Capítulo 1

Un Mínimo de Vectores

1.1. Para comenzar

Este conjunto de secciones pretende hacer una repaso, un recordatorio y avanzar sobre lo que la mayoría de Uds. conocen o han escuchado a lo largo de sus cursos de Física, Matemáticas y Química.

1.2. Vectores y escalares y álgebra vectorial

Desde siempre, desde los primeros cursos de Física en educación media, venimos hablando de vectores como cantidades que tienen que ser representadas con más de un número. Son muchas las razones que obligan a introducir este (y otro) tipo de cantidades, enumeraremos algunas que, a criterio personal, son las más representativas.

1. **Necesidad de modelos matemáticos de la naturaleza.** Desde los albores del renacimiento, con Galileo Galilei a la cabeza, nos es imperioso representar cantidades de manera precisa. Las matemáticas nos apoyan en esta necesidad de precisión. Desde ese entonces las matemáticas son el lenguaje de la actividad científica.

2. **Los modelos tienen que tener contrastación experimental.** Las ciencias y sus modelos, en última instancia, tienen que ver con la realidad, con la naturaleza y por ello debemos medir y contrastar las hipótesis con esa realidad que modelamos. Necesitamos representar cantidades medibles (observables) y que, por lo tanto, tienen que ser concretadas de la forma más compacta, pero a la vez más precisa posible.

3. **Las leyes de los modelos deben ser independiente de los observadores.** Cuando menos a una familia significativa de observadores. El comportamiento de la naturaleza no puede depender de la visión de un determinado observador, así los modelos que construimos para describirla, tampoco pueden depender de los observadores. Con conocer la ley de transformación entre observadores equivalentes deberemos conocer cómo ocurren los fenómenos en otros referenciales.

Por ello, tropezaremos con escalares, vectores, tensores y espinores, dependiendo del número de cantidades que necesitemos para representar ese objeto pero, sobre todo, dependiendo de la ley de transformación que exista entre estos objetos. Constataremos que las leyes de la Física vienen escritas en forma vectorial (o tensorial) y, por lo tanto, al conocer la ley de transformación de los vectores (tensores) conoceremos la visión que de esta ley tendrán otros observadores.

1.2.1. Escalares y vectores

Vamos a refrescar nuestros recuerdos con cantidades como:

Escalares: Serán aquellas cantidades las cuales se representan con UN solo número, una magnitud: temperatura, volumen, masa, entre otras. Es costumbre no denotarlas de manera especial, así $T = 5^{o}C$ representará una temperatura de 5 grados centígrados.

Vectores: Serán cantidades las cuales, para ser representadas por un objeto matemáticos requieren más de un número, requieren de UN número, UNA dirección y UN sentido. Entre las cantidades que típicamente reconocemos como vectores están: la velocidad, la aceleración, la fuerza En términos gráficos podremos decir que un vector será un segmento orientado, en el cual la dimensión del segmento representará su módulo y su orientación la dirección y el sentido. Para diferenciarla de las cantidades escalares hay una variedad de representaciones, entre ellas: en negrita $\mathbf{a}$; con una flecha arriba de la cantidad $\vec{a}$;

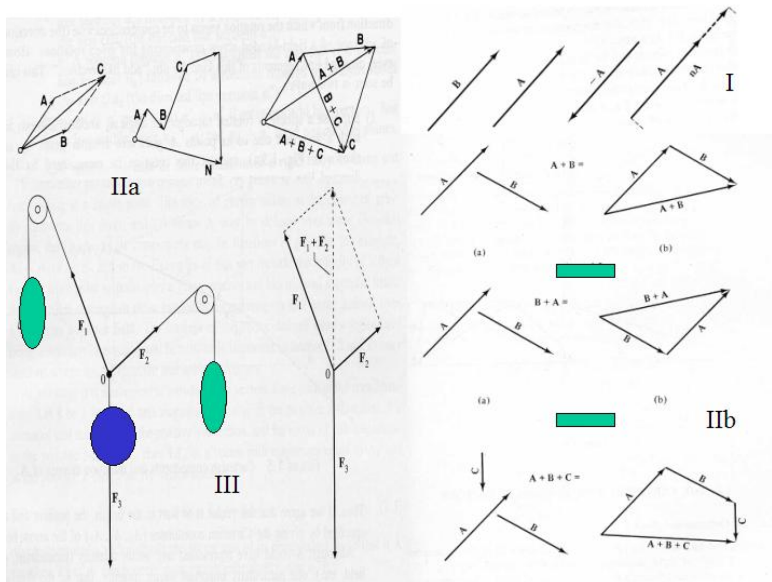


Figura 1.1: Vectores y sus operaciones

con una tilde arriba $\tilde{a}$; o explicitando el origen del segmento orientado $\overrightarrow{OP}$. El módulo del vector lo representaremos dentro de la función valor absoluto, o sencillamente sin la flecha arriba $a = |\mathbf{a}| = |\vec{a}|$.

Los vectores son independientes del sistema de coordenadas. Sus características (módulo, dirección y sentido) se preservarán en todos los sistemas de coordenada. Mas aún, habrá vectores que podremos desplazarlos (conservando su módulo dirección y sentido) paralelos a ellos mismos, en el espacio y (obvio que) seguirán siendo los mismo. Por ello encontrarán el término de *vectores deslizantes*. Un ejemplo de ellos son las fuerzas que actúan en un determinado cuerpo, como se muestra el cuadrante III en la Figura 1.1, arriba. También habrá vectores atados a un punto en el espacio, por cuanto representan una de sus propiedades: la velocidad del viento, el campo eléctrico, o sus variaciones son algunos ejemplos de estos *vectores atados* (observe la Figura 1.2 como ejemplos ilustrativos).

1.2.2. Algebra de vectores

Enumeraremos rápidamente el álgebra de vectores sin hacer referencia a un sistema de coordenadas. Desde siempre nos enseñaron a representar gráficamente este álgebra. Así tenemos que:

Vector nulo Es aquel que tiene por módulo cero y no se le pude asignar dirección ni sentido. Podremos comparar vectores si tienen la misma dirección y sentido.

Vector unitario Es aquel que tiene por módulo la unidad, es muy útil por cuanto, para efectos algebraicos, "contiene" únicamente dirección y sentido. Lo denotaremos con un acento circunflejo, comúnmente llamado "sombrero" $\hat{u}_{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, con lo cual todo vector $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{u}_{\vec{a}}$ se podrá expresar por un módulo en la dirección y sentido de un vector unitario.

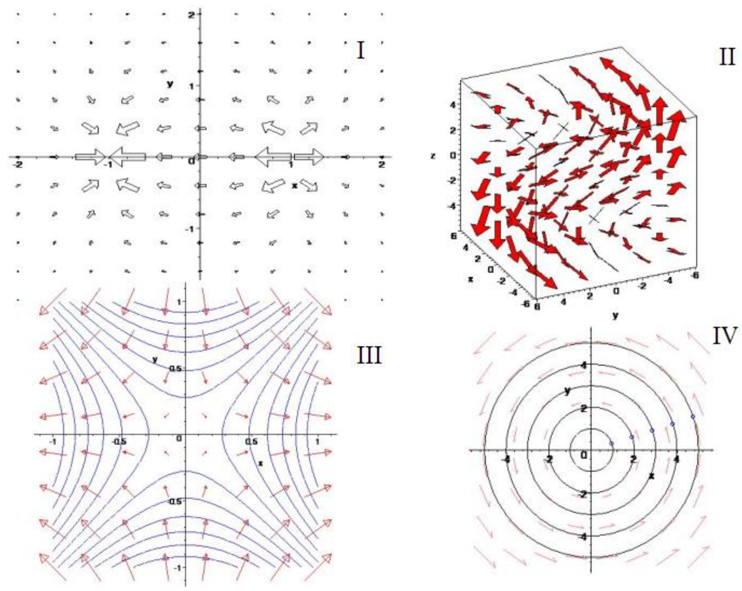


Figura 1.2: Ejemplos de *vectores atados*

Comparamos vectores Al comparar sus módulos diremos que pueden ser mayores, menores o iguales. Por lo tanto, tal y como mostramos en el cuadrante I de la Figura 1.1, dos vectores serán iguales $\vec{a} = \vec{b}$ si tienen la misma dirección y sentido.

