Математическая логика

Замкнутые классы

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной информатики и теории вероятностей РУДН
Маркова Екатерина Викторовна
markova_ev@pfur.ru

Курс математической логики

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Введение в алгебру логики**	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	**Минимизация булевых функций**	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	**Полнота и замкнутость систем логических функций**	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.
4.	**Исчисление высказываний и предикатов**	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Литература

- **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие. Математическая логика. – Москва : РУДН, 2014. – 118 с.**
- Светлов В.А., Логика: учебное пособие, изд-во: Логос, 2012 г. 429 с.
- Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
- Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Дискретная математика, М.: АСТ, 2014 г, 448 с.
- Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
- **Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.**
- **Учебный портал РУДН, раздел «Математическая логика» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522**

Класс T_0

Определение:
T_0 - класс всех логических функций $f(x_1,\dots,x_n)$, сохраняющих константу 0 на нулевом наборе, т.е. $f(0,\dots,0)=0$.

Если $f \in T_0$, а функция g получена из функции f путем добавления или изъятия фиктивных переменных, то $g \in T_0$.

Класс T_0

$f \in T_0$	$f \notin T_0$

Заполните примеры функций.

Класс T_0

$f \in T_0$	$f \notin T_0$
0	1
x	$\overline{x}$
$x \cdot y$	$x \downarrow y\ (1000)$
$x \vee y$	$x \rightarrow y$
$x \oplus y$	$x \mid y\ (1110)$

Класс T_0

Докажем замкнутость класса T_0. Найдем значение $\Phi = f(f_1,\ldots,f_n)$ на наборе $(0,\ldots,0)$ и проверим, $\Phi = f(f_1,\ldots,f_n) \in T_0$, при условии, что $f,\ f_1,\ldots,\ f_n \in T_0$.,

$$\Phi\left(0,\ldots,0\right) = f\left(\underbrace{f_1\left(0,\ldots,0\right)}_{0},\ldots,\underbrace{f_n\left(0,\ldots,0\right)}_{0}\right) =$$

$$= f\left(0,\ldots,0\right) = 0$$

Следовательно, $\Phi \in T_0$ и T_0 - замкнутый класс.

Класс T_1

Определение:
Обозначим через T_1 класс всех логических функций $f(x_1,\ldots,x_n)$, сохраняющих константу 1 на единичном наборе, т.е. $f(1,\ldots,1)=1$.

Заметим, что если $f \in T_1$, а функция g получена из функции f путем добавления или изъятия фиктивных переменных, то и $g \in T_1$.

Класс T_1

$f \in T_1$	$f \notin T_1$

Заполните таблицу

Класс T_1

$f \in T_1$	$f \notin T_1$
1	0
x	$\overline{x}$
$x \cdot y$	$x \downarrow y$ (1000)
$x \vee y$	$x \oplus y$
$x \to y$	$x \mid y$ (1110)

Класс T_1

Покажем, что T_1 –замкнутый класс.

Найдем значение $\Phi = f(f_1,\ldots,f_n)$ на наборе $(1,\ldots,1)$ и проверим, $\Phi \in T_1$, если f, $f_1,\ldots,$ $f_n \in T_1$?

$$\Phi(1,\ldots,1) = f\left(\underbrace{f_1(1,\ldots,1)}_{1},\ldots,\underbrace{f_n(1,\ldots,1)}_{1}\right) =$$

$$= f(1,\ldots,1) = 1$$

Следовательно, $\Phi = f(f_1,\ldots,f_n) \in T_1$, и T_1 - замкнутый класс.

Класс S

Определение:
S - класс всех самодвойственных функций f из P_2, т.е. таких, что $f^* = f$.

Заметим, что если $f \in S$, а функция g получена из функции f путем добавления или изъятия фиктивных переменных, то и $g \in S$.

Класс S

$f \in S$	$f \notin S$

Заполните таблицу

Класс S

$f \in S$	$f \notin S$
x	0
$\overline{x}$	$x \vee y$
$xy \vee xz \vee yz$	$x \downarrow y$ (1000)
(0101)	$x \oplus y$

Класс S

Докажем, что класс S замкнут.

