



UNIVERSIDADE
Estadual de Londrina

ARTHUR DE SOUZA MOLINA

Ferramentas para Explorar a Radiação Cósmica de
Fundo e suas Anomalias

Londrina
2021

ARTHUR DE SOUZA MOLINA

**Ferramentas para Explorar a Radiação Cósmica de
Fundo e suas Anomalias**

Relatório de Iniciação Científica apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para o Programa de Iniciação Científica.

Orientador: Prof. Dr. Sandro Dias Pinto Vitenti

Londrina

2021

ARTHUR DE SOUZA MOLINA

**Ferramentas para Explorar a Radiação Cósmica de Fundo e suas
Anomalias**

Relatório de Iniciação Científica apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para o Programa de Iniciação Científica.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Sandro Dias Pinto Vitenti
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. ...
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. ...
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 8 de dezembro de 2021

Agradecimentos

Agradeço a minha querida mãe pelo apoio incondicional, carinho, amor, estar comigo sempre e ser uma das pessoas mais importantes da minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Sandro Dias Pinto Vitenti por me conceder a oportunidade de produzir um projeto de iniciação científica, mesmo neste período de dificuldades que enfrentamos diariamente em virtude da pandemia de COVID-19.

MOLINA, Arthur de Souza **Ferramentas para Explorar a Radiação Cósmica de Fundo e suas Anomalias**. 2021. Relatório de Iniciação Científica para o Programa de Iniciação Científica – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

Resumo

Com surgimento de diversas modelos cosmológicos, modificações no modelo padrão para explicar fenômenos ou novas teorias físicas e a evolução da tecnologia, tanto na questão da acessibilidade quanto na capacidade de processamento de computadores, surge a necessidade da demanda por códigos de cosmologia que permitem fazer simulações, a previsão de resultados, verificar a coerência estatística em relação aos dados observacionais e o consenso dos resultados obtidos de cálculos numéricos de outros grupos de pesquisa. Neste trabalho, estudamos a descrição da formação de estruturas em grandes escala no universo com um tratamento Newtoniano de sua instabilidade gravitacional e analisamos os códigos relacionados à correlações cruzadas das bibliotecas de cálculo numérico de cosmologia CCL e NumCosmo, afim de produzir um *jupyter notebook* utilizando um dos algoritmos de validação do CCL como base para comparar os resultados dos cálculos numéricos feitos pela NumCosmo utilizando o mesmo conjunto de dados e documentar a precisão entre as bibliotecas e os métodos de cálculo de correlações cruzadas com gráficos e verificar a concordância entre elas.

Palavras-chave: Cosmologia. Cálculo Numérico. Estatística. Correlações Cruzadas.

Molina, Arthur de Souza **Tools for Exploring Cosmic Background Radiation and its Anomalies**. 2021. Scientific Initiation Report in Physics – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

Abstract

With the emergence of several cosmological models, such as modifications to the standard model to explain ourselves or new physical theories and the evolution of technology, both in terms of accessibility and computer processing capacity, there is a need for demand for cosmology codes that allow for simulations, the prediction of results, verifying the coherence about observational data, and the consensus of the results obtained from numerical calculations of other research groups. In this work, we study the description of the formation of large-scale structures in the universe with a Newtonian treatment of their gravitational instability and analyze the codes related to the cross-correlations of the CCL and NumCosmo cosmology numerical calculus libraries, to produce a *jupyter notebook* using CCL's benchmarks to compare numerical calculation results and document accuracy between libraries and cross-correlation calculation methods with graphs and details on this notebook.

