Mecánica 2014

U03C04:Transformaciones Canónicas

2014/10/30

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

$\mathcal{L}$ $\xleftrightarrow[\text{Misma "física"}]{\text{Transf. de Legendre}}$ $\mathcal{H}$

n coord generalizadas

$t \mid q_i \rightarrow \dot{q}_i$

espacio de configuración

Ec. de Movimiento: Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

n ec. de 2do orden

2n - coordenadas generalizadas

$t \mid q_i, p_i$

espacio de fases

Ec. de Movimiento. Hamilton

$$\dot{q}_i = \partial \mathcal{H} / \partial p_i$$

$$\dot{p}_i = - \partial \mathcal{H} / \partial q_i$$

2n ec. de 1° orden.

Transformaciones Canónica

Imaginemos el caso donde t y todas las q_i son cíclicas

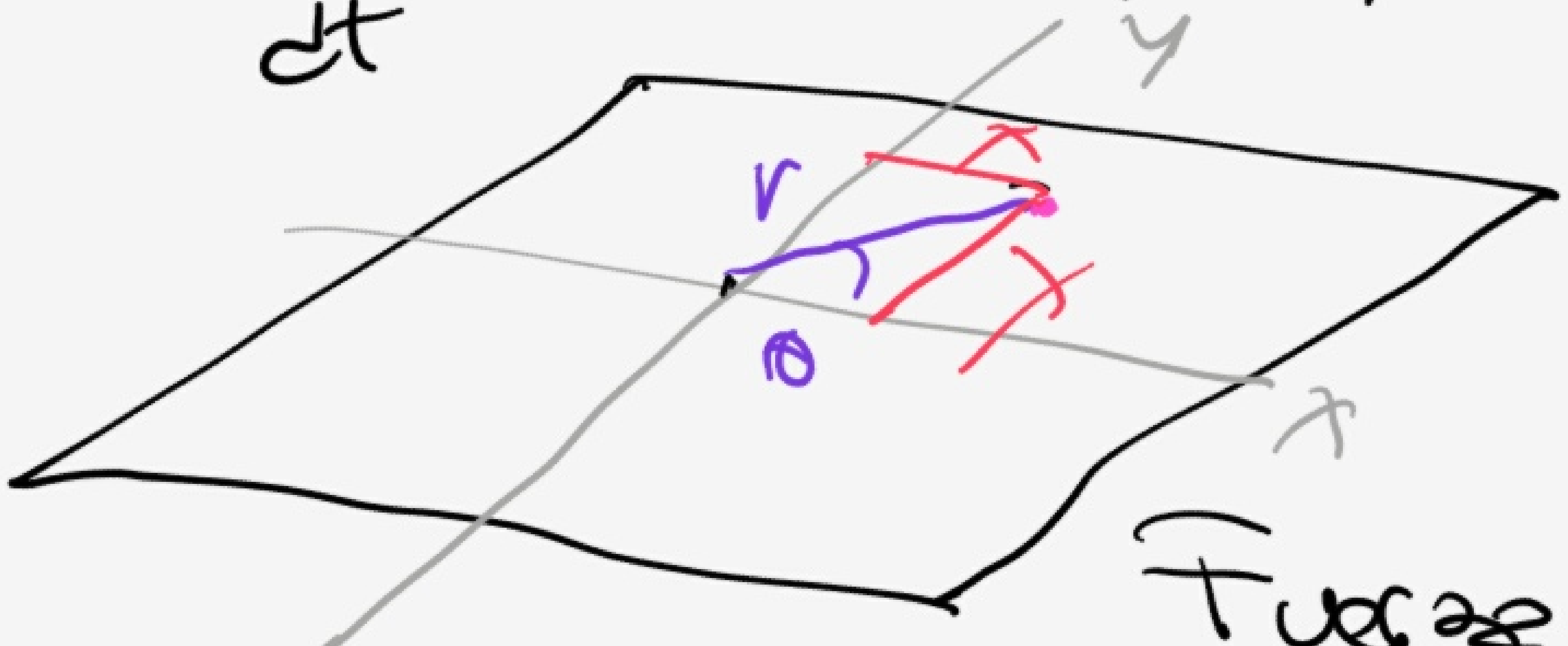
$$\Rightarrow \quad H = h \quad y \quad p_i = \alpha_i$$

$$\dot{p}_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad H = H(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i$$

$$\Rightarrow \frac{dq_i}{dt} = \omega_i \Rightarrow q_i(t) = \omega_i t + \beta_i$$

Solución de las C. iniciales.



