Теория конечных графов

Алгоритм Дейкстры

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной информатики и теории вероятностей РУДН
Маркова Екатерина Викторовна
markova_ev@pfur.ru

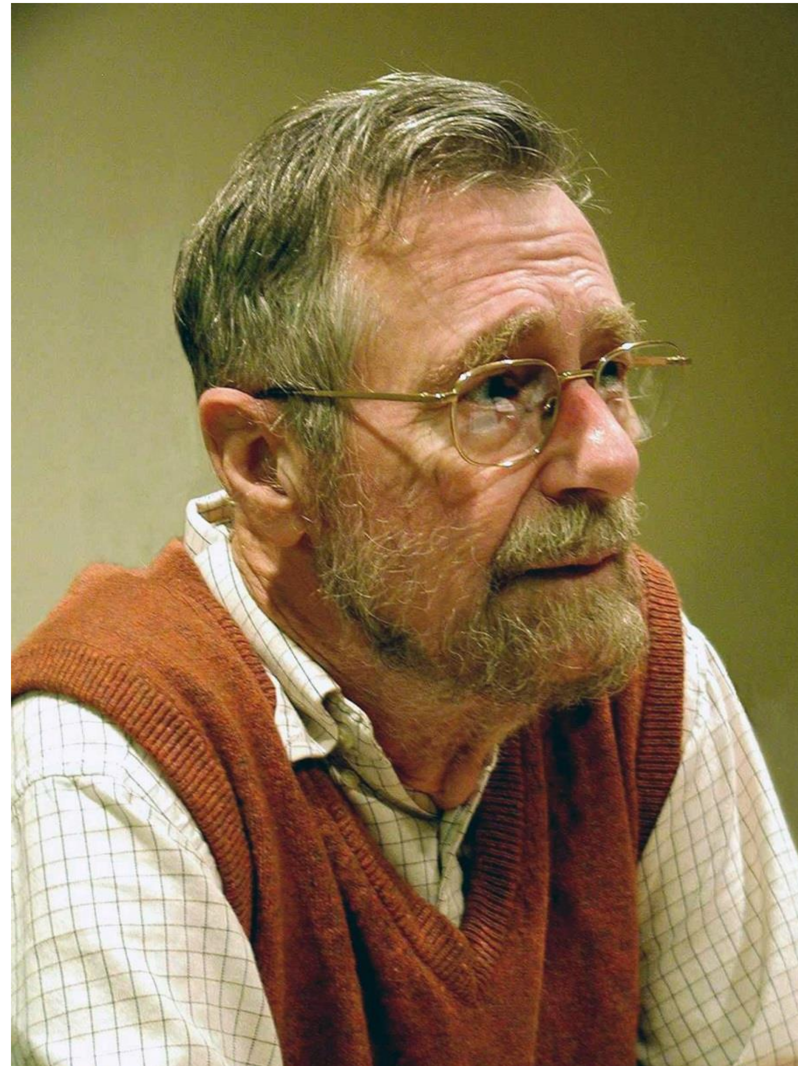
Литература

1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

Эдсгер Дейкстра (1930-2002)

Этот алгоритм первым предложил нидерландский ученый Эдсгер Дейкстра в 1959 г.

Алгоритм применяется при решении задачи о кратчайших путях для ориентированного взвешенного графа.



Поиск пути наименьшей длины в орграфе

Пусть $G = < \mathbf{V}, \mathbf{E} >$ – взвешенный орграф без петель. Алгоритм Дейкстры дает возможность определить длину ориентированного маршрута.

В случае неорграфа каждое ребро можно заменить на две дуги в одном и обратном направлении с одинаковым весом и применить алгоритм.

Применение алгоритма можно встретить в следующих задачах:

1) Найти путь наименьшей стоимости от пункта А до пункта В.

2) Пользуясь метро, доехать от пункта А до пункта В, и найти оптимальный (то есть минимальный) по времени маршрут.

Расстановка меток

Метка

<u>Постоянная</u> $D(V_S, V)$

<u>Временная</u> $l(V_S, V)$

$D(V_s, V)$ – длина кратчайшего пути от вершины V_s до вершины V ,

$l(V_s, V)$ – длина кратчайшего пути от вершины V_s до вершины V , проходящего через вершины с постоянными метками.

Расстановка меток

Для поиска пути наименьшей длины между вершинами V_s (начало) и V_T (конец), ищем расстояние от вершины V_s до всех вершин графа $l(V_s, V)$, где $l(V_s, V_s) = 0$, и $l(V_s, V) = \infty$ тогда и только тогда, когда вершины V_s и V не соединены дугой (можно использовать матрицу весов).