Multiplicación por un escalar Un vector, multiplicado por un escalar, n, cambiará su módulo si $n > 0$ y cambiará su sentido y eventualmente su módulo si $n < 0$ Tal y como puede apreciarse en el cuadrante I de la Figura 1.1. Claramente dos vectores proporcionales serán colineales. Diremos además, que el inverso del vector $\vec{a}$ será la multiplicación de $\vec{a}$ por (-1). Esto es $\vec{c} = (-1)\,\vec{a} = -\vec{a}$

Suma de vectores Aprendimos que para sumar vectores utilizamos la regla del paralelogramo, es decir, desplazamos paralelamente uno de los vectores y lo colocamos a continuación del otro, de tal forma que la diagonal del paralelogramo, que tiene por lados los vectores sumandos, constituye el vector suma (ver cuadrantes IIa y IIb de la Figura 1.1). Este esquema se puede generalizar para varios vectores tal y como lo mostramos en el cuadrante IIa de la Figura 1.1. Allí construimos un polígono cuyos lados los constituyen los vectores sumandos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ y $\vec{n}$ con $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

Nótese que aún el caso tridimensional, el vector suma siempre será coplanar (estará en el mismo plano) a los sumandos que lo generaron.

Igualmente, podemos definir la resta de vectores al sumar el inverso. Esto es

$$\vec{a} - \vec{b} \equiv \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) \quad \Rightarrow 0 = \vec{a} - \vec{a} \equiv \vec{a} + (-\vec{a})$$

En términos gráficos la resta de dos vectores se representa colocando los vectores (minuendo y sutraendo) con el mismo origen y uniendo las cabezas de flecha. Dependiendo de cual vector es el minuendo y cual sustraendo el vector resta apuntará del sustraendo hacia el minuendo. Obsérvese el cuadrante IIa de la Figura 1.1 la resta $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) - \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Claramente, el módulo del vector resta representa la distancia entre los dos extremos de los vectores minuendo y el sustraendo

Un resumen de propiedades Podemos resumir las propiedades del álgebra de vectores como sigue

- La suma de vectores
  - tiene un único elemento neutro $0 + \vec{a} = \vec{a} + 0 = \vec{a}\ \forall \vec{a}$
  - existe un elemento simétrico $(-\vec{a})$ (uno para cada vector) tal que $0 = \vec{a} - \vec{a} \equiv \vec{a} + (-\vec{a})$
  - es conmutativa $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
  - es asociativa $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
  - es distributiva $\mu\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \mu\vec{a} + \mu\vec{b}$ respecto a la multiplicación por escalares
- La multiplicación de escalares por vectores
  - es conmutativa $\vec{a}\mu = \mu\vec{a}$
  - es asociativa $\mu\left(\nu\vec{a}\right) = \left(\mu\nu\right)\vec{a}$
  - es distributiva $\left(\mu + \nu\right)\vec{a} = \mu\vec{a} + \nu\vec{a}$

1.3. Independencia lineal y las bases para vectores

Armados con el álgebra y explicitando sus propiedades podemos construir la primera aproximación a uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal. La noción de *independencia* o *dependencia lineal.*

Diremos que tres vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son *linealmente independientes* si se cumple que

$$\mu\vec{a} + \nu\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \nu = \gamma = 0$$

es decir que la única manera que al sumar cualquier múltiplo de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se anule esto obliga que los escalares son **necesariamente** nulos. Si no se cumple lo anterior entonces diremos que uno de los vectores será *linealmente dependiente* y que por lo tanto se podrá expresar como combinación lineal de los otros dos

$$\mu\vec{a} + \nu\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \quad \text{alguno de} \left\{ \begin{array}{c} \mu \neq 0 \\ \nu \neq 0 \\ \gamma \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \vec{c} = \bar{\mu}\ \vec{a} + \bar{\nu}\ \vec{b}$$

Los vectores linealmente independientes formarán base para el espacio donde ellos "viven" y el número máximo de vectores linealmente independientes será la dimensión de ese espacio de "residencia". Tratemos de concretar algunas de estas importantes afirmaciones.

Dos vectores linealmente dependientes son colineales. Es claro que

$$\mu\vec{a} + \nu\vec{b} = 0 \quad \text{con alguno de} \left\{ \begin{array}{c} \mu \neq 0 \\ \nu \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = -\dfrac{\nu}{\mu}\vec{b} \\ \\ \vec{b} = -\dfrac{\mu}{\nu}\vec{a} \end{array} \right.$$

el contrario también será cierto: *si dos vectores son colineales ellos serán linealmente dependientes.*

$$\vec{a} = \alpha \vec{b} \quad \Rightarrow \mu \vec{a} + \nu \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \mu \alpha \vec{b} + \nu \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow (\mu \alpha + \nu)\, \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \alpha = -\frac{\nu}{\mu}$$

y con lo cual podremos afirma que *si dos vectores son linealmente independientes ellos* ***no*** *son colineales* y más aún *si dos vectores son linealmente independientes* ***no*** *son colineales.*

Tres vectores linealmente dependientes son complanares. Es claro que por ser los tres vectores *linealmente dependientes* al menos uno de los escalares tiene que ser distinto de cero. Esto es

$$\mu \vec{a} + \nu \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \Rightarrow \quad \vec{c} = -\frac{\mu}{\gamma}\vec{a} - \frac{\nu}{\gamma}\vec{b} = \bar{\mu}\ \vec{a} + \bar{\nu}\ \vec{b}$$

pero como $\bar{\mu}\ \vec{a} \propto \vec{a}$ y $\bar{\nu}\ \vec{b} \propto \vec{b}$ eso significa que ambos $\bar{\mu}\ \vec{a}$ y $\vec{a}$ y $\bar{\nu}\ \vec{b}$ y $\vec{b}$ son colineales respectivamente y su suma estará en el mismo plano.

Dos vectores linealmente independientes expanden todos los vectores coplanares. Esto es, dado dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ linealmente independientes, entonces cualquier vector $\vec{c}$,complanar con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, podrá expresarse como una combinación lineal de ellos y diremos que $\vec{c}$ se expresa en términos de $\vec{a}, \vec{b}$ como $\vec{c} = \bar{\mu}\ \vec{a} + \bar{\nu}\ \vec{b}$ y esa expresión es única.

La primera de las afirmaciones es directa por cuanto hemos visto que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independiente y $\vec{c}$ es complanar con $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Entonces, necesariamente $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes. Esto es

$$\mu \vec{a} + \nu \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \Rightarrow \quad \vec{c} = -\frac{\mu}{\gamma}\vec{a} - \frac{\nu}{\gamma}\vec{b} = \bar{\mu}\ \vec{a} + \bar{\nu}\ \vec{b}$$

La demostración de que la expansión es única viene de suponer que existen dos maneras distintas de representar al vector $\vec{c}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{c} = \bar{\mu}\ \vec{a} + \bar{\nu}\ \vec{b} \\ \\ \vec{c} = \breve{\mu}\ \vec{a} + \breve{\nu}\ \vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = (\bar{\mu} - \breve{\mu})\ \vec{a} + (\bar{\nu} - \breve{\nu})\ \vec{b} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \bar{\mu} - \breve{\mu} = 0 & \Rightarrow \bar{\mu} = \breve{\mu} \\ \\ \bar{\nu} - \breve{\nu} = 0 & \Rightarrow \bar{\nu} = \breve{\nu} \end{array}\right.$$

debido a que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independiente. La demostración para el caso tridimensional es equivalente. Es decir tres vectores linealmente independientes $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ expanden, de manera unívoca, todos los vectores del espacio. Esta demostración queda para el lector.

Cuando un vector $\vec{c}$ se pueda expresar en términos de dos vectores linealmente independientes $\vec{a}, \vec{b}$ diremos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base para todos los vectores complanares a ellos. Equivalentemente para el caso tridimensional, tres vectores linealmente independientes $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ conformarán una base para los vectores del espacio. Los escalares μ, ν para el caso bidimensional se denominan las componentes de $\vec{c}$ a lo largo de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, .respectivamente. Equivalentemente μ, ν, γ serán las componentes de cualquier vector para el caso 3D a lo largo de $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$, respectivamente. Esta nomenclatura será más evidente luego de la próxima sección.

