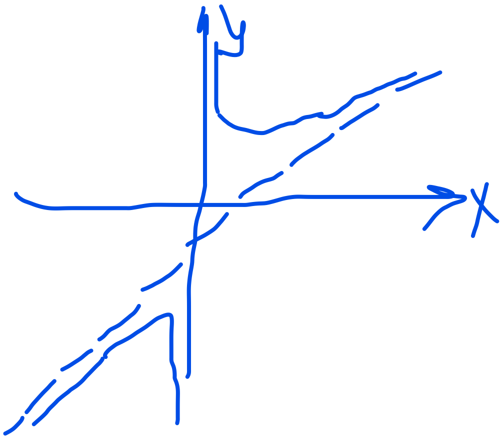
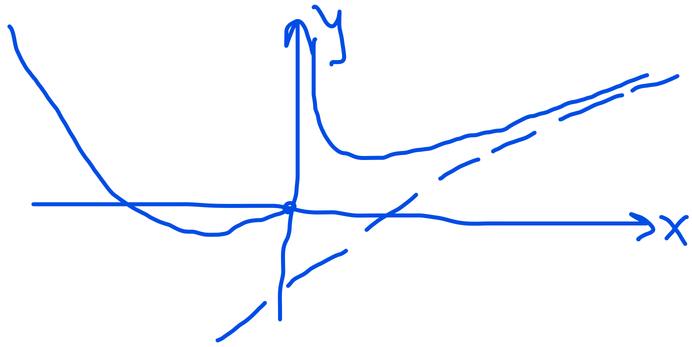
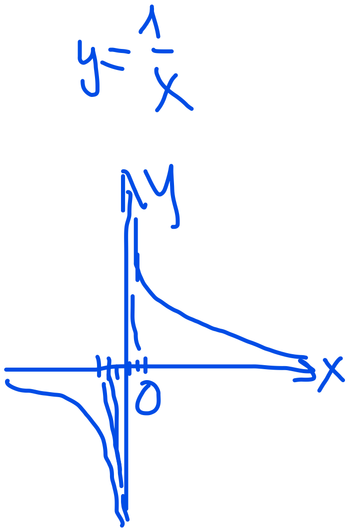
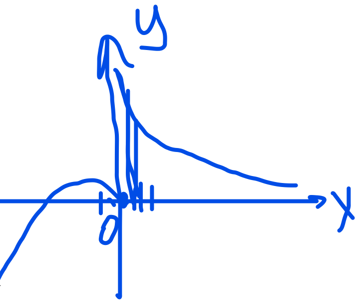




Определение 4.19. Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (соответственно для всех $x < a$). Если существуют такие числа k и l, что $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (kx + l)] = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (kx + l)] = 0\right)$, то прямая $y = kx + l$ называется невертикальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$).





Коэффициенты k и l находятся следующим образом:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad l = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$$

$$\left(k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad l = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx)\right).$$

Определение 4.20. Пусть функция f определена в некоторой окрестности или проколотой окрестности точки x_0 (быть может, односторонней) и пусть выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty.$$

Тогда прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции f.

§ 4.10 Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Теорема 4.22. *Пусть заданы функции* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *и* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющие условиям:*
1. дифференцируемости на (a, b);
2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$;
3. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$;
4. существует $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.47}$$

$[a,b]$ $\qquad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Доказательство. В силу условий теоремы функции f и g не определены в точке a; доопределим их, положив $f(a) = g(a) = 0$. Теперь функции f и g непрерывны в точке a и удовлетворяют условиям теоремы Коши о конечных приращениях (см. § 4.7) на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$. Поэтому для каждого x, $a < x < b$, существует такое $\xi = \xi(x) \in (a, x)$, что

$\xi = \xi(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{4.48}$$

$\xi(x) = t$

Если $x \to a + 0$, то $\xi \to a + 0$, поэтому

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{t \to a+0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Таким образом, из равенства (4.48) следует, что справедливо утверждение (4.47). □

Доказанная теорема (с соответствующими изменениями ее условий) остается справедливой при $x \to a - 0$ и $x \to a$.

$\dfrac{0}{0}$

Теорема 4.23. *Пусть заданы функции $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ и $g : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:*
1. дифференцируемости на $(c, +\infty)$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$;
3. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (c, +\infty)$;
4. существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует и предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$t = \dfrac{1}{x}$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $c > 0$ (если $c < 0$, то в качестве нового значения c возьмем, например, $c = 1$).

Выполним замену переменного $x = 1/t$. Функции $\varphi(t) = f(1/t)$ и $\psi(t) = g(1/t)$ определены на интервале $(0, 1/c)$; если $x \to +\infty$, то $t \to +0$, и наоборот. На интервале $(0, 1/c)$ существуют производные

$\dfrac{1}{t} = t^{-1}$

$$\varphi'(t) = -f'\left(\frac{1}{t}\right)\cancel{\frac{1}{t^2}} \quad \text{и} \quad \psi'(t) = -g'\left(\frac{1}{t}\right)\cancel{\frac{1}{t^2}},$$

где штрихом обозначены производные функций f и g по первоначальному аргументу.

