Глава 2

Предел последовательности

§ 2.1 Определение предела числовой последовательности. Переход к пределу в неравенствах

$\varepsilon > 0$

Определение 2.1. Отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется числовой последовательностью. Элемент $f(n)$ обозначается через x_n и называется n-м членом последовательности $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, а сама последовательность обозначается через $\{x_n\}$.

$x_n = \frac{1}{n}$

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$ ....

$a-\varepsilon$ a $a+\varepsilon$

Определение 2.2. Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется любой интервал, содержащий эту точку.

Определение 2.3. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists c \geq 0 : |x_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b_1 a b_2

$|x_n| \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Определение 2.4. Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \to |x_n - a| < \varepsilon.$$

$|x_n - a| < \varepsilon$

$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$\forall n > N$

Сформулированное условие равносильно тому, что вне любой окрестности точки a содержится лишь конечное множество членов рассматриваемой последовательности.

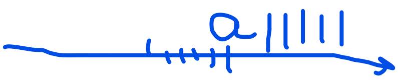
Записывают $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Определение 2.5. Если числовая последовательность имеет предел, то она называется сходящейся.

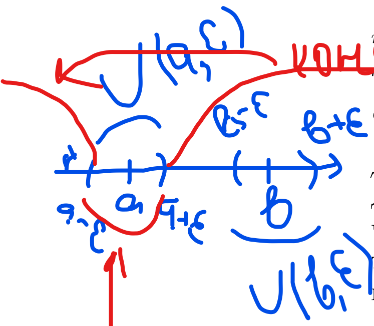
беск. много

к. к.

$a-\varepsilon$ a $a+\varepsilon$



Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n < a$ (соответственно $x_n > a$) для всех $n = 1, 2, ...$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a слева (соответственно справа) и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 0$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a + 0$.)



конечн.

беск. число

чл-тов

посл-ти

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$

$a \neq b$

Теорема 2.1. *Числовая последовательность может иметь только один предел.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела a и b, причем $a < b$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы ε-окрестности точек a и b не пересекались (не имели общих точек). Возьмем, например, $\varepsilon = (b - a)/3$. Так как число a – предел последовательности $\{x_n\}$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти номер N такой, что $x_n \in U(a, \varepsilon)$ для всех $n > N$. Поэтому вне интервала $U(a, \varepsilon)$ может оказаться лишь конечное число членов последовательности. В частности, интервал $U(b, \varepsilon)$ может содержать лишь конечное число членов последовательности. Это противоречит тому, что b – предел последовательности (любая окрестность точки b должна содержать бесконечное число членов последовательности). Полученное противоречие показывает, что последовательность не может иметь два различных предела. Итак, сходящаяся последовательность имеет только один предел. □

Определение 2.6. Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $|x_n - a| < \varepsilon$

$\{x_n\}$ – огр., если $\exists C > 0$: $|x_n| \le C$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер N такой, что при всех $n > N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит сумму модулей, то

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a|.$$

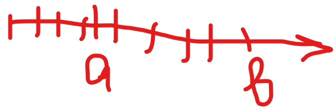
Поэтому при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n| < 1 + |a|. \quad N+1$$

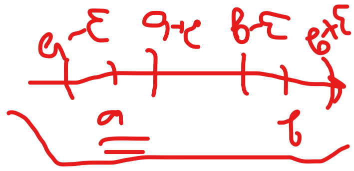
$|a+b| \le |a| + |b|$

Положим $c = \max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, ..., |x_N|\}$. Тогда $|x_n| \le c$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена. □

Теорема 2.3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a < b$. *Тогда* $\exists N \in \mathbb{N} : x_n < b$ *при всех* $n > N$.



Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы ε-окрестности точек a и b не пересекались (возьмем, например, $\varepsilon = (b-a)/3$). По определению предела по заданному ε можно найти номер N такой, что $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ при всех $n > N$. Тогда при всех $n > N$ выполняются неравенства $x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b$, то есть $x_n < b$ при всех $n > N$. $\square$



Теорема 2.4 (о трех последовательностях). *Если последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *таковы, что*

$$x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n > N_0, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

то последовательность $\{y_n\}$ *сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_1\ |x_n - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_2\ |z_n - a| < \varepsilon$

$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < y_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b$

Доказательство. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что $x_n \in U(a, \varepsilon)$ при всех $n > N_1$ и $z_n \in U(a, \varepsilon)$ при всех $n > N_2$. Отсюда и из условия (2.1) следует, что при всех $n > N$, где $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, выполняется условие $y_n \in U(a, \varepsilon)$. Это означает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. $\square$

$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$

$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

Теорема 2.5. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *причем*

$$x_n \le y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Тогда $a \le b$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Rightarrow a \le b$

Доказательство. По определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ при всех $n > N_1$ и $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$ при всех $n > N_2$. Обозначим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Учитывая условие (2.2), получаем, что при всех $n > N$

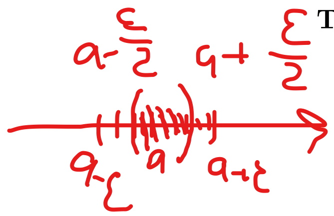
$$a - \varepsilon < x_n \le y_n < b + \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_1\ |x_n - a| < \varepsilon$

Отсюда следует, что $a - \varepsilon < b + \varepsilon$, то есть $a - b < 2\varepsilon$. $\forall \varepsilon > 0$
Поскольку ε – произвольное положительное число, то $a - b \le 0$. Таким образом, $a \le b$. $\square$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_2\ |y_n - b| < \varepsilon$

§ 2.2 Свойства пределов последовательностей



$\{x_n\}, \{y_n\}$

$\{x_n+y_n\}$

$z_n = x_n + y_n$

$\{z_n\}$

Теорема 2.6. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a+b, \tag{2.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab, \tag{2.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, \quad y_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b \neq 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. a) Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, найдется номер N_1 такой, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N_1$. Аналогично, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, найдется номер N_2 такой, что $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N_2$. Обозначим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будем иметь $|(x_n+y_n)-(a+b)| = |(x_n-a)+(y_n-b)| \leq |x_n-a|+|y_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что в соответствии с определением предела последовательности доказывает утверждение (2.3).

b) Отметим, что

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - ((a-x_n)+x_n)\cdot((b-y_n)+y_n)| =$$

$$= |y_n(x_n-a) + x_n(y_n-b) - (x_n-a)(y_n-b)| \leq |y_n|\cdot|x_n-a| +$$

$$+ |x_n|\cdot|y_n-b| + |x_n-a|\cdot|y_n-b|.$$

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем числа N_1 и N_2 такие, что

$$\forall n > N_1 \to |x_n - a| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3(|b|+1)}\right\},$$

$$\forall n > N_2 \to |y_n - b| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3(|a|+1)}\right\}.$$

Обозначим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будем иметь

$$|x_n| = |(x_n-a)+a| \leq |x_n-a| + |a| < 1 + |a|,$$

$$|y_n| = |(y_n-b)+b| \leq |y_n-b| + |b| < 1 + |b|,$$

$$|x_n-a|\cdot|y_n-b| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}\cdot\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при $n > N$

$$|x_n| \cdot |y_n - b| < (1 + |a|) \cdot \frac{\varepsilon}{3(|a| + 1)} = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|y_n| \cdot |x_n - a| < (1 + |b|) \cdot \frac{\varepsilon}{3(|b| + 1)} = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|x_n - a| \cdot |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{3},$$

поэтому $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$ при $n > N$, то есть утверждение (2.4) доказано.
c) По заданному $\varepsilon > 0$ найдем числа N_1 и N_2 такие, что

$$\forall n > N_1 \to |x_n - a| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon |b|}{8}\right\},$$

$$\forall n > N_2 \to |y_n - b| < \min\left\{\frac{|b|}{4}, \frac{\varepsilon b^2}{16(|a| + 1)}\right\}.$$

