# Лекция 6

## Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$ (продолжение)

Пусть $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ – единичный вектор, причем $\|\mathbf{l}\| = 1$, $\mathbf{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда при достаточно малых значениях $t \geqslant 0$ имеем $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l}) \in X$. Рассмотрим функцию $\varphi(t, \mathbf{l}) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l})$.

**Определение 6.1.** Если существует производная

$$\varphi'_t\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l})\Big|_{t=0}, \tag{6.1}$$

то она называется *производной по направлению вектора* $\mathbf{l}$ функции $f$ в точке $\mathbf{x}_0$. Обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0)$.

$x_0+tl_k=(x_0^1,\dots,x_0^{k-1},x_0^k+t,x_0^{k+1},\dots,x_0^n)$

Перепишем (6.1) в виде

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0).$$

$\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial l_k}(x_0).$

Частная производная является частным случаем производной по направлению. Действительно, пусть

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+tl_k)-f(x_0)}{t}$

$x_0=(x_0^1,\dots,x_0^{k-1},x_0^k,x_0^{k+1},\dots,x_0^n)$

$$\mathbf{l}_k = (\overbrace{\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0}^{n}),$$

$tl_k=(0,\dots,0,\underset{k}{t},0,\dots,0)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_k}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k + t, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x^k}(\mathbf{x}_0).$$

**Определение 6.2.** Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке $\mathbf{x}_0 \in X$, если

$f(x_0^1,\dots,x_0^{k-1},x_0^k,x_0^{k+1},\dots,x_0^n)$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i (x^i - x_0^i) + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|), \tag{6.2}$$

где $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \dots, n$ – постоянные.

**Теорема 6.1.** Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, то $\mathcal{A}_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, \dots, n$ и существует $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0)$ по любому направлению $\mathbf{l}$ и при этом

$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0) = (\mathcal{A}, \mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i l^i.$$

$A=(A_1,A_2,\dots,A_n)$

$x-x_0=tl$

*Доказательство.* Поскольку по условию теоремы имеем место (6.2), то, подставив в (6.2) $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{l}$ ($\|l\| = 1$), получим

$x_0=(x_0^1,\dots,x_0^n)$

$l=(l^1,\dots,l^n)$

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{l}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i (x_0^i + tl^i - x_0^i) + \bar{\bar{o}}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t\mathcal{A}_i l^i + \bar{\bar{o}}(\|t\mathbf{l}\|) = \sum_{i=1}^{n} t\mathcal{A}_i l^i + \bar{\bar{o}}(|t| \cdot \underbrace{\|\mathbf{l}\|}_{=1}) = \sum_{i=1}^{n} t\mathcal{A}_i l^i + \bar{\bar{o}}(|t|).$$

$tl=(tl^1,\dots,tl^n)$; $x_0+tl=(x_0^1+tl^1,\dots,x_0^n+tl^n)$.

$$\frac{f(x_0+tl)-f(x_0)}{t} = \sum_{i=1}^{n} A_i l^i + \frac{\bar{o}(|t|)}{t}$$

Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{l})-f(\mathbf{x}_0)}{t} = \sum_{i=1}^{n}\mathcal{A}_i l^i + \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\bar{\bar{o}}(|t|)}{t}}_{=0} = (\mathcal{A},\mathbf{l}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}_0), \qquad (6.3)$$

$A_k l^k = A_k$

где $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n)$.

Подставим, в (6.3) вместо $\mathbf{l}$ вектор $\mathbf{l}_k$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial l_k}(x_0) = A_k.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_k}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(\mathbf{x}_0) = (\mathcal{A},\mathbf{l}_k) = \mathcal{A}_k, \quad k = 1,\ldots,n.$$

$$l_k = (0,\ldots,0,\overset{k}{1},0,\ldots,0)$$

□

**Теорема 6.2.** Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_0$, то она непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.

*Доказательство.* Переходя в (6.2) к пределу при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, получим

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)) = 0,$$

то есть $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$. □

**Теорема 6.3.** Из существования частных производных функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$, вообще говоря, не следует её дифференцируемость в точке $\mathbf{x}_0$.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Найдем $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ и покажем, что эта функция не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Имеем

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{0|x|}-0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично, $f'_y(0,0) = 0$. Далее, из (6.2) следует, что

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta f(0,0) - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

где $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

В данном случае имеем

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\sqrt{2(\Delta x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

то есть $f$ не является дифференцируемой в точке $(0,0)$. □

**Теорема 6.4. (Достаточное условие дифференцируемости).** Пусть в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in X$ существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}$, $k = 1,\ldots,n$, являющиеся непрерывными функциями в точке $\mathbf{x}_0$. Тогда функция $f : X \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_0$.

