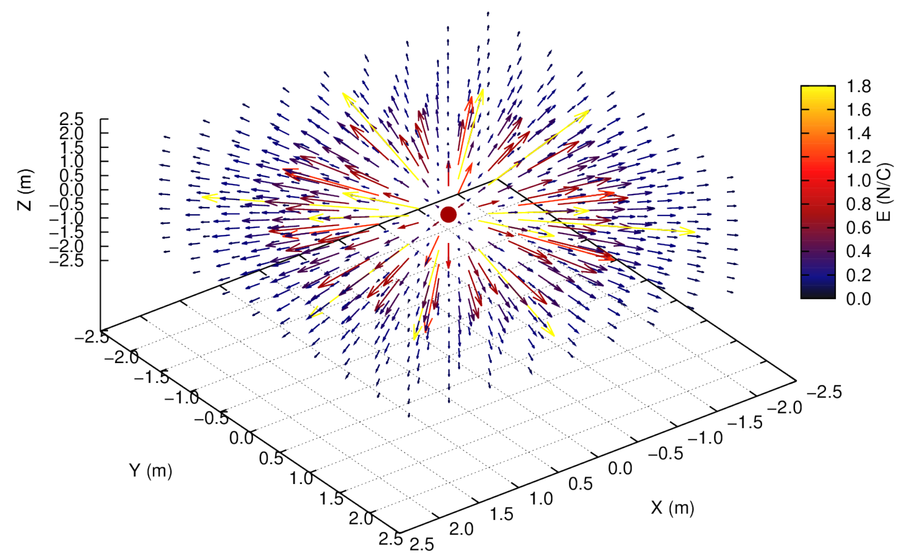
Introducción a la Física (2014)

Universidad Industrial de Santander

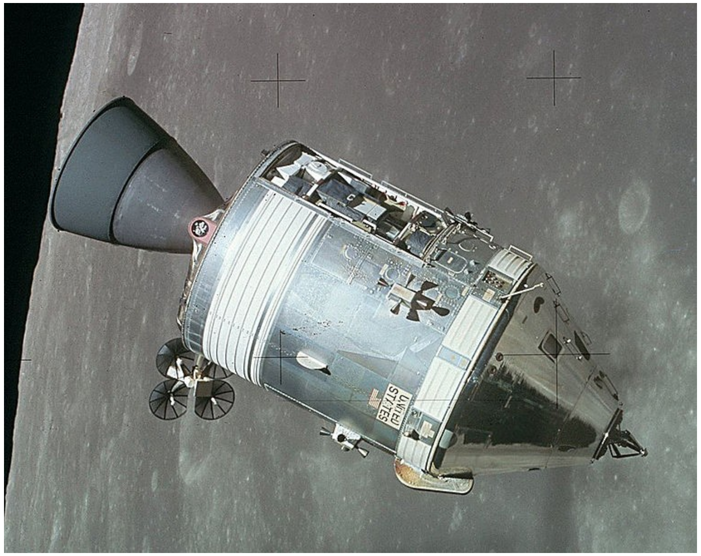
- Unidad: 03
- Clase: 04
- Fecha: 20140821J
- Contenido: Energía Electrostática
- Web: http://halley.uis.edu.co/fisica_para_todos/
- Archivo: 20140821J-HA-repaso.pdf

En el episodio anterior...

Problemas de “frizz” → “Descárguese y póngase en contacto con la Tierra”

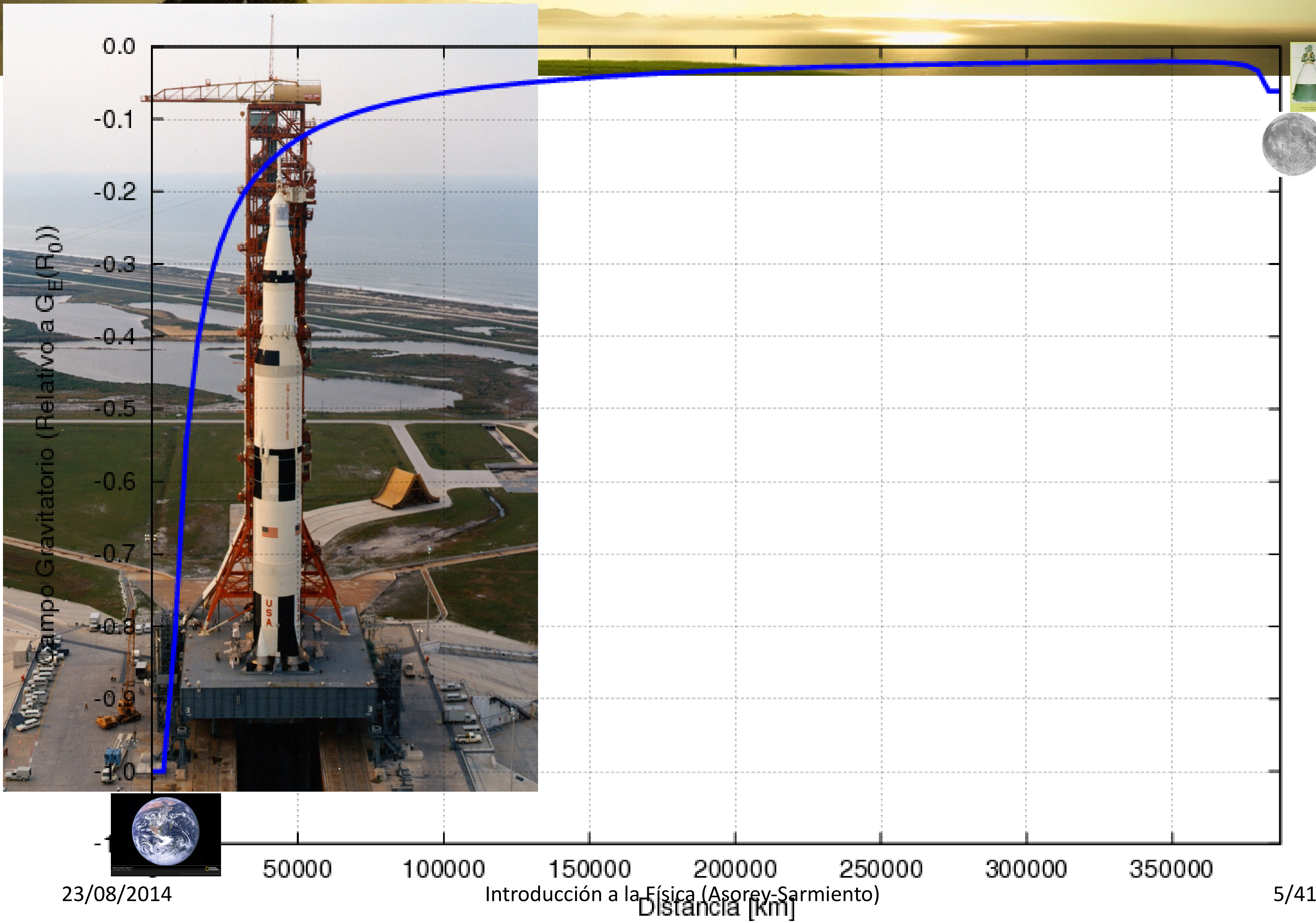


Ida y vuelta

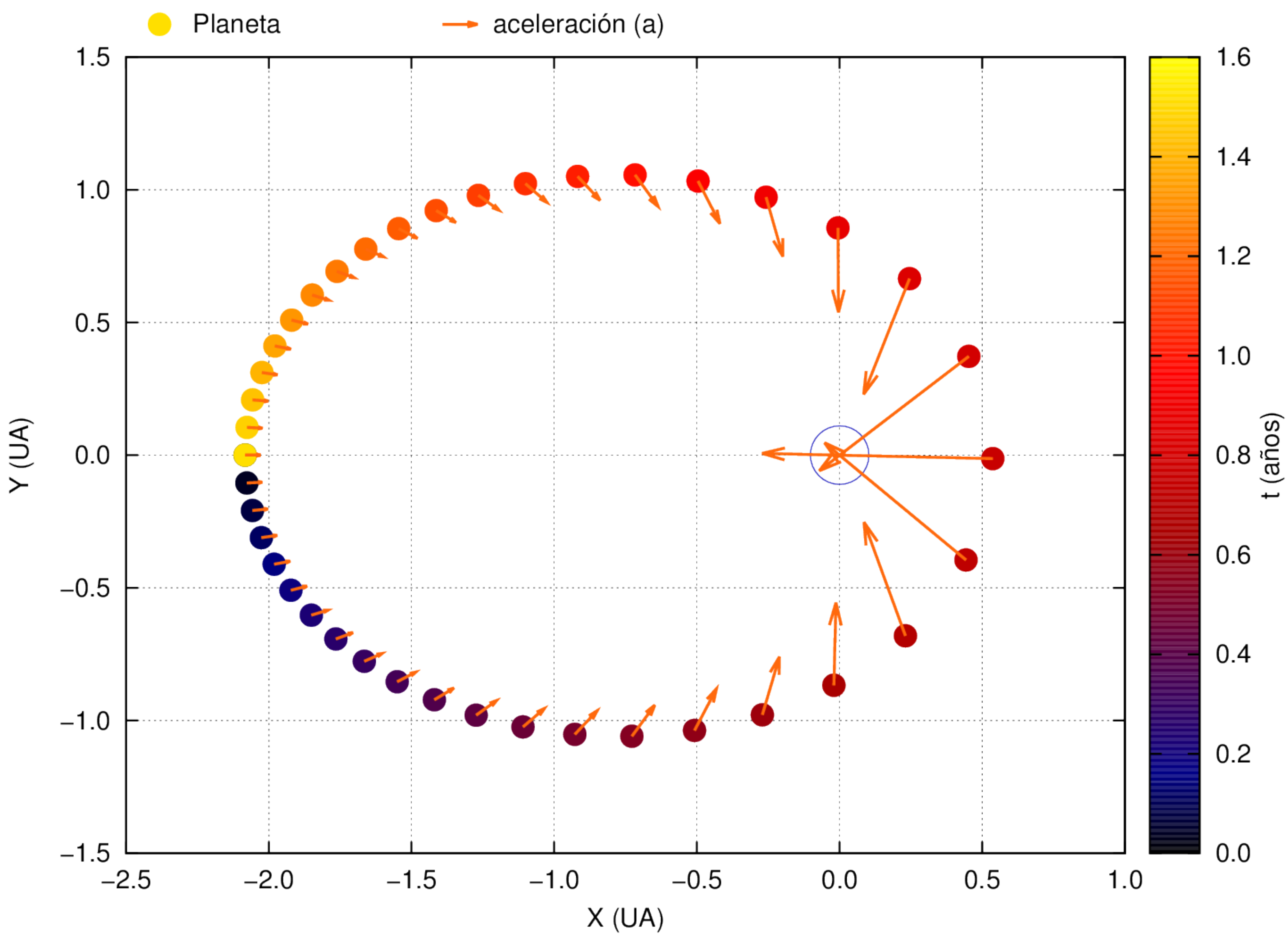



Apollo Spacecraft Engines
Service propulsion engine
thrust: 20,500 lb
LM descent engine
thrust: 10,500 lb
LM ascent engine
thrust: 3,500 lb

“Pozo de Potencial”

