Mecánica 2014

U01C08: Mapeos

2014/10/02

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

Modelo Logístico

$$y_{i+1} = r\, y_i (1 - y_i)$$

y es la fracción entre la pob. actual y la máx. soportada por el ambiente

$$0 < y < 1$$

El valor de r determina la tendencia final del sistema y su comportamiento "dinámico":

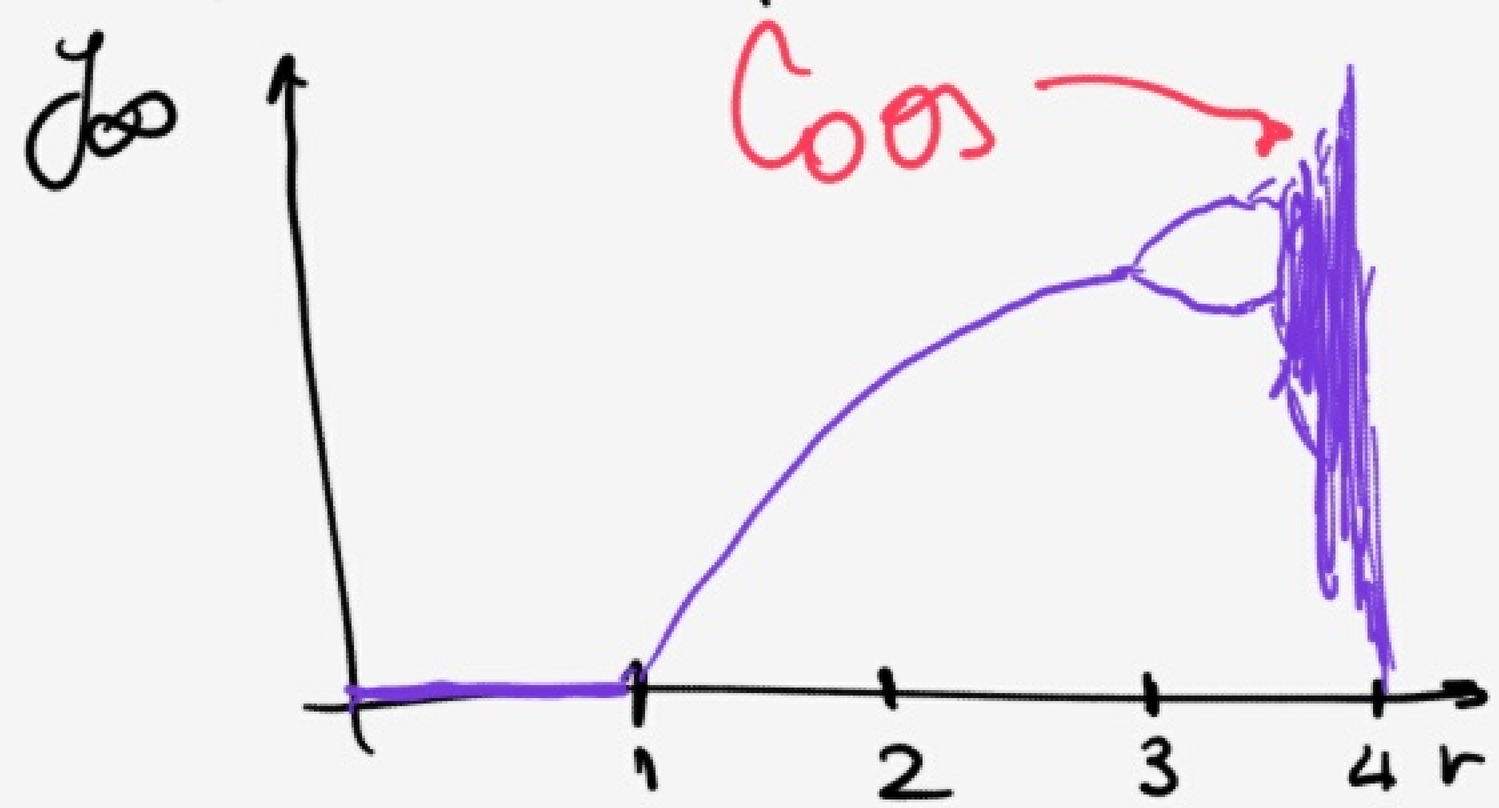
$r < 1$: Independiente del valor de y_0, la pob. tiende a 0

