Теория конечных графов

Увеличение потока в графе

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной информатики и теории вероятностей РУДН
Маркова Екатерина Викторовна
markova_ev@pfur.ru

Литература

1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

Задачи на потоки в графах

Поток определяет способ пересылки некоторых объектов из одного пункта в другой.

Задачи на оптимизацию потоков могут возникнуть

- при транспортировке товаров,
- при передвижении людей,
- при денежном обороте.

Применительно к графам поток задает способ пересылки некоторых объектов (единиц потока) из одной вершины графа (из источника) в другую вершину (сток) по дугам в направлении их ориентации.

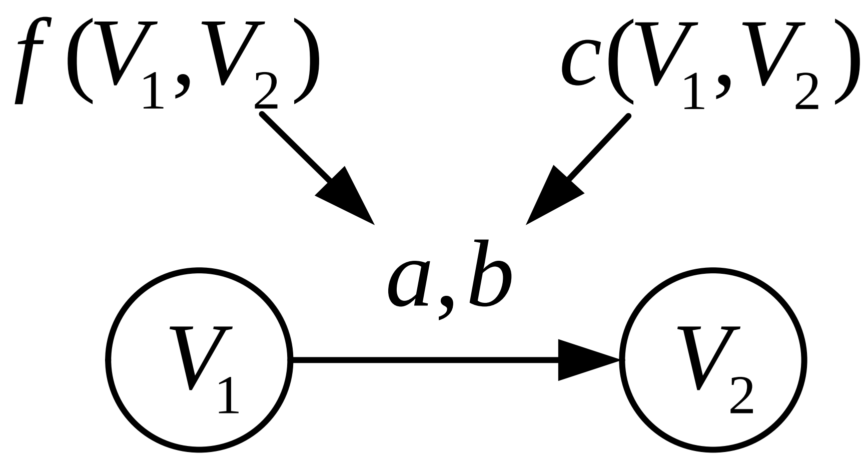
Задачи в теории графов:

- найти максимальный поток на графе.
- найти поток минимальной стоимости для пересылки k единиц потока

Пример дуги, на которой задан поток из источника V_1 в сток V_2

Максимальное число единиц потока, которые могут проходить по дуге, называется пропускной способностью дуги. Обозначение $c(V_i, V_j)$. Реальное число единиц потока, проходящих по дуге $< V_i, V_j >$ обозначается $f(V_i, V_j)$.

Отметим, что реальное число единиц потока не превосходит пропускную способность дуги: $f(V_i, V_j) \le c(V_i, V_j)$.



Условия существования потока

Пусть на графе $G =< \mathbf{V,E} >$ заданы значения $f(V_i,V_j)$ и $c(V_i,V_j)$ для каждой дуги $< V_i,V_j > \in \mathbf{E}$, $V_S \in \mathbf{V}$ – источник и $V_T \in \mathbf{V}$ – сток.

1) $\forall < V_i,V_j > \in \mathbf{E}$; $0 \le f(V_i,V_j) \le c(V_i,V_j)$.

Число единиц потока, проходящих по дуге $< V_i,V_j >$ ограничено пропускной способностью этой дуги.

2) $\forall V_i \in \mathbf{V}$, $V_i \ne V_S$, $V_i \ne V_T$: $\sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_i,V_j) = \sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_j,V_i)$.

Условие 2 (правило Кирхгофа) запрещает утечку потока в промежуточных вершинах, число приходящих единиц потока в вершину должно быть равно числу выходящих из этой вершины единиц потока.

Условия существования потока

3) $\sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_S, V_j) - \sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_j, V_S) = K = \sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_j, V_T) - \sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_T, V_j)$.

Распишем каждую суммы в этом уравнении.

$\sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_S, V_j)$ – количество единиц потока, выходящего из V_S.

$\sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_j, V_S)$ – количество единиц потока, входящего в V_S.

