Теория конечных графов

# Метрические характеристики. Матричное представление графов

**Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры**
**прикладной информатики и теории вероятностей РУДН**
**Маркова Екатерина Викторовна**
**markova_ev@pfur.ru**

# Литература

1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

# Метрические характеристики

Рассмотрим связный невзвешенный неорграф $G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$, $V_i,V_j,V_k\in\mathbf{V}$.

Пусть $d(V_i,V_j)$ – длина (количество ребер) кратчайшей простой цепи между $V_i$ и $V_j$, и положим, что $d(V_i,V_j)=\infty$, если $V_i$ и $V_j$ находятся в разных компонентах связности. Такое расстояние будет удовлетворять следующим аксиомам метрики:

1) $d(V_i,V_j)\ge 0$,
2) $d(V_i,V_j)=0 \Leftrightarrow V_i=V_j$,
3) $d(V_i,V_j)=d(V_j,V_i)$,
4) $d(V_i,V_j)+d(V_j,V_k)\ge d(V_i,V_k)$.

# Метрические характеристики

Эксцентриситетом фиксированной вершины $V_j$ называется величина $e(V_i) = \max_{V_j \in \mathbf{V}} d(V_i, V_j)$.

Диаметром графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ называется величина $d(G) = \max_{V_i \in \mathbf{V}} e(V_i)$.

Вершина $V_i$ называется периферийной, если $e(V_i) = d(G)$.

Радиусом графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ называется величина $r(G) = \min_{V_i \in \mathbf{V}} e(V_i)$.

Вершина $V_i$ называется центральной, если $e(V_i) = r(G)$.

Множество всех центральных вершин графа называется его центром.

# Матрица инцидентности для неорграфа

Пусть $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ – неорграф, имеющий $n$ вершин ($|\mathbf{V}| = n$) и $m$ ребер ($|\mathbf{E}| = m$), т.е. $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$, $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$.

Матрицей инцидентности для графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ будет называться матрица:

$$A = [a_{i,j}]_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}} = \left[\begin{array}{c|cccc} A & e_1 & e_2 & \ldots & e_m \\ \hline V_1 & & & & \\ V_2 & & a_{i,j} & & \\ \ldots & & & & \\ V_n & & & & \end{array}\right]$$

# Матрица инцидентности для неографа

где $a_{i,j} = \begin{cases} 0, \text{ если ребро } e_j \text{ не инцидентно вершине } V_i; \\ 1, \text{ если ребро } e_j \text{ инцидентно вершине } V_i; \\ 2, \text{ если ребро } e_j \text{ - петля в вершине } V_i. \end{cases}$

и $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

**<u>Свойство 1:</u>**

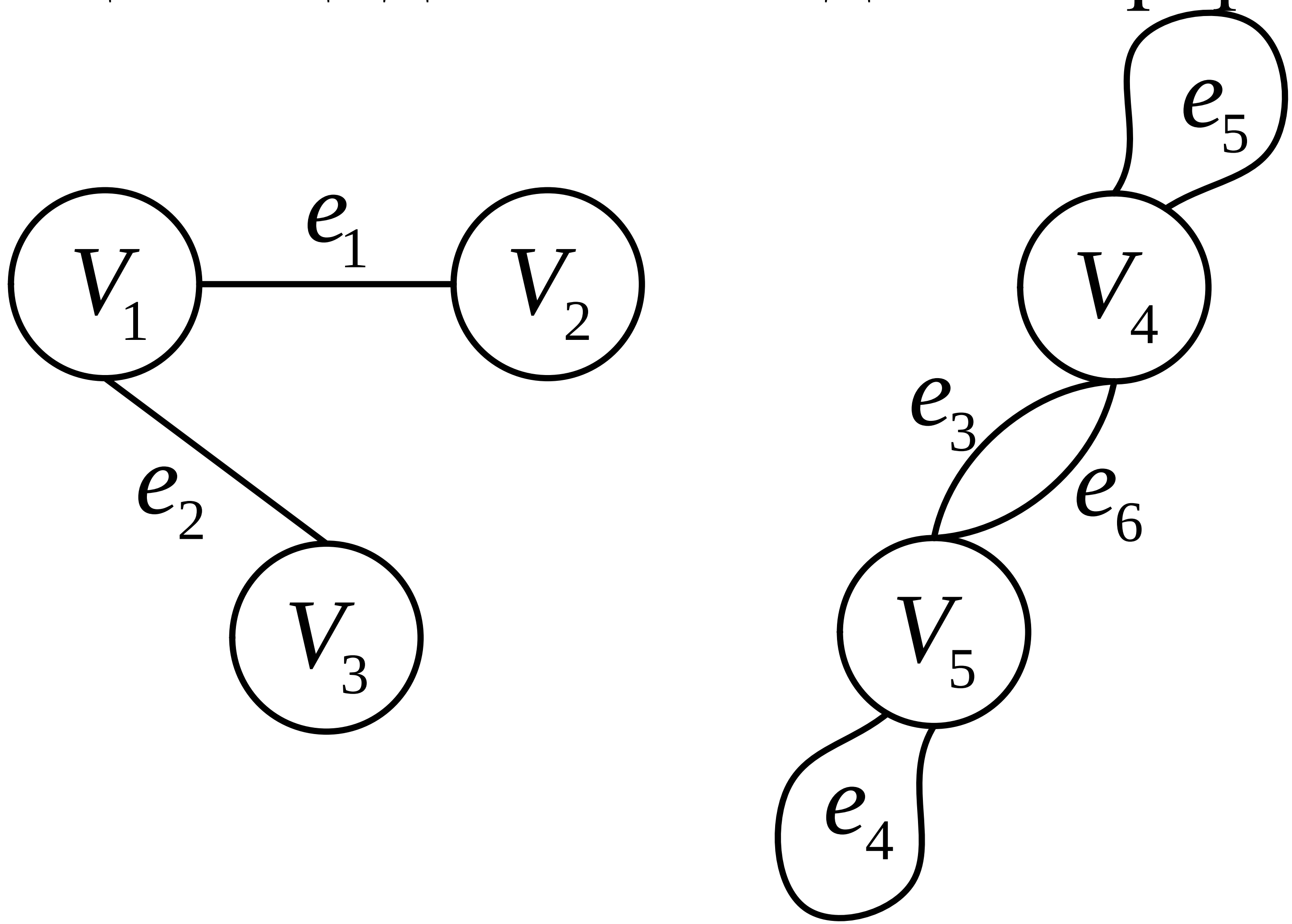
$$a_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 2, \qquad a_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \delta(V_i).$$

В каждом столбце ровно по две единицы, кроме столбцов, соответствующих петлям. В столбцах, соответствующих петлям, – только одна цифра 2.

**<u>Свойство 2:</u>**

В случае, когда граф можно разбить на два или более несвязных компоненты, то матрица инцидентности будет иметь блочно-диагональную структуру при условии, что вершины первой компоненты пронумерованы первыми, второй компоненты – вторыми, и т.д. (то есть по возрастанию).

