Дифференциальная геометрия
Псевдоевклидовы пространства.

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Определение

Линейное пространство E над $\mathbb{R}$ называется **евклидовым**, если на E задана функция $(\cdot,\cdot)\colon E \times E \to \mathbb{R}$ и для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E$ и скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняются следующие свойства:

1. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$,
2. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ — симметричность,
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$ $\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ — положительная-определенность (дефинитность).

Функция $(\cdot,\cdot)\colon E \times E \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением векторов.

- Из (1) и (3) следует $(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$.
- Из (2) и (3) следует $(\mathbf{a}, \beta\mathbf{b}) = \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Евклидово пространство 2

Скалярное произведение, следовательно, является билинейной формой, так как обладает свойством линейности по обоим своим аргументам (билинейность = двух-линейность):

$$(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b},\mathbf{c})=\alpha(\mathbf{a},\mathbf{c})+\beta(\mathbf{b},\mathbf{c}),$$
$$(\mathbf{a},\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c})=\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})+\beta(\mathbf{a},\mathbf{c}).$$

Условие (4) позволяет гарантировать, что длина вектора, определяемая по следующей формуле:

$$\|\mathbf{a}\|\overset{\mathrm{def}}{=}\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})},$$

будет всегда больше 0 для всех векторов, не равных $\mathbf{0}$.

Если в пространстве E задан базис $\langle\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$ и $\mathbf{a}=\sum\limits_{i=1}^{n}a^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{b}=\sum\limits_{i=1}^{n}b^i\mathbf{e}_i$, то

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)a^ib^j=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}a^ib^j,\ \text{где } g_{ij}=(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j).$$

Коэффициенты $[g_{ij}]$, записанные в виде матрицы $G = [g_{ij}]$, в алгебре называют матрицей Грама, а в геометрии — римановым метрическим тензором или просто римановой метрикой. В строгом смысле слова G не матрица, а ковариантный тензор валентности (ранга) 2.

Тем не менее, G можно рассматривать в виде квадратной матрицы:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

Свойство (3) налагает на матрицу требование симметричности: $G^T = G$.

В E всегда существует базис, называемый ортонормированным, в котором G принимает вид единичной матрицы:

$$G = [\delta_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

При ортонормированном базисе скалярное произведение принимает наиболее простой вид:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} a^i b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i b^i = a^1 b^1 + ... + a^n b^n.$$

Определение

Линейное пространство E над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется эрмитовым или унитарным, если на E задана функция $(\cdot,\cdot)\colon E \times E \to \mathbb{C}$ и для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ и скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняются следующие свойства:

1. $(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
2. $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$,
3. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ — эрмитовость (черта сверху означает комплексное сопряжение),
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \,\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ — положительная-определенность (дефинитность).

Функция $(\cdot,\cdot)\colon E \times E \to \mathbb{C}$ называется эрмитовым или **унитарным произведением** векторов.

- Из (1) и (3) следует $(\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$.
- Из (2) и (3) следует $(\mathbf{u}, \beta\mathbf{v}) = \overline{\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Эрмитово (унитарное) пространство 2

Эрмитово произведение, следовательно, является полуторалинейной формой [1, Гл. 3, §2, п. 1] на комплексном векторном пространстве, так как обладает свойствами линейности по первому аргументу и полулинейности по второму при фиксированном первом:

$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$
$$(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \overline{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \overline{\beta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Полная линейность по первому аргументы и половинная линейность (полулинейность) по второму аргументу в сумме дает полуторную линейность (полуторалинейность).

Термин «эрмитовость» произошел от фамилии французского математика Шарля Эрмита (Charles Hermite, 1822–1901)

Условие эрмитовости (3) необходимо, чтобы вновь можно было определить длину вектора как норму:

$$\|\mathbf{v}\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

Эрмитово (унитарное) пространство 3

Если вместо эрмитовости оставить симметричность, то получим, например, следующий неприятный факт:

$$\|i\mathbf{v}\|^2 = (i\mathbf{v}, i\mathbf{v}) = ii(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = i^2\|\mathbf{v}\|^2 = -\|\mathbf{v}\|^2 \leqslant 0.$$

С условием эрмитовости квадрат длины не сможет стать отрицательным:

$$\|i\mathbf{v}\|^2 = (i\mathbf{v}, i\mathbf{v}) = i\bar{i}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -i^2\|\mathbf{v}\|^2 = +\|\mathbf{v}\|^2 \geqslant 0.$$

Если в пространстве E задан базис $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\mathbf{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} u^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} v^i \mathbf{e}_i$, то:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) u^i \bar{v}^j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} u^i \bar{v}^j, \text{ где } g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Обратите внимание на комплексное сопряжение над компонентами вектора $\mathbf{v}$.

