

# Resolução da primeira prova de Física Moderna 1 A

Arthur de Souza Molina e Gabriel Capelini Magalhaes

2 de outubro de 2022

1. Considere o seguinte conjunto de matrizes  $\Lambda$ :

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda \in O(3, 1) \quad (1)$$

onde  $\eta$  é a métrica do espaço de Minkowsky.

- (a) Determine os possíveis valores para o determinante de  $\Lambda$

**Solução:** Tomando o determinante de ambos os lados de (1), temos

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^T \eta \Lambda) &= \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T) \det(\eta) \det(\Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T) \det(\Lambda) = 1 \\ &\Rightarrow (\det(\Lambda))^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \end{aligned} \quad (2)$$

onde foi usado  $\det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)$  e  $\det(\eta) = -1$ .

- (b) O subconjunto

$$\Lambda \in O(3, 1) \quad \text{com} \quad \det \Lambda = -1 \quad (3)$$

forma um grupo?

**Solução:** Vamos checar as propriedades de grupos para verificar se (3) forma um grupo

- i. Fechado

Sejam duas matrizes  $\Lambda$  e  $\Lambda'$  em que  $\det \Lambda = \det \Lambda' = -1$ . Temos então que

$$\Lambda \cdot \Lambda' = \Lambda'' \Rightarrow \det(\Lambda \cdot \Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda) \cdot \det(\Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda'') = 1 \quad (4)$$

Portanto, veja que o produto de duas matrizes de determinante igual a -1 nos dá uma matriz com determinante igual a 1. Porém, de (3) temos que esse subconjunto são todas as matrizes com determinante igual a -1. Logo o produto de duas matrizes pertencentes a (3) não produz uma matriz que pertence a (3). Portanto não pode formar um grupo.

2. Escreva a matriz  $\Lambda$  para uma transformação de Lorentz (um boost) com velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{b\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{y}} - \frac{b}{2} \hat{\mathbf{z}}, \quad b = \text{constante} \quad (5)$$

3. Considere um túnel (reto e muito longo). O comprimento próprio do túnel (ou seja, medido por um observador parado com o túnel) vale  $L$ . Fixo na entrada do túnel temos um relógio, que vamos chamar de  $R_1$ , e outro relógio fixo na saída do túnel, que vamos chamar de  $R_2$ . Os relógios  $R_1$  e  $R_2$  estão perfeitamente sincronizados no referencial do túnel (i.e., num referencial onde o túnel está parado). Considere agora um carro (muito rápido) que entra no túnel. O piloto do carro também possui um relógio (ou seja, um relógio que anda junto com o carro). Quando o carro entrou no túnel tanto o relógio do piloto, quanto o relógio  $R_1$  (o da entrada do túnel) marcavam um tempo igual a zero. Sabendo que, no instante em que o carro saiu do túnel, o relógio do piloto marcava um tempo

$$T = \frac{2L}{c} \quad (6)$$

quanto marcava o relógio  $R_2$  (o da saída do túnel) neste instante?

4. Considere um fio onde corre uma corrente  $I$ . No referencial do laboratório, que vamos chamar de  $S$ , o fio está parado, possui uma densidade de carga  $\rho$  (i.e, o fio **não é neutro**) e se estende reto paralelo ao eixo  $y$ . Ainda para esse referencial  $S$ , os elétrons responsáveis pela corrente se deslocam pelo fio com velocidade constante  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$ . Considere também um outro referencial  $\tilde{S}$  que se desloca com relação à  $S$ , com velocidade  $\mathbf{V} = \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$
- (a) Determine os campos elétricos e magnéticos nos referenciais  $S$  e  $\tilde{S}$
  - (b) Considere agora uma carga  $q$  a uma distância  $R$  do fio. A carga está parada com relação ao referencial  $S$  (o laboratório). Determine as forças que agem na carga  $q$  quando medidas por observadores nos referenciais  $S$  e  $\tilde{S}$