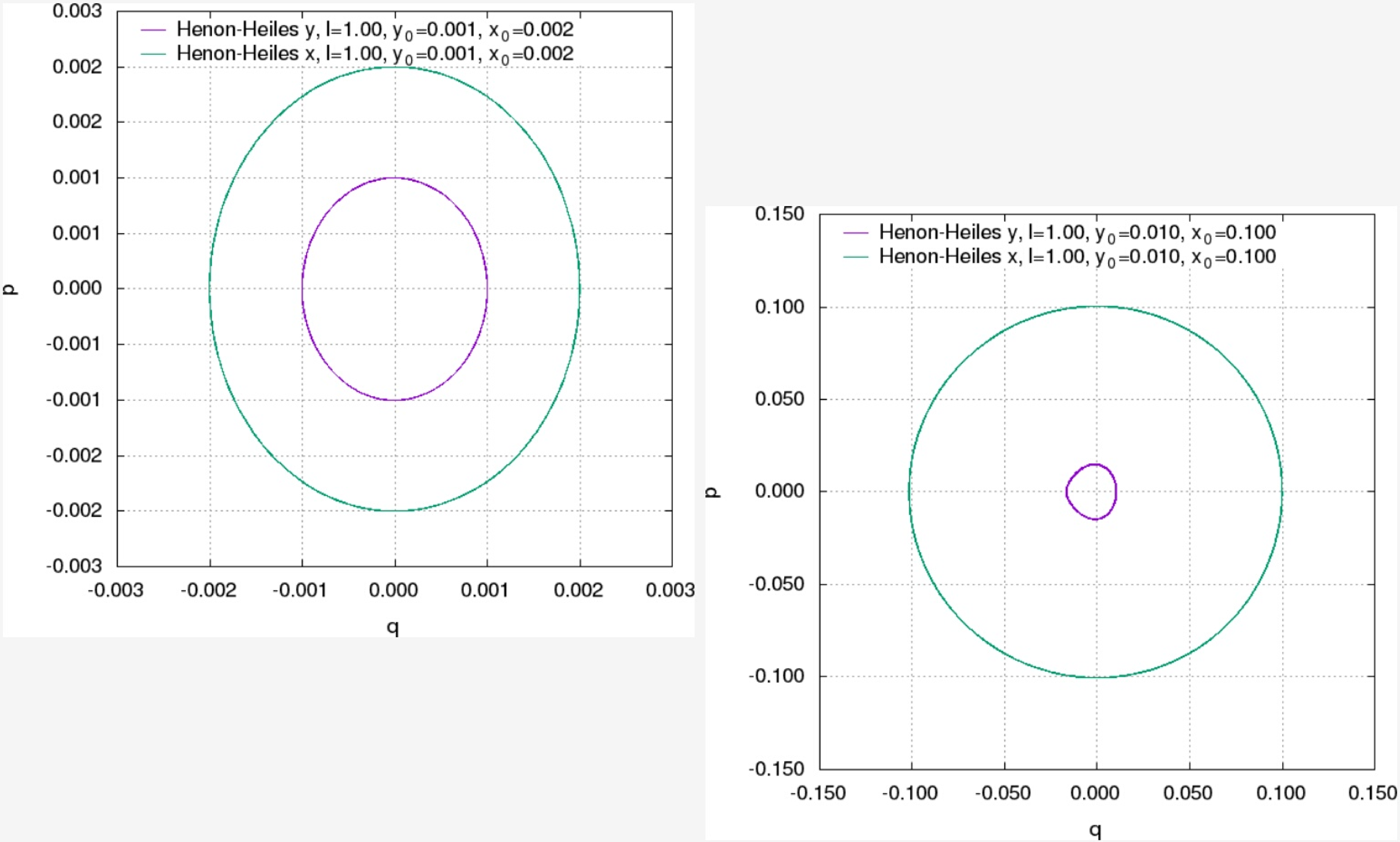
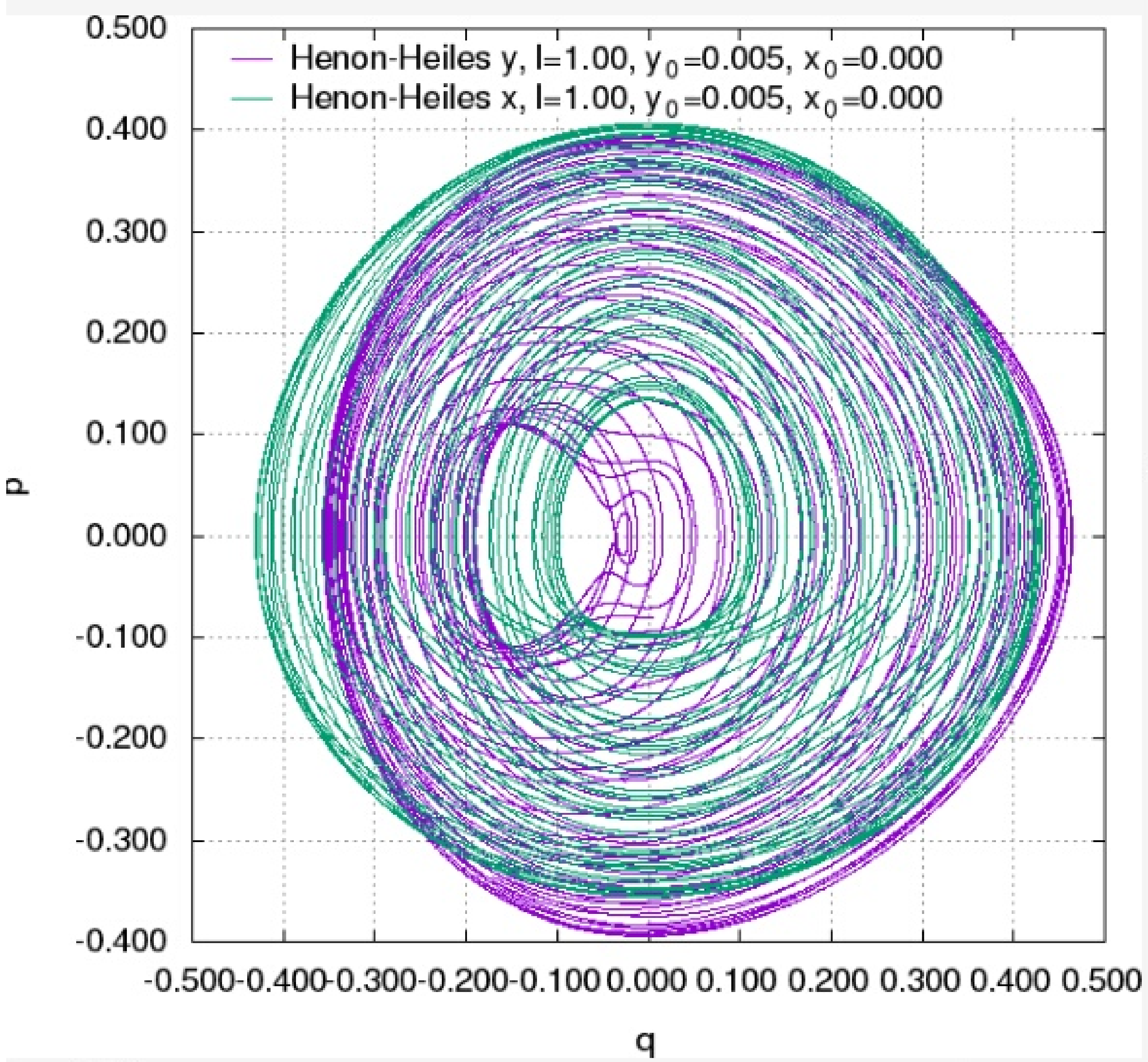
Mecánica 2014

