Векторная алгебра в $\mathbb{R}^3$

Ориентация пространства

Одноименные базисы

Определение

Два базиса $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle$ линейного пространства L называются одноименными [33, с. 71], если матрица оператора перехода от одного базиса к другом имеет положительный определитель:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \dots & \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} C \text{ где } \det\{C\} > 0.$$

Отношение одноименности обладает рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью и, следовательно, является отношением эквивалентности на множестве всех базисов пространства L.

Проще говоря, все возможные базисы в L относительно заданного базиса $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ распадаются на два класса, называемых ориентацией пространства:

1. Базисы, которые получаются из $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ с помощью матрицы с положительным определителем.
2. Базисы, которые получаются из $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ с помощью матрицы с отрицательным определителем.

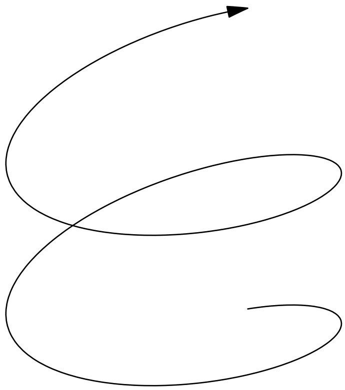
Ориентация пространства

В пространствах с размерностью 1, 2 и 3 этим двум классам можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

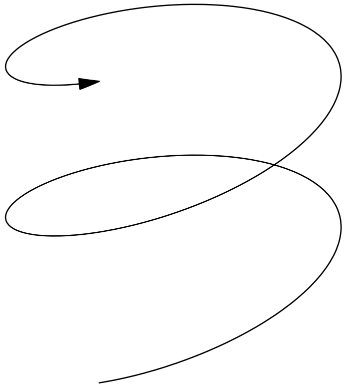
1. На прямой ориентация задается путем выделения одного направления, называемого положительным (обычно слева на право).
2. На плоскости ориентация задается выбором вращения (по часовой стрелки или против часовой).
3. В пространстве ориентация задается выбором направления вращения винта (буравчик) (правый винт или левый винт).

Пример правого и левого винтов

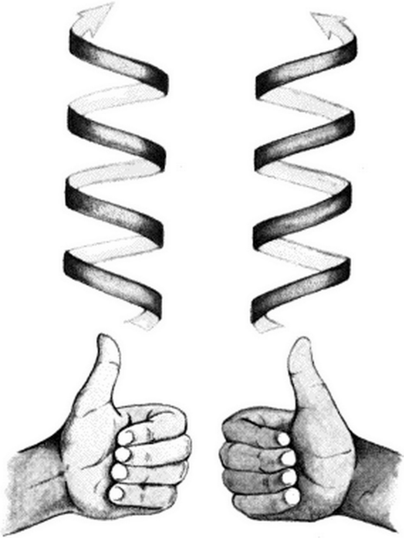
Левый винт (двигаемся вдоль винтовой линии вращаясь **по** часовой стрелке вокруг оси Oz)



Правый винт (двигаемся вдоль винтовой линии вращаясь **против** часовой стрелке вокруг оси Oz)



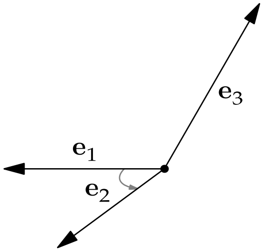
Аналогия с рукой

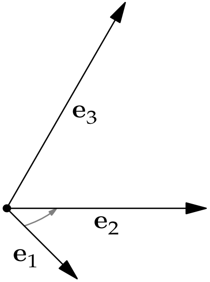


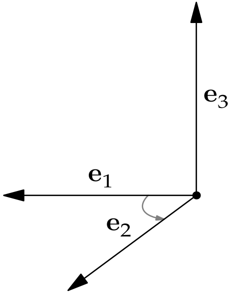
Правая ориентация пространства

В трехмерном пространстве правая ориентация определяется таким базисом $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, что вектор $\mathbf{e}_1$ кратчайшим образом совмещается с вектором $\mathbf{e}_2$ при вращении против часовой стрелки, если смотреть на плоскость векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ с конца вектора $\mathbf{e}_3$.

