Теория конечных графов

Ориентированные графы

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Литература

1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

Ориентированный граф

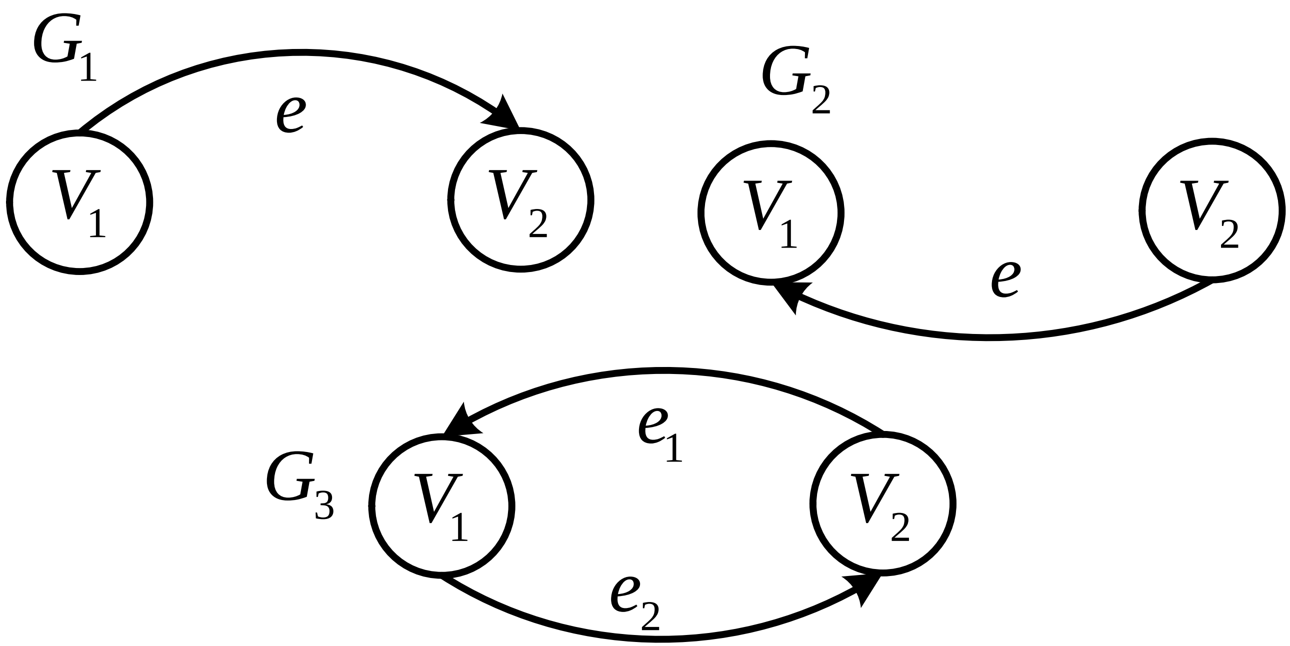
Во многих случаях ребрам графа необходимо задать *ориентацию* или *направление*. Отличие орграфов от неорграфов в том, что у неорграфов граничные точки ребра образуют *неупорядоченную пару*, а в случае орграфа граничные точки дуги образуют *упорядоченную пару*.

Ориентированным графом (или орграфом) называется пара $G = \langle \mathbf{V}, \mathbf{E} \rangle$, где $\mathbf{V}$ – непустое множество вершин, а $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^2 = \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ – множество дуг.

Начальная и конечная вершины в орграфе

Если дуга $e = < V_1, V_2 > \in \mathbf{E}$, то говорят, что вершина V_1 (начальная вершина) смежна с V_2 (конечной вершиной), а дуга e положительно инцидентна вершине V_1 и отрицательно инцидентна вершине V_2.

Смежность и инцидентность



Пример 1. Определите смежность вершин, положительную и отрицательную инцидентность для трех ориентированных графов

Ответ для примера 1

Для графа G_1 вершина V_1 смежна с вершиной V_2, при этом вершина V_2 не смежна с вершиной V_1, дуга e отрицательно инцидентна вершине V_2 и положительно инцидентна вершине V_1.

Для графа G_2 вершина V_2 смежна с вершиной V_1, но вершина V_1 не смежна с вершиной V_2, дуга e отрицательно инцидентна вершине V_1 и положительно инцидентна вершине V_2.

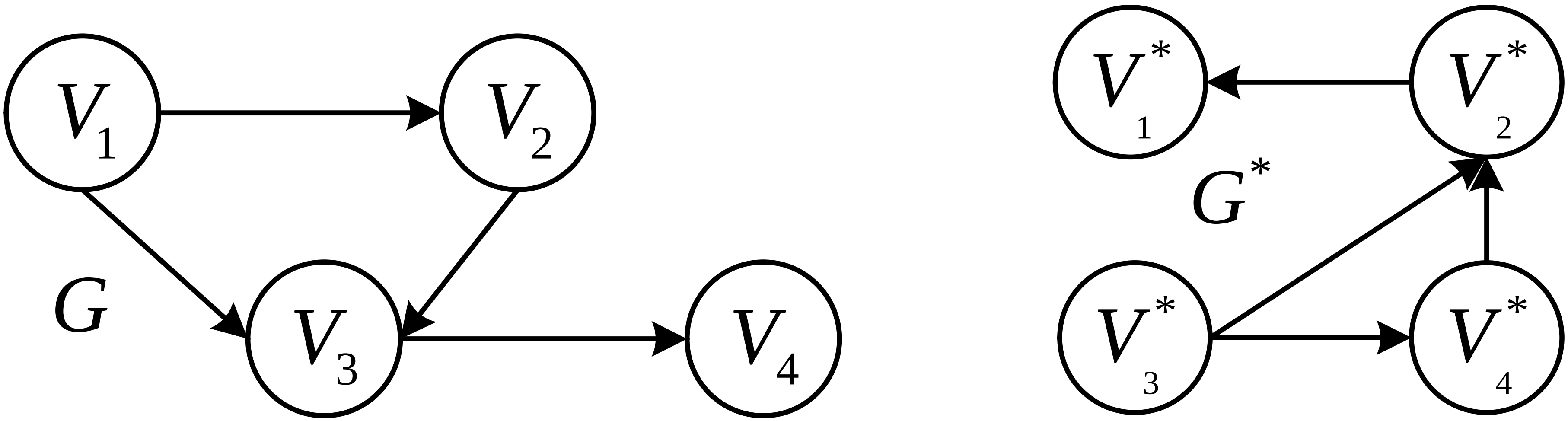
Для графа G_3 дуга e_1 отрицательно инцидентна вершине V_1 и положительно инцидентна вершине V_2, а дуга e_2 отрицательно инцидентна вершине V_2 и положительно инцидентна вершине V_1, при этом обе вершины являются смежными друг с другом.