1.4. Productos de vectores

1.4.1. Producto escalar

Denominaremos producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a un escalar cuyo valor será igual al producto de los módulos multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forma.

$$\zeta = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos \theta_{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$$

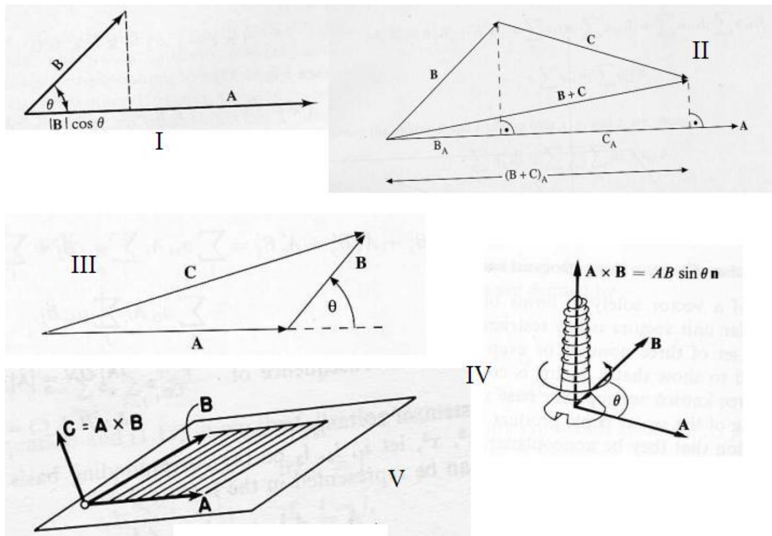


Figura 1.3: Productos de Vectores

El significado geométrico del producto escalar es evidente el cuadrante I de la Figura El producto escalar representa la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y equivalentemente la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

De esta definición se derivan varias consecuencias las cuales por obvias no dejan de ser importantes.

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, siempre es positivo.* $\zeta_{\vec{a}} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$ y sólo será nulo si $\vec{a}$ es el vector nulo. Esto es $\zeta_{\vec{a}} = 0 \quad \Rightarrow \vec{a} = 0$. Con esto podemos concluir que $|\vec{a}| == \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\zeta_{\vec{a}}}$
- *El producto escalar es conmutativo* $\zeta = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ ya el ángulo entre los vectores es el mismo y la multiplicación entre escalares es conmutativa.
- *El producto escalar es distributivo* Esto es $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$. La demostración (gráfica) puede apreciarse en el cuadrante II de la Figura 1.3
- *La multiplicación por un escalar.* $\bar{\zeta} = \alpha\zeta = |\alpha|\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\left(\alpha\vec{b}\right) = |\alpha\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle} = |\vec{a}|\left|\alpha\vec{b}\right|\cos\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}$
- *Desigualdad de Cauchy Schwarz.* A partir de la definición de producto interno es inmediata la comprobación de la desigualdad de Cauchy Schwarz

  $$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 = \left(|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}\right)^2 \quad\Rightarrow \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \leq |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) \leq |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \quad \text{ya que } 0 \leq \cos^2\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle} \leq 1$$

- *Del producto escalar surge el Teorema del Coseno.* Es inmediato generalizar el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello suponemos que $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$, con lo cual

  $$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b} \quad\Rightarrow \vec{c}\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\,|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}$$

que no es otra cosa que el teorema del coseno y está ilustrado en el cuadrante III de la Figura 1.3.

- *Diremos que dos vectores, no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo.* Esta afirmación es inmediata

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \theta_{\langle \vec{a},\vec{b} \rangle} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left| \vec{b} \right| \cos \theta_{\langle \vec{a},\vec{b} \rangle} = 0$$

1.4.2. Producto vectorial

De siempre, también hemos aprendido que existe otro producto entre vectores. El producto vectorial. A diferencia del producto escalar que genera un escalar, el producto vectorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ tiene como resultado otro vector (realmente un pseudovector o vector axial en contraposición a los vectores polares pero eso lo veremos más adelante), $\vec{c}$, con las siguientes características:

- El módulo de $\vec{c}$, será $|\vec{c}| = |\vec{a}| \left| \vec{b} \right| \operatorname{sen} \theta_{\vec{a}\vec{b}}$. Es claro que el módulo de $\vec{c}$ representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (cuadrante V de la Figura 1.3)
- Tal y como muestran los cuadrantes IV y V de la Figura 1.3, tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$
- y como sentido regla del pulgar derecho, regla de la mano derecha, o más elegante será positivo cuando la multiplicación de $\vec{a} \times \vec{b}$ corresponda al sentido horario.

Otra vez, podemos deducir algunas consecuencias de esta definición.

- *El producto vectorial es anticonmutativo.* Esto es $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ y se sigue de la definición que expresa el cuadrante IV de la Figura 1.3
- *El producto vectorial es distributivo respecto a la suma.* Vale decir $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c} \right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. La demostración de esto lo dejaremos para más adelante. Valga ahora creerse la propiedad.
- *La multiplicación por un escalar.* Nos conduce rápidamente a

$$|\vec{c}| = |\alpha| \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \times \left(\alpha \vec{b} \right) \right| = |\alpha \vec{a}| \left| \vec{b} \right| \operatorname{sen} \theta_{\vec{a}\vec{b}} = |\vec{a}| \left| \alpha \vec{b} \right| \operatorname{sen} \theta_{\vec{a}\vec{b}}$$

- *Dos vectores serán colineales si su producto vectorial se anula.* Al igual que el cuando se anula el producto escalar identificábamos a dos vectores ortogonales, cuando se anule el producto vectorial tendremos dos vectores paralelos. Obvio que esto se cumple de inmediato

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Rightarrow \theta_{\vec{a}\vec{b}} = 0 \quad \Rightarrow |\vec{c}| = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = |\vec{a}| \left| \vec{b} \right| \operatorname{sen} \theta_{\vec{a}\vec{b}} = 0$$

y si el módulo del vector es cero, obvio que es el vector nulo. Ahora bien, también de aquí deducimos que

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{b} = 0$$

1.4.3. Una división fallida

Uno esperaría que para cada una de las definiciones de productos vectoriales, existiera vector cociente. Es decir pudiéramos "despejar" uno de los multiplicados en términos del otro. La situación es que esta operación no está definida unívocamente y lo podemos intuir a partir de una de las definiciones de producto.

Supongamos que tenemos un producto escalar $o\ \zeta = \vec{a} \cdot \vec{b}$ con lo cual, si pudiéramos "despejar", digamos $\vec{b} = \frac{\zeta}{\vec{a}}$ ¿ tendríamos entonces definido $\vec{b}$ de una manera unívoca ? La respuesta es NO. ya que $\zeta = \vec{a} \cdot \left(\frac{\zeta}{\vec{a}} + \vec{d} \right)$ donde $\vec{a} \perp \vec{d}$ por lo cual existen infinitos $\vec{b} = \frac{\zeta}{\vec{a}} + \vec{d}$ que cumplen $\zeta = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

1.4.4. Producto triple o mixto

Analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación

$$V = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = |\vec{c}| \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right| \cos \theta_{\langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle}$$

representa del volumen del paralelepípedo cuyos lados quedan definidos por $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$. Este producto también cumple con algunas propiedades que enunciaremos ahora y demostraremos más tarde

- *El producto mixto* $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c}$, *representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores* $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$.Es claro y fue ilustrado que el módulo del producto vectorial $\left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right|$ representa el área de la base y la altura está representada por la proyección del vector $\vec{c}$ sobre la perpendicular al plano de la base que es, precisamente, $|\vec{c}| \cos \theta_{\langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle}$

- *El producto mixto es cíclico respecto a sus factores.* Esto es

  $$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \cdot \vec{a} = \left(\vec{c} \times \vec{a} \right) \cdot \vec{b}$$

  Esta afirmación se verá demostrada más adelante

- *el producto mixto se anula cuando se repite alguno de sus factores*

  $$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{a} = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{a} \times \vec{a} \right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = 0$$

  Claramente, si $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \perp \quad \vec{a} \Rightarrow \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{a} = 0$

- *Si los tres vectores* $\vec{a}, \vec{b}$ *y* $\vec{c}$ *son coplanares (linealmente dependientes) entonces* $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = 0$ o, dicho de manera más elegante, útil e impactante: *tres vectores que cumplen* $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \neq 0$ forma base para el espacio tridimensional. Esa base se denominará levógira (contraria al giro de las manecillas del reloj) si $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} < 0$ y dextrógira (la convencional base de la mano derecha) si $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} > 0$.

