Mecánica 2014

U01C06: Lyapunov y Hénon - Heiles
2014/09/29

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

Coef. de Lyapunov.

Imaginemos un sist. mecánico con un espacio de fases asociado de dim n. Sean ahora dos condiciones iniciales "cercanos" para este sistema.

$$\vec{y}_0 \quad ; \quad \vec{y}_0 + \vec{\varepsilon} \equiv \vec{y}_0^{\,\prime}$$ Cond. Inicial

(notar que $\vec{y}_0$ y $\vec{\varepsilon}$ son vectores de dim. n).

Luego de que el sistema evolucione (j):

¿Cómo será la diferencia $\left(\vec{y}_j^{\,\prime} - \vec{y}_j\right) \equiv \Delta \vec{y}_j$?

¿Serán prop. a $\vec{\varepsilon}$?

j iteraciones

En general, se puede plantear una diferencia como:

$$\Delta \vec{y}_j = \vec{\epsilon}\, e^{j\vec{\lambda}}$$

(notar el abuso de notación). A medida que el sistema evoluciona se espera que las distancias crezcan exponencialmente (si λ_i es positivo) o se mantengan en un entorno de 0 (si λ_i es neg)

Sea entonces

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \overrightarrow{rk4}(t, \vec{y}_i) \equiv \vec{f}(\vec{y}_i)$$

$\Rightarrow \Delta \vec{y}_0 = \vec{\epsilon} \longrightarrow \Delta \vec{y}_1 = \vec{y}_1' - \vec{y}_1 = \vec{f}(\vec{y}_0 + \vec{\epsilon}) - \vec{f}(\vec{y}_0)$

$$\Rightarrow \Delta \vec{y}_1 = \frac{\vec{f}(\vec{y}_0 + \vec{\epsilon}) - f(\vec{y}_0)}{|\vec{\epsilon}|} |\vec{\epsilon}|$$

En el caso 1D:

$$\Delta y_1 = \epsilon \left.\frac{df}{dy}\right|_{y_0}$$

$$f^n \equiv f(f(f(\dots f(x_0))))$$

Luego de n iteraciones:

$$\Delta y_n = f^n(y_0 + \epsilon) - f^n(x_0) = \epsilon e^{n\lambda}$$

Queremos obtener λ. Tomamos ln en ambos lados

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{f^n(y_n+\epsilon) - f^n(y_0)}{\epsilon} \right) = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(y)}{dy} \right|_{y_0}$$

y entonces $$\left.\frac{df^n(y)}{dy}\right|_{y_0} = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y_{n-1}} \left.\frac{df}{dy}\right|_{y_{n-2}} \cdots \left.\frac{df}{dy}\right|_{y_0}$$

En el lím $n \to \infty \Rightarrow$

$$\boxed{\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(y_i)}{dy} \right|}$$

Coef. de Lyapunov

$$\lambda = \begin{cases} \lambda < 0 \to \text{estable} \to \text{Mide el rate de acercamiento al atractor} \\ \lambda = 0 \to \text{bifurcación} \\ \lambda > 0 \to \text{caos.} \end{cases}$$

Para calcular el exp β de Lyapunov hay dos formas.

1) Usar la definición
2) Usar la derivada ⟵ Se complica al tratarse de un caso racional.

