Теория поверхностей

Первая и вторая квадратичные формы и их инварианты

Дифференциальная геометрия
Теория поверхностей.

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Простой сегмент поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение

Простым сегментом (куском) поверхности называется такое множество точек, которое может быть отображено топологически (взаимно однозначно и непрерывно) на множество точек круга, включая и точки окружности. Точки, отобразившиеся в точки окружности, называются граничными точками. Граничные точки составляют замкнутую кривую — границу данного куска [1, с. 40].

Более сложные поверхности можно составлять из простых сегментов с помощью склейки то есть совмещения дуг их границ путем установления взаимно однозначного соответствия между точками границ.

Далее везде под поверхностью подразумевается именно простой сегмент или склейка из нескольких простых сегментов.

Поверхности в трехмерном пространстве это простейший объект, на котором возникает, как говорят, внутренняя геометрия.

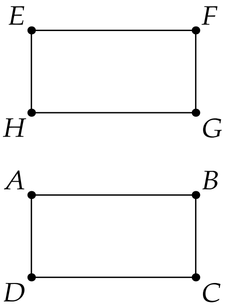

Рис. 6: Два простых куска поверхности

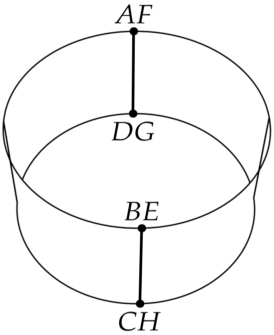

Рис. 7: Склеиваются в цилиндрическую поверхность…

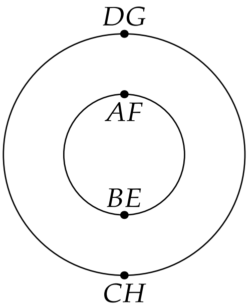

Рис. 8: … или в плоское кольцо…

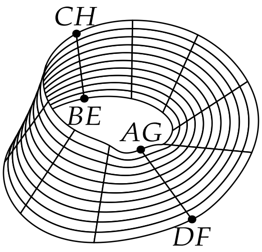

Рис. 9: … или в виде листа Мёбиуса

Параметрическое представление поверхности в $\mathbb{R}^3$

Методы классической дифференциальной геометрии позволяют изучать поверхности в $\mathbb{R}^3$ имеющие параметрическое представление, то есть определяемые с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}$ — вектор-функции от двух параметров u, v:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

где параметры u и v задают криволинейные координаты на поверхности.

Трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, в котором находится рассматриваемая поверхность, называется объемлющим пространством. Говорят, что поверхность вложена в объемлющее пространство.

В декартовых координатах x, y, z пространства $\mathbb{R}^3$ радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$ задается системой из трех уравнений:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Явное и неявное представления поверхности в $\mathbb{R}^3$

В $\mathbb{R}^3$ регулярный кусок поверхности можно задать в явном виде, выразив зависимость одной координаты через две другие:

$$x = f(y, z) \text{ или } y = f(x, z) \text{ или } z = f(x, y),$$

где функция f обычно предполагается непрерывной и имеющей непрерывные производные сколь угодно высокого порядка.

Кроме того, возможно задание поверхности в $\mathbb{R}^3$ неявно, в виде уравнения:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где функция F также непрерывна с непрерывными производными требуемого порядка.

Связь между параметрическим, неявным и явным представлениями устанавливается следующей теоремой, основанной на теореме существовании неявной функции [2, Глава VIII, §5].

Теорема

Пусть вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) \end{pmatrix}^T$ *удовлетворяет следующим требованиям:*

1. *функции* $x(u,v)$, $y(u,v)$ *и* $z(u,v)$ *являются непрерывными во всей области определения параметров* u *и* v*;*
2. *эти же функции имеют непрерывные частные производные первого порядка;*
3. *ранг матрицы Якоби* J *строго равен двум:*

$$J = \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right)^T_{u_0,v_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{u_0,v_0} \qquad \operatorname{rank} J = 2$$

Тогда в окрестности каждой точки u_0, v_0 *путем исключения параметров* u *и* v *можно получить неявное уравнение* $F(x,y,z) = 0$*, определяющее поверхность.*

Исключение параметров

Параметры u, v исключаются из уравнений

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

в результате чего получается выражение, содержащее только координаты x, y, z. Кроме того, это уравнение можно разрешить относительно каждой из переменной x, y или z и получить явное задание поверхности в явном виде

$$z = f(x, y), \text{ или } y = f(x, z), \text{ или } x = f(y, z).$$

Если в точке $P = (x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ ранг матрицы Якоби **не** равен двум $\operatorname{rank} J = 2$, то точка P называется особой точкой.

В окрестности неособой точки P все три способа задания поверхности эквивалентны.

Обобщение формул на случай $\mathbb{R}^n$ 1

В случае произвольной размерности удобно использовать индексы. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана декартова система координат и координаты обозначаются как $x^1, x^2, \dots, x^n$. Так параметрический вид поверхности задается радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^k) = \begin{bmatrix} x^1(u^1, \dots, u^k) \\ x^2(u^1, \dots, u^k) \\ \vdots \\ x^n(u^1, \dots, u^k) \end{bmatrix}$$

- В 3-мерное пространство можно вложить только 2-мерную поверхность (параметрическое задание требует два параметра).
- В 4-мерное пространство можно вложить 2-мерную и 3-мерную поверхности.
- В общем случае в n–мерное пространство вкладывается k мерная поверхность, где $k < n$.

Обобщение формул на случай $\mathbb{R}^n$ 2

В n – мерном пространстве k–мерная поверхность задается в неявном виде системой из $n-k$ уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}$$

или в параметрическом виде:

Точка $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ поверхности называется неособой, если ранг матрицы

$$\left.\frac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(u^1, u^2, \dots, u^k)}\right|_{x^i = x_0^i}, \; i = 1, \dots, n-k; j = 1, \dots, n$$

равен в точности k.

Далее мы будем записывать формулы сперва для случая $n = 3$, а затем, по возможности, для произвольного n.

