ANÁLISIS FUNCIONAL

Esta versión: 19 de abril de 2020

Profesor: Carlos Conca
Año: 2020
Autor: Francisco Muñoz

Depto. de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

Fecha: 09 de marzo de 2020.

Cátedra 1

Ejemplos de Espacios de Banach:

Ejemplos de Esp. de Banach

- $\mathbb{R}$ dotado con $\| \bullet \|$.
- $\mathbb{R}^n$ dotado con $\| \bullet \|_2$, donde $\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^n {x_i}^2\right)^{1/2}$.
- V, A sev de V, entonces A es evn con norma restringida al espacio A.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto (puede ser acotada)

Este último puede ser un dominio de calor, de onda, etc. (en vista a la matemática aplicada).

Espacio de Funciones Continuas

Definición 1 (Espacio de Funciones Continuas)**.**

$$\mathcal{C}^0(\Omega) \overset{\text{(def)}}{=} \{u : \Omega \to \mathbb{K} | u \text{ es continua en } \Omega\}$$

(Donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Es un ev y es seminormado, con la seminorma:

$$\forall K \subset \Omega,\ K \text{ compacto: } p_k(u) \overset{\text{(def)}}{=} \sup_{x \in K} |u(x)|$$

Esp. de Funciones Cont. $^{\text{mte}}$ Derivables

Definición 2 (Espacio de Funciones Continuamente Derivables)**.**

$$\forall m \geq 1, \quad \mathcal{C}^m(\Omega) \overset{\text{(def)}}{=} \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} | D^\alpha(u) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_N}^{\alpha_N}},\ \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\}$$

Donde $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_N)$ es un multi-índice, tal que $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ y $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Definición 3.

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \overset{\text{(def)}}{=} \bigcap_{m \geq 1} \mathcal{C}^m(\Omega)$$

$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$

Definición 4.

$$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \overset{\text{(def)}}{=} \{u \in \mathcal{C}^0(\Omega) | u \text{ es acotado en } \Omega \text{ y } u \text{ es unif}^{\text{ mte}} \text{ continua en } \Omega\}$$

Destacar que la barra no corresponde a la adherencia. Sin embargo, si Ω es acotado, los dos conjuntos coinciden

Ejemplo de una función acotada y no extensible al borde: $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Notemos que con la norma

$$\| u \|_\infty \overset{\text{(def)}}{=} \sup_{\Omega} |u(x)|\,, \quad \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ es Banach.}$$

$\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$

Definición 5.

$$\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) \overset{\text{(def)}}{=} \{u \in \mathcal{C}^m(\Omega) | D^\alpha u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\ \forall \alpha_i,\ |\alpha| \leq m\}$$

Notemos que con la norma

$$\| u \|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} \overset{\text{(def)}}{=} \| u \|_{m,\Omega} = \sum_{\substack{\alpha_i \\ |\alpha| \leq m}} \sup_{\Omega} |D^\alpha u(x)|\,, \quad \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) \text{ es Banach.}$$

ℓ_p y ℓ_∞

Definición 6.

$$\ell_p \overset{\text{(def)}}{=} \left\{ (x_n) | x_n \in \mathbb{K} \text{ y } \left(\sum\nolimits_{n \geq 1} |x_n|^p\right)^{1/p} \right\}$$

para $1 \leq p < \infty$. ℓ_∞ se define como el ev. de todas las sucesiones acotadas, i.e. tales que $\| (x_n) \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty$

Nota 7. $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathcal{C}^m(\overline{\mathbb{R}^n}) \subsetneq \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$
ℓ es acotado ($\implies$ $\operatorname{adh}\Omega$ es compacto)
$\mathcal{C}^0(\operatorname{adh}\Omega) = \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. (Cuando Ω es acotado)

Ejercicio 8.

$$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) = \{u|_\Omega \mid u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)\}$$

Fecha: 13 de abril de 2020.

Cátedra 8 (6 No Presencial)

Definición 9 (Espacio ortogonal)**.** Sea E ev Banach, M sev de E. Se define:

Espacio Ortogonal $M^{\perp}$

$$M^{\perp} \overset{(\text{def})}{=} \{f \in E' | < f,\ x >_{E',E} = 0,\ \forall x \in M\} \quad (\text{Es cerrado en } E')$$

Si N sev de E', se define

$$N^{\perp} \overset{(\text{def})}{=} \{x \in E | < f,\ x >_{E',E} = 0,\ \forall f \in N\} \quad (\text{Es cerrado en } E)$$

Proposición 10.

Prop. de los "ortogonal de ortogonales"

(i) $(M^{\perp})^{\perp} = \operatorname{adh} M$
(ii) $(N^{\perp})^{\perp} \supseteq \operatorname{adh} N$

Si el espacio es de Hilbert, el producto interno coincide con el producto escalar. De esta forma, esta definición coincide con la noción vista en espacio finito.

