Теория конечных графов

Алгоритм почтальона

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной информатики и теории вероятностей РУДН
Маркова Екатерина Викторовна
markova_ev@pfur.ru

Литература

1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

Аналоги задачи почтальона в повседневной жизни

Аналогами задачи почтальона в повседневной жизни являются:

- ✓ обход железнодорожных путей,
- ✓ патрулирование улиц,
- ✓ совершение покупок,
- ✓ доставка товара или почты,
- ✓ задачи маршрутизации.

Маршрут почтальона

Задача почтальона в терминах теории графов: «Проверить возможность существования оптимального (минимального по суммарному весу) ормаршрута в мультиграфе из произвольной вершины V_i, включающего все ребра графа ровно один раз и заканчивающегося также вершиной V_i».

Такой маршрут называется эйлеровым и знаком слушателю из прошлых лекций.

Соответствующий маршрут в орграфе принято называть маршрутом почтальона.

Условия существования маршрута почтальона

- ✓ Для неорграфа. Степень каждой вершины должна быть четной $\delta(V_i) = 2k,\ k \in \mathbf{N},\ \forall V_i \in \mathbf{V}$.

- ✓ Для орграфа. Отрицательная и положительная степени вершин должны быть равны: $\delta^+(V_i) = \delta^-(V_i),\ \forall V_i \in \mathbf{V}$.

Орграф, в котором для каждой вершины ее отрицательная степень равна положительной степени, называется симметричным орграфом. Смешанным графом называется граф, в котором встречаются и неориентированные ребра, и ориентированные дуги.

Алгоритм поиска маршрута почтальона для орграфов

Начало. Дан граф $G=<\mathbf{V},\mathbf{E}>$ – взвешенный мультиграф, в котором задана начальная вершина, являющаяся началом обхода маршрута почтальона, назовем ее в алгоритме V_0.

Шаг 1. Если $G=<\mathbf{V},\mathbf{E}>$ – несимметричный граф, то перейти к шагу 2, иначе к шагу 3.

Шаг 2. Путем дублирования дуг графа $G=<\mathbf{V},\mathbf{E}>$ уравнять степени вершин, то есть сделать граф симметричным, причем суммарная длина дублируемых дуг должна быть минимальной.

Шаг 3. Построить эйлеров цикл из заданной вершины V_0, используя алгоритм поиска эйлерова цикла с выбором вершины по нумерации без повторных обходов. При возврате в заданную вершину V_0, обойдя все дуги, получается ормаршрут почтальона для графа $G=<\mathbf{V},\mathbf{E}>$.

Конец алгоритма. Ормаршрут почтальона найден.

Шаг 2 (дублирование дуг) из алгоритма детально

Более детально опишем шаг 2.

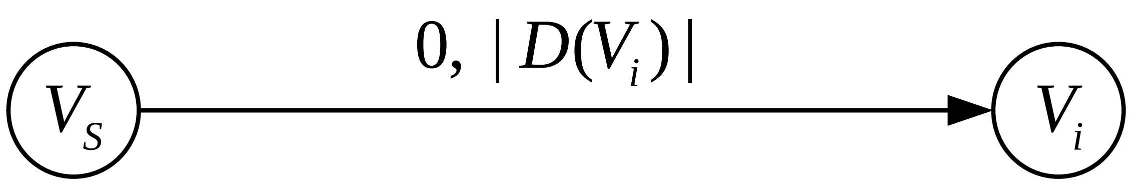
1) $\forall V_i \in \mathbf{V} \quad \exists \delta^+(V_i)$ (количество выходящих из вершины дуг) и $\exists \delta^-(V_i)$ (количество входящих в вершину дуг). Пусть $D(V_i) = \delta^-(V_i) - \delta^+(V_i)$. Согласно полученным значениям вершины делятся на три категории.

   a. Если значение $D(V_i) = 0$, то вершина V_i – промежуточная.
   b. Если значение $D(V_i) > 0$, то есть $\delta^-(V_i) > \delta^+(V_i)$, то вершина V_i – источник.
   c. Если значение $D(V_i) < 0$, то есть $\delta^-(V_i) < \delta^+(V_i)$, то вершина V_i – сток.

