Теория кривых

Репер Френе. Формулы Френе–Серре

Дифференциальная геометрия
Теория кривых

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Определение

Сегмент кривой γ имеет параметрическое представление в $\mathbb{R}^n$ если задана вектор-функция

$$\mathbf{r}(t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}\ t \in [a,b] \in \mathbb{R},$$

Если функции $x^i(t), \forall i = 1, \ldots, n$ имеют непрерывные производные первого порядка, которые ни в одной точке интервала $[a,b]$ не обращаются в ноль:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \neq \vec{\mathbf{0}},\ \forall t \in [a,b],$$

то сегмент кривой называется регулярным.

Параметризованная кривая

Если на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ каждому значению t соответствует одна точка сегмента кривой и, наоборот, каждой точке сегмента кривой соответствует одно значение t, то сегмент называется простой дугой. У такого сегмента кривой нет точек самопересечения.

В классической дифференциальной геометрии изучаются кривые, состоящие из регулярных сегментов. В точках соединения сегментов требование регулярности может не выполнятся. Такие точки называются нерегулярными или особыми.

Мы будем рассматривать примеры кривых, заданных на плоскости $\mathbb{R}^2$ и в пространстве $\mathbb{R}^3$. Параметрическое представление таких кривых задается как:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ t \in [a, b] \in \mathbb{R},$$

Неявно заданная кривая

Определение

Кривая γ называется неявно заданной в $\mathbb{R}^n$, если геометрическое место ее точек находится как решение системы из $n-1$ уравнения:

$$\begin{cases} F_1(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \\ F_2(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \\ \vdots \\ F_{n-1}(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \end{cases}$$

где каждая функция $F_i(\mathbf{x})$ — гладкая функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Для плоскости $\mathbb{R}^2$ это одно уравнение $F(x, y) = 0$, а для трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ это два уравнения $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$.

Касательный вектор

Определение

Касательным вектором кривой γ в точке P называется производная от радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ кривой:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{pmatrix}_{t=t_0}$$

Точка имеет координаты $P = \mathbf{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^n \end{pmatrix}$. Касательный вектор также называют вектором скорости.

С помощью точки над буквой $\dot{x}(t)$ обозначается первая производная по переменной t.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2},\ \dddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^3}$$

Вектор ускорения

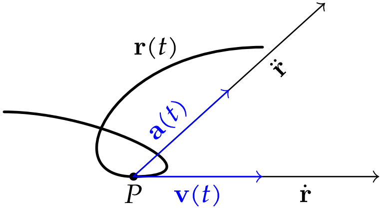
Вектором ускорения кривой γ в точке P назовем вторую производную по t от радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ кривой:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}t^2} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}^2x^n}{\mathrm{d}t^2} \end{pmatrix}_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \ddot{x}^1 \\ \vdots \\ \ddot{x}^n \end{pmatrix}_{t=t_0}$$

Термин вектор ускорения в дифференциальной геометрии обычно не используют, потому что рассматривают нормальный вектор, который мы введем ниже. В некоторых случаях вектор ускорения и вектор нормали совпадают.

Вектор скорости и ускорения

На рисунке можно видеть единичный (нормированный) касательный вектор $\mathbf{v}(t) = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}(t)$ и единичный вектор ускорения $\mathbf{a}(t) = \dfrac{\ddot{\mathbf{r}}}{\|\ddot{\mathbf{r}}\|}(t)$ в точке P некоторого сегмента кривой. Обратите внимание, что угол между ними может быть произвольным.



Натуральный параметр кривой 1

Выберем такой параметр $l = l(t)$, что касательный вектор по этому параметру будет единичным вектором при любых значениях l:

$$\mathbf{v}(l) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \ \|\mathbf{v}\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\| \equiv 1, \forall l \in [a, b].$$

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(l(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right\| = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\|}_{\equiv 1} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}.$$

Таким образом

$$\mathrm{d}l = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|\mathrm{d}t = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)}\,\mathrm{d}t\,,$$

а в случае ортонормированного базиса можно записать

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\dot{x}^i(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Натуральный параметр кривой 2

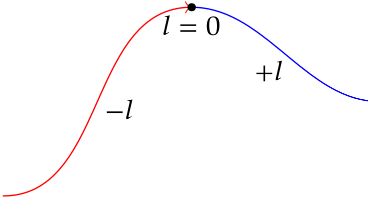
Определение

Параметрическое представление кривой γ, при котором радиус-вектор кривой $\mathbf{r}(l)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ имеет единичный касательный вектор $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v}(l)\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\| \equiv 1, \forall l \in [a,b] \in \mathbb{R}^n,$$

называется натуральным представлением, а параметр l — натуральным параметром.

Натуральный параметр l имеет смысл длины дуги кривой, измеряемой от произвольно, но определенно выбранного начала отсчета на кривой.



Натуральный параметр кривой 3

Определение

Кривая, которая допускает введение понятия длины дуги, называется спрямляемой.

Утверждение

Кривая спрямляема, если текущие координаты являются непрерывными функциями параметра t с непрерывными производными первого порядка.

Длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{r}}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot{\mathbf{r}}(\tau), \dot{\mathbf{r}}(\tau))} \, \mathrm{d}\tau$$

а для ортонормированного базиса в трехмерном случае:

$$l = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) + \dot{z}^2(\tau)} \, \mathrm{d}\tau$$

Натуральный параметр кривой 4

Эта формула раскрывает геометрический смысл параметра l — длина дуги от некоторой фиксированной точки $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$ кривой до произвольной точки $P = \mathbf{r}(t)$.

Касательная прямая и нормальная плоскость для $\mathbb{R}^3$

Уравнение касательной к кривой в точке $P = (x_0, y_0, z_0)$ может быть записано как уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно касательному вектору $\mathbf{v}(t_0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T$ то есть:

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}.$$

Прямые, проходящие через точки касания перпендикулярно к касательной, называются нормалями кривой. Плоскость, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной, называется нормальной плоскостью и содержит в себе все нормали к кривой в точке P. Уравнение нормальной плоскости записывается как

$$(x - x_0)\dot{x}_0 + (y - y_0)\dot{y}_0 + (z - z_0)\dot{z}_0 = 0.$$

В случае плоской кривой нормальная плоскость вырождается в нормальную прямую:

$$(x - x_0)\dot{x}_0 + (y - y_0)\dot{y}_0 = 0.$$

Кривизна и вектор нормали

Определение

Пусть регулярный сегмент кривой γ имеет параметрическое представление с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}(l)$ с натуральным параметром l. Вектор ускорения $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}$ в точке $P_0 = \mathbf{r}(l_0)$ называется вектором нормали в точке P_0.

Единичный вектор нормали $\mathbf{n}(l)$ определяется как:

$$\mathbf{n}(l) \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|}$$

Величина вектора нормали $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}l^2}$ в точке $P_0 = \mathbf{r}(l_0)$ называется кривизной кривой в точке P_0:

$$k(l_0) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|_{l=l_0}$$

Главная нормаль

Даже при $n = 3$ мы уже получаем целый пучок нормалей, так как достаточно провести плоскость, перпендикулярную касательной в точке касания и весь пучок прямых этой плоскости с центром в точке касания будет состоять из нормалей к нашей кривой.

Вектор нормали $\mathbf{n}(l)$ позволяет выделить главную нормаль на нормальной плоскости для случая $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$.

Кривизна и вектор нормали

Для регулярного сегмента кривой кривизна $k(l)$ определена для любого l из $[a, b] \in \mathbb{R}$. То же справедливо и для касательного вектора $\mathbf{v}(l)$ и для нормального вектора $\mathbf{n}(l)$. Поэтому мы часто будем опускать фразу об определенной точек P_0.

