

Resolução dos exercícios das notas - Física Moderna 1 A

Arthur Souza e Gabriel Capelini

9 de outubro de 2022

Aula 12

Exercício 9 Calcule $\eta^\mu \eta_{\mu\nu} \eta^\nu$ e mostre que é um invariante.

Solução:

$$\begin{aligned}\eta^\mu \eta_{\mu\nu} \eta^\nu &= \eta^\mu \eta_\nu = -\eta^0 \eta_0 + \eta^i \eta_i = -\frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx_0}{d\tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx_i}{d\tau} = \gamma^2 \left(-\frac{cdt}{dt} \frac{cdt}{dt} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} \right) = \gamma^2 (-c^2 + v^2) \\ &= -\gamma^2 c^2 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{\gamma^{-2}} = -c^2\end{aligned}\quad (1)$$

Para mostrar que é um invariante, aplicamos uma TL

$$\begin{aligned}\eta^{\mu'} \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu'} &= \frac{dx^{\mu'}}{d\tau} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu'}}{d\tau} = \frac{d(\Lambda^\mu_\alpha x^\alpha)}{d\tau} \eta_{\mu\nu} \frac{d(\Lambda^\nu_\beta x^\beta)}{d\tau} = \Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &= \eta^\alpha \eta_{\alpha\beta} \eta^\beta\end{aligned}\quad (2)$$

Como a transformação (2) é completamente arbitrária, então $\eta^\mu \eta_{\mu\nu} \eta^\nu$ é um invariante.

Exercício 10 Explique por que a massa de repouso é um invariante.

Solução: Como o resultado do produto interno é um escalar e escalares possuem o mesmo valor visto de qualquer referencial, o resultado $m^2 c^2$ é um invariante. Como c é um invariante, então m também deve ser um invariante para essa quantidade como um todo ser invariante.

Aula 14

Exercício 2 Um pion neutro (isso é importante pela conservação de carga) decai em dois fótons. Sabendo que a massa de repouso do pion vale $2,4 \times 10^{-28}$ kg, qual o momento dos fótons criados. É possível que o pion decaia em apenas um fóton? Justifique sua resposta.

Solução: Sabemos que o momento relativístico deve se conservar, isso se traduz como

$$p_\pi = p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2} = p_\gamma \quad (3)$$

em que p_π é o momento do pion e p_γ o momento total dos fótons. O momento total dos fótons pode ser escrito como

$$E_\gamma = cp_\gamma \Rightarrow p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}, \quad p_\gamma = |\mathbf{p}_\gamma| \quad (4)$$

Sabendo que a seguinte quantidade

$$E^2 - (cp)^2 = (mc^2)^2 \quad (5)$$

é invariante. Podemos tomar o referencial de repouso do pion (i.e $p = 0$), de forma que

$$E_\pi = mc^2 \quad (6)$$

Então, de (3) segue que

$$p_\gamma = \frac{E_\pi}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc \quad (7)$$

Substituindo os valores dados

$$p_\gamma = (2,4 \times 10^{-28} \text{kg})(3 \times 10^8 \text{m/s}) = 7,2 \times 10^{-20} \text{kg m/s} \quad (8)$$

Se o pion decair em apenas um fóton, a conservação de momento não é satisfeita, pois o fóton viaja a velocidade da luz e o pion, por ter massa, não é capaz de viajar a velocidade da luz. Dessa forma, outro fóton com direção contrária precisa aparecer para que o momento total seja conservado.

Aula 16

Exercício 7 Verifique que a conservação de carga não é invariante por Transformações de Galileu. Ou seja, assumindo que \mathbf{J} é um vetor 3D e que ρ é um escalar, mostre que a equação da conservação não é invariante por uma Transformação de Galileu.

Solução: A equação da continuidade é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

onde $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$. Ao realizarmos uma transformação de Galileu $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}$, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{J}' + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}') + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho(\mathbf{v} + \mathbf{V})) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Logo, a equação da conservação não é invariante por uma Transformação de Galileu.