Теория конечных графов

Гамильтоновы графы

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной информатики и теории вероятностей РУДН
Маркова Екатерина Викторовна
markova_ev@pfur.ru

Литература

1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

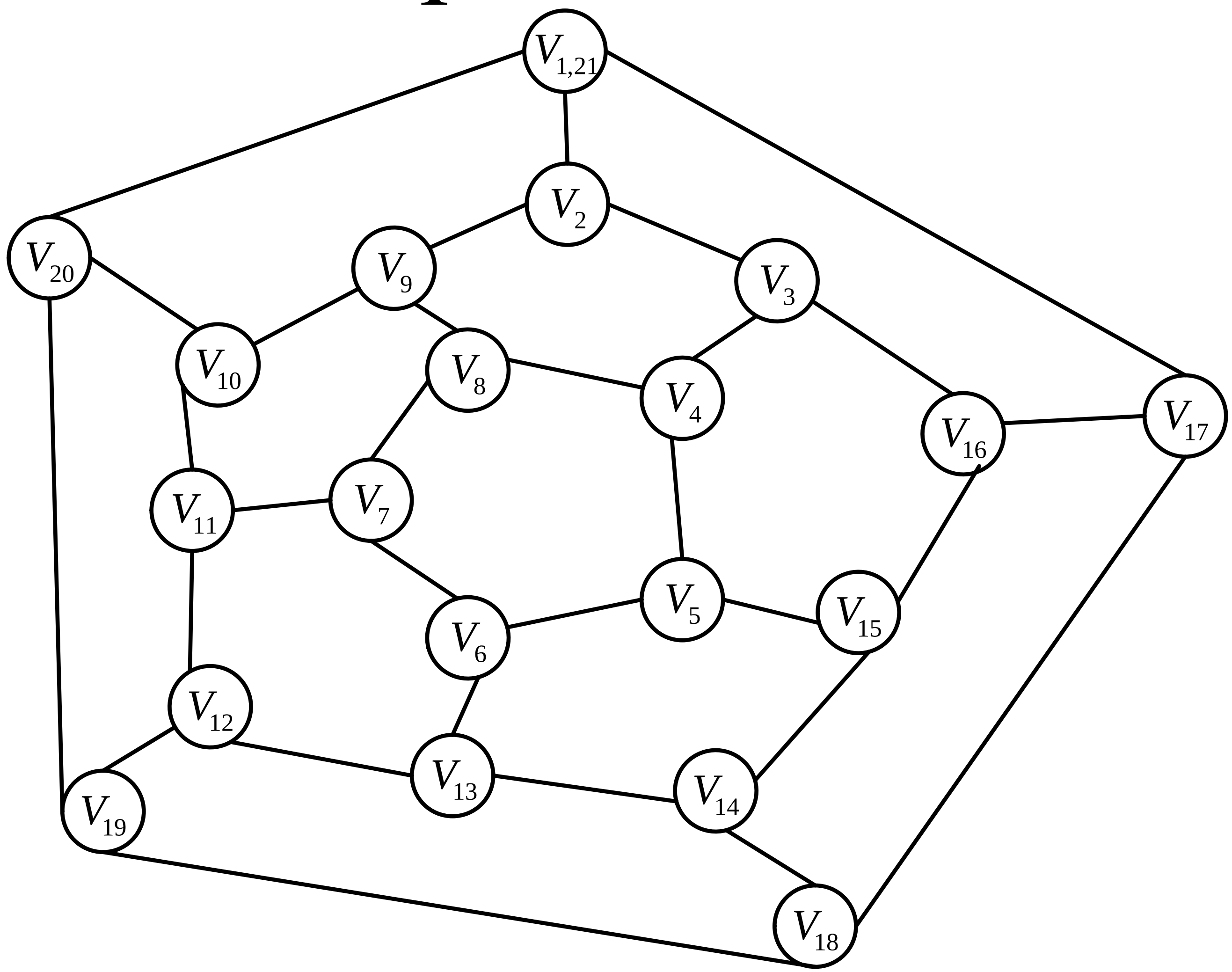
Гамильтоновы графы

Простой цикл называют гамильтоновым, если он включает в себя все вершины связного неорграфа.

