

Кейс 3. Кролики

Требуется найти и оценить возможные экологические последствия такой ситуации: на Кубе из клетки убежала сукрольная крольчиха.

Справочные материалы:

1) Ч. Дарвин в книге «Изменение животных и растений в домашнем состоянии» в главе 4 писал: «В 1418 или 1419 году у Х. Гонзалеса Зарко на корабле случайно была беременная крольчиха, которая родила детенышей; все они были выпущены на остров Порто-Санто. Кролики вскоре столь размножились, что стали вредными и почти заставили бросить поселение на острове. Тридцать семь лет спустя Када Мосто писал, что кролики стали неисчислимы, так как на острове не было никаких хищников и вообще никаких наземных млекопитающих».

2) Из наземных млекопитающих на Кубе в дикой природе живут:

Таблица 3.1. Млекопитающие Кубы

Парнокопытные	Хищники	Рукокрылые	Насекомоядные	Грызуны
кабан	яванский мангуст	25 видов	кубинский щелезуб	14 видов
				

3) биологический потенциал кроликов в природе:

Таблица 3.2. Условия размножения кроликов

Температура размножения (среднесуточная)	15-25°C
Возраст начала размножения	3 мес., оптимально – после 6 мес.
Длительность беременности	28-33 дня
Интервал между окролами	от 1 мес., обычно от 1,5 мес.
Крольчат в помете на молодую крольчиху	6-12
Смертность молодняка в природе	40-50%
Количество окролов в год	до 8
Крольчат на крольчиху в год	до 40
Средняя продолжительность жизни	3 года
Количество осадков, определяющих засушливость сезона, когда травы мало и размножение не происходит	меньше 60 мм второй месяц подряд

4) средние температуры и средняя влажность на Кубе по месяцам

1. Оцените перспективы развития популяции кроликов на Кубе с учетом наличия естественных врагов (табл. 3.1); длительности благоприятного температурного режима и кормовой базы (табл. 3.2 и рис. 3.1).

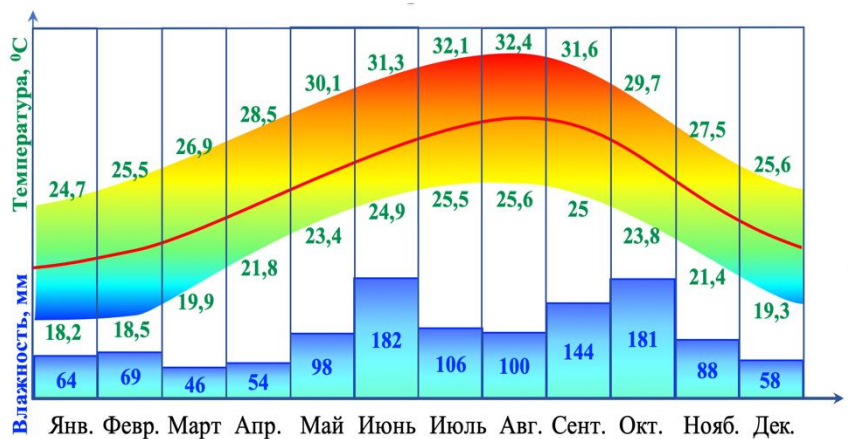


Рис. 3.1. График дневных и ночных температур (в °C) и гистограмма влажности (в мм) на Кубе

2. Предложите алгоритм определения количества кроликов на Кубе через год, если их длительность жизни больше года, в помете примерно одинаковое количество крольчат обоих полов и окрол должен был произойти в конце А) января, Б) октября.

