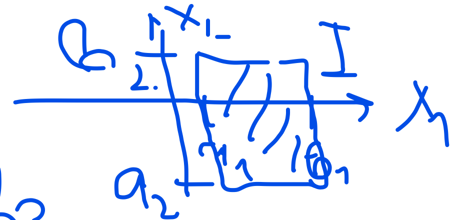
$n=1$:  $n=2$: 

$n=3$: $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$, $a_3 \leq x_3 \leq b_3$

Лекция 4

Компакты в $\mathbb{R}^n$ и их свойства

Определение 4.1. Множество $I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \ i = 1, \dots, n, \ a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$ называется *n-мерным промежутком* или *n-мерным параллелепипедом.*

Теорема 4.1. *n-мерный параллелепипед I является компактом в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть задано открытое покрытие $S = \{S_\lambda\}, \ \lambda \in \Lambda$ множества I. Предположим, что I не является компактом в $\mathbb{R}^n$, то есть из S невозможно выделить конечное покрытие. Делим каждый из отрезков $[a_i, b_i], \ i = 1, \dots, n$ пополам. Тогда хотя бы один из полученных 2^n $n-$мерных промежутков не допускает конечного подпокрытия. Продолжим указанную процедуру деления отрезков пополам, получим систему вложенных $n-$мерных промежутков $I = I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$, каждый из которых не допускает конечного подпокрытия.

При указанном делении отрезков $[a_i, b_i], \ i = 1, \dots, n$ для каждого из них получаем систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. По лемме Коши-Кантора существует точка ξ_i, принадлежащая системе сложенных отрезков из $[a_i, b_i], \ i = 1, \dots, n$, причем $\xi_i \in [a_i, b_i]$. Тогда $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in I$. Следовательно, $\exists \ S_{\lambda_0} : \ \boldsymbol{\xi} \in S_{\lambda_0}$. Так как S_{λ_0} – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то $\exists U(\boldsymbol{\xi}, \delta) : \ \boldsymbol{\xi} \in U(\boldsymbol{\xi}, \delta) \subset S_{\lambda_0}$, следовательно существует такой номер $\tilde{n}$, что $\boldsymbol{\xi} \in I_{\tilde{n}} \subset U(\boldsymbol{\xi}, \delta) \subset S_{\lambda_0}$, то есть $I_{\tilde{n}}$ допускает конечное подпокрытие (множество S_{λ_0}), что противоречит тому, что ни один из $n-$мерных промежутков $I = I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$ не допускает конечного подпокрытия. □

Теорема 4.2. *Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

1. *X – замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$,*

2. *любое замкнутое подмножество множества X является компактом.*

Доказательство.

1) Пусть X – компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Покажем, что дополнение $\mathbb{R}^n \setminus X$ является открытым множеством множеством в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Для $\forall \mathbf{x} \in X$ построим окрестность $U(\mathbf{x}; \delta x)$ и окрестность $V(\mathbf{y}, \delta x)$, где $\delta x < \dfrac{1}{2}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (рис.1). Имеем $U(\mathbf{x}; \delta x) \cap V(\mathbf{y}, \delta x) = \varnothing$.

Далее, $X \subset \bigcup\limits_{\mathbf{x} \in X} U(\mathbf{x}; \delta x)$, система $\{U(\mathbf{x}; \delta x)\}$ является открытым покрытием множества X. Поскольку X – компакт в $\mathbb{R}^n$, то существует конечное подпокрытие $U(\mathbf{x}_i; \delta x_i), \ \mathbf{x}_i \in X, \ i = 1, \dots, n$, то есть $X \subset \bigcup\limits_{\mathbf{x} \in X} U(\mathbf{x}_i; \delta x_i)$.

Рассмотрим множество

$$V = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \quad \underbrace{U(\mathbf{y}; \delta x_i)}_{\text{открытое множество}}.}_{\text{открытое множество}}$$

Оно является окрестностью точки $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus X$. В силу построения имеем

$$V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U(\mathbf{y}; \delta x_i) \right) = \varnothing.$$

Следовательно, $V \cap X = \varnothing \Rightarrow y \in \mathbb{R}^n \setminus X$ вместе с окрестностью V, то есть $\mathbb{R}^n \setminus X$ – открытое множество, то есть X – замкнутое множество.

2) Пусть подмножество $X_1 \subset X$ является замкнутым множеством в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathbb{R}^n \setminus X_1$–открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть $S = \{S_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$ является произвольным открытым покрытием множества X_1. Тогда $S \cup \left(\mathbb{R}^n \setminus X_1\right)$ покрывает $\mathbb{R}^n$ и, в частности, X_1. Поскольку X – компакт в $\mathbb{R}^n$, то из системы $S \cup \left(\mathbb{R}^n \setminus X_1\right)$ можно можно выделить конечное подпокрытие X. Поскольку $X_1 \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus X_1\right) = \varnothing$, то из системы S может быть выделено конечное подпокрытие множества X_1, то есть X_1 – компакт в $\mathbb{R}^n$. □

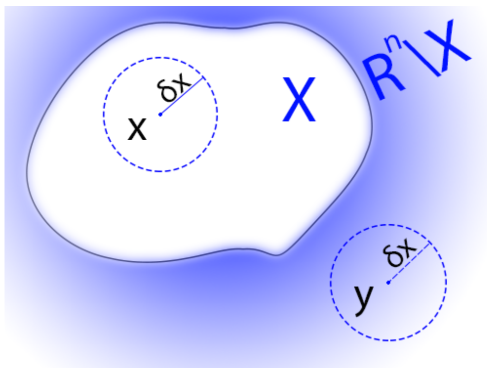


Рис. 1: Схема доказательства.

Теорема 4.3. Если X – компакт в $\mathbb{R}^n$, то X – ограниченное множество.

