Лекция 6

Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

Пусть $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ – единичный вектор, причем $\|\mathbf{l}\| = 1$, $\mathbf{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда при достаточно малых значениях $t \geqslant 0$ имеем $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l}) \in X$. Рассмотрим функцию $\varphi(t, \mathbf{l}) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l})$.

Определение 6.1. Если существует производная

$$\varphi'_t\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l})\Big|_{t=0}, \tag{6.1}$$

то она называется *производной по направлению вектора* $\mathbf{l}$ функции f в точке $\mathbf{x}_0$. Обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0)$.

$x_0 + tl_k = (x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k + t, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n)$

Перепишем (6.1) в виде

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0).$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial l_k}(x_0).$

Частная производная является частным случаем производной по направлению. Действительно, пусть

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0 + tl_k) - f(x_0)}{t}$

$x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n)$

$$\mathbf{l}_k = (\overbrace{\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0}^{n}),$$

$tl_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{t}, 0, \dots, 0)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_k}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k + t, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x^k}(\mathbf{x}_0).$$

$f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n)$

Определение 6.2. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке $\mathbf{x}_0 \in X$, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i (x^i - x_0^i) + \overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|), \tag{6.2}$$

где $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \dots, n$ – постоянные.

$\in X$

$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Теорема 6.1. Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, то $\mathcal{A}_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, \dots, n$ и существует $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0)$ по любому направлению $\mathbf{l}$ и при этом

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0) = (\mathcal{A}, \mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i l^i.$$

$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$

$x - x_0 = tl$

Доказательство. Поскольку по условию теоремы имеем место (6.2), то, подставив в (6.2) $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{l}$ ($\|l\| = 1$), получим

$x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$

$l = (l^1, \dots, l^n)$

$$f(\underbrace{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l}}_{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i (x_0^i + tl^i - x_0^i) + \overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t\mathcal{A}_i l^i + \overline{\overline{o}}(\|t\mathbf{l}\|) = \sum_{i=1}^{n} t\mathcal{A}_i l^i + \overline{\overline{o}}(|t| \cdot \underbrace{\|\mathbf{l}\|}_{=1}) = \sum_{i=1}^{n} t\mathcal{A}_i l^i + \overline{\overline{o}}(|t|).$$

$tl = (tl^1, \dots, tl^n)$; $x_0 + tl = (x_0^1 + tl^1, \dots, x_0^n + tl^n).$

$$\frac{f(x_0+tl)-f(x_0)}{t} = \sum_{i=1}^{n} A_i l^i + \frac{\bar{o}(|t|)}{t}$$

Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{l})-f(\mathbf{x}_0)}{t} = \sum_{i=1}^{n}\mathcal{A}_i l^i + \lim_{t\to 0}\frac{\overset{=}{o}(|t|)}{t} = (\mathcal{A},\mathbf{l}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0), \qquad (6.3)$$

$= 0$

$\| \; A_k l^k = A_k$

где $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n)$.

Подставим, в (6.3) вместо $\mathbf{l}$ вектор $\mathbf{l}_k$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial l_k}(x_0) = A_k.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_k}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(\mathbf{x}_0) = (\mathcal{A},\mathbf{l}_k) = \mathcal{A}_k,\ k = 1,\ldots,n.$$

$X \subset \mathbb{R}^n$

$$l_k = (0,\ldots,0,\overset{k}{1},0,\ldots,0)$$

$\square$

Теорема 6.2. Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_0$, то она непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. Переходя в (6.2) к пределу при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, получим

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)) = 0, \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

то есть $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$. $\square$

Теорема 6.3. Из существования частных производных функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$, вообще говоря, не следует её дифференцируемость в точке $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Найдем $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ и покажем, что эта функция не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Имеем

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{0|x|}-0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично, $f'_y(0,0) = 0$. Далее, из (6.2) следует, что

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i (x^i - x_0^i) + \bar{o}(\|x - x_0\|),$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta f(0,0) - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

где $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

В данном случае имеем

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\sqrt{2(\Delta x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

$f : X \to \mathbb{R}$

то есть f не является дифференцируемой в точке $(0,0)$. $\square$

Теорема 6.4. (Достаточное условие дифференцируемости). Пусть в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in X$ существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}$, $k = 1,\ldots,n$, являющиеся непрерывными функциями в точке $\mathbf{x}_0$. Тогда функция $f : X \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_0$.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$\exists\,\xi\in(a,b)$

$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$

Доказательство. Рассмотрим трехмерный ($n=3$) случай. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{x}_0) &= f(x_0^1+\Delta x^1, x_0^2+\Delta x^2, x_0^3+\Delta x^3) - f(x_0^1,x_0^2,x_0^3) = \\ &= [f(x_0^1+\Delta x^1, x_0^2+\Delta x^2, x_0^3+\Delta x^3) - f(x_0^1, x_0^2+\Delta x^2, x_0^3+\Delta x^3)] + \\ &\quad + [f(x_0^1, x_0^2+\Delta x^2, x_0^3+\Delta x^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3+\Delta x^3)] + \\ &\quad + [f(x_0^1, x_0^2, x_0^3+\Delta x^3) - f(x_0^1,x_0^2,x_0^3)].\end{aligned}$$

