ANÁLISIS FUNCIONAL

Esta versión: 19 de mayo de 2020

Profesor: Carlos Conca
Año: 2020
Autor: Francisco Muñoz

Depto. de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

Fecha: 6 de abril de 2020.

Cátedra 6 (4 No Presencial)

1. Suplementario Topológico

Sea $[E, \| \bullet \|]$ un espacio de Banach.

Definición 1.1 (Suplementario Topológico)**.** Sea E ev y G sev de E. Se dice que L, sev es suplementario de G si $E = G \oplus L$ (ie, si $E = G + L \wedge G \cap L = \emptyset$)

Sigue que $\forall z \in E$, este se descompone de manera única como $z = x + y$, $x \in G$, $y \in L$.
Todo G sev de E posee suplementario algebraico. Definiendo $x \sim y \iff (x - y) \in G$, obtenemos

$$E\Big|_G \overset{\text{(def)}}{=} \{\dot{a} | x \in E,\ \dot{x} = \{y \in E | (x - y) \in G\}\},$$

donde

$$\dot{x} = \{x\} + G$$

$E\Big|_G$ es un sev. $E\Big|_G$ es, salvo identificación, un suplementario algebraico de G.
Identificación: $\Phi : \dot{x} \mapsto \Phi(\dot{x}) = \bar{x}$, donde $\bar{x}$ es un elemento escogido de $\dot{x}$.
$\forall x \in E$,

$$x = \Phi(\dot{x}) + \underbrace{(x - \Phi(\dot{x}))}_{\in G}$$
$$\implies E = G + \Phi(E\Big|_G)$$

Si E es evn, $E\Big|_G$ es un evn con la norma

$$\| \dot{x} \|_{E|_G} = \inf_{x \in \dot{x}} \| x \|_E$$

Ejercicio 1.2. E Banach y G xerrado de E, entonces $[E\Big|_G,\ \| \bullet \|_{E|_G}]$ es Banach.

Definición 1.3. Sea E Banach y G sev cerrado. Diremos que L es un suplementario topológico de G si:

(i) L es cerrado

(ii) $E = G \oplus L$

Observación 1.4. Si G y L son suplementarios topológicos uno del otro, entonces

$$\begin{aligned} p_G : E &\longrightarrow G \\ x + y &\longmapsto x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p_L : E &\longrightarrow L \\ x + y &\longmapsto y \end{aligned}$$

son continuas.
En efecto, sea $X = G \times L$ dotado de la norma

$$\| (x,\ y) \|_X = \| x \|_E + \| y \|_E$$

y

$$\begin{aligned} T : [X,\ \| \bullet \|_X] &\longrightarrow [E = G + L,\ \| \bullet \|_E] \\ (x,\ y) &\longmapsto T(x,\ y) = x + y \end{aligned}$$

es biyectivo y continuo. Luego T^{-1} es continuo, y entonces $\exists c \geq 0$ tal que:

$$\| (x,\ y) \|_X = \| x \|_E + \| y \|_E \leq c \| x + y \|_E$$

Ejemplo 1.5. :

(1) E Banach y G sev de dimensión finita, y entonces cerrado.

Su suplementario algebraico es $EE\big|_G$, que es Banach, pues G es cerrado. Luego $E\big|_G$ es cerrado y entonces es suplementario topológico.

(2) E Banach y G sev de E de codimensión finita, ie

$$\operatorname{cod} G \overset{\text{(def)}}{=} \dim E\big|_G < +\infty,$$

Luego $E\big|_G$ es de dimensión finita, y entonces cerrado.

Resulta que $G = E\big|_L$, y como L es cerrado, G también lo es.

Fecha: 7 de abril de 2020.

Cátedra 7 (5 No Presencial)

Ejemplo 1.6. :

(1) E Banach, G sev cerrado de E, $\dim G < +\infty$. Con esto, $E\big|_G$ es cerrado y entonces es suplementario topológico de G.

(2) G sev de E de codimensión finita, ie, $\dim E\big|_G < +\infty$

(3) E es un espacio de Hilbert. Todo sev G de E cerrado, posee suplementario topológico y es:

$$L = G^{\perp} = \{x \in E | \langle x,\ y\rangle = 0 \quad \forall y \in G\}$$

(4) E Banach, $f_1,\ \ldots,\ f_n \in E'$ y $G = \{x \in E | \langle f_i,\ x\rangle = 0 \quad \forall i = 1,\ \ldots,\ n\}$ (es cerrado y sev).

Proposición 1.7.

$$\operatorname{codim} G = n$$

Demostración. Demostraremos que $\exists x_1,\ \ldots,\ x_n \in E$ l.i. tales que $E = G \oplus < x_1,\ \ldots,\ x_N >$ n.

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = (\langle f_1,\ x\rangle,\ \ldots,\ \langle f_n,\ x\rangle) \end{array}$$

φ es sobreyectiva, pues sino lo fuera $\exists \alpha \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha \cdot (\langle f_1,\ x\rangle,\ \ldots,\ \langle f_n,\ x\rangle) \quad \forall x \in E$, ie:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle f_i,\ x\rangle = 0 \iff \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i,\ x\rangle = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0 \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

$$\rightarrow\leftarrow$$

Como φ es sobreyectiva, tomando $e_i = (0,\ \ldots,\ \underbrace{1}_{i},\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^n$, $\exists x_i \in E$ tal que

$$\varphi(x_i) = e_i$$

Así: $\langle f_j,\ x_i\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$

Luego $E =$ $\square$

Fecha: 13 de abril de 2020.

