Choque elástico

Magnitudes conservadas

- Energía total: $E_i = E_f$
- Cantidad de movimiento: $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$

Magnitudes constantes

- Energía cinética: $E_{k,i} = E_{k,f}$

Entonces, sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 moviéndose con velocidades iniciales $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Luego del choque, sus velocidades finales serán $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$:

- Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f \to m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \tag{1}$$

- Constancia de la energía cinética:

$$E_{k,i} = E_{k,f} \to \frac{1}{2}m_1\mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{u}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 \tag{2}$$

y entonces

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \tag{3}$$

Estado Final: 2 ecuaciones con 2 incognitas

A partir de las condiciones iniciales, y sabiendo que es un choque elástico, ¿podemos determinar las condiciones finales ($\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$)?

Álgebra

1. Estamos en 1D, trabajamos con los módulos de las velocidades
2. Reordenamos (1), juntando las velocidades iniciales y finales de cada cuerpo:
$$-m_1(u_1 - v_1) = m_2(u_2 - v_2) \tag{4}$$
3. y lo mismo para la energía cinética (3):
$$m_2(u_2^2 - v_2^2) = -m_1(u_1^2 - v_1^2)$$
4. usando diferencia de cuadrados, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
$$m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2) = -m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) \tag{5}$$
5. mirando fijamente y comparando (4) con (5), vemos que:
$$u_2 + b_2 = u_1 + v_1 \to (u_2 - u_1) = -(v_2 - v_1) \to \Delta u = -\Delta v \tag{6}$$
6. con lo cual, podemos despejar, por ejemplo, v_2:
$$v_2 = u_1 + v_1 - u2 \tag{7}$$

Más álgebra, ya casi

7. Podemos utilizar (7), para poner todo en función de v_1, y despejar v_1. Partimos de (4):
$$m_2(u_2 - u_1 + u_2 - v_1) = -m_1(u_1 - v_1) \tag{8}$$
8. y tratamos de juntar las velocidades v_1:
$$m_2(2u_2 - u_1) - m_2 v_1 = -m_1 u_1 + m_1 v_1 \tag{9}$$
9. insistimos,
$$\begin{aligned} m_2(2u_2 - u_1) + m_1 u_1 &= (m_1 + m_2)v_1 \\ 2m_2 u_2 - m_2 u_1 + m_1 u_1 &= (m_1 + m_2)v_1 \\ 2m_2 u_2 - (m_1 - m_2)u_1 &= (m_1 + m_2)v_1 \end{aligned}$$
10. y finalmente,
$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \tag{10}$$
11. Cambiando los índices $1 \leftrightarrow 2$, obtenemos v_2:
$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \tag{11}$$

Casos límites

- autos chocadores, $m_1 = m_2$: ¡Las velocidades se intercambian!

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = u_2 \\ v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = u_1 \end{aligned}$$

- Billar, $m_1 = m_2$, $u_2 = 0$: ¡La primera bola se queda quieta!

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = 0 \\ v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = u_1 \end{aligned}$$

- Camión vs taxi, elástico, $m_1 \gg m_2$: Pobre taxista...

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_1 \approx u_1 \\ v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \rightarrow \quad v_2 \approx 2u_1 \end{aligned}$$

Casos límites

- Choque contra una pared, $u_2 = 0$, $m_2 \to \infty$: ¡Rebote!

  (el viejo truco, saco m_2 como factor común, y hago tender al límite)

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \to \quad v_1 \simeq -u_1 \\
v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad \to \quad v_2 \simeq 0
\end{aligned}
$$

- Vectorialmente, cambia sólo la coordenada donde está la pared.
- Imaginemos una pelota de masa m con velocidad $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, que choca una pared en $x = 1$. Al llegar a $x = 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
v_x &= -u_x \\
v_y &= u_y \\
v_z &= u_z
\end{aligned}
$$

Pensar una pelota chocando contra una pared

- La velocidad final es entonces $\mathbf{v} = (-u_x, u_y, u_z)$.