

Resolução da Lista e dos exercícios das notas.

Arthur de Souza Molina e Gabriel Capelini Magalhaes

10 de setembro de 2022

1 Primeiro Exercício

Qual a diferença entre os referenciais inerciais da Mecânica Clássica e os da Teoria da Relatividade Restrita?

Resposta: Na Mecânica Clássica, utilizamos as Transformações de Galileu como um dicionário para relacionar medidas entre referenciais inerciais. Na Teoria da Relatividade Restrita, utilizamos as Transformações de Lorentz para o mesmo propósito, uma vez que as TL satisfazem os postulados da TRR.

2 Terceiro Exercício

A distância até a estrela mais distante da nossa galáxia é da ordem de 10^5 anos-luz. Explique por que é possível, em princípio, para um ser humano viajar para tal estrela durante seu tempo de vida (digamos 80 anos) e faça uma estimativa da velocidade necessária para isso.

Resposta: Antes de começar qualquer cálculo, perceba que as medidas de intervalo de tempo e de distância são de um observador em repouso no referencial da Terra. Este problema é análogo ao paradoxo dos gêmeos.

Podemos definir o observador na Terra como o referencial S (o observador na estrela está em repouso em relação ao referencial S) e o observador (o viajante) da nave em repouso em seu respectivo referencial S' que se distancia da Terra com a velocidade iremos estimar, isto é, a velocidade relativa entre os referenciais S e S', lembrando que o sentido da velocidade do foguete se altera na mudança de referencial, logo,

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad (1)$$

Sabendo que o observador na Terra realiza medidas de comprimento contraídas e intervalos de tempo dilatadas

$$\Delta x \approx 10^5 \text{ anos-luz e } \Delta t \approx 80 \text{ anos,} \quad (2)$$

podemos usar as TL para traduzir as medidas para o sistema de coordenadas para S' com

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \text{ e } \Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (3)$$

Ao substituírmos temos

$$v' = \frac{\frac{\Delta x}{\gamma \Delta t}}{\frac{\Delta x}{\gamma^2 \Delta t}}$$

para facilitar as contas, podemos realizar a seguinte operação

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10^5 \text{ anos-luz}}{80 \text{ anos}} = \frac{10^5 c}{80} = 1,25 \cdot 10^3 c$$

irei definir $\alpha \equiv 1,25 \cdot 10^3$, apenas para não carregar um termo numérico imenso e dar o trabalho de manipula-lo. Retornando as contas temos

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\alpha c}{\gamma^2} \\ v' &= \alpha c \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right) \\ v' &= \alpha c - \frac{\alpha v'^2}{c} \\ \frac{cv'}{\alpha} &= c^2 - v'^2 \\ v'^2 - \frac{cv'}{\alpha} - c^2 &= 0, \end{aligned}$$

usando Baskara, temos

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{\frac{c}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2 + 4c^2}}{2} \\ v' &= \frac{-\frac{c}{\alpha} \pm c\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4}}{2} \end{aligned}$$

como isso é uma estimativa, podemos considerar que $\alpha^{-2} \approx 0$, logo

$$\begin{aligned} v' &= \frac{-\frac{c}{\alpha} \pm c\sqrt{4}}{2} \\ v' &= c \frac{-\frac{1}{\alpha} \pm 2}{2} \\ v' &= c \left(-\frac{1}{2\alpha} \pm 1 \right) \end{aligned}$$

O primeiro resultado, o negativo, temos $v' = c \left(-\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \implies |v'| > |c|$, ultrapassando a velocidade da luz, na direção contrária da viagem e isso é incorreto.

Já o segundo resultado, o positivo, temos $v' = c \left(-\frac{1}{2\alpha} + 1 \right) \approx 0,9996c$ que é o resultado correto.

3 Quinto Exercício

Uma barra de comprimento próprio L_0 (i.e., o comprimento medido no referencial S_0 em que ela está em repouso) faz um ângulo θ_0 com o eixo horizontal de seu referencial. Para um observador em um referencial S que se desloca com relação à S_0 na direção horizontal com velocidade v :

1. Qual o valor do ângulo θ que a barra faz com o eixo horizontal?

Resposta: Como S_0 se desloca com velocidade v na horizontal, isto é, no eixo x , portanto a componente vertical da barra ficará ilesa, pois a contração espacial ocorre apenas da direção do movimento.

