Mecánica 2014

U04C02: Separación de variables

2014/12/02

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

Función característica.

Siempre que el Hamiltoniano original no dependa explícitamente del tiempo, es posible separar el tiempo de la ec. principal y

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1$$

y α_1 es igual al valor del Hamiltoniano (constante).

Imaginemos entonces una T.C. en la cual los nuevos momentos son constantes de movimiento α_i, y α_1 es la constante

si $W = W(q, P) \Rightarrow p_i = \partial W/\partial q_i$; $Q_i = \partial W/\partial P_i = \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_i}$

$\Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i) = \alpha_1 \longrightarrow \mathcal{H}(q_i, \partial W/\partial q_i) = \underbrace{\alpha_1 = \mathcal{K}(Q_i, P_i)}_{\text{ya que } \mathcal{H} = \mathcal{K} + \cancel{\partial S/\partial t} \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{K} = \alpha_1}$

(ya que $\mathcal{H}$ no depende del tiempo)

y $\dot{P}_i = -\partial \mathcal{K}/\partial Q_i = 0 \Rightarrow P_i = \alpha_i \quad \forall i$

Para las $\dot{Q}_i$:

ya que $\mathcal{K} = \alpha_1$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \alpha_i} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{Q}_1 &= 1 \\ \dot{Q}_i &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_1 = t + \beta_1 \equiv \partial W/\partial \alpha_1$$

$$Q_i = \beta_i \equiv \partial W/\partial \alpha_i \quad i \neq 1$$

$$t \longleftrightarrow \mathcal{H}$$

Procedimiento General.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(p, q, t)$	$\mathcal{H} = \mathcal{H}(p, q) = $ cte.

TC $\rightarrow Q_i, P_i$

Q_i, P_i son todos ctes de valor	los momentos P_i son ctes.

y entonces el nuevo Hamiltoniano

es estrictamente 0: $K = 0$	es cíclico en todas las coordenadas $K = \mathcal{H}(P_i) = \alpha_1$

Bajo estas condiciones, las ec. de movimiento se tornan -

$$\dot{Q}_i = \partial \mathcal{K} / \partial P_i = 0$$

$$\dot{P}_i = -\partial \mathcal{K} / \partial Q_i = 0$$

y las soluciones son

$$Q_i = \beta_i$$

$$P_i = \gamma_i$$

$$\dot{Q}_i = \partial \mathcal{K} / \partial P_i = \nu_i$$

$$\dot{P}_i = -\partial \mathcal{K} / \partial Q_i = 0$$

$$Q_i = \nu_i t + \beta_i \qquad \nu_i = \nu_i(\gamma)$$

$$P_i = \gamma_i \qquad \gamma_i = \gamma_i(\alpha)$$

La función para lograr esto es

la función principal

$$S = S(q, P, t)$$

la función característica

$$W = W(q, P)$$

y luego, las ec. de H.J.:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad \Big| \qquad H\left(q, \partial W/\partial q\right) - \alpha_1 = 0$$

y la solución completa depende de

n constantes de integración $\alpha_1, \dots \alpha_n$ | n−1 ctes de integración pero junto con $\alpha_1 \to \alpha_1 \dots \alpha_n$

En ese caso, $P_i = \gamma_i$ se puede escribir como

$$P_i = \gamma_i(\alpha_1 \dots \alpha_n) \qquad \Big| \qquad P_i = \gamma_i(\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

y la solución completa puede ser función de los momentos:

$$S = S(q_i, \gamma_i, t) \qquad \Big| \qquad W = W(q_i, \gamma_i)$$

Se puede elegir $\gamma_i = \alpha_i$ (cond. iniciales)

$$p_i = \partial S/\partial q_i \qquad\qquad p_i = \partial W/\partial q_i$$

$$Q_i = \partial S/\partial \gamma_i = \beta_i \qquad\qquad Q_i = \partial W/\partial \gamma_i = \nu_i(\gamma_i)t + \beta_i$$

2n constantes.

pueden ser resueltas para obtener $q_i = q_i(t, \beta_i, \gamma_i)$

La solución del problema se obtiene al evaluar las 2n constantes para los valores iniciales (q_{i0}, p_{i0})

Si el Hamiltoniano no depende del tiempo las funciones principal y característica se relacionan así:

$$S(q, P, t) = W(q, P) - \alpha_1 t$$

Separación de variables

Hasta aquí, el método de JH nos permitió cambiar la sol. de 2n ec. de movimiento de 1° orden por una ec. dif. en derivadas parciales. Sin embargo la función de JH puede ser separada (ver métodos de derivadas parciales separables).

