Universidad Industrial de Santander

Introducción a la Física (2014)

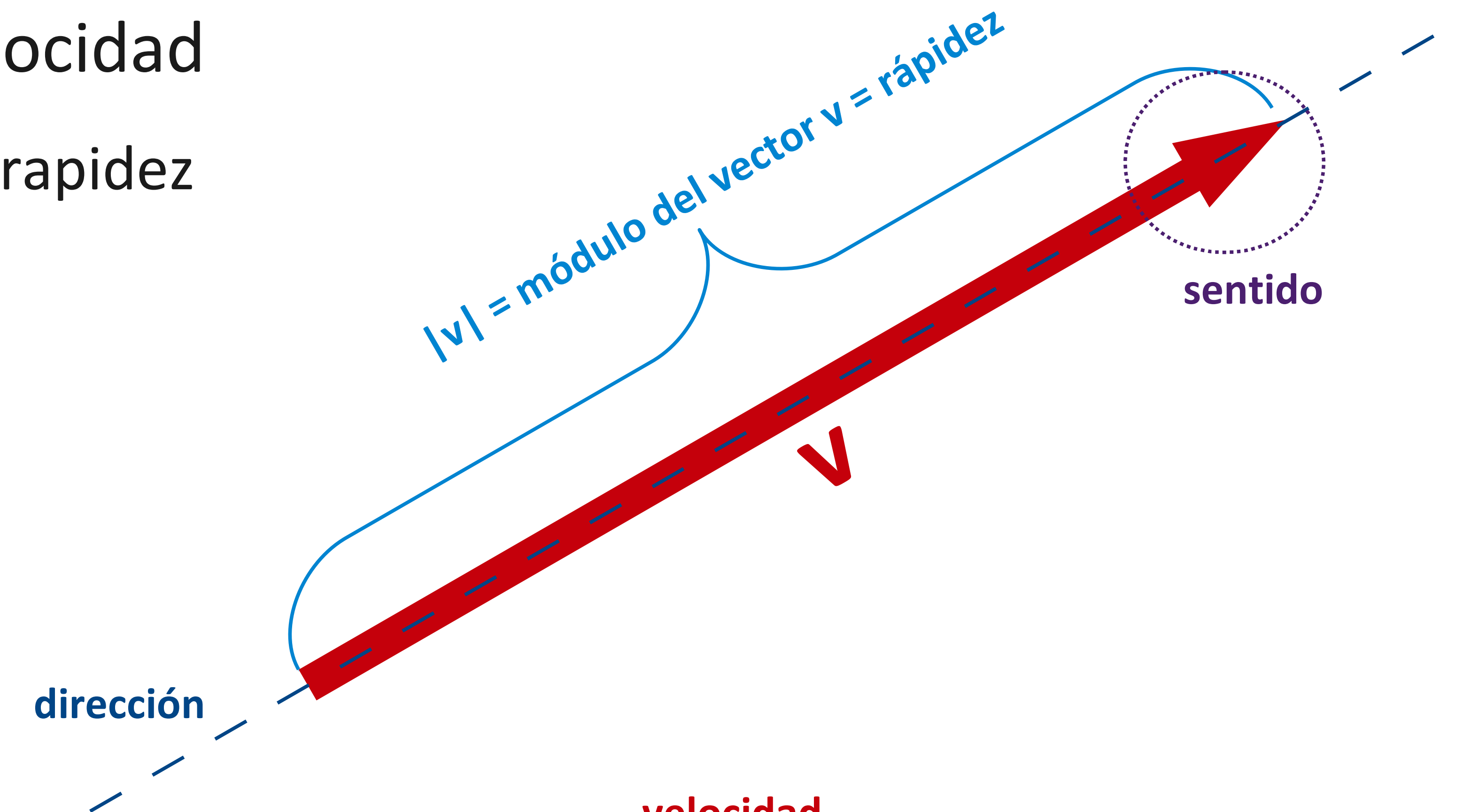
- Unidad: 01
- Clase: 04
- Fecha: 20140522J
- Contenido: Herramientas Matemáticas
- Web: http://halley.uis.edu.co/fisica_para_todos/
- Archivo: 20140522J-HA-herramientas_matematicas_2.pdf

En el episodio anterior

En el episodio anterior

Rapidez y velocidad

- Vector velocidad
  - Módulo = rapidez
  - Dirección
  - Sentido

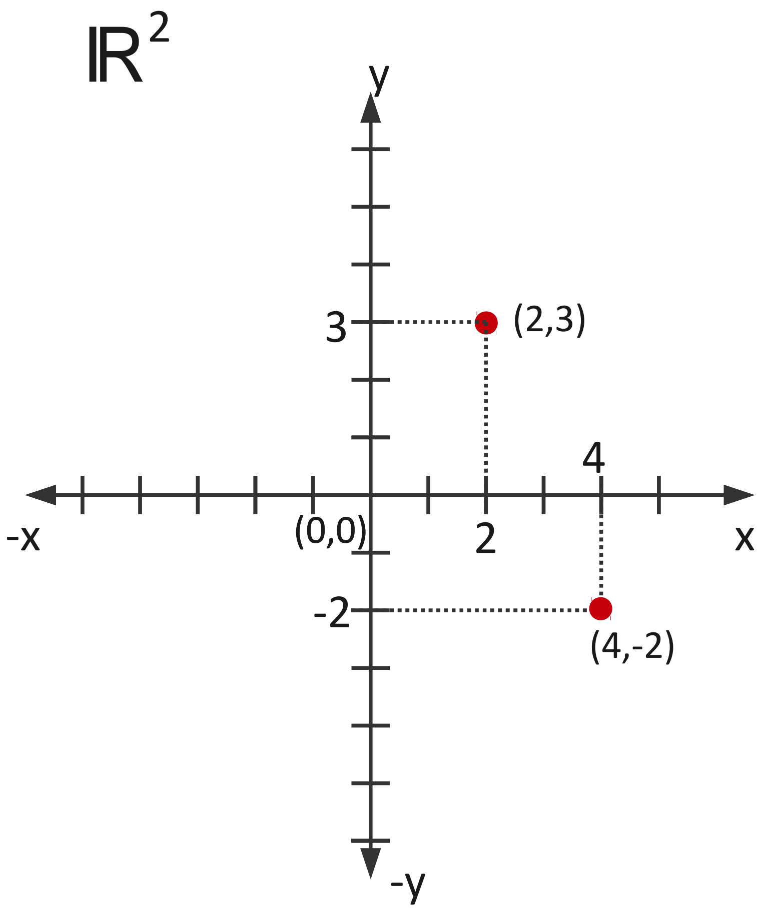


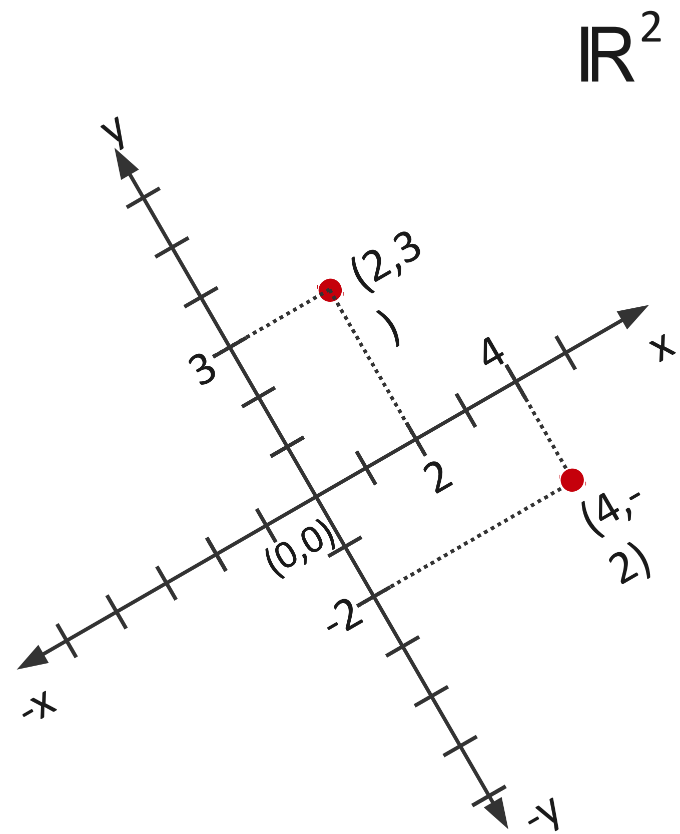
velocidad

Este auto se desplaza a 60 km/hora en dirección Norte-Sur, hacia el Norte

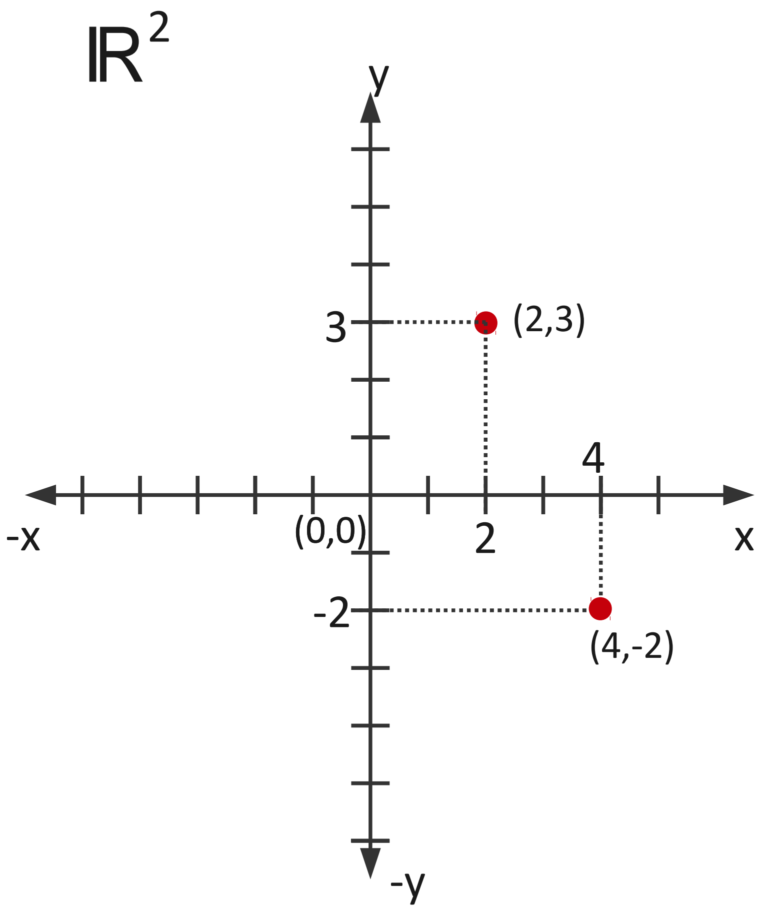
rapidez dirección sentido

Sistema de Coordenadas



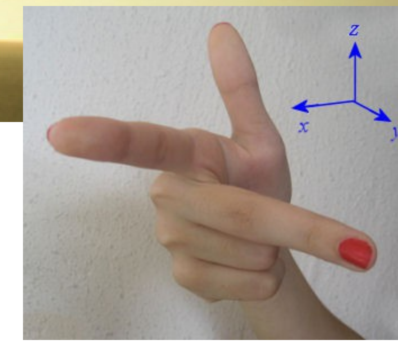


Par Ordenado: (x,y) → 2-tupla: (x,y)

