Обобщение инвариантов формальных групп

1 Обозначения и определения

1.1 Локальные поля и связанные с ними кольца

Обозначение 1.1. В качестве формальных переменных будут использоваться x, t, $X = (X_i)$, $Y = (Y_i)$, $Z = (Z_i)$.

Обозначение 1.2. Пусть A - коммутативное кольцо с единицей.

Обозначение 1.3. Пусть K - локальное поле, т.е. полное дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов[1].

Примеры:

1. $K = \mathbb{Q}_p$.

2. $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$, где ζ_{p^n} - примитивный корень из единицы степени p^n.

3. $K = \mathbb{F}_{p^n}((x))$.

Обозначение 1.4. Пусть v_K - нормализованное нормирование поля K, т.е. такое дискретное нормирование на K, что $v_K(K^\times) = \mathbb{Z}$[2].

---

[1] [FV01], I.4.6.
[2] [FV01], I.3.1.

Примеры:

1. Пусть $K = \mathbb{Q}_p$. Тогда $v_K = \mathrm{ord}_p$. Более явно, для любого $\alpha \in \mathbb{Q}_p^\times$ имеет место $v_K(\alpha) = v$, где $\alpha = p^v \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$.

2. Пусть $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Тогда для любого $\alpha \in K$ имеет место

$$v_K(\alpha) = \mathrm{ord}_p \left(N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha) \right).$$

Здесь $N_{K/\mathbb{Q}_p}$ - норма расширения $K/\mathbb{Q}_p$[3].

3. Пусть $K = \mathbb{F}_{p^n}((x))$. Тогда для любого $\alpha = \sum_{i=v}^{\infty} a_i x^i \in K$, имеет место $v_K(\alpha) = v$.

Обозначение 1.5. Пусть $\mathfrak{O}_K$ - кольцо целых поля K, т.е.

$$\mathfrak{O}_K = \{\alpha \in K | v_K(\alpha) \geq 0\}^4.$$

Это локальное кольцо с максимальным идеалом

$$\mathfrak{M} = \{\alpha \in K | v_K(\alpha) > 0\}.$$

Примеры:

1. Пусть $K = \mathbb{Q}_p$. Тогда $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}_p$.

2. Пусть $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Тогда $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]$.

3. Пусть $K = \mathbb{F}_{p^n}((x))$. Тогда $\mathfrak{O}_K = \mathbb{F}_{p^n}[[x]]$.

Обозначение 1.6. Пусть $\overline{K}$ - поле вычетов для K, т.е. $\overline{K} = \mathfrak{O}_K/\mathfrak{M}$[5].

Примеры:

1. Пусть $K = \mathbb{Q}_p$. Тогда $\overline{K} = \mathbb{F}_p$.

---

[3] [Gou20], 6.3.
[4] [FV01], I.2.2.
[5] [FV01], I.2.2.

2. Пусть $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Так как $K/\mathbb{Q}_p$ - вполне разветвлённое расширение[6], то $1 = f(K/\mathbb{Q}_p) = [\overline{K} : \mathbb{F}_p]$, поэтому $\overline{K} = \mathbb{F}_p$.

3. Пусть $K = \mathbb{F}_{p^n}((x))$. Тогда $\overline{K} = \mathbb{F}_{p^n}$.

Обозначение 1.7. Пусть π - униформизующий элемент (локальный параметр) поля K, т.е. такой элемент поля K, для которого $\mathfrak{M} = \pi\mathfrak{O}_K$.

Примеры:

1. Пусть $K = \mathbb{Q}_p$. Тогда $\pi = p$.

2. Пусть $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Тогда $\pi = \zeta_{p^n} - 1$. В этом случае, $v_K(\pi) = 1$, и если представить $\alpha \in K^\times$ в виде $\alpha = \pi^v \varepsilon$, где $\varepsilon \in \mathfrak{O}_K^\times$[7], то $v_K(\alpha) = v$.

3. Пусть $K = \mathbb{F}_{p^n}((x))$. Тогда $\pi = x$.

Замечание 1.1. С этого момента мы рассматриваем случай, когда $\operatorname{char}(K) = 0$, $\operatorname{char}\left(\overline{K}\right) = p > 0$, поэтому $K = \mathbb{F}_{p^n}((x))$ в качестве примера уже не подходит.

Обозначение 1.8. Пусть e - абсолютный индекс ветвления поля K, т.е. $e = v_K(p)$[8].

Примеры:

1. Пусть $K = \mathbb{Q}_p$. Тогда $e = 1$.

2. Пусть $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Тогда

$$e = \operatorname{ord}_p\left(N_{K/\mathbb{Q}_p}(p)\right) = \operatorname{ord}_p\left(p^{[K:\mathbb{Q}_p]}\right) = [K : \mathbb{Q}_p] = (p-1)p^{n-1}.$$

[6] [FV01], IV.1.3.
[7] [FV01], I.3.4.
[8] [FV01], I.5.7.

Обозначение 1.9. Пусть (N, σ) - σ-подполе поля K, такое, что расширение K/N вполне разветвлено. Это означает, что N - локальное поле, $\mathrm{char}\,(N) = 0$, $\mathrm{char}\,\left(\overline{N}\right) = p$, $f(K/N) = [\overline{K} : \overline{N}] = 1$, и существует $\sigma \in \mathrm{End}\,(N)$ удовлетворяющее соотношению

$$\sigma(a) - a^p \in \mathfrak{M}_N, \forall a \in \mathfrak{O}_N,$$

где $\mathfrak{O}_N$ - кольцо целых поля N, а $\mathfrak{M}_N$ - его максимальный идеал[9]. Поле (N, σ) всегда существует[10], N единственно, но σ, как правило, может быть выбрано более чем одним способом[11]. Мы будем использовать $\sigma(a) = a^p$.

Примеры:

1. Пусть $K = \mathbb{Q}_p$ или $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Тогда $N = \mathbb{Q}_p$.

Обозначение 1.10. Через $\mathfrak{A}$ будет обозначаться произвольное (не обязательно коммутативное) кольцо.

Примеры из рассматриваемых ниже случаев:

1. $\mathfrak{A} = K, \mathfrak{O}_K$.

2. $\mathfrak{A} = K[[\Delta]], \mathfrak{O}_K[[\Delta]]$.

Обозначение 1.11. Пусть $M_m(\mathfrak{A})$ - кольцо матриц над $\mathfrak{A}$ размера $m \times m$, а $M_{m\times n}(\mathfrak{A})$ - модуль матриц размера $m \times n$.

Обозначение 1.12. Пусть Δ - линейный оператор, возводящий формальные переменные в степень p, т.е.

$$\Delta\left(\sum a_i x^i\right) = \sum a_i x^{pi}, a_i \in \mathfrak{A};$$
$$\Delta\left(\sum a_{i_1\dots i_m} \prod X_j^{i_j}\right) = \sum a_{i_1\dots i_m} \prod X_j^{pi_j}, a_{i_1\dots i_m} \in \mathfrak{A}.$$

---

[9] [Бон06], 2.1.

[10] [Бон06], 2.1.1.

[11] [FV01], II.5.

Если $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{i,j} = \left(\sum_k a_{ijk}\Delta^k\right)_{i,j} \in M_m(\mathfrak{A}[[\Delta]])$, то под $\Lambda(X)$ мы будем подразумевать набор рядов

$$\Lambda(X) = \lambda = (\lambda_i)_i = \left(\sum_{j,k} a_{ijk}X_j^{p^k}\right)_i \in M_{m\times 1}(\mathfrak{A}[[X]]) = (\mathfrak{A}[[X]])^m.$$

Если же $h = (h)_i = \left(\sum_k a_{ik}\Delta^k\right)_i \in (\mathfrak{A}[[\Delta]])^m$, то под $h(x)$ будет подразумеваться набор рядов

$$h(x) = (h_i(x))_i = \left(\sum_k a_{ik}x^{p^k}\right)_i \in (\mathfrak{A}[[x]])^m.$$

Обозначение 1.13. Обозначим через $N_\sigma[[\Delta]]$ кольцо скрученных формальных степенных рядов Хонды[12], т.е. такое некоммутативное кольцо степенных рядов, что $\Delta a = \sigma(a)\Delta$ для всех $a \in N$. Пусть $\mathfrak{O}_{N,\sigma}[[\Delta]]$ - подкольцо $N_\sigma[[\Delta]]$, состоящее из рядов с коэффициентами из $\mathfrak{O}_N$.

Обозначение 1.14. Положим

$$R := \mathfrak{O}_K[[\Delta]] \otimes_{\mathfrak{O}_K} K = \mathfrak{O}_K[[\Delta]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \bigcup_{i>0} p^{-i}\mathfrak{O}_K[[\Delta]] \subset K[[\Delta]].$$

1.2 Формальные групповые законы

Определение 1.15. Набор из m формальных степенных рядов от $2m$ переменных $F \in (A[[X,Y]])^m$ ($X = (X_1, ..., X_m)$, $Y = (Y_1, ..., Y_m)$) называется *формальным групповым законом* (или *коммутативной формальной группой*) *F размерности m над A*, если выполнено

$$F(X,0) = F(0,X) = X,$$
$$F(F(X,Y),Z) = F(X,F(Y,Z)),$$
$$F(X,Y) = F(Y,X).$$

[12] Honda's twisted formal power series ring.

Кроме того, для любого закона F существует такой ряд $\iota_F(X)$, что

$$F(X, \iota_F(X)) = 0.$$

Примеры:

- $m = 1$, $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}(x, y) = x + y$.
- m - любое, $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m = (\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}(X_i, Y_i))_{i=\overline{1,m}} = (X_i + Y_i)_{i=\overline{1,m}}$.
- $m = 1$, $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}(x, y) = x + y + xy = (1 + x)(1 + y) - 1$.
- m - любое, $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}^m = (X_i + Y_i + X_iY_i)_{i=\overline{1,m}}$.
- Пусть K - числовое локальное поле (т.е. $|\overline{K}| = q < \infty$), $A = \mathfrak{O}_K$, $m = 1$. Пусть $\gamma(x) = \sum\limits_{i>0} a_i x^i \in A[[x]]$, $a_1 \in A^\times$. Положим

  $$f_\gamma(x) = \sum_{i \geq 0} \pi^{-i} \gamma(x^{q^i}).$$

  Тогда

  $$F_\gamma(x, y) = f_\gamma^{-1}(f_\gamma(x) + f_\gamma(y))$$

  - *формальный групповой закон Любина-Тэйта.* Это единственный формальный групповой закон над A, для которого

  $$F_\gamma(x, y) \equiv x + y \mod \deg 2,$$
  $$e_\gamma(F_\gamma(x, y)) = F_\gamma(e_\gamma(x), e_\gamma(y)),$$

  где $e_\gamma(x) = f_\gamma^{-1}(\pi f_\gamma(x)) \in A[[x]]$[13].

- Пусть K - числовое локальное поле, $q = |\overline{K}|$, $A = \mathfrak{O}_K$, m - любое. Пусть $\Gamma \in M_m(\mathfrak{M})$ таково, что $\pi^{-1}\Gamma \in \mathrm{GL}_m(A)$. Положим

  $$f_\Gamma(X) = \sum_{i \geq 0} \pi^{-i} (\pi^{-1}\Gamma)^{-i} X^{q^i},$$

[13] Подробности можно найти, например, в [Haz12], 8.