На коэффициенты g_{ij} свойство эрмитовости налагает требование следующего вида:

$$g_{ij} = \bar{g}_{ji},$$

что в матричном виде выглядит как взятие комплексного сопряжения от каждого элемента матрицы и дальнейшее ее транспонирование (или в обратном порядке):

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} & \cdots & \bar{g}_{1n} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} & \cdots & \bar{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{g}_{n1} & \bar{g}_{n2} & \cdots & \bar{g}_{nn} \end{bmatrix}^T \iff G = \bar{G}^T \overset{\text{not}}{=} G^\dagger \overset{\text{not}}{=} G^*.$$

Для этой операции существует специальный термин — эрмитово сопряжение и обозначение в виде $\dagger$: $G^\dagger$. Также можно встретить обозначение в виде звездочки: $*$, которым также часто обозначают операцию транспонирования. Для если коэффициенты матрицы — действительные числа, то эрмитово сопряжение становится просто транспонированием.

Определение

Линейное пространство E над $\mathbb{R}$ называется пространством с индефинитной метрикой, если на E задана функция $(\cdot,\cdot)\colon E \times E \to \mathbb{R}$ и для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E$ и скаляров α, β выполняются следующие свойства:

1. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$,
2. $(\alpha \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ — симметричность.

Из определения евклидова пространства убрали требование положительной определенности скалярного произведения, оно стало неопределенным (индефинитным).

По прежнему скалярное произведение записывается через метрический тензор, однако он теперь не обязательно римановый т.е. не обязательно положительно-определенный:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} a^i b^j.$$

Ортонормированный базис с индефинитной метрикой

В силу отсутствия требования положительной определенности скалярного произведения, теперь в ортонормированном базисе матрица G в общем случае имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q})$$

Подробности см. «Канонический вид квадратичной формы» [1, Гл. 1, §4, п. 6] или «Приведение квадратичной формы к главным осям» [1, Гл. 3, §3, п. 4])

Псевдоевклидово пространство

Рассмотрим индефинитный метрический тензор:

$$G = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q}), \quad p + q = n.$$

В силу закона инерции билинейной формы[1] числа p и q сохраняются при переходе из одного ортогонального базиса в другой. Говорят, что g_{ij} — псевдориманова метрика типа (p, q), если $q \geqslant 1$, а пространство в этом случае называется псевдоевклидовым.

Псевдоевклидово пространство в этом случае принято обозначать как $E^n_{p,q}$, а скалярное произведение как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{p,q} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \dots + a^p b^p - a^{p+1} b^{p+1} - a^{p+2} b^{p+2} - \dots - a^{p+q} b^{p+q} = \sum_{i=1}^{p} a^i b^i + \sum_{i=p+1}^{p+q} a^i b^i.$$

Также часто используют понятие сигнатуры метрики, указывая количество плюсов и минусов на диагонали метрического тензора:

$$(\underbrace{+, +, +, \dots, +}_{p}, \underbrace{-, -, -, \dots, -}_{q}), \quad p + q = n.$$

[1] Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. **Линейная алгебра.** Москва : МЦНМО, 2009. 368 с., Гл. 1, §4, п. 7.

Как и в обычном евклидовом пространстве длина вектора $\mathbf{a}$ в пространстве $E^n_{p,q}$ определяется по формуле

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})_{p,q}}.$$

Однако длины ненулевых векторов в $E^n_{p,q}$ могут быть положительными, нулевыми или мнимыми.

Множество всех классов векторов разбивается на три непересекающихся подкласса.

- $(\mathbf{a}, \mathbf{a})_{p,q} < 0$ — времениподобные векторы (чисто мнимая длина);
- $(\mathbf{a}, \mathbf{a})_{p,q} = 0$ — световые или изотропные векторы (нулевая длина);
- $(\mathbf{a}, \mathbf{a})_{p,q} > 0$ — пространственно-подобные векторы (вещественная длина).

