Дифференциальная геометрия
Криволинейные координаты. Преобразование координат.

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Рассмотрим следующее уравнение:

$$F(x^1, \dots, x^n, y) = 0, \tag{3}$$

которое задает в неявном виде функцию многих переменных $y(x^1, \dots, x^n)$. Нас будет интересовать условия, которые необходимо наложить на функцию $F(x^1, \dots, x^n, y)$, чтобы уравнение (3) определяло однозначную и непрерывную функцию $y(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности $U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0)$ некоторой точке $x_0^1, \dots, x_0^n, y_0$.

Эти условия определяются теоремой о неявной функции. Данная теорема известна из курса математического анализа [1, Глава VIII, §5].

Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции 2

Теорема

Если функция $F(x^1, \dots, x^n, y) \colon U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) \to \mathbb{R}$, *определенная в окрестности точки* $x_0^1, \dots, x_0^n, y_0$, *такова, что*

- $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$,
- $F(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) = 0$,
- $F_y'(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) \neq 0$,

то в некоторой подокрестности окрестности $U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0)$ *уравнение (3) однозначно определяет непрерывную и дифференцируемую функцию* $y = f(x^1, \dots, x^n)$.

Аналогичную теорему можно сформулировать для многомерного случая. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = 0, \\ F_2(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = 0, \\ \dots \\ F_n(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции 3

эта система уравнений определяет неявным образом систему функций

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^n), \\ y^2 = f^2(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^n = f^n(x^1, \dots, x^n). \end{cases}$$

Необходимо найти такие условия, налагаемые на функции $F_1, \dots, F_n$, чтобы набор $y^1, \dots, y^n$ был набором непрерывных и дифференцируемых функций от n переменных $x^1, \dots, x^n$. Выше мы видели, что в вопросе о существовании однозначной неявной функции, определяемой одним уравнением, одним из условий было условие неравенства нулю производной от F по y, то есть по той переменной, которая подлежит определению как неявная функция.

В вопросе существования системы однозначных неявных функций роль $F_y^{'}$ играет матрица Якоби J и определитель Якоби $\det J$ (якобиан).

$$J = \frac{\partial(F_1, \dots F_n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y^1} & \frac{\partial F_1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y^1} & \frac{\partial F_2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y^1} & \frac{\partial F_n}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

Теорема

Если функции $F_i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \colon U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0, \dots, y^n) \to \mathbb{R}$*, определенные в окрестности точки* $x_0^1, \dots, x_0^n, y_0, \dots, y^n$*, таковы, что*

- $F_i \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, $i = 1, \dots, n$
- $F_i(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^n) = 0$, $i = 1, \dots, n$,
- *определитель Якоби системы (4) в точке* $x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^n$ *не равен нулю*

$$\det J(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^n) = \left. \frac{\partial(F_1, \dots F_n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right|_{x_0^1, \dots, x_0^n} \neq 0$$

то в некоторой подокрестности окрестности $U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0, \dots, y^n)$ *система уравнений (4) однозначно определяет систему непрерывных и дифференцируемых функций* $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$.

Рассмотрим область пространства $\mathbb{R}^n$ в окрестности U_P некоторой точки P. Предположим, что в данной области заданы две системы координат:

- «старая» система координат $(y^1, \dots, y^n)$ с радиус-вектором $\mathbf{r}(y^1, \dots x, y^n)$
- «новая» система координат $(x^1, \dots, x^n)$ с радиус-вектором $\mathbf{r}(x^1, \dots x, x^n)$.

Пусть также заданы n функций преобразования «старых» координат к «новым» (функция перехода)

$$\varphi^i : (y^1, \dots, y^n) \to (x^1, \dots, x^n), \varphi^i \in C^1(U_P).$$

Это правило преобразования координат можно записать в виде системы

$$\begin{cases} x^1 = \varphi^1(y^1, \dots, y^n), \\ x^2 = \varphi^2(y^1, \dots, y^n), \\ \vdots \\ x^n = \varphi^n(y^1, \dots, y^n), \end{cases} \tag{5}$$

или более емко с помощью индексных обозначений:

$$x^i = \varphi^i(y^j), \text{ где } i, j = 1, \dots, n.$$

Какие условия надо наложить на функции φ^i чтобы преобразование координат было взаимно однозначным и, следовательно, обратимым? Ответ на данный вопрос даст теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции.

