ANÁLISIS FUNCIONAL

Esta versión: 21 de abril de 2020

Profesor: Carlos Conca
Año: 2020
Autor: Francisco Muñoz

Depto. de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

Fecha: 13 de abril de 2020.

Cátedra 8 (6 No Presencial)

Definición 1 (Espacio ortogonal)**.** Sea E ev Banach, M sev de E. Se define:

Espacio Ortogonal $M^{\perp}$

$$M^{\perp} \overset{\text{(def)}}{=} \{f \in E' | \langle f,\ x\rangle_{E',E} = 0,\ \forall x \in M\} \quad \text{(Es cerrado en } E'\text{)}$$

Si N sev de E', se define

$$N^{\perp} \overset{\text{(def)}}{=} \{x \in E | \langle f,\ x\rangle_{E',E} = 0,\ \forall f \in N\} \quad \text{(Es cerrado en } E\text{)}$$

Proposición 2.

Prop. de los "ortogonal de ortogonales"

(i) $(M^{\perp})^{\perp} = \operatorname{adh} M$

(ii) $(N^{\perp})^{\perp} \supseteq \operatorname{adh} N$

Si el espacio es de Hilbert, el producto interno coincide con el producto escalar. De esta forma, esta definición coincide con la noción vista en espacio finito.

Proposición 3. *Sea E un ev de Banach. G, L sev de E cerrados.*

(i) $G \cap L = (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}$

(ii) $G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp}$

Demostración. :

(i) Sea $x \in G \cap L$ y probemos que $x \in (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}$, ie, pdq $\langle f,\ x\rangle = 0 \forall f \in G^{\perp} + L^{\perp}$.

Pero $f \in G^{\perp} + L^{\perp} \iff f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in G^{\perp}$ y $f_2 \in L^{\perp}$, y entonces $\langle f_1,\ x\rangle = 0$ pues $x \in G$ y $\langle f_2,\ x\rangle = 0$ pues $x \in L$.

Por lo tanto $\langle f_1 + f_2,\ x\rangle = 0$. De esta forma, $x \in (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}$

Inversa $^{\text{mte}}$, es claro que

$$G^{\perp} \subseteq G^{\perp} + L^{\perp} \implies (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} \subseteq (G^{\perp})^{\perp} = \operatorname{adh} G = G$$

Pues G es cerrado. Analoga $^{\text{mte}}$:

$$(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} \subseteq L$$

Entonces $(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} \subseteq G \cap L$. Por lo tanto, $(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} = G \cap L$.

(ii) pdq $(G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} = (G + L)^{\perp}$

Sea $f \in G^{\perp} \cap L^{\perp}$ y probemos que $f \in (G + L)^{\perp}$, ie,

$$\langle f,\ x\rangle = 0 \quad \forall x \in G + L$$

Pero, como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in G$, $x_2 \in L$, sigue que

$$\langle f,\ x_1\rangle = 0 \quad \text{pues } f \in G^{\perp}$$
$$\langle f,\ x_2\rangle = 0 \quad \text{pues } f \in L^{\perp}$$

Sumando, sigue que

$$\langle f,\ x_1 + x_2\rangle = 0$$

y entonces $f \in (G + L)^{\perp}$.

Inversa $^{\text{mte}}$:

$$G \subseteq G + L$$

tomando ortogonal

$$\left.\begin{array}{l} (G^{\perp} + L)^{\perp} \subseteq G^{\perp} \\ (G^{\perp} + L)^{\perp} \subseteq L^{\perp} \end{array}\right\} \implies (G^{\perp} + L)^{\perp} \subseteq G^{\perp} \cap L^{\perp}$$

Concluyendo así que

$$(G^{\perp} + L)^{\perp} = G^{\perp} \cap L^{\perp}$$

□

$$G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$$

Tomando $\perp$:

$$(G \cap L)^\perp = (\underbrace{G^\perp + L^\perp}_{\text{sev } E'})^{\perp^\perp} \supseteq \operatorname{adh}(G^\perp + L^\perp)$$

$$G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp$$

$$\overset{(\perp)}{\Longrightarrow} (G^\perp \cap L^\perp)^\perp = (G+L)^{\perp^\perp} = \operatorname{adh}(G+L)$$

Si G y L cerrados, ¿Será $G+L$ cerrado? La respuesta no es trivial, y la respuesta viene de un teorema (que no tiene tantas aplicaciones).

