1. Введение

Дифференциальная геометрия

Дифференциальная геометрия — область математики изучающая гладкие многообразия и структуры на них. Менее формально — дифференциальная геометрия это применение методов математического анализа к геометрическим объектам (кривым, поверхностям, пространствам).

Кратко перечислим основные вехи развития дифференциальной геометрии.

- Возникновение дифференциальной геометрии принято относить к 18 веку (Леонард Эйлер, Гаспар Монж).
- Большой вклад в развитие внес Бернхард Риман (лекция 1854 года).
- Теоретико-групповой подход на геометрию вообще был предложен Феликсом Кляйном в лекции, получившей название Эрлангенская программа.
- В начале 20 веке мощный импульс с к развитию математического аппарата дифференциальной геометрии дали специальная и общая теория относительности и общий подход по геометризации физики.

Разделы дифференциальная геометрия

В настоящее время дифференциальная геометрия разрослась и разделилась на множество ветвей. Перечислим некоторые из них.

- Классическая дифференциальная геометрия (локальные свойства кривых и поверхностей в декартовом двухмерном и трехмерном пространствах). Исторически тесно связанна с теоретической механикой.
- Общая дифференциальная геометрия. Является обобщением теории поверхностей в трехмерном пространстве.
- Риманова геометрия изучает многообразия Римана с введенной на них метрикой специального вида. Является обобщением евклидова пространства.
- Псевдо-риманова геометрия обобщение геометрии Римана для необязательно положительно определенной метрики. Используется в общей теории относительности. Частный случай — геометрия Минковского, которая используется в специальной теории относительности.
- Симплектическая геометрия. Изучает многообразия с введенной на них специальной структурой — симплектической формой. Используется в теоретической механики (формализм Гамильтона), в электродинамике и квантовой механике.
- К дифференциальной геометрии также относят тензорную алгебру и тензорный анализ — обобщения понятий вектор и матрица на многие размерности. Большое значение играют в физике.

- Теория групп Ли. Изучаются непрерывные группы и алгебры Ли (в честь Мариус Софуса Ли). Тесно связанна с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений.

Эрлангенская программа Феликса Клейна

Крупный немецкий математик 19 века Феликс Клейн в своей лекции в Эрлангенском университете (октябрь 1872 года) предложил общий подход к геометрии на основе теории групп (групп преобразований пространства).

Суть программы Клейна

- Рассматривается некоторая группа преобразований некоторого пространства.
- Изучаются свойства, которые преобразования данной группы оставляют неизменными (инварианты).
- Разные группы имеют разные инварианты и приводят к разным геометриям.

Несколько примеров

- В классической греческой геометрии (школьная геометрия) рассматриваются свойства фигур, которые остаются неизменными при поворотах и параллельном переносе (инварианты: длины, площади, объемы и углы).
- Также в школе коротко изучают инварианты, которые проявляются при преобразовании подобия (растяжение и сужение пространства, подобные треугольники, инварианты: углы).
- Проективная геометрия, геометрия Лобачевского, геометрия Римана, аффинная геометрия и другие могут быть рассмотрены с точки зрения инвариантности некоторых величин при воздействии преобразований соответствующей группы.

Эрлангенскую программа Клейна называют второй алгебраизацией геометрии. Она еще больше усилила степень проникновения алгебры (общей алгебры) в геометрию и позволила рассматривать геометрические свойства вне связи с системами координат.

Топология

Топология — отдельный раздел математики, который изучает свойство геометрических пространств, неизменные при непрерывных деформациях. Данный раздел мы не затронем ввиду отсутствия времени. Стандартные программы для математических специальностей предусматривают отдельный курс топологии на 2-3 семестра.

Рис. 1: Феликс Христиан Клейн

Содержание курса

Классическая дифференциальная геометрия.

- Теория кривых на плоскости $\mathbb{R}^2$ и в пространстве $\mathbb{R}^3$. Формулы Френе–Серре, репер Френе, кривизна и кручение.

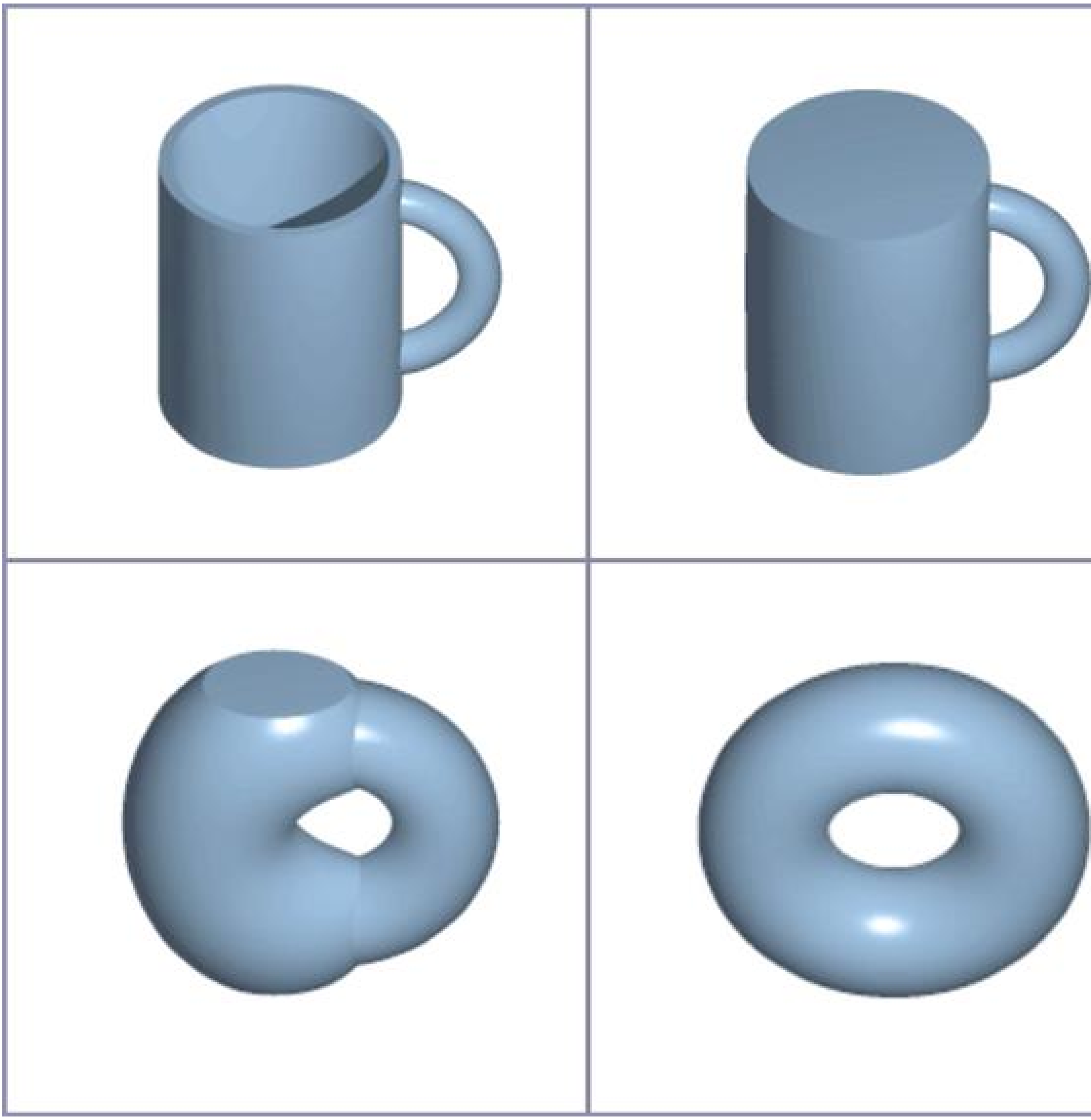


Рис. 2: С точки зрения топологии кружка и бублик (тор) неотличимы

- Теория поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Первая и вторая квадратичные формы, метрика поверхности и кривизна поверхности.

Вводные сведения из общей дифференциальной геометрии.

- Определения многообразия, карты, атласа, диффеоморфизма.

- Криволинейная система координат.
- Преобразование систем координат.
- Векторные поля.

Необходимые сведения из общей и линейной алгебры.

- Группы, линейные и евклидовы пространства. Основные сведения из линейной алгебры.
- Скалярное, векторное и смешанное произведения. Ориентация системы координат.
- Некоторые сведения из аналитической геометрии.
- Алгебра Грассмана на примере поливекторов.

Тензорная алгебра.

- Тензорная алгебра. Ковариантные и контравариантные векторы.
- Тензорные обозначения, правило суммирования Эйнштейна.
- Симметричный и антисимметричные тензоры.
- Поливекторы (n-векторы) и n-формы (антисимметричные тензоры).

Активности курса

Курс рассчитан на один модуль. Для набора баллов предусмотрены следующие активности.

- Две контрольные работы по 20 баллов каждая, в сумме 40 баллов.
- Четыре проверочных теста по каждому разделу программы, по 10 баллов каждый, в сумме 40 баллов.
- Один итоговый тест 20 баллов.

Список литературы

- Основные учебники [1, 2, 3].
- Дополнительные учебники [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].
- Задачники [11, 12].
- Повторение алгебры и аналитической геометрии [13, 14, 15, 16, 17].

Список литературы

1. Фиников С. Курс дифференциальной геометрии. — Москва : URSS, 2017. — 343 с.
2. Поздняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия : Первое знакомство. — Москва : Издательство МГУ, 1990. — 384 с.
3. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 305 с. — ISBN 9785971026815.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. В 3 т. Т. 1. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. — 6-е изд. — Москва : УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 336 с. — ISBN 9785453000470.
5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. В 3 т. Т. 2. Геометрия и топология многообразий. — 6-е изд. — Москва : УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 304 с. — ISBN 9785453000487.
6. Степанов С. С. Векторы, тензоры и формы: инструкция по применению. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — ISBN 9785971066910. — URL: `http://synset.com/pdf/steps_vec.pdf`.
7. Новиков С. П., Тайманов И. А. Современные геометрические структуры и поля. — Москва : МЦНМО, 2005. — 584 с. — ISBN 5940571026.
8. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. В 2 т. Т. 1. Евклидовы пространства и аффинные пространства. Тензорный анализ. Математические основы специальной теории относительности. — Москва : УРСС, 2014. — 352 с. — ISBN 9785396005778.
9. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. В 2 т. Т. 2. Римановы пространства и пространства аффинной связности. Тензорный анализ. Математические основы общей теории относительности. — Москва : УРСС, 2014. — 336 с. — ISBN 9785396005785.
10. Норден А. П. Теория поверхностей. — 2-е изд. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 264. — (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия)). — ISBN 978597106234.
11. Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. — Москва : ЛЕНАНД, 2016. — 416 с. — ISBN 9785971024484.
12. Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии. — 6-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 141 с. — ISBN 9785922108218.
13. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 1. Основы алгебры. — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574538.
14. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. Линейная алгебра. — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574545.

15. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 3. Основные структуры алгебры. — Москва : МЦНМО, 2009. — 272 с. — ISBN 9785940574552.
16. Аржанцев И. В. [и др.]. Сборник задач по линейной алгебре / под ред. А. И. Кострикин. — Москва : МЦНМО, 2009. — 408 с. — ISBN 9785940574132.
17. Федорчук В. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / под ред. Л. А. Николова. — Москва : Издательство Московского университета, 1990. — 328 с. — ISBN 521100941X.

2. Теория кривых

2.1. Репер Френе. Формулы Френе–Серре

Параметризованная кривая

Определение 1. Сегмент кривой γ имеет *параметрическое представление* в $\mathbb{R}^n$ если задана вектор-функция

$$\mathbf{r}(t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}\ t \in [a,b] \in \mathbb{R},$$

Если функции $x^i(t), \forall i = 1, \dots, n$ имеют непрерывные производные первого порядка, которые ни в одной точке интервала $[a,b]$ не обращаются в ноль:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \neq \vec{\mathbf{0}},\ \forall t \in [a,b],$$

то сегмент кривой называется *регулярным.*

Параметризованная кривая

Если на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ каждому значению t соответствует одна точка сегмента кривой и, наоборот, каждой точке сегмента кривой соответствует одно значение t, то сегмент называется простой дугой. У такого сегмента кривой нет точек самопересечения.

В классической дифференциальной геометрии изучаются кривые, состоящие из регулярных сегментов. В точках соединения сегментов требование регулярности может не выполнятся. Такие точки называются нерегулярными или особыми.

Мы будем рассматривать примеры кривых, заданных на плоскости $\mathbb{R}^2$ и в пространстве $\mathbb{R}^3$. Параметрическое представление таких кривых задается как:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ t \in [a,b] \in \mathbb{R},$$

Неявно заданная кривая

Определение 2. Кривая γ называется неявно заданной в $\mathbb{R}^n$, если геометрическое место ее точек находится как решение системы из $n-1$ уравнения:

$$\begin{cases} F_1(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \\ F_2(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \\ \vdots \\ F_{n-1}(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \end{cases}$$

где каждая функция $F_i(\mathbf{x})$ — гладкая функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Для плоскости $\mathbb{R}^2$ это одно уравнение $F(x,y)=0$, а для трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ это два уравнения $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$.

Касательный вектор

Определение 3. *Касательным вектором* кривой γ в точке P называется производная от радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ кривой:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{pmatrix}_{t=t_0}$$

Точка имеет координаты $P = \mathbf{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^n \end{pmatrix}$. Касательный вектор также называют вектором скорости.

С помощью точки над буквой $\dot{x}(t)$ обозначается первая производная по переменной t.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2},\ \dddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^3}$$

Вектор ускорения

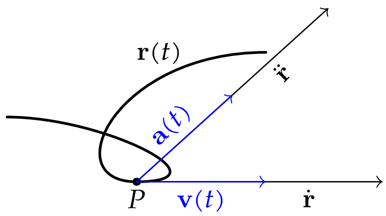
Вектором ускорения кривой γ в точке P назовем вторую производную по t от радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ кривой:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}t^2} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}^2x^n}{\mathrm{d}t^2} \end{pmatrix}_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \ddot{x}^1 \\ \vdots \\ \ddot{x}^n \end{pmatrix}_{t=t_0}$$

Термин вектор ускорения в дифференциальной геометрии обычно не используют, потому что рассматривают нормальный вектор, который мы введем ниже. В некоторых случаях вектор ускорения и вектор нормали совпадают.

Вектор скорости и ускорения

На рисунке можно видеть единичный (нормированный) касательный вектор $\mathbf{v}(t) = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}(t)$ и единичный вектор ускорения $\mathbf{a}(t) = \dfrac{\ddot{\mathbf{r}}}{\|\ddot{\mathbf{r}}\|}(t)$ в точке P некоторого сегмента кривой. Обратите внимание, что угол между ними может быть произвольным.



Натуральный параметр кривой

Выберем такой параметр $l = l(t)$, что касательный вектор по этому параметру будет единичным вектором при любых значениях l:

$$\mathbf{v}(l) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l},\ \|\mathbf{v}\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\| \equiv 1, \forall l \in [a, b].$$

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(l(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right\| = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\|}_{\equiv 1} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}.$$

Таким образом

$$\mathrm{d}l = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|\mathrm{d}t = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)}\,\mathrm{d}t\,,$$

а в случае ортонормированного базиса можно записать

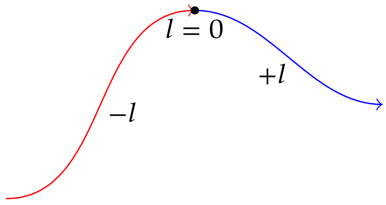
$$\mathrm{d}l = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\dot{x}^i(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Определение 4. Параметрическое представление кривой γ, при котором радиус-вектор кривой $\mathbf{r}(l)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ имеет единичный касательный вектор $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v}(l)\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\| \equiv 1, \forall l \in [a, b] \in \mathbb{R}^n,$$

называется натуральным представлением, а параметр l — *натуральным параметром.*

Натуральный параметр l имеет смысл длины дуги кривой, измеряемой от произвольно, но определенно выбранного начала отсчета на кривой.



Определение 5. Кривая, которая допускает введение понятия длины дуги, называется спрямляемой.

Утверждение 6. *Кривая спрямляема, если текущие координаты являются непрерывными функциями параметра t с непрерывными производными первого порядка.*

Длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{r}}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot{\mathbf{r}}(\tau), \dot{\mathbf{r}}(\tau))} \, \mathrm{d}\tau$$

а для ортонормированного базиса в трехмерном случае:

$$l = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) + \dot{z}^2(\tau)} \, \mathrm{d}\tau$$

Эта формула раскрывает геометрический смысл параметра l — длина дуги от некоторой фиксированной точки $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$ кривой до произвольной точки $P = \mathbf{r}(t)$.

Касательная прямая и нормальная плоскость для $\mathbb{R}^3$

Уравнение касательной к кривой в точке $P = (x_0, y_0, z_0)$ может быть записано как уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно касательному вектору $\mathbf{v}(t_0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T$ то есть:

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}.$$

Прямые, проходящие через точки касания перпендикулярно к касательной, называются нормалями кривой. Плоскость, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной, называется нормальной плоскостью и содержит в себе все нормали к кривой в точке P. Уравнение нормальной плоскости записывается как

$$(x - x_0)\dot{x}_0 + (y - y_0)\dot{y}_0 + (z - z_0)\dot{z}_0 = 0.$$

В случае плоской кривой нормальная плоскость вырождается в нормальную прямую:

$$(x - x_0)\dot{x}_0 + (y - y_0)\dot{y}_0 = 0.$$

Кривизна и вектор нормали

Определение 7. Пусть регулярный сегмент кривой γ имеет параметрическое представление с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}(l)$ с натуральным параметром l. Вектор ускорения $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}$ в точке $P_0 = \mathbf{r}(l_0)$ называется *вектором нормали* в точке P_0.

Единичный вектор нормали $\mathbf{n}(l)$ определяется как:

$$\mathbf{n}(l) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|}$$

Величина вектора нормали $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}l^2}$ в точке $P_0 = \mathbf{r}(l_0)$ называется *кривизной* кривой в точке P_0:

$$k(l_0) = \left\| \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} \right\|_{l=l_0}$$

Главная нормаль

Даже при $n = 3$ мы уже получаем целый пучок нормалей, так как достаточно провести плоскость, перпендикулярную касательной в точке касания и весь пучок прямых этой плоскости с центром в точке касания будет состоять из нормалей к нашей кривой.

Вектор нормали $\mathbf{n}(l)$ позволяет выделить главную нормаль на нормальной плоскости для случая $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$.

Кривизна и вектор нормали

Для регулярного сегмента кривой кривизна $k(l)$ определена для любого l из $[a, b] \in \mathbb{R}$. То же справедливо и для касательного вектора $\mathbf{v}(l)$ и для нормального вектора $\mathbf{n}(l)$. Поэтому мы часто будем опускать фразу об определенной точек P_0.

Определение 8. *Радиусом кривизны* кривой γ в точке P называется величина, обратная кривизне

$$R(l) = \frac{1}{k(l)}$$

Из определений следует уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = k\mathbf{n},\ k(l) = \left\| \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} \right\|.$$

Это первое уравнение Френе-Серре

Замечания по поводу обозначений

В литературе (см., например [1, с. 57]) встречаются обозначения касательного и нормального векторов с помощью греческих букв «тау» $\vec{\tau}$ и «ню» $\vec{\nu}$, так как они перекликаются с оригинальными латинскими терминами *tangentem* и *normalis*.

Мы используем обозначение $\mathbf{v}$ для единичного касательного вектора, что отражает физический смысл этого вектора — вектор скорости (лат. velocitas — скорость) и обозначение $\mathbf{n}$ для единичного вектора нормали.

Ортогональность векторов касательной и нормали

Утверждение 9. *Векторы касательной* $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}$ *и нормали* $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}$ *ортогональны, при натуральном параметре* l.

Докажем, взяв производную от скалярного произведения. С одной стороны:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) = 2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right).$$

С другой стороны, из-за натурального параметра касательный вектор единичной длины для любого значения l и, следовательно, производная равна 0 $\forall l$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}1 = 0,$$

В итоге

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) \equiv 0 \quad \square$$

Ортогональность единичных векторов касательной и нормали

Из ортогональности

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) = 0,$$

следует ортогональность $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$:

$$(\mathbf{v}, k\mathbf{n}) = k(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) = 0$$

Можно точно также доказать, что

$$\left(\mathbf{n}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right) \equiv 0,$$

пользуясь единичностью вектора $\mathbf{n}$ при натуральном параметре l.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 2\left(\mathbf{n}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}1 \equiv 0$$

Бинормаль

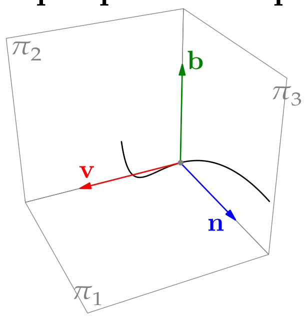
Векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ при натуральной параметризации являются ортогональными. В $\mathbb{R}^3$ должен существовать еще один вектор, ортогональный и $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$. Введем его следующим образом.

Определение 10. Вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}]$ называется единичным вектором *бинормали.*

По определению векторного умножения вектор бинормали ортогонален векторам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$. Упорядоченная тройка векторов $\langle\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle$ образуют репер, который называется *репером Френе* или основными векторами кривой.

$$\mathbf{v} = [\mathbf{n}, \mathbf{b}],$$
$$\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{v}],$$
$$\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}].$$

Репер Френе и сопровождающий трехгранник



Репер Френе как локальный базис

Репер Френе определен для бесконечно малой локальной окрестности каждой точки P регулярного сегмента кривой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Возможны обобщения и на большие размерности, но классическая дифференциальная геометрия изучает кривые именно в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Любой вектор в локальной окрестности точки P можно разложить по векторам базиса Френе. Рассмотрим следующий вектор:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = a\mathbf{v} + b\mathbf{n} + c\mathbf{b},\ a, b, c \in \mathbb{R},$$

и найдем значения коэффициентов a, b, c. Из ортогональности $\mathbf{n}$ и $\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}$ следует:

$$\left(\mathbf{n}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right) = a\underbrace{(\mathbf{n}, \mathbf{v})}_{=0} + b\underbrace{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}_{=1} + c\underbrace{(\mathbf{n}, \mathbf{b})}_{=0} \Rightarrow b = 0$$

Таким образом:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = a\mathbf{v} + c\mathbf{b}$$

Вывод второй формулы Френе-Серре

Для нахождения a и c продифференцируем скалярное произведение $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l}, \mathbf{n}\right) + \left(\mathbf{v}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right)$$

так как

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = k\mathbf{n} \text{ и } \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = a\mathbf{v} + c\mathbf{b},$$

то

$$k\underbrace{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}_{=1} + a\underbrace{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}_{=1} + c\underbrace{(\mathbf{v}, \mathbf{b})}_{=0} = 0 \Rightarrow a = -k.$$

Таким образом

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = -k\mathbf{v} + c\mathbf{b}$$

Кручение

Величина c обозначается греческой буквой κ (или $\varkappa$) и называется *кручением* и является вторым инвариантом кривой (первый – кривизна). Также кручение иногда называют пространственной кривизной и обозначают как k_2.

- Кручение, в отличие от кривизны, может принимать любой знак.
- У плоских (двумерных) кривых кручение равно 0.
- Геометрический смысл кручения — скорость изменения направления соприкасающейся плоскости.

Формула
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}$$
называется второй формулой Френе–Серре.

Третья формула Френе–Серре

Для вывода третьей формулы Френе–Серре найдем производную от бинормали по натуральному параметру.
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}[\mathbf{v},\mathbf{n}] = \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l},\mathbf{n}\right] + \left[\mathbf{v},\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right] = \underbrace{[k\mathbf{n},\mathbf{n}]}_{=0} + \left[\mathbf{v},\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right] = \left[\mathbf{v},\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right]$$
Пользуясь второй формулой Френе–Серре, получим:
$$\left[\mathbf{v},\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l}\right] = [\mathbf{v}, -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}] = -k\underbrace{[\mathbf{v},\mathbf{v}]}_{=0} + \varkappa\underbrace{[\mathbf{v},\mathbf{b}]}_{-\mathbf{n}}.$$
Получили третью формулу Френе–Серре:
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\varkappa\mathbf{n}.$$

Формулы Френе–Серре

Мы доказали теорему:

Теорема 11. *Френе–Серре для любой пространственной кривой $\mathbf{r}(l)$, где l — натуральный параметр, имеют место следующие формулы, называемые формулами Френе:*
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} &= \qquad +k\mathbf{n}\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} &= -k\mathbf{v} \qquad\quad +\varkappa\mathbf{b}\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} &= \qquad -\varkappa\mathbf{n}\end{aligned}$$
где $\mathbf{v}$ — единичный вектор касательной, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, $\mathbf{b}$ — единичный вектор бинормали, $\varkappa$ — кручение, а k — кривизна.

Обобщенный вывод формул Френе-Серре

Три вектора $\langle \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)\rangle$ образуют *ортонормальную тройку* если они единичны и взаимно ортогональны:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Дополнительно потребуем непрерывность производных произвольного порядка. Производные первого порядка от $\mathbf{e}_i$ можно разложить по ним самим и рассмотреть систему [2, с. 13]:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{3} a_i^k \mathbf{e}_k.$$

С одной стороны:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t}, \mathbf{e}_j\right) + \left(\mathbf{e}_i, \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_j}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{k=1}^{3}(a_i^k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) + \sum_{l=1}^{3}(\mathbf{e}_i, a_j^l \mathbf{e}_l) = \sum_{k=1}^{3} a_i^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) + \sum_{l=1}^{3} a_j^l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) = a_i^k$$

С другой стороны по определению:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{ij} = 0.$$

Получаем условие, налагаемое на коэффициенты матрицы a_j^i:

$$a_i^j + a_j^i = 0 \ \forall i, j \Rightarrow a_i^j = -a_j^i,$$

что в терминах матриц означает антисимметричность матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2^1 & a_3^1 \\ -a_2^1 & 0 & a_3^2 \\ -a_3^1 & -a_3^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}t} = -\alpha\mathbf{e}_2 - \beta\mathbf{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}t} = +\alpha\mathbf{e}_1 - \gamma\mathbf{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}t} = +\beta\mathbf{e}_1 + \gamma\mathbf{e}_2. \end{cases}$$

Отсюда мы можем легко получить формулы Френе-Серре, если рассмотрим в качестве ортонормальной тройки вектора $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle$ (порядок важен) и натуральную параметризацию кривой параметром l. Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}l} = -\alpha\mathbf{e}_2 - \beta\mathbf{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}l} = +\alpha\mathbf{e}_1 - \gamma\mathbf{e}_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}l} = +\beta\mathbf{e}_1 + \gamma\mathbf{e}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = -\alpha\mathbf{n} - \beta\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = +\alpha\mathbf{v} - \gamma\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = +\beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{n}. \end{cases}$$

и используем формулу

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = k\mathbf{n},$$

которая по-сути является определением единичного вектора нормали. Из этой формулы следует, что $\alpha = -k$, $\beta = 0$. Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = k\mathbf{n} - 0\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = -k\mathbf{v} - \gamma\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = 0\mathbf{v} + \gamma\mathbf{n}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = k\mathbf{n}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} = -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\varkappa\mathbf{n}, \end{cases} \text{где } \gamma = -\varkappa.$$

Мы получили непосредственно формулы Френе–Серре. Последнюю формулу можно использовать в качестве определения кручения $\varkappa$.

Такой подход позволяет обобщить формулы Френе–Серре на произвольную размерность пространства $\mathbb{R}^n$.

Явная формула для кручения $\varkappa$ I/II

Выведем теперь явную формулу для вычисления кручения $\varkappa$ в произвольной точке регулярной гладкой кривой. Рассмотрим три производные от радиус-вектора $\mathbf{r}$ по l:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \mathbf{v},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = k\mathbf{n},$$
$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} = k\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l}\mathbf{n} = -k^2\mathbf{v} + k\varkappa\mathbf{b} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l}\mathbf{n}.$$

Найдем смешанное произведение (используя внешнее произведение)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} \wedge \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} = \mathbf{v} \wedge k\mathbf{n} \wedge \left(-k^2\mathbf{v} + k\varkappa\mathbf{b} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l}\mathbf{n}\right) =$$
$$= -k^3 \underbrace{\mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}}_{=0} + k^2\varkappa \underbrace{\mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{b}}_{\neq 0} + k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l} \underbrace{\mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{n}}_{=0} = k^2\varkappa\mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{b}$$

Явная формула для кручения $\varkappa$ II/II

Получили значение смешанного произведения (скаляр)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}\right) = k^2\varkappa \Rightarrow \varkappa = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}\right)}{k^2(l)} = R^2(l)\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}\right).$$

Учитывая, что

$$k^2(l) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2.$$

получим окончательную формулу для вычисления кручения кривой:

$$\boxed{\varkappa(l) = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}\right)}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2}}$$

Сводка основных формул для кривой с натуральным параметром

Пусть $\mathbf{r}(l)$ радиус-вектор гладкой регулярной кривой γ (сегмента кривой). В каждой точке кривой можно определить следующие векторы.

- Единичный *касательный вектор* $\mathbf{v}(l)$:

$$\mathbf{v}(l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(l)}{\mathrm{d}l}$$

- Единичный *вектор нормали* $\mathbf{n}(l)$:

$$\mathbf{n}(l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|}$$

- Единичный *вектор бинормали* $\mathbf{b}(l)$:

$$\mathbf{b}(l) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{v}, \mathbf{n}]$$

Также у кривой существуют два скалярных инварианта.

- *Кривизна* кривой $k(l)$ и *радиус кривизны* $R(l)$:

$$k(l) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(l)}{\mathrm{d}l^2}\right\|,\ R(l) = \frac{1}{k(l)}.$$

- *Кручение* кривой $\varkappa(l)$ в точке $\mathbf{r}(l)$ определяется по формуле:

$$\varkappa(l) = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}\right)}{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\|^2}$$

Между перечисленными векторами $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle$ и скалярами $k(l)$ и $\varkappa(l)$ существует связь, задаваемая *формулами Френе–Серре*:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} &= \phantom{-k\mathbf{v}} +k\mathbf{n} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}l} &= -k\mathbf{v} \phantom{+k\mathbf{n}} +\varkappa\mathbf{b} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} &= \phantom{-k\mathbf{v}} -\varkappa\mathbf{n} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +k & 0 \\ -k & 0 & +\varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}$$

Упорядоченная тройка векторов $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle$ образует *репер Френе*.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{b},\ \mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{v},\ \mathbf{b} \times \mathbf{v} = \mathbf{n}.$$

Вычисление репера Френе, кривизны и кручения для произвольного уравнения кривой

Все вышеперечисленные формулы и определения справедливы только для натурального уравнения $\mathbf{r}(l)$ кривой γ. Для произвольного параметра t эти формулы довольно значительно усложняются. Далее мы займемся выводом формул для вычисления $\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\rangle$, $k(t)$ и $\varkappa(t)$.

Вычисление единичного вектора касательной

Задача
Вычислить касательный вектор $\mathbf{v}(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Будем считать, что натуральный параметр l является непрерывной функцией от t то есть $t(l)$ и, обратно: $l(t)$. Аналитического выражения для $t(l)$ и $l(t)$ мы не знаем. Тогда из определения касательного вектора и правила дифференцирования сложной функции имеем:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t(l))}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(l(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}.$$

Так как $\|\mathbf{v}\| \equiv 1$, то

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \|\mathbf{v}\| \equiv 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^{-1}} \text{ и } \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \underbrace{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right\|}_{=\|v\|\equiv 1}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|}$$

Для единичного касательного вектора получим выражение (очевидное)

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^{-1} \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|}}$$

Вычисление единичного вектора нормали

Задача
Вычислить единичный вектор нормали $\mathbf{n}(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Данная задача намного более трудоемкая. Начнем с определения:

$$\mathbf{n}(t(l)) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|}$$

Используя правило дифференцирования сложной функции вычислим:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}\right) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}}_{\ddot{\mathbf{r}}}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}\right)^2}_{\|\dot{\mathbf{r}}\|^{-2}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}}_{\dot{\mathbf{r}}}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2} + \dot{\mathbf{r}}\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}l^2}}_{???} \tag{1}$$

Необходимо найти вторую производную от t по l. Учитывая, что $\|\dot{\mathbf{r}}\| = \sqrt{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})}$ запишем:

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{1}{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})}} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^{-\frac{3}{2}}\left((\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) + (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} =$$

$$= -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^{-\frac{3}{2}}2(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^{-\frac{1}{2}} = -\frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}l^2} = -\frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^2}}$$

Подставляя в (1) получим:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2}\dot{\mathbf{r}} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2}$$

Найдем теперь $\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right) = \left(\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2}\dot{\mathbf{r}}, \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2}\dot{\mathbf{r}}\right) =$$

$$= \frac{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^3}(\ddot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^3} + \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^4} = \frac{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^3} = \frac{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^3} = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2$$

Получили:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2}} \qquad \boxed{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}}$$

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}}\|\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}}$$

Вычисление кривизны $k(t)$

Задача
Вычислить кривизну $k(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Выше мы доказали, что

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})^2} \qquad \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$$

Для векторного произведения можно доказать следующее равенство:

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$$

$$\boxed{k(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}}$$

Альтернативный способ Вычисление кривизны $k(t)$ I/II

Можно обойтись без формулы $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2$ для этого рассмотрим первую и вторую производные от $\mathbf{r}(t)$ по t:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} + \frac{\mathrm{d}^2l}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 k\mathbf{n} + \frac{\mathrm{d}^2l}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{v}$$

И найдем их векторное произведение, используя внешнее произведение $\wedge$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \wedge \left(\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 k\mathbf{n} + \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{v} \right) = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k\mathbf{v} \wedge \mathbf{n} + \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}$$

Следовательно:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k\mathbf{v} \times \mathbf{n} \Rightarrow \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \right\| = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k \underbrace{\|\mathbf{v} \times \mathbf{n}\|}_{\|\mathbf{b}\|=1} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 k$$

Альтернативный способ Вычисление кривизны $k(t)$ II/II

Учитывая, что

$$\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3 = \|\mathbf{r}\|^3,$$

запишем формулу для $k(t)$:

$$k(t) = \frac{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right\|}{\|\mathbf{r}\|^3}.$$

Так как по определению

$$k(t) = k(l) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})^2}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3},$$

то мы заодно доказали формулу

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right\| = \sqrt{(\ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})^2} \text{ или } \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2 = (\ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})^2.$$

Вычисление единичного вектора бинормали

Задача

Вычислить единичный вектор бинормали $\mathbf{b}(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Единичный вектор бинормали $\mathbf{b}$ легко вычисляется из определения при известных $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$. Но можно записать явную формулу через $\mathbf{r}(t)$. Выше мы вывели, что

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \|\dot{\mathbf{r}}\|^3 k\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \|\dot{\mathbf{r}}\|^3 k\mathbf{b}.$$

Используя выражение для $k(t)$

$$k(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$$

получим

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}\|\dot{\mathbf{r}}\|^3\mathbf{b} \Rightarrow \boxed{\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}}$$

Вычисление кручения $\varkappa(t)$

Задача
Вычислить кручение $\varkappa(t)$ зная радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t.

