# Геометрическая алгебра

## Внешнее произведение векторов и его свойства

## Произведение векторов

В стандартных курсах алгебры и аналитической геометрии рассматривают следующие произведения векторов из векторного пространства $L$.

- Скалярное произведение $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ для пространства $L$ любой размерности.
- Векторное произведение $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ для трехмерного пространства.
- Смешанное произведение $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ также для трехмерного пространства.

Векторное произведение встречается очень часто и через него выражаются многие физические величины. Однако, оно имеет существенные недостатки.

- Оно определено только для трехмерного случая.
- Результатом векторного произведения является «странный вектор», который может изменить свое направление при некоторых заменах координат.

То же относится и к смешанному произведению. Устранить эти недостатки и заменить два произведения (векторное и смешанное) одним, можно введя новую операцию, называемую внешним произведением.

# Внешнее произведение векторов

Внешним произведением векторов из линейного пространства $L$ называется операция $\wedge$, которая для любых векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ из $L$ обладает следующими свойствами:

1. $1 \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \wedge 1$, где $1 \in \mathbb{R}$;
2. $\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
3. $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ — ассоциативность;
4. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ — правая дистрибутивность;
5. $\mathbf{w} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$ — левая дистрибутивность;
6. $\mathbf{u} \wedge (\alpha \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$;
7. $\boxed{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}}$ — антикоммутативность (антисимметричность, кососимметричность).

Отметим ряд особенностей.

- Все свойства произведения $\wedge$ совпадают со свойствами обычного умножения чисел и отличается оно только свойством антикоммутативности.
- Результат внешнего произведения двух векторов $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ дает ни скаляр и не вектор, а элемент другого множества. Отсюда и название — внешнее произведение, так как результат внешнего произведения не принадлежит $L$ и является внешним по отношению к нему.

## Свойство антикоммутативности

Свойство антикоммутативности можно также определить следующим тождеством:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0.$$

Можно показать, что оно эквивалентно равенству $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$. Рассмотрим внешнее произведение вектора $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ самого на себя:

$$0 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \underbrace{\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}}_{=0} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}}_{=0} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}.$$

# Пространство бивекторов

Взяв любые два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из $L$ можно составить внешнее произведение $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ которое будем называть бивектором.

Множество бивекторов обозначим как $\Lambda^2(L)$. В скобках указанно векторное пространство $L$ из элементов которого строится пространство бивекторов.

# Базисные бивекторы 1

Рассмотрим базисные векторы $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ пространства $L$. Из свойств операции $\wedge$ следует:

- $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i$,
- $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$.

Произведение $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ является бивектором и служат в качестве базисного бивектора в пространстве бивекторов $\Lambda^2(L)$. Каждый бивектор можно выразить через линейную комбинацию $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$. Все комбинации $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ можно записать в виде таблицы:

| | $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{e}_1$ | $0$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1$ | $0$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2$ | $0$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_3$ | $\dots$ | $0$ | $\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_n$ | $\mathbf{e}_n \wedge \mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_n \wedge \mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_n \wedge \mathbf{e}_3$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_n \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $0$ |

# Базисные бивекторы 2

Благодаря свойству кососимметричности главная диагональ таблицы состоит из нулей, а нижний треугольник под главной диагональю выражается через элементы верхнего треугольника

| | $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{e}_1$ | $0$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ | $0$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_3$ | $-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ | $-\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ | $0$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\mathbf{e}_{n-1}$ | $-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $-\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $-\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\dots$ | $0$ | $\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_n$ | $-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n$ | $-\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_n$ | $-\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_n$ | $\dots$ | $-\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n$ | $0$ |

# Базисные бивекторы 3

Получается, что для представления любого бивектора достаточно задать $\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ бивекторов базиса $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$.

| | $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_4$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_{n-2}$ | $\mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{e}_1$ | $0$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_{n-2}$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_2$ | — | $0$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_3$ | — | — | $0$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_{n-2}$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_4$ | — | — | — | $0$ | $\dots$ | $\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_{n-2}$ | $\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\mathbf{e}_{n-2}$ | — | — | — | — | $\dots$ | $0$ | $\mathbf{e}_{n-2} \wedge \mathbf{e}_{n-1}$ | $\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_{n-1}$ | — | — | — | — | $\dots$ | — | $0$ | $\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n$ |
| $\mathbf{e}_n$ | — | — | — | — | $\dots$ | — | — | $0$ |

Элементы верхнего треугольника называются значимыми базисными бивекторами. Каждый бивектор имеет $\frac{n(n-1)}{2}$ значимых компонент.

# Бивекторы двухмерного и трехмерного пространств

Для двумерного пространства получим:

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\
\hline
\mathbf{e}_1 & 0 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 & 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|cc}
 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\
\hline
\mathbf{e}_1 & 0 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 & 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|cc}
 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\
\hline
\mathbf{e}_1 & 0 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_2 & - & 0
\end{array}
$$

Для для трехмерного пространства получим:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\
\hline
\mathbf{e}_1 & 0 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 & 0 & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 & 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|ccc}
 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\
\hline
\mathbf{e}_1 & 0 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_2 & - & 0 & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_3 & - & - & 0
\end{array}
$$

# Базис бивекторов

Сделаем несколько выводов.

- Если введен базис пространства $L$, то на его основе можно сконструировать базис пространства $\Lambda^2(L)$. Он будет состоять из объектов вида $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$.
- Из-за кососимметричности достаточно взять только такие комбинации, в которых $i < j$.

