$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx, \quad m=1,2,\dots$$

$p^2-4q<0$ | $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

3. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$

$x^2+px+q=$

Заметим, что

$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2$

$$x^2+px+q=\cancel{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\left(x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$$

70

Положим $t=x+\dfrac{p}{2}$, $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$. В данном случае $dx=dt$ и

$dt=d\left(x+\frac{p}{2}\right)$

$dt=dx$

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=M\boxed{\int\frac{t}{t^2+a^2}dt}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C.$$

$Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)$

$\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$

$t^2+a^2=u$

$d(t^2+a^2)=du$

$2t\,dt=du$

$t\,dt=\frac{1}{2}du$

$=\frac{1}{2}\ln|u|+C=$

$=\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C=$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+px+q)+C$

4. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx,\ m\neq 1.$

Как и выше, положим

$dx=dt$

$$t=x+\frac{p}{2},\qquad a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2$

Тогда

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=M\int\frac{t}{(t^2+a^2)^m}dt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\boxed{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}.$$

$\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^m}=\frac{1}{2}\frac{u^{-m+1}}{-m+1}+C$

$u=t^2+a^2$

Вычислим каждый из полученных интегралов.

Имеем

$\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+C$

$$\int\frac{t}{(t^2+a^2)^m}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}=\frac{1}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+C.$$

Далее, обозначим $\boxed{I_m=\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}.$

Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\int\frac{dt}{a^2\left(\left(\frac{t}{a}\right)^2+1\right)}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a\,dv}{v^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}v+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$$

$\frac{t}{a}=v\Rightarrow d\left(\frac{t}{a}\right)=dv\Rightarrow\frac{1}{a}dt=dv\Rightarrow dt=a\,dv$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad I_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m},\ m \neq 1$$

Пусть

$$u = \frac{1}{(t^2+a^2)^m} = (t^2+a^2)^{-m}, \qquad dv = dt.$$

$$\left((t^2+a^2)^{-m}\right)' = -m(t^2+a^2)^{-m-1}\,2t$$

Тогда

$$du = \frac{-2mt\,dt}{(t^2+a^2)^{m+1}}, \qquad v = t.$$

$$\int dv = \int dt$$

Следовательно,

$$\boxed{I_m} = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{m+1}}dt =$$

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{m+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}_{I_m} - 2ma^2\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m+1}}}_{I_{m+1}}.$$

Таким образом,

$$I_m = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1},$$

$$I_{m+1} = \frac{t}{2ma^2(t^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2}I_m.$$

$$I_2 = \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

Отметим, что

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Пример 5.8. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3x+2)}.$$

Раскладывая знаменатель заданной правильной рациональной дроби на множители, получим

$$(x^2+1)(x^2-3x+2) = (x^2+1)(x-1)(x-2).$$

Представим теперь дробь $\dfrac{1}{(x^2+1)(x-1)(x-2)}$ в виде суммы элементарных рациональных дробей (с неопределенными коэффициентами), т.е.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Найдем A, B, C и D.
Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получаем

$$1 = A(x-2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x-2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} A+B+C &= 0, \\ -2A-B-3C+D &= 0, \\ A+B+2C-3D &= 0, \\ 2D-2A-B &= 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{3}{10}, \quad D = \frac{1}{10}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3x+2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{10}\int \frac{3x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{5}\ln|x-2| + \frac{3}{10}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{1}{10}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{5}\ln|x-2| + \frac{3}{20}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{10}\operatorname{arctg} x =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{5}\ln|x-2| + \frac{3}{20}\ln(x^2+1) + \frac{1}{10}\operatorname{arctg} x + C.$$

§ 5.5 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Функции вида

$$R(u_1, ..., u_n) = \frac{P(u_1, ..., u_n)}{Q(u_1, ..., u_n)}, \tag{5.15}$$

где P и Q – многочлены от переменных $u_1, ..., u_n$, то есть функции вида

$$\sum_{k_1+...+k_n \le k} a_{k_1,...,k_n} u_1^{k_1} \cdots u_n^{k_n},$$

$P(u_1, u_2) = u_1^2 + 3u_1u_2^3 + 2u_2^2$

называются рациональными функциями от $u_1, ..., u_n$.