*Доказательство.* Рассмотрим трехмерный ($n = 3$) случай. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{x}_0) = f(x_0^1 + \Delta x^1, x_0^2 + \Delta x^2, x_0^3 + \Delta x^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \\ = [f(x_0^1 + \Delta x^1, x_0^2 + \Delta x^2, x_0^3 + \Delta x^3) - f(x_0^1, x_0^2 + \Delta x^2, x_0^3 + \Delta x^3)] + \\ + [f(x_0^1, x_0^2 + \Delta x^2, x_0^3 + \Delta x^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3 + \Delta x^3)] + \\ + [f(x_0^1, x_0^2, x_0^3 + \Delta x^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3)].\end{aligned}$$

Применим теорему Лагранжа о конечных приращениях ($(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \in X$, рассматриваются промежутки с концами $x_0^k$ и $x_0^k + \Delta x^k,\ k = 1, \ldots, n$). Получим

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2 + \Delta x^2, x_0^3 + \Delta x^3)\Delta x^1 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, \xi^2, x_0^3 + \Delta x^3)\Delta x^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, \xi^3)\Delta x^3, \quad (6.4)\end{aligned}$$

где $\xi_i$ – точка из промежутка с концами $x_0^i$ и $x_0^i + \Delta x^i$.

Учитывая, что частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ непрерывны в точке $\mathbf{x}_0$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2 + \Delta x^2, x_0^3 + \Delta x^3) &= \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^1} + \alpha_1, \\ \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, \xi^2, x_0^3 + \Delta x^3) &= \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^2} + \alpha_2, \quad (6.5) \\ \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, \xi^3) &= \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^3} + \alpha_3,\end{aligned}$$

где $\alpha_i \to 0$ при $x \to x_0$.

Подставляя (6.5) в (6.4), приходим к равенству

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^k}\Delta x^k + \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \Delta x^k = \\ = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^k}\Delta x^k + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\alpha_k \Delta x^k}{\|\Delta\mathbf{x}\|}\right)}_{\substack{\text{огр.}\times\text{беск. малая=} \\ \text{беск. малая}}} \|\Delta\mathbf{x}\| = \\ = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^k}\Delta x^k + \overline{\overline{o}}(\|\Delta\mathbf{x}\|).\end{aligned}$$

□

## Дифференцирование сложной функции

**Теорема 6.5.** Пусть функции $g^k : X \subset \mathbb{R}^n \to Z \subset \mathbb{R}^m,\ k = 1, \ldots, m$ дифференцируемы в точке $\mathbf{x}_0$, а функция $f : Z \to \mathbb{R}$ – дифференцируема в точке $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$ и при этом $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\left.\frac{\partial y(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial x^i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b})\frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0).$$

*Доказательство.* Имеем

$$f(\mathbf{z})-f(\mathbf{b})=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b})(z^k-b^k)+\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{z}-\mathbf{b}\|), \tag{6.6}$$

$$\underbrace{g^k(\mathbf{x})}_{=z^k}-\underbrace{g^k(\mathbf{x}_0)}_{=b^k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)(x^i-x_0^i)+\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|),\ k=1,\ldots,m, \tag{6.7}$$

Из (6.6) и (6.7) следует

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))-f(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0))=\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b})\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)(x^i-x_0^i)+\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|)\right]+\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{z}-\mathbf{b}\|)=\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b})\frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)(x^i-x_0^i)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b})\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|)+\\
&\qquad\qquad+\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{z}-\mathbf{b}\|).
\end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
\frac{\|\mathbf{z}-\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}&=\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x_0})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}=\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}(g^k(\mathbf{x})-g^k(\mathbf{x}_0))}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}=\\
&=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)\frac{x^i-x_0^i}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}+\frac{\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\right)^2}
\end{aligned}$$

– ограничено, поэтому $\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{z}-\mathbf{b}\|)=\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|)$.

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b})\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|)+\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|)=\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|).$$

Таким образом,

$$f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))-f(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0))=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\mathcal{A}}_i(x^i-x_0^i)+\overline{\overline{o}}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|),$$

где $\tilde{\mathcal{A}}_i=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial z^k}(\mathbf{b})\frac{\partial g^k}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)=\left.\frac{\partial y(x^1,x^2,\ldots,x^n)}{\partial x^i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_0}}=\left.\frac{\partial f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{\partial x^i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}.$ □