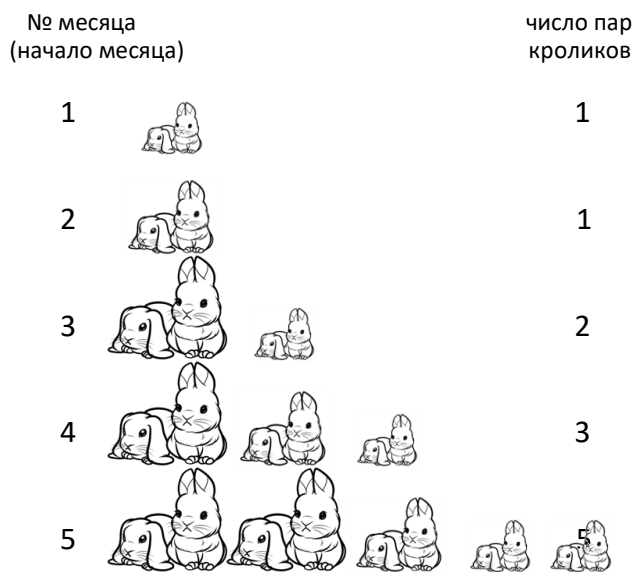


Рис. 3.2. Модель развития популяции кроликов до пятого месяца

Первая известная модель биологической системы описана Леонардо из Пизы по прозвищу Фибоначчи (1202 г.). Предполагалось, что пара разнополых кроликов начинает спариваться через месяц после рождения, и, начиная с третьего месяца жизни, ежемесячно крольчиха приносит пару разнополых крольчат, которые сами с третьего месяца ежемесячно начинают приносить по паре крольчат и т.д. Кролики не умирают и не имеют

внутривидовой конкуренции.

3. Как будет выглядеть схема размножения кроликов (рис. 3.2), если ее продолжить до начала седьмого месяца?

4. Запишите последовательность из 9 чисел, отражающую количество пар кроликов в начале каждого месяца.

5. Найдите зависимость между последовательными числами ряда и запишите ее в виде рекуррентной формулы (формулы, в которой каждый член последовательности выражается через предыдущие члены и, возможно, номер члена последовательности).

6. Постройте в редакторе Excel (или любом другом, позволяющем вносить изменения и смотреть динамику) график роста популяции кроликов Фибоначчи за 12 месяцев.

7. Определите количество пар кроликов в модели Фибоначчи через А) год (в начале 13-го месяца); Б) 15 месяцев; В) 19 месяцев; Г) 22 месяца

8. Сравните трудоемкость и информативность определения числа кроликов через заданный период времени с помощью числового ряда, рекуррентной формулы, инфограммы и гистограммы. Выскажите предположения, в каком случае каждую из них эффективнее всего использовать

9. Для идеализированного случая (табл. 3.3), с учетом начала размножения (появления первых крольчат) к началу четвертого месяца, выведите числовой ряд, характеризующий ежемесячный рост популяции пар кроликов за год и формулу ряда; постройте в редакторе Excel кривую роста популяции кроликов и сравните с кривой роста популяции кроликов Фибоначчи.

Таблица 3.3. Идеальные условия для кроликов

Естественные враги и болезни	нет
Кормовая база	неограниченная круглый год
Температура региона	18-23 ⁰ С
Среднее число выживших крольчат в помете	4
Число пометов в год	8

10. Подберите такие параметры моделей (число выживших крольчат в помете и количество окролов в год), чтобы они соответствовали данным трех реальных ситуаций (табл. 3.4), учитывая, что кролики в каждой из этих экосистем не имеют естественных врагов и живут больше года. Считается, что кроликов обоего пола изначально было одинаковое количество. Постройте модели в редакторе Excel. Насколько хорошо данные математические модели описывают реальные экосистемы?

1) в 1972 году в Евпатории на скудном приморском солончаке было выпущено 30 взрослых зверьков. Спустя год кроликов было около 150; к концу второго года колония насчитывала около 700 особей, но потом отстрел уменьшил динамику роста популяции. Со временем дикие кролики расселились по всему Крыму;

2) в 1859 году австралиец Том Остин выпустил на волю 24 взрослых кролика. По оценкам, через год их было уже около 1,2 тыс., а через два их поголовье оценивалось свыше 40 тыс. особей. С 1887 года на государственном уровне стали пытаться ограничить рост популяции кроликов - в Австралии кролики установили абсолютный рекорд размножения млекопитающих на нашей планете;

3) в 1971 году на маленький безжизненный остров Окуносимо в Японии школьники привезли 8 кроликов, а через год их было уже около 70. Через два – приблизилось к 500. Сейчас основные обитатели Окуносимо – 700 кроликов. Их охраняют – на остров запрещено привозить даже кошек и собак.

Таблица 3.4. Климат трех регионов

Регион	Показатель климата	Янв.	Февр.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Нояб.	Дек.
Евпатория	Средняя температура, °С	2,5	3,0	4,1	11,2	16,6	21,3	23,8	24,3	18,9	13,9	8,4	4,5
	Влажность, мм	67	69	71	71	71	85	88	89	86	80	70	64
Австралия (Сидней)	Средняя температура, °С	22,3	22,3	21,2	18,6	15,5	13,1	12,2	13,4	15,6	17,9	19,6	21,4
	Влажность, мм	102	118	130	126	121	130	99	81	69	78	84	78
Окуносимо	Средняя температура, °С	5,2	5,6	8,5	14,1	18,6	21,7	25,2	27,1	23,2	17,6	12,6	7,9
	Влажность, мм	49	60	115	130	128	165	162	155	209	163	93	40

В 1798 году английский демограф и экономист Томас Мальтус вывел формулу для подсчета размера популяции P в момент времени t : $P = P_0 e^{rt}$, где P_0 – начальный размер популяции, а мальтузианский параметр r можно подсчитать, если известно как минимум 2 разных значения P_1 и P_2 в моменты времени t_1 и t_2 .

