Лекция 2

Несобственный интеграл
Критерий Коши, признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов

Пусть задана функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ и $f \in R[a, b],\ \forall [a, b] \subset [a, +\infty)$.

Определение 2.1. Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx, \tag{2.1}$$

то он называется *несобственным* интегралом функции f на $[a, +\infty)$.

Если существует предел (2.1), то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*, в противном случае – *расходится*. Отметим, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$, где $a_1 > a$. Действительно, поскольку

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^b f(x)dx,$$

то, очевидно, указанные пределы существуют или не существуют.

Теорема 2.1. (Критерий Коши). Пусть задана функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ и $f \in R[a, b],\ \forall [a, b] \subset [a, +\infty)$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0 : \forall b_1 > A,\ \forall b_2 > A \Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сводится к вопросу о существовании предела $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, который решается с помощью критерия Коши: $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)\ \exists \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A > a :\ \forall b_1, b_2 :\ b_1 > A,\ b_2 > A\ |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$. Отметим, что

$b_1 < b_2$

$a \quad b_1 \quad b_2$

$$|F(b_2) - F(b_1)| = \left|\int_a^{b_2} f(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx\right| = \cancel{\left|\int_a^{b_2} f(x)dx + \int_{b_1}^{a} f(x)dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| <} \varepsilon.$$

$= \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

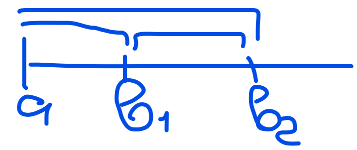
□

Теорема 2.2. Пусть $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a, +\infty),\ f \in R[a, b],\ \forall [a, b] \subset [a, +\infty)$. Несобственный интеграл сходится $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+ : \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M\ \forall b > a$.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \int\limits_a^{b_2} f(x)dx = \int\limits_a^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx$

$b_1 \leqslant b_2 \quad F(b_1) \leqslant F(b_2)$

$F(b_1) - F(b_2) \leqslant 0 \Rightarrow F(b_1) \leqslant F(b_2)$



Доказательство. Рассмотрим функцию $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Функция $F(b)$ является неубывающей, так как из $b_1 \leqslant b_2 \Rightarrow F(b_1) - F(b_2) = \int\limits_a^{b_1} f(x)dx - \int\limits_a^{b_2} f(x)dx = \cancel{\int\limits_a^{b_1} f(x)dx} + \cancel{\int\limits_{b_2}^{a} f(x)dx} = \int\limits_{b_2}^{b_1} f(x)dx = -\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \leqslant 0.$

$\geqslant 0$

$\int\limits_a^{b_2} f(x)dx = \int\limits_a^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx$

Отметим, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, а последний существует в том и только том случае, когда F ограничена сверху. $\square$

Теорема 2.3. (признак сравнения). Пусть $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a, b]$, $\forall [a, b] \subset [a, +\infty)$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится и $|f(x)| \leqslant g(x)$, $\forall x \geqslant a$. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходятся.

$0 \leqslant$

Доказательство. Поскольку $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то в силу критерия Коши $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a : \ \forall b_i > A, \ (i = 1, 2) \Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$. Тогда $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| < \varepsilon.$

$< \varepsilon \quad < \varepsilon$

$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx$ $\quad \to 0 \quad \to 0$

Таким образом, для рассматриваемых несобственных интегралов выполняется критерий Коши, то есть они сходятся. $\square$

Определение 2.2. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Отметим, что из абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует его сходимость, то есть из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Этот факт вытекает из теоремы 2.3, если положить ~~$g(x) = |f(x)|$ и учесть, что $f(x) \leqslant |f(x)|$, $\forall x \geqslant a$ (см.~~ критерий Коши).

$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx.$

Теорема 2.4. (признак Дирихле).

Пусть

1. функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\exists M > 0 :$
$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant M, \ \forall b > a;$$

$|\sigma(f; P, \xi)| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant$

$\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |f(\xi_i)\Delta x_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$

$|f(\xi_i)\Delta x_i| = |f(\xi_i)| \cdot \Delta x_i$

$\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \lim\limits_{d(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$

$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists A > a : \forall b_1, b_2 : b_1 > A,\ b_2 > A \to \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon.$

$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$

2. $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ является непрерывно дифференцируемой и убывающей при $x \geqslant a$,

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0.$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. По первому условию $|F(x)| \leqslant M,\ \forall x \geqslant a$. Функция $F(x)$ является первообразной функции f. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$