Алгоритм Дейкстры по шагам

Начало: Пусть V_S – начальная вершина. Присваиваем ей постоянную метку. $V_u := V_S$. $D(V_S, V_u) := 0$, V_u – текущая вершина.

Шаг 1. Все вершины графа кроме начальной вершины включаем в множество $\mathbf{P} := \mathbf{V} \setminus \{V_u\}$ и расставляем временные метки: $l(V_S, V_i) := \min(w_{V_S, V_i})$, $V_i \in \mathbf{P}$. Сравниваем все значения временных меток $l(V_S, V_i)$ и выделяем $l_{\min} = l(V_S, V_j) = \mathrm{X}$. Если две вершины имеют одинаковое минимальное значение, то для присвоения постоянной метки выбираем вершину с меньшей нумерацией. Вершине V_j присваивается постоянная метка. Вершина V_j становится текущей вершиной. $V_u := V_j$; $D(V_S, V_u) := \mathrm{X}$.

1) Если $V_u = V_T$, то алгоритм закончен. $D(V_S, V_T) = \mathrm{X}$.

2) Если $V_u \neq V_T$, то переходим к шагу 2.

Алгоритм Дейкстры по шагам

Шаг 2. $\mathbf{P} := \mathbf{P} \setminus \{V_u\}$. Расставляем временные метки:

$l(V_S, V_i) = \min(l(V_S, V_i); D(V_S, V_u) + \min(w_{V_u, V_i}))$, $\forall V_i \in \mathbf{P}$. $l(V_S, V_i)$ – старый результат из предыдущего шага, $D(V_S, V_u)$ – длина через новую постоянную метку, w_{V_u, V_i} – вес дуги.

Сравниваем значения $l(V_S, V_i)$ и выделяем $l_{\min} = l(V_S, V_j) = \mathrm{Y}$. Если две вершины имеют одинаковый минимальный вес, то для присвоения постоянной метки выбираем вершину с меньшей нумерацией. Вершине V_j присваивается постоянная метка $V_u := V_j$; $D(V_S, V_u) = \mathrm{Y}$.

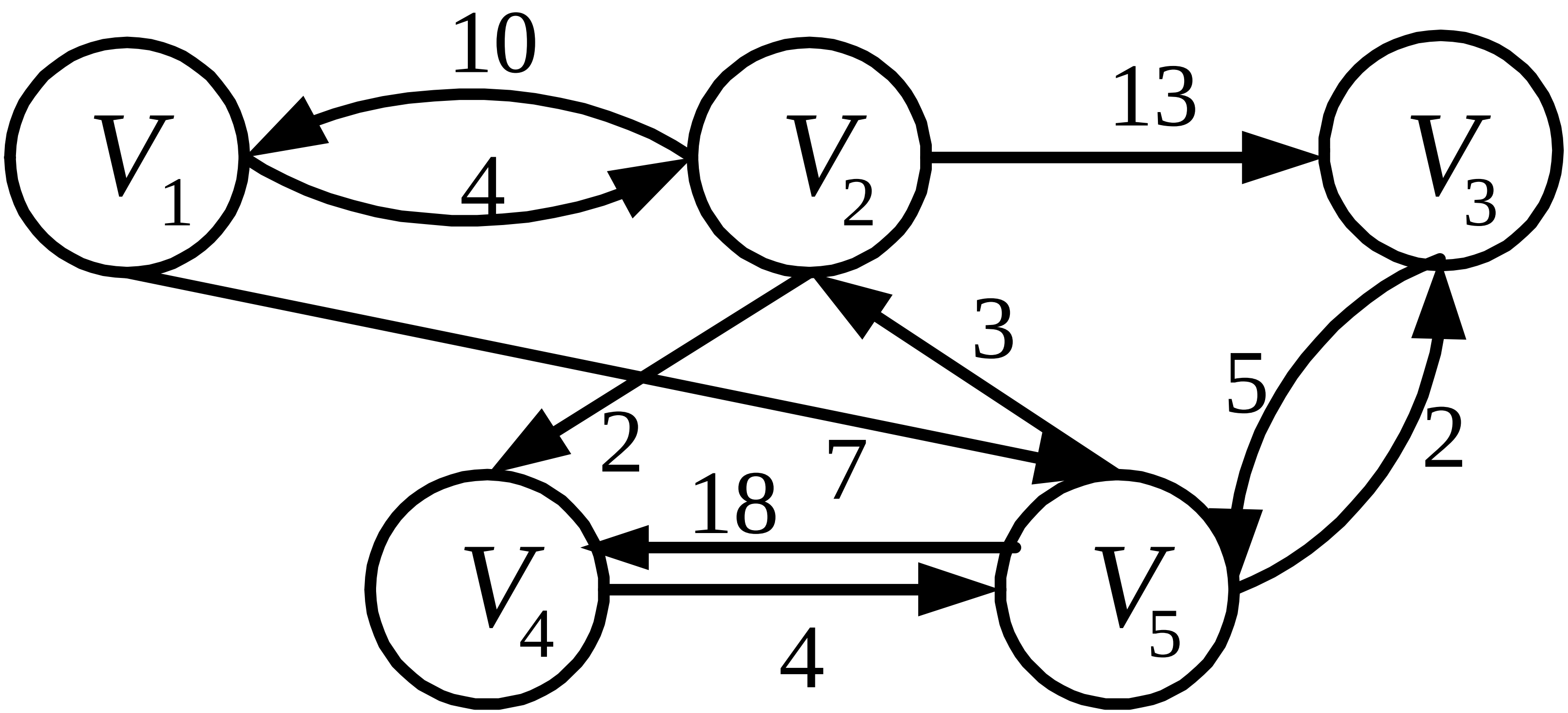
1) Если $V_u = V_T$, то алгоритм закончен. $D(V_S, V_T) = \mathrm{Y}$. Переходим к шагу 3.