11. Подсчитайте мальтузианский коэффициент (время t равно числу окролов от начального момента), запишите формулу Мальтуса и сравните (с помощью построения моделей в редакторе Excel), рост популяций кроликов за 4 года по «адаптированной» модели Фибоначчи, полученной при решении задания 9, и по модели Мальтуса для

А) австралийской ситуации

Б) крымской ситуации

В) японской ситуации

12. Подсчитайте примерное число пар кроликов через 3 года по модели Мальтуса для

А) австралийской ситуации

Б) крымской ситуации

В) японской ситуации

13. Насколько применимы модели Фибоначчи и Мальтуса к ситуации на острове Окуносимо? По каким возможным причинам там не наблюдается рост популяции?

Бельгийский математик Пьер Франсуа Ферхюльст в модель Мальтуса ввел параметр K – поддерживающая емкость среды, то есть максимально возможное число особей в популяции, отражающий конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции. Получилось уравнение

$$P = \frac{KP_0 e^{rt}}{K + P_0 e^{rt} - P_0}.$$

14. Определите, чему равны поддерживающая емкость среды и мальтузианский параметр в каждой из популяции.

15. Постройте логистическую кривую Ферхюльста для каждой популяции и сравните модели Мальтуса и Ферхюльста.

16. Объясните, почему

А) Математические уравнения можно считать моделями процессов?

Б) Моделирование рассматривается как универсальный метод познания?

В) К научной модели предъявляется требование универсальности?

17*. С помощью моделирования определите, насколько эффективными способами замедления динамики роста популяции кроликов в Австралии были меры, принятые в момент, когда поголовье достигло 10 млн. особей:

1) ежегодный отстрел по 2 млн. особей в год (отстрел равномерно распределен по месяцам),

2) ежегодная распахка 60% территории, занятой кроликами, с уничтожением 80% особей, проживающих на донной территории (распахка занимает по времени 2 месяца).

Для борьбы с кроликами в Австралию завезли хищников, а потом вирус миксоматоза.

18. Какие данные нужно учесть, чтобы построить уравнения изменения колебания численности жертвы и численности хищника?

В природе наблюдается довольно устойчивое соотношение между численностями хищников и жертв, принадлежащих одной пищевой цепочке. В 1920-х годах было обнаружено, что оно

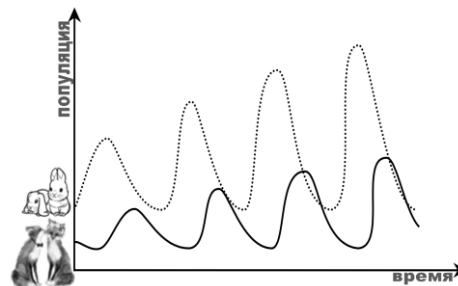


Рис. 3.3. Модель развития популяции кроликов и лис

успешно описывается нелинейной математической моделью Лотки-Вольтерра:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 - p_1 N_1 N_2 \quad \frac{dN_2}{dt} = p_2 N_1 N_2 - d_1 N_2$$

где N_1 – численность жертв, N_2 – численность хищников;

dN_1/dt – скорость прироста популяции жертв

dN_2/dt – скорость прироста популяции хищников

$p_1 N_1 N_2$ – частота встреч хищников и жертв

r_1, p_1, p_2, d_1 – коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами.

r_1 – коэффициент рождаемости жертв,

d_1 – коэффициент убыли хищников

На рис. 3.3 приведены две кривые (модель Лотки — Вольтёрры), описывающие модель развития популяции кроликов, имеющих бесконечную кормовую базу, которые не иммигрируют и не эмигрируют, но имеют врагов (лис), которые питаются только кроликами.

