Лекция 21

Свойства интеграла Римана (продолжение)

Теорема 21.1. Пусть $f \in R[a,b]$, $g \in R[a,b]$. Тогда $(f \cdot g) \in R[a,b]$.

Доказательство. Так как $f, g \in R[a,b]$, то они ограничены на $[a,b]$, то есть $\exists\ A > 0, B > 0:\ |f(x)| \leqslant A, |g(x)| \leqslant B,\ \forall x \in [a,b]$, поэтому $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leqslant AB$, то есть $f \cdot g$ ограничена на $[a,b]$.

Пусть P - какое-либо разбиение $[a,b]$. Имеем

$$f(\xi_i'')g(\xi_i'') - f(\xi_i')g(\xi_i') = [f(\xi_i'') - f(\xi_i')]g(\xi_i'') + [g(\xi_i'') - g(\xi_i')]f(\xi_i'),$$

где $\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$.

Далее,

$$\begin{aligned}|f(\xi_i'')g(\xi_i'') - f(\xi_i')g(\xi_i')| &\leqslant \\ &\leqslant |f(\xi_i'') - f(\xi_i')||g(\xi_i'')| + |g(\xi_i'') - g(\xi_i')||f(\xi_i')| \leqslant \\ &\leqslant B\omega(f, \Delta_i) + A\omega(g, \Delta_i),\end{aligned}$$

то есть $\omega(fg, \Delta_i) \leqslant B\omega(f, \Delta_i) + A\omega(g, \Delta_i)$.

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(fg, \Delta_i)\Delta x_i \leqslant B \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i + A \sum_{i=1}^{n} \omega(g, \Delta_i)\Delta x_i.$$

Так как f и g интегрируемы на $[a,b]$, то $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i = 0$ и $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(g, \Delta_i)\Delta x_i = 0$, следовательно, $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(fg, \Delta_i)\Delta x_i = 0$. □

Оценки интеграла Римана, монотонность интеграла и теорема о среднем

Теорема 21.2. Если $f(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [a,b],\ f \in R[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0. \tag{21.1}$$

Доказательство. Каковы бы не были разбиение P отрезка $[a,b]$ и точки $\xi_i,\ i = 1, \ldots, n$, для функции $f(x) \geqslant 0$ имеем

$$\sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\geqslant 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\geqslant 0} \geqslant 0. \tag{21.2}$$

Перейдем к пределу в (21.2), получим (21.1). □

Св-во монотонности.

Следствие 21.1. Если $f, g \in R[a,b]$ и $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Если $f(x) \geqslant g(x)$, то $f(x) - g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a,b]$. Функция $f - g$ является интегрируемой на $[a,b]$ (так как выполняется свойство линейности интеграла Римана), поэтому, учитывая (21.1), получаем

$\tilde{F}(x) = f(x) - g(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a,b]$.

$$\int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx \geqslant 0,$$

но $\underbrace{\int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx}_{\geqslant 0} = \overbrace{\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx}^{\geqslant 0}$, поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$$

□

Теорема 21.3. (теорема о среднем значении интеграла)

Пусть

$$
\begin{aligned}
&1)\ f, g \in R[a,b];\\
&2)\ m \leqslant f(x) \leqslant M,\ \forall x \in [a,b];\\
&3)\ g(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a,b].
\end{aligned}
\tag{21.3}
$$

Тогда существует такое число μ, что $m \leqslant \mu \leqslant M$ и

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b \cancel{f(x)dx} = \mu \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{21.4}$$

док-во

Умножим (21.3) на $g(x) \geqslant 0$. Получим $\int\limits_a^b mg(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b Mg(x)dx$. Проинтегрируем последнее неравенство. Получим

$\int\limits_a^b g(x)dx \geqslant 0$

$$\underbrace{m \overbrace{\int\limits_a^b g(x)dx}^{=0} \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M \overbrace{\int\limits_a^b g(x)dx}^{}}_{} = 0 \tag{21.5}$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$, поэтому в качестве μ возьмем любое число из $[m, M]$. Если $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, то поделим (21.5) на $\int\limits_a^b g(x)dx$. Получим

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} = \mu \leqslant M.$$

Полагая $\mu = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}$, получим (21.4).

