

### Индивидуальное домашнее задание (3 модуль)

1. В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите:
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$
  - 3) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\mu$ , математическое ожидание и ковариацию случайных величин  $\mu_1$  и  $\mu_2$
2. В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 3) Математическое ожидание случайной величины  $\mu$ .
3. В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите:
  - 1) условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ ;
  - 2) условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$ ;
4. В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$  и условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ .
5. Выполните следующие задания:
  - 1) По заданным плотностям  $p_\xi(x)$  и  $p_\eta(y)$  найдите характеристические функции  $f_\xi(t)$  и  $f_\eta(t)$  случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ ; характеристическую функцию  $f_\mu(t)$  случайной величины  $\mu = \xi + \eta$
  - 2) По заданной характеристической функции  $f_\xi(t)$  вычислите математическое ожидание случайной величины  $\xi$  и дисперсию случайной величины  $\xi$ .
6. Посетитель тира платит  $a$  рублей за выстрел. При попадании в девятку получает выигрыш  $b$  рублей, при попадании в десятку получает выигрыш  $c$  рублей. Если стрелок не попадает ни в девятку, ни в десятку, то деньги ему не выплачиваются. Вероятности попадания в девятку, десятку и промаха равны  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  соответственно. Число посетителей равно  $n$ .  
С помощью **неравенства Чебышева**:
  - 1) найдите границы, в которых будет лежать суммарная прибыль владельца тира с вероятностью не менее  $\alpha$ ;
  - 2) найдите число посетителей тира, чтобы вероятность отклонения суммарной прибыли от среднего размера суммарной прибыли на величину не меньше  $\beta$  % (от средней суммарной прибыли) равнялась  $p$С помощью **центральной предельной теоремы** оцените вероятность того, что
  - 1) размер убытка у владельца тира будет лежать в пределах от  $m_1$  до  $m_2$  рублей;
  - 2) что суммарная прибыль окажется в пределах от  $n_1$  до  $n_2$  рублей.
7. По заданным выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  объема  $n = 50$  найти и построить:
  - 1) минимальный и максимальный элементы выборки, разброс выборки, статистический ряд;
  - 2) гистограмму, полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения (для выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$ );
  - 3) выборочные характеристики: среднее, дисперсию (смещенную и несмещенную) (по выборке и по статистическому ряду), медиану.
8. Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью  $p_\xi(x)$  с неизвестным параметром. Найдите оценку неизвестного параметра методом моментов.
9. а) Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

б) Известно, что выборка  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

**10.** С помощью критерия отношения правдоподобия проверьте:

- 1) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  дискретному распределению с заданными параметрами.
- 2) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  непрерывному распределению с заданными параметрами.

**11.** С помощью критерия  $\chi^2$  проверьте:

- 1) гипотезу о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  к заданному дискретному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).
- 2) гипотезу о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  заданному непрерывному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).

**Распределение баллов (15 баллов)**

<b>Задача 1</b>	<b>Задача 2</b>	<b>Задача 3</b>	<b>Задача 4</b>	<b>Задача 5</b>	<b>Задача 6</b>
<b>1, 5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

  

<b>Задача 7</b>	<b>Задача 8</b>	<b>Задача 9</b>	<b>Задача 10</b>	<b>Задача 11</b>
<b>1,5 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

