Introducción a la Física (2013)

Universidad Industrial de Santander

- Unidad: 03
- Clase: 01
- Fecha: 20130924M
- Contenido: Energía y Movimiento (II)
- Web: http://halley.uis.edu.co/fisica_para_todos/
- Archivo: 20130924M-HA-energia-y-movimiento.pdf

El código (I)

```
################################## mi programa
# el codigo

# constante de Coulomb
k=8.988e9

# mis cargas
# En este ejemplo tengo tres cargas:
Q1 = 1.
r1 = vector([-1.0,0,0])

Q2 = -1.
r2=vector([0,0,0])

Q3 = 1.
r3=vector([1.0,0,0])

# y quiero calcular el potencial y el campo en :
r=vector([1.,1.,1.])

# recuerdo las definicions. Primero, calculo los vectores resta
d1 = resta(r,r1)
d2 = resta(r,r2)
d3 = resta(r,r3)
```

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i$$

```
# y el potencial debido a cada carga en r
V1 = k*Q1/d1.mod
V2 = k*Q2/d2.mod
V3 = k*Q3/d3.mod
```

$$V_i(\boldsymbol{r}) = k_e \frac{Q_i}{|\boldsymbol{d}_i|}$$

```
# y ahora, segun el ppio de superposicion, el potencial total es
# la suma de cada potencial:
V = V1 + V2 + V3
```

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_i(\boldsymbol{r})$$

```
# Ahora calculo el campo electrico (es una magnitud vectorial)
# Entonces, calculo el campo electrico debido a cada carga individual
# en vez de usar el vector unitario, uso el vector y divido por el
# modulo al cubo
E1 = vector_escalar(d1, k * Q1 / d1.mod**3)
E2 = vector_escalar(d2, k * Q2 / d2.mod**3)
E3 = vector_escalar(d3, k * Q3 / d3.mod**3)
```

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) = \left(k_e \frac{Q_i}{|\boldsymbol{d}_i|^3}\right) \boldsymbol{d}_i$$

```
# Principio de superposicion: el campo electrico es la suma de cada
# campo individual
E12 = suma(E1, E2)
E = suma(E12,E3)
```

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$$

```
# finalmente imprimo las coordenadas de r,
for i in range (0,r.dim):
  print r.x[i],

            pesc=0.
            for i in range(0,self.dim):
# las coordenadas del campo electrico E(r)
for i in range (0,r.dim):
  print E.x[i],

# y el modulo del campo electrico |E(r)| y el potencial V(r)
print E.mod,V
```

- Define la cte de Coulomb (eléctrica)
- Defino: N cargas (Q_i) y su posición ($\mathbf{r}_i$)
- Defino el vector **r** donde quiero calcular el potencial y el campo
- Calculo los vectores resta
- Calculo el potencial de cada carga en **r**, V_i(**r**) y el potencial total V(**r**)
- Calculo el campo eléctrico de cada carga en **r**, $\mathbf{E}_i$(**r**), y el campo total, **E**(**r**)
- Imprimo las coordenadas de **r**, las coordenadas de **E**(**r**), el módulo de |**E**(**r**)| y el potencial V(**r**).

El código (II): cuadrícula

- Quiero calcular un campo en una región del espacio

$$-1\ \mathrm{m} \leqslant (x\,;y\,;z) \leqslant 1\ \mathrm{m} \qquad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.25\ \mathrm{m}$$

- Impongo una cuadrícula. ¿Cuántos puntos tengo?

$$x = -1, -0.75, \ldots, 0.75, 1\,;\ x_i = -1\,;\ x_f = 1\,; \rightarrow n_x = \frac{(x_f - x_i)}{\Delta x} + 1 \rightarrow \frac{(1-(-1))}{0.25} + 1 = 9\ \text{puntos}$$

- Defino los puntos iniciales y finales y el número de puntos en cada dirección

```
xi = -1.
xf = 1.
dx = 0.25
nx = int((xf-xi)/dx) + 1
```

- Y lo mismo para y,z

El código (II): cuadrícula

- Ahora genero tres índices: i→x, j→y, k→z
- Si i=0, entonces $x=x_i$. Si i=(nx-1)→$x=x_f$. Luego x=xi + i*dx

```
for i in range(0,9):
  x=xi+i*dx
  for j in range(0,9):
    y=yi+j*dy
    for k in range(0,9):
      z=zi+k*dz
```

