Глава 1

Множества. Действительные числа

В математике первичными понятиями являются понятия множества, элемента и принадлежности элемента множеству.

Множества будем обозначать большими буквами: $A, B, \ldots, X, Y, \ldots, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots,$ а элементы множеств – малыми буквами: $a, b, \ldots, x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$.

Если a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (читается: «a принадлежит множеству A») или, что то же, $\underline{A \ni a}$. Если же a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$ или $A \not\ni a$.

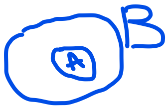
$A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$

Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Таким образом, равенство $A = B$ означает применительно к множествам, что одно и то же множество обозначено разными буквами A и B.

$x^2 + x + 1 = 0$

Если все элементы, из которых состоит A, входят и в B (причем случай $A = B$ не исключается), то мы называем A подмножеством множества B и пишем $A \subset B$ или, что то же, $\underline{B \supset A}$.

Иногда мы не знаем заранее, содержит ли некое множество (например, множество корней данного уравнения) хотя бы один элемент. Поэтому целесообразно ввести понятие пустого множества, то есть множества, не содержащего ни одного элемента. Будем обозначать его символом $\varnothing$. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества. Если B - произвольное множество, то $\varnothing$ и B называются его несобственными подмножествами; если же $A \subset B$ и существует такой



B, ∅

элемент $x \in B$, что $x \notin A$, то множество A называется собственным подмножеством множества B.

§ 1.1 Операции над множествами

1. Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.
2. Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то они называются непересекающимися. В этом случае записывают $A \cap B = \varnothing$.

Операции объединения и пересечения множеств по самому своему определению коммутативны и ассоциативны, то есть

$$A \cup B = B \cup A, \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A, \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1.1}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{1.2}$$

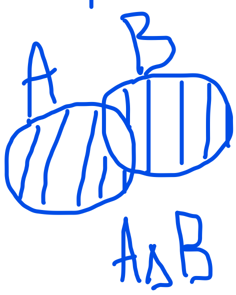
$(S \setminus A) \cap (S \setminus B) \cup (S \setminus C) =$

$= ((S \setminus A) \cup (S \setminus C)) \cap ((S \setminus B) \cup (S \setminus C)).$

Действительно, проверим, например, первое из этих равенств. Пусть элемент x принадлежит множеству, стоящему в левой части равенства (1.1), то есть $x \in (A \cup B) \cap C$. Это означает, что x входит в C и, кроме того, по крайней мере в одно из множеств A или B. Но тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$, то есть входит в правую часть рассматриваемого равенства. Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. Следовательно, $x \in C$ и, кроме того, x входит в A или B, то есть $x \in A \cup B$. Таким образом, $x \in (A \cup B) \cap C$. Равенство (1.1) доказано. Аналогично проверяется равенство (1.2).

Объединением множеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называется множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из заданных множеств A_α. Обозначают $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$.

Пересечением множеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называется такое множество, обозначаемое через $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, что каждый его элемент принадлежит всем множествам A_α.



3. Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.
4. Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Часто приходится рассматривать тот или иной запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основного множества S, например различные множества точек на числовой прямой. В этом случае разность $S \setminus A$ называют дополнением множества A.

В теории множеств важную роль играет так называемый принцип двойственности, который основан на следующих двух соотношениях.
1. *Дополнение суммы равно пересечению дополнений:*

$$S \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (S \setminus A_\alpha). \tag{1.3}$$

2. *Дополнение пересечения равно сумме дополнений:*

$$S \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (S \setminus A_\alpha). \tag{1.4}$$

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества S, совершенно автоматически может быть получено другое – двойственное – равенство путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, сумм множеств – пересечениями, а пересечений – суммами.