# Ориентированная площадь в двухмерном пространстве

Рассмотрим два вектора на плоскости:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$$

Найдем их внешнее произведение. Будем раскрывать скобки и приводить подобные так, как если бы мы перемножали числа, но помня, что при перестановке множителей меняется знак.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2) \wedge (b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2) = a^1b^1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1}_{=0} + a^2b^1\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + a^1b^2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a^2b^2 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2}_{=0} =$$

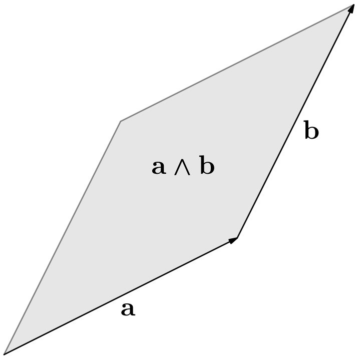
$$= a^2b^1\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + a^1b^2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -a^2b^1\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a^1b^2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

Бивектор $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ имеет одну значимую компоненту, равную ориентированной площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

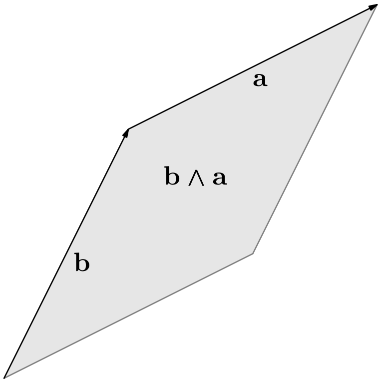
$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = (b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2) \wedge (a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2) = b^1a^2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + b^2a^1\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = (b^1a^2 - b^2a^1)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} b^1 & a^1 \\ b^2 & a^2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

# Визуализация ориентированной площади




$$S = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$




$$S = \begin{vmatrix} b^1 & a^1 \\ b^2 & a^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

# Векторное произведение как частный случай внешнего 1

Рассмотрим два вектора в $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$$

Найдем их внешнее произведение:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3) \wedge (b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3) = a^1b^1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1}_{=0} + a^1b^2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a^1b^3\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 +$$

$$+ a^2b^1 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1}_{=-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2} + a^2b^2 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2}_{=0} + a^2b^3\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + a^3b^1 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1}_{-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3} + a^3b^2 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2}_{-\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3} + a^3b^3 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3}_{0} =$$

$$= (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + (a^1b^3 - a^3b^1)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + (a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

Таким образом, у бивектора $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 6 компонент всего, из которых только три — значимые:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{12} = a^1b^2 - a^2b^1 = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{21}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{13} = a^1b^3 - a^3b^1 = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{31}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{23} = a^2b^3 - a^3b^2 = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{32}$$

## Векторное произведение как частный случай внешнего 2

Теперь найдем векторное произведение тех же векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} a^2b^3 - a^3b^2 \\ a^3b^1 - a^1b^3 \\ a^1b^2 - a^2b^1 \end{pmatrix}$$

Можно установить формальное взаимно однозначное соответствие между значимыми компонентами $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ и компонентами $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} a^2b^3 - a^3b^2 \\ a^3b^1 - a^1b^3 \\ a^1b^2 - a^2b^1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} +(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{23} \\ -(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{13} \\ +(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{12} \end{pmatrix}$$

Это соответствие частный случай действия операции дополнения, которую мы изучим позже.

Вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ таким образом составлен из компонент бивектора $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ путем переноса компонент из бивекторного пространства в пространство $\mathbb{R}^3$.

# Векторное произведение как частный случай внешнего 3

Из-за такого формального переноса «вектор» $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ведет себя не так, как должен вести добропорядочный вектор и меняет направлении при изменении направления любой оси координатной системы, что отличает его от настоящих векторов и вынуждает давать отдельные названия вроде псевдовектор или аксиальный вектор.

Находясь в рамках $\mathbb{R}^3$ не возможно объяснить такое поведения вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и операция векторного произведения кажется искусственной.

Кроме того, у бивектора всего 6 компонент, хотя значимых всего 3. Поэтому это не трехмерный объект.

Если вести изложение строже, то операцией дополнения надо действовать на 2-вектор, переводя его компоненты в пространство 1-векторов. Или действовать операцией дуализации (оператор Ходжа) на 2-форму и получить 1-вектор.

# Смешанное произведение как частный случай внешнего 1

Рассмотрим теперь в $\mathbb{R}^3$ три вектора:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$$

и найдем внешнее произведение $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3) \wedge (b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3) \wedge (c^1\mathbf{e}_1 + c^2\mathbf{e}_2 + c^3\mathbf{e}_3)$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ — тривектор в трехмерном пространстве, а $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k$ — базисные тривекторы.

Раскрыв скобки мы получим $3^3 = 27$ слагаемых.

$$
\begin{aligned}
&a^1b^1c^1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{0}} + a^1b^1c^2 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{0}} + a^1b^1c^3 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{0}} + \\
&a^1b^2c^1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{0}} + a^1b^2c^2 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{0}} + a^1b^2c^3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \\
&a^1b^3c^1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{0}} + a^1b^3c^2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 + a^1b^3c^3 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{0}} + \\
&a^2b^1c^1 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{0}} + a^2b^1c^2 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{0}} + a^2b^1c^3 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \\
&a^2b^2c^1 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{0}} + a^2b^2c^2 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{0}} + a^2b^2c^3 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{0}} + \\
&a^2b^3c^1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + a^2b^3c^2 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{0}} + a^2b^3c^3 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{0}} + \\
&a^3b^1c^1 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{0}} + a^3b^1c^2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a^3b^1c^3 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{0}} + \\
&a^3b^2c^1 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + a^3b^2c^2 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{0}} + a^3b^2c^3 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{0}} + \\
&a^3b^3c^1 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{0}} + a^3b^3c^2 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{0}} + a^3b^3c^3 \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{0}}
\end{aligned}
$$

## Смешанное произведение как частный случай внешнего 3

Выражения $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k$, где хотя бы два индекса совпадают, равны нулю в силу кососимметричности. В результате остается только 6 слагаемых.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = a^1 b^2 c^3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + a^1 b^3 c^2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 + a^2 b^1 c^3 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \\ + a^2 b^3 c^1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + a^3 b^1 c^2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a^3 b^2 c^1 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1$$

Оставшиеся ненулевые базисные тривекторы в силу кососимметричности или равны $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ или отличаются знаком:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \\
\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \\
\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (a^1 b^2 c^3 - a^1 b^3 c^2 - a^2 b^1 c^3 + a^2 b^3 c^1 + a^3 b^1 c^2 - a^3 b^2 c^1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

Получается, что у тривектора $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ одна значимая компонента, поэтому его можно интерпретировать как скаляр, значение которого совпадает со значением смешанного произведения и с ориентированным объемом параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Из-за такого формального переноса компоненты в другое пространство данный «скаляр» имеет свойство изменять свой знак при замене направления одной оси координат на противоположное, что вынуждает дать ему название псевдоскаляра.