Рассмотрим три производные: $\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ и $\dddot{\mathbf{r}}(t)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l},\\
&\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} + \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l},\\
&\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^3} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} + 3\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} + \frac{\mathrm{d}^3 l}{\mathrm{d}t^3}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}.
\end{aligned}
$$

Находим внешнее произведение всех трех векторов:

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\wedge\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\wedge\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^3\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^6\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\wedge\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\wedge\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3}
$$

Учитывая, что $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\wedge\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\wedge\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^3} = k^2\varkappa\mathbf{v}\wedge\mathbf{n}\wedge\mathbf{b}$, запишем смешанное произведение векторов $\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ и $\dddot{\mathbf{r}}(t)$ как:

$$
\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^3}\right) = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^6 k^2\varkappa
$$

Учитывая также, что

$$
\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^6 = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})^3 = \|\dot{\mathbf{r}}\|^6 \text{ и } k(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} \Rightarrow \varkappa\frac{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|^2}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^6}\|\dot{\mathbf{r}}\|^6 = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})
$$

окончательно получим:

$$
\boxed{\varkappa(t) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|^2}}
$$

Случай плоской кривой в $\mathbb{R}^2$

Стоит отдельно рассмотреть регулярный сегмент кривой γ на плоскости $\mathbb{R}^2$. В этом случае

$$
\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\ \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t)\\ \ddot{y}(t)\end{pmatrix}
$$

- Единичный вектор бинормали $\mathbf{b}$ тождественно равен нулю. Кручение $\varkappa$ также равно нулю во всех точках.
- Так как операция векторного произведения определена только для трехмерных векторов, формулы с ее участием нужно переписать другим способом.
- Репер Френе на плоскости состоит из двух векторов $\langle\mathbf{v}, \mathbf{n}\rangle$. Из инвариантов на плоскости определена только кривизна k.

Многие формулы для плоских кривых существенно упрощаются, если использовать для их записи комплексную структуру.

Комплексная структура на $\mathbb{R}^2$

Определение 12. *Комплексная структура* [3] на $\mathbb{R}^2$ задается линейным оператором J таким, что для любого вектора $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ верно:

$\mathrm{J}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ из чего следует, что $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathrm{J}\circ\mathrm{J}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{J}\circ\mathrm{J} = -\mathrm{I}$

Каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие комплексное число $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow z = x + iy$$

Тогда действие оператора J на $\mathbf{u}$ будет соответствовать умножению числа z на мнимую единицу:

$$\mathrm{J}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \leftrightarrow iz = -y + ix$$

Выше мы доказали равенство $(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2$ для трехмерного случая $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Покажем, что для двумерных векторов $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ вместо векторного произведения можно использовать комплексную структуру:

$$(\mathbf{a},\mathrm{J}\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2$$

$$\begin{gathered}
(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) = a_x^2 b_x^2 + a_y^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 + a_x^2 b_y^2, \\
(\mathbf{a},\mathbf{b})^2 = a_x^2 b_x^2 + 2a_x b_x a_y b_y + a_y^2 b_y^2, \\
(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 = a_y^2 b_x^2 + a_x^2 b_y^2 - 2a_x b_x a_y b_y = (a_x b_y - b_x a_y)^2 = (a_y b_x - a_x b_y)^2, \\
(\mathbf{a},\mathrm{J}\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -b_y \\ b_x \end{pmatrix} = -a_x b_y + a_y b_x = a_y b_x - a_x b_y,
\end{gathered}$$

откуда

$$\boxed{(\mathbf{a},\mathrm{J}\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2}$$

Единичный вектор нормали n на плоскости

Выше мы нашли, что

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}}\|\sqrt{(\ddot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})^2}}.$$

Упростим эту формулу для двумерного случая.

$$(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})\ddot{\mathbf{r}} - (\ddot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} - (\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y})\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}^2\ddot{x} + \dot{y}^2\ddot{x} - \ddot{x}\dot{x}^2 - \ddot{y}\dot{y}\dot{x} \\ \dot{x}^2\ddot{y} + \dot{y}^2\ddot{y} - \ddot{x}\dot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{y}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x})\dot{y} \\ (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\dot{x} \end{pmatrix} = (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}} = (\ddot{\mathbf{r}},\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}} \text{ так как } (\ddot{\mathbf{r}},\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

Получается, что

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(\ddot{\mathbf{r}}, \mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}}, \mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})}} = \frac{\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})}} = \frac{(-\dot{y}, \dot{x})^T}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \boxed{\mathbf{n}(t) = \frac{\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}}$$

Кривизна плоской кривой

Так как $(\mathbf{a}, \mathrm{J}\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$, то формула для кривизны принимает вид:

$$\boxed{k(t) = \frac{(\ddot{\mathbf{r}}, \mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}}$$

Также, имя ввиду соответствие $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T \leftrightarrow z = x + iy$ можно записать формулу для кривизны в комплексном виде:

$$k(t) = \mathfrak{I}\frac{\ddot{z}(t)\bar{\dot{z}}(t)}{|\dot{z}(t)|^3},$$

где буквой $\mathfrak{I}$ обозначена мнимая часть комплексного числа.

Производные кривые от кривой γ

Для регулярного сегмента кривой γ вводят несколько различных вспомогательных кривых, которые имеют дополнительный геометрический и механический смысл [4]:

- Эволюта и эвольвента.
- Эквидистантная кривая.
- Подера и антиподера.
- Огибающая.
- Конхоида.
- Циссоида.
- Строфоида.
- Глиссетта.
- Рулетта.

Дадим определения некоторым из этих кривых. Примеры построения будут даны при решении задач.

Эволюта и эвольвента

Определение 13. Геометрическое место точек центров кривизны кривой называется *эволютой* кривой.

Для плоской кривой γ точка $Q \in \mathbb{R}^2$ называется *центром кривизны* в точке $P \in \gamma$, если существует окружность $C(Q, R)$ с центром в Q и радиуса R, которая касается кривой γ в точке P так, что кривизны кривой γ и окружности C совпадают. Радиус R — радиус кривизны, а окружность C называется *соприкасающейся окружностью.*

Определение 14. *Эвольвента* (инволюта) кривой γ суть кривая, для которой γ является эволютой.

Если на кривую намотана нерастяжимая нить, то при разматывании этой нити, ее свободный конец будет описывать эвольвенту.

Уравнения эволюты и эвольвенты

Если кривая γ представленная параметрическим уравнением с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$, то уравнение эволюты для плоской кривой имеет вид:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + R(t)\mathbf{n}(t),$$

где $R(t) = 1/k(t)$ — радиус кривизны, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали. В свою очередь уравнение эвольвенты имеет вид:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + (l(t_0) + l(t))\mathbf{v}(t), \quad l(t_0) - l(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{r}}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau,$$

где l — натуральный параметр.

Эквидистантная кривая и ее уравнение

Определение 15. Геометрическое место точек, расположенных на фиксированном расстоянии от точек кривой γ в направлении единичного вектора нормали, называется *эквидистантной кривой* (параллельной кривой).

Уравнение данной кривой легко получается из определения:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t),$$

где d — фиксированное расстояние до кривой γ, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали.

Подера кривой и ее уравнение

Определение 16. Пусть γ — некоторая кривая и O — фиксированная точка. Геометрическое место точек, описываемое основанием перпендикуляра, опущенного на касательную движущейся точки кривой γ называется *подерой* кривой γ.

Для трехмерной кривой уравнение подеры с точкой O в начале координат имеет вид:

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{n}(t))\mathbf{n}(t) + (\mathbf{r}(t), \mathbf{b}(t))\mathbf{b}(t).$$

Для двумерной кривой уравнение упрощается

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{n}(t))\mathbf{n}(t),$$

где точка O из определения по прежнему является началом координат.

Огибающая семейства кривых

Определение 17. *Огибающей* семейства кривых называется кривая, которая касается каждой кривой из данного семейства.

Конхоида

Следующее определения справедливо для плоской кривой.

Определение 18. Пусть γ — некоторая кривая и A — некоторая фиксированная точка на плоскости. Некоторая прямая проходит через A и пересекает γ в точке Q. P_1 и P_2 — точки этой прямой такие, что

$$P_1Q = QP_2 = k = \mathrm{const}$$

Геометрическое место точек P_1 и P_2, получаемое при перемещении точки Q по прямой, называется *конхоидой*, построенной относительно точки A.

Циссоида

Следующее определения справедливо для плоской кривой.

Определение 19. Пусть даны две кривые γ_1 и γ_2. Пусть A — некоторая фиксированная точка. Некоторая прямая проходит через A и пересекает γ_1 и γ_2 в точках Q и R соответственно. Найдется точка P на прямой для которой выполняется $AP = QR$. Геометрическое место точек P, получаемое при движении точек Q и R по кривым называется *циссоидой*. Точка A называется полюсом циссоиды.

Строфоида

Следующее определения справедливо для плоской кривой.

Определение 20. Пусть даны некоторая кривая γ и фиксированные точки O и A на этой кривой. Прямая проходит через O и пересекает кривую γ в точке Q. Две точки P_1 и P_2 выбираются на прямой так, что $P_1Q = QP_2 = QA$. Геометрическое место точек P_1 и P_2 называется *строфоидой*, построенной относительно O и A. Точка O называется полюсом строфоиды.

Рулетта

Следующее определения справедливо для плоской кривой.

Определение 21. Если кривая катится без проскальзывания вдоль другой, фиксированной кривой, то любая выбранная точка движущейся кривой описывает *рулетту* (от французского roulette).

Примеры рулетты: циклоида, эпициклоида, гипоциклоида.

2.2. Примеры и решение задач по теории кривых

Замечательные кривые

Существует большое количество кривых, которые возникали как решение различных математических, физических, астрономических и инженерных задач. Обычно такие кривые получали имя собственное. Перечислим некоторые из таких кривых.

- Конические сечения: эллипс (окружность), парабола, гипербола.
- Циклоидальные кривые: эпитрохоида и гипотрохоида и их частные случаи: эпициклоида и гипоциклоида, кардиоида, улитка Паскаля (limaçon), астроида, нефроида, делтоида, циклоида.
- Различные спирали (простая и логарифмическая)
- Прямая строфоида.
- Лемнискаты (лемниската Бернулли)

Окружность

Не следует путать отдельные графики $x(t) = R\cos t$ и $y(t) = R\sin t$ (рисунок 61) с параметрически заданной кривой с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix} \text{ против } \begin{cases} x(t) = R\cos t, \\ y(t) = R\sin t. \end{cases}$$

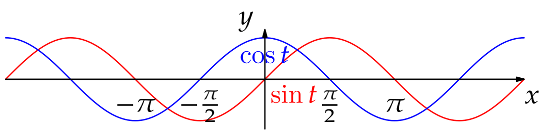


Рис. 3: Синусоиды, а не окружность

На рисунке 4 изображена параметрическая окружность, заданная радиус-вектором:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$$

- Каждому значению параметра t соответствует точка $(x(t), y(t))^T$.
- Геометрический смысл t — угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и осью Ox.
- Хотя $t \in \mathbb{R}$, но достаточно $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

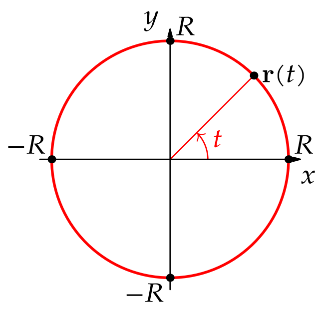


Рис. 4: Окружность

Эллипс

Из неявного уравнения эллипса с центром в точке (x_0, y_0) легко получить явную, кусочно-гладкую функцию:

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1 \Rightarrow y=y_0\pm b\sqrt{1-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2},\ -a\leqslant x\leqslant a.$$

Параметрическое представление удобнее для анализа и построения кривой (см. рис. 62).

$$\mathbf{r}(t)=(x_0+a\cos t, y_0+b\sin t)^T$$

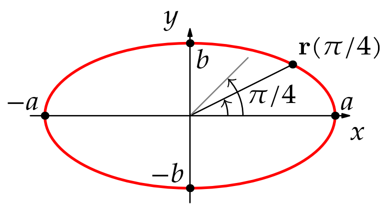


Рис. 5: В случае эллипса параметр не равен углу поворота радиус-вектора

Гипербола I/II

Центр двух ветвей гиперболы в точке (x_0, y_0). Неявное уравнение имеет вид:

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1,$$

а явное получается из неявного и также является кусочной функцией:

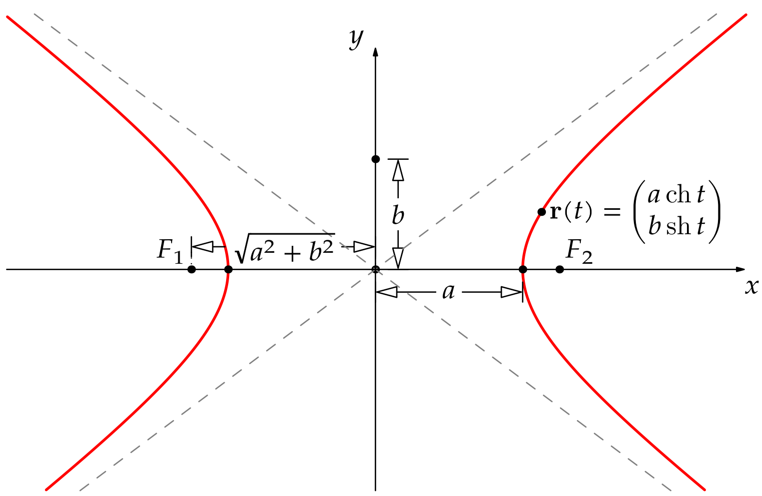
$$y=y_0\pm b\sqrt{\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-1},\ x\notin(-a,a).$$

Параметрическое уравнение:

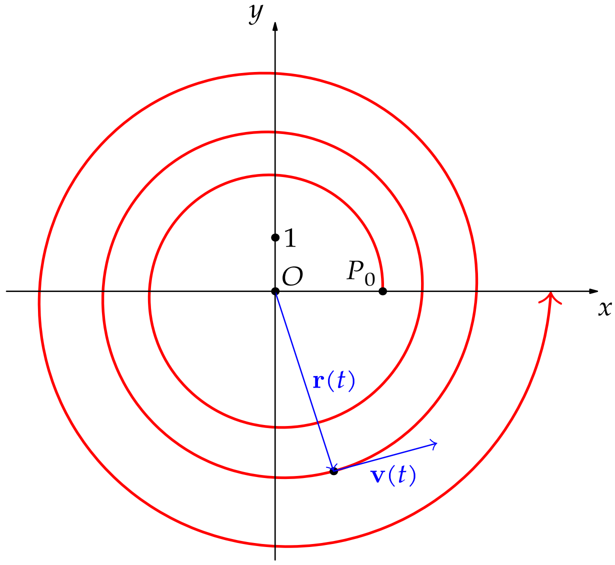
$$\begin{cases} x=x_0+a\,\mathrm{ch}\,t,\\ y=y_0+b\,\mathrm{sh}\,t. \end{cases}$$

где ch — гиперболический косинус, а sh — гиперболический синус.

Гипербола II/II



Логоифмическая спираль



Логарифмическая спираль имеет наиболее простое уравнение в полярных координатах:

$$r = ae^{b\varphi}$$

Параметрическое представление в декартовых координатах чуть более громоздкое:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} ae^{bt}\cos t \\ ae^{bt}\sin t \end{pmatrix}$$

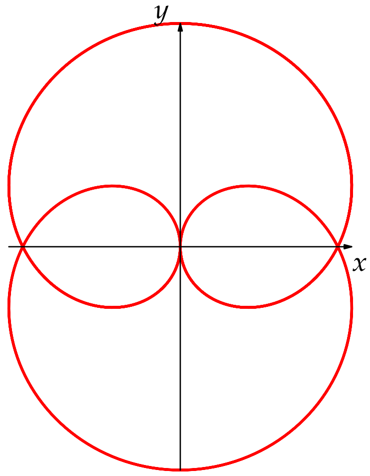
Эпитрохоида

Эпитрохоида (ἐπί — над, τροχός — колесо, ειδής — образ) циклоидальная кривая (или рулетта) получающаяся если окружность радиуса r катится по внешней стороне окружности радиуса R. Параметрический вид кривой:

$$\begin{cases} x(t) = R(k+1)\cos(kt) - d\cos((k+1)t), \\ y(t) = R(k+1)\sin(kt) - d\sin((k+1)t), \end{cases}$$

где $k = r/R$, d — расстояние от центра катящейся окружности до точки кривой.

Эпитрохоида



На рисунке слева изображена эпитрохоида со следующими параметрами:

$$r = \frac{R}{2}, R = 3, d = \frac{3R}{2}.$$

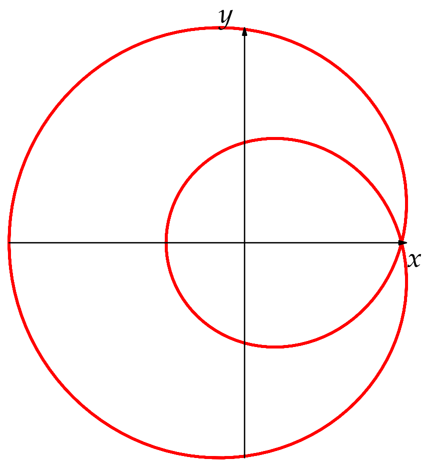
Гипотрохоида

Гипотрохоида (ὑπό — снизу, τροχός — колесо, ειδής — образ) циклоидальная кривая (или рулетта) получающаяся если окружность радиуса r катится по внутренней стороне окружности радиуса R. Параметрическое уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = R(1-k)\cos(kt) + d\cos((1-k)t), \\ y(t) = R(1-k)\sin(kt) - d\sin((1-k)t), \end{cases}$$

где r — радиус катящейся окружности, R — радиус неподвижной окружности, $k = r/R$, d — расстояние от центра катящейся окружности до точки кривой.

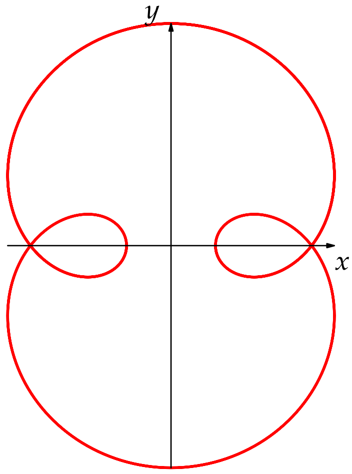
Гипотрохоида



На рисунке слева изображена гипотрохоида со следующими параметрами:

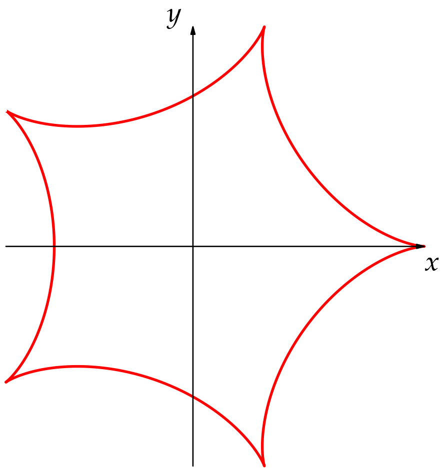
$$R = 4, r = 2, d = 1.$$

Эпициклоида



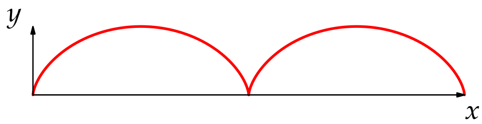
Эпициклоида (ὑπό — снизу, κύκλος — круг/окружность, ειδής — образ) суть эпитрохоида с $d = r$.

Гипоциклоида



Гипоциклоида (ἐπί — над, κύκλος — круг/окружность, ειδής — образ) суть гипотрохоида с $d = r$

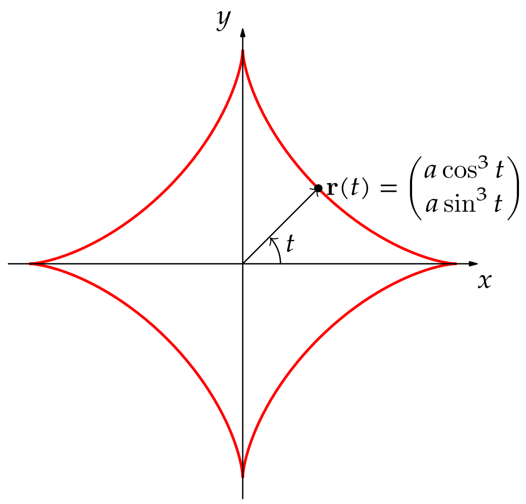
Циклоида



Циклоида (κύκλος — круг/окружность, ειδής — образ) определяется как траектория фиксированной точки на окружности, которая катится без проскальзывания по прямой (обычно вдоль Ox). Параметрическое представление:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix}$$

Астроида



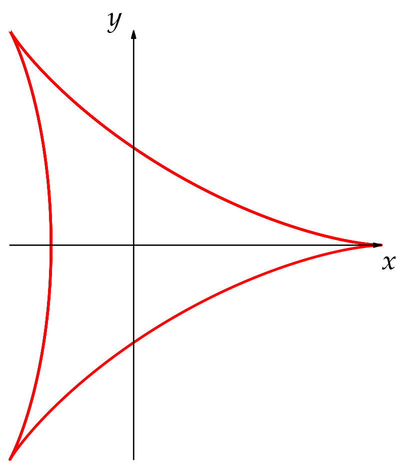
Астроида (αστρον — звезда, ειδος — образ, идея) — частный случай гипоциклоиды с $k = 4$. Неявное уравнение имеет вид:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

а параметрическое указано на рисунке слева.

- Геометрический смысл t — угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и осью Ox.
- Хотя $t \in \mathbb{R}$, но достаточно $0 \leqslant t < 2\pi$ чтобы обойти все точки кривой.

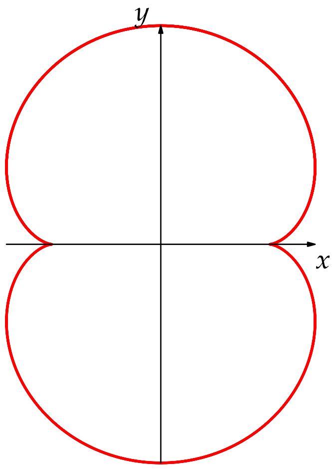
Дельтоида



Дельтоида (δέλτα — дельта Δ, ειδής — образ) — частный случай гипоциклоиды с $k = 3$. Параметрическое уравнение имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(2\cos t + \cos 2t) \\ a(2\sin t - \sin 2t) \end{pmatrix}$$

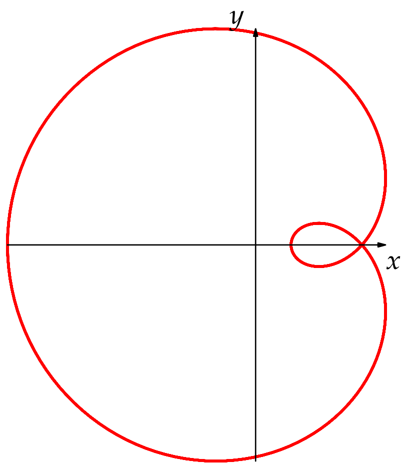
Нефроида



Нефроида (νεφρός — почка, εἶδος — образ) — частный случай эпициклоиды с $k = 2$. Параметрическое уравнение имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(3\cos t - \cos 3t) \\ a(3\sin t - \sin 3t) \end{pmatrix}$$

Кардиоида



Кардиоида (καρδία — сердце, εἶδος — образ) — частный случай эпициклоиды с $k = 1$ или улитки Паскаля при $d = r$. Параметрическое уравнение имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(2\cos t - \cos 2t) \\ a(2\sin t - \sin 2t) \end{pmatrix}$$

Вычисление натурального параметра

Пример 22. Найти натуральный параметр кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Параметризировать функцию можно следующим образом: $t = x \Rightarrow$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^{3/2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t^{3/2} \end{cases}$$

Используя известную нам формулу:

$$\mathrm{d}l = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t\,,$$

найдем выражение для дифференциала натурального параметра:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}t^{1/2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}|t|} \Rightarrow \mathrm{d}l = \sqrt{1 + \frac{9}{4}|t|}\,\mathrm{d}t$$

В данном случае интеграл можно вычислить аналитически. Обратите внимание, что мы заменили параметр t на τ под знаком интеграла.

$$l = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sqrt{4 + 9|\tau|}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{27}((4 + 9t)^{3/2} - 8)$$

Мы нашли выражение для натурального параметра:

$$\boxed{l = \frac{1}{27}((4 + 9t)^{3/2} - 8)}$$

Так как мы брали интеграл от 0 до t, то $l = 0$ в той точке, которая соответствует $t = 0$, то есть $(0, 0)$. Именно от этой точки отсчитывается длина дуги кривой l в положительном и отрицательном направлениях.

Вычисление натурального параметра

Пример 23. Найти натуральное уравнение окружности с центром в точке x_0, y_0 радиуса R.

Параметрическое уравнение окружности имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos t \\ y_0 + R\sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ +R\cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = R.$$

Натуральный параметр вычисляется легко, так как норма радиус-вектора постоянна и равна R

$$\mathrm{d}l = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|\,\mathrm{d}t = R\,\mathrm{d}t \Rightarrow l = \int\limits_0^t R\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow l = Rt \Rightarrow t = l/R.$$

Праметрическое представление окружности имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \left(x_0 + R\cos\frac{l}{R}, y_0 + R\sin\frac{l}{R}\right)^T$$

Кривизна прямой линии

Пример 24. Найти кривизну прямой линии.

Параметрическое представление с натуральным параметром для кривой имеет вид:

$$\mathbf{r}(l) = (x_0 + al, y_0 + bl)^T \Leftrightarrow \begin{cases} x(l) = x_0 + al, \\ y(l) = y_0 + bl. \end{cases}$$

Так как кривизна вычисляется по формуле $k(l) = \left\| \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} \right\|$ нам надо вычислить вторую производную от радиус-вектора $\mathbf{r}$ по натуральному параметру l:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k(l) = 0,\ R(l) \to \infty.$$

Кривизна окружности

Пример 25. Найти кривизну окружности радиуса ρ:

Выше мы нашли параметрическое представление окружности с натуральным параметром. Продифференцируем $x(l)$ и $y(l)$ два раза.

$$\begin{cases} x(l) = x_0 + \rho \cos\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \\ y(l) = y_0 + \rho \sin\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} = -\rho\dfrac{1}{\rho} \sin\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} = +\rho\dfrac{1}{\rho} \cos\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}l^2} = -\dfrac{1}{\rho} \cos\left(\dfrac{l}{\rho}\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}l^2} = -\dfrac{1}{\rho} \sin\left(\dfrac{l}{\rho}\right). \end{cases}$$

$$k(l) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}l^2} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}l^2}} = \frac{1}{\rho},$$

$$R(l) = \frac{1}{k(l)} = \rho.$$

Вычисление кривизны и кручения винтовой линии

Найти кривизну и кручение винтовой линии:

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$$

Решение.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = (-a\sin t, a\cos t, b)^T$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + b^2}\mathrm{d}t$$

$$l = \sqrt{a^2 + b^2}t \Rightarrow t = \frac{l}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\mathbf{r}(l) = \begin{pmatrix} a\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{bl}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ +\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \mathbf{v}(l)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{a^2+b^2}\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\dfrac{a}{a^2+b^2}\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l}\right| = \boxed{\frac{a}{a^2+b^2} = k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} -\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}] = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot 0 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathbf{e}_1 +$$

$$+ \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot 0\right)\mathbf{e}_2 +$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\mathbf{e}_3$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a^2+b^2}\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{a^2+b^2}\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{-\frac{b}{a^2+b^2}}_{\kappa}\underbrace{\begin{pmatrix} -\cos\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\sin\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}} \Rightarrow$$

Так как кручение определяется равенством

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\kappa\mathbf{n},$$

то для винтовой линии:

$$\boxed{\kappa = \frac{b}{a^2+b^2}}$$

Из формул видно, что кривизна и кручение винтовой линии постоянны:

$$k = \frac{a}{a^2+b^2} = \text{const},\ \kappa = \frac{b}{a^2+b^2} = \text{const}.$$

Вычисление эволюты эллипса

Уравнение эволюты:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + R(t)\mathbf{n}(t) = \mathbf{r} + \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}{(\ddot{\mathbf{r}}, \mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})}\frac{\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} = \mathbf{r} + \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{(\ddot{\mathbf{r}}, \mathrm{J}\dot{\mathbf{r}})}\mathrm{J}\dot{\mathbf{r}},$$

а в декартовых координатах

$$\mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} x_{\mathbf{e}}(t) \\ y_{\mathbf{e}}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - \dot{y}(t)\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \\ y(t) + \dot{x}(t)\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

Пример 26. Найти уравнение эволюты эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Так как у нас есть общая формула для эволюты плоской кривой, то решение задачи является делом чисто техническим. Достаточно найти первую и вторую производную и выполнить алгебраические преобразования.

