Теория конечных графов

Эйлеровы графы

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры

прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

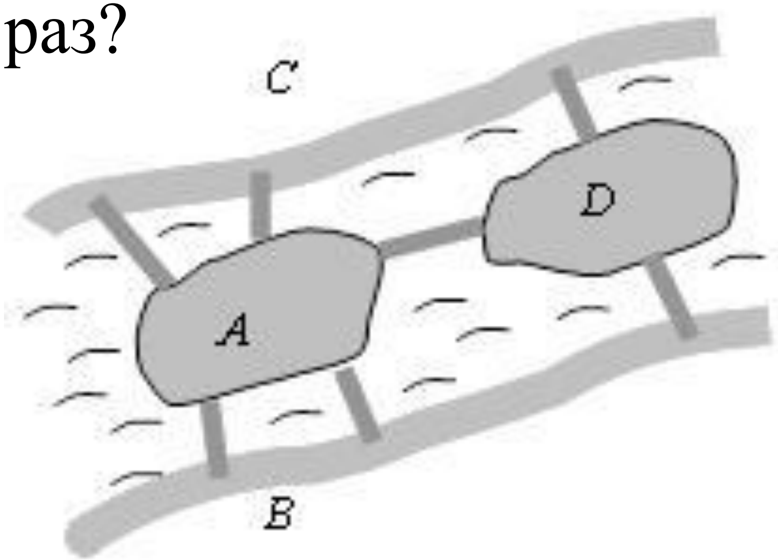
Литература

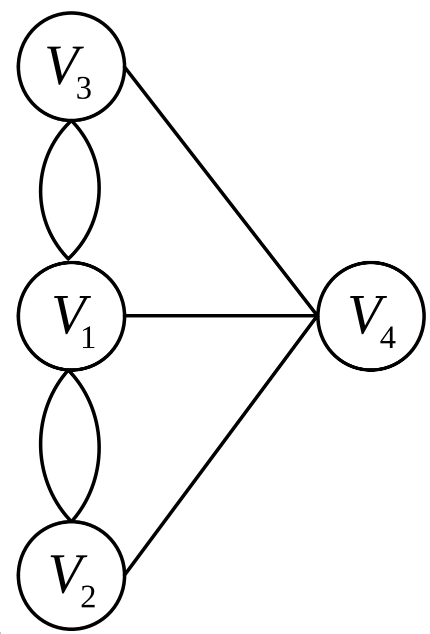
1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

Эйлеровы графы

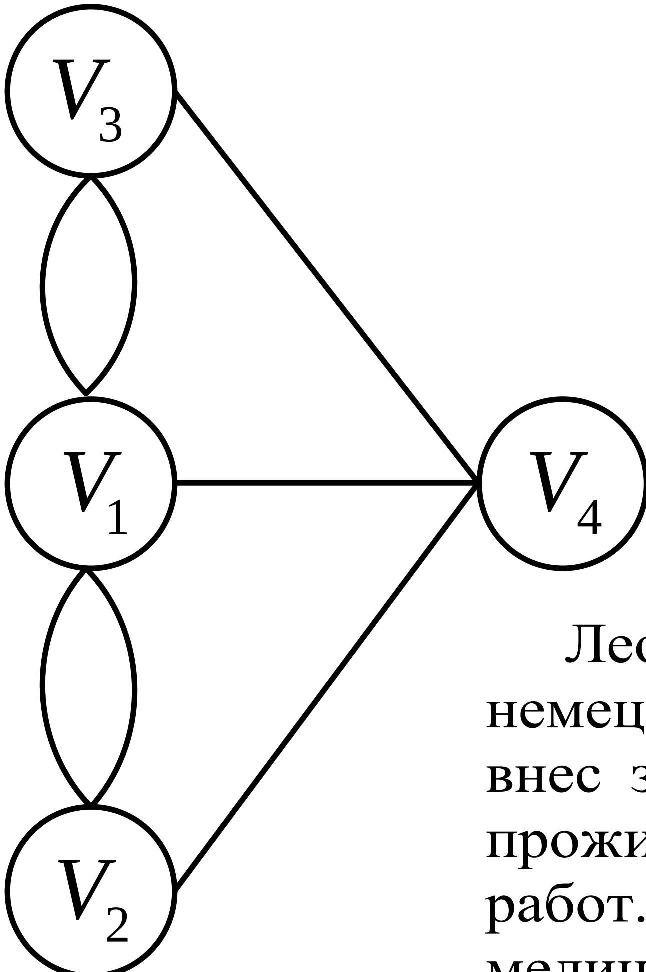
Задача о кёнигсбергских мостах. Город Кенигсберг (Калининград, Россия) был построен на берегах и двух островах реки Преголи (нем. Pregel — Прегель). В городе было семь мостов, которые соединяли острова между собой и с береговыми частями города.