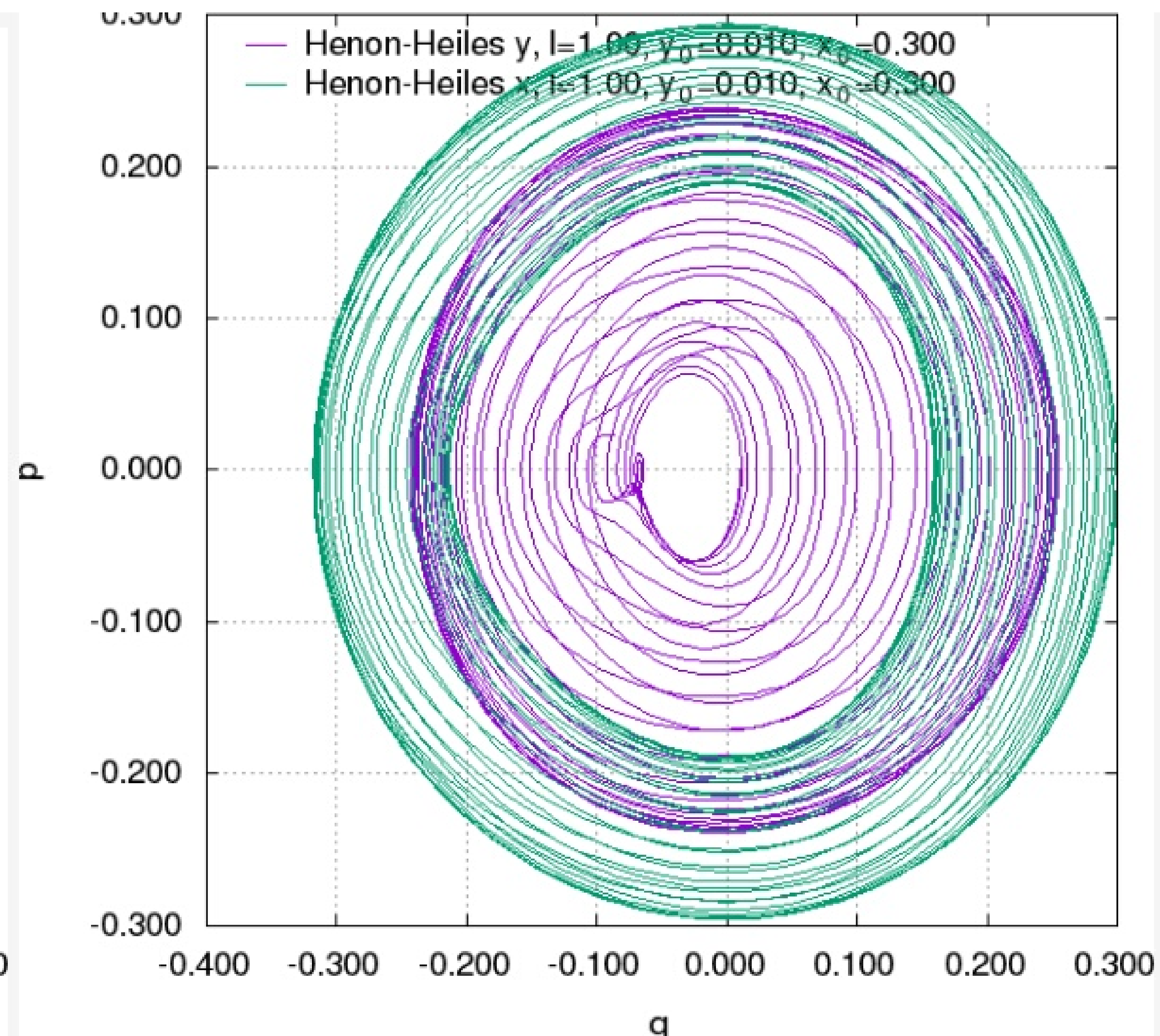
U01C07: Hénon - Heiles y mapeos

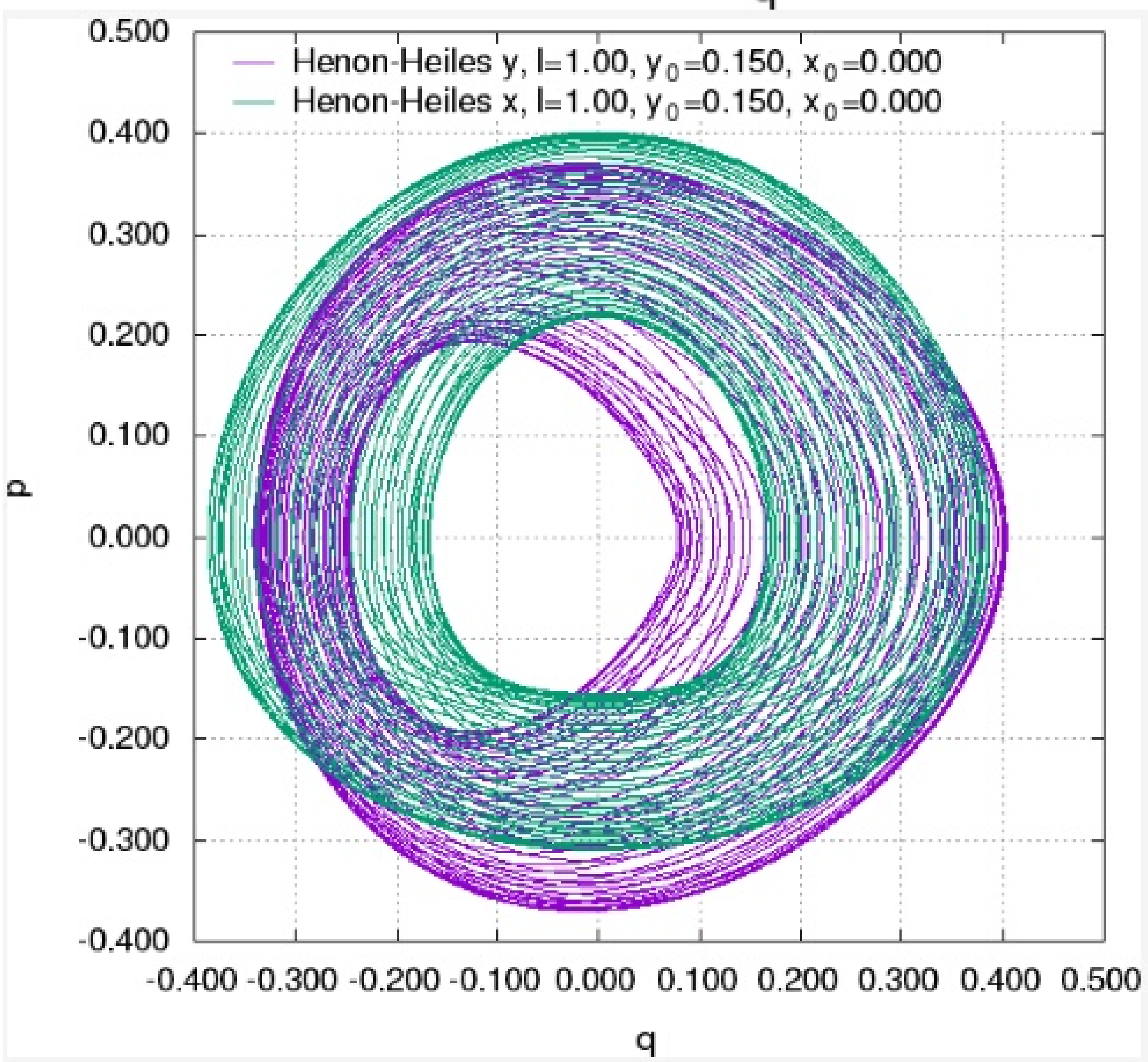