Noción de Adjunto y Operadores No Acotados

Vamos a poner énfasis en las diferencias en la dim. finita y dim infinita.

En dim. finita, lo interesante es que todo operador lineal es continua. La gran diferencia con la dim. infinita es que no todos los operadores lineales son continuos, y uno comienza a caracterizar la cont. en el caso de la dim. infinita.

En el caso de la dim finita se prueba que todos los op. lineales son continuos y acotados. De hecho, se hace una caracterización de que si es acotado, es continuo.

Definición 4. Sea E, F ev Banach. Un operador $T : D(T) \subseteq E \to F$ con $D(T)$ sev de E, se denomina operador (lineal) lineal no-acotado

Op. Lineal **no acotado**

Definición 5. T se dice **acotado** si

Op. Lineal **acotado**

$$\exists M \geq 0, \; \| Tx \|_F \leq M \| x \|_E \; \forall x \in D(T)$$

Una función se le dice **no lineal** si es una función cualquiera. Y una función lineal es tmb. no lineal. Los matemáticos “conviven” con esta pequeña contradicción.

Nota 6. *Un operador acot. es tmb no-acotado, pero no hay que perder el sueño por esto.*

En dim. finita, todo op. lineal se representa por una matriz.

Ejercicio 7. Si $E = \mathbb{R}^N$, $F = \mathbb{R}^M$ y $T : D(T) = \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, entonces

$$(T \text{ es no-acotado}) \iff (T \text{ es acotado}) \iff (T \text{ es continua en } E)$$

Definición 8. Un op. $T : \underset{(D(T) \text{ sev de } E)}{D(T)} \subseteq E \to F$ se dice **cerrado** si $\operatorname{Gr}(T)$ es cerrado en $E \times F$

Recordando que

$$\operatorname{Gr} T = \{(x,\ Tx) | x \in D(T)\} \subseteq E \times F$$

Nota 9. *:*
(i) T *cerrado* $\implies \ker T$ *es cerrado, pues*

$$\ker T \times \{0\} = \operatorname{Gr} T \cap (E \times \{0\}), \quad \textit{que es cerrado}$$

(ii) $T : D(T) \subseteq E \to F$ *es cerrado* $\iff$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \in D(T),\ x_n \to x \in E \\ y_n = Tx_n \to y_n \\ \Big(ie,\ (x_n,\ y_n) \in \operatorname{Gr} T,\ (x_n,\ y_n) \to (x,\ y)\Big) \end{array} \right\} \implies x \in D(T) \wedge y = Tx$$

(iii) Para T *cerrado,* ***no*** *podemos usar el teo. del grafo cerrado, y concluir que* T *es continua. (hay que evitar la tentación de ocupar este teorema y decir que* T *es cont).*

Fecha: 14 de abril de 2020.

Cátedra 9 (7 No Presencial)

Operadores no Acotados y Noción de Operador Adjunto

Definición 10. Una función $T : \underbrace{D(T)}_{\text{sev } E} \subseteq E \to F$ lineal es un operador no acotado

Definición 11. T se dice acotado si $\exists c \geq 0 : \ \| Tx \|_F \leq c\| x \|_E, \quad \forall x \in D(T)$

Definición 12. Un operador $T : D(T) \subseteq E \to F$ se dice **cerrado** si $\operatorname{Gr} T$ es cerrado en $E \times F$, donde $\operatorname{Gr} T = \{(x,\ Tx) | x \in D(T)\}$

Nota 13. *:*
(1) T cerrado $\implies \ker T$ cerrado

$$\ker T \times \{0\} = \operatorname{Gr} T \cap (E \times \{0\})$$

(2) T cerrado $\iff (x_n) \subseteq D(T)$

$$y_n = Tx_n, \quad \left.\begin{matrix} x_n \to x \\ y_n \to y \end{matrix}\right\} \implies x \in D(T) \ \wedge \ y = Tx$$

