Лекция 1

Кривые в евклидовом пространстве
~~Кривизна кривой~~

Рассмотрим множество точек вида $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Определим функцию $(\cdot\,,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям

(x,y)

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$;
2. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$;
3. $\cancel{(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x_1}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x_2}, \mathbf{y})}$; $(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$
4. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n \text{ раз}}$.

Такая функция называется *скалярным произведением*. Отметим, что $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-мерным вектором и

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;
2. $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$;
4. $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$;
5. $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ – расстояние между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

$|x| = \sqrt{(x,x)}$

$(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$

Линейное пространство $\mathbb{R}^n$, наделенное скалярным произведением, называется *евклидовым пространством* $\mathbb{E}^n$. Рассмотрим функцию $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, то есть

E^n.

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \tag{1.1}$$

$x = x(t)$

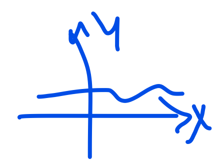
$y = y(t)$

где

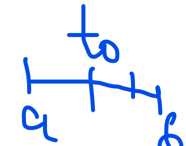
$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t). \tag{1.2}$$

Определение 1.1. Образ непрерывного отображения (1.1) называется *кривой*.

Определение 1.2. Кривая называется *гладкой*, если функции (1.2) являются непрерывно дифференцируемыми.



Определение 1.3. Пусть P – некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, тогда кривая вида (1.1) называется *спрямляемой*, если $\sup\limits_P \sum\limits_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = l < \infty$, при этом l называется *длиной* рассматриваемой кривой.



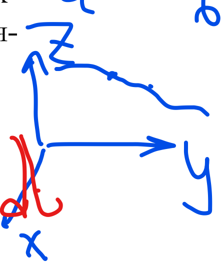
Теорема 1.1. Пусть рассматривается кривая вида (1.1) и при этом векторная функция $\mathbf{r}(t)$ является непрерывно дифференцируемой. Тогда кривая является спрямляемой и её длина вычисляется по формуле

$r(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$

$r'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))$

без док-ва

$$l = \int\limits_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, dt$$



где $\mathbf{r}'(t) = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$, тогда $\mathbf{r}'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))$ и $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}$.

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{r}'(t)dt \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt.$$

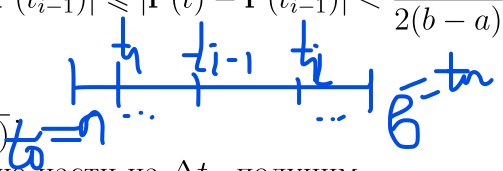
Отметим, что $\left| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt \right| \leqslant \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t)|dt$, так как $\left| \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \right| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta t_i$ и $\int\limits_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt < +\infty$, так как $|\mathbf{r}'(t)|$ является непрерывной функцией.

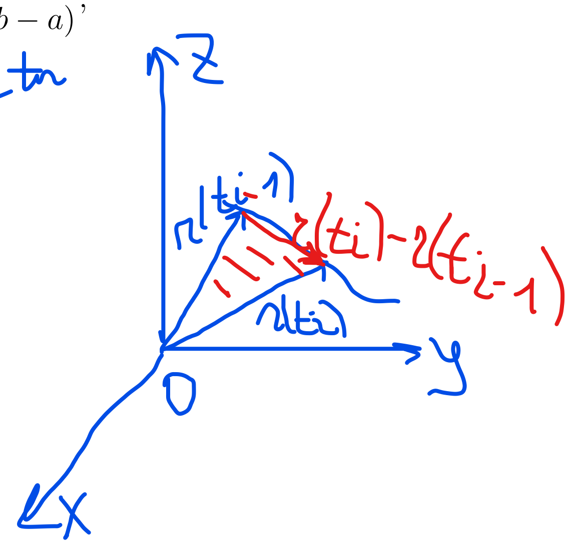
Следовательно, $l \leqslant \int\limits_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$. С другой стороны, так как $\mathbf{r}(t)$ является непрерывно дифференцируемой, то есть $\mathbf{r}'(t)$ является непрерывной на $[a, b]$, то по теореме Кантора $\mathbf{r}'(t)$ является равномерно непрерывной на $[a, b]$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall t_i, t_{i-1} \in [a, b],\ |t_i - t_{i-1}| < \delta \Rightarrow |\mathbf{r}'(t_i) - \mathbf{r}'(t_{i-1})| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Пусть P – любое разбиение $[a, b]$ и $\lambda(P) < \delta$. Поскольку при $t_{i-1} < t < t_i$ имеем