Cátedra 8 (6 No Presencial)

Definición 1.8 (Espacio ortogonal)**.** Sea E ev Banach, M sev de E. Se define: Espacio Ortogonal $M^\perp$

$$M^\perp \overset{\text{(def)}}{=} \{f \in E' | \langle f,\ x\rangle_{E',E} = 0,\ \forall x \in M\} \quad \text{(Es cerrado en } E')$$

Si N sev de E', se define

$$N^\perp \overset{\text{(def)}}{=} \{x \in E | \langle f,\ x\rangle_{E',E} = 0,\ \forall f \in N\} \quad \text{(Es cerrado en } E)$$

Proposición 1.9. Prop. de los "ortogonal de ortogonales"

(*i*) $(M^\perp)^\perp = \operatorname{adh} M$

(*ii*) $(N^\perp)^\perp \supseteq \operatorname{adh} N$

Si el espacio es de Hilbert, el producto interno coincide con el producto escalar. De esta forma, esta definición coincide con la noción vista en espacio finito.

Proposición 1.10. *Sea E un ev de Banach. G, L sev de E cerrados.*

(*i*) $G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$

(*ii*) $G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp$

Demostración. :
(*i*) Sea $x \in G \cap L$ y probemos que $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$, ie, pdq $\langle f,\ x\rangle = 0 \forall f \in G^\perp + L^\perp$.
Pero $f \in G^\perp + L^\perp \iff f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in G^\perp$ y $f_2 \in L^\perp$, y entonces $\langle f_1,\ x\rangle = 0$ pues $x \in G$ y $\langle f_2,\ x\rangle = 0$ pues $x \in L$.
Por lo tanto $\langle f_1 + f_2,\ x\rangle = 0$. De esta forma, $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$
Inversa $^{\text{mte}}$, es claro que

$$G^\perp \subseteq G^\perp + L^\perp \implies (G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq (G^\perp)^\perp = \operatorname{adh} G = G$$

Pues G es cerrado. Analoga $^{\text{mte}}$:

$$(G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq L$$

Entonces $(G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq G \cap L$. Por lo tanto, $(G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L$.
(*ii*) pdq $(G^\perp \cap L^\perp)^\perp = (G + L)^\perp$
Sea $f \in G^\perp \cap L^\perp$ y probemos que $f \in (G + L)^\perp$, ie,

$$\langle f,\ x\rangle = 0 \quad \forall x \in G + L$$

Pero, como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in G$, $x_2 \in L$, sigue que

$$\langle f,\ x_1\rangle = 0 \quad \text{pues } f \in G^\perp$$

$$\langle f,\ x_2\rangle = 0 \quad \text{pues } f \in L^\perp$$

Sumando, sigue que

$$\langle f,\ x_1 + x_2\rangle = 0$$

y entonces $f \in (G + L)^\perp$.
Inversa $^{\text{mte}}$:

$$G \subseteq G + L$$

tomando ortogonal

$$\left.\begin{array}{l}(G^\perp + L)^\perp \subseteq G^\perp \\ (G^\perp + L)^\perp \subseteq L^\perp\end{array}\right\} \implies (G^\perp + L)^\perp \subseteq G^\perp \cap L^\perp$$

Concluyendo así que

$$(G^\perp + L)^\perp = G^\perp \cap L^\perp$$

□

$$G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$$

Tomando $\perp$:

$$(G \cap L)^\perp = (\underbrace{G^\perp + L^\perp}_{\text{sev } E'})^{\perp^\perp} \supseteq \mathrm{adh}(G^\perp + L^\perp)$$

$$G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp$$

$$\overset{(\perp)}{\implies} (G^\perp \cap L^\perp)^\perp = (G+L)^{\perp^\perp} = \mathrm{adh}(G+L)$$

Si G y L cerrados, ¿Será $G + L$ cerrado? La respuesta no es trivial, y la respuesta viene de un teorema (que no tiene tantas aplicaciones).

2. Noción de Adjunto y Operadores No Acotados

Vamos a poner énfasis en las diferencias en la dim. finita y dim infinita.

En dim. finita, lo interesante es que todo operador lineal es continua. La gran diferencia con la dim. infinita es que no todos los operadores lineales son continuos, y uno comienza a caracterizar la cont. en el caso de la dim. infinita.

En el caso de la dim finita se prueba que todos los op. lineales son continuos y acotados. De hecho, se hace una caracterización de que si es acotado, es continuo.

Definición 2.1. Sea E, F ev Banach. Un operador $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$ con $\mathcal{D}(T)$ sev de E, se denomina operador (lineal) lineal no-acotado Op. Lineal **no acotado**

Definición 2.2. T se dice **acotado** si Op. Lineal **acotado**

$$\exists M \geq 0,\ \| Tx \|_F \leq M \| x \|_E\ \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

Una función se le dice **no lineal** si es una función cualquiera. Y una función lineal es tmb. no lineal. Los matemáticos "conviven" con esta pequeña contradicción.

Nota 2.3. *Un operador acot. es tmb no-acotado, pero no hay que perder el sueño por esto.*

En dim. finita, todo op. lineal se representa por una matriz.