Мы получили, что с помощью $\wedge$ можно выразить операции векторного произведения и смешанного произведения.

# Геометрическая алгебра

## Бивекторы, тривекторы и $p$-векторы

# Двухмерное линейное пространство $L$

- Рассмотрим двухмерное линейное пространство $L$ с базисом $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, $\dim L = 2$.
- Введем на этом пространстве операцию внешнего произведения $\wedge$, которую мы выше определили аксиоматически.
- Возьмем два произвольных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из $L$ и найдем их внешнее произведение (подробно см. слайд 192)
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2.$$
- Возьмем три произвольных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ из $L$ и найдем их внешнее произведение:
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2) \wedge (b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2) \wedge (c^1 \mathbf{e}_1 + c^2 \mathbf{e}_2) = (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge (c^1 \mathbf{e}_1 + c^2 \mathbf{e}_2) =$$
$$= (a^1 b^2 - a^2 b^1) c^1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1}_{=0} + (a^1 b^2 - a^2 b^1) c^2 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2}_{=0} = 0.$$
- Ясно, что для двухмерного пространства $L$ все внешние произведения из более чем двух векторов будут равны нулю в силу антисимметричности.

# Внешние алгебры над $L$ с $\dim L = 2$

Для двухмерного линейного пространства $L$ можно построить следующие внешние алгебры:

- Тривиальную алгебру скаляров: $\Lambda^0(L) = \mathbb{R}$. В ней есть один базисный элемент — скалярная единица $1$ и операция внешнего произведения совпадает с обычным умножением. Каждый элемент можно формально записать как скаляр умноженный на $1$.
- Двухмерную алгебру векторов $\Lambda^1(L) = L$. Она совпадает с самим пространством $L$. Ее элементы — двухмерные векторы, действует операция внешнего произведения и существует два базисных элемента — векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Каждый элемент выражается через базис с помощью двух компонент (двух чисел).
- Одномерную алгебру бивекторов $\Lambda^2(L)$. Ее элементы — бивекторы, базисный элемент — бивектор $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. Каждый бивектор выражается через базисный бивектор с помощью одной компоненты (одного числа).
- Алгебры тривекторов, четыревекторов и т.д. на основе двухмерного пространства $L$ будут вырожденными т.е. будут состоять из одного нулевого элемента.

## Внешние алгебры над $L$ с $\dim L = 2$

Для двухмерного линейного пространства $L$ можно построить следующие внешние алгебры:

| $p$ | $\Lambda^p(L)$ | Базис | Элемент | Ранг |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\mathbb{R}$ | 1 | $a = a \cdot 1$ | 1 |
| $1$ | $L$ | $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2$ | 2 |
| $2$ | $\Lambda^2(L)$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ | $\mathbf{a} = a^{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ | 1 |
| $3$ | $\Lambda^3(L)$ | 0 | $\mathbf{a} = 0$ | 0 |

- Из таблицы видно, что максимальный ранг $p$ внешней алгебры $\Lambda^p(L)$ зависит от размерности пространства $L$ равной $n$ и он не может быть выше, чем $n$.
- Ранг не следует путать с размерностью пространства $\Lambda^p(L)$!

Увеличим теперь размерность $L$ до трех и составим такую же таблицу:

| $p$ | $\Lambda^p(L)$ | Базис | Элемент | Ранг |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\mathbb{R}$ | $1$ | $a = a \cdot 1$ | 1 |
| $1$ | $L$ | $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$ | $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$ | 3 |
| $2$ | $\Lambda^2(L)$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ | $\mathbf{a} = a^{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a^{23}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + a^{13}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ | 3 |
| $3$ | $\Lambda^3(L)$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ | $\mathbf{a} = a^{123}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ | 1 |

- Из таблицы видно, что максимальный ранг $p$ внешней алгебры $\Lambda^p(L)$ зависит от размерности пространства $L$ равной $n$ и он не может быть выше, чем $n$.
- Ранг не следует путать с размерностью пространства $\Lambda^p(L)$!

# Обозначения для базисов

Нам постоянно встречались комбинации следующего вида: $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k$. Если работать с большими размерностями, то комбинации будут усложняться, например: $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \mathbf{e}_{i_3} \wedge \mathbf{e}_{i_4} \wedge \mathbf{e}_{i_5} \wedge \mathbf{e}_{i_6}$.

Можно ввести специальные обозначения, чтобы меньше приходилось писать или печатать:

- $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij}$,
- $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{ijk}$,
- $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_{ijkl}$.

Например, для конкретных индексов

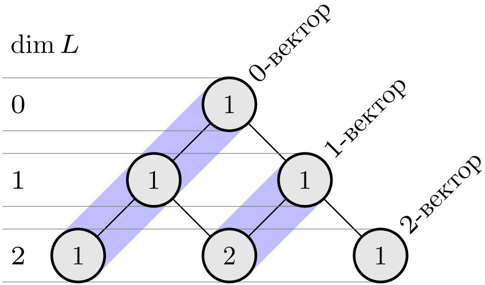
- $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}$,
- $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_{234}$,
- $\mathbf{e}_6 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_8 = \mathbf{e}_{6238}$.