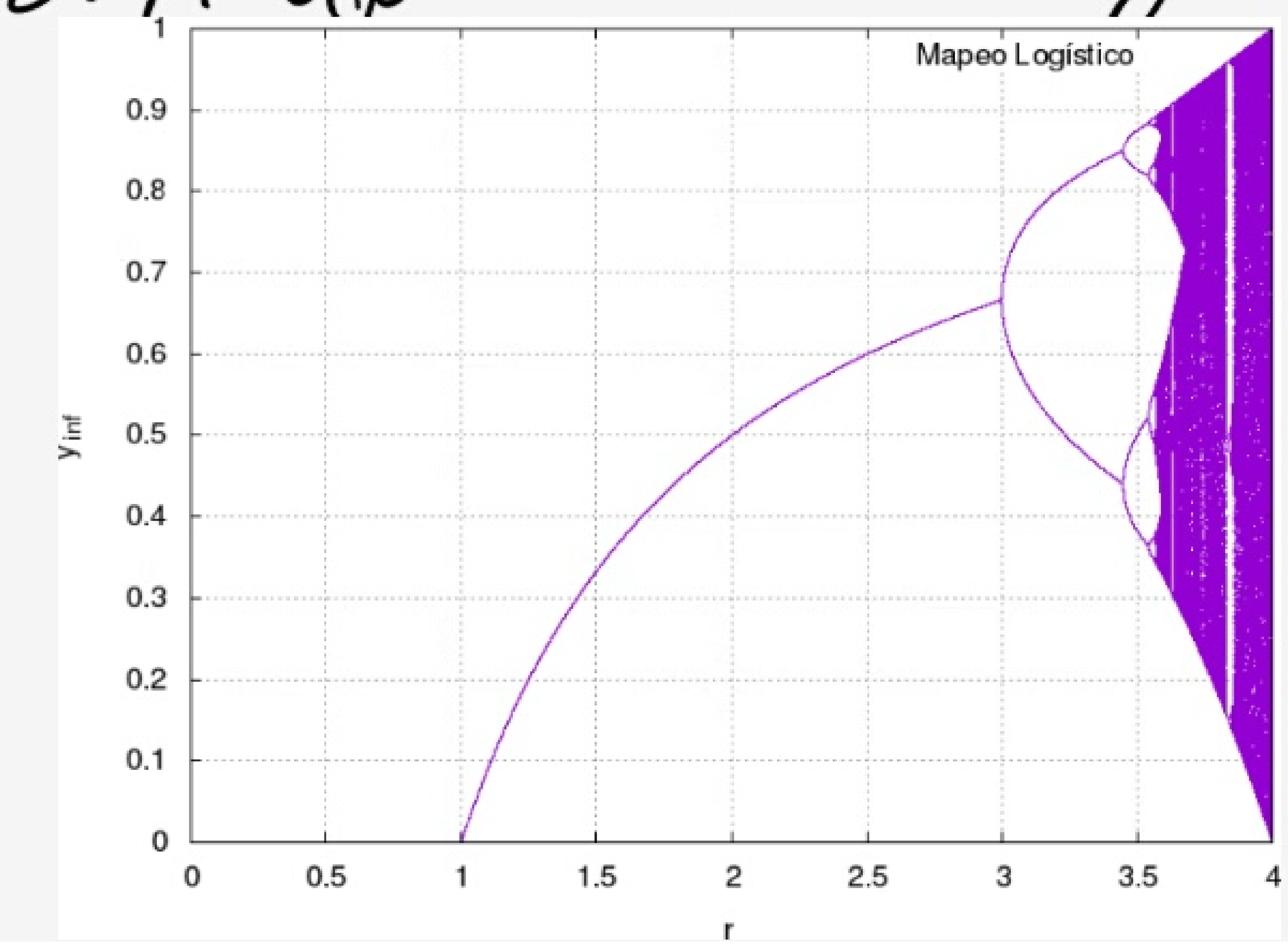
$1 < r < 3$: La población tiende a $\frac{r-1}{r}$

