Escuela José Antonio Balseiro 2016
Nuevas Tendencias en Investigación en Física Médica

Introducción a muchas cosas

Martes, Modelo Estándar

Hernán Asorey
asoreyh@cab.cnea.gov.ar

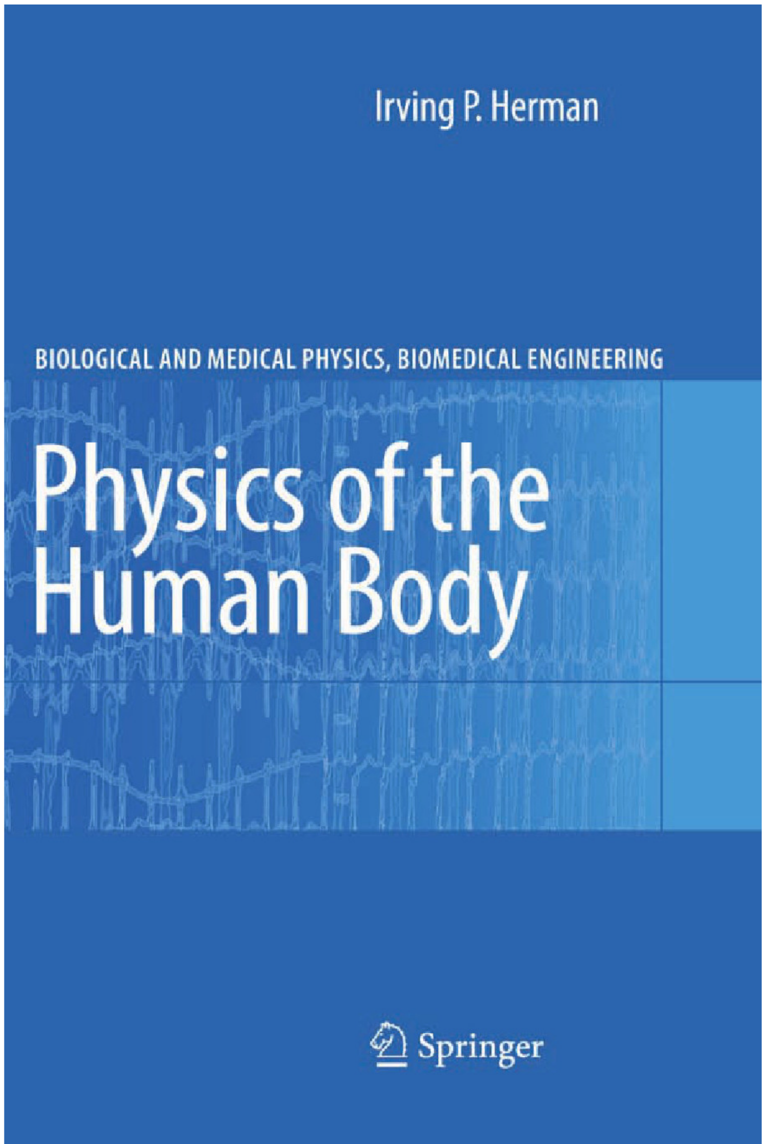
Contenidos: la magia de Knorr™

Tarea para el hogar

- Prestar mucha atención
- Indicador de tarea

Pero antes unos *disclaimers* generales

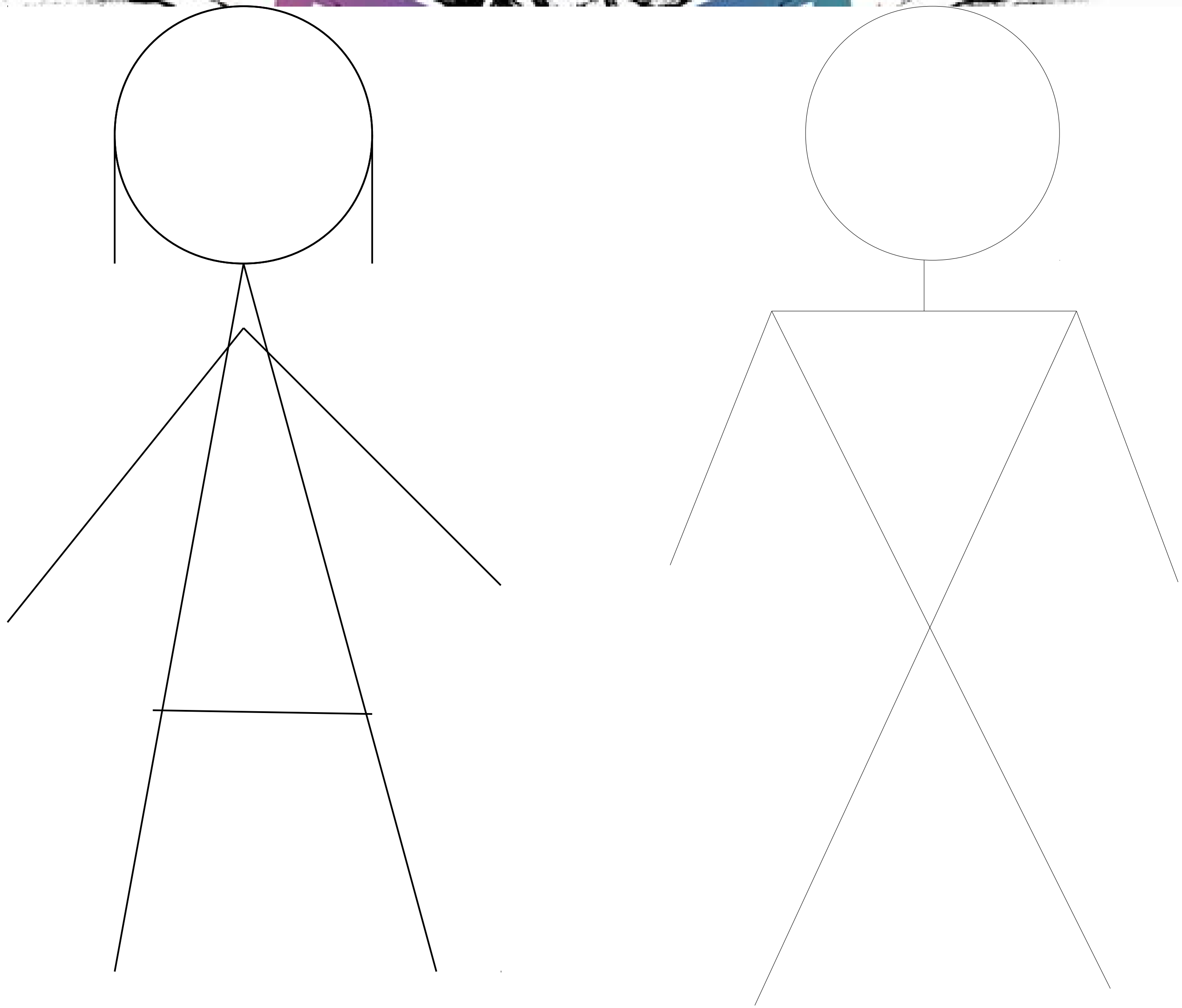
jerga, jerga, jerga



- *"Much of the problem we have in comprehending specialists in any field is in understanding their jargon, and not in understanding their ideas. This is particularly true for medicine. Much of medical jargon of interest to us is the terminology used in anatomy, and much of that in anatomy relates to directions and positions"*
- La medicina es descriptiva

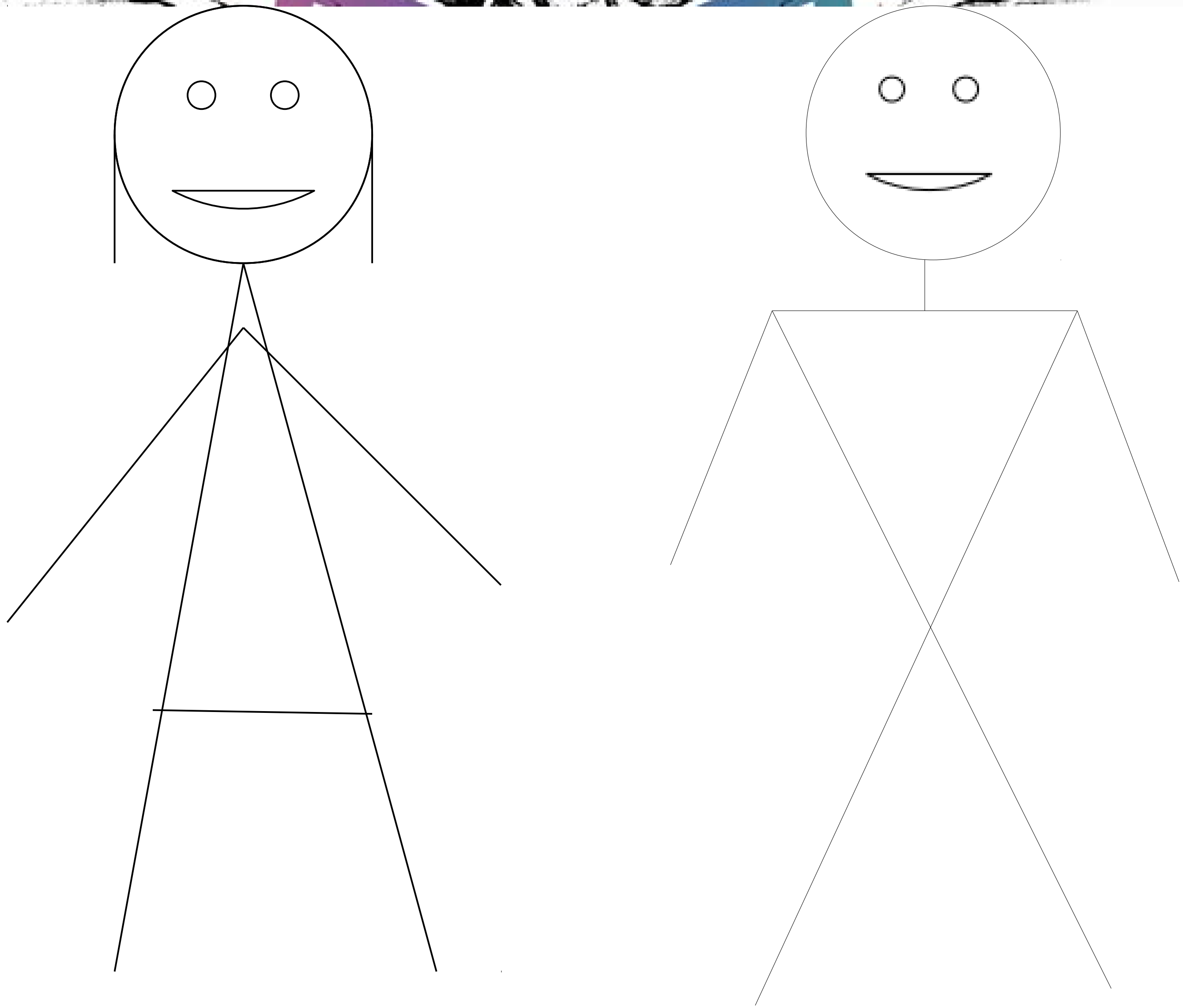
Imaginemos que esta es la "realidad" que queremos representar

Para ello usamos modelos simplificados...

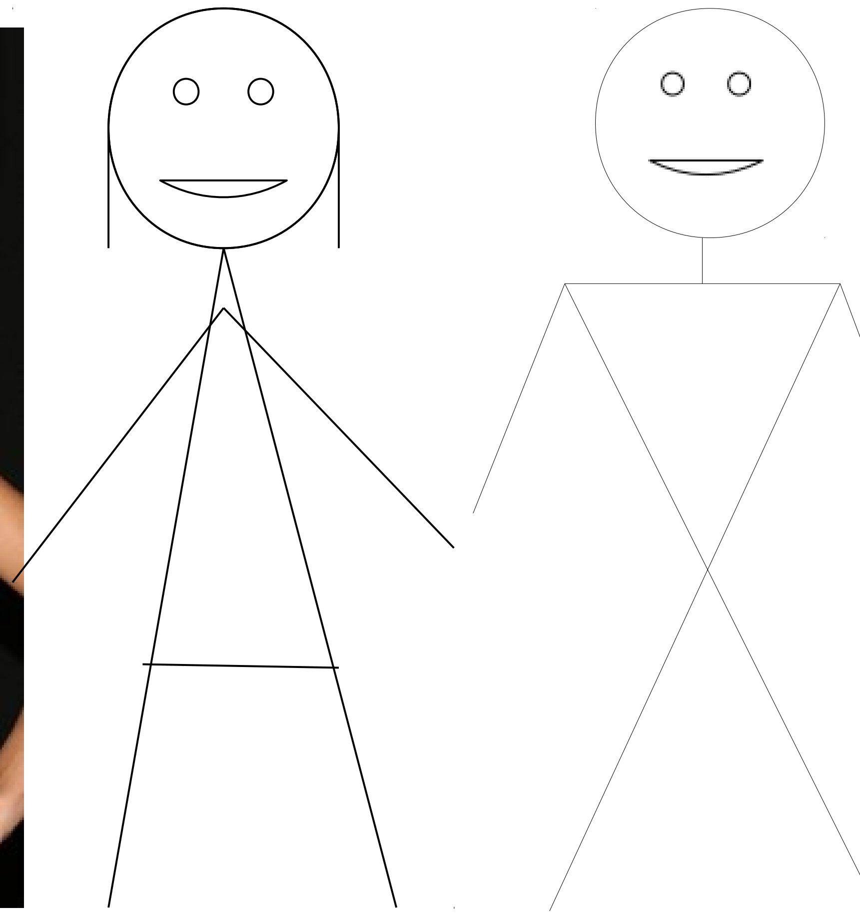


Para mejorar al modelo debemos contrastarlo

Que podrían ser mejorados ...



Pero seguro estarán muy lejos de la realidad.... (¡por suerte!)



Comentario sobre unidades

- Es conveniente trabajar en otro sistema de unidades
- 1 eV es la energía ganada por un electrón en una diferencia de potencial de 1 V

$$E = qV \rightarrow E = (1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(1\,\mathrm{V}) \rightarrow E = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

electronvolt $\boxed{\Rightarrow 1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}$

meV eV keV MeV GeV TeV PeV EeV

Microndas R X Partículas R.C. Gal

Visible Gamma C. Galáctico R.C.E.G.

