Следствие 3.1. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, *то* $\forall\, c \in \mathbb{R}$ *существует и предел* $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = cA.$$

$\forall x \in X$

$h(x) = c$

$\forall \varepsilon$

Отметим, что $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В качестве δ можно взять любое положительное число. Тогда $\forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |c - c| = 0 < \varepsilon$.

$|h(x) - c| < \varepsilon$

$\| $

c

$|c - c| < \varepsilon$

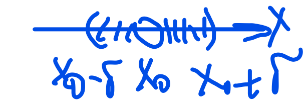
$0 < \varepsilon$

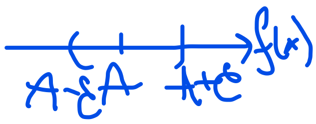
Далее, из (3.4) получаем

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = \overbrace{\lim_{x\to x_0} c}^{=c} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{=A} = cA.$$

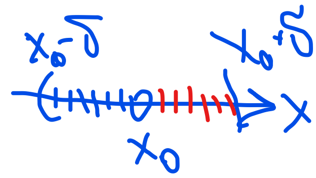
Таким образом, постоянный множитель можно выносить за знак предела.

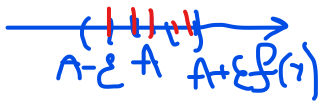
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$





§ 3.3 Односторонние пределы





Определение 3.5. Действительное число A называется пределом функции $f : X \to \mathbb{R}$ слева при $x \to x_0$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$ $\forall x \in X,\ x_0 - \delta < x < x_0 \to |f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A$ или $f(x_0 - 0) = A$.

Определение 3.6. Действительное число A называется пределом функции $f : X \to \mathbb{R}$ справа при $x \to x_0$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$ $\forall x \in X,\ x_0 < x < x_0 + \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0) = A$.

Теорема 3.6. *Для существования конечного предела* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали и совпадали односторонние пределы* $f(x_0 + 0)$ *и* $f(x_0 - 0)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то есть

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$

В частности, это будет справедливо $\forall x \in X,\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $\forall x \in X,\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Таким образом, существуют оба односторонних предела и $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

Обратно, пусть существуют оба односторонних предела и

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$$

Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0: \ \forall x \in X, \ x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \to |f(x) - A| < \varepsilon$$

и

$$\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0: \ \forall x \in X, \ x \in (x_0, x_0 + \delta_2) \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда

$$\forall x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$. □

§ 3.4 Замечательные пределы

Первый замечательный предел.

Лемма 3.1. *Если* $x \to 0$, *то* $\frac{\sin x}{x} \to 1$, *то есть*

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \tag{3.5}$$

Доказательство. Известно (см. [7], стр. 109), что

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{3.6}$$

Без док-ва

В данном случае $\sin x > 0$, поэтому неравенство (3.6) равносильно неравенству

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

откуда следует, что

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Далее,

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x,$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

Учитывая, что $0 < \sin\frac{x}{2} < 1$, $\sin^2\frac{x}{2} < \sin\frac{x}{2}$, $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$, получаем

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\frac{x}{2} = x.$$

Тогда

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < x.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Отметим, что $\lim\limits_{x\to-0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{y\to+0} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim\limits_{y\to+0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Таким образом, получаем равенство (3.5). $\square$

Второй замечательный предел.

Лемма 3.2. *Функция $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ имеет при $x \to 0$ предел, равный e, то есть*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.} \tag{3.7}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Доказательство. Известно, что

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.8}$$

Без док-ва

Покажем, что если $\{n_k\}$ – произвольная (не обязательно возрастающая) последовательность натуральных чисел такая, что

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty, \tag{3.9}$$

то

$$a_{n_k} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.10}$$

По определению предела (3.8)

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > N \to |a_n - e| < \varepsilon, \tag{3.11}$$

а условие (3.9) означает, что

$$\forall M > 0\ \exists K = K(M) \in \mathbb{N}:\ \forall k > K \to n_k > M. \tag{3.12}$$

Полагая в (3.12) $M = N(\varepsilon)$, получаем, что для $k > K(N(\varepsilon))$ выполняется неравенство $n_k > N(\varepsilon)$ и поэтому из условия (3.11) следует, что $|a_{n_k} - e| < \varepsilon$ для $k > K(N(\varepsilon))$, то есть справедливо (3.10).

Для доказательства утверждения (3.7) достаточно показать, что

$$\lim_{x\to+0}\varphi(x) = \lim_{x\to-0}\varphi(x) = e. \tag{3.13}$$

Если $\{x_k\}$ – любая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ и $x_k > 0$ для $k \in \mathbb{N}$, то можно считать, что $0 < x_k < 1$ для $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $n_k = [1/x_k]$, где $[t]$ – целая часть числа t. Тогда

$$n_k \le \frac{1}{x_k} < n_k + 1, \tag{3.14}$$

откуда следует, что

$$1 + \frac{1}{n_k+1} < 1 + x_k \le 1 + \frac{1}{n_k}. \tag{3.15}$$

Так как все члены неравенства (3.15) больше 1, то в силу свойств степени из (3.14) и (3.15) следует, что

