Resolução da primeira prova de Física Moderna 1 A

Arthur de Souza Molina e Gabriel Capelini Magalhaes

6 de outubro de 2022

1. Considere o seguinte conjunto de matrizes Λ:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda \in O(3,1) \tag{1}$$

onde η é a métrica do espaço de Minkowsky.

(a) Determine os possíveis valores para o determinante de Λ

Solução: Tomando o determinante de ambos os lados de (1), temos

$$\begin{aligned} &\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T)\det(\eta)\det(\Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T)\det(\Lambda) = 1 \\ &\Rightarrow (\det(\Lambda))^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \end{aligned} \tag{2}$$

onde foi usado $\det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)$ e $\det(\eta) = -1$.

(b) O subconjunto

$$\Lambda \in O(3,1) \quad \text{com} \quad \det \Lambda = -1 \tag{3}$$

forma um grupo?

Solução: Vamos checar as propriedades de grupos para verificar se (3) forma um grupo

i. Fechado
Sejam duas matrizes Λ e Λ' em que $\det\Lambda = \det\Lambda' = -1$. Temos então que

$$\Lambda \cdot \Lambda' = \Lambda'' \Rightarrow \det(\Lambda \cdot \Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda) \cdot \det(\Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda'') = 1 \tag{4}$$

Portanto, veja que o produto de duas matrizes de determinante igual a -1 nos dá uma matriz com determinante igual a 1. Porém, de (3) temos que esse subconjunto são todas as matrizes com determinante igual a -1. Logo o produto de duas matrizes pertencentes a (3) não produz uma matriz que pertence a (3). Portanto não pode formar um grupo.

2. Escreva a matriz Λ para uma transformação de Lorentz (um boost) com velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{b\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{y}} - \frac{b}{2}\hat{\mathbf{z}}, \quad b = \text{ constante} \tag{5}$$

Solução: Como esse boost tem uma direção arbitrária, é necessário aplicarmos uma rotação para alinhar os eixos. Pela velocidade só ter componentes em $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$, podemos tratar esse problema como bidimensional (por conveniência). A seguir está representado esquematicamente a situação

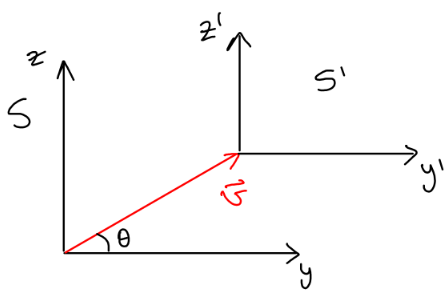

Figura 1: Movimento entre dois referenciais para uma velocidade igual a (5).

A partir dessa figura, é fácil ver que se rotacionarmos os referenciais em torno de x de um ângulo θ (que pode ser encontrado mais tarde), alinhamos o eixo y com a direção da velocidade e então podemos aplicar a matriz e boost para y, dada por

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

A matriz de rotação em torno de x é dada por

$$R_{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{7}$$

Como $R_{(x)} \in SO(3)$, então $R^{-1} = R^T$. Então

$$R_{(x)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{8}$$

Portanto, a matriz que faz esse boost é dada por

$$\begin{aligned} \Lambda = R_{(x)}^{-1}\tilde{\Lambda}R_{(x)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta\cos\theta & 0 & \beta\cos\theta & -\sin\theta \\ -\gamma\beta\sin\theta & 0 & \beta\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta\cos\theta & -\gamma\beta\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta\cos\theta & 0 & \beta cos^2\theta + \sin^2\theta & \beta\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ -\gamma\beta\sin\theta & 0 & \beta\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & \beta\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

De (5) temos

$$v = \sqrt{\frac{3b^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = b \tag{10}$$

Logo, tomando a projeção de $\mathbf{v}$ na direção de $\hat{\mathbf{y}}$, temos

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{y}} = vy\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}b}{2}}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{11}$$

Portanto

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \tag{12}$$

Substituindo esse valor em (9) teremos a matriz que faz esse boost.

3. Considere um túnel (reto e muito longo). O comprimento próprio do túnel (ou seja, medido por um observador parado com o túnel) vale L. Fixo na entrada do túnel temos um relógio, que vamos chamar de R_1, e outro relógio fixo na saída do túnel, que vamos chamar de R_2. Os relógios R_1 e R_2 estão perfeitamente sincronizados no referencial do túnel (i.e., num referencial onde o túnel está parado). Considere agora um carro (muito rápido) que entra no túnel. O piloto do carro também possui um relógio (ou seja, um relógio

que anda junto com o carro). Quando o carro entrou no túnel tanto o relógio do piloto, quanto o relógio R_1 (o da entrada do túnel) marcavam um tempo igual a zero. Sabendo que, no instante em que o carro saiu do túnel, o relógio do piloto marcava um tempo

$$T = \frac{2L}{c} \tag{13}$$

quanto marcava o relógio R_2 (o da saída do túnel) neste instante?

