

Resolução da primeira prova de Física Moderna 1 A

Arthur de Souza Molina e Gabriel Capelini Magalhaes

2 de outubro de 2022

1. Considere o seguinte conjunto de matrizes Λ :

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda \in O(3, 1) \quad (1)$$

onde η é a métrica do espaço de Minkowsky.

- (a) Determine os possíveis valores para o determinante de Λ

Solução: Tomando o determinante de ambos os lados de (1), temos

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^T \eta \Lambda) &= \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T) \det(\eta) \det(\Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T) \det(\Lambda) = 1 \\ &\Rightarrow (\det(\Lambda))^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \end{aligned} \quad (2)$$

onde foi usado $\det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)$ e $\det(\eta) = -1$.

- (b) O subconjunto

$$\Lambda \in O(3, 1) \quad \text{com} \quad \det \Lambda = -1 \quad (3)$$

forma um grupo?

Solução: Vamos checar as propriedades de grupos para verificar se (3) forma um grupo

- i. Fechado

Sejam duas matrizes Λ e Λ' em que $\det \Lambda = \det \Lambda' = -1$. Temos então que

$$\Lambda \cdot \Lambda' = \Lambda'' \Rightarrow \det(\Lambda \cdot \Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda) \cdot \det(\Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda'') = 1 \quad (4)$$

Portanto, veja que o produto de duas matrizes de determinante igual a -1 nos dá uma matriz com determinante igual a 1. Porém, de (3) temos que esse subconjunto são todas as matrizes com determinante igual a -1. Logo o produto de duas matrizes pertencentes a (3) não produz uma matriz que pertence a (3). Portanto não pode formar um grupo.

2. Escreva a matriz Λ para uma transformação de Lorentz (um boost) com velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{b\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{y}} - \frac{b}{2} \hat{\mathbf{z}}, \quad b = \text{constante} \quad (5)$$

Solução: Como esse boost tem uma direção arbitrária, é necessário aplicarmos uma rotação para alinhar os eixos. Pela velocidade só ter componentes em $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$, podemos tratar esse problema como bidimensional (por conveniência). A seguir está representado esquematicamente a situação

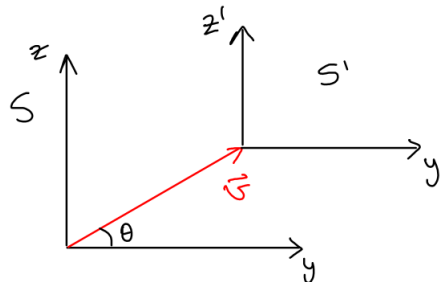


Figura 1: Movimento entre dois referenciais para uma velocidade igual a (5).

A partir dessa figura, é fácil ver que se rotacionarmos os referenciais em torno de x de um ângulo θ (que pode ser encontrado mais tarde), alinhamos o eixo y com a direção da velocidade e então podemos aplicar a matriz e boost para y , dada por

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

A matriz de rotação em torno de x é dada por

$$R_{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

Como $R_{(x)} \in SO(3)$, então $R^{-1} = R^T$. Então

$$R_{(x)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

Portanto, a matriz que faz esse boost é dada por

$$\begin{aligned} \Lambda &= R_{(x)}^{-1} \tilde{\Lambda} R_{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta \cos \theta & 0 & \beta \cos \theta & -\sin \theta \\ -\gamma\beta \sin \theta & 0 & \beta \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta \cos \theta & -\gamma\beta \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta \cos \theta & 0 & \beta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \beta \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ -\gamma\beta \sin \theta & 0 & \beta \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta & \beta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

De (5) temos

$$v = \sqrt{\frac{3b^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = b \quad (10)$$

Logo, tomando a projeção de \mathbf{v} na direção de $\hat{\mathbf{y}}$, temos

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{y}} = vy \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}b}{2}}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (11)$$

Portanto

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad (12)$$

Substituindo esse valor em (9) teremos a matriz que faz esse boost.