Для того, чтобы применить эту теорему запишем систему (5) в следующем виде:

$$\begin{cases} F^1 = x^1 - \varphi^1(y^1, \dots, y^n) = 0, \\ F^2 = x^2 - \varphi^2(y^1, \dots, y^n) = 0, \\ \dots \\ F^n = x^n - \varphi^n(y^1, \dots, y^n) = 0. \end{cases}$$

Из такой записи видно, что на функции φ^i надо наложить условия непрерывности и дифференцируемости (что уже было сделано), а также условие неравенства нулю определителя Якоби в точке P:

$$J = \frac{\partial(F^1,\dots F^n)}{\partial(y^1,\dots,y^n)} = \frac{\partial(\varphi^1,\dots \varphi^n)}{\partial(y^1,\dots,y^n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial y^1} & \frac{\partial\varphi^1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial\varphi^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^1} & \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^n}{\partial y^1} & \frac{\partial\varphi^n}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

$$\det \left.\frac{\partial(\varphi^1,\dots \varphi^n)}{\partial(y^1,\dots,y^n)}\right|_{y^j=y^j_0} \neq 0.$$

Заметим, что можно с помощью индексных обозначений можно емко записать матрицу Якоби

$$\frac{\partial(\varphi^1,\dots \varphi^n)}{\partial(y^1,\dots,y^n)} \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}, \text{ где } i,j=1,\dots,n.$$

Преобразования координат 4

Выполнение этих условий гарантирует существование обратных функций $(\varphi^i)^{-1}$, которые однозначно выражают «новые» координаты x^i через «старые» y^i:

$$\begin{cases} y^1 = (\varphi^1)^{-1}(x^1, \dots, x^n), \\ y^2 = (\varphi^2)^{-1}(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^n = (\varphi^n)^{-1}(x^1, \dots, x^n). \end{cases}$$

Так как координаты x^i и y^i связаны взаимно однозначно $x^i \leftrightarrow y^i$, то можно считать, что каждая координата x^i есть функция от всех y^i и наоборот. Записывают:

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \\ y^2 = y^2(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^n = y^n(x^1, \dots, x^n), \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^1 = x^1(y^1, \dots, y^n), \\ x^2 = x^2(y^1, \dots, y^n), \\ \dots \\ x^n = x^n(y^1, \dots, y^n). \end{cases}$$

Преобразования координат 5

Также как и радиус-вектор произвольной точки имеет разные компоненты в разных системах координат:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \dots, x^n) = \mathbf{r}(y^1, \dots, y^n).$$

Матрица Якоби J и ее обратная J^{-1} записываются как:

$$J = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \text{ и } J^{-1} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

Матрица Якоби задает **линейную** часть (первое слагаемое ряда Тейлора) в общем случае **нелинейного** преобразования координат $x^i \leftrightarrow y^i$.

Обобщая вышесказанное, сформулируем определение.

Определение

Точка $P(x_0^1, \dots, x_0^n)$ называется неособой точкой системы координат $\{y^1, \dots, y^n\}$ если в этой точке определитель матрицы Якоби преобразования не равен нулю т.е.

$$\det \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)}\bigg|_P \neq 0$$

и $x^i(y_0^1, \dots, y_0^n) = x_0^i$. Сама система координат при этом называется регулярной. В случае, если данные условия не выполняются, то система координат нерегулярная, а точка P — особая.

Криволинейные координаты

Пусть задано преобразование от декартовой системы координат $(x^1, \dots, x^n)$ к системе координат $q^1, \dots, q^n$. Говорят, что $(q^1 \dots, q^n)$ является криволинейными координатами, если

- функции $x^i = x^i(q^1, \dots, q^n)$ имеют непрерывные производные всех порядков;
- Определитель матрицы Якоби отличен от нуля во всех точках рассматриваемой области:

$$\det\left\{\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right\} \neq 0.$$

Из этих требований следует, что обратные функции $q^i(x^1, \dots, x^n)$ также имеют непрерывные производные всех порядков и определитель обратной матрицы Якоби также отличен от нуля:

$$\det\{J^{-1}\} = \det\left\{\frac{\partial q^i}{\partial x^j}\right\} \neq 0.$$

Координатные поверхности и линии

Функции $x^i = x^i(q^1, \dots, q^n)$ можно рассматривать одновременно для всех значений $i = 1, \dots, n$ введя радиус-вектор $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, \dots, q^n) = \begin{pmatrix} x^1(q^1, \dots, q^n) \\ x^2(q^1, \dots, q^n) \\ \vdots \\ x^n(q^1, \dots, q^n) \end{pmatrix}$$

- Условия $q^i = \mathrm{const}$ определяют n семейств координатных гиперповерхностей.
- Гиперповерхности одного семейства не пересекаются.
- Любые $n - 1$ гиперповерхностей разных семейств пересекаются по некоторой кривой. Такие кривые называются координатными.