$q_1 = x \qquad q_2 = y$

$q_1 = r \qquad q_2 = \theta$

Fuerza central x, y no son cíclicas, θ sí

¿Es posible encontrar un conjunto de coordenadas donde todos sean cíclicos?

En la formulación Hamiltoniana, p y q son independientes.

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q, p, t) \\ P_i = P_i(q, p, t) \end{cases}$$

Transf. Puntuales en el espacio de Fases.

Dado que p y q son canónicos, Q y P también.

Es decir ¿existe una transformación:

$$H \to K \text{ tal que: } \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \quad ?$$

Donde $K = K(Q, P, t)$. Si Q y P son canónicas

$$\Rightarrow \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right) dt = 0$$

y

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q, p, t) \right) dt = 0$$

y dado que para la transf. $\delta \Rightarrow \eta_i = 0 \Big|_{t_1, t_2} \Rightarrow$

$$\lambda \left(p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$

transf. de Escala $\lambda \in \mathbb{R}$

$\rightarrow F = F(P, Q, t)$ derivable junto hasta orden 2

Ahora, siempre me puedo arreglar los casos para que $\lambda = 1$ ya que si no, puedo hacer una transf. intermedia a λ' tal que $\lambda' = 1/\lambda$. Esta transf. tendrá la forma del $Q', P' \to \lambda \Rightarrow Q_i = \mu Q_i'$; $P_i = \nu P_i'$ y $\mu\nu = \lambda^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + dF/dt}$$

Función Generadora de la transf.

Si se cumple $\Rightarrow Q = Q(q, p, t)$ y $P = P(q, p, t)$ son transformaciones canónicas.

Si $\lambda \neq 1 \to$ Transf. Canónica Extendida.

Si Q y P no dependen del tiempo $\to$ Transf. Canónica restringida.

Supongan por ejemplo que

$$F = F_1(q, Q, t)$$

$$\Rightarrow p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + dF_1/dt$$

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \partial F_1/\partial t + \partial F_1/\partial q_i \, \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i$$

q_i y Q_i son independientes. La única forma de que esto funcione es que:

$$p_i \dot{q}_i = \partial F/\partial q_i \, \dot{q}_i \Rightarrow \boxed{p_i = \partial F/\partial q_i} \qquad \boxed{K = H + \frac{\partial F}{\partial t}}$$

$$P_i \dot{Q}_i = -\partial F/\partial Q_i \, \dot{Q}_i \Rightarrow \boxed{P_i = -\partial F/\partial Q_i}$$

$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$ n funciones: $p_i = p_i(q_j, Q_j, t) \Rightarrow Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$

y ahora que tengo los Q, reemplazo en

$P_i = -\partial F_1/\partial Q_i$ → obtengo n ecuaciones: $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$

finalmente $K = H + \partial F_1/\partial t$ pero cuidado q y p en H debemos escribirse en función de Q y P antes de usar el camino. K debe ser función sólo de Q, P y eventualmente t.

Podrían pasar que no podemos obtener una función F_1 como función de q, Q y t, pero sí podría existir F_2 tal que $F_2 = F_2(q, P, t)$ →

Si entonces hacen

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$$

$$\Rightarrow \quad p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = P_i \dot{Q}_i - K + dF/dt$$

$$dF/dt = dF_2/dt - Q_i \dot{P}_i - \dot{Q}_i P_i \Rightarrow$$

$$p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \cancel{P_i \dot{Q}_i} - K + dF_2/dt - Q_i \dot{P}_i \cancel{- \dot{Q}_i P_i}$$

$$p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = - Q_i \dot{P}_i - K + dF_2/dt$$

$$p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = - Q_i \dot{P}_i - K + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{p_i = \partial F_2 / \partial q_i} \quad \Big| \quad \boxed{Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}} \quad \Big| \quad \boxed{K = \mathcal{H} + \partial F_2 / \partial t}$$

