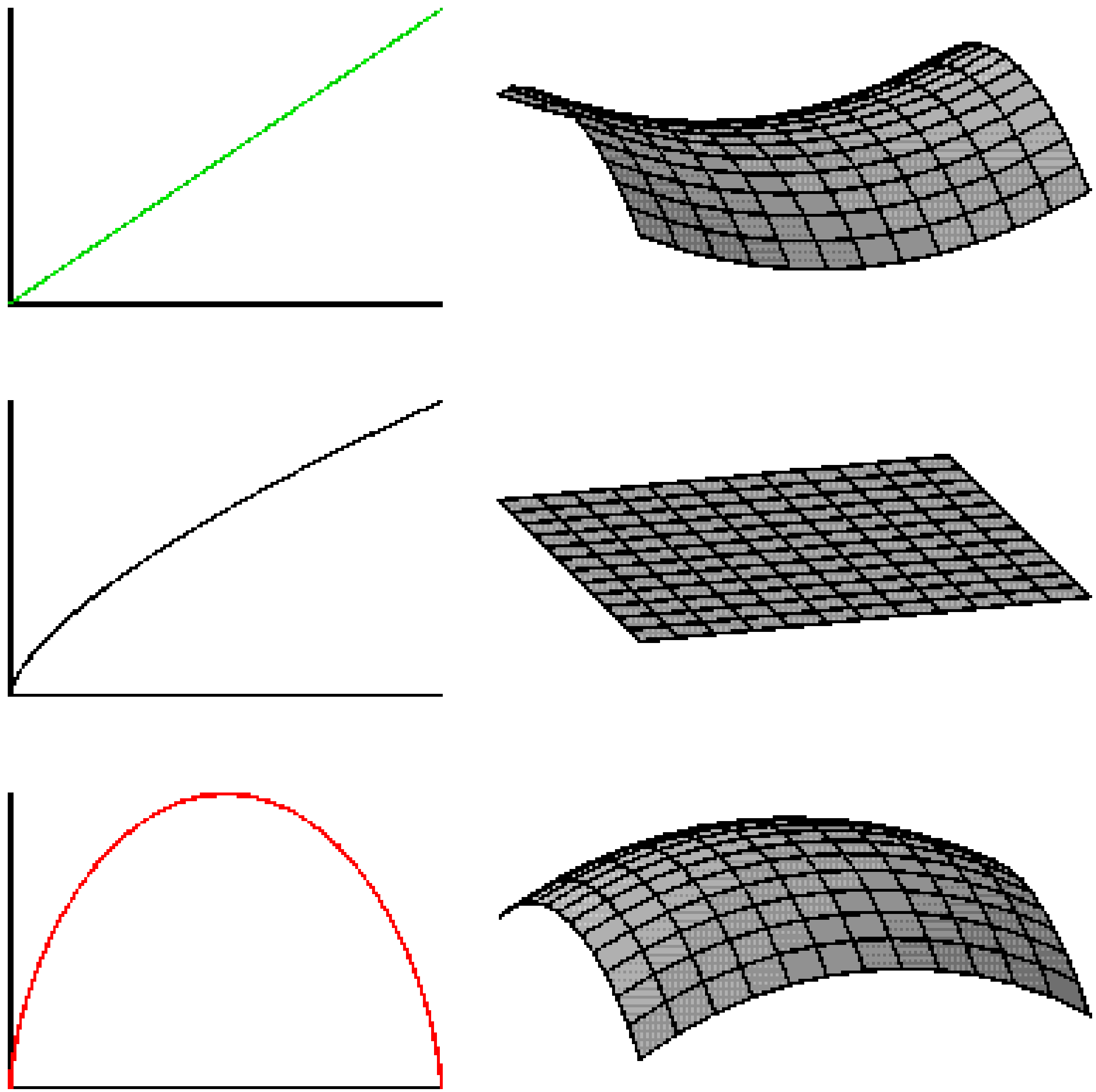
Universidad Industrial de Santander

Introducción a la Física (2014)