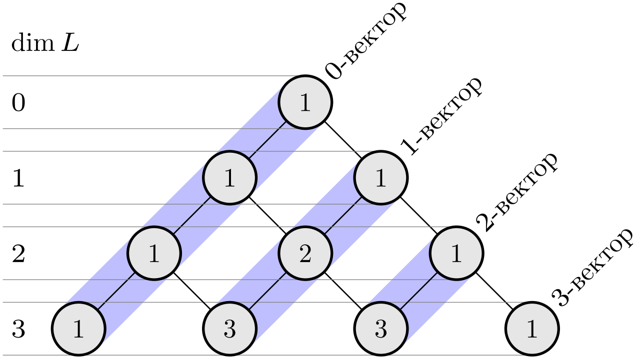
## Базисы для разных размерностей

| $\dim L$ | rank | $\dim \Lambda^p$ | Базис |
|---|---|---|---|
| 0 | Скаляр | 1 | 1 |
| 1 | Скаляр | 1 | 1 |
| | Вектор | 1 | $\mathbf{e}$ |
| 2 | Скаляр | 1 | 1 |
| | Вектор | 2 | $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ |
| | Бивектор | 1 | $\mathbf{e}_{12}$ |
| 3 | Скаляр | 1 | 1 |
| | Вектор | 3 | $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ |
| | Бивектор | 3 | $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}$ |
| | Тривектор | 1 | $\mathbf{e}_{123}$ |
| 4 | Скаляр | 1 | 1 |
| | Вектор | 4 | $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ |
| | Бивектор | 6 | $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{24}, \mathbf{e}_{34}$ |
| | Тривектор | 4 | $\mathbf{e}_{123}, \mathbf{e}_{124}, \mathbf{e}_{134}, \mathbf{e}_{234}$ |
| | Квадривектор | 1 | $\mathbf{e}_{1234}$ |

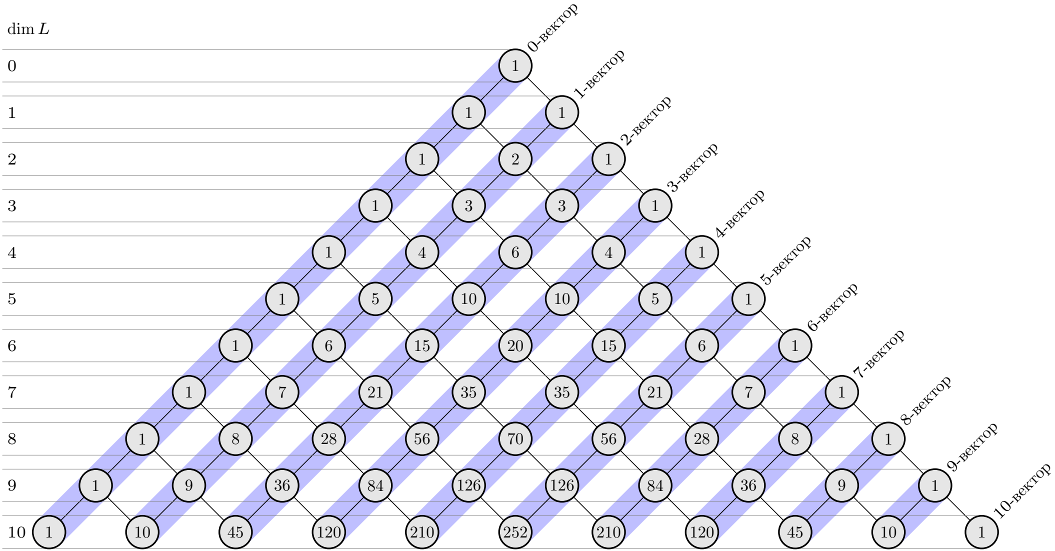
Можно заметить, что $\dim \Lambda^p(L) = C_n^p$, а комбинации индексов в базисных элементах — все возможные сочетания по $p$ разных индексов из $n$ элементов.

Так как размерности совпадают с биноминальными коэффициентами, то есть возможность использовать треугольник Паскаля для визуализации зависимостей размерности $n$ пространства $L$, ранга элементов $p$ и размерности $\Lambda^p(L)$. Для примера рассмотрим треугольник для максимальной размерности $n = 2$.




dim $L$
0
1
2
3
0-вектор
1-вектор
2-вектор
3-вектор
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

# Внешние алгебры вплоть до $n = 10$



# Разложимый $p$-вектор

Разложимым называют такой $p$-вектор $\mathbf{A}$, который выражается через внешнее произведение $p$ различных векторов из $L$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_p$$

Также использую термин простой (simple) вектор и blade (лезвие).

Не всякий $p$-вектор разложим, однако в трехмерном пространстве $L$ все $p$-векторы разложимы (то есть бивекторы и тривекторы в трехмерном пространстве являются разложимыми).

# Элемент единичного объема

Рассматривая треугольник размерностей и рангов, можно обратить внимание на то, что когда ранг рассматриваемого объекта $p$ совпадает с размерностью пространства $n$, то у этого объекта существует только один компонент.

- Бивектор в двумерном пространстве $\mathbf{a} = a^{12}\mathbf{e}_{12}$.
- Тривектор в трехмерном пространстве $\mathbf{A} = a^{123}\mathbf{e}_{123}$.
- $n$-вектор в $n$-мерном пространстве $\mathbf{A} = a^{123\ldots n}\mathbf{e}_{123\ldots n}$.

Видно, что:

- все $n$-векторы определяются одним числом и могут быть «спутаны» со скаляром (0-вектором) из того же пространства $L$;
- все $n$-векторы отличаются друг от друга только компонентой $a^{123\ldots n}$;
- базисный $n$-вектор $\mathbf{e}_{123\ldots n}$ один единственный и называется элементом единичного объема.

Элемент единичного объема будем обозначать как

$$\boxed{\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_{123\ldots n} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n}$$

## Симметричность треугольника

Обратите внимание на симметричность треугольника размерностей и рангов.

- Для $\dim L = 2$ скаляры и бивекторы имеют ранг 1.
- Для $\dim L = 3$ скаляры и тривекторы имеют ранг 1, векторы и бивекторы ранг 3.
- Для $\dim L = 4$ скаляры и квадривекторы имеют ранг 1, векторы и тривекторы ранг 4.
- Для $\dim L = 5$ скаляры и 5-векторы имеют ранг 1, векторы и 4-векторы ранг 5, бивекторы и тривекторы имеют ранг 10.
- И так далее.

В каком-то смысле все элементы одинакового ранга неотличимы друг от друга, если описывать их только компонентами. Мы видели пример такой путаницы, когда векторное произведение выдавало бивектор за обычный вектор и было невозможно объяснить, почему при замене координат этот «вектор» вел себя не так, как обычные векторы.