Keywords: Cosmology. Numerical Calculation. Statistics. Cross-correlation.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – A primeira análise mostra os resultados da comparação entre os métodos *fftlog* e o *bessel* do CCL utilizando os dados de histograma e os mesmos traçadores com o objetivo de apresentar a precisão relativa entre eles. 9
- Figura 2 – A segunda análise apresenta a comparação utilizando os dados de histograma, os mesmos métodos e diferentes funções de correlação. 10
- Figura 3 – A terceira análise mostra os resultados da comparação entre os métodos *fftlog* e o *bessel* do CCL utilizando os dados do caso analíticos utilizando a mesma função de correlação, em cada um dos casos, as funções g1 e g2. 10
- Figura 4 – A quarta análise mostra a comparação dos resultados computados pelo CCL ao utilizar os dados do caso analítico, os mesmos métodos para calcular funções de correlação diferentes no mesmo gráfico. 11

Sumário

Introdução	1
Instabilidade Gravitacional	2
Análise dos códigos	7
Resultados	9
Conclusão	12
REFERÊNCIAS	13

Introdução

Ao apontar o telescópio para uma fração do céu e estudar um observável, observando o fluxo, o espectro dos feixes de luz provenientes dessa região em diversos pontos no céu, realizando a medida dos dados brutos e após separar o sinal e minimizar os ruídos através de um tratamento estatístico, é possível construir um mapa desse observável e realizar a medida da função de dois pontos.

A medida da função de dois pontos apresenta diversos obstáculos e por isso não é tão fácil de ser realizada, pois a medida incorpora alguns efeitos observacionais, como a resolução do instrumento, que precisam ser filtrados para que possam ser comparados com os resultados das previsões teóricas e experimentos diferentes.

A função de dois pontos permite inferir a distribuição de matéria no Universo, apresentando informações muito importantes para ajustar parâmetros cosmológicos, estudar detalhes da composição, forma e a evolução de estruturas de grandes escalas.

Ao observarmos o universo utilizando escalas próximas ou superiores a 200 Mpc, o universo pode ser aproximado como sendo homogêneo e isotrópico, como descrito pelo princípio cosmológico, mas em escalas menores, o universo possui flutuações de densidade de matéria, como vazios e superaglomerados. A descrição da formação de observáveis relativamente pequenos nessas regiões como planetas, estrelas, galáxias, envolvem uma física bastante complicada.

Neste trabalho será discutido a descrição de estruturas maiores que galáxias, as observáveis que estão apenas em processo de colapso sobre a sua própria gravidade, e devido a este fato, se expandem menos rapidamente em relação à outras regiões, como essas estruturas não possuem velocidades relativísticas, podem ser descritas pela teoria Newtoniana com aproximações.

Também será analisado os códigos de correlações cruzadas de ambas as bibliotecas, com o objetivo de calcular os observáveis principais e suas componentes em um *jupyter notebook*, plotando suas curvas e diferenças relativas a fim de demonstrar a concordância ou discordância entre os resultados das duas bibliotecas.

Instabilidade Gravitacional

Quando estudamos uma estrutura de grande escala utilizando as teorias Newtonianas, pressupomos que a estrutura não possui velocidade relativística, a estrutura está em uma região que se expande menos rapidamente em relação as outras regiões, a estrutura esteja em colapso sobre a sua auto-gravidade, ou seja, a instabilidade gravitacional é o mecanismo de maior contribuição para sua evolução e a matéria se comporta como um fluido perfeito.

Os resultados obtidos pela mecânica clássica possuem uma discrepância com um fator de $\frac{v^2}{c^2}$ em relação a mecânica relativística, ao pressupor que a estrutura não possui velocidade relativística, então $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0$ e a mecânica relativística deve concordar com os resultados obtidos pela mecânica clássica, já o fato que o espaço se expande de forma acelerada em todas as direções como descrito pela lei de Hubble-Lemaître, não impede de fazer uma descrição mais simples do comportamento da matéria e acrescentar conceitos gradualmente com as perturbações na região estudada.

