$f'(x_0) \neq 0$; *тогда обратная функция* $x = f^{-1}(y)$ *имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$, *причем*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

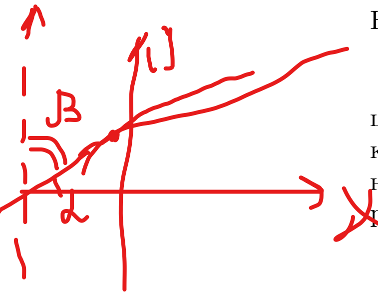
то есть производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Доказательство. Зафиксируем какую-то окрестность точки x_0, на которой функция f определена, непрерывна и строго монотонна, и будем рассматривать f только в этой окрестности. Тогда обратная функция определена и непрерывна на некотором интервале, содержащем точку y_0 и являющемся образом указанной выше окрестности точки x_0. Поэтому если $\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0,\ y = f(x)$, то $\Delta x \to 0$ равносильно $\Delta y \to 0$ в том смысле, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (для функции f) и $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ (для функции f^{-1}).

Для любых $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ имеем $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y/\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$ (или, что то же, в силу сказанного выше, при $\Delta y \to 0$) предел правой части существует, значит, существует и предел левой части, причем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = (f^{-1})'(y_0)$, поэтому $\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$. □

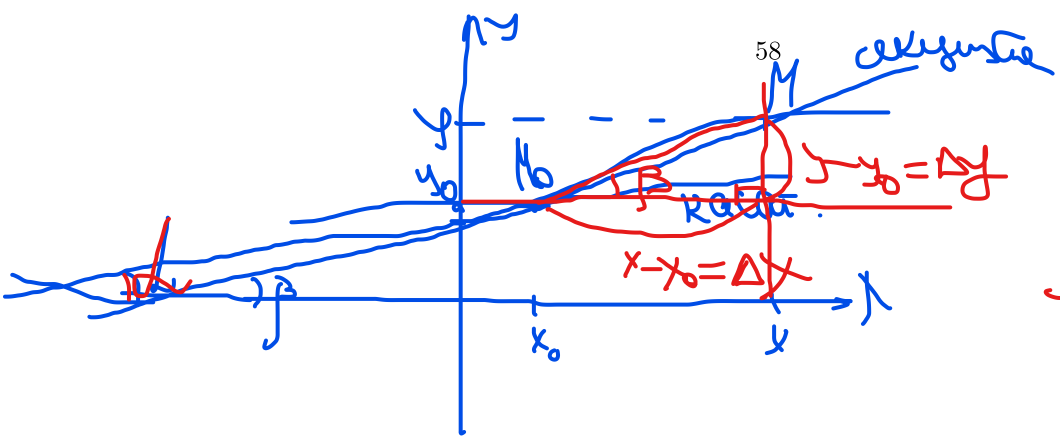


Этой теореме можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Как известно, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – значение угла, образуемого касательной графика функции f в точке (x_0, y_0) с положительным направлением оси Ox, а $(f^{-1})'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$, где β – значение угла, образованного той же касательной с осью Oy.

Очевидно, $\beta = \pi/2 - \alpha$, поэтому

$$(f^{-1})'(y_0) = \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Определение 4.6. Пусть функции $\boxed{x = \varphi(t)}$ и $y = \psi(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и функция $x = \varphi(t)$ непрерывна и строго монотонна в указанной окрестности; тогда существует обратная $\varphi(t)$ функция $t = \varphi^{-1}(x)$, и в некоторой окрестности точки $x_0 = \varphi(t_0)$ имеет смысл композиция $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Эта функция и



$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\lim\limits_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$

t наз. параметром.

называется параметрически заданной формулами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функцией.

$x_0 = \varphi(t_0) \Rightarrow$
$t_0 = \varphi^{-1}(x_0)$

Теорема 4.6. *Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют в точке t_0 производные и если $\varphi'(t_0) \neq 0$, то параметрически заданная функция $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ также имеет в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ производную, причем*

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{4.9}$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$f'(x_0) = \psi'(\varphi^{-1}(x_0)) \cdot (\varphi^{-1})'(x_0); = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \tag{4.10}$$

по правилу же дифференцирования обратной функции

$$(\varphi^{-1})'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(t_0)}. \tag{4.11}$$

Из формул (4.10) и (4.11) и следует формула (4.9). □

§ 4.5 Дифференциал

Определение 4.7. Линейная функция $A\Delta x$ (от переменной Δx) такая, что

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \ \ \Delta x \to 0, \tag{4.12}$$

где $A = A(x_0)$ не зависит от Δx, называется дифференциалом (первым дифференциалом) функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$, $dy(x_0)$, dy.

