Глава 5

Неопределенный интеграл

§ 5.1 Неопределенный интеграл и его свойства

Рассмотрим следующую задачу.

Скорость свободного падения тяжелой материальной точки в момент времени t задается формулой $v = gt$ (сопротивление среды не учитывается). Требуется найти пройденный за это время путь $s = s(t)$.

В данном случае нужно по заданной функции v найти ту функцию $s = s(t)$, для которой производной будет v.

Непосредственным дифференцированием проверяется, что для функции $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$, где C – произвольная постоянная, производной будет заданная функция v. При различных значениях C мы будем получать различные значения пути в один и тот же момент времени, то есть имеющихся у нас данных недостаточно для полного решения задачи. Чтобы получить вполне определенное решение задачи, достаточно знать величину пути в какой-нибудь момент времени. Предположим, что в момент времени $t = 0$ путь $s = 0$. Подставим эти значения в полученное выражение для пути $s(0) = C$, то есть $C = 0$. Теперь решение задачи принимает вид $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Как мы видим, сложность решения этой задачи заключалась в восстановлении функции $s = s(t)$ по ее производной, или, другими словами, в нахождении первообразной для функции $v = v(t)$.

Пусть X – конечный или бесконечный промежуток числовой оси.

Определение 5.1. Функция F называется первообразной функцией (или, короче, первообразной) функции f на промежутке X, если F дифференцируема на X и в каждой точке этого промежутка производная функции F равна значению функции f:

$$F'(x) = f(x), \ x \in X.$$

Функция, имеющая в данной точке производную, непрерывна в этой точке, поэтому первообразная F функции f непрерывна на промежутке X.

Теорема 5.1. *Две дифференцируемые на промежутке X функции F и Φ являются первообразными одной и той же функции в том и только том случае, когда они отличаются на постоянную:*

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$\exists \xi\in(a,b)$:

$$F(x) = \Phi(x) + C, \ x \in X, \ C = const. \tag{5.1}$$

Доказательство. Если имеет место (5.1), то $F' = (\Phi + C)' = \Phi'$, то есть функции F и Φ являются первообразными одной и той же функции.

$f(b)-f(a)=$

$=f'(\xi)(b-a)$

Пусть, наоборот, F и Φ являются первообразными одной и той же функции f, то есть $F' = \Phi' = f$. Обозначим $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x)$. Выберем на промежутке X произвольно точки x_1 и x_2 так, что $x_1 < x_2$; тогда, очевидно, функция φ является непрерывной на отрезке $[x_1, x_2]$ и дифференцируемой на интервале (x_1, x_2). Поэтому по теореме Лагранжа

$F(x)-\Phi(X)=C$

$F(x)=\Phi(x)+C$

$\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi)(x_2 - x_1), \ x_1 < \xi < x_2. \tag{5.2}$$

$f(x)-f(x)$

Отметим, что $\varphi'(x) = F'(x) - \Phi'(x) = 0$ на (x_1, x_2), в частности, $\varphi'(\xi) = 0$, так как $\xi \in (x_1, x_2)$. Таким образом, из формулы (5.2) следует, что $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, а поскольку x_1 и x_2 – произвольные точки рассматриваемого промежутка, то это и означает, что функция φ постоянна на этом промежутке. □

Определение 5.2. Совокупность всех первообразных функции f на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции f и обозначается $\int f(x)dx$.

Если F – какая-либо первообразная функции f на X, то записывают

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

$f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

$y=f(x)$

$\boxed{dy=f'(x)dx}$

Основные свойства неопределенного интеграла

I. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \tag{5.3}$$

$d\left(\int f(x)dx\right) =$

$= d\left(F(x)+C\right) =$

$= \left(F(x)+C\right)'dx =$

$= F'(x)dx = f(x)dx$

Отметим, что в этом равенстве под $\int f(x)dx$ понимается произвольная первообразная F функции f. Поэтому равенство (5.3) можно записать в виде

$$dF(x) = f(x)dx,$$

а справедливость последнего равенства следует из того, что F – первообразная f.

II. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Это следует из свойства I.

III. Неопределенный интеграл от производной функции равен самой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

что может быть переписано так:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Это сразу следует из определения неопределенного интеграла как совокупности всех дифференцируемых функций, дифференциал которых стоит под знаком интеграла.

