Геометрическая вероятность

$$P(A) = \frac{\mu_A}{\mu_\Omega}$$, где μ - мера (длина, площадь, объем)

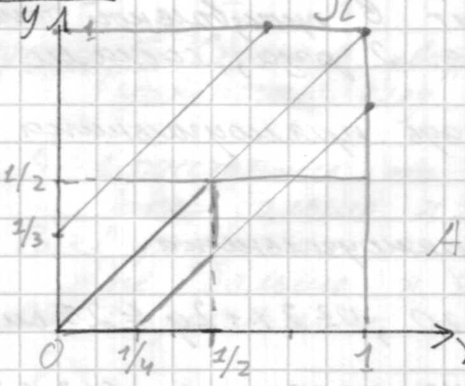
Задача 1 Консультация назначена с 10.00 до 11.00. Если преподаватель приходит первым, а студентов еще нет, то он ждет до 11^{00}, но не более 20 минут.
Если студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя до 11^{00}, но не более 15 минут.
Найти вероятности след. событий:

A = {студенты пришли раньше преподавателя, консультация началась до 10^{30}}

B = {преподаватель пришел раньше студентов, консультация началась после 10^{30}}

C = {до 10^{30} консультации не было} - самостоятельно

Решение:



Пусть x - время прихода преподавателя
y - время прихода студентов
10^{00} - точка 0
11^{00} - точка 1

$\mu_\Omega = S_{квадрата} = 1$

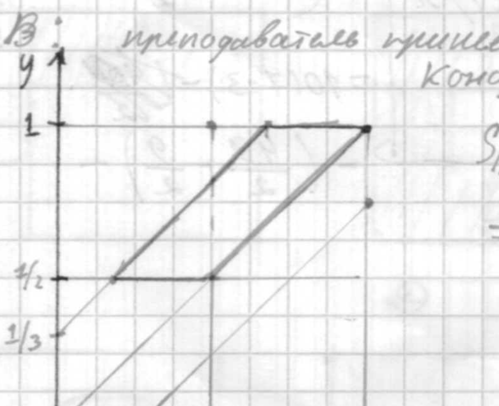
A: студенты пришли раньше преподавателя ($y < x$), консультация началась (т.е. была $\begin{cases} y - x \le 1/3 \\ x - y \le 1/4 \end{cases}$) до 10^{30}

$$\begin{cases} y - x \le 1/3 \\ x - y \le 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le x + 1/3 \\ y \ge x - 1/4 \end{cases}$$ консультация была

$y < x$ - студенты пришли раньше преподавателя

$$S_A = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = 3/32 \qquad P(A) = \frac{3/32}{1} = 3/32$$

B: преподаватель пришел раньше студентов — $x < y$
Консультация началась после 10^{30}



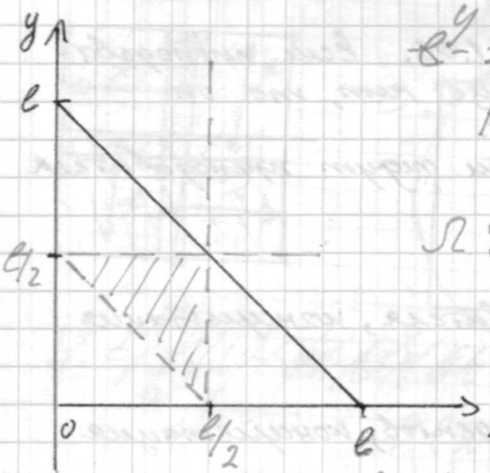
$$S_B = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} - \frac{5}{24} = \frac{9-5}{24} = \frac{1}{6}$$

Задача 2 Отрезок длиной l ломают на 3 части. Найти вероятность того, что из обломков можно составить треугольник.

