Математическая логика

Метод резолюций для исчисления высказываний

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной информатики и теории вероятностей РУДН
Маркова Екатерина Викторовна
markova_ev@pfur.ru

Курс математической логики

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Введение в алгебру логики**	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	**Минимизация булевых функций**	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	**Полнота и замкнутость систем логических функций**	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.
4.	**Исчисление высказываний и предикатов**	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Литература

- **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие. Математическая логика. – Москва : РУДН, 2014. – 118 с.**
- Светлов В.А., Логика: учебное пособие, изд-во: Логос, 2012 г. 429 с.
- Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
- Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Дискретная математика, М.: АСТ, 2014 г, 448 с.
- Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
- **Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.**
- **Учебный портал РУДН, раздел «Математическая логика» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522**

Определение дизъюнкта

Дизъюнктом называется дизъюнкция пропозициональных переменных.

Пропозициональные переменные p и $\overline{p}$ называются контрарными.

Определение резольвенты

Для любых двух дизъюнктов C_1 и C_2, если существует переменная σ в C_1, которая контрарна переменной $\bar{\sigma}$ в C_2, то вычеркнув σ и $\bar{\sigma}$ из C_1 и C_2 соответственно, и построив дизъюнкцию оставшихся дизъюнктов, получим резольвенту C_1 и C_2 (Определение верно для одной пары контрарных переменных).

Определение пустого дизъюнкта

Дизъюнкт, не содержащий переменных, называется пустым (обозначаем **П**).

Пустой дизъюнкт по определению противоречив.

Пример 1

Пример. Для двух дизъюнктов C_1 и C_2 найти резольвенту.

$$C_1: \quad p \vee r$$

$$C_2: \quad \overline{p} \vee q$$

$$\frac{p \vee r, \quad \overline{p} \vee q}{r \vee q}.$$

В данном примере $r \vee q$ – резольвента.

Пример 2

Пример. Для двух дизъюнктов C_1 и C_2 найти резольвенту.

$$C_1 : \quad p \vee q \vee r$$

$$C_2 : \quad \bar{q} \vee s$$

$$\frac{p \vee q \vee r, \quad \bar{q} \vee s}{p \vee r \vee s}.$$

В данном примере $p \vee r \vee s$ – резольвента.

Пример 3

Пример. Для двух дизъюнктов C_1 и C_2 найти резольвенту.

$$C_1: \quad p \vee q$$

$$C_2: \quad \overline{p}$$

$$\frac{p \vee q, \quad \overline{p}}{q}.$$

В данном примере q – резольвента.

Пример 4

Пример. Для двух дизъюнктов C_1 и C_2 найти резольвенту.

$$C_1: \quad \overline{p} \vee q$$

$$C_2: \quad \overline{p} \vee r\ .$$

$$\frac{\overline{p} \vee q, \quad \overline{p} \vee r}{?}$$

В данном примере резольвенты не существует, т.к. нет пары контрарных переменных.

Пример 5

Пример. Для двух дизъюнктов C_1 и C_2 найти резольвенту.

$$C_1: \quad p \vee \overline{q}$$

$$C_2: \quad \overline{p} \vee q\,.$$

$$\frac{p \vee \overline{q}, \quad \overline{p} \vee q}{?}$$

В данном примере резольвенты не существует, т.к. рассматриваюся более одной пары контрарных переменных.

Теорема о резольвенте

Пусть даны два дизъюнкта C_1 и C_2. Тогда резольвента C дизъюнктов C_1 и C_2 есть их логическое следствие.

Доказательство:

Теорема о резольвенте

Док-во. Пусть C_1 и C_2 истинны в некоторой интерпретации K. Нужно показать, что резольвента C дизъюнктов C_1 и C_2 также истинна в K, тогда C будет логическим следствием (по определению логического следствия).

Доказывать истинность логического следствия можно, например, по 2-й теореме о логическом следствии: $C_1 \cdot C_2 \cdot \overline{C} = 0$.

Теорема о резольвенте

1) Пусть дизъюнкты C_1 и C_2 содержат контрарную пару переменных σ и $\overline{\sigma}$, т.е. $C_1 = \sigma \vee C_1'$ и $C_2 = \overline{\sigma} \vee C_2'$, где C_1' и C_2' – некоторые дизъюнкты. Пусть также $C = C_1' \vee C_2'$ – резольвента C_1 и C_2.

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \overline{C} = \left(\sigma \vee C_1'\right)\left(\overline{\sigma} \vee C_2'\right)\overline{\left(C_1' \vee C_2'\right)} =$$

$$= \left(\sigma\overline{\sigma} \vee \sigma C_2' \vee \overline{\sigma} C_1' \vee C_1' C_2'\right)\overline{\left(C_1' \vee C_2'\right)} =$$

$$= \left(\sigma C_2' \vee \overline{\sigma} C_1' \vee C_1' C_2'\right)\overline{C_1'} \cdot \overline{C_2'} = 0,$$

следовательно C - логическое следствие.