2014/09/30

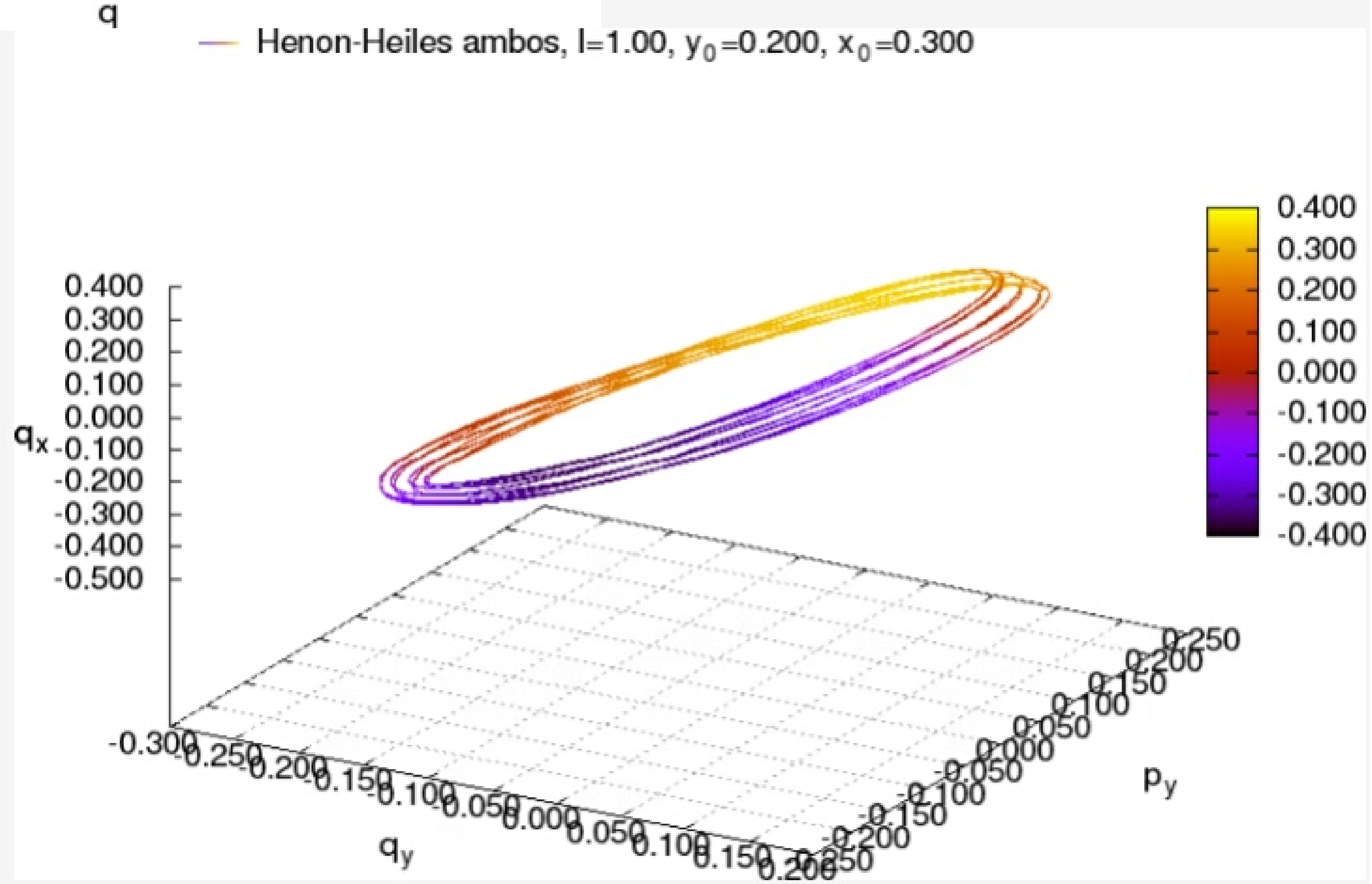
H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

