Ортогональные линейные преобразования. Группа преобразований.

Геворкян М. Н.

13 февраля 2022 г.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Ортогональные операторы

Определение

Движение — преобразование евклидова пространства, сохраняющее длину векторов (скалярное произведение) или иначе, расстояние между точками.

Является частным случаем аффинного преобразования

$$f(\mathbf{v}) = M\mathbf{v} + \mathbf{t}$$

где матрица M является матрицей ортогонального оператора. Рассмотрим ортогональные операторы подробнее.

Ортогональные преобразования 1

Определение

Линейное преобразование (оператор) P евклидова пространства E называется ортогональным, если для любых двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из E выполняется равенство

$$(\mathrm{P}\mathbf{u}, \mathrm{P}\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Иными словами преобразование P сохраняет скалярное произведение.

Скалярное произведение можно представить в матричном виде как

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T G \mathbf{v},$$

где G — метрический тензор. Для ортогонального оператора A с матрицей A справедлива следующая цепочка равенств:

$$(A\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (A\mathbf{u})^T G (A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T A^T G A \mathbf{v}$$

Ортогональные преобразования 2

В евклидовом пространстве всегда можно выбрать базис, называемый ортонормированным, при котором матрица Грама $G = I$ то есть является единичной. Поэтому для матрицы A ортогонального оператора справедливо следующее соотношение:

$$A^T A = I$$

Из этого соотношения следует два свойства ортогональных преобразований.

- $A^T A = I \Leftrightarrow A^T A A^{-1} = I A^{-1} \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$.
- $A^T A = I \Rightarrow A \underbrace{A^T A}_{I} A^T = A A^T = A A^{-1} = I \Rightarrow A^T A = I$.

Свойства матрицы ортогонального оператора

- $A^T A = A A^T = I$
- $A^T = A^{-1}$

Ортогональный оператор переводит один ортонормированный базис в другой ортонормированный базис. Собственно из-за этого свойства и возникло название ортогональный оператор. Рассмотрим два ортонормированных базиса $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n \rangle$ и рассмотрим линейное преобразование от одного к другому:

$$\mathbf{e}'_j = a^1_j \mathbf{e}_1 + \ldots + a^n_j \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a^i_j \mathbf{e}_i$$

и найдем скалярное произведение векторов штрихованного базиса:

$$(\mathbf{e}'_j, \mathbf{e}'_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} a^i_j \mathbf{e}_i, \sum_{l=1}^{n} a^l_k \mathbf{e}_l \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a^i_j a^l_k (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a^i_j a^l_k \delta_{il} = \sum_{i=1}^{n} a^i_j a^i_k = \delta_{jk}$$

Равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i_j a^i_k = \delta_{jk}$ можно представить в матричном виде как

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \ldots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \ldots & a^n_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a^1_n & a^2_n & \ldots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a^n_1 & a^n_2 & \ldots & a^n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^T A = I$$

Сохранение ортонормированного базиса 2

что дает $n \times n$ равенств вида

$$a_j^1 a_k^1 + ... + a_j^n a_k^n = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, j = k, \\ 0, j \neq k. \end{cases}$$

Ортогональная группа 1

Из свойства матрицы ортогонального преобразования

$$A^T A = A A^T = I$$

следует

$$\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2 = \det(I) = 1.$$

Следовательно, для определителя матрицы ортогонального преобразования всегда выполняется свойство:

$$\det(A)^2 = 1 \Leftrightarrow |\det(A)| = 1.$$

Ортогональные преобразования образуют группу, обозначаемую как $O(n)$. Выше мы приводили данную группу как пример матричной группы $GL(n,n)$. То что ортогональные преобразования действительно образуют группу легко проверить указав наличие нейтрального элемента, существование обратного преобразования для каждого элемента группы и показав, что композиция преобразований также является ортогональным преобразованием.

Ортогональная группа 2

- Свойство определителя $\det(A)^2 = 1$ гарантирует существование обратной матрицы для каждой матрицы A.
- Нейтральным элементом является единичная матрица I.
- Композиция двух ортогональных преобразований (произведение ортогональных матриц) вновь является ортогональным преобразованием $(AB\mathbf{u}, AB\mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Напомним, что выделяют также специальную ортогональную группу $SO(n)$ для которой накладывается более строгое условие на определитель $\det\{A\} = 1$.