Nuevas unidades

Magnitud	Ecuación	Unidad
Energía	E	eV
Cant. de movimiento	p = E/c	eV/c
Masa	$m = E / c^2$	eV/c^2

- A veces, se usan las unidades naturales:

$$h=c=1$$

- Entonces, todo se mide en eV (alguna potencia)

Einstein postula

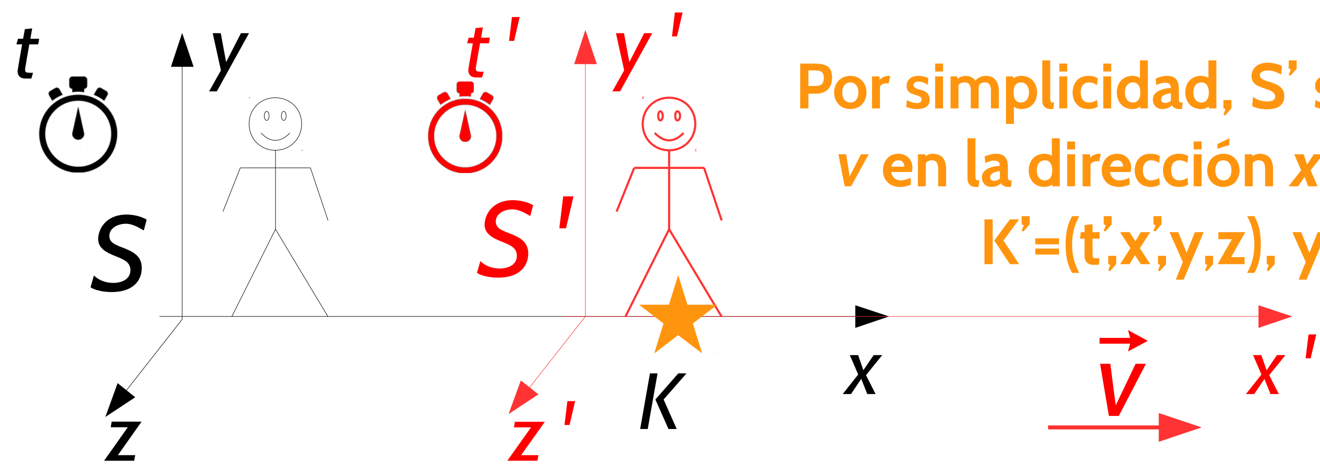
- **El principio de la relatividad**

  Las leyes que gobiernan los cambios en los estados de los sistemas físicos son iguales para todos los observadores inerciales

- **El principio de la invariancia de la velocidad de la luz**

  La luz se propaga en el vacío siempre con la misma velocidad, c, sin importar la velocidad de la fuente emisora de luz

- **Marco de Referencia**
  sistema de referencia inercial donde existe la habilidad de medir intervalos temporales mediante un reloj
- Espacio (3D) y tiempo → **espaciotiempo**
- **Evento**
  es un punto en el espaciotiempo *K=(t,x,y,z)*

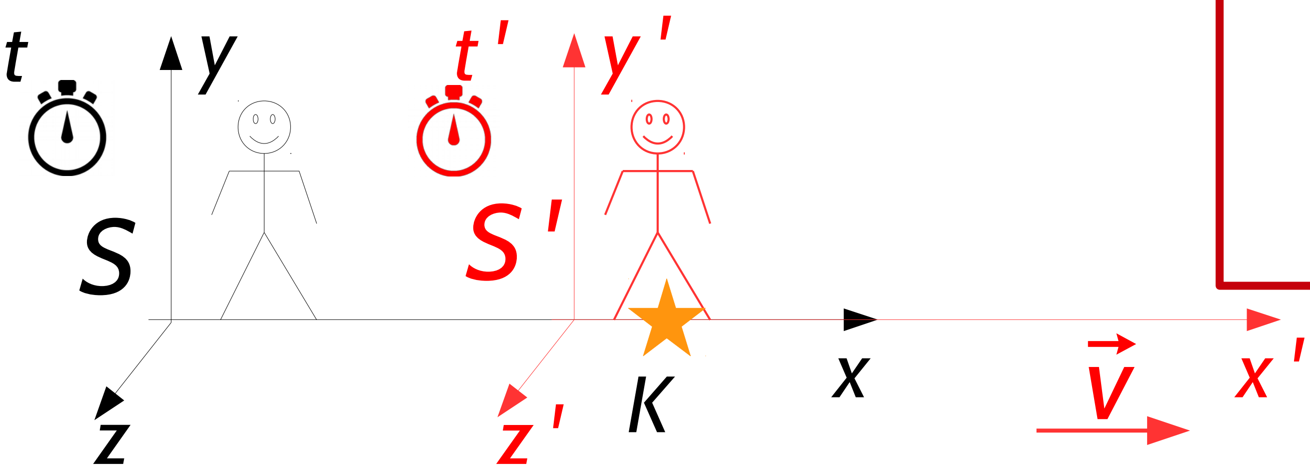


Por simplicidad, S' se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

- Las ecuaciones que transforman dos marcos de referencia, y que verifican ambos postulados, son

Recordar que estas transformaciones son válidas para un sistema S' que se mueve con velocidad *v* en la dirección *x*, entonces K=(t,x,y,z) y K'=(t',x',y,z), ya que z'=z e y'=y

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\, x\right)$$
$$x' = \gamma\left(x - v\, t\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$



$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

Transformaciones de Lorentz (TL ó Λ)

- Grupo de Poincare: Grupo de isometrías del espacio tiempo de Minkowsky
  - Traslación temporal (1)
  - Traslación espacial (3)
  - Rotación espacial (3)
  - Boosts espacial (3)

$$x'^{\mu} = x^{\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} + C^{\mu}$$

- Forman grupo frente a la composición de operaciones
  - Hay una isometría "unidad" (no hago nada); existe la inversa (voy y vengo); son asociativas
- Las transformaciones de Lorentz (Λ) son un subgrupo del grupo de Poincare (**C** = **0**)
  - Preservan el origen (invariante) → Rotaciones y Boosts

Boosts

- Transformaciones de Lorentz no rotantes
  - Cambios entre marcos de referencia incerciales
- Quedan definidos por γ de Lorentz.
- Puede demostrarse que un boost en la dirección x puede expresarse

$$\mathbf{\Lambda} \equiv \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Y luego, S → S' :

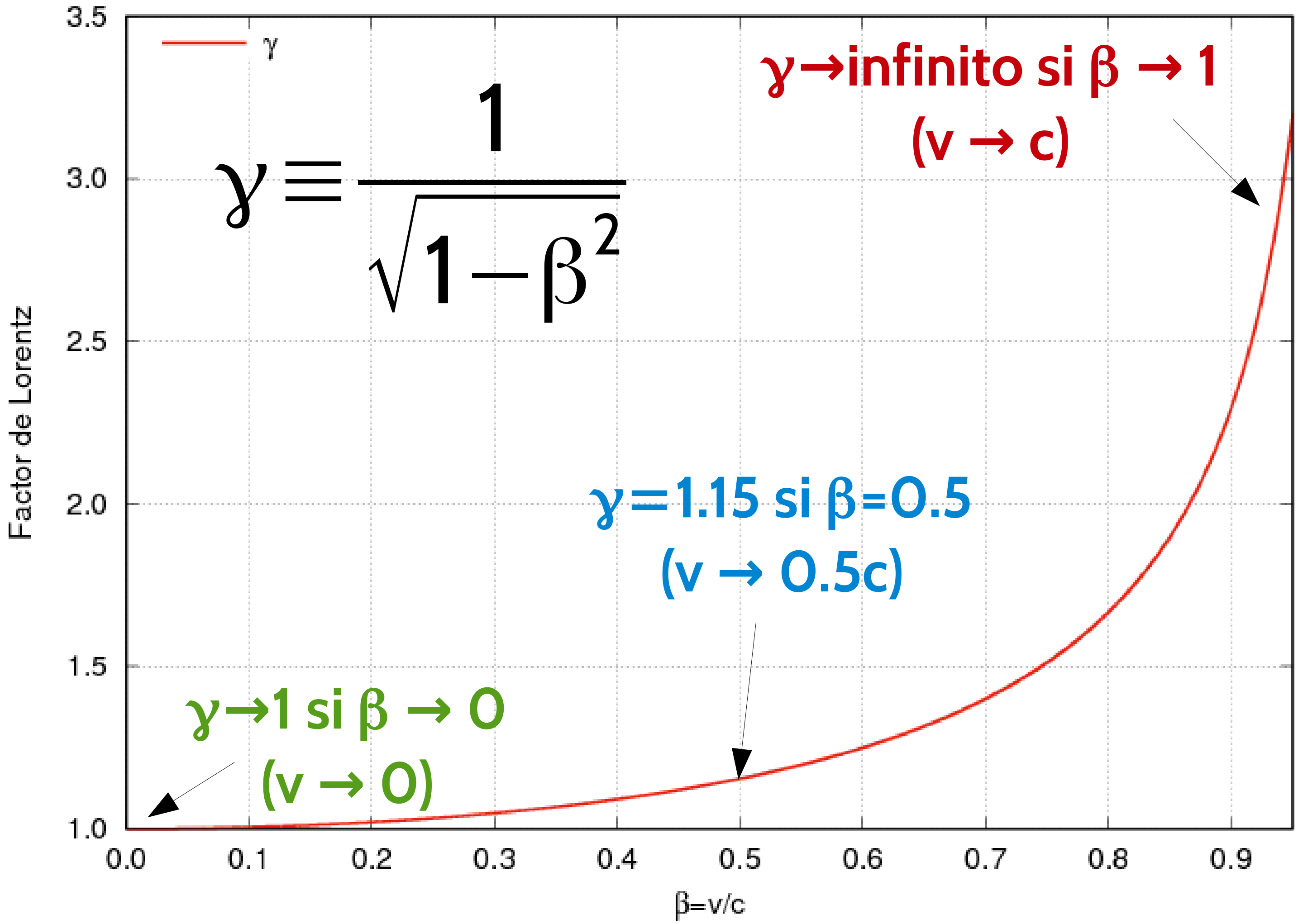
$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Tareas

- Verificar que lo anterior representa un boost en la dirección x de un sistema S' a un sistema S
- Escribir la transformación **Λ** para un boost en la dirección z

Factor de Lorentz

- Estudiemos la función gamma



Aproximación Newtoniana, v → 0

- A velocidades bajas respecto a c, $\gamma \rightarrow 1$, las correcciones relativistas son menores, y entonces

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2} v\, x\right) \rightarrow t' \simeq t$$

$$x' = \gamma\left(x - v\, t\right) \rightarrow x' \simeq x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Si v → 0, ¡las transformaciones de Lorentz tienden a las transformaciones de Galileo!

Dilatación temporal y Contracción espacial

- El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \text{para eventos} \quad \Delta x = 0$$

- La distancia espacial entre dos eventos no es invariante de un observador a otro en distintos marcos de referencia

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad \text{para eventos} \quad \Delta t' = 0$$

El muón

$\mu \to e^- \bar{\nu}_\mu \nu_e$

- velocidad típica $v = 0.99c \Rightarrow \beta = 0.99$

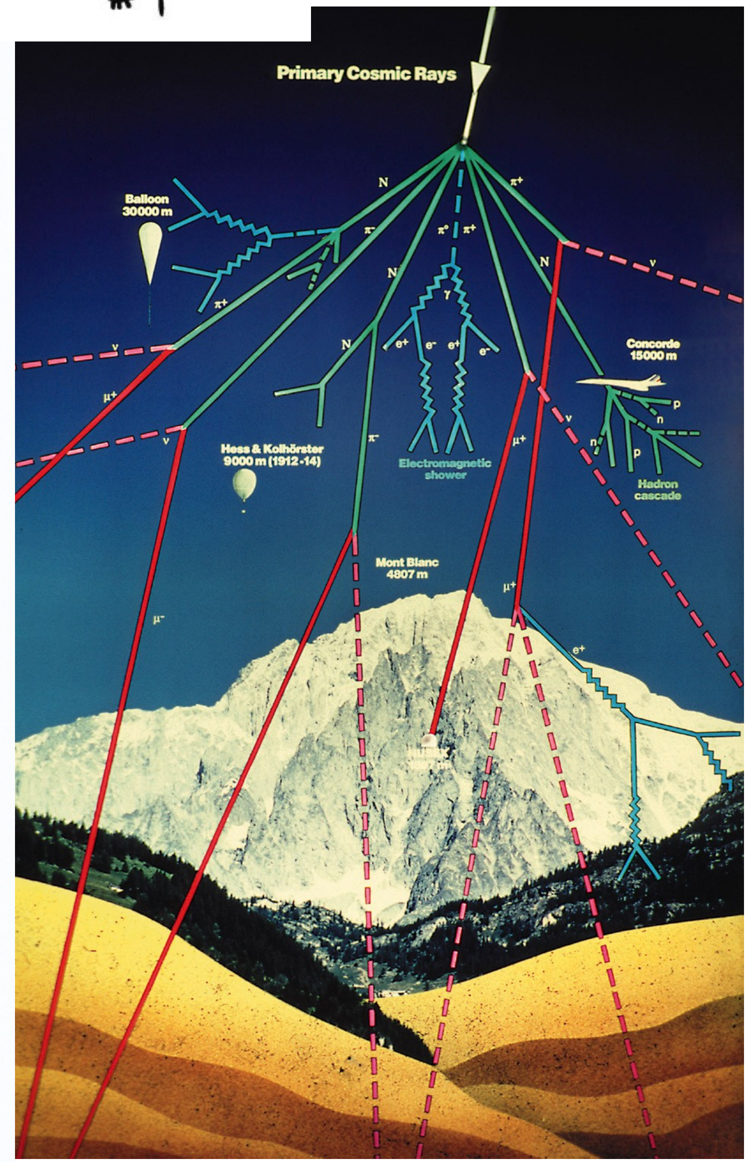
$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to \boxed{\gamma \simeq 7}$

- Algún μ decae en $2\,\mu s$ (p. ej) $\Rightarrow$ esto es en el marco de referencia del μ (t'). $\Rightarrow x' = t' c \beta = \boxed{594\,m = x'}$
- Esto es medido desde S' ¿A cuánto corresponde esto en S? ya que $t'=0 \Rightarrow t=0$ (por construcción) tenemos:

$x' = x/\gamma \Rightarrow x = x' \cdot \gamma \Rightarrow x = 7 \cdot 594\,m \Rightarrow \boxed{x = 4158\,m}$

- y el tiempo t? las cosas serán consistentes.
- Antes de decaer el muón recorre más de 4 km en nuestro marco de referencia.

Muones producidos en la atmósfera se observan en el piso



Regla de suma de velocidades

- Sea un objeto en movimiento en el espaciotiempo.
  - El observador en *S*, mide que el objeto se desplaza a lo largo del eje *x* con velocidad *u=dx/dt*
  - El observador en *S'*, verá que el objeto se mueve con velocidad *u'=dx'/dt'*

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \qquad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

$$\text{Si } u \ll c \Rightarrow u' \simeq u - v. \quad \text{Si } u = c \Rightarrow u' = c$$

Intervalo invariante

- La velocidad de la luz es invariante, entonces:

$$c=\frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt'} \text{ con } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ y } r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

- Luego, para un fotón: $c\,\Delta t=\Delta r \rightarrow c^2(\Delta t)^2=(\Delta r)^2$

Convención:

+ - - -

$$\rightarrow s^2 \equiv \overbrace{c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2}^{\text{intervalo espaciotemporal} \equiv s^2}$$

$$\text{y } s'^2 \equiv \overbrace{c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2}^{\text{intervalo espaciotemporal} \equiv s'^2}$$

- La invariancia de la velocidad de la luz implica (probar):

$$s^2=s'^2$$

Tiempo propio

- Dado que cada marco de referencia tiene su propio tiempo, **podemos definir un marco de referencia adherido a un objeto en movimiento**.
- **El tiempo de ese marco es el tiempo que "percibe" un observador que se mueve junto con el objeto**. Llamaremos a este marco "comovil".
- El tiempo del marco comóvil es el tiempo propio: es independiente de las coordenadas.