Обозначим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будем иметь

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|,$$

$$|y_n| = |b + (y_n - b)| \geq |b| - |y_n - b| > |b| - \frac{|b|}{4} > \frac{|b|}{2},$$

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|},$$

$$\frac{|y_n - b|}{|y_n|} < \frac{|b|/4}{|b|/2} = \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{|y_n - b|}{|y_n|} > \frac{1}{2}$$

и

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b x_n - a y_n}{b y_n}\right| = \left|\frac{((b - y_n) + y_n) x_n - ((a - x_n) + x_n) y_n}{b y_n}\right| =$$

$$= \left|\frac{(b - y_n) x_n - (a - x_n) y_n}{((b - y_n) + y_n) y_n}\right| = \left|\frac{(b - y_n) x_n - (a - x_n) y_n}{y_n^2 \left(\frac{b - y_n}{y_n} + 1\right)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(b - y_n) x_n - (a - x_n) y_n}{y_n^2}\right| \cdot \left|\frac{1}{\frac{b - y_n}{y_n} + 1}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|y_n - b| \cdot |x_n| + |x_n - a| \cdot |y_n|}{y_n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|y_n - b|}{|y_n|}} =$$

$$= \left(|x_n| \cdot \frac{1}{y_n^2} \cdot |y_n - b| + \frac{1}{|y_n|} \cdot |x_n - a| \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{|y_n - b|}{|y_n|}} <$$

$$< \left((1 + |a|) \cdot \frac{4}{b^2} \cdot \frac{\varepsilon b^2}{16(|a| + 1)} + \frac{2}{|b|} \cdot \frac{\varepsilon |b|}{8} \right) \cdot 2 = \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \right) \cdot 2 = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

и, следовательно, утверждение (2.5) доказано. $\square$

§ 2.3 Подпоследовательности

$\{x_n\}$: 1, 2, 3, 4, ...

Определение 2.7. Последовательность $\{x_{n_k}\}$, которая составлена из членов последовательности $\{x_n\}$ и в которой порядок следования ее элементов совпадает с их порядком следования в исходной последовательности $\{x_n\}$, называется подпоследовательностью этой последовательности.

1, 3, 5, 7, ...

Таким образом, последовательность $\{x_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, если условие $k < k'$ равносильно условию $n_k < n_{k'}$, $k, k' = 1, 2, \ldots$.

3, 1, 5, 7, ...

Теорема 2.7. *Если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. По определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N$.

Пусть $\{x_{n_k}\}$ – произвольная подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Заметим, что по определению подпоследовательности $n_k \geq k \ \forall k \in \mathbb{N}$, поэтому $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Следовательно, для выбранного $\varepsilon > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} : \ n_p > N$. Тогда $|x_{n_k} - a| < \varepsilon \ \ \forall k > p$ (в этом случае $n_k > n_p \geq N$). Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. $\square$

N $\quad n_p$

Определение 2.8. Предел подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

$x_n=(-1)^n, n\in\mathbb{N}$ $\{x_n\}$ – огр.

$\exists c>0:$ $|x_n|\le c$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$1: |(-1)^n|\le 1$

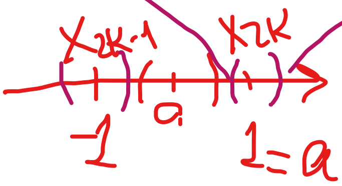
$c=1$

Определение 2.9. Наибольший (наименьший) из частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ называется верхним (нижним) пределом этой последовательности.

Обозначают $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ соответственно.