Ejercicio 2.4. Si $E = \mathbb{R}^N$, $F = \mathbb{R}^M$ y $T : \mathcal{D}(T) = \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, entonces

$$(T \text{ es no-acotado}) \iff (T \text{ es acotado}) \iff (T \text{ es continua en } E)$$

Definición 2.5. Un op. $T : \underset{(\mathcal{D}(T) \text{ sev de } E)}{\mathcal{D}(T)} \subseteq E \to F$ se dice **cerrado** si $\mathrm{Gr}(T)$ es cerrado en $E \times F$

Recordando que

$$\mathrm{Gr}\, T = \{(x,\ Tx) | x \in \mathcal{D}(T)\} \subseteq E \times F$$

Nota 2.6. *:*

(i) T cerrado $\implies$ $\ker T$ es cerrado, pues

$$\ker T \times \{0\} = \mathrm{Gr}\, T \cap (E \times \{0\}), \quad \textit{que es cerrado}$$

(ii) $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$ *es cerrado* $\iff$

$$\left.\left\{\begin{array}{l} x_n \in \mathcal{D}(T),\ x_n \to x \in E \\ y_n = Tx_n \to y_n \\ \Big(ie,\ (x_n,\ y_n) \in \operatorname{Gr} T,\ (x_n,\ y_n) \to (x,\ y)\Big) \end{array}\right.\right\} \implies x \in \mathcal{D}(T) \wedge y = Tx$$

(iii) *Para T cerrado, **no** podemos usar el teo. del grafo cerrado, y concluir que T es continua. (hay que evitar la tentación de ocupar este teorema y decir que T es cont).*

Fecha: 14 de abril de 2020.

Cátedra 9 (7 No Presencial)

Operadores no Acotados y Noción de Operador Adjunto

Definición 2.7. Una función $T:\underbrace{\mathcal{D}(T)}_{\text{sev } E}\subseteq E\to F$ lineal es un operador no acotado

Definición 2.8. T se dice acotado si $\exists c\geq 0:\ \| Tx \|_F \leq c\| x \|_E, \quad \forall x\in\mathcal{D}(T)$

Definición 2.9. Un operador $T:\mathcal{D}(T)\subseteq E\to F$ se dice **cerrado** si $\operatorname{Gr} T$ es cerrado en $E\times F$, donde $\operatorname{Gr} T=\{(x,\ Tx)|x\in\mathcal{D}(T)\}$

Nota 2.10. *:*

(1) T *cerrado* $\implies \ker T$ *cerrado*

$$\ker T\times\{0\}=\operatorname{Gr} T\cap(E\times\{0\})$$

(2) T *cerrado* $\iff (x_n)\subseteq\mathcal{D}(T)$

$$y_n=Tx_n,\quad \left.\begin{matrix} x_n\to x\\ y_n\to y\end{matrix}\right\}\implies x\in\mathcal{D}(T)\ \wedge\ y=Tx$$

3. Noción de Adjunto

Queremos generalizar la noción de matriz transpuesta, y se define el adjunto (o traspuesto) para esta generalización en dimensión infinita.
Sean E, F ev Banach $T:\mathcal{D}(T)\subseteq E\to F$ tal que $\operatorname{adh}\mathcal{D}(T)=E$ Queremos definir un operador T^* , adjunto de T a partir de la propiedad fundamental (o básica) siguiente:

$$\langle Tx,\ y\rangle_{F,F'}=\langle x,\ T^*y\rangle_{E,E'},\quad \forall x\in\mathcal{D}(T),\ \forall y\in\mathcal{D}(T^*) \tag{3.1}$$

Si uno quiere que (3.1) sea cierto, lo primero que observamos es que $T^*:\mathcal{D}(T^*)\subseteq F'\to E'$ y además $y\in\mathcal{D}(T^*)\iff$ (3.1) se cumple $\forall x\in\mathcal{D}(T)\iff x\in\mathcal{D}(T)\mapsto\langle Tx,\ y\rangle_{F,F'}$ es una forma lineal continua en $\mathcal{D}(T)$
Así,

$$\mathcal{D}(T^*)=\{y\in F'|\exists c\geq 0,\ |\langle Tx,\ y\rangle|\leq c\| x \|_E\ \forall x\in\mathcal{D}(T)\}$$

Además, si $y\in\mathcal{D}(T^*)$, entonces la forma lineal $g_y:\mathcal{D}(T)\subseteq E\to\mathbb{R}$ tal que $x\mapsto\langle Tx,\ y\rangle$ es continua, y entonces se extiende de manera única a una forma lineal continua $\tilde{g_y}:E\to F$, además

$$\left|\langle\tilde{g_y},\ x\rangle\right|\leq c\| x \|_E\quad\forall x\in E$$

Se define

$$T^*y=\tilde{g_y}$$

Proposición 3.1. $T:\mathcal{D}(T)\subseteq E\to F,\ \operatorname{adh} T=E$ *entonces* T^* *es cerrado*

Demostración. Sea $(y_n,T^*y_n)\in\operatorname{Gr} T^*\subseteq F'\times E'$ tal que $y_n\to z$ en $F'\wedge T^*y_n\to u$ en E'
pdq $z\in\mathcal{D}(T^*),\ u=T^*z$
Ahora bien sabemos que $\forall x\in\mathcal{D}(T)$

$$\langle Tx,\ y_n\rangle=\langle x,\ T^*y_n\rangle$$

y haciendo $n \to \infty$

$$\langle Tx,\ z\rangle = \langle x,\ u\rangle,\ \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

y entonces $z \in \mathcal{D}(T^*)$, pues

$$|\langle Tx,\ y\rangle| = |\langle x,\ u\rangle| \leq \|\ u\ \|_{E'} \|\ x\ \|_{E} \leq c\|\ u\ \|_{E},\ x \in \mathcal{D}(T)$$

Además $T^* z = u$ $\square$

Todo esto es un espiritu llamado “la dualidad”, la cual es posiblemente la mayor contribución de las matemáticas a la humanidad. Los operadores duales son ocupadas ampliamente en la mecánica cuántica, matematizandola, y mejorando el entendimiento del mundo que nos rodeamos. Aunque estos conceptos no sean fácil de comprender.