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \arctan\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right) = \arctan\left(\frac{L_y}{L_x}\right) \\ L_0 &= \sqrt{L_y^2 + L_x^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\end{aligned}\tag{4}$$

Reescrevendo $\frac{L_y}{L_x} \equiv \alpha$ em termos de θ_0 , temos

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right) = \arctan\left(\frac{L_y}{L_x}\right) = \arctan(\alpha)$$

$$\therefore \alpha = \tan(\theta_0)$$

Sabendo que $\Delta y = \Delta y_0 = L_y$ e $\Delta x = \frac{\Delta x_0}{\gamma} = \frac{L_x}{\gamma}$, temos

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctan\left(\frac{\Delta y_0}{\frac{\Delta x_0}{\gamma}}\right) = \arctan\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} \gamma\right) = \arctan(\gamma \alpha)$$

$$\theta = \arctan(\gamma \alpha) = \arctan(\gamma \tan(\theta_0))$$

$$\therefore \theta = \arctan(\gamma \tan(\theta_0))$$

2. Qual o comprimento L da barra em S ?

Resposta: O comprimento da barra em S_0 é dado por

$$L_0 = \sqrt{L_y^2 + L_x^2}$$

e para o comprimento da barra em S é dado por

$$L = \sqrt{L_y'^2 + L_x'^2}$$

$$L = \sqrt{L_y^2 + \left(\frac{L_x}{\gamma}\right)^2}$$

$$L = \sqrt{(L_x)^2 \left(\left(\frac{L_y}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \right)} = L_x \sqrt{(\alpha)^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = L_x \sqrt{\tan^2(\theta_0) + 1 - 1 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2}$$

$$L = L_x \sqrt{\sec^2 \theta_0 - 1 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = L_x \sqrt{\sec^2 \theta_0 - \frac{v^2}{c^2}}$$

podemos escrever $L_x = L_0 \cos \theta_0$, ao substituir

$$L = L_x \sqrt{\sec^2 \theta_0 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \cos \theta_0 \sqrt{\sec^2 \theta_0 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \sqrt{\cos^2 \theta_0 \sec^2 \theta_0 - \frac{v^2 \cos^2 \theta_0}{c^2}}$$

$$\therefore L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2 \cos^2 \theta_0}{c^2}}$$

4 Sétimo Exercício

Num certo referencial S um observador registra a seguinte sequência de eventos: num certo instante uma bomba explodiu numa certa posição e, 3 segundo depois, uma segunda bomba explodiu a uma distância de 1 metro desta primeira bomba. É possível encontrar um referencial inercial S_0 , que respeite todos os postulados da relatividade, onde estas duas bombas explodiram no mesmo instante? Se sim, qual a velocidade deste referencial em relação a S . Se não, justifique sua resposta.

Resposta: Temos as medidas realizadas no referencial S

$$\Delta x = 1m \quad \Delta t = 3s$$

precisamos encontrar um referencial S' em que um observador registra as duas explosões ocorrendo simultaneamente ($\Delta t' = 0$), ao usar uma das transformações de Lorentz podemos encontrar a velocidade relativa entre os referenciais S e S' .

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - v \frac{\Delta x}{c^2} \right)$$

$$0 = \gamma \left(3 - v \frac{1}{c^2} \right)$$

$$0 = 3 - v \frac{1}{c^2}$$

$$v \frac{1}{c^2} = 3$$

$$v = 3c^2$$

O referencial S' precisaria estar a uma velocidade relativa ao referencial S de $3c^2$, portanto não é encontrar um referencial que consiga registrar os dois eventos ocorrendo simultaneamente.

Outra maneira de resolver esse problema é verificar qual tipo de distância que temos entre os eventos

$$((\Delta s)^2 = \Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 1^2 - 9c^2 < 0$$

portanto, a distância entre os evento é do tipo-tempo, ou seja, há uma relação de causalidade entre os eventos, logo é impossível encontrar um referencial que consiga ver os dois eventos ocorrerem simultaneamente.