IV. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть если $a = const\,(a \neq 0)$, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \tag{5.4}$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int af(x)dx = aF(x)+C$$

$$a\int f(x)dx = a(F(x)+C) = aF(x)+a\cdot C$$

Доказательство. Пусть F – первообразная функции f на X, то есть $F'(x) = f(x)$, $x \in X$. Тогда функция aF является первообразной функции af на промежутке X при любом $a \in \mathbb{R}$, так как $(aF(x))' = aF'(x) = af(x)$, $x \in X$. Поэтому интеграл $\int af(x)dx$ состоит из всевозможных функций вида $aF + C$, а интеграл $a\int f(x)dx$ – из всевозможных функций $a(F + C) = aF + aC$. В силу произвольности постоянной C, при условии $a \neq 0$, обе совокупности функций совпадают. Это и означает справедливость равенства (5.4). □

св-во линейности:

$$\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

V. Неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме их интегралов:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \tag{5.5}$$

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 – первообразные соответственно функций f_1 и f_2, то есть в каждой точке $x \in X$ выполняются равенства $F_1'(x) = f_1(x)$, $F_2'(x) = f_2(x)$. Положим $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$; тогда функция F является первообразной функции $f_1 + f_2$, так как

$$F'(x) = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x), \ x \in X.$$

Следовательно, интеграл $\int (f_1(x) + f_2(x))dx$ состоит из функций $F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C$, а сумма интегралов

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2. = F_1(x)+F_2(x)+C$$

Поскольку C, C_1 и C_2 – произвольные постоянные, оба эти множества, то есть левая и правая части равенства (5.5), совпадают. □

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = \cancel{C} = A + C = C$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

1) $y = \ln x$, $x>0$

2) $y = \ln(-x)$, $x<0$

$y' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

$\ln e = 1$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

10. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

13. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

14. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$; $\boxed{\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}}$

§ 5.2 Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Теорема 5.2. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ определены на промежутках X и T соответственно, причем $\varphi(T) \subset X$. Если функция f имеет на X первообразную $F(x)$ и, следовательно,*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{5.6}$$

а функция φ дифференцируема на T, то функция $\boxed{f(\varphi(t))}\varphi'(t)$ имеет на T первообразную $F(\varphi(t))$ и

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \Big|_{x=\varphi(t)}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Функции f и F определены на промежутке X, и так как, по условию теоремы, справедливо включение $\varphi(T) \subset X$, то имеют смысл сложные функции $f(\varphi(t))$ и $F(\varphi(t))$. При этом так как

$$F'(x) = f(x), \quad x \in X,$$

$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) =$

то по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in T.$$

$= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

Это и означает, что функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F(\varphi(t))$. Отсюда, согласно определению интеграла, следует, что

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{5.8}$$

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Подставив же в формулу (5.6) $x = \varphi(t)$, получим

$$\int f(x)\,dx\,\bigg|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C. \tag{5.9}$$

$\int f(x)dx\,\Big|_{x=\varphi(t)} =$

$= F(\varphi(t)) + C$

В формулах (5.8) и (5.9) равны правые части, значит, равны и левые, то есть имеет место равенство (5.7). □

Формула (5.7) называется формулой интегрирования подстановкой, а именно подстановкой $\varphi(t) = x$. Это название объясняется тем, что если формулу (5.7) записать в виде

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)\,dx\,\bigg|_{x=\varphi(t)},$$

$\varphi'(t)dt = d\varphi(t)$

то будет видно, что, для того чтобы вычислить интеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t)$, можно сделать подстановку $\varphi(t) = x$, вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$ и затем вернуться к переменной t, положив $x = \varphi(t)$.

Отметим, что формулу (5.7) бывает целесообразно использовать и в обратном порядке, то есть справа налево. А именно иногда удобно вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ с помощью соответствующей замены переменного $x = \varphi(t)$ свести к вычислению интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (если этот интеграл в каком-то смысле «проще» исходного).

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$x=\varphi(t)$

$$\int \cos 2x\,dx = \int \cos t\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$2x=t$

$d(2x)=dt$

$2dx=dt$

$dx=\frac{1}{2}dt$

В случае, когда функция φ имеет обратную φ^{-1}, перейдя в обеих частях формулы (5.7) к переменной x с помощью подстановки $t=\varphi^{-1}(x)$ и поменяв местами стороны равенства, получим

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Эта формула обычно называется формулой интегрирования заменой переменной.

Для того чтобы существовала функция φ^{-1}, обратная φ, в дополнение к условиям теоремы 5.2 достаточно, например, потребовать, чтобы на рассматриваемом промежутке T функция φ была строго монотонной. В этом случае, как известно, существует однозначная обратная функция φ^{-1}.

