Окончательно получаем

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) + C = e^{3x} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) + C.$$

Пример 5.7. Найти интеграл

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

Пусть $u = e^x$, $dv = \cos x dx$; тогда $du = e^x dx$, $v = \sin x$. Следовательно,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Для вычисления полученного интеграла еще раз воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положив $u_1 = e^x$, $dv_1 = \sin x dx$, найдем $du_1 = e^x dx$, $v_1 = -\cos x$. Тогда

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

и

$$\int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x dx,$$

т.е.

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

Таким образом,

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$$

§ 5.4 Интегрирование рациональных дробей

$y = \frac{x^2+3x+2}{2x^3+4}$

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Определение 5.3. Рациональная дробь

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, и неправильной, если степень многочлена $P(x)$ не меньше степени многочлена $Q(x)$.

$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Если рациональная дробь является неправильной, то, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, получим

$$R(x) = M(x) + \boxed{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}},$$

$y = \frac{x^2+2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)+1}{x^2+1} = 1 + \boxed{\frac{1}{x^2+1}}$

$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0$

где $M(x)$, $P_1(x)$ и $\cancel{Q_1(x)}$ – многочлены, а дробь $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ является правильной.

Теорема 5.4. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь,* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *– многочлены с действительными коэффициентами. Если число* a *является действительным корнем кратности* $k \geq 1$ *многочлена* $Q(x)$, *т.е.*

$$Q(x) = (x-a)^k Q_1(x) \;\; \text{и} \;\; Q_1(a) \neq 0,$$

то существуют $A \in \mathbb{R}$ *и многочлен* $P_1(x)$ *с действительными коэффициентами такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \boxed{\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}},$$

причем дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. Каково бы ни было действительное число A, вычитая из дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}$$

выражение $\frac{A}{(x-a)^k}$ и затем прибавляя его, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \left[\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^k}\right] =$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \boxed{\frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}}.$$

По условию, степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$. Очевидно, что и степень многочлена $Q_1(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$ (так как $k \geq 1$), поэтому при любом выборе числа A рациональная дробь

$$\frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{Q(x)}$$

является правильной.

Выберем теперь число A таким образом, чтобы число a было корнем многочлена $P(x) - AQ_1(x)$ и, следовательно, чтобы этот многочлен делился на $x - a$. Иначе говоря, определим A из условия $P(a) - AQ_1(a) = 0$; поскольку, по условию, $Q_1(a) \neq 0$, отсюда имеем $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$.

При таком и только таком выборе числа A дробь

$$\frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} \quad = (x-a)P_1(x), \quad k-1$$

сократится на $x - a$. В результате в этом и только в этом случае после сокращения указанной дроби получится дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}.$$

Эта дробь получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на множитель $x - a$, где a действительно, поэтому и сама она является также правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами.

В результате получается искомое разложение, в котором коэффициент A однозначно определен. □

$z = a + bi$

$a, b \in \mathbb{R}; \ i = \sqrt{-1}$

$x^2 + x + 1 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1+\sqrt{-1}\sqrt{3}}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\overline{x_1} = x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Теорема 5.5. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь,* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *– многочлены с действительными коэффициентами. Если комплексное число* $z_1 = a + bi$ *(*a *и* b *действительные,* $b \neq 0$*) является корнем кратности* $m \geq 1$ *многочлена* $Q(x)$*, т.е.*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x),$$

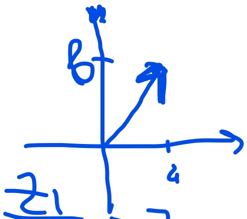
где $Q_1(z_1) \neq 0$*, а* $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \overline{z}_1)$*, то существуют действительные числа* M, N *и многочлен* $P_1(x)$ *с действительными коэффициентами такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1}Q_1(x)},$$

причем дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. Для любых действительных M и N

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} =$$



$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_3}$

$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_3}$

$z = a + bi$

$\overline{z} = a - bi$

$x^2 + x + 1 = (x - x_1)(x - \overline{x}_1)$

$z_1 = a_1 + b_1 i$

$z_2 = a_2 + b_2 i$

$a_1 = a_2, \ b_1 = b_2.$

$(x^2+px+q)P_1(x)$

$$= \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \left[\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)} - \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\right] =$$

$$= \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}, \tag{5.12}$$

причем второе слагаемое правой части равенства (5.12) является, как нетрудно видеть, правильной дробью.