Изоморфизм орграфов

Рассмотрим графы $G = \langle \mathbf{V}, \mathbf{E} \rangle$ и $G^* = \langle \mathbf{V}^*, \mathbf{E}^* \rangle$ и пусть $\exists$ биекция $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$.

Если для любых вершин V_1 и V_2 графа G образ $\varphi(V_1)$ смежен с образом $\varphi(V_2)$ в G^*, тогда и только тогда, когда вершина V_1 смежна вершине V_2 в графе G, то эта биекция называется изоморфизмом графа G на граф G^*. Если такой изоморфизм существует, то граф G изоморфен графу G^*.

Упражнение:
доказать изоморфизм орграфов



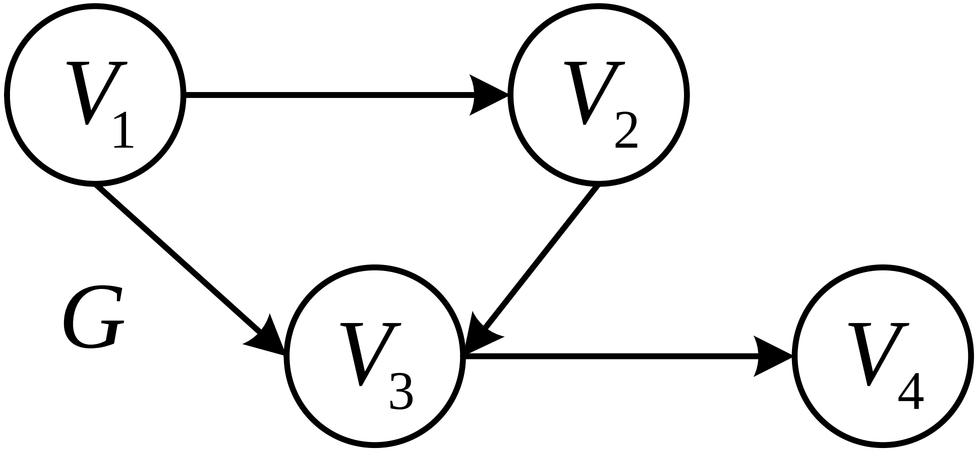
Пример 2.

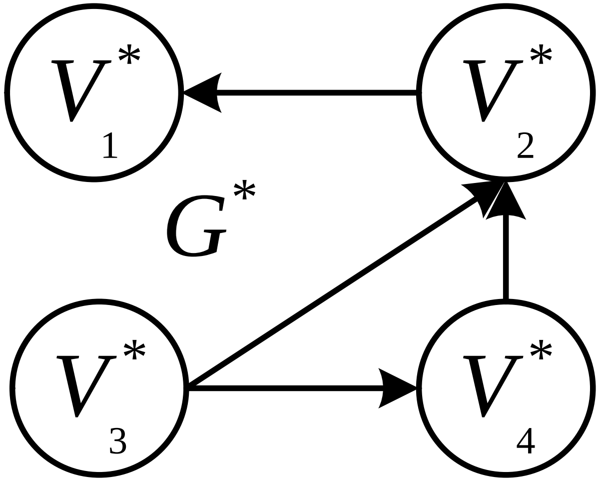
Как выглядит биекция $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ для данных графов?

Упражнение: доказательство

Биекция $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ для данных графов выглядит следующим образом:

$$\varphi : \begin{array}{l} V_1 \to V_3^* \\ V_2 \to V_4^* \\ V_3 \to V_2^* \\ V_4 \to V_1^* \end{array},$$

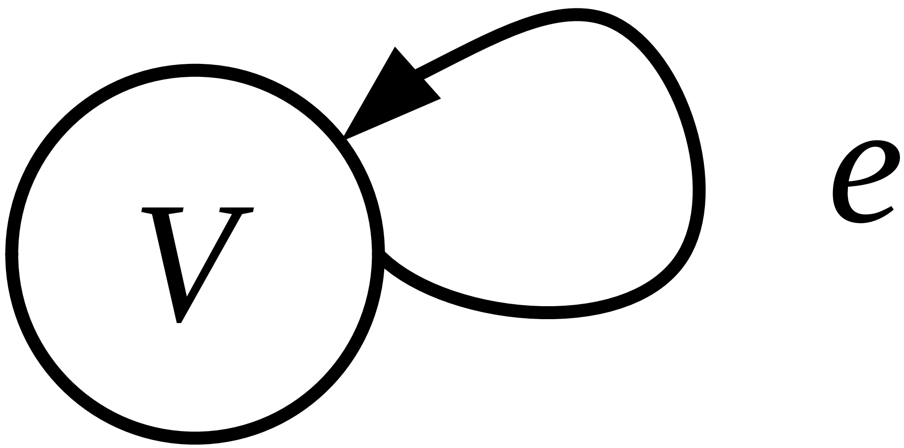




Граф G изоморфен графу G^*.