где $X^{q^i} = \begin{pmatrix} X_1^{q^i} \\ \vdots \\ X_m^{q^i} \end{pmatrix}$. Тогда

$$F_\Gamma(X, Y) = f_\Gamma^{-1}(f_\Gamma(X) + f_\Gamma(Y))$$

- *m-мерный формальный групповой закон Любина-Тэйта.* Это единственная формальный групповой закон над A, для которого

$$e_\Gamma(F_\Gamma(X, Y)) = F_\Gamma(e_\Gamma(X), e_\Gamma(Y)),$$

где $e_\Gamma(X) = f_\Gamma^{-1}(\Gamma f_\Gamma(X))$[14]. У этого примера есть общий частный случай с предыдущим: если рассматривать $\gamma(x) = ax$, $a \in A^\times$, то можно получить те же самые групповые законы, что и при $m = 1$ в текущем примере.

Обозначение 1.16. Пусть F - m-мерный формальный групповой закон над A. Через $\mathscr{C}(F)$ обозначим группу, элементами которой являются так называемые *кривые* - наборы из m степенных рядов $\xi(x) = (\xi_i(x))_i \in A[[x]]^m$, такие что $\xi(0) = 0$. Сложение в этой группе производится по правилу

$$\xi(x) +_F \eta(x) = F(\xi(x), \eta(x)).$$

Примеры:

- $\mathscr{C}(\hat{\mathbb{G}}_\mathrm{a}^m) = \bigoplus_{i=1}^{m} A[[x]]^+$[15].

Обозначение 1.17. Пусть F - m-мерный формальный групповой закон над A, $\xi_\mathrm{id} = (x, ..., x) \in \mathscr{C}(F)$. Для всякого целого $n > 0$ положим

$$[n]_F = \underbrace{\xi_\mathrm{id} +_F \ldots +_F \xi_\mathrm{id}}_{n \text{ слагаемых}} \in \mathscr{C}(F).$$

[14] Подробности и дальнейшие обобщения можно найти, например, в [Haz12], 13.

[15] $A[[x]]^+ = \{\xi \in A[[x]] | \xi(0) = 0\}$.

Примеры:

- $[n]_{\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m} = (nx, ..., nx) \in \mathscr{C}(\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m)$.

- $[n]_{\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}^m} = (S(x), ..., S(x)) \in \mathscr{C}(\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}^m)$, где $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{n,i}(1, ..., 1)x^i$, $\sigma_{n,i}$ - i-й элементарный симметрический многочлен от n переменных.

Определение 1.18. Пусть F - m-мерный формальный групповой закон над A. Определим операторы $\langle a \rangle$, $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{f}_n$, действующие на группе $\mathscr{C}(F)$, следующим образом:

- Для $\xi \in \mathscr{C}(F)$, $a \in A$, пусть
$$\langle a \rangle \, \xi(x) = \xi(ax).$$

- Для $\xi \in \mathscr{C}(F)$, $n \in \mathbb{N}$, пусть
$$\mathbf{V}_n\xi(x) = \xi(x^n).$$

- Для $\xi \in \mathscr{C}(F)$, $n \in \mathbb{N}$, пусть
$$\xi(t_1 x^{\frac{1}{n}}) +_F ... +_F \xi(t_n x^{\frac{1}{n}}) = \alpha(\sigma_1, ..., \sigma_n, x^{\frac{1}{n}}),$$
для некоторого ряда $\alpha \in A[t_1, ..., t_n][[x^{\frac{1}{n}}]]^m$, где $t_1, ..., t_n$ - формальные переменные, $\sigma_1, ..., \sigma_n$ - элементарные симметрические многочлены от этих переменных. Тогда $\mathbf{f}_n$ можно определить как
$$\mathbf{f}_n\xi(x) = \alpha(0, ..., 0, (-1)^{n-1}, x^{\frac{1}{n}})[16].$$

Примеры:

- $\mathbf{f}_1\xi = \xi$.

- $\mathbf{f}_n[k]_{\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m} = 0$ при $n > 0$.

[16] Подробности см. в [Haz12], 15.1.

- Пусть $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}^m$, тогда $\mathbf{f}_n \xi_{\mathrm{id}} = (-1)^{n-1} \xi_{\mathrm{id}}$ при $n > 0$.

Обозначение 1.19. Пусть F - m-мерный формальный групповой закон над A, p - простое число. Положим

$$\mathscr{C}_p(F) = \{\xi \in \mathscr{C}(F) | \mathbf{f}_q \xi(x) = 0 \text{ для всех простых } q \neq p\}.$$

Элементы группы $\mathscr{C}_p(F)$ называются *p-типическими кривыми.*

Примеры:

- $[k]_{\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m} \in \mathscr{C}_p(\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m)$.

- $\xi_{\mathrm{id}} \notin \mathscr{C}_p(\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}^m)$.

Определение 1.20. Пусть F - m-мерный формальный групповой закон над A, G - k-мерный формальный групповой закон над A. Набор из k формальных степенных рядов $f = (f_i(X))_i$, где $f_i \in A[[X_1, ..., X_m]]$, $f_i(X) \equiv 0 \mod \deg 1$, называется *гомоморфизмом из F в G*, если

$$f(F(X, Y)) = G(f(X), f(Y)).$$

Гомоморфизм f называется *изоморфизмом*, если $m = k$ и суещсвтует набор из m рядов $g = (g_i(X))_i$, такой что $(f \circ g)(X) = (g \circ f)(X) = X$. Изоморфизм f называется *строгим*, если $f(X) \equiv I_m X \mod \deg 2$, где $I_m \in M_m(A)$ - единичная матрица.

Примеры:

- Пусть $F = G$. Тогда $f(X) = X$ является изоморфизмом из F в G.

- Пусть m - любое, $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m$, $k = 1$, $G = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}$. Тогда

  $$f(X_1, ..., X_m) = X_1 + ... + X_m$$

  является гомоморфизмом из F в G.

- Пусть $m = 1$, $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}$, k - любое, $G = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^k$. Тогда

  $$f = (f_1(x), ..., f_k(x)) = (x, ..., x)$$

  является гомоморфизмом из F в G.

- Пусть A является $\mathbb{Q}$-алгеброй, $m = 1$, $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}$, $k = 1$, $G = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}$. Тогда $f(x) = \sum\limits_{i>0} \dfrac{x^i}{i!}$ является изоморфизмом из F в G.

- Пусть F_γ - групповой закон Любина-Тэйта над $A = \mathfrak{O}_K$. Для всякого $a \in A$ ряд

  $$[a]_\gamma(x) = f_\gamma^{-1}(af_\gamma(x))$$

  является эндоморфизмом формальной группового закона F_γ для всякого $a \in A$[17].

- Пусть F_Γ - m-мерный групповой закон Любина-Тэйта над $A = \mathfrak{O}_K$. Для всякой матрицы $\mathrm{B} \in M_m(A)$, коммутирующей с Γ, ряд

  $$[\mathrm{B}]_\Gamma(X) = f_\Gamma^{-1}(\mathrm{B}f_\Gamma(X))$$

  является эндоморфизмом формального группового закона F_Γ[18].

Определение 1.21. Пусть $\varphi : A \to B$ - гомоморфизм коммутативных колец с единицей,

$$F(X, Y) = \sum_{I,J} a_{IJ} X^I Y^J$$

- формальный групповой закон над A (I, J - мультииндексы). Тогда

$$\varphi_* F(X, Y) = \sum_{I,J} \varphi(a_{IJ}) X^I Y^J$$

является формальным групповым законом над B, полученным из $F(X, Y)$ путём *замены базы.*

[17] [Haz12], 8.1.5.
[18] [Haz12], 13.2.5.

Обозначение 1.22. С этого момента F будет m-мерным формальным групповым законом над $\mathfrak{O}_K$.

Обозначение 1.23. Пусть $\overline{F}$ - редукция F по модулю π, т.е. $\overline{F} = \kappa_* F$, где $\kappa : \mathfrak{O}_K \to \overline{K}$ - сюръекция $a \mapsto a \mod \pi$.

Обозначение 1.24. Обозначим через $h = h(F)$ высоту группового закона F, то есть, величину

$$h = \dim_{\overline{K}} \left(\mathscr{C}_p(\overline{F}) / [p]_{\overline{F}} \mathscr{C}_p(\overline{F}) \right),$$

если она конечна[19].

Примеры:

- $h(\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m) = \infty$.
- $h(\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}^m) = 1$.

Обозначение 1.25. Пусть λ_F - логарифм F, т.е. $\lambda_F(X)$ - строгий изоморфизм из $\iota_* F$ в $\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m$ (который существует и единственен[20]), где $\iota : \mathfrak{O}_K \to \mathfrak{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = K$ - вложение.

Примеры:

- Пусть $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m$. Тогда $\lambda_F(X) = X$.
- Пусть $F = \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}^m$. Тогда $\lambda_F(X) = (\lambda_i(X))_i$, где $\lambda_i(X) = \sum\limits_{j>0} (-1)^{j+1} \dfrac{X_i^j}{j}$.
- Пусть $F = F_\Gamma$. Тогда $\lambda_F(X) = f_\Gamma(X)$.

Определение 1.26. Формальный групповой закон F называется *криволинейным*, если λ_F имеет вид

$$\lambda_F(X) = \sum_{i>0} A_i X^i,$$

[19] Это определение взято из [Haz12], 28.2.9.

[20] [Haz12], 11.1.6.

где $A_i \in M_m(K)$, и $X^i = \begin{pmatrix} X_1^i \\ \vdots \\ X_m^i \end{pmatrix}$[21].

Определение 1.27. Пусть $\ell \in \mathbb{Z}$ - некоторое простое число (не обязательно совпадающее с $p = \operatorname{char}\left(\overline{K}\right)$). Формальный групповой закон F называется *ℓ-типическим*, если λ_F имеет вид

$$\lambda_F(X) = \sum_{i \geq 0} A_i X^{\ell^i},$$

где $A_i \in M_m(K)$, и $X^{\ell^i} = \begin{pmatrix} X_1^{\ell^i} \\ \vdots \\ X_m^{\ell^i} \end{pmatrix}$[22].

Замечание 1.2. Любой формальный групповой закон F над $\mathfrak{O}_K$ строго изоморфен некоторому p-типическому[23]. Поэтому мы будем изначально рассматривать только p-типические формальные групповые законы (такие как $\hat{\mathbb{G}}_a^m$ и F_Γ). Согласно 1.12 и 1.27, это означает, что $\lambda_F = \Lambda_F(X)$ для некоторой матрицы $\Lambda_F \in M_m(K[[\Delta]])$.

Определение 1.28. Пусть G - k-мерный формальный групповой закон над $\mathfrak{O}_K$, $\alpha : F \to G$ - гомоморфизм. Тогда существуют изоморфизмы $f : F \to F'$ и $g : G \to G'$, такие, что F' и G' криволинейные формальные групповые законы, а $\alpha' = g \circ \alpha \circ f^{-1} : F' \to G'$ имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha_1'(X) = X_1^{p^{n_1}}, \\ \ldots, \\ \alpha_r'(X) = X_r^{p^{n_r}}, \\ \alpha_s'(X) = 0, r < s \leq k, \end{gathered}$$

где $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r$ - некоторые натуральные числа[24]. Мы будем называть число $\operatorname{rank}(\alpha) = r$ *рангом* гомоморфизма α.