Noción de Adjunto

Queremos generalizar la noción de matriz transpuesta, y se define el adjunto (o traspuesto) para esta generalización en dimensión infinita.
Sean E, F ev Banach $T : D(T) \subseteq E \to F$ tal que $\operatorname{adh} D(T) = E$ Queremos definir un operador T^* , adjunto de T a partir de la propiedad fundamental (o básica) siguiente:

$$\langle Tx,\ y \rangle_{F,F'} = \langle x,\ T^* y \rangle_{E,E'}, \quad \forall x \in D(T),\ \forall y \in D(T^*) \tag{0.1}$$

Si uno quiere que (0.1) sea cierto, lo primero que observamos es que $T^* : D(T^*) \subseteq F' \to E'$ y además $y \in D(T^*) \iff$ (0.1) se cumple $\forall x \in D(T) \iff x \in D(T) \mapsto \langle Tx,\ y \rangle_{F,F'}$ es una forma lineal continua en $D(T)$
Así,

$$D(T^*) = \{y \in F' | \exists c \geq 0,\ |\langle Tx,\ y \rangle| \leq c\| x \|_E \ \forall x \in D(T)\}$$

Además, si $y \in D(T^*)$, entonces la forma lineal $g_y : D(T) \subseteq E \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto \langle Tx,\ y \rangle$ es continua, y entonces se extiende de manera única a una forma lineal continua $\tilde{g_y} : E \to F$, además

$$\left|\langle \tilde{g_y},\ x \rangle\right| \leq c\| x \|_E \quad \forall x \in E$$

Se define

$$T^* y = \tilde{g_y}$$

Proposición 14. *$T : D(T) \subseteq E \to F,\ \operatorname{adh} T = E$ entonces T^* es cerrado*

Demostración. Sea $(y_n, T^* y_n) \in \operatorname{Gr} T^* \subseteq F' \times E'$ tal que $y_n \to z$ en $F' \wedge T^* y_n \to u$ en E'
pdq $z \in D(T^*),\ u = T^* z$
Ahora bien sabemos que $\forall x \in D(T)$

$$\langle Tx,\ y_n \rangle = \langle x,\ T^* y_n \rangle$$

y haciendo $n \to \infty$

$$\langle Tx,\ z\rangle = \langle x,\ u\rangle,\ \forall x \in D(T)$$

y entonces $z \in D(T^*)$, pues

$$|\langle Tx,\ y\rangle| = |\langle x,\ u\rangle| \leq \|\ u\ \|_{E'} \|\ x\ \|_E \leq c \|\ u\ \|_E,\ x \in D(T)$$

Además $T^* z = u$ $\square$

Todo esto es un espiritu llamado "la dualidad", la cual es posiblemente la mayor contribución de las matemáticas a la humanidad. Los operadores duales son ocupadas ampliamente en la mecánica cuántica, matematizandola, y mejorando el entendimiento del mundo que nos rodeamos. Aunque estos conceptos no sean fácil de comprender.

En optimización, también se ocupa bastante los conceptos de dualidad.

Nota 15.

$$\begin{aligned}
&\textit{Sea } (y,\ T^* y = f) \in \operatorname{Gr} T^* \\
&\quad \iff \langle Tx,\ y\rangle = \langle x,\ f\rangle\ \forall x \in D(T) \\
&\quad \iff -\langle x,\ f\rangle + \langle Tx,\ y\rangle = 0\ \forall x \in D(T) \\
&\quad \iff \langle (x,\ Tx),\ (-f,\ y)\rangle = 0\ \forall x \in D(T) \\
&\quad \iff (-f,\ y) \in (\operatorname{Gr} T)^{\perp}\ \forall x \in D(T)
\end{aligned}$$

$J(\operatorname{Gr} T^*) = (\operatorname{Gr} T)^{\perp}$, *donde* $J : (y,\ f) \in F' \times E' \mapsto (-f,\ y) \in E' \times F'$

Fecha: 20 de abril de 2020.

