Глава 4

Производная функции

§ 4.1 Определение производной

Определение 4.1. Если существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, = f'(x_0) = y'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

то он называется производной функции f в точке x_0.
Обозначают $\frac{df(x_0)}{dx}$, $y'(x_0)$, $f'(x_0)$.
Определение 4.2. Разности $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ называются приращениями аргумента и функции соответственно.

$\Delta x = x - x_1 \Rightarrow$

$x = x_0 + \Delta x$

Таким образом, мы можем записать

$$f'(x_0) = \boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0.$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием функции.
Пример 4.1. Найти производную y', если $y = c$ (c – постоянная).
Так как $\Delta y = c - c = 0$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ и, таким образом,

$f(x) = C\ \forall x \in X$

$$c' = 0. \tag{4.1}$$

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = c - c = 0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$f(x) = \sin x$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$\frac{x-x_0}{2} = t$

$x - x_0 = 2t$

$$= \cos x_0 \cdot \lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{2t} = \cos x_0 \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 = \cos x_0.$$

Определение 4.3. Если существуют пределы

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то они называются соответственно левосторонней и правосторонней производными функции f в точке x_0.
Обозначают $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$.
Определение 4.4. Если существуют пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty,\quad\text{или}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\quad\text{или}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,$$

то говорят, что функция $y=f(x)$ имеет бесконечные производные (с соответствующим знаком) в точке x_0.

В дальнейшем под выражением «существует производная функции» будем понимать наличие конечной производной, если не оговорено противное.

Теорема 4.1. *Производная $f'(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.*

$f: X \to \mathbb{R}$

$\varphi: Y \to \mathbb{R}$, где $Y = X\setminus\{x_0\}$

Доказательство. Обозначим $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x\neq x_0$. Согласно теореме об односторонних пределах, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0}\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}\varphi(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\varphi(x)$. Заметим, что $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=f'(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0}\varphi(x)=f'_-(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0}\varphi(x)=f'_+(x_0)$. □

Теорема 4.2. *Если существует $f'(x_0)$, то функция f непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Из равенства

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}f'(x_0)=0$$

получаем

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right]=0,$$

то есть

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=\alpha(x),\qquad \alpha(x)\to 0\ \text{при}\ x\to x_0.$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\alpha(x)$$

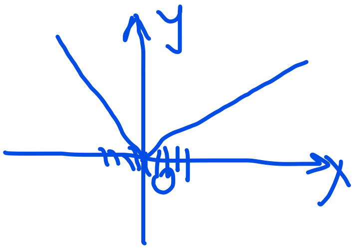
Таким образом,

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\overbrace{\alpha(x)(x-x_0)}^{\bar{o}(x-x_0)}. \tag{4.2}$$

Если $x\to x_0$, то правая часть равенства (4.2) стремится к нулю, и поэтому $f(x)\to f(x_0)$. Следовательно, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. □

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\underbrace{\lim_{x\to x_0}f'(x_0)(x-x_0)}_{0}+\underbrace{\lim_{x\to x_0}\alpha(x)(x-x_0)}_{0}=0$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)-\underbrace{\lim_{x\to x_0}f(x_0)}_{f(x_0)}=0\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$



Замечание 4.1. Отметим, что из непрерывности функции f в точке x_0, вообще говоря, не следует существование производной в этой точке.

Рассмотрим пример. Функция $f(x) = |x|$, очевидно, непрерывна в точке $x_0 = 0$ (как и во всех других), но не имеет в этой точке производной.

В самом деле, при $x \geq 0$ имеем $f(x) = |x| = x$, поэтому

$$f'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1.$$

$x_0 = 0$

$= \lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to +0} 1 = 1$

$x \to 0-0$

Аналогично, при $x \leq 0$ имеем $f(x) = |x| = -x$, поэтому

$x \to -0$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1.$$

$= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to -0} (-1) = -1$

Тем самым доказано, что функция $f(x) = |x|$ не имеет в точке $x_0 = 0$ производной, однако в этой точке существуют как левосторонняя, так и правосторонняя призводные.

Определение 4.5. Если функция f имеет производную в точке x_0, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Если функция f имеет производную в любой точке $x_0 \in X$, то она называется дифференцируемой на множестве X.

§ 4.2 Правила вычисления производных

Теорема 4.3. *Пусть функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ определены в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и имеют в самой точке x_0 производные, тогда и их сумма $f_1(x) + f_2(x)$, произведение $f_1(x)f_2(x)$, а если $f_2(x) \neq 0$, то и частное $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ имеют в точке x_0 производные, причем*

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2', \tag{4.3}$$

$$(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2', \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} \tag{4.5}$$

(в формулах (4.3) – (4.5) $x = x_0$).