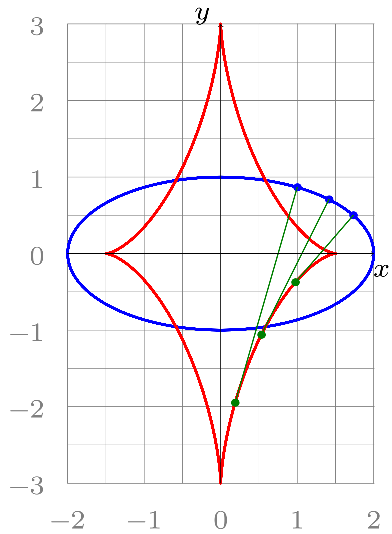
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a\sin t, \\ \dot{y}(t) = b\cos t \end{cases} \begin{cases} \ddot{x}(t) = -a\cos t, \\ \ddot{y}(t) = -b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t, \\ \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = ab\sin^2 t + ab\cos^2 t = ab \end{matrix}$$

$$x_{\mathbf{e}}(t) = a\cos t - b\cos t\frac{1}{ab}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) = a\cos t(1 - \sin^2 t) - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$

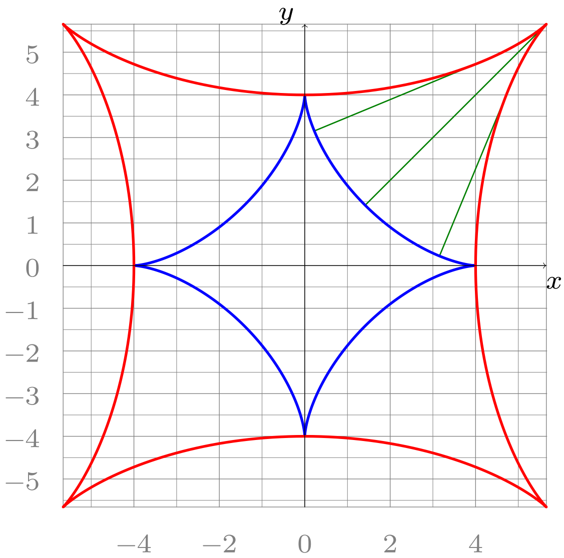
$$y_{\mathbf{e}}(t) = b\sin t - a\sin t\frac{1}{ab}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) = b\sin t(1 - \cos^2 t) - \frac{a^2}{b}\sin^3 t = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t$$

$$\mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ \dfrac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t \end{pmatrix} \text{ — эволюта.}$$

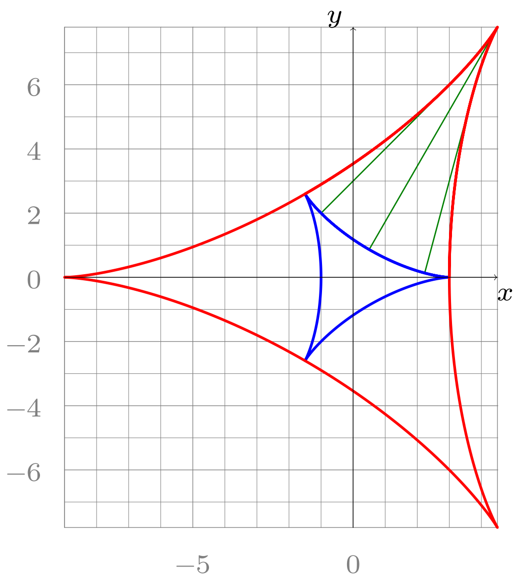
Эволюта эллипса



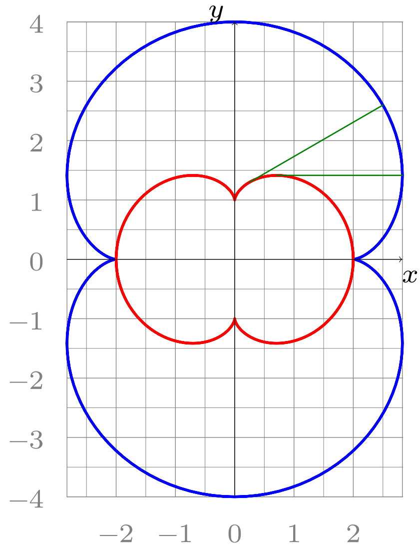
Эволюта астроиды



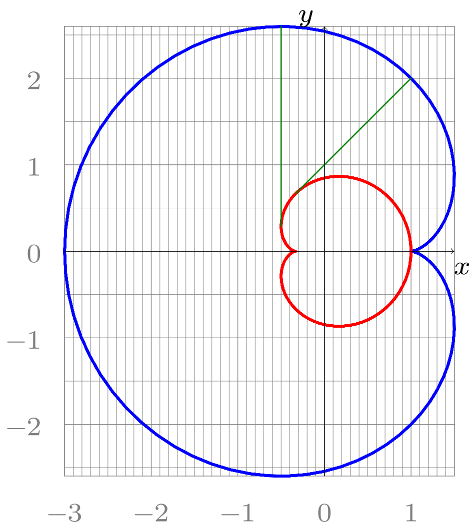
Эволюта дельтоиды



Эволюта нефроиды



Эволюта кардиоиды



Пример вычисления репера Френе, кривизны и кручения

Задача
Найти репер Френе, кривизну и кручение следующей кривой

$$\mathbf{r}(t) = (2t, \ln t, t^2)^T$$

Попробуем перейти к натуральному параметру:

$$\mathrm{d}l = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| \mathrm{d}t\,,\ l = \int\limits_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right\| \mathrm{d}\tau,\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{t} \\ 2t \end{pmatrix}\ \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{t^2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 = \left(\frac{1}{t} + 2t\right)^2, \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \frac{1}{t} + 2t \Rightarrow \mathrm{d}l = \frac{2t^2+1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Выразить t через l явно не представляется возможным в конечном виде, так как их связывает трансцендентное уравнение:

$$l = t^2 + \ln t.$$

Будем действовать обходными путями. Проще всего найти касательный вектор:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \frac{t}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{t} \\ 2t \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t^2 \end{pmatrix}}$$

Далее найдем нормальный вектор и кривизну:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}l^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} = \frac{t}{2t^2+1}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}l^2} = \frac{(1-2t^2)t}{(2t^2+1)^3},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = \frac{2t}{(2t^2+1)^3}\begin{pmatrix} 1-2t^2 \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|^2 = \frac{4t^2}{(2t^2+1)^4}$$

Вычисляем кривизну и единичный вектор нормали:

$$k(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\| = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}, \quad \mathbf{n}(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}}{\left\|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}\right\|} = \frac{1}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 1-2t^2 \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Зная $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ можно найти единичный вектор бинормали:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}] = \frac{1}{(2t^2+1)^2}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2t & 1 & 2t^2 \\ 1-2t^2 & -2t & 2t \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{b}(t) = \frac{1}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 2t \\ -2t^2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Можно проверить, что $\|\mathbf{b}\| \equiv 1$. Для нахождения кручения $\varkappa(\mathrm{t})$ воспользуемся третьей формулой Френе–Серре:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\varkappa\mathbf{n}$$

для чего вычислим

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l} \text{ т.к. } \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(2t^2+1)^2}\begin{pmatrix} 2-4t \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix} \text{ то } \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}l} = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2}\underbrace{\frac{1}{2t^2+1}\begin{pmatrix} 1-2t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}}$$

Из этого соотношения находим кручение как коэффициент при единичном векторе нормали:

$$\boxed{\varkappa(t) = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}}$$

Это проще, чем пользоваться формулой со смешанным произведением.

Список литературы

1. Фиников С. Курс дифференциальной геометрии. — Москва : URSS, 2017. — 343 с.
2. Норден А. П. Теория поверхностей. — 2-е изд. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 264. — (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия)). — ISBN 978597106234.
3. Abbena E., Salamon S., Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. — 3-е изд. — CRC Press, 2017. — (Textbooks in Mathematics). — ISBN 9781351992206.
4. Lockwood E. H. A book of curves. — Cambridge University Press, 1961.

3. Теория поверхностей

3.1. Первая и вторая квадратичные формы и их инварианты

Простой сегмент поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение 27. *Простым сегментом (куском)* поверхности называется такое множество точек, которое может быть отображено топологически (взаимно однозначно и непрерывно) на множество точек круга, включая и точки окружности. Точки, отобразившиеся в точки окружности, называются *граничными точками*. Граничные точки составляют замкнутую кривую — *границу* данного куска [1, с. 40].

Более сложные поверхности можно составлять из простых сегментов с помощью склейки то есть совмещения дуг их границ путем установления взаимно однозначного соответствия между точками границ.

Далее везде под поверхностью подразумевается именно простой сегмент или склейка из нескольких простых сегментов.

Поверхности в трехмерном пространстве это простейший объект, на котором возникает, как говорят, внутренняя геометрия.

Примеры склейки

В результате склейки простых кусков поверхности, может получиться такая поверхность, которая не является простым куском. Например, два простых куска (рис. 6) можно склеить в цилиндрическую поверхность (рис. 8), которая топологически эквивалентна плоскому кольцу (рис. 8), а можно в лист Мёбиуса (рис. 9), который плоскому кольцу топологически не эквивалентен.

Параметрическое представление поверхности в $\mathbb{R}^3$

Методы классической дифференциальной геометрии позволяют изучать поверхности в $\mathbb{R}^3$ имеющие параметрическое представление, то есть определяемые с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}$ — вектор-функции от двух параметров u, v:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

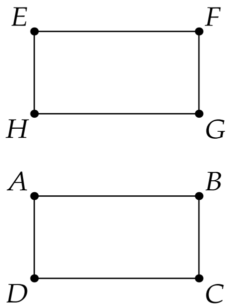


Рис. 6: Два простых куска поверхности

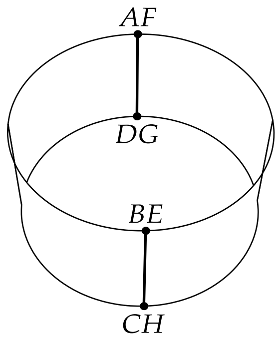


Рис. 7: Склеиваются в цилиндрическую поверхность...

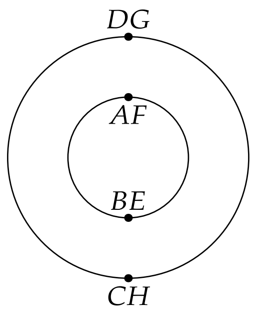


Рис. 8: ... или в плоское кольцо...

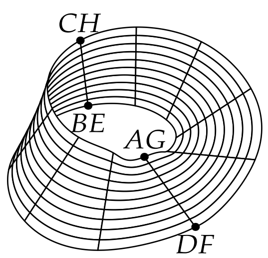


Рис. 9: ... или в виде листа Мёбиуса

где параметры u и v задают криволинейные координаты на поверхности.

Трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, в котором находится рассматриваемая поверхность, называется *объемлющим пространством.* Говорят, что поверхность *вложена* в объемлющее пространство.

В декартовых координатах x, y, z пространства $\mathbb{R}^3$ радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$ задается системой из трех уравнений:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

Явное и неявное представления поверхности в $\mathbb{R}^3$

В $\mathbb{R}^3$ регулярный кусок поверхности можно задать в явном виде, выразив зависимость одной координаты через две другие:

$$x = f(y, z) \text{ или } y = f(x, z) \text{ или } z = f(x, y),$$

где функция f обычно предполагается непрерывной и имеющей непрерывные производные сколь угодно высокого порядка.

Кроме того, возможно задание поверхности в $\mathbb{R}^3$ неявно, в виде уравнения:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где функция F также непрерывна с непрерывными производными требуемого порядка.

Связь между параметрическим, неявным и явным представлениями устанавливается следующей теоремой, основанной на теореме существовании неявной функции [2, Глава VIII, §5].

Теорема 28. *Пусть вектор* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) \end{pmatrix}^T$ *удовлетворяет следующим требованиям:*

1. *функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ являются непрерывными во всей области определения параметров u и v;*
2. *эти же функции имеют непрерывные частные производные первого порядка;*
3. *ранг матрицы Якоби J строго равен двум:*

$$J = \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)}\right)^T_{u_0, v_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{u_0, v_0} \qquad \operatorname{rank} J = 2$$

Тогда в окрестности каждой точки u_0, v_0 путем исключения параметров u и v можно получить неявное уравнение $F(x, y, z) = 0$, определяющее поверхность.

Исключение параметров

Параметры u, v исключаются из уравнений

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v),$$

в результате чего получается выражение, содержащее только координаты x, y, z. Кроме того, это уравнение можно разрешить относительно каждой из переменной x, y или z и получить явное задание поверхности в явном виде

$$z = f(x,y), \text{ или } y = f(x,z), \text{ или } x = f(y,z).$$

Если в точке $P = (x_0, y_0, z_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ ранг матрицы Якоби **не** равен двум $\operatorname{rank} J = 2$, то точка P называется *особой точкой.*

В окрестности неособой точки P все три способа задания поверхности эквивалентны.

Обобщение формул на случай $\mathbb{R}^n$

В случае произвольной размерности удобно использовать индексы. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана декартова система координат и координаты обозначаются как $x^1, x^2, \dots, x^n$. Так параметрический вид поверхности задается радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^k) = \begin{bmatrix} x^1(u^1, \dots, u^k) \\ x^2(u^1, \dots, u^k) \\ \vdots \\ x^n(u^1, \dots, u^k) \end{bmatrix}$$

- В 3-мерное пространство можно вложить только 2-мерную поверхность (параметрическое задание требует два параметра).
- В 4-мерное пространство можно вложить 2-мерную и 3-мерную поверхности.
- В общем случае в n–мерное пространство вкладывается k мерная поверхность, где $k < n$.

В n – мерном пространстве k–мерная поверхность задается в неявном виде системой из $n-k$ уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}$$

или в параметрическом виде:

Точка $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ поверхности называется *неособой*, если ранг матрицы

$$\left. \frac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(u^1, u^2, \dots, u^k)} \right|_{x^i = x_0^i}, \ i = 1, \dots, n-k; j = 1, \dots, n$$

равен в точности k.

Далее мы будем записывать формулы сперва для случая $n = 3$, а затем, по возможности, для произвольного n.

Кривая в 3-х мерном пространстве

Рассмотрим некоторую кривую γ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть кривая лежит на некоторой поверхности, т.е. все точки этой кривой принадлежат поверхности. Так как все точки кривой лежат на поверхности, следовательно радиус вектор поверхности $\mathbf{r}(u, v)$ также задает и кривую:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T.$$

Каждую точку кривой можно выразить через параметры u, v поверхности:

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T.$$

Получается, что каждому значению параметра t кривой соответствуют значения двух параметров (u, v) поверхности:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u(t),v(t)) \\ y(u(t),v(t)) \\ z(u(t),v(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Таким образом, если мы рассматриваем кривую, целиком лежащую на некоторой поверхности, то для ее задания достаточно два уравнения, которые показывают связь параметра кривой с координатами поверхности (u, v):

$$u = u(t), \;\; v = v(t).$$

Мы можем обойтись без объемлющего пространства и задавать кривую только через координаты самой поверхности. Можно построить самодостаточную геометрию на поверхности без помощи внешнего пространства.

Первый вопрос, который следует решить: как вычислять длины дуги кривой заданной в координатах (u, v)?

Касательные векторы к точке на поверхности

Рассмотри поверхность, заданную радиус-вектором $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$, также будем считать, что на поверхности задана некоторая кривая γ и все точки кривой можно выразить через вектор $\mathbf{r}$, который можно считать сложной функцией от t:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u(t),v(t)) \\ y(u(t),v(t)) \\ z(u(t),v(t)) \end{pmatrix}$$

Найдем первую производную от $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ по параметру t:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} x_u\dot{u} + x_v\dot{v} \\ y_u\dot{u} + y_v\dot{v} \\ z_u\dot{u} + z_v\dot{v} \end{pmatrix}$$

Следующие обозначения производных использованы для компактности формул:

$$x_u \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial x}{\partial u}, y_u \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial y}{\partial u}, z_u \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial z}{\partial u}, x_v \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial x}{\partial v}, y_v \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial y}{\partial v}, z_v \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial z}{\partial v}, \dot{u} \overset{\text{not}}{=} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \dot{v} \overset{\text{not}}{=} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Векторы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

являются касательными векторами к поверхности в данной точке и образуют базис, через который могут быть выражены все возможные касательные векторы к кривой в данной точке.

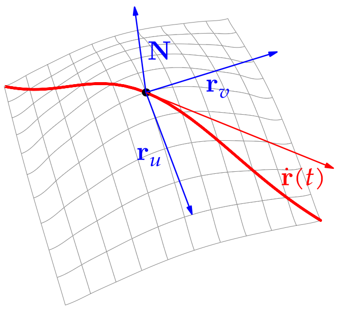


Рис. 10: Касательные векторы

Определение 29. Плоскость, содержащая все касательные к поверхности в данной ее точке, называется *касательной плоскостью.*

При взятии производной по t от $\mathbf{r}(t)$ мы фактически разложили касательный вектор **к кривой** на поверхности в линейную комбинацию касательных векторов **к поверхности**:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}_{\text{скаляр}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}_{\text{скаляр}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Вектора $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ образуют базис на касательной плоскости к поверхности и любой вектор на этой поверхности может быть выражен через их линейную комбинацию.

Через данную точку поверхности может проходить сколько угодно кривых и пар касательных векторов может быть сколь угодно много, однако все они лежат в одной касательной плоскости.

Нормальный вектор к поверхности

Определение 30. Вектор $\mathbf{N}$, перпендикулярный всем касательным прямым к данной точке поверхности, называется *нормальным вектором поверхности.*

Следует отметить, что нормальный вектор в данной точке поверхности может отличаться от нормального вектора к кривой, проходящей через данную точку на поверхности.

Нормальный вектор определяется через векторное произведение касательных векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & x_u & x_v \\ \mathbf{e}_2 & y_u & y_v \\ \mathbf{e}_3 & z_u & z_v \end{vmatrix} = \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \mathbf{e}_1 + \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \mathbf{e}_2 + \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \mathbf{e}_3.$$

Часто используют не $\mathbf{N}$, а единичный вектор нормали $\mathbf{m}$, который получается путем нормировки $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|}$$

Вектор нормали ортогонален к касательной плоскости, что очевидно следует из равенства:

$$\left(\mathbf{N}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\mathbf{N}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\mathbf{N}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Параметрическое уравнение нормали с параметром t задается формулой:

$$\mathbf{P}(x,y,z) = \mathbf{r}(u,v) + \mathbf{m}t,$$

где $\mathbf{P}(x,y,z)$ — радиус-вектор нормали, задающий все точки $P(x,y,z)$ этой прямой линии.

Первая квадратичная форма поверхности

Для нахождения дифференциала дуги $\mathrm{d}l$ кривой в ортонормированных декартовых координатах, необходимо вычислить норму касательного вектора:

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} +$$
$$+ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

В декартовых координатах:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

Скалярные произведения $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)$, $(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)$ и $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ можно сгруппировать в таблицу:

$$G = \begin{pmatrix} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad g_{12} = g_{21}$$

которая задает компоненты метрического тензора на поверхности. В силу непрерывности функции $\mathbf{r}$ таблица обладает симметрией $g_{12} = g_{21}$. Так как компонент всего 3 в литературе часто используют еще и такие обозначения:

$$G = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ где } E \overset{\text{not}}{=} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right), \ F \overset{\text{not}}{=} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right), \ G \overset{\text{not}}{=} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right).$$

Мы их будем избегать, чтобы сохранить общность изложения.

Вычислим, наконец, квадрат дифференциала дуги кривой $\mathrm{d}l$:

$$\mathrm{d}l^2 = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 \mathrm{d}t^2 = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t^2 + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t^2$$

окончательно:

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\,\mathrm{d}u^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}v^2$$

Полученная формула называется *первой квадратичной формой* поверхности и по сути является римановой метрикой на поверхности. Иногда используют обозначение φ_1:

$$\boxed{\varphi_1 = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\,\mathrm{d}u^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}v^2}$$

Геометрический смысл первой квадратичной формы

Что дает знание первой квадратичной формы поверхности? Она определяет геометрические свойства плоских фигур, лежащих на поверхности.

- Позволяет вычислять длины дуг кривых.
- Позволяет определить углы пересечения линий на поверхности.
- Позволяет вычислять площадь выбранного куска поверхности.
- Выбрав такие преобразования поверхности, которые не меняют первую квадратичную форму, мы получим аналог классической геометрии на плоскости для любой поверхности. Так, можно сформулировать геометрию на сфере, на параболе, торе и т.д.
- Конформные преобразования первой формы дадут нам аналог преобразований подобия в классической геометрии.

Индексные обозначения при записи первой квадратичной формы

Вместо того, чтобы обозначать параметры поверхности двумя разными буквами u и v, можно использовать одну букву, например u, но снабдить ее верхним индексом u^i. Для двумерного случая $(u, v) \leftrightarrow (u^1, u^2)$. Такие обозначения называются индексными и позволяют записывать формулы очень компактно, особенно если распространить их на многомерный случай.

Радиус-вектор поверхности будет записываться как $\mathbf{r}(u^1, u^2)$. Найдем производную по t, имя ввиду, что $u^i = u^i(t)$ для $i = 1, 2$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^j}\right)\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathrm{d}\mathbf{r}\,, \mathrm{d}\mathbf{r}) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j\,.$$

Обобщение на n–мерие

В случае $\mathbb{R}^n$ запишем формулы с помощью индексных обозначений. Далее везде индекс $i = 1, \dots, n$, а индексы $j, k, l = 1, \dots, m$.

В n-мерном пространстве может лежать m-мерная поверхность, где $2 \leqslant m \leqslant n-1$. Параметрически она задается в декартовых координатах следующим радиус-вектором:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \dots, x^n) = \begin{bmatrix} x^1(u^1, \dots, u^m) \\ \vdots \\ x^n(u^1, \dots, u^m) \end{bmatrix} = \mathbf{r}(x^i(u^j)) = \mathbf{r}(x^1(u^1, \dots, u^m), \dots, x^n(u^1, \dots, u^m)).$$

Сокращенную запись $\mathbf{r}(x^i(u^j))$ удобно применять при дифференцировании.

Пусть m уравнений задают кривую на поверхности:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(t), \\ \vdots \\ u^m = u^m(t), \end{cases} \Leftrightarrow u^j = u^j(t).$$

Дифференцируем $\mathbf{r}$ как сложную функцию от переменной t, где зависимость от t дается аргументами $x^i(u^j(t))$.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^j}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}$$

Первую квадратичную форму находим как:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^j}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^k}\right)\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t} = \sum_{j,k=1}^{m} g_{jk}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t},$$

где элементы g_{jk} суть компоненты метрического тензора, которые можно сгруппировать в таблицу:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix}$$

Дифференциал дуги выражается через первую квадратичную форму:

$$\mathrm{d}l^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t^2 = \sum_{j,k=1}^{m} g_{jk}\,\mathrm{d}u^j\,\mathrm{d}u^k$$

Следует отметить, что мы при выводе первой квадратичной формы что в $\mathbb{R}^3$, что в $\mathbb{R}^n$ всегда предполагали наличие декартовой системы координат и, следовательно, наличие метрического тензора в самом пространстве $\mathbb{R}^n$. И используя этот внешний по отношению к поверхности метрический тензор, мы получили формулу для внутреннего метрического тензора.

Такой метрический тензор называется *индуцированным.* Можно исходить не из декартовой системы координат и индуцировать другую метрику на той же самой поверхности. Позже мы на примере рассмотрим как это делается.

Единичный вектор нормали и метрический тензор

Ранее мы уже ввели единичный вектор нормали к поверхности $\mathbf{m}$ который вычисляется по формуле:

$$\mathbf{m} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|},$$

теперь мы можем модифицировать данную формулу, учитывая, что

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|^2 = \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\|^2}_{g_{11}} \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|^2}_{g_{22}} - \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2}_{g_{12}g_{21}=g_{12}^2} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \det G$$

запишем единичный вектор нормали как:

$$\mathbf{m} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\det G}.$$

Единичный вектор нормали при репараметризации

Рассмотрим как изменяется единичный вектор нормали при замене параметров кривой. Пусть параметры u^1, u^2 заменяются на параметры v^1, v^2 то есть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) = \mathbf{r}(v^1, v^2).$$

Надо найти связь между $\mathbf{m}$ в криволинейных координатах v^1 и v^2 и в криволинейных координатах u^1 и u^2. Для этого используем формулу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^i} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^1}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^2} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^2} = \frac{\partial u^1}{\partial v^1} \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} + \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial u^1}{\partial v^1} \frac{\partial u^2}{\partial v^2} - \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$$

Мы получили, что преобразование вектора нормали задается определителем матрицы Якоби преобразования криволинейных координат:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \quad \det(J) = \frac{\partial u^1}{\partial v^1} \frac{\partial u^2}{\partial v^2} - \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^2}.$$

Тогда
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^2} = \det J \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}.$$

В случае единичного вектора нормали $\mathbf{m}$ получаем:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_{v^1} \times \mathbf{r}_{v^2}}{\|\mathbf{r}_{v^1}\|\|\mathbf{r}_{v^2}\|} = \frac{\det J}{|\det J|} \frac{\mathbf{r}_{u^1} \times \mathbf{r}_{u^2}}{\|\mathbf{r}_{u^1}\|\|\mathbf{r}_{u^2}\|} = \operatorname{sign}(\det J) \frac{\mathbf{r}_{u^1} \times \mathbf{r}_{u^2}}{\|\mathbf{r}_{u^1}\|\|\mathbf{r}_{u^2}\|}$$

Таким образом, при преобразовании криволинейных координат норма единичного вектора нормали не изменяется, но если определитель преобразования $\det J$ меньше нуля, то вектор $\mathbf{m}$ меняет направление.

Такое поведение единичного вектора нормали становится более понятным, если учесть, что мы определили его посредством векторного произведения, результатом которого на самом деле является псевдовектор, а не вектор.

Преобразование первой квадратичной формы при репараметризации

Рассмотрим, как преобразуется первая квадратичная форма при замене параметров (локальных координат). Пусть $\mathbf{r}(u^1, u^2, \dots, u^m) = \mathbf{r}(v^1, v^2, \dots, v^m)$ то есть сделали замену:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(v^1, v^2, \dots, v^m), \\ u^2 = u^2(v^1, v^2, \dots, v^m), \\ \vdots \\ u^m = u^m(v^1, v^2, \dots, v^m). \end{cases} \implies \quad u^i = u^i(v^j), \;\; i, j = 1, \dots, m.$$

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}v^k} \frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow \mathrm{d}u^i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}v^k} \mathrm{d}v^k$$

$$\mathrm{d}l^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{\partial u^j}{\partial v^l} \mathrm{d}v^k \, \mathrm{d}v^l = \sum_{k,l=1}^{m} g'_{kl} \, \mathrm{d}v^k \, \mathrm{d}v^l \,,$$

где с помощью g'_{kl} мы обозначили компоненты метрического тензора в новой системе локальных координат $v^1, \dots, v^m$

$$g'_{kl} = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{\partial u^j}{\partial v^l}, \quad G' = [g'_{ij}]$$

Можно заметить, что выражение типа $\partial u^i \big/ \partial v^j$ задает элементы матрицы Якоби:

$$J = \frac{\partial(u^1, u^2, \dots, u^m)}{\partial(v^1, v^2, \dots, v^m)} = \begin{pmatrix} \partial u^1 \big/ \partial v^1 & \partial u^1 \big/ \partial v^2 & \dots & \partial u^1 \big/ \partial v^m \\ \partial u^2 \big/ \partial v^1 & \partial u^2 \big/ \partial v^2 & \dots & \partial u^2 \big/ \partial v^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial u^m \big/ \partial v^1 & \partial u^m \big/ \partial v^2 & \dots & \partial u^m \big/ \partial v^m \end{pmatrix}$$

Тогда преобразование компонент метрического тензора можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\boxed{G' = J^T G J}$$

Например для двумерного случая матрицы Якоби примут следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} \partial u^1/\partial v^1 & \partial u^1/\partial v^2 \\ \partial u^2/\partial v^1 & \partial u^2/\partial v^2 \end{pmatrix} J^T = \begin{pmatrix} \partial u^1/\partial v^1 & \partial u^2/\partial v^1 \\ \partial u^1/\partial v^2 & \partial u^2/\partial v^2 \end{pmatrix}$$

Можно получить вторую квадратичную форму рассуждая следующим образом: пусть мы проводим репараметризацию, заменяя декартовы координаты (x, y, z) на параметры поверхности (u, v), тогда:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{pmatrix} \quad J^T = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{pmatrix}$$

Учитывая, что метрика декартова пространства — единичная матрица $I = \operatorname{diag}(1, 1, 1)$, тогда

$$G = J^T I J = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу первой квадратичной формы поверхности:

$$G = \begin{pmatrix} x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 & x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v & x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что матрица Якоби получилась не квадратной, так как мы при замене координат ввели координатную систему не для всего пространства, а для его части, лежащем на двумерной поверхности.

Нормальная кривизна

Рассмотрим кривую заданную на поверхности радиус-вектором $\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}(u(l), v(l))$, где l — нормальный параметр. В данной точке кривой рассмотрим одновременно:

- вектор нормали $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}$ **к кривой**;
- вектор нормали $\mathbf{N}$ **к поверхности**.

Важно понимать, что данные векторы могут не совпадать!

Проекция вектора нормали кривой $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}$ на вектор нормали к поверхности $\mathbf{N}$ называется *нормальной кривизной*, обозначается как k_n и вычисляется по формуле

$$k_n = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right),$$

так как $\mathbf{m} = \mathbf{N}/\|\mathbf{N}\|$.

Учитывая первую формулу Френе–Серре $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = k\mathbf{n}$, можно записать k_n как

$$k_n = (k\mathbf{n}, \mathbf{m}) = k(\mathbf{n}, \mathbf{m}).$$

Для вычисления нормальной кривизны необходимо вычислить вторую производную от $\mathbf{r}$ по натуральному параметру l. Найдем производную по произвольному параметру t.

Вторая квадратичная форма

Вновь рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ двумерную поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ и кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ на этой поверхности. Первую производную по параметру t мы уже нашли:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Вычислим теперь вторую производную вновь используя формулу для производной от сложной функции и формулу производной от произведения функций. Распишем все подробно, раскрыв все суммы.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}$$

Умножим скалярно вектор $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$ единичный вектор нормали к поверхности $\mathbf{m}$ (найдем проекцию). Учтем ортогональность $\mathbf{m}$ и касательной плоскости, из-за чего: $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \mathbf{m}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \mathbf{m}\right) = 0$. Следовательно:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}, \mathbf{m}\right) &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2, \mathbf{m}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \mathbf{m}\right) + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2, \mathbf{m}\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}, \mathbf{m}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}, \mathbf{m}\right) = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \mathbf{m}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}, \mathbf{m}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}, \mathbf{m}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \mathbf{m}\right)}_{=0}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \mathbf{m}\right)}_{=0}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}$$

Получили квадратичную форму следующего вида:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}, \mathbf{m}\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \mathbf{m}\right)}_{h_{11}}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}, \mathbf{m}\right)}_{h_{12}=h_{21}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}, \mathbf{m}\right)}_{h_{22}}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Коэффициенты формы можно сгруппировать в следующую таблицу

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \text{ где } h_{11} = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m}), h_{12} = h_{21} = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{m}), h_{22} = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{m}),$$

которая в силу непрерывности вторых производных также является симметричной, как и таблица коэффициентов первой квадратичной формы.

Запишем теперь проекцию вектора нормали кривой на вектор нормали поверхности $\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right)$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right) = h_{11}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}\right)^2 + 2h_{12}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l} + h_{22}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l}\right)^2.$$

Обратите внимание, что коэффициенты h_{ij} от параметра t не зависят, поэтому при смене параметра на натуральный не меняются.

Форму

$$\varphi_2 = h_{11}\,\mathrm{d}u^2 + 2h_{12}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + h_{22}\,\mathrm{d}v^2$$

называют *второй квадратичной формой поверхности*.

Вычисление коэффициентов второй квадратичной формы

Используя индексные обозначения (u^1, u^2) для криволинейных координат, можно записать формулу для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы.

$$h_{ij} = \left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^j \partial u^i}, \mathbf{m}\right) = \frac{1}{\det G}\left(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\right) = \frac{(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\det G},$$

где

$$\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^j \partial u^i},\ \mathbf{r}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^1} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\ \mathbf{r}_2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^2} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v},\ i, j = 1, 2.$$

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\det G}, \\ h_{12} &= \frac{(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\det G}, \\ h_{21} &= \frac{(\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\det G}, \\ h_{22} &= \frac{(\mathbf{r}_{22}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\det G}. \end{aligned}$$

Нормальная кривизна поверхности и кривизна кривой

Нормальная кривизна поверхности k_n выражается через вторую квадратичную форму:

$$k_n = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right) = h_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}l} \Rightarrow k_n\,\mathrm{d}l^2 = h_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j.$$

Так как $\mathrm{d}l^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j$ — первая квадратичная форма, то нормальную кривизну можно записать как

$$k_n = \frac{h_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j}{g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j}$$

С другой стороны $k_n = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right) = (k\mathbf{n}, \mathbf{m}) = k(\mathbf{n}, \mathbf{m})$

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{m})}{\underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{=1}\,\underbrace{\|\mathbf{m}\|}_{=1}} = (\mathbf{n}, \mathbf{m}) \Rightarrow k_n = k\cos\theta$$

Инварианты пары квадратичных форм

Мы выяснили, что в каждой неособой точке поверхности задана пара квадратичных форм:

$$\varphi_1 = g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j\,,\ G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 = h_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j\,,\ H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

Следующий определитель дает характеристическое уравнение двух квадратичных форм:

$$\det(H - \lambda G) = 0,$$

или в компонентном виде:

$$(h_{11} - \lambda g_{11})(h_{22} - \lambda g_{22}) - (h_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0.$$

Корни λ_1 и λ_2 данного квадратного уравнения суть собственные числа пары квадратичных форм. А из однородной системы уравнений

$$(H - \lambda G)\mathbf{w} = \mathbf{0},\quad \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

находятся собственные векторы $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ пары квадратичных форм. Направления векторов $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ называют главными направлениями квадратичных форм [3, с. 68].

Как известно, у квадратичной формы существует два инварианта, которые не меняются при линейном преобразовании базиса. Это определитель det и след Tr матрицы квадратичной формы.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad \mathrm{Tr}\{M\} = m_{11} + m_{22}, \det\{M\} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

Тоже самое справедливо для пары квадратичных форм. Кроме того, если λ_1 и λ_2 — собственные векторы, то $\mathrm{Tr}\{M\} = \lambda_1 + \lambda_2$ и $\det\{M\} = \lambda_1\lambda_2$.

Определение 31. Собственные числа пары квадратичных форм называются *главными кривизнами* поверхности в изучаемой точке. Произведение главных кривизн называется *гауссовой кривизной* поверхности, а их сумма — *средней кривизной* поверхности.

$$K_1 = \lambda_1\lambda_2,\ \ K_2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Также часто полагают

$$K_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

что лучше отражает смысл названия.