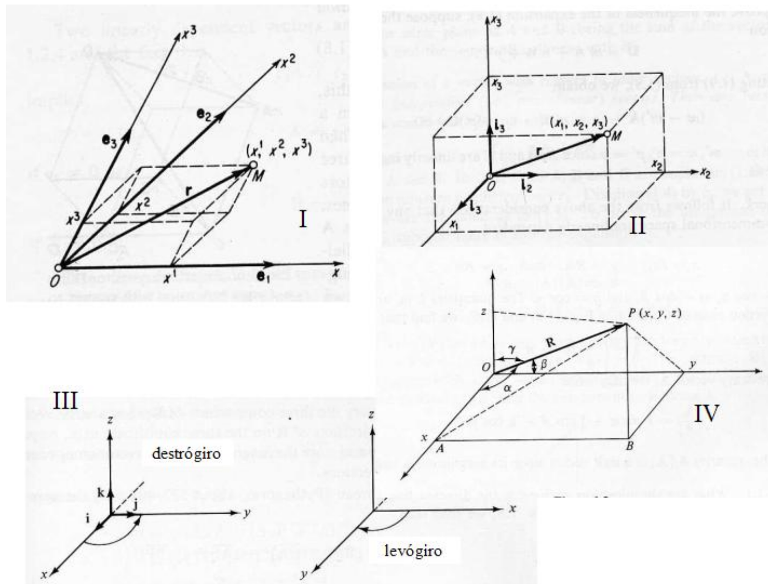


Figura 1.4: Vectores, bases y componentes

1.5. Componentes, coordenadas y cosenos directores

1.5.1. Bases, componentes y coordenadas

La formulación de las leyes físicas debe hacerse en término de cantidades vectoriales (tensoriales). Esto independiza su formulación de un sistema particular de coordenadas, pero llegado el momento de calcular valores y utilizar estas leyes, es mucho más conveniente referirla a un sistema de coordenadas particularmente adaptado a la geometría del problema. En ese caso la ecuación vectorial se convertirá en tantas ecuaciones como componentes (referidas al sistema de coordenadas utilizado) tenga los vectores en ese sistema de coordenadas

Tal y como mencionamos arriba tres vectores **no coplanares** cualesquiera son linealmente independientes y constituyen una base para el espacio tridimensional. Denominaremos, de ahora en adelante estos vectores base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ y por ser linealmente independientes podremos expresar cualquier vector $\vec{a}$ como una combinación lineal única. Tal y como lo mostramos en el cuadrante I de la Figura 1.4 con los vectores base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general) de coordenadas al colocarlos con un mismo origen. Esto es

$$\vec{a} = \tilde{a}^1 \vec{w}_1 + \tilde{a}^2 \vec{w}_2 + \tilde{a}^3 \vec{w}_3$$

donde las cantidades $\left\{\tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \tilde{a}^3\right\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\vec{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Nótese que por costumbre (la cual será evidente más adelante) etiquetamos estos números con superíndices y la letra que identifica el vector.

Más aún, cada punto P del espacio viene definido por un radiovector $\overrightarrow{r}(P) \equiv \overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto P y se le asocian tres números $\left\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\right\}$, los cuales son las proyecciones a lo largo de cada uno de los ejes coordenados $\left\{\overline{0\tilde{x}^1}, \overline{0\tilde{x}^2}, \overline{0\tilde{x}^3}\right\}$. Los números $\left\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\right\}$ se denominarán componentes de $\overrightarrow{r}(P)$ en el sistema de referencia $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

Existe una familia de sistema de coordenadas en la cual sus vectores base son ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ son perpendiculares entre si. Tal y como mostraremos más adelante, siempre se puede construir un sistema ortogonal (ortonormal) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a partir de una base genérica de vectores linealmente independientes $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Cuando el sistema sea ortogonal sus componentes se denominarán rectangulares. Dependiendo del signo del triple producto mixto el sistema de coordenadas será dextrógiro ($(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 > 0$) o levógiro ($(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 < 0$) tal y como se muestra en el cuadrante III de la Figura 1.4

Es costumbre ancestral, por relaciones de dominación de los derechos sobre los izquierdos (en latín e italiano los zurdos son siniestros) utilizar la convención dextrógira ($(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 > 0$) y en ese caso utilizamos el bien conocido conjunto de vectores unitarios $\left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$ con lo cual desde siempre tenemos que

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad \vec{r}\,(P) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{\mathbf{k}}$$

de ahora en adelante representaremos este sistema de coordenadas ortonormal como $\left\{\hat{\imath} \equiv \hat{\mathrm{e}}_1, \hat{\jmath} \equiv \hat{\mathrm{e}}_2, \hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\imath}_3\right\}$ para recordar que estamos en un sistema de coordenadas cartesianas.

Obviamente el módulo del vector se podrá expresar con la utilización del Teorema de Pitágoras

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |\vec{a}| \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \left|\overrightarrow{r}\,(P)\right|$$

y la multiplicación por un escalar

$$\alpha\vec{a} = \alpha\left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{\mathbf{k}}\right) = (\alpha a_x)\,\hat{\imath} + (\alpha a_y)\,\hat{\jmath} + (\alpha a_z)\,\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow |\vec{a}| = \alpha\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Igualmente un vector unitario

$$\hat{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{\mathbf{k}}\right) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\hat{\imath} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\hat{\jmath} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\hat{\mathbf{k}}$$

con lo cual todo vector

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{u}_{\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\hat{u}_{\vec{a}}$$

1.5.2. Cosenos directores

Como se puede apreciar en el cuadrante IV de la Figura 1.4 podemos construir tres triángulos rectángulos con el radiovector $\vec{R}\,(P)$ como hipotenusa de cada uno de ellos. Los ángulos que forma el radiovector $\vec{R}\,(P)$ con cada uno de los ejes coordenados $\{x, y, z\}$ son $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ respectivamente, con lo cual

$$R_x = \left|\vec{R}\right|\cos\alpha \quad R_y = \left|\vec{R}\right|\cos\beta \quad \text{y} \quad R_z = \left|\vec{R}\right|\cos\gamma \quad \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

pero además

$$u_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath} + \cos\gamma\,\hat{\mathbf{k}}$$

1.6. Algebra vectorial y coordenadas

Entonces podremos reescribir el álgebra vectorial como de forma algebraica, vale decir mediante operaciones referidas a las coordenadas. Así

1.6.1. Suma y resta de vectores

Será representada por

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{\mathbf{k}}\right)+\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{\mathbf{k}}\right)=\left(a_x+b_x\right)\hat{\imath}+\left(a_y+b_y\right)\hat{\jmath}+\left(a_z+b_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

o equivalentemente

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a^1\mathsf{e}_1+a^2\mathsf{e}_2+a^3\mathsf{e}_3\right)+\left(b^1\mathsf{e}_1+b^2\mathsf{e}_2+b^3\mathsf{e}_3\right)=\left(a^1+b^1\right)\mathsf{e}_1+\left(a^2+b^2\right)\mathsf{e}_2+\left(a^3+b^3\right)\mathsf{e}_3$$

y obviamente, la resta

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a^1\mathsf{e}_1+a^2\mathsf{e}_2+a^3\mathsf{e}_3\right)-\left(b^1\mathsf{e}_1+b^2\mathsf{e}_2+b^3\mathsf{e}_3\right)=\left(a^1-b^1\right)\mathsf{e}_1+\left(a^2-b^2\right)\mathsf{e}_2+\left(a^3-b^3\right)\mathsf{e}_3$$

con lo cual la distancia entre dos puntos P y M será

$$d\left(P,M\right)=\left|\left(\overrightarrow{r}\left(P\right)=\vec{a}\right)-\left(\overrightarrow{r}\left(M\right)=\vec{b}\right)\right|=\sqrt{\left(a_x-b_x\right)^2+\left(a_y-b_y\right)^2+\left(a_z-b_z\right)^2}$$

