Universidad Industrial de Santander

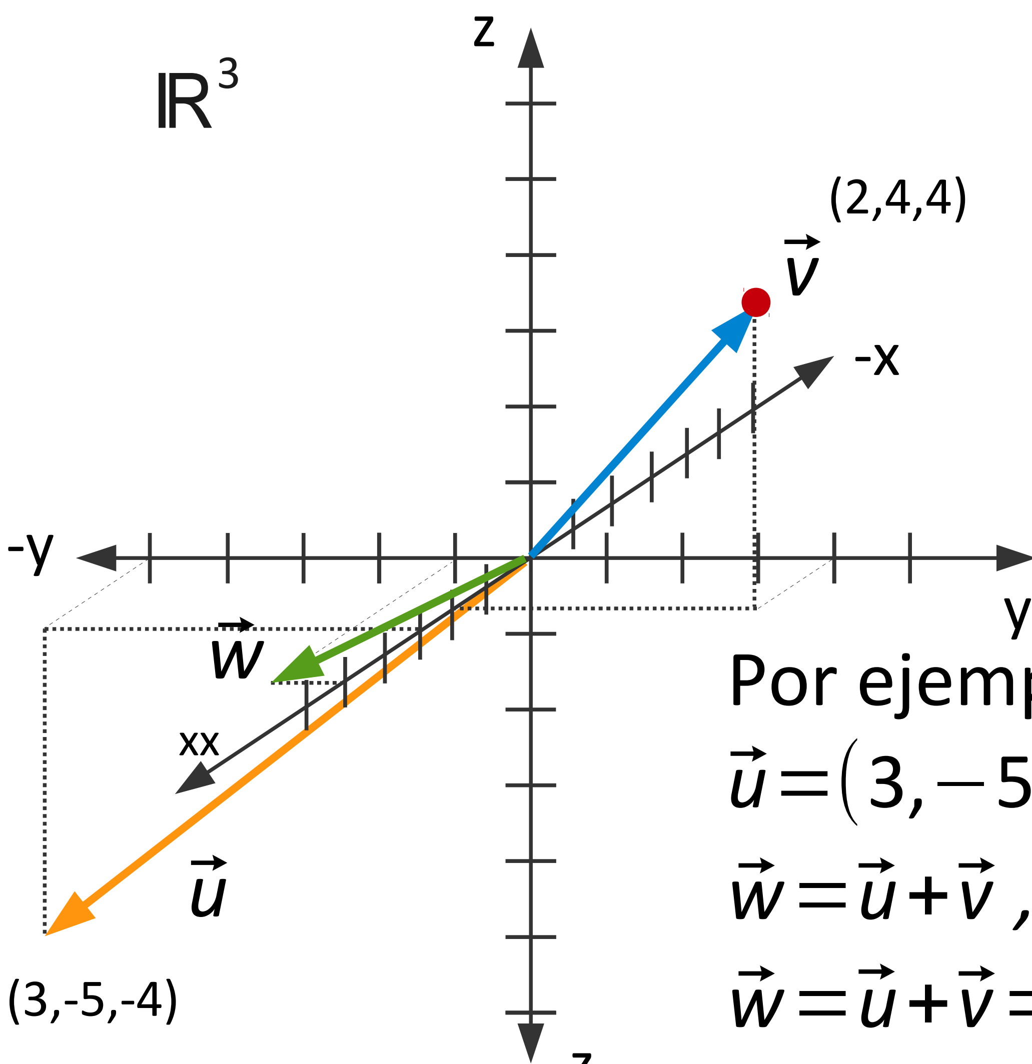
Introducción a la Física (2014)

- Unidad: 01
- Clase: 05
- Fecha: 20140527M
- Contenido: Herramientas Matemáticas
- Web: http://halley.uis.edu.co/fisica_para_todos/
- Archivo: 20140527M-HA-herramientas_matematicas_3.pdf

En el episodio anterior

En el episodio anterior

Operación suma



Sean $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{u} = (u_{1,} u_{2,} u_3)$ y $\vec{v} = (v_{1,} v_{2,} v_3)$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{w} = (w_{1,} w_{2,} w_3)$

$\vec{w} = ((u_1 + v_1), (u_2 + v_2), (u_3 + v_3))$

Por ejemplo:

