Дифференциальная геометрия
Введение. Содержание курса.

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Дифференциальная геометрия

Дифференциальная геометрия — область математики изучающая гладкие многообразия и структуры на них. Менее формально — дифференциальная геометрия это применение методов математического анализа к геометрическим объектам (кривым, поверхностям, пространствам).

Кратко перечислим основные вехи развития дифференциальной геометрии.

- Возникновение дифференциальной геометрии принято относить к 18 веку (Леонард Эйлер, Гаспар Монж).
- Большой вклад в развитие внес Бернхард Риман (лекция 1854 года).
- Теоретико-групповой подход на геометрию вообще был предложен Феликсом Кляйном в лекции, получившей название Эрлангенская программа.
- В начале 20 веке мощный импульс с к развитию математического аппарата дифференциальной геометрии дали специальная и общая теория относительности и общий подход по геометризации физики.

Разделы дифференциальная геометрия 1

В настоящее время дифференциальная геометрия разрослась и разделилась на множество ветвей. Перечислим некоторые из них.

- Классическая дифференциальная геометрия (локальные свойства кривых и поверхностей в декартовом двухмерном и трехмерном пространствах). Исторически тесно связанна с теоретической механикой.
- Общая дифференциальная геометрия. Является обобщением теории поверхностей в трехмерном пространстве.
- Риманова геометрия изучает многообразия Римана с введенной на них метрикой специального вида. Является обобщением евклидова пространства.
- Псевдо-риманова геометрия обобщение геометрии Римана для необязательно положительно определенной метрики. Используется в общей теории относительности. Частный случай — геометрия Минковского, которая используется в специальной теории относительности.

Разделы дифференциальная геометрия 2

- Симплектическая геометрия. Изучает многообразия с введенной на них специальной структурой — симплектической формой. Используется в теоретической механики (формализм Гамильтона), в электродинамике и квантовой механике.
- К дифференциальной геометрии также относят тензорную алгебру и тензорный анализ — обобщения понятий вектор и матрица на многие размерности. Большое значение играют в физике.
- Теория групп Ли. Изучаются непрерывные группы и алгебры Ли (в честь Мариус Софуса Ли). Тесно связанна с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений.

Эрлангенская программа Феликса Клейна 1

Крупный немецкий математик 19 века Феликс Клейн в своей лекции в Эрлангенском университете (октябрь 1872 года) предложил общий подход к геометрии на основе теории групп (групп преобразований пространства).

Рис. 1: Феликс Христиан Клейн

Эрлангенская программа Феликса Клейна 2

Суть программы Клейна

- Рассматривается некоторая группа преобразований некоторого пространства.
- Изучаются свойства, которые преобразования данной группы оставляют неизменными (инварианты).
- Разные группы имеют разные инварианты и приводят к разным геометриям.

Эрлангенская программа Феликса Клейна 3

Несколько примеров

- В классической греческой геометрии (школьная геометрия) рассматриваются свойства фигур, которые остаются неизменными при поворотах и параллельном переносе (инварианты: длины, площади, объемы и углы).
- Также в школе коротко изучают инварианты, которые проявляются при преобразовании подобия (растяжение и сужение пространства, подобные треугольники, инварианты: углы).
- Проективная геометрия, геометрия Лобачевского, геометрия Римана, аффинная геометрия и другие могут быть рассмотрены с точки зрения инвариантности некоторых величин при воздействии преобразований соответствующей группы.

Эрлангенскую программа Клейна называют второй алгебраизацией геометрии. Она еще больше усилила степень проникновения алгебры (общей алгебры) в геометрию и позволила рассматривать геометрические свойства вне связи с системами координат.

Топология

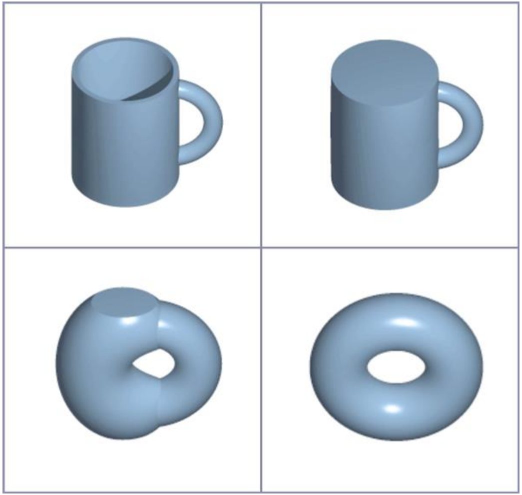

Рис. 2: С точки зрения топологии кружка и бублик (тор) неотличимы

Топология — отдельный раздел математики, который изучает свойство геометрических пространств, неизменные при непрерывных деформациях. Данный раздел мы не затронем ввиду отсутствия времени. Стандартные программы для математических специальностей предусматривают отдельный курс топологии на 2-3 семестра.