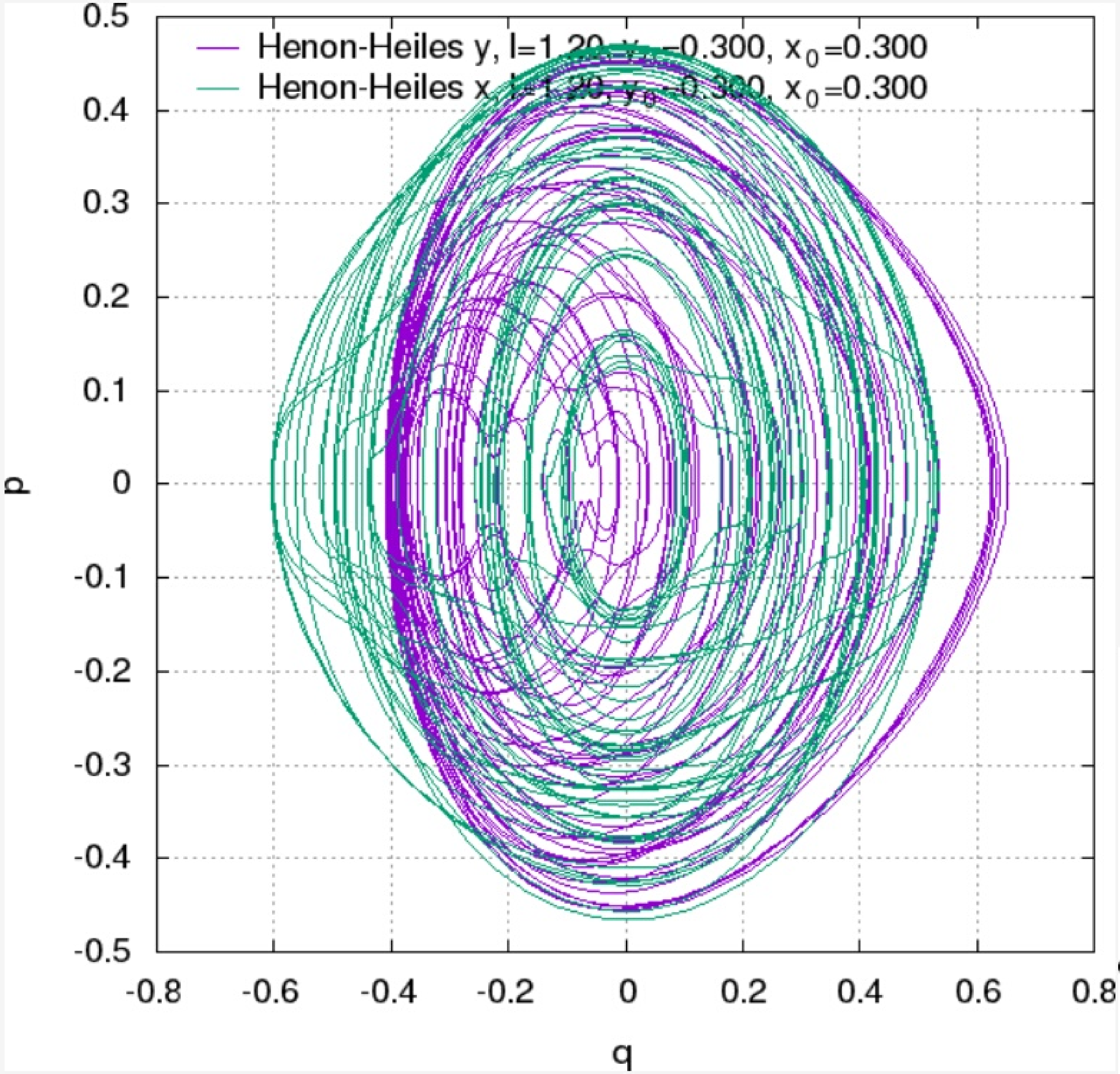

Henon-Heiles y, l=1.00, y0=0.001, x0=0.002
Henon-Heiles x, l=1.00, y0=0.001, x0=0.002
0.003
0.002
0.002
0.001
0.001
0.000
-0.001
-0.001
-0.002
-0.002
-0.003
p
-0.003
-0.002
-0.001
0.000
0.001
0.002
0.003
q
Henon-Heiles y, l=1.00, y0=0.010, x0=0.100
Henon-Heiles x, l=1.00, y0=0.010, x0=0.100
0.150
0.100
0.050
0.000
-0.050
-0.100
-0.150
p
-0.150
-0.100
-0.050
0.000
0.050
0.100
0.150
q

