Математическая логика

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. *Quine–McCluskey method*

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Курс математической логики

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Введение в алгебру логики**	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	**Минимизация булевых функций**	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	**Полнота и замкнутость систем логических функций**	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.
4.	**Исчисление высказываний и предикатов**	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Литература

- **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие. Математическая логика. – Москва : РУДН, 2014. – 118 с.**
- Светлов В.А., Логика: учебное пособие, изд-во: Логос, 2012 г. 429 с.
- Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
- Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Дискретная математика, М.: АСТ, 2014 г, 448 с.
- Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
- **Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.**
- **Учебный портал РУДН, раздел «Математическая логика» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522**

Теорема о простых импликантах

Теорема. Каждая функция $f \not\equiv 0$ представима в виде $f = \vee_i P_i$, где P_i – простые импликанты.

Док-во. 1) Функция $f = 1$ т. и т. т., к. $\vee_i P_i = 1$. Очевидно, что, если $\vee_i P_i = 1$, то $f = 1$.

Пусть теперь для некоторого набора значений переменных $f = \vee_i k_i = 1$. Если конъюнкция $k_i = 1$, то по определению k_i – импликант. Сокращаем этот импликант до простого. Данную процедуру повторяем для всех наборов значений переменных, для которых $f = 1$. □

Определение неизбыточной ДНФ

ДНФ $\Phi = \underset{i}{\vee} k_i$ функции f называют неизбыточной если:

1) все k_i – простые импликанты;
2) удаление любой k_i из Φ нарушает равенство $f = \Phi$.

Задача минимизации

Задача минимизации может быть разделена на следующие этапы:

1) нахождение всех простых импликантов функции f ;
2) нахождение неизбыточных ДНФ функции f ;
3) выбор минимальных ДНФ функции f .

Основные понятия

Элементарная конъюнкция α покрывается элементарной конъюнкцией β, если каждая переменная, входящая в β, входит в α (с учетом отрицания).

Основные понятия

Пример. Покрывающие конъюнкции.

Конъюнкция $\alpha = xyz$ покрывается конъюнкцией $\beta = xy$.

Конъюнкция $\alpha = x\bar{y}z$ не покрывается конъюнкцией $\beta = x\bar{z}$.

Основные понятия

Элементарная конъюнкция α называется дополнением элементарной конъюнкции β по отношению к ДНФ Φ, если:

1) конъюнкция α покрывается конъюнкцией β,
2) в конъюнкцию α входят все переменные, входящие в Φ.

Основные понятия

Пример. Найти дополнительные конъюнкции $\beta = xy$ по отношению к $\Phi = xy\bar{z} \vee \bar{t} \vee zt \vee \bar{x}\,\bar{y}$.

Предложите свое решение.

Основные понятия

Пример. Найти дополнительные конъюнкции $\beta = xy$ по отношению к $\Phi = xy\bar{z} \vee \bar{t} \vee zt \vee \bar{x}\,\bar{y}$.

Пусть $\Phi = xy\bar{z} \vee \bar{t} \vee zt \vee \bar{x}\,\bar{y}$. Тогда конъюнкции

$\alpha_1 = xyzt$,

$\alpha_2 = xyz\bar{t}$,

$\alpha_3 = xy\bar{z}t$,

$a_4 = xy\bar{z}\,\bar{t}$

являются дополнениями конъюнкции $\beta = xy$ по отношению к Φ.

Теорема о дополнениях к СДНФ

Теорема. Пусть Φ – СДНФ функции f. Если β – импликант f, то все дополнения элементарной конъюнкции β по отношению к Φ входят в Φ.

Опережая док-во заметим, что объединяя в СДНФ Φ функции f соответствующим образом пары элементарных конъюнкций и применяя последовательно равенство $xy \vee \bar{x}y = y$, можно в результате получить все простые импликанты функции f.

Теорема о дополнениях к СДНФ

Док-во. Пусть $\beta = x_{i_1}^{\rho_1} x_{i_2}^{\rho_2} \dots x_{i_m}^{\rho_m}$ – импликант функции f и пусть $\alpha = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_n^{\delta_n}$ является дополнением β по отношению к Φ. (Дополнение больше!!!)

