номер, то есть будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми натуральными и всеми рациональными числами.

Теорема 1.4. *Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

$a_{n_1} a_{n_2} \dots, a_{n_k} \dots$

Доказательство. Пусть A – счетное множество, а B – его подмножество. Занумеруем элементы множества A : $a_1, ..., a_n, ...$. Пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, ...$ – те из них, которые входят в B. Если среди чисел $n_1, n_2, ...$ есть наибольшее, то B конечно, в противном случае B счетно, поскольку его элементы $a_{n_1}, a_{n_2}, ...$ занумерованы числами $1, 2, ...$ □

Теорема 1.5. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть M – бесконечное множество. Выберем в нем произвольный элемент a_1. Поскольку M бесконечно, в нем найдется элемент a_2, отличный от a_1, затем найдется элемент a_3, отличный от a_1 и от a_2 и т.д. Продолжая этот процесс (который не может оборваться из-за «нехватки» элементов, ибо M бесконечно), мы получаем счетное подмножество $A = \{a_1, ..., a_n, ...\}$ множества M. □

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным множеством.

Теорема 1.6. *Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.*

Доказательство. Предположим, что указанное множество является счетным, то есть имеет место взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и числами

Без док-ва.

$$\alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}...,$$

$$\alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}...,$$

$$\alpha_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n}...,$$

$$..$$

$$\alpha_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}...,$$

$$..$$

Здесь a_{ik} – k-я десятичная цифра числа α_i. Построим дробь

$$\beta = 0, b_1 b_2 b_3 ... b_n ...,$$

где

$$b_i = \begin{cases} 2, & \text{если } a_{ii} = 1, \\ 1, & \text{если } a_{ii} \neq 1. \end{cases}$$

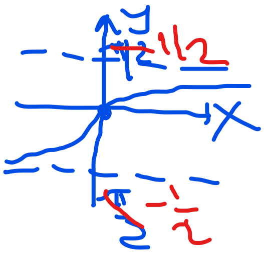
Имеем $\beta \neq \alpha_1$, $\beta \neq \alpha_2$ и т.д. Таким образом, никакое счетное множество действительных чисел, лежащих на отрезке $[0, 1]$, не исчерпывает этого отрезка. $\square$

§ 1.5 Эквивалентность множеств. Мощность

Определение 1.5. Множества M и N называются эквивалентными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Введенное отношение является отношением эквивалентности, поэтому будем записывать $M \sim N$.

Понятие эквивалентности применимо как к конечным, так и к бесконечным множествам. Два конечных множества эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда число элементов у них одинаково. Определение счетного множества можно теперь сформулировать следующим образом: множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.



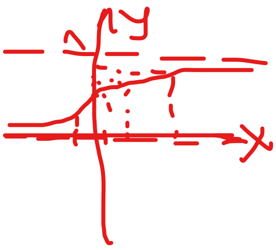
Заметим, что множество всех точек интервала $(0, 1)$ эквивалентно множеству всех точек на прямой. Соответствие можно установить, например, с помощью функции

$$y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

B

∅ B

Определение 1.6. Множество M называется бесконечным, если оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.



Отношение эквивалентности разбивает совокупность всех множеств на классы. Класс, которому принадлежит множество M, называется мощностью (кардинальным числом) множества M и обозначается $\operatorname{card} M$. Если $M \sim N$, то пишут $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N$.

Говорят, что мощность множества M не больше мощности множества N, и пишут $\operatorname{card} M \leq \operatorname{card} N$, если M эквивалентно некоторому подмножеству множества N.

Для конечных множеств понятие мощности совпадает с привычным понятием числа элементов множества. Мощность множества натуральных чисел (то есть любого счетного множества) обозначается символом $\aleph_0$ (читается: «алеф нуль»), то есть $\operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0$. Про множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел отрезка $[0, 1]$, говорят, что они имеют мощность континуума. Эта мощность обозначается символом c (или символом $\aleph$).