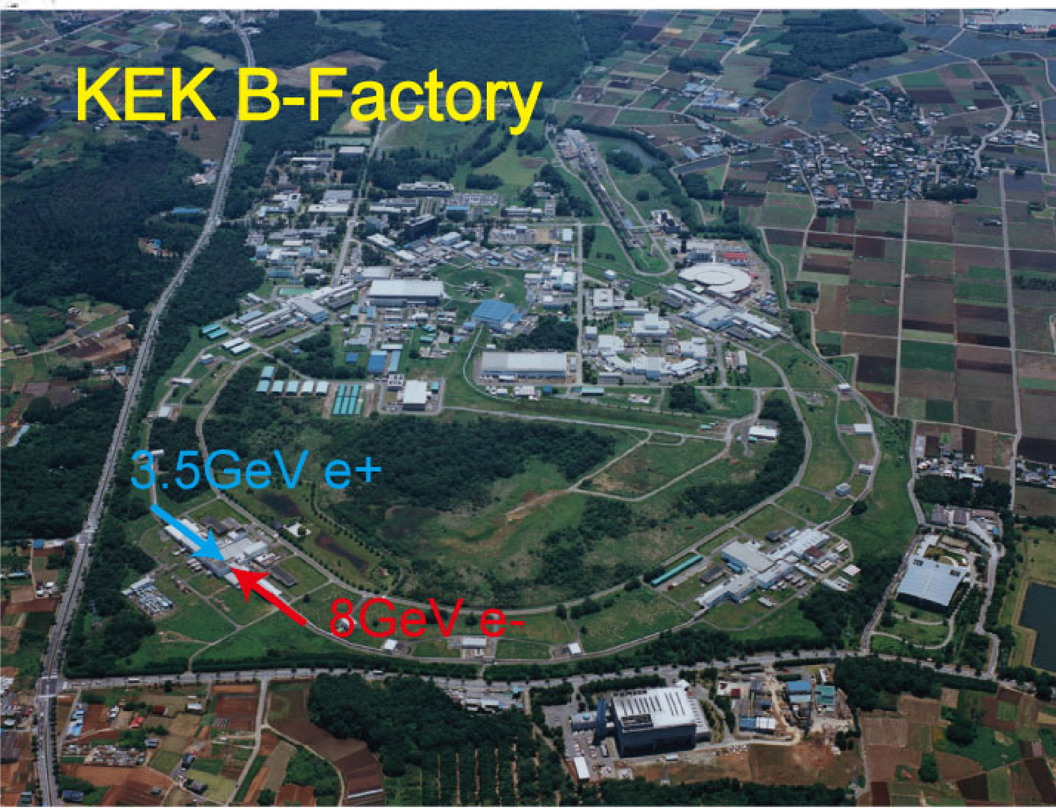
$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c\, d\tau^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 d\tau^2}$$

Tiempo propio

$$dt = \gamma\, d\tau$$

Ejemplo real



- Beam asimétrico
- Colisión e+/e-
- E_{+}=3.5 GeV
- E_{-}=8.0 GeV
- Boost CM: $$\beta\gamma = \frac{E_{-} - E_{+}}{\sqrt{4 E_{-} E_{+}}}$$

Tareíta:

Con los valores dados, calcular la vida media τ de un bosón B en el frame del laboratorio (sacar τ_0). Luego, calcular la distancia recorrida en el detector

Jugando con la velocidad de la luz

A slower speed of light
http://gamelab.mit.edu/games/a-slower-speed-of-light/

WARP: A Special Relativity Simulator
http://www.adamauton.com/warp/

Otro disclaimer: tensores

- Convención de Einstein en notación covariante
  - Índices latinos, i,j,k... espaciales (1..3),
  - Índices griegos μ,ν,ρ,... espaciotemporales (0..3)
- Métrica de Minkowsky (plana)
- Convención de signos usual en partículas, (1,-1,-1,-1).
- La métrica queda

$$\boldsymbol{g}\equiv g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=g^{\mu\nu}\equiv\boldsymbol{g}^{-1}$$

Verificar: $\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{g}^{-1}=\delta^{\mu}_{\nu}$

Verificar: $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}=g_{\rho\sigma}$

- Definimos cuadrivector contravariante (**cuadrivector**) a un tensor contravariante de rango 1, que ante una transformación de Lorentz **Λ** se comporta como:

$$\boxed{a'^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\nu}a^{\nu} \qquad \text{cuadrivector}}$$

- Tensores de rango n
  - Transforman según n TL

$$F'^{\mu\nu}=\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}F^{\rho\sigma}, \qquad O'^{\mu\nu\theta}=\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}\Lambda^{\theta}_{\tau}O^{\mu\nu\tau}$$

  - Hay tensores covariantes

$$F_{\mu\nu}=g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma}$$

  - Y tensores n-covariantes y m-contravariantes

$$F^{\nu}_{\mu}=g_{\mu\rho}F^{\nu\sigma}$$

  - Para propiedades generales, ver Cap. 03 Hernández & Núñez

Hasta aquí...

- Los postulados de Einstein implican cambios profundos en la concepción de la Naturaleza.
  - Estos afectan nuestra percepción de distancia y lapso temporal, de espacio y tiempo.
- Las transformaciones de Lorentz indican como transforman las leyes de la física entre dos marcos de referencia inerciales.
  - Son las transformaciones válidas entre marcos de referencia.
- La mecánica Newtoniana es una aproximación válida para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
  - ¿Cómo puede ser generalizada?

Diálogo entre dos mundos: dinámica

- Newton: - Un cuerpo sujeto a una fuerza constante *F* durante un tiempo *t* tendrá una velocidad *v=(F/m)t* que aumenta con *t*
- Einstein: - Pero Isaac, ¡v<c siempre!
- N: ¿Qué? Vos estás equivocado Alberto ¿sino que pasa con mi 2da ley?

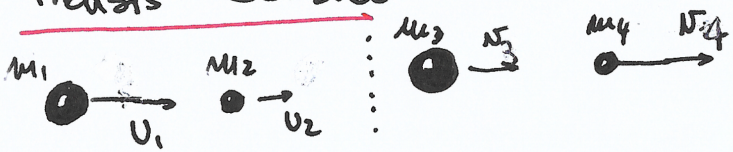
$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

- E: ¡Ahh! ¿Pero cuál *t* estarás usando en tu derivada? ¿En que marco de referencia?
- N: ¿Cómo? ¿el tiempo no es absoluto? ¿Acaso *t* no es el mismo para todos los observadores inerciales?
- E: Jejejeje.... (sonrisa con mirada pícara)

Pasen y vean

Colisiones (u es inicial, v es final

Análisis Clásico



En el marco S, conservación de $\vec{p}$ implica

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_3 v_3 \quad m_4 v_4 \quad (1)$$

En S'

$$m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_3 v_3' + m_4 v_4' \quad (2)$$

y $v_3' = v_3 - V$ (3) (V es la vel. relativa ent. S y S') ⇒

En S'

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 - (m_1 + m_2) V \overset{(1)}{=} m_3 v_3 + m_4 v_4 - V(m_3 + m_4)$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) V = (m_3 + m_4) V$$ y para todo V:

(4) $\boxed{m_1 + m_2 = m_3 + m_4}$ Conservación de la masa.

La conservación de la cantidad de movimiento implica la conservación de la masa

Principios de conservación

- En una colisión, el análisis relativista usando la ley de suma de velocidades,

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \qquad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad ,$$

se ve que o bien:

  - No se conserva la cantidad de movimiento;
  - O bien, la cantidad de movimiento está mal definida en el caso relativista

Clásico: $\vec{p} = m\vec{v}$, Relativistiva $\vec{p} = ?$

La conservación de *p* es un principio básico

- Al igual que nos pasó con *u*, debemos recordar lo que dijo Alberto: al derivar, el tiempo depende del marco de referencia. Antes eso no nos preocupaba:

Clásico: $\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{r})$ y $\vec{p}' = \frac{d}{dt}(m\vec{r}')$

Correcto: $\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{r})$ y $\vec{p}' = \frac{d}{dt'}(m\vec{r}')$

- Y como todos los marcos son equivalentes, ¡podemos usar el marco comovil!

Cant. de movimiento relativista

$$\boxed{\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau}}$$

Magia algebráica (como ejercicio)

Definición de $\vec{p}$: $\boxed{\vec{p} = m\, d\vec{r}/d\tau}$

Pero ¿qué es $(d\vec{r}/d\tau)$? Recordando:

$dt = \gamma\, d\tau \Rightarrow dt/d\tau = \gamma \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{p}} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau}\cdot\frac{dt}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = \boxed{m\vec{v}\gamma}$$

Donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $\beta = |\vec{v}|/c$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = m\vec{v}\gamma}$$

Definimos $\gamma_i = (1-\beta_i^2)^{-1/2}$ y $\beta_i = v_i/c \Rightarrow$

En S:

$$m_1 v_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 v_2 = m_3 v_3 \gamma_3 + m_4 v_4 \gamma_4$$

En S':

$$m_1 v_1' \gamma_1' + m_2 v_2' \gamma_2' = m_3 v_3' \gamma_3' + m_4 v_4' \gamma_4'$$

Magia Algebráica (Problema en la guía):

$$\boxed{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 = m_3\gamma_3 + m_4\gamma_4}$$

Es una cantidad conservada dentro de la conservación del momento.

- Con la nueva definición de p,

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v}$$

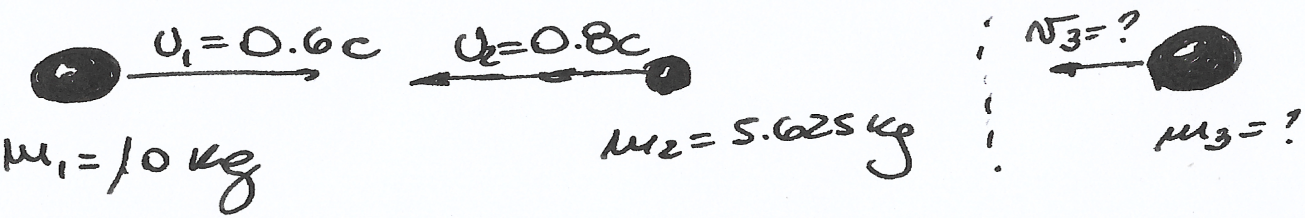
- aparece una nueva magnitud conservada

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

- m es la masa del objeto
- Notar que si v>0, entonces mγ>m

Choque inelástico: ¡¡$m_3 > m_1 + m_2$!! energía a masa

Colisión inelástica:



Clásicamente diríamos: $m_3 = 15.625$ kg y $v_3 = 0.01 > 0$.

Relativísticamente:

$\gamma_1 = (1-\beta_1^2)^{-1/2} = 1.25$ y $\gamma_2 = (1-\beta_2^2)^{-1/2} = 5/3$

$\Rightarrow p_T^i = \sum p_i^i = \sum m_i \gamma_i v_i = 10\,kg \cdot 1.25 \cdot 0{,}6c + 5.625\,kg \cdot \frac{5}{3}(-0.8c)$

$\Rightarrow p_T^i = 7.5\,kgc - 7.5\,kgc \Rightarrow \cancel{p_f^i}\ p_T^i = 0 \Rightarrow v_3 = 0.$

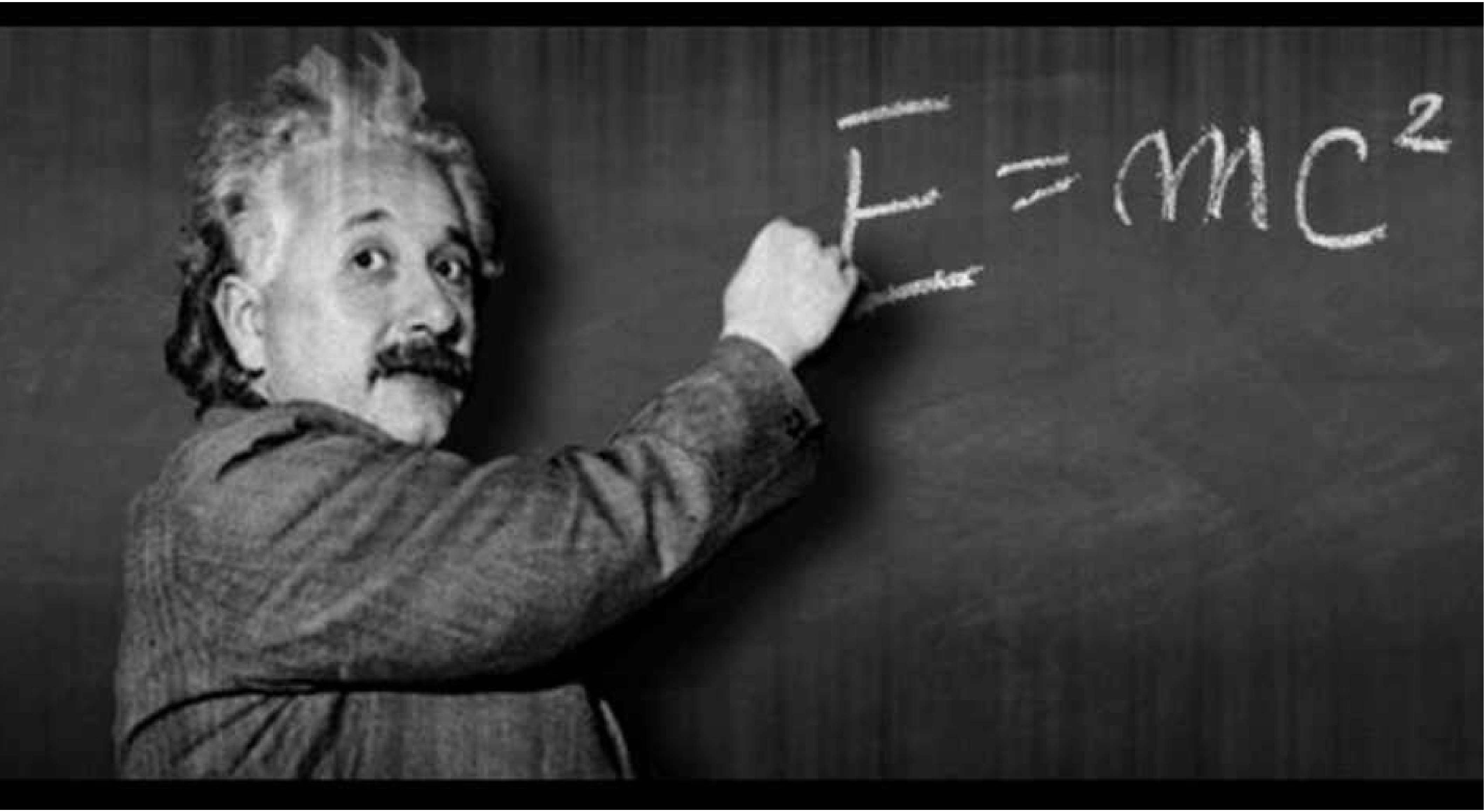
$\Rightarrow \boxed{p_f = 0.}$ y $\gamma_3 = 1$

Conservación energía.

$E_i = \sum m_i \gamma_i c^2 \Rightarrow E_i = E_f \Rightarrow 10\,kg \cdot 1.25 + 5.625 \cdot 5/3 = m_3 \gamma_3$

$\Rightarrow m_3 = 21.875$ kg $\Rightarrow m_3 > m_1 + m_2$!!!

Gracias Isaac, seguí participando....



Según Richard Feynmann….

