Лекция 7

Градиент
~~Геометрический смысл дифференциала~~

Пусть $\mathbf{x}_0$ – предельная точка множества X, а функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_0$, то есть имеет место равенство

$$\Delta f(x_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)}^{A_i}(x^i - x_0^i) + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$$

при x, стремящимся к x_0, и существует производная по направлению вектора $\mathbf{l} = (l^1, l^2, \ldots, l^n)$, $\|\mathbf{l}\| = 1$

$A = (A^1, \ldots, A^n)$

$A^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) l^i. = (A, l) = (\mathrm{grad} f, l).$$

Определение 7.1. Вектор $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0)\right)$ называется *градиентом* функции f в точке $\mathbf{x}_0$.

Таким образом, в случае трёх переменных имеем

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}. = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Часто оказывается удобно использовать символический вектор Гамильтона

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

(набла)

Для функции f, по определению, полагаем

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}, = \mathrm{grad} f$$

то есть $\mathrm{grad} f$ и ∇f являются обозначениям одного и того же выражения.

Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0) = (\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0), \mathbf{l}) = \|\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)\| \underbrace{\|\mathbf{l}\|}_{=1} \cdot \cos\varphi = \|\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)\| \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)$ и $\mathbf{l}$, то величина $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0)$ принимает наибольшее значение, если $\varphi = 0$, то есть направление вектора $\mathbf{l}$ совпадает с направлением вектора $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)$, при этом

$$\|\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0)\right)^2}.$$

Таким образом, направление градиента показывает направление наибыстрейшего роста функции (оно единственно), а его величина равна производной в этом направлении.

$$\boxed{\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\ldots+\cos^2\alpha_n=1.}$$

Отметим, что поскольку в декартовой системе координат имеет место представление $\mathbf{l}=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\ldots,\cos\alpha_n)$, $\|\mathbf{l}\|=1$, α_i – угол между $\mathbf{l}$ и осью Ox_i, то

$y=y(x)$

$dy=y'(x)dx$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)\cos\alpha_i.$$

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\cdot(y^i-x_0^i)+\bar{o}(\|x-x_0\|)$$

Дифференциал

Пусть $\mathbf{x}_0$ – предельная точка множества $X\subset\mathbb{R}^n$, $f:X\to\mathbb{R}$ – дифференцируемая в точке $\mathbf{x}_0$ функция. Тогда

$$f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)=df(\mathbf{x}_0)+\bar{o}(\,\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|),\ \mathbf{x}\to\mathbf{x}_0, \tag{7.1}$$

где $\boxed{df(\mathbf{x}_0)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)dx^i,\ dx^i}=x^i-x_0^i$. (7.1)

$$df(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\underbrace{(x^i-x_0^i)}_{dx^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)dx^i.$$

Определение 7.2. Линейная функция от dx^1, $dx^2,\ldots$, dx^n вида (7.1) называется *(первым) дифференциалом* функции f в точке $\mathbf{x}_0$.

Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть $u=f(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные u'_x, u'_y и u'_z, а x, y и z, в свою очередь, являются функциями от новых переменных t и v, то есть

$$x=x(t,v),\ y=y(t,v),\ z=z(t,v),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'_x$$

также имеющих непрерывные частные производные x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v.

Если бы x, y и z были независимыми переменными, то полный дифференциал функции u был бы равен

$$\boxed{du=u'_xdx+u'_ydy+u'_zdz.}$$

$u(t,v)=f(x(t,v),\ldots)$

В данном случае u зависит от переменных t и v. Следовательно,

$$du=u'_tdt+u'_vdv. \tag{7.2}$$

$u=f(x(t,v),y(t,v),z(t,v)).$

Далее,

$$\begin{aligned}u'_t&=u'_xx'_t+u'_yy'_t+u'_zz'_t,\\ u'_v&=u'_xx'_v+u'_yy'_v+u'_zz'_v.\end{aligned} \tag{7.3}$$

$x=x(t,v)$

$dx=x'_tdt+x'_vdv$

Подставим (7.3) в (7.2). Получим

$$\begin{aligned}du=(u'_xx'_t+u'_yy'_t+u'_zz'_t)dt+(u'_xx'_v+u'_yy'_v+u'_zz'_v)dv=\\ =u'_x(x'_tdt+x'_vdv)+u'_y(y'_tdt+y'_vdv)+u'_z(z'_tdt+z'_vdv)=\\ =u'_xdx+u'_ydy+u'_zdz,\end{aligned}$$

то есть мы пришли к той же самой форме дифференциала, что и в случае, когда x, y и z были независимыми переменными.

