Resolução da Lista e dos exercícios das notas.

Arthur de Souza Molina e Gabriel Capelini Magalhaes

10 de setembro de 2022

1 Primeiro Exercício

Qual a diferença entre os referenciais inerciais da Mecânica Clássica e os da Teoria da Relatividade Restrita?

Resposta: Na Mecânica Clássica, utilizamos as Transformações de Galileu como um dicionário para relacionar medidas entre referenciais inerciais. Na Teoria da Relatividade Restrita, utilizamos as Transformações de Lorentz para o mesmo propósito, uma vez que as TL satisfazem os postulados da TRR.

2 Terceiro Exercício

A distância até a estrela mais distante da nossa galáxia é da ordem de 10^5 anos-luz. Explique por que é possível, em princípio, para um ser humano viajar para tal estrela durante seu tempo de vida (digamos 80 anos) e faça uma estimativa da velocidade necessária para isso.

Resposta: Antes de começar qualquer cálculo, perceba que as medidas de intervalo de tempo e de distância são de um observador em repouso no referencial da Terra. Este problema é análogo ao paradoxo dos gêmeos.

Podemos definir o observador na Terra como o referencial S (o observador na estrela está em repouso em relação ao referencial S) e o observador (o viajante) da nave em repouso em seu respectivo referencial S' que se distância da Terra com a velocidade iremos estimar, isto é, a velocidade relativa entre os referenciais S e S', lembrando que o sentido da velocidade do foguete se altera na mudança de referencial, logo,

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \tag{1}$$

Sabendo que o observador na Terra realiza medidas de comprimento contraídas e intervalos de tempo dilatadas

$$\Delta x \approx 10^5 \text{ anos-luz e } \Delta t \approx 80 \text{ anos,} \tag{2}$$

podemos usar as TL para traduzir as medidas para o sistema de coordenadas para S' com

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \text{ e } \Delta t' = \gamma \Delta t. \tag{3}$$

Ao substituirmos temos

$$v' = \frac{\frac{\Delta x}{\gamma}}{\gamma \Delta t}$$
$$v' = \frac{\Delta x}{\gamma^2 \Delta t}$$

para facilitar as contas, podemos realizar a seguinte operação

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10^5 \text{ anos-luz}}{80 \text{ anos}} = \frac{10^5 c}{80} = 1,25 \cdot 10^3 c$$

irei definir $\alpha \equiv 1,25 \cdot 10^3$, apenas para não carregar um termo numérico imenso e dar o trabalho de manipula-lo. Retornando as contas temos

$$v' = \frac{\alpha c}{\gamma^2}$$
$$v' = \alpha c \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)$$
$$v' = \alpha c - \frac{\alpha v'^2}{c}$$
$$\frac{cv'}{\alpha} = c^2 - v'^2$$
$$v'^2 - \frac{cv'}{\alpha} - c^2 = 0,$$

usando Baskara, temos

$$v' = -\frac{\frac{c}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2 + 4c^2}}{2}$$
$$v' = \frac{-\frac{c}{\alpha} \pm c\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4}}{2}$$

como isso é uma estimativa, podemos considerar que $\alpha^{-2} \approx 0$, logo

$$v' = \frac{-\frac{c}{\alpha} \pm c\sqrt{4}}{2}$$
$$v' = c\frac{-\frac{1}{\alpha} \pm 2}{2}$$
$$v' = c\left(-\frac{1}{2\alpha} \pm 1\right)$$

O primeiro resultado, o negativo, temos $v' = c\left(-\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \implies |v'| > |c|$, ultrapassando a velocidade da luz, na direção contrária da viagem e isso é incorreto.

Já o segundo resultado, o positivo, temos $v' = c\left(-\frac{1}{2\alpha} + 1\right) \approx 0,9996c$ que é o resultado correto.