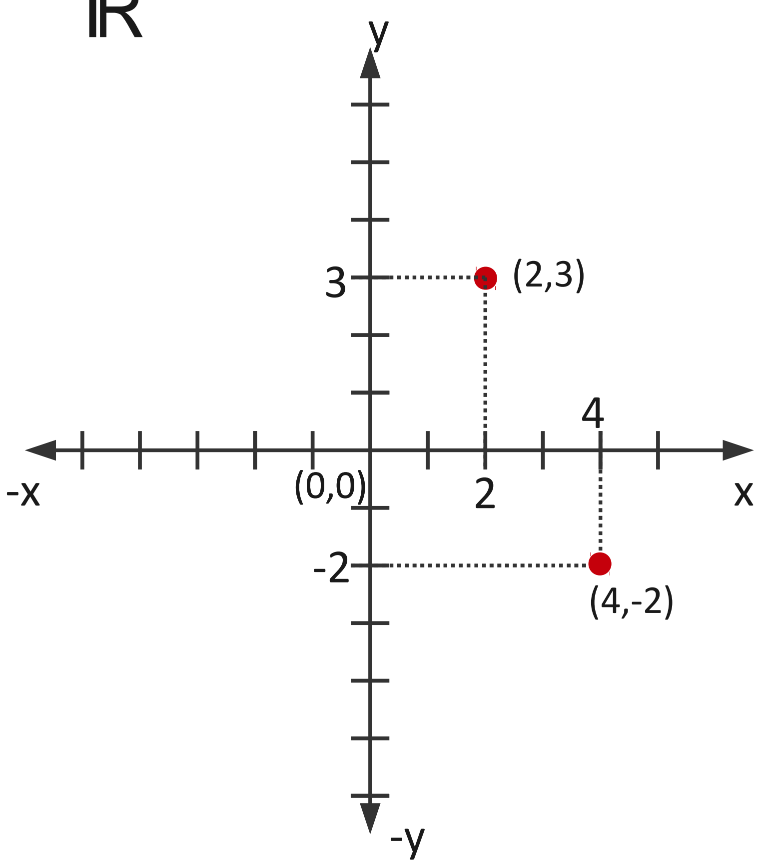


Par Ordenado: (x,y) → 2-tupla: (x,y)

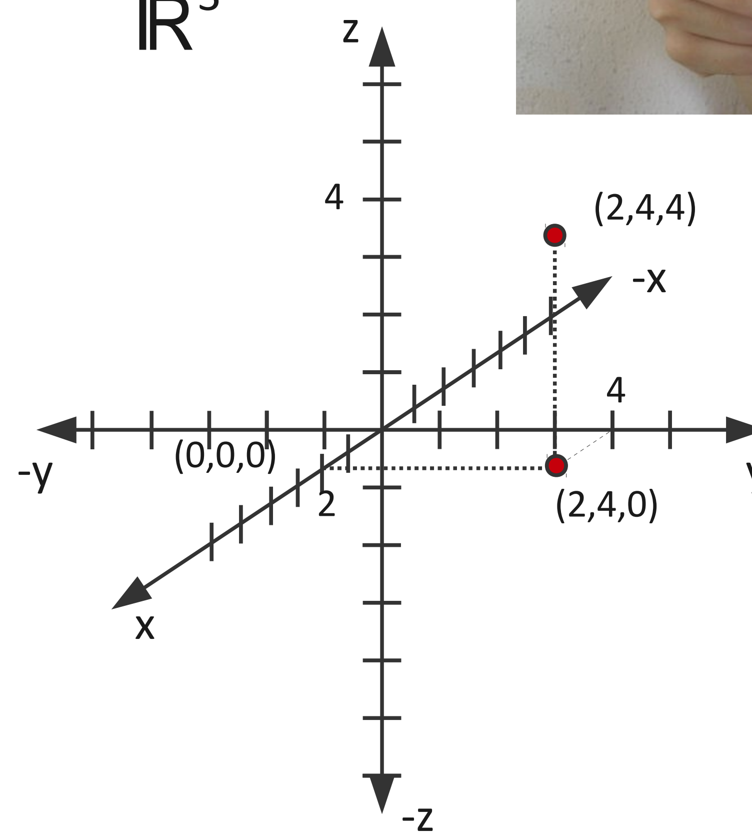
Sistema de Coordenadas



$\mathbb{R}^2$



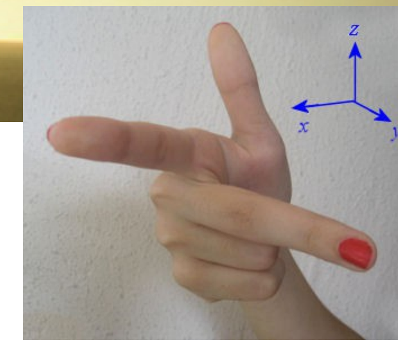
$\mathbb{R}^3$



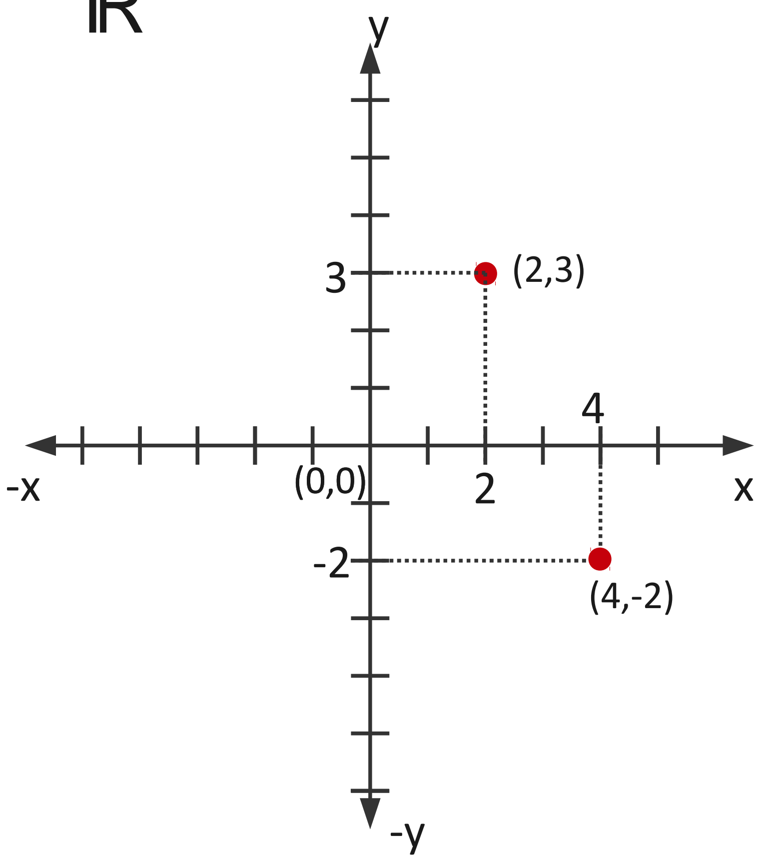
Par Ordenado: (x,y) → 2-tupla: (x,y)

3-tupla: (x,y,z)

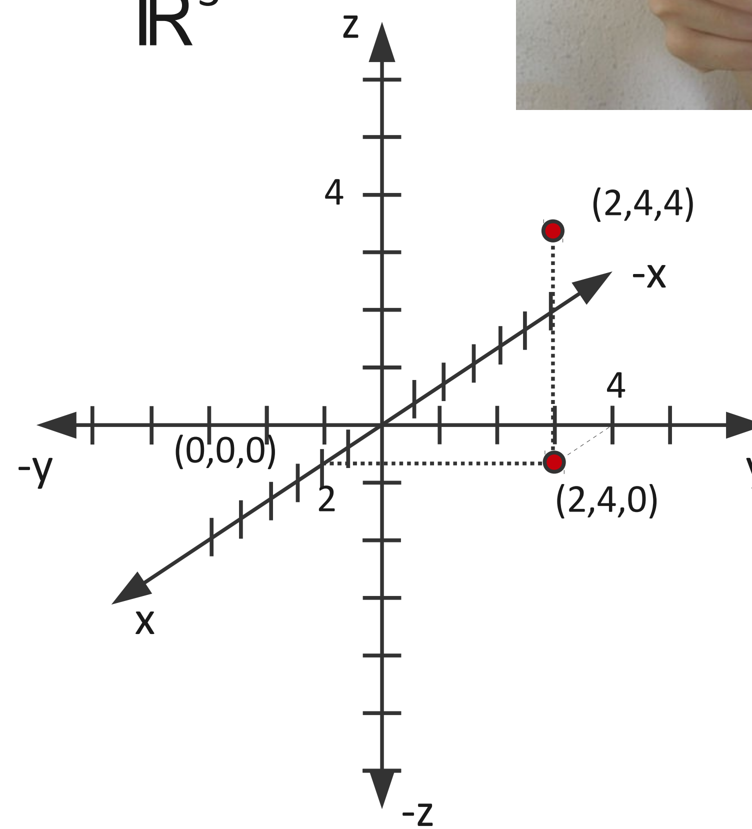
Sistema de Coordenadas



$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



Par Ordenado: (x,y) → 2-tupla: (x,y)

3-tupla: (x,y,z)

En general: n-tupla $\rightarrow (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x_i \in \mathbb{R}$

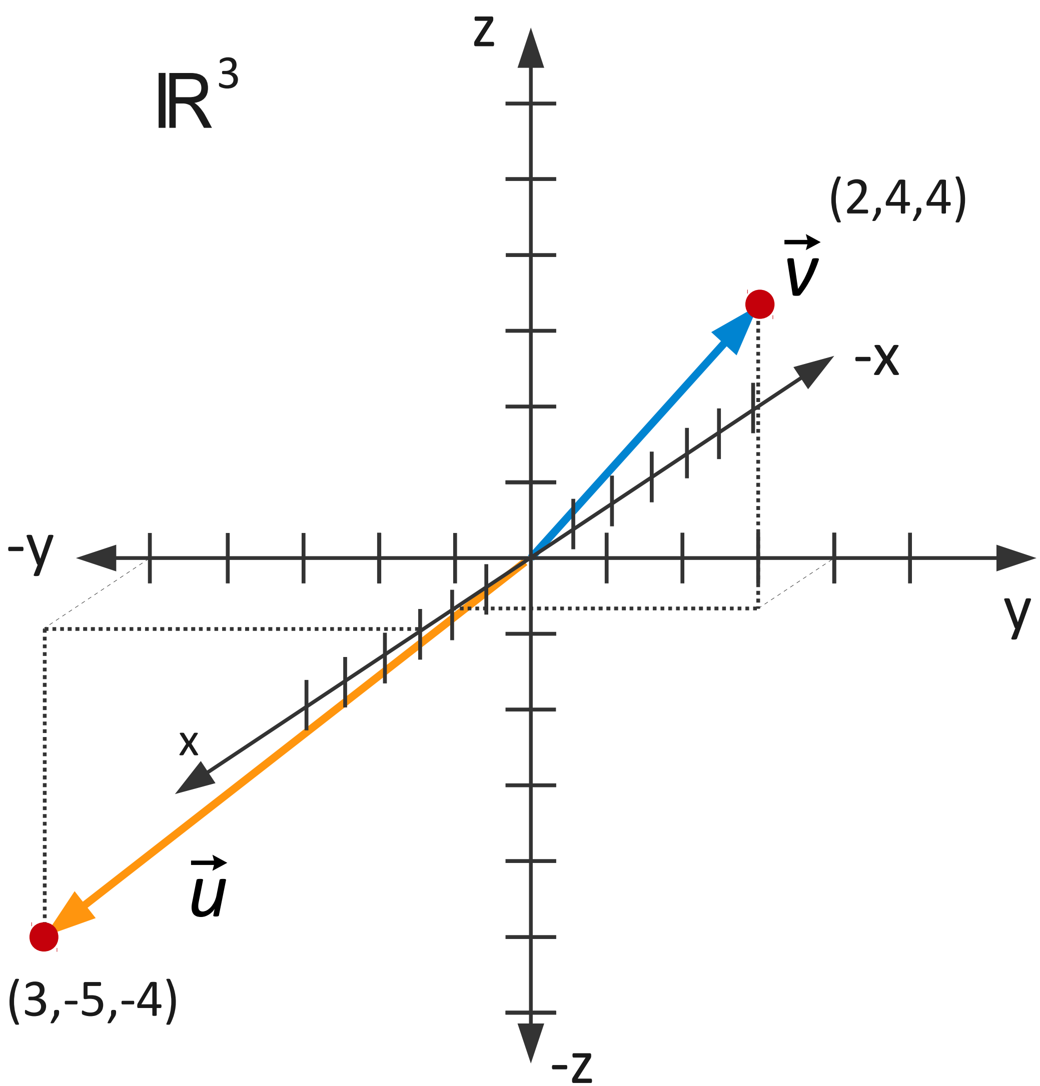
Espacio vectorial (versión corta)

