Кватернионы

Определение и алгебраические свойства

Кватернионом называют гиперкомплексное число следующего вида:

$$q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$$

где a, b, c, d — действительные числа, а $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ — кватернионные мнимые единицы, определяемые следующим соотношением:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

Множество кватернионов часто обозначают как $\mathbb{H}$ в честь ирландского математика У. Р. Гамильтона (1805–1865), разработавшего теорию кватернионов [32, 12, 28]. Термин кватернион происходит от латинского слова *quaterni* — по четыре.

С точки зрения общей алгебры

Кватернионы образуют множество, называемое в общей алгебре телом, то есть кольцом с обратным элементом и нейтралом по умножению, но без требования коммутативности умножения.

Говоря проще: кватернионы можно складывать, вычитать, умножать и делить, но умножение и деление не коммутируют, то есть при смене мест сомножителей произведение меняется.

Сопоставление с трехмерным пространством

В кватернионе $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ выделяют:

- векторную часть $\mathbf{q} = b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, называемую также чисто мнимой, чисто кватернионной или просто чистой;
- скалярную часть $q_0 = a$ (или вещественную часть).

Часто кватернион записывают в виде:

$$q = q_0 + \mathbf{q} = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}.$$

Каждому чисто мнимому кватерниону можно взаимно-однозначно сопоставить вектор в трехмерном пространстве. Более строго: множество чистых кватернионов $\mathbb{H}_0$ изоморфно множеству $\mathbb{R}^3$ (евклидово пространство).

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \leftrightarrow b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} = \mathbf{q}.$$

Сопоставление настолько естественно, что и чистый кватернион и вектор $\mathbf{q}$ обозначают одинаково.

Сложение и вычитание

Свойства сложения определяется элементарно. Для двух кватернионов

$$q_1 = a_1 + b_1\mathrm{i} + c_1\mathrm{j} + d_1\mathrm{k}, \quad q_2 = a_2 + b_2\mathrm{i} + c_2\mathrm{j} + d_2\mathrm{k}$$

сложение определяется как:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i} + (c_1 + c_2)\mathrm{j} + (d_1 + d_2)\mathrm{k},$$

обратный элемент по сложению получается простым добавлением знака минус перед коэффициентами кватерниона:

$$-q = -a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k},$$

а вычитание кватернионов определяется как сложение с обратным по сложению:

$$q_1 + (-q_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i} + (c_1 - c_2)\mathrm{j} + (d_1 - d_2)\mathrm{k},$$

Чтобы найти правило умножения кватернионов,необходимо сперва составить таблицу умножения для мнимых единиц i, j, k. Для этого достаточно использовать формулу $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$.

$$
\begin{gathered}
\mathrm{ijkk} = -\mathrm{ij} = -\mathrm{k} \Rightarrow \mathrm{ij} = \mathrm{k}, \\
\mathrm{iijk} = -\mathrm{jk} = -\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{jk} = \mathrm{i}, \\
\mathrm{ik} = \mathrm{iij} = -\mathrm{j} \Rightarrow \mathrm{ik} = -\mathrm{j}, \\
\mathrm{ji} = \mathrm{jjk} = -\mathrm{k} \Rightarrow \mathrm{ji} = -\mathrm{k}, \\
-\mathrm{ki} = \mathrm{jii} = -\mathrm{j} \Rightarrow \mathrm{ki} = \mathrm{j}, \\
\mathrm{kj} = \mathrm{ijj} = -\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{kj} = -\mathrm{i}.
\end{gathered}
\Rightarrow
\begin{array}{c|rrr}
 & \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\
\hline
\mathrm{i} & -1 & \mathrm{k} & -\mathrm{j} \\
\mathrm{j} & -\mathrm{k} & -1 & \mathrm{i} \\
\mathrm{k} & \mathrm{j} & -\mathrm{i} & -1
\end{array}
\tag{1}
$$

После получения таблицы умножения легко найти результат кватернионного умножения просто раскрывая скобки и пользуясь таблицей (1).

