Евклидовы пространства

Определения

Евклидово линейное пространство

Определение

Линейное пространство E над $\mathbb{R}$ называется евклидовым линейным пространством, если на E задана функция $(\cdot,\cdot)\colon E \times E \to \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E, \alpha \in \mathbb{R}$ называемая скалярным произведением и для которой выполняются следующие свойства:

1. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$,
2. $(\alpha \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$,
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$ для всех $a \neq 0_E$.

Свойства 1 и 2 задают билинейность, свойство 3 — симметричность, а свойство 4 — положительную определенность.

Аффинное пространство $(\mathbb{A}, L)$ называется евклидовым пространством если линейное пространство L является евклидовым линейным пространством.

Свойства скалярного умножения

Непосредственно из определения следуют следующие свойства.

- $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0_{\mathbb{R}}$,
- $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$
- $(\mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b}) = \alpha \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Скалярное произведение 1

Рассмотрим два вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ таких, что

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} b^i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$

и найдем их скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} b^j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^i b^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a^i b^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Если заданы скалярные произведения $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ всех базисных векторов между собой, то становится возможным вычислить скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ зная координаты векторов. Значения $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ организуют в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение 2

В линейной алгебре данная таблица носит название матрицы Грама, а в тензорной алгебре и дифференциальной геометрии — метрического тензора.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \dots \\ b^n \end{pmatrix}$$

Наиболее простой вид скалярное произведение принимает в случае если

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = [\delta_i^j]$$

Базис, обладающий таким свойством, называют ортонормированным. В этом случае скалярное умножение двух векторов имеет вид:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} a^i b^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a^i b^i = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \ldots + a^n b^n,$$

или в матричном виде:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \ldots & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$

Норма вектора [30, с. 105]

Определение

Нормой (длина) $\|\mathbf{a}\|$ любого вектора $\mathbf{a} \in E$ называется неотрицательное вещественное число

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

- Так как $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqslant 0$, то норма вектора определена для любого вектора $\mathbf{a}$ и если $\mathbf{a} \neq 0$, то $\|\mathbf{a}\| > 0$.
- Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\|\alpha \mathbf{a}\| = |\alpha| \|\mathbf{a}\|$.

Вектор длины 1 называется нормированным. Любой вектор $\mathbf{a} \neq 0$ можно нормировать, умножив на скаляр $\dfrac{1}{\|\mathbf{a}\|}$

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \|\mathbf{a}\| = 1.$$

Угол между векторами

Теорема

Коши-Буньяковского Для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ *справедливо неравенство:* $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leqslant \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$.

Из данного неравенства следует, что:

$$-1 \leqslant \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} \leqslant 1$$

и можно подобрать такое $\theta \in \mathbb{R}$, что

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Величина θ считается по определению величиной угла между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Определение

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют ортогональными, если $\theta = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

Пример

Евклидовыми пространствами являются следующие линейные пространства:

- $E = \mathbb{R}^3$ трехмерное векторное пространство с декартовой системой координат и ортонормированным базисом $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos\varphi \text{ или } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1 x^2 + y^1 y^2 + z^1 z^2$$
- $\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \,|\, x^i \in \mathbb{R}\}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=i}^{n} x^i y^i$.
- $C[a, b]$ — пространство непрерывных функций со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x$.

Билинейная функция

Определение

Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, функция $f\colon L \times L \to \mathbb{P}$ называется **билинейной формой**, если выполняются следующие свойства для $x, y, z \in L$, $\alpha \in \mathbb{P}$

1. $f(x+z, y) = f(x, y) + f(z, y)$
2. $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$
3. $f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z)$
4. $f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$

Если $x = y$, то $f(x, x)$ — квадратичная форма.

Скалярное произведение в евклидовом пространстве является билинейной функцией.

Вектор $\mathbf{a}$ относительно вектора $\mathbf{b}$ можно разложить на две компоненты $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel \mathbf{b}} + \mathbf{a}_{\perp \mathbf{b}}$:

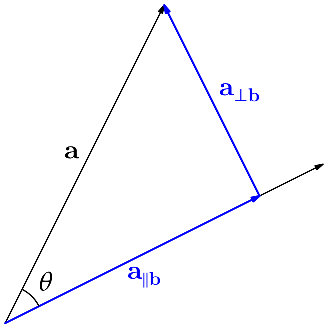
- компоненту $\mathbf{a}_{\parallel \mathbf{b}}$, коллинеарную вектору $\mathbf{b}$;
- компоненту $\mathbf{a}_{\perp \mathbf{b}}$, ортогональную вектору $\mathbf{b}$.

Коллинеарная компонента это проекция вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$, которая вычисляется как:

$$\mathbf{a}_{\parallel \mathbf{b}} = \left(\mathbf{a}, \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\right) \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}\mathbf{b}$$

Ортогональная компонента называется отклонением [19] и вычисляется как:

$$\mathbf{a}_{\perp \mathbf{b}} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel \mathbf{b}} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}\mathbf{b}.$$



Операцию проектирования можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{a}_{\parallel \mathbf{b}} = \frac{1}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}\mathbf{b}^T \mathbf{a},$$

где выражение $\mathbf{b}\mathbf{b}^T$ разворачивается в матрицу. Например, для трехмерного пространства:

$$\mathbf{b}\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 b^1 & b^1 b^2 & b^1 b^3 \\ b^2 b^1 & b^2 b^2 & b^2 b^3 \\ b^3 b^1 & b^3 b^2 & b^3 b^3 \end{pmatrix}$$

Ортогонализация по Граму–Шмидту

На операциях проектирования и отклонения основан процесс ортогонализации по Граму–Шмидту. Цель процесса заключается в построении на основе упорядоченного набора векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ нового набора ортогональных векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1, \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{2\|\mathbf{b}_1} = \mathbf{a}_{2\perp\mathbf{b}_1}, \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_{3\|\mathbf{b}_1} - \mathbf{a}_{3\|\mathbf{b}_2}, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

- В качестве первого вектора выбираем $\mathbf{a}_1$
- Для построения второго вектора убираем из вектора $\mathbf{a}_2$ компоненту, коллинеарную $\mathbf{b}_1$ и остается часть только ортогональная $\mathbf{b}_1$.
- Для построения третьего вектора убираем из вектора $\mathbf{a}_3$ убираем две компоненты: одну коллинеарную $\mathbf{b}_1$ и вторую, коллинеарную $\mathbf{b}_2$.
- Таким же образом продолжаем процесс, убирая все коллинеарные компоненты предыдущих векторов.

Евклидовы пространства

Примеры

Базис двумерного евклидова пространства 1

Для простоты восприятия формул ограничимся рассмотрением двумерного случая. Это позволит выписывать все суммы в явном виде, но все рассуждения сохраняются и для произвольной размерности.

Рассмотрим евклидово пространство E размерности 2 и введем на нем некоторый базис $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$. Это означает, что мы из всего множества векторов выбрали два $(\dim E = 2)$ и поставили их в «привилегированное» положение.

Теперь имея базис $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ мы можем любой другой вектор $\mathbf{v}$ выразить через линейную комбинацию векторов этого базиса:

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Запись в виде столбца возможна, если из контекста рассуждений ясно в каком базисе записаны компоненты векторов. Тогда нет нужды каждый раз явно указывать векторы $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

Базис двумерного евклидова пространства 2

Как вычислить компоненты базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в том же самом базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$? Делается это крайне просто:

$$\begin{matrix} \mathbf{e}_1 = \sum\limits_{i=1}^{2} \alpha^i \mathbf{e}_i = \alpha^1 \mathbf{e}_1 + \alpha^2 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2 = \sum\limits_{i=1}^{2} \beta^i \mathbf{e}_i = \beta^1 \mathbf{e}_1 + \beta^2 \mathbf{e}_2, \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{e}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2 = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2, \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Это согласуется с записью вектора $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 = v^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

