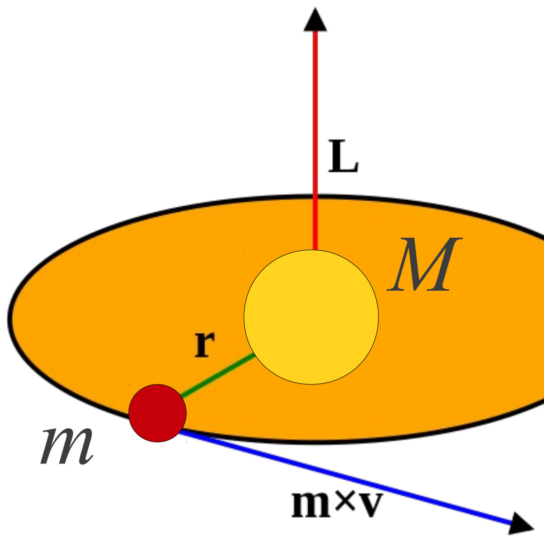
Introducción a la Física (2013)

Universidad Industrial de Santander

- Unidad: 01
- Clase: 14
- Fecha: 20130718J
- Contenido: Leyes de Kepler (II)
- Web: http://halley.uis.edu.co/fisica_para_todos/
- Archivo: 20130718J-HA-leyes-kepler.pdf

En el episodio anterior...

Movimiento circular



- La velocidad cambia en dirección
- Debe haber una aceleración asociada al cambio de velocidad
- Ergo, hay una fuerza

- Fuerza Centrípeta

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

- Pero si los cuerpos tienen masa...

$$F_G = m\frac{GM}{r^2}$$

Tercera Ley

- Velocidad orbital (circular)

$$v=\sqrt{\frac{G\,M}{r}}$$

- Y como la velocidad es

$$v=\frac{\Delta\,x}{t}=\frac{2\,\pi\,r}{t}$$

¡Tercera Ley de Kepler!

- Entonces:

$$\frac{2\,\pi\,r}{t}=\sqrt{\frac{G\,M}{r}} \longrightarrow \boxed{r^3=\frac{GM}{4\,\pi^2}t^2 \longrightarrow r^3\propto t^2}$$

Ecuación “vis-viva”

- Si P=periastro y A=apoastro, se puede ver (hacerlo!!!) que

$$r_P v_P = r_A v_A \rightarrow v_P = (r_A / r_P) v_A$$

- En la órbita, la E_m se conserva:

$$E_m = E_k + E_g = \mathrm{cte}$$

- Planteamos la conservación en el perihelio y en el afelio

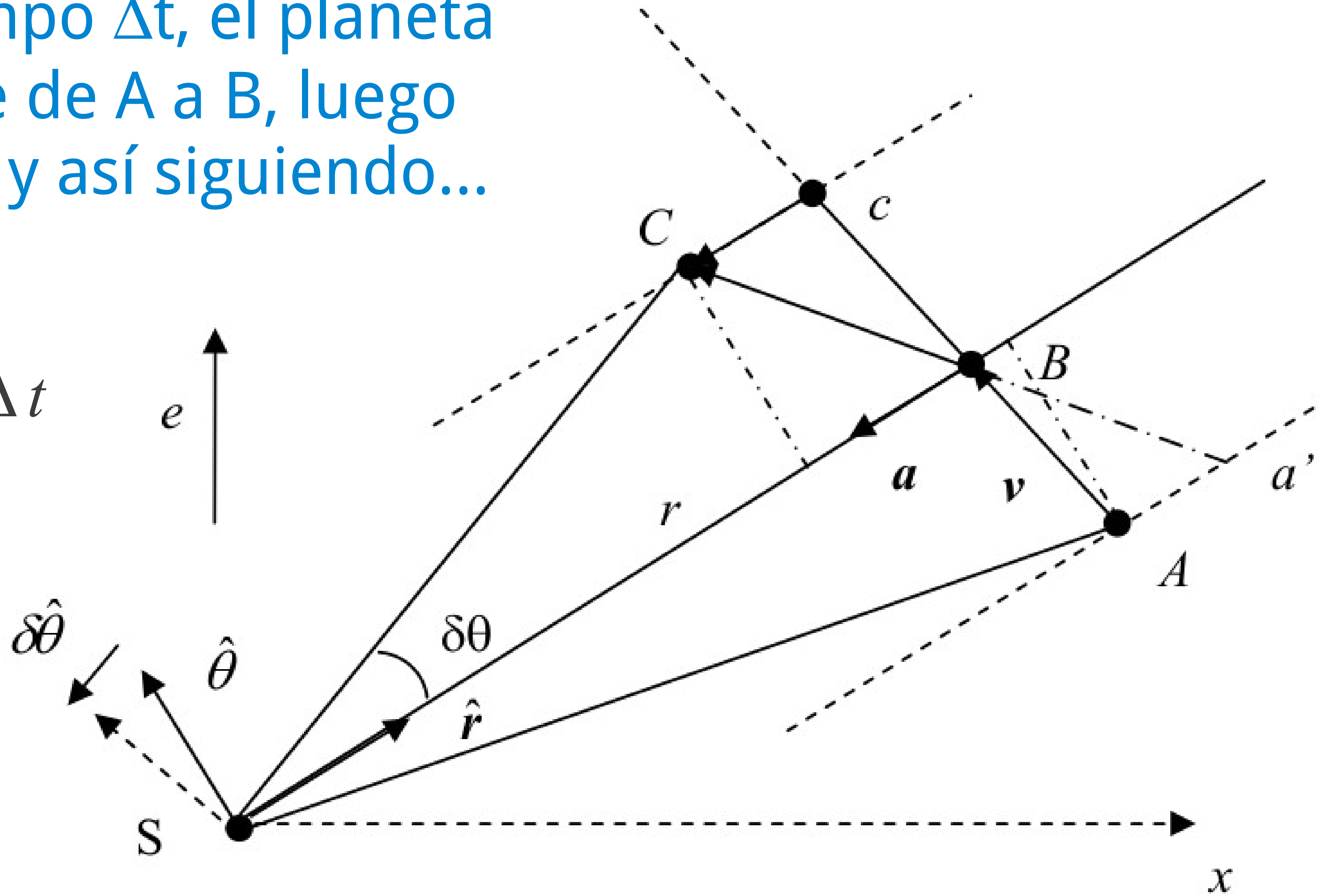
$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{GM}{r_A} = \frac{v_P^2}{2} - \frac{GM}{r_P}$$

- Resolvemos para v_A (maxima) y usamos a=(P+A)/2

$$v(r)^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{GM\left(\frac{2}{A} - \frac{1}{a}\right)}}$$

En el tiempo Δt, el planeta se mueve de A a B, luego De B a C, y así siguiendo...

$t \rightarrow \Delta t$



Algoritmo general

- Trabajo en cartesianas, el origen en el foco (estrella).
- El tiempo avanza en pasos discretos: i=1,2,3..1000
  - En python: `for i in range(1,1001):`
- El intervalo temporal es $\Delta t=(T/1000)$
- Entonces, el tiempo transcurrido desde el inicio hasta el paso i-ésimo es

$$t_i = t_0 + i\,\Delta t \text{ ; si } t_0 = 0\text{, entonces } t_i = i\,\Delta t$$

- Luego, cuando i=1000 entonces $t_i=T$

Condiciones iniciales

- Es más simple empezar en el apoastro:

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\left(-\left(a+f\right),0\right)$$

- En el el apoastro, la velocidad es perpendicular al vector posición y el modulo → “Vis Viva”
- La aceleración siempre tiene dirección radial, sentido hacia la estrella (negativo):

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\bar{\boldsymbol{F}}}{m}=-\left(\frac{GM}{|\bar{\boldsymbol{r}}|^2}\right)\hat{r} \quad (\text{notar que } \hat{r}=\frac{1}{|\bar{\boldsymbol{r}}|}\bar{\boldsymbol{r}} \;\rightarrow\; |\hat{r}|=1)$$

- Media vuelta después, el vector posición debe ser

$$|\bar{\boldsymbol{r}}|=\left(\left(a-f\right),0\right)$$

Entonces...