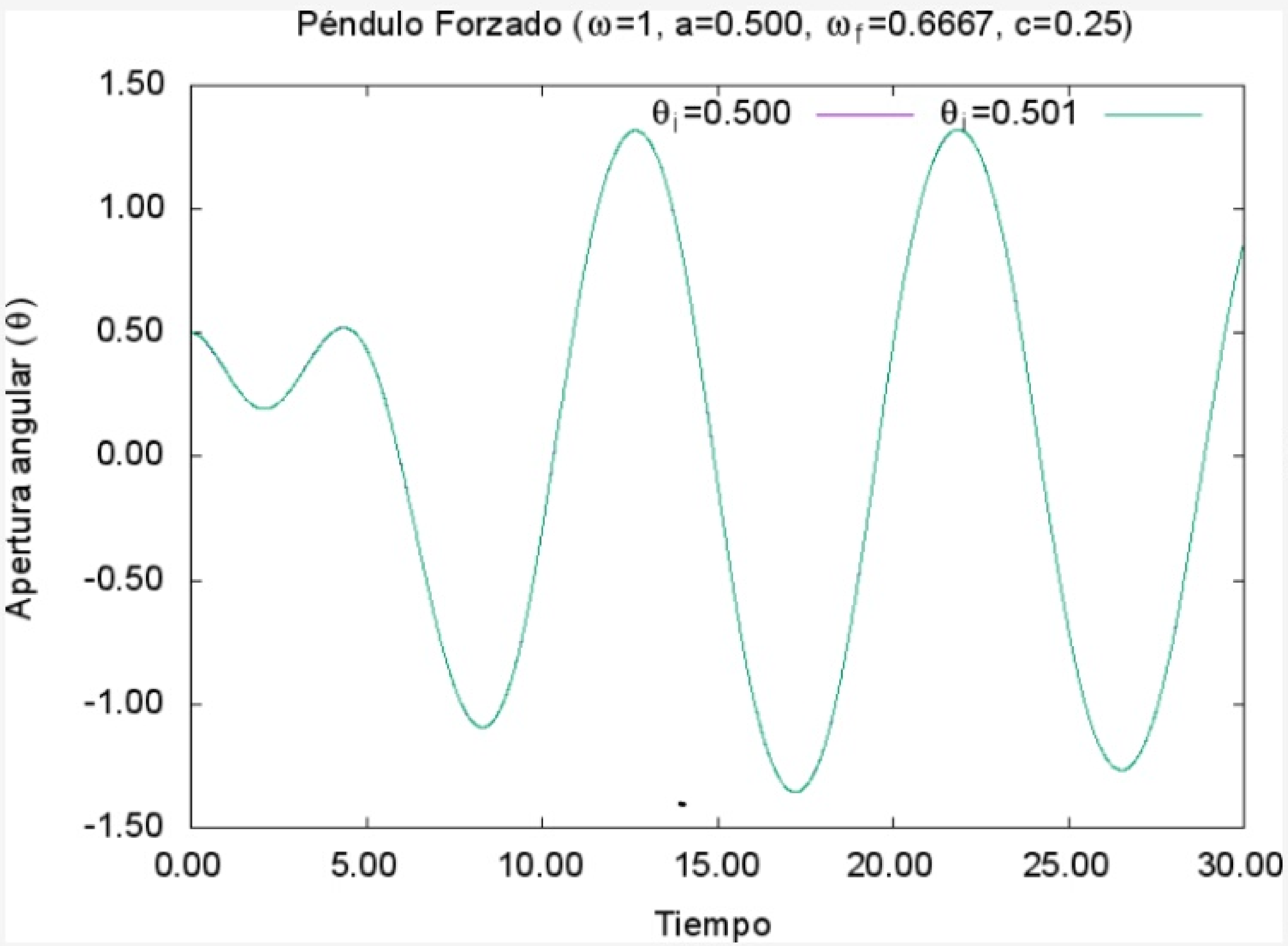
El método 1) implica.

