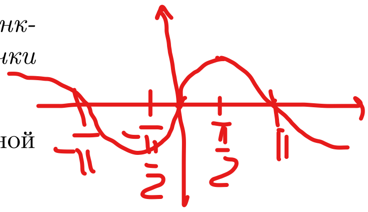
$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \nexists$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sin x \cdot \frac{1}{x} = 0$

огр. б.м.

$\frac{1}{x}\to 0$

Теорема 3.10. *Произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ функции на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки x_0 функцию есть бесконечно малая при $x \to x_0$ функция.*



Доказательство. Пусть функция $g : X \to \mathbb{R}$ является ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки x_0, т.е.

$$\exists C > 0 : \ |g(x)| \le C \ \ \forall x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta_1.$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

$\boxed{|\sin x|}$

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \to |f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда

$|f(x) - 0|$

$|\sin x| \le 1$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

$$\forall x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{\cancel{C}} \cdot \cancel{C} = \varepsilon.$$

$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)g(x)| < \varepsilon$

Следовательно, $f \cdot g$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией. $\square$

Определение 3.15. Если для функций $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ $\exists\, c > 0, \ U(x_0) : \ |f(x)| \le c|g(x)| \ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$, то функцию f называют ограниченной по сравнению с функцией g в окрестности точки x_0.

$g(x) \equiv 1$

Записывают $f(x) = O(g(x)), \ x \to x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$

Лемма 3.3. *Если $f(x) = \varphi(x)g(x), \ x \in X$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = k$, то $f(x) = O(g(x)), \ x \to x_0$.*

Доказательство. Из существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = k$ следует существование такой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0, что функция φ ограничена на $X \cap \mathring{U}(x_0)$, то есть имеется такая постоянная $C > 0$, что для всех $x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| \le C$, следовательно, и неравенство

$$|f(x)| = |\varphi(x)||g(x)| \le C|g(x)|.$$

Это, согласно определению 3.15, и означает, что $f(x) = O(g(x)), \ x \to x_0$. $\square$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Определение 3.16. Функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ называются эквивалентными (асимптотически равными) при $x \to x_0$, если $\exists\ \varphi : X \to \mathbb{R}, U(x_0) : \ \ f(x) = \varphi(x)g(x) \ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 1$.

Записывают $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

$\sin x \sim x, \ x \to 0$

$x_n = n$

1, 2, 3, 4, ...,

1, 3, 5, ...

~~3, 4, 5, 7, ...~~

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ ∄.

$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \to 0$ при $n\to\infty$

$y_n = \frac{1}{\pi+2\pi n} \to 0$ при $n\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi+2\pi n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

Теорема 3.11. *Пусть функции f, f_1, g, g_1 заданы на множестве X и $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$. Тогда если существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{3.20}$$

Доказательство. По условию $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$. Это означает, что $f(x) = \varphi(x) f_1(x)$ и $g(x) = \psi(x) g_1(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = 1$.

Так как существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ и $\psi(x) \to 1$ при $x \to x_0$, то найдется такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $g_1(x) \neq 0$ и $\psi(x) \neq 0$ $\forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$. В этом случае $g(x) = \psi(x) g_1(x) \neq 0$ $\forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$, поэтому частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено для всех $x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$.

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) f_1(x)}{\psi(x) g_1(x)} = \frac{\overset{=1}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}}{\underset{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x)}} \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

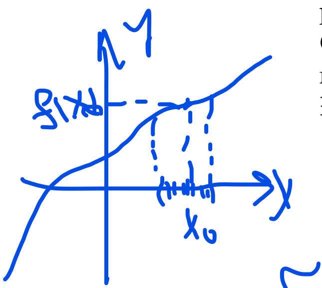
то есть имеет место равенство (3.20). □

Обе части равенства (3.20) равноправны, поэтому из доказанной теоремы следует, что предел, стоящий в левой части, существует тогда и только тогда, когда существует предел в правой части, причем в случае их существования они совпадают. Это делает очень удобным применение теоремы 3.11 на практике: ее можно использовать для вычисления пределов, не зная заранее, существует или нет рассматриваемый предел.

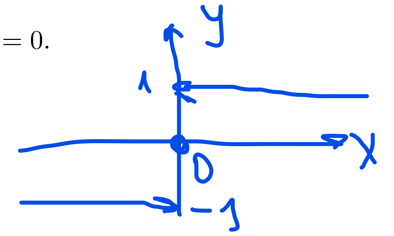
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Определение 3.17. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$ по сравнению с функцией $g : X \to \mathbb{R}$, если $\exists\ \varepsilon : X \to \mathbb{R},\ U(x_0) :\ \ f(x) = \varepsilon(x) g(x)\ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Записывают $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0$.