Умножение кватернионов

Для кватернионного умножения используется то же обозначение, что и для умножения действительных и комплексных чисел.

$$q_1 \cdot q_2 = (a_1 + b_1\mathrm{i} + c_1\mathrm{j} + d_1\mathrm{k}) \cdot (a_2 + b_2\mathrm{i} + c_2\mathrm{j} + d_2\mathrm{k}) = a_1a_2 + a_1b_2\mathrm{i} + a_1c_2\mathrm{j} + a_1d_2\mathrm{k} + b_1a_2\mathrm{i} + b_1b_2\underbrace{\mathrm{ii}}_{-1} + b_1c_2\underbrace{\mathrm{ij}}_{\mathrm{k}} +$$
$$+ b_1d_2\underbrace{\mathrm{ik}}_{-j} + c_1a_2\mathrm{j} + c_1b_2\underbrace{\mathrm{ji}}_{-\mathrm{k}} + c_1c_2\underbrace{\mathrm{jj}}_{-1} + c_1d_2\underbrace{\mathrm{jk}}_{\mathrm{i}} + d_1a_2\mathrm{k} + d_1b_2\underbrace{\mathrm{ki}}_{\mathrm{j}} + d_1c_2\underbrace{\mathrm{kj}}_{-\mathrm{i}} + d_1d_2\underbrace{\mathrm{kk}}_{-1}.$$

В результате получим:

$$q_1q_2 = \overbrace{a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2}^{\text{скалярная часть}} \left.\begin{aligned} &+(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathrm{i}+ \\ &+(a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)\mathrm{j}+ \\ &+(a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\mathrm{k} \end{aligned}\right\} \text{векторная часть}$$

Однако данную формулу можно записать компактнее, если обратить внимание на части выделенные разными цветами.

- В части, выделенной зеленным цветом, прячется скалярное произведение векторной части кватернионов q_1 и q_2:

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2.$$

- В части, выделенной синим цветом, прячется векторное произведение векторных частей кватернионов q_1 и q_2:

$$\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & b_1 & b_2 \\ \mathrm{j} & c_1 & c_2 \\ \mathrm{k} & d_1 & d_2 \end{vmatrix} = (c_1 d_2 - c_2 d_1)\mathrm{i} + (d_1 b_2 - d_2 b_1)\mathrm{j} + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\mathrm{k}.$$

- Красную часть можно записать как: $a_1 b_2 \mathrm{i} + a_1 c_2 \mathrm{j} + a_1 d_2 \mathrm{k} = a_1(b_2 \mathrm{i} + c_2 \mathrm{j} + d_2 \mathrm{k}) = a_1 \mathbf{q}_2$.
- Фиолетовую часть можно записать как: $a_2 b_2 \mathrm{i} + a_2 c_2 \mathrm{j} + a_2 d_2 \mathrm{k} = a_2(b_2 \mathrm{i} + c_2 \mathrm{j} + d_2 \mathrm{k}) = a_2 \mathbf{q}_1$.

В результате:

$$\boxed{q_1 \cdot q_2 = a_1 a_2 - (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + a_2 \mathbf{q}_1 + a_1 \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2} \tag{2}$$

Сопряженный кватернион и модуль кватерниона

Кватернион q^* называется сопряженным к кватерниону $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$, если

$$q^* = q_0 - \mathbf{q} = q_0 - q_1\mathrm{i} - q_2\mathrm{j} - q_3\mathrm{k}.$$

Найдем произведение кватерниона q на его сопряженный q^* пользуясь формулой (2):

$$qq^* = q_0q_0 - (\mathbf{q}, -\mathbf{q}) + q_0\mathbf{q} - q_0\mathbf{q} + \underbrace{\mathbf{q} \times (-\mathbf{q})}_{=0} = q_0^2 + (\mathbf{q}, \mathbf{q}) = q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2 \Rightarrow \boxed{qq^* = q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2}$$

Норма векторной части кватерниона $\|\mathbf{q}\|$ совпадает с нормой вектора $\mathbf{q}$ и вычисляется как:

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Модуль или абсолютное значение кватерниона определяется формулой:

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Обратный кватернион. Деление кватернионов.

Сопряженный кватернион позволяет найти кватернион q^{-1} — обратный по умножению и, следовательно, определить операцию деления (все аналогично комплексным числам). Запишем:

$$q\frac{q^*}{qq^*} = \frac{qq^*}{qq^*} = \frac{q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2}{q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2} \equiv 1.$$

Так как при умножении на q кватернион $\dfrac{q^*}{qq^*}$ дает в результате 1, то по определению он является обратным для q:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{qq^*} = \frac{q^*}{|q|^2}.$$

Операцию деления можно определить через умножение справа на обратный:

$$\frac{q_1}{q_2} = q_1 q_2^{-1} = \frac{q_1 q_2^*}{|q_2|^2}.$$

Важно, что умножение осуществляется справа, так как операция умножения для кватернионов не коммутативна!

Некоммутативность умножения

Для того, чтобы проверить, что в общем случае

$$q_1 q_2 \neq q_2 q_1,$$

достаточно привести хотя бы один пример двух кватернионов, для которых данное неравенство выполняется. Умножим два кватерниона:

$$q_1 = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{j} - \mathrm{k} \text{ и } q_2 = 1 - \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k},$$

для упрощения запишем умножение в виде таблицы 4×4 пользуясь таблицей (1):

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \hline \mathrm{i} & -1 & \mathrm{k} & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & -\mathrm{k} & -1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{k} & \mathrm{j} & -\mathrm{i} & -1 \end{array} \Rightarrow \quad q_1 q_2 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & \mathrm{i} & \mathrm{j} & -\mathrm{k} \\ \hline 1 & 1 & \mathrm{i} & \mathrm{j} & -\mathrm{k} \\ -\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{k} & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & \mathrm{j} & -\mathrm{k} & -1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{k} & \mathrm{k} & \mathrm{j} & -\mathrm{i} & 1 \end{array} \quad q_2 q_1 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \hline 1 & 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 & +\mathrm{k} & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & \mathrm{j} & \mathrm{k} & -1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{k} & -\mathrm{k} & \mathrm{j} & \mathrm{i} & 1 \end{array}$$

$$(1 + \mathrm{i} + \mathrm{j} - \mathrm{k})(1 - \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}) = 1 + 1 - 1 + 1 + \mathrm{i} - \mathrm{i} - \mathrm{i} - \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{j} + \mathrm{j} - \mathrm{j} - \mathrm{k} - \mathrm{k} - \mathrm{k} + \mathrm{k} = 2 - 2\mathrm{i} + 2\mathrm{j} - 2\mathrm{k},$$

$$(1 - \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k})(1 + \mathrm{i} + \mathrm{j} - \mathrm{k}) = 1 + 1 - 1 + 1 - \mathrm{i} + \mathrm{i} + \mathrm{i} + \mathrm{i} + \mathrm{j} - \mathrm{j} + \mathrm{j} + \mathrm{j} + \mathrm{k} - \mathrm{k} + \mathrm{k} + \mathrm{k} = 2 + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{j} + 2\mathrm{k}.$$

Некоторые дополнительные свойства

Из некоммутативности умножения следует:

- $(q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*$,
- $(q_1 q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-1}$.

Еще несколько свойств:

- $q + q^* = 2q_0$,
- $q_1 q_2 - q_2 q_1 = -2\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$,
- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$.

Последнее свойство выполняется, так как:

$$|q_1 q_2|^2 = q_1 q_2 (q_1 q_2)^* = q_1 q_2 q_2^* q_1^* = q_1 |q_2|^2 q_1^* = q_1 q_1^* |q_2|^2 = |q_1|^2 |q_2|^2.$$

Произведение чистых кватернионов

Рассмотрим два чистых кватерниона $q_1 = 0 + \mathbf{q}_1$ и $q_2 = 0 + \mathbf{q}_2$ и перемножим их по формуле (2)

$$q_1 \cdot q_2 = a_1 a_2 - (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + a_2 \mathbf{q}_1 + a_1 \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2.$$

В нашем случае $a_1 = a_2 = 0$, следовательно

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= 0 - (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + 0\mathbf{q}_1 + 0\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 = -(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2, \\ q_2 \cdot q_1 &= 0 - (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) + 0\mathbf{q}_2 + 0\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 = -(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) - \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \end{aligned}$$

$$\boxed{q_1 \cdot q_2 = (0 + \mathbf{q}_1)(0 + \mathbf{q}_2) = -(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 + q_2 \cdot q_1 &= -2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \\ q_1 \cdot q_2 - q_2 \cdot q_1 &= +2\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= -\frac{1}{2}(q_1 \cdot q_2 + q_2 \cdot q_1), \\ \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 &= \frac{1}{2}(q_1 \cdot q_2 - q_2 \cdot q_1). \end{aligned}$$

Получается, что в трехмерном пространстве можно скалярное и векторное произведения свести к кватернионному умножению чистых кватернионов.

Квадрат чистого кватерниона

Найдем кватернионное произведение чистого кватерниона самого на себя:

$$qq = q^2 = (0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{q}) = -(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \underbrace{\mathbf{q} \times \mathbf{q}}_{=\mathbf{0}} = -(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = -\|\mathbf{q}\|^2.$$

Мы получили интересное свойство: квадрат чистого кватерниона в смысле кватернионного умножения равен отрицательному числу (так как $\|\mathbf{q}\| \geqslant 0$, то всегда $-\|\mathbf{q}\| \leqslant 0$).

Единичный кватернион

Единичным или нормированным называется кватернион с модулем равным единице:

$$|q| = q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = 1, \text{ где } q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}.$$

Для единичного кватерниона можно записать «тригонометрическую форму». Всегда существует такое число $\theta \in [0, \pi)$, что $q_0^2 = \cos^2\theta$, $\|q\|^2 = \sin^2\theta$

$$q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Сам кватернион $q = q_0 + \mathbf{q}$ можно записать через θ, если нормировать векторную часть $\mathbf{q}$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{\mathbf{q}}{\sin\theta} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{u}\sin\theta,$$

после чего единичный кватернион записывается в виде:

$$q = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta = \cos\theta + \sin\theta u_1\mathrm{i} + \sin\theta u_2\mathrm{j} + \sin\theta u_3\mathrm{k}.$$

Чистый кватернион $u = 0 + \mathbf{u}$ кроме того, что чисто мнимый, еще и по совместительству единичный.

Свойства единичного кватерниона

- Единичный кватернион, сопряженный к q получается простой заменой знака угла θ на противоположный:

$$q^* = q_0 - \mathbf{q} = \cos\theta - \mathbf{u}\sin\theta = \cos -\theta + \mathbf{u}\sin -\theta.$$

- Умножение двух единичных кватернионов с одинаковой векторной частью $\mathbf{u}$ упрощается:

$$q_1 = \cos\alpha + \mathbf{u}\sin\alpha, \quad q_2 = \cos\beta + \mathbf{u}\sin\beta.$$

$$q_1 q_2 = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \underbrace{(\mathbf{u},\mathbf{u})}_{=1} + \cos\alpha\sin\beta\mathbf{u} + \cos\beta\sin\alpha\mathbf{u} + \sin\alpha\sin\beta \underbrace{\mathbf{u}\times\mathbf{u}}_{=0} =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + (\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha)\mathbf{u} = \cos(\alpha+\beta) + \mathbf{u}\sin(\alpha+\beta).$$

В итоге мы снова получили нормированный кватернион:

$$q_1 q_2 = \cos(\alpha+\beta) + \mathbf{u}\sin(\alpha+\beta).$$

Экспоненциальное представление единичного кватерниона

Представление единичного кватерниона через θ и $\mathbf{u}$ напоминают тригонометрическое представление комплексного числа. Сравните:

$$z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \text{ и } q = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta.$$

Вместо мнимой единицы i в формуле для кватерниона стоит единичный чистый кватернион $u = 0 + \mathbf{u}$. Вспомним, однако, следующее свойство чисто мнимого кватерниона, которое для единичного чистого кватерниона становится еще занимательнее:

$$uu = u^2 = (0 + \mathbf{u})(0 + \mathbf{u}) = -\underbrace{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}_{\|\mathbf{u}\|} + \underbrace{\mathbf{u} \times \mathbf{u}}_{0} = -\|\mathbf{u}\|^2 = -1.$$

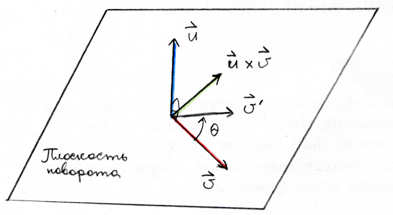
Получается, что относительно кватернионного умножения единичный чистый кватернион $u = 0 + \mathbf{u}$ обладает свойствами мнимой единицы комплексных чисел. Сравните: $\mathrm{i}^2 = -1$ и $u^2 = -1$. Это дает возможность определить экспоненту от единичного чистого кватерниона по аналогии с формулой Эйлера:

$$e^{\mathbf{u}\theta} = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta.$$

Кватернионы

Кватернионы и вращения в $\mathbb{R}^3$

Вращение вектора в трехмерном пространстве вокруг перпендикулярной оси



Рассмотрим поворот вектора $\mathbf{v}$ на угол θ. Поворот происходит в некоторой плоскости α и в результате поворота получаем вектор $\mathbf{v}'$. Рассмотрим единичный вектор $\mathbf{u}$ перпендикулярный плоскости α.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \end{array}\right. \Rightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \alpha$$

Так как при вращении длина вектора сохраняется, то $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\|$. Кроме того $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ из-за единичности вектора $\mathbf{u}$ так как:

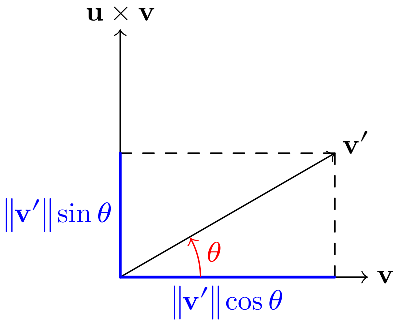
$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin(\angle \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{n}\|\|\mathbf{v}\| \sin \pi/2 = \|\mathbf{v}\|,$$

следовательно:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\|.$$

Вектор $\mathbf{u}$ задает направление оси вращения.

Вращение вектора в трехмерном пространстве вокруг перпендикулярной оси



Проекция $\mathbf{v}'$ на вектор $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}'_{\parallel \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}'\|\cos\theta\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{v}\|\cos\theta\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \cos(\theta)\mathbf{v}.$$

Перпендикулярная вектору $\mathbf{v}$ компонента вектора $\mathbf{v}'$ равна проекции $\mathbf{v}'$ на вектор $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}'_{\perp \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}'\|\sin(\theta)\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{v}'\|\sin(\theta)\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}'\|} = \sin(\theta)\mathbf{u}\times\mathbf{v}.$$

Таким образом по правилу параллелограмма можно записать вектор $\mathbf{v}'$ как сумму перпендикулярной и параллельной составляющих:

$$\mathbf{v}' = \cos(\theta)\mathbf{v} + \sin(\theta)\mathbf{u}\times\mathbf{v}. \tag{4}$$

Здесь мы воспользовались равенством длины векторов

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\|.$$

Формула (4) позволяет вычислить поворот вектора, зная ось вращения $\mathbf{u}$ и угол вращения θ.

Пример вращения вокруг перпендикулярной оси

Рассмотрим конкретный пример. Пусть вектор $\mathbf{v} = (1, -1, 0)^T$ и ось вращения $\mathbf{a} = (1, 1, 1)^T$. Повернем вектор $\mathbf{v}$ вокруг оси $\mathbf{a}$ на угол $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Проверим, что $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{a}) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{v}.$$

Найдем единичный направляющий вектор оси вращения, для чего нормируем вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T.$$

Теперь можно применить полученную формулу:

$$\mathbf{v}' = \cos\frac{\pi}{3}\mathbf{v} + \sin\frac{\pi}{3}\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \mathbf{e}_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ \mathbf{e}_3 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Формулировка на языке кватернионов

Формулу для поворота вектора $\mathbf{v}$ вокруг оси $\mathbf{u}$

$$\mathbf{v}' = \cos(\theta)\mathbf{v} + \sin(\theta)\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

можно переписать в терминах кватернионов. Заменим векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ на чистые кватернионы $v = 0 + \mathbf{v}$ и $u = 0 + \mathbf{u}$. Кватернион $u = 0 + \mathbf{u}$ является вдобавок единичным. Перемножим кватернионы v и u:

$$u \cdot v = -(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ так как } \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow u \cdot v = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Если заменить $\mathbf{v}'$ на чистый кватернион $v' = 0 + \mathbf{v}'$, то формулу можно записать так:

$$v' = \cos\theta v + \sin\theta u \cdot v = (\cos\theta + \sin\theta u)v, \text{ где } u = 0 + \mathbf{u}, v = 0 + \mathbf{v}.$$

Вспомним также экспоненциальное представление единичного кватерниона: $\exp\{\theta\mathbf{u}\} = \cos\theta + \sin\theta\mathbf{u}$, следовательно:

$$v' = \exp(\theta\mathbf{u})v.$$

Получили экспоненциальную запись формулы поворота, которая перекликается с такой же формулой для двухмерного поворота с помощью комплексных чисел.

Вращение вокруг произвольной оси

Рассмотрим общий случай, когда ось вращения $\mathbf{u}$ не перпендикулярна вращаемому вектору $\mathbf{v}$. Воспользуемся разложением вектора $\mathbf{v}$ на два компонента:

- параллельная оси $\mathbf{u}$ часть, обозначаемая как $\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}$;
- перпендикулярная оси $\mathbf{u}$ часть, обозначаемая как $\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}$.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}.$$

При вращении вокруг оси $\mathbf{u}$ на угол θ компонента $\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}$ не изменяется, а компонента $\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}$ меняется по формуле (4), следовательно, в общем случае:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} + \mathbf{v}'_{\perp\mathbf{u}} = \mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} + \cos\theta\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}} + \sin\theta\mathbf{u}\times\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}},$$

или в кватернионной форме:

$$v' = v_{\|} + (\cos\theta + \sin\theta u)v_{\perp} = v_{\|} + \exp(\theta\mathbf{u})v_{\perp},$$

где $v_{\perp} = 0 + \mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}$, $v' = 0 + \mathbf{v}'$, $v_{\|} = 0 + \mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}$ — чистые кватернионы.

Два вспомогательных утверждения: первое

Докажем первое утверждение, которое заключается в следующем:

$$\exp(\theta\mathbf{u})v_\perp = v_\perp \exp(-\theta\mathbf{u}).$$

По определению кватернионной экспоненты:

$$(\cos\theta + \sin\theta\mathbf{u})(0 + \mathbf{v}_\perp) = (0 + \mathbf{v}_\perp)(\cos\theta - \sin\theta\mathbf{u}).$$

Левая часть:

$$0\cdot\cos\theta + 0\cdot\sin\theta\mathbf{u} + \cos\theta\mathbf{v}_\perp \underbrace{-\sin\theta\overbrace{(\mathbf{u},\mathbf{v}_\perp)}^{=0} + \sin\theta\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp}_{\text{умножение чистых кватернионов (3)}} = \cos\theta\mathbf{v}_\perp + \sin\theta\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp.$$

Правая часть:

$$0\cdot\cos\theta + 0\cdot(-\sin\theta)\mathbf{u} + \cos\theta\mathbf{v}_\perp + \sin\theta(\mathbf{v}_\perp,\mathbf{u}) - \sin\theta\mathbf{v}_\perp\times\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{v}_\perp - \sin\theta\mathbf{v}_\perp\times\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{v}_\perp + \sin\theta\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp.$$

Что и требовалось доказать.

Докажем второе утверждение, которое заключается в следующем:

$$\exp(\theta\mathbf{u})v_{\parallel} = v_{\parallel}\exp(\theta\mathbf{u}).$$

Используем формулу

$$\frac{1}{2}(q_1 \cdot q_2 - q_2 \cdot q_1) = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2.$$

В нашем случае $q_1 = \exp\left(\theta\mathbf{u}\right) = \cos\theta + \sin\theta\mathbf{u}$, следовательно векторная часть $\mathbf{q}_1 = \sin\theta\mathbf{u}$. А кватернион $q_1 = v_{\parallel} = 0 + \mathbf{v}_{\parallel}$ — чисто мнимый. В результате:

$$\exp(\theta\mathbf{u})v_{\parallel} - v_{\parallel}\exp(\theta\mathbf{u}) = 2(\sin\theta\,\underbrace{\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\parallel}}_{=0}) = 0.$$

Таким образом равенство $\exp(\theta\mathbf{u})v_{\parallel} = v_{\parallel}\exp(\theta\mathbf{u})$ доказано.

«Сендвич»-формула

Преобразуем формулу $v' = v_\parallel + \exp(\theta\mathbf{u})v_\perp$ с помощью двух вышедоказанных тождеств. Так как

$$1 = \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)\exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right) \Rightarrow$$

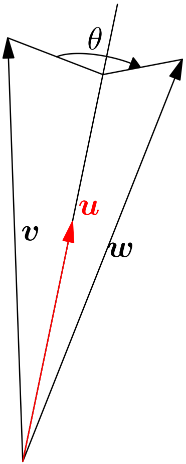
$$v' = \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)\exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)v_\parallel + \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)\exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)v_\perp = \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)v_\parallel \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right) +$$
$$= \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)v_\perp \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right) = \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)(v_\parallel + v_\perp)\exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right) = \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)v\exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right),$$

окончательно:

$$\boxed{v' = \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)v\exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right) = qvq^*}$$

Напомним, что $\exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right)$ по определению является некоторым единичным кватернионом следующего вида:

$$q = \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{u} \text{ и } q^* = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{u}\right) = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{u}.$$



Сформулируем полученные результаты в виде задачи.

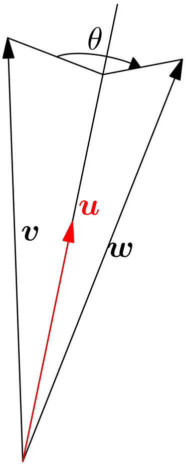
Задача

В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ дан вектор $\mathbf{v}$. Необходимо повернуть его на угол θ вокруг оси вращения, заданной нормированным вектором $\mathbf{u}$. В результате вращения вектор $\mathbf{v}$ переходит в вектор $\mathbf{w}$.

Как решить данную задачу с помощью кватернионов? Сделаем следующие сопоставления:

- вектору $\mathbf{v}$ — чисто мнимый кватернион;
- вектору $\mathbf{u}$ — векторную часть единичного кватерниона q;
- углу поворота θ — половинный угол $\dfrac{\theta}{2}$ единичного кватерниона q.

Вращение с помощью кватернионов



Запишем вышеперечисленные кватернионы в явном виде:

- единичный кватернион $q = q_0 + \mathbf{q} = \sin\frac{\theta}{2} + \mathbf{u}\cos\frac{\theta}{2}$, где $u = 0 + \mathbf{u}$ — чисто мнимый кватернион, которому соответствует направляющий вектор оси вращения $\mathbf{u}$;
- чисто мнимый кватернион $v = 0 + \mathbf{v}$, которому в соответствует вектор $\mathbf{v}$,
- чисто мнимый кватернион $w = 0 + \mathbf{w}$, который соответствуют результату вращения.

Выше мы доказали (см. также [16, с. 21]), что поворот задается формулой:

$$\boxed{w = qvq^*} \text{ или } w = q^*vq, \tag{5}$$

где подразумевается кватернионное умножение. Обратите внимание, что угол поворота в формуле участвует в половинном виде $\frac{\theta}{2}$. Формула часто называется сэндвич оператором.

Пример использования кватернионной формулы поворота

Пример

Осуществим поворот вектора $\mathbf{v} = (1, 0, 0)^T$ на угол $\dfrac{\pi}{3}$ вокруг оси Oz [18, с. 123].

Вектор $\mathbf{v} = 1\mathbf{e}_x$, ось вращения задает базисный вектор $\mathbf{e}_z$. Составим необходимые кватернионы и умножим их.

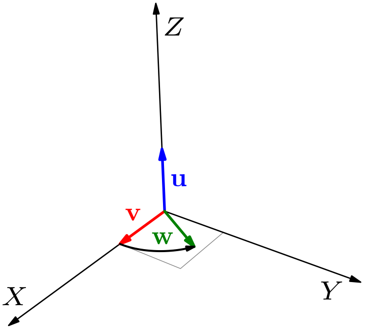
- Основной кватернион $q = \sin\dfrac{\pi}{6} + \mathbf{u}\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathbf{u}$.
- Векторная часть q — чистый кватернион, задающий ось вращения: $u = 0 + \mathbf{e}_z = 0\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + 1\mathrm{k} = \mathrm{k}$ т.е. $u = \mathrm{k}$. Следовательно $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{k}$, а сопряженный $q^* = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{k}$.
- Кватернион $v = 0 + \mathbf{v} = 1\mathrm{i} = \mathrm{i}$.