Таким образом, счетные множества – это «самые маленькие» из бесконечных множеств; существуют также и бесконечные множества, бесконечность которых имеет более «высокий порядок», – это множества мощности континуума. А существуют ли мощности, превосходящие мощность континуума? Вообще, существует ли какая-нибудь «наивысшая» мощность или нет? Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема 1.7 (Кантор)**.** *Пусть M – заданное множество, $\mathcal{P}(M)$ – множество всех его подмножеств. Тогда $\operatorname{card} M < \operatorname{card}\mathcal{P}(M)$.*

Доказательство. Если M – пустое множество, то множество $\mathcal{P}(M)$ будет содержать один элемент, то есть $\operatorname{card}\mathcal{P}(M) = 1 > 0 = \operatorname{card} M$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $M \neq \varnothing$.

Пусть M_1 – множество всех одноэлементных подмножеств множества M. Отметим, что $M_1 \sim M$ (взаимно однозначное соответствие устанавливается по следующему правилу: каждому элементу $x \in M$ ставится в соответствие одноэлементное подмножество $\{x\} \in M_1$). Таким образом, $\operatorname{card} M \leq \operatorname{card}\mathcal{P}(M)$, поскольку $\mathcal{P}(M)$ содержит M_1.

Для доказательства теоремы теперь достаточно установить, что $\operatorname{card} M \neq \operatorname{card}\mathcal{P}(M)$.

Предположим, что $\operatorname{card} M = \operatorname{card}\mathcal{P}(M)$, то есть существует взаимно однозначное соответствие $f : M \to \mathcal{P}(M)$. Рассмотрим множество $A = \{x \in M : x \notin f(x)\}$ тех элементов $x \in M$, которые не содержатся в сопоставленном им множестве $f(x) \in \mathcal{P}(M)$. Поскольку $A \in \mathcal{P}(M)$, то найдется элемент $a \in M$ такой, что $f(a) = A$. Для элемента $a \in M$ невозможно ни соотношение $a \in A$ (по определению A), ни соотношение $a \notin A$ (тоже по определению A), то есть мы вступаем в противоречие с законом исключенного третьего. $\square$

§ 1.6 Определение множества действительных чисел

Определение 1.7. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы – действительными (вещественными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

∃!

Exist

(I) Аксиомы сложения

Для любой упорядоченной пары действительных чисел a и b $\exists!$ сумма $(a+b) \in \mathbb{R}$, так что при этом имеют место следующие свойства:
I_1. $a+b=b+a \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$ (коммутативность),
I_2. $a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$ (ассоциативность),
I_3. $\exists\, 0: \; a+0=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$,
I_4. $\forall\, a \in \mathbb{R} \; \exists -a: \; a+(-a)=0$.

(II) Аксиомы умножения

Для любой упорядоченной пары действительных чисел a и b $\exists!$ произведение $ab \in \mathbb{R}$, так что при этом имеют место следующие свойства:
II_1. $ab=ba \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$ (коммутативность),
II_2. $a(bc)=(ab)c \quad \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$ (ассоциативность),
II_3. $\exists\, 1: \; a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$,
II_4. $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \; \exists\, a^{-1}: \; a \cdot a^{-1} = 1$.

(III) Связь сложения и умножения

$(a+b)c = ac+bc \quad \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность).

(IV) Аксиомы порядка

Для элементов $\mathbb{R}$ определено отношение $\leq$, удовлетворяющее следующим аксиомам:
IV_1. $a \leq a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$ (рефлексивность),
IV_2. если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a=b$ (антисимметричность),
IV_3. если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзитивность),
IV_4. $\forall\, a,b \in \mathbb{R} \quad a \leq b$ или $b \leq a$.

(V) Связь сложения и отношения порядка

Если $a \leq b$, то $a+c \leq b+c \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$.

(VI) Связь умножения и отношения порядка

Если $0 \leq a$ и $0 \leq b$, то $0 \leq ab$.

(VII) Аксиома полноты (непрерывности)

Если A и B - непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что

$$a \leq b \; \forall a \in A, \;\; \forall b \in B,$$

то

$$\exists c \in \mathbb{R} : \; a \leq c \leq b \;\; \forall a \in A, \;\; \forall b \in B.$$

§ 1.7 Важнейшие классы действительных чисел

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество натуральных чисел.