Векторное поле базисов

Касательные векторы к координатным кривым определяются как

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial q^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial q^k} \end{pmatrix}$$

Эти векторы задают локальный базис в виде векторного поля в каждой точке окрестности, в которой введена криволинейная система координат.

Компоненты локального метрического тензора криволинейной системы координат определяется как:

$$g_{ij} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \right)$$

Простейшим примером криволинейной системы координат являются полярные координаты (r, φ), связанные с декартовыми следующими формулами:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Используя эти соотношения вычисляем матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

и определитель Якоби:

$$\det J = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Поскольку при $r = 0$ якобиан тождественно равен нулю $\det J = 0$, то точка $(0, \varphi)$ является особой. В декартовой системе координат этой точке соответствует точка $(0, 0)$.

Полярная системы координат 2

Для придания однозначности преобразованию декартовых координат к полярным необходимо исключить точку $(0, \varphi)$:

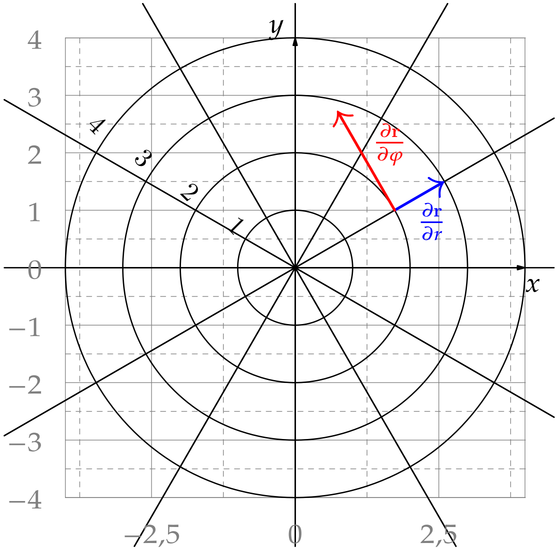
$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r > 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Базисные векторы в фиксированной точке выражаются через $\mathbf{r}(r, \varphi)$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right) = 1, \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right) = r^2, \qquad \Rightarrow G = J^T J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \\ g_{12} = g_{21} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right) = 0. \end{aligned}$$

Координатные кривые полярной системы координат



Координатные линии двух типов:

- $\varphi = \text{const}$ — лучи, исходящие из точки O;
- $r = \text{const}$ — концентрические окружности с центром в точке O.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Эллиптическая система координат связана с декартовой следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch}\varphi\cos\theta, \\ y &= \operatorname{sh}\varphi\sin\theta. \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sh}\varphi\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\varphi\cos\theta & -\operatorname{ch}\varphi\sin\theta \\ \operatorname{ch}\varphi\sin\theta & \operatorname{sh}\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Поле базисных векторов задается векторами:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\varphi\cos\theta \\ \operatorname{ch}\varphi\sin\theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\varphi\sin\theta \\ \operatorname{sh}\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$$

Координатные кривые эллиптической системы координат

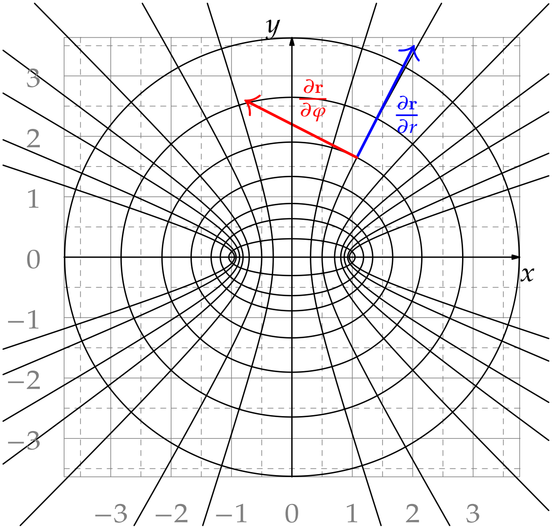
Первая координатная кривая получается при $\varphi = C_1 = \mathrm{const}$ — семейство эллипсов:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} C_1 \cos\theta, \\ y &= \operatorname{sh} C_1 \sin\theta, \end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{x}{\operatorname{ch} C_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\operatorname{sh} C_1}\right)^2 = 1$$

