Тензорная алгебра

Контравариантные и ковариантные векторы. Тензоры

Дифференциальная геометрия
Векторы, формы, тензоры. Тензорное пространство. Тензорное произведение.

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Тензорная нотация 1

В дифференциальной геометрии, тензорной алгебре и анализе принято использовать тензорную нотацию или иначе правило суммирования Эйнштейна [1, с. 17].

Правило Эйнштейна

Если в выражении одна и та же буква встречается в качестве верхнего и нижнего индексов, то по данному индексу предполагается суммирование. Знак суммы Σ при этом не ставится.

$$A^i_j x_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} A^i_j x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}g^i(x^j)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g^i(x^j)}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}g^i(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g^i(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g_{ij}x^i y^j \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x^i y^j$$

Тензорная нотация 2

В последнем примере результатом выражения $g_{ij}x^i y^j$ является скаляр, так как все индексы участвуют в суммировании. Рассмотрим более сложные примеры.

$$M^{j_2 j_3} = T^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} G^{j_1}_{i_1} v^{j_1} p_{i_2} q_{i_3} \leftrightarrow \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_3=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_3=1}^{n} T^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} G^{j_1}_{i_1} v^{j_1} p_{i_2} q_{i_3}$$

- Если пределы суммирования у индексов разные, то тензорная нотация не тах эффективна. Однако в дифференциальной геометрии такое встречается редко, если вообще встречается.
- При использование знаков Σ можно не делать разницы между верхними и нижними индексами. В случае тензорной нотации делать это различие необходимо.
- Разница между верхними и нижними индексами является не просто прихотью в обозначениях, а отражает геометрические свойства объектов. Разберем это подробнее позже, когда будем изучать тензоры.

Забегая вперед упомянем некоторую терминологию:

Тензорная нотация 3

- величины с одним верхним индексом — компоненты контравариантных векторов (v^i);
- величины с одним нижним индексом — компоненты ковариантных векторов p_i;
- величины с одним нижним индексом и одним верхним — матрицы A^i_j;
- все остальные варианты называются тензорами.

Линейная форма [2, с. 33]

Рассмотрим линейное пространство $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ над полем R (в нашем курсе $\mathbb{R}$).

Определение

Отображение $f\colon L \to R$ обладающее свойствами линейности

- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$.
- $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ где и $\alpha \in R$.

называется линейной функцией на L (линейным функционалом, линейной формой, 1-формой).

Пространству L можно сопоставить другое векторное пространство L^*, находящееся с L в специальном отношении двойственности или сопряженности. Рассмотрим как это делается.

Компоненты линейной формы 1

Пусть $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ — базис в L, что коротко записывается как:

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Любой вектор $\mathbf{x}$ можно записать через компоненты в этом базисе:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n = x^i \mathbf{e}_i,\ i = 1 \dots, n.$$

Подействуем линейным функционалом f на вектор $\mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}) = x^1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x^n f(\mathbf{e}_n) = x^1 f_1 + \dots + x^n f_n = x^i f_i,\ i = 1, \dots, n.$$

Здесь $f_i = f(\mathbf{e}_i),\ i = 1, \dots, n$ — набор скаляров (компонент), зависящих только от выбора базиса.

Обратите внимание, что нижний индекс компонент получился естественным образом, так как в выражении $f(\mathbf{e}_i)$ у $\mathbf{e}_i$ индекс внизу.

Компоненты линейной формы 2

Справедливо и обратное: если задать базис $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ и произвольный набор скаляров $(f_1, \ldots, f_n)$ такой, что $f_i \in R, \forall i = 1, \ldots n$, то этот набор однозначно определяет линейную функцию $f\colon L \to R$.

$$(f_1, \ldots, f_n) \leftrightarrow f.$$

Преобразование компонент формы при замене базиса 1

В определении линейной функции нет упоминания о базисах, то есть определение линейной функции инвариантно относительно преобразования координат (базисов).

Найдем правила изменения компонент $f_i = f(\mathbf{e}_i)$ при переходе от одного базиса к другому. Пусть на L заданно два базиса: $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\langle \mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'} \rangle$:

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'} \rangle$$

Второй базис для краткости будем называть штрихованным и отличать от первого по штрихованным индексам. Любой вектор $\mathbf{e}_{j'}$ можно выразить через $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}_{j'} = a^1_{j'}\mathbf{e}_1 + \dots + a^n_{j'}\mathbf{e}_n = a^i_{j'}\mathbf{e}_i \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Обратите внимание, что штрихами помечаются индексы, а не буквы $\mathbf{e}$!

Преобразование компонент формы при замене базиса 2

Последняя формула справедлива, так как $\mathbf{e}_{j'}$ принадлежит L и может быть выражен через любой базис пространства L также как и любой другой вектор. Коэффициенты $a^i_{j'}$ задают матрицу линейного преобразования базиса

$$A = [a^i_{j'}] = \begin{pmatrix} a^1_{1'} & a^1_{2'} & \dots & a^1_{n'} \\ a^2_{1'} & a^2_{2'} & \dots & a^2_{n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_{1'} & a^n_{2'} & \dots & a^n_{n'} \end{pmatrix}$$

Произвольный вектор $\mathbf{x}$ можно представить как через базис $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, так и через $\langle \mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'} \rangle$:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \dots + x^n\mathbf{e}_n = x^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \dots + x^{n'}\mathbf{e}_{n'}.$$

Линейный функционал f может действует на вектор $\mathbf{x}$ независимо от того, в каком базисе вектор представлен:

$$f(\mathbf{x}) = x^1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x^n f(\mathbf{e}_n) = x^1 f_1 + \dots + x^n f_n = x^i f_i,$$
$$f(\mathbf{x}) = x^{1'} f(\mathbf{e}_{1'}) + \dots + x^{n'} f(\mathbf{e}_{n'}) = x^{1'} f_{1'} + \dots + x^{n'} f_{n'} = x^{i'} f_{i'}.$$

Преобразование компонент формы при замене базиса 3

Или в матричном виде:

$$x^i f_i = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad x^{i'} f_{i'} = \begin{pmatrix} f_{1'} & f_{2'} & \dots & f_{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}$$

Скаляры $(f_1, \dots, f_n)$ и $(f_{1'}, \dots, f_{n'})$ представляют собой компоненты одного и того же линейного функционала в разных базисах. Найдем как они связаны.

$$f_{j'} = f(\mathbf{e}_{j'}) = f(a^i_{j'}\mathbf{e}_i) = a^i_{j'} f(\mathbf{e}_i) = a^i_{j'} f_i = a^1_{j'} f_1 + \dots + a^n_{j'} f_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_{j'} = a^1_{j'} f_1 + \dots + a^n_{j'} f_n = a^i_{j'} f_i, \text{ где } i, j' = 1, \dots, n.$$

Мы получили закон преобразования компонент $f \in L^*$:

$$f_{j'} = a^1_{j'} f_1 + \dots + a^n_{j'} f_n = a^i_{j'} f_i.$$

Преобразование компонент формы при замене базиса 4

Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} f_{1'} & f_{2'} & \dots & f_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_{1'} & a^1_{2'} & \dots & a^1_{n'} \\ a^2_{1'} & a^2_{2'} & \dots & a^2_{n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_{1'} & a^n_{2'} & \dots & a^n_{n'} \end{pmatrix}$$

