Exponenciais e Logaritmos

Arthur de Souza Molina

September 6, 2022

1 Introdução

Este material de apoio é destinado aos interessados em se aprofundar nas exponenciais e logaritmos, o conteúdo que será/foi ministrado por mim na Semana da Matemática Básica de 2022.

2 Exponenciais

As exponenciais são funções que possuem a seguinte forma

$$f(x) = a^x \text{ onde } a \in \mathbb{R},$$

onde a é chamada de base e x de expoente. As exponenciais possuem o seguinte comportamento. Quando x é muito grande, a função "explode" e quando x é

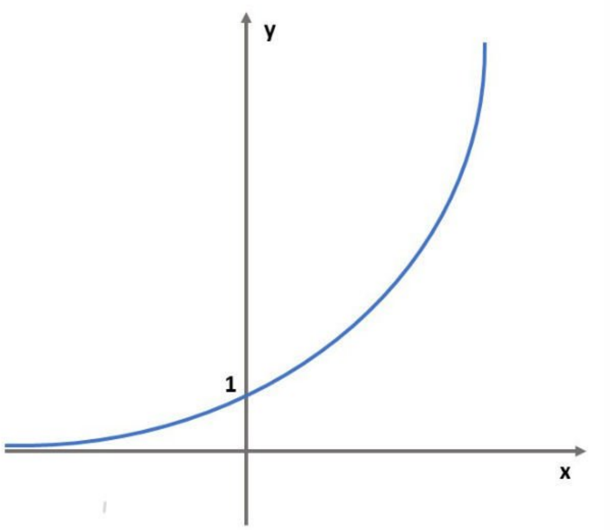

Figure 1: Representação de uma função exponencial genérica.

pequeno o suficiente ou um infinitesimal, a função se aproxima ao valor zero. Por sorte uma função exponencial cresce mais rápido do que qualquer polinômio e guardem essa informação quando forem trabalhar com limites, derivadas e integrais em um curso de cálculo.

As funções exponenciais possuem algumas propriedades especiais e irei listalas abaixo, seja $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, temos

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
5. $(a^m)^n = a^{mn}$
6. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m}$

Essas propriedades são importantes para simplificar cálculos, escrever equações e termos convenientemente para algum resultado.

Existe uma função exponencial especial que possui uma base que possui o valor e que também é chamado de número natural ou número de Euler, e por alguma razão decidida pela natureza, $f(x) = e^x$ e funções parecidas/proporcionais aparecem bastante na descrição matemáticas de fenômenos físicos e problemas matemáticos. Uma das formas de se calcular o número de Euler seria com a seguinte soma infinita

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Como eu já apresentei acima as definições e as propriedades de exponenciais, nada mais justo em resolver alguns exercícios passo a passo, mostrar como resolver as contas e depois propor exercícios para os leitores darem os próprios passos.

2.1 Exercícios resolvidos:

Simplifique as expressões abaixo: **Se possível tente fazer os exercícios primeiro e depois leia a resolução.**

1. $\dfrac{(a^5b^3)^4}{(a^2b^4)^2}$

$$\frac{(a^5b^3)^4}{(a^2b^4)^2} = (3) \Rightarrow \frac{(a^5)^4(b^3)^4}{(a^2)^2(b^4)^2} = (5) \Rightarrow \frac{a^{20}b^{12}}{a^4b^8} = \frac{a^{16+4}b^{4+8}}{a^4b^8} = (1) \Rightarrow \frac{(a^{16}b^4)(a^4b^8)}{a^4b^8} = a^{16}b^4$$

2. $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$

$$\frac{9}{2\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{9}{\sqrt{3}} = (6) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\frac{3^2}{3^{1/2}} = (2)\left(\frac{1}{2}\right)3^{2-1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)3^{3/2} = \frac{3^{3/2}}{2}$$

3. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{ab}$ onde $(ab) \neq 0$

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{ab}(2) \Rightarrow = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{ab} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{ab} = \frac{a+b}{(ab)^2}$$

2.2 Exercícios:

Encontre o valor de x e utilize a prova real (substituindo o x) para verificar a sua resposta.