A partir dessas pressuposições, podemos descrever essas estruturas em termos de sua distribuição de energia $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, a entropia por unidade de massa $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ e o vetor velocidade $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, ao estabelecer essas quantidades para um volume fixo em uma região, sabemos que a variação da massa deve ser equivalente a variação de sua distribuição de energia em todo o volume nesta região, em outras palavras,

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Delta V} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV. \quad (1)$$

A variação da massa também pode ser escrita como a variação do fluxo da distribuição de energia em todo o contorno do volume fixo

$$\frac{dM}{dt} = - \oint \varepsilon(\mathbf{x}, t) \mathbf{V} d\sigma = - \int_{\Delta V} \nabla(\varepsilon(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}) dV. \quad (2)$$

Devido a equivalência de eq. (1) e eq. (2), podemos escrever a seguinte relação consistente

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla(\varepsilon \mathbf{V}) = 0, \quad (3)$$

que nos permite lidar com a massa em termos de sua distribuição de energia e volume explicitamente. Podemos descrever instabilidade gravitacional na região, utilizando o conceitos como potencial gravitacional ϕ , a segunda Lei de Newton e a pressão no fluido, a força gravitacional pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_{gr} = -\Delta M \nabla \phi \quad (4)$$

a força devido a pressão no fluido é dada por

$$\mathbf{F}_{pr} = - \oint p \cdot d\sigma = - \int_{\Delta V} \nabla p \, dV \quad (5)$$

ao utilizar a segunda Lei de Newton, podemos encontrar a equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\varepsilon} + \nabla \phi = 0 \quad (6)$$

que nos permite descrever a instabilidade gravitacional em termos do volume, distribuição de energia, a pressão e potencial gravitacional.

A conservação de entropia do sistema não permite a dissipação de energia, e portanto, a entropia para um pequeno elemento de matéria é conservada

$$\frac{dS(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) S = 0, \quad (7)$$

também nos utilizamos da equação de Poisson para determinar o potencial gravitacional

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \varepsilon. \quad (8)$$

E através dessas equações hidrodinâmicas, podemos estudar o comportamento de pequenas perturbações nas funções desconhecidas: $\varepsilon, \mathbf{V}, p$ e ϕ .

Teoria de Jeans

Assumimos que o universo é estático, homogêneo, isotrópico, não expansível e que a distribuição de energia na região estudada não varia com tempo e permaneça constante $\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \text{constante}$, mas para que a distribuição de energia permaneça constante, a matéria necessitaria de estar em repouso, o fato da força gravitacional ser proporcional ao gradiente do potencial não permitindo que essa condição seja satisfeita, ou seja, a equação de Poisson não é satisfeita, logo o universo precisar de uma constante de cosmológica apropriada para se manter estático.

Com pequenas perturbações, temos

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad (9)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0 + \delta\phi(\mathbf{x}, t), \quad S(\mathbf{x}, t) = S_0 + \delta S(\mathbf{x}, t)$$

onde cada variação $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$ e assim por diante. A pressão é dada por

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\mathbf{x}, t), S_0 + \delta S(\mathbf{x}, t)) = p_0 + \delta p(\mathbf{x}, t) \quad (10)$$

ao realizar uma aproximação linear dessas perturbações, podemos escrever a perturbação na pressão em termos da perturbação da distribuição de energia e a entropia assim

$$\delta p = c_s^2 \delta \varepsilon + \sigma \delta S \quad (11)$$

onde $c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_s$ é o quadrado da velocidade do som e $\sigma \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\varepsilon$. Para a matéria não relativística, a velocidade do som é muito menor que a velocidade da luz ($c_s \ll c$).

Através dessas perturbações nas variáveis do sistema, conseguimos construir uma descrição clara com aproximações lineares o comportamento do sistema. Ao aplicar as pequenas perturbações em cada uma das definições acima, combinando as equações, conseguimos obter uma relação de cada uma das variações ao mantendo apenas os termos lineares as perturbações da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta \varepsilon - 4\pi G \varepsilon_0 \delta \varepsilon = \sigma \nabla^2 \delta S(\mathbf{x}), \quad (12)$$

$\delta \varepsilon$ está contida em uma equação fechada, onde a entropia serve como uma fonte da perturbação.