Определение 1.8. Объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным числам, и нуля называется множеством целых чисел и обозначается $\mathbb{Z}$.

Определение 1.9. Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, называются рациональными числами. $\frac{m}{n}$

Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

Определение 1.10. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Теорема 1.8. *Не существует рационального числа, квадрат которого равен двум.*

Доказательство. Предположим противное: пусть существует дробь $\frac{p}{q}$ такая, что $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Будем считать эту дробь несократимой. Тогда $p^2 = 2q^2$, следовательно, p^2, а значит, и p делится на 2. Но если $p = 2r$, то $2r^2 = q^2$ и по той же причине q должно делиться на 2, что противоречит несократимости дроби $\frac{p}{q}$. □

$4r^2 = 2q^2$ $\quad p = 2r \quad q = 2s$

$\frac{p}{q} = \frac{\cancel{2}r}{\cancel{2}s}$

Расширенное множество действительных чисел

Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ называется расширенным множеством действительных чисел.

Будем считать, что

$$-\infty < +\infty,$$

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty,$$
$$(+\infty)-(-\infty)=+\infty, \quad (-\infty)-(+\infty)=-\infty,$$
$$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty,$$
$$(+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty.$$

Отметим, что операции

$$(+\infty)+(-\infty), \ \frac{+\infty}{+\infty}, \ \frac{-\infty}{-\infty}, \ \frac{+\infty}{-\infty}, \ \frac{-\infty}{+\infty}$$

являются неопределенными.

Если $a \in \mathbb{R}$, то

$$a+(+\infty)=+\infty+a=+\infty, \quad -\infty+a=a+(-\infty)=-\infty;$$

для $a>0$

$$a(+\infty)=(+\infty)a=+\infty, \quad a(-\infty)=(-\infty)a=-\infty;$$

для $a<0$

$$a(+\infty)=(+\infty)a=-\infty, \quad a(-\infty)=(-\infty)a=+\infty.$$

Числовые промежутки

Конечные промежутки

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: \ a<x<b\}$ – интервал,
$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}: \ a<x\le b\}$ – полуинтервал, содержащий точку b,
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: \ a\le x<b\}$ – полуинтервал, содержащий точку a,
$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: \ a\le x\le b\}$ – отрезок.

Бесконечные промежутки

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: \ x>a\}$, $\quad [a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: \ x\ge a\}$,
$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}: \ x<b\}$, $\quad (-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}: \ x\le b\}$.

§ 1.8 Ограниченные и неограниченные множества

Определение 1.11. Множество $X\subset\mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists c\in\mathbb{R}: \ x\le c \ \forall x\in X$. Число c называется верхней гранью (мажорантой) множества X.

Определение 1.12. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists c \in \mathbb{R}: \ c \leq x \ \forall x \in X$. Число c называется нижней гранью (минорантой) множества X.

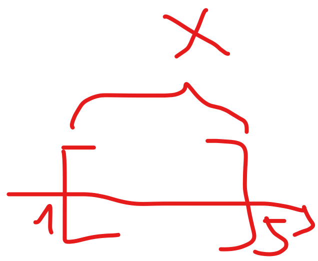
Определение 1.13. Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется ограниченным множеством.

Определение 1.14. Множество, не являющееся ограниченным, называется неограниченным.

$\subset \mathbb{R}$

Определение 1.15. Элемент $a \in X$ называется наибольшим (максимальным), если $x \leq a \ \forall x \in X$.

Обозначают $a = \max X$ или $a = \max\limits_{x \in X} x$.



Определение 1.16. Элемент $a \in X$ называется наименьшим (минимальным), если $a \leq x \ \forall x \in X$.

Обозначают $a = \min X$ или $a = \min\limits_{x \in X} x$.

Определение 1.17. Наименьшая из мажорант множества X называется его точной верхней гранью и обозначается $\sup X$ или $\sup\limits_{x \in X} x$.

Определение 1.18. Действительное число a называется точной верхней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$, если
1. $x \leq a \ \forall x \in X$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in X: \ x' > a - \varepsilon$.

