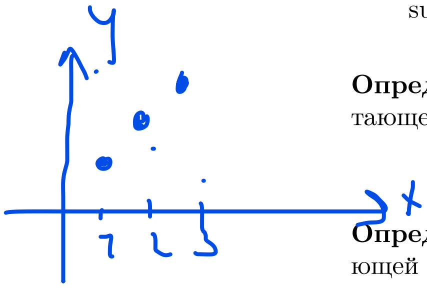
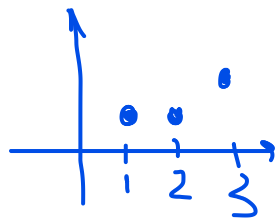
§ 2.5 Монотонные последовательности

Определение 2.11. Точная верхняя (нижняя) грань множества значений элементов последовательности $\{x_n\}$ называется точной верхней (нижней) гранью данной последовательности.

Обозначают

$$\sup\{x_n\} \text{ или } \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \quad (\text{соответственно } \inf\{x_n\} \text{ или } \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n).$$





Определение 2.12. Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей) последовательностью, если

$$x_{n+1} > x_n \ \forall n \in \mathbb{N} \ (x_{n+1} < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}).$$

Определение 2.13. Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей) последовательностью, если

$$x_{n+1} \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N} \ (x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}).$$

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие последовательности называются монотонными.

Теорема 2.10 (Вейерштрасс). *Если последовательность является монотонной и ограниченной, то она имеет предел.*

$x_m \leq x_n \ \forall n > m$

Доказательство. Ограничимся доказательством теоремы для случая ограниченной сверху и неубывающей последовательности. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то есть множество чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ограничено сверху, то существует точная верхняя грань этой последовательности (см. § 1.8). Обозначим $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$. По определению точной верхней грани это означает, что
1) все члены последовательности $\{x_n\}$ не превосходят a, то есть

$$x_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

2) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется член последовательности, больший $a - \varepsilon$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N}: \ x_m > a - \varepsilon. \tag{2.11}$$

Так как $\{x_n\}$ – неубывающая последовательность, то

$$x_m \leq x_n \quad \forall n > m. \tag{2.12}$$

Из (2.10)–(2.12) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists m \in \mathbb{N}: \ \ \forall n > m \ \to \ a - \varepsilon < x_m \leq x_n \leq a < a + \varepsilon, \Rightarrow$$

то есть $|x_n - a| < \varepsilon$. Это означает, согласно определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

□

Следствие 2.1. Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n, \quad 0! = 1$$

Число e. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \longrightarrow e \approx 2.7$$

и покажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная сверху. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{n}$$

$$x_n = C_n^0 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \ldots + \underset{=1}{C_n^n} \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n},$$

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad k = \overline{0, n}, \qquad 0! = 1.$$

Запишем x_n в следующем виде:

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot n\cdot n\ldots n} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \tag{2.13}$$

$$<1 \quad <1 \quad <1$$

Тогда

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right). \tag{2.14}$$

$$n < n+1, \quad \frac{m}{n} > \frac{m}{n+1}, \quad 1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$$

Все слагаемые в суммах (2.13) и (2.14) положительны, причем каждое слагаемое суммы (2.13) меньше соответствующего слагаемого суммы (2.14), так как $1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$, $m = \overline{1, n-1}$, а число слагаемых в

$m = 1, 2, \ldots, n-1$

сумме (2.14) на одно больше, чем в сумме (2.13). Поэтому $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то есть $\{x_n\}$ – возрастающая последовательность. Кроме того, учитывая, что $0 < 1 - \frac{m}{n} < 1$ $(m = \overline{1, n-1})$, из равенства (2.13) получаем $\boxed{x_n < 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}$. Так как $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ при $k \in \mathbb{N}$, то, используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем $x_n < 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \boxed{1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Следовательно,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}}$

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k = 2 \cdot 3 \ldots k \geq 2^{k-1}$

$k! \geq 2^{k-1}$

$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

то есть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность. По теореме 2.10 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Этот предел обозначается буквой e. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - 1/2} =$

$= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) =$

$= 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$

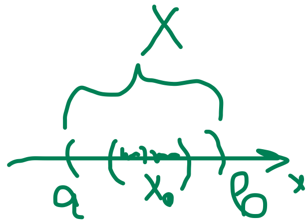
Число e является иррациональным, оно служит основанием натуральных логарифмов и играет важную роль в математике. Справедливо приближенное равенство

$$e \approx 2,718281828459045.$$

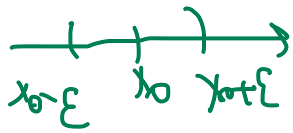
Глава 3

Предел функции. Непрерывность

$f : X \to \mathbb{R}$



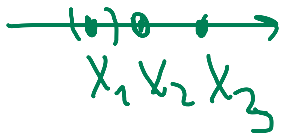
§ 3.1 Определение предела функции



Определение 3.1. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если в любой ее окрестности существует отличная от нее точка, принадлежащая множеству X.

$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : \ x \neq x_0, \ |x - x_0| < \varepsilon}$

Теорема 3.1. *Если x_0 – предельная точка множества X, то существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что*
1. $x_n \in X, \ x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$,
2. $x_n \to x_0$ *при* $n \to \infty$.

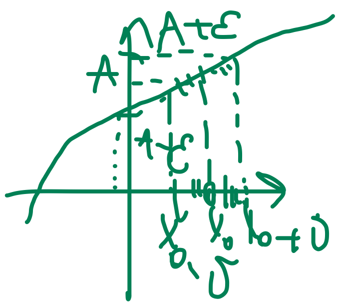


$X = \{x_1, x_2, x_3\}$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 = 1$. Тогда $\exists x_1 \in X : |x_1 - x_0| < 1, \ x_1 \neq x_0$. Пусть $\varepsilon_2 = 1/2$. Тогда $\exists x_2 \in X : |x_2 - x_0| < 1/2, \ x_2 \neq x_0$ и т.д. Пусть $\varepsilon_n = 1/n$. Тогда $\exists x_n \in X : |x_n - x_0| < 1/n, \ x_n \neq x_0$. Продолжаем эту процедуру произвольное число раз. Получим последовательность $\{x_n\} : x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$. Из неравенства $|x_n - x_0| < 1/n$ следует, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. □

$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$

$0 \quad 0 \quad 0$



Определение 3.2 (Коши). Действительное число A называется пределом функции $f : X \to \mathbb{R}$ в предельной точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Записывают $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.}$

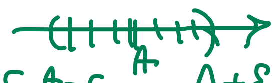
$|x - x_0| < \delta$

$|x - x_0| > 0$

$|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow$

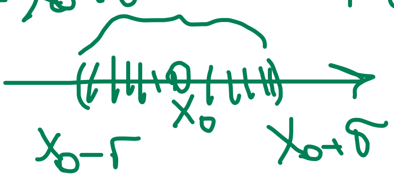
$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$

$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$



$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{0}{0}$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \mathring{U}(x_0, \delta)$



Определение 3.3 (Гейне). Действительное число A называется пределом функции $f : X \to \mathbb{R}$ в предельной точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Теорема 3.2. *Определения 3.2 и 3.3 эквивалентны.*

Доказательство. а) Докажем сначала, что если функция f имеет в точке x_0 предел в смысле определения 3.2, то она имеет тот же самый предел в этой точке и в смысле определения 3.3.

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка множества X и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения 3.2. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность элементов из X, сходящаяся к точке x_0 и $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Согласно определению предела последовательности для найденного $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ можно указать номер m такой, что $\forall n > m \to |x_n - x_0| < \delta$. Тогда $\boxed{|f(x_n) - A| < \varepsilon.}$ Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, и, следовательно, число A является пределом функции f в точке x_0 в смысле определения 3.3.