- Sea ***V*** **un espacio vectorial**, entonces ***V*** posee:
  - Un conjunto de elementos → "**vectores de *V***": $\vec{v}, \vec{u}, \vec{i}, \ldots$
    - Notaciones habituales: $\boldsymbol{v}$ ó $\vec{v}$ ó $\bar{v}$
  - Una operación interna → "**suma**": +
    - Interna → $(\vec{v}+\vec{u})=\vec{z}$ es un vector que pertenece a ***V***
  - Una operación externa → "**producto por un escalar**"
    - Externa → La operación se realiza entre un elemento del espacio y un elemento de un cuerpo externo (por ejemplo, los números reales). El resultado es un vector de V:

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in \boldsymbol{V} \rightarrow (a\,\vec{v})$ es un vector que pertenece a ***V***

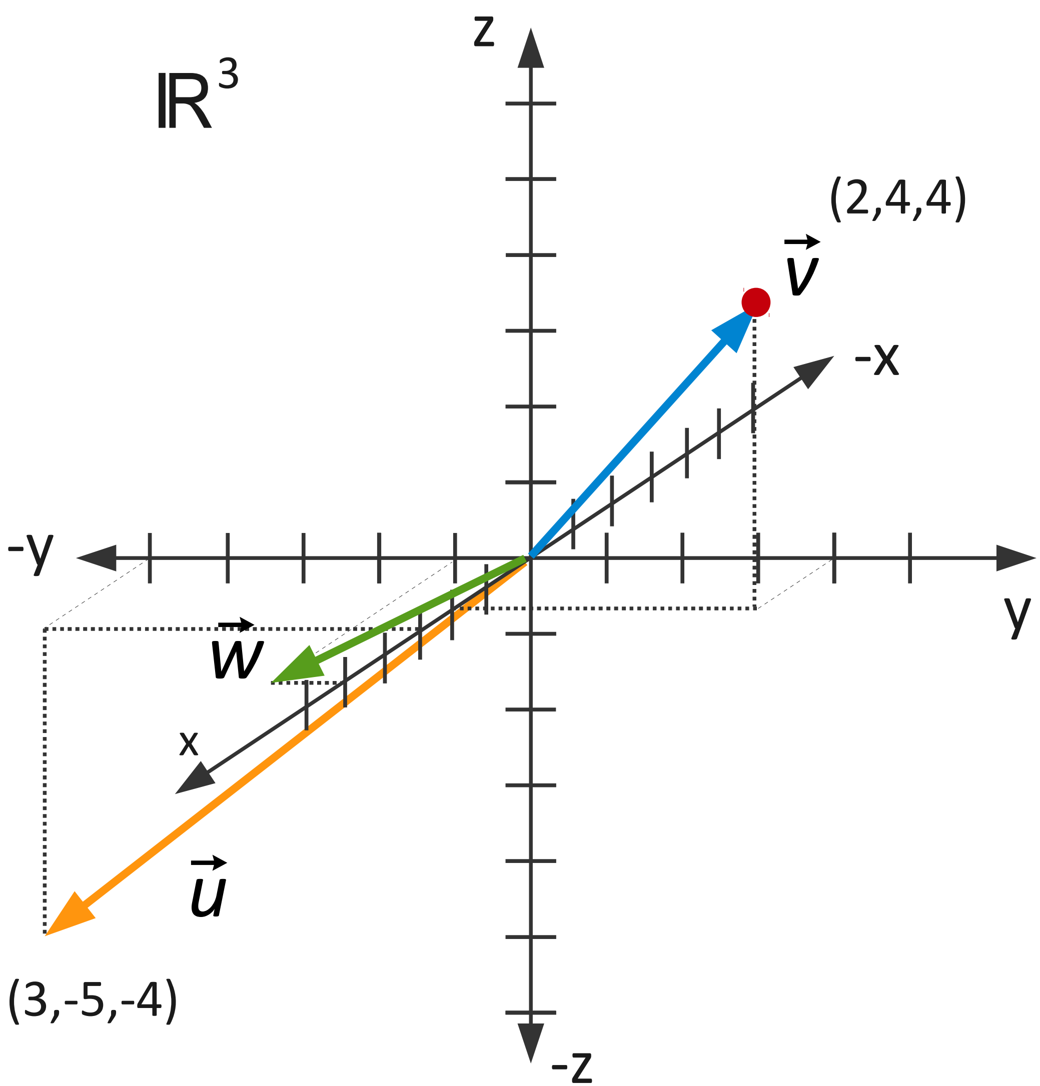
- Importane: no confundir con el producto escalar (punto o interno)

R^2 y R^3 son ejemplos de espacios vectoriales



- R^3 es un espacio vectorial
- A cada punto del espacio R^3 le asignamos un vector
  - Desde el orígen hasta el punto
- En física, a ese vector se lo llama **vector posición**
- Un vector de R^3 tiene **3 componentes**: las **coordenadas** de la 3-tupla

Operación suma



Sean $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

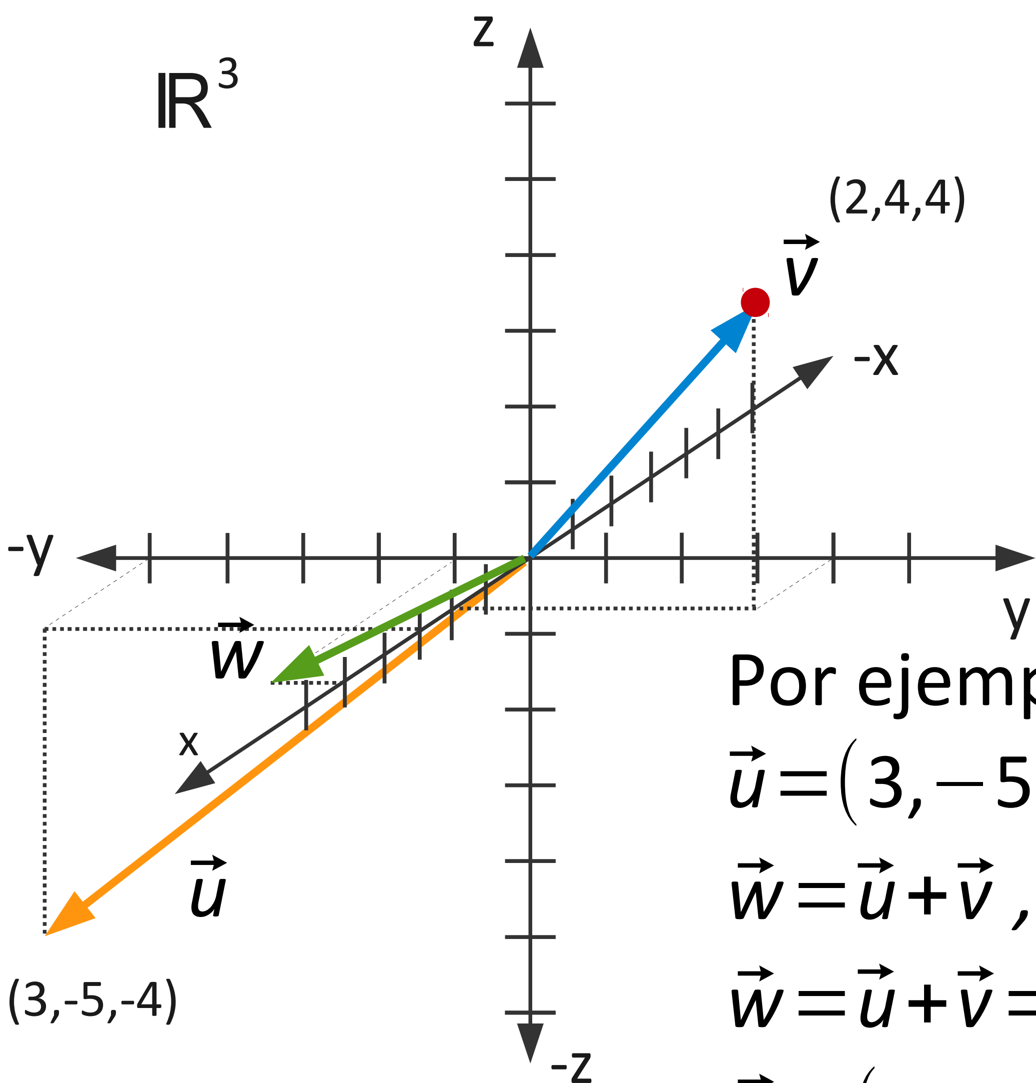
$\vec{u} = (u_{1,} u_{2,} u_3)$ y $\vec{v} = (v_{1,} v_{2,} v_3)$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{w} = (w_{1,} w_{2,} w_3)$

$\vec{w} = ((u_1 + v_1), (u_2 + v_2), (u_3 + v_3))$

Operación suma



Sean $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{u} = (u_{1,} u_{2,} u_3)$ y $\vec{v} = (v_{1,} v_{2,} v_3)$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{w} = (w_{1,} w_{2,} w_3)$

$\vec{w} = ((u_1 + v_1), (u_2 + v_2), (u_3 + v_3))$

Por ejemplo:

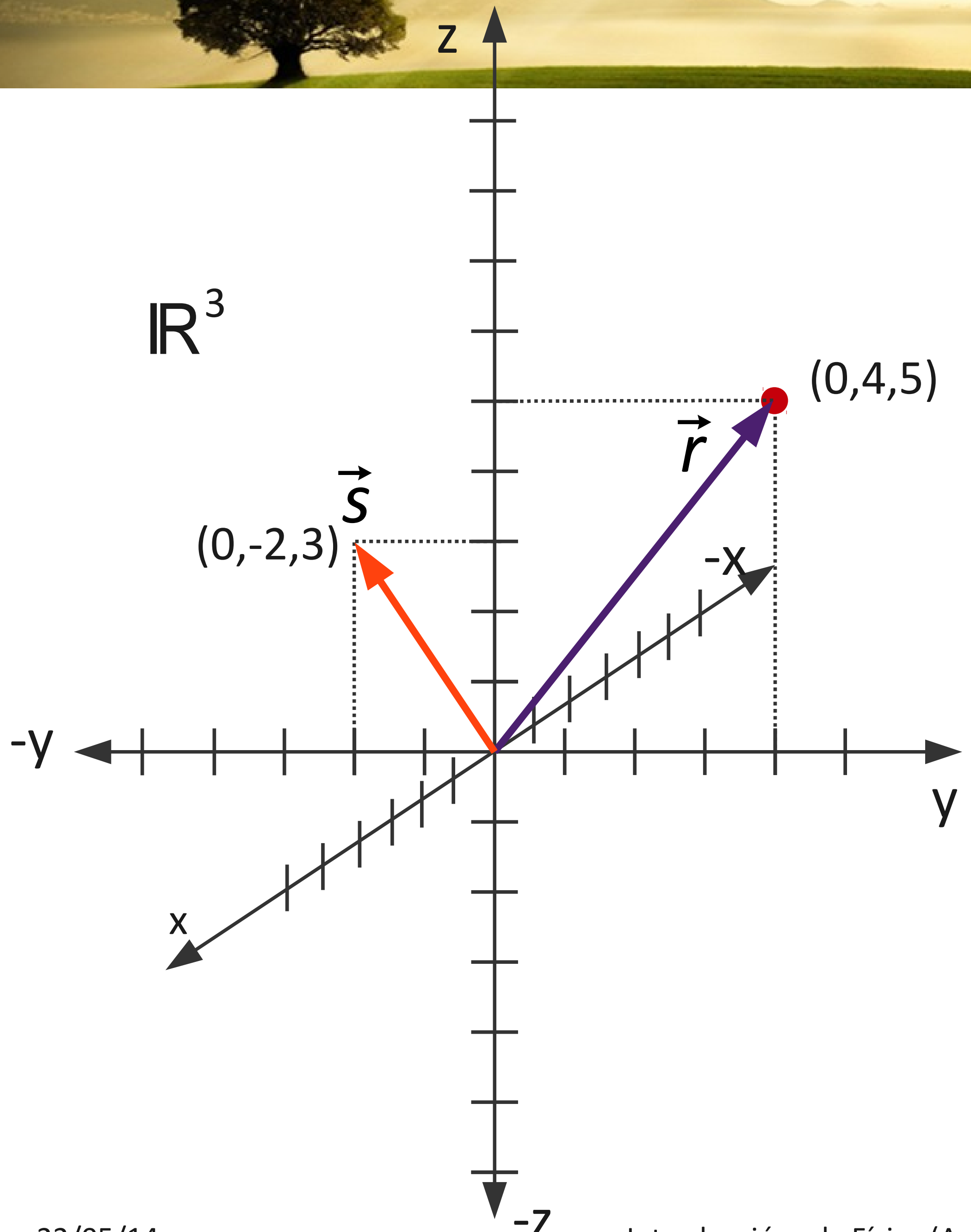
$\vec{u} = (3, -5, -4)$ y $\vec{v} = (2,4,4)$

