Universidad Industrial de Santander

Introducción a la Física (2014)

- Unidad: 02
- Clase: 13
- Fecha: 20140731J
- Contenido: Choques
- Web: http://halley.uis.edu.co/fisica_para_todos/
- Archivo: 20140731J-HA-choques.pdf

En el episodio anterior…

Algoritmo "Newton-Hooke"

$$\Delta t = \frac{T}{1000} = \text{cte}$$

Datos: $\vec{r}_{i=0}\,;\vec{v}_{i=0}$

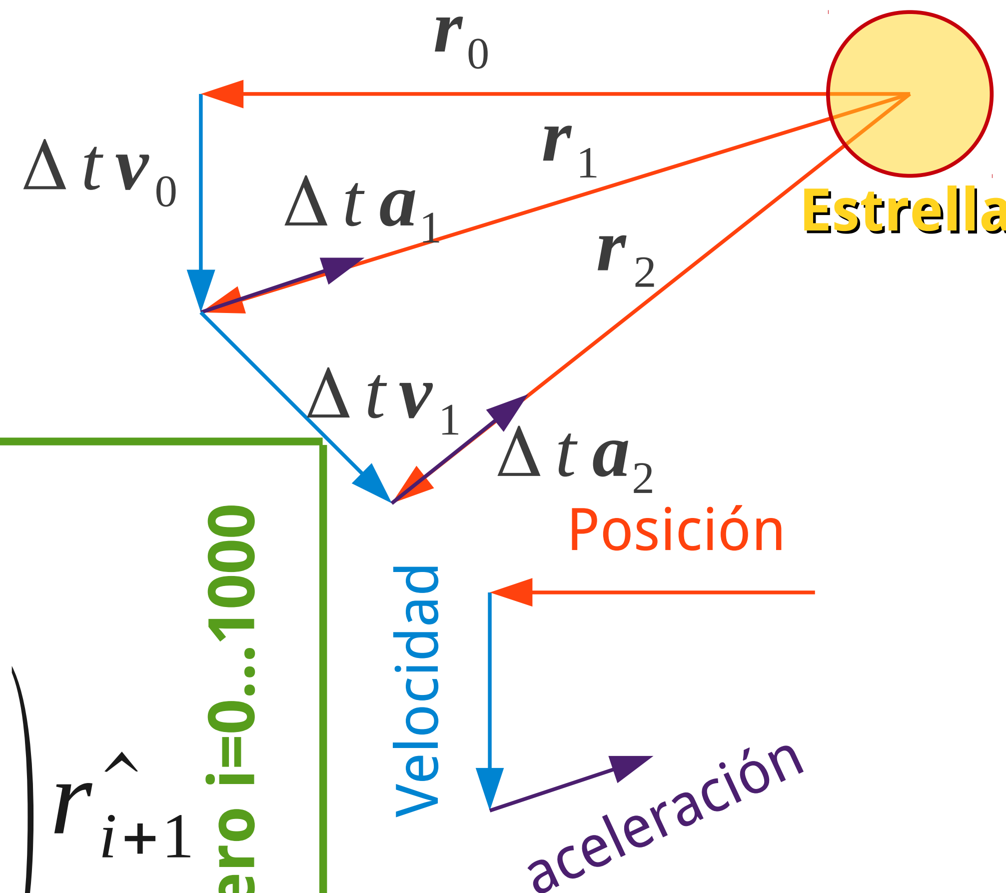
Imprimo $\vec{r}_i$

Calculo: $\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \Delta t\,\vec{v}_i$

Calculo: $\vec{a}_{i+1} = -\left(\dfrac{GM}{|\boldsymbol{r}_{i+1}|^2}\right)\hat{r}_{i+1}$

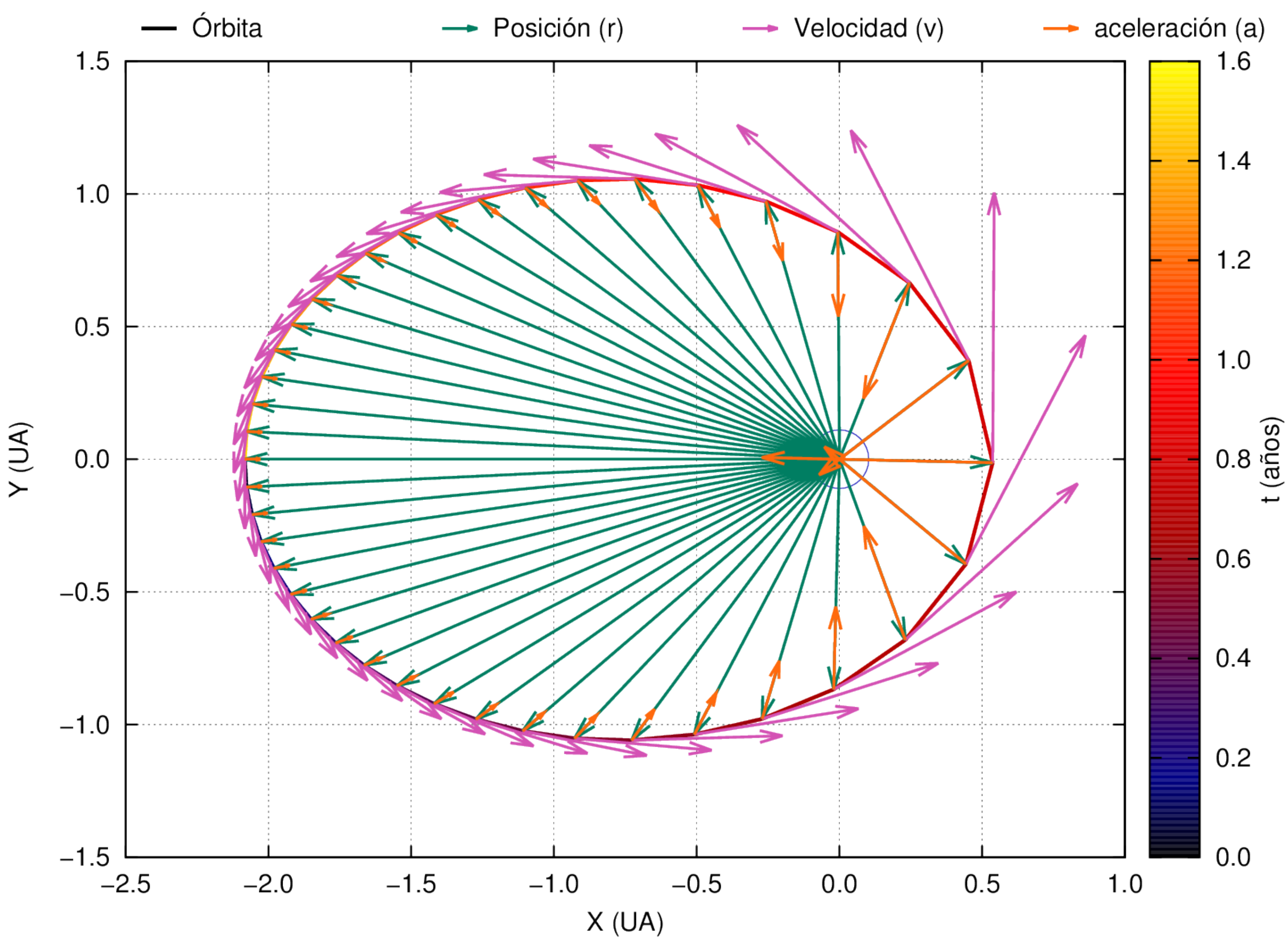
Calculo: $\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \Delta t\,\vec{a}_{i+1}$

itero i=0...1000

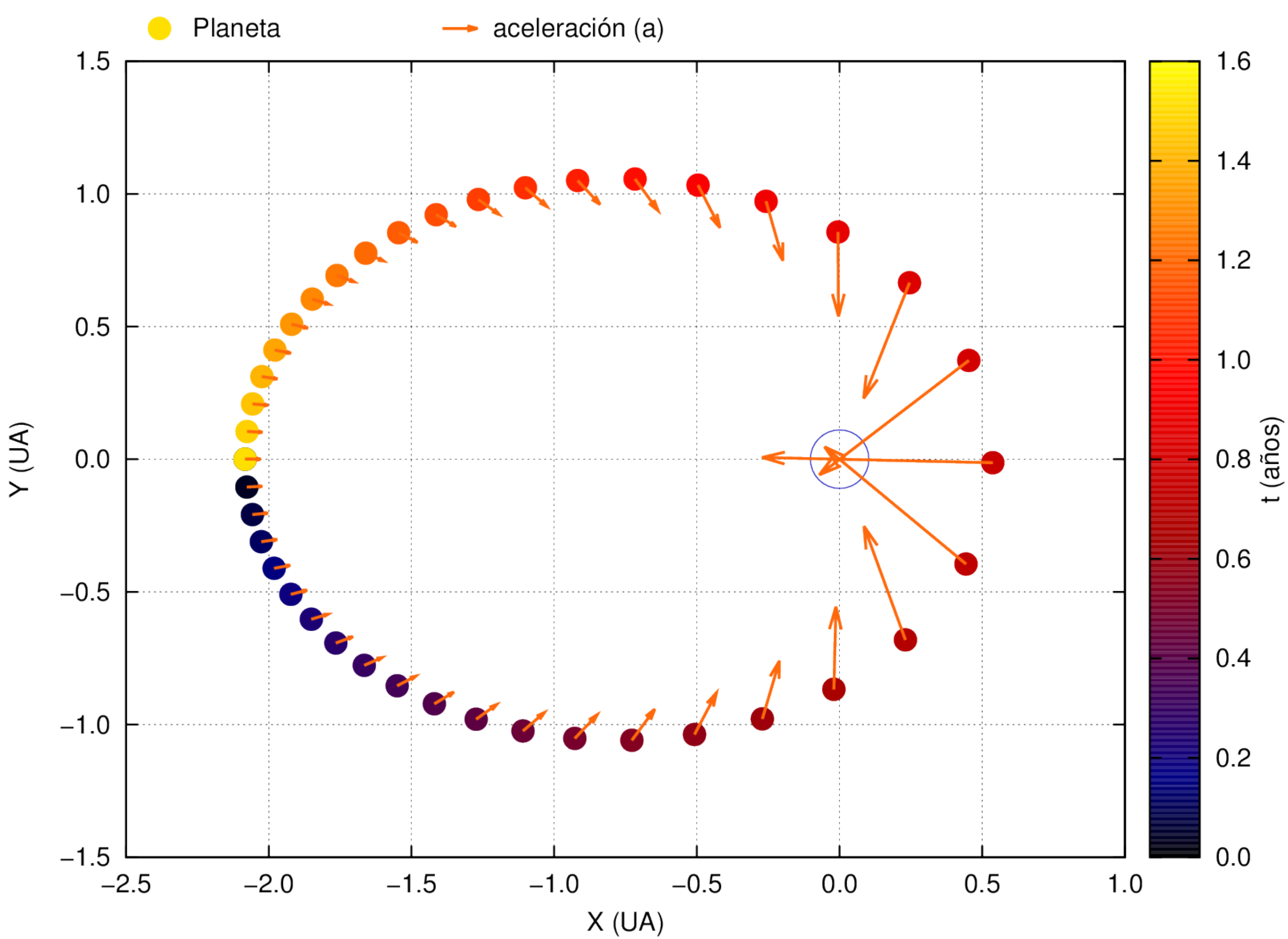


Notar: $\vec{a}_{i+1} = -\left(\dfrac{GM}{|\vec{r}_{i+1}|^3}\right)\vec{r}_{i+1}$