Несколько примеров **правой** тройки векторов:



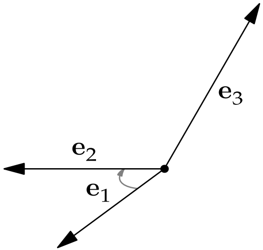


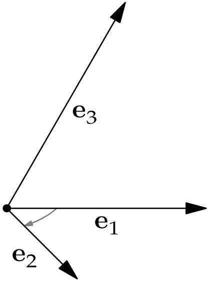


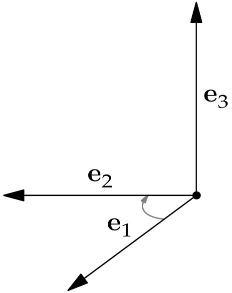
Левая ориентация пространства

Все базисы, получаемые из правой тройки базисных векторов $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ с помощью оператора с положительным определителем, будут иметь также правую ориентацию, а с отрицательным определителем — левую.

Несколько примеров **левой** тройки векторов:

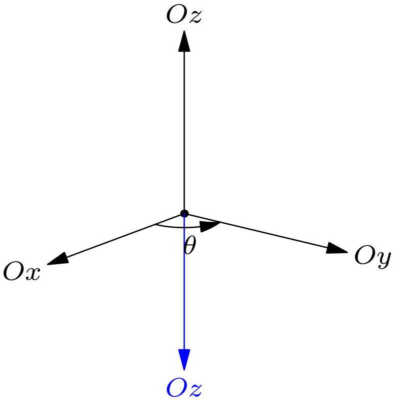






Инверсия осей координат

Ориентация пространства изменится, если инвертировать лбую координатную ось декартовой системы координат. Для осей Ox и Oy это более очевидно, а для оси Oz менее. Картинку лучше смотреть в 3D.



Перестановка базисных векторов 1

Рассмотрим правую тройку векторов, составляющих базис $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Рассмотрим 5 базисов, которые можно получить из данного путем перестановок его векторов.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Перестановка базисных векторов 2

Получили, что при одной перестановке в упорядоченной тройке $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ любых двух векторов местами, новый базис меняет ориентацию с правой на левую. Круговая перестановка дает одноименные базисы и ориентация не меняется.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Векторная алгебра в $\mathbb{R}^3$

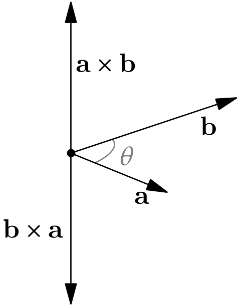
Векторное произведение

Определение

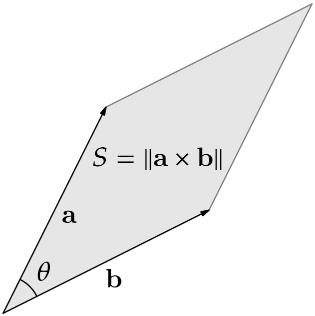
Векторным произведением [33, с. 75] векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из $\mathbb{R}^3$ называется такой вектор $\mathbf{c}$, который обладает следующими свойствами:

1. $\|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin\theta$, где $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
2. $(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{b}) = 0$ — вектор c ортогонален векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
3. Упорядоченная тройка векторов $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ положительная, то есть ориентация (правая/левая) этой тройки совпадает с ориентацией пространства.

Обозначается векторное произведение как $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.



- Равенство $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ были коллинеарны.
- Норма векторного произведения $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ так как $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin\theta$, где $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.



Свойства векторного произведения 1

1. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ — кососимметричность.
2. $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — линейность.
3. $[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ — линейность.
4. $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] + [[\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a}] + [[\mathbf{c}, \mathbf{a}], \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ — тождество Якоби.
5. $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — тождество Лагранжа.
6. $\|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$
7. $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$.

Свойства векторного произведения 2

Докажем свойство 6. Сделать это просто, если вспомнить определение косинуса угла между векторами через скалярное произведение:

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} \Rightarrow (\mathbf{a},\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Тогда с одной стороны:

$$(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\cos^2\theta = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\theta,$$

а с другой стороны из определения векторного произведения:

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\theta,$$

что и доказывает свойство 6.

Вычисление векторного произведения в $\mathbb{R}^3$ 1

Пусть задан ортонормированный базис $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Чтобы вычислить векторное произведение любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в данном базисе, надо задать следующую таблицу.