Кривая в 3-х мерном пространстве 1

Рассмотрим некоторую кривую γ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть кривая лежит на некоторой поверхности, т.е. все точки этой кривой принадлежат поверхности. Так как все точки кривой лежат на поверхности, следовательно радиус вектор поверхности $\mathbf{r}(u, v)$ также задает и кривую:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T.$$

Каждую точку кривой можно выразить через параметры u, v поверхности:

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T.$$

Получается, что каждому значению параметра t кривой соответствуют значения двух параметров (u, v) поверхности:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Кривая в 3-х мерном пространстве 2

Таким образом, если мы рассматриваем кривую, целиком лежащую на некоторой поверхности, то для ее задания достаточно два уравнения, которые показывают связь параметра кривой с координатами поверхности (u, v):

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Мы можем обойтись без объемлющего пространства и задавать кривую только через координаты самой поверхности. Можно построить самодостаточную геометрию на поверхности без помощи внешнего пространства.

Первый вопрос, который следует решить: как вычислять длины дуги кривой заданной в координатах (u, v)?

Касательные векторы к точке на поверхности 1

Рассмотри поверхность, заданную радиус-вектором $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$, также будем считать, что на поверхности задана некоторая кривая γ и все точки кривой можно выразить через вектор $\mathbf{r}$, который можно считать сложной функцией от t:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix}$$

Найдем первую производную от $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ по параметру t:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} x_u \dot{u} + x_v \dot{v} \\ y_u \dot{u} + y_v \dot{v} \\ z_u \dot{u} + z_v \dot{v} \end{pmatrix}$$

Следующие обозначения производных использованы для компактности формул:

$$x_u \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial x}{\partial u}, y_u \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial y}{\partial u}, z_u \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial z}{\partial u}, x_v \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial x}{\partial v}, y_v \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial y}{\partial v}, z_v \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial z}{\partial v}, \dot{u} \overset{\text{not}}{=} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \dot{v} \overset{\text{not}}{=} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Векторы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

являются касательными векторами к поверхности в данной точке и образуют базис, через который могут быть выражены все возможные касательные векторы к кривой в данной точке.

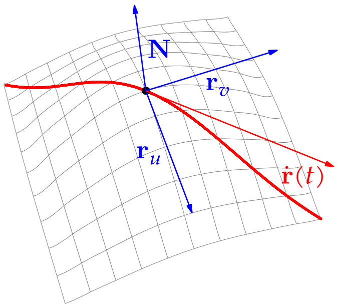

Рис. 10: Касательные векторы

Определение

Плоскость, содержащая все касательные к поверхности в данной ее точке, называется касательной плоскостью.

Касательные векторы к точке на поверхности 3

При взятии производной по t от $\mathbf{r}(t)$ мы фактически разложили касательный вектор **к кривой** на поверхности в линейную комбинацию касательных векторов **к поверхности**:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}_{\text{скаляр}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}_{\text{скаляр}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Вектора $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ образуют базис на касательной плоскости к поверхности и любой вектор на этой поверхности может быть выражен через их линейную комбинацию.

Через данную точку поверхности может проходить сколько угодно кривых и пар касательных векторов может быть сколь угодно много, однако все они лежат в одной касательной плоскости.

Определение

Вектор $\mathbf{N}$, перпендикулярный всем касательным прямым к данной точке поверхности, называется нормальным вектором поверхности.

Следует отметить, что нормальный вектор в данной точке поверхности может отличаться от нормального вектора к кривой, проходящей через данную точку на поверхности.

Нормальный вектор определяется через векторное произведение касательных векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & x_u & x_v \\ \mathbf{e}_2 & y_u & y_v \\ \mathbf{e}_3 & z_u & z_v \end{vmatrix} = \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \mathbf{e}_1 + \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \mathbf{e}_2 + \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \mathbf{e}_3.$$

Часто используют не $\mathbf{N}$, а единичный вектор нормали $\mathbf{m}$, который получается путем нормировки $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}$$

Нормальный вектор к поверхности 2

Вектор нормали ортогонален к касательной плоскости, что очевидно следует из равенства:

$$\left(\mathbf{N}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\mathbf{N}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\mathbf{N}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Параметрическое уравнение нормали с параметром t задается формулой:

$$\mathbf{P}(x, y, z) = \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{m}t,$$

где $\mathbf{P}(x, y, z)$ — радиус-вектор нормали, задающий все точки $P(x, y, z)$ этой прямой линии.

Первая квадратичная форма поверхности 1

Для нахождения дифференциала дуги $\mathrm{d}l$ кривой в ортонормированных декартовых координатах, необходимо вычислить норму касательного вектора:

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} +$$

$$+ \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

В декартовых координатах:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right) = (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

Первая квадратичная форма поверхности 2

Скалярные произведения $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)$, $(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)$ и $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ можно сгруппировать в таблицу:

$$G = \begin{pmatrix} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad g_{12} = g_{21}$$

которая задает компоненты метрического тензора на поверхности. В силу непрерывности функции $\mathbf{r}$ таблица обладает симметрией $g_{12} = g_{21}$. Так как компонент всего 3 в литературе часто используют еще и такие обозначения:

$$G = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ где } E \overset{\text{not}}{=} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right), \; F \overset{\text{not}}{=} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right), \; G \overset{\text{not}}{=} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right).$$

Мы их будем избегать, чтобы сохранить общность изложения.

Вычислим, наконец, квадрат дифференциала дуги кривой $\mathrm{d}l$:

$$\mathrm{d}l^2 = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 \mathrm{d}t^2 = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t^2 + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t^2$$

окончательно:

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\,\mathrm{d}u^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}v^2$$

Полученная формула называется первой квадратичной формой поверхности и по сути является римановой метрикой на поверхности. Иногда используют обозначение φ_1:

$$\boxed{\varphi_1 = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\,\mathrm{d}u^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}v^2}$$

Геометрический смысл первой квадратичной формы

Что дает знание первой квадратичной формы поверхности? Она определяет геометрические свойства плоских фигур, лежащих на поверхности.

- Позволяет вычислять длины дуг кривых.
- Позволяет определить углы пересечения линий на поверхности.
- Позволяет вычислять площадь выбранного куска поверхности.
- Выбрав такие преобразования поверхности, которые не меняют первую квадратичную форму, мы получим аналог классической геометрии на плоскости для любой поверхности. Так, можно сформулировать геометрию на сфере, на параболе, торе и т.д.
- Конформные преобразования первой формы дадут нам аналог преобразований подобия в классической геометрии.