Если в формуле (5.15) переменные $u_1, ..., u_n$, в свою очередь, являются функциями переменной $x: \ u_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$, то функция $R(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ называется рациональной функцией от функций $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$.

Например, функция

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}$$

является рациональной функцией от x и радикалов $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2-1}$ и $\sqrt{x^2+1}$:

$$f(x) = R(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2-1}, \sqrt{x^2+1});$$

здесь

$$R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 + u_3^2}{u_2 - u_4},$$

$$u_1 = x, \ \ u_2 = \sqrt{x}, \ \ u_3 = \sqrt[3]{x^2-1}, \ \ u_4 = \sqrt{x^2+1}.$$

5.5.1. Интегрирование функций вида

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, $r_1, r_2, ..., r_s$ – рациональные числа, a, b, c и d – действительные числа, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$
Пусть m – общий знаменатель чисел $r_1, r_2, ..., r_s$:

$$r_i = \frac{p_i}{m}, \quad p_i - \text{целое}, \quad i = 1, 2, ..., s.$$

Положим

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad t^{m}(cx+d) = ax+B$$

откуда

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t); \tag{5.16}$$

$x = \rho(t)$

$\rho(t)$ является рациональной функцией, поэтому $\rho'(t)$ также является рациональной функцией; далее,

рац. ф-ия

$$dx = \rho'(t)dt, \tag{5.17}$$

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, ..., s. \tag{5.18}$$

$r_i = \frac{p_i}{m}$

Подставляя (5.16) – (5.18) в подынтегральное выражение рассматриваемого интеграла, получим

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, t^{p_2}, ..., t^{p_s}\right) \rho'(t)dt = \int R^*(t)dt,$$

$\frac{a_n t^n + ... + a_0}{b_k t^k + ... + b_k} = R^*(t)$

где $R^*(t) = R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, t^{p_2}, ..., t^{p_s}\right) \rho'(t)$, очевидно, является рациональной функцией переменного t. Таким образом, вычисление интеграла

1) $c = 0,\ d = 1$

$\frac{ax+b}{cx+d} = ax+b$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx$$

сводится к интегрированию рациональных дробей.

Отметим, что к рассмотренному типу интегралов относятся интегралы вида

$t^m = ax+b$

$$\int R\left(x, (ax+b)^{r_1}, (ax+b)^{r_2}, ..., (ax+b)^{r_s}\right) dx, \quad a \neq 0,$$

2) $c = 0,\ d = 1,\ b = 0,\ a = 1$

в частности,

$$\int R\left(x, x^{r_1}, x^{r_2}, ..., x^{r_s}\right) dx.$$

Пример 5.9. Найти интеграл

$m = 6 \quad r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = \frac{5}{6}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x^5}}.$$

$\frac{ax+b}{cx+d} = x$

$x = t^6$

$x = t^m$

Общий знаменатель дробей $1/2$ и $5/6$ есть 6, поэтому полагаем $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5 dt$.

$dx = 6t^5 dt$

Далее,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x^5}} = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^5} dt = 6 \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt =$$

$X = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}$

$$= 6\int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt = 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$
$$= 6t - 6\operatorname{arctg} t + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

5.5.2. Интегралы от дифференциальных биномов

$\int x^m (a+bx^n)^p dx =$
$= \frac{1}{n}\int t^{\frac{m}{n}} (a+bt)^p t^{\frac{1}{n}-1} dt$

Выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p dx \qquad (a \neq 0,\, b \neq 0)$$

называется дифференциальным биномом. Будем рассматривать случаи, когда m, n, p – рациональные, а a и b – действительные числа.

Положим

$$x = t^{1/n}, \tag{5.19}$$

тогда $dx = \frac{1}{n}t^{1/n-1}dt$ и, следовательно,

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1}dt.$$

Таким образом, интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \tag{5.20}$$

сводится подстановкой (5.19) к интегралу типа

$$\int (a+bt)^p t^q dt, \tag{5.21}$$

где p и q рациональны. В рассматриваемом случае

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

$dt = s z^{s-1} dz$
$t = z^s$
$\int (a+bt)^p t^q dt =$
$= \int (a+bz^s)^p z^{?} \cdot s z^{s-1} dz$

Первый случай: p – целое число. Пусть $q = r/s$, где r и s – целые числа. В этом случае подстановка $z = t^{1/s}$ сводит интеграл (5.21) к интегралу от рациональной дроби.