3 Quinto Exercício

Uma barra de comprimento próprio L_0 (i.e., o comprimento medido no referencial S_0 em que ela está em repouso) faz um ângulo θ_0 com o eixo horizontal de seu referencial. Para um observador em um referencial S que se desloca com relação à S_0 na direção horizontal com velocidade v:

1. Qual o valor do ângulo θ que a barra faz com o eixo horizontal?

   Resposta: Como S_0 se desloca com velocidade v na horizontal, isto é, no eixo x, portanto a componente vertical da barra ficará ilesa, pois a contração espacial ocorre apenas da direção do movimento.

$$
\begin{aligned}
\theta_0 &= \arctan\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right) = \arctan\left(\frac{L_y}{L_x}\right) \\
L_0 &= \sqrt{L_y^2 + L_x^2} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)
\end{aligned} \tag{4}
$$

   Reescrevendo $\frac{L_y}{L_x} \equiv \alpha$ em termos de θ_0, temos

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right) = \arctan\left(\frac{L_y}{L_x}\right) = \arctan(\alpha)$$

$$\therefore \alpha = \tan(\theta_0)$$

   Sabendo que $\Delta y = \Delta y_0 = L_y$ e $\Delta x = \dfrac{\Delta x_0}{\gamma} = \dfrac{L_x}{\gamma}$, temos

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctan\left(\frac{\Delta y_0}{\frac{\Delta x_0}{\gamma}}\right) = \arctan\left(\frac{\Delta y_0}{\frac{\Delta x_0}{\gamma}}\right) = \arctan(\gamma\alpha)$$

$$\theta = \arctan(\gamma\alpha) = \arctan(\gamma\tan(\theta_0))$$

$$\therefore \theta = \arctan(\gamma\tan(\theta_0))$$

2. Qual o comprimento L da barra em S?

Resposta: O comprimento da barra em S_0 é dado por

$$L_0 = \sqrt{L_y^2 + L_x^2}$$

e para o comprimento da barra em S é dado por

$$L = \sqrt{L_y'^2 + L_x'^2}$$

$$L = \sqrt{L_y^2 + \left(\frac{L_x}{\gamma}\right)^2}$$

$$L = \sqrt{(L_x)^2\left(\left(\frac{L_y}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2\right)} = L_x\sqrt{(\alpha)^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = L_x\sqrt{\tan^2(\theta_0) + 1 - 1 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2}$$

$$L = L_x\sqrt{\sec^2\theta_0 - 1 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = L_x\sqrt{\sec^2\theta_0 - \frac{v^2}{c^2}}$$

podemos escrever $L_x = L_0\cos\theta_0$, ao substituir

$$L = L_x\sqrt{\sec^2\theta_0 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0\cos\theta_0\sqrt{\sec^2\theta_0 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0\sqrt{\cos^2\theta_0\sec^2\theta_0 - \frac{v^2\cos^2\theta_0}{c^2}}$$

$$\therefore L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2\cos^2\theta_0}{c^2}}$$

4 Sétimo Exercício

Num certo referencial S um observador registra a seguinte sequência de eventos: num certo instante uma bomba explodiu numa certa posição e, 3 segundo depois, uma segunda bomba explodiu a uma distância de 1 metro desta primeira bomba. É possível encontrar um referencial inercial S_0,que respeite todos os postulados da relatividade, onde estas duas bombas explodiram no mesmo instante? Se sim, qual a velocidade deste referencial em relação a S. Se não, justifique sua resposta.

Resposta: Temos as medidas realizadas no referencial S

$$\Delta x = 1m \quad \Delta t = 3s$$

precisamos encontrar um referencial S' em que um observador registra as duas explosões ocorrendo simultaneamente ($\Delta t' = 0$), ao usar uma das transformações de Lorentz podemos encontrar a velocidade relativa entre os referenciais S e S'.

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - v\frac{\Delta x}{c^2}\right)$$

$$0 = \gamma\left(3 - v\frac{1}{c^2}\right)$$

$$0 = 3 - v\frac{1}{c^2}$$

$$v\frac{1}{c^2} = 3$$

$$v = 3c^2$$

O referencial S' precisaria estar a uma velocidade relativa ao referencial S de $3c^2$, portanto não é encontrar um referencial que consiga registrar os dois eventos ocorrendo simultaneamente.

Outra maneira de resolver esse problema é verificar qual tipo de distância que temos entre os eventos

$$((\Delta s)^2 = \Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 1^2 - 9c^2 < 0$$

portanto, a distância entre os evento é do tipo-tempo, ou seja, há uma relação de causalidade entre os eventos, logo é impossível encontrar um referencial que consiga ver os dois eventos ocorrerem simultaneamente.