Определение

Радиусом кривизны кривой γ в точке P называется величина, обратная кривизне

$$R(l) = \frac{1}{k(l)}$$

Из определений следует уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = k\mathbf{n},\ k(l) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|.$$

Это первое уравнение Френе-Серре

Замечания по поводу обозначений

В литературе (см., например [1, с. 57]) встречаются обозначения касательного и нормального векторов с помощью греческих букв «тау» $\vec{\tau}$ и «ню» $\vec{\nu}$, так как они перекликаются с оригинальными латинскими терминами $tangentem$ и $normalis$.

Мы используем обозначение $\mathbf{v}$ для единичного касательного вектора, что отражает физический смысл этого вектора — вектор скорости (лат. velocitas — скорость) и обозначение $\mathbf{n}$ для единичного вектора нормали.

Ортогональность векторов касательной и нормали

Утверждение

Векторы касательной $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}$ *и нормали* $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}$ *ортогональны, при натуральном параметре* l.

Докажем, взяв производную от скалярного произведения. С одной стороны:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) = 2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right).$$

С другой стороны, из-за натурального параметра касательный вектор единичной длины для любого значения l и, следовательно, производная равна 0 $\forall l$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}1 = 0,$$

В итоге

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) \equiv 0 \quad \square$$

Ортогональность единичных векторов касательной и нормали

Из ортогональности

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) = 0,$$

следует ортогональность $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$:

$$(\mathbf{v}, k\mathbf{n}) = k(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) = 0$$

Можно точно также доказать, что

$$\left(\mathbf{n}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right) \equiv 0,$$

пользуясь единичностью вектора $\mathbf{n}$ при натуральном параметре l.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 2\left(\mathbf{n}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}1 \equiv 0$$

Бинормаль

Векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ при натуральной параметризации являются ортогональными. В $\mathbb{R}^3$ должен существовать еще один вектор, ортогональный и $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$. Введем его следующим образом.

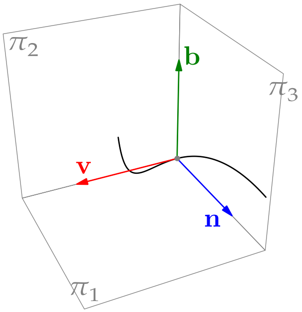
Определение

Вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}]$ называется единичным вектором бинормали.

По определению векторного умножения вектор бинормали ортогонален векторам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$. Упорядоченная тройка векторов $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle$ образуют репер, который называется репером Френе или основными векторами кривой.

$$\mathbf{v} = [\mathbf{n}, \mathbf{b}],$$
$$\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{v}],$$
$$\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}].$$

Репер Френе и сопровождающий трехгранник



Репер Френе как локальный базис

Репер Френе определен для бесконечно малой локальной окрестности каждой точки P регулярного сегмента кривой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Возможны обобщения и на большие размерности, но классическая дифференциальная геометрия изучает кривые именно в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Любой вектор в локальной окрестности точки P можно разложить по векторам базиса Френе. Рассмотрим следующий вектор:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = a\mathbf{v} + b\mathbf{n} + c\mathbf{b},\ a, b, c \in \mathbb{R},$$

и найдем значения коэффициентов a, b, c. Из ортогональности $\mathbf{n}$ и $\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}$ следует:

$$\left(\mathbf{n}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right) = a\underbrace{(\mathbf{n}, \mathbf{v})}_{=0} + b\underbrace{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}_{=1} + c\underbrace{(\mathbf{n}, \mathbf{b})}_{=0} \Rightarrow b = 0$$

Таким образом:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = a\mathbf{v} + c\mathbf{b}$$

Вывод второй формулы Френе-Серре

Для нахождения a и c продифференцируем скалярное произведение $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l}, \mathbf{n}\right) + \left(\mathbf{v}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right)$$

так как

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = k\mathbf{n} \text{ и } \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = a\mathbf{v} + c\mathbf{b},$$

то

$$k\underbrace{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}_{=1} + a\underbrace{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}_{=1} + c\underbrace{(\mathbf{v}, \mathbf{b})}_{=0} = 0 \Rightarrow a = -k.$$

Таким образом

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = -k\mathbf{v} + c\mathbf{b}$$

Кручение

Величина c обозначается греческой буквой κ (или $\varkappa$) и называется кручением и является вторым инвариантом кривой (первый – кривизна). Также кручение иногда называют пространственной кривизной и обозначают как k_2.

- Кручение, в отличие от кривизны, может принимать любой знак.
- У плоских (двумерных) кривых кручение равно 0.
- Геометрический смысл кручения — скорость изменения направления соприкасающейся плоскости.

Формула

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}$$

называется второй формулой Френе–Серре.

Третья формула Френе–Серре

Для вывода третьей формулы Френе–Серре найдем производную от бинормали по натуральному параметру.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}[\mathbf{v},\mathbf{n}] = \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l},\mathbf{n}\right] + \left[\mathbf{v},\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right] = \underbrace{[k\mathbf{n},\mathbf{n}]}_{=0} + \left[\mathbf{v},\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right] = \left[\mathbf{v},\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right]$$

Пользуясь второй формулой Френе–Серре, получим:

$$\left[\mathbf{v},\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right] = [\mathbf{v},-k\mathbf{v}+\varkappa\mathbf{b}] = -k\underbrace{[\mathbf{v},\mathbf{v}]}_{=0} + \varkappa\underbrace{[\mathbf{v},\mathbf{b}]}_{-\mathbf{n}}.$$

Получили третью формулу Френе–Серре:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\varkappa\mathbf{n}.$$

Формулы Френе–Серре

Мы доказали теорему:

Теорема

Френе–Серре для любой пространственной кривой $\mathbf{r}(l)$, где l — натуральный параметр, имеют место следующие формулы, называемые формулами Френе:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} &= \phantom{-k\mathbf{v}} +k\mathbf{n} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} &= -k\mathbf{v} \phantom{+k\mathbf{n}} + \varkappa\mathbf{b} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} &= \phantom{-k\mathbf{v}} -\varkappa\mathbf{n}\end{aligned}$$

где $\mathbf{v}$ — единичный вектор касательной, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, $\mathbf{b}$ — единичный вектор бинормали, $\varkappa$ — кручение, а k — кривизна.

Обобщенный вывод формул Френе-Серре 1

Три вектора $\langle \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t) \rangle$ образуют ортонормальную тройку если они единичны и взаимно ортогональны:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Дополнительно потребуем непрерывность производных произвольного порядка. Производные первого порядка от $\mathbf{e}_i$ можно разложить по ним самим и рассмотреть систему [2, с. 13]:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{3} a_i^k \mathbf{e}_k.$$

С одной стороны:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t}, \mathbf{e}_j\right) + \left(\mathbf{e}_i, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_j}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{k=1}^{3} (a_i^k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) + \sum_{l=1}^{3} (\mathbf{e}_i, a_j^l \mathbf{e}_l) = \sum_{k=1}^{3} a_i^k (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) + \sum_{l=1}^{3} a_j^l (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) = a_i^k \delta_{kj} + a_j^l \delta_{il} =$$

Обобщенный вывод формул Френе-Серре 2

С другой стороны по определению:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{ij} = 0.$$

Получаем условие, налагаемое на коэффициенты матрицы a^i_j:

$$a^j_i + a^i_j = 0 \ \forall i, j \Rightarrow a^j_i = -a^i_j,$$

что в терминах матриц означает антисимметричность матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & a^1_2 & a^1_3 \\ -a^1_2 & 0 & a^2_3 \\ -a^1_3 & -a^2_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}t} = -\alpha\mathbf{e}_2 - \beta\mathbf{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}t} = +\alpha\mathbf{e}_1 - \gamma\mathbf{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}t} = +\beta\mathbf{e}_1 + \gamma\mathbf{e}_2. \end{cases}$$