Пример 5.1. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$.
Пусть $t=x^2+1$. Тогда $dt=d(x^2+1)$, то есть $dt=2xdx$, или $xdx=\frac{dt}{2}$. Следовательно,

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Пример 5.2. Вычислить интеграл $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.
Учитывая, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ и $\cos x dx = d(\sin x)$, положим $t=\sin x$. Тогда

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|\sin x|+C.$$

Пример 5.3. Вычислить интеграл $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Пусть $x=\sin t,\quad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}.$

Тогда $dx=\cos t\,dt$ и

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = \int\cos^2 t\,dt = \int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt = \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C.$$

Отметим, что

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) =$$

$$= 2x\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 5.4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Учитывая, что $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dt}{\sin t\cos t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^2 t\cdot\operatorname{tg} t} = \int \frac{d(\operatorname{tg} t)}{\operatorname{tg} t} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

§ 5.3 Интегрирование по частям

$\int v(x)du(x)$

Теорема 5.3. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на промежутке X и на этом промежутке существует интеграл $\int vdu$, то на нем существует и интеграл $\int udv$, причем*

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (5.10)$$

Доказательство. Пусть функции u и v дифференцируемы на промежутке X; тогда

$$d(uv) = vdu + udv,$$

поэтому

$$udv = d(uv) - vdu.$$

$$\int udv = \underbrace{\int d(uv)}_{\text{сущ}} - \underbrace{\int vdu}_{\text{сущ.}}$$

Интеграл от каждого слагаемого правой части существует, так как, согласно свойству III неопределенного интеграла,

$$\int d(uv) = uv + C,$$

а интеграл $\int v\,du$ существует по условию теоремы. Поэтому на основании свойств IV и V неопределенного интеграла существует и интеграл $\int u\,dv$, причем

$uv+C$

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du. \qquad (5.11)$$

Подставляя в правую часть (5.11) $uv+C$ вместо $\int d(uv)$ и относя произвольную постоянную C к интегралу $\int v\,du$, получим формулу (5.10). □

$u=x$

$du=dx$

$dv=\sin x\,dx$

$\int dv=\int \sin x\,dx$

$V=-\cos x$

Пример 5.5. Найти интеграл

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}.$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Положим $u = x$, $dv = \sin x\,dx$; тогда $du = dx$, $v = -\cos x$. Следовательно,

$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

$u = \sin x$

$dv = x\,dx$

$du = d(\sin x) \Rightarrow$

$\Rightarrow du = \cos x\,dx$

$\int dv = \int x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Пример 5.6. Найти интеграл

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{e^{3x}dx}_{dv}.$$

$\int dv = \int e^{3x}dx$

$V = \frac{1}{3}e^{3x}$

Положим $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$; тогда $du = 2x\,dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. Следовательно,

$$\int x^2e^{3x}dx = x^2\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2x\,dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\boxed{\int xe^{3x}dx.}$$

$\int \underbrace{\sin x}_{u}\cdot\underbrace{x\,dx}_{dv} =$

$= \sin x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cos x\,dx =$

$= \frac{x^2}{2}\sin x -$

$-\frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx$

К полученному интегралу снова применим формулу интегрирования по частям, полагая $u_1 = x$, $dv_1 = e^{3x}dx$. В этом случае

$$du_1 = dx,\ v_1 = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

$\int e^{3x}dx = \int e^{t}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int e^{t}dt = \frac{1}{3}e^{t}+C = \frac{1}{3}e^{3x}+C$

$3x=t$

$d(3x)=dt$

$3dx=dt$

$dx=\frac{1}{3}dt$

Тогда

$$\int xe^{3x}dx = x\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

Окончательно получаем

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + C = e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right) + C.$$

Пример 5.7. Найти интеграл

$$\int e^x \cos x\, dx.$$

Пусть $u = e^x$, $dv = \cos x dx$; тогда $du = e^x dx$, $v = \sin x$. Следовательно,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Для вычисления полученного интеграла еще раз воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положив $u_1 = e^x$, $dv_1 = \sin x dx$, найдем $du_1 = e^x dx$, $v_1 = -\cos x$. Тогда

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

и

$$\int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x dx,$$

т.е.

$$2\int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

Таким образом,

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

§ 5.4 Интегрирование рациональных дробей

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Определение 5.3. Рациональная дробь

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, и неправильной, если степень многочлена $P(x)$ не меньше степени многочлена $Q(x)$.