5 Nono Exercício

Num sistema onde nomeamos as coordenadas como

$$x_0 = ct, \ x_1 = x, \ x_2 = y, \ x_3 = z$$

considere a seguinte transformação linear

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 M_{\mu\nu} x_\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

1. Determine as condições que $M_{\mu\nu}$ deve respeitar para que

$$\tilde{x}_0^2 - \sum_{i=1}^3 \tilde{x}_i^2 = x_0^2 - \sum_{i=1}^3 x_i^2$$

Resposta: Abrindo as componentes da transformação linear temos

$$x_\mu = M_{\mu 0} x_0 + M_{\mu 1} x_1 + M_{\mu 2} x_2 + M_{\mu 3} x_3$$

para $\mu = 0$

$$\tilde{x}_0 = M_{00} x_0 + M_{01} x_1 + M_{02} x_2 + M_{03} x_3$$

para $\mu = 1$

$$\tilde{x}_1 = M_{10} x_0 + M_{11} x_1 + M_{12} x_2 + M_{13} x_3$$

para $\mu = 2$

$$\tilde{x}_2 = M_{20}x_0 + M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3$$

para $\mu = 3$

$$\tilde{x}_3 = M_{30}x_0 + M_{31}x_1 + M_{32}x_2 + M_{33}x_3$$

calculando o $(\tilde{x}_\mu)^2$ para substituir na equação acima.

Para cada $\mu = 0$

$$(\tilde{x}_0)^2 = (M_{00}x_0 + M_{01}x_1 + M_{02}x_2 + M_{03}x_3)^2$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_0)^2 = & M_{00}^2x_0^2 + M_{00}M_{01}x_0x_1 + M_{02}M_{00}x_0x_2 + M_{03}M_{00}x_0x_3 \\ & M_{00}M_{01}x_1x_0 + M_{01}^2x_1^2 + M_{02}M_{01}x_1x_2 + M_{03}M_{01}x_1x_3 \\ & M_{00}M_{02}x_2x_0 + M_{01}M_{02}x_2x_1 + M_{02}^2x_2^2 + M_{03}M_{02}x_2x_3 \\ & M_{00}M_{03}x_3x_0 + M_{01}M_{03}x_3x_1 + M_{02}M_{03}x_3x_2 + M_{03}^2x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_0)^2 = & M_{00}^2x_0^2 + M_{01}^2x_1^2 + M_{02}^2x_2^2 + M_{03}^2x_3^2 + 2M_{00}M_{01}x_0x_1 + 2M_{02}M_{00}x_0x_2 \\ & + 2M_{01}M_{03}x_3x_1 + 2M_{03}M_{00}x_0x_3 + 2M_{02}M_{01}x_1x_2 + 2M_{02}M_{03}x_3x_2 \end{aligned}$$

para $\mu = 1$

$$(\tilde{x}_1)^2 = (M_{10}x_0 + M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + M_{13}x_3)^2$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_1)^2 = & M_{10}^2x_0^2 + M_{11}M_{10}x_0x_1 + M_{12}M_{10}x_0x_2 + M_{13}M_{10}x_0x_3 \\ & M_{10}M_{11}x_1x_0 + M_{11}^2x_1^2 + M_{12}M_{11}x_1x_2 + M_{13}M_{11}x_1x_3 \\ & M_{10}M_{12}x_2x_0 + M_{11}M_{12}x_2x_1 + M_{12}^2x_2^2 + M_{13}M_{12}x_2x_3 \\ & M_{10}M_{13}x_3x_0 + M_{11}M_{13}x_3x_1 + M_{12}M_{13}x_3x_2 + M_{13}^2x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_1)^2 = & M_{10}^2x_0^2 + M_{11}^2x_1^2 + M_{12}^2x_2^2 + M_{13}^2x_3^2 + 2M_{11}M_{10}x_0x_1 + 2M_{12}M_{10}x_0x_2 \\ & + 2M_{13}M_{10}x_0x_3 + 2M_{11}M_{13}x_3x_1 + 2M_{12}M_{13}x_3x_2 + 2M_{12}M_{11}x_1x_2 \end{aligned}$$