Граф, в котором есть гамильтонов цикл называют гамильтоновым графом.

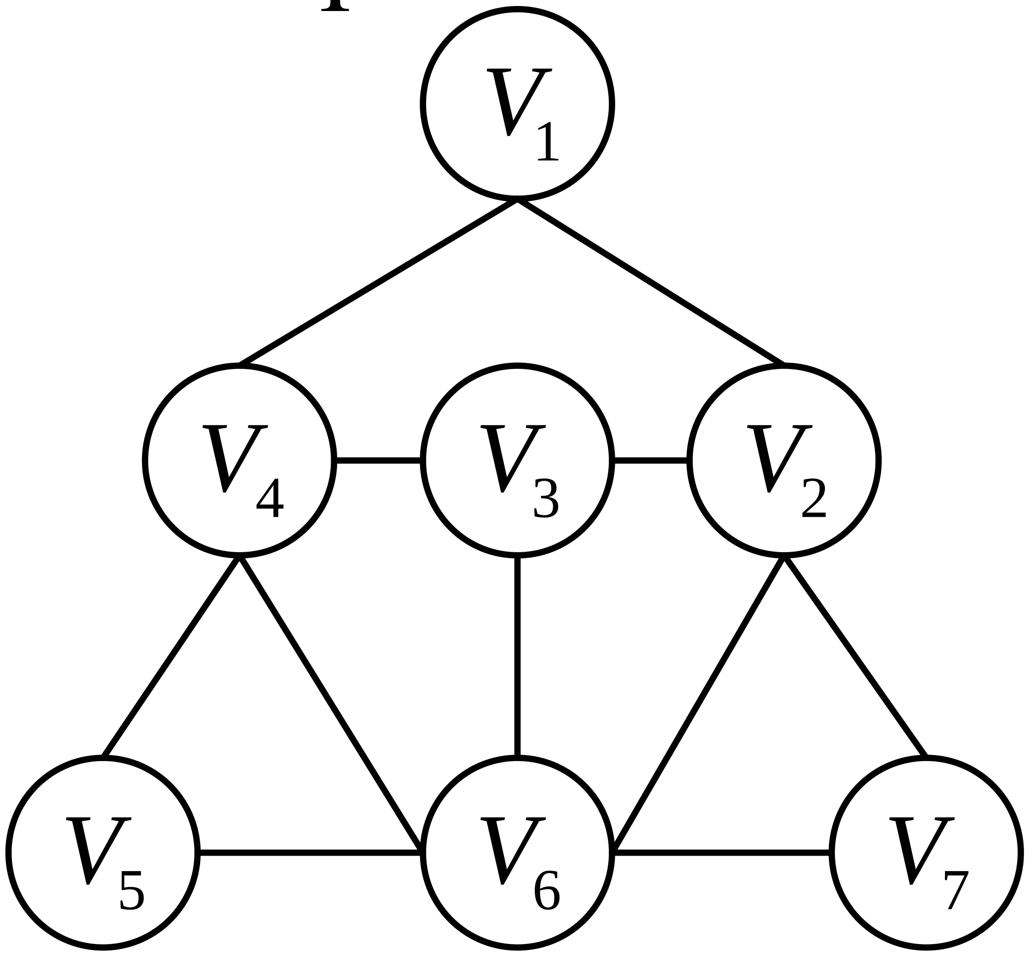
<u>История:</u> Слово «гамильтонов» в этих определениях является производным от имени ирландского математика Уильяма Роуэна Гамильтона (1805-1865), предложившего своим друзьям игру по названием «Кругосветное путешествие». Для игры Гамильтон изобразил граф, содержаций 20 вершин, названиями которых служили названия городов. Цель игры – совершить кругосветное путешествие, посетив каждый город один раз, и вернуться домой. Очевидно, что задача сводилась к поиску в графе простого цикла, проходимого через все вершины.

