Аналитическая геометрия. Прямая и плоскость

М. Л. Гольдман Е. О. Сивкова

Москва
2015

ББК 22.151.5
Г 63
УДК 51

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор А. В. Фурсиков
доктор физ.-мат. наук, профессор Э. М. Галеев

Научный редактор: доктор физ.-мат. наук, профессор В. М. Тихомиров

Г 63 Гольдман М. Л., Сивкова Е. О. Аналитическая геометрия. Прямая и плоскость. Учебное пособие/ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники" (МИРЭА). — М., 2015.

Пособие охватывает раздел "Прямая и плоскость" общего курса линейной алгебры и аналитической геометрии. В нем рассмотрены основные виды уравнения прямой на плоскости, уравнения прямой и плоскости в пространстве, а также различные случаи взаимного расположения прямых на плоскости, прямых и плоскостей в пространстве. В пособие включено большое количество упражнений, контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения с ответами. Пособие предназначено для студентов технического университета с усиленной программой по математике.

Табл. нет. Ил. 54. Библиогр.: 6 назв.

Регистрируется по решению редакционно-издательского совета университета.

Уравнение прямой на плоскости

1.1. Понятие об уравнении множества точек на плоскости

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Говорят, что соотношение (или уравнение)

$$F(x,\, y) = 0 \tag{$*$}$$

задает множество точек L на плоскости, если для любой точки $M \in L$ ее координаты удовлетворяют равенству $(*)$ и наоборот, для всех пар $(x,\ y)$, удовлетворяющих $(*)$ точка $M(x,\, y)$ принадлежит множеству L. При этом говорят, что уравнение $(*)$ является уравнением множества L.

В связи с этим возникает два типа задач:
1) Найти уравнение множества, изначально заданного как геометрическое место точек, обладающих определенными свойствами.
2) По данному уравнению изобразить множество точек и описать его геометрические свойства.

Упражнение 1.1. *Найти уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0,\, y_0)$ радиуса R.*

Окружность — геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до заданной точки (центра) равно R. Точка $M(x,\, y)$ лежит на окружности тогда и только тогда, когда

$$|\,MM_0\,| = R \ \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R \ \Leftrightarrow$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2.$$

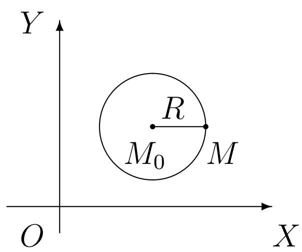

Рис. 1.1

Таким образом, уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0,\, y_0)$ радиуса R имеет вид

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \tag{1.1}$$

Упражнение 1.2.
Какое множество точек задает уравнение $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$?

Выделим в левой части уравнения полные квадраты:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4,$$
$$(x^2 + 2\cdot 1\cdot x + 1) - 1 + (y^2 - 2\cdot 2\cdot y + 4) - 4 = 4,$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Это уравнение окружности радиуса $R = 3$ с центром в точке $M_0(-1,\, 2)$.

1.2. Общее уравнение прямой на плоскости

Пусть на плоскости введены декартовы координаты $(x,\, y)$.

Упражнение 1.3. *Найти уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0,\, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (A,\, B)$ $\left(\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}\right)$.*

Рассмотрим произвольную точку $M(x,\, y) \in L$ (см. рис. 1.2.).

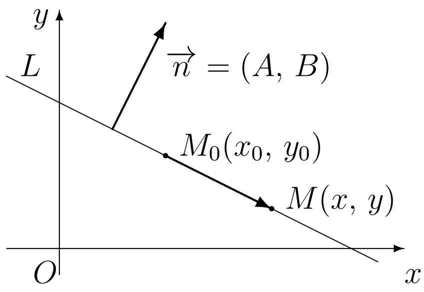

Рис. 1.2

Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\, y - y_0)$. Далее,

$$M(x,\, y) \in L \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n} \;\Leftrightarrow\; \left(\overrightarrow{M_0M},\; \overrightarrow{n}\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (A,\, B)$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{1.2}$$

Вектор $\overrightarrow{n} = (A,\, B)$ называется *вектором нормали к прямой.*

Теорема 1.1. *Всякая прямая на плоскости может быть задана уравнением*

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{1.3}$$

и наоборот, любое уравнение (1.3) задает на плоскости некоторую прямую.

Доказательство. 1) Покажем, что любая прямая L описывается уравнением вида (1.3). Зафиксируем на L некоторую точку $M_0(x_0,\, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{n} = (A,\, B)$, перпендикулярный L. Тогда уравнение прямой L имеет вид (1.2):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$Ax + By + \underbrace{(-Ax_0 - By_0)}_{= C} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$Ax + By + C = 0.$$

2) Обратно. Пусть задано уравнение (1.3)

$$Ax + By + C = 0,$$

в котором коэффициенты A и B не равны нулю одновременно. Пусть, для определенности, $B \neq 0$. Тогда для того, чтобы получить решение $(x_0,\, y_0)$ уравнения (1.3) можно значение x_0 выбрать произвольно, а y_0 определить из уравнения (1.3):

$$y_0 = -\frac{A}{B}\,x_0 - \frac{C}{B}\,.$$

В точке $M_0(x_0,\, y_0)$ справедливо равенство

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{$**$}$$

Вычитая из уравнения (1.3) равенство $(**)$ получаем эквивалентное (1.3) уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

которое задает прямую, проходящую через точку $M_0(x_0,\, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (A,\ B)$. $\square$

Уравнение (1.3) называют *общим уравнением прямой на плоскости.*

Замечание. В процессе доказательства мы установили, что для прямой, заданной уравнением (1.3), вектор $\overrightarrow{n} = (A,\ B)$ является вектором нормали.

1.3. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой

Пусть на плоскости заданы прямая L и точка M. *Проекцией точки M на прямую L* называется точка M', в которой пересекаются L и прямая, проходящая через точку M перпендикулярно L. *Расстоянием от точки M до прямой L* называется длина отрезка MM'.

Упражнение 1.4. *Пусть заданы $\overrightarrow{n}^{\,0} = (\cos\varphi,\, \sin\varphi)$ — единичный вектор нормали, направленный из начала координат к прямой L, и $\rho > 0$ — расстояние от точки O начала координат до L. Написать уравнение прямой L.*

Пусть $M(x,\, y)$ — произвольная точка L (см. рис. 1.3)

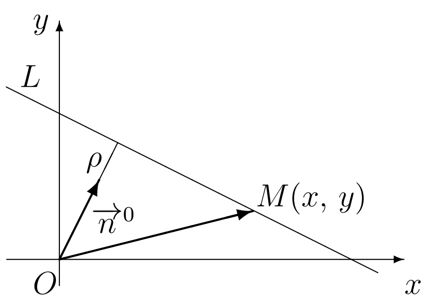

Рис. 1.3

Тогда $pr_{\overrightarrow{n}^{0}}\overrightarrow{OM} = \rho$. Поскольку

$$\left(\overrightarrow{n}^{\,0},\, \overrightarrow{OM}\right) = \left|\overrightarrow{n}^{\,0}\right| \cdot pr_{\overrightarrow{n}^{0}}\overrightarrow{OM} = pr_{\overrightarrow{n}^{0}}\overrightarrow{OM},$$

то

$$\left(\overrightarrow{n}^{\,0}, \overrightarrow{OM}\right) = \rho \quad \Leftrightarrow \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi = \rho \quad \Leftrightarrow$$
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho = 0. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.3.) называют *нормальным уравнением прямой*. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \quad C \neq 0$$

может быть приведено к виду (1.3.) с помощью умножения на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{-\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2+B^2}}$:

$$\underbrace{\frac{-\operatorname{sign} C \cdot A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\varphi} x + \underbrace{\frac{-\operatorname{sign} C \cdot B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin\varphi} y - \underbrace{\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\rho} = 0.$$

Упражнение 1.5. *Пусть заданы прямая L уравнением*

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho = 0$$

и точка $M^*(x^*,\, y^*) \notin L$. Найти расстояние от точки M^* до прямой L.

Обозначим расстояние от точки $M^*(x^*,\, y^*)$ до прямой L через $d(M^*,\, L)$, и пусть $M(x,\, y)$ — произвольная точка L (см. рис. 1.4).

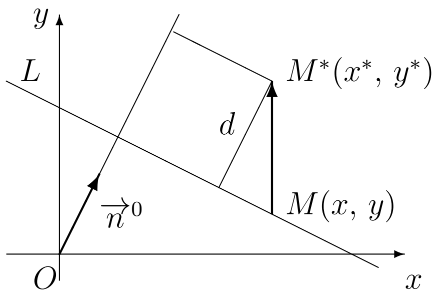

Рис. 1.4

Тогда $\overrightarrow{MM^*} = (x^* - x,\, y^* - y)$. Очевидно, что

$$d(M^*,\, L) = \left| pr_{\overrightarrow{n}^0} \overrightarrow{MM^*} \right|.$$

Далее,

$$pr_{\overrightarrow{n}^0} \overrightarrow{MM^*} = \left(\overrightarrow{MM^*},\ \overrightarrow{n}^{\,0}\right) =$$
$$(x^* - x)\cos\varphi + (y^* - y)\sin\varphi =$$
$$x^*\cos\varphi + y^*\sin\varphi - \underbrace{(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}_{=\rho}.$$

Значит,

$$d(M^*,\, L) = |x^*\cos\varphi + y^*\sin\varphi - \rho|\,. \tag{1.5}$$

Следствие. *Если прямая L задана общим уравнением*

$$Ax + By + C = 0,$$

то расстояние от точки $M^*(x^*,\, y^*)$ до L вычисляется по формуле

$$d(M^*,\, L) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,. \tag{1.6}$$

Упражнение 1.6. *Найти условия, при которых точки M^* и O лежат по одну сторону от прямой L, и по разные стороны от этой прямой.*

1.4. Частные случаи уравнения прямой

Отметим еще несколько полезных частных случаев уравнения прямой.

Упражнение 1.7. *Найти уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0,\, y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{p} = (l,\, m)$ $\left(\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}\right)$.*

Рассмотрим произвольную точку $M(x,\, y) \in L$ (см. рис. 1.5).

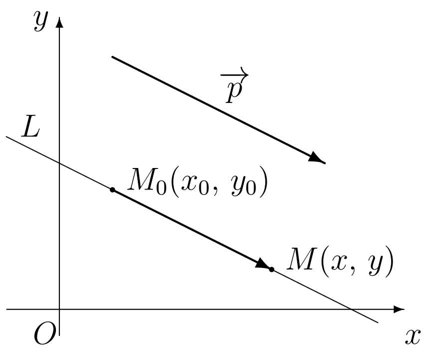

Рис. 1.5

Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\, y - y_0)$. Далее,

$$M(x,\, y) \in L \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{p} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}\,.$$

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\, y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{p} = (l,\ m)$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{1.7}$$

и называется *каноническим уравнением прямой*. Вектор $\overrightarrow{p}$ называется *направляющим вектором прямой.*

Замечание. Если $l = 0$, то $x = x_0$ — вертикальная прямая, если $m = 0$, то $y = y_0$ — горизонтальная прямая.

Упражнение 1.8. *Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(x_0,\, y_0)$ и $M_1(x_1,\, y_1)$.*

Пусть $M(x,\,y)$ — произвольная точка L (см. рис. 1.6).

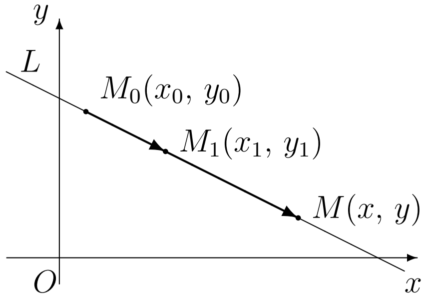

Рис. 1.6

Тогда $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\,y-y_0)$, $\quad\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,\,y_1-y_0)$. Далее,

$$\overrightarrow{M_0M}\parallel\overrightarrow{M_0M_1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\,.$$

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(x_0,\,y_0)$ и $M_1(x_1,\,y_1)$, имеет вид

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\,. \tag{1.8}$$

Рассмотрим уравнение (1.3), в котором коэффициент $B\neq 0$. Тогда

$$Ax+By+C=0\quad\Leftrightarrow\quad y=-\frac{A}{B}\,x-\frac{C}{B}\,.$$

Обозначив $k=-\dfrac{A}{B}\,,\;b=-\dfrac{C}{B}$, запишем последнее уравнение в виде:

$$y=kx+b \tag{1.9}$$

Упражнение 1.9. *Пусть $\alpha\quad(0\le\alpha<\pi)$ — угол, образованный прямой L с положительным направлением оси Ox (см. рис. 1.7). Показать, что $k=\operatorname{tg}\alpha$.*

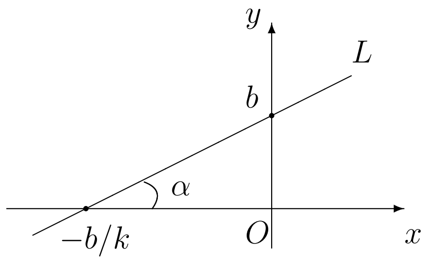

Рис. 1.7

Коэффициент k называют *угловым коэффициентом прямой*, а уравнение (1.9) — *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Пусть теперь прямая задана уравнением (1.3), в котором коэффициенты A, B и C — ненулевые. Тогда

$$Ax+By+C=0\quad\Leftrightarrow\quad -\frac{A}{C}\,x-\frac{B}{C}\,y=1.$$

Обозначив $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$, получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{1.10}$$

которое называется *уравнением прямой в отрезках*. Здесь коэффициенты a и b — величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно (см. рис. 1.8).

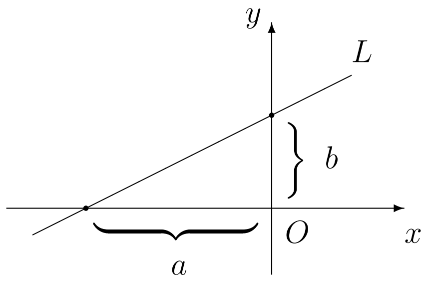

Рис. 1.8

1.5. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Угол между прямыми

Рассмотрим на плоскости две прямые, заданные общими уравнениями:

$$\begin{aligned} L_1: &\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 \neq 0, \\ L_2: &\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Определение 1.1. *Углом между прямыми L_1 и L_2 называется острый угол φ между нормалями к этим прямым.*

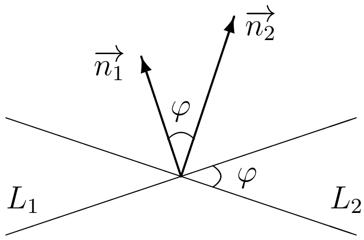

Рис. 1.9

Так как $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1) \perp L_1$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2) \perp L_2$, то, учитывая, что $\cos\varphi \geq 0$, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2})|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|},$$

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{1.11}$$

В частности:

1) $L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Если же $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 совпадают.

