Лекция 20

Суммы и интегралы Дарбу
Критерий Дарбу

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$, P - некоторое разбиение этого отрезка. Обозначим $M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$. Составим суммы

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \text{—нижняя сумма Дарбу,}$$
$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \text{ — верхняя сумма Дарбу.}$$

Поскольку $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$, то $\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$, то

$$s(f,P) \leqslant \sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi})) \leqslant S(f,P). \tag{20.1}$$

Теорема 20.1. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - ограниченная функция. Тогда

$$S(f,P) = \sup_{\xi}\sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi})), \tag{20.2}$$
$$s(f,P) = \inf_{\xi}\sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi})). \tag{20.3}$$

Доказательство. Поскольку в силу (20.1) $\forall(P,\boldsymbol{\xi})$ имеем $\sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi})) \leqslant S(f,P)$, то остается показать, что $\forall\varepsilon>0,\ \exists\xi:\ \sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi})) > S(f,P)-\varepsilon$, или

$$S(f,P) < \sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi}))+\varepsilon. \tag{20.4}$$

Так как $M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, то $\forall\varepsilon>0,\ \exists\xi_i\in\Delta_i:\ M_i < f(\xi_i)+\dfrac{\varepsilon}{b-a},\ i=1,\dots,n.$

Отсюда находим

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i = \sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi}))+\varepsilon \Rightarrow (20.4),$$

а, следовательно, и (20.2).

Неравенство (20.3) доказывается аналогично. □

Определение 20.1.

$$\underline{J} = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) \text{ — нижний интеграл Дарбу,}$$
$$\overline{J} = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) \text{ — верхний интеграл Дарбу.}$$

Теорема 20.2. (Дарбу). Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - ограниченная функция. Тогда $f\in R[a,b] \Leftrightarrow \exists\ \underline{J}$ и $\overline{J}$. При этом $\underline{J}=\overline{J}=\int\limits_a^b f(x)dx (=J)$.

Доказательство. Пусть $f \in R[a,b]$, то есть $\exists J$. Тогда из (20.4) $\Rightarrow \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) \leqslant J$, но из (20.1) получаем $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi})) = J \leqslant \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$. То есть $\overline{J} = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = J$. Аналогично доказываем, что $\underline{J} = J$.

Пусть $\exists$ $\underline{J}$ и $\overline{J}$, и $\underline{J} = \overline{J}$. Тогда из (20.1) получаем

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) \leqslant \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi})) \leqslant \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P),$$

то есть $\underline{J} \leqslant J \leqslant \overline{J}$, то есть $\exists J = \underline{J} = \overline{J}$ (по теореме о трех последовательностях). $\square$

Теорема 20.3. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - ограниченная функция. Тогда $f \in R[a,b] \Leftrightarrow$

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i = 0. \tag{20.5}$$

Доказательство. Достаточность доказана на предыдущей лекции (смотри теорему 19.03). Докажем необходимость. Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_1,x_2\in\Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)|\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\Delta_i} f(x)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in\Delta_i} f(x)\Delta x_i = S(f,P) - s(f,P).$$

Из теоремы 20.2 имеем $S(f,P) - s(f,P) \to 0$ при $\lambda(P) \to 0$, то есть получаем (20.5). $\square$

Критерий Лебега интегрируемости функции

Определение 20.2. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *множеством Лебеговой меры нуль*, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более чем счетное его покрытие $\{I_n\}$ такое, что $\sum_n |I_n| < \varepsilon$, где $|I_n|$ - длина интервала I_n.

Определение 20.3. Говорят, что некоторое свойство *выполняется на множестве почти всюду*, если множество, на котором оно не выполняется имеет меру нуль.

Примеры.

1. Точка является множеством меры нуль.

   Напомним, что если I - промежуток с концами a и b, то $|I| = b - a$, $a < b$. Тогда для точки $x_0 \in \mathbb{R}$ выбираем по заданному произвольному числу ε любой интервал $I \ni x_0 : \ |I| < \varepsilon$.

