$y=g(z)$

$= g''(f(x))(f'(x)dx)^2 + g'(f(x))f''(x)dx^2 = g''(z)dz^2 + g'(z)d^2z$

Пусть теперь $z = f(x)$, т.е. $y = g(f(x))$. Найдем d^2y в этом случае. Имеем

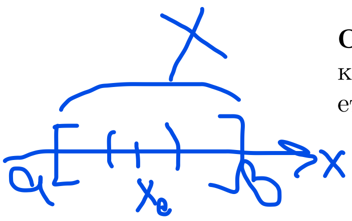
$$d^2y = (g(f(x)))''dx^2 = (g'(f(x))f'(x))'dx^2 =$$
$$= (g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))f''(x))dx^2 = g''(z)dz^2 + g'(z)d^2z.$$

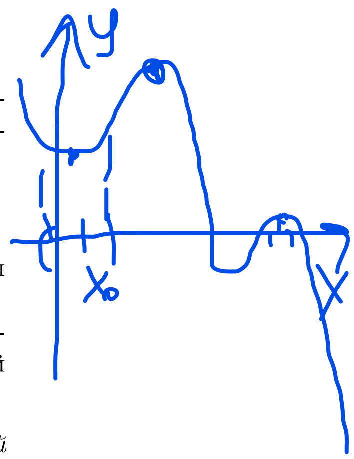
$(g'(f(x)))' = g''(f(x))\cdot f'(x)$

§ 4.7 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши

Определение 4.11. Точка $x_0 \in X$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $f : X \to \mathbb{R}$, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in X \cap U(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \in X \cap U(x_0)).$$





Определение 4.12. Точка $x_0 \in X$ называется точкой строгого локального максимума (минимума) функции $f : X \to \mathbb{R}$, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0) \quad (f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in X \cap \mathring{U}(x_0)).$$

Точки (строгого) локального максимума и минимума называются точками (строгого) экстремума.

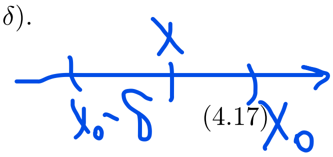
Определение 4.13. Точка x_0 называется внутренней точкой множества X, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

Теорема 4.9 (Ферма). *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет локальный экстремум во внутренней точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0, то есть существует δ-окрестность $U(x_0, \delta)$ точки x_0 такая, что $f(x) - f(x_0) \ge 0 \quad \forall x \in X \cap U(x_0, \delta)$.

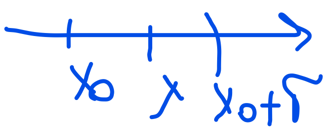
Если $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то $x - x_0 < 0$ и

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\ge 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \le 0, \tag{4.17}$$



а если $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то выполняется неравенство

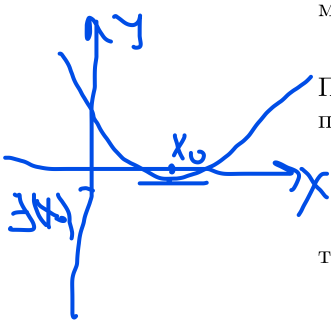
$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\ge 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \ge 0. \tag{4.18}$$



$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \Rightarrow f'_-(x_0) \le 0$

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \Rightarrow f'_+(x_0) \ge 0$

По условию теоремы функция f дифференцируема в точке x_0, поэтому



$$0 \geq f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0 = f'(x_0). \tag{4.19}$$

$f'(x_0)=0$

$y=f(x),\ (x_0, f(y_0))$

Перейдем к пределу при $x \to x_0 - 0$ в неравенстве (4.17). По свойствам пределов получим

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

то есть

$$f'_-(x_0) \leq 0. \tag{4.20}$$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow$

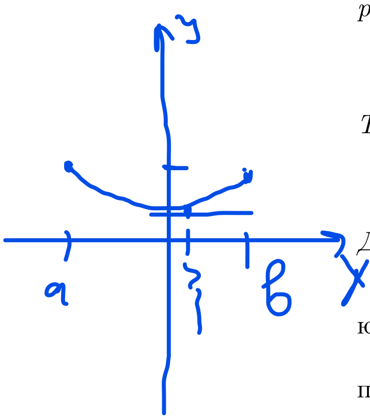
Аналогично, переходя к пределу при $x \to x_0 + 0$ в неравенстве (4.18), получаем

$$f'_+(x_0) \geq 0. \tag{4.21}$$

Из (4.19) – (4.21) следует, что $f'(x_0) = 0$. □

$y = f(x_0)$

Теорема 4.10 (Ролль)**.** *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах отрезка, то есть*



$$f(a) = f(b). \tag{4.22}$$

Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)$ такая, что

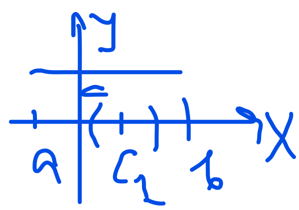
$$f'(\xi) = 0. \tag{4.23}$$

Доказательство. Обозначим $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$.

$m \leq M$

Согласно второй теореме Вейерштрасса, на отрезке $[a, b]$ существуют точки c_1 и c_2 такие, что $f(c_1) = m$, $f(c_2) = M$.

Если $m = M$, то функция f является постоянной на отрезке $[a, b]$, поэтому в качестве ξ можно взять любую точку интервала (a, b).



Если $m \neq M$, то $\boxed{m < M}$, и поэтому $\boxed{f(c_1) < f(c_2)}$. В силу условия (4.22), по крайней мере одна из точек c_1, c_2 является внутренней точкой отрезка $[a, b]$. Пусть, например, $c_1 \in (a, b)$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $U(c_1, \delta) \subset (a, b)$. Так как для всех $x \in U(c_1, \delta)$ выполняется условие $f(x) \geq f(c_1) = m$, то по теореме Ферма $f'(c_1) = 0$, то есть условие (4.23) выполняется при $\xi = c_1$. Аналогично рассматривается случай, когда $c_2 \in (a, b)$. □

X

Теорема 4.11 (Лагранж). *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда* $\exists\ \xi \in (a, b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{4.24}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda x \tag{4.25}$$

$\varphi(a) = \varphi(b)$

и определим число λ так, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$, то есть чтобы

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b.$$

$\lambda b - \lambda a = f(b) - f(a)$

$\lambda(b-a) = f(b) - f(a)$

Это равносильно тому, что

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.26}$$

Для функции φ выполняются все условия теоремы Ролля. Действительно, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция λx, будучи линейной, непрерывна на всей числовой оси; поэтому и функция $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$ также непрерывна на отрезке $[a, b]$. Функция f дифференцируема на интервале (a, b), а функция λx – во всех точках числовой оси, поэтому их разность $\varphi(x)$ также дифференцируема на интервале (a, b). Наконец, на концах отрезка $[a, b]$, в силу выбора λ (см. (4.26)), функция φ принимает одинаковые значения. Поэтому $\exists\ \xi \in (a, b) : \varphi'(\xi) = 0$. Из (4.25) получаем $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \lambda$, поэтому $f'(\xi) - \lambda = 0$. Подставив сюда λ из (4.26), получим

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

$\xi \in (a, b)$

$\varphi'(\xi) = 0$

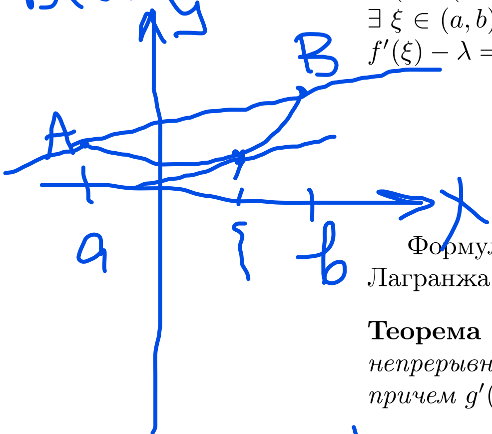
$\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$

$f'(\xi) - \lambda = 0$

$f'(\xi) = \lambda$

$A(a, f(a))$

$B(b, f(b))$



Формулу (4.24) называют формулой конечных приращений Лагранжа или просто формулой конечных приращений.

Теорема 4.12 (Коши). *Пусть функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0\ \ \forall x \in (a, b)$. Тогда $\exists\ \xi \in (a, b)$:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{4.27}$$

$y = kx + d$

$y = kx + d$

$y = f(x)$, $(\xi, f(\xi))$

$y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$

$k_1 = f'(\xi)$

$$\begin{cases} f(a) = ka + d \\ f(b) = kb + d \end{cases} \Rightarrow f(b) - f(a) = k(b - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\varphi(x) = f(x) - \lambda y$ $g(x)$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x), \tag{4.28}$$

$\xi \in (a, b)$

$\varphi'(\xi) = 0$

где число λ выберем таким образом, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$, т.е. чтобы $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Для этого нужно взять

$\lambda g(b) - \lambda g(a) = f(b) - f(a)$

$$\boxed{\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.} \tag{4.29}$$

$\lambda(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$

Заметим, что $g(a) \neq g(b)$. В самом деле, если $g(a) = g(b)$, то функция g удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля и, значит, нашлась бы точка $\zeta \in (a, b)$ такая, что $g'(\zeta) = 0$, что противоречило бы условиям теоремы.

