Лекция 22

Замена переменной в интеграле Римана

Теорема 22.1. Пусть $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда для любой непрерывной функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ функция $f(\varphi(t))\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ является интегрируемой по Риману на $[\alpha, \beta]$ и

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}dt = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Доказательство. При рассмотренных условиях $f(\varphi(t)) \in C[\alpha, \beta]$ и $\dfrac{d\varphi}{dt} \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow$ $f(\varphi(t))\dfrac{d\varphi}{dt}$ является непрерывной на $[\alpha, \beta]$ и, следовательно, интегрируемой н этом отрезке.

Пусть

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)$ – первообразная функции f на $[a, b]$. Тогда функция $F(\varphi(t))$ является первообразной функции $f(\varphi(t))\dfrac{d\varphi}{dt}$ на $[\alpha, \beta]$, так как $\dfrac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \dfrac{dF(\varphi(t))}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} = f(\varphi(t))\dfrac{d\varphi}{dt}$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}dt = F(\varphi(t))\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

$\square$

Приложения определенного интеграла

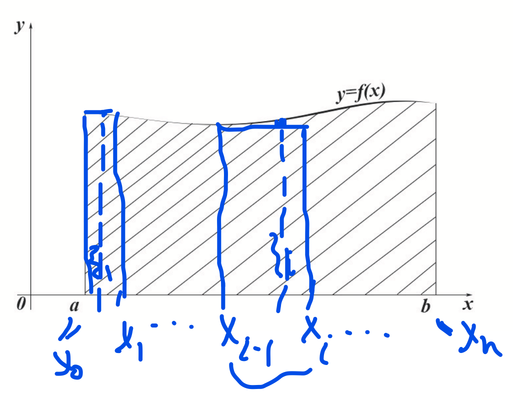
1. Площадь криволинейной трапеции

Пусть задана криволинейная трапеция $G = \{(x, y) : \ x \in [a, b], \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, и $f \in C[a, b]$, P – разбиение отрезка $[a, b]$. Составим интегральную сумму

$$\sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

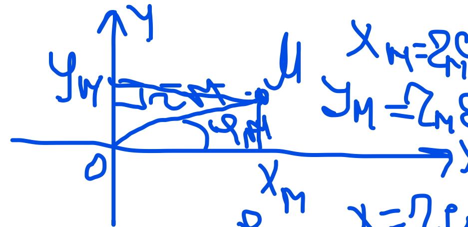
Число $S = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = \int\limits_a^b f(x)dx$ называется *площадью криволинейной трапеции.*

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



$r \geqslant 0$

$r,\ \varphi \quad M(r,\varphi)$



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

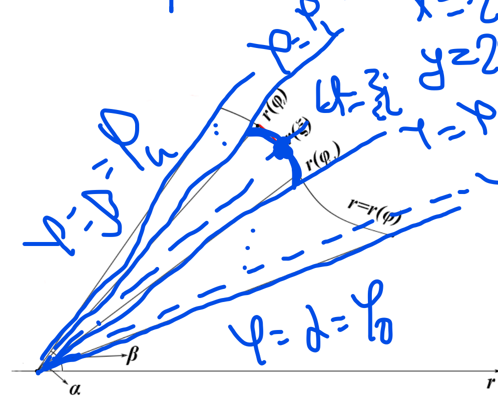
2. Площадь криволинейного сектора

Рассмотрим фигуру $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)$. Пусть P – разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ с отмеченными точками $\xi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Далее

$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$

$\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$S_i = \frac{\cancel{\pi} r^2(\xi_i)}{2\cancel{\pi}}\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i -$$



площадь кругового сектора с радиусом $r(\xi_i)$.

Пусть $r = r(\varphi)$ – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция. Тогда

$$\sigma(r^2; (P, \boldsymbol{\xi})) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i.$$

При рассматриваемых условиях существует предел $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(r^2; (P, \boldsymbol{\xi})) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$, называемый *площадью криволинейного сектора*.