Cátedra 10 (8 No Presencial)

$T : D(T) \subseteq E \to F$, donde $\operatorname{adh} D(T) = E$ (se puede obviar pues es spg)
Se quiere definir T^*, el operador adjunto
Que satisfaga la siguiente identidad

$$\langle Tx,\ y\rangle_{F,F'} = \langle x,\ T^*y\rangle_{E,E'} \quad \forall x \in D(T)\ \forall y \in D(T^*) \tag{0.2}$$

$$(0.2) \implies \begin{cases} T^* : D(T^*) \subseteq F' \to E' \\ D(T^*) = \{y \in F' | x \mapsto \langle Tx,\ y\rangle,\ x \in D(T) \text{ es lineal ie, } \exists c \geq o; \text{ continua, } |\langle Tx,\ y\rangle| \leq x\|\ x\ \|\ \forall x \in D(T)\ \} \\ T^*y = (x \in D(T) \to \langle Tx,\ y\rangle) \end{cases}$$

Proposición 16. *:*
(1) T^* es cerrado.
(2) $(\operatorname{Gr} T)^\perp = J(\operatorname{Gr} T^*)$

$$\begin{array}{rccc} J: & F' \times E' & \to & E' \times F' \\ & (y,\ f) & \mapsto & (-f,\ y) \end{array}$$

Proposición 17. *$T : D(T) \subseteq E \to F$ cerrado y $\operatorname{adh} D(T) = E$ entonces*
(i) $\ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp$
(ii) $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$
(iii) $(\ker T)^\perp \supseteq \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*)$
(iv) $(\ker T^*)^\perp = \operatorname{adh}(\operatorname{im} T)$

Demostración. :
$G \overset{\text{(def)}}{=} \operatorname{Gr} T$, $L \overset{\text{(def)}}{=} E \times \{0\}$. G, L sev de $E \times F$, ¡cerrado! □

Lema 18. *$T : D(T) \subseteq E \to F$ no-acotado*
y sean $G = \operatorname{Gr} T \wedge L = E \times \{0\}$. Entonces
(i) $\ker T \times \{0\} = G \cap L$
(ii) $E \times \operatorname{im} T = G + L$
(iii) $\{0\} \times \ker T^* = G^\perp \cap L^\perp$
(iv) $\operatorname{im} T^* \times F' = G^\perp + L^\perp$

Demostración. **Queda como ejercicio para el lector c:** □

Demostración. (De la proposición)
(i) pdq

$$\ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp$$

Gracias a (iv) en el lema 18, y tomando $\perp$

$$(\operatorname{im} T^* \times F')^\perp = (G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L$$

y entonces

$$(\operatorname{im} T^*)^\perp \times \{0\} = GcapL = \ker T \times \{0\}$$

Luego, $(\operatorname{im} T^*)^\perp = \ker T$.
(ii) pdq

$$\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$$

Gracias a (ii) en el lema 18 y tomando $\perp$ nos queda que:

$$(\operatorname{im} T \times F)^\perp = (G + L)^\perp \overset{\text{ver guia 2}}{=} G^\perp \cap L^\perp$$

y entonces
$$\{0\} \times (\operatorname{im} T)^{\perp} = G^{\perp} \cap L^{\perp} \overset{\text{lema } 18}{=} \{0\} \times \ker T^*$$

(iii) pdq
$$(\ker T)^{\perp} \supseteq \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*)$$

Tomando $\perp$ en (i),
$$(\ker T)^{\perp} = (\operatorname{im} T^*)^{\perp^{\perp}} \supseteq \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*)$$

(iv) Basta toma $\perp$ a (ii) □

Nota 19. *Hay ejemplos explícitos en que la inclusión en (iii) es estricta.*
Resolver el ejercicio #2, lista #3:

$$E = \ell_1 (\implies E' = \ell_\infty)$$
$$\begin{array}{rcl} T : \ell_1 & \to & \ell_\infty \\ u = (u_n)_n & \mapsto & Tu = \left(\frac{u_n}{n}\right)_n \end{array}$$

Calcular $\ker T$, $(\ker T)^{\perp}$, T^*, $\ker T^*$, $(\ker T^*)^{\perp}$, $\operatorname{im} T$, $\operatorname{im} T^*$, *etc.*