$\vec{u} = (3, -5, -4)$ y $\vec{v} = (2,4,4)$

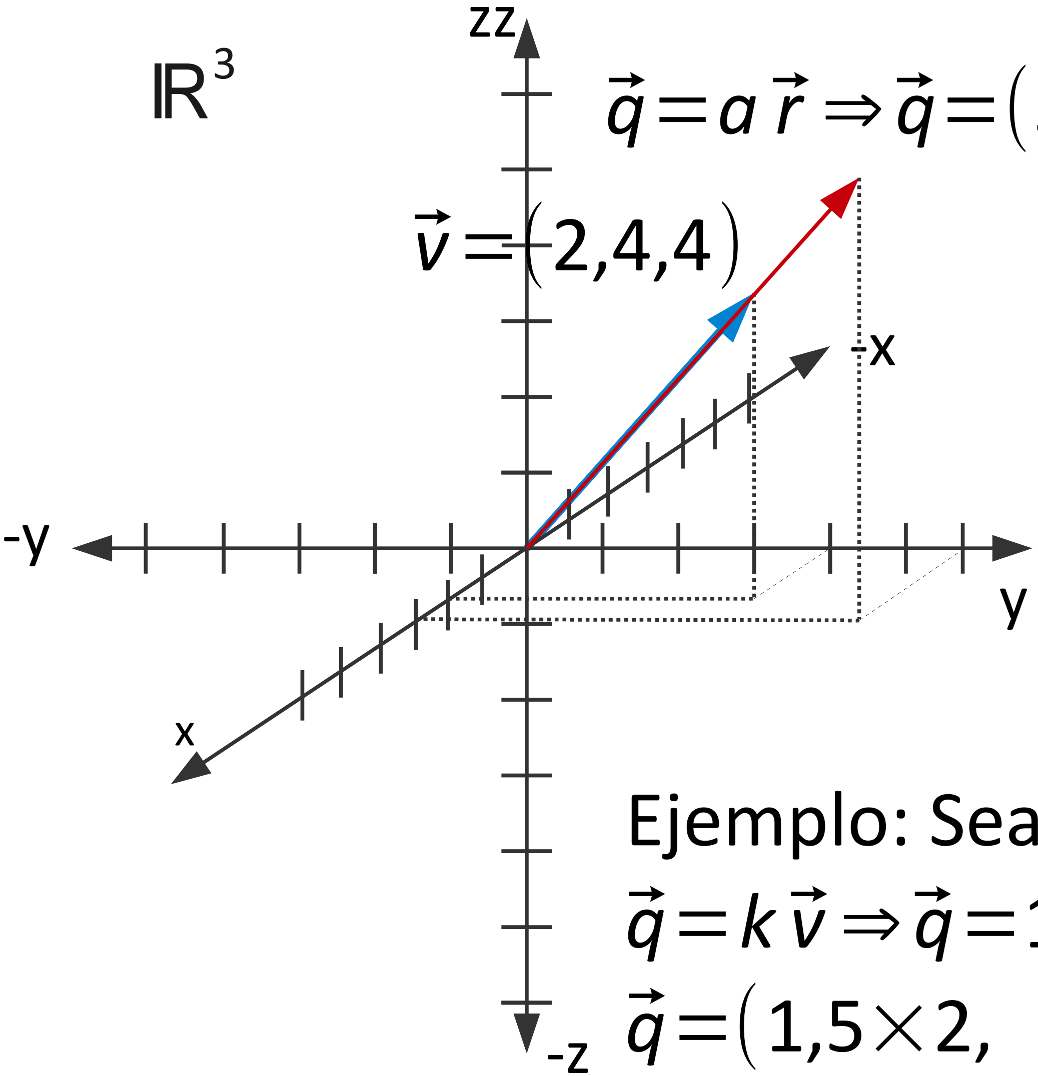
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = ((3+2), (-5+4), (-4+4))$

$\vec{w} = (5, -1, 0)$

Producto por un escalar

$\mathbb{R}^3$



$$\vec{q} = a\,\vec{r} \Rightarrow \vec{q} = (3,6,6)$$

$$\vec{v} = (2,4,4)$$

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} = (v_{1,} v_{2,} v_3) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{q} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow q = (q_{1,} q_{2,} q_3)$

$$\vec{q} = a\,\vec{v}$$

$$\vec{q} = a(v_{1,} v_{2,} v_3)$$

$$\vec{q} = (a\,v_{1,} a\,v_{2,} a\,v_3)$$

Ejemplo: Sea $a = 1{,}5$ y $\vec{v} = (2,4,4)$

$$\vec{q} = k\,\vec{v} \Rightarrow \vec{q} = 1{,}5(2,4,4)$$

$$\vec{q} = (1{,}5 \times 2,\ \ 1{,}5 \times 4,\ \ 1{,}5 \times 4)$$

$$\vec{q} = (3,6,6)$$

Combinación lineal

Para un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$, decimos que un vector $\vec{u}$ es combinación lineal (c.l.) de los vectores

$$S=\{\vec{v}_{1,}\vec{v}_{2,}\ldots\vec{v}_{n}\},$$

si existen n escalares $a_{1,}a_{2,}\ldots a_{n}$ tales que:

$$\vec{u}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\ldots+a_n\vec{v}_n$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, sea $\vec{u}=(2{,}2{,}4)$ y sea

$$S=\{\vec{v}_1=(4{,}0{,}0),\vec{v}_2=(0{,}3{,}0),\vec{v}_3=(0{,}0{,}2)\}$$

El vector $\vec{u}$ es c.l. de los vectores de S ya que:

$$\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{v}_1+\frac{2}{3}\vec{v}_2+2\vec{v}_3\Rightarrow\vec{u}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3$$

- Decimos que un conjunto de vectores de un espacio vectorial V es un **sistema de generadores** si es posible generar a todos los elementos del espacio como c.l. de los vectores del conjunto

