ANÁLISIS FUNCIONAL

Esta versión: 20 de abril de 2020

Profesor: Carlos Conca
Año: 2020
Autor: Francisco Muñoz

Depto. de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

Fecha: 13 de abril de 2020.

Cátedra 8 (6 No Presencial)

Definición 1 (Espacio ortogonal)**.** Sea E ev Banach, M sev de E. Se define:

Espacio Ortogonal $M^\perp$

$$M^\perp \overset{\text{(def)}}{=} \{f \in E' | \langle f,\ x\rangle_{E',E} = 0,\ \forall x \in M\} \quad \text{(Es cerrado en } E'\text{)}$$

Si N sev de E', se define

$$N^\perp \overset{\text{(def)}}{=} \{x \in E | \langle f,\ x\rangle_{E',E} = 0,\ \forall f \in N\} \quad \text{(Es cerrado en } E\text{)}$$

Proposición 2.

Prop. de los "ortogonal de ortogonales"

(i) $(M^\perp)^\perp = \operatorname{adh} M$
(ii) $(N^\perp)^\perp \supseteq \operatorname{adh} N$

Si el espacio es de Hilbert, el producto interno coincide con el producto escalar. De esta forma, esta definición coincide con la noción vista en espacio finito.

Proposición 3. *Sea E un ev de Banach. G, L sev de E cerrados.*
(i) $G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$
(ii) $G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp$

Demostración. :
(i) Sea $x \in G \cap L$ y probemos que $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$, ie, pdq $\langle f,\ x\rangle = 0 \forall f \in G^\perp + L^\perp$.
Pero $f \in G^\perp + L^\perp \iff f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in G^\perp$ y $f_2 \in L^\perp$, y entonces $\langle f_1,\ x\rangle = 0$ pues $x \in G$ y $\langle f_2,\ x\rangle = 0$ pues $x \in L$.
Por lo tanto $\langle f_1 + f_2,\ x\rangle = 0$. De esta forma, $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$
Inversa $^{\text{mte}}$, es claro que

$$G^\perp \subseteq G^\perp + L^\perp \implies (G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq (G^\perp)^\perp = \operatorname{adh} G = G$$

Pues G es cerrado. Analoga $^{\text{mte}}$:

$$(G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq L$$

Entonces $(G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq G \cap L$. Por lo tanto, $(G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L$.
(ii) pdq $(G^\perp \cap L^\perp)^\perp = (G + L)^\perp$
Sea $f \in G^\perp \cap L^\perp$ y probemos que $f \in (G + L)^\perp$, ie,

$$\langle f,\ x\rangle = 0 \quad \forall x \in G + L$$

Pero, como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in G$, $x_2 \in L$, sigue que

$$\langle f,\ x_1\rangle = 0 \quad \text{pues } f \in G^\perp$$
$$\langle f,\ x_2\rangle = 0 \quad \text{pues } f \in L^\perp$$

Sumando, sigue que

$$\langle f,\ x_1 + x_2\rangle = 0$$

y entonces $f \in (G + L)^\perp$.
Inversa $^{\text{mte}}$:

$$G \subseteq G + L$$

tomando ortogonal

$$\left.\begin{array}{l}(G^\perp + L)^\perp \subseteq G^\perp \\ (G^\perp + L)^\perp \subseteq L^\perp\end{array}\right\} \implies (G^\perp + L)^\perp \subseteq G^\perp \cap L^\perp$$

Concluyendo así que

$$(G^\perp + L)^\perp = G^\perp \cap L^\perp$$

$\square$

$$G \cap L = (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}$$

Tomando $\perp$:

$$(G \cap L)^{\perp} = (\underbrace{G^{\perp} + L^{\perp}}_{\text{sev } E'})^{\perp^{\perp}} \supseteq \operatorname{adh}(G^{\perp} + L^{\perp})$$

$$G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp}$$

$$\overset{(\perp)}{\Longrightarrow} (G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} = (G + L)^{\perp^{\perp}} = \operatorname{adh}(G + L)$$

Si G y L cerrados, ¿Será $G + L$ cerrado? La respuesta no es trivial, y la respuesta viene de un teorema (que no tiene tantas aplicaciones).

Noción de Adjunto y Operadores No Acotados

Vamos a poner énfasis en las diferencias en la dim. finita y dim infinita.

En dim. finita, lo interesante es que todo operador lineal es continua. La gran diferencia con la dim. infinita es que no todos los operadores lineales son continuos, y uno comienza a caracterizar la cont. en el caso de la dim. infinita.

