Математическая логика

Функции алгебры логики

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной информатики и теории вероятностей РУДН
Маркова Екатерина Викторовна
markova_ev@pfur.ru

Курс математической логики

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Введение в алгебру логики**	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	**Минимизация булевых функций**	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	**Полнота и замкнутость систем логических функций**	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.
4.	**Исчисление высказываний и предикатов**	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Литература

- **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие. Математическая логика. – Москва : РУДН, 2014. – 118 с.**
- Светлов В.А., Логика: учебное пособие, изд-во: Логос, 2012 г. 429 с.
- Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
- Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Дискретная математика, М.: АСТ, 2014 г, 448 с.
- Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
- **Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.**
- **Учебный портал РУДН, раздел «Математическая логика» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522**

Логические переменные

Рассмотрим двухэлементное множество $\boldsymbol{B} = \{0,1\}$ и двоичные переменные, принимающие значения из $\boldsymbol{B}$.

Элементы 0 и 1 не являются числами в обычном смысле, хотя по некоторым свойствам и похожи на них.

Наиболее распространенная интерпретация двоичных переменных – логическая:

1 – «да»,	или	1 – «истина»,
0 – «нет» ,		0 – «ложь».

Алгебра логики (Булева алгебра)

Алгебра, образованная множеством $\boldsymbol{B}$ вместе со всеми возможными операциями на нем, называется алгеброй логики.

Функцией алгебры логики от n переменных называется n-арная операция на $\boldsymbol{B}$, т.е. $f:\boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{B}^n = \left\{ \left(x_1, \ldots, x_n \right) \mid x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{B} \right\}$.

Алгебра логики (Булева алгебра)

Функция алгебры логики $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ – это функция, принимающая значения 0, 1, аргументы которой принимают значения 0, 1.

Множество всех логических функций обозначаются $\boldsymbol{P}_2$, множество всех логических функций n переменных – $\boldsymbol{P}_2\left(n\right)$.

Как перейти из двоичной системы счисления в десятичную?

Двоичная система	Десятичная система
010101	?
1111	?

Как перейти из двоичной системы счисления в десятичную?

Если число b в десятичной системе счисления можно представить в виде

$$b = b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + b_1 2^1 + b_0 2^0,$$

где $b_i \in \boldsymbol{B}$, $i = 0, \ldots, n$, т.е. либо 0 либо 1, то двоичная запись числа b будет выглядеть следующим образом $b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$.

Двоичная система	Десятичная система
010101	21
1111	15

Как перейти из десятичной системы счисления в двоичную?

Если число b в десятичной системе счисления можно представить в виде

$$b = b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + b_1 2^1 + b_0 2^0,$$

где $b_i \in \boldsymbol{B}$, $i = 0, \ldots, n$, т.е. либо 0 либо 1, то двоичная запись числа b будет выглядеть следующим образом $b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$.

Пример

$$0_{10} = 0 \times 2^0 = 0_2;$$

$$1_{10} = 1 \times 2^0 = 1_2;$$

$$2_{10} = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10_2;$$

$$6_{10} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 110_2.$$

Домашнее задание

Перевести числа от 0 до 15 из десятичной системы счисления в двоичную (необходимо для дальнейших семинаров). Записать в таблицу

a_{10}	b_2
0	0000
1	0001
2	0010
…	…

Представление функции через таблицу

x_1	$,\ldots,$	$x_{n-1},$	x_n	$f($	x_1	$,\ldots,$	$x_{n-1},$	$x_n)$
0,	,…,	0,	0	$f($	0,	,…,	0,	0)
0,	,…,	0,	1	$f($	0,	,…,	0,	1)
0,	,…,	1,	0	$f($	0,	,…,	1,	0)
0,	,…,	1,	1	$f($	0,	,…,	1,	1)
	…					…		
1,	,…,	1,	1	$f($	1,	,…,	1,	1)

Аргументы Значения функций на наборах (0 или 1)

Утверждение о количестве наборов для n переменных

Для n переменных существует 2^n возможных наборов переменных.

Доказательство по индукции.