Доказательство. Рассмотрим для каждой фиксированной точкой $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ систему окрестностей $S = \{U(\mathbf{y}, n)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Система S покрывает $X \subset \mathbb{R}^n$. Если допустить, что X является неограниченным множеством, то из S невозможно будет отделить конечное подпокрытие, следовательно X не будет являться компактом. Что является противоречием. □

Теорема 4.4. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является компактом в $\mathbb{R}^n$, то

1. X – замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$;
2. X – ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Выше доказано, что если X – компакт в $\mathbb{R}^n$, то справедливо 1) и 2). Пусть теперь X – ограничено и замкнуто в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует $n-$мерный параллелепипед $I \supset X$. Поскольку I – компакт в $\mathbb{R}^n$ и его подмножество X является замкнутым, то по теореме 4.2. множество X является компактом в $\mathbb{R}^n$. □

Последовательности в $\mathbb{R}^n$ и их сходимость

Определение 4.2. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ называется *последовательностью* в $\mathbb{R}^n$. Обозначается $\{\mathbf{x}_k\}$, где $\mathbf{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)$. Пусть $k_1 < k_2 < \ldots$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда $\{\mathbf{x}_{km}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$.

Определение 4.3. Точка $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ называется *пределом* последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; \forall k > N \; \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \varepsilon$.

Теорема 4.5. Последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится к $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ при $k \to \infty$ тогда и только тогда, когда имеет место покоординатная сходимость, то есть $\{x_k^i\}$ сходится $\{a^i\}$ при $k \to \infty$.

Доказательство.

1) Пусть $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится к $\mathbf{a}$ при $k \to \infty$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall k > N \ \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) = \sqrt{(x_k^1 - a^1)^2 + (x_k^2 - a^2)^2 + \cdots + (x_k^n - a^n)^2} < \varepsilon$.

Поскольку $\left|x_k^i - a^i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{s=1}^{n}(x_k^s - a^s)} < \varepsilon, \ \forall k > N, \ \forall i = 1, \ldots, n$, то последовательность $\{x_k^i\}$ сходится к a^i при $k \to \infty$. То есть имеет место покоординатная сходимость.

2) Пусть $\{x_k^i\}$ сходится к a^i при $k \to \infty$, $i = 1, \ldots, n$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_i = N_i(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall k > N_i \ \Rightarrow \left|x_k^i - a^i\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Положим $N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$. Тогда $\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) = \sqrt{(x_k^1 - a^1)^2 + (x_k^2 - a^2)^2 + \cdots + (x_k^n - a^n)^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{n} n} = \varepsilon, \ \forall k > n$, то есть $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится к $\mathbf{a}$ при $k \to \infty$. $\square$

Теорема 4.6. Если последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ имеет предел, то он единственный.

Доказательство. Допустим, что сходящаяся последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ имеет два предела $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall k > N \ \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_1) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_2) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее,

$$\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k - \mathbf{a}_2\| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}_1\| + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}_2\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\forall k > N$, то есть $\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \sqrt{(a_1^1 - a_2^1)^2 + (a_1^2 - a_2^2)^2 + \cdots + (a_1^n - a_2^n)^2} < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a_1^i = a_2^i, \ \forall i = 1, \ldots, n$, то есть $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$. $\square$

Определение 4.4. Последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ называется *ограниченной*, если $\exists \ M > 0 : \|\mathbf{x}_k\| \leqslant M, \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.7. (Больцано-Вейерштрасс). Из любой ограниченной последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{x}_k\}$ – заданная ограниченная последовательность. Поскольку $\left|x_k^i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_k^s)^2} \leqslant M, \ \forall k \in \mathbb{N}$, то, следовательно, последовательность $\{x_k^i\}$ также является ограниченной $\forall i = 1, \ldots, n$. По теореме Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{km}^i\}$.

Рассмотрим последовательность $\{x_k^1\}$. Из неё выделим сходящуюся к a^1 при $k \to \infty$ подпоследовательность $\{x_{km}^1\}$. Тогда из $\{x_k^2\}$ можно выделить сходящуюся к a^2 при $k \to \infty$ подпоследовательность $\{x_{km}^2\}$ и так далее. В результате получим точку $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$. Поскольку имеет место покоординатная сходимость, то по теореме 4.5. получаем, что выделенная подпоследовательность сходится к $\mathbf{a}$. $\square$

Определение 4.5. Последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall k, s > N \ \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_s) < \varepsilon$.

Теорема 4.8. (Критерий Коши). Последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Доказательство. 1) Пусть $\{\mathbf{x}_k\}$ – фундаментальная последовательность $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall k, s > N \ \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_s) < \varepsilon$. Тогда $\left|x_k^i - x_s^i\right| \leqslant \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_s) < \varepsilon, \ \forall k, s > N$.

Следовательно, последовательность $\{x_k^i\}$ является фундаментальной. Согласно критерию Коши о последовательностях $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ заключаем, что $\{x_k^i\}$ – сходящаяся последовательность $\forall i = 1, \ldots, n$, то есть имеет место покоординатная сходимость. Тогда по теореме 4.5. $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится.

2) Пусть $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится, то есть имеет место покоординатная сходимость, тогда $\{x_k^i\}$ – фундаментальная последовательность $\forall i = 1, \ldots, n$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_i = N_i(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall k, s > N_i \Rightarrow \left| x_k^i - x_s^i \right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Пусть $N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$. Тогда $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_s\| = \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_s) = \sqrt{(x_k^1 - x_s^1)^2 + (x_k^2 - x_s^2)^2 + \cdots + (x_k^n - x_s^n)^2} < \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon \ \forall k, s > n$, то есть $\{\mathbf{x}_k\}$ – фундаментальная последовательность. $\square$