Ahora podemos hacer lo mismo con las otras transformaciones para F:

$$F_3(p,Q,t) \to F = F_3 + q_i p_i$$

$$F_4(p,P,t) \to F = F_4(p,P,t) + q_i p_i - Q_i P_i$$

Generating Function	Generating Function Derivatives	Trivial Special Case
$F = F_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$ $\quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$F_1 = q_i Q_i$, $\quad Q_i = p_i$, $\quad P_i = -q_i$
$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ $\quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = q_i P_i$, $\quad Q_i = q_i$, $\quad P_i = p_i$
$F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$ $\quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$F_3 = p_i Q_i$, $\quad Q_i = -q_i$, $\quad P_i = -p_i$
$F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$ $\quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$F_4 = p_i P_i$, $\quad Q_i = p_i$, $\quad P_i = -q_i$

Transformaciones Canónicas Básicas

$F_1 \rightarrow F_2$: $q, Q \rightarrow q, P$: $-P_i = \partial F_1/\partial Q_i$

Legendre $\rightarrow F_2(q, P, t) = \underbrace{F_1}_{=F}(q, Q, t) + P_i Q_i$

Ejemplo Ingiremos una tipo 2: $F_2 = q_i P_i$

$\Rightarrow p_i = \partial F_2/\partial q_i = P_i$; $Q_i = \partial F_2/\partial P_i = q_i$; $K = H$

$\Rightarrow p_i = P_i$ y $q_i = Q_i$ $\leftarrow$ Transformación Identidad.

$F_3 = p_i Q_i \Rightarrow q_i = -\partial F_3/\partial p_i = -Q_i$; $P_i = -\partial F_3/\partial Q_i = -p_i$

$\Rightarrow Q_i = -q_i$; $P_i = -p_i$ $\leftarrow$ Transf. Negativa

$F_2 = f_i(q_1 \ldots q_n, t) P_i \rightarrow Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q_1 \ldots q_n, t)$

$p_i = \partial F_2/\partial q_i$

F_i deben ser independientes e invertibles y además Q_j no deben depender de los momentos → son transf. de punto → como F es arbitraria, todas las transf. de punto son canónicas.

Para las de primera especie tenemos $F_1 = q_k Q_k$

$\Rightarrow p_i = \partial F_1 / \partial q_1 = Q_i$; $P_i = -\partial F_1 / \partial Q_i = -q_i$

$\Rightarrow p_i = Q_i$ y $P_i = -q_i$ $\quad p \leftrightarrow q$

dejando las ec. de Hamilton inalteradas.

Se pueden mezclar entre sí. P. ej. $n=2$:

$$Q_1 = q_1 \qquad P_1 = p_1$$

$$Q_2 = p_2 \qquad P_2 = -q_2 \longrightarrow F = \underbrace{q_1 P_1}_{F_2} + \overbrace{q_2 Q_2}^{F_1}$$

Oscilador Armónico 1D

$$\mathcal{H} = p^2/2m + kq^2/2 \qquad k/m = \omega^2 \Rightarrow$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$$

Podemos encontrar P y Q tal que Q sea cíclico?

p^2+q^2 sugiere algo de la forma:

$$p = f(P)\cos Q \ ; \ q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q \Rightarrow$$

$$K = \mathcal{H} = \frac{f^2(P)}{2m}\left(\cos^2 Q + \sin^2 Q\right) = f^2(P)/2m$$