Вторая координатная кривая получается при $\theta = C_2 = \mathrm{const}$ — семейство гипербол:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch}\varphi \cos C_2, \\ y &= \operatorname{sh}\varphi \sin C_2, \end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{x}{\cos C_2}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin C_2}\right)^2 = 1$$

Координатные кривые эллиптической системы координат



Эллипсы:

$$\left(\frac{x}{\operatorname{ch} C_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\operatorname{sh} C_1}\right)^2 = 1.$$

Гиперболы:

$$\left(\frac{x}{\cos C_2}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin C_2}\right)^2 = 1.$$

Цилиндрическая система координат связана с декартовой следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \ \Rightarrow J = \\ z &= z, \end{aligned} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det\{J\} = r.$$

Поле базисных векторов:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = J^T J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сферическая система координат связана с декартовой следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\theta, \\ z &= r\sin\theta \end{aligned} \quad J = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \quad \det\{J\} = r^2\cos\varphi$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sin\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos\theta \end{pmatrix}$$

Двумерная сфера

- Стандартная сфера является двумерной поверхностью. Обозначим ее как S^2.
- Рассмотрим сферу S^2 в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Сфера в данном случае — вложенное многообразие, а $\mathbb{R}^3$ — объемлющее пространство.
- Рассмотрим произвольную кривую на сфере $\gamma \subset S^2$, которая в то же время $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, тогда параметрический вид:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$$

  где (x, y, z) — декартовы координаты, (R, θ, φ) — сферические координаты и $R = \mathrm{const}$, так как мы рассматриваем фиксированную сферу.

Метрика на сфере

В пространстве $\mathbb{R}^3$ декартовы координаты задают евклидову метрику следующего вида:

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Одновременно в том же $\mathbb{R}^3$ сферические координаты задают другую метрику:

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}R^2 + R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2, \quad G = g_{ij}(R,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

На сфере данная метрика редуцируется, так как радиус $R = \mathrm{const}$ и превращается в двумерную метрику:

$$\mathrm{d}l^2 = g_{ij}(R,\theta,\varphi)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = (0, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\varphi) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\varphi \end{bmatrix} = R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Это риманова метрика на сфере, индуцированная объемлющей метрикой пространства $\mathbb{R}^3$.

Стереографическая проекция

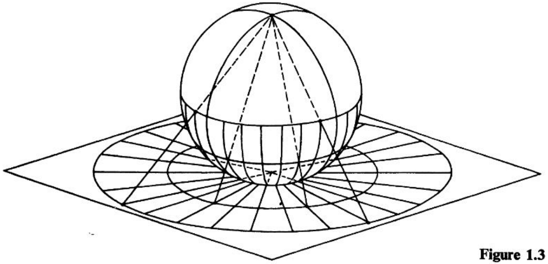
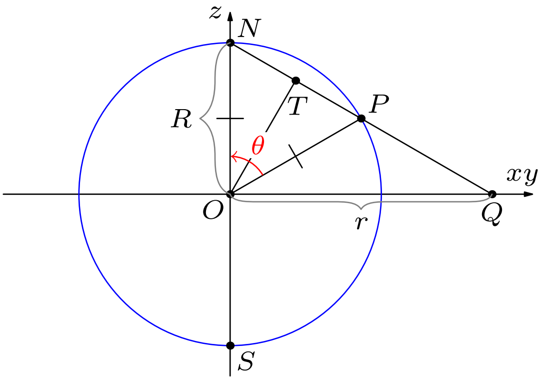


Figure 1.3

На сфере можно ввести другую метрику, индуцированную уже не объемлющим пространством R^3, а самой сферой S^2. Для примера рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость Oxy, где введены полярные координаты (r, φ).

$$S^2(\theta, \varphi) \longleftrightarrow \mathbb{R}^2(r, \varphi).$$

Такая проекция обеспечивает взаимно-однозначное соответствует всех точек сферы и плоскости $\mathbb{R}^2$, кроме северного полюса N. Обычно полагают $N \longleftrightarrow \infty$.



