Festival namiznih iger

Festivalsko mesto Cluj-Napoca vsako leto gosti znan festival namiznih iger Boardgame Expo, na katerem se predstavlja široka paleta različnih povabljivih iger. Kot je na takih dogodkih običajno, jih vsako leto nekaj izstopa iz povprečja, in letošnje ni nobena izjema: občestvo nori za igro BoardOina.

In kako, se vprašaš, se igra BoardOina? Preprosto. Igra je narejena za n igralcev, ki se zvrstijo v vrsto ter čakajo, da bodo na vrsti. Igralce oštevilčimo od 0 do $n-1$, kot so postavljeni v vrsti. Igralec 0 je na čelu vrste, igralec $n-1$ pa na repu.

Med našimi nadebudnimi igralci je m *različnih* **prijateljskih zvez**, torej med m pari igralcev. Natančneje, za vsak i med 0 in $m-1$, vključno, prijateljujeta igralca $x[i]$ in $y[i]$, pri čemer imamo $0 \leq x[i] < y[i] < n$. Prijateljske zveze so, kakopak, simetrične; neuslišanih prijateljstev ni.

V vrsti igralcev si pobliže oglejmo strnjeno podzaporedje dolžine k, ki se začne pri igralcu s (pri čemer za vsaka s in k velja $0 \leq s < n$ in $1 \leq k \leq n-s$). To zaporedje tvori **skupino prijateljev** velikosti k, če sta vsaka dva igralca v njem povezana s Potjo Prijateljstva znotraj te skupine, tj. zaporedje igralcev $s, s+1, \ldots, s+k-1$ tvori skupino prijateljev velikosti k, če za vsaka u in v (kjer $s \leq u < v < s+k$) obstaja skupek (ne nujno strnjen) igralcev $p[0], \ldots, p[l-1]$, da velja:

- $l \geq 2$;
- $s \leq p[j] < s+k$ za vsak j od 0 do $l-1$, vključno;
- $p[0] = u$ in $p[l-1] = v$;
- igralca $p[j]$ in $p[j+1]$ sta prijatelja za vsak j od 0 do $l-2$, vključno.

Upoštevaj, da je v posebnem primeru $k=1$ igralec s osamljen, sam v svoji "skupini" prijateljev velikosti 1.

BoardOino seveda lahko igra kolikor koli veliko igralcev. Kljub temu pa so organizatorji, misleč, da bo igra tako bolj uspešna, vse skupaj omejili samo na skupine prijateljev. Vendarle lahko naenkrat igra samo ena skupina. Za vsako igro se iz vrste odcepi vodeča skupina prijateljev (torej tista, v kateri je tudi igralec, ki je takrat na začetku vrste) in prične z igranjem igre. Igralci iz te skupine se torej umaknejo iz vrste, na njen začetek se premaknejo sledeči igralci, in postopek odcepljanja skupin se ponavlja, dokler se vrsta igralcev ne izprazni. Povedano bolj formalno: pravimo, da je mogoče vrsto igralcev **particionirati v g skupin prijateljev**, če obstaja tak seznam velikosti skupin ($K = [K[0], K[1], \ldots, K[g-1]]$), da veljajo vsi sledeči pogoji:

- $g > 0$ in $K[j] > 0$ (za vsak tak j, da je $0 \leq j < g$);
- $K[0] + K[1] + \ldots + K[g-1] = n$;
- za vsak j med 0 in $g-1$, vključno, tvorijo igralci $s[j], s[j]+1, \ldots, s[j]+K[j]-1$ skupino prijateljev velikosti $K[j]$, pri čemer imamo $s[0] = 0$, sicer pa $s[j] = K[0] + K[1] + \ldots + K[j-1]$.

Ob vseh teh govorancah pa so organizatorji tudi stiskaški: želijo *minimizirati* število skupin prijateljev, ki bodo igrali BoardOino. Torej, vrsto igralcev hočejo particionirati v g skupin prijateljev tako, da je ni mogoče particionirati tudi v $g-1$ (ali manj) skupin prijateljev.

Tvoja naloga je, da najdeš particioniranje vrste igralcev v minimalno število skupin prijateljev ter vrneš seznam velikosti teh skupin.

Podrobnosti implementacije

Implementiraj tole funkcijo:

```
std::vector<int> partition_players(int n, int m, std::vector<int> X, std::vector<int> Y)
```

- `n`: število igralcev v vrsti.
- `m`: število prijateljskih zvez.
- `x`, `y`: seznama dolžine `m`, ki opisujeta prijateljske zveze.
- Funkcija mora vrniti seznam velikosti prijateljskih skupin, ki predstavlja particioniranje vrste igralcev na najmanjše možno število teh skupin.
- Funkcija bo klicana natanko enkrat za vsak testni primer.