Трехмерные ортогональные преобразования 1

Рассмотрим пример трехмерных ортогональных преобразований в декартовом пространстве со стандартным ортонормированным базисом $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ имеющим вид:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Применим к этому базису ортогональное преобразование с матрицей M.

$$M\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^1 \\ m_1^2 \\ m_1^3 \end{pmatrix} = \mathbf{m}_1$$

$$M\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2^1 \\ m_2^2 \\ m_2^3 \end{pmatrix} = \mathbf{m}_2$$

Трехмерные ортогональные преобразования 2

$$Me_3 = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_3^1 \\ m_3^2 \\ m_3^3 \end{pmatrix} = \mathbf{m}_3$$

Видно, что компоненты нового базиса выраженные в старом базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ содержатся в столбцах матрицы преобразования M. Если $\mathbf{v}$ некоторый вектор, разлагаемый на следующие компоненты:
$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3$, то

$$M\mathbf{v} = v^1 M\mathbf{e}_1 + v^2 M\mathbf{e}_2 + v^3 M\mathbf{e}_3 = v^1\mathbf{m}_1 + v^2\mathbf{m}_2 + v^3\mathbf{m}_3.$$

Использовав свойство ортогональности, получим

$$M^T M = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \mathbf{m}_2^T \\ \mathbf{m}_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 & \mathbf{m}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{m}_1\|^2 & (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) & (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3) \\ (\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1) & \|\mathbf{m}_2\|^2 & (\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3) \\ (\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_1) & (\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_2) & \|\mathbf{m}_3\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Трехмерные ортогональные преобразования 3

$$\|\mathbf{m}_1\| = \|\mathbf{m}_2\| = \|\mathbf{m}_3\| = 1,\ (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3) = (\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_2) = 0.$$

Как мы видим, ортогональность преобразования влечет необходимость ортонормированности векторов $\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3 \rangle$.

- Столбцы матрицы M — ортонормированные векторы.
- Строки матрицы M — ортонормированные векторы.

Геометрический смысл ортогональных преобразований

Ортогональным преобразованиям можно дать следующую геометрическую интерпретацию.

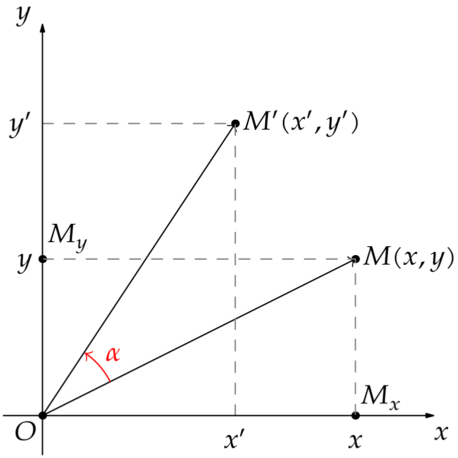
- Вращение вокруг центра координат при $\det(M) = 1$ то есть для случая $SO(n)$.
- Отражение относительно некоторой оси координат при $\det(M) = -1$.
- Комбинацию вращения и отражения.

Поворот на произвольный угол вокруг начала координат проще всего представить как композицию поворотов вокруг осей координат Ox, Oy и Oz.

$$M_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad M_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad M_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вращения

Ортогональные преобразования на плоскости



Рассмотрим вначале простейший случай — вращение точки M (радиус-вектора $\mathbf{OM}$) с координатами (x, y) вокруг начала координат O на угол α. В результате вращения точка переходит в M' с координатами (x', y').

$$\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{OM}\| = \|\mathbf{OM}'\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \measuredangle M'OM'_x = \alpha + \measuredangle MOM_x,$$

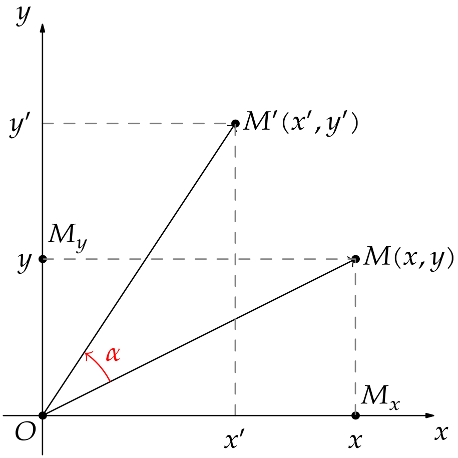
$$\cos \measuredangle MOM_x = \frac{\|\mathbf{OM}_x\|}{\|\mathbf{OM}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \measuredangle MOM_x = \frac{\|\mathbf{OM}_y\|}{\|\mathbf{OM}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Координаты точки M' выражаются через $\cos$ и $\sin$ следующим образом:

$$x' = \|\mathbf{OM}\| \cos(\measuredangle M'OM'_x) = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\alpha + \measuredangle MOM_x),$$

$$y' = \|\mathbf{OM}\| \sin(\measuredangle M'OM'_x) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\alpha + \measuredangle MOM_x).$$