Вопрос слушателю: можно ли, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту только один раз?





Эйлеровы графы



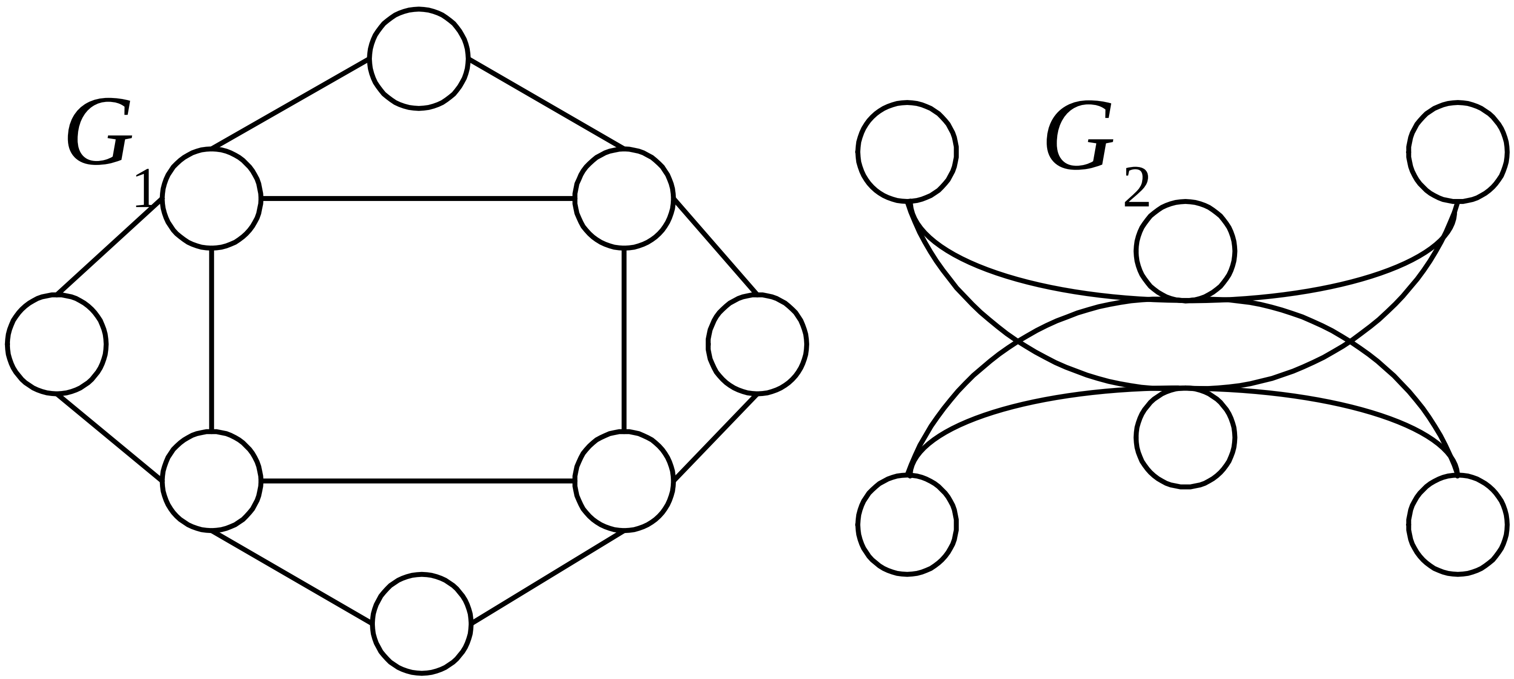
Вопрос задачи: *Существует ли цикл, содержащий все ребра графа? Возможно ли, выйдя из одной вершины, пройдя однократно по всем ребрам, вернуться обратно в ту же самую вершину?*