19. Определите скорость прироста популяции кроликов и сделайте выводы, если $N_1 = P_0$, $r_1 = e^t$, $p_1 = 2$, А) $N_2 = 0, 01N_1$ Б) $N_2 = 0,05N_1$ В) $N_2 = 0,1N_1$ Г) $N_2 = 0,5N_1$

На рис. 3.3 приведены две кривые (модель Лотки — Вольтёрры), описывающие модель развития популяции кроликов, имеющих бесконечную кормовую базу, которые не иммигрируют и не эмигрируют, но имеют врагов (лис), которые питаются только кроликами. Изменение численности популяции кроликов за единицу времени равно скорости их естественного прироста минус скорость гибели за счёт встречи с лисами и от естественных причин, а изменение численности популяции хищников за единицу времени равно скорости размножения хищников минус скорость естественной гибели.

20. Прокомментируйте эту модель биологической коэволюции:

А) С чем связана периодичность (волнообразность) протекания процесса изменения числа популяций кроликов и лис?

Б) Как связаны частоты и фазы колебаний численностей популяций кроликов и лис?

В) Почему увеличение численности популяции лис отстает по фазе от роста численности популяции кроликов?

Г) Почему следует различать природный объект и его модель?

Д) В чем выражается открытость данной модели?

Е) Как будет протекать процесс, если в какой-то момент систему сделать закрытой (например, прекратить поступление энергии в виде пищи для кроликов)?

Ж) Чем объясняется возможность сопоставления одному и тому же объекту нескольких моделей? От чего это зависит?

З) Почему эта модель является примером самоорганизации?

Д.И. Менделеев занимался математическим моделированием и предсказал, что к 2050 году население России должно составить 800 млн человек. Он считал, что «Высшая цель политики яснее всего выражается в выработке условий для размножения людского».

21*. Исходя из данных рис. 3.4,

А) подберите рекуррентную формулу, график которой более-менее совпадает с графиком рис. 3.4;

Б) продлите график до 2050 г. и полученное значение сравните с величиной, предсказанной Менделеевым;

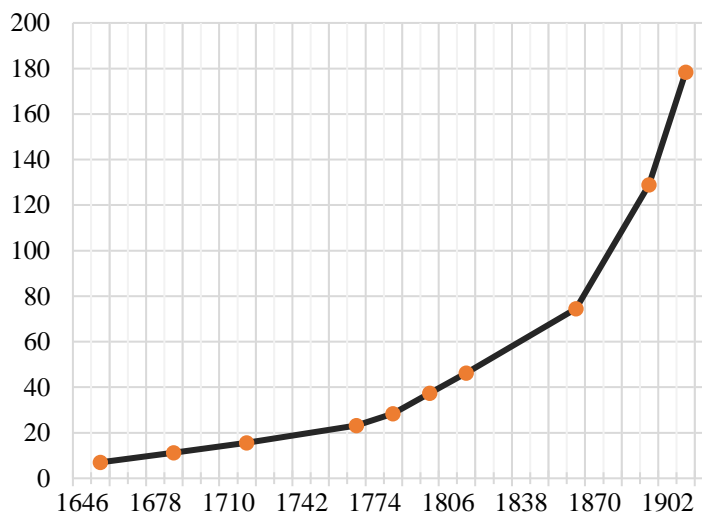


Рис. 3.4. Население Российской империи, млн. чел.

В) оцените достоверность прогноза Менделеева с помощью данных табл. 3.5 и выскажите предположения причин расхождения прогноза и выведенной зависимости с реальными цифрами;

Г) мог ли повлиять на точность прогноза тот факт, что Д.И. Менделеев был 17-м ребенком в семье и имел 7 детей? Ответ поясните с помощью данных по разным странам из табл. 3.5.

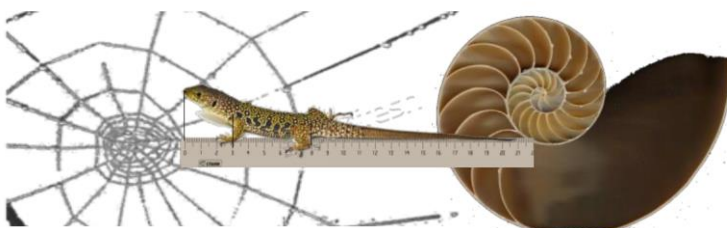
Таблица 3.5. Численность населения бывшей Российской империи в конце XX – начале XXI веков

1989		2019	
Республика или страна	Население	Страна	Население
РСФСР	147 400 000	Россия	146 780 000
Украинская ССР	51 707 000	Украина	42 217 000
Польша	37 963 000	Польша	38 400 000
Узбекская ССР	19 905 000	Узбекистан	33 254 100
Казахская ССР	16 536 000	Казахстан	18 528 900
Белорусская ССР	10 200 000	Белоруссия	9 475 000
Азербайджанская ССР	7 038 000	Азербайджан	10 020 000