5 Nono Exercício

Num sistema onde nomeamos as coordenadas como

$$x_0 = ct,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$$

considere a seguinte transformação linear

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} M_{\mu\nu}x_\nu,\ \ \mu = 0, 1, 2, 3.$$

1. Determine as condições que $M_{\mu\nu}$ deve respeitar para que

$$\tilde{\mathrm{x}}_0^2 - \sum_{i=1}^{3}\tilde{\mathrm{x}}_i^2 = \mathrm{x}_0^2 - \sum_{i=1}^{3}\mathrm{x}_i^2$$

Resposta: Abrindo as componentes da transformação linear temos

$$x_\mu = M_{\mu 0}x_0 + M_{\mu 1}x_1 + M_{\mu 2}x_2 + M_{\mu 3}x_3$$

para $\mu = 0$

$$\tilde{\mathrm{x}}_0 = M_{00}x_0 + M_{01}x_1 + M_{02}x_2 + M_{03}x_3$$

para $\mu = 1$

$$\tilde{\mathrm{x}}_1 = M_{10}x_0 + M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3$$

para $\mu = 2$

$$\tilde{x}_2 = M_{20}x_0 + M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3$$

para $\mu = 3$

$$\tilde{x}_3 = M_{30}x_0 + M_{31}x_1 + M_{32}x_2 + M_{33}x_3$$

calculando o $(\tilde{x}_\mu)^2$ para substituir na equação acima.

Para cada $\mu = 0$

$$(\tilde{x}_0)^2 = (M_{00}x_0 + M_{01}x_1 + M_{02}x_2 + M_{03}x_3)^2$$

$$\begin{aligned}(\tilde{x}_0)^2 = {} & M_{00}^2x_0^2 + M_{00}M_{01}x_0x_1 + M_{02}M_{00}x_0x_2 + M_{03}M_{00}x_0x_3 \\ & M_{00}M_{01}x_1x_0 + M_{01}^2x_1^2 + M_{02}M_{01}x_1x_2 + M_{03}M_{01}x_1x_3 \\ & M_{00}M_{02}x_2x_0 + M_{01}M_{02}x_2x_1 + M_{02}^2x_2^2 + M_{03}M_{02}x_2x_3 \\ & M_{00}M_{03}x_3x_0 + M_{01}M_{03}x_3x_1 + M_{02}M_{03}x_3x_2 + M_{03}^2x_3^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{x}_0)^2 = {} & M_{00}^2x_0^2 + M_{01}^2x_1^2 + M_{02}^2x_2^2 + M_{03}^2x_3^2 + 2M_{00}M_{01}x_0x_1 + 2M_{02}M_{00}x_0x_2 \\ & +2M_{01}M_{03}x_3x_1 + 2M_{03}M_{00}x_0x_3 + 2M_{02}M_{01}x_1x_2 + 2M_{02}M_{03}x_3x_2\end{aligned}$$

para $\mu = 1$

$$(\tilde{x}_1)^2 = (M_{10}x_0 + M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3)^2$$

$$\begin{aligned}(\tilde{x}_1)^2 = {} & M_{10}^2x_0^2 + M_{11}M_{10}x_0x_1 + M_{12}M_{10}x_0x_2 + M_{13}M_{10}x_0x_3 \\ & M_{10}M_{11}x_1x_0 + M_{11}^2x_1^2 + M_{12}M_{11}x_1x_2 + M_{13}M_{11}x_1x_3 \\ & M_{10}M_{12}x_2x_0 + M_{11}M_{12}x_2x_1 + M_{12}^2x_2^2 + M_{13}M_{12}x_2x_3 \\ & M_{10}M_{13}x_3x_0 + M_{11}M_{13}x_3x_1 + M_{12}M_{13}x_3x_2 + M_{13}^2x_3^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{x}_1)^2 = {} & M_{10}^2x_0^2 + M_{11}^2 + M_{12}^2x_2^2 + M_{13}^2x_3^2 + 2M_{11}M_{10}x_0x_1 + 2M_{12}M_{10}x_0x_2 \\ & +2M_{13}M_{10}x_0x_3 + 2M_{11}M_{13}x_3x_1 + 2M_{12}M_{13}x_3x_2 + 2M_{12}M_{11}x_1x_2\end{aligned}$$

