Mecánica 2014

U02C04: Kepler , leapfrog y Hermite

2014/10/16

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

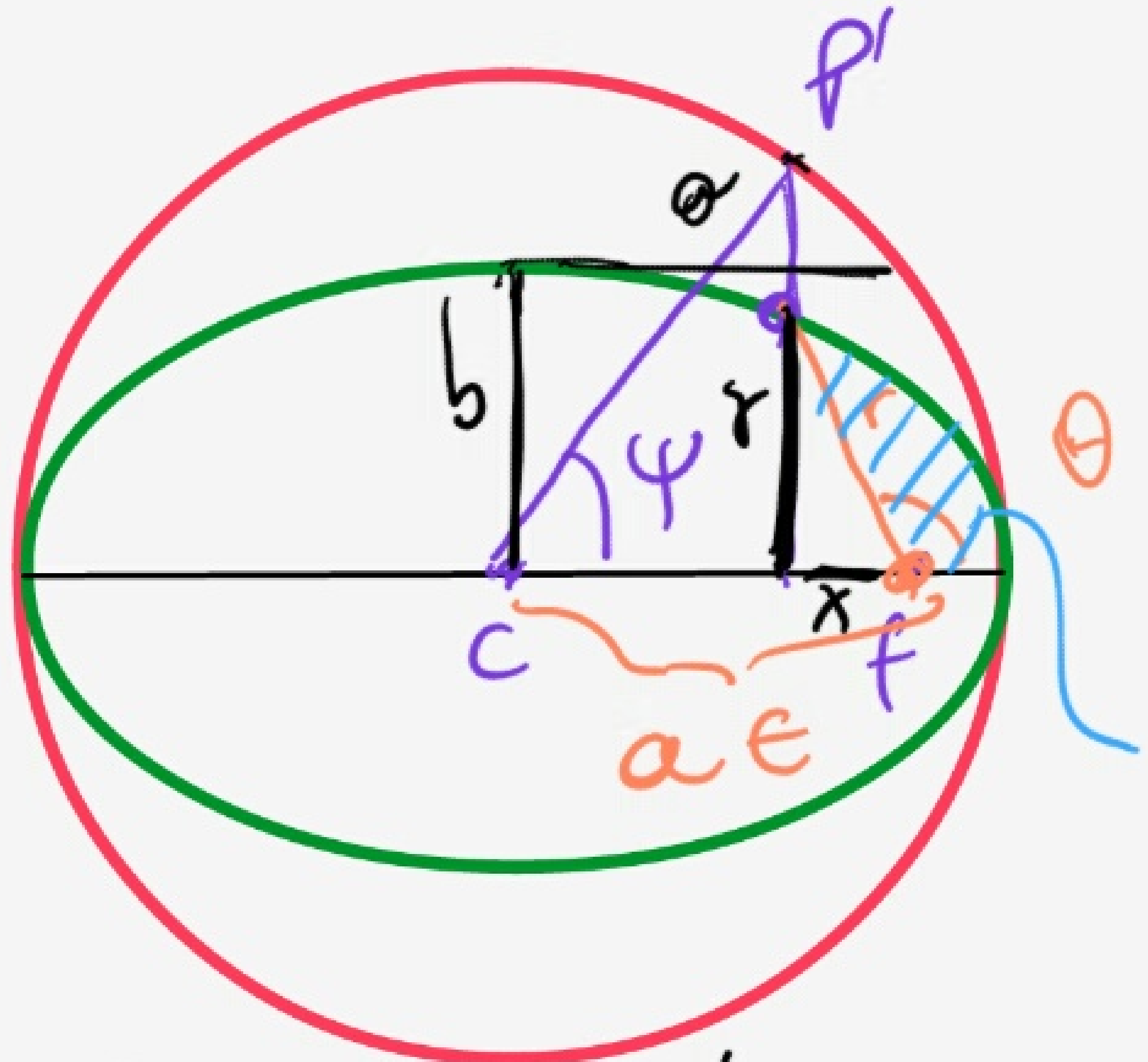
Análisis temporal

Recordemos: $t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - L^2/2mr^2\right)}}$

$\Rightarrow V = -k/r \Rightarrow$

$$t = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} + E}}$$

Es conveniente plantear las ecuaciones en términos de la excentricidad anómala:



