Линейные пространства

Определения

Определение линейного пространства [30, с. 12]

Множество L называется линейным пространством над полем $\mathbb{P}$ (поле скаляров) если выполняются следующие свойства.

- На L определены две операции $\forall a, b \in L, \forall \alpha \in \mathbb{P}$:
  1. «$+$» — сложение элементов из L т.ч. $a + b \in L, \forall a, b \in L$.
  2. «$\cdot$» — умножение элементов из L на элементы поля $\mathbb{P}$ т.ч. $\alpha \cdot a = \alpha a \in L$.
- Элементы $a, b, c \in L$ образуют коммутативную группу по сложению:
  1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность по сложению;
  2. $\exists 0_L \in L$ т. ч. $a + 0_L = 0_L + a = a$; 0_L — нейтральный элемент по сложению;
  3. $\forall a \in L \ \exists -a \in L$ т. ч. $a + (-a) = (-a) + a = 0_L$; $-a$ — обратный элемент по сложению;
  4. $a + b = b + a$ — коммутативность по сложению,
- Дополнительные свойства умножения на скаляры $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$:
  5. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ — дистрибутивность по сложению,
  6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ — дистрибутивность по умножению,
  7. $(\alpha(\beta))a = \alpha(\beta a)$ — ассоциативность по умножению,
  8. $\exists 1_{\mathbb{P}} \in \mathbb{P}$ т.ч. $1_{\mathbb{P}} \cdot a = a \cdot 1_{\mathbb{P}} = a$; $1_{\mathbb{P}}$ — нейтральный элемент по умножению.

Следствия из определения

Непосредственно из определения доказываются следующие свойства.

- Групповые свойства.
  - В любом линейном пространстве L нулевой элемент 0_L является единственным.
  - Для каждого $a \in L$ существует **единственный** противоположный элемент $-a$ по сложению.
  - Противоположным элементу 0_L является он сам.
- Свойства умножения на скаляр.
  - $0_{\mathbb{P}} \cdot a = 0_L$ для любого $a \in L$.
  - $(-1)_{\mathbb{P}} \cdot a = -a$.
  - $\alpha \cdot 0_L = 0_L$.

Пример

Линейными пространствами являются следующие множества:

- множество двумерных векторов на плоскости и множество трехмерных векторов в трехмерном пространстве;
- поле $\mathbb{P}$ над $\mathbb{P}$, в частности $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ над $\mathbb{C}$;
- $C[a, b]$ — множество непрерывных функций на отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}$ (в частности множество полиномов $P(x)$);
- множество векторов-строк $L = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, \forall x_i \in \mathbb{R}\}$;
- множество векторов-столбцов $L = \mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n)^T \,|\, \forall x^i \in \mathbb{R}\}$.

Методические замечания

- Важно помнить, что существуют множества, которые состоят из элементов, не похожих на геометрические векторы («стрелки»), но в своем строении (структуре) не отличимы от аксиоматически определяемого векторного пространства.
- Под структурой некоторого множества понимается набор операций, которые можно совершать над элементами. В случае линейного пространства это операции «$+$» и «$\cdot$». Множество с некоторой дополнительной структурой принято называть пространством.
- Геометрические ассоциации, связанные с этими терминами, не вводят в заблуждение математиков, однако создают некоторое неудобство для учащихся. В абстрактном (аксиоматическом) понятии линейного пространства нет ничего геометрического.

Линейная комбинация и оболочка

Располагая любым конечным набором скаляров α_i, $i = 1, \dots, m$ и векторов $a_1, \dots, a_m \in M \subset L$ мы можем составить выражение

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m,$$

называемое линейной комбинацией векторов a_i с коэффициентами α_i. Множество $\langle M \rangle$ всех возможных комбинаций набора векторов $a_1, \dots, a_m$ из подмножества $M \subset L$ называется линейной оболочкой подмножества M.

Линейная оболочка $\langle M \rangle$ — наименьшее подпространство в L, содержащее M. Говорят, что $\langle M \rangle$ — подпространство, порожденное векторами $a_i \in M$.

Линейная зависимость и независимость

Система векторов $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in L$ называется линейно зависимой, если некоторая их нетривиальная линейная комбинация равна нулю; иначе говоря, найдутся такие скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{P}$ не все равные нулю, что линейная комбинация векторов обращается в ноль:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0_L.$$

Условие нетривиальности, можно записать еще и так:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = (\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + \ldots + (\alpha_n)^2 \neq 0_{\mathbb{P}}.$$

Наоборот, система векторов $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in L$ называется линейно **не**зависимой, если из этих векторов **нельзя** построить нетривиальную линейную комбинацию:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0_L \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 0 \forall i = 1, \ldots, n.$$

Теорема

Система векторов $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in L$, $n \geqslant 2$ *линейна зависима тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных. Например:*

$$a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_4 a_4 + \ldots + \alpha_n a_n, \text{ при } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0_L.$$

Теорема

Если система векторов линейно независима, то и всякая ее подсистема также линейно независима.

Определение

Максимальной называют линейно независимую систему векторов, которая не допускает расширения до линейно независимой подсистемы из большего числа векторов. Число векторов, содержащихся в любой максимальной линейно независимой подсистеме данной системы векторов, называют рангом этой системы.

Базис линейного пространства

Определение

Линейное пространство L, в котором существует n линейно независимых векторов, но нет линейно независимых систем с большим числом векторов (большего ранга), называются n-мерными. Обозначают $\dim L = n$.

Базисом n-мерного линейного пространства L называется любая линейно независимая система из n векторов данного пространства. Число векторов в базисе равно размерности линейного пространства.

Для обозначения базисных векторов будем использовать латинскую букву e. Набор векторов, составляющих базис, будем считать упорядоченным и перечислять в треугольных скобках:

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle.$$

Координаты вектора

Представление вектора в виде линейной комбинации базисных векторов принято также называть разложением вектора по базису, а скаляры $\alpha_i \in \mathbb{P}$ линейной комбинации — координатами или компонентами вектора.