Шаг 2 (дублирование дуг) из алгоритма детально

2) В граф $G = <\mathbf{V}, \mathbf{E}>$ вводится дополнительный источник V_S и дополнительный сток V_T.

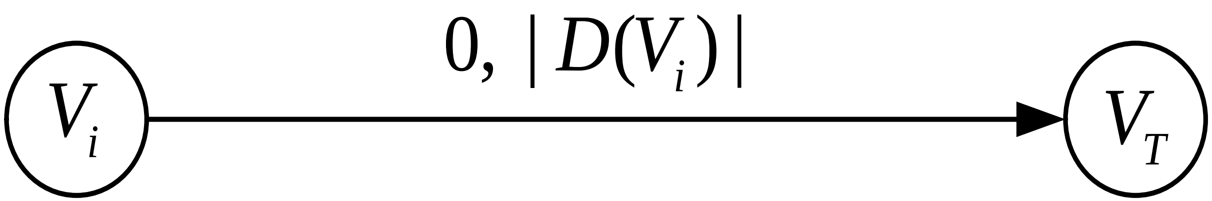
a. Дополнительный источник V_S соединяется дугами со всеми источниками, найденными в пункте 1b.



Значение пропускной способности (максимальный поток) каждой дуги, выходящей из дополнительного источника V_S равно $|D(V_i)|$. Стоимость прохождения единицы потока равна 0.

Шаг 2 (дублирование дуг) из алгоритма детально

b. Все вершины-стоки, найденные в пункте 1c соединяем с дополнительным стоком V_T. Значение пропускной способности каждой дуги, входящей в дополнительный сток V_T равно $|D(V_i)|$. Стоимость прохождения единицы потока по дуге равна 0.



Шаг 2 (дублирование дуг) из алгоритма детально

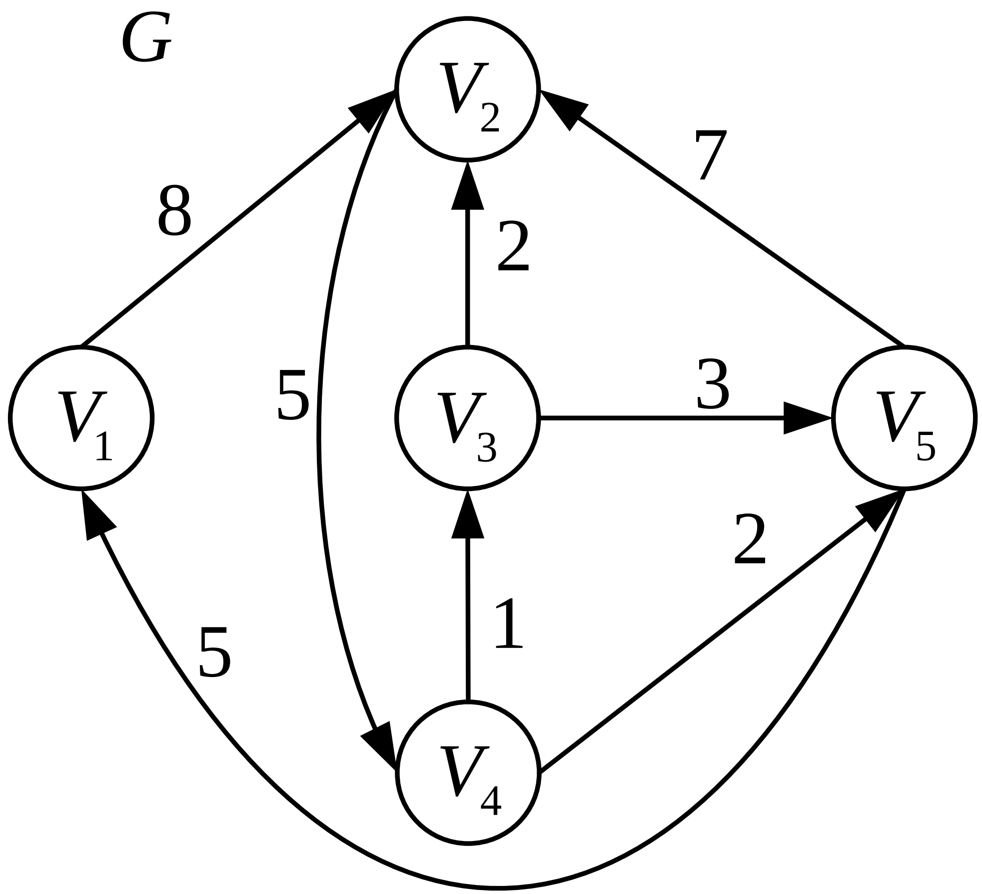
3) Для всех дуг графа $G = <\mathbf{V},\mathbf{E}>$ пропускная способность дуг $c(V_i, V_j) := \infty$, а стоимость прохождения по дугам единицы потока прежняя.