[21] [Haz12], 12.1.2.
[22] [Haz12], 15.2.6.
[23] [Haz12], 16.4.14.
[24] [Haz12], 28.2.6.

Определение 1.29. Пусть G - k-мерный формальный групповой закон над $\mathfrak{O}_K$, $\alpha : F \to G$ - гомоморфизм. α называется *изогенией*, если $m = k = \mathrm{rank}\,(\alpha)$.

1.3 Формальные группы

Обозначение 1.30. Обозначим через $\mathbf{Nil}_A$ категорию нильпотентных коммутативных A-алгебр[25].

Обозначение 1.31. Обозначим через $\mathbf{Mod}_A$ категорию A-модулей.
Так как любой A-модуль $M \in \mathbf{Mod}_A$ можно рассматривать как нильпотентную A-алгебру, полагая $M^2 = 0$, то $\mathbf{Mod}_A$ можно рассматривать как подкатегорию в $\mathbf{Nil}_A$.

Определение 1.32. A-алгебра B со структурным морфизмом $f : A \to B$ называется *аугментированной*, если задан гомоморфизм A-алгебр $\varepsilon : B \to A$, называемый *аугментацией*, такой, что $\varepsilon \circ f = \mathrm{id}_A$. Мы также будем пользоваться обозначением $B^+ = \mathrm{Ker}\,(\varepsilon)$.
Аугментированная A-алгебра B называется *нильпотентной*, если $B^+ \in \mathbf{Nil}_A$.

Обозначение 1.33. Обозначим через $\mathbf{Compl}_A$ категорию полных аугментированных A-алгебр. То есть, объектами $\mathbf{Compl}_A$ являются пары $(C, \{\mathfrak{c}_i\})_{i\in\mathbb{N}}$, где C - аугментированная A-алгебра; $\mathfrak{c}_1 = C^+$; $\mathfrak{c}_1 \supset \mathfrak{c}_2 \supset \mathfrak{c}_3 \supset \ldots$ - убывающая последовательность идеалов в C, причём $\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_i \in \mathbf{Nil}_A$ для любого $i \in \mathbb{N}$, и $C = \varprojlim C/\mathfrak{c}_i$.
Полагая $C = A \oplus N$, $\mathfrak{c}_1 = N$ и $\mathfrak{c}_i = 0$ при $i > 1$, мы получаем объект из $\mathbf{Compl}_A$ для любого $N \in \mathbf{Nil}_A$. Поэтому можно рассматривать $\mathbf{Nil}_A$ как подкатегорию в $\mathbf{Compl}_A$.

Обозначение 1.34. Обозначим через $\mathbf{Sets}$ категорию множеств.

Обозначение 1.35. Обозначим через $\mathbf{Ab}$ категорию абелевых групп.

[25] A-алгеброй называется кольцо B, снабженное некоторым гомоморфизмом колец $f : A \to B$ ([Лен68], глава V, §1), называемым *структурным морфизмом*. A-алгебра B нильпотентна, если существует такое $n > 0$, что $b_1 \cdot \ldots \cdot b_n = 0$ для любых $b_1, \ldots, b_n \in B$.

Определение 1.36. Пусть C - аугментированная нильпотентная A-алгебра. Она определяет функтор

$$\mathrm{Spf}\,(C) : \mathbf{Nil}_A \to \mathbf{Sets}$$

следующим образом:

$$\mathrm{Spf}\,(C) : N \mapsto \mathrm{Hom}\left(C^+, N\right),$$
$$\mathrm{Spf}\,(C) : (f : N \to M) \mapsto (g \mapsto f \circ g).$$

Функтор $\mathscr{F} : \mathbf{Nil}_A \to \mathbf{Sets}$ называется *представимым*, если он изоморфен функтору вида $\mathrm{Spf}\,(C)$ для некоторой аугментированной нильпотентной A-алгебры C.
Если же $(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_A$, то такая алгебра определяет функтор

$$\mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_i\}) : \mathbf{Nil}_A \to \mathbf{Sets}$$

как предел представимых функторов:

$$\mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_i\}) : N \mapsto \varinjlim\,(\mathrm{Spf}\,(C/\mathfrak{c}_i)\,(N))\,.$$

Функтор $\mathscr{F} : \mathbf{Nil}_A \to \mathbf{Sets}$ называется *пропредставимым*, если он изоморфен функтору вида $\mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_i\})$ для некоторой полной аугментированной A-алгебры $(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_A$. Очевидно, любой представимый функтор является также пропредставимым[26].
Пропредставимый функтор $\mathscr{F} \cong \mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_i\})$ называется *строго пропредставимы* если $\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_i$ является конечнопорождённым проективным A-модулем для каждого $i \geq 1$[27].
Соответственно, представимый функтор $\mathscr{F} \cong \mathrm{Spf}\,(C)$ называется *строго представимым*, если он является строго пропредставимым, то есть, если C^+ - конечнопорождённый проективный A-модуль.

Определение 1.37. *Формальной группой* над A называется точный функтор $\mathscr{F} : \mathbf{Nil}_A \to \mathbf{Ab}$, коммутирующий с бесконечными прямыми суммами[28].

---

[26]Если C - аугментированная нильпотентная A-алгебра, то $\mathrm{Spf}\,(C) = \mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_i\})$, где $\mathfrak{c}_1 = C^+$ и $\mathfrak{c}_i = 0$ при $i > 1$.

[27]О конечнопорождённых и проективных модулях - [Лен68], глава III.

[28]Разъяснения см. в [Zin84], 2.2.

Примеры:

- $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^m : N \mapsto (N, +_N)^m$, где $+_N$ - операция сложения в алгебре N.
- $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^m : N \mapsto (1+N, \cdot)^m$, где $1+N$ - множество формальных сумм вида $1+u$, $u \in N$, и умножение выполняется по правилу
$$(1+u)\cdot(1+v) = 1 + (u +_N v +_N u \cdot_N v),$$
где $u, v \in N$, $+_N$, $\cdot_N$ - соответствующие операции сложения и умножения в алгебре N.
- Пусть K - числовое локальное поле, $q = |\overline{K}|$, $A = \mathfrak{O}_K$, $m \in \mathbb{N}$. Зафиксируем некоторое число $h \in \mathbb{N}$, и некоторую матрицу $\Gamma \in M_m(\mathfrak{M})$, для которой $\pi^{-1}\Gamma \in \mathrm{GL}_m(A)$. Пусть $e_{\Gamma,h} \in (K[[X_1, ..., X_m]])^m$ - такой набор рядов, для которого
$$e_{\Gamma,h}(X) \equiv \Gamma X \mod \deg 2,$$
$$e_{\Gamma,h}(X) \equiv X^{q^h} \mod \pi.$$
Тогда для каждого $N \in \mathbf{Nil}_A$ мы можем построить отображение $\varepsilon_{\Gamma,h,N} : N^m \to N^m$ по правилу
$$\varepsilon_{\Gamma,h,N}(a) = e_{\Gamma,h}(a).$$
$\varepsilon_{\Gamma,h,N}$ определено корректно, так как N - нильпотентная A-алгебра. Согласно теореме 13.3.3 из [Haz12], существует единственная формальная группа $\mathscr{F}_{\Gamma,h}$, такая, что $\varepsilon_{\Gamma,h,N} : \mathscr{F}_{\Gamma,h}(N) \to \mathscr{F}_{\Gamma,h}(N)$ является отображением абелевых групп для каждого $N \in \mathbf{Nil}_A$[29]. $\mathscr{F}_{\Gamma,h}$ можно называть *m-мерной формальной группой Любина-Тэйта.*
- Для всякого $N \in \mathbf{Nil}_A$ обозначим через $\Lambda(N)$ подгруппу по умножению в $N[t]$, состоящую из многочленов вида $1 + u_1 t + ... + u_n t^n$.

[29] Отображение $\varepsilon_{\Gamma,h,N}$ переопределено корректно, поскольку $\mathscr{F}_{\Gamma,h}(N)$ и N^m совпадают как множества - это тоже следует из теоремы.

Определение 1.38. Формальная группа $\mathscr{F}$ над A называется представимой (пропредставимой / строго представимой / строго пропредставимой), если композиция $\mathscr{F}$ с забывающим функтором является представимым (пропредставимым / строго представимым / строго пропредставимым) функтором.

Примеры:

- Формальная группа $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{m}$ над произвольным A пропредставима.
- Формальная группа $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{m}$ над произвольным A пропредставима.
- Формальная группа $\mathscr{F}_{\Gamma,h}$ над $\mathfrak{O}_K$[30] строго пропредставима.

Замечание 1.3. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A. Можно считать, что функтор $\mathscr{F}$ действует на $\mathbf{Compl}_A$, полагая

$$\mathscr{F}((C, \{\mathfrak{c}_i\})) = \varprojlim \mathscr{F}(\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_i)$$

для всякого $(C, \{\mathfrak{c}_i\})_{i \in \mathbb{N}}$.

Определение 1.39. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A. Её *касательным функтором* $t_{\mathscr{F}}$ называется ограничение $\mathscr{F}$ на подкатегорию $\mathbf{Mod}_A$.

Определение 1.40. Говорят, что формальная группа $\mathscr{F}$ над A *конечномерна размерности* m, если $t_{\mathscr{F}}(A)$ - свободный конечно порождённый проективный A-модуль ранга m[31].

Обозначение 1.41. Пусть $\phi_A : \mathbf{Nil}_A \to \mathbf{Mod}_A$ - функтор, забывающий умножение, и превращающий любую A-алгебру $N \in \mathbf{Nil}_A$ в A-модуль. Это же обозначение мы сохраним для аналогичного функтора, действующего из $\mathbf{Compl}_A$ в $\mathbf{Mod}_A$.

Определение 1.42. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A. *Алгеброй Ли группы* $\mathscr{F}$ называется функтор $\mathrm{Lie}(\mathscr{F}) = t_{\mathscr{F}} \circ \phi_A$.

[30] Здесь вновь K - числовое локальное поле.

[31] См. [Лен68], глава III.

Утверждение 1.1. Формальные группы связаны с формальными групповыми законами следующим образом:

- Пусть $\mathscr{F}$ - конечномерная формальная группа над A размерности m. Пусть $\mathfrak{a} = A[[X, Y]]^+$. Тогда $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^n \in \mathbf{Nil}_A$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $+_{\mathscr{F},n}$ операцию сложения в группе $\mathscr{F}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^n) \in \mathbf{Ab}$[32], и положим

$$\left(F_1^{(n)}, ..., F_m^{(n)}\right) = (X_1, ..., X_m) +_{\mathscr{F},n} (Y_1, ..., Y_m).$$

  Если теперь для каждого i построить единственный ряд $F_i \in A[[X, Y]]$, такой, что $F_i \equiv F_i^{(n)} \mod \mathfrak{a}^n$, то мы получим формальный групповой закон $F = (F_i)_i$ размерности m над A, соответствующий формальной группе $\mathscr{F}$.