Само преобразование осуществляется той же матрицей, что и преобразование базисных векторов пространства L:

$$\mathbf{e}_{j'} = a^1_{j'}\mathbf{e}_1 + \dots + a^n_{j'}\mathbf{e}_n = a^i_{j'}\mathbf{e}_i$$

Из формул явно видно, что базисные векторы и коэффициенты линейной формы при замене базиса меняются по одному и тому же правилу, то есть согласовано (когредиентно):

$$\mathbf{e}_{j'} = a^1_{j'}\mathbf{e}_1 + \dots + a^n_{j'}\mathbf{e}_n = a^i_{j'}\mathbf{e}_i,$$

$$f_{j'} = a^1_{j'}f_1 + \dots + a^n_{j'}f_n = a^i_{j'}f_i.$$

Определение

Линейные формы формируют векторное пространство L^* дуальное (двойственное, сопряженное [2, с. 34]) к пространству L, на элементы которого они действуют. Операции умножения на скаляр и сложения определяются как:

- $(f+g)(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in L$.
- $(\alpha f)(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \alpha f(\mathbf{x})$, $\alpha \in R$.

- Элементы из L^* называют ковариантными векторами (ковекторами, формами).
- Элементы из L называют контравариантными векторами (или просто векторами).

Выше мы показали, что если в L задан базис $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ то существует изоморфизм

$$\Phi\colon f \leftrightarrow (f_1, \dots, f_n) \ni \mathbb{R}^n,\ \dim L^* = \dim \mathbb{R}^n = n$$

Иначе L^* изоморфно пространству n-строк, а L — n-столбцов.

Базис сопряженного пространства 1

Введем базис в дуальном пространстве L^*, согласованным с L образом. Для этого рассмотрим набор линейных функций (форм) $e^i \in L^*$, $i = 1 \ldots, n$ таких, что

$$e^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad e^i(\mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} e^1(\mathbf{e}_1) & e^1(\mathbf{e}_2) & e^1(\mathbf{e}_3) & \ldots & e^1(\mathbf{e}_n) \\ e^2(\mathbf{e}_1) & e^2(\mathbf{e}_2) & e^2(\mathbf{e}_3) & \ldots & e^2(\mathbf{e}_n) \\ e^3(\mathbf{e}_1) & e^3(\mathbf{e}_2) & e^3(\mathbf{e}_3) & \ldots & e^3(\mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^n(\mathbf{e}_1) & e^n(\mathbf{e}_2) & e^n(\mathbf{e}_3) & \ldots & e^n(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

это равенство полностью определяет все множество функций $\langle e^1, \ldots, e^n \rangle$. Используя его, мы можем, например, вычислить значение формы e^i от некоторого вектора $\mathbf{x} \in L$:

$$e^i(\mathbf{x}) = e^i(x^j \mathbf{e}_j) = x^j e^i(\mathbf{e}_j) = x^j \delta^i_j = x^1 \delta^i_1 + x^2 \delta^i_2 + \ldots + x^n \delta^i_n = x^i.$$

Базис сопряженного пространства 2

Теорема

Пусть L — векторное пространство размерности n над полем R. Тогда двойственное пространство L^* также имеет размерность n. Если $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ — базис в L, а $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ — линейные функции, такие что

$$e^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j, \; i, j = 1, \dots, n,$$

то $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ — базис в L^*.

Определение

Базис $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ пространства L^* называется двойственным (дуальным, взаимным) для данного базиса $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ пространства L

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle, \; L^* = \langle e^1, \dots, e^n \rangle.$$

Замечания по обозначениям 1

При написании от руки элементы пространства L^* обозначают буквой с волной над ней, например:

$$\tilde{u}, \tilde{x},$$

а элементы из L буквой со стрелкой:

$$\vec{u}, \vec{x}.$$

На печати, для элементов из пространства L, обычно используют полужирный шрифт:

$$\mathbf{x}$$

или прямой рубленный шрифт:

$$\mathrm{x}.$$

Для элементов из L^* обычный шрифт

$$x \in L^*.$$

Замечания по обозначениям 2

Дуальные базисы обоих пространств обозначаются буквой e. В случае пространства L^* используется обычный шрифт с верхним индексом

$$e^i, i = 1, \dots, n,$$

а в случае пространства L используется жирный шрифт с нижним индексом

$$\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$$

Использование нотации 1

Контравариантные векторы можно трактовать, как функции от ковариантных векторов (форм), а ковариантные векторы (формы), как функции от контравариантных.

Вектор — функция от формы, а форма — функция от вектора.

Для того, чтобы подчеркнуть их дуальное отношение, часто используют следующую форму записи:

$$(f, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),\ f \in L^*,\ \mathbf{x} \in L,$$

$$(f, \mathbf{x})\colon L^* \times L \to R,$$

$$f = f_1 e^1 + \ldots + f_n e^n \in L^*,$$

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x^n \mathbf{e}_n \in L.$$

Использование нотации 2

Для вычисления $(f, \mathbf{x})$ достаточно знания компонент f и $\mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}) = f(x^i \mathbf{e}_i) = x^1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + x^n f(\mathbf{e}_n),$$

$$f(\mathbf{e}_j) = f_i e^i(\mathbf{e}_j) = f_1 \underbrace{e^1(\mathbf{e}_j)}_{\delta^1_j} + \ldots + f_n \underbrace{e^n(\mathbf{e}_j)}_{\delta^n_j} = f_i \delta^i_j = f_j \ \Rightarrow$$

$$f(\mathbf{e}_1) = f_1,\ f(\mathbf{e}_2) = f_2,\ \ldots,\ f(\mathbf{e}_n) = f_n,$$

$$f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}) = x^1 f_1 + \ldots + x^n f_n = x^j f_j.$$

Компоненты $\mathbf{x}$ вычисляются как

$$x^i = (e^i, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(e^i),$$

а компоненты f как

$$f_i = (f, \mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i).$$

Использование нотации 3

Приведем две цепочки равенств, позволяющих лучше освоить введенные обозначения:

$$x^i = (e^i, x^j \mathbf{e}_j) = x^j (e^i, \mathbf{e}_j) = x^j e^i(\mathbf{e}_j) = x^j \delta^i_j = x^i,$$
$$f_i = (f_j e^j, \mathbf{e}_i) = f_j (e^j, \mathbf{e}_i) = f_j e^j(\mathbf{e}_i) = f_j \delta^j_i = f_i.$$

Напомним лишний раз, что знаки суммирования в тензорной нотации опускаются, а суммирование происходит по нижним и верхним индексам.

По крайней мере для $\mathrm{dim} L < \infty$ существует изоморфизм $L^* \leftrightarrow L$ и $L^{**} \leftrightarrow L$.

Теорема

Для всякого базиса в L^* существует однозначно определенный двойственный ему базис в L.

Пространство, двойственное к евклидовому

Рассмотрим следующие пространства:

- E — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, размерность $\dim E = n$, базис $E = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots, \mathbf{e}_n \rangle$.
- E^* — двойственное к E пространство, $\dim E^* = n$ и базис $E^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \dots, \tilde{e}^n \rangle$

С помощью скалярного произведения, определенного в E можно каждому вектору $\mathbf{v} \in E$ поставить в соответствие однозначным образом ковектор (форму) из E^*.

