Universidad Industrial de Santander - Escuela de Física
Introducción a la Física (Asorey-Sarmiento-Pinilla)

Guía 05: Fuerzas y Kepler
2014

Modalidad de Entrega

- Lea atenta y cuidadosamente todos los problemas antes de proceder al cálculo de los mismos.
- Modalidad de trabajo: grupal, en grupos con un mínimo de dos (2) y un máximo de tres (3) personas por grupo. No se admitirán trabajos individuales ni de grupos con más de tres integrantes.
- El trabajo será entregado utilizando el enlace dispuesto para tal fin en el blog de la materia, teniendo en cuenta lo siguiente:
    - la resolución de al menos uno de los ejercicios (a elección de cada grupo) deberá ser entregada en un `pdf` obtenido utilizando LaTeX.
    - la resolución del resto de los ejercicios puede ser realizada "a mano", pero todas las hojas deberán ser escaneadas
    - se conformará un único archivo `zip` ó `rar`, nombrándolo con los apellidos de los autores del trabajo en orden alfabético, separados por guiones, por ejemplo: *janeway-kirk-picard.zip*, o *cuadrado-gutierrez-yepes.rar*. Este archivo contendrá el `pdf` obtenido en LaTeX, y las hojas escaneadas, y constituye el único entregable de este trabajo, que deberá ser subido al blog.
- Para esta entrega, valen todas las indicaciones dadas para la entrega de las guías 3 y 4.
- El cumplimiento de todas las indicaciones será tenido en cuenta.
- Y otra vez, lea atenta y cuidadosamente todos los problemas antes de proceder al cálculo de los mismos.
- **Fecha límite de entrega: Lunes 04/Agosto/2014 a las 23:59:59.**

Ejercicios

1) Para el caso gravitatorio, verifique numéricamente que

$$\left|\vec{F}_g\right| = \lim_{\Delta r \to 0} -\frac{\Delta E_g}{\Delta r}.$$

Para ello, repase la clase 20140710J, y luego considere la diferencia de energía potencial gravitatoria para un cuerpo de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ ubicado a una altura $h \equiv \Delta r = (R+h) - R$ sobre la superficie terrestre:

$$-\frac{\Delta E_g}{\Delta r} = -\left(-\frac{GMm}{h}\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right)\right),$$

donde M y R corresponden a la masa y al radio de la Tierra respectivamente, considerando los siguientes valores para h: $h_1 = 10000\,\mathrm{m}$, $h_2 = 1000\,\mathrm{m}$, $h_3 = 100\,\mathrm{m}$, $h_4 = 10\,\mathrm{m}$,

$h_5 = 1$ m, $h_6 = 0{,}1$ m y $h_7 = 0{,}01$ m. Note que cuando $h \to 0$, el resultado del cálculo tiende al peso ($P = mg$) de un cuerpo de masa $m = 1$ kg en la superficie de la Tierra. Ayuda: Puede hacer estos cálculo utilizando convenientemente una planilla tipo Excel o Calc.

2) Imagine un carro de supermercado lleno de comestibles que, estando inicialmente en reposo, adquiere una rapidez $v_f = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ luego de que usted lo empujara una distancia de 10 m a lo largo de un pasillo. Entonces:

   1) Estime la masa del carro (a la Fermi) y exponga los cálculos realizados.
   2) Calcule el trabajo realizado por usted para lograr dicho cambio en la velocidad
   3) Calcule la fuerza necesaria para lograr ese cambio en la velocidad
   4) Sin usar ecuaciones cinemáticas, calcule la aceleración media que actuó sobre el carro.

3) Ahora imagine que el carro del ejercicio anterior se encuentra en el extremo inferior de una rampa que forma un ángulo de 15º respecto a la horizontal, y usted lo empuja 10 m a lo largo de la rampa hasta llegar al extremo superior de la misma. Repita los cálculos anteriores.