4) Применяя к полученному графу алгоритм поиска максимального потока минимальной стоимости из источника V_S в сток V_T, можно получить новые дублируемые дуги, которые сделают граф $G = <\mathbf{V},\mathbf{E}>$ симметричным.

5) Удаляются дополнительный источник V_S и дополнительный сток V_T, и дуги, инцидентные им.

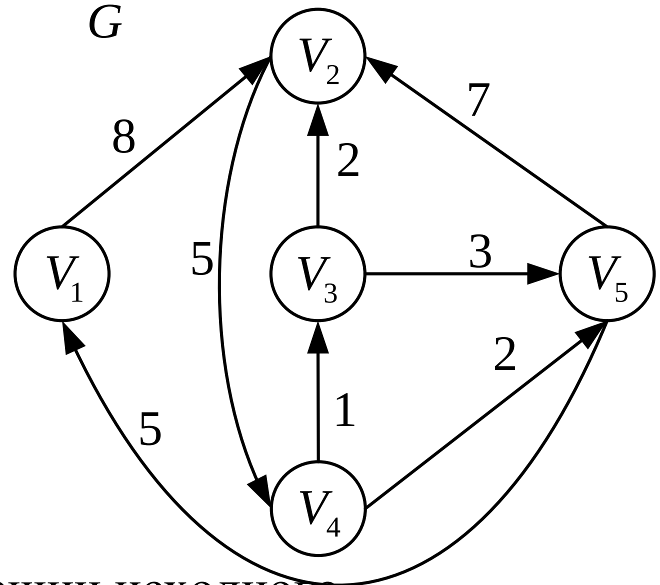
6) Граф $G = <\mathbf{V},\mathbf{E}>$ – симметричен.

Пример построения маршрута почтальона из вершины V_1



Цифра на ребре обозначает стоимость прохождения по дуге одной единицы потока.

Описание категорий вершин орграфа



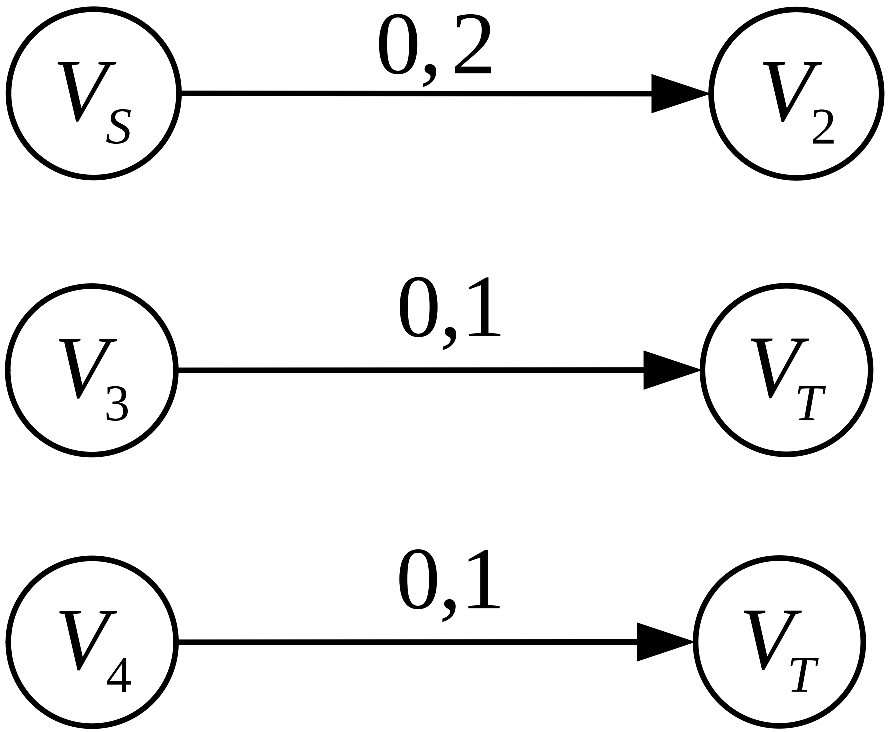
1. Строим таблицу с описанием категорий вершин исходного графа:

$\delta^-(V_i)$	$\delta^+(V_i)$	Описание
1	1	Промежуточная
3	1	Источник
1	2	Сток
1	2	Сток
2	2	Промежуточная

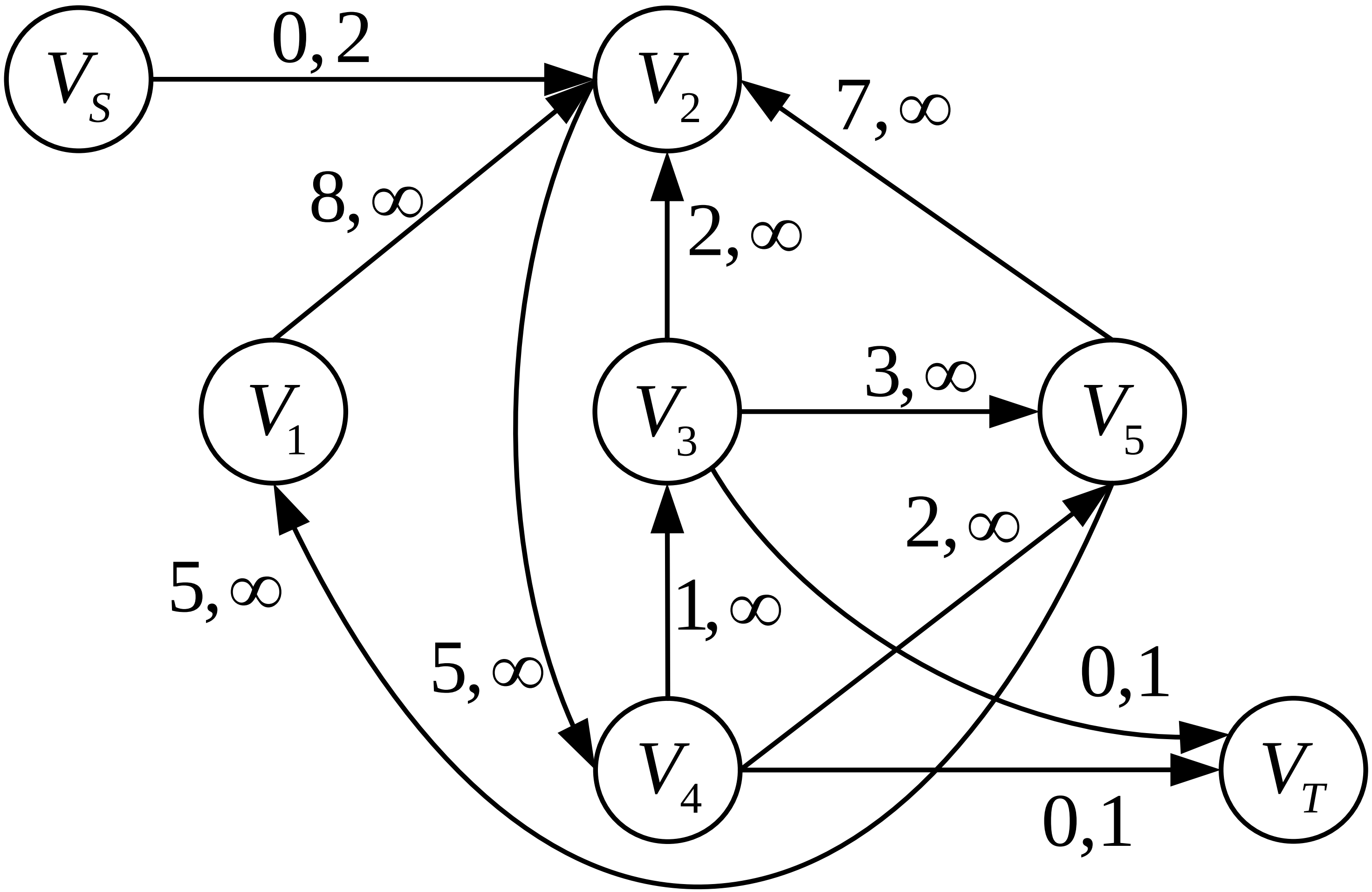
Дополнительные источник и сток

Вводим дополнительные источник V_S и сток V_T .

Соединяем дополнительный источник с вершинами-источниками, а вершины-стоки соединяем с дополнительным стоком.



Орграф после дополнений



Дублирование дуг

Из дополнительного источника проводится поток минимальной стоимости до насыщения новых дуг.

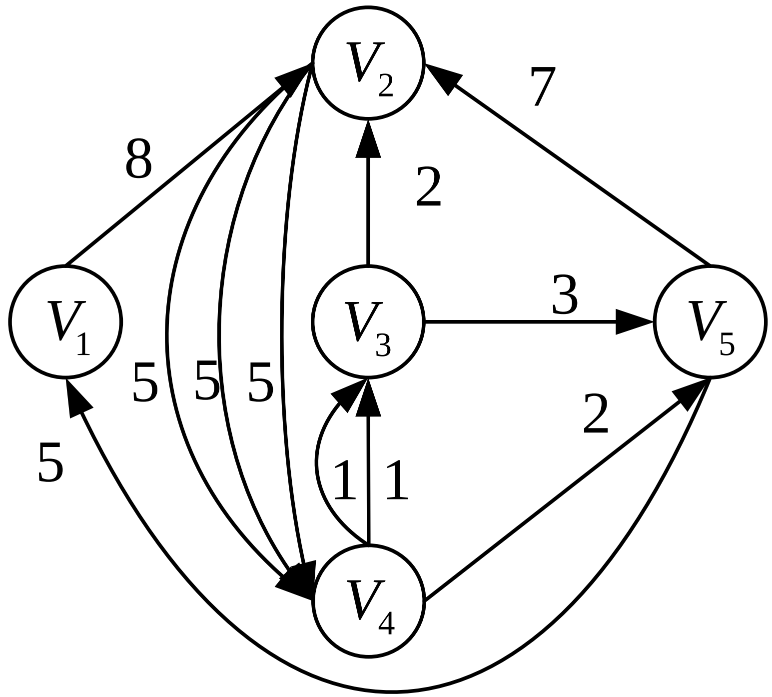
a. $V_S \to V_2 \to V_4 \to V_T$ (дуга $< V_4, V_T >$ насыщена).

b. $V_S \to V_2 \to V_4 \to V_3 \to V_T$ (дуги $< V_S, V_2 >$ и $< V_3, V_T >$ также насыщены).

В процессе насыщения дуг можно наблюдать последовательный проход по вершинам через дуги исходного графа. Эти дуги будут дублироваться. Достраиваются три дополнительные дуги $< V_2 \overset{5}{,} V_4 >$, $< V_2 \overset{5}{,} V_4 >$, $< V_4 \overset{1}{,} V_3 >$.

Орграф после дополнений

Для получения симметричного графа, исключаются дуги $<V_S, V_2>$, $<V_3, V_T>$, $<V_4, V_T>$.



Начиная с вершины V_1, строится эйлеров маршрут, вершины выбираются по нумерации. Читателю рекомендуется самостоятельно проделать эту несложную процедуру. <u>Ответ.</u> $V_1V_2V_4V_3V_2V_4V_3V_5V_2V_4V_5V_1$.

Вопросы для подготовки к экзамену по теории графов размещены на web-local.rudn.ru

Желаю Вам трудолюбия во время подготовки к экзамену!