МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ"
(МИРЭА)

Гольдман М.Л., Сивкова Е.О.

Аналитическая геометрия. Векторы

Учебное пособие

Москва 2015

ББК 22.151.5
Г 63
УДК 51

Авторы: Гольдман М.Л., Сивкова Е.О.
Научный редактор: доктор физ.-мат. наук, профессор Тихомиров В.М.

Учебное пособие охватывает раздел "Геометрические векторы" общего курса линейной алгебры и аналитической геометрии. В нем изложены основные понятия алгебры геометрических векторов: линейные операции над векторами, понятия проекции вектора на прямую, числовой проекции вектора на ось, их основные свойства. Рассмотрены понятия декартовой системы координат на плоскости и в пространстве, декартовых координат вектора и точки, а также выражения линейных операций над векторами в координатах. Разобраны основные свойства скалярного, векторного и смешанного произведения векторов, их геометрический смысл и выражения в координатах. Приведены необходимые для понимания сведения об определителях 2-го и 3-го порядка. В пособие включено большое количество упражнений, контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения с ответами. Пособие предназначено для студентов технических университетов с усиленной программой по математике.

Аналитическая геометрия. Векторы
Учебное пособие

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор А.В. Фурсиков, МГУ им. М.В. Ломоносова
доктор физ.-мат. наук, профессор Э.М. Галеев, МГУ им. М.В. Ломоносова

Минимальный системные требования:
Поддерживаемые ОС: Windows 2000 и выше
Память: ОЗУ 128МБ
Жесткий диск: 20 Мб
Устройства ввода: клавиатура, мышь
Дополнительные программные средства: Программа Adobe Reader

Оглавление

Геометрические векторы

1.1. Векторы

Пусть в пространстве заданы две точки A и B. *Вектором* называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A и концом в точке B.

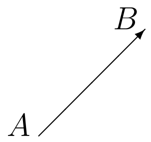


Рис. 1.1

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется неотрицательное число $|\overrightarrow{AB}|$, равное длине отрезка AB.

Если точки A и B совпадают, то вектор $\overrightarrow{AA}$ называется *нулевым вектором* и обозначается $\overrightarrow{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю, а его направление не определено.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *коллинеарными* (пишем $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы могут быть *сонаправлены* ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$) или *противонаправлены* ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$) (пояснения на рис. 1.2).

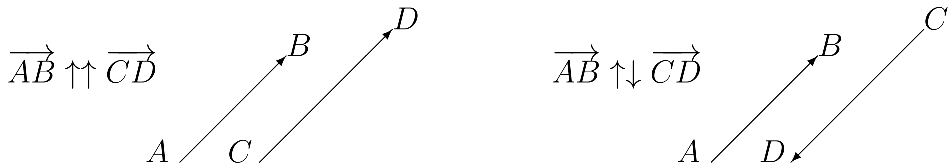


Рис. 1.2. Коллинеарные векторы

Нулевой вектор $\overrightarrow{0}$ считается коллинеарным любому вектору $\overrightarrow{AB}$.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ *равны* между собой (пишем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

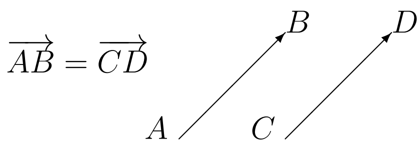


Рис. 1.3. Равные векторы

Таким образом, равные векторы — это такие векторы, которые получаются один из другого параллельным переносом. В векторной алгебре отождествляют равные векторы и говорят, что они определяют один *свободный вектор* $\overrightarrow{a}$, который можно откладывать уже от любого начала.

1.2. Линейные операции над векторами

Определим операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Определение 1.1. *Суммой векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется вектор $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, получаемый по следующему правилу, которое называется правилом параллелограмма: приведем векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ к общему началу O и построим на этих векторах параллелограмм $OACB$. Тогда $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OC}$ (рис. 1.4). Разностью векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется вектор $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{BA}$ (рис. 1.5).*

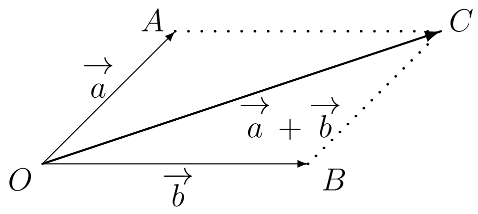


Рис. 1.4. Сложение векторов по правилу параллелограмма

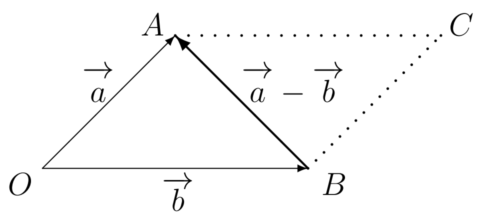


Рис. 1.5. Вычитание векторов

Так как $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$, то векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ можно складывать по *правилу замыкания цепочки векторов* (рис. 1.6).

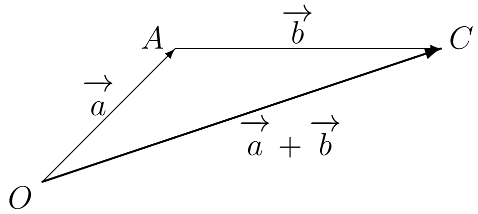


Рис. 1.6. Правило замыкания цепочки из двух векторов

Это правило распространяется на любое число слагаемых: если векторы $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{BC}$, $\ldots$, $\overrightarrow{l}=\overrightarrow{KL}$ образуют ломаную $OAB\ldots KL$, то суммой этих векторов является вектор $\overrightarrow{OL}$, замыкающий ломаную (рис. 1.7).

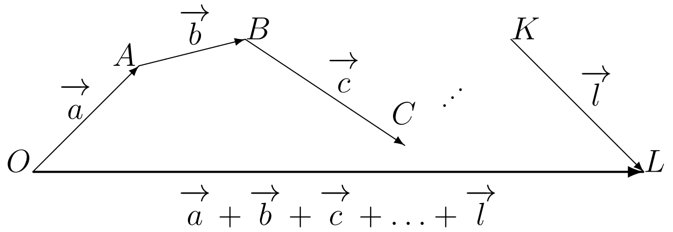


Рис. 1.7. Правило замыкания цепочки из нескольких векторов

Определение 1.2. *Произведением вектора* $\overrightarrow{a}$ *на число* α *называется вектор* $\alpha\overrightarrow{a}$, *такой что*
1) $|\alpha\overrightarrow{a}| = |\alpha| \cdot |\overrightarrow{a}|$,
2) $\alpha\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}$, *если* $\alpha > 0$; $\alpha\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{a}$, *если* $\alpha < 0$.
При $\alpha = 0$ *или* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *положим* $\alpha\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

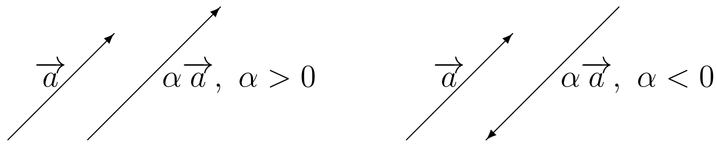


Рис. 1.8. Умножение вектора на число

Очевидно, что $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-1)\cdot\overrightarrow{b}$ (рис. 1.9).

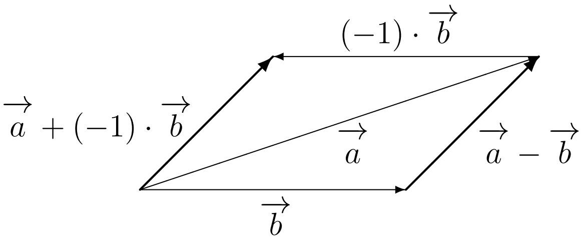


Рис. 1.9

Определение 1.3. *Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором или ортом и обозначается* $\overrightarrow{a}^0$.

Если $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, то вектор

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\cdot\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$$

есть единичный вектор, сонаправленный вектору $\overrightarrow{a}$.

Свойства сложения векторов и умножения их на числа

1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ — коммутативность сложения,
2) $\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c}$ — ассоциативность сложения,
3) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a},\ \ \forall\overrightarrow{a}$,
4) $\forall\overrightarrow{a}\ \exists\ \left(-\overrightarrow{a}\right)$ (противоположный вектор): $\overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{0}$,
5) $1\cdot\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a},\ \forall\,\overrightarrow{a}$,
6) $(\alpha\beta)\,\overrightarrow{a} = \alpha\,(\beta\overrightarrow{a})$ — ассоциативность умножения,
7–8) $\left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}\\ \alpha\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \alpha\,\overrightarrow{a} + \alpha\,\overrightarrow{b}\end{array}\right\}$ — законы дистрибутивности.

Все эти свойства легко проверяются. Покажем это.

1) При сложении векторов по правилу параллелограмма каждый из векторов $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ изображается диагональю $\overrightarrow{OC}$ (см. рис. 1.4) параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, отложенных от одного начала. Следовательно, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.

2) Правило замыкания цепочки из трех векторов (рис. 1.10) показывает, что $\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c}$.

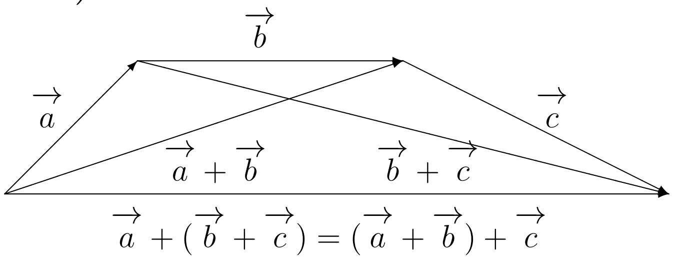


Рис. 1.10. Ассоциативность сложения векторов

3)–5) Свойства очевидны.

6) По определению

$$|(\alpha\beta)\overrightarrow{a}| = |\alpha\beta| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\alpha| \cdot |\beta\overrightarrow{a}|,$$

т. е. векторы $(\alpha\beta)\overrightarrow{a}$ и $\alpha(\beta\overrightarrow{a})$ имеют одинаковую длину. Если $\alpha\beta = 0$, то оба эти вектора нулевые. Пусть теперь $\alpha\beta > 0$, т. е. α и β имеют одинаковый знак. Тогда $(\alpha\beta)\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}$. Если $\alpha,\ \beta > 0$, то

$$\begin{cases} \beta\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a} \\ \alpha(\beta\overrightarrow{a}) \uparrow\uparrow \beta\overrightarrow{a} \end{cases} \quad \Rightarrow \ \alpha(\beta\overrightarrow{a}) \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}.$$

Если $\alpha,\ \beta < 0$, то

$$\begin{cases} \beta\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{a} \\ \alpha(\beta\overrightarrow{a}) \uparrow\downarrow \beta\overrightarrow{a} \end{cases} \quad \Rightarrow \ \alpha(\beta\overrightarrow{a}) \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}.$$

Итак, векторы $(\alpha\beta)\overrightarrow{a}$ и $\alpha(\beta\overrightarrow{a})$ сонаправлены и имеют одинаковую длину, т. е. они равны. Случай, когда $\alpha\beta < 0$, разбирается аналогично.

Упражнение. Свойства 7)–8) проверить самостоятельно.

1.3. Проекция вектора на ось. Свойства проекций

Пусть в пространстве заданы прямая L и точка A. *Проекцией точки A на прямую L* называется точка A', в которой пересекаются прямая L и плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно прямой L (рис. 1.11).

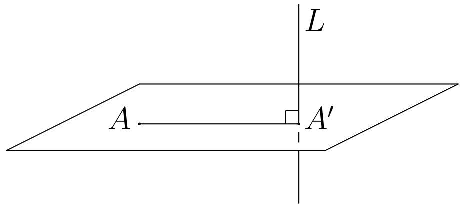


Рис. 1.11. Проекция точки на прямую

Определение 1.4. *Проекцией вектора $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ на прямую L называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$, где точки A' и B' — проекции на прямую L точек A и B соответственно (рис. 1.12).*

Проекцию вектора $\overrightarrow{a}$ на прямую L будем обозначать $\overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}}$.

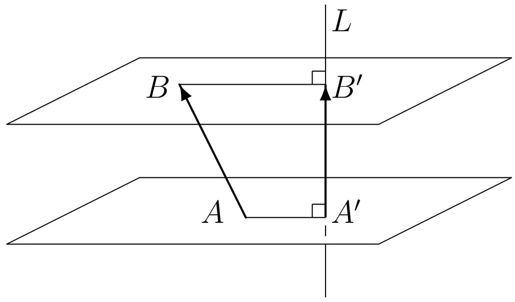


Рис. 1.12. Проекция вектора на прямую

Проекцией нулевого вектора на прямую L является нулевой вектор: $\overrightarrow{pr_L \overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$.

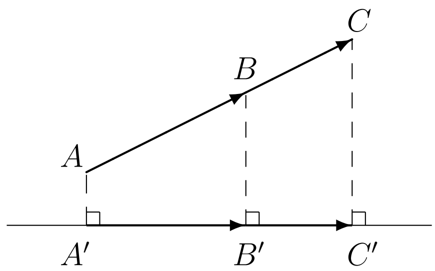
Свойства проекций

1) $\overrightarrow{pr_L(\lambda \overrightarrow{a})} = \lambda \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}}$

Доказательство. a) $\lambda = 0$

$$\begin{cases} \lambda \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \\ \lambda \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} = \overrightarrow{0} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{pr_L(\lambda \overrightarrow{a})} = \lambda \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}}.$$

b) $\lambda > 0$ (см. рис. 1.13)



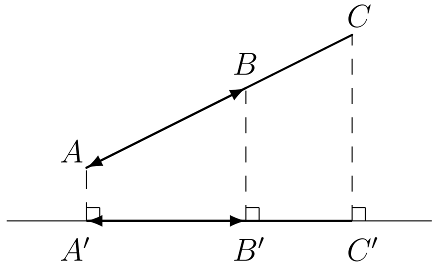
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$

$\lambda \overrightarrow{a} = \overrightarrow{AC}$

Рис. 1.13

$$\begin{cases} \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} = \overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{pr_L(\lambda \overrightarrow{a})} = \overrightarrow{A'C'} \\ \left|\overrightarrow{A'C'}\right| = \lambda \left|\overrightarrow{A'B'}\right| \text{ (по теореме о} \\ \text{пропорциональных отрезках)} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{pr_L(\lambda \overrightarrow{a})} = \lambda \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}},$$

c) $\lambda < 0$ (см. рис. 1.14)



$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$

$\lambda \overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$

Рис. 1.14

$$\begin{cases} \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} = \overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{pr_L(\lambda \overrightarrow{a})} = \overrightarrow{C'A'} \\ \left|\overrightarrow{C'A'}\right| = |\lambda| \left|\overrightarrow{A'B'}\right| \text{ (по теореме о} \\ \text{пропорциональных отрезках)} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{pr_L(\lambda \overrightarrow{a})} = \lambda \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}}. \qquad \square$$

2) $\overrightarrow{pr_L\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)} = \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} + \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{b}}$

Доказательство. См. рис. 1.15

$$\begin{cases} \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} = \overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{b}} = \overrightarrow{B'C'} \\ \overrightarrow{pr_L(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})} = \overrightarrow{A'C'} \\ \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{pr_L\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)} = \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} + \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{b}}. \qquad \square$$

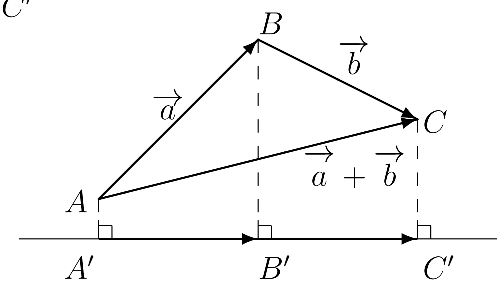


Рис. 1.15. Проекция суммы векторов

3) $\overrightarrow{pr_L\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)} = \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} - \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{b}}$

Доказательство.

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-1) \cdot \overrightarrow{b} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{pr_L\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)} = \overrightarrow{pr_L\left(\overrightarrow{a} + (-1) \cdot \overrightarrow{b}\right)} = \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} + \overrightarrow{pr_L(-1) \cdot \overrightarrow{b}} =$$

$$\overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} + (-1) \cdot \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{b}} = \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{a}} - \overrightarrow{pr_L \overrightarrow{b}}.$$

$\square$

Таким образом, *линейные операции над векторами* (сложение векторов и умножение вектора на число) *перестановочны с операцией проектирования на прямую.*

Выберем на прямой L направление. Направленную прямую будем обозначать $\mathbf{L}$ и называть *осью.*

Из любой точки пространства проведем два луча в направлении оси $\mathbf{L}$ и ненулевого вектора $\overrightarrow{a}$. Угол $\omega \quad (0 \leq \omega \leq \pi)$, образованный этими двумя лучами, называется *углом между вектором* $\overrightarrow{a}$ *и осью* $\mathbf{L}$.

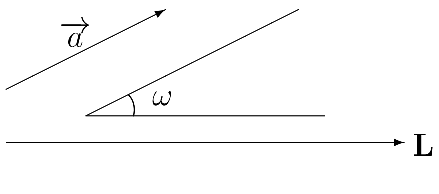


Рис. 1.16

Определение 1.5. *Числовой проекцией вектора* $\overrightarrow{a}$ *на ось* $\mathbf{L}$ *называется произведение длины вектора* $\overrightarrow{a}$ *на косинус угла* ω *между вектором* $\overrightarrow{a}$ *и осью* $\mathbf{L}$*:*

$$pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\omega. \tag{1.1}$$

При $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *положим* $pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a} = 0$.

Рассмотрим следующие частные случаи:
1) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ или $\omega = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a} = 0$,

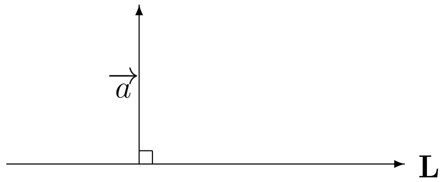


Рис. 1.17

2) $0 \leq \omega < \dfrac{\pi}{2}$

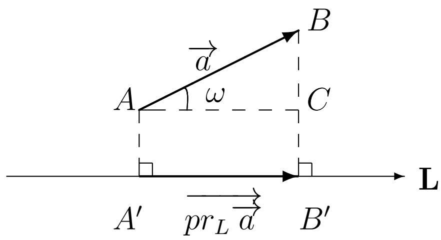


Рис. 1.18

$pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\omega = |AC| = |A'B'| = \left|\overrightarrow{pr_L\overrightarrow{a}}\right| > 0$,

3) $\dfrac{\pi}{2} < \omega \leq \pi$

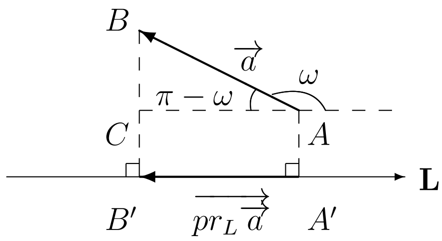


Рис. 1.19

$pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\omega = -\left|\overrightarrow{AB}\right| \cos(\pi - \omega) = -|AC| = -|A'B'| = -\left|\overrightarrow{pr_L\overrightarrow{a}}\right| < 0.$

Таким образом:
1) $pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a} = 0$, если $\overrightarrow{pr_L\overrightarrow{a}} = \overrightarrow{0}$,
2) $pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a} = \left|\overrightarrow{pr_L\overrightarrow{a}}\right|$, если вектор $\overrightarrow{pr_L\overrightarrow{a}}$ сонаправлен оси $\mathbf{L}$,
3) $pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a} = -\left|\overrightarrow{pr_L\overrightarrow{a}}\right|$, если вектор $\overrightarrow{pr_L\overrightarrow{a}}$ противонаправлен оси $\mathbf{L}$.

Направление на оси $\mathbf{L}$ можно задать с помощью единичного вектора $\overrightarrow{e}$, направленного так же, как $\mathbf{L}$.

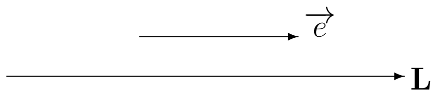


Рис. 1.20

Тогда связь между проекцией вектора на прямую L и его числовой проекцией на ось $\mathbf{L}$ выражается следующим очевидным равенством:

$$\overrightarrow{pr_L\,\overrightarrow{a}} = pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e}. \tag{1.2}$$

Свойства числовой проекции вектора на ось

1) $pr_{\mathbf{L}}\left(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}\right) = pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a}\pm pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{b}$.

Доказательство. По формуле (1.2) и по свойствам проекции вектора на прямую получаем:

$$\overrightarrow{pr_L\left(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}\right)} = \overrightarrow{pr_L\,\overrightarrow{a}}\pm\overrightarrow{pr_L\,\overrightarrow{b}} \quad\Leftrightarrow$$
$$pr_{\mathbf{L}}\left(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{e} = pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e}\pm pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{e} = \left(pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a}\pm pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{e} \quad\Leftrightarrow$$
$$pr_{\mathbf{L}}\left(\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}\right) = pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a}\pm pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{b}.$$

□

2) $pr_{\mathbf{L}}(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a}$.

Доказательство. По формуле (1.2) и по свойствам проекции вектора на прямую получаем:

$$\overrightarrow{pr_L\,(\lambda\overrightarrow{a})} = \lambda\overrightarrow{pr_L\,\overrightarrow{a}} \quad\Leftrightarrow$$
$$pr_{\mathbf{L}}\,(\lambda\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{e} = \lambda\,(pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e}) = (\lambda pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{e} \quad\Leftrightarrow$$
$$pr_{\mathbf{L}}\,(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a}.$$

□

3) Если $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, то $pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a} = pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{b}$ (то есть равные векторы имеют равные проекции).

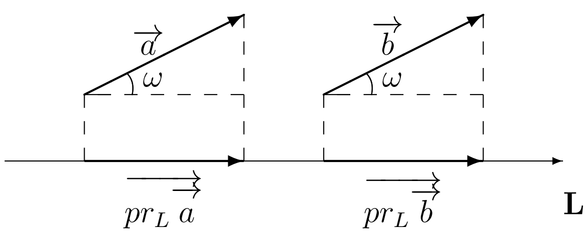


Рис. 1.21

Доказательство.

$$\begin{cases} pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a} = \left|\overrightarrow{a}\right|\cos\omega \\ pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{b}\right|\cos\omega \\ \left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| \end{cases} \Rightarrow \quad pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{a} = pr_{\mathbf{L}}\,\overrightarrow{b}.$$

□

Если направление оси $\mathbf{L}$ задано с помощью вектора $\overrightarrow{e}$ то числовую проекцию вектора $\overrightarrow{a}$ на ось $\mathbf{L}$ обозначают также $pr_{\overrightarrow{e}}\,\overrightarrow{a}$.

1.4. Упражнения

Упражнение 1.1. *В параллелограмме* $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$. *Выразить через векторы* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *векторы* $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$, *где* M *— точка пересечения диагоналей параллелограмма.*

Поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то по определению операций сложения и вычитания векторов получаем (см. рис. 1.22):

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right),$$
$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right),$$
$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right),$$
$$\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right).$$

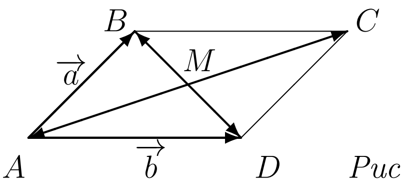


Рис. 1.22

Упражнение 1.2. *В тетраэдре* $OABC$ *выразить через векторы* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ *вектор* $\overrightarrow{OF}$, *где* F *— точка пересечения медиан основания* ABC.

По правилу замыкания цепочки векторов:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF}.$$

Пусть M — середина стороны BC. Тогда AM — медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, OM — медиана треугольника OBC, проведенная из вершины O. Следовательно,

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Значит,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right).$$

Упражнение 1.3. *Вне плоскости параллелограмма* $ABCD$ *взята точка* O. *Выразить через векторы* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ *и* $\overrightarrow{OC}$ *вектор* $\overrightarrow{OK}$, *где* K *— середина стороны* AD.

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK},$$
$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right).$$

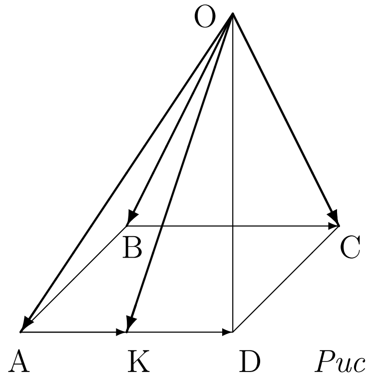


Рис. 1.23

Упражнение 1.4. *$ABCD$ — параллелограмм, точка K лежит на стороне AD, $|AK| = \dfrac{1}{5}\,|AD|$, точка L лежит на диагонали AC, $|AL| = \dfrac{1}{6}|AC|$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны.*

Выразим векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, образующие стороны параллелограмма:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK}, \quad \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AL},$$
$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right),$$
$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{6}\,\overrightarrow{AB} - \frac{1}{30}\,\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{LB} = \frac{5}{6}\,\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\,\overrightarrow{AD}.$$

Значит,
$$\overrightarrow{LB} = 5\overrightarrow{KL}.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны.

Упражнение 1.5. *Доказать, что для любых заданных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.*

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Компланарность векторов очевидна, поскольку
$\vec{c} - \vec{a} = \left(\vec{b} + \vec{c}\right) - \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

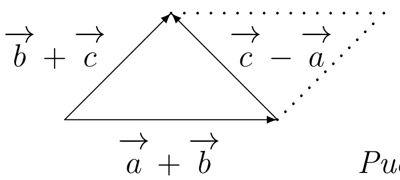


Рис. 1.24

1.5. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

1.2. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Докажите также, что если имеет место равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, то M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

1.3. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника на плоскости. Докажите, что если $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, то точки пересечения медиан этих треугольников совпадают.

1.4. Известно, что $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BM}$ — медианы треугольника ABC. Выразить через векторы $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BM} = \vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

1.5. Пусть M и N — точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}\right)$.

1.6. Точки E и F — середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

1.7. Стороны параллелограмма разделены по обходу в равных отношениях. Доказать, что точки деления служат вершинами параллелограмма, а центры этих параллелограммов совпадают.

1.8. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB, точка K — середина CD. Докажите, что середины отрезков AK, CE, BK и DE являются вершинами параллелограмма.

1.9. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром в точке O пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

1.10. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Выразить через векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$ векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

1.11. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Выразить через векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{b}$ векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$.

1.12. В пятиугольнике $ABCDE$ точки M, K, N и L — середины сторон BC, CD, DE и EA соответственно. Докажите, что отрезок, соединяющий середины отрезков MN и KL параллелен стороне AB и равен $\dfrac{1}{4}|AB|$.

1.13. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка пространства. Доказать, что $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

1.14. Задан тетраэдр $OABC$. Выразить через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{DE}$, где точки D и E — середины ребер OA и BC соответственно.

1.15. Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка O. Выразить через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{OM}$, где M — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

1.16. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, O — произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

1.17. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 — точки пересечения диагоналей. Доказать, что $\overrightarrow{OO_1} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}\right)$.

1.18. Каким условием должны быть связаны векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, чтобы вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ делил угол между ними пополам? Полагается, что все три вектора приведены к общему началу.

1.19. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, и $\overrightarrow{AB} = \frac{\alpha}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = 4\left(\beta\vec{a} - \vec{b}\right)$, $\overrightarrow{CD} = -4\beta\vec{b}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$. Найти α и β и доказать коллинеарность векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$.

1.20. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$. При каком соотношении между α и β векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны?

1.21. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$. Пусть α и β таковы, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ неколлинеарны. Полагая $\overrightarrow{BC} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{MN} = \vec{q}$, выразить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

1.22. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, и $\vec{c}$. Доказать, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $-\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны.

1.6. Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.4. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

1.10. $\overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{EF} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}$,
$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = 2\vec{b} - \vec{a}$.

1.11. $\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{b} + \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{a} + \vec{b}$,
$\overrightarrow{CD} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{DE} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\vec{b} - \vec{a}$.

1.14. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

1.15. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$.

1.18. $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$, т.к. диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла тогда и только тогда, когда параллелограмм является ромбом.

1.19. $\alpha = 2$, $\beta = -\frac{1}{2}$.

1.20. $\alpha = \beta$.

1.21. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\beta\vec{p} - \vec{q}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\alpha\vec{p} - \vec{q}\right)$.

Прямоугольные декартовы координаты

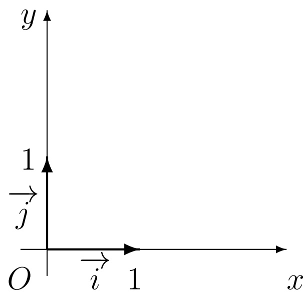
2.1. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости

Введем на плоскости прямоугольную систему координат $x,\ y$: возьмем две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через некоторую точку, которую обозначим O.

Выберем для данной системы координат единичный отрезок, с помощью которого измеряются все прочие отрезки.

Точка O называется *началом координат*, а оси — *осями координат* $Ox,\ Oy$.

Направление осей координат можно задать с помощью единичных векторов $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}$ направленных так же, как оси $Ox,\ Oy$ соответственно. Векторы $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}$ называются *ортами координатных осей* $Ox,\ Oy$.



$$\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$$

$$\left|\overrightarrow{i}\right| = \left|\overrightarrow{j}\right| = 1$$

Рис. 2.1. Декартова система координат на плоскости

Упорядоченную пару $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}$ называют *ортонормированным базисом* на плоскости.

Пусть $\overrightarrow{a}$ — вектор на плоскости. Числовые проекции вектора $\overrightarrow{a}$ на оси $Ox,\ Oy$ назовем *координатами вектора* $\overrightarrow{a}$ в базисе $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}$ и обозначим $a_x,\ a_y$. То, что вектор $\overrightarrow{a}$ имеет координаты $a_x,\ a_y$ будем записывать $\overrightarrow{a}(a_x,\ a_y)$ или $\overrightarrow{a} = (a_x,\ a_y)$.

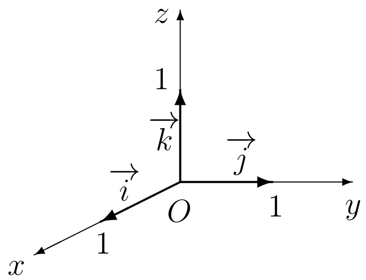
2.2. Прямоугольные декартовы координаты в пространстве

Аналогичным образом введем в пространстве прямоугольную систему координат $x,\ y,\ z$: выберем три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через некоторую точку, которую обозначим O.

Выберем для данной системы координат единичный отрезок, с помощью которого измеряются все прочие отрезки.

Точка O называется *началом координат*, а оси — *осями координат* $Ox,\ Oy,\ Oz$.

Направление осей координат будем задавать с помощью *ортов* $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}$ направленных так же, как оси $Ox,\ Oy,\ Oz$ соответственно.



$$\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Рис. 2.2. Декартова система координат в пространстве

Упорядоченную тройку $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ назовем *ортонормированным базисом* в пространстве.

Пусть $\vec{a}$ — вектор в пространстве. Числовые проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy, Oz назовем *координатами вектора* $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и обозначим a_x, a_y, a_z соответственно. То, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты a_x, a_y, a_z будем записывать $\vec{a}(a_x,\, a_y,\, a_z)$ или $\vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z)$.

Из свойств числовых проекций следует, что равные векторы имеют равные координаты.

Теорема 2.1. *Рассмотрим векторы* $\vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z)$ *и* $\vec{b} = (b_x,\, b_y,\, b_z)$. *Тогда:*

$$1)\ \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x,\, a_y \pm b_y,\, a_z \pm b_z) \tag{2.1}$$

$$2)\ \lambda\vec{a} = (\lambda a_x,\, \lambda a_y,\, \lambda a_z) \tag{2.2}$$

Доказательство. Используем свойства проекции вектора на ось.

$$1)\ pr_{\mathbf{L}}\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = pr_{\mathbf{L}}\vec{a} \pm pr_{\mathbf{L}}\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} pr_{\vec{i}}\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = pr_{\vec{i}}\vec{a} \pm pr_{\vec{i}}\vec{b} \\ pr_{\vec{j}}\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = pr_{\vec{j}}\vec{a} \pm pr_{\vec{j}}\vec{b} \\ pr_{\vec{k}}\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = pr_{\vec{k}}\vec{a} \pm pr_{\vec{k}}\vec{b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z)$$

$$2)\ pr_{\mathbf{L}}(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_{\mathbf{L}}\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} pr_{\vec{i}}(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_{\vec{i}}\vec{a} \\ pr_{\vec{j}}(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_{\vec{j}}\vec{a} \\ pr_{\vec{k}}(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_{\vec{k}}\vec{a} \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda\vec{a} = (\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z) \qquad \square$$

Теорема 2.2. $\vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z) \ \Leftrightarrow\ \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Доказательство. Поскольку $\vec{i} = (1,\, 0,\, 0)$, $\vec{j} = (0,\, 1,\, 0)$, $\vec{k} = (0,\, 0,\, 1)$, то по формулам (2.1), (2.2) получаем:

$$\vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z) = (a_x,\, 0,\, 0) + (0,\, a_y,\, 0) + (0,\, 0,\, a_z) =$$
$$a_x(1,\, 0,\, 0) + a_y(0,\, 1,\, 0) + a_z(0,\, 0,\, 1) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

$\square$

Определение 2.1. *Представление вектора* $\overrightarrow{a}$ *в виде*

$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \tag{2.3}$$

называется разложением по координатным ортам или разложением по базису $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$.

Очевидно, что для каждого вектора $\overrightarrow{a}$ координаты в базисе $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ определены однозначно, то есть разложение (2.3) единственно. Отсюда легко получить (оставим это в качестве упражнения), что векторы $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ равны тогда и только тогда, когда равны их координаты:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y. \\ a_z = b_z \end{cases} \tag{2.4}$$

Сформулируем теперь условие коллинеарности векторов. Пусть $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$. Тогда по формулам (2.2), (2.4) получаем:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R}: \; \overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_x = \lambda b_x \\ a_y = \lambda b_y, \\ a_z = \lambda b_z \end{cases}$$

то есть у коллинеарных векторов координаты пропорциональны. Полученные условия принято записывать в виде пропорции:

$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \;\Leftrightarrow\; \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{2.5}$$

Замечание. Если одна или две координаты вектора $\overrightarrow{b}$ равны нулю, то соответствующие координаты вектора $\overrightarrow{a}$ также равны нулю. В этом случае должны быть пропорциональны лишь ненулевые координаты. Например: $\overrightarrow{a} = (0, 1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (0, 2, 4)$, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$.

Пусть $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ — произвольный ненулевой вектор пространства. Легко показать (см. рис. 2.3), что

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2.6}$$

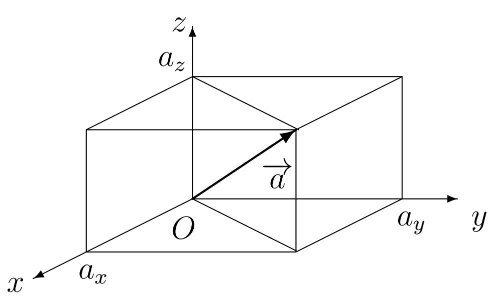


Рис. 2.3

Оставим доказательство формулы (2.6) в качестве упражнения.

Далее, обозначим через α, β, γ углы между вектором $\overrightarrow{a}$ и осями Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда по формуле (1.1) получаем

$$\begin{cases} a_x = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\alpha \\ a_y = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\beta. \\ a_z = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

Числа $\cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\overrightarrow{a}$.

Для орта $\overrightarrow{a}^0$ по формулам (2.2), (2.6) имеем

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x^0 = \dfrac{a_x}{|\overrightarrow{a}|} = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \cos\,\alpha \\ a_y^0 = \dfrac{a_y}{|\overrightarrow{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \cos\,\beta, \\ a_z^0 = \dfrac{a_z}{|\overrightarrow{a}|} = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \cos\,\gamma \end{cases}$$

или

$$\overrightarrow{a}^0 = \cos\alpha \cdot \overrightarrow{i} + \cos\beta \cdot \overrightarrow{j} + \cos\gamma \cdot \overrightarrow{k}, \tag{2.7}$$

то есть направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{a}$ совпадают с координатами орта $\overrightarrow{a}^0$.

2.3. Декартовы координаты точек. Расстояние между точками на плоскости и в пространстве

Зададим в пространстве произвольную точку A. Вектор $\overrightarrow{OA}$ (где точка O – начало координат) называется *радиус–вектором точки* A, а его координаты — *координатами точки* A.

Пусть заданы координаты точек $A(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $B(x_2,\, y_2,\, z_2)$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

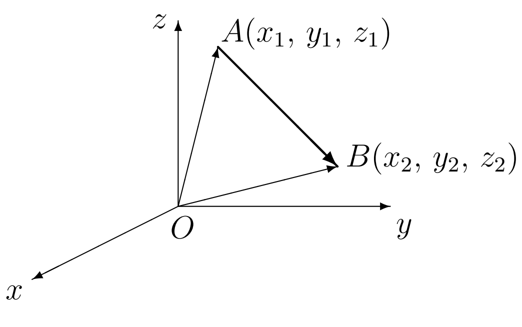


Рис. 2.4

Поскольку

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB} = (x_2,\, y_2,\, z_2), \quad \overrightarrow{OA} = (x_1,\, y_1,\, z_1),$$

то по формулам (2.1), (2.6) получаем

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1), \tag{2.8}$$

$$|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{2.9}$$

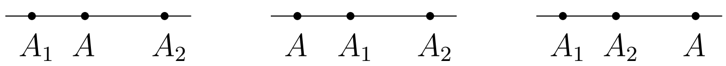
В частности, если $A(x_1,\, y_1)$ и $B(x_2,\, y_2)$ — точки плоскости, то

$$|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{2.10}$$

2.4. Деление отрезка в заданном отношении

Пусть $\lambda \neq -1, \quad A_1 \neq A_2$.

Определение 2.2. *Точка A делит отрезок A_1A_2 в отношении λ, если* $\overrightarrow{A_1A} = \lambda\overrightarrow{AA_2}\,$.



$\lambda > 0$ $\qquad -1 < \lambda < 0$ $\qquad \lambda < -1$ $\qquad$ *Рис. 2.5*

Пример. Пусть точка A принадлежит отрезку A_1A_2 ($\lambda > 0$) и делит его на две части A_1A и AA_2. Говорят, что точка A является "золотым сечением", если отношение длины большей из полученных частей к длине меньшей части равно отношению длины всего отрезка к длине большей из частей. Найти отношение, в котором точка A делит отрезок A_1A_2.

Пусть A_1A — больший из полученных отрезков ($\lambda > 1$). Тогда по условию получаем

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1A} = \lambda\overrightarrow{AA_2} \\ \overrightarrow{A_1A_2} = \lambda\overrightarrow{A_1A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A_1A} = \lambda\overrightarrow{AA_2} \\ \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AA_2} = \lambda\overrightarrow{A_1A} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1A} = \lambda\overrightarrow{AA_2} \\ \overrightarrow{AA_2} = (\lambda - 1)\overrightarrow{A_1A} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda - 1 = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Так как $\lambda > 1$, то $\lambda = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Теорема 2.3. *Пусть заданы координаты точек $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, и $A_1 \neq A_2$. Если точка $A(x,\ y,\ z)$ делит отрезок A_1A_2 в отношении λ, то*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\,, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\,, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\,. \tag{2.11}$$

Доказательство. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{AA_2}$:

$$\overrightarrow{A_1A} = (x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1), \quad \overrightarrow{AA_2} = (x_2 - x,\, y_2 - y,\, z_2 - z).$$

Тогда

$$\overrightarrow{A_1A} = \lambda\overrightarrow{AA_2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2 \\ y(1 + \lambda) = y_1 + \lambda y_2 \\ z(1 + \lambda) = z_1 + \lambda z_2. \end{cases}$$

Так как $\lambda \neq -1$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

□

Следствие 2.1. *Координаты середины отрезка* ($\lambda = 1$)*:*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{2.12}$$

Следствие 2.2. *Пусть заданы координаты* $A(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $B(x_2,\, y_2,\, z_2)$, $C(x_3,\, y_3,\, z_3)$ *вершин треугольника. Тогда координаты центра тяжести* $\triangle ABC$ *равны:*

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Центр тяжести треугольника совпадает с точкой M пересечения его медиан. Пусть AA_1 — медиана, проведенная из точки A. Тогда координаты точки A_1 равны

$$x^* = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y^* = \frac{y_2 + y_3}{2}, \quad z^* = \frac{z_2 + z_3}{2}.$$

Далее, точка M делит медиану AA_1 в отношении 2:1, считая от вершины. Отсюда по формулам (2.11) ($\lambda = 2$) получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + 2x^*}{3} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \dfrac{y_1 + 2y^*}{3} = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ z = \dfrac{z_1 + 2z^*}{3} = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{cases}.$$

□

2.5. Упражнения

Упражнение 2.1. *Пусть* $\overrightarrow{a} = (1,\, 1,\, -2)$, $\overrightarrow{b} = (1,\, -3,\, 0)$, $\overrightarrow{c} = (-4,\, 2,\, 1)$. *Разложить вектор* $\overrightarrow{d} = (-11,\, 11,\, -1)$ *по векторам* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Пусть

$$\overrightarrow{d} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}.$$

Подставим вместо векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{d}$ их координаты (в данном случае координаты векторов удобнее записывать в столбцы):

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда по формулам (2.1), (2.2) получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 4z = -11 \\ x - 3y + 2z = 11 \\ -2x \phantom{{}-3y} + z = -1, \end{cases}$$

решением которой являются $x = 2,\ y = -1,\ z = 3$. Значит,

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}.$$

Упражнение 2.2. *Пусть* $\vec{a} = (-1,\ 2,\ 0)$, $\vec{b} = (2,\ 3,\ 1)$. *Коллинеарны ли векторы* $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ *и* $\vec{d} = 12\vec{b} - 9\vec{a}$?

По формулам (2.1), (2.2) найдем координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$$\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b} = 3(-1,\ 2,\ 0) - 4(2,\ 3,\ 1) = (-11\ -6,\ -4),$$
$$\vec{d} = 12\vec{b} - 9\vec{a} = 12(2,\ 3,\ 2) - 9(-1,\ 2,\ 0) = (33,\ 18,\ 12).$$

Проверим условие (2.5) коллинеарности векторов:

$$\frac{-11}{33} = \frac{-6}{18} = \frac{-4}{12} \ \Rightarrow\ \vec{c} \parallel \vec{d}.$$

Упражнение 2.3. *Пусть* $\vec{a} = (-2,\ 2,\ 1)$, $\vec{b} = (3,\ 2,\ 1)$, $\vec{c} = (2,\ 1,\ 1)$, $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$. *Найти* 1) *длину и направляющие косинусы вектора* $\vec{a}$, 2) $pr_{\vec{i}}\vec{d}$, $pr_{\vec{j}}\vec{d}$, $pr_{\vec{k}}\vec{d}$.

1) Длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ найдем по формулам (2.6), (2.7):

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3,$$
$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$
$$\cos\alpha = -\frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

2) По формулам (2.1), (2.2) найдем координаты вектора $\vec{d}$:

$$\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = (-2,\ 2,\ 1) - 2(3,\ 2,\ 1) + 3(2,\ 1,\ 1) = (-2,\ 1,\ 2).$$

Значит, $pr_{\vec{i}}\vec{d} = -2,\ pr_{\vec{j}}\vec{d} = 1,\ pr_{\vec{k}}\vec{d} = 2.$

Упражнение 2.4. *Найти вектор* $\vec{x}$, *образующий с ортом* $\vec{j}$ *угол* $60°$, *с ортом* $\vec{k}$ — *угол* $120°$, *если* $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$.

Пусть $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$. Тогда по определению координат вектора получаем

$$x_2 = pr_{\vec{j}}\vec{x} = |\vec{x}| \cdot \cos\beta = 5\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$
$$x_3 = pr_{\vec{k}}\vec{x} = |\vec{x}| \cdot \cos\gamma = 5\sqrt{2} \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Координату x_1 найдем по формуле (2.6):

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}, \quad x_1 = \pm 5.$$

Значит, $\vec{x} = \left(\pm 5,\ \frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Упражнение 2.5. *Даны три последовательные вершины параллелограмма* $A(5,\,-5,\,12)$, $B(-3,\,2,\,3)$, $C(3,\,1,\,2)$. *Найти координаты четвертой вершины* D.

Обозначим координаты вершины $D(x,\,y,\,z)$. По формуле (2.8) найдем координаты векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AD} = (x-5,\,y+5,\,z-12), \quad \overrightarrow{BC} = (6,\,-1,\,-1).$$

Поскольку противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны, то $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Запишем данное равенство в координатном виде:

$$\begin{pmatrix} x & - & 5 \\ y & + & 5 \\ z & - & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= & 11 \\ y &= & -6 \\ z &= & 11 \end{cases}$$

Упражнение 2.6. *На оси абсцисс найти точку* M, *равноудаленную от точек* $A(1,\,-4,\,7)$ *и* $B(5,\,6,\,-5)$.

Обозначим координаты вершины $M(x,\,0,\,0)$. По формуле (2.8) найдем координаты векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$:

$$\overrightarrow{AM} = (x-1,\,4,\,7), \quad \overrightarrow{BM} = (x-5,\,-6,\,5).$$

Далее, по формуле (2.9)

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{BM}\right|,$$

$$\sqrt{(x-1)^2+4^2+7^2} = \sqrt{(x-5)^2+(-6)^2+5^2}\,,$$

$$(x-1)^2+65 = (x-5)^2+61, \quad x^2-2x+5 = x^2-10x+25, \quad x = \frac{5}{2}\,.$$

Значит, $M\left(\frac{5}{2}\,,\,0,\,0\right)$.

Упражнение 2.7. *Найти координаты точек, делящих отрезок* AB, $A(4,\,-1)$, $B(7,\,5)$ *на три равные части.*

Пусть точки $C(x_1,\,y_1)$ и $D(x_2,\,y_2)$ делят отрезок AB на три равные части.

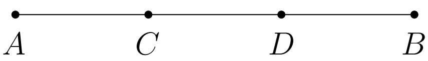


Рис. 2.6

Поскольку $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, то точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Отсюда по формулам (2.11) получаем:

$$x_1 = \frac{4+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}} = 5, \quad y_1 = \frac{-1+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}} = 1, \quad C(5,\,1).$$

Аналогично, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, и точка D делит отрезок AB в отношении $\lambda = 2$. Значит,

$$x_2 = \frac{4+2\cdot 7}{1+2} = 6, \quad y_2 = \frac{-1+2\cdot 5}{1+2} = 3, \quad D(6,\,3).$$

Упражнение 2.8. *Даны координаты вершин* $A(3,\ -6,\ 9)$, $B(0,\ -3,\ 6)$ *и координаты точки* $M(4,\ -7,\ 10)$ *пересечения медиан треугольника* ABC. *Найти координаты вершины* C.

Пусть координаты вершины $C(x,\ y,\ z)$. По формулам (2.13) получаем:

$$= \frac{3+0+x}{3}, \quad -7 = \frac{-6-3+y}{3}, \quad 10 = \frac{9+6+z}{3},$$
$$x = 9, \quad y = -12, \quad z = 15.$$

Значит, $C(9,\ -12,\ 15)$.

Упражнение 2.9. *Даны вершины треугольника* $A(2,\ -5)$, $B(1,\ -2)$ *и* $C(4,\ 7)$. *Найти* 1) *длину медианы* BM, 2) *точку пересечения биссектрисы угла при вершине* B *со стороной* AC.

1) Пусть $M(x,\ y)$ — середина стороны AC. По формулам (2.12) найдем координаты точки M:

$$x = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y = \frac{-5+7}{2} = 1.$$

Далее, по формулам (2.8), (2.9) имеем:

$$\overrightarrow{BM} = (2,\ 3), \quad |BM| = \left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{13}.$$

2) Пусть $L(x,\ y)$ — точка пересечения биссектрисы угла B со стороной AC. Найдем длины сторон BA и BC и воспользуемся свойством биссектрисы угла треугольника:

$$\overrightarrow{BA} = (1,\ -3), \quad \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{10}, \quad \overrightarrow{BC} = (3,\ 9), \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = 3\sqrt{10},$$
$$\frac{|AL|}{|LC|} = \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{10}}, \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LC}.$$

Значит, точка L делит отрезок AC в отношении $\lambda = \dfrac{1}{3}$. Отсюда по формулам (2.11) получаем

$$x = \frac{2 + \frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{-5 + \frac{1}{3}\cdot 7}{1+\frac{1}{3}} = -2, \quad L\left(\frac{5}{2},\ -2\right).$$

2.6. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Пусть $\overrightarrow{a} = (-1,\ 2)$, $\overrightarrow{b} = (2,\ 0)$. Выразить вектор $\overrightarrow{c} = (-8,\ 4)$ через векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

2.2. Пусть $\overrightarrow{a} = (0,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{b} = (1,\ 0,\ 1)$, $\overrightarrow{c} = (-1,\ 2,\ 4)$. Выразить вектор $\overrightarrow{d} = (-2,\ 4,\ 7)$ через векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

2.3. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{c} = 4\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}$, построенные на векторах $\overrightarrow{a} = (1,\ -2,\ 5)$ и $\overrightarrow{b} = (3,\ -1,\ 0)$?

2.4. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{b} - 4\overrightarrow{a}$, построенные на векторах $\overrightarrow{a} = (3,\, 2,\, 0)$ и $\overrightarrow{b} = (1,\, 1,\, -5)$?

2.5. При каких значениях α и β векторы $\overrightarrow{a} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \alpha\overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{b} = \beta\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ коллинеарны?

2.6. Даны точки $A(1,\, 2,\, 1)$, $B(2,\, -1,\, 3)$, $C(3,\, \alpha,\, \beta)$. При каких значениях α и β точка C лежит на прямой AB?

2.7. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1,\, 1,\, 4)$, $B(2,\, 3,\, -1)$, $C(-2,\, 2,\, 0)$. Найти координаты четвертой вершины D.

2.8. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(1,\, 2,\, 3)$, $B(3,\, 3,\, 1)$, $C(6,\, 1,\, 7)$, $D(4,\, 0,\, 9)$ есть параллелограмм. Найти длины его сторон.

2.9. Даны вершины треугольника $A(1,\, -4,\, 10)$, $B(2,\, -1,\, 0)$, $C(-6,\, -3,\, 8)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

2.10. Даны вершины треугольника $A(-5,\, 7,\, 2)$, $B(1,\, 4,\, -1)$ и $C(7,\, 4,\, 5)$. Найти расстояние от начала координат до точки пересечения медиан треугольника.

2.11. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2,\, 6)$, $B(2,\, 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2,\, 2)$. Найти две другие вершины.

2.12. Найти координаты вершин треугольника, если известны середины его сторон $K(2,\, -2)$, $M(4,\, 2)$, $N(3,\, 6)$.

2.13. Определить координаты концов отрезка AB, который точками $C(1,\, 1,\, 2)$ и $D(4,\, -2,\, 1)$ разделен на три равные части.

2.14. Даны вершины треугольника $A(3,\, -5)$, $B(-3,\, 3)$ и $C(-1,\, -2)$. Найти точку пересечения биссектрисы угла при вершине A со стороной BC.

2.15. Даны вершины треугольника $A(3,\, -2,\, 2)$, $B(4,\, 0,\, 3)$ и $C(-3,\, 1,\, -1)$. Найти длину биссектрисы угла при вершине A.

2.16. Найти вектор $\overrightarrow{x}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, образующий с ортом $\overrightarrow{k}$ тупой угол и имеющий длину $|\overrightarrow{x}| = 3\sqrt{21}$.

2.17. Найти вектор $\overrightarrow{x}$, сонаправленный биссектрисе угла между векторами $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{b} = -7\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$, если $|\overrightarrow{x}| = 3\sqrt{110}$.

2.7. Ответы к задачам для самостоятельного решения

2.1. $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$.

2.2. $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

2.3. $\overrightarrow{c} \parallel \overrightarrow{d}$.

2.4. $\overrightarrow{c} \nparallel \overrightarrow{d}$.

2.5. $\alpha = -1,\ \beta = 4$.

2.6. $\alpha = -4,\ \beta = 5$.

2.7. $D(-3,\ 0,\ 5)$.

2.8. $|AB| = |CD| = 3,\ |AD| = |BC| = 7$.

2.9. 7.

2.10. $\sqrt{30}$.

2.11. $C(6,\ -2),\ D(2,\ -4)$.

2.12. $A(1,\ 2),\ B(3,\ -6),\ C(5,\ 10)$.

2.13. $A(-2,\ 4,\ 3),\ B(7,\ -5,\ 0)$.

2.14. $\left(-\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$.

2.15. $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

2.16. $\overrightarrow{x} = (-6,\ 3,\ -12)$.

2.17. $\overrightarrow{x} = (-19,\ -23,\ 10)$.

Скалярное, векторные, смешанное произведения

3.1. Скалярное произведение

Определение 3.1. *Скалярным произведением ненулевых векторов* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *называется число* $\left(\overrightarrow{a}\,,\ \overrightarrow{b}\right)$, *равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:*

$$\left(\overrightarrow{a}\,,\ \overrightarrow{b}\right) = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\omega. \tag{3.1}$$

Если $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *или* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, *положим*

$$\left(\overrightarrow{a}\,,\ \overrightarrow{b}\right) = 0.$$

Геометрический смысл скалярного произведения

Поскольку

$$\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \cos\omega = pr_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a}$$

— проекция вектора $\overrightarrow{a}$ на направление, определяемое вектором $\overrightarrow{b}$, а

$$\left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\omega = pr_{\overrightarrow{a}}\,\overrightarrow{b}$$

— проекция вектора $\overrightarrow{b}$ на направление, определяемое вектором $\overrightarrow{a}$, то

$$\left(\overrightarrow{a}\,,\ \overrightarrow{b}\right) = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot pr_{\overrightarrow{a}}\,\overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot pr_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a}\,. \tag{3.2}$$

Замечание. Пусть $\overrightarrow{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$. Из формулы (3.2) следует, что

$$\begin{cases} a_x = pr_{\overrightarrow{i}}\,\overrightarrow{a} = \left(\overrightarrow{i}\,,\ \overrightarrow{a}\right) \\ a_y = pr_{\overrightarrow{j}}\,\overrightarrow{a} = \left(\overrightarrow{j}\,,\ \overrightarrow{a}\right) \\ a_z = pr_{\overrightarrow{k}}\,\overrightarrow{a} = \left(\overrightarrow{k}\,,\ \overrightarrow{a}\right). \end{cases}$$

Механический смысл скалярного произведения

Пусть материальная точка перемещается под действием силы $\overrightarrow{F}$ вдоль вектора $\overrightarrow{S}$.

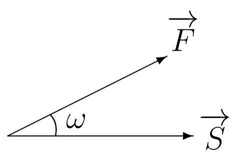


Рис. 3.1

Из курса физики известно, что работа W силы $\overrightarrow{F}$ при перемещении материальной точки вдоль пути $\overrightarrow{S}$ равна

$$W = \left|\overrightarrow{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{S}\right| \cdot \cos\omega,$$

где $\left|\overrightarrow{F}\right|$ — величина силы, $\left|\overrightarrow{S}\right|$ — длина пути, ω — угол между векторами $\overrightarrow{F}$ и $\overrightarrow{S}$. Таким образом,

$$W = \left(\overrightarrow{F},\ \overrightarrow{S}\right),$$

то есть работа силы $\overrightarrow{F}$ при перемещении материальной точки вдоль пути $\overrightarrow{S}$ равна скалярному произведению векторов $\overrightarrow{F}$ и $\overrightarrow{S}$.

3.2. Свойства скалярного произведения

Алгебраические свойства скалярного произведения

1) $\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) = (\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}),$

2) $\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}\right),$

$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}\right) + \left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right),$

3) $\left(\lambda\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right),$

$\left(\overrightarrow{a},\ \lambda\overrightarrow{b}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right).$

Геометрические свойства скалярного произведения

4) $\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right) \geq 0,\ \left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right)}.$

5) Пусть ω — угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Тогда

$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) > 0 \ \Leftrightarrow\ 0 \leq \omega < \frac{\pi}{2},$$
$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) < 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{\pi}{2} < \omega \leq \pi.$$

6) Пусть $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$. Тогда $\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Доказательство.
1) Следует из формулы (3.1).

2) По свойству проекций $pr_{\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} + pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{c}$. Тогда

$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot pr_{\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left(pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} + pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{c}\right) =$$
$$\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} + \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}\right).$$

Далее,
$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right)=\left(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\left(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a}\right)+\left(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{b}\right)=\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}\right)+\left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right).$

3) По свойству проекций $pr_{\overrightarrow{a}}\left(\lambda\overrightarrow{b}\right)=\lambda pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$. Тогда

$$\left(\overrightarrow{a},\lambda\overrightarrow{b}\right)=\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot pr_{\overrightarrow{a}}\left(\lambda\overrightarrow{b}\right)=\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left(\lambda pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}\right)=\lambda\left(\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}\right)=\lambda\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right).$$

Далее,

$$\left(\lambda\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)=\left(\overrightarrow{b},\lambda\overrightarrow{a}\right)=\lambda\left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}\right)=\lambda\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right).$$

4) Положим в формуле (3.1) $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}$:

$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right)=\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\cos 0=\left|\overrightarrow{a}\right|^2\geq 0,\quad \left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right)}.$$

5) Пусть $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$. Выразим из формулы (3.1) $\cos\omega$:

$$\cos\omega=\frac{\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)}{\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|}. \tag{3.3}$$

Так как $\left|\overrightarrow{a}\right|>0,\ \left|\overrightarrow{b}\right|>0,$ то

$$\begin{gathered}\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)>0\ \Leftrightarrow\ \cos\omega>0\ \Leftrightarrow\ 0\leq\omega<\frac{\pi}{2},\\ \left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)<0\ \Leftrightarrow\ \cos\omega<0\ \Leftrightarrow\ \frac{\pi}{2}<\omega\leq\pi.\end{gathered}$$

6) Из формулы (3.3):

$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \cos\omega=0\ \Leftrightarrow\ \omega=\frac{\pi}{2},\ \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}.$$

□

Пример 3.1. Рассмотрим выражение $\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)$. По свойствам 1—3 имеем

$$\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right)-2\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)+\left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}\right).$$

Пользуясь свойством 4 и определением скалярного произведения, получаем

$$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\omega+\left|\overrightarrow{b}\right|^2, \tag{3.4}$$

где ω — угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках A, B и C.

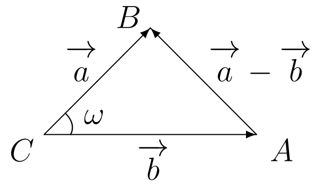


Рис. 3.2

Пусть $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CA}$. Тогда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$. Положим $\omega=\angle ACB$. Из равенства (3.4) получаем известную теорему косинусов

$$|AB|^2=|AC|^2-2|AC|\cdot|BC|\cos\omega+|BC|^2.$$

3.3. Координатное выражение скалярного произведения

Теорема 3.1. *Пусть* $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k}$. *Тогда*

$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)=(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{3.5}$$

Доказательство. Для скалярных произведений ортов координатных осей имеют место равенства

$$\left(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}\right)=\left(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}\right)=\left(\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{k}\right)=1\cdot1\cdot\cos0=1,$$
$$\left(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)=\left(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}\right)=\left(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Отсюда по свойствам скалярного произведения получаем

$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)=\left(a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k},\ b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k}\right)=$$
$$a_1b_1\left(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}\right)+a_2b_2\left(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}\right)+a_3b_3\left(\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{k}\right)+(a_1b_2+a_2b_1)\left(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)+$$
$$(a_1b_3+a_3b_1)\left(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}\right)+(a_2b_3+a_3b_2)\left(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

□

Следствие 3.1. *Длина вектора* $\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ *равна*

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Положим в формуле (3.5) $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}$. Тогда

$$\begin{cases}(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a})=a_1^2+a_2^2+a_3^2\\ |\overrightarrow{a}|=\sqrt{(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a})}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

□

Заметим, что в лекции 2 мы уже получили данную формулу, исходя из геометрических соображений.

Следствие 3.2. *Косинус угла ω между ненулевыми векторами $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $\overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ равен*

$$\cos\omega = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,. \tag{3.7}$$

Доказательство. Следует из формул (3.3), (3.5), (3.6). □

Следствие 3.3. *Пусть ось* **L** *составляет углы $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ с осями координат, $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$. Тогда проекция вектора $\overrightarrow{a}$ на ось* **L** *равна*

$$pr_{\mathbf{L}}\overrightarrow{a} = a_1\cos\alpha + a_2\cos\beta + a_3\cos\gamma\,. \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{e}$ — единичный вектор, сонаправленный оси **L**. Тогда по формуле (2.7)

$$\overrightarrow{e} = (\cos\alpha\,,\ \cos\beta\,,\ \cos\gamma)\,.$$

Далее, по формулам (3.2), (3.5)

$$(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{e}) = |\overrightarrow{e}| \cdot pr_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{a}\,,$$

$$pr_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{a} = \frac{(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{e})}{|\overrightarrow{e}|} = a_1\cos\alpha + a_2\cos\beta + a_3\cos\gamma\,.$$

□

3.4. Определители второго и третьего порядка

Рассмотрим таблицу, состоящую из четырех чисел, которая называется квадратной матрицей второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Числа $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ называются *элементами матрицы.* Пара элементов $a_1,\ b_2$ образует *главную диагональ* матрицы, пара $a_2,\ b_1$ — *побочную диагональ.*

Определение 3.2. *Определителем квадратной матрицы A второго порядка (или просто определителем второго порядка) назовем число*

$$\underbrace{\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}_{\textit{обозначения}} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{3.9}$$

Таким образом, для вычисления определителя второго порядка нужно из произведения a_1b_2 элементов главной диагонали вычесть произведение a_2b_1 элементов побочной диагонали. Схематически это правило можно изобразить так:

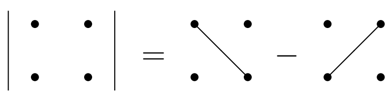


Рис. 3.3

Пример 3.2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

Рассмотрим теперь таблицу, состоящую из девяти чисел, которая называется квадратной матрицей третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Числа $a_i,\ b_i,\ c_i,\ i = 1,\, 2,\, 3$ называются *элементами матрицы*. Тройка элементов $a_1,\ b_2,\ c_3$ образует *главную диагональ* матрицы, тройка $a_3,\ b_2,\ c_1$ — *побочную диагональ*.

Определение 3.3. *Определителем квадратной матрицы A третьего порядка (или просто определителем третьего порядка) называется число*

$$\underbrace{\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{\textit{обозначения}} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - -a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3. \qquad (3.10)$$

Схематически правило вычисления определителя третьего порядка можно представить следующим образом:

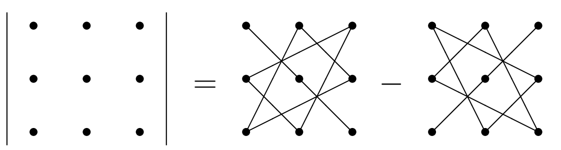


Рис. 3.4

Пример 3.3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 0.$$

Рассмотрим определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 =$$

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \overset{(3.9)}{=}$$

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, доказана формула

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad (3.11)$$

которая называется *разложением определителя по первой строке.* Схематически формулу (3.11) можно изобразить так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Пример 3.4.

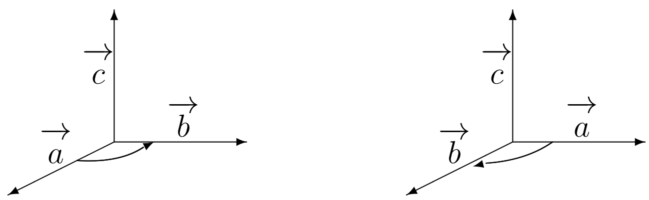
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = 0.$$

3.5. Векторное произведение

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ называется *правой*, если из конца вектора $\overrightarrow{c}$ кратчайший поворот от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки. Иначе упорядоченная тройка $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ называется *левой*.



Правая тройка *Левая тройка* *Рис. 3.5*

Определение 3.4. *Пусть векторы* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *не равны* $\overrightarrow{0}$ *одновременно. Векторным произведением вектора* $\overrightarrow{a}$ *на вектор* $\overrightarrow{b}$ *называется вектор* $\overrightarrow{c} = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$, *длина и направление которого определяются следующими условиями:*
1) $\left|\overrightarrow{c}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\omega$, *где* ω *– угол между векторами* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$,
2) $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$ (*т.е. вектор* $\overrightarrow{c}$ *перпендикулярен плоскости векторов* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$),
3) *упорядоченная тройка* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *— правая.*

Если $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *или* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, *положим*

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{0}.$$

3.6. Свойства векторного произведения

Алгебраические свойства векторного произведения

1) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$

2) $\left[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right]$,

$\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$.

3) $\left[\vec{a}, \lambda\vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$,

$\left[\lambda\vec{a}, \vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Геометрические свойства векторного произведения

4) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны) $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$.

Доказательство.

1) Пусть $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{c}$, $\left[\vec{b}, \vec{a}\right] = \vec{d}$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{ll} a) & \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{d}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\omega \\ b) & \vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}, \quad \vec{d} \perp \vec{a}, \quad \vec{d} \perp \vec{b} \\ c) & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка}, \quad \vec{b}, \vec{a}, \vec{d} \text{ — правая тройка} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \vec{c} = -\vec{d}.$$

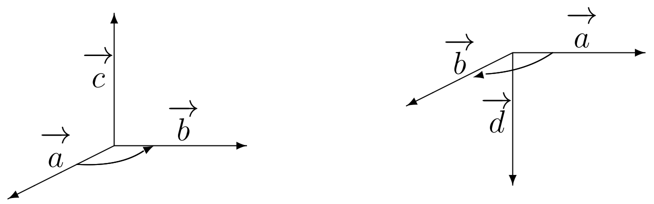


Рис. 3.6

2) Данное свойство будет доказано в п. 3.9.

3) Пусть $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, $\vec{d} = \left[\vec{a}, \lambda\vec{b}\right]$. Тогда при $\lambda > 0$ $\quad \lambda\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}$, и

$$\left\{\begin{array}{ll} a) & \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\omega, \quad \left|\vec{d}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\lambda\vec{b}\right| \cdot \sin\omega = \lambda\left|\vec{c}\right| \\ b) & \vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}, \quad \vec{d} \perp \vec{a}, \quad \vec{d} \perp \lambda\vec{b} \\ c) & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка}, \quad \vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{d} \text{ — правая тройка} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \vec{d} = \lambda\vec{c}.$$

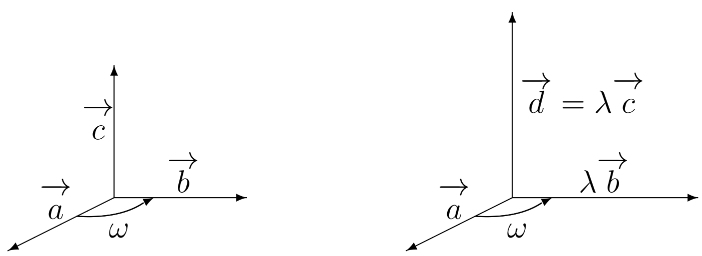


Рис. 3.7

При $\lambda < 0 \quad \lambda\overrightarrow{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$, и

$$\left\{\begin{array}{l} a)\quad \left|\overrightarrow{c}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\omega, \\ \left|\overrightarrow{d}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\lambda\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin(\pi-\omega) = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\omega = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{c}\right| \\ b)\quad \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b},\ \ \overrightarrow{d} \perp \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{d} \perp \lambda\overrightarrow{b} \\ c)\quad \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c} \text{ — правая тройка, } \overrightarrow{a},\ \lambda\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{d} \text{ — правая тройка} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \overrightarrow{d} = \lambda\overrightarrow{c}.$$

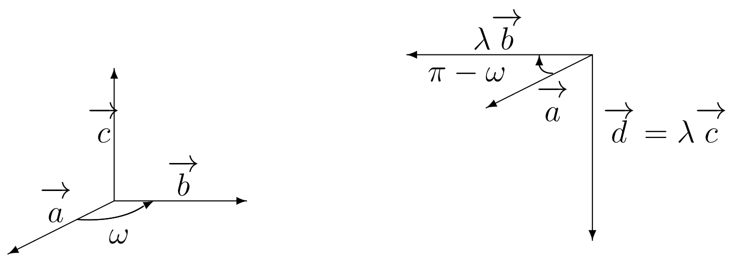


Рис. 3.8

При $\lambda = 0 \quad \lambda\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{d} = \lambda\overrightarrow{c}$.
Далее, $\left[\lambda\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{b},\ \lambda\overrightarrow{a}\right] = -\lambda\left[\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}\right] = \lambda\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right]$.

4) Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Его площадь вычисляется по формуле

$$S = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\omega \quad \Rightarrow \quad S = \left|\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right]\right|.$$

Следовательно, площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, вычисляется по формуле

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\omega = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right]\right|.$$

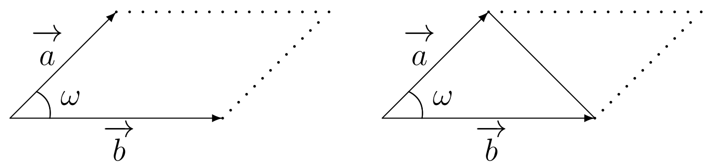


Рис. 3.9

5) $\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right]\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\omega = 0$. Последнее равенство возможно в следующих случаях:

$$\begin{array}{l} a)\quad \left|\overrightarrow{a}\right| = 0 \text{ или } \left|\overrightarrow{b}\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \text{ или } \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}, \\ b)\quad \sin\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 0 \text{ или } \omega = \pi \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}. \end{array}$$

□

Пример 3.5. Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — неколлинеарные векторы. Вычислим произведение $\left[\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right]$. Пользуясь тем, что $\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right] = \left[\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{0}$ (как произведение коллинеарных векторов), будем иметь

$$\left[\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right] = \left[\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}\right] - \left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right] = 2\left[\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}\right].$$

Отсюда

$$S_{\text{параллелограмма}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|\cdot\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|\cdot\sin\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$.

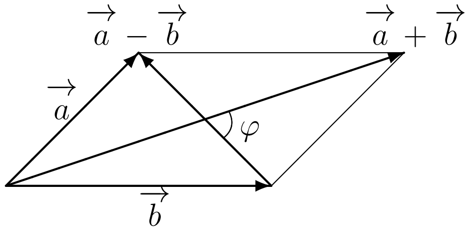


Рис. 3.10

Тем самым доказано, что площадь параллелограмма равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними.

3.7. Координатное выражение векторного произведения

Теорема 3.2. *Пусть* $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$. *Тогда*

$$\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right] = (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k}, \qquad (3.12)$$

или в символической записи

$$\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.13)$$

Доказательство. Для векторных произведений ортов координатных осей имеют место равенства, которые следуют непосредственно из определения векторного произведения (а также очевидны из геометрических соображений):

$$\begin{gathered}
\left[\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}\right] = \overrightarrow{0},\quad \left[\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right] = \overrightarrow{k},\quad \left[\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}\right] = -\overrightarrow{j},\\
\left[\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}\right] = -\overrightarrow{k},\quad \left[\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}\right] = \overrightarrow{0},\quad \left[\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right] = \overrightarrow{i},\\
\left[\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}\right] = \overrightarrow{j},\quad \left[\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j}\right] = -\overrightarrow{i},\quad \left[\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{k}\right] = \overrightarrow{0}.
\end{gathered}$$

Тогда по свойствам векторного произведения получаем

$$\begin{gathered}
\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right] = \left[a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k},\ b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}\right] = \\
a_1b_1\left[\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}\right] + a_1b_2\left[\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right] + a_1b_3\left[\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}\right] + a_2b_1\left[\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}\right] + a_2b_2\left[\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}\right] + \\
a_2b_3\left[\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right] + a_1b_1\left[\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}\right] + a_3b_2\left[\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j}\right] + a_3b_3\left[\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{k}\right] = \\
(a_2b_3 - a_3b_2)\ \overrightarrow{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\ \overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\ \overrightarrow{k} = \\
\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.
\end{gathered}$$

□

3.8. Смешанное произведение

Определение 3.5. *Векторно-скалярным (смешанным) произведением векторов* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\overrightarrow{a}$ *на вектор* $\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$:

$$\left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} \right\rangle = \left(\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right).$$

3.9. Свойства смешанного произведения

Геометрические свойства смешанного произведения

1) Пусть некомпланарные векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ приведены к общему началу, и V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Тогда

$$\left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} \right\rangle = \begin{cases} V, \text{ если тройка } \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \text{ — правая,} \\ -V, \text{ если тройка } \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \text{ — левая.} \end{cases}$$

2) Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ $\left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} \right\rangle = 0.$

Алгебраические свойства смешанного произведения

3) Для любых векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$

$$\left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} \right\rangle.$$

4) $\left\langle \left(\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2}\right) \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \overrightarrow{a_1}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \overrightarrow{a_2}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} \right\rangle.$

Аналогичное свойство имеет место для остальных множителей

$$\left\langle \overrightarrow{a} \left(\lambda_1 \overrightarrow{b_1} + \lambda_2 \overrightarrow{b_2}\right) \overrightarrow{c} \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b_1}\,\overrightarrow{c} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b_2}\,\overrightarrow{c} \right\rangle,$$
$$\left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} \left(\lambda_1 \overrightarrow{c_1} + \lambda_2 \overrightarrow{c_2}\right) \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c_1} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c_2} \right\rangle.$$

Доказательство. 1) Пусть векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ некомпланарны. Тогда по определению смешанного произведения и формуле (3.2) имеем

$$\left(\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right) = \left|\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right| \cdot pr_{\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]} \overrightarrow{a} = \underbrace{\left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \left|\overrightarrow{c}\right| \cdot \sin\omega}_{S_{\text{основания}}} \cdot \underbrace{pr_{\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]} \overrightarrow{a}}_{\pm h}.$$

Далее, если тройка $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ — правая, то φ — острый угол (см. рис. 3.11). Значит,

$$pr_{\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]} \overrightarrow{a} = \left|\overrightarrow{a}\right| \cos\varphi > 0 \quad \Rightarrow \quad pr_{\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]} \overrightarrow{a} = h \quad \Rightarrow$$
$$\left(\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right) = S_{\text{основания}} \cdot h = V_{\text{параллелепипеда}}$$

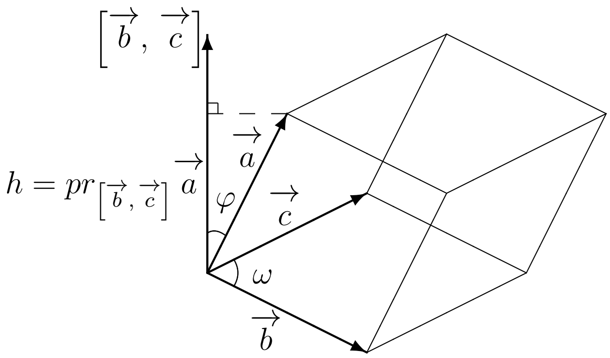


Рис. 3.11

Если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — левая, то φ — тупой угол (см. рис. 3.12). Значит,

$$pr_{\left[\vec{b},\ \vec{c}\right]}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi < 0 \quad\Rightarrow\quad pr_{\left[\vec{b},\ \vec{c}\right]}\vec{a} = -h \quad\Rightarrow$$

$$\left(\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right) = S_{\text{основания}} \cdot (-h) = -V_{\text{параллелепипеда}}.$$

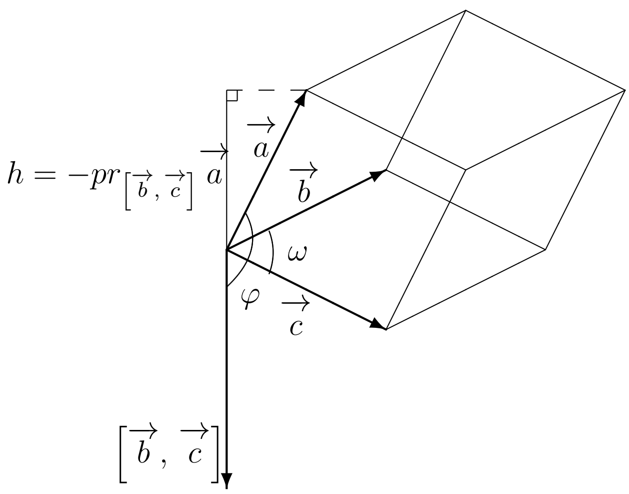


Рис. 3.12

2) Выше показано, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны, то

$$\langle \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,\rangle = \pm V \neq 0.$$

Пусть теперь векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Рассмотрим три частных случая:

a) $\vec{a} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \left(\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right) = 0$,

b) векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны $\Rightarrow$ $\left[\vec{b},\ \vec{c}\right] = \vec{0} \;\Rightarrow\; \left(\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right) = 0.$

c) векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны, вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ $\;\Leftrightarrow\;$ $\vec{a} \perp \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]$ $\;\Rightarrow\;$ $\left(\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right) = 0.$

Следствие. *Пусть некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ приведены к общему началу. Тогда объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен*

$$V = \frac{1}{6}\left|\left\langle \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,\right\rangle\right|. \tag{3.14}$$

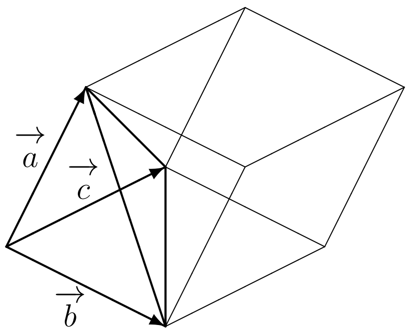


Рис. 3.13

Действительно,

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} S_{\text{параллелограмма}} \right) \cdot h =$$
$$\frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{6} \left| \left\langle \overrightarrow{a}\, \overrightarrow{b}\, \overrightarrow{c} \right\rangle \right| .$$

3) Из предыдущего свойства вытекает, что при перестановке сомножителей в смешанном произведении может измениться лишь знак произведения. Остается заметить, что тройки, получаемые по схеме из рис. 3.14 (начиная с любого вектора), имеют одинаковую ориентацию.