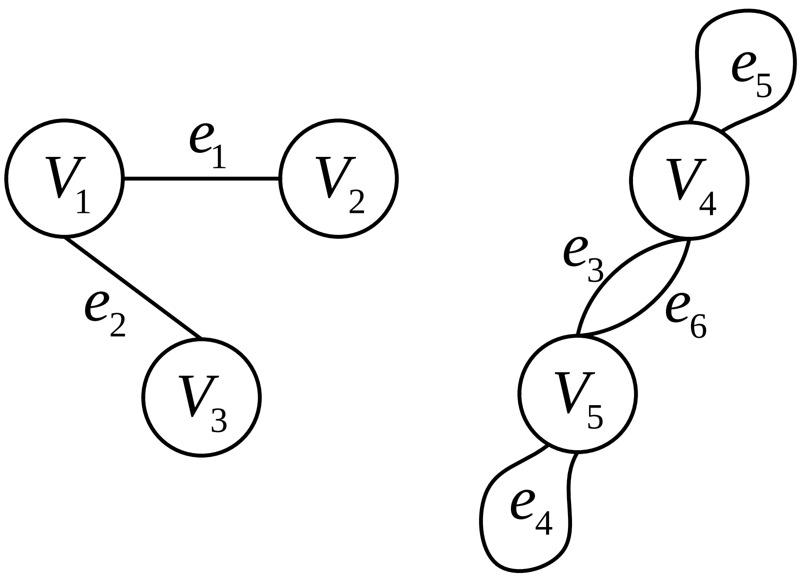
# Матрица инцидентности для неорграфа




Пример 1. Составить для неорграфа матрицу инцидентности.
Заметим, что граф не является связным, вершины и ребра пронумерованы последовательно по компонентам

# Матрица инцидентности для примера 1 в блочно-диагональном виде

Так как ребро $e_1$ соединяет вершины $V_1$ и $V_2$, то в первом столбце первой строке ставим единицу и в первом столбце и второй строке ставим единицу, так как ребро $e_5$ является петлей в вершине $V_4$, то в пятом столбце и четвертой строки ставим цифру 2, и так далее:



$$A = \left[\begin{array}{c|cc:cccc} A & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline V_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline V_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ V_5 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

# Матрица смежности для неорграфов

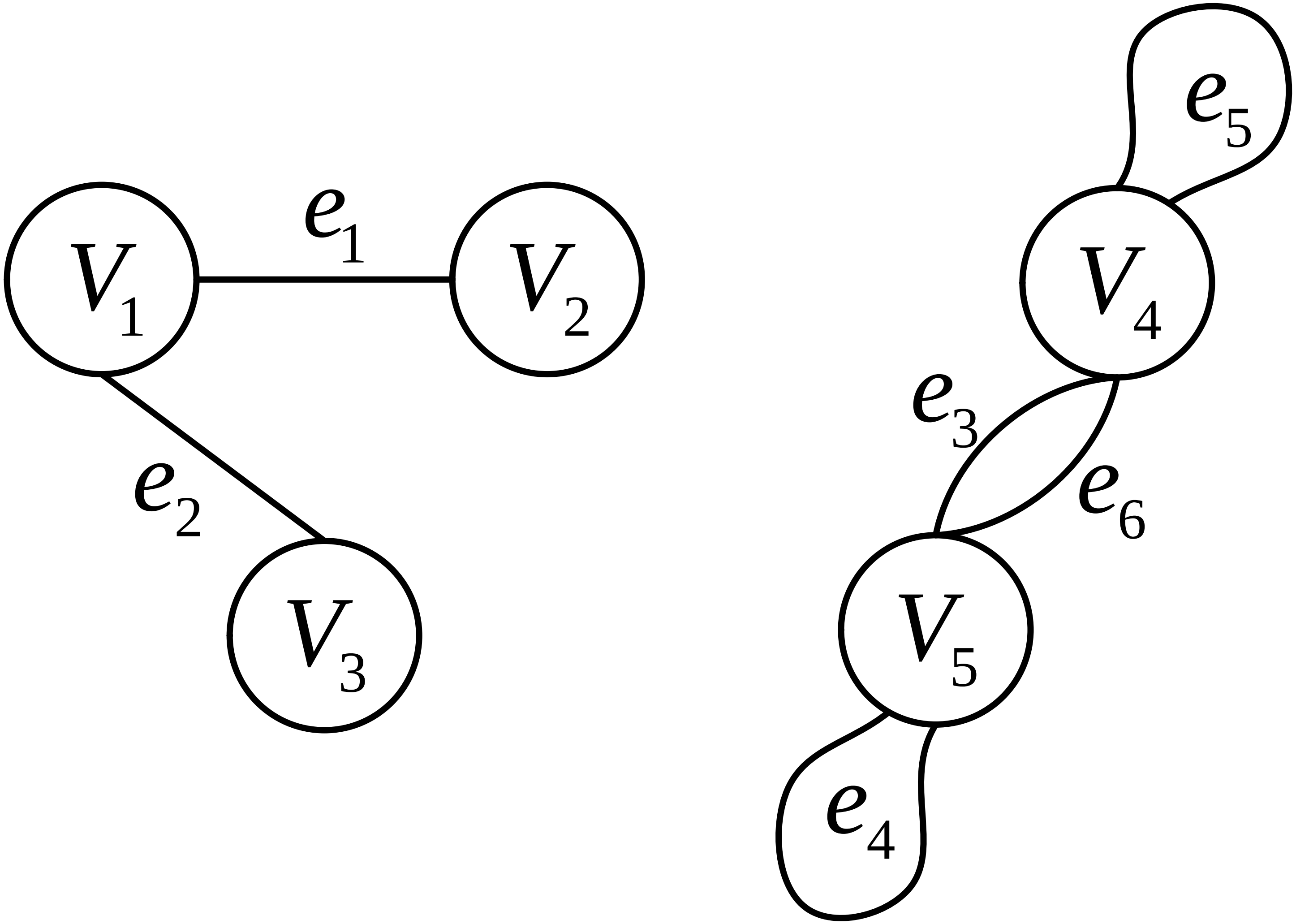
Пусть $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ – неорграф, имеющий $n$ вершин ($|\,\mathbf{V}\,| = n$, $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$). Матрицей смежности для неорграфа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ будет называться матрица $B$:

$$B = [b_{i,j}]_{i,j=\overline{1,n}} = \left[\begin{array}{c|cccc} B & V_1 & V_2 & ... & V_n \\ \hline V_1 & & & & \\ V_2 & & b_{i,j} & & \\ ... & & & & \\ V_n & & & & \end{array}\right],$$

$b_{i,j} = \{$ число ребер одновременно инцидентных вершинам $V_i$ и $V_j$, $i, j = \overline{1,n}$ .$\}$