2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

3) Если прямые L_1 и L_2 не параллельны, то они пересекаются. Координаты точки пересечения задаются системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{cases}$$

Упражнение 1.10. *Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями (1.7)*

$$L_1: \quad \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}\,,$$
$$L_2: \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}\,.$$

Определить угол между прямыми, сформулировать условия, при которых прямые параллельны (в частности, совпадают), перпендикулярны.

Упражнение 1.11. *Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом (1.9)*

$$L_1: \quad y = k_1x + b_1, \qquad L_2: \quad y = k_2x + b_2.$$

Пусть угол φ между прямыми — острый. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}\right|. \tag{1.12}$$

Получить отсюда условия параллельности и перпендикулярности прямых L_1 и L_2.

1.6. Упражнения

Упражнение 1.12. *Составить уравнения параллели и перпендикуляра к прямой $L:\ 3x - 2y + 5 = 0$, проходящих через точку $M(-2,\,4)$.*

Пусть L_1 — параллель, L_2 — перпендикуляр к прямой L. Поскольку L задана общим уравнением (1.3), то вектор $\overrightarrow{n} = (3,\,-2)$ перпендикулярен данной прямой. Значит, для прямой L_1 он является вектором нормали, а для прямой L_2 — направляющим вектором (см. рис. 1.10).

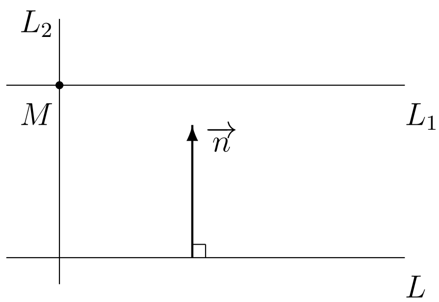

Рис. 1.10

Отсюда для L_1 по формуле (1.2) имеем

$$3(x + 2) - 2(y - 4) = 0, \quad \text{или} \quad 3x - 2y + 14 = 0.$$

Уравнение L_2 получаем по формуле (1.7):

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 4}{-2}\,, \quad \text{или} \quad 2x + 3y - 8 = 0.$$

Упражнение 1.13. *Показать, что точки $A(1,\,1)$, $B(-1,\,7)$ и $C(3,\,-5)$ лежат на одной прямой. Найти ее уравнение.*

По формуле (1.8) составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-1}{7-1}\,,\qquad \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{6}\,,\qquad \text{или}\ \ 3x+y-4=0.$$

Для того, чтобы показать, что точка C лежит на прямой (AB), достаточно убедиться, что ее координаты удовлетворяют полученному уравнению.

Упражнение 1.14. *Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,\,-2)$ и образующей угол $\dfrac{\pi}{4}$ с осью Ox.*

Запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом. В данном случае $k=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$, и уравнение (1.9) имеет вид

$$y=x+b.$$

Для того, чтобы найти коэффициент b, подставим координаты точки M в полученное уравнение: $-2=1+b$, $b=-3$. Тем самым искомая прямая задается уравнением:

$$y=x-3,\quad \text{или}\ \ x-y-3=0.$$

Упражнение 1.15. *Даны точка $M(2,\,1)$ и прямая $L:\ 4x+3y-1=0$. Найти*
1) *расстояние от точки M до прямой L,*
2) *проекцию M' точки M на прямую L,*
3) *точку M'', симметричную точке M относительно прямой L,*
4) *уравнение прямой L_1, симметричной прямой L относительно точки M.*

1) Расстояние от точки M до прямой L найдем по формуле (1.6):

$$d(M,\,L)=\frac{|4\cdot 2+3\cdot 1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2.$$

2) Построим прямую L', проходящую через точку M перпендикулярно прямой L. Вектор нормали $\overrightarrow{n}=(4,\,3)$ к L является для L' направляющим вектором. Отсюда по формуле (1.8) получаем

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}\,,\quad \text{или}\quad -3x+4y+2=0.$$

Далее, проекция точки M на прямую L — это точка пересечения прямых L и L' (см. рис. 1.11).

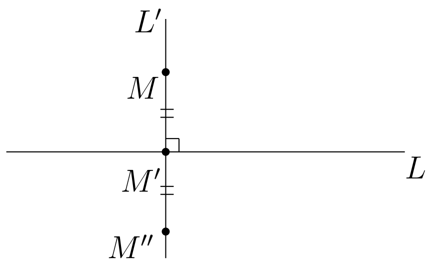

Рис. 1.11

Координаты точки $M'(x,\,y)$ найдем, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 2 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,4 \\ y = -0,2. \end{cases}$$

Заметим, что расстояние от точки M до прямой L можно было бы искать, как длину вектора $\overrightarrow{M'M}$:

$$\overrightarrow{M'M} = (1,6;\ 1,2), \quad d(M,\,L) = \left|\overrightarrow{M'M}\right| = \sqrt{1,6^2 + 1,2^2} = 2.$$

3) Для того, чтобы найти точку $M''(x,\,y)$, симметричную точке M относительно прямой L, используем формулы координат середины отрезка:

$$0,4 = \frac{x+2}{2}\,, \qquad -0,2 = \frac{y+1}{2}\,,$$

откуда $M''(-1,2;\ -1,4)$.

4) Очевидно, что прямая L_1, симметричная прямой L относительно точки M, параллельна L, и значит, имеет тот же вектор нормали $\overrightarrow{n} = (4,\,3)$. Следовательно, уравнение L_1 имеет вид

$$4x + 3y + C = 0.$$

Кроме того, расстояния от точки M до прямых L и L_1 одинаковы (см. рис. 1.12).

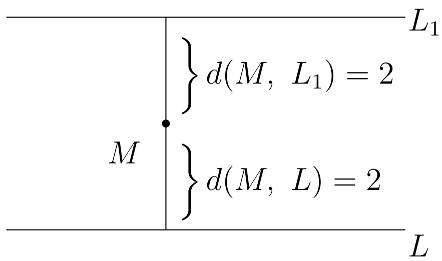

Рис. 1.12

Поэтому значение коэффициента C найдем из условия

$$d(M,\,L_1) = \frac{|4\cdot 2 + 3\cdot 1 + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2.$$

Так как $C \neq -1$, то $C = -21$. Итак, уравнение прямой L_1 имеет вид

$$4x + 3y - 21 = 0.$$

Упражнение 1.16. *Даны вершины треугольника* $A(-1,\,-1)$, $B(3,\,5)$ *и* $C(-4,\,1)$. *Найти*

1) *уравнение медианы* (BM),

2) *уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине* A.

1) Найдем сначала координаты точки $M(x,\,y)$, являющейся серединой стороны AC. По формулам координат середины отрезка имеем

$$x = \frac{-1-4}{2}\,, \qquad y = \frac{-1+1}{2}\,, \qquad M(-2,5;\ 0).$$

Далее строим прямую, проходящую через точки B и M, используя уравнение (1.8)

$$\frac{x-3}{-2,5-3} = \frac{y-5}{0-5}, \quad \text{или} \quad 10x - 11y + 25 = 0.$$

2) Найдем направляющий вектор биссектрисы внутреннего угла при вершине A. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (4,\ 6), \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{13}, \quad \overrightarrow{AC} = (-3,\ 2), \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{13},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\overrightarrow{AC}\right|.$$

Следовательно, параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{AC}$ — ромб. Из школьного курса геометрии известно, что диагонали ромба лежат на биссектрисах его углов. Значит, вектор

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = (-2,\ 10)$$

является направляющим вектором биссектрисы внутреннего угла при вершине A треугольника ABC (см. рис. 1.13).

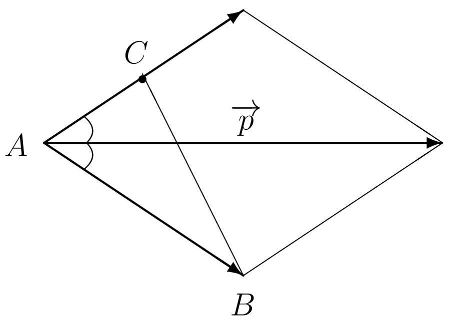

Рис. 1.13

Подставляя координаты точки A и вектора $\overrightarrow{p}$ в формулу (1.7), имеем

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{10}, \quad \text{или} \quad 5x + y + 6 = 0.$$

Далее, легко показать, что биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника при любой из его вершин взаимно перпендикулярны. Поэтому для биссектрисы внешнего угла при вершине A вектор $\overrightarrow{p}$ является нормалью. Подставляя данные в формулу (1.2), получаем уравнение биссектрисы внешнего угла при вершине A:

$$-2(x+1) + 10(y+1) = 0, \quad \text{или} \quad -x + 5y + 4 = 0.$$

Упражнение 1.17. *Найти угол между прямыми* $L_1:\ 3x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ *и* $L_2:\ x + \sqrt{3}y - 4 = 0$.

Имеем

$$\overrightarrow{n_1} = (3,\ \sqrt{3}), \quad \overrightarrow{n_2} = (1,\ \sqrt{3})$$

— векторы нормалей к L_1 и L_2. Следовательно, по формуле (1.5.)

$$\cos\varphi = \frac{|3+3|}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, угол между прямыми равен $\dfrac{\pi}{6}$.

Упражнение 1.18. *Даны прямые* $L_1: \ \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{2}$ *и* $L_2: \ 4x + 6y + 3 = 0.$
1) *Доказать, что прямые* L_1 *и* L_2 *параллельны.*
2) *Найти расстояние между этими прямыми.*
3) *Составить уравнение прямой, равноудаленной от двух данных прямых.*

1) Прямая L_1 задана каноническим уравнением (1.7), $\overrightarrow{p} = (-3,\ 2)$ — ее направляющий вектор, прямая L_2 задана общим уравнением (1.3), $\overrightarrow{n} = (4,\ 6)$ — ее вектор нормали. Поскольку векторы $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{n}$ ортогональны ($(\overrightarrow{p},\ \overrightarrow{n}) = 0$), то прямые L_1 и L_2 либо параллельны, либо совпадают. Рассмотрим точку $M(-1,\ 1)$. Подставляя ее координаты в уравнения прямых, легко убедиться, что $M \in L_1$, $M \notin L_2$. Значит, прямые L_1 и L_2 параллельны (см. рис. 1.14).

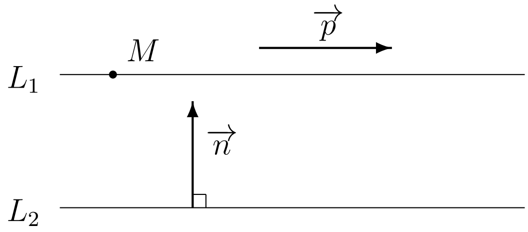

Рис. 1.14

2) *I способ*. Для того, чтобы найти расстояние между L_1 и L_2, приведем уравнения этих прямых к нормальному виду. Для L_1 запишем сначала ее общее уравнение:

$$2x + 3y - 1 = 0.$$

Теперь умножая его на нормирующий множитель $\mu_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$, получаем нормальное уравнение прямой L_1:

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\,x + \frac{3}{\sqrt{13}}\,y - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0,$$

$\overrightarrow{n_1}^0 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$ — единичный вектор нормали, направленный из начала координат к L_1, $\rho_1 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$ — расстояние от начала координат до этой прямой. Аналогично, умножая общее уравнение прямой L_2 на нормирующий множитель $\mu_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{4^2+6^2}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{13}}$, получаем нормальное уравнение:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}\,x - \frac{3}{\sqrt{13}}\,y - \frac{3}{2\sqrt{13}} = 0,$$

$\overrightarrow{n_2}^0 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ -\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$ — единичный вектор нормали, направленный из начала координат к L_2, $\rho_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{13}}$ — расстояние от начала координат до этой прямой. Так как $\overrightarrow{n_2}^0 = -\overrightarrow{n_1}^0$, то прямые L_1 и L_2 расположены по разные стороны от начала координат (см. рис. 1.15).

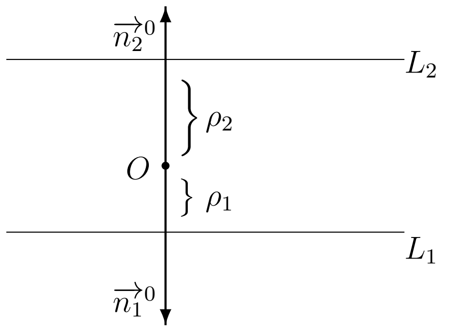

Рис. 1.15

Значит, расстояние между прямыми равно

$$d(L_1,\ L_2) = \rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{3}{2\sqrt{13}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}\,.$$

II способ. Расстояние между прямыми L_1 и L_2 можно было найти проще. Очевидно, что оно равно расстоянию от точки $M(-1,\ 1) \in L_1$ до прямой L_2 (см. рис. 1.16).

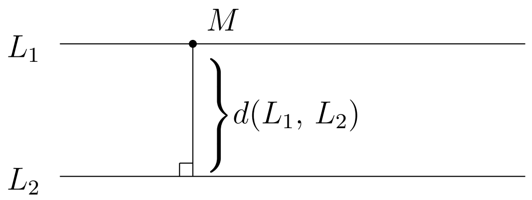

Рис. 1.16

Отсюда по формуле (1.6) получим

$$d(L_1,\ L_2) = d(M,\ L_2) = \frac{|4\cdot(-1) + 6\cdot 1 + 3|}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}\,.$$

3) Составим теперь уравнение прямой L, параллельной двум данным прямым и проходящей посередине между ними. Поскольку прямая L_2 расположена от начала координат дальше, чем прямая L_1, то L и L_2 расположены по одну сторону от точки O (см. рис. 1.17).

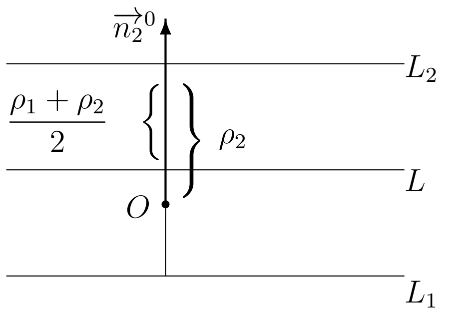

Рис. 1.17

Следовательно, $\overrightarrow{n_2}^0$ — единичный вектор нормали, направленный от начала координат к искомой прямой L, и

$$\rho = \rho_2 - \frac{\rho_1+\rho_2}{2} = \frac{\rho_2-\rho_1}{2} = \frac{1}{4\sqrt{13}}$$

— расстояние от начала координат до этой прямой. Отсюда нормальное уравнение прямой L имеет вид
$$-\frac{2}{\sqrt{13}}\,x-\frac{3}{\sqrt{13}}\,y-\frac{1}{4\sqrt{13}}=0\,.$$
Умножая его на $(-4\sqrt{13})$, получаем общее уравнение L
$$8x+12y+1=0.$$

1.7. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}=(A,\,B)$:
1) $M_0(1,\,3),\ \overrightarrow{n}=(-1,\,2)$,
2) $M_0(4,\,-1),\ \overrightarrow{n}=(2,\,-5)$,
3) $M_0(2,\,0),\ \overrightarrow{n}=(3,\,-2)$.