1.6.2. Dependencia e independencia lineal

Ahora es fácil estudiar la dependencia/independencia lineal en coordenadas. Otra vez, tres vectores $\vec{a}=a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{\mathbf{k}};\vec{b}=b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{c}=c_x\hat{\imath}+c_y\hat{\jmath}+c_z\hat{\mathbf{k}}$ serán *linealmente independientes* si se cumple que

$$\mu\vec{a}+\nu\vec{b}+\gamma\vec{c}=0\quad\Rightarrow\quad\mu=\nu=\gamma=0$$

Antes de proseguir en forma general, veamos algunos casos particulares

- La base canónica $\mathsf{e}_1=\hat{\imath}\equiv(1,0,0);\mathsf{e}_\mathbf{2}=\hat{\jmath}\equiv(0,1,0);\mathsf{e}_\mathbf{3}=\hat{\mathbf{k}}\equiv(0,0,1)$. Estos vectores son claramente linealmente independientes y por lo tanto constituyen un base

$$\begin{array}{cccccc}\mu & & & = & 0\\ & \nu & & = & 0\\ & & \gamma & = & 0\end{array}$$

- Los vectores $w_1=\hat{\imath}\equiv(1,0,0);w_2=\hat{\imath}+\hat{\jmath}\equiv(1,1,0);\hat{\imath}_3=\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}\equiv(1,1,1)$. Estos vectores no son linealmente independientes de manera obvia. Veamos

$$\left.\begin{array}{cccccc}\mu & & & = & 0\\ \mu & +\nu & & = & 0\\ \mu & +\nu & +\gamma & = & 0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu=0\\ \nu=0\\ \gamma=0\end{array}\right.$$

  con lo cual demostramos que son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base para los vectores tridimensionales.

En general tendremos que

$$0=\mu\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{\mathbf{k}}\right)+\nu\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{\mathbf{k}}\right)+\gamma\left(c_x\hat{\imath}+c_y\hat{\jmath}+c_z\hat{\mathbf{k}}\right)\quad\Rightarrow$$

$$0=\left(\mu a_x+\nu b_x+\gamma c_x\right)\hat{\imath}+\left(\mu a_y+\nu b_y+\gamma c_y\right)\hat{\jmath}+\left(\mu a_z+\nu b_z+\gamma c_z\right)\hat{\mathbf{k}}\quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu a_x+\nu b_x+\gamma c_x=0\\ \mu a_y+\nu b_y+\gamma c_y=0\\ \mu a_z+\nu b_z+\gamma c_z=0\end{array}\right.$$

Esto no es otra cosa que un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas $\{\mu, \nu, \gamma\}$ y la solución que estamos buscando $\mu = \nu = \gamma = 0$ se cumplirá si

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = a_z \left(b_y c_x - c_x b_y\right) - a_y \left(b_x c_z - c_z b_x\right) + a_x \left(b_y c_z - c_z b_y\right) \neq 0$$

1.6.3. Producto escalar

Del mismo modo representaremos el producto escalar de dos vectores en una base cartesiana como $\left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$ es una base ortonormal entonces

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(b_x \hat{\imath} + b_y \hat{\jmath} + b_z \hat{\mathbf{k}}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ya que por ser ortogonales

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{1} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = 0 \\ \hat{\imath} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\imath} = 0 \\ \hat{\jmath} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\jmath} = 0 \end{cases}$$

Las propiedades del producto escalar en coordenadas comprueban fácilmente

- *El producto interno de un vector consigo mismo, siempre es positivo.*

  $$\zeta_{\vec{a}} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 0 \quad \Rightarrow a_x = a_y = a_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0$$

  Adicionalmente $|\vec{a}| = \sqrt{\zeta_{\vec{a}}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

- *El producto escalar es conmutativo*

  $$\zeta = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z$$

- *El producto escalar es distributivo*:

  $$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

  $$\Updownarrow$$

  $$\left(a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left(b_x + c_x\right) \hat{\imath} + \left(b_y + c_y\right) \hat{\jmath} + \left(b_z + c_z\right) \hat{\mathbf{k}}\right) = a_x \left(b_x + c_x\right) + a_y \left(b_y + c_y\right) + a_z \left(b_z + c_z\right)$$

  $$\left(a_x b_x + a_x c_x\right) + \left(a_y b_y + a_y c_y\right) + \left(a_z b_z + a_z c_z\right) = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right) + \left(a_x c_x + a_y c_y a_z c_z\right)$$

- *La multiplicación por un escalar.*

  $$\bar{\zeta} = \alpha \zeta = |\alpha| \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\alpha \vec{b}\right) = \left(\alpha a_x\right) b_x + \left(\alpha a_y\right) b_y + \left(\alpha a_z\right) b_z = a_x \left(\alpha b_x\right) + a_y \left(\alpha b_y\right) + a_z \left(\alpha b_z\right)$$

- *Desigualdad de Cauchy Schwarz.*

  $$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \leq \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right|$$

- *Diremos que dos vectores, no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo.* Esta afirmación es inmediata

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \theta_{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left| \vec{b} \right| \cos \theta_{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = 0$$

  Por lo cual

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \left| \vec{b} \right| \cos \theta_{\widehat{\vec{a}\vec{b}}} \qquad \Rightarrow \quad \cos \theta_{\widehat{\vec{a}\vec{b}}} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \right) \left(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \right)}$$

  de donde se deduce que dos vectores perpendiculares

$$\vec{a} \perp \vec{b} \qquad \Rightarrow \quad 0 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

  Los vectores de la base canónica $\mathtt{e}_1 = \hat{\imath} \equiv (1,0,0)\,; \mathtt{e}_\mathbf{2} = \hat{\jmath} \equiv (0,1,0)\,; \hat{\imath}_\mathbf{3} = \hat{\mathbf{k}} \equiv (0,0,1)$ son claramente mutualmente ortonormales

$$\begin{array}{c} \cos \theta_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} = \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = 0 \\ \hat{\imath} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\imath} = 0 \\ \hat{\jmath} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\jmath} = 0 \end{array}$$

- *Del producto escalar surge el Teorema del Coseno.* Es inmediato generalizar el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello suponemos que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, con lo cual

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b} \right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} \right) = |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + \left| \vec{b} \right|^2 + 2\,|\vec{a}| \left| \vec{b} \right| \cos \theta_{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$$

  que no es otra cosa que el teorema del coseno y está ilustrado en el cuadrante III de la Figura 1.3

1.6.4. Producto vectorial

De igual manera aprendimos

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{\mathbf{k}}$$

con lo cual lo podemos organizar como el determinante de la matriz

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

con lo cual

$$|\vec{c}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2} = \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \right) \left(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \right) \operatorname{sen} \theta_{\widehat{\vec{a}\vec{b}}}$$

1.6.5. Triple producto mixto

Analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación

$$V = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = \|\vec{c}\| \left\| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right\| \cos \theta_{\langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

representa del volumen del paralelepípedo cuyos lados quedan definidos por $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$.

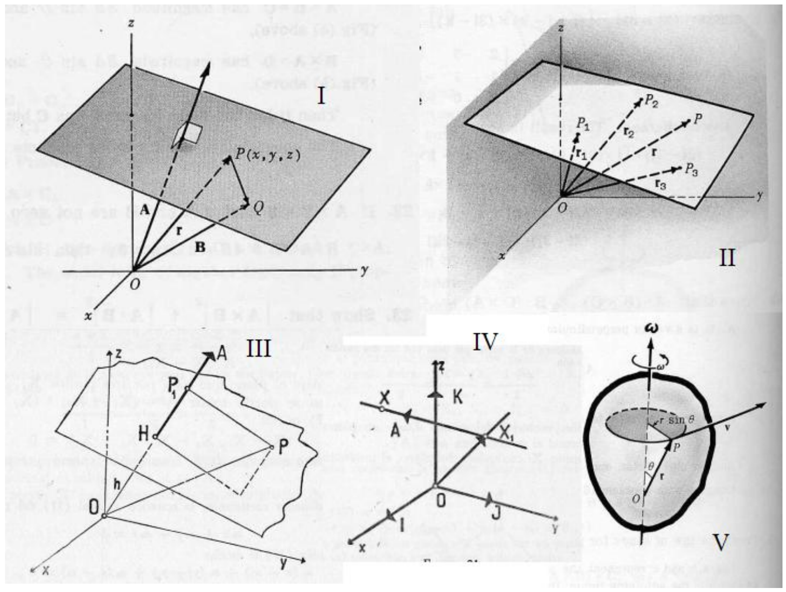


Figura 1.5: Geometría analítica y vectores cartesianos

1.7. Aplicaciones del álgebra vectorial

Uno de los terrenos más exitosos de las aplicaciones del álgebra vectorial es la geometría analítica en el plano. Esto se realiza en base a la definición que hiciéramos de radio vector, en la cual a cada punto, P, del espacio le asociábamos un radiovector posición tal y como lo mostramos en el cuadrante IV de la Figura 1.4 .

$$P \longleftrightarrow (x, y, z) \equiv \left(x^1, x^2, x^3\right) \quad \Rightarrow \vec{r}\,(P) = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}} = x^1 \mathsf{e}_1 + x^2 \mathsf{e}_2 + x^3 \mathsf{e}_3 = x^m \mathsf{e}_m$$

A partir de esta definición todas las propiedades geométricas del espacio las podemos construir con vectores.