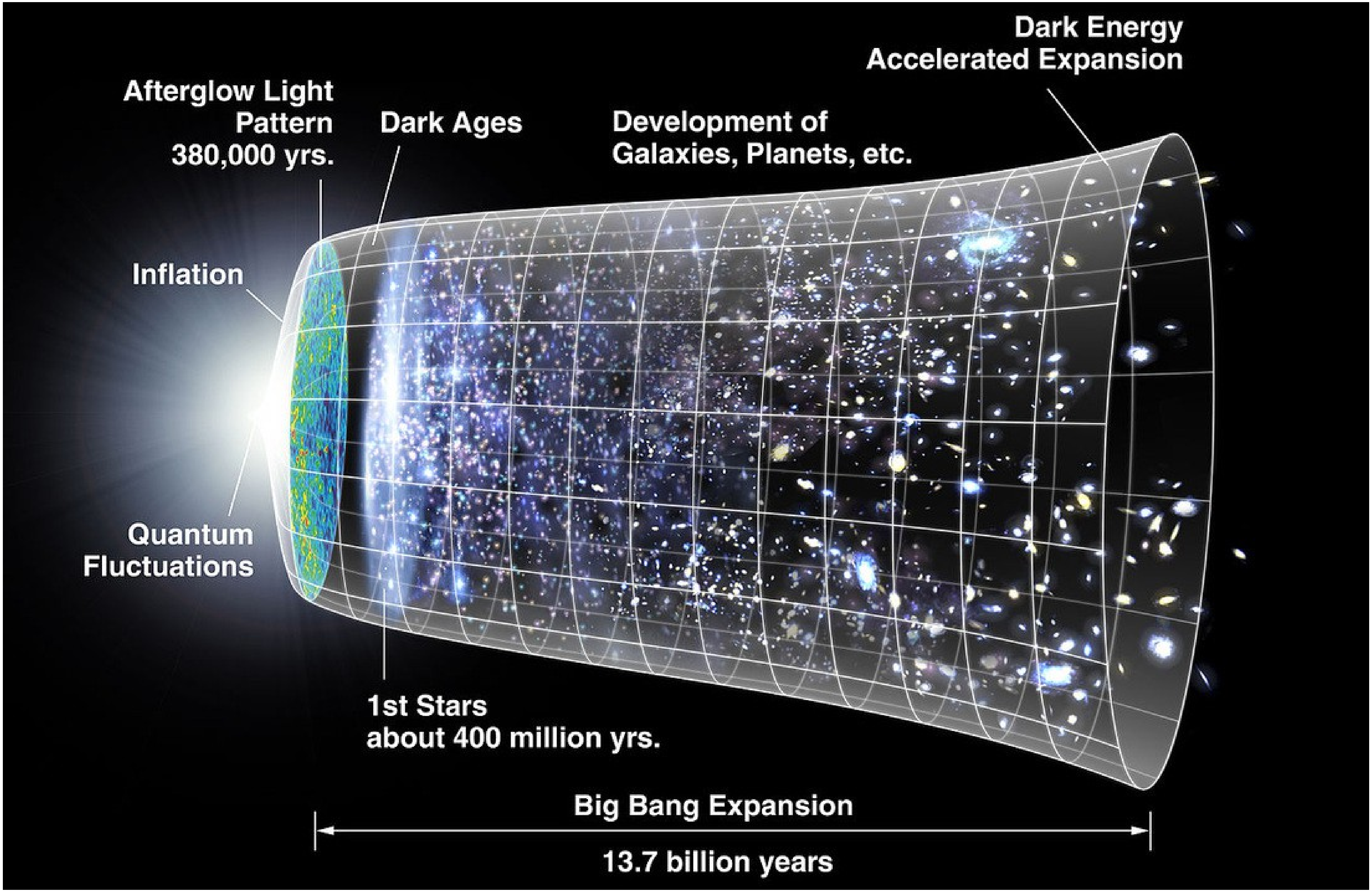
- Unidad: 02
- Clase: 01
- Fecha: 20140529J
- Contenido: Velocidad y Aceleración
- Web: http://halley.uis.edu.co/fisica_para_todos/
- Archivo: 20140529J-HA-velocidad.pdf

En el episodio anterior

En el episodio anterior: geometría



En el episodio anterior: geometría



Nueva operación en un espacio vectorial

- Hasta aquí, trabajamos con operaciones que:
  - **Suma** → **vector** + **vector** = **vector**
  - **Producto por un escalar** → escalar **vector** = **vector**
- Podríamos imaginar una nueva operación que:
  - **vector · vector =** escalar ← **Producto escalar**
- **Producto escalar** (prod. interior, prod. Punto)

$$\text{Sean } \vec{v} \in \boldsymbol{V} \text{ y } \vec{w} \in \boldsymbol{V}: \quad k = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad k \in \mathbb{R}$$