ψ es la anomalía Excéntrica

θ es la anomalía verdadera

$M = \sqrt{\frac{G(M+m)}{a^3}}\, t$ es la anomalía Media

y es prop. al área barrida por el radio vector que une el foco con el planeta

Es adimensional y $0 \leq M \leq 2\pi$

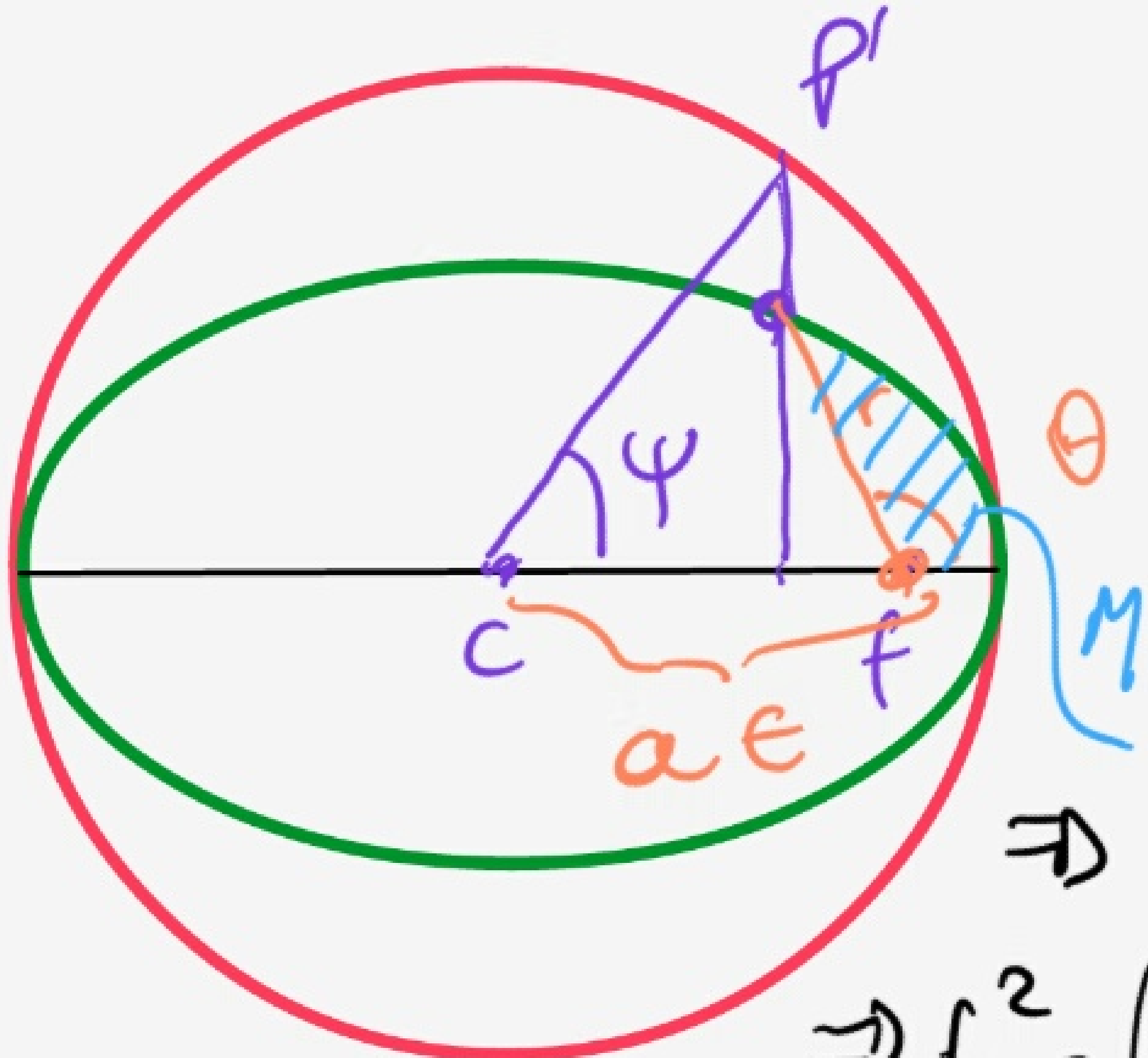
$$M = \psi - \epsilon \sin\psi$$

$$x = a\epsilon - a\cos\psi$$

$$y = b\sin\psi$$

$$\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$$



ψ de la anomalía Excéntrica

$$y = b \sin \psi \qquad x = a\epsilon - a\cos\psi$$

$$\Rightarrow r^2 = \underbrace{b^2}_{a^2(1-\epsilon^2)} \underbrace{\sin^2\psi}_{1-\cos^2\psi} + (a\epsilon - a\cos\psi)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = a^2(1-\epsilon^2)(1-\cos^2\psi) + a^2(\epsilon^2 - 2\epsilon\cos\psi + \cos^2\psi)$$

$$\Rightarrow r^2 = (a^2 - a^2\epsilon^2)(1-\cos^2\psi) + a^2\epsilon^2 - 2a^2\epsilon\cos\psi + a^2\cos^2\psi$$