Из сказанного и условий теоремы следует, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют на интервале $(0, 1/c)$ условиям 1–3 теоремы 4.22. Покажем еще, что из существования предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ следует существование предела $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ и равенство его A, то есть что выполняется и условие 4 теоремы 4.22. Действительно, используя полученные выражения для производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, находим

$x = \frac{1}{t}$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

$t = \frac{1}{x}$

Теперь из теоремы 4.22, примененной к функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, следует, что $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = A$. Но

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где $x = 1/t$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = A.$$

□

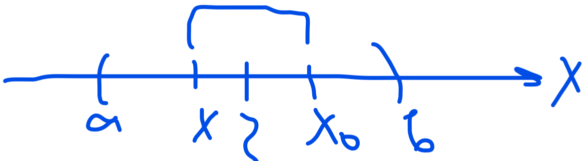
Эта теорема остается верной с соответствующим видоизменением и при $x \to -\infty$.

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Теорема 4.24. *Пусть заданы функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:*
1. дифференцируемости на (a, b);
2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$;
3. $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;
4. существует $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

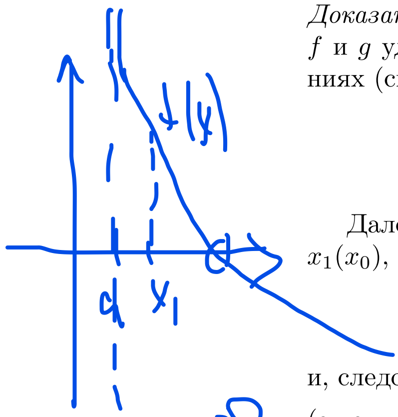
Тогда существует и предел

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.49}$$



$\xi = \xi(x_0, x)$

$[a, b]$



Доказательство. Если $a < x < x_0 < b$, то на отрезке $[x, x_0]$ функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши о конечных приращениях (см. § 4.7), поэтому существует такая точка $\xi = \xi(x_0, x)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x < \xi < x_0. \tag{4.50}$$

Далее, в силу условия 2 теоремы, существует такая точка $x_1 = x_1(x_0)$, $a < x_1 < x_0$, что

$$f(x) \neq 0, \;\; g(x) \neq 0, \;\; f(x) \neq f(x_0) \;\; \forall x \in (a, x_1),$$

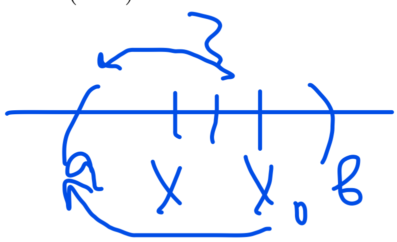
и, следовательно, можно выполнять деление на $f(x)$, $g(x)$ и $1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}$ (а также и на $1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}$, поскольку, в силу условий теоремы, $g(x) \neq g(x_0)$, см. теорему Коши § 4.7). Для этих значений x из (4.50) вытекает равенство

$$\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \to 0$$

$$\frac{f(x)\left(1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}\right)}{g(x)\left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

откуда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{4.51}$$



$$\lim_{\xi \to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$$

В правой части равенства (4.51) первый сомножитель $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ стремится к A при $x_0 \to a + 0$, так как $a < \xi < x_0$, а второй, в силу условия 2 теоремы, стремится к 1 при $x \to a + 0$ и фиксированном x_0:

$$\lim_{x \to a+0} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1. \tag{4.52}$$

Непосредственно перейти к пределу в равенстве (4.51) нельзя, поскольку указанные выше предельные переходы в сомножителях в правой части этого равенства происходят при разных условиях: при $x_0 \to a + 0$ и при фиксированном x_0, но $x \to a + 0$. Однако если задать произвольно окрестность $U(A)$ предела A, то, в силу условия 4 теоремы, можно сначала зафиксировать точку x_0 столь близко к точке a, что отношение $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ попадет в эту окрестность, ибо $a < \xi < x_0$. Согласно же условию (4.52), для всех точек x, достаточно близких к a, отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ (см. (4.51)) также будет принадлежать указанной окрестности $U(A)$, а это означает справедливость утверждения (4.49). □

1) $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{1/f(x)} - \frac{1}{1/g(x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

2) $0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to a} \overset{\to 0}{f(x)}\,\overset{\to\infty}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{0}$$

3) $(f(x))^{g(x)}$ $\quad 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to a} \underbrace{g(x)\ln f(x)}}$$

$0\cdot\infty$

$0\cdot\infty$

$\infty\cdot 0$