Леонард Эйлер (1707-1783) – швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внес значительный вклад в науку, полжизни прожил в России, автор более 850 научных работ. Изучал математику, механику, медицину, физику, астрономию и другие науки.

Эйлеровы графы

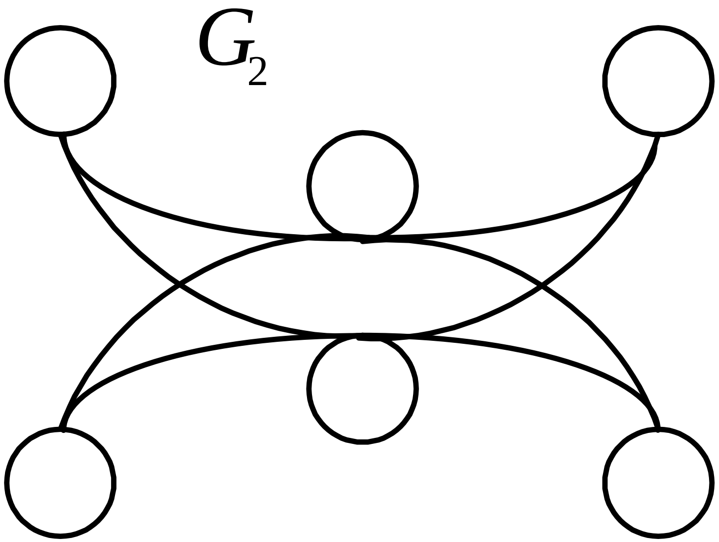
Цикл в графе называется эйлеровым, если он содержит все ребра графа.

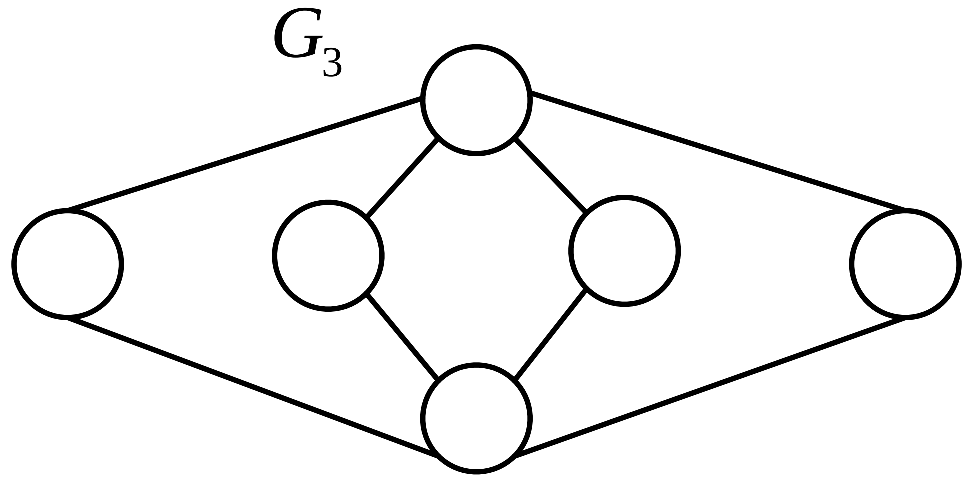
Связный граф, в котором есть эйлеров цикл называется эйлеровым графом.



Пример 1. Эйлеровы планарные графы.

Эйлеровы графы





Пример 2. Эйлеров планарный граф G_2
и изоморфный ему эйлеров плоский граф G_3.