Определение 1.19. Наибольшая из минорант множества X называется его точной нижней гранью и обозначается $\inf X$ или $\inf\limits_{x \in X} x$.

Определение 1.20. Действительное число a называется точной нижней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$, если
1. $x \geq a \ \forall x \in X$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in X: \ x' < a + \varepsilon$.

$\subset \mathbb{R}$

Теорема 1.9. *Пусть X – ограниченное сверху непустое числовое множество. Тогда $\exists!$ $\sup X$.*

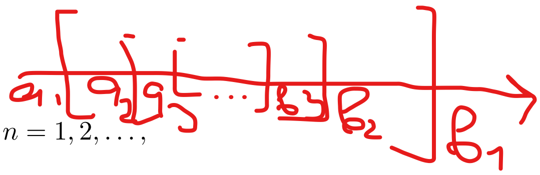
Доказательство. Пусть Y – множество всех мажорант множества X. $Y \neq \varnothing$, так как по условию теоремы множество X ограничено сверху. Имеем $x \leq y \ \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y$, так как y – верхняя грань множества X. Тогда в силу аксиомы полноты существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq a \leq y \ \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y$. Число a, таким образом, является мажорантой X и минорантой Y. Как мажоранта X, число a является элементом Y, но как миноранта Y число a является минимальным элементом множества Y. Итак, $a = \min Y = \sup X$. Единственность числа a следует из аксиом порядка. $\square$

Упр! a_1, a_2

Аналогично доказывается существование и единственность нижней грани у ограниченного снизу числового множества, то есть имеет место следующая теорема.

Теорема 1.10. *Пусть X – ограниченное снизу непустое числовое множество. Тогда* $\exists!\ \inf X$*.*

§ 1.9 Основные леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел



Определение 1.21. Система отрезков

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2], \ldots,\ [a_n, b_n], \ldots,\ a_n \in \mathbb{R},\ b_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots,$$

называется системой вложенных отрезков, если

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1, \tag{1.5}$$

то есть если каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ содержится в предыдущем $[a_n, b_n]$:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots.$$

Определение 1.22. Пусть задана система отрезков $[a_n, b_n]$, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$ Будем говорить, что длина $b_n - a_n$ отрезков этой системы стремится к нулю, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$b_n - a_n < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Лемма 1.1 (принцип Коши–Кантора)**.** *Для всякой системы $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots,$ вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам данной системы.*

Доказательство. Пусть задана система вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$ Обозначим через A множество всех левых концов отрезков этой системы, а через B – множество их правых концов, то есть $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Покажем, что

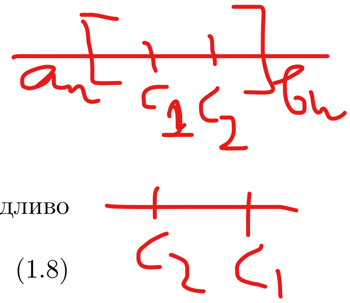
$$a_m \leq b_n \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

$a_m \le b_n \ \forall m, n \in \mathbb{N}$

Действительно, если $n \ge m$, то из неравенств (1.5) следует, что $a_m \le a_n \le b_n$, а если $n < m$, то $a_m \le b_m \le b_n$.

Поэтому из неравенств (1.7), в силу аксиомы полноты, следует, что существует такое число c, что $a_m \le c \le b_n \ \ \forall m, n \in \mathbb{N}$, в частности, $a_n \le c \le b_n, \ \ n = 1, 2, \ldots$. Это и означает, что число c принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$.