Формулы для вычисления средней и гауссовой кривизн

Найдем явные формулы для вычисления средней и гауссовой кривизн. Используем характеристическое уравнение

$$(h_{11} - \lambda g_{11})(h_{22} - \lambda g_{22}) - (h_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0,$$

для нахождения собственных чисел λ_1 и λ_2, а затем выразим через эти числа определитель и след. Начнем с того, что приведем уравнение к каноническому виду квадратного алгебраического уравнения.

$$\begin{gathered} h_{11}h_{22} - \lambda h_{11}g_{22} - \lambda g_{11}h_{22} + \lambda^2 g_{11}g_{22} - b_{12}^2 + 2\lambda h_{12}g_{12} - \lambda^2 g_{12}^2 = 0, \\ (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\lambda^2 + (2h_{12}g_{12} - g_{11}h_{22} - h_{11}g_{22})\lambda + (h_{11}h_{22} - h_{12}^2) = 0. \end{gathered}$$

Нас интересуют не столько сами корни уравнения λ_1 и λ_2, сколько их сумма $\lambda_1 + \lambda_2$ (след) и произведение $\lambda_1\lambda_2$ (определитель) поэтому можно не решать уравнение, а воспользоваться теоремой Виета:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lambda_1\lambda_2 = \frac{h_{11}h_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det H}{\det G}, \\ 2K_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned}$$

Для средней кривизны K_2 можно получить выражение через след и определитель матриц H и G. Для этого найдем обратную матрицу G^{-1} имя ввиду, что $G^T = G$ в силу симметричности и $g_{12} = g_{21}$

$$G^{-1} = (\det G)^{-1}\mathrm{adj}(G^T) = \frac{1}{\det G}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$

Найдем произведение HG^{-1}:

$$\frac{1}{\det G}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det G}\begin{pmatrix} h_{11}g_{22} - h_{12}g_{12} & -h_{11}g_{12} + h_{12}g_{11} \\ h_{12}g_{22} - h_{22}g_{12} & -h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11} \end{pmatrix}$$

Найдем след матрицы HG^{-1}:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(HG^{-1}) = \frac{1}{\det G}\mathrm{Tr}(H \cdot \mathrm{adj} G) = \frac{1}{\det G}(h_{11}g_{22} - h_{12}g_{12} - h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}) = \\ = \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12}}{\det G}. \end{aligned}$$

Мы получили, что

$$2K_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(HG^{-1}) = \mathrm{Sp}(HG^{-1}).$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Гауссова кривизна: } K_1 = \lambda_1\lambda_2 = \frac{\det H}{\det G}, \\ &\text{Средняя кривизна: } K_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(HG^{-1}). \end{aligned}}$$

Величины K_1 и K_2 являются инвариантами поверхности и не меняются при смене параметризации (т.е. при преобразовании локальных координат). Заметим, что они выражаются через инварианты матриц — определитель и след — которые также не изменяются при преобразовании базиса.

Типы поверхности

Определение 32. Точки поверхности можно классифицировать исходя из знака $K_1 = \lambda_1\lambda_2$:

- точка называется *эллиптической*, если обе главные кривизны λ_1 и λ_2 одного знака: $K_1 = \lambda_1\lambda_2 > 0$,
- точка называется *гиперболической*, если обе главные кривизны λ_1 и λ_2 разного знака: $K_1 = \lambda_1\lambda_2 < 0$,
- точка называется *параболической*, одна из кривизн λ_1 и λ_2 равна нулю: $K_1 = \lambda_1\lambda_2 = 0$.

Происхождение такой терминологии связанно с типом особой кривой второго порядка — индикатрисой нормальной кривизны.

3.2. Примеры и решение задач по теории поверхностей

Вычисление длин дуг кривых, лежащих на поверхности

Пусть некоторая кривая задана в параметрическом виде в системе координат u, v на некоторой поверхности с известной первой квадратичной формой:

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\,\mathrm{d}u^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}v^2\,.$$

Кривая задается системой уравнений:

$$\begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases}$$

что дает нам возможность вычислить дифференциалы $\mathrm{d}u$ и $\mathrm{d}v$ через производные по t:

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \dot{u}\,\mathrm{d}t \;\text{ и }\; \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \dot{v}\,\mathrm{d}t\,.$$

Подставляем в первую квадратичную форму и записываем выражение для дифференциала дуги, которое можно проинтегрировать по нужному диапазону параметра t и получить длину кривой:

$$\mathrm{d}l^2 = \left((\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\dot{u}^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\dot{u}\dot{v} + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\dot{v}^2\right)\mathrm{d}t^2 \Rightarrow \mathrm{d}l = \sqrt{(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\dot{u}^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\dot{u}\dot{v} + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\dot{v}^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Вычисление углов пересечения кривых, лежащих на поверхности

Углом пересечения двух кривых в точке называется меньший угол между касательными к кривым в данной точке. Для его вычисления следует найти угод между касательными векторами.

Пусть две кривые заданы параметрически своими радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} g^1(t) \\ g^2(t) \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} u = f^1(t), \\ v = f^2(t). \end{cases} \text{ и } \begin{cases} u = g^1(t), \\ v = g^2(t). \end{cases}$$

Угол между касательными векторами находится через косинус и скалярное произведение:
$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t}\right)}{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}\right\|\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t}\right\|}$$
Формулу раскрывать не будем, а проиллюстрируем решение данной задачи, когда будем рассматривать конкретные примеры кривых на поверхностях.

Вычисление первой квадратичной формы для сферы

Сфера радиуса R в декартовой системе координат задается следующим радиус-вектором:
$$\mathbf{r}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u\cos v \\ R\cos u\sin v \\ R\sin u \end{pmatrix}$$
Мы можем интерпретировать $\mathbf{r}$ как сложную функцию от параметров u и v. Вычислим касательные векторы $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin u\cos v \\ -R\sin u\sin v \\ R\cos u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\cos u\sin v \\ R\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для вычисления элементов первой квадратичной формы, найдем все возможные скалярные произведения векторов $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$:

$$g_{11} = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right) = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = R^2\sin^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + R^2\cos^2 u = R^2\sin^2 u + R^2\cos^2 u = R^2$$
$$g_{12} = g_{21} = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = R^2\sin u\cos u\cos v\sin v - R^2\sin u\sin v\cos u\cos v = 0,$$
$$g_{22} = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right) = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = R^2\cos^2 u(\sin^2 v + \cos^2 v) = R^2\cos^2 u.$$

В результате получаем метрику на сфере для бесконечно мало окрестности любой неособой точки:
$$\mathrm{d}l^2 = g_{11}\,\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g_{22}\,\mathrm{d}v^2 = R^2\,\mathrm{d}u^2 + R^2\cos^2 u\,\mathrm{d}v^2$$

Вычисление первой квадратичной формы для цилиндра

Найти первую квадратичную форму для цилиндрической поверхности, заданной радиус-вектором:
$$\mathbf{r}(s,\lambda) = \vec{\rho}(s) + \lambda\mathbf{e}, \text{ где } \mathbf{e} = \mathrm{const}.$$
Здесь для обозначения параметров использованы не буквы u, v, а буквы s и λ. Вектор $\mathbf{e}$ — некоторый фиксированный вектор, компоненты которого не зависят от s и λ, а вектор-функция $\vec{\rho}(s)$ зависит только от одного параметра s. Явное выражение для вектор-функции $\vec{\rho}(s)$ нам по условию задачи не дано.

Найдем первую квадратичную форму, вычислив касательный вектор к некоторой произвольной кривой, целиком лежащей на цилиндрической поверхности. Радиус-вектор данной кривой выражается через радиус-вектор поверхности:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t), \lambda(t)) = \begin{pmatrix} x(s(t), \lambda(t)) \\ y(s(t), \lambda(t)) \\ z(s(t), \lambda(t)) \end{pmatrix}$$

Касательный вектор кривой вычисляется как первая производная от сложной функции $\mathbf{r}$ по параметру t:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}s}}_{\mathbf{v}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \mathbf{e}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\dot{s} + \mathbf{e}\dot{\lambda},$$

где мы переобозначили $\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}s}$ через $\mathbf{v}$ и заменили $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}$ на вектор $\mathbf{e}$ из-за того, что:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vec{\rho}(s)}{\partial \lambda} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{e} = 0 + 1 \cdot \mathbf{e}$$

Первую квадратичную форму вычислим через скалярное произведение $(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = (\mathbf{v}\dot{s} + \mathbf{e}\dot{\lambda}, \mathbf{v}\dot{s} + \mathbf{e}\dot{\lambda}) = (\mathbf{v}, \mathbf{v})\dot{s}^2 + (\mathbf{v}, \mathbf{e})\dot{s}\dot{\lambda} + (\mathbf{e}, \mathbf{v})\dot{s}\dot{\lambda} + (\mathbf{e}, \mathbf{e})\dot{\lambda}^2$$

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})\mathrm{d}s^2 + 2(\mathbf{e}, \mathbf{v})\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda + (\mathbf{e}, \mathbf{e})\mathrm{d}\lambda^2$$

Вычисление второй квадратичной формы для сферы

Вернемся к двумерной сфере, вложенной в трехмерное пространство:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} R\cos u \cos v \\ R\cos u \sin v \\ R\sin u \end{pmatrix}$$

Выше мы уже вычислили касательные векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ в произвольной точке и компоненты метрического тензора G (первой квадратичной формы):

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -R\sin u \cos v \\ -R\sin u \sin v \\ R\cos u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -R\cos u \sin v \\ R\cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{pmatrix}$$

Вычислим компоненты нормального вектора в декартовой системе координат с со стандартным базисом $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & -R\sin u \cos v & -R\cos u \sin v \\ \mathbf{e}_2 & -R\sin u \sin v & R\cos u \cos v \\ \mathbf{e}_3 & R\cos u & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2 u \cos v \\ -R^2\cos^2 u \sin v \\ -R^2\cos u \sin u \end{pmatrix}$$

Вычислим норму $\|\mathbf{N}\|$

$$\|\mathbf{N}\|^2 = \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = R^2 \cdot R^2 \cos^2 u - 0 \cdot 0 = R^4 \cos^2 u,$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{R^2 \cos u} \begin{pmatrix} -R^2 \cos^2 u \cos v \\ -R^2 \cos^2 u \sin v \\ -R^2 \cos u \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \qquad \|\mathbf{m}\| = 1.$$

Далее найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -R \cos u \cos v \\ -R \cos u \sin v \\ -R \sin u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -R \cos u \cos v \\ -R \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} R \sin u \sin v \\ -R \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим скалярные произведения $(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m})$, $(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{m})$ и $(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{m})$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \mathbf{m}\right) = R \cos^2 u \cos^2 v + R \cos^2 u \sin^2 v + R \sin^2 u = R$$
$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}, \mathbf{m}\right) = -R \sin u \sin v \cos u \cos v + R \cos u \sin v \sin u \cos v = 0$$
$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}, \mathbf{m}\right) = R \cos^2 u \cos^2 v + R \cos^2 u \sin^2 v = R \cos^2 u$$

В результате мы получили вторую квадратичную форму для сферы:

$$(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{m})\, \mathrm{d}t^2 = R\, \mathrm{d}u^2 + R \cos^2 u\, \mathrm{d}v^2 \qquad H = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \cos^2 u \end{pmatrix}$$

Вычисление кривизны сферы

Найдем гауссову и среднюю кривизны для сферы. Выше мы уже вычислили первую и вторую фундаментальные формы для сферы:

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u \end{pmatrix} \;\; \det\{G\} = R^4 \cos^2 u, \;\; H = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \cos^2 u \end{pmatrix} \;\; \det\{H\} = R^2 \cos^2 u,$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \cos^2 u} \end{pmatrix} \Rightarrow HG^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$
$$K_1 = \frac{\det H}{\det G} = \frac{1}{R^2}, \;\; K_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\{HG^{-1}\} = \frac{1}{R}.$$

Поверхность Гаусса

Поверхность Гаусса задается в декартовой системе координат в явном виде следующей формулой:

$$z = f(x, y) = \exp\{-(x^2 + y^2)\}.$$

Так как все формулы мы выводили для параметрического представления поверхностей, то следует параметризовать это явное представление. Параметризовать можно несколькими способами, но наиболее простая параметризация получается, если в качестве параметров выбрать координаты x и y, а координату z выразить через них.

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \exp\{-(u^2+v^2)\} \end{pmatrix} \text{ где } u = x, v = y.$$

Найдем касательные векторы к произвольной точке поверхности

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u\exp\{-(u^2+v^2)\} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v\exp\{-(u^2+v^2)\} \end{pmatrix}$$

Если мы хотим построить кривую на поверхности, то можно задать ее уравнение в локальных координатах (u, v), а затем используя радиус-вектор поверхности вычислить координаты этой кривой в объемлющем пространстве с декартовой системе координат.

Покажем это на конкретном примере. Пусть кривая задается следующими уравнениями:

$$u = u(t) = \sin t,$$
$$v = v(t) = \sin t,$$
$$z = \exp\{-(u^2+v^2)\} = \exp\{-(\sin^2 t + \sin^2 t)\} = \exp\{-2\sin^2 t\},$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cos t + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cos t,$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2e^{-2\sin t}\sin t \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2e^{-2\sin t}\sin t \end{pmatrix}$$

Угол между кривыми на поверхности

Рассмотрим задачу между нахождения угла между кривыми $v = u+1$ и $v = 3-u$ на поверхности, заданной радиус-вектором

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Найдем точку пересечения линий

$$\begin{cases} v = u+1 \\ v = 3-u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v-u = 1 \\ v+u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 4 \\ 2u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

Найдем первую квадратичную форму:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 2u \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) &= \cos^2 v + \sin^2 v + 4u^2 = 4u^2 + 1, \\
\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) &= -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v + 0 = 0, \\
\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) &= u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2.
\end{aligned}$$

$$G = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

Теперь запишем параметрические уравнения кривых в криволинейных координатах (u, v) используя u в качестве параметра t кривой.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} u \\ 3-u \end{pmatrix}$$

- Радиус-вектор $\mathbf{r}_1$ задает кривую $v = u + 1$ и качестве параметра выбран u.
- Радиус-вектор $\mathbf{r}_2$ задает кривую $v = 3 - u$ и качестве параметра выбран u.

В точке пересечения кривых их касательные векторы имею вид:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Найдем скалярное произведение касательных векторов $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u}$ и $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}$, а также их нормы.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}\right) = (4u^2 + 1) \cdot 1 \cdot 1 + u^2 \cdot 1 \cdot (-1) = 4u^2 + 1 - u^2 = 3u^2 + 1$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u}\right\|^2 = (4u^2+1)\cdot 1\cdot 1 + u^2 \cdot 1 \cdot 1 = 5u^2+1 \quad \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}\right\|^2 = (4u^2+1)\cdot 1 \cdot 1 + u^2(-1)(-1) = 5u^2+1$$

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}\right)}{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u}\right\| \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}\right\|} = \frac{3u^2 + 1}{\sqrt{5u^2 + 1}\sqrt{5u^2 + 1}}$$

В точке $(u, v) = (1, 2)$ имеем угол:

$$\cos\theta = \frac{3 \cdot 1^2 + 1}{5 \cdot 1^2 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \cos\theta = \frac{2}{3}.$$

Локсодрома

Кривая, расположенная на сфере и пересекающая все меридианы сферы под данным углом, называется *локсодромией* или *локсодромой*. Выведем ее уравнение в сферических координатах. Пусть задана сфера со стандартным метрическим тензором:

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Будем искать локсодрому в виде параметрического уравнения $\theta = \theta(\varphi)$, где в качестве параметра используется φ.

$$\mathbf{r}_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \theta(\varphi) \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \theta = \theta(\varphi), \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$$

Меридианы задаются как

$$\mathbf{r}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \theta = \theta, \\ \varphi = \varphi_0. \end{cases}$$

Касательные векторы к меридианам и к локсодроме:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{pmatrix} \dot\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta}\right) = R^2\dot\theta \cdot 1 + R^2\cos^2\theta \cdot 1 \cdot 0 = R^2\dot\theta$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi}\right\|^2 = R^2\dot\theta^2 + R^2\cos^2\theta, \quad \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta}\right\|^2 = R^2 \cdot 1 + R^2\cos^2\theta \cdot 0 = R^2.$$

Пусть α — угол между локсодромой и меридианам. По определению он должен быть постоянным.

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta}\right)}{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi}\right\|\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta}\right\|} = \frac{R^2\dot\theta}{R\sqrt{R^2\dot\theta^2 + R^2\cos^2\theta}} = \frac{\dot\theta}{\sqrt{\dot\theta^2 + \cos^2\theta}}$$

Надо решить это дифференциальное уравнение. Оно легко преобразуется к уравнению с разделяемыми переменными

$$\dot\theta^2 = \cos^2\alpha\dot\theta^2 + \cos^2\alpha\cos^2\theta$$

$$\dot\theta^2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha\cos^2\theta$$

$$\dot\theta^2 = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi} = \operatorname{ctg}\alpha\cos\theta(\varphi) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{ctg}\alpha\,\mathrm{d}\varphi$$

Интеграл от левой стороны можно вычислить аналитически:

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \ln\left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| + C$$

Так как $\operatorname{tg}\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$, то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(\pi/2+\theta\right)}{\sin\left(\pi/2+\theta\right)} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \ln\left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right|$$

$$\int \operatorname{ctg}\alpha\,\mathrm{d}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha\varphi \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha\varphi = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right|$$

$$\boxed{\varphi = \operatorname{tg}\alpha\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

Нормальный вектор к поверхности, заданной в явном виде

Пусть задана поверхность $z = f(x,y)$, введем параметры $u = x$ и $v = y$ и запишем параметрическое уравнение:

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{cases} x, \\ y, \\ f(x,y). \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

Найдем частные производные и их векторное произведение:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & 1 & 0 \\ \mathbf{e}_y & 0 & 1 \\ \mathbf{e}_z & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z.$$

Получили направляющий вектор нормали к поверхности:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} & 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем его, поделив на длину $\|\mathbf{N}\|$:

$$\left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\right\| = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1$$

$$\mathbf{m} = \frac{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}}{\left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\right\|} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

нормальный вектор к поверхности, заданной в неявном виде

Рассмотрим теперь поверхность, которая задана в виде уравнения:

$$F(x,y,z)=0 \;\Leftrightarrow\; F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0.$$

Взяв производные по u и v получим два тождества

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}&=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\
\frac{\partial F}{\partial v}&=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0.
\end{aligned}\tag{2}$$

При условии, что данную поверхность можно задать и в явном виде, с помощью функции $z=f(x,y)$, можно положить $u=x$ и $v=y$, как в предыдущем примере. Это даст возможность упростить тождества (2) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}\cancelto{1}{\frac{\partial x}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial y}\cancelto{0}{\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x}\cancelto{0}{\frac{\partial x}{\partial y}}+\frac{\partial F}{\partial y}\cancelto{1}{\frac{\partial y}{\partial y}}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,
\end{aligned}
\;\Longrightarrow\;
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,
\end{aligned}
\;\Longrightarrow\;
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\\
&\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.
\end{aligned}$$

Так как в предыдущем примере мы уже нашли выражение для единичного нормального вектора к поверхности $\mathbf{m}$ для случая явной функции $z=f(x,y)$, можно воспользоваться этими формулами и записать выражение для неявной функции:

$$\mathbf{m}=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}}=-\frac{\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},-1\right)}{\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}+1}}=\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

Можно заметить, что

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\operatorname{grad}F(x,y,z)=\nabla F(x,y,z)\Rightarrow\mathbf{N}=\nabla F$$

Ненормированный направляющий вектор нормали к поверхности в данной точке равен градиенту. Можно дать следующую вольную геометрическую интерпретацию: так как градиент функции указывает направление наибольшего изменения функции, то вектор нормали тем длиннее, чем более выпуклой является поверхность.

Список литературы

1. Норден А. П. Теория поверхностей. — 2-е изд. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 264. — (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия)). — ISBN 978597106234.

2. Зорич В. А. Математической анализ. Т. 1. — 5-е изд. — Москва : МЦНМО, 2007. — 664 с. — ISBN 5940570569.

3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. В 3 т. Т. 1. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. — 6-е изд. — Москва : УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 336 с. — ISBN 9785453000470.

4. Криволинейные координаты

Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции

Рассмотрим следующее уравнение:

$$F(x^1, \dots, x^n, y) = 0, \tag{3}$$

которое задает в неявном виде функцию многих переменных $y(x^1, \dots, x^n)$. Нас будет интересовать условия, которые необходимо наложить на функцию $F(x^1, \dots, x^n, y)$, чтобы уравнение (3) определяло однозначную и непрерывную функцию $y(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности $U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0)$ некоторой точке $x_0^1, \dots, x_0^n, y_0$.

Эти условия определяются теоремой о неявной функции. Данная теорема известна из курса математического анализа [1, Глава VIII, §5].

Теорема 33. *Если функция $F(x^1, \dots, x^n, y) \colon U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) \to \mathbb{R}$, определенная в окрестности точки $x_0^1, \dots, x_0^n, y_0$, такова, что*

- $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$,
- $F(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) = 0$,
- $F'_y(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) \neq 0$,

то в некоторой подокрестности окрестности $U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0)$ уравнение (3) однозначно определяет непрерывную и дифференцируемую функцию $y = f(x^1, \dots, x^n)$.

Аналогичную теорему можно сформулировать для многомерного случая. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = 0, \\ F_2(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = 0, \\ \dots \\ F_n(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

эта система уравнений определяет неявным образом систему функций

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^n), \\ y^2 = f^2(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^n = f^n(x^1, \dots, x^n). \end{cases}$$

Необходимо найти такие условия, налагаемые на функции $F_1, \dots, F_n$, чтобы набор $y^1, \dots, y^n$ был набором непрерывных и дифференцируемых функций от n переменных $x^1, \dots, x^n$. Выше мы видели, что в вопросе о существовании однозначной неявной функции, определяемой одним уравнением, одним из условий было условие неравенства нулю производной от F по y, то есть по той переменной, которая подлежит определению как неявная функция.

В вопросе существования системы однозначных неявных функций роль $F_y^{'}$ играет матрица Якоби J и определитель Якоби $\det J$ (якобиан).

$$J = \frac{\partial(F_1, \dots F_n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^2} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y^1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y^2} & \dots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y^1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y^2} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

Теорема 34. *Если функции* $F_i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \colon U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0, \dots, y^n) \to \mathbb{R}$, *определенные в окрестности точки* $x_0^1, \dots, x_0^n, y_0, \dots, y^n$, *таковы, что*

- $F_i \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, $i = 1, \dots, n$
- $F_i(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^n) = 0$, $i = 1, \dots, n$,
- *определитель Якоби системы (4) в точке* $x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^n$ *не равен нулю*

$$\det J(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^n) = \left. \frac{\partial(F_1, \dots F_n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right|_{x_0^1, \dots, x_0^n} \neq 0$$

то в некоторой подокрестности окрестности $U(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0, \dots, y^n)$ *система уравнений (4) однозначно определяет систему непрерывных и дифференцируемых функций* $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$.

Преобразования координат

Рассмотрим область пространства $\mathbb{R}^n$ в окрестности U_P некоторой точки P. Предположим, что в данной области заданы две системы координат:

- «старая» система координат $(y^1, \dots, y^n)$ с радиус-вектором $\mathbf{r}(y^1, \dots x, y^n)$
- «новая» система координат $(x^1, \dots, x^n)$ с радиус-вектором $\mathbf{r}(x^1, \dots x, x^n)$.

Пусть также заданы n функций преобразования «старых» координат к «новым» (функция перехода)

$$\varphi^i \colon (y^1, \dots, y^n) \to (x^1, \dots, x^n), \varphi^i \in C^1(U_P).$$

Это правило преобразования координат можно записать в виде системы

$$\begin{cases} x^1 = \varphi^1(y^1, \dots, y^n), \\ x^2 = \varphi^2(y^1, \dots, y^n), \\ \vdots \\ x^n = \varphi^n(y^1, \dots, y^n), \end{cases} \tag{5}$$

или более емко с помощью индексных обозначений:

$$x^i = \varphi^i(y^j), \text{ где } i, j = 1, \dots, n.$$

Какие условия надо наложить на функции φ^i чтобы преобразование координат было взаимно однозначным и, следовательно, обратимым? Ответ на данный вопрос даст теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции.

Для того, чтобы применить эту теорему запишем систему (5) в следующем виде:

$$\begin{cases} F^1 = x^1 - \varphi^1(y^1, \dots, y^n) = 0, \\ F^2 = x^2 - \varphi^2(y^1, \dots, y^n) = 0, \\ \dots \\ F^n = x^n - \varphi^n(y^1, \dots, y^n) = 0. \end{cases}$$

Из такой записи видно, что на функции φ^i надо наложить условия непрерывности и дифференцируемости (что уже было сделано), а также условие неравенства нулю определителя Якоби в точке P:

$$J = \frac{\partial(F^1, \dots F^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} = \frac{\partial(\varphi^1, \dots \varphi^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial y^1} & \frac{\partial\varphi^1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial\varphi^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^1} & \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^n}{\partial y^1} & \frac{\partial\varphi^n}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial\varphi^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

$$\det \left. \frac{\partial(\varphi^1, \dots \varphi^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right|_{y^j = y^j_0} \neq 0.$$

Заметим, что можно с помощью индексных обозначений можно емко записать матрицу Якоби

$$\frac{\partial(\varphi^1, \dots \varphi^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}, \text{ где } i, j = 1, \dots, n.$$

Выполнение этих условий гарантирует существование обратных функций $(\varphi^i)^{-1}$, которые однозначно выражают «новые» координаты x^i через «старые» y^i:

$$\begin{cases} y^1 = (\varphi^1)^{-1}(x^1, \dots, x^n), \\ y^2 = (\varphi^2)^{-1}(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^n = (\varphi^n)^{-1}(x^1, \dots, x^n). \end{cases}$$

Так как координаты x^i и y^i связаны взаимно однозначно $x^i \leftrightarrow y^i$, то можно считать, что каждая координата x^i есть функция от всех y^i и наоборот. Записывают:

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \\ y^2 = y^2(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^n = y^n(x^1, \dots, x^n), \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^1 = x^1(y^1, \dots, y^n), \\ x^2 = x^2(y^1, \dots, y^n), \\ \dots \\ x^n = x^n(y^1, \dots, y^n). \end{cases}$$

Также как и радиус-вектор произвольной точки имеет разные компоненты в разных системах координат:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \dots, x^n) = \mathbf{r}(y^1, \dots, y^n).$$

Матрица Якоби J и ее обратная J^{-1} записываются как:

$$J = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \text{ и } J^{-1} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

Матрица Якоби задает **линейную** часть (первое слагаемое ряда Тейлора) в общем случае **нелинейного** преобразования координат $x^i \leftrightarrow y^i$.

Особая точка системы координат

Обобщая вышесказанное, сформулируем определение.

Определение 35. Точка $P(x_0^1, \dots, x_0^n)$ называется *неособой точкой* системы координат $\{y^1, \dots, y^n\}$ если в этой точке определитель матрицы Якоби преобразования не равен нулю т.е.

$$\det \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)}\bigg|_P \neq 0$$

и $x^i(y_0^1, \dots, y_0^n) = x_0^i$. Сама система координат при этом называется регулярной. В случае, если данные условия не выполняются, то система координат нерегулярная, а точка P — *особая*.

Криволинейные координаты

Пусть задано преобразование от декартовой системы координат $(x^1, \dots, x^n)$ к системе координат $q^1, \dots, q^n$. Говорят, что $(q^1 \dots, q^n)$ является *криволинейными координатами*, если

- функции $x^i = x^i(q^1, \dots, q^n)$ имеют непрерывные производные всех порядков;
- Определитель матрицы Якоби отличен от нуля во всех точках рассматриваемой области:

$$\det\left\{\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right\} \neq 0.$$

Из этих требований следует, что обратные функции $q^i(x^1, \dots, x^n)$ также имеют непрерывные производные всех порядков и определитель обратной матрицы Якоби также отличен от нуля:

$$\det\{J^{-1}\} = \det\left\{\frac{\partial q^i}{\partial x^j}\right\} \neq 0.$$

Координатные поверхности и линии

Функции $x^i = x^i(q^1, \dots, q^n)$ можно рассматривать одновременно для всех значений $i = 1, \dots, n$ введя радиус-вектор $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, \dots, q^n) = \begin{pmatrix} x^1(q^1, \dots, q^n) \\ x^2(q^1, \dots, q^n) \\ \vdots \\ x^n(q^1, \dots, q^n) \end{pmatrix}$$

- Условия $q^i = \mathrm{const}$ определяют n семейств координатных гиперповерхностей.
- Гиперповерхности одного семейства не пересекаются.
- Любые $n-1$ гиперповерхностей разных семейств пересекаются по некоторой кривой. Такие кривые называются координатными.

Векторное поле базисов

Касательные векторы к координатным кривым определяются как

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial q^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial q^k} \end{pmatrix}$$

Эти векторы задают локальный базис в виде векторного поля в каждой точке окрестности, в которой введена криволинейная система координат.

Компоненты локального метрического тензора криволинейной системы координат определяется как:

$$g_{ij} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \right)$$

Полярная системы координат

Простейшим примером криволинейной системы координат являются полярные координаты (r, φ), связанные с декартовыми следующими формулами:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Используя эти соотношения вычисляем матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

и определитель Якоби:

$$\det J = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Поскольку при $r = 0$ якобиан тождественно равен нулю $\det J = 0$, то точка $(0, \varphi)$ является особой. В декартовой системе координат этой точке соответствует точка $(0, 0)$.

Для придания однозначности преобразованию декартовых координат к полярным необходимо исключить точку $(0, \varphi)$:

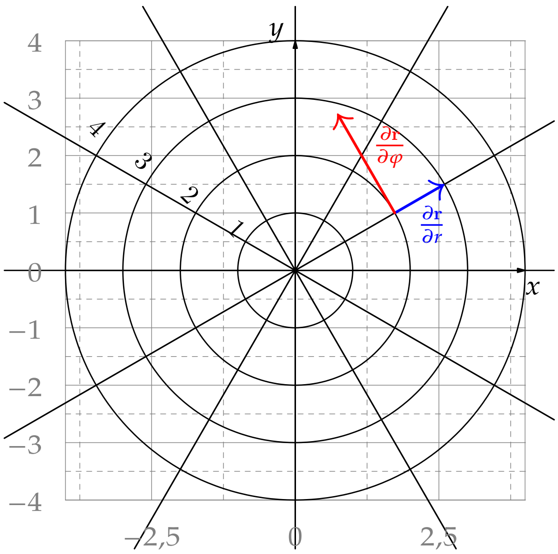
$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r > 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Базисные векторы в фиксированной точке выражаются через $\mathbf{r}(r, \varphi)$:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = r\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ +\cos\varphi\end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\right) = 1,\\ g_{22} &= \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right) = r^2,\\ g_{12} = g_{21} &= \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right) = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\right) = 0.\end{aligned}\right. \Rightarrow G = J^TJ = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{pmatrix}$$

Координатные кривые полярной системы координат



Координатные линии двух типов:

- $\varphi = \mathrm{const}$ — лучи, исходящие из точки O;
- $r = \mathrm{const}$ — концентрические окружности с центром в точке O.

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = r\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ +\cos\varphi\end{pmatrix}$$

Эллиптическая система координат

Эллиптическая система координат связана с декартовой следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch}\varphi\cos\theta, \\ y &= \operatorname{sh}\varphi\sin\theta. \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sh}\varphi\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\varphi\cos\theta & -\operatorname{ch}\varphi\sin\theta \\ \operatorname{ch}\varphi\sin\theta & \operatorname{sh}\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Поле базисных векторов задается векторами:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\varphi\cos\theta \\ \operatorname{ch}\varphi\sin\theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\varphi\sin\theta \\ \operatorname{sh}\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$$

Координатные кривые эллиптической системы координат

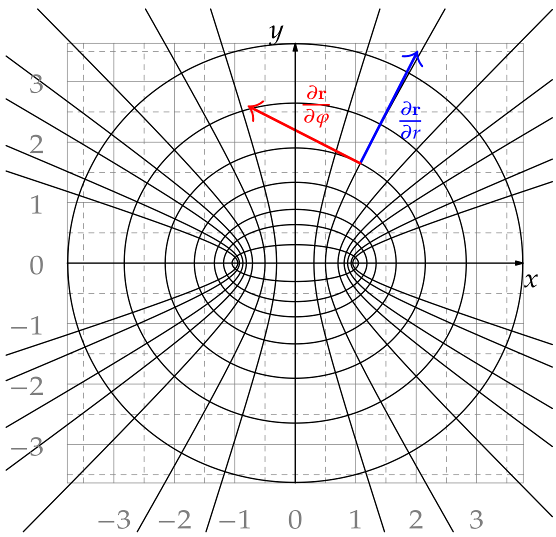
Первая координатная кривая получается при $\varphi = C_1 = \mathrm{const}$ — семейство эллипсов:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch}C_1\cos\theta, \\ y &= \operatorname{sh}C_1\sin\theta, \end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{x}{\operatorname{ch}C_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\operatorname{sh}C_1}\right)^2 = 1$$

Вторая координатная кривая получается при $\theta = C_2 = \mathrm{const}$ — семейство гипербол:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch}\varphi\cos C_2, \\ y &= \operatorname{sh}\varphi\sin C_2, \end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{x}{\cos C_2}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin C_2}\right)^2 = 1$$

Координатные кривые эллиптической системы координат



Эллипсы:

$$\left(\frac{x}{\operatorname{ch}C_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\operatorname{sh}C_1}\right)^2 = 1.$$

Гиперболы:

$$\left(\frac{x}{\cos C_2}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin C_2}\right)^2 = 1.$$

Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система координат связана с декартовой следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det\{J\} = r.$$

Поле базисных векторов:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = J^T J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сферическая система координат

Сферическая система координат связана с декартовой следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\theta, \\ z &= r\sin\theta \end{aligned} \quad J = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \quad \det\{J\} = r^2\cos\varphi$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sin\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos\theta \end{pmatrix}$$

Список литературы

1. Зорич В. А. Математической анализ. Т. 1. — 5-е изд. — Москва : МЦНМО, 2007. — 664 с. — ISBN 5940570569.