Индексные обозначения при записи первой квадратичной формы 1

Вместо того, чтобы обозначать параметры поверхности двумя разными буквами u и v, можно использовать одну букву, например u, но снабдить ее верхним индексом u^i. Для двумерного случая $(u, v) \leftrightarrow (u^1, u^2)$. Такие обозначения называются индексными и позволяют записывать формулы очень компактно, особенно если распространить их на многомерный случай.

Радиус-вектор поверхности будет записываться как $\mathbf{r}(u^1, u^2)$. Найдем производную по t, имя ввиду, что $u^i = u^i(t)$ для $i = 1, 2$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \right) \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathrm{d}\mathbf{r}\,, \mathrm{d}\mathbf{r}) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, \mathrm{d}u^i\, \mathrm{d}u^j\,.$$

Обобщение на n–мерие 1

В случае $\mathbb{R}^n$ запишем формулы с помощью индексных обозначений. Далее везде индекс $i = 1, \dots, n$, а индексы $j, k, l = 1, \dots, m$.

В n-мерном пространстве может лежать m-мерная поверхность, где $2 \leqslant m \leqslant n-1$. Параметрически она задается в декартовых координатах следующим радиус-вектором:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \dots, x^n) = \begin{bmatrix} x^1(u^1, \dots, u^m) \\ \vdots \\ x^n(u^1, \dots, u^m) \end{bmatrix} = \mathbf{r}(x^i(u^j)) = \mathbf{r}(x^1(u^1, \dots, u^m), \dots, x^n(u^1, \dots, u^m)).$$

Сокращенную запись $\mathbf{r}(x^i(u^j))$ удобно применять при дифференцировании.

Пусть m уравнений задают кривую на поверхности:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(t), \\ \vdots \\ u^m = u^m(t), \end{cases} \Leftrightarrow u^j = u^j(t).$$

Обобщение на n–мерие 2

Дифференцируем $\mathbf{r}$ как сложную функцию от переменной t, где зависимость от t дается аргументами $x^i(u^j(t))$.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}$$

Первую квадратичную форму находим как:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}\right) \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t} = \sum_{j,k=1}^{m} g_{jk} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t},$$

где элементы g_{jk} суть компоненты метрического тензора, которые можно сгруппировать в таблицу:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix}$$

Обобщение на n–мерие 3

Дифференциал дуги выражается через первую квадратичную форму:

$$\mathrm{d}l^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t^2 = \sum_{j,k=1}^{m} g_{jk}\,\mathrm{d}u^j\,\mathrm{d}u^k$$

Следует отметить, что мы при выводе первой квадратичной формы что в $\mathbb{R}^3$, что в $\mathbb{R}^n$ всегда предполагали наличие декартовой системы координат и, следовательно, наличие метрического тензора в самом пространстве $\mathbb{R}^n$. И используя этот внешний по отношению к поверхности метрический тензор, мы получили формулу для внутреннего метрического тензора.

Такой метрический тензор называется индуцированным. Можно исходить не из декартовой системы координат и индуцировать другую метрику на той же самой поверхности. Позже мы на примере рассмотрим как это делается.

Единичный вектор нормали и метрический тензор

Ранее мы уже ввели единичный вектор нормали к поверхности $\mathbf{m}$ который вычисляется по формуле:

$$\mathbf{m} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|},$$

теперь мы можем модифицировать данную формулу, учитывая, что

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|^2 = \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\|^2}_{g_{11}} \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|^2}_{g_{22}} - \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2}_{g_{12}g_{21} = g_{12}^2} = g_{11}g_{22} - \underbrace{g_{12}g_{21}}_{g_{12}^2} = \det G$$

запишем единичный вектор нормали как:

$$\mathbf{m} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\sqrt{\det G}}.$$

Единичный вектор нормали при репараметризации 1

Рассмотрим как изменяется единичный вектор нормали при замене параметров кривой. Пусть параметры u^1, u^2 заменяются на параметры v^1, v^2 то есть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) = \mathbf{r}(v^1, v^2).$$

Надо найти связь между $\mathbf{m}$ в криволинейных координатах v^1 и v^2 и в криволинейных координатах u^1 и u^2. Для этого используем формулу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^i} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial v^i} = \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\dfrac{\partial u^1}{\partial v^1} + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\dfrac{\partial u^2}{\partial v^1}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\dfrac{\partial u^1}{\partial v^2} + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\dfrac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^2} = \frac{\partial u^1}{\partial v^1}\frac{\partial u^2}{\partial v^2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} + \frac{\partial u^2}{\partial v^1}\frac{\partial u^1}{\partial v^2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial u^1}{\partial v^1}\frac{\partial u^2}{\partial v^2} - \frac{\partial u^2}{\partial v^1}\frac{\partial u^1}{\partial v^2}\right)\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$$

Единичный вектор нормали при репараметризации 2

Мы получили, что преобразование вектора нормали задается определителем матрицы Якоби преобразования криволинейных координат:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \quad \det(J) = \frac{\partial u^1}{\partial v^1}\frac{\partial u^2}{\partial v^2} - \frac{\partial u^2}{\partial v^1}\frac{\partial u^1}{\partial v^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^2} = \det J \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}.$$

В случае единичного вектора нормали $\mathbf{m}$ получаем:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_{v^1} \times \mathbf{r}_{v^2}}{\|\mathbf{r}_{v^1} \times \mathbf{r}_{v^2}\|} = \frac{\det J}{|\det J|}\frac{\mathbf{r}_{u^1} \times \mathbf{r}_{u^2}}{\|\mathbf{r}_{u^1} \times \mathbf{r}_{u^2}\|} = \operatorname{sign}(\det J)\frac{\mathbf{r}_{u^1} \times \mathbf{r}_{u^2}}{\|\mathbf{r}_{u^1} \times \mathbf{r}_{u^2}\|}$$

Таким образом, при преобразовании криволинейных координат норма единичного вектора нормали не изменяется, но если определитель преобразования $\det J$ меньше нуля, то вектор $\mathbf{m}$ меняет направление.

Единичный вектор нормали при репараметризации 3

Такое поведение единичного вектора нормали становится более понятным, если учесть, что мы определили его посредством векторного произведения, результатом которого на самом деле является псевдовектор, а не вектор.