para $\mu = 2$

$$(\tilde{x}_2)^2 = (M_{20}x_0 + M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + M_{23}x_3)^2$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_2)^2 = & M_{20}^2x_0^2 + M_{21}M_{20}x_0x_1 + M_{22}M_{20}x_0x_2 + M_{23}M_{20}x_0x_3 \\ & M_{20}M_{21}x_1x_0 + M_{21}^2x_1^2 + M_{22}M_{21}x_1x_2 + M_{23}M_{21}x_1x_3 \\ & M_{20}x_0M_{22}x_2 + M_{21}M_{22}x_2x_1 + M_{22}^2x_2^2 + M_{23}M_{22}x_2x_3 \\ & M_{20}M_{23}x_3x_0 + M_{21}M_{23}x_3x_1 + M_{22}M_{23}x_3x_2 + M_{23}^2x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_2)^2 = & M_{20}^2x_0^2 + M_{21}^2x_1^2 + M_{22}^2x_2^2 + M_{23}^2x_3^2 + 2M_{21}M_{20}x_0x_1 + 2M_{22}M_{20}x_0x_2 \\ & + 2M_{23}M_{20}x_0x_3 + 2M_{21}M_{23}x_3x_1 + 2M_{22}M_{23}x_3x_2 + 2M_{21}M_{22}x_2x_1 \end{aligned}$$

para $\mu = 3$

$$(\tilde{x}_3)^2 = (M_{30}x_0 + M_{31}x_1 + M_{32}x_2 + M_{33}x_3)^2$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_3)^2 = & M_{30}^2x_0^2 + M_{31}M_{30}x_0x_1 + M_{32}M_{30}x_0x_2 + M_{33}M_{30}x_0x_3 \\ & M_{30}M_{31}x_1x_0 + M_{31}^2x_1^2 + M_{32}M_{31}x_1x_2 + M_{33}M_{31}x_1x_3 \\ & M_{30}M_{32}x_2x_0 + M_{31}M_{32}x_2x_1 + M_{32}^2x_2^2 + M_{33}M_{32}x_2x_3 \\ & M_{30}M_{33}x_3x_0 + M_{31}M_{33}x_3x_1 + M_{32}M_{33}x_3x_2 + M_{33}^2x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_3)^2 = & M_{30}^2x_0^2 + M_{31}^2x_1^2 + M_{32}^2x_2^2 + M_{33}^2x_3^2 + 2M_{31}M_{30}x_0x_1 + 2M_{32}M_{30}x_0x_2 \\ & + 2M_{33}M_{30}x_0x_3 + 2M_{31}M_{33}x_3x_1 + 2M_{32}M_{33}x_3x_2 + 2M_{33}M_{32}x_2x_3 \end{aligned}$$

substituindo, temos

$$\begin{aligned} & M_{00}^2x_0^2 + M_{01}^2x_1^2 + M_{02}^2x_2^2 + M_{03}^2x_3^2 + 2M_{00}M_{01}x_0x_1 + 2M_{02}M_{00}x_0x_2 \\ & + 2M_{01}M_{03}x_3x_1 + 2M_{03}M_{00}x_0x_3 + 2M_{02}M_{01}x_1x_2 + 2M_{02}M_{03}x_3x_2 \\ & - (M_{10}^2x_0^2 + M_{11}^2x_1^2 + M_{12}^2x_2^2 + M_{13}^2x_3^2 + 2M_{11}M_{10}x_0x_1 + 2M_{12}M_{10}x_0x_2 \\ & + 2M_{13}M_{10}x_0x_3 + 2M_{11}M_{13}x_3x_1 + 2M_{12}M_{13}x_3x_2 + 2M_{12}M_{11}x_1x_2 \\ & M_{20}^2x_0^2 + M_{21}^2x_1^2 + M_{22}^2x_2^2 + M_{23}^2x_3^2 + 2M_{21}M_{20}x_0x_1 + 2M_{22}M_{20}x_0x_2 \\ & + 2M_{23}M_{20}x_0x_3 + 2M_{21}M_{23}x_3x_1 + 2M_{22}M_{23}x_3x_2 + 2M_{21}M_{22}x_2x_1 \\ & M_{30}^2x_0^2 + M_{31}^2x_1^2 + M_{32}^2x_2^2 + M_{33}^2x_3^2 + 2M_{31}M_{30}x_0x_1 + 2M_{32}M_{30}x_0x_2 \\ & + 2M_{33}M_{30}x_0x_3 + 2M_{31}M_{33}x_3x_1 + 2M_{32}M_{33}x_3x_2 + 2M_{33}M_{32}x_2x_3) \\ & = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