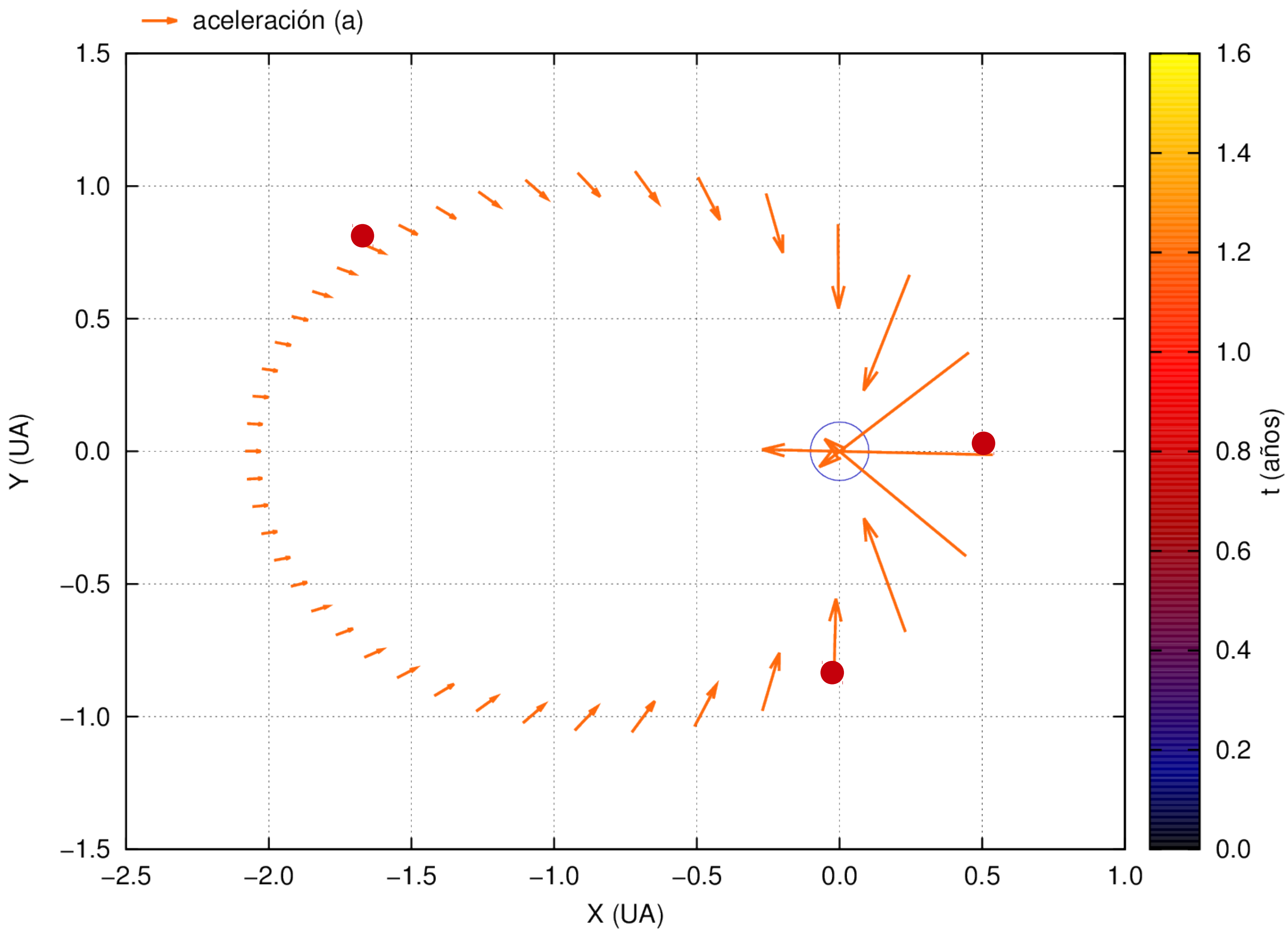


planeta+aceleración

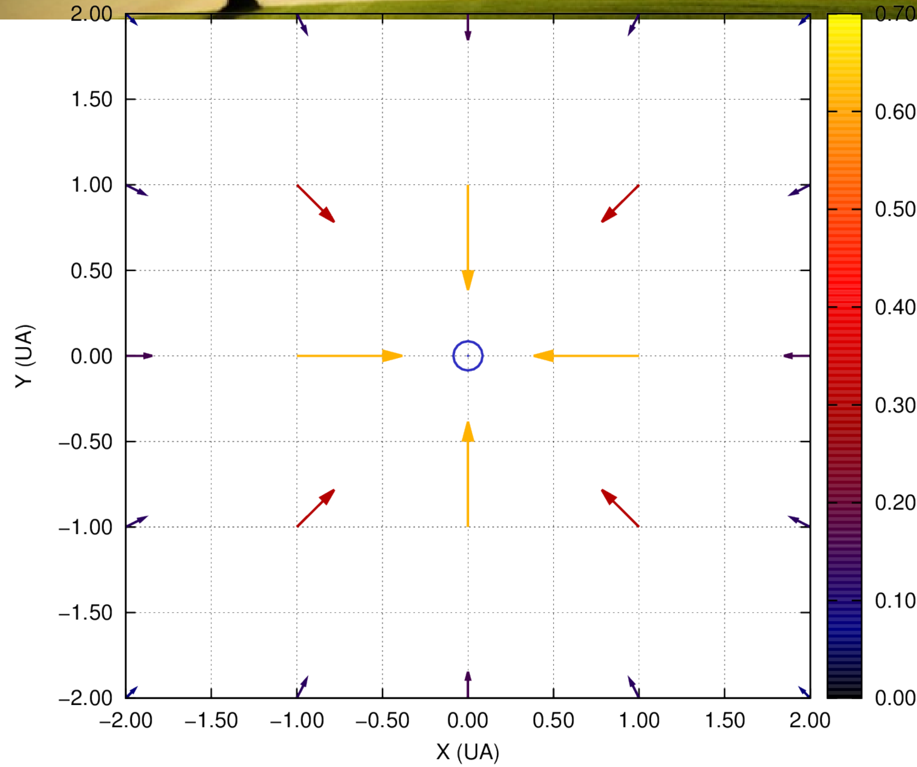


aceleración=Fuerza / masa

masa de prueba



Muevo la masa de prueba en el plano z=0



$$\vec{F}(r) = \frac{G\,M\,m}{|\vec{r}|^2}\,\hat{\vec{r}}$$

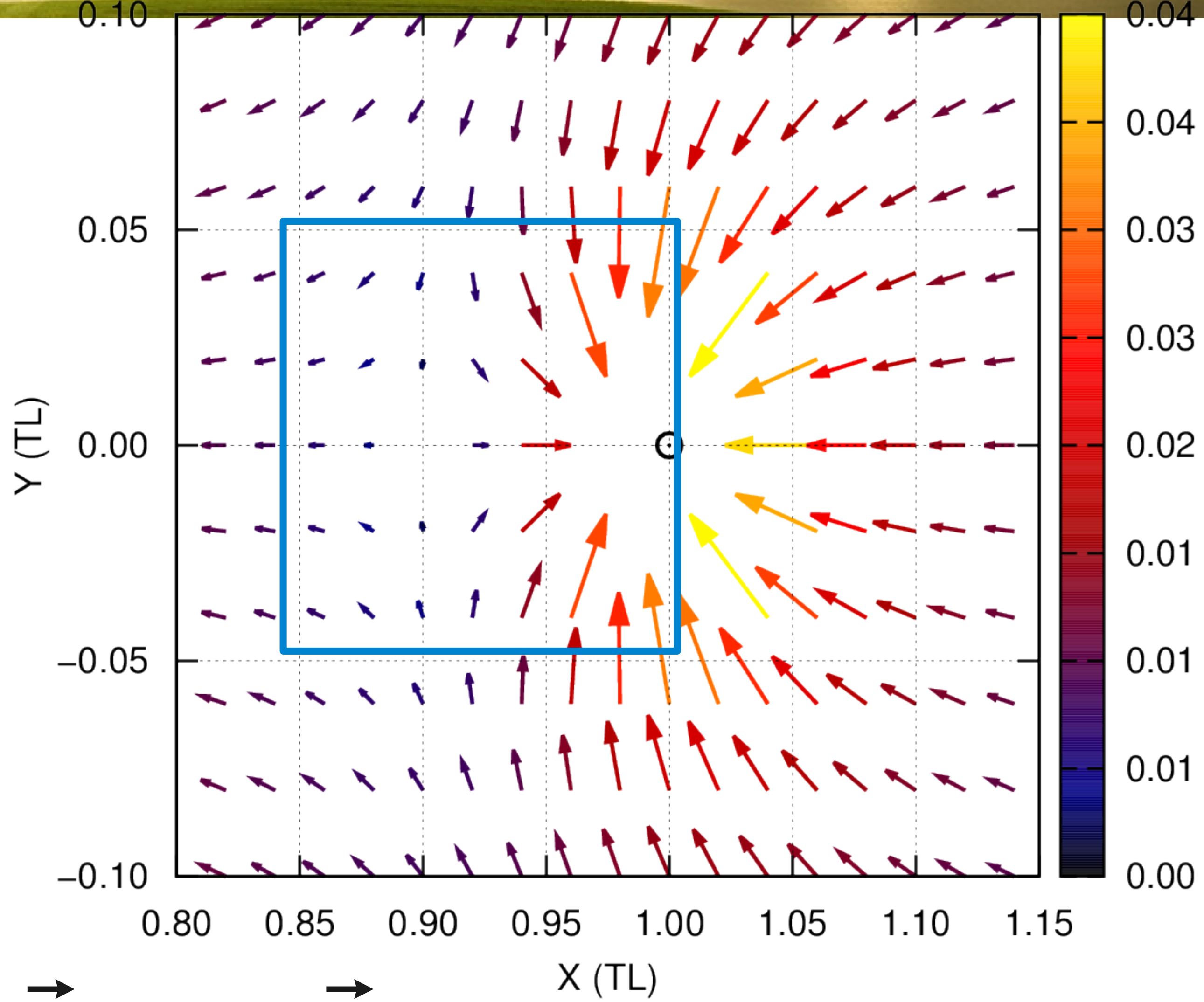
$$\vec{F}(r) = m\left[\left(\frac{G\,M}{|\vec{r}|^2}\right)\hat{\vec{r}}\right]$$

$$\vec{F}(r) = m\,\vec{g}(r)$$

$$\boxed{\vec{g}(r) = \left(\frac{G\,M}{|\vec{r}|^2}\right)\hat{\vec{r}}}$$

g(r) es un *campo vectorial*.
A cada punto **r** del espacio le asigna el vector **g(r)**

Campo gravitatorio sistema Tierra-Luna



$$\vec{g}(r) = \vec{g_T}(r) + \vec{g_L}(r)$$

Energia "Y" Potencial, Fuerzas "Y" Campos

- **Potencial de interacción** es la energía potencial de interacción por unidad de carga

$$V_i(\vec{r}) = \frac{U_i(\vec{r})}{q_i}$$

- P. ej: Potencial Gravitatorio: $V_g(\vec{r}) = \frac{1}{m}\left(\frac{-G\,M\,m}{|\vec{r}|}\right)$

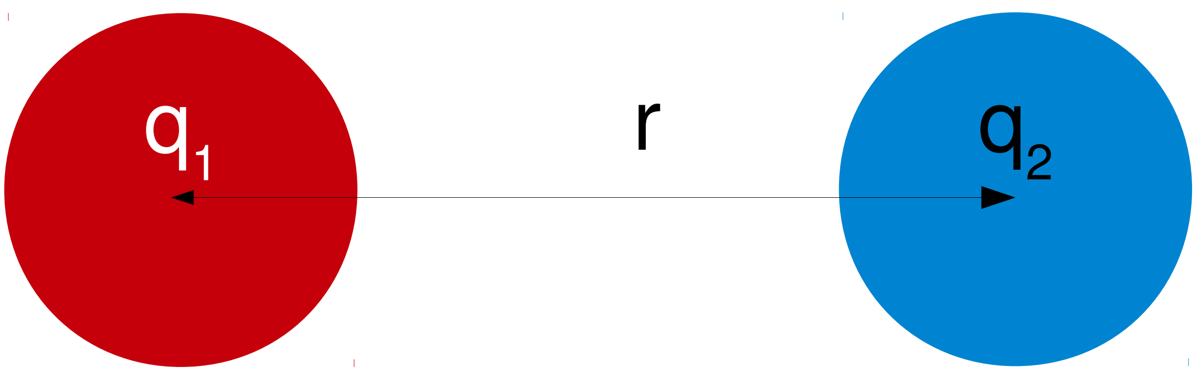
- **Campo de interacción** es la fuerza de interacción por unidad de carga

$$\vec{f}_i(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_i(\vec{r})}{q_i}$$

P. ej: Campo gravitatorio $\vec{f}_g(\vec{r}) \equiv \vec{g}(\vec{r}) = \frac{1}{m}\left(G\frac{M\,m}{|\vec{r}|^2}\hat{r}\right)$

En la naturaleza existe otra interacción

- Es de largo alcance (como la gravedad)
- Pero tiene “dos” tipos de cargas
  - Convención de nombres: Carga Positiva (+) y Carga Negativa (-)
  - Unidad de carga → Coulomb → **C**
- Puede ser atractiva o repulsiva (según el tipo de cargas que interactúan)
- Y depende de la posición relativa entre las cargas



Energía potencial electrostática

Campo Escalar

$$\boxed{U_e(\vec{r}) = k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|}}$$

Campo Vectorial

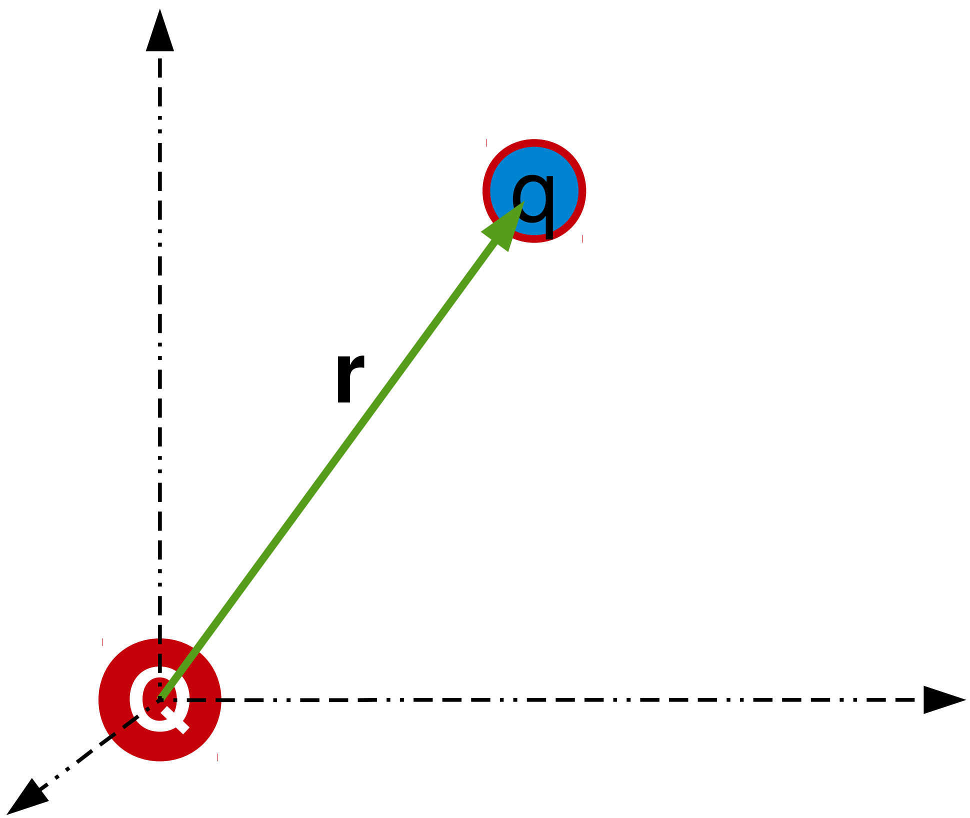
$$\boxed{\vec{F}_e(\vec{r}) = k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2}\hat{r}}$$

$$k_e \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.988\times 10^9 \frac{\mathrm{J\,m}}{\mathrm{C}^2} \simeq 9\times 10^9 \frac{\mathrm{J\,m}}{\mathrm{C}^2}$$