- Пусть $F = (F_i)_i$ - формальный групповой закон размерности m над A, $N \in \mathbf{Nil}_A$. Так как N нильпотентная A-алгебра, то выражению $F_i(a, b)$ можно придать очевидный смысл для любых $a, b \in N^m$, $i = 1, ..., m$, и, таким образом, мы получаем некоторый элемент из N. Полагая

$$a +_{F,N} b = (F_1(a, b), ..., F_m(a, b)),$$

  для любых $a, b \in N^m$, мы определяем таким образом сложение $+_{F,N}$ на N^m. $(N^m, +_{F,N})$ является абелевой группой, следовательно, мы получили некоторый функтор $\mathscr{F} : \mathbf{Nil}_A \to \mathbf{Ab}$. На морфизмах этот функтор действует следующим образом: если $f : N \to M$ - гомоморфизм нильпотентных A-алгебр, то

$$\mathscr{F}(f) : (a_1, ..., a_m) \mapsto (f(a_1), ..., f(a_m))$$

  для любого $(a_1, ..., a_m) \in \mathscr{F}(N)$. Функтор $\mathscr{F}$ является формальной группой над A размерности m, соответствующей формальному груповому закону F.

Примеры:

[32] Так как $\mathscr{F}$ имеет размерность m, то $\mathscr{F}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^n) = (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^n)^m$ как множества, см. [Zin84], 2.32.

- Формальному групповому закону $\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m$ соответствует формальная группа $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^m$.
- Формальному групповому закону $\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}^m$ соответствует формальная группа $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^m$.
- Формальному групповому закону Любина-Тэйта F_Γ соответствует формальная группа Любина-Тэйта $\mathscr{F}_{\Gamma,1}$.

Обозначение 1.43. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A. Через $M_{\mathscr{F}}$ обозначим группу $\mathscr{F}(A[[x]]^+)$[33] и будем называть её элементы *кривыми*.

Примеры:

- $M_{\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^m} = \mathscr{C}(\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a}}^m) = \bigoplus_{i=1}^{m} A[[x]]^+.$

Определение 1.44. Пусть $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ - формальные группы над A. Естественное преобразование $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ называется *гомоморфизмом* формальных групп. Таким образом, для каждого $N \in \mathbf{Nil}_A$ задан гомоморфизм групп $\varphi_N : \mathscr{F}(N) \to \mathscr{G}(N)$, причём для любого гомофоризма алгебр $f : N \to M$, $N, M \in \mathbf{Nil}_A$, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{F}(N) & \xrightarrow{\varphi_N} & \mathscr{G}(N) \\
{\scriptstyle \mathscr{F}(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}(f)} \\
\mathscr{F}(M) & \xrightarrow{\varphi_M} & \mathscr{G}(M)
\end{array}$$

Естественный изоморфизм $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ называется *изоморфизмом* формальных групп. В этом случае, для каждого $N \in \mathbf{Nil}_A$ гомоморфизм φ_N является изоморфизмом абелевых групп.

[33] $A[[x]] \in \mathbf{Compl}_A$. Аугментация $\varepsilon : A[[x]] \to A$ имеет вид

$$\varepsilon : \sum_{i \geq 0} a_i x^i \mapsto a_0,$$

и $\mathfrak{c}_i = x^i A[[x]]$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Примеры:

- Пусть $\mathscr{F}$ - произвольная формальная группа над A, тогда $\mathrm{id}_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ - соответствующий ей тождественный автоморфизм, который для каждого $N \in \mathbf{Nil}_A$ имеет вид $(\mathrm{id}_{\mathscr{F}})_N = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(N)}$.

- Пусть A является $\mathbb{Q}$-алгеброй, $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F} = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^m$, $\mathscr{G} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^m$. Для каждого $N \in \mathbf{Nil}_A$ определим гомоморфизм $\varphi_N : \mathscr{F}(N) \to \mathscr{G}(N)$ следующим образом:

$$\varphi_N : (a_1, ..., a_m) \mapsto \left(\sum_{i>0} \frac{a_1^i}{i!}, ..., \sum_{i>0} \frac{a_m^i}{i!} \right).$$

  Определение корректно, так как N - нильпотентная A-алгебра. В таком случае, φ является строгим изоморфизмом из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{G}$.

- Пусть $\mathscr{F}_{\Gamma,1}$ - m-мерная формальная группа Любина-Тэйта над $A = \mathfrak{O}_K$. Для всякой матрицы $B \in M_m(A)$, коммутирующей с Γ, можно построить эндоморфизм $[\beta]_\Gamma \in \mathrm{End}\,(\mathscr{F}_{\Gamma,1})$ следующим образом. Пусть $N \in \mathbf{Nil}_A$, тогда гомоморфизм $([\beta]_\Gamma)_N : \mathscr{F}_{\Gamma,1}(N) \to \mathscr{F}_{\Gamma,1}(N)$ должен действовать по правилу

$$([\beta]_\Gamma)_N : a \mapsto [B]_\Gamma(a).$$

Утверждение 1.2. Гомоморфизмы формальных групп связаны с гомоморфизмами формальных групповых законов следующим образом:

- Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A размерности m, $\mathscr{G}$ - формальная группа над A размерности k, F, G - соответствующие им формальные групповые законы над A[34], $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ - гомоморфизм. Пусть $\mathfrak{b} = A[[X]]^+$. Тогда $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^n \in \mathbf{Nil}_A$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\left(f_1^{(n)}, ..., f_k^{(n)}\right) = \varphi_{\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^n}(X_1, ..., X_m).$$

[34]Построенные таким же образом, как в утверждении 1.1.

Если теперь для каждого i построить единственный ряд $f_i \in A[[X]]$, такой, что $f_i \equiv f_i^{(n)} \mod \mathfrak{b}^n$, то мы получим гомоморфизм $f = (f_i)_i$ из F в G[35].

- Пусть F - формальный групповой закон размерности m над A, G - формальный групповой закон размерности k над A, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ - соответствующие им формальные группы над A[36], $f = (f_i)_i$ - гомоморфизм из F в G, $N \in \mathbf{Nil}_A$. Вновь мы можем для любых $a \in N^m$, $i = 1, ..., k$, придать смысл выражению $f_i(a)$, так как алгебра N нильпотентна, т.е. $f(a) \in N^k$. Таким образом, полагая

$$\varphi_N(a) = f(a)$$

для любого $a \in \mathscr{F}(N)$, мы определяем гомоморфизм $\varphi_N : \mathscr{F}(N) \to \mathscr{G}(N)$ для произвольного $N \in \mathbf{Nil}_A$. Прямой проверкой можно убедиться, что набор таких гомоморфизмов определяет естественное преобразование $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$.

Утверждение 1.3. Пусть $\varphi = \{\varphi_N\}_{N \in \mathbf{Nil}_A} : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ - гомоморфизм формальных групп над A. Для любого $N \in \mathbf{Nil}_A$ пусть N^0 - кольцо, состоящее из тех же элементов, что и N, с той же операцией сложения, но с умножением, задаваемым по правилу $N^0 \cdot N^0 = 0$. Тогда $\mathrm{Lie}\,(\varphi) = \{\varphi_{N^0}\}_{N \in \mathbf{Nil}}$ также является гомоморфизмом формальных групп над A.

Proof. Тривиально. ■

Определение 1.45. Гомоморфизм $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ формальных групп над A одинаковой конечной размерности называется *изогенией*, если функтор $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$[37] представим.

---

[35] То, что набор рядов $(f_1, ..., f_k)$ является гомоморфизмом формальных групповых законов следует из того, что $\varphi_{\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^n}$ - гомоморфизм групп.

[36] Тоже построенные как в утверждении 1.1.

[37] Функтор $\mathrm{Ker}\,(\varphi) : \mathbf{Nil}_A \to \mathbf{Sets}$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) : N \mapsto \mathrm{Ker}\,(\varphi_N)\,,$$
$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) : (f : N \to M) \mapsto \mathscr{F}(f)|_{\mathrm{Ker}(\varphi_N)}.$$

Теорема 1.4. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A. Тогда отображение $\iota_{\mathscr{F}} : \operatorname{Hom}(\Lambda, \mathscr{F}) \to \mathscr{F}(A[[x]]^{+})$ вида

$$\iota_{\mathscr{F}} : \Phi \mapsto \Phi_{A[[x]]^{+}}(1 - xt)$$

является изоморфизмом абелевых групп.

Proof. Первая основная теорема теории Картье, см. [Zin84], теорема 3.5. ■

Обозначение 1.46. Обозначим через $\operatorname{Cart}(A) = (\operatorname{End}(\Lambda))^{\mathrm{op}}$[38] *кольцо Картье*, соответствующее A. Воспользуемся теоремой 1.4 для обозначения некоторых особых элементов этого кольца:

- Для $a \in A$, пусть
$$[a] = \iota_{\Lambda}^{-1}(1 - axt).$$
- Для $n \in \mathbb{N}$, пусть
$$\mathcal{V}_n = \iota_{\Lambda}^{-1}(1 - x^n t).$$
- Для $n \in \mathbb{N}$, пусть
$$\mathcal{F}_n = \iota_{\Lambda}^{-1}(1 - xt^n).$$

Имеет место следующее представление:

$$\operatorname{Cart}(A) = \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{N_r} \mathcal{V}_r \, [a_{r,s}] \, \mathcal{F}_s \middle| N_r \in \mathbb{N}, a_{r,s} \in A \right\}^{39}.$$

Замечание 1.4. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A. Тогда теорема 1.4 позволяет рассматривать группу кривых $M_{\mathscr{F}}$ как модуль над кольцом Картье $\operatorname{Cart}(A)$[40]. А именно, для $\Phi \in \operatorname{Cart}(A)$ и $\xi \in M_{\mathscr{F}}$ мы определяем их произведение как

$$\Phi\xi = \iota_{\mathscr{F}}\left(\iota_{\mathscr{F}}^{-1}(\xi) \circ \Phi\right) \in M_{\mathscr{F}}.$$

[38] Очевидно, Λ рассматривается над A, и R^{op} для кольца R означает кольцо, совпадающее с R как группа по сложению, но умножение в котором выполняется в обратном порядке относительно умножения в R.

[39] Теорема 3.12 в [Zin84].

[40] Также это позволяет смотреть на элементы кольца $\operatorname{Cart}(A)$ как на операторы, действующие на кривых формальной группы $\mathscr{F}$.