Следствие 21.2. При дополнительном предположении непрерывности функции f на $[a,b]$ существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \underset{=\mu}{f(\xi)} \int\limits_a^b g(x)dx.$$

$$\int\limits_a^b dx = b - a.$$

В частности, при $g(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \Rightarrow \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f \in R[a,b]$. Тогда $f \in R[a,x]$, где $x \in [a,b]$, то есть $\forall x \in [a,b]$ имеет смысл интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$.

a x b

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \tag{21.6}$$

-интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 21.4. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \qquad \frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right) = f(x), \ \forall x \in [a,b],$$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(\xi)\Delta x.$$

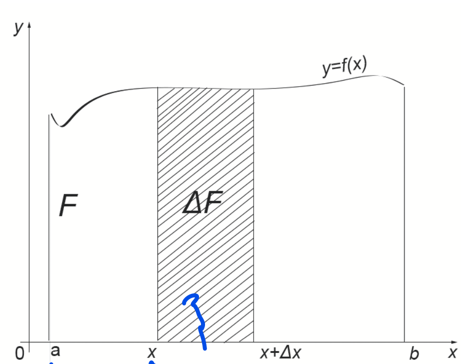
то есть функция (21.6) является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Доказательство. Поскольку f - непрерывна на $[a,b]$ функция, то $f \in R[a,b] \Rightarrow f \in R[a,x], \forall x \in [a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ определена функция (21.6).

Пусть x - произвольная точка из $[a,b]$ и $(x+\Delta x) \in [a,b]$. Тогда $\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt \underset{\text{т.21.3}}{=} f(\xi)(\underset{\Delta x}{b-a})$, где $\xi \in (x, x+\Delta x)$.

x x+Δx

Следовательно, $\dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi)$. В последнем равенстве перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. □



$$\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\xi)=f(x).$

$f\in C[a,b]$

Теорема 21.5. Пусть ~~$f\in R[a,b]$ непрерывная на $[a,b]$ функция~~. Если функция Φ является произвольной её первообразной на этом отрезке, то

$\int\limits_1^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\cancel{\Phi(b)-\Phi(a)}\ \Phi(x)\Big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a).$$

-формула Ньютона-Лейбница.

Доказательство. Положим $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ – первообразная функции f (смотри теорему 21.4). Таким образом, F и Φ – две первообразные функции $f(x)$ на $[a,b]$, поэтому $F(x)=\Phi(x)+C$, то есть

$$\int\limits_a^x f(t)dt=\Phi(x)+C.$$

$\int\limits_a^a f(t)dt=0$, $\int\limits_a^a f(t)dt=\Phi(a)+C$

$x=a$

При ~~$x\to a$~~ получаем $0=\Phi(a)+C$, то есть $C=-\Phi(a)$. Тогда

$\int\limits_1^2 t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_1^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$$\int\limits_a^x f(t)dt=\Phi(x)-\Phi(a).$$

$\int\limits_a^b f(t)dt=\Phi(b)-\Phi(a)$

При $x=b$ получаем $\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$. □

Обозначают также $\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a)$.

Теорема 21.6. (формула интегрирования по частям).

Пусть ~~$u,v\in C[a,b]$. Тогда~~

$u,v\in C^1[a,b].$

$$\int\limits_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

$u\in C^n[a,b]$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_a^b\frac{d}{dx}(uv)dx=\int\limits_a^b\left(u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right)dx=\int\limits_a^b udv+\int\limits_a^b vdu.$$

Все написанные интегралы существуют, так как подынтегральные функции непрерывны. Согласно формуле Ньютона-Лейбница, имеем $\int\limits_a^b\frac{d}{dx}(uv)dx=(uv)\Big|_a^b$, поэтому $(uv)\Big|_a^b=\int\limits_a^b udv+\int\limits_a^b vdu$, или

$$\int\limits_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

□