Теория конечных графов

Транзитивное замыкание

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры

прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Литература

1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

Транзитивность. Примеры.

Бинарное отношение R на множестве X называется транзитивным, если для любых трех элементов множества $a, b, c \in X$ выполнение отношений aRb и bRc следует выполнение отношения aRc. Отношение R транзитивно, если $\forall\, a, b, c \in X$ $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Приведем примеры транзитивных отношений:

1) Равенство: $a = b, b = c$, отсюда следует, что $a = c$.
2) Отношения порядка: $a > b,\ b > c$, а значит $a > c$.
3) Параллельность прямых: $a \| b,\ b \| c$, а значит $a \| c$ по теореме о параллельности трех прямых в пространстве.
4) Делимость: если a делится на b, а b делится на c ,то a делится на c.
5) Включение подмножества: если a является подмножеством b, а b является подмножеством c, то a является подмножеством c.
6) Достижимость вершин ориентированного графа: если вершина b достижима из вершины a, а вершина c достижима из вершины b, то вершина c достижима из вершины a.

Отсутствие транзитивности

Приведем пример отстутствия транзитивности, при котором логические высказывания не связаны строгими арифметическими отношениями.

Все знакомы с игрой «Камень, ножницы, бумага», в которой камень выигрывает у ножниц, ножницы выигрывают у бумаги, но бумага не проигрывает камню, а, наоборот, выигрывает, т.к. может его покрыть.

Такого рода примеры возникают из смысловых отношений, которые не поддаются арифметическим отношениям.

Транзитивное бинарное отношение в орграфе

Рассмотрим орграф $G = <\mathbf{V},\mathbf{E}>$, где $|\mathbf{V}| = n$. Под **бинарным отношением** на множестве $\mathbf{V}$ будем понимать произвольное подмножество $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ (множество дуг графа $G = <\mathbf{V},\mathbf{E}>$). Бинарное отношение $\mathbf{E}$ можно однозначно представить графом $G = <\mathbf{V},\mathbf{E}>$.

Бинарное отношение на графе $G = <\mathbf{V},\mathbf{E}>$ является **транзитивным** при выполнении условия: если $<x, y> \in \mathbf{E}$ и $<y, z> \in \mathbf{E}$, то $<x, z> \in \mathbf{E}$ для произвольных вершин $x, y, z \in \mathbf{V}$.

$\mathbf{E}^* = \{<x, y>$: в $G = <\mathbf{V}, \mathbf{E}>$ $\exists$ путь ненулевой длины из x в $y\}$, $\mathbf{E}^*$ – **транзитивное замыкание** на множестве $\mathbf{V}$ и $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^*$.

Алгоритм построения транзитивного замыкания в орграфе

Начало. Граф $G = <\mathbf{V}, \mathbf{E}>$, $|\mathbf{V}| = n$.

Шаг 1. Построение начальной матрицы $D^{(0)}$.

$$D^{(0)} = [d_{i,j}^{(0)}],\ \ i, j = \overline{1, n},\ \ d_{i,j}^{(0)} := \begin{cases} 1, \text{ если } <V_i, V_j> \in \mathbf{E} \\ 0, \text{ если } <V_i, V_j> \notin \mathbf{E} \end{cases}.$$

Шаг 2. $m := m + 1$. Построение матрицы $D^{(m)}$, $m = \overline{1, n}$.

$$D^{(m)} = [d_{i,j}^{(m)}],\ \ i, j = \overline{1, n},$$

$$d_{i,j}^{(m)} = \max\left(d_{i,j}^{(m-1)}; d_{i,m}^{(m-1)} \times d_{m,j}^{(m-1)}\right).$$

А) если $m < n \Rightarrow$ возврат к началу шага 2,

Б) если $m = n$, то $D^{(n)}$ – является матрицей связности (достижимости) графа $G = <\mathbf{V}, \mathbf{E}>$. Переходим к шагу 3.

