1 Terceiro Exercício

A distância até a estrela mais distante da nossa galáxia é da ordem de 10^5 anos-luz. Explique por que é possível, em princípio, para um ser humano viajar para tal estrela durante seu tempo de vida (digamos 80 anos) e faça uma estimativa da velocidade necessária para isso.

Resposta: Antes de começar qualquer cálculo, perceba que as medidas de intervalo de tempo e de distância são de um observador em repouso no referencial da Terra. Este problema é análogo ao paradoxo dos gêmeos.

Podemos definir o observador na Terra como o referencial S (o observador na estrela está em repouso em relação ao referencial S) e o observador (o viajante) da nave em repouso em seu respectivo referencial S' que se distância da Terra com a velocidade iremos estimar, isto é, a velocidade relativa entre os referenciais S e S', lembrando que o sentido da velocidade do foguete se altera na mudança de referencial, logo,

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \tag{1}$$

Sabendo que o observador na Terra realiza medidas de comprimento contraídas e intervalos de tempo dilatadas

$$\Delta x \approx 10^5 \text{ anos-luz e } \Delta t \approx 80 \text{ anos,} \tag{2}$$

podemos usar as TL para traduzir as medidas para o sistema de coordenadas para S' com

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \text{ e } \Delta t' = \gamma \Delta t. \tag{3}$$

Ao substituirmos temos

$$v' = \frac{\frac{\Delta x}{\gamma}}{\gamma \Delta t}$$
$$v' = \frac{\Delta x}{\gamma^2 \Delta t}$$

para facilitar as contas, podemos realizar a seguinte operação

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10^5 \text{ anos-luz}}{80 \text{ anos}} = \frac{10^5 c}{80} = 1,25 \cdot 10^3 c$$

irei definir $\alpha \equiv 1,25 \cdot 10^3$, apenas para não carregar um termo numérico imenso e dar o trabalho de manipula-lo. Retornando as contas temos

$$
\begin{aligned}
v' &= \frac{\alpha c}{\gamma^2} \\
v' &= \alpha c \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) \\
v' &= \alpha c - \frac{\alpha v'^2}{c} \\
\frac{c v'}{\alpha} &= c^2 - v'^2 \\
v'^2 - \frac{c v'}{\alpha} - c^2 &= 0,
\end{aligned}
$$

usando Baskara, temos

$$
\begin{aligned}
v' &= -\frac{\frac{c}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{\alpha}\right)^2 + 4c^2}}{2} \\
v' &= \frac{-\frac{c}{\alpha} \pm c\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4}}{2}
\end{aligned}
$$

como isso é uma estimativa, podemos considerar que $\alpha^{-2} \approx 0$, logo

$$
\begin{aligned}
v' &= \frac{-\frac{c}{\alpha} \pm c\sqrt{4}}{2} \\
v' &= c\frac{-\frac{1}{\alpha} \pm 2}{2} \\
v' &= c\left(-\frac{1}{2\alpha} \pm 1\right)
\end{aligned}
$$

O primeiro resultado, o negativo, temos $v' = c\left(-\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \implies |v'| > |c|$, ultrapassando a velocidade da luz, na direção contrária da viagem e isso é incorreto.

Já o segundo resultado, o positivo, temos $v' = c\left(-\frac{1}{2\alpha} + 1\right) \approx 0,9996c$ que é o resultado correto.