ANÁLISIS FUNCIONAL

Esta versión: 19 de abril de 2020

Profesor: Carlos Conca
Año: 2020
Autor: Francisco Muñoz

Depto. de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

Fecha: 13 de abril de 2020.

Cátedra 8 (6 No Presencial)

Definición 1 (Espacio ortogonal)**.** Sea E ev Banach, M sev de E. Se define:

Espacio Ortogonal $M^\perp$

$$M^\perp \overset{(\text{def})}{=} \{f \in E' | < f,\ x >_{E',E} = 0,\ \forall x \in M\} \quad \text{(Es cerrado en } E')$$

Si N sev de E', se define

$$N^\perp \overset{(\text{def})}{=} \{x \in E | < f,\ x >_{E',E} = 0,\ \forall f \in N\} \quad \text{(Es cerrado en } E)$$

Proposición 2.

Prop. de los “ortogonal de ortogonales”

(i) $(M^\perp)^\perp = \operatorname{adh} M$
(ii) $(N^\perp)^\perp \supseteq \operatorname{adh} N$

Si el espacio es de Hilbert, el producto interno coincide con el producto escalar. De esta forma, esta definición coincide con la noción vista en espacio finito.

Proposición 3. *Sea E un ev de Banach. G, L sev de E cerrados.*
(i) $G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$
(ii) $G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp$

Demostración. :
(i) Sea $x \in G \cap L$ y probemos que $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$, ie, pdq $< f,\ x >= 0 \forall f \in G^\perp + L^\perp$.
Pero $f \in G^\perp + L^\perp \iff f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in G^\perp$ y $f_2 \in L^\perp$, y entonces $< f_1,\ x >= 0$ pues $x \in G$ y $< f_2,\ x >= 0$ pues $x \in L$.
Por lo tanto $< f_1 + f_2,\ x >= 0$. De esta forma, $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$
Inversa $^{\text{mte}}$, es claro que

$$G^\perp \subseteq G^\perp + L^\perp \implies (G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq (G^\perp)^\perp = \operatorname{adh} G = G$$

Pues G es cerrado. Analoga $^{\text{mte}}$:

$$(G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq L$$

Entonces $(G^\perp + L^\perp)^\perp \subseteq G \cap L$. Por lo tanto, $(G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L$.
(ii) pdq $(G^\perp \cap L^\perp)^\perp = (G + L)^\perp$
Sea $f \in G^\perp \cap L^\perp$ y probemos que $f \in (G + L)^\perp$, ie,

$$< f,\ x >= 0 \quad \forall x \in G + L$$

Pero, como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in G$, $x_2 \in L$, sigue que

$$< f,\ x_1 >= 0 \quad \text{pues } f \in G^\perp$$
$$< f,\ x_2 >= 0 \quad \text{pues } f \in L^\perp$$

Sumando, sigue que

$$< f,\ x_1 + x_2 >= 0$$

y entonces $f \in (G + L)^\perp$.
Inversa $^{\text{mte}}$:

$$G \subseteq G + L$$

tomando ortogonal

$$\left.\begin{aligned} (G^\perp + L)^\perp \subseteq G^\perp \\ (G^\perp + L)^\perp \subseteq L^\perp \end{aligned}\right\} \implies (G^\perp + L)^\perp \subseteq G^\perp \cap L^\perp$$

Concluyendo así que

$$(G^\perp + L)^\perp = G^\perp \cap L^\perp$$

□

$$G \cap L = (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}$$

Tomando $\perp$:

$$(G \cap L)^{\perp} = (\underbrace{G^{\perp} + L^{\perp}}_{\text{sev } E'})^{\perp^{\perp}} \supseteq \mathrm{adh}(G^{\perp} + L^{\perp})$$

$$G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp}$$

$$\overset{(\perp)}{\Longrightarrow} (G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} = (G + L)^{\perp^{\perp}} = \mathrm{adh}(G + L)$$

Si G y L cerrados, ¿Será $G + L$ cerrado? La respuesta no es trivial, y la respuesta viene de un teorema (que no tiene tantas aplicaciones).

Noción de Adjunto y Operadores No Acotados

Vamos a poner énfasis en las diferencias en la dim. finita y dim infinita.

En dim. finita, lo interesante es que todo operador lineal es continua. La gran diferencia con la dim. infinita es que no todos los operadores lineales son continuos, y uno comienza a caracterizar la cont. en el caso de la dim. infinita.

En el caso de la dim finita se prueba que todos los op. lineales son continuos y acotados. De hecho, se hace una caracterización de que si es acotado, es continuo.

Definición 4. Sea E, F ev Banach. Un operador $T : D(T) \subseteq E \to F$ con $D(T)$ sev de E, se denomina operador (lineal) lineal no-acotado

Op. Lineal **no acotado**

Definición 5. T se dice **acotado** si

Op. Lineal **acotado**

$$\exists M \geq 0, \; \| \, Tx \, \|_F \leq M \| \, x \, \|_E \; \forall x \in D(T)$$

Una función se le dice **no lineal** si es una función cualquiera. Y una función lineal es tmb. no lineal. Los matemáticos "conviven" con esta pequeña contradicción.

Nota 6. *Un operador acot. es tmb no-acotado, pero no hay que perder el sueño por esto.*

En dim. finita, todo op. lineal se representa por una matriz.

Ejercicio 7. Si $E = \mathbb{R}^N$, $F = \mathbb{R}^M$ y $T : D(T) = \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, entonces

$$(T \text{ es no-acotado}) \iff (T \text{ es acotado}) \iff (T \text{ es continua en } E)$$

Definición 8. Un op. $T : \underset{(D(T) \text{ sev de } E)}{D(T)} \subseteq E \to F$ se dice **cerrado** si $\mathrm{Gr}(T)$ es cerrado en $E \times F$

Recordando que

$$\mathrm{Gr}\, T = \{(x, \; Tx) | x \in D(T)\} \subseteq E \times F$$

Nota 9. *:*
(i) T cerrado $\Longrightarrow$ $\ker T$ es cerrado, pues

$$\ker T \times \{0\} = \mathrm{Gr}\, T \cap (E \times \{0\}), \quad \textit{que es cerrado}$$

(ii) $T : D(T) \subseteq E \to F$ es cerrado $\iff$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \in D(T), \; x_n \to x \in E \\ y_n = Tx_n \to y_n \\ \Big(ie, \; (x_n, \; y_n) \in \mathrm{Gr}\, T, \; (x_n, \; y_n) \to (x, \; y) \Big) \end{array} \right\} \Longrightarrow x \in D(T) \wedge y = Tx$$

(iii) Para T cerrado, ***no*** *podemos usar el teo. del grafo cerrado, y concluir que T es continua. (hay que evitar la tentación de ocupar este teorema y decir que T es cont).*