Отчет по лабораторной работе №6

Задача об эпидемии

Маслова Анастасия Сергеевна

Содержание

1 Цель работы

Рассмотреть и построить простейшую модель эпидемии SIR.

2 Задание

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове (N=11 200) в момент начала эпидемии (t=0) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) I(0)=230, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни R(0)=45. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени S(0)=N-I(0)- R(0).

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае: 1) если $I(0) \leq I*$ 2) если $I(0) > I*$

3 Теоретическое введение

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через S(t). Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их I(t). А третья группа, обозначающаяся через R(t) – это здоровые особи с иммунитетом к болезни ([1]).

До того, как число заболевших не превышает критического значения I*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда I(t) > I*,* тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей. Таким образом, скорость изменения числа S(t) меняется по следующему закону (рис. ??)

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, \text{ если } I(\mathrm{t}) > \mathrm{I}^* \\ 0, \text{ если } I(\mathrm{t}) \le \mathrm{I}^* \end{cases}$$

Закон изменения S(t)

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е. см рис. ??

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, \text{ если } I(\mathrm{t}) > \mathrm{I}^* \\ -\beta I, \text{ если } I(\mathrm{t}) \le \mathrm{I}^* \end{cases}$$

Закон изменения I(t)

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни) изменяется по закону на рис. ??.

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Закон изменения R(t)

Постоянные пропорциональности α,β, - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни R(0)=0, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей I(0) и S(0) соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: 1) если $I(0) \le I * 2)$ если $I(0) > I *$

4 Выполнение лабораторной работы

Реализация на языке программирования Julia выглядит у меня следующим образом:

```
#вариант 26

using Plots
using DifferentialEquations

N = 11200 # общая численность популяции
tspan = (0.0,200.0)
I = 230 # количество инфицированных особей в начальный момент времени
R = 45 #  количество здоровых особей с иммунитетом в начальный момент времени
S = N - I - R # количество восприимчивых к болезни, но пока здоровых особей в
начальный момент времени
u0 = [S, I, R]
p = [0.01, 0.02] # коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно

function sir!(du,u,p,t) # при I(0)>I*
    a,b = p
    S, I, R = u
    du[1] = -a*u[1] #dS
    du[2] = a*u[1] - b*u[2] #dI
    du[3] = b*u[2] #dR
end

function sir1!(du,u,p,t) # при I(0)<I*
    a,b = p
    du[1] = 0
    du[2] = - b*u[2]
    du[3] = b*u[2]
end

prob1 = ODEProblem(sir!,u0,tspan,p)
sol1 = solve(prob1, Tsit5())

prob2 = ODEProblem(sir1!,u0,tspan,p)
sol2 = solve(prob2, Tsit5())

plot(sol2, title="SIR model", label = ["S" "I" "R"])
#savefig("C:\\Users\\anast\\work\\study\\2023-2024\\Математическое
моделирование\\mathmod\\labs\\lab6\\report\\image\\lessthanjulia.png")
```

В результате я получила два графика: в случае, когда $I(0) \leq I*$ (рис. ??), и в случае, когда если $I(0) > I*$ (рис. ??).

