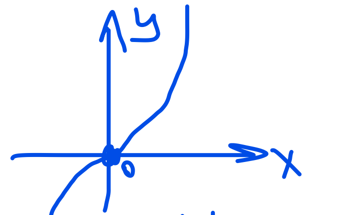
§ 4.9 Экстремумы функции. Точки перегиба, асимптоты

Теорема 4.16 (необходимые условия экстремума). *Пусть x_0 является точкой экстремума функции f, определенной в некоторой окрестности точки x_0. Тогда $f'(x_0) = 0$ или не существует.*



$(x^3)' = 3x^2$

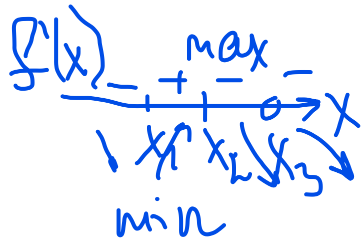
Доказательство. Действительно, если x_0 является точкой экстремума функции f, то найдется такая окрестность $U(x_0, \delta)$, что значение функции f в точке x_0 будет наибольшим или наименьшим в этой окрестности. Поэтому если в точке x_0 существует производная, то она, согласно теореме Ферма (см. § 4.7), равна нулю. □

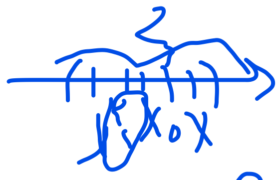
Отметим, что условие $f'(x_0) = 0$ не является (для дифференцируемой при $x = x_0$ функции) достаточным условием наличия экстремума, как это показывает пример функции $y = x^3$, которая при $x = 0$ имеет производную, равную нулю, но для которой $x = 0$ не является точкой экстремума.

т. Лагранжа
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ — непр, дифф. на (a,b). Тогда $\exists\, \xi \in (a,b)$: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Определение 4.16. Точка x_0 называется критической точкой функции $f : X \to \mathbb{R}$, если $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Теорема 4.17 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, в которой она, однако, является непрерывной. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через x_0 (это означает, что существует такое $\delta > 0$, что значения производной f' имеют один и тот же знак всюду в $(x_0 - \delta, x_0)$ и противоположный знак для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$), то x_0 является точкой строгого локального экстремума. При этом если при $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x_0 < x < x_0 + \delta$ – неравенство $f'(x) < 0$, то x_0 является точкой строгого локального максимума, а если при $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x_0 < x < x_0 + \delta$ – неравенство $f'(x) > 0$, то x_0 является точкой строгого локального минимума.*





Доказательство. Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, где x принадлежит окрестности точки x_0, указанной в условиях теоремы. По теореме Лагранжа (см. § 4.7) имеем

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где ξ принадлежит интервалу с концами x_0 и x.

1. $\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{<0} = \overbrace{f'(\xi)}^{>0} \underbrace{(x - x_0)}_{<0}$

$f(x) - f(x_0) < 0$
$f(x) < f(x_0)$

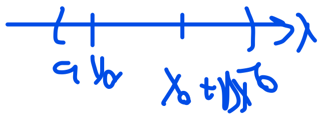
2. $\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{<0} = \underbrace{f'(\xi)}_{<0} \underbrace{(x - x_0)}_{>0}$

Если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$ и $f'(\xi) > 0$, так как $x < \xi < x_0$. Если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$ и $f'(\xi) < 0$, так как в этом случае $x_0 < \xi < x$. Таким образом, всегда $\Delta f < 0$, то есть точка x_0 является точкой строгого локального максимума. Аналогично рассматривается второй случай. $\square$

Отметим, что если функция имеет всюду в некоторой проколотой окрестности данной точки x_0 производную одного и того же знака, а в самой точке x_0 производная либо равна нулю, либо не существует, однако сама функция непрерывна, то есть если производная непрерывной функции «не меняет знак» при переходе через точку x_0, то эта точка заведомо не является точкой локального экстремума рассматриваемой функции (более того, функция в указанной окрестности возрастает или убывает в зависимости от того, положительна или отрицательна производная в точках $x \neq x_0$).