Теорема

Каждый элемент линейного пространства L с базисом $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ может быть ***единственным способом*** *представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:*

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \dots \alpha^n e_n \in L,\ \alpha^i \in \mathbb{P}.$$

Теорема говорит о том, что каждый элемент пространства L однозначно определяется своими координатами (компонентами) относительно данного базиса.

Изоморфизм линейных пространств

Теорема

Любое n-мерное абстрактное линейное пространство L с базисом $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ изоморфно пространству векторов-столбцов той же размерности. Так для любого $a \in L$ справедливо:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}$$

Данное утверждение доказывается строго в курсе линейной алгебры как теорема о стандартном изоморфизме. Для дифференциальной геометрии существенно использование именно вектор-столбцов.

Стандартные обозначения для векторов

Пора ввести более удобные обозначения. На печати чаще всего элементы линейного пространства обозначают полужирным шрифтом:

$$\mathbf{a} \in L, \text{ сравните с обычным шрифтом: } a \in L.$$

Это позволяет легко отличить вектор от скаляра и использовать для обозначения скаляров также латинские буквы, например, обозначить компоненты вектора теми же буквами, что и сам вектор:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a^i\mathbf{e}_i.$$

В письме от руки используют стрелку над буквой:

$$\vec{a}, \ \bar{a}, \overset{\rightharpoondown}{a}$$

Стандартные обозначения для базисных векторов

Базисные векторы будем обозначать буквой $\mathbf{e}$ и нумеровать нижним индексом. Набор базисных векторов будем заключать в треугольные скобки, чтобы показать важность порядка перечисления базисных векторов.

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$$

Знак равенства говорит о том, что каждый элемент пространства L может быть выражен через набор $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$.

Если в пространстве L задан другой базис, то будем обозначать его чаще всего как:

$$L = \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$$

Стандартные обозначения для компоненты векторов

Компоненты вектора будем нумеровать индексами, расположенными строго сверху и записывать их исключительно в виде столбца:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

В случае необходимости сэкономить место, можно записать компоненты вектора в строку, но дополнительно указать знак транспонирования:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^n \end{pmatrix}^T$$

чтобы подчеркнуть, что перед нами столбец.

Матрица

Матрица — набор (массив) скалярных элементов, записанных в виде таблицы, которая состоит из n строк и m столбцов. Если $n = m$, то матрица называется квадратной. Скалярные элементы, составляющие матрицу, называются компонентами матрицы.

Матрицы используются для записи (представления) различных алгебраических объектов

- Вектор в конкретном базисе записывается в виде матрицы $n \times 1$ с одним столбцом и n строками или в виде матрицы $1 \times n$ с одной строкой и n столбцами.
- Коэффициенты системы линейных уравнений могут записываться в виде матрицы $n \times n$.
- Линейные операторы представимы в виде матриц.
- Квадратичные и билинейные формы представимы в виде матриц.
- Комплексные числа представимы как матрицы 2×2 (редко используется).

Стандартные обозначения для матриц

Компоненты матриц будем нумеровать индексами, расположенными сверху и снизу.

- Верхний индекс — номер строки.
- Нижний индекс — номер столбца.

Сами матрицы будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, M и т.д. Таблицу обозначают квадратными или круглыми скобками:

$$A = \left[a^i_j\right] = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_{m-1} & a^1_m \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_{m-1} & a^2_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1}_1 & a^{n-1}_2 & \dots & a^{n-1}_{m-1} & a^{n-1}_m \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_{m-1} & a^n_m \end{pmatrix}$$

Запись в квадратных скобках $\left[a^i_j\right]$ означает весь набор компонент матрицы, а не один конкретный элемент с индексами i и j. Индекс $i = 1, \dots, n$ — номер строки, а индекс $j = 1, \dots, m$ — номер столбца.

Операции с матрицами

Для матриц определяют следующие операции:

- сложение матриц, имеющих один и тот же размер;
- умножение матриц подходящего размера;
- умножение матрицы на скаляр (элемент поля/кольца).

Множество матриц относительно той или иной операции образуют следующие алгебраические множества.

- Коммутативная группа относительно сложения.
- Векторное пространство над полем скаляров относительно сложения матриц друг с другом и умножения на скаляр.

Можно наложить дополнительные требования, например квадратность и существование обратной матрицы относительно умножения. Тогда

- квадратные матрицы образуют ассоциативное кольцо с единицей относительно матричного сложения и матричного умножения;
- квадратные матрицы с ненулевым определителем образуют группу относительно умножения.

Сложение матриц

Складывать можно матрицы одинаковым количеством строк и столбцов соответственно. Определяется сложение следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{m-1}^1 & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{m-1}^2 & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{m-1}^{n-1} & a_m^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{m-1}^n & a_m^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_{m-1}^1 & b_m^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_{m-1}^2 & b_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \dots & b_{m-1}^{n-1} & b_m^{n-1} \\ b_1^n & b_2^n & \dots & b_{m-1}^n & b_m^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & a_2^1 + b_2^1 & \dots & a_{m-1}^1 + b_{m-1}^1 & a_m^1 + b_m^1 \\ a_1^2 + b_1^2 & a_2^2 + b_2^2 & \dots & a_{m-1}^2 + b_{m-1}^2 & a_m^2 + b_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} + b_1^{n-1} & a_2^{n-1} + b_2^{n-1} & \dots & a_{m-1}^{n-1} + b_{m-1}^{n-1} & a_m^{n-1} + b_{m-1}^{n-1} \\ a_1^n + b_1^n & a_2^n + b_2^n & \dots & a_{m-1}^n + b_{m-1}^n & a_m^n + b_m^n \end{pmatrix}$$

или

$$[a_j^i] + [b_j^i] = [a_j^i + b_j^i], \; i = 1, \dots, n; \; j = 1, \dots, m.$$

Умножение матрицы на скаляр

При умножении матрицы на скаляр, каждый элемент матрицы умножается на этот скаляр:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1^1 & \alpha \cdot a_2^1 & \dots & \alpha \cdot a_{m-1}^1 & \alpha \cdot a_m^1 \\ \alpha \cdot a_1^2 & \alpha \cdot a_2^2 & \dots & \alpha \cdot a_{m-1}^2 & \alpha \cdot a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha \cdot a_1^{n-1} & \alpha \cdot a_2^{n-1} & \dots & \alpha \cdot a_{m-1}^{n-1} & \alpha \cdot a_m^{n-1} \\ \alpha \cdot a_1^n & \alpha \cdot a_2^n & \dots & \alpha \cdot a_{m-1}^n & \alpha \cdot a_m^n \end{pmatrix}$$

Перемножение матриц

Произведение $A \times B$ матриц A и B определяют двумя способами.