- Y ahora, defino el vector posición como:

```
      r=vector([x,y,z])
```

- Calculo los vectores resta, y verifico que no sean nulos!
- Luego, calculo el potencial y el campo E en cada punto
- Imprimo las coordenadas de r, E y el potencial para cada punto de la cuadrícula

```python
# constante de Coulomb
k=8.988e9
# mis cargas
Q1 = 1.
r1 = vector([-1.0,0,0])
Q2 = -1.
r2=vector([0,0,0])
Q3 = 1.
r3=vector([1.0,0,0])
#Defino los puntos iniciales para calcular la grilla xi,yi,zi y
# los saltos, dx, dy y dz y el número de puntos nx,ny,nz
xi=-1.
xf=1.
dx=0.25
nx=int((xf-xi)/dx) + 1
yi=-1.
yf=1.
dy=0.25
ny=int((yf-yi)/dy) + 1
zi=-1.
zf=1.
dz=0.25
nz=int((zf-zi)/dz) + 1
for i in range(0,nx):
  x=xi+i*dx
  for j in range(0,ny):
    y=yi+j*dy
    for k in range(0,nz):
      z=zi+k*dz
      #establezco mi nueva posición en (x,y,z)
      r=vector([x,y,z])
      # recuerdo las definicions. Primero, calculo los vectores resta
      d1 = resta(r,r1)
      d2 = resta(r,r2)
      d3 = resta(r,r3)
      #Verifico que los vectores diferencia no sean nulos:
      if (d1.mod!=0. and d2.mod!=0. and d3.mod!=0.):
        # Calculo el potencial debido a cada carga en r
        V1 = k*Q1/d1.mod
        V2 = k*Q2/d2.mod
        V3 = k*Q3/d3.mod
        # y ahora, segun el ppio de superposicion, el potencial total es
        V = V1 + V2 + V3
        # Ahora calculo el campo electrico (es una magnitud vectorial)
        # Calculo el campo electrico debido a cada carga individual
        # en vez de usar el vector unitario, uso el vector y divido por el modulo al cubo
        E1 = vector_escalar(d1, k * Q1 / d1.mod**3)
        E2 = vector_escalar(d2, k * Q2 / d2.mod**3)
        E3 = vector_escalar(d3, k * Q3 / d3.mod**3)
        # Principio de superposicion: el campo electrico es
        E12 = suma(E1, E2)
        E = suma(E12,E3)
        # finalmente imprimo las coordenadas de r,
        for i in range (0,r.dim):
          print r.x[i],
        # las coordenadas del campo electrico E(r)
        for i in range (0,r.dim):
          print E.x[i],
        # y el modulo del campo electrico |E(r)| y el potencial V(r)
        print E.mod,V
```

Entonces:

- Identificar cada parte del pseudocódigo anterior en este código
- Adecuar las constantes, las cargas y los límites a los problemas planteados en la guía
- Ejectuar, guardar resultados, escribir los informes
- Entregar

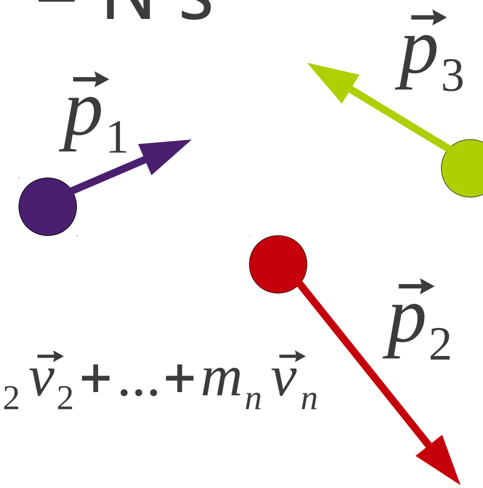
Cantidad de movimiento

- La energía es un escalar
- ¿Hacia dónde va la energía?
- **Cantidad de movimiento**

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

- Unidades
  $[p] = \text{kg m s}^{-1} = \text{N s}$
- Es aditivo:



$$\vec{p}_t = \sum_i^n m_i \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \ldots + m_n \vec{v}_n$$

- Se conserva: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

Relación con E_k:

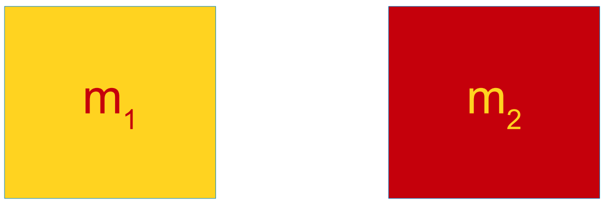
$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

¿Qué pasa durante un choque?

Convenciones

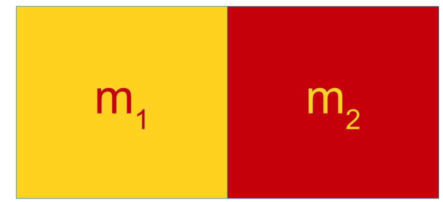
- Velocidades iniciales: $u_1, u_2, \ldots, u_n$
- Velocidades finales: $v_1, v_2, \ldots, v_n$
- Colisiones unidimensionales: misma dirección
- Signos: Igual al eje "x": positivo hacia la derecha

$\vec{u}_1$ $\vec{u}_2$



$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{p}_f=\vec{p}_i\\ E_{k,i}>E_{k,f}\end{array}}$$

$\vec{v}_1=\vec{v}_2\equiv\vec{v}$



¡La cantidad de movimiento se conserva siempre!

$$\vec{p}_f=\vec{p}_i$$

$$m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2=(m_1+m_2)v$$

$$\boxed{\vec{v}=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{u}_1+\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{u}_2}$$

La energía cinética NO se conserva

$$E_{k,i}=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^2>\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=E_{k,f}$$

Atención:
¿Qué pasa en este caso con la conservación de la energía?