$\sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_j, V_T)$ – количество единиц потока, входящего в сток V_T.

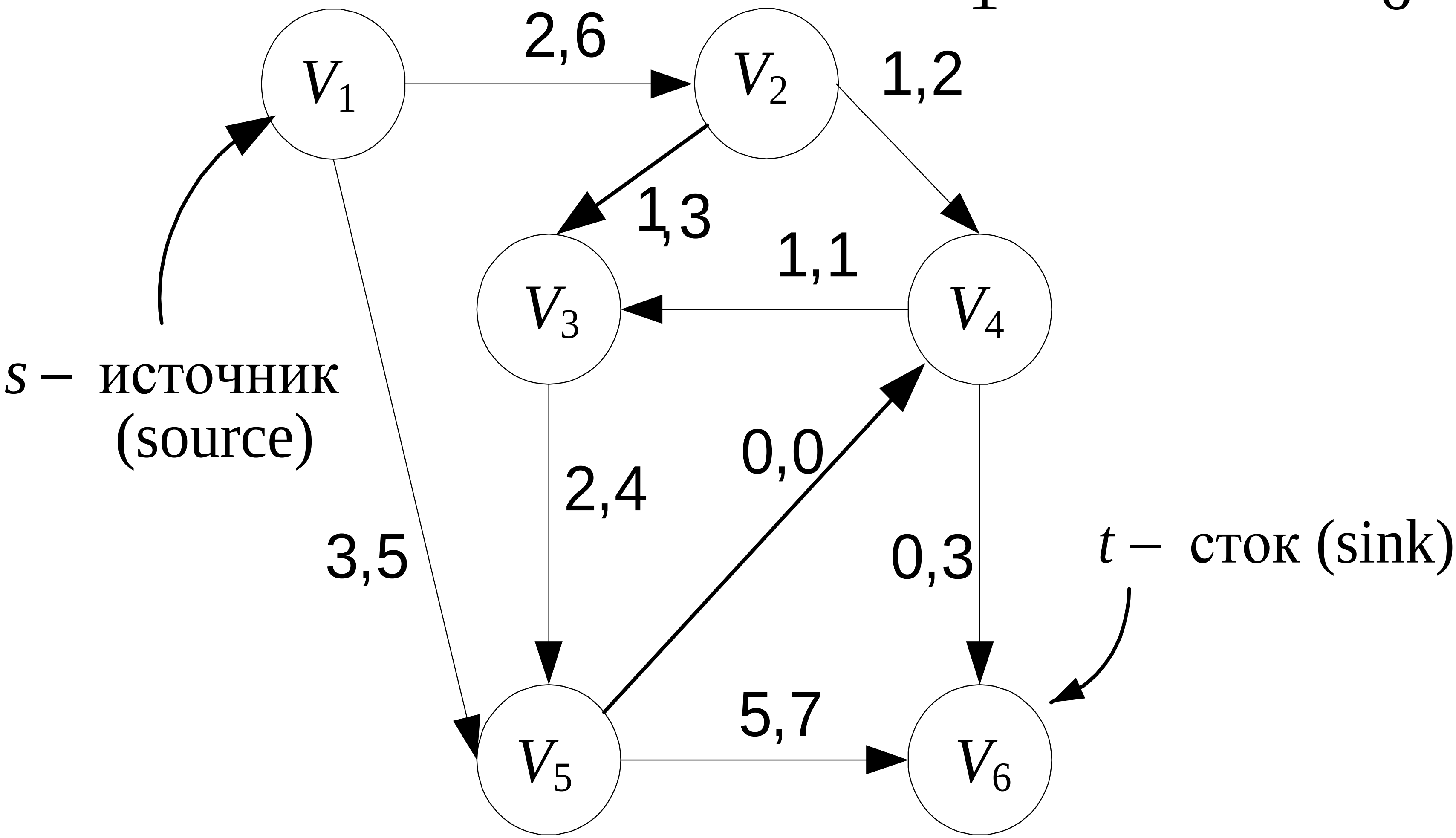
$\sum\limits_{V_j \in \mathbf{V}} f(V_T, V_j)$ – количество единиц потока, выходящего из стока V_T.

Из источника V_S выходит всего (суммарно) K единиц потока, и в сток V_T входит всего (суммарно) K единиц потока.

Условие 3 задает баланс единиц потока, выходящего из источника и входящего в сток.

Если условия 1–3 соблюдаются, то говорят, что в графе $G = \langle \mathbf{V}, \mathbf{E} \rangle$ задан поток величины K (то есть из источника в сток передается K единиц потока).

Пример графа, в котором задан поток из источника V_1 в сток V_6



Пример 1. Определить, соблюдены ли на графе условия существования потока 1-3.

Увеличивающая цепь

Пусть в графе $G = < \mathbf{V}, \mathbf{E} >$, $|\mathbf{V}| = n$, существует поток из вершины $V_S \in \mathbf{V}$ в вершину $V_T \in \mathbf{V}$. При решении транспортных задач часто возникает вопрос возможности увеличения потока из источника в сток. Для решения удобно применить алгоритм поиска увеличивающей цепи в графе.

Увеличивающей цепью называется цепочка дуг, по которой могут быть переданы дополнительные единицы потока из источника в сток.

Группы дуг графа

Дуги графа могут быть разделены на несколько групп.

N (neutral) – группа дуг графа, в которых поток не может изменяться (дуги с нулевой пропускной способностью или дуги, в которых по каким-либо причинам, например техническим, число проходящих единиц потока должно быть постоянным).

I (increase)– дуги, в которых поток может увеличиваться, то есть дуги $<V_i,V_j>\in\mathbf{E}$, в которых число проходящих единиц потока $f(V_i,V_j)$ меньше пропускной способности $c(V_i,V_j)$.

R (reduce) – дуги, в которых поток может уменьшаться, то есть дуги $<V_i,V_j>\in\mathbf{E}$, в которых число проходящих единиц потока $f(V_i,V_j)$ больше нуля.

Алгоритм поиска увеличивающей цепи в орграфе

Начало. В орграфе $G = < \mathbf{V}, \mathbf{E} >$, $|\mathbf{V}| = n$, существует поток, и соблюдены условия существования потока 1–3.

Шаг 1. Разбить множество дуг графа $G = < \mathbf{V}, \mathbf{E} >$ на группы: $\mathbf{N}, \mathbf{I}, \mathbf{R}$ (дуги в группах $\mathbf{I}, \mathbf{R}$ могут повторяться).

Шаг 2. 1) Исключить из рассмотрения дуги группы $\mathbf{N}$. 2) окрасить вершину V_S.

Шаг 3. Окрашивать дуги и вершины в соответствии с правилами (правила представлены после алгоритма) до тех пор, пока
1) будет окрашена вершина V_T, 2) окраска новых вершин и дуг станет невозможной.

Шаг 4. 1) Если вершина V_T окрашена, то для цепи выбираются окрашенные дуги, соединяющие вершины V_S и V_T. Такая цепь называется увеличивающей. 2) В обратном случае увеличивающей цепи в графе нет.

Конец алгоритма.

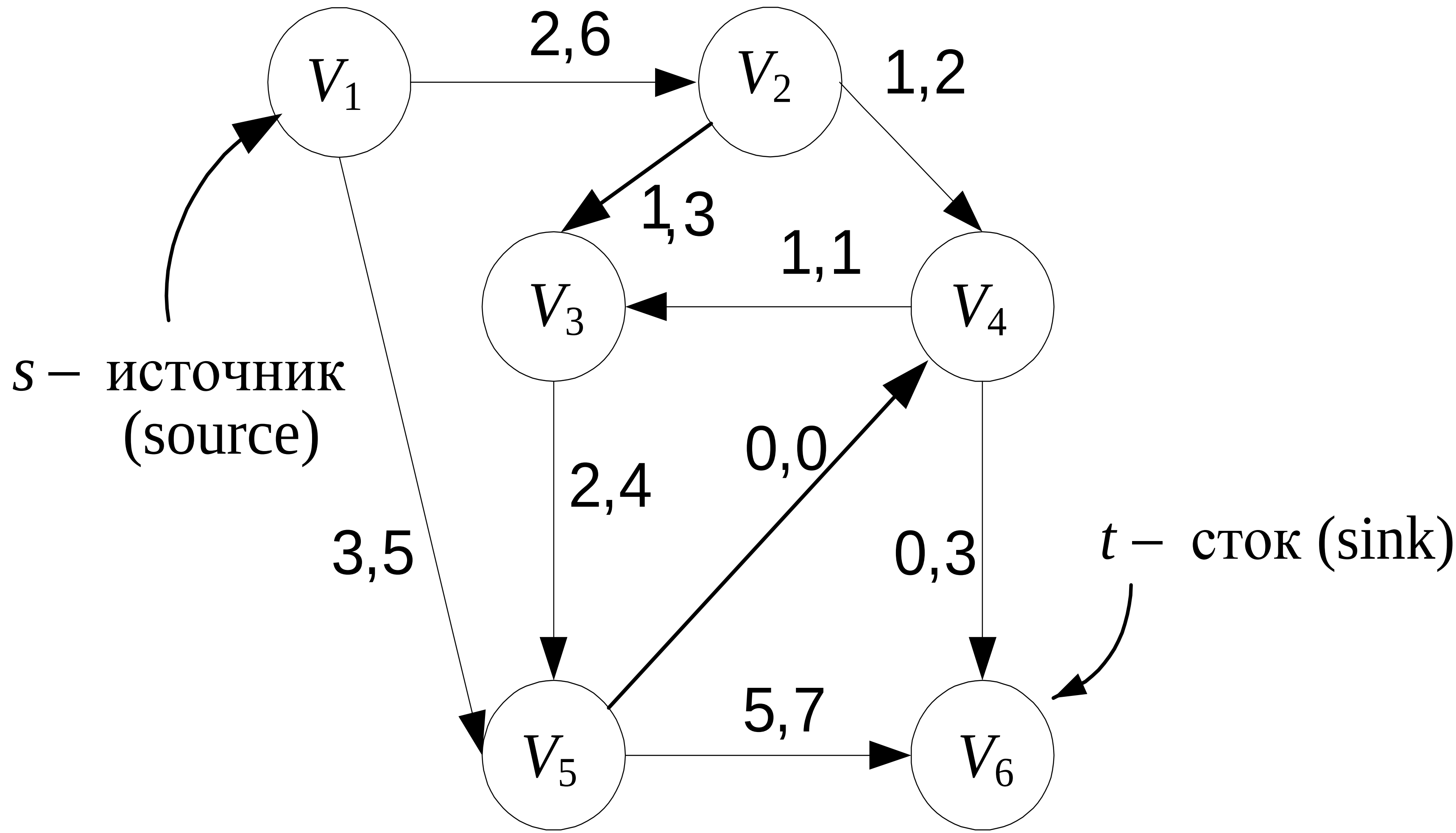
Правила окрашивания дуг $<V_i,V_j>$, $<V_j,V_i>$ и вершины V_j при уже окрашенной вершине V_i

1) Если дуга $<V_i,V_j>\in \mathbf{I}$, то дуга $<V_i,V_j>$ и вершина V_j окрашиваются. Дуга $<V_i,V_j>$ называется прямой дугой.

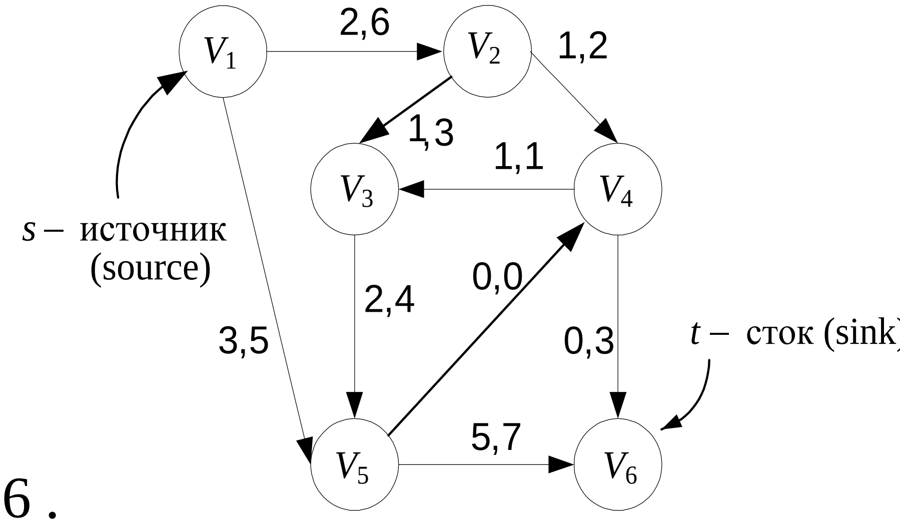
2) Если дуга $<V_j,V_i>\in \mathbf{R}$, то окрашивается дуга $<V_j,V_i>$ и вершина V_j. Дуга $<V_j,V_i>$ называется обратной дугой.

3) В остальных случаях дуга $<V_i,V_j>$ и вершина V_j не окрашиваются.

Упражнение: найти увеличивающую цепь для примера 1



Поиск увеличивающей цепи для примера 1



Начало. Граф $G=<\mathbf{V},\mathbf{E}>$, $|\mathbf{V}|=n=6$.

Шаг 1. Разбиваем множество дуг графа $G=<\mathbf{V},\mathbf{E}>$ на группы: $\mathbf{N},\mathbf{I},\mathbf{R}$ (дуги в группах $\mathbf{I},\mathbf{R}$ могут повторяться).