Теорема о четности степеней вершин в эйлеровом графе

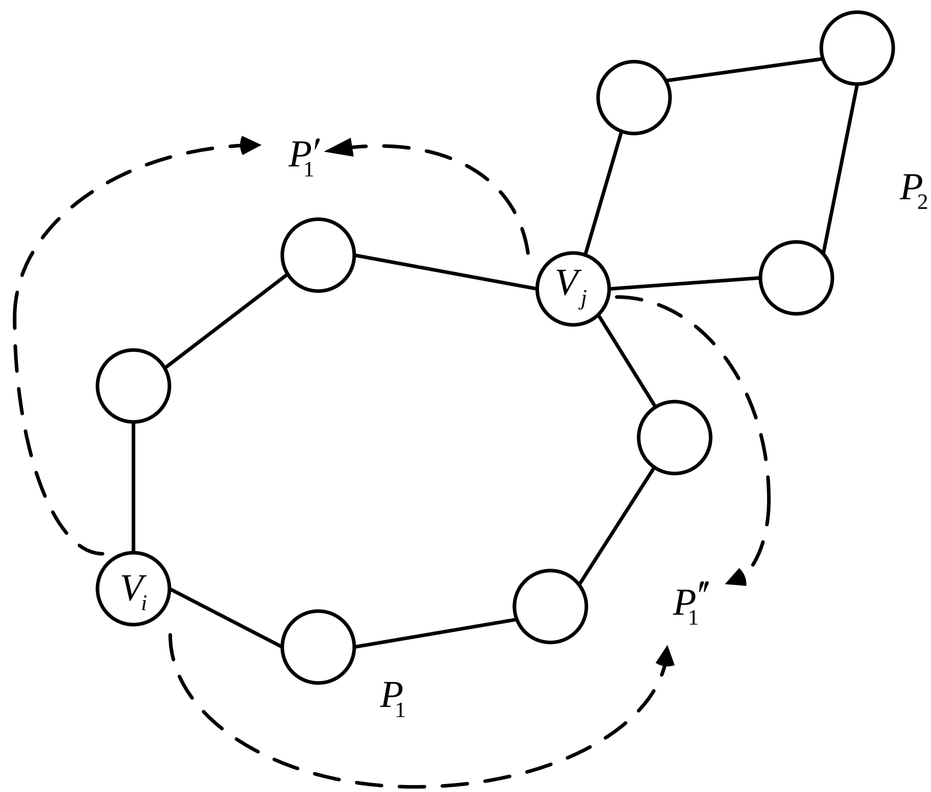
Теорема: Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

Доказательство.

1) Необходимость (слева направо). Пусть граф G – эйлеров. Докажем, что граф связный и степени всех его вершин четны. Эйлеров цикл этого графа а) содержит все ребра графа (следовательно, граф связный) и б) входит в вершину по одному ребру, а выходит по другому ребру. Каждая вершина такого графа инцидентна четному количеству ребер, следовательно, степень каждой вершины четна (т.к. ребро, проходя через вершину добавляет к степени этой вершины двойку).

Теорема о четности степеней вершин в эйлеровом графе

2) <u>Достаточность</u> (справа налево). Пусть степени всех вершин четны и граф связен. Докажем, что граф является эйлеровым. Начнем строить цепь P_1 из произвольной вершины V_i и будем продолжать эту цепь, каждый раз выбирая новое ребро.



Теорема о четности степеней вершин в эйлеровом графе

Если вершина, в которую пришла цепь P_1, отлична от вершины V_i, то всегда имеется новое ребро для выхода из вершины в силу четности степеней. Если мы вернулись в вершину V_i, то построение цепи P_1 заканчивается циклом, то есть P_1 – цикл. Если цикл P_1 содержит все ребра графа, то это эйлеров цикл, иначе из графа G удаляется цикл P_1, работа продолжается с графом $G_1 = G \setminus P_1$. Так как граф G и цикл P_1 имеют вершины четных степеней, то граф G_1 также содержит только четные степени вершин. В силу связности графа G, графы P_1 и G_1 должны иметь хотя бы одну общую вершину. Для ясности назовем эту вершину V_j.