$x_0-\delta < x < x_0+\delta$



§ 3.8 Непрерывные функции

Определение 3.18. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in X,\ \boxed{|x - x_0| < \delta} \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

0

$f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$. $f(x) = \bar{o}(g(x))$, $x \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} - \frac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} - \underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1} = 1 - 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

$f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x,\ g(x) = x^3,\ x_0 = 0.$ $\quad f(x) = O(g(x)),\ x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Теорема 3.12. *Пусть x_0 – предельная точка множества X, $x_0 \in X$. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ является непрерывной в точке $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.* A

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то есть

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Тогда для $x = x_0$ имеем $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Следовательно, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in X,\ |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Таким образом, функция f непрерывна в точке x_0.
Обратно, пусть функция f непрерывна в точке x_0, то есть

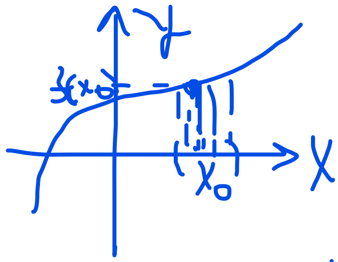
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in X,\ |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Определение 3.19. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.



Теорема 3.13. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ и $f(x_0) \neq 0$. Тогда функция f сохраняет знак на пересечении некоторой окрестности точки x_0 с множеством X.*

Доказательство. Согласно определению непрерывности функции f в точке x_0, по заданному числу $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X \cap U(x_0, \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2}$, или $f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}$

$$-\frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{|f(x)|}{2}$$

$$f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}. \qquad (3.21)$$

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}$$

Если $f(x_0) > 0$, то из левого неравенства (3.21) следует, что

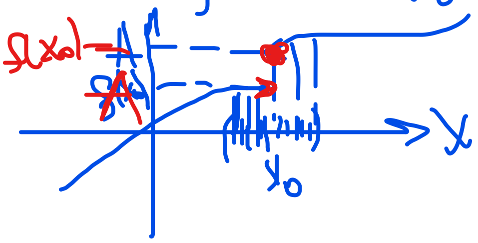
$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0 \ \text{ для всех } x \in X \cap U(x_0, \delta).$$

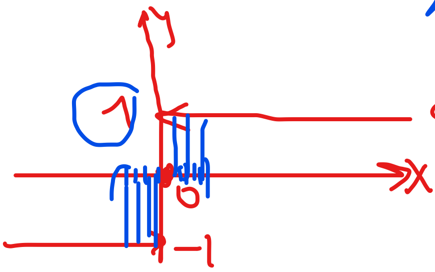
Если $f(x_0) < 0$, то из правого неравенства (3.21) следует, что

$$f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0 \ \text{ для всех } x \in X \cap U(x_0, \delta).$$

□

$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ $\qquad$ $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$





$y=\operatorname{sgn} x = \begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

Определение 3.20. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной слева (справа) в точке $x_0 \in X$, если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 + 0) = f(x_0)$).

Теорема 3.14 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена, то есть*

$$\exists\, C > 0 : \forall x \in [a, b] \to |f(x)| \le C. \tag{3.22}$$

Доказательство. Предположим противное, тогда

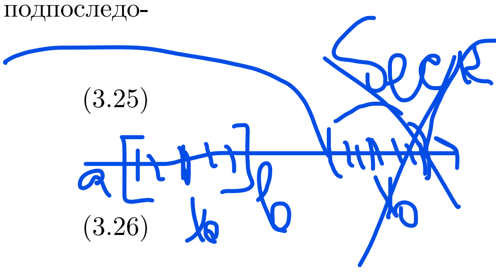
$$\forall\, C > 0 \;\; \exists\, x_c \in [a, b] : |f(x_c)| > C. \tag{3.23}$$

Полагая в (3.23) $C = 1, 2, ..., n, ...,$ получим, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n. \tag{3.24}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \le x_n \le b$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то есть существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и точка x_0 такие, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0, \tag{3.25}$$



где в силу условия (3.24) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$a \le x_{n_k} \le b. \tag{3.26}$$

Из условий (3.25) и (3.26) следует, что $x_0 \in [a, b]$, а из условия (3.25) в силу непрерывности функции f в точке x_0 получаем

$$f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \in \mathbb{R} \tag{3.27}$$

С другой стороны, утверждение (3.24) выполняется при всех $n \in \mathbb{N}$, и в частности при $n = n_k$ $(k = 1, 2, ...)$, то есть

$$|f(x_{n_k})| > n_k,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$, так как $n_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Это противоречит равенству (3.27), согласно которому последовательность имеет конечный предел. Поэтому условие (3.23) не может выполняться, то есть справедливо утверждение (3.22). $\square$

$|f(x)| \le C$

$f(x)=\frac{1}{x},\ x\in(0,1)$