Приведем доказательство соотношения (1.3). Пусть $x \in S \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$. Это означает, что x не входит в объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, то есть x не входит ни в одно из множеств A_α. Следовательно, x принадлежит каждому из дополнений $S \setminus A_\alpha$ и потому $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (S \setminus A_\alpha)$. Обратно, пусть $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (S \setminus A_\alpha)$, то есть x входит в каждое $S \setminus A_\alpha$; тогда x не входит ни в одно из множеств A_α, то есть не принадлежит их сумме $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, а тогда $x \in S \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$. Равенство (1.3) доказано. Соотношение (1.4) доказывается аналогично.

§ 1.2 Отображение множеств. Основные свойства отображений

Пусть M и N – произвольные множества. Говорят, что на M определена функция f, принимающая значения из N, если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in N$.

Для множеств произвольной природы (как, впрочем, и в случае числовых множеств) вместо термина «функция» часто пользуются термином «отображение», говоря об отображении одного множества в другое.

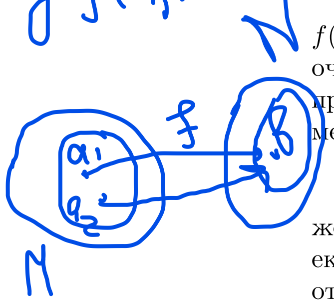
Для обозначения функции (отображения) из M в N мы будем часто пользоваться записью $f : M \to N$.

$M \xrightarrow{f} N$

Если a – элемент из M, то отвечающий ему элемент $b = f(a)$ из N называется образом элемента a (при отображении f). Совокупность всех тех элементов a из M, образом которых является данный элемент $b \in N$, называется прообразом (или, точнее, полным прообразом) элемента b и обозначается $f^{-1}(b)$.

$y = f(x), x \in M$

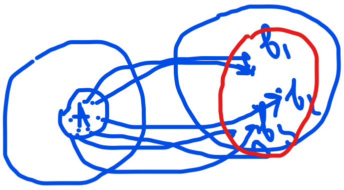
Пусть $A \subset M$. Совокупность $\{f(a) : a \in A\}$ всех элементов вида $f(a)$, где $a \in A$, называется образом A и обозначается $f(A)$. В свою очередь, для каждого множества B из N определяется его (полный) прообраз $f^{-1}(B)$, а именно: $f^{-1}(B)$ есть совокупность всех тех элементов из M, образы которых принадлежат B.



Введем следующую терминологию.

Будем говорить, что f есть отображение множества M «на» множество N, если $f(M) = N$; такое отображение называют также сюръекцией. В общем случае, то есть когда $f(M) \subset N$, говорят, что f есть отображение M «в» N.

Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из M их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ также различны, то f называется инъекцией.



Отображение $f : M \to N$, которое одновременно является сюръекцией и инъекцией, называется биекцией или взаимно однозначным соответствием между M и N.

Если $A \subset M$, то функция $f : M \to N$ естественным образом порождает функцию, определенную на множестве A, ставящую в соответствие каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x)$. Эту функцию называют сужением функции f на множество A и обозначают f_A. Таким образом, $f_A : A \to N$ и $f_A(x) = f(x)$ $\forall x \in A$. Функцию f называют продолжением функции f_A на множество M.

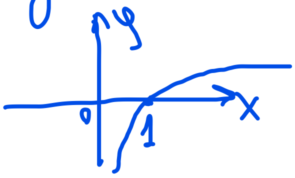
$f_A : A \to N$

$f_A(x) = f(x), x \in A$

$f(x) = x^2, x \in R$

$f_A(x) = x^2, x \in A = [0;1]$

$y = \ln x,\ x > 0$



$\forall$ All

$y = f(x),\ x \in M$

Пусть $f : M \to N$ – биективное отображение. Определим обратное отображение $f^{-1} : N \to M$ по следующему правилу: $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

Если функции f и g рассматриваются на одном и том же множестве M, то запись $f \equiv g$ на M означает, что $f(x) = g(x)\ \forall x \in M$. В этом случае говорят, что функция f тождественно равна функции g на множестве M.