Теорема о четности степеней вершин в эйлеровом графе

Начиная с вершины V_j, строим цикл в графе G_1 аналогично построению цикла P_1 в графе G. Цикл P_1 разбивается между вершинами V_i и V_j на 2 части. Назовем их P_1' и P_1'', получим новый цикл $P_3 = P_1' \bigcup P_2 \bigcup P_1''$.

Если P_3 – не эйлеров цикл, то продолжаем поиск, пока не обойдем все ребра, так как G – конечный граф, то эйлеров цикл будет построен.

Эйлеров путь в графе

Эйлеровым путем в графе называется произвольный путь, проходящий через каждое ребро графа точно один раз.

Эйлеров путь начинается в одной вершине с нечетной степенью и заканчивается в другой вершине с нечетной степенью.

Эйлеров путь в графе существует тогда и только тогда, когда граф связный и содержит не более, чем две вершины нечетной степени.

Эйлеров путь получается удалением одного ребра из эйлерова цикла.

Алгоритм поиска эйлерова цикла в графе пошагово

<u>Обозначения:</u>

stack – рабочий стек (дисциплина обслуживания LIFO, Last In First Out);

res – стек, содержащий последовательность вершин эйлерового цикла;

$u(V_i)$ – упорядоченный по нумерации список смежности для вершины V_i, $u(V_i), V_i = \overline{V_1, V_n}, n = |\mathbf{V}|$.

<u>Начало:</u> $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ – связный неорграф без вершин нечетной степени. Для каждой вершины $V_i \in \mathbf{V}$ строится список смежности $u(V_i)$, упорядоченный по нумерации. stack:=$\varnothing$ и res:=$\varnothing$.

Алгоритм поиска эйлерова цикла в графе пошагово

Шаг 1. Выбирается начальная вершина $V_i \in \mathbf{V}$ и помещается в стек $V_i \to$ stack. (В задаче указана начальная вершина).

Шаг 2. Список смежности для вершины $V_i \in \mathbf{V}$ может быть пуст или содержать некоторые вершины. В зависимости от этого возникает 2 случая:

1 случай: $u(V_i) \neq \varnothing$:

$u(V_i) = \{V_j, ...\}$, выбираем из данного списка смежности по нумерации первую вершину $V_j \in \mathbf{V}$.

$u(V_i) := u(V_i) \setminus \{V_j\}$,

$u(V_j) := u(V_j) \setminus \{V_i\}$.

Алгоритм поиска эйлерова цикла в графе пошагово

Далее для списка смежности вершины V_j возможны два варианта:

Вариант А: $u(V_j) \neq \varnothing \;\Rightarrow\; V_j \to$ stack, $V_i := V_j$ – текущей вершиной становится V_j и возвращаемся к началу шага 2.