Отсюда мы можем легко получить формулы Френе-Серре, если рассмотрим в качестве ортонормальной тройки вектора $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle$ (порядок важен) и натуральную параметризацию кривой параметром l. Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}l} = -\alpha\mathbf{e}_2 - \beta\mathbf{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}l} = +\alpha\mathbf{e}_1 - \gamma\mathbf{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}l} = +\beta\mathbf{e}_1 + \gamma\mathbf{e}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = -\alpha\mathbf{n} - \beta\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = +\alpha\mathbf{v} - \gamma\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = +\beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{n}. \end{cases}$$

и используем формулу

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = k\mathbf{n},$$

Обобщенный вывод формул Френе-Серре 4

которая по-сути является определением единичного вектора нормали. Из этой формулы следует, что $\alpha = -k$, $\beta = 0$. Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = k\mathbf{n} - 0\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = -k\mathbf{v} - \gamma\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = 0\mathbf{v} + \gamma\mathbf{n}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = k\mathbf{n}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\varkappa\mathbf{n}, \end{cases} \text{где } \gamma = -\varkappa.$$

Мы получили непосредственно формулы Френе–Серре. Последнюю формулу можно использовать в качестве определения кручения $\varkappa$.

Такой подход позволяет обобщить формулы Френе–Серре на произвольную размерность пространства $\mathbb{R}^n$.

Явная формула для кручения $\varkappa$ I/II

Выведем теперь явную формулу для вычисления кручения $\varkappa$ в произвольной точке регулярной гладкой кривой. Рассмотрим три производные от радиус-вектора $\mathbf{r}$ по l:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \mathbf{v},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = k\mathbf{n},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} = k\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l}\mathbf{n} = -k^2\mathbf{v} + k\varkappa\mathbf{b} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l}\mathbf{n}.$$

Найдем смешанное произведение (используя внешнее произведение)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} \wedge \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} = \mathbf{v} \wedge k\mathbf{n} \wedge \left(-k^2\mathbf{v} + k\varkappa\mathbf{b} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l}\mathbf{n}\right) =$$

$$= -k^3 \underbrace{\mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}}_{=0} + k^2\varkappa \underbrace{\mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{b}}_{\neq 0} + k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l} \underbrace{\mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{n}}_{=0} = k^2\varkappa\mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{b}$$

Получили значение смешанного произведения (скаляр)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}\right) = k^2\varkappa \Rightarrow \varkappa = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}\right)}{k^2(l)} = R^2(l)\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}\right).$$

Учитывая, что

$$k^2(l) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2.$$

получим окончательную формулу для вычисления кручения кривой:

$$\boxed{\varkappa(l) = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}\right)}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2}}$$

Сводка основных формул для кривой с натуральным параметром 1

Пусть $\mathbf{r}(l)$ радиус-вектор гладкой регулярной кривой γ (сегмента кривой). В каждой точке кривой можно определить следующие векторы.

- Единичный касательный вектор $\mathbf{v}(l)$:

$$\mathbf{v}(l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(l)}{\mathrm{d}l}$$

- Единичный вектор нормали $\mathbf{n}(l)$:

$$\mathbf{n}(l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|}$$

- Единичный вектор бинормали $\mathbf{b}(l)$:

$$\mathbf{b}(l) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{v}, \mathbf{n}]$$

Сводка основных формул для кривой с натуральным параметром 2

Также у кривой существуют два скалярных инварианта.

- Кривизна кривой $k(l)$ и радиус кривизны $R(l)$:

$$k(l) = \left\| \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(l)}{\mathrm{d}l^2} \right\|, \; R(l) = \frac{1}{k(l)}.$$

- Кручение кривой $\varkappa(l)$ в точке $\mathbf{r}(l)$ определяется по формуле:

$$\varkappa(l) = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} \right)}{\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} \right\|^2}$$

Сводка основных формул для кривой с натуральным параметром 3

Между перечисленными векторами $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle$ и скалярами $k(l)$ и $\varkappa(l)$ существует связь, задаваемая формулами Френе–Серре:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} &= \phantom{-k\mathbf{v}} +k\mathbf{n} \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} &= -k\mathbf{v} \phantom{+k\mathbf{n}} + \varkappa\mathbf{b} \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} &= \phantom{-k\mathbf{v}} -\varkappa\mathbf{n}
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +k & 0 \\ -k & 0 & +\varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}
$$

Упорядоченная тройка векторов $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle$ образует репер Френе.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{b},\ \mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{v},\ \mathbf{b} \times \mathbf{v} = \mathbf{n}.$$

Вычисление репера Френе, кривизны и кручения для произвольного уравнения кривой

Все вышеперечисленные формулы и определения справедливы только для натурального уравнения $\mathbf{r}(l)$ кривой γ. Для произвольного параметра t эти формулы довольно значительно усложняются. Далее мы займемся выводом формул для вычисления $\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$, $k(t)$ и $\varkappa(t)$.

Вычисление единичного вектора касательной

Задача

Вычислить касательный вектор $\mathbf{v}(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Будем считать, что натуральный параметр l является непрерывной функцией от t то есть $t(l)$ и, обратно: $l(t)$. Аналитического выражения для $t(l)$ и $l(t)$ мы не знаем. Тогда из определения касательного вектора и правила дифференцирования сложной функции имеем:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t(l))}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(l(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}.$$

Так как $\|\mathbf{v}\| \equiv 1$, то

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \|\mathbf{v}\| \equiv 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^{-1}} \text{ и } \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \underbrace{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\|}_{=\|v\|\equiv 1}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|}$$

Для единичного касательного вектора получим выражение (очевидное)

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^{-1} \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|}}$$

Вычисление единичного вектора нормали 1

Задача

Вычислить единичный вектор нормали $\mathbf{n}(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Данная задача намного более трудоемкая. Начнем с определения:

$$\mathbf{n}(t(l)) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|}$$

Используя правило дифференцирования сложной функции вычислим:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}\right) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}}_{\ddot{\mathbf{r}}}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}\right)^2}_{\|\dot{\mathbf{r}}\|^{-2}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}}_{\dot{\mathbf{r}}}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2} + \dot{\mathbf{r}}\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}l^2}}_{???} \tag{1}$$

Вычисление единичного вектора нормали 2

Необходимо найти вторую производную от t по l. Учитывая, что $\|\dot{\mathbf{r}}\| = \sqrt{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})}$ запишем:

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{1}{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})}} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^{-\frac{3}{2}}\left((\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) + (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} =$$

$$= -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^{-\frac{3}{2}} 2(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^{-\frac{1}{2}} = -\frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}l^2} = -\frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^2}}$$

Подставляя в (1) получим:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})} - \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^2}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^2}$$

Вычисление единичного вектора нормали 3

Найдем теперь $\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) = \left(\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2}\dot{\mathbf{r}}, \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2}\dot{\mathbf{r}}\right) =$$

$$= \frac{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^3}(\ddot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^3} + \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^4} = \frac{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^3} = \frac{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^3} = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2$$

Получили:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2}} \qquad \boxed{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}}$$

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}}\|\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}}$$

Вычисление кривизны $k(t)$

Задача

Вычислить кривизну $k(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Выше мы доказали, что

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2} \qquad \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$$

Для векторного произведения можно доказать следующее равенство:

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$$

$$\boxed{k(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}}$$

Можно обойтись без формулы $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2$ для этого рассмотрим первую и вторую производные от $\mathbf{r}(t)$ по t:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} + \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 k\mathbf{n} + \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{v}$$

И найдем их векторное произведение, используя внешнее произведение $\wedge$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\wedge\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\wedge\left(\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 k\mathbf{n} + \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{v}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k\mathbf{v}\wedge\mathbf{n} + \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{v}\wedge\mathbf{v} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k\mathbf{v}\wedge\mathbf{n}$$

