Mecánica 2014

U03C02: Notación Simpléctica y Teoremas de Conservación

2014/10/23

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

$$\boxed{\dot{q}_i(q_j,p_j,t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i(q_j,p_j,t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

Ec. canónicas de Hamilton

2n ec. de 1er grado

y además $-\dot{\mathcal{L}} = \dot{H}$

donde el Hamiltoniano del sistema es:

$$\boxed{H(q_j,p_j,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)}$$

Hamiltoniano

Notar poniendo todo en función de p_i, q_i, t

Por ejemplo: si no hay una dependencia explícita del tiempo y las fuerzas son conservativas ⇒

$$\mathcal{H} = T + V = E$$ Sólo si se cumple

Fuerzas centrales, recordando:

Sea una partícula m, en un campo generado por una fuerza central

En esféricas (r, θ, φ) ⇒

$$T = \frac{m|\dot{\vec{r}}|^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right)$$

$$V = V(r)$$

$\Rightarrow$ 1) $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$

2) $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \Rightarrow p_r = m\dot{r}$; $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$; $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}\, m$

3) $H = \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} \Rightarrow H = \dot{r}(m\dot{r}) + \dot{\theta}(m r^2 \dot{\theta}) + \dot{\varphi}(m r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi})$

$\Rightarrow H = m\dot{r}^2 + m r^2\dot{\theta}^2 + m r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r)$

$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$

4) Invertir las ec. 2 ;

$\dot{r}^2 = (p_r/m)^2$; $\dot{\theta}^2 = (p_\theta / m r^2)^2$; $\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2\theta}\right)^2$

5) Reemplazo: $H = \frac{\cancel{m}}{2}\frac{p_r^2}{m^{\cancel{2}}} + \frac{\cancel{m}}{2}\frac{\cancel{r^2}\,p_\theta^2}{m^{\cancel{2}} r^{\cancel{4}2}} + \frac{\cancel{m}}{2}\frac{\cancel{r^2}\,\cancel{\sin^2\theta}\,p_\varphi^2}{m^{\cancel{2}} r^{\cancel{4}2} \sin^{\cancel{4}2}\theta} - V(r)$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_\theta^2/r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + V(r)$$

¿Que pasaba si usamos cartesianas?

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 \quad ; \quad V = V(r)$$

$$\Rightarrow p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = p_x/m \Rightarrow \dot{x}^2 = p_x^2/m^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \dot{x}\, m\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(r) \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{p_x^2}{m^2} + V(r)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2m}p_x^2 + V(r)$$

Notación Simpléctica — Entrelazados

Esta notación intenta introducir cierta simetría en el tratamiento entre coordenadas y momentos generalizados

Sea un sistema con n grados de libertad ($\to 2n$ coordenadas) $\Rightarrow$ Construimos una matriz columna η $(2n \times 1)$ donde:

$$\underline{\eta} \equiv \eta_i = q_i \qquad \eta_{i+n} = p_i \longrightarrow \eta = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)^t$$

$\Rightarrow$ Aparece una matriz columna

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{\eta}} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \frac{\partial H}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^t$$

$$\to \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_i = \partial H / \partial q_i \quad ; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{i+n} = \partial H / \partial p_i$$

y una matriz $\mathbb{J}^{2n\times 2n}$ de Jordan antisimétrica, antidiagonal:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \quad \mathbb{O}, \mathbb{1} \text{ son mat de } n\times n$$

$$\Rightarrow \mathbb{J}^t = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{O} \end{bmatrix} = \mathbb{J}^{-1} : \quad \mathbb{J}^t \mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{J}^t = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1} \end{bmatrix} = \mathbb{1}^{2n\times 2n}$$

y además $\mathbb{J}^t = -\mathbb{J} \quad \Rightarrow \mathbb{J}^t = -\mathbb{J} = \mathbb{J}^{-1}$

$$\Rightarrow \mathbb{J}^2 = \mathbb{J}\mathbb{J} = -\mathbb{1} \quad \Rightarrow |\mathbb{J}| = 1$$

Con esta notación, las ec. de Hamilton quedan:

$$\boxed{\dot{\eta} = \mathbb{J}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}}$$

