Mecánica 2014

U03C06:Transformaciones Canónicas no restringidas

2014/11/06

H. Asorey
hasorey@uis.edu.co
UIS

Transformación canónicas no restringidas

Imaginemos una transformación canónica:

$$\xi = \xi(\eta, t)$$

Ahora, si la transformación $\eta \to \xi(t)$ es canónica (y también lo es $\eta \to \xi(t)$ por extensión), luego $\xi(t_0) \to \xi(t)$ también lo es. Como t_0 es una constante, entonces en ese punto se verifica la validez de las condiciones directas. Para probar que es canónica para todo la transformación $\xi(t_0) \to \xi(t)$, debemos probarlo punto a punto.

Definamos una Transformación Canónica Infinitesimal (TCI) a una transf. donde las diferencias son infinitesimales:

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i \\ P_i &= p_i + \delta p_i \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\xi = \eta + \delta \eta}$$

T.C. infinitesimal

En el formalismo de la función generatriz, podemos proponer una variación infinitesimal sobre la generatriz de la T. identidad ($F_2 = q_i P_i$):

$$F_2(q,P,t) = \underbrace{q_i P_i}_{\sim \mathbb{I}} + \epsilon\, G(q,P,t)$$

infinitesimal

→ función diferenciable en $2n+1$

A partir de aquí y recordando que para F_2: $p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}$

$$\Rightarrow p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \epsilon\, \partial G / \partial q_j$$

$$\Rightarrow \delta p_j = P_j - p_j = \cancel{P_j} \cancel{+} \cancel{P_j} - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} = -\frac{\epsilon\, \partial G}{\partial q_j}$$

Para Q_j:

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j}$$

$$\Rightarrow \delta q_j = Q_j - q_j = \cancel{q_j} + \epsilon \, \partial G / \partial P_j - \cancel{q_j} = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j}$$

Pero $P_j = p_j + \epsilon \, \partial G / \partial q_j$. A primer orden y $\epsilon \to 0$: $P_j \approx p_j$

$$\Rightarrow \delta q_j \doteq \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j}$$

G es la función generatriz de la T.C. infinitesimal.

Lu

$$\boxed{\begin{aligned} \delta q_j &= \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \\ \delta p_j &= -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \end{aligned} \longrightarrow \delta \eta = \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta}}$$

Una TCI puede ser una transf. infinitesimal en el tiempo

$$\xi(t_0) \to \xi(t_0 + dt) \quad dt \sim \epsilon$$

si esta es canónica $\to \xi(t_0) \to \xi(t)$ en intervalo dt.

Veamos entonces si una TCI es canónica:

$$\xi = \eta + \delta\eta \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\,\partial\eta} = \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_i\,\partial\eta_j}$$

El Jacobiano será

$$\mathbb{M} = \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \mathbb{1} + \frac{\partial \delta\eta}{\partial \eta} = \mathbb{1} + \epsilon\, \mathbb{J} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)$$

$$\mathbb{M}^t = \mathbb{1}^t + \epsilon \left(\mathbb{J}\ \partial^2 G / \partial\eta\,\partial\eta\right)^t$$

$$\mathbb{M}^t = \mathbb{1} + \epsilon \left(\frac{\partial^2 G}{\partial\eta\,\partial\eta}\right)^t \mathbb{J}^t = \mathbb{1} - \epsilon\, \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\,\partial\eta}\, \mathbb{J}$$

