Замечание 3.2. Теорема 3.14 неверна для промежутков, не являющихся отрезками. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не ограничена на этом интервале. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$, но не ограничена на $\mathbb{R}$.

Теорема 3.15 (вторая теорема Вейерштрасса)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает своих точной верхней и точной нижней граней, то есть*

$$\exists\ \overline{x} \in [a, b] : \ f(\overline{x}) = \sup_{x \in [a,b]} f(x), \tag{3.28}$$

$$\exists\ \underline{x} \in [a, b] : \ f(\underline{x}) = \inf_{x \in [a,b]} f(x). \tag{3.29}$$

Доказательство. Так как непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f ограничена (теорема 3.14), то есть множество значений, принимаемых функцией f на отрезке $[a, b]$, ограничено, то существуют $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$

Докажем утверждение (3.28). Обозначим $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. В силу определения точной верхней грани выполняются условия

$$\forall x \in [a, b] \to f(x) \le M, \tag{3.30}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x(\varepsilon) \in [a, b] : f(x(\varepsilon)) > M - \varepsilon. \tag{3.31}$$

$x_n \le y_n \le z_n$

$a \quad a \quad a$

Полагая $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, получим, в силу условия (3.31), последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = x\left(\frac{1}{n}\right)$, такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются условия

$$x_n \in [a, b], \tag{3.32}$$

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}. \tag{3.33}$$

Из соотношений (3.30), (3.32) и (3.33) следует, что

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

откуда получаем

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M. \tag{3.34}$$

Как и в теореме 3.14, из условия (3.32) следует, что существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и точка $\overline{x}$ такие, что

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \overline{x}, \quad \text{где } \overline{x} \in [a, b].$$

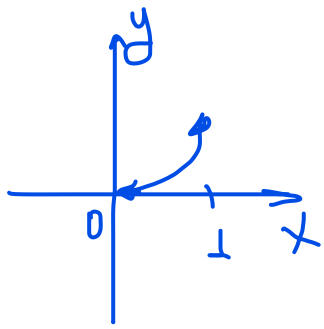
В силу непрерывности функции f в точке $\overline{x}$

$$f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\overline{x}). \tag{3.35}$$

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ – подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, сходящейся, согласно условию (3.34), к числу M. Поэтому

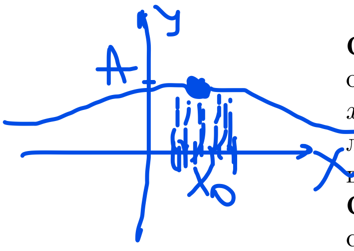
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M. \tag{3.36}$$

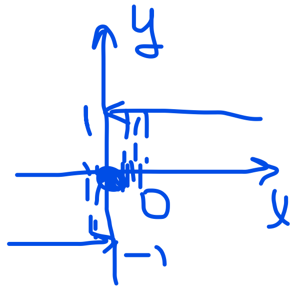
В силу единственности предела последовательности из соотношений (3.35) и (3.36) заключаем, что $f(\overline{x}) = M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Утверждение (3.28) доказано. Аналогично доказывается утверждение (3.29). $\square$



Замечание 3.3. Теорема 3.15 неверна для интервалов: функция, непрерывная на интервале, может не достигать своих точных граней. Например, функция $f(x) = x^2$ не достигает на интервале $(0, 1)$ своей точной нижней грани, равной нулю, и точной верхней грани, равной единице.

§ 3.9 Точки разрыва функции





Определение 3.21. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки. Точка x_0 называется точкой разрыва функции f, если функция f не определена в точке x_0 или если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

Определение 3.22. Если x_0 – точка разрыва функции f и существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода.

$y = \operatorname{sgn} x$

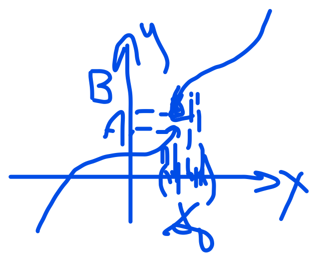
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$$

$$f(x_0) = A$$

Величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции f в точке x_0. Если скачок функции f в точке разрыва x_0 равен нулю, т.е. $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Точка разрыва функции, не являющаяся ее точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.



§ 3.10 Непрерывность сложной функции

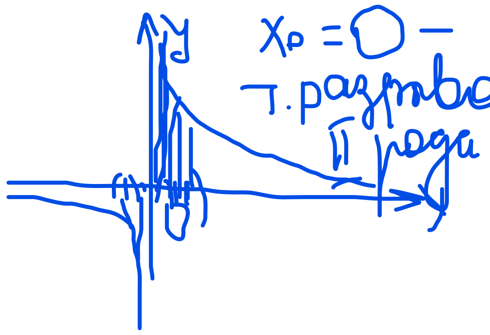
Теорема 3.16. *Пусть функция $f : X \to Z$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а функция $g : Z \to Y$ непрерывна в соответствующей точке*

$y = g(f(x))$

$y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty$$



$x_0 = 0$ – т. разрыва II рода

$z_0 = f(x_0)$. *Тогда сложная функция* $y = g(f(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. По условию теоремы функция g непрерывна в точке z_0, то есть $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\forall z \in Z,\ |z - z_0| < \sigma \to |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon. \tag{3.37}$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0 для указанного $\sigma > 0$ найдется $\delta = \delta(\sigma) > 0$ такое, что

z z_0

$$\forall x \in X,\ |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \sigma. \tag{3.38}$$

Полагая в (3.37) $z = f(x)$, $z_0 = f(x_0)$ и учитывая (3.38), получаем, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in X,\ |x - x_0| < \delta \to |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Это означает, в силу определения непрерывности, что функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0. $\square$

§ 3.11 Равномерная непрерывность

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение 3.23. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если

$\forall$, x_0 — фикс.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in X,\ |x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Лемма 3.4. *Всякая равномерно непрерывная на множестве* X *функция непрерывна на нем.*

Доказательство. В определении равномерной непрерывности зафиксируем точку x_2, получим определение непрерывности в этой точке. $\square$

$y = x^2$, $X = [a, b]$

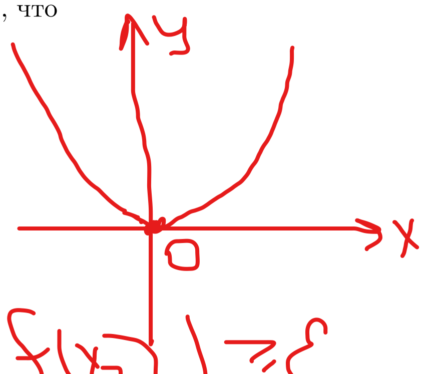
Теорема 3.17 (Кантор). *Функция, непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Докажем теорему от противного. Допустим, что на отрезке $[a, b]$ существует непрерывная, однако не равномерно непрерывная на нем функция f. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие точки $x' \in [a, b]$ и $x'' \in [a, b]$, что

X

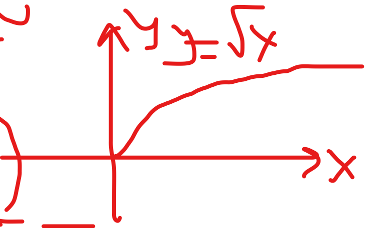
$y = x^2$, $X = \mathbb{R}$ непр. на $\mathbb{R}$. Докажем, что она не явл. равн. непр. на $\mathbb{R}$.

$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$



$x_n' = \sqrt{n+1}$, $x_n'' = \sqrt{n}$

$$|x_n' - x_n''| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \delta$$



$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = +\infty - (+\infty) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{n+1}}_{\to+\infty}+\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = |\cancel{n+1} - \cancel{n}| = 1$$

$n \in \mathbb{N}$

$|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. В частности, для $\delta_n = 1/n$ найдутся такие точки, обозначим их x_n' и x_n'', что

$\{x_n'\}, \{x_n''\}$

$$|x_n' - x_n''| < 1/n,$$

но

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon.$$

$$|f(x_n') - f(x_n'')| > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Из ограниченной последовательности $\{x_n'\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}'\}$. Обозначим ее предел x_0:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}' = x_0.$$

Поскольку $a \leq x_{n_k}' \leq b$, $k = 1, 2, ...$, то $a \leq x_0 \leq b$. Функция f непрерывна в точке x_0, поэтому

$$f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}'\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}') = f(x_0). \tag{3.39}$$

Подпоследовательность $\{x_{n_k}''\}$ последовательности $\{x_n''\}$ также сходится к точке x_0, ибо при $k \to \infty$

$$|(x_{n_k}'' - x_{n_k}') + (x_{n_k}' - x_0)| = |x_{n_k}'' - x_0| \leq |x_{n_k}'' - x_{n_k}'| + |x_{n_k}' - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k}' - x_0| \to 0.$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}'') = f(x_0). \tag{3.40}$$

Из (3.39) и (3.40) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}') - \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}'') = \lim_{k\to\infty}\left[f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')\right] = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

а это противоречит условию, что при всех $k = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \geq \varepsilon > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Определение 3.24. Колебанием функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве X называется величина

$$w(f; X) = \sup_{x_1, x_2 \in X} |f(x_1) - f(x_2)|.$$