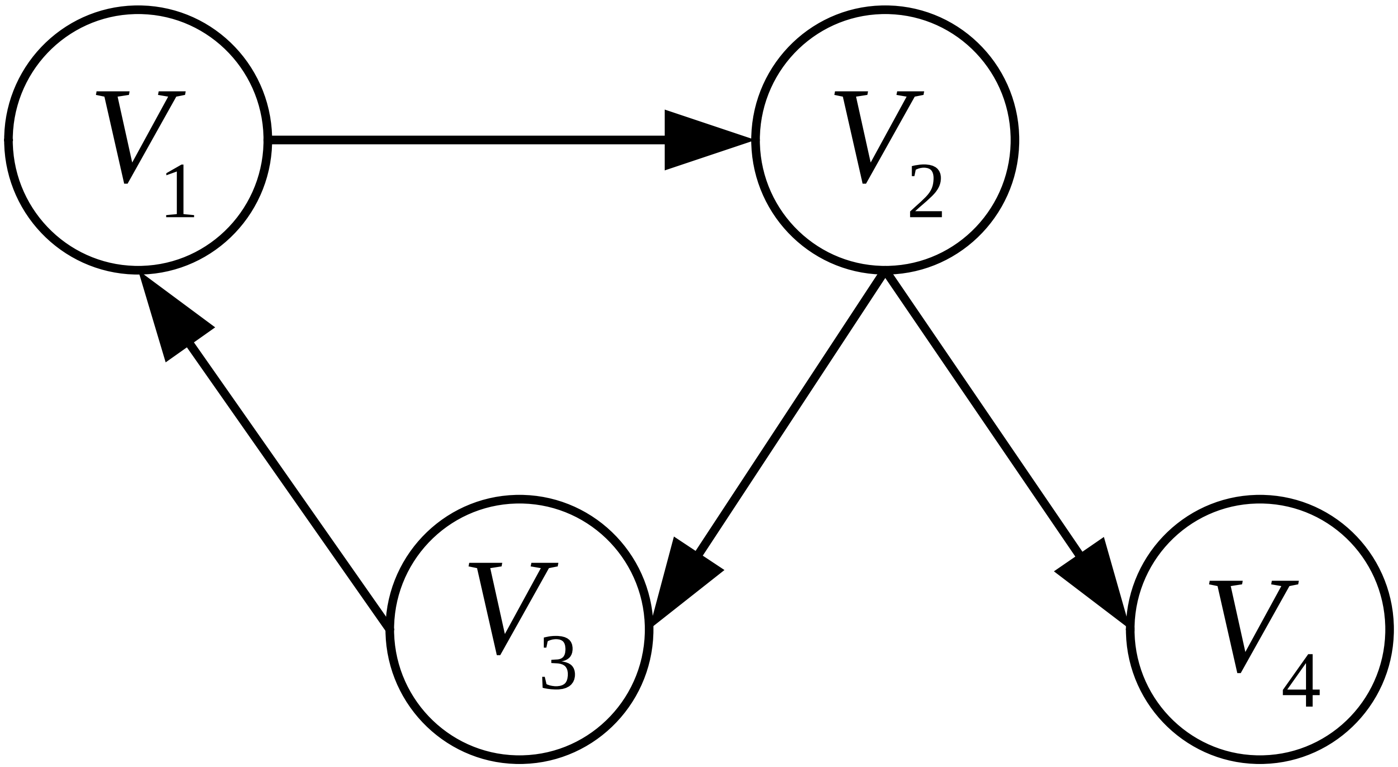
Алгоритм построения транзитивного замыкания в орграфе

Шаг 3. Определяем транзитивное замыкание по матрице связности следующим образом:

$$D^{(n)} = [d^n_{i,j}],\ d^n_{i,j} = \begin{cases} 1,\ \text{если}\ < V_i, V_j > \in \mathbf{E}^*, \\ 0,\ \text{если}\ < V_i, V_j > \notin \mathbf{E}^*. \end{cases}$$

Конец алгоритма. По матрице связности строится транзитивное замыкание.

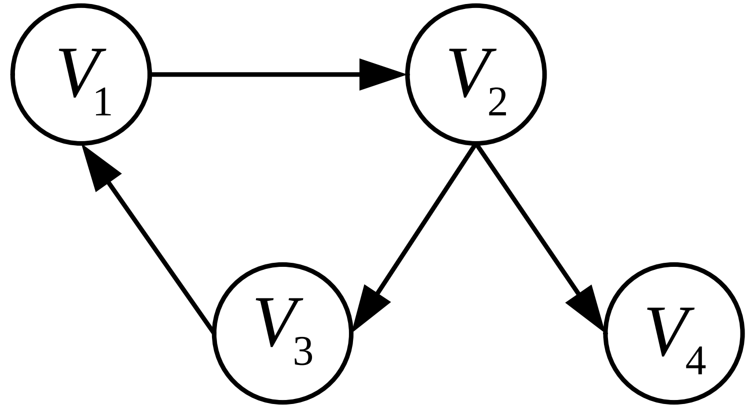
Пример построения транзитивного замыкания в орграфе



Пример 1. Построить транзитивное замыкание для графа.
Найти матрицу связности (достижимости).