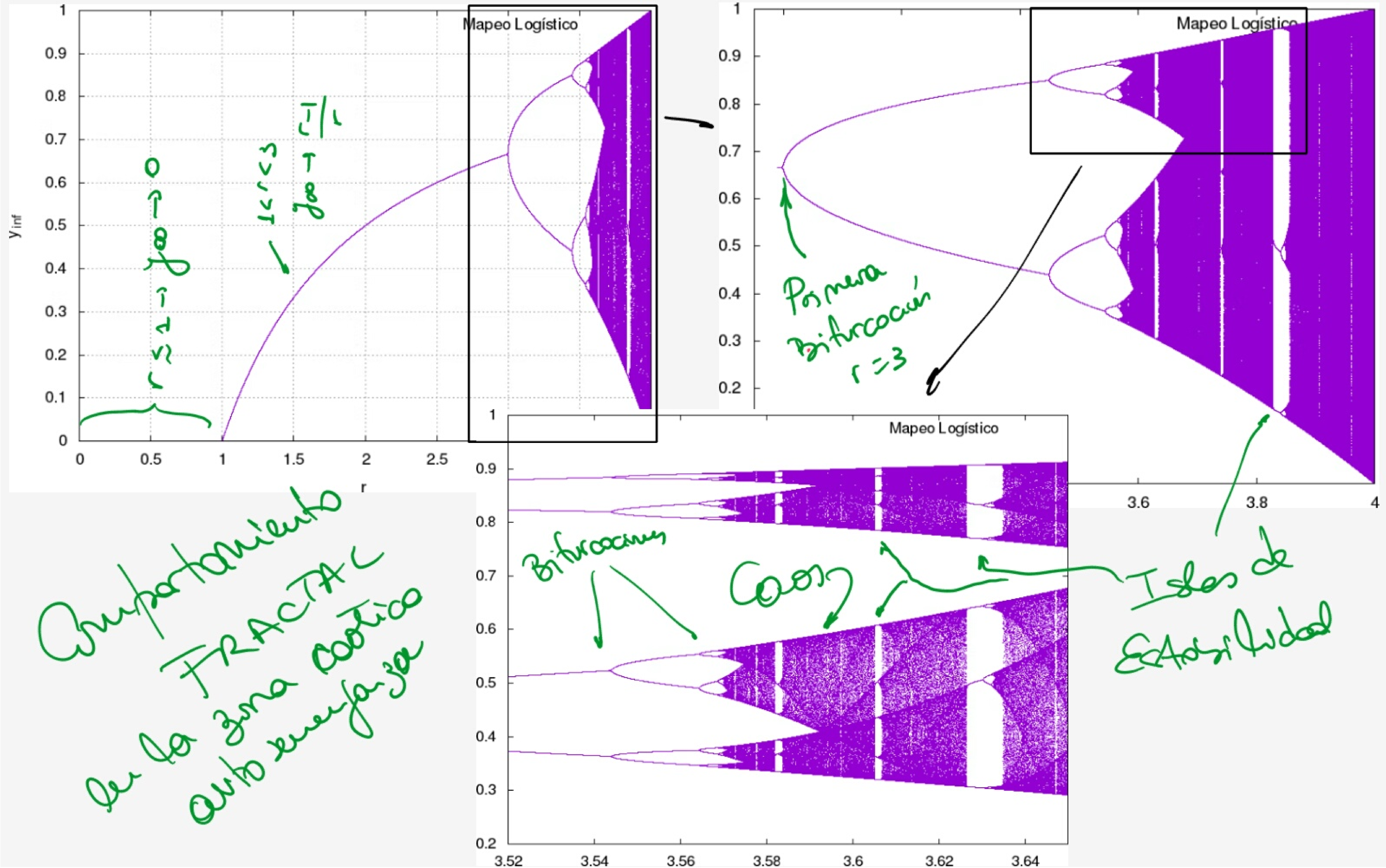
$3 < r < 3.5$: Aparecen bifurcaciones con "tendencia" $\frac{r-1}{r}$