En el caso de la dim finita se prueba que todos los op. lineales son continuos y acotados. De hecho, se hace una caracterización de que si es acotado, es continuo.

Definición 4. Sea E, F ev Banach. Un operador $T : D(T) \subseteq E \to F$ con $D(T)$ sev de E, se denomina operador (lineal) lineal no-acotado

Op. Lineal **no acotado**

Definición 5. T se dice **acotado** si

Op. Lineal **acotado**

$$\exists M \geq 0,\ \| Tx \|_F \leq M \| x \|_E \ \forall x \in D(T)$$

Una función se le dice **no lineal** si es una función cualquiera. Y una función lineal es tmb. no lineal. Los matemáticos "conviven" con esta pequeña contradicción.

Nota 6. *Un operador acot. es tmb no-acotado, pero no hay que perder el sueño por esto.*

En dim. finita, todo op. lineal se representa por una matriz.

Ejercicio 7. Si $E = \mathbb{R}^N$, $F = \mathbb{R}^M$ y $T : D(T) = \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, entonces

$$(T \text{ es no-acotado}) \iff (T \text{ es acotado}) \iff (T \text{ es continua en } E)$$

Definición 8. Un op. $T : \underset{(D(T) \text{ sev de } E)}{D(T)} \subseteq E \to F$ se dice **cerrado** si $\operatorname{Gr}(T)$ es cerrado en $E \times F$

Recordando que

$$\operatorname{Gr} T = \{(x,\ Tx) | x \in D(T)\} \subseteq E \times F$$

Nota 9. *:*
(i) T cerrado $\implies \ker T$ es cerrado, pues

$$\ker T \times \{0\} = \operatorname{Gr} T \cap (E \times \{0\}), \quad \textit{que es cerrado}$$

(ii) $T : D(T) \subseteq E \to F$ es cerrado $\iff$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \in D(T),\ x_n \to x \in E \\ y_n = Tx_n \to y_n \\ \Big(ie,\ (x_n,\ y_n) \in \operatorname{Gr} T,\ (x_n,\ y_n) \to (x,\ y) \Big) \end{array} \right\} \implies x \in D(T) \wedge y = Tx$$

*(iii) Para T cerrado, **no** podemos usar el teo. del grafo cerrado, y concluir que T es continua. (hay que evitar la tentación de ocupar este teorema y decir que T es cont).*

Fecha: 14 de abril de 2020.

Cátedra 9 (7 No Presencial)

Operadores no Acotados y Noción de Operador Adjunto

Definición 10. Una función $T : \underbrace{D(T)}_{\text{sev } E} \subseteq E \to F$ lineal es un operador no acotado

Definición 11. T se dice acotado si $\exists c \geq 0 :\ \| Tx \|_F \leq c \| x \|_E, \quad \forall x \in D(T)$

Definición 12. Un operador $T : D(T) \subseteq E \to F$ se dice **cerrado** si $\operatorname{Gr} T$ es cerrado en $E \times F$, donde $\operatorname{Gr} T = \{(x,\ Tx) | x \in D(T)\}$

Nota 13. *:*
(1) T cerrado $\implies \ker T$ cerrado

$$\ker T \times \{0\} = \operatorname{Gr} T \cap (E \times \{0\})$$

(2) T cerrado $\iff (x_n) \subseteq D(T)$

$$y_n = Tx_n, \quad \left.\begin{matrix} x_n \to x \\ y_n \to y \end{matrix}\right\} \implies x \in D(T)\ \wedge\ y = Tx$$

Noción de Adjunto

Queremos generalizar la noción de matriz transpuesta, y se define el adjunto (o traspuesto) para esta generalización en dimensión infinita.
Sean E, F ev Banach $T : D(T) \subseteq E \to F$ tal que $\operatorname{adh} D(T) = E$ Queremos definir un operador T^* , adjunto de T a partir de la propiedad fundamental (o básica) siguiente:

$$\langle Tx,\ y \rangle_{F,F'} = \langle x,\ T^* y \rangle_{E,E'}, \quad \forall x \in D(T),\ \forall y \in D(T^*) \tag{0.1}$$

Si uno quiere que (0.1) sea cierto, lo primero que observamos es que $T^* : D(T^*) \subseteq F' \to E'$ y además $y \in D(T^*) \iff$ (0.1) se cumple $\forall x \in D(T) \iff x \in D(T) \mapsto \langle Tx,\ y \rangle_{F,F'}$ es una forma lineal continua en $D(T)$
Así,
$$D(T^*) = \{y \in F' | \exists c \geq 0,\ |\langle Tx,\ y \rangle| \leq c \| x \|_E\ \forall x \in D(T)\}$$