$$|\mathbf{r}'(t)| - |\mathbf{r}'(t_{i-1})| \leqslant |\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

то $|\mathbf{r}'(t)| \leqslant |\mathbf{r}'(t_{i-1})| + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.





Умножив правую и левую части на Δt_i, получим

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}'(t)|\Delta t_i \leqslant |\mathbf{r}'(t_{i-1})|\Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta t_i &= \\
= |\mathbf{r}'(t_{i-1})\Delta t_i| + \frac{\varepsilon \Delta t_i}{2(b-a)} &= \\
= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{r}'(t_{i-1})dt \right| + \frac{\varepsilon \Delta t_i}{2(b-a)} &= \\
= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\mathbf{r}'(t_{i-1}) - \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}'(t)]dt \right| + \frac{\varepsilon \Delta t_i}{2(b-a)} &\leqslant \\
\leqslant \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\mathbf{r}'(t_{i-1}) - \mathbf{r}'(t)]dt \right| + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{r}'(t)dt \right| + \frac{\varepsilon \Delta t_i}{2(b-a)} &\leqslant \\
\leqslant \frac{\varepsilon \Delta t_i}{2(b-a)} + |r(t_i) - r(t_{i-1})| + \frac{\varepsilon \Delta t_i}{2(b-a)} &= \\
&= \frac{\varepsilon \Delta t_i}{b-a} + |r(t_i) - r(t_{i-1})|.
\end{aligned}$$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}|\mathbf{r}'(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta t_i + \sum\limits_{i=1}^{n}|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})|$ или

$$\int\limits_a^b|\mathbf{r}'(t)|dt-\varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})| \leqslant \sup_P\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})|,$$

то есть $l=\int\limits_a^b|\mathbf{r}'(t)|dt.$ □

Частные случаи

$x=\varphi(t)$,

1. Пусть $\mathbf{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t)),\ t\in[a,b]$, то есть $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$. Тогда $y=\psi(t),\ t\in[a,b].$

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt.$$

$x=t,=\varphi(t)$

2. Пусть $y=f(x),\ x\in[a,b]$. Положим $\mathbf{r}(x)=(x,f(x)),\ x\in[a,b]$, тогда $y=\underbrace{f(t)}_{\psi(t)},\ t\in[a,b]$

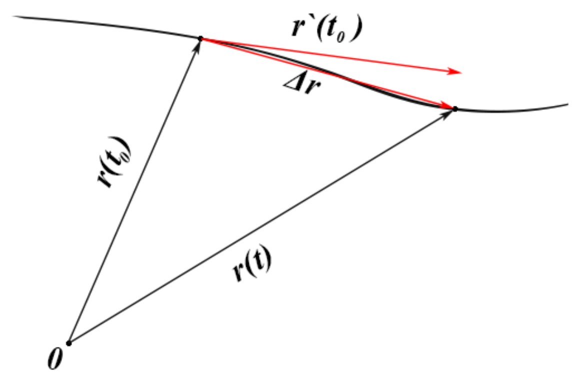
$r(t)=(t,f(t))$

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}d\cancel{t}x$$

$$\ell=\int_a^b\sqrt{1^2+(f'(t))^2}dt=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Касательный вектор

Пусть задана функция $\mathbf{r}=(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)),\ t\in[a,b]$, и существует точка $t_0\in[a,b]:\ \mathbf{r}'(t_0)\neq 0$.