Proponemos tipo 1, $F_1 = F_1(q, Q)$

$$F_1 = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad \Bigg| \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}$$

$$\Rightarrow p = m\omega q \cot Q \Rightarrow$$

$$P = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q} \Rightarrow \boxed{q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q}$$

$$\Rightarrow \boxed{p = m\omega \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \cot Q = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q}$$

$$\Rightarrow f(P) = \sqrt{2m\omega P}$$

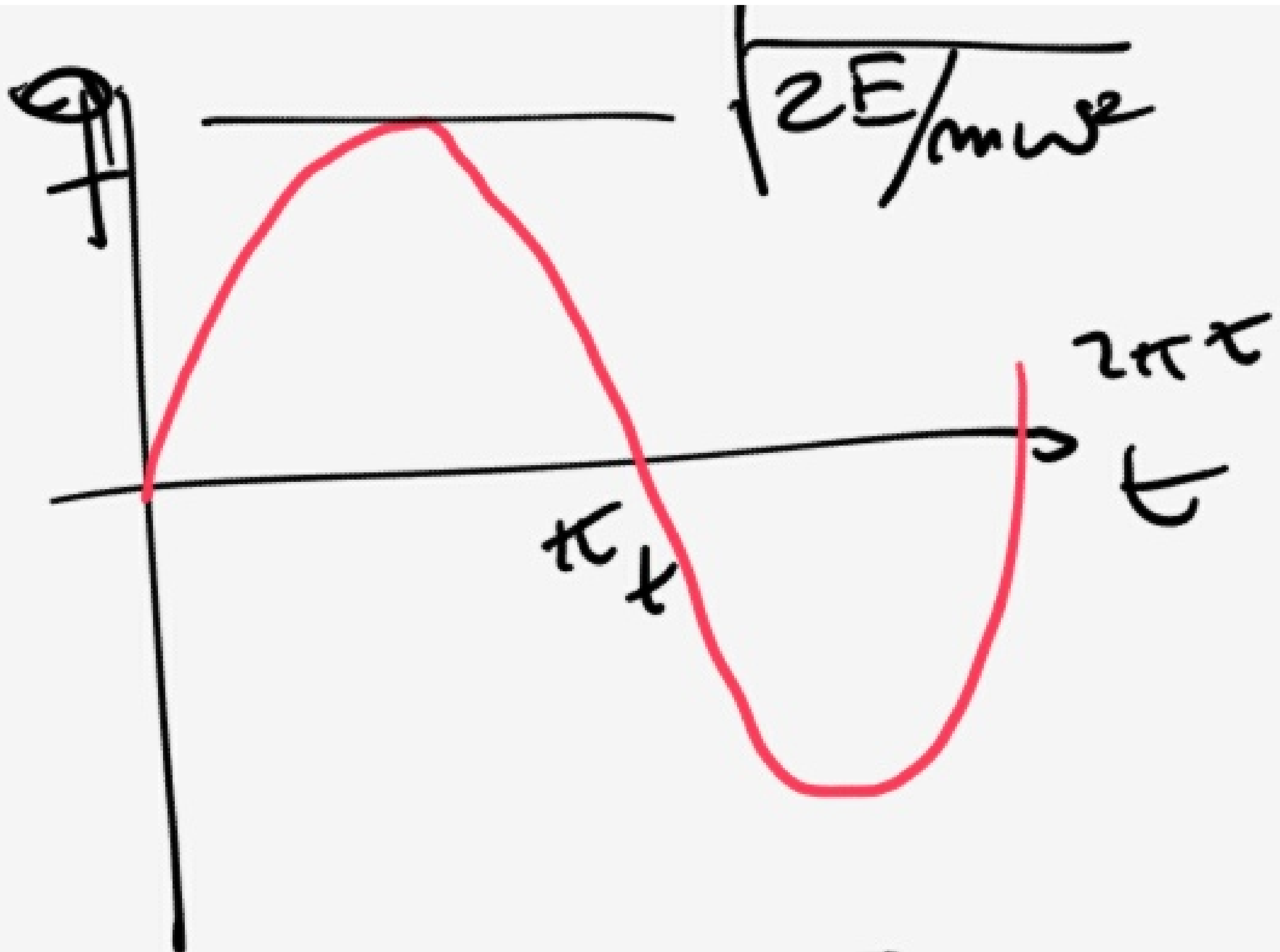
Luego $K = \dfrac{f^2(P)}{2m} = \dfrac{\sqrt{\cancel{2m}\omega P}^{\,2}}{\cancel{2m}} = \omega P \equiv H$

