Аффинные пространства

Определения

Недостаток векторных пространств

- В векторном пространстве нулевой вектор $\mathbf{0}$ играет особую роль, так как при всех автоморфизмах пространства остается на месте. Проще говоря, любое линейное преобразование переводит его в самого себя.
- Нулевой вектор ассоциируется с началом координат. Из за его неподвижности получается, что все остальные векторы «привязаны» к началу координат.
- Все векторы можно сделать равноправными только при добавлении к линейным преобразованиям параллельного переноса.

Формальное определение аффиного пространства

Пусть $\mathbb{A}$ — некоторое непустое множество, элементы которого будем называть точками и обозначать P, Q, R и т.д. Пусть, далее L — векторное пространство над полем скаляров $\mathbb{P}$. Пара $(\mathbb{A}, L)$ называется аффинным пространством, связанным с L если задано отображение

$$\mathbb{A} \times L \to \mathbb{A} \text{ такое, что } (P, \mathbf{v}) \to P + \mathbf{v} \in \mathbb{A}$$

со следующими свойствами

1. $P + \mathbf{0} = P$, где P — произвольная точка из $\mathbb{A}$.
2. $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$.
3. Для любых точек P и Q существует единственный вектор $\mathbf{v}$ такой, что $P + \mathbf{v} = Q$.

Размерностью аффинного пространства считается размерность пространства L. Вектора пространства L называются свободными векторами.

Неформальное определение аффиного пространства

- Наряду с векторами линейного пространства L рассмотрим множество геометрических точек $\mathbb{A}$. Точки будем обозначать большими латинскими буквами как P, Q, M и т.д.
- Определим операцию сложения точек и векторов. В результате сложения получается новая точка: $P + \mathbf{v} = Q$.
- Для любых точек P и Q существует единственный вектор $\mathbf{v}$ такой, что $P + \mathbf{v} = Q$.
- Множество точек $\mathbb{A}$ и векторное пространство свободных векторов L называют аффинным пространством.

Системой координат (или репером) в n–мерном аффинном пространстве $(\mathbb{A}, L)$ называется совокупность $\{O, \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle\}$ состоящая из точки $O \in \mathbf{A}$ и базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в L.

Координатами произвольной точки P называются компоненты вектора $\mathbf{r}$ такого, что $O + \mathbf{r} = P$. Данный вектор определен однозначно. Пишут также

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T.$$

Вектор $\mathbf{r}$ называют радиус-вектором. При фиксированном базисе каждая точка определяется однозначно своим радиус-вектором.

Афинные преобразования

Определение

Отображение вида $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ называется аффинным преобразованием, если для $\forall P \in \mathbb{A}$ и $\forall \mathbf{v} \in L$ данное преобразование имеет вид

$$f(P + \mathbf{v}) = f(P) + \varphi(\mathbf{v})$$

где $\varphi\colon L \to L$ — некоторое линейное преобразование, а $f(P)$ — некоторая новая точка, являющаяся образом преобразования f.

Можно доказать, что любое аффинное преобразование точки P в произвольной системе координат $\{O, \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle\}$ имеет вид:

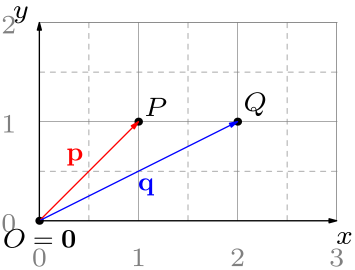
$$\mathbf{OQ} = \mathrm{A}\mathbf{OP} + \mathbf{b},$$

где $\mathbf{OP}$ — радиус-вектор точки P, задающий ее координаты, $\mathbf{b}$ — некоторый вектор, называемы вектором трансляции, A — линейный оператор. В компонентах запишем:

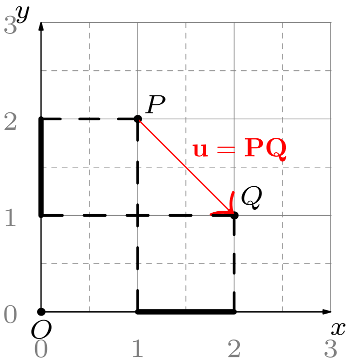
$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$

Аффинные пространства

Примеры



- Наряду с векторами рассмотрим множество точек, которые будем обозначать большими латинскими буквами как P, Q, M и т.д.
- Некоторую фиксированная точку O и базис $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ будем называть системой координат.
- Фиксированная вместе с базисом точка O называется центром системы координат.
- Вектор $\mathbf{p} \in L$ проведенный от O до любой другой точки P будем обозначать $\mathbf{OP}$ и назовем радиус-вектором этой точки: $O + \mathbf{p} = P$.
- Радиус-вектором точки O является нулевой вектор $\mathbf{0}$ так как $O + \mathbf{0} = O$.
- Координатами точки P будем называть компоненты ее радиус-вектора $\mathbf{p}$ в базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$. На рисунке $\mathbf{p} = (1, 1)^T$, следовательно P имеет координаты $(1, 1)$. Кратко пишут $P(1, 1)$ или $P = (1, 1)$. Точка $Q = (2, 1)$.



- От произвольной точки P до произвольной точки Q существует единственный вектор $\mathbf{u}$ такой, что $P + \mathbf{u} = Q$. Его можно обозначить как $\mathbf{PQ}$
- Получается, что векторы «освободились» от привязки к начальной точке O и теперь «свободны».
- Для задания вектора в аффинном пространстве можно указать две точки или точку основания вектора и сам вектор.
- Каждая точка в аффинном пространстве задается радиус-вектором и действия сточками сводятся к действию с их радиус-векторами.

Аффинное преобразование

- Аффинное преобразование на плоскости — преобразование сохраняющее параллельность прямых.
- Можно доказать, что аффинное преобразование произвольной точки P с радиус-вектором $\mathbf{p}$ сводится следующей формуле:

$$\mathbf{p}' = \mathrm{A}\mathbf{p} + \mathbf{b}$$

  где

  - A — некоторый линейный оператор;
  - $\mathbf{b}$ — некоторый вектор (вектор трансляции или перемещения).
  - $\mathbf{p}'$ — радиус-вектор точки P', которая получилась из P в результате данного аффинного преобразования.

- В матричном виде оно запишется как:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x' &= a_1^1 x + a_2^1 y + b^1 \\ y' &= a_1^2 x + a_2^2 y + b^2 \end{aligned}$$

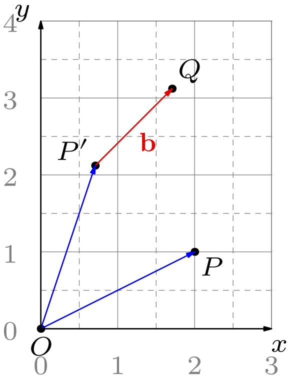
Зачем нужно введение аффинного пространства

Расширение векторного пространства до аффинного пространства позволяет:

1. выбирать произвольную начальную точку координатной системы;
2. открепить векторы от начала координат, закрепленными остаются только радиус векторы.

Все действия с точками после введения радиус-векторов сводятся к действиям с векторам. Это называется векторизация аффинного пространства.

Аффинное преобразование



На рисунке изображено аффинное преобразование точки $P(2, 1)$, которое задается следующей формулой:

$$\mathbf{q} = A\mathbf{p} + \mathbf{b},$$

где p — радиус-вектор точки P, b — вектор трансляции (сдвига), A — матрица линейного преобразования, $\mathbf{q}$ — радиус-вектор точки Q получившейся преобразованием точки P.

Подставляя конкретные числовые значения, вычислим

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2+1 \\ 3\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$