Петля в орграфе

Петлей называется дуга $e = <V_1, V_2>$, где $V_1 = V_2 = V$. Обозначение $e = <V, V>$. (В этом случае вершина V смежна сама с собой.)



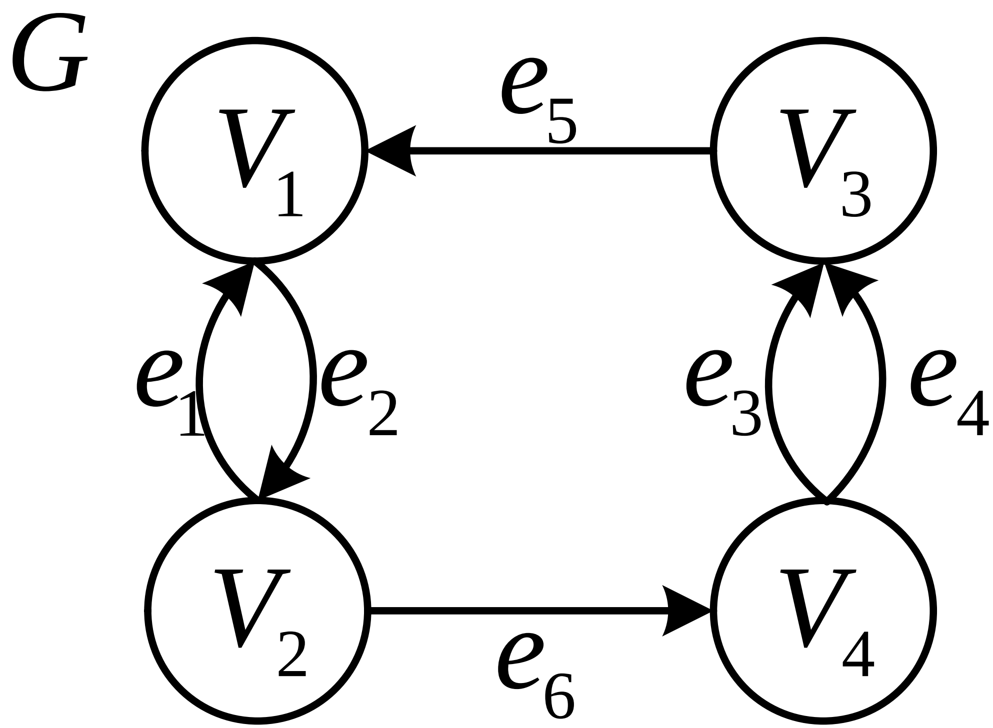
Пример 3.

Строгая и нестрогая параллельность дуг в орграфах

Если даны дуги $e_1 = <V_1, V_2>$ и $e_2 = <V_1, V_2>$, где V_1 – начальная вершина и V_2 – конечная вершина для обеих дуг e_1 и e_2 одновременно, то дуги e_1 и e_2 называются строго параллельными.

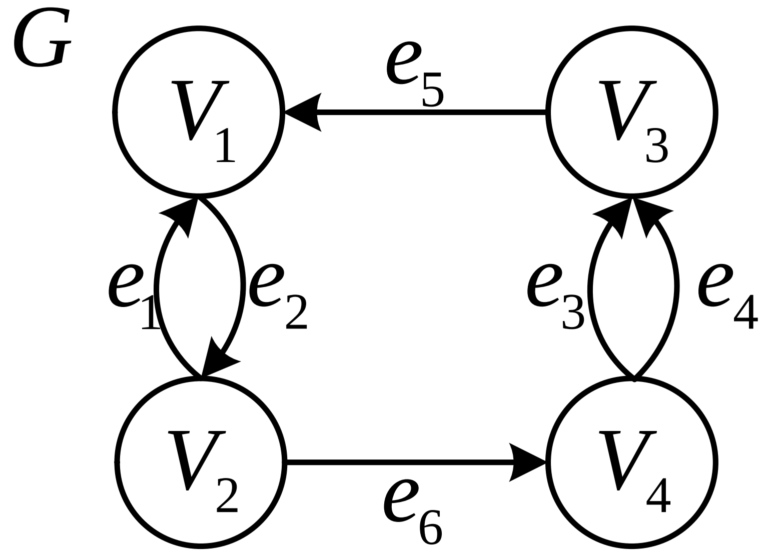
Если даны дуги $e_1 = <V_1, V_2>$ и $e_2 = <V_2, V_1>$, то есть V_1 – начальная вершина и V_2 – конечная вершина для дуги e_1 и, наоборот, V_2 – начальная вершина и V_1 – конечная вершина для дуги e_2, то дуги e_1 и e_2 называются нестрого параллельными.

Строгая и нестрогая параллельность дуг в орграфах



Пример 4. Найти пары строго параллельных дуг, пары нестрого параллельных дуг. Обосновать свои суждения