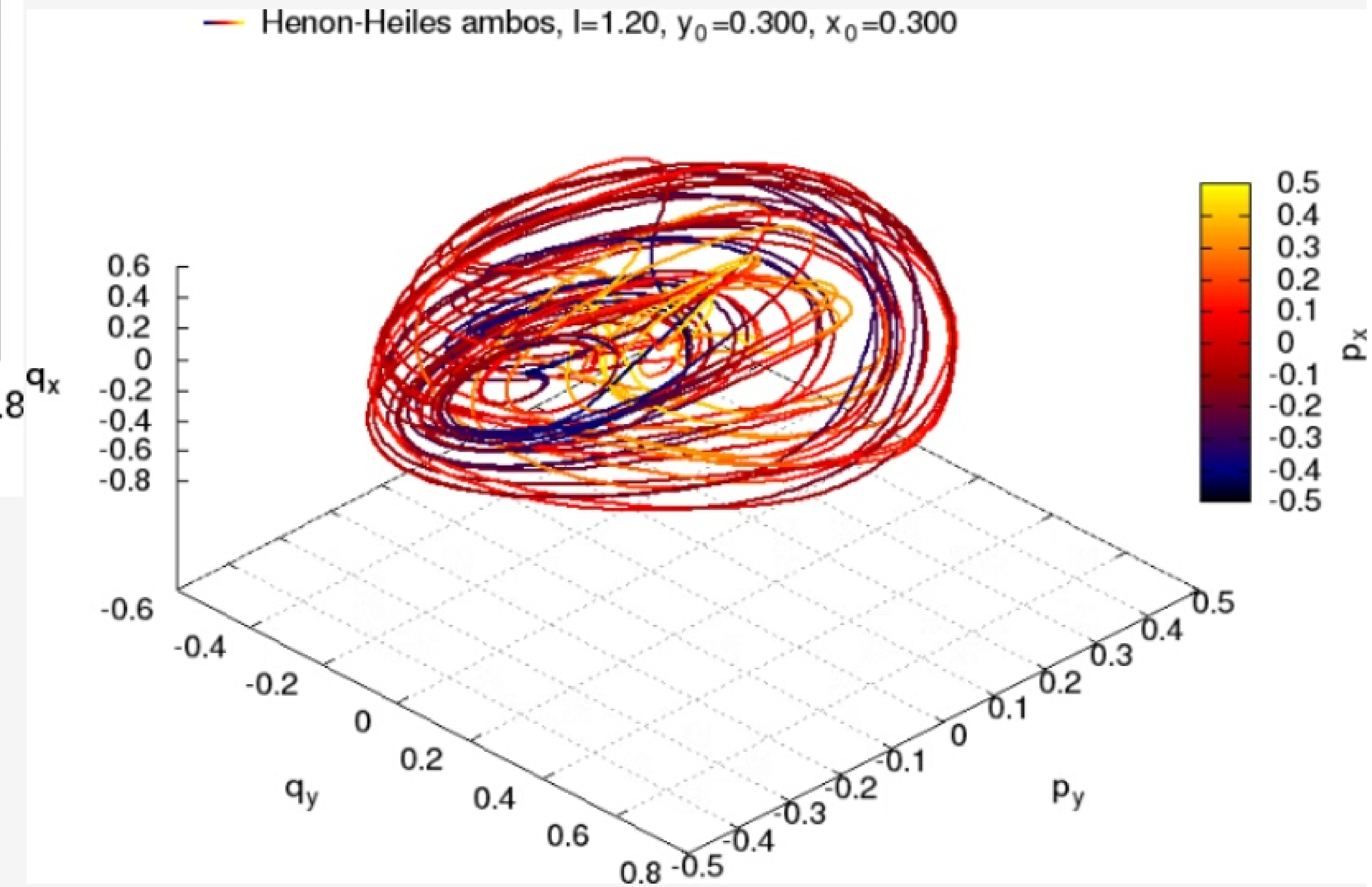

Henon-Heiles y, l=1.00, y_0=0.005, x_0=0.000
Henon-Heiles x, l=1.00, y_0=0.005, x_0=0.000
p
q