3. Considere um túnel (reto e muito longo). O comprimento próprio do túnel (ou seja, medido por um observador parado com o túnel) vale L . Fixo na entrada do túnel temos um relógio, que vamos chamar de R_1 , e outro relógio fixo na saída do túnel, que vamos chamar de R_2 . Os relógios R_1 e R_2 estão perfeitamente sincronizados no referencial do túnel (i.e., num referencial onde o túnel está parado). Considere agora um carro (muito rápido) que entra no túnel. O piloto do carro também possui um relógio (ou seja, um relógio

que anda junto com o carro). Quando o carro entrou no túnel tanto o relógio do piloto, quanto o relógio R_1 (o da entrada do túnel) marcavam um tempo igual a zero. Sabendo que, no instante em que o carro saiu do túnel, o relógio do piloto marcava um tempo

$$T = \frac{2L}{c} \quad (13)$$

quanto marcava o relógio R_2 (o da saída do túnel) neste instante?

Solução:

Considerando R_1 e R_2 parados no referencial S e o carro parado com o relógio R_3 no referencial S', temos as seguintes relações:

O relógio R_1 está sincronizado perfeitamente com o relógio R_2 , em outras palavras, $\Delta t_{R_1} = \Delta t_{R_2}$.

O instante inicial do relógio R_1 é igual ao instante inicial do relógio R_3 e é zero, isto é, $t_{R_1 I} = t_{R_3 I} = 0$

Usando uma das transformações de Lorentz, temos

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})$$

logo,

$$\Delta t_{R_3} = \gamma(\Delta t_{R_2} - \frac{v\Delta x}{c^2})$$

$$\therefore \Delta t_{R_2} = (\frac{\Delta t_{R_3}}{\gamma} + \frac{v\Delta x}{c^2})$$

$$\Delta t_{R_2} = (\frac{\frac{2L}{c}}{\gamma} + \frac{vL}{c^2}) = \frac{2L}{c\gamma} + \frac{vL}{c^2} = L(\frac{2}{c\gamma} + \frac{v}{c^2}) = \frac{L}{c}(\frac{2}{\gamma} + \frac{v}{c})$$

Sabendo que $\Delta t_{R_3} = \frac{2L}{c}$ e a distância percorrida pelo piloto $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{L}{\gamma}$, podemos calcular a velocidade

$$v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{L}{\gamma}}{\frac{2L}{c}} = \frac{c}{2\gamma}$$

$$v^2 = (\frac{c}{2\gamma})^2 = \frac{c^2}{4\gamma^2} = (\frac{c^2}{4})(1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$v^2 + \frac{v^2}{4} = \frac{5v^2}{4} = \frac{c^2}{4}$$

$$\therefore v = \frac{c}{\sqrt{5}} < c$$

Calculando o γ , temos

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = (1 - \frac{(\frac{c}{\sqrt{5}})^2}{c^2})^{-1/2} = (1 - \frac{1}{5})^{-1/2} = (\frac{4}{5})^{-1/2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$$

Substituindo o valor de v e γ , obtemos

$$\Delta t_{R_2} = \frac{L}{c}(\frac{2}{\gamma} + \frac{v}{c}) = \frac{L}{c}(\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{c}{\sqrt{5}}}{c})$$

$$\Delta t_{R_2} = \frac{5L}{c\sqrt{5}} = \frac{L\sqrt{5}}{c}$$

O relógio R_2 marca $\frac{L\sqrt{5}}{c}$ neste instante.

4. Considere um fio onde corre uma corrente I . No referencial do laboratório, que vamos chamar de S , o fio está parado, possui uma densidade de carga ρ (i.e, o fio **não é neutro**) e se estende reto paralelo ao eixo y . Ainda para esse referencial S , os elétrons responsáveis pela corrente se deslocam pelo fio com velocidade constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$. Considere também um outro referencial \tilde{S} que se desloca com relação à S , com velocidade $\mathbf{V} = \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$
 - (a) Determine os campos elétricos e magnéticos nos referenciais S e \tilde{S}
 - (b) Considere agora uma carga q a uma distância R do fio. A carga está parada com relação ao referencial S (o laboratório). Determine as forças que agem na carga q quando medidas por observadores nos referenciais S e \tilde{S}