Обозначение 1.47. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A, p - простое число. Положим

$$M_{\mathscr{F},p} = \{\xi \in M_{\mathscr{F}} | \mathcal{F}_n \xi = 0 \text{ для всех } (n,p) = 1,\, n > 1\}.$$

Элементы группы $M_{\mathscr{F},p}$ называются *p-типическими кривыми.*

Определение 1.48. Пусть $\varphi : A \to B$ - гомоморфизм коммутативных колец с единицей. Пусть $N \in \mathbf{Nil}_B$, что влечёт существование гомоморфизма колец $f : B \to N$. Тогда гомоморфизмом также является отображение $f \circ \varphi$, следовательно, $N \in \mathbf{Nil}_A$. Таким образом, мы определили функтор

$$b_\varphi : \mathbf{Nil}_B \to \mathbf{Nil}_A.$$

Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A, тогда $\varphi_* \mathscr{F} = \mathscr{F} \circ b_\varphi$ является формальной группой над B, полученной из $\mathscr{F}$ путём *замены базы.*

Утверждение 1.5. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над A. Тогда:

- если $\varphi : A \to B$ и $\psi : B \to C$ - гомоморфизмы колец, то

$$\psi_* (\varphi_* \mathscr{F}) = (\psi \circ \varphi)_* \mathscr{F};$$

- если $\varphi : A \to B$ - гомоморфизм колец, то

$$\varphi_* \mathrm{Lie}(\mathscr{F}) = \mathrm{Lie}(\varphi_* \mathscr{F});$$

- если $\mathscr{G}$ - другая формальная группа над A, $\alpha = \{\alpha_N\}_{N \in \mathbf{Nil}_A} : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ - гомомофризм формальных групп над A, $\varphi : A \to B$ - гомоморфизм колец, то $\varphi_* \alpha = \{\alpha_{b_\varphi(N)}\}_{N \in \mathbf{Nil}_B} : \varphi_* \mathscr{F} \to \varphi_* \mathscr{G}$ является гомоморфизмом формальных групп над B.

Proof. Проверяется легко. ∎

Обозначение 1.49. С этого момента $\mathscr{F}$ будет конечномерной формальной группой размерности m над $\mathfrak{O}_K$.

Обозначение 1.50. Пусть $\overline{\mathscr{F}}$ - редукция $\mathscr{F}$ по модулю π, т.е. $\overline{\mathscr{F}} = \kappa_* \mathscr{F}$, где $\kappa : \mathfrak{O}_K \to \overline{K}$ - сюръекция $a \mapsto a \mod \pi$.

Определение 1.51. Пусть $\mathscr{G}$ - формальная группа размерности m над $\mathfrak{O}_K$, $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ - изогения, $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cong \mathrm{Spf}\,(A)$ для некоторой аугментированной нильпотентной $\mathfrak{O}_K$-алгебры A. Для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{O}_K$ пусть $\kappa(\mathfrak{p})$ - его поле вычетов, тогда

$$h(\mathfrak{p}) = \log_p \left(\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} A \otimes_{\mathfrak{O}_K} \kappa(\mathfrak{p})\right) \in \mathbb{N}^{41}.$$

Если существует такое число $h \in \mathbb{N}$, что $h(\mathfrak{p}) = h$ для всех $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{O}_K$, то это h мы обозначим через $h(\varphi)$ и назовём *высотой изогении* φ[42].

Обозначение 1.52. Если для $\mathscr{F}$ определена высота $h\left([p]_{\mathscr{F}}\right)$ умножения на p, то это число мы обозначим через $h = h(\mathscr{F}) \in \mathbb{N}$ и назовём *высотой формальной группы* $\mathscr{F}$.

Обозначение 1.53. Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $[n]_{\mathscr{F}} \in \mathrm{End}\,(\mathscr{F})$ эндоморфизм умножения на n. То есть, такой морфизм, что для любого $N \in \mathbf{Nil}_{\mathfrak{O}_K}$:

$$\left([n]_{\mathscr{F}}\right)_N : a \mapsto \underbrace{a +_{\mathscr{F}(N)} \ldots +_{\mathscr{F}(N)} a}_{n \text{ слагаемых}},$$

где $a \in \mathscr{F}(N)$, $+_{\mathscr{F}(N)}$ - операция сложения в группе $\mathscr{F}(N)$.

Определение 1.54. Формальная группа $\mathscr{F}$ называется *p-делимой*, если $[p]_{\mathscr{F}}$ является изогенией[43].

Примеры:

- Формальная группа $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^m$ над $\mathfrak{O}_K$ не является p-делимой[44].
- Формальная группа $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^m$ p-делима над $\mathfrak{O}_K$[45].

[41] [Zin84], замечание 5.6.

[42] Такого числа может не быть, и в этом случае высота изогении просто не определена.

[43] Здесь, как и ранее, $p = \mathrm{char}\,(\overline{K}) > 0$.

[44] Проверить, что $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^m$ не p-делима над $\overline{K}$ можно, например, с помощью [Zin84], 5.27. Так как свойство p-делимости сохраняется при замене базы ([Zin84], 5.6), то $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^m$ не p-делима и над $\mathfrak{O}_K$.

[45] Вновь можно воспользоваться заменой базы. Над $\overline{K}$ m-мерный случай аналогичен одномерному, рассмотренному в [Zin84], в начале §4 раздела 5.

- Формальная группа $\mathscr{F}_{\Gamma,1}$ p-делима над $\mathfrak{O}_K$[46].

Замечание 1.5. С этого момента под $\mathscr{F}$ подразумевается некоторая p-делимая формальная группа размерности m над $\mathfrak{O}_K$ (например, $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^m$ или $\mathscr{F}_{\Gamma,h}$).

Теорема 1.6. Если формальная группа $\mathscr{F}$ строго пропредставима, то существует единственный функториальный по $\mathscr{F}$[47] изоморфизм $\exp_{\mathscr{F}} = \exp_{\iota_*\mathscr{F}} : \mathrm{Lie}\,(\iota_*\mathscr{F}) \to \iota_*\mathscr{F}$, где $\iota : \mathfrak{O}_K \to K$ - вложение.

Proof. [Zin], предложение 1.38. ∎

Замечание 1.6. Теперь рассматриваемая p-делимая m-мерная формальная группа $\mathscr{F}$ над $\mathfrak{O}_K$ также должна быть строго пропредставимой (в качестве примеров всё ещё подходят $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^m$ или $\mathscr{F}_{\Gamma,h}$).

Обозначение 1.55. Пусть $\lambda_{\mathscr{F}}$ - логарифм $\mathscr{F}$, т.е. $\lambda_{\mathscr{F}} = \exp_{\mathscr{F}}^{-1}$.

1.4 Логарифм формальной группы представимый в виде ряда

Обозначение 1.56. Для $(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K$ пусть $\phi_K^C : C \to \phi_K(C)$ - морфизм, который действует как тождественный на множестве C, если забыть про все структуры на нём. Мы также обозначим через $\phi_K^{-C} : \phi_K(C) \to C$ обратный к ϕ_K^C морфизм. Эти морфизмы сохраняют аддитивную структуру, но не мультипликативную.

[46] Переходим к $\overline{K}$. Для любого $\xi \in M_{\mathscr{F}_{\Gamma,1}} \cong \mathscr{C}(F_\Gamma)$:

$$[p]_{\mathscr{F}_{\Gamma,1}}(\xi) = [pI_m]_\Gamma(\xi) = f_\Gamma^{-1}(pf_\Gamma(\xi)) = \xi^p + ...,$$

поэтому $[p]_{\mathscr{F}_{\Gamma,1}}$ инъективно на $M_{\mathscr{F}_{\Gamma,1}}$. Следовательно, по [Zin84], 5.27, $\mathscr{F}_{\Gamma,1}$ p-делима над $\overline{K}$, а значит и над $\mathfrak{O}_K$.

На самом деле, аналогичные рассуждения применимы и для $\mathscr{F}_{\Gamma,h}$ при $h > 1$.

[47] Подразумевается, что exp ведёт себя как функтор, то есть, для каждого гомоморфизма строго пропредставимых формальных групп $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ над K определён также некоторый гомоморфизм $\mathrm{Lie}\,(\varphi) : \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F}) \to \mathrm{Lie}\,(\mathscr{G})$, причём $\varphi \circ \exp_{\mathscr{F}} = \exp_{\mathscr{G}} \circ \mathrm{Lie}\,(\varphi)$, $\mathrm{Lie}\,(\mathrm{id}_{\mathscr{F}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(\mathscr{F})}$ и $\mathrm{Lie}\,(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Lie}\,(\psi) \circ \mathrm{Lie}\,(\varphi)$.

Обозначение 1.57. Для $(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K$ обозначим через $s_C : K \to C$ структурный морфизм K-алгебры C, а через $\alpha_C : K \to \mathrm{End}\,(C)$ - гомоморфизм, задающий структуру K-модуля на C[48]. Таким образом, $\alpha_C(a)(f) = s_C(a) \cdot f$ для всех $a \in K$, $f \in C$.
Если $N \in \mathbf{Nil}_K$, то такой K-алгебре будут соответствовать структурный морфизм $s_N : K \to N$ и гомоморфизм $\alpha_N : K \to \mathrm{End}\,(N)$, согласованные с вложением категории $\mathbf{Nil}_K$ в $\mathbf{Compl}_K$.
Если же $M \in \mathbf{Mod}_K$, то структурного морфизма мы не имеем, но можно также через $\alpha_M : K \to \mathrm{End}\,(M)$ обозначить гомоморфизм, задающий структуру K-модуля на M. Тогда для $(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K$ будет иметь место

$$\alpha_{\phi_K(C)}(a)\left(\phi_K^C(f)\right) = \phi_K^C\left(s_C(a) \cdot f\right), a \in K, f \in C.$$

Обозначение 1.58. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над K, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})$. Для любого $(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K$ обозначим через $\varphi_{\mathscr{F},C} : C \to \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(C))$ - гомоморфизм колец $\varphi_{\mathscr{F},C} : f \mapsto t_{\mathscr{F}}([f]_C)$, где $[f]_C : \phi_K(C) \to \phi_K(C)$, $[f]_C : g \mapsto \phi_K^C\left(f \cdot \phi_K^{-C}(g)\right)$. При этом, $[s_C(a)]_C = \alpha_{\phi_K(C)}(a)$ для всякого $a \in K$. Получается, что гомоморфизм $\varphi_{\mathscr{F},C}$ задаёт структуру C-модуля на $\mathscr{L}(C)$.

Определение 1.59. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над K, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})$. Предположим также, что K-модуль $\mathscr{L}(K) = t_{\mathscr{L}}(K) \cong M_{\mathscr{L}}/M_{\mathscr{L}}^2$[49] свободен[50], и что $\mathrm{Cart}(K)$-модуль $M_{\mathscr{L}}$ обладает стандартным V-базисом $\{\delta_i\}_{i \in I}$[51] для некоторого (не обязательно конечного или даже счётного) множества индексов I. Тогда кольцо эндоморфизмов модуля $\mathscr{L}(K)$ можно представить в виде

$$\mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K)) = M_I(K) = \{\xi : I \times I \to K | \forall i \in I : \#\{j \in I | \xi(i,j) \neq 0\} < \infty\},$$

[48] Другими словами, можно сказать, что α_C - представление K, ассоциированное с C (см. [Pas04]).

[49] См. [Zin84], 4.18 и 4.23.

[50] Согласно [Zin84], 4.7, это означает, что $\mathscr{L}(C) \cong \bigoplus_{i \in I} \phi_K(C)$ для всех $(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K$.

[51] То есть $(\delta_i)_j = \begin{cases} x, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, где $i, j \in I$.