Ec. de Hamilton en not. simpléctica

Por ejemplo, para dos variables, $n=2 \rightarrow q_1\ q_2\ p_1\ p_2$ —

$$\eta = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \; ; \; \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} \partial \mathcal{H}/\partial q_1 \\ \partial \mathcal{H}/\partial q_2 \\ \partial \mathcal{H}/\partial p_1 \\ \partial \mathcal{H}/\partial p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{p}_1 \\ -\dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\eta} = J\, \partial \mathcal{H}/\partial \eta \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial \mathcal{H}/\partial q_1 \\ \partial \mathcal{H}/\partial q_2 \\ \partial \mathcal{H}/\partial p_1 \\ \partial \mathcal{H}/\partial p_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \dot{q}_1 = \partial \mathcal{H}/\partial p_1 \; ; \; \dot{q}_2 = \partial \mathcal{H}/\partial p_2 \\ &\dot{p}_1 = -\partial \mathcal{H}/\partial q_1 \; ; \; \dot{p}_2 = -\partial \mathcal{H}/\partial q_2 \end{aligned}\right\} \text{Ec. de Hamilton (ver pg. 13)}$$

En muchos problemas de dinámica así práctica se observa que existen ciertas relaciones de la forma:

$$f(q_1, q_2, \ldots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots) = cte$$

que corresponden a una ec. diferencial de 1º orden, es decir, son integrales de las ec. de movimiento (que son de 2º orden).

En general, si el Lagrangiano no contiene alguna coordenada q_j en forma explícita $\Rightarrow$ la coordenada es cíclica

$\mathcal{L}$ no depende de q_j $\longrightarrow$ q_j es cíclica

Para esta coordenada, las ec de Lagrange quedan:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_j = cte}$$

El momento generalizado conjugado a una coordenada cíclica es una magnitud conservada.

P ej → Ley de inercia. $V = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$\Rightarrow \quad p_x = cte \Rightarrow v = cte$

A nivel del Hamiltoniano también es cíclica, ya que en Lagrange para una coord. cíclica

$$p_j = cte \Rightarrow \dot{p} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \rightarrow H \text{ no depende de } q_j$$

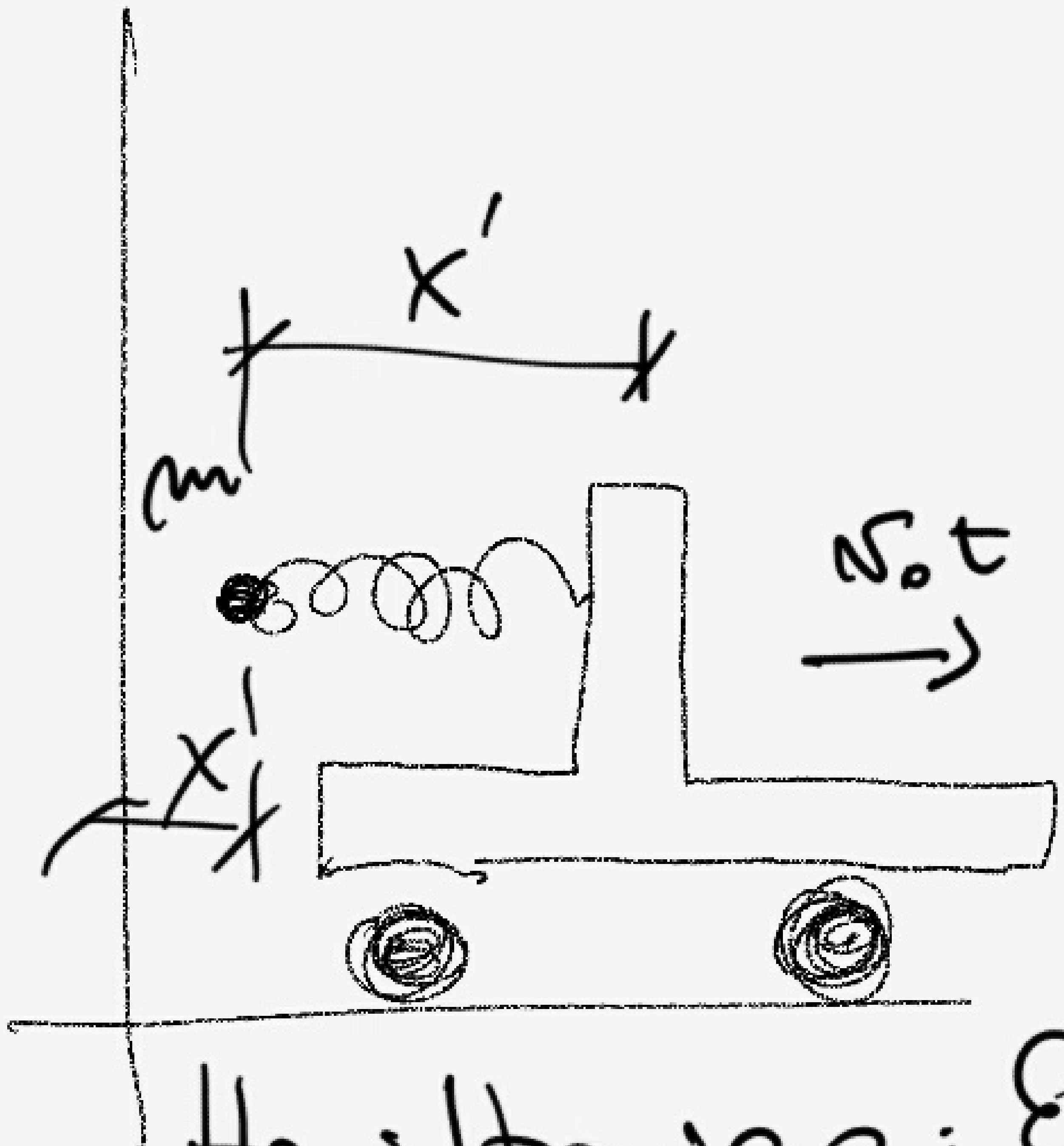
De igual forma pero, si el tiempo es cíclico $\Rightarrow$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = cte$$