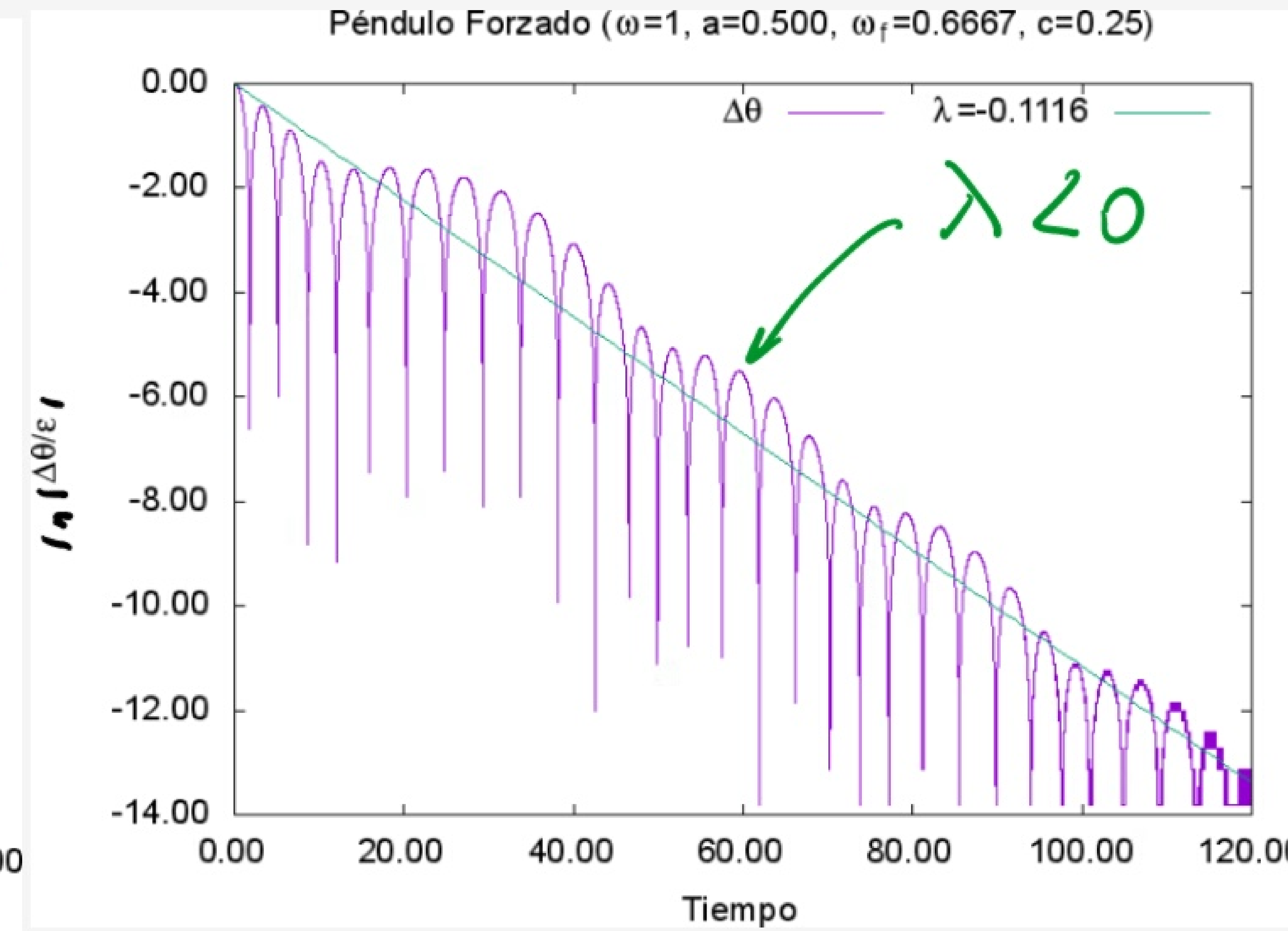
- resolver la EDO a partir de dos C.I. "cercanas"
- Calcular el módulo de la diferencia como función del tiempo
- Luego $|\Delta y| = \epsilon\, e^{\beta t \lambda}$

$$|\Delta y| = \epsilon\, e^{\Delta t \lambda} \Rightarrow \ln|\Delta y| - \ln \epsilon = \Delta t\, \lambda$$

