Симметричные и кососимметричные тензоры

Перестановки и символы Леви-Чивиты

Дифференциальная геометрия
Перестановки (подстановки) и символы Леви-Чивиты

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Определение

Пусть Ω — конечное множество из n элементов. Природа этих элементов для нас не существенна, поэтому положим $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Элементы множества $S_n = S(\Omega)$ всех взаимно однозначных преобразований $\pi\colon \Omega \to \Omega$ называются перестановками [1, §8]. Произвольную перестановку $\pi\colon i \to \pi(i)$ изображают в виде таблицы, полностью указывая все образы.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{matrix}$$

Иногда элементы множества S_n называют подстановками, а термин перестановка используют для обозначения некоторого фиксированного порядка расположения чисел $1, 2, \dots, n$. Мы будем считать подстановку и перестановку синонимами.

Группа перестановок

Элементы множества S_n образуют группу. Групповой операцией является композиция перестановок. Перестановки применяются справа на лево: сперва π_2, а потом π_1:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_1 \circ \pi_2 = \pi_1\pi_2 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Свойства группы легко проверяются:

1. Ассоциативность $(\pi_1\pi_2)\pi_3 = \pi_1(\pi_2\pi_3)\ \forall \pi_1, \pi_2, \pi_3 \in S_n$.
2. Существует единичная перестановка $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{smallmatrix}\right)$.
3. Для каждой перестановки π существует обратная π^{-1}.

Пример перестановки

Пример

Представим, что у нас есть 4 разных шарика, которые мы можем пронумеровать $\{1, 2, 3, 4\}$. Их можно переставлять различными способами, всего способов $4!$. Конкретную перестановку можно записать как:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Произошла перестановка шаров:

- шар №1 попал на место №3;
- шар №2 попал на место №1;
- шар №3 попал на место №2;
- шар №4 попал на место №4 (остался на месте).

Любой перестановке можно дать наглядную интерпретацию, рассмотрев n нумерованных шаров в урне. Каждая перестановка π эквивалентна последовательности вынимания шаров из урны.

Циклическая запись перестановок 1

Перестановку можно записать компактно, используя циклическую запись

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 = (1\,2\,3\,4) = (2\,3\,4\,1) = (3\,4\,1\,2) = (4\,1\,2\,3)$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \to 4 \to 1)(2 \to 3 \to 2) = (1\,4)(2\,3)$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \to 2 \to 1)(3 \to 3)(4 \to 4) = (1\,2)(3)(4)$$

- У π_1 один цикл длины 4.
- У π_2 два цикла длины 2 каждый.
- У π_3 три цикла: первый длины 2, а второй и третий длины 1.

Циклическая запись перестановок 2

Циклическую запись можно воспринимать как композицию перестановок:

$$\pi_2 = (1\,4)(2\,3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{(1\,4)} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{(2\,3)} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

Каждая перестановка $\pi \neq e$ из S_n является произведением независимых циклов длины $\geqslant 2$. Это разложение в произведение определено однозначно и с точностью до порядка следования циклов [1, §8 п. 2, теорема 1].

Определение

Цикл длины 2 называется транспозицией.

Цикл длины 1 также можно представить в виде цикла длины 2. Например, $(2) = (2\,2)$. Циклы длины 1 часто опускаются, так как они определяют тождественную перестановку.

Можно доказать, что каждая перестановка $\pi \in S_n$ является произведением транспозиций. Проиллюстрируем это примером.

$$(1\,2\,3) = (1\,3)(2)(1\,2)(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Число транспозиций не является инвариантом перестановки. Иными словами, одну и ту же перестановку можно записать через композицию совершенно разных транспозиций.

Знак перестановки

Теорема

Пусть π *— перестановка из* S_n*, разложенная произвольным образом на композицию транспозиций:*

$$\pi = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k.$$

Тогда число

$$\varepsilon_\pi = (-1)^k \in \{-1, 1\},$$

называемое ***знаком*** π *(сигнатурой, четностью), полностью определяется перестановкой* π *и не зависит от способа разложения* π *на транспозиции. То есть четность целого числа* k *для данной перестановки всегда одна и та же. Кроме того*

$$\varepsilon_{\pi_1 \pi_2} = \varepsilon_{\pi_1} \varepsilon_{\pi_2}.$$

Четность перестановки 1

Определение

Перестановка $\pi \in S_n$ называется четной, если $\varepsilon_\pi = 1$ и нечетной, если $\varepsilon_\pi = -1$.

Определение

В перестановке числа i и j составляют инверсию, если $i > j$, но i стоит в этой перестановке раньше чем j.

Пример

В следующей перестановке 2 инверсии

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 3 > 1, 3 > 2$$

Следующие два утверждения позволяют определять четность/нечетность перестановки не раскладывая ее на транспозиции.

Четность перестановки 2

- Перестановка четная, если ее символы составляют четное число инверсий и нечетная в противном случае.
- Четность/нечетность подстановки совпадает с четностью числа $(n - s)$ где n — степень подстановки (количество элементов), а s — количество циклов (произвольной длины).

Все перестановки степени 3

Рассмотрим все перестановки π множества $S_3 = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)\,(2)\,(3)\ s = 3, n - s = 0, \varepsilon_\pi = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)\,(3)\ s = 2, n - s = 1, \varepsilon_\pi = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2)\ s = 1, n - s = 2, \varepsilon_\pi = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)\,(2\,3)\ s = 2, n - s = 1, \varepsilon_\pi = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)\ s = 1, n - s = 2, \varepsilon_\pi = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)\,(2)\ s = 2, n - s = 1, \varepsilon_\pi = -1$$

Полезно ввести символы Леви–Чивиты: $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \in \{-1, 0, 1\}$. Знак выбирается в зависимости от знака перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 \text{ если } \pi \text{ четная,} \\ -1 \text{ если } \pi \text{ нечетная,} \\ \quad 0 \text{ если есть повторяющиеся индексы.} \end{cases}$$

Названы в честь Туллио Леви-Чивиты (1873–1941 гг.).

Действие группы перестановок на функциях 1

Определение

Пусть $\pi \in S_n$ и f — функция от любых n аргументов. Полагаем

$$(\pi \circ f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}),\ \text{где } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}\ \ \pi(k) = i_k.$$

Говорят, что функция $g = \pi \circ f$ получается действием π на f.

Определение

Функция f от n аргументов называется кососимметрической, если

$$f(\dots, x_k, x_{k+1}, \dots) = -f(\dots, x_{k+1}, x_k, \dots),$$

то есть при перестановки местами любых двух соседних аргументов значение f меняет знак на противоположный.

Можно доказать, что

Действие группы перестановок на функциях 2

- Если $\pi_1, \pi_2 \in S_n$, то $(\pi_1 \pi_2) \circ f = \pi_1 \circ (\pi_2 \circ f)$.
- При перестановке местами любых двух аргументов кососимметричная функция меняет знак на противоположный.