Следовательно:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k\mathbf{v}\times\mathbf{n} \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right\| = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k\underbrace{\|\mathbf{v}\times\mathbf{n}\|}_{\|\mathbf{b}\|=1} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 = \|\mathbf{r}\|^3,$$

запишем формулу для $k(t)$:

$$k(t) = \frac{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right\|}{\|\mathbf{r}\|^3}.$$

Так как по определению

$$k(t) = k(l) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})^2}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3},$$

то мы заодно доказали формулу

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right\| = \sqrt{(\ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})^2} \text{ или } \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2 = (\ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})^2.$$

Вычисление единичного вектора бинормали

Задача

Вычислить единичный вектор бинормали $\mathbf{b}(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Единичный вектор бинормали $\mathbf{b}$ легко вычисляется из определения при известных $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$. Но можно записать явную формулу через $\mathbf{r}(t)$. Выше мы вывели, что

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \|\dot{\mathbf{r}}\|^3 k\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \|\dot{\mathbf{r}}\|^3 k\mathbf{b}.$$

Используя выражение для $k(t)$

$$k(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$$

получим

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}\|\dot{\mathbf{r}}\|^3\mathbf{b} \Rightarrow \boxed{\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}}$$

Вычисление кручения $\varkappa(t)$ 1

Задача

Вычислить кручение $\varkappa(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Рассмотрим три производные: $\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ и $\dddot{\mathbf{r}}(t)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l},\\
\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} &= \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} + \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l},\\
\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^3} &= \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} + 3\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} + \frac{\mathrm{d}^3 l}{\mathrm{d}t^3}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}.
\end{aligned}
$$

Находим внешнее произведение всех трех векторов:

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\wedge\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\wedge\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^6\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\wedge\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\wedge\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}
$$

Учитывая, что $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} \wedge \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} = k^2\varkappa \mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{b}$, запишем смешанное произведение векторов $\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ и $\dddot{\mathbf{r}}(t)$ как:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^3}\right) = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^6 k^2\varkappa$$

Учитывая также, что

$$\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^6 = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^3 = \|\dot{\mathbf{r}}\|^6 \text{ и } k(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} \Rightarrow \varkappa \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^6} \|\dot{\mathbf{r}}\|^6 = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})$$

окончательно получим:

$$\boxed{\varkappa(t) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2}}$$

Случай плоской кривой в $\mathbb{R}^2$

Стоит отдельно рассмотреть регулярный сегмент кривой γ на плоскости $\mathbb{R}^2$. В этом случае

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

- Единичный вектор бинормали $\mathbf{b}$ тождественно равен нулю. Кручение $\varkappa$ также равно нулю во всех точках.
- Так как операция векторного произведения определена только для трехмерных векторов, формулы с ее участием нужно переписать другим способом.
- Репер Френе на плоскости состоит из двух векторов $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle$. Из инвариантов на плоскости определена только кривизна k.

Многие формулы для плоских кривых существенно упрощаются, если использовать для их записи комплексную структуру.

Комплексная структура на $\mathbb{R}^2$

Определение

Комплексная структура [3] на $\mathbb{R}^2$ задается линейным оператором J таким, что для любого вектора $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ верно:

$$\mathrm{J}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ из чего следует, что } \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{J}\circ\mathrm{J}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{J}\circ\mathrm{J} = -\mathrm{I}$$

Каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие комплексное число $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow z = x + iy$$

Тогда действие оператора J на $\mathbf{u}$ будет соответствовать умножению числа z на мнимую единицу:

$$\mathrm{J}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \leftrightarrow iz = -y + ix$$

Выше мы доказали равенство $(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2$ для трехмерного случая $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$. Покажем, что для двумерных векторов $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ вместо векторного произведения можно использовать комплексную структуру:

$$(\mathbf{a},\mathrm{J}\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2$$

$$\begin{gathered}
(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) = a_x^2 b_x^2 + a_y^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 + a_x^2 b_y^2, \\
(\mathbf{a},\mathbf{b})^2 = a_x^2 b_x^2 + 2a_x b_x a_y b_y + a_y^2 b_y^2, \\
(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 = a_y^2 b_x^2 + a_x^2 b_y^2 - 2a_x b_x a_y b_y = (a_x b_y - b_x a_y)^2 = (a_y b_x - a_x b_y)^2, \\
(\mathbf{a},\mathrm{J}\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -b_y \\ b_x \end{pmatrix} = -a_x b_y + a_y b_x = a_y b_x - a_x b_y,
\end{gathered}$$

откуда

$$\boxed{(\mathbf{a},\mathrm{J}\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2}$$

Единичный вектор нормали n на плоскости

Выше мы нашли, что

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}}\|\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}}.$$

Упростим эту формулу для двумерного случая.

$$(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})\ddot{\mathbf{r}} - (\ddot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} - (\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y})\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{x}^2\ddot{x}+\dot{y}^2\ddot{x}-\ddot{x}\dot{x}^2-\ddot{y}\dot{y}\dot{x}\\ \dot{x}^2\ddot{y}+\dot{y}^2\ddot{y}-\ddot{x}\dot{x}\dot{y}-\ddot{y}\dot{y}^2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}(\dot{y}\ddot{x}-\ddot{y}\dot{x})\dot{y}\\ (\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})\dot{x}\end{pmatrix} = (\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})\begin{pmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{pmatrix} = (\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}} = (\ddot{\mathbf{r}},\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}} \text{ так как } (\ddot{\mathbf{r}},\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{pmatrix}$$

Получается, что

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(\ddot{\mathbf{r}},\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}},\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})}} = \frac{\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})}} = \frac{(-\dot{y},\dot{x})^T}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}, \quad \boxed{\mathbf{n}(t) = \frac{\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{pmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{pmatrix}}$$

Кривизна плоской кривой

Так как $(\mathbf{a}, \mathrm{J}\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$, то формула для кривизны принимает вид:

$$\boxed{k(t) = \frac{(\ddot{\mathbf{r}}, \mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}}$$

Также, имя ввиду соответствие $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T \leftrightarrow z = x + iy$ можно записать формулу для кривизны в комплексном виде:

$$k(t) = \Im \frac{\ddot{z}(t)\bar{\dot{z}}(t)}{|\dot{z(t)}|^3},$$

где буквой $\Im$ обозначена мнимая часть комплексного числа.

Производные кривые от кривой γ

Для регулярного сегмента кривой γ вводят несколько различных вспомогательных кривых, которые имеют дополнительный геометрический и механический смысл [4]:

- Эволюта и эвольвента.
- Эквидистантная кривая.
- Подера и антиподера.
- Огибающая.
- Конхоида.
- Циссоида.
- Строфоида.
- Глиссетта.
- Рулетта.

Дадим определения некоторым из этих кривых. Примеры построения будут даны при решении задач.

Определение

Геометрическое место точек центров кривизны кривой называется эволютой кривой.

Для плоской кривой γ точка $Q \in \mathbb{R}^2$ называется центром кривизны в точке $P \in \gamma$, если существует окружность $C(Q, R)$ с центром в Q и радиуса R, которая касается кривой γ в точке P так, что кривизны кривой γ и окружности C совпадают. Радиус R — радиус кривизны, а окружность C называется соприкасающейся окружностью.

Определение

Эвольвента (инволюта) кривой γ суть кривая, для которой γ является эволютой.

Если на кривую намотана нерастяжимая нить, то при разматывании этой нити, ее свободный конец будет описывать эвольвенту.