Теорема о резольвенте

2) Пусть дизъюнкты $C_1 = \sigma$ и $C_2 = \bar{\sigma} \vee C_2'$,
$C = C_2'$ – резольвента C_1 и C_2.

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \bar{C} = \sigma\left(\bar{\sigma} \vee C_2'\right)\overline{C_2'} = \left(\sigma\bar{\sigma} \vee \sigma C_2'\right)\overline{C_2'} = 0,$$

следовательно C - логическое следствие.

Теорема о резольвенте

3) Пусть дизъюнкты $C_1 = \sigma$ и $C_2 = \bar{\sigma}$, тогда C_1 и C_2 не могут быть одновременно истинны, их резольвента $C = \Pi$, а пустой дизъюнкт по определению противоречив, т.е. C не является логическим следствием.

Таким образом, резольвента двух дизъюнктов является их логическим следствием только для тех случаев, когда дизъюнкты содержат дополнительные переменные кроме контрарных. □

Резолютивный метод

Резолютивный метод – поиск резольвенты C из посылок и логического следствия, образующих множество дизъюнктов $\boldsymbol{S}$.

Рассмотренный метод может быть использован для проверки того, является ли формула G логическим следствием формул $F_1,\ldots,F_n$.

Алгоритм решения задач резолютивным методом:

1) Представить формулу $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n \cdot \overline{G}$ в виде КНФ, заменив, например, $x \to y = \overline{x} \vee y$.

2) Если из множества дизъюнктов $\boldsymbol{S} = \left\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \overline{G}\right\}$ удалось вывести пустой дизъюнкт $\mathbf{\Pi}$, задействовав все дизъюнкты, то G является логическим следствием, иначе – нет.

Пример

Пример. Является ли резольвента логическим следствием?

$$S = \{\overline{p} \vee q, \overline{q}, p\}.$$

Резолютивный вывод:

$$\frac{\overline{p} \vee q, \overline{q}}{\overline{p}}, \quad \frac{\overline{p}, p}{\mathbf{П}}.$$

Следовательно, $(\overline{p} \vee q)(\overline{q})(p) \equiv 0$.

Пример

Пример. Доказать, что r является логическим следствием формул $p \to q,\ q \to r,\ p$.

Представляем формулы $p \to q, q \to r$ в виде КНФ: $p \to q = \overline{p} \vee q, \quad q \to r = \overline{q} \vee r$.

$$\boldsymbol{S} = \{\overline{p} \vee q, \overline{q} \vee r, p, \overline{r}\}.$$

Резолютивный вывод:

$$\frac{\overline{p} \vee q, \overline{q} \vee r}{\overline{p} \vee r}; \qquad \frac{\overline{p} \vee r,\ p}{r}; \qquad \frac{r, \overline{r}}{\mathbf{П}}.$$

Пример

Пример. Для задачи проверить вывод на логическое следствие.

Если Андрей интересуется логикой, то он посещает лекции по дискретной математике и не пропускает семинарские занятия. Если Андрей посещает лекции, то он пропускает семинарские занятия. Следовательно, Андрей не интересуется логикой.

Пример

Тогда рассматриваемое высказывание может быть записано на языке исчисления высказываний следующим образом:

$$F_1 : p \to qr$$

$$F_2 : q \to \overline{r}$$

$$\overline{}$$

$$G : \overline{p}\,.$$

Пример

1) Представляем формулу $F_1 \cdot F_2 \cdot \overline{G}$ в виде КНФ:

$$F_1 \cdot F_2 \cdot \overline{G} = (p \to qr)(q \to \overline{r})\overline{\overline{p}} =$$

$$= (\overline{p} \vee qr)(\overline{q} \vee \overline{r})\, p =$$

$$= (\overline{p} \vee q)(\overline{p} \vee r)(\overline{q} \vee \overline{r})\, p\,.$$

Пример

2) Резолютивный вывод

$$\boldsymbol{S} = \{\overline{p} \vee q, \overline{p} \vee r, \overline{q} \vee \overline{r}, p\}$$

$$\frac{\overline{p} \vee q, \overline{q} \vee \overline{r}}{\overline{p} \vee \overline{r}}; \qquad \frac{\overline{p} \vee \overline{r}, \overline{p} \vee r}{\overline{p}}; \qquad \frac{\overline{p}, p}{\mathbf{\Pi}}.$$

Поскольку резолютивный вывод заканчивается пустым дизъюнктом, то G является логическим следствием формул F_1 и F_2.

Тема следующей лекции:

«Исчисление предикатов».