Перестановка двух аргументов в функции f можно записать как $(\tau \circ f)$, где τ — транспозиция. В кососимметричной функции при произвольной перестановке аргументов, знак будет совпадать со знаком перестановки

$$\pi \circ f = \varepsilon_\pi f$$

Симметричные и кососимметричные тензоры

Симметризация и антисимметризация

Дифференциальная геометрия
Симметричные и кососимметричные тензоры.

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Перестановки аргументов тензора 1

Рассмотрим тензор валентности (p, q)

$$T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p; \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_q)$$

Перестановка контравариантного аргумента с ковариантным аргументом для тензоров не определена. Поэтому при обсуждении вопросов симметричности и кососимметричности ограничиваются рассмотрением тензоров вида $(p, 0)$

$$T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = T_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

или вида $(0, p)$

$$T(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p) = T^{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}$$

Далее все выкладки приводятся для тензора $T(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)$ типа $(0, p)$, но все рассуждения могут быть легко применены и к тензору типа $(p, 0)$.

Перестановки аргументов тензора 2

Рассмотрим действие перестановки $\pi \in S_p$ на аргументы тензора T типа $(0,p)$

$$(\pi \circ T)(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p) = T(\tilde{x}_{\pi(1)}, \dots, \tilde{x}_{\pi(p)}), \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \quad \pi(k) = i_k$$

Можно доказать, что $(\pi \circ T)$ также является тензором, причем того же типа $(0,p)$, что и T [2, Гл. 6 §2 п. 3].

Компоненты тензора $\pi \circ T$ получаются из компонентов T перестановкой индексов:

$$(\pi \circ T)^{i_1 i_2 \dots i_p} = T^{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(p)}}$$

Симметризация

Определение

Симметризацией (или симметрированием) тензоров из $\mathbb{T}^p_0(L)$ называется отображение:

$$S = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \pi \colon \mathbf{T}^p_0(L) \to \mathbf{T}^p_0(L),$$

Иными словами, для применения операции S к тензору необходимо выполнить следующие шаги:

- надо найти все возможные перестановки аргументов тензора $(0, p)$;
- подействовать каждой из них на тензор T;
- все результаты суммировать, а затем полученную сумму нормировать на $p!$, где $p!$ — количество всех возможных перестановок.

Рассмотрим действие операции симметризации S на примере двухвалентного тензора. На пространстве $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ рассмотрим тензор $T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ валентности $(0, 2)$. Так как $p = 2$, то всего возможно $p! = 2! = 2$ различных перестановок аргументов

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}_2, \quad \tilde{x}_2 \tilde{x}_1$$

Операция симметризации действует на тензор следующим образом:

$$S(T) = \frac{1}{2}(T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + T(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1)) \quad S(T)^{i_1 i_2} = \frac{1}{2}(T^{i_1 i_2} + T^{i_2 i_1})$$

Симметризация двухвалетного тензора 2

Так как $p = 2$, а $\dim L = 3$, то у данного тензора всего $n^p = 3^2 = 9$ компонент

$$S(T)^{11} = \frac{1}{2}(T^{11} + T^{11}) = T^{11}$$
$$S(T)^{12} = \frac{1}{2}(T^{12} + T^{21}) = S(T)^{21}$$
$$S(T)^{13} = \frac{1}{2}(T^{13} + T^{31}) = S(T)^{31}$$
$$S(T)^{22} = \frac{1}{2}(T^{22} + T^{22}) = T^{22}$$
$$S(T)^{23} = \frac{1}{2}(T^{23} + T^{32}) = S(T)^{23}$$
$$S(T)^{33} = \frac{1}{2}(T^{33} + T^{33}) = T^{33}$$

Так как тензор двухвалентный, то его компоненты можно сгруппировать в виде «матрицы». Обозначим тензор $S(T)$ как $\mathfrak{T}$ и запишем

	1	2	3
1	$\mathfrak{T}^{11}$	$\mathfrak{T}^{12}$	$\mathfrak{T}^{13}$
2	$\mathfrak{T}^{12}$	$\mathfrak{T}^{22}$	$\mathfrak{T}^{23}$
3	$\mathfrak{T}^{13}$	$\mathfrak{T}^{23}$	$\mathfrak{T}^{33}$

Данная матрица симметрична, так верхняя треугольная часть равна нижней треугольной части. Тензор $\mathfrak{T}$ имеет 6 значимых компонент. Обратите также внимание, что мы получили тензор $\mathfrak{T}$ из тензора T, который никакой симметричностью не обладает — это произвольный двухвалентный тензор.

Симметризация трехвалентного тензора 1

Рассмотрим действие операции симметризации S на примере трехвалентного тензора. На пространстве $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ рассмотрим тензор $T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ валентности $(0, 3)$. Так как $p = 3$, то всего возможно $p! = 3! = 6$ различных перестановок аргументов

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3, \quad \tilde{x}_1\tilde{x}_3\tilde{x}_2, \quad \tilde{x}_2\tilde{x}_1\tilde{x}_3, \quad \tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_1, \quad \tilde{x}_3\tilde{x}_1\tilde{x}_2, \quad \tilde{x}_3\tilde{x}_2\tilde{x}_1$$

или, если рассматривать компоненты, индексов:

$$i_1i_2i_3, \quad i_1i_3i_2, \quad i_2i_1i_3, \quad i_2i_3i_1, \quad i_3i_1i_2, \quad i_3i_2i_1$$

После действия симметризации получим новый тензор:

$$\mathfrak{T} = S(T) = \frac{1}{3!}(T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) + T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3, \tilde{x}_2) + T(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) + T(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_1) + T(\tilde{x}_3, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + T(\tilde{x}_3, \tilde{x}_2, \tilde{x}_1))$$

или в компонентном виде:

$$\mathfrak{T}^{i_1i_2i_3} = S(T)^{i_1i_2i_3} = \frac{1}{3!}(T^{i_1i_2i_3} + T^{i_1i_3i_2} + T^{i_2i_1i_3} + T^{i_2i_3i_1} + T^{i_3i_1i_2} + T^{i_3i_2i_1})$$

Симметризация трехвалентного тензора 2

У исходного тензора T существует $n^p = 3^3 = 27$ компонент:

$$\begin{matrix} T^{111} & T^{211} & T^{311} \\ T^{112} & T^{212} & T^{312} \\ T^{113} & T^{213} & T^{313} \\ T^{121} & T^{221} & T^{321} \\ T^{122} & T^{222} & T^{322} \\ T^{123} & T^{223} & T^{323} \\ T^{131} & T^{231} & T^{331} \\ T^{132} & T^{232} & T^{332} \\ T^{133} & T^{233} & T^{333} \end{matrix}$$