Además, si $y \in D(T^*)$, entonces la forma lineal $g_y : D(T) \subseteq E \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto \langle Tx,\ y \rangle$ es continua, y entonces se extiende de manera única a una forma lineal continua $\tilde{g_y} : E \to F$, además

$$\left| \langle \tilde{g_y},\ x \rangle \right| \leq c \| x \|_E \quad \forall x \in E$$

Se define
$$T^* y = \tilde{g_y}$$

Proposición 14. $T : D(T) \subseteq E \to F,\ \operatorname{adh} T = E$ *entonces* T^* *es cerrado*

Demostración. Sea $(y_n, T^* y_n) \in \operatorname{Gr} T^* \subseteq F' \times E'$ tal que $y_n \to z$ en $F' \wedge T^* y_n \to u$ en E'
pdq $z \in D(T^*),\ u = T^* z$
Ahora bien sabemos que $\forall x \in D(T)$

$$\langle Tx,\ y_n \rangle = \langle x,\ T^* y_n \rangle$$

y haciendo $n \to \infty$

$$\langle Tx,\ z\rangle = \langle x,\ u\rangle,\ \forall x \in D(T)$$

y entonces $z \in D(T^*)$, pues

$$|\langle Tx,\ y\rangle| = |\langle x,\ u\rangle| \leq \|\ u\ \|_{E'}\|\ x\ \|_E \leq c\|\ u\ \|_E,\ x \in D(T)$$

Además $T^*z = u$ $\square$

Todo esto es un espiritu llamado "la dualidad", la cual es posiblemente la mayor contribución de las matemáticas a la humanidad. Los operadores duales son ocupadas ampliamente en la mecánica cuántica, matematizandola, y mejorando el entendimiento del mundo que nos rodeamos. Aunque estos conceptos no sean fácil de comprender.

En optimización, también se ocupa bastante los conceptos de dualidad.

Nota 15.

$$\begin{aligned} &\textit{Sea } (y,\ T^*y = f) \in \operatorname{Gr} T^* \\ &\iff \langle Tx,\ y\rangle = \langle x,\ f\rangle\ \forall x \in D(T) \\ &\iff -\langle x,\ f\rangle + \langle Tx,\ y\rangle = 0\ \forall x \in D(T) \\ &\iff \langle (x,\ Tx),\ (-f,\ y)\rangle = 0\ \forall x \in D(T) \\ &\iff (-f,\ y) \in (\operatorname{Gr} T)^{\perp}\ \forall x \in D(T) \end{aligned}$$

$J(\operatorname{Gr} T^*) = (\operatorname{Gr} T)^{\perp}$, *donde* $J : (y,\ f) \in F' \times E' \mapsto (-f,\ y) \in E' \times F'$

Fecha: 20 de abril de 2020.

Cátedra 10 (8 No Presencial)

$T : D(T) \subseteq E \to F$, donde $\operatorname{adh} D(T) = E$ (se puede obviar pues es spg)

Se quiere definir T^*, el operador adjunto

Que satisfaga la siguiente identidad

$$\langle Tx,\ y\rangle_{F,F'} = \langle x,\ T^*y\rangle_{E,E'} \quad \forall x \in D(T)\ \forall y \in D(T^*) \tag{0.2}$$

$$(0.2) \implies \begin{cases} T^* : D(T^*) \subseteq F' \to E' \\ D(T^*) = \{y \in F' | x \mapsto \langle Tx,\ y\rangle,\ x \in D(T) \text{ es lineal ie, } \exists c \geq o\text{; continua, } |\langle Tx,\ y\rangle| \leq x\| \ x \ \| \ \forall x \in D(T)\ \} \\ T^*y = (x \in D(T) \to \langle Tx,\ y\rangle) \end{cases}$$

Proposición 16. *:*
(1) T^* *es cerrado.*
(2) $(\operatorname{Gr} T)^\perp = J(\operatorname{Gr} T^*)$

$$\begin{array}{rccc} J: & F' \times E' & \to & E' \times F' \\ & (y,\ f) & \mapsto & (-f,\ y) \end{array}$$

Proposición 17. $T : D(T) \subseteq E \to F$ *cerrado y* $\operatorname{adh} D(T) = E$ *entonces*
(i) $\ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp$
(ii) $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$
(iii) $(\ker T)^\perp \supseteq \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*)$
(iv) $(\ker T^*)^\perp = \operatorname{adh}(\operatorname{im} T)$