Упражнение 1



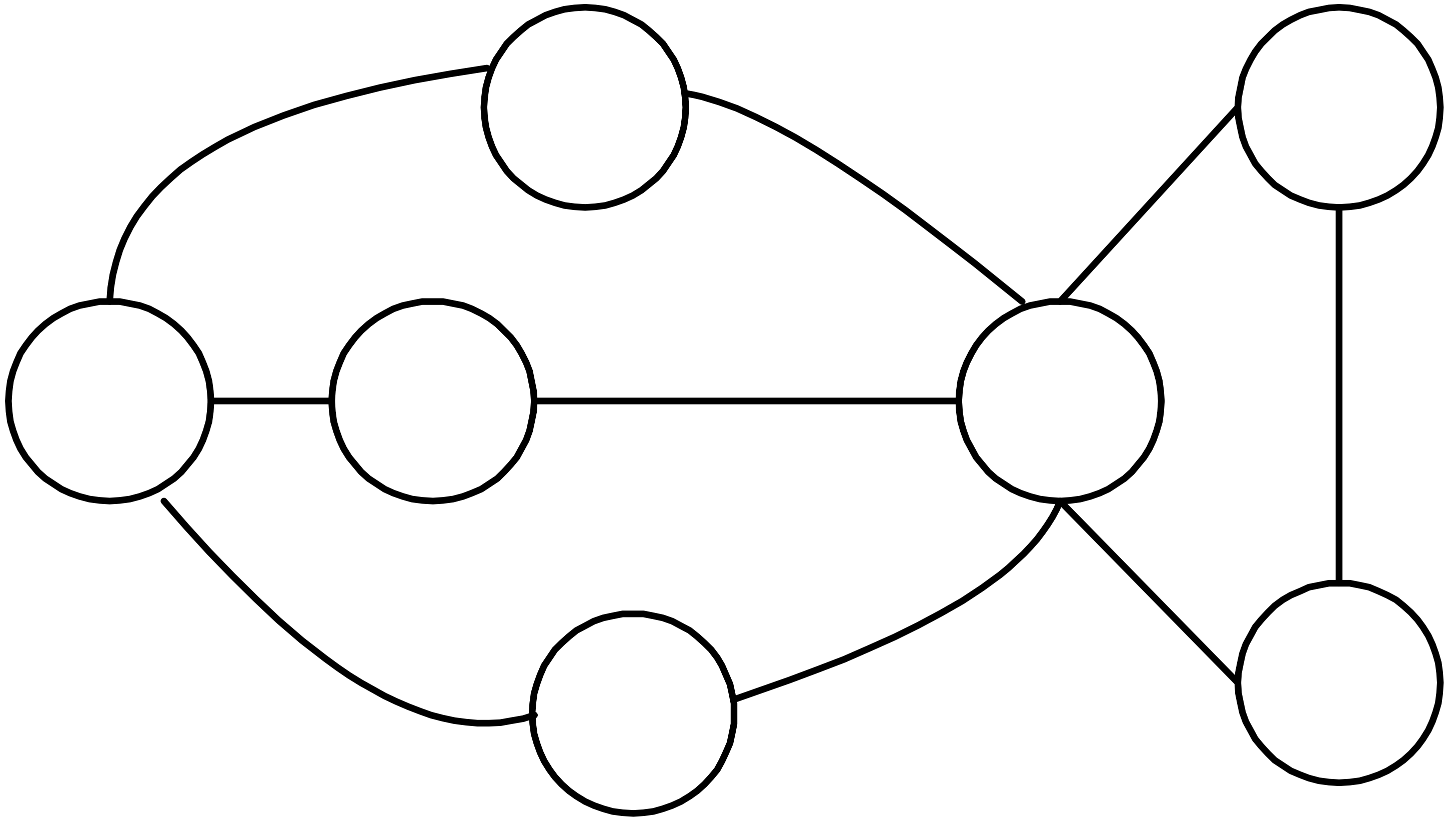
Пример 1. Граф «Кругосветное путешествие», «Головоломка Гамильтона».
Найти гамильтонов цикл в графе.