Преобразование первой квадратичной формы при репараметризации 1

Рассмотрим, как преобразуется первая квадратичная форма при замене параметров (локальных координат). Пусть $\mathbf{r}(u^1, u^2, \dots, u^m) = \mathbf{r}(v^1, v^2, \dots, v^m)$ то есть сделали замену:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(v^1, v^2, \dots, v^m), \\ u^2 = u^2(v^1, v^2, \dots, v^m), \\ \vdots \\ u^m = u^m(v^1, v^2, \dots, v^m). \end{cases} \implies \quad u^i = u^i(v^j), \quad i, j = 1, \dots, m.$$

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t} \iff \mathrm{d}u^i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \,\mathrm{d}v^k$$

$$\mathrm{d}l^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{\partial u^j}{\partial v^l} \,\mathrm{d}v^k \,\mathrm{d}v^l = \sum_{k,l=1}^{m} g'_{kl} \,\mathrm{d}v^k \,\mathrm{d}v^l \,,$$

Преобразование первой квадратичной формы при репараметризации 2

где с помощью g'_{kl} мы обозначили компоненты метрического тензора в новой системе локальных координат $v^1, \dots, v^m$

$$g'_{kl} = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{\partial u^j}{\partial v^l}, \quad G' = [g'_{ij}]$$

Можно заметить, что выражение типа $\partial u^i \big/ \partial v^j$ задает элементы матрицы Якоби:

$$J = \frac{\partial(u^1, u^2, \dots, u^m)}{\partial(v^1, v^2, \dots, v^m)} = \begin{pmatrix} \partial u^1 \big/ \partial v^1 & \partial u^1 \big/ \partial v^2 & \dots & \partial u^1 \big/ \partial v^m \\ \partial u^2 \big/ \partial v^1 & \partial u^2 \big/ \partial v^2 & \dots & \partial u^2 \big/ \partial v^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial u^m \big/ \partial v^1 & \partial u^m \big/ \partial v^2 & \dots & \partial u^m \big/ \partial v^m \end{pmatrix}$$

Тогда преобразование компонент метрического тензора можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\boxed{G' = J^T G J}$$

Например для двумерного случая матрицы Якоби примут следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} \partial u^1 / \partial v^1 & \partial u^1 / \partial v^2 \\ \partial u^2 / \partial v^1 & \partial u^2 / \partial v^2 \end{pmatrix} J^T = \begin{pmatrix} \partial u^1 / \partial v^1 & \partial u^2 / \partial v^1 \\ \partial u^1 / \partial v^2 & \partial u^2 / \partial v^2 \end{pmatrix}$$

Можно получить вторую квадратичную форму рассуждая следующим образом: пусть мы проводим репараметризацию, заменяя декартовы координаты (x, y, z) на параметры поверхности (u, v), тогда:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v \end{pmatrix} \quad J^T = \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial y / \partial u & \partial z / \partial u \\ \partial x / \partial v & \partial y / \partial v & \partial z / \partial v \end{pmatrix}$$

Преобразование первой квадратичной формы при репараметризации 4

Учитывая, что метрика декартова пространства — единичная матрица $I = \mathrm{diag}(1,1,1)$, тогда

$$G = J^T I J = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу первой квадратичной формы поверхности:

$$G = \begin{pmatrix} x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 & x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v & x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что матрица Якоби получилась не квадратной, так как мы при замене координат ввели координатную систему не для всего пространства, а для его части, лежащем на двумерной поверхности.

Нормальная кривизна 1

Рассмотрим кривую заданную на поверхности радиус-вектором $\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}(u(l), v(l))$, где l — нормальный параметр. В данной точке кривой рассмотрим одновременно:

- вектор нормали $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}$ **к кривой**;
- вектор нормали $\mathbf{N}$ **к поверхности**.

Важно понимать, что данные векторы могут не совпадать!

Проекция вектора нормали кривой $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}$ на вектор нормали к поверхности $\mathbf{N}$ называется нормальной кривизной, обозначается как k_n и вычисляется по формуле

$$k_n = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right),$$

так как $\mathbf{m} = \mathbf{N}/\|\mathbf{N}\|$.

Учитывая первую формулу Френе–Серре $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2} = k\mathbf{n}$, можно записать k_n как

$$k_n = (k\mathbf{n}, \mathbf{m}) = k(\mathbf{n}, \mathbf{m}).$$

Нормальная кривизна 2

Для вычисления нормальной кривизны необходимо вычислить вторую производную от $\mathbf{r}$ по натуральному параметру l. Найдем производную по произвольному параметру t.

Вторая квадратичная форма 1

Вновь рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ двумерную поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ и кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ на этой поверхности. Первую производную по параметру t мы уже нашли:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Вычислим теперь вторую производную вновь используя формулу для производной от сложной функции и формулу производной от произведения функций. Распишем все подробно, раскрыв все суммы.

Вторая квадратичная форма 2

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} = \\
&= \left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial u}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} = \\
&= \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\partial u}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} = \\
&= \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}
$$

В итоге получаем:

$$
\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}
$$

Вторая квадратичная форма 3

Умножим скалярно вектор $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$ единичный вектор нормали к поверхности $\mathbf{m}$ (найдем проекцию). Учтем ортогональность $\mathbf{m}$ и касательной плоскости, из-за чего: $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \mathbf{m}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \mathbf{m}\right) = 0$. Следовательно:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}, \mathbf{m}\right) = \left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2, \mathbf{m}\right) + 2\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u \partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \mathbf{m}\right) + \left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2, \mathbf{m}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}, \mathbf{m}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}, \mathbf{m}\right) = \left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2}, \mathbf{m}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u \partial v}, \mathbf{m}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2}, \mathbf{m}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \mathbf{m}\right)}_{=0}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \mathbf{m}\right)}_{=0}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}$$

Получили квадратичную форму следующего вида:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}, \mathbf{m}\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2}, \mathbf{m}\right)}_{h_{11}}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\underbrace{\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u \partial v}, \mathbf{m}\right)}_{h_{12}=h_{21}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2}, \mathbf{m}\right)}_{h_{22}}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Вторая квадратичная форма 4

Коэффициенты формы можно сгруппировать в следующую таблицу

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \text{ где } h_{11} = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m}), h_{12} = h_{21} = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{m}), h_{22} = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{m}),$$

которая в силу непрерывности вторых производных также является симметричной, как и таблица коэффициентов первой квадратичной формы.