Постараемся теперь подобрать M и N так, чтобы числитель этой дроби делился на $x^2+px+q = (x-z_1)(x-\overline{z}_1)$. Для этого необходимо и достаточно выбрать M и N так, чтобы z_1 было корнем многочлена $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$; тогда, как известно, число $\overline{z}_1$, сопряженное с z_1, также будет являться корнем указанного многочлена. Отсюда и будет следовать, что этот многочлен делится на x^2+px+q.

Итак, пусть

$$P(z_1) - (Mz_1+N)Q_1(z_1) = 0.$$

Если это имеет место, то $Mz_1 + N = \frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$, где, по условию, $Q_1(z_1) \neq 0$.

Пусть $z_1 = a+bi$, $P(z_1)/Q_1(z_1) = A+Bi$; тогда $Mz_1+N = A+Bi$, или

$$M(a+bi)+N = A+Bi.$$

$Ma+N+MBi=A+Bi$

Отсюда, приравнивая действительные и мнимые части, получим уравнения $Ma+N=A$ и $Mb=B$ и, следовательно, коэффициенты M и N однозначно определяются по формулам

$$M = \frac{B}{b}, \quad N = A - \frac{a}{b}B.$$

При этих значениях M и N многочлен $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ делится на многочлен x^2+px+q. Сокращая второе слагаемое правой части равенства (5.12) на x^2+px+q, получим дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)}.$$

Эта дробь получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на многочлен с действительными коэффициентами, поэтому и сама она также является правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. □

Определение 5.4. Дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad k = 1, 2, ...,$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-1)(x-2)^2(x^2+x+1)(x^2+x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1} +$$

$$+ \frac{M_2x+N_2}{x^2+x+2} + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+x+2)^2}$$

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, \ m = 1, 2, ..., \text{ где } p^2 - 4q < 0,$$

называются элементарными рациональными дробями.

Теорема 5.6. *Пусть $P(x)/Q(x)$ – правильная рациональная дробь, $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами. Если*

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}...(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}, \quad (5.13)$$

a_i – попарно различные действительные корни многочлена $Q(x)$ кратности $k_i, i = \overline{1, r}$,

$$x^2 + p_jx + q_j = (x - z_j)(x - \overline{z}_j),$$

z_j и $\overline{z}_j$ – попарно различные при разных j существенно комплексные корни многочлена $Q(x)$ кратности $m_j, j = \overline{1, s}$, то существуют действительные числа $A_i^{(k)}, i = \overline{1, r}, k = \overline{1, k_i}, M_j^{(m)}$ и $N_j^{(m)}, j = \overline{1, s}$, $m = \overline{1, m_j}$, такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + ... + \frac{A_1^{(k_1)}}{x-a_1} + ...+$$

$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{k_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{k_r-1}} + ... + \frac{A_r^{(k_r)}}{x-a_r} + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+$$

$$+\frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}} + ... + \frac{M_1^{(m_1)}x + N_1^{(m_1)}}{x^2+p_1x+q_1} + ...+$$

$$+\frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}} + ... + \frac{M_s^{(m_s)}x + N_s^{(m_s)}}{x^2+p_sx+q_s}. \quad (5.14)$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что коэффициент старшего члена многочлена $Q(x)$ равен единице, так как в случае, когда он равен кокому-то другому числу (отличному от нуля), можно разделить числитель и знаменатель дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на это число, после чего у получившегося в знаменателе многочлена коэффициент старшего члена окажется равным единице.

