Universidad Industrial de Santander - Escuela de Física

Mecánica Teórica (Asorey)

Guía 02: Fuerzas Centrales

2014

1) **Choque cometario**

Un planeta de masa M posee una órbita de excentricidad $\epsilon = 1-\alpha$, con $\alpha \ll 1$, alrededor del Sol. Suponga que el movimiento del Sol puede ser obviado y sólo actúan las fuerzas gravitacionales. Cuando el planeta se encuentra en el afelio es golpeado por un cometa de masa m, con $m \ll M$, que viajaba en dirección tangencial. Suponiendo que la colisión fue totalmente inelástica, obtenga la energía cinética mínima que el cometa debe tener para cambiar la órbita del planeta a una parábola.

2) **Órbita parabólica y circular**

Para órbitas parabólicas y circulares en un potencial atractivo de la forma $U = r^{-1}$, ambas con el mismo momento angular L, muestre que la distancia al perihelio de la parábola es la mitad del radio de la órbita circular. Luego, verifique que la velocidad de una partícula en un punto cualquiera de la órbita parabólica es $\sqrt{2}$ veces más grande que la velocidad en el mismo punto pero para una órbita circular.

3) **Sección eficáz de la Tierra**

Analice y discuta el trabajo de J.B. Tatum, "The Capture Cross-Section of Earth for Errant Asteroids", JRASC **91**, 276 (1997), 1997JRASC..91..276T.

4) **Planeta X**

Suponga que el "Planeta X" existe y es un gemelo de la Tierra y está ubicado en la misma órbita que la Tierra pero de forma tal que cuando la Tierra está en el perihelio, el planeta X está en el afelio. Ahora bien, dado que la órbita es elíptica, el ocultamiento del planeta X no siempre es efectivo al ser visto desde la Tierra. Calcule, a primer orden de aproximación en ϵ, la máxima separación angular entre nuestro planeta gemelo y el Sol visto desde la Tierra. ¿Podría ser visible desde la Tierra?

5) **Año anómalo**

El período de la Tierra entre dos tránsitos sucesivos por el perihelio se denomina el "año anómalo" y es de $T_A = 365{,}2596$ días solares medios. Sabiendo que la excentricidad de la órbita terrestre es $\epsilon_\oplus = 0{,}0167504$ y suponiendo que el movimiento es perfectamente Kepleriano, calcule (numéricamente si fuera necesario) la apertura angular de la posición de la Tierra medida desde el perihelio cuando el tiempo transcurrido es igual a $T_A/4$.

6) **Puntos de Lagrange**

El problema de 3 cuerpos restringido consiste en dos masas M_1 y M_2 en órbita circular, una alrededor de la otra, y un tercer cuerpo de masa m, $m \ll M_1$ y $m \ll M_2$, de manera que el efecto gravitatorio de este cuerpo sobre los dos mayores puede ser despreciado.

Los puntos de Lagrange (o puntos de Libración), son aquellos puntos del espacio (identificados como $L_1, \ldots, L_5$) donde el potencial total presenta un extremo y, por lo tanto, la fuerza neta que experimenta el cuerpo de masa m es nula.

A partir del Lagrangiano del sistema para la masa m, $\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r,\theta,t)$, y moviéndonos a un sistema comóvil con los cuerpos que gira con frecuencia angular ω, los dos cuerpos masivos parecen estar en reposo. Es posible moverse a este sistema mediante la transformación $\theta' = \theta + \omega t$.

1) En el sistema comóvil y en coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta = \theta' - \omega t, z)$ con origen en el centro de masas, obtenga el nuevo Lagrangiano del sistema

2) Identifique en el Lagrangiano los términos de Coriolis y Centrífugo.

3) Obtenga las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange, y encuentre las cinco posiciones donde se verifica $\dot{\rho} = \dot{z} = \dot{\theta} = 0$. Estos son los cinco puntos de Lagrange.

4) Perturbe las soluciones anteriores y determine si los puntos encontrados son estables (L_4 y L_5) o inestables (L_1, L_2 y L_3).

5) Encuentre las posiciones de los puntos de Lagrange en el sistema Tierra-Sol y Sol-Júpiter.

6) Investigue sobre la importancia de los puntos de Lagrange para la ciencia aeroespacial

7) **Puntos de Lagrange Numéricos**

Utilizando un código basado en el algoritmo de leapfrog, resuelva numéricamente la órbita de la Tierra en torno al Sol. Utilice los principios de conservación para obtener las condiciones iniciales cuando la Tierra se encuentra en el afelio. Luego, incluya un tercer cuerpo de masa despreciable frente a las masas de la Tierra y el Sol, y verifique las soluciones obtenidas en el punto anterior y la estabilidad de las mismas.

8) **Planeta X, el regreso**

Utilizando un algoritmo leapfrog, resuelva numéricamente la órbita del Sistema Planeta X-Sol-Tierra. Suponga que el Planeta X es idéntico a la Tierra en todos los aspectos. Para las posiciones iniciales, suponga que a tiempo $t = 0$, la Tierra se encuentra en el perihelio y el planeta X se encuentra en el afelio, y determine las correspondientes velocidades de cada planeta en dichos puntos (sólo para este punto desprecie las interacciones gravitatorias entre los planetas).

9) **Cúmulo globular**

Modifique el código de leapfrog para obtener un código que funcione con el algoritmo Predictor-Corrector de Hermite con paso temporal variable. Luego, estudie la evolución de un cúmulo globular esférico con 50 estrellas de masas $m = 1$. Como condiciones iniciales, suponga que todas las estrellas están inicialmente en reposo (*cold start*) y se encuentran distribuidas uniformemente en el interior de una esfera de radio $R = 1$ (código `cold-start.py`). En el sistema de unidades donde $G = 1$, deje el código evolucionar entre $t = 0$ y $t = 1$, con un paso temporal variable cuya base es 0,05 (de esta forma, el $dt = 0{,}05 \times \tau$, con τ igual al tiempo de paso variable).

10) **Cúmulo globular y agujero negro**

Imagine que en el centro del cúmulo globular anterior se encuentra un agujero negro de masa $M = 1000$ en reposo. Obtenga la evolución del cúmulo con las mismas constantes y parámetros del caso anterior.