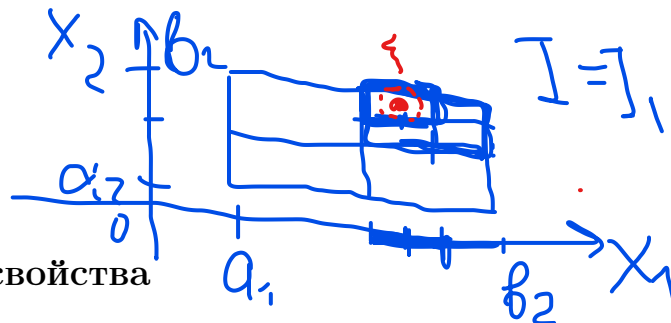


Лекция 4

Компакты в \mathbb{R}^n и их свойства



Определение 4.1. Множество $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n, a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$ называется n -мерным промежутком или n -мерным параллелепипедом.

Теорема 4.1. n -мерный параллелепипед I является компактом в \mathbb{R}^n .

Доказательство. Пусть задано открытое покрытие $S = \{S_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$ множества I . Предположим, что I не является компактом в \mathbb{R}^n , то есть из S невозможно выделить конечное покрытие. Делим каждый из отрезков $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$ пополам. Тогда хотя бы один из полученных 2^n n -мерных промежутков не допускает конечного подпокрытия. Продолжим указанную процедуру деления отрезков пополам, получим систему вложенных n -мерных промежутков $I = I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, каждый из которых не допускает конечного подпокрытия.

При указанном делении отрезков $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$ для каждого из них получаем систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. По лемме Коши-Кантора существует точка ξ_i , принадлежащая системе сложенных отрезков из $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, причем $\xi_i \in [a_i, b_i]$. Тогда $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in I$. Следовательно, $\exists S_{\lambda_0} : \xi \in S_{\lambda_0}$. Так как S_{λ_0} – открытое множество в \mathbb{R}^n , то $\exists U(\xi, \delta) : \xi \in U(\xi, \delta) \subset S_{\lambda_0}$, следовательно существует такой номер \tilde{n} , что $\xi \in I_{\tilde{n}} \subset U(\xi, \delta) \subset S_{\lambda_0}$, то есть $I_{\tilde{n}}$ допускает конечное подпокрытие (множество S_{λ_0}), что противоречит тому, что ни один из n -мерных промежутков $I = I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ не допускает конечного подпокрытия. \square

Теорема 4.2. Пусть X – компакт в \mathbb{R}^n . Тогда

1. X – замкнутое множество в \mathbb{R}^n ,
2. любое замкнутое подмножество множества X является компактом.

Доказательство.

1) Пусть X – компактное множество в \mathbb{R}^n . Покажем, что дополнение $\mathbb{R}^n \setminus X$ является открытым множеством в \mathbb{R}^n .

Пусть $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Для $\forall x \in X$ построим окрестность $U(x; \delta x)$ и окрестность $V(y, \delta x)$, где $\delta x < \frac{1}{2} \rho(x, y)$ (рис.1). Имеем $U(x; \delta x) \cap V(y, \delta x) = \emptyset$.

Далее, $X \subset \bigcup_{x \in X} U(x; \delta x)$, система $\{U(x; \delta x)\}$ является открытым покрытием множества X . Поскольку X – компакт в \mathbb{R}^n , то существует конечное подпокрытие $U(x_i; \delta x_i)$, $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, то есть $X \subset \bigcup_{i=1}^n U(x_i; \delta x_i)$.

Рассмотрим множество

$$V = \underbrace{\bigcap_{i=1}^n U(y; \delta x_i)}_{\text{открытое множество}}$$

Оно является окрестностью точки $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$. В силу построения имеем

$$V \cap \left(\bigcup_{i=1}^n U(y; \delta x_i) \right) = \emptyset.$$

Следовательно, $V \cap X = \emptyset \Rightarrow y \in \mathbb{R}^n \setminus X$ вместе с окрестностью V , то есть $\mathbb{R}^n \setminus X$ – открытое множество, то есть X – замкнутое множество.

