

# Resolução da primeira prova de Física Moderna 1 A

Arthur de Souza Molina e Gabriel Capelini Magalhaes

6 de outubro de 2022

1. Considere o seguinte conjunto de matrizes  $\Lambda$ :

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda \in O(3, 1) \quad (1)$$

onde  $\eta$  é a métrica do espaço de Minkowsky.

- (a) Determine os possíveis valores para o determinante de  $\Lambda$

**Solução:** Tomando o determinante de ambos os lados de (1), temos

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^T \eta \Lambda) &= \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T) \det(\eta) \det(\Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^T) \det(\Lambda) = 1 \\ &\Rightarrow (\det(\Lambda))^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \end{aligned} \quad (2)$$

onde foi usado  $\det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)$  e  $\det(\eta) = -1$ .

- (b) O subconjunto

$$\Lambda \in O(3, 1) \quad \text{com} \quad \det \Lambda = -1 \quad (3)$$

forma um grupo?

**Solução:** Vamos checar as propriedades de grupos para verificar se (3) forma um grupo

- i. Fechado

Sejam duas matrizes  $\Lambda$  e  $\Lambda'$  em que  $\det \Lambda = \det \Lambda' = -1$ . Temos então que

$$\Lambda \cdot \Lambda' = \Lambda'' \Rightarrow \det(\Lambda \cdot \Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda) \cdot \det(\Lambda') = \det(\Lambda'') \Rightarrow \det(\Lambda'') = 1 \quad (4)$$

Portanto, veja que o produto de duas matrizes de determinante igual a -1 nos dá uma matriz com determinante igual a 1. Porém, de (3) temos que esse subconjunto são todas as matrizes com determinante igual a -1. Logo o produto de duas matrizes pertencentes a (3) não produz uma matriz que pertence a (3). Portanto não pode formar um grupo.

2. Escreva a matriz  $\Lambda$  para uma transformação de Lorentz (um boost) com velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{b\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{y}} - \frac{b}{2} \hat{\mathbf{z}}, \quad b = \text{constante} \quad (5)$$

**Solução:** Como esse boost tem uma direção arbitrária, é necessário aplicarmos uma rotação para alinhar os eixos. Pela velocidade só ter componentes em  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}$ , podemos tratar esse problema como bidimensional (por conveniência). A seguir está representado esquematicamente a situação

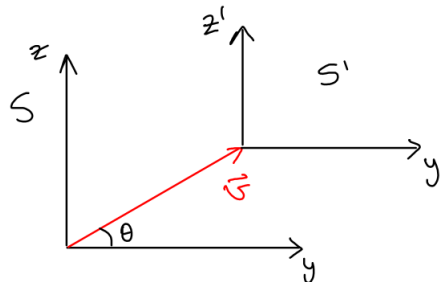


Figura 1: Movimento entre dois referenciais para uma velocidade igual a (5).

A partir dessa figura, é fácil ver que se rotacionarmos os referenciais em torno de  $x$  de um ângulo  $\theta$  (que pode ser encontrado mais tarde), alinhamos o eixo  $y$  com a direção da velocidade e então podemos aplicar a matriz e boost para  $y$ , dada por

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

A matriz de rotação em torno de  $x$  é dada por

$$R_{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

Como  $R_{(x)} \in SO(3)$ , então  $R^{-1} = R^T$ . Então

$$R_{(x)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

Portanto, a matriz que faz esse boost é dada por

$$\begin{aligned} \Lambda &= R_{(x)}^{-1} \tilde{\Lambda} R_{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta \cos \theta & 0 & \beta \cos \theta & -\sin \theta \\ -\gamma\beta \sin \theta & 0 & \beta \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta \cos \theta & -\gamma\beta \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta \cos \theta & 0 & \beta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \beta \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ -\gamma\beta \sin \theta & 0 & \beta \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta & \beta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

De (5) temos

$$v = \sqrt{\frac{3b^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = b \quad (10)$$

Logo, tomando a projeção de  $\mathbf{v}$  na direção de  $\hat{\mathbf{y}}$ , temos

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{y}} = vy \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}b}{2}}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (11)$$

Portanto

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad (12)$$

Substituindo esse valor em (9) teremos a matriz que faz esse boost.