Ejemplo: El conjunto $S=\{\vec{v}_1=(4,0,0),\vec{v}_2=(0,3,0),\vec{v}_3=(0,0,2)\}$

es un generador de $\mathbb{R}^3$: el vector $\vec{r}=(r_{1,}r_{2,}r_3)$:

$$\vec{r}=\frac{r_1}{4}\vec{v}_1+\frac{r_2}{3}\vec{v}_2+\frac{r_3}{2}\vec{v}_3$$

- Decimos que un conjunto de vectores es **linealmente independiente** si el vector nulo no se puede expresar como c.l. de los elementos del conjunto

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, sea $\vec{0}=(0,0,0)$ y sea

$$S=\{\vec{v}_1=(4,0,0),\vec{v}_2=(0,3,0),\vec{v}_3=(0,0,2)\}$$

Sólo la c.l. trivial permite obtener $\vec{0}$ a partir de S:

$$\vec{0}=0\vec{v}_1+0\vec{v}_2+0\vec{v}_3\Rightarrow a_1=a_2=a_3=0$$

S es un conjunto linealmente independiente (l.i.)

Base de un espacio vectorial

- Si ***V*** es un espacio vectorial, y *S* es un **conjunto de generadores** de ***V*** que sea **linealmente independiente**, entonces *S* es una **base de *V***.
  - Todos los vectores de V se obtienen como c.l. de S
  - Todo espacio vectorial tiene una base

  Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, el conjunto

  $$S=\{\vec{v}_1=(4,0,0),\vec{v}_2=(0,3,0),\vec{v}_3=(0,0,2)\}$$

  es una base de $\mathbb{R}^3$
- Se define como **dimensión del espacio vectorial *V*** al **número de vectores de una base** de ***V***.