$x = x(t),\ y = y(t)$

Следствие. В случае, когда x и y являются функциями одного аргумента, справедливы следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
&d(cx) = c \cdot dx,\ c = const,\\
&d(x \pm y) = dx \pm dy,\\
&d(xy) = ydx + xdy,\\
&d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.
\end{aligned}
$$

$dy = f'(x)dx$

Эти формулы верны и в том случае, когда x и y являются функциями n переменных, то есть $x = x(t_1, t_2, \ldots, t_n),\ y = y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Докажем, например, последнюю формулу. Для этого примем сначала x и y за независимые переменные. Получим

$$du = d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}dx + \left(\frac{-x}{y^2}\right)dy = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

$u(x,y) = \frac{x}{y} = x y^{-1}$

$(xy^{-1})'_y =$

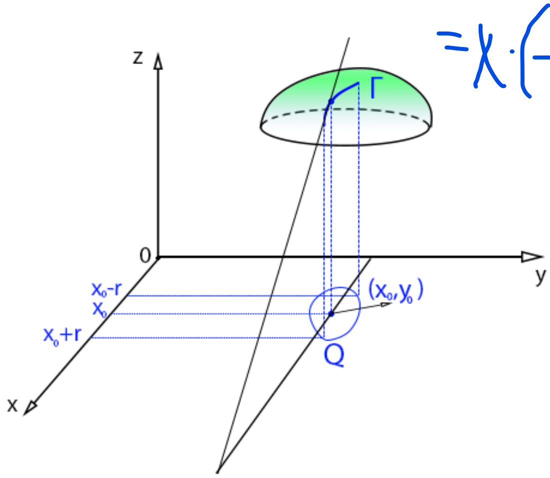
$= x \cdot (-1) y^{-2} =$

$= -\frac{x}{y^2}$

На основании инвариантности формы первого дифференциала заключаем, что эта формула справедлива и в том случае, когда x и y являются функциями n переменных.

Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную на отрытом множестве $G \in \mathbb{R}^2$. Пусть $(x_0, y_0) \in G$ и пусть в точке (x_0, y_0) существует $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.



Рассмотрим замкнутый круг Q радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) и лежащий в G. Пусть Γ – кривая, заданная следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&z = f(x, y_0),\ y = y_0,\\
&x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r,
\end{aligned}
$$

то есть кривая, которая получается в результате сечения графика функции $z = f(x, y),\ (x, y) \in Q$ плоскостью $y = y_0$. Известно, что $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\dfrac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x = x_0} = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, образованный касательной к графику функции $f(x, y_0)$ в точке $(x_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox, то есть угол, образованный касательной к кривой Γ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox.

Аналогично определяется геометрический смысл $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Что же касается геометрического смысла дифференциала, то имеем

$$
\begin{aligned}
&f(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \overline{\overline{o}}(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2});\\
&(x, y) \to (x_0, y_0),\ z_0 = f(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Уравнение $z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ является уравнением плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и не параллельной оси Oz. Известно,что $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Тогда

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \tag{7.4}$$

Определение 7.3. Плоскость, определяемая формулой (7.4), называется *касательной плоскостью* к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Полагая $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, правую часть (7.4) запишем в виде

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y = dz,$$

поэтому (7.4) примет вид $z - z_0 = dz$.

Таким образом, геометрический смысл полного дифференциала функции в точке (x_0, y_0) состоит в том, что он равен приращению аппликаты плоскости касательной к графику функции.