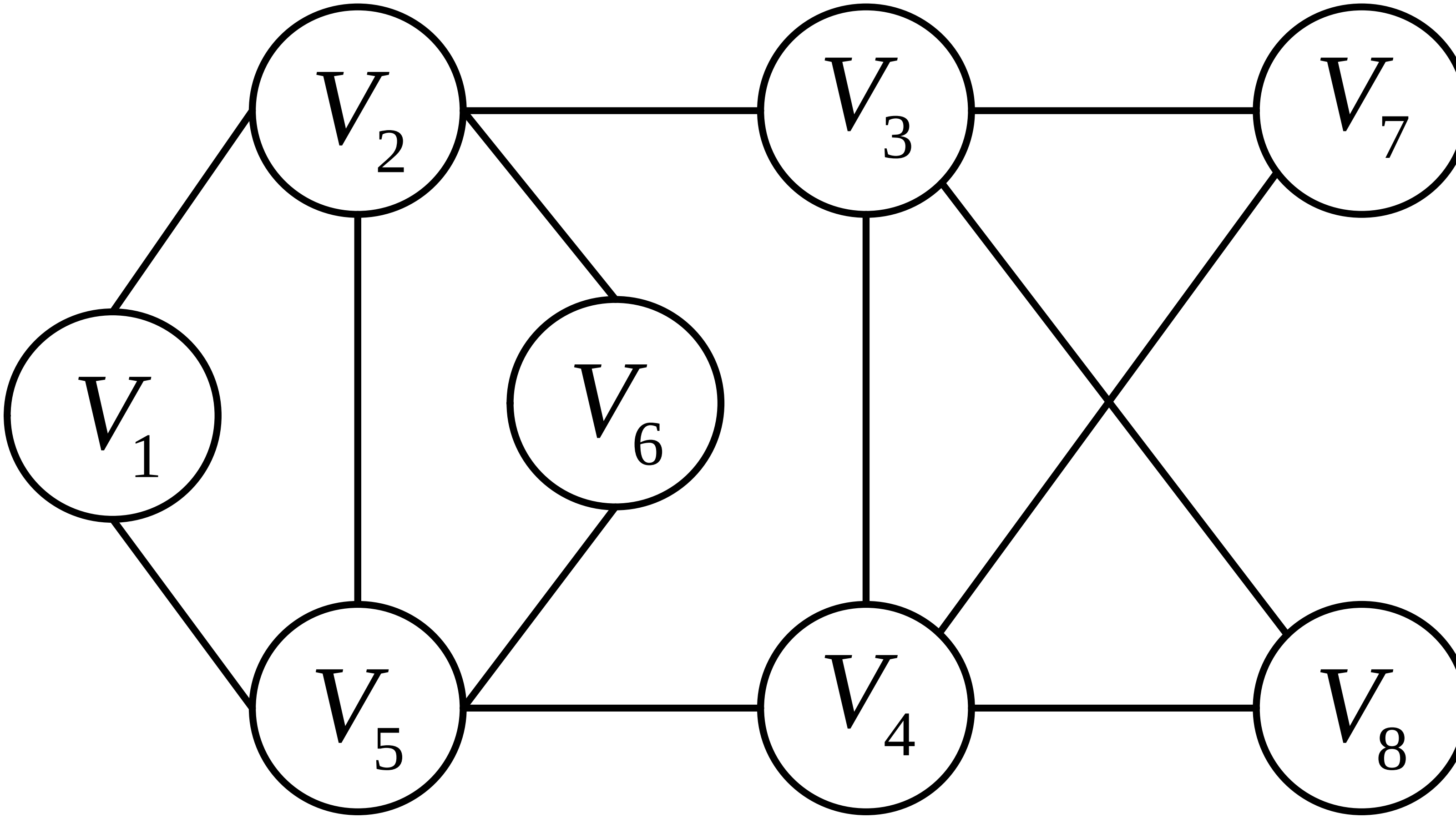
Вариант Б: $u(V_j) = \varnothing \;\Rightarrow\; V_j \to$ res, вершина V_i снова становится верхней вершиной стека stack. Далее, возвращаемся к началу шага 2.

2 случай: $u(V_i) = \varnothing$:

$V_i \to$ res, и предыдущая вершина из рабочего стека stack до V_i становится верхней вершиной стека. Далее возвращаемся в началу шага 2.

Конец: stack $= \varnothing \;\Rightarrow$ эйлеров цикл построен и представлен в res.