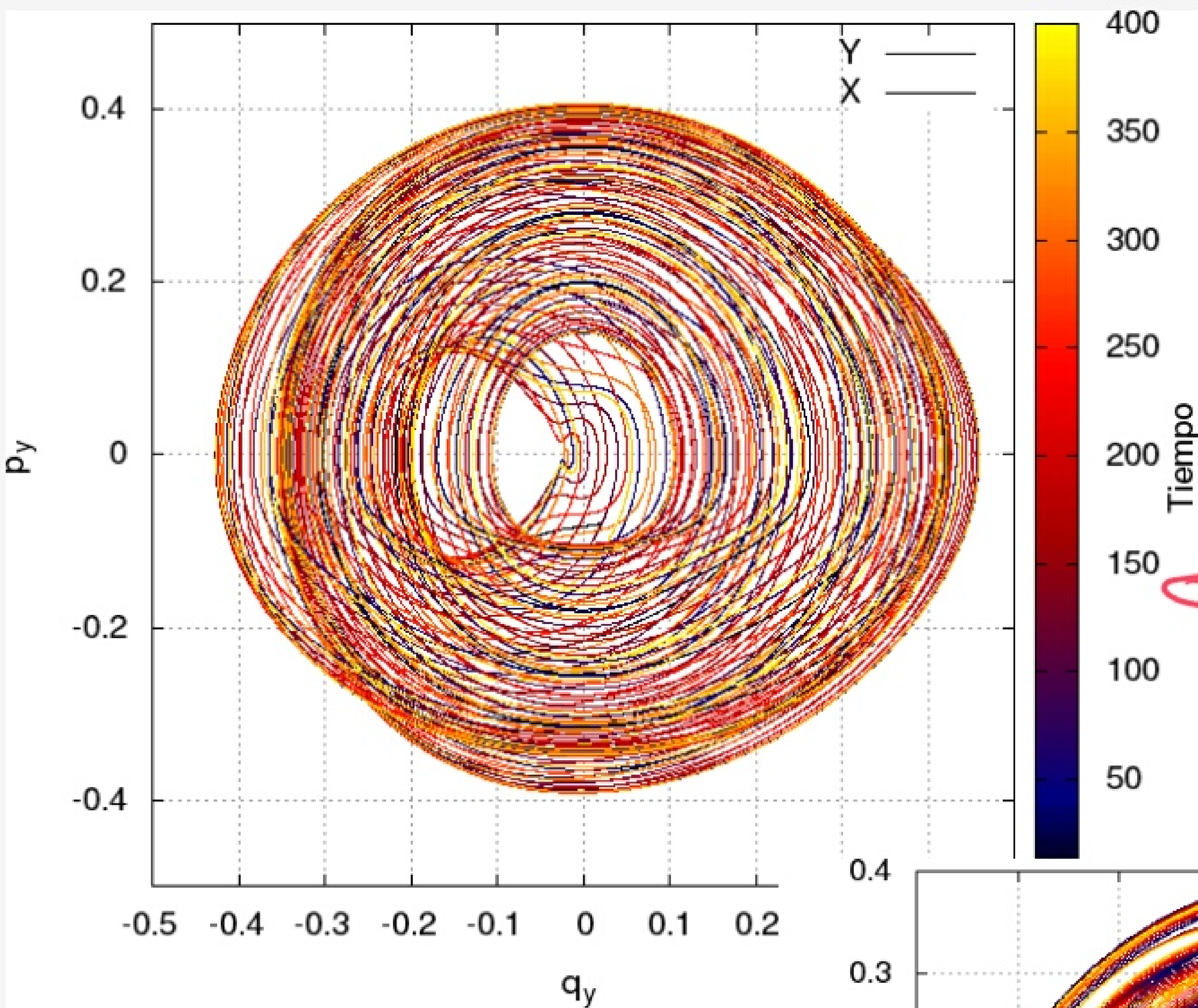

Henon-Heiles y, l=1.00, y_0=0.010, x_0=0.300
Henon-Heiles x, l=1.00, y_0=0.010, x_0=0.300
p
q


Henon-Heiles y, l=1.00, y_0=0.150, x_0=0.000
Henon-Heiles x, l=1.00, y_0=0.150, x_0=0.000
p
q


Henon-Heiles ambos, l=1.00, y_0=0.200, x_0=0.300
q_x
q_y
p_y


Henon-Heiles y, l=1.20, y$_0$=0.300, x$_0$=0.300
Henon-Heiles x, l=1.20, y$_0$=0.300, x$_0$=0.300
p
q