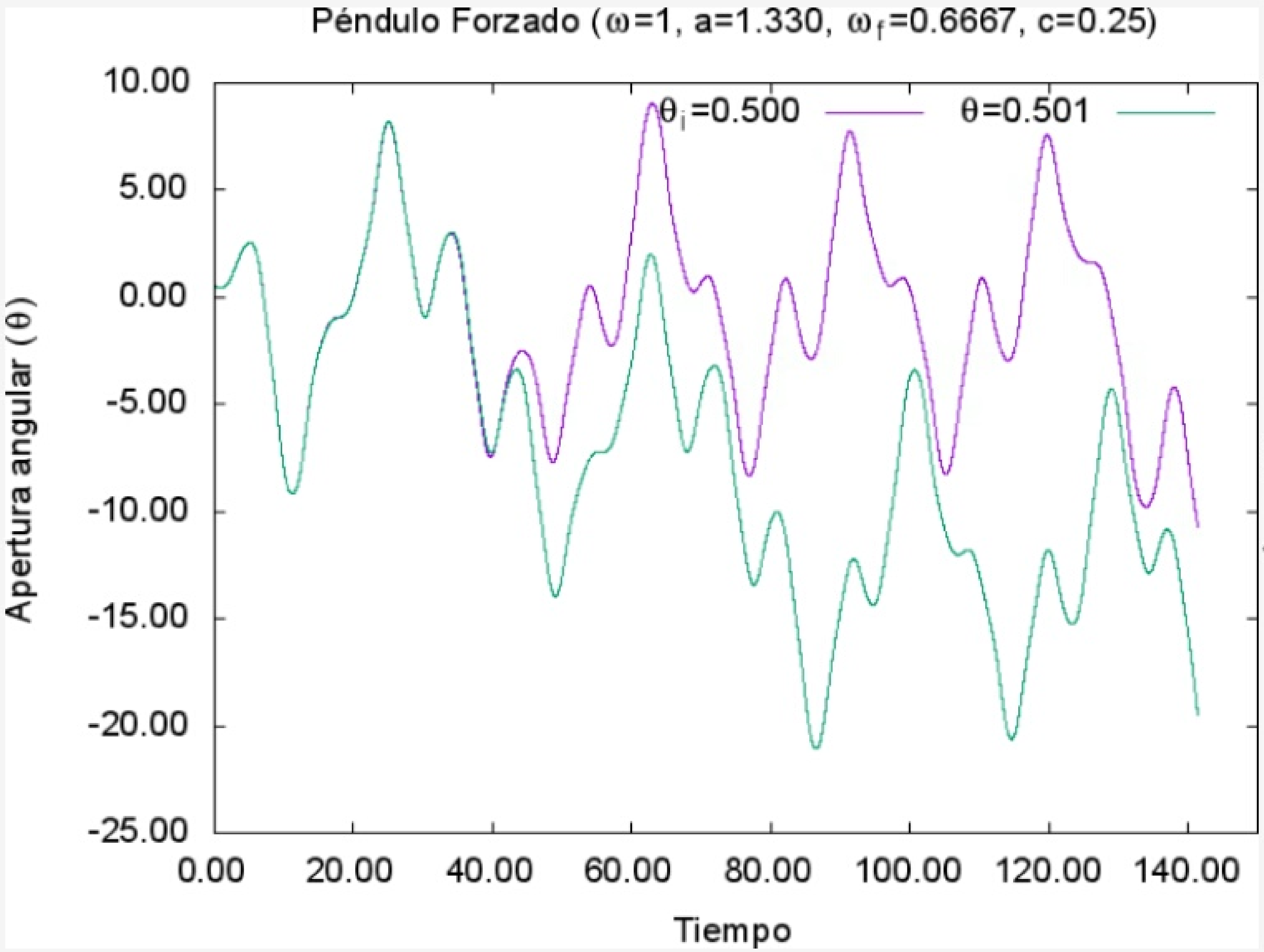
$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln(|\Delta y|/\epsilon)}{\Delta t}}$$