Órbita+posición+velocidad+aceleración

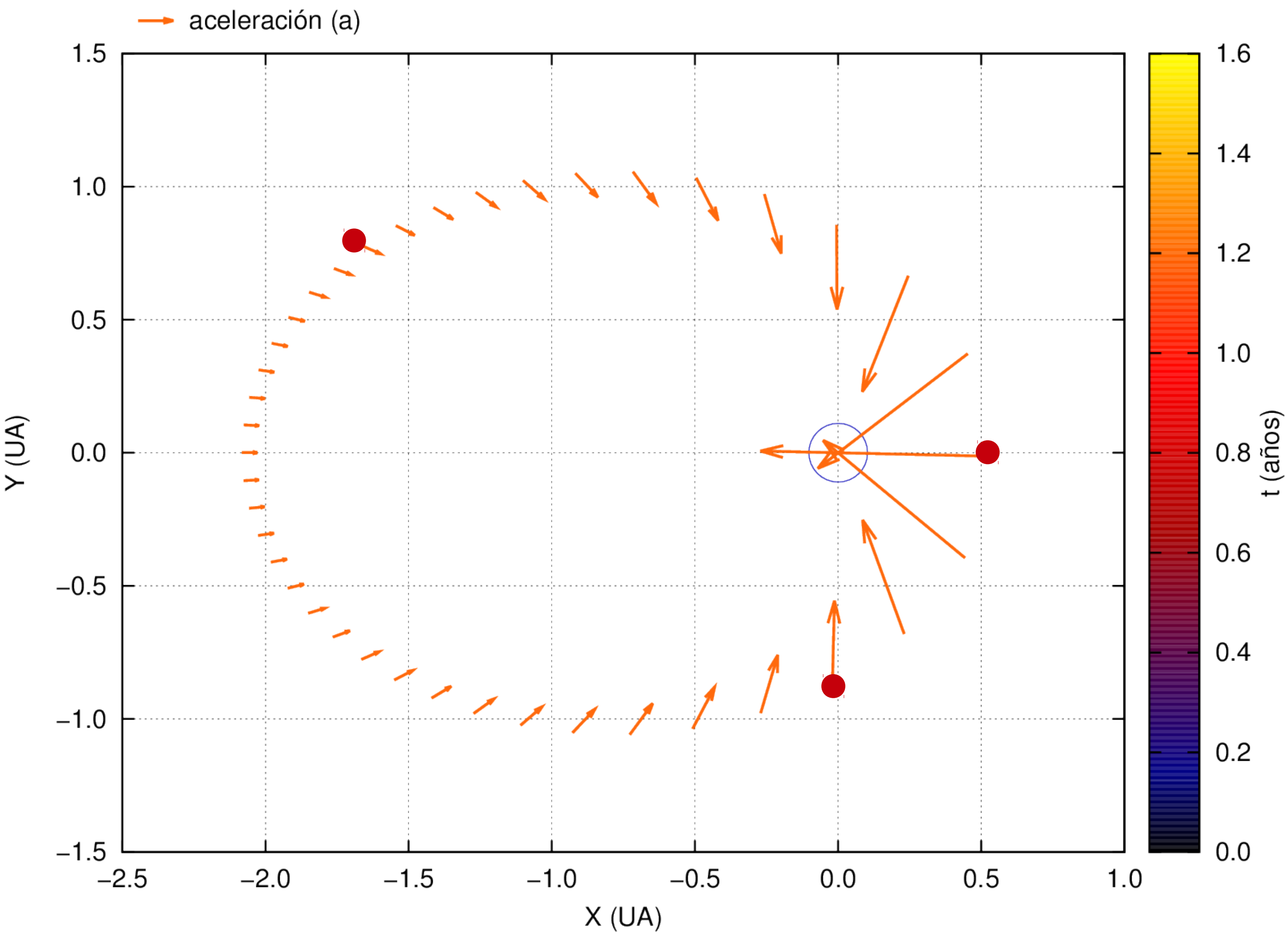


planeta+aceleración

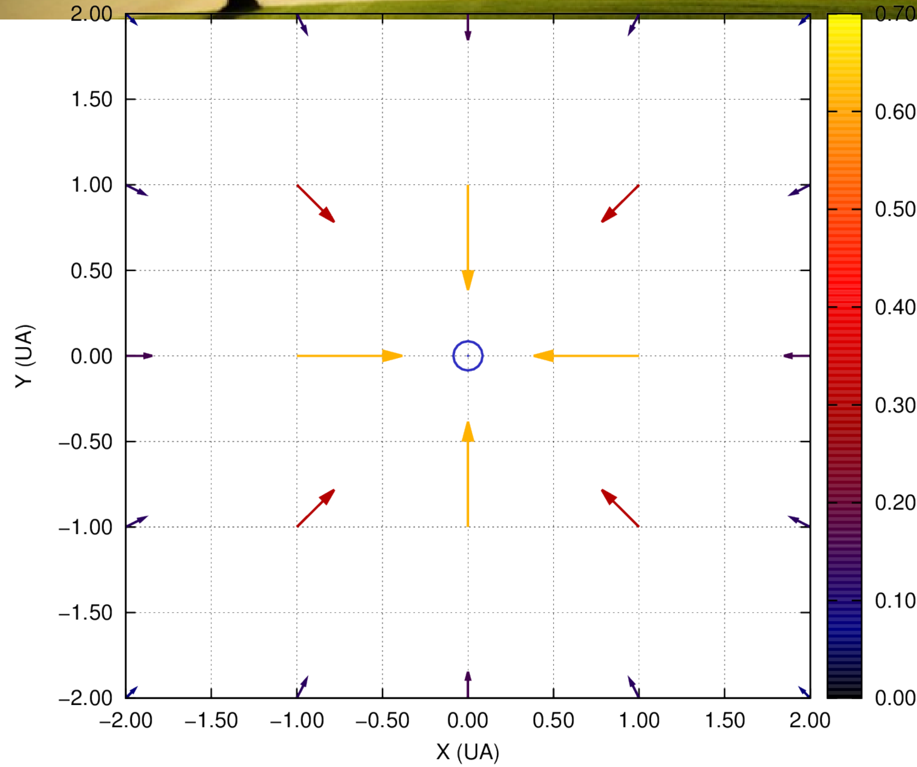


aceleración=Fuerza / masa

masa de prueba



Muevo la masa de prueba en el plano z=0



$$\vec{F}(r) = \frac{G\,M\,m}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

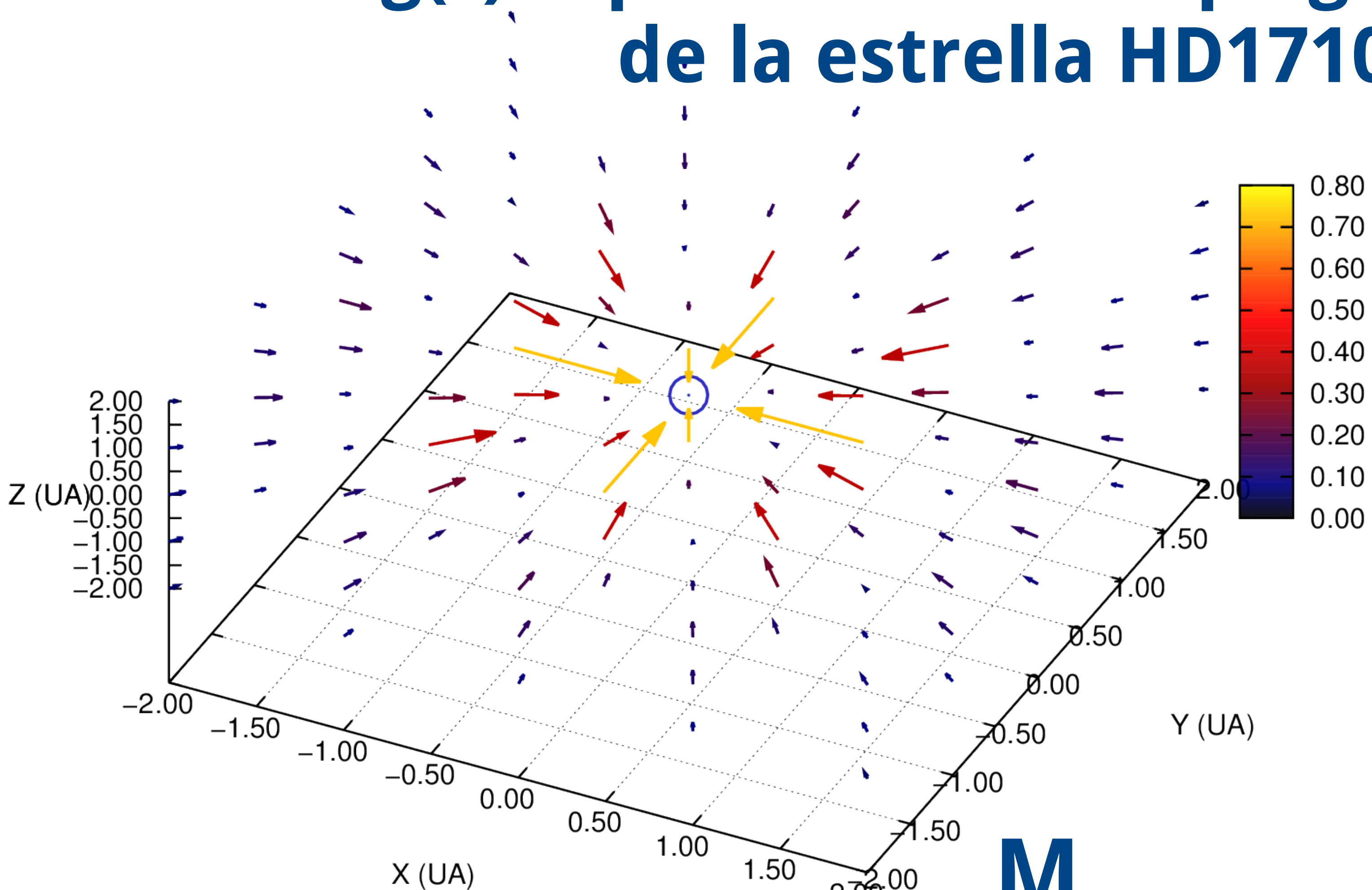
$$\vec{F}(r) = m\left[\left(\frac{G\,M}{|\vec{r}|^2}\right)\hat{r}\right]$$

$$\vec{F}(r) = m\,\vec{g}(r)$$

$$\boxed{\vec{g}(r) = \left(\frac{G\,M}{|\vec{r}|^2}\right)\hat{r}}$$

g(r) es un *campo vectorial*.
A cada punto **r** del espacio le asigna el vector **g(r)**

g(r) representa al campo gravitatorio de la estrella HD171028D



$$M_{HD171028D} = 0.99\ M_S$$

Una de las moralejas de esta materia:

Sea físico y conviértase en el alma de las fiestas

“Che”, vos que sos físico....

“¿Cómo es posible que para llegar a la Luna necesitaron el Saturno V y para volver un motor tan chiquito?”

Poniendo en contexto...

Una buena respuesta...

"Para llegar a la Luna hacen falta 500 años de ciencia y millones de mentes humanas. Para inventarse que no se llegó basta con un gilipollas"

Visto en Microsiervos, *http://goo.gl/MB6FI*

Earth as viewed by Apollo 17
Photograph courtesy NASA

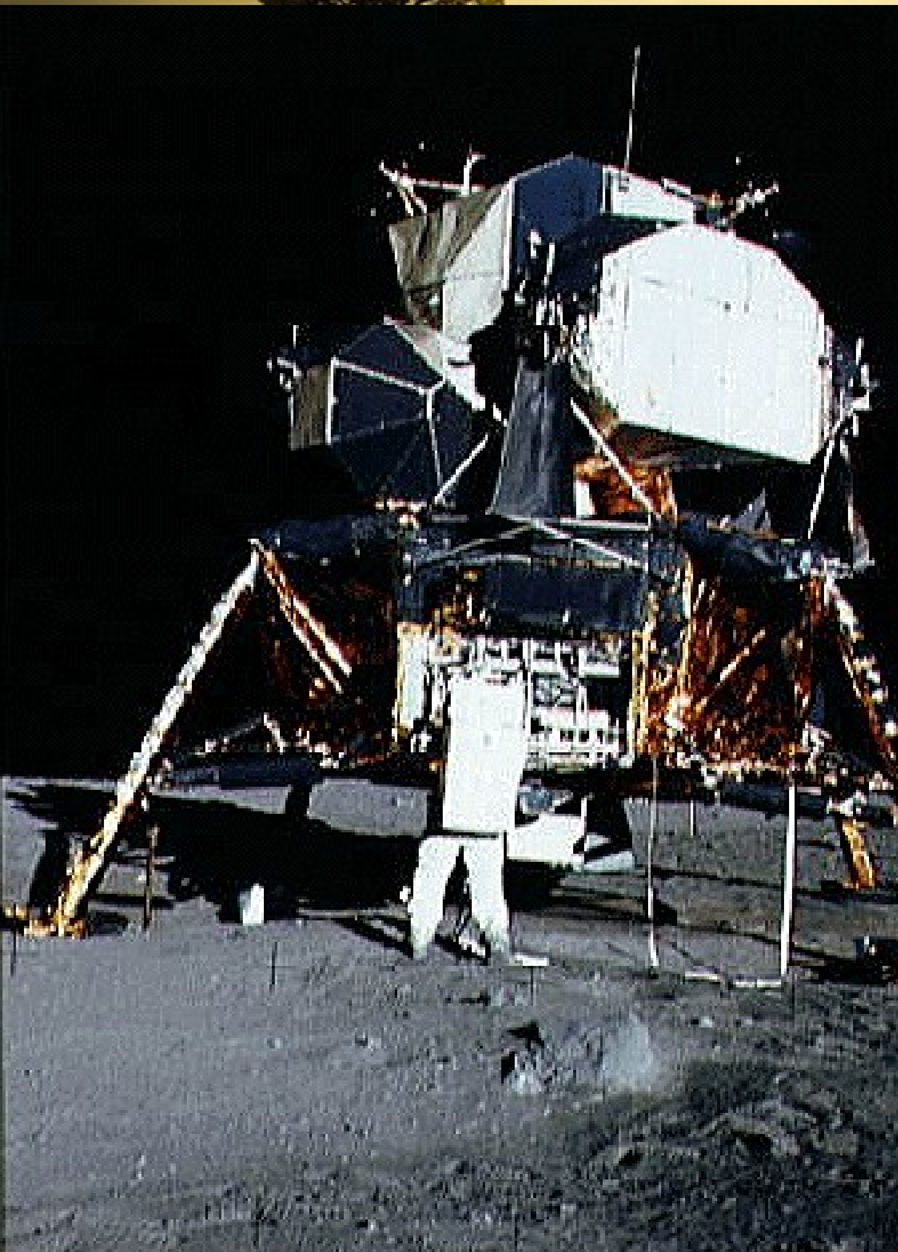
fly me to the moon...

