Теория конечных графов

Алгоритм Уоршалла-Флойда

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры

прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Маркова Екатерина Викторовна

markova_ev@pfur.ru

Литература

1. **Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г. Лекции по дискретной математике: Теория графов. Учебное пособие. М., изд-во: РУДН, 2013, 162 с.**
2. Харари Ф. «Теория графов», М.: КомКнига, 2006. – 296 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. «Элементы дискретной математики». Учебник. М.: Инфра-М; Новосибирск: НГТУ, 2003. – 280 с.
4. Шапорев С.Д. «Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий». СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
5. Сайт кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс). Режим доступа: http://api.sci.pfu.edu.ru/ – свободный.
6. Учебный портал кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (информационный ресурс) Режим доступа: http://stud.sci.pfu.edu.ru – для зарегистрированных пользователей.
7. **Учебный портал РУДН, раздел «Теория конечных графов» http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/rj/index.php?id=209&p=26342**

Алгоритм Дейкстры и алгоритм Уоршалла-Флойда

Для решения задачи определения расстояния между всеми парами вершин можно использовать $n(n-1)$ раз алгоритм Дейкстры.

Но существуют более эффективные алгоритмы, в частности, алгоритм Уоршалла-Флойда. Любое расстояние между двумя вершинами сравнивается с длиной маршрута через все остальные вершины. Алгоритм разработан Стивеном Уоршаллом и Робертом Флойдом в 1962 году.

Заметим, что алгоритм Дейкстры позволяет найти путь наименьшей длины (последовательность вершин), а алгоритм Уоршалла-Флойда находит лишь минимальное расстояние между вершинами.

Алгоритм Уоршалла-Флойда

<u>Начало.</u> Рассмотрим орграф $G = <\mathbf{V},\mathbf{E}>$, где $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$, $|\mathbf{V}| = n$.

Пусть матрица $D^{(m)} = [d_{i,j}^{(m)}]$ и ее элементы $d_{ij}^{(m)} = d^{(m)}(V_i, V_j)$, $i, j = \overline{1,n}$, где $d_{ij}^{(m)}$ – длина кратчайшего из путей из V_i в V_j с промежуточными вершинами из множества $\{V_1, V_2, ..., V_m\}$, $m \le n$.

<u>Шаг 1.</u> Построение матрицы $D^{(0)}$.

$$D^{(0)} := \left[d_{ij}^{(0)} \right]_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{cases} \min\left(w_{ij}\right), \text{если } <V_i, V_j> \in \mathbf{E}, \\ \infty, \text{ если } <V_i, V_j> \notin \mathbf{E}. \end{cases}$$

Алгоритм Уоршалла-Флойда

Шаг 2. $m := m+1$. Построение матрицы $D^{(m)}$, $m = \overline{1,n}$:

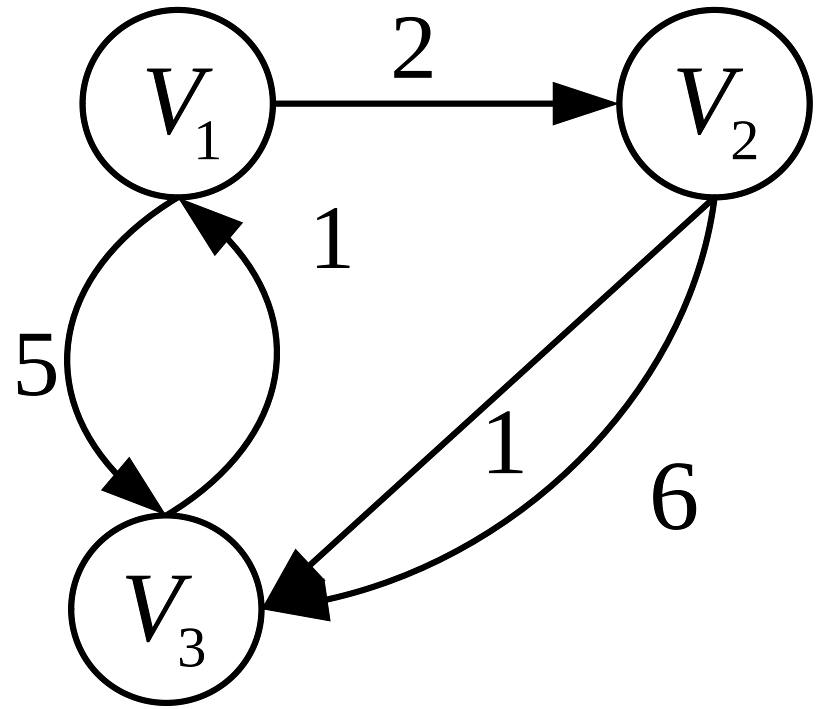
$d_{ij}^{(m)} := \min\left(d_{ij}^{(m-1)}, d_{im}^{(m-1)} + d_{mj}^{(m-1)} \right)$.