1.7.1. Rectas y vectores

La ecuación de la recta en término de vectores la definiremos fijando uno de sus puntos, digamos

$$\vec{r}\,(P_1) \equiv \vec{X}\,(P_1) = \vec{X}_1 = x_1\ \hat{\imath} + y_1\ \hat{\jmath} + z_1 \hat{\mathbf{k}} = x_1^1 \mathsf{e}_1 + x_1^2 \mathsf{e}_2 + x_1^3 \mathsf{e}_3 \longleftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$$

sus puntos y un vector que indique su dirección, digamos $\vec{A} = A_x\ \hat{\imath} + A_y\ \hat{\jmath} + A_z\ \hat{\mathbf{k}}$ (ver cuadrante IV de la Figura 1.5) con lo cual la ecuación de una recta en lenguaje vectorial será

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \lambda \vec{A} \quad \Rightarrow x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}} = x_1\ \hat{\imath} + y_1\ \hat{\jmath} + z_1\ \hat{\mathbf{k}} + \lambda \left(A_x\ \hat{\imath} + A_y\ \hat{\jmath} + A_z\ \hat{\mathbf{k}}\right) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda A_x \\ \\ y = y_1 + \lambda A_y \\ \\ z = z_1 + \lambda A_z \end{array} \right.$$

donde $\vec{X} = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}}$ el conjunto de puntos genéricos que cumple con la ecuación de la recta en 3D. Si lo colocamos en función de la notación de índices, las ecuaciones anteriores son más evidentes

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \lambda \vec{A} \quad \Rightarrow x^m \mathsf{e}_m = x_1^m \mathsf{e}_m + \lambda A^m \mathsf{e}_m \quad \Rightarrow x^m = x_1^m + \lambda A^m \qquad \text{para } m = 1, 2, 3$$

Nótese que efectivamente se cumplen tres ecuaciones escalares y cada una de ellas tiene la forma de una recta. Además, tal y como muestra la Figura 1.5 el punto genérico (x, y, z) lo describe (sobre la recta) la variación del módulo de $\left|\vec{A}\right|$ mediante la constante de proporcionalidad λ. Si se requiere describir una recta que pase por dos puntos, digamos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) entonces una vez seleccionado uno de los puntos (digamos (x_1, y_1, z_1)) seleccionamos el vector $\vec{A} = \vec{r}\,(P_2) - \vec{r}\,(P_1)$ como la resta de los dos radiovectores a los puntos P_2 y P_1 . Esto es

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \lambda \left(\vec{X}_2 - \vec{X}_1\right) \quad \Rightarrow \vec{X} = \frac{\vec{X}_1 + \delta \vec{X}_2}{1 - \delta} \quad \text{con } \delta = \frac{\vec{X}_1 - \vec{X}}{\vec{X}_2 - \vec{X}}.$$

La división entre vectores δ tiene sentido porque no es una división entre vectores genéricos es una división entre vectores que tienen la misma dirección Nótese además que, lo mismo ocurre cuando "despejamos" λ de la ecuación de la recta

$$\lambda = \frac{\vec{X} - \vec{X}_1}{\vec{A}} \quad \Rightarrow x^m = x_1^m + \lambda A^m \quad \Rightarrow \lambda = \frac{x^m - x_1^m}{A^m} = \frac{x - x_1}{A_x} = \frac{y - y_1}{A_y} = \frac{z - z_1}{A_z}$$

y equivalentemente ocurre cuando "despejamos" λde la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$$\lambda = \frac{\vec{X} - \vec{X}_1}{\vec{X}_2 - \vec{X}_1} \quad \Rightarrow x^m = x_1^m + \lambda \left(x_2^m - x_1^m\right) \quad \Rightarrow \lambda = \frac{x^m - x_1^m}{x_2^m - x_1^m} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

1.7.2. Planos y vectores

Ocurre exactamente lo mismo cuando construimos la ecuación vectorial para un plano. En general una superficie la define su vector normal (perpendicular). En el caso de una superficie plana (un plano) tendrá una única normal que lo define. Por lo tanto, un plano vendrá definido su vector perpendicular un punto, digamos $P_1 \longleftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$. La ecuación vectorial del plano vendrá definida por todos los vectores $\overrightarrow{PQ}$ tales que sean perpendiculares a un determinado vector $\vec{A}$ (ver cuadrante IV de la Figura 1.5). Donde el punto P es un punto genérico (x, y, z) que define un radiovector. La ecuación vectorial del plano será simplemente

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{r}\,(P) - \underbrace{\vec{r}\,(P_1)}_{\vec{B}}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{r} = \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{r}_1}_{b}$$

Esto es se tiene que cumplir la condición

$$\left(A_x\ \hat{\imath} + A_y\ \hat{\jmath} + A_z\ \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left(x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}}\right) - \left(x_1\ \hat{\imath} + y_1\ \hat{\jmath} + z_1\ \hat{\mathbf{k}}\right)\right) = 0$$

$$\left(A_x\ \hat{\imath} + A_y\ \hat{\jmath} + A_z\ \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left((x - x_1)\ \hat{\imath} + (y - y_1)\hat{\jmath} + (z - z_1)\hat{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$A_x\,(x - x_1) + A_y\,(y - y_1) + A_z\,(z - z_1) = 0$$

con lo cual la ecuación del plano queda como siempre ha sido

$$A_x x + A_y y + A_z z - A_x x_1 - A_y y_1 - A_z z_1 = 0 \quad \Rightarrow A_x x + A_y y + A_z z = b = A_x x_1 + A_y y_1 + A_z z_1$$

es decir, de manera más compacta

$$A^m x_m - A_j x_1^j = 0 \quad \Rightarrow A_k x^k = b = A_l x_1^l$$

Es claro que $\vec{A} \cdot \vec{r}_1 = b$ es la proyección del radiovector $\vec{r}\,(P_1)$ sobre la perpendicular que define al plano. Por lo tanto será la distancia entre el plano y el origen de coordenadas. Si $b = 0$ el plano pasa por el origen de coordenadas.

Consideremos ahora el cuadrante IV de la Figura 1.5. Allí están especificados tres puntos en el espacio caracterizados por sus correspondientes radiovectores posición, $\vec{r}\,(P_1) = \vec{r}_1, \vec{r}\,(P_2) = \vec{r}_2$ y $\vec{r}\,(P_3) = \vec{r}_3$. Estos tres puntos serán coplanares si

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{mnl}\,(x_1^m - x_2^m)\,(x_2^n - x_3^n)\left(x_3^l - x_1^l\right) = 0$$

y la ecuación del plano vendrá dada por

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad = 0$$

1.8. Algunos ejemplos resueltos

1. Hemos definido como la posición, $\vec{R}$, del centro de masa para un sistema de N partículas como

$$\vec{R} = \frac{\Sigma_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\Sigma_{j=1}^{N} m_j}$$

donde $\vec{r}_i$ corresponde con la posición de la $i-$ésima partícula

Determine la posición del centro de masa para un sistema de tres masas, $m_i = 1{,}2{,}3$, colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $l = 2$

Solución: Al colocar el origen de coordenadas en uno de los vértices y uno de los ejes de coordenadas sobre uno de los lados. Entonces,

$$\vec{R} = \frac{\Sigma_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i}{\Sigma_{j=1}^{3} m_j} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_1}{M_T} = \frac{1 \cdot 2\hat{\imath} + 3 \cdot \left(\hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath}\right)}{6} = \frac{5}{6}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}$$

2. Dada una base ortonormal $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ y los siguientes vectores

$$\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k} \quad \vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k} \quad \vec{c} = \hat{\imath} - \hat{k}$$

a) Comprobar si $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ forman base

