2FIS070 – Primeira lista de exercícios

Remark 1 *Esta lista complementa os exercícios nas notas de aula sem substitutos. Ou seja, os exercícios das notas também servirão de base para a prova.*

1. Qual a diferença entre os referenciais inerciais da Mecânica Clássica e os da Teoria da Relatividade Restrita?

2. Até aqui nós escrevemos apenas transformações de Lorentz na direção x. Como seria uma transformação de Lorentz na direção y?

3. A distância até a estrela mais distante da nossa galáxia é da ordem de 10^5 anos-luz. Explique por que é possível, em princípio, para um ser humano viajar para tal estrela durante seu tempo de vida (digamos 80 anos) e faça uma estimativa da velocidade necessária para isso.

4. Considere o problema do muon descrito nas notas de aula. Lembrando que o muon tem um tempo médio de decaimento de $2,2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$. Com que velocidade ele precisa ser produzido na atmosfera para percorrer $10\,\mathrm{km}$ e atingir o nível do mar?

5. Uma barra de comprimento próprio L_0 (i.e., o comprimento medido no referencial S_0 em que ela está em repouso) faz um ângulo θ_0 com o eixo horizontal de seu referencial. Para um observador em um referencial S que se desloca com relação à S_0 na direção horizontal com velocidade v:

   (a) Qual o valor do ângulo θ que a barra faz com o eixo horizontal?

   (b) Qual o comprimento L da barra em S?

6. Se, para o observador em S, um feixe luminoso viaja por um intervalo de tempo Δt, esse feixe percorre uma distância $\Delta x = c\Delta t$. Da mesma forma, para um observador em S' esse **mesmo feixe** viaja por um intervalo de tempo $\Delta t'$, percorrendo uma distância $\Delta x'$. Se a velocidade da luz é a mesma para ambos os observadores temos

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = c\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = c \\ \Delta x' = c\Delta t' \Rightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = c \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \ . \tag{1}$$

   Se usarmos agora a dilatação temporal para um dos observadores (qualquer um), e.g., $\Delta t = \gamma \Delta t'$ temos

$$\Delta t = \gamma\Delta t' \Rightarrow \frac{\Delta x}{\gamma\Delta t'} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta x = \gamma\Delta x' \ . \tag{2}$$

   Vimos que, devido aos efeitos relativísticos, devemos esperar uma dilatação temporal ($\Delta t = \gamma\Delta t'$) e uma contração espacial ($\Delta x = \Delta x'/\gamma$). Mas a expressão acima mostra que, se o tempo se dilata $\Delta t = \gamma\Delta t'$, o espaço também deve ser dilatar $\Delta x = \gamma\Delta x'$. Responda, argumentando com detalhes, as seguintes questões:

(a) Se a velocidade da luz é constante o espaço deve se contrair, ou se dilatar?

(b) Como você explica a (i.e., qual o significado Físico da) dilatação espacial em (2)?

7. Num certo referencial S um observador registra a seguinte seqüência de eventos: num certo instante uma bomba explodiu numa certa posição e, 3 segundo depois, uma segunda bomba explodiu a uma distância de 1 metro desta primeira bomba. É possível encontrar um referencial inercial S', que respeite todos os postulados da relatividade, onde estas duas bombas explodiram no mesmo instante? Se sim, qual a velocidade deste referencial em relação a S. Se não, justifique sua resposta.

8. Considere a seguinte transformação entre dois referenciais:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{2}\left[\gamma\left(x-z\right)+x+z-\gamma tv\sqrt{2}\right] \ , \\
z' &= \frac{1}{2}\left[\gamma\left(z-x\right)+x+z+tv\gamma\sqrt{2}\right] \ , \\
t' &= \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\left[\frac{v}{c^2}\left(z-x\right)+\sqrt{2}t\right] \ , \\
y' &= y \ , \gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2} \ , \beta=\frac{v}{c} \ .
\end{aligned} \tag{3}$$

Essa transformação é compatível com o segundo postulado de Einstein?

9. Num sistema onde nomeamos as coordenadas como

$$x_0 = ct \ , \ x_1 = x \ , \ x_2 = y \ , \ x_3 = z \ , \tag{4}$$

considere a seguinte transformação linear

$$\tilde{x}_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} M_{\mu\nu} x_\nu \ , \ \mu = 0,1,2,3 \ . \tag{5}$$

(a) Determine as condições que $M_{\mu\nu}$ deve respeitar para que

$$\tilde{x}_0^2 - \sum_{i=1}^{3} \tilde{x}_i^2 = x_0^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \ . \tag{6}$$

(b) Agora escreva

$$M = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c} & D \end{pmatrix} \ , \tag{7}$$

com a um número D uma matriz 3×3 e

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \ . \tag{8}$$

Mostre que as condições obtidas no item anterior podem ser escritas como

$$M^T \eta M = B \ , \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{9}$$

e determine a matriz B.
Obs.: Como veremos com detalhes no futuro, esse é o grupo $O(3+1)$ e desempenha o papel do grupo ortogonal $O(3)$ na Relatividade.

10. Considere um fio onde corre uma corrente I. No referencial do laboratório, que vamos chamar de S, o fio está parado, é neutro (sem carga líquida) e se estende reto paralelo ao eixo y. Ainda para esse referencial, os elétrons responsáveis pela corrente se deslocam pelo fio com velocidade constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$. Considere também uma carga q a uma distância R do fio. Considere ainda um referencial $\tilde{S}$ que se desloca, com relação à S, com velocidade $\mathbf{V} = v\hat{\mathbf{y}}$.

    (a) Determine os campos elétricos e magnéticos nos referenciais S e $\tilde{S}$.

    (b) Determine as forças que agem na carga q quando medidas por observadores nos referenciais S e $\tilde{S}$.

11. Mostre que duas transformações de Lorentz sucessivas na mesma direção, a primeira com velocidade v_1 e a segunda com velocidade v_2, equivalem a uma única transformação de Lorentz, e calcule a velocidade v desta transformação. Discuta como esta velocidade resultante se relaciona com a fórmula de Einstein para a soma de velocidades.