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{3.16}$$

Из условия $x_k \to +0$ при $k \to \infty$ следует, что $n_k \to +\infty$. Поэтому, используя (3.10), получаем

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} \to e$$

и $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \to e$ при $k \to \infty$. По свойствам пределов из (3.16) следует, что $(1+x_k)^{1/x_k} \to e$ при $k \to \infty$. Согласно определению предела функции по Гейне,

$$\lim_{x\to+0}\varphi(x) = e.$$

Докажем, наконец, что $\lim\limits_{x\to-0}\varphi(x) = e$. Пусть $\{x_k\}$ – любая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ и $x_k < 0$ для $k \in \mathbb{N}$. Тогда, полагая, $y_k = -x_k$, получаем $y_k > 0$ и $y_k \to 0$ при $k \to \infty$. Заметим, что

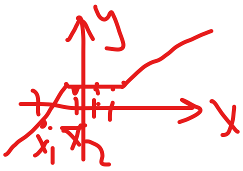
$$(1+x_k)^{1/x_k} = (1-y_k)^{-1/y_k} = \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{1/y_k}.$$

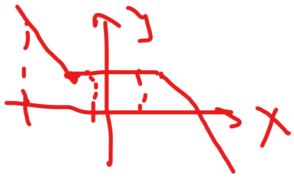
Обозначим $z_k = \frac{y_k}{1-y_k}$, тогда $z_k > 0$ и $z_k \to 0$ при $k \to \infty$,

$$(1+x_k)^{1/x_k} = (1+z_k)^{1+(1/z_k)} \to e \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

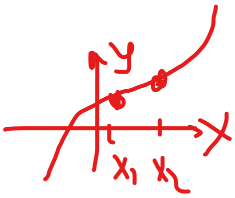
по доказанному выше. Итак, доказано, что выполняются условия (3.13). Следовательно, справедливо утверждение (3.7). $\square$

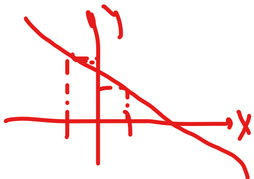
§ 3.5 Пределы монотонных функций





Определение 3.7. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется неубывающей на множестве X, если $\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$.
Определение 3.8. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется возрастающей на множестве X, если $\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$.





Определение 3.9. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется невозрастающей на множестве X, если $\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$.
Определение 3.10. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется убывающей на множестве X, если $\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие функции называются монотонными.
Определение 3.11. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется ограниченной сверху, если существует такая постоянная M, что $f(x) \leq M\ \forall x \in X$, при этом M называют верхней гранью функции f на множестве X.

Наименьшая верхняя грань функции f называется точной верхней гранью функции и обозначается $\sup\limits_{x\in X} f(x)$.

$m \leq f(x) \leq M$
$\forall x \in X$

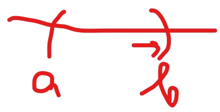
Определение 3.12. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется ограниченной снизу, если существует такая постоянная m, что $f(x) \geq m\ \forall x \in X$, при этом m называют нижней гранью функции f на множестве X.

Наибольшая нижняя грань функции f называется точной нижней гранью функции и обозначается $\inf\limits_{x\in X} f(x)$.

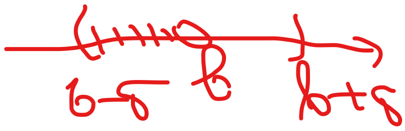
$|f(x)| \leq C$
$\forall x \in X$

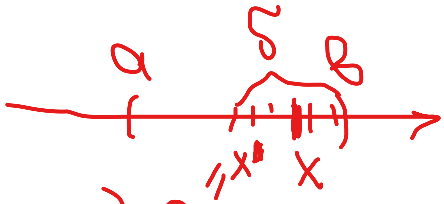
Определение 3.13. Функция f, ограниченная на множестве X как сверху, так и снизу, называется ограниченной на этом множестве.

Теорема 3.7. *Если функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ является неубывающей и ограниченной сверху, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.*



Доказательство. По условию теоремы множество значений, которые функция f принимает на интервале (a,b), ограничено сверху, поэтому по теореме о точной верхней грани существует $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) = A$.





Согласно определению точной верхней грани, выполняются условия

$$f(x) \le A \quad \forall x \in (a,b), \tag{3.17}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x' \in (a,b): \quad f(x') > A - \varepsilon. \tag{3.18}$$

$b-\delta \quad x' < X$

$f(x') \le f(x)$

Обозначим $\delta = b - x'$, тогда $\delta > 0$, так как $x' < b$. Если $x \in (x', b)$, то есть $x \in (b-\delta, b)$, то

$$f(x') \le f(x), \tag{3.19}$$

так как f – неубывающая функция. Из условий (3.17) – (3.19) следует, что

$A - \varepsilon < f(x') \le f(x) \le$
$\le A < A + \varepsilon$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \;\; \forall x \in (b-\delta, b) \to A - \varepsilon < f(x) \le A < A + \varepsilon.$$

Согласно определению предела слева, это означает, что существует

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b-0) = A.$$

Итак, $f(b-0) = \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x)$. □

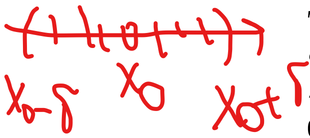
Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3.8. *Если функция $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ является неубывающей и ограниченной снизу, то существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.*

Подобные утверждения справедливы для невозрастающих, убывающих и возрастающих функций.

