Индивидуальное домашнее задание по «Стохастическому анализу».

1. Задан случайный процесс $\xi(t)$. Найдите: $M_\xi(t), D_\xi(t), Cov_\xi(t_1,t_2)$.

1) $\xi(t) = a\eta t + b(c\eta^2 + dt),\ \ t > 0$, где η – случайная величина с плотностью распределения
$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (d_1; d_2) \\ Ax, & x \in (d_1; d_2) \end{cases}$$
2) $\xi(t) = at + be^{-ct\eta - dt},\ t > 0$, где η имеет экспоненциальное распределение с параметром λ
3) $\xi(t) = at + b\eta \sin t(c\pi + d\mu)\,, t \in R$, где η и μ – независимые случайные величины, $\eta \sim N(m,\sigma)$, μ имеет равномерное распределение на $[c_1,\ c_2]$.

2. Цепь Маркова задана матрицей переходных вероятностей P и начальным распределением $\vec{p}(0)$

1) Классифицируйте каждое состояние, укажите классы эргодичности и найдите канонический вид матрицы переходных вероятностей, нарисуйте граф по матрице переходных вероятностей.
2) Найдите фундаментальную матрицу N и матрицу D.
3) Пусть Θ – время пребывания в множестве несущественных состояний. Найдите $M\Theta$ и $D\Theta$.
4) Найдите вероятности перехода в поглощающие состояния и вероятности перехода к состояния эргодических классов.
5) Найдите вероятность того, что цепь Маркова покинет множество несущественных состояний на первом, втором и третьем шаге.

3. Цепь Маркова задана матрицей P вероятностей переходов и вектором начального распределения вероятностей $\vec{p}(0)$. Пусть $\tau_0 = 0$, τ_i– момент i-го изменения состояния цепи Маркова, $i \geq 1$.

1) Вычислите матрицы вероятностей переходов за 2 и 3 шага и векторы вероятностей состояний после 1, 2, 3 шагов.
2) Определите, является ли эта цепь Маркова эргодической, и, если это так, найдите предельное распределение этой цепи.
3) Найдите вероятность того, что, исходя из состояния i, цепь достигнет состояние j на первом, втором, третьем шаге.
4) Найдите вероятность того, что, исходя из состояния i, цепь впервые достигнет состояние j на первом, втором, третьем шаге.
5) Найдите вероятность того, что цепь Маркова в моменты $\tau_0, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ будет находиться в состояниях k_0, k_1, k_3, k_4, k_5

4. Марковский процесс $\{\eta(t), t \geq 0\}$ задан матрицей интенсивностей переходов А переходов А и вектором начального распределения $\vec{p}(0)$.

1) Составьте и решите систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей $p_i(t)$
2) Найдите предельные вероятности состояний Марковского процесса.

5. Марковский процесс $\{\eta(t), t \geq 0\}$ задан матрицей интенсивностей переходов А и вектором начального распределения $\vec{p}(0)$. Пусть $\tau_0 = 0$, τ_i– момент i-го изменения состояния марковского процесса, , $i \geq 1$.

1) Найдите стационарное распределение марковского процесса
2) Запишите матрицу переходных вероятностей по вложенной цепи Маркова, найдите стационарное распределение по вложенной цепи Маркова.
3) Найдите вероятность того, что, исходя из состояния i, цепь достигнет состояние j на первом, втором, третьем шаге.
4) Найдите вероятность того, что, исходя из состояния i, цепь впервые достигнет состояние j на первом, втором, третьем шаге.
5) Найдите вероятность того, что цепь Маркова в моменты $\tau_0, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ будет находиться в состояниях k_0, k_1, k_3, k_4, k_5

6. 1) Найдите функцию восстановлений и плотность восстановления, если заданы плотности распределения длительности бесперебойной работы, определяющие простой процесс восстановления $N(t)$,
$p_\xi(x) = \begin{cases} Ae^{-\lambda_1 x} + Be^{-\lambda_2 x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ и $p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

2) Найдите плотность распределения длительностей безотказной работы, если функция восстановления для простого процесса восстановления имеет вид $H(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Lambda} t - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Lambda^2}\left(1 - e^{-\Lambda t}\right)$, где $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2$..

Распределение баллов

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
3 балла	2,5 балла	2,5 балла	3 балла	2 балла	2 балла

№ варианта	№ задачи	Данные
12	**1.**	$a = \frac{5}{3}, b = \frac{5}{4}, c = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{4}, d_1 = \frac{5}{4}, d_2 = \frac{8}{3}$
		$a = \frac{7}{2}, b = -\frac{5}{7}, c = \frac{3}{2}, d = -\frac{3}{2}, \lambda = \frac{6}{5}$
		$a = -\frac{3}{4}, b = \frac{5}{3}, c = -\frac{1}{2}, d = \frac{3}{2}, \quad m = -\frac{2}{5}, \sigma = \frac{1}{3}, \quad c_1 = -\frac{2\pi}{3}, c_2 = \frac{\pi}{3}$
	2.	$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$
	3.	$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0.1 \end{pmatrix} \quad \vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,7 \end{pmatrix}$ $i = 1, j = 3, \quad k_0 = 2, k_1 = 3, k_2 = 1, k_4 = 2, k_5 = 3$
	4.	Матрица интенсивностей Марковского процесса равна $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Начальное состояние процесса - состояние 2
	5.	$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \ \vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix},$ $i = 1, j = 3, \quad k_0 = 1, k_1 = 4, k_2 = 3, k_4 = 2, k_5 = 1$
	6.	$\mathrm{A} = \frac{2}{3}, \mathrm{B} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{5}{3}, \lambda_2 = \frac{5}{6}, \quad \lambda = \frac{5}{4}.$
		$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \frac{7}{4}$