Лекция 3

Метрические пространства
Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ и их свойства

Определение 3.1. Непустое множество X называется *метрическим пространством*, если задана функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\rho(x,y) \geqslant 0,\ \forall\, x,y \in X, \\ 2)\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ 3)\rho(x,y) = \rho(y,x),\ \forall\, x,y \in X \\ 4)\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) \text{ (неравенство треугольника)}\ \forall\, x,y,z \in X \end{array}\right\} \text{аксиомы метрики}$$

$\rho(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z| = \rho(x,y)+\rho(y,z)$

$|x-y| = |(-1)(y-x)| = |y-x|$

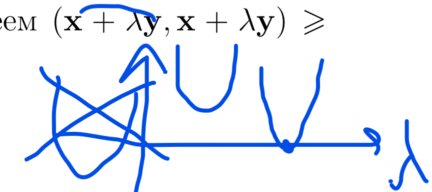
Указанная функция называется *метрикой* (расстоянием в X).

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}$. Положим $\rho(x,y) = |x-y|$. Условия 1) - 4), очевидно, выполнены $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ – метрическое пространство.

Теорема 3.1. $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство Коши-Буняковского

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leqslant \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}\sqrt{(\mathbf{y},\mathbf{y})}. \tag{3.1}$$

Доказательство. По свойству скалярного произведения имеем $(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}, \mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}) \geqslant 0,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, то есть $(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \lambda(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \lambda^2(\mathbf{y},\mathbf{y}) \geq 0$. Тогда



$$\underbrace{\lambda^2(\mathbf{y},\mathbf{y})}_{>0} + 2\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{x}) \geqslant 0,$$

то есть имеем квадратный трехчлен относительно λ, значение которого больше нуля.

Дискриминант данного трехчлена равен

$$D = \cancel{4}(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 - \cancel{4}(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}) \leqslant 0,$$

то есть $(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})$. $\Rightarrow |(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, получаем (3.1). □

Определение 3.2. Векторное пространство X называется *нормированным*, если задана функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

1. $\|x\| \geqslant 0,\ \forall\, x \in X$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in X$;
4. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,\ \forall\, x,y \in X$.

$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2+(\lambda x_2)^2+\ldots+(\lambda x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)} = |\lambda|\|x\|.$

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$

$0 = (0, 0, \ldots, 0)$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Такая функция называется *нормой*.

Положим $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.2. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$, наделенное функцией (3.2), является нормированным пространством.

Доказательство. Условия 1) - 3) являются очевидными. Докажем условие 4). Имеем

$(x, y) = (y, x)$ $\quad \le \|x\| \|y\|$

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) =$$
$$= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

То есть $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. □

Положим $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \geq 0 \tag{3.3}$$

$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$

Теорема 3.3. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$, наделенное функцией (3.3), является метрическим пространством.

Доказательство. Условия 1) - 3) из определения метрического пространства являются очевидными. Докажем 4). Имеем

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{z})\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \rho(y, x)$

□

Определение 3.3. *Открытым шаром* радиуса $\delta > 0$ с центром в точке $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ называется множество $U(\mathbf{a}; \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \rho(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < \delta\}$. $U(\mathbf{a}; \delta)$ называется δ-*окрестностью* точки $\mathbf{a}$.

Определение 3.4. Точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если $\exists\, U(\mathbf{x}; \delta) \subset X$.

Определение 3.5. Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым* в $\mathbb{R}^n$, если каждая точка $\mathbf{x} \in G$ является внутренней точкой множества G.

Определение 3.6. Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus F$ является открытым в $\mathbb{R}^n$.

Пример 2.

1. (a, b) – открытое множество в $\mathbb{R}^1$;
2. $[a, b]$ – замкнутое множество в $\mathbb{R}^1$;
3. $\mathbb{R}^n$ – открытое множество.

$|x - a| \le \delta \Rightarrow -\delta \le x - a \le \delta \Rightarrow$

$x - a = \delta$

$x - a = -\delta$

$a - \delta \le x \le a - \delta$

$\rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \le \delta$

$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \le \delta^2$

$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2 \leqslant \delta^2$

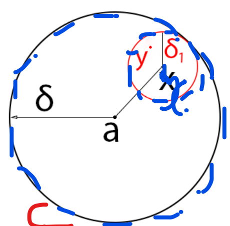
Теорема 3.4. δ-окрестность точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством.