Симметризация трехвалентного тензора 3

$$\mathfrak{T}^{111} = \frac{1}{3!}(T^{111} + T^{111} + T^{111} + T^{111} + T^{111} + T^{111}) = T^{111}$$

$$\mathfrak{T}^{112} = \frac{1}{3!}(T^{112} + T^{121} + T^{112} + T^{121} + T^{211} + T^{211}) = \frac{1}{3}(T^{112} + T^{121} + T^{211})$$

$$\mathfrak{T}^{113} = \frac{1}{3!}(T^{113} + T^{131} + T^{113} + T^{131} + T^{311} + T^{311}) = \frac{1}{3}(T^{113} + T^{131} + T^{311})$$

$$\mathfrak{T}^{121} = \frac{1}{3!}(T^{121} + T^{112} + T^{211} + T^{211} + T^{112} + T^{121}) = \frac{1}{3}(T^{121} + T^{112} + T^{211})$$

$$\mathfrak{T}^{122} = \frac{1}{3!}(T^{122} + T^{122} + T^{212} + T^{221} + T^{212} + T^{221}) = \frac{1}{3}(T^{122} + T^{212} + T^{221})$$

$$\mathfrak{T}^{123} = \frac{1}{3!}(T^{123} + T^{132} + T^{213} + T^{231} + T^{312} + T^{321})$$

$$\mathfrak{T}^{131} = \frac{1}{3!}(T^{131} + T^{113} + T^{311} + T^{311} + T^{113} + T^{131}) = \frac{1}{3}(T^{131} + T^{113} + T^{311})$$

$$\mathfrak{T}^{132} = \frac{1}{3!}(T^{132} + T^{123} + T^{312} + T^{321} + T^{213} + T^{231})$$

$$\mathfrak{T}^{133} = \frac{1}{3!}(T^{133} + T^{133} + T^{313} + T^{331} + T^{313} + T^{331} = 6T^{133}$$

Симметризация трехвалентного тензора 4

$$\mathfrak{T}^{211} = \frac{1}{3!}(T^{211} + T^{211} + T^{121} + T^{112} + T^{121} + T^{112}) = \frac{1}{3}(T^{211} + T^{121} + T^{112})$$

$$\mathfrak{T}^{212} = \frac{1}{3!}(T^{212} + T^{221} + T^{122} + T^{122} + T^{221} + T^{212}) = \frac{1}{3}(T^{212} + T^{221} + T^{122})$$

$$\mathfrak{T}^{213} = \frac{1}{3!}(T^{213} + T^{231} + T^{123} + T^{132} + T^{321} + T^{312})$$

$$\mathfrak{T}^{221} = \frac{1}{3!}(T^{221} + T^{212} + T^{221} + T^{212} + T^{122} + T^{122}) = \frac{1}{3}(T^{221} + T^{122} + T^{212})$$

$$\mathfrak{T}^{222} = \frac{1}{3!}(T^{222} + T^{222} + T^{222} + T^{222} + T^{222} + T^{222}) = T^{222}$$

$$\mathfrak{T}^{223} = \frac{1}{3!}(T^{223} + T^{232} + T^{223} + T^{232} + T^{322} + T^{322}) = \frac{1}{3}(T^{223} + T^{232} + T^{322})$$

$$\mathfrak{T}^{231} = \frac{1}{3!}(T^{231} + T^{213} + T^{321} + T^{312} + T^{123} + T^{132})$$

$$\mathfrak{T}^{232} = \frac{1}{3!}(T^{232} + T^{223} + T^{322} + T^{322} + T^{223} + T^{232}) = \frac{1}{3}(T^{232} + T^{223} + T^{322})$$

$$\mathfrak{T}^{233} = \frac{1}{3!}(T^{233} + T^{233} + T^{323} + T^{332} + T^{323} + T^{332}) = \frac{1}{3}(T^{233} + T^{323} + T^{332})$$

$$\mathfrak{T}^{311} = \frac{1}{3!}(T^{311} + T^{311} + T^{131} + T^{113} + T^{131} + T^{113}) = \frac{1}{3}(T^{311} + T^{131} + T^{113})$$
$$\mathfrak{T}^{312} = \frac{1}{3!}(T^{312} + T^{321} + T^{132} + T^{123} + T^{231} + T^{213})$$
$$\mathfrak{T}^{313} = \frac{1}{3!}(T^{313} + T^{331} + T^{133} + T^{133} + T^{331} + T^{313}) = \frac{1}{3}(T^{313} + T^{331} + T^{133})$$
$$\mathfrak{T}^{321} = \frac{1}{3!}(T^{321} + T^{312} + T^{231} + T^{213} + T^{132} + T^{123})$$
$$\mathfrak{T}^{322} = \frac{1}{3!}(T^{322} + T^{322} + T^{232} + T^{223} + T^{232} + T^{223}) = \frac{1}{3}(T^{322} + T^{232} + T^{223})$$
$$\mathfrak{T}^{323} = \frac{1}{3!}(T^{323} + T^{332} + T^{233} + T^{233} + T^{332} + T^{323}) = \frac{1}{3}(T^{323} + T^{332} + T^{233})$$
$$\mathfrak{T}^{331} = \frac{1}{3!}(T^{331} + T^{313} + T^{331} + T^{313} + T^{133} + T^{133}) = \frac{1}{3}(T^{331} + T^{313} + T^{133})$$
$$\mathfrak{T}^{332} = \frac{1}{3!}(T^{332} + T^{323} + T^{332} + T^{323} + T^{233} + T^{233}) = \frac{1}{3}(T^{332} + T^{323} + T^{233})$$
$$\mathfrak{T}^{333} = \frac{1}{3!}(T^{333} + T^{333} + T^{333} + T^{333} + T^{333} + T^{333}) = T^{333}$$

Симметризация трехвалентного тензора 6

Получаем следующую картину:

$$\mathfrak{T}^{132} = \mathfrak{T}^{231} = \mathfrak{T}^{321}$$
$$\mathfrak{T}^{121} = \mathfrak{T}^{112} = \mathfrak{T}^{211}$$
$$\mathfrak{T}^{113} = \mathfrak{T}^{131} = \mathfrak{T}^{311}$$
$$\mathfrak{T}^{122} = \mathfrak{T}^{212} = \mathfrak{T}^{221}$$
$$\mathfrak{T}^{133} = \mathfrak{T}^{313} = \mathfrak{T}^{331}$$
$$\mathfrak{T}^{213} = \mathfrak{T}^{123} = \mathfrak{T}^{312}$$
$$\mathfrak{T}^{223} = \mathfrak{T}^{232} = \mathfrak{T}^{322}$$
$$\mathfrak{T}^{233} = \mathfrak{T}^{323} = \mathfrak{T}^{332}$$

получаем лишь 8 различных компонент из 27.

kkl

Определение

Тензор T типа $(0, p)$ (или $(p, 0)$) называется симметричными, если

$$\pi \circ T = T, \forall \pi \in S_p,$$

то есть любая перестановка аргументов не меняет значение тензора.

