Se empieza creando el módulo "paths" en donde quedará registrado todas las rutas necesarias para la tarea.

- Se crea la ruta PATH_DATA y PATH_RAW que serán las rutas a las carpetas 'data' y 'raw' respectivamente
- Se crea un dicc. dict_path_raw, que al entregarse de llave 'wNN', entregará la ruta de la carpeta 'wNN' en 'raw'
- Se crean a su vez los dicc.'s dict_csv_mc_a y dict_csv_mc_f, que entrega la ruta para los .csv's 'metrocuadrado_all_wNN' y 'metrocuadrado_furnished_wNN' respectivamente, al entregarle de llave 'wNN'.

Luego se procede a crear un único DataFrame que contenga la información de los datasets proporcionados. Se realiza como sigue:

- Se crean dos listas de DataFrames, uno para 'all' y otro para 'furnished'.
- Luego se concatenan los DataFrames en dos DataFrames únicos. Uno para 'all' y otro para 'furnished'.
- Paso seguido, se crea una nueva columna, 'furnished', que informa si el DataFrame proviene de 'furnished' (marcado con un 1), o si viene de 'all' (marcado con 0).
- Posteriormente se unen los dos DataFrames creados en un único DataFrame, y se añade la columna extra.
- Finalmente, se eliminan los duplicados.

P3.1

Pdq $p(\vec{w}|\vec{y}, X, \alpha, \beta) \sim N(\vec{m}_N, S_N)$

$p(\vec{w}|\vec{y}, X, \alpha, \beta)$

$$\propto \underbrace{p(\vec{y}|\vec{w}, X, \alpha, \beta)}_{1} \underbrace{p(\vec{w}|X, \alpha, \beta)}_{2} \quad / \text{Bayes}$$

Desarrollemos 1 y 2 por separado:

1: Notemos que $y \perp \alpha$, luego

$$1 = p(\vec{y}|X, \vec{w}, \beta)$$
$$= \prod_{i=1}^{N} p(y_i|\vec{x}_i, \vec{w}, \beta) \quad / \text{i.i.d}, \ y_i \perp \vec{x}_j \ \forall j \neq i$$
$$= \prod^N N(y_i|\vec{w}^t x_i, \beta^{-1}) \quad / \sum_{i=1}^{N} \equiv \sum^N$$
$$= \prod^N (2\pi\beta^{-1})^{-1/2} \exp(-\beta/2 \cdot (y_i - \vec{x}_i^t \vec{w})^2)$$
$$= (2\pi\beta^{-1})^{-N/2} \exp(-\beta/2 \sum^N (y_i - \vec{x}_i^t \vec{w})^2)$$
$$= (2\pi\beta^{-1})^{-N/2} \exp(-\beta/2 (\vec{y} - X\vec{w})^t (\vec{y} - X\vec{w})) \qquad (3)$$

2: Notemos que $\vec{w} \perp X, \beta$, luego:

$$2 = p(\vec{w}|\alpha)$$
$$= (2\pi |\alpha^{-1} I|)^{-d/2} \exp(-\tfrac{1}{2} \vec{w}^t (\alpha^{-1} I)^{-1} \vec{w}) \quad / \text{Notando q } \vec{w} \in R^{[0..d-1]}$$
$$= (2\pi\alpha^{-1})^{-d/2} \exp(-\tfrac{\alpha}{2} \vec{w}^t \vec{w}) \qquad (4)$$

Ocupando los resultados en lo anterior:

$p(\vec{w}|\vec{y}, X, \alpha, \beta)$

$$\underset{\vec{w}}{\propto} \exp(\underbrace{-\beta/2 (\vec{y} - X\vec{w})^t (\vec{y} - X\vec{w}) - \tfrac{\alpha}{2} \vec{w}^t \vec{w}}_{-\frac{1}{2}(*)}) \qquad (5)$$

Desarrollemos $(\star)$:

$$\beta(\vec{y} - X\vec{w})^t(\vec{y} - X\vec{w}) + \alpha\vec{w}^t\vec{w}$$

$$= \beta(\vec{y}^t\vec{y} - 2\vec{w}^t X^t y + \vec{w}^t X^t X\vec{w}) + \alpha\vec{w}^t\vec{w}$$

$$= \vec{w}^t(\alpha I + \beta X^t X)\vec{w} - 2\vec{w}^t(\beta X^t y) + \beta\vec{y}^t\vec{y} \qquad (6)$$

Notemos que ahora la expresión anterior tiene forma de cuadrática:

$$(\vec{w} - \vec{\mu})^t\Lambda^{-1}(\vec{w} - \vec{\mu}) = \vec{w}^t\Lambda^{-1}\vec{w} - 2\vec{w}^t\Lambda^{-1}\vec{\mu} + \vec{\mu}^t\Lambda^{-1}\vec{\mu} \qquad (7)$$

Identificando términos similares en (6), encontramos que:

$$\Lambda^{-1} = \alpha I + \beta X^t X \qquad (8)$$

$$\Lambda^{-1}\vec{\mu} = \beta X^t\vec{y} \qquad (9)$$

En dónde (8) identificamos que $S_N^{-1} = \Lambda^{-1}$. Por otro lado, en (9) si multiplicamos $S_N\cdot$, tenemos que $\vec{\mu} = \vec{m}_N$