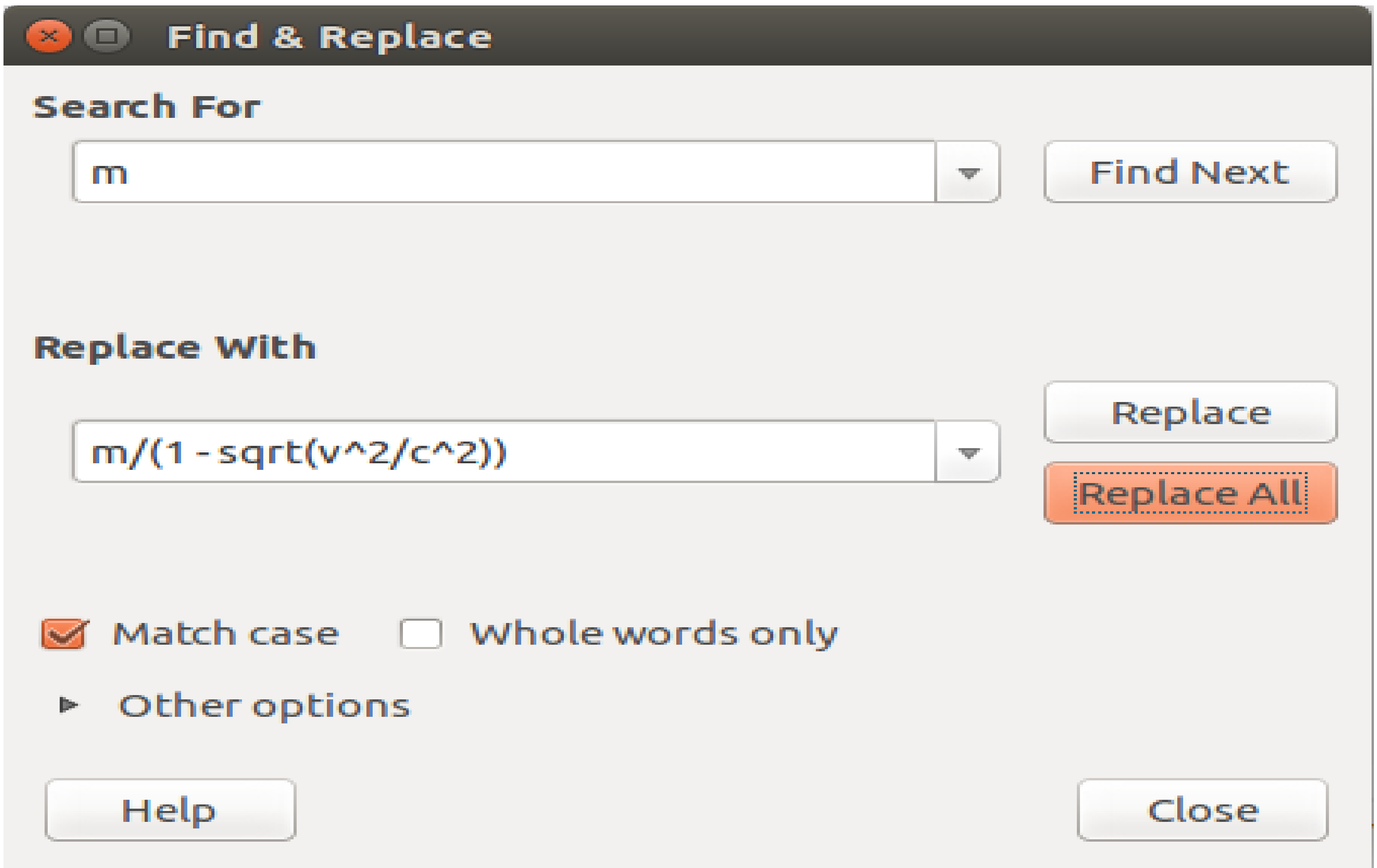
- *"For those who want to learn just enough about it so they can solve problems, that is all there is to the [special] theory of relativity – it just changes Newton's laws by introducing a correction factor to the mass"*
- Luego:

$$\vec{F} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

- donde

$$m \rightarrow \gamma\, m = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Al final era tan simple....



Una nueva magnitud conservada

- Hemos visto que al aplicar los principios relativistas y pedir conservación de la cantidad de moviemiento relativista, una nueva magnitud conservada aparece:

Energía total

$$\boxed{E = \gamma m c^2}$$

- Y la energía cinética es:

$$\boxed{E_K \equiv E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2}$$

Energía cinética
(en ausencia de otras interacciones)

- $E = \frac{1}{2} m v^2$ es una aproximación válida si v<<c:

Desarrollo en serie

- La Energía total es

$$E=\gamma m c^2 \Rightarrow E=m c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

- Luego, la famosa fórmula, si v=0,

$$E=m c^2$$

- Desarrollemos para v → 0:

$$E=m c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right) \rightarrow E \simeq m c^2+\frac{1}{2} m v^2$$

Otro *disclaimer*: cos y contras

- Cada vector contravariante (vector) tiene asociado un vector covariante (forma), gracias a la métrica (contra → co)

(“*el tensor métrico sube y baja índices*”) $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = (t, -\boldsymbol{r})$

- La transformación inversa co→contra $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu = (t, \boldsymbol{r})$

- ¿Cómo transforma ante **Λ** un vector covariante?

$$a'_\mu = g_{\mu\nu} a'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho a^\rho$$
$$a'_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma} a_\sigma$$
$$a'_\mu = (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu a_\sigma$$

Notar: Si
Λ representa un boost
Λ-1 representa un boos

- Ya que:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho \Lambda^\mu_\theta = g_{\rho\theta}$$
$$g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho \Lambda^\mu_\theta g^{\rho\sigma} = g_{\rho\theta} g^{\rho\sigma}$$
$$(g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma}) \Lambda^\mu_\theta = \delta^\sigma_\theta$$
$$\Xi^\sigma_\mu \Lambda^\mu_\theta = \delta^\sigma_\theta \rightarrow \Xi^\sigma_\mu = (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu$$

(covariantes · contravariantes) → invariantes

- **Propuesta 1**: La composición de dos TL es una TL:

$$a'^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\ \nu}a^{\nu},\quad a''^{\rho}=\Lambda'^{\rho}_{\ \mu}a'^{\mu}$$
$$a''^{\rho}=\Lambda'^{\rho}_{\ \mu}\Lambda^{\mu}_{\ \nu}a^{\nu}$$
$$a''^{\rho}=\left(\Lambda'\Lambda\right)^{\rho}_{\ \nu}a^{\nu}$$
$$a''^{\rho}=\Lambda''^{\rho}_{\ \nu}a^{\nu}$$

- **Propuesta 2**: El producto escalar $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\equiv a_{\mu}b^{\mu}$ es invariante ante transformaciones de Lorentz

$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=a'_{\mu}b'^{\mu}$$
$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=\left(\Lambda^{-1}\right)^{\sigma}_{\ \mu}a_{\sigma}\left(\Lambda\right)^{\mu}_{\ \rho}b^{\rho}$$
$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=\left(\Lambda^{-1}\right)^{\sigma}_{\ \mu}\left(\Lambda\right)^{\mu}_{\ \rho}a_{\sigma}b^{\rho}$$
$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=\delta^{\sigma}_{\rho}a_{\sigma}b^{\rho}$$
$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=a_{\rho}b^{\rho}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

Tres invariantes famosos

- Intervalo invariante

$$ds^2 \equiv dx^\mu dx_\mu = d(ct)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

- Derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \text{ y } \frac{\partial}{\partial_\mu} \equiv \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$$

luego $\partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)$ Operador de D'Alambert

- Cuadrivector Energía-momento: con $E = \gamma m c^2$ y $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$:

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) \text{ y } p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu = (E/c, -\vec{p})$$

luego

$$\boxed{p^\mu p_\mu = E^2 - (p c)^2 = m^2 c^4}$$

¿y si la partícula no tiene masa?

- ¡No importa, tiene energía y tiene cantidad de movimiento

$$m=0 \rightarrow E^2-(pc)^2=(mc^2)^2 \Rightarrow E^2-(pc)^2=0$$

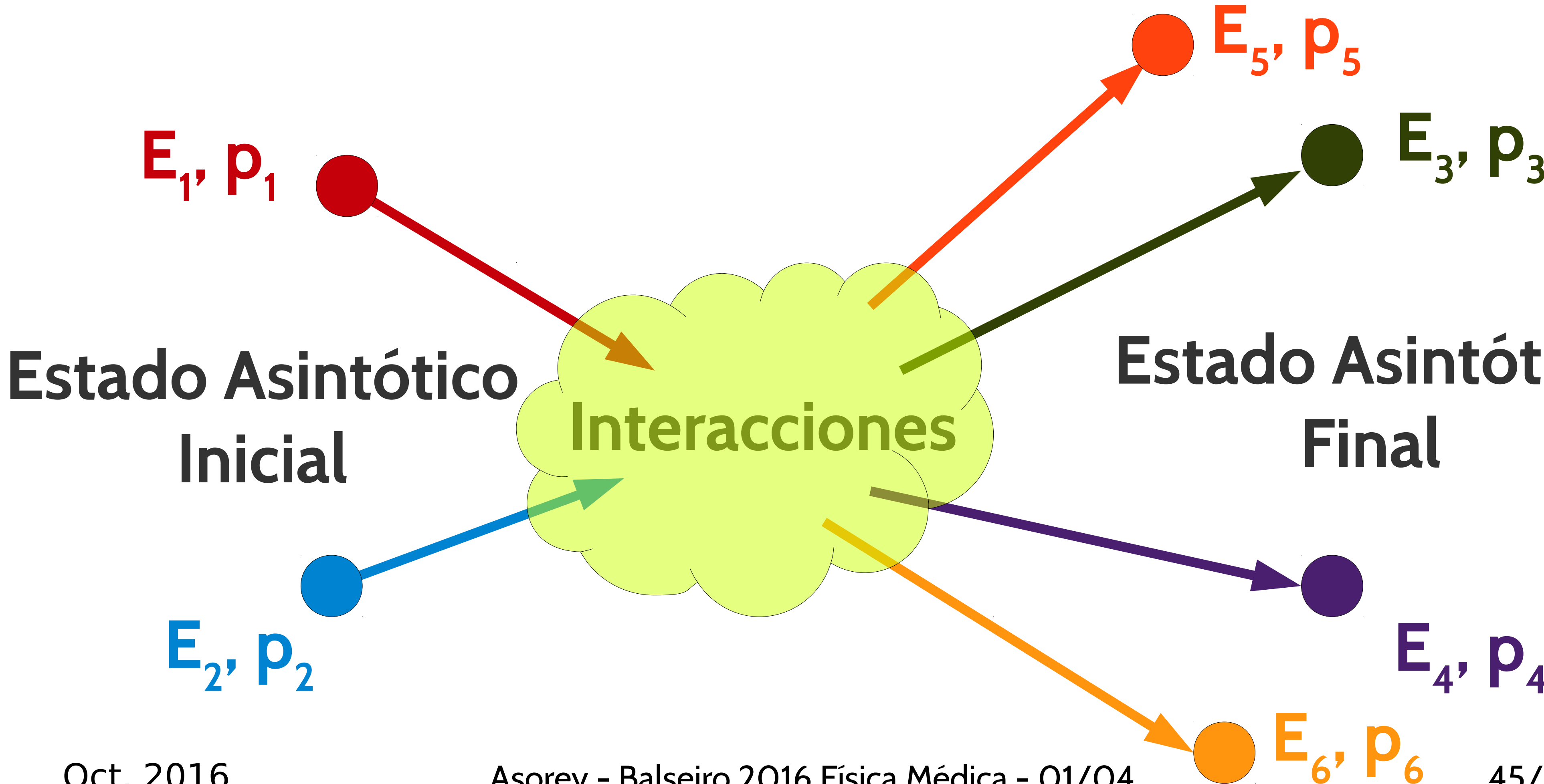
Cantidad de movimiento de partículas sin masa

$$\boxed{E=pc}$$

- Por ejemplo, un fotón violeta λ=420 nm
  → E = hc/λ = 4.73 x 10⁻¹⁹ J → p = 1.58 x 10⁻²⁷ kg m/s
  mejor:
  → E = hc/λ = 2.95 eV → p = 2.95 eV/c

¿Cómo funciona la conservación?

- Y todo por pedir que *c* tiene que tener el mismo valor para todos los observadores inerciales.



- **La Energía total se conserva**

$$\left.\begin{aligned} E^{\text{inicial}} &= \sum_{j}^{n^{\text{inicial}}} E_j^{\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j c^2 \\ E^{\text{final}} &= \sum_{k}^{n^{\text{final}}} E_k^{\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k c^2 \end{aligned}\right\} E^{\text{inicial}} = E^{\text{final}}$$

- **La cantidad de movimiento total se conserva**

$$\left.\begin{aligned} \vec{p}^{\,\text{inicial}} &= \sum_{j}^{n^{\text{inicial}}} \vec{p}_j^{\,\text{inicial}} = \sum_j m_j \gamma_j \vec{v}_j \\ \vec{p}^{\,\text{final}} &= \sum_{k}^{n^{\text{final}}} \vec{p}_k^{\,\text{final}} = \sum_k m_k \gamma_k \vec{v}_k \end{aligned}\right\} \vec{p}^{\,\text{inicial}} = \vec{p}^{\,\text{final}}$$

Resumen hasta aquí

- Cantidad de movimiento relativista (correcto siempre):

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

- Energía relativista (correcta siempre):

$$E = \gamma m c^2$$

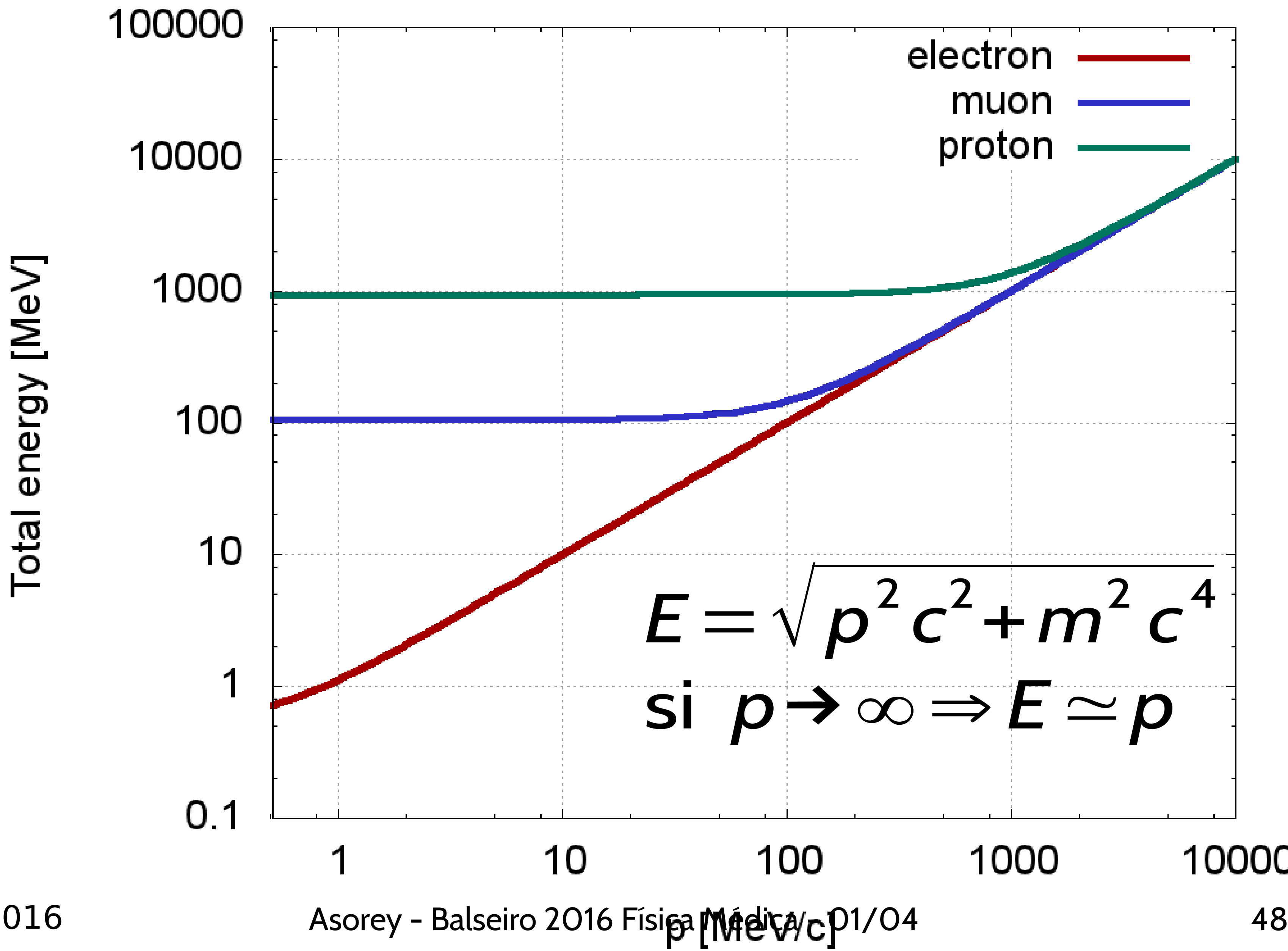
- Un nuevo invariante relativista

$$\boxed{E^2 - (p c)^2 = (m c^2)^2}$$

Invariante relativista

- Una sutileza, es una expresión cuadrática

$$E = \pm\sqrt{(m c^2)^2 + (p c)^2}$$


electron
muon
proton
Total energy [MeV]
p [MeV/c]
100000
10000
1000
100
10
1
0.1
1
10
100
1000
10000
$E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$
si $p\rightarrow\infty\Rightarrow E\simeq p$

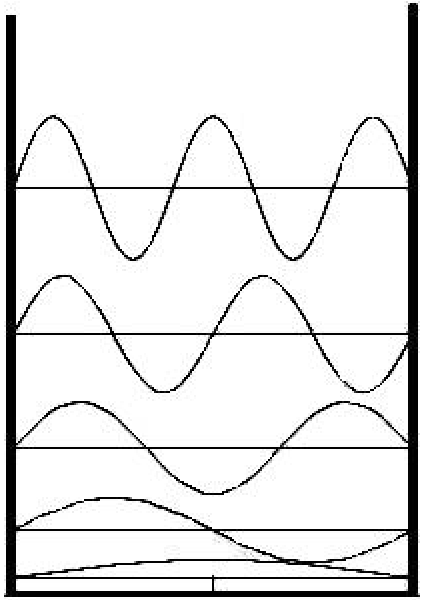
Cuántica + Relativdad....