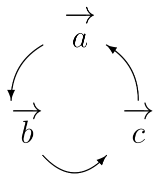


Рис. 3.14

При движении по этой схеме в противоположном направлении ориентация меняется.

4) Пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем

$$\left\langle \left(\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} \right) \overrightarrow{b}\, \overrightarrow{c} \right\rangle = \left(\left(\lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 \right), \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \right] \right) =$$
$$\lambda_1 \left(\overrightarrow{a}_1, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \right] \right) + \lambda_2 \left(\overrightarrow{a}_2, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \right] \right) = \lambda_1 \left\langle \overrightarrow{a}_1 \overrightarrow{b}\, \overrightarrow{c} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \overrightarrow{a}_2 \overrightarrow{b}\, \overrightarrow{c} \right\rangle ,$$

$$\left\langle \overrightarrow{a} \left(\lambda_1 \overrightarrow{b_1} + \lambda_2 \overrightarrow{b_2} \right) \overrightarrow{c} \right\rangle = - \left\langle \left(\lambda_1 \overrightarrow{b_1} + \lambda_2 \overrightarrow{b_2} \right) \overrightarrow{a}\, \overrightarrow{c} \right\rangle =$$
$$- \left(\left(\lambda_1 \overrightarrow{b_1} + \lambda_2 \overrightarrow{b_2} \right), \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \right] \right) = -\lambda_1 \left(\overrightarrow{b_1}, \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \right] \right) - \lambda_2 \left(\overrightarrow{b_2}, \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \right] \right) =$$
$$- \lambda_1 \left\langle \overrightarrow{b_1} \overrightarrow{a}\, \overrightarrow{c} \right\rangle - \lambda_2 \left\langle \overrightarrow{b_2} \overrightarrow{a}\, \overrightarrow{c} \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \overrightarrow{a}\, \overrightarrow{b_1} \overrightarrow{c} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \overrightarrow{a}\, \overrightarrow{b_2} \overrightarrow{c} \right\rangle .$$

Последнее равенство доказывается аналогично. □

Докажем теперь свойство 2) векторного произведения, т.е. равенства

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \right] = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right] + \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \right],$$
$$\left[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \right] = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \right] + \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \right].$$

Доказательство. Из свойства 4) смешанного произведения вытекает, что для любого вектора $\vec{d}$

$$\left(\vec{d},\left[\vec{a},\,\vec{b}+\vec{c}\right]\right)=\left\langle\vec{d}\,\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right\rangle=\left\langle\vec{d}\,\vec{a}\,\vec{b}\right\rangle+\left\langle\vec{d}\,\vec{a}\,\vec{c}\right\rangle=$$
$$\left(\vec{d},\left[\vec{a},\,\vec{b}\right]\right)+\left(\vec{d},\left[\vec{a},\,\vec{c}\right]\right)=\left(\vec{d},\left[\vec{a},\,\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\,\vec{c}\right]\right).$$

Беря в качестве $\vec{d}$ векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, получаем, что координаты векторов $\left[\vec{a},\,\vec{b}+\vec{c}\right]$ и $\left[\vec{a},\,\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\,\vec{c}\right]$ совпадают (см. замечание п. 3.1). Из этого следует, что эти векторы равны.

Второе равенство доказывается аналогично. □

3.10. Координатное выражение смешанного произведения

Теорема 3.3. *Пусть* $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$. *Тогда*

$$\left\langle\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right\rangle=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}. \tag{3.15}$$

Доказательство. По формулам (3.5), (3.12) имеем:

$$\left[\vec{b},\,\vec{c}\right]=(b_2c_3-b_3c_2)\,\vec{i}-(b_1c_3-b_3c_1)\,\vec{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\,\vec{k},$$
$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\,\vec{c}\right]\right)=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=$$
$$a_1\cdot\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\cdot\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\cdot\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

□

Таким образом, геометрический смысл определителя третьего порядка $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$ — это объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(a_1,\,a_2,\,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\,b_2,\,b_3)$ и $\vec{c}=(c_1,\,c_2,\,c_3)$, взятый со знаком (+), если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая и со знаком (−), если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — левая.

Упражнение. Доказать, что геометрический смысл определителя второго порядка $\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}$ — это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(a_1,\,a_2)$ и $\vec{b}=(b_1,\,b_2)$, взятая со знаком (+), если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки, и со знаком (−) в противном случае.

3.11. Упражнения

Упражнение 3.1. *Дано:* $\left|\overrightarrow{a}\right| = 2,\ \left|\overrightarrow{b}\right| = 3,\ \left(\widehat{\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$. *Найти: 1)* $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)^2$, *2)* $\left(2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right)$, *3)* $\left|2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right|$.

Используем определение и свойства скалярного произведения.

$$1)\quad \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)^2 = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right) + 2\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}\right) = \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 = 7,$$

$$2)\quad \left(2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right) = 2\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right) + 4\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) - 3\left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}\right) - 6\left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}\right) = 2\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{a}\right) + \left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right) - 6\left(\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}\right) = 3\left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - 6\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = -49,$$

$$3)\quad \left|2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b},\ 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)} = \sqrt{4\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right) - 4\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}\right)} = \sqrt{4\left|\overrightarrow{a}\right|^2 - 4\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + \left|\overrightarrow{b}\right|^2} = \sqrt{37}.$$

Упражнение 3.2. *Определить угол между векторами* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$, *если известно, что* $\left|\overrightarrow{a}\right| = 2,\ \left|\overrightarrow{b}\right| = 1,\ \left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)^2 + \left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)^2 = 17$.

Используем определение и свойства скалярного произведения.

$$\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)^2 + \left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)^2 = 5\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\right) - 8\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) + 5\left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}\right) =$$
$$5\left|\overrightarrow{a}\right|^2 - 8\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\omega + 5\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = 25 - 16\cos\omega = 17,$$
$$\cos\omega = \frac{1}{2},\quad \omega = \frac{\pi}{3}.$$

Упражнение 3.3. *Пусть* $\overrightarrow{a} = (3,\ -2,\ -5),\ \overrightarrow{b} = (1,\ -3,\ 4)$. *Найти: 1)* $\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)$, *2)* $\left(\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b},\ 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right)$, *3)* $pr_{\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)}\left(4\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)$.

1) По формуле (3.5) получаем

$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 6 - 20 = -11.$$

2) По формулам (2.1), (2.2) найдем координаты векторов $\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$ и $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} = (3,\ -2,\ -5) - 3(1,\ -3,\ 4) = (0,\ 7,\ -17),$$

$$3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=3(3,\ -2,\ -5)+2(1,\ -3,\ 4)=(11,\ -12,\ -7).$$

Далее, по формуле (3.5) получаем

$$\left(\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b},\ 3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)=(0\ \ 7\ \ -17)\begin{pmatrix}11\\-12\\-7\end{pmatrix}=-84+119=35.$$

3) Аналогично п.2):

$$\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=(3,\ -2,\ -5)+2(1,\ -3,\ 4)=(5,\ -8,\ 3),$$
$$4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=4(3,\ -2,\ -5)-(1,\ -3,\ 4)=(11,\ -5,\ -24).$$
$$\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b},\ 4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=(5\ \ -8\ \ 3)\begin{pmatrix}11\\-5\\-24\end{pmatrix}=55+40-72=23.$$

Далее, по формуле (3.2)

$$\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b},4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=\left|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right|\cdot pr_{\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)}\left(4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right),$$
$$\left|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right|=7\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad pr_{\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)}\left(4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=\frac{23}{7\sqrt{2}}=\frac{23\sqrt{2}}{14}.$$

Упражнение 3.4. *Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах* $\overrightarrow{a}=(2,1,0)$ *и* $\overrightarrow{b}=(0,-1,1)$.

По определению операций сложения и вычитания векторов (см. рис. 1.4 и 1.5 п. 1.1):

$$\overrightarrow{d}_1=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(2,0,1),\quad \overrightarrow{d}_2=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(2,2,-1).$$

Далее, по формулам (3.3), (3.7)

$$\cos\omega=\frac{\left(\overrightarrow{d}_1,\ \overrightarrow{d}_2\right)}{\left|\overrightarrow{d}_1\right|\cdot\left|\overrightarrow{d}_2\right|}=\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Поскольку $\cos\omega>0$, то $\omega=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ — острый угол между диагоналями параллелограмма.

Упражнение 3.5. *Даны вершины треугольника* $A(6,3,-2)$, $B(6,2,-3)$, $C(7,1,-3)$. *Найти величину внешнего угла при вершине* B.

Искомый угол — это угол между векторами $\overrightarrow{BA}=(0,1,1)$ и $\overrightarrow{CB}=(-1,1,0)$ (см. рис. 3.15), обозначим его через β.

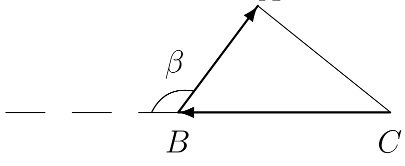


Рис. 3.15

Тогда по формулам (3.3), (3.7), получаем:

$$\cos\beta = \frac{\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}\right)}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Упражнение 3.6. *Даны координаты вершин треугольника* $A(1,\,1,\,2)$, $B(1,\,6,\,3)$ *и* $C(4,\,5,\,2)$. *Найти координаты проекции точки* B *на сторону* AC.

Пусть $B'(x,\,y,\,z)$ — проекция точки B на сторону AC (см. рис. 3.16).

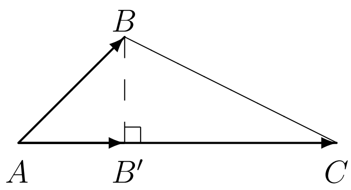


Рис. 3.16

Тогда по формуле (3.2)

$$\left|\overrightarrow{AB'}\right| = pr_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Имеем

$$\overrightarrow{AB} = (0,\,5,\,1),\ \overrightarrow{AC} = (3,\,4,\,0),$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 5, \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 20, \quad \left|\overrightarrow{AB'}\right| = 4.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}.$$

Запишем полученное равенство в координатном виде:

$$\begin{pmatrix} x & - & 1 \\ y & - & 1 \\ z & - & 2 \end{pmatrix} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17/5 \\ y = 21/5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Значит,

$$B' = (17/5,\,21/5,\,2).$$

Упражнение 3.7.
Упростить выражение $\left[2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{c} - \vec{a}\right] + \left[\vec{b} + \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b}\right]$.

Воспользуемся определением и алгебраическими свойствами векторного произведения:

$$\left[2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{c} - \vec{a}\right] + \left[\vec{b} + \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b}\right] =$$
$$\left(2\left[\vec{a},\,\vec{c}\right] - 2\left[\vec{a},\,\vec{a}\right] + \left[\vec{b},\,\vec{c}\right] - \left[\vec{b},\,\vec{a}\right]\right) +$$
$$\left(\left[\vec{b},\,\vec{a}\right] + \left[\vec{b},\,\vec{b}\right] + \left[\vec{c},\,\vec{a}\right] + \left[\vec{c},\,\vec{b}\right]\right) =$$
$$2\left[\vec{a},\,\vec{c}\right] + \left[\vec{b},\,\vec{c}\right] - \left[\vec{a},\,\vec{c}\right] - \left[\vec{b},\,\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\,\vec{c}\right],$$

т.к. $\left[\vec{a},\,\vec{a}\right] = \left[\vec{b},\,\vec{b}\right] = \vec{0}$, $\left[\vec{c},\,\vec{a}\right] = -\left[\vec{a},\,\vec{c}\right]$, $\left[\vec{c},\,\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\,\vec{c}\right]$.

Упражнение 3.8.
Дано: $\left|\overrightarrow{a}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 3$, $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. *Найти* $\left|\left[2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right]\right|$.

Так же, как в предыдущей задаче, упростим выражение:

$$\left[2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right] = 6\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}\right] - 3\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right] + 4\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] - 2\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}\right] = 3\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] + 4\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = 7\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right].$$

Далее, по определению векторного произведения получаем:

$$\left|\left[2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right]\right| = 7\left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right| = 7\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 21\sqrt{3}.$$

Упражнение 3.9. *Какому условию должны удовлетворять векторы* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$, *чтобы векторы* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ *и* $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ *были коллинеарны?*

По свойству векторного произведения

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \parallel \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \;\Leftrightarrow\; \left[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{0}.$$

Далее,

$$\left[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right] = -2\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{0} \;\Leftrightarrow\; \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{0} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}.$$

Значит, векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ должны быть коллинеарны.

Замечание. Задачу можно было решить, просто воспользовавшись определением операций сложения и вычитания векторов (см. рис. 1.4 и 1.5 п. 1.1).

Упражнение 3.10. *Пусть* $\overrightarrow{a} = (2, -1, 3)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 2, 0)$. *Найти* 1) $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$, 2) $\left[2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}\right]$.

1) По формуле (3.13) имеем:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} = -6\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}.$$

2) Найдем координаты векторов $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$:

$$2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = 2(2, -1, 3) + (-1, 2, 0) = (3, 0, 6),$$
$$\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} = (2, -1, 3) - 3(-1, 2, 0) = (5, -7, 3).$$

Далее,

$$\left[2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-3\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & 6\\ 5 & -7 & 3\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}0 & 6\\ -7 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 6\\ 5 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & -7\end{vmatrix}\vec{k}=42\vec{i}+21\vec{j}-21\vec{k}.$$

Упражнение 3.11. *Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}=(2,\,1,\,0)$ *и* $\vec{b}=(0,\,-1,\,1)$.