- Строка матрицы A умножается на столбец матрицы B.
- Столбец матрицы A умножается на строку матрицы B.

Чаще встречается первый способ: умножение строки на столбец. Предположим, что

- A — матрица размера $n \times m$,
- B — матрица размера $m \times k$,

тогда результатом перемножения $A \times B$ будет матрица C размера $n \times k$ с элементами c^i_j, где

$$c^i_j = \sum_{l=1}^{m} a^i_l b^l_j = a^i_1 b^1_j + a^i_2 b^2_j + \ldots + a^i_m b^m_j, \;\; i = 1, \ldots, n \; l = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, k.$$

Число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B. У матрицы C количество строк совпадает с A, а количество столбцов с B.

Определение

Линейным оператором (преобразованием) в линейном пространстве L над полем $\mathbb{P}$ называют преобразование $f\colon L \to L$, удовлетворяющее двум свойствам линейности:

- $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$,
- $f(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in L$, $\forall \alpha \in \mathbb{P}$.

Часто, оператор обозначают прямым рубленным шрифтом и не используют скобок для указания его действия на элемент пространства L:

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{v} \in L$$

Множество линейных операторов в L само образует линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Напомним, что под $\mathbb{P}$ почти всегда понимается $\mathbb{R}$ и реже $\mathbb{C}$.

Матрица линейного оператора 1

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} \in L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle,$$

и разложим его по компонентам в некотором базисе

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + x^n \mathbf{e}_n,$$

а затем подействуем на него некоторым оператором $\mathrm{A} \colon L \to L$

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathrm{A} \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathrm{A}\mathbf{e}_i = x^1 \mathrm{A}\mathbf{e}_1 + x^2 \mathrm{A}\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n \mathrm{A}\mathbf{e}_n.$$

При действии оператора A на вектор $\mathbf{x}$ мы получим некоторый вектор $\mathbf{y} \in L$:

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

Матрица линейного оператора 2

Вектор $\mathbf{y}$ можно выразить в том же базисе $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, но его компоненты $y^1, \dots, y^n$ нам не известны. Однако их можно вычислить, если знать, как действует оператор A на базисные векторы:

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_i = ?$$

При действии оператора A на базисный вектор $\mathbf{e}_i$ мы получим некоторый другой вектор, компоненты которого можно записать в том же базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$:

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \mathbf{e}_j = a_i^1 \mathbf{e}_1 + a_i^2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_i^n \mathbf{e}_n.$$

В результате:

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1, i=1}^{n} x^i a_i^j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x^i a_i^j) \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x^i a_i^j \right)}_{\text{компоненты } \mathbf{y}} \mathbf{e}_j.$$

Матрица линейного оператора 3

В матричном виде:

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 a_1^1 + x^2 a_2^1 + \ldots + x^n a_n^1 \\ x^1 a_1^2 + x^2 a_2^2 + \ldots + x^n a_n^2 \\ \vdots \\ x^1 a_1^{n-1} + x^2 a_2^{n-1} + \ldots + x^n a_n^{n-1} \\ x^1 a_1^n + x^2 a_2^n + \ldots + x^n a_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Вектор } \mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Матрица оператора } \mathrm{A}} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix}$$

Таким образом каждому линейному оператору $\mathrm{A}\colon L \to L$ можно поставить в соответствие матрицу оператора

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{pmatrix}$$

которая полностью определяет действия этого оператора на любой элемент $\mathbf{x}$ линейного пространства L, то есть дает возможность вычислить компоненты этого элемента для заданного базиса. Сама матрица определяется действием оператора на каждый из базисных векторов и, следовательно, зависит от этого базиса.

Столбцы матрицы оператора A — компоненты векторов $\mathrm{A}\mathbf{e}_i$ в базисе $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathrm{A}\mathbf{e}_1 & \mathrm{A}\mathbf{e}_2 & \dots & \mathrm{A}\mathbf{e}_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}$$

Почему различают линейный оператор и его матрицу?

При замене базиса матрица оператора изменяется, но сам оператор остается тем же самым — меняется лишь его представление. Аналогичное утверждение верно и для вектора — при замене базиса компоненты вектора изменяются, но вектор остается тем же самым.

Такой подход имеет преимущество, так как позволяет записывать выражения, не используя компоненты векторов и матриц. Такие выражения остаются справедливы в любой системе координат (в любом базисе).

Замена базиса 1

Пусть в L заданы два базиса: $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$. Оба базиса являются базисами одного и того же пространства. Каждый вектор $\mathbf{e}_i$ выражается через базис $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$ и наоборот.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= b_1^1 \mathbf{e}_1 + b_1^2 \mathbf{e}_2 + \dots + b_1^n \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2 &= b_2^1 \mathbf{e}_1 + b_2^2 \mathbf{e}_2 + \dots + b_2^n \mathbf{e}_n, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= b_n^1 \mathbf{e}_1 + b_n^2 \mathbf{e}_2 + \dots + b_n^n \mathbf{e}_n. \end{aligned}\right. \Rightarrow \mathbf{e}'_i = \mathrm{B}\mathbf{e}_i. \qquad \left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= c_1^1 \mathbf{e}'_1 + c_1^2 \mathbf{e}'_2 + \dots + c_1^n \mathbf{e}'_n, \\ \mathbf{e}_2 &= c_2^1 \mathbf{e}'_1 + c_2^2 \mathbf{e}'_2 + \dots + c_2^n \mathbf{e}'_n \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= c_n^1 \mathbf{e}'_1 + c_n^2 \mathbf{e}'_2 + \dots + c_n^n \mathbf{e}'_n, \end{aligned}\right. \Rightarrow \mathbf{e}_i = \mathrm{C}\mathbf{e}'_i.$$

Операторы B и C — линейные операторы перехода от одного базиса к другому и обратно.