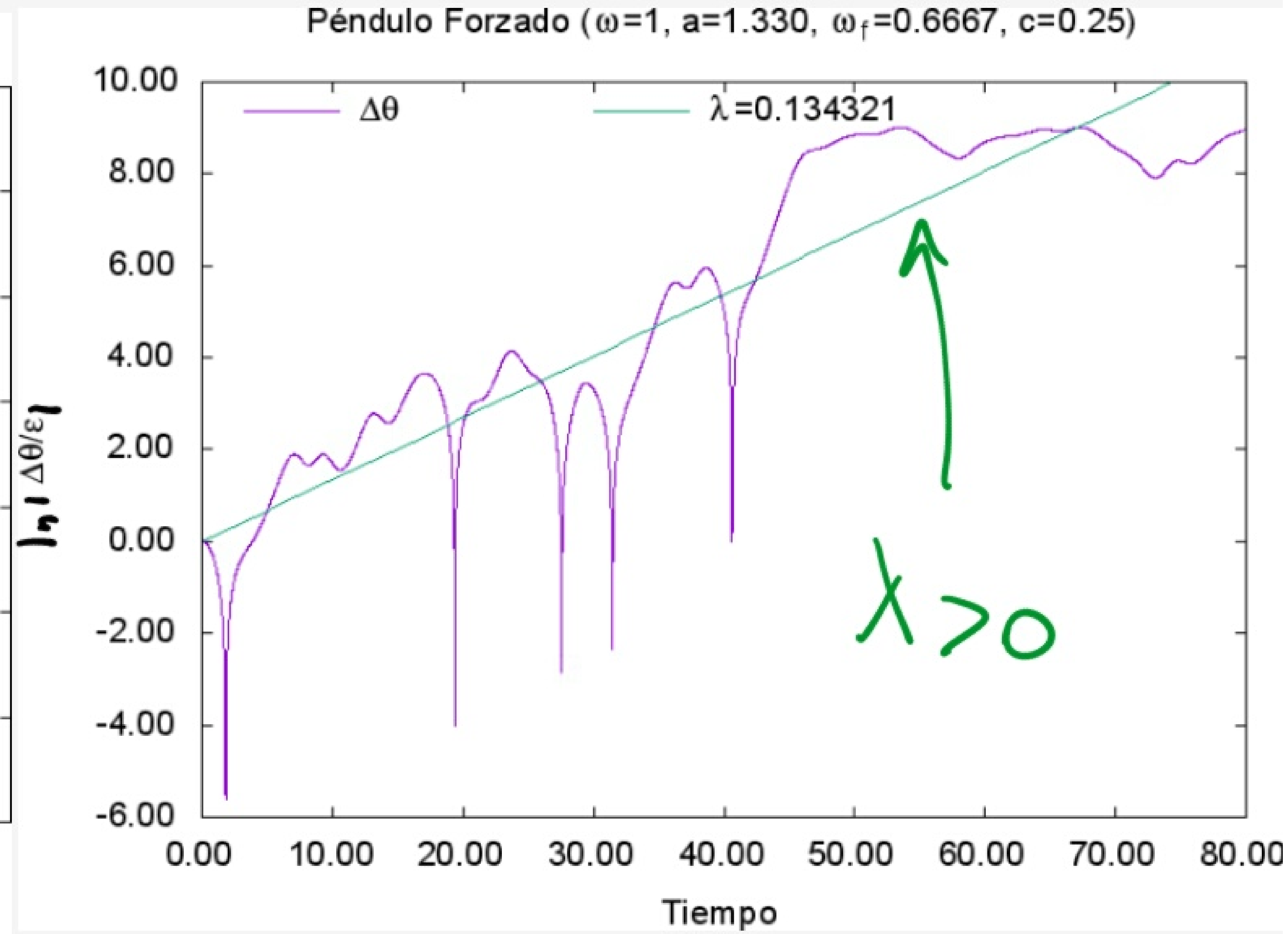
Lyapunov





Para un caso caótico tenemos:





Hénon - Heiles

Dos osciladores armónicos acoplados por un término de interacción cúbico:

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2\right) + \lambda\left(x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right)$$

Normalizando:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + \overbrace{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + \lambda\left(x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right)}^{\text{Pot. de Hénon - Heiles}}$$