Уравнения эволюты и эвольвенты

Если кривая γ представленная параметрическим уравнением с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$, то уравнение эволюты для плоской кривой имеет вид:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + R(t)\mathbf{n}(t),$$

где $R(t) = 1/k(t)$ — радиус кривизны, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали. В свою очередь уравнение эвольвенты имеет вид:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + (l(t_0) + l(t))\mathbf{v}(t), \;\; l(t_0) - l(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{r}}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau,$$

где l — натуральный параметр.

Эквидистантная кривая и ее уравнение

Определение

Геометрическое место точек, расположенных на фиксированном расстоянии от точек кривой γ в направлении единичного вектора нормали, называется эквидистантной кривой (параллельной кривой).

Уравнение данной кривой легко получается из определения:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t),$$

где d — фиксированное расстояние до кривой γ, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали.

Определение

Пусть γ — некоторая кривая и O — фиксированная точка. Геометрическое место точек, описываемое основанием перпендикуляра, опущенного на касательную движущейся точки кривой γ называется подерой кривой γ.

Для трехмерной кривой уравнение подеры с точкой O в начале координат имеет вид:

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{n}(t))\mathbf{n}(t) + (\mathbf{r}(t), \mathbf{b}(t))\mathbf{b}(t).$$

Для двумерной кривой уравнение упрощается

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{n}(t))\mathbf{n}(t),$$

где точка O из определения по прежнему является началом координат.

Огибающая семейства кривых

Определение

Огибающей семейства кривых называется кривая, которая касается каждой кривой из данного семейства.

Следующее определения справедливо для плоской кривой.

Определение

Пусть γ — некоторая кривая и A — некоторая фиксированная точка на плоскости. Некоторая прямая проходит через A и пересекает γ в точке Q. P_1 и P_2 — точки этой прямой такие, что

$$P_1Q = QP_2 = k = \mathrm{const}$$

Геометрическое место точек P_1 и P_2, получаемое при перемещении точки Q по прямой, называется конхоидой, построенной относительно точки A.

Следующее определения справедливо для плоской кривой.

Определение

Пусть даны две кривые γ_1 и γ_2. Пусть A — некоторая фиксированная точка. Некоторая прямая проходит через A и пересекает γ_1 и γ_2 в точках Q и R соответственно. Найдется точка P на прямой для которой выполняется $AP = QR$. Геометрическое место точек P, получаемое при движении точек Q и R по кривым называется циссоидой. Точка A называется полюсом циссоиды.

Следующее определения справедливо для плоской кривой.

Определение

Пусть даны некоторая кривая γ и фиксированные точки O и A на этой кривой. Прямая проходит через O и пересекает кривую γ в точке Q. Две точки P_1 и P_2 выбираются на прямой так, что $P_1Q = QP_2 = QA$. Геометрическое место точек P_1 и P_2 называется строфоидой, построенной относительно O и A. Точка O называется полюсом строфоиды.

Следующее определения справедливо для плоской кривой.

Определение

Если кривая катится без проскальзывания вдоль другой, фиксированной кривой, то любая выбранная точка движущейся кривой описывает рулетту (от французского roulette).

Примеры рулетты: циклоида, эпициклоида, гипоциклоида.

Теория кривых

Примеры и решение задач по теории кривых

Дифференциальная геометрия
Примеры и решение задач по теории кривых

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Существует большое количество кривых, которые возникали как решение различных математических, физических, астрономических и инженерных задач. Обычно такие кривые получали имя собственное. Перечислим некоторые из таких кривых.

- Конические сечения: эллипс (окружность), парабола, гипербола.
- Циклоидальные кривые: эпитрохоида и гипотрохоида и их частные случаи: эпициклоида и гипоциклоида, кардиоида, улитка Паскаля (limaçon), астроида, нефроида, делтоида, циклоида.
- Различные спирали (простая и логарифмическая)
- Прямая строфоида.
- Лемнискаты (лемниската Бернулли)

Не следует путать отдельные графики $x(t) = R\cos t$ и $y(t) = R\sin t$ (рисунок 78) с параметрически заданной кривой с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix} \text{ против } \begin{cases} x(t) = R\cos t, \\ y(t) = R\sin t. \end{cases}$$

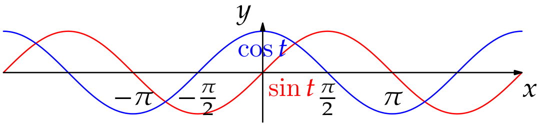


Рис. 3: Синусоиды, а не окружность

Окружность 2

На рисунке 4
изображена параметрическая окружность, заданная радиус-вектором:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$$

- Каждому значению параметра t соответствует точка $(x(t), y(t))^T$.
- Геометрический смысл t — угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и осью Ox.
- Хотя $t \in \mathbb{R}$, но достаточно $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

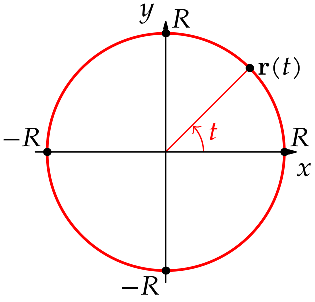


Рис. 4: Окружность

Из неявного уравнения эллипса с центром в точке (x_0, y_0) легко получить явную, кусочно-гладкую функцию:

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow y = y_0 \pm b\sqrt{1-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2}, \; -a \leqslant x \leqslant a.$$

Параметрическое представление удобнее для анализа и построения кривой (см. рис. 80).

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)^T$$

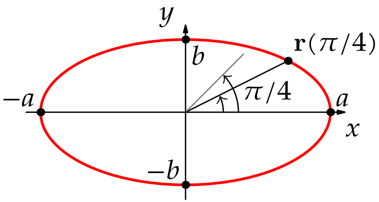


Рис. 5: В случае эллипса параметр не равен углу поворота радиус-вектора

Центр двух ветвей гиперболы в точке (x_0, y_0). Неявное уравнение имеет вид:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1,$$

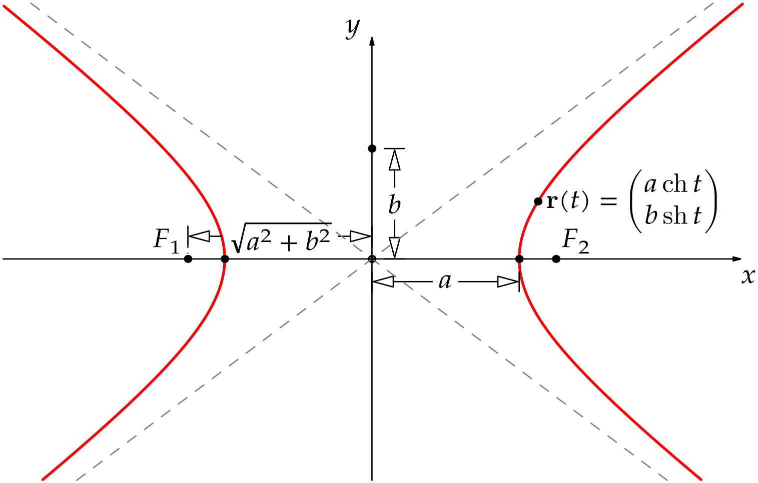
а явное получается из неявного и также является кусочной функцией:

$$y = y_0 \pm b\sqrt{\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - 1},\ x \notin (-a, a).$$

Параметрическое уравнение:

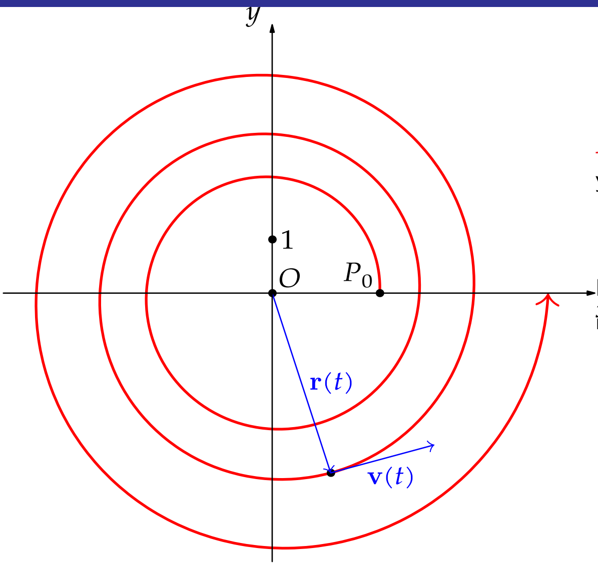
$$\begin{cases} x = x_0 + a \operatorname{ch} t, \\ y = y_0 + b \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

где ch — гиперболический косинус, а sh — гиперболический синус.



y
b
$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \operatorname{ch} t \\ b \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$
F_1
$\sqrt{a^2 + b^2}$
F_2
a
x

Логоифмическая спираль



Логарифмическая спираль имеет наиболее простое уравнение в полярных координатах:

$$r = ae^{b\varphi}$$

Параметрическое представление в декартовых координатах чуть более громоздкое:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} ae^{bt}\cos t \\ ae^{bt}\sin t \end{pmatrix}$$

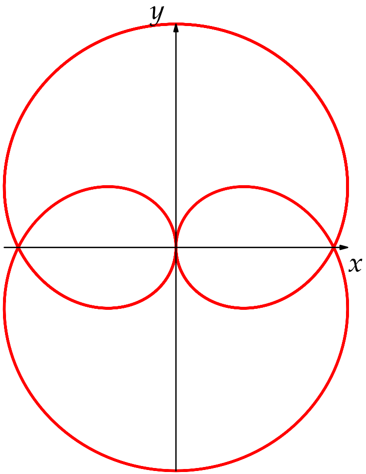
Эпитрохоида

Эпитрохоида (ἐπί — над, τροχός — колесо, ειδής — образ) циклоидальная кривая (или рулетта) получающаяся если окружность радиуса r катится по внешней стороне окружности радиуса R.
Параметрический вид кривой:

$$\begin{cases} x(t) = R(k+1)\cos(kt) - d\cos((k+1)t), \\ y(t) = R(k+1)\sin(kt) - d\sin((k+1)t), \end{cases}$$

где $k = r/R$, d — расстояние от центра катящейся окружности до точки кривой.

Эпитрохоида



На рисунке слева изображена эпитрохоида со следующими параметрами:

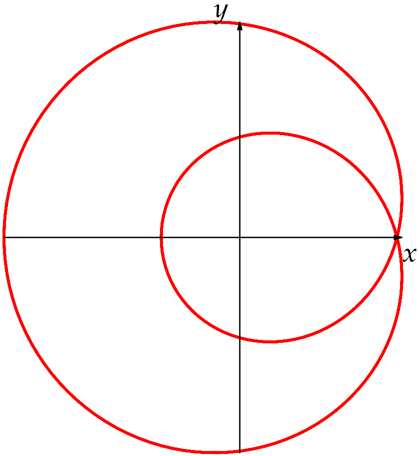
$$r = \frac{R}{2}, R = 3, d = \frac{3R}{2}.$$

Гипотрохоида (ὑπό — снизу, τροχός — колесо, ειδής — образ) циклоидальная кривая (или рулетта) получающаяся если окружность радиуса r катится по внутренней стороне окружности радиуса R.
Параметрическое уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = R(1-k)\cos(kt) + d\cos((1-k)t), \\ y(t) = R(1-k)\sin(kt) - d\sin((1-k)t), \end{cases}$$

где r — радиус катящейся окружности, R — радиус неподвижной окружности, $k = r/R$, d — расстояние от центра катящейся окружности до точки кривой.

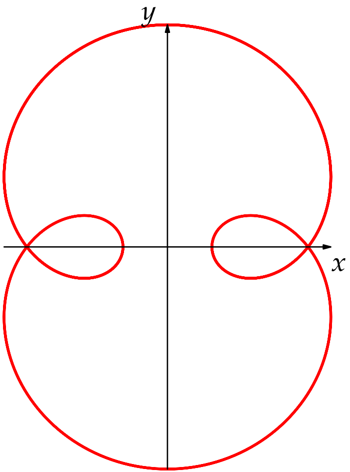
Гипотрохоида



На рисунке слева изображена гипотрохоида со следующими параметрами:

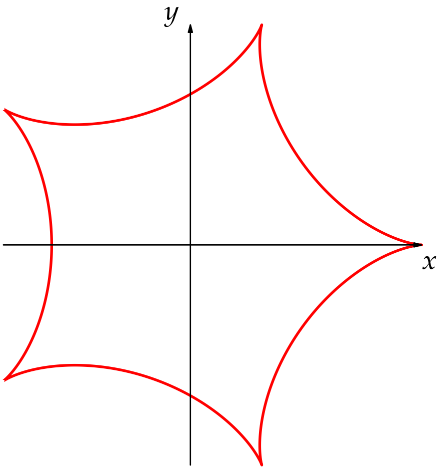
$$R = 4, r = 2, d = 1.$$

Эпициклоида

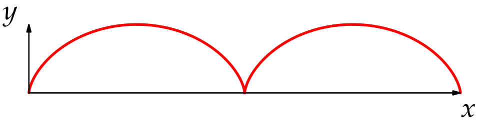


Эпициклоида (ὑπό — снизу, κύκλος — круг/окружность, εἰδής — образ) суть эпитрохоида с $d = r$.

Гипоциклоида



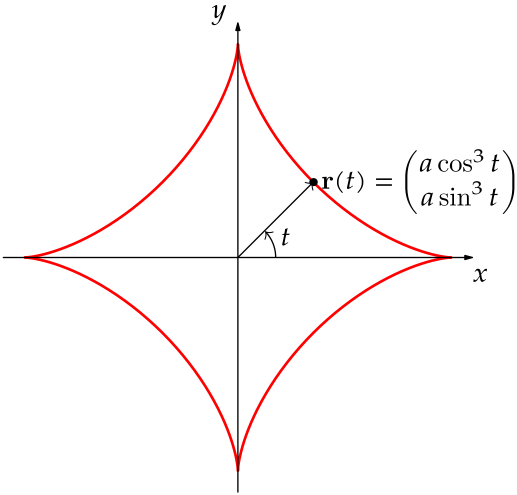
Гипоциклоида (ἐπί — над, κύκλος — круг/окружность, εἰδής — образ) суть гипотрохоида с $d = r$



Циклоида (κύκλος — круг/окружность, ειδής — образ) определяется как траектория фиксированной точки на окружности, которая катится без проскальзывания по прямой (обычно вдоль Ox). Параметрическое представление:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix}$$

Астроида



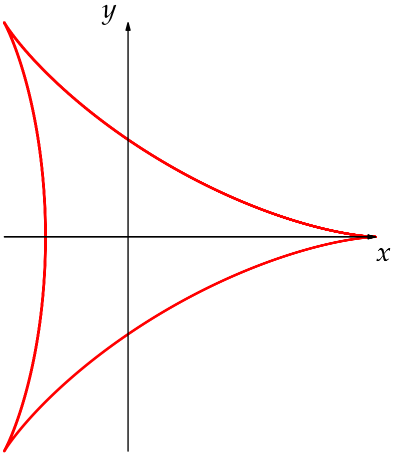
Астроида (αστρον — звезда, ειδος — образ, идея) — частный случай гипоциклоиды с $k = 4$. Неявное уравнение имеет вид:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

а параметрическое указано на рисунке слева.