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}$$

- Столбцы матрицы оператора B — компоненты векторов $\langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$ в базисе $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$.

Замена базиса 2

- Столбцы матрицы оператора C — компоненты векторов $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ в базисе $\langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$.

Подставляя $\mathbf{e}'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_i^j \mathbf{e}_j$ в $\mathbf{e}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} c_k^i \mathbf{e}'_i$ получим

$$\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_k^i b_i^j \mathbf{e}_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_k^i b_i^j = \delta_k^j = \begin{cases} 1, j = k, \\ 0, j \neq k. \end{cases}$$

Последнее равенство означает, что матрицы операторов B и C при умножении дают единичную матрицу: $C \cdot B = I$ Следовательно $B = C^{-1}$ и поэтому достаточно знать лишь одну из матриц B или C.

Преобразование базисов в матричном виде

Соблюдая правила матричного умножения, можно записать связь базисов следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_{n-1} & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \dots & \mathbf{e}'_{n-1} & \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1}^1 & c_{n-1}^2 & \dots & c_{n-1}^n \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{pmatrix}}_{C}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \dots & \mathbf{e}'_{n-1} & \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_{n-1} & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1}^1 & b_{n-1}^2 & \dots & b_{n-1}^n \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \end{pmatrix}}_{B}$$

Компоненты вектора при замене базиса 1

Рассмотрим, как преобразуется компоненты вектора $\mathbf{v}$ при переходе от базиса $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ к базису $\langle \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \dots, \mathbf{e}_{n'} \rangle$. В первом базисе вектор имел компоненты $v^1, v^2, \dots, v^n$, а во втором базисе $v^{1'}, v^{2'}, \dots, v^{n'}$. Обратите внимание, что штрихи поставлены над индексами, а не над буквой v. Это касается и базисных векторов.

Можно считать, что при замене базиса, вектор $\mathbf{v}$ остается неизменным, но изменяются его компоненты. В базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ компоненты вектора $\mathbf{v}$:

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \mathbf{e}_i = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + \dots + v^n \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

а в базисе $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$ как

$$\sum_{i=1}^{n} v^{i'} \mathbf{e}_{i'} = v^{1'} \mathbf{e}_{1'} + v^{2'} \mathbf{e}_{2'} + \dots + v^{n'} \mathbf{e}_{n'} = \begin{pmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \\ \vdots \\ v^{n'} \end{pmatrix}$$

Компоненты вектора при замене базиса 2

Пусть базисы связаны матрицей $B = [b^j_{i'}]$ так, что: $\mathbf{e}_{i'} = \sum\limits_{i=1}^{n} b^i_{i'}\mathbf{e}_i$ тогда

$$\mathbf{v} = \sum_{i'=1}^{n} v^{i'}\mathbf{e}_{i'} = \sum_{i'=1}^{n} v^{i'} \sum_{i=1}^{n} b^i_{i'}\mathbf{e}_i = \sum_{i'=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v^{i'} b^i_{i'}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{i'=1}^{n} v^{i'} b^i_{i'}\Big)\mathbf{e}_i \Rightarrow v^i = \sum_{i'=1}^{n} v^{i'} b^i_{i'}.$$

В операторном виде нам придется использовать разные букву $\mathbf{v}$ для обозначения вектора в базисе $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и букву $\mathbf{v}$ для обозначения его же в базисе $\langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$

$$\mathbf{v} = \mathrm{B}\mathbf{v}' \quad \text{и} \quad \mathbf{v}' = \mathrm{B}^{-1}\mathbf{v}.$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{1'}_1 & \dots & b^{1'}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n'}_1 & \dots & b^{n'}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1'} \\ \vdots \\ v^{n'} \end{pmatrix}$$

Матрицы оператора при замене базиса 1

Теперь рассмотрим, как преобразуется матрица оператора A при переходе от базиса $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ к $\langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$.

Матрицу оператора A обозначим:

- в $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ как $A = [a_i^j]$.
- в $\langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$ как $A' = [a_{i'}^{j'}]$.

Подействуем оператором A на базисные векторы $\langle \mathbf{e}_i \rangle_1^n$:

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \mathbf{e}_j$$

а затем им же на базисные векторы $\langle \mathbf{e}_{i'} \rangle_1^n$:

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_{i'} = \sum_{j'=1}^{n} a_{i'}^{j'} \mathbf{e}_{j'}.$$

Матрицы оператора при замене базиса 2

Верна цепочка равенств:

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_{i'} = \mathrm{A}\sum_{j=1}^{n} b^j_{i'}\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} b^j_{i'}\mathrm{A}\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} b^j_{i'}\sum_{k=1}^{n} a^k_j\mathbf{e}_k = \sum_{l'=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b^j_{i'}a^k_j c^{l'}_k\right)\mathbf{e}_{l'} = \sum_{l'=1}^{n} a^{l'}_{i'}\mathbf{e}_{l'}$$

из которой следует, что

$$a^{l'}_{j'} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b^j_{i'}a^k_j c^{l'}_k$$

что в матричном виде означает:

$$\begin{pmatrix} a^{1'}_{1'} & \dots & a^{1'}_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n'}_{1'} & \dots & a^{n'}_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{1'}_{1} & \dots & c^{1'}_{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n'}_{1} & \dots & c^{n'}_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1}_{1} & \dots & a^{1}_{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n}_{1} & \dots & a^{n}_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{1}_{1'} & \dots & b^{1}_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n}_{1'} & \dots & b^{n}_{n'} \end{pmatrix}$$

в операторном виде:

$$A' = C\cdot A\cdot B = B^{-1}\cdot A\cdot B$$

Матрицы оператора при замене базиса 3

и наоборот:

$$A = B \cdot A' \cdot B^{-1}$$

Говорят, что матрица A' подобна матрице A, если существует невырожденная матрица B, связывающая A' и A соотношением

$$A' = B^{-1} \cdot A \cdot B.$$

Все матрицы квадратные и одинакового порядка.