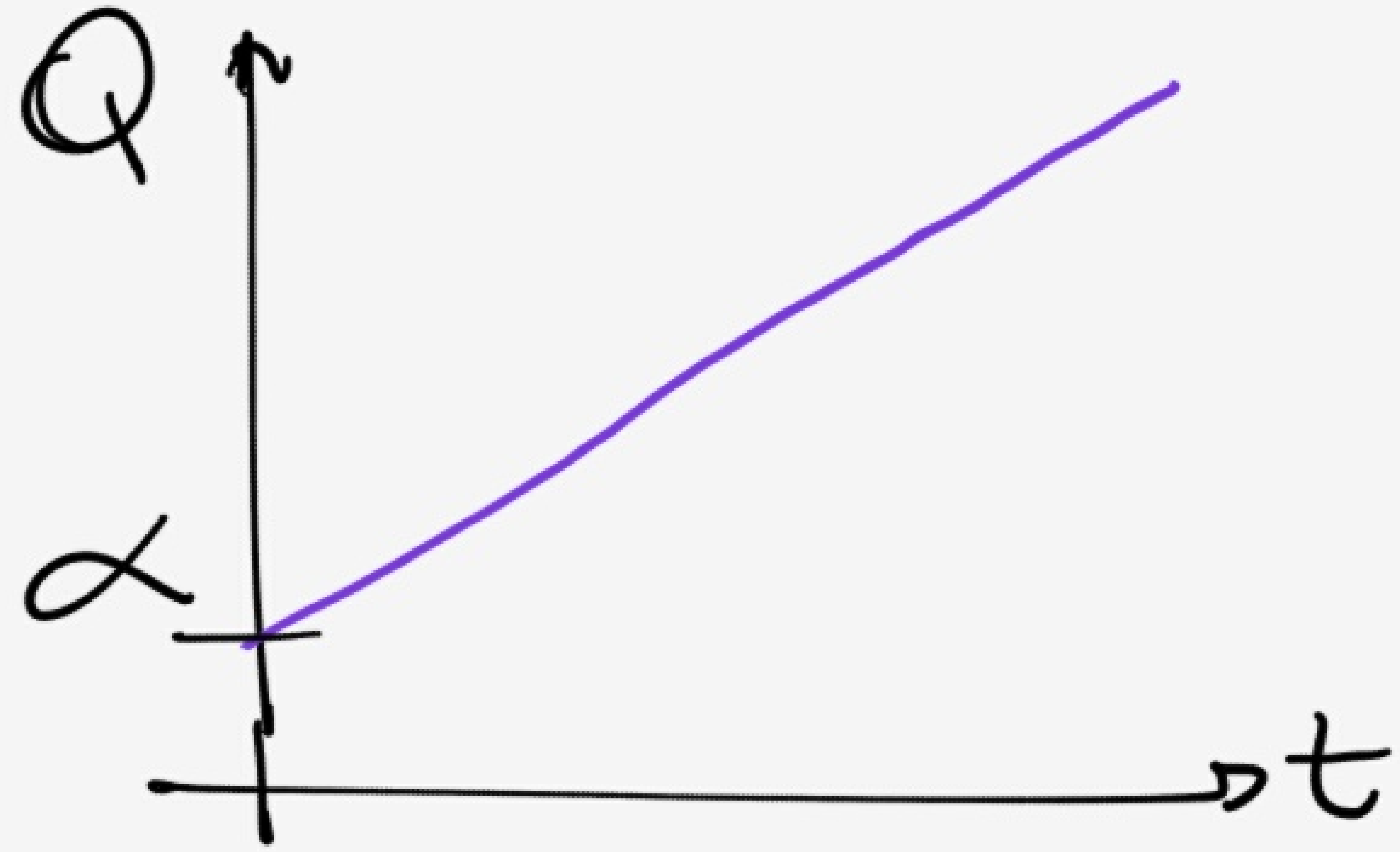
y como es cíclico en $Q \Rightarrow P = cte = E/\omega$