Проверим, $\Phi = f(f_1,\ldots,f_n) \in S$ при условии, что $f, f_1,\ldots, f_n$ – самодвойственны.

$$\Phi^* = f^*(f_1^*,\ldots,f_n^*) = f(f_1,\ldots,f_n) = \Phi .$$

Следовательно класс S замкнут.

Лемма о несамодвойственной функции

Если $f(x_1,\ldots,x_n)\notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\overline{x}$ можно получить несамодвойственную функцию одной переменной, т.е. константу.

Пример по лемме о несамодвойственной функции

$f(x,y) = x \oplus y$. Если $f(x,y) \notin S$, представить с помощью подстановок константу.

Решение:

Проверяем самодвойственность, например, через таблицу.

$x \quad y$	$f(x,y)$	$f^*(x,y)$
0 0		
0 1		
1 0		
1 1		

Пример по лемме о несамодвойственной функции

Проверяем самодвойственность через таблицу.

x	y	$f(x,y)$	$f^*(x,y)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$f \neq f^*$, следовательно $f(x,y) \notin S$ и по лемме о несамодвойственной функции можно через нее представить константу.

Пример по лемме о несамодвойственной функции

Для $f \in S$ по определению самодвойственности

$$f^*(x,y) = \overline{f(\overline{x},\overline{y})} = f(x,y),$$

для несамодвойственных $f(\overline{x},\overline{y}) = f(x,y)$.

Для поиска константы необходимо найти противоположные наборы, на которых значения функции равны (противоположные наборы находятся симметрично относительно центра наборов).

Пример по лемме о несамодвойственной функции

x y	$f(x,y)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Представим константу 0. $f(0,0)=0$ и $f(1,1)=0$, следовательно вместо переменных можно подставить x или $\overline{x}$ и получить константу 0, например, $f(x,x)=0$ или $f(\overline{x},\overline{x})=0$. Оба представления возможны. Проверим, $f(x,x)=x\oplus x=0$, верно. Также и $f(\overline{x},\overline{x})=\overline{x}\oplus\overline{x}=0$.

Пример по лемме о несамодвойственной функции

x y	$f(x,y)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Представим константу 1. $f(0,1)=f(1,0)=1$, тогда $f(x,\overline{x})=f(\overline{x},x)=1.$ Проверим, $f(x,\overline{x})=x\oplus\overline{x}=1$, верно.

Лемма о несамодвойственной функции

Если $f(x_1,\ldots,x_n)\notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\bar{x}$ можно получить константу.

Док-во.

Т.к. $f\notin S$ то найдется набор $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ такой, что $f(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n)=f(\alpha_1,...,\alpha_n)$. Рассмотрим функции

$$\varphi_i(x)=x^{\alpha_i}=x_i,\quad i=\overline{1,n},\ \text{т.е. } \varphi_i\left(x\right)=\left[\begin{array}{l} x, \\ \bar{x}. \end{array}\right.$$

Построим таблицу обозначений:

α_i	0^{α_i}	$\alpha_i{}^0$	1^{α_i}	$\alpha_i{}^1$
0	$\bar{0}=1$			
1				

Лемма о несамодвойственной функции

α_i	0^{α_i}	${\alpha_i}^0$	1^{α_i}	${\alpha_i}^1$
0	**1**	**1**	0	0
1	0	0	**1**	**1**

Введем $\varphi(x) = f(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x))$. Тогда имеем

$$\varphi(0) = f(\varphi_1(0),...,\varphi_n(0)) = f(0^{\alpha_1},...,0^{\alpha_n}) = f(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n) =$$
$$= f(\alpha_1,...,\alpha_n) = f(1^{\alpha_1},...,1^{\alpha_n}) = f(\varphi_1(1),...,\varphi_n(1)) = \varphi(1).$$

Т.к. $\varphi(0) = \varphi(1)$, то функция является константой. □

Тема следующей лекции:

«Замкнутые классы. Часть 2».