
ANÁLISIS FUNCIONAL

Esta versión: 20 de abril de 2020

Profesor: Carlos Conca

Año: 2020

Autor: Francisco Muñoz

Depto. de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

Cátedra 8 (6 No Presencial)

Definición 1 (Espacio ortogonal). Sea E ev Banach, M sev de E . Se define:

Espacio Ortogonal M^\perp

$$M^\perp \stackrel{(\text{def})}{=} \{f \in E' \mid \langle f, x \rangle_{E', E} = 0, \forall x \in M\} \quad (\text{Es cerrado en } E')$$

Si N sev de E' , se define

$$N^\perp \stackrel{(\text{def})}{=} \{x \in E \mid \langle f, x \rangle_{E', E} = 0, \forall f \in N\} \quad (\text{Es cerrado en } E)$$

Proposición 2.

Prop. de los "ortogonal de ortogonales"

$$(i) (M^\perp)^\perp = \text{adh } M$$

$$(ii) (N^\perp)^\perp \supseteq \text{adh } N$$

Si el espacio es de Hilbert, el producto interno coincide con el producto escalar. De esta forma, esta definición coincide con la noción vista en espacio finito.

Proposición 3. Sea E un ev de Banach. G, L sev de E cerrados.

$$(i) G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$$

$$(ii) G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp$$

Demostración. :

(i) Sea $x \in G \cap L$ y probemos que $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$, ie, pdq $\langle f, x \rangle = 0 \forall f \in G^\perp + L^\perp$.

Pero $f \in G^\perp + L^\perp \iff f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in G^\perp$ y $f_2 \in L^\perp$, y entonces $\langle f_1, x \rangle = 0$ pues $x \in G$ y $\langle f_2, x \rangle = 0$ pues $x \in L$.

Por lo tanto $\langle f_1 + f_2, x \rangle = 0$. De esta forma, $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$

Inversa ^{mte}, es claro que

$$G^\perp \subseteq G^\perp + L^\perp \implies (G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq (G^\perp)^\perp = \text{adh } G = G$$

Pues G es cerrado. Analoga ^{mte} :

$$(G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq L$$

Entonces $(G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq G \cap L$. Por lo tanto, $(G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L$.

$$(ii) \text{ pdq } (G^\perp \cap L^\perp)^\perp = (G + L)^\perp$$

Sea $f \in G^\perp \cap L^\perp$ y probemos que $f \in (G + L)^\perp$, ie,

$$\langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in G + L$$

Pero, como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in G$, $x_2 \in L$, sigue que

$$\langle f, x_1 \rangle = 0 \quad \text{pues } f \in G^\perp$$

$$\langle f, x_2 \rangle = 0 \quad \text{pues } f \in L^\perp$$

Sumando, sigue que

$$\langle f, x_1 + x_2 \rangle = 0$$

y entonces $f \in (G + L)^\perp$.

Inversa ^{mte} :

$$G \subseteq G + L$$

tomando ortogonal

$$\left. \begin{aligned} (G^\perp + L)^\perp &\subseteq G^\perp \\ (G^\perp + L)^\perp &\subseteq L^\perp \end{aligned} \right\} \implies (G^\perp + L)^\perp \subseteq G^\perp \cap L^\perp$$

Concluyendo así que

$$(G^\perp + L)^\perp = G^\perp \cap L^\perp$$

□

$$G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$$

Tomando \perp :

$$\begin{aligned} (G \cap L)^\perp &= \underbrace{(G^\perp + L^\perp)^{\perp\perp}}_{\text{sev } E'} \supseteq \text{adh}(G^\perp + L^\perp) \\ G^\perp \cap L^\perp &= (G + L)^\perp \\ \xrightarrow{(\perp)} (G^\perp \cap L^\perp)^\perp &= (G + L)^{\perp\perp} = \text{adh}(G + L) \end{aligned}$$

Si G y L cerrados, ¿Será $G + L$ cerrado? La respuesta no es trivial, y la respuesta viene de un teorema (que no tiene tantas aplicaciones).

Noción de Adjunto y Operadores No Acotados

Vamos a poner énfasis en las diferencias en la dim. finita y dim infinita.

En dim. finita, lo interesante es que todo operador lineal es continuo. La gran diferencia con la dim. infinita es que no todos los operadores lineales son continuos, y uno comienza a caracterizar la cont. en el caso de la dim. infinita.

En el caso de la dim finita se prueba que todos los op. lineales son continuos y acotados. De hecho, se hace una caracterización de que si es acotado, es continuo.

Definición 4. Sea E, F ev Banach. Un operador $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ con $D(T)$ sev de E , se denomina operador (lineal) lineal no-acotado

Op. Lineal **no acotado**

Definición 5. T se dice **acotado** si

Op. Lineal **acotado**

$$\exists M \geq 0, \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in D(T)$$

Una función se le dice **no lineal** si es una función cualquiera. Y una función lineal es tmb. no lineal. Los matemáticos “conviven” con esta pequeña contradicción.

Nota 6. *Un operador acot. es tmb no-acotado, pero no hay que perder el sueño por esto.*

En dim. finita, todo op. lineal se representa por una matriz.