Solución: Para que los vectores formen base tienen que ser linealmente independientes. Esto es $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ con lo cual

$$\alpha\left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \beta\left(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \gamma\left(\hat{\imath} - \hat{k}\right) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{array}\right.$$

y al resolver esl sistema se obtiene $\alpha = \beta = \gamma = 0$ con lo cual se demuestra que son linealmente independientes

Otra manera de resolverlo es mostrar que $\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \neq 0$ y efectivamente

$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right| = 4 \neq 0$$

b) Si $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ forma base, exprese $\vec{d} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \quad \vec{e} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} \quad \vec{f} = \vec{a} \times \vec{b}$ en término de esa base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. De lo contrario, construya una base como $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ y exprese los vectores $\{\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}\}$ en término de esa nueva base

Solución: Como forman base expresamos los vectores en término esos términos. Esto es

$$\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} = \alpha\left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \beta\left(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \gamma\left(\hat{\imath} - \hat{k}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{array}\right.$$

resolviendo tendremos que $\vec{d} = \frac{5}{8}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$. Seguidamente

$$3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} = \alpha\left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \beta\left(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \gamma\left(\hat{\imath} - \hat{k}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 3 \\ 2\alpha - 2\beta = -2 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{array}\right.$$

resolviendo tendremos que $\vec{e} = -\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{7}{8}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$
Ahora bien

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv \left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) \times \left(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) \equiv \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\hat{\imath} - 12\hat{k}$$

con lo cual

$$4\hat{\imath} - 12\hat{k} = \alpha\left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \beta\left(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \gamma\left(\hat{\imath} - \hat{k}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 4 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = -12 \end{array} \right.$$

y finalmente $\vec{f} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} - \vec{b} + 10\vec{c}$

3. Dados los siguientes puntos en el espacio $(1,0,3); (2,-1,0); (0,-1,1); (-1,0,1)$.

   a) Considere los tres primeros puntos. ¿ Estos tres puntos son coplanares ? ¿ por qué ? De ser coplanares,

Solución: *Tres puntos en el espacio definen un plano, por lo tanto siempre serán coplanares*

1) Encuentre el área del triángulo que tiene por vértices esos tres puntos

Solución: *Para ello seleccionamos uno de los puntos como un vértice privilegiado (digamos $(2,-1,0)$) respecto al cual construirémos dos vectores que representan dos de los lados del triángulo. Esto es*

$$\vec{a} = (1,0,3) - (2,-1,0) \leftrightarrow \vec{a} = -1\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{\mathrm{k}}$$

y

$$\vec{b} = (0,-1,1) - (2,-1,0) \leftrightarrow \vec{b} = -2\hat{\imath} + \hat{\mathrm{k}}$$

con lo cual, el área del vértice será la mitad del área del paralelogramo que tiene por lados estos dos vectores. Es decir

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\| \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathrm{k}} \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{\mathrm{k}} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\|\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{\mathrm{k}}\| = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

2) Encuentre la ecuación del plano que los contiene

Solución: *La ecuación del plano vendrá dada por*

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = 0$$

donde

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{\mathrm{k}}, \quad \vec{r}_1 = \hat{\imath} + 3\hat{\mathrm{k}}, \quad \vec{r}_2 = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}, \quad \vec{r}_3 = -\hat{\jmath} + \hat{\mathrm{k}},$$

con lo cual la ecuación del plano queda como

$$\begin{vmatrix} (x-1) & y & (z-3) \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -(x-1) + 5y - 2(z-3) = 0 \quad \Rightarrow x - 5y + 2z = 7$$

   b) Considere los cuatro puntos ¿ Estos cuatro puntos son coplanares ? ¿ por qué ? De NO ser coplanares, encuentre la distancia del cuarto punto al posible plano que contiene a los otros tres.

Solución: *Para verificar si el cuarto punto está en el plano, verificamos si cumple la ecuación que lo define*

$$(-1) - 5(0) + 2(1) \neq 7$$

los cuatro puntos no son coplanares. Para calcular la distancia del cuarto punto al plano construyo el vector unitario normal al plano

$$\vec{n}_P = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \left(\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) d = \vec{n}_P \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{30}} \left(\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \left(-3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right)$$

con lo cual la distancia al cuarto punto será

$$d = \vec{n}_P \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{30}} \left(\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \left(-3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right) = -\frac{6}{\sqrt{30}}$$

4. Considere los siguientes tres vectores

$$\vec{w}_1 = \hat{\imath} + 3\hat{k} \quad \vec{w}_2 = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} \quad \vec{w}_3 = -\hat{\jmath} + \hat{k}$$

a) ¿ Forman una base para $\mathbb{R}^3$? Explique detalladamente

Solución: *Son linealmente independientes, estos es*

$$\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 + \gamma\vec{w}_3 = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

que se comprueba directamente al resolver

$$\begin{array}{cccc} \alpha & +2\beta & & = 0 \\ & -3\beta & -\gamma & = 0 \\ 3\alpha & & +\gamma & = 0 \end{array}$$

b) Si es que forman base, exprese el vector $\vec{a} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ en la posible base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$

Solución: *Como son linealmente independientes, forman base, con lo cual cualquier vector puede ser expresado como combinación lineal de estos tres. Eso es:*

$$\vec{a} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 + \gamma\vec{w}_3 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha & +2\beta & & = 1 \\ & -3\beta & -\gamma & = -3 \\ 3\alpha & & +\gamma & = 3 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha = \frac{1}{3} \\ \\ \beta = \frac{1}{3} \\ \\ \gamma = 2 \end{array} \right.$$

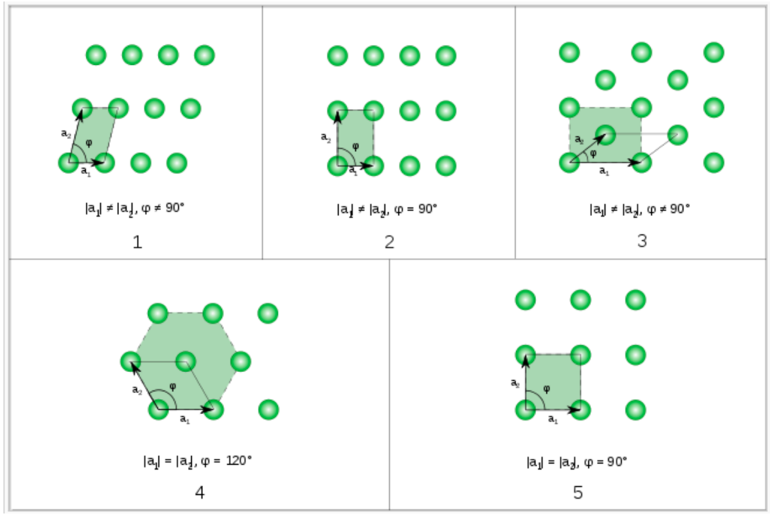


Figura 1.6: Las 5 redes de Bravais bidimensionales fundamentales: 1 Oblicuas, 2 rectangular, 3 rectangular centrada (rómbica), 4 hexagonal, y 5 cuadrada. Figura tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice

1.9. Algunos ejercicios propuestos

1. Auguste Bravais[1] se dio cuenta que replicando un arreglo geométrico muy simple, se puede describir una estructura cristalina. Dicho de otro modo, que conociendo una celda simple, podemos conocer la estructura cristalina. Esto es que las posiciones de los átomos en una red cristalina puede ser descrita por un vector $\vec{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = n^1\hat{a}_1 + n^2\hat{a}_2 + n^3\hat{a}_3 = n^i\hat{a}_i$ donde los $\hat{a}_i$ son vectores no copleares (vectores primitivos o, simplemente en nuestro lenguaje, vectores base). Estos vectores Los n^i son números enteros (negativos, cero o positivos). La posición de cada átomo de un cristal puede ser descrita como reescalamiento (discretos) de este vector genérico, o mas preciso la traslación del origen de coordenadas por un vector. Ese concepto se conoce como redes de Bravais[2]. En cada red puede haber varios vectores primitivos[3]. Se puede definir la *celda primitiva* como la estructura mínima que replicada reproduce todo el cristal. Vale decir la estructura cristalina es invariante bajo traslaciones espaciales del tipo $\vec{R'} = \vec{R} + \vec{T}$ con $\vec{T} = m^i\hat{a}_i$

   a) **Redes de Bravais bidimensionales**. Tal y como muestra la Figura **??** existen 5 tipos distintos de redes de Bravais bidimensionales.