Теорема 2.8 (Больцано–Вейерштрасс). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

(без док-ва)



$a\ne\pm1$

$a=1$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, тогда все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку, то есть

$$\exists\, a,b:\ x_n\in\Delta=[a,b]\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Разобьем отрезок $\Delta=[a,b]$ пополам точкой d. Тогда по крайней мере один из отрезков $[a,d]$, $[d,b]$ содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Если оба отрезка обладают этим свойством, возьмем, например, правый отрезок (и будем так поступать в дальнейшем). Выбранный отрезок, содержащий бесконечное число членов данной последовательности, обозначим $\Delta_1=[a_1,b_1]$, его длина равна $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$.

Разделив отрезок Δ_1 пополам, выберем из двух получившихся отрезков указанным выше способом отрезок $\Delta_2=[a_2,b_2]$, содержащий бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Продолжая эти рассуждения, получим последовательность $\{\Delta_n=[a_n,b_n]\}$ отрезков таких, что

1) $\Delta_1\supset\Delta_2\supset\ldots\supset\Delta_n\supset\Delta_{n+1}\supset\ldots$,

2) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$.

Следовательно, $\{\Delta_n\}$ – последовательность вложенных отрезков. По лемме Коши–Кантора существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам, то есть

$$\exists\, c:\ c\in\Delta_k\ \ \forall k\in\mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Покажем, что найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c. \tag{2.7}$$

Так как отрезок Δ_1 содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, то

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}: \; x_{n_1} \in \Delta_1.$$

Отрезок Δ_2 также содержит бесконечное число членов данной последовательности, и поэтому

$$\exists\, n_2 > n_1: \; x_{n_2} \in \Delta_2.$$

Вообще,

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n_k: \; x_{n_k} \in \Delta_k, \quad \text{где} \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k.$$

Следовательно, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Условия (2.6) и (2.8) означают, что точки c и x_{n_k} принадлежат отрезку $\Delta_k = [a_k, b_k]$, и поэтому расстояние между ними не превосходит длину отрезка Δ_k, то есть

$$|x_{n_k} - c| \le b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}. \tag{2.9}$$

Так как $\frac{1}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$, то из (2.9) следует, что справедливо утверждение (2.7). $\square$

Замечание 2.1. Теорему Больцано–Вейерштрасса можно сформулировать так: любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

§ 2.4 Критерий Коши сходимости последовательности

Определение 2.10. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N, \, \forall m > N \;\; \to |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

x_n x_m

Последовательности, удовлетворяющие условию Коши, называются также фундаментальными последовательностями.

Теорема 2.9 (критерий Коши)**.** *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$; тогда, согласно определению предела последовательности, существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть теперь $n > N$ и $m > N$; тогда

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq \underbrace{|x_n - a|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|x_m - a|}_{<\varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то есть последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной.
Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что если $n > N$ и $m > N$, то $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Возьмем, например, $\varepsilon = 1$; $|x_n| \leq A$
тогда существует такое N_1, что при всех $n > N_1$ и $m > N_1$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < 1$. В частности, если $n > N_1$ и $m = N_1 + 1$, то $|x_n - x_{N_1+1}| < 1$, то есть

$$x_{N_1+1} - 1 < x_n < x_{N_1+1} + 1 \quad \forall n > N_1.$$

$|x_1|, |x_2|, \ldots |x_{N_1}|$

Это значит, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Поэтому, в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса, существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$. Покажем, что вся данная последовательность $\{x_n\}$ также сходится и имеет пределом число a. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда, во-первых, по определению предела последовательности, существует такое $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $k_1 > k$ или, что то же самое, согласно определению подпоследовательности, для всех $n_{k_1} > n_k$ выполняется неравенство $|x_{n_{k_1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Во-вторых, так как последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной, то существует такое $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ и всех $m > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим $N_2 = \max\{N, n_k\}$ и зафиксируем некоторое $n_{k_1} > N_2$. Тогда для всех $n > N_2$ получим

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_{k_1}}) + (x_{n_{k_1}} - a)| \leq |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □