Лекция 19

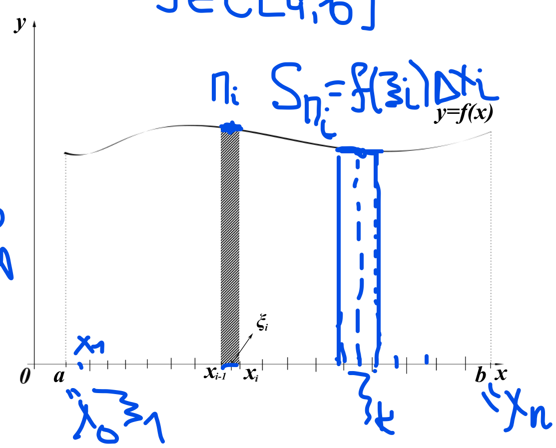
Определенный интеграл (интеграл Римана)

Определение интеграла Римана

криволинейной

Рассмотрим задачу вычисления площади ~~кривой~~ трапеции. Пусть функция f определена на $[a, b]$ и пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Зафиксируем произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим сумму

$f \in C[a,b]$



$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

криволинейной

Тогда площадь ~~кривой~~ трапеции

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

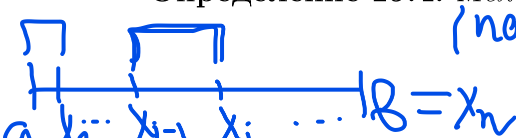
Определение 19.1. *Разбиением* отрезка $[a, b]$ называется любая конечная система его точек $x_0, \ldots, x_n$ такая, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Будем обозначать разбиение отрезка $[a, b]$ через P.

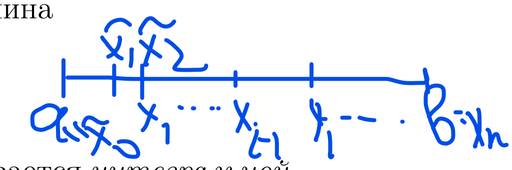
Определение 19.2. Разбиением отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ называется *разбиением P с указанными точками* ξ_i, $i = \overline{1, n}$, и обозначается $(P, \boldsymbol{\xi})$, где $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Определение 19.3. Разбиение P' называется *продолжением разбиения P*, если оно получено из P добавлением новых точек разбиения.

Определение 19.4. *Мелкостью разбиения P* называется величина (параметр разбиения)



$$\lambda(P) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - x_{i-1}).$$



Определение 19.5. Величина $\sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой Римана функции f*.

Определение 19.6. Число J называется *интегралом Римана функции f на $[a, b]$*, если

$$\boxed{J = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi}))} \tag{19.1}$$

и этот предел не зависит ни от разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$.

Другими словами, число J называется интегралом Римана функции f на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такая, что для произвольного разбиения P с отмеченными точками ξ_i $(i = \overline{1, n})$ при $\lambda(P) < \delta$ выполняется неравенство $|J - \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi}))| < \varepsilon$.

Обозначим

$$J = \int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b$$

$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$, $a<b$

Полагают

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

$f \in R[a,b]$

Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то записывают $\cancel{f \in R[a,b]}$.

Теорема 19.1. (Критерий Коши существования интеграла). Для существования предела (19.1) необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall(P',\boldsymbol{\xi}')$ и $(P'',\boldsymbol{\xi}'')$, $\lambda(P')<\delta$ и $\lambda(P'')<\delta$ выполнялось условие

$$|\sigma(f;(P',\boldsymbol{\xi}'))-\sigma(f;(P'',\boldsymbol{\xi}''))|<\varepsilon.$$

Теорема 19.2. Если $f\in R[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$.

Доказательство. От противного. Пусть f не ограничена на $[a,b]$ и пусть фиксировано некоторое разбиение P этого отрезка. В силу неограниченности f на $[a,b]$ она является неограниченной по крайней мере на одном отрезке разбиения P. Пусть для определенности функция f не ограничена на $[x_0,x_1]$, тогда на этом отрезке существует последовательность $\xi_1^{(n)}\in[x_0,x_1]$, $n=1,2,\ldots$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_1^{(n)})=\infty.$$

Зафиксируем каким-либо образом точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{2,n}$. Тогда сумма $\sum_{i=2}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ будет иметь численное значение. Тогда

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi}))=\lim_{\lambda(P)\to0}\left(f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1+\sum_{i=2}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right)=\infty.$$

Следовательно, не может быть конечного предела (19.1), то есть $f\notin R[a,b]$, что противоречит условию теоремы. □

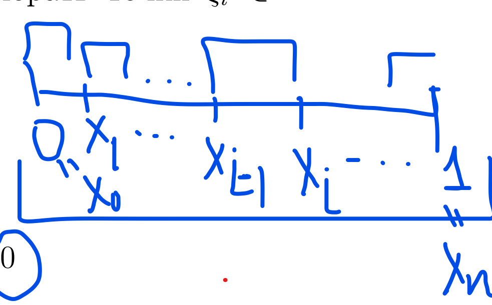
Замечание 19.1. Из ограниченности функции f, вообще говоря, не следует её интегрируемость.

$f: X\to\mathbb{R}$ наз. огр. на X, если $\exists M>0$: $|f(x)|\le M$ $\forall x\in X$.