Определение 1.4. Прямая, проходящая через точку $\mathbf{r}(t_0)$ и параллельная вектору $\mathbf{r}'(t_0)$ называется *касательной* к кривой в точке $\mathbf{r}(t_0)$.

Уравнение касательной к кривой, в точке $\mathbf{r}(t_0)$ в векторной записи имеет вид

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t_0)+\mathbf{r}'(t_0)\lambda,\ -\infty<\lambda<+\infty,$$

или $x=x(t_0)+\lambda x'(t_0)$, $y=y(t_0)+\lambda y'(t_0)$, $z=z(t_0)+\lambda z'(t_0)$.

Определение 1.5. Кривая, заданная уравнением $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\ t\in[a,b]$ называется *регулярной*, если $|\mathbf{r}'(t)|\neq 0,\ \forall t\in[a,b]$. Регулярность кривой означает существование касательного вектора в каждой точке.

Рассмотрим функцию $s(t)=\int\limits_{t_0}^{t}|\mathbf{r}'(\tau)|d\tau,\ a\leqslant t_0\leqslant b$. Обозначим $s_0=-\int\limits_{t_0}^{a}|\mathbf{r}'(\tau)|d\tau$, $s_1=\int\limits_{t_0}^{b}|\mathbf{r}'(\tau)|d\tau$.

Имеем $s'(t)=|\mathbf{r}'(t)|$. Считая, что кривая является регулярной, заключаем, что $s'(t)>0\ \forall t\in[a,b]$, то есть $s(t)$ – строго монотонная функция, и существует обратная функция $t=t(s),\ s\in[s_0,s_1]$. При этом

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

В исходном уравнении кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ переходим к переменной s, полагая $t = t(s)$.

Определение 1.6. Тогда $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t(s))$ называется *натуральным уравнением кривой*, а s – *натуральным параметром*.

Обозначим $\boldsymbol{\tau}(s) = \dfrac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$. Имеем

$$|\boldsymbol{\tau}(s)| = \left|\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\left|\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\right| = |\mathbf{r}'(t)|\frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} = 1,$$

то есть $\boldsymbol{\tau}(s)$ – единичный вектор касательной.

Определение 1.7. Величина $k(s) = \left|\dfrac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds}\right|$ называется *кривизной* кривой.

Поскольку $\boldsymbol{\tau}(s) = \dfrac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$, то

$$k(s) = \left|\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}\right|.$$

Пусть рассматривается кривая на плоскости, то есть $\mathbf{r}(t(s)) = (\varphi(t(s)),\ \psi(t(s)))$. Имеем

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \left(\varphi'\frac{dt}{ds}, \psi'\frac{dt}{ds}\right) = \left(\frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}, \frac{\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}\right).$$

Далее

$$\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = \left(\left(\frac{\varphi'}{|\mathbf{r}'(t)|}\right)'_t\frac{dt}{ds}, \left(\frac{\psi'}{|\mathbf{r}'(t)|}\right)'_t\frac{dt}{ds}\right),$$

то есть

$$\left(\frac{\varphi'}{|\mathbf{r}'(t)|}\right)'_t = \left(\frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}\right)'_t =$$

$$= \frac{\varphi''\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} - \varphi'\dfrac{\varphi'\psi'' + \varphi''\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}}{(\varphi')^2 + (\psi')^2} =$$

$$= \frac{\varphi''(\psi')^2 - \varphi'\psi'\psi''}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\psi'\overbrace{(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}^{A}}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Аналогично $\left(\dfrac{\psi'}{|\mathbf{r}'(t)|}\right)'_t = \dfrac{-\varphi' A}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{\frac{3}{2}}}$. Таким образом

$$k(s) = \sqrt{\frac{(\psi')^2A^2 + (\varphi')^2A^2}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^4}} = \frac{|A|}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'|}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$