Доказательство. Положим $\delta_1 = \delta - \rho(\mathbf{a}, \mathbf{x})$. Покажем, что $U(\mathbf{x}; \delta_1) \subset U(\mathbf{a}; \delta)$. Так как

$x \in U(a;\delta)$

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \leqslant \boxed{\rho(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})} < \rho(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + \delta_1 = \cancel{\rho(\mathbf{a}, \mathbf{x})} + \delta - \cancel{\rho(\mathbf{a}, \mathbf{x})} = \delta,$$

то есть $\mathbf{y} \in U(\mathbf{a}; \delta)$. То есть $U(\mathbf{x}; \delta_1) \subset U(\mathbf{a}; \delta)$. □



Определение 3.7. Множество $\overline{U}(\mathbf{a}; \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \rho(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leqslant \delta\}$ называется *замкнутым шаром* радиуса δ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$.

Это множество является замкнутым. Его дополнение в $\mathbb{R}^n$ является множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \rho(\mathbf{a}, \mathbf{x}) > \delta\}$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ (доказательство аналогично доказательству теормы 3.4).

Определение 3.8. Множество $S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \rho(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = r\}$ называется *сферой* радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$.

Определение 3.9. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если в любой δ-окрестности точки $\mathbf{a}$ существует хотя бы одна точка $\mathbf{x} \in X : \ \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Определение 3.10. Любое открытое множество из $\mathbb{R}^n$, содержащее точку $\mathbf{a}$, называется *окрестностью* точки $\mathbf{a}$.

Теорема 3.5. Если $\{G_\alpha, \alpha \in L\}$ – семейство открытых в $\mathbb{R}^n$ множеств, то $\bigcup\limits_{\alpha \in L} G_\alpha$ является открытым в $\mathbb{R}^n$ множеством.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \bigcup\limits_{\alpha \in L} G_\alpha$. Тогда $\exists \ \alpha_0 : \ \mathbf{x} \in G_{\alpha_0}$. Так как G_{α_0} – открытое множество, то $\exists \ U(\mathbf{x}, \delta) \subset G_{\alpha_0} \Rightarrow U(\mathbf{x}, \delta) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in L} G_\alpha \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in L} G_\alpha$ является открытым множеством. □

Теорема 3.6. $G_i, \ i = 1, \ldots, n$ – открытые в $\mathbb{R}^n$ множества. Тогда их пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ является открытым в $\mathbb{R}^n$ множеством.

$\delta_k = \frac{1}{k}, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \Rightarrow \mathbf{x} \in G_i, \ \forall i = 1, \ldots, n$. Так как G_i – открытые множества, то $\exists \ U(\mathbf{x}, \delta_i) \subset G_i, \ i = 1, \ldots, n$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Тогда $U(\mathbf{x}, \delta) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$, то есть $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ является открытым множеством. □

Теорема 3.7. Пусть $\{\mathcal{F}_\alpha, \alpha \in L\}$ – семейство замкнутых множеств. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in L} \mathcal{F}_\alpha$ является замкнутым множеством.

$\mathbb{R}^n$ F

Доказательство. Покажем, что $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in L} \mathcal{F}_\alpha$ является открытым множеством. Имеем

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{F}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in L} \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}_\alpha}_{\text{откр. в } \mathbb{R}^n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по теореме 3.5. $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in L} \mathcal{F}_\alpha$ – открытое множество. □

Теорема 3.8. Пусть $\{\mathcal{F}_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ – множество замкнутых множеств. Тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Покажем, что $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Имеем

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}_i}_{\text{откр. в } \mathbb{R}^n}$$

– открытое множество по теореме 3.6. □

Определение 3.11. Объединение множества X и всех его предельных точек называется *замыканием* множества X и обозначается $\overline{X}$.

> ~~**Упражнение.** Доказать, что, если X – замкнутое множество, то $\overline{X} = X$.~~

Теорема 3.9. Если X – замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, то оно содержит все свои предельные точки.

Доказательство. Пусть точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ является предельной точкой множества X, то есть в любой окрестности точки $\mathbf{x}$ существует хотя бы одна точка $\mathbf{y} \in X : \ y \neq \cancel{X}$ x.

Допустим, что $x \notin X$, тогда $x \in \mathbb{R}^n \backslash X$. Поскольку $\mathbb{R}^n \backslash X$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то $\exists \, U(\mathbf{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n \backslash X$. Учитывая, что $X \cap (\mathbb{R}^n \backslash X) = \varnothing$, заключаем, что $U(\mathbf{x}, \delta) \cap X = \varnothing \Rightarrow x$ не является предельной точкой множества $X \Rightarrow$ противоречие, возникает в силу предположения, что $x \notin X$. □

Компакты в $\mathbb{R}^n$

Определение 3.12. Множество $\{S_\alpha\}, \ \alpha \in L$ открытых множеств в $\mathbb{R}^n$ называется *открытым покрытием* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall x \in X \ \exists \ S_{\alpha_0} : \ x \in S_{\alpha_0}$.

Определение 3.13. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактным* множеством или *компактом* в $\mathbb{R}^n$, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

> **Пример 3.** Отрезок $[a, b]$ является компактным множеством в $\mathbb{R}^1$.