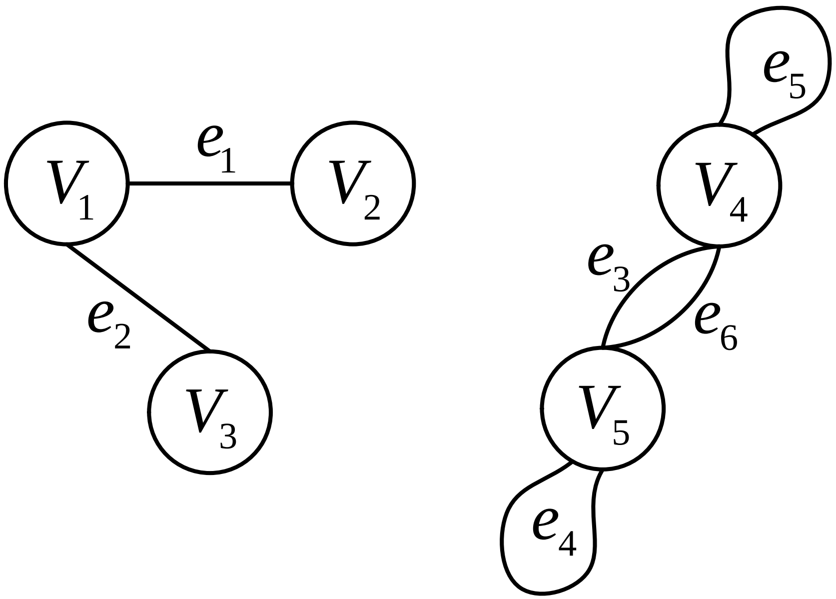
<u>**Свойство.**</u> Матрица смежности для неорграфов всегда является симметричной матрицей относительно главной диагонали.

# Матрица смежности для неорграфа




Пример 2. Составить для неорграфа матрицу смежности. Заметим, что граф не является связным, вершины и ребра пронумерованы последовательно по компонентам

# Матрица смежности для примера 2




$$B = \begin{array}{c|ccc:cc} B & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline V_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Вершины $V_1$ и $V_2$ соединены одним ребром, следовательно, в первой строке и втором столбце стоит единица, и во второй строке и первом столбце тоже единица. Обратите внимание, хотя есть петли, в матрице смежности они обозначатся цифрой 1, т.к. одна петля.

Матрица является симметричной относительно главной диагонали.

# Матрица инцидентности для орграфа

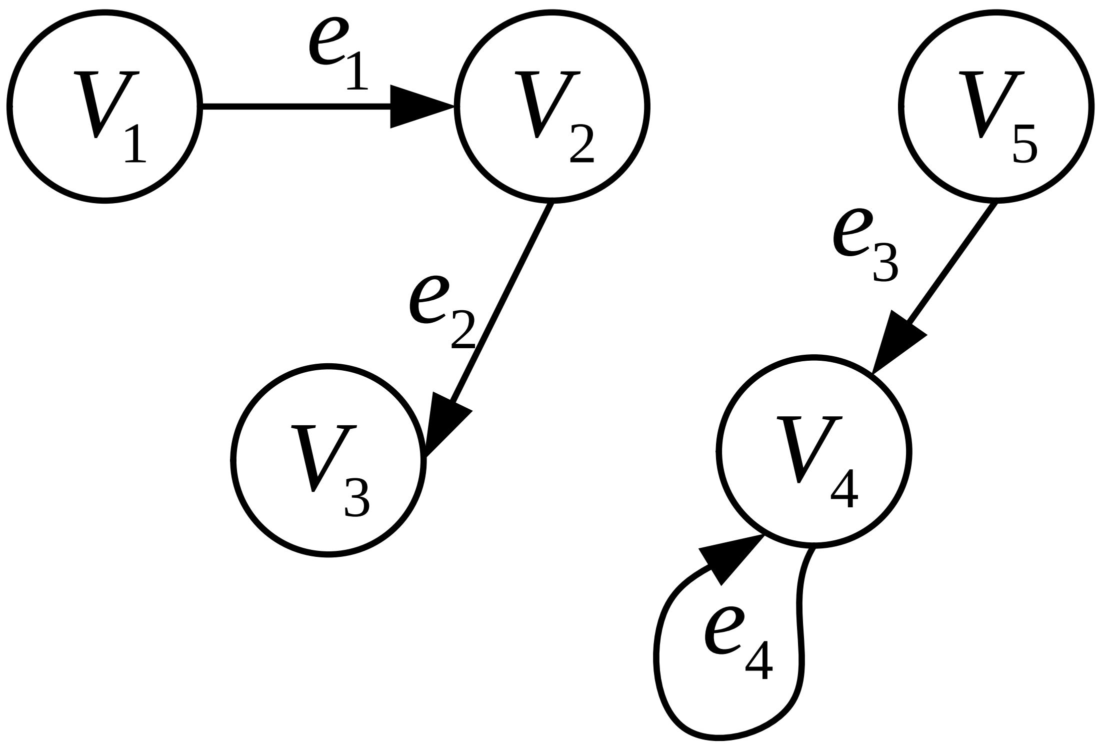
Пусть $G = \langle \mathbf{V}, \mathbf{E} \rangle$ – орграф, имеющий $n$ вершин ($|\mathbf{V}| = n$) и $m$ дуг ($|\mathbf{E}| = m$): $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$, $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$.

Матрицей инцидентности для орграфа $G = \langle \mathbf{V}, \mathbf{E} \rangle$ будет называться матрица $A$:

$$A = [a_{i,j}]_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}} = \left[\begin{array}{c|cccc} A & e_1 & e_2 & \dots & e_m \\ \hline V_1 & & & & \\ V_2 & & a_{i,j} & & \\ \dots & & & & \\ V_n & & & & \end{array}\right], \text{ где}$$

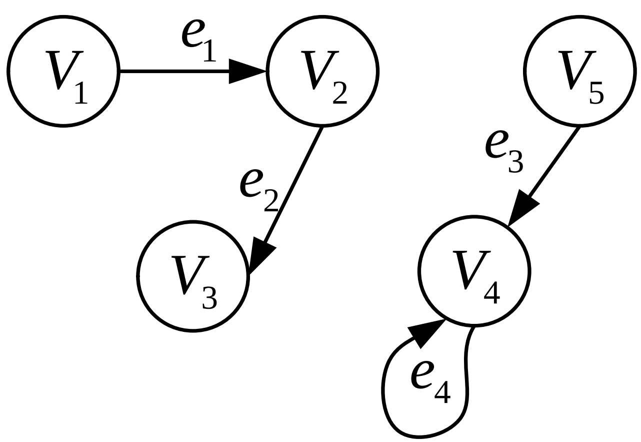
$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если дуга } e_j \text{ не инцидентна вершине } V_i; \\ 1, & \text{если дуга } e_j \text{ положительно инцидентна} \\ & \quad \text{вершине } V_i \text{ (т.е. выходит из вершины } V_i); \\ -1, & \text{если дуга отрицательно инцидентна} \\ & \quad \text{вершине } V_i \text{ (т.е. входит в вершину } V_i); \\ 2, & \text{если дуга } e_j \text{ - петля в вершине } V_i, \end{cases} \qquad i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,m}.$$

# Матрица инцидентности для орграфа




Пример 3. Составить для орграфа матрицу инцидентности. Заметим, что граф не является связным, вершины и ребра пронумерованы последовательно по компонентам

# Матрица инцидентности для примера 3




$$A = \left[\begin{array}{c|cc:cc} A & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline V_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline V_4 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ V_5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Так как дуга $e_1$ направлена из вершины $V_1$ в $V_2$, то в первой строке первого столбца стоит 1, а во второй строке первого столбца стоит -1. Петля в вершине $V_4$ дает в четвертой строке и четвертом столбце цифру 2, и так далее.