En optimización, también se ocupa bastante los conceptos de dualidad.

Nota 3.2.

$$\begin{aligned} &\textit{Sea } (y,\ T^*y = f) \in \operatorname{Gr} T^* \\ &\quad \iff \langle Tx,\ y\rangle = \langle x,\ f\rangle\ \forall x \in \mathcal{D}(T) \\ &\quad \iff -\langle x,\ f\rangle + \langle Tx,\ y\rangle = 0\ \forall x \in \mathcal{D}(T) \\ &\quad \iff \langle (x,\ Tx),\ (-f,\ y)\rangle = 0\ \forall x \in \mathcal{D}(T) \\ &\quad \iff (-f,\ y) \in (\operatorname{Gr} T)^{\perp}\ \forall x \in \mathcal{D}(T) \end{aligned}$$

$J(\operatorname{Gr} T^*) = (\operatorname{Gr} T)^{\perp},$ *donde* $J : (y,\ f) \in F' \times E' \mapsto (-f,\ y) \in E' \times F'$

Fecha: 20 de abril de 2020.

Cátedra 10 (8 No Presencial)

$T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$, donde $\operatorname{adh} \mathcal{D}(T) = E$ (se puede obviar pues es spg)
Se quiere definir T^*, el operador adjunto
Que satisfaga la siguiente identidad

$$\langle Tx,\ y\rangle_{F,F'} = \langle x,\ T^*y\rangle_{E,E'} \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)\ \forall y \in \mathcal{D}(T^*) \tag{3.2}$$

$$(3.2) \implies \begin{cases} T^* : \mathcal{D}(T^*) \subseteq F' \to E' \\ \mathcal{D}(T^*) = \{y \in F' | x \mapsto \langle Tx,\ y\rangle,\ x \in \mathcal{D}(T) \text{ es lineal ie, } \exists c \geq o\text{; continua, } |\langle Tx,\ y\rangle| \leq x\|\ x\ \|\ \forall x \in \mathcal{D}(T)\ \} \\ T^*y = (x \in \mathcal{D}(T) \to \langle Tx,\ y\rangle) \end{cases}$$

Proposición 3.3. *:*
(1) T^* *es cerrado.*
(2) $(\operatorname{Gr} T)^\perp = J(\operatorname{Gr} T^*)$

$$\begin{array}{rccc} J: & F' \times E' & \to & E' \times F' \\ & (y,\ f) & \mapsto & (-f,\ y) \end{array}$$

Proposición 3.4. $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$ *cerrado y* $\operatorname{adh} \mathcal{D}(T) = E$ *entonces*

(*i*) $\ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp$

(*ii*) $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$

(*iii*) $(\ker T)^\perp \supseteq \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*)$

(*iv*) $(\ker T^*)^\perp = \operatorname{adh}(\operatorname{im} T)$

Demostración. :
$G \overset{\text{(def)}}{=} \operatorname{Gr} T$, $L \overset{\text{(def)}}{=} E \times \{0\}$. G, L sev de $E \times F$, ¡cerrado! □

Lema 3.5. $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$ *no-acotado*
y sean $G = \operatorname{Gr} T \wedge L = E \times \{0\}$. *Entonces*

(*i*) $\ker T \times \{0\} = G \cap L$

(*ii*) $E \times \operatorname{im} T = G + L$

(*iii*) $\{0\} \times \ker T^* = G^\perp \cap L^\perp$

(*iv*) $\operatorname{im} T^* \times F' = G^\perp + L^\perp$

Demostración. **Queda como ejercicio para el lector c:** □

Demostración. (De la proposición)
(*i*) pdq

$$\ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp$$

Gracias a (*iv*) en el lema 3.5, y tomando $\perp$

$$(\operatorname{im} T^* \times F')^\perp = (G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L$$

y entonces

$$(\operatorname{im} T^*)^\perp \times \{0\} = GcapL = \ker T \times \{0\}$$

Luego, $(\operatorname{im} T^*)^\perp = \ker T$.

(ii) pdq
$$\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$$

Gracias a (ii) en el lema 3.5 y tomando $\perp$ nos queda que:

$$(\operatorname{im} T \times F)^\perp = (G + L)^\perp \overset{\text{ver guia 2}}{=} G^\perp \cap L^\perp$$

y entonces
$$\{0\} \times (\operatorname{im} T)^\perp = G^\perp \cap L^\perp \overset{\text{lema 3.5}}{=} \{0\} \times \ker T^*$$

(iii) pdq
$$(\ker T)^\perp \supseteq \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*)$$

Tomando $\perp$ en (i),
$$(\ker T)^\perp = (\operatorname{im} T^*)^{\perp^\perp} \supseteq \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*)$$

(iv) Basta toma $\perp$ a (ii) $\square$

Nota 3.6. *Hay ejemplos explícitos en que la inclusión en* (iii) *es estricta.*
Resolver el ejercicio #2, lista #3:

$$E = \ell_1 (\implies E' = \ell_\infty)$$
$$\begin{array}{rcl} T : \ell_1 & \to & \ell_\infty \\ u = (u_n)_n & \mapsto & Tu = \left(\frac{u_n}{n}\right)_n \end{array}$$

Calcular $\ker T$, $(\ker T)^\perp$, T^*, $\ker T^*$, $(\ker T^*)^\perp$, $\operatorname{im} T$, $\operatorname{im} T^*$, *etc.*

Ejercicio 3.7 (Caracterización de operadores a imagen cerrada)**. Nuestro sueño:**

$$\ulcorner \qquad Tu = f \qquad \lrcorner$$

Sea $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$, $\operatorname{adh} \mathcal{D}(T) = E$, T cerrado
TFAE:

(i) $\operatorname{im} T$ es cerrada en F

(ii) $\operatorname{im} T^*$ es cerrada en E'

(iii) $(\ker T)^\perp = \operatorname{im} T^*$

(iv) $(\ker T^*)^\perp = \operatorname{im} T$

Teorema 3.8 (Caracterización de operadores sobreyectivos)**.** *:*
Bajo las mismas hipótesis del ejercicio anterior
TFAE

(i) T *es sobreyectivo*

(ii) $\exists c \geq 0 :\ \| y \|_{F'} \leq c \| T^* y \|_{E'}\ \forall y \in \mathcal{D}(T^*)$

(iii) T^* *es inyectivo* $(\ker T^* = \{0\}) \wedge \operatorname{im} T^*$ *es cerrada.*

Nota 3.9. *Cómo se usa la equivalencia* $(i) \iff (ii)$ *en la práctica. La idea es plantear la ecuación*
$$T^* v = g \quad (\text{en } E')$$

En la práctica los operadores son autoadjuntos o simétricos, por lo tanto esta ecuación es prácticamente la misma que la original $(Tu = f)$

Entonces nos planteamos esta ecuación con g *cualquiera y se dice así mismo, siempre que* v *tiene solución y trato de probar que* $\| v \| \leq c \| g \|$ *con* c *indep. de la función* v.

Entonces tratamos de estimar la solución en vez de encontrarla.

Esto se llama la ***Técnica de las estimaciones a priori****.*

Fecha: 21 de abril de 2020.

Cátedra 11 (9 No Presencial)

Teorema 3.10 (Caracterización operadores acotados). *Sea* $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$*;* $\operatorname{adh} \mathcal{D}(T) = E$*,*
T cerrado
Son equivalentes:

(i) $\mathcal{D}(T) = E$

(ii) *T es acotado*

(iii) $\mathcal{D}(T^*) = F'$

(iv) *T^* es acotado*

Y en estas condiciones, $\| T \|_{\mathcal{L}(E,\ F)} = \| T^* \|_{\mathcal{L}(F',\ E')}$

Defina $G = \operatorname{Gr} T$ y $L = E \times \{0\}$
Que son sev de E cerrados
Recuerdo: Ejercicio #4 (Lista #3)

(i) $\ker T \times \{0\} = G \cap L$

(ii) $E \times \operatorname{im} T = G + L$

(iii) $\{0\} \times \ker T^{\perp} = G^{\perp} \cap L^{\perp}$

(iv) $\operatorname{im} T^* \times F' = G^{\perp} + L^{\perp}$

1. $\operatorname{im} T$ es cerrado
   $\iff$ $E \times \operatorname{im} T$ es cerrado en $E \times F$
   $\iff$ $G + L$ es cerrado en $E \times F$.

2. $\operatorname{im} T^*$ es cerrada
   $\iff$ $\operatorname{im} T^* \times F'$ es cerrada en $E' \times F'$
   $\iff$ $G + L$ es cerrada en $E' \times F'$

3. $(\ker T)^{\perp} = \operatorname{im} T^*$
   $\iff$ $(\ker T)^{\perp} \times F' = T^* \times F'$
   $\iff$ $(G \cap L)^{\perp} = G^{\perp} + L^{\perp}$

4. $(\ker T^*)^{\perp} = \operatorname{im} T$
   $\iff$ $E \times (\ker T^*)^{\perp} = E \times \operatorname{im} T$
   $\iff$ $(G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} = G + L$

Con esto, el teorema #1 es simplemente una reescritura del teorema en la pág 2, guía #2.

Demostración. Del Teorema (3.10):
Usemos el Teorema #1 para probar que $(i) \iff (iii)$
Probemos primero que $(i) \implies (iii)$
Sabemos que $(\ker T^*)^{\perp} \underset{\text{(iv) en Teo. 1}}{=} \operatorname{im} T = F$
$\implies \ker T^* = \{0\}$ gracias a (i), luego T^* es inyectivo.
Además $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^{\perp}$ y entonces cerrada.
$(iii) \underset{\text{Por Teo, 1}}{\implies} \operatorname{im} T$ es cerrada, pero además, por Teo. 1 parte (iv)
$\operatorname{im} T = (\ker T^*)^{\perp} = \{\ 0\ \}^{\perp} = F$.
Demostremos que $(ii) \implies (iii)$
Si $T^* y = 0$, entonces como $\| y \| \leq c \| T^* y \| = 0$, sigue que $y = 0$. Así T^* es inyectivo.

Sea $(y_n)_n$ sucesión en $\operatorname{im} T^*$ tal que $y_n \to y$ en E'

pdq $y \in \operatorname{im} T^*$

Escribamos $y_n = T f_n$ con $f_n \in \mathcal{D}(T^*)$

Gracias a (ii), $\forall n,\ m$

$$\| f_n - f_m \| \leq c \| y_n - y_m \| \overset{n,\ m \to \infty}{\to} 0$$

y entonces (f_n) es de Cauchy en F', y entonces $f_n \to f$ en F'. Con esto,

$$\left.\begin{array}{r} f_n \in \mathcal{D}(T^*), f_n \to f \text{ en } F' \\ y_n = T^* f_n \to y \text{ en } E' \end{array}\right\} \overset{T^* \text{ es cerrado}}{\Longrightarrow} (f,\ y) \in \operatorname{Gr} T^*, \text{ ie, } f \in \mathcal{D}(T^*),\ y = T^* f$$