1) При $n=1$ (одна переменная), то существует два набора переменных 0 и 1.

x	$f(x)$
0	
1	

Утверждение о количестве наборов для n переменных

2) Пусть при $(n-1)$ переменной будет 2^{n-1} различных наборов. Докажем, что для n переменных будет 2^n наборов.

	x_1	$,\ldots,$	$x_{n-1},$	$f($ x_1	$,\ldots,$	$x_{n-1})$
2^{n-1} наборов	0,	$,\ldots,$	0,	$f($ 0,	$,\ldots,$	0)
	0,	$,\ldots,$	1,	$f($ 0,	$,\ldots,$	1)
	0,	$,\ldots,$	0,	$f($ 0,	$,\ldots,$	0)
	0,	$,\ldots,$	1,	$f($ 0,	$,\ldots,$	1)
		…			…	
	1,	$,\ldots,$	1,	$f($ 1,	$,\ldots,$	1)

Утверждение о количестве наборов для n переменных

3) Добавим еще одну переменную, поставим ее вперед, перед всеми переменными.
Тогда таблица заполнится следующим образом: сначала ко всем наборам добавится 0 впереди, а затем к тем же наборам добавится 1, т.е. количество наборов УДВОИТСЯ.

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1} \times 2 = 2^n$$

Т.е для n переменных существует 2^n возможных наборов переменных.

Утверждение о количестве логических функций для n переменных

Поскольку число различных наборов значений n аргументов равно 2^n, то число $\left|\boldsymbol{P}_2(n)\right|$ различных функций n переменных равно 2^{2^n}.

2^{2^n} - число размещений с повторениями (из двух значений 0 и 1 мы выбираем 2^n раз).

Существенные и фиктивные переменные

Есть переменные, которые не влияют на значение функции, и являются фиктивными. Тогда возникает вопрос о количестве существенных переменных в функции.

Функция $f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n\right)$ из $\boldsymbol{P}_2$ зависит существенным образом от аргумента x_i, если существуют такие значения $\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_i,\beta_{i+1},\ldots,\beta_n$ переменных $x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n$, что $f\left(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},0,\beta_{i+1},\ldots,\beta_n\right)\neq f\left(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\ldots,\beta_n\right)$. В этом случае переменная x_i называется **существенной**.

Если x_i не является существенной переменной, то она называется несущественной или **фиктивной**.

Существенные и фиктивные переменные

Если переменная x_i является фиктивной переменной, то функция $f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n\right)$ по существу зависит лишь от $(n-1)$ переменной, т.е. представляет собой функцию $g\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\right)$ от $(n-1)$ переменной.

Будем говорить, что функция g получена из функции f удалением фиктивной переменной, а функция f получена из функции g введением фиктивной переменной.

Функции f и g называются равными, если функцию g можно получить из функции f путем добавления или изъятия фиктивных переменных. В дальнейшем все функции мы будем рассматривать с точностью до фиктивных переменных.

Логические функции одной переменной

Логических функций одной переменной – четыре.

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции f_0 и f_3 – константы 0 и 1 соответственно;

f_1 – тождественная функция, $f_1(x) = x$;

f_2 – отрицание x: $f_2(x) = \overline{x}$ (или $\neg x$, читается *«не x»*).

Отметим, что значения функций f_0 и f_3 не зависят от значения переменной и, следовательно, переменная x – фиктивная.

Логические функции двух переменных

Логических функций двух переменных – 16.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
		$\mathbf{0}$	$\&, \cdot$					$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

x_1	x_2	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
		$\sim, \equiv$	$\overline{x_2}$		$\overline{x_1}$	$\rightarrow$	$\vert$	$\mathbf{1}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1

Логические функции двух переменных

Функции f_0 и f_{15} – константы 0 и 1.

Функция $f_1(x_1, x_2)$ - конъюнкция x_1 и x_2, обозначается как $x_1 \,\&\, x_2$ или $x_1 \wedge x_2$, или $x_1 \cdot x_2$ (логическое умножение), $x_1 \,\&\, x_2 = min(x_1, x_2)$.

Функция $f_7(x_1, x_2)$ - дизъюнкция x_1 и x_2, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \vee x_2 = max(x_1, x_2)$.

Функция $f_6(x_1, x_2)$ – сложение по модулю 2, $x_1 \oplus x_2$.

Функция $f_9(x_1, x_2)$ - эквивалентность, $x_1 \sim x_2$, $x_1 \equiv x_2$. Она равна 1, когда значения ее аргументов равны.

$f_{13}(x_1, x_2)$ – импликация, $x_1 \to x_2$ или $x_1 \supset x_2$ (читается «если x_1, то x_2»).

$f_8(x_1, x_2)$ – стрелка Пирса, обозначение $x_1 \downarrow x_2$.

$f_{14}(x_1, x_2)$ – штрих Шеффера, обозначение $x_1 \mid x_2$.

Тема следующей лекции:

«Свойства булевых операций. Двойственность».