  Ejemplo: La dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3

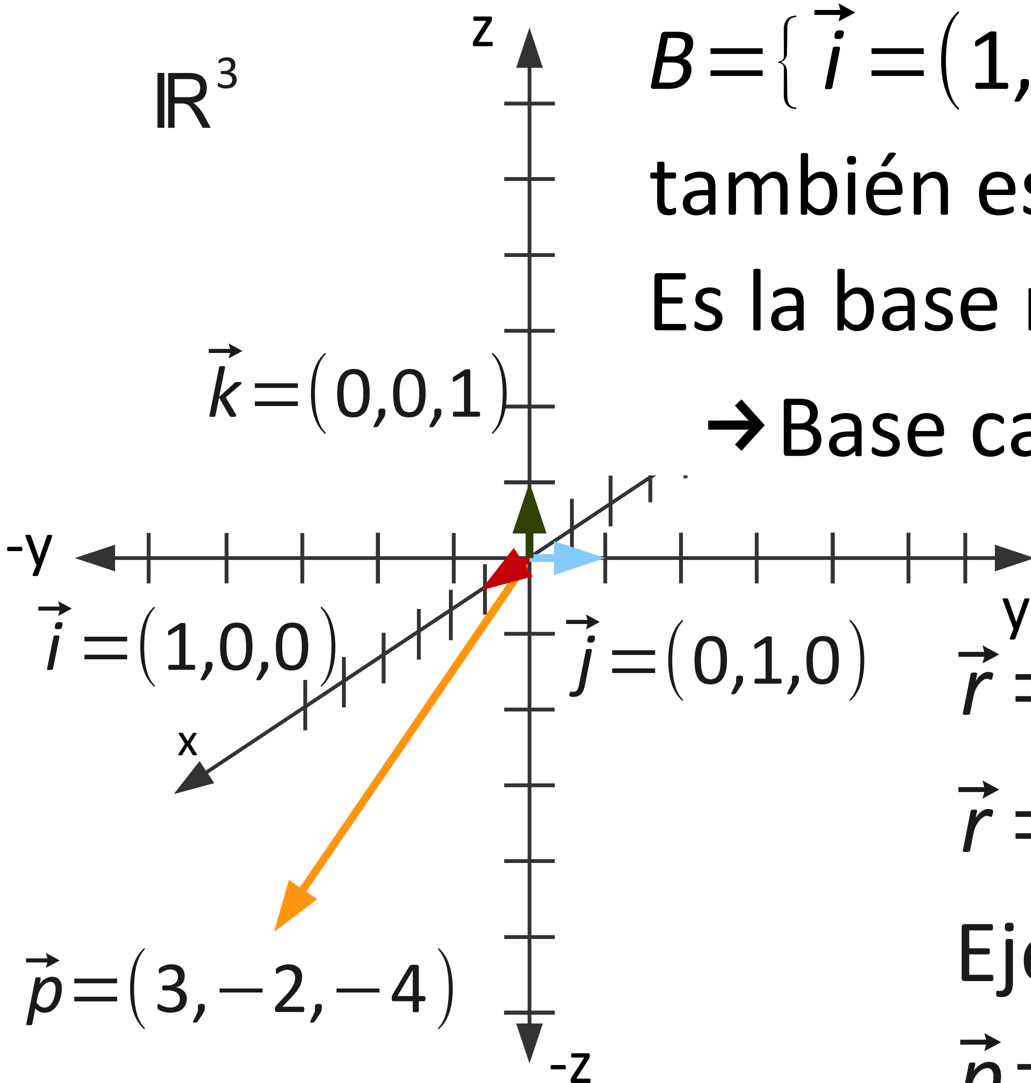
Base canónica

$$B=\{\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)\}$$

también es una base de $\mathbb{R}^3$

Es la base más simple

→ Base canónica de $\mathbb{R}^3$



$$\vec{r}=(r_{1,}r_{2,}r_3)$$

$$\vec{r}=r_1\vec{i}+r_2\vec{j}+r_3\vec{k}$$

Ejemplo: $\vec{p}=(3,-2,-4)$

$$\vec{p}=3\vec{i}+(-2)\vec{j}+(-4)\vec{k}$$

Nueva operación en un espacio vectorial

- Hasta aquí, trabajamos con operaciones que:
  - **Suma** → **vector** + **vector** = **vector**
  - **Producto por un escalar** → escalar **vector** = **vector**
- Podríamos imaginar una nueva operación que:
  - **vector · vector =** escalar ← **Producto escalar**

Producto Escalar

- Sea $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial, definimos una nueva operación sobre los vectores del espacio vectorial:

- **Producto escalar** (producto interior, producto punto)

$$\text{Sean } \vec{v} \in \boldsymbol{V} \text{ y } \vec{w} \in \boldsymbol{V} : \quad k = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad k \in \mathbb{R}$$

- Si el cuerpo es el de los reales, $k \in \mathbb{R}$, entonces:

Sean $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in \boldsymbol{V}$, y $s, t \in \mathbb{R}$:

  - **Conmutatividad:** $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
  - **Linealidad:** $\left(s\vec{u} + t\vec{v}\right) \cdot \vec{w} = s\left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right) + t\left(\vec{v} \cdot \vec{w}\right)$
  - **Positividad:** $\vec{v} \cdot \vec{v} \geqslant 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Espacios normados

- Sea ***V*** un espacio vectorial sobre un cuerpo ***K***. (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)
- Se dice que ***V*** es un **espacio vectorial normado** si se puede definir una **norma**, $\|.\|:\boldsymbol{V}\rightarrow\mathbb{R}$, que verifica:
  - **No negatividad:**

$$\forall\,\vec{v}\in\boldsymbol{V},\ \|\vec{v}\|>0 \text{ si } \vec{v}\neq\vec{0},\ \text{y}\ \|\vec{v}\|=0\Leftrightarrow\vec{v}=\vec{0}$$

  - **Homogeneidad:**

$$\forall\,\vec{v}\in\boldsymbol{V}\ \text{y}\ \forall\,k\in\mathbb{R}\Rightarrow\|k\,\vec{v}\|=|k|\times\|\vec{v}\|$$

  - **Desigualdad triangular:**

$$\forall\,\vec{v}\in\boldsymbol{V}\ \text{y}\ \vec{w}\in\boldsymbol{V}\Rightarrow\|\vec{v}+\vec{w}\|\leqslant\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$$

Norma inducida por el producto escalar

- Asociaremos la **norma de un vector con el producto escalar consigo mismo**

$$\forall\, \vec{v} \in \boldsymbol{V}\,,\ \ \|\vec{v}\| \equiv \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

- A partir de las propiedades del producto escalar, es posible verificar que está definición cumple con las propiedades de la norma ← **Hacerlo**

Distancia

- En todo espacio vectorial normado, se puede definir una **distancia**, $d : \boldsymbol{V} \rightarrow \mathbb{R}$
- Si $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial normado,

$$\forall\, \vec{v} \in \boldsymbol{V} \text{ y } \vec{w} \in \boldsymbol{V}\,,\quad d(\vec{v},\vec{w}) \equiv \|\vec{v}-\vec{w}\|$$

- entonces V es un espacio métrico. Propiedades de d:
  - **Positividad:** $d(\vec{v},\vec{w}) \geqslant 0$
  - **Reflexividad:** $d(\vec{v},\vec{v}) = 0$
  - **Indiscernibilidad:** $d(\vec{v},\vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{w}$
  - **Simetría:** $d(\vec{v},\vec{w}) = d(\vec{w},\vec{v})$
  - **Desigualdad Triangular:** $d(\vec{v},\vec{u}) \leq d(\vec{v},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{u})$

La distancia induce el módulo de un vector

- El concepto de distancia en un espacio vectorial permite introducir el **módulo** (o **longitud**) de un vector
- Si ***V*** es un espacio métrico, el **módulo de un vector** queda definido como la **"distancia" entre el origen y el extremo del vector**:

$$\forall\, \vec{v} \in \boldsymbol{V},\ |\vec{v}| \equiv d(\vec{v}, \vec{0}) = \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- Llamamos **vector unitario** o simplemente **versor** a un **vector con módulo igual a 1**

$$\forall\, \vec{v} \neq \vec{0} \in \boldsymbol{V},\ \hat{v} \equiv \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|},\quad \rightarrow |\hat{v}| = 1$$