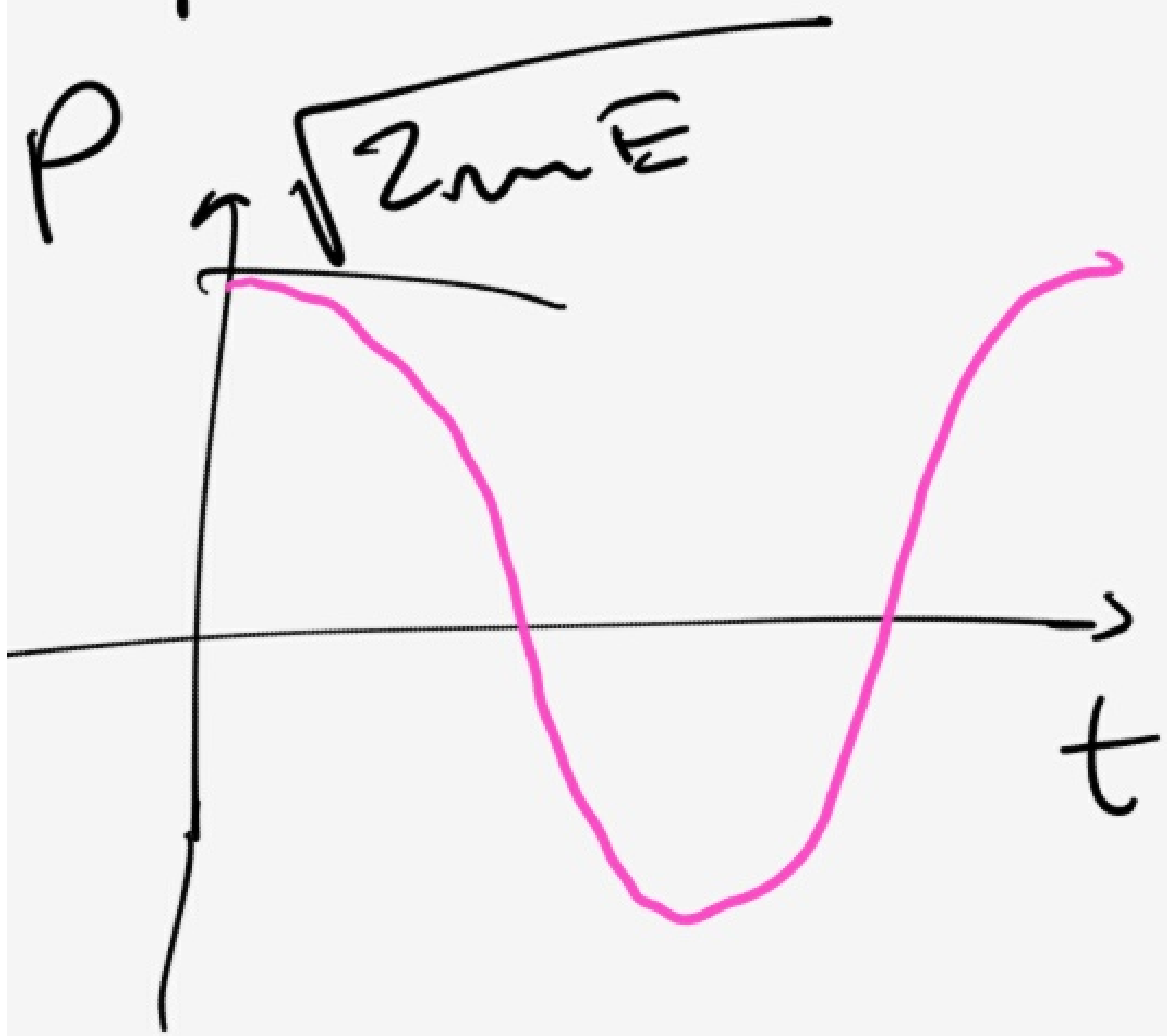
$$\Rightarrow \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega = cte \Rightarrow Q = \omega t + \alpha$$