Формула $w = qvq^*$ для данного примера имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{k}\right)(\mathrm{i})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{k}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\mathrm{ki}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{k}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{k}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{j} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{ik} - \frac{1}{4}\mathrm{jk} = \frac{3}{4}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{j} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{j} - \frac{1}{4}\mathrm{i} = \frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j} \quad \Rightarrow w = \frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}.$$

Результат использования формулы



В результате применения формулы, мы получили из кватерниона $v = \mathrm{i}$ кватернион

$$w = \frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j},$$

которому соответствует вектор

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Можно проверить, что кватернион w единичный:

$$|w| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Вывод формулы Родрига с помощью кватернионов I/II

Применим формулу для кватернионного умножения $q_1 \cdot q_2 = a_1 a_2 - (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + a_2\mathbf{q}_1 + a_1\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$ к сэндвич-операции qvq^*:

$$qvq^* = (q_0+\mathbf{q})(0+\mathbf{v})(q_0-\mathbf{q}) = (-(\mathbf{q},\mathbf{v})+q_0\mathbf{v}+\mathbf{q}\times\mathbf{v})(q_0-\mathbf{q}) = -q_0(\mathbf{q},\mathbf{v})-(q_0\mathbf{v}+\mathbf{q}\times\mathbf{v},-\mathbf{q})+q_0(q_0\mathbf{v}+\mathbf{q}\times\mathbf{v})-$$

$$-(\mathbf{q},\mathbf{v})(-\mathbf{q})+(q_0\mathbf{v}+\mathbf{q}\times\mathbf{v})\times(-\mathbf{q}) = \cancel{-q_0(\mathbf{q},\mathbf{v})}+\cancel{q_0(\mathbf{v},\mathbf{q})}+\underbrace{(\mathbf{q}\times\mathbf{v},\mathbf{q})}_{=0}+q_0^2\mathbf{v}+q_0\mathbf{q}\times\mathbf{v}+(\mathbf{q},\mathbf{v})\mathbf{q}-q_0\mathbf{v}\times\mathbf{q}-(\mathbf{q}\times\mathbf{v})\times\mathbf{q} =$$

$$= q_0^2\mathbf{v} + 2q_0\mathbf{q}\times\mathbf{v} + (\mathbf{q},\mathbf{v})\mathbf{q} - (\mathbf{q}\times\mathbf{v})\times\mathbf{q}$$

Слагаемое $(\mathbf{q}\times\mathbf{v})\times\mathbf{q}$ упрощается, если воспользоваться формулой:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{q}\times\mathbf{v})\times\mathbf{q} = \mathbf{v}(\mathbf{q},\mathbf{q}) - \mathbf{q}(\mathbf{q},\mathbf{v})$$

$$qvq^* = q_0^2\mathbf{v} + 2q_0\mathbf{q}\times\mathbf{v} + (\mathbf{q},\mathbf{v})\mathbf{q} - \mathbf{v}\underbrace{(\mathbf{q},\mathbf{q})}_{\|\mathbf{q}\|^2} + \mathbf{q}(\mathbf{q},\mathbf{v}) = (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q},\mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0\mathbf{q}\times\mathbf{v}.$$

В результате получили:

$$qvq^* = (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q},\mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0\mathbf{q}\times\mathbf{v}.$$

Слагаемое $(q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{v}$ можно преобразовать, если воспользоваться единичность кватерниона q:

$$|q| = q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = 1 \Rightarrow \|\mathbf{q}\|^2 = 1 - q_0^2 \Rightarrow q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2 = q_0^2 - 1 + q_0^2 = 2q_0^2 - 1.$$

В результате получаем два варианта формулы Родрига

$$\boxed{\mathbf{w} = (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q}, \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0\mathbf{q} \times \mathbf{v} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q}, \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0\mathbf{q} \times \mathbf{v}} \tag{6}$$

Данная формула была известна еще до открытия кватернионов и была записана (в компонентном виде) в 1840 году французским математиком Бенджамином Олиндом Родригом (1795–1851) [16, с. 24]. Формулу можно получить и использовать не привлекая понятия кватерниона.

Вывод формулы Родрига без помощи кватернионов

Исторически формула Родрига была получена без помощи кватернионов. Это можно сделать рассмотрев поворот вектора, разложенного на параллельную и перпендикулярную компоненты: