Лекция 5

Непрерывные функции в $\mathbb{R}^n$
Свойства функций, заданных на компакте

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}$, то есть $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция n переменных. Пусть $\mathbf{a}$ – предельная точка множества X.

Определение 5.1. Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции $f : X \to \mathbb{R}$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \ \forall \mathbf{x} \in\ \ 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow \bigl|f(\mathbf{x}) - A\bigr| < \varepsilon$. Записывают $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$ или $\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(\mathbf{x}) = A$.

Определение 5.2. (Гейне). Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции $f : X \to \mathbb{R}$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, если для любой последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$: $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ при $k \to \infty$, $\mathbf{x}_k \in X$, $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f(\mathbf{x}_k) \to A$ при $k \to \infty$.

Теорема 5.1. Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет предел $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, то он единственный.

Теорема 5.2. (Критерий Коши). Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f : X \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X :\ 0 < \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) < \delta,\ 0 < \rho(\mathbf{x}_2, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow \bigl|f(\mathbf{x}_1 - f(\mathbf{x}_2)\bigr| < \varepsilon$.

Теорема 5.3. Пусть функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ имеют пределы A_1 и A_2 при $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, то есть

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A_1, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = A_2.$$

Тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ $(g(\mathbf{x}) \neq 0\ \forall \mathbf{x} \in X, A_2 \neq 0)$ имеют пределы $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, причем

1. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})) = A_1 \pm A_2$;
2. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})) = A_1 A_2$;
3. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \dfrac{A_1}{A_2}$.

Определение 5.3. Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции $f : X \to \mathbb{R}$ при $\mathbf{x} \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists r \in \mathbb{R} : \forall \mathbf{x} \in X,\ \|\mathbf{x}\| > r \Rightarrow \bigl|f(\mathbf{x}) - A\bigr| < \varepsilon$. У функций многих переменных существует понятие *повторного предела*.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

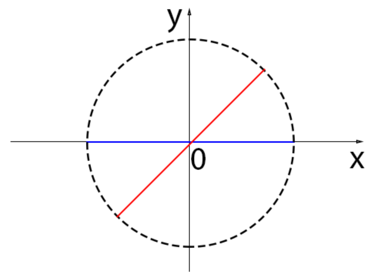
Найдем повторные пределы, то есть пределы вида $\lim\limits_{x\to 0} (\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$ и $\lim\limits_{y\to 0} (\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$. Имеем

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Аналогично $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0$. Однако $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ не существует. Действительно,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$



Таким образом, из существования повторных пределов не следует существование предела в соответствующей точке и, наоборот, из существования предела в точке не следует существование повторных пределов. Тем не менее связь между этими понятиями может быть установлена.

Теорема 5.4. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена в окрестности $O((x_0, y_0); r)$ точки (x_0, y_0) за исключением, быть может, точки (x_0, y_0). Пусть $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$, и существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$ $\forall y : \ 0 < |y - y_0| < r$. Тогда существует повторный предел

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = A.$$

Доказательство. Имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall (x,y) \in O((x_0,y_0); r) : \ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow \left|f(x,y) - A\right| < \varepsilon$. Перейдем в предыдущих формулах к пределу при $x \to x_0$, получим, что при $0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) - A\right| < \varepsilon$, то есть $\left|\varphi(y) - A\right| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y) = A$. $\Rightarrow \lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right) = A.$ $\square$

$X \subset \mathbb{R}^n$

Определение 5.4. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in X$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 5.5. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in X, \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$.

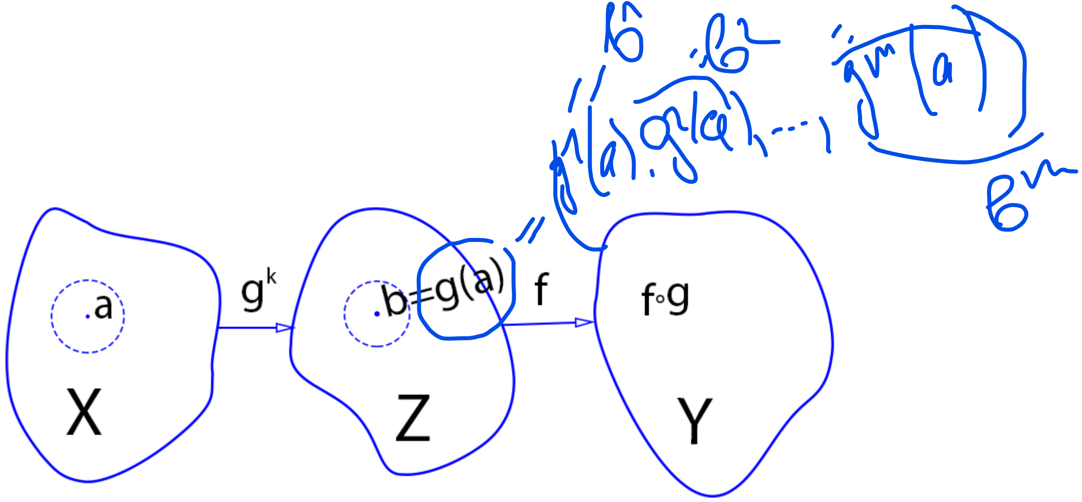
Теорема 5.5. Пусть функции $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $x_0 \in X$. Тогда функции $f \pm g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0\ \forall x \in X)$ непрерывны в точке x_0.

