Теория конечных графов

Поток минимальной стоимости

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры

прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Литература

1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

Поиск потока минимальной стоимости

Обозначения:

k – число единиц потока из источника V_S в сток V_T с минимальной стоимостью.

$a(V_i,V_j)$ – стоимость прохождения единицы потока по дуге $<V_i,V_j>$.

В задаче о потоке минимальной стоимости требуется переслать фиксированное число k единиц потока из V_S в сток V_T с минимальной стоимостью, то есть найти значение $\min\left\{\sum_{<V_i,V_j>\in E} a(V_i,V_j)\times f(V_i,V_j)\right\}$ при условиях существования потока.

Поиск потока минимальной стоимости

$$V_i \xrightarrow{f(V_i,V_j),\ a(V_i,V_j),\ c(V_i,V_j)} V_j$$

Начальный поток – $f(V_i,V_j)$,

стоимость – $a(V_i,V_j)$,

пропускная способность – $c(V_i,V_j)$.

Для дуги $<V_i,V_j>$ значения $f, a, c \in \mathbf{Z}$.

Идея упрощенного алгоритма поиска потока минимальной стоимости

<u>Дано.</u> В графе $G=<\mathbf{V},\mathbf{E}>$ задан нулевой поток, то есть $f(V_i,V_j)=0,\ \forall <V_i,V_j>\in\mathbf{E}$.

<u>Шаг 1.</u> Из вершины V_S в вершину V_T пересылается как можно больше единиц потока, полная стоимость прохождения по графу каждой из которых равна нулю.

<u>Шаг 2.</u> На следующем шаге из вершины V_S в вершину V_T пересылается как можно больше единиц потока, полная стоимость прохождения по графу каждой из которых равна единице и так далее.

Полная стоимость каждой единицы потока равна разности суммы стоимостей прямых дуг и суммы стоимостей обратных дуг.

Идея упрощенного алгоритма поиска потока минимальной стоимости

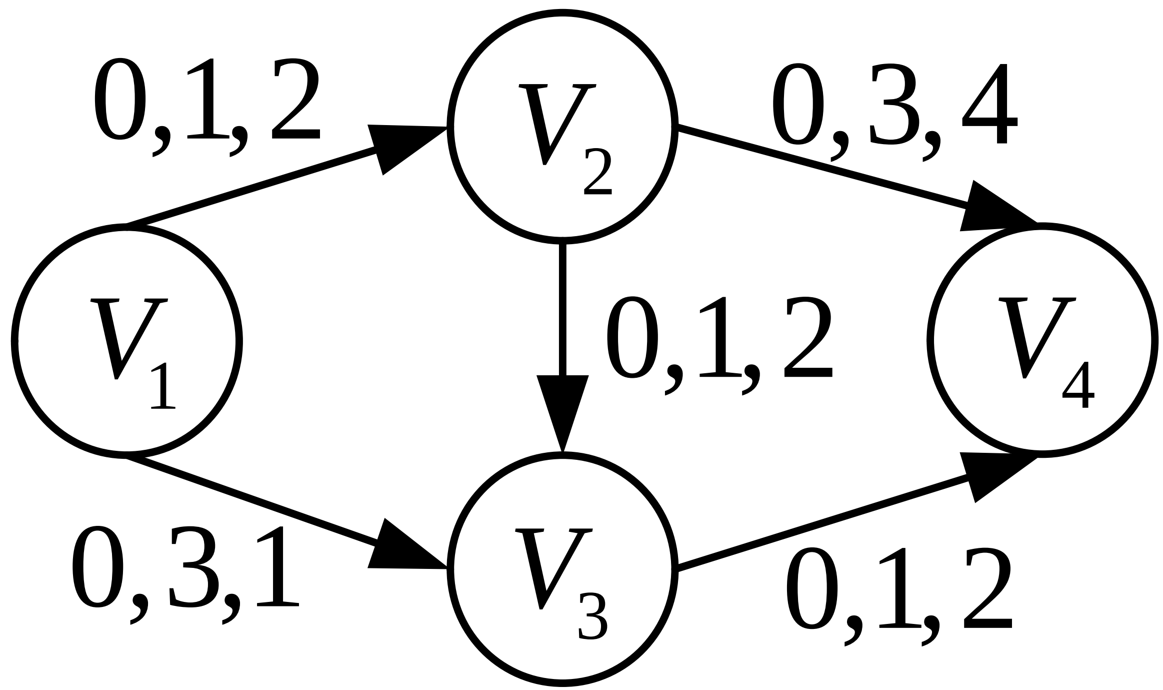
<u>Шаг 3.</u> В алгоритме поиска потока минимальной стоимости используется в качестве подалгоритма «Алгоритм поиска увеличивающей цепи», где цепь увеличивается на нужное количество единиц потока. В конце алгоритма можно подсчитать минимальную общую стоимость для k единиц потока:

$$P\left(k\right)=\min\left\{\sum_{<V_i,V_j>\in E} a(V_i,V_j)\times f(V_i,V_j)\right\}.$$

<u>Конец алгоритма.</u>

Пример поиска потока минимальной стоимости

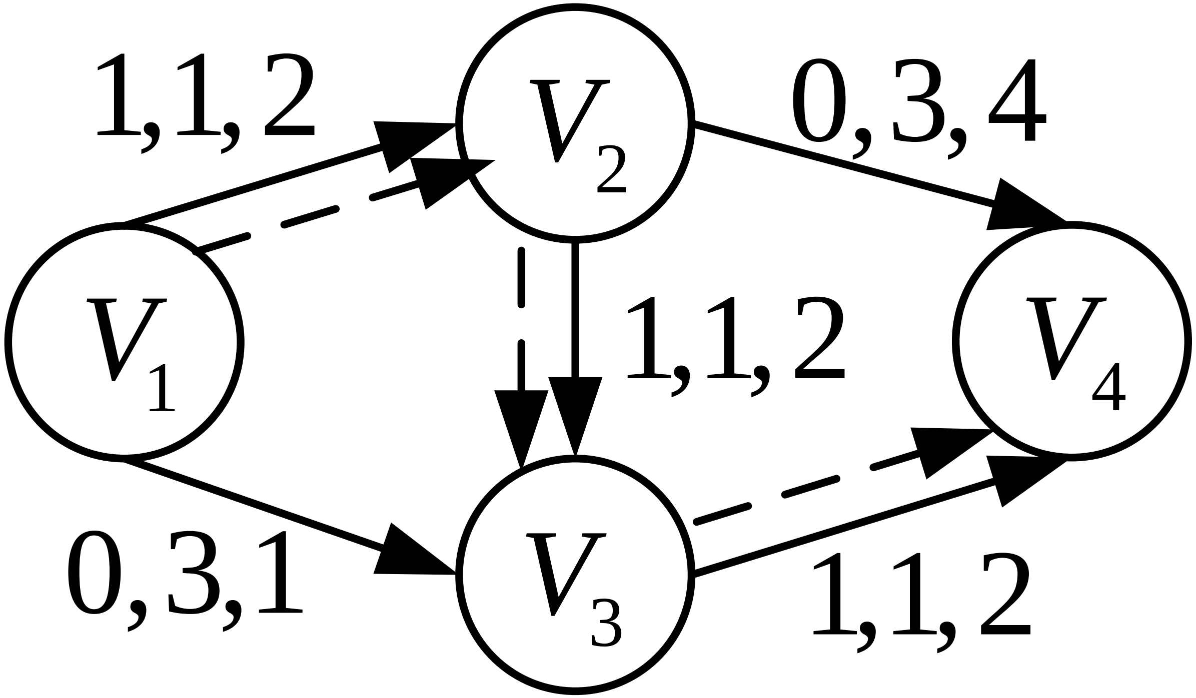
Для графа $G = <\mathbf{V}, \mathbf{E}>$ передать k единиц потока с минимальной стоимостью. Рассмотреть случаи $k = \overline{1;4}$. Найти минимальную стоимость для каждого случая. Начальная вершина $V_S = V_1$ и конечная вершина $V_T = V_4$.