Ejercicio 20 (Caracterización de operadores a imagen cerrada)**. Nuestro sueño:**

$$\ulcorner \quad Tu = f \quad \lrcorner$$

Sea $T : D(T) \subseteq E \to F$, $\operatorname{adh} D(T) = E$, T cerrado
TFAE:
(i) $\operatorname{im} T$ es cerrada en F
(ii) $\operatorname{im} T^*$ es cerrada en E'
(iii) $(\ker T)^{\perp} = \operatorname{im} T^*$
(iv) $(\ker T^*)^{\perp} = \operatorname{im} T$

Teorema 21 (Caracterización de operadores sobreyectivos)**.** *:*
Bajo las mismas hipótesis del ejercicio anterior
TFAE
(i) T es sobreyectivo
(ii) $\exists c \geq 0 : \; \| y \|_{F'} \leq c \| T^* y \|_{E'} \; \forall y \in D(T^*)$
(iii) T^* es inyectivo $(\ker T^* = \{0\}) \wedge \operatorname{im} T^*$ *es cerrada.*

Nota 22. *Cómo se usa la equivalencia (i) $\iff$ (ii) en la práctica. La idea es plantear la ecuación*
$$T^* v = g \quad (\text{en } E')$$

En la práctica los operadores son autoadjuntos o simétricos, por lo tanto esta ecuación es prácticamente la misma que la original $(Tu = f)$
Entonces nos planteamos esta ecuación con g cualquiera y se dice así mismo, siempre que v tiene solución y trato de probar que $\| v \| \leq c \| g \|$ con c indep. de la función v.
Entonces tratamos de estimar la solución en vez de encontrarla.
*Esto se llama la **Técnica de las estimaciones a priori**.*

Fecha: 21 de abril de 2020.

Cátedra 11 (9 No Presencial)

Teorema 23 (Caracterización operadores acotados)**.** *Sea* $T : D(T) \subseteq E \to F$*;* $\operatorname{adh} D(T) = E$*,*
T *cerrado*
Son equivalentes:

(i) $D(T) = E$

(ii) T *es acotado*

(iii) $D(T^*) = F'$

(iv) T^* *es acotado*

Y en estas condiciones, $\| T \|_{L(E,\ F)} = \| T^* \|_{L(F',\ E')}$

Defina $G = \operatorname{Gr} T$ y $L = E \times \{0\}$
Que son sev de E cerrados
Recuerdo: Ejercicio #4 (Lista #3)

(i) $\ker T \times \{0\} = G \cap L$

(ii) $E \times \operatorname{im} T = G + L$

(iii) $\{0\} \times \ker T^{\perp} = G^{\perp} \cap L^{\perp}$

(iv) $\operatorname{im} T^* \times F' = G^{\perp} + L^{\perp}$

1. $\operatorname{im} T$ es cerrado
   $\iff$ $E \times \operatorname{im} T$ es cerrado en $E \times F$
   $\iff$ $G + L$ es cerrado en $E \times F$.

2. $\operatorname{im} T^*$ es cerrada
   $\iff$ $\operatorname{im} T^* \times F'$ es cerrada en $E' \times F'$
   $\iff$ $G + L$ es cerrada en $E' \times F'$

3. $(\ker T)^{\perp} = \operatorname{im} T^*$
   $\iff$ $(\ker T)^{\perp} \times F' = T^* \times F'$
   $\iff$ $(G \cap L)^{\perp} = G^{\perp} + L^{\perp}$

4. $(\ker T^*)^{\perp} = \operatorname{im} T$
   $\iff$ $E \times (\ker T^*)^{\perp} = E \times \operatorname{im} T$
   $\iff$ $(G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} = G + L$

Con esto, el teorema #1 es simplemente una reescritura del teorema en la pág 2, guía #2.

