Далее, пусть
$$r_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x). \tag{4.39}$$
Из существования $f^{(n)}(x_0)$ следует, что функция $f(x)$ определена и имеет производные до порядка $n-1$ включительно в $\delta$-окрестности точки $x_0$. Обозначим $\varphi(x) = r_n(x)$, $\psi(x) = (x - x_0)^n$. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4.1, если заменить номер $n+1$ на номер $n-1$. Используя лемму 4.1 и учитывая, что в силу (4.33) и (4.39) $r_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, получаем
$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi - x_0)}, \tag{4.40}$$
где $\xi = \xi(x)$ и
$$x_0 < \xi < x < x_0 + \delta \quad \text{или} \quad x_0 - \delta < x < \xi < x_0.$$
Пусть $x \to x_0$, тогда из неравенств (4.40) следует, что $\xi \to x_0$ и, в силу существования $f^{(n)}(x_0)$, существует
$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi - x_0} = r_n^{(n)}(x_0).$$
Отметим, что в силу (4.33) и (4.39) $r_n^{(n)}(x_0) = 0$, поэтому правая часть формулы (4.40) имеет при $x \to x_0$ предел, равный нулю. Следовательно, существует предел левой части этой формулы, также равный нулю. Это означает, что $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$.

Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 4.13.** *Пусть функция $f(x)$, определенная на интервале $(a,b)$, имеет в точке $x_0 \in (a,b)$ производные до порядка $n$ включительно. Тогда при $x \to x_0$*
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n). \tag{4.41}$$
Формула (4.41) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или локальной формулой Тейлора.

В дальнейшем многочлен $P_n(x)$ будем обозначать также $P_n(x_0, x)$.

**Определение 4.14.** Многочлен

$$P_n(x_0,x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора функции $f$ в точке $x_0$.
**Определение 4.15.** Формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0,x)$$

называется формулой Тейлора (при $x_0 = 0$ – формулой Маклорена), при этом

$$r_n(x_0,x) = f(x) - P_n(x_0,x) \qquad (4.42)$$

называется остаточным членом $n$-го порядка формулы Тейлора.

**Теорема 4.14.** *Пусть функция $f : [x_0,x] \to \mathbb{R}$ имеет непрерывные производные до порядка $n$ включительно на отрезке $[x_0,x]$ и производную $(n+1)$-го порядка на интервале $(x_0,x)$, а функция $g : [x_0,x] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[x_0,x]$, дифференцируема на интервале $(x_0,x)$ и $g' \neq 0$ на $(x_0,x)$. Тогда $\exists\, c \in (x_0,x)$ :*

$$r_n(x_0,x) = \frac{[g(x)-g(x_0)]f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!g'(c)}. \qquad (4.43)$$

*Доказательство.* На отрезке $[x_0,x]$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - P_n(t,x) \qquad (4.44)$$

от аргумента $t$. Запишем определение $F(t)$ подробнее:

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + ... + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]. \qquad (4.45)$$

Из определения функции $F(t)$ и условий теоремы видно, что $F$ непрерывна на отрезке $[x_0,x]$ и дифференцируема на интервале $(x_0,x)$, причем

$$F'(t) = -\left[f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \right.$$

$$\left. + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - ... + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Используя теорему Коши (см. § 4.7), получаем

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{F'(c)}{g'(c)}.$$

Подставляя сюда выражение для $F'(c)$ и замечая из сопоставления формул (4.42), (4.44) и (4.45), что $F(x) = 0$, $F(x_0) = r_n(x_0, x)$, получаем формулу (4.43). $\square$

**Частные случаи.**
1. Пусть $g(t) = x - t$. Тогда $g(x) = 0$, $g(x_0) = x - x_0$, $g'(t) = -1$. Из (4.43) получаем форму Коши остаточного члена

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0)}{n!}.$$

2. Пусть $g(t) = (x-t)^{n+1}$. Тогда

$$g(x) = 0,\ g(x_0) = (x-x_0)^{n+1},\ g'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

Из (4.43) получаем форму Лагранжа остаточного члена

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Теорема 4.15.** *Пусть функция $f$ имеет производные до порядка $n$ включительно в точке $x_0$, и пусть*