Доказательство. Пусть функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ определены в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, $(x_0 + \Delta x) \in U(x_0)$ и

$$\Delta y_1 = f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0), \ \ \Delta y_2 = f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0).$$

Для простоты записи будем иногда опускать обозначение аргумента, рассматривая при этом приращения функций только в точке x_0.

Если $y = y_1 + y_2$, то

$$\Delta y = (f_1(x_0 + \Delta x) + f_2(x_0 + \Delta x)) - (f_1(x_0) + f_2(x_0)) =$$

$$= (f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0)) + (f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0)) = \Delta y_1 + \Delta y_2,$$

откуда при $\Delta x \neq 0$ получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$ и замечая, что в силу существования производных функций y_1 и y_2 в точке x_0 предел правой части этого равенства существует и равен $y_1' + y_2'$, получим, что существует и предел его левой части, то есть существует производная y', причем $y' = y_1' + y_2'$, то есть формула (4.3) доказана.

Если $y = y_1 y_2$, то аналогичным образом получаем

$$\Delta y = f_1(x_0 + \Delta x) f_2(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0) f_2(x_0) =$$

$$= (f_1(x_0 + \Delta x) f_2(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0) f_2(x_0 + \Delta x)) +$$

$$+ (f_1(x_0) f_2(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0) f_2(x_0)) =$$

$$= (f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0)) f_2(x_0 + \Delta x) + f_1(x_0)(f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0)) =$$

$$= \Delta y_1 f_2(x_0 + \Delta x) + f_1(x_0) \Delta y_2.$$

Далее,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} f_2(x_0 + \Delta x) + f_1(x_0) \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Из существования производной $f_2'(x_0)$ следует непрерывность функции f_2 в точке x_0 : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f_2(x_0 + \Delta x) = f_2(x_0)$; кроме того, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_1'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_2'$. Поэтому, перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, из полученного равенства имеем

$$y' = y_1' y_2 + y_1 y_2',$$

то есть формула (4.4) доказана.

Наконец, если $y = \frac{y_1}{y_2}$ и $f_2(x_0) \neq 0$, то

$$\Delta y = \frac{f_1(x_0 + \Delta x)}{f_2(x_0 + \Delta x)} - \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} =$$

$$y(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f(x)$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$= \frac{f_1(x_0+\Delta x)f_2(x_0) - f_1(x_0)f_2(x_0+\Delta x)}{f_2(x_0+\Delta x)f_2(x_0)} =$$

$$= \frac{f_1(x_0+\Delta x)f_2(x_0) - f_1(x_0)[f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0) + f_2(x_0)]}{f_2(x_0+\Delta x)f_2(x_0)} =$$

$$= \frac{\underbrace{[f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)]}_{\Delta y_1}f_2(x_0) - f_1(x_0)\underbrace{[f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0)]}_{\Delta y_2}}{f_2(x_0+\Delta x)f_2(x_0)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} f_2(x_0) - f_1(x_0)\frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{f_2(x_0+\Delta x)f_2(x_0)}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f_2(x_0+\Delta x) = f_2\left(\lim_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)\right) = f_2(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - f_1(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{f_2(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0} f_2(x_0+\Delta x)} = \frac{f_2(x_0)f_1'(x_0) - f_1(x_0)f_2'(x_0)}{f_2^2(x_0)}$$

Отсюда при $\Delta x \to 0$, вспомнив снова, что из существования производной следует непрерывность функции, и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f_2(x_0+\Delta x) = f_2(x_0)$, получим

$$y' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2},$$

то есть формула (4.5) также доказана. □

Следствие 4.1. *Если функция $y = f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 и $c \in \mathbb{R}$, то функция $cf(x)$ также дифференцируема в точке x_0, причем*

$$(cy)' = cy' \qquad (x = x_0).$$

Действительно, учитывая (4.1), из формулы (4.4) получаем

$$(cy)' = \underbrace{c'}_{=0} y + cy' = cy'.$$

§ 4.3 Производная сложной функции

Теорема 4.4. *Пусть функция $z = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = g(z)$ дифференцируема в точке $z_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $y = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем*

$$y'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{4.6}$$

Доказательство. Сложная функция $y(x)$ непрерывна в точке x_0, так как из дифференцируемости функций f и g следует непрерывность этих функций соответственно в точках x_0 и z_0 (§ 4.1, теорема 4.2). Поэтому функция $y(x)$ определена в окрестности $U(x_0, \delta)$ при некотором $\delta > 0$.