Предположим, что α не входит в Φ.

Рассмотрим такой набор значений переменных, что $\alpha = 1$, т.е. положим $x_i = \delta_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $\rho_1 = \delta_{i_1}, \dots, \rho_m = \delta_{i_m}$ и $\beta = 1$, а $\Phi = 0$ поскольку α по предположению не входит в Φ.

Но это противоречит тому, что β является импликантом f. □

Пример

Найти простые импликанты для функции
$$f = xyzt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt\,.$$

Предложите решение!

Пример

Пример.
Найти простые импликанты для функции
$f = xyzt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt$.

Первая и третья конъюнкции дают $xyzt \vee x\bar{y}zt = xzt$.
Вторая и третья конъюнкции дают $x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt = x\bar{y}z$.
Полученные выражения являются простыми импликантами (надо проверять!) и, следовательно, $f = xzt \vee x\bar{y}z$.

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски

1) Выпишем для функции f её СДНФ Φ.
2) В каждой элементарной конъюнкции все переменные будем записывать в одинаковом порядке.
3) Каждую конъюнкцию будем представлять в виде последовательности из 1, 0 и –, ставя на i-м месте 1, если i-я переменная входит в конъюнкцию без отрицания, 0 – если с отрицанием и –, если не входит.

Например, $f(x,y,z,t) = xyz \vee x\overline{z} \vee x\overline{t}$ запишем в виде $111- \vee 1-0- \vee 1--0$.

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски

4) Образуем из элементарных конъюнкций группы, включая в одну группу наборы с одинаковым числом единиц (группы, в которых число единиц отличается на 1, называются соседними); расположим группы в порядке возрастания числа единиц.

Например, для функции
$f(x, y, z, t) = (1110.0000.1100.1100)$ построим СДНФ, откуда найдем ее элементарные конъюнкции и сгруппируем их в группы.

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски

$$f(x,y,z,t) = xy\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee$$
$$\vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$$

элементарные конъюнкции представляются как 1101, 1001, 1100, 1000, 0010, 0001, 0000, а список групп будет следующим:

<u>0000</u>
0001
0010
<u>1000</u>
1001
<u>1100</u>
1101

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски

5) Равенство $xy \vee \bar{x}y = y$ может быть применимо только к подходящим парам наборов из соседних групп. Подходящая пара образуется двумя наборами, отличающимися в одной позиции, и в этой позиции не стоит черточка. Подходящие пары будем отмечать звездочками (*).

6) Ставим в различающейся позиции подходящей пары черточку и помещаем получившийся набор в следующий список групп.

7) Повторяем описанный процесс с шага 4, пока это возможно. Непомеченные наборы образуют простые импликанты.

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски

					*	*	*	0000
				*			*	0001
						*		0010
		*	*		*			1000
	*		*	*				1001
*		*						1100
*	*							1101

Старый список

000-
00-0
-000
-001
100-
1-00
1-01
110-

Новый список

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски

		*		000-	-00-
				00-0	1-0-
			*	-000	
			*	-001	
*		*		100-	
	*			1-00	
	*			1-01	
*				110-	
				Старый список	Новый список

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски

Непомеченными остались следующие импликанты

00–0,

–00–,

1–0–.

Они образуют простые импликанты $\bar{x}\bar{y}\bar{t}$, $\bar{y}\bar{z}$, $x\bar{z}$.

Ответ: $f(x,y,z,t)=\bar{x}\bar{y}\bar{t}\vee x\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}$.

Подготовить к КР 1

Выполнить ДЗ 1 по матлогике. Сдавать семинаристу до КР 1. После КР не принимается.
http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522

К контрольной подготовить следующие темы:

1) СДНФ, СКНФ, ПЖ, фиктивные и существенные переменные, дополнительные задания из лекции.
2) Представить функцию булевой формулой и упростить (в виде ДНФ).
3) Двойственность 3 способами: по определению (по правилу), таблично, по принципу.
4) Проверить справедливость 2 способами: через ДНФ и таблично.

Тема следующей лекции:

«Таблицы простых импликантов».