Докажем единственность точки пересечения. Допустим обратное: пусть существуют точки c_1 и c_2, принадлежащие всем отрезкам рассматриваемой системы, то есть



$$c_1 \in [a_n, b_n], \quad c_2 \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$|c_1 - c_2| \le b_n - a_n \underset{}{<\varepsilon} \ \cancel{\forall n \in \mathbb{N}}, \quad \forall n > N$$

следовательно, в силу условий (1.6), для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$|c_1 - c_2| < \frac{1}{2}|c_1 - c_2|$

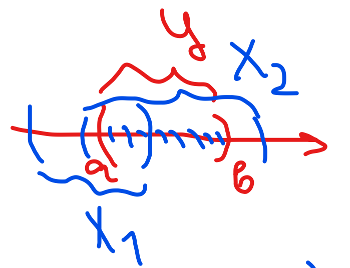
$$|c_1 - c_2| < \varepsilon. \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad (1.8)$$

$1 < \frac{1}{2}$

Так как ε – произвольное положительное число, то неравенство (1.8) может иметь место только тогда, когда $c_1 = c_2$ (если бы $c_1 \ne c_2$, то, например, при $\varepsilon = \frac{1}{2}|c_1 - c_2|$ неравенство (1.8) было бы противоречиво). Это означает, что существует единственное число c, принадлежащее всем отрезкам $[a_n, b_n]$. □

Определение 1.23. Говорят, что система $S = \{X_\alpha\}$ множеств X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, покрывает множество Y, если $\forall\, y \in Y \ \ \exists\, X_\alpha \in S: \ \ y \in X_\alpha$.

Если подсистема S_1 покрытия S сама образует покрытие множества Y, то она называется подпокрытием этого множества.

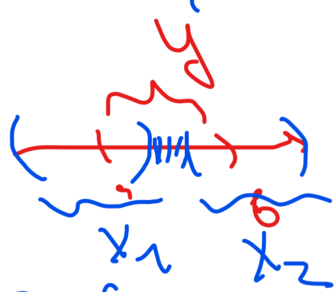


$S = \{X_1, X_2\}$

Лемма 1.2 (принцип Гейне–Бореля–Лебега). *Из любой системы интервалов, покрывающей отрезок, можно выделить конечное подпокрытие этого отрезка.*

Без док-ва

Доказательство. Пусть S – система интервалов, покрывающая отрезок $[a, b] = I_1$. Предположим, что отрезок I_1 не допускает покрытия конечным набором интервалов системы S. Поделив I_1 пополам, получим, что по крайней мере одна из его половинок, которую обозначим через I_2, тоже не допускает конечного покрытия. С отрезком I_2 проделаем ту же процедуру деления пополам, получим отрезок I_3 и т.д. Таким образом, возникает последовательность $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S.



$S = \{X_1, X_2\}$

Поскольку длина отрезка, полученного на n-м шаге, по построению равна $|I_n| = |I_1| \cdot 2^{-n}$, то в последовательности $\{I_n\}$ есть отрезки сколь угодно малой длины. По лемме о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам $I_n,\ n \in \mathbb{N}$. Поскольку $c \in I_1 = [a, b]$, то найдется интервал $(\alpha, \beta) \in S$, содержащий точку c, то есть $\alpha < c < \beta$. Пусть $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Найдем в построенной последовательности такой отрезок I_n, что $|I_n| < \varepsilon$. Поскольку $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, заключаем, что $I_n \subset (\alpha, \beta)$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы S. $\square$

Глава 2

Предел последовательности

§ 2.1 Определение предела числовой последовательности. Переход к пределу в неравенствах

$x_n = \frac{1}{n}$

$\varepsilon > 0$

Определение 2.1. Отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется числовой последовательностью. Элемент $f(n)$ обозначается через x_n и называется n-м членом последовательности $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, а сама последовательность обозначается через $\{x_n\}$.

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$ . . . .

$a-\varepsilon$ a $a+\varepsilon$

Определение 2.2. Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется любой интервал, содержащий эту точку.

Определение 2.3. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists\, c \geq 0 : |x_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b_1 a b_2

Определение 2.4. Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$|x_n - a| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \to |x_n - a| < \varepsilon.$$

$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$

$|x_n| \leq 1$

Сформулированное условие равносильно тому, что вне любой окрестности точки a содержится лишь конечное множество членов рассматриваемой последовательности.

Записывают $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Определение 2.5. Если числовая последовательность имеет предел, то она называется сходящейся.

$\forall n > N$

беск.много

к. к.

$a-\varepsilon$ a $a+\varepsilon$