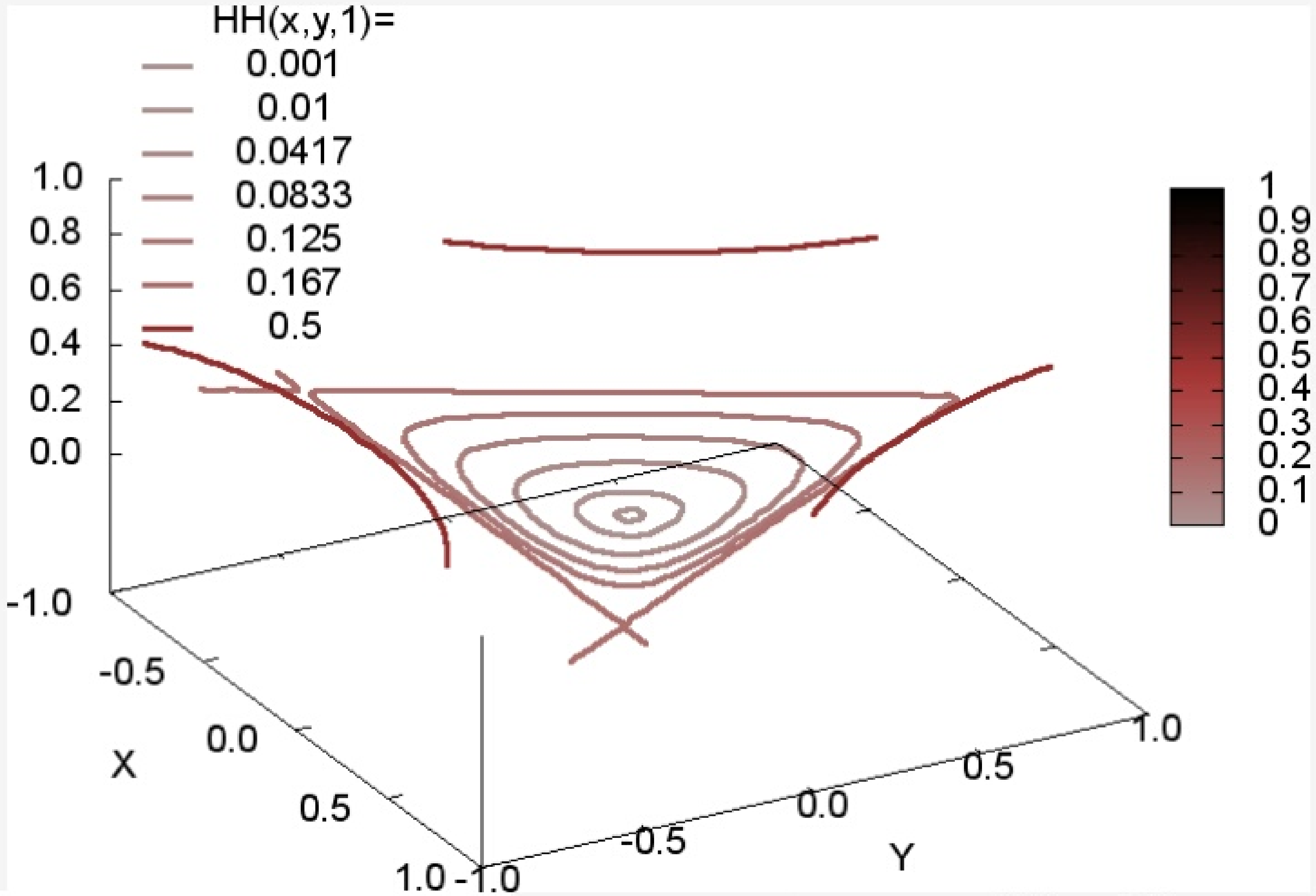
Potencial
H-H