Запишем теперь проекцию вектора нормали кривой на вектор нормали поверхности $\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right)$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right) = h_{11}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}\right)^2 + 2h_{12}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l} + h_{22}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l}\right)^2.$$

Обратите внимание, что коэффициенты h_{ij} от параметра t не зависят, поэтому при смене параметра на натуральный не меняются.

Форму

$$\varphi_2 = h_{11}\,\mathrm{d}u^2 + 2h_{12}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + h_{22}\,\mathrm{d}v^2$$

называют второй квадратичной формой поверхности.

Вычисление коэффициентов второй квадратичной формы 1

Используя индексные обозначения (u^1, u^2) для криволинейных координат, можно записать формулу для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы.

$$h_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^j \partial u^i}, \mathbf{m} \right) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} (\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \frac{(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{\det G}},$$

где

$$\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^j \partial u^i}, \ \mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \ \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \ i, j = 1, 2.$$

$$h_{11} = \frac{(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{\det G}},$$

$$h_{12} = \frac{(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{\det G}},$$

$$h_{21} = \frac{(\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{\det G}},$$

$$h_{22} = \frac{(\mathbf{r}_{22}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{\det G}}.$$

Нормальная кривизна поверхности и кривизна кривой

Нормальная кривизна поверхности k_n выражается через вторую квадратичную форму:

$$k_n = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right) = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}l} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}l} \Rightarrow k_n \, \mathrm{d}l^2 = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} \, \mathrm{d}u^i \, \mathrm{d}u^j .$$

Так как $\mathrm{d}l^2 = g_{ij} \, \mathrm{d}u^i \, \mathrm{d}u^j$ — первая квадратичная форма, то нормальную кривизну можно записать как

$$k_n = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} h_{ij} \, \mathrm{d}u^i \, \mathrm{d}u^j}{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij} \, \mathrm{d}u^i \, \mathrm{d}u^j}$$

С другой стороны $k_n = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}, \mathbf{m}\right) = (k\mathbf{n}, \mathbf{m}) = k(\mathbf{n}, \mathbf{m})$

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{m})}{\underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{=1} \underbrace{\|\mathbf{m}\|}_{=1}} = (\mathbf{n}, \mathbf{m}) \Rightarrow k_n = k\cos\theta$$

Инварианты пары квадратичных форм 1

Мы выяснили, что в каждой неособой точке поверхности задана пара квадратичных форм:

$$\varphi_1 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j\,,\ G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{d}u^1 & \mathrm{d}u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u^1 \\ \mathrm{d}u^2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j\,,\ H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{d}u^1 & \mathrm{d}u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u^1 \\ \mathrm{d}u^2 \end{pmatrix}$$

Следующий определитель дает характеристическое уравнение двух квадратичных форм:

$$\det(H - \lambda G) = 0,$$

или в компонентном виде:

$$(h_{11} - \lambda g_{11})(h_{22} - \lambda g_{22}) - (h_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0.$$

Инварианты пары квадратичных форм 2

Корни λ_1 и λ_2 данного квадратного уравнения суть собственные числа пары квадратичных форм. А из однородной системы уравнений

$$(H - \lambda G)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

находятся собственные векторы $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ пары квадратичных форм. Направления векторов $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ называют главными направлениями квадратичных форм [3, с. 68].

Как известно, у квадратичной формы существует два инварианта, которые не меняются при линейном преобразовании базиса. Это определитель $\det$ и след Tr матрицы квадратичной формы.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad \mathrm{Tr}\{M\} = m_{11} + m_{22}, \det\{M\} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

Тоже самое справедливо для пары квадратичных форм. Кроме того, если λ_1 и λ_2 — собственные числа, то $\mathrm{Tr}\{M\} = \lambda_1 + \lambda_2$ и $\det\{M\} = \lambda_1 \lambda_2$.

Инварианты пары квадратичных форм 3

Определение

Собственные числа пары квадратичных форм называются главными кривизнами поверхности в изучаемой точке. Произведение главных кривизн называется гауссовой кривизной поверхности, а их сумма — средней кривизной поверхности.

$$K_1 = \lambda_1\lambda_2, \;\; K_2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Также часто полагают

$$K_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

что лучше отражает смысл названия.

Формулы для вычисления средней и гауссовой кривизн 1

Найдем явные формулы для вычисления средней и гауссовой кривизн. Используем характеристическое уравнение

$$(h_{11} - \lambda g_{11})(h_{22} - \lambda g_{22}) - (h_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0,$$

для нахождения собственных чисел λ_1 и λ_2, а затем выразим через эти числа определитель и след. Начнем с того, что приведем уравнение к каноническому виду квадратного алгебраического уравнения.

$$h_{11}h_{22} - \lambda h_{11}g_{22} - \lambda g_{11}h_{22} + \lambda^2 g_{11}g_{22} - b_{12}^2 + 2\lambda h_{12}g_{12} - \lambda^2 g_{12}^2 = 0,$$
$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\lambda^2 + (2h_{12}g_{12} - g_{11}h_{22} - h_{11}g_{22})\lambda + (h_{11}h_{22} - h_{12}^2) = 0.$$

Нас интересуют не столько сами корни уравнения λ_1 и λ_2, сколько их сумма $\lambda_1 + \lambda_2$ (след) и произведение $\lambda_1\lambda_2$ (определитель) поэтому можно не решать уравнение, а воспользоваться теоремой Виета:

$$K_1 = \lambda_1\lambda_2 = \frac{h_{11}h_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det H}{\det G},$$
$$2K_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Формулы для вычисления средней и гауссовой кривизн 2

Для средней кривизны K_2 можно получить выражение через след и определитель матриц H и G. Для этого найдем обратную матрицу G^{-1} имя ввиду, что $G^T = G$ в силу симметричности и $g_{12} = g_{21}$

$$G^{-1} = (\det G)^{-1}\mathrm{adj}(G^T) = \frac{1}{\det G}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$

Найдем произведение HG^{-1}:

$$\frac{1}{\det G}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det G}\begin{pmatrix} h_{11}g_{22} - h_{12}g_{12} & -h_{11}g_{12} + h_{12}g_{11} \\ h_{12}g_{22} - h_{22}g_{12} & -h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11} \end{pmatrix}$$

Найдем след матрицы HG^{-1}:

$$\mathrm{Tr}(HG^{-1}) = \frac{1}{\det G}\mathrm{Tr}(H \cdot \mathrm{adj}G) = \frac{1}{\det G}(h_{11}g_{22} - h_{12}g_{12} - h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}) =$$

$$= \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12}}{\det G}.$$

Мы получили, что

$$2K_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(HG^{-1}) = \mathrm{Sp}(HG^{-1}).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Гауссова кривизна: } K_1 = \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{\det H}{\det G}, \\ \text{Средняя кривизна: } K_2 = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(HG^{-1}). \end{array}}$$

Величины K_1 и K_2 являются инвариантами поверхности и не меняются при смене параметризации (т.е. при преобразовании локальных координат). Заметим, что они выражаются через инварианты матриц — определитель и след — которые также не изменяются при преобразовании базиса.