Теорема 4.18 (признак монотонности функции). *Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция f не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках $f'(x) \geq 0$ $\ (f'(x) \leq 0)$.*

Если всюду на (a, b) $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то f возрастает (убывает) на этом промежутке.



Доказательство. Необходимость. Если функция f не убывает (не возрастает) на интервале (a, b), то для любого $x_0 \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$, $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$ имеем $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$), поэтому $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$ (соответственно $\Delta y \leq 0$).

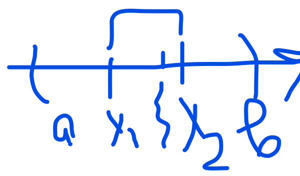
$x_1 < x_2$

$f(x_1) \leq f(x_2)$

Следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ $\left(\text{соответственно } \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0\right)$. Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x_0) \geq 0$ (соответственно $f'(x_0) \leq 0$).

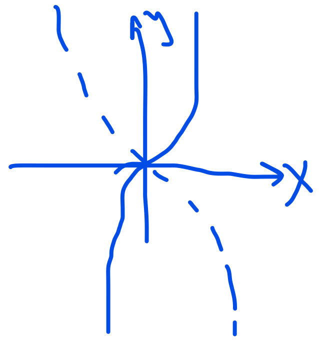
$f(x_1) \geq f(x_2)$

Достаточность. Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда по теореме Лагранжа (см. § 4.7) имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < \xi < x_2$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то при $f'(x) \geq 0$ на (a, b) (откуда следует, что, в частности, $f'(\xi) \geq 0$) будем иметь $f(x_2) \geq f(x_1)$, то есть функция f не убывает. Аналогично при $f'(x) \leq 0$ на (a, b) имеем $f'(\xi) \leq 0$ и, следовательно, $f(x_2) \leq f(x_1)$, то есть функция не возрастает.



Если $f'(x) > 0$ на (a, b), то $f'(\xi) > 0$ и поэтому $f(x_2) > f(x_1)$, то есть функция f возрастает. Если же $f'(x) < 0$ на (a, b), то $f'(\xi) < 0$, следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$, то есть функция f убывает. $\square$

Отметим, что условия $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ не являются необходимыми для возрастания (убывания) дифференцируемой на интервале функции, что показывают примеры функций $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = -x^3$. Первая из них возрастает, а вторая убывает на всей числовой оси, но при $x = 0$ их производные обращаются в нуль.



$y = kx + b$

Пусть функция f определена на интервале (a, b) и пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$, имеет вид

$$y = \frac{f(x_2)(x_1 - x) + f(x_1)(x - x_2)}{x_1 - x_2}. = l(x)$$

$$\begin{cases} f(x_1) = kx_1 + b \\ f(x_2) = kx_2 + b \end{cases}$$

$$b = f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x_1$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $l(x)$; тогда оно кратко запишется в виде $y = l(x)$.

Определение 4.17. Функция f называется выпуклой вверх (вниз) на интервале (a, b), если, каковы бы ни были точки x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, для любой точки x_0 интервала (a, b) выполняется неравенство $l(x_0) \le f(x_0)$ $(l(x_0) \ge f(x_0))$.

Если в определении 4.17 $l(x_0) < f(x_0)$ $(l(x_0) > f(x_0))$, то функция f называется строго выпуклой вверх (вниз).

$$f(x_2) - f(x_1) = k(x_2 - x_1)$$

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x + \frac{f(x_1)(x_1 - x_2) - x_1(f(x_1) - f(x_2))}{x_1 - x_2} =$$

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Теорема 4.19 (достаточное условие строгой выпуклости)**.** *Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, если $f'' < 0$ на (a, b), то функция f строго выпукла вверх, а если $f'' > 0$ на (a, b), то функция f строго выпукла вниз на этом интервале.*