Resumen hasta aquí

- Un **espacio vectorial**, un **cuerpo** y **operaciones**:
  - **Suma**: **vector+vector** = **vector** $\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}$
  - **Prod. por escalar** : escalar **vector** = **vector** $a\,\vec{p}=\vec{q}$
  - **Prod. Escalar: vector** · **vector** = escalar $\vec{v}\cdot\vec{w}=b$
- El **producto escalar** induce una **norma**

$$\|\vec{v}\|\equiv\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

- La **norma** induce una **distancia**

$$d\left(\vec{v},\vec{w}\right)\equiv\|\vec{v}-\vec{w}\|=\sqrt{\left(\vec{v}-\vec{w}\right)\cdot\left(\vec{v}-\vec{w}\right)}$$

- La **distancia** induce el **módulo o longitud** de un vector

$$|\vec{v}|\equiv\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Caso concreto: vectores en R^n

- En el espacio vectorial **R**^{n}, el producto escalar se define:

Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^n, \vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \equiv \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n)$$

Producto escalar en R^2 y R^3

- Por ejemplo, en $\mathbf{R}^3$: (para $\mathbf{R}^2$ tomar z=0)

$$\text{Sean } \vec{v} \in \mathbb{R}^{3,} \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \text{y } \vec{w} \in \mathbb{R}^{3,} \vec{w} = (w_1, w_2, w_3),$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \equiv \sum_{i=1}^{3} v_i w_i = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)$$

$$\text{Ejemplo: } \vec{v} = (-1,5,6), \text{y } \vec{w} = (3,-2,2),$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = ((-1)(3) + (5)(-2) + (6)(2))$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -3 + (-10) + 12 = -1$$

$$\text{Ejemplo: } \vec{p} = (2,1,5), \text{y } \vec{q} = (1,3,-1),$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = ((2)(1) + (1)(3) + (5)(-1))$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 2 + 3 - 5 = 0$$

Resumen hasta aquí

- Un **R**^{3}, un cuerpo **R**, y operaciones:
  - **Suma:** $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}=\left(\left(v_1+w_1\right),\left(v_2+w_2\right),\left(v_3+w_3\right)\right)$
  - **Prod. por escalar** $\vec{p}=a\vec{v}=\left(\left(a v_1\right),\left(a v_2\right),\left(a v_3\right)\right)$
  - **Prod. Escalar** $b=\vec{v}\cdot\vec{w}=\left(v_1 w_1+v_2 w_2+v_3 w_3\right)$
- El producto escalar induce una norma

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1 v_1+v_2 v_2+v_3 v_3}=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

- La norma induce una distancia

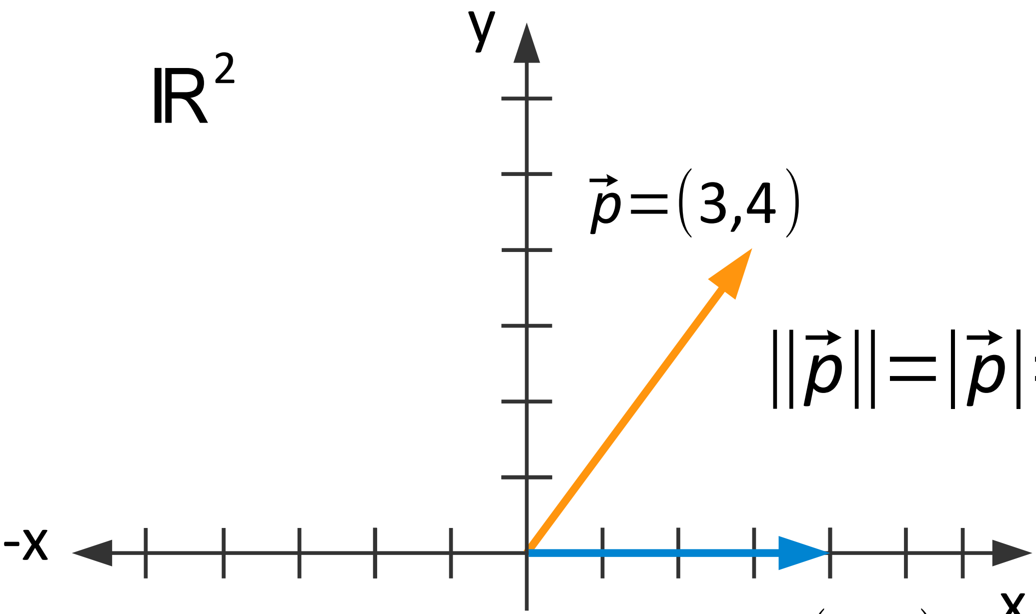
$$d\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\sqrt{\left(\vec{v}-\vec{w}\right)\cdot\left(\vec{v}-\vec{w}\right)}=\sqrt{\left(v_1-w_1\right)^2+\left(v_2-w_2\right)^2+\left(v_3-w_3\right)^2}$$