Solução:

Considerando R_1 e R_2 parados no referencial S e o carro parado com o relógio R_3 no referencial S', temos as seguintes relações:

O relógio R_1 está sincronizado perfeitamente com o relógio R_2, em outras palavras, $\Delta t_{R_1} = \Delta t_{R_2}$.

O instante inicial do relógio R_1 é igual ao instante inicial do relógio R_3 e é zero, isto é, $t_{R_1 I} = t_{R_3 I} = 0$

Usando uma das transformações de Lorentz, temos

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})$$

logo,

$$\Delta t_{R_3} = \gamma(\Delta t_{R_2} - \frac{v\Delta x}{c^2})$$

$$\therefore \ \Delta t_{R_2} = (\frac{\Delta t_{R_3}}{\gamma} + \frac{v\Delta x}{c^2})$$

$$\Delta t_{R_2} = (\frac{\frac{2L}{c}}{\gamma} + \frac{vL}{c^2}) = \frac{2L}{c\gamma} + \frac{vL}{c^2} = L(\frac{2}{c\gamma} + \frac{v}{c^2}) = \frac{L}{c}(\frac{2}{\gamma} + \frac{v}{c})$$

Sabendo que $\Delta t_{R_3} = \frac{2L}{c}$ e a distância percorrida pelo piloto $\Delta x\prime = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{L}{\gamma}$, podemos calcular a velocidade

$$v = \frac{\Delta x\prime}{\Delta t\prime} = \frac{\frac{L}{\gamma}}{\frac{2L}{c}} = \frac{c}{2\gamma}$$

$$v^2 = (\frac{c}{2\gamma})^2 = \frac{c^2}{4\gamma^2} = (\frac{c^2}{4})(1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$v^2 + \frac{v^2}{4} = \frac{5v^2}{4} = \frac{c^2}{4}$$

$$\therefore \ v = \frac{c}{\sqrt{5}} < c$$

Calculando o γ, temos

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = (1 - \frac{(\frac{c}{\sqrt{5}})^2}{c^2})^{-1/2} = (1 - \frac{1}{5})^{-1/2} = (\frac{4}{5})^{-1/2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$$

Substituindo o valor de v e γ, obtemos

$$\Delta t_{R_2} = \frac{L}{c}(\frac{2}{\gamma} + \frac{v}{c}) = \frac{L}{c}(\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{c}{\sqrt{5}}}{c})$$

$$\Delta t_{R_2} = \frac{5L}{c\sqrt{5}} = \frac{L\sqrt{5}}{c}$$

O relógio R_2 marca $\dfrac{L\sqrt{5}}{c}$ neste instante.

4. Considere um fio onde corre uma corrente I. No referencial do laboratório, que vamos chamar de S, o fio está parado, possui uma densidade de carga ρ (i.e, o fio **não é neutro**) e se estende reto paralelo ao eixo y. Ainda para esse referencial S, os elétrons responsáveis pela corrente se deslocam pelo fio com velocidade constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$. Considere também um outro referencial S que se desloca com relação à S, com velocidade $\mathbf{V} = \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$

   (a) Determine os campos elétricos e magnéticos nos referenciais S e $\tilde{S}$
   Solução:
   No referencial S, temos os elétrons se movendo com velocidade constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$ e o fio carregado com a densidade de carga ρ. Portanto,
   ao usar a Lei de Gauss para determinar o campo elétrico produzido pelo fio, temos

$$E = \frac{\rho l}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{x}$$

   onde l é o comprimento do fio e calculando o campo elétrico produzido pela carga. O campo magnético total visto no referencial S é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{x}$$

   pois é produzido pela corrente I do fio e $\vec{s}$ é o vetor radial na direção de y.
   No referencial $\tilde{S}$, ao analisarmos a densidade de carga do fio no referencial $\tilde{S}$, é preciso ter cuidado, a relação da densidade de carga positiva e negativa do fio é dada por

$$\rho_+ + \rho_- = \rho$$

   onde

$$\rho_+ = \frac{Q_+}{l} \text{ e } \rho_- = \frac{Q_-}{l}$$

   no referencial S. Para $\tilde{S}$, a distância entre os elétrons é maior em comparação a distância entre os elétrons medida por um observador no referencial S, logo a densidade de carga negativa é dada por