# Операция дополнения

Так как для всякой размерности $\dim L = n$ существует элемент максимального ранга $n$ ($n$–вектор), то можно ввести операцию дополнения, которая определяется следующим образом.

Правым дополнением (right complement) базисного $p$-вектора $\mathbf{B} \in \Lambda^p(L)$, где $\dim L = n$ называется такой $(n-p)$-вектор $\overline{\mathbf{B}} \in \Lambda^{n-p}(L)$, что

$$\mathbf{B} \wedge \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{E}_n.$$

Соответственно левым дополнением (left complement) базисного $p$-вектора $\mathbf{B} \in \Lambda^p(L)$ называется такой $(n-p)$-вектор $\underline{\mathbf{B}} \in \Lambda^{n-p}(L)$, что

$$\underline{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E}_n.$$

## Операция дополнения для трехмерного пространства

Рассмотрим пространство бивекторов $\Lambda^2(L)$ на $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Рассмотрим базис бивекторов в этом пространстве:

$$\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3,$$

и найдем правые дополнения к этим базисным бивекторам:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{e}}_{12} &= \mathbf{e}_3 \text{ т.к. } (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3,\\
\overline{\mathbf{e}}_{13} &= -\mathbf{e}_2 \text{ т.к. } (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge (-\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3,\\
\overline{\mathbf{e}}_{23} &= \mathbf{e}_1 \text{ т.к. } (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_3.
\end{aligned}$$

Левые дополнения в данном случае совпадают с правыми:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{e}}_{12} &= \mathbf{e}_3 \text{ т.к. } \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{E}_3,\\
\underline{\mathbf{e}}_{13} &= -\mathbf{e}_2 \text{ т.к. } (-\mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3,\\
\underline{\mathbf{e}}_{23} &= \mathbf{e}_1 \text{ т.к. } \mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{E}_3.
\end{aligned}$$

# Операция дополнения для трехмерного пространства

| $\mathbf{B}$ | $\overline{\mathbf{B}}$ |
|---|---|
| $1$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ |
| $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ |
| $\mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ |
| $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ |
| $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ | $-\mathbf{e}_2$ |
| $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_1$ |
| $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ | $1$ |

| $\mathbf{B}$ | $\overline{\mathbf{B}}$ | $\underline{\mathbf{B}}$ |
|---|---|---|
| $1$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ |
| $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2$ | $-\mathbf{e}_2$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $-\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_1$ |
| $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ | $1$ | $1$ |

## Векторное произведение как дополнение

Пусть $L$ трехмерное пространство с базисом $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Найдем внешнее произведение двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u^1v^2 - u^2v^1)\mathbf{e}_{12} + (u^1v^3 - u^3v^1)\mathbf{e}_{13} + (u^2v^3 - u^3v^2)\mathbf{e}_{23}$$

Найдем дополнение к бивектору $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

$$\overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}} = (u^1v^2 - u^2v^1)\mathbf{e}_3 - (u^1v^3 - u^3v^1)\mathbf{e}_2 + (u^2v^3 - u^3v^2)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} u^2v^3 - u^3v^2 \\ u^3v^1 - u^1v^3 \\ u^1v^2 - u^2v^1 \end{pmatrix} \in \Lambda^1(L) = L$$

Мы получили векторное произведение $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}$$

Операция дополнения позволяет найти $1$-вектор, ортогональный бивектору $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Если же ее применить к $1$-вектору, то, наоборот, получаем бивектор, «ортогональный» к исходному вектору. Для больших размерностей данная интерпретация также сохраняется, но теряет наглядность.

## Смешанное произведение как дополнение

На том же трехмерном пространстве $L$ найдем внешнее произведение трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = \sum_{i,j,k=1}^{3} u^i v^j w^k \mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j\wedge\mathbf{e}_k = \sum_{i,j,k=1}^{3} u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk}\mathbf{E}_3 = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}\mathbf{E}_3,$$

где $\varepsilon_{ijk}$ — символ Леви–Чивиты.

Найдем дополнение к тривектору $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$

$$\overline{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}} = \sum_{i,j,k=1}^{3} u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk}\overline{\mathbf{E}}_3 = \sum_{i,j,k=1}^{3} u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk}\cdot 1.$$

Это не что иное, как смешанное произведение трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \overline{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}}$$

## Задания для самостоятельной работы

- В стандартной библиотеки Python есть модуль `itertools` найдите в нем функцию, которая позволит распечатать все возможные комбинации $p$ индексов из $n$ возможных.
- С помощью этой функции дополните табличку на слайде 206
- В двухмерном пространстве $L$ возьмите произвольный вектор и найдите его правое и левое дополнения. Сравните с комплексным сопряжением. Какой поворот вокруг центра координат дает эта операция?
- Установите библиотеку `clifford` (ссылка) и попробуйте найти в ней функции для внешнего произведения и для правого и левого дополнений. Повторите примеры из презентаций с помощью этих функций.

# Геометрическая алгебра

## Геометрическое произведение

## Мультивектор

Рассмотрим объект, состоящий из элементов различного ранга:

$$\mathbf{M} = a + \mathbf{u} + \underset{2}{\mathbf{V}} + \underset{3}{\mathbf{W}} + \ldots$$

Число под буквой указывает на ранг объекта то есть:

- $a$ — скаляр (действительное число);
- $\mathbf{u}$ — вектор из $\Lambda^1(L) = L$;
- $\underset{2}{\mathbf{V}}$ — бивектор из $\Lambda^2(L)$;
- $\underset{3}{\mathbf{W}}$ — тривектор из $\Lambda^3(L)$;
- и так далее.

В этом выражении знак $+$ надо воспринимать также, как и знак $+$ в комплексных числах и кватернионах. Знак суммы просто указывает, что элементы разного ранга рассматриваются вместе, как единая сущность, которую называют мультивектором или реже числом Клиффорда [27]. Пространство мультивекторов обозначим как $\Lambda(L)$.

Геометрическим произведением двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ назовем отображение $L \times L \to L$, которое имеет следующие свойства.