- La distancia induce un módulo vectorial

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

Interpretación geométrica

$\mathbb{R}^2$



$\vec{p}=(3,4)$

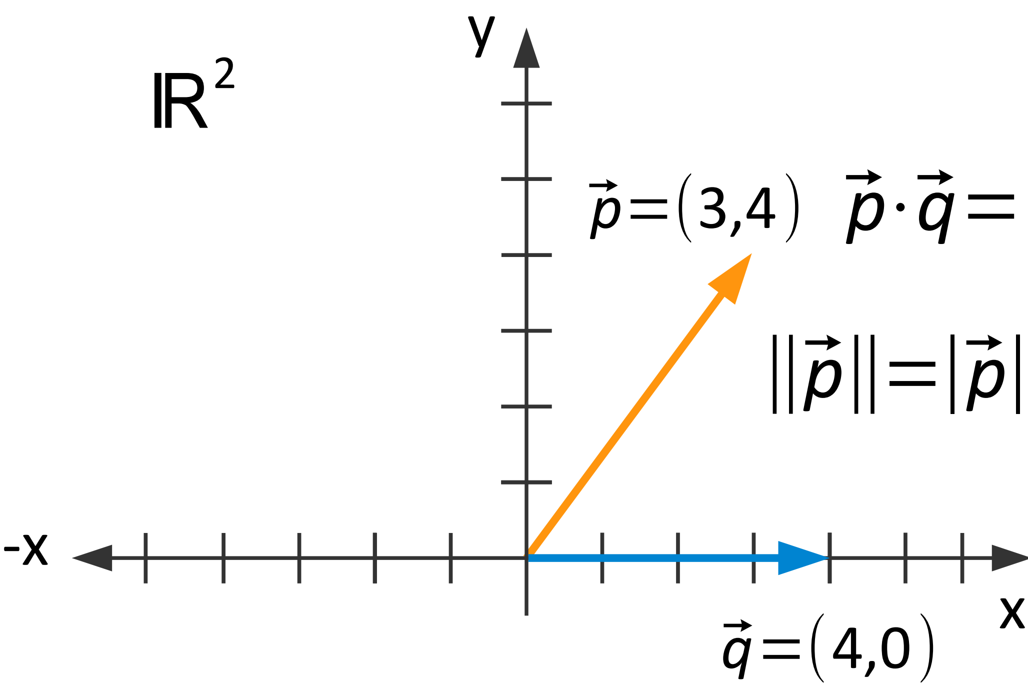
$$\|\vec{p}\|=|\vec{p}|=\sqrt{p_1^2+p_2^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

$\vec{q}=(4,0)$

$$\|\vec{q}\|=|\vec{q}|=\sqrt{q_1^2+q_2^2}=\sqrt{4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$$

Interpretación geométrica

$\mathbb{R}^2$



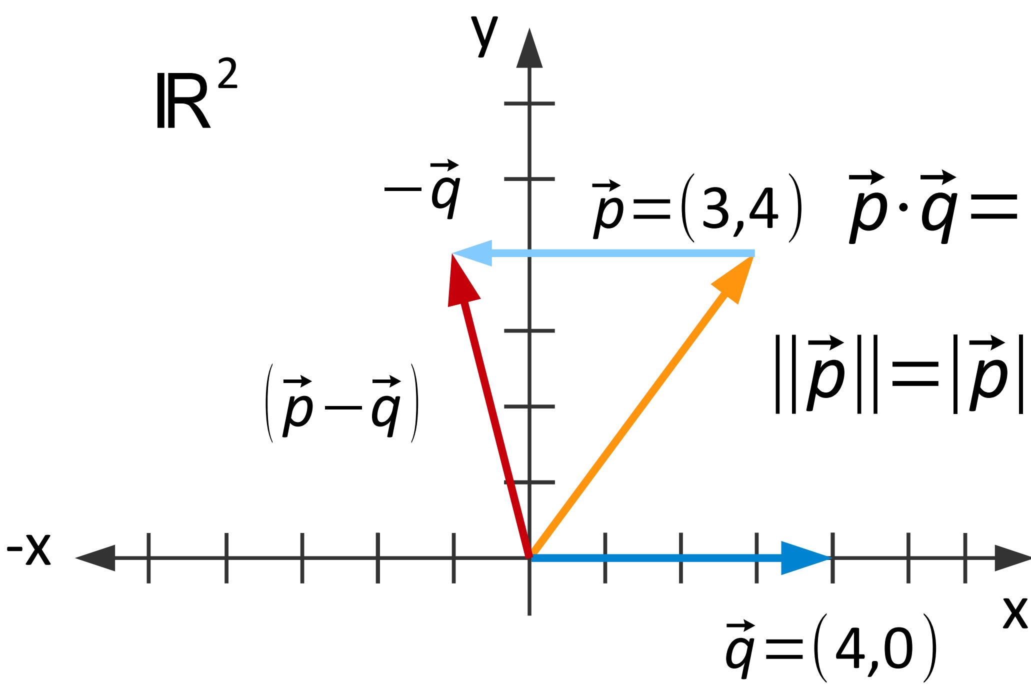
$$\vec{p}\cdot\vec{q}=p_1q_1+p_2q_2=(3)(4)+(4)(0)=12$$

$$\|\vec{p}\|=|\vec{p}|=\sqrt{p_1^2+p_2^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\|\vec{q}\|=|\vec{q}|=\sqrt{q_1^2+q_2^2}=\sqrt{4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$$