1) Если $m < n$, то вернуться к началу шага 2.

2) Если $m = n$, то $D^{(n)}$ – и есть матрица кратчайших путей между всеми парами вершин.

Конец алгоритма. $D^{(n)}$ – матрица кратчайших путей в графе $G = < \mathbf{V}, \mathbf{E} >$.

Пример поиска кратчайших расстояний по алгоритму Уоршалла-Флойда



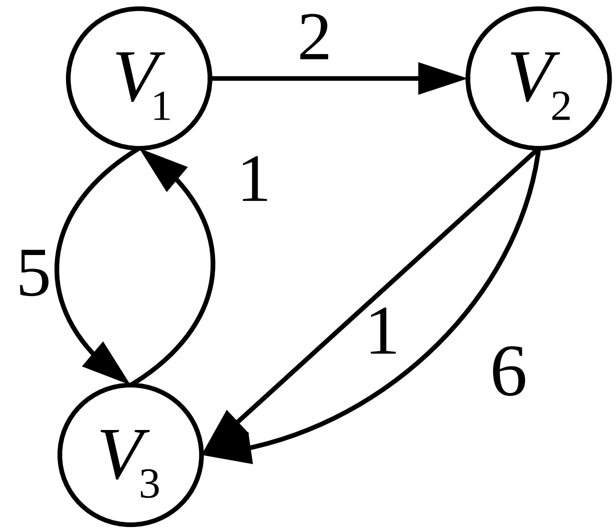
Пример 1. Найти минимальное расстояние между всеми парами вершин по алгоритму Уоршалла-Флойда.

Решение для примера 1

Матрица $D^{(0)}$:

$D^{(0)}$	V_1	V_2	V_3
V_1	∞	2	5
V_2	∞	∞	1
V_3	1	∞	∞

.



Для решения задачи применяем алгоритм Уоршалла-Флойда.

1) $d_{i,j}^{(1)} := \min\left(d_{i,j}^{(0)}, d_{i,1}^{(0)} + d_{1,j}^{(0)}\right),\ i, j = \overline{1,3}$

$D^{(1)}$	V_1	V_2	V_3
V_1	∞	2	5
V_2	∞	∞	1
V_3	1	3	6

,

первая строка и первый столбец не меняются в силу определения матрицы $D^{(1)}$.

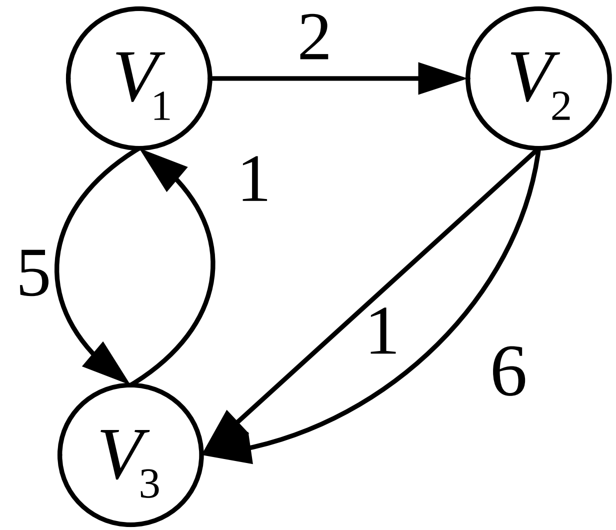
Решение для примера 1

2) $d_{i,j}^{(2)} := \min\left(d_{i,j}^{(1)}, d_{i,2}^{(1)} + d_{2,j}^{(1)}\right),\ i, j = \overline{1,3},$