1.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\,y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{p}=(l,\,m)$:
1) $M_0(-1,\,2),\ \overrightarrow{p}=(1,\,3)$,
2) $M_0(2,\,1),\ \overrightarrow{p}=(4,\,-1)$,
3) $M_0(3,\,-2),\ \overrightarrow{p}=(2,\,0)$.

1.3. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(x_0,\,y_0)$ и $M_1(x_1,\,y_1)$:
1) $M_0(-1,\,2),\ M_1(1,\,3)$,
2) $M_0(2,\,1),\ M_1(4,\,-1)$,
3) $M_0(3,\,-2),\ M_1(3,\,0)$.

1.4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3,\,4)$ и образующей угол $\dfrac{3\pi}{4}$ с осью Ox.

1.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,\ -2,4)$ и отсекающей от координатного угла треугольник с площадью, равной 10.

1.6. Заданы точка $M(3,\,-6)$ и прямая $L:\ 2x-3y+2=0$. Найти
1) уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно прямой L,
2) уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L,
3) проекцию M' точки M на прямую L,
4) расстояние от точки M до прямой L,
5) точку M'', симметричную точке M относительно прямой L,
6) уравнение прямой L_1, равноудаленной от точки M и прямой L
7) уравнение прямой L_2, симметричной прямой L относительно точки M.

1.7. Даны вершины треугольника $A(1,\,2),\ B(4,\,6),\ C(-4,\,0)$. Найти
1) уравнение стороны (AB),
2) уравнение высоты (CD),
3) длину высоты $h=|CD|$,
4) уравнение медианы (AM),
5) угол между медианой (AM) и высотой (CD),

6) уравнение средней линии, параллельной стороне (AC),
7) уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине B,
8) точку K пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине B с продолжением стороны AC.

1.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,\,4)$ на одинаковых расстояниях от точек $B(-6,\,2)$ и $C(12,\,-16)$.

1.9. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,\,2)$ и удаленной от точки $A(-2,\,-5)$ вдвое дальше, чем от точки $B(1,\,8)$.

1.10. В треугольнике ABC точки $M(3,\,0)$, $L(4,\,-5)$ и $K(6,\,2)$ — середины сторон AB, AC и BC соответственно. Найти уравнения сторон треугольника и координаты его вершин.

1.11. Дана сторона прямоугольника $3x-4y+5=0$ и две его вершины $A(-1,\,3)$ и $C(1,\,2)$. Найти уравнения остальных сторон прямоугольника.

1.12. Найти расстояние от точек $M_1(-1,\,3)$ и $M_2(2,\,1)$ до прямой $L:\ 3x-4y+1=0$ и выяснить, лежат ли эти точки по одну сторону от прямой L, или по разные стороны.

1.13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,\,4)$ и отстоящей от точки $A(0,\,3)$ на расстояние $d=1$.

1.14. Исследовать взаимное расположение прямых L_1 и L_2. Если прямые пересекаются, найти точку пересечения и угол между прямыми. Если прямые параллельны, найти расстояние между прямыми и уравнение прямой L_3, параллельной данным и проходящей посередине между ними.
1) $L_1:\ -x+y+5=0,\quad L_2:\ 3x+4y+6=0;$
2) $L_1:\ 2x-y+5=0,\quad L_2:\ -4x+2y+2=0;$
3) $L_1:\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1},\quad L_2:\ \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y}{-2};$
4) $L_1:\ \dfrac{x+3}{-5}=\dfrac{y+1}{2},\quad L_2:\ \dfrac{x}{5}=\dfrac{y+4}{-2};$
5) $L_1:\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-4},\quad L_2:\ -x+2y+6=0;$
6) $L_1:\ \dfrac{x-5/2}{2}=\dfrac{y+1}{-1},\quad L_2:\ -2x-4y+1=0;$
7) $L_1:\ \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{5},\quad L_2:\ \dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-6}{-10}.$

1.15. Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны. Найти а) расстояние между прямыми L_1 и L_2, б) уравнение прямой L_3, параллельной данным и проходящей посередине между ними, в) уравнение прямой L_4, симметричной прямой L_1 относительно прямой L_2.
1) $L_1:\ x-2y+2=0,\quad L_2:\ -3x+6y+2=0;$
2) $L_1:\ \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{1},\quad L_2:\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-4}{-2};$
3) $L_1:\ 5x-2y-3=0,\quad L_2:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{5}.$

1.16. При каких значениях параметра a прямые

$$L_1:\ (a+1)x-2y-(a+4)=0 \ \text{ и } \ L_2:\ -6x+2ay-3=0$$

1) параллельны, 2) совпадают, 3) перпендикулярны?

1.17. Найти угол между прямыми $L_1:\ -3x-4y+6=0$ и $L_2:\ 8x+6y-9=0$. Составить уравнение биссектрисы острого угла между данными прямыми.

1.18. Дана прямая $L:\ 2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,\,1)$ под углом 45° к данной прямой.

1.19. Проверить пересекает ли прямая $L:\ 2x+y+3=0$ отрезок M_1M_2, где $M_1(-5,\,1)$ и $M_2(3,\,7)$.

1.20. Доказать, что уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,\,y_1)$ и $M_2(x_2,\,y_2)$, может быть записано в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

1.21. Доказать, что условие, при котором три точки $M_1(x_1,\,y_1)$, $M_2(x_2,\,y_2)$ и $M_3(x_3,\,y_3)$ лежат на одной прямой, может быть записано в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

1.22. Доказать, что формула для определения угла между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ может быть записана в виде:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_1-A_2B_2}{A_1A_2+B_1B_2}\right|.$$

1.23. Доказать, что если три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и $A_3x+B_3y+C_3=0$ пересекаются в одной точке, то

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

1.8. Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.1. 1) $-x+2y-5=0$, 2) $2x-5y-13=0$, 3) $3x-2y-6=0$.

1.2. 1) $3x-y+5=0$, 2) $x+4y-6=0$, 3) $y=-2$.

1.3. 1) $x-2y+5=0$, 2) $x+y-3=0$, 3) $x=3$.

1.4. $y=-x+2$.

1.5. $4x - 5y - 20 = 0$.

1.6. 1) $2x - 3y - 24 = 0$, 2) $3x + 2y + 3 = 0$, 3) $M'(-1,\ 0)$,
4) $d(M,\ L) = 2\sqrt{13}$, 5) $M''(-5,\ 6)$, 6) $2x - 3y - 11 = 0$.

1.7. 1) $4x - 3y + 2 = 0$, 2) $3x + 4y + 12 = 0$, 3) $h = 14/5$, 4) $x + y - 3 = 0$,
5) $\varphi = \arccos\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$, 6) $2x - 5y + 15 = 0$, 7) $x - y + 2 = 0$, $x + y - 10 = 0$,
8) $K(6,\ 4)$.

1.8. $11x - y - 40 = 0$.

1.9. $2x + 5y - 24 = 0$.

1.10. $(AB):\ 7x - 2y - 21 = 0$, $(AC):\ 5x + 3y - 26 = 0$, $(BC):\ 5x + y - 32 = 0$,
$A(1,\ -7)$, $B(5,\ 7)$, $C(7,\ -3)$.

1.11. $(AD):\ 3x - 4y + 15 = 0$, $(AB):\ 4x + 3y - 5 = 0$, $(CD):\ 4x + 3y - 10 = 0$.

1.12. $d_1 = 14/5$, $d_2 = 3/5$, по разные стороны.

1.13. $4x - 3y + 4 = 0$, $-y + 4 = 0$.

1.14. 1) прямые пересекаются, $M(2,\ -3)$, $\varphi = \arccos\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$;
2) прямые параллельны, $L_3:\ 2x - y - 3 = 0$;
3) прямые пересекаются, $M(0,\ -2)$, $\varphi = \arccos\dfrac{4}{\sqrt{65}}$;
4) прямые параллельны, $L_3:\ 4x + 10y + 31 = 0$;
5) прямые пересекаются, $M(4,\ -1)$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$;
6)–7) прямые совпадают.

1.15. 1) $d = \dfrac{8}{3\sqrt{5}}$, $L_3:\ 3x - 6y + 2 = 0$, $L_4:\ 3x - 6y - 10 = 0$;
2) $d = 2\sqrt{5}$, $L_3:\ x + 2y - 5 = 0$, $L_4:\ x + 2y - 20 = 0$;
3) $d = 4\sqrt{29}$, $L_3:\ 5x - 2y - 5 = 0$, $L_4:\ 5x - 2y - 11 = 0$.

1.16. 1) $a = 2$, 2) $a = -3$, 3) $a = -\dfrac{3}{5}$.

1.17. $2x + 2y - 3 = 0$.

1.18. $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$.

1.19. прямая пересекает отрезок M_1M_2 в точке $\left(-\dfrac{31}{11},\ \dfrac{29}{11}\right)$.

Прямая и плоскость в пространстве

2.1. Уравнение плоскости

Пусть в пространстве введены декартовы координаты (x, y, z) и задано уравнение $F(x, y, z) = 0$.

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением поверхности σ, если выполнено следующее условие: точка $M(x, y, z) \in \sigma$ тогда и только тогда, когда ее координаты (x, y, z) удовлетворяют этому уравнению.

Упражнение 2.1.
Найти уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ $\left(\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}\right)$.

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z) \in P$ (см. рис. 2.1).

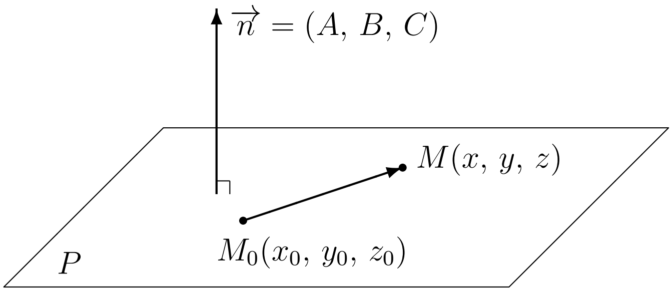

Рис. 2.1

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Далее,

$$M(x, y, z) \in P \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n} \;\Leftrightarrow\; (\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{n}) = 0 \;\Leftrightarrow\;$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Таким образом, уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2.1}$$

Вектор $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ называется *вектором нормали к плоскости.*

Упражнение 2.2.
Найти уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно неколлинеарным векторам $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

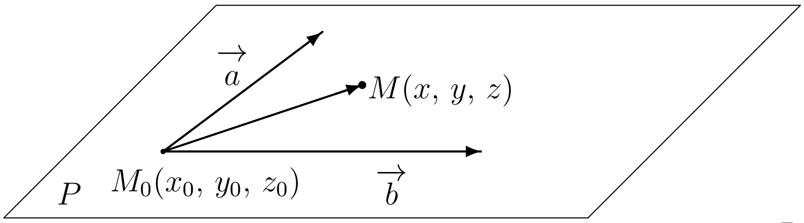

Рис. 2.2

Рассмотрим произвольную точку $M(x,\, y,\, z) \in P$ и вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ (см. рис. 2.2). Далее,

$$M(x,\, y,\, z) \in P \quad \Leftrightarrow \quad \text{векторы } \overrightarrow{M_0M},\ \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b} \text{ компланарны } \Leftrightarrow$$
$$\left\langle \overrightarrow{M_0M}\, \overrightarrow{a}\, \overrightarrow{b} \right\rangle = 0$$

(по свойству смешанного произведения). Отсюда получаем, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ параллельно векторам $\overrightarrow{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$ и $\overrightarrow{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2}$$

Упражнение 2.3.
Найти уравнение плоскости P, проходящей через точки $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$, $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$.

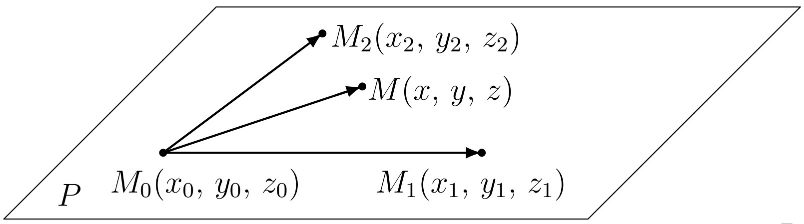

Рис. 2.3

Рассмотрим произвольную точку $M(x,\, y,\, z) \in P$ и векторы

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0),$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0,\, y_1 - y_0,\, z_1 - z_0),$$
$$\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0,\, y_2 - y_0,\, z_2 - z_0)$$

(см. рис. 2.3). Рассуждая так же, как в предыдущем упражнении, получаем, что уравнение плоскости, проходящей через точки $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$, $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

2.2. Плоскость как поверхность I порядка

Определение 2.1. *Поверхность σ называется поверхностью первого порядка, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. *Плоскость есть поверхность первого порядка; всякая поверхность первого порядка, где коэффициенты $A,\ B,\ C$ не равны нулю одновременно ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) — плоскость.*

Доказательство. 1) Покажем, что любая плоскость P описывается уравнением вида (2.4). Зафиксируем на плоскости P некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$, перпендикулярный P. Тогда уравнение плоскости P имеет вид (2.1):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_{= D} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

2) Обратно. Пусть задано уравнение (2.4)

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

в котором коэффициенты $A,\ B,$ и C не равны нулю одновременно. Пусть, для определенности, $C \neq 0$. Тогда для того, чтобы получить решение $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ уравнения (2.4) можно значения x_0 и y_0 выбрать произвольно, а z_0 определить из уравнения (2.4):

$$z_0 = \frac{A}{C}\,x_0 - \frac{B}{C}\,y_0 - \frac{D}{C}\,.$$

В точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ справедливо равенство

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0\,. \tag{$*$}$$

Вычитая из уравнения (2.4) равенство ($*$) получаем эквивалентное уравнению (2.4) уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Оно задает плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$.

Таким образом, уравнение (2.4) всегда задает плоскость. □

Уравнение (2.4) называется *общим уравнением плоскости.*

Замечание. При доказательстве теоремы мы установили, что для плоскости, заданной уравнением (2.4), вектор $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ является вектором нормали.

2.3. Нормальное уравнение плоскости

Пусть в пространстве заданы плоскость P и точка A. *Проекцией точки A на плоскость P* называется точка A', в которой пересекаются плоскость P и прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости P. *Расстоянием от точки A до плоскости P* называется длина отрезка AA'.

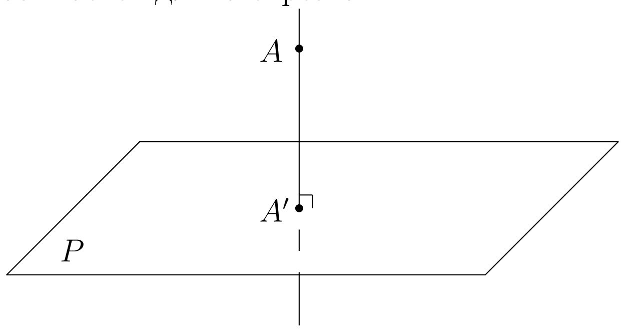

Рис. 2.4 Проекция точки на плоскость

Упражнение 2.4. *Пусть заданы $\overrightarrow{n}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ — единичный вектор нормали, направленный из начала координат к плоскости P и $\rho > 0$ — расстояние от точки O начала координат до плоскости P. Написать уравнение плоскости P.*

Пусть $M(x,\,y,\,z)$ — произвольная точка плоскости P (см. рис. 2.5).