2) Пусть подмножество $X_1 \subset X$ является замкнутым множеством в \mathbb{R}^n . Тогда $\mathbb{R}^n \setminus X_1$ – открытое множество в \mathbb{R}^n . Пусть $S = \{S_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$ является произвольным открытым покрытием множества X_1 . Тогда $S \cup (\mathbb{R}^n \setminus X_1)$ покрывает \mathbb{R}^n и, в частности, X_1 . Поскольку X – компакт в \mathbb{R}^n , то из системы $S \cup (\mathbb{R}^n \setminus X_1)$ можно выделить конечное подпокрытие X . Поскольку $X_1 \cap (\mathbb{R}^n \setminus X_1) = \emptyset$, то из системы S может быть выделено конечное подпокрытие множества X_1 , то есть X_1 – компакт в \mathbb{R}^n . \square

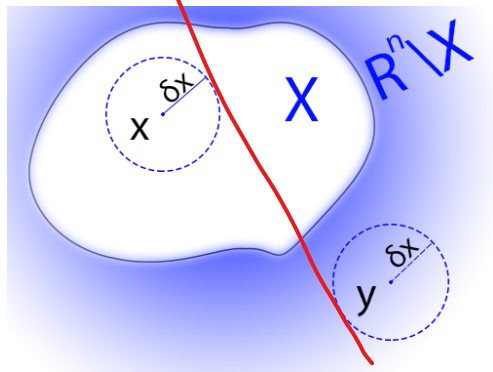


Рис. 1: Схема доказательства.

Теорема 4.3. Если X – компакт в \mathbb{R}^n , то X – ограниченное множество.

Доказательство. Рассмотрим для каждой фиксированной точкой $y \in \mathbb{R}^n$ систему окрестностей $S = \{U(y, n)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Система S покрывает $X \subset \mathbb{R}^n$. Если допустить, что X является неограниченным множеством, то из S невозможно будет отделить конечное подпокрытие, следовательно X не будет являться компактом. Что является противоречием. \square

Теорема 4.4. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является компактом в \mathbb{R}^n , то

1. X – замкнутое множество в \mathbb{R}^n ;
2. X – ограниченное множество в \mathbb{R}^n .

Доказательство. Выше доказано, что если X – компакт в \mathbb{R}^n , то справедливо 1) и 2). Пусть теперь X – ограничено и замкнуто в \mathbb{R}^n . Тогда существует n -мерный параллелепипед $I \supset X$. Поскольку I – компакт в \mathbb{R}^n и его подмножество X является замкнутым, то по теореме 4.2. множество X является компактом в \mathbb{R}^n . \square

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^1$

Последовательности в \mathbb{R}^n и их сходимость

Определение 4.2. Функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *последовательностью* в \mathbb{R}^n . Обозначается $\{\mathbf{x}_k\}$, где $\mathbf{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$. Пусть $k_1 < k_2 < \dots$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда $\{\mathbf{x}_{k_m}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$.

Определение 4.3. Точка $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ называется *пределом* последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall k > N \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \varepsilon$.

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_k^i - a^i|^2}$$

2

$$\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) = |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \varepsilon$$

$$\sqrt{(x_k^i - a^i)^2} \leq \sqrt{(x_k^1 - a^1)^2 + (x_k^2 - a^2)^2 + \dots + (x_k^n - a^n)^2}$$

$$x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n), x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n), \dots$$

Теорема 4.5. Последовательность $\{x_k\}$ сходится к $a \in \mathbb{R}^n$ при $k \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда имеет место покоординатная сходимость, то есть $\{x_k^i\}$ сходится к a^i при $k \rightarrow \infty, i = \overline{1, n}$.

Доказательство.

1) Пусть $\{x_k\}$ сходится к a при $k \rightarrow \infty$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall k > N \rho(x_k, a) = \sqrt{(x_k^1 - a^1)^2 + (x_k^2 - a^2)^2 + \dots + (x_k^n - a^n)^2} < \varepsilon$.

Поскольку $|x_k^i - a^i| \leq \sqrt{\sum_{s=1}^n (x_k^s - a^s)^2} < \varepsilon, \forall k > N, \forall i = 1, \dots, n$, то последовательность $\{x_k^i\}$ сходится к a^i при $k \rightarrow \infty$. То есть имеет место покоординатная сходимость.

