Resolução da primeira prova de Física Moderna 1 A

Arthur de Souza Molina e Gabriel Capelini Magalhaes

2 de outubro de 2022

1. Considere o seguinte conjunto de matrizes Λ:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda \in O(3,1) \tag{1}$$

onde η é a métrica do espaço de Minkowsky.

(a) Determine os possíveis valores para o determinante de Λ

Solução: Tomando o determinante de ambos os lados de (1), temos

$$\begin{aligned} &\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T)\det(\eta)\det(\Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T)\det(\Lambda) = 1 \\ &\Rightarrow (\det(\Lambda))^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \end{aligned} \tag{2}$$

onde foi usado $\det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)$ e $\det(\eta) = -1$.

(b) O subconjunto

$$\Lambda \in O(3,1) \quad \text{com} \quad \det \Lambda = -1 \tag{3}$$

forma um grupo?

Solução: Vamos checar as propriedades de grupos para verificar se (3) forma um grupo

i. Fechado
Sejam duas matrizes Λ e Λ' em que $\det\Lambda = \det\Lambda' = -1$. Temos então que

$$\Lambda \cdot \Lambda' = \Lambda'' \Rightarrow \det(\Lambda \cdot \Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda) \cdot \det(\Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda'') = 1 \tag{4}$$

Portanto, veja que o produto de duas matrizes de determinante igual a -1 nos dá uma matriz com determinante igual a 1. Porém, de (3) temos que esse subconjunto são todas as matrizes com determinante igual a -1. Logo o produto de duas matrizes pertencentes a (3) não produz uma matriz que pertence a (3). Portanto não pode formar um grupo.

2. Escreva a matriz Λ para uma transformação de Lorentz (um boost) com velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{b\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{y}} - \frac{b}{2}\hat{\mathbf{z}}, \quad b = \text{ constante} \tag{5}$$

3. Considere um túnel (reto e muito longo). O comprimento próprio do túnel (ou seja, medido por um observador parado com o túnel) vale L. Fixo na entrada do túnel temos um relógio, que vamos chamar de R_1 , e outro relógio fixo na saída do túnel, que vamos chamar de R_2. Os relógios R_1 e R_2 estão perfeitamente sincronizados no referencial do túnel (i.e., num referencial onde o túnel está parado). Considere agora um carro (muito rápido) que entra no túnel. O piloto do carro também possui um relógio (ou seja, um relógio que anda junto com o carro). Quando o carro entrou no túnel tanto o relógio do piloto, quanto o relógio R_1 (o da entrada do túnel) marcavam um tempo igual a zero. Sabendo que, no instante em que o carro saiu do túnel, o relógio do piloto marcava um tempo

$$T = \frac{2L}{c} \tag{6}$$

quanto marcava o relógio R_2 (o da saída do túnel) neste instante?
Solução:

Considerando R_1 e R_2 parados no referencial S e o carro parado com o relógio R_3 no referencial S', temos as seguintes relações:

O relógio R_1 está sincronizado perfeitamente com o relógio R_2, em outras palavras, $\Delta t_{R_1} = \Delta t_{R_2}$.

O instante inicial do relógio R_1 é igual ao instante inicial do relógio R_3 e é zero, isto é, $t_{R_1 I} = t_{R_3 I} = 0$

Usando uma das transformações de Lorentz, temos

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x)$$

logo,

$$\Delta t_{R_3} = \gamma(\Delta t_{R_2} - \frac{v\Delta x}{c^2})$$

$$\therefore \ \ \Delta t_{R_2} = (\frac{\Delta t_{R_3}}{\gamma} + \frac{v\Delta x}{c^2})$$

$$\Delta t_{R_2} = (\frac{\frac{2L}{c}}{\gamma} + \frac{vL}{c^2}) = \frac{2L}{c\gamma} + vL = L(\frac{2}{c\gamma} + \frac{v}{c}) = \frac{L}{c}(\frac{2}{\gamma} + \frac{v}{c})$$

Sabendo que $\Delta t_{R_3} = \dfrac{2L}{c}$ e a distância percorrida pelo piloto $\Delta x\prime = \dfrac{\Delta x}{\gamma} = \dfrac{L}{\gamma}$, podemos calcular a velocidade

$$v = \frac{\Delta x\prime}{\Delta t\prime} = \frac{\frac{L}{\gamma}}{\frac{2L}{c}} = \frac{c}{2\gamma}$$

$$v^2 = (\frac{c}{2\gamma})^2 = \frac{c^2}{4\gamma^2} = (\frac{c^2}{4})(1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$v^2 + \frac{v^2}{4} = \frac{5v^2}{4} = \frac{c^2}{4}$$

$$\therefore \ \ v = \frac{c}{\sqrt{5}} < c$$

Calculando o γ, temos

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = (1 - \frac{(\frac{c}{\sqrt{5}})^2}{c^2})^{-1/2} = (1 - \frac{1}{5})^{-1/2} = (\frac{4}{5})^{-1/2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$$

Substituindo o valor de v e γ, obtemos

$$\Delta t_{R_2} = \frac{L}{c}(\frac{2}{\gamma} + \frac{v}{c}) = \frac{L}{c}(\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{c}{\sqrt{5}}}{c})$$

$$\Delta t_{R_2} = \frac{5L}{c\sqrt{5}} = \frac{L\sqrt{5}}{c}$$

O relógio R_2 marca $\dfrac{L\sqrt{5}}{c}$ neste instante.

4. Considere um fio onde corre uma corrente I. No referencial do laboratório, que vamos chamar de S, o fio está parado, possui uma densidade de carga ρ (i.e, o fio **não é neutro**) e se estende reto paralelo ao eixo y. Ainda para esse referencial S, os elétrons responsáveis pela corrente se deslocam pelo fio com velocidade constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$. Considere também um outro referencial S que se desloca com relação à S, com velocidade $\mathbf{V} = \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$

   (a) Determine os campos elétricos e magnéticos nos referenciais S e $\tilde{S}$

   (b) Considere agora uma carga q a uma distância R do fio. A carga está parada com relação ao referencial S (o laboratório). Determine as forças que agem na carga q quando medidas por observadores nos referenciais S e $\tilde{S}$