Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения, формула сложения

Формула условной вероятности $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

События A и B - независимы, если

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{или} \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Если $A_1, ..., A_n$ - независимы в совокупности, то $P(A_1 ... A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

$$\forall k \leq n \quad P(\bigcap_{j=1}^{k} A_j) = \prod_{j=1}^{k} P(A_j)$$

~~Задача 1: Подбрасываются~~

Если $A_1, .., A_n$ - не являются независимыми в совокупности, то

$$P(A_1 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_2 A_1) \cdot ... \cdot P(A_n / A_{n-1} ... A_1)$$

Формула сложения

$$P(A_1 \cup A_2 \cup . \cup A_n) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i) =$$

$$= \begin{cases} 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i) & \text{- независимы} \\ 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2 / \overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_3 / \overline{A}_1 \overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n / \overline{A}_1 ... \overline{A}_{n-1}) \end{cases}$$

НИ-201 не давать

Задача 1. Ведется стрельба по мишени. Вероятность попадания в мишень при первом выстреле равна 0.7. При последующих выстрелах эта вероятность увеличивается на 0.05. Найти вероятность того, что мишень будет поражена третьим выстрелом

Решение. A_i - попадание в мишень ~~на~~ i-м выстрелом

$$P(A_3) = P(A_3 \overline{A}_1 \overline{A}_2) = \underset{\text{промах}}{0,3} \cdot \underset{\text{промах}}{0,25} \cdot 0,8 = 0,06$$

Задача 2. Подбрасывается 3 игральных кости. Даны события
A = { выпадут разные числа },
B = { хотя бы на одной ~~будут~~ будет шестерка }.

Найти $P(A/B)$ и $P(B/A)$

Решение

а) $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ $\quad P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$

$$P(AB) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = \frac{60}{216} = \frac{10}{36}$$

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{60}{91}$$

б) $P(B/A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$ $\quad P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{20}{36}$

$$P(B/A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Задача 3 Игральная кость бросается два раза. Пусть i и j – число очков, выпавших на первой и второй костях.

Введены события:

$A_1 = \{ i$ делится на 2, j – делится на $3 \}$

$A_2 = \{ i$ делится на 3, j делится на $2 \}$

$A_3 = \{ i$ делится на $j \}$

$A_4 = \{ j$ делится на $i \}$

$A_5 = \{ i + j$ делится на $2 \}$

$A_6 = \{ i + j$ делится на $3 \}$

Найти все пары, тройки и т.д. независимых событий.

Решение:

	1	2	3	4	5	6
1	•	*			*	
2	*	•		*		
3	•		*			*
4	•	*		•	*	
5	*			*	•	
6	•	•	*			*

$$P(A_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} = P(A_2)$$

$$P(A_3) = \frac{14}{36} = P(A_4)$$

$$P(A_5) = \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_6) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$P(A_1 A_2) = \frac{1}{36}$ $\quad P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) \Rightarrow A_1$ и A_2 – независимы

$P(A_3 A_4) = \frac{6}{36}$ $\quad P(A_3) \cdot P(A_4) = \frac{14}{36} \cdot \frac{14}{36} \neq \frac{6}{36} \Rightarrow A_3$ и A_4 – зависимы

$P(A_5 A_6) = P\{$ сумма делится на $6 \}$ $\quad P(A_5 A_6) = \frac{6}{36} = 1/6$

	1	2	3	4	5	6
1					•	
2				•		
3			•			
4		•				
5	•					
6						•

$P(A_5) \cdot P(A_6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow A_5$ и A_6 – независимы

$P(A_1 A_3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\quad P(A_1) \cdot P(A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{14}{36} \neq \frac{1}{18}$

$\Rightarrow A_1$ и A_3 – зависимы

A_2 и A_4 – зависимы

$P(A_1 A_4) = 2/36 = 1/18$ $\quad P(A_1) \cdot P(A_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{14}{36} \neq 1/18 \Rightarrow$ зависимы;

i	1	2	3	4	5	6
1						
2	*		*			*
3			–			
4	*		*			*
5						
6	*		*			*

$\Rightarrow A_2$ и A_3 – зависимы

$P(A_1 A_5) = 3/36 = \frac{1}{12}$ $\quad P(A_2) \cdot P(A_5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ –

$\Rightarrow$ независимы

$\Rightarrow A_2$ и A_5 – независимы

$P(A_1 A_6) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\quad P(A_1) \cdot P(A_6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = 1/18$ – независимы

A_2 и A_6 – независимы.

$P(A_3 A_5) = 10/36 \quad P(A_3)\cdot P(A_5) = \frac{14}{36}\cdot\frac{1}{2} \neq \frac{10}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	⊙					
2	·	⊙				
3	⊙		⊙			
4	·	⊙		⊙		
5	⊙				⊙	
6	·	⊙	·			⊙

$\Rightarrow A_3$ и A_5 – зависимы

A_4 и A_5 – зависимы

$P(A_3 A_6) = 6/36 = 1/6 \quad P(A_3) = \frac{14}{36}\cdot\frac{1}{3} \neq \frac{1}{6}$

$P(A_6)$

	1	2	3	4	5	6
1	·					
2	⊙	·				
3	·		⊙			
4	·	⊙		·		
5	⊙				·	
6	·	·	⊙			⊙

$\Rightarrow A_3$ и A_6 – зависимы

A_4 и A_6 – зависимы

$P(A_1 A_2 A_3) = 1/36 \quad P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{14}{36} \neq \frac{1}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1						
2			·			·
3		*		*		*
4			·			·
5						
6		*	·	*		⊛

A_1, A_2 и A_3 зависимы в совокупности.