Можно записать иначе:

$$T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p) = T(\tilde{x}_{\pi(1)}, \tilde{x}_{\pi(2)}, \dots, \tilde{x}_{\pi(p)}).$$

Симметричные тензоры можно строить с помощью применения операции симметризации S. Рассмотрим пример.

Пример симметризации тензора 1

Рассмотрим простой тензор $T = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ и найдем его симметризацию

$$S(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2).$$

У перестановки n-ой стадии $n!$ вариантов. В нашем случае $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

И два элемента совпадают из-за того, что $3 = 2$ получаем следующие подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Всего получаем 6 слагаемых

$$S(T) = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + +\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$$

Пример симметризации тензора 2

среди которых по два одинаковых:

$$S(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2 \cdot 3}(2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) =$$

$$= \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1).$$

Пример симметричного тензора №1

Рассмотрим тензор $T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ симметричный тензор, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2 \rangle$, $\dim L^* = 2$, $\operatorname{rank} T = 3$ т.е. валентность $(3, 0)$. Выпишем все компоненты данного тензора

$$T = T_{ijk} \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j \otimes \tilde{e}^k, \; i, j, k = 1, 2.$$

$$\left.\begin{matrix} T_{111} & T_{112} & T_{121} & T_{122} \\ T_{211} & T_{212} & T_{221} & T_{222} \end{matrix}\right\} 2^3 = 8 \text{ компонент.}$$

Симметричность позволяет переставлять индексы между собой:

$$T_{112} = T_{121} = T_{211}$$
$$T_{122} = T_{212} = T_{221}$$

Индексы T_{111} и T_{222} — «диагональные» элементы. Таким образом из 8 компонент значимых будет 4 штуки.

Пример симметричного тензора №2

Рассмотрим тензор $T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ симметричный тензор, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$, $\dim L = 3$, $\mathrm{rang} T = 2$, валентность $(2,0)$. Выпишем все компоненты данного тензора, всего их $3^2 = 9$.

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричность позволяет переставлять индексы между собой:

$$T_{12} = T_{21},\ T_{13} = T_{31},\ T_{23} = T_{32},$$
$$T_{11}, T_{22}, T_{33}$$

Это симметричная матрица.

Пример симметричного тензора №3

Рассмотрим тензор $T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ симметричный тензор, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$, $\dim L^* = 3$, $\mathrm{rang} T = 3$, валентность $(3, 0)$. Выпишем все компоненты данного тензора, всего их $3^3 = 27$.

$$\begin{matrix} T_{111} & T_{112} & T_{113} & T_{121} & T_{122} & T_{123} & T_{131} & T_{132} & T_{133} \\ T_{211} & T_{212} & T_{213} & T_{221} & T_{222} & T_{223} & T_{231} & T_{232} & T_{233} \\ T_{311} & T_{312} & T_{313} & T_{321} & T_{322} & T_{323} & T_{331} & T_{332} & T_{333} \end{matrix} \quad \text{27 компонент.}$$

Симметричность позволяет переставлять индексы между собой:

$$\begin{gathered} T_{112} = T_{121} = T_{211}, \quad T_{113} = T_{131} = T_{311} \\ T_{122} = T_{212} = T_{221}, \quad T_{133} = T_{313} = T_{331} \\ T_{233} = T_{323} = T_{332}, \quad T_{223} = T_{232} = T_{322} \\ T_{123} = T_{132} = T_{213} = T_{231} = T_{312} = T_{321} \end{gathered}$$

Компоненты T_{111}, T_{222}, T_{333} — «диагональные». Всего получается $7 + 3 = 10$ значимых индексов.

Альтернирование 1

Определение

Тензор T типа $(p,0)$ (или $(0,p)$) называется кососимметричными или антисимметричным, если

$$\pi \circ T = \varepsilon_\pi T, \forall \pi \in S_p,$$

где ε_π — знак перестановки π (четность), $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Для компонент:

$$\varepsilon_\pi T^{i_1 \dots i_p} = T^{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(p)}}$$

Условие кососимметричности можно заменить эквивалентным условием $\tau \circ T = -T$, где τ — транспозиция. Иначе говоря, тензор является симметричным, если при перестановке любых двух аргументов тензор меняет знак на противоположный.

Любая координата кососимметричного тензора однозначно определяется координатой с теми же индексами, расположенными, например, в порядке возрастания:

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p}, \ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n.$$

Альтернирование 2

Определение

Альтернированием (или антисимметризацией) тензоров из $\mathbb{T}^p(L)$ называется отображение:

$$A = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi \pi \colon \mathbf{T}^p_0(L) \to \mathbf{T}^p_0(L).$$

Применяется операция альтернирования также как и операция симметризации, однако знак при суммировании берется в зависимости от четности/нечетности перестановки индексов.

Альтернирование тензора 1

Рассмотрим тензор $T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ валентности $(0,2)$, на пространстве $\dim L = 3$. Применим к нему операцию альтернирования.

$$A(T)(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{1}{2}(T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - T(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1)) \quad A(T)^{i_1 i_2} = \frac{1}{2}\varepsilon_{i_1 i_2} T^{i_1 i_2} = \frac{1}{2}(T^{i_1 i_2} - T^{i_2 i_1}).$$

Обозначим получившейся тензор через A и рассмотрим его компоненты:

$$A^{11} = A^{22} = A^{33} = 0 \text{ так как } A^{ii} = \frac{1}{2}(T^{ii} - T^{ii}) = 0,$$

а значимых компонент всего три:

$$A^{12} = \frac{1}{2}(T^{12} - T^{21}) = -\frac{1}{2}(T^{21} - T^{12}) = -A^{21},$$
$$A^{13} = \frac{1}{2}(T^{13} - T^{31}) = -\frac{1}{2}(T^{31} - T^{13}) = -A^{31},$$
$$A^{23} = \frac{1}{2}(T^{23} - T^{32}) = -\frac{1}{2}(T^{32} - T^{23}) = -A^{32}.$$

Альтернирование тензора 2

Из компонент можно составить таблицу

	1	2	3
1	0	A^{12}	A^{13}
2	$-A^{12}$	0	A^{23}
3	$-A^{13}$	$-A^{23}$	0

Необходимо заметить, что значимых компонент у антисимметричного тензора ранга 2 в пространстве размерности $\dim L = 3$ меньше, чем у соответствующего симметричного тензора того же ранга и в том же пространстве: 3 против 6.

Симметричные и кососимметричные тензоры

Антисимметричные тензоры

Дифференциальная геометрия
Кососимметричные тензоры.