Вычислим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}.$$

Далее, по свойству 4 векторного произведения:

$$S_{\text{параллелограмма}}=\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=3.$$

Упражнение 3.12. *Найти площадь треугольника, построенного на векторах* $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ *и* $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, *если* $\left|\vec{p}\right|=4$, $\left|\vec{q}\right|=3$, $\left(\widehat{\vec{p},\ \vec{q}}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.

По свойствам векторного произведения:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]=\left[3\vec{p}+2\vec{q},\,2\vec{p}-\vec{q}\right]=-7\left[\vec{p},\ \vec{q}\right];$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right|=\frac{7}{2}\left|\left[\vec{p},\ \vec{q}\right]\right|=\frac{7}{2}\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\sin\frac{3\pi}{4}=21\sqrt{2}.$$

Упражнение 3.13. *Даны вершины треугольника* $A(3,2,-3)$, $B(5,1,-1)$, $C(1,-2,1)$. *Найти* 1) *площадь треугольника* ABC, 2) *длину высоты* BD, *опущенной из точки* B *на сторону* AC.

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}=(2,\,-1,\,2)$ и $\overrightarrow{AC}=(-2,\,-4,\,4)$:

$$\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ -2 & -4 & 4\end{vmatrix}=4\vec{i}-12\vec{j}-10\vec{k}.$$

Далее,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-12)^2+(-10)^2}=\frac{\sqrt{260}}{2}=\sqrt{65}.$$

Для того, чтобы найти длину высоты BD, используем формулу площади треугольника $S=\dfrac{a\cdot h_a}{2}$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{|AC|\cdot|BD|}{2},$$

$$|BD|=\frac{2S_{\triangle ABC}}{|AC|}=\frac{2\sqrt{65}}{6}=\frac{\sqrt{65}}{3}.$$

Упражнение 3.14. *Векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *образуют левую тройку, взаимно перпендикулярны и* $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$. *Найти* $\langle \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \rangle$.

Воспользуемся свойствами смешанного произведения. Так как $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — левая тройка, то

$$\left\langle \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right\rangle = -V,$$

где V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Далее, поскольку данные векторы взаимно перпендикулярны, то объем параллелепипеда равен

$$V = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| = 24.$$

Значит, $\left\langle \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right\rangle = -24$.

Упражнение 3.15. *Компланарны ли векторы* $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ *и* $\vec{c} = \vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$*?*

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\langle \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Упражнение 3.16. *Даны вершины тетраэдра* $A(3,\ 2,\ -3)$, $B(5,\ 1,\ -1)$, $C(1,\ -2,\ 1)$, $D(2,\ 0,\ 1)$. *Найти* 1) *объем тетраэдра,* 2) *длину высоты, опущенной из точки* D *на грань* ABC.

1) Рассмотрим три вектора, исходящие из одной вершины тетраэдра (см. рис. 3.17). Например,

$$\overrightarrow{DA} = (1,\ 2,\ -4),$$

$$\overrightarrow{DB} = (3,\ 1,\ -2),$$

$$\overrightarrow{DC} = (-1,\ -2,\ 0).$$

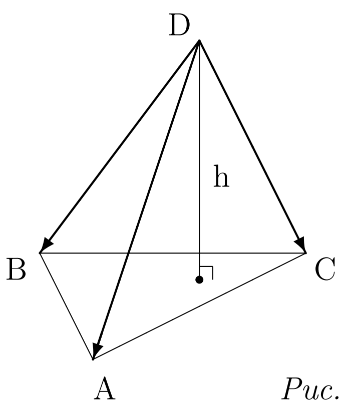


Рис. 3.17

Найдем их смешанное произведение:

$$\left\langle \overrightarrow{DA}\,\overrightarrow{DB}\,\overrightarrow{DC} \right\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 20.$$

По свойствам смешанного произведения

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6}\left|\left\langle \overrightarrow{DA}\,\overrightarrow{DB}\,\overrightarrow{DC}\right\rangle\right| = \frac{10}{3}\,.$$

2) Для нахождения высоты тетраэдра используем формулу объема $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$. Отсюда получаем:

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot h, \quad S_{\triangle ABC} = \sqrt{65} \text{ (см. упражнение 13)},$$

$$h = \frac{3V}{S_{\triangle ABC}} = \frac{10}{\sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{65}}{13}\,.$$

3.12. Задачи для самостоятельного решения

3.1. Дано: $\left|\overrightarrow{a}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$, $\left(\widehat{\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$. Найти: 1) $\left(4\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b},\ 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$, 2) $\left(3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)^2$, 3) $\left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right|$.

3.2. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}$, если известно, что $\left|\overrightarrow{p}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{q}\right| = 3$, $\left(\widehat{\overrightarrow{p},\ \overrightarrow{q}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

3.3. Дано: $\left|\overrightarrow{a}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}$ будут перпендикулярны.

3.4. Определить угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если известно, что $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)^2 + \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)^2 = 35$ и $\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 1$.

3.5. Определить угол, образованный единичными векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если известно, что векторы $\overrightarrow{p} = 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ перпендикулярны.

3.6. Пусть $\overrightarrow{a} = (-2,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{b} = (3,\ -2,\ 6)$. Найти 1) угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, 2) $pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$, 3) $pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$, 4) $\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)^2$, 5) $pr_{\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)}\left(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)$.

3.7. Обозначив через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ стороны ромба, выходящие из общей вершины, докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

3.8. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(1,\ -3,\ 7)$, $B(-2,\ -3,\ 3)$, $C(5,\ -3,\ 4)$.

3.9. Даны вершины треугольника $A(-1,\ -2,\ 4)$, $B(-4,\ -2,\ 0)$, $C(3,\ -2,\ 1)$. Найти величину его внешнего угла при вершине B.

3.10. В треугольнике с вершинами $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(-1,\ 2,\ 3)$ и $C(1,\ 3,\ 4)$ проведена высота AH. Выяснить, принадлежит ли точка H стороне BC, или ее продолжению.

3.11. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-1,\ 4,\ 9)$, $B(3,\ -6,\ 10)$, $C(10,\ -4,\ 2)$ и $D(6,\ 6,\ 1)$ — квадрат.

3.12. Даны вершины четырехугольника $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(4,\ 1,\ 9)$, $C(4,\ -2,\ 2)$, $D(6,\ 4,\ 3)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

3.13. Проверить, что точки $A(3,\ -2,\ 4)$, $B(-2,\ 1,\ 8)$, $C(-8,\ 7,\ 5)$, $D(2,\ 1,\ -3)$ служат вершинами трапеции. Найти длины ее параллельных сторон и угол при вершине C.

3.14. Найти угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если заданы три его вершины $A(-1,\ 3,\ 4)$, $B(2,\ 4,\ 0)$ и $C(-6,\ 5,\ -2)$.

3.15. Найти координаты вектора $\vec{x}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (3,\ -2,\ 1)$ и удовлетворяющего условию $\left(\vec{x},\ \vec{a}\right) = -7$.

3.16. Даны вершины треугольника $A(-1,\ -2,\ 4)$, $B(-4,\ -1,\ 2)$, $C(-5,\ 6,\ -4)$, BD — его высота. Найти координаты точки D.

3.17. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

3.18. Упростить выражение: 1) $\left[\vec{i},\ \vec{j} + \vec{k}\right] - \left[\vec{j},\ \vec{i} + \vec{k}\right] + \left[\vec{k},\ \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right]$, 2) $\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},\ \vec{c}\right] + \left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},\ \vec{b}\right] + \left[\vec{b} - \vec{c},\ \vec{a}\right]$.

3.19. Доказать, что $\left[\vec{a} - \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b}\right] = 2\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$. Выяснить геометрический смысл этого тождества.

3.20. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ связаны условием $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Доказать, что $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \left[\vec{b},\ \vec{c}\right] = \left[\vec{c},\ \vec{a}\right]$. Каков геометрический смысл этого результата?

3.21. Доказать компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, зная, что $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] + \left[\vec{b},\ \vec{c}\right] + \left[\vec{c},\ \vec{a}\right] = \vec{0}$.

3.22. Дано: $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. Найти $\left|\left[4\vec{a} + 3\vec{b},\ 3\vec{a} - 2\vec{b}\right]\right|$.

3.23. Известно, что $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$, $\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$.

3.24. Известно, что $\left|\overrightarrow{a}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 1$, $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ и $4\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$.

3.25. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$ и $2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$, где $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — единичные векторы и $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

3.26. Дано: $\overrightarrow{a} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (5, -6, 2)$. Найти: 1) $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$, 2) $\left[3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right]$.

3.27. Даны координаты вершин треугольника $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(-1, 2, 3)$. Вычислить: 1) площадь треугольника, 2) длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

3.28. Найти вектор $\overrightarrow{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, образует с ортом $\overrightarrow{j}$ острый угол и имеет длину $\left|\overrightarrow{x}\right| = 10\sqrt{2}$.

3.29. Вектор $\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right]$ называется *двойным векторным произведением* заданных векторов. Доказать, что справедливо равенство

$$\left[\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right] = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c}.$$

3.30. Доказать тождество

$$\left\langle \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}\right)\left(4\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 5\overrightarrow{c}\right)\right\rangle = 0.$$

3.31. Доказать, что $\left|\left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right\rangle\right| \le \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \left|\overrightarrow{c}\right|$. В каком случае имеет место равенство?

3.32. Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ образуют правую тройку, $\left|\overrightarrow{a}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{c}\right| = 4$ и $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$. Вычислить $\left\langle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right\rangle$.

3.33. Дано: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Вычислить: 1) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 2) объем тетраэдра $OABC$.

3.34. Даны вершины тетраэдра $O(-1, 1, 1)$, $A(5, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$, $C(1, 2, 4)$. Найти: 1) объем тетраэдра $OABC$, 2) длину высоты, опущенной из точки O на грань ABC.

3.35. Компланарны ли векторы
1) $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = -10\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$,
2) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$?

3.36. При каком значении λ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будут компланарны?
1) $\vec{a} = (1,\ 2,\ \lambda)$, $\vec{b} = (4,\ 5,\ 2)$, $\vec{c} = (7,\ 8,\ 3)$,
2) $\vec{a} = (2,\ 5,\ 7)$, $\vec{b} = (0,\ 3,\ 4)$, $\vec{c} = (-5,\ \lambda,\ -1)$.

3.37. Проверить, лежат ли точки $A(3,\ 2,\ -2)$, $B(-3,\ 3,\ 1)$, $C(6,\ -5,\ 3)$, $D(0,\ 2,\ 0)$ в одной плоскости.

3.38. Доказать, что при любых векторах $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы $\left[\vec{a}\ \vec{p}\right]$, $\left[\vec{a}\ \vec{q}\right]$, $\left[\vec{a}\ \vec{r}\right]$ компланарны.

3.13. Ответы к задачам для самостоятельного решения

3.1. 1) 81, 2) 67, 3) $\sqrt{19}$.

3.2. $\sqrt{139}$, $\sqrt{103}$.

3.3. $\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$.

3.4. $\dfrac{3\pi}{4}$.

3.5. $\dfrac{2\pi}{3}$.

3.6. 1) $\arccos\dfrac{4}{21}$, 2) $\dfrac{4}{3}$, 3) $\dfrac{4}{7}$, 4) 50, 5) $-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

3.8. $|AB| = |AC| = 5$, $|BC| = 5\sqrt{2}$, $\angle A = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle B = \angle C = \dfrac{\pi}{4}$.

3.9. $\dfrac{3\pi}{4}$.

3.10. Точка H принадлежит продолжению стороны BC, т.к. угол при вершине B — тупой.

3.13. $|AB| = 5\sqrt{2}$, $|CD| = 10\sqrt{2}$, $\angle C = \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

3.14. $\arccos\dfrac{43}{25\sqrt{13}}$.

3.15. $\vec{x} = \left(-\dfrac{3}{2},\ 1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

3.16. $D(-2,\ 0,\ 2)$.

3.17. $\arccos\dfrac{4}{5}$.

3.18. 1) $-2\vec{i} + 2\vec{k}$, 2) $2\left[\vec{a},\ \vec{c}\right]$.

3.22. $51\sqrt{2}$.

3.23. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

3.24. $5\sqrt{2}$.

3.25. $4\sqrt{3}$.

3.26. 1) $(10,\ 8,\ -1)$, 2) $(40,\ 32,\ -4)$.

3.27. $S = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$, $h = \sqrt{10}$.

3.28. $\overrightarrow{x} = (-6,\ 10,\ 8)$.

3.32. $12\sqrt{3}$.

3.33. 35, $\dfrac{35}{6}$.

3.34. $V = 12$, $h = 2\sqrt{3}$.

3.35. 1) да, 2) нет.

3.36. 1) $\lambda = 1$, 2) $\lambda = -1/8$.

3.37. Точки лежат в одной плоскости.

Список литературы

[1] Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968.

[2] Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М. : МГУ, 1998.

[3] Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. Том I. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[4] Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976.

[5] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре — М.: Физматлит, 2004.

[6] Болгов В.А., Демидович Б.П. и др. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч. I. Линейная алгебра и основы математического анализа. — М.: Физматлит, 1981.