Ответ для примера 4

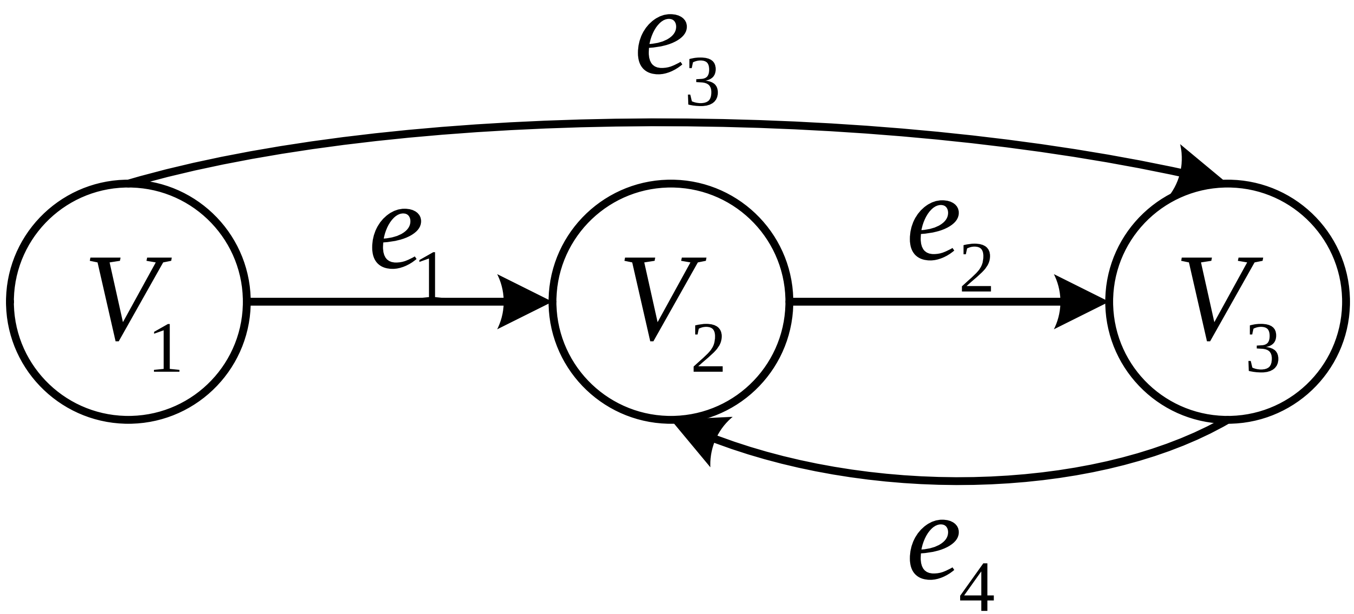


Дуги e_1 и e_2 нестрого параллельные, так как V_1 – начальная вершина, V_2 – конечная вершина для дуги e_2 и V_2 – начальная вершина, V_1 – конечная вершина для дуги e_1.

Аналогично докажите, что дуги e_3 и e_4 – строго параллельные.

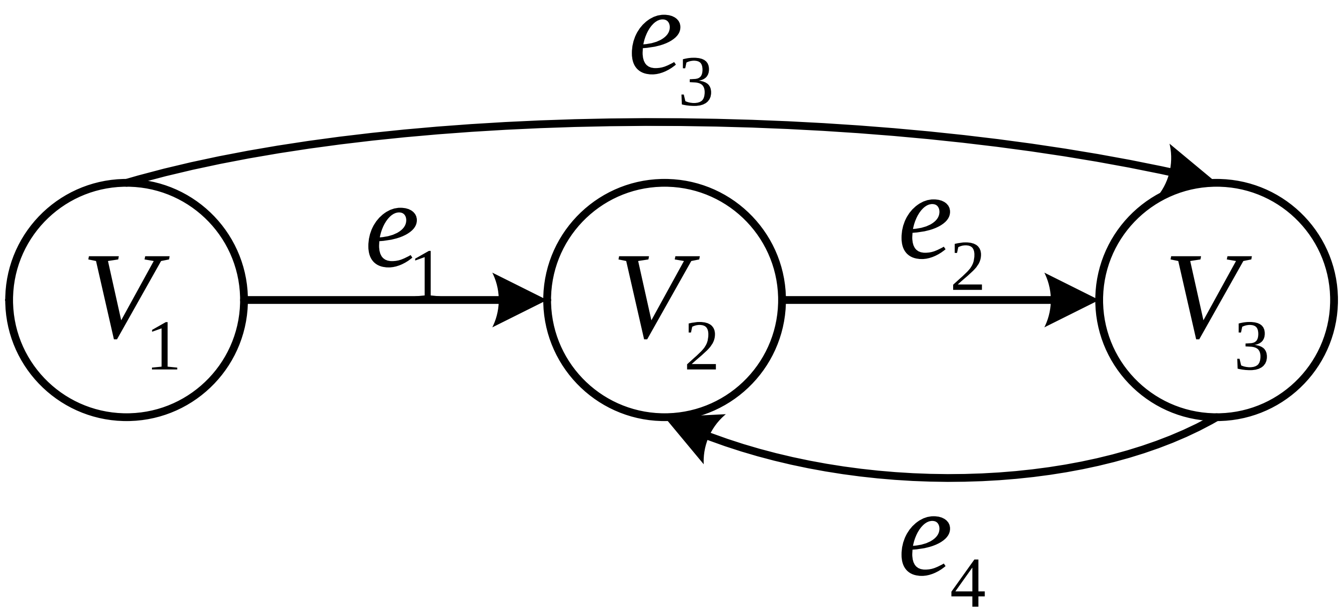
Смежность дуг в орграфе

Дуга e_1 смежна с дугой e_2, если конечная вершина дуги e_1 совпадает с начальной вершиной дуги e_2



Пример 5. Найти пары смежных дуг. Обосновать свои суждения.

Смежность дуг в орграфе



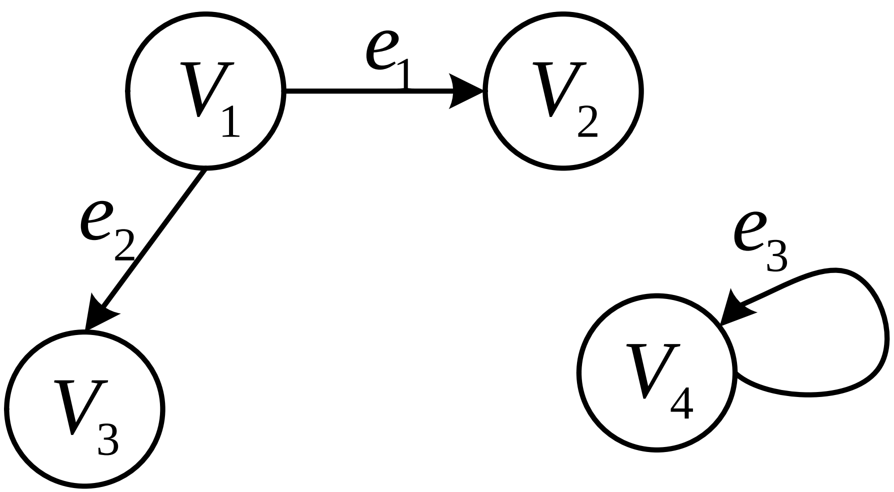
Дуга e_1 смежна с дугой e_2, а так же дуга e_3 смежна с дугой e_4. Слушателю курса предлагается найти остальные пары смежных дуг.