$\varphi'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$

Функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, следовательно, существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $\varphi'(\xi) = 0$. Но из (4.28) $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, поэтому

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0,$$

$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0$

откуда следует, что

$$\boxed{\lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.} \tag{4.30}$$

$\lambda = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Сравнив (4.29) и (4.30), получим формулу (4.27), обычно называемую формулой конечных приращений Коши. □

Отметим, что формула конечных приращений Лагранжа является частным случаем формулы конечных приращений Коши, в которой $g(x) = x$.

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow$

§ 4.8 Формула Тейлора

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то приращение этой функции можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - y_0$, $y_0 = f(x_0)$ и $A = f'(x_0)$, то есть

$$f(x) = \underline{y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0)}, \quad x \to x_0.$$

Иначе говоря, существует линейная функция

$$P_1(x) = y_0 + A(x - x_0) \tag{4.31}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \underbrace{\left(\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right)}_{\alpha(\Delta x)} = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$

$\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \boxed{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \overbrace{\alpha(\Delta x)\Delta x}^{o(\Delta x)}}$

$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$ $\qquad$ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$

такая, что

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

причем $P_1(x_0) = y_0$, $P_1'(x_0) = A = f'(x_0)$.

Поставим более общую задачу. Пусть функция f имеет n производных в точке x_0. Требуется выяснить, существует ли многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{4.32}$$

и

$$P_n(x_0) = f(x_0), \ \boxed{P_n'(x_0) = f'(x_0),} \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \tag{4.33}$$

$P''_n(x_0) = f''(x_0)$

Будем искать этот многочлен по аналогии с формулой (4.31) в виде

$$\boxed{P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n.}$$

Замечая, что $P_n(x_0) = A_0$, из первого условия (4.33), то есть условия $P_n(x_0) = f(x_0)$, получаем $A_0 = f(x_0)$. Далее,

$$\boxed{P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1},}$$

отсюда $P_n'(x_0) = A_1$, и так как $P_n'(x_0) = f'(x_0)$, то $A_1 = f'(x_0)$. Затем найдем вторую производную многочлена $P_n(x)$:

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1 \cdot A_2 + \ldots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}.$$

$P''_n(x_0) = 2A_2$

Отсюда и из условия $P_n''(x_0) = f''(x_0)$ получим $A_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$ и вообще

$A_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3!}$

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

В силу самого построения, для многочлена

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

выполнены все соотношения (4.33). Проверим, удовлетворяет ли он условию (4.32).

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *определены в* δ*-окрестности точки* x_0 *и удовлетворяют следующим условиям:*
для каждого $x \in U(x_0, \delta)$ *существуют* $\varphi^{(n+1)}(x)$ *и* $\psi^{(n+1)}(x)$*;*

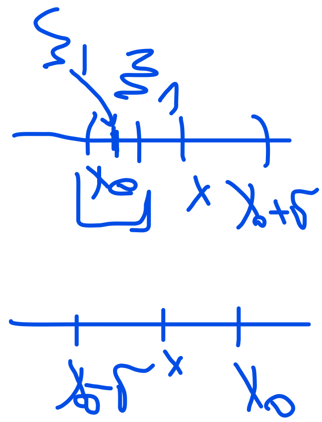
$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = ... = \varphi^{(n)}(x_0) = 0; \tag{4.34}$$

$$\psi(x_0) = \psi'(x_0) = ... = \psi^{(n)}(x_0) = 0; \tag{4.35}$$

$\psi(x) \neq 0$, $\psi^{(k)}(x) \neq 0$ *для* $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ *и для* $k = 1, 2, ..., n+1$.

Тогда для каждого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ *существует точка* ξ*, принадлежащая интервалу с концами* x_0 *и* x *такая, что*

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}. \tag{4.36}$$



Доказательство. Пусть, например, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда, применяя к функциям φ и ψ на отрезке $[x_0, x]$ теорему Коши (см. §4.7) и учитывая, что $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0$ в силу условий (4.34) и (4.35), получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}, \quad x_0 < \xi_1 < x. \tag{4.37}$$

Аналогично, применяя к функциям φ' и ψ' на отрезке $[x_0, \xi_1]$ теорему Коши, находим

$$\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1) - \psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}, \quad x_0 < \xi_2 < \xi_1. \tag{4.38}$$

Из равенств (4.37) и (4.38) следует, что

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}, \quad x_0 < \xi_2 < \xi_1 < x < x_0 + \delta.$$

Применяя теорему Коши последовательно к функциям φ'' и ψ'', $\varphi^{(3)}$ и $\psi^{(3)}$,..., $\varphi^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$ на соответствующих отрезках, получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = ... = \frac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{\psi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)},$$

где $x_0 < \xi < \xi_n < ... < \xi_1 < x < x_0 + \delta$.

Равенство (4.36) доказано для случая, когда $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Аналогично рассматривается случай, когда $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. □