Преобразование базисов и векторов (сводка)

Два базиса пространства $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$ связаны матрицей преобразования A следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \dots & \mathbf{e}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} A \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \dots & \mathbf{e}'_n \end{bmatrix} A^{-1}$$

Компоненты вектора $\mathbf{x}$

- в базисе $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ — $(x^1, x^2, \dots, x^n)^T$
- в базисе $\langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$ — $(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'})^T$

связаны как

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}$$

и матрица P оператора $\mathrm{P}\colon L \to L$ также зависит от базиса и преобразуется по правилу:

$$P' = A^{-1} P A$$

Линейные пространства

Примеры

Пример линейного преобразования базиса 1

Рассмотрим линейное пространство L размерности 2. В L задан «старый» базис $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ и «новый» базис $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$. Они связаны матрицей замены базисов $A = [a^i_j]$ размера 2×2. Для примера возьмем конкретные числовые коэффициенты:

$$A = [a^i_j] = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда базисные векторы связаны как:

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^{2} a^i_j \mathbf{e}_i = a^1_j \mathbf{e}_1 + a^2_j \mathbf{e}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A}$$

В A содержатся компоненты векторов «нового» базиса $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$ в «старом» базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a^1_1 \mathbf{e}_1 + a^2_1 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= a^1_2 \mathbf{e}_1 + a^2_2 \mathbf{e}_2, \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2. \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Пример линейного преобразования базиса 2

Чтобы выразить $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ через $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$ (то есть записать компоненты векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в новом базисе) необходимо найти обратную матрицу A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

после чего можно записать:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{e}_1 = -\dfrac{3}{5}\mathbf{e}'_1 + \dfrac{2}{5}\mathbf{e}'_2, \\ \mathbf{e}_2 = \dfrac{4}{5}\mathbf{e}'_1 - \dfrac{1}{5}\mathbf{e}'_2, \end{matrix} \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ -\dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Пример преобразование компонент вектора

Пусть дан вектор $\mathbf{v}$ с компонентами в базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{2} v^i \mathbf{e}_i = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Для примера возьмем конкретные числовые компоненты

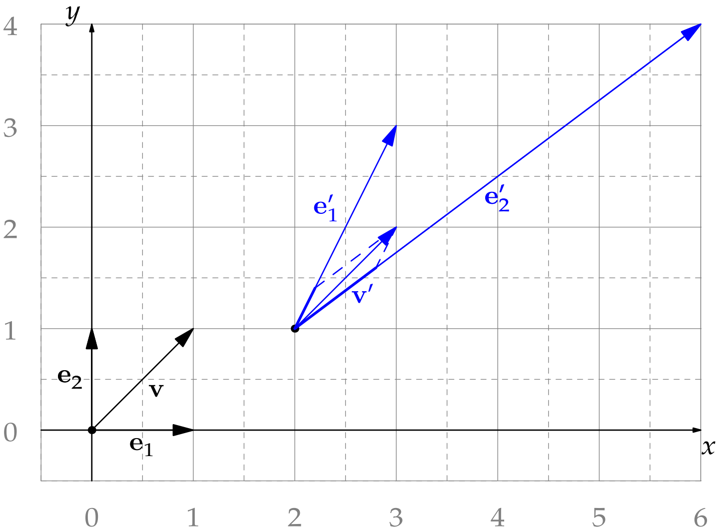
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

Найдем компоненты этого же вектора $\mathbf{v}$ в новом базисе $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$ из предыдущего примера.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так как мы записали матрицу преобразования в числовом виде, то можем дать наглядную иллюстрацию.

Вектор не меняется



Интерпретация преобразования матрицы оператора 1

Можно дать интерпретацию формулы преобразования матрицы оператора, которая может поспособствовать лучшему пониманию геометрической сути формул. Нам не интересны в данном случае компоненты, поэтому базисные векторы явно не выписываем, и ограничимся абстрактными обозначениями.

Рассмотрим два базиса или, иными словами, две системы координат. Обозначим первую систему как A, а вторую как B. Связь между ними дается линейным преобразованием с матрицей M.

Рассмотрим оператор P.

- P_A — матрица оператора $\mathbf{P}$ в системе координат A;
- P_B — матрица оператора $\mathbf{P}$ в системе координат B.

Тоже самое справедливо для вектора $\mathbf{v}$.

- $\mathbf{v}_A$ — вектор $\mathbf{v}$, записанный в системе координат A;
- $\mathbf{v}_B$ — вектор $\mathbf{v}$, записанный в системе координат B.

Интерпретация преобразования матрицы оператора 2

Как было показано выше, матрица оператора P и вектор $\mathbf{v}$ преобразуются по правилу:

$$P_B = MP_AM^{-1} \text{ и } \mathbf{v}_B = M\mathbf{v}_A$$

Пусть теперь мы хотим подействовать оператором P на вектор $\mathbf{v}$. Результат действия — некоторый другой вектор $\mathbf{u}$.

- $\mathbf{u}_A = P_A\mathbf{v}_A$ — результат действия P в системе координат A;
- $\mathbf{u}_B = P_B\mathbf{v}_B$ — результат действия P в системе координат B.

Справедлива формула:

$$P_B\mathbf{v}_B = MP_AM^{-1}\mathbf{v}_B$$

Рассмотрим эту формулу по частям справа налево и поясним ее геометрический смысл.

- $M^{-1}\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$ — перенос вектора $\mathbf{v}$ из системы координат A в систему координат B;

Интерпретация преобразования матрицы оператора 3

- $P_A M^{-1}\mathbf{v}_B = P_A\mathbf{v}_A = \mathbf{u}_A$ — действуем на перенесенный в A вектор $\mathbf{v}$ оператором P чья матрица записывается как P_A, так как мы теперь в A и получаем вектор $\mathbf{u}$ записанный в A как $\mathbf{u}_A$.
- $MP_A M^{-1}\mathbf{v}_B = M\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B$ — на последнем шаге используем матрицу оператора M, чтобы перенести вектор $\mathbf{u}$ из A, где он записан как $\mathbf{u}_A$ в B, где он записан как $\mathbf{u}_B$.

Линейные пространства

Векторы на плоскости

Определение линейного пространства

Множество L называется линейным пространством или векторным пространством над действительными числами $\mathbb{R}$ если выполняются следующие свойства.

