Mayo 2017

Física de Astropartículas
Lluvias Atmosféricas Extendidas
1er semestre 2017

1. Un modelo más realista para el modelo de Heitler implica suponer que luego de cada capa atmosférica, cuyo espesor es $X_{EM} = 37{,}1\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$, cada partícula produce g_{EM} nuevas partículas. De esta forma, el modelo original de Heitler supone $g_{EM} = 2$. Obtenga según este modelo realista los nuevos parámetros de la cascada, $N_{\text{máx}}$, $X_{\text{máx}}$ y Λ (*elongation rate*), como función de g_{EM}. Luego, evalúe esos parámetros para los casos $g_{EM} = 2, 6, 13, 20$.

2. La atmósfera marciana es una mezcla de gases con la siguiente composición: $96\,\%$ de CO_2, $2\,\%$ de Ar, $1{,}8\,\%$ de N_2 y $0{,}2\,\%$ de O_2. Es tan tenue que la presión atmosférica en su superficie es de sólo $6\,$hPa (como referencia, la presión atmosférica en la superficie terrestre es $1013{,}2\,$hPa), llegando a un máximo de $12\,$hPa en Hellas Planitia. Repita los cálculos del punto anterior para el caso de Hellas Planitia y compare los resultados obtenidos con los de la Tierra. Ayuda: algunos datos adicionales que podrían llegar a usar: masa de Marte: $6{,}42 \times 10^{23}\,$kg; radio de Marte: $3400\,$km. El número másico de una mezcla calcula simplemente como un promedio pesado por la fracción de cada constituyente, $\langle A \rangle = \sum_i A_i x_i$. Para el número atómico de la mezcla debe calcularse el número atómico efectivo, $Z_{\text{eff}} = \sqrt[2{,}94]{\sum_i f_i Z_i^{2{,}94}}$, donde Z_i es el número atómico del elemento i-ésimo y f_i es la fracción de carga de cada elemento (es decir, $f_i = Z_i / \sum_i Z_i$). Por ejemplo, para el caso del agua, H_2O, $Z_{\text{eff}} = 7{,}42$.

3. El modelo de Glasmaher-Matthews para cascadas hadrónicas es un modelo simple que permite comprender la evolución de una cascada iniciada por un hadrón. Hemos visto en clase el caso de una lluvia atmosférica extendida (EAS) iniciada por un protón de energía E_p, donde obtuvimos que la mayor parte de la energía se encuentra en el canal electromagnético ($E_{\mathrm{EM}} = 1 - (E_p/E_\pi)^{\beta_\pi - 1} \simeq 0{,}9$ para $\beta_\pi = 0{,}85$). Luego, es válido suponer que a orden cero, $X_{\text{máx}} \simeq X_{\text{máx}}^{\mathrm{EM}}$, donde este último término corresponde a la posición del máximo de una cascada equivalente pero iniciada por un fotón de energía $E_\gamma = E_p/(3N_{\mathrm{CH}})$ (esto surge de suponer que en la primer interacción se producen N_{CH} y $N_{\mathrm{CH}}/2$, que decaen inmediatamente según la reacción $\pi^0 \to 2\gamma$, y luego $N_\gamma = N_{\mathrm{CH}}$). Bajo esta aproximación, demuestre que la posición del máximo para una cascada iniciada por un protón puede aproximarse cómo $X_{\text{máx}}^p = X_0 + X_{\text{máx}}^{\mathrm{EM}} - 126\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$ para $N_{\mathrm{CH}} = 10$ y X_0 corresponde al punto de primera interacción.

4. Suponiendo que la energía límite E_π es $E_\pi = 10\,$GeV para piones cargados presentes en una cascada iniciada por un protón de $E_p = 100\,$PeV, calcule a que altura sobre el nivel del mar debería incrementarse el número de muones en la cascada, suponiendo que el punto de primera interacción se dio en $X_0 = 0\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$. Considere y justifique todas las aproximaciones que considere necesarias para llegar al resultado pedido. Luego, a partir del poder de frenado del muón en el aire (vea Groom 2001), estime cuantos de esos muones llegaran a la superficie del suelo y cual con que energía promedio. Finalmente, use el poder de frenado del muón en roca estándar (Groom 2001) para determinar cuantos de estos llegaran a un detector ubicado a $2{,}5\,$m bajo la superficie del suelo. En caso de requerirlo, modifique a voluntad y use el código `stopping.py` incluido en los materiales del curso.