Henon-Heiles ambos, l=1.20, y$_0$=0.300, x$_0$=0.300
q$_x$
q$_y$
p$_y$
p$_x$



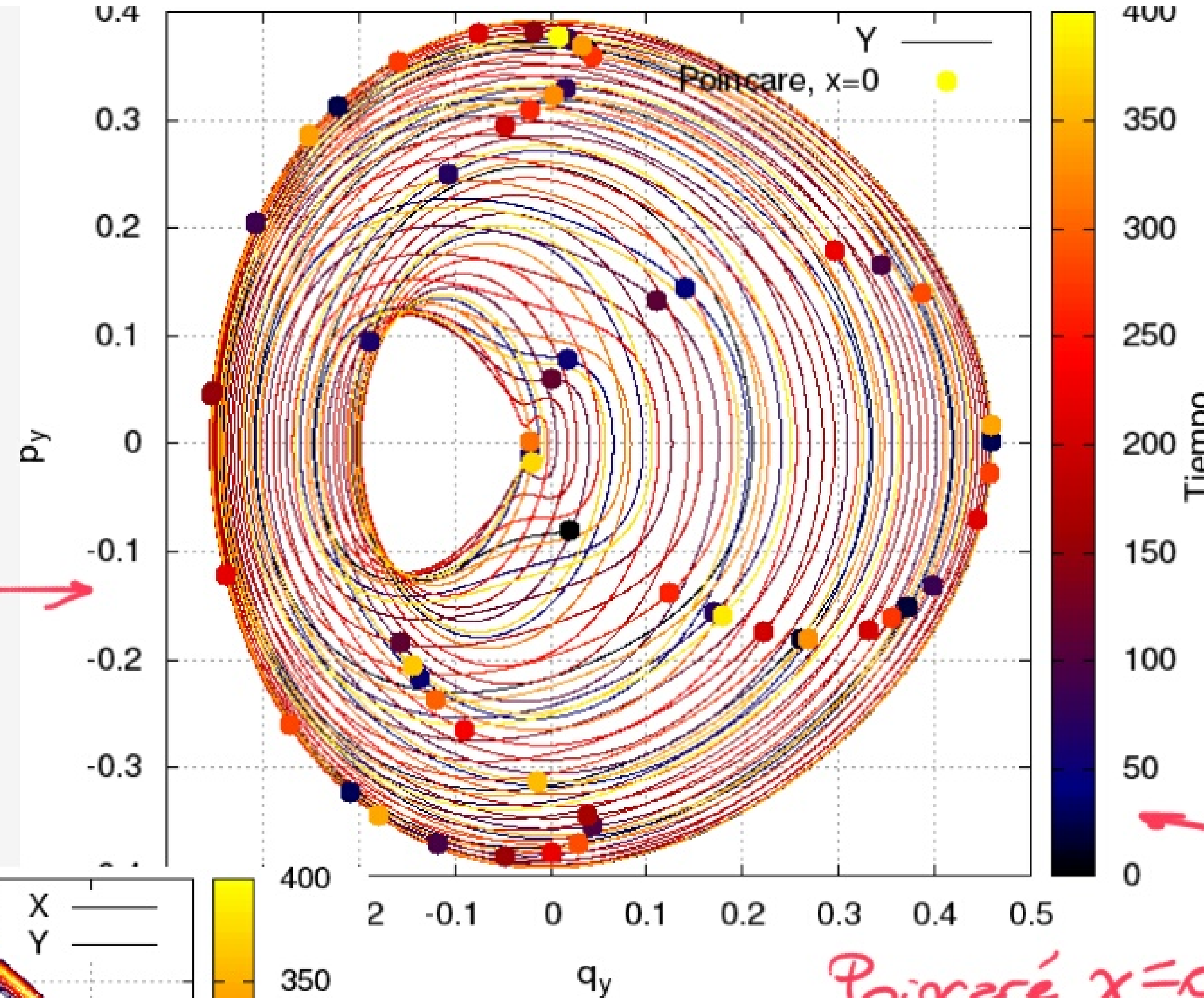
$\lambda = 1.0$

$y_0 = 0.02$

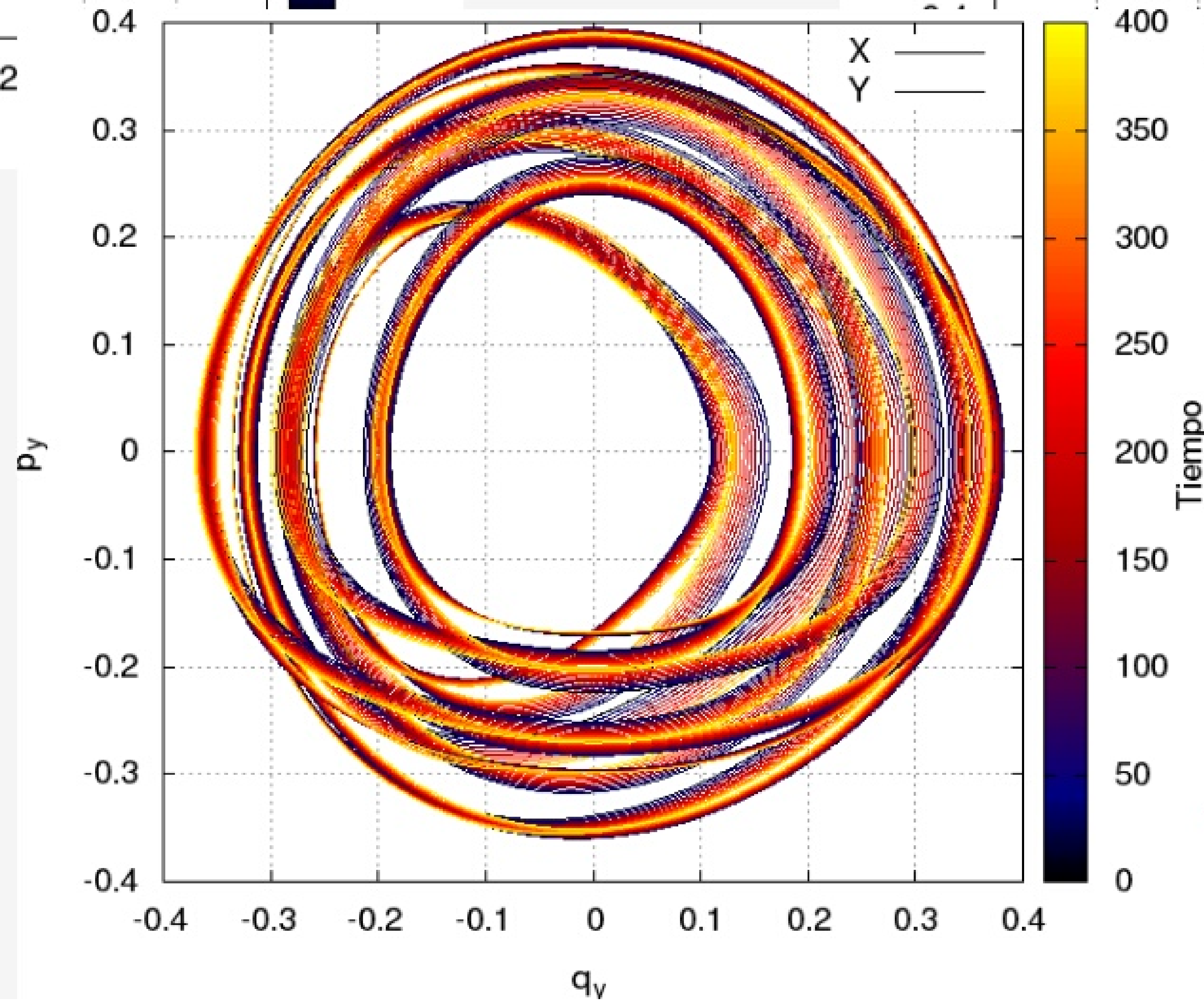
$y'_0 = -0.08$

$x = 0$

$E = 1/12$



Poincaré $x=0$



$\lambda = 1.0$

$y_0 = 0.20$

$y'_0 = -0.08$

$x = 0$

$E = 1/12$

CAOS

Mapeos.

Definimos como mapeo (mapping) a una relación de recurrencia, de la forma:

$$\boxed{y_{i+1} = f(y_i)}$$ Mapeos.

De forma que la aplicación del sistema para queda definida sólo por la aplicación sucesiva de la función f sobre alguna condición inicial

$$y_i = f^i(y_0) \equiv \underbrace{f(f(f(\cdots(f}_{i \text{ veces}}(y_0)))))$$

cond. inici

Un ejemplo típico:

Fibonacci es lineal y bien comportado:

$y_0 = 0$; $y_1 = 1$; $y_{i+1} = f(y_i, y_{i-1}) = y_i + y_{i-1}$

0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Feed forward $\underbrace{y_i}_{\text{Salida en } i} = (1-\alpha)\underbrace{x_i}_{\text{Entrada en } i} + \alpha \underbrace{y_{i-T}}_{\text{Salida de } i-T}$

T y α son los parámetros del Sistema.

