Математическая логика

Свойства булевых операций. Двойственность

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры

прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Курс математической логики

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Введение в алгебру логики**	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	**Минимизация булевых функций**	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	**Полнота и замкнутость систем логических функций**	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.
4.	**Исчисление высказываний и предикатов**	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Литература

- **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие. Математическая логика. – Москва : РУДН, 2014. – 118 с.**
- Светлов В.А., Логика: учебное пособие, изд-во: Логос, 2012 г. 429 с.
- Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
- Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Дискретная математика, М.: АСТ, 2014 г, 448 с.
- Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
- **Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.**
- **Учебный портал РУДН, раздел «Математическая логика» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522**

Суперпозиции и формулы

Суперпозицией функций $f_1, \ldots, f_m$ называется функция f, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга, а **формулой** называется выражение, описывающее эту суперпозицию.

$f_3\left(f_1\left(x_3, x_1\right)\right) \wedge f_2\left(x_1, f_3\left(x_1, x_2\right)\right)$ - формула.

Глубина формулы

Символы переменных $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ будем считать формулами глубины 0, $k=0$)

Формула $F = f\left(F_1,\ldots,F_m\right)$ имеет глубину k, если $F_1,\ldots,F_m$ – формулы, максимальная из глубин которых равна $k-1$.

$F_1,\ldots,F_m$ - подформулы F ; все подформулы формул $F_1,\ldots,F_m$ также называются подформулами формулы F .

Глубина формулы. Примеры

1) $f_2(x_1, x_2)$ – это формула глубины 1,

2) $f_3\Big(f_1(x_3, x_1) \wedge f_2\big(x_1, f_3(x_1, x_2)\big)\Big)$ – формула глубины 3, содержащая одну подформулу глубины 2 и две подформулы глубины 1.

Если f_1 обозначает дизъюнкцию, f_2 – конъюнкцию, а f_3 – сложение по $mod 2$, то приведенная формула примет более привычный вид: $\Big((x_3 \vee x_1) \oplus \big(x_1 \,\&\, (x_1 \oplus x_2)\big)\Big)$.

3) $\bar{x}$ - какая глубина?

Как можно задать функцию?

Функция задается

1) таблично (единственное представление),
2) через формулу (представление не единственно).

<u>Примеры</u> задания через формулы:

$$f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \overline{x_1 x_2}\ ,$$

$$f_8(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1 \vee x_2}\ .$$

Эквивалентность (равносильность) формул

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются эквивалентными или равносильными. Эквивалентность формул обозначается знаком равенства:

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}, \qquad \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}.$$

Эти формулы являются **законом де Моргана**.

Для того чтобы выяснить, эквивалентны формулы или нет, можно по каждой формуле восстановить таблицу функции, а затем эти таблицы сравнить.

Доказательство эквивалентности формулы

Доказать истинность формулы $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$.

Строим таблицу истинности для правой и левой части.

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	$\overline{x_1 \cdot x_2}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

Жирным отмечены левая и правая части формулы, видим, что они равны.

ДЗ слушателям: доказать истинность формулы

$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

Эквивалентность (равносильность) формул

Существует и другой метод определения эквивалентности формул, называемый методом эквивалентных преобразований.

Необходимо привести формулы с помощью эквивалентных преобразований к одному виду.

Булева алгебра логических функций

Алгебра $\{\boldsymbol{P}_2; \vee, \&, \neg\}$, основным множеством которой является все множество логических функций, а операциями – дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, называется булевой алгеброй логических функций.

Свойства булевых операций

1. **Ассоциативность**: (меняем порядок действий)
$\left(x_1 \cdot \left(x_2 \cdot x_3\right)\right) = \left(\left(x_1 \cdot x_2\right) \cdot x_3\right)$, (относительно конъюнкции)
$\left(x_1 \vee \left(x_2 \vee x_3\right)\right) = \left(\left(x_1 \vee x_2\right) \vee x_3\right)$. (относительно дизъюнкции).
2. **Коммутативность**: (местами меняем)
$x_2 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2$,
$x_2 \vee x_1 = x_1 \vee x_2$.
3. **Дистрибутивность** конъюнкции относительно дизъюнкции:
$\left(x_1 \cdot \left(x_2 \vee x_3\right)\right) = \left(x_1 \cdot x_2\right) \vee \left(x_1 \cdot x_3\right)$.