Решение примера 1

$D^{(0)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	0	0
V_2	0	0	1	1
V_3	1	0	0	0
V_4	0	0	0	0



В следующей матрице $D^{(1)}$ сразу проставим единицы, так как это максимум, а нули могут как поменяться, так и остаться.

1) $D^{(1)} = [d_{i,j}^{(1)}]$, $i, j = \overline{1,4};$ $d_{i,j}^{(1)} = \max\left(d_{i,j}^{(0)}; d_{i,1}^{(0)} \times d_{1,j}^{(0)}\right)$.

Решение примера 1

1) $D^{(1)} = [d_{i,j}^{(1)}], \ \ i, j = \overline{1,4}; \ \ d_{i,j}^{(1)} = \max\left(d_{i,j}^{(0)}; d_{i,1}^{(0)} \times d_{1,j}^{(0)}\right).$

$D^{(0)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	0	0
V_2	0	0	1	1
V_3	1	0	0	0
V_4	0	0	0	0

$D^{(1)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	0	0
V_2	0	0	1	1
V_3	1	1	0	0
V_4	0	0	0	0

Решение примера 1

2) $D^{(2)} = [d_{i,j}^{(2)}], \;\; i, j = \overline{1,4}; \;\; d_{i,j}^{(2)} = \max\left(d_{i,j}^{(1)}; d_{i,2}^{(1)} \times d_{2,j}^{(1)}\right).$

$D^{(1)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	0	0
V_2	0	0	1	1
V_3	1	1	0	0
V_4	0	0	0	0

$D^{(2)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	1	1
V_2	0	0	1	1
V_3	1	1	1	1
V_4	0	0	0	0

Решение примера 1

3) $D^{(3)} = [d_{i,j}^{(3)}],\ \ i, j = \overline{1,4};\ \ d_{i,j}^{(3)} = \max\left(d_{i,j}^{(2)}; d_{i,3}^{(2)} \times d_{3,j}^{(2)}\right).$

$D^{(2)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	1	1
V_2	0	0	1	1
V_3	1	1	1	1
V_4	0	0	0	0

$D^{(3)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	1	1	1	1
V_2	1	1	1	1
V_3	1	1	1	1
V_4	0	0	0	0

Решение примера 1

4) $D^{(4)} = [d_{i,j}^{(4)}], \;\; i, j = \overline{1,4}; \;\; d_{i,j}^{(4)} = \max\left(d_{i,j}^{(3)}; d_{i,4}^{(3)} \times d_{4,j}^{(3)}\right).$

$D^{(3)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	1	1	1	1
V_2	1	1	1	1
V_3	1	1	1	1
V_4	0	0	0	0

$D^{(4)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	1	1	1	1
V_2	1	1	1	1
V_3	1	1	1	1
V_4	0	0	0	0

Решение примера 1

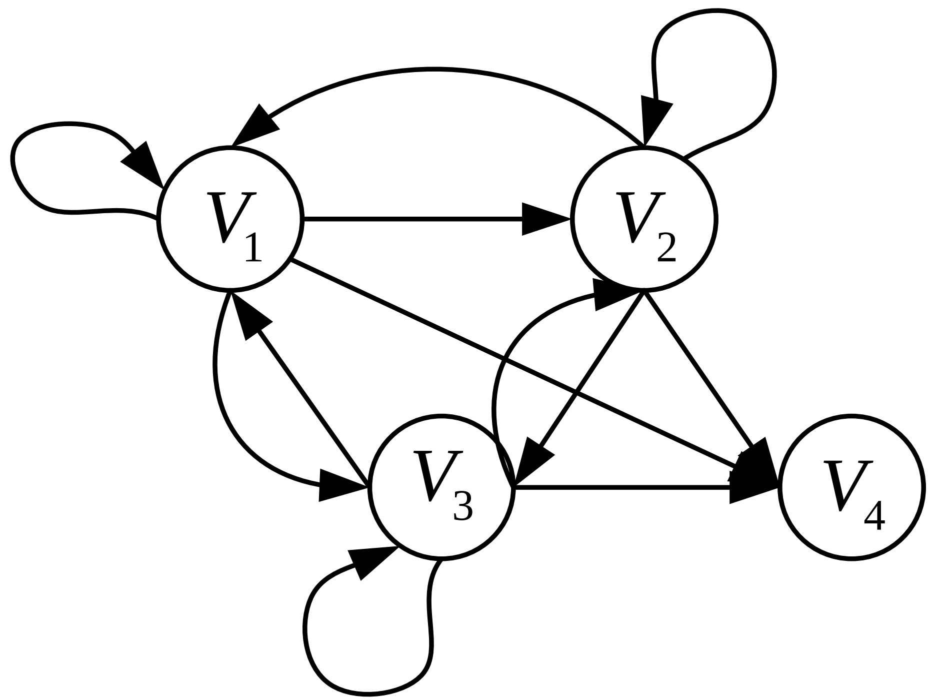
Построим транзитивное замыкание по матрице связности:

$D^{(4)}$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	1	1	1	1
V_2	1	1	1	1
V_3	1	1	1	1
V_4	0	0	0	0

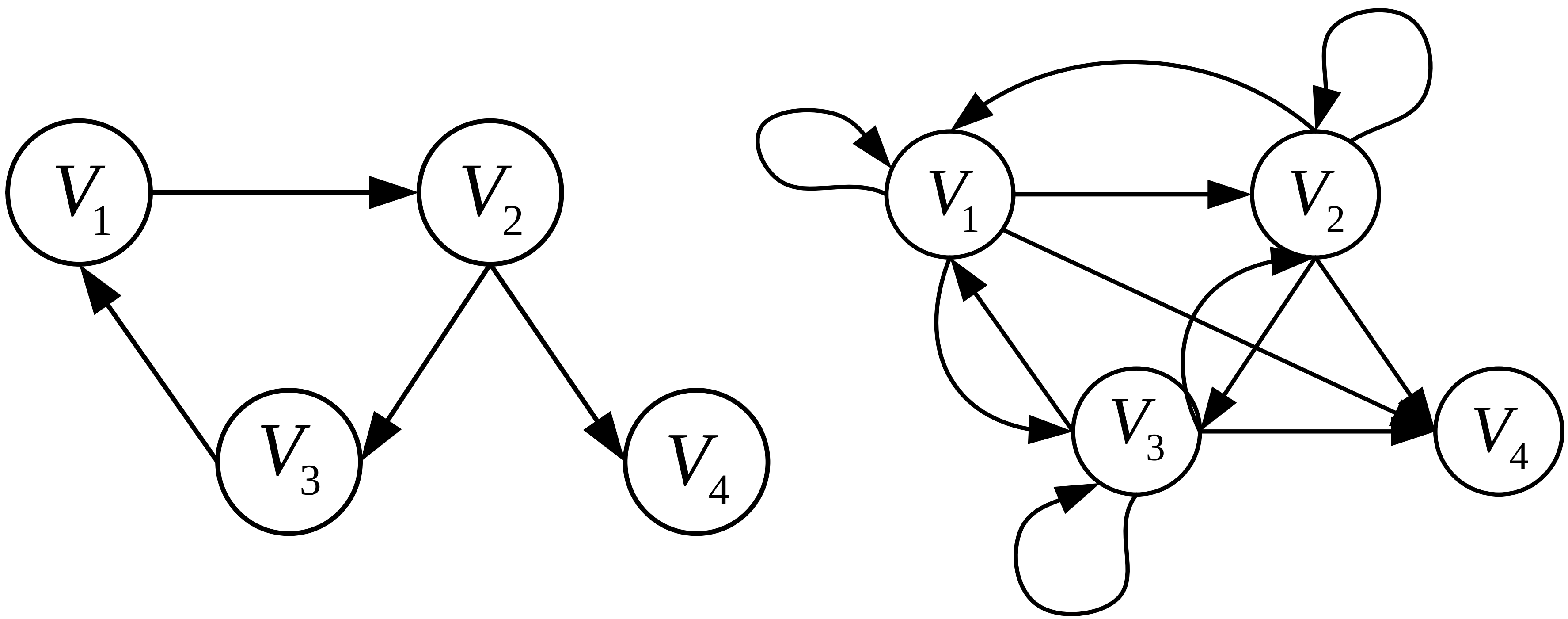
$$\mathbf{E}^* = \left\{ \begin{matrix} <V_1,V_1>,<V_1,V_2>,<V_1,V_3>,<V_1,V_4>, \\ <V_2,V_1>,<V_2,V_2>,<V_2,V_3>,<V_2,V_4>, \\ <V_3,V_1>,<V_3,V_2>,<V_3,V_3>,<V_3,V_4> \end{matrix} \right\}$$

Решение примера 1

$$\mathbf{E}^* = \left\{ \begin{matrix} <V_1,V_1>,<V_1,V_2>,<V_1,V_3>,<V_1,V_4>, \\ <V_2,V_1>,<V_2,V_2>,<V_2,V_3>,<V_2,V_4>, \\ <V_3,V_1>,<V_3,V_2>,<V_3,V_3>,<V_3,V_4> \end{matrix} \right\}$$



Ответ для примера 1



Исходный граф и его транзитивное замыкание.

Тема следующей лекции:

«Увеличение потока в графе»