Demostración. Del Teorema (23):
Usemos el Teorema #1 para probar que $(i) \iff (iii)$
Probemos primero que $(i) \implies (iii)$
Sabemos que $(\ker T^*)^{\perp} \underset{\text{(iv) en Teo. 1}}{=} \operatorname{im} T = F$
$\implies \ker T^* = \{0\}$ gracias a (i), luego T^* es inyectivo.
Además $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^{\perp}$ y entonces cerrada.
$(iii) \underset{\text{Por Teo, 1}}{\implies} \operatorname{im} T$ es cerrada, pero además, por Teo. 1 parte (iv)
$\operatorname{im} T = (\ker T^*)^{\perp} = \{\ 0\ \}^{\perp} = F$.
Demostremos que $(ii) \implies (iii)$
Si $T^* y = 0$, entonces como $\| y \| \leq c \| T^* y \| = 0$, sigue que $y = 0$. Así T^* es inyectivo.

Sea $(y_n)_n$ sucesión en $\operatorname{im} T^*$ tal que $y_n \to y$ en E'

pdq $y \in \operatorname{im} T^*$

Escribamos $y_n = T f_n$ con $f_n \in D(T^*)$

Gracias a (ii), $\forall n,\ m$

$$\| f_n - f_m \| \leq c \| y_n - y_m \| \overset{n,\ m \to \infty}{\to} 0$$

y entonces (f_n) es de Cauchy en F', y entonces $f_n \to f$ en F'. Con esto,

$$\left.\begin{array}{r} f_n \in D(T^*), f_n \to f \text{ en } F' \\ y_n = T^* f_n \to y \text{ en } E' \end{array}\right\} \overset{T^* \text{ es cerrado}}{\Longrightarrow} (f,\ y) \in \operatorname{Gr} T^*, \text{ ie, } f \in D(T^*),\ y = T^* f$$

Recapitulando:

$(i) \iff (iii)$ en Teo.2 V

$(ii) \implies (iii)$ en Teo.2 V

pdq $(iii) \implies (ii)$ o $(i) \implies (ii)$ en Teo. 2

Supongamos que (i) en Teo. 2 es Verdadero.

y usaremos el Teorema de B-S al cjto.

$$G = \{ y \in D(T^*) \subseteq F' | \| T^* y \|_{E'} \leq 1 \}$$

Comencemos chequeando que es puntualmente acotado: Sea $f \in F$,

$$\sup_{y \in G} |\langle y,\ f \rangle| \underset{\text{Pues } T \text{ es epiy}}{\overset{\text{para algún } x \in E}{=}} \sup_{y \in G} |\langle y,\ Tx \rangle| = \sup_{y \in G} |\langle T^* y,\ x \rangle| \leq \underbrace{\sup_{y \in G} \| T^* \|}_{\leq 1} \| x \| = \| x \| < \infty$$

Gracias a B-S, G está unif $^{\text{mte}}$ acotada, ie, $\exists M \geq 0$ tal que

$$\| y \| \leq M \quad \forall y \in G$$

Conclusión intermedia

$$\left.\begin{array}{r} y \in D(T^*) \\ \| T^* y \|_{E'} \leq 1 \end{array}\right\} \implies \| y \|_{F'} \leq M$$

Luego, $\forall y \in D(T^*)$

$$\| y \| \leq M \| T^* y \|$$

En efecto, sea $z \in D(T^*)$, cualquiera, y definamos $y = \frac{z}{\| T^* z \|}$. Luego,

$$\| z \| = \| T^* z \| \| y \|$$

pues $\| T^* y \| = 1$

$\square$

Demostración. **(Del Teorema 3)**

Primero demostremos que $(i) \implies (ii)$ en Teo. 3

Usando Graf. Cerrado, (que se puede usar pues el esp. $[D(T) = E,\ \| \bullet \|]$ es Banach)

Como T es cerrado, es acotado o continuo

Demostremos que $(ii) \implies (iii)$ en Teorema 3.

pdq si T es acot. cont. $\implies D(T^*) = F'$

Sea $y \in F'$. Miremos la app.

$$x \in E \mapsto \langle y,\ Tx \rangle$$

Ahora bien,

$$|\langle y,\ Tx \rangle| \leq \| y \| \| Tx \| \leq \underbrace{\| y \| \| T \|}_{c} \| x \| = c \| x \|$$

y entonces $y \in D(T^*)$

$\square$