- Геометрическое умножение двух скаляров сводится к обычному умножению, определенному в поле этих скаляров.
- Геометрическое умножение скаляра на вектор из $L$ сводится к обычному умножению, определенному в $L$.
- Геометрическое произведение вектора $\mathbf{u}$ самого на себя равно скаляру, значения которого равно норме вектора (норме):
$$\mathbf{u}^2 \equiv \mathbf{u}\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2.$$
- Дистрибутивность:
$$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w},$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{w}.$$
В силу того, что $\mathbf{u}$ может быть скаляром, из дистрибутивности следует линейность.
- Ассоциативность: $\mathbf{v}(\mathbf{u}\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\mathbf{u})\mathbf{w}$.

Коммутативность или антикоммутативность явным образом не требуется. Геометрическое произведение никак не обозначается.

## Геометрическое произведение. Конструктивное определение

Для вычислений проще использовать конструктивное определение геометрического произведения:
Геометрическое произведение двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ определим как:

$$\mathbf{uv} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

- Можно проверить, что все свойства из аксиоматического определения выполняются.
- Геометрическое произведение комбинирует в себе скалярное и внешнее произведения.

Верны два следующих равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{uv} &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \\ \mathbf{vu} &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{uv} + \mathbf{vu} &= 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \mathbf{uv} - \mathbf{vu} &= 2\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{uv} + \mathbf{vu}\right), \\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{uv} - \mathbf{vu}\right). \end{aligned}}$$

Из данных равенств видно, что можно выразить операции скалярного и внешнего произведения через операцию геометрического произведения.

# Зачем нужно еще одно произведение?

До этого момента были введены следующие произведения векторов:

- умножение на число;
- скалярное произведение;
- векторное произведение;
- смешанное произведение;
- внешнее произведение.

Векторное и смешанное можно свести к внешнему. Скалярное и внешнее к друг-другу не сводятся, поэтому можно предположить, что это наиболее общие операции. Векторное произведение совмещает в себе и скалярное и внешнее, благодаря понятию мультивектора.

$$\mathbf{uv} = \underbrace{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}_{\text{скаляр}} + \underbrace{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}_{\text{бивектор}}$$

Все операции на основе внешнего и скалярного произведений можно записать с использованием только геометрического произведения.

# Обратный элемент

Рассмотрим вектор $\mathbf{u}$ и найдем его геометрическое произведение самого на себя:

$$\mathbf{u}\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \underbrace{\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}}_{=0} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 = u^2.$$

Если теперь найти произведение $\mathbf{u}\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$, то

$$\mathbf{u}\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} = 1,$$

а следовательно можно определить обратный вектор $\mathbf{u}^{-1} = \dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$, а значит и операцию деления, как произведение справа на обратный элемент:

$$\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} = \mathbf{u}\mathbf{v}^{-1} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Если умножение произвести слева, то получим иное выражение: $\mathbf{v}^{-1}\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}\mathbf{u}}{\|\mathbf{v}^2\|}$ так как $\mathbf{u}\mathbf{v} \neq \mathbf{v}\mathbf{u}$

# Геометрическое произведение произвольных мультивекторов

Мы дали аксиоматическое и конструктивное определения геометрического произведения, но ни подходят только для вычисления геометрического произведения векторов.

- Как геометрически перемножить три и более вектора?
- Как найти геометрическое произведение бивектора и вектора?
- Тривектора и вектора?...
- и т.д.

Оказывается, если есть ортонормированный базис, то все эти действия можно вывести из того определения, что у нас уже есть. Но все будет работать только при ортонормированном базисе!

# Геометрическое произведение и ортонормированный базис

Рассмотрим ортонормированный базис евклидова пространства $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и найдем как на векторы $\mathbf{e}_i$ действует геометрическое произведение:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \delta_{ij} + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j.$$

При $i \neq j$ получим:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i.$$

При $i = j$ получим в силу антисимметричности $\wedge$ и ортонормированности базиса:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) + \underbrace{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i}_{=0} = \|\mathbf{e}_i\|^2 = 1.$$

В результате:

$$\boxed{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i,\ i \neq j \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = 1}$$

Кроме того, если $i \neq j$, то $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, то есть базис бивекторов можно выразить через геометрическое произведение.

# Базис $p$-векторов

Мы показали, что для ортонормированного базиса пространства $L$ базис бивекторов из $\Lambda^2(L)$ можно записывать через геометрическое произведение вместо внешнего:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j,$$

а случай $i = j$ можно отдельно не упоминать, так как бивекторы $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i$ всегда равны нулю из-за антисимметричности.

Оказывается, то же справедливо для базиса произвольного $p$-вектора:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k,$$
$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l,$$
$$\dots$$
$$\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_p} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_3}.$$

## Базисы для разных размерностей

Повторим таблицу со слайда 206, записав базис через геометрическое произведение:

| $\dim L$ | rank | $\dim \Lambda^p$ | Базис |
|---|---|---|---|
| 0 | Скаляр | 1 | 1 |
| 1 | Скаляр | 1 | 1 |
| | Вектор | 1 | $\mathbf{e}$ |
| 2 | Скаляр | 1 | 1 |
| | Вектор | 2 | $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ |
| | Бивектор | 1 | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ |
| 3 | Скаляр | 1 | 1 |
| | Вектор | 3 | $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ |
| | Бивектор | 3 | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ |
| | Тривектор | 1 | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ |
| 4 | Скаляр | 1 | 1 |
| | Вектор | 4 | $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ |
| | Бивектор | 6 | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$ |
| | Тривектор | 4 | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$ |
| | Квадривектор | 1 | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$ |

# Базис бивектора и тривектора в трехмерном пространстве

Для примера запишем бивектор и тривектор в трехмерном пространстве.