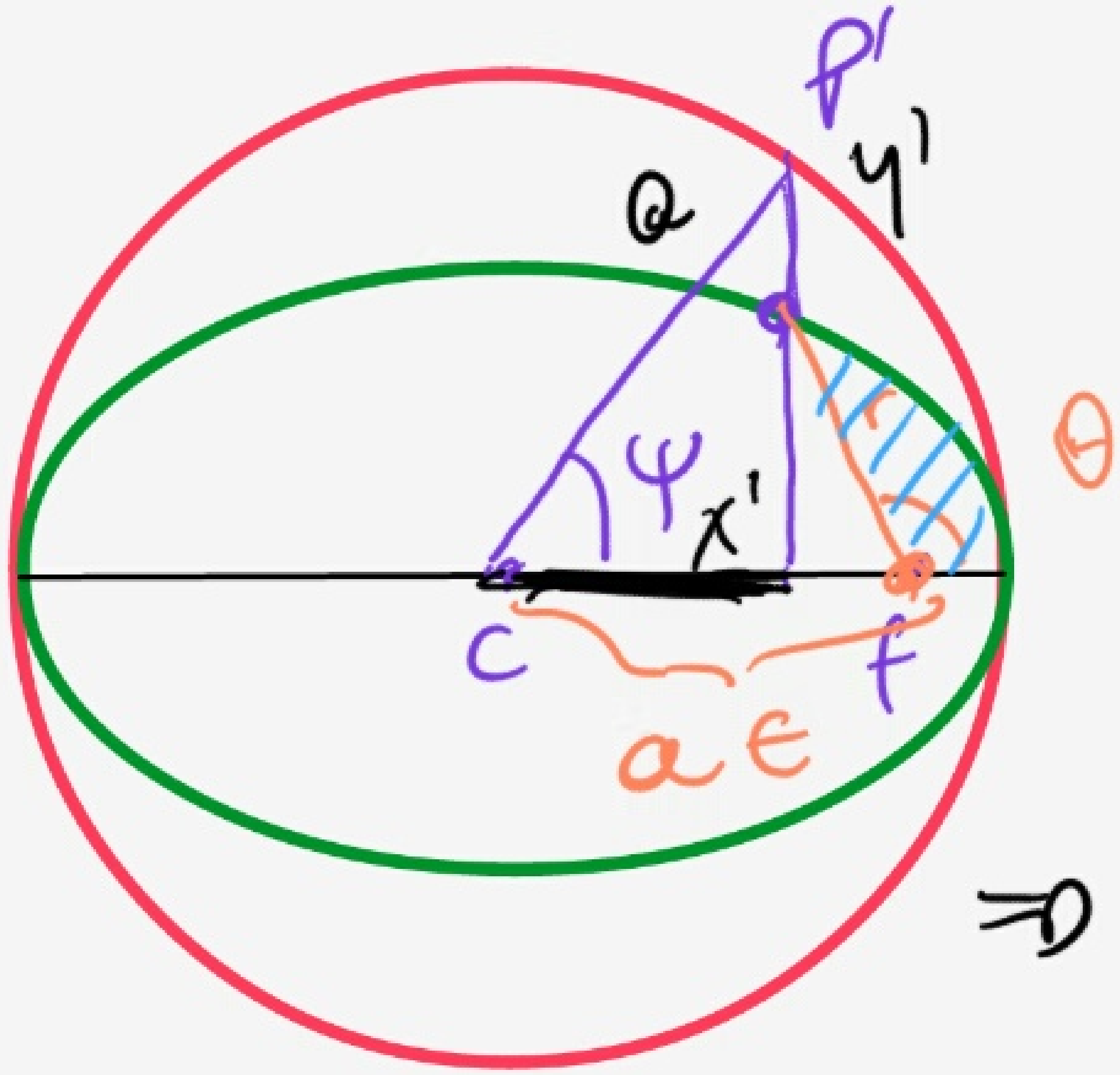
$$\Rightarrow r^2 = a^2 \cancel{- a^2\epsilon^2} \cancel{- a^2\cos^2\psi} + a^2\epsilon^2\cos^2\psi \cancel{+ a^2\epsilon^2} - 2a^2\epsilon\cos\psi \cancel{+ a^2\cos^2\psi}$$