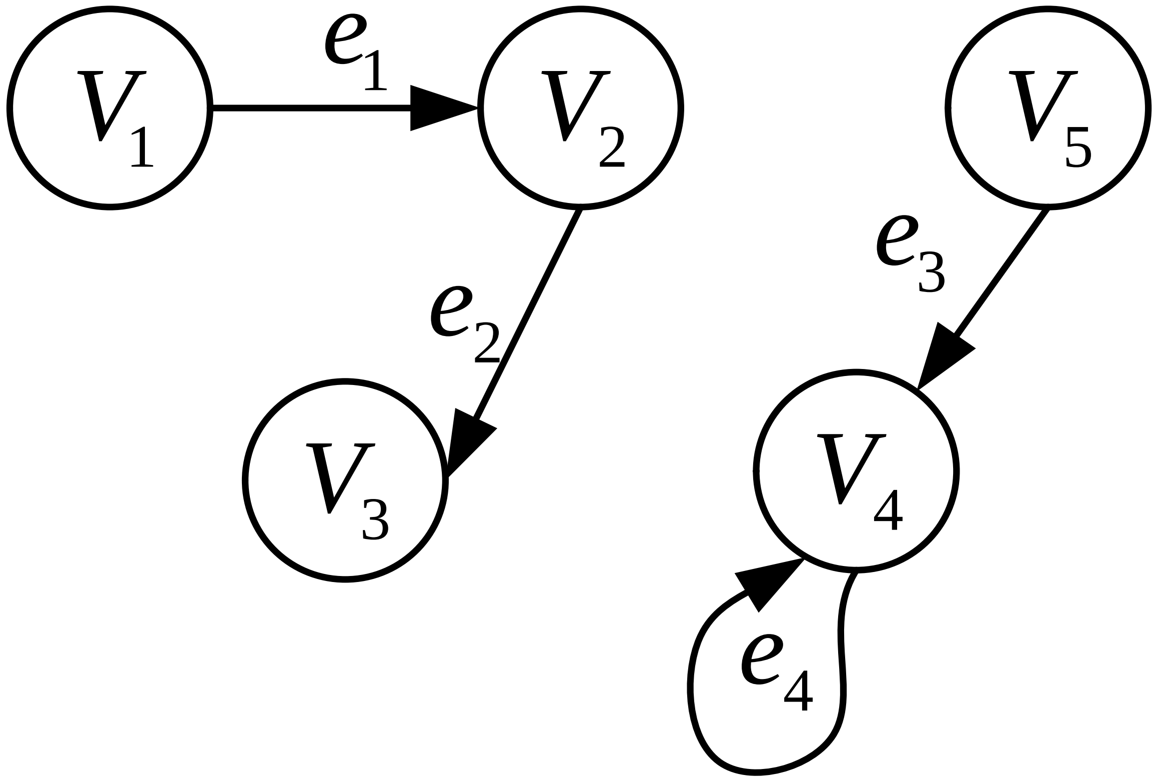
# Матрица смежности для орграфа

Пусть $G = <\mathbf{V}, \mathbf{E}>$ – орграф, имеющий $n$ вершин ($|\mathbf{V}| = n$, $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$). Матрицей смежности для орграфа $G = <\mathbf{V}, \mathbf{E}>$ будет называться квадратная матрица $B$:

$$B = [b_{i,j}]_{i,j=\overline{1,n}} = \left[\begin{array}{c|cccc} B & V_1 & V_2 & \dots & V_n \\ \hline V_1 & & & & \\ V_2 & & b_{i,j} & & \\ \dots & & & & \\ V_n & & & & \end{array}\right],$$

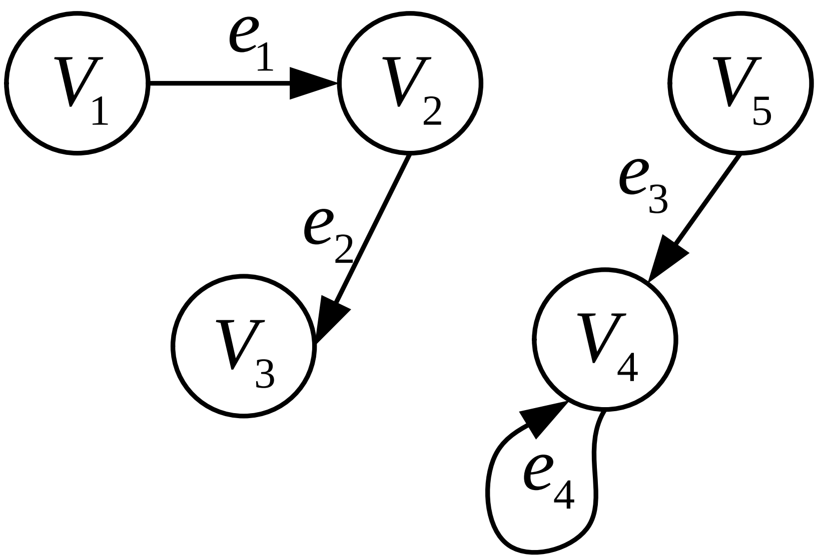
где $b_{i,j}$ – число дуг, направленных от вершины $V_i$ к вершине $V_j$, $i, j = \overline{1,n}$.

# Матрица смежности для орграфа




Пример 4. Составить для орграфа матрицу смежности.
Заметим, что граф не является связным, вершины и ребра пронумерованы последовательно по компонентам

# Матрица смежности для примера 4




$$B = \left[\begin{array}{c|ccc:cc} B & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline V_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Отметим, что граф $G = < \mathbf{V}, \mathbf{E} >$ является несвязным, и это отражено в блочно-диагональной структуре матрицы инцидентности и смежности.