k_e = Constante de Coulomb

Idea de la magnitud de la intensidad de la interacción

Q es mi carga "fuente"
q es mi carga de prueba
V(r) es el potencial eléctrico



$$U_e(\vec{r}) = k_e \frac{Q\,q}{|\vec{r}|}$$

$$U_e(\vec{r}) = q\,k_e \frac{Q}{|\vec{r}|}$$

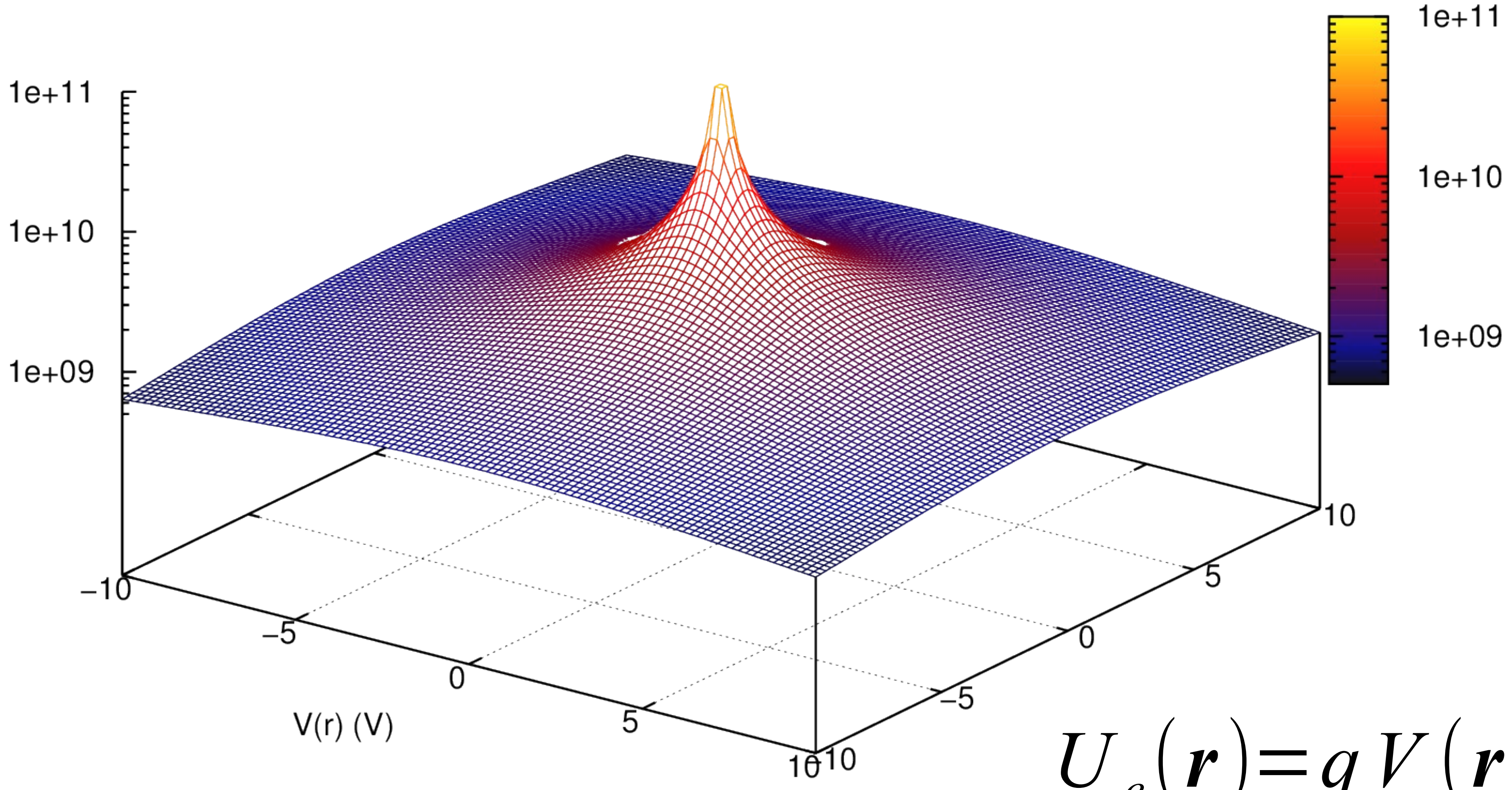
$$U_e(\vec{r}) = q\left(k_e \frac{Q}{|\vec{r}|}\right)$$

$$U_e(\vec{r}) = q\,V(\vec{r})$$

V(**r**) es un campo escalar

[V] = Voltio = J/C

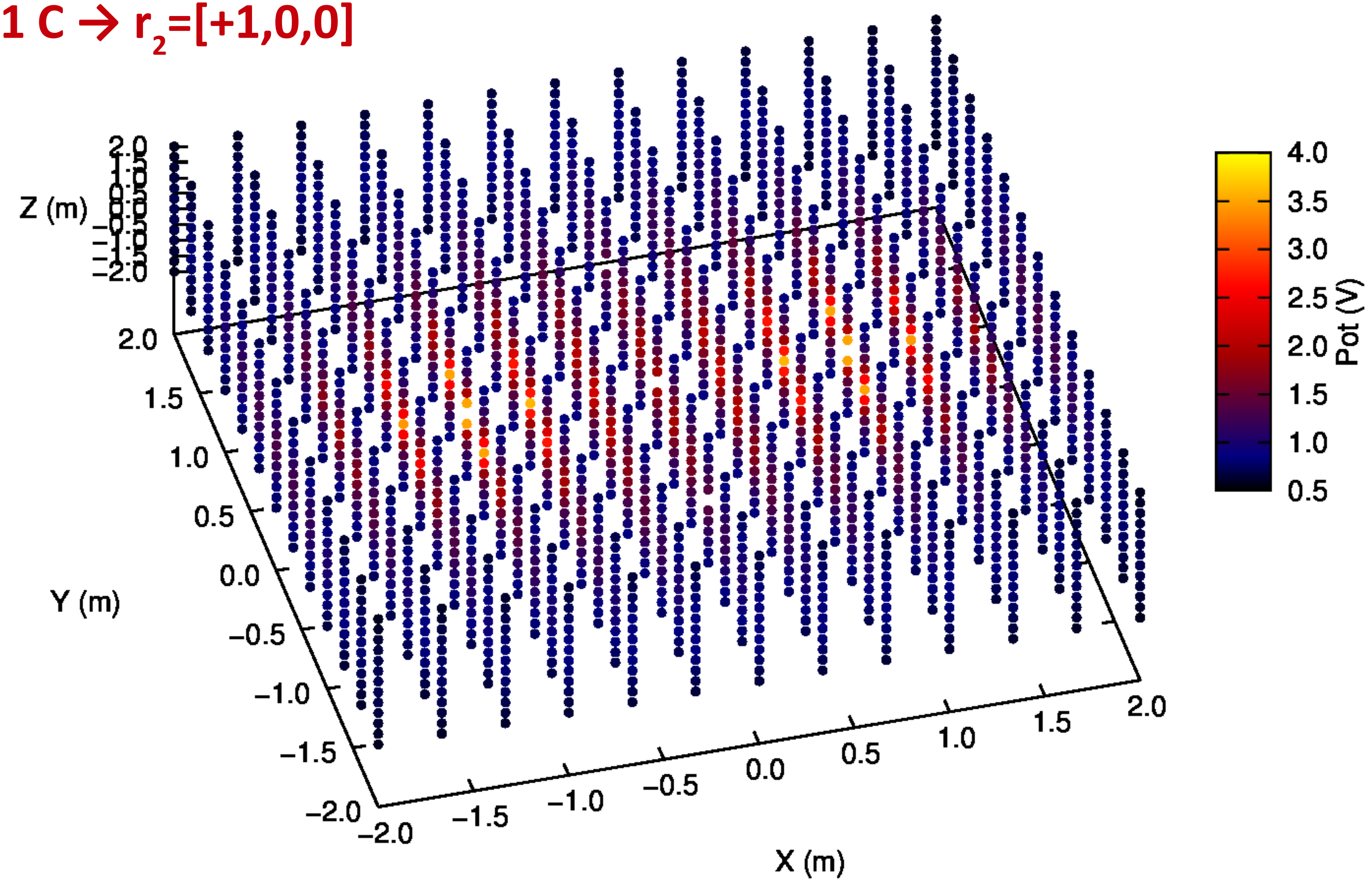
Carga "Puntual" ← Sin distribución espacial de carga
Q=1 C en el orígen



$$U_e(\boldsymbol{r}) = q\,V(\boldsymbol{r})$$

Potencial eléctrico en el espacio

Q_1=+1 C → r_1=[-1,0,0]
Q_2=+1 C → r_2=[+1,0,0]



Potencial eléctrico → distribución de cargas puntuales

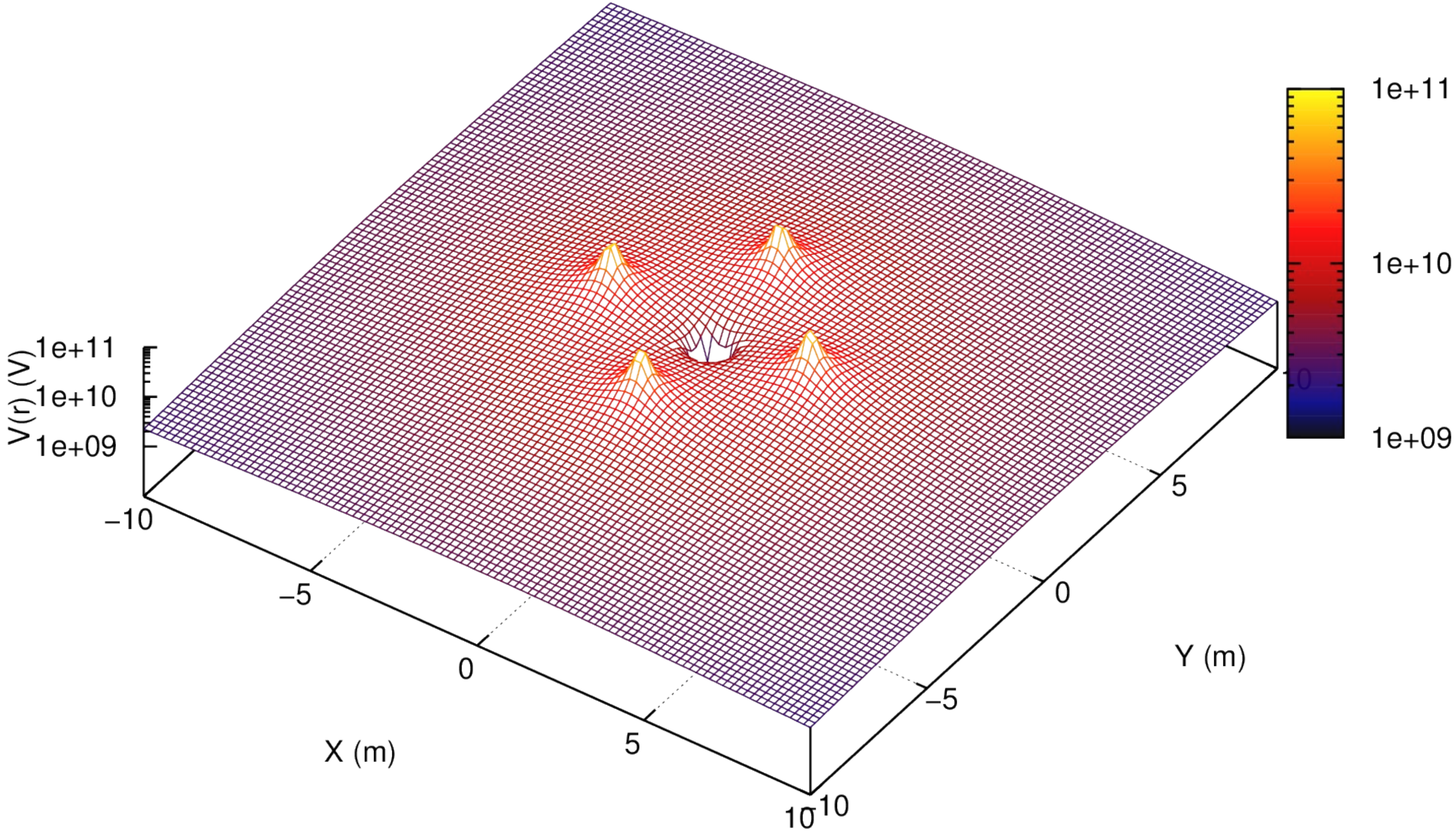
- Principio de superposición:
  - Supongo que cada carga es independiente
  - Calculo los potenciales asociados a cada carga
  - Sumo todos los potenciales
- Si tengo N cargas, cada una Q_i, en las posiciones $\mathbf{r}_i$, el potencial en el punto **r** será:

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_i^N V_i(\boldsymbol{r}) = \sum_i^N k_e \frac{Q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|}$$

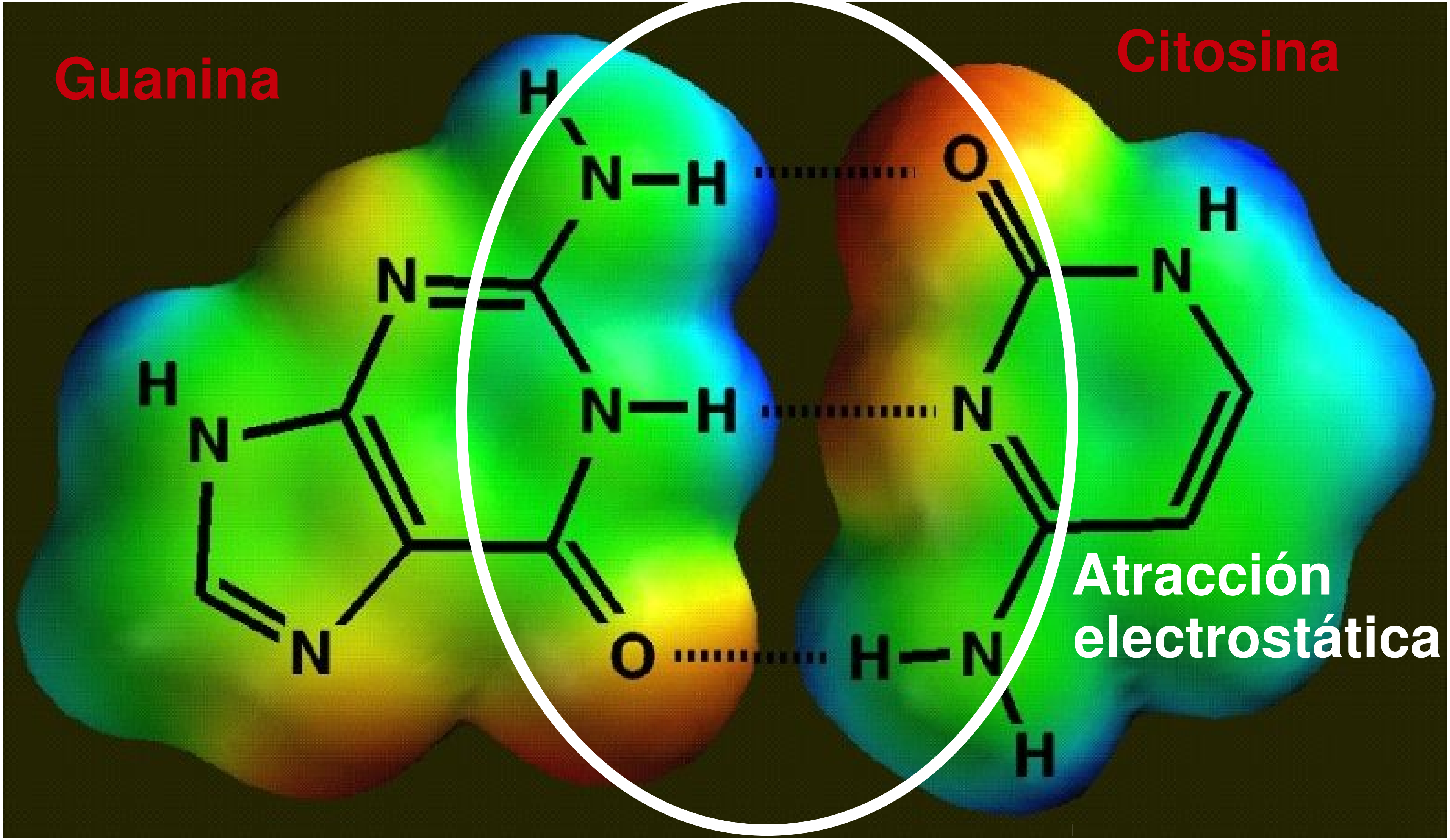
- Y la energía potencial para una carga q de prueba:

$$U_e(\boldsymbol{r}) = q\,V(\boldsymbol{r}) = q \sum_i^N k_e \frac{Q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|}$$