Важно, что все эти векторы не равны $\mathbf{0}$ то есть имеют ненулевые компоненты, что в случае евклидова и эрмитова пространств запрещается свойством (4).

Пространство Минковского 1

Пространство $E^4_{1,3}$ особо важно, так как это пространство используется в специальной теории относительности (СТО) и называется пространством Минковского в честь немецкого математика Германа Минковского (Hermann Minkowski, 1864–1909).

В современной формулировке первый постулат (аксиома) специальной теории относительности гласит, что пространственно-временной континуум является пространством Минковского, то есть время является одной из координат 4-х мерного псевдоевклидова пространства.

$$\begin{array}{c|cccc} \cdot & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \hline \mathbf{e}_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{e}_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \Longleftrightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Метрический тензор G называется метрикой Минковского.

Пространство Минковского 2

В СТО принято использовать греческие буквы в качестве индексов $\alpha = 0, 1, 2, 3$ $\delta\alpha\alpha'$. Любой вектор $\mathbf{x} \in E^4_{1,3}$ можно записать как

$$\mathbf{x} = x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = (ct, x, y, z)^T,$$

где c — скорость света, которую часто принимают за $c = 1$ (геометрическая система единиц).

$$\mathbf{x} = t\mathbf{e}_0 - x^1\mathbf{e}_1 - x^2\mathbf{e}_2 - x^3\mathbf{e}_3, \quad \|\mathbf{x}\|^2 = t^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Любая точка P с радиус-вектором $\mathbf{p} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ в пространстве Минковского называется событием, а расстояние между точками $\|P_1 - P_2\| = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|$, вычисляемое по метрике Минковского

$$\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|^2 = (x^0_1 - x^0_2)^2 - (x^1_1 - x^1_2)^2 - (x^2_1 - x^2_2)^2 - (x^3_1 - x^3_2)^2,$$

называется пространственно-временным интервалом между событиями P_1 и P_2.

Мировая линия

Если в $E^4_{1,3}$ рассмотреть параметрически заданную кривую $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$, то физической интерпретацией в рамках СТО будет мировая линия материальной частицы. В качестве параметра используется τ, так как время t является не параметром, а координатой (это не собственное время!).

$$\boldsymbol{\gamma}(\tau) = \begin{pmatrix} t(\tau) \\ x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^T \Longrightarrow \mathrm{d}l^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau^2$$

$$\mathrm{d}l^2 = \left(\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right)\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

Длина дуги в $E^4_{1,3}$ будет вычисляться следующим образом:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\tau), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\tau))}\mathrm{d}\tau$$

Так как скалярное произведение может иметь любой знак, то длина дуги мировой линии может быть действительной, мнимой или равной нулю. При этом равенство нулю не гарантирует, что кривая вырождается в точку.

Псевдосфера

Рассмотрим пространственно-подобные векторы $\mathbf{x}$. По определению, это такие векторы, что

$$\|\mathbf{x}\|^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0.$$

Поверхность, задаваемая уравнением

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2, \;\; a \in \mathbb{R}.$$

называется псевдосферой.

- Псевдосферу в псевдоевклидовом пространстве невозможно изобразить на бумаге/экране так как она мало того, что псевдоевклидова, так еще и четырехмерная.
- Однако, можно сделать трюк: рассмотреть частный случай $E^3_{1,2}$ и нарисовать *модель* псевдосферы в $\mathbb{R}^3$.
- Так мы сможем получить модель псевдосферы.

Модели псевдосферы для пространственно-подобных векторов

Рассмотрим модель псевдосферы

$$t^2 - x^2 - y^2 = a^2 \iff \left(\frac{t}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

Если x и y ассоциировать с декартовыми осями Ox и Oy, а t с декартовой осью Oz, то мы получим уравнение двуполостного гиперболоида.

Второй постулат специальной теории относительности 1

Второй постулат СТО чаще всего формулируют следующим образом: скорость света в вакууме одинакова во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Иными словами: никакое материальное тело не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме.