Степень вершины в орграфе

Число дуг, положительно инцидентных вершине V, называется положительной степенью вершины V, обозначается $\delta^{+}(V)$, а число дуг, отрицательно инцидентных вершине V, называется отрицательной степенью вершины V, обозначается $\delta^{-}(V)$.

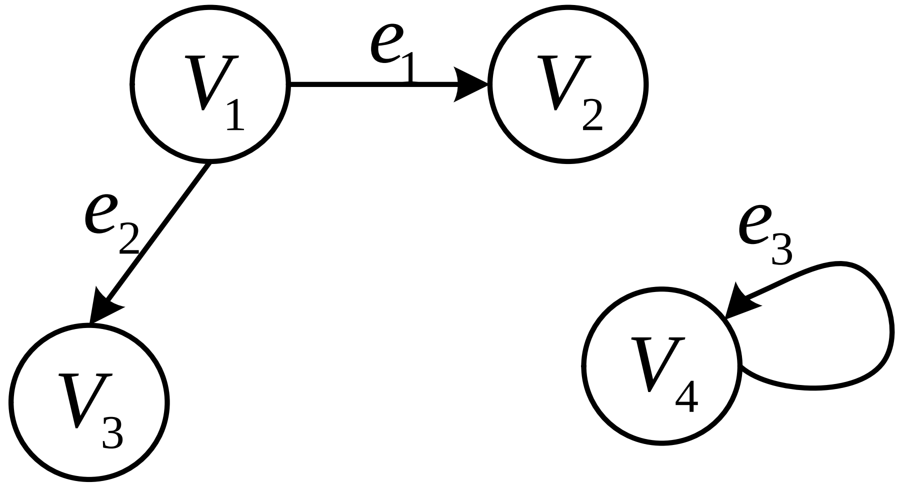
Степенью вершины V ориентированного графа, называется сумма положительной и отрицательной степеней вершины:

$$\delta(V) = \delta^{+}(V) + \delta^{-}(V).$$



Пример 6. Определить положительную, отрицательную степень вершин орграфа.

Степень вершины в орграфе



$$\delta^+(V_1) = 2;\ \delta^-(V_1) = 0;\ \delta(V_1) = 2;$$

$$\delta^+(V_2) = 0;\ \delta^-(V_2) = 1;\ \delta(V_2) = 1;$$

$$\delta^+(V_3) = 0;\ \delta^-(V_3) = 1;\ \delta(V_3) = 1;$$

$$\delta^+(V_4) = 1;\ \delta^-(V_4) = 1;\ \delta(V_4) = 2.$$

Сумма степеней вершин графа

<u>Утверждение.</u> $\sum\limits_{V \in \mathbf{V}} \delta^{+}(V) = \sum\limits_{V \in \mathbf{V}} \delta^{-}(V) = |\mathbf{E}|$, где $|\mathbf{E}|$ – число дуг графа $G = <\mathbf{V}, \mathbf{E}>$.

<u>Теорема</u> о числе вершин нечетной степени в орграфе:
В орграфе число вершин нечетной степени четно.
С доказательством можно ознакомится в предыдущей теме.