Теорема 5.6. Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, то существует окрестность точки x_0, в которой функция f является ограниченной.

Теорема 5.7. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ и $f(x_0) \neq 0$, тогда существует окрестность точки x_0, в которой функция f сохраняет знак.

Пусть обозначено на рисунке $y = f \circ \mathbf{g}$; $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = f(g^1(\mathbf{x}), g^2(\mathbf{x}), \ldots, g^m(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $z^k = g^k(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $k = 1, \ldots, m$, $\mathbf{b} = (b^1, b^2, \ldots, b^m)$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Z \subset \mathbb{R}^m$.

$z = g(x)$



Теорема 5.8. Пусть заданы функции g^k, $k = 1, \ldots, m$ в окрестности точки $\mathbf{a} \in X \subset \mathbb{R}^n$, и они являются непрерывными в точке $\mathbf{a}$. Пусть в окрестности точки $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ задана функция f со значениями в $\mathbb{R}$, и она является непрерывной в точке $\mathbf{b}$. Тогда сложная функция $y = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ определена в окрестности точки $\mathbf{a}$ и непрерывна в точке $\mathbf{a}$.

Доказательство. Поскольку функция f непрерывна в точке ~~в точке~~ $\mathbf{b}$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall z \in V(\mathbf{b}), \rho(\mathbf{z}, \mathbf{b}) < \delta \Rightarrow \big|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{b})\big| < \varepsilon$. Учитывая, что функции g^k, $k = 1, \ldots, m$ непрерывны в точке $\mathbf{a}$, то для выбранного δ $\exists \sigma_k = \sigma_k(\delta) > 0$ $k = 1, \ldots, m$: $\big|g^k(\mathbf{x}) - g^k(\mathbf{a})\big| < \dfrac{\delta}{\sqrt{m}}$ $\forall x \in U(\mathbf{a}), \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \sigma_k$. Обозначим $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$.

$$\text{Тогда } \forall x \in U(\mathbf{a}), \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \sigma \Rightarrow \rho(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{a})) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (g^i(\mathbf{x}) - g^i(\mathbf{a}))^2} < \sqrt{\frac{\delta^2}{m} m} = \delta.$$

$< \frac{\delta^2}{m}$

При указанных значениях $\mathbf{x}$ имеем

$$|f(\underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x})}_{\mathbf{z}}) - f(\underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{a})}_{\mathbf{b}})| = \big|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{b})\big| < \varepsilon,$$

то есть сложная функция $y = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ определена в окрестности точки $\mathbf{a}$ и непрерывна в этой точке. □

Теорема 5.9. (Вейерштрасс). Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^n$, а $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда f является ограниченной на X.

Теорема 5.10. (Вейерштрасс). Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^n$, а $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда существуют точки $x_1, x_2 \in X$, $\sup\limits_{x \in X} f(x) = f(x_1)$, $\inf\limits_{x \in X} f(x) = f(x_2)$.

Определение 5.6. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на X, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in X :\ \rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \big|f(x_1) - f(x_2)\big| < \varepsilon$.

Теорема 5.11. Функция f, непрерывная на компакте, является равномерно непрерывной на ней. М.

Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$

Пусть X – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, и $f : X \to \mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ – точка их X.

$x = x_0 + \Delta x$

Считая, что $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) \in X$, рассмотрим полное приращение функции f

$$\Delta f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0).$$

$\frac{df}{dx}$ $y = f(x)$

$f(x_0^1, \ldots, x_0^k, \ldots, x_0^n)$.

Обозначим $\Delta_k f(\mathbf{x}_0) = f(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{k-1}, \boxed{x_0^k + \Delta x^k}, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^n) - \cancel{f(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)}$.

Определение 5.7. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x^k \to 0} \dfrac{\Delta_k f(\mathbf{x}_0)}{\Delta x^k}$, то он называется *частной производной* функции f по переменной x^k в точке $\mathbf{x}_0$.

Обозначим $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}(\mathbf{x}_0)$, $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^k}$, $f_{x^k}(\mathbf{x}_0)$, $D_{x^k} f(x_0)$.

Пример 2.

$f(x, y, z)$

Найти $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$, если $\cancel{f(x,y)} = xy^2 + xy + x + 2y + 1 + \sin(xy) + z$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + y + 1 + y\cos(xy); \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x + 2 + x\cos(xy); \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1.$