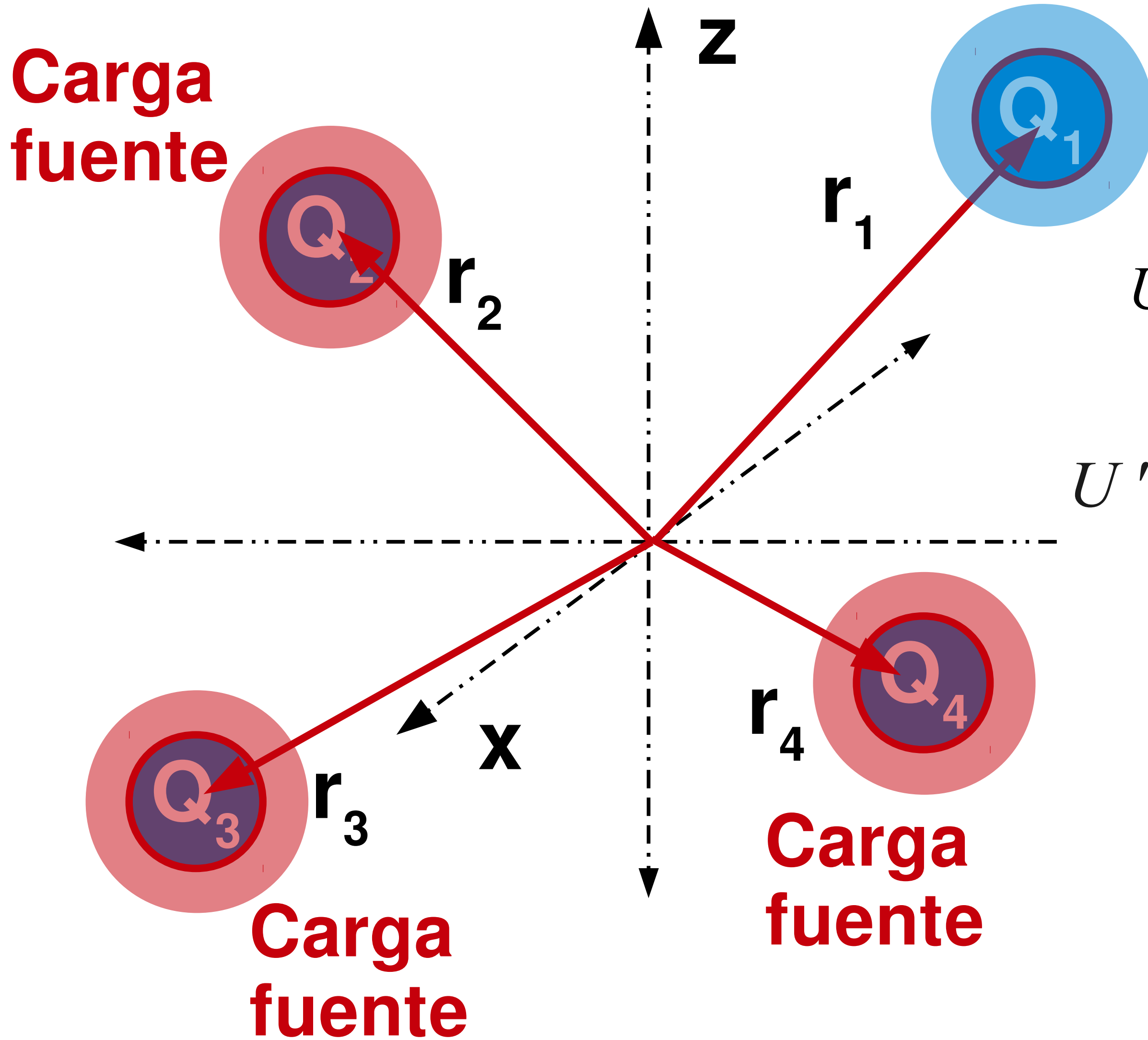
4 cargas Q=1C en X=+/- 3 m y Y=+/-3 y una carga Q=-0.5 C en el orígen



En el episodio anterior...



Ejemplo: energía de configuración
4 cargas $Q_1 \ldots Q_4$ en posiciones $r_1 \ldots r_4$

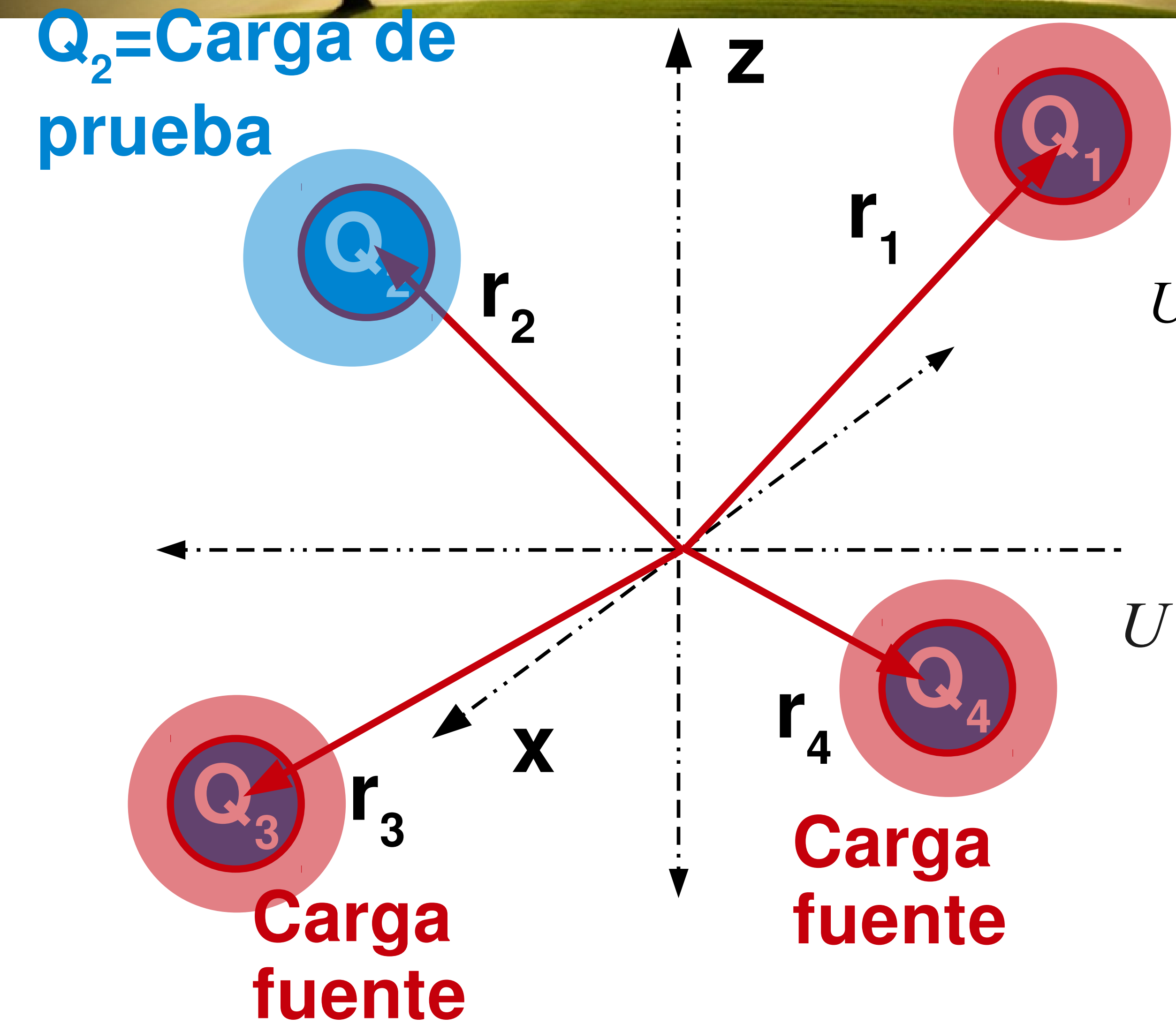


Q_1=Carga de prueba

$$U_e(\vec{r}) = q\,V(\vec{r}) = q\sum_i^N k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

$$U'_1(\vec{r}_1) = Q_1 \sum_{i=2,3,4} k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}_1-\vec{r}_i|}$$

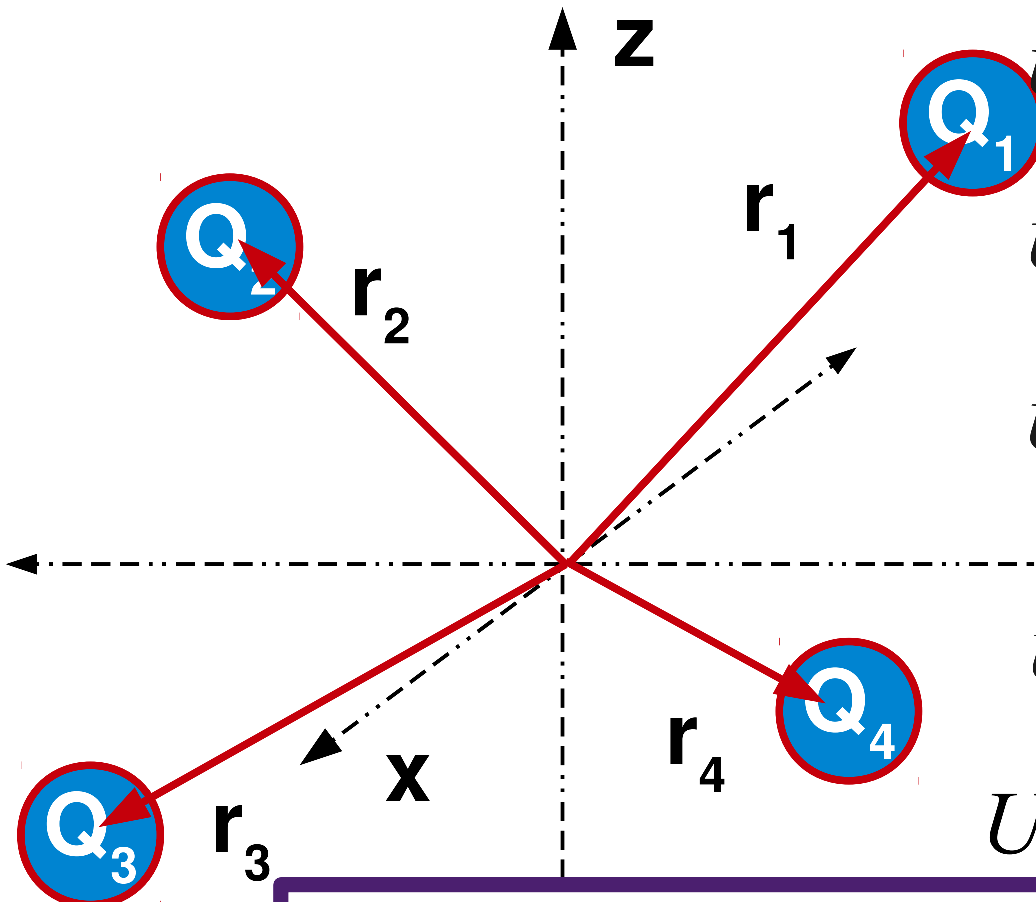
Ejemplo: energía de configuración
4 cargas $Q_1 \ldots Q_4$ en posiciones $r_1 \ldots r_4$



$$U_e(\vec{r}) = q\,V(\vec{r}) = q\sum_i^N k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

$$U'_2(\vec{r}_2) = Q_2 \sum_{i=1,3,4} k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}_2-\vec{r}_i|}$$

Energía de un sistema de N cargas



$$U'_1(\vec{r}_1)=Q_1\sum_{i=2,3,4} k_e\frac{Q_i}{|\vec{r}_1-\vec{r}_i|}$$

$$U'_2(\vec{r}_2)=Q_2\sum_{i=1,3,4} k_e\frac{Q_i}{|\vec{r}_2-\vec{r}_i|}$$

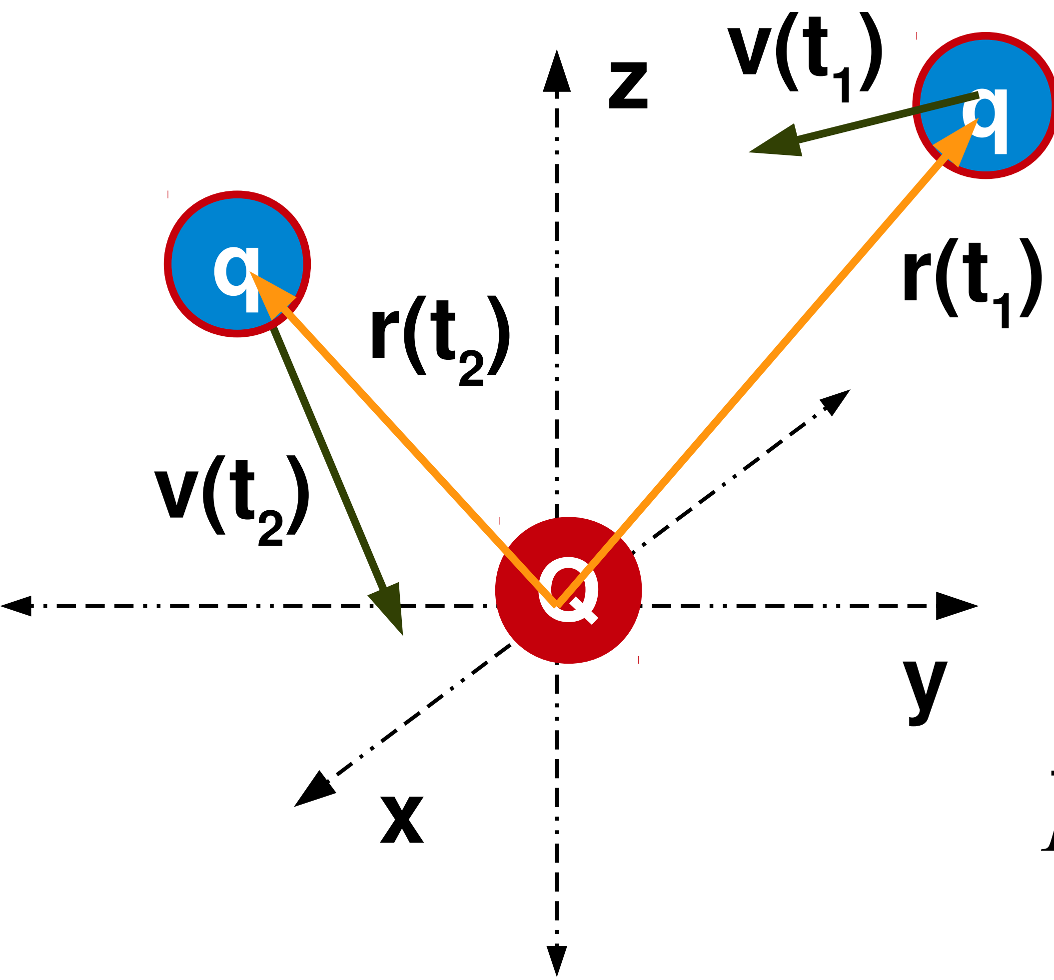
$$U'_3(\vec{r}_3)=Q_3\sum_{i=1,2,4} k_e\frac{Q_i}{|\vec{r}_3-\vec{r}_i|}$$

$$U'_4(\vec{r}_4)=Q_4\sum_{i=1,2,3} k_e\frac{Q_i}{|\vec{r}_4-\vec{r}_i|}$$

$$U_e=U'_1+U'_2+U'_3+U'_4$$

$$\boxed{U_e=\sum_{i=1}^{N} Q_i\left(\sum_{j\neq i}^{N} k_e\frac{Q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\right)}$$

$$\text{Energía mecánica} = \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial}$$

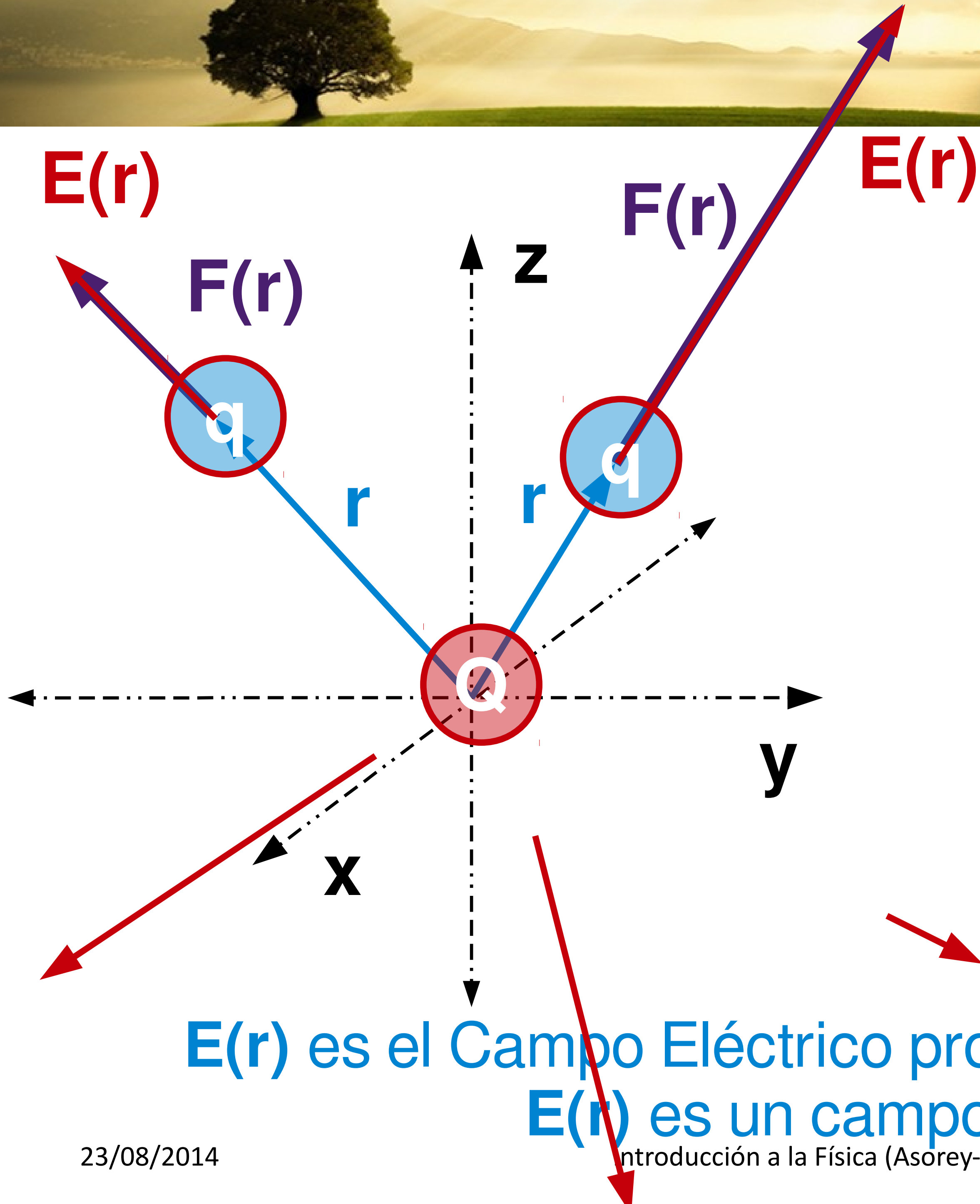


$$U_e\left(\vec{r}(t)\right) = k_e \frac{qQ}{\left|\vec{r}(t)\right|}$$

$$E_m = E_k + U_e$$

$$\frac{\Delta E_m}{\Delta t} = 0$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\lim_{\Delta\vec{r}\to 0}\left(\frac{\Delta U_e}{|\Delta\vec{r}|}\right)\hat{\boldsymbol{r}}$$



$$\vec{F}_e(\vec{r}) = \left(k_e \frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2} \right) \hat{r}$$

$$\vec{F}_e(\vec{r}) = q \left(k_e \frac{Q}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \right)$$

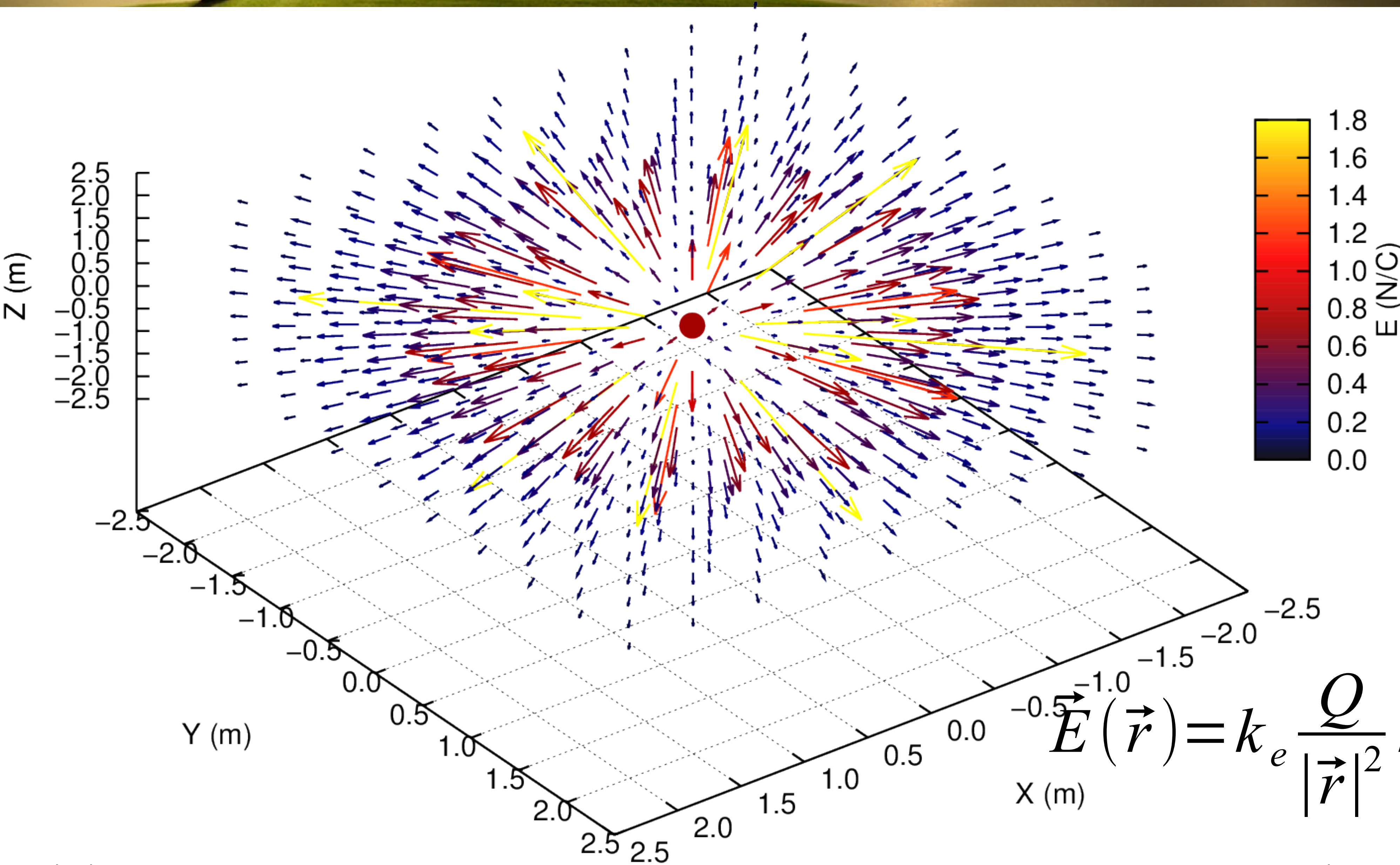
$$\vec{F}_e(\vec{r}) = q\,\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(k_e \frac{Q}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \right)$$

E(r) es el Campo Eléctrico producido por la carga Q

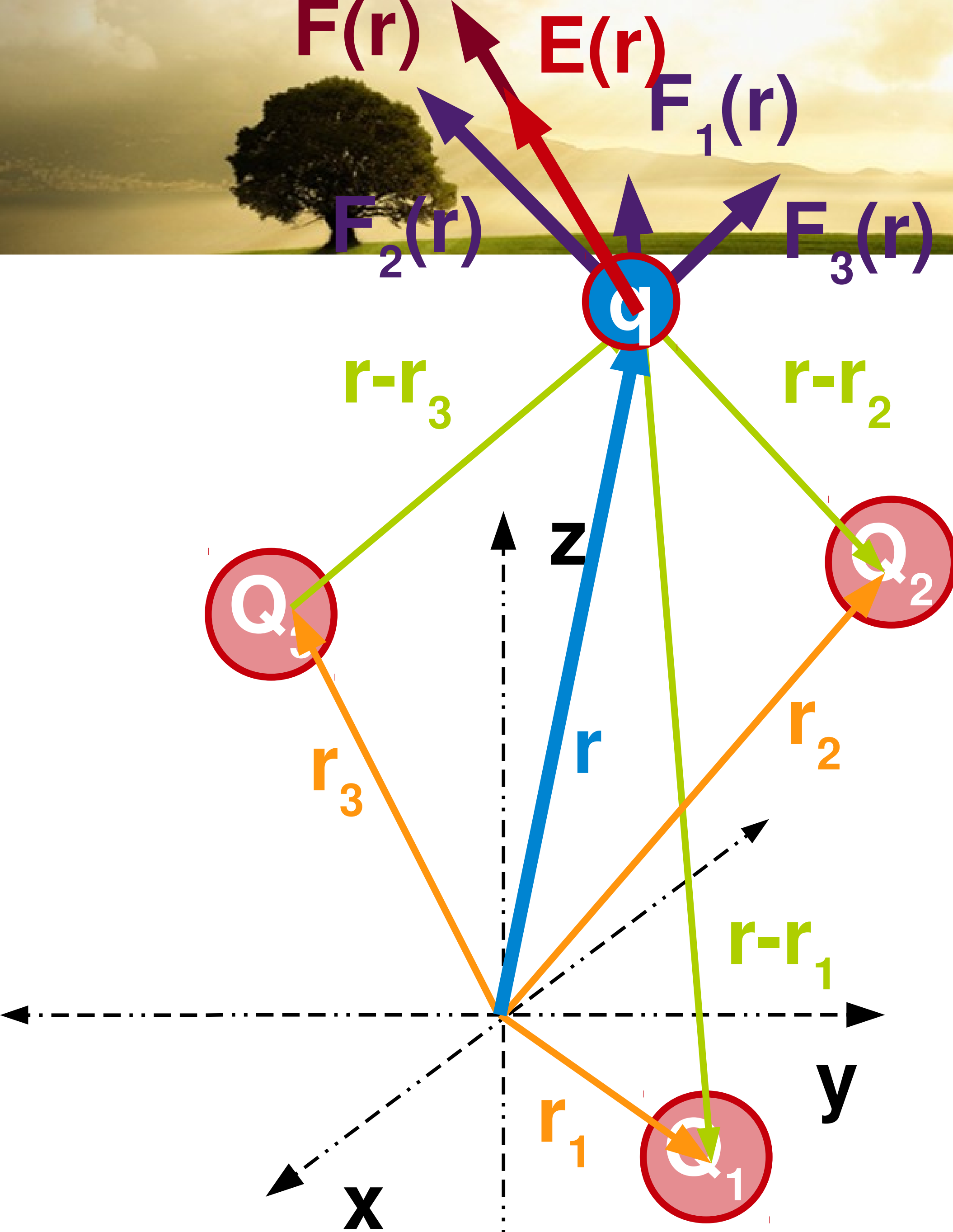
E(r) es un campo vectorial

Campo Eléctrico, carga puntual en el origen



$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{Q}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

Configuración de cargas



$$\vec{F}_1(\vec{r}) = q\left(k_e \frac{Q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\right)\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