в котором операции сложения и умножения выглядят следующим образом:

$$(\xi+\eta)(i,j)=\xi(i,j)+\eta(i,j),$$
$$(\xi\eta)(i,j)=\sum_{k\in I}\xi(k,j)\eta(i,k).$$

На $\mathscr{L}(K)$ такие эндоморфизмы будут действовать по правилу

$$\xi:(a_i)_{i\in I}\mapsto\left(\sum_{j\in I}\alpha_K(\xi(j,i))(a_j)\right)_{i\in I}.$$

Определим отображение $\sigma_{K[[x]]^+}:\mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))\to\mathrm{End}\,(M_{\mathscr{L}})$ так:

$$\sigma_{K[[x]]^+}(\xi):\delta_i\mapsto\sum_{j\in I}\langle\xi(i,j)\rangle\,\delta_j\text{[52]}.$$

Корректность определения связана со свойствами $\xi\in M_I(K)$.
Далее, рассмотрим произвольный $N\in\mathbf{Nil}_K$. Следующим шагом будет определение отображения $\sigma_N:\mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))\to\mathrm{End}\,(\mathscr{L}(N))$. Пусть $\xi\in\mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))$, $\nu\in\mathscr{L}(N)$, и элементу ν соответствует пара (u,γ) относительно изоморфизма $\mathscr{L}(N)\cong\Lambda(N)\overline{\otimes}_{\mathrm{Cart}(K)}M_{\mathscr{L}}$[53], где $u=1+u_1t+...+u_nt$ $\gamma\in M_{\mathscr{L}}$. Пусть $v_i^n:K[[x]]^+\to K[[X_1,...,X_n]]^+$ - гомоморфизм вида $v_i^n:x\mapsto X_i$, и $v_{\mathscr{L}}^n=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathscr{L}(v_i^n):M_{\mathscr{L}}\to\mathscr{L}(K[[X_1,...,X_n]]^+)$. Пусть $\rho_n^u:K[[X_1,...,X_n]]^+\to N$ - гомоморфизм вида $\rho_n^u:X_i\mapsto(-1)^iu_i$. Тогда положим

$$\sigma_N(\xi):\nu\mapsto\mathscr{L}(\rho_n^u)\left(v_{\mathscr{L}}^n\left(\sigma_{K[[x]]^+}(\xi)(\gamma)\right)\right).$$

Таким образом, зафиксировав некоторый V-базис $\mathrm{Cart}(K)$-модуля $M_{\mathscr{L}}$, мы можем построить по нему систему морфизмов $\sigma=\{\sigma_N\}_{N\in\mathbf{Nil}_K}$, которую назовём *переносом эндоморфизмов над* $\mathbf{Nil}_K$ *для* $\mathscr{F}$. Также

---

[52] Так как любой элемент из $M_{\mathscr{L}}$ представим через элементы V-базиса, то достаточно определить действие гомоморфизма $\sigma_{K[[x]]^+}(\xi)$ на $\{\delta_i\}_{i\in I}$

[53] См. [Zin84], 3.28.

иногда будем говорить, что $\mathscr{F}$ *допускает перенос эндоморфизмов над* $\mathbf{Nil}_K$ *посредством* σ[54].

Утверждение 1.7. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над K, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})$, и $\mathscr{F}$ допускает перенос эндоморфизмов над $\mathbf{Nil}_K$ посредством $\sigma = \{\sigma_N\}_{N \in \mathbf{Nil}_K}$. Пусть $N, M \in \mathbf{Nil}_K$, и $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_K}(\phi_K(N), \phi_K(M))$ - гомоморфизм K-модулей. Тогда, $\forall \xi \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}(N) \arrow[r, "\sigma_N(\xi)"] \arrow[d, "t_{\mathscr{F}}(f)"'] & \mathscr{L}(N) \arrow[d, "t_{\mathscr{F}}(f)"] \\ \mathscr{L}(M) \arrow[r, "\sigma_M(\xi)"] & \mathscr{L}(M) \end{tikzcd}$$

- коммутативная диаграмма.

Proof. Из [Zin84] известно, что изоморфизм $\Lambda(N)\overline{\otimes}_{\mathrm{Cart}(K)} M_{\mathscr{L}} \cong \mathscr{L}(N)$ действует по правилу $(u, \gamma) \mapsto \mathscr{L}(\rho_n^u)(v_{\mathscr{L}}^n(\gamma))$[55]. Используя этот факт, а также определения $\mathscr{L}$, σ_N и свойства функторов, не трудно убедиться в истинности утверждения. ■

Определение 1.60. Благодаря 1.7, мы можем дополнить определение 1.59.
Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над K, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})$, и $\mathscr{F}$ допускает перенос эндоморфизмов над $\mathbf{Nil}_K$ посредством $\sigma = \{\sigma_N\}_{N \in \mathbf{Nil}_K}$.
Пусть $(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K$. Определим отображение $\sigma_C : \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K)) \to \mathrm{End}\,(\mathscr{L}($
Пусть $\xi \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))$, $\varphi \in \mathscr{L}(C)$. По определению $\mathscr{L}(C)$, φ имеет вид $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$, где $\varphi_i \in \mathscr{L}(\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_i)$ и $\varphi_i = \mathscr{L}(f_{ij})(\varphi_j)$ при $i \leq j$, и $f_{ij} : \mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_j \to \mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_i$, $f_{ij} : f \mod \mathfrak{c}_j \mapsto f \mod \mathfrak{c}_i$. Тогда положим

$$\sigma_C(\xi)(\varphi) = \left(\sigma_{\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_i}(\xi)(\varphi_i)\right)_{i=1}^{\infty}.$$

Именно корректность этого определения проверяется с помощью 1.7.
Теперь систему морфизмов $\sigma = \{\sigma_C\}_{(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K}$ мы можем назвать *переносом эндоморфизмов для* $\mathscr{F}$, и иногда говорить, что $\mathscr{F}$ *допускает перенос эндоморфизмов посредством* σ.

---

[54] Другими словами, если мы говорим, что $\mathscr{F}$ допускает перенос эндоморфизмов посредством σ, то мы подразумеваем, что $M_{\mathscr{L}}$ обладает стандартным V-базисом, и что σ строится с помощью этого базиса так, как это указано в данном определении.

[55] См. [Zin84], 3.28. Обозначения взяты из определения 1.59.

Утверждение 1.8. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над K, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})$, и $\mathscr{F}$ допускает перенос эндоморфизмов посредством $\sigma = \{\sigma_C\}_{(C,\{\mathfrak{c}_i\})\in\mathbf{Compl}_K}$. Тогда

- Пусть $C, D \in \mathbf{Compl}_K$, и $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_K}(\phi_K(C), \phi_K(D))$ - гомоморфизм K-модулей. Тогда, $\forall \xi \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))$:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(C) & \xrightarrow{\sigma_C(\xi)} & \mathscr{L}(C) \\ {\scriptstyle t_{\mathscr{F}}(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle t_{\mathscr{F}}(f)} \\ \mathscr{L}(D) & \xrightarrow{\sigma_D(\xi)} & \mathscr{L}(D) \end{array}$$

  - коммутативная диаграмма,

- $\forall (C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K$: $\sigma_C : \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K)) \to \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(C))$ - гомоморфизм колец,

- $\forall (C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K$: $\sigma_C \circ \varphi_{\mathscr{F},K} = \varphi_{\mathscr{F},C} \circ s_C$.

Proof. Первое свойство проверяется с помощью 1.7.
Чтобы проверить второе свойство, достаточно использовать определение и уже доказанное свойство σ_C, свойства проективных пределов и тот факт, что σ_N является гомоморфизмом колец для любого $N \in \mathbf{Nil}_K$. А это, в свою очередь, следует из определения σ_N, и того, что для любых $\xi, \eta \in \mathscr{L}(K)$ и $\gamma \in M_{\mathscr{L}}$:

$$\sigma_{K[[x]]^+}(\xi + \eta)(\gamma) = \sigma_{K[[x]]^+}(\xi)(\gamma) + \sigma_{K[[x]]^+}(\eta)(\gamma),$$
$$\sigma_{K[[x]]^+}(\xi\eta)(\gamma) = \sigma_{K[[x]]^+}(\xi)\left(\sigma_{K[[x]]^+}(\eta)(\gamma)\right).$$

Для проверки этих утверждений, можно ограничиться случаем $\gamma = \delta_i$, где $\{\delta_i\}_{i\in I}$ - стандартный V-базис $M_{\mathscr{L}}$. Дальше надо использовать определение $\sigma_{K[[x]]^+}$, а также свойство $\langle a + b\rangle\, \delta_i = \langle a\rangle\, \delta_i + \langle b\rangle\, \delta_i$ для любых $a, b \in K$ - именно из-за этого свойства предпочтительно брать стандартный базис $M_{\mathscr{L}}$, а не любой другой, иначе пришлось бы вносить корректировки в определение $\sigma_{K[[x]]^+}$ и в обоснование данного свойства.

Докажем третье свойство. Используя определения σ_C и $\varphi_{\mathscr{F},C}$, можно свести его к случаю, когда $C = N \in \mathbf{Nil}_K$. Далее, используя разложение элементов из $M_{\mathscr{L}}$ по V-базису, можно ограничиться доказательством того факта, что

$$\mathscr{L}(\rho_n^u)\left(v_{\mathscr{L}}^n\left(\sigma_{K[[x]]^+}\left(\varphi_{\mathscr{F},K}(a)\right)\left(V_r\left\langle b\right\rangle\delta_i\right)\right)\right) = \varphi_{\mathscr{F},N}(s_N(a))(\nu),$$

где элементу $\nu \in \mathscr{L}(N)$ соответствует пара $(u, V_r\left\langle b\right\rangle\delta_i)$ относительно изоморфизма $\mathscr{L}(N) \cong \Lambda(N)\overline{\times}_{\mathrm{Cart}(K)}M_{\mathscr{L}}$, где $r \geq 1$, $i \in I$, $a, b \in K$, $u \in \Lambda(N)$, $\deg(u) = n$. На самом деле, проверить это не сложно - все так же пользуясь лишь определениями и уже известными свойствами $\sigma_{K[[x]]^+}$, $\varphi_{\mathscr{F},N}$, ρ_n^u и $v_{\mathscr{L}}^n$. ■

Утверждение 1.9. Пусть $\mathscr{F}$ - формальная группа над K, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})$. Пусть $\sigma = \{\sigma_C : \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K)) \to \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(C))\}_{(C,\{\mathfrak{c}_i\})\in\mathbf{Compl}_K}$ - набор гомоморфизмов колец, такой, что:

- Для любого $\xi \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))$

$$\sigma_{K[[x]]^+}(\xi) : \delta_i \mapsto \sum_{j\in I}\left\langle\xi(i,j)\right\rangle\delta_j.$$

- Пусть $C, D \in \mathbf{Compl}_K$, и $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_K}(\phi_K(C), \phi_K(D))$ - гомоморфизм K-модулей. Тогда, $\forall\xi \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{L}(C) & \xrightarrow{\sigma_C(\xi)} & \mathscr{L}(C) \\
{\scriptstyle t_{\mathscr{F}}(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle t_{\mathscr{F}}(f)} \\
\mathscr{L}(D) & \xrightarrow{\sigma_D(\xi)} & \mathscr{L}(D)
\end{array}$$

  - коммутативная диаграмма.

Тогда система σ является переносом эндоморфизмов для $\mathscr{F}$.

Proof. Доказывается просто. ■

Замечание 1.7. Утверждение 1.8 даёт необходимые, а 1.9 - достаточные условия для того, чтобы система гомоморфизмов σ была переносом эндоморфизмов для формальной группы $\mathscr{F}$.