Из разложения (5.13) имеем

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}Q_1(x).$$

Здесь

$$Q_1(x) = (x-a_2)^{k_2}...(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$$

и, следовательно, $Q_1(a_1) \neq 0$, поэтому, согласно теореме 5.4,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}Q_1(x)}.$$

Применяя в случае $k_1 > 1$ подобным образом эту же теорему к рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}Q_1(x)}$, получаем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a_1)^{k_1-2}Q_1(x)}.$$

Продолжая этот процесс далее, пока показатель степени у сомножителя $x - a_1$ в знаменателе последней дроби в правой части равенства не станет равным нулю, а затем, поступая аналогичным образом относительно множителей $x - a_i, i = \overline{2, r}$, будем иметь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + ... + \frac{A_1^{(k_1)}}{x-a_1} + ... +$$

$$+ \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{k_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{k_r-1}} + ... + \frac{A_r^{(k_r)}}{x-a_r} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

где $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ – снова правильная рациональная дробь, причем $P^*(x)$ и $Q^*(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами и многочлен $Q^*(x)$ не имеет действительных корней.

Применяя последовательно теорему 5.5 к дроби $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ и к получающимся при этом выражениям, в результате получим формулу (5.14). $\square$

$k \neq 1$

$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A\int (x-a)^{-k} dx =$

$x-a=t$

$= A\int t^{-k} dt =$

$= A\frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C$

$\int x^n dx =$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Интегрирование элементарных рациональных дробей

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{1}{x-a}d(x-a) = A\ln|x-a| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C, \;\; k \neq 1.$

$\frac{A}{(x-a)^k}$ $\quad k=1,2,...$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{1\cdot x-a} = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| + C =$

$x-a=t \Rightarrow d(x-a)=dt$

$= A\ln|x-a| + C$

$\int \frac{dx}{k_1x-a} = \int \frac{dx}{k_1(x-\frac{a}{k_1})} = \frac{1}{k_1}\int \frac{dx}{x-b_1} = \frac{1}{k_1}\ln|x-b_1| + C$

$dx = dt$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx, \quad m=1,2,\ldots$$

$p^2-4q<0$ | $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$x^2+px+q=$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$

Заметим, что

$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2$

$$x^2+px+q=\cancel{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\left(x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\boxed{\frac{4q-p^2}{4}}$$

>0

Положим $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$. В данном случае $dx=dt$ и

$dt=d\left(x+\frac{p}{2}\right)$

$dt=dx$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=M\boxed{\int \frac{t}{t^2+a^2}dt}+$$
$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=$$
$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$
$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C.$$

$Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)$

$\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$

$t^2+a^2=u$

$d(t^2+a^2)=du$

$2t\,dt=du$

$t\,dt=\frac{1}{2}du$

$=\frac{1}{2}\ln|u|+C=$

$=\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C=$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+px+q)+C$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx, \; m\neq 1.$

Как и выше, положим

$dx=dt$

$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2$

$$t=x+\frac{p}{2}, \qquad a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Тогда

$\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^m}=\frac{1}{2}\frac{u^{-m+1}}{-m+1}+C$

$u=t^2+a^2$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^m}dt=$$
$$=M\int \frac{t}{(t^2+a^2)^m}dt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\boxed{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}.$$

Вычислим каждый из полученных интегралов.

Имеем

$\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+C$

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^m}dt=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}=\frac{1}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+C.$$

Далее, обозначим $I_m=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$

Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\int\frac{dt}{a^2\left(\left(\frac{t}{a}\right)^2+1\right)}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a\,dv}{v^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}v+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$$

$\frac{t}{a}=v\Rightarrow d\left(\frac{t}{a}\right)=dv\Rightarrow\frac{1}{a}dt=dv\Rightarrow dt=a\,dv$