5. Псевдоевклидовы пространства

Евклидово пространство

Определение 36. Линейное пространство E над $\mathbb{R}$ называется **евклидовым**, если на E задана функция $(\cdot,\cdot)\colon E\times E\to\mathbb{R}$ и для любых векторов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in E$ и скаляров $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ выполняются следующие свойства:

1. $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{c}) + (\mathbf{b},\mathbf{c})$,

2. $(\alpha\mathbf{a},\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$,

3. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$ — симметричность,

4. $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0 \ \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ — положительная-определенность (дефинитность).

Функция $(\cdot, \cdot)\colon E \times E \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением векторов.

- Из (1) и (3) следует $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$.
- Из (2) и (3) следует $(\mathbf{a}, \beta\mathbf{b}) = \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Скалярное произведение, следовательно, является билинейной формой, так как обладает свойством линейности по обоим своим аргументам (билинейность = двухлинейность):

$$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$
$$(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Условие (4) позволяет гарантировать, что длина вектора, определяемая по следующей формуле:

$$\|\mathbf{a}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})},$$

будет всегда больше 0 для всех векторов, не равных $\mathbf{0}$.

Если в пространстве E задан базис $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum\limits_{i=1}^{n} b^i \mathbf{e}_i$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) a^i b^j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} a^i b^j, \text{ где } g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Коэффициенты $[g_{ij}]$, записанные в виде матрицы $G = [g_{ij}]$, в алгебре называют матрицей Грама, а в геометрии — римановым метрическим тензором или просто римановой метрикой. В строгом смысле слова G не матрица, а ковариантный тензор валентности (ранга) 2.

Тем не менее, G можно рассматривать в виде квадратной матрицы:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

Свойство (3) налагает на матрицу требование симметричности: $G^T = G$.

В E всегда существует базис, называемый ортонормированным, в котором G принимает вид единичной матрицы:

$$G = [\delta_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

При ортонормированном базисе скалярное произведение принимает наиболее простой вид:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} a^i b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i b^i = a^1 b^1 + \ldots + a^n b^n.$$

Эрмитово (унитарное) пространство

Определение 37. Линейное пространство E над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется эрмитовым или унитарным, если на E задана функция $(\cdot,\cdot)\colon E\times E\to\mathbb{C}$ и для любых векторов $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in E$ и скаляров $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ выполняются следующие свойства:

1. $(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w})=(\mathbf{u},\mathbf{w})+(\mathbf{v},\mathbf{w})$,
2. $(\alpha\mathbf{u},\mathbf{v})=\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})$,
3. $(\mathbf{u},\mathbf{v})=\overline{(\mathbf{v},\mathbf{u})}$ — эрмитовость (черта сверху означает комплексное сопряжение),
4. $(\mathbf{u},\mathbf{u})>0\,\forall\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ — положительная-определенность (дефинитность).

Функция $(\cdot,\cdot)\colon E\times E\to\mathbb{C}$ называется эрмитовым или **унитарным произведением** векторов.

- Из (1) и (3) следует $(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{u},\mathbf{w})$.
- Из (2) и (3) следует $(\mathbf{u},\beta\mathbf{v})=\overline{\beta}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Эрмитово произведение, следовательно, является полуторалинейной формой [1, Гл. 3, §2, п. 1] на комплексном векторном пространстве, так как обладает свойствами линейности по первому аргументу и полулинейности по второму при фиксированном первом:

$$(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v},\mathbf{w})=\alpha(\mathbf{u},\mathbf{w})+\beta(\mathbf{v},\mathbf{w}),$$
$$(\mathbf{u},\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w})=\overline{\alpha}(\mathbf{u},\mathbf{w})+\overline{\beta}(\mathbf{v},\mathbf{w}).$$

Полная линейность по первому аргументы и половинная линейность (полулинейность) по второму аргументу в сумме дает полуторную линейность (полуторалинейность).

Термин «эрмитовость» произошел от фамилии французского математика Шарля Эрмита (Charles Hermite, 1822–1901)

Условие эрмитовости (3) необходимо, чтобы вновь можно было определить длину вектора как норму:

$$\|\mathbf{v}\|\overset{\text{def}}{=}\sqrt{(\mathbf{v},\mathbf{v})}.$$

Если вместо эрмитовости оставить симметричность, то получим, например, следующий неприятный факт:

$$\|i\mathbf{v}\|^2=(i\mathbf{v},i\mathbf{v})=ii(\mathbf{v},\mathbf{v})=i^2\|\mathbf{v}\|^2=-\|\mathbf{v}\|^2\leqslant 0.$$

С условием эрмитовости квадрат длины не сможет стать отрицательным:

$$\|i\mathbf{v}\|^2=(i\mathbf{v},i\mathbf{v})=i\overline{i}(\mathbf{v},\mathbf{v})=-i^2\|\mathbf{v}\|^2=+\|\mathbf{v}\|^2\geqslant 0.$$

Если в пространстве E задан базис $\langle\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$ и $\mathbf{u}=\sum\limits_{i=1}^n u^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{v}=\sum\limits_{i=1}^n v^i\mathbf{e}_i$, то:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)u^i\bar{v}^j=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}u^i\bar{v}^j,\ \text{где } g_{ij}=(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j).$$

Обратите внимание на комплексное сопряжение над компонентами вектора $\mathbf{v}$.

На коэффициенты g_{ij} свойство эрмитовости налагает требование следующего вида:

$$g_{ij} = \bar{g}_{ji},$$

что в матричном виде выглядит как взятие комплексного сопряжения от каждого элемента матрицы и дальнейшее ее транспонирование (или в обратном порядке):

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} & \cdots & \bar{g}_{1n} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} & \cdots & \bar{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{g}_{n1} & \bar{g}_{n2} & \cdots & \bar{g}_{nn} \end{bmatrix}^T \iff G = \bar{G}^T \overset{\text{not}}{=} G^\dagger \overset{\text{not}}{=} G^*.$$

Для этой операции существует специальный термин — эрмитово сопряжение и обозначение в виде $\dagger$: $G^\dagger$. Также можно встретить обозначение в виде звездочки: $*$, которым также часто обозначают операцию транспонирования. Для если коэффициенты матрицы — действительные числа, то эрмитово сопряжение становится просто транспонированием.

Пространство с индифинитной метрикой

Определение 38. Линейное пространство E над $\mathbb{R}$ называется пространством с индефинитной метрикой, если на E задана функция $(\cdot,\cdot)\colon E \times E \to \mathbb{R}$ и для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E$ и скаляров α, β выполняются следующие свойства:

1. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$,
2. $(\alpha \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ — симметричность.

Из определения евклидова пространства убрали требование положительной определенности скалярного произведения, оно стало неопределенным (индефинитным).

По прежнему скалярное произведение записывается через метрический тензор, однако он теперь не обязательно римановый т.е. не обязательно положительно-определенный:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} a^i b^j.$$

Ортонормированный базис с индефинитной метрикой

В силу отсутствия требования положительной определенности скалярного произведения, теперь в ортонормированном базисе матрица G в общем случае имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q})$$

Подробности см. «Канонический вид квадратичной формы» [1, Гл. 1, §4, п. 6] или «Приведение квадратичной формы к главным осям» [1, Гл. 3, §3, п. 4])

Псевдоевклидово пространство

Рассмотрим индефинитный метрический тензор:

$$G = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q}), \quad p + q = n.$$

В силу закона инерции билинейной формы[1] числа p и q сохраняются при переходе из одного ортогонального базиса в другой. Говорят, что g_{ij} — псевдориманова метрика типа (p, q), если $q \geqslant 1$, а пространство в этом случае называется псевдоевклидовым.

Псевдоевклидово пространство в этом случае принято обозначать как $E^n_{p,q}$, а скалярное произведение как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{p,q} = a^1b^1 + a^2b^2 + \dots + a^pb^p - a^{p+1}b^{p+1} - a^{p+2}b^{p+2} - \dots - a^{p+q}b^{p+q} = \sum_{i=1}^{p} a^ib^i + \sum_{i=p+1}^{p+q} a^ib^i.$$

Также часто используют понятие сигнатуры метрики, указывая количество плюсов и минусов на диагонали метрического тензора:

$$(\underbrace{+, +, +, \dots, +}_{p}, \underbrace{-, -, -, \dots, -}_{q}), \quad p + q = n.$$

Классы векторов в псевдоевклидовом пространстве

Как и в обычном евклидовом пространстве длина вектора **a** в пространстве $E^n_{p,q}$ определяется по формуле

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})_{p,q}}.$$

Однако длины ненулевых векторов в $E^n_{p,q}$ могут быть положительными, нулевыми или мнимыми.

Множество всех классов векторов разбивается на три непересекающихся подкласса.

[1] Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. Линейная алгебра. Москва : МЦНМО, 2009. 368 с., Гл. 1, §4, п. 7.

- $(\mathbf{a},\mathbf{a})_{p,q} < 0$ — времениподобные векторы (чисто мнимая длина);
- $(\mathbf{a},\mathbf{a})_{p,q} = 0$ — световые или изотропные векторы (нулевая длина);
- $(\mathbf{a},\mathbf{a})_{p,q} > 0$ — пространственно-подобные векторы (вещественная длина).

Важно, что все эти векторы не равны $\mathbf{0}$ то есть имеют ненулевые компоненты, что в случае евклидова и эрмитова пространств запрещается свойством (4).

Пространство Минковского

Пространство $E^4_{1,3}$ особо важно, так как это пространство используется в специальной теории относительности (СТО) и называется пространством Минковского в честь немецкого математика Германа Минковского (Hermann Minkowski, 1864–1909).

В современной формулировке первый постулат (аксиома) специальной теории относительности гласит, что пространственно-временной континуум является пространством Минковского, то есть время является одной из координат 4-х мерного псевдоевклидова пространства.

$$\begin{array}{c|cccc} \cdot & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \hline \mathbf{e}_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{e}_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \Longleftrightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Метрический тензор G называется метрикой Минковского.

В СТО принято использовать греческие буквы в качестве индексов $\alpha = 0, 1, 2, 3$ $\delta\alpha\alpha'$. Любой вектор $\mathbf{x} \in E^4_{1,3}$ можно записать как

$$\mathbf{x} = x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = (ct, x, y, z)^T,$$

где c — скорость света, которую часто принимают за $c = 1$ (геометрическая система единиц).

$$\mathbf{x} = t\mathbf{e}_0 - x^1\mathbf{e}_1 - x^2\mathbf{e}_2 - x^3\mathbf{e}_3, \;\; \|\mathbf{x}\|^2 = t^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Любая точка P с радиус-вектором $\mathbf{p} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ в пространстве Минковского называется событием, а расстояние между точками $\|P_1 - P_2\| = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|$, вычисляемое по метрике Минковского

$$\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|^2 = (x^0_1 - x^0_2)^2 - (x^1_1 - x^1_2)^2 - (x^2_1 - x^2_2)^2 - (x^3_1 - x^3_2)^2,$$

называется пространственно-временным интервалом между событиями P_1 и P_2.

Мировая линия

Если в $E^4_{1,3}$ рассмотреть параметрически заданную кривую $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$, то физической интерпретацией в рамках СТО будет мировая линия материальной частицы. В качестве параметра используется τ, так как время t является не параметром, а координатой (это не собственное время!).

$$\boldsymbol{\gamma}(\tau) = \begin{pmatrix} t(\tau) \\ x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^T \Longrightarrow \mathrm{d}l^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau^2$$

$$\mathrm{d}l^2 = \left(\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right)\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

Длина дуги в $E^4_{1,3}$ будет вычисляться следующим образом:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\tau), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\tau))}\mathrm{d}\tau$$

Так как скалярное произведение может иметь любой знак, то длина дуги мировой линии может быть действительной, мнимой или равной нулю. При этом равенство нулю не гарантирует, что кривая вырождается в точку.

Псевдосфера

Рассмотрим пространственно-подобные векторы $\mathbf{x}$. По определению, это такие векторы, что

$$\|\mathbf{x}\|^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0.$$

Поверхность, задаваемая уравнением

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2, \;\; a \in \mathbb{R}.$$

называется псевдосферой.

- Псевдосферу в псевдоевклидовом пространстве невозможно изобразить на бумаге/экране так как она мало того, что псевдоевклидова, так еще и четырехмерная.
- Однако, можно сделать трюк: рассмотреть частный случай $E^3_{1,2}$ и нарисовать *модель* псевдосферы в $\mathbb{R}^3$.
- Так мы сможем получить модель псевдосферы.

Модели псевдосферы для пространственно-подобных векторов

Рассмотрим модель псевдосферы

$$t^2 - x^2 - y^2 = a^2 \Longleftrightarrow \left(\frac{t}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

Если x и y ассоциировать с декартовыми осями Ox и Oy, а t с декартовой осью Oz, то мы получим уравнение двуполостного гиперболоида.

Второй постулат специальной теории относительности

Второй постулат СТО чаще всего формулируют следующим образом: скорость света в вакууме одинакова во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Иными словами: никакое материальное тело не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме.

Рассмотрим мировую линию по которой движется некоторое тело в пространстве-времени. Мировая линия задается кривой, с радиус-вектором $\mathbf{r}$ (физики используют $\boldsymbol{\gamma}$):

$$\mathbf{r}(\tau) = (t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))^T, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^T$$

Если наложить требования, что вектор скорости $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}$ должен быть времениподобным или изотропным, то можем записать:

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}\right\|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \geqslant 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2.$$

Разделим обе части неравенства на $\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$:

$$1 \geqslant \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

где правая часть имеет физический смысл пространственной скорости (то, что в физике и подразумевается под скоростью)

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = v^2.$$

Выходит, что величина скорости движения тела не может превышать 1. Если вспомнить, что мы положили $c = 1$, то данное утверждение можно переписать в виде

$$c^2 \geqslant \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

что эквивалентно второму постулату специальной теории относительности.

Модель псевдосферы для изотропных векторов

Отдельно рассмотрим изотропные векторы, которые по определению имеют нулевую длину, запишем это требование для вектора $\mathbf{x} = (t, x, y, z)^T$ в пространстве Минковского:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

- Поверхность, определяемая таким уравнением в псевдоевклидовом пространстве является частным случаем псевдосферы.
- Эту псевдосферу также нельзя изобразить (находясь в здравом уме).

- Однако, можно выполнить тот же трюк и визуализировав ее в виде конуса в обычном евклидовом пространстве (в декартовых координатах) $\mathbb{R}^3$.

- При этом придется пожертвовать одной размерностью, оставив координаты (t, x, y), так как невозможно изобразить четырехмерное пространство.

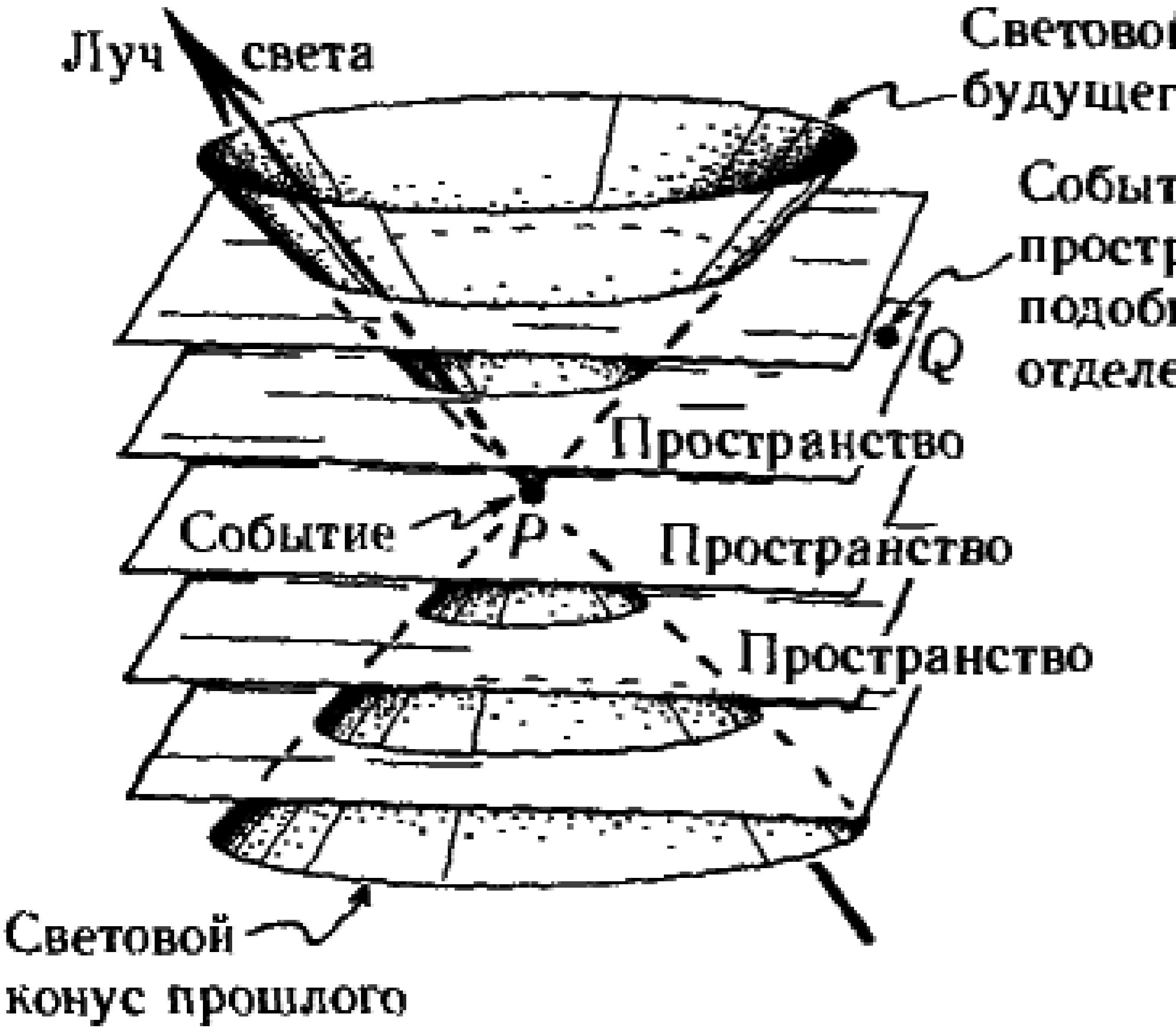
В обычном декартовом пространстве уравнение конуса в каноническом виде выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0.$$

В нашем случае, чтобы визуализировать модель псевдосферы, ось Oz будем использовать в качестве оси времени, а оси Ox и Oy оставим для пространственных координат x и y.

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0.$$

Такая наглядная модель псевдосферы носит название пространственно-временного или светового конуса. Луч света, выпущенный из начала координат будет распространяться по одной из образующих конуса.



Псевдосфера и геометрия Лобачевского

Второй основной постулат СТО гласит: никакой сигнал не может распространятся быстрее скорости света c. Математически это означает:

$$c\mathrm{d}t > \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}, \quad (\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))_{4,1} < 0.$$

Это означает, что каждый касательный вектор к мировой линии является времениподобным. Отсюда следует, что мировая линия имеет чисто мнимую длину.

Определение 39. В псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_{p,q}$ множество точек, удаленных от некоторой точки на расстояние ρ назовем псевдосферой индекса q: S^{p-1}_q. Радиус сферы ρ может быть действительной, мнимой или нулевой величиной.

Псевдосфера нулевого радиуса описывается уравнением второго порядка:

$$-\sum_{i=1}^{q}(x^i)^2+\sum_{j=1}^{p}(x^j)^2=0.$$

где $x^1,\dots,x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, где можно смоделировать псевдоевклидово пространство. Псевдосфера нулевого радиуса совпадает с так называемым изотропным конусом.

Рассмотрим несколько частных случаев пространства $\mathbb{R}^n_{p,q}$. Для пространства $\mathbb{R}^2_{1,1}$ псевдоокружности действительного и мнимого радиусов являются гиперболами и задаются формулами:

$$-(x^1)^2+(x^2)^2=\alpha^2 \text{ и } -(x^1)^2+(x^2)^2=-\alpha^2,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

В случае пространства $\mathbb{R}^3_{2,1}$

1. $\rho=0$, $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$ — конус;
2. $\rho\in\mathbb{R}$, $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=+\alpha^2$ — однополостный гиперболоид;
3. $\rho\in\mathbb{C}$, $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=-\alpha^2$ — двуполостный гиперболоид.

Рассмотрим стереографическую проекцию двуполостного гиперболоида. Образ правой полости гиперболоида покрывает не всю плоскость YOZ, а только внутренность диска радиуса α:

$$y^2+z^2<\alpha^2.$$

Образ левой полости покрывает внешность окружности

$$y^2+z^2=\alpha^2.$$

Северный полюс N переходит в $+\infty$ (u^1,u^2).

Лемма 40. *Пусть* $P=(x,y,z)$, $f(P)=(u^1,u^2)$ *тогда*

$$x=\alpha\frac{|\mathbf{u}|^2+\alpha^2}{\alpha^2-|\mathbf{u}|^2}, y=\frac{2\alpha^2u^1}{\alpha^2-|\mathbf{u}|^2}, z=\frac{2\alpha^2u^2}{\alpha^2-|\mathbf{u}|^2}.$$

$|\mathbf{u}|^2=(u^1)^2+(u^2)^2$ *и* $\mathbf{u}=(u^1,u^2)$

Лемма 41. *Координаты* (u^1,u^2) *меняющиеся в открытом диске* $(u^1)^2+(u^2)^2<\alpha^2$ *задают регулярную систему координат на правой полости гиперболоида, то есть стереографическая проекция задает регулярные координаты* $(u^1,u^2)\leftrightarrow(x,y,z)$ *так как* x *выражается через* y,z, *то можно считать* $(y,z)\to(u^1,u^2)$.

Доказательство. Необходимо найти определитель матрицы Якоби

$$\det J=\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u^1,u^2)}=4\alpha^4\frac{\alpha^2|\mathbf{u}|^2}{(\alpha^2-|\mathbf{u}|^2)^3}$$

Найдем вид метрического тензора в стереографической проекции (в координатах u^1 и u^2). Исходный вид

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \alpha\frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}, \quad y = \frac{2\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{4\alpha^3 u^1}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} & \dfrac{4\alpha^3 u^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} \\ \dfrac{2\alpha^2(\alpha^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2)}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} & \dfrac{4\alpha^2 u^1 u^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} \\ \dfrac{4\alpha^2 u^1 u^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} & \dfrac{2\alpha^2(\alpha^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2)}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{G}(u^1,u^2) = \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2)}\right)^T G(x,y,x)\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u^1,u^2)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{4\alpha^4}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)} & 0 \\ 0 & \dfrac{4\alpha^4}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)} \end{pmatrix} = G(u^1,u^2)$$

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\alpha^4}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2}((\mathrm{d}u^1)^2 + (\mathrm{d}u^2)^2).$$

Преобразования Лоренца

Рассмотрим двумерное пространство Минковского. Метрический тензор в данном пространстве имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Дифференциал дуги имеет вид $\mathrm{d}l^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2$. По традиции индексация начинается с нуля, для того, чтобы выделить время-подобную координату.

Найдем такое линейное преобразование координат, которое оставляет метрику неизменной (другими словами сохраняет длины). Это преобразование будет эквивалентно преобразования поворота в декартовой системе координат.

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Задача заключается в нахождении такой матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

для которой выполняется соотношение

$$G = \mathrm{J}^T \cdot G \cdot \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

В случае линейного преобразования матрица Якоби данного преобразования совпадает с матрицей самого преобразования (матрица Якоби по определению является главной линейной частью любого преобразования).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ab = cd, & a = \pm \operatorname{ch} \psi, \\ a^2 - c^2 = 1, & c = \pm \operatorname{sh} \psi, \\ b^2 - d^2 = -1. & \pm b \operatorname{ch} \psi = \pm d \operatorname{sh} \psi \Rightarrow b = \pm d \operatorname{th} \psi. \end{cases}$$

Подставим $b = \pm d \operatorname{th} \psi$ в $b^2 - d^2 = -1$ и получим

$$(\operatorname{th}^2 \psi - 1) d^2 = -1, \;\; d^2 = 1/(1 - \operatorname{th}^2 \psi), \;\; d = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}}$$

$$b = \pm \frac{\operatorname{th} \psi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}}$$

Матрица линейного преобразования в результате примет следующий вид

$$A = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & \pm \dfrac{\operatorname{th} \psi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} \\ \operatorname{sh} \psi & \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} \end{pmatrix}$$

она имеет 4 компоненты связанности. Ее можно упростить, используя тот факт, что

$$\frac{\operatorname{th} \psi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} = \operatorname{sh} \psi, \;\; \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \psi}} = \operatorname{ch} \psi$$

$$A = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & \pm \operatorname{sh} \psi \\ \operatorname{sh} \psi & \pm \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix}$$

Список литературы

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. Линейная алгебра. — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574545.

6. Тензорная алгебра

6.1. Контравариантные и ковариантные векторы. Тензоры

Тензорная нотация

В дифференциальной геометрии, тензорной алгебре и анализе принято использовать *тензорную нотацию* или иначе правило суммирования Эйнштейна [1, с. 17].

Правило Эйнштейна

Если в выражении одна и та же буква встречается в качестве верхнего и нижнего индексов, то по данному индексу предполагается суммирование. Знак суммы Σ при этом не ставится.

$$A^i_j x_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} A^i_j x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}g^i(x^j)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g^i(x^j)}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}g^i(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^i(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ij}x^i y^j \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x^i y^j$$

В последнем примере результатом выражения $g_{ij}x^i y^j$ является скаляр, так как все индексы участвуют в суммировании. Рассмотрим более сложные примеры.

$$M^{j_2 j_3} = T^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} G^{j_1}_{i_1} v^{j_1} p_{i_2} q_{i_3} \leftrightarrow \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} T^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} G^{j_1}_{i_1} v^{j_1} p_{i_2} q_{i_3}$$

- Если пределы суммирования у индексов разные, то тензорная нотация не тах эффективна. Однако в дифференциальной геометрии такое встречается редко, если вообще встречается.

- При использование знаков Σ можно не делать разницы между верхними и нижними индексами. В случае тензорной нотации делать это различие необходимо.

- Разница между верхними и нижними индексами является не просто прихотью в обозначениях, а отражает геометрические свойства объектов. Разберем это подробнее позже, когда будем изучать тензоры.

Забегая вперед упомянем некоторую терминологию:

- величины с одним верхним индексом — компоненты контравариантных векторов (v^i);

- величины с одним нижним индексом — компоненты ковариантных векторов p_i;

- величины с одним нижним индексом и одним верхним — матрицы A^i_j;

- все остальные варианты называются тензорами.

Линейная форма [2, с. 33]

Рассмотрим линейное пространство $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ над полем R (в нашем курсе $\mathbb{R}$).

Определение 42. Отображение $f\colon L \to R$ обладающее свойствами линейности

- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$.
- $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ где и $\alpha \in R$.

называется *линейной функцией* на L (линейным функционалом, линейной формой, 1-формой).

Пространству L можно сопоставить другое векторное пространство L^*, находящееся с L в специальном отношении двойственности или сопряженности. Рассмотрим как это делается.

Компоненты линейной формы

Пусть $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ — базис в L, что коротко записывается как:

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Любой вектор $\mathbf{x}$ можно записать через компоненты в этом базисе:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n = x^i \mathbf{e}_i,\ i = 1 \dots, n.$$

Подействуем линейным функционалом f на вектор $\mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}) = x^1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x^n f(\mathbf{e}_n) = x^1 f_1 + \dots + x^n f_n = x^i f_i,\ i = 1, \dots, n.$$

Здесь $f_i = f(\mathbf{e}_i),\ i = 1, \dots, n$ — набор скаляров (компонент), зависящих только от выбора базиса.

Обратите внимание, что нижний индекс компонент получился естественным образом, так как в выражении $f(\mathbf{e}_i)$ у $\mathbf{e}_i$ индекс внизу.

Справедливо и обратное: если задать базис $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и произвольный набор скаляров $(f_1, \dots, f_n)$ такой, что $f_i \in R, \forall i = 1, \dots n$, то этот набор однозначно определяет линейную функцию $f\colon L \to R$.

$$(f_1, \dots, f_n) \leftrightarrow f.$$

Преобразование компонент формы при замене базиса

В определении линейной функции нет упоминания о базисах, то есть определение линейной функции инвариантно относительно преобразования координат (базисов).

Найдем правила изменения компонент $f_i = f(\mathbf{e}_i)$ при переходе от одного базиса к другому. Пусть на L заданно два базиса: $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\langle \mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'} \rangle$:

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'} \rangle$$

Второй базис для краткости будем называть штрихованным и отличать от первого по штрихованным индексам. Любой вектор $\mathbf{e}_{j'}$ можно выразить через $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}_{j'} = a^1_{j'}\mathbf{e}_1 + ... + a^n_{j'}\mathbf{e}_n = a^i_{j'}\mathbf{e}_i \ \ j = 1, 2, ..., n$$

Обратите внимание, что штрихами помечаются индексы, а не буквы $\mathbf{e}$!

Последняя формула справедлива, так как $\mathbf{e}_{j'}$ принадлежит L и может быть выражен через любой базис пространства L также как и любой другой вектор. Коэффициенты $a^i_{j'}$ задают матрицу линейного преобразования базиса

$$A = [a^i_{j'}] = \begin{pmatrix} a^1_{1'} & a^1_{2'} & ... & a^1_{n'} \\ a^2_{1'} & a^2_{2'} & ... & a^2_{n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_{1'} & a^n_{2'} & ... & a^n_{n'} \end{pmatrix}$$

Произвольный вектор $\mathbf{x}$ можно представить как через базис $\langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \rangle$, так и через $\langle \mathbf{e}_{1'}, ..., \mathbf{e}_{n'} \rangle$:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + ... + x^n\mathbf{e}_n = x^{1'}\mathbf{e}_{1'} + ... + x^{n'}\mathbf{e}_{n'}.$$

Линейный функционал f может действует на вектор $\mathbf{x}$ независимо от того, в каком базисе вектор представлен:

$$f(\mathbf{x}) = x^1 f(\mathbf{e}_1) + ... + x^n f(\mathbf{e}_n) = x^1 f_1 + ... + x^n f_n = x^i f_i,$$
$$f(\mathbf{x}) = x^{1'} f(\mathbf{e}_{1'}) + ... + x^{n'} f(\mathbf{e}_{n'}) = x^{1'} f_{1'} + ... + x^{n'} f_{n'} = x^{i'} f_{i'}.$$

Или в матричном виде:

$$x^i f_i = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad x^{i'} f_{i'} = \begin{pmatrix} f_{1'} & f_{2'} & ... & f_{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}$$

Скаляры $(f_1, ..., f_n)$ и $(f_{1'}, ..., f_{n'})$ представляют собой компоненты одного и того же линейного функционала в разных базисах. Найдем как они связаны.

$$f_{j'} = f(\mathbf{e}_{j'}) = f(a^i_{j'}\mathbf{e}_i) = a^i_{j'} f(\mathbf{e}_i) = a^i_{j'} f_i = a^1_{j'} f_1 + ... + a^n_{j'} f_n \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ f_{j'} = a^1_{j'} f_1 + ... + a^n_{j'} f_n = a^i_{j'} f_i, \text{ где } i, j' = 1, ..., n.$$

Мы получили закон преобразования компонент $f \in L^*$:

$$f_{j'} = a^1_{j'} f_1 + ... + a^n_{j'} f_n = a^i_{j'} f_i.$$

Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} f_{1'} & f_{2'} & ... & f_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_{1'} & a^1_{2'} & ... & a^1_{n'} \\ a^2_{1'} & a^2_{2'} & ... & a^2_{n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_{1'} & a^n_{2'} & ... & a^n_{n'} \end{pmatrix}$$

Само преобразование осуществляется той же матрицей, что и преобразование базисных векторов пространства L:

$$\mathbf{e}_{j'} = a^1_{j'}\mathbf{e}_1 + ... + a^n_{j'}\mathbf{e}_n = a^i_{j'}\mathbf{e}_i$$

Из формул явно видно, что базисные векторы и коэффициенты линейной формы при замене базиса меняются по одному и тому же правилу, то есть согласовано (когредиентно):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{j'} &= a^1_{j'}\mathbf{e}_1 + ... + a^n_{j'}\mathbf{e}_n = a^i_{j'}\mathbf{e}_i, \\ f_{j'} &= a^1_{j'}f_1 + ... + a^n_{j'}f_n = a^i_{j'}f_i. \end{aligned}$$

Дуальное пространство

Определение 43. Линейные формы формируют векторное пространство L^* *дуальное* (двойственное, сопряженное [2, с. 34]) к пространству L, на элементы которого они действуют. Операции умножения на скаляр и сложения определяются как:

- $(f+g)(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in L$.
- $(\alpha f)(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \alpha f(\mathbf{x})$, $\alpha \in R$.
- Элементы из L^* называют *ковариантными* векторами (*ковекторами*, *формами*).
- Элементы из L называют *контравариантными* векторами (или просто *векторами*).

