Теория конечных графов

1. Организация учебного процесса

2. Неориентированные графы

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной информатики и теории вероятностей РУДН
Маркова Екатерина Викторовна
markova_ev@pfur.ru

Курс теории конечных графов

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Элементы теории графов**	Введение в теорию графов: основные понятия и определения. Матричные представления графов. Маршруты, цепи, циклы. Нахождение связных компонент. Метрические характеристики графов. Подграфы. Операции над графами. Деревья. Эйлеровы графы. Гамильтоновы графы. Эйлеровы пути и циклы. Гамильтоновы пути и циклы. Связь между наличием в связном графе гамильтоновых циклов и длиной максимальных простых путей в нем. Нахождение кратчайших путей в ориентированном графе.
2.	**Алгоритмы на графах**	Алгоритм Краскала. Алгоритм Прима. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм нахождения эйлерова цикла в графе. Алгоритм построения кратчайшего пути от фиксированной вершины до всех остальных вершин в ориентированном графе, случай неотрицательных весов ребер.
3.	**Потоки в сетях**	Прикладные модели и задачи, примеры применения методов теории графов. Оценки структурных компонент графа. Задача о максимальном потоке и о минимальном разрезе в сети. Максимальный поток в транспортной сети. Задача на нахождение «узких» мест в сети. Задача о потоке минимальной стоимости.

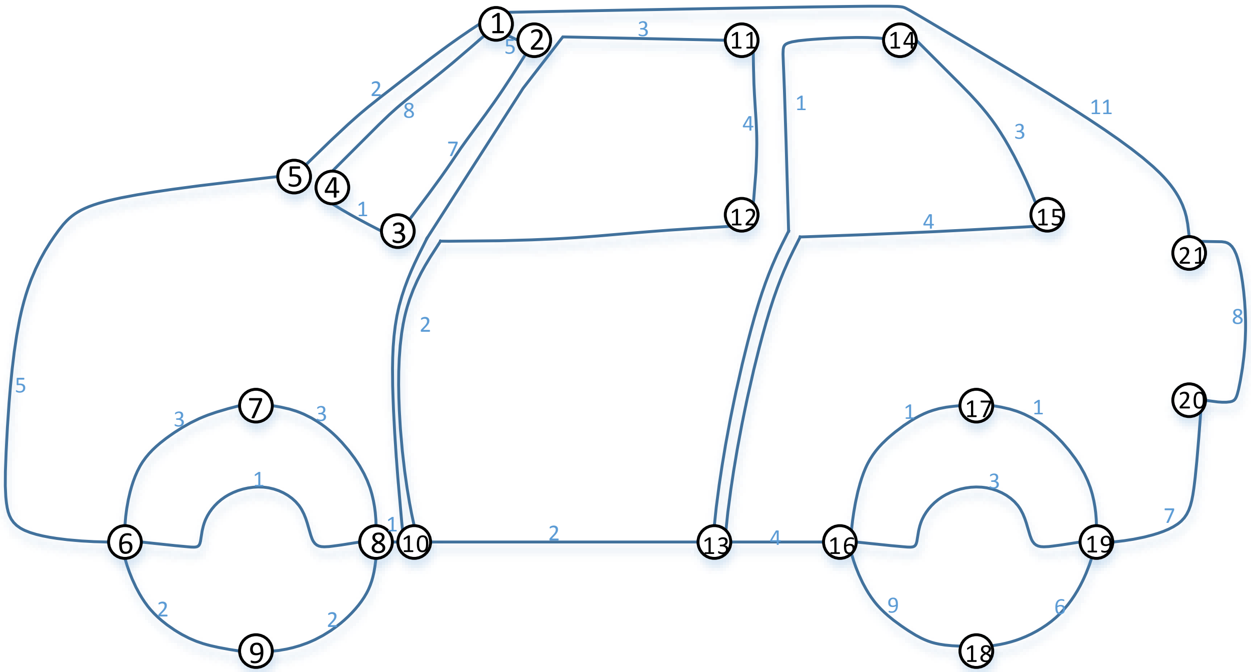
БРС

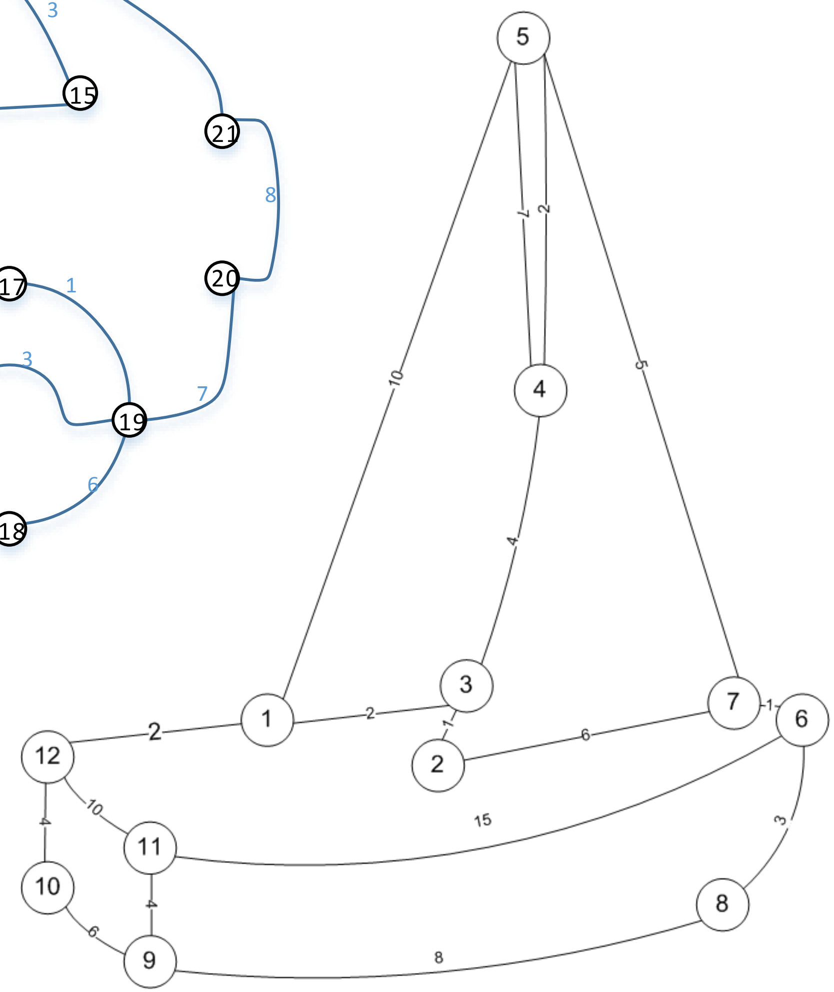
Раздел	Тема	Формы контроля уровня освоения ООП			Баллы темы	Баллы раздела
		Выполнение ПЗ (ЛР)	Контр. тест.	Итог. контр. знаний		
1.	Основные понятия ТГ. Неориентированные и ориентированные графы. Метрические характеристики графов.	0	15 (работа на семинарах /лекциях)	5	20	20
2.	Алгоритмы на графах: Краскала, Прима, Дейкстры, поиска Эйлерова цикла, Уоршала–Флойда. Транзитивное замыкание.	8 !	25	10	40	40
3.	Потоки на графах. Задача почтальона для ориентированных графов. Гамильтоновы графы.	7 !	25	5	40	40
Итого		15	65	20	100	100

Литература

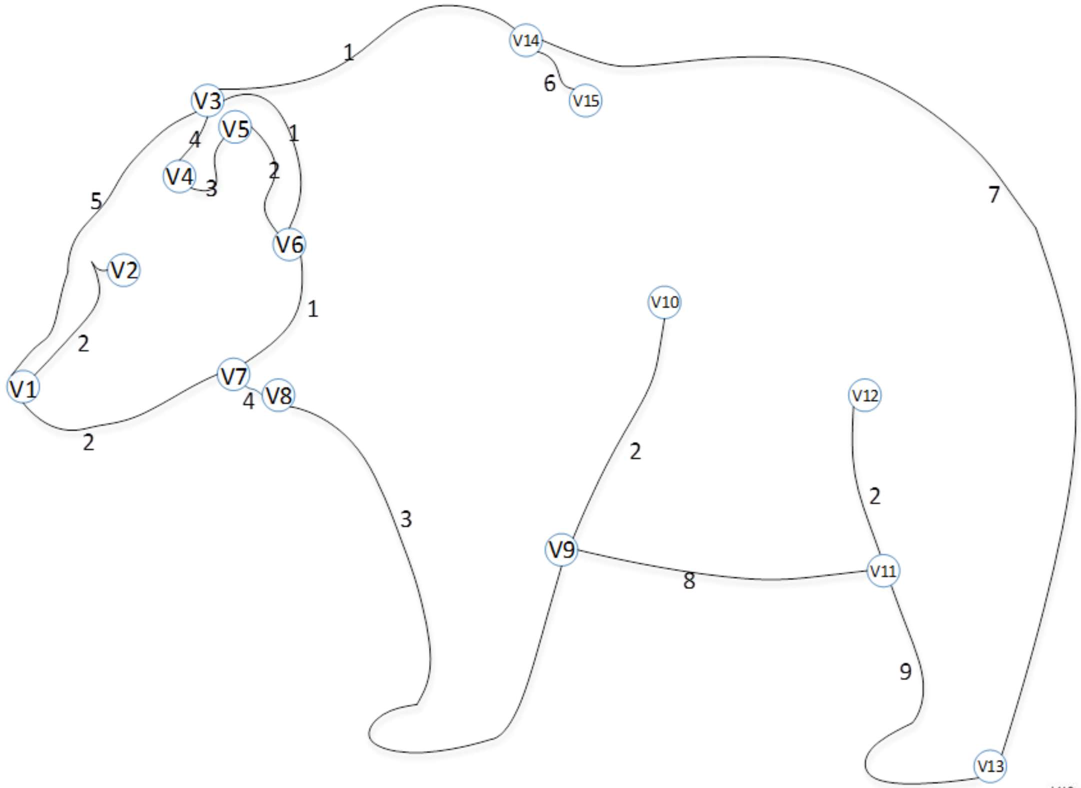
1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Емеличев В.А., Мельников О.И. Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. «Лекции по теории графов» М.: Либроком, 2014.- 392 с.
3. Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
4. Годунова Е.К. «Введение в теорию графов. Индивидуальные задания» М.: МПГУ, 2012. – 44 с.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

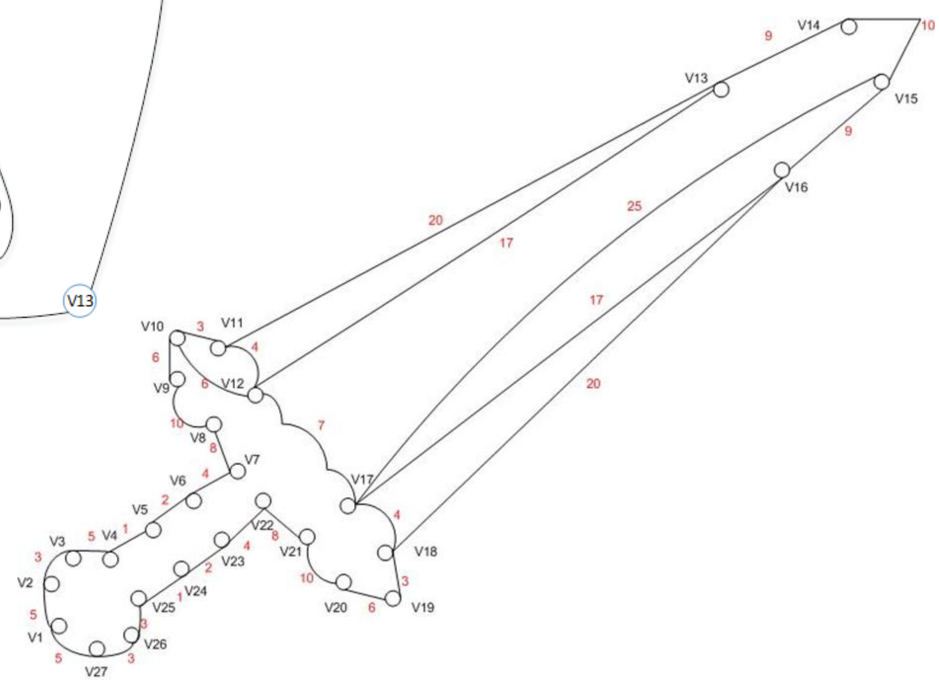
Примеры графов



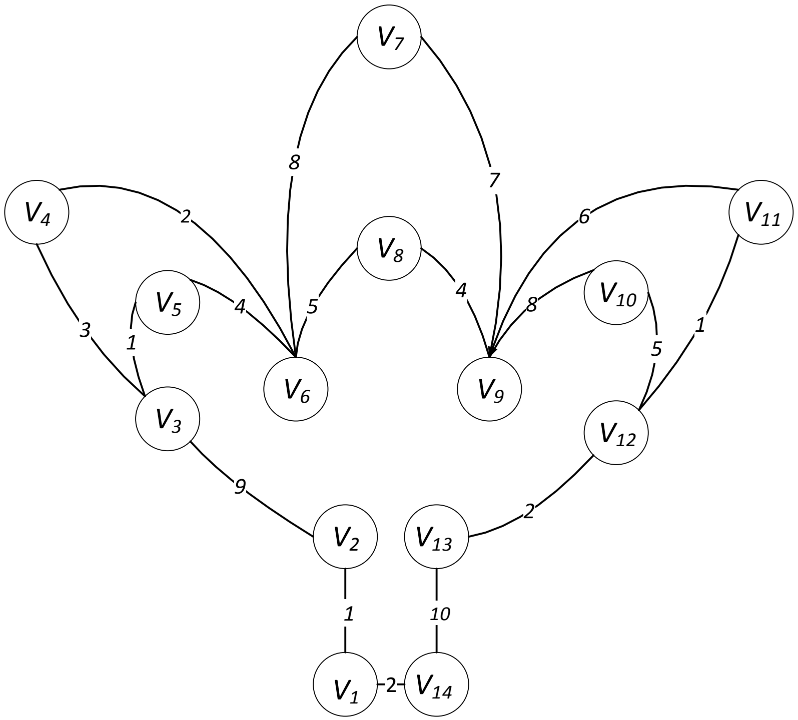


Примеры графов





Примеры графов



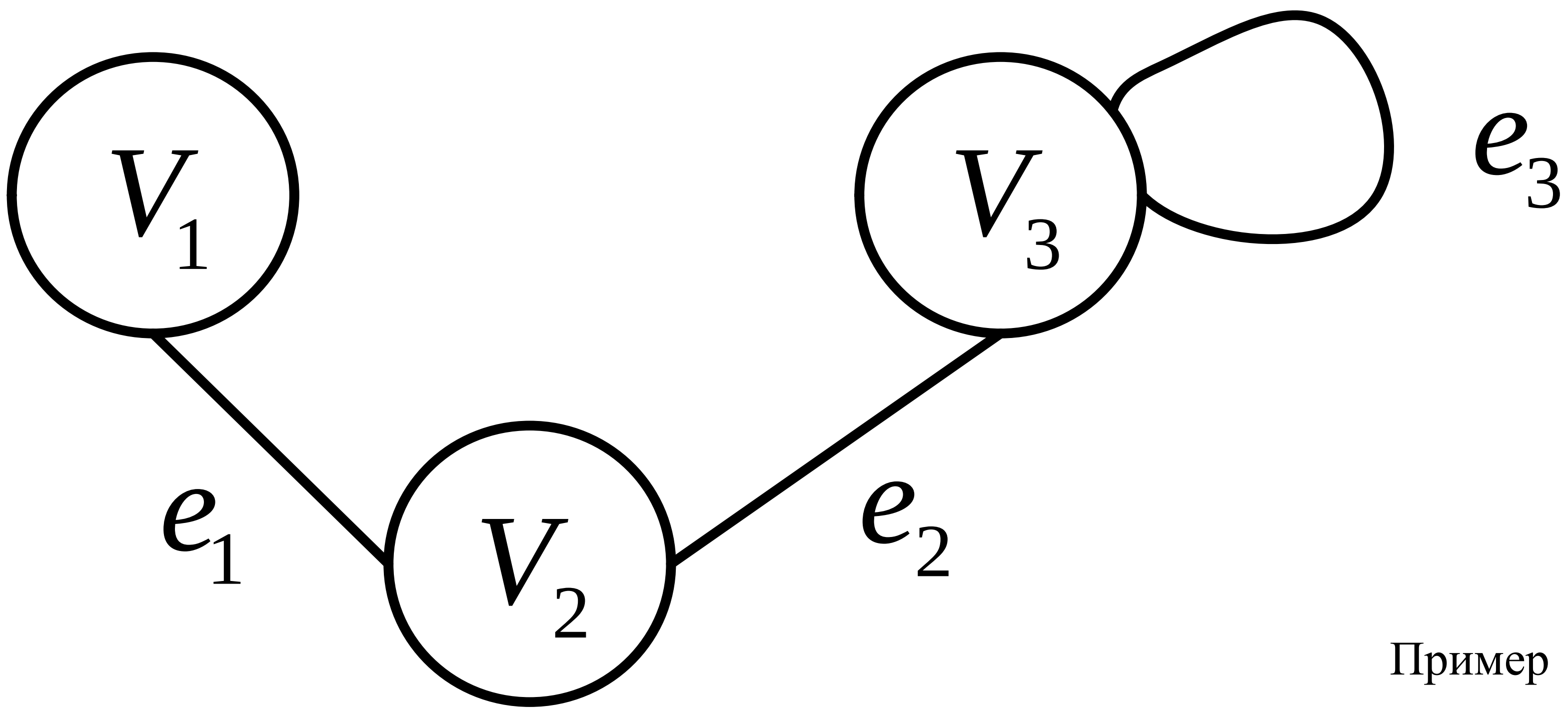
Определение неорграфа

Пусть $\mathbf{V}$ – непустое множество, $\mathbf{V}^{(2)}$ – множество всех его двухэлементных подмножеств, т.е. $(V_1, V_2) \in \mathbf{V}^{(2)}$, если $V_1, V_2 \in \mathbf{V}$.

Неориентированным графом (или просто графом) называется пара $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^{(2)}$.

Элементы множества $\mathbf{V}$ называются вершинами графа, а элементы множества $\mathbf{E}$ – ребрами.

Пример неографа



Пример 1.

Множество вершин: $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$,

множество ребер: $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$,

где $e_1 = (V_1, V_2)$, $e_2 = (V_2, V_3)$ и $e_3 = (V_3, V_3)$.

Смежность и инцидентность

Если ребро e соединяет вершины V_1 и V_2, $e = (V_1, V_2) \in \mathbf{E}$, то вершины V_1, V_2 называются смежными, а ребро $e = (V_1, V_2)$ называется ребром, инцидентным вершинам V_1 и V_2.

Если ребро e инцидентно вершинам V_1 и V_2, то такие вершины называются граничными точками ребра e.

Если вершины V_1 и V_2 – граничные точки ребра e и вершина V_1 совпадает с вершиной V_2, то ребро e называется петлей. (В этом случае вершина V_1 смежна сама с собой.)

Если вершины V_1 и V_2 одновременно инцидентны ребрам e_1 и e_2, то ребра e_1 и e_2 – называются параллельными ребрами.

Ребра e_1 и e_2 называются смежными, если они имеют хотя бы одну общую граничную точку.

Смежность и инцидентность

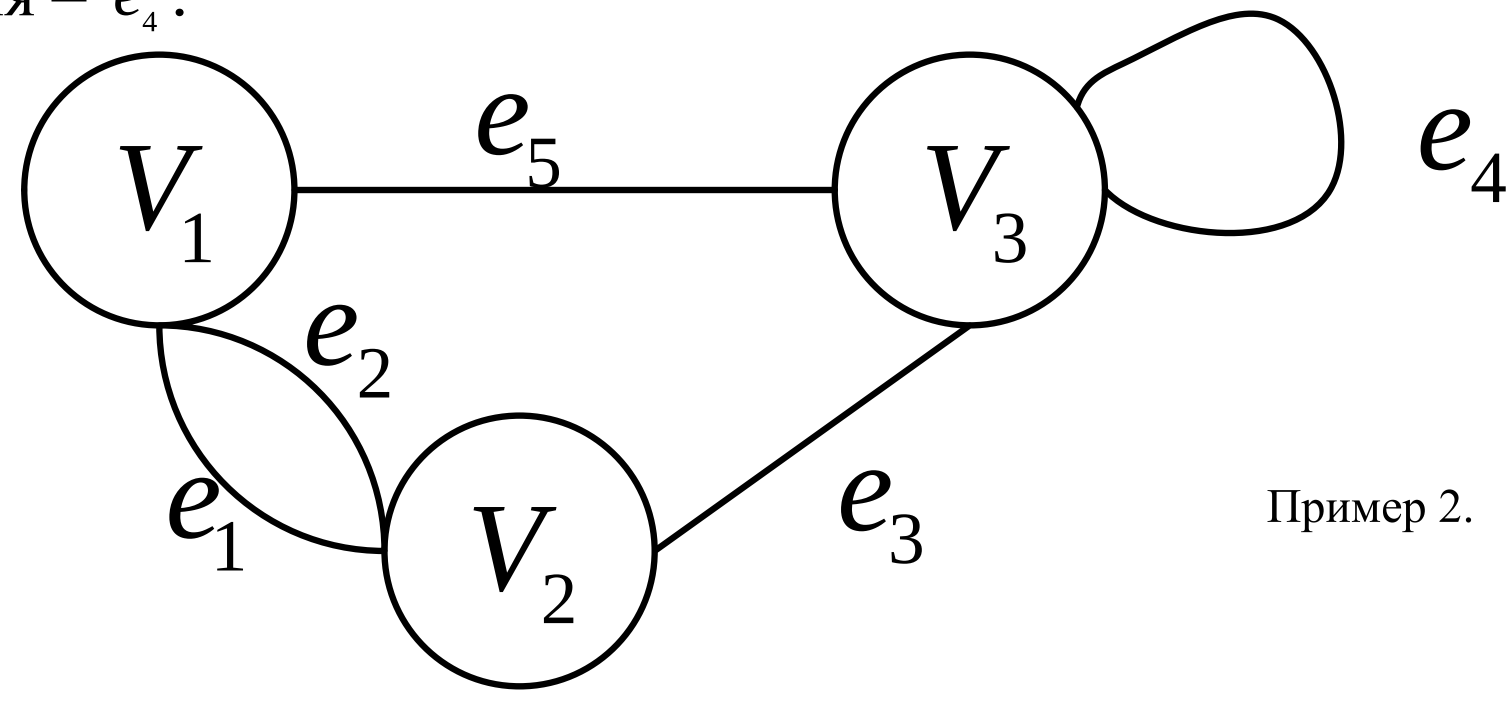
Параллельные ребра e_1 и e_2,

смежные ребра e_3 и e_5,

ребра e_1 и e_4 не смежные,

также как и e_2 и e_4.

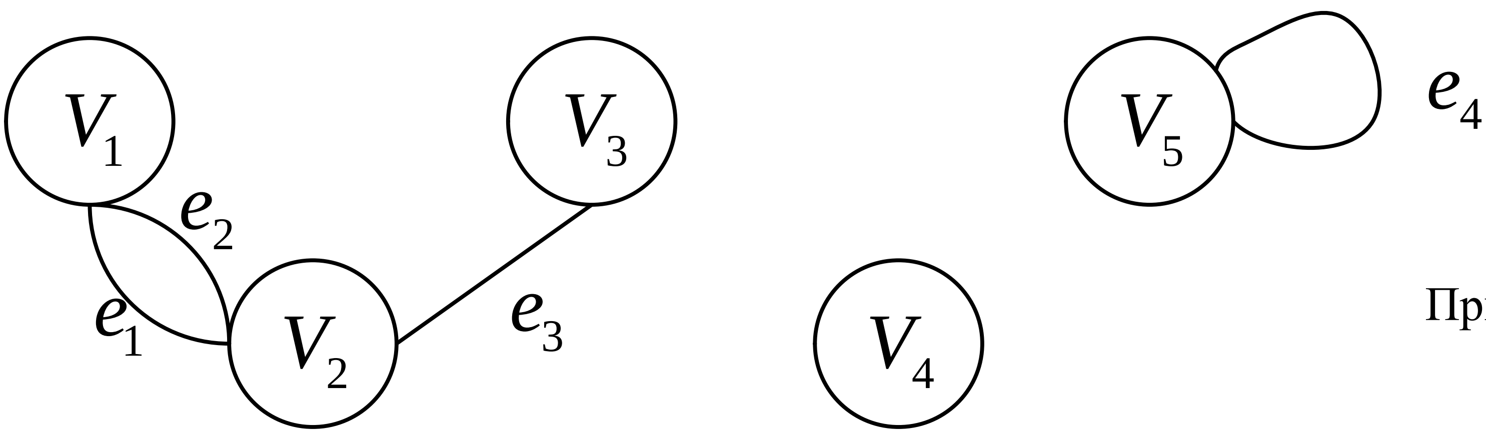
Петля – e_4.



Пример 2.

Степень вершины

Число ребер, инцидентных вершине V (петля учитывается дважды), называется степенью вершины V и обозначается $\delta(V)$. Вершина V изолирована, если $\delta(V)=0$. В случае петли, например, в вершине V_1, $\delta(V_1)=2$.

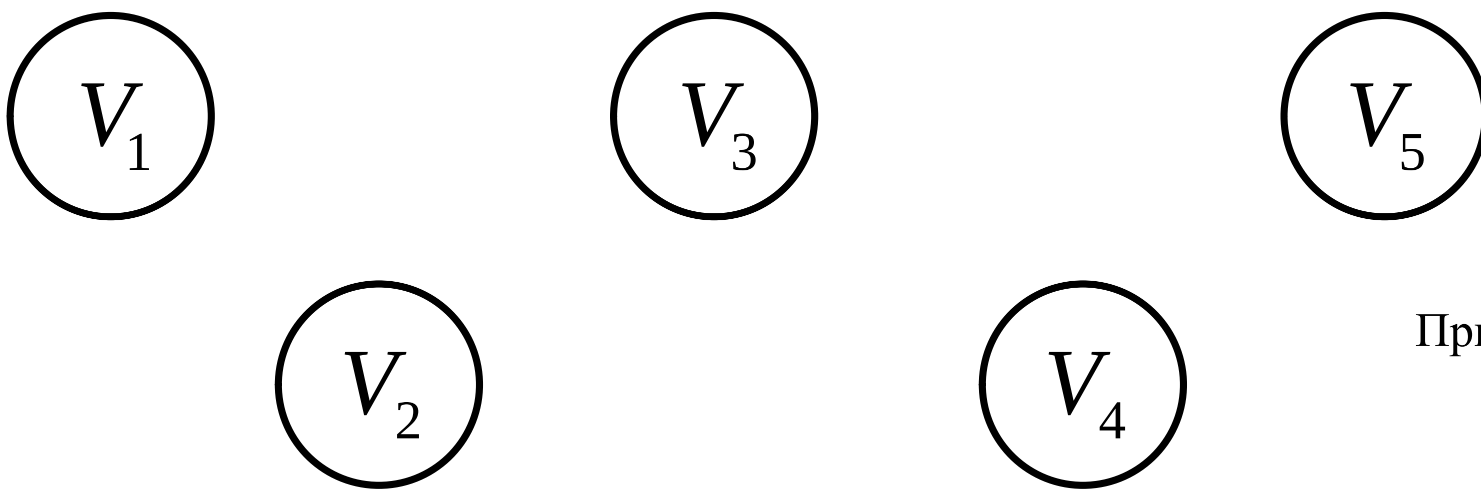


Пример 3.

$\delta(V_1)=2,\ \delta(V_2)=3,\ \delta(V_4)=0,\ \delta(V_5)=2.$

Вырожденный граф

Граф называется вырожденным (пустым), если все его вершины являются изолированными.



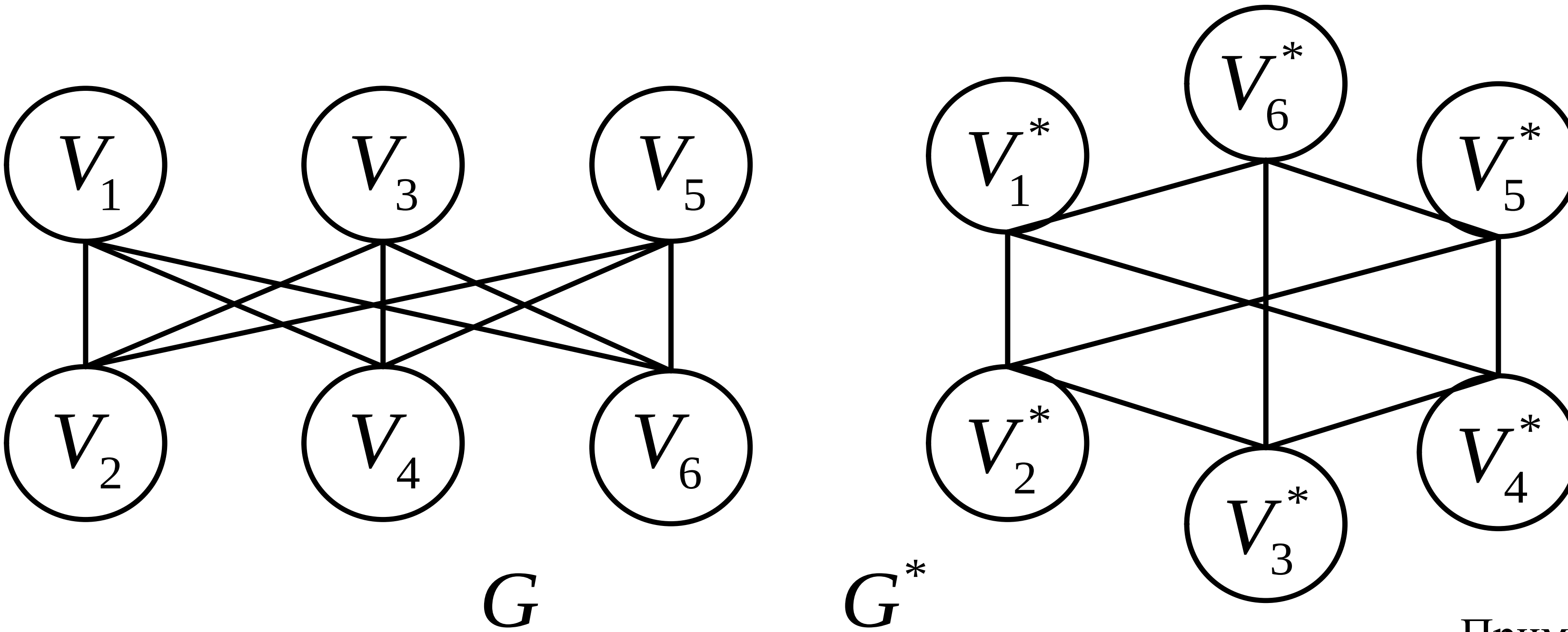
Пример 4.

Изоморфизм графов

Рассмотрим два графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ и $G^* = (\mathbf{V}^*, \mathbf{E}^*)$, и пусть существует биекция (взаимно однозначное отображение) – $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$.

Если для любых вершин V_i и V_j графа G их образы $\varphi(V_i)$ и $\varphi(V_j)$ смежны в G^* тогда и только тогда, когда вершины V_i и V_j смежны в G, то эта биекция называется изоморфизмом графа G на граф G^*. Если такой изоморфизм существует, то граф G *изоморфен* графу G^*.

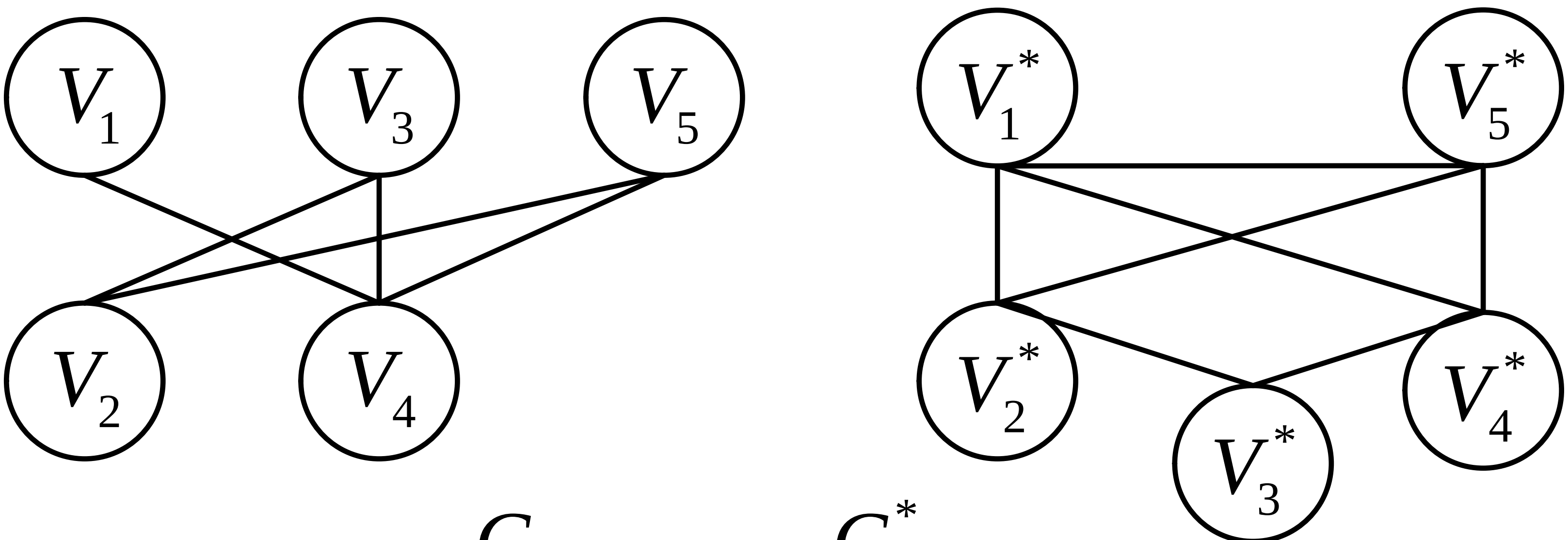
Пример изоморфных графов



Пример 5.

Для графов G и G^* вершины пронумерованы соответствующим образом.

Пример неизоморфных графов



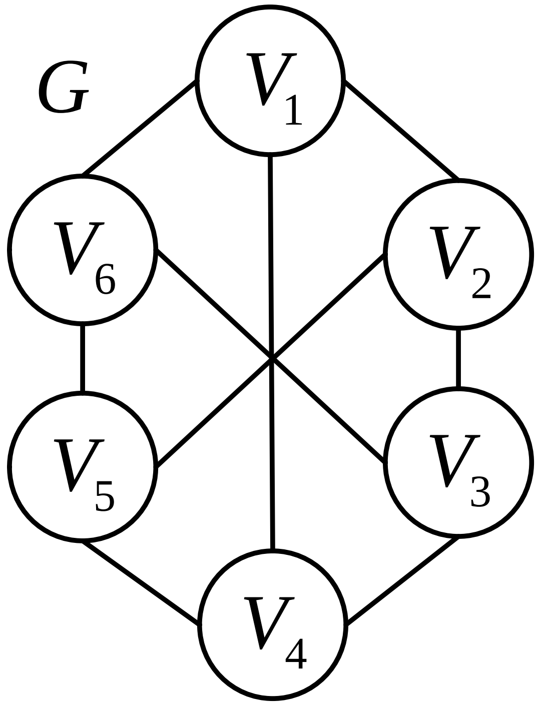
G $\qquad$ G^*

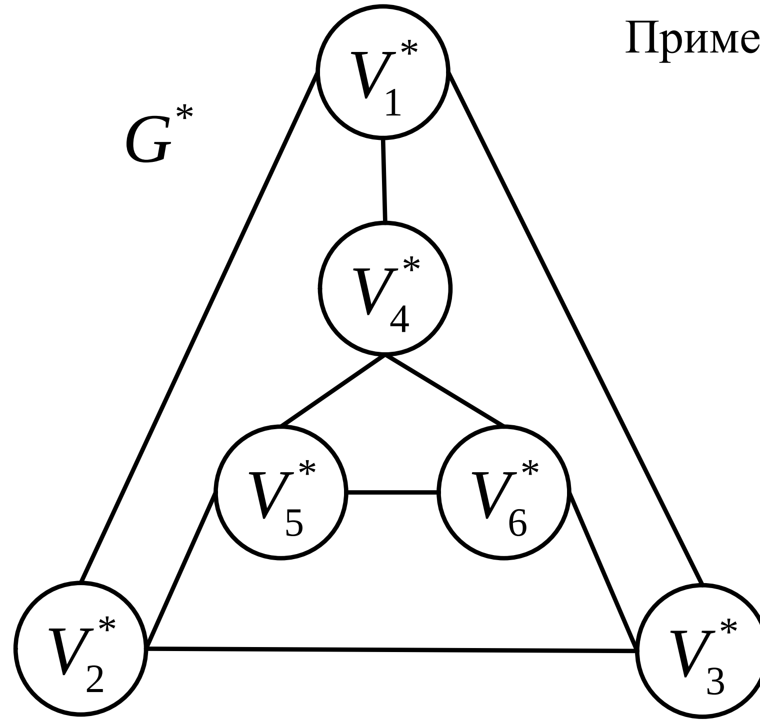
Пример 6.

Для этих двух графов G и G^* число вершин одинаковое, но, например, степень вершины V_1 графа G равна единице, а в графе G^* нет вершин, степень которых меньше двух. Читателю предлагается найти другие признаки неизоморфности.

Упражнение: определить, изоморфны ли графы?

Пример 7.





Даны два графа G и G^*. Являются ли эти два графа изоморфными? Если графы являются изоморфными, найдите биекцию.

Теорема о числе вершин нечетной степени в графе 1/3

Теорема: В конечном графе число вершин нечетной степени четно.

Док-во. Нечетная степень вершины означает, что число ребер, инцидентных данной вершине, нечетно. Докажем, что количество таких вершин в графе четно.

Рассмотрим конечный граф $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$. Пусть $|\mathbf{V}|$ и $|\mathbf{E}|$ – число вершин и ребер соответственно.

Утверждение. $\sum_{V \in \mathbf{V}} \delta(V) = 2 \cdot |\mathbf{E}|$.

Теорема о числе вершин нечетной степени в графе 2/3

Разобьем множество вершин $\mathbf{V}$ на два множества: $\mathbf{V} = \mathbf{V_2} \bigcup \mathbf{V_1}$.

1) $\mathbf{V_2}$ – множество всех вершин, имеющих четные степени, $\sum\limits_{V \in \mathbf{V_2}} \delta(V)$ – сумма степеней вершин четной степени.

2) $\mathbf{V_1}$ – множество всех вершин, имеющих нечетные степени, $\sum\limits_{V \in \mathbf{V_1}} \delta(V)$ – сумма степеней вершин нечетной степени.

$$\sum_{V \in \mathbf{V}} \delta(V) = \sum_{V \in \mathbf{V_2}} \delta(V) + \sum_{v \in \mathbf{V_1}} \delta(V) \text{ и } \sum_{V \in \mathbf{V_1}} \delta(V) = \sum_{V \in \mathbf{V}} \delta(V) - \sum_{V \in \mathbf{V_2}} \delta(V).$$

Теорема о числе вершин нечетной степени в графе 3/3

Так как по утверждению $\sum_{V \in \mathbf{V}} \delta(V) = 2 \cdot |\mathbf{E}|$, то эта сумма является четной. Сумма $\sum_{V \in \mathbf{V}_2} \delta(V)$ также четна, так как суммируются четные степени вершин.

$\Rightarrow \sum_{V \in \mathbf{V_1}} \delta(V)$ – эта сумма также четна, так как является конечной суммой четных чисел.

В сумме $\sum_{V \in \mathbf{V_1}} \delta(V)$ суммируются нечетные числа. Для того, чтобы сумма $\sum_{V \in \mathbf{V_1}} \delta(V)$ была четной, количество слагаемых должно быть четно. $\Rightarrow$ Количество вершин нечетной степени четно. □

Подграф

Граф $G_1 = (\mathbf{V_1}, \mathbf{E_1})$ называется подграфом графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ при соблюдении следующих условий:

1. $\mathbf{V_1} \subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{E_1} \subseteq \mathbf{E}$.

2. Если ребро $e \in \mathbf{E_1}$ инцидентно вершинам V_1 и $V_2 \in \mathbf{V_1}$, то ребро $e \in \mathbf{E}$, также инцидентно вершинам $V_1, V_2 \in \mathbf{V}$.

Маршруты, цепи и циклы

Конечная последовательность ребер $e_1, e_2, ..., e_n$ графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ (не обязательно различных) называется маршрутом длины n, если существует последовательность $V_0, V_1, V_2, ..., V_n$ вершин (не обязательно различных), таких, что e_i инцидентно вершинам V_{i-1} и V_i, $i = \overline{1, n}$. (Здесь номера вершин и ребер показывают последовательность в маршруте, а не нумерацию в графе.) Маршрут замкнут, если $V_0 = V_n$ (циклический маршрут).

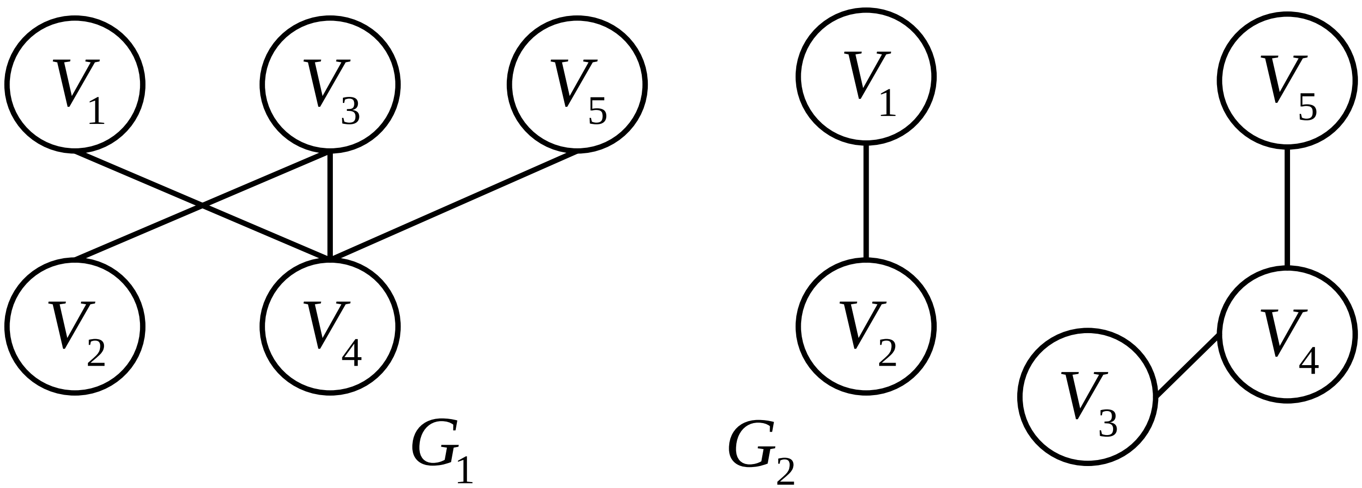
Маршрут называется цепью, если все его ребра различны и простой цепью, если все его вершины различны (в этом случае и все его ребра различны).

Замкнутая цепь называется циклом.

Простая замкнутая цепь называется простым циклом.

Связность

Граф $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ называется связным, если каждая пара различных вершин может быть соединена, по крайней мере, одной цепью. В противном случае граф называется несвязным.



Пример 8. Связный и несвязный графы

Теорема о связности графа

Граф $G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ связен тогда и только тогда, когда множество его вершин нельзя разбить на два непустых подмножества $\mathbf{V}=\mathbf{V}_1\bigcup\mathbf{V}_2$ так, что обе граничные точки каждого ребра находятся в одном и том же подмножестве.

Теорема о связности графа

Граф $G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ связен тогда и только тогда, когда множество его вершин нельзя разбить на два непустых подмножества $\mathbf{V}=\mathbf{V}_1\bigcup\mathbf{V}_2$ так, что обе граничные точки каждого ребра находятся в одном и том же подмножестве.

Доказательство. (от противного в обе стороны)

1) (слева направо) Пусть $G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ несвязен. Выберем произвольную вершину V_i из множества $\mathbf{V}_1$. Множество $\mathbf{V}_1$ состоит из вершины V_i и всех вершин, которые могут быть соединены с V_i цепью. Так как G – несвязен, то $\exists\,\mathbf{V}_2=\mathbf{V}\setminus\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2\neq\varnothing$. По построению множества $\mathbf{V}_1$ ни одно ребро из множества $\mathbf{V}_1$ не соединяет вершину из множества $\mathbf{V}_1$ ни с одной вершиной из множества $\mathbf{V}_2$, т.е. $\exists$ разбиение G на непустые подмножества.

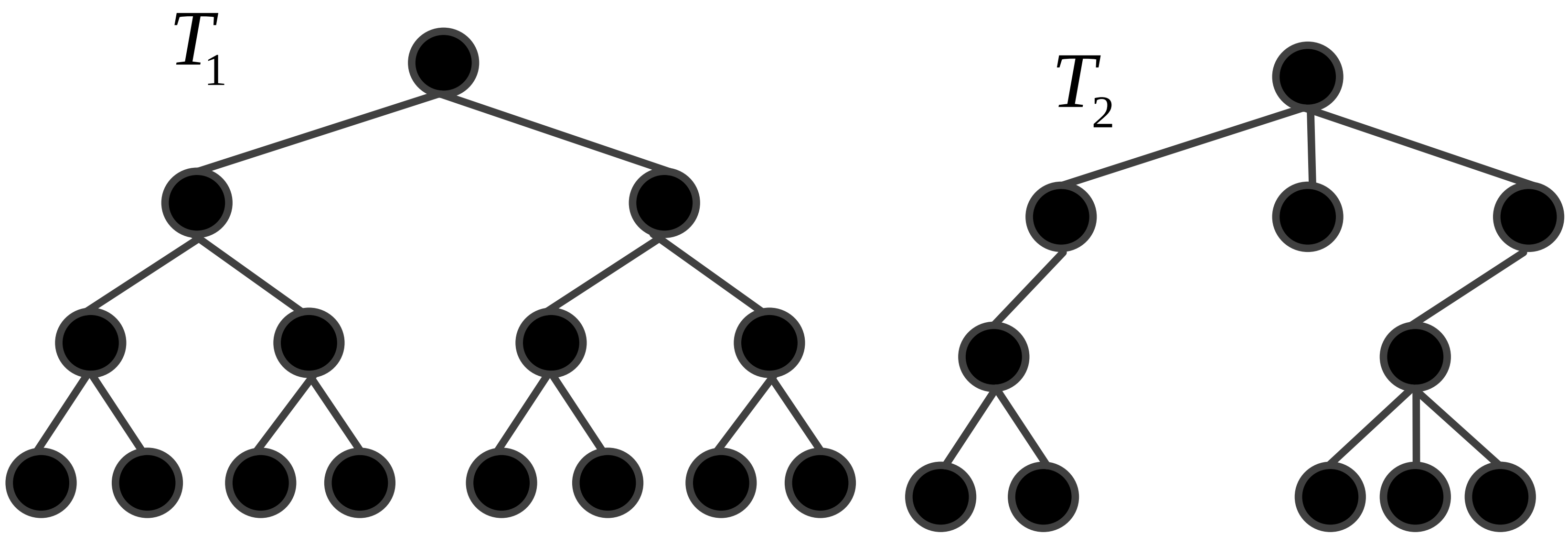
Теорема о связности графа

2) (справа налево) Пусть $\exists$ разбиение графа G на непустые подмножества $\mathbf{V_1}$ и $\mathbf{V_2}$. Произвольным образом выберем вершины V_i из $\mathbf{V_1}$ и V_j из $\mathbf{V_2}$. Цепь, соединяющая вершины V_i и V_j должна содержать минимум одно ребро, содержащее граничные точки в обоих множествах $\mathbf{V_1}$ и $\mathbf{V_2}$. Так как такого ребра не существует, то G – несвязен.

Деревья и леса

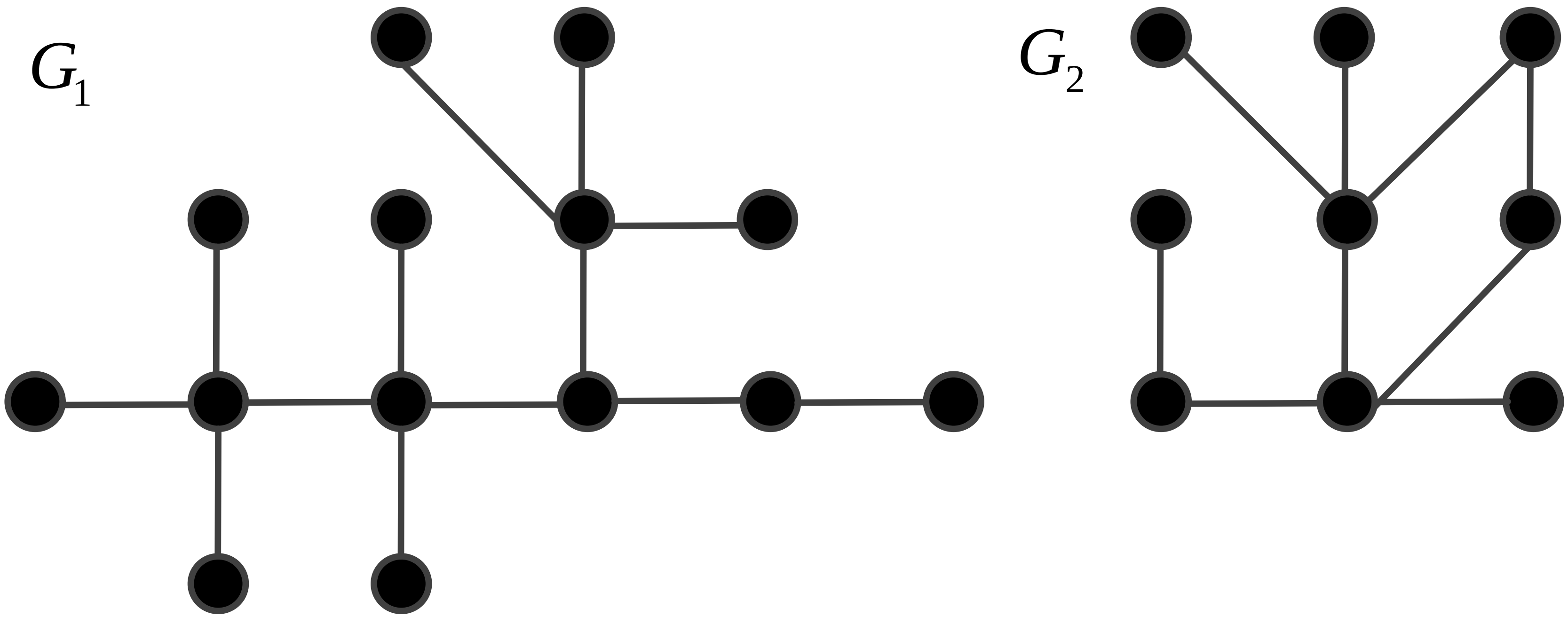
Граф называется деревом, если он связен и не имеет циклов. Обозначается буквой T .

Граф, не имеющий циклов и состоящий из k компонентов, называется лесом из k деревьев. Обозначается буквой F .



Пример 9. Два дерева составляют лес из двух компонентов.
Заметим, что T_1 является полным бинарным деревом.

Упражнение: определить, является ли граф деревом?

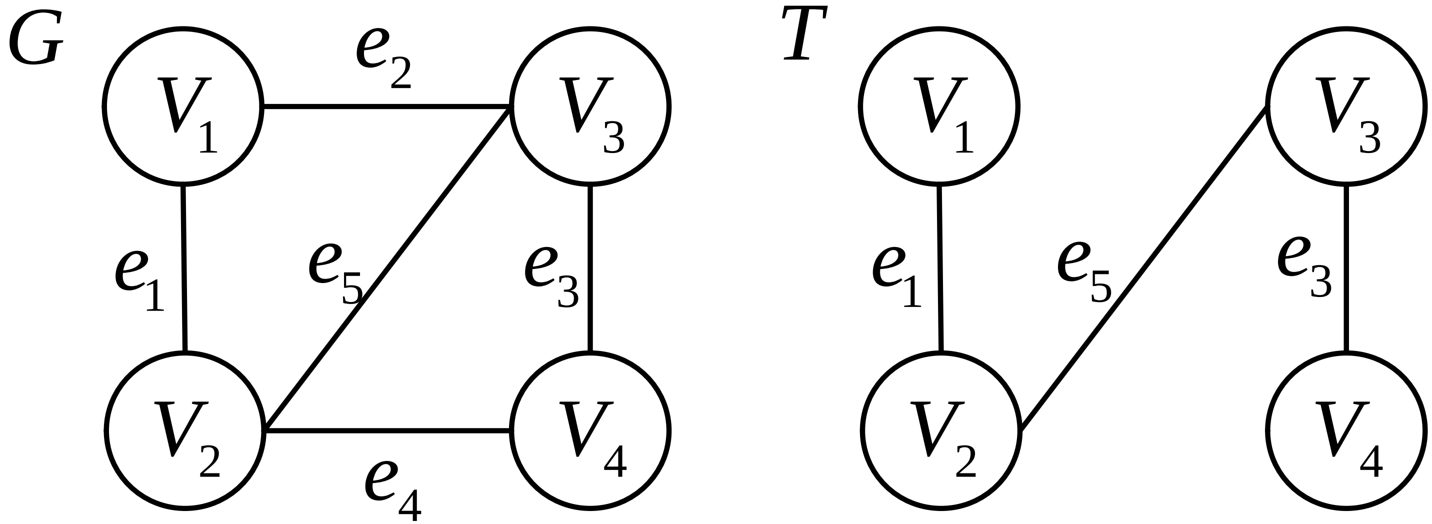


Пример 10.

Ветви и хорды дерева

Если дерево T является подграфом графа G, то ребра графа G, принадлежащие дереву T, называются ветвями дерева T, а ребра, не принадлежащие дереву T, называются хордами относительно дерева T.

Пример 11.



Дерево T является подграфом графа G. Дерево T получилось путем удаления ребер e_2, e_4 из графа G. Ребра e_1, e_3, e_5 графа G являются *ветвями* дерева T, а ребра e_2, e_4 – *хорды* относительно дерева T.

Теорема о количестве ребер для дерева с *n* вершинами

Дерево с *n* вершинами имеет в точности *n*-1 ребро.

Доказательство.

Нужно доказать, что количество ребер в дереве не больше $(n-1)$, иначе образуется цикл, и не меньше $(n-1)$, иначе образуется лес.

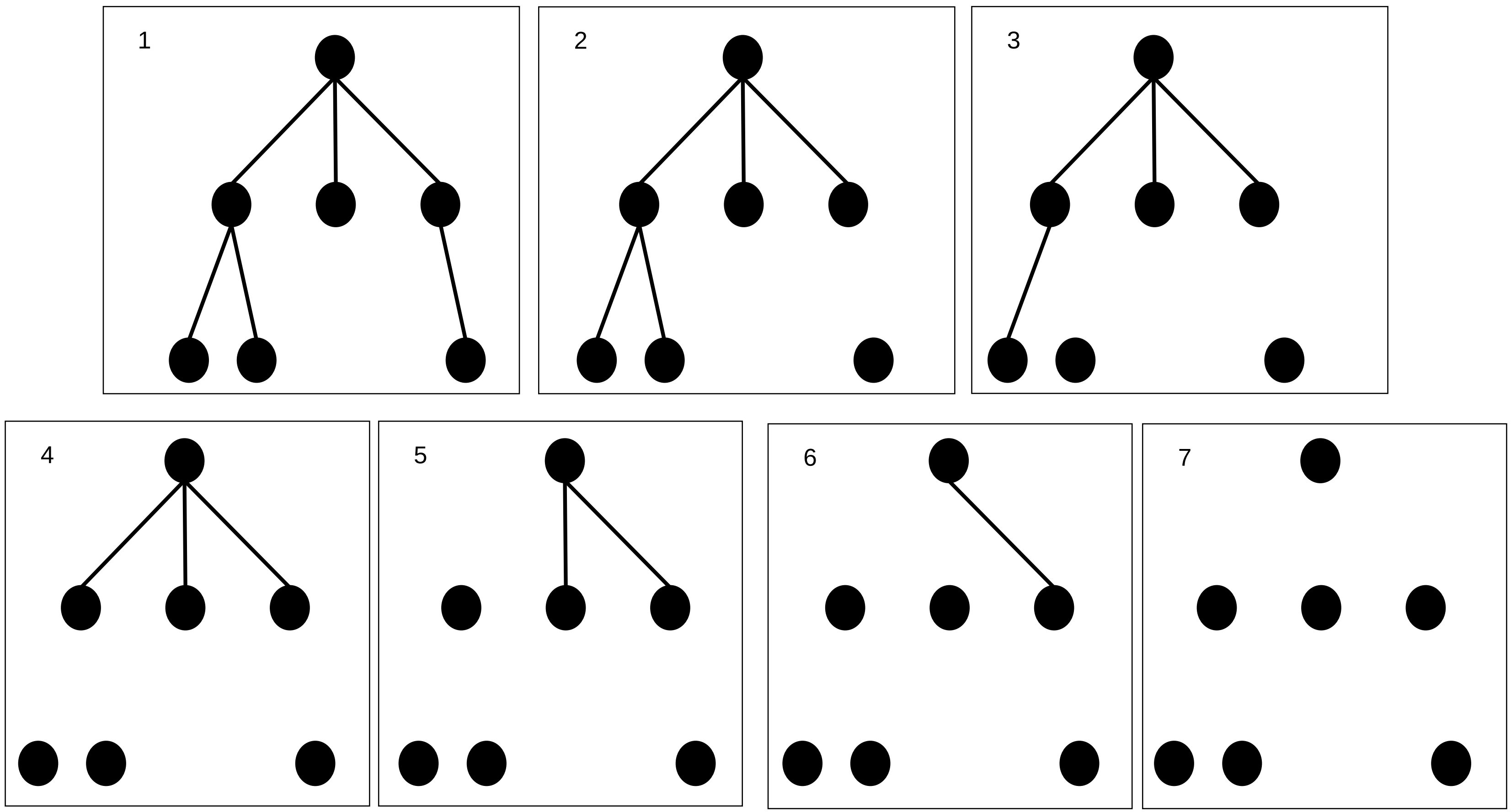
Теорема о количестве ребер для дерева с n вершинами

1) Удаление одного ребра разбивает дерево на 2 компоненты связности, то есть превращает его в лес из двух деревьев, граф становится несвязным. Удаление второго ребра превращает дерево в лес из 3 деревьев, и так далее. Удаление $(n-1)$-го ребра превращает дерево в лес из n деревьев, каждое из которых является изолированной вершиной.

2) Добавление любого ребра, после $(n-1)$ образует цикл с ребрами, составляющими дерево.

Следовательно, каждое дерево с n вершинами имеет в точности $(n-1)$ ребро.

Пример с деревом, состоящим из 7 вершин



Пример 12. Удаление каждого ребра добавляет несвязные компоненты

Тема следующей лекции:

«Ориентированные графы».