Ejercicio 7. Si $E = \mathbb{R}^N$, $F = \mathbb{R}^M$ y $T : D(T) = \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, entonces

$$(T \text{ es no-acotado}) \iff (T \text{ es acotado}) \iff (T \text{ es continua en } E)$$

Definición 8. Un op. $T : \begin{matrix} D(T) \\ (D(T) \text{ sev de } E) \end{matrix} \subseteq E \rightarrow F$ se dice **cerrado** si $\text{Gr}(T)$ es cerrado en $E \times F$

Recordando que

$$\text{Gr } T = \{(x, Tx) | x \in D(T)\} \subseteq E \times F$$

Nota 9. :

(i) T cerrado $\implies \ker T$ es cerrado, pues

$$\ker T \times \{0\} = \text{Gr } T \cap (E \times \{0\}), \quad \text{que es cerrado}$$

(ii) $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ es cerrado \iff

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \in D(T), x_n \rightarrow x \in E \\ y_n = Tx_n \rightarrow y \\ \left(\text{ie, } (x_n, y_n) \in \text{Gr } T, (x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \right) \end{array} \right\} \implies x \in D(T) \wedge y = Tx$$

(iii) Para T cerrado, **no** podemos usar el teo. del grafo cerrado, y concluir que T es continua. (hay que evitar la tentación de ocupar este teorema y decir que T es cont).

Cátedra 9 (7 No Presencial)

Operadores no Acotados y Noción de Operador Adjunto

Definición 10. Una función $T : \underbrace{D(T)}_{\text{sev } E} \subseteq E \rightarrow F$ lineal es un operador no acotado

Definición 11. T se dice acotado si $\exists c \geq 0 : \|Tx\|_F \leq c\|x\|_E, \quad \forall x \in D(T)$

Definición 12. Un operador $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ se dice **cerrado** si $\text{Gr } T$ es cerrado en $E \times F$, donde $\text{Gr } T = \{(x, Tx) | x \in D(T)\}$

Nota 13. :

(1) T cerrado $\implies \ker T$ cerrado

$$\ker T \times \{0\} = \text{Gr } T \cap (E \times \{0\})$$

(2) T cerrado $\iff (x_n) \subseteq D(T)$

$$\left. \begin{array}{l} y_n = Tx_n, \\ y_n \rightarrow y \end{array} \right\} \implies x \in D(T) \wedge y = Tx$$

Noción de Adjunto

Queremos generalizar la noción de matriz transpuesta, y se define el adjunto (o traspuesto) para esta generalización en dimensión infinita.

Sean E, F ev Banach $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ tal que $\text{adh } D(T) = E$ Queremos definir un operador T^* , adjunto de T a partir de la propiedad fundamental (o básica) siguiente:

$$\langle Tx, y \rangle_{F, F'} = \langle x, T^*y \rangle_{E, E'}, \quad \forall x \in D(T), \forall y \in D(T^*) \quad (0.1)$$

Si uno quiere que (0.1) sea cierto, lo primero que observamos es que $T^* : D(T^*) \subseteq F' \rightarrow E'$ y además $y \in D(T^*) \iff (0.1)$ se cumple $\forall x \in D(T) \iff x \in D(T) \mapsto \langle Tx, y \rangle_{F, F'}$ es una forma lineal continua en $D(T)$

Así,

$$D(T^*) = \{y \in F' | \exists c \geq 0, |\langle Tx, y \rangle| \leq c\|x\|_E \quad \forall x \in D(T)\}$$

Además, si $y \in D(T^*)$, entonces la forma lineal $g_y : D(T) \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ es continua, y entonces se extiende de manera única a una forma lineal continua $\tilde{g}_y : E \rightarrow F$, además

$$|\langle \tilde{g}_y, x \rangle| \leq c\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Se define

$$T^*y = \tilde{g}_y$$

Proposición 14. $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$, $\text{adh } T = E$ entonces T^* es cerrado

Demostración. Sea $(y_n, T^*y_n) \in \text{Gr } T^* \subseteq F' \times E'$ tal que $y_n \rightarrow z$ en F' \wedge $T^*y_n \rightarrow u$ en E' pdq $z \in D(T^*)$, $u = T^*z$

Ahora bien sabemos que $\forall x \in D(T)$

$$\langle Tx, y_n \rangle = \langle x, T^*y_n \rangle$$

y haciendo $n \rightarrow \infty$

$$\langle Tx, z \rangle = \langle x, u \rangle, \forall x \in D(T)$$

y entonces $z \in D(T^*)$, pues

$$|\langle Tx, y \rangle| = |\langle x, u \rangle| \leq \|u\|_{E'} \|x\|_E \leq c \|u\|_E, \quad x \in D(T)$$

Además $T^*z = u$

□

Todo esto es un espíritu llamado “la dualidad”, la cual es posiblemente la mayor contribución de las matemáticas a la humanidad. Los operadores duales son ocupadas ampliamente en la mecánica cuántica, matematizandola, y mejorando el entendimiento del mundo que nos rodeamos. Aunque estos conceptos no sean fácil de comprender.

En optimización, también se ocupa bastante los conceptos de dualidad.

Nota 15.

$$\begin{aligned} \text{Sea } (y, T^*y = f) &\in \text{Gr } T^* \\ \iff \langle Tx, y \rangle &= \langle x, f \rangle \quad \forall x \in D(T) \\ \iff -\langle x, f \rangle + \langle Tx, y \rangle &= 0 \quad \forall x \in D(T) \\ \iff \langle (x, Tx), (-f, y) \rangle &= 0 \quad \forall x \in D(T) \\ \iff (-f, y) &\in (\text{Gr } T)^\perp \quad \forall x \in D(T) \end{aligned}$$

$$J(\text{Gr } T^*) = (\text{Gr } T)^\perp, \text{ donde } J : (y, f) \in F' \times E' \mapsto (-f, y) \in E' \times F'$$