Рассмотрим мировую линию по которой движется некоторое тело в пространстве-времени. Мировая линия задается кривой, с радиус-вектором $\mathbf{r}$ (физики используют γ):

$$\mathbf{r}(\tau) = (t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))^T, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^T$$

Если наложить требования, что вектор скорости $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}$ должен быть времениподобным или изотропным, то можем записать:

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}\right\|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \geqslant 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2.$$

Второй постулат специальной теории относительности 2

Разделим обе части неравенства на $\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$:

$$1 \geqslant \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

где правая часть имеет физический смысл пространственной скорости (то, что в физике и подразумевается под скоростью)

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = v^2.$$

Выходит, что величина скорости движения тела не может превышать 1. Если вспомнить, что мы положили $c = 1$, то данное утверждение можно переписать в виде

$$c^2 \geqslant \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

что эквивалентно второму постулату специальной теории относительности.

Модель псевдосферы для изотропных векторов 1

Отдельно рассмотрим изотропные векторы, которые по определению имеют нулевую длину, запишем это требование для вектора $\mathbf{x} = (t, x, y, z)^T$ в пространстве Минковского:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

- Поверхность, определяемая таким уравнением в псевдоевклидовом пространстве является частным случаем псевдосферы.
- Эту псевдосферу также нельзя изобразить (находясь в здравом уме).
- Однако, можно выполнить тот же трюк и визуализировав ее в виде конуса в обычном евклидовом пространстве (в декартовых координатах) $\mathbb{R}^3$.
- При этом придется пожертвовать одной размерностью, оставив координаты (t, x, y), так как невозможно изобразить четырехмерное пространство.

Модель псевдосферы для изотропных векторов 2

В обычном декартовом пространстве уравнение конуса в каноническом виде выглядит следующим образом:

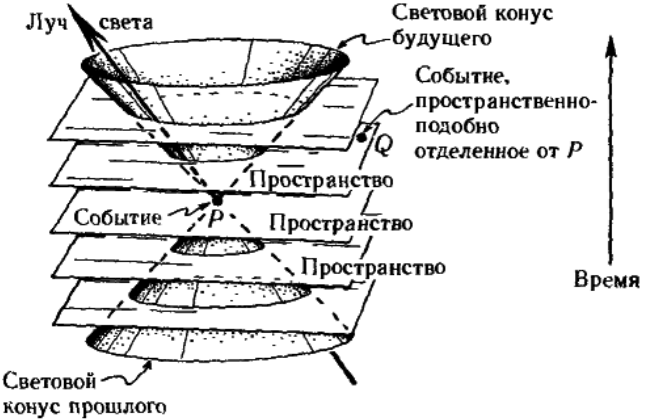
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0.$$

В нашем случае, чтобы визуализировать модель псевдосферы, ось Oz будем использовать в качестве оси времени, а оси Ox и Oy оставим для пространственных координат x и y.

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0.$$

Такая наглядная модель псевдосферы носит название пространственно-временного или светового конуса. Луч света, выпущенный из начала координат будет распространяться по одной из образующих конуса.

Модель псевдосферы для изотропных векторов 3



Второй основной постулат СТО гласит: никакой сигнал не может распространятся быстрее скорости света c. Математически это означает:

$$c\mathrm{d}t > \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}, \quad (\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))_{4,1} < 0.$$

Это означает, что каждый касательный вектор к мировой линии является времени-подобным. Отсюда следует, что мировая линия имеет чисто мнимую длину.

Определение

В псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_{p,q}$ множество точек, удаленных от некоторой точки на расстояние ρ назовем псевдосферой индекса q: S^{p-1}_q. Радиус сферы ρ может быть действительной, мнимой или нулевой величиной.

Псевдосфера нулевого радиуса описывается уравнением второго порядка:

$$-\sum_{i=1}^{q}(x^i)^2 + \sum_{j=1}^{p}(x^j)^2 = 0.$$

где $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, где можно смоделировать псевдоевклидово пространство. Псевдосфера нулевого радиуса совпадает с так называемым изотропным конусом.

Рассмотрим несколько частных случаев пространства $\mathbb{R}^n_{p,q}$. Для пространства $\mathbb{R}^2_{1,1}$ псевдоокружности действительного и мнимого радиусов являются гиперболами и задаются формулами:

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 = \alpha^2 \text{ и } -(x^1)^2 + (x^2)^2 = -\alpha^2, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

В случае пространства $\mathbb{R}^3_{2,1}$

1. $\rho = 0$, $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ — конус;
2. $\rho \in \mathbb{R}$, $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = +\alpha^2$ — однополостный гиперболоид;
3. $\rho \in \mathbb{C}$, $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -\alpha^2$ — двуполостный гиперболоид.

