Mecánica 2014

Unidad 1: Caos

Unidad 2: Fuerzas Centrales

Unidad 3: Formulación Hamiltoniana

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

Mecánica 2014

Unidad 3
Formulación Hamiltoniana

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

Mecánica 2014

U03C01: Formalismo

2014/10/21

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

Formulación Hamiltoniana.

Al igual que la f. Lagrangiana, son descripciones que permite simplificar la manera de resolver las ec. de movimiento asociadas a la física del problema en cuestión. La formulación Hamiltoniana (FH) establece una manera de escribir las ecuaciones que establecen de manera práctica de extender a otras áreas, como la mec. cuántica y estadística.

Las transf. de Legendre nos permiten cambiar

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$$

Un sistema con n grados de libertad posee n ec. de movimiento que son las E. Lagrange son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad (1)$$

y $(2n)$ cond. iniciales deben ser dadas.

El estado del sistema queda determinado por puntos en un espacio n-dimensional: el espacio de configuración. En esta formulación, las variables son q_i y $\dot{q}_i$, además tiempo

Las variables relacionadas en el lagrangiano y sus ec de movimiento están dadas por (1)

Si hacemos nulo para a primera vista, los variables q, $\dot{q}$ son tratadas como variables independientes: tomar la derivada respecto a $\dot{q}$ implica dejar todas las otras variables constantes aun a pesar de la <u>muy evidente</u>. prescripción física de que un cambio en $\dot{q}$ implica que q no es constante.

De todas formas, las ec de Lagrange representan un sistema de n ec. diferenciales de orden 2 acopladas.

¿Podemos repetir el "truco" usado en la Unidad 1?

Desde el punto de vista matemático, es directa la aplicación de estas ecuaciones mediante la identificación $q_i = \dot{q}_i$ y $\ddot{q}_i = f(q_i, \dot{q}_i, t)$.

La formulación de Hamilton es una de estas transformaciones, en donde el resultado final ~~pasar~~ de un sistema de n ec. de orden 2 a un sistema de

$$\boxed{\text{2n ecuaciones de movimiento de } 1^{\circ} \text{ orden independientes mediante la identificación: } (q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow (q_i, p_i, t)}$$

Espacio de configuración
n variables y sus derivadas temporales, q_i, $\dot{q}_i$

Espacio de fases
$2n$ variables independientes
q_i, p_i

Función Lagrangiana y Hamiltoniana

Las nuevas variables introducidas p_i son los momentos conjugados y quedan definidos por

(q_i, p_i) son variables canónicas

$$\boxed{p_j = \frac{\partial \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}} \qquad j = 1, n$$

En este sentido, el momento conjugado es una generalización del momento mecánico $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. Las transformaciones de Legendre sobre el Lagrangiano de una partícula cambian el $\vec{p}$ mecánico. En estos sistemas, p_i podría depender de las posiciones y otras variables conjugadas.

Legendre.

Sea $f = f(x, y) \Rightarrow df = \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}^{u} dx + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}^{v} dy$

Queremos escribir las cosas de tal forma que podamos escribir esto en términos de du y dy:

Definimos una función $g(x,y,u) = f(x,y) - ux \Rightarrow$

$$dg = df - u\,dx - x\,du$$

$$dg = \cancel{u\,dx} + v\,dy - \cancel{u\,dx} - x\,du$$

$$\Rightarrow dg = v\,dy - x\,du$$

$$\partial g / \partial y \qquad \partial g / \partial u$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u} \qquad v = \frac{\partial g}{\partial y}$$

Apliquemos esto al lagrangiano $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$. El momento canónico es $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$, por comparación con las ec. de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} p_i = \partial\mathcal{L}/\partial q_i \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = \partial\mathcal{L}/\partial q_i$$

Tomando el dif. del $\mathcal{L}$:

$$d\mathcal{L} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}}_{\dot{p}_i} dq_i + \overbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}}^{p_i} d\dot{q}_i + \overbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}}^{\dot{\mathcal{L}}} dt$$

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i\, dq_i + p_i\, d\dot{q}_i + \dot{\mathcal{L}}\, dt$$

Podemos obtener las eq. transf. de Legendre.

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

$$\Rightarrow \quad d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

pero también:

$$\Rightarrow \quad d\mathcal{H} = \dot{q}_i \, dp_i + p_i \, d\dot{q}_i - d\mathcal{L}$$

$$= \dot{q}_i \, dp_i \cancel{+ p_i \, d\dot{q}_i} - \dot{p}_i \, dq_i \cancel{- p_i \, d\dot{q}_i} - \dot{\mathcal{L}} \, dt$$

$$\Rightarrow \quad d\mathcal{H} = \dot{q}_i \, dp_i - \dot{p}_i \, dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

$$\boxed{\dot{q}_i(q_j,p_j,t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad p_i(q_j,p_j,t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

Ec. canónicas de Hamilton

2n ec. de 1º grado

y además $-\dot{L} = \dot{H}$

donde el Hamiltoniano del sistema es:

$$\boxed{H(q_j,p_j,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)}$$

Hamiltoniano

Notar poniendo todo en función de p_i, q_i, t

4) Aún quedan $\dot{q}_i$ en $\mathcal{H}$ $\Rightarrow$ Invertir

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \longrightarrow \dot{q}_i = f(q_j, p_j, t)$$

Esto podría ser muy complejo

5) Usar las inversas obtenidas en 4) para eliminar $\dot{q}_i$

$$\Rightarrow \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(q, p, t)$$

Si $\mathcal{L}$ es separable, en 3) ya obtenemos el Hamiltoniano

Por ejemplo: si no hay una dependencia explícita del tiempo y las funciones son cuadráticas $\Rightarrow$