Математическая логика

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Полином Жегалкина. Импликант

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Курс математической логики

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Введение в алгебру логики**	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	**Минимизация булевых функций**	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	**Полнота и замкнутость систем логических функций**	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение и лемма о нелинейной функции.
4.	**Исчисление высказываний и предикатов**	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

Литература

- **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике: Учеб. пособие. Математическая логика. – Москва : РУДН, 2014. – 118 с.**
- Светлов В.А., Логика: учебное пособие, изд-во: Логос, 2012 г. 429 с.
- Микони С.В., Дискретная математика для бакалавра. Множества, отношения, функции, графы. СПб., Изд-во Лань, 2013 г., 192 с.
- Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В., Дискретная математика, М.: АСТ, 2014 г, 448 с.
- Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
- **Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.**
- **Учебный портал РУДН, раздел «Математическая логика» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26522**

Представление произвольной функции через СКНФ

Пусть $f(x_1,...,x_n)\not\equiv 1$. Разложим функцию $f^*(x_1,...,x_n)$ ($f^*(x_1,...,x_n)\not\equiv 0$) в СДНФ:

$$f^*(x_1,...,x_n)=\bigvee_{\substack{\delta_1,...,\delta_n\\ f^*(\delta_1,...,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n}.$$

Из принципа двойственности следует, что

$$f^{**}(x_1,...,x_n)=\mathop{\&}_{\substack{\delta_1,...,\delta_n\\ f^*(\delta_1,...,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1}\vee ...\vee x_n^{\delta_n}.$$

Представление произвольной функции через СКНФ

Левая часть равенства есть $f(x_1,\ldots,x_n)$, а правая может быть преобразована:

$$\mathop{\&}_{\substack{\delta_1,\ldots,\delta_n \\ f^*(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1} \vee \ldots \vee x_n^{\delta_n} = \mathop{\&}_{\substack{\delta_1,\ldots,\delta_n \\ f(\bar{\delta}_1,\ldots,\bar{\delta}_n)=0}} x_1^{\delta_1} \vee \ldots \vee x_n^{\delta_n} =$$

$$= \mathop{\&}_{\substack{\delta_1,\ldots,\delta_n \\ f(\bar{\delta}_1,\ldots,\bar{\delta}_n)=0}} x_1^{\bar{\delta}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\delta}_n}.$$

Таким образом, получаем разложение

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \mathop{\&}_{\substack{\delta_1,\ldots,\delta_n \\ f(\bar{\delta}_1,\ldots,\bar{\delta}_n)=0}} x_1^{\bar{\delta}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\delta}_n}.$$

Построение СКНФ для функции, заданной таблицей

1) СКНФ функции f содержит ровно столько дизъюнкций, сколько нулей в таблице f.

2) Каждому набору $(\delta_1,\ldots,\delta_n)$, на котором значение функции равно 0, соответствует дизъюнкция всех переменных, в которых x_i взято с отрицанием, если $\delta_i = 1$ и без отрицания, если $\delta_i = 0$.

Построение СКНФ для функции, заданной таблицей

Пример. Найти СКНФ для функции $x_1 \to x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	Основные элементарные дизъюнкции (ОЭД)
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	
1	1	1	

Построение СКНФ

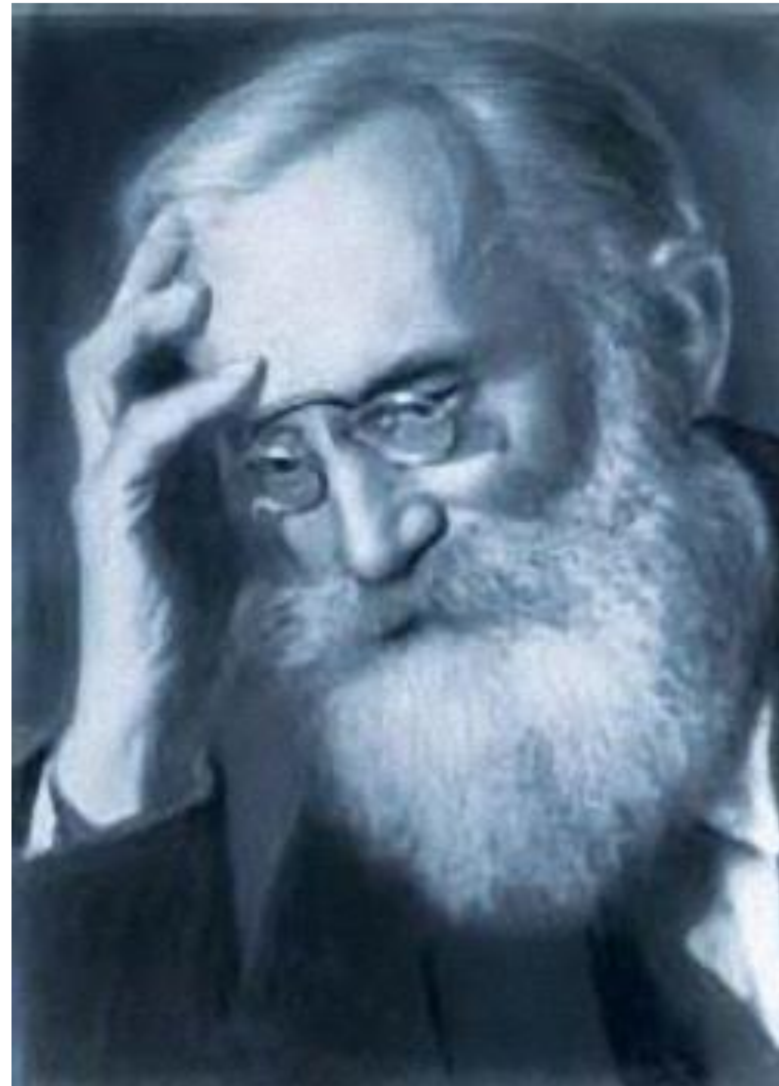
Найти СКНФ для функции $x_1 \to x_2$.

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	Основные элементарные дизъюнкции (ОЭД)
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	$\overline{x_1} \vee x_2$
1	1	1	

Полученные ОЭД записываем в ответ через конъюнкции, получаем СКНФ.

$$f(x_1, x_2) = x_1^0 \vee x_2^1 = \overline{x}_1 \vee x_2 .$$

Полином Жегалкина



Иван Иванович Жегалкин, (1869-1947), российский математик и логик. Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ. И.И. Жегалкин представил алгебру логики как арифметику вычетов по модулю 2.

Полином Жегалкина

Любую функцию можно представить с помощью 2 функций: сложения по модулю 2 и конъюнкции, и константы 1, если нужно.

Определение: Выражение вида

$$P\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \beta_0 \oplus \beta_1 K_1 \oplus \beta_2 K_2 \oplus ... \oplus \beta_{2^n-1} K_{2^n-1}$$

называется полиномом Жегалкина, где $\beta_i \in \{0;1\}$ - коэффициенты при конъюнкциях, K_i - всевозможные конъюнкции, $i = \overline{0, 2^n - 1}$.

Полином Жегалкина. Частные случаи

Для одной переменной: $P(x) = \beta_0 \oplus \beta_1 x$.

	x	$f(x)$
β_0	0	
β_1	1	

Полином Жегалкина.
Частные случаи

Для двух переменных:

$$P(x_1, x_2) = \beta_0 \oplus \beta_1 x_2 \oplus \beta_2 x_1 \oplus \beta_3 x_1 x_2 .$$

	$x_1 \ x_2$	$f(x)$
β_0	0 0	
β_1	0 1	
β_2	1 0	
β_3	1 1	

Полином Жегалкина. Частные случаи

Для трех переменных:

$$P\left(x_1, x_2, x_3\right) = \beta_0 \oplus \beta_1 x_3 \oplus \beta_2 x_2 \oplus \beta_3 x_2 x_3 \oplus \beta_4 x_1 \oplus$$

$$\oplus\, \beta_5 x_1 x_3 \oplus \beta_6 x_1 x_2 \oplus \beta_7 x_1 x_2 x_3$$

	$x_1 \; x_2 \; x_3$	$f\left(x\right)$
β_0	0 0 0	
β_1	0 0 1	
β_2	0 1 0	
β_3	0 1 1	
β_4	1 0 0	
β_5	1 0 1	
β_6	1 1 0	
β_7	1 1 1	

Полином Жегалкина. Пример

Рассмотрим **метод неопределенных коэффициентов** для построения полинома Жегалкина рассмотрим на примере

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1 \to x_2 .$$

В общем виде полином Жегалкина выглядит следующим образом: $P\left(x_1, x_2\right) = \beta_0 \oplus \beta_1 x_2 \oplus \beta_2 x_1 \oplus \beta_3 x_1 x_2$.

