Universidad Industrial de Santander - Escuela de Física

Mecánica Teórica (Asorey)

Guía 03: Formulación Hamiltoniana

2014

1) **Partícula en una caja**

   Una partícula está confinada en una caja unidimensional. Los bordes de la caja se están desplazando hacia el centro con una velocidad mucho menor que la velocidad de la partícula en la caja. Resuelva los siguientes puntos utilizando primero la formulación Lagrangiana y luego la formulación Hamiltoniana:

   1) si la cantidad de movimiento de la partícula es p_0 a tiempo t_0, cuando las paredes están separadas por una distancia x_0 entre sí, encuentre la cantidad de movimiento de la partícula a tiempo $t > t_0$, suponiendo que las colisiones con las paredes son perfectamente elásticas y el movimiento es no-relativista;
   2) cuando las paredes están separadas por una distancia x, cuál debe ser la fuerza promedio que debe ser aplicada a cada pared para que se muevan a velocidad constante hacia el centro.

2) **Fuerzas centrales**

   Escriba el problema del movimiento bajo fuerzas centrales de dos masas puntuales en la formulación Hamiltoniana, eliminando las variables cíclicas.

3) **Lagrangiano con término de interacción**

   El Lagrangiano de un sistema puede ser escrito como:

$$\mathcal{L} = a\dot{x}^2 + b\frac{\dot{y}}{x} + c\,\dot{x}\,\dot{y} + f\,y^2\dot{x}\,\dot{z} + g\,\dot{y} - k\sqrt{x^2+y^2},$$

   donde a, b, c, f, g y k son constantes. Obtenga el Hamiltoniano del sistema, las ecuaciones de movimiento y diga que cantidades son conservadas.

4) **Lagrangiano numérico, I**

   El Lagrangiano de un sistema puede ser escrito como:

$$\mathcal{L} = \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{a + b\,q_1^2} + k_1 q_1^2 + k_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

   siendo a, b, k_1 y k_2 constantes.

   1) Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema en la formulación Hamiltoniana
   2) Diga si el sistema tiene alguna magnitud conservada.
   3) Suponiendo que todas las constantes son iguales a 1, usando el algoritmo RK4 resuelva numéricamente las ecuaciones de movimiento obtenidas, con condiciones iniciales ($t_0 = 0$), $q_1(t_0) = q_2(t_0) = 0$, $\dot{q}_1(t_0) = \dot{q}_2(t_0) = 1$ (reescriba las condiciones iniciales para p_i).
   4) Haga un gráfico de q_1, q_2, p_1 y p_2 como función del tiempo.
   5) Haga un gráfico de la trayectoria del sistema en el espacio de fases.

5) **Péndulo simple no tan simple**

Imagine que el punto de sujeción de un péndulo simple, de masa m y longitud l, se dispone de forma tal que el mismo puede moverse a lo largo de una parábola $y = ax^2$ en el plano vertical ($a > 0$). Encuentre el Hamiltoniano del sistema y las ecuaciones de movimiento del péndulo y del punto de sujeción. Luego, suponga $a = 0$ y eligiendo una condición inicial no trivial ($z_0 > 0$, $\theta_0 > 0$), resuélvalas numéricamente.

6) **Dos resortes**

Una partícula de masa m puede moverse en 1 dimensión bajo la acción de dos resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 respectivamente. Cada resorte está sujeto en un extremo a una pared fija y en el otro a la partícula. La distancia de separación de las paredes es a. Los resortes obedecen la ley de Hooke y tienen longitud de relajación igual a 0 (es decir, siempre están tensionados).

1) Usando como coordenada generalizada q la posición x de la partícula medida desde uno de los puntos fijos (de forma que estos se encuentran en $x = 0$ y $x = a$), encuentre el Lagrangiano y derive el correspondiente Hamiltoniano. Obtenga las ecuaciones de movimiento y diga si la energía es conservada y si el Hamiltoniano lo es.
2) Introduzca una nueva coordenada generalizada:

$$Q = q - b \sin \omega t, \qquad b = \frac{k_2}{k_1 + k_2} a,$$

y responda: ¿Cuál es el nuevo Lagrangiano como función de Q? ¿Cuál es el Hamiltoniano correspondiente? ¿Es la energía una magnitud conservada? ¿y el Hamiltoniano?

