Лекция 10

Точки локального экстремума функции n переменных (продолжение)

Заданной квадратичной форме $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x^i x^k$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Критерий Сильвестра. Для того, чтобы квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x^i x^k$, $a_{ik} = a_{ki}$, $i,k = 1,\ldots,n$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\vdots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того, чтобы квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} < 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0,$$

и так далее.

Теорема 10.1. Пусть $f \in C^2(U(\mathbf{x}_0);\mathbb{R})$, $\mathbf{x}_0$ – стационарная точка функции f. Тогда, если квадратичная форма

$A(dx, dx) = A(dx^1, \ldots, dx^n; dx^1, \ldots, dx^n)$

$$= A(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j, \qquad (10.1)$$

то есть второй дифференциал функции f в точке $\mathbf{x}_0$, положительно определена (отрицательно определена), то $\mathbf{x}_0$ является точкой строгого минимума (строгого максимума). Если квадратичная форма (10.1) неопределена, то в точке $\mathbf{x}_0$ экстремума нет.

$dx = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$

Доказательство. Пусть точка

$$\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x} = (x_0^1 + dx^1, x_0^2 + dx^2, \ldots, x_0^n + dx^n)$$

принадлежит $U(\mathbf{x}_0)$.

Так как $\mathbf{x}_0$ – стационарная точка функции f, то $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^1} = \cdots = \dfrac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^n} = 0$. Тогда по формуле Тейлора получим

$$\Delta f = f(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j + \bar{\bar{o}}(\|d\mathbf{x}\|^2),$$

где $d\mathbf{x} = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$.

Если $d\mathbf{x} \neq 0$, то

$$\Delta f = \frac{\|d\mathbf{x}\|^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i \partial x^j} \frac{dx^i}{\|d\mathbf{x}\|}\frac{dx^j}{\|d\mathbf{x}\|} + 2\alpha(d\mathbf{x})\right) = \\ = \frac{\|d\mathbf{x}\|^2}{2}\left(A\left(\frac{dx^1}{\|d\mathbf{x}\|}, \cdots, \frac{dx^n}{\|d\mathbf{x}\|}\right) + 2\alpha(d\mathbf{x})\right). \quad (10.2)$$

Точка $\left(\dfrac{dx^1}{\|d\mathbf{x}\|}, \cdots, \dfrac{dx^n}{\|d\mathbf{x}\|}\right)$ лежит на единичной сфере $\mathtt{S}$ (то есть на сфере с центром в начале координат и радиусом $R = 1$), так как $\left(\dfrac{dx^1}{\|d\mathbf{x}\|}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{dx^n}{\|d\mathbf{x}\|}\right)^2 = 1$.

Пусть квадратичная форма (10.1) знакопеременна. Тогда $\inf\limits_{\mathtt{S}}|A| = \mu > 0$. Действительно, функция A является многочленом второй степени по своим переменным, поэтому A и $|A|$ являются непрерывными на компакте $\mathtt{S}$.

Согласно теореме Вейерштрасса, функция $|A|$ достигает своей нижней грани. По определению знакопеременной квадратичной формы модуль $|A|$ положителен на $\mathtt{S}$, значит, в частности, $\mu > 0$.

Выберем δ так, чтобы $2\big|\alpha(d\mathbf{x})\big| < \mu$ при $\|d\mathbf{x}\| < \delta$. Тогда при $\|d\mathbf{x}\| < \delta$, то есть при $(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}) \in U_\delta(\mathbf{x}_0) \subset U(\mathbf{x}_0)$ и $d\mathbf{x} \neq 0$, все выражения в правой части (10.2) будет иметь тот же знак, что и слагаемое $A\left(\dfrac{dx^1}{\|d\mathbf{x}\|}, \cdots, \dfrac{dx^n}{\|d\mathbf{x}\|}\right)$.

Поэтому, если квадратичная форма (10.1) является положительно определенной, то $\Delta f > 0$, если отрицательно определенной, то $\Delta f < 0$. Значит, в первом случае $\mathbf{x}_0$ является точкой строгого минимума, а во втором – точкой строгого максимума.

Допустим теперь, что квадратичная форма (10.1) является неопределенной. Тогда в любой окрестности точки $\mathbf{x}_0$ найдутся точки, в которых $\Delta f > 0$ и $\Delta f < 0$, то есть точка $\mathbf{x}_0$ не является точкой локального экстремума. □

Теорема 10.2. (Следствие теоремы 1). Пусть $n = 2$, а точка (x_0, y_0) является стационарной точкой функции $f \in C^2(U(x_0, y_0); \mathbb{R})$. Тогда (x_0, y_0) – точка строгого

$f(x,y)$

min (max), если

локального ~~экстремума функции~~

1) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 > 0 - \text{~~минимум~~},$$

2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 > 0 - \text{~~максимум~~}.$$

3) Если $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 < 0$, то точка (x_0,y_0) не является точкой локального экстремума функции f.

Доказательство. С учетом теоремы 10.1 остается доказать только последнюю часть утверждения. Обозначим

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\ \underset{=}{\overset{a_{21}}{a_{12}}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0),\ a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

Рассмотрим квадратичную форму $A(dx,dy) = a_{11}dx^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dy^2$. Если $a_{11} \neq 0$, то

$$A(dx,dy) = \frac{1}{a_{11}}\left((a_{11}dx + a_{12}dy)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)dy^2\right).$$

Если $dx \neq 0$, $dy = 0$, то получаем

$$A(dx,dy) = \frac{1}{a_{11}}a_{11}^2dx^2 = a_{11}dx^2,$$

то есть знак A совпадает со знаком a_{11}.

Если $dx = a_{12}$, $dy = -a_{11}$, то

$$A(dx,dy) = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)a_{11}^2 = a_{11}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right),$$

<0

то есть знак A противоположен знаку a_{11}.

Если $a_{22} \neq 0$, то получаем аналогичный результат. Если же $a_{11} = a_{22} = 0$, то

$$A(dx,dy) = 2a_{12}dxdy$$

– неопределенная квадратичная форма.

1) $dx = dy$

$A(dx,dx) = 2\boxed{a_{12}}dx^2$

2) $dx = -dy$

$A(dx,-dy) = -2a_{12}dx^2$

Основные теоремы о неявных функциях

Выясним условия, при которых одно уравнение с несколькими переменными определяет однозначно функцию, то есть определяет одну из этих переменных как функцию остальных. Рассмотрим функцию $F(x,y) = 0$.

Определение 10.1. Если функция двух переменных задана на некотором множестве $A \subset \mathbb{R}^2$, и существует такая функция $y = f(x)$, определенная на множестве $B \subset \mathbb{R}$, содержащаяся в проекции множества A на ось Ox, что для всех $x \in B$ имеет место $(x, f(x)) \in A$ и $F(x, f(x)) = 0$, то f называется *неявной функцией*, определяемой уравнениям $F(x,y) = 0$.

Пример. Пусть $x^2 + y^2 = 1$, то есть $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Функции $f_1 = \sqrt{1 - x^2}$ и $f_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, являются неявными функциями, задаваемые этим уравнениям.

Теорема 10.3. Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой прямоугольной окрестности $U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi,\ |y - y_0| < \eta\}$ точки (x_0, y_0) и при каждом фиксированном $\varkappa \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ строго монотонна по y на $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$. Тогда, если $F(x_0, y_0) = 0$, то существуют окрестности $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ такие, что для всех $x \in U(x_0)$ существует единственное решение $y \in U(y_0)$ уравнение $F(x, y) = 0$. Это решение, являющееся функцией от x и обозначаемое $y = f(x)$, непрерывно в точке x_0 и $y_0 = f(x_0)$.

Теорема 10.4. Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеет в этой окрестности частную производную $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$, которая непрерывна в точке (x_0, y_0). Тогда, если $F(x_0, y_0)$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то найдутся такие окрестности $U(x_0)$ и $U(y_0)$, что для всех $x \in U(x_0)$ существует единственное решение $y = f(x) \in U(y_0)$ уравнение $F(x, y) = 0$. Это решение непрерывно всюду в $U(x_0)$ и $y_0 = f(x_0)$.

Если дополнительно предположить, что функция F имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частную производную $F'_x(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0), то функция $f(x)$ также имеет в точке x_0 производную и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Теорема 10.5. Пусть функция $F(\mathbf{x}, y) \equiv F(x^1, \ldots, x^n, y)$ непрерывная в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}_0, y)$ и имеет в этой окрестности частную производную F'_y, непрерывную в точке $(\mathbf{x}_0, y_0)$. Если $F(\mathbf{x}, y) = 0$, а $F'_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$, то найдутся такие окрестности $U(\mathbf{x}_0)$ и $U(y_0)$, что для всех $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ существует единственное решение $y = f(x^1, \ldots, x^n) \in U(y_0)$ уравнение $F(\mathbf{x}, y) = 0$, причем это решение $y = f(\mathbf{x})$ непрерывно на $U(\mathbf{x}_0)$ и $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$.

Если, кроме того, в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}_0, y_0)$ существуют частные производные F'_{x^i}, $i = 1, \ldots, n$, непрерывные в точке $(\mathbf{x}_0, y_0)$, то существуют частные производные $f'_{x^i}(\mathbf{x}_0)$, непрерывные в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$. При этом

$$\frac{\partial y}{\partial x^i} = -\frac{F'_{x^i}}{F'_y}.$$