Типы поверхности

Определение

Точки поверхности можно классифицировать исходя из знака $K_1 = \lambda_1\lambda_2$:

- точка называется эллиптической, если обе главные кривизны λ_1 и λ_2 одного знака: $K_1 = \lambda_1\lambda_2 > 0$,
- точка называется гиперболической, если обе главные кривизны λ_1 и λ_2 разного знака: $K_1 = \lambda_1\lambda_2 < 0$,
- точка называется параболической, одна из кривизн λ_1 и λ_2 равна нулю: $K_1 = \lambda_1\lambda_2 = 0$.

Происхождение такой терминологии связанно с типом особой кривой второго порядка — индикатрисой нормальной кривизны.

Теория поверхностей

Примеры и решение задач по теории поверхностей

Дифференциальная геометрия
Примеры и решение задач по теории поверхностей

Геворкян М. Н.

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Вычисление длин дуг кривых, лежащих на поверхности

Пусть некоторая кривая задана в параметрическом виде в системе координат u, v на некоторой поверхности с известной первой квадратичной формой:

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\,\mathrm{d}u^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}v^2\,.$$

Кривая задается системой уравнений:

$$\begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases}$$

что дает нам возможность вычислить дифференциалы $\mathrm{d}u$ и $\mathrm{d}v$ через производные по t:

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \dot{u}\,\mathrm{d}t \;\text{ и }\; \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \dot{v}\,\mathrm{d}t\,.$$

Подставляем в первую квадратичную форму и записываем выражение для дифференциала дуги, которое можно проинтегрировать по нужному диапазону параметра t и получить длину кривой:

$$\mathrm{d}l^2 = \left((\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\dot{u}^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\dot{u}\dot{v} + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\dot{v}^2\right)\mathrm{d}t^2 \Rightarrow \mathrm{d}l = \sqrt{(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u)\dot{u}^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\dot{u}\dot{v} + (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v)\dot{v}^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Углом пересечения двух кривых в точке называется меньший угол между касательными к кривым в данной точке. Для его вычисления следует найти угод между касательными векторами.

Пусть две кривые заданы параметрически своими радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} g^1(t) \\ g^2(t) \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} u = f^1(t), \\ v = f^2(t). \end{cases} \text{ и } \begin{cases} u = g^1(t), \\ v = g^2(t). \end{cases}$$

Угол между касательными векторами находится через косинус и скалярное произведение:

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t}\right)}{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}\right\|\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t}\right\|}$$

Формулу раскрывать не будем, а проиллюстрируем решение данной задачи, когда будем рассматривать конкретные примеры кривых на поверхностях.

Вычисление первой квадратичной формы для сферы 1

Сфера радиуса R в декартовой системе координат задается следующим радиус-вектором:

$$\mathbf{r}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \cos v \\ R\cos u \sin v \\ R\sin u \end{pmatrix}$$

Мы можем интерпретировать $\mathbf{r}$ как сложную функцию от параметров u и v. Вычислим касательные векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin u \cos v \\ -R\sin u \sin v \\ R\cos u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\cos u \sin v \\ R\cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление первой квадратичной формы для сферы 2

Для вычисления элементов первой квадратичной формы, найдем все возможные скалярные произведения векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$:

$$g_{11} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = R^2 \sin^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + R^2 \cos^2 u = R^2 \sin^2 u + R^2 \cos^2 u = R^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = R^2 \sin u \cos u \cos v \sin v - R^2 \sin u \sin v \cos u \cos v = 0,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = R^2 \cos^2 u(\sin^2 v + \cos^2 v) = R^2 \cos^2 u.$$

В результате получаем метрику на сфере для бесконечно мало окрестности любой неособой точки:

$$\mathrm{d}l^2 = g_{11}\,\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g_{22}\,\mathrm{d}v^2 = R^2\,\mathrm{d}u^2 + R^2\cos^2 u\,\mathrm{d}v^2$$

Вычисление первой квадратичной формы для цилиндра 1

Найти первую квадратичную форму для цилиндрической поверхности, заданной радиус-вектором:

$$\mathbf{r}(s,\lambda) = \vec{\rho}(s) + \lambda\mathbf{e}, \quad \text{где} \quad \mathbf{e} = \text{const}.$$

Здесь для обозначения параметров использованы не буквы u, v, а буквы s и λ. Вектор $\mathbf{e}$ — некоторый фиксированный вектор, компоненты которого не зависят от s и λ, а вектор-функция $\vec{\rho}(s)$ зависит только от одного параметра s. Явное выражение для вектор-функции $\vec{\rho}(s)$ нам по условию задачи не дано.