Выше мы показали, что если в L задан базис $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ то существует изоморфизм

$$\Phi \colon f \leftrightarrow (f_1, \ldots, f_n) \ni \mathbb{R}^n, \ \dim L^* = \dim \mathbb{R}^n = n$$

Иначе L^* изоморфно пространству n-строк, а L — n-столбцов.

Базис сопряженного пространства

Введем базис в дуальном пространстве L^*, согласованным с L образом. Для этого рассмотрим набор линейных функций (форм) $e^i \in L^*$, $i = 1\ldots, n$ таких, что

$$e^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j. \end{cases} \quad e^i(\mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} e^1(\mathbf{e}_1) & e^1(\mathbf{e}_2) & e^1(\mathbf{e}_3) & \ldots & e^1(\mathbf{e}_n) \\ e^2(\mathbf{e}_1) & e^2(\mathbf{e}_2) & e^2(\mathbf{e}_3) & \ldots & e^2(\mathbf{e}_n) \\ e^3(\mathbf{e}_1) & e^3(\mathbf{e}_2) & e^3(\mathbf{e}_3) & \ldots & e^3(\mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^n(\mathbf{e}_1) & e^n(\mathbf{e}_2) & e^n(\mathbf{e}_3) & \ldots & e^n(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

это равенство полностью определяет все множество функций $\langle e^1, \ldots, e^n \rangle$. Используя его, мы можем, например, вычислить значение формы e^i от некоторого вектора $\mathbf{x} \in L$:

$$e^i(\mathbf{x}) = e^i(x^j\mathbf{e}_j) = x^j e^i(\mathbf{e}_j) = x^j \delta^i_j = x^1\delta^i_1 + x^2\delta^i_2 + \ldots + x^n\delta^i_n = x^i.$$

Теорема 44. *Пусть L — векторное пространство размерности n над полем R. Тогда двойственное пространство L^* также имеет размерность n. Если $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ — базис в L, а $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ — линейные функции, такие что*

$$e^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j,\ i, j = 1, \dots, n,$$

то $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ — базис в L^*.

Определение 45. Базис $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ пространства L^* называется двойственным (дуальным, взаимным) для данного базиса $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ пространства L

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle,\ L^* = \langle e^1, \dots, e^n \rangle.$$

Замечания по обозначениям

При написании от руки элементы пространства L^* обозначают буквой с волной над ней, например:

$$\tilde{u}, \tilde{x},$$

а элементы из L буквой со стрелкой:

$$\vec{u}, \vec{x}.$$

На печати, для элементов из пространства L, обычно используют полужирный шрифт:

$$\mathbf{x}$$

или прямой рубленный шрифт:

$$\mathrm{x}.$$

Для элементов из L^* обычный шрифт

$$x \in L^*.$$

Дуальные базисы обоих пространств обозначаются буквой e. В случае пространства L^* используется обычный шрифт с верхним индексом

$$e^i, i = 1, \dots, n,$$

а в случае пространства L используется жирный шрифт с нижним индексом

$$\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$$

Использование нотации

Контравариантные векторы можно трактовать, как функции от ковариантных векторов (форм), а ковариантные векторы (формы), как функции от контравариантных.

Вектор — функция от формы, а форма — функция от вектора.

Для того, чтобы подчеркнуть их дуальное отношение, часто используют следующую форму записи:

$$(f, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),\ f \in L^*,\ \mathbf{x} \in L,$$
$$(f, \mathbf{x})\colon L^* \times L \to R,$$
$$f = f_1 e^1 + \ldots + f_n e^n \in L^*,$$
$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x^n \mathbf{e}_n \in L.$$

Для вычисления $(f, \mathbf{x})$ достаточно знания компонент f и $\mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}) = f(x^i \mathbf{e}_i) = x^1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + x^n f(\mathbf{e}_n),$$
$$f(\mathbf{e}_j) = f_i e^i(\mathbf{e}_j) = f_1 \underbrace{e^1(\mathbf{e}_j)}_{\delta^1_j} + \ldots + f_n \underbrace{e^n(\mathbf{e}_j)}_{\delta^n_j} = f_i \delta^i_j = f_j \ \Rightarrow$$
$$f(\mathbf{e}_1) = f_1,\ f(\mathbf{e}_2) = f_2,\ \ldots,\ f(\mathbf{e}_n) = f_n,$$
$$f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}) = x^1 f_1 + \ldots + x^n f_n = x^j f_j.$$

Компоненты $\mathbf{x}$ вычисляются как

$$x^i = (e^i, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(e^i),$$

а компоненты f как

$$f_i = (f, \mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i).$$

Приведем две цепочки равенств, позволяющих лучше освоить введенные обозначения:

$$x^i = (e^i, x^j \mathbf{e}_j) = x^j (e^i, \mathbf{e}_j) = x^j e^i(\mathbf{e}_j) = x^j \delta^i_j = x^i,$$
$$f_i = (f_j e^j, \mathbf{e}_i) = f_j (e^j, \mathbf{e}_i) = f_j e^j(\mathbf{e}_i) = f_j \delta^j_i = f_i.$$

Напомним лишний раз, что знаки суммирования в тензорной нотации опускаются, а суммирование происходит по нижним и верхним индексам.

По крайней мере для $\mathrm{dim} L < \infty$ существует изоморфизм $L^* \leftrightarrow L$ и $L^{**} \leftrightarrow L$.

Теорема 46. *Для всякого базиса в L^* существует однозначно определенный двойственный ему базис в L.*

Пространство, двойственное к евклидовому

Рассмотрим следующие пространства:

- E — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, размерность $\dim E = n$, базис $E = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$.
- E^* — двойственное к E пространство, $\dim E^* = n$ и базис $E^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \ldots, \tilde{e}^n \rangle$

С помощью скалярного произведения, определенного в E можно каждому вектору $\mathbf{v} \in E$ поставить в соответствие однозначным образом ковектор (форму) из E^*.

Значение скалярного произведения двух векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ задается метрическим тензором G с компонентами g_{ij}, где $i, j = 1, \ldots, n$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} u^i v^j = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}),\ \ (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij}$$

Ковариантные координаты вектора

Можно записать и через матричные операции:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T G\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u^1 & \dots & u^n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^n \end{pmatrix}$$

но следует иметь ввиду, что G не матрица в строгом смысле (почему?).

Рассмотрим скалярное произведения базисного вектора $\mathbf{e}_i$ на произвольный вектор $\mathbf{v} \in E$.

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{v}) = (\mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = v^j(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = v^j g_{ij}$$

Выражение $v^j g_{ij}$ дает n чисел, которые мы обозначим как v_i и назовем ковариантными координатами вектора $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) &= v^j g_{1j} = v_1, \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) &= v^j g_{2j} = v_2, \\ &\vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{v}) &= v^j g_{nj} = v_n. \end{aligned}$$

Скалярное произведение как ковектор из E^*

Числа $v_1, v_2, \dots, v_n$ являются компонентами ковектора из E^*, а скалярное произведение ставит в соответствие вектору $\mathbf{v}$ некоторый ковектор $\tilde{v}$:

$$\tilde{v} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{v})\tilde{e}^i = \underbrace{(\mathbf{e}_1, \mathbf{v})}_{v_1} \tilde{e}^1 + \dots + \underbrace{(\mathbf{e}_n, \mathbf{v})}_{v_n} \tilde{e}^n = v_i \tilde{e}^i$$

Можно интерпретировать скалярное произведение, как линейную функцию от вектора, если фиксировать один из аргументов:

$$g(\mathbf{v}, \bullet) = (\mathbf{v}, \bullet) \colon E \to \mathbb{R}$$

По определению ковектор — это линейная функция от вектора. Подставили один аргумент в скалярное произведения и осталось еще место для второго. Была функция от двух векторов, а стала функция от одного вектора (место для которого обозначено как $\bullet$).

Базис $\langle \tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n \rangle$ определяется также скалярным произведением следующим образом, если в качестве вектора $\mathbf{v}$ выбрать один из $\mathbf{e}_i$ ортогонального базиса $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots, \mathbf{e}_n \rangle$:

$$\tilde{e}^j = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\tilde{e}^i = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j)\tilde{e}^1 + \dots + (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j)\tilde{e}^n = \delta_{ij}\tilde{e}^i = 0 \cdot \tilde{e}^1 + \dots + 1 \cdot \tilde{e}^j + \dots + 0 \cdot \tilde{e}^n = \tilde{e}^j$$

Случай ортонормированного базиса

В случае ортонормированного базиса $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ разница ковариантными и контравариантными компонентами вектора становится формальностью. Так как

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} u^i v^j = \delta_{ij} u^i v^j = u^i v^j$$

то

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) = v^j \delta_{1j} = v^1 = v_1, \\
&(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) = v^j \delta_{2j} = v^2 = v_2, \\
&\vdots \\
&(\mathbf{e}_n, \mathbf{v}) = v^j \delta_{nj} = v^n = v_n.
\end{aligned}$$

Получается, что значения компонент $\tilde{v}$ и $\mathbf{v}$ совпадают и вся разница лишь в том, записаны ли индексы вверху или внизу буквы. Это позволяет игнорировать различие между ковариантными и контравариантными индексами, что и делается в курсе линейной алгебры.

Определение тензора

Определение 47. Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, L — векторное пространство над $\mathbb{R}$, L^* — сопряженное к L пространство, p и q — целые неотрицательные числа. Рассмотрим декартово произведение следующего вида:

$$L^p \times (L^*)^q = \underbrace{L \times L \times \dots \times L}_{p} \times \underbrace{L^* \times L^* \times \dots \times L^*}_{q}.$$

Всякое отображение $T\colon L^p \times (L^*)^q \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами полилинейности называется *тензором* на L типа (p, q) и валентности (ранга) $p + q$. Говорят, что T смешанный тензор p раз ковариантный и q раз контравариантный.

Обозначается тензор большими латинскими буквами:

$$T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q),\ p + q \leqslant n.$$

Полилинейность означает, что для любого $i = 1, \dots, p$ или $j = 1, \dots, q$ выполняются условия линейности:

- $T(\mathbf{v}_1, \dots, \alpha\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) = \alpha T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q)$;
- $T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) = T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) + T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots,$

Аналогичные требования и для аргументов $u_1, \dots, u_q$.

- Тензор можно считать обобщением понятия вектора и матрицы.
- Ближайшим его аналогом являются понятие массива, используемое в программировании. Аналогия станет понятна после введения компонентов тензора. Стоит иметь ввиду, что эта аналогия не полная.

Тензорное пространство

Совокупность $\mathbb{T}_p^q(L)$ всех тензоров на пространстве L типа (p,q) образует векторное пространство. Если $T, G \in \mathbb{T}_p^q(L)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то под $\alpha T + \beta G$ естественно понимать тензор, определенный формулой

$$(\alpha T + \beta G)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) = \alpha T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) + \beta G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q)$$

Определение тензора

Приведем несколько примеров тензоров среди уже знакомых объектов линейной алгебры:

- тензор валентности $(1,0)$ — линейные формы на L из L^*,
- тензор валентности $(0,1)$ — векторы на L^* из L,
- тензор валентности $(2,0)$ — билинейная форма на L (например, скалярное произведение),
- тензор валентности $(0,2)$ — билинейная форма на L^*,
- тензор валентности $(1,1)$ — матрица $n \times n$, где n — размерность линейного пространства L.

Замечание по определениям

Обратите внимание на порядок аргументов тензора:

$$T(\underbrace{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p}_{\text{векторы}}; \overbrace{u_1, \dots, u_q}^{\text{ковекторы}})$$

- Сначала идут p векторов, а затем q ковекторов.
- Между собой две группы отделяются точкой с запятой.
- Переставлять аргументы в произвольном порядке даже в рамках одной группы в общем случае нельзя.

Частные случаи:

- $A(\mathbf{v}; u)$ — тензор валентности $(1,1)$,
- $A(\mathbf{v}, \mathbf{u};)$ — тензор валентности $(2,0)$,
- $A(; v, u)$ — тензор валентности $(0,2)$.

Точку с запятой можно убрать, если аргументов одного типа нет.

Тензорное произведение

Пусть T — тензор типа (p,q) и G тензор типа (r,s). Введем новый тензор, который обозначим как $T\otimes G$. Этот тензор является полилинейной функцией на декартовом произведении

$$L^p\times(L^*)^q\times L^r\times(L^*)^s=L^{p+r}\times(L^*)^{q+s}$$

и его можно рассматривать как тензор валентности $(p+r,q+s)$.

Определение 48. Бинарная операция $\otimes$ называется тензорным произведением тензоров T и G и определяется следующим соотношением:

$$(T\otimes G)(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{p+r};u_1,\dots,u_{q+s})=T(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_p;u_1,\dots,u_q)\cdot G(\mathbf{v}_{p+1},\dots,\mathbf{v}_{p+r};u_{q+1},\dots,u_{q+s}).$$

Из определения и линейности тензоров следуют следующие два свойства:

- $(\alpha T+\beta G)\otimes H=\alpha T\otimes H+\beta G\otimes H$
- $H\otimes(\alpha T+\beta G)=\alpha H\otimes T+\beta H\otimes G$

Замечания

- Операция тензорного произведения $\otimes$ определена для тензоров произвольных типов.
- Валентность произведения равна сумме валентностей сомножителей: $\operatorname{rank}T=p+q$, $\operatorname{rank}G=r+s$, следовательно $\operatorname{rank}T\otimes G=p+q+r+s$.
- Тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно, но **не коммутативно**: $T\otimes G\neq G\otimes T$.

Пример тензорного произведения

Пусть f, g, h — линейные функции из L^*; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — векторы из L. Можно говорить о трех тензорах f, g, h типа $(1,0)$, а также о тензоре T, получаемом с помощью тензорного произведения:

$$T=f\otimes g\otimes h\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$$

Если $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in L$ и $u,\ v\in L^*$, то

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z};u,v)=f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y})\cdot h(\mathbf{z})\cdot\mathbf{a}(u)\cdot\mathbf{b}(v)$$

Компоненты тензора

Введем понятие компонент тензора. Для этого рассмотрим базисы пространств L и L^*

$$L=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle,\ L^*=\langle e^1,\dots,e^n\rangle.$$

Определение 49. Массив чисел $T^{j_1,j_2,\dots,j_q}_{i_1,i_2,\dots,i_p}$, называются компонентами или координатами тензора T типа (p,q) в заданных базисах $\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\rangle$ и $\langle e^1,\dots,e^n\rangle$ определяются формулой:

$$T^{j_1,j_2,\dots,j_q}_{i_1,i_2,\dots,i_p}\overset{\text{def}}{=}T(\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},\dots,\mathbf{e}_{i_p};e^{j_1},e^{j_2},\dots,e^{j_q}),$$

где все индексы пробегают от 1 до n.

Разложение тензора по базисным тензорам

С помощью тензорного произведения $\otimes$ и базисов $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ сконструируем набор (p, q) тензоров следующего вида:

$$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

Интерпретируя базисные векторы $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и ковекторы $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ как линейные функции на L и L^* соответственно, найдем компоненты рассматриваемого тенора. По определению имеем:

$$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} (\mathbf{e}_{i'_1}, \mathbf{e}_{i'_2}, \dots, \mathbf{e}_{i'_p}; e^{j'_1}, e^{j'_2}, \dots, e^{j'_q}) =$$
$$= (e^{i_1}, \mathbf{e}_{i'_1}) \cdot (e^{i_2}, \mathbf{e}_{i'_2}) \cdot \ldots \cdot (e^{i_p}, \mathbf{e}_{i'_p}) \cdot (\mathbf{e}_{j_1}, e^{j'_1}) \cdot (\mathbf{e}_{j_2}, e^{j'_2}) \cdot \ldots \cdot (\mathbf{e}_{j_q}, e^{j'_q}) =$$
$$= \delta^{i_1}_{i'_1} \cdot \delta^{i_2}_{i'_2} \cdot \ldots \cdot \delta^{i_p}_{i'_p} \delta^{j'_1}_{j_1} \cdot \delta^{j'_2}_{j_2} \cdot \ldots \cdot \delta^{j'_q}_{j_q}.$$

Мы пользовались определением согласованных базисов L и L^*:

$$\mathbf{e}_{i'}(e^i) = e^i(\mathbf{e}_{i'}) = (e^i, \mathbf{e}_{i'}) = \delta^i_{i'}.$$

Построим тензор T как линейную комбинацию всех возможных $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$:

$$T = T^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}.$$

Можно показать, что коэффициенты разложения в этой линейной комбинации будут равны компонентам тензора T:

$$T(\mathbf{e}_{i'_1}, \mathbf{e}_{i'_2}, \dots, \mathbf{e}_{i'_p}; e^{j'_1}, e^{j'_2}, \dots, e^{j'_q}) = T^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} (\mathbf{e}_{i'_1}, \dots, \mathbf{e}_{i'_p}; e^{j'_1}, \dots, e^{j'_q}) =$$
$$T^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p} \delta^{i_1}_{i'_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{i_p}_{i'_p} \delta^{j'_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{j'_q}_{j_q} = T^{j'_1, \dots, j'_q}_{i'_1, \dots, i'_p}.$$

Получили, что $T^{j'_1, \dots, j'_q}_{i'_1, \dots, i'_p}$ — являются компонентами тензора. Это те же самые компоненты тензора, что и $T^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p}$, только индексы перенеобозначенны, что не влияет на их значение.

Размерность пространства $\mathbb{T}^q_p(L)$ равна числу различных базисных векторов и ковекторов

$$\dim \mathbb{T}^q_p = n^{p+q}.$$

Из-за соображений наглядности компоненты тензора следовало бы размещать в виде пространственной кубической матрицы. Размерность куба (гиперкуба) равна валентности тензора T. Вектор-строки, вектор-столбцы и матрицы являются частными случаями таких $(p+q)$ мерных таблиц.

Теорема 50. *Тензор на L типа (p, q) составляют векторное пространство $\mathbb{T}^q_p$ размерности n^{p+q} с базисными тензорами*

$$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

где $\langle \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_q} \rangle = L$, $\langle e^{i_1}, \dots, e^{i_p} \rangle = L^*$. Существует, и притом только один, тензор с наперед заданными компонентами $T^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p}$, которые задают разложение по базису:

$$T = T^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}.$$

Пример набора базисных тензоров

Рассмотрим, какие возможны базисные тензоры $e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes e^{i_3} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2}$ при $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ и $L^* = \langle e^1, e^2 \rangle$. $\dim L = \dim L^* = 2$. Тензоры действует на пространстве $L \times L \times L \times L^* \times L^*$.

$$
\begin{array}{llll}
e^1 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^1 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^2 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
e^2 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, & e^2 \otimes e^2 \otimes e^2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2
\end{array}
$$

Получается $2^{3+2} = 32$ базисных тензора.

Пример компонент тензоров

Рассмотрим для простоты частный случай малой размерности:

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \ L^* = \langle e^1, e^2, e^3 \rangle.$$

Рассмотрим тензор T такой, что:

$$T(\mathbf{v}, \mathbf{u}; w) \colon L \times L \times L^* \to \mathbb{R}.$$

Векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ и ковектор w можно разложить по базисам:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3 = v^i \mathbf{e}_i, \\
&\mathbf{u} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + u^3 \mathbf{e}_3 = u^j \mathbf{e}_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; \\
&w = w_1 e^1 + w_2 e^2 + w_3 e^3 = w_k e^k.
\end{aligned}
$$

Подставляем в тензор и пользуясь линейностью вычисляем:

$$T(v^i \mathbf{e}_i, u^j \mathbf{e}_j; w_k e^k) = v^i u^j w_k T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j; e^k), i, j, k = 1, 2, 3.$$

Если мы будем знать все $T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j; e^k)$, то сможем вычислить $T(v^i \mathbf{e}_i, u^j \mathbf{e}_j; w_k e^k)$. Сколько всего таких элементов? Так как каждый индекс пробегает от 1 до 3 то имеем C_3^1 вариантов выбрать 1 элемент из 3. Аргументов у нас 3, поэтому сего вариантов:

$$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 = 27$$

Выпишем все эти варианты, что даст нам полный список компонент:

$$
\begin{gathered}
T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1; e^1), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1; e^2), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1; e^3),\\
T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2; e^1), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2; e^2), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2; e^3),\\
T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3; e^1), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3; e^2), T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3; e^3),\\
T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1; e^1), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1; e^2), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1; e^3),\\
T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2; e^1), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2; e^2), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2; e^3),\\
T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; e^1), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; e^2), T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; e^3),\\
T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1; e^1), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1; e^2), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1; e^3),\\
T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2; e^1), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2; e^2), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2; e^3),\\
T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3; e^1), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3; e^2), T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3; e^3).
\end{gathered}
$$

Например:

$$T^1_{13} = T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3; e^1),$$

Если есть компоненты, то есть и базис:

$$T = T^i_{jk} e^j \otimes e^k \otimes \mathbf{e}_i$$

Базисных тензоров также 27 штук:

$$e^j \otimes e^k \otimes \mathbf{e}_i,\ i, j, k = 1, 2, 3.$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{v}, \mathbf{u}; w) = T^i_{jk} e^j \otimes e^k \otimes \mathbf{e}_i (v^l \mathbf{e}_l, u^m \mathbf{e}_m; w_n e^n) = T^i_{jk} v^l u^m w_n e^j(\mathbf{e}_l) \cdot e^k(\mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{e}_i(e^n) = \\
= T^i_{jk} v^l u^m w_n \delta^j_l \delta^k_m \delta^n_i = T^i_{jk} v^j u^k w_i
\end{aligned}
$$

Преобразование координат тензоров

В очередной раз вспомним, как преобразуются базисы линейного пространства L и сопряженного пространства L^*.

$$
\begin{gathered}
L = \overbrace{\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle}^{\text{старый базис}} = \overbrace{\langle \mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'} \rangle}^{\text{новый базис}},\ \dim L = n,\\
L^* = \langle e^1, \dots, e^n \rangle = \langle e^{1'}, \dots, e^{n'} \rangle,\ \dim L^* = n,\\
\mathbf{e}_{k'} = a^i_{k'} \mathbf{e}_i,\ \ A = [a^i_{k'}],\\
e^{k'} = b^{k'}_i e^i,\ B = [b^{k'}_i],\\
k, k', i = 1 \dots, n.
\end{gathered}
$$

Напомним, как связаны матрицы преобразования A и B. Пусть $B^{-1} = C = [c^i_j]$, тогда:

$$
\begin{gathered}
(e^k, \mathbf{e}_{j'}) = (c^k_{i'} e^{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = c^k_{i'} (e^{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = c^k_{i'} \delta^{i'}_{j'} = c^k_{j'},\\
(e^k, \mathbf{e}_{j'}) = (e^k, a^i_{j'} \mathbf{e}_i) = a^i_{j'} (e^k, \mathbf{e}_i) = a^i_{j'} \delta^k_i = a^k_{j'} \Rightarrow\\
B^{-1} = C = A,\ c^k_{j'} = a^k_{j'},\ e^k = a^k_{i'} e^{i'},\ a^i_k b^k_j = \delta^i_j.
\end{gathered}
$$

Так как $B^{-1} = A$ то $A^{-1} = B$ и $B = A^{-1}$ где $(A^{-1})^T$ — *контраградиентная* матрица к матрице A.

Рассмотрим теперь преобразование координат тензора T при переходе от одного базиса к другому. Все индексы пробегают от 1 до n, $p+q \leqslant n$.

$$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} \leftrightarrow e^{i'_1} \otimes e^{i'_2} \otimes \dots \otimes e^{i'_p} \otimes \mathbf{e}_{j'_1} \otimes \mathbf{e}_{j'_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j'_q}$$

$$T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \leftrightarrow T^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p}$$

$$T = T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} = T^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p} e^{i'_1} \otimes \dots \otimes e^{i'_p} \otimes \mathbf{e}_{j'_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j'_q} =$$
$$= (b^{i'_1}_{i_1} \cdot b^{i'_2}_{i_2} \cdot \dots \cdot b^{i'_p}_{i_p} \cdot T^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p} \cdot a^{j_1}_{j'_1} \cdot a^{j_2}_{j'_2} \cdot \dots \cdot a^{j_q}_{j'_q}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

Теорема 51. *При переходе от дуальных базисов $\{\mathbf{e}_i\}_1^n$ и $\{e^i\}_1^n$ пространств L и L^* к новым дуальным базисам тех же пространств по формулам*

$$\mathbf{e}_{k'} = a^i_{k'} \mathbf{e}_i, \; e^{k'} = b^{k'}_i e^i$$

координаты тензора T валентности (p, q) преобразуются по формулам

$$T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = b^{i'_1}_{i_1} b^{i'_2}_{i_2} \cdot \dots \cdot b^{i'_p}_{i_p} T^{j'_1 \dots j'_q}_{i'_1 \dots i'_p} a^{j_1}_{j'_1} a^{j_2}_{j'_2} \cdot \dots \cdot a^{j_q}_{j'_q}.$$

Некоторые замечания

- С помощью тензорных обозначений кратко записаны сразу n^{p+q} формул преобразований, так как суммирование идет для всех возможных комбинаций индексов.
- Говорят, что матрица $A = [a^i_j]$ действует на верхние индексы координат тензора, а матрица $B = [b^i_j] = A^{-1}$ — на нижние индексы.
- Тензор можно также определить, как массив из n^{p+q} скаляров, преобразующихся по вышеуказанному закону. Такое определение удобно для практической работы с тензорами (то есть для вычислений компонент, нахождения тензорных произведений, сверток и так далее).
- Наше определение тензора — бескомпонентное. Оно более универсальное, так как компоненты тензора могут меняться от базиса к базису, при этом определяя один и тот же объект.

6.2. Примеры и решение задач по тензорной алгебре

Вектор-столбец и вектор строка

Вектор-столбец может служить примером контравариантного вектора (или просто вектора):

$$\mathbf{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}) \quad L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$$

А вектор-строка — примером ковариантного вектора (ковектора, 1-формы):

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \dots & u^n \end{pmatrix} \in L^*(\mathbb{R}) \quad L = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \dots, \tilde{e}^n \rangle$$

Можно интерпретировать $\mathbf{v}$ и $\tilde{u}$ как линейные функции (функционалы). Вектор — функция от ковариантного вектора

$$\mathbf{v}\colon L^* \to \mathbb{R}$$

а ковариантный вектор — функция от вектора

$$\tilde{u}\colon L \to \mathbb{R}$$

Справедливость такой записи можно обосновать следующими соотношениями

$$\mathbf{v}(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = u_i \cdot v^i = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v^i \in \mathbb{R}$$

С другой стороны ничего не мешает полагать, что это вектор-столбец является аргументом у вектора строки:

$$\tilde{u}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = u_i \cdot v^i = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v^i \in \mathbb{R}$$

Линейность функций $\mathbf{v}$ и $\tilde{u}$ следует из матричных правил умножения принятых в линейной алгебре.

Матрица как тензор

Матрица является простейшим примером тензора типа $(1, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \dots & a^2_n \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & \dots & a^3_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & a^n_3 & \dots & a^n_n \end{pmatrix} = [a^i_j] \in \mathbb{T}^1_1(\mathbb{R}) = L \times L^*$$

Обратите внимание, что верхний индекс обозначает номер строки, а нижний индекс номер столбца.

Так как матрица есть тензор, то ее можно в соответствии с определением тензора рассматривать как функцию от одного вектора и одного ковектора:

$$A(\mathbf{v}; \tilde{u})\colon L \times L^* \to \mathbb{R}$$

Убедиться в правильности такой интерпретации матрицы, поможет следующее соотношение

$$A(\mathbf{v};\tilde{u}) = \tilde{u}A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & ... & u_n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & ... & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & ... & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & ... & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}}_{\text{После умножения получится вектор-столбец}} \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{u}A\mathbf{v} = u_i a_j^i v^j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_i a_j^i v^j = \sum_{i,j=1}^{n} u_i a_j^i v^j$$

Записанная сумма согласуется с правилами умножения матриц в линейной алгебре.

Тензоры $(2,0)$ **и** $(0,2)$

Тензоры $(2,0)$ и $(0,2)$ имеют такое же количество компонент, что и тензор $(1,1)$, поэтому их можно сгруппировать в такие в виде матриц. Но эти «матрицы» не будут подчиняться законам матричного умножения.

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y})\colon L \times L \to \mathbb{R}, \quad S(\tilde{x},\tilde{y})\colon L^* \times L^* \to \mathbb{R}$$

$$T = [T_{ij}], i,j = 1,...,n \quad S = [S^{ij}], i,j = 1,...,n$$

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = T_{ij}x^i y^j = \sum_{i,j=1}^{n} T_{ij}x^i y^j \in \mathbb{R}$$

$$S(\tilde{x},\tilde{y}) = S^{ij}x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} S^{ij}x_i y_j \in \mathbb{R}$$

Для того, чтобы не смешивать настоящие матрицы с просто таблицами, можно использовать следующую форму записи:

$$T = \begin{array}{c|ccccc} i,j & 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \hline 1 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & ... & T_{1n} \\ 2 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & ... & T_{2n} \\ 3 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & ... & T_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & ... & T_{nn} \end{array}$$

$$S = \begin{array}{c|ccccc} i,j & 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \hline 1 & S^{11} & S^{12} & S^{13} & ... & S^{1n} \\ 2 & S^{21} & S^{22} & S^{23} & ... & S^{2n} \\ 3 & S^{31} & S^{32} & S^{33} & ... & S^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & S^{n1} & S^{n2} & S^{n3} & ... & S^{nn} \end{array}$$

Комплексный пример тензора $(1,1)$

Найдем значения тензора $F(\mathbf{v}; \tilde{u})$, который через базисные тензоры выражается следующим образом

$$F = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2 + \tilde{e}^2 \otimes (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3) \in \mathbb{T}^1_1(L),$$

где

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \quad \tilde{u} = \tilde{e}^1 + \tilde{e}^2 + \tilde{e}^3.$$

Тензор записан через базисные тензоры

$$\tilde{e}^i \otimes \mathbf{e}_j, \ i, j = 1, \dots, n$$

для нахождения компонент следует раскрыть скобки

$$F = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2 + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3$$

Уже из этой записи видны все ненулевые компоненты тензора, однако для тренировки мы воспользуемся определением базисных тензоров для нахождения этих компонент. По определению

$$F(\mathbf{e}_i; \tilde{e}^j) = F_i^j.$$

Так как тензор F имеет валентность 2, а пространство L размерность 3, то компонент у тензора $3^2 = 9$.

$$\begin{array}{c|ccc} j,i & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & F_1^1 & F_3^1 & F_3^1 \\ 2 & F_1^2 & F_3^2 & F_3^2 \\ 3 & F_1^3 & F_3^3 & F_3^3 \end{array} = \begin{pmatrix} F_1^1 & F_3^1 & F_3^1 \\ F_1^2 & F_3^2 & F_3^2 \\ F_1^3 & F_3^3 & F_3^3 \end{pmatrix}$$

Начнем вычислять компоненты

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1; \tilde{e}^2) &= \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1; \tilde{e}^2) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1; \tilde{e}^2) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1; \tilde{e}^2) = \\ &= \tilde{e}^1(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2(\tilde{e}^2) + \tilde{e}^2(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1(\tilde{e}^2) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_3(\tilde{e}^2) = \delta_1^1\delta_2^2 + \delta_1^2\delta_1^2 + 3\delta_1^2\delta_3^2 = \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 1 = F_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^1) &= \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^1) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^1) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^1) = \\ &= \tilde{e}^1(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2(\tilde{e}^1) + \tilde{e}^2(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1(\tilde{e}^1) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3(\tilde{e}^1) = \delta_2^1\delta_2^1 + \delta_2^2\delta_1^1 + 3\delta_2^2\delta_3^1 = \\ &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 = 1 = F_2^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^3) &= \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^3) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^3) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^3) = \\ &= \tilde{e}^1(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2(\tilde{e}^3) + \tilde{e}^2(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1(\tilde{e}^3) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3(\tilde{e}^3) = \delta_2^1\delta_2^3 + \delta_2^2\delta_1^3 + 3\delta_2^2\delta_3^3 = \\ &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3 = F_2^3 \end{aligned}$$

Мы нашли все ненулевые компоненты. Однако такие манипуляции являются лишними, так как все компоненты можно узнать сразу после раскрытия скобок.

$$F = F_i^j \tilde{e}^i \otimes \mathbf{e}_j = F_1^2 \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2 + F_2^1 \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 + F_2^3 \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3$$
$$1\ \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2 +\ 1\ \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 +\ 3\ \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3$$

Отсюда сразу видно

$$F_1^2 = F_2^1 = 1,\ F_2^3 = 3.$$

Остальные компоненты равны нулю, например

$$F(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^2) = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^2) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^2) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2; \tilde{e}^2) =$$
$$= \tilde{e}^1(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2(\tilde{e}^2) + \tilde{e}^2(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1(\tilde{e}^2) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3(\tilde{e}^2) = \delta_2^1\delta_2^2 + \delta_2^2\delta_1^2 + 3\delta_2^2\delta_3^2 =$$
$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0 = F_2^2$$

Таблица компонент тензора принимает вид:

$$\begin{array}{c|ccc} j, i & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим значение тензора на данных в условии векторах:

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \quad \tilde{u} = \tilde{e}^1 + \tilde{e}^2 + \tilde{e}^3.$$

Так как тензор разложен на базисные составляющие, то для вычисления воспользуемся формулами

$$\mathbf{e}_i(\tilde{u}) = u_i,\ \ \tilde{e}^j(\mathbf{v}) = v^j$$

$$F(\mathbf{v}; \tilde{u}) = \tilde{e}^1 \otimes \mathbf{e}_2(\mathbf{v}; \tilde{u}) + \tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1(\mathbf{v}; \tilde{u}) + 3\tilde{e}^2 \otimes \mathbf{e}_3(\mathbf{v}; \tilde{u}) =$$
$$= \tilde{e}^1(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_2(\tilde{u}) + \tilde{e}^2(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_1(\tilde{u}) + 3\tilde{e}^2(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_3(\tilde{u})$$

$$v^1 = 1,\ v^2 = 5,\ v^3 = 4;\ u_1 = u_2 = u_3 = 1.$$

- $\tilde{e}^1(\mathbf{v}) = \tilde{e}^1(\mathbf{e}_1) + 5\tilde{e}^1(\mathbf{e}_2) + 4\tilde{e}^1(\mathbf{e}_3) = \delta_1^1 + 5\delta_2^1 + 4\delta_3^1 = 1 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 = v^1$,
- $\tilde{e}^2(\mathbf{v}) = v^2 = 5$,
- $\mathbf{e}_1(\tilde{u}) = u_1 = 1,\ \ \mathbf{e}_2(\tilde{u}) = u_2 = 1,\ \ \mathbf{e}_3(\tilde{u}) = u_3 = 1.$

$$F(\mathbf{v}; \tilde{u}) = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 21$$

Нахождение координат тензора при преобразовании базиса

Рассмотрим следующую задачу: найти координату $T^{1'2'}_{1'2'3'}$ тензора $T \in \mathbb{T}^2_3(L)$, $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$ все координаты которого в базисе

$$\tilde{e}^{i_1} \otimes \tilde{e}^{i_2} \otimes \mathbf{e}_{i_3} \otimes \mathbf{e}_{i_4} \otimes \mathbf{e}_{i_5}, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 = 1 \ldots, n$$

равны 2. Штрихованный и нештрихованный базисы связаны следующим линейным преобразованием

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим матрицу перехода от нештрихованного базиса к штрихованному как A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нам дана матрица перехода от $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ к $\langle \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'} \rangle$, но нет матрицы B, задающей переход от $\langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$ к $\langle \tilde{e}^{1'}, \tilde{e}^{2'}, \tilde{e}^{3'} \rangle$. Однако между A и B существует связь, позволяющая вычислить B из A.