Además:

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{-\dot{p}_i} \dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{\dot{q}_i} \dot{p}_i + \underbrace{\cancel{\frac{\partial H}{\partial t}}}_{0} \rightarrow \frac{dH}{dt} = -\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i = 0$$

Cuidado $\rightarrow$ la dependencia explícita del tiempo en H puede depender de las coord. generalizadas elegidas



$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k \Delta x = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - v_0 t)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \; ; \; \partial \mathcal{L} / \partial x = - k (x - v_0 t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + k(x - v_0 t) = 0 \Rightarrow \ddot{x} = k/m \, (x - v_0 t)$$

Si hacemos $x' = (x - v_0 t) \Rightarrow \ddot{x}' = \ddot{x} \Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{x}' = k/m \; x'}$$

oscilador armónico
visto desde el carro

Hamiltoniano: El pot no depende de $\dot{x} \Rightarrow$

$E = T + V$. Sin embargo hagamos el proc. completo

$$p = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{x} = m \dot{x} \Rightarrow \mathcal{H} = \dot{x} p - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - v_0 t)^2$$

$$\Rightarrow \dot{x} = p/m \Rightarrow \mathcal{H} = p/m \cdot p - \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{p^2}{m^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2} k (x - v_0 t)^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} (x - v_0 t)^2$$

$\mathcal{H} \equiv E$ pero
E no es cte.

Usemos ahora x' como coord. generalizada.

$$-\frac{k}{2}x'^2$$

$$x' = x - v_0 t \Rightarrow \dot{x}' = \dot{x} - v_0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}' + v_0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x} - \frac{k}{2}x'^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}' + v_0)^2 - \frac{k}{2}x'^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}'^2 + 2v_0\dot{x}' + v_0^2\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m v_0 \dot{x}' + \frac{1}{2}m v_0^2 - \frac{k}{2}x'^2$$

Ahora $p' = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x}' + m v_0 \Rightarrow \dot{x}' = \dfrac{1}{m}(p' - m v_0)$

$$\mathcal{H} = \dot{x}'p' - \mathcal{L} = \dot{x}'p' - \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 - m v_0 \dot{x}' - \frac{1}{2}m v_0^2 + V =$$

$$= \dot{x}' m \dot{x}' + \cancel{m v_0 \dot{x}'} - \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 - \cancel{m v_0 \dot{x}'} - \frac{1}{2}m v_0^2 + V$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 + V$$

$$= \frac{m}{2}\frac{1}{m^2}(p' - m v_0)^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 + \frac{k}{2}x'^2$$

cte

Energía relativa al camión.

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p' - m v_0)^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 + \frac{k}{2}x'^2$$