Утверждение 1.10. Пусть $\mathscr{F}$ - конечномерная формальная группа размерности m над K, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})$. Тогда $\mathrm{End}\,(\mathscr{L}(C)) = M_m\,(\mathrm{End}\,(\phi_K(C)))$ для любого $(C, \{\mathfrak{c}_i\}) \in \mathbf{Compl}_K$, $\mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K)) = M_m(K)$, и $\mathscr{F}$ допускает перенос эндоморфизмов посредством $\sigma = \{\sigma_C\}_{(C,\{\mathfrak{c}_i\})\in\mathbf{Compl}_K}$, где

$$\sigma_C : \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{\phi_K(C)}(a_{11}) & \dots & \alpha_{\phi_K(C)}(a_{1m}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\phi_K(C)}(a_{m1}) & \dots & \alpha_{\phi_K(C)}(a_{mm}) \end{pmatrix}$$

Proof. Кольцо $\mathrm{End}\,(\mathscr{L}(C))$ принимает указанный вид потому, что $\mathscr{L} \cong \mathbb{G}_\mathrm{a}^m$, согласно теореме 1.39 из [Zin].

Для доказательства проще всего воспользоваться критерием 1.9. Свойства матриц и $\alpha_{\phi_K(C)}$ влекут тот факт, что σ_C - гомоморфизм колец. Остальные условия также проверяются напрямую по определению. ∎

Обозначение 1.61. Пусть $\mathscr{F} \cong \mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_k\})$ - пропредставимая формальная группа над полем K, $(C, \{\mathfrak{c}_k\}) \in \mathbf{Compl}_K$. Обозначим изоморфизм $\mathscr{F} \to \mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_k\})$ через $\phi_{\mathscr{F},C}$.

Обозначение 1.62. Пусть $\mathscr{F} \cong \mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_k\})$ - строго пропредставимая формальная группа над полем K, $(C, \{\mathfrak{c}_k\}) \in \mathbf{Compl}_K$. Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$[56] - множество элементов из $\mathfrak{c}_1$, таких, что $\{\varepsilon_i \mod \mathfrak{c}_2\}_{i\in I}$ - базис модуля $\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_2$. Пусть $P_C = K\langle\langle Z_i\rangle\rangle_{i\in I}$ - K-алгебра формальных степенных рядов от некоммутирующих переменных Z_i, $\alpha_C : P_C \to C$ - сюръективный гомоморфизм[57], отправляющий Z_i в ε_i. Пусть $\alpha_{C,k} : \alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_1)/\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_k) \to \mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_k$ - изоморфизм K-алгебр, действующий следующим образом: $\alpha_{C,k} : \overline{s} \mapsto \overline{\alpha_C(s)}$, где черта означает переход к классу смежности по модулю соответствующего идеала. Для $N \in \mathbf{Nil}_K$, пусть $\tau_{C,k,N} : \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_k, N) \to \mathrm{Hom}\,\left(\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_1)/\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_k), N\right)$ - биекция, такая, что $\tau_{C,k,N} : f \mapsto f \circ \alpha_{C,k}$. Для всякого натурального

[56] $|I| < \infty$, согласно определению строгой пропредставимости.

[57] см. [Qui69], следствие A.1.7.

$n > 0$ пусть $d^n_{C,k} \in \mathrm{End}_{K\text{-alg}}\left(\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_1)/\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_k)\right)$ определяется следующим образом: $d^n_{C,k} : \overline{s(Z_i)_{i\in I}} \mapsto \overline{s(Z_i^n)_{i\in I}}$, то есть, $d^n_{C,k}$ заменяет каждый Z_i на Z_i^n в элементах из $\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_1)/\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_k)$. Тогда для того же $n > 0$ пусть $d^n_{C,k,N} : \mathrm{Hom}\left(\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_1)/\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_k), N\right) \to \mathrm{Hom}\left(\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_1)/\alpha_C^{-1}(\mathfrak{c}_k), N\right)$ - отображение вида $d^n_{C,k,N} : s \mapsto s \circ d^n_{C,k}$. Это приводит к корректному определению отображения $D^n_{C,k,N} = \tau^{-1}_{C,k,N} \circ d^n_{C,k,N} \circ \tau_{C,k,N}$, действующего на множестве $\mathrm{Hom}\left(\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_k, N\right)$. Так как такие отображения коммутируют с морфизмами направленной системы $\{\mathrm{Hom}\left(\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_k, N\right)\}_{k>0}$, то по ним можно однозначно восстановить отображение между индуктивными пределами $D^n_{C,N} : \mathrm{Spf}\left(C, \{\mathfrak{c}_k\}\right)(N) \to \mathrm{Spf}\left(C, \{\mathfrak{c}_k\}\right)(N)$. В таком случае, обозначим $D^n_{\mathscr{F}(N)} = (\phi_{\mathscr{F},C})^{-1}_N \circ D^n_{C,N} \circ (\phi_{\mathscr{F},C})_N : \mathscr{F}(N) \to \mathscr{F}(N)$, и пусть $\Delta_{\mathscr{F}(N)} = D^p_{\mathscr{F}(N)}$, где по-прежнему $p = \mathrm{char}\left(\overline{K}\right) > 0$. Дополнительно обозначим $\Delta^0_{\mathscr{F}(N)} = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(N)}$ и $\Delta^n_{\mathscr{F}(N)} = \Delta_{\mathscr{F}(N)} \circ \Delta^{n-1}_{\mathscr{F}(N)}$ для любого целого $n > 0$.

Замечание 1.8. В 1.62 множество раз встаёт вопрос корректности, существования и единственности тех или иных обозначений и определений. Однако, по отдельности они проверяются относительно легко и не требуют подробных разъяснений.

Замечание 1.9. Итоговое отображение $\Delta_{\mathscr{F}(N)}$ из 1.62, в общем случае, не обязано быть эндоморфизмом абелевой группы $\mathscr{F}(N)$. Его надо воспринимать именно как отображение множества в себя.

Утверждение 1.11. Система отображений $\{\Delta_{\mathscr{F}(N)}\}_{N\in\mathbf{Nil}_K}$ из 1.62 обладает следующим свойством: для любых $N, M \in \mathbf{Nil}_K$ и любого $f \in \mathrm{Hom}\left(N, M\right)$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(N) \arrow[r, "\Delta_{\mathscr{F}(N)}"] \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"'] & \mathscr{F}(N) \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"] \\
\mathscr{F}(M) \arrow[r, "\Delta_{\mathscr{F}(M)}"] & \mathscr{F}(M)
\end{tikzcd}$$

Следовательно, $\Delta_{\mathscr{F}} = \{\Delta_{\mathscr{F}(N)}\}_{N\in\mathbf{Nil}_K}$ является естественным преобразованием функтора $\mathscr{F}$, если рассматривать его как функтор из $\mathbf{Nil}_K$ в $\mathbf{Sets}$.

Proof. Без труда проверяется по определению. ∎

Утверждение 1.12. Пусть $\mathscr{F}$ - строго пропредставимая формальная группа над полем K, $N \in \mathbf{Nil}_K$. Тогда для любого $\nu \in \mathscr{F}(N)$ существует некоторое целое $n \geq 0$, такое, что $\Delta^n_{\mathscr{F}(N)}(\nu) = 0$.

Proof. Доказывается не сложно, надо лишь использовать нильпотентность N и строгую пропредставимость $\mathscr{F}$. ∎

Утверждение 1.13. Пусть $\mathscr{F}$ - конечномерная формальная группа размерности m над K. Тогда $\Delta_{\mathscr{F}(N)} : \mathscr{F}(N) \to \mathscr{F}(N)$ принимает вид $\Delta_{\mathscr{F}(N)} : (\nu_1, ..., \nu_m) \mapsto (\nu_1^p, ..., \nu_m^p)$.

Proof. Известно, что $\mathscr{F} \cong \mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_k\})$, где $C = K[[X_1, ..., X_m]]$, и $\mathfrak{c}_k = (X_1, ..., X_m)^k$. Используя этот факт и определение 1.62, можно непосредственно получить требуемое. ∎

Обозначение 1.63. Пусть $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ - пропредставимые формальные группы над полем K, такие, что $\mathscr{F} \cong \mathscr{G} \cong \mathrm{Spf}\,(C, \{\mathfrak{c}_k\})$ для некоторого $(C, \{\mathfrak{c}_k\}) \in \mathbf{Compl}_K$. Введём обозначение $\phi_{\mathscr{F},\mathscr{G}} = \phi^{-1}_{\mathscr{G},C} \circ \phi_{\mathscr{F},C}$.

Замечание 1.10. Изоморфизм $\phi_{\mathscr{F},\mathscr{G}}$ из 1.63 в общем случае не является изоморфизмом формальных групп. Это лишь изоморфизм двух функторов из $\mathbf{Nil}_K$ в $\mathbf{Sets}$.

Утверждение 1.14. Пусть $\mathscr{F}$ - конечномерная формальная группа размерности m над K, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})$. Тогда для любого $N \in \mathbf{Nil}_K$ биекция $(\phi_{\mathscr{F},\mathscr{L}})_N : \mathscr{F}(N) \to \mathscr{L}(N)$ действует следующим образом: $(\nu_1, ..., \nu_m) \mapsto \left(\phi^N_K(\nu_1), ..., \phi^N_K(\nu_m)\right) \in (\phi_K(N)^m, +_{t_\mathscr{F}}) = (N^m, +_\mathscr{L})$.

Proof. Легко следует из определения. ∎

Определение 1.64. Пусть $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ - строго пропредставимые формальные группы над полем K, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\mathscr{G}) \cong \mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})$, и пусть $\mathscr{G}$ допускает перенос эндоморфизмов посредством σ. Пусть $\Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \Delta^k \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))\,[[\Delta]]$. Обозначим через $\Lambda^{\mathscr{F},\mathscr{G}}$ естественное преобразование, соответствующее

Λ, переводящее $\mathscr{F}$ в $\mathscr{G}$, которые рассматриваются как функторы из $\mathbf{Nil}_K$ в $\mathbf{Sets}$. Действие $\Lambda^{\mathscr{F},\mathscr{G}}$ определим следующим образом:

$$\Lambda_N^{\mathscr{F},\mathscr{G}} : \nu \mapsto (\phi_{\mathscr{L},\mathscr{G}})_N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_N(\Lambda_k) \left((\phi_{\mathscr{F},\mathscr{L}})_N \left(\Delta^k_{\mathscr{F}(N)}(\nu) \right) \right) \right),$$

где $\nu \in \mathscr{F}(N)$, и суммирование ведётся с помощью операции $+_{\mathscr{L}}$ в $\mathscr{L}(N)$. Корректность определения[58] вытекает из утверждений 1.11, 1.12 и свойств σ.

Утверждение 1.15. Пусть $\mathscr{F}$ - конечномерная формальная группа размерности m над $\mathfrak{O}_K$, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\iota_*\mathscr{F})$, а F - соответствующий ей групповой закон. Тогда групповой закон F является p-типическим в том и только том случае, когда существует ряд $\Lambda \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))\,[[\Delta]]$, определяющий логарифм $\mathscr{F}$, то есть, когда $\lambda_{\mathscr{F}} = \Lambda^{\iota_*\mathscr{F},\mathscr{L}}$.

