Лекция 8

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Если существуют частные производные первого порядка $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то они являются функциями независимых переменных x и y. Они могут также иметь частные производные. Например,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}; \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

$:= f''_{xx};$

$:= f''_{xy};$

Определение 8.1. Производные, определенные формулами (8.1), называются *частными производными второго порядка*.

Аналогично, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ и так далее.

Определение 8.2. Частная производная (по любой из независимых переменных) от частной производной порядка $m-1$, $m = 1, 2, \ldots$ называется *частными производными порядка* m. Частная производная, полученная дифференцированием по различным переменным, называется *смешанной* частной производной. Частная производная, полученная дифференцированием только по одной переменной, называется *чистой* частной производной.

∂x ∂y

Аналогичным образом определяются частные производные высших порядков для функций n переменных.

Пример 1. Пусть $u = f(x, y, z)$,

$$f(x, y, z) = \cos(x^2 + y) + z^2 - x - y + 1.$$

Найти $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0,0)}$, $\left.\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\right|_{(0,0,0)}$, $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0,0)}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := -\cos(x^2+y)\cdot 2x$

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x^2 + y) - 1. \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(0,0,0)} =$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial x}(-\sin(x^2 + y) - 1)\right|_{(0,0,0)} = \left.-2x\cos(x^2 + y)\right|_{(0,0,0)} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(2z) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\Big|_{(0,0,0)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)\Big|_{(0,0,0)} = \frac{\partial}{\partial x}(0)\Big|_{(0,0,0)} = 0.$$

$z = f(x,y)$; $f(x,y) = 2x^2y^2 + x^3 + y^3 + xy$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(0,0,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(-\sin(x^2+y)-1)\right|_{(0,0,0)} = \left.-\cos(x^2+y)\right|_{(0,0,0)} = -1.$$

Вопрос. Когда $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$?

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 \cdot 2x + 3x^2 + y$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$\exists \xi \in (a,b)$

$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Теорема 8.1. Пусть функция $f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем f_{xy} и f_{yx} непрерывны в этой точке. Тогда

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 2y + 3y^2 + x$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x\,2y + 1 = \boxed{8xy + 1}$

По теореме Лагранжа получаем

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, \xi_1)\Delta y - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_1)\Delta y = \tag{8.2}$$

$= \Delta y\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, \xi_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, \xi_1)\right]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y\,2x + 1 = \boxed{8xy + 1}$

Далее

$$\boxed{\Phi(\Delta x, \Delta y) = \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\zeta_1, \xi_1)\Delta x,}$$

где $\zeta_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, $\xi_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$.

С другой стороны,

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] -$$
$$- [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_2, y_0 + \Delta y)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_2, y_0)\Delta x. \tag{8.3}$$

$= \Delta x\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_2, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_2, y_0)\right]$

По аналогии, получаем

$$\boxed{\Phi(\Delta x, \Delta y) = \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\zeta_2, \xi_2)\Delta y,}$$

где $\zeta_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, $\xi_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$.

Так как равны левые части (8.2) и (8.3), то должны быть равны и их правые части, то есть

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\zeta_2, \xi_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\zeta_1, \xi_1).$$

ζ_1, ζ_2; x_0, $x_0 + \Delta x$, x

$\Delta y = y - y_0$

$\Delta x = x - x_0$

$x = x_0 + \Delta x$

$y = y_0 + \Delta y$

Учитывая непрерывность смешанных производных в точке (x_0, y_0), получаем

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

□

y_0, ξ_1, ξ_2, $y_0 + \Delta y$, y

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные на некотором открытом плоском множестве G, то есть $G \subset \mathbb{R}^2$.

Тогда $dz = \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy}$. Найдем d^2z. Имеем

$d(dx) = d^2x$

$g(x) = x$

$h(y) = y$

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{d^2x}_{=0}} + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{d^2y}_{=0}} =$$

$z = k(x)$

$d^2z = k''(x)\,dx^2$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\right)dy =$$

$$\boxed{= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.}$$

$d^2g = 0$

$dx^2 = dx \cdot dx = (dx)^2$

Аналогично, $d^3z = d(d^2z)$ при непрерывности частных производных третьего порядка и выше, и так далее. Справедлива формула

$z = f(x, y)$

$$d^m z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}dx^{m-k}dy^k, \tag{8.4}$$

$C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$, $0! = 1$. $m = 2$: $d^2z = \left(dx\dfrac{\partial}{\partial x} + dy\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) =$

которую символически записывают в следующем виде:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$d^m z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)} f(x, y).$$

$= \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$

Докажем (8.4) по индукции. При $m = 1$ имеем

$C_1^0 = \dfrac{1!}{0!1!} = 1$

$$dz = C_1^0\frac{\partial f}{\partial x}dx + C_1^1\frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

$C_1^1 = \dfrac{1!}{1!0!} = 1$

что верно.

Пусть (8.4) справедлива при некотором m. Покажем, что она справедлива при

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$d^3z=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$

$m+1$. Имеем

$$d^{m+1}z = d(d^m z) = d\left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}dx^{m-k}dy^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left[\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k}dx^{m+1-k}dy^k + \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m-k}\partial y^{k+1}}dx^{m-k}dy^{k+1}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k}dx^{m+1-k}dy^k + \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m-p}\partial y^{p+1}}dx^{m-p}dy^{p+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k}dx^{m+1-k}dy^k + \sum_{\substack{k=1\\(p\to k-1)}}^{m+1} C_m^{k-1} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k}dx^{m+1-k}dy^k =$$

$k=p+1$, $p=k-1$

$$= \underbrace{C_m^0}_{=C_{m+1}^0} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}dx^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \overbrace{(C_m^k + C_m^{k-1})}^{C_{m+1}^k} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k}dx^{m+1-k}dy^k + \overbrace{C_m^m}^{C_{m+1}^{m+1}} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}}dy^{m+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k}dx^{m+1-k}dy^k,$$

так как $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$.

$C_m^k + C_m^{k-1} = \frac{m!}{k!(m-k)!}+\frac{m!}{(k-1)!(m+1-k)!} = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m+1-k}\right) =$

Пример 2. Пусть $z = f(x,y)$. Найти d^3z. Имеем

$$d^3z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(x,y) =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

$= \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\,\frac{m+1}{k(m+1-k)} = \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} = C_{m+1}^k$