2) Пусть $\{x_k^i\}$ сходится к a^i при $k \rightarrow \infty, i = 1, \dots, n$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N_i = N_i(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall k > N_i \Rightarrow |x_k^i - a^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Положим $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$. Тогда

$\rho(x_k, a) = \sqrt{(x_k^1 - a^1)^2 + (x_k^2 - a^2)^2 + \dots + (x_k^n - a^n)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} n} = \varepsilon, \forall k > N$ то есть $\{x_k\}$ сходится к a при $k \rightarrow \infty$. \square

Теорема 4.6. Если последовательность $\{x_k\}$ имеет предел, то он единственный.

Доказательство. Допустим, что сходящаяся последовательность $\{x_k\}$ имеет два предела a_1 и a_2 , то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall k > N \rho(x_k, a_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_k, a_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее,

$$\rho(a_1, a_2) = \|a_1 - a_2\| = \|(a_1 - x_k) + (x_k - a_2)\| \leq \|x_k - a_1\| + \|x_k - a_2\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\forall k > N$, то есть $\rho(a_1, a_2) = \sqrt{(a_1^1 - a_2^1)^2 + (a_1^2 - a_2^2)^2 + \dots + (a_1^n - a_2^n)^2} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a_1^i = a_2^i, \forall i = 1, \dots, n$, то есть $a_1 = a_2$.

Определение 4.4. Последовательность $\{x_k\}$ называется *ограниченной*, если $\exists M > 0 : \|x_k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.7. (Больцано-Вейерштрасс). Из любой ограниченной последовательности $\{x_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_k\}$ – заданная ограниченная последовательность. Поскольку $|x_k^i| \leq \sqrt{\sum_{s=1}^n (x_k^s)^2} \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$, то, следовательно, последовательность $\{x_k^i\}$ также является ограниченной $\forall i = 1, \dots, n$. По теореме Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_m}^i\}, i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим последовательность $\{x_{k_m}^1\}$. Из неё выделим сходящуюся к a^1 при $k \rightarrow \infty$ подпоследовательность $\{x_{k_m}^1\}$. Тогда из $\{x_{k_m}^2\}$ можно выделить сходящуюся к a^2 при $k \rightarrow \infty$ подпоследовательность $\{x_{k_m}^2\}$ и так далее. В результате получим точку $a = (a^1, a^2, \dots, a^n)$. Поскольку имеет место покоординатная сходимость, то по теореме 4.5. получаем, что выделенная подпоследовательность сходится к a . \square

Определение 4.5. Последовательность $\{x_k\}$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall k, s > N \rho(x_k, x_s) < \varepsilon$.

Теорема 4.8. (Критерий Коши). Последовательность $\{x_k\}$ сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Доказательство. 1) Пусть $\{x_k\}$ – фундаментальная последовательность $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall k, s > N \rho(x_k, x_s) < \varepsilon$. Тогда $|x_k^i - x_s^i| \leq \rho(x_k, x_s) < \varepsilon, \forall k, s > N$.

Следовательно, последовательность $\{x_k^i\}$ является фундаментальной. Согласно критерию Коши о последовательностях $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ заключаем, что $\{x_k^i\}$ – сходящаяся последовательность $\forall i = 1, \dots, n$, то есть имеет место покоординатная сходимость. Тогда по теореме 4.5. $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится.

2) Пусть $\{x_k^i\}$ сходится, то есть имеет место покоординатная сходимость, тогда $\{x_k^i\}$ – фундаментальная последовательность $\forall i = 1, \dots, n$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N_i = N_i(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k, s > N_i \Rightarrow |x_k^i - x_s^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Пусть $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$. То-

гда $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_s\| = \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_s) = \sqrt{(x_k^1 - x_s^1)^2 + (x_k^2 - x_s^2)^2 + \dots + (x_k^n - x_s^n)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \quad \forall k, s > N$ то есть $\{\mathbf{x}_k\}$ – фундаментальная последовательность. \square

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon^2}{n} < \frac{\varepsilon^2}{n} < \frac{\varepsilon^2}{n} \\ & \frac{\varepsilon^2}{n} < \frac{\varepsilon^2}{n} < \frac{\varepsilon^2}{n} \end{aligned}$$