No caso de uma perturbação adiabática, onde não há troca de calor, ou seja, a perturbação na entropia é nula, e portanto, não depende das coordenadas espaciais, uma vez que a entropia é o único termo da eq.(12) depende exclusivamente das coordenadas espaciais, consequentemente, o termo a direita da equação eq.(12) se torna equivalente a 0, logo, podemos utilizar as transformações de Fourier e encontrar uma equação diferencial que relaciona a perturbação da distribuição de energia com as quantidades expressas na equação completamente dependente do tempo dada por

$$\frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_k)}{\partial t^2} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G \varepsilon_0) \delta \varepsilon_k(t) = 0 \quad (13)$$

a solução é dada por

$$\delta \varepsilon_k(t) \propto e^{\pm \omega(t)i} \quad (14)$$

onde $\omega(t) = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G \varepsilon_0}$ e o comportamento da perturbação adiabática depende exclusivamente do sinal do expoente.

Definindo o comprimento Jeans como

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \left(\frac{\pi}{G \varepsilon_0} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

onde $\omega(k_J) = 0$, para $\lambda < \lambda_J$, as soluções descrevem as ondas sonoras, proporcionais a $\delta \varepsilon_k \propto \sin(\omega t + \mathbf{kx} + \alpha)$ que propaga com velocidade de fase

$$c_{fase} = \frac{\omega}{k} = c_s \sqrt{1 - \frac{k_J^2}{k}}. \quad (16)$$

Ao analisar as soluções, no limite de $k \geq k_J$ ou em escalas muito pequenas ($\lambda \leq \lambda_J$), onde a gravidade é insignificante comparado com a pressão, consequentemente $c_{fase} \rightarrow c_s$.

Uma dessas soluções descrevem o comportamento exponencialmente rápido e não homogêneo, enquanto outras correspondem o modo decaimento, onde $k \rightarrow 0$, $|\omega|t \rightarrow \frac{t}{t_{gr}}$, onde $t_{gr} \equiv (4\pi G \varepsilon_0)^{-1/2}$. Onde t_{gr} é interpretado como o tempo característico de colapso para uma região com uma densidade de energia inicial ε_0 .

O comprimento Jeans $\lambda_J \sim c_s t_{gr}$ é o "comunicação de som" sobre a qual a pressão consegue reagir as mudanças da densidade de energia devido ao colapso gravitacional.

No caso de uma perturbação de vetor, onde as perturbações na distribuição de energia e na entropia são nulas, ou seja, as relações lineares de perturbação com $\delta\varepsilon = 0$ e $\delta S = 0$, o resultado dessas substituições, e inclusive no espaço de Fourier, concluimos que a velocidade da perturbação de onda plana, isto é, $\delta\mathbf{v} = \mathbf{w}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ e que a velocidade é perpendicular ao vetor de onda \mathbf{k} , ou seja,

$$\mathbf{w}_\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (17)$$

As perturbações vetoriais descrevem o movimento de cisalhamento do meio que não perturbam a densidade de energia, pois existem duas direções perpendiculares independentes para \mathbf{k} .

Por fim, as perturbações de entropia, onde $\delta S \neq 0$, ao analisar a eq. (12) completa, aplicando as transformações de Fourier obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k)}{\partial t^2} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G \varepsilon_0) \delta\varepsilon_k = -\sigma k^2 \delta S_k \quad (18)$$

onde a solução geral é a combinação da solução da homogênea e da solução particular, para o caso independente do tempo $\frac{\partial^2(\delta\varepsilon_k)}{\partial t^2} = 0$, a solução é dada por

$$\delta\varepsilon_k = \frac{-\sigma k^2 \delta S_k}{k^2 c_s^2 - 4\pi G \varepsilon_0} \quad (19)$$

é chamada de perturbação de entropia. Nota-se que $k \rightarrow \infty$ quando a gravidade não é relevante. Neste caso, a contribuição para a pressão devido à falta de homogeneidade da densidade de energia é exatamente compensada pela contribuição correspondente as perturbações de entropia, logo, essas ocorrem apenas em fluidos constituídos de muitas componentes, por exemplo, um fluido que consiste em bárions e radiação.