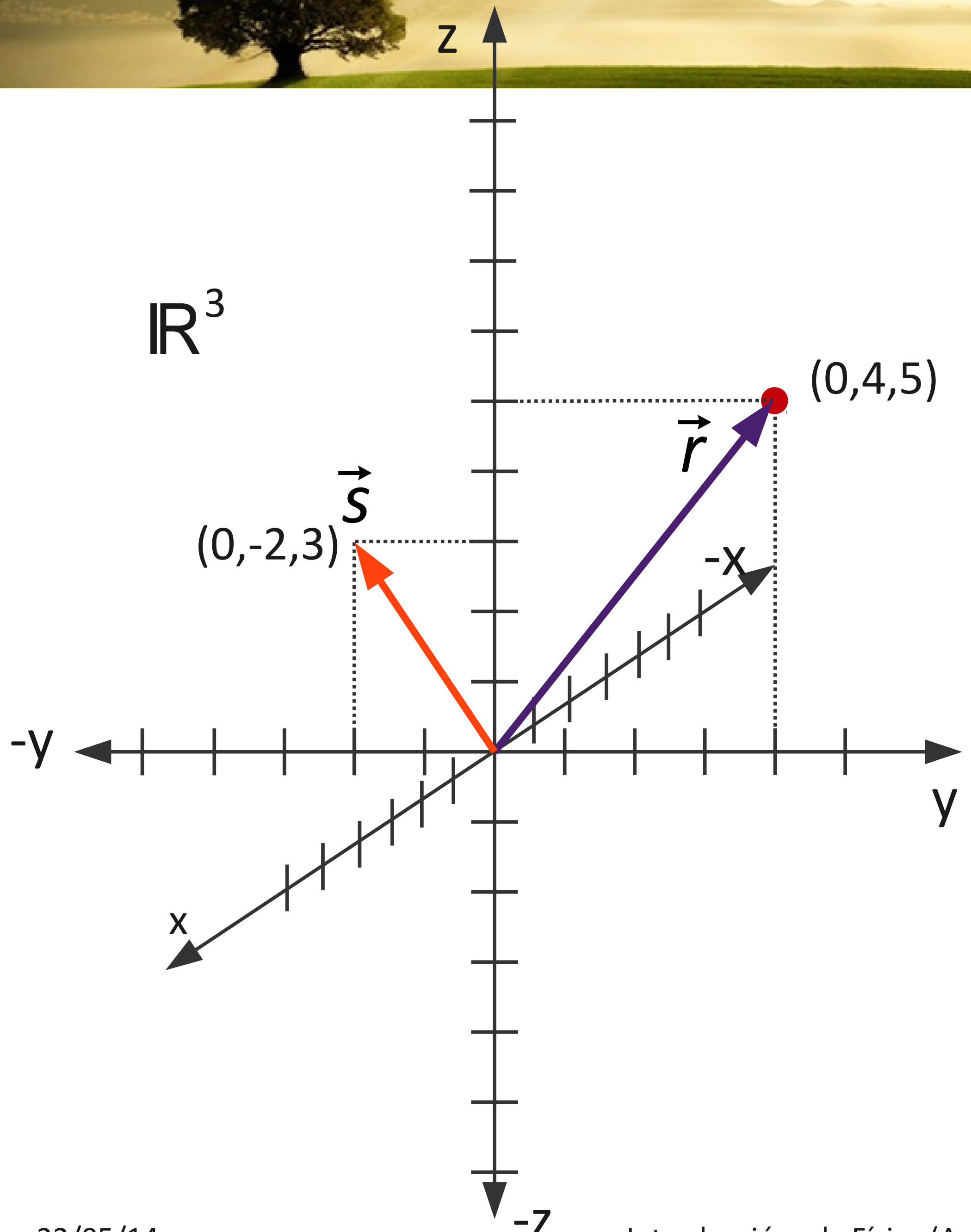
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = ((3+2), (-5+4), (-4+4))$

$\vec{w} = (5, -1, 0)$

Operación suma





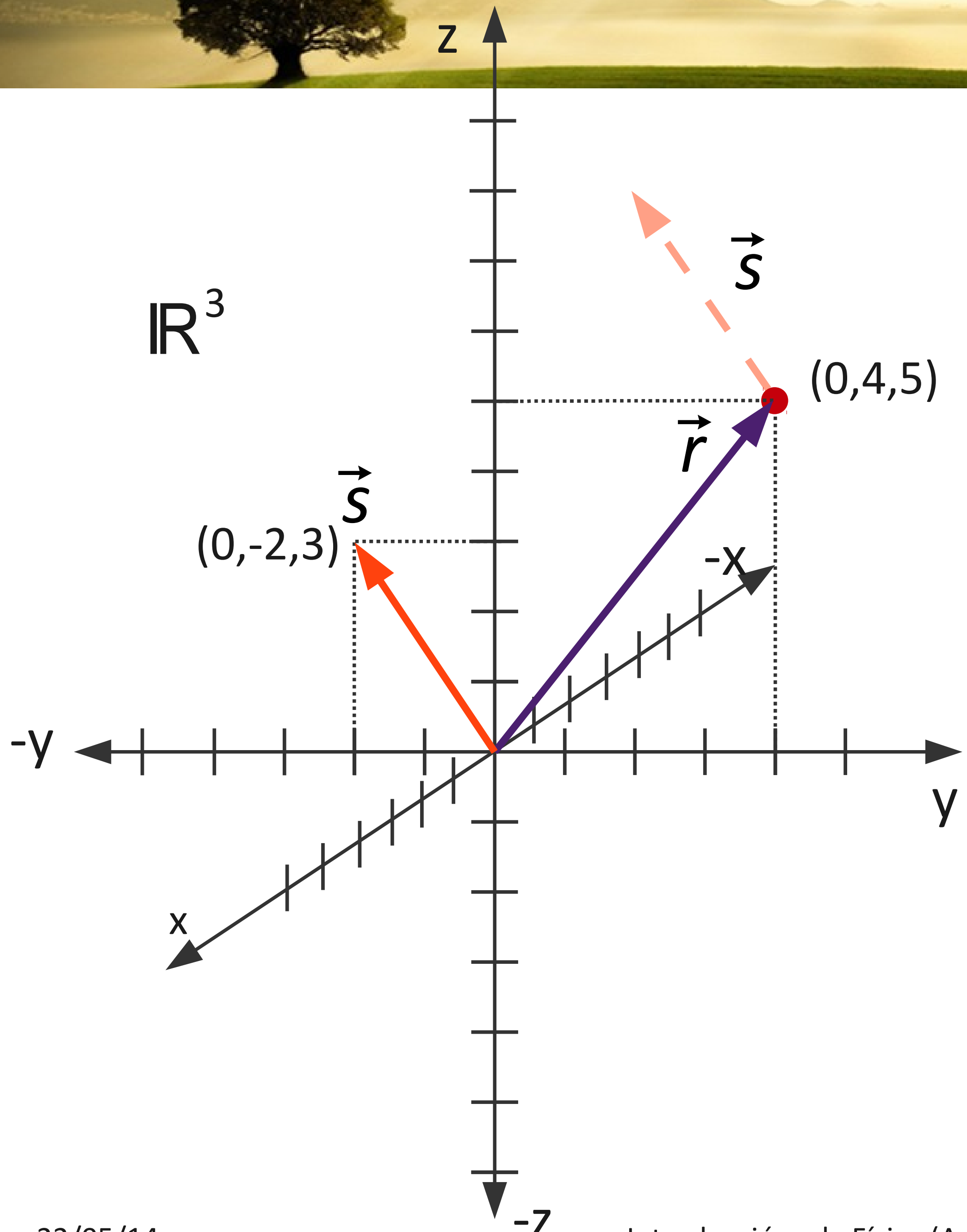
$$\vec{r} = (0,4,5) \text{ y } \vec{s} = (0,-2,3)$$