Значение скалярного произведения двух векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ задается метрическим тензором G с компонентами g_{ij}, где $i, j = 1, \dots, n$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} u^i v^j = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij}$$

Ковариантные координаты вектора

Можно записать и через матричные операции:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T G \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u^1 & \dots & u^n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^n \end{pmatrix}$$

но следует иметь ввиду, что G не матрица в строгом смысле (почему?).

Рассмотрим скалярное произведения базисного вектора $\mathbf{e}_i$ на произвольный вектор $\mathbf{v} \in E$.

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{v}) = (\mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = v^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = v^j g_{ij}$$

Выражение $v^j g_{ij}$ дает n чисел, которые мы обозначим как v_i и назовем ковариантными координатами вектора $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) &= v^j g_{1j} = v_1, \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) &= v^j g_{2j} = v_2, \\ &\vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{v}) &= v^j g_{nj} = v_n. \end{aligned}$$

Скалярное произведение как ковектор из E^*

Числа $v_1, v_2, \dots, v_n$ являются компонентами ковектора из E^*, а скалярное произведение ставит в соответствие вектору $\mathbf{v}$ некоторый ковектор $\tilde{v}$:

$$\tilde{v} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{v})\tilde{e}^i = \underbrace{(\mathbf{e}_1, \mathbf{v})}_{v_1}\tilde{e}^1 + \dots + \underbrace{(\mathbf{e}_n, \mathbf{v})}_{v_n}\tilde{e}^n = v_i\tilde{e}^i$$

Можно интерпретировать скалярное произведение, как линейную функцию от вектора, если фиксировать один из аргументов:

$$g(\mathbf{v}, \bullet) = (\mathbf{v}, \bullet) \colon E \to \mathbb{R}$$

По определению ковектор — это линейная функция от вектора. Подставили один аргумент в скалярное произведения и осталось еще место для второго. Была функция от двух векторов, а стала функция от одного вектора (место для которого обозначено как $\bullet$).

Базис $\langle \tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n \rangle$ определяется также скалярным произведением следующим образом, если в качестве вектора $\mathbf{v}$ выбрать один из $\mathbf{e}_i$ ортогонального базиса $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots, \mathbf{e}_n \rangle$:

$$\tilde{e}^j = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\tilde{e}^i = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j)\tilde{e}^1 + \dots + (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j)\tilde{e}^n = \delta_{ij}\tilde{e}^i = 0 \cdot \tilde{e}^1 + \dots + 1 \cdot \tilde{e}^j + \dots + 0 \cdot \tilde{e}^n = \tilde{e}^j$$

Случай ортонормированного базиса

В случае ортонормированного базиса $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ разница ковариантными и контравариантными компонентами вектора становится формальностью. Так как

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} u^i v^j = \delta_{ij} u^i v^j = u^i v^j$$

то

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) = v^j \delta_{1j} = v^1 = v_1, \\
&(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) = v^j \delta_{2j} = v^2 = v_2, \\
&\vdots \\
&(\mathbf{e}_n, \mathbf{v}) = v^j \delta_{nj} = v^n = v_n.
\end{aligned}$$

Получается, что значения компонент $\tilde{v}$ и $\mathbf{v}$ совпадают и вся разница лишь в том, записаны ли индексы вверху или внизу буквы. Это позволяет игнорировать различие между ковариантными и контравариантными индексами, что и делается в курсе линейной алгебры.

Определение тензора 1

Определение

Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, L — векторное пространство над $\mathbb{R}$, L^* — сопряженное к L пространство, p и q — целые неотрицательные числа. Рассмотрим декартово произведение следующего вида:

$$L^p \times (L^*)^q = \underbrace{L \times L \times \ldots \times L}_{p} \times \underbrace{L^* \times L^* \times \ldots \times L^*}_{q}.$$

Всякое отображение $T\colon L^p \times (L^*)^q \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами полилинейности называется тензором на L типа (p, q) и валентности (ранга) $p + q$. Говорят, что T смешанный тензор p раз ковариантный и q раз контравариантный.

Обозначается тензор большими латинскими буквами:

$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q),\ p + q \leqslant n.$$

Полилинейность означает, что для любого $i = 1, \ldots, p$ или $j = 1, \ldots, q$ выполняются условия линейности:

- $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \alpha\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q) = \alpha T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q);$

Определение тензора 2

- $T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) = T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) + T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q)$.

Аналогичные требования и для аргументов $u_1, \dots, u_q$.

- Тензор можно считать обобщением понятия вектора и матрицы.
- Ближайшим его аналогом являются понятие массива, используемое в программировании. Аналогия станет понятна после введения компонентов тензора. Стоит иметь ввиду, что эта аналогия не полная.

Тензорное пространство

Совокупность $\mathbb{T}_p^q(L)$ всех тензоров на пространстве L типа (p, q) образует векторное пространство. Если $T, G \in \mathbb{T}_p^q(L)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то под $\alpha T + \beta G$ естественно понимать тензор, определенный формулой

$$(\alpha T + \beta G)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) = \alpha T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) + \beta G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q)$$

Определение тензора

Приведем несколько примеров тензоров среди уже знакомых объектов линейной алгебры:

- тензор валентности $(1, 0)$ — линейные формы на L из L^*,
- тензор валентности $(0, 1)$ — векторы на L^* из L,
- тензор валентности $(2, 0)$ — билинейная форма на L (например, скалярное произведение),
- тензор валентности $(0, 2)$ — билинейная форма на L^*,
- тензор валентности $(1, 1)$ — матрица $n \times n$, где n — размерность линейного пространства L.

Замечание по определениям

Обратите внимание на порядок аргументов тензора:

$$T(\underbrace{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p}_{\text{векторы}}; \overbrace{u_1, \dots, u_q}^{\text{ковекторы}})$$

- Сначала идут p векторов, а затем q ковекторов.
- Между собой две группы отделяются точкой с запятой.
- Переставлять аргументы в произвольном порядке даже в рамках одной группы в общем случае нельзя.

Частные случаи:

- $A(\mathbf{v}; u)$ — тензор валентности $(1,1)$,
- $A(\mathbf{v}, \mathbf{u};)$ — тензор валентности $(2,0)$,
- $A(; v, u)$ — тензор валентности $(0,2)$.

Точку с запятой можно убрать, если аргументов одного типа нет.

Тензорное произведение

Пусть T — тензор типа (p, q) и G тензор типа (r, s). Введем новый тензор, который обозначим как $T \otimes G$. Этот тензор является полилинейной функцией на декартовом произведении

$$L^p \times (L^*)^q \times L^r \times (L^*)^s = L^{p+r} \times (L^*)^{q+s}$$

и его можно рассматривать как тензор валентности $(p + r, q + s)$.