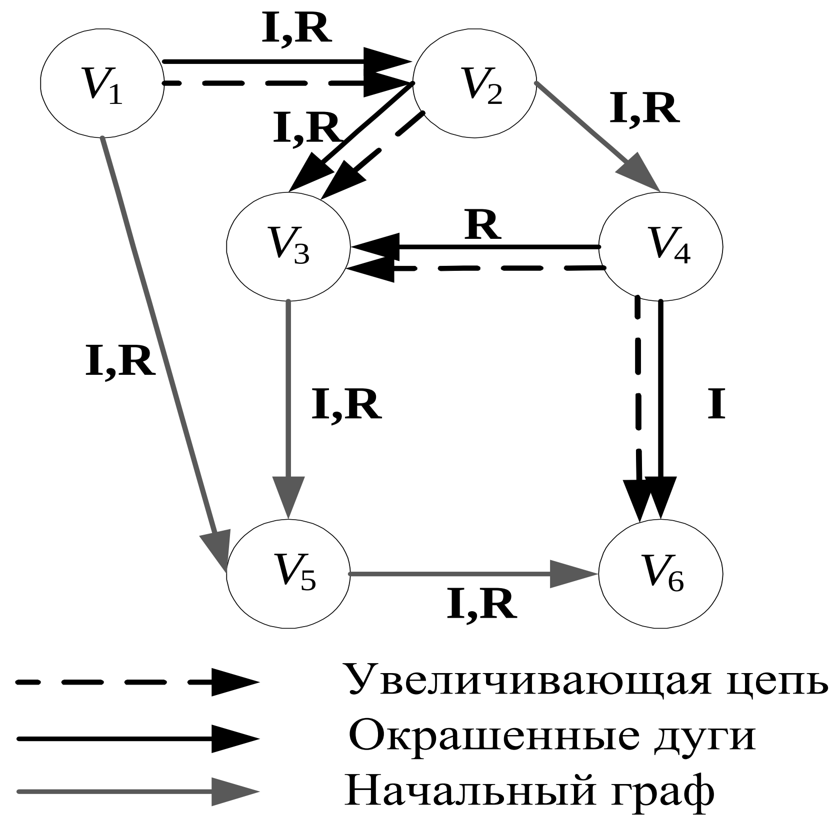
$\mathbf{N}=\{<V_5,V_4>\}$,

$\mathbf{I}=\{<V_1,V_2>,<V_1,V_5>,<V_2,V_3>,<V_2,V_4>,<V_3,V_5>,<V_4,V_6>,<V_5,V_6>\}$,

$\mathbf{R}=\{<V_1,V_2>,<V_1,V_5>,<V_2,V_3>,<V_2,V_4>,<V_3,V_5>,<V_4,V_3>,<V_5,V_6>\}$.

Шаг 2. Закрашиваем вершины и дуги. Исключаем дугу $<V_5,V_4>$ и закрашиваем начальную вершину $V_S=V_1$.

Поиск увеличивающей цепи для примера 1



Шаг 3. По правилу 1.

1) Дуга $< V_1, V_2 >$ и вершина V_2 окрашиваются.
2) Дуга $< V_2, V_3 >$ и вершина V_3 окрашиваются.

По правилу 2.

3) Дуга $< V_4, V_3 >$ и вершина V_4 окрашиваются.

По правилу 1.

4) Дуга $< V_4, V_6 >$ и вершина V_6 окрашиваются.

Шаг 4. Вершина $V_T = V_6$ окрашена, следовательно, существует увеличивающая цепь от вершины $V_S = V_1$ до $V_T = V_6$. Одна из увеличивающих цепей: $V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_6$.

Конец алгоритма.

Ответ. Увеличивающая цепь –

$E' = \{< V_1, V_2 >, < V_2, V_3 >, < V_4, V_3 >, < V_4, V_6 >\}$.

Увеличение потока вдоль увеличивающей цепи

Увеличение потока вдоль найденной увеличивающей цепи находится по следующим правилам.

1) Определяется величина $t = \min\left\{\gamma(V_i, V_j)\right\}$ $\forall\ \gamma(V_i, V_j) \in E'$ где $\gamma(V_i, V_j)$ – разница на дуге $< V_i, V_j >$.

Если $< V_i, V_j >$ – прямая дуга (окрашена по правилу 1), то $\gamma(V_i, V_j) = c(V_i, V_j) - f(V_i, V_j)$.

Если $< V_i, V_j >$ – обратная дуга (окрашена по правилу 2), то $\gamma(V_i, V_j) = f(V_i, V_j)$.

Увеличение потока вдоль увеличивающей цепи

2) С помощью величины t из предыдущего пункта, изменяем поток.

Для каждой прямой дуги $<V_i, V_j> \in E'$

$f(V_i, V_j) := f(V_i, V_j) + t$, поток увеличивается на t единиц.

Для каждой обратной дуги $<V_i, V_j> \in E'$

$f(V_i, V_j) := f(V_i, V_j) - t$, поток уменьшается на t единиц.