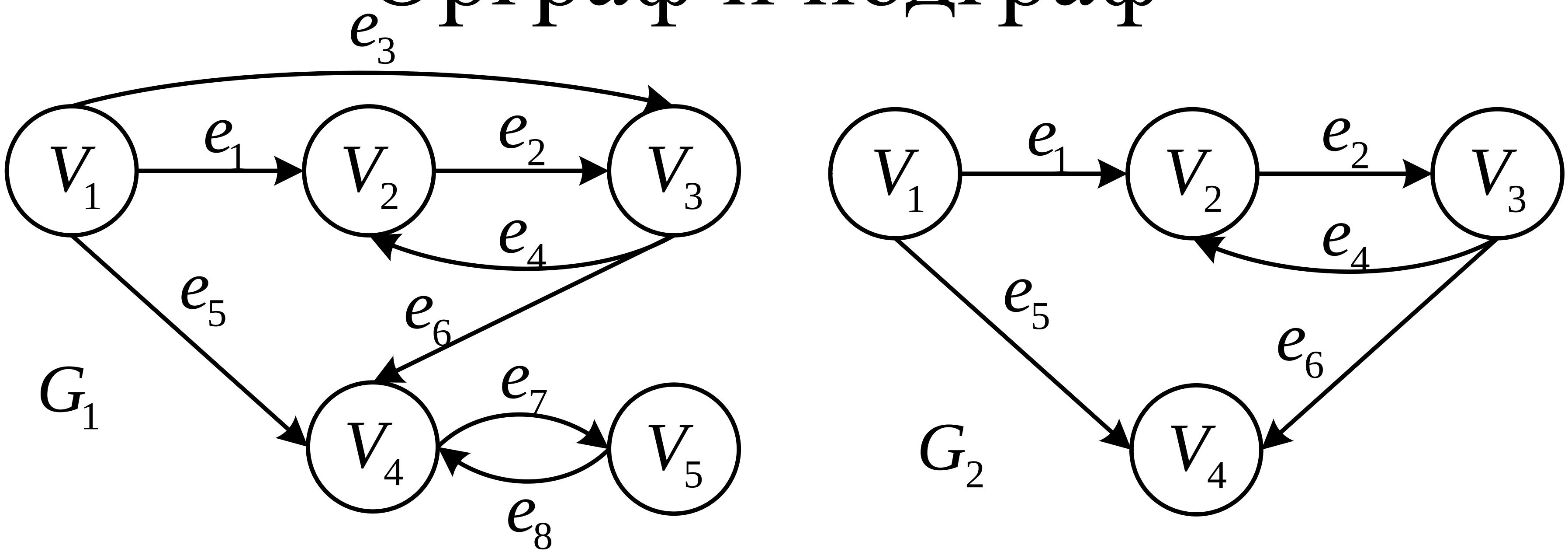
Подграф орграфа

Граф $G_1 = <\mathbf{V_1}, \mathbf{E_1}>$ называется подграфом $G = <\mathbf{V}, \mathbf{E}>$ при выполнении следующих двух условий:

1) $\mathbf{V_1} \subseteq \mathbf{V},\ \mathbf{E_1} \subseteq \mathbf{E}.$

2) Если дуга $e \in \mathbf{E_1}$ положительно инцидентна вершине $V_1 \in \mathbf{V_1}$ и отрицательно инцидентна вершине $V_2 \in \mathbf{V_1}$, то и дуга $e \in \mathbf{E}$ также положительно инцидентна вершине $V_1 \in \mathbf{V}$ и отрицательно инцидентна вершине $V_2 \in \mathbf{V}$.

Орграф и подграф



Пример 7. Пример ориентированного графа G_1 и его подграфа G_2.

Граф G_2 является подграфом графа G_1. Для $G_1 = <\mathbf{V_1}, \mathbf{E_1}>$: $\mathbf{V_1} = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ и $\mathbf{E_1} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$; для $G_2 = <\mathbf{V_2}, \mathbf{E_2}>$: $\mathbf{V_2} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ и $\mathbf{E}_2 = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$. $\mathbf{V_2} \subseteq \mathbf{V_1}$, $\mathbf{E_2} \subseteq \mathbf{E_1}$ и свойства положительной и отрицательной инцидентности выполняются.

Ормаршруты, пути, контуры

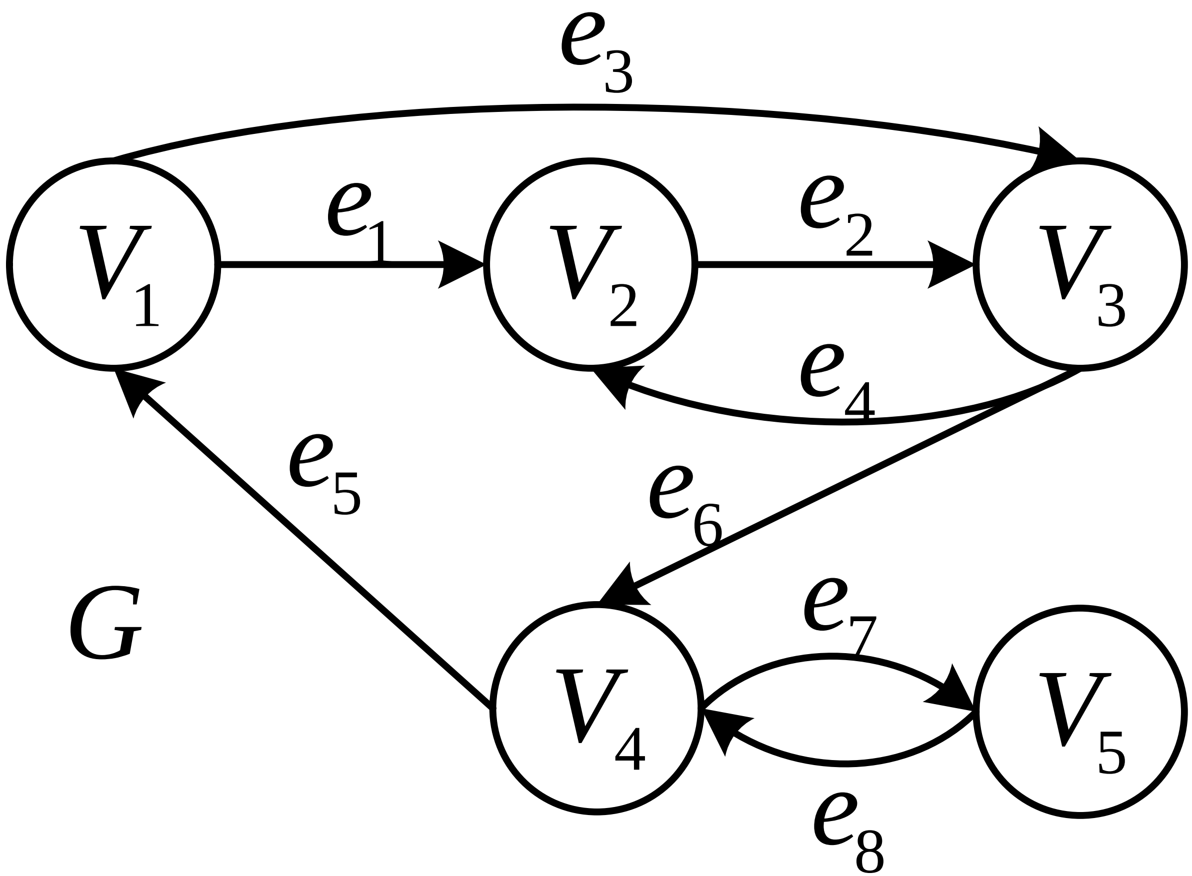
Ориентированным маршрутом (или ормаршрутом) длины n называется последовательность (не обязательно различных) дуг $e_1, e_2, ..., e_n$ таких, что для соответствующей последовательности $n+1$ вершин $V_0, V_1, ..., V_n$ выполняется условие $e_i = \langle V_{i-1}, V_i \rangle,\ i = \overline{1, n}$. (Заметим, что нумерация говорит о последовательности дуг и вершин в ормаршруте, а не о нумерации в орграфе).