Если $f : X \to Z$ и $g : Z \to Y$, то функция $F : X \to Y$, определенная для каждого $x \in X$ равенством $F(x) = g(f(x))$, называется композицией функций f и g или сложной функцией. Обозначают $g \circ f$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Графиком функции $f : M \to N$ называется множество

$$\Gamma = \{(x, f(x)),\ \ x \in M\}.$$

Теорема 1.1. *Прообраз суммы двух множеств равен сумме их прообразов:*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Доказательство. Если $x \in f^{-1}(A \cup B)$, то $f(x) \in A \cup B$, то есть $f(x) \in A$ или $f(x) \in B$, следовательно, $x \in f^{-1}(A)$ или $x \in f^{-1}(B)$, то есть $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, то есть $x \in f^{-1}(A)$ или $x \in f^{-1}(B)$, то $f(x) \in A$ или $f(x) \in B$. Иначе говоря, $f(x) \in A \cup B$. Следовательно, $x \in f^{-1}(A \cup B)$. □

Теорема 1.2. *Прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов:*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

без док-ва

Доказательство. Если $x \in f^{-1}(A \cap B)$, то $f(x) \in A \cap B$, то есть $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$, следовательно, $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, то есть $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, то есть $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, то $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$. Иначе говоря, $f(x) \in A \cap B$. Следовательно, $x \in f^{-1}(A \cap B)$. □

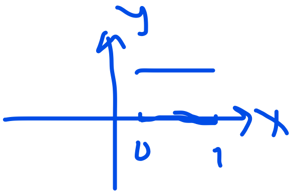
Теорема 1.3. *Образ суммы двух множеств равен сумме их образов:*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Доказательство. Если $y \in f(A \cup B)$, то это означает, что $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B. Следовательно, $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Обратно, если $y \in f(A) \cup f(B)$, то $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B, то есть $x \in A \cup B$ и, следовательно, $y = f(x) \in f(A \cup B)$. □

– без док-ва

Заметим, что образ пересечения двух множеств, вообще говоря, не совпадает с пересечением их образов. Например, пусть рассматриваемое отображение представляет собой проектирование плоскости на ось Ox. Тогда отрезки



$$0 \le x \le 1, \quad y = 0,$$

$$0 \le x \le 1, \quad y = 1$$

не пересекаются, а в то же время их образы совпадают.

§ 1.3 Разбиение множеств на классы

В самых различных вопросах встречаются разбиения тех или иных множеств на попарно непересекающиеся подмножества. Например, плоскость (рассматриваемую как множество точек) можно разбить на прямые, параллельные оси Ox.

Каждый раз, когда некоторое множество A представлено тем или иным способом как сумма попарно непересекающихся подмножеств, мы говорим о разбиении множества A на классы.

Определение 1.1. Прямым (декартовым) произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар

$$A \times B = \{(a, b): \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Отметим, что $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, \ b = d$.

Если $A = B$, то записывают $A \times A = A^2$.

$a \sim b$

Говорят, что в A задано бинарное отношение φ, если в A^2 выделено произвольное подмножество R_φ. Точнее говоря, элемент a находится в отношении φ к элементу b, если пара (a, b) принадлежит R_φ.

$(a, b):$

Определение 1.2. Бинарное отношение φ называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. рефлексивности: $(a, a) \in R_\varphi \ \forall a \in A$,
2. симметричности: если $(a, b) \in R_\varphi$, то $(b, a) \in R_\varphi$,
3. транзитивности: если $(a, b) \in R_\varphi$ и $(b, c) \in R_\varphi$, то $(a, c) \in R_\varphi$.

Эквивалентность обозначают символом $\sim$.