Теорема 4.7. *Для существования $df(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы функция f имела производную в этой точке; при этом $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть существует $df(x_0)$, то есть $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \overbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}^{=0} = A \Rightarrow f'(x_0) = A$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A\Delta x}{\Delta x} + \frac{\bar{o}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\bar{o}(\Delta x)}{\Delta x}$$

Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и равна A. Отсюда

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Достаточность. Пусть существует производная $f'(x_0)$, то есть существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x), \quad \Delta x \neq 0,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x) = 0$ и, следовательно,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x), \quad \Delta x \neq 0.$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)}_{=\varepsilon(\Delta x)}\Big) = 0$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x)$

Полагая здесь $\varepsilon(0) = 0$, получаем, что в некоторой окрестности точки x_0 имеет место равенство

$$\Delta y = \boxed{f'(x_0)\Delta x} + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

то есть равенство (4.12) при $A = f'(x_0)$. Таким образом, существует $df(x_0)$. □

Отметим, что приращение Δx обозначают dx и называют его дифференциалом независимой переменной. Таким образом, дифференциал можно записать в виде $df(x_0) = f'(x_0)dx$ или $\boxed{dy = y'dx}$.

Замечание 4.2. Из формул (4.3) – (4.5) и определения дифференциала следует, что

$$d(y_1 + y_2) = dy_1 + dy_2,$$
$$\boxed{d(y_1y_2) = y_2dy_1 + y_1dy_2,}$$
$$d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2dy_1 - y_1dy_2}{y_2^2} \qquad (y_2 \neq 0).$$

Докажем, например, формулу для дифференциала произведения. Так как $d(y_1y_2) = (y_1y_2)'dx$, где $(y_1y_2)' = y_1'y_2 + y_1y_2'$, то $d(y_1y_2) = y_2\underbrace{y_1'dx}_{dy_1} + y_1y_2'dx = y_2dy_1 + y_1dy_2$.
Остальные формулы доказываются аналогично.

Инвариантность формы первого дифференциала относительно преобразования независимой переменной

Рассмотрим функцию $y = g(z)$. Тогда $\boxed{dy = g'(z)dz.}$
Пусть теперь $z = f(x)$, т.е. $y = g(f(x))$. Найдем dy в этом случае.
Имеем

$$dy = (g(f(x)))'dx = g'(f(x))\underbrace{f'(x)dx}_{dz} = g'(z)dz.$$

Таким образом, дифференциал функции имеет один и тот же вид: произведение производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной – независимо от того, является эта переменная, в свою очередь, функцией или независимой переменной.

§ 4.6 Производные и дифференциалы высших порядков

$y=f(x)$

$f'(x)$

$f''(x)=(f'(x))'$

$y=x^3$

$y'=3x^2$

$y''=3\cdot 2x=6x$

$y'''=6$

$y^{(4)}=0$

$\ldots$

Определение 4.8. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой на множестве X и пусть $x_0 \in X$. Если при $x = x_0$ у производной $f'(x)$ функции $f(x)$ существует производная, то она называется второй производной (или производной второго порядка) функции f и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.

Таким образом, $f''(x_0) = [f'(x)]'|_{x=x_0}$ или, если опустить значения аргумента, $y'' = (y')'$.

Аналогично определяется производная $y^{(n)}$ любого порядка $n = 1, 2, \ldots$.

Заметим, что $\boxed{y^{(0)} = y}$.

Определение производной n-го порядка функции f в точке x_0 можно записать в виде предела:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Определение 4.9. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется n раз дифференцируемой на множестве X, если во всех точках этого множества она имеет производные до порядка n включительно.

Правила вычисления производных высших порядков

Теорема 4.8. *Если c – постоянная, а $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ – функции, имеющие производные n-го порядка в точке x_0, то функции $cf_1(x)$, $f_1(x)+f_2(x)$ и $f_1(x)f_2(x)$ также имеют производные n-го порядка в точке x_0, причем*

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}, \tag{4.13}$$

$$(cy_1)^{(n)} = cy_1^{(n)}, \tag{4.14}$$

$$(y_1y_2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(k)} y_2^{(n-k)} \qquad \text{(формула Лейбница)}, \tag{4.15}$$

$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{(n)} = (y_1 \cdot y_2^{-1})^{(n)}$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$n! = 1\cdot 2 \ldots n, \; 0! = 1$

$(y_1+y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}$

где C_n^k *- число сочетаний из* n *элементов по* k*:* $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. Формулы (4.13)–(4.15) доказываются по индукции. При $n=1$, то есть для производных первого порядка, они были доказаны в § 4.2. Пусть теперь эти формулы верны для прозводных n-го порядка. Докажем справедливость этих формул для прозводных порядка $n+1$, предполагая, что существуют $y_1^{(n+1)}$ и $y_2^{(n+1)}$.

В случае суммы функций имеем

$$(y_1+y_2)^{(n+1)} = \left[(y_1+y_2)^{(n)}\right]' = (y_1^{(n)} + y_2^{(n)})' =$$

$$= (y_1^{(n)})' + (y_2^{(n)})' = y_1^{(n+1)} + y_2^{(n+1)}.$$

Формула (4.13) доказана.