Ормаршрут замкнут, если $V_0 = V_n$ (начальная вершина совпадает с последней вершиной). Также замкнутый ормаршрут называется циклическим ормаршрутом.

Ормаршрут в котором нет повторяющихся дуг, называется путем; и простым путем, если все его вершины различны.

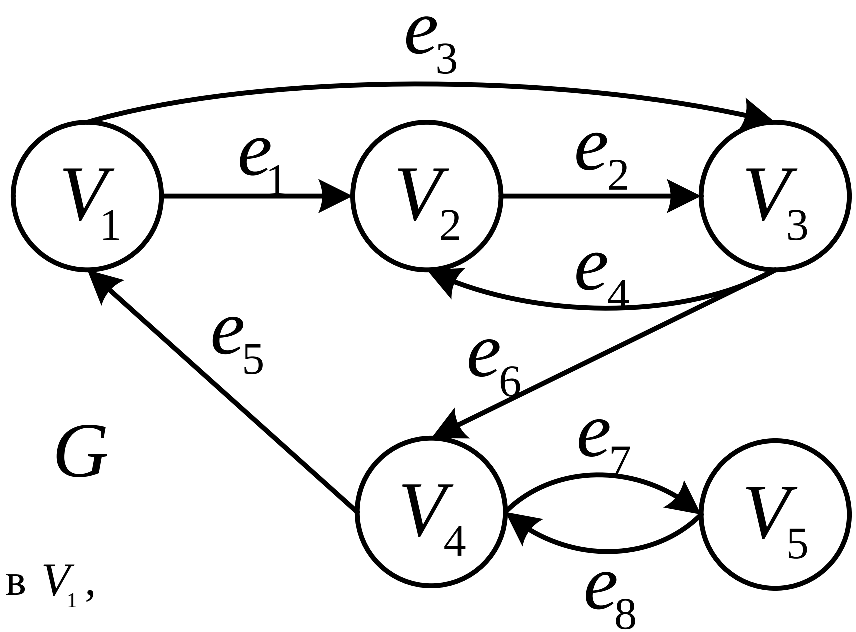
Замкнутый путь называется контуром. Замкнутый простой путь называется простым контуром

Ормаршруты, пути, контуры



Пример 8. Привести пример ормаршрута, направленного из V_1 в V_5,
привести пример циклического ормаршрута из V_1 ,
привести пример пути и контура.

Ормаршруты, пути, контуры



Ормаршрут из V_1 в V_5: e_1, e_2, e_6, e_7, последовательность вершин: V_1, V_2, V_3, V_4, V_5.

Циклический ормаршрут e_3, e_6, e_7, e_8, e_5 из V_1 в V_1, последовательностью вершин: $V_1, V_3, V_4, V_5, V_4, V_1$.

Ормаршрут e_1, e_2, e_6, e_7 является путем, но не является контуром, так как он не замкнут.

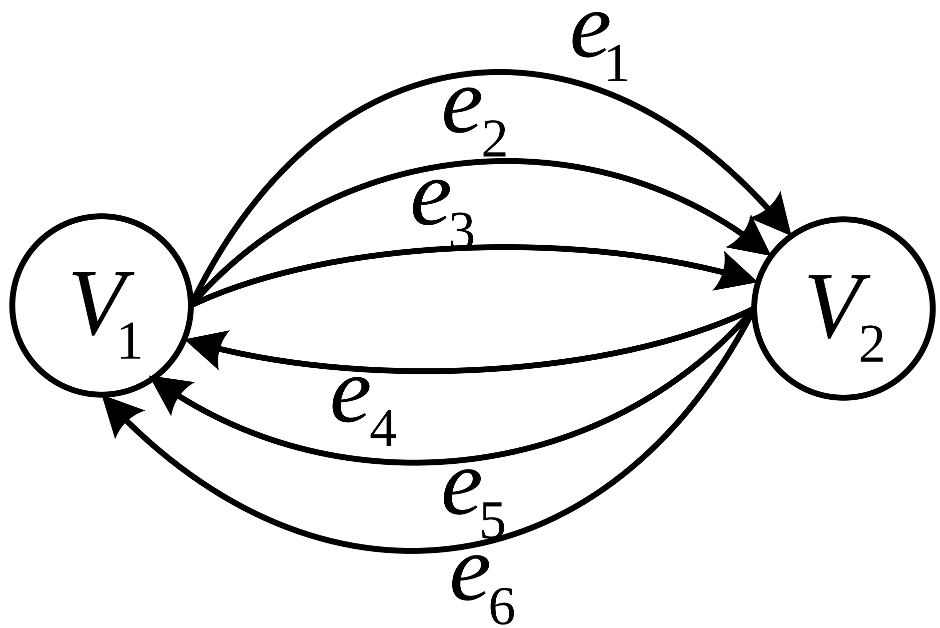
Ормаршрут e_3, e_6, e_7, e_8, e_5 является и путем и контуром, так как замкнут, но этот ормаршрут не является простым путем и простым контуром, так как проходит через вершину V_4 два раза.

Сильная связность

Орграф называется сильно связным, если для каждой пары различных вершин V_i и V_j существует путь из V_i в V_j и из V_j в V_i.

Орграф называется сильно k – связным, если для каждой пары различных вершин V_i и V_j существует по крайней мере k путей из V_i и V_j, и из V_j в V_i, которые не имеют общих вершин (а, следовательно, и дуг) за исключением V_i в V_j.