$$\vec{p} = \vec{r} + \vec{s}$$

$$\vec{p} = \left((0+0),(4+(-2)),(5+3)\right)$$

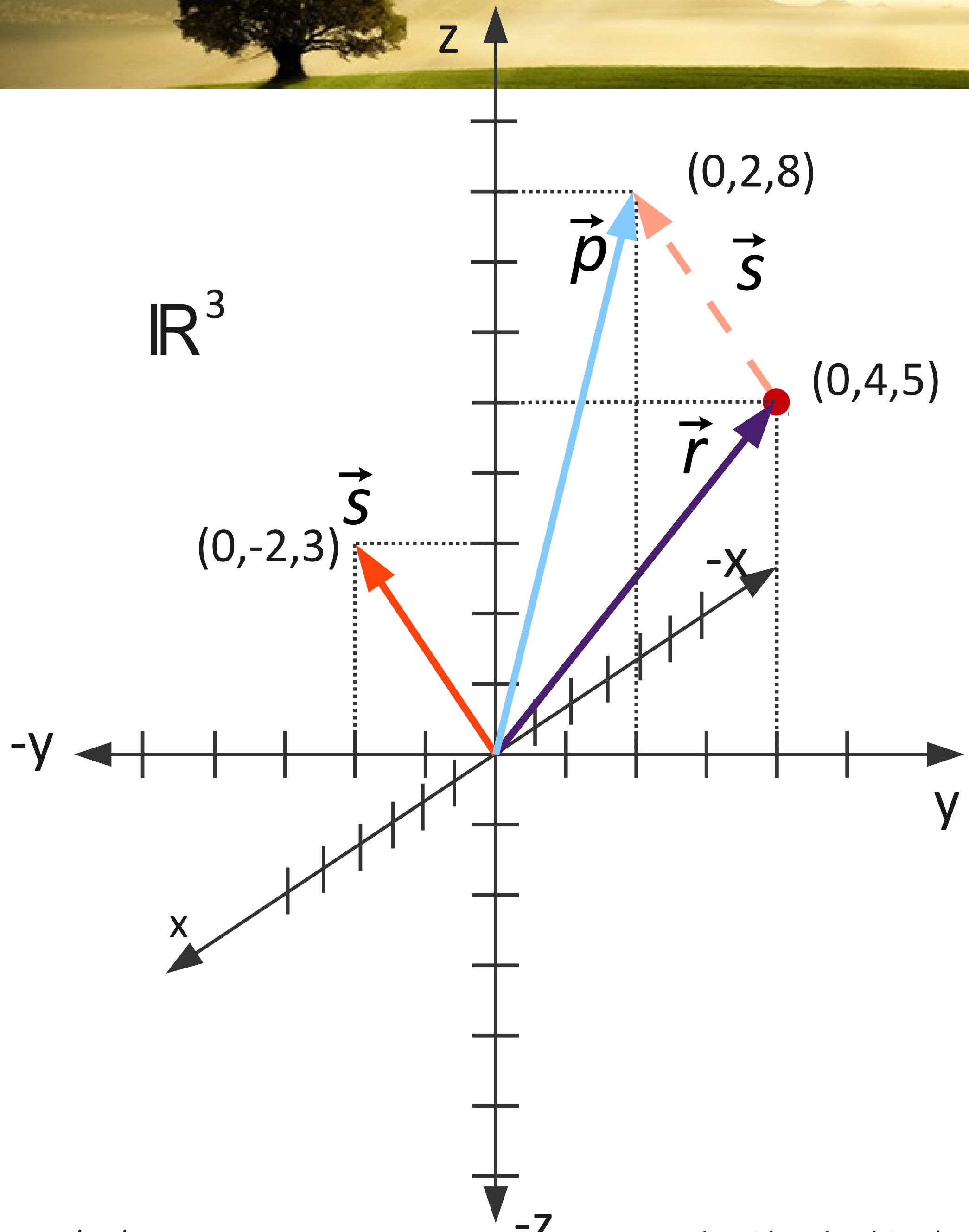
$$\vec{p} = (0,2,8)$$

Operación suma



$$\vec{r}=(0,4,5) \text{ y } \vec{s}=(0,-2,3)$$
$$\vec{p}=\vec{r}+\vec{s}$$
$$\vec{p}=\big((0+0),(4+(-2)),(5+3)\big)$$
$$\vec{p}=(0,2,8)$$

Operación suma



$$\vec{r}=(0,4,5) \text{ y } \vec{s}=(0,-2,3)$$

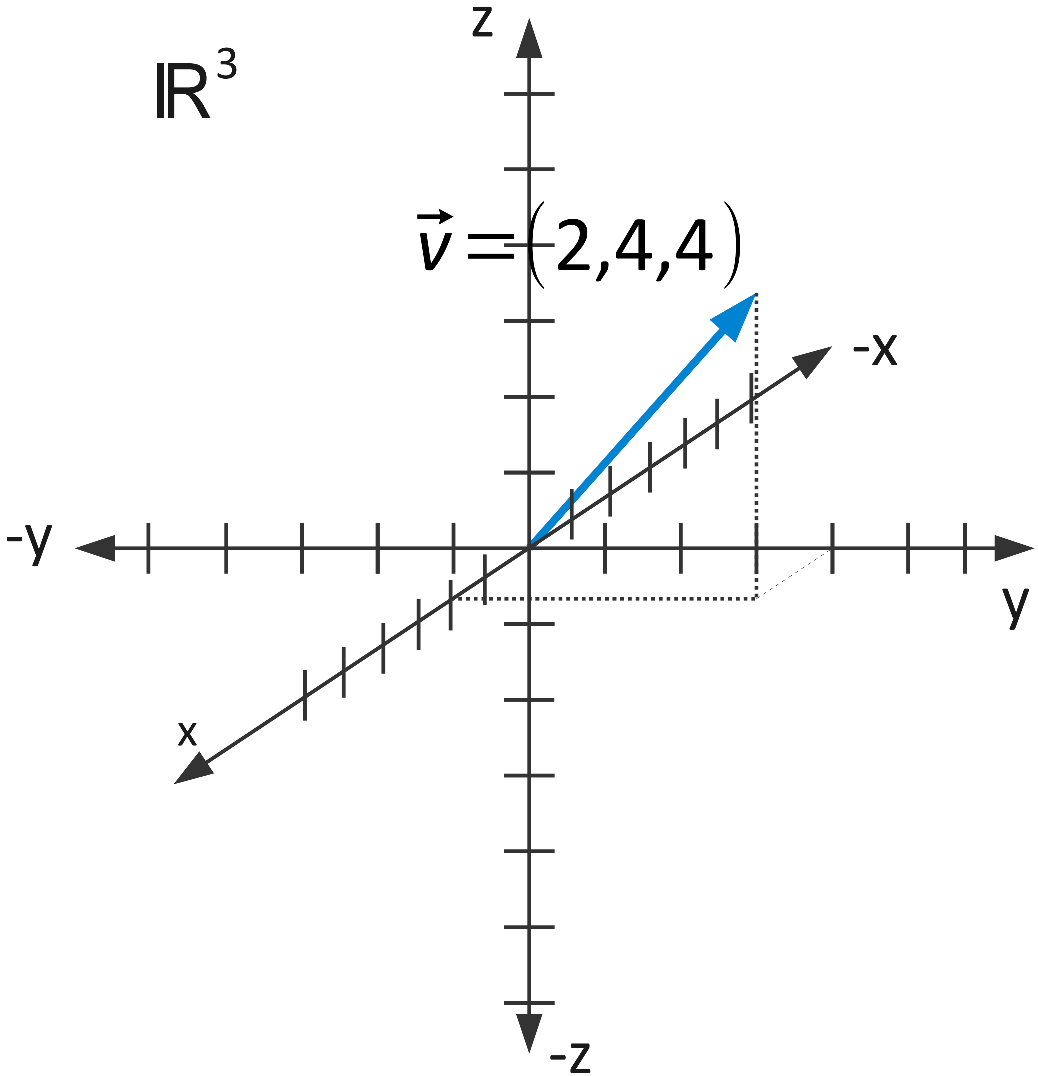
$$\vec{p}=\vec{r}+\vec{s}$$

$$\vec{p}=\left((0+0),(4+(-2)),(5+3)\right)$$

$$\vec{p}=(0,2,8)$$

Producto por un escalar

$\mathbb{R}^3$



Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}=(v_{1,} v_{2,} v_3) \in \mathbb{R}^3$

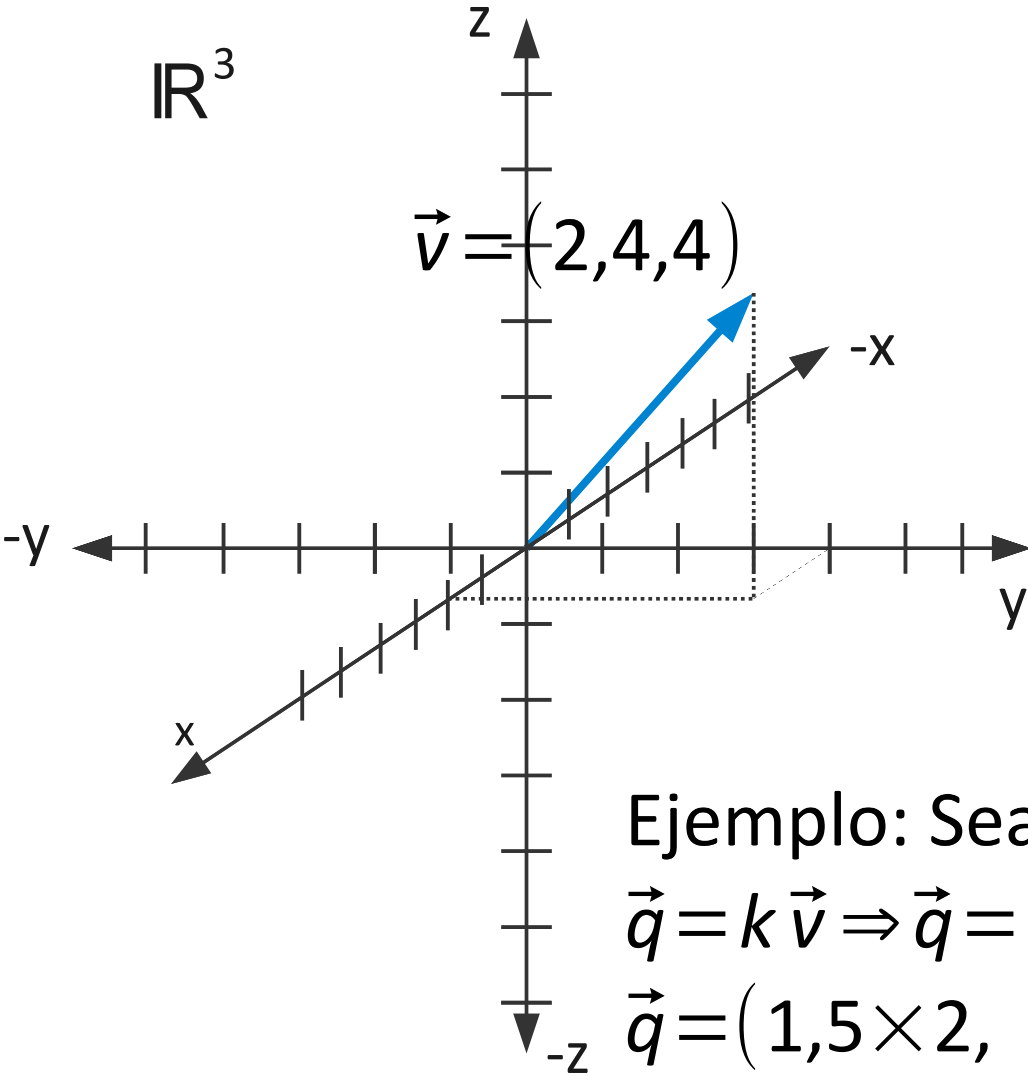
$\vec{q} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow q=(q_{1,} q_{2,} q_3)$

$\vec{q}=a\vec{v}$

$\vec{q}=a(v_{1,} v_{2,} v_3)$

$\vec{q}=(a v_{1,} a v_{2,} a v_3)$

Producto por un escalar



$$\text{Sea } a\in\mathbb{R} \text{ y } \vec{v}=(v_{1,}\, v_{2,}\, v_3)\in\mathbb{R}^3$$