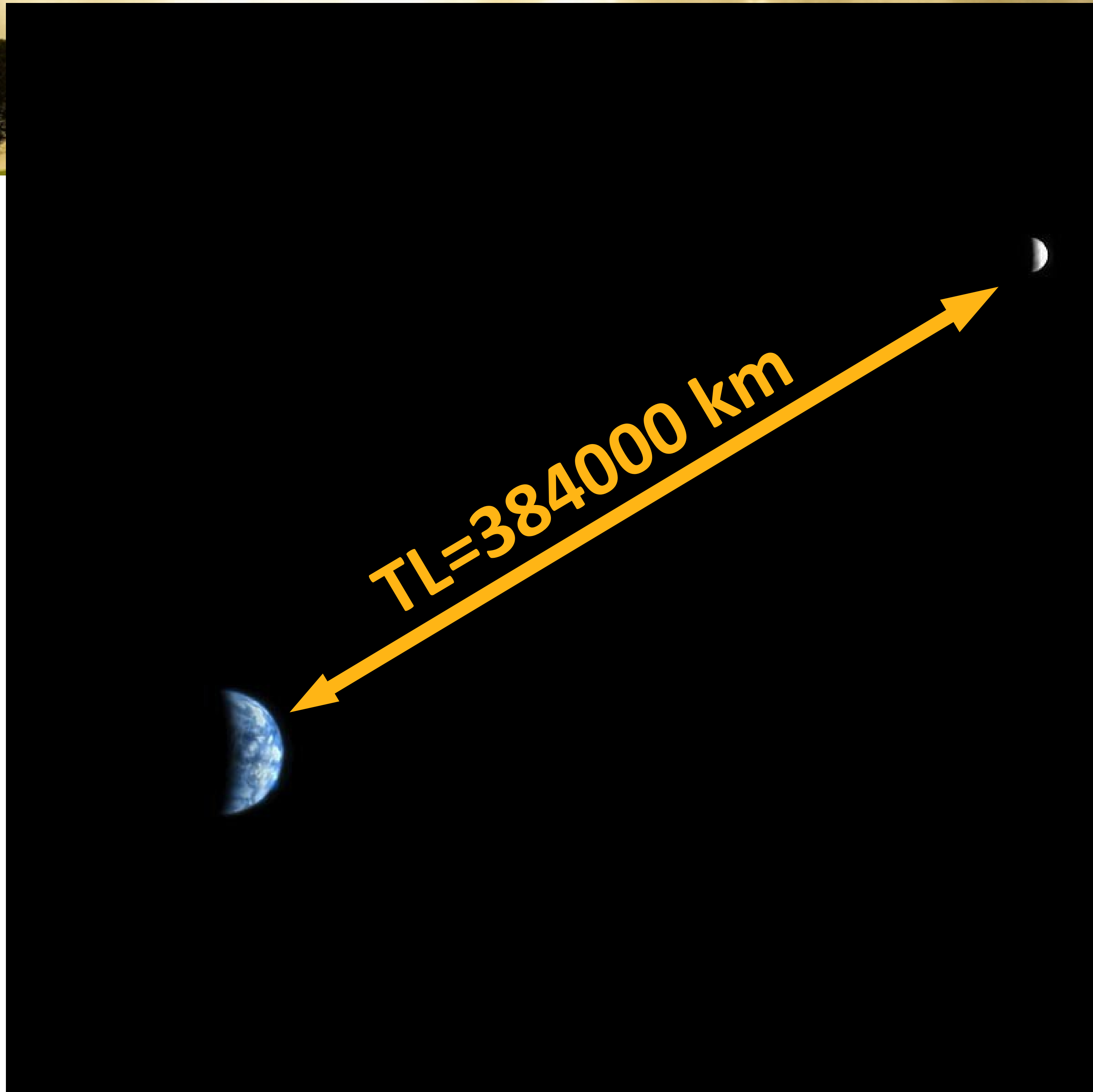
NATIONAL GEOGRAPHIC

Saturno V, un cohetito: 110.6 m altura, 10 m diám, 2900 Ton

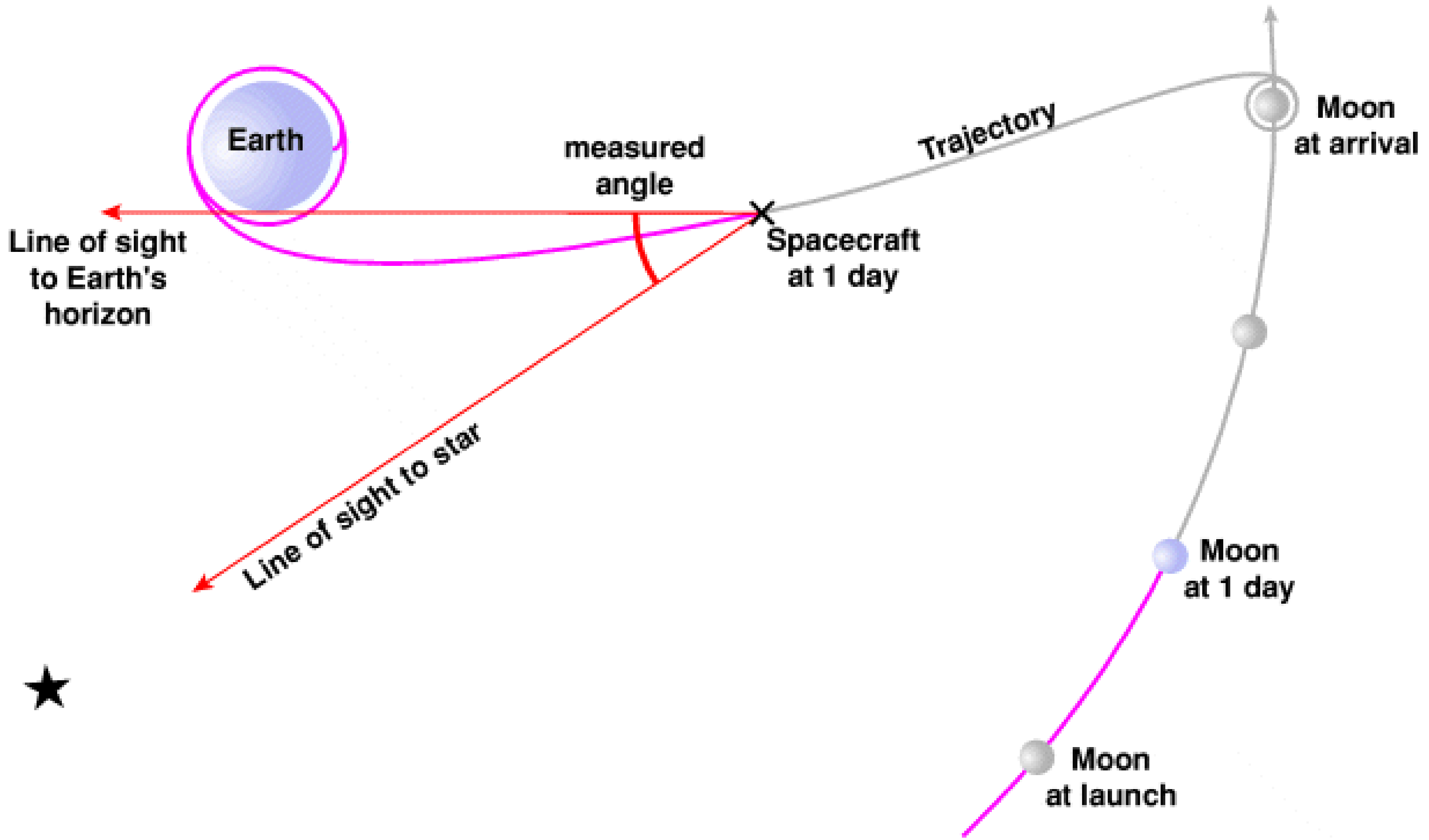
Empuje: 3.34×10^7 N

El módulo lunar (Eagle y Columbia)




TL=384000 km

Trayectoria de ida y vuelta



Pregunta:

¿Hasta dónde **“sube”** un cuerpo lanzado desde La Tierra en dirección a la Luna?

ó

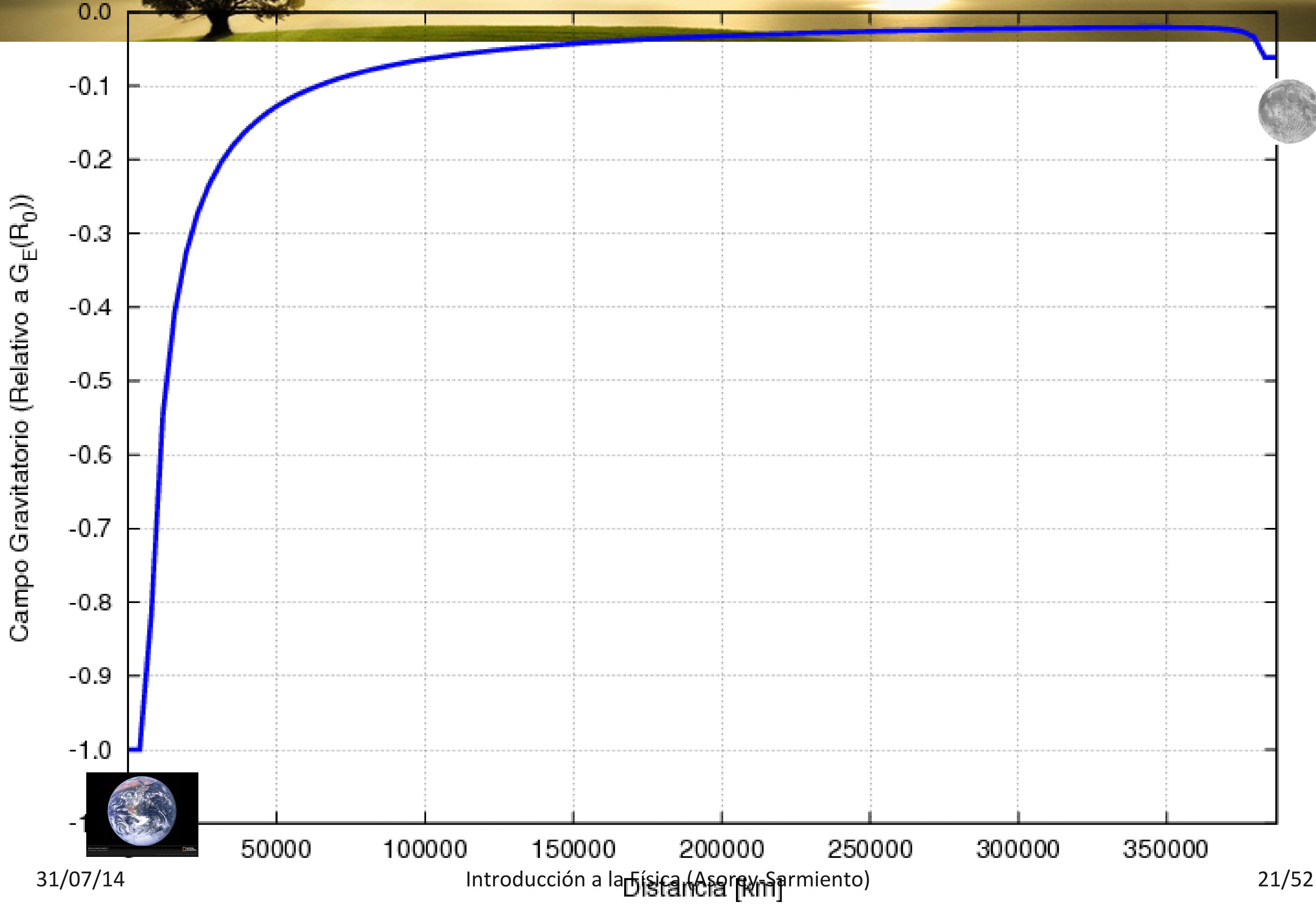
¿Cuándo ese cuerpo comienza a **“caer”** en la Luna?

Respuesta: (Aproximada)

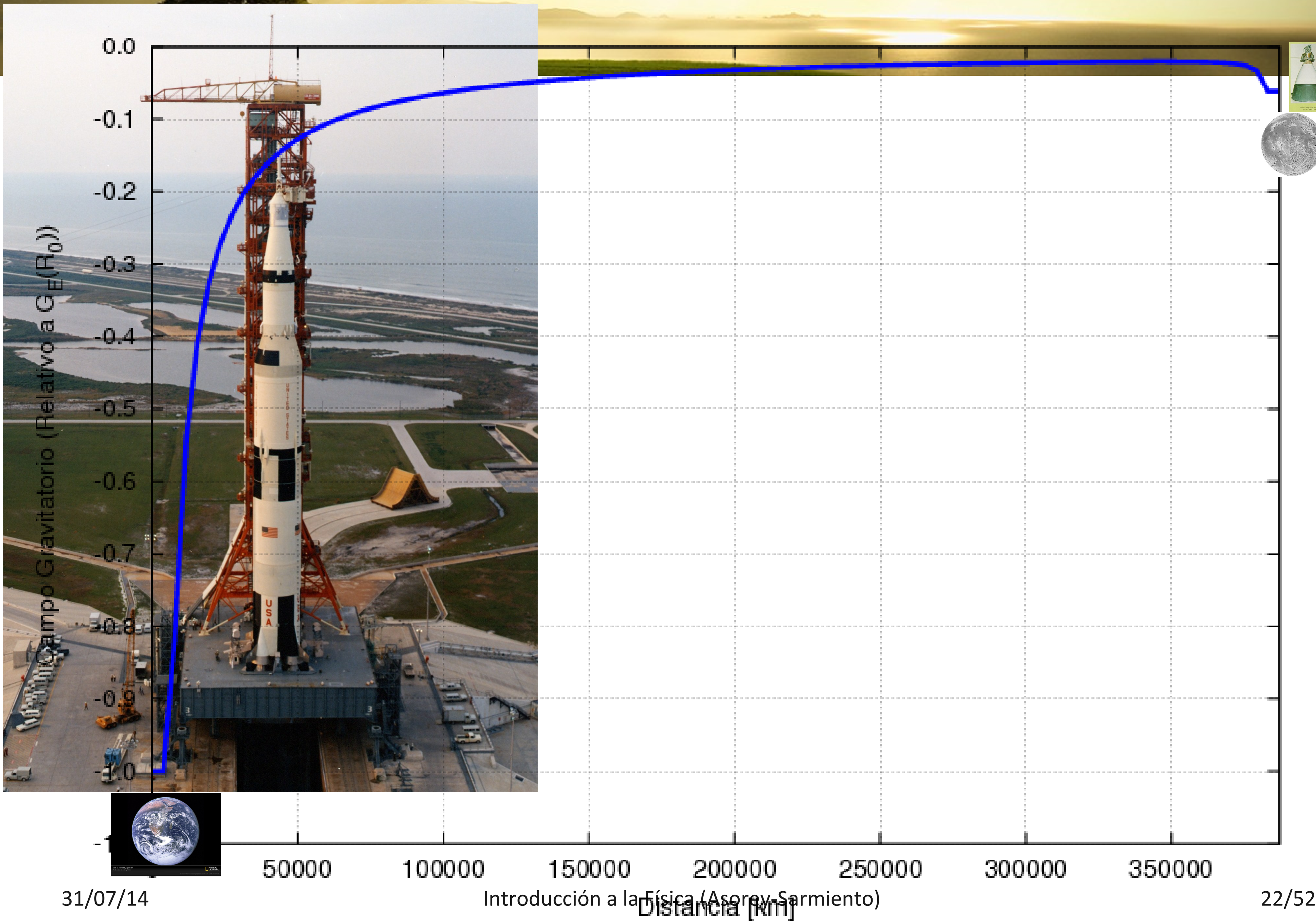
Hay un punto de equilibrio, donde las fuerzas de atracción gravitatorias que la Tierra y la Luna ejercen sobre el cuerpo se igualan

Veamos...

“Pozo de Potencial”