- El tiempo avanza y entonces, para calcular la posición en el tiempo (i+1)

$$\bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i + \Delta t\, \bar{v}_i$$

- Imprimo las coordenadas de **r** en la nueva pos.
- Calculo la aceleración en $\mathbf{r}_{i+1}$, y entonces:

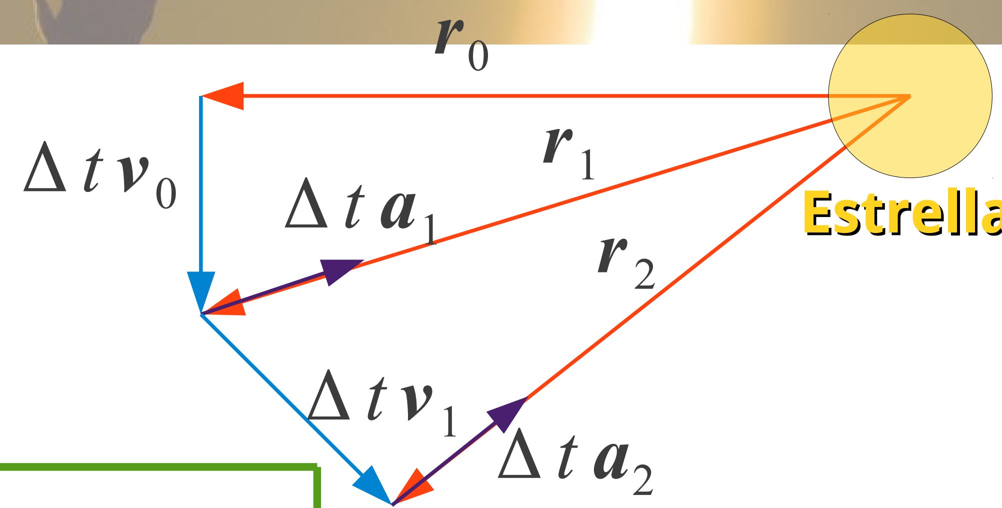
$$\bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i + \Delta t\, \bar{a}_{i+1}$$

- Y este bucle continua hasta i=1000 (t=T)
- Sugerencia: suponga a=b=r y verifique que la trayectoria corresponde a una órbita circular. Luego vuelva a SU exoplaneta

Algoritmo “Newton-Hooke”

$$\Delta t = \frac{T}{1000} = \text{cte}$$

Datos: $\boldsymbol{r}_{i=0}; \boldsymbol{v}_{i=0}$



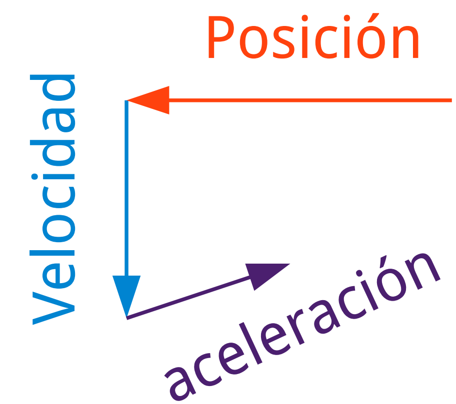
Imprimo $\boldsymbol{r}_i$

Calculo: $\boldsymbol{r}_{i+1} = \boldsymbol{r}_i + \Delta t\, \boldsymbol{v}_i$

Calculo: $\boldsymbol{a}_{i+1} = -\left(\frac{GM}{|\boldsymbol{r}_{i+1}|^2}\right) \hat{r}_{i+1}$