Пример поиска эйлерова цикла



Пример 3. Найти эйлеров цикл в графе, начиная с вершины V_1

Пример поиска эйлерова цикла

Составим списки смежности для всех вершин

$u(V_1) = \{V_2, V_5\}$,

$u(V_2) = \{V_1, V_3, V_5, V_6\}$,

$u(V_3) = \{V_2, V_4, V_7, V_8\}$,

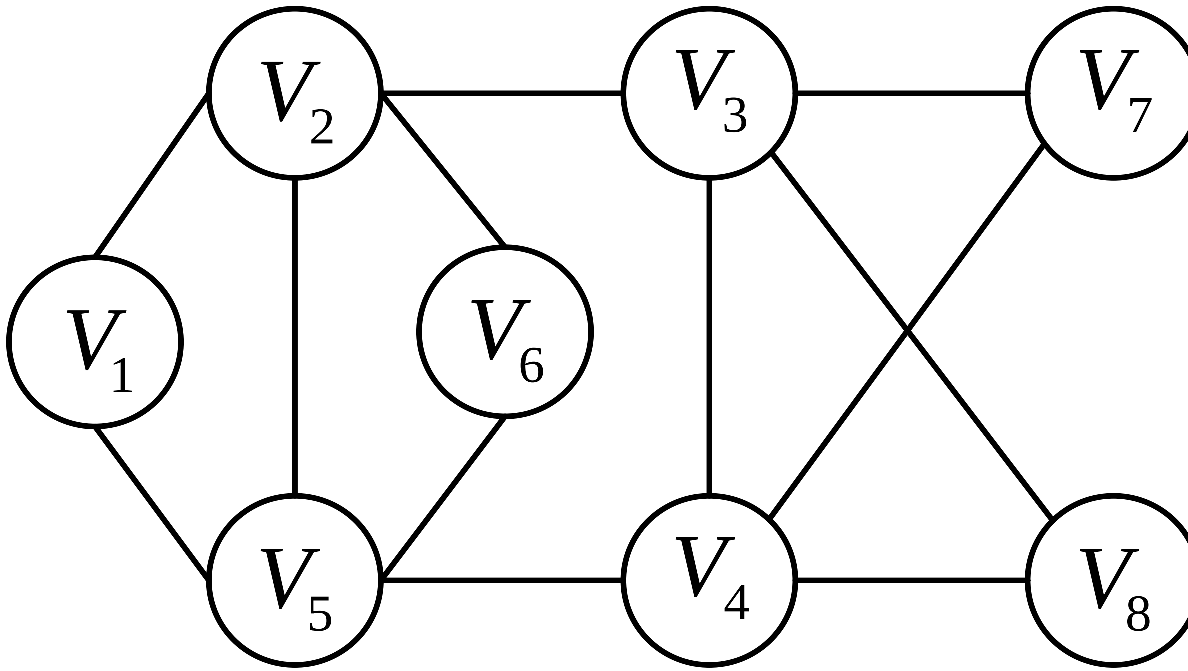
$u(V_4) = \{V_3, V_5, V_7, V_8\}$,

$u(V_5) = \{V_1, V_2, V_4, V_6\}$,

$u(V_6) = \{V_2, V_5\}$,

$u(V_7) = \{V_3, V_4\}$,

$u(V_8) = \{V_3, V_4\}$.



Пример поиска эйлерова цикла

Будем пошагово заполнять stack по алгоритму поиска эйлерова цикла.