- También tenemos

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow E = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

- La relatividad anticipa estados con energía total negativa... → **PROBLEMAS**
- Y encima son infinitos → **MÁS PROBLEMAS**
- Partícula en una caja

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8 m L^2} \right) n^2$$

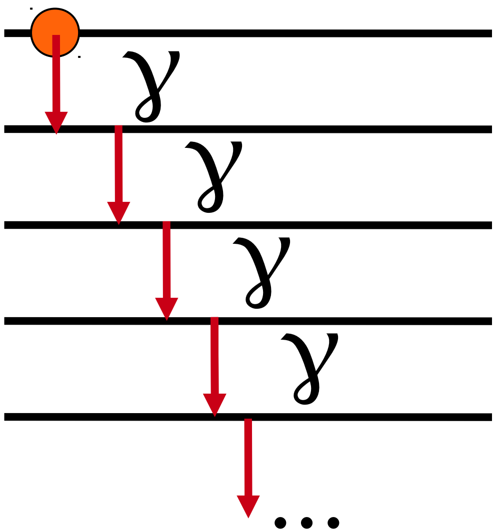


Peeeroooooooo.....

- También tenemos

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \rightarrow E = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

- La relatividad anticipa estados con energía total negativa... → **PROBLEMAS**
- Y encima son infinitos → **MÁS PROBLEMAS**
- Aquí no tengo "estado fundamental"



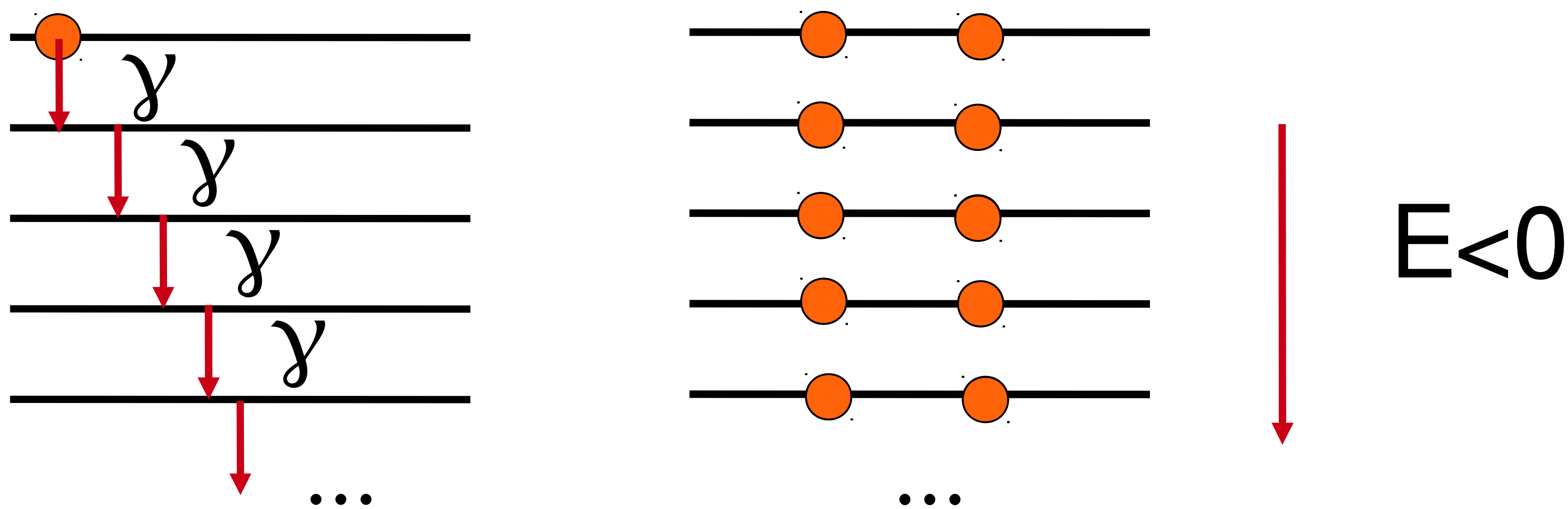
- **COLAPSO**

Solución, redefinir un concepto

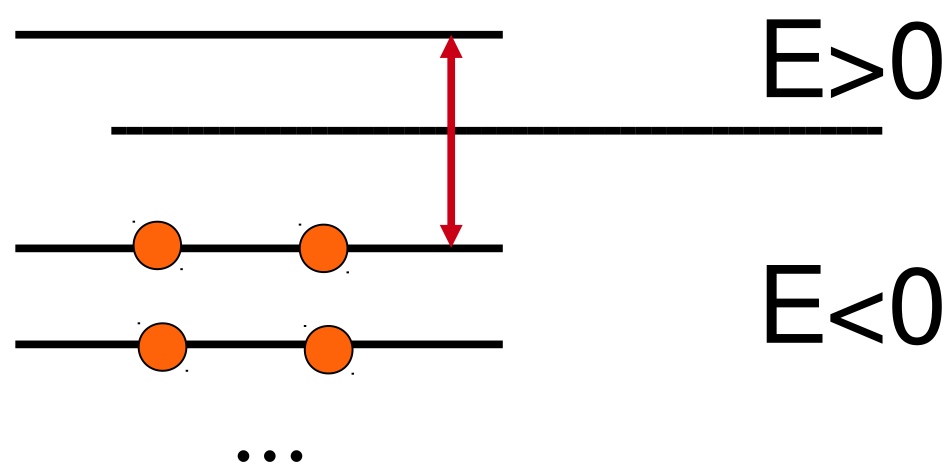
- Dirac (1928) obtiene la versión relativista de la ec. de Schrödinger y observa ese problema
- Los electrones obedecen el principio de exclusión de Pauli
- Propone que todos los estados de energía negativa están ocupados
- **Solución**
  Redefinimos el "vacío" como el estado en el cual todos los estados de energía negativos están llenos

Alegría interminable

- No hay colapso porque no hay estados vacíos



$$E = 2mc^2 = 1.022\,\text{MeV}$$

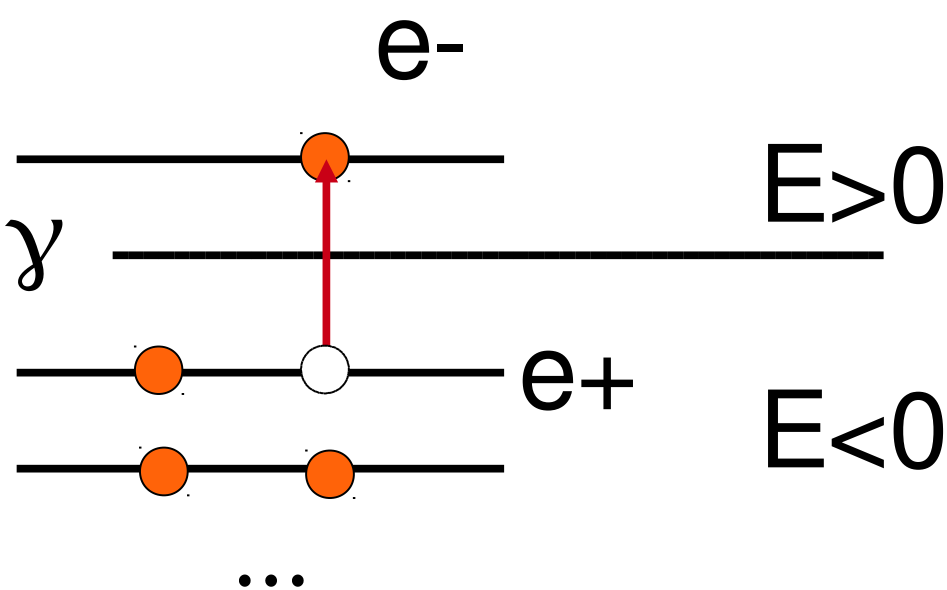


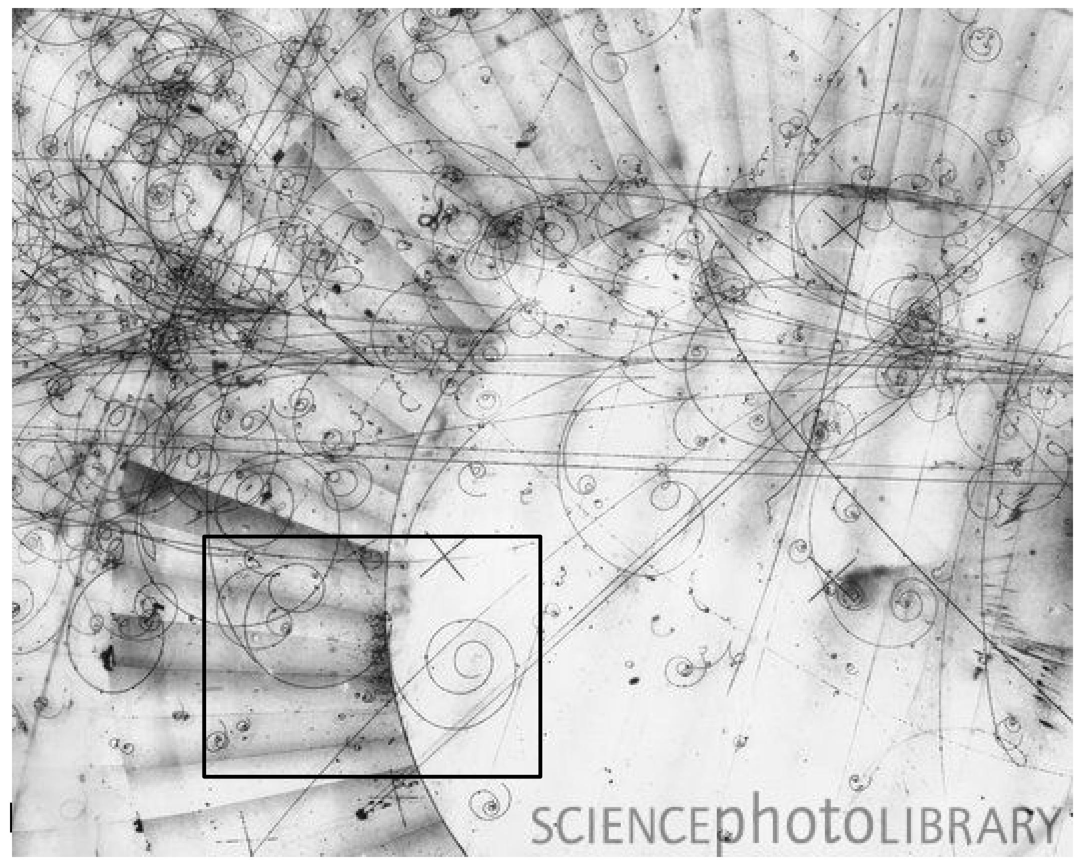
$$E = \pm mc^2$$

Unos detalles sutiles del “modelo”

- El espacio está lleno con infinitas partículas
- Energía infinita
- Energía de punto 0 (como el oscilador armónico)

- En una interacción EM (scattering) es posible sacar un electrón del mar
- El "hueco" se ve como un electrón positivo





$$E_\gamma \geqslant 1.022\ MeV$$

Hasta aquí

- Se conocían cuatro partículas:
  - Protón (+)
  - Electrón (-)
  - Fotón (0) ← interacciones cargadas
  - Neutrón (0)
- Si existía el antielectrón, ¿por qué no un antiprotón?
- La idea del antineutrón es más compleja (sin carga)

El núcleo

- Un simple modelo atómico
- Radio atómico: a0 ~ 53 pm = 53000 fm
- Radio núcleo: f0 ~ 1.2 fm
- Relación: ~ 44200
- Núcleo 4 mm → electrones 177 m
- La naturaleza es escencialmente vacío
- Calcule el volumen que ocupan las moléculas de agua presentes en un balde de 18L

El núcleo existe

- Tiene que haber una fuerza más "intensa" que la fuerza eléctrica, la gravedad no es:

$$F_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{e^2}{f_0^2}$$

$$F_E = 160\,N$$

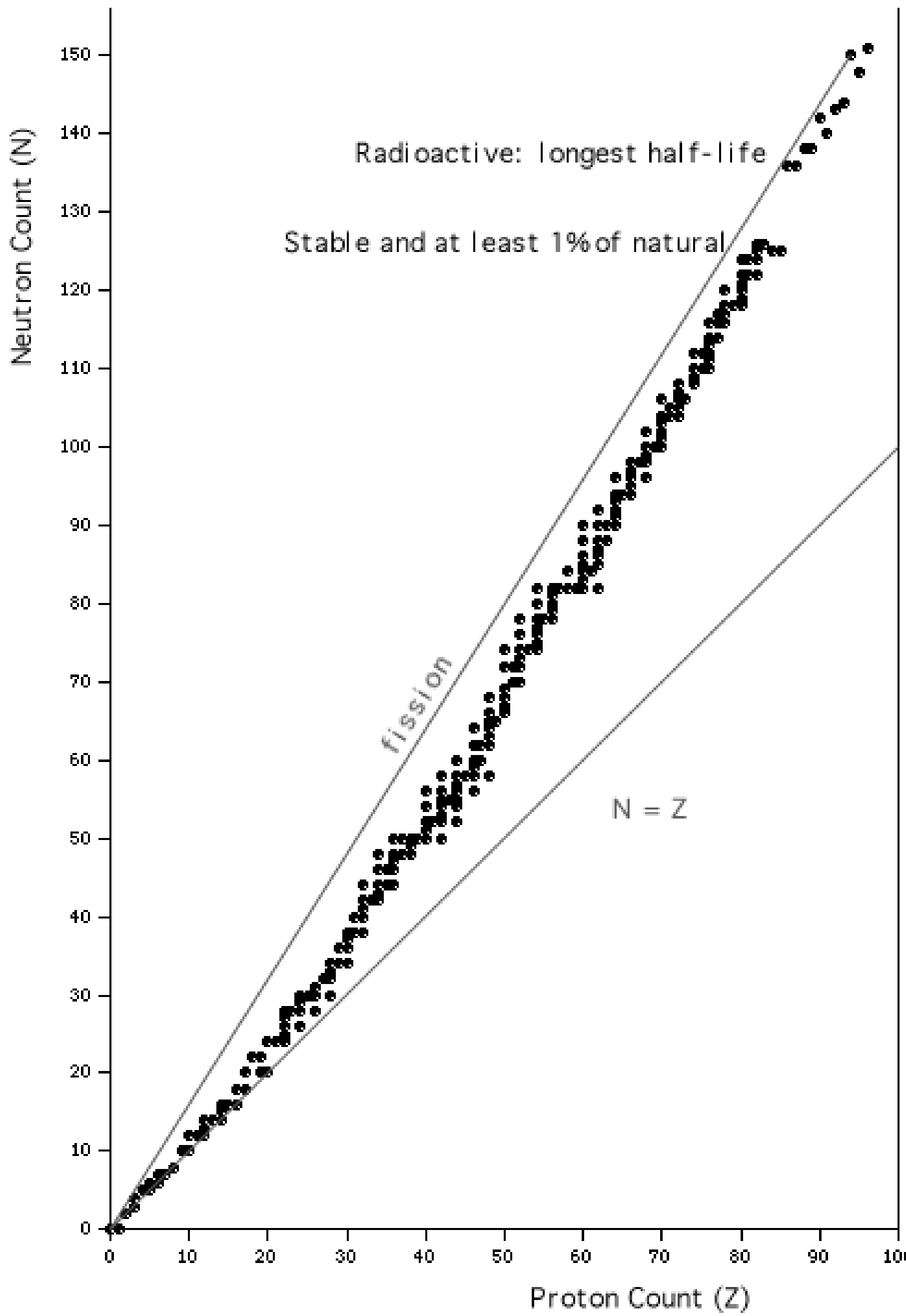
$$F_E = 1.2\times10^{36}\,F_G$$

- Ayuda:
  Los núcleos tiene más neutrones que protones

$$A = Z + N$$

$$N \geqslant Z$$

Tabla de nucleídos estables



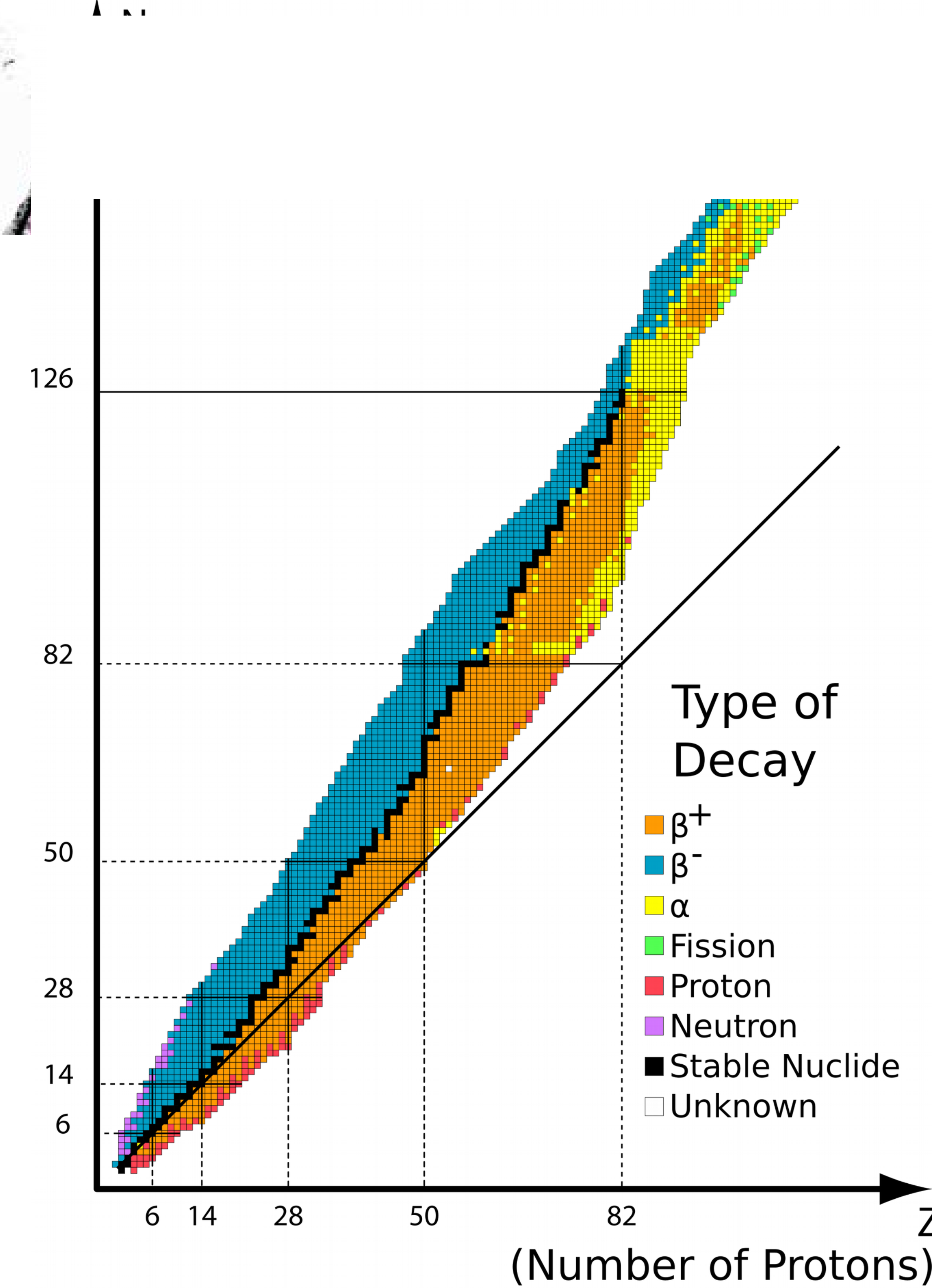
- $F_E \sim Z^2$
- Neutrones sin carga
- $^{1}H_{1}$ $^{4}He_{2}$ $^{238}U_{92}$

Los neutrones ayudan a la cohesión
(mantener juntas cosas que no quieren estarlo)

Matrimonio

Fuerza Fuerte

Tabla de nucléidos



Decaimiento Beta, energías

- Propuesta para el decaimiento beta del Bismuto-210

$$ {}^{210}_{127}\mathrm{Bi}_{83} \rightarrow {}^{210}_{126}\mathrm{Po}_{84} + e^{-} + Q_{\beta^-} \quad (¿?) $$

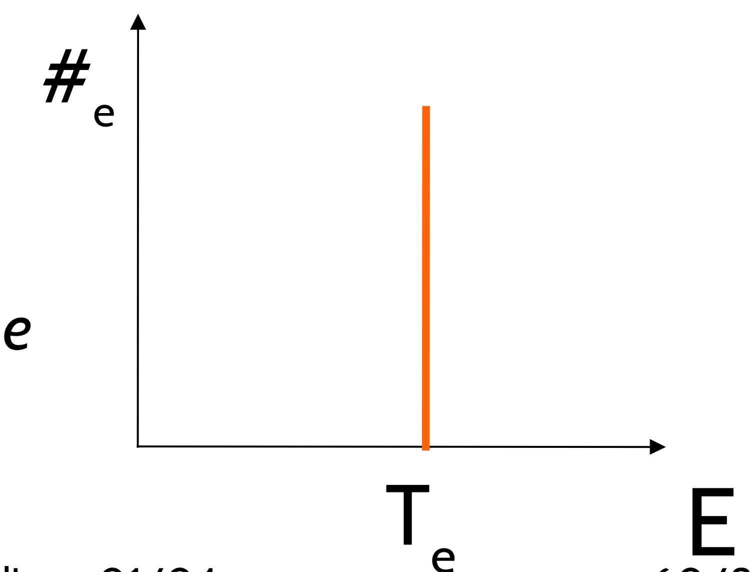
$$ \left(n \rightarrow p^{+} + e^{-} + Q_{\beta^-} \right) \quad (¿?) $$

- Luego, la energía liberada debería ser

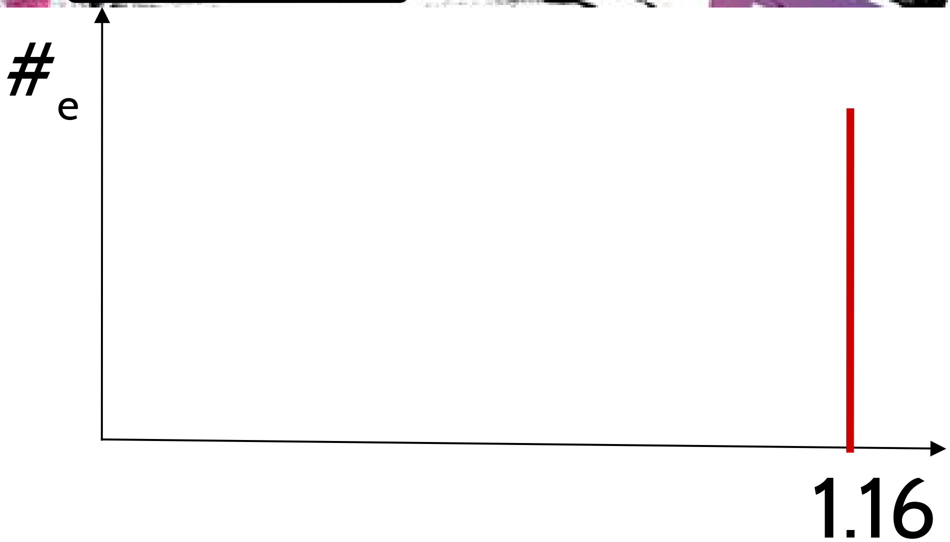
$$ m_{\mathrm{Bi}} c^2 = \left(m_{\mathrm{Po}} + m_e \right) c^2 + Q $$

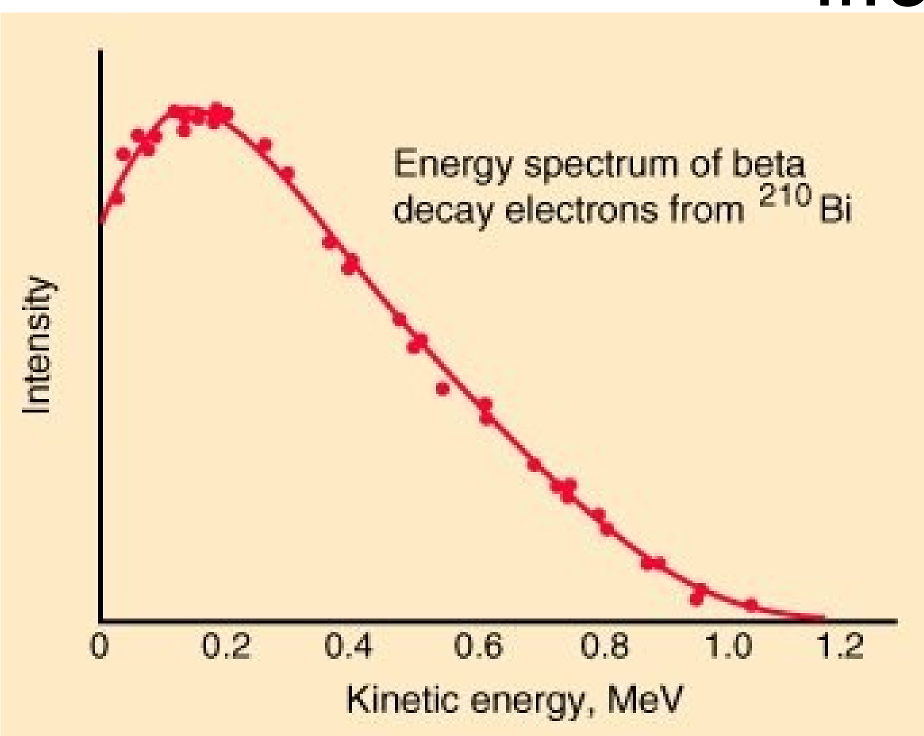
$$ Q = \left(m_{\mathrm{Bi}} - m_{\mathrm{Po}} - m_e \right) c^2 \approx T_e $$

$$ T_e \simeq 1.16\,\mathrm{MeV} $$



La medición





- Bohr: “La energía no se conserva”
- Pauli: La energía se conserva si existe otra partícula: “**neutrino**”
- Decaimiento beta correcto:

$$^{210}_{127}\mathrm{Bi}_{83} \rightarrow {}^{210}_{126}\mathrm{Po}_{84} + e^- + \bar{\nu}_e + Q_{\beta^-}$$

$$\left(n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e + Q_{\beta^-}\right)$$

$$Q = \left(m_{\mathrm{Bi}} - m_{\mathrm{Po}} - m_e - m_{\bar{\nu}_e}\right)c^2$$

$$Q \approx T_e + T_\nu$$

El electrón emitido, ¿es relativista?

+ velocidad del electrón emitido en el Decaimiento β del 210-Bi

$m_e = 0{,}511\ \mathrm{MeV}/c^2$ y la energía disponible $Q = 1{,}16\ \mathrm{MeV}$

Supongamos que $T_e = Q \Rightarrow T_e = 1{,}16\ \mathrm{MeV}$. Luego.

$$E = mc^2 + T_e \Rightarrow E = 0{,}511\ \frac{\mathrm{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2} + 1{,}16\ \mathrm{MeV}$$

$$\Rightarrow E = 1{,}671\ \mathrm{MeV}.$$

Pero $E = m\gamma c^2 \Rightarrow \gamma = E/mc^2 \Rightarrow \gamma = \dfrac{1{,}671\ \cancel{\mathrm{MeV}}}{0{,}511\ \frac{\cancel{\mathrm{MeV}}}{\cancel{c^2}}\ \cancel{c^2}} \Rightarrow \gamma = 3{,}27$

$$\boxed{\gamma = 3{,}27}$$

y $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \beta^2 = 1 - 1/\gamma^2 \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$

$\Rightarrow \beta = 0{,}952 \Rightarrow v_e = \beta c \Rightarrow \boxed{v_e = 0{,}952\,c}$

