

Társasjáték Kiállítás (Boardgame Expo)

Minden évben megrendezésre kerül Kolozsváron egy nagy Társasjáték Kiállítás, ahol új játékok széles választékát mutatják be. Az idei év fő attrakciója egy Majomcsapda nevű játék.

Egy sorban n játékos áll, akik arra várnak, hogy kipróbálhassák a játékot. A játékosok 0-tól $n - 1$ -ig vannak számozva a sorban elfoglalt helyük szerint. A 0-s játékos a sor elején, az $n - 1$ -es játékos pedig a sor végén áll.

A sorban álló játékosok között m darab *különböző* **baráti kapcsolat** van. Pontosabban, minden $i = 0, \dots, m - 1$ -re, az $x[i]$ és $y[i]$ játékosok barátok, ahol $0 \leq x[i] < y[i] < n$. A baráti kapcsolatok szimmetrikusak.

Vegyünk k egymást követő játékost a sorból, $s, s + 1, \dots, s + k - 1$ -t (ahol $0 \leq s < n$ és $1 \leq k \leq n - s$). Ők egy k tagú **baráti csoportot** alkotnak, ha bármely két tagja összeköthető baráti kapcsolatok sorozatán keresztül a csoporton belül. Pontosabban, az $s, s + 1, \dots, s + k - 1$ játékosok egy k méretű baráti csoportot alkotnak, ha minden olyan u és v esetén, ahol $s \leq u < v < s + k$, létezik egy $p[0], \dots, p[\ell - 1]$ játékosorozat, amelyre teljesülnek a következők:

- $\ell \geq 2$;
- $s \leq p[j] < s + k$ minden $j = 0, \dots, \ell - 1$ esetén;
- $p[0] = u$ és $p[\ell - 1] = v$;
- a $p[j]$ és $p[j + 1]$ játékosok barátok minden $j = 0, \dots, \ell - 2$ esetén.

Megjegyzendő, hogy $k = 1$ esetén az s játékos egyedül alkot egy 1 méretű baráti csoportot.

A Majomcsapda játékot bármennyi játékos játszhatja, azonban a játék sikerességének növelése érdekében a szervezők csak baráti csoportoknak engedik a játékot.

Egyszerre csak egy csoport játszhat. Minden játékhoz a sor elején álló játékosnál kezdődően egy baráti csoport alakul, és elkezdi a játékot. Az ebben a baráti csoportban lévő játékosok kikerülnek a sorból. Ez a folyamat addig ismétlődik, amíg a sor ki nem ürül. Formálisan, azt mondjuk, hogy a sor g **baráti csoportra osztható fel**, ha létezik egy $K = [K[0], K[1], \dots, K[g - 1]]$ csoportméret-tömb, amelyre a következő feltételek mindegyike teljesül:

- $g > 0$ és $K[j] > 0$ minden $j = 0, \dots, g - 1$ esetén;
- $K[0] + K[1] + \dots + K[g - 1] = n$;
- minden $j = 0, \dots, g - 1$ esetén az $s[j], s[j] + 1, \dots, s[j] + K[j] - 1$ játékosok egy $K[j]$ méretű baráti csoportot alkotnak, ahol $s[0] = 0$, egyébként pedig

$$s[j] = K[0] + K[1] + \dots + K[j - 1].$$

A szervezők a játékot játékos baráti csoportok számát szeretnék minimalizálni. Vagyis, a sort g baráti csoportra szeretnék felosztani úgy, hogy ne legyen lehetséges a sort $g - 1$ (vagy kevesebb) baráti csoportra felosztani.

A feladatod, hogy megtaláld a sornak egy minimális számú baráti csoportra való felosztását, és megadd a csoportméretek tömbjét.

Implementációs részletek

A következő függvényt kell implementálnod.

```
std::vector<int> partition_players(int n, int m, std::vector<int> X,
                                std::vector<int> Y)
```

- n : a sorban álló játékosok száma.
- m : a baráti kapcsolatok száma.
- x, y : m hosszúságú tömbök, amelyek a baráti kapcsolatokat írják le.
- Ennek a függvénynek egy csoportméretekből álló tömböt kell visszaadnia, amely a játékosok minimális számú baráti csoportra való felosztását (partícióját) reprezentálja.
- Ez a függvény minden tesztelésben pontosan egyszer hívódik meg.

Korlátok

- $2 \leq n \leq 100\,000$
- $0 \leq m \leq 200\,000$
- $0 \leq x[i] < y[i] < n$ minden $i = 0, \dots, m - 1$ esetén
- A baráti kapcsolatok különbözőek. Más szóval, $x[i] \neq x[j]$ vagy $y[i] \neq y[j]$ minden olyan i és j esetén, ahol $0 \leq i < j < m$.
- Ha több olyan megoldás is létezik, amely minimális számú csoportot használ, akkor bármelyik megoldás megadható.

