Математическая логика

Исчисление предикатов

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Курс математической логики

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Введение в алгебру логики**	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	**Минимизация булевых функций**	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	**Полнота и замкнутость систем логических функций**	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.
4.	**Исчисление высказываний и предикатов**	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Литература

- **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие. Математическая логика. – Москва : РУДН, 2014. – 118 с.**
- Светлов В.А., Логика: учебное пособие, изд-во: Логос, 2012 г. 429 с.
- Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
- Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Дискретная математика, М.: АСТ, 2014 г, 448 с.
- Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
- **Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.**
- **Учебный портал РУДН, раздел «Математическая логика» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522**

Определение предиката

Предикатами являются выражения, имеющие форму высказывания, но содержащие переменные, принадлежащие некоторому множеству D.

Множество D называется предметной областью, а переменные – предметными переменными.

Определение предиката

Предикаты отражают свойства и отношения между предметами из заранее заданной предметной области.

Предикат при подстановке конкретных констант из предметной области может принимать значения *И* или *Л*.

Пример высказываний и предикатов

Пример **высказываний**:

1) 2 – простое число,
2) 3>1

Пример **предикатов**:

1) n – простое число, $D = \mathrm{N}$,
2) $n_1 > n_2$, $D = \mathrm{N}$.

Пример высказываний и предикатов

Введем следующие обозначения:

$P_1(n)$ – свойство «быть простым числом»,

$P_2(n_1, n_2)$ отношение « n_1 больше n_2 ».

Рассмотрим значения предикатов при разных значениях n, n_1, n_2 .

1) $n = 2$, $n_1 = 3$, $n_2 = 1$. Найдите значения предикатов.

Пример высказываний и предикатов

$P_1(2)$ – «2–простое число»,

$P_2(3,1)$ – «3 больше 1» –

истинные высказывания, $P_1(2) = И$, $P_2(3,1) = И$.

2) при значениях $n = 4$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$ найдите значения предикатов.

Пример высказываний и предикатов

2) при значениях $n = 4$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$ значения предикатов

$P_1(4)$ – «4 – простое число»,

$P_2(1,3)$ – «1 больше 3» –

ложные высказывания, т.е.

$P_1(4) =$Л,

$P_2(1,3) =$Л.

Кванторы

$\forall$ – квантор всеобщности;

$\exists$ – квантор существования.

Кванторы

Пусть $P(x)$ – одноместный предикат.

Запись $(\forall x)P(x)$ означает, что свойство P выполняется для всех предметов из предметной области, а

$(\exists x)P(x)$ означает, что существует по крайней мере один предмет, обладающий свойством P.

Кванторы

Переход от $P(x)$ к $(\forall x)P(x)$ или к $(\exists x)P(x)$ называется связыванием переменной или навешиванием квантора на переменную x.

Переменная, на которую навесили квантор, называется связанной, несвязанная переменная называется свободной.

Алфавит исчисления предикатов

Пусть

$\boldsymbol{D}$ – предметная область (множество),

$f:\boldsymbol{D}^n \to \boldsymbol{D}$ – n-местная функция,

$p:\boldsymbol{D}^n \to \boldsymbol{B} = \{0,1\}$ – n-местный предикат.

$\boldsymbol{V}$ – множество предметных переменных,

$\boldsymbol{C}$ – множество предметных констант,

$\boldsymbol{F}$ – множество функциональных (1,2,…- местных) символов,

$\boldsymbol{P}$ – множество предикатных (1,2,…- местных) символов,

$\{\neg, \vee, \wedge, \to\}$ – множество операций,

$\{\exists, \forall\}$ – множество кванторов,

$\{(,)\}$ – множество вспомогательных символов.

Алфавит исчисления предикатов

$\boldsymbol{V} \cup \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{P} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\} \cup \{\exists, \forall\} \cup \{(,)\}$ – алфавит исчисления предикатов.

$\boldsymbol{V}$ – множество предметных переменных,

$\boldsymbol{C}$ – множество предметных констант,

$\boldsymbol{F}$ – множество функциональных (1,2,…- местных) символов,

$\boldsymbol{P}$ – множество предикатных (1,2,…- местных) символов,

Терм

Определим понятие терма.

1. Любая предметная переменная является термом.
2. Любая предметная константа является термом.
3. Если f – n-местный функциональный символ, а $t_1,\ldots,t_n$ – термы, то $f(t_1,\ldots,t_n)$ – терм.

Атом

Определим понятие атома.

Если P – n-местный предикатный символ, $t_1,\ldots,t_n$ - термы, то $P(t_1,\ldots,t_n)$ – атом (атомарная или простейшая формула).

Формула

Определим понятие формулы.

1. Атом является формулой.
2. Если A и B – формулы, то $(\neg A)$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$ – формулы, причем все переменные в этих формулах – свободные.
3. Если A – формула, а x – свободная переменная в A, то $(\forall x)$A и $(\exists x)$A – формулы.