$dv = F'(x)dx \Rightarrow \int dv = \int F'(x)dx \Rightarrow v = F(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b F'(x)g(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dF(x) =$$

$$= g(x)F(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b F(x)g'(x)dx = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int\limits_a^b F(x)g'(x)dx. \quad (2.2)$$

$\int\limits_a^B |F(x)g'(x)|dx =$

Отметим, что $\int\limits_a^b |F(x)||g'(x)|dx \leqslant M \int\limits_a^b |g'(x)|dx$. Поскольку $g(x)$ убывающая функция при $x \geqslant a$, получим

$\leqslant M$

$= -M\, g(x)\Big|_a^b = -M(g(b) - g(a)).$

$$M \int\limits_a^b |g'(x)|dx = -M \int\limits_a^b g'(x)dx = -M(g(b) - g(a)).$$

Следовательно, $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b |F(x)g'(x)|dx \leqslant -M \lim\limits_{b \to +\infty} (g(b) - g(a)) = Mg(a)$ (см. условие 3). Следовательно, сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} F(x)g'(x)dx$, то есть правая часть (2.2) стремится к конечному значению при $b \to +\infty \Rightarrow$ сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$. $\square$

$\int\limits_a^{+\infty} |F(x)g'(x)|dx$

$\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$

$\int\limits_a^B |F(x)g'(x)|dx \leqslant -M(g(b) - g(a)).$

Теорема 2.5. (признак Абеля).

Пусть

1. $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

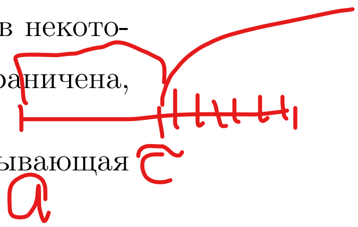
2. $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая, монотонная и ограниченная функция.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Предположим, что $g(x)$ – убывающая функция. Поскольку $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = c$. Обозначим $\tilde{g}(x) = g(x) - c$ и рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$. Покажем, что для функций f и $\tilde{g}$ выполнены теоремы 2.4.

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left(F(b)g(b)-F(a)g(a)-\int_a^b F(x)g'(x)dx\right) = \lim_{b\to+\infty}F(b)g(b) - \lim_{b\to+\infty}F(a)g(a) - \lim_{b\to+\infty}\int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Действительно, $f(x)$ является непрерывной на $[a,+\infty)$, а функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ является ограниченной, то есть $|F(b)| \leqslant M,\ \forall b \geqslant a$. Действительно, из существования конечного предела $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ следует ограниченность функции в некоторой окрестности точки $+\infty$ ($U(+\infty) = \{b:\ b > c\}$), а на отрезке $[a,c]$ F ограничена, так как она непрерывна.



Функция $\tilde{g}(x)$ – непрерывно дифференцируемая, монотонная и убывающая функция, причем $\lim\limits_{x\to+\infty}\tilde{g}(x) = 0$. Далее,

$\int f(x)(g(x)-c)dx$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx}_{\text{сходится}} + \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} c f(x)dx}_{\text{сходится}} \Rightarrow$$

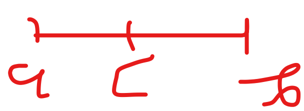
$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-c) = \lim_{x\to+\infty} g(x) - c = 0$$

интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится. □

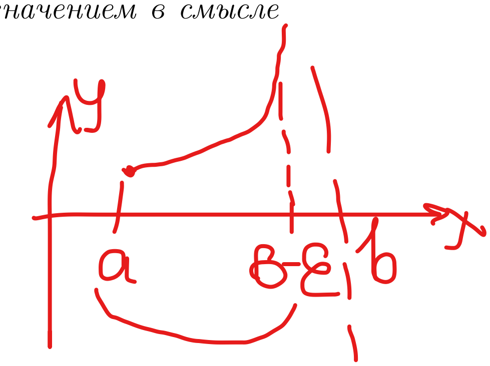
Определение 2.3. Пусть функция $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ является неограниченной в окрестности точки b и $f \in R[a,b-\varepsilon]$ $\forall\varepsilon > 0$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$, то он называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$.

$(a,b]$

Определение 2.4. Если функция $f(x)$ такова, что $\forall\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ и $\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$ $(a < c < b)$, то под *главным значением в смысле Коши* (V.p.) понимается число



$$V.p.\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right).$$



Аналогично

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx.$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$