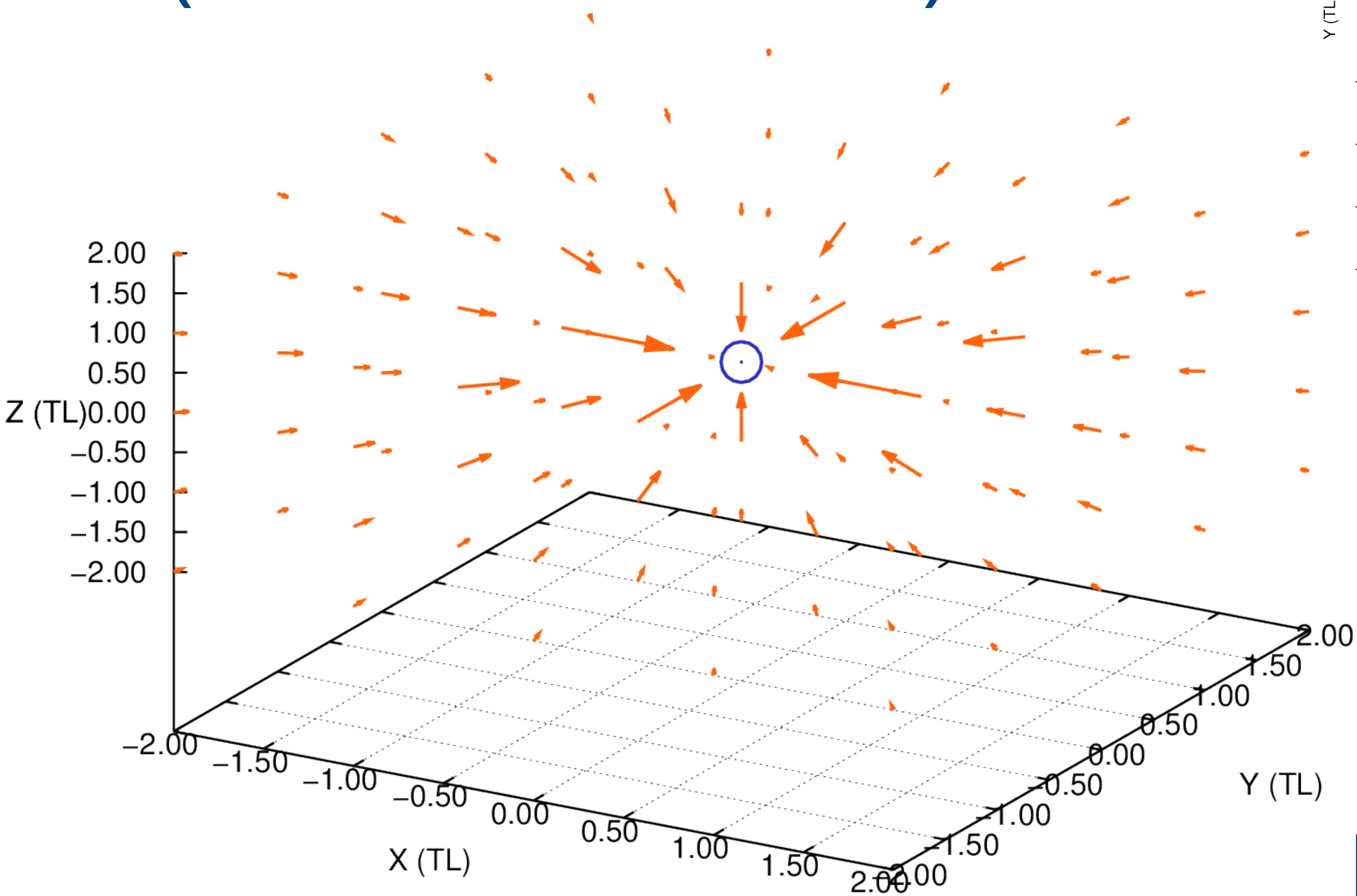


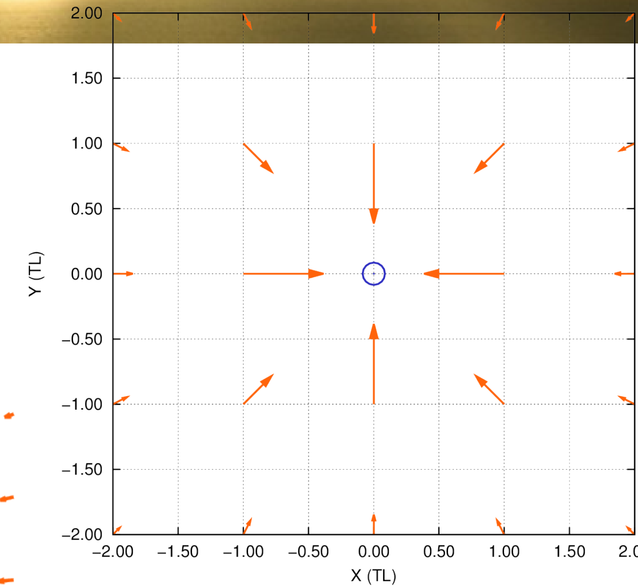
“Pozo de Potencial”



¿y la Tierra?

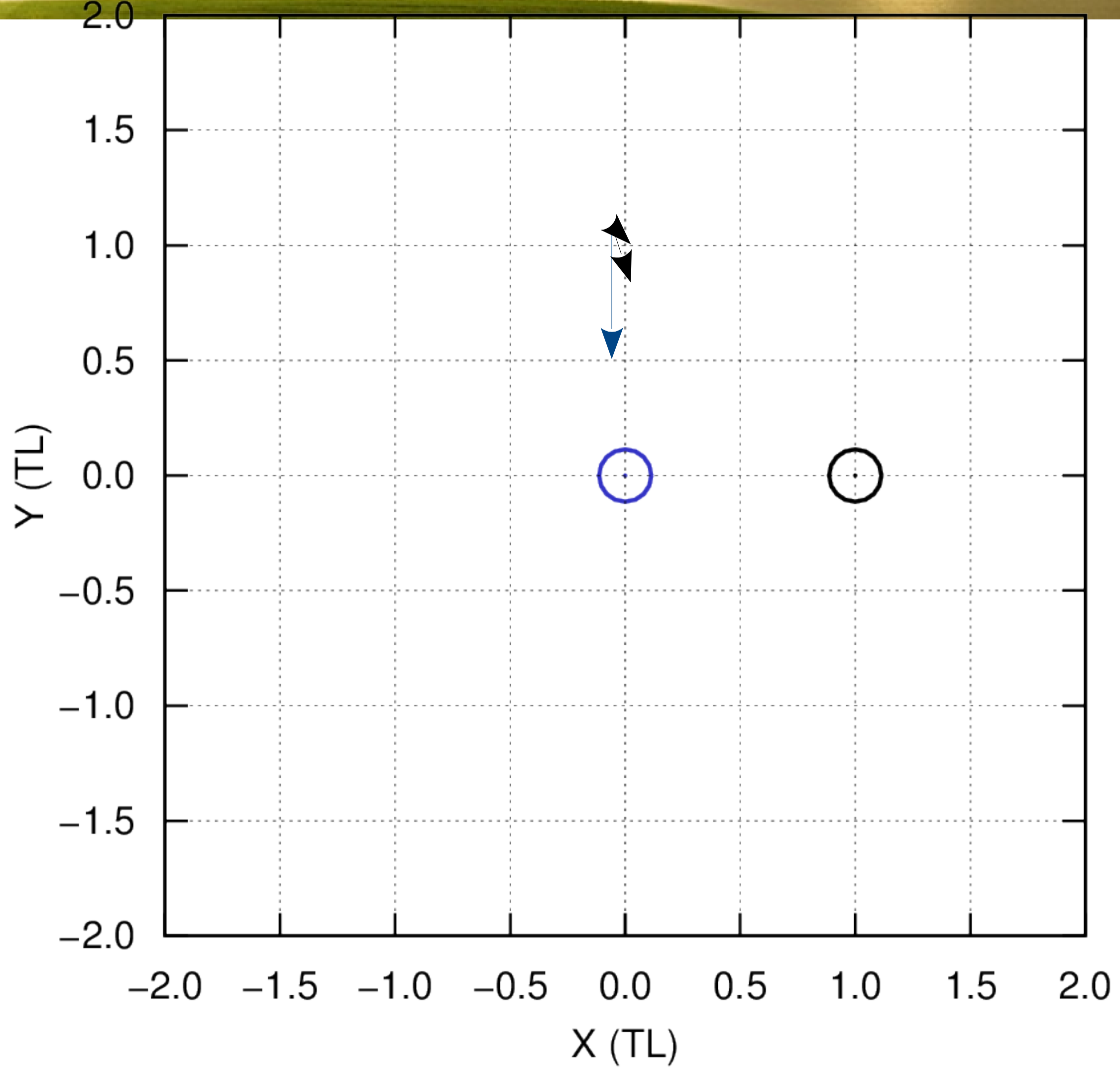
campo gravitatorio terrestre
(TL=dist. Tierra-Luna)





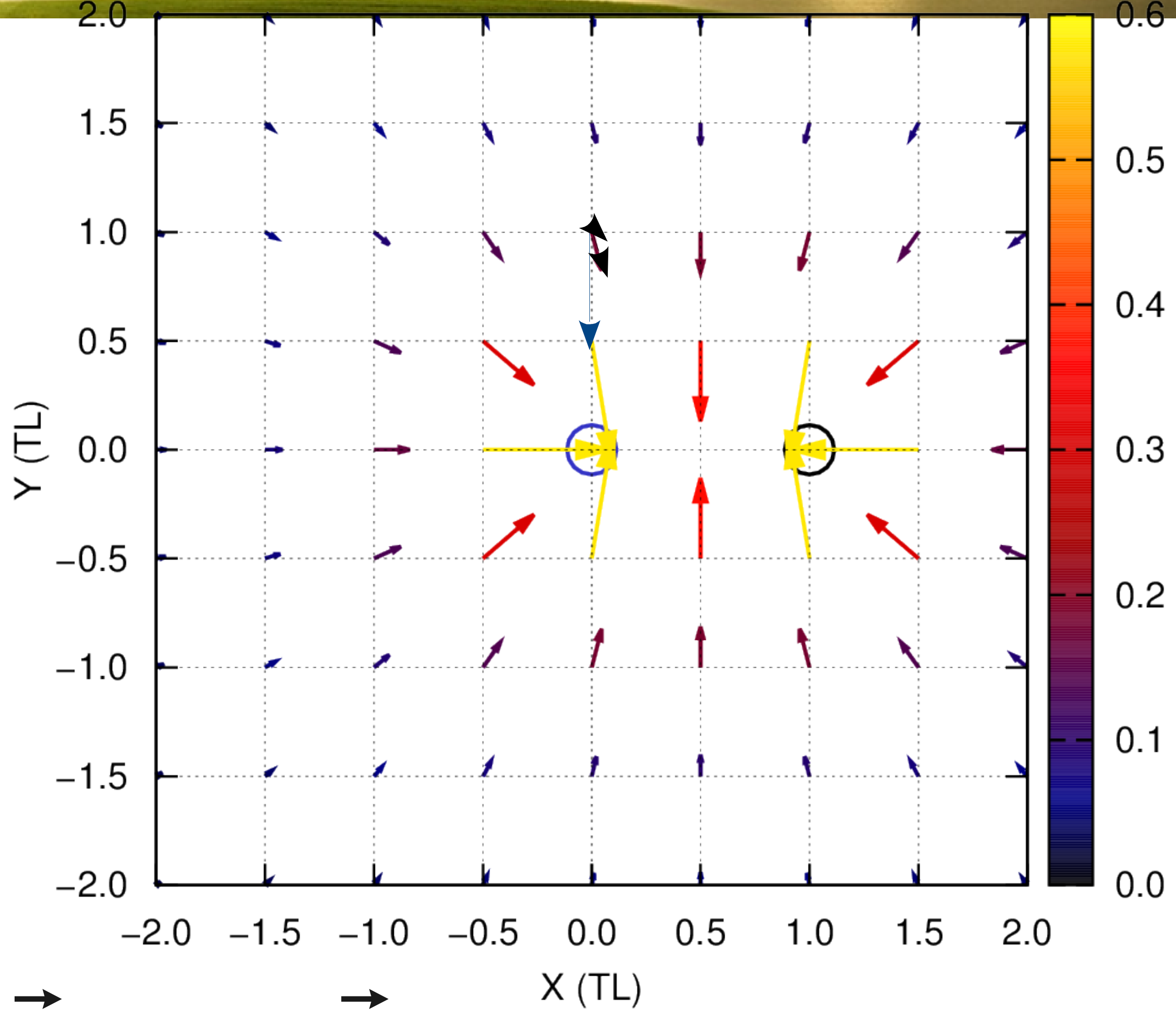
M_T=6x10^{24} kg

Dos Tierras a distancia TL



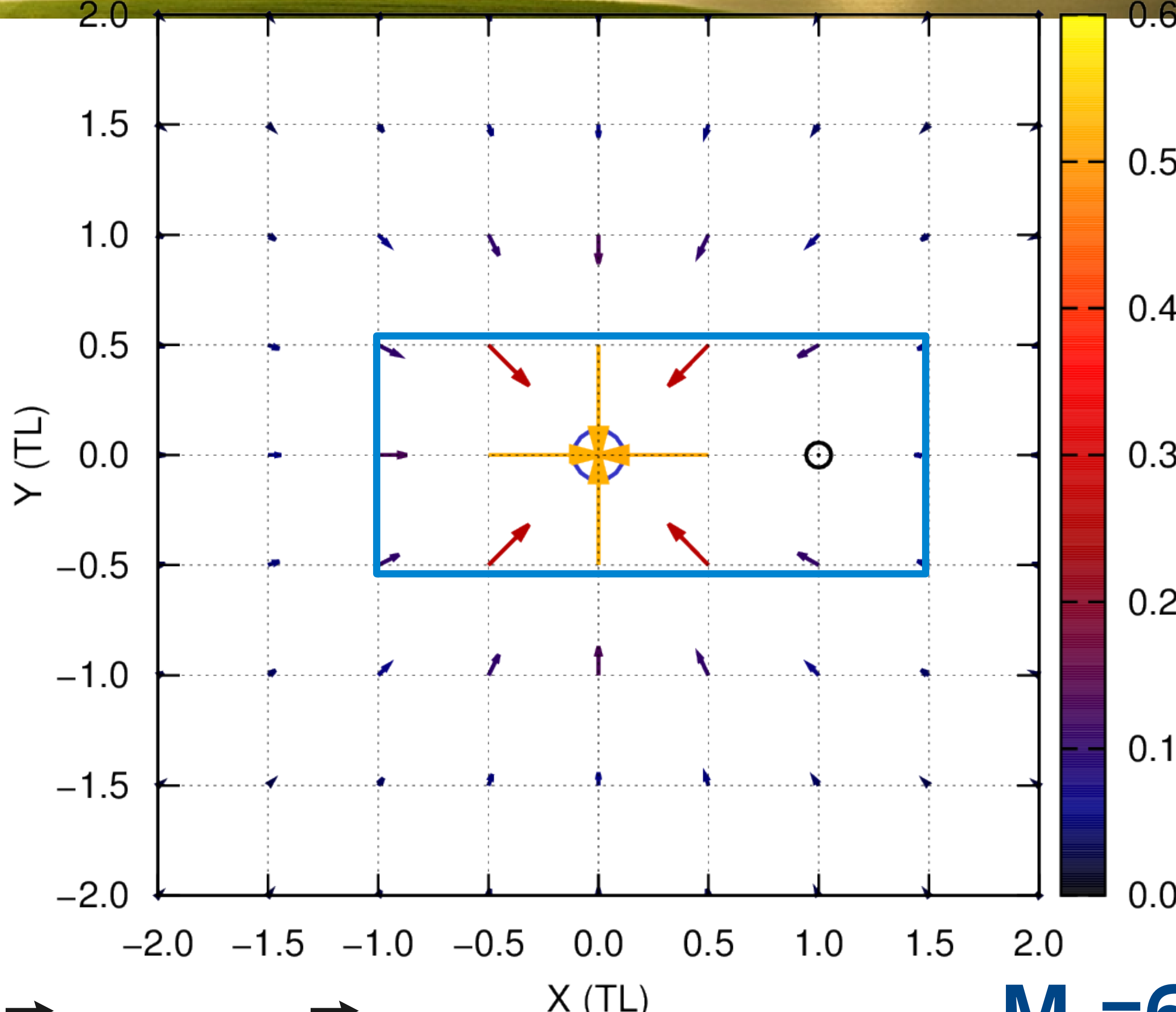
$M_T = 6x10^{24}$ kg

Campo gravitatorio “2 Tierras”



$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}_{T1}(\vec{r}) + \vec{g}_{T2}(\vec{r})$$