Вначале, однако, найдем матрицу перехода от $\langle \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'} \rangle$ к $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$.

$$\mathbf{e}_i = \hat{a}^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}, \;\; \tilde{e}^j = b^j_{j'} \tilde{e}^{j'}, \; A = [a^{i'}_i], \; B = A^{-1} = [b^j_{j'}]$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \hat{a}^{1'}_1 \mathbf{e}_{1'} + \hat{a}^{2'}_1 \mathbf{e}_{2'} + \hat{a}^{3'}_1 \mathbf{e}_{3'}, \\ \mathbf{e}_2 = \hat{a}^{1'}_2 \mathbf{e}_{1'} + \hat{a}^{2'}_2 \mathbf{e}_{2'} + \hat{a}^{3'}_2 \mathbf{e}_{3'}, \\ \mathbf{e}_3 = \hat{a}^{1'}_3 \mathbf{e}_{1'} + \hat{a}^{2'}_1 \mathbf{e}_{2'} + \hat{a}^{3'}_1 \mathbf{e}_{3'}. \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = a^1_{1'} \mathbf{e}_1 + a^2_{1'} \mathbf{e}_2 + a^3_{1'} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{2'} = a^1_{2'} \mathbf{e}_1 + a^2_{2'} \mathbf{e}_2 + a^3_{2'} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{3'} = a^1_{3'} \mathbf{e}_1 + a^2_{3'} \mathbf{e}_2 + a^3_{3'} \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = 1\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{2'} = 2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_{3'} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a^1_{1'} = 1, & a^2_{1'} = 0, & a^3_{1'} = 0, \\ a^1_{2'} = 2, & a^2_{2'} = 1, & a^3_{2'} = 0, \\ a^1_{3'} = 3, & a^2_{3'} = 2, & a^3_{3'} = 1. \end{matrix} \qquad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) A^{-1}$$

$$A^{-1} = [\hat{a}^{i'}_i] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_1 = 1\mathbf{e}_{1'}, \\ \mathbf{e}_2 = -2\mathbf{e}_{1'} + 1\mathbf{e}_{2'}, \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{1'} - 2\mathbf{e}_{2'} + 1\mathbf{e}_{3'}. \end{cases}$$

$$A^{-1} = [\hat{a}^{i'}_i] = \begin{pmatrix} \hat{a}^{1'}_1 & \hat{a}^{1'}_2 & \hat{a}^{1'}_3 \\ \hat{a}^{2'}_1 & \hat{a}^{2'}_2 & \hat{a}^{2'}_3 \\ \hat{a}^{3'}_1 & \hat{a}^{3'}_2 & \hat{a}^{3'}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{a}^{1'}_1 = 1, & \hat{a}^{2'}_1 = 0, & \hat{a}^{3'}_1 = 0, \\ \hat{a}^{1'}_2 = -2, & \hat{a}^{2'}_2 = 1, & \hat{a}^{3'}_2 = 0, \\ \hat{a}^{1'}_3 = 1, & \hat{a}^{2'}_3 = -2, & \hat{a}^{3'}_3 = 1. \end{matrix}$$

На следующем шаге решения необходимо найти как связаны ковекторные базисы $\langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$ и $\langle \tilde{e}^{1'}, \tilde{e}^{2'}, \tilde{e}^{3'} \rangle$. Воспользуемся тем фактом, что

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) A \Rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) A^{-1}$$

$$(\tilde{e}^{1'},\tilde{e}^{2'},\tilde{e}^{3'})^T=B(\tilde{e}^{1},\tilde{e}^{2},\tilde{e}^{3})^T\Rightarrow(\tilde{e}^{1},\tilde{e}^{2},\tilde{e}^{3})^T=B^{-1}(\tilde{e}^{1'},\tilde{e}^{2'},\tilde{e}^{3'})^T$$

$$B=A^{-1}\Rightarrow B^{-1}=A\Rightarrow B^{-1}=[\hat{b}^{j}_{j'}]=[a^{j}_{j'}],\ \ B=[b^{j'}_{j}]$$

$$\tilde{e}^{j'}=b^{j'}_{j}\tilde{e}^{j}=\sum_{j=1}^{n}b^{j'}_{j}\tilde{e}^{j},\ \ \tilde{e}^{j}=\hat{b}^{j}_{j'}\tilde{e}^{j'}=\sum_{j'=1}^{n}\hat{b}^{j}_{j'}\tilde{e}^{j'}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\hat{b}^{1}_{1'}=1&\hat{b}^{1}_{2'}=2&\hat{b}^{1}_{3'}=3\\\hat{b}^{2}_{1'}=0&\hat{b}^{2}_{2'}=1&\hat{b}^{2}_{3'}=2\\\hat{b}^{3}_{1'}=0&\hat{b}^{3}_{2'}=0&\hat{b}^{3}_{3'}=1\end{matrix}$$

$$T^{1'2'}_{1'2'3'}=\hat{b}^{i_1}_{1'}\hat{b}^{i_2}_{2'}\hat{b}^{i_3}_{3'}\cdot T^{j_1j_2}_{i_1i_2i_3}\hat{a}^{1'}_{j_1}\hat{a}^{2'}_{j_2}=$$
$$=(\hat{b}^{1}_{1'}+\hat{b}^{2}_{1'}+\hat{b}^{3}_{1'})\cdot(\hat{b}^{1}_{2'}+\hat{b}^{2}_{2'}+\hat{b}^{3}_{2'})\cdot(\hat{b}^{1}_{3'}+\hat{b}^{2}_{3'}+\hat{b}^{3}_{3'})\cdot 2\cdot(\hat{a}^{1'}_{1}+\hat{a}^{1'}_{2}+\hat{a}^{1'}_{3})\cdot(\hat{a}^{2'}_{1}+\hat{a}^{2'}_{2}+\hat{a}^{2'}_{3})=$$
$$=(1+0+0)(2+1+0)(3+2+1)2(1-2+1)(0+1-2)=0$$

Поднятие и опускание индексов тензора

Пусть в евклидовом пространстве E дан метрический тензор G со следующими коэффициентами:

$$G=[g_{ij}]=\begin{array}{c|cccc} j/i & 1 & 2 & 3 & 4\\\hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 2\end{array}$$

$$E=\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\rangle,\ E^*=\langle\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\tilde{e}_4\rangle\Rightarrow\ i,j=1,2,3,4$$

Используя этот метрический тензор провести опускание и подъем индексов следующего тензора:

$$T=\tilde{e}^1\otimes\mathbf{e}_3+\tilde{e}^2\otimes\mathbf{e}_4$$

В общем случае опускание индексов для произвольного тензора T с помощью метрического тензора $G=[g_{ij}]$ проводится по следующей формуле:

$$\mathrm{S}^{i_2\dots i_q}_{j_1j_2\dots j_pk}=g_{i_1k}\mathrm{T}^{i_1i_2\dots i_q}_{j_1j_2\dots j_p}$$

Получается, что тензор T превращается в новый тензор S валентность которого не (p,q) как у T, а $(p+1,q-1)$. Обратите внимание, что индекс k стоит последним, а не первым. Процесс можно повторять, пока у тензора T не останется верхних индексов:

$$\mathrm{S}_{j_1j_2\dots j_pk_1k_2\dots k_q}=\underbrace{g_{i_qk_q}\cdot\ldots\cdot g_{i_1k_1}}_{q}\mathrm{T}^{i_1i_2\dots i_q}_{j_1j_2\dots j_p}$$

Вернемся к нашему примеру. У нашего тензора всего две ненулевые компоненты:

$$T=\mathrm{T}^i_j\tilde{e}^j\otimes\mathbf{e}_i=\tilde{e}^1\otimes\mathbf{e}_3+\tilde{e}^2\otimes\mathbf{e}_4,\ \mathrm{T}^3_1=\mathrm{T}^4_2=1$$

$$S_{kj}=g_{ij}\mathrm{T}^i_k=g_{ji}\mathrm{T}^i_k,\ \text{т.к. } g_{ij}=g_{ji}.$$

Так как не равны нулю только $\mathrm{T}_1^3 = 1$ и $\mathrm{T}_2^4 = 1$, то из всех 16 сумм остается только 8.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_{1j} &= g_{3j}\mathrm{T}_1^3, & \mathrm{S}_{2j} &= g_{4j}\mathrm{T}_2^4,\\
\mathrm{S}_{11} &= g_{31}\mathrm{T}_1^3 = 0\cdot 1 = 0, & \mathrm{S}_{21} &= g_{41}\mathrm{T}_2^4 = 0\cdot 1 = 0,\\
\mathrm{S}_{12} &= g_{32}\mathrm{T}_1^3 = 0\cdot 1 = 0, & \mathrm{S}_{22} &= g_{42}\mathrm{T}_2^4 = 0\cdot 1 = 0,\\
\mathrm{S}_{13} &= g_{33}\mathrm{T}_1^3 = 1\cdot 1 = 1, & \mathrm{S}_{23} &= g_{43}\mathrm{T}_2^4 = 1\cdot 1 = 1,\\
\mathrm{S}_{14} &= g_{34}\mathrm{T}_1^3 = 1\cdot 1 = 1, & \mathrm{S}_{24} &= g_{44}\mathrm{T}_2^4 = 2\cdot 1 = 2.
\end{aligned}
$$

$$S = \tilde{e}^1 \otimes \tilde{e}^3 + \tilde{e}^1 \otimes \tilde{e}^4 + \tilde{e}^2 \otimes \tilde{e}^3 + 2\tilde{e}^2 \otimes \tilde{e}^4$$

Проведем теперь подъем индексов. В общем виде он выглядит так:

$$\mathrm{S}^{k i_1 i_2 \dots i_q}_{j_2 \dots j_p} = g^{j_1 k}\mathrm{T}^{i_1 i_2 \dots i_q}_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

Получается, что тензор T превращается в новый тензор S валентность которого не (p, q) как у T, а $(p-1, q+1)$. Обратите внимание, что индекс k стоит **первым**, а не последним. Процесс можно повторять, пока у тензора T не останется верхних индексов:

$$\mathrm{S}^{k_1 k_2 \dots k_p i_1 i_2 \dots i_q} = \underbrace{g^{j_p k_p} \cdot \ldots \cdot g^{j_1 k_1}}_{p} \mathrm{T}^{i_1 i_2 \dots i_q}_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

Необходимо найти тензор g^{ij}. Он находится из соотношения

$$g^{ij} g_{ij} = \delta^i_k,\ i, k = 1, 2, 3, 4,$$

что в матричном виде сводится к нахождению обратной матрицы:

$$G^{-1} = [g^{ij}] = \begin{array}{c|cccc} j/i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Также исходим из двух компонент $\mathrm{T}_1^3 = 1$ и $\mathrm{T}_2^4 = 1$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}^{j3} &= g^{1j}\mathrm{T}_1^3, & \mathrm{S}^{j4} &= g^{2j}\mathrm{T}_2^4,\\
\mathrm{S}^{13} &= g^{11}\mathrm{T}_1^3 = 1\cdot 1 = +1, & \mathrm{S}^{14} &= g^{12}\mathrm{T}_2^4 = -1\cdot 1 = -1,\\
\mathrm{S}^{23} &= g^{21}\mathrm{T}_1^3 = -1\cdot 1 = -1, & \mathrm{S}^{24} &= g^{22}\mathrm{T}_2^4 = 2\cdot 1 = 2,\\
\mathrm{S}^{33} &= g^{31}\mathrm{T}_1^3 = 0\cdot 1 = 0, & \mathrm{S}^{34} &= g^{32}\mathrm{T}_2^4 = 0\cdot 1 = 0,\\
\mathrm{S}^{43} &= g^{41}\mathrm{T}_1^3 = 0\cdot 1 = 0, & \mathrm{S}^{44} &= g^{42}\mathrm{T}_2^4 = 0\cdot 1 = 0.
\end{aligned}
$$

$$S = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_4 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_4$$

Список литературы

1. Норден А. П. Теория поверхностей. — 2-е изд. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 264. — (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия)). — ISBN 978597106234.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. Линейная алгебра. — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574545.

7. Симметричные и кососимметричные тензоры

7.1. Перестановки и символы Леви-Чивиты

Подстановки/перестановки

Определение 52. Пусть Ω — конечное множество из n элементов. Природа этих элементов для нас не существенна, поэтому положим $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Элементы множества $S_n = S(\Omega)$ всех взаимно однозначных преобразований $\pi\colon \Omega \to \Omega$ называются *перестановками* [1, §8]. Произвольную перестановку $\pi\colon i \to \pi(i)$ изображают в виде таблицы, полностью указывая все образы.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{matrix}$$

Иногда элементы множества S_n называют *подстановками*, а термин перестановка используют для обозначения некоторого фиксированного порядка расположения чисел $1, 2, \dots, n$. Мы будем считать подстановку и перестановку синонимами.

Группа перестановок

Элементы множества S_n образуют группу. Групповой операцией является композиция перестановок. Перестановки применяются справа на лево: сперва π_2, а потом π_1:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_1 \circ \pi_2 = \pi_1\pi_2 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Свойства группы легко проверяются:

1. Ассоциативность $(\pi_1\pi_2)\pi_3 = \pi_1(\pi_2\pi_3)\ \forall \pi_1, \pi_2, \pi_3 \in S_n$.
2. Существует единичная перестановка $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{smallmatrix}\right)$.
3. Для каждой перестановки π существует обратная π^{-1}.

Пример перестановки

Пример 53. Представим, что у нас есть 4 разных шарика, которые мы можем пронумеровать $\{1,2,3,4\}$. Их можно переставлять различными способами, всего способов 4!. Конкретную перестановку можно записать как:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Произошла перестановка шаров:

- шар №1 попал на место №3;
- шар №2 попал на место №1;
- шар №3 попал на место №2;
- шар №4 попал на место №4 (остался на месте).

Любой перестановке можно дать наглядную интерпретацию, рассмотрев n нумерованных шаров в урне. Каждая перестановка π эквивалентна последовательности вынимания шаров из урны.

Циклическая запись перестановок

Перестановку можно записать компактно, используя циклическую запись

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 = (1\,2\,3\,4) = (2\,3\,4\,1) = (3\,4\,1\,2) = (4\,1\,2\,3)$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \to 4 \to 1)(2 \to 3 \to 2) = (1\,4)(2\,3)$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \to 2 \to 1)(3 \to 3)(4 \to 4) = (1\,2)(3)(4)$$

- У π_1 один цикл длины 4.
- У π_2 два цикла длины 2 каждый.
- У π_3 три цикла: первый длины 2, а второй и третий длины 1.

Циклическую запись можно воспринимать как композицию перестановок:

$$\pi_2 = (1\,4)(2\,3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{(1\,4)} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{(2\,3)} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 54. *Каждая перестановка $\pi \neq e$ из S_n является произведением независимых циклов длины $\geqslant 2$. Это разложение в произведение определено однозначно и с точностью до порядка следования циклов [1, §8 п. 2, теорема 1].*

Транспозиции

Определение 55. Цикл длины 2 называется *транспозицией.*

Цикл длины 1 также можно представить в виде цикла длины 2. Например, $(2) = (2\,2)$. Циклы длины 1 часто опускаются, так как они определяют тождественную перестановку.

Можно доказать, что каждая перестановка $\pi \in S_n$ является произведением транспозиций. Проиллюстрируем это примером.

$$(1\,2\,3) = (1\,3)(2)(1\,2)(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Число транспозиций не является инвариантом перестановки. Иными словами, одну и ту же перестановку можно записать через композицию совершенно разных транспозиций.

Знак перестановки

Теорема 56. *Пусть π — перестановка из S_n, разложенная произвольным образом на композицию транспозиций:*

$$\pi = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k.$$

Тогда число

$$\varepsilon_\pi = (-1)^k \in \{-1, 1\},$$

называемое знаком π (сигнатурой, четностью), полностью определяется перестановкой π и не зависит от способа разложения π на транспозиции. То есть четность целого числа k для данной перестановки всегда одна и та же. Кроме того

$$\varepsilon_{\pi_1\pi_2} = \varepsilon_{\pi_1}\varepsilon_{\pi_2}.$$

Четность перестановки

Определение 57. Перестановка $\pi \in S_n$ называется *четной*, если $\varepsilon_\pi = 1$ и *нечетной*, если $\varepsilon_\pi = -1$.

Определение 58. В перестановке числа i и j составляют *инверсию*, если $i > j$, но i стоит в этой перестановке раньше чем j.

Пример 59. В следующей перестановке 2 инверсии

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 3 > 1, 3 > 2$$

Следующие два утверждения позволяют определять четность/нечетность перестановки не раскладывая ее на транспозиции.

- Перестановка четная, если ее символы составляют четное число инверсий и нечетная в противном случае.
- Четность/нечетность подстановки совпадает с четностью числа $(n-s)$ где n — степень подстановки (количество элементов), а s — количество циклов (произвольной длины).

Все перестановки степени 3

Рассмотрим все перестановки π множества $S_3 = \{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = (1)\,(2)\,(3)\ s=3, n-s=0, \varepsilon_\pi = 1 \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = (12)\,(3)\ s=2, n-s=1, \varepsilon_\pi = -1$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = (1\,3\,2)\ s=1, n-s=2, \varepsilon_\pi = 1 \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = (1)\,(2\,3)\ s=2, n-s=1, \varepsilon_\pi = -1$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = (1\,2\,3)\ s=1, n-s=2, \varepsilon_\pi = 1 \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = (13)\,(2)\ s=2, n-s=1, \varepsilon_\pi = -1$$

Символ Леви–Чивиты

Полезно ввести *символы Леви–Чивиты*: $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \in \{-1,0,1\}$. Знак выбирается в зависимости от знака перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 \text{ если } \pi \text{ четная,}\\ -1 \text{ если } \pi \text{ нечетная,}\\ \quad 0 \text{ если есть повторяющиеся индексы.}\end{cases}$$

Названы в честь Туллио Леви-Чивиты (1873–1941 гг.).

Действие группы перестановок на функциях

Определение 60. Пусть $\pi \in S_n$ и f — функция от любых n аргументов. Полагаем

$$(\pi \circ f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}), \text{ где } \pi = \begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}\ \ \pi(k) = i_k.$$

Говорят, что функция $g = \pi \circ f$ получается действием π на f.

Определение 61. Функция f от n аргументов называется *кососимметрической*, если

$$f(\dots, x_k, x_{k+1}, \dots) = -f(\dots, x_{k+1}, x_k, \dots),$$

то есть при перестановки местами любых двух соседних аргументов значение f меняет знак на противоположный.

Можно доказать, что

- Если $\pi_1, \pi_2 \in S_n$, то $(\pi_1\pi_2) \circ f = \pi_1 \circ (\pi_2 \circ f)$.
- При перестановке местами любых двух аргументов кососимметричная функция меняет знак на противоположный.

Перестановка двух аргументов в функции f можно записать как $(\tau \circ f)$, где τ — транспозиция. В кососимметричной функции при произвольной перестановке аргументов, знак будет совпадать со знаком перестановки

$$\pi \circ f = \varepsilon_\pi f$$

7.2. Симметризация и антисимметризация

Перестановки аргументов тензора

Рассмотрим тензор валентности (p, q)

$$T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p; \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_q)$$

Перестановка контравариантного аргумента с ковариантным аргументом для тензоров не определена. Поэтому при обсуждении вопросов симметричности и кососимметричности ограничиваются рассмотрением тензоров вида $(p, 0)$

$$T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = T_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

или вида $(0, p)$

$$T(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p) = T^{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}$$

Далее все выкладки приводятся для тензора $T(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p)$ типа $(0, p)$, но все рассуждения могут быть легко применены и к тензору типа $(p, 0)$.

Рассмотрим действие перестановки $\pi \in S_p$ на аргументы тензора T типа $(0, p)$

$$(\pi \circ T)(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p) = T(\tilde{x}_{\pi(1)}, \dots, \tilde{x}_{\pi(p)}), \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \quad \pi(k) = i_k$$

Можно доказать, что $(\pi \circ T)$ также является тензором, причем того же типа $(0, p)$, что и T [2, Гл. 6 §2 п. 3].

Компоненты тензора $\pi \circ T$ получаются из компонентов T перестановкой индексов:

$$(\pi \circ T)^{i_1 i_2 \dots i_p} = T^{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(p)}}$$

Симметризация

Определение 62. *Симметризацией* (или *симметрированием*) тензоров из $\mathbb{T}_0^p(L)$ называется отображение:

$$S = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \pi \colon \mathbf{T}_0^p(L) \to \mathbf{T}_0^p(L),$$

Иными словами, для применения операции S к тензору необходимо выполнить следующие шаги:

- надо найти все возможные перестановки аргументов тензора $(0, p)$;
- подействовать каждой из них на тензор T;
- все результаты суммировать, а затем полученную сумму нормировать на $p!$, где $p!$ — количество всех возможных перестановок.

Симметризация двухвалетного тензора

Рассмотрим действие операции симметризации S на примере двухвалентного тензора. На пространстве $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ рассмотрим тензор $T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ валентности $(0, 2)$. Так как $p = 2$, то всего возможно $p! = 2! = 2$ различных перестановок аргументов

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2, \;\; \tilde{x}_2\tilde{x}_1$$

Операция симметризации действует на тензор следующим образом:

$$S(T) = \frac{1}{2}(T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + T(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1)) \quad S(T)^{i_1 i_2} = \frac{1}{2}(T^{i_1 i_2} + T^{i_2 i_1})$$

Так как $p = 2$, а $\dim L = 3$, то у данного тензора всего $n^p = 3^2 = 9$ компонент

$$\begin{aligned}
S(T)^{11} &= \frac{1}{2}(T^{11} + T^{11}) = T^{11} \\
S(T)^{12} &= \frac{1}{2}(T^{12} + T^{21}) = S(T)^{21} \\
S(T)^{13} &= \frac{1}{2}(T^{13} + T^{31}) = S(T)^{31} \\
S(T)^{22} &= \frac{1}{2}(T^{22} + T^{22}) = T^{22} \\
S(T)^{23} &= \frac{1}{2}(T^{23} + T^{32}) = S(T)^{23} \\
S(T)^{33} &= \frac{1}{2}(T^{33} + T^{33}) = T^{33}
\end{aligned}$$

Так как тензор двухвалентный, то его компоненты можно сгруппировать в виде «матрицы». Обозначим тензор $S(T)$ как $\mathfrak{T}$ и запишем

	1	2	3
1	$\mathfrak{T}^{11}$	$\mathfrak{T}^{12}$	$\mathfrak{T}^{13}$
2	$\mathfrak{T}^{12}$	$\mathfrak{T}^{22}$	$\mathfrak{T}^{23}$
3	$\mathfrak{T}^{13}$	$\mathfrak{T}^{23}$	$\mathfrak{T}^{33}$

Данная матрица симметрична, так верхняя треугольная часть равна нижней треугольной части. Тензор $\mathfrak{T}$ имеет 6 значимых компонент. Обратите также внимание, что мы получили тензор $\mathfrak{T}$ из тензора T, который никакой симметричностью не обладает — это произвольный двухвалентный тензор.

Симметризация трехвалентного тензора

Рассмотрим действие операции симметризации S на примере трехвалентного тензора. На пространстве $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ рассмотрим тензор $T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ валентности $(0,3)$. Так как $p = 3$, то всего возможно $p! = 3! = 6$ различных перестановок аргументов

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3,\ \ \tilde{x}_1\tilde{x}_3\tilde{x}_2,\ \ \tilde{x}_2\tilde{x}_1\tilde{x}_3,\ \ \tilde{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_1,\ \ \tilde{x}_3\tilde{x}_1\tilde{x}_2,\ \ \tilde{x}_3\tilde{x}_2\tilde{x}_1$$

или, если рассматривать компоненты, индексов:

$$i_1i_2i_3,\ \ i_1i_3i_2,\ \ i_2i_1i_3,\ \ i_2i_3i_1,\ \ i_3i_1i_2,\ \ i_3i_2i_1$$

После действия симметризации получим новый тензор:

$$\mathfrak{T} = S(T) = \frac{1}{3!}(T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) + T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3, \tilde{x}_2) + T(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) + T(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_1) + T(\tilde{x}_3, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + T(\tilde{x}_3, \tilde{x}_2, \tilde{x}_1)$$

или в компонентном виде:

$$\mathfrak{T}^{i_1i_2i_3} = S(T)^{i_1i_2i_3} = \frac{1}{3!}(T^{i_1i_2i_3} + T^{i_1i_3i_2} + T^{i_2i_1i_3} + T^{i_2i_3i_1} + T^{i_3i_1i_2} + T^{i_3i_2i_1})$$

У исходного тензора T существует $n^p = 3^3 = 27$ компонент:

$$\begin{array}{ccc}
T^{111} & T^{211} & T^{311} \\
T^{112} & T^{212} & T^{312} \\
T^{113} & T^{213} & T^{313} \\
T^{121} & T^{221} & T^{321} \\
T^{122} & T^{222} & T^{322} \\
T^{123} & T^{223} & T^{323} \\
T^{131} & T^{231} & T^{331} \\
T^{132} & T^{232} & T^{332} \\
T^{133} & T^{233} & T^{333}
\end{array}$$

$$\mathfrak{T}^{111} = \frac{1}{3!}(T^{111} + T^{111} + T^{111} + T^{111} + T^{111} + T^{111}) = T^{111}$$

$$\mathfrak{T}^{112} = \frac{1}{3!}(T^{112} + T^{121} + T^{112} + T^{121} + T^{211} + T^{211}) = \frac{1}{3}(T^{112} + T^{121} + T^{211})$$

$$\mathfrak{T}^{113} = \frac{1}{3!}(T^{113} + T^{131} + T^{113} + T^{131} + T^{311} + T^{311}) = \frac{1}{3}(T^{113} + T^{131} + T^{311})$$

$$\mathfrak{T}^{121} = \frac{1}{3!}(T^{121} + T^{112} + T^{211} + T^{211} + T^{112} + T^{121}) = \frac{1}{3}(T^{121} + T^{112} + T^{211})$$

$$\mathfrak{T}^{122} = \frac{1}{3!}(T^{122} + T^{122} + T^{212} + T^{221} + T^{212} + T^{221}) = \frac{1}{3}(T^{122} + T^{212} + T^{221})$$

$$\mathfrak{T}^{123} = \frac{1}{3!}(T^{123} + T^{132} + T^{213} + T^{231} + T^{312} + T^{321})$$

$$\mathfrak{T}^{131} = \frac{1}{3!}(T^{131} + T^{113} + T^{311} + T^{311} + T^{113} + T^{131}) = \frac{1}{3}(T^{131} + T^{113} + T^{311})$$

$$\mathfrak{T}^{132} = \frac{1}{3!}(T^{132} + T^{123} + T^{312} + T^{321} + T^{213} + T^{231})$$

$$\mathfrak{T}^{133} = \frac{1}{3!}(T^{133} + T^{133} + T^{313} + T^{331} + T^{313} + T^{331} = 6T^{133}$$

$$\mathfrak{T}^{211} = \frac{1}{3!}(T^{211} + T^{211} + T^{121} + T^{112} + T^{121} + T^{112}) = \frac{1}{3}(T^{211} + T^{121} + T^{112})$$
$$\mathfrak{T}^{212} = \frac{1}{3!}(T^{212} + T^{221} + T^{122} + T^{122} + T^{221} + T^{212}) = \frac{1}{3}(T^{212} + T^{221} + T^{122})$$
$$\mathfrak{T}^{213} = \frac{1}{3!}(T^{213} + T^{231} + T^{123} + T^{132} + T^{321} + T^{312})$$
$$\mathfrak{T}^{221} = \frac{1}{3!}(T^{221} + T^{212} + T^{221} + T^{212} + T^{122} + T^{122}) = \frac{1}{3}(T^{221} + T^{122} + T^{212})$$
$$\mathfrak{T}^{222} = \frac{1}{3!}(T^{222} + T^{222} + T^{222} + T^{222} + T^{222} + T^{222}) = T^{222}$$
$$\mathfrak{T}^{223} = \frac{1}{3!}(T^{223} + T^{232} + T^{223} + T^{232} + T^{322} + T^{322}) = \frac{1}{3}(T^{223} + T^{232} + T^{322})$$
$$\mathfrak{T}^{231} = \frac{1}{3!}(T^{231} + T^{213} + T^{321} + T^{312} + T^{123} + T^{132})$$
$$\mathfrak{T}^{232} = \frac{1}{3!}(T^{232} + T^{223} + T^{322} + T^{322} + T^{223} + T^{232}) = \frac{1}{3}(T^{232} + T^{223} + T^{322})$$
$$\mathfrak{T}^{233} = \frac{1}{3!}(T^{233} + T^{233} + T^{323} + T^{332} + T^{323} + T^{332}) = \frac{1}{3}(T^{233} + T^{323} + T^{332})$$

$$\mathfrak{T}^{311} = \frac{1}{3!}(T^{311} + T^{311} + T^{131} + T^{113} + T^{131} + T^{113}) = \frac{1}{3}(T^{311} + T^{131} + T^{113})$$
$$\mathfrak{T}^{312} = \frac{1}{3!}(T^{312} + T^{321} + T^{132} + T^{123} + T^{231} + T^{213})$$
$$\mathfrak{T}^{313} = \frac{1}{3!}(T^{313} + T^{331} + T^{133} + T^{133} + T^{331} + T^{313}) = \frac{1}{3}(T^{313} + T^{331} + T^{133})$$
$$\mathfrak{T}^{321} = \frac{1}{3!}(T^{321} + T^{312} + T^{231} + T^{213} + T^{132} + T^{123})$$
$$\mathfrak{T}^{322} = \frac{1}{3!}(T^{322} + T^{322} + T^{232} + T^{223} + T^{232} + T^{223}) = \frac{1}{3}(T^{322} + T^{232} + T^{223})$$
$$\mathfrak{T}^{323} = \frac{1}{3!}(T^{323} + T^{332} + T^{233} + T^{233} + T^{332} + T^{323}) = \frac{1}{3}(T^{323} + T^{332} + T^{233})$$
$$\mathfrak{T}^{331} = \frac{1}{3!}(T^{331} + T^{313} + T^{331} + T^{313} + T^{133} + T^{133}) = \frac{1}{3}(T^{331} + T^{313} + T^{133})$$
$$\mathfrak{T}^{332} = \frac{1}{3!}(T^{332} + T^{323} + T^{332} + T^{323} + T^{233} + T^{233}) = \frac{1}{3}(T^{332} + T^{323} + T^{233})$$
$$\mathfrak{T}^{333} = \frac{1}{3!}(T^{333} + T^{333} + T^{333} + T^{333} + T^{333} + T^{333}) = T^{333}$$

Получаем следующую картину:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{T}^{132} = \mathfrak{T}^{231} = \mathfrak{T}^{321} \\
\mathfrak{T}^{121} = \mathfrak{T}^{112} = \mathfrak{T}^{211} \\
\mathfrak{T}^{113} = \mathfrak{T}^{131} = \mathfrak{T}^{311} \\
\mathfrak{T}^{122} = \mathfrak{T}^{212} = \mathfrak{T}^{221} \\
\mathfrak{T}^{133} = \mathfrak{T}^{313} = \mathfrak{T}^{331} \\
\mathfrak{T}^{213} = \mathfrak{T}^{123} = \mathfrak{T}^{312} \\
\mathfrak{T}^{223} = \mathfrak{T}^{232} = \mathfrak{T}^{322} \\
\mathfrak{T}^{233} = \mathfrak{T}^{323} = \mathfrak{T}^{332}
\end{gathered}$$

получаем лишь 8 различных компонент из 27.

