Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4801 - Análisis Funcional

Auxiliar 4

Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Nicolás Bitar, Eduardo Silva

P1. Sean E y F dos espacios de Banach.

a) Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Muestre que $\mathrm{Im}(T)$ es cerrado si y solo si existe $C > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}(x, \ker(T)) \leq C\|Tx\|, \ \forall x \in E.$$

b) Sea $A : D(A) \subset E \to F$ un operador no-acotado, cerrado. Muestre que $\mathrm{Im}(A)$ es cerrado si y solo si existe $C > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}(u, \ker(A)) \leq C\|Au\|, \ \forall u \in D(A).$$

P2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $g : X \to \mathbb{R}$ medible. Considere el operador lineal no-acotado A en $L^1(\mu)$, definido por,

$$D(A) := \{f \in L^1(\mu) : gf \in L^1\} \text{ y } A(f) = gf.$$

a) Muestre que A es cerrado

b) Considere ahora $X = \mathbb{N}$, μ la medida de conteo (es decir, $L^1(\mu) = \ell^1$) y $g(n) = n$. Demuestre que A esta densamente definido.

c) Determine para esto último, A^*, $D(A^*)$ y $\overline{D(A^*)}$

P3. Sean E, F y G espacios de Banach,

a) Sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Muestre que $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

b) Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ biyectivo. Demuestre que T^* es biyectivo y $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

P4. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $a \in E$, $a \neq 0$ fijo y una función lineal discontinua $f : E \to \mathbb{R}$. Considere el operador $A : D(A) = E \to E$ definido por

$$Ax = x - f(x)a.$$

a) Determine $\mathrm{Im}(A)$ y $\ker(A)$.

b) Determine si A es cerrado.

c) Determine $D(A^*)$ y A^*.

d) Determine $\mathrm{Im}(A^*)$ y $\ker(A^*)$.

P5. Sean E y F dos espacios de Banach. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $A : D(A) \subset E \to F$ un operador no-acotado cerrado y densamente definido. Definimos el operador $B : D(B) \subset E \to F$ por

$$D(B) = D(A) \ \text{ y } \ B = A + T.$$

a) Muestre que B es cerrado.

b) Muestre que $D(B^*) = D(A^*)$ y $B^* = A^* + T^*$.

P1. Sean E y F dos espacios de Banach.

a) Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Muestre que $\operatorname{Im}(T)$ es cerrado si y solo si existe $C > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, \ker(T)) \leq C\|Tx\|, \ \forall x \in E.$$

a) Usaremos $X = E/_{\ker T}$ $\longrightarrow$ Intentando q la fn sea iny.

$\pi : E \longrightarrow X$

$x \longmapsto \pi(x) = x + \ker T$

extensión de la fn $\left\{ \begin{array}{l} \hat{T} : X \longrightarrow F \\ x + \ker T \longmapsto \hat{T}(x + \ker T) = T(x) \end{array} \right.$ Bien def

$\|\pi(x)\|_X = \inf_{y \in \ker T} \|x + y\| = \operatorname{dist}(x, \ker T)$

Además $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} \hat{T}$

Con esto:

$\operatorname{Im} T$ es cerrada $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} \hat{T}$ cerrada

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} \hat{T}$ es Banach

$\Leftrightarrow$ $\hat{T} : X \to \operatorname{Im} \hat{T}$ es isomorfismo.
(por app. abta)

$\Leftrightarrow$ $\hat{T}^{-1}$ es lineal continua

$\Leftrightarrow$ $\exists\, C > 0 : \forall\, Tx \in \operatorname{Im} \hat{T}$:

$\operatorname{dist}(x, \ker T) = \|\pi(x)\| = \|\hat{T}^{-1} \hat{T} x\| \leq C \|Tx\|$ //

b) Sea $A : D(A) \subset E \to F$ un operador no-acotado, cerrado. Muestre que $\operatorname{Im}(A)$ es cerrado si y solo si existe $C > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(u, \ker(A)) \leq C\|Au\|, \ \forall u \in D(A).$$

b) Queremos usar a) Definimos una norma $\|\cdot\|_A$ en $D(A)$:

$\|u\|_A := \|u\|_E + \|Au\|_F, \ u \in D(A)$

$(D(A), \|\cdot\|_A)$ es Banach:

Si $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(A)$ es $\|\cdot\|_A$ Cauchy. Como $\|\cdot\|_E \leq \|\cdot\|_A$

$\Rightarrow \{u_n\}$ es $\|\cdot\|_E$ - Cauchy

$\therefore \exists\, x \in E : u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x$

Como $\|Au\|_F \leq \|u\|_A$: $\{Au_n\}_n$ es $\|\cdot\|_F$ - Cauchy

$\therefore \exists y \in F : Au_n \xrightarrow{\|\cdot\|_F} y$

¡Pero A es cerrado! $\Rightarrow$ i) $x \in D(A)$

ii) $Ax = y$

$$\|u_n - x\|_A = \|u_n - x\|_E + \|Au_n - \overset{Ax}{\overset{\shortparallel}{y}}\|_F \xrightarrow[n]{} 0$$

$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_A} x$

Además A es continua pues $\|Au\|_F \leq \|u\|_A$, $\forall u \in D(A)$

Usando lo anterior: $\operatorname{Im}(A)$ cerrado ssi $\exists c > 0 : \forall u \in D(A)$

$$\operatorname{dist}_A(u, \ker A) \leq C\|Au\|$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\inf_{y \in \ker A} \{\|u + y\|_E + \|Au + \overset{0}{\cancel{Ay}}\|_F\}}_{\operatorname{dist}_E(u, \ker A) + \|Au\|_E} \leq C\|Au\|_F$$

$\blacksquare$

P2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $g : X \to \mathbb{R}$ medible. Considere el operador lineal no-acotado A en $L^1(\mu)$, definido por,

$$D(A) := \{f \in L^1(\mu) : gf \in L^1\} \text{ y } A(f) = gf.$$

a) Muestre que A es cerrado

$$A : L^1 \longrightarrow L^1$$
$$f \longmapsto A(f) = gf.$$

A es cerrado: receta

- Tomamos $\{f_n\}_n \subseteq D(A)$: • $f_n \xrightarrow{L^1} f \in L^1$, y además
  • $Af_n \xrightarrow{L^1} h \in L^1$

pdq $f \in D(A)$ y $Af = h$

Tenemes q $\exists$ subsuc $f_{n_k} \xrightarrow{cs} f$.

$\hookrightarrow \exists$ otra subsubsuc tq $\begin{cases} A f_{n_{k_j}} \xrightarrow{cs} h \\ f_{n_k} \xrightarrow{cs} f \\ \exists w \in L^1 : \underbrace{|A f_{n_{k_j}}|}_{= |g f_{n_{k_j}}|} \leq w \end{cases}$

$\overset{\Rightarrow}{j \to \infty} |gf| \leq w \in L^1 \Rightarrow gf \in L^1 \Rightarrow f \in D(A)$.

Además

- $A f_{n_{k_j}} = g f_{n_{k_j}} \xrightarrow{cs} h$
- $g f_{n_{k_j}} \xrightarrow{cs} gh$

$\Big\}$ $h = gf$ cs

b) Considere ahora $X = \mathbb{N}$, μ la medida de conteo (es decir, $L^1(\mu) = \ell^1$) y $g(n) = n$. Demuestre que A esta densamente definido.

$\ell^1(\mathbb{N})$; $g(n) = n$ $\quad D(A) = \{(u_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}) \mid \sum |n u_n| < \infty\}$

$D(A)$ es denso en $\ell^1(\mathbb{N})$:

Basta notar que

$C_{00}(\mathbb{N}) \subseteq D(A)$

$\hookrightarrow$ Denso en $\ell^1(\mathbb{N})$

$\therefore \overline{D(A)} = \ell^1(\mathbb{N}) = \overline{C_{00}(\mathbb{N})}$

c) ¿A^*? Para $v \in (\ell^1(\mathbb{N}))^* = \ell^\infty(\mathbb{N})$

$u \in D(A)$:

$\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle$

$\langle v, Au \rangle = \sum_n v_n \cdot n u_n = \sum_n n v_n \cdot u_n$

$= \langle (n v_n)_n, (u_n)_n \rangle$

$\therefore A^* v = (n v_n)_n$

$D(A^*) = \{(v_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mid (n v_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})\}$

¿ $\overline{D(A^*)}$?

