Кольца и поля

Определения

Кольцо

Кольцом называют множество R на котором заданы две бинарные операции $\{+, *\}$ со следующими свойствами $\forall a, b, c \in R$

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность.
2. $\exists 0_R$ т. ч. $0_R + a = a + 0_R = a$ — нейтрал по сложению.
3. $\forall a \in R\ \exists b \in R$ т. ч. $a + b = b + a = 0_R$ — противоположный элемент по сложению $b = -a$.
4. $a + b = b + a$ — коммутативность по сложению.
5. $a * (b * c) = (a * b) * c$ — ассоциативность по умножению.
6. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ и $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$ — дистрибутивность.

Свойства 1–4 — абелева группа по сложению, 5 – полугруппа по умножению, 6 — двусторонняя дистрибутивность.

Иногда, кольцом называют множество без свойства 5, а со свойством 5 — ассоциативным кольцом.

АКУ-кольцо

Рассматривают также два дополнительных свойства:

7. $\exists 1_R \in R$ такой, что $a * 1_R = 1_R * a = a$ — кольцо с единицей (унитарность).
8. $a * b = b * a$ — коммутативность по умножению.

Кольцо со свойствами 5,7,8 называют ассоциативным коммутативным унитарным кольцом, АКУ-кольцо или акузативное кольцо. Кольцо со свойствами 5 и 7, но без 8 называют моноидом.

Поле

Если к свойствам АКУ-кольца добавить еще два требования:

9. $\forall a \in R\ \exists b \in R$ такой что $a * b = b * a = 1_R$ — противоположный элемент по умножению $b = a^{-1}$,
10. $1_R \neq 0_R$,

то получим определение поля.

- Элемент кольца $a \in R$ называется левым (правым) делителем нуля, если $\exists b \neq 0_R$ такой что $a * b = 0_R$ $(b * a = 0_R)$.
- Если умножение в кольце коммутативно, то понятия левого и правого элементов совпадают.
- Сам 0_R называется собственным (тривиальным) делителем нуля. Делители нуля отличные от 0_R называется нетривиальными или несобственными.

В дальнейшем мы будем использовать именно поля, поэтому дадим еще раз полное его определение.

Полное определение поля

Полем называют множество $\mathbb{P}$ на котором заданы две бинарные операции $\{+, *\}$ со следующими свойствами $\forall a, b, c \in \mathbb{P}$

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность.
2. $\exists 0_{\mathbb{P}}$ т. ч. $0_{\mathbb{P}} + a = a + 0_{\mathbb{P}} = a$ — нейтрал по сложению.
3. $\forall a \in \mathbb{P}\ \exists b \in \mathbb{P}$ т. ч. $a + b = b + a = 0_{\mathbb{P}}$ — противоположный элемент по сложению $b = -a$.
4. $a + b = b + a$ — коммутативность по сложению.
5. $a * (b * c) = (a * b) * c$ — ассоциативность по умножению.
6. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ и $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$ — дистрибутивность.
7. $\exists 1_{\mathbb{P}} \in \mathbb{P}$ такой, что $a * 1_{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{P}} * a = a$ — кольцо с единицей (унитарность).
8. $a * b = b * a$ — коммутативность по умножению.
9. $\forall a \in \mathbb{P}\ \exists b \in \mathbb{P}$ такой что $a * b = b * a = 1_{\mathbb{P}}$ — противоположный элемент по умножению $b = a^{-1}$,
10. $1_{\mathbb{P}} \neq 0_{\mathbb{P}}$.

Кольца и поля

Примеры

Примеры полей

Пример

Примерами полей являются числовые множества:

- $\mathbb{Q}$ — рациональные числа,
- $\mathbb{R}$ — действительные числа,
- $\mathbb{C}$ — комплексные числа,
- Алгебраические числа (корни полиномов).

В дальнейшем мы будем почти всегда использовать поле действительных чисел $\mathbb{R}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Для краткости их элементы будем называть скалярами.