5. El modelo de superposición para una EAS iniciada por un hadrón de masa A y energía E_p sostiene que la cascada resultante es equivalente a A cascadas simultáneas iniciadas por sendos protones de energía E_p/A. Este modelo se soporta en el hecho de que a las energías más altas, $E_p \gg m_p$, la energía de ligadura por nucleón (típicamente $B/A \simeq 8{,}8\,$MeV) es despreciable frente a E_p/A. Utilice entonces el modelo de Glasmaher-Matthews combinado con el modelo de superposición para verificar que:

   a) El número de muones de una lluvia iniciada por un núcleo de hierro ($^{56}Fe_{26}$) es $\simeq 50\,\%$ mayor que el número de muones de una lluvia iniciada por un protón (estrictamente, $N_\mu^A \simeq A^{1-\beta_\pi} N_\mu^p$).

   b) La posición del máximo puede aproximarse como $X_{\text{máx}}^A = X_{\text{máx}}^p - X_{\mathrm{EM}} \ln A$.

c) Las fluctuaciones en la posición del máximo de distintas lluvias con la misma energía del primario son menores para los hierros que para los protones.

6. Calcule el número de muones que esperaría ver para una lluvia iniciada por un protón con energía $E_p = 100\,$PeV. Repita sus cálculos para un helio, un carbono, un oxigeno, un calcio y un hierro de la misma energía.

7. A partir de la definición del radio de Molière,

$$X_m = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha_{\rm EM}}}\frac{m_e c^2}{E_c^{\rm EM}} X_{\rm EM}$$

calcule el radio de Moliere, r_m en metros en los siguientes casos: a) La Tierra a nivel del Mar; b) La Tierra en Chacaltaya ($h = 5350\,$m s.n.m); c) La Tierra en altura de vuelo ($h = 11500\,$m s.n.m.); d) Marte en la superficie.

8. En una lluvia iniciada por un núcleo de masa A, el número de electrones puede calcularse como

$$N_e^A \simeq 7{,}35\ A^{-0{,}046}\left(\frac{E_p}{10^{17}\,\rm eV}\right)^{1{,}046} \times 10^7.$$

Luego, el número de muones queda parametrizado como:

$$N_\mu^A \simeq 0{,}95 \times 10^5 \left(\frac{N_e^A}{10^6}\right)^{0{,}75}.$$

A partir de esto, Greisen propuso una parametrización para la LDF de los muones, que aún se utiliza, con algunos cambios. El experimento KASCADE utilizó esta parametrización para la densidad de muones a una distancia r al eje de la lluvia, medida sobre el frente de la misma:

$$\rho_\mu(\varrho_\mu) = \left(\frac{k_G N_\mu}{r_G^2}\right)\varrho_\mu^{-0{,}69}\,(1+\varrho_\mu)^{-2{,}39}\left(1+(0{,}1\varrho_\mu)^2\right)^{-1{,}0}$$

donde N_μ es el número total de electrones, $k_G = 0{,}28$ es una constante de normalización y $\varrho_\mu \equiv r/r_G$ es la distancia normalizada al radio de Molière para muones, también llamado radio de Greisen, $r_G = 320\,$m. Estas expresiones completan las vistas en clase para los electrones,

$$\rho_e(\varrho, S) = \left(\frac{\Gamma(4{,}5-S)}{2\Gamma(S)\Gamma(4{,}5-2S)}\right)(\varrho)^{S-2}\,(1+\varrho)^{S-4{,}5}\left(\frac{N_e(S)}{\pi R_M^2}\right),$$

donde Γ es la extensión del factorial a números reales y complejos,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}{\rm d}t\ \rightarrow\ \Gamma(n) = (n-1)!\ \text{si}\ n \in \mathbb{Z}^+,$$

$\varrho \equiv r/R_m$ es la distancia r al eje expresada en unidades del radio de Molière, y $N_e(S)$ es el número total de electrones a la edad S, dado por

$$N_e(S) = 0{,}31 y^{-1/2}\exp\left[t\left(1-\frac{3}{2}\ln S\right)\right],$$

que continúa siendo válida para un hadrón si se corrige la edad de la lluvia por $S_A = 1{,}15\ S$.

Utilice todas estas expresiones según corresponda para calcular el número de electrones y muones y su distribución a nivel del suelo, y compárelas con los resultados obtenidos en las simulaciones de un fotón, un protón y un hierro verticales con energía $E_p = 0{,}5\,$PeV realizadas en clase para un observatorio situado en la ciudad de la furia.

Luego, si se anima, calcule la profundidad del máximo $X_{\text{máx}}$ y la altura del máximo $h_{\text{máx}}$ para un fotón vertical de $2\,$PeV. Entonces posicione un nivel de observación en CORSIKA a dicha altitud y realice la simulación de un fotón, un protón y un hierro de procedencia vertical con esa energía. Repita los cálculos y comparaciones para el número y la distribución de electrones y muones en cada caso.