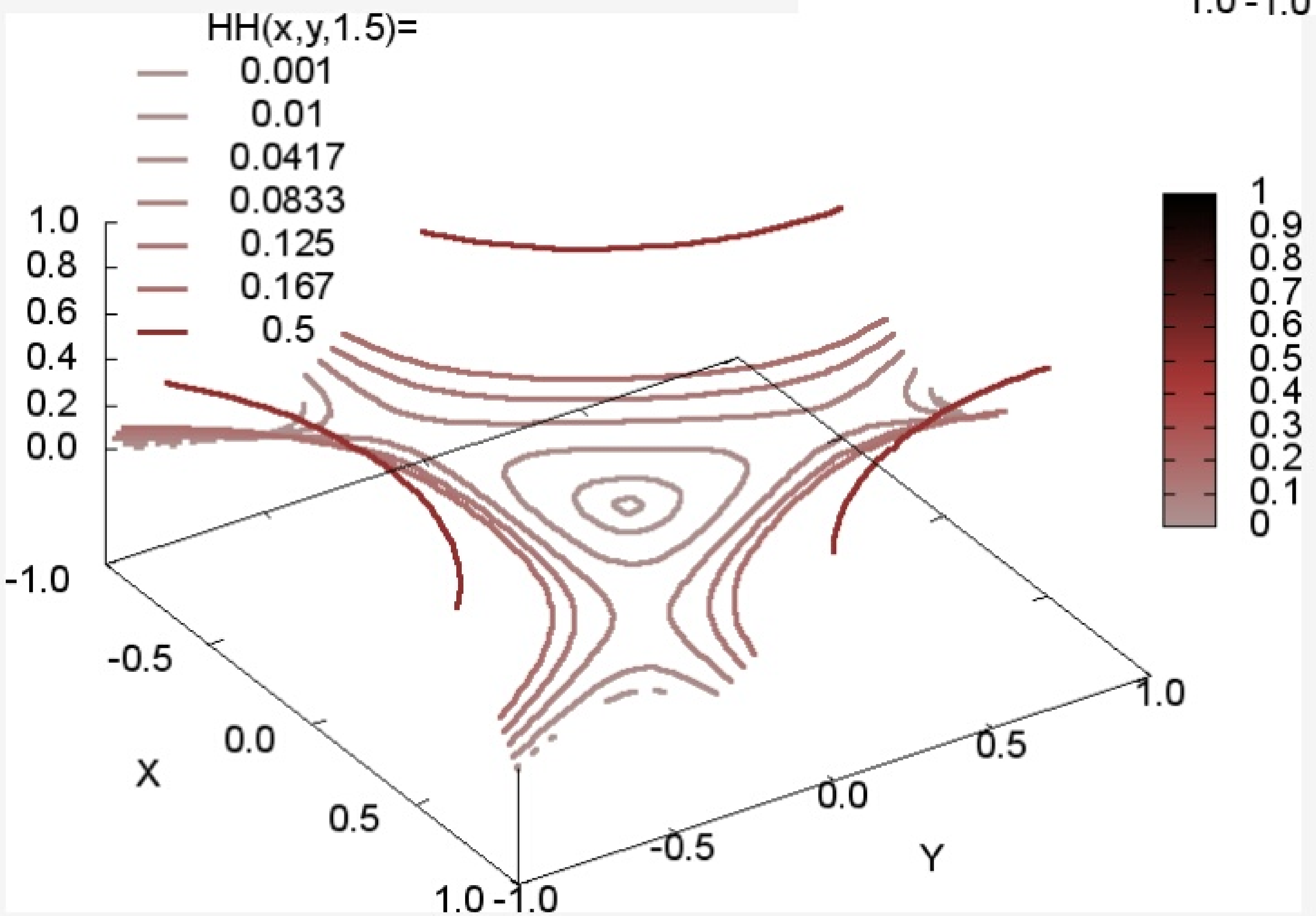
si $\lambda \to 0$
Armonico Bidim.