Решение Пусть x - длина первого отрезка

y - длина второго

$l - x - y$ - длина третьего



Пространство $\Omega = \{(x,y):\ 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l,\ 0 \le l-x-y \le l\}$

$$\Omega \overset{u}{\underset{o}{}} \begin{cases} 0 \le x \le l \\ 0 \le y \le l \\ 0 \le l-x-y \le l \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le x \le l \\ 0 \le y \le l \\ 0 \le x+y \le l \end{cases}$$

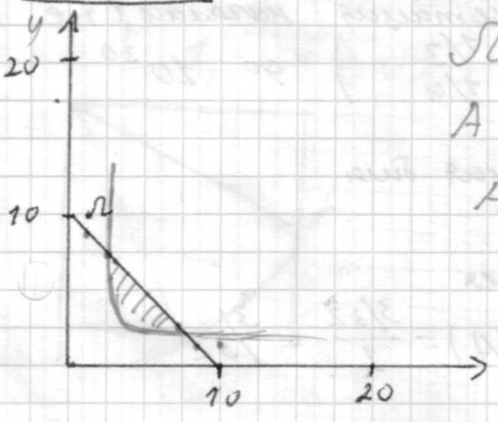
Событие A: $$\begin{cases} x+y \ge l-x-y \\ x+l-x-y \ge y \\ y+l-x-y \ge x \end{cases} \iff \begin{cases} x+y \ge \frac{l}{2} \\ y \le l/2 \\ x \le l/2 \end{cases}$$

$S_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}$ $\quad S_\Omega = \frac{1}{2} l \cdot l$

$$P(A) = \frac{l^2/8}{l^2/2} = \frac{1}{4}$$

Задача 3 Кусок проволоки в 20 см согнут в произвольной точке. После этого, согнув проволоку еще 2 раза, сделали прямоугольник.
Найти вер-ть того, что площадь прямоугольника не больше 21 см^2

Решение: Пусть x и y - длины сторон прямоугольника



$\Omega = \{(x,y):\ 0 \le x, y \le 20,\ 0 \le 2x+2y \le 20 \text{ см}\}$

$A = \{(x,y):\ 0 \le x, y \le 10,\ 0 \le x+y \le 10,\ x \cdot y \le 21\}$

A: $y \le \frac{21}{x}$

$$S_A = \int_3^7 \left(10 - x - \frac{21}{x}\right) dx = \left(10x - \frac{x^2}{2} - 21 \ln x\right)\Big|_3^7 =$$

$y + x = 10$ $\quad$ $y = 10 - x$, $y = 21/x$

$10 - x = 21/x$

$10x - x^2 = 21 \iff x^2 - 10x + 21 = 0$

$x_1 = 7 \quad x_2 = 3$

$= 10(7-3) - \left(\frac{49}{2} - \frac{9}{2}\right) -$

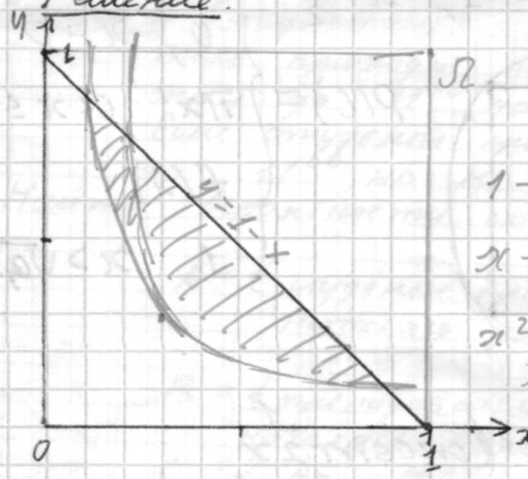
$- 21(\ln 7 - \ln 3) = 40 - 20 - 21 \ln \frac{7}{3} =$

$= 20 - 21 \ln \frac{7}{3} \approx 2{,}2$

$$P(A) = \frac{S_A}{10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2{,}2}{50} = 0{,}044$$

Задача 4 Наугад выбраны два положительных числа x и y: $0 \le x, y \le 1$. Найти вероятность того, что $x+y \le 1$, $xy \ge 0{,}09$

Решение: $A = \{(x,y) : 0 \le x, y \le 1, \ x+y \le 1, \ xy \ge 0{,}09\}$



$$S_A = \int_{0,1}^{0,9} \left(1 - x - \frac{0{,}09}{x}\right) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} - 0{,}09 \ln x\right)\Big|_{0,1}^{0,9} =$$

$1 - x = \frac{0{,}09}{x}$

$x - x^2 = 0{,}09$

$x^2 - x + 0{,}09 = 0$

$x_1 = 0{,}1$

$x_2 = 0{,}9$

$$= 0{,}8 - \frac{1}{2}(0{,}81 - 0{,}1) - 0{,}09 \ln 9 =$$

$$= 0{,}8 - 0{,}4 - 0{,}09 \ln 9 \approx 0{,}2$$

$P(A) \approx \frac{0{,}2}{1} \approx 0{,}2$

Задача 5 Строится квадрат со стороной длины 1. Найти вероятности след. событий:

$A = \{$расстояние от точки T до фиксированной стороны квадрата не больше $x\}$

$B = \{$расстояние от точки T до ближайшей стороны квадрата не больше $x\}$

$C = \{$расстояние от T до центра квадрата не больше x

$D = \{$расстояние от T до фиксированной ~~стороны~~ вершины квадрата не больше $x\}$

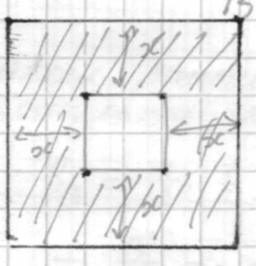
$E = \{$расстояние от T до ближайшей вершины квадрата не больше $x\}$

T – произвольная точка в квадрате.

Самые простые варианты

Решение: $P(A) = \frac{x \cdot 1}{1^2} = x \quad (x < 1)$

A:



B: $P(B) = 1 - \frac{(1-2x)^2}{1} = 1 - (1-2x)^2 = 4x - 4x^2 = 4x(1-x) \quad (0 \le x \le \frac{1}{2})$

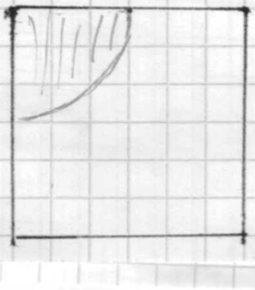
C: $P(C) = \frac{\pi x^2}{1} = \pi x^2 \quad (0 \le x \le 1/2)$

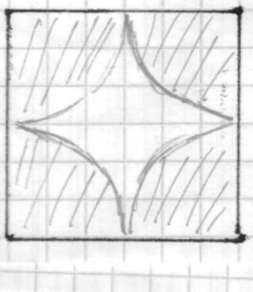
D: $P(D) = \frac{\pi x^2}{4} \quad (0 \le x \le 1)$

E: $P(E) = \frac{\pi x^2}{4} \cdot 4 \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$

C

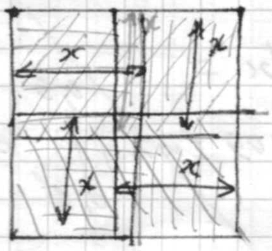
D



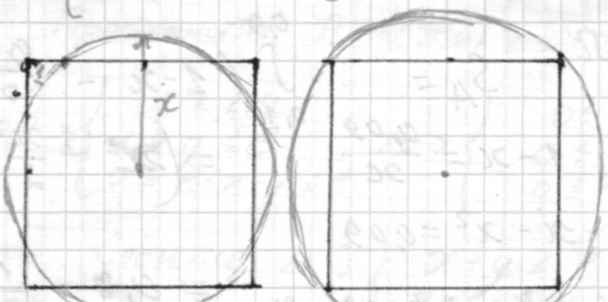


Событие A: $P(A) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

Событие B: $P(B) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 4x(1-x), & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$



C:



$P(C) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \pi x^2, & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ f(x) & \\ 1, & x > \sqrt{0{,}5} \end{cases}$

$f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1/4} + 2x^2\left(\arcsin\frac{1}{2x} - \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - 1/4}}{x}\right)$ $0{,}5 < x \le \sqrt{0{,}5}$

Событие D:

$P(D) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{\pi x^2}{4}, & 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{2}\left(\arcsin\frac{1}{x} - \arcsin\frac{x^2-1}{x}\right), & 1 < x \le \sqrt{2} \\ 1, & x \ge \sqrt{2} \end{cases}$