Упражнение 2



Пример 2. Граф «Башня».
Определить, существует ли в графе гамильтонов цикл и гамильтонова цепь?

Упражнение 3



Пример 3. Граф «Рыбка».
Определить, существует ли в графе гамильтонов цикл и гамильтонова цепь?

Сходство и различия гамильтоновых и эйлеровых графов

	Эйлеровы циклы	**Гамильтоновы циклы**
Ребра	Эйлеров цикл проходит по каждому ребру ровно один раз.	Гамильтонов цикл может не проходить по некоторым ребрам.
Вершины	Эйлеров цикл может проходить через одну вершину несколько раз.	Гамильтонов цикл проходит ровно один раз по каждой вершине.

Достаточные условия существования гамильтоновых циклов

Для гамильтоновых графов не существует одного необходимого и достаточного условия существования цикла, как у эйлерова графа (четность степеней вершин).

Известны лишь несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в неорграфах.

Достаточные условия существования гамильтоновых циклов

(1) **(теорема Оре)** Если для любой пары несмежных вершин $\{V_i, V_j\}$ графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ порядка $|\mathbf{V}| \geq 3$ выполняется неравенство $\delta(V_i) + \delta(V_j) \geq |\mathbf{V}|$, то граф G – гамильтонов граф.

(2) Если для любой вершины V_i графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ порядка $|\mathbf{V}| > 3$ выполняется неравенство $\delta(V_i) \geq \dfrac{|\mathbf{V}|}{2}$, то граф G – гамильтонов граф.

(3) Любой 4–связный планарный граф является гамильтоновым.

<u>Замечание к (3):</u> Связность (реберная) определяется как наименьшее количество ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

Обозначения для алгоритма поиска гамильтонова цикла

Введем следующие обозначения.

1) $P^{(l)}$ – матрица всех маршрутов с l промежуточными вершинами для всех упорядоченных пар вершин графа.

$$P^{(l)} = P' \times P^{(l-1)}, \quad l = \overline{1, |V| - 1}.$$

2) $P' = \left[p'_{i,j} \right]_{i,j \in \overline{1,|V|}}$ $\quad p'_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } <V_i, V_j> \notin \mathbf{E}, \\ V_j, & \text{если } <V_i, V_j> \in \mathbf{E}. \end{cases}$

3) $P^{(0)} = \left[p^{0}_{i,j} \right]_{i,j \in \overline{1,|V|}}$ получаем из матрицы P'. $\quad p^{(0)}_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } p'_{i,j} = 0, \\ 1, & \text{если } p'_{i,j} \neq 0. \end{cases}$

Обозначения для алгоритма поиска гамильтонова цикла

<u>Упрощение.</u>

Вместо матрицы $P^{|V|-1}$ достаточно сформировать только один из ее столбцов, соответствующий начальной вершине V_s. Искомый результат содержится в строке s найденного столбца.

1) $P_s^{(l)}$ – столбец s матрицы $P^{(l)}$.

2) $P_s^{(l)} = P' \times P_s^{(l-1)}$, где $l = 1, 2, \ldots, \left(\left|V\right| - 1\right)$.

3) $P_s^{(0)}$ – столбец номер s матрицы $P^{(0)}$.

Алгоритм поиска гамильтонова цикла

Начало алгоритма: $G = <\mathbf{V},\mathbf{E}>$ – связный орграф. Определена начальная вершина V_s для построения гамильтонова цикла.

Шаг 1. Составляется матрица P' и $P_s^{(0)}$ - столбец s матрицы $P^{(0)}$.

$$P' = \left[\, p'_{i,j} \,\right]_{i,j \in \overline{1,|V|}}, \quad p'_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } <V_i, V_j> \notin \mathbf{E}, \\ V_j, & \text{если } <V_i, V_j> \in \mathbf{E}. \end{cases}$$

Элементы столбца $P_s^{(0)}$ определяются по следующему правилу:

$$p_{i,j}^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{если } p'_{i,j} = 0, \\ 1, & \text{если } p'_{i,j} \neq 0. \end{cases}$$