2) Если $V_u \neq V_T$, то следует вернуться к началу шага 2.

Шаг 3. Длина $D(V_S, V_T)$ найдена. С помощью постоянных меток определяем путь от V_S к V_T.

Конец алгоритма.

Пример поиска минимального расстояния по алгоритму Дейкстры

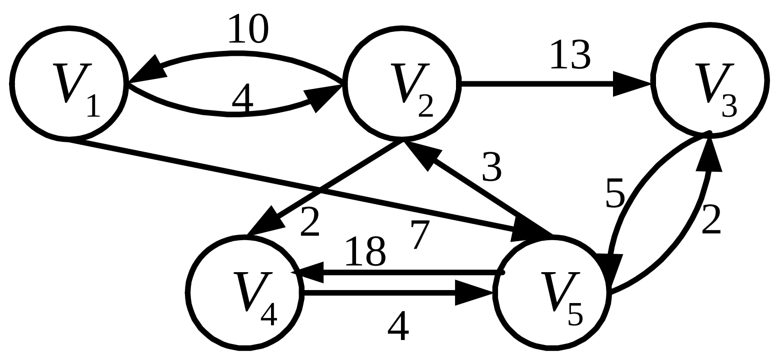


Пример 1. Найти минимальное расстояние и путь по алгоритму Дейкстры из вершины V_1 до вершины V_3.

Решение для примера 1

<u>Начало:</u> $V_S = V_1$ – начальная вершина и $V_T = V_3$ – конечная вершина. $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$. Присваиваем постоянную метку. $V_u := V_1$. $D(V_1, V_u) := 0$.

<u>Шаг 1.</u> $\mathbf{P} = \mathbf{V} \setminus \{V_u\} = \mathbf{V} \setminus \{V_1\} = \{V_2, V_3, V_4, V_5\}$, Находим все $l(V_1, V_i)$: $l(V_1, V_2) = 4$, $l(V_1, V_3) = \infty$, $l(V_1, V_4) = \infty$, $l(V_1, V_5) = 7$.



Сравниваем все временные метки $l(V_1, V_i)$ и выделяем $l_{\min} = l(V_1, V_2) = 4$. Следовательно, вершине V_2 присваивается постоянная метка $V_u := V_2$;

$D(V_1, V_2) = D(V_1, V_u) = 4$.

Решение для примера 1

Шаг 2. $\mathbf{P} = \mathbf{P} \setminus \{V_u\} = \{V_3, V_4, V_5\}$. Расставляем временные метки:

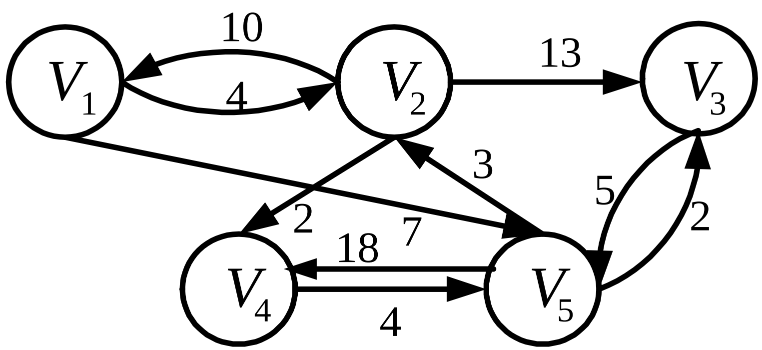
$l(V_1,V_i) = \min(l(V_1,V_i), D(V_1,V_u) + \min\left(w_{V_uV_i}\right))$ для любого $V_i \in \mathbf{P}$. Где $l(V_1,V_i)$ – старый результат из предыдущего шага, $D(V_1,V_u)$ – длина через новую постоянную метку, $w_{V_uV_i}$ – вес.

