Лекция 19

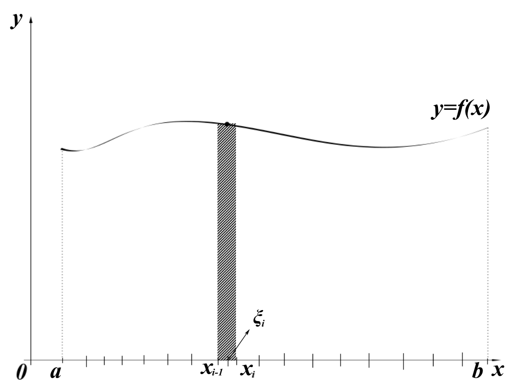
Определенный интеграл
Определение интеграла Римана

Рассмотрим задачу вычисления площади кривой трапеции. Пусть функция f определена на $[a,b]$ и пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Зафиксируем произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Тогда площадь кривой трапеции

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$



Определение 19.1. *Разбиением* отрезка $[a,b]$ называется любая конечная система его точек $x_0, \ldots, x_n$ такая, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Будем обозначать разбиение отрезка $[a,b]$ через P.

Определение 19.2. Разбиением отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ называется *разбиением P с указанными точками* $\xi_i, i = \overline{1,n}$, и обозначается $(P, \boldsymbol{\xi})$, где $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Определение 19.3. Разбиение P' называется *продолжением разбиения P*, если оно получено из P добавлением новых точек разбиения.

Определение 19.4. *Мелкостью разбиения P* называется величина

$$\lambda(P) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$$

Определение 19.5. Величина $\sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой Римана функции f*.

Определение 19.6. Число J называется *интегралом Римана функции f на $[a,b]$*, если

$$J = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) \tag{19.1}$$

и этот предел не зависит ни от разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

Другими словами, число J называется интегралом Римана функции f на $[a,b]$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такая, что для произвольного разбиения P с отмеченными точками ξ_i $(i = \overline{1,n})$ при $\lambda(P) < \delta$ выполняется неравенство $|J - \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi}))| < \varepsilon$.

Обозначим

$$J = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Полагают

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то записывают $f \in R[a, b]$.

Теорема 19.1. (Критерий Коши существования интеграла). Для существования предела (19.1) необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall (P', \boldsymbol{\xi'})$ и $(P'', \boldsymbol{\xi''})$, $\lambda(P') < \delta$ и $\lambda(P'') < \delta$ выполнялось условие

$$|\sigma(f; (P', \boldsymbol{\xi'})) - \sigma(f; (P'', \boldsymbol{\xi''}))| < \varepsilon.$$

Теорема 19.2. Если $f \in R[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. От противного. Пусть f не ограничена на $[a, b]$ и пусть фиксировано некоторое разбиение P этого отрезка. В силу неограниченности f на $[a, b]$ она является неограниченной по крайней мере на одном отрезке разбиения P. Пусть для определенности функция f не ограничена на $[x_0, x_1]$, тогда на этом отрезке существует последовательность $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1],\ n = 1, 2, \ldots$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty.$$

Зафиксируем каким-либо образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{2, n}$. Тогда сумма $\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ будет иметь численное значение. Тогда

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \left(f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right) = \infty.$$

Следовательно, не может быть конечного предела (19.1), то есть $f \notin R[a, b]$, что противоречит условию теоремы. $\square$

Замечание 19.1. Из ограниченности функции f, вообще говоря, не следует её интегрируемость.

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x\text{-рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x\text{-иррациональное число,} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ ограничена на $[0, 1]$. Покажем, что она не интегрируема на $[0, 1]$. Зафиксируем произвольное разбиение P отрезка $[0, 1]$. Если выбрать точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, n}$ рациональными, то получим

$$\sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1,$$

если ξ_i - иррационально, то

$$\sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) \Rightarrow f \notin R[a, b].$$

$\square$

Если $\tilde{P}$ - продолжение разбиения P, то все или некоторые отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ разбиваются точками x_{ij}. Тогда $\Delta x_{i,j} = x_{i,j} - x_{i,j-1}$ и $\sum_{i=1}^{n_j} \Delta x_{i,j} = \Delta x_i$.