Recapitulando:
$(i) \iff (iii)$ en Teo.2 V
$(ii) \implies (iii)$ en Teo.2 V

pdq $(iii) \implies (ii)$ o $(i) \implies (ii)$ en Teo. 2

Supongamos que (i) en Teo. 2 es Verdadero.

y usaremos el Teorema de B-S al cjto.

$$G = \{ y \in \mathcal{D}(T^*) \subseteq F' \mid \| T^* y \|_{E'} \leq 1 \}$$

Comencemos chequeando que es puntualmente acotado: Sea $f \in F$,

$$\sup_{y \in G} |\langle y,\ f \rangle| \underset{\text{Pues } T \text{ es epiy}}{\overset{\text{para algún } x \in E}{=}} \sup_{y \in G} |\langle y,\ Tx \rangle| = \sup_{y \in G} |\langle T^* y,\ x \rangle| \leq \underbrace{\sup_{y \in G} \| T^* \|}_{\leq 1} \| x \| = \| x \| < \infty$$

Gracias a B-S, G está unif $^{\text{mte}}$ acotada, ie, $\exists M \geq 0$ tal que

$$\| y \| \leq M \quad \forall y \in G$$

Conclusión intermedia

$$\left.\begin{array}{r} y \in \mathcal{D}(T^*) \\ \| T^* y \|_{E'} \leq 1 \end{array}\right\} \implies \| y \|_{F'} \leq M$$

Luego, $\forall y \in \mathcal{D}(T^*)$

$$\| y \| \leq M \| T^* y \|$$

En efecto, sea $z \in \mathcal{D}(T^*)$, cualquiera, y definamos $y = \frac{z}{\| T^* z \|}$. Luego,

$$\| z \| = \| T^* z \| \| y \|$$

pues $\| T^* y \| = 1$

$\square$

Demostración. **(Del Teorema 3)**

Primero demostremos que $(i) \implies (ii)$ en Teo. 3

Usando Graf. Cerrado, (que se puede usar pues el esp. $[\mathcal{D}(T) = E,\ \| \bullet \|]$ es Banach)

Como T es cerrado, es acotado o continuo

Demostremos que $(ii) \implies (iii)$ en Teorema 3.

pdq si T es acot. cont. $\implies \mathcal{D}(T^*) = F'$

Sea $y \in F'$. Miremos la app.

$$x \in E \mapsto \langle y,\ Tx \rangle$$

Ahora bien,

$$|\langle y,\ Tx \rangle| \leq \| y \| \| Tx \| \leq \underbrace{\| y \| \| T \|}_{c} \| x \| = c \| x \|$$

y entonces $y \in \mathcal{D}(T^*)$

$\square$

Fecha: 27 de abril de 2020.

Cátedra 12 (10 No Presencial)

Teorema 3.11. *E, F esp. de Banach $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$*
$\operatorname{adh} \mathcal{D}(T) = E$, *$T$ es cerrado.*
Son equivalentes:

(i) $\mathcal{D}(T) = E$

(ii) *T es acot.*

(iii) $\mathcal{D}(T^*) = F'$

(iv) *T^* es acotado*

Bajo estas condiciones:

$$\| T \|_{\mathcal{L}(E;\ F)} = \| T^* \|_{\mathcal{L}(F';\ E')}$$

Demostración. :
(i) $\implies$ *(ii)* Basta con usar el teorema del grafo cerrado.
(ii) $\implies$ *(iii)* Basta con usar la definición $\mathcal{D}(T^*)$.
(iii) $\implies$ *(iv)* Basta usar nuevamente Teo. Graf. Cerrado.
(iv) $\implies$ *(i)* (Este es un poco menos trivial)
Comencemos probando que *(iv)* $\implies$ $\mathcal{D}(T^*)$ es cerrado. En efecto:
Sea $(y_n) \in \mathcal{D}(T^*)$ tq $y_n \to y \in F'$, y probemos que $y \in \mathcal{D}(T^*)$,
La idea es usar la hipótesis *(iv)*.
Como T^* es acot.,
Y entonces $(T^* y_n)_n$ es de Cauchy en E', y entonces converge, digamos,
$T^* y_n \overset{n\to\infty}{\to} f \in E'$. Con esto, $((y_n,\ T^* y_n))$ es convergente en $F' \times E'$, y como está en $\operatorname{Gr} T^*$, que es cerrado, se concluye que $(y,\ f) \in \operatorname{Gr} T^*$
En particular $y \in \mathcal{D}(T^*)$
Probemos ahora que $\mathcal{D}(T)$ es también cerrado, lo que permite concluir $\mathcal{D}(T) = E$, pues $\mathcal{D}(T)$ es denso en E. Para ello definamos

$$G = \operatorname{Gr} T \wedge L = \{0\} \times F$$

sev de $E \times F$, cerrados, se tiene que

$$G + L = \mathcal{D}(T) \times F$$

$$\left.\begin{aligned} G^\perp = (\operatorname{Gr} T)^\perp = J(\operatorname{Gr} T^*) \\ L^\perp = E' \times \{0\} \end{aligned}\right\} G^\perp + L^\perp = E' \times \mathcal{D}(T^*)$$

y entonces $G^\perp + L^\perp$ es cerrado en $E' \times F'$.
Luego, gracias al Teorema de la pág. 2 de la guía #2, $G + L$ es cerrado, y entonces $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en E.
Por último, probemos que $\| T \| = \| T^* \|$
Sabemos que

$$\langle y,\ Tx \rangle = \langle T^* y,\ x \rangle \forall x \in \mathcal{D}(T) \forall y \in \mathcal{D}(T^*)$$