Второй случай: q – целое число. Пусть теперь $p = r/s$, где r и s – целые числа. Интеграл (5.21) приводится в этом случае подстановкой $z = (a+bt)^{1/s}$ к интегралу от рациональной дроби.

$q = \frac{m+1}{n} - 1$

Третий случай: $p + q$ – целое. Пусть $p = r/s$, где r и s – целые числа. Запишем для наглядности интеграл (5.21) в виде

$\boxed{\int \frac{(a+bt)^p t^q t^p dt}{t^p}}$

$$\int (a+bt)^p t^q dt \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Подстановка $z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/s}$ приводит его к интегралу от рациональной дроби.

Применительно к интегралу (5.20) этот результат выглядит следующим образом: когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$ является целым, интеграл (5.20) может быть сведен к интегралу от рациональной дроби. При этом в том случае, когда p – целое число, это сведение осуществляет подстановка $z = x^{n/s}$, где число s является знаменателем дроби $\frac{m+1}{n}$, то есть $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$; в том случае, когда $\frac{m+1}{n}$ – целое, – подстановка

$$z = (a + bx^n)^{1/s},$$

где число s является знаменателем дроби p, то есть $p = r/s$, а в том случае, когда $\frac{m+1}{n} + p$ – целое, – подстановка

$$z = (ax^{-n} + b)^{1/s},$$

где число s также является знаменателем дроби p.

Пример 5.10. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

В данном случае $m = 0$, $n = 3$, $p = -1/3$, то есть $\frac{m+1}{n} + p$ – целое, поэтому полагаем $x^{-3} + 1 = t^3$.

Далее,

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{t^3 - 1}}, \qquad dx = -\frac{t^2 dt}{(t^3-1)^{4/3}}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = -\int \frac{t\,dt}{t^3 - 1} = -\int \frac{t\,dt}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{3}\int \frac{(t-1)\,dt}{t^2+t+1} = -\frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\int \frac{(2t+1)-3}{t^2+t+1}dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\int \frac{(2t+1)}{t^2+t+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \quad \text{где } t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}.$$

5.5.3. Подстановки Эйлера

Рассмотрим интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, a, b и c – действительные числа, $a \neq 0$.

Этот интеграл приводится к интегралу от рациональной дроби в следующих случаях.

Первый случай: $a > 0$. Выполним замену x на t следующим образом:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$$

(знаки можно брать в любой комбинации). Возведем обе части полученного равенства в квадрат, получим

$$\cancel{ax^2} + bx + c = \cancel{ax^2} \pm 2tx\sqrt{a} + t^2.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

$R_1(t)$ – рациональная функция от t, значит, $R_1'(t)$ также рациональная функция.

Далее, $dx = R_1'(t)dt$, $\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm R_1(t)\sqrt{a} \pm t = R_2(t)$, где, очевидно, $R_2(t)$ – рациональная функция. Окончательно,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)dt = \int R^*(t)dt,$$

где $R^*(t) = R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)$ – рациональная дробь.

Второй случай: корни трехчлена ax^2+bx+c действительные. Пусть x_1 и x_2 действительные и являются корнями трехчлена ax^2+bx+c. Если $x_1=x_2$, то при $a>0$ имеем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)^2}=\sqrt{a}\cdot|x-x_1|,$$

то есть под интегралом стоит рациональная функция от x, вообще говоря, разная для каждого из промежутков $(-\infty,x_1)$ и $(x_1,+\infty)$.