3. Considere um túnel (reto e muito longo). O comprimento próprio do túnel (ou seja, medido por um observador parado com o túnel) vale  $L$ . Fixo na entrada do túnel temos um relógio, que vamos chamar de  $R_1$ , e outro relógio fixo na saída do túnel, que vamos chamar de  $R_2$ . Os relógios  $R_1$  e  $R_2$  estão perfeitamente sincronizados no referencial do túnel (i.e., num referencial onde o túnel está parado). Considere agora um carro (muito rápido) que entra no túnel. O piloto do carro também possui um relógio (ou seja, um relógio

que anda junto com o carro). Quando o carro entrou no túnel tanto o relógio do piloto, quanto o relógio  $R_1$  (o da entrada do túnel) marcavam um tempo igual a zero. Sabendo que, no instante em que o carro saiu do túnel, o relógio do piloto marcava um tempo

$$T = \frac{2L}{c} \quad (13)$$

quanto marcava o relógio  $R_2$  (o da saída do túnel) neste instante?

**Solução:**

Considerando  $R_1$  e  $R_2$  parados no referencial S e o carro parado com o relógio  $R_3$  no referencial S', temos as seguintes relações:

O relógio  $R_1$  está sincronizado perfeitamente com o relógio  $R_2$ , em outras palavras,  $\Delta t_{R_1} = \Delta t_{R_2}$ .

O instante inicial do relógio  $R_1$  é igual ao instante inicial do relógio  $R_3$  e é zero, isto é,  $t_{R_1 I} = t_{R_3 I} = 0$

Usando uma das transformações de Lorentz, temos

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})$$

logo,

$$\Delta t_{R_3} = \gamma(\Delta t_{R_2} - \frac{v\Delta x}{c^2})$$

$$\therefore \Delta t_{R_2} = (\frac{\Delta t_{R_3}}{\gamma} + \frac{v\Delta x}{c^2})$$

$$\Delta t_{R_2} = (\frac{\frac{2L}{c}}{\gamma} + \frac{vL}{c^2}) = \frac{2L}{c\gamma} + \frac{vL}{c^2} = L(\frac{2}{c\gamma} + \frac{v}{c^2}) = \frac{L}{c}(\frac{2}{\gamma} + \frac{v}{c})$$

Sabendo que  $\Delta t_{R_3} = \frac{2L}{c}$  e a distância percorrida pelo piloto  $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{L}{\gamma}$ , podemos calcular a velocidade

$$v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{L}{\gamma}}{\frac{2L}{c}} = \frac{c}{2\gamma}$$

$$v^2 = (\frac{c}{2\gamma})^2 = \frac{c^2}{4\gamma^2} = (\frac{c^2}{4})(1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$v^2 + \frac{v^2}{4} = \frac{5v^2}{4} = \frac{c^2}{4}$$

$$\therefore v = \frac{c}{\sqrt{5}} < c$$

Calculando o  $\gamma$ , temos

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = (1 - \frac{(\frac{c}{\sqrt{5}})^2}{c^2})^{-1/2} = (1 - \frac{1}{5})^{-1/2} = (\frac{4}{5})^{-1/2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$$

Substituindo o valor de  $v$  e  $\gamma$ , obtemos

$$\Delta t_{R_2} = \frac{L}{c}(\frac{2}{\gamma} + \frac{v}{c}) = \frac{L}{c}(\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{c}{\sqrt{5}}}{c})$$

$$\Delta t_{R_2} = \frac{5L}{c\sqrt{5}} = \frac{L\sqrt{5}}{c}$$

O relógio  $R_2$  marca  $\frac{L\sqrt{5}}{c}$  neste instante.