Mientras tanto en la atmósfera

- … caen rayos cósmicos
- Anderson descubre una

partícula m/q ~ 200 m_e/e

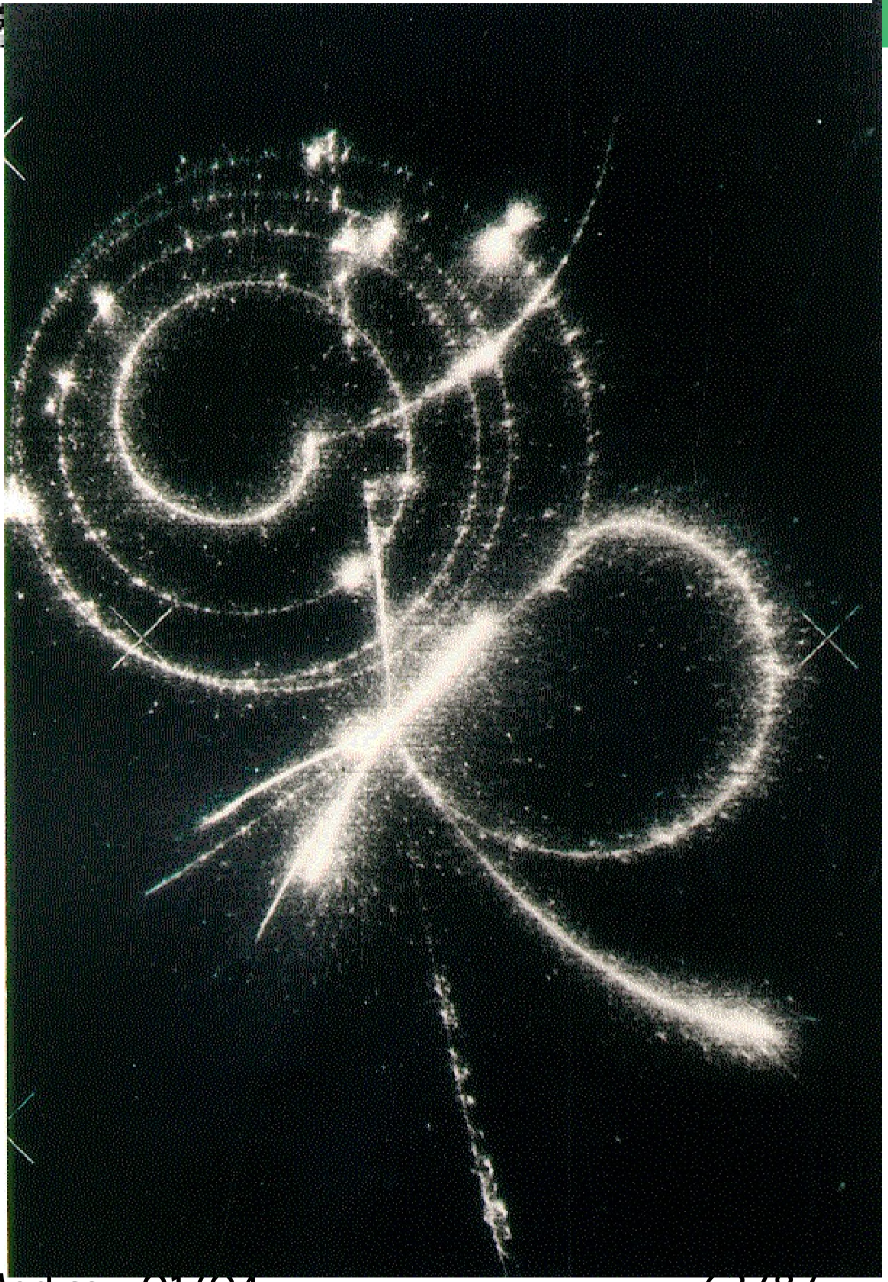
$\rightarrow$ m ~ 100 MeV

- Luego, se observa

$$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm}$$

que también violaba la E

$$\Rightarrow \pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu_{\mu}$$



Probemos esto

- Sección eficáz neutrinos

$$\sigma_\nu \simeq 10^{-44}\, cm^2$$

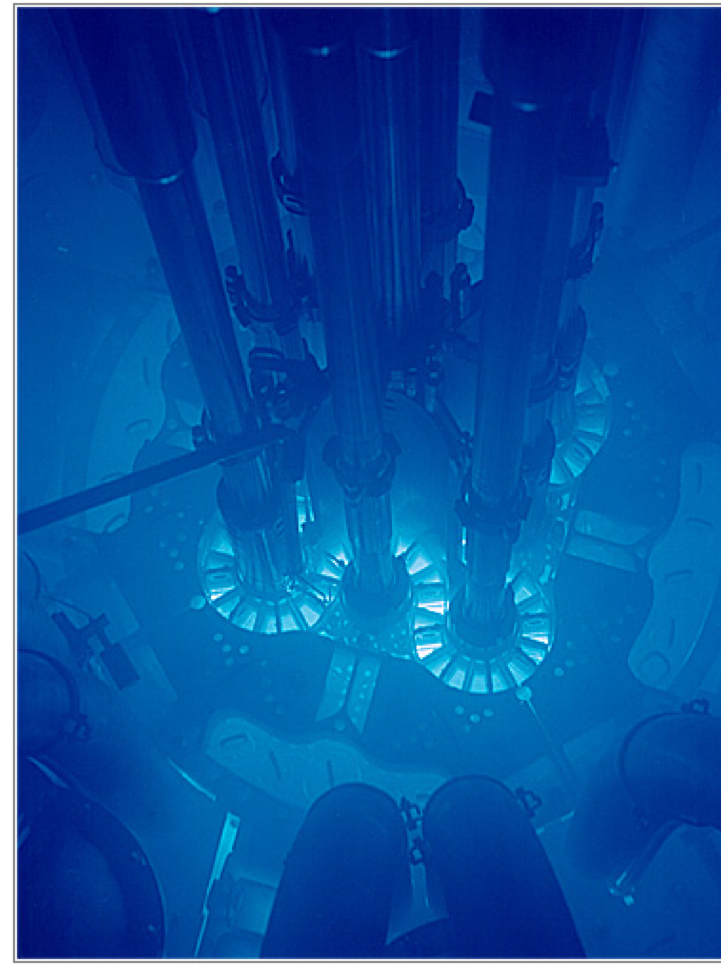
~250 años luz de agua (~2 x 10^20 cm)

- Usemos 10^20 neutrinos en 1 cm de agua

$$\bar{\nu}\, p^+ \rightarrow n\, e^+$$

$$\cancel{\bar{\nu}\, p^+ \rightarrow n\, \mu^+}$$

- **Tiempos "largos": Corto alcance. Interaccion Débil**



$$p^+ \rightarrow n e^+ \nu_e$$

$$\pi^+ \rightarrow n \mu^+ \nu_\mu$$

Hasta aquí tenemos...

- Sin fuerza fuerte: e, μ, ν_e, ν_μ, ← Leptones
- Con fuerza fuerte: p, n, π, ← Hadrones
- Y sus antipartículas. **Total: 14** (empezamos con **2**)
- Fuerzas: γ, g, W, (G) ← Mediadores (Calibre)

Con los aceleradores

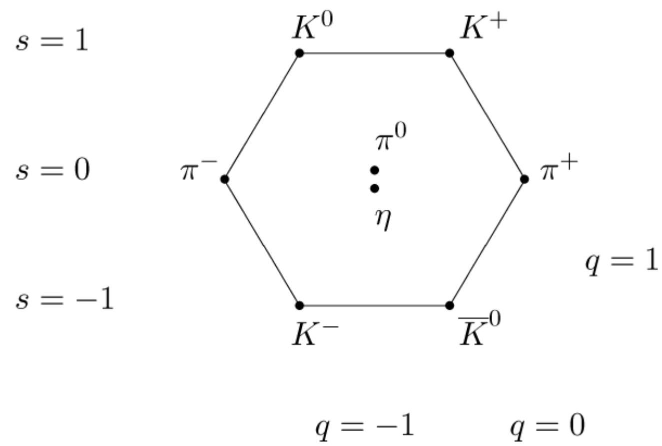
Con los aceleradores

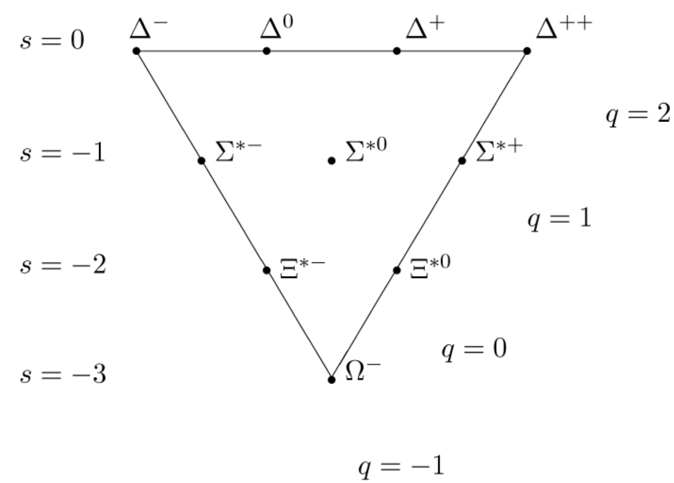
Con los aceleradores

Hoy se conocen ~ 1000 hadrones

Los hadrones no pueden ser “elementales”

- Luego, debe haber partículas más simples
- Modelo octuple (Gell-mann, 1961)
- Quarks:
  - Se combinan para formar los hadrones
  - Tienen carga fraccionaria
  - Dos por familia





Quarks, primera generación

- Hadrones:
  - 3 quarks: bariones
  - 2 quarks: mesones
- Primera generación
  - "up" y "down"
    - Carga eléctrica
      - u: +2/3 e
      - d: -1/3 e
    - masa
      - m_u: 1.7-3.3 MeV
      - M_d: 4.1-5.8 MeV

- Bariones:

$$p:(uud)$$

$$n:(udd)$$

$$\bar{p}:(\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d})$$

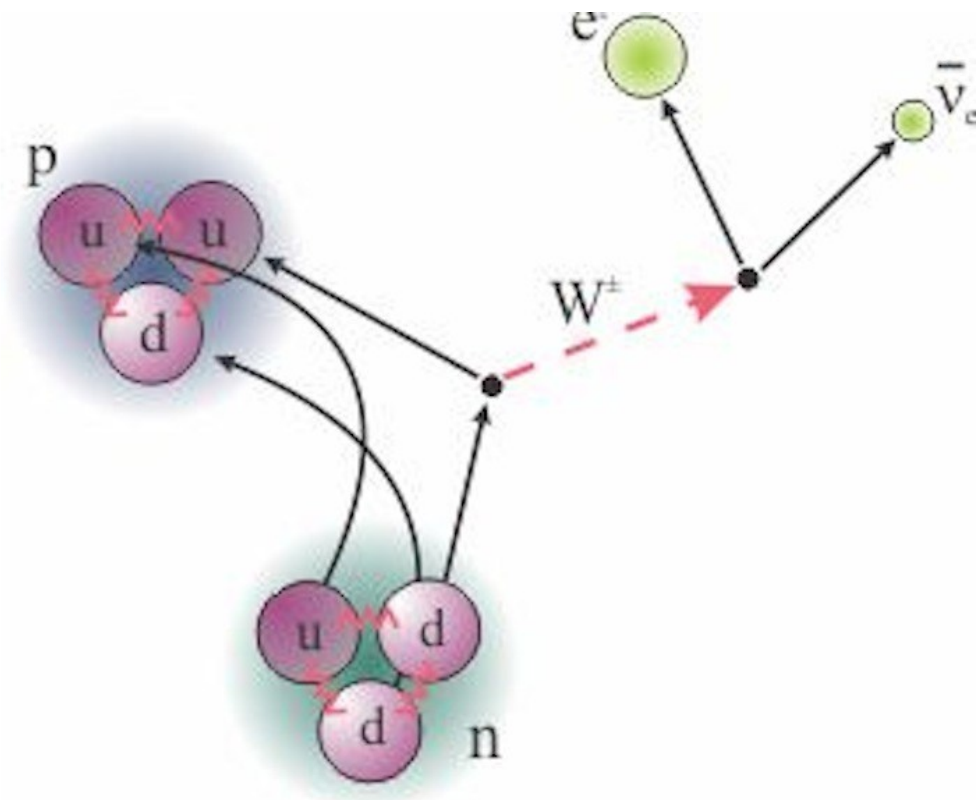
- Mesones:

$$\pi^{+}:(u\,\bar{d})$$

$$\pi^{-}:(\bar{u}\,d)$$

$$\pi^{0}:(u\,\bar{u}+d\,\bar{d})$$

Entonces el decaimiento beta...



- Mediada por una interacción débil
- En el n^o, ***(udd)***, uno de los quarks ***d***$^{-1/3}$ del neutrón cambia a ***u***$^{+2/3}$ emitiendo un bosón ***W***$^-$.
- Ahora es un protón p$^+$ ***(uud)***
- El bosón ***W***$^-$ decae en un electrón y un antineutrino electrónico

Quarks, the next generation

- Segunda generación
  - “charm” y “strange”
    - Carga eléctrica
      - c: +2/3 e
      - s: -1/3 e
    - masa
      - m_c: (1.27 +- 0.07) GeV
      - m_s: (101 +- 29) MeV

- Tercera generación
  - “top” y “bottom”
    - Carga eléctrica
      - t: +2/3 e
      - b: -1/3 e
    - masa
      - m_t: (172 +- 2) GeV
      - M_b: (4.19 +- 0.18) GeV

Una disgresión sobre cargas

Fuerza eléctrica

$$F_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F_E = \left(k_e \frac{q_1}{r^2}\right) q_2$$

$$F_E = \left(k_e \frac{q_1}{r^2}\right) q_2 = m_2^i \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F_E = \left(k_e \frac{q_1}{r^2}\right) \frac{q_2}{m_2^i} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

?

Fuerza Gravedad

$$F_G = G \frac{m_1^g m_2^g}{r^2}$$

$$F_e = G \frac{m_1^g}{r^2} m_2^g$$

$$F_e = \left(G \frac{m_1^g}{r^2}\right) m_2^g = m_2^i \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F_e = \left(G \frac{m_1^g}{r^2}\right) \frac{m_2^g}{m_2^i} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F_e = \left(G \frac{m_1^g}{r^2}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2} = g$$

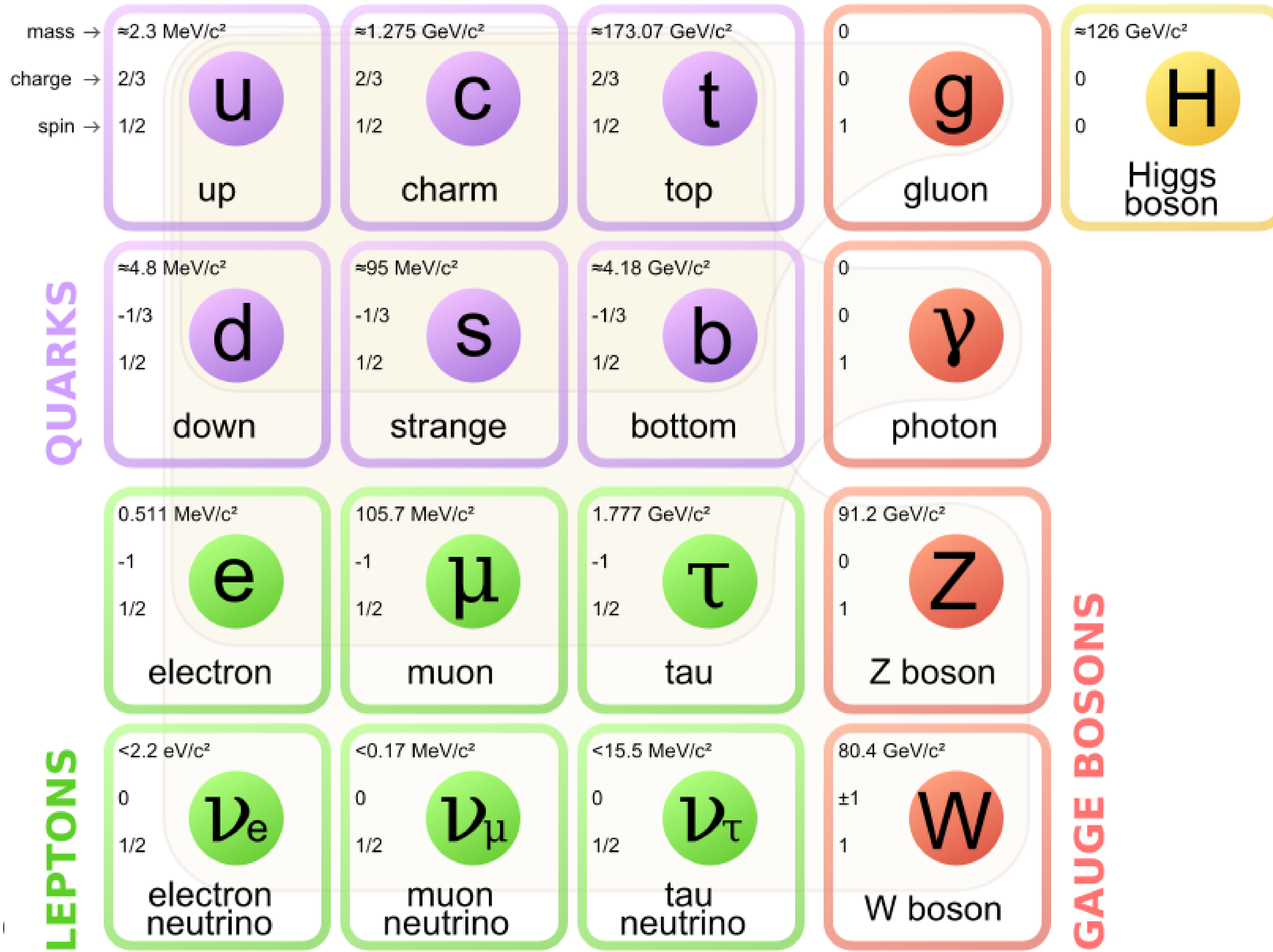
Interacción fuerte: el color del mundo

- Fuerzas y cargas
  - G: una carga (masa)
  - EM: dos cargas (+,-)
  - W: “una” carga (w)
  - FF: tres cargas (r,g,b)
- El color no se observa: la naturaleza es “blanca”
- Bariones: (qqq) o (qq qq qq)/3
- Mesones: (qq) (nota: el magenta es el antiverde)
- 8 Gluones: (rojo antiverde), (azul antirojo), ...