Campo gravitatorio sistema Tierra-Luna

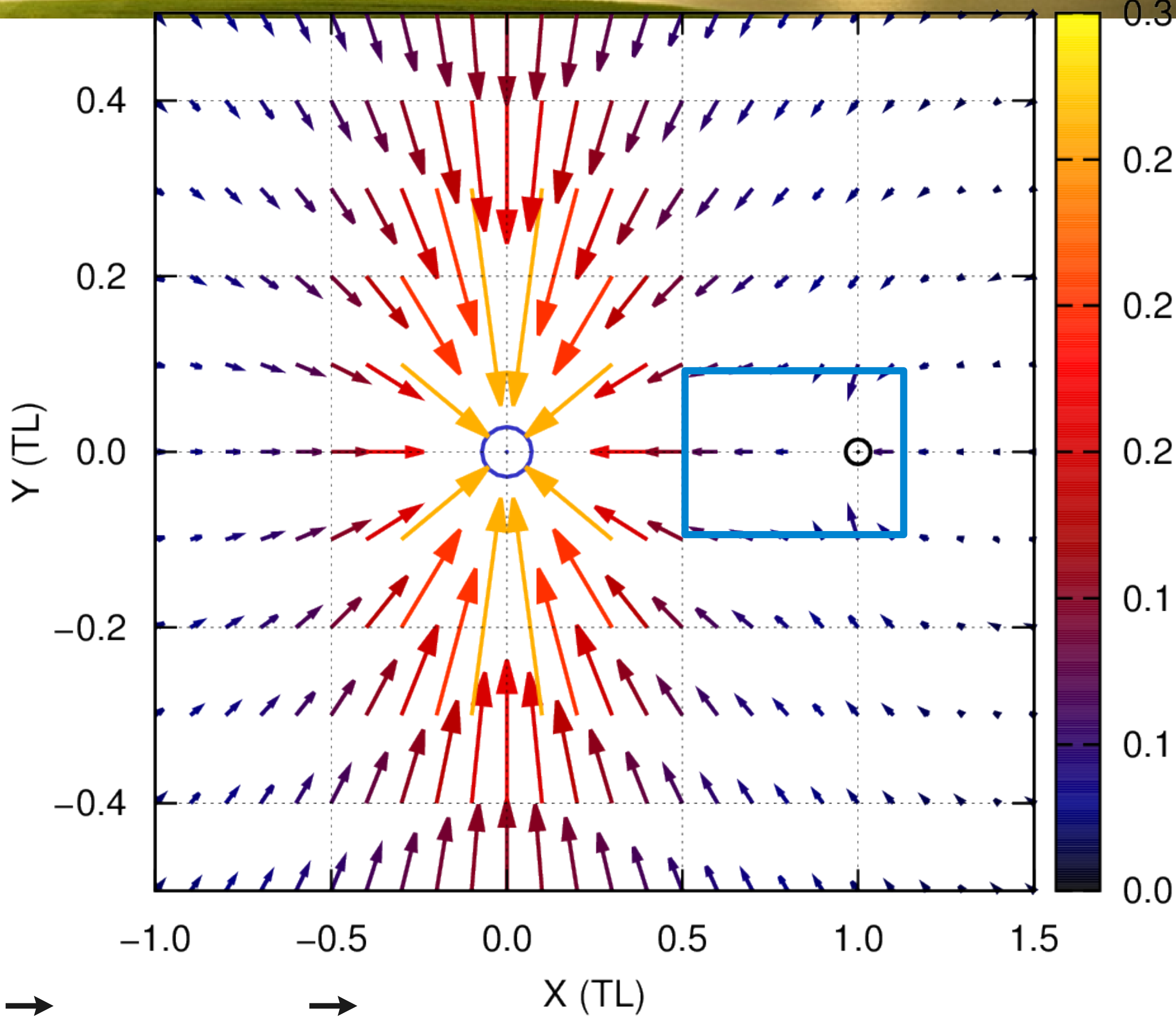


$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}_T(\vec{r}) + \vec{g}_L(\vec{r})$$

$M_T = 6 \times 10^{24}$ kg

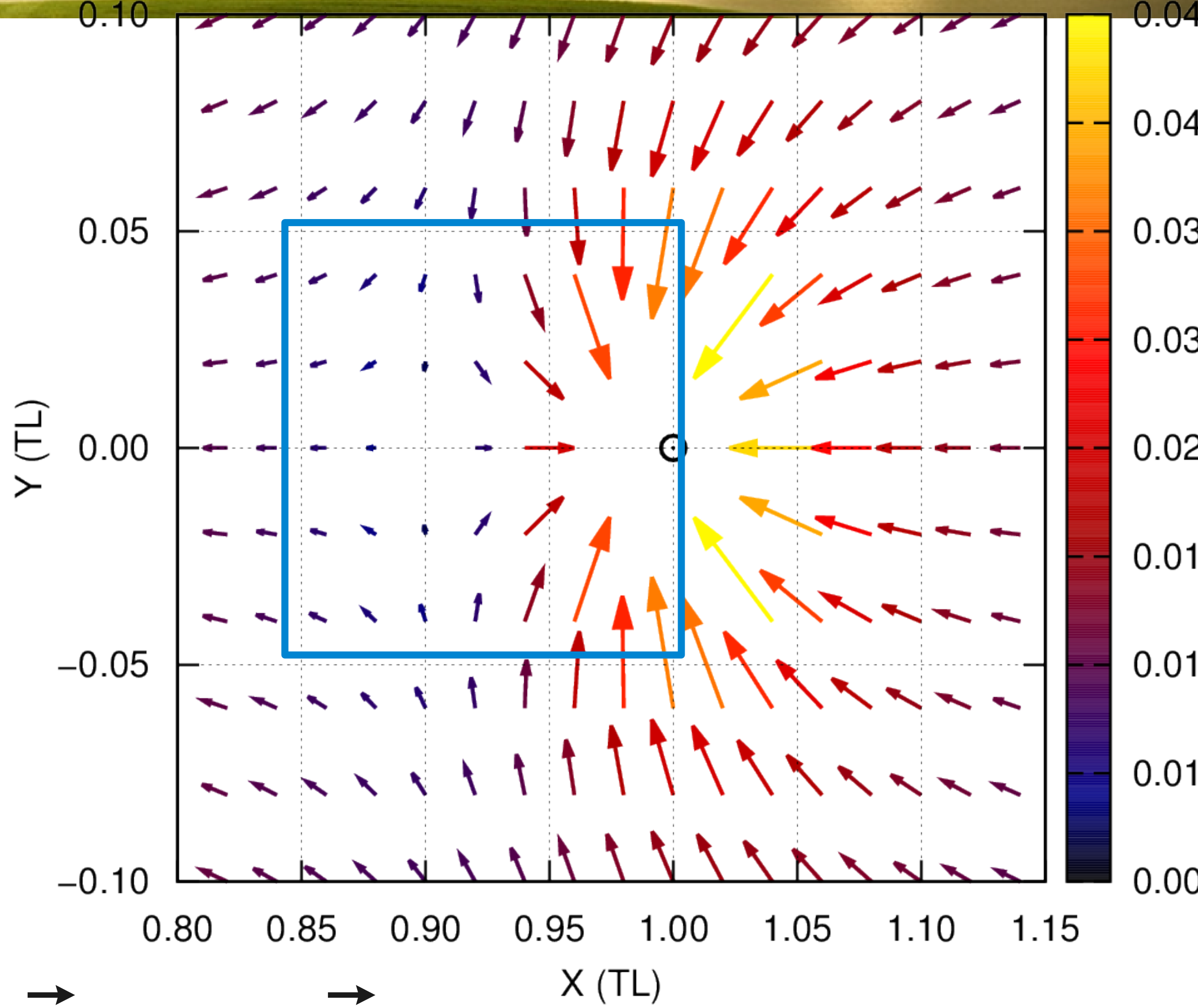
$M_L = 0.012\ M_T$

Campo gravitatorio sistema Tierra-Luna



$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}_T(\vec{r}) + \vec{g}_L(\vec{r})$$

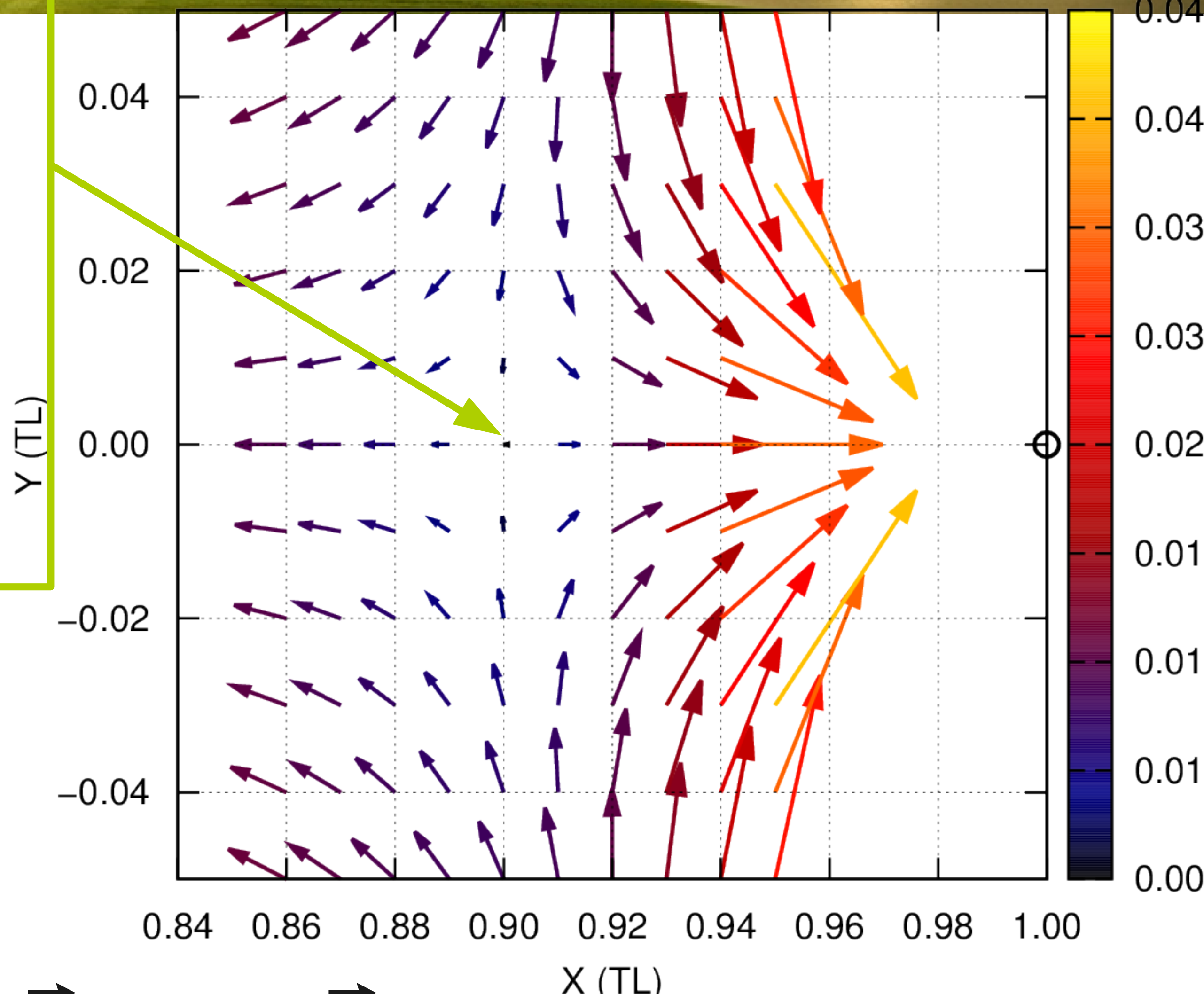
Campo gravitatorio sistema Tierra-Luna



$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}_T(\vec{r}) + \vec{g}_L(\vec{r})$$

Campo gravitatorio sistema Tierra-Luna

Hasta aquí subo desde la Luna, luego empiezo a "caer" hacia la Tierra



$$\vec{g}(\vec{r})=\vec{g}_T(\vec{r})+\vec{g}_L(\vec{r}) \qquad \vec{g}(\vec{r})=0 \rightarrow |\vec{r}|=0.91\,TL$$

¿Qué pasa durante un choque?

Autitos chocadores

Convenciones

- Velocidades iniciales: $u_1, u_2, \ldots, u_n$
- Velocidades finales: $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Choques inelásticos

$\vec{u}_1$ m$_1$

$\vec{u}_2$ m$_2$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{p}_f = \vec{p}_i \\ E_{k,i} > E_{k,f}\end{gathered}}$$

$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \equiv \vec{v}$ m$_1$ m$_2$

¡La cantidad de movimiento se conserva siempre!

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i$$

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\boxed{\vec{v} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{u}_1 + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{u}_2}$$

La energía cinética NO se conserva

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{u}_2^2 \; > \; \frac{1}{2}(m_1+m_2) v^2 = E_{k,f}$$

Atención:
¿Qué pasa en este caso con la conservación de la energía?

Casos límites

- Choque inelástico, $m_1=m_2=m$

$$\vec{v}=\left(\frac{m}{m+m}\right)\vec{u}_1+\left(\frac{m}{m+m}\right)\vec{u}_2 \rightarrow \vec{v}=\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2}$$

- Choque inelástico, $m_1=m_2=m$ y $\mathbf{u_1=-u_2}$

$$\vec{v}=\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2} \rightarrow \vec{v}=0$$

- Choque inelástico, $m_1 >> m_2$:

$$\vec{v}=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{u}_1+\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{u}_2 \rightarrow \vec{v}\simeq\vec{u}_1$$

Choque elástico

Magnitudes conservadas

- Energía total: $E_i = E_f$
- Cantidad de movimiento: $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$

Magnitudes constantes

- Energía cinética: $E_{k,i} = E_{k,f}$

Entonces, sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 moviéndose con velocidades iniciales $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Luego del choque, sus velocidades finales serán $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$:

- Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f \rightarrow m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \tag{1}$$

- Constancia de la energía cinética:

$$E_{k,i} = E_{k,f} \rightarrow \frac{1}{2}m_1\mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{u}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 \tag{2}$$

y entonces

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \tag{3}$$

Estado Final: 2 ecuaciones con 2 incognitas

A partir de las condiciones iniciales, y sabiendo que es un choque elástico, ¿podemos determinar las condiciones finales ($\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$)?

Álgebra

1. Estamos en 1D, trabajamos con los módulos de las velocidades
2. Reordenamos (1), juntando las velocidades iniciales y finales de cada cuerpo:
$$-m_1(u_1 - v_1) = m_2(u_2 - v_2) \tag{4}$$
3. y lo mismo para la energía cinética (3):
$$m_2(u_2^2 - v_2^2) = -m_1(u_1^2 - v_1^2)$$
4. usando diferencia de cuadrados, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,
$$m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2) = -m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) \tag{5}$$
5. mirando fijamente y comparando (4) con (5), vemos que:
$$u_2 + b_2 = u_1 + v_1 \rightarrow (u_2 - u_1) = -(v_2 - v_1) \rightarrow \Delta u = -\Delta v \tag{6}$$
6. con lo cual, podemos despejar, por ejemplo, v_2:
$$v_2 = u_1 + v_1 - u2 \tag{7}$$

Más álgebra, ya casi

7. Podemos utilizar (7), para poner todo en función de v_1, y despejar v_1. Partimos de (4):
$$m_2(u_2 - u_1 + u_2 - v_1) = -m_1(u_1 - v_1) \tag{8}$$
8. y tratamos de juntar las velocidades v_1:
$$m_2(2u_2 - u_1) - m_2 v_1 = -m_1 u_1 + m_1 v_1 \tag{9}$$
9. insistimos,
$$\begin{aligned} m_2(2u_2 - u_1) + m_1 u_1 &= (m_1 + m_2) v_1 \\ 2m_2 u_2 - m_2 u_1 + m_1 u_1 &= (m_1 + m_2) v_1 \\ 2m_2 u_2 - (m_1 - m_2) u_1 &= (m_1 + m_2) v_1 \end{aligned}$$
10. y finalmente,
$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \tag{10}$$
11. Cambiando los índices $1 \leftrightarrow 2$, obtenemos v_2:
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \tag{11}$$

Casos límites

- autos chocadores, $m_1 = m_2$: ¡Las velocidades se intercambian!