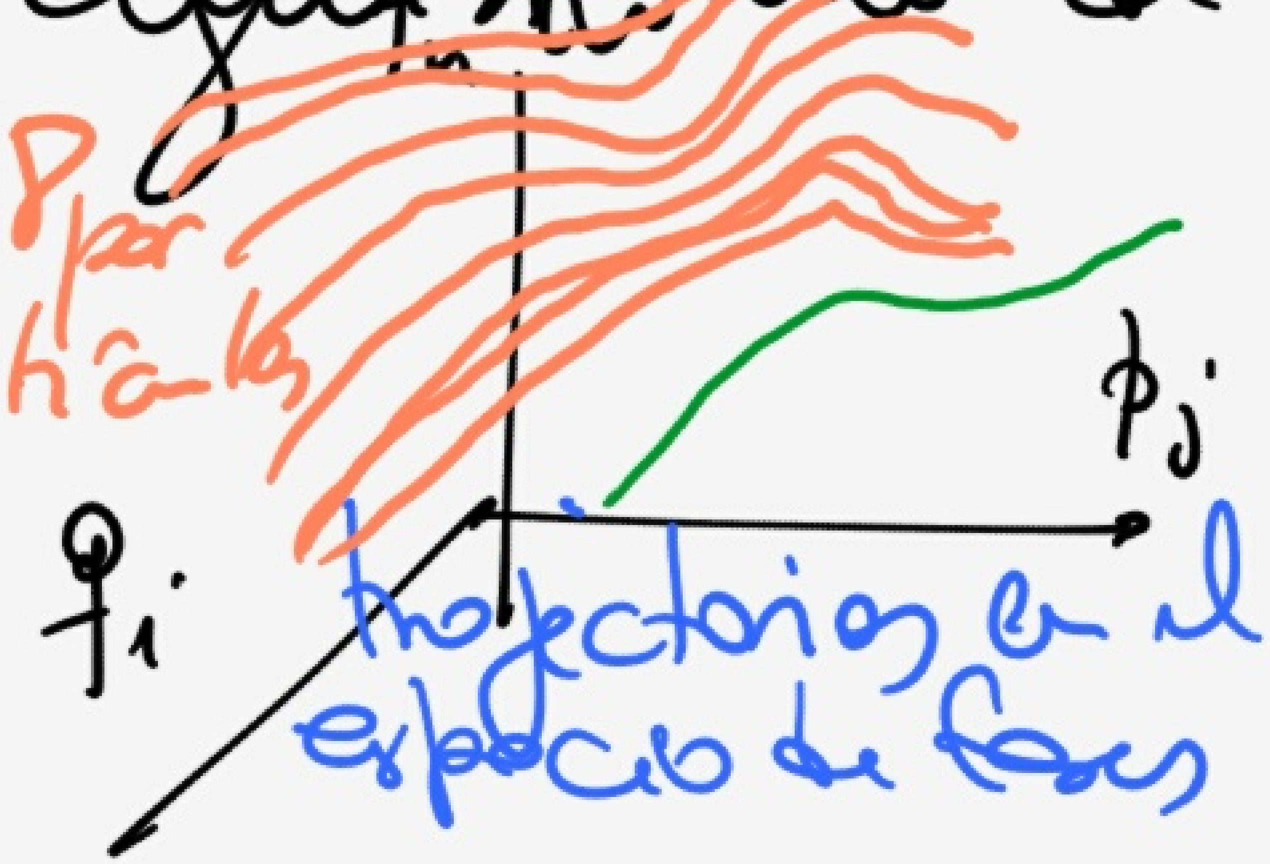
$$\Rightarrow M J M^t = J \rightarrow \left(\mathbb{1} + \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta}\right) J \left(\mathbb{1} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta} J\right) =$$

$$= J - \cancel{\epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta} J} + \cancel{\epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta} J} - \cancel{\epsilon^2 J \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta} J \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta} J} \quad O^2(\epsilon)$$

$$\Rightarrow M J M^t = J$$ TCi son Canónicas

El Teorema de Liouville (I)

En mecánica clásica el estado de un sistema está determinado por el conocimiento de sus 2n coordenadas generalizadas en algún momento de su evolución