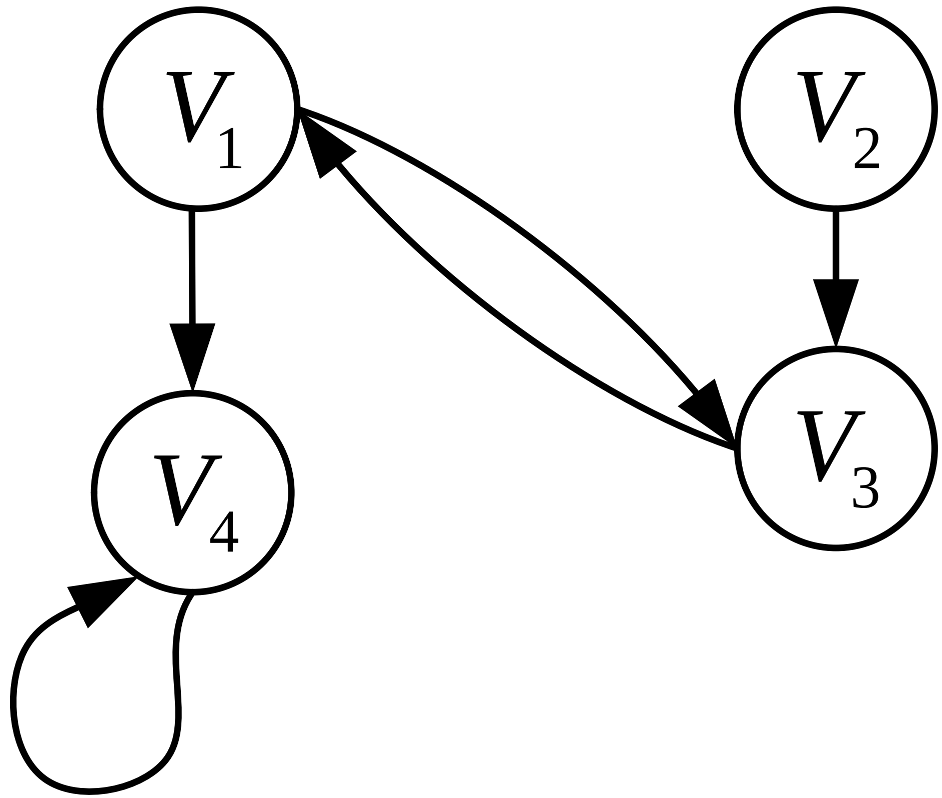
# Список смежности для слабосвязных графов

Списком смежности вершины $V_i \in \mathbf{V}$ называется множество вершин, смежных с ней.

$$u(V_i) = \left\{ V_j : (V_i, V_j) \in \mathbf{E} \right\} \text{ (для неографа) и}$$

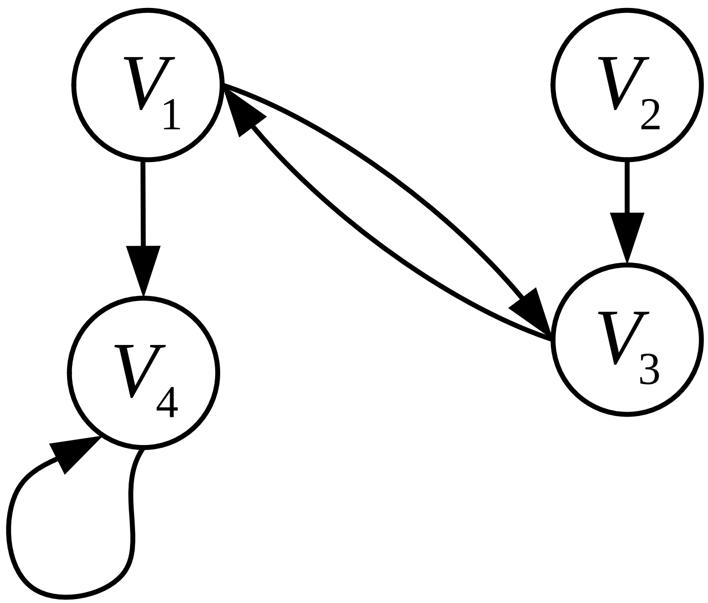
$$u(V_i) = \left\{ V_j : < V_i, V_j > \in \mathbf{E} \right\} \text{ (для орграфов).}$$

# Список смежности для слабосвязных графов




Пример 5. Составить для орграфа список смежности.

# Список смежности для примера 5




$$u(V_1) = \{V_3, V_4\},$$

$$u(V_2) = \{V_3\},$$

$$u(V_3) = \{V_1\},$$

$$u(V_4) = \{V_4\}.$$

# Теорема о числе ормаршрутов между двумя вершинами орграфа

Матрица $B^n$ дает число ориентированных маршрутов длины $n$ между любыми двумя вершинами ориентированного графа.

# Теорема о числе ормаршрутов между двумя вершинами орграфа

Доказательство. (доказательство проводится методом математической индукции)

1) Рассмотрим граф $G = < \mathbf{V}, \mathbf{E} >$. Пусть $|\mathbf{V}| = m$. Введем обозначения:

$b_{i,k}$ – число дуг, соединяющих вершину $V_i$ с вершиной $V_k$,

$b_{k,j}$ – число дуг, соединяющих вершину $V_k$ с вершиной $V_j$,

$b_{i,j}^{(2)}$ – число различных ориентированных маршрутов длины 2 (то есть маршрут состоит из двух дуг) от вершины $V_i$ к вершине $V_j$ и проходящих через вершину $V_k$, $k = \overline{1, m}$.

Тогда $\sum_{k=1}^{m} b_{i,k} \cdot b_{k,j} = b_{i,j}^{(2)}$. Теорема очевидна для $B^2$.

# Теорема о числе ормаршрутов между двумя вершинами орграфа

2) Пусть теорема верна для матрицы $B^{n-1}$. Покажем, что она верна для матрицы $B^n = B^{n-1} \cdot B$.

Если $b_{i,k}^{(n-1)}$ – число всех ормаршрутов длины $(n-1)$ от $V_i$ к $V_k$,

$b_{k,j}$ – число дуг от вершины $V_k$ к $V_j$, то

$b_{i,k}^{(n-1)} \cdot b_{k,j}$ – число всех ормаршрутов от $V_i$ к $V_j$, проходящих через $V_k$.