- Геометрический смысл t — угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и осью Ox.
- Хотя $t \in \mathbb{R}$, но достаточно $0 \leqslant t < 2\pi$ чтобы обойти все точки кривой.

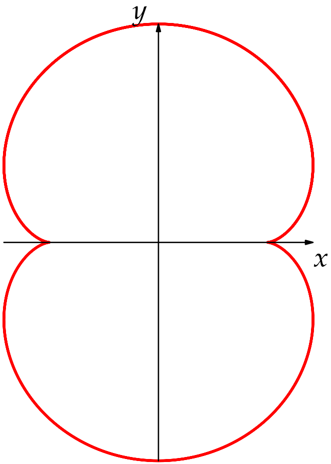
Дельтоида



Дельтоида (δέλτα — дельта Δ, ειδής — образ) — частный случай гипоциклоиды с $k = 3$.

Параметрическое уравнение имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(2\cos t + \cos 2t) \\ a(2\sin t - \sin 2t) \end{pmatrix}$$

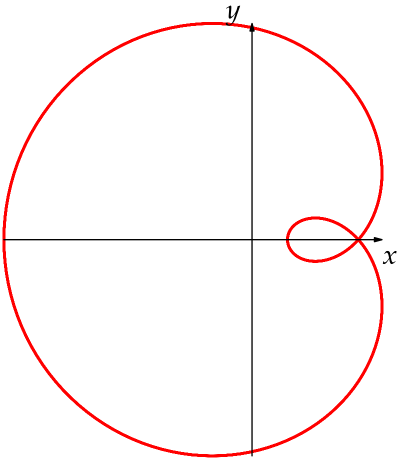


Нефроида (νεφρός — почка, εἶδος — образ) — частный случай эпициклоиды с $k = 2$.

Параметрическое уравнение имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(3\cos t - \cos 3t) \\ a(3\sin t - \sin 3t) \end{pmatrix}$$

Кардиоида



Кардиоида (καρδία — сердце, εἶδος — образ) — частный случай эпициклоиды с $k = 1$ или улитки Паскаля при $d = r$. Параметрическое уравнение имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(2\cos t - \cos 2t) \\ a(2\sin t - \sin 2t) \end{pmatrix}$$

Вычисление натурального параметра 1

Пример

Найти натуральный параметр кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Параметризировать функцию можно следующим образом: $t = x \Rightarrow$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^{3/2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t^{3/2} \end{cases}$$

Используя известную нам формулу:

$$\mathrm{d}l = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t \,,$$

найдем выражение для дифференциала натурального параметра:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} t^{1/2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}|t|} \Rightarrow \mathrm{d}l = \sqrt{1 + \frac{9}{4}|t|}\, \mathrm{d}t$$

Вычисление натурального параметра 2

В данном случае интеграл можно вычислить аналитически. Обратите внимание, что мы заменили параметр t на τ под знаком интеграла.

$$l = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sqrt{4+9|\tau|}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{27}((4+9t)^{3/2}-8)$$

Мы нашли выражение для натурального параметра:

$$\boxed{l = \frac{1}{27}((4+9t)^{3/2}-8)}$$

Так как мы брали интеграл от 0 до t, то $l=0$ в той точке, которая соответствует $t=0$, то есть $(0,0)$. Именно от этой точки отсчитывается длина дуги кривой l в положительном и отрицательном направлениях.

Пример

Найти натуральное уравнение окружности с центром в точке x_0, y_0 радиуса R.

Параметрическое уравнение окружности имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos t \\ y_0 + R\sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ +R\cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = R.$$

Натуральный параметр вычисляется легко, так как норма радиус-вектора постоянна и равна R

$$\mathrm{d}l = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|\,\mathrm{d}t = R\,\mathrm{d}t \Rightarrow l = \int\limits_0^t R\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow l = Rt \Rightarrow t = l/R.$$

Праметрическое представление окружности имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \left(x_0 + R\cos\frac{l}{R}, y_0 + R\sin\frac{l}{R}\right)^T$$

Пример

Найти кривизну прямой линии.

Параметрическое представление с натуральным параметром для кривой имеет вид:

$$\mathbf{r}(l) = (x_0 + al, y_0 + bl)^T \Leftrightarrow \begin{cases} x(l) = x_0 + al, \\ y(l) = y_0 + bl. \end{cases}$$

Так как кривизна вычисляется по формуле $k(l) = \left\| \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} \right\|$ нам надо вычислить вторую производную от радиус-вектора $\mathbf{r}$ по натуральному параметру l:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k(l) = 0, \; R(l) \to \infty.$$

Пример

Найти кривизну окружности радиуса ρ:

Выше мы нашли параметрическое представление окружности с натуральным параметром. Продифференцируем $x(l)$ и $y(l)$ два раза.

$$\begin{cases} x(l) = x_0 + \rho \cos\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \\ y(l) = y_0 + \rho \sin\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} = -\rho \dfrac{1}{\rho} \sin\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} = +\rho \dfrac{1}{\rho} \cos\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}l^2} = -\dfrac{1}{\rho} \cos\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}l^2} = -\dfrac{1}{\rho} \sin\left(\dfrac{l}{\rho}\right). \end{cases}$$

$$k(l) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}l^2} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}l^2}} = \frac{1}{\rho},$$

$$R(l) = \frac{1}{k(l)} = \rho.$$

Найти кривизну и кручение винтовой линии:

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$$

Решение.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = (-a\sin t, a\cos t, b)^T$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t$$

$$l = \sqrt{a^2+b^2}t \Rightarrow t = \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\mathbf{r}(l) = \begin{pmatrix} a\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{bl}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ +\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \mathbf{v}(l)$$

Вычисление кривизны и кручения винтовой линии 2

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{a^2+b^2}\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\dfrac{a}{a^2+b^2}\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l}\right| = \boxed{\frac{a}{a^2+b^2} = k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} -\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление кривизны и кручения винтовой линии 3

$$\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}] = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot 0 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \left(- \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot 0 \right) \mathbf{e}_2 +$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \cdot \mathbf{e}_3$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a^2+b^2} \cos \dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{a^2+b^2} \sin \dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{- \frac{b}{a^2+b^2}}_{\kappa} \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos \dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\sin \dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}} \Rightarrow$$

Вычисление кривизны и кручения винтовой линии 4

Так как кручение определяется равенством

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\kappa\mathbf{n},$$

то для винтовой линии:

$$\boxed{\kappa = \frac{b}{a^2 + b^2}}$$

Из формул видно, что кривизна и кручение винтовой линии постоянны:

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2} = \mathrm{const}, \ \kappa = \frac{b}{a^2 + b^2} = \mathrm{const}.$$

Вычисление эволюты эллипса 1

Уравнение эволюты:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + R(t)\mathbf{n}(t) = \mathbf{r} + \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}{(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{J}\dot{\mathbf{r}})} \frac{\mathbf{J}\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} = \mathbf{r} + \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{J}\dot{\mathbf{r}})}\mathbf{J}\dot{\mathbf{r}},$$

а в декартовых координатах

$$\mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} x_{\mathbf{e}}(t) \\ y_{\mathbf{e}}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - \dot{y}(t)\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \\ y(t) + \dot{x}(t)\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

Пример

Найти уравнение эволюты эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Вычисление эволюты эллипса 2

Так как у нас есть общая формула для эволюты плоской кривой, то решение задачи является делом чисто техническим. Достаточно найти первую и вторую производную и выполнить алгебраические преобразования.