$(cy_1)^{(n)} = cy_1^{(n)}$

Далее,

$$(cy_1)^{(n+1)} = \left[(cy_1)^{(n)}\right]' = (cy_1^{(n)})' = c(y_1^{(n)})' = cy_1^{(n+1)}.$$

$(y_1+y_2+\dots+y_s)' = y_1'+y_2'+\dots+y_s'$

Формула (4.14) также доказана.

В случае произведения функций выкладки несколько сложнее.

$\boxed{(y_1y_2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(k)} y_2^{(n-k)}}$

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = \left[(y_1y_2)^{(n)}\right]' = \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(k)} y_2^{(n-k)}\right]' = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k y_1^{(k)} y_2^{(n-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[y_1^{(k+1)} y_2^{(n-k)} + y_1^{(k)} y_2^{(n+1-k)}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(k+1)} y_2^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(k)} y_2^{(n+1-k)}. \tag{4.16}$$

$(y_1y_2)' = \sum_{k=0}^{1} C_1^k y_1^{(k)} y_2^{(1-k)} =$

$= C_1^0 y_1^{(0)} y_2' + C_1^1 y_1' y_2^{(0)} =$

$= y_1 y_2' + y_1' y_2$

$C_1^0 = \frac{1!}{0!\,1!} = 1$

$C_1^1 = \frac{1!}{1!\,0!} = 1$

$C_n^n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

Преобразуем суммы в правой части равенства (4.16), выделяя в первой сумме последнее слагаемое, а во второй – первое и сдвигая индекс суммирования в первой сумме на единицу. Получим

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(k+1)} y_2^{(n-k)} = y_1^{(n+1)} y_2 + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y_1^{(k+1)} y_2^{(n-k)} = y_1^{(n+1)} y_2 +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n} C_n^{p-1} y_1^{(p)} y_2^{(n+1-p)} = y_1^{(n+1)} y_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} y_1^{(k)} y_2^{(n+1-k)},$$

$k+1=p$

$k=p-1$

$n-(p-1)$

$\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} y_1^{(k)} y_2^{(n+1-k)}$

$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot n!} = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(k)} y_2^{(n+1-k)} = y_1 y_2^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k y_1^{(k)} y_2^{(n+1-k)}.$$

Следовательно,

$$(y_1 y_2)^{(n+1)} = y_1 y_2^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) y_1^{(k)} y_2^{(n+1-k)} + y_1^{(n+1)} y_2.$$

C_{n+1}^k

Отметим, что

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

Действительно,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

$n+1-k+k$

Таким образом, получаем

$$(y_1 y_2)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k y_1^{(k)} y_2^{(n+1-k)},$$

то есть формула Лейбница справедлива для производных $(n+1)$-го порядка. $\square$

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ является n раз дифференцируемой на множестве X и $x_0 \in X$.

Определение 4.10. Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется выражение $f^{(n)}(x_0)dx^n$, где $dx^n = (dx)^n$ $= \underbrace{dx \cdot dx \ldots dx}_{n \text{ раз}}$

Обозначают $d^n y(x_0)$, $d^n f(x_0)$.

$d^2 f(x_0) = f''(x_0)dx^2$

О неинвариантности дифференциалов высших порядков (на примере второго дифференциала)

Рассмотрим функцию $y = g(z)$. Тогда $d^2y = g''(z)dz^2$.

$y=g(z)$

$= g''(f(x))(f'(x)dx)^2 +$
$+ g'(f(x))f''(x)dx^2 =$
$= g''(z)dz^2 +$
$+ \boxed{g'(z)d^2z}$

Пусть теперь $z = f(x)$, т.е. $y = g(f(x))$. Найдем d^2y в этом случае. Имеем

$$d^2y = (g(f(x)))''dx^2 = (g'(f(x))f'(x))'dx^2 =$$
$$= (g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))f''(x))dx^2 = g''(z)dz^2 + g'(z)d^2z.$$

$(g'(f(x)))' =$
$= g''(f(x))\cdot f'(x)$

§ 4.7 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши

Определение 4.11. Точка $x_0 \in X$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $f : X \to \mathbb{R}$, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in X \cap U(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \in X \cap U(x_0)).$$

Определение 4.12. Точка $x_0 \in X$ называется точкой строгого локального максимума (минимума) функции $f : X \to \mathbb{R}$, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0) \quad (f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0)).$$

Точки (строгого) локального максимума и минимума называются точками (строгого) экстремума.

Определение 4.13. Точка x_0 называется внутренней точкой множества X, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

Теорема 4.9 (Ферма)**.** *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет локальный экстремум во внутренней точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0, то есть существует δ-окрестность $U(x_0, \delta)$ точки x_0 такая, что $f(x) - f(x_0) \ge 0 \quad \forall x \in X \cap U(x_0, \delta)$.

Если $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то $x - x_0 < 0$ и

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0, \tag{4.17}$$

а если $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0. \tag{4.18}$$