	$x_1 \quad x_2$	$x_1 \to x_2$
β_0	0 0	1
β_1	0 1	1
β_2	1 0	0
β_3	1 1	1

Полином Жегалкина. Пример

Заполняем аргументы x_1, x_2 на каждом наборе переменных, получаем соответствующие этому набору коэффициенты.

$$P(0,0) = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0 \cdot 0 = \beta_0,$$

Заметим, что $P(0,0) = 1, \Rightarrow \boxed{\beta_0 = 1}$.

$$P(0,1) = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0 \cdot 1 = \beta_0 \oplus \beta_1,$$

т.е. $1 = \beta_0 \oplus \beta_1$ и $\beta_0 = 1$, тогда $\boxed{\beta_1 = 0}$.

Полином Жегалкина. Пример

$$P(1,0)=\beta_0\oplus\beta_1\cdot 0\oplus\beta_2\cdot 1\oplus\beta_3\cdot 1\cdot 0=\beta_0\oplus\beta_2,$$

$0=\beta_0\oplus\beta_2$, $\beta_0=1$, поэтому $\boxed{\beta_2=1}$.

Аналогично с последним набором, состоящим из единиц.

$P(1,1)=\beta_0\oplus\beta_1\oplus\beta_2\oplus\beta_3$, где $\beta_0=1$, $\beta_1=0$,

$\beta_2=1$, получаем $1=1\oplus 0\oplus 1\oplus\beta_3$, откуда $\boxed{\beta_3=1}$.

После подстановки найденных коэффициентов в ПЖ, получим представление импликации в следующем виде: $f(x_1,x_2)=x_1\to x_2=1\oplus x_1\oplus x_1x_2$.

Минимальная и кратчайшая ДНФ

ДНФ φ функции f называется

а) минимальной (минимальной по литералам), если она имеет наименьшее число символов переменных среди других ДНФ функции f ;

б) кратчайшей (минимальной по конъюнкциям), если она имеет минимальное число элементарных конъюнкций.

Минимальная и кратчайшая ДНФ

Пример:

Импликацию представим тремя различными ДНФ:

$$
\begin{aligned}
x_1 \to x_2 &= \overline{x}_1 \vee x_2 = D_1, \\
&= \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 = D_2, \\
&= \overline{x}_1 \vee x_1 x_2 = D_3.
\end{aligned}
$$

Определите, какие ДНФ являются минимальными по литералам и кратчайшими.

Минимальная и кратчайшая ДНФ

Ответ:

D_1 - минимальная по литералам (2 литерала) и кратчайшая,

D_2 - не минимальная (5 литералов,), не кратчайшая (3 конъюнкции)

D_3 - кратчайшая (2 конъюнкции).

Число различных ЭК

3^n - число различных элементарных конъюнкций от n переменных, т.к. любая переменная может а) входить в конъюнкцию без отрицания, б) входить с отрицанием, в) не входить.

Пример: Для одной переменной, $n=1$, число различных ЭК равно трем: $x, \overline{x}, -$

Составьте ЭК для двух переменных.

Число различных ЭК

Пример:

Для одной переменной, $n=1$, число различных ЭК равно трем: $x, \overline{x}, -$

ЭК для двух переменных.

9 ЭК: $x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2, x_1\overline{x}_2, \overline{x}_1\overline{x}_2, \overline{x}_1 x_2, x_1 x_2, -$.

Число различных ДНФ

2^{3^n} - число различных ДНФ от n переменных. ДНФ однозначно определяется вектором длины 3^n, состоящим из нулей и единиц, где 1 означает, что соответствующая элементарная конъюнкция входит в ДНФ, а 0 – не входит.