$3.5 < r < 4$: Caos y regímenes de estabilidad

$r > 4$: La población diverge, sin importar el valor de y_0.






Mapeo Logístico
y_{inf}
r
$r<1 \rightarrow y_\infty \rightarrow 0$
$1<r<3$
$y_\infty \rightarrow r-1/r$
Mapeo Logístico
Primera Bifurcación
$r=3$
Mapeo Logístico
Bifurcaciones
Caos
Islas de Estabilidad
Comportamiento FRACTAL en la zona caótica autosemejanza

Bifurcaciones:

Aquí el parámetro que gobierna la evolución del sistema es r ⇒.

- $r: 0 \xrightarrow{0.001} 4$
- $i = 0$
- Mientras $i < 1000$:
    - $y_{i+1} = r * y_i * (1 - y_i)$
    - Si $i \geq 950$:
      print r, y
    - $i += 1$
- cdin

Bifurcaciones.

El mapeo en awk:

Fin

no

si $i<100?$

```
awk 'BEGIN {r=3.60; y=0.2}{for (i=0; i <100; i++){print i, y; y=r*y*(1.-y)}}'
```

valor de r

c. inic.

Bloque inicial

iteración $0 \le i < 100$

imprime i, y

mapeo $y_{i+1} = r y_i (1 - y_i)$

Coef. de Lyapunov.

Recordemos que

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(y_i)}{dy} \right|$$

En nuestro caso:

$$f(y) = r \cdot y\,(1-y)$$

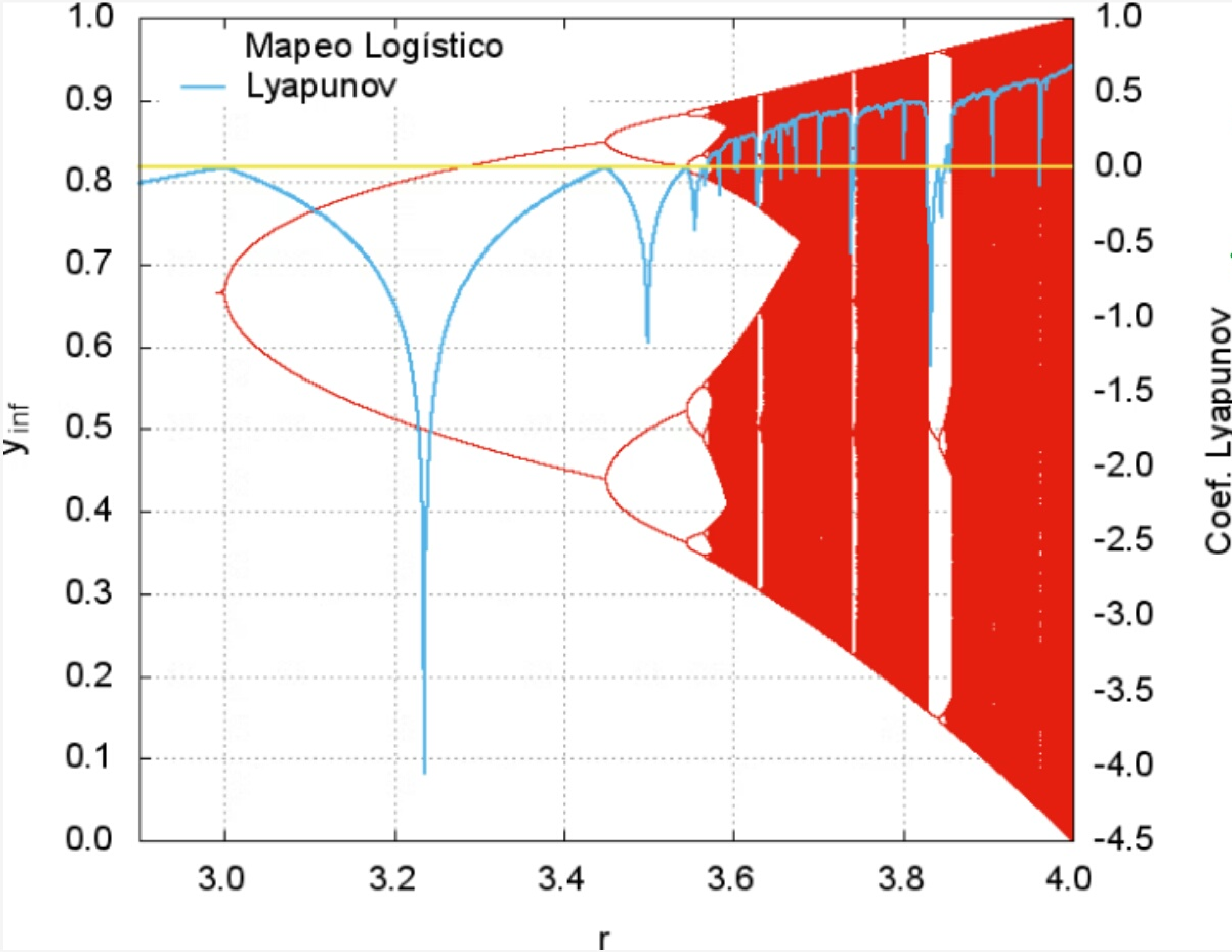
$$\Rightarrow \frac{df}{dy} = r(1-y) + (-ry) = r - yr - yr = r - 2ry$$

Algoritmo.

1) Dejo evolucionar el sistema hasta que pasen los transitorios: $i < 500$

2) Para cada $0 \leq i < 10000$: $(= 9999 = n-1)$

- Calculo el valor y_i
- Calculo $\log|df/dy(y_i)|$
- $\sum \log|df/dy|$
- Divido por 10000



Si $\lambda < 0$ estabilidad

Si $\lambda = 0$ Bifurcación

Si $\lambda > 0$ Caos!

Hamiltoniano de Pullen-Edmonds.

Movimiento bidimensional de una partícula bajo un potencial armónico más un término cuártico de la forma:

$$\frac{1}{\lambda^2} q_x^2 q_y^2$$

De manera que el Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H}_{PE} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m\omega_0^2}{2}\left(q_x^2 + q_y^2 + \frac{1}{\lambda^2} q_x^2 q_y^2\right)$$

Este Hamiltoniano se "parece" mucho a dos osciladores armónicos de igual masa m acoplados por un término cuártico:

$$\mathcal{H}_{PE} = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p^2\right) + \frac{m\omega_0^2}{2}\left(q_1^2 + q_2^2 + \frac{1}{\lambda^2} q_1^2 q_2^2\right)$$

y adimensionalizando:

$$\mathcal{H}_{PE} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \alpha\, x^2 y^2$$

Notar que $\alpha > 0$ $\left(\sim 1/\lambda^2\right)$

Estudiaremos el comportamiento del sistema para los casos $E=5$; $E=20$ y $E=100$. (Unidades adimensionalizadas!)