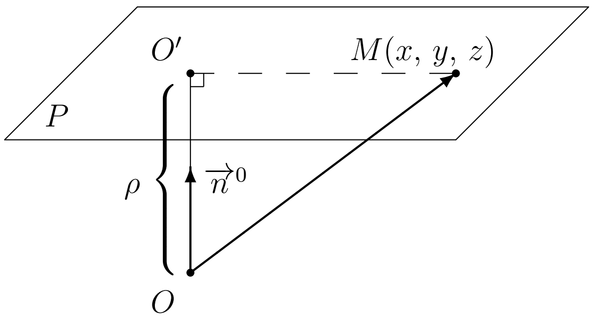

Рис. 2.5

Тогда $pr_{\overrightarrow{n}^0}\overrightarrow{OM} = \rho$. Поскольку

$$\left(\overrightarrow{n}^0,\, \overrightarrow{OM}\right) = \left|\overrightarrow{n}^0\right| \cdot pr_{\overrightarrow{n}^0}\overrightarrow{OM} = pr_{\overrightarrow{n}^0}\overrightarrow{OM},$$

то

$$\left(\overrightarrow{n}^0,\, \overrightarrow{OM}\right) = \rho \quad \Leftrightarrow \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \rho \quad \Leftrightarrow$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.3.) называют *нормальным уравнением плоскости*. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad D \neq 0$$

может быть приведено к виду (2.3.) с помощью умножения на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{-\operatorname{sign} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Упражнение 2.5. *Пусть заданы плоскость P уравнением*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0$$

и точка $M^*(x^*, y^*, z^*) \notin P$. Найти расстояние от точки M^* до плоскости P.

Обозначим расстояние от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ до плоскости P через $d(M^*, P)$, и пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости P (см. рис. 2.6).

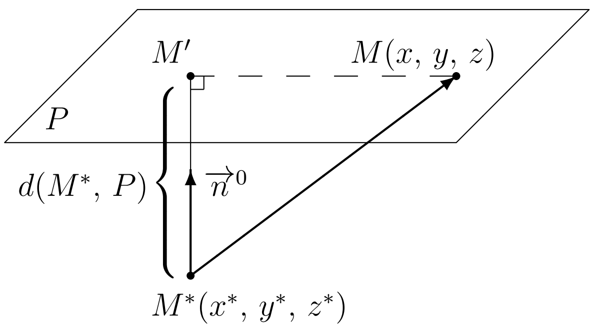

Рис. 2.6

Тогда $\overrightarrow{M^*M} = (x - x^*, y - y^*, z - z^*)$. Очевидно, что

$$d(M^*, P) = \left| pr_{\vec{n}^0}\overrightarrow{M^*M} \right|.$$

Далее,

$$pr_{\vec{n}^0}\overrightarrow{M^*M} = (\overrightarrow{M^*M}, \vec{n}^0) = (x - x^*)\cos\alpha + (y - y^*)\cos\beta + (z - z^*)\cos\gamma =$$
$$\underbrace{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}_{=\rho} - (x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma).$$

Значит,

$$d(M^*, P) = |x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - \rho|. \tag{2.6}$$

Следствие. *Если плоскость P задана общим уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то расстояние от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ до плоскости P вычисляется по формуле

$$d(M^*, P) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.7}$$

Упражнение 2.6. *Найти условия, при которых точки M^* и O лежат по одну сторону от плоскости P и по разные стороны от этой плоскости.*

2.4. Неполные уравнения плоскости

Уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

называется *полным*, если в нем коэффициенты A, B, C, D не равны нулю. Если среди A, B, C, D есть нулевые, то уравнение называется *неполным*.

Рассмотрим следующие частные случаи:

1) $D = 0$. Тогда

$$Ax + By + Cz = 0$$

— уравнение плоскости, проходящей через начало координат $O(0,\, 0,\, 0)$.

2) $A = 0$. Рассмотрим уравнение

$$By + Cz + D = 0.$$

Нормаль к плоскости $\overrightarrow{n} = (0,\, B,\, C)$ перпендикулярна вектору $\overrightarrow{i} = (1,\, 0,\, 0)$. Значит, плоскость P параллельна оси Ox.

3) $A = D = 0$. Тогда

$$By + Cz = 0$$

— плоскость, проходящая через начало координат и параллельная оси Ox. Значит, плоскость P содержит ось Ox.

4) $A = B = 0$. Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$Cz + D = 0.$$

Нормаль к плоскости $\overrightarrow{n} = (0,\, 0,\, C)$ параллельна вектору $\overrightarrow{k} = (0,\, 0,\, 1)$. Значит, плоскость P параллельна плоскости xOy.

5) $A = B = D = 0$. Уравнение плоскости имеет вид

$$Cz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

Значит, плоскость P совпадает с плоскостью $x0y$.

Все остальные случаи получаются переименованием переменных.

2.5. Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости

$$P_1 \ : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$P_2 \ : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Определение 2.2. *Углом между плоскостями P_1 и P_2 называется острый угол φ между нормалями к этим плоскостям.*

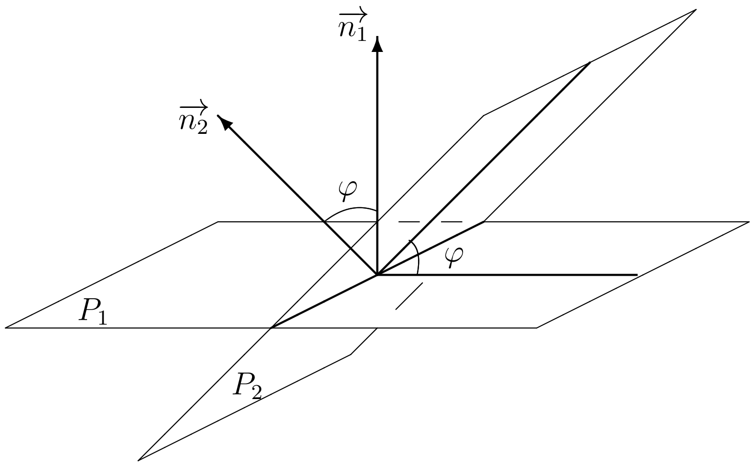

Рис. 2.7

Так как $\overrightarrow{n_1} = (A_1,\, B_1,\, C_1) \perp P_1$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2,\, B_2,\, C_2) \perp P_2$, то учитывая, что $\cos\varphi \geq 0$, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\,. \tag{2.8}$$

В частности:

1) $P_1 \parallel P_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}\,.$

Если же $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости P_1 и P_2 совпадают.

2) $P_1 \perp P_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{n_1},\, \overrightarrow{n_2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

2.6. Уравнение прямой в пространстве

Если плоскости P_1 и P_2 не параллельны, то они пересекаются.

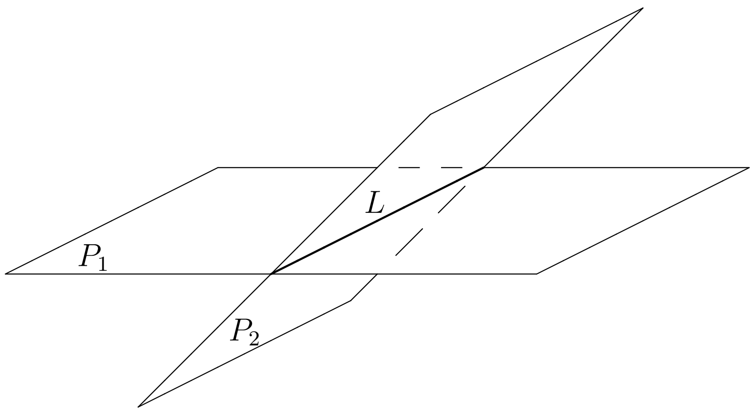

Рис. 2.8

Их пересечение L задается условиями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Эти уравнения называются *общими уравнениями* прямой в пространстве.

Упражнение 2.7. *Найти уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0,\, y_0\, z_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{p} = (l,\, m,\, n)$ $\left(\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}\right)$.*

Рассмотрим произвольную точку $M(x,\, y,\, z) \in L$ (см. рис. 2.9).

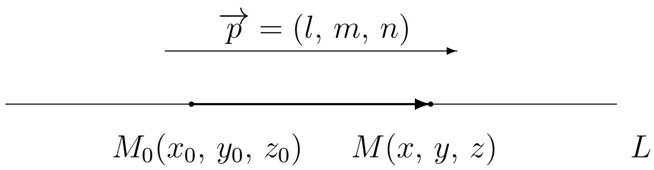

Рис. 2.9

Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0)$. Далее рассуждаем также, как в упражнении 1.7:

$$M(x,\, y,\, z) \in L \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{p} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\,.$$

Таким образом, прямая, проходящая через точку $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{p} = (l,\, m,\, n)$, может быть задана *каноническими уравнениями*:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\,. \tag{2.10}$$

Вектор $\overrightarrow{p}$ называется *направляющим вектором прямой.*

Условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{p}$ можно записать по-другому:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{p} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \overrightarrow{p} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \\ z - z_0 = nt, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{2.11}$$

— *параметрические уравнения прямой.*

Упражнение 2.8. *Найти уравнение прямой, проходящей через точки* $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ *и* $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$.

Пусть $M(x,\, y,\, z)$ — произвольная точка L (см. рис. 2.10).

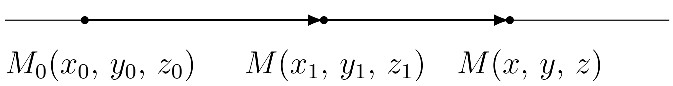

Рис. 2.10

Векторы $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0,\, y_1 - y_0,\, z_1 - z_0)$ коллинеарны, откуда получаем

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{2.12}$$

— уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.

Упражнение 2.9. *В пространстве заданы прямая* $L: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ *и точка* $M^*(x^*,\, y^*,\, z^*)$, $M^* \notin L$. *Найти расстояние от точки* M^* *до прямой* L.

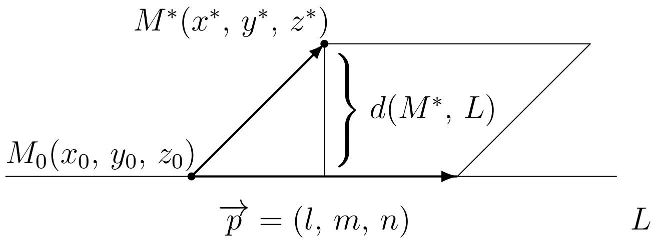

Рис. 2.11

Прямая L проходит через точку $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{p} = (l,\, m,\, n)$. Обозначим расстояние от точки M^* до прямой L через $d(M^*,\, L)$. Построим на векторах $\overrightarrow{M_0M^*}$ и $\overrightarrow{p}$ параллелограмм, как указано на рисунке 2.11. Очевидно, что искомое расстояние равно высоте параллелограмма и может быть найдено по формуле:

$$d(M^*,\, L) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M^*},\, \overrightarrow{p}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{p}\right|} \tag{2.13}$$

(см. свойства векторного произведения).

2.7. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Рассмотрим в пространстве две прямые, заданные каноническими уравнениями:

$$L_1: \ \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$
$$L_2: \ \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Возможны четыре различных варианта расположения двух прямых в пространстве.

1) Прямые параллельны, т.е. лежат в одной плоскости и не пересекаются, тогда и только тогда, когда направляющие векторы прямых $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ коллинеарны, а вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ им не коллинеарен: $\overrightarrow{p_1} \parallel \overrightarrow{p_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$ (см. рис. 2.12).

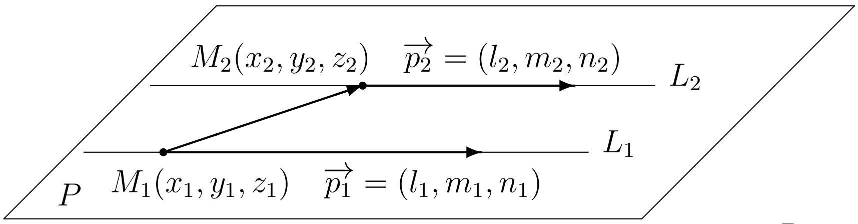

Рис. 2.12

2) Прямые совпадают тогда и только тогда, когда направляющие векторы прямых $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ и вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ коллинеарны: $\overrightarrow{p_1} \parallel \overrightarrow{p_2} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$ (см. рис. 2.13).

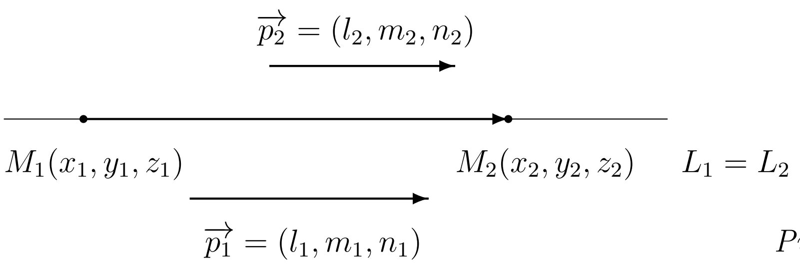

Рис. 2.13

3) Прямые пересекаются, т.е. лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку, тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ не коллинеарны $\left(\overrightarrow{p_1} \nparallel \overrightarrow{p_2}\right)$, а векторы $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ компланарны, и, значит, их смешанное произведение равно нулю: $\left\langle \overrightarrow{p_1}\, \overrightarrow{p_2}\, \overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle = 0$ (см. рис. 2.14).

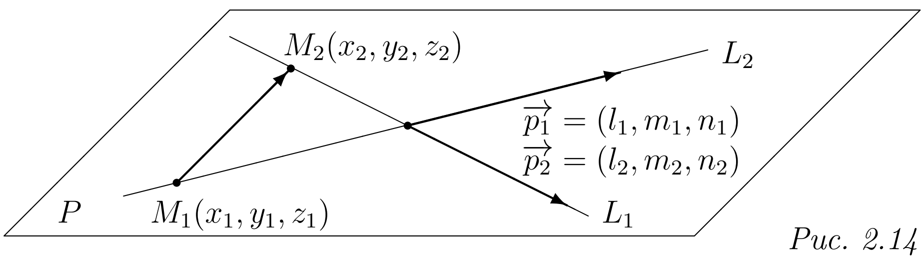

Рис. 2.14

4) Прямые скрещиваются, т.е. не лежат в одной плоскости, тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны, и, значит, их смешанное произведение не равно нулю: $\left\langle \overrightarrow{p_1}\, \overrightarrow{p_2}\, \overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle \neq 0$ (см. рис. 2.15).