Определение

Бинарная операция $\otimes$ называется тензорным произведением тензоров T и G и определяется следующим соотношением:

$$(T \otimes G)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p+r}; u_1, \dots, u_{q+s}) = T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) \cdot G(\mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_{p+r}; u_{q+1}, \dots, u_{q+s}).$$

Из определения и линейности тензоров следуют следующие два свойства:

- $(\alpha T + \beta G) \otimes H = \alpha T \otimes H + \beta G \otimes H$
- $H \otimes (\alpha T + \beta G) = \alpha H \otimes T + \beta H \otimes G$

Замечания

- Операция тензорного произведения $\otimes$ определена для тензоров произвольных типов.
- Валентность произведения равна сумме валентностей сомножителей: $\operatorname{rank} T = p + q$, $\operatorname{rank} G = r + s$, следовательно $\operatorname{rank} T \otimes G = p + q + r + s$.
- Тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно, но **не коммутативно**: $T \otimes G \neq G \otimes T$.

Пусть f, g, h — линейные функции из L^*; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — векторы из L. Можно говорить о трех тензорах f, g, h типа $(1,0)$, а также о тензоре T, получаемом с помощью тензорного произведения:

$$T = f \otimes g \otimes h \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

Если $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ и u, $v \in L^*$, то

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; u, v) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}) \cdot h(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}(u) \cdot \mathbf{b}(v)$$

Компоненты тензора

Введем понятие компонент тензора. Для этого рассмотрим базисы пространств L и L^*

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle, \; L^* = \langle e^1, \dots, e^n \rangle.$$

Определение

Массив чисел $T^{j_1, j_2, \dots, j_q}_{i_1, i_2, \dots, i_p}$, называются компонентами или координатами тензора T типа (p, q) в заданных базисах $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ определяются формулой:

$$T^{j_1, j_2, \dots, j_q}_{i_1, i_2, \dots, i_p} \overset{\text{def}}{=} T(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}; e^{j_1}, e^{j_2}, \dots, e^{j_q}),$$

где все индексы пробегают от 1 до n.

Разложение тензора по базисным тензорам 1

С помощью тензорного произведения $\otimes$ и базисов $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ сконструируем набор (p, q) тензоров следующего вида:

$$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

Интерпретируя базисные векторы $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и ковекторы $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ как линейные функции на L и L^* соответственно, найдем компоненты рассматриваемого тенора. По определению имеем:

$$\begin{aligned}
&e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} (\mathbf{e}_{i'_1}, \mathbf{e}_{i'_2}, \dots, \mathbf{e}_{i'_p}; e^{j'_1}, e^{j'_2}, \dots, e^{j'_q}) = \\
&\qquad = (e^{i_1}, \mathbf{e}_{i'_1}) \cdot (e^{i_2}, \mathbf{e}_{i'_2}) \cdot \ldots \cdot (e^{i_p}, \mathbf{e}_{i'_p}) \cdot (\mathbf{e}_{j_1}, e^{j'_1}) \cdot (\mathbf{e}_{j_2}, e^{j'_2}) \cdot \ldots \cdot (\mathbf{e}_{j_q}, e^{j'_q}) = \\
&\qquad\qquad = \delta^{i_1}_{i'_1} \cdot \delta^{i_2}_{i'_2} \cdot \ldots \cdot \delta^{i_p}_{i'_p} \delta^{j'_1}_{j_1} \cdot \delta^{j'_2}_{j_2} \cdot \ldots \cdot \delta^{j'_q}_{j_q}.
\end{aligned}$$

Мы пользовались определением согласованных базисов L и L^*:

$$\mathbf{e}_{i'}(e^i) = e^i(\mathbf{e}_{i'}) = (e^i, \mathbf{e}_{i'}) = \delta^i_{i'}.$$

Разложение тензора по базисным тензорам 2

Построим тензор T как линейную комбинацию всех возможных $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$:

$$T = T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}.$$

Можно показать, что коэффициенты разложения в этой линейной комбинации будут равны компонентам тензора T:

$$T(\mathbf{e}_{i'_1}, \mathbf{e}_{i'_2}, \dots, \mathbf{e}_{i'_p}; e^{j'_1}, e^{j'_2}, \dots, e^{j'_q}) = T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}(\mathbf{e}_{i'_1}, \dots, \mathbf{e}_{i'_p}; e^{j'_1}, \dots, e^{j'_q}) =$$
$$T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} \delta^{i_1}_{i'_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{i_p}_{i'_p} \delta^{j'_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{j'_q}_{j_q} = T^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}.$$

Получили, что $T^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}$ — являются компонентами тензора. Это те же самые компоненты тензора, что и $T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}$, только индексы перенеобозначенны, что не влияет на их значение.

Размерность пространства $\mathbb{T}^q_p(L)$ равна числу различных базисных векторов и ковекторов

$$\dim \mathbb{T}^q_p = n^{p+q}.$$

Разложение тензора по базисным тензорам 3

Из-за соображений наглядности компоненты тензора следовало бы размещать в виде пространственной кубической матрицы. Размерность куба (гиперкуба) равна валентности тензора T. Вектор-строки, вектор-столбцы и матрицы являются частными случаями таких $(p+q)$ мерных таблиц.

Теорема

Тензор на L типа (p,q) составляют векторное пространство $\mathbb{T}_p^q$ размерности n^{p+q} с базисными тензорами

$$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

где $\langle \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_q} \rangle = L$, $\langle e^{i_1}, \dots, e^{i_p} \rangle = L^*$. Существует, и притом только один, тензор с наперед заданными компонентами $T_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}$, которые задают разложение по базису:

$$T = T_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_q}.$$

Пример набора базисных тензоров

Рассмотрим, какие возможны базисные тензоры $e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes e^{i_3} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2}$ при $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ и $L^* = \langle e^1, e^2 \rangle$. $\dim L = \dim L^* = 2$. Тензоры действует на пространстве $L \times L \times L \times L^* \times L^*$.

$$
\begin{array}{llll}
e^1 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^1 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^2 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^2 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2
\end{array}
$$

Получается $2^{3+2} = 32$ базисных тензора.

Пример компонент тензоров 1

Рассмотрим для простоты частный случай малой размерности:

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle,\ L^* = \langle e^1, e^2, e^3 \rangle.$$

Рассмотрим тензор T такой, что:

$$T(\mathbf{v}, \mathbf{u}; w) \colon L \times L \times L^* \to \mathbb{R}.$$

Векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ и ковектор w можно разложить по базисам:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3 = v^i\mathbf{e}_i, \\
\mathbf{u} &= u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 = u^j\mathbf{e}_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; \\
w &= w_1e^1 + w_2e^2 + w_3e^3 = w_ke^k.
\end{aligned}$$

Подставляем в тензор и пользуясь линейностью вычисляем:

$$T(v^i\mathbf{e}_i, u^j\mathbf{e}_j; w_ke^k) = v^iu^jw_kT(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j; e^k), i, j, k = 1, 2, 3.$$

Пример компонент тензоров 2

Если мы будем знать все $T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j; e^k)$, то сможем вычислить $T(v^i\mathbf{e}_i, u^j\mathbf{e}_j; w_k e^k)$. Сколько всего таких элементов? Так как каждый индекс пробегает от 1 до 3 то имеем C_3^1 вариантов выбрать 1 элемент из 3. Аргументов у нас 3, поэтому сего вариантов:

$$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 = 27$$

Пример компонент тензоров 3

Выпишем все эти варианты, что даст нам полный список компонент:

$$
\begin{gathered}
T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1; e^1), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1; e^2), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1; e^3),\\
T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2; e^1), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2; e^2), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2; e^3),\\
T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3; e^1), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3; e^2), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3; e^3),\\
T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1; e^1), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1; e^2), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1; e^3),\\
T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2; e^1), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2; e^2), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2; e^3),\\
T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; e^1), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; e^2), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; e^3),\\
T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1; e^1), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1; e^2), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1; e^3),\\
T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2; e^1), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2; e^2), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2; e^3),\\
T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3; e^1), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3; e^2), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3; e^3).
\end{gathered}
$$