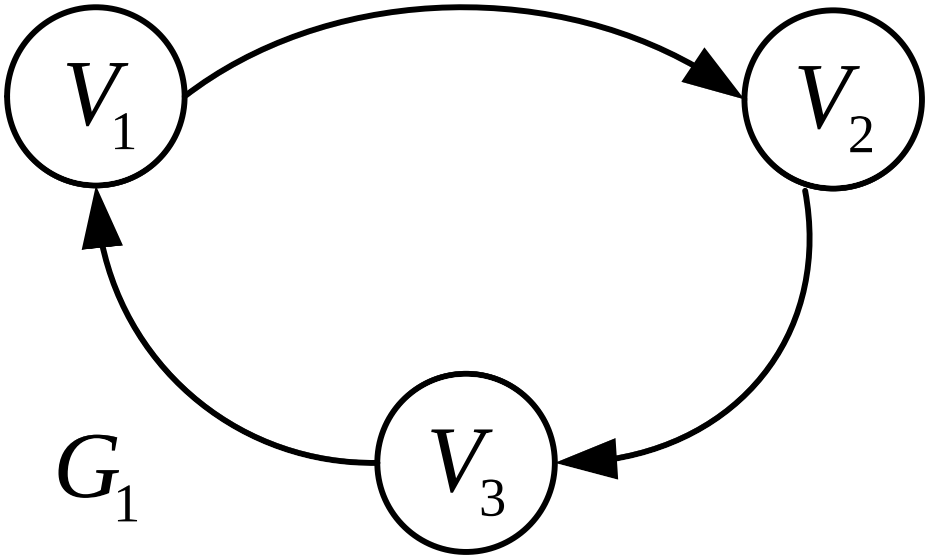
Сильная связность

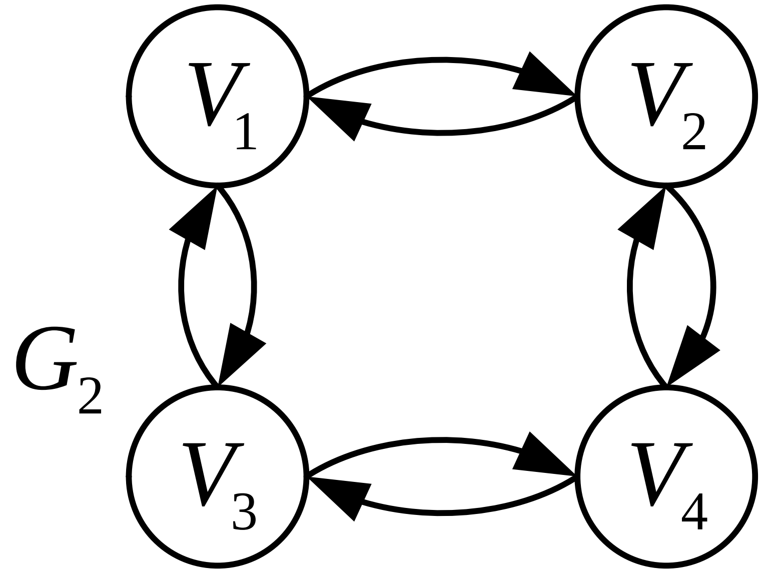


Пример 9.

Этот орграф является сильно связным, так как для вершин, существует путь из V_1 в V_2 и из V_2 в V_1. Так как путей минимум по 3, этот орграф называется 3-связным.

Сильная связность





Пример 10. Определить, являются ли графы сильносвязными?

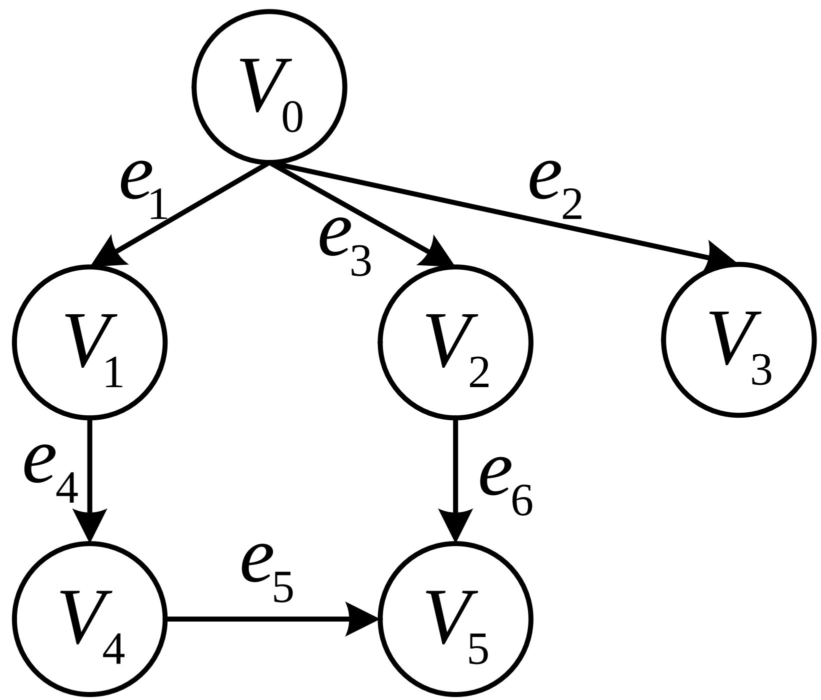
Ориентированные деревья

Орграф является ориентированным деревом, растущим из корня V_0, если:

1) он образует дерево в неориентированном смысле;

2) единственная цепь между V_0 и любой другой вершиной V является путем из V_0 в V.

Пример 11.
Какую дугу нужно убрать из графа для того, чтобы получить ориентированное дерево?
Сколько решений возможно?



Тема следующей лекции:

«Метрические характеристики. Матричное представление графов».