Применим теорему Лагранжа о конечных приращениях ($(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})\in X$, рассматриваются промежутки с концами x_0^k и $x_0^k+\Delta x^k$, $k=1,\ldots,n$). Получим

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2+\Delta x^2, x_0^3+\Delta x^3)\Delta x^1 + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, \xi^2, x_0^3+\Delta x^3)\Delta x^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, \xi^3)\Delta x^3, \quad (6.4)\end{aligned}$$

где ξ_i – точка из промежутка с концами x_0^i и $x_0^i+\Delta x^i$.

Учитывая, что частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ непрерывны в точке $\mathbf{x}_0$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2+\Delta x^2, x_0^3+\Delta x^3) &= \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^1}+\alpha_1, \\ \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, \xi^2, x_0^3+\Delta x^3) &= \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^2}+\alpha_2, \qquad (6.5)\\ \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, \xi^3) &= \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^3}+\alpha_3,\end{aligned}$$

x_0 $\quad\xi\quad$ $x=x_0+\Delta x$

$\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)\Rightarrow$

$\lim_{x\to x_0} g(x)-g(x_0)=0$

$\lim_{x\to x_0}(g(x)-g(x_0))=0$

где $\alpha_i\to 0$ при $x\to x_0$.

Подставляя (6.5) в (6.4), приходим к равенству

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{x}_0) &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^k}\Delta x^k + \sum_{k=1}^{3}\alpha_k\Delta x^k = \\ &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^k}\Delta x^k + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k\Delta x^k}{\|\Delta\mathbf{x}\|}\right)\|\Delta\mathbf{x}\|}_{\text{огр.}\times\text{беск. малая}=\text{беск. малая}} = \\ &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^k}\Delta x^k + \overline{\overline{o}}(\|\Delta\mathbf{x}\|).\end{aligned}$$

б.м. огр.

$\sum_{k=1}^{3}\dfrac{\alpha_k\Delta x^k}{\|\Delta x\|}\cdot\|\Delta x\|$

A_k

$g(x)-g(x_0)=\alpha(x)$

$\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$

Дифференцирование сложной функции

Теорема 6.5. Пусть функции $g^k: X\subset\mathbb{R}^n\to \cancel{Z\subset\mathbb{R}^m}$ $\mathbb{R}$, $k=1,\ldots,m$ дифференцируемы в точке $\mathbf{x}_0$, а функция $f: Z\to\mathbb{R}$ – дифференцируема в точке $\mathbf{b}=\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. Тогда сложная функция $y=f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$ и при этом $\forall i=1,\ldots,n$

$$\left.\frac{\partial y(x^1,x^2,\ldots,x^n)}{\partial x^i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b})\frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0).$$

$g^k=g^k(x^1,\ldots,x^n)$; $g=(g_1,\ldots,g_m)$. $\quad\Delta x=(\Delta x^1,\Delta x^2,\ldots,\Delta x^n)$.

$$\sqrt{(\Delta x^k)^2} \le \sqrt{(\Delta x^1)^2 + \ldots + (\Delta x^k)^2 + \ldots + (\Delta x^n)^2} = \|\Delta x\|$$

$$|\Delta x^k| \le \|\Delta x\| \Rightarrow 0 \le \frac{|\Delta x^k|}{\|\Delta x\|} \le 1$$

Доказательство. Имеем

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{b}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b})(z^k - b^k) + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{z} - \mathbf{b}\|), \tag{6.6}$$

$$\underbrace{g^k(\mathbf{x})}_{=z^k} - \underbrace{g^k(\mathbf{x}_0)}_{=b^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)(x^i - x_0^i) + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|),\ k = 1, \ldots, m, \tag{6.7}$$

$\Delta x = x - x_0$

Из (6.6) и (6.7) следует

$$= \sum_{k=1}^{3} A_k \cdot (x^k - x_0^k) + \bar{\bar{o}}(\|x - x_0\|).$$

$$f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b}) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)(x^i - x_0^i) + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \right] + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{z} - \mathbf{b}\|) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b}) \frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)(x^i - x_0^i) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b}) \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) +$$

$$+ \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{z} - \mathbf{b}\|).$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Отметим, что

$$\frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x_0})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} (g^k(\mathbf{x}) - g^k(\mathbf{x}_0))}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \frac{x^i - x_0^i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{\bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right)^2}$$

– ограничено, поэтому $\bar{\bar{o}}(\|\mathbf{z} - \mathbf{b}\|) = \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$.

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b}) \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) = \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

Таким образом,

$$f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{A}}_i (x^i - x_0^i) + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|),$$

где $\tilde{\mathcal{A}}_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b}) \frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial y(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial x^i} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{\partial x^i} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0}$. □