$$l(V_1,V_3) = \min\left\{l\left(V_1,V_3\right); D(V_1,V_2) + \min\left(w_{V_2,V_3}\right)\right\} = \min\{\infty; 4+13\} = 17$$

$$l(V_1,V_4) = \min\left\{l\left(V_1,V_4\right); D(V_1,V_2) + \min\left(w_{V_2,V_4}\right)\right\} = \min\{\infty; 4+2\} = 6$$

$$l(V_1,V_5) = \min\left\{l\left(V_1,V_5\right); D(V_1,V_2) + \min\left(w_{V_2,V_5}\right)\right\} = \min\{7; 4+\infty\} = 7$$

$l_{\min} = l(V_1,V_4) = 6$ и $V_u := V_4$; $D(V_1,V_4) = D(V_1,V_u) = 6$.



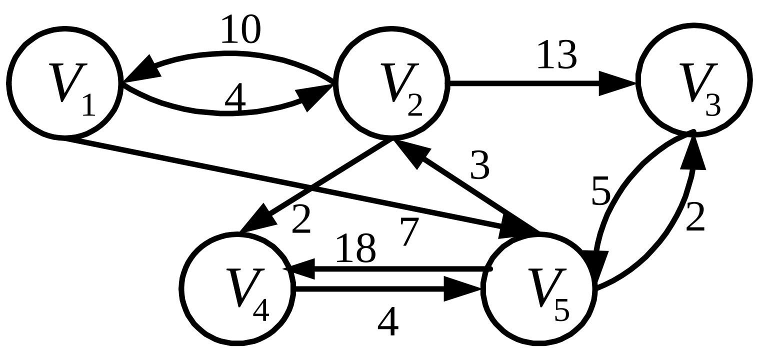
Решение для примера 1

Шаг 3. $\mathbf{P} = \mathbf{P} \setminus \{V_u\} = \{V_3, V_5\}$.

$$l(V_1,V_3) = \min\left\{l\left(V_1,V_3\right); D(V_1,V_4) + \min\left(w_{V_4,V_3}\right)\right\} = \min\{17; 6+\infty\} = 17$$

$$l(V_1,V_5) = \min\left\{l\left(V_1,V_5\right); D(V_1,V_4) + \min\left(w_{V_4,V_5}\right)\right\} = \min\{7; 6+4\} = 7$$

$l_{\min} = l(V_1,V_5) = 7$ и $V_u := V_5$; $D(V_1,V_5) = D(V_1,V_u) = 7$.



Шаг 4. $\mathbf{P} = \mathbf{P} \setminus \{V_u\} = \{V_3\}$.

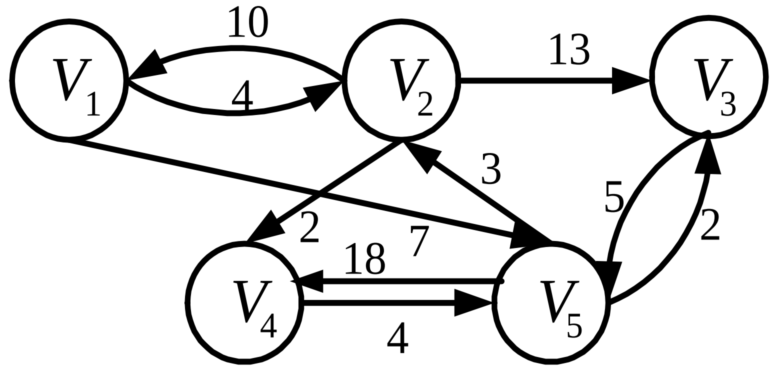
$$l(V_1,V_3) = \min\left\{l\left(V_1,V_3\right); D(V_1,V_5) + \min\left(w_{V_5,V_3}\right)\right\} = \min\{17; 7+2\} = 9$$

$l_{\min} = l(V_1,V_3) = 9$ и $V_u := V_3$; $D(V_1,V_3) = 9$.

Конец алгоритма.

Решение для примера 1

Ищем путь по постоянным меткам: $V_1 \to V_5 \to V_3$



V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
0	∞	∞	∞	∞
	4	∞	∞	7
		17	6	7
		17		7
		9		

Ответ: путь $V_1 \to V_5 \to V_3$, минимальное расстояние равно 9.

Тема следующей лекции:

«Эйлеровы графы»