      1) Dada la red bidimensional de la Figura **??** encuentre todos los posibles vectores primitivos y celdas primitivas asociadas.
      2) La humanidad ha estado seducida por la geometría desde que empezó a representar figuras. A partir de las cuatro imágenes que se ilustran en la Figura **??**, encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas.
      3) Maurits Cornelis Escher[4] es un fenomenal dibujante holandés, quien se interes por las simetrías

[1]http://en.wikipedia.org/wiki/Auguste_Bravais
[2]http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice
[3]http://www.engr.sjsu.edu/rkwok/Phys175A/Chapter%201.pdf
[4]http://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

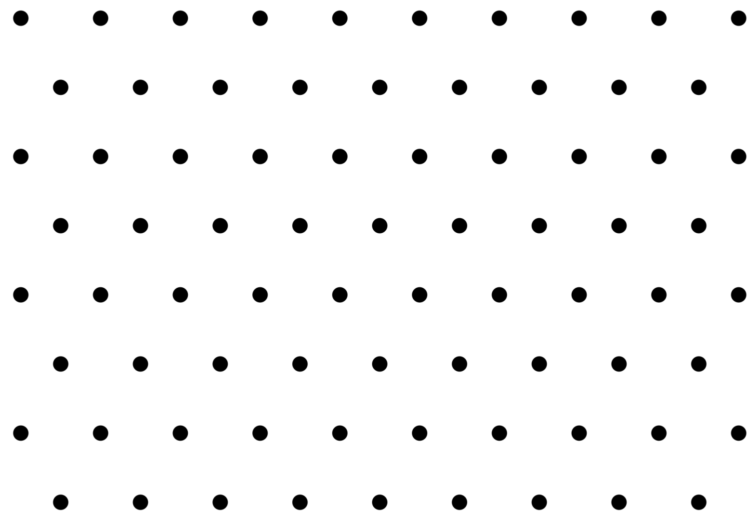


Figura 1.7: Red cristalina bidimensional. Encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas

Figura 1.8: Cuatro detalles geométricos. Cuadrante I: Mural egipcio. Cuadrante II: Mural Mural Asirio. Cuadrante III: Tejido Tahití. Cuadrante IV: Ilustración en pieza de porcelana china. Tomado de http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

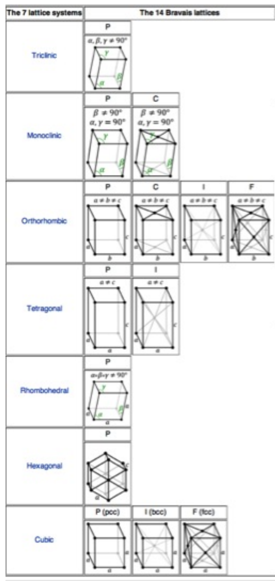
Figura 1.9: Teselados de M.C. Escher, tomados de http://www.wikipaintings.org/en/paintings-by-genre/tessellation?firstArtist=m-c-escher#artist-m-c-escher

de los grupos de imágenes de papel tapiz. Berend, hermano de Maurits, era cristalógrafo y le mostró la belleza de las simetrías de la naturaleza. En las cuatro obras del género de Teselado[5] de M.C. Escher, presentadas en la Fig **??** encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas.

b) **Redes de Bravais Tridimensionales**. Este tipo de redes complica un poco mas el escenario. Se puede demostrar que existen 14 de estas redes, tal y como se muestran en la Figura **??**

- Muestre que los volúmenes de ocupación atómica, para los sistemas Monoclínico, Triclínico, Ortorómbico, Tetragonal, Romboédrico, exagonal y cúbico, corresponden a las expresiones que se muestran en la Figura **??**.
- El sistema cúbico es el mas simple corresponde a un sistema con un único parámetro de red $a = |\mathbf{a}|$, ya que $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Además, una posible descripción, para el caso más simple, es $\mathbf{a} = \hat{\imath}; \mathbf{b} = \hat{\jmath}; \mathbf{c} = \hat{h}$, los tres vectores cartesianos ortogonales. Existen otros sistemas que también están asociados al cúbico. Estos son el sistema cúbico cara centrada (*fcc* por sus siglas en inglés) y cúbico cuerpo centrado (*bcc*). En el primero existen átomos en el centro de cada una de las caras del cubo definido por la tríada, $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$. En el sistema *fcc* se añade un átomo la centro del cubo simple.
  1) Muestre que un sistema *bcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos: $\mathbf{a} = a\hat{\imath}$, $\mathbf{b} = a\hat{\jmath}$ y $\mathbf{c} = a(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})/2$. Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.
  2) Muestre que un sistema *bcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos: $\mathbf{a} =$

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation



Lattice system	Volume
Triclinic	$abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$
Monoclinic	$abc\ \sin\alpha$
Orthorhombic	abc
Tetragonal	a^2c
Rhombohedral	$a^3\sqrt{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha}$
Hexagonal	$\frac{\sqrt{3}\,a^2c}{2}$
Cubic	a^3

Crystal System	Possible Variations	Axial Distances (edge lengths)	Axial Angles	Examples
Cubic	Primitive, Body-centred, Face-centred	a = b = c	α = β = γ = 90°	NaCl, Zinc Blende, Cu
Tetragonal	Primitive, Body-centred	a = b ≠ c	α = β = γ = 90°	White tin, SnO_2, TiO_2, $CaSO_4$
Orthorhombic	Primitive, Body-centred, Face-centred, Base-centred	a ≠ b ≠ c	α = β = γ = 90°	Rhombic sulphur, KNO_3, $BaSO_4$
Hexagonal	Primitive	a = b ≠ c	α = β = 90°, γ = 120°	Graphite, ZnO, CdS
Rhombohedral	Primitive	a = b = c	α = β = γ ≠ 90°	Calcite ($CaCO_3$, Cinnabar (HgS)
Monoclinic	Primitive, Base-centred	a ≠ b ≠ c	α = γ = 90°, β ≠ 90°	Monoclinic sulphur, $Na_2SO_4.10H_2O$
Triclinic	Primitive	a ≠ b ≠ c	α ≠ β ≠ γ ≠ 90°	$K_2Cr_2O_7$, $CuSO_4.5H_2O$, H_3BO_3

Figura 1.10: Las 14 Redes de Bravais Tridimensionales y las estructuras cristalinas asociadas. Tomado de `http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice`

$a(\hat{\jmath}+\hat{k}-\hat{\imath})/2$, $\mathbf{b} = a(\hat{k}+\hat{x}-\hat{\jmath})/2$ y $\mathbf{c} = a(\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k})/2$. Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

3) Muestre que un sistema *fcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos: $\mathbf{a} = a(\hat{\jmath}+\hat{k})/2$, $\mathbf{b} = a(\hat{\imath}+\hat{k})/2$ y $\mathbf{c} = a(\hat{\imath}+\hat{\jmath})/2$. Otra vez, dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

- Se puede definir la red recíproca como

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}; \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}; \quad y \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})};$$

De esta manera es claro que, por construcción, $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = 0$ y además $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a} = 1$ Con lo cual podemos generalizarlo como $\mathsf{e}'^{i}\cdot\mathsf{e}_j = \delta^i_j$. Exprese los vectores y las celdas recíprocas para los sistemas cúbico simple, y los distintos *bcc* y *fcc*. Calcule además el volúmen de cada celda recíproca.

2. Encuentre la ecuación vectorial para una trayectoria recta que pasa por los puntos $P \to (1,2,3)$ y $Q \to (1,1,1)$

3. Encuentre el ángulo entre los siguientes planos $x+y+z=9$ y $x+y-z=3$.

Bibliografía

[1] Arfken, G. B.,Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[2] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analisys** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[3] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[4] Harper, C. (1971) **Introduction to Mathematical Physics** (*Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J:*)

[5] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*

[6] Hauser, W (1971) **Introduction to Principles of Electromagnetism** (*Addison-Wesley Pub Co Reading*)

[7] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press*)

[8] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)

[9] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)

[10] Spiegel, M. (1959) **Vector Analysis** (*Schaums Outline Series, McGraw Hill New York*)