Пример компонент тензоров 4

Например:

$$T_{13}^{1} = T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3; e^1),$$

Если есть компоненты, то есть и базис:

$$T = T_{jk}^{i} e^j \otimes e^k \otimes \mathbf{e}_i$$

Базисных тензоров также 27 штук:

$$e^j \otimes e^k \otimes \mathbf{e}_i,\ i, j, k = 1, 2, 3.$$

$$T(\mathbf{v}, \mathbf{u}; w) = T_{jk}^{i} e^j \otimes e^k \otimes \mathbf{e}_i (v^l \mathbf{e}_l, u^m \mathbf{e}_m; w_n e^n) = T_{jk}^{i} v^l u^m w_n e^j(\mathbf{e}_l) \cdot e^k(\mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{e}_i(e^n) =$$

$$= T_{jk}^{i} v^l u^m w_n \delta_l^j \delta_m^k \delta_i^n = T_{jk}^{i} v^j u^k w_i$$

Преобразование координат тензоров 1

В очередной раз вспомним, как преобразуются базисы линейного пространства L и сопряженного пространства L^*.

$$L = \overbrace{\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle}^{\text{старый базис}} = \overbrace{\langle \mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'} \rangle}^{\text{новый базис}},\ \dim L = n,$$

$$L^* = \langle e^1, \dots, e^n \rangle = \langle e^{1'}, \dots, e^{n'} \rangle,\ \dim L^* = n,$$

$$\mathbf{e}_{k'} = a^i_{k'} \mathbf{e}_i,\ \ A = [a^i_{k'}],$$

$$e^{k'} = b^{k'}_i e^i,\ B = [b^{k'}_i],$$

$$k, k', i = 1 \dots, n.$$

Напомним, как связаны матрицы преобразования A и B. Пусть $B^{-1} = C = [c^i_j]$, тогда:

$$(e^k, \mathbf{e}_{j'}) = (c^k_{i'} e^{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = c^k_{i'} (e^{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = c^k_{i'} \delta^{i'}_{j'} = c^k_{j'},$$

$$(e^k, \mathbf{e}_{j'}) = (e^k, a^i_{j'} \mathbf{e}_i) = a^i_{j'} (e^k, \mathbf{e}_i) = a^i_{j'} \delta^k_i = a^k_{j'} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = C = A,\ c^k_{j'} = a^k_{j'},\ e^k = a^k_{i'} e^{i'},\ a^i_k b^k_j = \delta^i_j.$$

Преобразование координат тензоров 2

Так как $B^{-1} = A$ то $A^{-1} = B$ и $B = A^{-1}$ где $(A^{-1})^T$ — контраградиентная матрица к матрице A.

Рассмотрим теперь преобразование координат тензора T при переходе от одного базиса к другому. Все индексы пробегают от 1 до n, $p + q \leqslant n$.

$$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} \leftrightarrow e^{i'_1} \otimes e^{i'_2} \otimes \dots \otimes e^{i'_p} \otimes \mathbf{e}_{j'_1} \otimes \mathbf{e}_{j'_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j'_q}$$

$$T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \leftrightarrow T^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p}$$

$$T = T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} = T^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p} e^{i'_1} \otimes \dots \otimes e^{i'_p} \otimes \mathbf{e}_{j'_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j'_q} =$$

$$= (b^{i'_1}_{i_1} \cdot b^{i'_2}_{i_2} \cdot \dots \cdot b^{i'_p}_{i_p} \cdot T^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p} \cdot a^{j_1}_{j'_1} \cdot a^{j_2}_{j'_2} \cdot \dots \cdot a^{j_q}_{j'_q}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

Теорема

При переходе от дуальных базисов $\{\mathbf{e}_i\}_1^n$ и $\{e^i\}_1^n$ пространств L и L^* к новым дуальным базисам тех же пространств по формулам

$$\mathbf{e}_{k'} = a^i_{k'}\mathbf{e}_i,\ e^{k'} = b^{k'}_i e^i$$

координаты тензора T валентности (p, q) преобразуются по формулам

$$T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = b^{i'_1}_{i_1} b^{i'_2}_{i_2} \cdot \ldots \cdot b^{i'_p}_{i_p} T^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p} a^{j_1}_{j'_1} a^{j_2}_{j'_2} \cdot \ldots \cdot a^{j_q}_{j'_q}.$$

Некоторые замечания

- С помощью тензорных обозначений кратко записаны сразу n^{p+q} формул преобразований, так как суммирование идет для всех возможных комбинаций индексов.
- Говорят, что матрица $A = [a^i_j]$ действует на верхние индексы координат тензора, а матрица $B = [b^i_j] = A^{-1}$ — на нижние индексы.
- Тензор можно также определить, как массив из n^{p+q} скаляров, преобразующихся по вышеуказанному закону. Такое определение удобно для практической работы с тензорами (то есть для вычислений компонент, нахождения тензорных произведений, сверток и так далее).
- Наше определение тензора — бескомпонентное. Оно более универсальное, так как компоненты тензора могут меняться от базиса к базису, при этом определяя один и тот же объект.

Тензорная алгебра

Примеры и решение задач по тензорной алгебре

Дифференциальная геометрия
Примеры задач на тему тензорной алгебры.

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Вектор-столбец и вектор строка

Вектор-столбец может служить примером контравариантного вектора (или просто вектора):

$$\mathbf{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}) \quad L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$$

А вектор-строка — примером ковариантного вектора (ковектора, 1-формы):

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \dots & u^n \end{pmatrix} \in L^*(\mathbb{R}) \quad L = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \dots, \tilde{e}^n \rangle$$

Можно интерпретировать $\mathbf{v}$ и $\tilde{u}$ как линейные функции (функционалы). Вектор — функция от ковариантного вектора

$$\mathbf{v} \colon L^* \to \mathbb{R}$$

а ковариантный вектор — функция от вектора

$$\tilde{u} \colon L \to \mathbb{R}$$

Справедливость такой записи можно обосновать следующими соотношениями

$$\mathbf{v}(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = u_i \cdot v^i = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v^i \in \mathbb{R}$$

С другой стороны ничего не мешает полагать, что это вектор-столбец является аргументом у вектора строки:

$$\tilde{u}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = u_i \cdot v^i = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v^i \in \mathbb{R}$$

Линейность функций $\mathbf{v}$ и $\tilde{u}$ следует из матричных правил умножения принятых в линейной алгебре.

Матрица как тензор

Матрица является простейшим примером тензора типа $(1, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = [a_j^i] \in \mathbb{T}_1^1(\mathbb{R}) = L \times L^*$$

Обратите внимание, что верхний индекс обозначает номер строки, а нижний индекс номер столбца.

