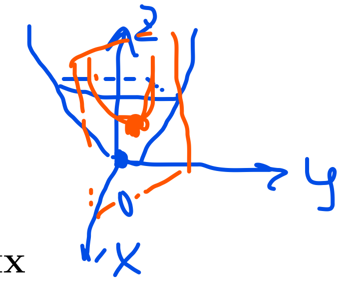
$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1$



Лекция 12

Условный экстремум функций n переменных

Пусть задана функция $y = f(x^1, \ldots, x^n)$ непрерывно дифференцируемая на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Далее, пусть при $m < n$

$$\begin{cases} g_1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \\ g_2(x^1, \ldots, x^n) = 0, \\ \qquad \vdots \\ g_m(x^1, \ldots, x^n) = 0, \end{cases} \tag{12.1}$$

где $g_i(\mathbf{x})$ – непрерывно дифференцируемые на X функции, $i = 1, \ldots, m$.

Предположим, что $\forall \mathbf{x} \in X$

$$Rg \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x^m} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x^1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x^m} \end{pmatrix} = m \tag{12.2}$$

Определение 12.1. Условия (12.1) называются *уравнениями связей.*

Теорема 12.1. Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $y = f(x^1, \ldots, x^n)$ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, и имеет место (12.1) и (12.2). Для того чтобы точка $\mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n)$ являлась точкой условного экстремума функции f при связях (12.1) необходимо выполнение в этой точке следующих условий

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial h^j} \frac{\partial h^j}{\partial x^k} + \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0, \;\; k = m+1, \ldots, n, \tag{12.3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial h^j} \frac{\partial h^j}{\partial x^k} + \frac{\partial g_i}{\partial x^k} = 0, \;\; k = m+1, \ldots, n, \;\; i = 1, \ldots, m, \tag{12.4}$$

где

$$x^j = h^j(x^{m+1}, \ldots, x^n), \;\; j = 1, \ldots, m. \tag{12.5}$$

Доказательство. По теореме о неявной функции получаем (12.5), где $h_j, \;\; j = 1, \ldots, m$ является непрерывно дифференцируемыми функциями. Подставляем (12.5) в (12.1), получим

$$g_i(h^1, \ldots, h^m, x^{m+1}, \ldots, x^n) = 0, \;\; i = 1, \ldots, m. \tag{12.6}$$

Так как функция $y = f(x^1, \ldots, x^n)$ непрерывно дифференцируемая на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, получаем

$$y = f(h^1, \ldots, h^m, x^{m+1}, \ldots, x^n) \equiv F(x^{m+1}, \ldots, x^n).$$

Необходимое условие экстремума функции $F(x^{m+1}, \ldots, x^n)$ в точке $(a^{m+1}, \ldots, a^n)$ имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}, \; k = m+1, \ldots, n,$$

то есть имеет место (12.3).

Отметим, что из условия (12.6) следует

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial h^j}\frac{\partial h^j}{\partial x^k} + \frac{\partial g_i}{\partial x^k} = 0,\ k = m+1, \dots, n,\ i = 1, \dots, m,$$

то есть имеет место (12.4). □

$x = (x^1, \dots, x^n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$

Обозначим

$$\Phi(x, \lambda)\ \cancel{\Phi(\mathbf{x})} = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x}) \tag{12.7}$$

– функция Лагранжа, λ_j – числовые множители.

Теорема 12.2. При выполнении условий теоремы 12.1 необходимые условия условного экстремума в точке $\mathbf{a}$ x_0 $= (a^1, \dots, a^n)$ имеют вид

$x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$

λ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^i}(x, \lambda) = 0,\ i = 1, \dots, m \ n, & (12.8) \\ g_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, m. & (12.9) \end{cases}$$

Доказательство. Покажем, что условия (12.1), (12.3), (12.4) эквиваленты (12.8) и (12.9). Для этого отметим, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x^i},\ i = 1, \dots, m.$$

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} & \frac{\partial f}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x^m} & \frac{\partial f}{\partial x^{m+1}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x^1} & \frac{\partial g_1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x^m} & \frac{\partial g_1}{\partial x^{m+1}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x^1} & \frac{\partial g_m}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x^m} & \frac{\partial g_m}{\partial x^{m+1}} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \tag{12.10}$$

Из условий (12.3) и (12.4) следует, что каждый столбец с номером от $m+1$ до n матрицы (12.10) является линейной комбинацией первый m столбов.

Учитывая (12.2), заключаем, что ранг матрицы (12.10) равен m. Следовательно, первая строка этой матрицы является линейной комбинацией остальных строк, а равенство (12.8) выражает эту зависимость.

Отметим, что (12.9) также имеет место, так как рассматривается точка $\mathbf{a}$, которая является решением системы (12.1). □

Достаточные условия условного экстремума

Из уравнений связи имеем

$g_j(x) = 0,\ j = \overline{1,m}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x^i} dx^i = 0,\ j = 1, \dots, m. \tag{12.11}$$

$dg_j(x_0) = 0$

$$\frac{\partial g_j(x_0)}{\partial x^1}dx^1 + \ldots + \frac{\partial g_j(x_0)}{\partial x^n}dx^n = 0, \quad j=\overline{1,m}$$

Учитывая (12.2), из (12.11) получаем

$$dx^i = \sum_{j=m+1}^{n} b_i^j dx^j, \ i = 1, \ldots, m, \tag{12.12}$$

$dx^1, \ldots, dx^n$

$dx^{m+1}, \ldots, dx^n$

где b_i^j – некоторые коэффициенты.

Найдем $d^2\Phi(\mathbf{a})$ с учетом (12.12). Получим

$$d^2\Phi(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}dx^i dx^j$$

$$d^2\Phi(\mathbf{a}) = \cancel{\frac{1}{2!}} \sum_{i,j=1}^{m+1} B_{ij}dx^i dx^j. \tag{12.13}$$

Если квадратичная форма (12.13) является положительно (отрицательно) определенной, то точка $\mathbf{a}$ является точкой условного локального минимума (максимума) функции f при связях (12.1).

Числовые ряды

Определение 12.2. Пусть $\{a_n\}$ – заданная последовательность чисел из $\mathbb{R}$. Тогда сумма

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

называется *числовым рядом*, a_n называется *общим членом* ряда.

Определение 12.3. Сумма $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ называется *частичной суммой*...