Mecánica 2014

U03C05:Transformaciones Canónicas en Notación Simpléctica

2014/11/04

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

Notación simpléctica

Otro acercamiento a las transformaciones canónicas viene por medio de la utilización de la notación simpléctica.

Trabajamos usando transformación de punto no dependientes del tiempo:

$$Q_i = Q_i(q, p) \longrightarrow q_j = q_j(Q, P)$$

$$P_i = P_i(q, p) \longrightarrow p_j = p_j(Q, P)$$

Ec de Hamilton

$$\Rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{=\dot{q}_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_j}}_{=\dot{p}_j}$$

Usando los inversos:

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \mathcal{H}\big(q(Q,P), p(Q,P), t\big)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i}$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}$$

Si $\boxed{\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \text{ y } \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}} \Rightarrow \boxed{\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}}$

y lo mismo en $\dot{P}$:

Condiciones Directas

$$\text{Si } \boxed{\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{P,q} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P} \text{ y } \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}} \Rightarrow \boxed{\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}}$$

Notación Simpléctica

Recordando la notación simpléctica, las ec. de Hamilton:

$$\dot{\eta} = \mathbb{J}\,\frac{\partial H}{\partial \eta}$$

Una transformación de punto será:

$$\Psi = \Psi(\eta)$$

Para estudiar la derivada temporal de Ψ, tenemos en cuenta:

$$\dot{\psi}_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \qquad i,j = 1, \dots, 2n$$

$M_{ij} \leftarrow$ Jacobiano

$$\Rightarrow \dot{\Psi} = \mathbb{M} \dot{\eta} \qquad , \ \mathbb{M} : M_{ij} = \partial \psi_i / \partial \eta_j$$

$$\Rightarrow \dot{\Psi} = \mathbb{M} \mathbb{J} \, \partial \mathcal{H} / \partial \eta$$

Pero quiero todo en términos de Ψ, luego usamos la transf. inversa

$M_{ji} \rightarrow \mathbb{M}^t$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta_i} \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = \mathbb{M}^t \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Psi}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\Psi} = \mathbb{M}\,\mathbb{J}\,\mathbb{M}^t \frac{\partial H}{\partial \Psi}$$

Ahora, sabemos que H en las nuevas variables sigue siendo el Hamiltoniano, dado que estamos en transf. canónicas restringidas ($K = H + \partial F/\partial t \Rightarrow K = H$), luego para el nuevo Hamiltoniano, las ec. de Hamilton simplécticas son:

$$\dot{\Psi} = \mathbb{J}\, \partial H/\partial \Psi$$

Comparando, una transf. canónica debe verificar.

$$\boxed{\mathbb{M}\,\mathbb{J}\,\mathbb{M}^t = \mathbb{J}}$$

Cond. para una transf. canónica restringida.

Si forma extendida $(\lambda \neq 1)$, el cambio es trivial:

$$M J M^t = \lambda J$$

Multiplicando por izq por $M^{t^{-1}}$ →

$$\boxed{M J = J M^{t^{-1}}}$$

Cond. Directas.

que es la forma matricial simpléctica de las cond. directas. Seguimos

$$M \overbrace{J J}^{-I} = J M^{t^{-1}} J$$

$$-J(-M) = -J J M^{t^{-1}} J$$

$$J\,M = M^{t-1}\,J$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M^t\,J\,M = J}$$

Si M cumple estas condiciones $\Rightarrow$ M es una matriz simpléctica

Recordemos de la clase anterior

$$Q_1 = q_1 \qquad P_1 = p_1 \qquad \longrightarrow \quad F = \underbrace{q_1 P_1}_{F_2} + \overbrace{q_2 Q_2}^{F_1}$$

$$Q_2 = p_2 \qquad P_2 = -q_2$$

$$\eta = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{M} \psi = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\Upsilon} = M\dot{\eta} :$$

$$\begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_1 \\ -\dot{p}_2 \end{pmatrix}$$

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{M^t J M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{J}$$