Алгоритм поиска гамильтонова цикла

Шаг 2. $P_s^{(l)} = P' \times P_s^{(l-1)}$, $l = \overline{1,|V|-1}$,

в столбце $P_s^{(l)}$ обнуляются элементы:

1) в столбце $P_s^{(l)}$, если «произведение вершин» в строке содержит вершину, равную метке строки, $l = \overline{1,|V|-1}$;

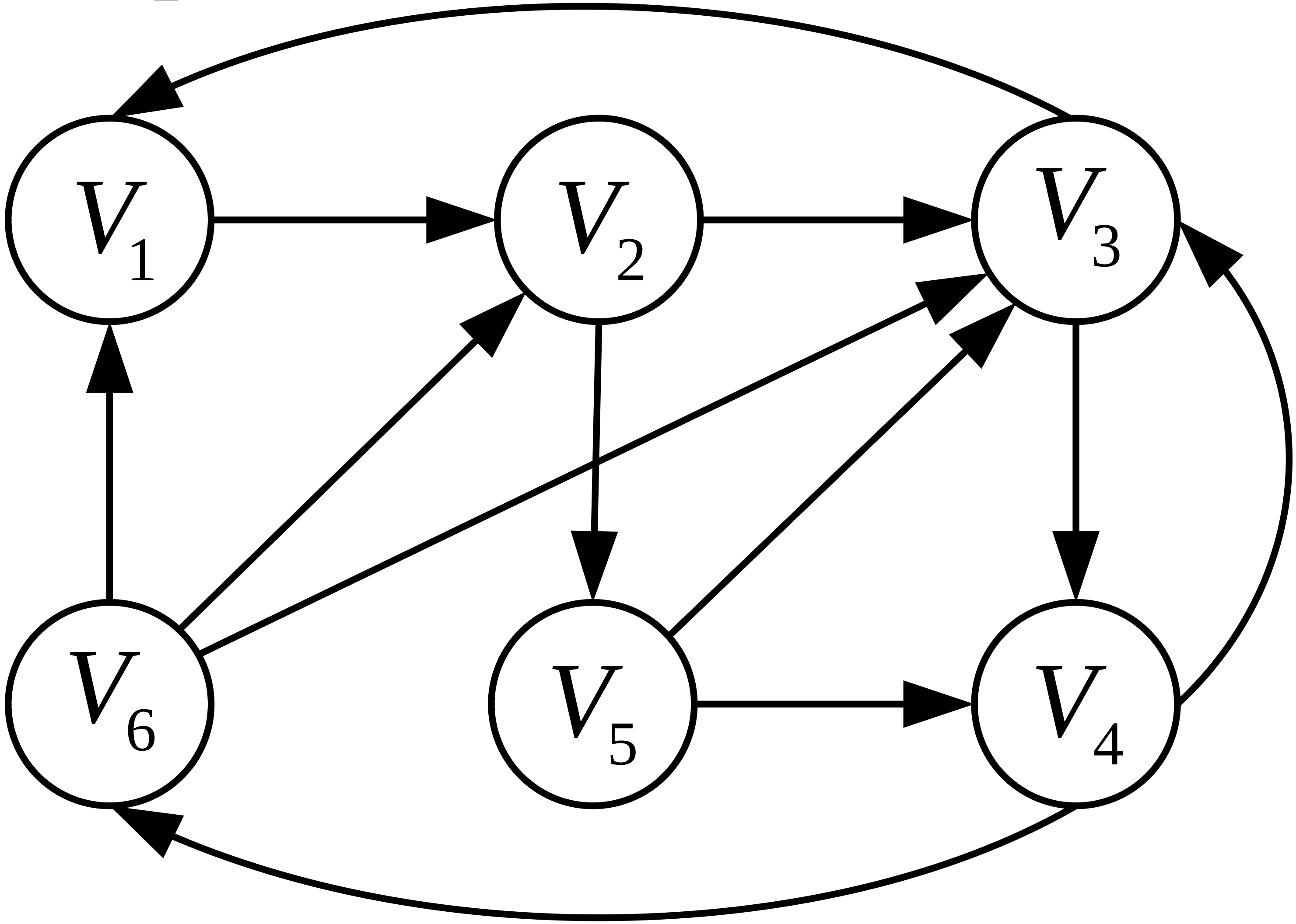
2) все элементы в s-ой строке столбца $P_s^{(l)}$ $l = \overline{1,|V|-2}$;

3) в столбце $P_s^{(l)}$ «произведение вершин», содержащее одинаковые «множители» $l = \overline{1;|V|-1}$.