Рассмотрим стереографическую проекцию двуполостного гиперболоида. Образ правой полости гиперболоида покрывает не всю плоскость YOZ, а только внутренность диска радиуса α:

$$y^2 + z^2 < \alpha^2.$$

Образ левой полости покрывает внешность окружности

$$y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Северный полюс N переходит в $+\infty$ (u^1, u^2).

Лемма

Пусть $P = (x, y, z)$, $f(P) = (u^1, u^2)$ *тогда*

$$x = \alpha \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}, y = \frac{2\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}, z = \frac{2\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}.$$

$|\mathbf{u}|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$ *и* $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$

Лемма

Координаты (u^1, u^2) *меняющиеся в открытом диске* $(u^1)^2 + (u^2)^2 < \alpha^2$ *задают регулярную систему координат на правой полости гиперболоида, то есть стереографическая проекция задает регулярные координаты* $(u^1, u^2) \leftrightarrow (x, y, z)$ *так как* x *выражается через* y, z, *то можно считать* $(y, z) \to (u^1, u^2)$.

Доказательство. Необходимо найти определитель матрицы Якоби

$$\det J = \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u^1, u^2)} = 4\alpha^4 \frac{\alpha^2 |\mathbf{u}|^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^3}$$

Найдем вид метрического тензора в стереографической проекции (в координатах u^1 и u^2). Исходный вид

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \alpha \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}, \quad y = \frac{2\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{4\alpha^3 u^1}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} & \dfrac{4\alpha^3 u^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} \\ \dfrac{2\alpha^2(\alpha^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2)}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} & \dfrac{4\alpha^2 u^1 u^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} \\ \dfrac{4\alpha^2 u^1 u^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} & \dfrac{2\alpha^2(\alpha^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2)}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{G}(u^1,u^2) = \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2)}\right)^T G(x,y,x) \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{4\alpha^4}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)} & 0 \\ 0 & \dfrac{4\alpha^4}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)} \end{pmatrix} = G(u^1,u^2)$$

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^4}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2}((\mathrm{d}u^1)^2 + (\mathrm{d}u^2)^2).$$

Рассмотрим двумерное пространство Минковского. Метрический тензор в данном пространстве имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Дифференциал дуги имеет вид $\mathrm{d}l^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2$. По традиции индексация начинается с нуля, для того, чтобы выделить время-подобную координату.

Найдем такое линейное преобразование координат, которое оставляет метрику неизменной (другими словами сохраняет длины). Это преобразование будет эквивалентно преобразования поворота в декартовой системе координат.

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Задача заключается в нахождении такой матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Преобразования Лоренца 2

для которой выполняется соотношение

$$G = \mathrm{J}^T \cdot G \cdot \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

В случае линейного преобразования матрица Якоби данного преобразования совпадает с матрицей самого преобразования (матрица Якоби по определению является главной линейной частью любого преобразования).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ab = cd, & a = \pm \operatorname{ch} \psi, \\ a^2 - c^2 = 1, & c = \pm \operatorname{sh} \psi, \\ b^2 - d^2 = -1. & \pm\, b \operatorname{ch} \psi = \pm d \operatorname{sh} \psi \Rightarrow b = \pm d \operatorname{th} \psi. \end{cases}$$

Подставим $b = \pm d \operatorname{th} \psi$ в $b^2 - d^2 = -1$ и получим

$$(\operatorname{th}^2 \psi - 1)d^2 = -1, \quad d^2 = 1/(1 - \operatorname{th}^2 \psi), \quad d = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}}$$

$$b = \pm \frac{\operatorname{th} \psi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}}$$

Матрица линейного преобразования в результате примет следующий вид

$$A = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & \pm \dfrac{\operatorname{th} \psi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} \\ \operatorname{sh} \psi & \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} \end{pmatrix}$$

она имеет 4 компоненты связанности. Ее можно упростить, используя тот факт, что

$$\frac{\operatorname{th} \psi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} = \operatorname{sh} \psi, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} = \operatorname{ch} \psi$$

Преобразования Лоренца 4

$$A = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \pm\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \pm\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$

Список литературы 1

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. — **Линейная алгебра.** — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574545.