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Поливекторы и полиформы

Определение

- Контравариантные кососимметричные тензоры валентности $(0, p)$ принято называть p–векторами или поливекторами. Они образуют пространство, обозначаемое как $\Lambda^p(L)$, где $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$.
- Ковариантные кососимметричные тензоры валентности $(p, 0)$ принято называть p–формами (косыми формами). Они образуют пространство, обозначаемое как $\Lambda^p(L^*)$, где $L^* = \langle \tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n \rangle$.

- Полагают, что $\Lambda^0(L) = R$ и $\Lambda^0(L^*) = R$ — поле скаляров (чаще всего $\mathbb{R}$).
- Полагают, что $\Lambda^1(L) = L$ и $\Lambda^1(L^*) = L^*$ то есть 1-вектор — контравариантный вектор, а 1-форма — ковариантный вектор.
- Часто p-векторы обозначают как обычные векторы, указывая внизу буквы ранг $\underset{p}{\mathbf{u}}$. Ранг можно не указывать, если он понятен из контекста. В этом случае будем использовать прописные буквы $\mathbf{U}$ для обозначения p–векторов при $p > 1$.

Рассмотрим пространства $\Lambda(L)$ и $\Lambda(L^*)$, которые представляют собой бесконечную прямую сумму пространств p-векторов и p-форм соответственно

$$\Lambda(L) = \Lambda^0(L) \oplus \Lambda^1(L) \oplus \Lambda^2(L) \oplus \Lambda^3(L) \oplus \ldots \quad \text{и} \quad \Lambda(L^*) = \Lambda^0(L) \oplus \Lambda^1(L^*) \oplus \Lambda^2(L^*) \oplus \Lambda^3(L^*) \oplus \ldots$$

На данных пространствах можно ввести структуру ассоциативной алгебры, задав операцию внешнего произведения. Сделаем это для $\Lambda(L)$.

Определение

Зададим операцию внешнего произведения (умножения) $\wedge\colon \Lambda(L) \times \Lambda(L) \to \Lambda(L)$ полагая

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = A(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})$$

для любого p-вектора $\mathbf{U}$ и q-вектора $\mathbf{V}$. Под $A(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})$ здесь понимается операция альтернирования примененная к тензорному произведению $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$

Внешнее умножение и внешняя алгебра 2

Так как $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} \in \mathbb{T}_0^{p+q}$, а тензор $A(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})$ кососимметричен, то внешнее умножение задает следующее отображение

$$\wedge \colon \Lambda^p(L) \times \Lambda^q(L) \to \Lambda^{p+q}(L)$$

Из свойств тензорного произведения следует билинейность (дистрибутивность и линейность) и ассоциативность операции внешнего произведения $\wedge$

- $\mathbf{U} \wedge (\alpha\mathbf{V} + \beta\mathbf{W}) = \alpha(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) + \beta(\mathbf{U} \wedge \mathbf{W})$
- $(\alpha\mathbf{V} + \beta\mathbf{W}) \wedge \mathbf{U} = \alpha\mathbf{V} \wedge \mathbf{U} + \beta\mathbf{W} \wedge \mathbf{U}$
- $(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) \wedge \mathbf{W} = \mathbf{U} \wedge (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W})$

где $\mathbf{U} \in \Lambda^p(L)$, $\mathbf{V} \in \Lambda^q(L)$, $\mathbf{W} \in \Lambda^r(L)$, а α, β — скаляры.

Из билинейности и ассоциативности операции $\wedge$ следует, что $\Lambda(L)$ наделена строением алгебры.

Определение

Ассоциативная алгебра $\Lambda(L)$ над полем R называется внешней алгеброй пространства L (или алгеброй Грассмана) [2, Гл. 6, §3].

Аксиоматическое задание внешнего произведения

Внешнее произведение можно ввести аксиоматически, потребовав выполнение следующих свойств. Пусть $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — p, q, r-векторы соответственно.

- $\operatorname{rank}(\underset{p}{\mathbf{u}} \wedge \underset{q}{\mathbf{v}}) = p + q$.
- $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ — ассоциативность.
- $1 \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \wedge 1 = \mathbf{u}$, где 1 — скалярная единица (единичный элемент).
- $\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta$ — для скаляров $\wedge$ эквивалентно простому умножению.
- $\underset{p}{\mathbf{u}} \wedge \underset{q}{\mathbf{v}} = (-1)^{pq} \underset{q}{\mathbf{v}} \wedge \underset{p}{\mathbf{u}}$ — антикоммутативность для нечетных валентностей.
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ — дистрибутивность (правая).
- $\mathbf{w} \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ — дистрибутивность (левая).
- $\mathbf{u} \wedge (\alpha \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ это свойство в купе с дистрибутивностью дает билинейность операции $\wedge$.

Свойства внешнего умножения 1

Мы ввели конструктивное определение операции внешнего произведения, так как мы указали явную формулу, которая позволяет применять эту операцию к любым кососимметричным тензорам (как к p-векторам, так и к p-формам).

Рассмотрим два обычных вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$, $\dim L = n$ и найдем их внешнее произведение:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = A(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}) \in \Lambda^2(L),$$

непосредственно из определения получаем свойства антисимметричности:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0.$$

Рассмотрим теперь три вектора $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ из L с $\dim L = n$:

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 = A(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3) =$$
$$= \frac{1}{3!}(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3)$$

Свойства внешнего умножения 2

$$\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_3 = A(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3) =$$

$$= \frac{1}{3!}(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3) =$$

$$= -\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3$$

Для всех возможных сочетаний аргументов справедлива цепочка равенств:

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 = -\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_3 = -\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3,$$

из которой следует, что все возможные комбинации внешнего произведения векторов выражаются через $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3$.

По индукции доказывается следующее свойство.

Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ — произвольные векторы из L, тогда

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p = A(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots, \otimes \mathbf{x}_p)$$

Также верны следующие утверждения.

- Пусть $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, тогда p-векторы $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n$ образуют базис пространства $\Lambda^P(L)$.
- Внешняя алгебра $\Lambda^p(L)$ пространства L имеет размерность C_n^p.

Свойства внешнего умножения 4

Если ограничится базисом $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$, где индексы упорядочены по возрастанию $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$, то в разложении p-векторов будут участвовать только значимые компоненты. Другие компоненты можно получить из значимых путем перестановки индексов и заменой знака в случае нечетной перестановки.

Строгие доказательства данных утверждений можно найти в [2, Гл. 6, §3, п.2]. Ниже мы проверим их на частных случаях.