Proposición 11. *Sea E un ev de Banach. G, L sev de E cerrados.*
(i) $G \cap L = (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}$
(ii) $G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp}$

Demostración. :
(i) Sea $x \in G \cap L$ y probemos que $x \in (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}$, ie, pdq $< f,\ x >= 0 \forall f \in G^{\perp} + L^{\perp}$.
Pero $f \in G^{\perp} + L^{\perp} \iff f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in G^{\perp}$ y $f_2 \in L^{\perp}$, y entonces $< f_1,\ x >= 0$ pues $x \in G$ y $< f_2,\ x >= 0$ pues $x \in L$.
Por lo tanto $< f_1 + f_2,\ x >= 0$. De esta forma, $x \in (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}$
Inversa $^{\text{mte}}$, es claro que

$$G^{\perp} \subseteq G^{\perp} + L^{\perp} \implies (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} \subseteq (G^{\perp})^{\perp} = \operatorname{adh} G = G$$

Pues G es cerrado. Analoga $^{\text{mte}}$:

$$(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} \subseteq L$$

Entonces $(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} \subseteq G \cap L$. Por lo tanto, $(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} = G \cap L$.
(ii) pdq $(G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} = (G + L)^{\perp}$
Sea $f \in G^{\perp} \cap L^{\perp}$ y probemos que $f \in (G + L)^{\perp}$, ie,

$$< f,\ x >= 0 \quad \forall x \in G + L$$

Pero, como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in G$, $x_2 \in L$, sigue que

$$< f,\ x_1 >= 0 \quad \text{pues } f \in G^{\perp}$$
$$< f,\ x_2 >= 0 \quad \text{pues } f \in L^{\perp}$$

Sumando, sigue que

$$< f,\ x_1 + x_2 >= 0$$

y entonces $f \in (G + L)^{\perp}$.
Inversa $^{\text{mte}}$:

$$G \subseteq G + L$$

tomando ortogonal

$$\left.\begin{array}{l} (G^{\perp} + L)^{\perp} \subseteq G^{\perp} \\ (G^{\perp} + L)^{\perp} \subseteq L^{\perp} \end{array}\right\} \implies (G^{\perp} + L)^{\perp} \subseteq G^{\perp} \cap L^{\perp}$$

Concluyendo así que

$$(G^{\perp} + L)^{\perp} = G^{\perp} \cap L^{\perp}$$

□

$$G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$$

Tomando $\perp$:

$$(G \cap L)^\perp = (\underbrace{G^\perp + L^\perp}_{\text{sev } E'})^{\perp^\perp} \supseteq \operatorname{adh}(G^\perp + L^\perp)$$

$$G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp$$

$$\stackrel{(\perp)}{\Longrightarrow} (G^\perp \cap L^\perp)^\perp = (G+L)^{\perp^\perp} = \operatorname{adh}(G+L)$$

Si G y L cerrados, ¿Será $G+L$ cerrado? La respuesta no es trivial, y la respuesta viene de un teorema (que no tiene tantas aplicaciones).

Noción de Adjunto y Operadores No Acotados

Vamos a poner énfasis en las diferencias en la dim. finita y dim infinita.

En dim. finita, lo interesante es que todo operador lineal es continua. La gran diferencia con la dim. infinita es que no todos los operadores lineales son continuos, y uno comienza a caracterizar la cont. en el caso de la dim. infinita.

En el caso de la dim finita se prueba que todos los op. lineales son continuos y acotados. De hecho, se hace una caracterización de que si es acotado, es continuo.

Definición 12. Sea E, F ev Banach. Un operador $T : D(T) \subseteq E \to F$ con $D(T)$ sev de E, se denomina operador (lineal) lineal no-acotado

Op. Lineal **no acotado**

Definición 13. T se dice **acotado** si

Op. Lineal **acotado**

$$\exists M \geq 0,\ \| Tx \|_F \leq M \| x \|_E \ \forall x \in D(T)$$

Una función se le dice **no lineal** si es una función cualquiera. Y una función lineal es tmb. no lineal. Los matemáticos "conviven" con esta pequeña contradicción.

Nota 14. *Un operador acot. es tmb no-acotado, pero no hay que perder el sueño por esto.*

En dim. finita, todo op. lineal se representa por una matriz.

Ejercicio 15. Si $E = \mathbb{R}^N$, $F = \mathbb{R}^M$ y $T : D(T) = \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, entonces

$$(T \text{ es no-acotado}) \iff (T \text{ es acotado}) \iff (T \text{ es continua en } E)$$

Definición 16. Un op. $T : \underset{(D(T) \text{ sev de } E)}{D(T)} \subseteq E \to F$ se dice **cerrado** si $\operatorname{Gr}(T)$ es cerrado en $E \times F$

Recordando que

$$\operatorname{Gr} T = \{(x,\ Tx) | x \in D(T)\} \subseteq E \times F$$

Nota 17. *:*
(i) T cerrado $\Longrightarrow$ $\ker T$ es cerrado, pues

$$\ker T \times \{0\} = \operatorname{Gr} T \cap (E \times \{0\}), \quad \textit{que es cerrado}$$

(ii) $T : D(T) \subseteq E \to F$ es cerrado $\iff$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \in D(T),\ x_n \to x \in E \\ y_n = Tx_n \to y_n \\ \Big(ie,\ (x_n,\ y_n) \in \operatorname{Gr} T,\ (x_n,\ y_n) \to (x,\ y)\Big) \end{array} \right\} \Longrightarrow x \in D(T) \wedge y = Tx$$

*(iii) Para T cerrado, **no** podemos usar el teo. del grafo cerrado, y concluir que T es continua. (hay que evitar la tentación de ocupar este teorema y decir que T es cont).*