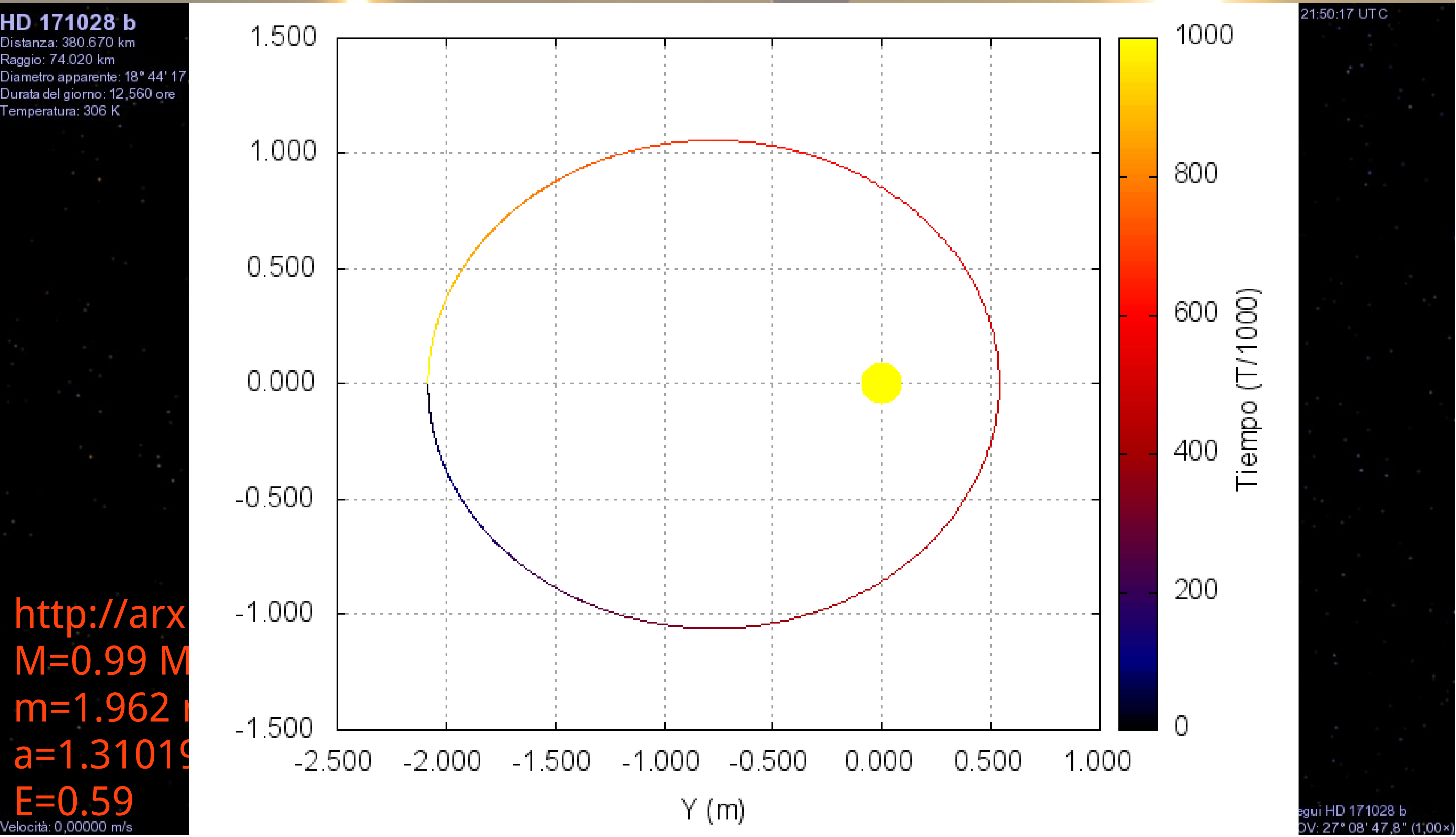
Calculo: $\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_i + \Delta t\, \boldsymbol{a}_{i+1}$

itero i=0...1000

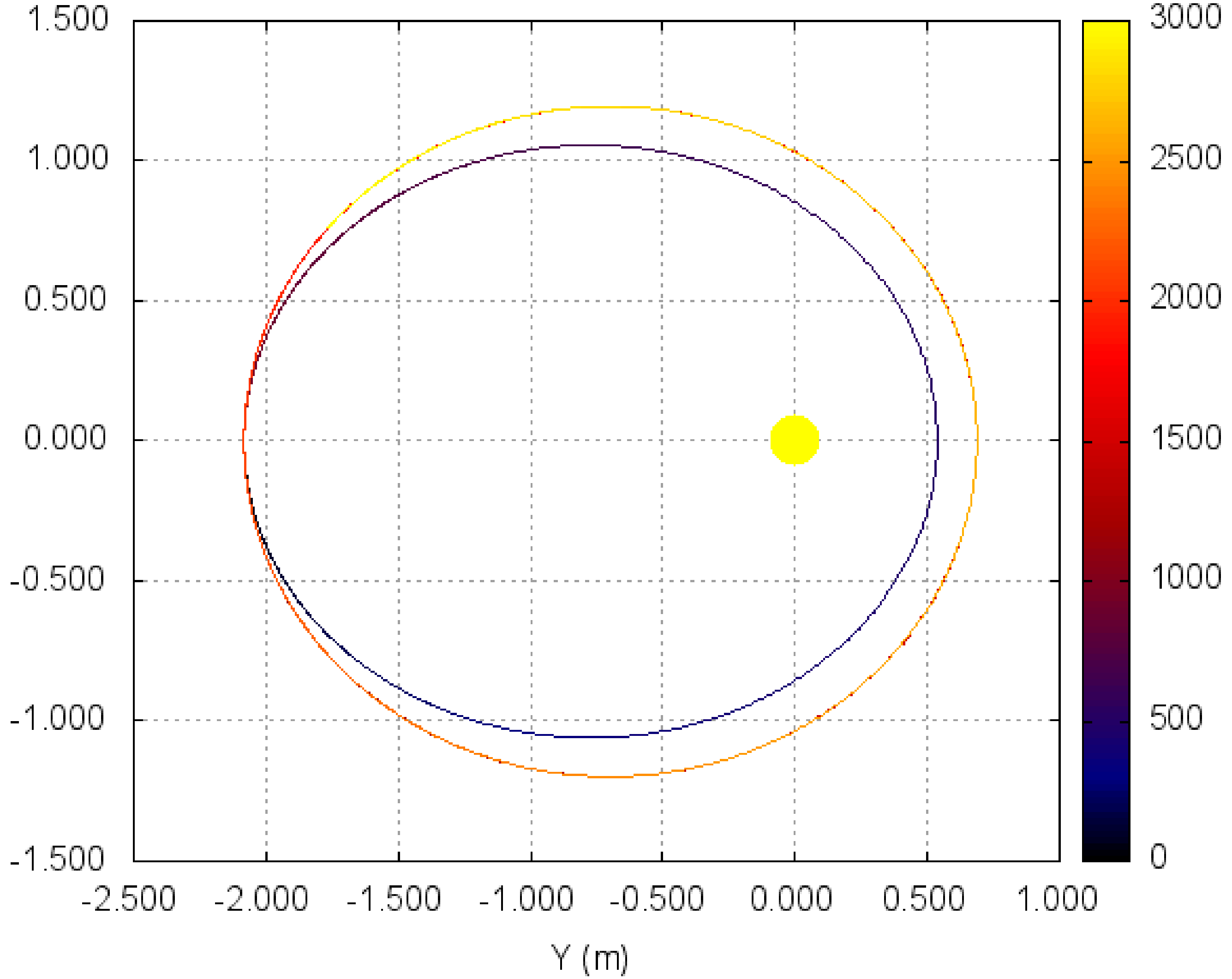


Notar: $\boldsymbol{a}_{i+1} = -\left(\frac{GM}{|\boldsymbol{r}_{i+1}|^3}\right) \boldsymbol{r}_{i+1}$