1. $9^x = 27$
2. $16^{\frac{3}{x}} = \frac{1}{8}$
3. $\pi^x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$
4. $9^{x^2+1} = 81$
5. $2^{x^2-4} = 128$
6. $3^{x+2} + 3^x = 2430$
7. $3^{x^2-x} = 9$
8. $5^{3x} = 64$
9. $2^{x+3/2} = (1/2)^{-3}$
10. $2^{2x+1} \cdot 4^{3x+1} = 8^{x-1}$

3 Logaritmos

Os logaritmos são funções que possuem a seguinte forma

$$f(x) = \log_a x,$$

onde a é a base e x é o logaritmando e o seu resultado é o logaritmo. O logaritmo é a função inversa da função exponencial, ela cresce/diminui bem devagar em comparação com a exponencial, podemos ver o seu comportamento no gráfico abaixo.

Quando a função logarítmica é aplicada em uma função é possível desvendar mudanças bruscas de comportamento de funções (quando as funções são tratadas como logaritmando).

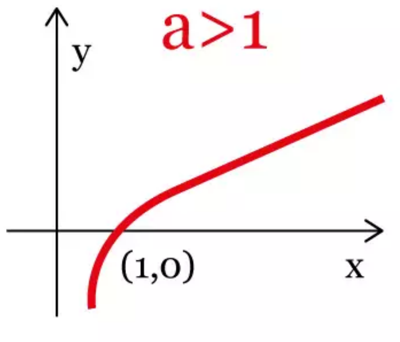

Figure 2: Representação do gráfico de uma função logarítmica genérica.

Como descrevi anteriormente, a função logarítmica é a inversa da função exponencial, uma definição formal seria dada por, seja a e b reais positivos diferentes de 1, o logaritmo de b na base a é o expoente x que satisfaz a igualdade $a^x = b$. Em outras palavras,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow \; a^x = b.$$

Assim como as exponenciais, os logaritmos possuem algumas propriedades especiais que são dadas por, seja $a, b, c \in \mathbb{R}$ teremos

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^b = b \log_a \Rightarrow a = b$
4. $a^{\log_a b} = b$
5. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = 0$
6. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
7. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ com $c \neq 0$
8. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
9. $\log_a b \log_b a = 1$
10. $\log_{a^c} b = \frac{\log_a b}{c}$

Essas propriedades são importantes para simplificar cálculos, escrever equações e termos convenientemente para estudar o comportamento de outras funções ao trata-la como logaritmando.

Assim como nas exponenciais, existe uma logaritmo de especial relacionada ao número de Euler, o famoso "ln", isto é, $\log_e \equiv \ln$ e esse logaritmo será visto muitas vezes em diversos cálculos, pois a natureza gosta bastante dele.

Outro detalhe não menos importante, quando temos $\log(x)$, significa que a base do logaritmo está omitida mas é convencionado que a base é 10.

3.1 Exercícios resolvidos:

Simplifique as expressões abaixo: **Se possível tente fazer os exercícios primeiro e depois leia a resolução.**

1. $\log_6 12 - \log_6 3$

   $$\log_6 12 - \log_6 3 = \log_6(3 \cdot 2) - \log_6 3 = (6) \Rightarrow \log_6 3 - \log_6 2 - \log_6 3 = \log_6 2$$

2. $5^{-1 \log_5 2}$

   $$5^{-1 \log_5 2} = 5^{-1} \cdot 5^{\log_5 2} = 4 \Rightarrow 5^{-1} 2 = \frac{2}{5}$$

3.2 Exercícios:

Encontre o valor de x e utilize a prova real (substituindo o x) para verificar a sua resposta.

1. $\log_5 x = 0$
2. $\log_2(x+3) = 1$
3. $\log_5(x^2 - x) = log_5(8x - 14)$
4. $\log_{27} x + \frac{1}{3} \log_3 2x = 1$
5. $\log_3 x + \log_9 x = 1$
6. $x = 16^{\log_4 5}$
7. $\log_{10}(x+1) + \log_{x+3} = log_{10} 3$
8. $\dfrac{1}{\log_x 8} + \dfrac{1}{\log_{2x} 8} + \dfrac{1}{\log_{4x} 8} = 2$
9. $(\log_x 2) \cdot (\log_{\frac{x}{16}} 2) = \log_{\frac{x}{64}} 2$
10. $\log_\pi(\pi x^2) - 1 = -\log_{\pi^2}\left(\dfrac{1}{\pi^4}\right)$

Aproveitem o material queridos!

Figure 3: Descoberta do $\ln 0$.