$$|\langle y,\ Tx \rangle| \leq \| T^* y \| \| x \| \leq \| T^* \| \| y \| \| x \|$$

$$\underbrace{\sup_{y\in F'}\frac{|\langle y,\ Tx\rangle|}{\| y \|}}_{=\|Tx\|_F} \leq \| T^* \| \| x \|$$

y así

$$\| Tx \| \leq \| T^* \| \| x \|$$

lo que implica que $\| T \| \leq \| T^* \|$

$$\| T^*y \|_{E'} = \sup_{x\in E}\frac{|\langle T^*y,\ x\rangle|}{\| x \|_E} = \sup_{x\in E}\frac{|\langle y,\ Tx\rangle|}{\| x \|_E} \leq \frac{\| y \| \| Tx \|}{\| x \|} \leq \| y \| \| T \|$$

y entonces $\| T^* \| \leq \| T \|$

$\square$

Notas y comentarios

(1) El teo. 2 posee una versión dual que dice que Si T es a dominio denso y cerrado, entonces T^* es sobrey. $\iff$ $\exists c \geq 0 :\ \| x \| \leq c\| Tx \| \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$ $\iff$ T es inyectivo y $\operatorname{im} T$ es cerrada.

Su dem. es una aplicación del Teo. 2 a T^*, pues no sabemos que T^* tenga dominio denso.

(2) Si $\dim E < +\infty$ o si $\dim F < +\infty$ entonces se tiene

$$T \text{ es iny. } \iff T^* \text{ es sobrey.}$$

$$T^* \text{ es iny. } \iff T \text{ es sobrey.}$$

pues $\operatorname{im} T$ y $\operatorname{im} T^*$ son cerrados, y como $(\ker T)^\perp = \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*) = E'$, y $\ker T = \{0\}$. También $(\ker T^*)^\perp = \operatorname{adh}(\operatorname{im} T) = F$

En dimensión infinita, sólo se tiene

$$T \text{ es sobrey} \implies T^* \text{ es iny.}$$

$$T^* \text{ es sobrey} \implies T \text{ es iny.}$$

Y la inversa **no** es cierta en gral.

Contraejemplo

$E = F = \ell_2$ $T : E \to F$ $u = (u_n)$ $Tu = v = \left(\frac{u_n}{n}\right)$

Como E es Hilbert, $E' = F' = \ell_2$. Además, T es continua y que $T^* = T$. En efecto,

$$\langle Tu,\ v\rangle = \langle\left(\frac{u_n}{n}\right),\ (v_n)\rangle = \sum_n \frac{u_n}{n}v_n = \sum_n u_n\frac{v_n}{n} = \langle u,\ T^*v\rangle$$

Luego, $T^*v = \left(\frac{v_n}{n}\right) = Tv$

Claramente, T y T^* son inyectivos, pues

$$Tv = 0 \iff u \equiv 0$$

Pero, T (resp. T^*) **no** es sobre, pues

$$\operatorname{im} T = \{v \in \ell_2 | v = \left(\frac{u_n}{n}\right),\ u \in \ell_2\} = \{v \in \ell_2 | (nv_n) \in \ell_2\}$$

$\left(\frac{1}{n^2}\right) \in \ell_2$, pero, $\left(n\frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) \notin \ell_2$

$\left(\frac{1}{n^2}\right) \in \ell_2$, pero, $\left(\frac{1}{n^2}\right) \notin \operatorname{im} T$.

4. Doble adjunto T^{**}

Teorema 4.1. *Sean E, F Banach reflexivos. (ie, $E'' = E$, $F'' = F$). Si $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$ es cerrado y* $\operatorname{adh} \mathcal{D}(T) = E$*, entonces $\mathcal{D}(T^*)$ es denso en F'.*

En este caso, podemos definir $T^{**} : \mathcal{D}(T^{**}) \subseteq E'' \to F''$ o bien $T^{**} : \mathcal{D}(T^{**}) \subseteq E \to F$ y $T^{**} = T$.

Fecha: 28 de abril de 2020.

Cátedra 13 (11 No Presencial)

Queriamos definir el operador doble adjunto

$$(T^*)^*$$

con T^* cerrado. Queremos saber si

$$\operatorname{adh}\mathcal{D}(T^*) \stackrel{?}{=} F'$$

Teorema 4.2. *Sean E y F Banach reflexivo. $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$ tal que $\operatorname{adh}\mathcal{D}(T) = E$, T cerrado.*

Entonces $\operatorname{adh}\mathcal{D}(T^*) = F'$.

En estas condiciones, podemos definir el adjunto del adjunto $(T^*)^*$ y resulta que $T^{**} = T$

Donde

$$(T^*)^* : \mathcal{D}(T^{**}) \subseteq E'' \to F''$$

Demostración. Usaremos el siguiente corolario de H-B:

Corolario 4.3. *Dado G sev de E, si $f \in E'$, $\langle f,\ x\rangle = 0\ \forall x \in G$ verifica $f = 0$, entonces $\operatorname{adh} G = E$*

o bien, viendo la contrarreciproca:

Dado G sev de E no denso, entonces $\exists f \in E' - \{0\}$ tal que $\langle f,\ x\rangle = 0\ \forall x \in G$.

Ocupemos este corolario en su contrarreciproca.

Supongamos que $\exists \varphi \in F''$ no nulo tal que $\langle \varphi,\ \omega\rangle = 0\ \forall \omega \in \mathcal{D}(T^*) \subseteq F'$

Como $\varphi \in F''$, que es reflexivo, $\exists f \in E$ tal que

$$\langle \varphi,\ v\rangle = \langle v,\ f\rangle \quad \forall v \in F',$$

es decir, φ se puede representar con f.