A_1 A_2 и A_4 – аналогично

$P(A_1 A_2 A_5) = 1/36 \quad P(A_1)P(A_2)P(A_5) = 1/6 \cdot 1/6 \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{36}$

$P(A_1 A_2 A_6) = 1/36 \quad P(A_1)P(A_2)P(A_6) = 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/3 \neq \frac{1}{36}$ и тд

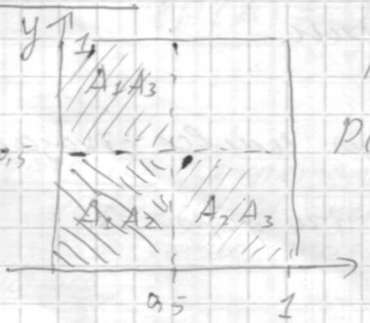
Сам-но НИ-201

Задача 4 Точка с координатами (x, y) случ. образом отмечается в квадрате с стороной 1. Даны события

$A_1 = \{x < 0{,}5\}$
$A_2 = \{y < 0{,}5\}$
$A_3 = \{(x-0{,}5)(y-0{,}5) < 0\}$

Проверить на парную независимость и независимость в совокупности.

Решение



$P(A_1) = 1/2 \quad P(A_2) = 1/2$

$P(A_3) = 1/2$

$P(A_1 A_2) = 1/4 \quad P(A_2)\cdot P(A_1) = \frac{1}{4} \Rightarrow A_1$ и A_2 – независимы

$P(A_1 A_3) = \frac{1}{4} \Rightarrow A_1$ и A_3 – независимы

$P(A_2 A_3) = 1/4 \Rightarrow A_2$ и A_3 – независимы!

$P(A_1 A_2 A_3) = 0 \Rightarrow A_1$, A_2 и A_3 – зависимы в совокупности

Задача 5

Три студента делают расчеты.

p_1 – вероятность ошибки первого студента = 0,1

p_2 – вероятность ошибки второго студента = 0,15

p_3 – вероятность ошибки третьего студента = 0,2

A = {все студенты выполнили расчет верно}

B = {только два студента выполнили расчет верно}

C = {хотя бы один студент выполнил расчет верно}

Решение: $P(A) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0,612$

$P(B) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3 = 0,329$

$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - p_1 p_2 p_3 = 0,997$

Задача 6

Сколько надо взять игральных костей, чтобы с вероятностью не меньшей 0,7 можно было ожидать выпадение шестерки хотя бы на одной из них?

Решение

A_i – шестерка выпала на одной кости $P(\bar{A_i}) = 5/6$

~~P(A) $\bar{A}$ – шестерка~~ Пусть n – число костей

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,7$ =>

$\bar{A}$ – ни на одной кости шестерка не выпала

$\Rightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,7 \qquad \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,3$

$\Leftrightarrow n \ln 5/6 \leq \ln 0,3$

$n \geq \frac{\ln 0,3}{\ln 5 - \ln 6} = 6,6 \Rightarrow \underline{n \geq 7}$

Задача 7

Пусть p_i – вероятность отказа i-го устройства

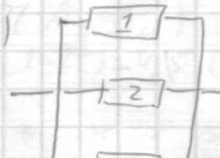
~~P(A) – вер~~ A = {отказ всей схемы} P(A) – ?

Решение:

а) –[1]–[2]–[3]– $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

– отказ хотя бы одного => отказ всей схемы

б)

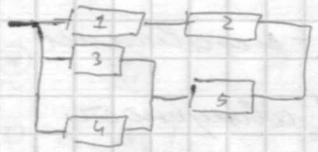


$P(A) = p_1 p_2 p_3$ – отказ схемы, только если все отказали.

A_i – отказ i-го устройства

$p_{34} = p_3 p_4$

в)



$p_{12} = 1 - (1-p_1)(1-p_2)$

$p_{345} = 1 - (1-p_{34})(1-p_5) = 1 - (1-p_3 p_4)(1-p_5)$

$P(A) = \left(1 - (1-p_1)(1-p_2)\right)\left(1 - (1-p_3 p_4)(1-p_5)\right)$

Задача 8. Два игрока поочередно извлекают шары (без возвращения) из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров.

Выигрывает тот, кто первым достанет белый шар. Найти вероятность выигрыша 1 игрока, если
а) $N=3$ $M=1$ б) $N=4$ $M=1$ в) $N=6$, $M=2$.

Решение: а) всего 3 шара: 2 черных и 1 белый
A = первый игрок выиграл
A_i - на i-м ходу 1 игрок вытащил белый шар
B_i - на i-м ходу 2 игрок вытащил белый шар

$$A = A_1 + \bar{A}_1 \bar{B}_1 A_2 \quad P(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

б) - ~~самостоятельно~~.

$$A = A_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 + \underbrace{\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3}_{\text{не может быть - 4 шара}}$$

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 1/2$$

в)
$$A = A_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3 \quad P(A) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} +$$
$$+ \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{3}^{15} + \frac{1}{5}^{13} + \frac{1}{15} = \frac{9}{15}$$

Задача 9 (То же условие, но с возвращением)

а) $A = A_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3 + \ldots$

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5}$$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} p\,(q^2)^k = \underline{p\frac{1}{1-q^2}}$$

p - вер-ть вытащить белый шар
$q = 1-p$ - вер-ть вытащить черный шар

Задача 10. Секретарша написала n писем, вложила их в конверты и перепутала адреса. Какова вер-ть того, что хотя бы одно письмо придет по адресу? ($n=5$)

Решение.