$D^{(2)}$	V_1	V_2	V_3
V_1	∞	2	3
V_2	∞	∞	1
V_3	1	3	4

,

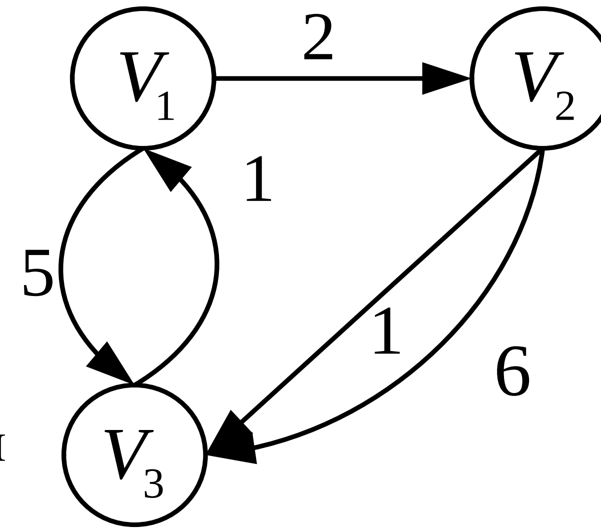
вторая строка и второй столбец не меняются в силу определения матрицы $D^{(2)}$.



Решение для примера 1

3) $d_{i,j}^{(3)} := \min\left(d_{i,j}^{(2)}, d_{i,3}^{(2)} + d_{3,j}^{(2)}\right),\ i, j = \overline{1,3}$,

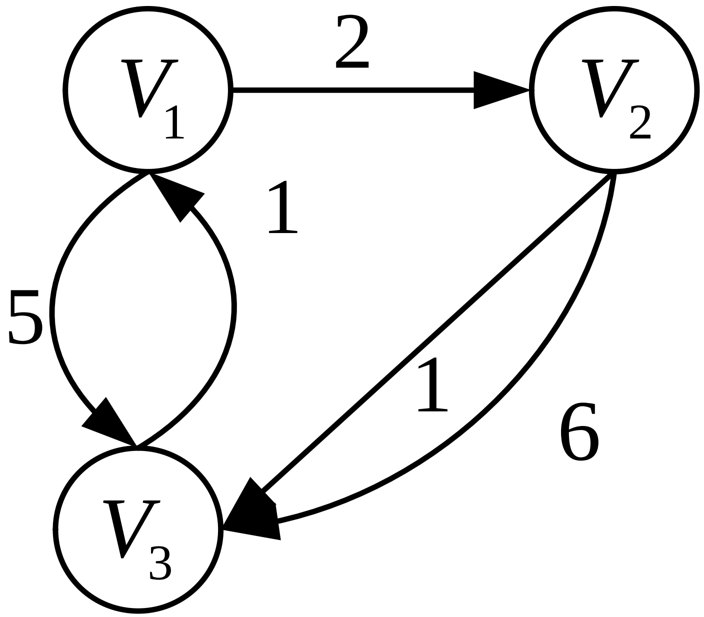
$D^{(3)}$	V_1	V_2	V_3
V_1	4	2	3
V_2	2	4	1
V_3	1	3	4



третья строка и третий столбец не меняются в силу определения матрицы $D^{(3)}$.

Элементы матрицы $D^{(3)}$ показывают кратчайшие расстояния между всеми парами вершин. Например, расстояние от V_3 к V_2, равное трем, получается переходом из вершины V_3 в V_1, вес этой дуги равен 1, и из V_1 в V_2, вес дуги 2, суммируя, получаем 3.

Ответ для примера 1



$D^{(3)}$	V_1	V_2	V_3
V_1	4	2	3
V_2	2	4	1
V_3	1	3	4

Тема следующей лекции:

«Транзитивное замыкание»