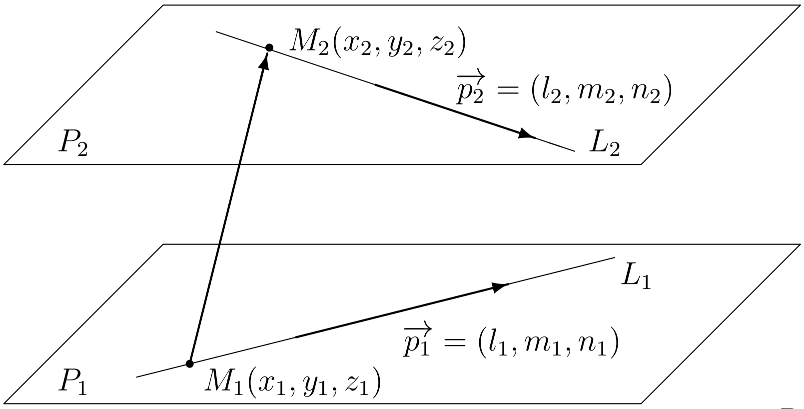

Рис. 2.15

Упражнение 2.10. *Доказать, что расстояние между скрещивающимися прямыми* $L_1: \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ *и* $L_2: \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ *можно найти по формуле*

$$d(L_1,\ L_2) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{p_1}\, \overrightarrow{p_2}\, \overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle\right|}{\left|\left[\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2}\right]\right|} \tag{2.14}$$

(см. рис. 2.15, 2.16).

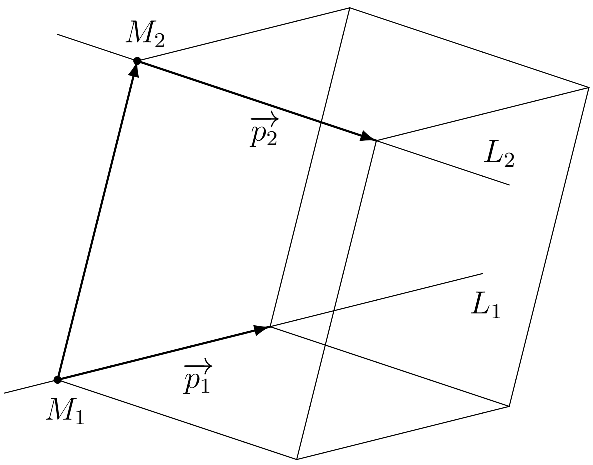

Рис. 2.16

Определение 2.3. *Углом между прямыми L_1 и L_2 называется острый угол φ между направляющими векторами этих прямых.*

Если $\overrightarrow{p}_1 = (l_1,\, m_1,\, n_1)$ — направляющий вектор L_1, $\overrightarrow{p}_2 = (l_2,\, m_2,\, n_2)$ — направляющий вектор L_2, то учитывая, что $\cos\varphi \geq 0$, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2})|}{|\overrightarrow{p_1}| \cdot |\overrightarrow{p_2}|},$$

$$\cos\varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{2.15}$$

2.8. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть в пространстве заданы плоскость

$$P: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

и прямая

$$L: \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Возможны следующие случаи взаимного расположения прямой и плоскости.

1) Прямая лежит в плоскости, т.е. все точки прямой принадлежат плоскости, тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\overrightarrow{p}$ и нормаль к плоскости $\overrightarrow{n}$ перпендикулярны $((\overrightarrow{n}, \overrightarrow{p}) = 0)$, и точка M_0 принадлежит плоскости P $(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0)$ (см. рис. 2.17).

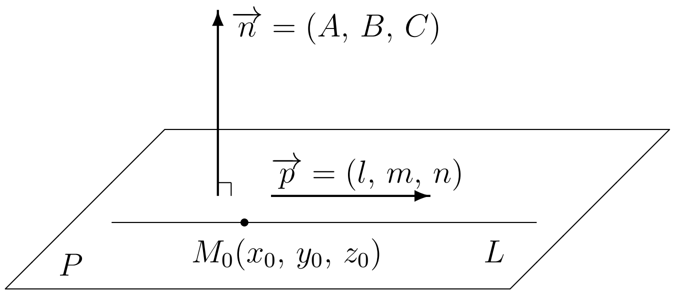

Рис. 2.17

2) Прямая и плоскость параллельны, т.е. не имеют общих точек, тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\overrightarrow{p}$ и нормаль к плоскости $\overrightarrow{n}$ перпендикулярны $((\overrightarrow{n}, \overrightarrow{p}) = 0)$, а точка M_0 не принадлежит плоскости P $(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0)$ (см. рис. 2.18).

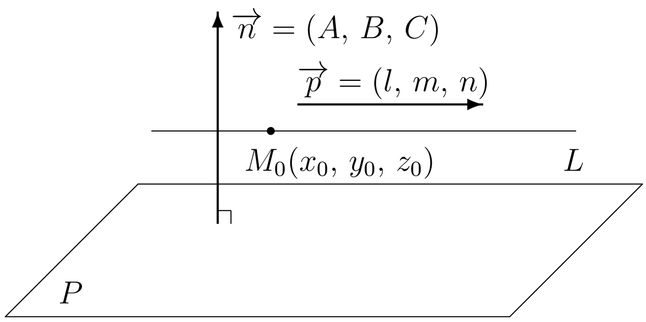

Рис. 2.18

3) Прямая и плоскость пересекаются, т.е. имеют одну общую точку, тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\overrightarrow{p}$ и нормаль к плоскости $\overrightarrow{n}$ не ортогональны $((\overrightarrow{n}, \overrightarrow{p}) \neq 0)$ (см. рис. 2.19).

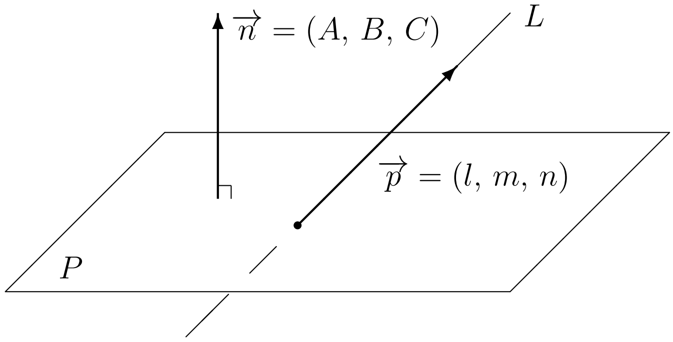

Рис. 2.19

Определение 2.4. *Углом между прямой L и плоскостью P называется угол ψ между прямой и ее проекцией на плоскость.*

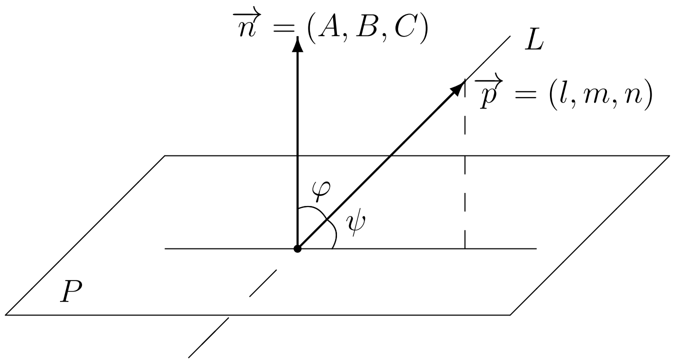

Рис. 2.20

Угол φ между направляющим вектором $\overrightarrow{p} = (l,\ m,\ n)$ прямой и нормалью $\overrightarrow{n} = (A,\ B,\ C)$ к плоскости связан с углом ψ соотношениями

$$\left[\begin{array}{ll} \psi = \pi/2 - \varphi, & 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ \psi = \varphi - \pi/2, & \pi/2 < \varphi < \pi. \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\sin\psi = |\cos\varphi| = \frac{|(\overrightarrow{n},\ \overrightarrow{p})|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{p}|},$$

$$\sin\psi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.16)$$

2.9. Упражнения

Упражнение 2.11. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0,\ 2,\ -1)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (3,\ -2,\ 4)$.*

Подставив в формулу (2.1) координаты точки M_0 и вектора $\overrightarrow{n}$, после преобразования получим

$$3(x - 0) - 2(y - 2) + 4(z + 1) = 0,$$
$$3x - 2y + 4z + 8 = 0$$

— искомое уравнение плоскости.

Упражнение 2.12. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 1, 1)$ параллельно векторам $\overrightarrow{a} = (0,\ 1,\ 2)$ и $\overrightarrow{b} = (-1,\ 0,\ 1)$.*

Подставив в формулу (2.2) координаты точки M_0 и векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, после вычисления определителя получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1) - 2(y-1) + (z-1) = 0,$$

$$x - 2y + z = 0$$

— искомое уравнение плоскости.

Упражнение 2.13. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_0(1,\ 2,\ 0)$, $M_1(2,\ 1,\ 1)$ и $M_2(3,\ 0,\ 1)$.*

Подставив в формулу (2.3) координаты точек M_0, M_1 и M_2, после вычисления определителя получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 2-1 & 1-2 & 1-0 \\ 3-1 & 0-2 & 1-0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1) + (y-2) = 0,$$

$$x + y - 3 = 0$$

— искомое уравнение плоскости.

Упражнение 2.14. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,\ 3,\ -5)$ параллельно плоскости $P:\ 2x + y - 3z + 4 = 0$.*

Пусть P_1 — искомая плоскость. Поскольку плоскость P задана общим уравнением (2.4), то $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ -3)$ — вектор нормали к P. А так как плоскости P и P_1 параллельны, то вектор $\overrightarrow{n}$ также является нормалью к P_1 (см. рис. 2.21).

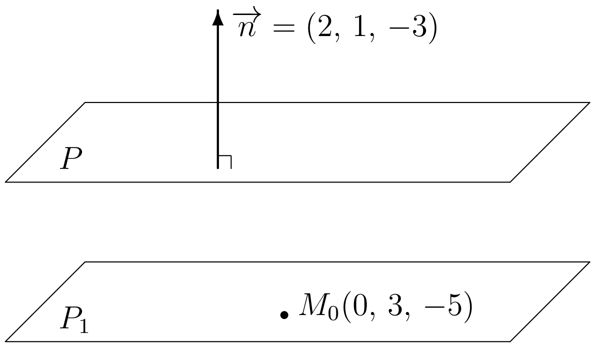

Рис. 2.21

Подставляя в формулу (2.1) координаты точки M_0 и вектора $\overrightarrow{n}$, после преобразования получим

$$2(x-0)+(y-3)-3(z+5)=0,$$
$$2x+y-3z-20=0$$

— уравнение плоскости P_1.

Упражнение 2.15. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_0(0,\ 1,\ 2)$ и $M_1(2,\ 3,\ 2)$ параллельно вектору $\overrightarrow{a}=(2,\ 0,\ 1)$.*

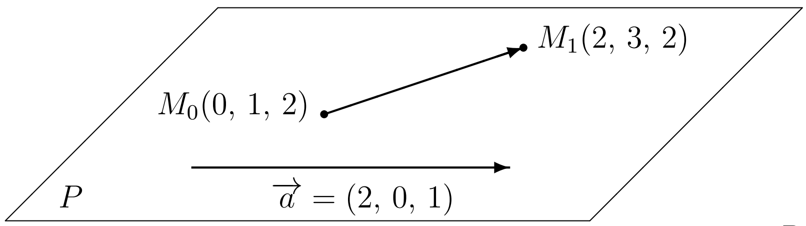

Рис. 2.22

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(2-0,\ 3-1,\ 2-2)=(2,\ 2,\ 0)$ параллелен искомой плоскости P (см. рис. 2.22). Подставив в формулу (2.2) координаты точки M_0 и векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$, после вычисления определителя получим

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0,$$
$$x\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-(y-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+(z-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0,$$
$$-2x+2(y-1)+4(z-2)=0,$$
$$-2x+2y+4z-10=0,$$
$$x-y-2z+5=0$$

— уравнение плоскости P.

Упражнение 2.16. *Найти расстояние от точки $M(3,\,0,\,4)$ до плоскости $P:\ 3x-y+z+9=0$.*

По формуле (2.7) получаем

$$d(M,\,P)=\frac{|3\cdot 3-1\cdot 0+1\cdot 4+9|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{22}{\sqrt{11}}=2\sqrt{11}.$$

Упражнение 2.17. *Найти угол между плоскостями $P_1:\ x+2y-4z+1=0$ и $P_2:\ 3x-y+z=0$.*

Поскольку плоскости P_1 и P_2 заданы общими уравнениями (2.4), то $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2,\ -4)$ и $\overrightarrow{n_2}=(3,\ -1,\ 1)$ — векторы нормалей к P_1 и P_2. Подставляя в формулу (2.8) координаты векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, получим

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot 3+2\cdot(-1)+(-4)\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{231}}{77}\,,$$
$$\varphi=\arccos\frac{\sqrt{231}}{77}\,.$$

Упражнение 2.18. *Даны плоскости* $P_1: \ 3x+y-z-3=0$ *и* $P_2: \ -3x-y+z-5=0$.
1) Доказать, что плоскости P_1 *и* P_2 *параллельны.*
2) Найти расстояние между этими плоскостями.
3) Составить уравнение плоскости P*, равноудаленной от* P_1 *и* P_2*.*

1) Проверим условие параллельности плоскостей:

$$\frac{3}{-3} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-3}{5} \qquad \Rightarrow \qquad P_1 \parallel P_2.$$

2) Очевидно, расстояние между плоскостями равно расстоянию от произвольной точки $M_1 \in P_1$ до плоскости P_2 (см. рис. 2.23).

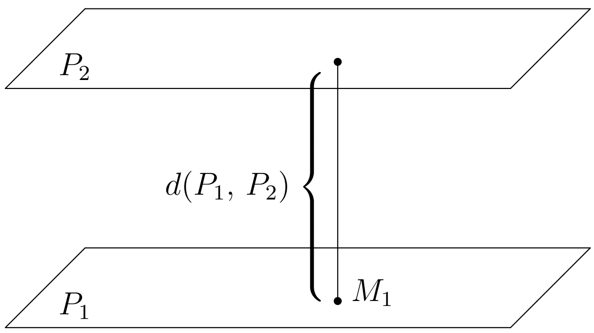

Рис. 2.23

Подберем точку $M_1 \in P_1$: пусть $x = y = 1$, тогда $z = 3x+y-3 = 1$. Итак, $M_1(1,\ 1,\ 1) \in P_1$. Отсюда по формуле (2.7) получаем

$$d(M,\, P) = \frac{|-3\cdot 1 - 1\cdot 1 + 1\cdot 1 - 5|}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}} = \frac{8\sqrt{11}}{11}\,.$$

3) Уравнение плоскости P, равноудаленной от P_1 и P_2, можно было бы составить по аналогии с задачей 1.18. Предложим другой способ решения. Подберем точку $M_2 \in P_2$: пусть $x = 1,\ y = 3$, тогда $z = 3x+y+5 = 11$. Итак, $M_2(1,\ 3,\ 11) \in P_2$. Найдем координаты середины отрезка M_1M_2:

$$x = \frac{1+1}{2} = 1, \quad y = \frac{1+3}{2} = 2, \quad z = \frac{1+11}{2} = 6.$$

Легко показать, что точка $M(1,\ 2,\ 6)$ равноудалена от плоскостей P_1 и P_2. Значит, искомая плоскость P проходит через точку M параллельно плоскостям P_1 и P_2. Подставляя в формулу (2.1) координаты точки M и вектора $\overrightarrow{n} = (3,\ 1,\ -1)$, после преобразования получим

$$3(x-1)+(y-2)-(z-6) = 0,$$
$$3x+y-z+1 = 0$$

— уравнение плоскости P.