$$\rho'_- = \frac{Q_-}{l'} = \frac{Q_-}{\gamma l} = \gamma^{-1}\rho_-$$

   Para um observador no referencial $\tilde{S}$ o fio é contraído, logo

$$\rho_+\prime = \frac{Q_+}{l\prime} = \frac{Q_+}{\frac{l}{\gamma}} = \gamma\rho_+$$

   portanto, a densidade de carga $\rho\prime$ observada em $\tilde{S}$ é observada com uma concentração maior de densidade de carga positiva, isto é,

$$\rho\prime = \gamma\rho_+ + \gamma^{-1}\rho_- > \rho = \rho_+ + \rho_-$$

   A corrente elétrica e a carga pode ser reescrita como

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dl}{dt}\frac{dq}{dl} = v\frac{dq}{dl}$$

   e a densidade de carga

$$dq = \rho dl \Rightarrow \frac{dq}{dl} = \rho$$

   logo,

$$i = v\frac{dq}{dl} = v\rho$$

   Então podemos reescrever $\rho_- = \dfrac{I}{v}$, ao substituirmos em ρ temos

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = \rho_+ + \frac{I}{v}$$

e escrevermos $\rho_+ = \rho - \rho_- = \rho - \frac{I}{v}$.
substituindo no calculo de $\rho\prime$,obtemos

$$\rho\prime = \gamma\rho_+ + \gamma^{-1}\rho_- = \gamma(\rho - \frac{I}{v}) + \gamma^{-1}\frac{I}{v}$$

$$\rho\prime = \gamma\left(\rho - \frac{I}{v} + (1-\beta^2)\frac{I}{v}\right) = \gamma\left(\rho - \frac{I\beta^2}{v}\right)$$

A corrente elétrica vista no referencial $\tilde{S}$ é

$$I\prime = v_+\prime\rho\prime_+ + v_-\prime\rho\prime_- = -v\rho\prime_+ = -v\gamma(\rho - \frac{I}{v}) = \gamma(I - v\rho)$$

O campo elétrico e magnético observado no referencial S, é dado por

$$E = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

$$B = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

Para o referencial $\tilde{S}$, temos

$$E\prime = \frac{\rho\prime}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r}\left(\rho - \frac{I\beta^2}{v}\right)\hat{r} = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r}\left(\rho - \frac{Iv}{c^2}\right)\hat{r}$$

$$B = -\frac{\mu_0 I\prime}{2\pi r}\hat{\theta} = -\frac{\mu_0\gamma(I - v\rho)}{2\pi r}\hat{\theta}$$

(b) Considere agora uma carga q a uma distância R do fio. A carga está parada com relação ao referencial S (o laboratório). Determine as forças que agem na carga q quando medidas por observadores nos referenciais S e $\tilde{S}$

A força de Lorentz é dada por

$$F = q(E + v \times B)$$

. Como a carga está parada em relação ao referencial S, então a força não terá a contribuição do campo magnético visto pelo referencial S, portanto

$$F = q(E + v \times B) = qE = q\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{r}$$

Para o referencial $\tilde{S}$, os elétrons estão parados e a carga está se movendo no sentido oposto ao sentido da corrente elétrica, portanto, há contribuição do campo magnético. Assim, a força na carga observada no referencial $\tilde{S}$ é

$$F\prime = q(E\prime + v \times B\prime) = q\left(\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r}\left(\rho - \frac{Iv}{c^2}\right)\hat{r} - \frac{\mu_0\gamma(I - v\rho)}{2\pi r}v\hat{y} \times \hat{\theta}\right)$$

$$F\prime = q(E\prime + v \times B\prime) = q\left(\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 R}\left(\rho - \frac{Iv}{c^2}\right)\hat{r} - \frac{\mu_0 v\gamma(I - v\rho)}{2\pi R}\hat{r}\right)$$

$$F\prime = \frac{q\gamma}{2\pi\epsilon_0 R}\left(\rho - \frac{Iv}{c^2} - \mu_0\epsilon_0 v(I - v\rho)\right)\hat{r}$$

$$F\prime = \frac{q\gamma}{2\pi\epsilon_0 R}\left(\rho - \frac{Iv}{c^2} - \frac{1}{c^2}v(I - v\rho)\right)\hat{r}$$

$$F\prime = \frac{q\gamma}{2\pi\epsilon_0 R}\left(\rho - \frac{v^2\rho}{c^2}\right)\hat{r}$$

$$F\prime = \frac{q\gamma\rho}{2\pi\epsilon_0 R}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\hat{r}$$

$$F\prime = \frac{q\gamma\rho\gamma^{-2}}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{r}$$

$$F\prime = \frac{q\rho}{2\gamma\pi\epsilon_0 R}\hat{r} = \frac{F}{\gamma}$$