Omejitve

- $2 \leq n \leq 100\,000$
- $0 \leq m \leq 200\,000$
- $0 \leq x[i] < y[i] < n$ (za vsak tak i, da je $0 \leq i < m$)
- Prijateljske zveze so različne, tj. $x[i] \neq x[j]$ ali pa $y[i] \neq y[j]$ (za vsaka taka i in j, da je $0 \leq i < j < m$).
- Če obstaja več rešitev z istim minimalnim številom skupin prijateljev, vrni katerokoli.

Podnaloge

1. (5 točk) $y[i] = x[i] + 1$ za vsak i od 0 do $m - 1$, vključno.
2. (7 točk) $y[i] \leq x[i] + 2$ za vsak i od 0 do $m - 1$, vključno.
3. (6 točk) $n \leq 300$ in $m \leq 600$
4. (15 točk) $n \leq 2\,000$ in $m \leq 4\,000$
5. (34 točk) Ni prijateljskih zvez, ki bi tvorile *cikel*. Torej, za vsako zaporedje *različnih* igralcev $p[0], p[1], \ldots, p[l-1]$, kjer je $l \geq 3$ in sta za vsak $0 \leq j < l - 1$ igralca $p[j]$ in $p[j+1]$ prijatelja, igralca $p[0]$ in $p[l-1]$ **nista** prijatelja.
6. (33 točk) Brez dodatnih omejitev.

Primeri

Prvi primer

Razmislimo o naslednjem primeru klica funkcije:

```
partition_players(5, 3, {0, 1, 3}, {1, 4, 4})
```

V tem primeru sta prijatelja igralca 0 in 1, prav tako igralca 1 in 4 in igralca 3 in 4.

Igralec 2 je brez prijateljev v vrsti, zato mora biti sam v svoji skupini… prijatelj**a**. To pomeni, da je minimalno število skupin prijateljev $g = 3$. Po drugi strani pa para igralcev 0 in 1 ter 3 in 4 lahko tvorita svoji skupini prijateljev velikosti 2.

Vrsto torej lahko razbijemo v tri skupine prijateljev, velikosti 2, 1 in 2, in tvoja funkcija lahko vrne seznam

```
{2, 1, 2}
```

Drugi primer

```
partition_players(7, 6, {0, 4, 2, 1, 2, 3}, {1, 5, 4, 5, 5, 6})
```

V tem primeru sta prijatelja igralca 0 in 1, prav tako tudi igralca 4 in 5, 2 in 4, 1 in 5, 2 in 5 ter igralca 3 in 6.

Edini prijatelj igralca 3 je igralec 6, kar pomeni, da je vsaka skupina prijateljev, ki vsebuje igralca 3:

- velikosti 1 in vsebuje le igralca 3,
- ali pa vsebuje vsaj še igralca 6.

V drugem primeru, ko sta v skupini tako 3 kot 6, mora ta skupina nujno vsebovati še igralca 4 in 5 (ker so skupine strnjena podzaporedja začetne vrste igralcev) — kar pa vemo, da ni mogoče, saj je edini prijatelj igralca 6 igralec 3, ki potemtakem z igralcema 4 in 5 ni povezan s Potjo Prijateljstva.

Igralec 3 mora torej biti v svoji osamljeni skupini velikosti 1. Podobno mora biti osamljen tudi igralec 6, kar pomeni, da morajo biti skupine prijateljev vsega skupaj vsaj 4.

Igralci 0, 1 in 2 ne tvorijo skupine prijateljev velikosti 3, saj niti 0 niti 1 nista s Potjo Prijateljstva povezana z igralcem 2. Pomagalo ne bi niti, če bi bil v skupini igralec 5 — kar pa ne more biti, ker vemo, da morata igralca 3 in 4 sigurno biti v različnih skupinah. Torej mora biti skupin prijateljev v resnici vsaj 5.

Po drugi strani, para igralcev 0 in 1 ter 4 in 5 tvorita skupini velikosti 2. Torej je mogoče začetno vrsto igralcev razbiti na 5 skupin prijateljev velikosti 2, 1, 1, 2 in 1, tvoja funkcija pa lahko vrne

```
{2, 1, 1, 2, 1}
```

Testni ocenjevalec

Priloženi primer ocenjevalca sprejema vhodne podatke v naslednji obliki:

- v prvi vrstici sta števili n in m
- nadaljnjih m vrstic vsebuje števili $x[i]$ in $y[i]$

Označimo elemente seznama, ki ga vrne funkcija, s $K[0], K[1], \ldots, K[g-1]$ za nek ne-negativen g. Izhod testnega ocenjevalca je potem:

- v prvi vrstici število skupin g
- v drugi vrstici njihove velikosti: $K[0]$, $K[1]$, ..., $K[g-1]$