Si $\alpha = 1 \Rightarrow y_i = y_{i-T}$; si $\alpha = 0 \Rightarrow y_i = x_i$

$0 < \alpha < 1$

Biología

En general, el número de individuos en una población a tiempo t, depende de la población en el pasado, y de las condiciones del medio.

Si, el espacio y el alimento es infinito ⟹

$$\frac{dN}{dt} = (\text{nac} - \text{muertes})\, N = \delta N$$

$$\Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{\delta N} \quad \begin{cases} \delta < 0 & \text{Dec. Exponencial} \\ \delta = 0 & \text{Estable} \\ \delta > 0 & \text{Crec. Exponencial} \end{cases}$$

Modelos más realistas:

Modelo de Ricker

$$y_{i+1} = y_i \, e^{r(1 - y_i/K)}$$

Nota que

$$\begin{cases} \text{si } y_i \ll K \Rightarrow y_{i+1} = y_i e^{r} \\ \text{si } y_i \simeq K \Rightarrow y_{i+1} \simeq y_i \\ \text{si } y_i > K \Rightarrow y_{i+1} \simeq y_i e^{-\alpha r} \end{cases}$$

r = factor de crecimiento.

K = capacidad de soporte del ambiente

Caso más general (tarea)

Modelo de Hassell

http://www-rohan.sdsu.edu/~jmahaffy/courses/s00a/math121/lectures/qual_discrete/qualdiscrete.html

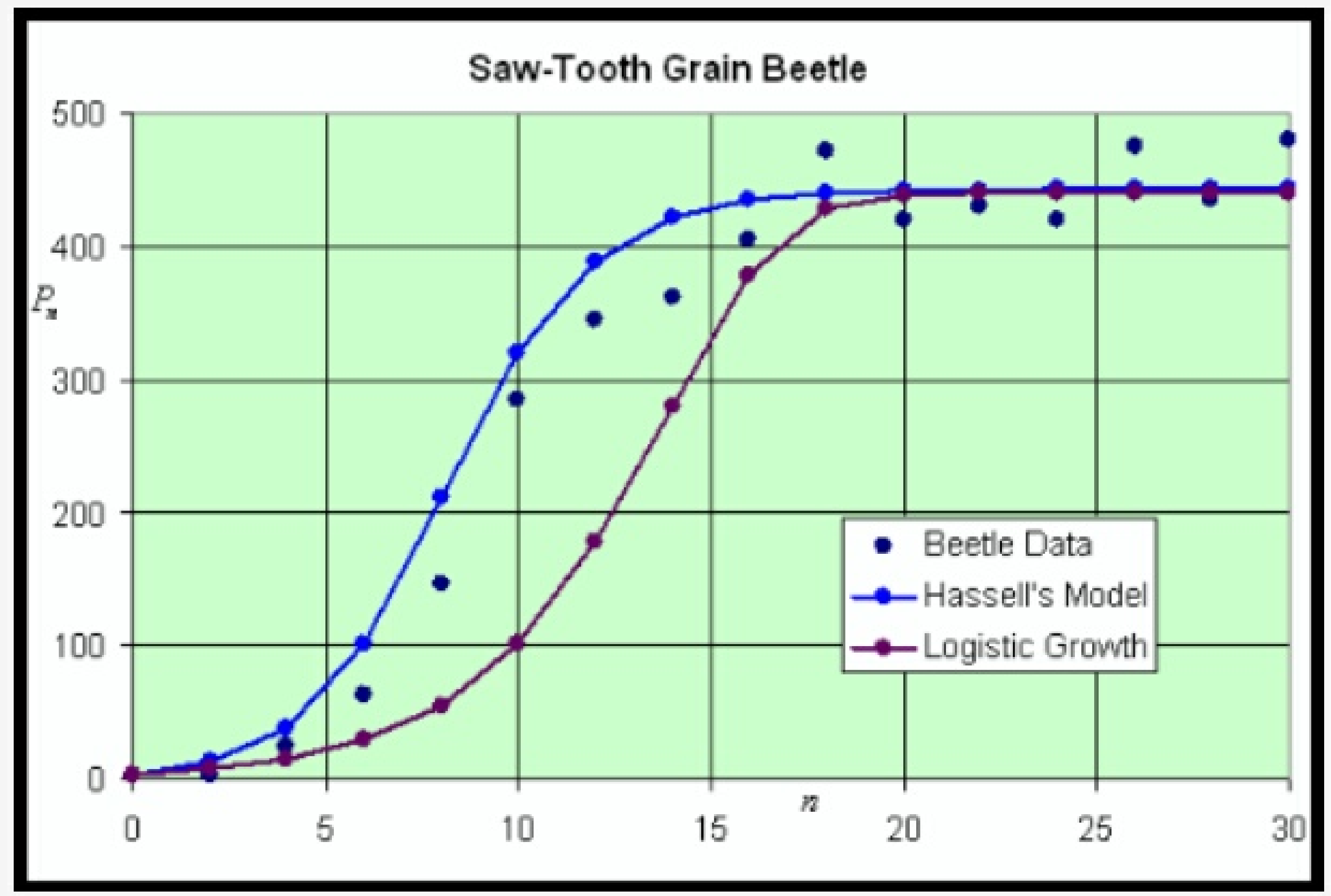
Poblaciones de insectos

$$y_{i+1} = \frac{k_1 y_i}{(1 + k_2 y_i)^{k_3}}$$

k_1, k_2, k_3 son parámetros. $k_1 > 1$ y $k_3 > 0$

Escarabajos

$$k_1 = 3.255$$
$$k_2 = 0.0073$$
$$k_3 = 0.8178$$



Modelo Logístico

$$y_{i+1} = r\, y_i (1 - y_i)$$

y es la fracción entre la pob. actual y la máx. soportada por el ambiente

$$0 < y < 1$$

El valor de r determina la tendencia final del sistema y su comportamiento "dinámico":