Доказательство. Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x_1 - x) + f(x_1)(x - x_2)}{x_1 - x_2} - f(x)\boxed{\frac{(x_1 - x) + (x - x_2)}{x_1 - x_2}} = 1 =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x_1 - x) - [f(x) - f(x_1)](x - x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Применяя теорему Лагранжа (см. § 4.7), получаем

$$l(x) - f(x) = \frac{\boxed{f'(\eta)(x_2 - x)}(x_1 - x) - \boxed{f'(\xi)(x - x_1)}(x - x_2)}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{[f'(\xi) - f'(\eta)](x - x_1)(x_2 - x)}{x_1 - x_2},$$

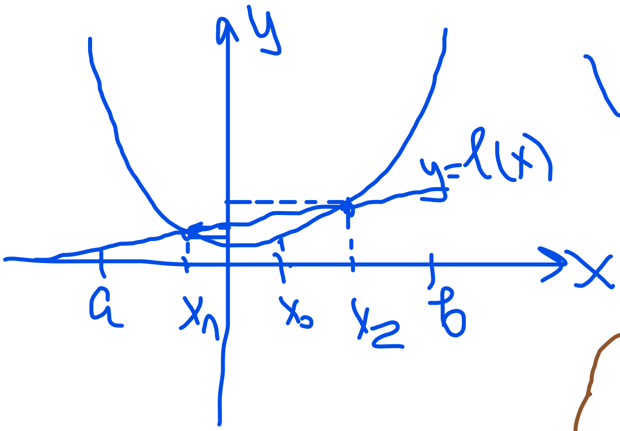
где $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

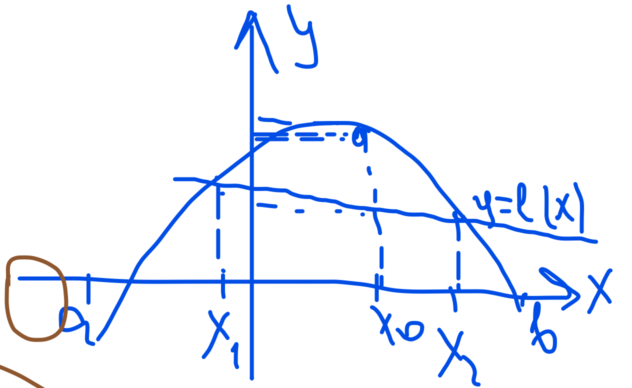
$$= \frac{x f(x_1) - x f(x_2) + \ldots}{x_1 - x_2}$$

$a \quad x_1 \quad \xi \quad x \quad \eta \quad x_2 \quad b$

$$\frac{\cancel{f(x_1)x_1} - f(x_1)x_2 - \cancel{x_1 f(x_1)} + x_1 f(x_2)}{\ldots} = \frac{f(x_1)(x - x_2) + f(x_2)(x_1 - x)}{x_1 - x_2}$$

$$f'(b) - f'(a) = f''(\theta)(b - a) \qquad f'$$



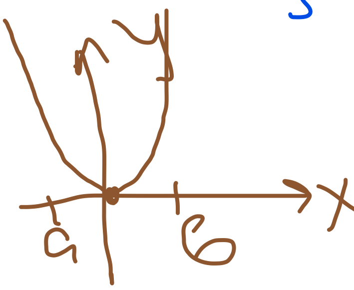


Воспользуемся снова теоремой Лагранжа:

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(x - x_1)(x_2 - x)(\xi - \eta)}{x_1 - x_2}, \quad \xi < \zeta < \eta.$$

Отсюда видно, что если $f'' < 0$ на (a, b), следовательно, в частности, $f''(\zeta) < 0$, то $l(x) < f(x)$, то есть функция f строго выпукла вверх; если же $f'' > 0$ на (a, b), то $l(x) > f(x)$, то есть функция f строго выпукла вниз. □

Условие знакопостоянства второй производной, являясь достаточным для строгой выпуклости (вверх или вниз), не является вместе с тем необходимым. Так, функция $y = x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $y'' = 12x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.



$y' = 4x^3$

$y'' = 12x^2$

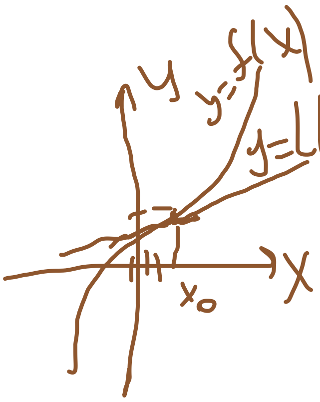
Определение 4.18. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и пусть $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 называется точкой перегиба функции f.