Упражнение 2.19. *Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(2,\ 6,\ -1)$ *параллельно вектору* $\overrightarrow{p} = (0,\ 2,\ 3)$*.*

Подставив координаты точки M_0 и вектора $\overrightarrow{p}$ в формулы (2.10) и (2.11), получим

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+1}{3}$$

— канонические уравнения искомой прямой,

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

— параметрические уравнения искомой прямой.

Упражнение 2.20. *Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки* $M_0(1,\ 2,\ 3)$ *и* $M_1(1,\ 4,\ -1)$.

Подставляя координаты точек M_0 и M_1 в формулу (2.12), получаем

$$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z-3}{-1-3}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-4}$$

— канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.

Упражнение 2.21. *Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(1,\ -3,\ 4)$ *параллельно прямой* $L:$ $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 1 \\ z = 4t + 4. \end{cases}$

Пусть L_1 — искомая прямая. Поскольку прямая L задана параметрическими уравнениями (2.11), то $\overrightarrow{p} = (2,\ -1,\ 4)$ — ее направляющий вектор. А так как прямые L и L_1 параллельны, то вектор $\overrightarrow{p}$ также является направляющим вектором прямой L_1 (см. рис. 2.24).

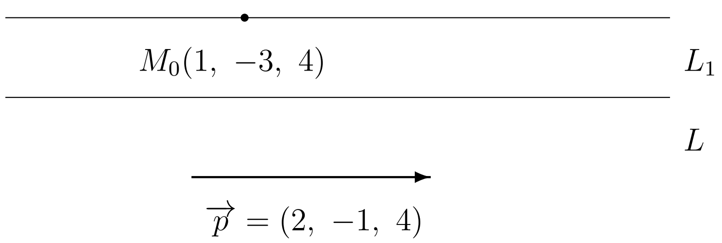

Рис. 2.24

Подставив координаты точки M_0 и вектора $\overrightarrow{p}$ в формулу (2.10), получим

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{4}$$

— канонические уравнения искомой прямой.

Упражнение 2.22. *В треугольнике с вершинами* $A(3,\ -2,\ 2)$, $B(4,\ 0,\ 3)$ *и* $C(-3,\ 1,\ -1)$ *составить канонические уравнения:*
1) медианы, проведенной из вершины C*;*
2) средней линии, параллельной стороне AC*;*
3) уравнение биссектрисы, внутреннего угла при вершине A*.*

1) Пусть M — середина стороны AB (см. рис. 2.25).

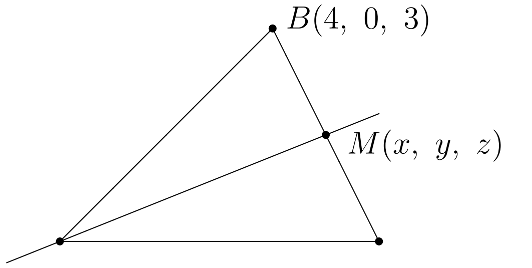

Рис. 2.25

Найдем координаты точки M по формулам координат середины отрезка:

$$x = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}, \quad y = \frac{-2+0}{2} = -1, \quad z = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Подставив координаты точек C и M в формулу (2.12), после преобразования получим

$$\frac{x+3}{7/2+3} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{5/2+1}, \quad \text{или} \quad \frac{x+3}{13} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{7}$$

— канонические уравнения медианы, проведенной из вершины C.

2) Средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, проходит через точку M (см. рис. 2.26).

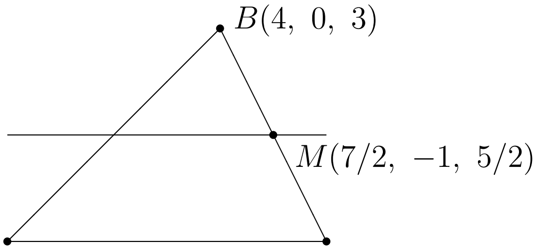

Рис. 2.26

Подставив координаты точки M и вектора $\overrightarrow{AC} = (-6,\ 3,\ -3)$ в формулу (2.10), получим

$$\frac{x-7/2}{-6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5/2}{-3}, \quad \text{или} \quad \frac{x-7/2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5/2}{-1}$$

— канонические уравнения искомой прямой.

3) Направляющий вектор биссектрисы внутреннего угла при вершине A, найдем так же, как в задаче 1.16. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1,\ 2,\ 1), \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6}, \quad \overrightarrow{AC} = (-6,\ 3,\ -3), \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = 3\sqrt{6},$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 3\left|\overrightarrow{AB}\right|.$$

Следовательно, параллелограмм, построенный на векторах $3\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ — ромб. Значит, вектор

$$\overrightarrow{p} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-3,\ 9,\ 0)$$

является направляющим вектором биссектрисы угла при вершине A треугольника ABC (см. рис. 2.27).

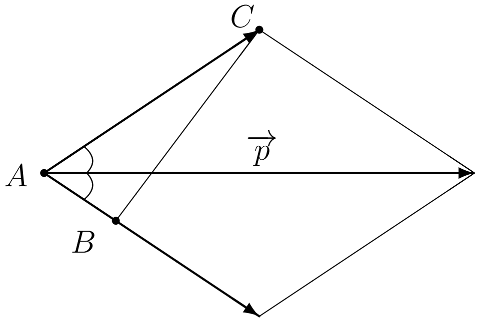

Рис. 2.27

Подставив координаты точки A и вектора $\overrightarrow{p}$ в формулу (2.10), получим

$$\frac{x-3}{-3}=\frac{y+2}{9}=\frac{z-2}{0},\quad \text{или}\quad \frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{0}$$

— канонические уравнения искомой прямой.

Упражнение 2.23. *Составить параметрические уравнения прямой*
$L:\ \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$

I способ. Для того, чтобы составить параметрические уравнения (2.11), необходимо знать координаты произвольной точки M_0, лежащей на данной прямой, и направляющего вектора $\overrightarrow{p}$. Найдем сначала точку M_0. Пусть $x=2$. Подставив выбранное значение x в общие уравнения прямой L, получим

$$\begin{cases} 4 - y + 2z - 3 = 0 \\ 2 + 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + 2z = -1 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$$

— систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Решим ее методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=3,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=3,$$
$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-1,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=-1.$$

Итак, $M_0(2,\ -1,\ -1)\in L$.

Найдем теперь координаты направляющего вектора $\overrightarrow{p}$. Прямая L задана общими уравнениями (2.9) как линия пересечения двух плоскостей. Поскольку плоскости $P_1:\ 2x-y+2z-3=0$ и $P_2:\ x+2y-z-1=0$ заданы общими уравнениями (2.4), то $\overrightarrow{n_1}=(2,\ -1,\ 2)$ и $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 2,\ -1)$ — векторы нормалей к P_1 и P_2. Далее,

$$\begin{cases} L \subset P_1 \\ L \subset P_2 \\ \overrightarrow{p} \parallel L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{p} \parallel P_1 \\ \overrightarrow{p} \parallel P_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{n_1} \\ \overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{n_2} \end{cases} \text{(см. рис. 2.28).}$$

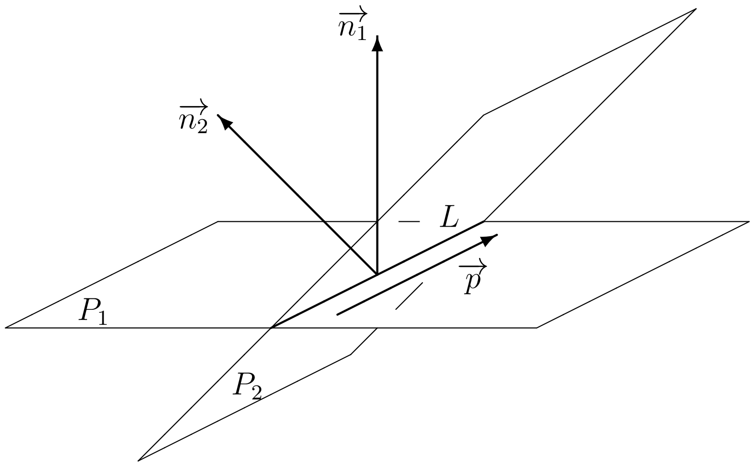

Рис. 2.28

Значит, направляющий вектор $\overrightarrow{p}$ может быть найден, как векторное произведение нормалей $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$:

$$\overrightarrow{p} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}.$$

Подставив координаты точки M_0 и вектора $\overrightarrow{p}$ в формулу (2.11), получим

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

— параметрические уравнения прямой L.

II способ. Запишем общие уравнения прямой L, как линейную неоднородную систему, и решим ее методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

а) Прямой ход.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (\mathrm{II}) \cdot 2 - (\mathrm{I}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

б) Обратный ход. Преобразованная система имеет вид:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ 5y - 4z = -1. \end{cases}$$

Пусть $z = t$ свободная переменная, $x,\ y$ — базисные. Тогда

$$\begin{cases} 2x - y + 2t = 3 \\ 5y - 4t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (y - 2t + 3)/2 = -3t/5 + 7/5 \\ y = 4t/5 - 1/5. \end{cases}$$

Записав общее решение системы в виде

$$\begin{cases} x &= -3t/5 + 7/5 \\ y &= 4t/5 - 1/5 \\ z &= t, \end{cases}$$

получаем параметрические уравнения прямой L.

Замечание: легко убедиться, что уравнения, полученные двумя разными способами, задают в пространстве одну и ту же прямую L.

Упражнение 2.24. *Найти точку пересечения прямых* $L_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ *и* $L_2: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+11}{2} = \dfrac{z+6}{1}$.

Перейдем к параметрическим уравнениям прямых L_1 и L_2:

$$L_1: \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -2 - t \\ z &= -2t, \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x &= -1 + q \\ y &= -11 + 2q \\ z &= -6 + q. \end{cases}$$

Приравняв правые части соответствующих равенств, получаем линейную неоднородную систему, которую решим методом Гаусса:

$$\begin{cases} 1 + 2t = -1 + q \\ -2 - t = -11 + 2q \\ -2t = -6 + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - q = -2 \\ -t - 2q = -9 \\ -2t - q = -6. \end{cases}$$

а) Прямой ход.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -9 \\ -2 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (\mathrm{II})\cdot 2 + (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{III}) + (\mathrm{I}) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -20 \\ 0 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (\mathrm{II})\cdot(-1) \\ (\mathrm{III})\cdot(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 20 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right).$$

б) Обратный ход. Преобразованная система имеет вид:

$$\begin{cases} 2t - q = -2 \\ 5q = 20 \\ 2q = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ q = 4. \end{cases}$$

Подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой L_1, получаем точку пересечения прямых $M(3,\ -3,\ -2)$.

Упражнение 2.25. *Найти угол между прямыми* $L_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+4}{3}$ *и* $L_2: \dfrac{x+3}{0} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Поскольку прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями (2.10), то $\overrightarrow{p_1} = (2,\ -1,\ 3)$ и $\overrightarrow{p_2} = (0,\ 2,\ 1)$ — направляющие векторы данных прямых. Подставляя в формулу (2.15) координаты векторов $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$, получим

$$\cos\varphi = \frac{|2\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 3\cdot 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{70}}{70}\,,$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{70}}{70}\,.$$

Упражнение 2.26. *Доказать, что прямые* $L_1:\ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-4}{2}$ *и* $L_2:$ $\begin{cases} x = -3t + 6 \\ y = 2 \\ z = 4t + 3 \end{cases}$ *скрещиваются и найти расстояние между прямыми.*

Из данных задачи находим координаты направляющего вектора $\overrightarrow{p_1} = (1,\ -2,\ 2)$ прямой L_1 и точки $M_1(-1,\ -3,\ 4) \in L_1$, а также координаты направляющего вектора $\overrightarrow{p_2} = (-3,\ 0,\ 4)$ прямой L_2 и точки $M_2(6,\ 2,\ 3) \in L_2$. Так как векторы $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ не коллинеарны $\left(\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{-2}{0} \neq \dfrac{2}{4}\right)$, то прямые L_1 и L_2 либо пересекаются, либо скрещиваются. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = (7,\ 5,\ -1)$. Поскольку

$$\left\langle \overrightarrow{p_1}\,\overrightarrow{p_2}\,\overrightarrow{M_1M_2}\right\rangle = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-20) + 2\cdot(-25) + 2\cdot(-15) = -100 \neq 0,$$

то векторы $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны. Значит, прямые L_1 и L_2 скрещиваются (см. рис. 2.29).

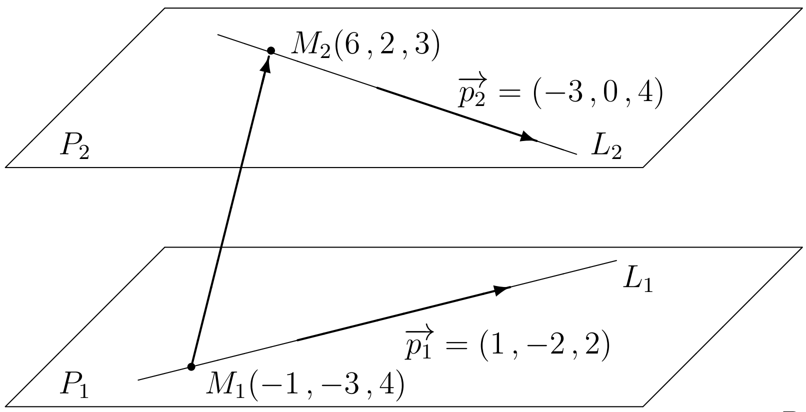

Рис. 2.29

Расстояние между прямыми найдем по формуле (2.14):

$$\left[\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -8\overrightarrow{i} - 10\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k},$$

$$\left|\left[\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2}\right]\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-10)^2 + (-6)^2} = 10\sqrt{2},$$

$$d(L_1,\ L_2) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{p_1}\,\overrightarrow{p_2}\,\overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle\right|}{\left|\left[\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2}\right]\right|} = \frac{100}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$$

Упражнение 2.27. *Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(2,\ 1,\ 3)$ перпендикулярно прямой $L: \ \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+4}{0}$.*

Прямая L задана каноническими уравнениями (2.10), откуда имеем $\overrightarrow{p} = (5,\ -1,\ 0)$ — направляющий вектор. Далее, $\begin{cases} \overrightarrow{p} & \parallel & L \\ P & \perp & L \end{cases} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{p} \perp P$. Значит, вектор $\overrightarrow{p}$ является нормалью к плоскости (см. рис. 2.30).