Casos límites

- Choque inelástico, $m_1=m_2=m$

$$\vec{v}=\left(\frac{m}{m+m}\right)\vec{u}_1+\left(\frac{m}{m+m}\right)\vec{u}_2 \rightarrow \vec{v}=\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2}$$

- Choque inelástico, $m_1=m_2=m$ y $\mathbf{u_1=-u_2}$

$$\vec{v}=\frac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{2} \rightarrow \vec{v}=0$$

- Choque inelástico, $m_1>>m_2$:

$$\vec{v}=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{u}_1+\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{u}_2 \rightarrow \vec{v}\simeq\vec{u}_1$$

Choque elástico

Magnitudes conservadas

- Energía total: $E_i = E_f$
- Cantidad de movimiento: $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$

Magnitudes constantes

- Energía cinética: $E_{k,i} = E_{k,f}$

Entonces, sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 moviéndose con velocidades iniciales $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Luego del choque, sus velocidades finales serán $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$:

- Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f \rightarrow m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \tag{1}$$

- Constancia de la energía cinética:

$$E_{k,i} = E_{k,f} \rightarrow \frac{1}{2}m_1\mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{u}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 \tag{2}$$

y entonces
$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \tag{3}$$

Estado Final: 2 ecuaciones con 2 incognitas

A partir de las condiciones iniciales, y sabiendo que es un choque elástico, ¿podemos determinar las condiciones finales ($\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$)?

Álgebra

1. Estamos en 1D, trabajamos con los módulos de las velocidades
2. Reordenamos (1), juntando las velocidades iniciales y finales de cada cuerpo:
$$-m_1(u_1 - v_1) = m_2(u_2 - v_2) \tag{4}$$
3. y lo mismo para la energía cinética (3):
$$m_2(u_2^2 - v_2^2) = -m_1(u_1^2 - v_1^2)$$
4. usando diferencia de cuadrados, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,
$$m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2) = -m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) \tag{5}$$
5. mirando fijamente y comparando (4) con (5), vemos que:
$$u_2 + b_2 = u_1 + v_1 \rightarrow (u_2 - u_1) = -(v_2 - v_1) \rightarrow \Delta u = -\Delta v \tag{6}$$
6. con lo cual, podemos despejar, por ejemplo, v_2:
$$v_2 = u_1 + v_1 - u2 \tag{7}$$

Más álgebra, ya casi

7. Podemos utilizar (7), para poner todo en función de v_1, y despejar v_1. Partimos de (4):
$$m_2(u_2 - u_1 + u_2 - v_1) = -m_1(u_1 - v_1) \tag{8}$$
8. y tratamos de juntar las velocidades v_1:
$$m_2(2u_2 - u_1) - m_2 v_1 = -m_1 u_1 + m_1 v_1 \tag{9}$$
9. insistimos,
$$\begin{aligned} m_2(2u_2 - u_1) + m_1 u_1 &= (m_1 + m_2) v_1 \\ 2m_2 u_2 - m_2 u_1 + m_1 u_1 &= (m_1 + m_2) v_1 \\ 2m_2 u_2 - (m_1 - m_2) u_1 &= (m_1 + m_2) v_1 \end{aligned}$$
10. y finalmente,
$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \tag{10}$$
11. Cambiando los índices $1 \leftrightarrow 2$, obtenemos v_2:
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \tag{11}$$

Casos límites

- autos chocadores, $m_1 = m_2$: ¡Las velocidades se intercambian!

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = u_2$$
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = u_1$$

- Billar, $m_1 = m_2$, $u_2 = 0$: ¡La primera bola se queda quieta!

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = 0$$
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = u_1$$

- Camión vs taxi, elástico, $m_1 \gg m_2$: Pobre taxista...

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_1 \approx u_1$$
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_2 \approx 2u_1$$

Casos límites

- Choque contra una pared, $u_2 = 0$, $m_2 \to \infty$: ¡Rebote!

  (el viejo truco, saco m_2 como factor común, y hago tender al límite)

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \to \quad v_1 \simeq -u_1 \\
v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \to \quad v_2 \simeq 0
\end{aligned}
$$

- Vectorialmente, cambia sólo la coordenada donde está la pared.
- Imaginemos una pelota de masa m con velocidad $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, que choca una pared en $x = 1$. Al llegar a $x = 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
v_x &= -u_x \\
v_y &= u_y \\
v_z &= u_z
\end{aligned}
$$

Pensar una pelota chocando contra una pared

- La velocidad final es entonces $\mathbf{v} = (-u_x, u_y, u_z)$.