para $\mu = 2$

$$(\tilde{x}_2)^2 = (M_{20}x_0 + M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3)^2$$

$$\begin{aligned}(\tilde{x}_2)^2 = {} & M_{20}^2x_0^2 + M_{21}M_{20}x_0x_1 + M_{22}M_{20}x_0x_2 + M_{23}M_{20}x_0x_3 \\ & M_{20}M_{21}x_1x_0 + M_{21}^2x_1^2 + M_{22}M_{21}x_1x_2 + M_{23}M_{21}x_1x_3 \\ & M_{20}x_0M_{22}x_2 + M_{21}M_{22}x_2x_1 + M_{22}^2x_2^2 + M_{23}M_{22}x_2x_3 \\ & M_{20}M_{23}x_3x_0 + M_{21}M_{23}x_3x_1 + M_{22}M_{23}x_3x_2 + M_{23}^2x_3^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{x}_2)^2 = {} & M_{20}^2x_0^2 + M_{21}^2x_1^2 + M_{22}^2x_2^2 + M_{23}^2x_3^2 + 2M_{21}M_{20}x_0x_1 + 2M_{22}M_{20}x_0x_2 \\ & +2M_{23}M_{20}x_0x_3 + 2M_{21}M_{23}x_3x_1 + 2M_{22}M_{23}x_3x_2 + 2M_{21}M_{22}x_2x_1\end{aligned}$$

para $\mu = 3$

$$(\tilde{\mathrm{x}}_3)^2 = (M_{30}x_0 + M_{31}x_1 + M_{32}x_2 + M_{33}x_3)^2$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathrm{x}}_3)^2 = {} & M_{30}^2 x_0^2 + M_{31}M_{30}x_0x_1 + M_{32}M_{30}x_0x_2 + M_{33}M_{30}x_0x_3 \\
& M_{30}M_{31}x_1x_0 + M_{31}^2 x_1^2 + M_{32}M_{31}x_1x_2 + M_{33}M_{31}x_1x_3 \\
& M_{30}M_{32}x_2x_0 + M_{31}M_{32}x_2x_1 + M_{32}^2 x_2^2 + M_{33}M_{32}x_2x_3 \\
& M_{30}M_{33}x_3x_0 + M_{31}M_{33}x_3x_1 + M_{32}M_{33}x_3x_2 + M_{33}^2 x_3^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathrm{x}}_3)^2 = {} & M_{30}^2 x_0^2 + M_{31}^2 x_1^2 + M_{32}^2 x_2^2 + M_{33}^2 x_3^2 + 2M_{31}M_{30}x_0x_1 + 2M_{32}M_{30}x_0x_2 \\
& +2M_{33}M_{30}x_0x_3 + 2M_{31}M_{33}x_3x_1 + 2M_{32}M_{33}x_3x_2 + 2M_{33}M_{32}x_2x_3
\end{aligned}$$