Формула и ее компоненты

$$(\forall x)\underbrace{\left(\overbrace{P(x)}^{\text{Атом}} \to \overbrace{Q(f(x),a)}^{\text{Атом}}\right)}_{\text{Область действия квантора }\forall}$$

Терм

Как найти значение формулы

Если задана интерпретация I, то значение формулы определяется по следующим правилам:

а) если заданы значения формул G и H, то значения формул $\overline{\mathrm{G}}$, $\mathrm{G} \wedge \mathrm{H}$, $\mathrm{H} \vee \mathrm{G}$, $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ можно определить по таблицам;

б) $(\forall x)\mathrm{G}$ принимает значение *И*, если G имеет значение *И* для $\forall x \in \mathrm{D}$; в противном случае G принимает значение *Л*;

в) $(\exists x)\mathrm{G}$ принимает значение *И*, если G принимает значение *И* хотя бы для одного $x \in \mathrm{D}$; в противном случае G принимает значение *Л*.

Как найти значение формулы

б) $(\forall x)\mathrm{G}$ принимает значение *И*, если G имеет значение *И* для $\forall x \in \mathrm{D}$; в противном случае G принимает значение *Л*;

$$(\forall x)\mathrm{G}\left(x\right) = И,\, если\; G = И\; \forall x \in \boldsymbol{D}.$$

$$(\forall x)\mathrm{G}\left(x\right) = Л,\, если\; \exists x \in \boldsymbol{D},\;\; где\; \mathrm{G}\left(x\right) = Л.$$

Как найти значение формулы

б) $(\forall x)\mathrm{G}$ принимает значение *И*, если G имеет значение *И* для $\forall x \in \mathrm{D}$; в противном случае G принимает значение *Л*;

$$(\forall x)\mathrm{G}\left(x\right) = И, \textit{если } G = И \ \forall x \in \boldsymbol{D}.$$

$$(\forall x)\mathrm{G}\left(x\right) = Л, \textit{если } \exists x \in \boldsymbol{D}, \ \textit{где } \mathrm{G}\left(x\right) = Л.$$

Как найти значение формулы

в) $(\exists x)\mathrm{G}$ принимает значение *И*, если G принимает значение *И* хотя бы для одного $x \in \mathrm{D}$; в противном случае G принимает значение *Л*.

$$(\exists x)\mathrm{G}(x) = \text{И}, \textit{ если } \exists x \in \boldsymbol{D}, \textit{ где } G(x) = \text{И}.$$

$$(\exists x)\mathrm{G}(x) = \text{Л}, \textit{ если не } \exists x \in \boldsymbol{D}, \textit{ где } G(x) = \text{И},$$

$$\textit{т.е. } G(x) = \text{Л} \ \ \forall x \in \boldsymbol{D}.$$

Пример 1

Пример. Рассмотрим формулу

$G:(\forall x)(P(x)\to Q(f(x),a))$ и проверим ее истинность в данной интерпретации.

Интерпретация:

1) $\boldsymbol{D}=\{1,2\}$;
2) $a=1$;
3) $f(1)=2$; $f(2)=1$;
4) $P(1)=Л$, $P(2)=И$; $Q(1,1)=И$, $Q(1,2)=И$; $Q(2,1)=Л$, $Q(2,2)=И$.

Пример 1

Решение:

1) При $x = 1$ получаем:

$(P(1) \to Q(f(1),1)) = Л \to Q(2,1) = Л \to Л = И$.

2) При $x = 2$ получаем:

$(P(2) \to Q(f(2),1)) = И \to Q(1,1) = И \to И = И$.

Т.е. для любого $x \in \boldsymbol{D}$ формула истинна.

Домашнее задание:

Доказать при $a = 2$ истинность формулы.

Пример 2

В исчислении предикатов верны также теоремы о логическом следствии, доказанные для исчисления высказываний.

Пример.

$$F_1 : (\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big)$$

$$F_2 : P(a)$$

$$G : Q(a).$$

Пример 2

Рассмотрим предметную область
$\boldsymbol{D} = \left\{ n \in N, n = 6k, k \in Z \right\}$,

$P(x)$ - свойство « x кратно 6»,

$Q(x)$ - свойство « x - четное число».

Пример 2

Если F_1 и F_2 истинны, то $F_1 \wedge F_2$ также истинна, т.е.

$F_1 = (\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big) = И$, т.е. истинна для любого x, и будет истинна, например, при подстановке $x = a$.

$$F_1 \wedge F_2 = (\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big) \wedge P(a) = И \text{, т.е.}$$

$$F_1 \wedge F_2 = \big(P(a) \to Q(a)\big) \wedge P(a) = И$$

Следовательно, $Q(a) = И$, а это и есть вопрос задачи. Т.е. G - логическое следствие по определению.

Тема следующей лекции:

«ПНФ».