5. Независимые непрерывные случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют плотности распределения
- $$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}(x+3), & x \in (-2; 4) \\ 0, & x \notin (-2; 4), \end{cases} \text{ и } p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}y, & 2 \leq y \leq 4 \\ 0, & y < 2, y > 4 \end{cases}$$
- $$f(t) = \frac{e^{-5-2t^2}}{e^{-5e^{it}}}$$
6.  $a = 150, b = 250, c = 500, p_1 = 0,3, p_2 = 0,15, p_3 = 0,55, n = 500,$   
 $\alpha = 0,8, \beta = 5, p = 0,05$   
 $m_1 = 0, m_2 = 1000, n_1 = 100, n_2 = 1500.$
7. Выборка  $X_1, \dots, X_n$
- |    |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|----|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 12 | 5 | 4 | 4 | 3 | 4 | 6 | 4  | 6  | 5  |
| 8  | 5 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 6  | 4  | 4  |
| 6  | 8 | 4 | 4 | 4 | 8 | 5 | 11 | 6  | 13 |
| 5  | 5 | 9 | 6 | 6 | 4 | 3 | 7  | 14 | 4  |
| 7  | 9 | 9 | 5 | 5 | 2 | 6 | 6  | 11 | 8  |
- Выборка  $Y_1, \dots, Y_n$
- |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -2.88 | -8.24 | -8.66 | -3.44 | -5.64 | -4.26 | -1.50 | -3.04 | -5.92 | -3.34 |
| -6.18 | -5.49 | -6.92 | -7.54 | -5.53 | -6.78 | -5.63 | -6.03 | -7.69 | -2.95 |
| -3.47 | -1.89 | -2.13 | -5.38 | -5.04 | -6.44 | -5.63 | -6.46 | -6.50 | -4.89 |
| -3.43 | -8.67 | -6.25 | -3.64 | -4.71 | -6.23 | -8.95 | -3.63 | -1.35 | -4.04 |
| -6.74 | -2.57 | -3.98 | -6.54 | -1.69 | -4.41 | -3.21 | -5.11 | -2.99 | -8.16 |
8. Выборка  $X_1, \dots, X_n$  – имеет плотность распределения
- $$f(x) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x} + \frac{1-p}{a}, & x \in (0; a) \\ p\lambda e^{-\lambda x}, & x \in (a; +\infty) \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$
- При заданных значениях параметров  $\lambda = 0.3$  и  $a = 4$  найти оценку параметра  $p$ . Таблица частот
- |            |       |         |         |         |       |       |         |         |         |         |
|------------|-------|---------|---------|---------|-------|-------|---------|---------|---------|---------|
| интер-валы | 0-0.8 | 0.8-1.6 | 1.6-2.4 | 2.4-3.2 | 3.2-4 | 4-4.8 | 4.8-5.6 | 5.6-6.4 | 6.4-7.2 | 7.2-8.0 |
| частоты    | 142   | 136     | 150     | 149     | 150   | 14    | 12      | 10      | 8       | 7       |
9. По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров  $a$  и  $b$
- |            |         |         |         |         |         |         |         |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| интер-валы | 1.1-1.7 | 1.7-2.3 | 2.3-2.9 | 2.9-3.5 | 3.5-4.1 | 4.1-4.7 | 4.7-5.3 |
| частоты    | 18      | 49      | 58      | 41      | 22      | 8       | 4       |
- По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров  $a$  и  $b$
- |            |         |         |         |          |           |           |           |           |           |           |
|------------|---------|---------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| интер-валы | 1.0-3.6 | 3.6-6.2 | 6.2-8.8 | 8.8-11.4 | 11.4-14.0 | 14.0-16.6 | 16.6-19.2 | 19.2-21.8 | 21.8-24.4 | 24.4-26.0 |
| частоты    | 59      | 363     | 329     | 149      | 70        | 18        | 10        | 1         | 0         | 1         |
10. Гипотеза  $H_0$  --- биномиальное распределение  $Binom(k = 25, p = 0.4)$   
Гипотеза  $H_1$  --- биномиальное распределение  $Binom(k = 25, p = 0.35), \alpha = 0.115$
- |    |   |    |    |    |    |    |    |    |   |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 10 | 8 | 6  | 11 | 9  | 10 | 11 | 6  | 12 | 7 |
| 11 | 7 | 10 | 8  | 7  | 8  | 7  | 13 | 7  | 6 |
| 10 | 9 | 5  | 14 | 6  | 10 | 10 | 10 | 7  | 9 |
| 6  | 8 | 7  | 6  | 9  | 10 | 5  | 6  | 8  | 5 |
| 7  | 6 | 13 | 9  | 11 | 10 | 10 | 8  | 13 | 9 |
- Гипотеза  $H_0$  --- гамма распределение  $Gamma(\lambda = 0.3, \gamma = 5)$   
Гипотеза  $H_1$  --- гамма распределение  $Gamma(\lambda = 0.4, \gamma = 5), \alpha = 0.135$
- |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 17.51 | 14.29 | 28.54 | 11.59 | 13.75 | 10.34 | 27.86 | 20.62 | 22.20 | 17.43 |
| 10.44 | 30.52 | 17.97 | 8.05  | 9.54  | 9.66  | 34.41 | 16.24 | 7.13  | 16.47 |
| 11.48 | 13.42 | 13.13 | 15.74 | 14.27 | 10.23 | 8.79  | 24.56 | 15.80 | 2.30  |
| 9.32  | 11.87 | 23.14 | 16.39 | 16.41 | 20.83 | 6.34  | 12.62 | 6.14  | 9.78  |
| 24.48 | 24.98 | 15.14 | 24.37 | 16.15 | 27.86 | 12.54 | 24.60 | 28.00 | 19.95 |

11.	<p>Распределение Пуассона с неизвестным параметром <math>\lambda</math>, <math>\alpha = 0.05</math></p> <p>Выборка <math>X_1, \dots, X_n</math></p> <p>12 5 4 4 3 4 6 4 6 5</p> <p>8 5 4 5 5 3 4 6 4 4</p> <p>6 8 4 4 4 8 5 11 6 13</p> <p>5 5 9 6 6 4 3 7 14 4</p> <p>7 9 9 5 5 2 6 6 11 8</p> <p>Равномерное распределение, <math>\alpha = 0.1</math></p> <p>Выборка <math>Y_1, \dots, Y_n</math></p> <p>-2.88 -8.24 -8.66 -3.44 -5.64 -4.26 -1.50 -3.04 -5.92 -3.34</p> <p>-6.18 -5.49 -6.92 -7.54 -5.53 -6.78 -5.63 -6.03 -7.69 -2.95</p> <p>-3.47 -1.89 -2.13 -5.38 -5.04 -6.44 -5.63 -6.46 -6.50 -4.89</p> <p>-3.43 -8.67 -6.25 -3.64 -4.71 -6.23 -8.95 -3.63 -1.35 -4.04</p> <p>-6.74 -2.57 -3.98 -6.54 -1.69 -4.41 -3.21 -5.11 -2.99 -8.16</p>
-----	---