Так как матрица есть тензор, то ее можно в соответствии с определением тензора рассматривать как функцию от одного вектора и одного ковектора:

$$A(\mathbf{v}; \tilde{u}) \colon L \times L^* \to \mathbb{R}$$

Убедиться в правильности такой интерпретации матрицы, поможет следующее соотношение

$$A(\mathbf{v};\tilde{u}) = \tilde{u}A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}}_{\text{После умножения получится вектор-столбец}} \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{u}A\mathbf{v} = u_i a^i_j v^j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_i a^i_j v^j = \sum_{i,j=1}^{n} u_i a^i_j v^j$$

Записанная сумма согласуется с правилами умножения матриц в линейной алгебре.

Тензоры $(2,0)$ и $(0,2)$ имеют такое же количество компонент, что и тензор $(1,1)$, поэтому их можно сгруппировать в такие в виде матриц. Но эти «матрицы» не будут подчиняться законам матричного умножения.

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y})\colon L\times L\to\mathbb{R},\quad S(\tilde{x},\tilde{y})\colon L^*\times L^*\to\mathbb{R}$$

$$T=[T_{ij}], i,j=1,\dots,n\quad S=[S^{ij}], i,j=1,\dots,n$$

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y})=T_{ij}x^iy^j=\sum_{i,j=1}^{n}T_{ij}x^iy^j\in\mathbb{R}$$

$$S(\tilde{x},\tilde{y})=S^{ij}x_iy_j=\sum_{i,j=1}^{n}S^{ij}x_iy_j\in\mathbb{R}$$

Для того, чтобы не смешивать настоящие матрицы с просто таблицами, можно использовать следующую форму записи:

$$T = \begin{array}{c|ccccc} i,j & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & \dots & T_{1n} \\ 2 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & \dots & T_{2n} \\ 3 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & \dots & T_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & \dots & T_{nn} \end{array}$$

$$S = \begin{array}{c|ccccc} i,j & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 1 & S^{11} & S^{12} & S^{13} & \dots & S^{1n} \\ 2 & S^{21} & S^{22} & S^{23} & \dots & S^{2n} \\ 3 & S^{31} & S^{32} & S^{33} & \dots & S^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & S^{n1} & S^{n2} & S^{n3} & \dots & S^{nn} \end{array}$$

Комплексный пример тензора $(1, 1)$

Найдем значения тензора $F(\mathbf{v}; \tilde{u})$, который через базисные тензоры выражается следующим образом

$$F = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2 + \tilde{e}^2 \otimes (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3) \in \mathbb{T}^1_1(L),$$

где

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \quad \tilde{u} = \tilde{e}^1 + \tilde{e}^2 + \tilde{e}^3.$$

Тензор записан через базисные тензоры

$$\tilde{e}^i \otimes \mathbf{e}_j, \; i, j = 1, \dots, n$$

для нахождения компонент следует раскрыть скобки

$$F = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2 + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3$$

Уже из этой записи видны все ненулевые компоненты тензора, однако для тренировки мы воспользуемся определением базисных тензоров для нахождения этих компонент.

По определению

$$F(\mathbf{e}_i; \tilde{e}^j) = F_i^{\,j}.$$

Так как тензор F имеет валентность 2, а пространство L размерность 3, то компонент у тензора $3^2 = 9$.

$$\begin{array}{c|ccc} j, i & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & F_1^{\,1} & F_3^{\,1} & F_3^{\,1} \\ 2 & F_1^{\,2} & F_3^{\,2} & F_3^{\,2} \\ 3 & F_1^{\,3} & F_3^{\,3} & F_3^{\,3} \end{array} = \begin{pmatrix} F_1^1 & F_3^1 & F_3^1 \\ F_1^2 & F_3^2 & F_3^2 \\ F_1^3 & F_3^3 & F_3^3 \end{pmatrix}$$

Начнем вычислять компоненты

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1; \tilde{e}^2) &= \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1; \tilde{e}^2) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1; \tilde{e}^2) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1; \tilde{e}^2) = \\ &= \tilde{e}^1(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2(\tilde{e}^2) + \tilde{e}^2(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1(\tilde{e}^2) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_3(\tilde{e}^2) = \delta_1^1 \delta_2^2 + \delta_1^2 \delta_1^2 + 3\delta_1^2 \delta_3^2 = \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 1 = F_1^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_2;\tilde{e}^1) &= \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2;\tilde{e}^1) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2;\tilde{e}^1) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2;\tilde{e}^1) = \\
&= \tilde{e}^1(\mathbf{e}_2)\cdot \mathbf{e}_2(\tilde{e}^1) + \tilde{e}^2(\mathbf{e}_2)\cdot \mathbf{e}_1(\tilde{e}^1) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{e}_2)\cdot \mathbf{e}_3(\tilde{e}^1) = \delta^1_2\delta^1_2 + \delta^2_2\delta^1_1 + 3\delta^2_2\delta^1_3 = \\
&= 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 0 = 1 = F^1_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_2;\tilde{e}^3) &= \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2;\tilde{e}^3) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2;\tilde{e}^3) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2;\tilde{e}^3) = \\
&= \tilde{e}^1(\mathbf{e}_2)\cdot \mathbf{e}_2(\tilde{e}^3) + \tilde{e}^2(\mathbf{e}_2)\cdot \mathbf{e}_1(\tilde{e}^3) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{e}_2)\cdot \mathbf{e}_3(\tilde{e}^3) = \delta^1_2\delta^3_2 + \delta^2_2\delta^3_1 + 3\delta^2_2\delta^3_3 = \\
&= 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 3\cdot 1\cdot 1 = 3 = F^3_2
\end{aligned}
$$

Мы нашли все ненулевые компоненты. Однако такие манипуляции являются лишними, так как все компоненты можно узнать сразу после раскрытия скобок.

$$
\begin{aligned}
F = F_i^j \tilde{e}^i \otimes \mathbf{e}_j = & F_1^2 \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2 + F_2^1 \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 + F_2^3 \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3 \\
& 1\ \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2 +\ 1\ \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 +\ 3\ \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

Отсюда сразу видно

$$
F_1^2 = F_2^1 = 1,\ F_2^3 = 3.
$$

Остальные компоненты равны нулю, например

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^2) = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^2) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^2) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^2) = \\
= \tilde{e}^1(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2(\tilde{e}^2) + \tilde{e}^2(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1(\tilde{e}^2) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3(\tilde{e}^2) = \delta_2^1 \delta_2^2 + \delta_2^2 \delta_1^2 + 3\delta_2^2 \delta_3^2 = \\
= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0 = F_2^2
\end{aligned}
$$

Таблица компонент тензора принимает вид:

j, i	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	0
3	0	2	0

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим значение тензора на данных в условии векторах:

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \quad \tilde{u} = \tilde{e}^1 + \tilde{e}^2 + \tilde{e}^3.$$