Увеличение потока вдоль увеличивающей цепи для примера 1

1) $<V_1,V_2>$ – прямая, $<V_2,V_3>$ – прямая, $<V_4,V_3>$ – обратная, $<V_4,V_6>$ – прямая.

$$t=\min\{\gamma(V_1,V_2);\gamma(V_2,V_3);\gamma(V_4,V_3);\gamma(V_4,V_6)\}=$$

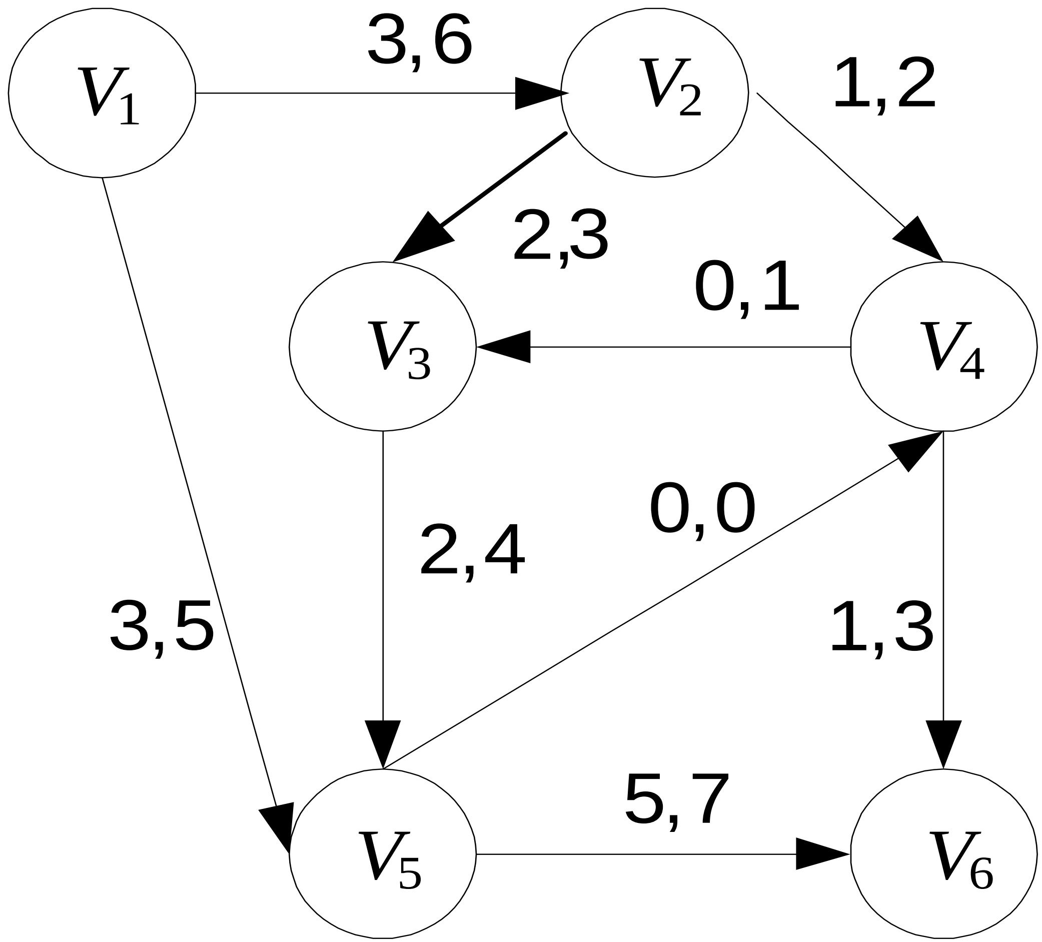
$$=\min\left\{\begin{matrix} c(V_1,V_2)-f(V_1,V_2);c(V_2,V_3)-f(V_2,V_3); \\ f(V_4,V_3);c(V_4,V_6)-f(V_4,V_6) \end{matrix}\right\}=$$

$$=\min\{(6-2);(3-1);1;(3-0)\}=\min\{4;2;1;3\}=1.$$

Получаем $t=1$.

2) $f(V_1,V_2):=2+1=3$, $f(V_2,V_3):=1+1=2$, $f(V_4,V_3):=1-1=0$, $f(V_4,V_6):=0+1=1$.

Результирующий граф для примера 1



Тема следующей лекции:

«Максимальный поток в графе»