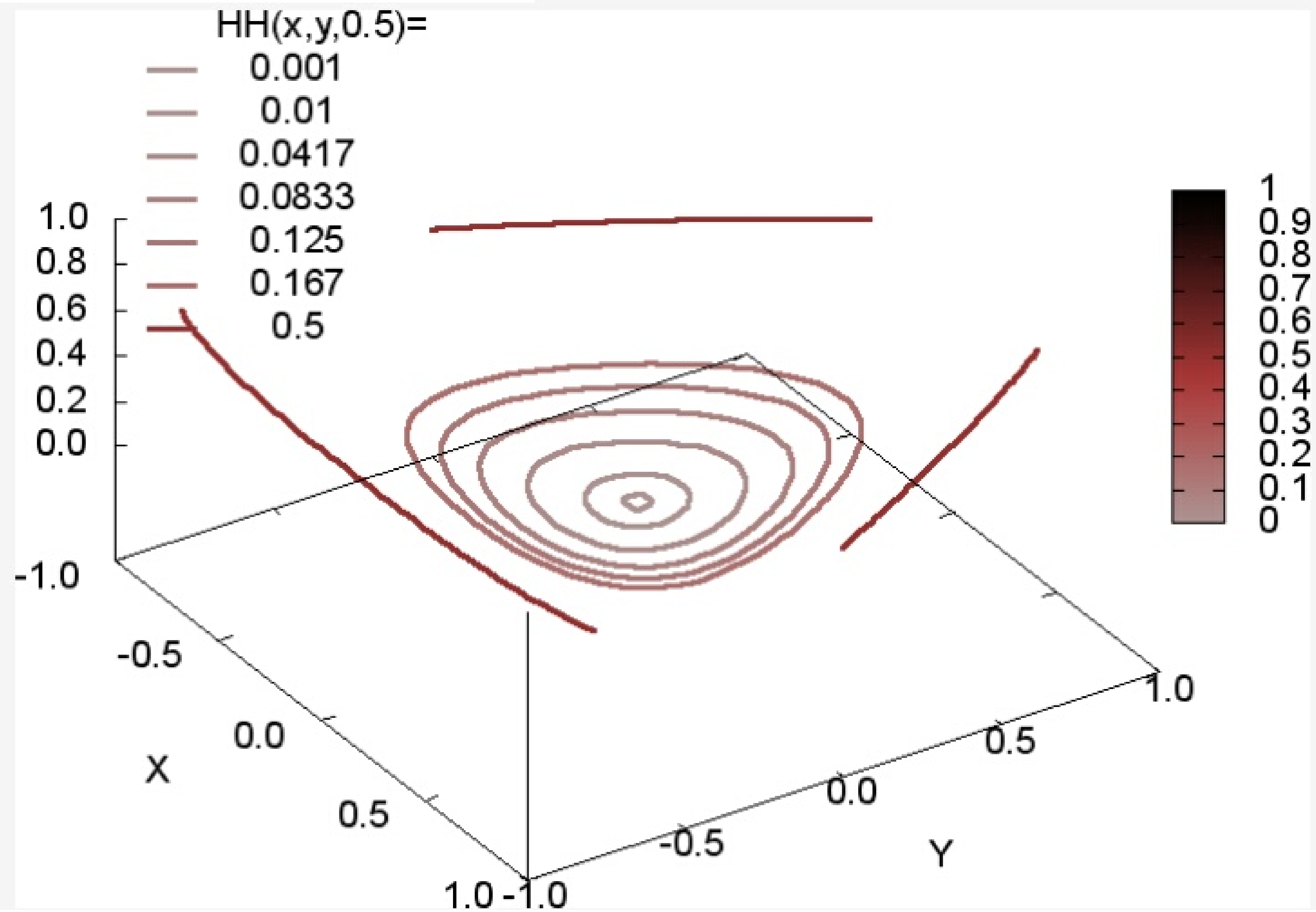
$\lambda = 1$

$E_p = 1/6$ escu

Punto de interés







Ecuaciones de movimiento.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \lambda\left(x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right)$$

Hamilton: $\dot{r}_i = \partial \mathcal{H}/\partial p_i \qquad \underline{\dot{p}_i = -\partial \mathcal{H}/\partial r_i}$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -x - 2\lambda x y$$

$$\ddot{y} = -y - \lambda x^2 - y^2 = -y - \lambda\left(x^2 - y^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\ddot{x} + x + 2\lambda x y = 0 \\ &\ddot{y} + y + \lambda\left(x^2 - y^2\right) = 0 \end{aligned}}$$

Ecuaciones de Movimiento

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -x - 2\lambda x y$$
$$\ddot{y} = -y - \lambda(x^2 - y^2)$$

Linealizamos estas ecuaciones e identificamos.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x - 2\lambda x y$$
$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = -y - \lambda(x^2 - y^2)$$

$x_1 \to y_3$

$x_2 \to y_4$

$y_1 \to y_1$

$y_2 \to y_2$

$$
\begin{cases}
\dot{y}_1 = y_2 \\
\dot{y}_2 = -y_1 - \lambda\left(y_3^2 - y_1^2\right) \\
\dot{y}_3 = y_4 \\
\dot{y}_4 = -y_3 - 2\lambda y_3 y_1
\end{cases}
$$

Listo para RK!

Recordar y_1 i $y_2 \to y$

y_3 i $y_4 \to x$