Грузинская ССР	5 443 000	Грузия	3 729 000
Таджикская ССР	5 109 000	Таджикистан	9 126 000
Финляндия	4 986 000	Финляндия	5 634 000
Молдавская ССР	4 338 000	Молдавия	2 682 000
Киргизская ССР	4 290 000	Киргизия	6 140 000
Литовская ССР	3 690 000	Литва	2 790 000
Туркменская ССР	3 534 000	Туркмения	5 850 900
Армянская ССР	3 288 000	Армения	2 930 000
Латвийская ССР	1 573 000	Латвия	1 930 000
Эстонская ССР	1 573 000	Эстония	1 325 000
ИТОГО	328 573 000	ИТОГО	340 812 000

22. Фибоначчи каждое последующее число полученной последовательности, начиная с четвертого, разделил на предыдущее. К какому числу стремится новая последовательность?

Полученное число – число «золотого сечения». В процентном округлённом значении золотое сечение — это соотношение частей какого-либо тела в отношении 62% и 38%.



23. Объясните, почему считается, что раковина Наутилуса (род моллюсков), паутина, ящерица (рис. 3.5), являются примерами «золотого сечения» в природе (рис. 3.6)?

Рис. 3.5. Примеры «золотого сечения» в природе

24. На рис. 3.7 отмечены некоторые параметры Спасского собора. Наблюдается ли в пропорциях собора «золотое сечение»?

Число «золотого сечения» впервые встречается в «Началах» Евклида (III в. до н. э.). Евклид презирал практическую полезность. Однажды один ученик, прослушав доказательства, спросил, что выиграет он изучением геометрии; тогда Евклид позвал раба и сказал: «Дай ему три обола, раз он хочет извлекать прибыль из учёбы».

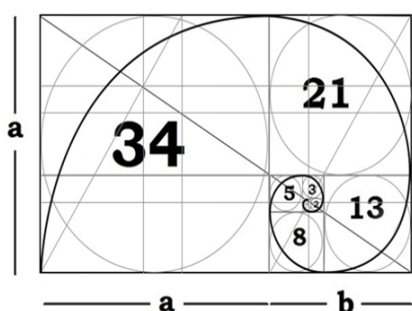


Рис. 3.6. Ряд Фибоначчи

25. Математика не открывает новых способов передвижения, как физика, и не создает новых вещей, как химия.

А) Что дает человечеству математика?

Изучая психологию изобретений в математике, Ж. Адамар разослал ряду учёных анкету с вопросами о языке их мышления. А.Эйнштейн ответил: «Слова, написанные или произнесённые, не играют, видимо, ни малейшей роли в механике моего мышления, психологическими элементами мышления являются некоторые более или менее ясные знаки и образы». У Эйнштейна образы были зрительными, слуховыми, иногда двигательными. Слова или другие знаки появлялись, «когда мысль надо было передать другим».

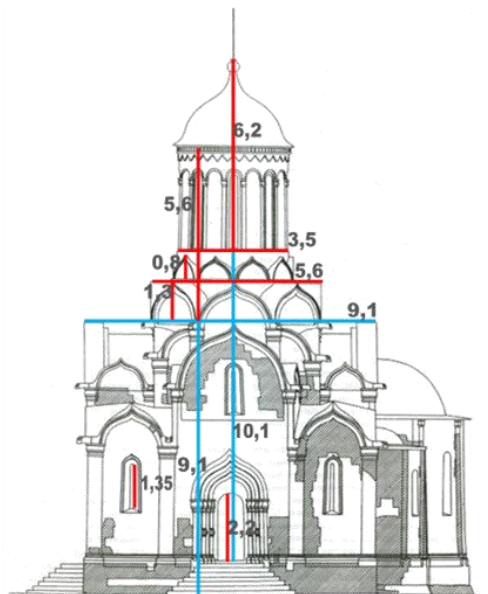


Рис. 3.7. Спасский собор (Москва)

Б) Почему появление в какой-либо отрасли науки и техники математических методов означает и достижение в этой отрасли определенного уровня зрелости, и начало нового этапа развития? Почему говорят, что степень научности дисциплины измеряется тем, насколько в ней применяется математика?

В) Прокомментируйте слова А. Эйнштейна: «с помощью математики можно доказать что угодно, в том числе и ошибочную теорию».

26. Постройте гипотетическую модель эволюции популяции кроликов на Кубе, объясните выбор параметров для модели и выбор самой модели.