Interpretación geométrica

$\mathbb{R}^2$



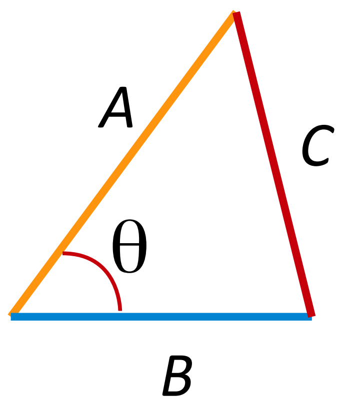
$$\vec{p}\cdot\vec{q}=p_1q_1+p_2q_2=(3)(4)+(4)(0)=12$$

$$\|\vec{p}\|=|\vec{p}|=\sqrt{p_1^2+p_2^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\|\vec{q}\|=|\vec{q}|=\sqrt{q_1^2+q_2^2}=\sqrt{4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$$

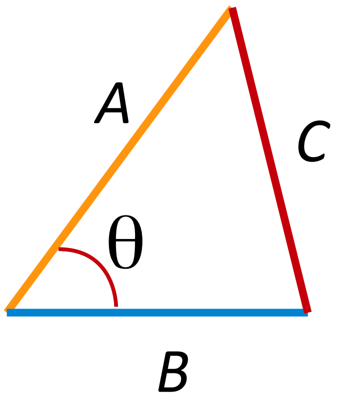
$$d(\vec{p},\vec{q})=\|\vec{p}-\vec{q}\|=\|\big((3,4)-(4,0)\big)\|=\|(-1,4)\|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$$

Interpretación geométrica



Ley de los cosenos: $C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\cos\theta$

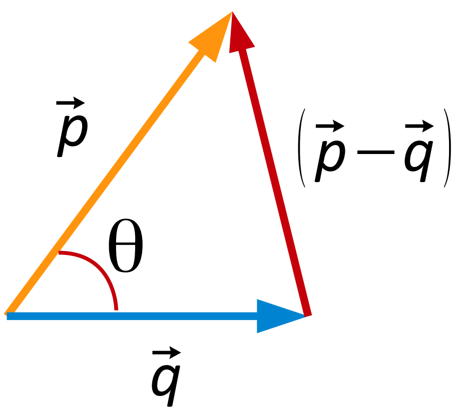
Interpretación geométrica



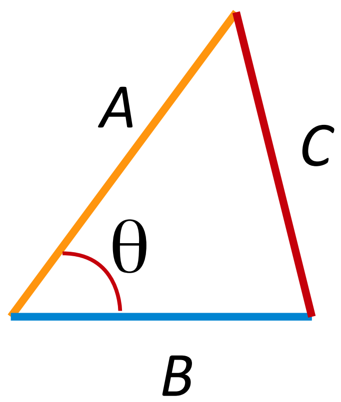
Ley de los cosenos: $C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\cos\theta$

$A = |\vec{p}|\,;\;\; B = |\vec{q}|\,;\;\; C = |\vec{p} - \vec{q}|$

Ley de los cosenos: $|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$



Interpretación geométrica



Ley de los cosenos: $C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\cos\theta$

$A = |\vec{p}|\,;\;\; B = |\vec{q}|\,;\;\; C = |\vec{p} - \vec{q}|$

Ley de los cosenos: $|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\,|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos\theta$

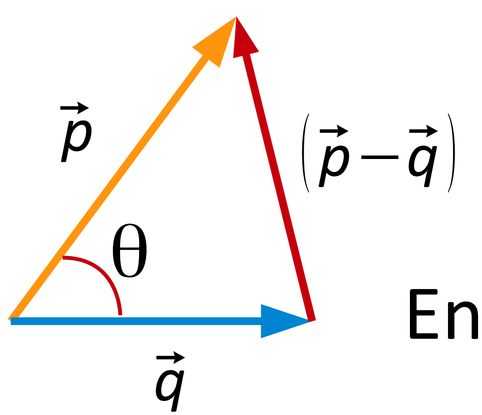
Pero:

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = (\vec{p} - \vec{q}) \cdot (\vec{p} - \vec{q})$$

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} - \vec{p} \cdot \vec{q} - \vec{q} \cdot \vec{p} + \vec{q} \cdot \vec{q}$$

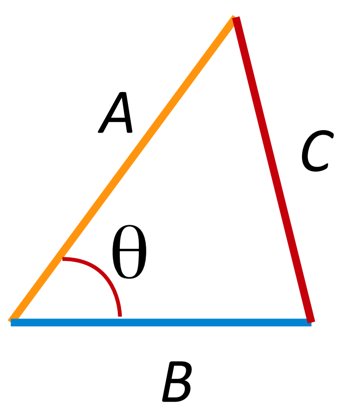
$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} - 2\,\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{q}$$