Notemos q $D(A^*) \subseteq C_0(\mathbb{N})$:

Si $v \in D(A^*)$: $\exists M > 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}: |n v_n| \leq M \Rightarrow |v_n| \leq M/n \xrightarrow[n]{} 0$

Así $C_{00}(\mathbb{N}) \subseteq D(A^*) \subseteq C_0(\mathbb{N}) \Rightarrow \overline{D(A^*)} = \overline{C_{00}(\mathbb{N})} = C_0(\mathbb{N})$

Propuesta:

P3. Sean E, F y G espacios de Banach,

a) Sean $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y $S \in \mathcal{L}(F,G)$. Muestre que $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

b) Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$ biyectivo. Demuestre que T^* es biyectivo y $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

P4. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $a \in E$, $a \neq 0$ fijo y una función lineal discontinua $f : E \to \mathbb{R}$. Considere el operador $A : D(A) = E \to E$ definido por

$$Ax = x - f(x)a.$$

a) Determine $\mathrm{Im}(A)$ y $\ker(A)$.

a) $D(A) = E$.

¿ $\ker A$? $0 = Ax = x - f(x)\,a$

$\Rightarrow x = f(x)\,a$.

Casos: • Si $f(a) = 1$: $\boxed{\ker A = \mathbb{R}a}$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$: $A(\lambda a) = \lambda a - f(\lambda a)a = \lambda a - \lambda \underbrace{f(a)}_{1} a = 0$.

¿ $\mathrm{Im}\, A$? $f(Ax) = f(x) - f(x)f(a)$

$= f(x)\underbrace{(1 - f(a))}_{0}$

$\boxed{\mathrm{Im}\, A = \ker f:}$

Si $y \in \ker f$: $Ay = y - f(y)a = y \in \mathrm{Im}\, A$ ¡ Ganamos!

• Caso $f(a) \neq 1$:

La ec. $a = f(a)a$ no tiene sentido

$x \in \ker A \iff x = 0$ si $x \in \ker A \setminus \{0\}$ se rompe.

$\underbrace{x = f(x)a}_{\text{tomando } f(\cdot)} \Rightarrow 0 = Ax = f(x)a - f(f(x)a)a \neq 0.$

$f(x) = f(x)f(a) \to f(a) = 1$ se rompe :c

¿$\operatorname{Im} A$? cuando $f(a) \neq 1$

Tenemos que $\operatorname{Im} A = E$:

Sea $y \in E$: Queremos que $y = Ax = x - f(x)a$

tomando $f(\cdot)$

$$\begin{cases} x = y + f(x)a \\ f(y) = f(x)(1 - f(a)) \end{cases}$$

$\therefore x = y + \frac{f(y)}{1 - f(a)} a \in E$ cumple $Ax = y$.

por construcción

b) Determine si A es cerrado.

$A: E \longrightarrow E$, E Banach

Si A fuese cerrado, sería cont. por Teo. Gr. cerrado

$\Rightarrow f$ es continua ✗

c) Determine $D(A^*)$ y A^*.

$D(A^*) = \{v \in E' / \exists c > 0, \forall x \in D(A): \underbrace{|\langle v, Ax\rangle|}_{*} \leq C\|x\|\}$

(*) $\langle v, Ax\rangle = \langle v, x\rangle - f(x)\langle v, a\rangle.$

$\therefore v \in D(A^*)$ ssi $\exists c > 0: \forall x \in D(A)$:

$|\langle v, x\rangle - f(x)\langle v, a\rangle| \leq C\|x\|$

Por desig triang inversa:

$\Rightarrow f(x)\langle v, a\rangle \leq C\|x\| + \langle v, x\rangle$

$\leq (C + \|v\|)\|x\|$

$$\Rightarrow |f(x)\underbrace{\langle v, a\rangle}_{0}| \leq (C + \|v\|)\|x\|$$

0 pues f no es cont.

$\therefore D(A^*) = \{v \in E' \mid \langle v, a\rangle = 0\}$

$v \in D(A^*)$

$\langle v, Ax\rangle = \langle v, x\rangle - 0 = \langle v, x\rangle$

$\therefore A^* v = v$

d) $\ker A^* = \{0\}$

$\operatorname{Im} A^* = D(A^*)$.