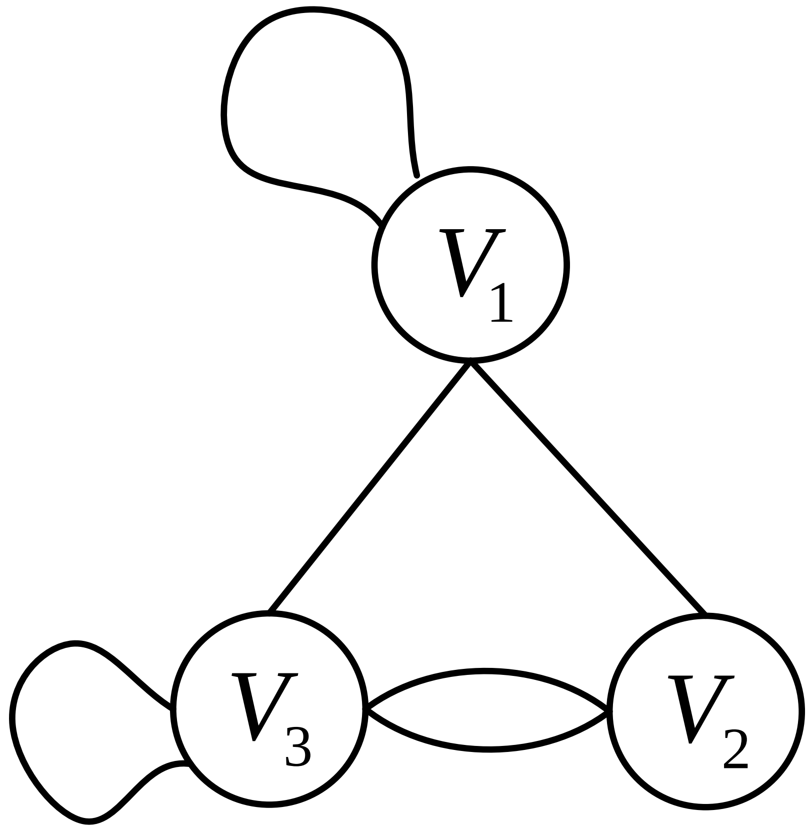
Тогда $\sum_{k=1}^{m} b_{i,k}^{(n-1)} \cdot b_{k,j} = b_{i,j}^{(n)}$ – число всех ормаршрутов длины $n$ направленных от $V_i$ к $V_j$ и $b_{i,j}^{(n)}$ – элемент матрицы $B^n$.

<u>Замечание 1:</u> Если существует $l$, $\forall n \geq l$: $B^n = 0$, то в графе нет циклов.

<u>Замечание 2:</u> Теорема верна и для неориентированных графов.

# Псевдограф

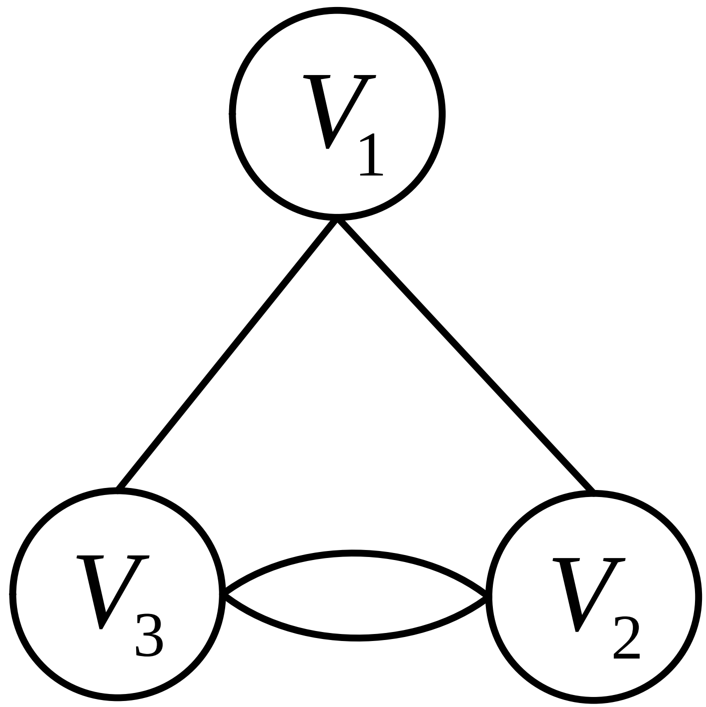
Псевдографом называется граф, в котором допускаются петли и кратные параллельные ребра.




Пример 6.

# Мультиграф

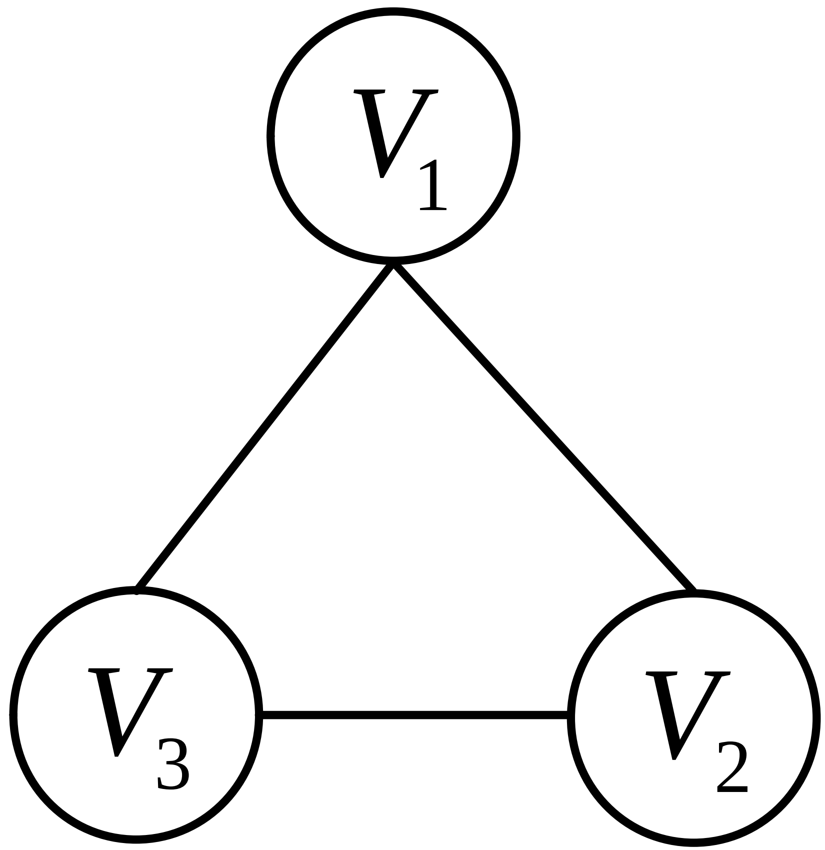
Мультиграфом называется граф, в котором допускаются параллельные ребра и нет петель.




Пример 7.

# Простой неограф

Неограф называется простым, если он не содержит петель и кратных параллельных ребер.