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = u_2$$
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = u_1$$

- Billar, $m_1 = m_2$, $u_2 = 0$: ¡La primera bola se queda quieta!

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = 0$$
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = u_1$$

- Camión vs taxi, elástico, $m_1 \gg m_2$: Pobre taxista...

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_1 \approx u_1$$
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_2 \approx 2u_1$$

Casos límites

- Choque contra una pared, $u_2 = 0$, $m_2 \to \infty$: ¡Rebote!

  (el viejo truco, saco m_2 como factor común, y hago tender al límite)

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \to \quad v_1 \simeq -u_1 \\
v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \to \quad v_2 \simeq 0
\end{aligned}
$$

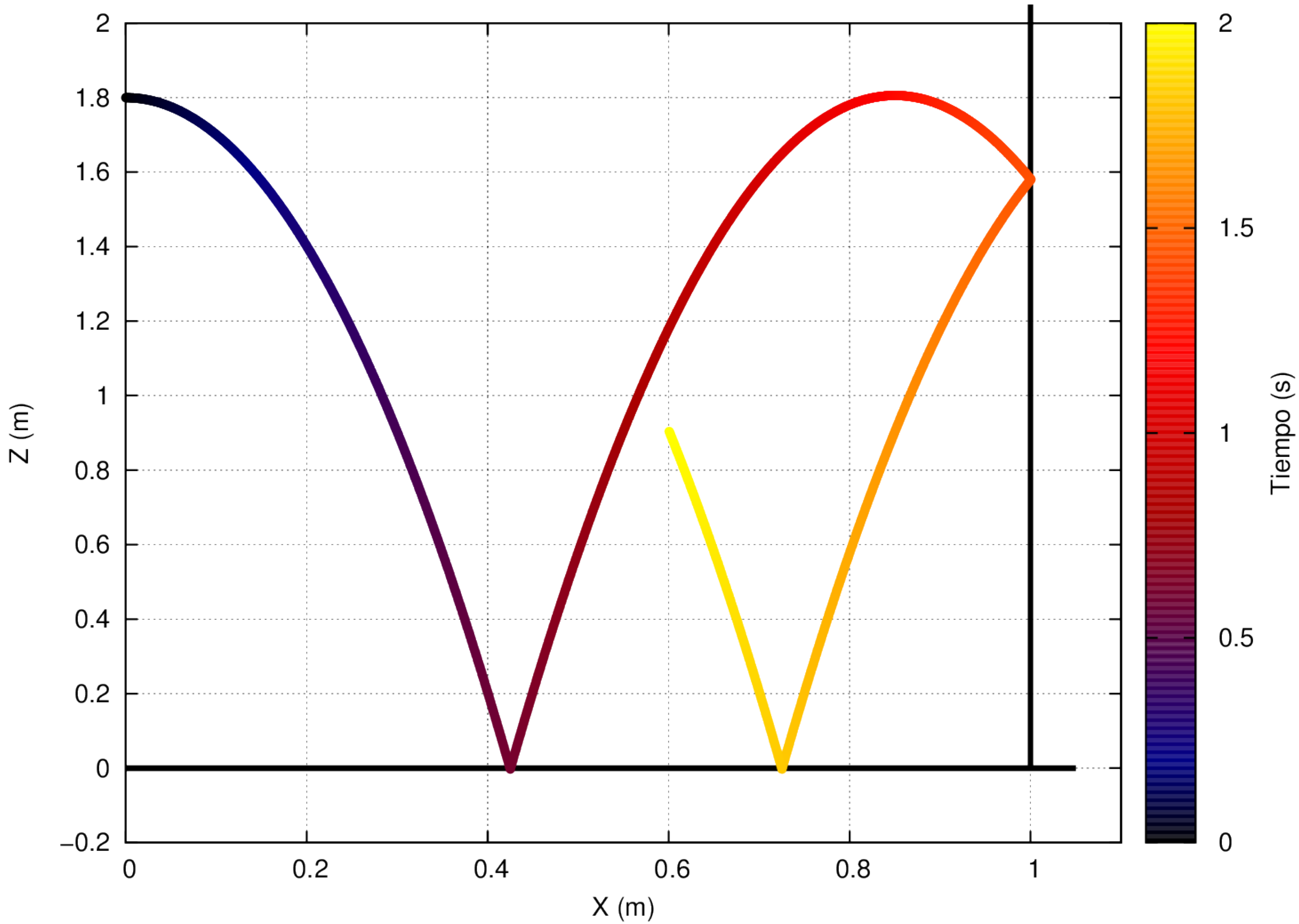
- Vectorialmente, cambia sólo la coordenada donde está la pared.
- Imaginemos una pelota de masa m con velocidad $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, que choca una pared en $x = 1$. Al llegar a $x = 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
v_x &= -u_x \\
v_y &= u_y \\
v_z &= u_z
\end{aligned}
$$

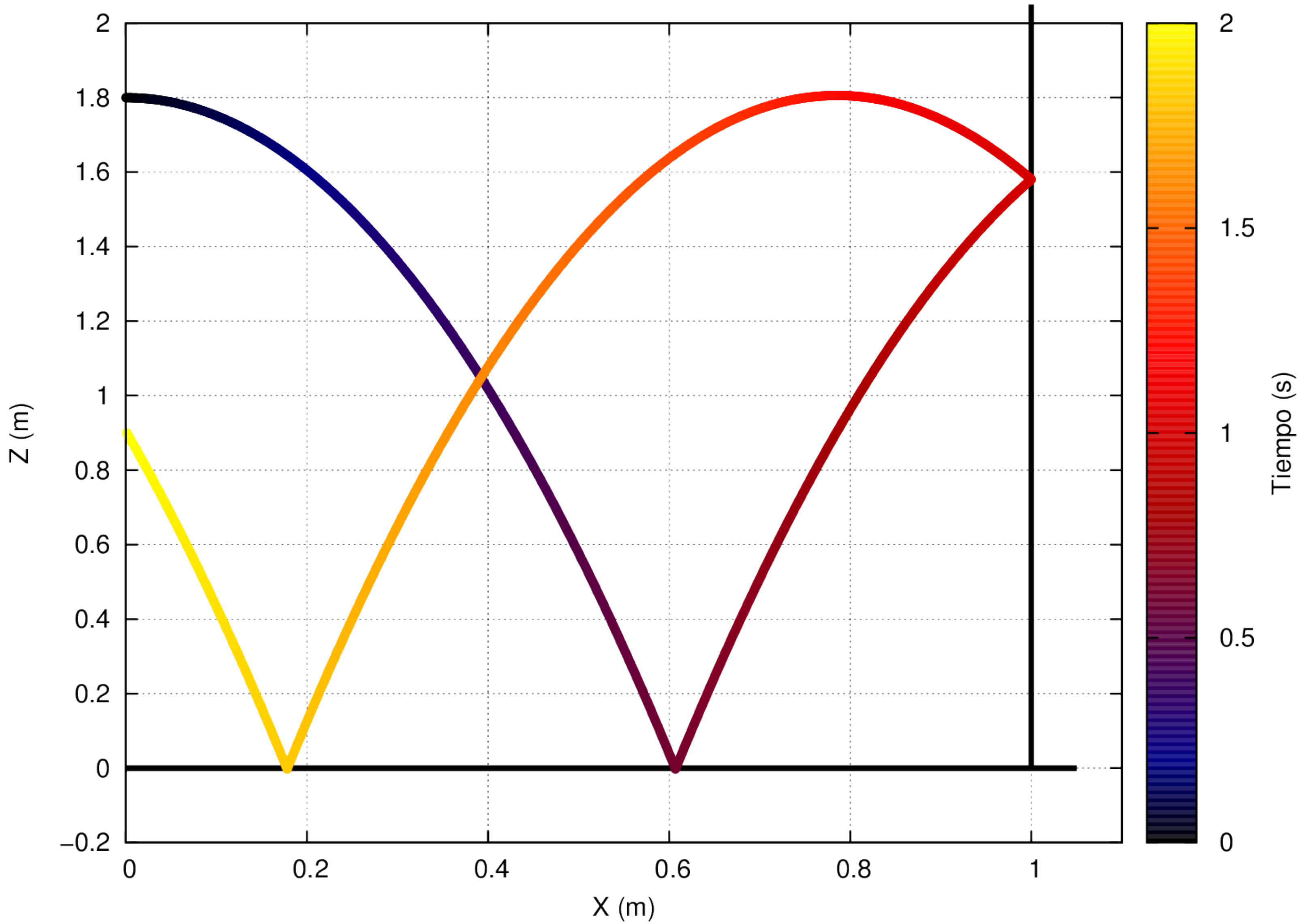
Pensar una pelota chocando contra una pared

- La velocidad final es entonces $\mathbf{v} = (-u_x, u_y, u_z)$.