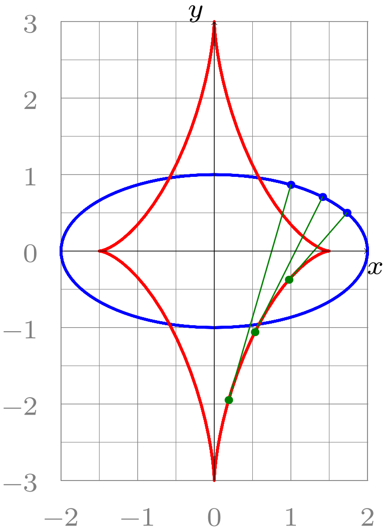
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a\sin t, \\ \dot{y}(t) = b\cos t \end{cases} \begin{cases} \ddot{x}(t) = -a\cos t, \\ \ddot{y}(t) = -b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t, \\ \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = ab\sin^2 t + ab\cos^2 t = ab \end{matrix}$$

$$x_{\mathbf{e}}(t) = a\cos t - b\cos t\frac{1}{ab}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) = a\cos t(1-\sin^2 t) - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

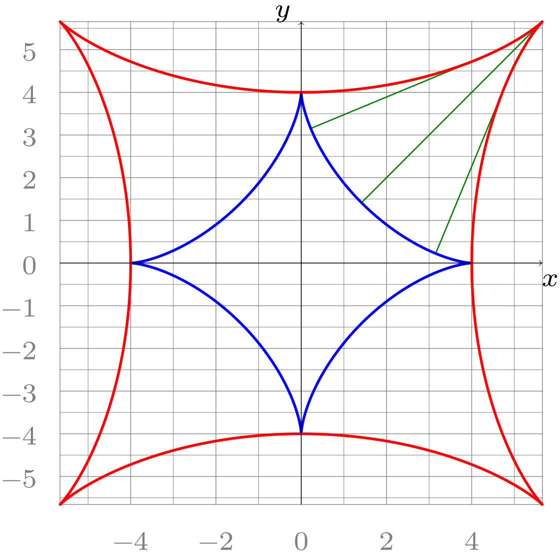
$$y_{\mathbf{e}}(t) = b\sin t - a\sin t\frac{1}{ab}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) = b\sin t(1-\cos^2 t) - \frac{a^2}{b}\sin^3 t = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$$

$$\mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \\ \dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t \end{pmatrix} \text{ — эволюта.}$$

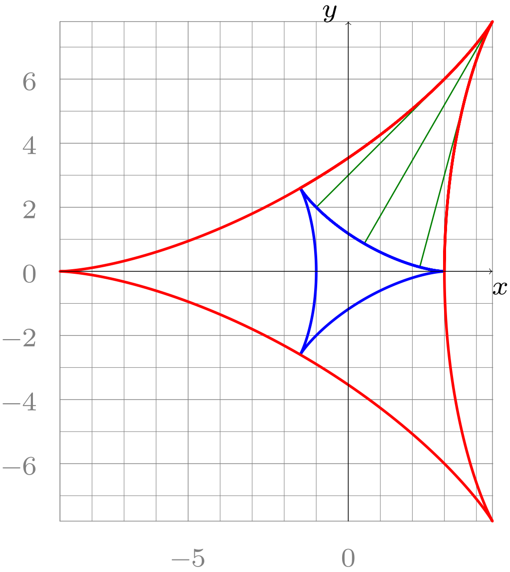
Эволюта эллипса



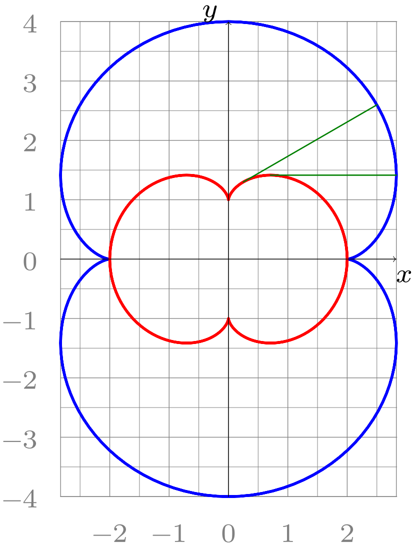
Эволюта астроиды



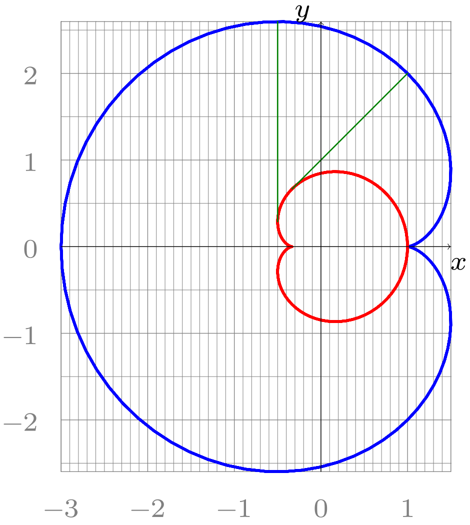
Эволюта дельтоиды



Эволюта нефроиды



Эволюта кардиоиды



Пример вычисления репера Френе, кривизны и кручения 1

Задача

Найти репер Френе, кривизну и кручение следующей кривой

$$\mathbf{r}(t) = (2t, \ln t, t^2)^T$$

Попробуем перейти к натуральному параметру:

$$\mathrm{d}l = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t\,,\ l = \int\limits_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \right\| \mathrm{d}\tau,\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{t} \\ 2t \end{pmatrix}\ \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{t^2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\|^2 = \left(\frac{1}{t} + 2t \right)^2, \Rightarrow \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\| = \frac{1}{t} + 2t \Rightarrow \mathrm{d}l = \frac{2t^2+1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Выразить t через l явно не представляется возможным в конечном виде, так как их связывает трансцендентное уравнение:

$$l = t^2 + \ln t.$$

Пример вычисления репера Френе, кривизны и кручения 2

Будем действовать обходными путями. Проще всего найти касательный вектор:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \frac{t}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{t} \\ 2t \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t^2 \end{pmatrix}}$$

Далее найдем нормальный вектор и кривизну:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}l^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \frac{t}{2t^2+1}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}l^2} = \frac{(1-2t^2)t}{(2t^2+1)^3},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{2t}{(2t^2+1)^3}\begin{pmatrix} 1-2t^2 \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2 = \frac{4t^2}{(2t^2+1)^4}$$

Пример вычисления репера Френе, кривизны и кручения 3

Вычисляем кривизну и единичный вектор нормали:

$$k(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}, \quad \mathbf{n}(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|} = \frac{1}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 1-2t^2 \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Зная $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ можно найти единичный вектор бинормали:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}] = \frac{1}{(2t^2+1)^2}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2t & 1 & 2t^2 \\ 1-2t^2 & -2t & 2t \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{b}(t) = \frac{1}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 2t \\ -2t^2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Пример вычисления репера Френе, кривизны и кручения 4

Можно проверить, что $\|\mathbf{b}\| \equiv 1$. Для нахождения кручения $\varkappa(t)$ воспользуемся третьей формулой Френе–Серре:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\varkappa\mathbf{n}$$

для чего вычислим

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} \text{ т.к. } \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(2t^2+1)^2}\begin{pmatrix} 2-4t \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix} \text{ то } \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2}\underbrace{\frac{1}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 1-2t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}}$$

Из этого соотношения находим кручение как коэффициент при единичном векторе нормали:

$$\boxed{\varkappa(t) = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}}$$

Это проще, чем пользоваться формулой со смешанным произведением.

Список литературы 1

1. Фиников С. — **Курс дифференциальной геометрии.** — Москва : URSS, 2017. — 343 с.
2. Норден А. П. — **Теория поверхностей.** — 2-е изд. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 264. — (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия)). — ISBN 978597106234.
3. Abbena E., Salamon S., Gray A. — **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.** — 3-е изд. — CRC Press, 2017. — (Textbooks in Mathematics). — ISBN 9781351992206.
4. Lockwood E. H. — **A book of curves.** — Cambridge University Press, 1961.