Симметричные тензоры

kkl

Определение 63. Тензор T типа $(0, p)$ (или $(p, 0)$) называется *симметричными*, если
$$\pi \circ T = T, \forall \pi \in S_p,$$
то есть любая перестановка аргументов не меняет значение тензора.

Можно записать иначе:
$$T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p) = T(\tilde{x}_{\pi(1)}, \tilde{x}_{\pi(2)}, \dots, \tilde{x}_{\pi(p)}).$$

Симметричные тензоры можно строить с помощью применения операции симметризации S. Рассмотрим пример.

Пример симметризации тензора

Рассмотрим простой тензор $T = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ и найдем его симметризацию
$$S(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2).$$
У перестановки n-ой стадии $n!$ вариантов. В нашем случае $n = 3$:
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$
И два элемента совпадают из-за того, что $3 = 2$ получаем следующие подстановки:
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$
Всего получаем 6 слагаемых
$$S(T) = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$$
среди которых по два одинаковых:
$$S(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2 \cdot 3}(2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) =$$
$$= \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1).$$

Пример симметричного тензора №1

Рассмотрим тензор $T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ симметричный тензор, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2 \rangle$, $\dim L^* = 2$, $\operatorname{rank} T = 3$ т.е. валентность $(3, 0)$. Выпишем все компоненты данного тензора
$$T = T_{ijk} \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j \otimes \tilde{e}^k,\ i, j, k = 1, 2.$$
$$\left.\begin{matrix}T_{111} & T_{112} & T_{121} & T_{122}\\ T_{211} & T_{212} & T_{221} & T_{222}\end{matrix}\right\} 2^3 = 8 \text{ компонент.}$$
Симметричность позволяет переставлять индексы между собой:
$$T_{112} = T_{121} = T_{211}$$
$$T_{122} = T_{212} = T_{221}$$
Индексы T_{111} и T_{222} — «диагональные» элементы. Таким образом из 8 компонент значимых будет 4 штуки.

Пример симметричного тензора №2

Рассмотрим тензор $T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ симметричный тензор, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$, $\dim L = 3$, $\mathrm{rang} T = 2$, валентность $(2, 0)$. Выпишем все компоненты данного тензора, всего их $3^2 = 9$.

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричность позволяет переставлять индексы между собой:

$$T_{12} = T_{21},\ T_{13} = T_{31},\ T_{23} = T_{32},$$
$$T_{11}, T_{22}, T_{33}$$

Это симметричная матрица.

Пример симметричного тензора №3

Рассмотрим тензор $T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ симметричный тензор, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$, $\dim L^* = 3$, $\mathrm{rang} T = 3$, валентность $(3, 0)$. Выпишем все компоненты данного тензора, всего их $3^3 = 27$.

$$\begin{matrix} T_{111} & T_{112} & T_{113} & T_{121} & T_{122} & T_{123} & T_{131} & T_{132} & T_{133} \\ T_{211} & T_{212} & T_{213} & T_{221} & T_{222} & T_{223} & T_{231} & T_{232} & T_{233} \\ T_{311} & T_{312} & T_{313} & T_{321} & T_{322} & T_{323} & T_{331} & T_{332} & T_{333} \end{matrix} \quad \text{27 компонент.}$$

Симметричность позволяет переставлять индексы между собой:

$$\begin{aligned} &T_{112} = T_{121} = T_{211}, \quad T_{113} = T_{131} = T_{311} \\ &T_{122} = T_{212} = T_{221}, \quad T_{133} = T_{313} = T_{331} \\ &T_{233} = T_{323} = T_{332}, \quad T_{223} = T_{232} = T_{322} \\ &T_{123} = T_{132} = T_{213} = T_{231} = T_{312} = T_{321} \end{aligned}$$

Компоненты T_{111}, T_{222}, T_{333} — «диагональные». Всего получается $7 + 3 = 10$ значимых индексов.

Альтернирование

Определение 64. Тензор T типа $(p, 0)$ (или $(0, p)$) называется *кососимметричными* или *антисимметричным*, если

$$\pi \circ T = \varepsilon_\pi T, \forall \pi \in S_p,$$

где ε_π — знак перестановки π (четность), $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Для компонент:

$$\varepsilon_\pi T^{i_1 \dots i_p} = T^{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(p)}}$$

Условие кососимметричности можно заменить эквивалентным условием $\tau \circ T = -T$, где τ — транспозиция. Иначе говоря, тензор является симметричным, если при перестановке любых двух аргументов тензор меняет знак на противоположный.

Любая координата кососимметричного тензора однозначно определяется координатой с теми же индексами, расположенными, например, в порядке возрастания:

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p},\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n.$$

Определение 65. *Альтернированием* (или *антисимметризацией*) тензоров из $\mathbb{T}^p(L)$ называется отображение:

$$A = \frac{1}{p!}\sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi \pi \colon \mathbf{T}_0^p(L) \to \mathbf{T}_0^p(L).$$

Применяется операция альтернирования также как и операция симметризации, однако знак при суммировании берется в зависимости от четности/нечетности перестановки индексов.

Альтернирование тензора

Рассмотрим тензор $T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ валентности $(0,2)$, на пространстве $\dim L = 3$. Применим к нему операцию альтернирования.

$$A(T)(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{1}{2}(T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - T(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1)) \quad A(T)^{i_1 i_2} = \frac{1}{2}\varepsilon_{i_1 i_2} T^{i_1 i_2} = \frac{1}{2}(T^{i_1 i_2} - T^{i_2 i_1}).$$

Обозначим получившейся тензор через A и рассмотрим его компоненты:

$$A^{11} = A^{22} = A^{33} = 0 \text{ так как } A^{ii} = \frac{1}{2}(T^{ii} - T^{ii}) = 0,$$

а значимых компонент всего три:

$$\begin{aligned}
A^{12} &= \frac{1}{2}(T^{12} - T^{21}) = -\frac{1}{2}(T^{21} - T^{12}) = -A^{21},\\
A^{13} &= \frac{1}{2}(T^{13} - T^{31}) = -\frac{1}{2}(T^{31} - T^{13}) = -A^{31},\\
A^{23} &= \frac{1}{2}(T^{23} - T^{32}) = -\frac{1}{2}(T^{32} - T^{23}) = -A^{32}.
\end{aligned}$$

Из компонент можно составить таблицу

	1	2	3
1	0	A^{12}	A^{13}
2	$-A^{12}$	0	A^{23}
3	$-A^{13}$	$-A^{23}$	0

Необходимо заметить, что значимых компонент у антисимметричного тензора ранга 2 в пространстве размерности $\dim L = 3$ меньше, чем у соответствующего симметричного тензора того же ранга и в том же пространстве: 3 против 6.

7.3. Антисимметричные тензоры

Поливекторы и полиформы

Определение 66.

- Контравариантные кососимметричные тензоры валентности $(0,p)$ принято называть *p–векторами* или *поливекторами*. Они образуют пространство, обозначаемое как $\Lambda^p(L)$, где $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$.

- Ковариантные кососимметричные тензоры валентности $(p, 0)$ принято называть *p–формами* (*косыми формами*). Они образуют пространство, обозначаемое как $\Lambda^p(L^*)$, где $L^* = \langle \tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n \rangle$.

- Полагают, что $\Lambda^0(L) = R$ и $\Lambda^0(L^*) = R$ — поле скаляров (чаще всего $\mathbb{R}$).

- Полагают, что $\Lambda^1(L) = L$ и $\Lambda^1(L^*) = L^*$ то есть 1-вектор — контравариантный вектор, а 1-форма — ковариантный вектор.

- Часто p-векторы обозначают как обычные векторы, указывая внизу буквы ранг $\underset{p}{\mathbf{u}}$. Ранг можно не указывать, если он понятен из контекста. В этом случае будем использовать прописные буквы $\mathbf{U}$ для обозначения p–векторов при $p > 1$.

Внешнее умножение и внешняя алгебра

Рассмотрим пространства $\Lambda(L)$ и $\Lambda(L^*)$, которые представляют собой бесконечную прямую сумму пространств p-векторов и p-форм соответственно

$$\Lambda(L) = \Lambda^0(L) \oplus \Lambda^1(L) \oplus \Lambda^2(L) \oplus \Lambda^3(L) \oplus \dots \quad \text{и} \quad \Lambda(L^*) = \Lambda^0(L) \oplus \Lambda^1(L^*) \oplus \Lambda^2(L^*) \oplus \Lambda^3(L^*) \oplus \dots$$

На данных пространствах можно ввести структуру ассоциативной алгебры, задав операцию внешнего произведения. Сделаем это для $\Lambda(L)$.

Определение 67. Зададим операцию *внешнего произведения* (умножения) $\wedge \colon \Lambda(L) \times \Lambda(L) \to \Lambda(L)$ полагая

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = A(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})$$

для любого p-вектора $\mathbf{U}$ и q-вектора $\mathbf{V}$. Под $A(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})$ здесь понимается операция альтернирования примененная к тензорному произведению $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$

Так как $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} \in \mathbb{T}_0^{p+q}$, а тензор $A(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})$ кососимметричен, то внешнее умножение задает следующее отображение

$$\wedge \colon \Lambda^p(L) \times \Lambda^q(L) \to \Lambda^{p+q}(L)$$

Из свойств тензорного произведения следует билинейность (дистрибутивность и линейность) и ассоциативность операции внешнего произведения $\wedge$

- $\mathbf{U} \wedge (\alpha \mathbf{V} + \beta \mathbf{W}) = \alpha(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) + \beta(\mathbf{U} \wedge \mathbf{W})$

- $(\alpha \mathbf{V} + \beta \mathbf{W}) \wedge \mathbf{U} = \alpha \mathbf{V} \wedge \mathbf{U} + \beta \mathbf{W} \wedge \mathbf{U}$

- $(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) \wedge \mathbf{W} = \mathbf{U} \wedge (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W})$

где $\mathbf{U} \in \Lambda^p(L)$, $\mathbf{V} \in \Lambda^q(L)$, $\mathbf{W} \in \Lambda^r(L)$, а α, β — скаляры.

Из билинейности и ассоциативности операции $\wedge$ следует, что $\Lambda(L)$ наделена строением алгебры.

Определение 68. Ассоциативная алгебра $\Lambda(L)$ над полем R называется *внешней алгеброй* пространства L (или *алгеброй Грассмана*) [2, Гл. 6, §3].

Аксиоматическое задание внешнего произведения

Внешнее произведение можно ввести аксиоматически, потребовав выполнение следующих свойств. Пусть $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — p, q, r-векторы соответственно.

- $\operatorname{rank}(\underset{p}{\mathbf{u}} \wedge \underset{q}{\mathbf{v}}) = p + q$.
- $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ — ассоциативность.
- $1 \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \wedge 1 = \mathbf{u}$, где 1 — скалярная единица (единичный элемент).
- $\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta$ — для скаляров $\wedge$ эквивалентно простому умножению.
- $\underset{p}{\mathbf{u}} \wedge \underset{q}{\mathbf{v}} = (-1)^{pq} \underset{q}{\mathbf{v}} \wedge \underset{p}{\mathbf{u}}$ — антикоммутативность для нечетных валентностей.
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ — дистрибутивность (правая).
- $\mathbf{w} \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ — дистрибутивность (левая).
- $\mathbf{u} \wedge (\alpha \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ это свойство в купе с дистрибутивностью дает билинейность операции $\wedge$.

Свойства внешнего умножения

Мы ввели конструктивное определение операции внешнего произведения, так как мы указали явную формулу, которая позволяет применять эту операцию к любым кососимметричным тензорам (как к p-векторам, так и к p-формам).

Рассмотрим два обычных вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$, $\dim L = n$ и найдем их внешнее произведение:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = A(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}) \in \Lambda^2(L),$$

непосредственно из определения получаем свойства антисимметричности:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0.$$

Рассмотрим теперь три вектора $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ из L с $\dim L = n$:

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 = A(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3) =$$
$$= \frac{1}{3!}(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3)$$

$$\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_3 = A(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3) =$$
$$= \frac{1}{3!}(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3) =$$
$$= -\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3$$

Для всех возможных сочетаний аргументов справедлива цепочка равенств:

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 = -\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_3 = -\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3,$$

из которой следует, что все возможные комбинации внешнего произведения векторов выражаются через $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3$.

По индукции доказывается следующее свойство.

Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ — произвольные векторы из L, тогда

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p = A(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots, \otimes \mathbf{x}_p)$$

Также верны следующие утверждения.

- Пусть $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, тогда p-векторы $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n$ образуют базис пространства $\Lambda^P(L)$.
- Внешняя алгебра $\Lambda^p(L)$ пространства L имеет размерность C_n^p.

Если ограничится базисом $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$, где индексы упорядочены по возрастанию $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n$, то в разложении p-векторов будут участвовать только *значимые* компоненты. Другие компоненты можно получить из значимых путем перестановки индексов и заменой знака в случае нечетной перестановки.

Строгие доказательства данных утверждений можно найти в [2, Гл. 6, §3, п.2]. Ниже мы проверим их на частных случаях.

Связь тензорных и кососимметричных базисов

На примере бивекторов рассмотрим как связаны компоненты антисимметричного тензора при разложении по базисам $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ при $i, j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и антисимметричный тензор T валентности $(0, 2)$, который разложим по базисным тензорам $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

$$T = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Индексы в сумме $T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ мы можем переобозначить, заменив i на j и j на i. Сама сумма от этого не изменится. Запишем следующую сумму:

$$T = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{2}(T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + T^{ji} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i).$$

Далее используем антисимметричность T т.е. свойство $T^{ij} = -T^{ji}$ и вынесем общий множитель за скобку:

$$T = \frac{1}{2}(T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - T^{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) = T^{ij} \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) = T^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$$

Мы получили разложение бивектора T по базису бивекторов $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$. В разложении участвуют те же компоненты, что и в разложении по $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Например для $n = 3$:

$$\begin{aligned} T = T^{12} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + T^{13} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{21} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + T^{23} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{31} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + T^{32} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = \\ = T^{12} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + T^{13} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{12} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + T^{23} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{13} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + T^{23} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \\ = 2T^{12} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + 2T^{13} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 2T^{23} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Мы использовали свойство внешнего умножения $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i$ и свойство антисимметричности тензора $T^{ij} = T^{ji}$ и оставили в разложении только *значимые компоненты.*

Если мы хотим, чтобы в разложении участвовали только значимые компоненты, то нужно использовать лишь упорядоченные базисные бивекторы $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, где $i > j$. Но тогда компоненты при разложении по $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ будут отличаться от компонент при разложении по $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ коэффициентом 2.

В общем случае данный коэффициент равен $p!$, где p — ранг антисимметричного тензора: p-вектора или p-формы. Именно этот коэффициент присутствует в операциях симметризации и альтернирования.

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= V^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} = \\ &= V^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} = p! \sum_{i_1 < \dots < i_p} V^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}\end{aligned}$$

- Можно убрать коэффициент $p!$ из определения операции альтернирования, тогда при разложении по $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$ с учетом только значимых компонент, компоненты будут совпадать с компонентами разложения по $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}$.

- Можно игнорировать различие в компонентах, если используется только базис $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$.

Далее везде при работе с p-векторами (p-формами) будем использовать базис $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ и разложение только по значимым компонентам.

Размерность, степень, валентность, ранг и т.д.

При работе с p-векторами следует учитывать следующие величины.

- Размерность пространства $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, которое будем обозначать $\dim L = n$ и также наделять структурой евклидова пространства.

- Степень (ранг, валентность) p-вектора. Она равна p и входит в обозначение пространства $\Lambda^p(L)$.

- Размерность пространства $\Lambda^p(L)$, которая равна количеству базисных p-векторов и обозначается как $\dim \Lambda^p(L)$ можно доказать [2, Гл. 6, §3, п. 2], что $\dim \Lambda^p(L) = \mathrm{C}_n^p$.

- Размерность пространства $\Lambda(L) = \Lambda^0(L) \oplus \Lambda^1(L) \oplus \Lambda^2(L) \oplus \Lambda^3(L) \oplus \dots$ равна сумме размерностей всех подпространств, составляющих прямую сумму $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i = 2^n$.

$\dim L$	rank	$\dim \Lambda^p$	Базис
0	Скаляр	1	1
1	Скаляр	1	1
	Вектор	1	$\mathbf{e}$
2	Скаляр	1	1
	Вектор	2	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$
	Бивектор	1	$\mathbf{e}_{12}$
3	Скаляр	1	1
	Вектор	3	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
	Бивектор	3	$\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}$
	Тривектор	1	$\mathbf{e}_{123}$
4	Скаляр	1	1
	Вектор	4	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$
	Бивектор	6	$\mathbf{e}_{41}, \mathbf{e}_{42}, \mathbf{e}_{43}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}$
	Тривектор	4	$\mathbf{e}_{234}, \mathbf{e}_{314}, \mathbf{e}_{124}, \mathbf{e}_{132}$
	Квадривектор	1	$\mathbf{e}_{1234}$

Базис $\Lambda^p(L)$

Базис пространства $\Lambda^p(L)$ зависит от p и от L. Будем полагать, что L — евклидово пространство с ортонормированным базисом $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$

- На $\Lambda^2(L)$ базис задается 2-векторами $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, где $i < j$ и $i, j = 1, \dots, n$.
- На $\Lambda^3(L)$ базис задается 3-векторами $\mathbf{e}_{i_1 i_2 i_3} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \mathbf{e}_{i_3}$, где $i_1 < i_2 < i_3$ и $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, n$.
- На $\Lambda^4(L)$ базис задается 4-векторами $\mathbf{e}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \mathbf{e}_{i_3} \wedge \mathbf{e}_{i_4}$, где $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ и $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, n$.
- На $\Lambda^p(L)$ базис задается p-векторами $\mathbf{e}_{i_1 \dots i_p} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$, где $i_1 < \dots < i_p$ и $i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n$.
- На $\Lambda^n(L)$ базис задается одним n-вектором $\mathbf{e}_{12\dots n} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \dots \wedge \mathbf{e}_n$.

Часто 2-вектор называют *бивектором*, 3-вектор — *тривектором* и 4-вектор — *квадривектором*.

Базисы для разных размерностей

Элемент единичного объема (псевдоскаляр)

Особый случай возникает, когда $p = n = \dim L$. Тогда базис $\Lambda^n(L)$ состоит всего из одного n-вектора:

$$\mathbf{e}_{12\dots n} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \dots \wedge \mathbf{e}_n$$

так как $\mathrm{C}_n^n = 1$ и мы условились использовать только базисы с индексами, упорядоченными по возрастанию.

Данный n-вектор важен для дальнейшего изложения. Его называют *элементом единичного объема* и обозначают как $\mathbf{E}_n$ также часто используют обозначение $\mathbf{I}_n$.

$\mathbf{E}_n$ связан с определителями, вычислением площади, объема и гиперобъема.

Разложимый p–вектор

Определение 69. *Разложимым* называют p-вектор $\mathbf{V}$, который выражается через внешнее произведение p различных векторов из L:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_p$$

В литературе на английском языке для обозначения разложимого вектора используют термин *blade* (лезвие). Реже встречается термин *простой* вектор.

В трехмерном пространстве L всякий бивектор (и, очевидно, тривектор) является простым, но для больших размерностей это не так. Например при $\dim L = 4$ бивектор

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{34} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$$

нельзя записать в виде $\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ ни для каких $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ из L.

Условия разложимости p–вектора

Можно доказать следующие утверждения [2, Гл. 6, §3, п. 5].

- Всякий $(n-1)$-вектор $\mathbf{V} \neq 0$ разложим, если $n = \dim L$.
- Бивектор $\mathbf{V} = V^{ij}\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ разложим тогда и только тогда, когда $\mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = 0$

Операции дуализации и дополнения

Для n-мерного пространства L определены следующие пространства одинаковой размерности:

- Пространство p-векторов $\Lambda^p(L)$ размерности C_n^p;
- Пространство p-форм $\Lambda^p(L^*)$ размерности C_n^p;
- Пространство $(n-p)$-векторов $\bar{\Lambda}^p(L)$ размерности $\mathrm{C}_n^{n-p} = \mathrm{C}_n^p$;
- Пространство $(n-p)$-форм $\bar{\Lambda}^p(L^*)$ размерности $\mathrm{C}_n^{n-p} = \mathrm{C}_n^p$.
- Операция *дуализации* (*оператор Ходжа*) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\Lambda^p(L)$ и $\bar{\Lambda}^p(L^*)$ или между $\Lambda^p(L^*)$ и $\bar{\Lambda}^p(L)$.
- Операция *дополнения* (комплиментарности) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\Lambda^p(L)$ и $\bar{\Lambda}^p(L)$ или между $\Lambda^p(L^*)$ и $\bar{\Lambda}^p(L^*)$.

Операция дополнения

Определение 70. *Правым дополнением* (right complement) базисного p-вектора $\mathbf{B} \in \Lambda^p(L)$, где $\dim L = n$ называется такой $(n-p)$-вектор $\overline{\mathbf{B}} \in \Lambda^{n-p}(L)$, что

$$\mathbf{B} \wedge \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{E}_n.$$

Соответственно *левым дополнением* (left complement) базисного p-вектора $\mathbf{B} \in \Lambda^p(L)$ называется такой $(n-p)$-вектор $\underline{\mathbf{B}} \in \Lambda^{n-p}(L)$, что

$$\underline{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E}_n.$$

В литературе [3] базис состоящий из дополнений называют *кобазисом.*

Рассмотрим пространство бивекторов $\Lambda^2(L)$ на $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Рассмотрим базис бивекторов в этом пространстве:

$$\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3,$$

и найдем правые дополнения к этим базисным бивекторам:

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{e}}_{12} = \mathbf{e}_3 \text{ т.к. } (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3,\\
&\overline{\mathbf{e}}_{13} = -\mathbf{e}_2 \text{ т.к. } (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge (-\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3,\\
&\overline{\mathbf{e}}_{23} = \mathbf{e}_1 \text{ т.к. } (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_3.
\end{aligned}$$

Левые дополнения в данном случае совпадают с правыми:

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathbf{e}}_{12} = \mathbf{e}_3 \text{ т.к. } \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{E}_3,\\
&\underline{\mathbf{e}}_{13} = -\mathbf{e}_2 \text{ т.к. } (-\mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3,\\
&\underline{\mathbf{e}}_{23} = \mathbf{e}_1 \text{ т.к. } \mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{E}_3.
\end{aligned}$$

Ниже приведены таблицы дополнений для базисных скаляров, векторов, бивекторов и тривекторов на $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ и $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$

$\mathbf{B}$	$\overline{\mathbf{B}}$
1	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$	1

$\mathbf{B}$	$\overline{\mathbf{B}}$	$\underline{\mathbf{B}}$
1	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	1	1

Связь между правым и левым дополнениями

Для любого разложимого p-вектора, в частности, для базисного p-вектора $\mathbf{B}$ выполняется следующее соотношение

$$\underline{\mathbf{B}} = (-1)^{p(n-p)} \overline{\mathbf{B}}$$

Данное соотношение показывает, что правое и левое дополнение совпадают в случае, если p — четное число и различаются знаком, если p — нечетное.

Также для разложимого p-вектора $\mathbf{B}$, где p — нечетное, выполняется равенство:

$$\overline{\overline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} = (-1)^{p(n-p)} \mathbf{B}$$

Для любого разложимого p-вектора:

$$\overline{\underline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$$

Дополнение к p-вектору

Определив операцию дополнения для базисных p-векторов, можно распространить ее на произвольный p-вектор, потребовав линейности:

- $\overline{\alpha \mathbf{V}} = \alpha \overline{\mathbf{A}}$, где α — скаляр.
- $\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$.

Левое дополнение должно подчиняться тем же свойствам.

После этого не составляет труда вычислять дополнительные (комплиментарные) p-векторы. Так для $\mathbf{v} \in L$, $\dim L = 3$ получим:

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{v^i \mathbf{e}_i} = v^i \overline{\mathbf{e}_i} = v^1 \overline{\mathbf{e}}_1 + v^2 \overline{\mathbf{e}}_2 + v^3 \overline{\mathbf{e}}_3 = v^1 \mathbf{e}_{23} - v^2 \mathbf{e}_{13} + v^3 \mathbf{e}_{12}$$

Вектор $\mathbf{v} \in \Lambda^1(L) = L$, а бивектор $\overline{\mathbf{v}} \in \Lambda^2(L)$, но благодаря одинаковым размерностям L и $\Lambda^2(L)$ (при условии $n = \dim L = 3$) возможно взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое операцией дополнения.

Векторное произведение

Пусть L трехмерное пространство с базисом $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Найдем внешнее произведение двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u^1 v^2 - u^2 v^1)\mathbf{e}_{12} + (u^1 v^3 - u^3 v^1)\mathbf{e}_{13} + (u^2 v^3 - u^3 v^2)\mathbf{e}_{23}$$

Найдем дополнение к бивектору $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

$$\overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}} = (u^1 v^2 - u^2 v^1)\mathbf{e}_3 - (u^1 v^3 - u^3 v^1)\mathbf{e}_2 + (u^2 v^3 - u^3 v^2)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ u^3 v^1 - u^1 v^3 \\ u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{pmatrix} \in \Lambda^1(L) = L$$

Мы получили векторное произведение $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}$$

Операция дополнения позволяет найти 1-вектор, ортогональный бивектору $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Если же ее применить к 1-вектору, то, наоборот, получаем бивектор, «ортогональный» к исходному вектору. Для больших размерностей данная интерпретация также сохраняется, но теряет наглядность.

Смешанное произведение

На том же трехмерном пространстве L найдем внешнее произведение трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = u^i v^j w^k \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk} \mathbf{E}_3 = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} \mathbf{E}_3,$$

где ε_{ijk} — символ Леви–Чивиты.

Найдем дополнение к тривектору $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$

$$\overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}} = u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk} \overline{\mathbf{E}}_3 = u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk}$$

Это не что иное, как смешанное произведение трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}}$$

Комплексная структура на $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$

Рассмотрим теперь $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ и некоторый вектор $\mathbf{u} \in L$. Найдем правое дополнение к $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

$$\overline{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2 \text{ т.к. } \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2,$$
$$\overline{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{e}_1 \text{ т.к. } \mathbf{e}_2 \wedge (-\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2.$$

Найдем теперь дополнение к $\mathbf{u}$:

$$\overline{\mathbf{u}} = u^1 \overline{\mathbf{e}}_1 + u^2 \overline{\mathbf{e}}_2 = u^1 \mathbf{e}_2 - u^2 \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}$$

Это не что иное, как комплексная структура на двумерном декартовом пространстве:

$$\mathbf{J}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^2 \\ u^1 \end{pmatrix} \text{ — поворот на } \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\mathbf{u}} = u^1 \underline{\mathbf{e}}_1 + u^2 \underline{\mathbf{e}}_2 = -u^1 \mathbf{e}_2 + u^2 \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} u^2 \\ -u^1 \end{pmatrix} \text{ — поворот на } -\frac{\pi}{2}$$

Ориентированная площадь $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$

Вновь рассмотрим двумерное пространство L. Найдем смешанное произведение двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = u^i v^j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = u^i v^j \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_2 = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \mathbf{E}_2 = (u^1 v^2 - u^2 v^1) \mathbf{E}_2,$$

Найдем дополнение от бивектора $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

$$\overline{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}} = (u^1 v^2 - u^2 v^1) \overline{\mathbf{E}}_2 = (u^1 v^2 - u^2 v^1).$$

Мы получили ориентированную площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Ориентированная площадь может слущить геометрической интерпретацией бивектора.

Антивектор

В общем случае для элемента $\mathbf{v}$ из n-мерного линейного пространства L, его правое дополнение $\overline{\mathbf{v}}$ (или левое $\underline{\mathbf{v}}$) имеет тоже n компонент, также как и сам n. Такое дополнение принято называть *антивектором.*

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \Rightarrow \overline{\mathbf{v}} = v^i \overline{e}_i$$

Найдем внешнее произведение $\mathbf{v}$ с $\overline{\mathbf{v}}$. Так как

$$\mathbf{e}_i \wedge \overline{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \mathbf{E}_n, & i = j \end{cases}$$

то

$$\mathbf{v} \wedge \overline{\mathbf{v}} = v^i v^j \mathbf{e}_i \wedge \overline{\mathbf{e}}_j = (v^i)^2 \mathbf{e}_i \wedge \overline{\mathbf{e}}_i = \|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{E}_n.$$

Для двух разных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ запишем:

$$\mathbf{u} \wedge \overline{\mathbf{v}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{E}_n \text{ или } \underline{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{E}_n$$

Антивнешнее произведение

Антивнешнее произведение $\vee$ вводится аксиоматически. Оно играет роль внешнего произведения, но в дополнительном пространстве $\Lambda^{n-p}(L)$.

$$\wedge \to \vee \quad \underset{p}{\mathbf{U}} \to \underset{n-p}{\mathbf{U}} \quad \Lambda^p(L) \to \Lambda^{n-p}(L)$$

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = -\mathbf{b} \vee \mathbf{a}$$

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = (-1)^{(n-\operatorname{rank}\mathbf{A})(n-\operatorname{rank}\mathbf{B})}\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$$

$$\overline{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \vee \overline{\mathbf{B}} \text{ и } \underline{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}} = \underline{\mathbf{A}} \vee \underline{\mathbf{B}} \Rightarrow \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \underline{\overline{\mathbf{A}} \vee \overline{\mathbf{B}}} = \overline{\underline{\mathbf{A}} \vee \underline{\mathbf{B}}}$$
$$\overline{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \wedge \overline{\mathbf{B}} \text{ и } \underline{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}} = \underline{\mathbf{A}} \wedge \underline{\mathbf{B}} \Rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \underline{\overline{\mathbf{A}} \wedge \overline{\mathbf{B}}} = \overline{\underline{\mathbf{A}} \wedge \underline{\mathbf{B}}}$$

Пример №1

Рассмотрим $A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ 2–форму, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3 \rangle$, $\mathrm{dim}L = 3$, $\mathrm{rang}A = 2$, валентность $(2, 0)$. Выпишем все компоненты данного тензора, всего их $3^2 = 9$.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Кососимметричность позволяет уменьшить количество компонент:

$$A_{12} = -A_{21},\ A_{13} = -A_{31},\ A_{23} = -A_{32},$$
$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$$

Всего $C_3^2 = 3$ значимых компонент.

$$A = A_{12}(\tilde{e}^1 \otimes \tilde{e}^2 - \tilde{e}^2 \otimes \tilde{e}^1) + A_{13}(\tilde{e}^1 \otimes \tilde{e}^3 - \tilde{e}^3 \otimes \tilde{e}^1) + A_{23}(\tilde{e}^2 \otimes \tilde{e}^3 - \tilde{e}^3 \otimes \tilde{e}^2)$$

Пример №2

Рассмотрим $A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ 4–форму, пространство $L^* = \langle \tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3, \tilde{e}^4 \rangle$, $\mathrm{dim}L = 4$, $\mathrm{rang}A = 4$, валентность $(4, 0)$. Можно было бы выписать все компоненты этой формы, если бы их не было $4^4 = 256$. Но нас интересуют в первую очередь значимые компоненты, а их всего одна штука:

$$C_4^4 = 1.$$

Не нулевых компонент всего $4! = 24$ штуки и все они равны или A_{1234} или $-A_{1234}$. Знак определяется четностью/нечетностью подстановки

$$\pi(1, 2, 3, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) \end{pmatrix}$$

Список литературы

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 1. Основы алгебры. — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574538.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. Линейная алгебра. — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574545.
3. Browne J. Grassmann Algebra : Exploring extended vector algebra with Mathematica. — 2009. — Incomplete draft Version 0.50.