Группы

Определения

Группа [29, с. 139]

Определение

Множество G и бинарная операция «$*$» образуют группу $\{G, *\}$ если выполняются следующие свойства:

1. ассоциативность операции «$*$»: $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$, $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$;
2. существует нейтральный элемент $e \in G$ такой, что $e * g = g * e = g, \forall g \in G$;
3. для любого элемента $g \in G$ существует обратный элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e, \forall g \in G$.

- Структура абстрактной группы определяется заданием результата групповой операции для любой пары элементов из G.
- Если групповая операция «$*$» является умножением «$\cdot$», то группа называется мультипликативной.
- В случае если «$*$» является сложением «$+$», то группа называется аддитивной.

Коммутативная группа

Определение

Группы $\{G, *\}$ называться коммутативной или абелевой, если для операции «$*$» наряду со свойствами 1–3 выполняется свойство коммутативности:

4. $g_1 * g_2 = g_2 * g_1, \forall g_1, g_2 \in G$

Нейтральный элемент часто обозначают символом единицы 1_G (для мультипликативной группы) или нуля 0_G (для аддитивной группы). Нижним индексом указывают на группу, для которой этот элемент является нейтральным.

Группы

Примеры

Группы относительно операции сложения «+»

- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел,
- $2\mathbb{Z}$ — множество четных целых чисел,
- $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,
- $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел,
- $\mathbb{H}$ — множество кватернионов,
- $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{P})$ — множество матриц $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{P}$,
- $P[x]$ — множество многочленов с действительными коэффициентам,
- $C(X)$ — множество непрерывных функций на отрезке X.

Группы относительно операции умножения «$\cdot$»

- $\mathbb{Q}/\{0\}$ — множество рациональных чисел исключая 0,
- $\mathbb{R}/\{0\}$ — множество действительных чисел исключая 0,
- $\mathbb{C}/\{0\}$ — множество комплексных чисел исключая 0.

Группа $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{P})$ единственная, из всех перечисленных выше групп, не является абелевой. Чаще всего поле $\mathbb{P}$ это или поле действительных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел.

Матричные группы

В множестве квадратных матриц $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{P}) \stackrel{\text{not}}{=} \mathrm{Mat}(n, \mathbb{P})$ с операцией умножения «$\cdot$» выделяют следующие важные группы.

- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{P})$ — **полная линейная группа** квадратных матриц M, т.ч. $\det(M) \neq 0_{GL}, \forall M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{P})$.
- $\mathrm{SL}(n, \mathbb{P})$ — **унимодулярная группа** квадратных матриц M, т.ч. $\det(M) = 1_{SL}, \forall M \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{P})$.
- $\mathrm{O}(n) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ — **ортогональная группа** квадратных матриц M таких, что:

$$M^T M = M M^T = I \Leftrightarrow \det(M M^T) = (det(M))^2 = 1,$$

  где M^T — транспонированная матрица, I — единичная матрица.
- $\mathrm{SO}(n) \in \mathrm{O}(n)$ — **специальная ортогональная группа**. В группу входят только те матрицы, у которых $\det(M) = 1, \forall M \in \mathrm{SO}(n)$