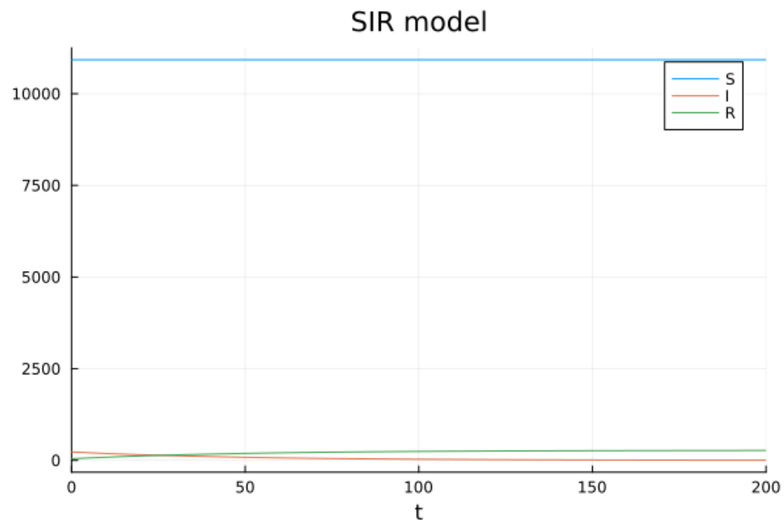

График для первого случая

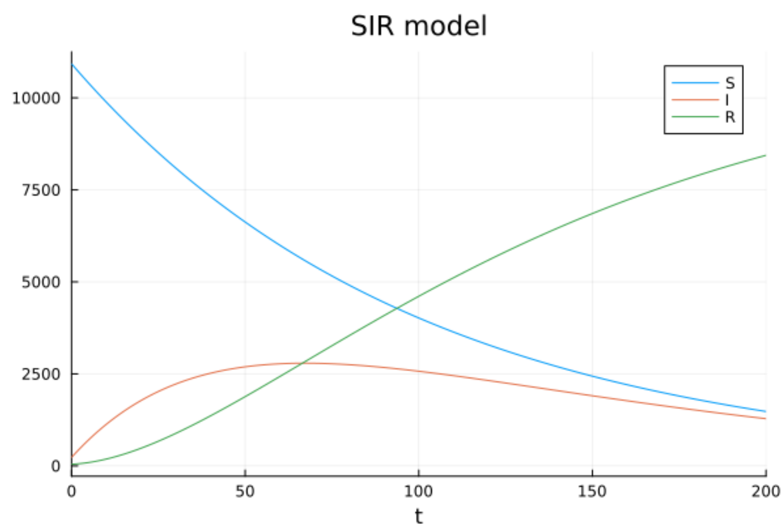

График для второго случая

Ту же модель я реализовала в среде OpenModelica. Код для первого случая ($I(0) \leq I*$) представлен ниже:

```
model lab6

parameter Real N = 11200;
parameter Real a = 0.01;
parameter Real b = 0.02;
Real I(start=230);
Real R(start=45);
Real S(start=11200-230-45);

equation

der(S) = 0;
der(I) = -b*I;
der(R) = b*I;
```

```
end lab6;
```

В результате я получила такой график (рис. ??):

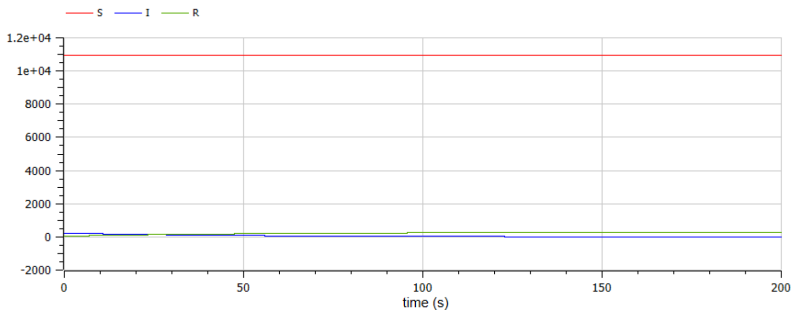

График для первого случая

Ниже представлен код для второго случая ($I(0) > I*$):

```
model lab6

parameter Real N = 11200;
parameter Real a = 0.01;
parameter Real b = 0.02;
Real I(start=230);
Real R(start=45);
Real S(start=11200-230-45);

equation

der(S) = -a*S;
der(I) = a*S - b*I;
der(R) = b*I;

end lab6;
```

В результате я получила вот такой график (рис. ??):

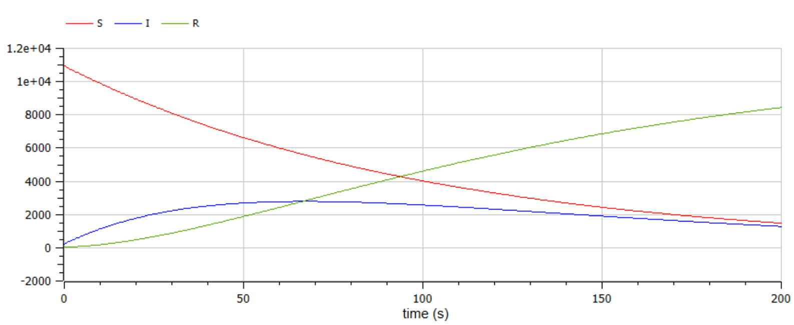

График для второго случая

Можно заметить, что графики, построенные с помощью языка Julia и с помощью OpenModelica идентичны.

5 Выводы

В ходе лабораторной работы я познакомилась с простейшей моделью эпидемии SIR и построила ее, используя Julia и OpenModelica.

Список литературы

1. Лабораторная работа №6 [Электронный ресурс]. People’s Friendship University of Russia, 2024. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/2290005/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%205.pdf.