$$= a^2 - 2a^2\epsilon\cos\psi + a^2\epsilon^2\cos^2\psi$$

$$= a^2(1 - 2\epsilon\cos\psi + \epsilon^2\cos^2\psi)$$

$$= a^2(1-\epsilon\cos\psi)^2 \Rightarrow r^2 = a^2(1-\epsilon\cos\psi)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{r = a(1-\epsilon\cos\psi)}$$



$$r = a(1 - \epsilon\cos\psi)$$

$$\cos\psi = \frac{x'}{a} = \frac{a\epsilon - (-r\cos\theta)}{a} = \frac{a\epsilon + r\cos\theta}{a}$$

$$= \epsilon + \frac{r}{a}\cos\theta = \epsilon + (1 - \epsilon\cos\psi)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\psi = \epsilon + \cos\theta - \epsilon\cos\theta\cos\psi$$

$$\Rightarrow \cos\psi(1 + \epsilon\cos\theta) = \epsilon + \cos\theta \Rightarrow \cos\psi = \frac{\epsilon + \cos\theta}{1 + \epsilon\cos\theta}$$

$$\Rightarrow r = a\left(1 - \epsilon\left(\frac{\epsilon + \cos\theta}{1 + \epsilon\cos\theta}\right)\right) = a\left(\frac{1 + \cancel{\epsilon\cos\theta} - \epsilon^2 - \cancel{\epsilon\cos\theta}}{1 + \epsilon\cos\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = a\frac{(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon\cos\theta}$$

que nós tínhamos antes

Si $r = p \Rightarrow \Theta = 0 = \psi$

Si $r = A \Rightarrow \Theta = \pi = t$

Recordando $a = -\frac{k}{2E}$; $\frac{L^2}{mk} = a(1-\epsilon^2)$

$\Rightarrow E = \frac{-k}{2a}$ y $\frac{L^2 \cancel{k}}{m\cancel{k}(2r^2)} = \frac{a(1-\epsilon^2)k}{2r^2}$

$$\Rightarrow t = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left[\frac{k}{r} - \frac{a(1-\epsilon^2)k}{2r^2} - k/2a\right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left[\frac{k}{r^2}\left(-\frac{1}{2a}r^2 + r - \frac{a(1-\epsilon^2)}{2}\right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}$$

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2ar - r^2 - a^2(1-e^2)}{2a}}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m\cancel{2}a}{\cancel{2}k}} \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{2ar - r^2 - a^2(1-e^2)}}$$

$$r = a(1 - e\cos\psi) \rightarrow dr = a e \sin\psi\, d\psi$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m a}{k}} \int_{0}^{\psi} \frac{a^2 e (1 - e\cos\psi)\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{a}\sqrt{2r - \frac{r^2}{a} - a(1-e^2)}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m a^3}{k}} \int_0^{\psi} (1 - \epsilon \cos \psi)\, d\psi$$

al tomar $\psi = 2\pi \Rightarrow \int_0^{2\pi} (1 - \epsilon \cos \psi)\, d\psi = 2\pi$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m a^3}{k}}\, 2\pi \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 . a^3 \left(\frac{m}{k}\right)$$

Ahora, recordemos que en realidad $m = \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

y $k = m_1 m_2 G$

$$\Rightarrow T^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{\cancel{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \frac{1}{\cancel{m_1 m_2} G}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3}$$ 3ª Ley.

Si, como pasa en general, $m_1 \ll m_2 \Rightarrow$

$m_1 + m_2 \simeq m_2$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G M_2}a^3$$