- На L определены две операции для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ из L и любых α из $\mathbb{R}$:
  1. «$+$» — сложение элементов из L т.ч. $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in L$.
  2. «$\cdot$» — умножение элементов из L на действительные числа т.ч. $\alpha \cdot \mathbf{a} \in L$. Значок «$\cdot$» можно не писать: $\alpha \cdot \mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}$.
- Элементы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in L$ образуют коммутативную группу по сложению:
  1. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ — ассоциативность по сложению;
  2. $\exists \mathbf{0} \in L$ т. ч. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$; $\mathbf{0}$ — нейтральный элемент по сложению;
  3. $\forall \mathbf{a} \in L\ \exists -\mathbf{a} \in L$ т. ч. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$; $-\mathbf{a}$ — обратный элемент по сложению;
  4. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ — коммутативность по сложению,
- Дополнительные свойства умножения на числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
  5. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ — дистрибутивность по сложению,
  6. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ — дистрибутивность по умножению,
  7. $(\alpha(\beta))\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ — ассоциативность по умножению,
  8. $\exists 1 \in \mathbb{R}$ т.ч. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$; 1 — нейтральный элемент по умножению (обычная единица).

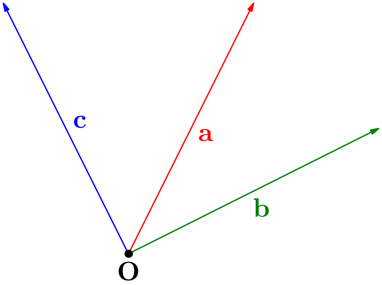
Ограничения линейного пространства

Если использовать только определение векторного пространства, то мы не можем:

- вычислять длины векторов и угл между двумя векторами — это требует скалярного произведения и расширения векторного пространства до векторного евклидова пространства;
- «оторвать» вектор от начальной точки (нулевого вектора) и переместить в другое место на плоскости — это требует добавление к векторам произвольных точек и расширения векторного пространства до аффинного пространства;
- записывать координаты векторов — это требует введения набора базисных векторов;
- вращать векторы вокруг начальной точки — это требует линейных операторов (матричных преобразований).

Векторы в виде стрелок на плоскости

Каждое из свойств абстрактного линейного пространства проиллюстрируем на примере векторов на плоскости, которые будем изображать стрелками.

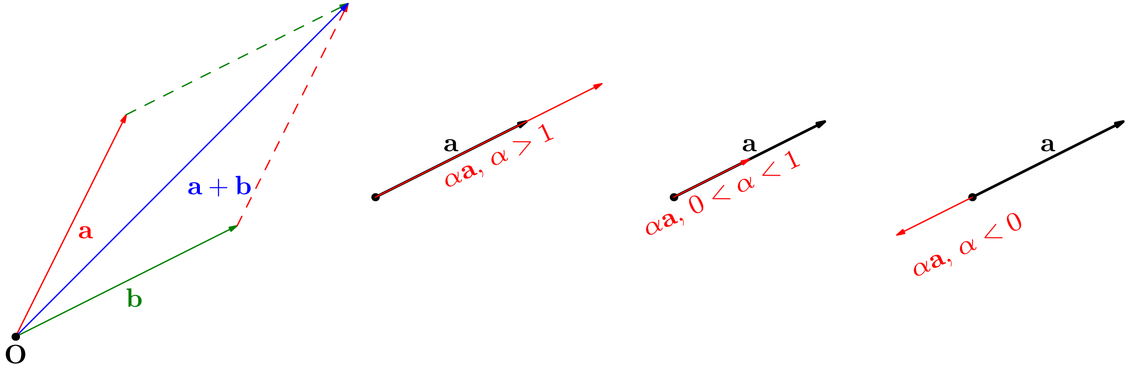


- Векторы будем изображать в виде стрелок на плоскости и обозначать как $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и т.д.
- Все векторы будут прикреплены к одной точке. Друг от друга будут отличаться визуально длиной стрелки и ее направлением.

Операции с векторами в рамках линейного пространства

В линейном пространстве определены две операции, которые нам надо определить для векторов-стрелок на плоскости.

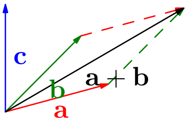
- Сложение $+$ двух векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ определим по правилу параллелограмма.
- Умножение $\cdot$ вектора на число $\alpha \cdot \mathbf{a}$ (в этом примере всегда $\alpha \in \mathbb{R}$ т.е. действительное число) — вектор длиннее или короче, лежащий на той же прямой.

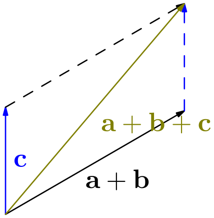


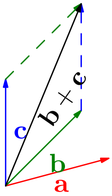
Ассоциативность

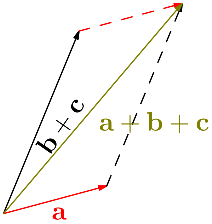
1. Ассоциативность: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

- Можно сперва сложить вектор $\mathbf{a}$ с $\mathbf{b}$ и получить $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ (рисунок 1)...
- а потом сложить $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ с $\mathbf{c}$ и получить $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ (рисунок 2).
- А можно сперва сложить вектор $\mathbf{b}$ с вектором $\mathbf{c}$, получить вектор $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ (рисунок 3)...
- а потом уже сложить $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ с $\mathbf{a}$ и получить $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ (рисунок 4).
- В любом случае получается одинаковый вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, то есть свойство ассоциативности позволяет вообще не писать скобки в выражении где есть только сложения векторов.





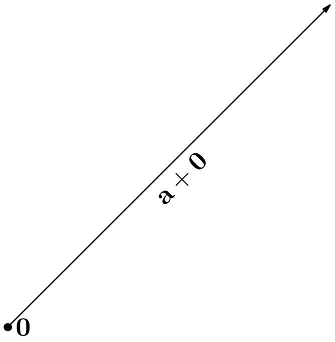




Нейтральный элемент по сложению

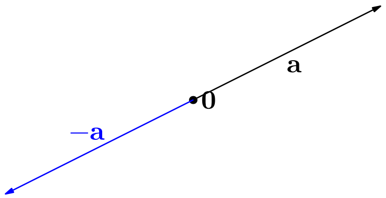
2. Существует нулевой вектор $\mathbf{0}$: $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$.