Шаг 3. При $l = |V|-1$ в s-той строке получим количество гамильтоновых циклов и последовательности вершин в цикле.

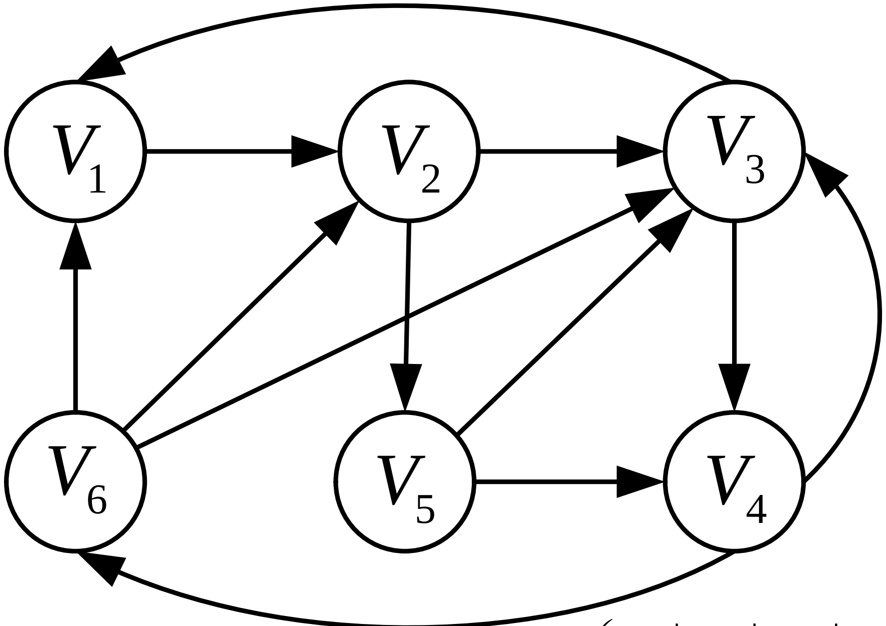
Конец алгоритма. Перечисляем количество циклов в графе G и последовательности вершин в каждом цикле.

Пример поиска гамильтонова цикла



Пример 4. Найти в графе гамильтоновы циклы, начинающиеся с вершины V_1

Пример поиска гамильтонова цикла



$$P' = \left(\begin{array}{c|cccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ \hline V_1 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & V_3 & 0 & V_5 & 0 \\ V_3 & V_1 & 0 & 0 & V_4 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & V_3 & 0 & 0 & V_6 \\ V_5 & 0 & 0 & V_3 & V_4 & 0 & 0 \\ V_6 & V_1 & V_2 & V_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad P_{V_1}^{(0)} = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Пример поиска гамильтонова цикла

В графе шесть вершин, следовательно, будет пять итераций.

$$1) \qquad P' \times P_{V_1}^{(0)} = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ V_3 \\ 0 \\ V_3 + V_6 \\ V_3 \\ V_3 \end{bmatrix} = P_{V_1}^{(1)}.$$

$$P' = \begin{pmatrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ V_1 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & V_3 & 0 & V_5 & 0 \\ V_3 & V_1 & 0 & 0 & V_4 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & V_3 & 0 & 0 & V_6 \\ V_5 & 0 & 0 & V_3 & V_4 & 0 & 0 \\ V_6 & V_1 & V_2 & V_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример поиска гамильтонова цикла