¿Y los leptones?

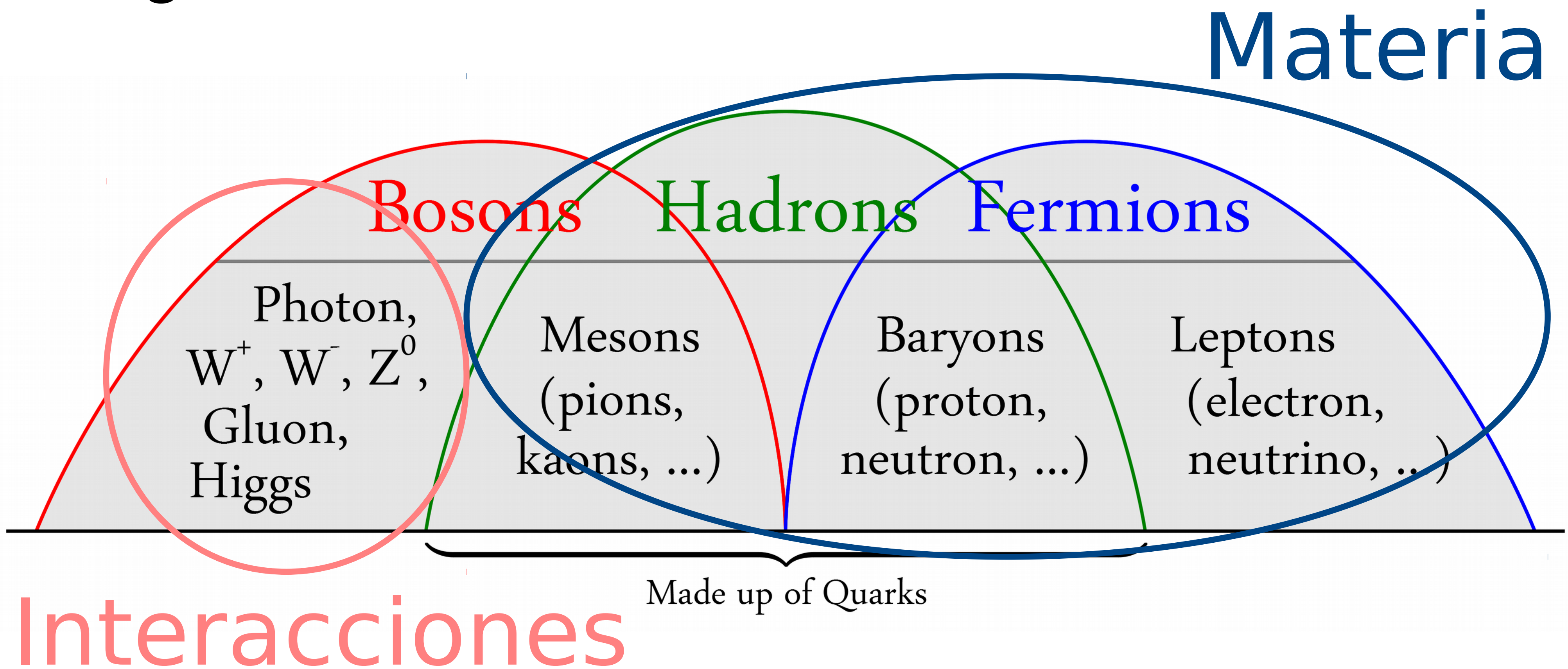
- Tenemos 3 generaciones de quarks
- 3 generaciones de leptones:
  - e, ν_e
  - μ, ν_μ
  - τ, ν_τ
- m_τ = 1776.99 MeV

La foto de la familia...

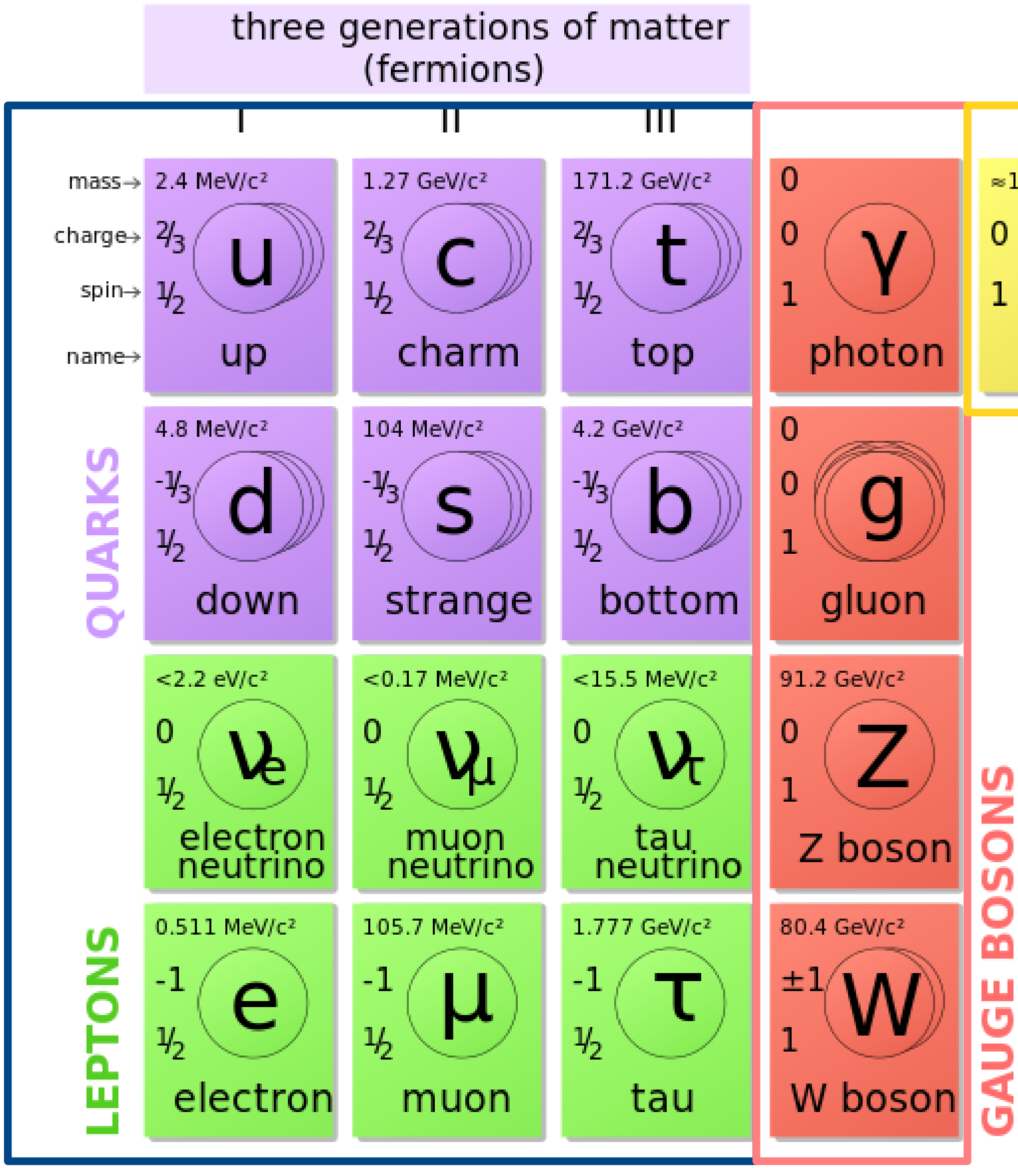


Clasificación de partículas

- Teorema de Espín-Estadística (Bosones-Fermiones)
- Carga de Fuerza Fuerte (hadrones o mesones)



Leptones, quarks y mediadores



- Materia
- Interacciones
- Masa
- Parece inocente:
  - (6·2) leptones = 12 l
  - ((6·3)·2) quarks = 36 q
  - (1+8+3+1)=13 bosones de calibre (gauge, interacciones)
- **61 partículas "fundamentales"**

Cuatro interacciones cuatro

Force	Strength	Theory	Mediator
Strong	10	Chromodynamics	Gluon
Electromagnetic	10^{-2}	Electrodynamics	Photon
Weak	10^{-13}	Flavordynamics	W and Z
Gravitational	10^{-42}	Geometrodynamics	Graviton

- Dos de largo alcance (infinito) → Gravedad y EM
- Dos de muy corto alcance (~fm) → Débil y fuerte

Teorema de Noether

- **Simetrías de las ecuaciones ↔ Cargas conservadas**
  - Invariancia rotaciones ↔ Cons. momento angular
  - Invariancia traslaciones espaciales ↔ Cons. momento lineal
  - Invariancia traslaciones temporales ↔ Cons. Energía
    - Ver por ejemplo, Landau & Lifshitz, Vol 1 (Mechanics, Cap II)
    - Para simetrías, caldo Knorr, Landay & Lifshitz, Vol 3 (Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory, Cap XII)
- ¡Cuidado! Dice "simetría de las ecuaciones", no del problema → un cuerpo en rotación puede no tener un sólo eje de simetría pero conserva el impulso angular

Las ecuaciones de movimiento son simétricas ↔ ↔ Hay cargas conservadas

Acción, simetrías y cargas

- ¿Qué fue primero, el huevo o la gallina?
  - ¿La conservación de la energía o la invariancia temporal?
- Aquí es simple: el huevo fue primero...
  - Los principios de conservación se basan en observaciones de los sistemas naturales → "prejuicios"
  - Las **ecuaciones movimiento**, y por ende la **acción**, debe tener las **simetrías** necesarias para verificar las **conservaciones observadas**
- **"La carga [eléctrica] es una magnitud conservada"**
- Significa que nunca en la historia (es decir, ***nunca hasta hoy y esperamos que eso no cambie -prejuicio-***) se observó un proceso donde la cantidad de carga [eléctrica] inicial y final difieren
- **Moraleja 1: Nuestra acción deberá incluir alguna simetría que, Noether mediante, contemple la conservación de la carga eléctrica**
- **Moraleja 2: La física es una ciencia natural, de carácter observacional y/o experimental → no es una ciencia "exacta"**

Nuevas cargas conservadas

- Conservación de la Energía (E)
- Conservación del impulso lineal (**p**)
- Conservación del impulso angular (J)
- Conservación de la carga eléctrica (Q)
- ***Conservación del número leptónico (L)***
  - ***electrónico (L$_e$)***
  - ***muónico (L$_\mu$)***
  - ***tauónico (L$_\tau$)***

$$n \to p\, e^-\, \bar{\nu}_e$$

- ***Conservación del número bariónico (B)***

$$p\, p \to p\, p\, p\, \bar{p}$$

- *Atención: una magnitud conservada hoy podría no haberse conservado en el pasado y viceversa ↔ Simetrías rotas*

Número leptónico

- Sean las siguientes reacciones/decaimiento:

$$p^+ \bar{\nu}_e \rightarrow n e^+$$

$$p^+ \nu_e \rightarrow n e^-$$

$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

$$p^+ \bar{\nu}_\mu \rightarrow n e^+$$

- Algunas se producen, otras no
- La 2da viola la conservación de la carga eléctrica
- ¿Qué pasa con la 4ta?
- La cantidad de leptones (o antileptones) por familia (o sabor) debe conservarse!

Magnitudes conservadas

LEPTON CLASSIFICATION

l	Q	L_e	L_μ	L_τ
e	−1	1	0	0
ν_e	0	1	0	0
μ	−1	0	1	0
ν_μ	0	0	1	0
τ	−1	0	0	1
ν_τ	0	0	0	1

$$p^+ \bar{\nu}_e \rightarrow n e^+ \quad ✓$$

$$p^+ \nu_e \rightarrow n e^- \quad ✗$$

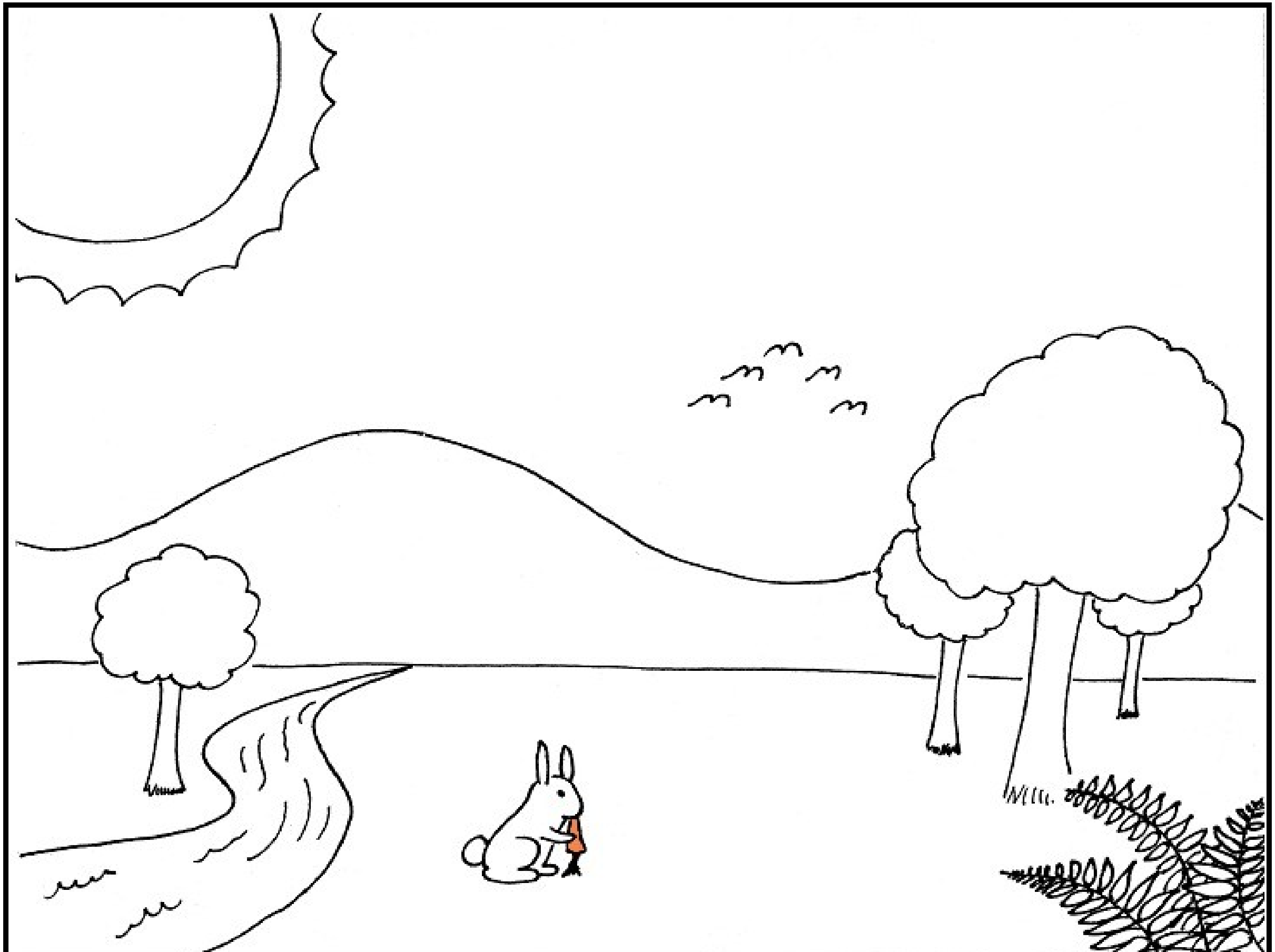
$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \quad ✓$$

$$p^+ \bar{\nu}_\mu \rightarrow n e^+ \quad ✗$$

- Carga eléctrica
- Número leptónico por sabor (flavor)
- Las antipartículas tienen signos opuestos en todos los números
- Entonces, hay "12" leptones diferentes
- **Los números antes y después de la reacción deben conservarse**

Para terminar, el Higgs

Tratamos de describir la naturaleza



Hacemos lo que podemos