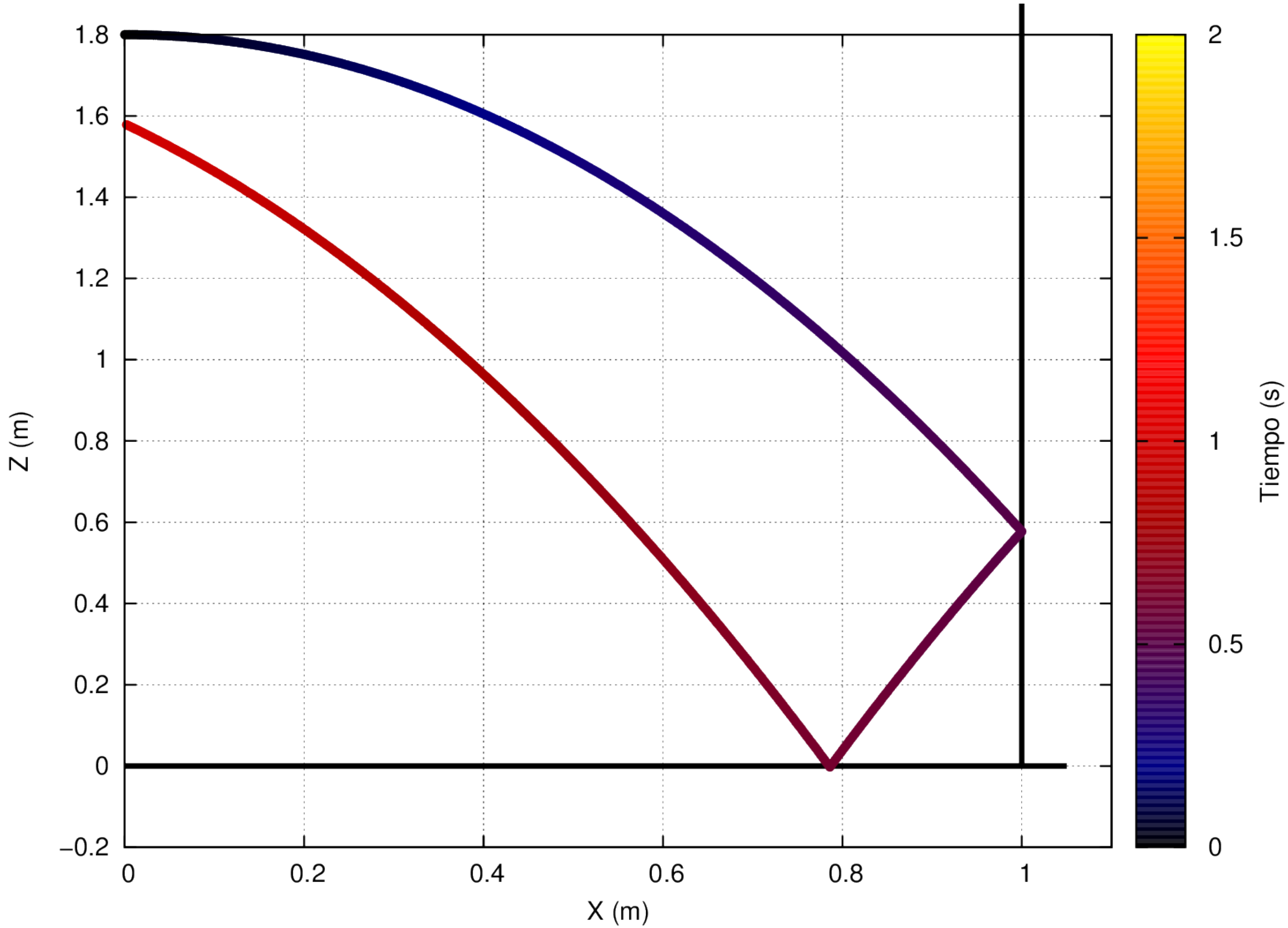
Pelota contra pared, v=(0.7,0,0) m/s



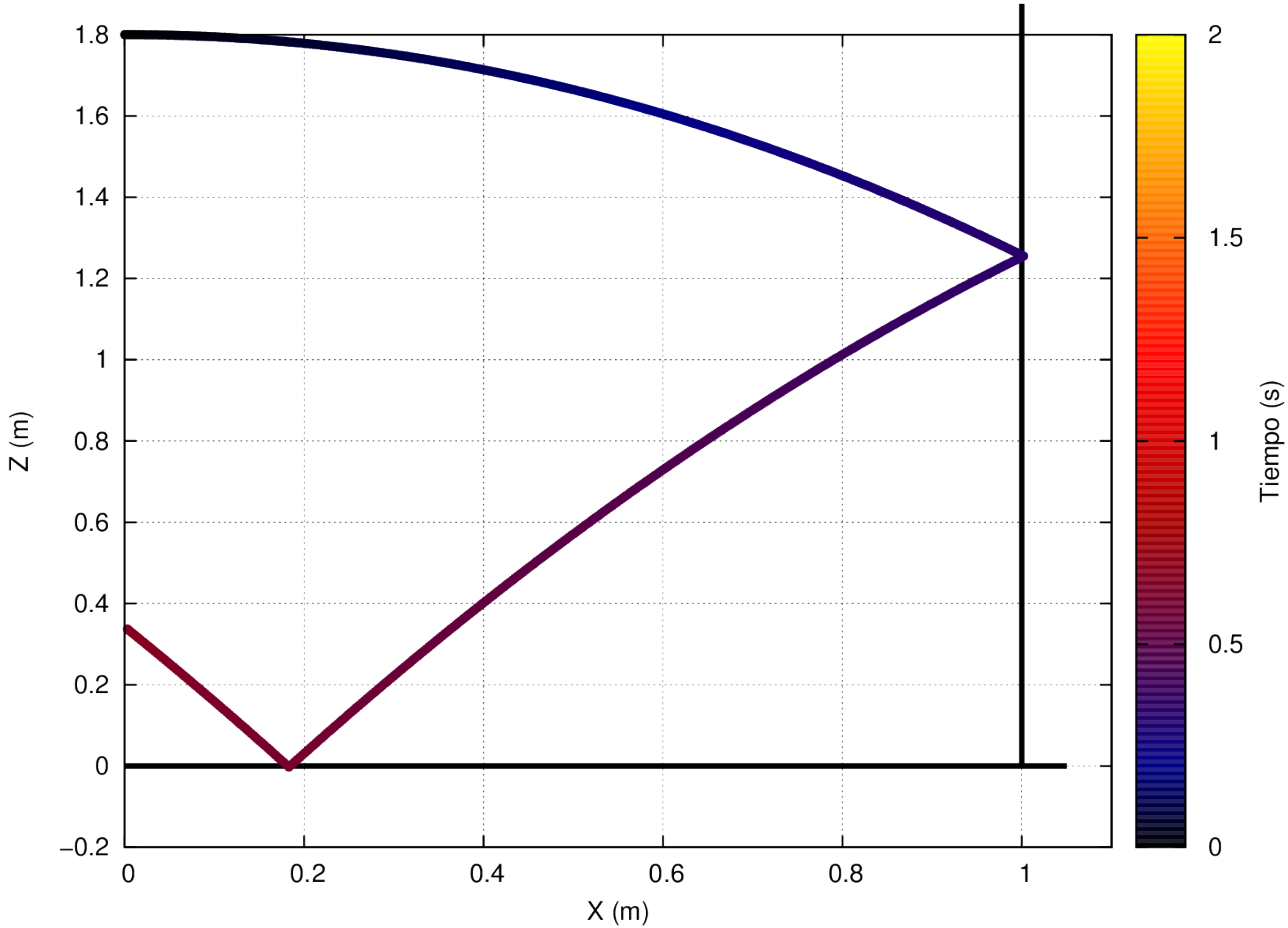
Pelota contra pared, v=(1.0,0,0) m/s



Pelota contra pared, v=(2.0,0,0) m/s

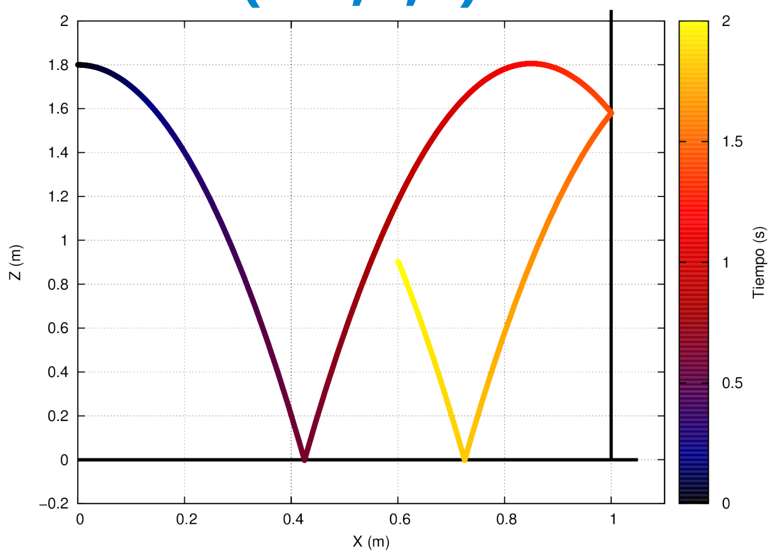


Pelota contra pared, v=(3.0,0,0) m/s

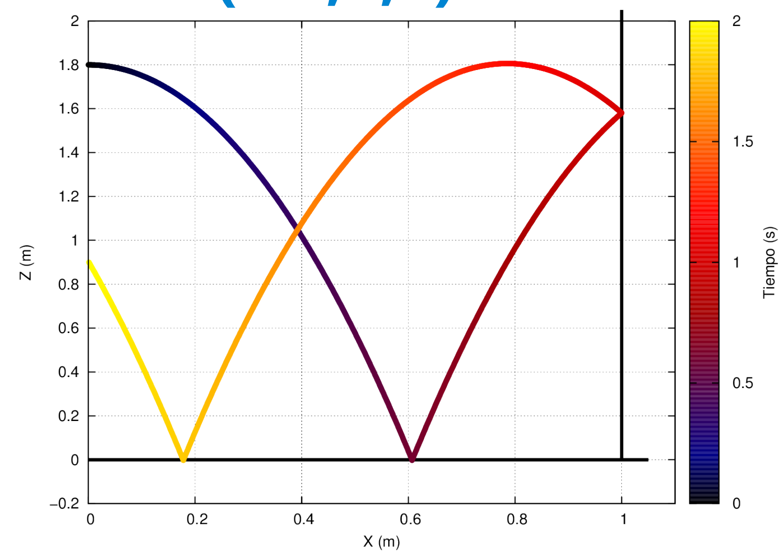


Pelota contra pared, v=(0.7,0,0) m/s → v=(3.0,0,0) m/s

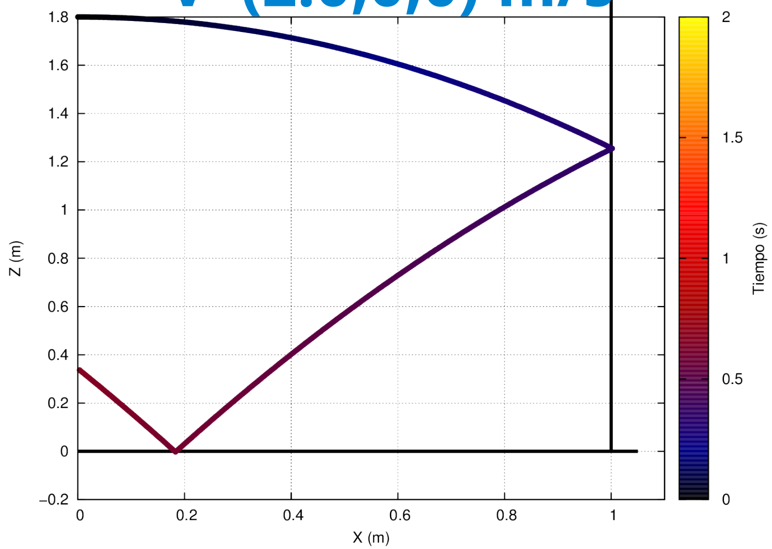
v=(0.7,0,0) m/s



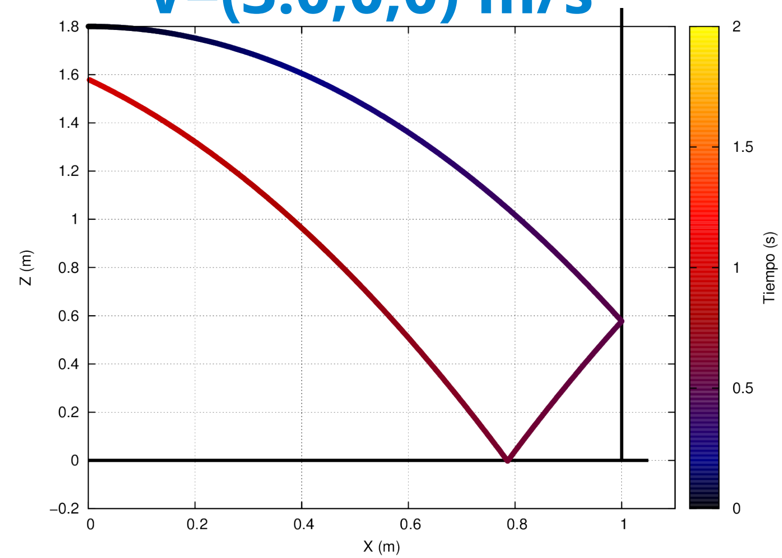
v=(1.0,0,0) m/s



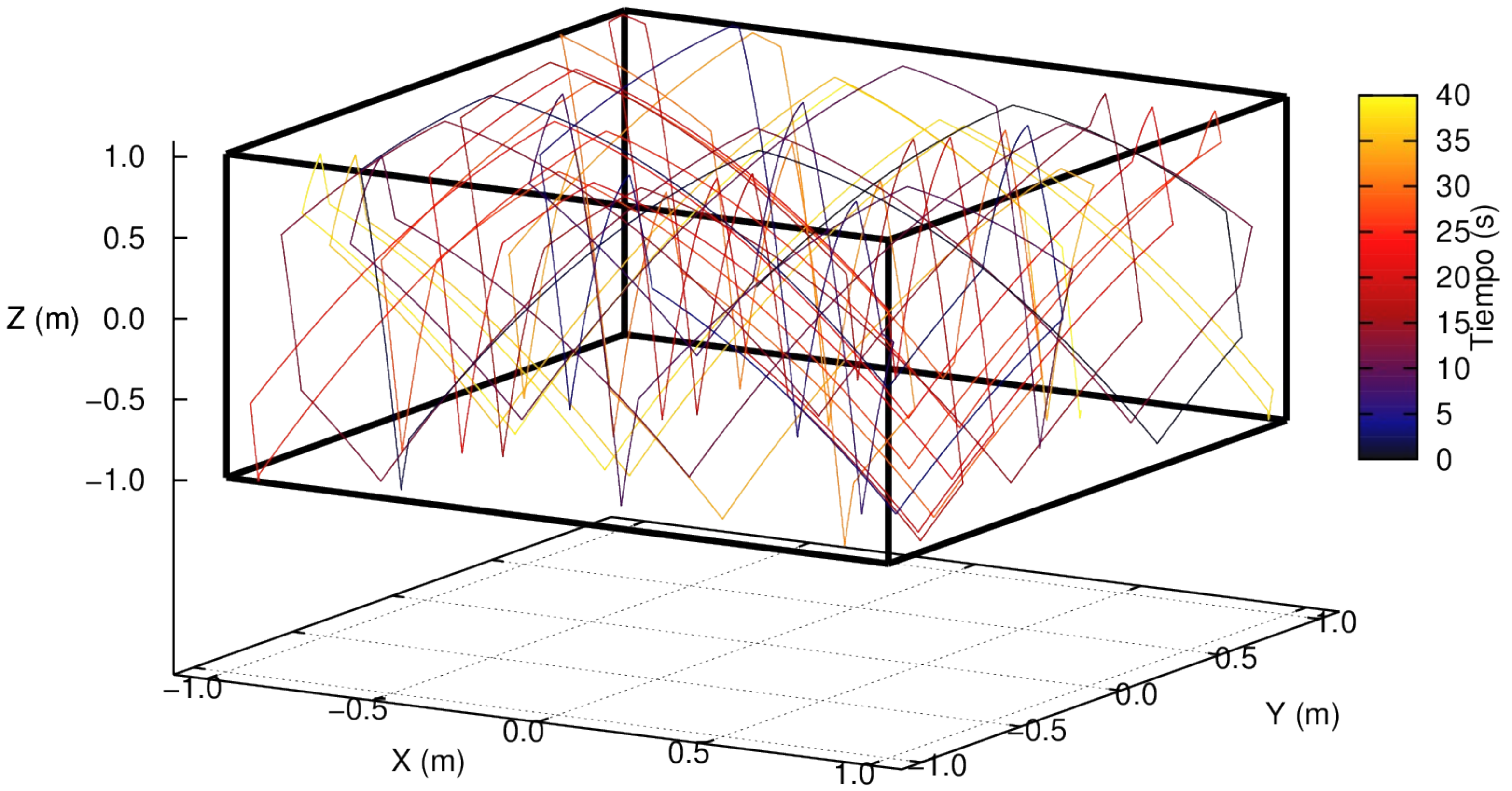
v=(2.0,0,0) m/s



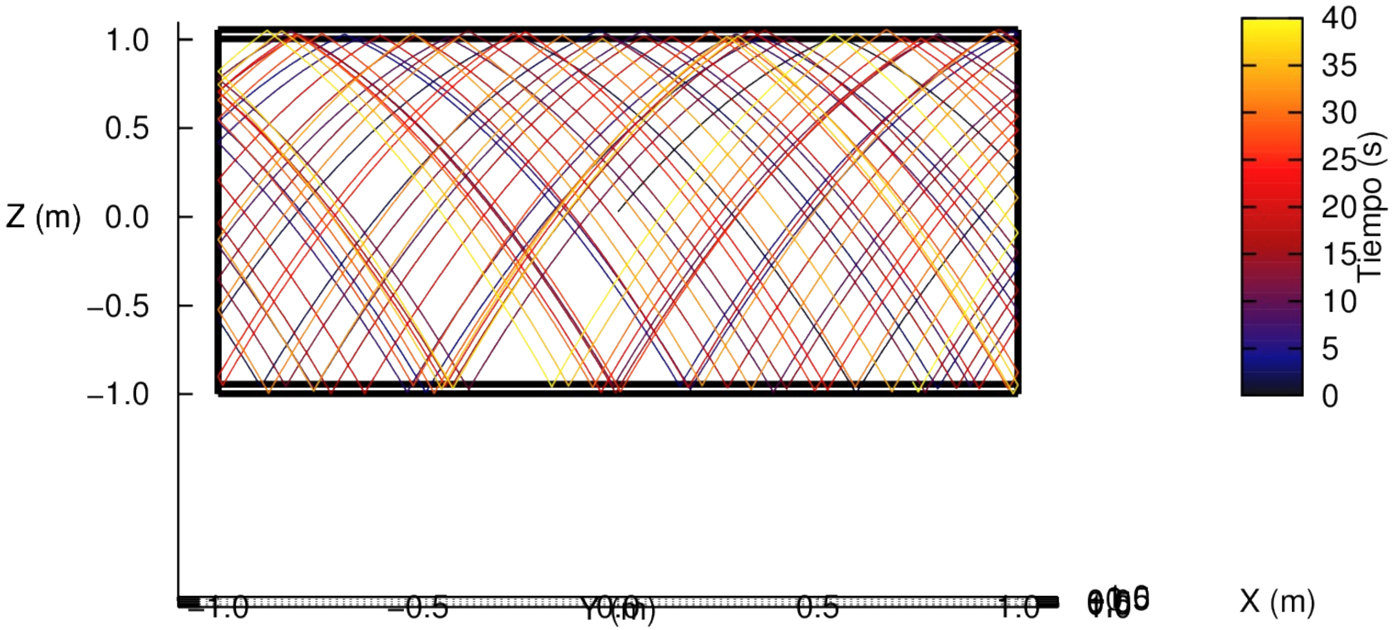
V=(3.0,0,0) m/s



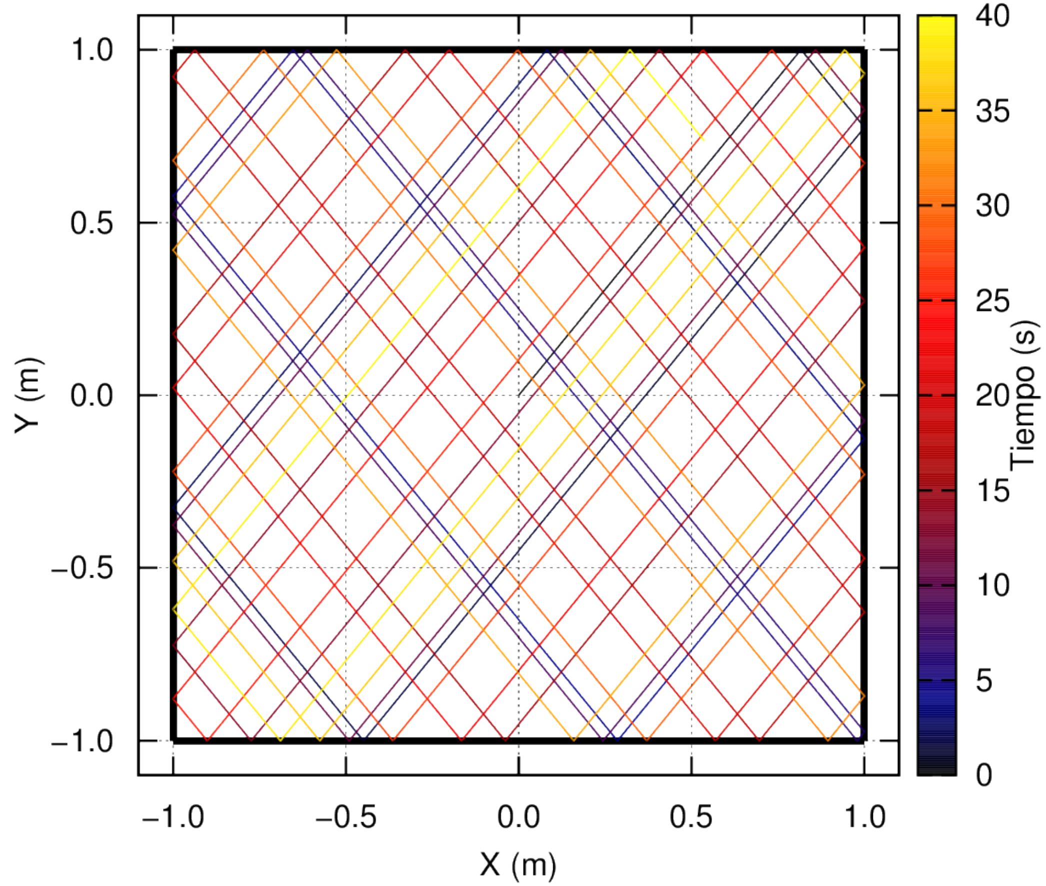
Partícula en una caja



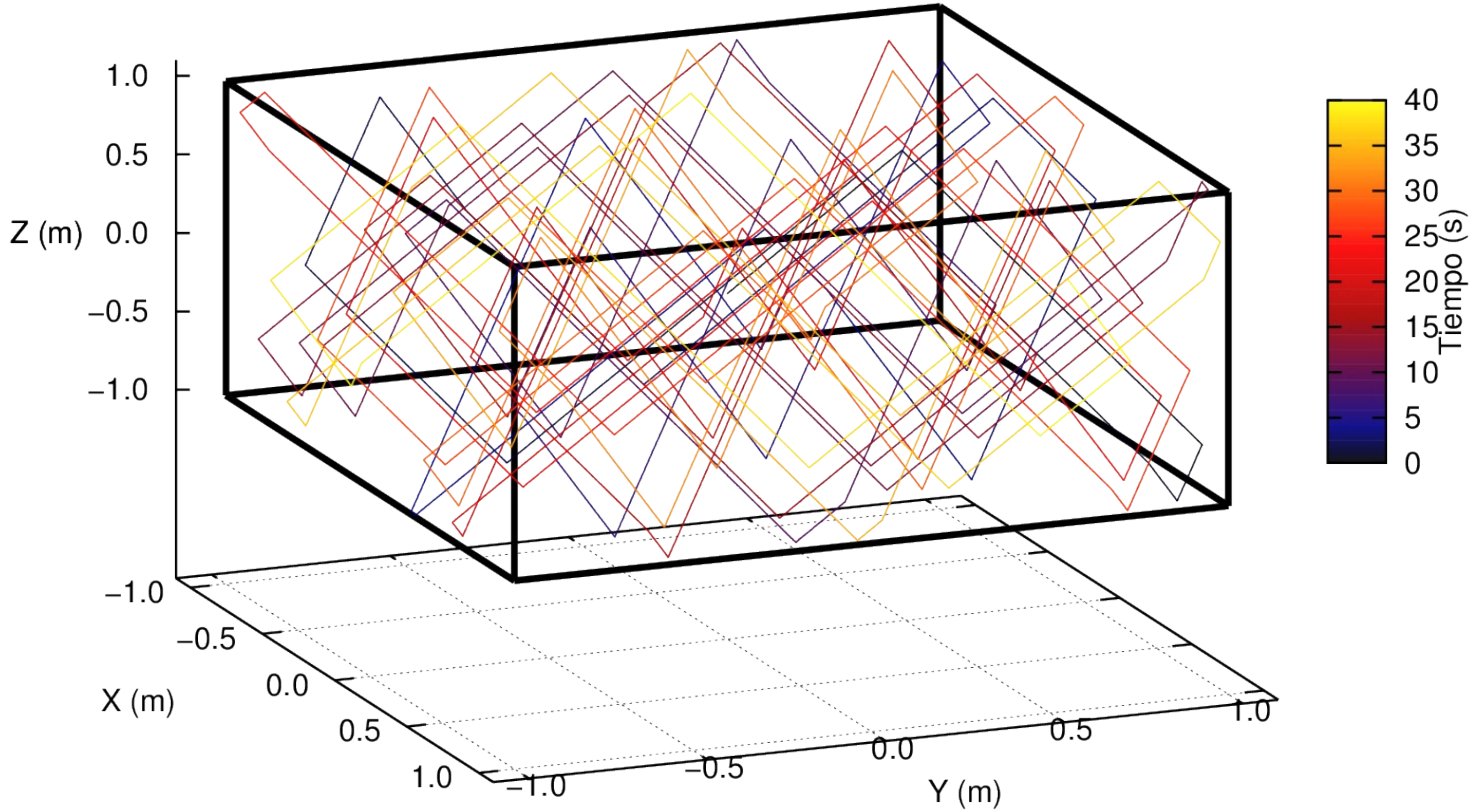
Partícula en una caja



Partícula en una caja



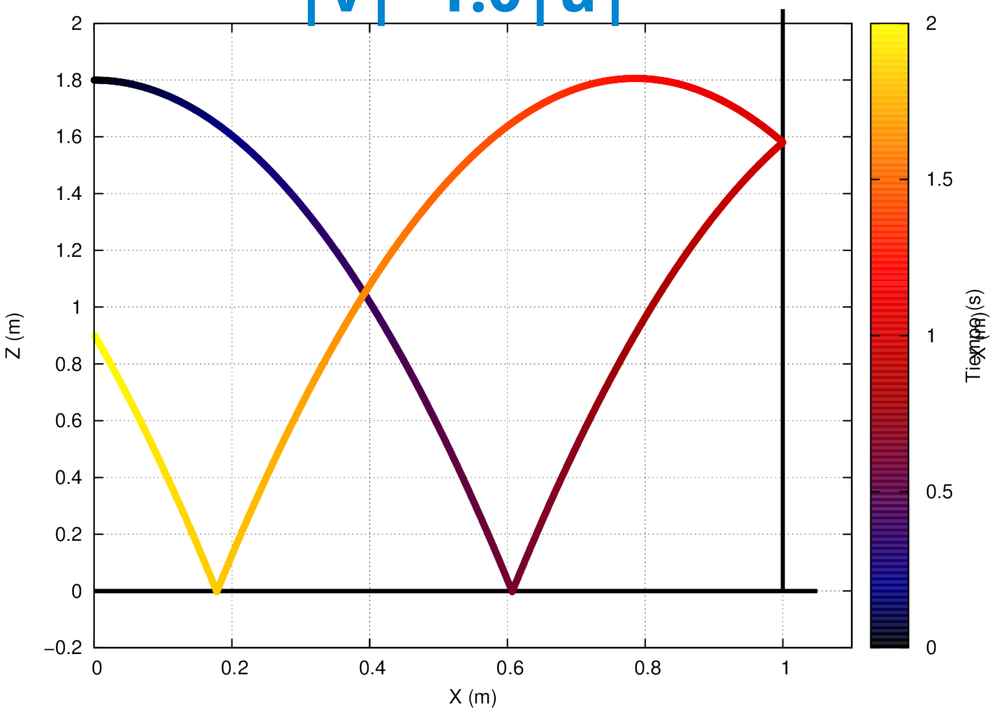