- Бивектор: $\mathbf{u} = u^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u^{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + u^{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.
- Тривектор: $\mathbf{U} = U^{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Умножим, например вектор на вектор:

$$\mathbf{vu} = (v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3)(u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3) =$$

$$= v^1u^1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + v^2u^1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + v^3u^1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + v^1u^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + v^2u^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + v^3u^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + v^1u^3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + v^2u^3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + v^3u^3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$$

Используем для упрощения вышедоказанные равенства:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i,\ i \neq j \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = 1$$

которые для трехмерного случая в явном виде записываются следующим образом:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = 1.$$

Получим:

$$\mathbf{vu} = v^1u^1 + v^2u^2 + v^3u^3 + (v^1u^2 - v^2u^1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (v^1u^3 - v^3u^1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + (v^2u^3 - v^3u^2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.$$

# Умножение двух бивекторов

Рассмотрим еще один пример с бивекторами в двухмерном пространстве. Запишем два бивектора через базис:

$$\mathbf{U} = U^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \text{ и } \mathbf{V} = V^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2.$$

и перемножим их

$$\mathbf{UV} = U^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2V^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = U^{12}V^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -U^{12}V^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -U^{12}V^{12}.$$

Все упрощение свелось к следующим шагам:

- можно менять рядом стоящие векторы местами;
- каждая перестановка сопровождается сменой знака;
- задача так переставить векторы, чтобы векторы с одинаковыми номерами оказались рядом;
- все парные одинаковые вектора заменяем на $1$;
- от каждой суммы останется максимум $n$ векторов, где $n = \dim L$.

# Геометрическое произведение произвольных мультивекторов

Теперь мы можем применить геометрическое произведение к любым мультивекторам, достаточно знать разложение по базисным $p$-векторам. Например:

$$(3+5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)(4\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)=12\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+20\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3-4\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=12\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3-20\mathbf{e}_3-4\mathbf{e}_2$$

Это справедливо, так как

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_1\underbrace{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2}_{1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3=-\underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1}_{=1}\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\underbrace{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3}_{=1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2=\underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1}_{=1}\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2.$$

- Геометрическое умножение похоже на обычное, но нельзя менять сомножители местами.
- Переставлять местами можно только базисные векторы, меняя при этом знак.

# Алгебраическая геометрия в $E^2$

В двумерном декартовом пространстве мультивектор в общем виде будет записываться как:

$$\mathbf{U} = u^0 + \underbrace{u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2}_{\mathbf{u}} + \underbrace{u^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}_{\mathbf{U}},$$

- $u^0$ — скаляр,
- $\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2$ — вектор в $E^2$,
- $\mathbf{U} = u^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ — бивектор в $E^2$,
- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — базисные векторы,
- $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ — базисные бивекторы.

Базисный бивектор в $E^2$ всего один:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2.$$

Мы видим, что его можно обозначить как $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, то есть свести к геометрическому произведению.

Единичный элемент объема (площади) $\mathbf{E}_2$ обозначим как $\mathbf{i}$, так как он обладает свойствами мнимой единицы относительно геометрического умножения:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1 \Rightarrow \mathbf{i}^2 = -1.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{v}\mathbf{i} &= 2\,\overbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1}^{=1}\,\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2 - 3\,\overbrace{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2}^{=1}\,\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_1, \\
\mathbf{i}\mathbf{v} &= 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -2\mathbf{e}_2\,\underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1}_{=1} + 3\mathbf{e}_1 = -2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_1.
\end{aligned}$$

# Бивекторы и комплексные числа

Мультивекторы следующего вида

$$\mathbf{V} = a + b\mathbf{i} \in \Lambda(L), \quad \dim L = 2$$

изоморфны комплексным числам $z = a + bi$ так как базисный бивектор $\mathbf{i}$ обладает свойством мнимой единицы $\mathbf{i}^2 = -1$ и все арифметические операции сохраняются:

- $(a + b\mathbf{i}) \pm (c + d\mathbf{i}) = (a + c) \pm (b + d)\mathbf{i}$
- $(a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = (ac - bd) + (bc + ad)\mathbf{i}$
- $\dfrac{a + b\mathbf{i}}{c + d\mathbf{i}} = \dfrac{(ac + bd) + (bc - ad)\mathbf{i}}{c^2 + d^2}$

Вместо обычного умножения используется геометрическое. Для скаляров оно совпадает с обычным.

# Случай трехмерного пространства

Рассмотрим теперь случай трехмерного евклидова пространства $L$ с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. В этом случае $\Lambda(L) = \Lambda^0(L) \oplus \Lambda^1(L) \oplus \Lambda^2(L) \oplus \Lambda^3(L)$ и на нем определены $p$-векторы четырех рангов:

- скаляр (действительное число) $u^0 \in \Lambda^0(L)$;
- вектор с тремя компонентами $\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u} \in \Lambda^1(L)$;
- бивектор с тремя компонентами $\underset{2}{\mathbf{U}} = u^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u^{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + u^{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{U} \in \Lambda^2(L)$.
- тривектор с одной компонентой $u^{123}$, который выражается через элемент единичного объема: $\underset{3}{\mathbf{U}} = u^{123}\mathbf{E}_3 = u^{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

В самом общем виде мультивектор для трехмерного пространства записывается следующим образом:

$$\mathbf{U} = u^0 + \underbrace{u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3}_{\text{вектор}} + \underbrace{u^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u^{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + u^{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3}_{\text{бивектор}} + \underbrace{u^{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}_{\text{тривектор}}$$

# Мнимая единица в трехмерном пространстве

Так же как и двухмерном случае базисные бивекторы выражаются через геометрическое произведение базисных векторов:

$$\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.$$

Элемент единичного объема $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ обозначим как $\mathbf{I}$ так как он обладает свойствами мнимой единицы:

$$\mathbf{I}\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = -1 \Rightarrow \boxed{\mathbf{I}^2 = -1}$$

Можно проверить, что справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{I} = +\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_1 = +\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{I} = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_2\mathbf{I} = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{I} = +\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = +\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}_3\mathbf{I} = +\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_3 = +\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{I} = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1.$$

## Коммутирование мнимой единицы

Можно показать, что $\mathbf{I}$ коммутирует со всеми базисными векторами и бивекторами:

| $\mathbf{B}$ | $\mathbf{BI}$ | $\mathbf{IB}$ |
|---|---|---|
| $1$ | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ |
| $\mathbf{e}_1$ | $+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ | $+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ | $-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ |
| $\mathbf{e}_3$ | $+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ | $+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ |
| $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ | $-\mathbf{e}_3$ | $-\mathbf{e}_3$ |
| $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ | $+\mathbf{e}_2$ | $+\mathbf{e}_2$ |
| $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ | $-\mathbf{e}_1$ | $-\mathbf{e}_1$ |
| $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ | $-1$ | $-1$ |

