Лекция 2

Несобственный интеграл
Критерий Коши, признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов

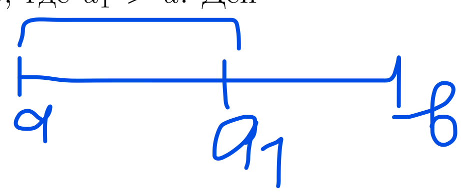
Пусть задана функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ и $f \in R[a, b]$, $\forall [a, b] \subset [a, +\infty)$.

Определение 2.1. Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx, \tag{2.1}$$

то он называется *несобственным* интегралом функции f на $[a, +\infty)$.

Если существует предел (2.1), то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*, в противном случае – *расходится*. Отметим, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$, где $a_1 > a$. Действительно, поскольку



$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \boxed{\int_a^{a_1} f(x)dx} + \lim_{b\to+\infty}\int_{a_1}^b f(x)dx,$$

то, очевидно, указанные пределы существуют или не существуют.

Теорема 2.1. (Критерий Коши). Пусть задана функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ и $f \in R[a, b]$, $\forall [a, b] \subset [a, +\infty)$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ \forall b_1 > A,\ \forall b_2 > A \Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сводится к вопросу о существовании предела $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, который решается с помощью критерия Коши: $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)\ \exists \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A > a :\ \forall b_1, b_2 :\ b_1 > A,\ b_2 > A\ |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$. Отметим, что

$$|F(b_2) - F(b_1)| = \left|\int_a^{b_2} f(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx\right| = \left|\int_a^{b_2} f(x)dx + \int_{b_1}^{a} f(x)dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

$\square$

Теорема 2.2. Пусть $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$, $f \in R[a, b]$, $\forall [a, b] \subset [a, +\infty)$. Несобственный интеграл сходится $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+ :\ \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M\ \forall b > a$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Функция $F(b)$ является неубывающей, так как из $b_1 \leqslant b_2 \Rightarrow F(b_1) - F(b_2) = \int\limits_a^{b_1} f(x)dx - \int\limits_a^{b_2} f(x)dx = \int\limits_a^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_2}^{a} f(x)dx = \int\limits_{b_2}^{b_1} f(x)dx = -\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \leqslant 0$.

Отметим, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, а последний существует в том и только том случае, когда F ограничена сверху. $\square$

Теорема 2.3. (признак сравнения). Пусть $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a, b]$, $\forall [a, b] \subset [a, +\infty)$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится и $|f(x)| \leqslant g(x)$, $\forall x \geqslant a$. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходятся.

Доказательство. Поскольку $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то в силу критерия Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > a :\ \forall b_i > A,\ (i = 1, 2) \Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$. Тогда $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$.

Таким образом, для рассматриваемых несобственных интегралов выполняется критерий Коши, то есть они сходятся. $\square$

Определение 2.2. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Отметим, что из абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует его сходимость, то есть из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Этот факт вытекает из теоремы 2.3, если положить $g(x) = |f(x)|$ и учесть, что $f(x) \leqslant |f(x)|$, $\forall x \geqslant a$ (см. критерий Коши).

Теорема 2.4. (признак Дирихле).

Пусть

1. функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\exists M > 0 :$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant M,\ \forall b > a;$$

2. $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ является непрерывно дифференцируемой и убывающей при $x \geqslant a$,

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. По первому условию $F(x) \leqslant M$, $\forall x > a$. Функция $F(x)$ является первообразной функции f. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b F'(x)g(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dF(x) =$$
$$= g(x)F(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b F(x)g'(x)dx = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int\limits_a^b F(x)g'(x)dx. \quad (2.2)$$

Отметим, что $\int\limits_a^b |F(x)||g'(x)|dx \leqslant M \int\limits_a^b |g'(x)|dx$. Поскольку $g(x)$ убывающая функция при $x \geqslant a$, получим

$$M \int\limits_a^b |g'(x)|dx = -M \int\limits_a^b g'(x)dx = -M(g(b) - g(a)).$$

Следовательно, $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b |F(x)g'(x)|dx \leqslant -M \lim\limits_{b \to +\infty} (g(b) - g(a)) = Mg(a)$ (см. условие 3). Следовательно, сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b F(x)g'(x)dx$, то есть правая часть (2.2) стремится к конечному значению при $b \to +\infty \Rightarrow$ сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$. □

Теорема 2.5. (признак Абеля).

Пусть

1. $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

2. $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая, монотонная и ограниченная функция.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Предположим, что $g(x)$ – убывающая функция. Поскольку $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = c$. Обозначим $\tilde{g}(x) = g(x) - c$ и рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$. Покажем, что для функций f и $\tilde{g}$ выполнены теоремы 2.4.

Действительно, $f(x)$ является непрерывной на $[a,+\infty)$, а функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ является ограниченной, то есть $|F(b)| \leqslant M,\ \forall b \geqslant a$. Действительно, из существования конечного предела $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ следует ограниченность функции в некоторой окрестности точки $+\infty$ ($U(+\infty) = \{b:\ b > c\}$), а на отрезке $[a,c]$ F ограничена, так как она непрерывна.

Функция $\tilde{g}(x)$ – непрерывно дифференцируемая, монотонная и убывающая функция, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = 0$. Далее,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx}_{\text{сходится}} + \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} cf(x)dx}_{\text{сходится}} \Rightarrow$$

интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится. □

Определение 2.3. Пусть функция $f\ :\ [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ является неограниченной в окрестности точки b и $f \in R[a,b-\varepsilon]\ \forall\varepsilon$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b+\varepsilon} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$, то он называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$.

Определение 2.4. Если функция $f(x)$ такова, что $\forall\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ и $\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$ $(a < c < b)$, то под *главным значением в смысле Коши* (*V.p.*) понимается число

$$V.p.\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right).$$

Аналогично

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx.$$