Связь тензорных и кососимметричных базисов 1

На примере бивекторов рассмотрим как связаны компоненты антисимметричного тензора при разложении по базисам $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ при $i, j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и антисимметричный тензор T валентности $(0, 2)$, который разложим по базисным тензорам $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

$$T = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Индексы в сумме $T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ мы можем переобозначить, заменив i на j и j на i. Сама сумма от этого не изменится. Запишем следующую сумму:

$$T = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{2}(T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + T^{ji} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i).$$

Далее используем антисимметричность T т.е. свойство $T^{ij} = -T^{ji}$ и вынесем общий множитель за скобку:

$$T = \frac{1}{2}(T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - T^{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) = T^{ij} \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) = T^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$$

Связь тензорных и кососимметричных базисов 2

Мы получили разложение бивектора T по базису бивекторов $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$. В разложении участвуют те же компоненты, что и в разложении по $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Например для $n = 3$:

$$
\begin{aligned}
T = T^{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + T^{13}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{21}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + T^{23}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{31}\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + T^{32}\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = \\
= T^{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + T^{13}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + T^{23}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{13}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{23}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \\
= 2T^{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + 2T^{13}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 2T^{23}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

Мы использовали свойство внешнего умножения $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i$ и свойство антисимметричности тензора $T^{ij} = T^{ji}$ и оставили в разложении только значимые компоненты.

Если мы хотим, чтобы в разложении участвовали только значимые компоненты, то нужно использовать лишь упорядоченные базисные бивекторы $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, где $i > j$. Но тогда компоненты при разложении по $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ будут отличаться от компонент при разложении по $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ коэффициентом 2.

Связь тензорных и кососимметричных базисов 3

В общем случае данный коэффициент равен $p!$, где p — ранг антисимметричного тензора: p-вектора или p-формы. Именно этот коэффициент присутствует в операциях симметризации и альтернирования.

$$\mathbf{V} = V^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} =$$
$$= V^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} = p! \sum_{i_1 < \dots < i_p} V^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$$

- Можно убрать коэффициент $p!$ из определения операции альтернирования, тогда при разложении по $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$ с учетом только значимых компонент, компоненты будут совпадать с компонентами разложения по $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}$.
- Можно игнорировать различие в компонентах, если используется только базис $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$.

Далее везде при работе с p-векторами (p-формами) будем использовать базис $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ и разложение только по значимым компонентам.

При работе с p-векторами следует учитывать следующие величины.

- Размерность пространства $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, которое будем обозначать $\dim L = n$ и также наделять структурой евклидова пространства.
- Степень (ранг, валентность) p-вектора. Она равна p и входит в обозначение пространства $\Lambda^p(L)$.
- Размерность пространства $\Lambda^p(L)$, которая равна количеству базисных p-векторов и обозначается как $\dim \Lambda^p(L)$ можно доказать [2, Гл. 6, §3, п. 2], что $\dim \Lambda^p(L) = \mathrm{C}_n^p$.
- Размерность пространства $\Lambda(L) = \Lambda^0(L) \oplus \Lambda^1(L) \oplus \Lambda^2(L) \oplus \Lambda^3(L) \oplus \dots$ равна сумме размерностей всех подпространств, составляющих прямую сумму $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i = 2^n$.

Базис пространства $\Lambda^p(L)$ зависит от p и от L. Будем полагать, что L — евклидово пространство с ортонормированным базисом $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$

- На $\Lambda^2(L)$ базис задается 2-векторами $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, где $i < j$ и $i, j = 1, \dots, n$.
- На $\Lambda^3(L)$ базис задается 3-векторами $\mathbf{e}_{i_1 i_2 i_3} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \mathbf{e}_{i_3}$, где $i_1 < i_2 < i_3$ и $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, n$.
- На $\Lambda^4(L)$ базис задается 4-векторами $\mathbf{e}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \mathbf{e}_{i_3} \wedge \mathbf{e}_{i_4}$, где $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ и $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, n$.
- На $\Lambda^p(L)$ базис задается p-векторами $\mathbf{e}_{i_1 \dots i_p} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$, где $i_1 < \dots < i_p$ и $i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n$.
- На $\Lambda^n(L)$ базис задается одним n-вектором $\mathbf{e}_{12\dots n} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \dots \wedge \mathbf{e}_n$.

Часто 2-вектор называют бивектором, 3-вектор — тривектором и 4-вектор — квадривектором.

Максимальные размерности p-векторов

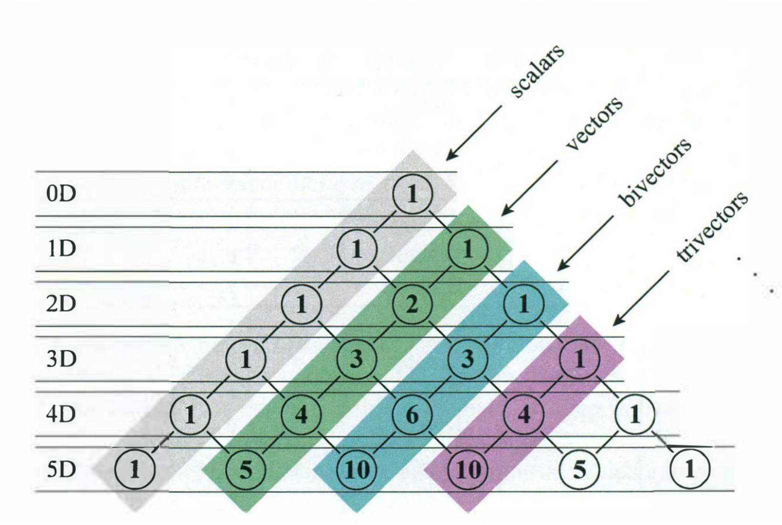

Рис. 11: Количество компонентов (размерность) p-векторов в зависимости от размерности L

Базисы для разных размерностей

$\dim L$	rank	$\dim \Lambda^p$	Базис
0	Скаляр	1	1
1	Скаляр	1	1
	Вектор	1	$\mathbf{e}$
2	Скаляр	1	1
	Вектор	2	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$
	Бивектор	1	$\mathbf{e}_{12}$
3	Скаляр	1	1
	Вектор	3	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
	Бивектор	3	$\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}$
	Тривектор	1	$\mathbf{e}_{123}$
4	Скаляр	1	1
	Вектор	4	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$
	Бивектор	6	$\mathbf{e}_{41}, \mathbf{e}_{42}, \mathbf{e}_{43}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}$
	Тривектор	4	$\mathbf{e}_{234}, \mathbf{e}_{314}, \mathbf{e}_{124}, \mathbf{e}_{132}$
	Квадривектор	1	$\mathbf{e}_{1234}$

Элемент единичного объема (псевдоскаляр)

Особый случай возникает, когда $p = n = \dim L$. Тогда базис $\Lambda^n(L)$ состоит всего из одного n-вектора:

$$\mathbf{e}_{12\ldots n} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \ldots \wedge \mathbf{e}_n$$

так как $\mathrm{C}_n^n = 1$ и мы условились использовать только базисы с индексами, упорядоченными по возрастанию.