Так как тензор разложен на базисные составляющие, то для вычисления воспользуемся формулами

$$\mathbf{e}_i(\tilde{u}) = u_i, \;\; \tilde{e}^j(\mathbf{v}) = v^j$$

$$F(\mathbf{v}; \tilde{u}) = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{v}; \tilde{u}) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{v}; \tilde{u}) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{v}; \tilde{u}) =$$

$$= \tilde{e}^1(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_2(\tilde{u}) + \tilde{e}^2(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_1(\tilde{u}) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_3(\tilde{u})$$

$$v^1 = 1, \; v^2 = 5, \; v^3 = 4; \; u_1 = u_2 = u_3 = 1.$$

- $\tilde{e}^1(\mathbf{v}) = \tilde{e}^1(\mathbf{e}_1) + 5\tilde{e}^1(\mathbf{e}_2) + 4\tilde{e}^1(\mathbf{e}_3) = \delta^1_1 + 5\delta^1_2 + 4\delta^1_3 = 1 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 = v^1$,
- $\tilde{e}^2(\mathbf{v}) = v^2 = 5$,
- $\mathbf{e}_1(\tilde{u}) = u_1 = 1, \;\; \mathbf{e}_2(\tilde{u}) = u_2 = 1, \;\; \mathbf{e}_3(\tilde{u}) = u_3 = 1.$

$$F(\mathbf{v}; \tilde{u}) = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 21$$

Нахождение координат тензора при преобразовании базиса

Рассмотрим следующую задачу: найти координату $T^{1'2'}_{1'2'3'}$ тензора $T \in \mathbb{T}^2_3(L)$, $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$ все координаты которого в базисе

$$\tilde{e}^{i_1} \otimes \tilde{e}^{i_2} \otimes \mathbf{e}_{i_3} \otimes \mathbf{e}_{i_4} \otimes \mathbf{e}_{i_5}, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 = 1 \ldots, n$$

равны 2. Штрихованный и нештрихованный базисы связаны следующим линейным преобразованием

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим матрицу перехода от нештрихованного базиса к штрихованному как A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нам дана матрица перехода от $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ к $\langle \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'} \rangle$, но нет матрицы B, задающей переход от $\langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$ к $\langle \tilde{e}^{1'}, \tilde{e}^{2'}, \tilde{e}^{3'} \rangle$. Однако между A и B существует связь, позволяющая вычислить B из A.

Вначале, однако, найдем матрицу перехода от $\langle \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'} \rangle$ к $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$.

$$\mathbf{e}_i = \hat{a}_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}, \;\; \tilde{e}^j = b_{j'}^j \tilde{e}^{j'}, \; A = [a_i^{i'}], \; B = A^{-1} = [b_{j'}^j]$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \hat{a}_1^{1'} \mathbf{e}_{1'} + \hat{a}_1^{2'} \mathbf{e}_{2'} + \hat{a}_1^{3'} \mathbf{e}_{3'}, \\ \mathbf{e}_2 = \hat{a}_2^{1'} \mathbf{e}_{1'} + \hat{a}_2^{2'} \mathbf{e}_{2'} + \hat{a}_2^{3'} \mathbf{e}_{3'}, \\ \mathbf{e}_3 = \hat{a}_3^{1'} \mathbf{e}_{1'} + \hat{a}_1^{2'} \mathbf{e}_{2'} + \hat{a}_1^{3'} \mathbf{e}_{3'}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = a_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + a_{1'}^2 \mathbf{e}_2 + a_{1'}^3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{2'} = a_{2'}^1 \mathbf{e}_1 + a_{2'}^2 \mathbf{e}_2 + a_{2'}^3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{3'} = a_{3'}^1 \mathbf{e}_1 + a_{3'}^2 \mathbf{e}_2 + a_{3'}^3 \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = 1\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{2'} = 2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_{3'} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

$$a^1_{1'}=1,\quad a^2_{1'}=0,\quad a^3_{1'}=0,$$
$$a^1_{2'}=2,\quad a^2_{2'}=1,\quad a^3_{2'}=0,\qquad (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=(\mathbf{e}_{1'},\mathbf{e}_{2'},\mathbf{e}_{3'})A^{-1}$$
$$a^1_{3'}=3,\quad a^2_{3'}=2,\quad a^3_{3'}=1.$$

$$A^{-1}=[\hat{a}^{i'}_i]=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{e}_1=1\mathbf{e}_{1'},\\ \mathbf{e}_2=-2\mathbf{e}_{1'}+1\mathbf{e}_{2'},\\ \mathbf{e}_3=\mathbf{e}_{1'}-2\mathbf{e}_{2'}+1\mathbf{e}_{3'}.\end{cases}$$

$$A^{-1}=[\hat{a}^{i'}_i]=\begin{pmatrix}\hat{a}^{1'}_1 & \hat{a}^{1'}_2 & \hat{a}^{1'}_3\\ \hat{a}^{2'}_1 & \hat{a}^{2'}_2 & \hat{a}^{2'}_3\\ \hat{a}^{3'}_1 & \hat{a}^{3'}_2 & \hat{a}^{3'}_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\hat{a}^{1'}_1=1, & \hat{a}^{2'}_1=0, & \hat{a}^{3'}_1=0,\\ \hat{a}^{1'}_2=-2, & \hat{a}^{2'}_2=1, & \hat{a}^{3'}_2=0,\\ \hat{a}^{1'}_3=1, & \hat{a}^{2'}_3=-2, & \hat{a}^{3'}_3=1.\end{matrix}$$

На следующем шаге решения необходимо найти как связаны ковекторные базисы $\langle\tilde{e}^1,\tilde{e}^2,\tilde{e}^3\rangle$ и $\langle\tilde{e}^{1'},\tilde{e}^{2'},\tilde{e}^{3'}\rangle$. Воспользуемся тем фактом, что

$$(\mathbf{e}_{1'},\mathbf{e}_{2'},\mathbf{e}_{3'})=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)A\Rightarrow(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=(\mathbf{e}_{1'},\mathbf{e}_{2'},\mathbf{e}_{3'})A^{-1}$$

$$(\tilde{e}^{1'},\tilde{e}^{2'},\tilde{e}^{3'})^T=B(\tilde{e}^1,\tilde{e}^2,\tilde{e}^3)^T\Rightarrow(\tilde{e}^1,\tilde{e}^2,\tilde{e}^3)^T=B^{-1}(\tilde{e}^{1'},\tilde{e}^{2'},\tilde{e}^{3'})^T$$

$$B=A^{-1}\Rightarrow B^{-1}=A\Rightarrow B^{-1}=[\hat{b}^j_{j'}]=[a^j_{j'}],\ \ B=[b^{j'}_j]$$