Пример поиска потока минимальной стоимости

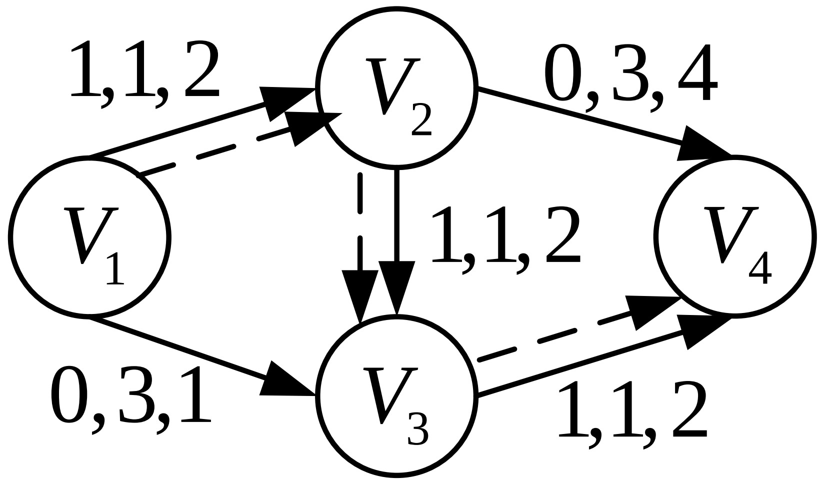
1. Так как не может быть передана ни одна единица потока с нулевой стоимостью, а также со стоимостью 1 и 2, то, по цепи $E_1 = \{ < V_1, V_2 >, < V_2, V_3 >, < V_3, V_4 > \}$ можно передать с минимальной стоимостью 2 единицы, каждая из которых будет иметь стоимость $P_1 = P_2 = 1 + 1 + 1 = 3,$ где P_1 – стоимость первой единицы. Тогда стоимость передачи первой единице потока из источника в сток равна $P(1) = 3$.

Пример поиска потока минимальной стоимости



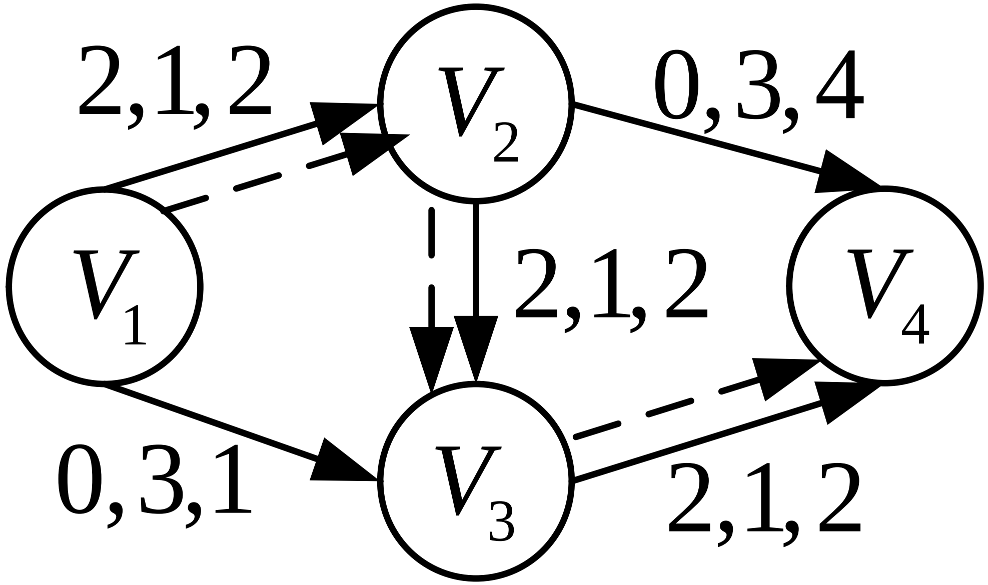
После передачи первой единицы потока по графу получаем следующий граф с выделением на нем первой увеличивающей цепи E_1. Если $k=1$, то ответом является значение $P(1)=3$.

Пример поиска потока минимальной стоимости



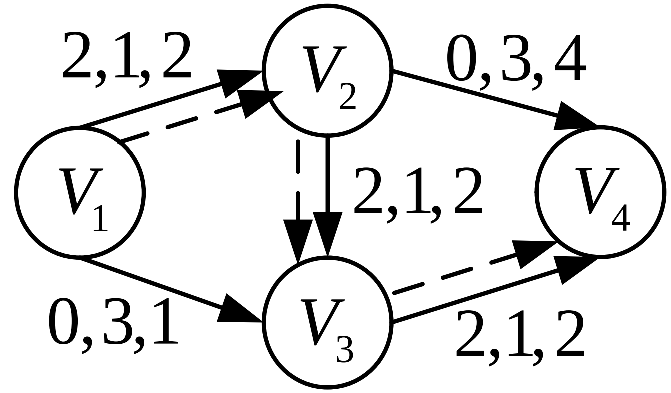
2) При $k = 2$ передаем вторую единицу потока из источника в сток, причем минимальное значение можно получить по той же самой увеличивающей цепи. Тогда $E_2 = \{<V_1, V_2>, <V_2, V_3>, <V_3, V_4>\}$, передаем вторую единицу потока , для которой $P_2 = 1+1+1=3.$ В случае $k = 2$ общая стоимость будет составлять $P(2) = P_1 + P_2 = 3+3=6$ – общая минимальная стоимость за две единицы потока.

Пример поиска потока минимальной стоимости



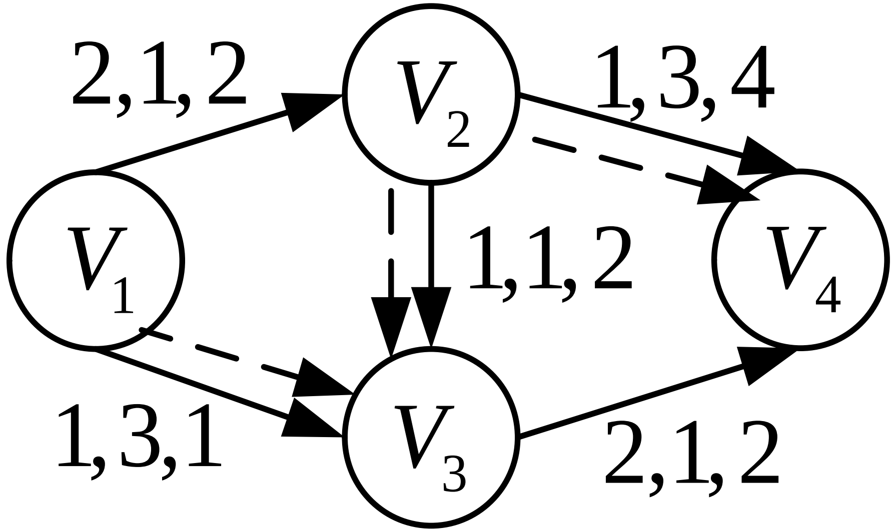
На рисунке изображен граф после передачи двух единиц потока из источника в сток с минимальной стоимостью, указана последняя увеличивающая цепь. При $k=2$ ответом является значение $P(2)=6$.

Пример поиска потока минимальной стоимости



3) Для случая $k=3$, можно использовать все предыдущие вычисления и добавить еще одну единицу потока с минимальной стоимостью. Из вершины $V_s = V_1$ уже нельзя перейти в вершину V_2, следовательно, путь проходит через в вершину V_3. Из вершины V_3 нельзя попасть сразу в вершину $V_T = V_4$, значит необходимо переходить по обратной дуге $< V_2, V_3 >$, уменьшая её поток на единицу, и из вершины V_2 в вершину $V_T = V_4$. Увеличивающая цепь для третьей единицы $E_3 = \{ < V_1, V_3 >, < V_2, V_3 >, < V_2, V_4 > \}$.

Пример поиска потока минимальной стоимости



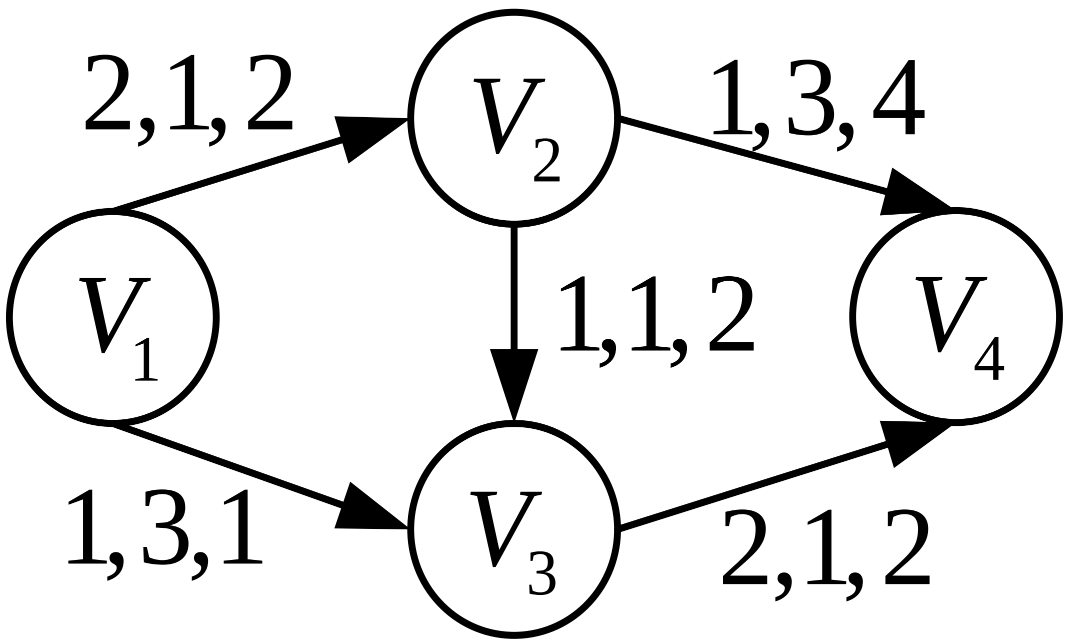
На рисунке изображен граф после передачи трех единиц потока. $P_3 = 3 - 1 + 3 = 5$ - стоимость только третьей единицы потока, $P(3) = P_1 + P_2 + P_3 = 6 + 5 = 11$ – общая стоимость трех единиц потока минимальной стоимости.

С другой стороны, можно посчитать по общей формуле $P(k) = \min \sum \{a(V_i, V_j) \times f(V_i, V_j)\}$, т.е.

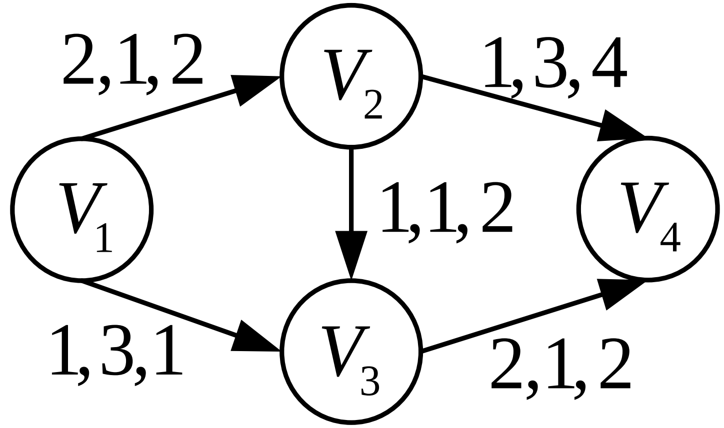
$$P(3) = 2\times 1 + 1\times 3 + 1\times 1 + 1\times 3 + 2\times 1 = 2 + 3 + 1 + 3 + 2 = 11.$$

Пример поиска потока минимальной стоимости

4. После передачи трех единиц потока получен следующий граф. Определите, можно ли передать четвертую единицу потока?



Пример поиска потока минимальной стоимости



При передаче трех единиц потока дуги графа, выходящие из источника, насыщаются. Дуга $<V_1,V_2>$ может передать только 2 единицы потока, а дуга $<V_1,V_3>$ только 1 единицу, то есть $K_{\max} = \sum_{V_j \in \mathbf{V}} c(V_1,V_j) = 3,\ 3<4 \quad \Rightarrow$ 4 единицы потока передать невозможно.

<u>Ответ.</u> $P(1)=3$, $P(2)=6$, $P(3)=11$; нельзя передать 4 единицы потока.

Тема следующей лекции:

«Алгоритм почтальона»