Данный n-вектор важен для дальнейшего изложения. Его называют элементом единичного объема и обозначают как $\mathbf{E}_n$ также часто используют обозначение $\mathbf{I}_n$.

$\mathbf{E}_n$ связан с определителями, вычислением площади, объема и гиперобъема.

Разложимый p–вектор

Определение

Разложимым называют p-вектор $\mathbf{V}$, который выражается через внешнее произведение p различных векторов из L:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_p$$

В литературе на английском языке для обозначения разложимого вектора используют термин blade (лезвие). Реже встречается термин простой вектор.

В трехмерном пространстве L всякий бивектор (и, очевидно, тривектор) является простым, но для больших размерностей это не так. Например при $\dim L = 4$ бивектор

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{34} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$$

нельзя записать в виде $\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ ни для каких $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ из L.

Можно доказать следующие утверждения [2, Гл. 6, §3, п. 5].

- Всякий $(n-1)$-вектор $\mathbf{V} \neq 0$ разложим, если $n = \dim L$.
- Бивектор $\mathbf{V} = V^{ij}\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ разложим тогда и только тогда, когда $\mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = 0$

Для n-мерного пространства L определены следующие пространства одинаковой размерности:

- Пространство p-векторов $\Lambda^p(L)$ размерности C_n^p;
- Пространство p-форм $\Lambda^p(L^*)$ размерности C_n^p;
- Пространство $(n-p)$-векторов $\bar{\Lambda}^p(L)$ размерности $\mathrm{C}_n^{n-p} = \mathrm{C}_n^p$;
- Пространство $(n-p)$-форм $\bar{\Lambda}^p(L^*)$ размерности $\mathrm{C}_n^{n-p} = \mathrm{C}_n^p$.

- Операция дуализации (оператор Ходжа) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\Lambda^p(L)$ и $\bar{\Lambda}^p(L^*)$ или между $\Lambda^p(L^*)$ и $\bar{\Lambda}^p(L)$.
- Операция дополнения (комплиментарности) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\Lambda^p(L)$ и $\bar{\Lambda}^p(L)$ или между $\Lambda^p(L^*)$ и $\bar{\Lambda}^p(L^*)$.

Определение

Правым дополнением (right complement) базисного p-вектора $\mathbf{B} \in \Lambda^p(L)$, где $\dim L = n$ называется такой $(n-p)$-вектор $\overline{\mathbf{B}} \in \Lambda^{n-p}(L)$, что

$$\mathbf{B} \wedge \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{E}_n.$$

Соответственно левым дополнением (left complement) базисного p-вектора $\mathbf{B} \in \Lambda^p(L)$ называется такой $(n-p)$-вектор $\underline{\mathbf{B}} \in \Lambda^{n-p}(L)$, что

$$\underline{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E}_n.$$

В литературе [3] базис состоящий из дополнений называют кобазисом.

Рассмотрим пространство бивекторов $\Lambda^2(L)$ на $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Рассмотрим базис бивекторов в этом пространстве:

$$\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3,$$

Операция дополнения 2

и найдем правые дополнения к этим базисным бивекторам:

$$\overline{\mathbf{e}}_{12} = \mathbf{e}_3 \text{ т.к. } (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3,$$
$$\overline{\mathbf{e}}_{13} = -\mathbf{e}_2 \text{ т.к. } (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge (-\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3,$$
$$\overline{\mathbf{e}}_{23} = \mathbf{e}_1 \text{ т.к. } (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_3.$$

Левые дополнения в данном случае совпадают с правыми:

$$\underline{\mathbf{e}}_{12} = \mathbf{e}_3 \text{ т.к. } \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{E}_3,$$
$$\underline{\mathbf{e}}_{13} = -\mathbf{e}_2 \text{ т.к. } (-\mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3,$$
$$\underline{\mathbf{e}}_{23} = \mathbf{e}_1 \text{ т.к. } \mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{E}_3.$$

Операция дополнения 3

Ниже приведены таблицы дополнений для базисных скаляров, векторов, бивекторов и тривекторов на $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ и $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$

$\mathbf{B}$	$\overline{\mathbf{B}}$
1	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$	1

$\mathbf{B}$	$\overline{\mathbf{B}}$	$\underline{\mathbf{B}}$
1	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	1	1

Связь между правым и левым дополнениями

Для любого разложимого p-вектора, в частности, для базисного p-вектора $\mathbf{B}$ выполняется следующее соотношение

$$\underline{\mathbf{B}} = (-1)^{p(n-p)}\overline{\mathbf{B}}$$

Данное соотношение показывает, что правое и левое дополнение совпадают в случае, если p — четное число и различаются знаком, если p — нечетное.

Также для разложимого p-вектора $\mathbf{B}$, где p — нечетное, выполняется равенство:

$$\overline{\overline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} = (-1)^{p(n-p)}\mathbf{B}$$

Для любого разложимого p-вектора:

$$\underline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$$

Дополнение к p-вектору

Определив операцию дополнения для базисных p-векторов, можно распространить ее на произвольный p-вектор, потребовав линейности:

- $\overline{\alpha \mathbf{V}} = \alpha \overline{\mathbf{A}}$, где α — скаляр.
- $\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$.

Левое дополнение должно подчиняться тем же свойствам.

После этого не составляет труда вычислять дополнительные (комплиментарные) p-векторы. Так для $\mathbf{v} \in L$, $\dim L = 3$ получим:

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{v^i \mathbf{e}_i} = v^i \overline{\mathbf{e}_i} = v^1 \overline{\mathbf{e}}_1 + v^2 \overline{\mathbf{e}}_2 + v^3 \overline{\mathbf{e}}_3 = v^1 \mathbf{e}_{23} - v^2 \mathbf{e}_{13} + v^3 \mathbf{e}_{12}$$

Вектор $\mathbf{v} \in \Lambda^1(L) = L$, а бивектор $\overline{\mathbf{v}} \in \Lambda^2(L)$, но благодаря одинаковым размерностям L и $\Lambda^2(L)$ (при условии $n = \dim L = 3$) возможно взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое операцией дополнения.

Векторное произведение

Пусть L трехмерное пространство с базисом $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Найдем внешнее произведение двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u^1 v^2 - u^2 v^1)\mathbf{e}_{12} + (u^1 v^3 - u^3 v^1)\mathbf{e}_{13} + (u^2 v^3 - u^3 v^2)\mathbf{e}_{23}$$

Найдем дополнение к бивектору $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

$$\overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}} = (u^1 v^2 - u^2 v^1)\mathbf{e}_3 - (u^1 v^3 - u^3 v^1)\mathbf{e}_2 + (u^2 v^3 - u^3 v^2)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ u^3 v^1 - u^1 v^3 \\ u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{pmatrix} \in \Lambda^1(L) = L$$

Мы получили векторное произведение $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}$$

Операция дополнения позволяет найти 1-вектор, ортогональный бивектору $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Если же ее применить к 1-вектору, то, наоборот, получаем бивектор, «ортогональный» к исходному вектору. Для больших размерностей данная интерпретация также сохраняется, но теряет наглядность.

