$$+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

3. Интеграл

$$\int\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

подстановкой $t=\frac{1}{x-\alpha}$ приводится к интегралу (5.22).

§ 5.6 Интегрирование некоторых тригонометрических функций

I. Интеграл вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$\boxed{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},}\quad -\pi<x<\pi,$$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg} t$

сводится к интегралу от рациональной дроби.
Действительно, в этом случае

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\underline{x=2\operatorname{arctg}t,}\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

поэтому

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Таким образом получен интеграл от рациональной функции.
Пример 5.14. Найти интеграл

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

Положим $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$. Тогда

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{2dt}{\cancel{(1+t^2)}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка дает возможность проинтегрировать всякую функцию вида $R(\sin x, \cos x)$. Однако она часто приводит к громоздким выражениям, поэтому следует использовать и другие приемы для вычисления интегралов указанного типа.

1. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагаем $t = \cos x$.

2. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то в этом случае $t = \sin x$.

3. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 5.15. Найти интеграл

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x \, dx.$$

$R(\sin x, \cos x) = \sin^4 x \cos^3 x.$

В этом случае

$$R(\sin x, -\cos x) = \sin^4 x \cdot (-\cos x)^3 = -\sin^4 x \cdot \cos^3 x = -R(\sin x, \cos x),$$

поэтому полагаем $\underline{t = \sin x}$. Тогда $dt = \cos x \, dx$ и

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int t^4(1-t^2)\, dt = \int (t^4 - t^6)\, dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx =$$

$$= \int \sin^4 x \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \underbrace{\cos x \, dx}_{d(\sin x)}$$

II. Рассмотрим интеграл

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx,$$

где m и n – рациональные числа.

Полагая $t = \sin x$ или $t = \cos x$, получим интеграл от дифференциального бинома.

Действительно, пусть, например, $t = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - t^2)^{1/2}, \quad dt = \cos x dx,$$

$$dx = \frac{dt}{\cos x} = (1 - t^2)^{-1/2} dt,$$

$(1-t^2)^{n/2}\ (1-t^2)^{-1/2}dt$

поэтому

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx = \int t^m (1 - t^2)^{(n-1)/2} dt.$$

$\int x^m (a+bx^k)^p dx$

Таким образом, можно выразить или нет интеграл

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

через элементарные функции, зависит от того, обладает этим свойством или нет получающийся интеграл от дифференциального бинома.

В том случае, когда m и n – целые числа, интеграл

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

относится к типу интегралов, рассмотренных в пункте I.

III. Интегралы

$$\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx, \ \int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx, \ \int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$$

вычисляются, если их подынтегральные функции преобразовать по формулам

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x \right),$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x \right),$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x \right).$$

$\int \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$

$t = kx$

Например:

$$\int \sin 2x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin x) \, dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C.$$

$= \frac{1}{2} \int \sin 3x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin x \, dx$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) \cos 3x$