- Вектор $\mathbf{0}$ изображают в виде точки. К нему прикреплены все векторы.
- Такой вектор единственный для всего пространства.
- Интуитивно понятно, что у нулевого вектора длина равна 0 и вращать его бесполезно, так как он не меняется от этого. Также он не изменяется при умножении на любое число.



3. Для каждого вектора $\mathbf{a}$ существует обратный вектор $-\mathbf{a}$ такой, что $-\mathbf{a}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

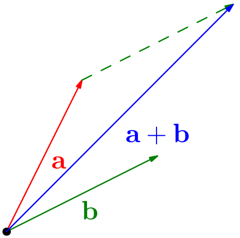
- Для каждого вектора $\mathbf{a}$ существует только один обратный, который получается путем умножения $\mathbf{a}$ на -1.
- Вычитание векторов не определяется, так как оно сводится к сложению с обратным $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ — сложение $\mathbf{a}$ с обратным к $\mathbf{b}$ вектором.

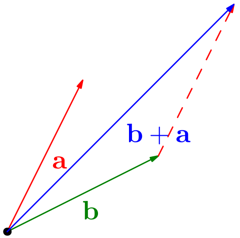


Коммутативность по сложению

4. От перемены мест слагаемых сумма не меняется $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

- Можно к $\mathbf{a}$ прибавить $\mathbf{b}$ (рисунок 1);
- а можно к $\mathbf{b}$ прибавить $\mathbf{a}$ (рисунок 2);
- результатом будет один и тот же вектор.

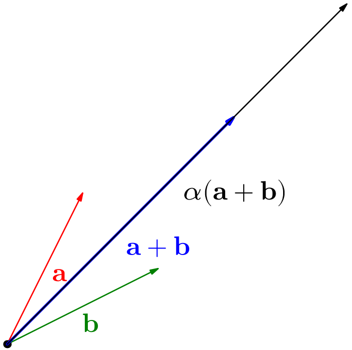


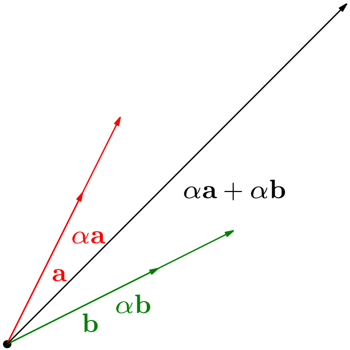


Дистрибутивность по сложению

5. Правило раскрытия скобок при умножении на число $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$.

- Можно сперва сложить два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а потом умножить результат на α (рисунок 1);
- а можно умножить вектор $\mathbf{a}$ на α, затем вектор $\mathbf{b}$ также на α и результат сложить $\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ (рисунок 2);
- результатом будет один и тот же вектор.





Дистрибутивность по умножению

6. Правило раскрытия скобок при сложении чисел $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

- Можно сперва сложить два числа α и β, а потом умножить на результат вектор $\mathbf{a}$;
- а можно умножить вектор $\mathbf{a}$ отдельно на α, а затем отдельно на β и результат сложить: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.
- Результатом будет один и тот же вектор.

Ассоциативность по умножению

7. При умножении на два числа подряд скобки можно опускать, то есть порядок умножения не важен: $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a}) = \alpha\beta\mathbf{a}$.

- Можно сперва умножить α на вектор, а затем результат на β;
- а можно умножить вектор числа α и β, получить новое число $\alpha\beta$ и уже на него умножить $\mathbf{a}$.
- Результатом будет один и тот же вектор.

8. Нейтральным элементом по умножению выступает обычная единица 1: $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$.

- Умножение на единицу не меняет вектор.
- Отдельно можно показать, что умножение на число 0 на произвольный вектор $\mathbf{a}$ превращает его в нулевой вектор $\mathbf{0}$. Это можно интуитивно понять, так как при умножении на 0 длина вектора станет равной 0.

- Система векторов называется линейно независимой если сумма

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

  только если все $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. В противном случае система векторов линейно зависимая.
- Векторное пространство L где существует не более n линейно независимых векторов, называют n-мерным.
- Базисом векторного пространства L размерности n называют любую упорядоченную систему из n линейно независимых векторов.
- Векторы базиса будем обозначать буквами $\mathbf{e}$ с индексами $\langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \rangle$. Треугольные скобки указывают на важность порядка векторов.

Базис нужен, чтобы мы могли как-то сравнивать все векторы друг с другом. Мы сможем выразить любой вектор через векторы базиса $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$. Например:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + \dots + a^n\mathbf{e}_n.$$

или можно записать короче

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

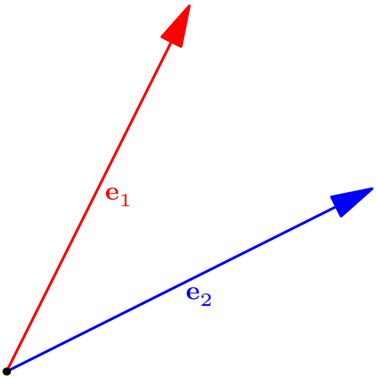
числа $a^1, a^2, \dots, a^n$ — компоненты или координаты вектора.

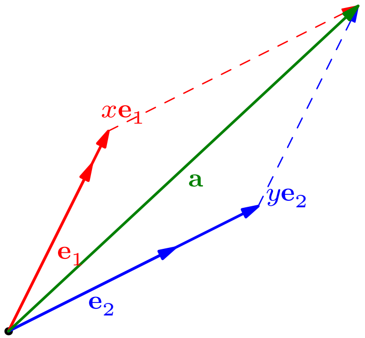
Векторы на плоскости

Очевидно, что на плоскости максимально возможная линейно независимая комбинация состоит из двух векторов (почему?):

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$$

Покажем это на примере. Для чего выберем некоторый базис в двумерном пространстве. Это означает, что надо выбрать любые два линейно независимых вектора. Проще говоря два вектора, которые не лежат на одной прямой.