Проблема минимизации: Для произвольной функции алгебры логики можно написать много ДНФ, но необходимо найти кратчайшую и минимальную по литералам ДНФ. Перебирать 2^{3^n} ДНФ трудоемко, поэтому был реализован алгоритм Куайна и Мак-Клоски (поиск простых импликантов).

Определение импликанта

Формула Ψ влечет формулу Φ (обозначение $\Psi \to \Phi$), если $\Psi \to \Phi \equiv 1$, т.е. не существует такого набора значений переменных, при котором Ψ принимает значение 1, а Φ – значение 0.

Элементарная конъюнкция K называется импликантом функции f, если $K \to f$.

Определение импликанта

Пример.

Является ли конъюнкция K импликантом для заданной функции. Функция $f(x,y,z) = x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z}$

и конъюнкция $K = x\overline{y} = x^1 y^0$.

Проверим, является ли K импликантом, т.е. при $K = 1$ функция f не должна быть равна 0.

При $K = 1 \Leftrightarrow x = 1,\ y = 0$. Поскольку $f(1,0,z) = 1 \cdot 1 \cdot z \vee 1 \cdot 1 \cdot \overline{z} = z \vee \overline{z} \equiv 1$, то $K = x\overline{y}$ является импликантом функции f.

Определение импликанта

Пример.

Проверить является ли конъюнкция K импликантом для заданной функции. Функция $f\left(x,y,z,t\right)=x\overline{y}z\vee x\overline{y}t$ и конъюнкция $K=x\overline{y}=x^1y^0$.

Проверим, является ли K импликантом.

При $K=1\Leftrightarrow x=1,\ y=0$. Поскольку $f(1,0,z,t)=z\vee t\not\equiv 1$, т.к. если $z=0$ и $t=0$, то $z\vee t=0$, т.е. $K=x\overline{y}$ не является импликантом f.

Теорема об импликантах

Теорема. Если формула Φ, реализующая функцию f, имеет вид $\Phi = \bigvee_{i=1}^{n} k_i$ – ДНФ, то $k_i \to \Phi$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Пусть в ДНФ функции $k_i = 1$.

Тогда $\Phi = k_1 \vee \ldots \vee k_i \vee \ldots \vee k_n = k_1 \vee \ldots \vee 1 \vee \ldots \vee k_n = 1$ и, следовательно, $f = 1$. □

Определение простого импликанта

Импликант P функции f называется простым, если при удалении любой переменной из P полученная элементарная конъюнкция не является импликантом.

Определение простого импликанта

Пример: Проверим, является ли $K = x\overline{y}$ простым импликантом для функции $f(x, y, z) = x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z}$?

Импликант $K = x\overline{y}$ – является простым импикантом, если при удалении любой переменной из K нельзя получить конъюнкции, являющиеся импликантами.

Из K можно получить две конъюнкции $K_1 = x$ и $K_2 = \overline{y}$. Проверим, являются ли эти конъюнкции импликантами функции $f(x, y, z) = x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z}$.

Определение простого импликанта

1) $K_1 = x$.

$K_1 = 1$ при $x = 1$. Подставим $x = 1$ в функцию $f(x, y, z) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$, и проверим значение функции. $f(1, y, z) = 1 \cdot \bar{y}z \vee 1 \cdot \bar{y}\bar{z}$, заметим, что, например, при $y = 1$ функция f будет равна 0, и $K_1 = x$ не является импикантом.

Определение простого импликанта

2) $K_2 = \overline{y}$.

$K_2 = 1$ при $y = 0$, проверим значение функции f при $y = 0$.

$f(x,0,z) = x \cdot 1 \cdot z \vee x \cdot 1 \cdot \overline{z}$, например, при $x = 0$ функция $f = 0$, и $K_2 = \overline{y}$ не является импликантом функции f .

Т.к. ни x ни $\overline{y}$ импликантами функции f не являются, то первоначальная конъюнкция $K = x\overline{y}$ является простым импликантом.

Тема следующей лекции:

«Алгоритм Куайна
и Мак-Клоски».