Ao considerarmos a instabilidade gravitacional em um universo expansão, homogêneo e isotrópico, onde a distribuição de energia depende do tempo e as velocidades obedecem a lei de Hubble-Lemaître

$$\varepsilon = \varepsilon_0(t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}. \quad (20)$$

substituímos esse resultado na eq. (3), obtemos

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + 3\mathbf{H}\varepsilon_0 = 0 \quad (21)$$

ao agruparmos a divergência equação de Euler com a equação de Poisson, chegamos a equação de Friedmann

$$\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H}^2 = -\frac{4\pi G}{3}\varepsilon_0 \quad (22)$$

As perturbações são dadas por

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}, \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi \quad (23)$$

$$p = p_0 + \delta p = p_0 + c_2^2 \delta\varepsilon$$

ao ignorar a perturbação de entropia.

Análise dos códigos

O algoritmo de validação

Para realizar a comparação entre as observáveis, foi utilizado como base um dos algoritmos do conjunto de teste de validação do CCL, o algoritmo de verificação dos cálculos de correlações cruzadas escrito em python chamado *test_correlation.py*.

Este algoritmo consulta um conjunto de dados de redshift, o espectro de potência angular, contraste de densidade de matéria, multipolos correspondentes ao espectro de potência de entrada, spin e entre outras grandezas cosmológicas para inicializar os traçadores, ou seja, as funções de correlação cruzadas. Ele calcula o valor da função de correlação para as separações angulares fornecidas como entrada e verifica a coerência do resultado comparando com o valor do erro de cálculo estimulado.

O algoritmo utiliza a estrutura de testes escalonáveis do módulo *pytest* para validar os cálculos em 112 testes utilizando três traçadores: *NumberCountsTracer*, *WeakLensingTracer* e *CMBLensingTracer*. Os testes foram feitos com os métodos: *fftlog* (Transformações rápidas de Fourier que permite menos custo computacional de processamento do que computar integrações de força bruta nos cálculos), *bessel* (método de cálculo utilizando as funções esféricas de Bessel), já para o método *legendre* (Soma da força bruta sobre os polinômios de Legendre) não possui testes implementados.

O algoritmo consulta 35 arquivos com extensão *.txt* contendo o conjunto de dados, mas apenas quatro arquivos são utilizados para realizar os cálculos dos observáveis e 31 arquivos são consultados para calcular o erro estimado e validar cada um dos cálculos realizados. O algoritmo possui um problema relativamente simples de implementação relacionado a declaração do endereço do diretório dos arquivos, onde é preciso realizar uma alteração no código para que o teste de validação funcione corretamente.

Um dos interesses deste trabalho era utilizar os testes com o traçador *CMBLensingTracer*, ou observáveis com spin-0 utilizando outros traçadores, afim de comparar os resultados do teste com os resultados computados pela NumCosmo utilizando os mesmos conjuntos de dados e verificar o grau de concordância entre as bibliotecas sobre esses resultados, mas infelizmente, nenhum teste com essas condições foi implementado neste algoritmo. A NumCosmo ainda não possui suporte para observáveis com spin diferente de zero e, portanto, dentre os testes do algoritmo de validação, apenas os testes utilizando o traçador *NumberCountsTracer* e o spin-0 permitem efetuar a análise. O algoritmo possui suporte para computar tanto os casos analíticos quanto os casos de histograma, como os cálculos de casos analíticos não foram implementados na NumCosmo, este trabalho aborda apenas casos com os dados de histograma para a comparação entre bibliotecas, mas este

fato não impede de realizarmos a comparação dos métodos diferentes em casos analíticos feitos pelo CCL.

Ao adaptar o teste que utiliza o traçador *NumberCountsTracer* e observáveis com spin-0 em um *jupyter notebook* descartando a dependência da consulta dos 31 arquivos de validação dos resultados, a inicialização de outros traçadores e seus respectivos cálculos, surgem dois desafios sobre a estrutura do código para a implementação, que seria remover a dependência do módulo *pytest* e da consulta do conjunto de dados. A estrutura de testes escalonáveis do módulo *pytest* é incompatível com o tipo de análise que precisamos e a consulta em vários arquivos não é interessante, pois o conjunto de dados é relativamente pequeno e podemos evitar as complicações relacionadas a manipulação de arquivos, em outras palavras, buscamos a produção de um algoritmo simples sem complicações/problemas a mais para lidar.