Любой другой вектор мы сможем выразить через линейную комбинацию этих двух векторов $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$. На рисунке показано, как это сделать: удлинить (укоротить) векторы базиса путем умножения на некоторые числа x, y и сложить. Числа x и y — координаты вектора $\mathbf{a}$.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Линейная независимость двух векторов на плоскости

Возьмем два вектора, указав их координаты в некотором базисе

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Будут ли они линейно независимыми?

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет решение только одно: $\alpha = \beta = 0$. Других решений нет. Это однородная система уравнений и решения отличные от нуля у нее могут быть, только если главный определитель системы равен нулю. В нашем случае это не так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0$$

Линейная комбинация из трех ненулевых двумерных векторов всегда линейно зависима. Например:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

В системе неизвестных больше чем уравнений, поэтому ненулевые решения всегда есть. Например:

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$$

Комбинации из большего количества векторов тем более не могут оказаться линейно независимыми. Так что максимальная линейно независимая комбинация, как мы в начале указали, не может состоять более чем из двух векторов.

Все базисы одинаково полезны

Пока у нас нет способа определять углы и длины векторов, все базисы можно считать равноценными. Нет способа выделить какой-то один, особенно полезный базис.

Линейные преобразования векторов

Определение

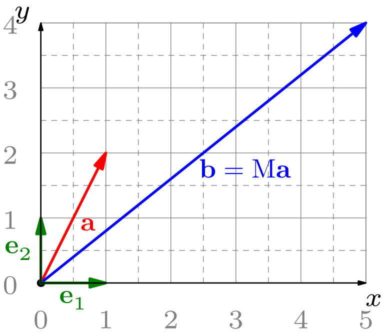
Линейным оператором (преобразованием) в линейном пространстве L над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ называют преобразование $f\colon L \to L$, удовлетворяющее двум свойствам линейности:

- $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$,
- $f(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in L$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Для того, чтобы сразу отличить линейный оператор от произвольной функции (произвольного преобразования) его обозначают большой буквой и не используют скобки:

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{v} \in L$$

Покажем на примере двумерного пространства L, что действие линейного оператора на вектор задается матрицей 2×2.



Рассмотрим некоторый оператор M, который действует на некоторый вектор $\mathbf{a}$ и в результате получается некоторый второй вектор $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \mathrm{M}\mathbf{a}.$$

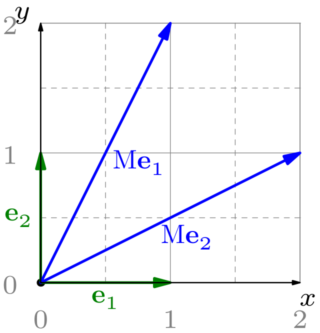
И вектор $\mathbf{a}$ и вектор $\mathbf{b}$ находятся в одном и том же линейном пространстве L и их можно записать через один и тот же базис $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^1\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$$

Подействуем оператором M на вектор $\mathbf{a}$

$$\mathrm{M}\mathbf{a} = \mathrm{M}(a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2) = a^1\mathrm{M}\mathbf{e}_1 + a^2\mathrm{M}\mathbf{e}_2$$

Действие оператора на базис



Действуя оператором M на вектор $\mathbf{a}$ разложенный на компоненты, мы использовали свойство линейности и вынесли компоненты вектора a^1 и a^2 за знак оператора:

$$\mathbf{b} = \mathrm{M}\mathbf{a} = a^1\mathrm{M}\mathbf{e}_1 + a^2\mathrm{M}\mathbf{e}_2.$$

Хотелось бы найти выражение для компонент вектора $\mathbf{b}$. Для этого надо знать, как оператор M действует на базисные векторы $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$:

$$\mathrm{M}\mathbf{e}_1 = m_1^1\mathbf{e}_1 + m_1^2\mathbf{e}_2,$$
$$\mathrm{M}\mathbf{e}_2 = m_2^1\mathbf{e}_1 + m_2^2\mathbf{e}_2,$$

Подставляя в выражение для $\mathbf{b}$ получим:

$$\mathbf{b} = a^1(m_1^1\mathbf{e}_1 + m_1^2\mathbf{e}_2) + a^2(m_2^1\mathbf{e}_1 + m_2^2\mathbf{e}_2) =$$
$$= (a^1 m_1^1 + a^2 m_2^1)\mathbf{e}_1 + (a^1 m_1^2 + a^2 m_2^2)\mathbf{e}_2$$

Матрица линейного оператора

Из предыдущего слайда видно, что для того, чтобы вычислить результат действия оператора M на вектор $\mathbf{a}$ надо знать 4 числа (для двумерного случая), которые можно записать в виде таблицы (матрицы)

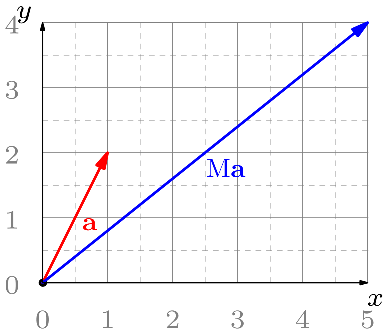
$$M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix}$$

- Верхний индекс — номер строки.
- Нижний индекс — номер столбца.

Пользуясь правилами матричного умножения (строка на столбец) можно записать:

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 m_1^1 + a^2 m_2^1 \\ a^1 m_1^2 + a^2 m_2^2 \end{pmatrix}$$

Матрица M называется матрицей линейного оператора M. Она имеет смысл только при указании базиса, который введен в L.



На рисунке справа показан результат действия оператора M со следующей матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

он действовал на вектор $\mathbf{a} = (1, 2)^T$ и результат его действия можно вычислить как

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Геометрический смысл линейного опертора

При действии линейного оператора, в зависимости от его матрицы, вектор может претерпеть следующие изменения:

- Повернуться вокруг точки $\mathbf{O}$ ассоциированной с нулевым вектором $\mathbf{0}$ то есть изменить направление.
- Изменить свою длину.

Обратите внимание, что любой оператор не изменяет нулевой вектор

$$\mathrm{M}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

это означает, что $\mathbf{0}$ не меняется при любых линейных преобразованиях. Эта особенность позволяет выделить его среди всех векторов и ассоциировать с начальной точкой системы координат, заданной базисом пространства L.