Partícula en una caja (sin gravedad)



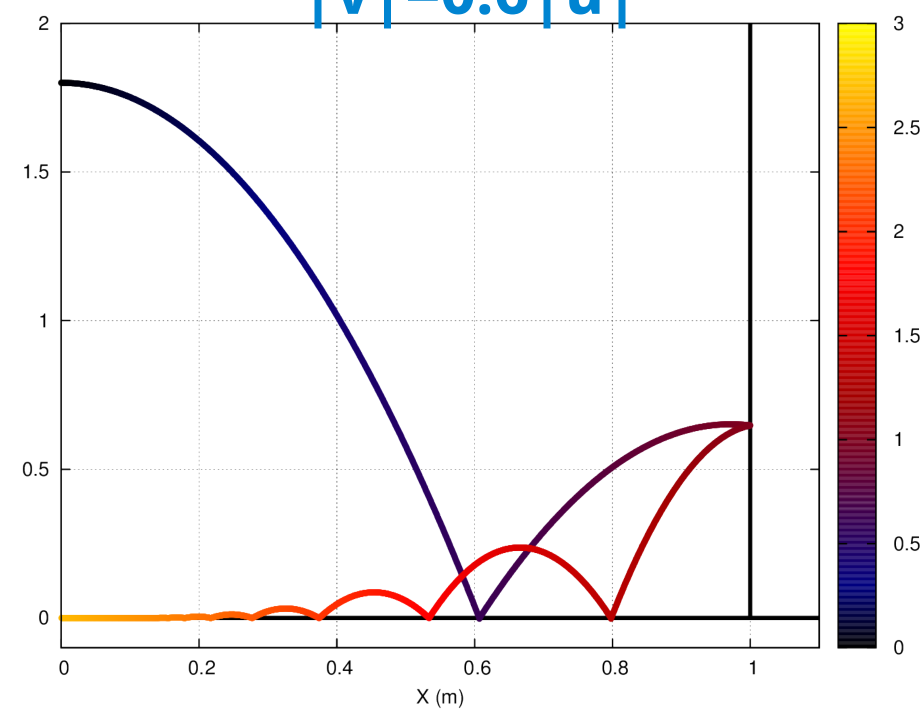
¿Qué pasaría si el rebote de la pelotita no fuera perfectamente elástico?

Choque parcialmente elástico

|v|=1.0|u|



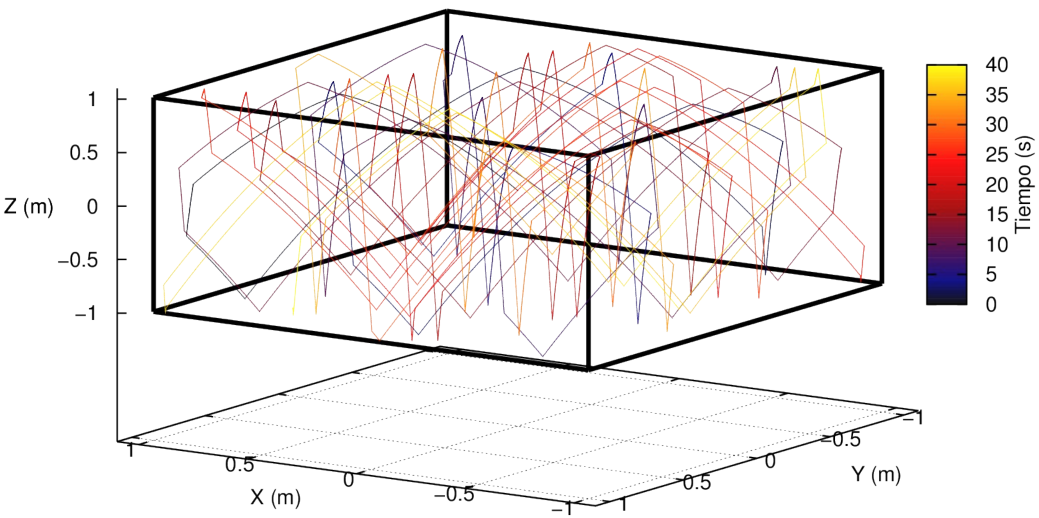
|v|=0.6|u|



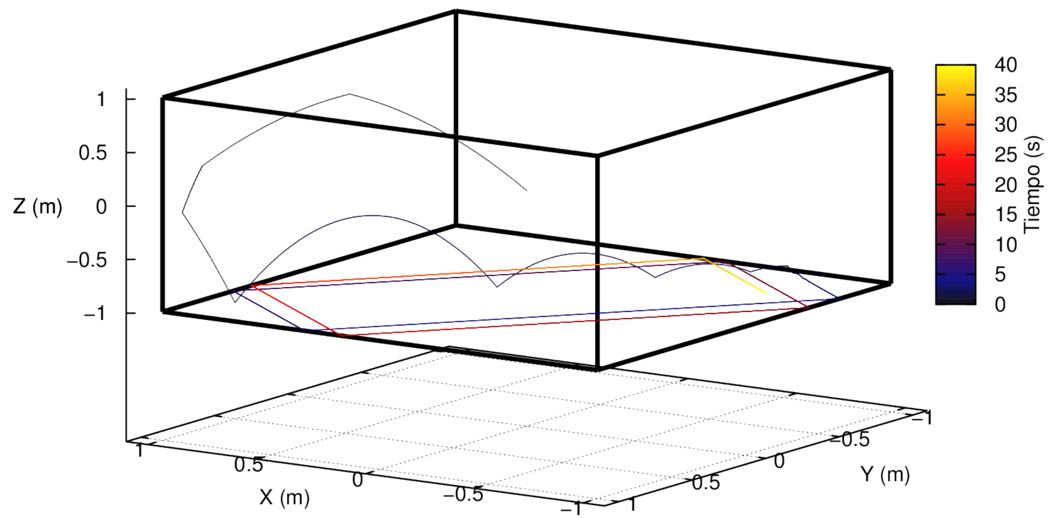
- En cada rebote pierde energía cinética (si no es elástico, E_k no es constante)

Choque parcialmente elástico

|v|=1.0|u|



|v|=0.6|u|



- En cada rebote pierde energía cinética (si no es elástico, E_k no es constante)

Declaración

- **Todos** los cálculos fueron realizados utilizando variaciones menores de los ejemplos **python realizados en clase**
  - cálculo de fuerzas
  - suma de vectores
  - impresión de resultados
- Los gráficos se hicieron usando gnuplot
- Scripts a disposición de los interesados en el blog