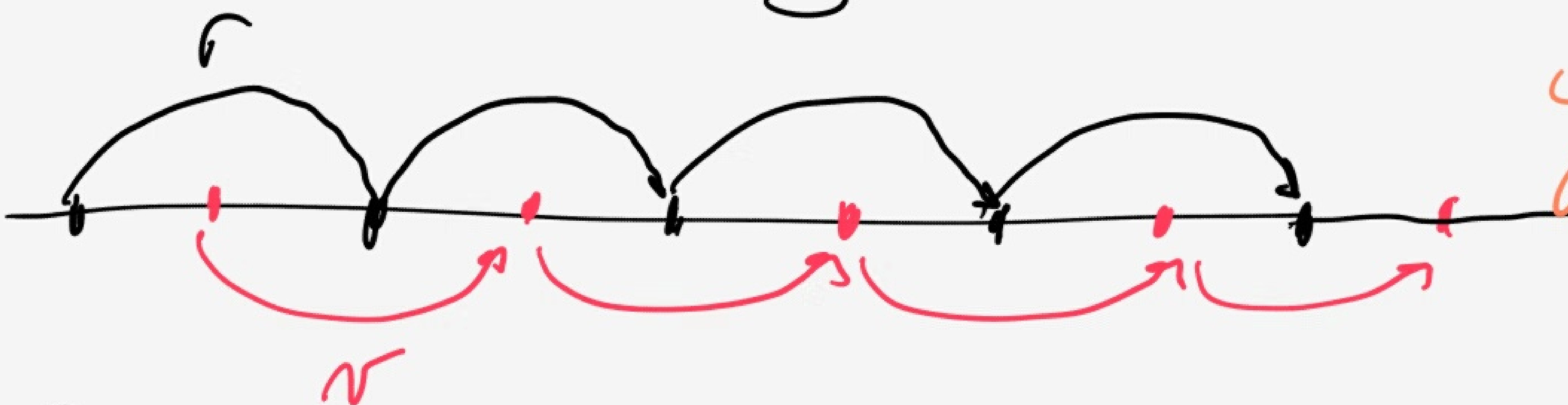
$M_{Jup} \sim 1/1000\ M_\odot$

Ojo

Solución Numérica para el Caso Gravitatorio

Leap Frog

Algoritmo simpléctico y reversible.



$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \vec{v}_{i-1/2}\, dt & \vec{r}_0 \; ; \; \vec{v}_0 \\ \vec{v}_{i+1/2} = \vec{v}_{i-1/2} + \vec{a}_i\, dt & ; \; \text{c.i.: } \vec{v}_{1/2} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \dfrac{dt}{2} \end{cases}$$

Habitualmente se usa si $\vec{a}$ no depende de $\vec{v}$

El tema es que no tenemos definida la velocidad en el mismo lugar que la posición

Algoritmo.

$$\text{ci} \quad \vec{r}_0, \vec{v}_0 \xrightarrow{\vec{a}_0} \vec{v}_{1/2}$$

$$\vec{r}_i, \vec{v}_{i+1/2} \longrightarrow \vec{r}_{i+1}$$

$$\vec{r}_{i+1} \longrightarrow \vec{a}_{i+1}$$

$$\vec{v}_{i+1/2}, \vec{a}_{i+1} \longrightarrow \vec{v}_{i+1+1/2}$$

iterar $i = 0 \ldots n$

Una formulación equivalente es:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{i+1} &= \vec{r}_i + \vec{v}_i\, dt + \frac{1}{2}\vec{a}_i\, dt^2 \\ \vec{v}_{i+1} &= \vec{v}_i + (\vec{a}_i + \vec{a}_{i+1})\, dt/2 \end{aligned}}$$

Leap frog. (2º orden)

Que es formalmente equivalente al anterior:

$$\vec{v}_{i+1} = \underbrace{\vec{v}_i + \vec{a}_i \frac{dt}{2}}_{\vec{v}_{i+1/2}} + \vec{a}_{i+1} \frac{dt}{2}.$$

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \Bigg(\underbrace{\vec{v}_i + \vec{a}_i \frac{dt}{2}}_{\vec{v}_{i+1/2}}\Bigg)\, dt$$

pero tiene $\vec{r}$ y $\vec{v}$ definidos en los mismos tiempos recordar, en python, $r_{i+1} = r_i + f_i \rightarrow r += f_i$

$$r_i \rightarrow a_i$$

$$\vec{r}_i += \vec{v}_i\,dt + \vec{a}_i\,dt^2/2$$

$$a_i = a_f$$

$$a_i = f(r_i)$$

$$\vec{v} += (\vec{a}_i + \vec{a}_f)\,dt/2$$

Se puede mejorar un poco más:

$\vec{a}_i = f(\vec{r}_i)$

While $(t < tf)$:

$\vec{v}_{si} \mathrel{+}= \vec{a}_i \cdot dt/2$

$r_i \mathrel{+}= \vec{r}_i \cdot dt$

$\vec{a}_i = f(\vec{r}_i)$

$\vec{r}_i \mathrel{+}= \vec{a}_i \, dt/2$

Leap Frog.

(Algoritmo Computacional Optimizado)

Notar que es para un pot. genéricos.

Puede notarse que la reversibilidad temporal es exacta (no aproximada) y es una ventaja del métodos

Para un sistema de N- cuerpos $\Rightarrow$

$$\ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} m_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}$$

o $$\ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j=1} \frac{m_j}{r_{ji}^2} \hat{r}_{ji} \qquad \vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

En general es conveniente ubicar el sistema en el CM:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\vec{R} \equiv \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad ; \quad \vec{r}\,'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$$

$$m_i = cte \rightarrow \vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \quad ; \quad \vec{v}\,'_i = \vec{v}_i - \vec{V}$$