Estos dos términos bastan para deducir que (6) admite esta descomposición:

$$(\vec{w} - \vec{m}_N)^t S_N^{-1}(\vec{w} - \vec{m}_N) + cte$$

donde cte son términos que no dependen de $\vec{w}$. de esta forma concluimos que, a partir de (5):

$$p(\vec{w}|\vec{y}, X, \alpha, \beta)$$

$$\underset{\vec{w}}{\propto} \exp(-\tfrac{\beta}{2}(\vec{y} - X\vec{w})^t(\vec{y} - X\vec{w}) - \tfrac{\alpha}{2}\vec{w}^t\vec{w})$$

$$\underset{\vec{w}}{\propto} \exp(-\tfrac{1}{2}(\vec{w} - \vec{m}_N)^t S_N^{-1}(\vec{w} - \vec{m}_N))$$

Es decir, que

$$p(\vec{w}|\vec{y}, X, \alpha, \beta) \sim N(\vec{m}_N, S_N^{-1}) \blacksquare$$

P3.2

$$p(y' \mid \vec{x}', \vec{y}, X, \alpha, \beta)$$
$$= \int d\vec{w} \; p(y' \mid \vec{x}', \vec{w}, \beta)\, p(\vec{w} \mid \vec{y}, X, \alpha, \beta)$$

pdq dada una observación $\vec{x}'$, α y β, la dist. pred. post. cumple que:

$$p(y' \mid \vec{x}', \vec{y}, X, \alpha, \beta) \sim N(\vec{m}_N^{\,t} X, \; \sigma_N^2(\vec{x}'))$$

donde $\sigma^2_N(\vec{x}') = \frac{1}{\beta} + X^t S_N \vec{x}'$

$$p(y' \mid \vec{x}', \vec{y}, X, \alpha, \beta) \propto \exp(-\tfrac{1}{2}(y' -$$

Dem:

$$p(y' \mid \vec{x}', \vec{y}, X, \alpha, \beta)$$
$$= \int d\vec{w} \; p(y' \mid \vec{x}', \vec{w}, \beta)\, p(\vec{w} \mid \vec{y}, X, \alpha, \beta)$$
$$= \int d\vec{w} \; N(y' \mid \vec{w}^t \vec{x}', \beta^{-1})\, N(\vec{w} \mid \vec{m}_N, S_N)$$
$$\underset{y'}{\propto} \int d\vec{w} \exp\left(-\tfrac{\beta}{2}(y' - \vec{w}^t \vec{x})^2 - \tfrac{1}{2}(\vec{w} - \vec{m}_N)^t S_N^{-1} (\vec{w} - \vec{m}_N)\right)$$
$$\underset{y'}{\propto} \int d\vec{w} \exp\Big(-\tfrac{\beta}{2}[y'^2 - 2(\vec{w}^t \vec{x}) y' + (\vec{w}^t \vec{x})^2]$$
$$-\tfrac{1}{2}[\vec{w}^t S_N^{-1} \vec{w} - 2\vec{w}^t S_N^{-1} \vec{m}_N \cancel{+ \vec{m}_N^t S_N^{-1} \vec{m}_N}]\Big)$$

No depende de y' o de $\vec{w}$

$$= \int d\vec{w} \exp\Big(-\tfrac{1}{2}[\beta y'^2 - 2\vec{w}^t(\beta y' \vec{x}) + \vec{w}^t(\beta \vec{x} \vec{x}^t)\vec{w}$$
$$+ \vec{w}^t S_N^{-1} \vec{w} - 2\vec{w}^t S_N^{-1} \vec{m}_N]\Big)$$

Analicemos lo que está en en paréntesis cuadrado:

$$\beta y'^2 - 2\vec{w}^t(\beta y' \vec{x}) + \vec{w}^t(\beta \vec{x}\vec{x}^t)\vec{w} + \vec{w}^t S_N^{-1} \vec{w} - 2\vec{w}^t S_N^{-1} \vec{m}_N$$
$$= \vec{w}^t(\beta \vec{x}\vec{x}^t + S_N^{-1})\vec{w} - 2\vec{w}(\beta y' \vec{x} + S_N^{-1} m_N) + \beta y'^2$$

Sea $\Lambda = \beta \vec{x}\vec{x}^t + S_N^{-1}$ y $\vec{\mu} = \Lambda^{-1}(\beta y' \vec{x} + S_N^{-1} m_N)$ (Si Λ fuera invert.)

Luego:

$$\vec{w}^t(\beta \vec{x}\vec{x}^t + S_N^{-1})\vec{w} - 2\vec{w}(\beta y' \vec{x} + S_N^{-1} m_N) + \beta y'^2$$
$$= \vec{w}^t \Lambda \vec{w} - 2\vec{w}\Lambda\vec{\mu} + \vec{\mu}^t \Lambda \vec{\mu} - \vec{\mu}^t \Lambda \mu + \beta y'^2$$
$$= (\vec{w} - \vec{\mu})^t \Lambda (\vec{w} - \vec{\mu}) - \vec{\mu}^t \Lambda \mu + \beta y'^2$$