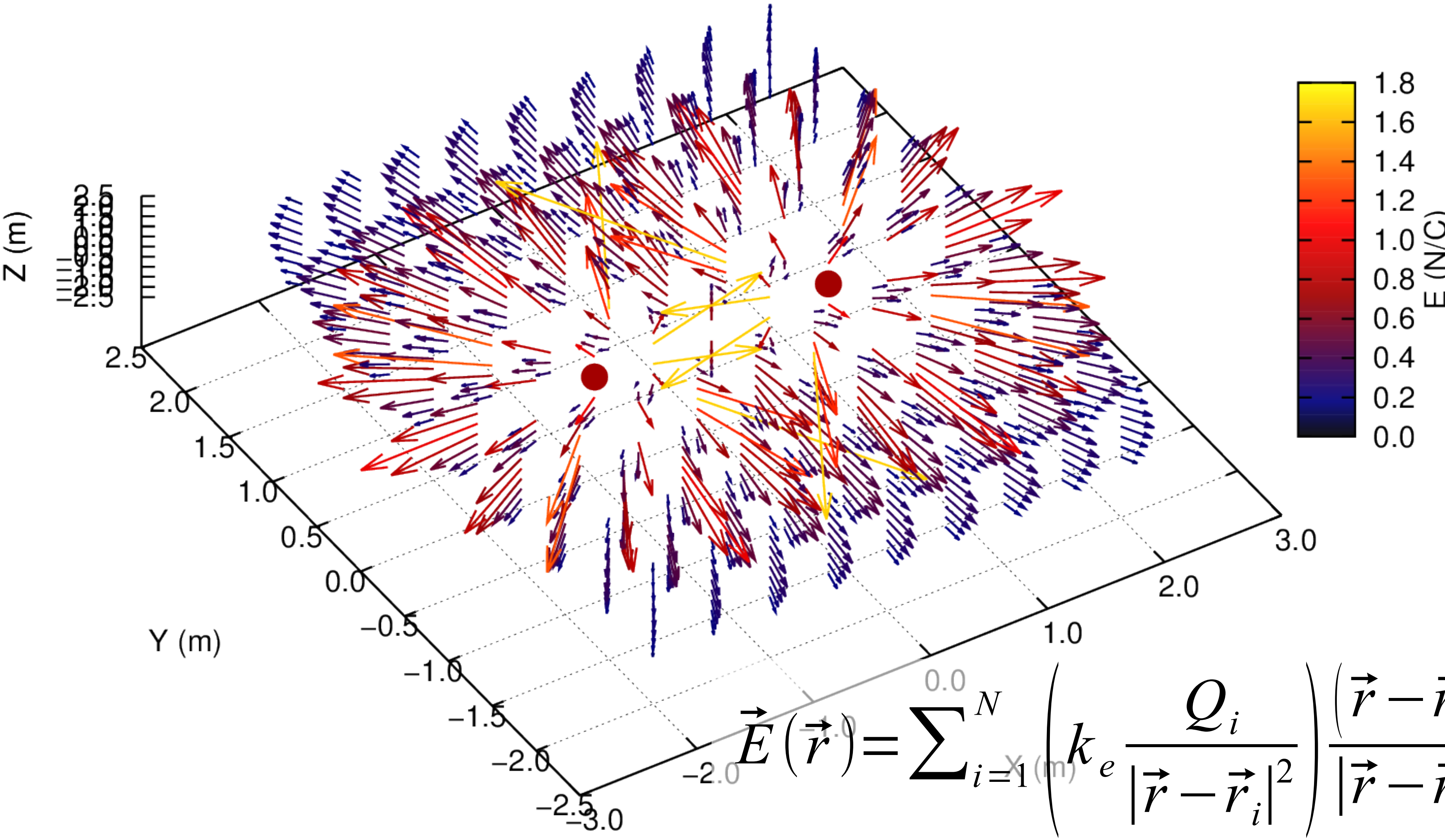
$$\vec{F}_2(\vec{r}) = q\left(k_e \frac{Q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}\right)\frac{(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

$$\vec{F}_3(\vec{r}) = q\left(k_e \frac{Q_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|^2}\right)\frac{(\vec{r}-\vec{r}_3)}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3}\left(k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\right)\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

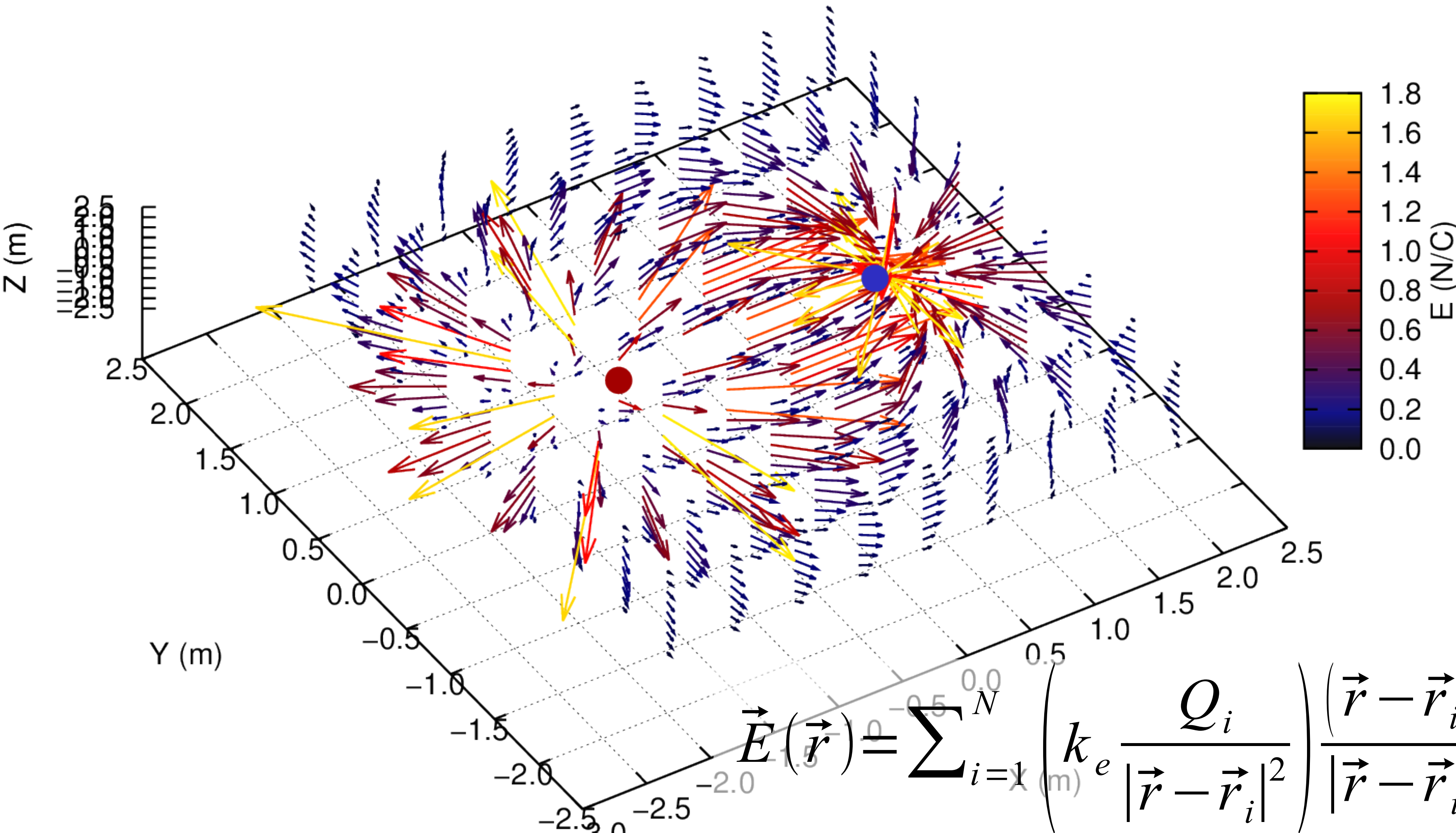
$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i(\vec{r}) = q\sum_{i=1}^{3}\left(k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\right)\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Campo eléctrico: dos cargas Q1=Q2; X=+/- 1



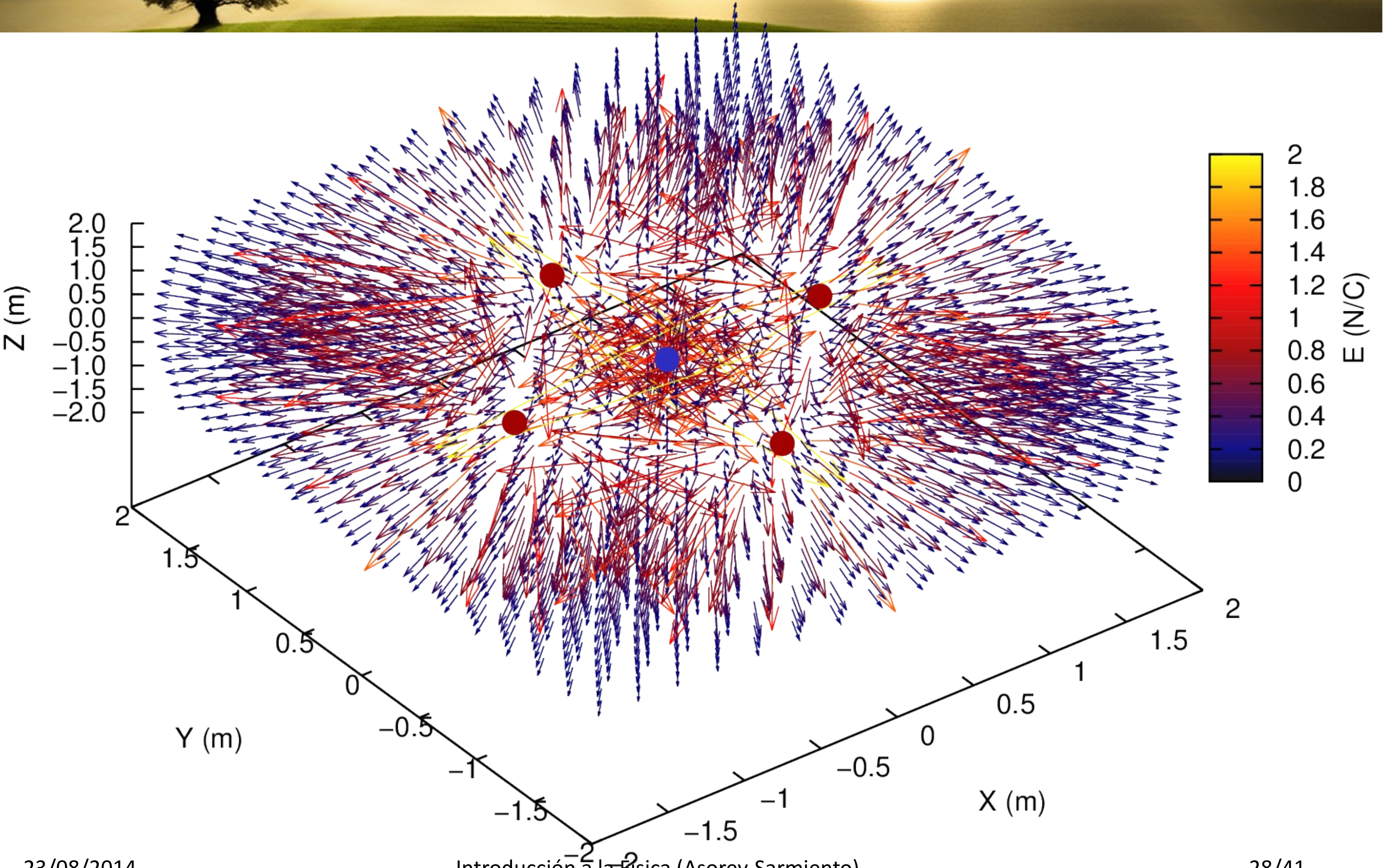
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \left(k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} \right) \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

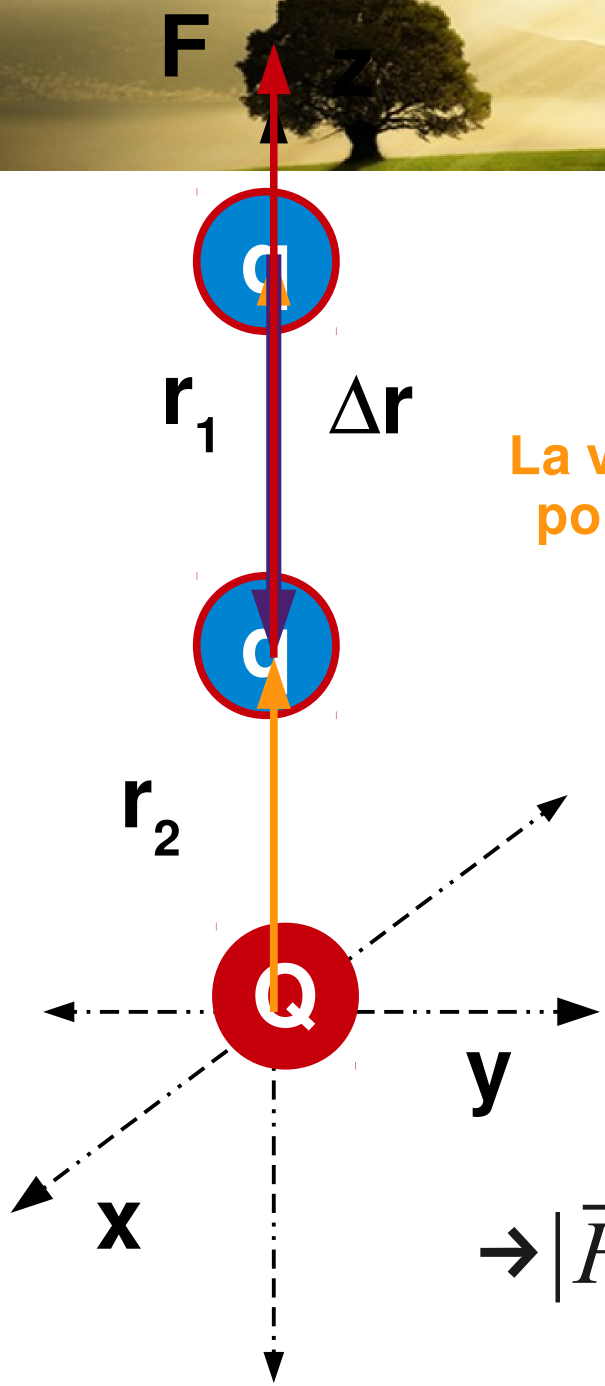
Campo eléctrico: dos cargas Q1=-Q2; X=+/- 1



$$\vec{E}(\vec{r})=\sum_{i=1}^{N}\left(k_e\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\right)\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Campo eléctrico: cinco cargas
Q1=Q2=Q3=Q4=-Q5; X=+/- 1; Y=+/- 1; 0,0





$$U_e(\vec{r}_1) = q\,V(\vec{r}_1) \text{ y } U_e(\vec{r}_2) = q\,V(\vec{r}_2)$$

$$\Delta U_e = U_e(\vec{r}_2) - U_e(\vec{r}_1) = q\,\Delta V$$

La variación de energía potencial es igual al trabajo realizado por un agente externo para traer "armar" esa configuración (Δr es un diferencial "dr" en el mundo de lo pequeño)

$$W = -\Delta U_e = -q\,\Delta V = -q\,\Delta V \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta \vec{r}|}$$

$$W = -q \frac{\Delta V}{|\Delta \vec{r}|} |\Delta \vec{r}| = -q \frac{\Delta V}{|\Delta \vec{r}|} |\Delta \vec{r}|$$