2. Всякое конечное или счетное множество является множеством лебеговой меры нуль.

   Пусть $X = \{x_n\}$ - конечное или счетное множество. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Система интервалов $\left(x_n - \dfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ покрывает множество X, а сумма их длин меньше ε:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Теорема 20.4. (Лебег). Для того, чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва было множеством лебеговой меры нуль.

Свойства интеграла Римана

$\int_a^b f(x)dx = \lim \sigma(f;(P,\xi)) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Теорема 20.5.

$$\int_a^b dx = b - a.$$

Доказательство. Подынтегральная функция $f(x) = 1$, $\forall x \in [a, b]$, поэтому для любого разбиения P с отмеченными точками $\boldsymbol{\xi}$ $\sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$. То есть $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) = b - a$. $\square$

Теорема 20.6. Если $f \in R[a, b]$, $g \in R[a, b]$, то $(\alpha f + \beta g) \in R[a, b]$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$

Доказательство. Для произвольного разбиения P с отмеченными точками $\boldsymbol{\xi}$ имеем

$x_0 = a,\ x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, b = x_n$

$$\sigma(\alpha f + \beta g; (P, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\sigma(f; (P, \boldsymbol{\xi})) + \beta\sigma(g; (P, \boldsymbol{\xi})).$$

Поскольку $f, g \in R[a, b]$, то $\exists$ предел правой части последнего равенства. Тогда $\exists$ предел и левой части и при этом

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(\alpha f + \beta g; (P, \boldsymbol{\xi})) = \boxed{\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.}$$

$\square$

$a = x_0,\ c,\ d,\ b = x_n$

Теорема 20.7. Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c, d]: \ [c, d] \subset [a, b]$.

Доказательство. Если функция f ограничена на $[a, b]$, то она ограничена и на $[c, d]$. Каково бы ни было разбиение P_1 отрезка $[c, d]$ мелкости $\lambda(P_1)$, его всегда можно продолжить в разбиение P отрезка $[a, b]$ той же мелкости, то есть $\lambda(P_1) = \lambda(P)$.

Положим $m_i^* = \inf\limits_{x\in\Delta_i^*} f(x)$, $M_i^* = \sup\limits_{x\in\Delta_i^*} f(x)$, где Δ_i^* - отрезок разбиения P_1, и, как обычно, $m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, Δ_i - отрезок разбиения P.

Каждое слагаемое суммы $\sum_{i=1}^{n^*}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^*$ является и слагаемым суммы $\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i$. Кроме того, все слагаемые обеих сумм неотрицательны.

Далее

$= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

$$0 \leqslant S(f, P_1) - s(f, P_1) = \sum_{i=1}^{n^*}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = S(f, P) - s(f, P) \tag{20.6}$$

$\to 0$

$\overline{\int} = \underline{\int}$

Если f интегрируема на $[a,b]$, то $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$, то есть $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(S(f,P) - s(f,P)) = 0$.

Поскольку $\lambda(P) = \lambda(P_1)$, то из (20.6) следует, что $\lim\limits_{\lambda(P_1)\to 0} S(f,P_1) = \lim\limits_{\lambda(P_1)\to 0} s(f,P_1)$, то есть $f \in R[c,d]$. □

Св-во аддитивности.

Теорема 20.8. Если $f \in R[a,b]$ и $a < c < b$, то справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx. \tag{20.7}$$

Доказательство. Существование интегралов в правой части (20.7) доказано в теореме 20.7. Для доказательства (20.7) воспользуемся равенствами

$$\sigma(f;(P,\boldsymbol{\xi})) = \sigma^{'}(f;(P,\boldsymbol{\xi})) + \sigma^{''}(f;(P,\boldsymbol{\xi})),$$

где $\sigma^{'}$ и $\sigma^{''}$ - интегральные суммы функции f на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно, P - произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками $\boldsymbol{\xi}$, причем c является точкой разбиения P.

Если $\lambda(P) \to 0$, то $\exists$ пределы σ, $\sigma^{'}$ и $\sigma^{''}$ и справедливо (20.7). □