Найдем первую квадратичную форму, вычислив касательный вектор к некоторой произвольной кривой, целиком лежащей на цилиндрической поверхности. Радиус-вектор данной кривой выражается через радиус-вектор поверхности:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t),\lambda(t)) = \begin{pmatrix} x(s(t),\lambda(t)) \\ y(s(t),\lambda(t)) \\ z(s(t),\lambda(t)) \end{pmatrix}$$

Вычисление первой квадратичной формы для цилиндра 2

Касательный вектор кривой вычисляется как первая производная от сложной функции $\mathbf{r}$ по параметру t:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}s}}_{\mathbf{v}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \mathbf{e}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\dot{s} + \mathbf{e}\dot{\lambda},$$

где мы переобозначили $\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}s}$ через $\mathbf{v}$ и заменили $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}$ на вектор $\mathbf{e}$ из-за того, что:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vec{\rho}(s)}{\partial \lambda} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{e} = 0 + 1 \cdot \mathbf{e}$$

Первую квадратичную форму вычислим через скалярное произведение $(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = (\mathbf{v}\dot{s} + \mathbf{e}\dot{\lambda}, \mathbf{v}\dot{s} + \mathbf{e}\dot{\lambda}) = (\mathbf{v}, \mathbf{v})\dot{s}^2 + (\mathbf{v}, \mathbf{e})\dot{s}\dot{\lambda} + (\mathbf{e}, \mathbf{v})\dot{s}\dot{\lambda} + (\mathbf{e}, \mathbf{e})\dot{\lambda}^2$$

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})\mathrm{d}s^2 + 2(\mathbf{e}, \mathbf{v})\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda + (\mathbf{e}, \mathbf{e})\mathrm{d}\lambda^2$$

Вычисление второй квадратичной формы для сферы 1

Вернемся к двумерной сфере, вложенной в трехмерное пространство:

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u\cos v \\ R\cos u\sin v \\ R\sin u \end{pmatrix}$$

Выше мы уже вычислили касательные векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ в произвольной точке и компоненты метрического тензора G (первой квадратичной формы):

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -R\sin u\cos v \\ -R\sin u\sin v \\ R\cos u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -R\cos u\sin v \\ R\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{pmatrix}$$

Вычислим компоненты нормального вектора в декартовой системе координат с со стандартным базисом $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & -R\sin u\cos v & -R\cos u\sin v \\ \mathbf{e}_2 & -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v \\ \mathbf{e}_3 & R\cos u & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2 u\cos v \\ -R^2\cos^2 u\sin v \\ -R^2\cos u\sin u \end{pmatrix}$$

Вычисление второй квадратичной формы для сферы 2

Вычислим норму $\|\mathbf{N}\|$

$$\|\mathbf{N}\|^2 = \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = R^2 \cdot R^2 \cos^2 u - 0 \cdot 0 = R^4 \cos^2 u,$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{R^2 \cos u} \begin{pmatrix} -R^2 \cos^2 u \cos v \\ -R^2 \cos^2 u \sin v \\ -R^2 \cos u \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \quad \|\mathbf{m}\| = 1.$$

Далее найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -R \cos u \cos v \\ -R \cos u \sin v \\ -R \sin u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -R \cos u \cos v \\ -R \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} R \sin u \sin v \\ -R \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление второй квадратичной формы для сферы 3

Вычислим скалярные произведения $(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m})$, $(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{m})$ и $(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{m})$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \mathbf{m}\right) = R\cos^2 u \cos^2 v + R\cos^2 u \sin^2 v + R\sin^2 u = R$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}, \mathbf{m}\right) = -R\sin u \sin v \cos u \cos v + R\cos u \sin v \sin u \cos v = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}, \mathbf{m}\right) = R\cos^2 u \cos^2 v + R\cos^2 u \sin^2 v = R\cos^2 u$$

В результате мы получили вторую квадратичную форму для сферы:

$$(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{m})\,\mathrm{d}t^2 = R\,\mathrm{d}u^2 + R\cos^2 u\,\mathrm{d}v^2 \qquad H = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2 u \end{pmatrix}$$

Вычисление кривизны сферы

Найдем гауссову и среднюю кривизны для сферы. Выше мы уже вычислили первую и вторую фундаментальные формы для сферы:

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{pmatrix} \ \det\{G\} = R^4\cos^2 u, \ \ H = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2 u \end{pmatrix} \ \det\{H\} = R^2\cos^2 u,$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2\cos^2 u} \end{pmatrix} \Rightarrow HG^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \frac{\det H}{\det G} = \frac{1}{R^2}, \ \ K_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\{HG^{-1}\} = \frac{1}{R}.$$

Поверхность Гаусса 1

Поверхность Гаусса задается в декартовой системе координат в явном виде следующей формулой:

$$z = f(x, y) = \exp\{-(x^2 + y^2)\}.$$

Так как все формулы мы выводили для параметрического представления поверхностей, то следует параметризовать это явное представление. Параметризовать можно несколькими способами, но наиболее простая параметризация получается, если в качестве параметров выбрать координаты x и y, а координату z выразить через них.

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \exp\{-(u^2 + v^2)\} \end{pmatrix} \text{ где } u = x, v = y.$$

Найдем касательные векторы к произвольной точке поверхности

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u\exp\{-(u^2 + v^2)\} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v\exp\{-(u^2 + v^2)\} \end{pmatrix}$$

Поверхность Гаусса 2

Если мы хотим построить кривую на поверхности, то можно задать ее уравнение в локальных координатах (u, v), а затем используя радиус-вектор поверхности вычислить координаты этой кривой в объемлющем пространстве с декартовой системе координат.

Покажем это на конкретном примере. Пусть кривая задается следующими уравнениями:

$$u = u(t) = \sin t,$$
$$v = v(t) = \sin t,$$

$$z = \exp\{-(u^2 + v^2)\} = \exp\{-(\sin^2 t + \sin^2 t)\} = \exp\{-2\sin^2 t\},$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cos t + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cos t,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2e^{-2\sin^2 t}\sin t \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2e^{-2\sin^2 t}\sin t \end{pmatrix}$$

Угол между кривыми на поверхности 1

Рассмотрим задачу между нахождения угла между кривыми $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности, заданной радиус-вектором

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Найдем точку пересечения линий

$$\begin{cases} v = u + 1 \\ v = 3 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v - u = 1 \\ v + u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 4 \\ 2u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

Найдем первую квадратичную форму:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 2u \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Угол между кривыми на поверхности 2

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = \cos^2 v + \sin^2 v + 4u^2 = 4u^2 + 1,$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v + 0 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2.$$

$$G = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

Теперь запишем параметрические уравнения кривых в криволинейных координатах (u, v) используя u в качестве параметра t кривой.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} u \\ u + 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} u \\ 3 - u \end{pmatrix}$$

- Радиус-вектор $\mathbf{r}_1$ задает кривую $v = u + 1$ и качестве параметра выбран u.

Угол между кривыми на поверхности 3

- Радиус-вектор $\mathbf{r}_2$ задает кривую $v = 3 - u$ и качестве параметра выбран u.