Demostración. :
$G \overset{\text{(def)}}{=} \operatorname{Gr} T$, $L \overset{\text{(def)}}{=} E \times \{0\}$. G, L sev de $E \times F$, ¡cerrado! □

Lema 18. $T : D(T) \subseteq E \to F$ *no-acotado*
y sean $G = \operatorname{Gr} T \wedge L = E \times \{0\}$. *Entonces*
(i) $\ker T \times \{0\} = G \cap L$
(ii) $E \times \operatorname{im} T = G + L$
(iii) $\{0\} \times \ker T^* = G^\perp \cap L^\perp$
(iv) $\operatorname{im} T^* \times F' = G^\perp + L^\perp$

Demostración. **Queda como ejercicio para el lector c:** □

Demostración. (De la proposición)
(i) pdq

$$\ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp$$

Gracias a (iv) en el lema 18, y tomando $\perp$

$$(\operatorname{im} T^* \times F')^\perp = (G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L$$

y entonces

$$(\operatorname{im} T^*)^\perp \times \{0\} = GcapL = \ker T \times \{0\}$$

Luego, $(\operatorname{im} T^*)^\perp = \ker T$.
(ii) pdq

$$\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$$

Gracias a (ii) en el lema 18 y tomando $\perp$ nos queda que:

$$(\operatorname{im} T \times F)^\perp = (G + L)^\perp \overset{\text{ver guia 2}}{=} G^\perp \cap L^\perp$$

y entonces

$$\{0\} \times (\operatorname{im} T)^{\perp} = G^{\perp} \cap L^{\perp} \overset{\text{lema } 18}{=} \{0\} \times \ker T^*$$

(iii) pdq

$$(\ker T)^{\perp} \supseteq \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*)$$

Tomando $\perp$ en (i),

$$(\ker T)^{\perp} = (\operatorname{im} T^*)^{\perp^{\perp}} \supseteq \operatorname{adh}(\operatorname{im} T^*)$$

(iv) Basta toma $\perp$ a (ii) $\square$

Nota 19. *Hay ejemplos explícitos en que la inclusión en (iii) es estricta.*
Resolver el ejercicio #2, lista #3:

$$E = \ell_1 (\implies E' = \ell_\infty)$$

$$\begin{array}{rcl} T : \ell_1 & \to & \ell_\infty \\ u = (u_n)_n & \mapsto & Tu = \left(\frac{u_n}{n}\right)_n \end{array}$$

Calcular $\ker T$, $(\ker T)^{\perp}$, T^*, $\ker T^*$, $(\ker T^*)^{\perp}$, $\operatorname{im} T$, $\operatorname{im} T^*$, *etc.*

Ejercicio 20 (Caracterización de operadores a imagen cerrada)**. Nuestro sueño:**

$$\ulcorner \qquad Tu = f \qquad \lrcorner$$

Sea $T : D(T) \subseteq E \to F$, $\operatorname{adh} D(T) = E$, T cerrado
TFAE:

(i) $\operatorname{im} T$ es cerrada en F

(ii) $\operatorname{im} T^*$ es cerrada en E'

(iii) $(\ker T)^{\perp} = \operatorname{im} T^*$

(iv) $(\ker T^*)^{\perp} = \operatorname{im} T$

Teorema 21 (Caracterización de operadores sobreyectivos)**.** *:*
Bajo las mismas hipótesis del ejercicio anterior

TFAE

(i) T es sobreyectivo

(ii) $\exists c \geq 0 : \ \| y \|_{F'} \leq c \| T^* y \|_{E'} \ \forall y \in D(T^*)$

(iii) T^* es inyectivo $(\ker T^* = \{0\}) \wedge \operatorname{im} T^*$ *es cerrada.*

Nota 22. *Cómo se usa la equivalencia (i) $\iff$ (ii) en la práctica. La idea es plantear la ecuación*

$$T^* v = g \quad (\text{en } E')$$

En la práctica los operadores son autoadjuntos o simétricos, por lo tanto esta ecuación es prácticamente la misma que la original $(Tu = f)$

Entonces nos planteamos esta ecuación con g cualquiera y se dice así mismo, siempre que v tiene solución y trato de probar que $\| v \| \leq c \| g \|$ con c indep. de la función v.

Entonces tratamos de estimar la solución en vez de encontrarla.

*Esto se llama la **Técnica de las estimaciones a priori***