Используя формулы косинуса суммы и синуса суммы

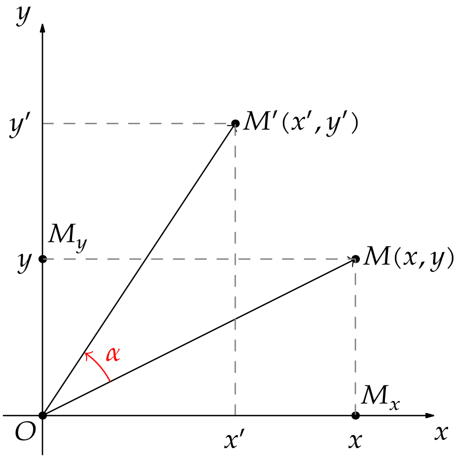
$$\cos(\alpha + \measuredangle MOM_x) = \cos\alpha \cos\measuredangle MOM_x - \sin\alpha \sin\measuredangle MOM_x,$$
$$\sin(\alpha + \measuredangle MOM_x) = \sin\alpha \cos\measuredangle MOM_x + \cos\alpha \sin\measuredangle MOM_x,$$

и учитывая, что

$$\cos\measuredangle MOM_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\measuredangle MOM_x = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

получим

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$



Преобразование можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A — матрица линейного оператора вращения. Мы вывели его из элементарных геометрических построений, но наш рисунок годится только для угла α не выводящего за первую четверть.

Вращение на плоскости, как ортогональное преобразование

Более общим подходом является рассмотрение вращений как частного случая ортогональных преобразований. Рассмотрим произвольную матрицу A размера 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

и потребуем выполнения условия ортогональности $A^T A = I$, тогда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1, \\ b^2 + d^2 = 1, \\ ab + cd = 0. \end{cases}$$

Первые два уравнения наводят на мысль об основном тригонометрическом тождестве. Без потери общности можно положить:

$$a = \cos\alpha,\ c = \sin\alpha,\ d = \mp\cos\alpha,\ b = \pm\sin\alpha,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Вращение на плоскости, как преобразование, сохраняющее длину

Можем получить те же матрицы из более элементарных соображений — потребовав сохранение длины вектора.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x')^2 = (ax + by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2,$$
$$(y')^2 = (cx + dy)^2 = c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2.$$

Из условия $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ получим уже знакомую систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1, \\ ab + cd = 0, \\ d^2 + b^2 = 1. \end{cases}$$

$$a = \cos\alpha,\ c = \sin\alpha,\ d = \mp\cos\alpha,\ b = \pm\sin\alpha,$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Вращение и отражение

Из общих соображений ортогональности (что по определению означает сохранение скалярного умножения, а следовательно и длины вектора) мы получили две матрицы двух возможных преобразований:

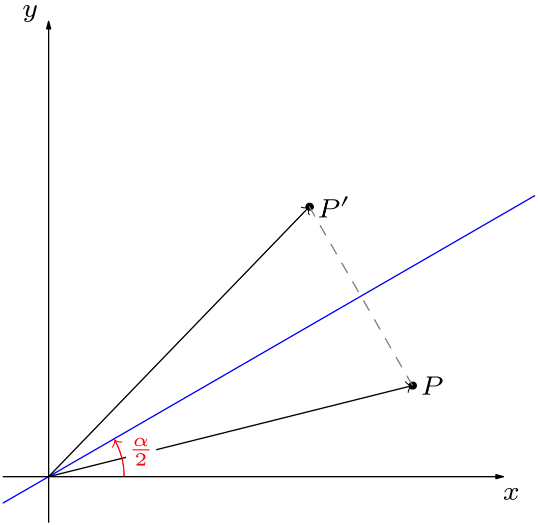
$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Можно дать следующую геометрическую интерпретацию:

- A_1 — знакомое нам вращение относительно начала координат;
- A_2 — отражение относительно прямой, проходящей через начало координат под углом $\alpha/2$.

Оказалось, что полученная нами из элементарных геометрических построений матрица A_1 описывает все возможные вращения против часовой стрелки на произвольный угол α.

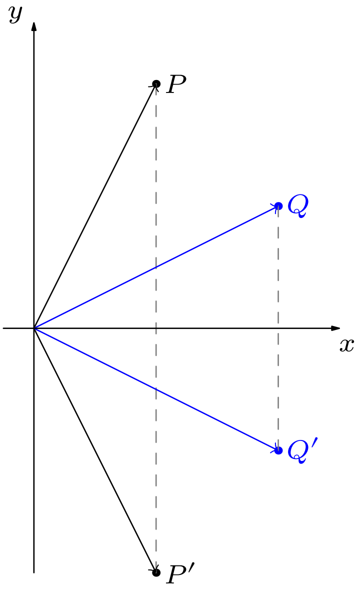
Пример отражения I/II



На рисунке изображен пример отражения точки P с координатами $(2, 1/2)$ относительно прямой, проходящей через начало координат O под углом $\dfrac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Отражение задается матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Пример отражения II/II



На рисунке изображен пример отражения двух точек $P = (1, 2)$ и $Q = (2, 1)$ относительно оси абсцисс Ox. Отражение задается матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \sin 0 & -\cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Легко вычислить $P' = (1, -2)$ и $Q' = (2, -1)$.