Содержание курса 1

Классическая дифференциальная геометрия.

- Теория кривых на плоскости $\mathbb{R}^2$ и в пространстве $\mathbb{R}^3$. Формулы Френе–Серре, репер Френе, кривизна и кручение.
- Теория поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Первая и вторая квадратичные формы, метрика поверхности и кривизна поверхности.

Вводные сведения из общей дифференциальной геометрии.

- Определения многообразия, карты, атласа, диффеоморфизма.
- Криволинейная система координат.
- Преобразование систем координат.
- Векторные поля.

Необходимые сведения из общей и линейной алгебры.

Содержание курса 2

- Группы, линейные и евклидовы пространства. Основные сведения из линейной алгебры.
- Скалярное, векторное и смешанное произведения. Ориентация системы координат.
- Некоторые сведения из аналитической геометрии.
- Алгебра Грассмана на примере поливекторов.

Тензорная алгебра.

- Тензорная алгебра. Ковариантные и контравариантные векторы.
- Тензорные обозначения, правило суммирования Эйнштейна.
- Симметричный и антисимметричные тензоры.
- Поливекторы (n-векторы) и n-формы (антисимметричные тензоры).

Активности курса

Курс рассчитан на один модуль. Для набора баллов предусмотрены следующие активности.

- Две контрольные работы по 20 баллов каждая, в сумме 40 баллов.
- Четыре проверочных теста по каждому разделу программы, по 10 баллов каждый, в сумме 40 баллов.
- Один итоговый тест 20 баллов.

Список литературы

- Основные учебники [1, 2, 3].
- Дополнительные учебники [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].
- Задачники [11, 12].
- Повторение алгебры и аналитической геометрии [13, 14, 15, 16, 17].

Список литературы 1

1. Фиников С. — **Курс дифференциальной геометрии.** — Москва : URSS, 2017. — 343 с.
2. Поздняк Э. Г., Шикин Е. В. — **Дифференциальная геометрия : Первое знакомство.** — Москва : Издательство МГУ, 1990. — 384 с.
3. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. — **Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.** — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 305 с. — ISBN 9785971026815.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. В 3 т. Т. 1. — **Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей.** — 6-е изд. — Москва : УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 336 с. — ISBN 9785453000470.
5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. В 3 т. Т. 2. — **Геометрия и топология многообразий.** — 6-е изд. — Москва : УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 304 с. — ISBN 9785453000487.
6. Степанов С. С. — **Векторы, тензоры и формы: инструкция по применению.** — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — ISBN 9785971066910. — URL: `http://synset.com/pdf/steps_vec.pdf`.

Список литературы 2

7. Новиков С. П., Тайманов И. А. — **Современные геометрические структуры и поля.** — Москва : МЦНМО, 2005. — 584 с. — ISBN 5940571026.
8. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. В 2 т. Т. 1. — **Евклидовы пространства и аффинные пространства. Тензорный анализ. Математические основы специальной теории относительности.** — Москва : УРСС, 2014. — 352 с. — ISBN 9785396005778.
9. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. В 2 т. Т. 2. — **Римановы пространства и пространства аффинной связности. Тензорный анализ. Математические основы общей теории относительности.** — Москва : УРСС, 2014. — 336 с. — ISBN 9785396005785.
10. Норден А. П. — **Теория поверхностей.** — 2-е изд. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 264. — (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия)). — ISBN 978597106234.
11. Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. — **Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.** — Москва : ЛЕНАНД, 2016. — 416 с. — ISBN 9785971024484.
12. Розендорн Э. Р. — **Задачи по дифференциальной геометрии.** — 6-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 141 с. — ISBN 9785922108218.

Список литературы 3

13. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 1. — **Основы алгебры.** — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574538.
14. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. — **Линейная алгебра.** — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574545.
15. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 3. — **Основные структуры алгебры.** — Москва : МЦНМО, 2009. — 272 с. — ISBN 9785940574552.
16. Аржанцев И. В. [и др.]. — **Сборник задач по линейной алгебре.** /. — Под ред. А. И. Кострикин. — Москва : МЦНМО, 2009. — 408 с. — ISBN 9785940574132.
17. Федорчук В. В. — **Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.** /. — Под ред. Л. А. Николова. — Москва : Издательство Московского университета, 1990. — 328 с. — ISBN 521100941X.