В точке пересечения кривых их касательные векторы имею вид:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Найдем скалярное произведение касательных векторов $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u}$ и $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}$, а также их нормы.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}\right) = \overbrace{(4u^2+1)}^{g_{11}} \cdot 1 \cdot 1 + \overbrace{0}^{g_{12}} \cdot 1 \cdot 1 + \overbrace{0}^{g_{21}} \cdot 1 \cdot 1 + \overbrace{u^2}^{g_{22}} \cdot 1 \cdot (-1) = 4u^2 + 1 - u^2 = 3u^2 + 1,$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u}\right\|^2 = (4u^2+1) \cdot 1 \cdot 1 + u^2 \cdot 1 \cdot 1 = 5u^2 + 1 \quad \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}\right\|^2 = (4u^2+1) \cdot 1 \cdot 1 + u^2(-1)(-1) = 5u^2 + 1,$$

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}\right)}{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}u}\right\|\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}u}\right\|} = \frac{3u^2+1}{\sqrt{5u^2+1}\sqrt{5u^2+1}}.$$

Угол между кривыми на поверхности 4

В точке $(u, v) = (1, 2)$ имеем угол:

$$\cos\theta = \frac{3 \cdot 1^2 + 1}{5 \cdot 1^2 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \cos\theta = \frac{2}{3}.$$

Локсодрома 1

Кривая, расположенная на сфере и пересекающая все меридианы сферы под данным углом, называется локсодромией или локсодромой. Выведем ее уравнение в сферических координатах. Пусть задана сфера со стандартным метрическим тензором:

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Будем искать локсодрому в виде параметрического уравнения $\theta = \theta(\varphi)$, где в качестве параметра используется φ.

$$\mathbf{r}_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \theta(\varphi) \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \theta = \theta(\varphi), \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$$

Меридианы задаются как

$$\mathbf{r}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \theta = \theta, \\ \varphi = \varphi_0. \end{cases}$$

Локсодрома 2

Касательные векторы к меридианам и к локсодроме:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta} \right) = R^2\dot{\theta} \cdot 1 + R^2 \cos^2\theta \cdot 1 \cdot 0 = R^2\dot{\theta}$$

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi} \right\|^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\cos^2\theta, \ \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta} \right\|^2 = R^2 \cdot 1 + R^2\cos^2\theta \cdot 0 = R^2.$$

Пусть α — угол между локсодромой и меридианам. По определению он должен быть постоянным.

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta} \right)}{\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}\varphi} \right\| \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}\theta} \right\|} = \frac{R^2\dot{\theta}}{R\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2\cos^2\theta}} = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \cos^2\theta}}$$

Локсодрома 3

Надо решить это дифференциальное уравнение. Оно легко преобразуется к уравнению с разделяемыми переменными

$$\dot\theta^2 = \cos^2\alpha\dot\theta^2 + \cos^2\alpha\cos^2\theta$$

$$\dot\theta^2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha\cos^2\theta$$

$$\dot\theta^2 = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi} = \operatorname{ctg}\alpha\cos\theta(\varphi) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{ctg}\alpha\,\mathrm{d}\varphi$$

Интеграл от левой стороны можно вычислить аналитически:

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \ln\left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| + C$$

Так как $\operatorname{tg}\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$, то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(\pi/2+\theta\right)}{\sin\left(\pi/2+\theta\right)} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

Локсодрома 4

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \ln\left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg}\alpha\,\mathrm{d}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha\varphi \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha\varphi = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right| + C,$$

$$\boxed{\varphi = \operatorname{tg}\alpha\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right| + C}$$

Нормальный вектор к поверхности, заданной в явном виде 1

Пусть задана поверхность $z = f(x, y)$, введем параметры $u = x$ и $v = y$ и запишем параметрическое уравнение:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{cases} x, \\ y, \\ f(x, y). \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

Найдем частные производные и их векторное произведение:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & 1 & 0 \\ \mathbf{e}_y & 0 & 1 \\ \mathbf{e}_z & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z.$$

Нормальный вектор к поверхности, заданной в явном виде 2

Получили направляющий вектор нормали к поверхности:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} & 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем его, поделив на длину $\|\mathbf{N}\|$:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1$$

$$\mathbf{m} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}}$$

нормальный вектор к поверхности, заданной в неявном виде 1

Рассмотрим теперь поверхность, которая задана в виде уравнения:

$$F(x,y,z)=0 \;\Leftrightarrow\; F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0.$$

Взяв производные по u и v получим два тождества

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\
\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0.
\end{aligned} \tag{2}$$

При условии, что данную поверхность можно задать и в явном виде, с помощью функции $z=f(x,y)$, можно положить $u=x$ и $v=y$, как в предыдущем примере. Это даст возможность упростить тождества (2) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}\cancelto{1}{\frac{\partial x}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial y}\cancelto{0}{\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \\
&\frac{\partial F}{\partial x}\cancelto{0}{\frac{\partial x}{\partial y}}+\frac{\partial F}{\partial y}\cancelto{1}{\frac{\partial y}{\partial y}}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,
\end{aligned}
\;\Longrightarrow\;
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,
\end{aligned}
\;\Longrightarrow\;
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\\
&\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.
\end{aligned}$$

Так как в предыдущем примере мы уже нашли выражение для единичного нормального вектора к поверхности $\mathbf{m}$ для случая явной функции $z = f(x, y)$, можно воспользоваться этими формулами и записать выражение для неявной функции:

$$\mathbf{m} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = -\frac{\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, -1\right)}{\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} + 1}} = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

Можно заметить, что

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \operatorname{grad} F(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) \Rightarrow \mathbf{N} = \nabla F$$

Ненормированный направляющий вектор нормали к поверхности в данной точке равен градиенту. Можно дать следующую вольную геометрическую интерпретацию: так как градиент функции указывает направление наибольшего изменения функции, то вектор нормали тем длиннее, чем более выпуклой является поверхность.

Список литературы 1

1. Норден А. П. — **Теория поверхностей.** — 2-е изд. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 264. — (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия)). — ISBN 978597106234.
2. Зорич В. А. — **Математической анализ.** — Т. 1. — 5-е изд. — Москва : МЦНМО, 2007. — 664 с. — ISBN 5940570569.
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. В 3 т. Т. 1. — **Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей.** — 6-е изд. — Москва : УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 336 с. — ISBN 9785453000470.