Agrupando os termos e relacionando com os termos do lado direito da equação, obtemos

$$\begin{aligned} (M_{00}^2 - M_{10}^2 - M_{20}^2 - M_{30}^2)x_0^2 &= x_0^2 \\ (M_{01}^2 - M_{11}^2 - M_{21}^2 - M_{31}^2)x_1^2 &= x_1^2 \\ (M_{02}^2 - M_{12}^2 - M_{22}^2 - M_{32}^2)x_2^2 &= x_2^2 \\ (M_{03}^2 - M_{13}^2 - M_{23}^2 - M_{33}^2)x_3^2 &= x_3^2 \\ 2(M_{00}M_{01} - M_{11}M_{10} - M_{21}M_{20} - M_{31}M_{30})x_0x_1 &= 0x_0x_1 \\ 2(M_{00}M_{02} - M_{12}M_{10} - M_{22}M_{20} - M_{32}M_{30})x_0x_2 &= 0x_0x_2 \\ 2(M_{00}M_{03} - M_{13}M_{10} - M_{23}M_{20} - M_{33}M_{30})x_0x_3 &= 0x_0x_3 \\ 2(M_{01}M_{02} - M_{11}M_{12} - M_{21}M_{22} - M_{31}M_{32})x_1x_2 &= 0x_1x_2 \\ 2(M_{01}M_{03} - M_{11}M_{13} - M_{21}M_{23} - M_{31}M_{33})x_1x_3 &= 0x_1x_3 \\ 2(M_{02}M_{03} - M_{12}M_{13} - M_{22}M_{23} - M_{32}M_{33})x_2x_3 &= 0x_2x_3 \end{aligned}$$

As condições que $M_{\mu\nu}$ deve respeitar são

$$\begin{aligned}
M_{00}^2 - M_{10}^2 - M_{20}^2 - M_{30}^2 &= 1 \\
M_{01}^2 - M_{11}^2 - M_{21}^2 - M_{31}^2 &= 1 \\
M_{02}^2 - M_{12}^2 - M_{22}^2 - M_{32}^2 &= 1 \\
M_{03}^2 - M_{13}^2 - M_{23}^2 - M_{33}^2 &= 1 \\
M_{00}M_{01} - M_{11}M_{10} - M_{21}M_{20} - M_{31}M_{30} &= 0 \\
M_{00}M_{02} - M_{12}M_{10} - M_{22}M_{20} - M_{32}M_{30} &= 0 \\
M_{00}M_{03} - M_{13}M_{10} - M_{23}M_{20} - M_{33}M_{30} &= 0 \\
M_{01}M_{02} - M_{11}M_{12} - M_{21}M_{22} - M_{31}M_{32} &= 0 \\
M_{01}M_{03} - M_{11}M_{13} - M_{21}M_{23} - M_{31}M_{33} &= 0 \\
M_{02}M_{03} - M_{12}M_{13} - M_{22}M_{23} - M_{32}M_{33} &= 0
\end{aligned}$$

2. Agora escreva

$$M = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c} & D \end{pmatrix}$$

com a um número D uma matriz 3×3 e

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Mostre que as condições obtidas no item anterior podem ser escritas como

$$M^T \eta M = B \text{ onde } \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Resposta: Calculando o produto matricial ηM , obtemos

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & D_{11} & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & D_{22} & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} = M$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & D_{11} & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & D_{22} & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} = H$$

$$H = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & b_3 \\ -c_1 & -D_{11} & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & -D_{22} & 0 \\ -c_3 & 0 & 0 & -D_{33} \end{pmatrix}$$