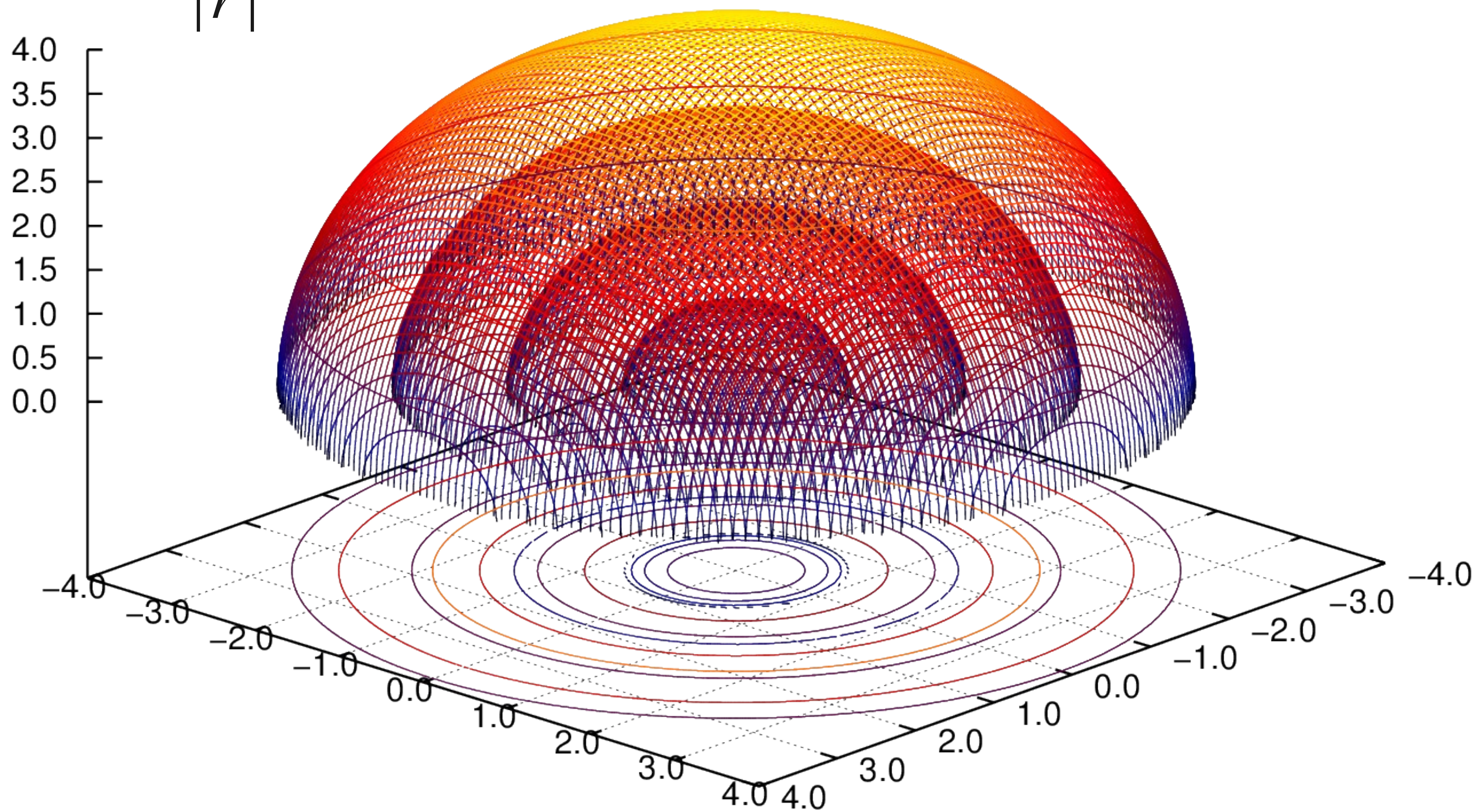
$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}||\Delta \vec{r}| \cos(\theta) = -|\vec{F}||\Delta \vec{r}|$$

$$\rightarrow |\vec{F}| = q|\vec{E}| = q \frac{\Delta V}{|\Delta \vec{r}|} \rightarrow \boxed{|\vec{E}| = \frac{\Delta V}{|\Delta \vec{r}|} \rightarrow [E] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}$$

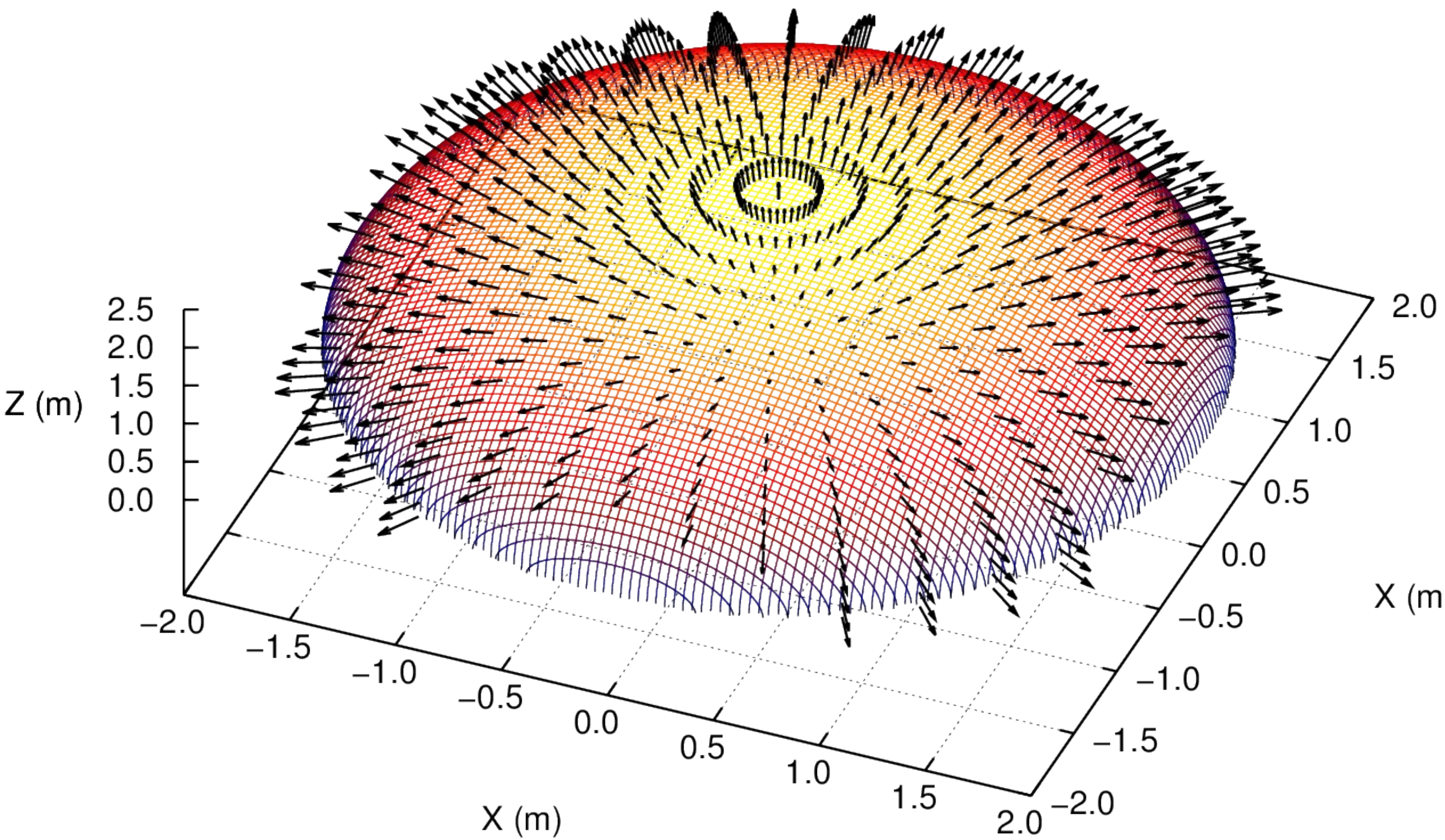
Curvas de equipotencial

$$V(\vec{r}) = k_e \frac{Q}{|\vec{r}|} = \text{cte} \rightarrow |\vec{r}| = \text{cte}$$

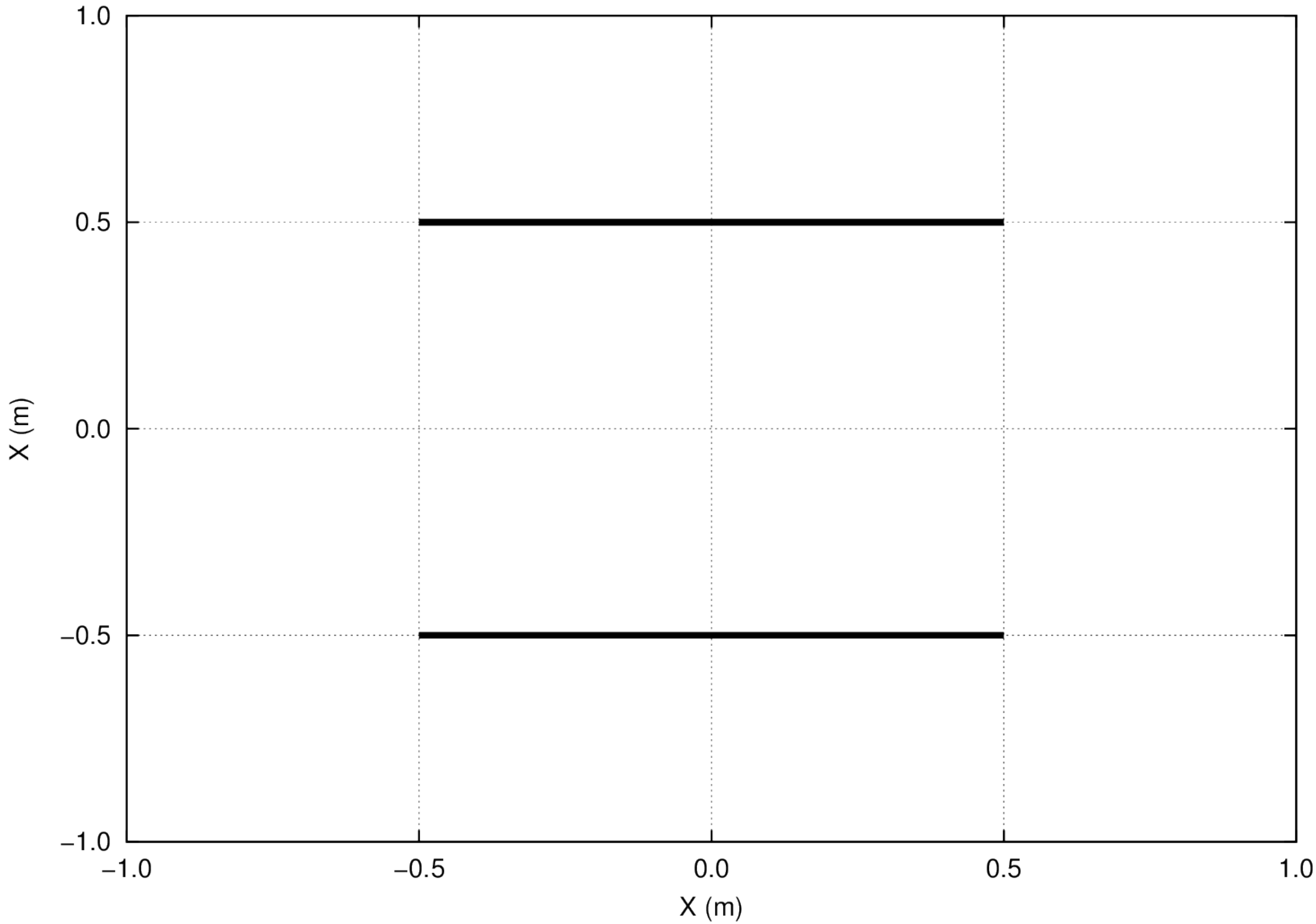
$$\text{en } R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