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + o((x-x_0)^n),\ \ x \to x_0, \tag{4.46}$$

*где $\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ – некоторый многочлен степени, меньшей или равной $n$. Тогда*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ \ k = 0, 1, 2, ..., n,$$

*то есть $\mathcal{P}_n(x)$ является многочленом Тейлора.*

*Доказательство.* Из формул (4.41) и (4.46) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \;\; x \to x_0,$$

откуда, перейдя к пределу при $x \to x_0$, получим $a_0 = f(x_0)$. Отбрасывая слева и справа этот член, сокращая оставшиеся в обеих частях выражения на множитель $x - x_0$ $(x \neq x_0)$ и замечая, что

$$o((x - x_0)^n) = \varepsilon(x)(x - x_0)^n,$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, следовательно, при $x \to x_0$ имеет место равенство

$$\frac{o((x - x_0)^n)}{x - x_0} = \varepsilon(x)(x - x_0)^{n-1} = o((x - x_0)^{n-1}), \; x \neq x_0, \; n = 1, 2, ...,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1}), \;\; x \to x_0.$$

Снова переходя к пределу при $x \to x_0$, находим $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая этот процесс, получаем

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \;\; k = 0, 1, 2, ..., n.$$

$\square$

Отметим, что многочлен Тейлора является единственным многочленом, который может приближать данную функцию с точностью до $o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$ (а поэтому и с более высокой точностью $o((x - x_0)^m)$, $m > n$, поскольку при $m > n$ имеет место соотношение $o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$. Все остальные многочлены той же или меньшей степени «хуже приближают» функцию $f$ при $x \to x_0$. Именно в этом смысле и говорят, что многочлен Тейлора является многочленом наилучшего приближения рассматриваемой функции в окрестности данной точки $x_0$ при $x \to x_0$.

## § 4.9 Экстремумы функции. Точки перегиба, асимптоты

**Теорема 4.16** (необходимые условия экстремума). *Пусть $x_0$ является точкой экстремума функции $f$, определенной в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда $f'(x_0) = 0$ или не существует.*

*Доказательство.* Действительно, если $x_0$ является точкой экстремума функции $f$, то найдется такая окрестность $U(x_0, \delta)$, что значение функции $f$ в точке $x_0$ будет наибольшим или наименьшим в этой окрестности. Поэтому если в точке $x_0$ существует производная, то она, согласно теореме Ферма (см. § 4.7), равна нулю. □

Отметим, что условие $f'(x_0) = 0$ не является (для дифференцируемой при $x = x_0$ функции) достаточным условием наличия экстремума, как это показывает пример функции $y = x^3$, которая при $x = 0$ имеет производную, равную нулю, но для которой $x = 0$ не является точкой экстремума.

**Определение 4.16.** Точка $x_0$ называется критической точкой функции $f : X \to \mathbb{R}$, если $f'(x_0) = 0$ или не существует.

**Теорема 4.17** (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция $f$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$, кроме, быть может, самой точки $x_0$, в которой она, однако, является непрерывной. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через $x_0$ (это означает, что существует такое $\delta > 0$, что значения производной $f'$ имеют один и тот же знак всюду в $(x_0-\delta, x_0)$ и противоположный знак для всех $x \in (x_0, x_0+\delta)$), то $x_0$ является точкой строгого локального экстремума. При этом если при $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x_0 < x < x_0 + \delta$ – неравенство $f'(x) < 0$, то $x_0$ является точкой строгого локального максимума, а если при $x_0-\delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x_0 < x < x_0+\delta$ – неравенство $f'(x) > 0$, то $x_0$ является точкой строгого локального минимума.*

*Доказательство.* Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, где $x$ принадлежит окрестности точки $x_0$, указанной в условиях теоремы. По теореме Лагранжа (см. § 4.7) имеем

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где $\xi$ принадлежит интервалу с концами $x_0$ и $x$.