3. Длина кривой на плоскости

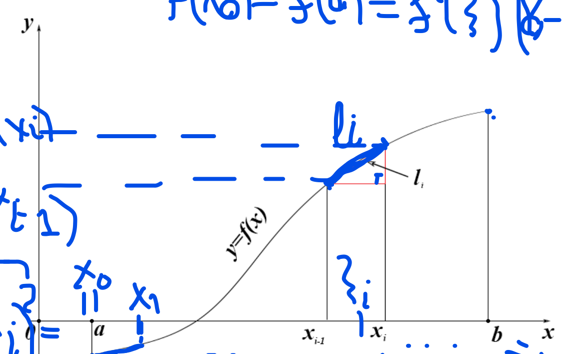
т. Лагранжа

$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Пусть задана кривая $y = f(x),\ x \in [a, b]$, где $f \in C^1[a, b]$. Пусть P – разбиение отрезка $[a, b]$. То по теореме Пифагора получаем

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

$= f'(\xi_i)\Delta x_i$



Тогда по теореме Лагранжа

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\frac{df}{dx}\Big|_{x=\xi_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2} = \sqrt{(f'(\xi_i))^2(\Delta x_i)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\Big|_{x=\xi_i}\right)^2}\,\Delta x_i,$$

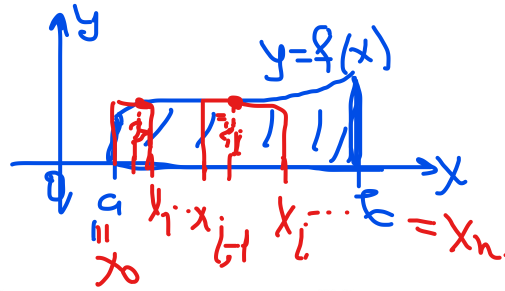
где $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} l_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\Big|_{x=\xi_i}\right)^2}\,\Delta x_i$. При рассматриваемых условиях существует предел

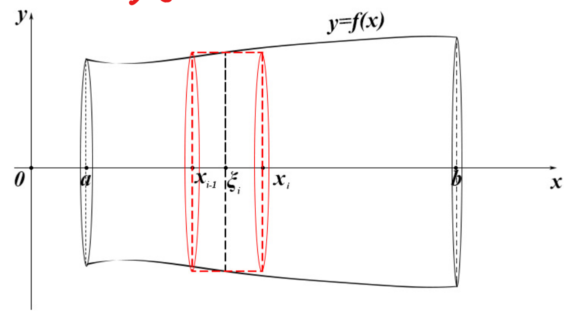
$$S = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\Big|_{x=\xi_i}\right)^2}\,\Delta x_i = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx, = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

называемый *длиной рассматриваемой кривой*.

4. Объем тела вращения



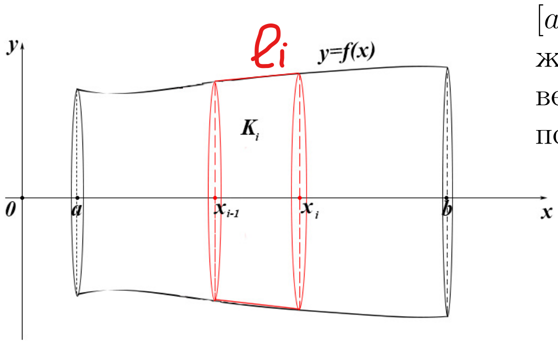
Рассмотрим криволинейную трапецию $G = \{(x,y):\ x \in [a,b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Пусть $f \in C[a,b]$, P – разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда $V = \sum\limits_{i=1}^{n} V_i$, где V_i – объем цилиндра с радиусом основания $f(\xi_i)$, $V_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Составим интегральную сумму



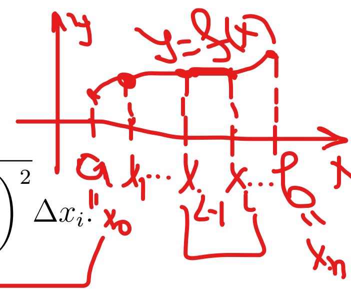
$$\sigma(\pi f^2; (P, \boldsymbol{\xi})) = \pi\sum_{i=1}^{n} \cancel{\pi} f^2(\xi_i)\Delta x_i.$$

При рассматриваемых условиях существует предел $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(\pi f^2; (P, \boldsymbol{\xi})) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$, называемый *объемом тела вращения.*

5. Площадь поверхности вращения



Пусть $f \in C^1[a,b]$, P – разбиение отрезка $[a,b]$, K_i – усеченный конус (в частности, может быть и цилиндр). Площадь боковой поверхности усеченного конуса K_i вычисляется по формуле



$$S_{K_i} = \frac{1}{2}[2\pi f(x_{i-1}) + 2\pi f(x_i)]l_i =$$

$$= \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\Big|_{x=\xi_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

При рассматриваемых условиях существует предел

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\Big|_{x=\xi_i}\right)^2}\Delta x_i = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx,$$

называемый *площадью боковой поверхности тела вращения.*