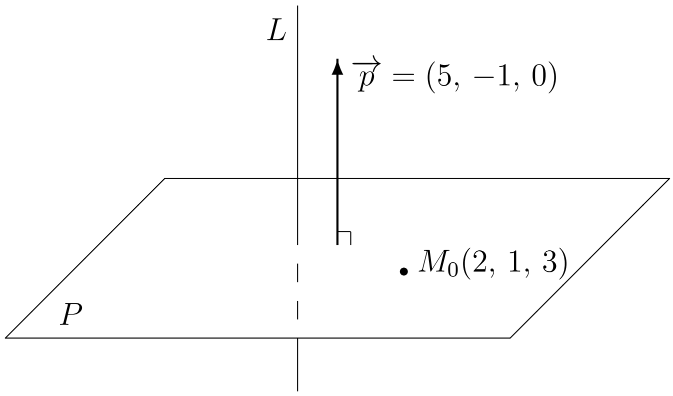

Рис. 2.30

Подставляя в формулу (2.1) координаты точки M_0 и вектора $\overrightarrow{p}$, после преобразования получим

$$5 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-3) = 0,$$
$$5x - y - 9 = 0$$

— уравнение плоскости P.

Упражнение 2.28. *Составить канонические уравнения прямой L, проходящей через точку $M_0(1,\ 3,\ -5)$ перпендикулярно плоскости $P: \ x + 2y - 3z + 2 = 0$.*

Поскольку плоскость P задана общим уравнением (2.4), то $\overrightarrow{n} = (1,\ 2,\ -3)$ — вектор нормали к P. Далее, $\begin{cases} \overrightarrow{n} & \perp & P \\ L & \perp & P \end{cases} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n} \parallel L$. Значит, вектор $\overrightarrow{n}$ является направляющим вектором прямой (см. рис. 2.31).

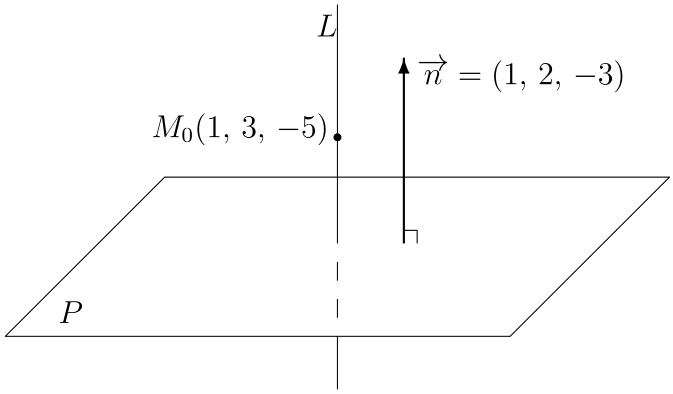

Рис. 2.31

Подставив координаты точки M_0 и вектора $\overrightarrow{n}$ в формулу (2.10), получим

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{-3}$$

— канонические уравнения искомой прямой.

Упражнение 2.29. *Даны прямая* $L: \ \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ *и плоскость* $P: \ x+y-z+1=0$*. Найти:*
1) угол между прямой и плоскостью;
2) точку пересечения прямой и плоскости.

1) Подставляя в формулу (2.16) координаты направляющего вектора прямой $\overrightarrow{p} = (0,\ 2,\ 1)$ и нормали к плоскости $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -1)$, получим

$$\sin\varphi = \frac{|0\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-1)|}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{15}\,,$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{15}\,.$$

2) Пусть M — точка пересечения прямой L и плоскости P. Значит, координаты точки M должны удовлетворять системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1} \\ x+y-z+1=0. \end{array}\right.$$

Запишем уравнения прямой L в параметрической форме и решим полученную систему:

$$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2t \\ z=-1+t \\ x+y-z+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2t \\ z=t-1 \\ 1+2t-(t-1)+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} t &=& -3 \\ x &=& 1 \\ y &=& -6 \\ z &=& -4. \end{array}\right.$$

Итак, $M(1,\ -6,\ -4)$ — точка пересечения прямой и плоскости.

Упражнение 2.30. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(0,\ 1,\ 2)$ *и прямую* $L: \ \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{-1}\,.$

Из канонических уравнений прямой находим координаты направляющего вектора $\overrightarrow{p} = (4,\ 0,\ -1)$ и точки $M_1(-1,\ 2,\ 0)$, лежащей на прямой. Значит, искомая плоскость P проходит через точки M_0 и M_1 параллельно вектору $\overrightarrow{p}$ (см. рис. 2.32).

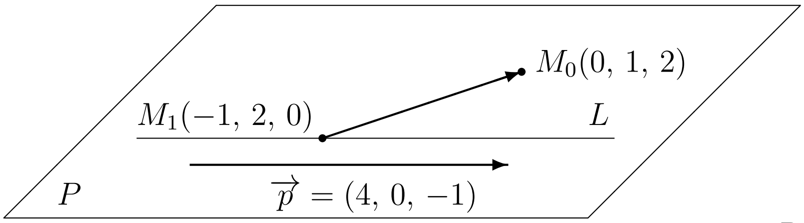

Рис. 2.32

Дальнейшее решение аналогично задаче 2.15: подставим в формулу (2.2) координаты точки M_0 и векторов $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{M_1M_0} = (1,\ -1,\ 2)$ и после вычисления определителя получим

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-x - 9(y-1) - 4(z-2) = 0,$$

$$-x - 9y - 4z + 17 = 0$$

— уравнение плоскости P.

Упражнение 2.31. *Убедиться, что прямые* $L_1 :\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ *и* $L_2 :\ \dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-4}$ *принадлежат одной плоскости и составить уравнение этой плоскости.*

Из данных задачи находим координаты направляющего вектора $\overrightarrow{p_1} = (3,\ 2,\ -2)$ прямой L_1 и точки $M_1(2,\ -1,\ 3) \in L_1$, а также координаты направляющего вектора $\overrightarrow{p_2} = (-4,\ 1,\ -4)$ прямой L_2 и точки $M_2(1,\ 2,\ -3) \in L_2$. Так как векторы $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ не коллинеарны $\left(\dfrac{3}{-4} \neq \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-2}{-4}\right)$, то прямые L_1 и L_2 либо пересекаются, либо скрещиваются. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1,\ 3,\ -6)$. Поскольку

$$\left\langle \overrightarrow{p_1}\overrightarrow{p_2}\overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot 6 - 2 \cdot 20 - 2 \cdot (-11) = 0,$$

то векторы $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны. Значит, прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, и, соответственно, пересекаются (см. рис. 2.33).

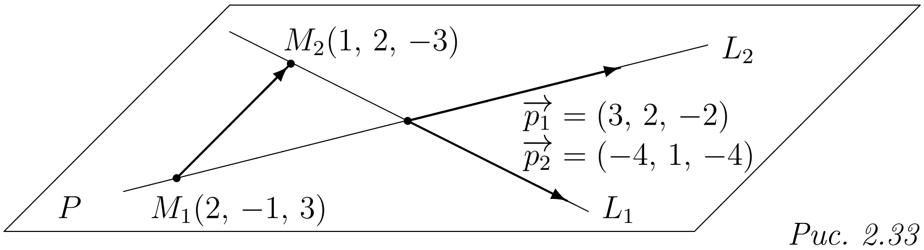

Рис. 2.33

Уравнение искомой плоскости P найдем, подставив в формулу (2.2) координаты точки M_1 и векторов $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$. После вычисления определителя получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - (y+1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + (z-3)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-6(x-2) + 20(y+1) + 11(z-3) = 0,$$

$$-6x + 20y + 11z - 1 = 0$$

— уравнение плоскости P.

Упражнение 2.32. *Даны прямые* $L_1 : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z+2}{2}$ *и* $L_2 : \begin{cases} x = -2t - 4 \\ y = -3t - 7 \\ z = -t + 1. \end{cases}$

1) Доказать, что прямые параллельны и найти расстояние между ними.
2) Составить уравнение плоскости P, проходящей через данные прямые.
3) Составить канонические уравнения прямой L, лежащей в плоскости P и равноудаленной от данных прямых.

1) Из данных задачи находим координаты направляющего вектора $\overrightarrow{p_1} = (4,\ 6,\ 2)$ прямой L_1 и точки $M_1(1,\ 0,\ -2) \in L_1$, а также координаты направляющего вектора $\overrightarrow{p_2} = (-2,\ -3,\ -1)$ прямой L_2 и точки $M_2(4,\ 7,\ -1) \in L_2$. Поскольку

$$\frac{4}{-2} = \frac{6}{-3} = \frac{2}{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{p_1} \parallel \overrightarrow{p_2}\,,$$

то прямые L_1 и L_2 либо параллельны, либо совпадают. А так как вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (3,\ 7,\ 1)$ не коллинеарен направляющим векторам прямых:

$$\frac{-2}{3} = \frac{-3}{7} \neq \frac{-1}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \overrightarrow{p_2}\,,$$

то L_1 и L_2 параллельны (см. рис. 2.34).

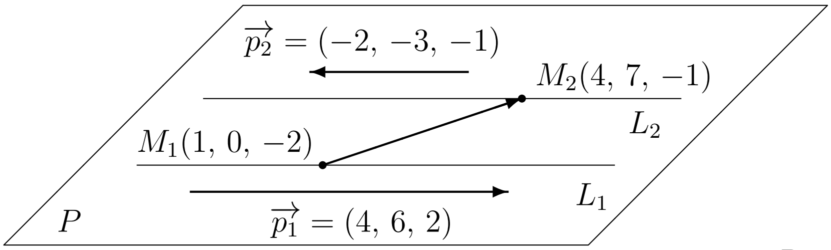

Рис. 2.34

Расстояние между прямыми, очевидно, равно расстоянию от точки M_2 до прямой L_1, и может быть найдено по формуле (2.13):

$$d(M_2,\ L_1) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{p_1}\right|}.$$

Подставляя данные задачи, получаем

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{i} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 8\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 10\overrightarrow{k},$$

$$\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1}\right]\right| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + 10^2} = \sqrt{168} = 2\sqrt{42},$$

$$|\overrightarrow{p_1}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{14},$$

$$d(M_2,\ L_1) = \frac{2\sqrt{42}}{2\sqrt{14}} = \sqrt{3}.$$

2) Уравнение плоскости P можно найти так же, как в предыдущей задаче, подставив в формулу (2.2) координаты точки M_1 и векторов $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$. Предложим другой способ. По определению векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1}\right] \perp \overrightarrow{M_1M_2}, \quad \left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1}\right] \perp \overrightarrow{p_1}.$$

Значит, этот вектор можно взять в качестве нормали к плоскости P. Подставляя в формулу (2.1) координаты точки M_1 и вектора $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1}\right] = (8,\ -2,\ -10)$, после преобразования получаем

$$8 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y-0) - 10 \cdot (z+2) = 0,$$
$$8x - 2y - 10z - 28 = 0,$$
$$4x - y - 5z - 14 = 0$$

— искомое уравнение плоскости.

3) Пусть M — середина отрезка M_1M_2. Легко показать, что точка M равноудалена от прямых L_1 и L_2. Значит, искомая прямая L проходит через данную точку параллельно данным прямым (см. рис. 2.35).

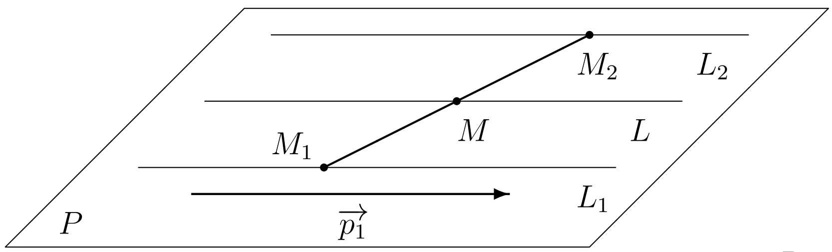

Рис. 2.35

Найдем координаты точки M:

$$x = \frac{1+4}{2} = 5/2, \quad y = \frac{0+7}{2} = 7/2, \quad z = \frac{-2-1}{2} = -3/2.$$

Подставив координаты вектора $\overrightarrow{p_1}$ и точки M в формулу (2.10), получим

$$\frac{x-5/2}{4} = \frac{y-7/2}{6} = \frac{z+3/2}{2}$$

— канонические уравнения прямой L.

Упражнение 2.33. *Даны точка $M_0(3,\ 0,\ 4)$ и плоскость $P:\ 3x - y + z + 9 = 0$.*
1) Найти проекцию точки M_0 на плоскость P.
2) Найти точку, симметричную точке M_0 относительно плоскости P.

1) Пусть $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ — проекция точки M_0 на плоскость P. Точка M_1 есть основание перпендикуляра, опущенного из M_0 на P (см. рис. 2.36).

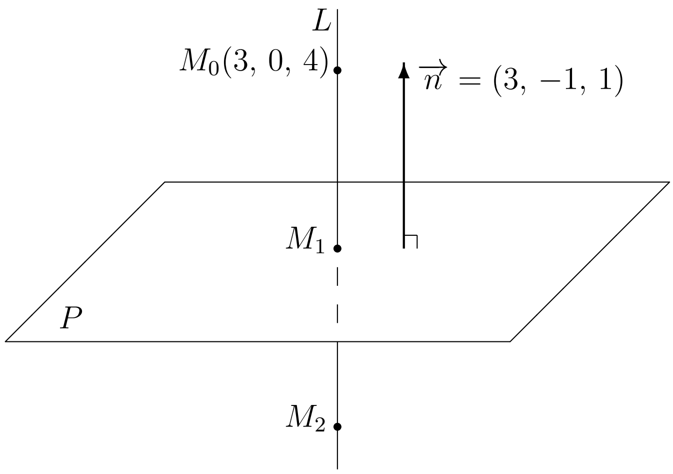

Рис. 2.36

Поэтому для того, чтобы найти координаты точки M_1, составим уравнение прямой L, проходящей через точку M_0 перпендикулярно плоскости P. В качестве направляющего вектора прямой возьмем нормаль $\overrightarrow{n} = (3,\ -1,\ 1)$ к плоскости. Затем найдем точку пересечения L и P (см. упражнения 2.28, 2.29).

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-4}{1} \\ 3x - y + z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = \quad - \ t \\ z = 4 + \ t \\ 3x - y + z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = \quad - \ t \\ z = 4 + \ t \\ 3(3t+3) + t + (t+4) + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x = -3 \\ y = 2 \\ z = 2. \end{cases}$$

Итак, $M_1(-3,\ 2,\ 2)$ — проекция точки M_0 на плоскость P.