Proof. Следует из 1.2, 1.10, 1.13 и 1.14. ∎

Замечание 1.11. 1.15 означает, что в некоторых случаях логарифм формальной группы полностью определяется некоторым рядом $\Lambda \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))\,[[$
Именно такие формальные группы будут интересовать нас далее.

Определение 1.65. Пусть $\mathscr{F}$ - строго пропредставимая формальная группа над $\mathfrak{O}_K$, допускающая перенос эндоморфизмов, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\iota_*\mathscr{F})$. Если существует ряд $\Lambda \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))\,[[\Delta]]$, такой, что $\lambda_{\mathscr{F}} = \Lambda^{\iota_*\mathscr{F},\mathscr{L}}$, то мы будем говорить, что Λ *соответствуют формальной группе* $\mathscr{F}$.

Предположение 1. Пусть $\widehat{W}$ - формальная группа векторов Витта над K[59]. Тогда существует ряд $\Lambda \in \mathrm{End}\,(\mathrm{Lie}\,(\mathscr{F})\,(K))\,[[\Delta]]$, соответствующий $\widehat{W}$[60].

---

[58] Все морфизмы применимы, сумма конечна, и набор $\{\Lambda_N^{\mathscr{F},\mathscr{G}}\}_{N\in\mathbf{Nil}_K}$ действительно определяет естественное преобразование функторов, т.е. $\Lambda_M^{\mathscr{F},\mathscr{G}} \circ \mathscr{F}(f) = \mathscr{G}(f) \circ \Lambda_N^{\mathscr{F},\mathscr{G}}$ для любого гомоморфизма K-алгебр $f \in \mathrm{Hom}\,(N, M)$.

[59] $\widehat{W} : N \mapsto \Lambda(N)\varepsilon_1$ для любого $N \in \mathbf{Nil}_K$, где $\varepsilon_1 = \prod_{\ell\neq p}\left(1 - \frac{1}{\ell}\mathbf{V}_\ell\mathbf{f}_\ell\right)$, $p = \mathrm{char}\,(\overline{K}) > 0$.

[60] Это пример, выходящий за пределы утверждения 1.15, поскольку формальная группа $\widehat{W}$ бесконечномерна.

Предположение 2. Пусть $\mathscr{F}$ - строго пропредставимая формальная группа над $\mathfrak{O}_K$, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\iota_*\mathscr{F}) \cong \bigoplus\limits_{i\in I} \mathbb{G}_\mathrm{a}$ для некоторого множества индексов I, и $M_{\mathscr{L}}$ содержит только p-типические элементы[61]. Тогда существует ряд $\Lambda \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))\,[[\Delta]]$, соответствующий формальной группе $\mathscr{F}$.

Обозначение 1.66. Пусть I - множество индексов, $p = \mathrm{char}\left(\overline{K}\right)$. Положим

$$p_I = \sum_{k=0}^{\infty} p_{I,k}\Delta^k \in M_I(K)[[\Delta]],$$

где

$$p_{I,0} : (i,j) \mapsto \begin{cases} p, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$
$$p_{I,k} : (i,j) \mapsto 0, k > 0.$$

Определение 1.67. Пусть M - V-плоский $\mathrm{Cart}(K)$-модуль. Предположим, что существует такое множество индексов I, что $\iota : M \to \bigoplus\limits_{i\in I} \mathbb{G}_\mathrm{a}(K[[x]]^+)$ - изоморфизм $\mathrm{Cart}(K)$-модулей. Пусть $\{\delta_i\}_{i\in I}$ - стандартный V-базис для $\bigoplus\limits_{i\in I} \mathbb{G}_\mathrm{a}(K[[x]]^+)$. Тогда мы назовём V-базис $\{\delta_i^M = \iota^{-1}(\delta_i)\}_{i\in I}$ *стандартным V-базисом для M*.

Определение 1.68. Пусть M и N - V-плоские $\mathrm{Cart}(K)$-модули, обладающие стандартными V-базисами $\{\delta_i^M\}_{i\in I}$ и $\{\delta_i^N\}_{i\in I}$ для одного и того же множества индексов I. Пусть $\Lambda = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \Delta^k \in M_I(K)[[\Delta]]$. Обозначим через $\Lambda^{M,N} : M \to N$ гомоморфизм модулей, соотвтетсвующий

[61] $p = \mathrm{char}\left(\overline{K}\right) > 0$.

Возможно, это примерно то же самое, что требовать от формальной группы равенства $\mathscr{F} = \widehat{\mathscr{F}}$, где $\widehat{\mathscr{F}} : \mathbf{Nil}_K \to \mathbf{Ab}$, $\widehat{\mathscr{F}} : N \mapsto \mathscr{F}(N)\varepsilon_1$.

Более точным могло бы быть требование, чтобы все элементы $M_{\mathscr{L}}$ имели вид $\sum\limits_{k\geq 0}\sum\limits_{i\in I} V_{p^k}\langle a_{k,i}\rangle\,\delta_i$, где $\{\delta_i\}_{i\in I}$ - стандартный базис $M_{\mathscr{L}}$.

Λ, действующий следующим образом:

$$\Lambda^{M,N} : \delta_i^M \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in I} \langle \Lambda_k(i,j) \rangle \, \mathbf{V}_{p^k} \delta_j^N.$$

Так как $N = \varprojlim_k N/V_{p^k}N$ и $\#\{j \in I | \Lambda_k(i,j) \neq 0\} < \infty$, $\forall i \in I$, $k \geq 0$, то сумма в правой части формулы всегда конечна, поэтому гомоморфизм определён корректно.

Предположение 3. Пусть $\mathscr{F}$ - строго пропредставимая формальная группа над $\mathfrak{O}_K$, допускающая перенос эндоморфизмов, $\mathscr{L} = \mathrm{Lie}\,(\iota_* \mathscr{F})$, и $\Lambda \in \mathrm{End}\,(\mathscr{L}(K))\,[[\Delta]]$ соответствует $\mathscr{F}$. Тогда $(\lambda_{\mathscr{F}})_{K[[x]]^+} = \Lambda^{M_{\iota_* \mathscr{F}}, M_{\mathscr{L}}}$.

2 Инвариант дробной части r(F)

Теорема 2.1. Пусть $\Lambda_F \in M_m(K[[\Delta]])$ соответствует формальному групповому закону F (т.е. $\Lambda_F(X)$ является логарифмом F), Λ_G соответствует формальному групповому закону G над $\mathfrak{O}_N$, при этом редукции F и G равны. Тогда Λ_F можно представить в виде vu^{-1}, где $vp^l\pi^{-p^l} \in M_m(\mathfrak{O}_K[[\Delta]])$, $l = \left\lfloor \log_p \left(\dfrac{e}{p-1} \right) \right\rfloor$, а $u = p\Lambda_G^{-1} \in M_m(\mathfrak{O}_{N,\sigma}[[\Delta]])$.

Proof. См. [Бон06], теорема 4.2.1. ■

Замечание 2.1. Тот факт, что $p\Lambda_G^{-1} \in M_m(\mathfrak{O}_{N,\sigma}[[\Delta]])$, следует из доказательства теоремы 4.2.1 в [Бон06].

Замечание 2.2. На практике, $p\Lambda_G^{-1}$ можно вычислять с помощью доказательства теормы, используя также [Haz12], 20.3. Кроме того, можно попытаться вычислить $\Lambda_G^{-1}(X)$ непосредственно, используя [Haz12], A.4.6.

Примеры:

- Пусть $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$, $N = \mathbb{Q}_p$, $F = \hat{\mathbb{G}}_a^m$, $G = \hat{\mathbb{G}}_a^m$. Тогда $\Lambda_F = I_m$, $\Lambda_G = I_m$, $u = pI_m$, $v = pI_m$.

Предположение 4. Пусть $\iota : \mathfrak{O}_K \to K$, $\omega : \mathfrak{O}_N \to N$ и $\alpha : N \to K$ - вложения. Пусть $\mathscr{F}$ - строго пропредставимая p-делимая формальная группа над $\mathfrak{O}_K$, $\mathrm{Lie}\,(\iota_*\mathscr{F}) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{G}_a$ и $\Lambda_{\mathscr{F}} \in M_I(K)[[\Delta]]$ соответствует $\mathscr{F}$. Пусть $\mathscr{G}$ - строго пропредставимая p-делимая формальная группа над $\mathfrak{O}_N$, $\mathrm{Lie}\,(\omega_*\mathscr{G}) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathbb{G}_a$ и $\Lambda_{\mathscr{G}} \in M_J(N)[[\Delta]]$ соответствует $\mathscr{G}$. Предположим также, что $\overline{\mathscr{F}} = \overline{\mathscr{G}}$. Тогда

1. $I \simeq J$; это позволяет ввести обозначение $[p_I] = p_I{}^{(\alpha\circ\omega)_*\mathscr{G},\iota_*\mathscr{F}}$;

2. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\alpha\circ\omega)_*\mathscr{G} \arrow[r, "\alpha_*\lambda_{\mathscr{G}}"] \arrow[d, "{[p_I]}"'] & \mathrm{Lie}\,((\alpha\circ\omega)_*\mathscr{G}) \arrow[d, "{\mathrm{Lie}([p_I])}"] \\
\iota_*\mathscr{F} \arrow[r, "\lambda_{\mathscr{F}}"] & \mathrm{Lie}\,(\iota_*\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

коммутативна;

3. $[p_I]$ и $\mathrm{Lie}\,([p_I])$ - изогении формальных групп;
4. существует такой ряд $u \in M_I(\mathfrak{O}_N)[[\Delta]]$, что $[p_I]\circ(\alpha_*\lambda_{\mathscr{G}})^{-1} = u^{\mathrm{Lie}((\alpha\circ\omega)_*\mathscr{G}),\iota_*\mathscr{F}}$;
5. существует такой ряд $v \in M_I(K)[[\Delta]]$, что $\mathrm{Lie}\,([p_I]) = v^{\mathrm{Lie}((\alpha\circ\omega)_*\mathscr{G}),\mathrm{Lie}(\iota_*\mathscr{F})}$, причём $vp^l\pi^{-p^l} \in M_I(\mathfrak{O}_K)[[\Delta]]$, где $l = \left\lfloor \log_p\left(\frac{e}{p-1}\right)\right\rfloor$.

Список литературы

[Лен68] С. Ленг. *Алгебра*. 1968.

[Qui69] D. Quillen. *Rational Homotopy Theory*. 1969.

[Zin84] T. Zink. *Cartier Theory of Commutative Formal Groups*. 1984.

[FV01] I.B. Fesenko and S.V. Vostokov. *Local Fields and Their Extensions*. 2001.

[Pas04] D. Passman. *A Course in Ring Theory*. 2004.

[Бон06] М.В. Бондарко. "Явные конструкции в теории формальных групп и конечных групповых схем и их приложения к арифметической геометрии". PhD thesis. 2006.

[Haz12] M. Hazewinkel. *Formal Groups and Applications*. 2012.

[Gou20] F. Gouvêa. *p-adic numbers: An introduction*. 2020.

[Zin] T. Zink. "Lectures on p-divisible group". Lecture notes. URL: https://www.math.uni-bielefeld.de/~zink/pDivGr1.pdf.