В общем виде можно записать: $\mathbf{I}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i\mathbf{I}$ и $\mathbf{I}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{I}$ из чего следует, что произвольный мультивектор $\mathbf{U}$ в трехмерном пространстве коммутирует с $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{IU} = \mathbf{UI}.$$

# Дополнение

Умножение на $\mathbf{I}$ похоже на операцию взятия дополнения, однако отличается знаком в случае умножения на базисные бивекторы. Так, взяв произвольный бивектор $\underset{2}{\mathbf{U}} = u^{12}\mathbf{e}_{12} + u^{13}\mathbf{e}_{13} + u^{23}\mathbf{e}_{23}$ и умножив его справа или слева на $\mathbf{I}$ получим вектор:

$$\underset{2}{\mathbf{U}}\mathbf{I} = \mathbf{I}\underset{2}{\mathbf{U}} = u^{12}\mathbf{e}_{12}\mathbf{I} + u^{13}\mathbf{e}_{13}\mathbf{I} + u^{23}\mathbf{e}_{23}\mathbf{I} = -u^{12}\mathbf{e}_3 + u^{13}\mathbf{e}_2 - u^{23}\mathbf{e}_1 = \underset{1}{\mathbf{u}}$$

Аналогично, взяв произвольный вектор и умножив его справа или слева на $\mathbf{I}$ мы получим бивектор:

$$\underset{1}{\mathbf{u}}\mathbf{I} = \mathbf{I}\underset{1}{\mathbf{u}} = u^{1}\mathbf{e}_{1}\mathbf{I} + u^{2}\mathbf{e}_{2}\mathbf{I} + u^{3}\mathbf{e}_{3}\mathbf{I} = u^{1}\mathbf{e}_{23} - u^{2}\mathbf{e}_{13} + u^{3}\mathbf{e}_{12} = \underset{2}{\mathbf{U}}$$

Таким образом, с помощью $\mathbf{I}$ можно связать внешнее и векторное произведения без использования операции дополнения:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u^1v^2 - u^2v^1)\mathbf{e}_{12} + (u^1v^3 - u^3v^1)\mathbf{e}_{13} + (u^2v^3 - u^3v^2)\mathbf{e}_{23},$$

$$\mathbf{I}\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -(u^1v^2 - u^2v^1)\mathbf{e}_{3} + (u^1v^3 - u^3v^1)\mathbf{e}_{2} - (u^2v^3 - u^3v^2)\mathbf{e}_{1},$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{I}\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}.$$

# Кватернионы

Обозначим

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \ \ \mathbf{j} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \ \ \mathbf{k} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3.$$

Данные бивекторы ведут себя точно также как и мнимые единицы кватернионов. Можно составить «таблицу умножения»:

| | $1$ | $\mathbf{i}$ | $\mathbf{j}$ | $\mathbf{k}$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\mathbf{i}$ | $\mathbf{j}$ | $\mathbf{k}$ |
| $\mathbf{i}$ | $\mathbf{i}$ | $-1$ | $\mathbf{k}$ | $-\mathbf{j}$ |
| $\mathbf{j}$ | $\mathbf{j}$ | $-\mathbf{k}$ | $-1$ | $\mathbf{i}$ |
| $\mathbf{k}$ | $\mathbf{k}$ | $\mathbf{j}$ | $-\mathbf{i}$ | $-1$ |

Кроме того $\mathbf{ijk} = -1$.

Таким образом в трехмерном пространстве множество мультивекторов вида

$$\mathbf{V} = v^0 + \underset{2}{\mathbf{v}}$$

изоморфно множеству кватернионов. Стоит обратить внимание, что в двухмерном пространстве мультивекторы такого вида были изоморфны множеству комплексных чисел. Стоило повысить размерность пространства на единицу, как те же мультивекторы стали изоморфны кватернионам.

## Задание для самостоятельной работы

- Выше было сказано, что можно проверить следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1\mathbf{I} = +\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_1 = +\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{I} = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3,\\
&\mathbf{e}_2\mathbf{I} = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{I} = +\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = +\mathbf{e}_2,\\
&\mathbf{e}_3\mathbf{I} = +\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_3 = +\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{I} = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1.
\end{aligned}
$$

  Так как поговорка гласит «доверяй, но проверяй», то придется проверить. Поделите три строки на троих и проверьте.
- В двухмерном пространстве мультивектор вида $a + b\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ обладает всеми свойствами комплексного числа. Проверьте выполнение всех арифметических действий с комплексными числами, используя вместо $i$ бивектор $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.
- В библиотеке `clifford` найдите операцию геометрического произведения. Вычислите векторное умножение используя только геометрическое умножение и базисные векторы.
- Как в `clifford` задавать мультивекторы?
- Как свести смешанное произведение к геометрическому?
- Проверьте таблицу умножения кватернионов с помощью геометрического умножения.
- Умножить произвольный бивектор в трехмерном пространстве на самого себя.

# Задание для самостоятельной работы к 11 марта

- Напишите программу, которая отражает вектор относительно прямой линии с помощью матрицы. Покажите, что сделав два отражения подряд можно получить поворот (теорию см. в презентации №5).
- То же самое попробуйте сделать с помощью геометрической алгебры и модуля clifford.
- Нарисуйте картинку на плоскости и, если получится, в пространстве.

## Задание для самостоятельной работы к 18 марта

Сравните повороты с помощью матриц, комплексных чисел и кватернионов с поворотами с помощью геометрической алгебры. Алгоритм сравнения такой:

- Какие входящие данные (угол вращения, ось вращения, плоскость вращения)?
- Какие формулы для вычисления?
- Простой пример (задаете конкретную точку и вращаете ее на конкретный угол).
- Что проще с вычислительной точки зрения? Какая геометрическая интерпретация?
- Напишите программу, которая вращает любой вектор на любой угол вокруг любой точки для плоскости и вокруг любой оси в пространстве.