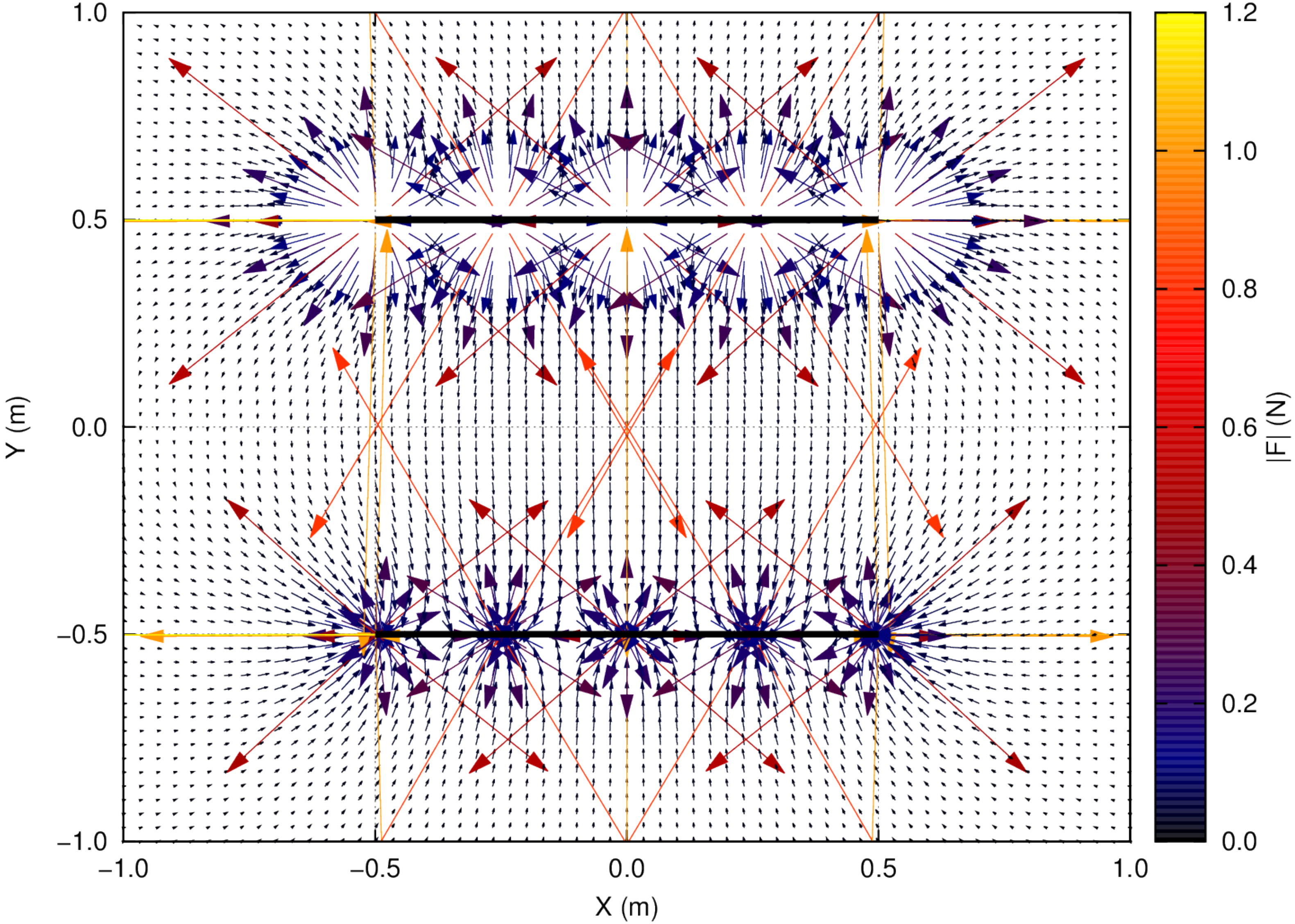
Potencial y campo



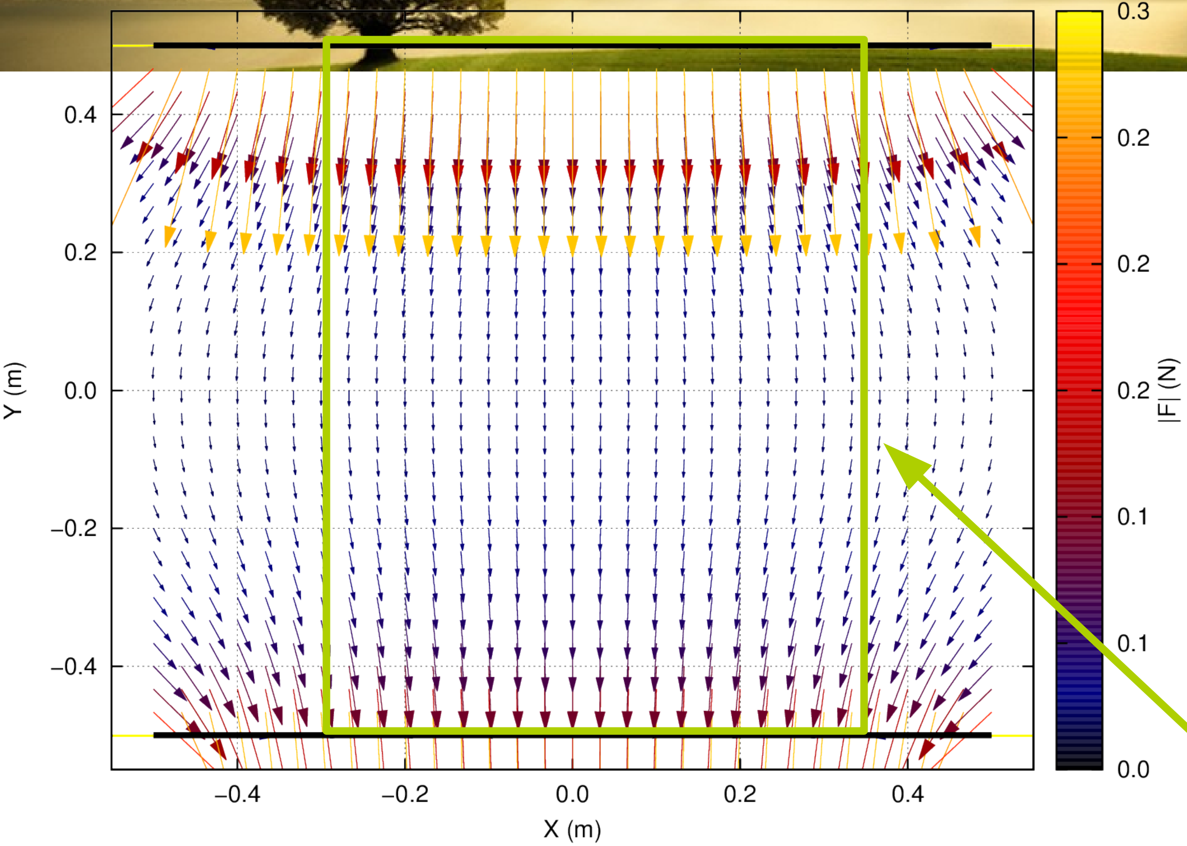
Sin carga



Diez cargas



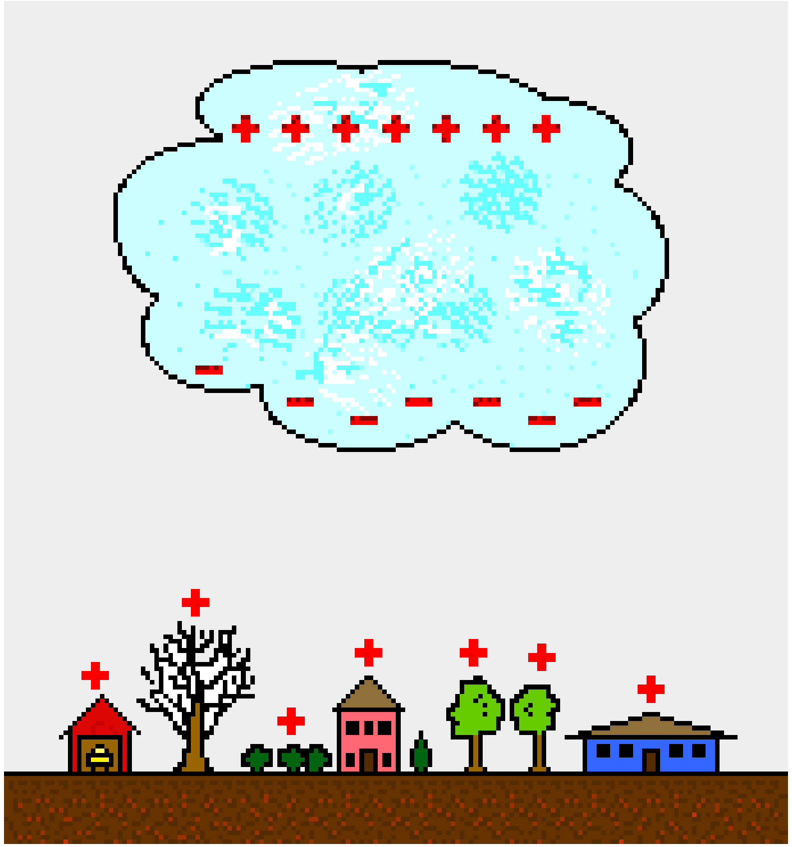
El capacitor...

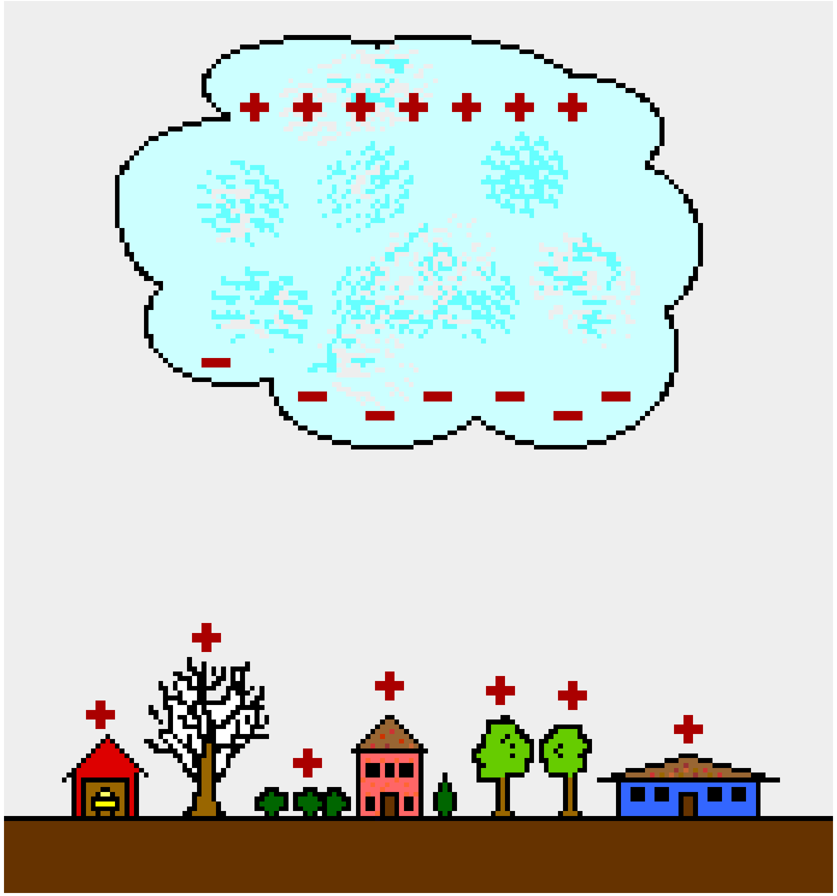


- Capacitor de placas paralelas
- Las curvas de equipotencial son líneas (planos) paralelas a las placas
- El campo eléctrico lejos de los bordes es uniforme y perpendicular a las placas

Electricidad en la atmósfera

Descargas atmosféricas





Códigos para los gráficos de esta unidad

A continuación, les dejamos una descripción de los códigos utilizados para los gráficos de esta unidad

```
################################## mi programa
# el codigo

# constante de Coulomb
k=8.988e9

# mis cargas
# En este ejemplo tengo tres cargas:
Q1 = 1.
r1 = vector([-1.0,0,0])

Q2 = -1.
r2=vector([0,0,0])

Q3 = 1.
r3=vector([1.0,0,0])

# y quiero calcular el potencial y el campo en :
r=vector([1.,1.,1.])

# recuerdo las definicions. Primero, calculo los vectores resta
d1 = resta(r,r1)
d2 = resta(r,r2)
d3 = resta(r,r3)
```

$$\vec{d}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$$

```
# y el potencial debido a cada carga en r
V1 = k*Q1/d1.mod
V2 = k*Q2/d2.mod
V3 = k*Q3/d3.mod
```

$$V_i(\vec{r}) = k_e \frac{Q_i}{|\vec{d}_i|}$$

```
# y ahora, segun el ppio de superposicion, el potencial total es
# la suma de cada potencial:
V = V1 + V2 + V3
```

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_i(\vec{r})$$

```
# Ahora calculo el campo electrico (es una magnitud vectorial)
# Entonces, calculo el campo electrico debido a cada carga individual
# en vez de usar el vector unitario, uso el vector y divido por el
# modulo al cubo
E1 = vector_escalar(d1, k * Q1 / d1.mod**3)
E2 = vector_escalar(d2, k * Q2 / d2.mod**3)
E3 = vector_escalar(d3, k * Q3 / d3.mod**3)
```

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \left(k_e \frac{Q_i}{|\vec{d}_i|^3} \right) \vec{d}_i$$

```
# Principio de superposicion: el campo electrico es la suma de cada
# campo individual
E12 = suma(E1, E2)
E = suma(E12,E3)
```

$$\boldsymbol{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r})$$

```
# finalmente imprimo las coordenadas de r,
for i in range (0,r.dim):
  print r.x[i],

          pesc=0.
          for i in range(0,self.dim):
# las coordenadas del campo electrico E(r)
for i in range (0,r.dim):
  print E.x[i],

# y el modulo del campo electrico |E(r)| y el potencial V(r)
print E.mod,V
```

El código (I) electrostatica.py

- Define la cte de Coulomb (eléctrica)
- Defino: N cargas (Q_i) y su posición (**r**$_i$)
- Defino el vector **r** donde quiero calcular el potencial y el campo
- Calculo los vectores resta
- Calculo el potencial de cada carga en **r**, V_i(**r**) y el potencial total V(**r**)
- Calculo el campo eléctrico de cada carga en **r**, **E**$_i$(**r**), y el campo total, **E**(**r**)
- Imprimo las coordenadas de **r**, las coordenadas de **E**(**r**), el módulo de |**E**(**r**)| y el potencial V(**r**).

El código (II): cuadrícula

- Quiero calcular un campo en una región del espacio

$$-1\ \text{m} \leqslant (x\,;y\,;z) \leqslant 1\ \text{m} \qquad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.25\ \text{m}$$

- Impongo una cuadrícula. ¿Cuántos puntos tengo?

$$x = -1, -0.75, \ldots, 0.75, 1\,;\ x_i = -1\,;\ x_f = 1\,; \rightarrow n_x = \frac{(x_f - x_i)}{\Delta x} + 1 \rightarrow \frac{(1-(-1))}{0.25} + 1 = 9\ \text{puntos}$$

- Defino los puntos iniciales y finales y el número de puntos en cada dirección

```
xi = -1.
xf = 1.
dx = 0.25
nx = int((xf-xi)/dx) + 1
```

- Y lo mismo para y,z

El código (II): cuadrícula

- Ahora genero tres índices: i→x, j→y, k→z
- Si i=0, entonces $x=x_i$. Si i=(nx-1)→$x=x_f$. Luego x=xi + i*dx

```
for i in range(0,9):
  x=xi+i*dx
  for j in range(0,9):
    y=yi+j*dy
    for k in range(0,9):
      z=zi+k*dz
```

- Y ahora, defino el vector posición como:

```
      r=vector([x,y,z])
```

- Calculo los vectores resta, y verifico que no sean nulos!
- Luego, calculo el potencial y el campo E en cada punto
- Imprimo las coordenadas de r, E y el potencial para cada punto de la cuadrícula

Entonces: campos.py

```
# constante de Coulomb
k=8.988e9
# mis cargas
Q1 = 1.
r1 = vector([-1.0,0,0])
Q2 = -1.
r2=vector([0,0,0])
Q3 = 1.
r3=vector([1.0,0,0])
#Defino los puntos iniciales para calcular la grilla xi,yi,zi y
# los saltos, dx, dy y dz y el número de puntos nx,ny,nz
xi=-1.
xf=1.
dx=0.25
nx=int((xf-xi)/dx) + 1
yi=-1.
yf=1.
dy=0.25
ny=int((yf-yi)/dy) + 1
zi=-1.
zf=1.
dz=0.25
nz=int((zf-zi)/dz) + 1
for i in range(0,nx):
  x=xi+i*dx
  for j in range(0,ny):
    y=yi+j*dy
    for k in range(0,nz):
      z=zi+k*dz
      #establezco mi nueva posición en (x,y,z)
      r=vector([x,y,z])
      # recuerdo las definicions. Primero, calculo los vectores resta
      d1 = resta(r,r1)
      d2 = resta(r,r2)
      d3 = resta(r,r3)
      #Verifico que los vectores diferencia no sean nulos:
      if (d1.mod!=0. and d2.mod!=0. and d3.mod!=0.):
        # Calculo el potencial debido a cada carga en r
        V1 = k*Q1/d1.mod
        V2 = k*Q2/d2.mod
        V3 = k*Q3/d3.mod
        # y ahora, segun el ppio de superposicion, el potencial total es
        V = V1 + V2 + V3
        # Ahora calculo el campo electrico (es una magnitud vectorial)
        # Calculo el campo electrico debido a cada carga individual
        # en vez de usar el vector unitario, uso el vector y divido por el modulo al cubo
        E1 = vector_escalar(d1, k * Q1 / d1.mod**3)
        E2 = vector_escalar(d2, k * Q2 / d2.mod**3)
        E3 = vector_escalar(d3, k * Q3 / d3.mod**3)
        # Principio de superposicion: el campo electrico es
        E12 = suma(E1, E2)
        E = suma(E12,E3)
        # finalmente imprimo las coordenadas de r,
        for i in range (0,r.dim):
          print r.x[i],
        # las coordenadas del campo electrico E(r)
        for i in range (0,r.dim):
          print E.x[i],
        # y el modulo del campo electrico |E(r)| y el potencial V(r)
        print E.mod,V
```