4) Cuando un objeto se mueve en el aire experimenta una fuerza de rozamiento que es proporcional al cuadrado de la velocidad del mismo respecto al aire. Así, si el objeto duplica su velocidad, la fuerza de rozamiento es cuatro veces más grande. Teniendo esto en cuenta, cuando un cuerpo está en caída libre en el aire pronto alcanza una velocidad para la cual la fuerza de rozamiento iguala al peso del mismo. A partir de ese punto, el objeto cae con velocidad constante (¿por qué?) llamada velocidad terminal. En general, la velocidad terminal depende de la forma del objeto. Para una gota de agua de diámetro d , la velocidad terminal está dada por la siguiente ecuación:

$$v_t = \sqrt{8000 d\,\mathrm{s}^{-2}}$$

   1) Sabiendo que la velocidad terminal promedio de la lluvia es $v_t = 6{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, estime la masa de una gota de agua típica ($\rho = 1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$).
   2) Calcule la energía cinética de la gota al llegar al piso, el trabajo de la fuerza de rozamiento para una gota que cae desde una altura de 1000 m.

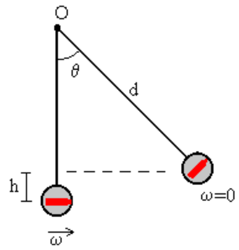
5) Calcule el vector cantidad de movimiento total $\vec{p}_T$ en cada uno de los siguientes casos:

   1) un cuerpo de masa $m = 2$ kg que se mueve con velocidad $\vec{v} = 5\hat{\imath}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$,
   2) un automóvil de masa $m = 1200$ kg y velocidad $\vec{u} = 100\hat{\imath}\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
   3) dos automóviles de masa $m_1 = 1000$ kg y $m_2 = 1600$ kg y velocidades $\vec{u}_1 = 20\hat{\imath}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y $\vec{u}_2 = 40\hat{\imath}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
   4) dos automóviles de masa $m_1 = 1000$ kg y $m_2 = 1600$ kg y velocidades $\vec{u}_1 = 40\hat{\imath}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y $\vec{u}_2 = -20\hat{\imath}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
   5) dos automóviles de masa $m_1 = 1000$ kg y $m_2 = 1600$ kg y velocidades $\vec{u}_1 = 40\hat{\imath}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y $\vec{u}_2 = 20\hat{\jmath}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
   6) un automóvil de masa $m = 900$ kg y velocidad $u = 130\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ y un camión de masa $M = 30000$ kg y velocidad $u = 80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ con igual dirección pero sentidos opuestos
   7) Ocho esferas de igual masa $m = 1$ kg, que se mueven cada una con la misma rapidez $1\,\mathrm{s^{-1}}$ y en sentido N, NE, E, SE, S, SO, O y NO respectivamente.

6) Imagine dos cuerpos de masas m_1 y $m_2 = 3m_1$ que se encuentran en reposo ($u_1 = u_2 = 0$). Ambos cuerpos están unidos por un resorte de masa despreciable y cuya constante elástica vale $k = 1000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. El resorte está comprimido $\Delta x = 0{,}5\,\mathrm{m}$ respecto de su posición de equilibrio. Una vez liberado el resorte, encuentre la relación entre las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de cada cuerpo. Luego calcule dichas velocidades y, proponiendo algún valor para la masa m_1, calcule la energía cinética de cada cuerpo.

7) Un fuego artificial de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ se encuentra en reposo en el instante en que estalla, separándose en 100 partes de igual masa $m_i = m/100$ que luego de la explosión, se mueven en distintas direcciones y sentidos pero todos con la misma rapidez $v = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calcule el vector cantidad de movimiento total $\vec{p}_f$ luego de la explosión. Justifique.

8) Un péndulo balístico es un dispositivo utilizado para determinar el poder de fuego de un arma. Consiste en un péndulo formado por una bloque de madera de masa $M = 5{,}98\,\mathrm{kg}$ que pende de un hilo de longitud $d = 1{,}5\,\mathrm{m}$ (considerar que esa es la distancia entre el anclaje del péndulo y el centro del bloque). Una bala de masa $m = 20\,\mathrm{g}$ es disparada por un revolver e impacta en el centro del bloque de madera. Tras el impacto, el bloque se eleva hasta formar un ángulo de $\theta = 15^{\mathrm{o}}$ respecto a la vertical. ¿Cuál es la velocidad de la bala al salir del revolver?



9) Propiedades elípticas:

   1) Verifique que el círculo, cuya expresión es $x^2 + y^2 = r^2$, pertenece a la familia de las elipses:
   $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$
   donde a y b son respectivamente el eje mayor y menor de la elipse.