Определение 1.3. Бинарное отношение φ называется отношением частичного порядка, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$M_4 \subset M_3$

$(M_i, M_j) \in R_\varphi : M_i \subset M_j \qquad (M_i, M_j), (M_j, M_k)$

$(M_i, M_i):$

(M_i, M_j) (M_j, M_i)

$M_i \subset M_j$ $M_j \subset M_i$

1. рефлексивности,
2. транзитивности,
3. антисимметричности: если $(a, b) \in R_\varphi$ и $(b, a) \in R_\varphi$, то $a = b$.

$\mathbb{R}$

$(a,b) \in R_\varphi : a \le b$

$a \le b,\ b \le c \Rightarrow a \le c$

$a \le b,\ b \le a \Rightarrow a = b$

$a \le b$ $b \le a$

Пусть a и b – элементы частично упорядоченного множества. Может оказаться, что $(a, b) \notin R_\varphi$ и $(b, a) \notin R_\varphi$. В этом случае элементы a и b называются несравнимыми. Таким образом, отношение порядка определено лишь для некоторых пар элементов, поэтому мы и говорим о частичной упорядоченности. Если же в частично упорядоченном множестве A несравнимых элементов нет, то множество A называется упорядоченным. Итак, множество A упорядочено, если оно частично упорядочено и если для любых двух различных элементов $a, b \in A$ обязательно либо $(a, b) \in R_\varphi$, либо $(b, a) \in R_\varphi$.

§ 1.4 Счетные и несчетные множества

Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Определение 1.4. Множество M называется счетным, если существует взаимно однозначное соответствие между элементами множеств M и $\mathbb{N}$.

$\{1, 2, 3\}$

$2 \cdot 1$ $2 \cdot 2$ $2 \cdot 3$

2 4 6 8

Приведем примеры счетных множеств.

1. *Множество всех целых чисел.* Установим соответствие между всеми целыми и всеми натуральными числами по следующей схеме:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \ldots, \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots. \end{array}$$

2. *Множество всех четных положительных чисел.* Соответствие очевидно: $n \leftrightarrow 2n$.

3. *Множество всех рациональных чисел.* Каждое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби

$\frac{p}{q}$

$$\alpha = p/q, \; q > 0.$$

Назовем сумму $|p| + q$ высотой рационального числа α. Ясно, что число дробей с данной высотой n конечно. Например, высоту 1 имеет только число 0/1, высоту 2 – числа 1/1 и -1/1, высоту 3 – числа 2/1, 1/2, -2/1 и -1/2 и т.д. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты, то есть сначала выпишем числа высоты 1, затем – числа высоты 2 и т.д. При этом всякое рациональное число получит некоторый

без док-ва

номер, то есть будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми натуральными и всеми рациональными числами.

Теорема 1.4. *Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_l} \dots$

Доказательство. Пусть A – счетное множество, а B – его подмножество. Занумеруем элементы множества A : $a_1, ..., a_n, ...$ Пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, ...$ – те из них, которые входят в B. Если среди чисел $n_1, n_2, ...$ есть наибольшее, то B конечно, в противном случае B счетно, поскольку его элементы $a_{n_1}, a_{n_2}, ...$ занумерованы числами $1, 2, ...$ □

Теорема 1.5. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть M – бесконечное множество. Выберем в нем произвольный элемент a_1. Поскольку M бесконечно, в нем найдется элемент a_2, отличный от a_1, затем найдется элемент a_3, отличный от a_1 и от a_2 и т.д. Продолжая этот процесс (который не может оборваться из-за «нехватки» элементов, ибо M бесконечно), мы получаем счетное подмножество $A = \{a_1, ..., a_n, ...\}$ множества M. □

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным множеством.

Теорема 1.6. *Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.*

Доказательство. Предположим, что указанное множество является счетным, то есть имеет место взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и числами

$$\alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}...,$$

$$\alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}...,$$

$$\alpha_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n}...,$$

$$.......................................$$

$$\alpha_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}...,$$

$$.......................................$$

Здесь a_{ik} – k-я десятичная цифра числа α_i. Построим дробь

$$\beta = 0, b_1b_2b_3...b_n...,$$