Из рисунка:

$$\measuredangle NOT = \theta/2, \ \measuredangle QNO = \pi/2 - \theta/2,$$

из треугольника ONQ следует

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{R} \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{R} \Rightarrow \theta = 2\operatorname{arcctg}\left(r/R\right).$$

Углы φ в сферической системе координат на сфере S^2 и в полярной системе координат на плоскости $\mathbb{R}^2$ совпадают.

$$\begin{cases} \theta = 2\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{r}{R}\right), \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$$

Итак, мы нашли формулы преобразования сферических координат в стреографические. Используя эти формулы, найдем метрику сферы в стереографических координатах.

Стереографическая метрика на сфере 1

Вычислим матрицу Якоби, якобиан и метрику $G(r,\varphi)$

$$\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R}\frac{-1\cdot 2}{1+(r/R)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{R^2+r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = J$$

Заметим, что:

$$R^2 + r^2 = R^2 + R^2 \operatorname{ctg}^2(\theta/2) = R^2(1 + ctg^2(\theta/2)) = R^2/\sin^2(\theta/2),$$

тогда:

$$\det J = -\frac{2R}{R^2+r^2} = -2\frac{\sin^2(\theta/2)}{R} \Rightarrow \det J = \frac{-2\sin^2\theta/2}{R}.$$

Теперь можно вычислить метрику $G(r,\varphi)$

$$G(r,\varphi) = J^T G(\theta,\varphi) J = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{R^2+r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2R}{R^2+r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2} & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Стереографическая метрика на сфере 2

исключим из выражения для метрики переменную θ, для чего заметим, что:

$$\sin^2\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = 4\sin^4\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{4\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow$$

$$R^2\sin^2\theta = \frac{4R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}}{(1+ctg^2\frac{\theta}{2})^2} = \frac{4r^2}{(1+r^2/R^2)^2} = \frac{4r^2R^4}{(R^2+r^2)^2},$$

$$G(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4r^2R^4}{(R^2+r^2)^2} \end{bmatrix} = \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

Обратите внимание, что для получения стереографической метрики мы использовали не формулу J^TJ а формулу J^TGJ, так как стереографическую метрику мы получили из сферической метрики, а не из декартовой.

Полученная нами метрика $G(r,\varphi)$ на S^2 отличается от метрики на $\mathbb{R}^2$ в полярных координатах.

Рассмотрим окружность радиуса ρ на поверхности сферы S^2. Найдем длину этой окружности и площадь круга используя лишь метрику $G(\theta, \varphi)$

Пусть центр окружности совпадает с северным полюсом N (точка $\theta = 0$). Тогда $\rho = R\theta_0$, где $\theta_0 = \mathrm{const}$ и измеряется в радианах. Уравнение окружности тогда можно записать в виде:

$$\rho/R = \theta, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Вычислим длину дуги всей окружности с помощью метрики:

$$\mathrm{d}l^2 = R^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2) = R^2 \sin^2(\rho/R)\mathrm{d}\varphi^2,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}l = \int\limits_0^{2\pi} R\sin(\rho/R)\mathrm{d}\varphi = R\sin(\rho/R)(2\pi - 0) = 2\pi R\sin(\rho/R).$$

Получили

$$l_\rho = 2\pi R \sin \rho/R.$$

Геометрия на сфере 2

При $\rho/R = \pi/2$ — длина максимальна, а при $\rho/R = \pi$ — длина минимальна (точка).

Найдем теперь площадь круга $0 \leqslant \theta \leqslant \rho/R$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

$$\sqrt{\det\{G\}} = R^2|\sin\theta|$$

$$\sigma_\rho = \iint\limits_{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\rho}{R}} R^2|\sin\theta|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = R^2\int\limits_0^{\rho/R}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2\Big(1-\cos\frac{\rho}{R}\Big).$$

При $\rho = \pi R$ круг совпадает со всей сферой, но при этом длина его окружности равна 0:

$$\sigma_\rho = 2\pi R^2(1-cos\pi) = 4\pi R^2.$$

Если радиус ρ окружности мал, а радиус сферы R велик, то мы получим приблизительные формулы для плоской окружности:

$$\sin\frac{\rho}{R} \approx \frac{\rho}{R},\ \ 1-\cos\frac{\rho}{R} \approx \frac{\rho^2}{2R^2}.$$

$$l_\rho = 2\pi R\sin\frac{\rho}{R} \approx 2\pi\rho,\ \ \sigma_\rho = 2\pi R^2(1-\cos\frac{\rho}{R}) \approx \pi\rho^2.$$

Список литературы 1

1. Зорич В. А. — **Математической анализ.** — Т. 1. — 5-е изд. — Москва : МЦНМО, 2007. — 664 с. — ISBN 5940570569.