$$\tilde{e}^{j'} = b^{j'}_{j}\,\tilde{e}^{j} = \sum_{j=1}^{n} b^{j'}_{j}\,\tilde{e}^{j}, \quad \tilde{e}^{j} = \hat{b}^{j}_{j'}\tilde{e}^{j'} = \sum_{j'=1}^{n} \hat{b}^{j}_{j'}\tilde{e}^{j'}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{b}^{1}_{1'} = 1 & \hat{b}^{1}_{2'} = 2 & \hat{b}^{1}_{3'} = 3 \\ \hat{b}^{2}_{1'} = 0 & \hat{b}^{2}_{2'} = 1 & \hat{b}^{2}_{3'} = 2 \\ \hat{b}^{3}_{1'} = 0 & \hat{b}^{3}_{2'} = 0 & \hat{b}^{3}_{3'} = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} T^{1'2'}_{1'2'3'} &= \hat{b}^{i_1}_{1'}\hat{b}^{i_2}_{2'}\hat{b}^{i_3}_{3'} \cdot T^{j_1 j_2}_{i_1 i_2 i_3}\,\hat{a}^{1'}_{j_1}\hat{a}^{2'}_{j_2} = \\ &= (\hat{b}^{1}_{1'} + \hat{b}^{2}_{1'} + \hat{b}^{3}_{1'}) \cdot (\hat{b}^{1}_{2'} + \hat{b}^{2}_{2'} + \hat{b}^{3}_{2'}) \cdot (\hat{b}^{1}_{3'} + \hat{b}^{2}_{3'} + \hat{b}^{3}_{3'}) \cdot 2 \cdot (\hat{a}^{1'}_{1} + \hat{a}^{1'}_{2} + \hat{a}^{1'}_{3}) \cdot (\hat{a}^{2'}_{1} + \hat{a}^{2'}_{2} + \hat{a}^{2'}_{3}) = \\ &= (1+0+0)(2+1+0)(3+2+1)2(1-2+1)(0+1-2) = 0 \end{aligned}$$

Поднятие и опускание индексов тензора

Пусть в евклидовом пространстве E дан метрический тензор G со следующими коэффициентами:

$$G = [g_{ij}] = \begin{array}{c|cccc} j/i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$E = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle,\ E^* = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4 \rangle \Rightarrow\ i, j = 1, 2, 3, 4$$

Используя этот метрический тензор провести опускание и подъем индексов следующего тензора:

$$T = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_3 + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_4$$

В общем случае опускание индексов для произвольного тензора T с помощью метрического тензора $G = [g_{ij}]$ проводится по следующей формуле:

$$\mathrm{S}^{i_2 \dots i_q}_{j_1 j_2 \dots j_p k} = g_{i_1 k} \mathrm{T}^{i_1 i_2 \dots i_q}_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

Получается, что тензор T превращается в новый тензор S валентность которого не (p, q) как у T, а $(p+1, q-1)$. Обратите внимание, что индекс k стоит последним, а не первым. Процесс можно повторять, пока у тензора T не останется верхних индексов:

$$\mathrm{S}_{j_1 j_2 \dots j_p k_1 k_2 \dots k_q} = \underbrace{g_{i_q k_q} \cdot \dots \cdot g_{i_1 k_1}}_{q} \mathrm{T}^{i_1 i_2 \dots i_q}_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

Вернемся к нашему примеру. У нашего тензора всего две ненулевые компоненты:

$$T = \mathrm{T}^i_j \tilde{e}^j \otimes \mathbf{e}_i = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_3 + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_4, \ \mathrm{T}^3_1 = \mathrm{T}^4_2 = 1$$

$$S_{kj} = g_{ij}\mathrm{T}^i_k = g_{ji}\mathrm{T}^i_k, \text{ т.к. } g_{ij} = g_{ji}.$$

Так как не равны нулю только $\mathrm{T}^3_1 = 1$ и $\mathrm{T}^4_2 = 1$, то из всех 16 сумм остается только 8.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{\color{red}{1}\color{blue}{j}} &= g_{3\color{blue}{j}}\mathrm{T}^3_{\color{red}{1}}, & \mathrm{S}_{2j} &= g_{4j}\mathrm{T}^4_2, \\
\mathrm{S}_{\color{red}{1}\color{blue}{1}} &= g_{3\color{blue}{1}}\mathrm{T}^3_{\color{red}{1}} = 0 \cdot 1 = 0, & \mathrm{S}_{21} &= g_{41}\mathrm{T}^4_2 = 0 \cdot 1 = 0, \\
\mathrm{S}_{12} &= g_{32}\mathrm{T}^3_1 = 0 \cdot 1 = 0, & \mathrm{S}_{22} &= g_{42}\mathrm{T}^4_2 = 0 \cdot 1 = 0, \\
\mathrm{S}_{13} &= g_{33}\mathrm{T}^3_1 = 1 \cdot 1 = 1, & \mathrm{S}_{23} &= g_{43}\mathrm{T}^4_2 = 1 \cdot 1 = 1, \\
\mathrm{S}_{14} &= g_{34}\mathrm{T}^3_1 = 1 \cdot 1 = 1, & \mathrm{S}_{24} &= g_{44}\mathrm{T}^4_2 = 2 \cdot 1 = 2.
\end{aligned}$$

$$S = \tilde{e}^1 \otimes \tilde{e}^3 + \tilde{e}^1 \otimes \tilde{e}^4 + \tilde{e}^2 \otimes \tilde{e}^3 + 2\tilde{e}^2 \otimes \tilde{e}^4$$

Проведем теперь подъем индексов. В общем виде он выглядит так:

$$\mathrm{S}^{ki_1 i_2 \dots i_q}_{j_2 \dots j_p} = g^{j_1 k} \mathrm{T}^{i_1 i_2 \dots i_q}_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

Получается, что тензор T превращается в новый тензор S валентность которого не (p, q) как у T, а $(p-1, q+1)$. Обратите внимание, что индекс k стоит **первым**, а не последним. Процесс можно повторять, пока у тензора T не останется верхних индексов:

$$\mathrm{S}^{k_1 k_2 \dots k_p i_1 i_2 \dots i_q} = \underbrace{g^{j_p k_p} \cdot \dots \cdot g^{j_1 k_1}}_{p} \mathrm{T}^{i_1 i_2 \dots i_q}_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

Необходимо найти тензор g^{ij}. Он находится из соотношения

$$g^{ij}g_{ij} = \delta^i_k,\ i,k = 1,2,3,4,$$

что в матричном виде сводится к нахождению обратной матрицы:

$$G^{-1} = [g^{ij}] = \begin{array}{c|cccc} j/i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Также исходим из двух компонент $\mathrm{T}_1^3 = 1$ и $\mathrm{T}_2^4 = 1$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}^{j3} &= g^{1j}\mathrm{T}_1^3, & \mathrm{S}^{j4} &= g^{2j}\mathrm{T}_2^4,\\
\mathrm{S}^{13} &= g^{11}\mathrm{T}_1^3 = 1\cdot 1 = +1, & \mathrm{S}^{14} &= g^{12}\mathrm{T}_2^4 = -1\cdot 1 = -1,\\
\mathrm{S}^{23} &= g^{21}\mathrm{T}_1^3 = -1\cdot 1 = -1, & \mathrm{S}^{24} &= g^{22}\mathrm{T}_2^4 = 2\cdot 1 = 2,\\
\mathrm{S}^{33} &= g^{31}\mathrm{T}_1^3 = 0\cdot 1 = 0, & \mathrm{S}^{34} &= g^{32}\mathrm{T}_2^4 = 0\cdot 1 = 0,\\
\mathrm{S}^{43} &= g^{41}\mathrm{T}_1^3 = 0\cdot 1 = 0, & \mathrm{S}^{44} &= g^{42}\mathrm{T}_2^4 = 0\cdot 1 = 0.
\end{aligned}
$$

$$
S = \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_4 + 2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_4
$$

Список литературы 1

1. Норден А. П. — **Теория поверхностей.** — 2-е изд. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 264. — (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия)). — ISBN 978597106234.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. — **Линейная алгебра.** — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574545.