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 - 2\,\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$$



Entonces: $|\vec{p}|^2 - 2\,\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\,|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos\theta$

Interpretación geométrica



Ley de los cosenos: $C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\cos\theta$

$A = |\vec{p}|\,;\;\; B = |\vec{q}|\,;\;\; C = |\vec{p} - \vec{q}|$

Ley de los cosenos: $|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\,|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos\theta$

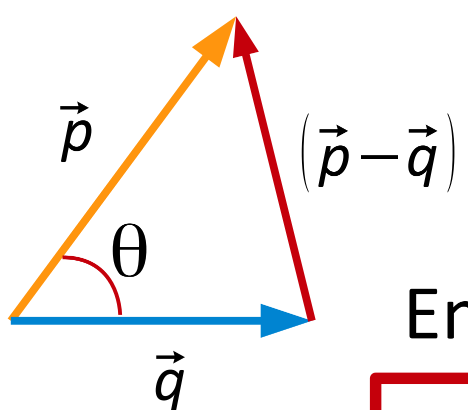
Pero:

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = (\vec{p} - \vec{q})\cdot(\vec{p} - \vec{q})$$

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\vec{q} - \vec{q}\cdot\vec{p} + \vec{q}\cdot\vec{q}$$

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} - 2\,\vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{q}\cdot\vec{q}$$

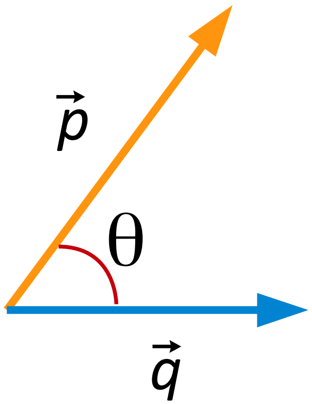
$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 - 2\,\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2$$



Entonces: $|\vec{p}|^2 - 2\,\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\,|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos\theta$

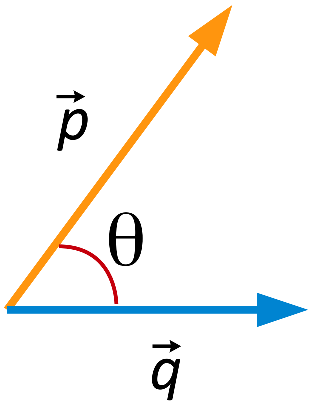
$$\boxed{\text{Luego: } \vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos\theta}$$

Interpretación geométrica



$$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$$

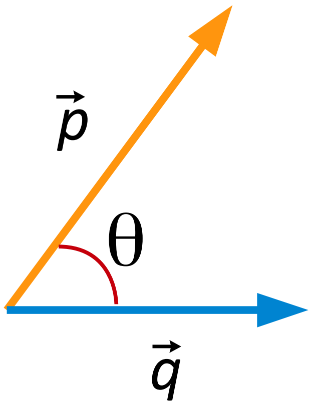
Interpretación geométrica



$$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=12\,;|p|=5\,;|q|=4 \rightarrow \cos\theta=\frac{12}{5\times 4} \rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5} \rightarrow \theta=53.13\,°$$

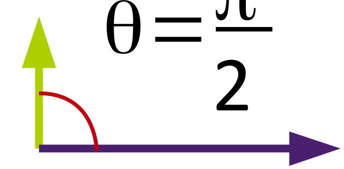
Interpretación geométrica



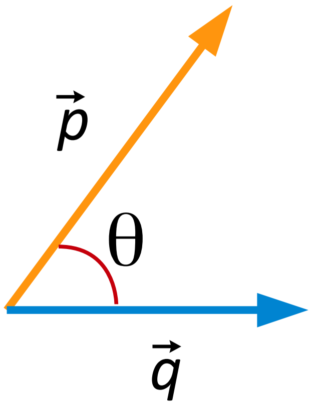
$$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=12\,;|p|=5\,;|q|=4 \rightarrow \cos\theta=\frac{12}{5\times 4} \rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5} \rightarrow \theta=53.13\,°$$

Perpendiculares: $\theta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\theta=0 \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{q}=0$

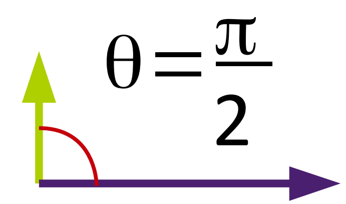


Interpretación geométrica



$$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=12\,;|p|=5\,;|q|=4 \rightarrow \cos\theta=\frac{12}{5\times 4} \rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5} \rightarrow \theta=53.13\,°$$



Perpendiculares: $\theta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\theta=0 \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{q}=0$

Paralelos: $(\theta=0 \text{ ó } \theta=pi) \Leftrightarrow \cos\theta=\pm 1 \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{q}=\pm|\vec{p}||\vec{q}|$