Resolução dos exercícios das notas - Física Moderna 1 A

Arthur Souza e Gabriel Capelini

12 de outubro de 2022

Aula 12

Exercício 9 Calcule $\eta^\mu \eta_{\mu\nu} \eta^\nu$ e mostre que é um invariante.

Solução:

$$\begin{aligned}
\eta^\mu \eta_{\mu\nu} \eta^\nu &= \eta^\mu \eta_\nu = -\eta^0 \eta_0 + \eta^i \eta_i = -\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx_0}{d\tau} + \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx_i}{d\tau} = \gamma^2 \left(-\frac{cdt}{dt}\frac{cdt}{dt} + \frac{dx^i}{dt}\frac{dx_i}{dt} \right) = \gamma^2(-c^2 + v^2) \\
&= -\gamma^2 c^2 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{\gamma^{-2}} = -c^2
\end{aligned} \tag{1}$$

Para mostrar que é um invariante, aplicamos uma TL

$$\begin{aligned}
\eta^{\mu'} \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu'} &= \frac{dx^{\mu'}}{d\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu'}}{d\tau} = \frac{d(\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha)}{d\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{d(\Lambda^\nu{}_\beta x^\beta)}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = \eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \\
&= \eta^\alpha \eta_{\alpha\beta} \eta^\beta
\end{aligned} \tag{2}$$

Como a tranformação (2) é completamente arbitrária, então $\eta^\mu \eta_{\mu\nu} \eta^\nu$ é um invariante.

Exercício 10 Explique por que a massa de repouso é um invariante.

Solução: Como o resultado do produto interno é um escalar e escalares possuem o mesmo valor visto de qualquer referencial, o resultado m^2c^2 é um invariante. Como c é um invariante, então m também deve ser um invariante para essa quantidade como um todo ser invariante.

Aula 14

Exercício 2 Um pion neutro (isso é importante pela conservação de carga) decai em dois fótons. Sabendo que a massa de repouso do pion vale $2,4 \times 10^{-28}$kg, qual o momento dos fótons criados. É possível que o pion decaia em apenas um fóton? Justifique sua resposta.

Solução: Sabemos que o momento relativístico deve se conservar, isso se traduz como

$$p_\pi = p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2} = p_\gamma \tag{3}$$

em que p_π é o momento do pion e p_γ o momento total dos fótons. O momento total dos fótons pode ser escrito como

$$E_\gamma = cp_\gamma \Rightarrow p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}, \quad p_\gamma = |\mathbf{p}_\gamma| \tag{4}$$

Sabendo que a seguinte quantidade

$$E^2 - (cp)^2 = (mc^2)^2 \tag{5}$$

é invariante. Podemos tomar o referencial de repouso do pion (i.e $p = 0$), de forma que

$$E_\pi = mc^2 \tag{6}$$

Então, de (3) segue que

$$p_\gamma = \frac{E_\pi}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc \tag{7}$$

Substituindo os valores dados

$$p_\gamma = (2,4 \times 10^{-28}\mathrm{kg})(3 \times 10^8 \mathrm{m/s}) = 7,2 \times 10^{-20} \mathrm{kg\,m/s} \tag{8}$$

Se o pion decair em apenas um fóton, a conservação de momento não é satisfeita, pois o fóton viaja a velocidade da luz e o pion, por ter massa, não é capaz de viajar a velocidade da luz. Dessa forma, outro fóton com direção contrária precisa aparecer para que o momento total seja conservado.

Exercise 6 Acima vemos que E varia com o tempo. A energia relativística não deveria ser uma constante?

Solução: A energia e o momento relativístico se conservam (ou seja, não variam no tempo) para sistemas isolados (sistemas livres de forças externas). Nesse caso, existe uma força constante que age sobre o corpo, mudando a sua velocidade a cada instante, de forma que a energia varie.

Aula 16

Exercício 7 Verifique que a conservação de carga não é invariante por Transformações de Galileu. Ou seja, assumindo que $\mathbf{J}$ é um vetor 3D e que ρ é um escalar, mostre que a equação da conservação não é invariante por uma Transformação de Galileu.

Solução: A equação da continuidade é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

onde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Ao realizarmos uma transformação de Galileu $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}$, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{J}' + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}') + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho(\mathbf{v} + \mathbf{V})) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla\rho \cdot \mathbf{V} + \rho\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla\rho \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla\rho \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Logo, a equação da conservação não é invariante por uma Transformação de Galileu.