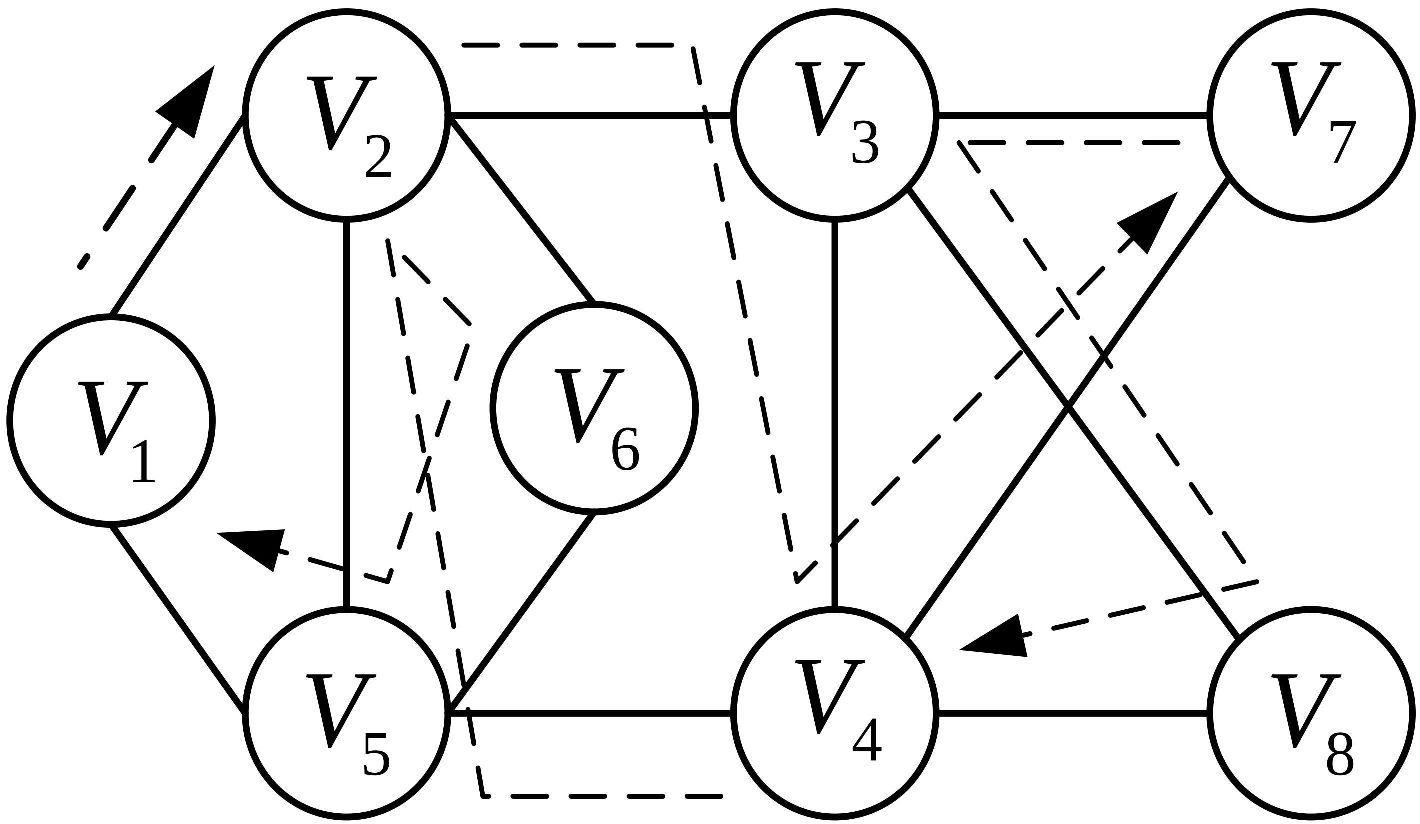
	V_1							
	V_2	V_1						
	V_3	V_2	V_1					
	V_4	V_3	V_2	V_1				
	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1			
res	V_1	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1		
	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1			
	V_2	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1		
	V_6	V_2	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1	
res	V_5	V_6	V_2	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1
res	V_6	V_2	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1	

Пример поиска эйлерова цикла

res	V_2	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1		
res	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1			
	V_4	V_3	V_2	V_1				
	V_7	V_4	V_3	V_2	V_1			
	V_3	V_7	V_4	V_3	V_2	V_1		
	V_8	V_3	V_7	V_4	V_3	V_2	V_1	
res	V_4	V_8	V_3	V_7	V_4	V_3	V_2	V_1
res	V_8	V_3	V_7	V_4	V_3	V_2	V_1	
res	V_3	V_7	V_4	V_3	V_2	V_1		
res	V_7	V_4	V_3	V_2	V_1			
res	V_4	V_3	V_2	V_1				
res	V_3	V_2	V_1					
res	V_2	V_1						
res	V_1							

Пример поиска эйлерова цикла

<u>Ответ:</u> Эйлеров цикл записывается следующим образом
res=$\left\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_7, V_3, V_8, V_4, V_5, V_2, V_6, V_5, V_1\right\}$.



Тема следующей лекции:

«Гамильтоновы графы»