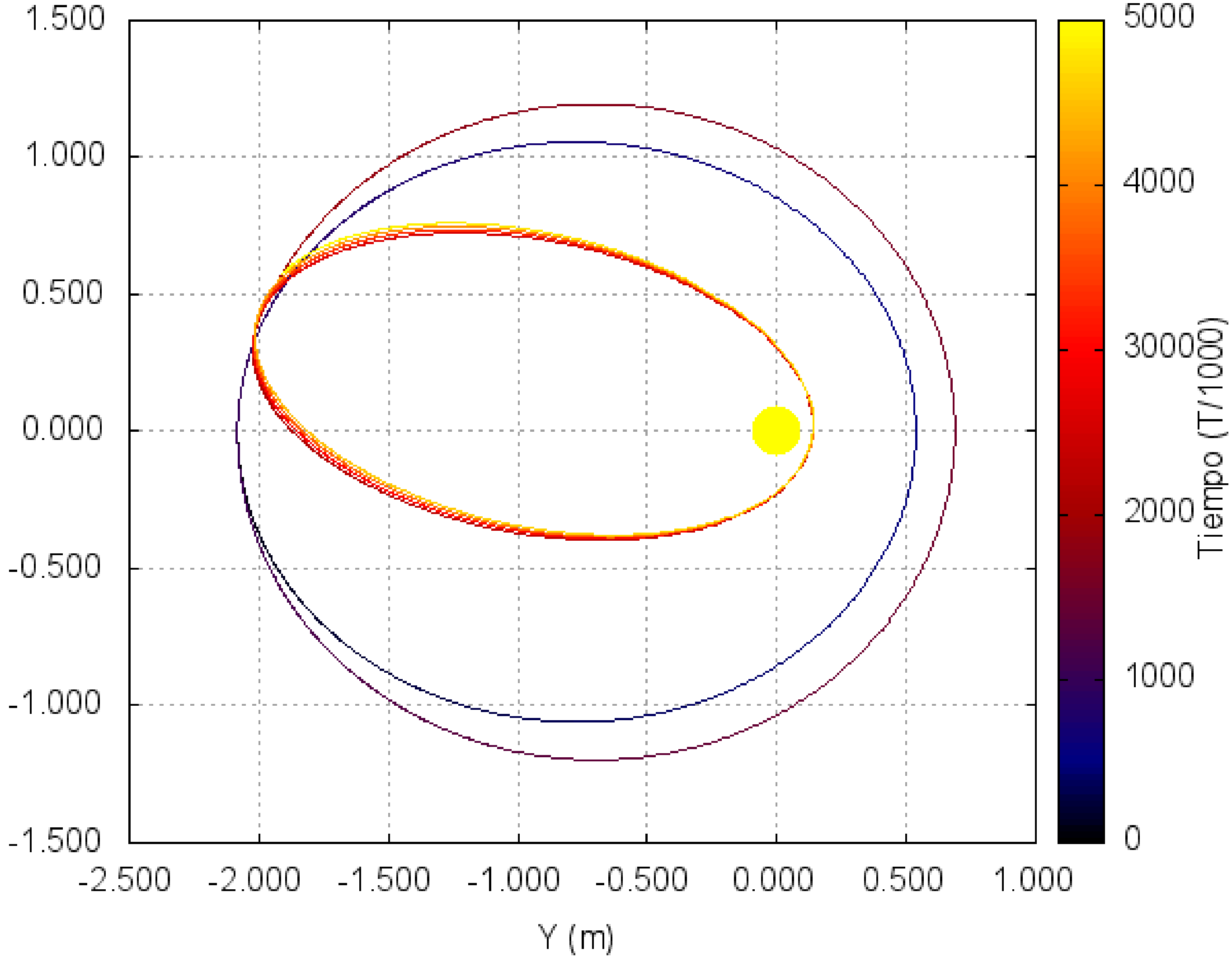
Resultado: órbita de # HD_171028_b



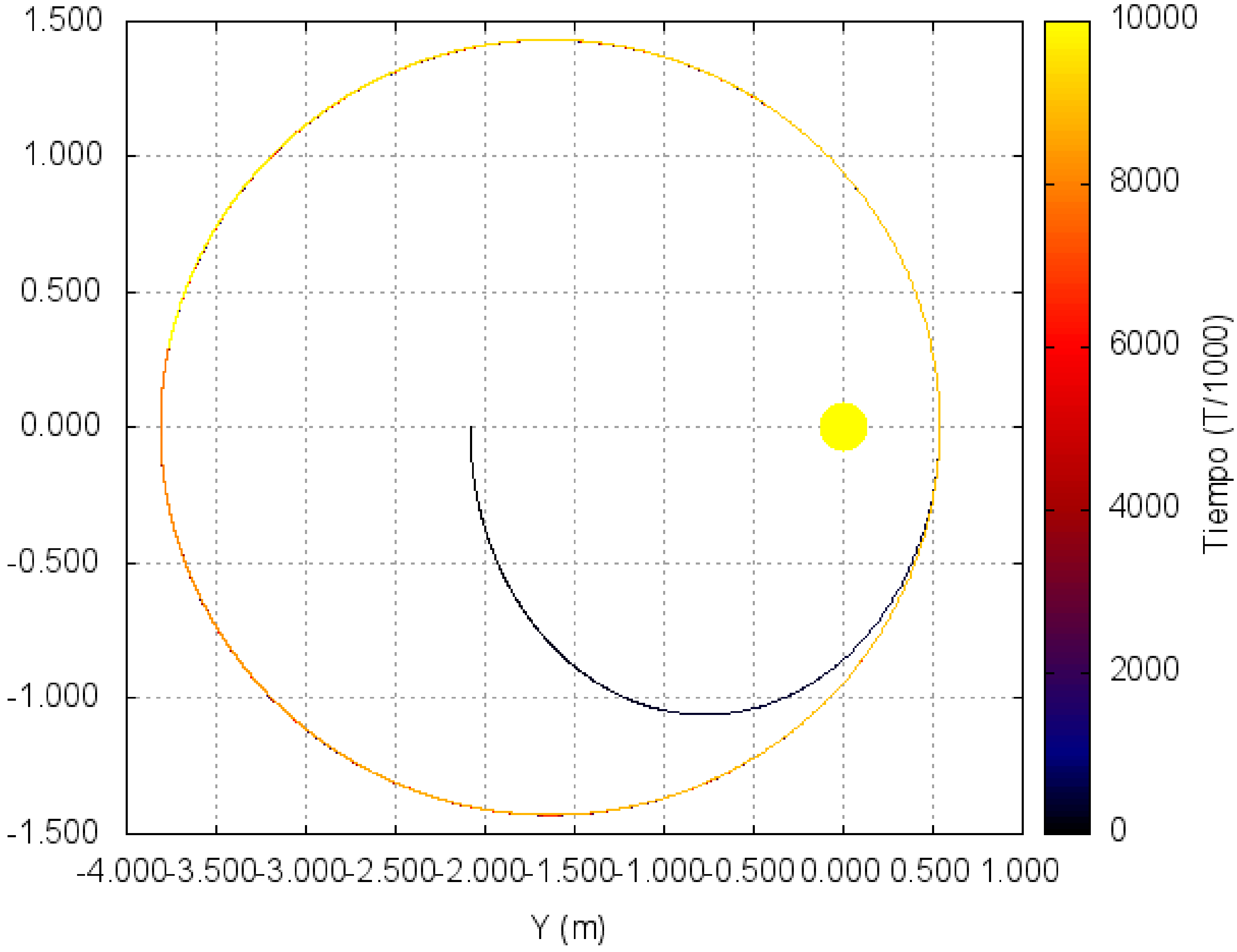
Aumento velocidad en apoastro (+10%)



En apoastro (1er : +10%, 2do -50%)



En el periastro (+5%)



En el periastro (+10%)