Introducción a la solución numérica de modelos matemáticos utilizando ecuaciones diferenciales

Introducción a la solución de sistemas físicos utilizando ecuaciones diferenciales parciales y métodos numéricos, utilizando DUNE

John Leal, Carlos Aznarán

8 de noviembre de 2021

Índice general

I. Software **5**

1. Introduction **7**

2. Linux, Gitpod y Github **9**

3. Plantillas C++ **11**
3.1. Yaml y Docker 11
3.2. Doxygen 11
3.3. Markdown 11
3.4. Paraview y Gnuplot 11

4. Mallas y Software **13**

II. Ecuaciones diferenciales parciales **15**

5. Modelos con EDO y EDP **17**
5.1. La derivada 17
5.2. Leyes de conservación 17
5.3. Casos especiales de las leyes de conservación 18
5.4. Ejemplos de modelos matemáticos 18

6. Elementos Finitos **19**

III. Distributed and Unified Numerics Environment, DuMux - DUNE for Multi-{Phase, Component, Scale, Physics, ...} flow and transport in porous media **21**

7. Algorítmos y Programación DUNE C++ **23**

8. Algorítmos y Programación DUNE Python **25**

Parte I.

Software

1. Introduction

2. Linux, Gitpod y Github

3. Plantillas C++

3.1. Yaml y Docker

3.2. Doxygen

3.3. Markdown

3.4. Paraview y Gnuplot

4. Mallas y Software

Parte II.

Ecuaciones diferenciales parciales

5. Modelos con EDO y EDP

Presentar una serie de ejemplos y ejercicios clásicos, con sus descripciones caracaterísticas, condiciones iniciales o de frontera. Una selección de teorías, partiendo por ejemplo de las leyes de conservación y de las leyes empíricas, Ley de Fourier, Ley de Darcy, Leyes de Maxwell, Leyes en el tránsito, flujos en suelos y plantas, circuitos. Ecuación de Poisson, Ecuación de Onda, etc.

Es importante la explicación de la condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neuman. Posiblemente, en los libros de Heildeberg. También revisar el libro del profesor Hernán Estrada.

5.1. La derivada

El modelamiento matemático es una técnica que utilizan principalmente los matemáticos e ingenieros para comprender, simular y predecir el comportamiento de sistemas físicos. Newton fue uno de los precursores, buscaba predecir el comportamiento de los cuerpos que se movían, por ejemplo tratar de explicar la rotación de los planetas alrededor del sol, o un coche que se moviera en una dirección particular. Para tratar de comprender lo que ocurría, inventó algunos conceptos que son muy utilizados hoy en día, por ejemplo el concepto de fuerza, y a diferencia de lo que se había planteado anteriormente, Newton estableció que todo cuerpo tiende a mantener su estado, excepto que haya una fuerza externa que cambié su estado inicial.

Estableció entonces tres leyes que rigen los movimientos de los cuerpos, a saber:

5.2. Leyes de conservación

En primer lugar nos vamos a referir a un *sistema cerrado*, que corresponde a una región del espacio que tiene fronteras en el cual siempre se conserva alguna cantidad particular, a la cual le podemos dar una representación numérica. Para empezar vamos a determinar la ecuación de conservación unidimensional de la masa de un gas en un cilindro. El gas fluye en el tubo en la dirección positiva de las x, tanto la densidad como la velocidad del gas se suponen constantes cuando cruzan la sección transversal del cilindro como se aprecia en la figura 5.2. La densidad se define de tal forma que la masa total $u(x,t)$ del gas en algun intervalo dado $[a,b]$ por ejemplo, está dada por la integral de la densidad como en la ecuación (5.1):

$$u(x,t) = \int_a^b \rho(x,t)dx \tag{5.1}$$

Si suponemos que las paredes del cilindro son impermeables, y la masa del gas ni se crea ni se destruye al interior del cilindro, entonces la masa en ésta sección sólo puede cambiar debido al flujo del gas del punto a al punto b.

Ahora, supongamos que $v(x,t)$ es la velocidad del gas en el punto x al tiempo t. Entonces la velocidad del flujo o el flujo másico ϕ que pasa por éste punto estará dado por la ecuación (5.2):

$$\phi(x,t) = \rho(x,t)v(x,t) \tag{5.2}$$

Que al establecer las unidades resulta en la expresión (5.3):

$$[\phi] = \frac{kg}{s} = [\rho]\,[v] = \frac{kg}{\cancel{cm}}\frac{\cancel{cm}}{s} \tag{5.3}$$

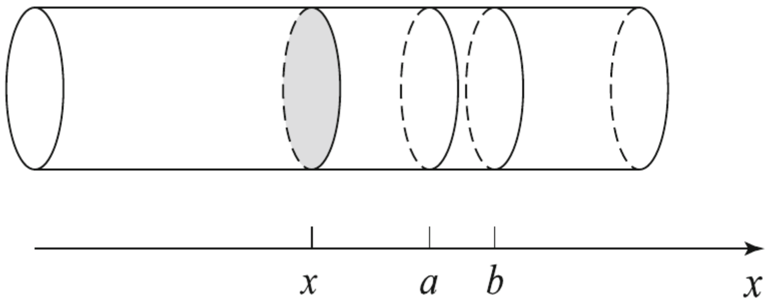

Figura 5.1.: Cilindro en el que fluye una masa de gas, en x hay una sección transversal

Así el flujo másico tendrá unidades de kilogramos "kg" por segundo "s", es decir una medida de la cantidad de masa que pasa por cada segundo en un x particular.

Debido a que el flujo másico tiene unidades de kilogramos por segundo, entonces podemos derivar la ecuación (5.1) de donde obtenemos la razón de cambio de la masa en el intervalo $[a, b]$ por la expresión (5.4):

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx = \overbrace{\rho(a,t)v(a,t)}^{masa\ que\ entra} - \underbrace{\rho(b,t)v(b,t)}_{masa\ que\ sale} \tag{5.4}$$

Que se puede interpretar como, el cambio en la masa en un instante de tiempo, es igual a la cantidad de masa que entra en el intervalo, menos la cantidad de masa que sale. La ecuación (5.4) es una forma **integral** de la ley de conservación.

5.3. Casos especiales de las leyes de conservación

5.4. Ejemplos de modelos matemáticos

6. Elementos Finitos

Parte III.

Distributed and Unified Numerics Environment, DuMux - DUNE for Multi-$\{$Phase, Component, Scale, Physics, ...$\}$ flow and transport in porous media

7. Algorítmos y Programación DUNE C++

8. Algorítmos y Programación DUNE Python

B.[**Reilly**]
A.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Probando la llave ssh, probando el repositorio en github, configuration 7 en serio.. jejej.

Índice alfabético

A, 25