Свойства булевых операций

4. **Дистрибутивность** дизъюнкции относительно конъюнкции:

   $$\left(x_1 \vee \left(x_2 \cdot x_3\right)\right) = \left(x_1 \vee x_2\right) \cdot \left(x_1 \vee x_3\right).$$

5. **Идемпотентность**:

   $$x \cdot x = x, \quad \left(x \vee x\right) = x.$$

6. **Двойное отрицание**:

   $$\overline{\overline{x}} = x.$$

7. **Свойства констант**:

   $$x \cdot 1 = x, \; x \cdot 0 = 0, \; x \vee 1 = 1,$$

   $$x \vee 0 = x, \; \overline{0} = 1, \; \overline{1} = 0$$

Свойства булевых операций

8. **Закон де Моргана**:

$$\overline{(x_1 \cdot x_2)} = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\,, \quad \overline{(x_1 \vee x_2)} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)\,.$$

9. **Закон противоречия**:

$$x \cdot \bar{x} = 0\,.$$

10. **Закон «исключения третьего»**:

$$x \vee \bar{x} = 1.$$

Свойства 1-10 справедливы даже в том случае, если вместо переменных подставить любые логические функции (вместо одной и той же переменной нужно подставлять одну и ту же функцию).

Эквивалентные преобразования

1) Поглощение $x \vee xy = x$

2) Склеивание $xy \vee x\bar{y} = x$

3) Обобщенное склеивание $xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}$

4) Расщепление $x \vee \bar{x}y = x \vee y$

Эквивалентные преобразования

1) **Поглощение** $x \vee xy = x$

Док-во:

$$x \vee xy = x \cdot 1 \vee xy = x(1 \vee y) = x \cdot 1 = x\,.$$

2) **Склеивание** $xy \vee x\overline{y} = x$

Док-во:

$$xy \vee x\overline{y} = x(y \vee \overline{y}) = x \cdot 1 \ = x\,.$$

Эквивалентные преобразования

3) **Обобщенное склеивание** $xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}$

Док-во:

$$xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} = xz \vee y\bar{z}\ .$$

4) **Расщепление** $x \vee \bar{x}y = x \vee y$

Док-во:

$$x \vee \bar{x}y = xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y =$$

$$= xy \vee x\bar{y} \vee xy \vee \bar{x}y = x \cdot 1 \vee y \cdot 1 = x \vee y$$

Двойственность функции

Двойственность функции проверяется:

1) таблично,
2) по определению двойственности,
3) по принципу двойственности.

Определение двойственной функции

Функция $f^*(x_1,\ldots,x_n)$, равная $\overline{f(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)}$, называется двойственной функцией к функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

<u>Пример</u>: $f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1\vee x_2\right)\cdot x_3$,

Двойственная функция:

$$f^*(x_1,x_2,x_3)=\overline{\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right)\cdot\overline{x_3}}=\overline{\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right)}\vee\overline{\overline{x_3}}=$$

$$=\overline{\overline{x_1}}\cdot\overline{\overline{x_2}}\vee x_3=x_1\cdot x_2\vee x_3$$

Определение самодвойственной функции

Функция, двойственная самой себе, является самодвойственной. $f^* = f$.

<u>Например</u>, функции x и $\overline{x}$ являются самодвойственными функциями.

Из определения двойственности следует, что

$$f = x,$$

$$f^*(x) = (\overline{f(\overline{x}}) = \overline{\overline{x}} = x$$

т.е. $f = x$ является самодвойственной функцией.

Табличное определение двойственной функции

Таблица для двойственной функции (при фиксированном порядке наборов значений переменных) получается из таблицы для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ инвертированием (т.е. заменой 0 на 1 и 1 на 0) столбца функции и его переворачиванием.

Для одной переменной 4 функции:

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_0^*	f_1^*	f_2^*	f_3^*
0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0

$f_1^* = f_1$, $f_2^* = f_2$, т.е. f_1 и f_2 - самодвойственные.

Табличное определение двойственной функции

Рассмотрим две функции для двух переменных:

x_1	x_2	f_0	f_1	f_0^*	f_1^*
0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1

Какие функции f_0 и f_0^*? f_1 и f_1^*?

Видим, что константа 0 двойственна 1, конъюнкция двойственна дизъюнкции.

Табличное определение двойственной функции

<u>Пример</u>: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot x_3$,

Таблично получаем

$$f(x_1, x_2, x_3) = (00010101),$$

$$f^*(x_1, x_2, x_3) = (01010111)$$

Принцип двойственности

Если формула $F = F(f_1, \ldots, f_m)$ реализует функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, то формула $F^* = F(f_1^*, \ldots, f_m^*)$ полученная из F заменой функций $f_1, \ldots, f_m$ на $f_1^*, \ldots, f_m^*$, реализует функцию $\varphi^*(x_1, \ldots, x_n)$.

функция 0 двойственна функции 1,
функция 1 двойственна функции 0,
функция x двойственна функции x,
функция $\overline{x}$ двойственна функции $\overline{x}$,
функция $x_1 \cdot x_2$ двойственна функции $x_1 \vee x_2$,
функция $x_1 \vee x_2$ двойственна функции $x_1 \cdot x_2$.

Принцип двойственности

Пример: $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \vee x_2\right) \cdot x_3$,

Двойственная функция по принципу двойственности:

$$f^*(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_3,$$

Последовательность действий в двойственной функции всегда сохраняется!

Ответ совпадает с ответом, полученным с помощью определения двойственности.

Тема следующей лекции:

«Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)».