Universidad Industrial de Santander - Escuela de Física

Mecánica Teórica (Asorey)

Guía 01: Caos

2014

1) **Oscilador armónico**

Resuelva numéricamente la ecuación del oscilador armónico simple, $\ddot{\theta}+\theta=0$ para el caso $\theta_0=0{,}05$. Luego:

1) Realice un gráfico de $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $p(q)$. Verifique la existencia de un ciclo límite en el espacio de fases.
2) Sabiéndose un sistema conservativo, estudie la estabilidad de la solución a partir de la evolución de la energía total del sistema, $E=E_k+E_g$, como función del tiempo.
3) Compárela con la solución analítica del péndulo mediante un gráfico de la diferencia entre las dos soluciones como función del tiempo

2) **Oscilador de grandes amplitudes**

Repita el ejercicio anterior pero para el oscilador más general, $\ddot{\theta}+\sin\theta=0$, para los casos $\theta_0=0{,}05$ y $\theta=1$.

3) **Péndulo**

Resuelva en numéricamente la ecuación del péndulo general, que en su forma adimensionalizada responde a la ecuación: $\ddot{\theta}+c\,\dot{\theta}+\sin\theta=a\sin(\Omega t)$. Dejando fijos los valores de $c=0{,}5$ y $\Omega=2/3$

1) Estudie las soluciones para 80 ciclos de forzado para los casos $a=0$, $a=0{,}3$, $a=0{,}9$, $a=1{,}15$, $a=1{,}35$ y $a=1{,}45$.
2) Habiendo amortiguación y forzado, analice el comportamiento de la energía total del sistema como función del tiempo.
3) Para cada valor de a, dibuje el diagrama de fases e identifique los casos caóticos por la existencia de un atractor extraño.
4) Realice el mapa de Poincaré en cada caso, considerando los puntos del espacio de fases al concluir cada ciclo del forzado. Suponga que se han superado los transitorios a partir del ciclo de forzado número quince.
5) Elija una de las condiciones que conduce a un sistema caótico, y haga un mapa de Poincaré para 10^6 ciclos de forzado, obteniendo un punto en el medio de cada ciclo. Estudie las condiciones de auto-semejanza del mapa obtenido, confirmando que se trata de un atractor extraño.

4) **Van der Pol**

Resuelva en forma numérica la ecuación del oscilador de Van der Pol, $\ddot{\theta}-\mu\left(1-\theta^2\right)\dot{\theta}+\theta=a\sin\Omega t$ en los siguientes casos:

1) $\mu=0{,}09$, $a=0.$, $\Omega=2/3$
2) $\mu=0{,}09$, $a=1{,}15$, $\Omega=2/3$
3) $\mu=8{,}53$, $a=0.$, $\Omega=0{,}628$
4) $\mu=8{,}53$, $a=1{,}15$, $\Omega=0{,}628$

En todos los casos, realice un gráfico de $\theta(t)$, el diagrama del espacio de fases, y estudie el comportamiento de la energía como función del tiempo.

5) **Edmon-Pullen**

Para el Hamiltoniano de Edmon-Pullen,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m\omega_0^2}{2}\left(q_x^2 + q_y^2 + \frac{1}{\lambda^2} q_x^2 q_y^2\right),$$

obtenga las ecuaciones de movimiento adimensionalizadas y luego resuelva los siguientes puntos para los casos con energía $E = 5$, $E = 20$ y $E = 100$ (unidades arbitrarias).

1) A partir de las ecuaciones de movimiento adimensionalizadas, obtenga un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden apto para ser resuelto utilizando Runge-Kuta de cuarto orden.
2) Obtenga un conjunto de condiciones iniciales. Teniendo presente que el sistema presenta simetría de intercambio ante los índices $x \longleftrightarrow y$, evite utilizar condiciones simétricas para las condiciones inciales. Utilice la energía del sistema como un vínculo.
3) Estime un valor razonable para el tiempo de simulación, y resuelva numéricamente las ecuaciones de movimiento. Verifique la estabilidad de las soluciones analizando la evolución temporal de la energía total y compárela con el valor definido para la energía en cada caso.
4) Estudie los espacios de fases para cada caso.
5) Realice un mapa de Poincaré (q_y, p_y) para la condición $x = 0$ (recuerde que para soluciones numéricas, en lugar de igualdad debe considerar un entorno del 0, por ejemplo $|x| < 10^{-3}$. Este valor dependerá del paso numérico considerado.).
6) Utilice un algoritmo de Transformada Rápida de Fourier Discreta (DFFT), como por ejemplo `np.fft` (http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/routines.fft.html), para buscar las frecuencias características del sistema. Analice cada uno de los tres casos y a partir de los resultados obtenidos establezca una relación entre el número de frecuencias características y el comportamiento del sistema.
7) Utilizando el método de las pendientes, obtenga el valor del coeficiente de Lyapunov en cada uno de los casos estudiados (recuerde que debe mantener el valor de la energía constante y cambiar ligeramente una de las condiciones iniciales).

6) **Mapeos**

El mapeo de Hassell está dado por la ecuación

$$y_{i+1} = \frac{k_1 y_i}{\left(1 + k_2 y_i\right)^{k_3}},$$

donde y_i representa a la población actual, y k_1, k_2 y k_3 son los parámetros de la ecuación. Para el caso $k_2 = 1$, estudiaremos la evolución temporal de la población en el espacio de parámetros k_1 y k_3. Para ello:

1) Escriba un código para resolver la evolución temporal del mapeo de Hassell, considerando 150 ciclos para superar los efectos transitorios dados por las condiciones iniciales.

2) Obtenga los diagramas de bifurcación para los casos $k_3 = 1, 2, 3, 4, 56$ con k_1 variando entre 1 y 1000 en pasos de 0,5 de ancho, graficando 50 valores de y_i con $i = 151, \ldots, 200$ como función de k_1, para los seis casos considerados en k_3. Estudie para cada uno de los seis casos el comportamiento del sistema, la existencia de bifurcaciones, la transición a regímenes caóticos y la existencia de islas de estabilidad.

3) Para cada uno de los seis casos anteriores, obtenga la evolución de los coeficientes de Lyapunov como función de k_1 utilizando el método de la derivada. Suponga un valor de 10000 para la evolución final del sistema. Haga un gráfico del coeficiente de Lyapunov superpuesto sobre el diagrama de bifurcación en cada caso.