Producto Escalar

- Sea ***V*** un espacio vectorial, definimos una nueva operación sobre los vectores del espacio vectorial:
- **Producto escalar** (producto interior, producto punto)

  Sean $\vec{v} \in \boldsymbol{V}$ y $\vec{w} \in \boldsymbol{V}$: $\quad k = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad k \in \mathbb{R}$

- Si el cuerpo es el de los reales, $k \in \mathbb{R}$, entonces:

  Sean $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in \boldsymbol{V}$, y $s, t \in \mathbb{R}$:

  - **Conmutatividad:** $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
  - **Linealidad:** $\left(s\,\vec{u} + t\,\vec{v}\right) \cdot \vec{w} = s\left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right) + t\left(\vec{v} \cdot \vec{w}\right)$
  - **Positividad:** $\vec{v} \cdot \vec{v} \geqslant 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Resumen hasta aquí

- Un **espacio vectorial**, un **cuerpo** y **operaciones**:
  - **Suma**: **vector+vector** = **vector** $\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}$
  - **Prod. por escalar** : escalar **vector** = **vector** $a\,\vec{p}=\vec{q}$
  - **Prod. Escalar: vector** · **vector** = escalar $\vec{v}\cdot\vec{w}=b$
- El **producto escalar** induce una **norma**

$$\|\vec{v}\|\equiv\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

- La **norma** induce una **distancia**

$$d(\vec{v},\vec{w})\equiv\|\vec{v}-\vec{w}\|=\sqrt{(\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w})}$$

- La **distancia** induce el **módulo o longitud** de un vector

$$|\vec{v}|\equiv\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Producto escalar en R^2 y R^3

- Por ejemplo, en $\mathbf{R}^3$: (para $\mathbf{R}^2$ tomar z=0)

$$\text{Sean } \vec{v} \in \mathbb{R}^{3,} \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \text{y } \vec{w} \in \mathbb{R}^{3,} \vec{w} = (w_1, w_2, w_3),$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \equiv \sum_{i=1}^{3} v_i w_i = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)$$

$$\text{Ejemplo: } \vec{v} = (-1,5,6), \text{y } \vec{w} = (3,-2,2),$$

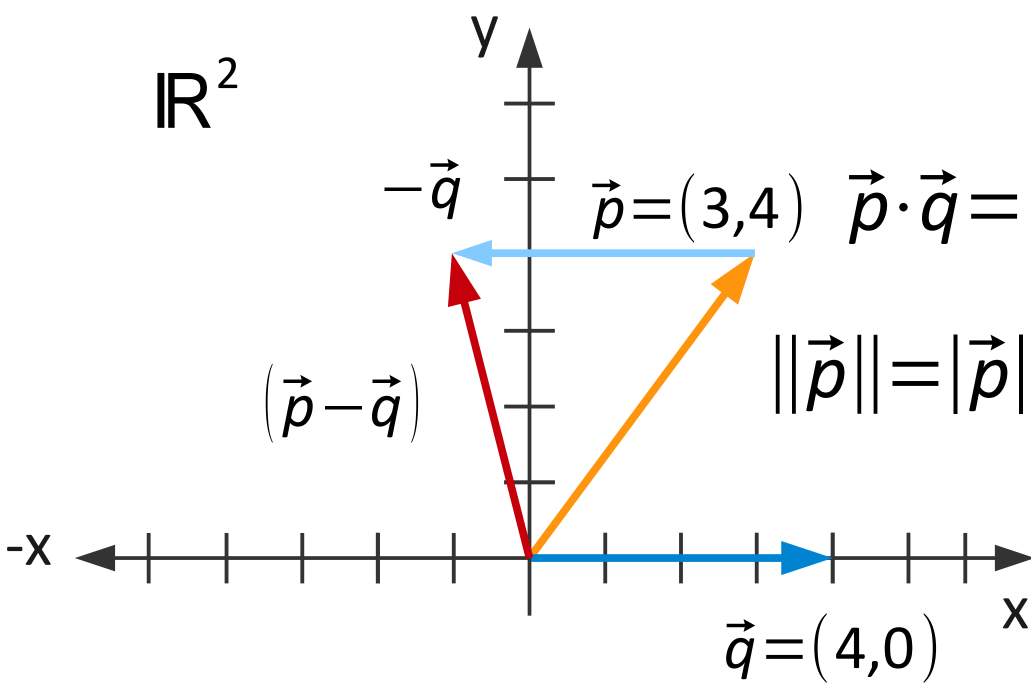
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = ((-1)(3) + (5)(-2) + (6)(2))$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -3 + (-10) + 12 = -1$$

