Introducción a la Física de Partículas

01-04
Probabilidades

Hernán Asorey

Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia
hasorey@uis.edu.co
20130913V

01-04-20130913V-HA-probabilistica.pdf

Contenidos

Boosts

- Transformaciones de Lorentz no rotantes: *cambios entre marcos de referencia incerciales*
- Quedan definidos por el γ de Lorentz (estrictamente $\beta \to \beta = \mathbf{v}/c$)
- Y luego, $S \to S'$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

- o en general, para un boost a un sistema con velocidad $\mathbf{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)c$, la TL se puede expresar mediante una matriz de 4×4, $\Lambda \equiv \Lambda_{ij}$, donde,

$$\begin{aligned} \Lambda_{00} &= \gamma, \\ \Lambda_{i0} = \Lambda_{0i} &= -\beta_i\gamma, \\ \Lambda_{ij} = \Lambda_{ji} &= \delta_{ij} + (\gamma - 1)\frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Cálculo Tensorial

Caldo Knorr®: Hernández& Núñez, "Métodos de Matemáticas Aplicadas", Vol 1, Cap 3

- Convención de Einstein en notación covariante: $\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu \equiv x_\mu x^\mu$
- Índices latinos, $i, j, k, \ldots$: componentes espaciales $(1 \ldots 3)$,
- Índices griegos $\mu, \nu, \rho, \ldots$: espaciotemporales $(0 \ldots 3)$
- Métrica de Minkowsky (plana), convención de signos usual en partículas, $\eta = (1, -1, -1, -1)$.
- El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ queda entonces:

$$\mathbf{g} \equiv g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} \equiv \mathbf{g}^{-1} \qquad (2)$$

Tarea (cont)

5. Verficar que $\mathbf{g}\mathbf{g}^{-1} = g_{\nu\rho} g^{\mu\rho} = \delta^\mu_\nu$
6. Verificar la relación de pseudo-ortogonalidad de las TL:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \qquad (4)$$

- Definimos **cuadrivector contravariante** (cuadrivector) a un tensor contravariante de rango 1, que ante una transformación de Lorentz Λ se comporta como:

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \qquad (3)$$

Cuadrivector

cos y contras

- Cada vector contravariante (vector) tiene asociado un vector covariante (forma), gracias a la métrica (contra $\to$ co)

$$(t, -\mathbf{r}) = a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \tag{5}$$

- La transformación inversa co$\to$contra:

$$(t, \mathbf{r}) = a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \tag{6}$$

- ¿Cómo transforma un vector covariante frente a una TL Λ?

$$\begin{aligned} a'_\mu &= g_{\mu\nu} a'^\nu \\ a'_\mu &= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho a^\rho \\ a'_\mu &= \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma}}_{\left(\Lambda^{-1}\right)^\sigma_\mu} a_\sigma \end{aligned}$$

Si Λ es un boost β, Λ^{-1} es un boost $-\beta$

$$a'_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\sigma_\mu a_\sigma \tag{7}$$

Queremos probar que el factor $g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma}$ es la TL inversa.

Entonces recordamos (2) y (4):

$$\begin{aligned} g_{\rho\theta} &= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho \Lambda^\mu_\theta \\ g_{\rho\theta} g^{\rho\sigma} &= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho \Lambda^\mu_\theta g^{\rho\sigma} \\ \delta^\sigma_\theta &= \underbrace{\left(g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma}\right)}_{\Xi^\sigma_\mu} \Lambda^\mu_\theta \\ \delta^\sigma_\theta &= \Xi^\sigma_\mu \Lambda^\mu_\theta \to \Xi^\sigma_\mu \left(\Lambda^{-1}\right)^\sigma_\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\Lambda^{-1}\right)^\sigma_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma} \tag{8}$$

Tarea 03 (último)

5. Verificar explicitamente que $p^{\mu} p_{\mu}$ es un invariante ante TL
6. Griffiths: leer sección 3.4, para discutir en clase 04
7. Griffiths: problemas 3.4, 3.11, 3.12, 3.14, y alguno del 3.15