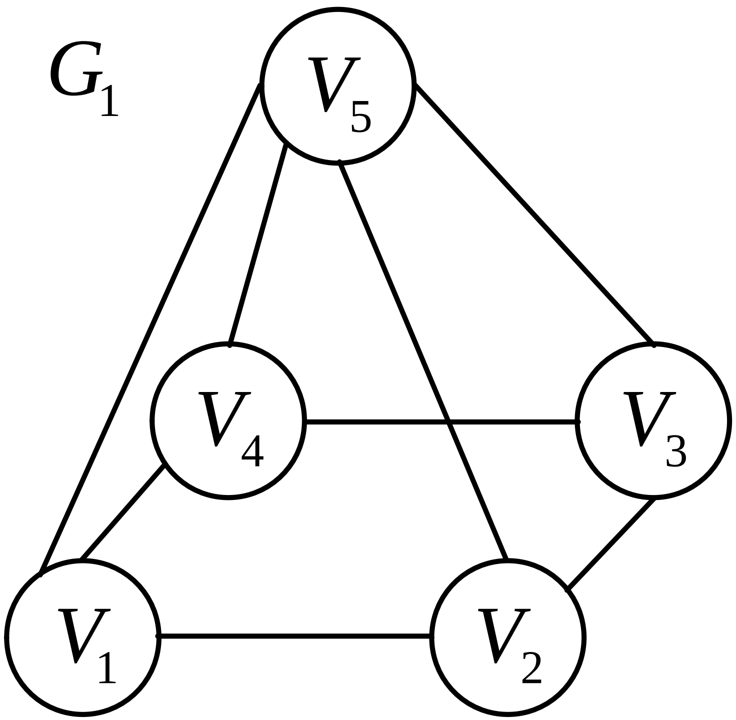


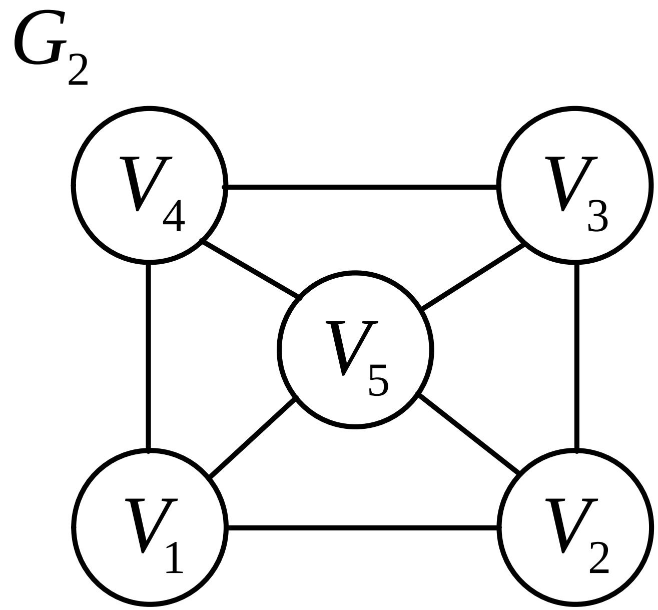

Пример 8.

# Планарные и плоские графы

Граф называется **плоским**, если он изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются его вершинами.

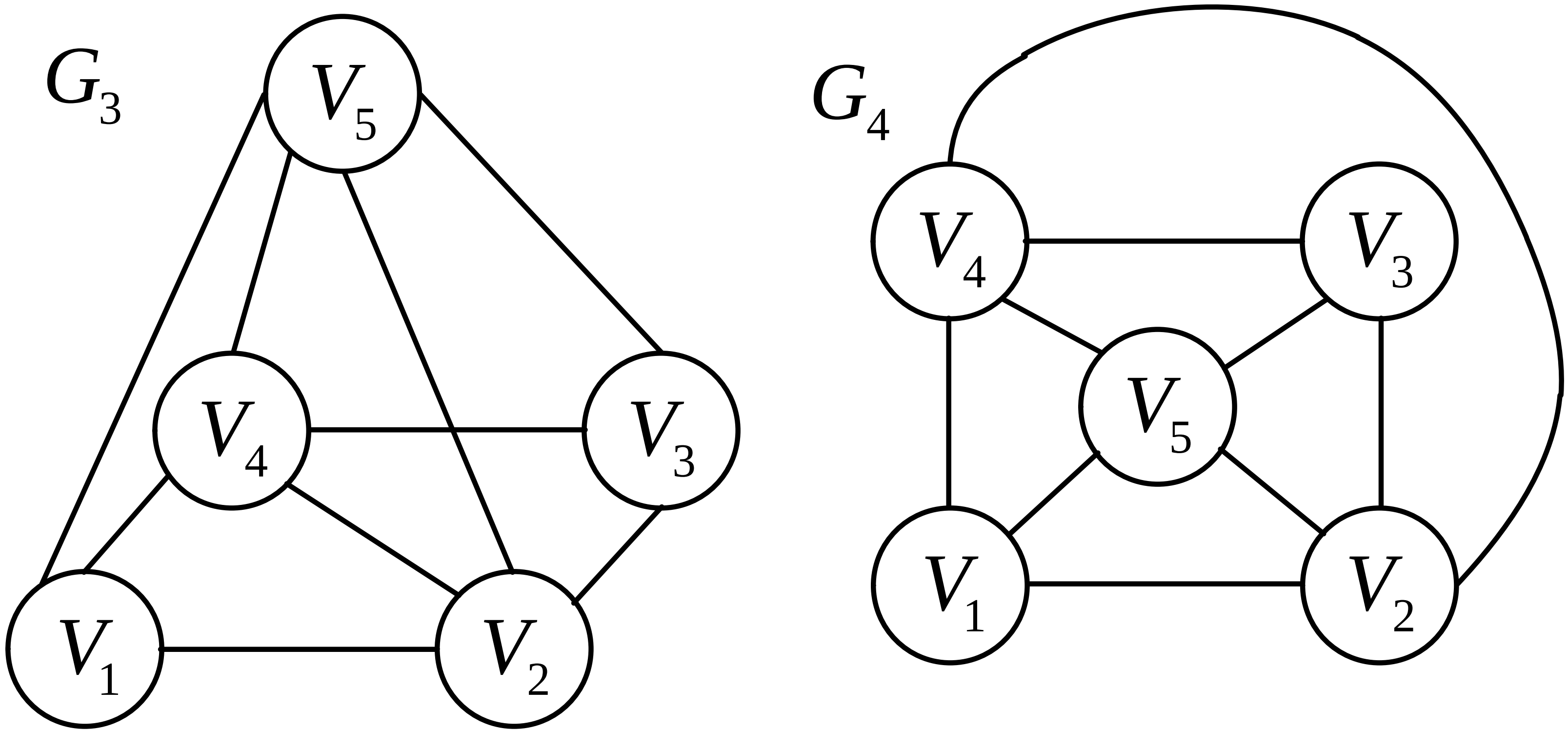
Граф называется **планарным**, если он изоморфен плоскому графу.



