Tarea 4
Programación declarativa

Peto Gutierrez Emmanuel
Ernesto Rubén Palacios Gómez

22 de mayo de 2018

1.- Por definición $a \leq b$ implica que $\exists c \in \mathbb{N}$ tal que $a + c = b$.

Voy a etiquetar las flechas de manera única con una terna, de forma que a la flecha $a \xrightarrow{f} b$ le corresponde la terna $f = (a, b, c)$. Por ejemplo $id_a = (a, a, 0)$ o si $b = s(a)$ entonces a la flecha $a \to b$ le corresponde $(a, b, 1)$. La composición se definirá así: Si tenemos que $a \leq b$ y $b \leq d$ y tenemos que $a + c = b$ y $b + e = d$, entonces $(b, d, e) \circ (a, b, c) = (a, d, e + c)$. La primera entrada de la terna de la izquierda debe ser igual a la segunda entrada de la terna de la derecha.

Veremos que se cumple la asociatividad y la identidad por la izquierda y derecha.

Asociatividad: Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq b \leq c \leq d$. Sean f, g, h flechas tal que $a \xrightarrow{f} b, b \xrightarrow{g} c, c \xrightarrow{h} d$, donde $f = (a, b, x), g = (b, c, y), h = (c, d, z)$.
$g \circ f = (a, c, x + y)$
$h \circ g = (b, d, y + z)$
Luego, $h \circ (g \circ f) = (a, d, x + y + z) = (h \circ g) \circ f \blacksquare$

Identidad izquierda: $id_b \circ f$ donde $a \xrightarrow{f} b$.
$(b, b, 0) \circ (a, b, c) = (a, b, c + 0) = (a, b, c) = f \blacksquare$

Identidad derecha: $f \circ id_a = (a, b, c) \circ (a, a, 0) = (a, b, c+0) = (a, b, c) = f \blacksquare$

Un funtor $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ podría ser la función sucesor definida así:
$F(a) = S(a)$
$F(a, b, c) = (S(a), S(b), c)$

2.- Sean $f : x \to y, g : y \to z$ funciones de Haskell y x, y, z tipos de Haskell.
$g \circ f : x \to z$.
$F(x) = a \to x$

$F(y) = a \to y$
$F(z) = a \to z$
$F(f) = F(x) \to F(y) = (a \to x) \to (a \to y)$
$F(g) = F(y) \to F(z) = (a \to y) \to (a \to z)$
$F(g \circ f) = (a \to x) \to (a \to z) = F(g) \circ F(f) \blacksquare$ Vemos que preserva la composición.