Смешанное произведение

На том же трехмерном пространстве L найдем внешнее произведение трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = u^i v^j w^k \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk} \mathbf{E}_3 = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} \mathbf{E}_3,$$

где ε_{ijk} — символ Леви–Чивиты.

Найдем дополнение к тривектору $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$

$$\overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}} = u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk} \overline{\mathbf{E}}_3 = u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk}$$

Это не что иное, как смешанное произведение трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}}$$

Комплексная структура на $L = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \rangle$

Рассмотрим теперь $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ и некоторый вектор $\mathbf{u} \in L$. Найдем правое дополнение к $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

$$\overline{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2 \text{ т.к. } \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2,$$

$$\overline{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{e}_1 \text{ т.к. } \mathbf{e}_2 \wedge (-\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2.$$

Найдем теперь дополнение к $\mathbf{u}$:

$$\overline{\mathbf{u}} = u^1 \overline{\mathbf{e}}_1 + u^2 \overline{\mathbf{e}}_2 = u^1 \mathbf{e}_2 - u^2 \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}$$

Это не что иное, как комплексная структура на двумерном декартовом пространстве:

$$\mathbf{Ju} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^2 \\ u^1 \end{pmatrix} \text{ — поворот на } \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\mathbf{u}} = u^1 \underline{\mathbf{e}}_1 + u^2 \underline{\mathbf{e}}_2 = -u^1 \mathbf{e}_2 + u^2 \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} u^2 \\ -u^1 \end{pmatrix} \text{ — поворот на } -\frac{\pi}{2}$$

Ориентированная площадь $L = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \rangle$

Вновь рассмотрим двумерное пространство L. Найдем смешанное произведение двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = u^i v^j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = u^i v^j \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_2 = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \mathbf{E}_2 = (u^1 v^2 - u^2 v^1) \mathbf{E}_2,$$

Найдем дополнение от бивектора $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

$$\overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}} = (u^1 v^2 - u^2 v^1) \overline{\mathbf{E}}_2 = (u^1 v^2 - u^2 v^1).$$

Мы получили ориентированную площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Ориентированная площадь может слущить геометрической интерпретацией бивектора.

В общем случае для элемента $\mathbf{v}$ из n-мерного линейного пространства L, его правое дополнение $\overline{\mathbf{v}}$ (или левое $\underline{\mathbf{v}}$) имеет тоже n компонент, также как и сам n. Такое дополнение принято называть антивектором.

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \Rightarrow \overline{\mathbf{v}} = v^i \overline{e}_i$$

Найдем внешнее произведение $\mathbf{v}$ с $\overline{\mathbf{v}}$. Так как

$$\mathbf{e}_i \wedge \overline{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \mathbf{E}_n, & i = j \end{cases}$$

то

$$\mathbf{v} \wedge \overline{\mathbf{v}} = v^i v^j \mathbf{e}_i \wedge \overline{\mathbf{e}}_j = (v^i)^2 \mathbf{e}_i \wedge \overline{\mathbf{e}}_i = \|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{E}_n.$$

Для двух разных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ запишем:

$$\mathbf{u} \wedge \overline{\mathbf{v}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{E}_n \text{ или } \underline{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{E}_n$$

Антивнешнее произведение

Антивнешнее произведение $\vee$ вводится аксиоматически. Оно играет роль внешнего произведения, но в дополнительном пространстве $\Lambda^{n-p}(L)$.

$$\wedge \to \vee \quad \underset{p}{\mathbf{U}} \to \underset{n-p}{\mathbf{U}} \quad \Lambda^{p}(L) \to \Lambda^{n-p}(L)$$

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = -\mathbf{b} \vee \mathbf{a}$$

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = (-1)^{(n-\operatorname{rank}\mathbf{A})(n-\operatorname{rank}\mathbf{B})}\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$$

$$\overline{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \vee \overline{\mathbf{B}} \text{ и } \underline{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}} = \underline{\mathbf{A}} \vee \underline{\mathbf{B}} \Rightarrow \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \underline{\overline{\mathbf{A}} \vee \overline{\mathbf{B}}} = \overline{\underline{\mathbf{A}} \vee \underline{\mathbf{B}}}$$

$$\overline{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \wedge \overline{\mathbf{B}} \text{ и } \underline{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}} = \underline{\mathbf{A}} \wedge \underline{\mathbf{B}} \Rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \underline{\overline{\mathbf{A}} \wedge \overline{\mathbf{B}}} = \overline{\underline{\mathbf{A}} \wedge \underline{\mathbf{B}}}$$

Пример №1

Рассмотрим $A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 2–форму, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$, $\mathrm{dim}L = 3$, $\mathrm{rang}A = 2$, валентность $(2, 0)$.
Выпишем все компоненты данного тензора, всего их $3^2 = 9$.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Кососимметричность позволяет уменьшить количество компонент:

$$A_{12} = -A_{21},\ A_{13} = -A_{31},\ A_{23} = -A_{32},$$
$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$$

Всего $C_3^2 = 3$ значимых компонент.

$$A = A_{12}(\tilde{e}^1 \otimes \tilde{e}^2 - \tilde{e}^2 \otimes \tilde{e}^1) + A_{13}(\tilde{e}^1 \otimes \tilde{e}^3 - \tilde{e}^3 \otimes \tilde{e}^1) + A_{23}(\tilde{e}^2 \otimes \tilde{e}^3 - \tilde{e}^3 \otimes \tilde{e}^2)$$

Пример №2

Рассмотрим $A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ 4–форму, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3, \tilde{e}^4 \rangle$, $\dim L = 4$, $\mathrm{rang} A = 4$, валентность $(4, 0)$. Можно было бы выписать все компоненты этой формы, если бы их не было $4^4 = 256$. Но нас интересуют в первую очередь значимые компоненты, а их всего одна штука:

$$C_4^4 = 1.$$

Не нулевых компонент всего $4! = 24$ штуки и все они равны или A_{1234} или $-A_{1234}$. Знак определяется четностью/нечетностью подстановки

$$\pi(1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) \end{pmatrix}$$

Список литературы 1

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 1. — **Основы алгебры.** — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574538.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. — **Линейная алгебра.** — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574545.
3. Browne J. — **Grassmann Algebra : Exploring extended vector algebra with Mathematica.** — 2009. — Incomplete draft Version 0.50.