Contenidos

$(\text{covariantes} \cdot \text{contravariantes}) \rightarrow \text{invariantes}$

- Propuesta 1: La composición de dos TL es una TL:

$$
\begin{aligned}
a'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} \qquad \text{y} \qquad a''^{\rho} = \Lambda'^{\rho}_{\mu} a'^{\mu} \\
\rightarrow a''^{\rho} &= \Lambda'^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} \\
a''^{\rho} &= \left(\Lambda' \Lambda\right)^{\rho}_{\nu} a^{\nu} \\
a''^{\rho} &= \Lambda''^{\rho}_{\nu} a^{\nu}
\end{aligned} \tag{9}
$$

- Propuesta 2: El producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_{\mu} b^{\nu} = a^{\mu} b_{\nu}$ es invariante ante transformaciones de Lorentz:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' &= a'_{\mu} b'^{\mu} \\
\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' &= (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\mu} a_{\sigma} \Lambda^{\mu}_{\rho} b^{\rho} \\
\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' &= (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\rho} a_{\sigma} b^{\rho} \\
\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' &= \delta^{\sigma}_{\rho} a_{\sigma} b^{\rho} \\
\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' &= a_{\rho} b^{\rho} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Tres invariantes famosos tres

- Invariante ds^2:

$$ds^2 \equiv dx^\mu dx_\mu = d(ct)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{11}$$

- Derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial_\mu} \equiv \partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \tag{12}$$

y luego, el invariante es el operador D'alambertiano:

$$\partial_\mu\partial^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \equiv \Box \tag{13}$$

- Cuadrivector Energía-momento: Recordando clase 01-01: $E = \gamma m_0$ y $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$, podemos formar un cuadrivector:

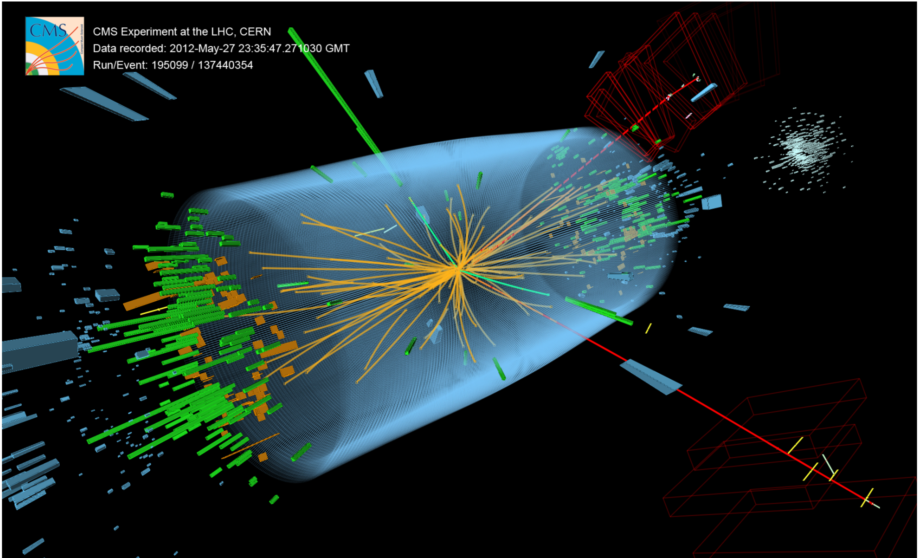
$$p^\mu \equiv (E, \mathbf{p}) \qquad \text{y} \qquad p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu \equiv (E, -\mathbf{p}) \tag{14}$$

y luego, contrayendo, obtenemos uno de los invariantes más importantes:

$$p^\mu p_\mu \equiv p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \tag{15}$$

Contenidos

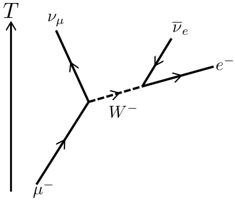
Colisiones



La física de partículas comenzó siendo física “probabilística” y “colisional”