б) Докажем, что если число A есть предел функции f в точке x_0 в смысле определения 3.3, то это же число является пределом функции f в смысле определения 3.2. Допустим, что это неверно. Тогда

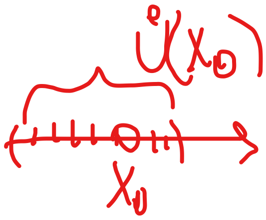
$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\, \exists x(\delta) \in X,\ 0 < |x(\delta) - x_0| < \delta : |f(x(\delta)) - A| \geq \varepsilon. \quad (3.1)$$

Возьмем $\delta = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, и обозначим $x_n = x(1/n)$. Тогда в силу (3.1) для любого $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in X$ и выполняются неравенства

$$0 < |x_n - x_0| < 1/n, \quad \Rightarrow x_n \to x_0 \quad (3.2)$$

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon \quad (3.3)$$

Из (3.2) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а из (3.3) заключаем, что число A не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Следовательно, число A не является пределом функции f в точке x_0 в смысле определения 3.3. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение. $\square$

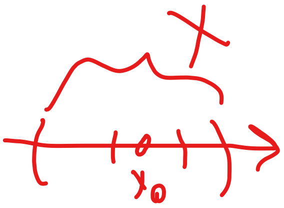


§ 3.2 Свойства пределов функций

Определение 3.4. Проколотой окрестностью точки x_0 называется множество, получающееся удалением точки x_0 из ее окрестности.

Обозначают $\mathring{U}(x_0)$.

В частности, проколотая δ-окрестность точки x_0 обозначается $\mathring{U}(x_0, \delta)$.



Теорема 3.3. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет предел в точке x_0, то она ограничена на пересечении некоторой проколотой окрестности точки x_0 с множеством X.*

$|f(x)-A|<1$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогда, согласно определению 3.2, для любого $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = 1$, найдется $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - A| < 1$. Иначе говоря, для всех $x \in X \cap \mathring{U}(x_0, \delta)$ справедливы неравенства $A - 1 < f(x) < A + 1$, а это означает ограниченность функции f на пересечении $X \cap \mathring{U}(x_0, \delta)$. □

$-1<f(x)-A<1$

$A-1<f(x)<A+1$

Теорема 3.4. *Если функция f имеет предел в точке x_0, то он единственный.*

Теорема 3.5. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда существуют и конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)]$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$, а если $g(x) \neq 0$, $B \neq 0$, то и предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = A + B,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x) = AB, \tag{3.4}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Замечание 3.1. Справедливость теорем 3.4 и 3.5 следует из справедливости соответствующих утверждений для числовых последовательностей, переход к которым осуществляется на основе определения Гейне.

Следствие 3.1. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, *то* $\forall\, c \in \mathbb{R}$ *существует и предел* $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x)$, *причем*

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = cA.$$

Отметим, что $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В качестве δ можно взять любое положительное число. Тогда $\forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |c - c| = 0 < \varepsilon$.

$\forall x \in X$

$h(x) = c$

$\forall \varepsilon$

$\underbrace{|h(x)}_{= c} - c| < \varepsilon$

$|c - c| < \varepsilon$

$0 < \varepsilon$

Далее, из (3.4) получаем

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = \overbrace{\lim_{x \to x_0} c}^{= c} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)}_{= A} = cA.$$

Таким образом, постоянный множитель можно выносить за знак предела.

§ 3.3 Односторонние пределы

Определение 3.5. Действительное число A называется пределом функции $f : X \to \mathbb{R}$ слева при $x \to x_0$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$ $\forall x \in X,\ x_0 - \delta < x < x_0 \to |f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ или $f(x_0 - 0) = A$.

Определение 3.6. Действительное число A называется пределом функции $f : X \to \mathbb{R}$ справа при $x \to x_0$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$ $\forall x \in X,\ x_0 < x < x_0 + \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0) = A$.

Теорема 3.6. *Для существования конечного предела* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали и совпадали односторонние пределы* $f(x_0 + 0)$ *и* $f(x_0 - 0)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то есть

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$

В частности, это будет справедливо $\forall x \in X,\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $\forall x \in X,\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Таким образом, существуют оба односторонних предела и $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.