Более подробно и точно это означает, что существует такая δ-окрестность $U(x_0, \delta)$ точки x_0, что на каждом из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ разность $f(x) - L(x)$ сохраняет постоянный знак, противоположный ее знаку на другом интервале.

Геометрический смысл точки перегиба x_0 состоит в том, что график функции f переходит в точке $(x_0, f(x_0))$ с одной стороны наклонной касательной в этой точке на другую.

Если x_0 – точка перегиба функции, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции f.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Теорема 4.20 (необходимое условие, выполняющееся в точке перегиба). *Если в точке перегиба функции существует вторая производная, то она равна нулю.*

Доказательство. Действительно, пусть функция f имеет в точке x_0 вторую производную и, как выше, $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, то есть

$$L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

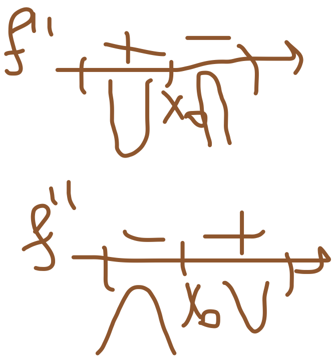
Тогда, в силу формулы Тейлора,

$$f(x) - L(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)}_{f(x)} -$$

$$\cancel{-[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]} = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad x \to x_0.$$

Если $f''(x_0) \neq 0$, то знак разности $f(x) - L(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 совпадает со знаком числа $f''(x_0)$. В этом случае разность $f(x) - L(x)$ не меняет знак при переходе через точку x_0 и, следовательно, эта точка не является точкой перегиба. Итак, если x_0 – точка перегиба функции f, то $f''(x_0) = 0$. $\square$

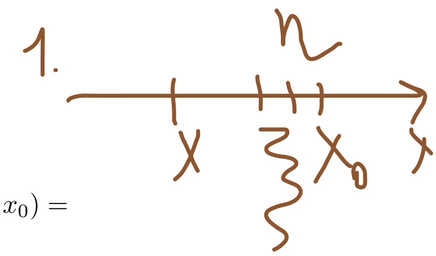
Замечание 4.2. Подобно тому, как все точки экстремума функции принадлежат множеству точек, в которых производная либо равна нулю, либо не существует, так и все точки перегиба функции (дважды дифференцируемой для всех значений аргумента, кроме, быть может, конечного числа его значений) входят во множество точек, в которых вторая производная либо равна нулю, либо не существует.



Теорема 4.21 (достаточное условие наличия точки перегиба)**.** *Если функция f, дифференцируемая в точке x_0, дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta)$ этой точки и вторая производная f'' функции f меняет знак при переходе аргумента через значение x_0 (то есть либо $f''(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, либо $f''(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$), то x_0 является точкой перегиба функции f.*

Доказательство. Запишем, как и выше, уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad L(x)$$



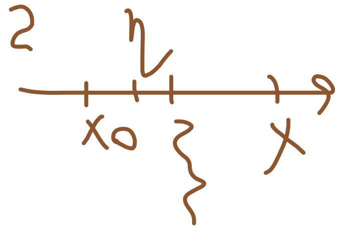
в виде $y = L(x)$. Тогда

$$f(x) - L(x) = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0).$$

Дважды применяя теорему Лагранжа, получаем

$$f(x) - L(x) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0) =$$
$$= f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

где точки x и ξ лежат по одну сторону от точки x_0, поэтому при $x \neq x_0$ имеем $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ и, следовательно,



$$sgn[f(x) - L(x)] = sgn f''(\eta).$$

Точка η лежит между ξ и x_0, то есть по ту же сторону от x_0, что и точка x. Отсюда имеем, что если f'' меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то разность $f(x) - L(x)$ меняет знак и, следовательно, x_0 является точкой перегиба. $\square$