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Или в таком виде:

$\times$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{0}$

Теперь вычислим векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ для векторов $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3$

Вычисление векторного произведения в $\mathbb{R}^3$ 2

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3)\times(b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3) = a^1b^1\overbrace{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1}^{\mathbf{0}} + a^1b^2\overbrace{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}^{\mathbf{e}_3} +$$

$$+ a^1b^3\overbrace{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3}^{-\mathbf{e}_2} + a^2b^1\overbrace{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1}^{-\mathbf{e}_3} + a^2b^2\overbrace{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2}^{\mathbf{0}} + a^2b^3\overbrace{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}^{\mathbf{e}_1} + a^3b^1\overbrace{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1}^{\mathbf{e}_2} + a^3b^2\overbrace{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2}^{-\mathbf{e}_1} + a^3b^3\overbrace{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3}^{=\mathbf{0}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}_1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}_2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} a^2b^3 - a^3b^2 \\ a^3b^1 - a^1b^3 \\ a^1b^2 - a^2b^1 \end{pmatrix}$$

Также можно записать с использованием определителя:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a^1 & b^1 \\ \mathbf{e}_2 & a^2 & b^2 \\ \mathbf{e}_3 & a^3 & b^3 \end{vmatrix}$$

Вычисление векторного произведения в $\mathbb{R}^3$ 3

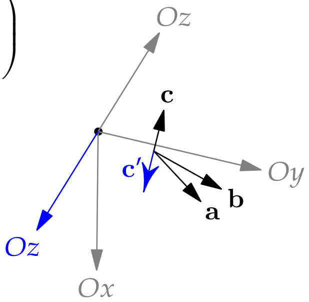
или используя матричное умножение:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^3 & -b^2 \\ -b^3 & 0 & b^1 \\ b^2 & b^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

Инверсия оси координат и векторное произведение

Инверсия оси Oz декартовой системы координат производится следующим оператором:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ где } \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$



Векторы $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$ и $\mathbf{b} = (b^1, b^2, b^3)$ преобразуются в векторы $\mathbf{a}' = (a^1, a^2, -a^3)$ и $\mathbf{b}' = (b^1, b^2, -b^3)$, а векторное произведение

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \begin{pmatrix}-(a^2b^3 - a^3b^2)\\ -(a^3b^1 - a^1b^3)\\ a^1b^2 - a^2b^1\end{pmatrix}$$

Если совместить обе координатные системы и изобразить векторы, то получится, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ остались прежними, а $\mathbf{c}$ поменял направления. Отсюда и название — псевдовектор.

Объем параллепипеда

Рассмотрим тройку упорядоченных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ и рассмотрим параллелепипед, построенный на этих векторах. В основании параллелепипеда лежит параллелограмм, построенный на $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, а боковая грань задается вектором $\mathbf{a}_3$.

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту. Площадь основания равна:

$$S = \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|,$$

а высоту h найдем как проекцию вектора $\mathbf{a}_3$ на ось, задаваемую единичным вектором $\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}$

$$\mathbf{h} = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \Rightarrow h = \|\mathbf{h}\| = \frac{|(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)| \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2} = \frac{|(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}$$

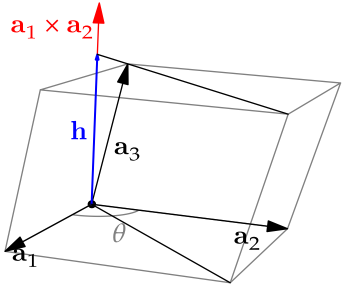
$$V = hS = \frac{|(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = |(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|$$

Для нахождения высоты проецируем вектор $\mathbf{a}_3$ на вектор $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$, так как $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ ортогонален плоскости основания параллелепипеда. Проекция делается с помощью единичного вектора $\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}$:

$$\mathbf{h} = \left(\mathbf{a}_3, \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}\right) \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2}.$$

Далее норму $\|\mathbf{h}\|$ умножаем на площадь основания $S = \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$

$$V = \|\mathbf{h}\| S = |(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)| \frac{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2} \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = |(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|.$$



Смешанное произведение

Определение

Смешанным произведением $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ из $\mathbb{R}^3$ называется скалярное произведение вектора $\mathbf{a}_1$ на векторное произведение $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$$

- $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$, который отличается от объема знаком. Знак зависит от порядка векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$
- Смешанное произведение в правой декартовой системе координат (в ортонормированном базисе) равно определителю матрицы, составленной из векторов:

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$