Лекция 9

Формула Тейлора функции n переменных

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и задана функция $f : X \to \mathbb{R}$. Если существуют все частные производные функции до порядка m включительно, и они являются непрерывными, то записывают $f \in C^m(X;\mathbb{R})$, или $f \in C^m(X)$.

Теорема 9.1. Пусть $f \in C^m(U(\mathbf{x}_0);\mathbb{R})$. Тогда имеет место формула Тейлора

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1}}(x^{i_1} - x_0^{i_1}) + \frac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}}(x^{i_1} - x_0^{i_1})(x^{i_2} - x_0^{i_2}) + \dots$$
$$+ \frac{1}{(m-1)!}\sum_{i_1,\dots,i_{m-1}=1}^{n} \frac{\partial^{m-1} f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{m-1}}}(x^{i_1} - x_0^{i_1})\cdots(x^{i_{m-1}} - x_0^{i_{m-1}}) + R_{m-1}(\mathbf{x}), \quad (9.1)$$

где $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ и

$$R_{m-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{m!}\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_m}}(x^{i_1} - x_0^{i_1})\cdots(x^{i_m} - x_0^{i_m}).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) = f(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), x_0^2 + t(x^2 - x_0^2), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n))$. Функция $F \in C^m([0,1];\mathbb{R})$. В этом случае имеет место формула Маклорена

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2!}F''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}(0)t^{m-1} + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\Theta)t^m, \quad (9.2)$$

где $0 < \Theta < 1$.

Далее,

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x^{i_1}}(x^{i_1} - x_0^{i_1}),\\
F''(t) &= \sum_{i_1,i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}}(x^{i_1} - x_0^{i_1})(x^{i_2} - x_0^{i_2}),\\
&\vdots\\
F^{(m-1)}(t) &= \sum_{i_1,\dots,i_{m-1}=1}^{n} \frac{\partial^{m-1} f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_{m-1}}}(x^{i_1} - x_0^{i_1})\cdots(x^{i_{m-1}} - x_0^{i_{m-1}}),\\
F^{(m)}(t) &= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_m}}(x^{i_1} - x_0^{i_1})\cdots(x^{i_m} - x_0^{i_m}).
\end{aligned} \quad (9.3)$$

Следовательно,

$$F'(0) = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1}}(x^{i_1} - x_0^{i_1}),$$

$$\vdots$$

$$F^{(m-1)}(0) = \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n} \frac{\partial^{m-1} f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{m-1}}}(x^{i_1} - x_0^{i_1}) \cdots (x^{i_{m-1}} - x_0^{i_{m-1}}), \tag{9.4}$$

$$F^{(m)}(\Theta) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_m}}(x^{i_1} - x_0^{i_1}) \cdots (x^{i_m} - x_0^{i_m}).$$

Положим в (9.2) $t = 1$ и подставим (9.3) и (9.4). Получим

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}(0) + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\Theta),$$

или

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1}}(x^{i_1} - x_0^{i_1}) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n} \frac{\partial^{m-1} f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{m-1}}}(x^{i_1} - x_0^{i_1}) \cdots (x^{i_{m-1}} - x_0^{i_{m-1}}) + R_{m-1}(\mathbf{x}).$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ □

Замечание 9.1. Если $z = f(x, y)$, то (9.1) может быть записана в виде

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0, y_0) + R_{m-1}(x, y),$$

где $R_{m-1}(x, y) = \dfrac{1}{m!} \left((x - x_0)\dfrac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\dfrac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0 + \Theta(x - x_0), y_0 + \Theta(y - y_0)).$

Замечание 9.2. В предположении теоремы 9.1 справедлива следующая формула:

$x_0 = (0, 0, \ldots, 0).$

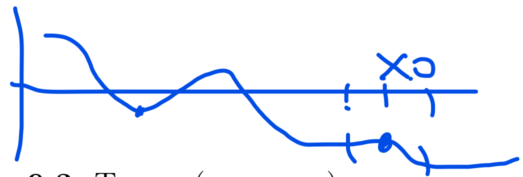
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1}}(x^{i_1} - x_0^{i_1}) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n} \frac{\partial^{m-1} f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{m-1}}}(x^{i_1} - x_0^{i_1}) \cdots (x^{i_{m-1}} - x_0^{i_{m-1}}) + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^m).$$

Точки локального экстремума функции n переменных

Определение 9.1. Точка $\mathbf{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f : X \to \mathbb{R}$, если существует $U(\mathbf{x}_0)$ такая, что $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0)$ $(f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}_0))$ $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \bigcap X$.

Определение 9.2. Точка $\mathbf{x}_0 \in X$ называется *точкой строгого локального максимума (минимума)* функции $f : X \to \mathbb{R}$, если существует $U(\mathbf{x}_0)$ такая, что $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ $(f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0))$ $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \bigcap X$.



Определение 9.3. Точки (строгого) максимума и минимума функции называются *точками (строгого) экстремума.*

Теорема 9.2. (необходимое условие экстремума). Если $\mathbf{x}_0$ – внутренняя экстремальная точка функции $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ и существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0),\ i = 1, \dots, n$, то

$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0) = 0, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0) = 0. \tag{9.5}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi_1(x^1) = f(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$. Так как $\mathbf{x}_0$ является внутренней точкой для области определения функции $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$, то точка x_0^1 является внутренней точкой для области определения функции $f(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, то есть для области определения функции φ_1.

То по теореме Ферма имеем

$\varphi_1'(x_0^1)$

$$0 = \left.\frac{d\varphi_1(x^1)}{dx^1}\right|_{x^1 = x_0^1} = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Аналогично для функций $\varphi_k(x^k) = f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{k-1}, \underline{x^k}, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n)$ получим

$$\left.\frac{d\varphi_k(x^k)}{dx^k}\right|_{x^k = x_0^k} = \frac{\partial f}{\partial x^k}(\mathbf{x}_0) = 0. \qquad \varphi_k'(x_0^k) = 0$$

□

Определение 9.4. Решения системы (9.5) называются *стационарными* точками функции f. Отметим, что не каждая стационарная точка функции f является точкой экстремума.

Достаточные условия строго го экстремума

Необходимые сведения из алгебры

Определение 9.5. Функция от упорядоченной пары $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ точек $n-$мерного пространства $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ вида

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x^i y^k,$$

где a_{ik} – заданные числа, $i, k = 1, 2, \dots, n$ называется *билинейной формой* от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Это название объясняется тем, что если одну из точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ зафиксировать, то функция будет линейной относительно координат оставшейся точки.

Определение 9.6. Функция $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ называется *квадратичной формой*, соответствующей данной билинейной форме $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$: y

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = A(x^1, \dots, x^n; x^1, \dots, x^n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x^i x^k.$$

В случае, когда $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, билинейная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и соответствующая ей квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ называются *симметричными*.

Пример. Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ и $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^n)$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n$$

является симметричной формой, а квадрат длины вектора $\mathbf{x}$ – соответствующей ей квадратичной формой $\|\mathbf{x}\|^2 = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$.

Определение 9.7. Квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} x^i x^k$, $a_{ik} = a_{ki}$, называется *положительно (отрицательно) определенной*, если $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ $(A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0)$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$.

Определение 9.8. Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется *неопределенной*.