Decimos que la una coordenada q_j es separable cuando la función principal de Hamilton puede ser escrita como la suma de dos términos, uno que depende sólo de q_j y otro independiente de q_j:

$$S(q_1,\dots,q_n;\alpha_1,\dots,\alpha_n;t) = S_1(q_1;\alpha_1,\dots,\alpha_n;t) + S'(q_2,\dots,q_n;\alpha_1,\dots,\alpha_n;t)$$

q_1 es separable

Si todas las coordenadas son separables ⇒ H-J Separable

$$\boxed{S(q_1 \ldots q_n; \alpha_1 \ldots \alpha_n; t) = \sum S_i(q_i; \alpha_1 \ldots \alpha_n; t)}$$

En este caso, la ec. de HJ,

$$\mathcal{H}(q; \partial S/\partial q; t) + \partial S/\partial t = 0.$$

Se separa en n ec. independientes

$$H_i(q_j; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; t) + \partial S_j/\partial t = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

Si además $\mathcal{H} = cte$ ⇒

$$S_i(q_j, \alpha_1 \ldots \alpha_n; t) = W_i(q_j; \alpha_1 \ldots \alpha_n; t) - \alpha_i t$$

Y luego

$$\boxed{H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_n\right) = \alpha_i}$$

H_i podrán o no ser el Hamil. del sistema. α_i son las constantes de separación del sistema.

En general, los casos de interés práctico son aquellos donde el tiempo es separable ($H = \alpha_1$).

El problema de Kepler

Empezamos mostrando que una coord. cíclica es separable.

Sup. que q_1 es cíclica $\Rightarrow p_1 = cte = \gamma \Rightarrow$ J–H para W es:

$$\mathcal{H}\left(q_2,\dots,q_n;\gamma;\partial W/\partial q_2,\dots,\partial W/\partial q_n\right)=\alpha_1$$

Si hacemos $W=W_1(q_1;\alpha)+W'(q_2,\dots,q_n;\alpha)$ $\Rightarrow$ esta ec. solo dep. de W' y $p_1=\dfrac{\partial W_1}{\partial q_1}=\gamma \Rightarrow W_1=\gamma q_1$ y $W=W'+\gamma q_1$

En general, si el sistema es separable y tengo s coord. no cíclicas

$$\Rightarrow \boxed{W=\sum_{i=1}^{s} W_i(q_i;\alpha_1\dots\alpha_n)+\sum_{i=s+1}^{n} q_i\,\alpha_i}$$

Dejando s ec. HJ a resolver:

$$\mathcal{H}\left(q_1,\partial W/\partial q_1;\alpha_2\dots\alpha_n\right)=\alpha_1$$

Los problemas de fuerzas centrales son separables en polares pero no en cartesianas.

Hay condiciones para garantizar la sep. completa de H-J (Teorema de Staeckel).

Para el caso de un problema de fuerzas centrales en polares (r, φ) tenemos:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_\varphi^2/r^2\right) + V(r)$$

que es cíclico en t y φ. $\Rightarrow$ $W = W_1(r) + \alpha_\varphi \varphi$

génerancy :

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}\right) + V(r) = \alpha_1 \overset{= E}{}$$

$$= \left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{r^2} + 2m\, V(r) = 2m\,\alpha_1 \overset{= E}{}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 = 2m\,(E - V) - \alpha_\psi^2 / r^2$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{2m(E-V) - \alpha_\psi^2/r^2} \Rightarrow W_1 = \int dr \left[2m(E-V) - \alpha_\psi^2/r^2\right]^{1/2}$$

y $W = \int dr \left[2m(E-V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2} \right]^{1/2} + \alpha_\psi \psi$

Recordando la sol. del Ejemplo, $t + \beta_1 = \partial W / \partial E$ y $\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\psi}$

$$\frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{1}{\cancel{2}} \left[\quad \right]^{-1/2} \cdot \cancel{2}m = \int \frac{m}{\sqrt{2m(E-V) - \alpha_\psi^2 / r^2}} \, dr$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_\psi} = \int \frac{1}{\cancel{2}} \left[\quad \right]^{-1/2} \left(-\cancel{2} \frac{\alpha_\psi}{r^2} \right) dr + \psi$$

$$\Rightarrow \quad t + \beta_1 = \int \frac{m \, dr}{\sqrt{2m(E-V) - \alpha_\psi^2 / r^2}} \qquad \Bigg\| \qquad \beta_2 = -\int \frac{\alpha_\psi \, dr}{r^2 \sqrt{2m(E-V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}} + \psi$$

Si tomamos $a_\psi = L$ recuperamos las soluciones anteriores de la 2da:

$$\psi = \beta_2 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{a_\psi^2}(E-V) - u^2}}$$

y es la ec. de órbita si hacemos $u = 1/r$; $\psi = \theta$ y $\beta_2 = \theta_0$

Kepler en esféricos

Recordando de la unidad 3, el Hamiltoniano de F.C. es Kepler

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + V(r)$$

Proponemos $W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi)$

y como ϕ es cíclica, $W_\phi = \alpha_\phi \phi$. Reescribimos el Hamiltoniano

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta}\right]}_{\text{depende de } \theta \Rightarrow \text{ es constante en } \theta.} + 2m V(r) = 2mE$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \alpha_\phi^2 / \sin^2\theta = \alpha_\theta^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m\left(E - V(r)\right)$$

Ahora $\alpha_\phi = p_\phi = \partial W_\phi / \partial \phi$ es el momento angular entorno al eje polar.

Para α_θ vemos que

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2 \rightarrow p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2$$

$\Rightarrow$ El Hamiltoniano queda

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}\right) + V(r) \quad \Rightarrow \alpha_\theta = L$$

$\Rightarrow$ Conservo el momento $L_z \rightarrow$ el hamiltoniano queda en r | theta y conservo L y la Energía