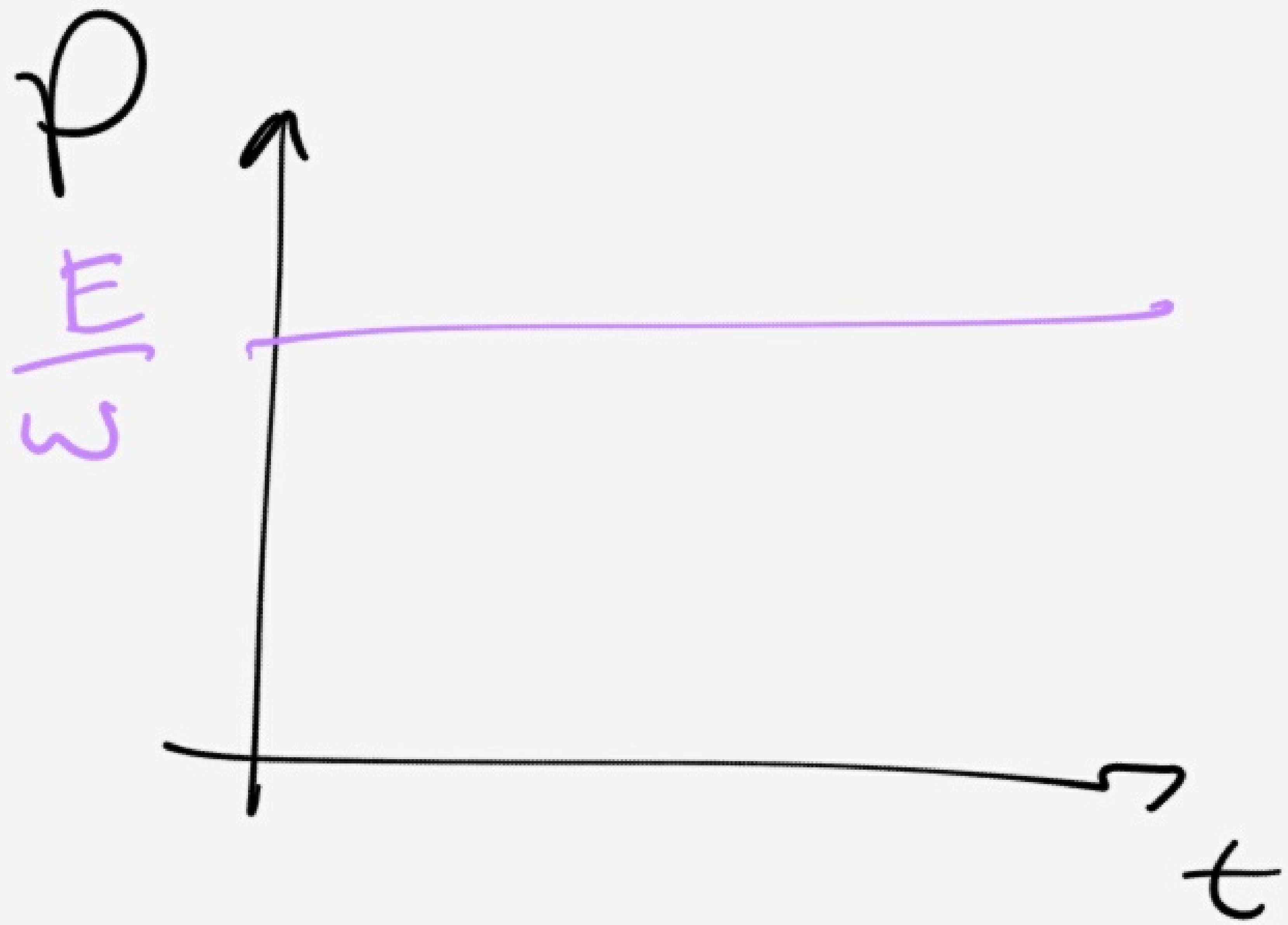
$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \longrightarrow q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

$$p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q \longrightarrow p = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \alpha)$$


q
√2E/mω²
2πτ
t
πτ


Q
α
t


p
√2mE
t


P
E/ω
t