$$2)\quad P'\times P_{V_1}^{(1)}=\begin{array}{c}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\\V_6\end{array}\begin{bmatrix}\underline{V_2V_3}\\V_5V_3\\\underline{V_4V_3}+V_4V_6\\V_6V_3\\V_4V_3+V_4V_6\\V_2V_3\end{bmatrix}\Rightarrow P_{V_1}^{(2)}=\begin{array}{c}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\\V_6\end{array}\begin{bmatrix}0\\V_5V_3\\V_4V_6\\V_6V_3\\V_4V_3+V_4V_6\\V_2V_3\end{bmatrix}.$$

$$P'=\left(\begin{array}{c|cccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6\\ \hline V_1 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ V_2 & 0 & 0 & V_3 & 0 & V_5 & 0\\ V_3 & V_1 & 0 & 0 & V_4 & 0 & 0\\ V_4 & 0 & 0 & V_3 & 0 & 0 & V_6\\ V_5 & 0 & 0 & V_3 & V_4 & 0 & 0\\ V_6 & V_1 & V_2 & V_3 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Пример поиска гамильтонова цикла

$$3)\ P' \times P_{V_1}^{(2)} = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array} \begin{bmatrix} \underline{V_2V_5V_3} \\ V_3V_4V_6 + V_5V_4V_3 + V_5V_4V_6 \\ \underline{V_4V_6V_3} \\ \underline{V_3V_4V_6} + V_6V_2V_3 \\ V_3V_4V_6 + V_4V_6V_3 \\ V_2V_5V_3 + \underline{V_3V_4V_6} \end{bmatrix} \Rightarrow P_{V_1}^{(3)} = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ V_3V_4V_6 + V_5V_4V_3 + V_5V_4V_6 \\ 0 \\ V_6V_2V_3 \\ V_3V_4V_6 + V_4V_6V_3 \\ V_2V_5V_3 \end{bmatrix}.$$

$$P' = \left(\begin{array}{c|cccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ \hline V_1 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & V_3 & 0 & V_5 & 0 \\ V_3 & V_1 & 0 & 0 & V_4 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & V_3 & 0 & 0 & V_6 \\ V_5 & 0 & 0 & V_3 & V_4 & 0 & 0 \\ V_6 & V_1 & V_2 & V_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Пример поиска гамильтонова цикла

$$4)\ \ P'\times P_{V_1}^{(3)}=\begin{array}{c} V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\\ V_5\\ V_6\end{array}\begin{bmatrix} \underline{V_2V_3V_4V_6+V_2V_5V_4V_3+V_2V_5V_4V_6}\\ V_5V_3V_4V_6+V_5V_4V_6V_3\\ \underline{V_4V_6V_2V_3}\\ V_6V_2V_5V_3\\ V_4V_6V_2V_3\\ \underline{V_2V_3V_4V_6}+V_2V_5V_4V_3+\underline{V_2V_5V_4V_6}\end{bmatrix}\Rightarrow\quad P_{V_1}^{(4)}=\begin{array}{c} V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\\ V_5\\ V_6\end{array}\begin{bmatrix} 0\\ V_5V_3V_4V_6+V_5V_4V_6V_3\\ 0\\ V_6V_2V_5V_3\\ V_4V_6V_2V_3\\ V_2V_5V_4V_3\end{bmatrix}.$$

$$P'=\left(\begin{array}{c|cccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6\\ \hline V_1 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ V_2 & 0 & 0 & V_3 & 0 & V_5 & 0\\ V_3 & V_1 & 0 & 0 & V_4 & 0 & 0\\ V_4 & 0 & 0 & V_3 & 0 & 0 & V_6\\ V_5 & 0 & 0 & V_3 & V_4 & 0 & 0\\ V_6 & V_1 & V_2 & V_3 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Пример поиска гамильтонова цикла

$$5)\ P' \times P_{V_1}^{(4)} = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array} \begin{bmatrix} V_2V_5V_3V_4V_6 + V_2V_5V_4V_6V_3 \\ \underline{V_5V_4V_6V_2V_3} \\ \underline{V_4V_6V_2V_5V_3} \\ \underline{V_6V_2V_5V_4V_3} \\ \underline{V_4V_6V_2V_5V_3} \\ \underline{V_2V_5V_3V_4V_6} + \underline{V_2V_5V_4V_6V_3} \end{bmatrix} \Rightarrow P_{V_1}^{(5)} = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array} \begin{bmatrix} V_2V_5V_3V_4V_6 + V_2V_5V_4V_6V_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