§ 3.6 Критерий Коши существования предела функции

Теорема 3.9. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ и x_0 – предельная точка множества X. Для существования конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall\, x_1, x_2 \in X$, $0 < |x_i - x_0| < \delta \;\; (i = 1,2) \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*



Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - A) + (A - f(x_2))| \le |f(x_1) - A| +$$

$$+|A - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x_i \in X,\ 0 < |x_i - x_0| < \delta,\ i = 1, 2.$$

$<\varepsilon/2$ $\quad$ $\varepsilon/2$

$x_1 \quad x_0 \quad x_2$ $\quad$ $x_0-\delta \quad x_0+\delta$

Достаточность. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ такова, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in X,\ 0 < |x_i - x_0| < \delta\ (i = 1, 2) \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Докажем, что существует предел функции f в точке x_0. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $x_n \in X, x_n \ne x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Докажем, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ имеет конечный предел, не зависящий от выбора последовательности $\{x_n\}$. По определению предела последовательности $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \to |x_n - x_0| < \delta$, поэтому в силу исходных предположений $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ для любого $n > N$ и для любого $m > N$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной и согласно критерию Коши для последовательности имеет конечный предел, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_x$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$

$\forall n > N$

$|x_n - x_0| < \delta$

x_n, x_m

$|x_n - x_0| < \delta$

$|x_m - x_0| < \delta$

$x_n \ne x_0$

$x_m \ne x_0$

Пусть $\{x'_n\}$ – другая последовательность, удовлетворяющая условиям $x'_n \in X,\ x'_n \ne x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$ и сходящаяся к x_0. Тогда по доказанному последовательность $\{f(x'_n)\}$ имеет конечный предел, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = A_{x'}$. Докажем, что $A_x = A_{x'}$.

Образуем последовательность

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, ..., x_n, x'_n, ...$$

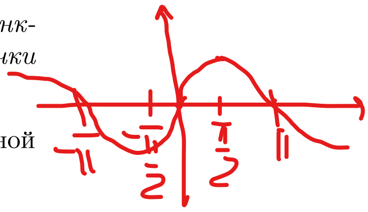
и обозначим k-й член этой последовательности через y_k. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$ и $y_k \in X,\ y_k \ne x_0\ \forall k \in \mathbb{N}$, то по доказанному существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = A'$. Заметим, что $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ являются подпоследовательностями сходящейся последовательности $\{f(y_k)\}$. Поэтому $A_x = A'$, $A_{x'} = A'$, откуда получаем, что $A_x = A_{x'}$. $\square$

§ 3.7 Сравнение функций

Определение 3.14. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \nexists$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\sin x}_{\text{огр.}}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{б.м.}} = 0$ $\frac{1}{x} \to 0$



Теорема 3.10. *Произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ функции на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки x_0 функцию есть бесконечно малая при $x \to x_0$ функция.*

Доказательство. Пусть функция $g : X \to \mathbb{R}$ является ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки x_0, т.е.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

$$\exists C > 0 : \ |g(x)| \le C \ \ \forall x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta_1.$$

$\boxed{|\sin x|}$

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \to |f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда

$|f(x)-0|$ $|\sin x| \le 1$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$

$$\forall x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{\cancel{C}} \cdot \cancel{C} = \varepsilon.$$

$|f(x)g(x)-0| = |f(x)g(x)|<\varepsilon$

Следовательно, $f \cdot g$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией. □

Определение 3.15. Если для функций $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ $\exists\ c > 0, \ U(x_0) : \ |f(x)| \le c|g(x)| \ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$, то функцию f называют ограниченной по сравнению с функцией g в окрестности точки x_0.

Записывают $f(x) = O(g(x)), \ x \to x_0$.

Лемма 3.3. *Если $f(x) = \varphi(x)g(x), \ x \in X$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = k$, то $f(x) = O(g(x)), \ x \to x_0$.*

Доказательство. Из существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = k$ следует существование такой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0, что функция φ ограничена на $X \cap \mathring{U}(x_0)$, то есть имеется такая постоянная $C > 0$, что для всех $x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| \le C$, следовательно, и неравенство

$$|f(x)| = |\varphi(x)||g(x)| \le C|g(x)|.$$

Это, согласно определению 3.15, и означает, что $f(x) = O(g(x)), \ x \to x_0$. □

Определение 3.16. Функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ называются эквивалентными (асимптотически равными) при $x \to x_0$, если $\exists\ \varphi : X \to \mathbb{R}, U(x_0) : \ \ f(x) = \varphi(x)g(x) \ \ \forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 1$.

Записывают $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

$x_n = n$

$1, 2, 3, 4, \ldots,$

$1, 3, 5, \ldots$

$3, 1, 5, 7, \ldots$