subsituindo, temos

$$\begin{aligned}
& M_{00}^2 x_0^2 + M_{01}^2 x_1^2 + M_{02}^2 x_2^2 + M_{03}^2 x_3^2 + 2M_{00}M_{01}x_0x_1 + 2M_{02}M_{00}x_0x_2 \\
& \quad +2M_{01}M_{03}x_3x_1 + 2M_{03}M_{00}x_0x_3 + 2M_{02}M_{01}x_1x_2 + 2M_{02}M_{03}x_3x_2 \\
& -(M_{10}^2 x_0^2 + M_{11}^2 + M_{12}^2 x_2^2 + M_{13}^2 x_3^2 + 2M_{11}M_{10}x_0x_1 + 2M_{12}M_{10}x_0x_2 \\
& \quad +2M_{13}M_{10}x_0x_3 + 2M_{11}M_{13}x_3x_1 + 2M_{12}M_{13}x_3x_2 + 2M_{12}M_{11}x_1x_2 \\
& M_{20}^2 x_0^2 + M_{21}^2 x_1^2 + M_{22}^2 x_2^2 + M_{23}^2 x_3^2 + 2M_{21}M_{20}x_0x_1 + 2M_{22}M_{20}x_0x_2 \\
& \quad +2M_{23}M_{20}x_0x_3 + 2M_{21}M_{23}x_3x_1 + 2M_{22}M_{23}x_3x_2 + 2M_{21}M_{22}x_2x_1 \\
& M_{30}^2 x_0^2 + M_{31}^2 x_1^2 + M_{32}^2 x_2^2 + M_{33}^2 x_3^2 + 2M_{31}M_{30}x_0x_1 + 2M_{32}M_{30}x_0x_2 \\
& \quad +2M_{33}M_{30}x_0x_3 + 2M_{31}M_{33}x_3x_1 + 2M_{32}M_{33}x_3x_2 + 2M_{33}M_{32}x_2x_3) \\
& \qquad = \mathrm{x}_0^2 - \mathrm{x}_1^2 - \mathrm{x}_2^2 - \mathrm{x}_3^2
\end{aligned}$$

Agrupando os termos e relacionando com os termos do lado direito da equação, obtemos

$$\begin{aligned}
& (M_{00}^2 - M_{10}^2 - M_{20}^2 - M_{30}^2)x_0^2 = x_0^2 \\
& (M_{01}^2 - M_{11}^2 - M_{21}^2 - M_{31}^2)x_1^2 = x_1^2 \\
& (M_{02}^2 - M_{12}^2 - M_{22}^2 - M_{32}^2)x_2^2 = x_2^2 \\
& (M_{03}^2 - M_{13}^2 - M_{23}^2 - M_{33}^2)x_3^2 = x_3^2 \\
& 2(M_{00}M_{01} - M_{11}M_{10} - M_{21}M_{20} - M_{31}M_{30})x_0x_1 = 0x_0x_1 \\
& 2(M_{00}M_{02} - M_{12}M_{10} - M_{22}M_{20} - M_{32}M_{30})x_0x_2 = 0x_0x_2 \\
& 2(M_{00}M_{03} - M_{13}M_{10} - M_{23}M_{20} - M_{33}M_{30})x_0x_3 = 0x_0x_3 \\
& 2(M_{01}M_{02} - M_{11}M_{12} - M_{21}M_{22} - M_{31}M_{32})x_1x_2 = 0x_1x_2 \\
& 2(M_{01}M_{03} - M_{11}M_{13} - M_{21}M_{23} - M_{31}M_{33})x_1x_3 = 0x_1x_3 \\
& 2(M_{02}M_{03} - M_{12}M_{13} - M_{22}M_{23} - M_{32}M_{33})x_2x_3 = 0x_2x_3
\end{aligned}$$

As condições que $M_{\mu\nu}$ deve respeitar são

$$\begin{aligned}
&M_{00}^2 - M_{10}^2 - M_{20}^2 - M_{30}^2 = 1\\
&M_{01}^2 - M_{11}^2 - M_{21}^2 - M_{31}^2 = 1\\
&M_{02}^2 - M_{12}^2 - M_{22}^2 - M_{32}^2 = 1\\
&M_{03}^2 - M_{13}^2 - M_{23}^2 - M_{33}^2 = 1\\
&M_{00}M_{01} - M_{11}M_{10} - M_{21}M_{20} - M_{31}M_{30} = 0\\
&M_{00}M_{02} - M_{12}M_{10} - M_{22}M_{20} - M_{32}M_{30} = 0\\
&M_{00}M_{03} - M_{13}M_{10} - M_{23}M_{20} - M_{33}M_{30} = 0\\
&M_{01}M_{02} - M_{11}M_{12} - M_{21}M_{22} - M_{31}M_{32} = 0\\
&M_{01}M_{03} - M_{11}M_{13} - M_{21}M_{23} - M_{31}M_{33} = 0\\
&M_{02}M_{03} - M_{12}M_{13} - M_{22}M_{23} - M_{32}M_{33} = 0
\end{aligned}$$

2. Agora escreva

$$M = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c} & D \end{pmatrix}$$

com a um número D uma matriz 3×3 e

$$b = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}\ , b = \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix}.$$

Mostre que as condições obtidas no item anterior podem ser escritas como

$$M^T \eta M = B \text{ onde } \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Resposta: Calculando o produto matricial ηM, obtemos

$$M = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ c_2 & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ c_3 & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ c_2 & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ c_3 & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} = H$$

$$H = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & b_3 \\ -c_1 & -D_{11} & -D_{12} & -D_{13} \\ -c_2 & -D_{21} & -D_{22} & -D_{23} \\ -c_3 & -D_{31} & -D_{32} & -D_{33} \end{pmatrix}$$

Por fim,

$$B = M^T H$$

calculando M^T, temos

$$M^T = \begin{pmatrix} a & c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ b_2 & D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ b_3 & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ b_2 & D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ b_3 & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & b_3 \\ -c_1 & -D_{11} & -D_{12} & -D_{13} \\ -c_2 & -D_{21} & -D_{22} & -D_{23} \\ -c_3 & -D_{31} & -D_{32} & -D_{33} \end{pmatrix}$$

Calculando as componentes de B, temos

$$\begin{aligned}
B_{00} &= a^2 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 \\
B_{01} &= ab_1 - D_{11}c_1 - D_{21}c_2 - D_{31}c_3 \\
B_{02} &= ab_2 - D_{12}c_1 - D_{22}c_2 - D_{32}c_3 \\
B_{03} &= ab_3 - D_{13}c_1 - D_{23}c_2 - D_{33}c_3 \\
B_{10} &= ab_1 - D_{11}c_1 - D_{21}c_2 - D_{31}c_3 \\
B_{11} &= b_1^2 - D_{11}^2 - D_{21}^2 - D_{31}^2 \\
B_{12} &= b_1b_2 - D_{11}D_{12} - D_{21}D_{22} - D_{31}D_{32} \\
B_{13} &= b_1b_3 - D_{11}D_{13} - D_{21}D_{23} - D_{31}D_{33} \\
B_{20} &= ab_2 - D_{12}c_1 - D_{22}c_2 - D_{32}c_3 \\
B_{21} &= b_1b_2 - D_{12}D_{11} - D_{22}D_{21} - D_{32}D_{31} \\
B_{22} &= b_2^2 - D_{12}^2 - D_{22}^2 - D_{32}^2 \\
B_{23} &= b_2b_3 - D_{12}D_{13} - D_{22}D_{23} - D_{32}D_{33} \\
B_{30} &= ab_3 - D_{13}c_1 - D_{23}c_2 - D_{33}c_3 \\
B_{31} &= b_1b_3 - D_{11}D_{13} - D_{21}D_{23} - D_{31}D_{33} \\
B_{32} &= b_2b_3 - D_{12}D_{13} - D_{22}D_{23} - D_{32}D_{33} \\
B_{33} &= b_3^2 - D_{13}^2 - D_{23}^2 - D_{33}^2
\end{aligned}$$

Se a matriz M respeita as condições do item anterior, então

$$
\begin{aligned}
B_{00} &= a^2 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 = 1 \\
B_{01} &= ab_1 - D_{11}c_1 - D_{21}c_2 - D_{31}c_3 = 0 \\
B_{02} &= ab_2 - D_{12}c_1 - D_{22}c_2 - D_{32}c_3 = 0 \\
B_{03} &= ab_3 - D_{13}c_1 - D_{23}c_2 - D_{33}c_3 = 0 \\
B_{10} &= ab_1 - D_{11}c_1 - D_{21}c_2 - D_{31}c_3 = 0 \\
B_{11} &= b_1^2 - D_{11}^2 - D_{21}^2 - D_{31}^2 = 1 \\
B_{12} &= b_1b_2 - D_{11}D_{12} - D_{21}D_{22} - D_{31}D_{32} = 0 \\
B_{13} &= b_1b_3 - D_{11}D_{13} - D_{21}D_{23} - D_{31}D_{33} = 0 \\
B_{20} &= ab_2 - D_{12}c_1 - D_{22}c_2 - D_{32}c_3 = 0 \\
B_{21} &= b_1b_2 - D_{12}D_{11} - D_{22}D_{21} - D_{32}D_{31} = 0 \\
B_{22} &= b_2^2 - D_{12}^2 - D_{22}^2 - D_{32}^2 = 1 \\
B_{23} &= b_2b_3 - D_{12}D_{13} - D_{22}D_{23} - D_{32}D_{33} \\
B_{30} &= ab_3 - D_{13}c_1 - D_{23}c_2 - D_{33}c_3 = 0 \\
B_{31} &= b_1b_3 - D_{11}D_{13} - D_{21}D_{23} - D_{31}D_{33} = 0 \\
B_{32} &= b_2b_3 - D_{12}D_{13} - D_{22}D_{23} - D_{32}D_{33} = 0 \\
B_{33} &= b_3^2 - D_{13}^2 - D_{23}^2 - D_{33}^2 = 1
\end{aligned}
$$

portanto, B é dado por

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

e as condições do item (a) podem ser escritas por $(M^T)_{\mu\alpha}(\eta)_{\alpha\beta}(M)_{\beta\nu} = \delta_{\mu\nu}$, pois obtemos as mesmas relações algébricas entre as componentes da matriz M.

6 Décimo Primeiro Exercício

Mostre que duas transformações de Lorentz sucessivas na mesma direção, a primeira com velocidade v_1 e a segunda com velocidade v_2, equivalem a uma única transformação de Lorentz, e calcule a velocidade v desta transformação. Discuta como esta velocidade resultante se relaciona com a fórmula de Einstein para a soma de velocidades.

Resposta: A matriz de Tranformação de Lorentz (Boots na direção x) é dada por

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

onde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ e $\beta = \frac{v}{c}$.

Podemos escrever a tranformação de Lorentz na forma matricial, como

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

para a uma transformação (na direção x) com velocidade v_1 dado por $\gamma(v_1) \equiv \gamma_1$ e $\beta(v_1) \equiv \beta_1$, logo

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

em seguida se fizermos a segunda transformação com velocidade v_2 na mesma direção, isto é, $\gamma(v_2) \equiv \gamma_2$ e $\beta(v_2) = \beta_2$

$$\begin{pmatrix} x_0'' \\ x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0'' \\ x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

chamando essa dupla transformação de Lorentz de Λ', temos

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calculando a multiplicação de matrizes acima, obtemos

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) & -\gamma_2\gamma_1(\beta_1+\beta_2) & 0 & 0 \\ -\gamma_2\gamma_1(\beta_1+\beta_2) & \gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calculando explicitamente quem é $\gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2)$, temos

$$\gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{-1/2} (1+\beta_1\beta_2) = \left(1-\beta_1^2\right)^{-1/2} \left(1-\beta_2^2\right)^{-1/2} (1+\beta_1\beta_2)$$

$$\gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) = \left(1-\beta_1^2\right)^{-1/2} \left(1-\beta_2^2\right)^{-1/2} (1+\beta_1\beta_2)$$

$$\gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) = \left(\left(1-\beta_1^2\right)\left(1-\beta_2^2\right)\right)^{-1/2} (1+\beta_1\beta_2)$$

$$\gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) = \left((1-\beta_1)(1+\beta_1)(1-\beta_2)(1-\beta_2)\right)^{-1/2}(1+\beta_1\beta_2)$$

$$\gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) = \left((1-(\beta_2\beta_1)^2)^2\right)^{-1/2}(1+\beta_1\beta_2)$$

$$\gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) = (1-(\beta_2\beta_1)^2)^{-1}(1+\beta_1\beta_2) = (1-(\beta_2\beta_1))^{-1}(1+(\beta_2\beta_1))^{-1}(1+\beta_1\beta_2)$$

$$\gamma_2\gamma_1(1+\beta_1\beta_2) = (1-(\beta_2\beta_1))^{-1}$$

calculando $-\gamma_2\gamma_1(\beta_1+\beta_2)$ explicitamente, temos

$$-\gamma_2\gamma_1(\beta_1+\beta_2) = -(1-(\beta_2\beta_1)^2)^{-1}(\beta_1+\beta_2)$$

A partir daqui não tenho uma ideia clara de como resolver esse exercício.