Группа поворотов

Множество ортогональных преобразований, задающих повороты на плоскости, образуют группу относительно композиции преобразований. Рассмотрим две матрицы поворота $A(\alpha)$ и $A(\beta)$ и найдем их композицию (групповая операция $\times$ — умножение матриц):

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Видно, что результат двух последовательных поворотов на угол α, а затем на угол β также является поворотом на сумму углов $\alpha+\beta$ и, следовательно, является элементом множества. Рассмотрим теперь выполнение групповых свойств.

1. Из ассоциативности умножения матриц следует ассоциативность композиции поворотов: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
2. Единичный элемент — единичная матрица I.
3. Существование обратного элемента рассмотрим далее.

Обратный поворот или обратный элемент группы поворотов

Обратный поворот можно найти тремя разными способами:

1. Указать отрицательный угол поворота $-\alpha$;
2. Найти обратную матрицу (свойство ортогональности $(\det A)^2 = 1$ гарантирует ее существование);
3. Воспользоваться свойством ортогональности $A^T = A^{-1}$ и вместо обратной найти транспонированную матрицу.

Все три способа приведут к одному результату:

$$A(-\alpha) = A^T(\alpha) = A^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Таким образом, для любого поворота существует обратный.

Показав, что повороты на плоскости образуют группу, мы проиллюстрировали более общее утверждение о том, что ортогональные преобразования (любой размерности) образуют группу.

Ортогональные группы $O(n)$ и $SO(n)$

Напомним, что специальная ортогональная группа $SO(n)$ отличается от общей $O(n)$ требованием $\det A = 1$ то есть определитель матрицы оператора должен быть строго равен 1. Для общей ортогональной группы требование слабее: $(\det A)^2 = 1$.

1. Вычислим определитель матрицы вращения на плоскости

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow A_1 \in SO(n)$$

2. Вычислим определитель матрицы отражений на плоскости

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1 \Rightarrow A_2 \in O(n)$$

- Вращения на плоскости образуют специальную ортогональную группу.
- Отражения на плоскости образуют общую ортогональную группу.

Вращение системы координат

Мы рассматривали ортогональный оператор A как оператор применяемый к вектору $\mathbf{v}$ из L, записанному в виде компонент в некотором базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ и в результате действия этого оператора мы получали компоненты нового вектора $\mathrm{A}\mathbf{v}$ в том же базисе.

Можно, однако, рассматривать матрицу A как матрицу замены базиса пространства L. В этом случае вектор $\mathbf{v}$ остается тем же самым, однако меняются его компоненты, так как теперь они записываются в другом базисе $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

где компоненты вектора $\mathbf{v}$ в базисе $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$ вычисляются как:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Использование комплексных чисел для описания вращений и отражений на плоскости

Комплексные числа позволяют дать реализацию поворотов и отражений на плоскости, отличную от векторно-матричной, изложенной выше. Особенно в таком представлении упрощаются описание поворотов.

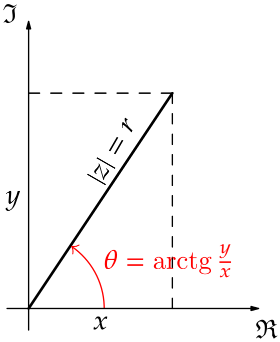
Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Три представления комплексного числа:

- алгебраическая форма $z = x + \mathrm{i}y$,
- тригонометрическая форма $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,
- показательная форма $z = re^{\mathrm{i}\theta}$,

где

- r — модуль числа z, вычисляемый как $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- θ — аргумент числа, вычисляемый как $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.



Каждому вектору на плоскости можно поставить в соответствие комплексное число и свести операции с векторами к операциям с комплексными числами.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow z = x + \mathrm{i}y$$

Вращение как умножение комплексных чисел

Умножим комплексное число $z = x + \mathrm{i}y$ на число $u = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$:

$$uz = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(x + \mathrm{i}y) = (x\cos\varphi + \mathrm{i}x\sin\varphi + \mathrm{i}y\cos\varphi - y\sin\varphi) =$$
$$= (x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \mathrm{i}(x\sin\varphi + y\cos\varphi)$$

Это эквивалентно матрице поворота на угол φ против часовой стрелки:

$$uz \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$

В показательном виде

$$uz = e^{i\varphi} r e^{i\theta} = r e^{i(\varphi+\theta)}$$