$$\vec{q}\in\mathbb{R}^3 \rightarrow q=(q_{1,}\, q_{2,}\, q_3)$$

$$\vec{q}=a\,\vec{v}$$

$$\vec{q}=a\,(v_{1,}\, v_{2,}\, v_3)$$

$$\vec{q}=(a\,v_{1,}\, a\,v_{2,}\, a\,v_3)$$

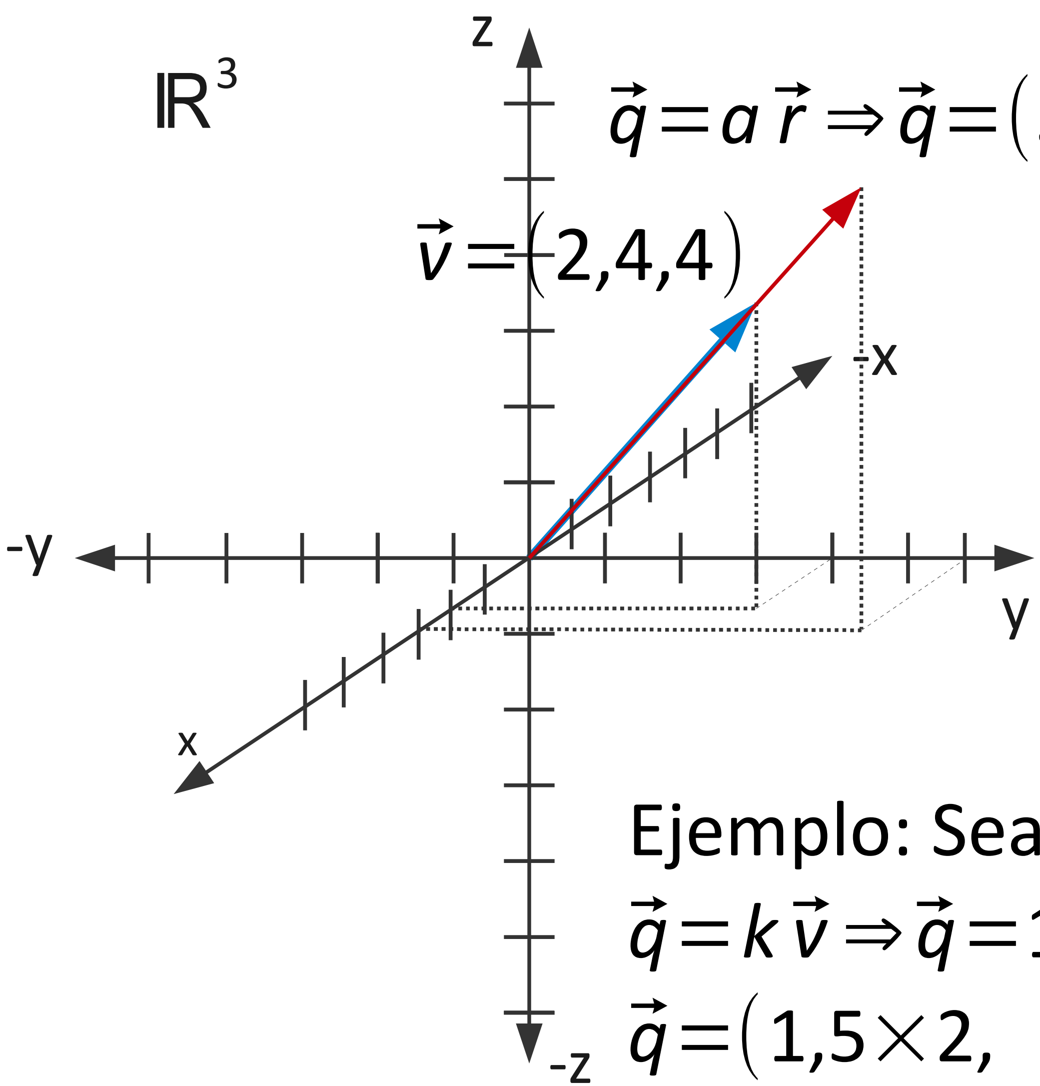
Ejemplo: Sea $a=1{,}5$ y $\vec{v}=(2,4,4)$

$$\vec{q}=k\,\vec{v}\Rightarrow\vec{q}=1{,}5\,(2,4,4)$$

$$\vec{q}=(1{,}5\times 2,\ \ 1{,}5\times 4,\ \ 1{,}5\times 4)$$

$$\vec{q}=(3,6,6)$$

Producto por un escalar



$$\text{Sea } a\in\mathbb{R} \text{ y } \vec{v}=(v_{1,}\, v_{2,}\, v_3)\in\mathbb{R}^3$$

$$\vec{q}\in\mathbb{R}^3 \rightarrow q=(q_{1,}\, q_{2,}\, q_3)$$

$$\vec{q}=a\,\vec{v}$$

$$\vec{q}=a\,(v_{1,}\, v_{2,}\, v_3)$$

$$\vec{q}=(a\,v_{1,}\, a\,v_{2,}\, a\,v_3)$$

Ejemplo: Sea $a=1,5$ y $\vec{v}=(2,4,4)$

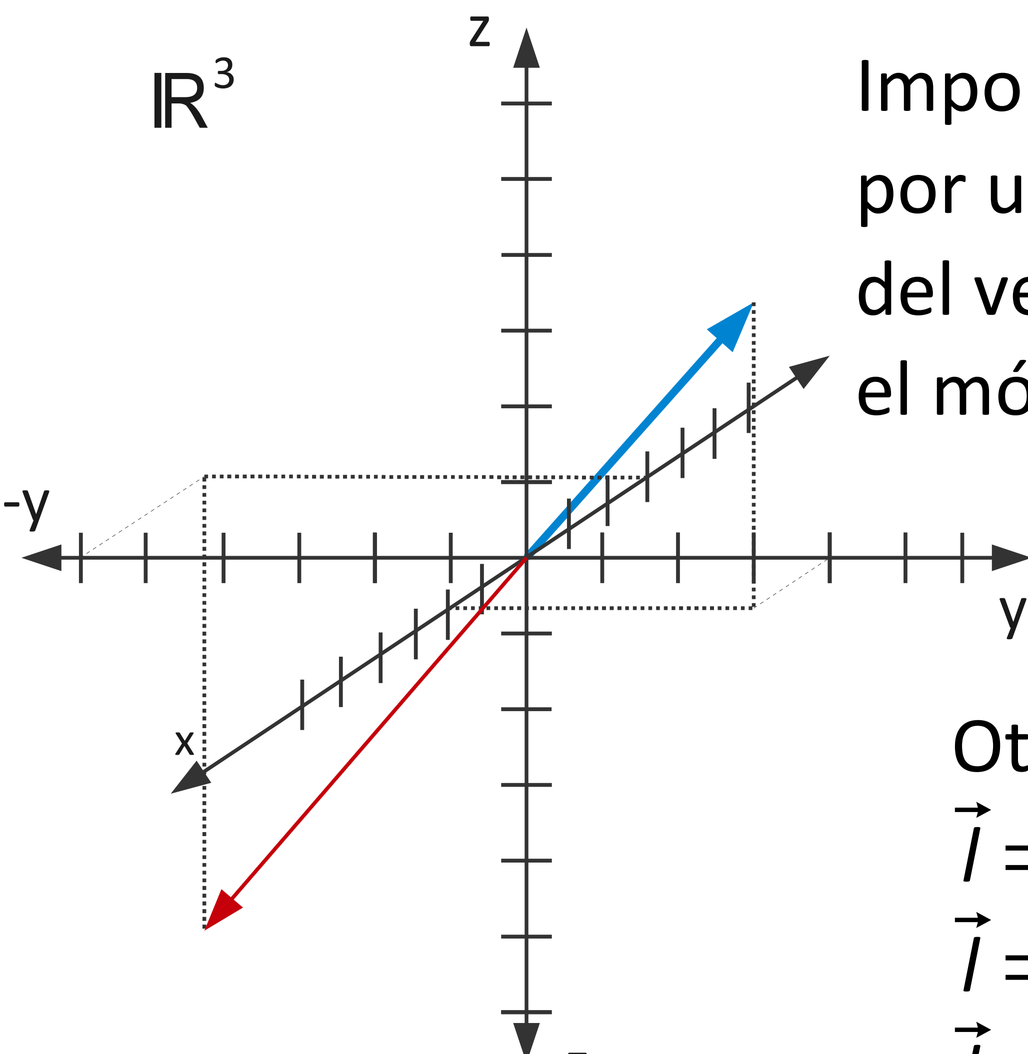
$$\vec{q}=k\,\vec{v}\Rightarrow\vec{q}=1,5\,(2,4,4)$$

$$\vec{q}=(1,5\times 2,\;\; 1,5\times 4,\;\; 1,5\times 4)$$

$$\vec{q}=(3,6,6)$$

Producto por un escalar

$\mathbb{R}^3$



Importante: Notar que el producto por un escalar no cambia la dirección del vector. Puede modificar el módulo y/o el sentido del mismo

$\vec{l} = b\,\vec{v} \Rightarrow \vec{q} = (-3, -6, -6)$

Otro: Sea $b = -1{,}5$ y $\vec{v} = (2{,}4{,}4)$

$\vec{l} = b\,\vec{v} \Rightarrow \vec{q} = -1{,}5\,(2{,}4{,}4)$

$\vec{l} = (-1{,}5 \times 2,\ -1{,}5 \times 4,\ -1{,}5 \times 4)$

$\vec{l} = (-3, -6, -6)$

Combinación lineal

Para un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$, decimos que un vector $\vec{u}$ es combinación lineal (c.l.) de los vectores

$$S=\{\vec{v}_{1,}\vec{v}_{2,}\ldots\vec{v}_n\},$$

si existen n escalares $a_{1,}a_{2,}\ldots a_n$ tales que:

$$\vec{u}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\ldots+a_n\vec{v}_n$$

Combinación lineal

Para un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$, decimos que un vector $\vec{u}$ es combinación lineal (c.l.) de los vectores

$$S=\{\vec{v}_{1,}\vec{v}_{2,}\ldots\vec{v}_{n}\},$$

si existen n escalares $a_{1,}a_{2,}\ldots a_{n}$ tales que:

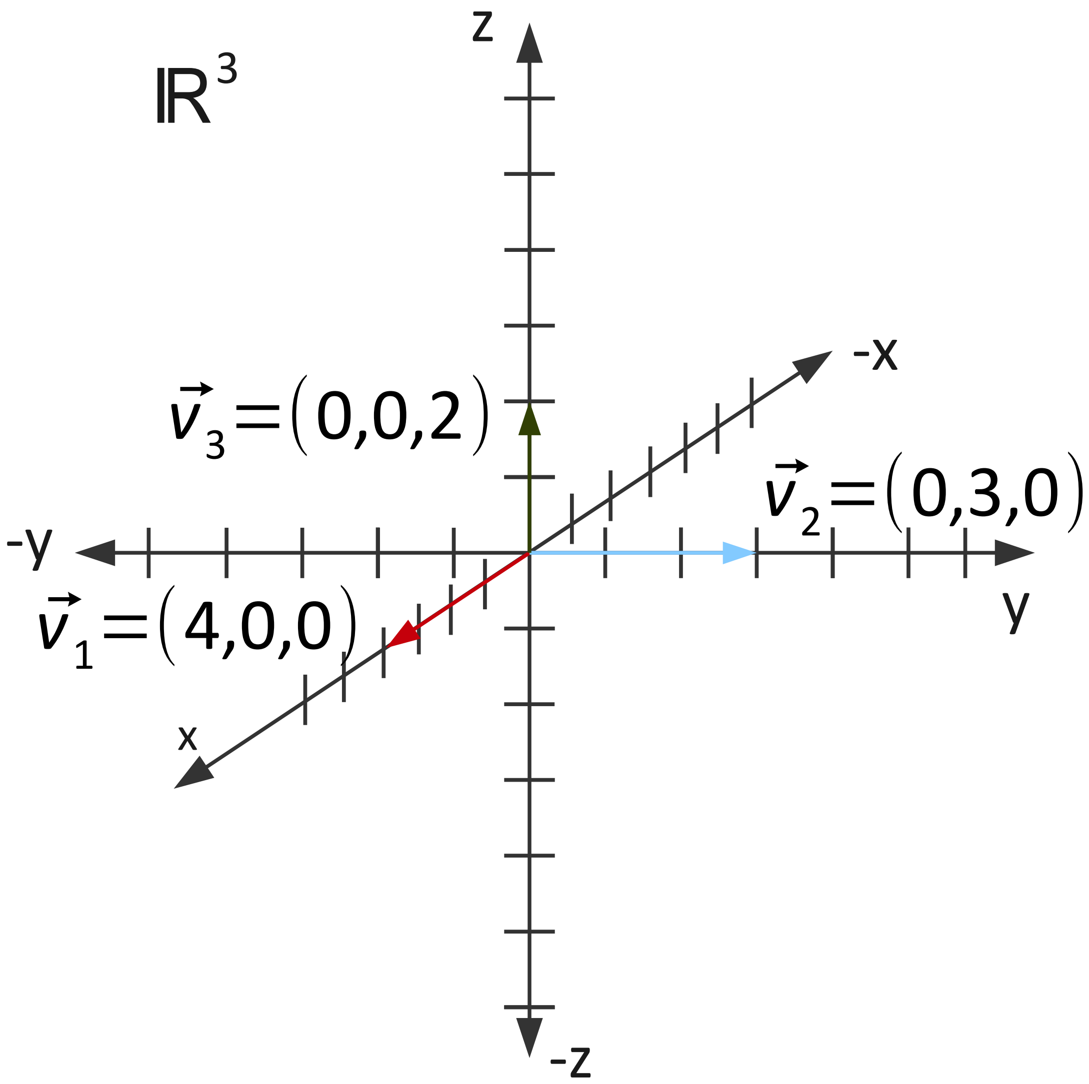
$$\vec{u}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\ldots+a_n\vec{v}_n$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, sea $\vec{u}=(2,2,4)$ y sea

$$S=\{\vec{v}_1=(4,0,0),\vec{v}_2=(0,3,0),\vec{v}_3=(0,0,2)\}$$

El vector $\vec{u}$ es c.l. de los vectores de S ya que:

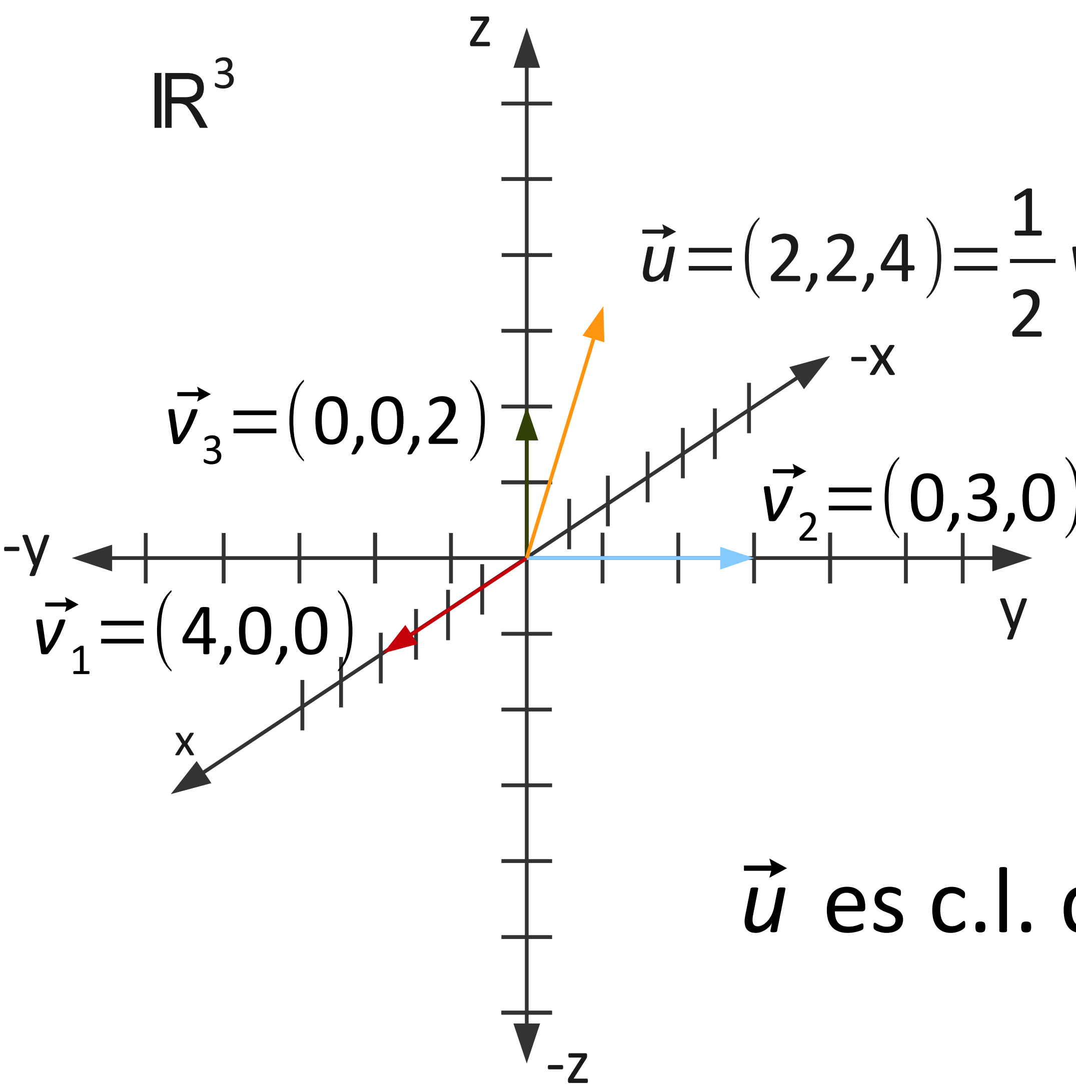
$$\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{v}_1+\frac{2}{3}\vec{v}_2+2\vec{v}_3\Rightarrow\vec{u}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3$$


$\mathbb{R}^3$
z
-x
$\vec{v}_3 = (0,0,2)$
$\vec{v}_2 = (0,3,0)$
-y
y
$\vec{v}_1 = (4,0,0)$
x
-z

Combinación lineal

$\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}=(2,2,4)=\frac{1}{2}\vec{v}_1+\frac{2}{3}\vec{v}_2+2\vec{v}_3$$



$\vec{u}$ es c.l. de los vectores $\vec{v}_{1,}\,\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$

Sistema de generadores

- Decimos que un conjunto de vectores de un espacio vectorial V es un **sistema de generadores** si es posible generar a todos los elementos del espacio como c.l. de los vectores del conjunto

Ejemplo: El conjunto $S=\{\vec{v}_1=(4,0,0),\vec{v}_2=(0,3,0),\vec{v}_3=(0,0,2)\}$

es un generador de $\mathbb{R}^3$: el vector $\vec{r}=(r_{1,}r_{2,}r_3)$:

$$\vec{r}=\frac{r_1}{4}\vec{v}_1+\frac{r_2}{3}\vec{v}_2+\frac{r_3}{2}\vec{v}_3$$

Independencia Lineal

- Decimos que un conjunto de vectores es **linealmente independiente** si el vector nulo no se puede expresar como c.l. de los elementos del conjunto

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, sea $\vec{0}=(0,0,0)$ y sea

$$S=\{\vec{v}_1=(4,0,0),\vec{v}_2=(0,3,0),\vec{v}_3=(0,0,2)\}$$

Sólo la c.l. trivial permite obtener $\vec{0}$ a partir de S:

$$\vec{0}=0\,\vec{v}_1+0\,\vec{v}_2+0\,\vec{v}_3 \Rightarrow a_1=a_2=a_3=0$$

S es un conjunto linealmente independiente (l.i.)

Base de un espacio vectorial

- Si ***V*** es un espacio vectorial, y *S* es un **conjunto de generadores** de ***V*** que sea **linealmente independiente**, entonces *S* es una **base de *V***.
  - Todos los vectores de V se obtienen como c.l. de S
  - Todo espacio vectorial tiene una base

    Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, el conjunto

    $$S=\{\vec{v}_1=(4,0,0),\vec{v}_2=(0,3,0),\vec{v}_3=(0,0,2)\}$$

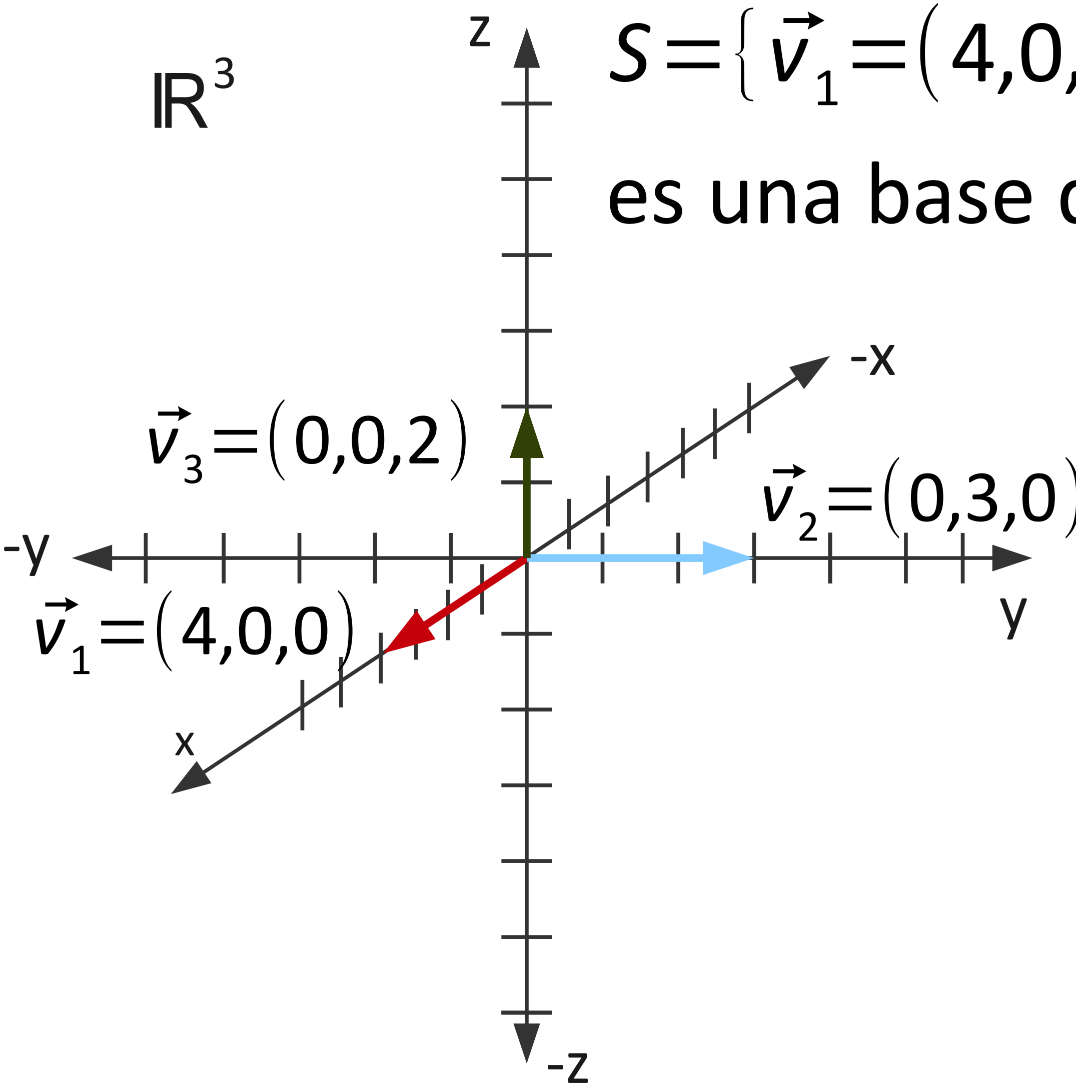
    es una base de $\mathbb{R}^3$
- Se define como **dimensión del espacio vectorial *V*** al **número de vectores de una base** de ***V***.