Com auxílio de algoritmos simples escritos em python, aproveitamos a versatilidade da linguagem para extrair os dados dos arquivos consultados e agrupamos em uma coleção ordenada dos dados nas listas dentro do *jupyter notebook*, com um estudo detalhado do comportamento do algoritmo e suas diversas funções escalonadas no teste e várias tentativas de sintetizar o código, foi possível simplificar todas as funções do algoritmo em apenas uma função, com poucas entradas, eliminando as verificações de envio de parâmetro inválidos e com os mesmos resultados que o algoritmo original apresentava.

Para a produção dos gráficos de distâncias relativas entre resultados, reaproveitamos uma função de comparação de resultados entre o CCL e a NumCosmo, ela é responsável por construir dois gráfico organizados na horizontal, onde o primeiro apresentava as curvas dos resultados de ambas as bibliotecas e o segundo apresentava a curva da distância relativa de seus resultados. A função estava definida no *jupyter notebook* presente no repositório da NumCosmo chamado *NumCosmoCCLTest.ipynb*, onde apresentava a comparação dos resultados computados de distância e espectro de potência de ambas as bibliotecas, demonstrando a discordância/concordância de seus cálculos.

Após o tratamento do algoritmo com os dados computados pelo CCL, desenvolvemos um estudo sobre a implementação dos códigos da NumCosmo ao estudar, documentar e separar os códigos anteriores do arquivo *NumCosmoCCLTest.ipynb* em três arquivos que realizam a comparação dos resultados de distância, espectro de potência e o que produzimos sobre correlações cruzadas entre as bibliotecas.

Resultados

Escolhemos uma forma padronizada de fácil visualização para a apresentação dos resultados em dois gráficos horizontais, onde o primeiro gráfico apresenta a curva dos valores calculados para as separações angulares fornecidas como entrada e o segundo apresenta a curva da distância relativa entre os resultados calculados.

Comparação entre os resultados do CCL

Na primeira análise apresentamos os resultados da função de correlação calculada usando os mesmos traçadores mas utilizando métodos diferentes.

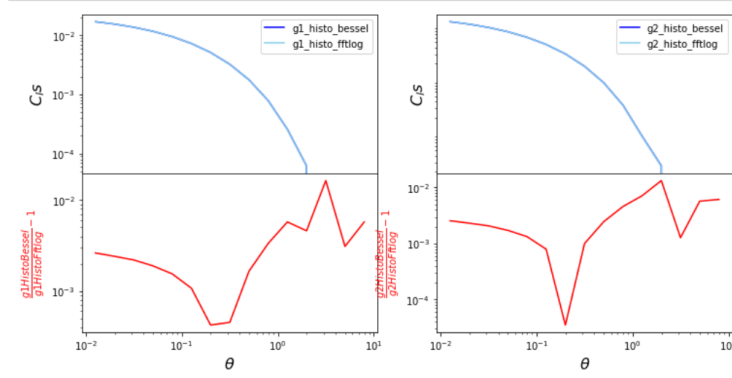


Figura 1 – A primeira análise mostra os resultados da comparação entre os métodos *fftllog* e o *bessel* do CCL utilizando os dados de histograma e os mesmos traçadores com o objetivo de apresentar a precisão relativa entre eles.

A distância relativa dos valores calculados utilizando métodos diferentes apresenta um grau concordância relativamente bom e com precisão média de 10^{-3} entre os valores calculados.

Em seguida ao utilizarmos as curvas dos cálculos utilizando os mesmos métodos e com traçadores diferentes obtemos o seguinte gráfico:

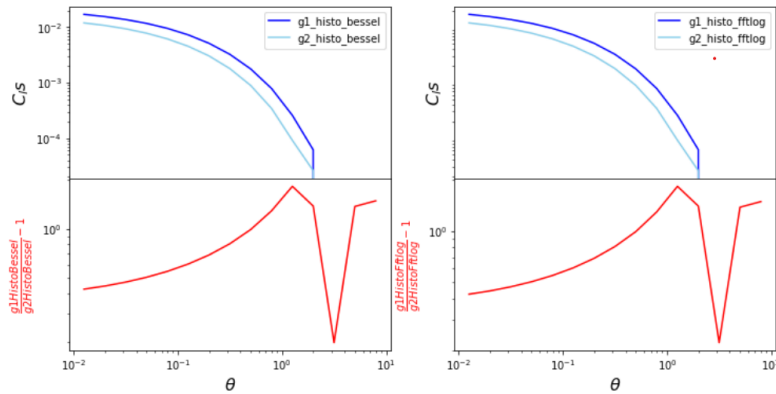


Figura 2 – A segunda análise apresenta a comparação utilizando os dados de histograma, os mesmos métodos e diferentes funções de correlação.

Na segunda análise, a distância relativa possuem concordância porém a precisão é extremamente baixa.

Também foi possível comparar os resultados calculados pelo CCL utilizando os dados do caso analítico em diferentes métodos e funções de correlação, na terceira análise, utilizamos os dados dos casos analíticos e comparamos os resultados esperados utilizando métodos diferentes para a mesma função de correlação.

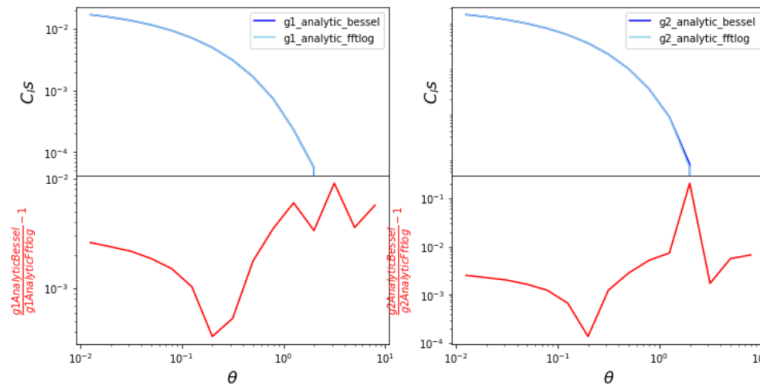


Figura 3 – A terceira análise mostra os resultados da comparação entre os métodos *fftllog* e o *bessel* do CCL utilizando os dados do caso analítico utilizando a mesma função de correlação, em cada um dos casos, as funções g1 e g2.

A distância relativa apresentada na terceira análise demonstra que as funções de correlação calculadas utilizando diferentes métodos fornecidos pelo CCL concordam entre si com uma precisão média de 10^{-3} entre seus resultados. Por fim, comparamos os valores calculados utilizando os mesmos métodos para diferentes funções de correlação e obtemos os seguintes gráficos:

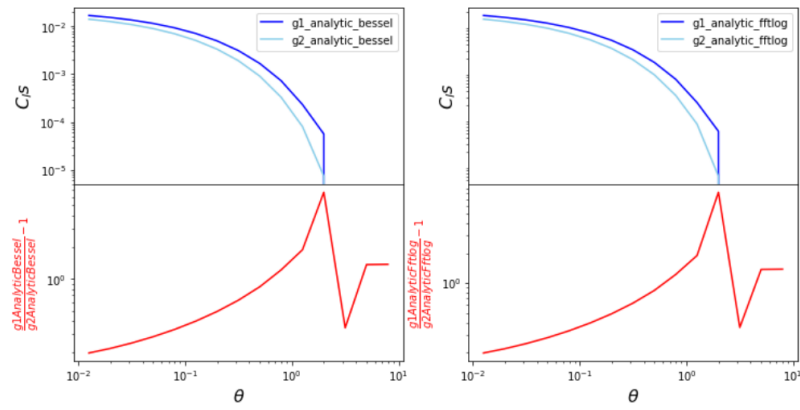


Figura 4 – A quarta análise mostra a comparação dos resultados computados pelo CCL ao utilizar os dados do caso analítico, os mesmos métodos para calcular funções de correlação diferentes no mesmo gráfico.

A distância relativa na quarta análise demonstra que os resultados na

Conclusão

Referências