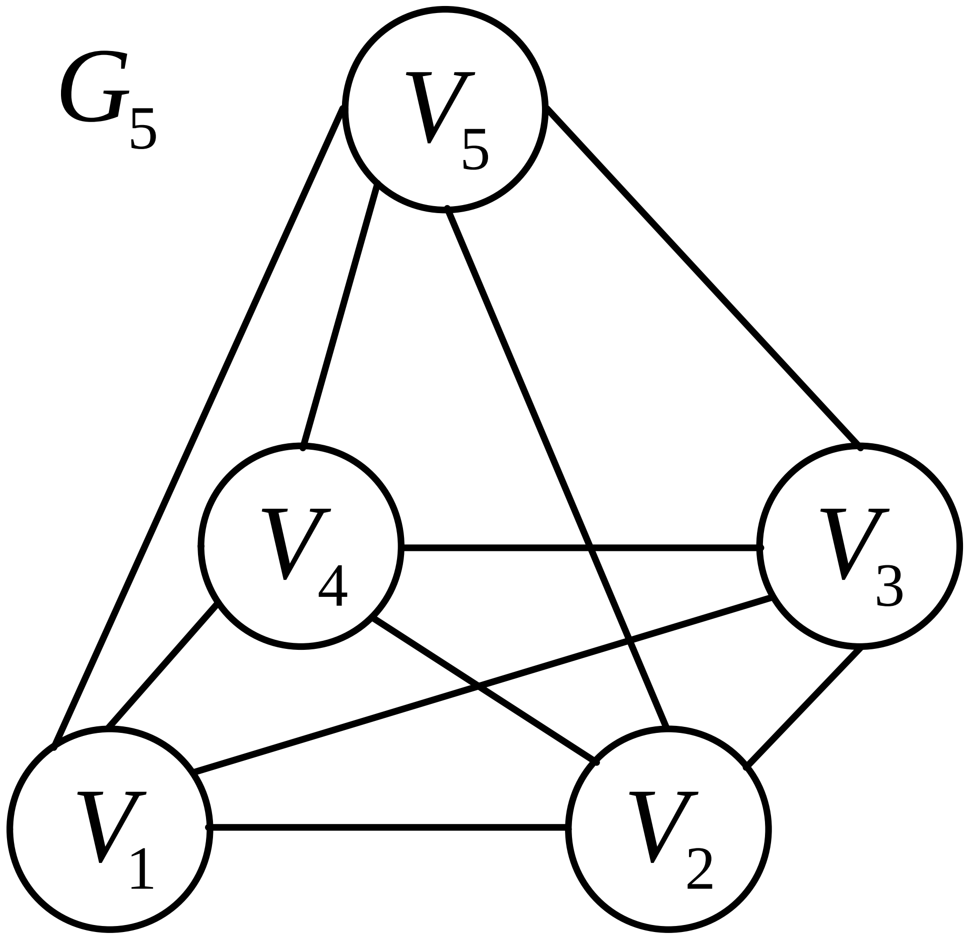

Пример 9. Планарный и плоский графы

# Планарные и плоские графы



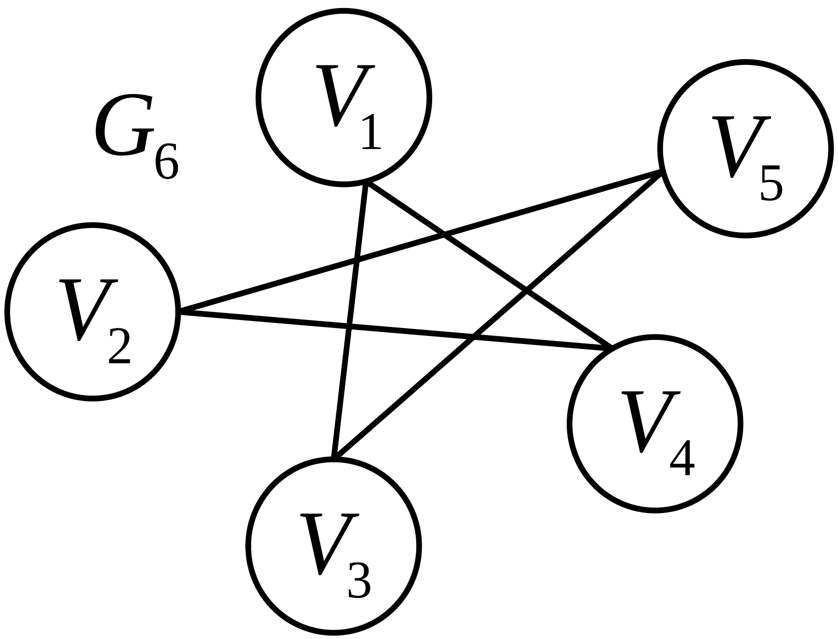

Пример 10. Планарный и плоский графы

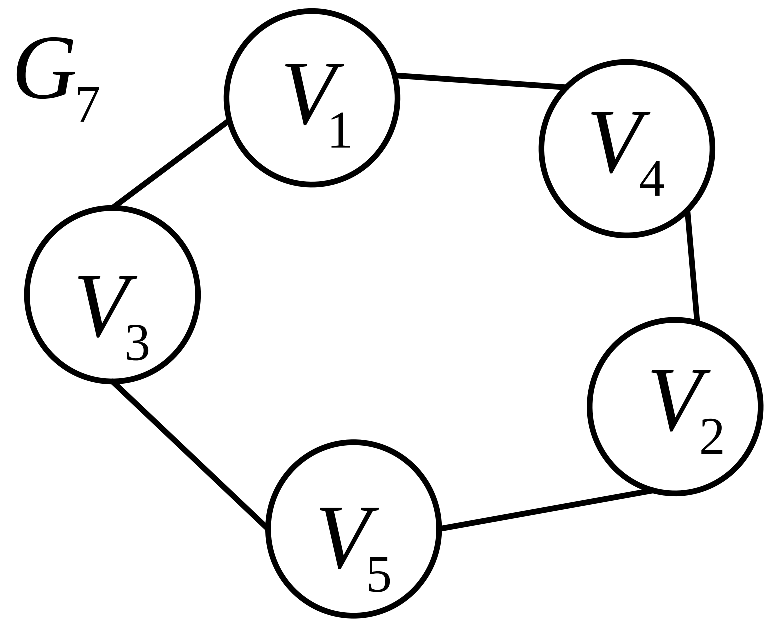
# Упражнение: определить, является ли граф плоским? планарным?




Пример 11. Объясните свои суждения при выполнении упражнения

# Планарные и плоские графы




Пример 11. Планарный и плоский графы

# Матрица весов

Для графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $|\mathbf{V}| = n$, матрица весов $\mathbf{W}$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{W} = \left( \begin{array}{c|ccc} & V_1 & \dots & V_n \\ \hline V_1 & & & \\ \dots & & w_{i,j} & \\ V_n & & & \end{array} \right), \ i, j = \overline{1, n} \text{ и}$$

$$w_{i,j} = \begin{cases} \text{минимальный вес ребра от вершины } V_i \text{ до вершины } V_j, \\ 0, \text{ если } i = j, \\ \infty, \text{ если ребра } (V_i, V_j) \text{ не существует.} \end{cases}$$

Тема следующей лекции:

«Алгоритм Краскала»