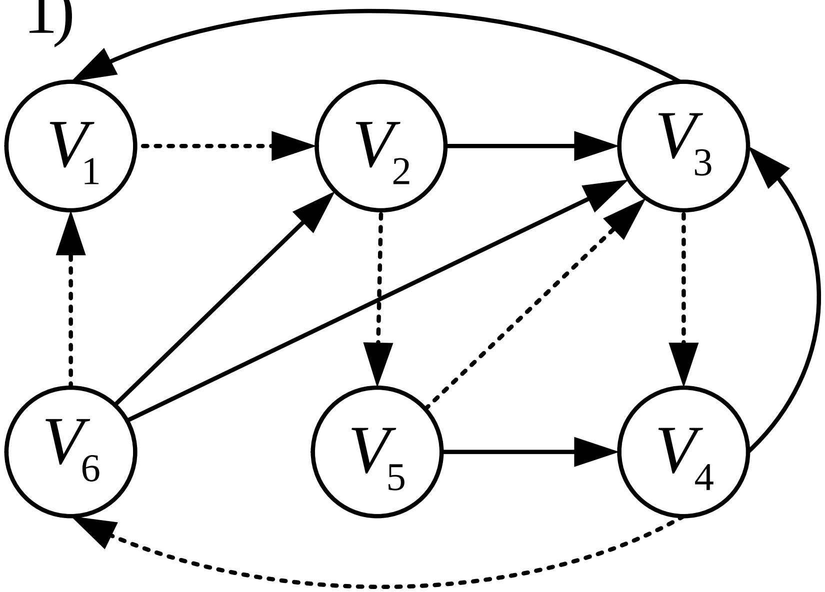
Получаем два гамильтоновых цикла:
1) $V_1V_2V_5V_3V_4V_6V_1$ и 2) $V_1V_2V_5V_4V_6V_3V_1$.

Пример поиска гамильтонова цикла

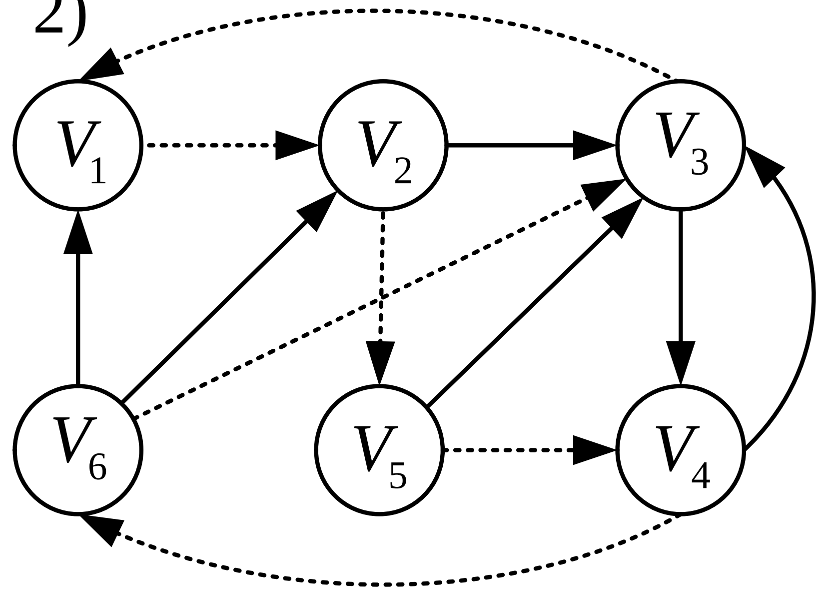
Получаем два гамильтоновых цикла:

1) $V_1V_2V_5V_3V_4V_6V_1$ и 2) $V_1V_2V_5V_4V_6V_3V_1$.

1)



2)



Тема следующей лекции:

«Алгоритм Уоршалла-Флойда»