4. Considere um fio onde corre uma corrente  $I$ . No referencial do laboratório, que vamos chamar de  $S$ , o fio está parado, possui uma densidade de carga  $\rho$  (i.e, o fio **não é neutro**) e se estende reto paralelo ao eixo  $y$ . Ainda para esse referencial  $S$ , os elétrons responsáveis pela corrente se deslocam pelo fio com velocidade constante  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$ . Considere também um outro referencial  $\tilde{S}$  que se desloca com relação à  $S$ , com velocidade  $\mathbf{V} = \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$

- (a) Determine os campos elétricos e magnéticos nos referenciais  $S$  e  $\tilde{S}$

**Solução:**

No referencial  $S$ , temos os elétrons se movendo com velocidade constante  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$  e o fio carregado com a densidade de carga  $\rho$ . Portanto,  
ao usar a Lei de Gauss para determinar o campo elétrico produzido pelo fio, temos

$$E = \frac{\rho l}{2\pi\epsilon_0 s^2} \vec{s}$$

onde  $l$  é o comprimento do fio e calculando o campo elétrico produzido pela carga

$$E = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

O campo elétrico total visto no referencial  $S$  é

$$E = \frac{\rho l}{2\pi\epsilon_0 s} \vec{s} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

O campo magnético total visto no referencial  $S$  é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s^3} \vec{s}$$

pois é produzido pela corrente  $I$  do fio.

No referencial  $\tilde{S}$ , temos

o campo elétrico eletrostático gerado pelos elétrons do fio

$$E = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

Ao analisarmos a densidade de carga do fio no referencial  $\tilde{S}$ , é preciso ter cuidado, a relação da densidade de carga positiva e negativa do fio é dada por

$$\rho_+ + \rho_- = \rho$$

onde

$$\rho_+ = \frac{Q_+}{l} \text{ e } \rho_- = \frac{Q_-}{l}$$

no referencial  $S$ . Para  $\tilde{S}$ , a distância entre os elétrons é maior em comparação a distância entre os elétrons medida por um observador no referencial  $S$ , logo a densidade de carga negativa é dada por

$$\rho'_- = \frac{Q_-}{l'} = \frac{Q_-}{\gamma l} = \gamma^{-1} \rho_-$$

Para um observador no referencial  $\tilde{S}$  o fio é contraído, logo

$$\rho'_+ = \frac{Q_+}{l'} = \frac{Q_+}{\frac{l}{\gamma}} = \gamma \rho_+$$

portanto, a densidade de carga  $\rho'$  observada em  $\tilde{S}$  é observada com uma concentração maior de densidade de carga positiva, isto é,

$$\rho' = \gamma \rho_+ + \gamma^{-1} \rho_- > \rho = \rho_+ + \rho_-$$

O campo elétrico gerado pelo fio é dado por

$$E' = \frac{l\rho'}{2\pi\epsilon_0 s^2} \vec{s}$$

onde  $E'_{fio} > E_{fio}$ . Neste referencial, a carga está em repouso e quem se move é o fio em sentido contrário, portanto, surge um campo magnético produzida pelo fio. A corrente elétrica e a carga pode ser reescrita como

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dl}{dt} \frac{dq}{dl} = v \frac{dq}{dl}$$

e a densidade de carga

$$dq = \rho dl \Rightarrow \frac{dq}{dl} = \rho$$

logo,

$$i = v \frac{dq}{dl} = v\rho$$

então

$$B'_{fio} = \frac{\mu_0 i'}{2\pi s^2} \vec{s} = \frac{\mu_0 v \rho'}{2\pi s^2} \vec{s}$$

- (b) Considere agora uma carga  $q$  a uma distância  $R$  do fio. A carga está parada com relação ao referencial  $S$  (o laboratório). Determine as forças que agem na carga  $q$  quando medidas por observadores nos referenciais  $S$  e  $\tilde{S}$

**Solução:** Aplicar as equações de forças elétrica e magnética obtemos as forças aplicadas na partícula.