“Probabilística”

Lo probable es lo que usualmente ocurre, Aristóteles, Retórica, c 350 AC

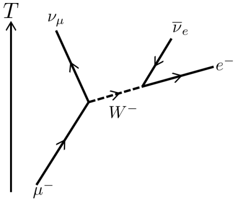


$$\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

- Sea un muón en reposo que fue creado a $t = t_0$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el muón decaiga en este instante? $\to 0$
- Probabilísticamente, “instante” no tiene sentido
- En t, la “edad” es $\Delta t \equiv (t - t_0)$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el muón decaiga entre Δt y $\Delta t + dt$?
- ¿Depende de Δt?

“Probabilística”

Lo probable es lo que usualmente ocurre, Aristóteles, Retórica, c 350 AC



$$\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

- Sea un muón en reposo que fue creado a $t = t_0$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el muón decaiga en este instante? $\to 0$
- Probabilísticamente, “instante” no tiene sentido
- En t, la “edad” es $\Delta t \equiv (t - t_0)$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el muón decaiga entre Δt y $\Delta t + dt$?
- ¿Depende de Δt? $\to$ ¡NO!

- Llamemos Γ a la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo.
- Γ es la tasa de decaimiento.
- Luego, para N_0 muones a $t = t_0$, $dN = -\Gamma N_0 dt$, y entonces

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t} \tag{16}$$

- Para un único muón, pensamos en probabilidades, la prob. de encontrar **aún** al muón a tiempo t es

$$P(t) = \frac{1}{\Gamma} e^{-\Gamma t} = \tau e^{-\frac{t}{\tau}}, \ \tau \equiv \frac{1}{\Gamma} \tag{17}$$

- Y por ende, la probabilidad de decaimiento será

$$P(t) = 1 - \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{18}$$

“Probabilística”

- τ representa el tiempo de vida de las partículas,

$$P(t) = \tau e^{-\frac{t}{\tau}},\ \tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$$

- Propiedad de falta de memoria:

$$P[t > (\Delta t + dt) | t > \Delta t] = P[t > dt]$$

  - Prueba: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$

$$P[t > (\Delta t + dt) | t > \Delta t] = \frac{P[t > (\Delta t + dt)] \cap P[t > \Delta t]}{P[t > \Delta t]}$$

  - entonces, al ser independientes y estar contenido

$$\begin{aligned}
P[t > (\Delta t + dt) | t > \Delta t] &= \frac{P[t > (\Delta t + dt)]}{P[t > \Delta t]} \\
P[t > (\Delta t + dt) | t > \Delta t] &= \frac{\int_{\Delta t + dt}^{\infty} e^{-t/\tau}\, dt}{\int_{\Delta t}^{\infty} e^{-t/\tau}\, dt} \\
P[t > (\Delta t + dt) | t > \Delta t] &= \frac{e^{-(\Delta t + dt)/\tau}}{e^{-\Delta t/\tau}} \\
P[t > (\Delta t + dt) | t > \Delta t] &= e^{-dt/\tau} = P[t > dt]
\end{aligned}$$

- Tres modos de decaimiento

$$\begin{aligned}
\mu^- &\to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu & \approx 100\,\% \\
\mu^- &\to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \gamma & 1{,}4 \times 10^{-2} \\
\mu^- &\to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu e^+ e^- & 3{,}4 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

- Como siempre, a priori no podremos determinar, cuál seguirá, y con que probabilidad (lo haremos)
- Cada modo, tendrá su propia tasa de decaimiento Γ_i:

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i,\ \tau = \frac{1}{\Gamma_{\text{tot}}} \tag{19}$$

- Con esto, queda definido el

$$\textit{Branching ratio} \equiv \Gamma_i/\Gamma_{\text{tot}}.$$

$$\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu, \quad \Gamma_i/\Gamma_{\text{tot}} \approx 100\,\%$$