Теорема 19.3. Для того, чтобы ограниченная функция f была интегрируема по Риману на $[a, b]$ достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \ \forall$ разбиения $P :\ \ \lambda(P) < \delta$ выполнялось неравенство

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon,}\tag{19.2}$$

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i = 0$$

где $\omega(f, \Delta_i) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)|$ - колебание функции f на Δ_i.

Доказательство. Сначала оценим разность

$$|\sigma(f; (\tilde{P}, \boldsymbol{\xi})) - \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi}))|,$$

где $\tilde{P}$ - продолжение разбиения P.

Имеем

$$|\sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) - \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi}))| = |\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_j} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| =$$
$$= |\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_j} (f(\xi_{ij}) - f(\xi_i))\Delta x_{ij}| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_j} |f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)|\Delta x_{ij} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_j} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i. \tag{19.3}$$

Пусть $(P', \boldsymbol{\xi'})$ и $(P'', \boldsymbol{\xi''})$ - произвольные разбиения $[a, b]$ с отмеченными точками и f удовлетворяет (19.2), при этом $\lambda(P') < \delta$ и $\lambda(P'') < \delta$. Рассмотрим разбиение $\tilde{P} = P' \cup P''$ - продолжение P' и P''. Тогда в силу (19.3) имеем

$$|\sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) - \sigma(f; (P', \boldsymbol{\xi'}))| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$|\sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) - \sigma(f; (P'', \boldsymbol{\xi''}))| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Получим

$$|\sigma(f; (P', \boldsymbol{\xi'})) - \sigma(f; (P'', \boldsymbol{\xi''}))| =$$
$$= |\sigma(f; (P', \boldsymbol{\xi'})) - \sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) + \sigma(f; (\tilde{P}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})) - \sigma(f; (P'', \boldsymbol{\xi''}))| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f \in R[a, b]$ (смотри критерий Коши). □

Теорема 19.4. Если $f \in C[a, b]$, то $f \in R[a, b]$.

Доказательство. По теореме Кантора, если $f \in C[a, b]$, то она является равномерно непрерывной на $[a, b]$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \underbrace{\omega(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{b - a}}$ при $\Delta x_i < \delta$. Тогда

$\delta(\varepsilon)$

$P:$ $a = x_0, \; x_1 \ldots x_{i-1} \; x_i \ldots \; b = x_n$

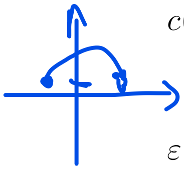
$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\forall P: \ \lambda(P) < \delta$ получаем $\underbrace{\sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i}_{19.3} < \dfrac{\varepsilon}{b-a}\underbrace{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}_{b-a} = \dfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow$ выполняется условие теоремы 8 $\Rightarrow f \in R[a,b]$. □

Теорема 19.5. Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - монотонная функция, то $f \in R[a,b]$.

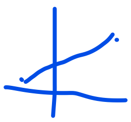
Доказательство. Если f - постоянная функция, то $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a)$ и $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = c(b-a)$, то есть $f \in R[a,b]$.

$= c$



Считая, что f не является постоянной функцией, положим $\boxed{\delta = \dfrac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}}$, где ε - произвольное заданное число. Тогда при $\lambda(P) < \delta$ имеем

f неубыв. $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$



$$\sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i) =$$

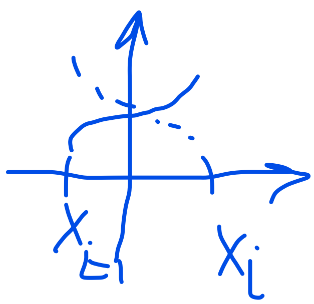
$< \delta$

$$= \delta \underbrace{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|}_{=|f(b)-f(a)|} \leqslant \delta\Big|\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Big| =$$

$$= \delta|f(b) - f(a)| = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f \in R[a,b]$ □

Для монотонной функции $\omega(f,[a,b]) = |f(b) - f(a)|$.



$\omega(f,\Delta_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$

$\omega(f,\Delta_i) = f(x_{i-1}) - f(x_i)$

$\omega(f,\Delta_i) = |f(x_i) - f(x_{i-1})|$

f - возр.

$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = (\cancel{f(x_1)} - f(x_0)) + (\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}) + (\cancel{f(x_3)} - \cancel{f(x_2)}) + \ldots + (f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})}) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$.