Resolução dos exercícios das notas - Física Moderna 1 A

Arthur Souza e Gabriel Capelini

2 de outubro de 2022

Aula 12

Exercício 9 Calcule $\eta^\mu \eta_{\mu\nu} \eta^\nu$ e mostre que é um invariante.

Solução:

$$\begin{aligned}\eta^\mu \eta_{\mu\nu} \eta^\nu &= \eta^\mu \eta_\nu = -\eta^0 \eta_0 + \eta^i \eta_i = -\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx_0}{d\tau} + \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx_i}{d\tau} = \gamma^2 \left(-\frac{cdt}{dt}\frac{cdt}{dt} + \frac{dx^i}{dt}\frac{dx_i}{dt}\right) = \gamma^2(-c^2 + v^2) \\ &= -\gamma^2 c^2 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{\gamma^{-2}} = -c^2\end{aligned} \tag{1}$$

Para mostrar que é um invariante, aplicamos uma TL

$$\begin{aligned}\eta^{\mu'} \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu'} &= \frac{dx^{\mu'}}{d\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu'}}{d\tau} = \frac{d(\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha)}{d\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{d(\Lambda^\nu{}_\beta x^\beta)}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = \eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &= \eta^\alpha \eta_{\alpha\beta} \eta^\beta\end{aligned} \tag{2}$$

Como a tranformação (2) é completamente arbitrária, então $\eta^\mu \eta_{\mu\nu} \eta^\nu$ é um invariante.
Exercício 10 Explique por que a massa de repouso é um invariante.

Solução: Como o resultado do produto interno é um escalar e escalares possuem o mesmo valor visto de qualquer referencial, o resultado $m^2 c^2$ é um invariante. Como c é um invariante, então m também deve ser um invariante para essa quantidade como um todo ser invariante.