Részfeladatok

1. (5 pont) $y[i] = x[i] + 1$ minden $i = 0, \dots, m - 1$ esetén.
2. (7 pont) $y[i] \leq x[i] + 2$ minden $i = 0, \dots, m - 1$ esetén.
3. (6 pont) $n \leq 300$ és $m \leq 600$
4. (15 pont) $n \leq 2\,000$ és $m \leq 4\,000$
5. (34 pont) Nincsenek *ciklikus* baráti kapcsolatok. Vagyis bármely különböző játékosokat tartalmazó sorozatra $p[0], p[1], \dots, p[\ell - 1]$, ahol $\ell \geq 3$, és minden $0 \leq j < \ell - 1$ esetén a $p[j]$ és $p[j + 1]$ játékosok barátok, a $p[0]$ és $p[\ell - 1]$ játékosok **nem** barátok.
6. (33 pont) Nincsenek további megkötések.

Példák

1. Példa

Vegyük a következő függvényhívást:

```
partition_players(5, 3, {0, 1, 3}, {1, 4, 4})
```

Ebben a példában a 0-as és 1-es, az 1-es és 4-es, valamint a 3-as és 4-es játékosok barátok.

A 2-es játékosnak nincsenek barátai a sorban, ezért a 2-es játékosnak egy egymagából álló baráti csoportot kell alkotnia, ami azt jelenti, hogy a baráti csoportok minimális száma $g = 3$. Másrésztől, a 0-s és 1-es, valamint a 3-as és 4-es játékosok alkothatnak egy-egy 2-es méretű baráti csoportot.

Ezért a sor felosztható 3 baráti csoportra, melyek méretei 2, 1 és 2, így az eljárás visszaadhatja a $[2, 1, 2]$ tömböt.

2. Példa

Vegyük a következő függvényhívást:

```
partition_players(7, 6, {0, 4, 2, 1, 2, 3}, {1, 5, 4, 5, 5, 6})
```

Ebben a példában a következő játékosok barátok:

- játékos 0 és 1
- játékos 4 és 5
- játékos 2 és 4
- játékos 1 és 5
- játékos 2 és 5
- játékos 3 és 6

A 3-as játékosnak csak a 6-os játékos a barátja, így bármely baráti csoport, amely tartalmazza a 3-as játékost, vagy:

- egy egyelemű csoport (csak a 3-as játékost tartalmazza), vagy
- egy olyan csoport, amely egyszerre tartalmazza a 3-as és 6-os játékosokat.

A második esetben a baráti csoportnak tartalmaznia kellene a 4-es és 5-ös játékost is. Ez azonban nem lehetséges, mivel a 6-os játékosnak csak a 3-as játékos a barátja, így a 3-as játékos nincs kapcsolatban a 4-es és 5-ös játékosokkal baráti kapcsolatok sorozatán keresztül.

Ezért a 3-as játékost egyelemű baráti csoportba kell tenni. Hasonlóképp, a 6-os játékos is egyelemű csoportba kerül. Így a baráti csoportok száma legalább 4.

A 0-ás, 1-es és 2-es játékosok nem alkotnak háromfős baráti csoportot, mivel sem a 0-ás, sem az 1-es játékos nincs kapcsolatban a 2-essel a csoporton belül. Ez nem lenne így, ha a 5-ös játékos is a csoportban lenne, de mivel a 3-as és 4-es játékosok biztosan külön csoportba kerülnek, ez sosem történhet meg. Ezért a baráti csoportok száma legalább 5.

Másrészt: a 0-ás és 1-es, valamint a 4-es és 5-ös játékosok kétfős baráti csoportokat alkotnak. Így a sor felosztható 5 baráti csoportra, ezek méretei: 2, 1, 1, 2, 1. A függvény visszaadhatja például a következőt: [2, 1, 1, 2, 1].

Minta értékelő (Sample Grader)

A minta értékelő a bemenetet az alábbi formátumban olvassa be:

- 1. sor: $n\ m$
- $2 + i$. sor (ahol $0 \leq i < m$): $x[i]\ y[i]$

Tegyük fel, hogy a `partition_players` által visszaadott tömb: $K[0], K[1], \dots, K[g-1]$ valamely nemnegatív g mellett. Ekkor a minta értékelő kimenetének formátuma:

- 1. sor: g
- 2. sor: $K[0]\ K[1]\ \dots\ K[g-1]$