7) **Lagrangiano numérico, II**

Considere un Lagrangiano de la forma:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2 \right) \exp(\gamma t),$$

donde la partícula de masa m posee un movimiento unidimensional. Suponiendo que todas las constantes son positivas:

1) encuentre las ecuaciones de movimiento en la formulación Lagrangiana;
2) interprete las ecuaciones mediante la interpretación física de las fuerzas actuando sobre la partícula;
3) Encuentre los momentos canónicos y construya el Hamiltoniano. ¿Es el Hamiltoniano una constante de movimiento?
4) Para las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x} = 0$, y suponiendo un sistema de unidades donde $\omega = \gamma = 1$, resuelva numéricamente las ecuaciones de movimiento y verifique a que valor tiene $x(t)$ para valores grandes de t.

8) **Condición simpléctica**

Mostrar que la transformación

$$\begin{aligned} Q &= q \cos \alpha - p \sin \alpha, \\ P &= q \sin \alpha + p \cos \alpha, \end{aligned}$$

verifica la condición simpléctica para cualquier valor del parámetro α. Luego, encuentre una función generatriz F para la transformación. Explique el significado físico de esta transformación cuando $\alpha = 0$ y cuando $\alpha = \pi/2$.

9) **Transformación de punto**

Las ecuaciones de transformación entre dos sistemas de coordenadas son:

$$\begin{aligned} Q &= \log\left(1+\sqrt{q}\cos p\right), \\ P &= 2\left(1+\sqrt{q}\cos p\right)\sqrt{q}\sin p. \end{aligned}$$

Muestre que si p y q son variables canónicas, entonces Q y P también lo son. Luego verifica que esta transformación es generada por:

$$F_3 = -\left(e^Q - 1\right)^2 \tan p.$$

10) **Condiciones directas**

Muestre por evaluación directa que las condiciones directas para una transformación canónica son equivalentes a la condición simpléctica expresada en la forma:

$$\mathbb{J}\mathbb{M} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}.$$

11) **Evaluación simpléctica**

Utilizando la condición simpléctica, muestre que la transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1^2, \\ P_1 &= \frac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2}, \\ Q_2 &= q_2 \sec p_2, \\ P_2 &= \sin p_2 - 2q_1, \end{aligned}$$

es canónica. Luego, encuentre una posible función generatriz para esta transformación.

12) **Evaluación simpléctica**

Para la transformación de punto en un sistema con dos grados de libertad:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1^2, \\ Q_2 &= q_1 + q_2, \end{aligned}$$

encuentre las ecuaciones de transformación más generales posibles para P_1 y P_2 de manera que la transformación general sea canónica. Muestre que para una dada elección de las funciones P_1 y P_2, el Hamiltoniano

$$\mathscr{H} = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

puede ser transformado en un nuevo Hamiltoniano donde tanto Q_1 como Q_2 sean cíclicos. Luego, obtenga q_1, q_2, p_1 y p_2 como función del tiempo para condiciones iniciales genéricas.

13) **Oscilador armónico**

Muestre que la transformación

$$
\begin{aligned}
Q &= p + iaq, \\
P &= \frac{p - iaq}{2ia},
\end{aligned}
$$

es una transformación canónica y encuentre una función generatriz. Luego, use la transformación para resolver el oscilador armónico.

14) **Corchetes de Poisson**

Muestre que si el Hamiltoniano y una función F son constantes de movimiento, entonces la enésima derivada parcial de F con respecto al tiempo, $\partial^n F/\partial t^n$, también lo es. Luego, considere el movimiento de una partícula libre de masa m. Sabemos que en este caso el Hamiltoniano del sistema es una magnitud conservada, y existe una constante de movimiento

$$F = x - \frac{pt}{m}.$$

Muestre por cálculo directo que la derivada parcial de F respecto al tiempo es una constante de movimiento y que cumple con la condición $[\mathscr{H}, F]$.