Математическая логика

Замкнутые классы. Часть 2

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры

прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Курс математической логики

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Введение в алгебру логики**	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	**Минимизация булевых функций**	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	**Полнота и замкнутость систем логических функций**	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.
4.	**Исчисление высказываний и предикатов**	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Литература

- **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие. Математическая логика. – Москва : РУДН, 2014. – 118 с.**
- Светлов В.А., Логика: учебное пособие, изд-во: Логос, 2012 г. 429 с.
- Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
- Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Дискретная математика, М.: АСТ, 2014 г, 448 с.
- Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
- **Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.**
- **Учебный портал РУДН, раздел «Математическая логика» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522**

Отношение предшествования

Определение:
Для двух наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$ выполнено отношение предшествования $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$, если $\alpha_1 \le \beta_1, ..., \alpha_n \le \beta_n$.

Например, $(0,1,0,1) \prec (1,1,0,1)$.

Свойство предшествования:

Если $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta} \prec \tilde{\gamma}$, то $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\gamma}$.

Класс M

Определение:
Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется монотонной, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, таких, что $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ имеет место неравенство $f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})$.

Функция, равная монотонной функции, также является монотонной.

Класс M

$f \in M$	$f \notin M$

Заполните таблицу

Класс M

$f \in M$	$f \notin M$
0, 1	$x \to y$
x	$x \mid y$
$x \vee y$	$x \downarrow y$ (1000)
$x \cdot y$	$x \oplus y$

Класс M

Докажем, что класс M является замкнутым.

Пусть $\Phi = f(f_1,...,f_m)$ и функции $f,\ f_1,\ldots,\ f_m$ являются монотонными. Для каждой функции $f,\ f_1,\ldots,\ f_m$ введем наборы, которые можно получить из набора переменных для внешней функции.

Класс M

Функция	Наборы
f	$\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$
f_1	$\tilde{x}_1 = (x_{1_1}, ..., x_{1_n})$
…	…
f_i	$\tilde{x}_i = (x_{i_1}, ..., x_{i_n})$
…	…
f_m	$\tilde{x}_m = (x_{m_1}, ..., x_{m_n})$

Класс M

Подставляем набор $\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в функцию Φ, получаем, что $\Phi(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$.

Начнем рассматривать наборы с внутренних функций.

Т.к. функции $f_1, \ldots, f_m \in M$, то при $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ будет верно следующее неравенство: $f_i(\tilde{\alpha}_i) \le f_i(\tilde{\beta}_i)$, $i = 1, ..., m$.

Класс M

Вычисляем значения на всех наборах внутренних функций, которые являются аргументами в предшествующих наборах

$$\left(f_1(\tilde{\alpha}_1),\dots, f_m(\tilde{\alpha}_m)\right) \prec \left(f_1\left(\tilde{\beta}_1\right),\dots, f_m\left(\tilde{\beta}_m\right)\right)$$

монотонной функции f. Таким образом, при $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ получаем, что

$$\Phi(\tilde{\alpha}) = f\left(\tilde{\alpha}\right) = f\left(f_1(\tilde{\alpha}_1),\dots, f_m(\tilde{\alpha}_m)\right) \le$$

$$\le f(f_1(\tilde{\beta}_1),\dots, f_m(\tilde{\beta}_m)) = \Phi(\tilde{\beta}),$$

т.е. $\Phi(\tilde{\alpha}) \le \Phi(\tilde{\beta})$ и функция Φ – монотонна, т.е. класс M замкнут.

Соседние наборы

Будем называть наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ соседними, если они отличаются в одной позиции, т.е.

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)\ ,$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \overline{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)\ .$$

Лемма о немонотонной функции

Если $f(x_1,\ldots,x_n)\notin M$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функции x можно получить функцию $\overline{x}$.

Пример на лемму о немонотонной функции

Если функция $f(x,y)=(1011)$ не является монотонной, получите $\overline{x}$, подставляя в функцию f константы 0, 1, x.

Решение: Для доказательства немонотонности необходимо найти пары предшествующих наборов $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$, где $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$. В таблице пары наборов частично упорядочены.

Пример на лемму о немонотонной функции

x y	$f(x,y)$
0 0	1
0 1	0
1 0	1
1 1	1

Пример на лемму о немонотонной функции

Заметим, что $(0,0) \prec (0,1)$, но $f(0,0) > f(0,1)$, следовательной функция не является монотонной, и из нее можно получить отрицание.

$$\begin{cases} f(0,0) = 1, \\ f(0,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(0,x) = \overline{x}.$$

Заметим, что возможно не единственное представление $\overline{x}$.

Лемма о немонотонной функции

Если $f(x_1,\ldots,x_n)\notin M$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функции x можно получить функцию $\overline{x}$.

Доказательство. Докажем сначала, что найдутся соседние наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$: $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha})>f(\tilde{\beta})$.

Лемма о немонотонной функции

Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ – соседние по i-й координате, т.е. $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$,
$\tilde{\beta} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$.

Если $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$, то $f(\tilde{\alpha}) = 1$ и $f(\tilde{\beta}) = 0$.

Введем функцию $\phi(x) = f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$.

Имеем $\phi(0) = f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = f(\tilde{\alpha}) = 1$ и

$\phi(1) = f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = f(\tilde{\beta}) = 0$.

Следовательно $\phi(0) = 1$, а $\phi(1) = 0$, т.е. $\phi(x) = \overline{x}$. □

Класс L

Класс L - класс всех линейных функций вида $f(x_1,...,x_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus ... \oplus \alpha_n x_n$, где $\alpha_i = \{0,1\}$, $i = \overline{0,n}$.

Класс L замкнут, т.к. линейная комбинация линейных выражений является линейным выражением.

Класс L

$f \in L$	$f \notin L$

Заполните таблицу

Класс L

$f \in L$	$f \notin L$
$0, 1$	$x \to y = xy \oplus x \oplus 1$
x	$x \vee y$
$\overline{x} = x \oplus 1$	$x \downarrow y$
$x \oplus y$	$x \cdot y$

Лемма о нелинейной функции

Если $f(x_1,\ldots,x_n)\notin L$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функций x и $\overline{x}$,а также, быть может, путем навешивания отрицания над f можно получить конъюнкцию двух переменных, например, $x_1 \cdot x_2$.

Лемма о нелинейной функции

Замечание: Нелинейность функции можно проверить через полином Жегалкина. Встретилась конъюнкция – функция не является линейной.

Доказательство леммы в виде алгоритма.

Лемма о нелинейной функции

1) Возьмем ПЖ для нелинейной функции f :

$$f(x_1,...,x_n)=\beta_0\oplus...\oplus\beta_{2^n-1}x_1x_2...x_n .$$

В силу нелинейности в нем найдется конъюнкция, например, $x_1\,x_2$. Тогда полином можно записать следующим образом

$$f(x_1,...,x_n)=x_1x_2\,f_1(x_3,...,x_n)\oplus x_1\,f_2(x_3,...,x_n)\oplus$$

$\oplus x_2\,f_3(x_3,...,x_n)\oplus f_4(x_3,...,x_n)$, причем $f_1(x_3,...,x_n)\not\equiv 0$, иначе конъюнкцию выразить невозможно.

Лемма о нелинейной функции

2) Выберем такие $\alpha_3,...,\alpha_n$, чтобы $f_1(\alpha_3,...,\alpha_n)\equiv 1$. $(\alpha_3,...,\alpha_n)$ - любой конкретный набор переменных $(x_3,...,x_n)$, состоящий из 0 и 1.

Переходим к построению функции $\varphi(x_1,x_2)$, которая образуется из f с помощью коэффициентов α, β и γ. Тогда $\varphi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,\alpha_3,...,\alpha_n)=x_1x_2\oplus\alpha x_1\oplus\beta x_2\oplus\gamma$, где α,β,γ – константы, равные 0 или 1.

Лемма о нелинейной функции

Узнаем константы α, β и γ.

Если $\alpha = 1$, то вторая переменная в конъюнкции входит в ответ с отрицанием, т.е. $\overline{x}_2$.

Если $\beta = 1$, то первая конъюнкция входит в ответ с отрицанием, т.е. $\overline{x}_1$.

Если $\alpha\beta \oplus \gamma = 1$, то над функцией f навешивается общее отрицание.

Лемма о нелинейной функции

3) Рассмотрим проверочную функцию $\psi(x_1, x_2)$, получаемую из $\varphi(x_1, x_2)$:

$$\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma .$$

Воспользуемся выражением для $\varphi(x_1, x_2)$

$$\varphi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma =$$

$$= (x_1 \oplus \beta)(x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(x_1 \oplus \beta) \oplus \beta(x_2 \oplus \alpha) \oplus \gamma \oplus \alpha\beta \oplus \gamma =$$

$$= x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \alpha\beta \oplus \alpha x_1 \oplus \alpha\beta \oplus$$

$$\oplus \beta x_2 \oplus \alpha\beta \oplus \gamma \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = x_1 x_2 .$$

Следовательно, $\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2$. □

Пример по лемме о нелинейной функции

Проверить, является ли функция $f(x,y) = x \to y$ линейной.

В противном случае представить конъюнкцию.

Пример по лемме о нелинейной функции

Решение:

1) $f(x,y) = x \to y = xy \cdot \underset{f_1}{1} \oplus x \cdot \underset{f_2}{1} \oplus y \cdot \underset{f_3}{0} \oplus \underset{f_4}{1}$.

$f_1 \equiv 1$

Пример по лемме о нелинейной функции

2) $\varphi(x,y) = xy \oplus \alpha x \oplus \beta y \oplus \gamma = xy \oplus x \oplus 1$, откуда

$\alpha = 1,\ \beta = 0$ и $\alpha\beta \oplus \gamma = 1$, т.е. $x \cdot y = \overline{f\left(x, \bar{y}\right)}$.

3) Проверка.

$$\psi(x,y) = \varphi\left(x \oplus \beta, y \oplus \alpha\right) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = \varphi\left(x, y \oplus 1\right) \oplus 1$$

$$= x\left(y \oplus 1\right) \oplus x \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus x = xy$$

И, действительно, $\overline{f\left(x, \bar{y}\right)} = \overline{x \to \bar{y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = x \cdot y$.

Функции из 5 классов

Отметим, что классы T_0, T_1, S, M и L попарно различны.

	T_0	T_1	S	M	L
0					
1					
x					
$\overline{x}$					
$x \cdot y$					

Заполните таблицу

Функции из 5 классов

Отметим, что классы T_0, T_1, S, M и L попарно различны.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
x	+	+	+	+	+
$\overline{x}$	-	-	+	-	+
$x \cdot y$	+	+	-	+	-

Теорема о функциональной полноте

Для того чтобы система функций $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.

Теорема о функциональной полноте

Доказательство.

Необходимость. Пусть F – полна, т.е. $[F]=P_2$. Предположим, что F содержится в одном из замкнутых классов, который обозначим через F', т.е. $F \subseteq F'$. Но тогда

$P_2 = [F] \subseteq [F'] = F'$ – противоречие.

Теорема о функциональной полноте

Достаточность. Пусть F не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов. Тогда из F можно выделить подсистему, содержащую 5 функций f_i, f_j, f_k, f_m, f_l, которые не содержатся соответственно в классах T_0, T_1, S, M, L. Пусть эта подсистема будет $F' = \{f_i, f_j, f_k, f_l, f_m\}$.

Можно считать, что все эти функции зависят от одинакового числа переменных.

Теорема о функциональной полноте

1) Построим при помощи функций f_i, f_j и f_k константы 0 и 1. Рассмотрим $f_i \notin T_0$.

Если $f_i(1,\ldots,1)=1$, то $\varphi(x)=f_i(x,\ldots,x)$ есть **константа 1**, т.к. $\varphi(0)=f_i(0,\ldots,0)=1$, в силу того, что $f_i \notin T_0$ и $\varphi(1)=f_i(1,\ldots,1)=1$.

Константу 0 получаем из f_j: $f_j(1,\ldots,1)=0$.

Теорема о функциональной полноте

Если $f_i\left(1,\ldots,1\right)=0$, то $\varphi(x)=f_i(x,\ldots,x)$ есть $\overline{x}$, т.к. $\varphi\left(0\right)=f_i\left(0,\ldots,0\right)=1$, $\varphi\left(1\right)=f_i\left(1,\ldots,1\right)=0$. Возьмем f_k $\left(f_k\notin S\right)$. Из леммы о несамодвойственной функции мы можем получить константу 0 или 1, а т.к. у нас есть функция $\overline{x}$, то мы можем получить и вторую константу.

Теорема о функциональной полноте

2) Имея константу 0 и 1 и функцию f_m $\left(f_m \notin M \right)$, мы по лемме о немонотонности функции можем получить функцию $\overline{x}$.

Теорема о функциональной полноте

3) Имея константы 0 и 1, функцию $\bar{x}$ и функцию f_l $\left(f_l \notin L\right)$ мы по лемме о нелинейной функции можем получить конъюнкцию двух переменных $x \cdot y$.

Таким образом, мы при помощи формул над F' (а значит и над F) получили функции $\bar{x}$ и $x_1 \cdot x_2$, что доказывает достаточность. □

Тема следующей лекции:

«Исчисление высказываний».