Resumen hasta aquí

- Un **R**^{3}, un cuerpo **R**, y operaciones:
  - **Suma:** $$\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}=\left(\left(v_1+w_1\right),\left(v_2+w_2\right),\left(v_3+w_3\right)\right)$$
  - **Prod. por escalar** $$\vec{p}=a\vec{v}=\left(\left(a v_1\right),\left(a v_2\right),\left(a v_3\right)\right)$$
  - **Prod. Escalar** $$b=\vec{v}\cdot\vec{w}=\left(v_1 w_1+v_2 w_2+v_3 w_3\right)$$
- El producto escalar induce una norma
$$\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1 v_1+v_2 v_2+v_3 v_3}=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$
- La norma induce una distancia
$$d\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\sqrt{\left(\vec{v}-\vec{w}\right)\cdot\left(\vec{v}-\vec{w}\right)}=\sqrt{\left(v_1-w_1\right)^2+\left(v_2-w_2\right)^2+\left(v_3-w_3\right)^2}$$
- La distancia induce un módulo vectorial
$$|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

Interpretación geométrica



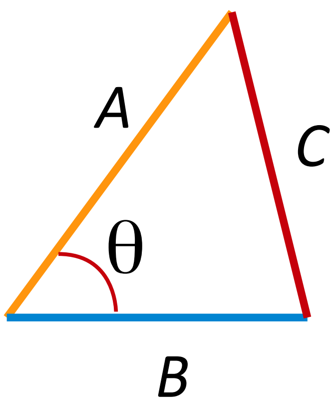
$$\vec{p}\cdot\vec{q}=p_1q_1+p_2q_2=(3)(4)+(4)(0)=12$$

$$\|\vec{p}\|=|\vec{p}|=\sqrt{p_1^2+p_2^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\|\vec{q}\|=|\vec{q}|=\sqrt{q_1^2+q_2^2}=\sqrt{4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$$

$$d(\vec{p},\vec{q})=\|\vec{p}-\vec{q}\|=\|((3,4)-(4,0))\|=\|(-1,4)\|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$$

Interpretación geométrica

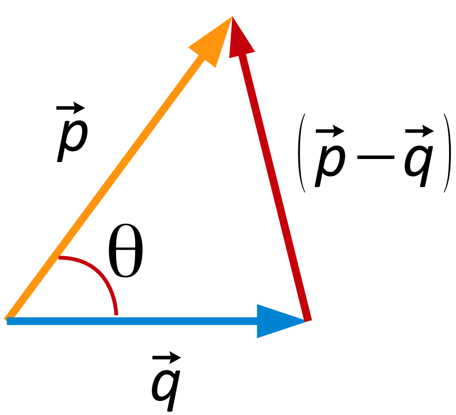


Ley de los cosenos: $C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\cos\theta$

$A = |\vec{p}|\,;\;\; B = |\vec{q}|\,;\;\; C = |\vec{p} - \vec{q}|$

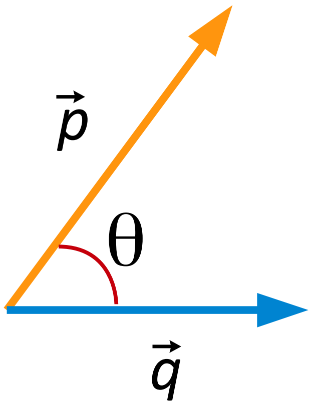
Ley de los cosenos: $|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$

Entonces: $|\vec{p}|^2 - 2\,\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$