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\text{-рациональное число;}\\ 0, & \text{если } x\text{-иррациональное число,}\quad x\in[0,1].\end{cases}$$

Функция $f(x)$ ограничена на $[0,1]$. Покажем, что она не интегрируема на $[0,1]$. Зафиксируем произвольное разбиение P отрезка $[0,1]$. Если выбрать точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$ рациональными, то получим



$$\sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi}))=\sum_{i=1}^n \overbrace{f(\xi_i)}^{=1}\Delta x_i=\sum_{i=1}^n\Delta x_i=1,$$

если ξ_i - иррационально, то

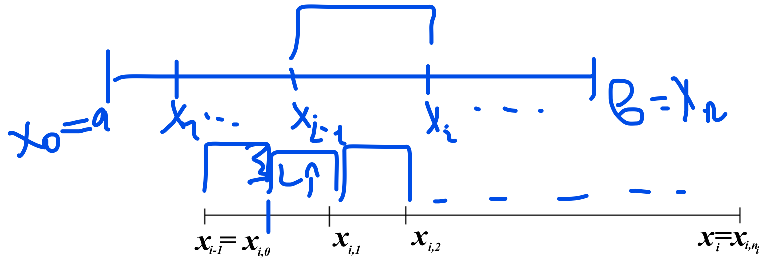
$$\sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi}))=\sum_{i=1}^n \overbrace{f(\xi_i)}^{=0}\Delta x_i=0\cdot\sum_{i=1}^n\Delta x_i=0\cdot1=0$$

$$\Rightarrow\nexists\lim_{\lambda(P)\to0}\sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi}))\Rightarrow f\notin R[a,b].$$

□

Если $\tilde P$ - продолжение разбиения P, то все или некоторые отрезки $[x_{i-1},x_i]$ разбиваются точками x_{ij}. Тогда $\Delta x_{i,j}=x_{i,j}-x_{i,j-1}$ и $\sum_{i=1}^{n_i}\Delta x_{i,j}=\Delta x_i$.

$x_{i,j}$ x_{ij-1}



Теорема 19.3. Для того, чтобы ограниченная функция f была интегрируема по Риману на $[a,b]$ достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \ \forall$ разбиения $P :\ \ \lambda(P) < \delta$ выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon, \tag{19.2}$$

где $\omega(f, \Delta_i) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)|$ - колебание функции f на Δ_i.

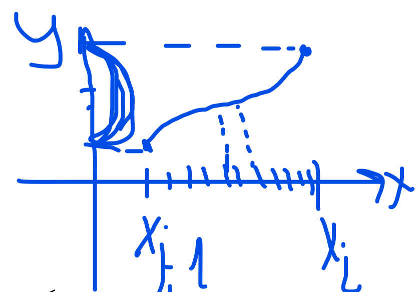
$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Доказательство. Сначала оценим разность

$$|\sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) - \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi}))|,$$

где $\tilde{P}$ - продолжение разбиения P.



Имеем

$$|\sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) - \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi}))| = |\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_j} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| =$$

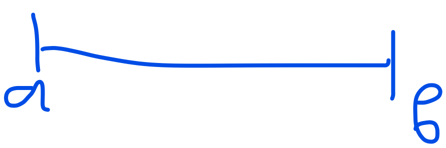
$|a_1 + \ldots + a_n| \leq$
$\leq |a_1| + \ldots + |a_n|$

$$= |\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_j}(f(\xi_{ij}) - f(\xi_i))\Delta x_{ij}| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_j}|f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)|\Delta x_{ij} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_j}\omega(f, \Delta_i)\Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\omega(f, \Delta_i)\Delta x_i. \tag{19.3}$$

Пусть $(P', \boldsymbol{\xi}')$ и $(P'', \boldsymbol{\xi}'')$ - произвольные разбиения $[a,b]$ с отмеченными точками и f удовлетворяет (19.2), при этом $\lambda(P') < \delta$ и $\lambda(P'') < \delta$. Рассмотрим разбиение $\tilde{P} = P' \cup P''$ - продолжение P' и P''. Тогда в силу (19.3) имеем

$\omega(f, \Delta_i) = |f(x_i) - f(x_{i-1})|$



$$\underbrace{|\sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) - \sigma(f; (P', \boldsymbol{\xi}'))|}_{A} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\underbrace{|\sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) - \sigma(f; (P'', \boldsymbol{\xi}''))|}_{B} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\leq |A| + |B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

Получим

$$|\sigma(f; (P', \boldsymbol{\xi}')) - \sigma(f; (P'', \boldsymbol{\xi}''))| =$$

$$= |\sigma(f; (P', \boldsymbol{\xi}')) - \sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) + \sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) - \sigma(f; (P'', \boldsymbol{\xi}''))| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f \in R[a,b]$ (смотри критерий Коши). $\square$

Теорема 19.4. Если $f \in C[a,b]$, то $f \in R[a,b]$.

Доказательство. По теореме Кантора, если $f \in C[a,b]$, то она является равномерно непрерывной на $[a,b]$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \omega(f, \Delta_i) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ при $\Delta x_i < \delta$. Тогда

$\forall P: \ \lambda(P) < \delta$ получаем $\sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \dfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow$ выполняется условие теоремы 3 $\Rightarrow f \in R[a,b]$. □

Теорема 19.5. Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - монотонная функция, то $f \in R[a,b]$.

Доказательство. Если f - постоянная функция, то $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a)$ и $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = c(b-a)$, то есть $f \in R[a,b]$.

Считая, что f не является постоянной функцией, положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}$, где ε - произвольное заданное число. Тогда при $\lambda(P) < \delta$ имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \delta\sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i) = \\ = \delta\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant \delta|\sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))| = \\ = \delta|f(b)-f(a)| = \varepsilon \Rightarrow\end{aligned}$$

$\Rightarrow f \in R[a,b]$ □

Для монотонной функции $\omega(f,[a,b]) = |f(b)-f(a)|$.