

Математическая логика

Таблицы простых импликантов

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Курс математической логики

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Введение в алгебру логики	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	Минимизация булевых функций	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	Полнота и замкнутость систем логических функций	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.
4.	Исчисление высказываний и предикатов	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Литература

- **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие. Математическая логика. – Москва : РУДН, 2014. – 118 с.**
- Светлов В.А., Логика: учебное пособие, изд-во: Логос, 2012 г. 429 с.
- Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
- Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Дискретная математика, М.: АСТ, 2014 г, 448 с.
- Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: <http://api.sci.pfu.edu.ru/> – свободный.
- Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: <http://stud.sci.pfu.edu.ru> – для зарегистрированных пользователей.
- Учебный портал РУДН, раздел «Математическая логика» <http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522>

Таблицы простых импликантов

Задача нахождения минимального подмножества простых импликантов решается с помощью таблиц, **столбцы** которых перенумерованы k_i (ОЭК), **строки** простыми импликантами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Таблица 1

	0000	0001	0010	1000	1001	1100	1101
00-0							
-00-							
1-0-							

Из примера прошлой лекции получаем следующую таблицу. Необходимо обозначить позиции, где импликант покрывает конъюнкцию. Ставим крестик × на пересечении импликанта и конъюнкции.

Таблица 1

	0000	0001	0010	1000	1001	1100	1101
00-0	×		×				
-00-	×	×		×	×		
1-0-				×	×	×	×

Правило работы с таблицами

1. Если в столбце имеется лишь один крестик, то соответствующая строка (т.е. импликант) должна быть выбрана обязательно (т.к. только этот импликант покрывает соответствующую конъюнкцию).
2. Множество таких строк (т.е. импликантов) отражает ядро задачи.
3. Далее, вычеркиваем все столбцы, у которых на пересечении с данной строкой есть крестик (т.е. конъюнкция покрывается импликантом).

Ответ для примера из таблицы 1

В примере 1 в ядро задачи входят все импликанты. Следовательно, минимальным представлением для функции $f(x, y, z, t)$ является $\bar{x}\bar{y}\bar{t} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$, т.е.

$$f(x, y, z, t) = \bar{x}\bar{y}\bar{t} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} .$$

После работы с таблицей

Возможные варианты:

- 1) после выделения ядра еще остаются элементарные конъюнкции, подлежащие покрытию. Необходимо составить следующую таблицу из оставшихся импликантов и конъюнкций;
- 2) останутся простые импликанты, которые не покрывают ни одну элементарную конъюнкцию, не покрытую элементами ядра. Такие импликанты являются лишними.

Таблица 2

Пусть получили следующие импликанты и конъюнкции.
Расставьте крестики в таблице.

	0000	0100	1000	0011	0101	0110	1010	1011	0111
01--									
0-00									
-000									
101-									
-011									
0-11									

Таблица 2

	0000	0100	1000	0011	0101	0110	1010	1011	0111
01--		×			×	×			×
0-00	×	×							
-000	×		×						
101-							×	×	
-011				×				×	
0-11				×					×

Таблица 2

Выделим ядро и перейдем к следующей таблице, в которую входят импликанты, не входящие в ядро, и еще не покрытые конъюнкции.

В ядро входят 3 импликанта: $\bar{x}y \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z$.

Таблица 2

	0011
0-00	
-011	
0-11	

Снова расставляем крестики в тех позициях, где импликант покрывает конъюнкцию.

Таблица 2

	0011
0-00	
-011	×
0-11	×

Элементарная конъюнкция 0011 покрывается любым из импликантов -011 и $0-11$.

$0-00$ – лишний импликант.

Таблица 2

Для примера из таблицы 2 получаем два неизбыточных выражения (ядро + один из последних импликантов):

$$f(x, y, z, t) = \bar{x}y \vee \bar{y} \bar{z} \bar{t} \vee x\bar{y}z \vee \bar{y}zt ,$$

$$f(x, y, z, t) = \bar{x}y \vee \bar{y} \bar{z} \bar{t} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}zt .$$

Таблица 3

Найдем минимальное представление следующей функции: $f(x, y, z, t) = (100111110110000)$.

Таблица 3

	Имплик.	0000	0100	1000	0011	0101	0110	1010	1011	0111
<i>a</i>	0-00									
<i>b</i>	-000									
<i>c</i>	10-0									
<i>d</i>	-011									
<i>e</i>	0-11									
<i>f</i>	101-									
<i>g</i>	01- -									

Необходимо расставить крестики в позициях, где импликанты покрывают конъюнкции.

Таблица 3

	Имплик.	0000	0100	1000	0011	0101	0110	1010	1011	0111
<i>a</i>	0-00	×	×							
<i>b</i>	-000	×		×						
<i>c</i>	10-0			×				×		
<i>d</i>	-011				×				×	
<i>e</i>	0-11				×					×
<i>f</i>	101-							×	×	
<i>g</i>	01- -		×			×	×			×

Определите ядро, постройте следующую таблицу.

Таблица 3

Ядро 01-- покрывает 0100, 0101, 0110, 0111.
Вычеркивая соответствующие строки и столбцы,
получаем следующую таблицу.

Изобразите следующую таблицу.

Таблица 3

		0000	1000	0011	1010	1011
<i>a</i>	0-00					
<i>b</i>	-000					
<i>c</i>	10-0					
<i>d</i>	-011					
<i>e</i>	0-11					
<i>f</i>	101-					

Расставьте крестики в тех позициях, где импликант покрывает конъюнкцию.

Таблица 3

		0000	1000	0011	1010	1011
<i>a</i>	0-00	×				
<i>b</i>	-000	×	×			
<i>c</i>	10-0		×		×	
<i>d</i>	-011			×		×
<i>e</i>	0-11			×		
<i>f</i>	101-				×	×

Видим, что существует большое количество решений. В таких случаях удобно обозначить импликанты символами и перечислить их для каждой конъюнкции.

Таблица 3

		0000	1000	0011	1010	1011
a	0-00	×				
b	-000	×	×			
c	10-0		×		×	
d	-011			×		×
e	0-11			×		
f	101-				×	×

Из таблицы следует, что ЭК 0000 покрывается импликантами a или b ($a \vee b$), ЭК 1000 – импликантами b или c ($b \vee c$) и т.д.

Таблица 3

$$(a \vee b)(b \vee c)(d \vee e)(c \vee f)(d \vee f)g ,$$

где после раскрытия скобок и упрощений получаются 5 конъюнкций, четыре из которых соответствуют минимальным ДНФ функции.

$$bdgf \vee befg \vee bcdg \vee acdg \vee acefg .$$

Таблица 3

Заметим, что в любое представление входит импликант g , т.к. он является ядром.

Ответ. Минимальными являются следующие 4 функции:

$$1) f(x, y, z, t) = \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee \overline{y}zt \vee \overline{x}y \vee x\overline{y}z ;$$

$$2) f(x, y, z, t) = \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}y \vee \overline{x}zt \vee x\overline{y}z ;$$

$$3) \quad \dots$$

$$4) \quad \dots$$

Остальные ДНФ в качестве упражнения предлагается выписать самостоятельно.

Тема следующей лекции:

«Полнота и замкнутость систем
логических функций».