Если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$ и $f'(\xi) > 0$, так как $x < \xi < x_0$. Если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$ и $f'(\xi) < 0$, так как в этом случае $x_0 < \xi < x$. Таким образом, всегда $\Delta f < 0$, то есть точка $x_0$ является точкой строгого локального максимума. Аналогично рассматривается второй случай. $\square$

Отметим, что если функция имеет всюду в некоторой проколотой окрестности данной точки $x_0$ производную одного и того же знака, а в самой точке $x_0$ производная либо равна нулю, либо не существует, однако сама функция непрерывна, то есть если производная непрерывной функции «не меняет знак» при переходе через точку $x_0$, то эта точка заведомо не является точкой локального экстремума рассматриваемой функции (более того, функция в указанной окрестности возрастает или убывает в зависимости от того, положительна или отрицательна производная в точках $x \neq x_0$).

**Теорема 4.18** (признак монотонности функции)**.** *Для того чтобы дифференцируемая на интервале* $(a, b)$ *функция* $f$ *не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках* $f'(x) \geq 0 \ \ (f'(x) \leq 0)$.

*Если всюду на* $(a, b)$ $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$*, то* $f$ *возрастает (убывает) на этом промежутке.*

*Доказательство.* Необходимость. Если функция $f$ не убывает (не возрастает) на интервале $(a, b)$, то для любого $x_0 \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$, $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$ имеем $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$), поэтому $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$ (соответственно $\Delta y \leq 0$).

Следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ $\Big($соответственно $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0\Big)$. Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x_0) \geq 0$ (соответственно $f'(x_0) \leq 0$).

Достаточность. Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда по теореме Лагранжа (см. § 4.7) имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < \xi < x_2$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то при $f'(x) \geq 0$ на $(a, b)$ (откуда следует, что, в частности, $f'(\xi) \geq 0$) будем иметь $f(x_2) \geq f(x_1)$, то есть функция $f$ не убывает. Аналогично при $f'(x) \leq 0$ на $(a, b)$ имеем $f'(\xi) \leq 0$ и, следовательно, $f(x_2) \leq f(x_1)$, то есть функция не возрастает.

Если $f'(x) > 0$ на $(a, b)$, то $f'(\xi) > 0$ и поэтому $f(x_2) > f(x_1)$, то есть функция $f$ возрастает. Если же $f'(x) < 0$ на $(a, b)$, то $f'(\xi) < 0$, следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$, то есть функция $f$ убывает. $\square$

Отметим, что условия $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ не являются необходимыми для возрастания (убывания) дифференцируемой на интервале функции, что показывают примеры функций $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = -x^3$. Первая из них возрастает, а вторая убывает на всей числовой оси, но при $x = 0$ их производные обращаются в нуль.

Пусть функция $f$ определена на интервале $(a, b)$ и пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$, имеет вид

$$y = \frac{f(x_2)(x_1 - x) + f(x_1)(x - x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $l(x)$; тогда оно кратко запишется в виде $y = l(x)$.

**Определение 4.17.** Функция $f$ называется выпуклой вверх (вниз) на интервале $(a, b)$, если, каковы бы ни были точки $x_1$ и $x_2$, $a < x_1 < x_2 < b$, для любой точки $x_0$ интервала $(a, b)$ выполняется неравенство $l(x_0) \leq f(x_0)$ $(l(x_0) \geq f(x_0))$.

Если в определении 4.17 $l(x_0) < f(x_0)$ $(l(x_0) > f(x_0))$, то функция $f$ называется строго выпуклой вверх (вниз).

**Теорема 4.19** (достаточное условие строгой выпуклости)**.** *Пусть функция $f$ дважды дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда, если $f'' < 0$ на $(a, b)$, то функция $f$ строго выпукла вверх, а если $f'' > 0$ на $(a, b)$, то функция $f$ строго выпукла вниз на этом интервале.*

*Доказательство.* Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x_1 - x) + f(x_1)(x - x_2)}{x_1 - x_2} - f(x)\frac{(x_1 - x) + (x - x_2)}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x_1 - x) - [f(x) - f(x_1)](x - x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Применяя теорему Лагранжа (см. § 4.7), получаем

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x_1 - x) - f'(\xi)(x - x_1)(x - x_2)}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{[f'(\xi) - f'(\eta)](x - x_1)(x_2 - x)}{x_1 - x_2},$$

где $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.