2) Пусть $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ — точка, симметричная точке M_0 относительно плоскости P. Очевидно, что точка M_2 лежит на прямой L, и $|M_0M_1| = |M_1M_2|$. Координаты точки M_2 найдем, используя формулы координат середины отрезка:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2} \\ y_1 = \dfrac{y_0 + y_2}{2} \\ z_1 = \dfrac{z_0 + z_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = \dfrac{3 + x_2}{2} \\ 2 = \dfrac{0 + y_2}{2} \\ 2 = \dfrac{4 + z_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -9 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = 0. \end{cases}$$

Итак, $M_2(-9,\ 4,\ 0)$ — точка, симметричная точке M_0 относительно плоскости P.

Упражнение 2.34. *Даны точка* $M_0(3,\ 4,\ 8)$ *и прямая* $L:\ \dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$.
1) Найти проекцию точки M_0 *на прямую* L.
2) Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M_0 *на прямую* L.
3) Найти точку, симметричную точке M_0 *относительно прямой* L.

1) Пусть $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ — проекция точки M_0 на прямую L. Легко видеть, что M_1 — точка пересечения прямой L и плоскости P, проходящей через точку M_0 перпендикулярно L (см. рис. 2.37).

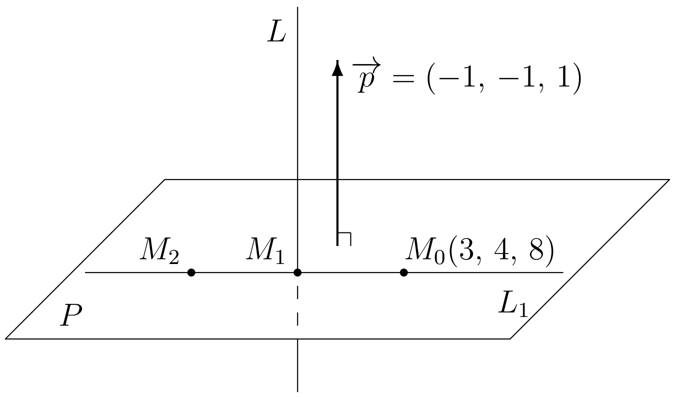

Рис. 2.37

Составим уравнение плоскости P, в качестве нормали к плоскости возьмем направляющий вектор прямой $\overrightarrow{p} = (1,\ -3,\ 1)$. Затем найдем точку пересечения L и P (см. упражнения 2.27, 2.29).

$$\begin{cases} -(x-3)-(y-4)+(z-8)=0 \\ \dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-1}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-y+z-1=0 \\ x=4-t \\ y=5-t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(4-t)-(5-t)+(1+t)-1=0 \\ x=4-t \\ y=5-t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ x=1 \\ y=2 \\ z=4. \end{cases}$$

Итак, $M_1(1,\ 2,\ 4)$ — проекция точки M_0 на прямую L.

2) Перпендикуляр, опущенный из точки M_0 на прямую L — это прямая, проходящая через точки M_0 и M_1 (см. рис. 2.37). Подставляя координаты M_0 и M_1 в формулу (2.12), получаем

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z-4}{8-4}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{4}$$

— канонические уравнения прямой L_1.

3) Пусть $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ — точка, симметричная точке M_0 относительно прямой L. Очевидно, что точка M_2 лежит на прямой L_1, и $|M_0M_1| = |M_1M_2|$. Координаты точки M_2 найдем, используя формулы координат середины отрезка:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_0+x_2}{2} \\ y_1 = \dfrac{y_0+y_2}{2} \\ z_1 = \dfrac{z_0+z_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{3+x_2}{2} \\ 2 = \dfrac{4+y_2}{2} \\ 4 = \dfrac{8+z_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 0. \end{cases}$$

Итак, $M_2(-1,\ 0,\ 0)$ — точка, симметричная точке M_0 относительно прямой L.

2.10. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,\ -2,\ 4)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (0,\ 2,\ -1)$.

2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,\ -3,\ -1)$ параллельно векторам $\overrightarrow{a} = (2,\ -4,\ -1)$ и $\overrightarrow{b} = (1,\ 2,\ 3)$.

2.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,-1,2)$, $B(2,0,2)$ и $C(4,-1,-1)$.

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,\ 1,\ 1)$ и $B(2,3,-1)$ параллельно вектору $\overrightarrow{a} = (0,\ -1,\ 2)$.

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3,\ 1,\ 4)$ параллельно плоскости $P:\ -7x+2y+z-2=0$.

2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,\ 1,\ -1)$ перпендикулярно плоскостям $P_1:\ 2x-y+5z+3=0$ и $P_2:\ x+3y-z-7=0$.

2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,\ -1,\ 1)$ и $B(3,\ 1,\ 2)$ перпендикулярно плоскости $P:\ 3x-y-5z=0$.

2.8. Найти угол между плоскостями $P_1:\ x-7y+2z=0$ и $P_2:\ 5x+3y-2=0$.

2.9. Найти расстояние от точки $A(1,\ 2,\ 4)$ до плоскости $P:\ 6x-2y-3z-6=0$.

2.10. Даны плоскости $P_1:\ -x+2y-z+1=0$ и $P_2:\ 2x-4y+2z+3=0$.
1) Доказать, что плоскости P_1 и P_2 параллельны.
2) Найти расстояние между этими плоскостями.
3) Составить уравнение плоскости P, находящейся к плоскости P_1 вдвое ближе, чем к плоскости P_2.

2.11. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(0,\ 2,\ 3)$ параллельно вектору $\overrightarrow{p}=(-1,\ 3,\ -2)$.

2.12. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(4,\ -1,\ 1)$ и $B(3,\ 3,\ -1)$.

2.13. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-2,1,0)$ параллельно прямой $L:\ \dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{0}$.

2.14. Даны вершины треугольника $A(-1,\ -2,\ 4)$, $B(-4,\ -1,\ 2)$, $C(-5,\ 6,\ -4)$. Составить:
1) канонические уравнения стороны (AC);
2) параметрические уравнения средней линии треугольника, параллельной стороне (AC);
3) канонические уравнения медианы, проведенной из вершины B;
4) канонические уравнения высоты, проведенной из вершины B.

2.15. Даны вершины треугольника $A(-1,\ -2,\ 4)$, $B(-4,\ -1,\ 2)$ и $C(-4,\ 0,\ 3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A.

2.16. Доказать, что точки $A(-3,\ -7,\ -5)$, $B(0,\ -1,\ -2)$, $C(2,\ 3,\ 0)$ лежат на одной прямой, причем точка B расположена между A и C. Составить канонические уравнения этой прямой.

2.17. Составить параметрические уравнения прямой
$$L:\ \begin{cases} x-2y+3z+1=0\\ 2x+y-4z-8=0.\end{cases}$$

2.18. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,\ -3,\ 5)$ параллельно прямой $L:\ \begin{cases} 3x-y+2z-7=0\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

2.19. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-3,\ 2,\ 0)$ перпендикулярно плоскости $P:\ 2x-5z+1=0$.

2.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой L.

1) $M_0(0,\,1,\,2)$, $\quad L:\ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{-1}$;

2) $M_0(2,\,-3,\,5)$, $\quad L:\ \begin{cases} 2x+y-2z+1=0\\ x+y+z-5=0.\end{cases}$

2.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и прямую L:

1) $M_0(2,\,0,\,1)$, $\ L:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$;

2) $M_0(1,\,2,\,3)$, $\ L_2:\ \begin{cases} x=2t+1\\ y=3t-2\\ z=4t.\end{cases}$

2.22. Даны плоскости $P_1:\ 2x+y-3z=0$ и $P_2:\ -x+2y+3z-4=0$.

1) Убедиться, что плоскости не параллельны и составить уравнения линии пересечения плоскостей.

2) Составить уравнения биссектральных плоскостей двугранных углов, образованных плоскостями P_1 и P_2.

2.23. Найти угол между прямыми L_1 и L_2. Пересекаются или скрещиваются данные прямые? Если пересекаются, найти точку пересечения и составить уравнение плоскости P, проходящей через L_1 и L_2. Если скрещиваются, найти расстояние между L_1 и L_2.

1) $L_1:\ \dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+7}{-4}$, $\quad L_2:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$;

2) $L_1:\ \dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+5}{2}$, $\quad L_2:\ \begin{cases} x=-3t+1\\ y=2\\ z=4t-5;\end{cases}$

3) $L_1:\ \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $\quad L_2:\ \begin{cases} x+y-z+4=0\\ 2x-3y-z-5=0;\end{cases}$

4) $L_1:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{4}$, $\quad L_2:\ \dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-9}{1}$;

5) $L_1:\ \begin{cases} x-y+2z-1=0\\ 2x+y-z+2=0,\end{cases}$ $\quad L_2:\ \begin{cases} x+y+2z=0\\ 2x-3z=0.\end{cases}$

2.24. Даны прямые L_1 и L_2. а) Доказать, что прямые параллельны и найти расстояние между ними. б) Составить уравнение плоскости P, проходящей через данные прямые. в) Составить канонические уравнения прямой L, лежащей в плоскости P и равноудаленной от данных прямых.

1) $L_1:\ \dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-5}{-6}=\dfrac{z-5}{0}$; $\ L_2:\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-9}{0}$;

2) $L_1:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$; $\ L_2:\ \begin{cases} x=3t+7\\ y=4t+1\\ z=2t+3;\end{cases}$

3) $L_1:\ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+5}{1}$, $\ L_2:\ \begin{cases} x+y-z=0\\ x-y-5z-8=0.\end{cases}$

2.25. Найти точку пересечения и угол между прямой $L:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{12}=\dfrac{z-6}{-3}$ и плоскостью $P:\ 6x-3y+2z=0$.

2.26. Доказать, что прямая $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 3y-4z-5=0 \end{cases}$ и плоскость $2x+4y+3z-17=0$ перпендикулярны. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

2.27. Даны точка M_0 и плоскость P. Найти а) проекцию точки M_0 на плоскость P, б) расстояние от точки M_0 до плоскости P, в) точку, симметричную точке M_0 относительно плоскости P.
1) $M_0(5,\,2,\,-1)$, $P:\ 2x-y+z+5=0$;
2) $M_0(4,\,-3,\,1)$, $P:\ x+2y-z-3=0$.

2.28. Даны точка M_0 и прямая L. Найти а) проекцию точки M_0 на прямую L; б) расстояние от точки M_0 до прямой L, г) точку, симметричную точке M_0 относительно прямой L. в) Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую L; д) Составить уравнение плоскости P, равноудаленной от точки M_0 и прямой L.
1) $M_0(4,\,3,\,10)$, $L:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$;
2) $M_0(5,\,3,\,1)$, $L:\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$;
3) $M_0(3,\,1,\,2)$, $L:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$.

2.11. Ответы к задачам для самостоятельного решения

2.1. $2y-z+8=0$.

2.2. $-10x-7y+8z+7=0$.

2.3. $3x+3y+z-8=0$.

2.4. $2x-2y-z+1=0$.

2.5. $-7x+2y+z-27=0$.

2.6. $2x-y-z-2=0$.

2.7. $9x-8y+7z-33=0$.

2.8. $\varphi=\arccos\left(\dfrac{8}{3\sqrt{51}}\right)$.

2.9. $d(A,\,P)=4$.

2.10. 2) $d=\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$ 3) $-4x+8y-4z+9=0$, или $-6x+12y-6z+1=0$.

2.11. $\begin{cases} x = \quad - \ t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 2t. \end{cases}$

2.12. $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$.

2.13. $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z}{0}$.

2.14. 1) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$; 2) $\begin{cases} x = -5/2 + t \\ y = -3/2 - 2t \\ z = 3 + 2t; \end{cases}$

3) $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{-2}$; 4) $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2. \end{cases}$

2.15. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$; $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{1}$.

2.16. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+5}{1}$.

2.17. $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 2 \\ z = t. \end{cases}$

2.18. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-5}{5}$.

2.19. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{-5}$.

2.20. $4x-z+2=0$; $3x-4y+z-23=0$.

2.21. 1) $5x-3y-z-9=0$, 2) $7x+6y-8z+5=0$.

2.22. 1) $\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{5}$; 2) $x+3y-4=0$, $-3x+y+6z-4=0$.

2.23. 1) $\varphi=\arccos\dfrac{10\sqrt{17}}{17}$, $L_1\cap L_2=M(5,\,1,\,1)$, $P:\ 2x-4y-z-5=0$;

2) $\varphi=\arccos\dfrac{1}{3}$, $L_1\cap L_2=M(4,\,2,\,-9)$, $P:\ 4x+5y+3z+1=0$;

3) $\varphi=\arccos\dfrac{9\sqrt{2}}{14}$, $L_1\cap L_2=M(1,\,-2,\,3)$, $P:\ x-4y-9=0$.

4) $\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{87}}{29}$, $d(L_1,\ L_2)=\sqrt{78}$;

5) $\varphi=\arccos 5/7$, $d(L_1,\ L_2)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

2.24. 1) $d(L_1,\ L_2)=4$, $P:\ -3x+2y-1=0$, $L:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-7}{0}$;

2) $d(L_1,\ L_2)=3$, $P:\ -8x-y+14z+15=0$, $L:\ \dfrac{x-9/2}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-3/2}{2}$;

3) $d(L_1,\ L_2)=\dfrac{\sqrt{38}}{2}$, $P:\ 4x+9y+6z+20=0$, $L:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+5/2}{1}$.

2.25. $\varphi = \arcsin\dfrac{18}{91}$, $M(5,\ 12,\ 3)$.

2.26. $M(1,\ 3,\ 1)$.

2.27. 1) а) $M_1(1,\ 4,\ -3)$, б) $d(M_0,\ P) = 2\sqrt{6}$, в) $M_2(-3,\ 6,\ -5)$; 2) а) $M_1(5,\ -1,\ 0)$, б) $d(M_0,\ P) = \sqrt{6}$, в) $M_2(6,\ 1,\ -1)$.

2.28. 1) а) $M_1(3,\ 6,\ 8)$, б) $d(M_0,\ L) = \sqrt{14}$, в) $M_2(2,\ 9,\ 6)$,
г) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z-8}{2}$, д) $x - 3y + 2z - 8 = 0$;
2) а) $M_1(-1,\ 3,\ 3)$, б) $d(M_0,\ L) = 2\sqrt{10}$, в) $M_2(-7,\ 3,\ 5)$,
г) $\dfrac{x-5}{-6} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-1}{2}$, д) $x + 2y + 3z - 14 = 0$;
3) а) $M_1(3,\ 1,\ 2)$, б) $d(M_0,\ L) = 3$, в) $M_2(3,\ 1,\ -4)$,
г) $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+1}{3}$, д) $2x + y - 7 = 0$.

Список литературы

[1] Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968.

[2] Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М. : МГУ, 1998.

[3] Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. Том I. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[4] Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976.

[5] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре — М.: Физматлит, 2004.

[6] Болгов В.А., Демидович Б.П. и др. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч. I. Линейная алгебра и основы математического анализа. — М.: Физматлит, 1981.

Оглавление