   2) La excentricidad ϵ es una características de las cónicas y está dada por
   $$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$
   Utilizando las propiedades de la elipse, demuestre que la distancia f entre el centro de la elipse y uno de los focos está dada por:
   $$f = a\,\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$$
   Luego, muestre que la distancia mínima del foco a un punto de la órbita (llamada periápside) esta dada por $r_{pe} = (1 - e)a$, mientras que la distancia máxima (apoápside) es $r_{ap} = (1 + e)a$.

   3) Utilizando el *método del jardinero*, construya una elipse que tenga $a = 10\,\mathrm{cm}$, y $b = 5\,\mathrm{cm}$.

10) Recordemos la primera ley de Kepler:

   "*Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de sus focos*"

   Utilizando los valores del afelio, perihelio y excentricidad de Mercurio, Venus, la Tierra, Urano y Plutón (utilizar la tabla de la guía 2), calcule para cada uno de ellos lo siguiente:

   1) Los valores de a y b para cada una de las órbitas;

2) La distancia desde el “*otro foco*” al Sol.

11) Utilizando los períodos orbitales y las distancias al Sol para Venus, La Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, verificaremos la tercera ley de Kepler,

$$a^3 = k_{\text{Sol}} T^2,$$

donde a es el eje mayor de la elipse (igual a la distancia media por las propiedades de las elipses), T es el periodo del planeta, y k es la constante de proporcionalidad y corresponde a,

$$k = \frac{GM_{\text{Sol}}}{4\pi^2}.$$

Para ello, grafique el cuadrado del período orbital, medido en días, como función del cubo de la distancia media al Sol, medida en millones de kilómetros.

La pendiente de la recta obtenida, $\Delta y/\Delta x$, no es otra que la constante de proporcionalidad k_{Sol}. A partir de los resultados obtenidos, calcule el valor de k en el sistema métrico internacional, y luego, utilizando este valor, calcule la masa del Sol. Compare el resultado obtenido con la masa tabulada del Sol, $M_{\text{Sol}} = 1{,}988 \times 10^{30}$ kg.

12) Satélites

1) A partir de la expresión para la velocidad orbital de una órbita circular,

$$v_O = \frac{2\pi r}{t},$$

usando la tercera ley de Kepler demuestre que para el caso circular la velocidad orbital vale:

$$v_O = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

dónde G es la constante de gravitación universal, M es la masa del cuerpo central, r es el radio de la órbita y T es el periodo orbital.

2) Calcule el radio r para la órbita de un satélite geoestacionario ($T = 24$ horas).

3) Calcule la velocidad orbital de la estación espacial internacional, que se encuentra a una altura media de 330 km. Luego determine el tiempo requerido para completar una órbita.

13) Un nuevo cometa de masa $m = 10^{12}$ kg fue descubierto en el sistema solar. Luego de algunas mediciones, se supo que su órbita es elíptica y el perihelio está situado a sólo 10^6 km del Sol.

1) Calcule la distancia al Sol del afelio sabiendo que el período es de 10 años.

2) ¿Cuáles es el valor de la energía potencial en el perihelio y en el afelio?

3) Usando la segunda ley de Kepler, calcule la relación entre las energías cinéticas en el afelio y en el perihelio (ayuda: suponga que las áreas barridas son triangulares, $A = \frac{1}{2} b \times h$).

14) Imagine que un planeta de masa $m = M_{\text{Tierra}}$ orbita en torno a una estrella de masa $M = 6{,}5 \times 10^{30}$ kg a una distancia media $r = 4{,}5 \times 10^8$ km. Usando las leyes de Kepler, calcule el tiempo que requiere el planeta para completar una órbita completa y su velocidad orbital media.

15) La órbita del planeta Mercurio es bastante alongada y posee una de las mayores excentricidades del Sistema Solar, siendo sólo superada por Plutón. Las distancias al Sol en su perihelio y afelio son:

Perihelio: $\overline{PE} = 45\,943\,700\,\text{km}$; Afelio $\overline{AF} = 69\,874\,671\,\text{km}$, respectivamente.

1) Calcule la excentricidad ϵ de la órbita y determine el valor de los semiejes a y b.
2) Se sabe que la cantidad de movimiento angular de Mercurio en su órbita es $L = 8{,}9585 \times 10^{38}\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$. Calcule la velocidad del planeta en el perihelio y en el afelio.
3) Usando la Tercera Ley de Kepler, determine el periodo T del planeta.