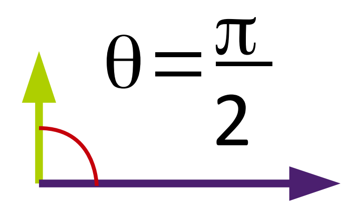
$$\boxed{\text{Luego: } \vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta}$$

Interpretación geométrica



$$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=12\,;|p|=5\,;|q|=4 \rightarrow \cos\theta=\frac{12}{5\times 4} \rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5} \rightarrow \theta=53.13\,°$$



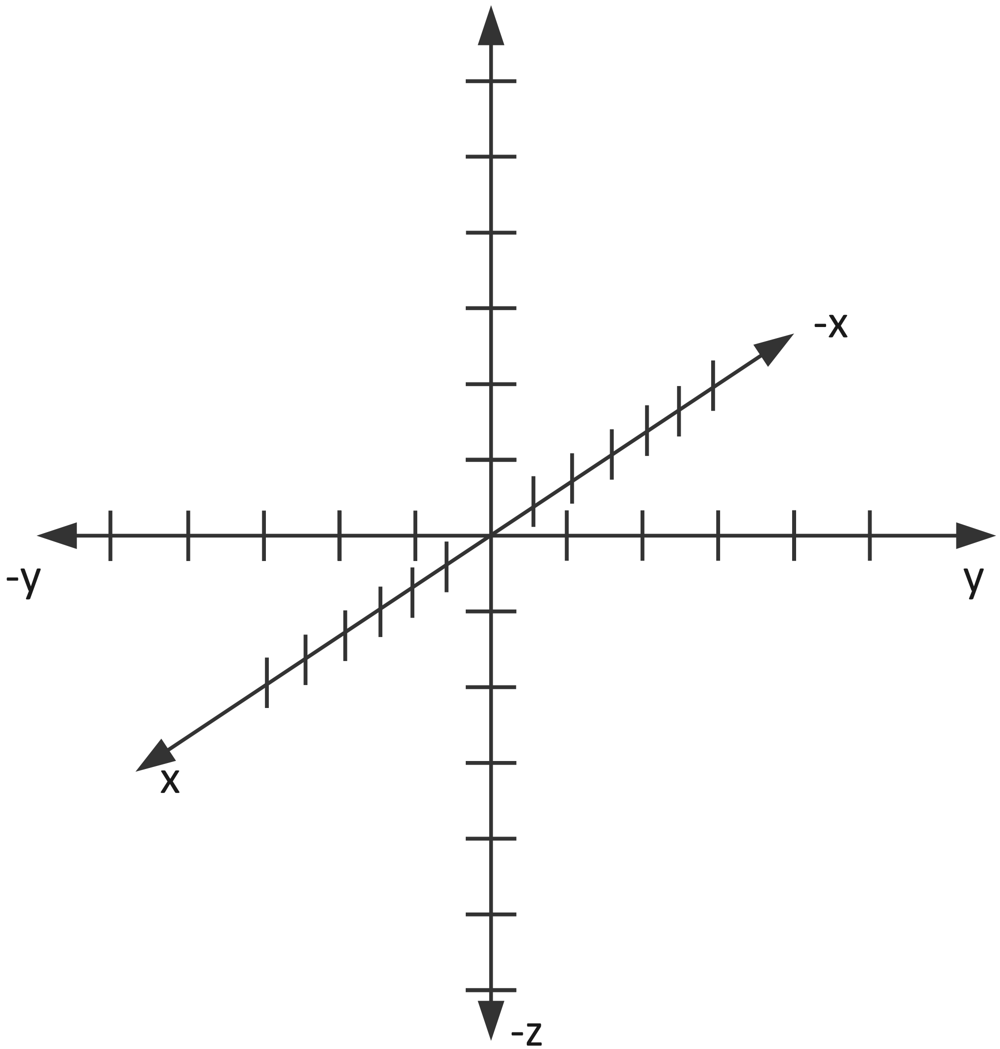
Perpendiculares: $\theta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\theta=0 \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{q}=0$

Paralelos: $(\theta=0 \text{ ó } \theta=pi) \Leftrightarrow \cos\theta=\pm 1 \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{q}=\pm|\vec{p}||\vec{q}|$

$\theta=0$

$\theta=\pi$

Posición, velocidad, aceleración



Posición, velocidad, aceleración