В качестве упражнения проверим, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$линейно независимы. Вообще это предполагается из определения базиса, но можно провести формальное доказательство для иллюстрации. Запишем в виде компонент:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и составим линейную комбинацию:

$$\lambda^1 \mathbf{e}_1 + \lambda^2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \text{ при } (\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 \neq 0.$$

$$\lambda^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\lambda^1 + 0\lambda^2 = 0 \\ 0\lambda^1 + 1\lambda^2 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Следовательно однородная система имеет только тривиальные решения $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$ и векторы линейно-независимые.

Так как пространство не просто линейное, а евклидово, нам нужно кроме базиса задать еще и метрический тензор (матрицу Грама), чтобы иметь возможность вычислять скалярное произведение.

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \text{ по определению:} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} \Rightarrow \begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= g_{11}, \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= g_{12}, \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) &= g_{21}, \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) &= g_{22}. \end{aligned}$$

Базис двумерного евклидова пространства 4

Для любых двух векторов $\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2$ получим:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{11}u^1v^1 + g_{12}u^1v^2 + g_{21}u^2v^1 + g_{22}u^2v^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}u^iv^j$$

Ортонормированный базис 1

В линейном пространстве все базисы равноправны и нет критерия по которому можно выделить какой-то один. Однако в евклидовом пространстве задается дополнительно метрический тензор и становится возможным выделит из всех базисов тот, при котором метрический тензор приобретает наиболее простой вид.

Наиболее простой вид метрического тензора G означает, что его матрица будет иметь вид единичной матрицы:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \Rightarrow \begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= 1, \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= 0, \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) &= 0, \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) &= 1. \end{aligned}$$

Базис, в котором метрический тензор имеет такой вид называется ортонормированным. В ортонормированном базисе скалярное произведение упрощается:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^1 v^1 + u^2 v^2$$

Ортонормированный базис 2

Слово «ортонормированный» является комбинацией слов нормированный (от лат. norma) и ортогональный. Слово ортогональный (ὀρθογώνιον) древнегреческое, состоит из двух слов ὀρθός — прямой, и γοῦνος — угол. Таким образом ортонормированный базис — базис состоящий из нормированных (векторов единичной долины) векторов, расположенных друг к другу под прямыми углами.

Мы будем обозначать евклидово пространства, на котором введен ортонормированный базис как $\mathbb{R}^n$ и говорить, что задана декартова (в честь Рене Декарта) система координат. В частности $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ — плоскость и трехмерное пространство.

Рассмотрим преобразование ортонормированного, «старого» базиса $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ в «новый» базис $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^{2} c^i_j \mathbf{e}_i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}_{C^T} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{C}$$

и найдем скалярное произведения в новом базисе. Для этого вычислим таблицу метрического тензора G

$$(\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_l) = \left(\sum_{i=1}^{2} c^i_k \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{2} c^i_l \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^{2} c^i_k c^j_l (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{2} c^i_k c^j_l \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{2} c^i_k c^i_l$$

$$g_{11} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1) = c^1_1 c^1_1 + c^2_1 c^2_1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5,$$

$$g_{12} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = c^1_1 c^1_2 + c^2_1 c^2_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 10,$$

$$g_{21} = (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) = c^1_2 c^1_1 + c^2_2 c^2_1 = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10,$$

$$g_{22} = (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2) = c^1_2 c^1_2 + c^2_2 c^2_2 = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 25.$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}'_1 + v^2 \mathbf{e}'_2, \mathbf{u} = u^1 \mathbf{e}'_1 + u^2 \mathbf{e}'_2, \ (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = g_{11} v^1 u^1 + g_{12} v^1 u^2 + g_{21} v^2 u^1 + g_{22} v^2 u^2$$