Если $x_1\neq x_2$, то положим

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\pm t(x-x_1)$$

(знаки берутся в любых комбинациях). Возводя в квадрат, получим

$$a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2,\quad a(x-x_2)=t^2(x-x_1),$$

откуда

$$x=\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}=R_3(t),$$

$R_3(t)$ – рациональная функция от t, значит, $R_3'(t)$ также рациональная функция. Далее, $dx=R_3'(t)dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\,(R_3(t)-x_1)=R_4(t)$, где, очевидно, $R_4(t)$ – рациональная функция. Следовательно,

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R(R_3(t),R_4(t))R_3'(t)dt=\int\tilde{R}(t)dt,$$

где $\tilde{R}(t)=R(R_3(t),R_4(t))R_3'(t)$ – рациональная дробь.

Третий случай: $c>0$. В этом случае можно применить подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt$$

(комбинация знаков произвольна). Возводя в квадрат, получим равенство

$$ax^2+bx+\cancel{c}=\cancel{c}+x^2t^2\pm2\sqrt{c}xt,$$

$ax+b=xt^2\pm2\sqrt{c}\,t$

рац.

откуда

$$x=\frac{b\mp2t\sqrt{c}}{t^2-a}=R_5(t),\ dx=R_5'(t)dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm R_5(t)t=R_6(t),$$

где $R_5(t), R_5'(t), R_6(t)$ – суть рациональные функции t. Поэтому

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(R_5(t), R_6(t))R_5'(t)dt = \int \hat{R}(t)dt,$$

где $\hat{R}(t) = R(R_5(t), R_6(t))R_5'(t)$ – рациональная дробь.

Пример 5.11. Найти интеграл

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx.$$

В данном случае $a = 1 > 0$, поэтому полагаем $\sqrt{x^2+x+1} = -x+t$; тогда

$$x^2+x+1 = x^2-2xt+t^2,$$

откуда

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t}.$$

Следовательно,

$$dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt.$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx = 2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt = 2\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{dt}{(2t+1)^2} -$$

$$-3\int \frac{dt}{2t+1} = 2\ln|t| + \frac{3}{2(2t+1)} - \frac{3}{2}\ln|2t+1| + C =$$

$$= \frac{3}{2(2t+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3} + C, \quad \text{где } t = x+\sqrt{x^2+x+1}.$$

Отметим, что подстановки Эйлера могут приводить к громоздким выражениям, поэтому следует использовать и другие возможные подходы.

1. Интегралы

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad \text{и} \quad \int (Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

вычисляем следующим образом: подкоренное выражение представляем в виде $ax^2+bx+c=a(x+p)^2+q$ и полагаем $x+p=t$.

Пример 5.12. Найти интеграл

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$$

$d(x+2)=dt$

Имеем $x^2+4x+3=(x+2)^2-1$. Полагаем $x+2=t$. Тогда $dx=dt$ и

$2\cdot x\cdot 2$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right| + C.$$

$x^2+4x+3=(x^2+2\cdot x\cdot 2+$
$+4)-4+3=$
$=(x+2)^2-1$

2. Интегралы вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{5.22}$$

$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, удобно находить методом неопределенных коэффициентов, используя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Здесь $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$, λ – некоторое число. Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ определяются из равенства

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left(Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Пример 5.13. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx.$$

Имеем

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Для нахождения коэффициентов A, B, C и λ продифференцируем обе части этого равенства. Получим

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \Big((Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2}\Big)' + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Далее,

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2}+$$

$$+\frac{(Ax^2+Bx+C)(1-x)\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

или

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Следовательно, $1\cdot x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = (\ldots)x^3 + (\ldots)x^2 + (\ldots)x + (\ldots)$

$$x^3 = (2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+\lambda.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -3A &= 1, \\ 5A-2B &= 0, \\ 2A+3B-C &= 0, \\ C+\lambda+B &= 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{5}{6}, \quad C = -\frac{19}{6}, \quad \lambda = 4.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+$$

$$+4\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+$$

$$+4\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+$$

$$+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

3. Интеграл

$$\int\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

подстановкой $t=\frac{1}{x-\alpha}$ приводится к интегралу (5.22).

§ 5.6 Интегрирование некоторых тригонометрических функций

I. Интеграл вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \ -\pi<x<\pi,$$

сводится к интегралу от рациональной дроби.
Действительно, в этом случае

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

поэтому

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Таким образом получен интеграл от рациональной функции.
Пример 5.14. Найти интеграл

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}.$$