Пусть Δx – произвольное приращение независимого переменного такое, что $\Delta x \neq 0$ и $|\Delta x| < \delta$. Обозначим

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \;\; \Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0).$$

$y=g(z)$
$z=f(x)$
$z_0=f(x_0)$

Приращение Δz, зависящее от Δx, определяет приращение $\Delta y = \Delta g$ функции $g(z)$ в точке z_0, то есть

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z}-g'(z_0)\right)=0$

$$\Delta y = \Delta g = g(z_0 + \Delta z) - g(z_0), \quad \text{где} \;\; z_0 = f(x_0).$$

Так как функция g дифференцируема в точке z_0, то из равенства

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z} = g'(z_0)$$

$\frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z}-g'(z_0)=\alpha(\Delta z)$

получаем

$$\Delta y = \Delta g = g'(z_0)\Delta z + \Delta z \cdot \alpha(\Delta z), \tag{4.7}$$

$\frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z}=g'(z_0)+\alpha(\Delta z)$

где $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Заметим, что функция $\alpha(\Delta z)$ не определена при $\Delta z = 0$. Однако приращение Δz может обратиться в нуль и при $\Delta x \neq 0$. Поэтому доопределим $\alpha(\Delta z)$ при $\Delta z = 0$, полагая $\alpha(0) = 0$. Тогда равенство (4.7) будет выполняться и при $\Delta z = 0$.

$\underbrace{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}_{\Delta y}=g'(z_0)\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z$

Разделив обе части равенства (4.7) на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(z_0)\frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \alpha(\Delta z). \tag{4.8}$$

Приращение Δy в левой части равенства (4.8) можно рассматривать как приращение сложной функции $y = g(f(x))$, соответствующее приращению аргумента Δx.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta z \to 0$ в силу непрерывности функции $z = f(x)$ в точке x_0, и поэтому $\alpha(\Delta z) \to 0$. Кроме того, $\frac{\Delta z}{\Delta x} \to f'(x_0)$, так как функция f дифференцируема в точке x_0. Следовательно, правая часть равенства (4.8) имеет при $\Delta x \to 0$ предел, равный $g'(f(x_0))f'(x_0)$. Поэтому существует предел левой части (4.8), то есть сложная функция $y = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула (4.6). □

$=g'(z_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}+$

$+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\alpha(\Delta z)$

§ 4.4 Производная обратной функции и функции, заданной параметрически

$z_0=f(x_0)$

$y'(x_0)=g'(z_0)f'(x_0)+0$

Теорема 4.5. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и пусть существует*

$y'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$

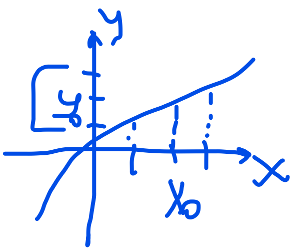
$y=f(x),\ x\in X$

$x=f^{-1}(y)$

$f'(x_0) \neq 0$; тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

то есть производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.



Доказательство. Зафиксируем какую-то окрестность точки x_0, на которой функция f определена, непрерывна и строго монотонна, и будем рассматривать f только в этой окрестности. Тогда обратная функция определена и непрерывна на некотором интервале, содержащем точку y_0 и являющемся образом указанной выше окрестности точки x_0. Поэтому если $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$, то $\Delta x \to 0$ равносильно $\Delta y \to 0$ в том смысле, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (для функции f) и $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ (для функции f^{-1}).

$\Delta y = y - y_0 =$
$= f(x) - f(x_0) =$
$= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Для любых $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ имеем $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$. При $\Delta x \to 0$ (или, что то же, в силу сказанного выше, при $\Delta y \to 0$) предел правой части существует, значит, существует и предел левой части, причем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = (f^{-1})'(y_0)$, поэтому $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. □

$\Delta x = x - x_0 =$
$= f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) =$
$= f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$

$x = f^{-1}(y)$

$y = f(x)$

Этой теореме можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Как известно, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – значение угла, образуемого касательной графика функции f в точке (x_0, y_0) с положительным направлением оси Ox, а $(f^{-1})'(y_0) = \operatorname{tg} \beta$, где β – значение угла, образованного той же касательной с осью Oy.

Очевидно, $\beta = \pi/2 - \alpha$, поэтому

$$(f^{-1})'(y_0) = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Определение 4.6. Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и функция $x = \varphi(t)$ непрерывна и строго монотонна в указанной окрестности; тогда существует обратная $\varphi(t)$ функция $t = \varphi^{-1}(x)$, и в некоторой окрестности точки $x_0 = \varphi(t_0)$ имеет смысл композиция $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Эта функция и