  Ejemplo: La dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3

Base canónica

$$S=\{\vec{v}_1=(4,0,0),\vec{v}_2=(0,3,0),\vec{v}_3=(0,0,2)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$



Base canónica

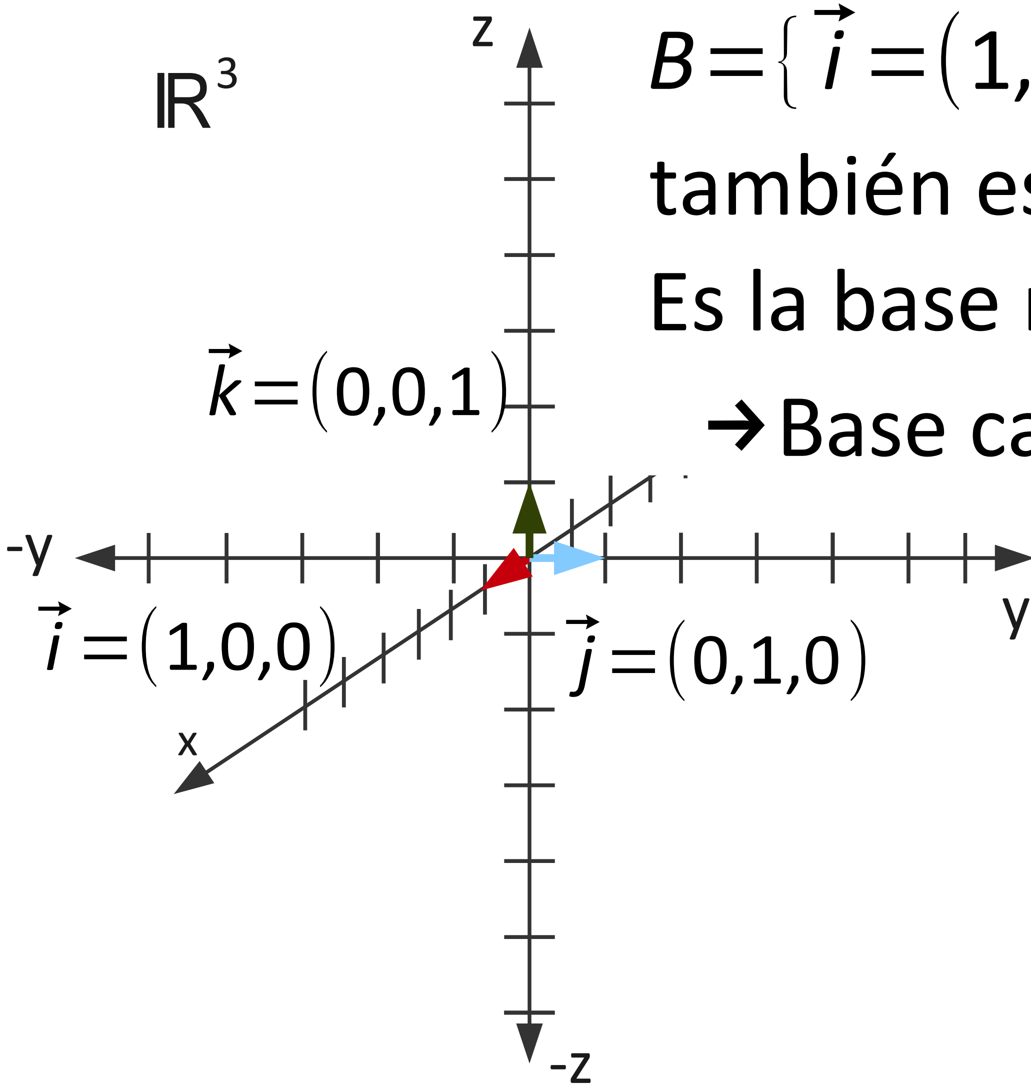
$\mathbb{R}^3$

$$B=\{\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)\}$$

también es una base de $\mathbb{R}^3$

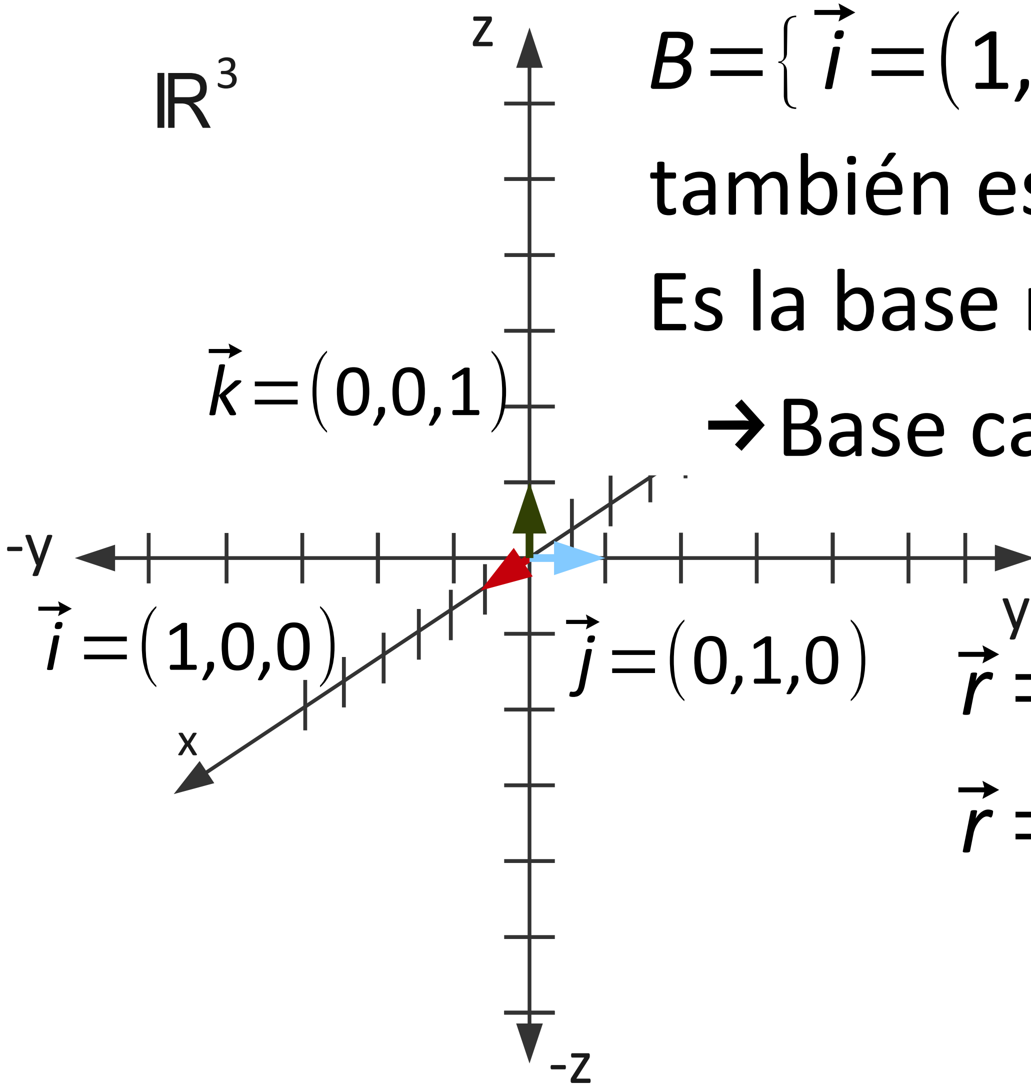
Es la base más simple

→ Base canónica de $\mathbb{R}^3$



Base canónica

$\mathbb{R}^3$



$$B=\{\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)\}$$

también es una base de $\mathbb{R}^3$

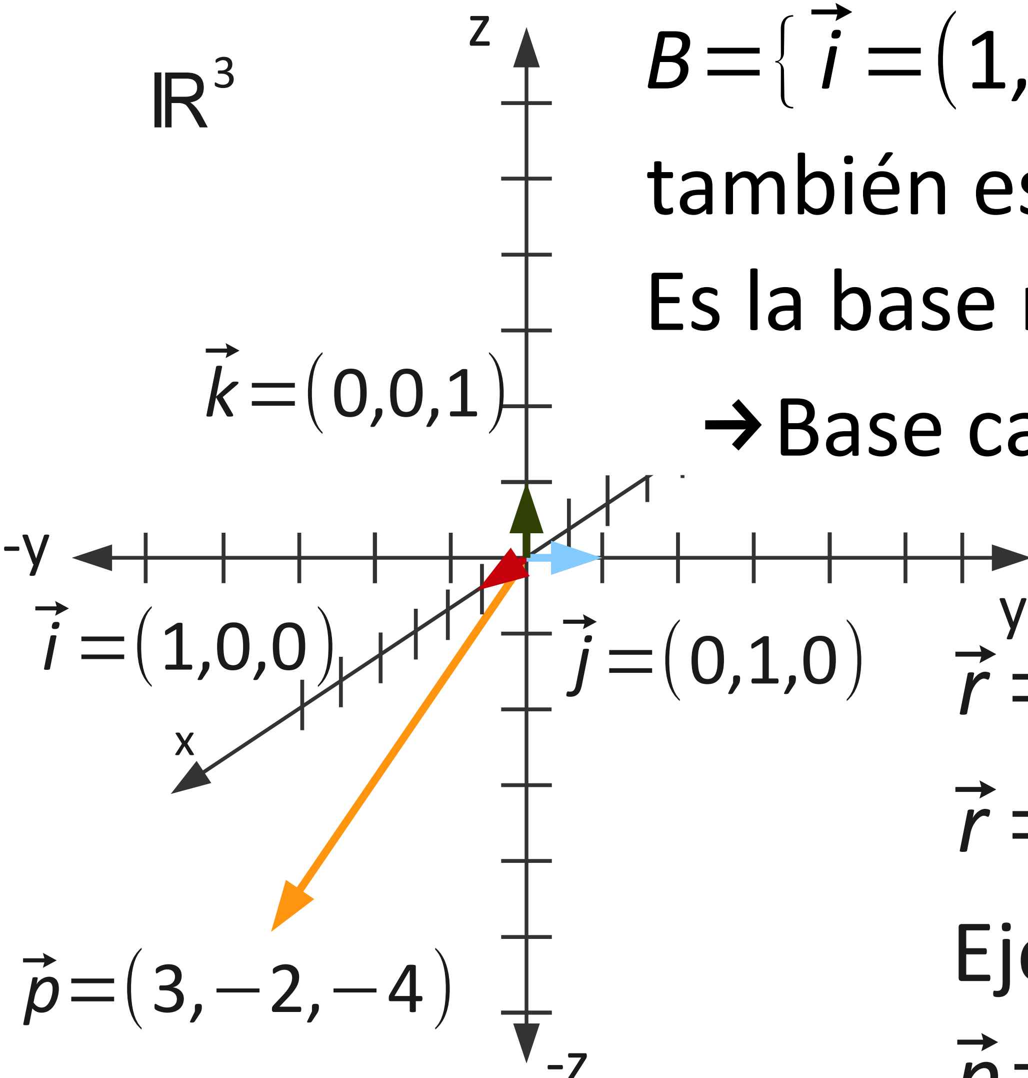
Es la base más simple

→ Base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}=(r_{1,}r_{2,}r_3)$$

$$\vec{r}=r_1\vec{i}+r_2\vec{j}+r_3\vec{k}$$

Base canónica



$B=\{\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)\}$

también es una base de $\mathbb{R}^3$

Es la base más simple

→ Base canónica de $\mathbb{R}^3$

$\vec{r}=(r_{1,}r_{2,}r_{3})$

$\vec{r}=r_1\vec{i}+r_2\vec{j}+r_3\vec{k}$

Ejemplo: $\vec{p}=(3,-2,-4)$

$\vec{p}=3\vec{i}+(-2)\vec{j}+(-4)\vec{k}$

Problema de desarrollo

- Un avión que acaba de despegar desde el Aeropuerto de Palo Negro se dirige hacia el Sur. El avión también se encuentra en su etapa de ascenso, demorando 10 minutos en alcanzar su altitud de crucero de 20000 pies s.n.m. Si la altura del aeropuerto es de 950 m s.n.m., y la rapidez total es 500 km/h, determine las 3 componentes del vector velocidad. Suponiendo que el avión partió del reposo, calcule además el vector aceleración media.

  Nota: en R3, el módulo de un vector se calcula con:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

¡Atención! Nueva guía

- Guia 01: Vectores 1ra parte
  - Pídasela desde esta noche a su quioskero amigo

    http://halley.uis.edu.co/fisica_para_todos
  - Entrega: Próximo Jueves 29/Mayo 11:59 (aquí)
- Guia 02: Vectores 2da parte
  - Desde el martes