Como φ se anula al evaluarse en $\mathcal{D}(T^*)$, entonces $f \in \mathcal{D}(T^*)^{\perp}$ (ie, su representante).

¿Qué podemos decir del par $(0,\ f)$? Tendremos que $(0,\ f) \notin \operatorname{Gr}(T)$, que es cerrado. Luego, podemos separar estrictamente $\operatorname{Gr}(T)$ de $\{(0,\ f)\}$ en $E \times F$

Luego, $\exists (z,\ y) \in E' \times F'$ y $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle z,\ x\rangle + \langle y,\ Tx\rangle < \alpha < (z,\ 0) + (y,\ f) \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

Como $\mathcal{D}(T)$ es sev, sigue que $\alpha > 0$ y

$$\begin{cases} \langle z,\ x\rangle + \langle y,\ Tx\rangle = 0 & \forall x \in \mathcal{D}(T) \\ \langle y,\ f\rangle > 0 \end{cases}$$

De la primera identidad, se concluye que $y \in \mathcal{D}(T^*)$ (y $T^*y = -z$) y como $\langle y,\ f\rangle > 0$ esto contradice que

$$0 = \langle \varphi,\ \omega\rangle = \langle \omega,\ f\rangle \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}(T^*)$$

Cuando ponemos $\omega = y$.

Probemos ahora que $T = T^{**}$. Para ello, demostremos que los grafos son iguales, ie

$$\operatorname{Gr}(T) = \operatorname{Gr}(T^{**})$$

Sabemos que

$$\operatorname{Gr}(T)^{\perp} = J(\operatorname{Gr}(T^*))$$

y

$$\operatorname{Gr}(T^*)^{\perp} = \tilde{J}(\operatorname{Gr}(T^{**}))$$

Donde

$$\begin{array}{rcl} J : F' \times E' & \longrightarrow & E' \times F' \\ (y,\, f) & \longmapsto & (-f,\, y) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \tilde{J} : E'' \times F'' & \longrightarrow & F'' \times E'' \\ (z,\, h) & \longmapsto & (-h,\, z) \end{array}$$

Ocupemos que J y $\tilde{J}$ son biyectivas. luego,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gr}\,(T^{**}) & = & \tilde{J}^{-1}\left(\mathrm{Gr}\,(T^{*})^{\perp}\right) \\ & = & \tilde{J}^{-1}\left(\left(\tilde{J}^{-1}(\mathrm{Gr}\,(T)^{\perp})\right)^{\perp}\right) \\ & \overset{\text{(a)}}{=} & \mathrm{Gr}\,(T)^{\perp\perp} \\ & = & \mathrm{adh}\,\mathrm{Gr}\,(T) \\ & = & \mathrm{Gr}\,(T) \end{array}$$

Donde (a) queda como ejercicio. Es decir,

Ejercicio 4.4. Probar que

$$\tilde{J}^{-1}\left(\left(\tilde{J}^{-1}(H)\right)^{\perp}\right) = H^{\perp}$$

□

5. Capitulo 2:Topología Débiles

La motivación es tratar de entender los conjuntos compactos en dimensión infinita, pues la situación es más compleja que en el caso finito. Como se hablaba al principio del curso, la compacidad siempre está involucrada en los teoremas de existencia en matemáticas. Con lo cual, se está "obligado" a entender bien los compactos.

Dado un conjunto topológico, se tiene que entender bien quienes son los conjuntos compactos. *A priori* se sabe bien quien es abierto y quien es cerrado, pero es difícil saber quien es compacto.

Al menos para la topología de la norma, se es muy difícil ser compacto. Los compactos son conjuntos muy pequeñas (como los singuletes), cosas que no tienen mucho interés en dimensión infinita.

Con lo cuál, la idea las topologías débiles, es tratar de ver en la topología de la norma, y a esta topología, al tener muchos abiertos, se retirarán un número importante de abiertos, hasta tener una topología con mucho menos abiertos, y por lo tanto, con esta nueva topología, los conjuntos pasan a ser mucho más fácilmente ser compacto. Pero la idea es retirar tantos abiertos, pero sin distorcionar completamente la cualidad de ser evn con esta topología. Así, se retiran abiertos manteniendo el dual tal cual.

Como preliminar, nos propondremos el siguiente problema:

Sea X un conjunto cualquiera e $[Y, \mathcal{T}_Y]$ un espacio topológico. Y sea $(\varphi_i)_{i\in I}$ una familia de funciones arbitrarias de X en $[Y, \mathcal{T}_Y]$.

Problema: ¿Cuál es una topología en X tal que haga continuas a las funciones de la familia $(\varphi_i)_{i\in I}$?, y ¿Cuál sería la menos fina de estas topologías?

Poniendo en X la topología $\mathcal{P}(X)$, entonces todas las φ_i son continuas. La idea es que esta topología se puede refinar.

Consideremos

$$\mathcal{U} = \{{\varphi_i}^{-1}(\omega) \,|\, i \in I,\, \omega \in \mathcal{T}_Y\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$\mathcal{U}$ no es necesariamente una topología en X.

Es claro que la topología menos fina que hace continua la familia φ_i es

$$\sigma_X = \text{ topología engendrada por } \mathcal{U}$$

si denotamos $\mathcal{U} = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ entonces

$$\sigma_X = \bigcup_{\text{cualquiera}} \bigcap_{\text{finitas}} U_\lambda$$

o bien

$$\sigma_X = \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ es topología en } X \\ \mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}}} U_\lambda$$

hola!