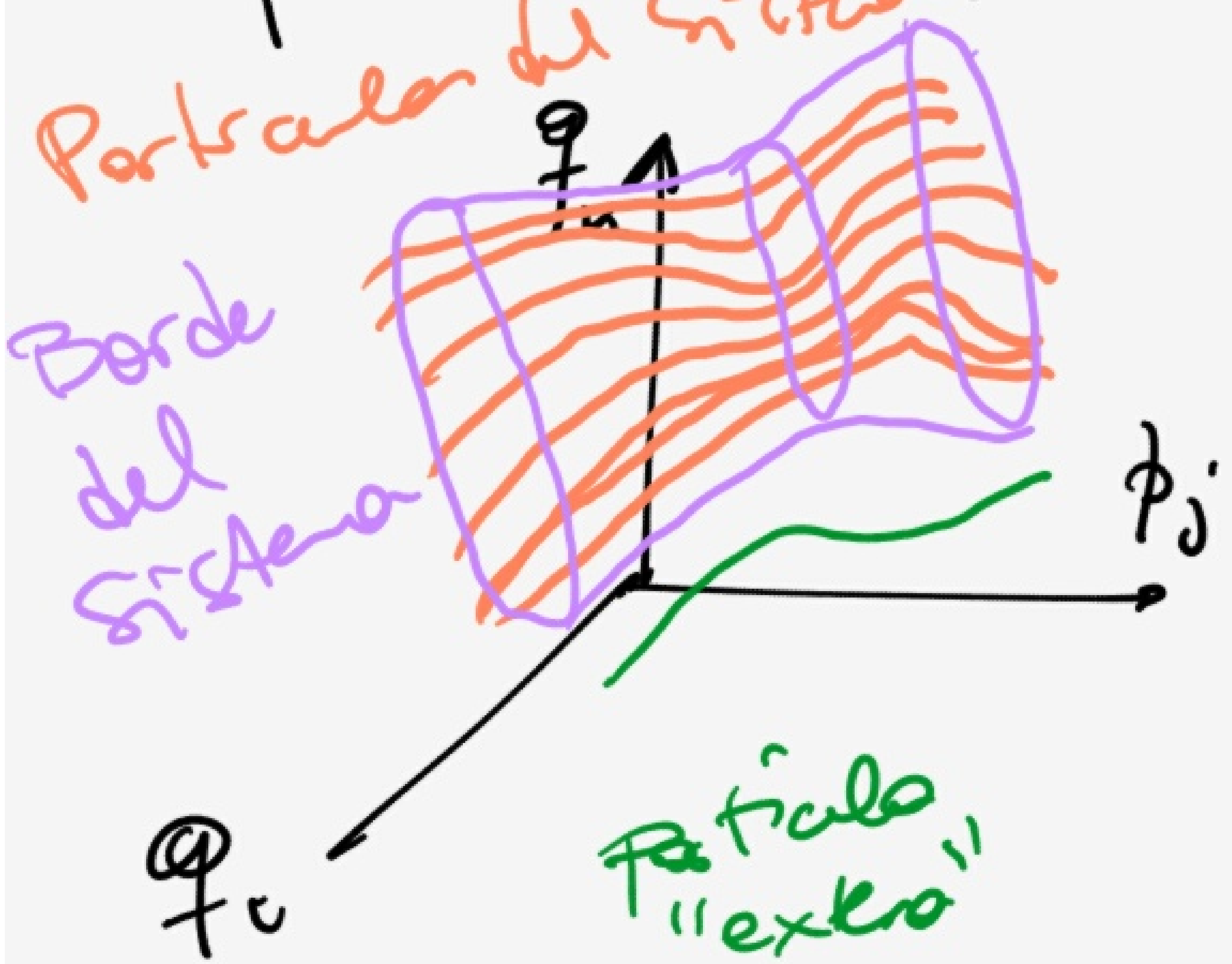
Si el número de partículas es grande, es conveniente hablar de la densidad de partículas en el espacio de fases

$$\rho = \rho(q, p, t)$$

El teorema de Liouville establece que la densidad de partículas en el espacio de fases es constante:

$$\frac{dN}{dV} = \rho(q_i, p_i, t) = \alpha \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Esta densidad es medida sobre un sistema canonical a lo largo de la trayectoria de las partículas en el espacio de fases



La partícula externa nunca puede entrar al volumen definido por el sistema. Las trayectorias están definidas por la evolución del sistema. Dado que nada sale tampoco nada puede entrar, porque si entra, pasaría a formar parte del sistema. Luego, N=cte.

¿Qué pasa con dV en el tiempo? La evolución temporal en el E. Fases del Sistema es una transformación canónica.

Nos preguntamos entonces si el volumen del espacio de fases es invariante frente a transformaciones canónicas.

El elemento de volumen en las coordenadas originales es:

$$d\eta = dq_1\, dq_2 \dots dq_n\, dp_1\, dp_2 \dots dp_n$$

y frente a una transformación canónica $\eta(q,p,t) \longrightarrow \xi(Q,P,t)$

$$d\xi = dQ_1\, dQ_2 \dots dQ_n\, dP_1\, dP_2 \dots dP_n$$

$dV=0$ implica $d\eta = d\xi$ obviamente, dado que

El módulo del determinante de M

$$d\xi = \big|\, |M| \,\big|\, d\eta \quad \longrightarrow \quad \big|\, |M| \,\big| = 1$$

donde M es la matriz Jacobiana de la transformación, De la condición simpléctica,

$$M J M^t = J$$

tomando determinantes

$$|M J M^t| = |M| |J| |M^t| = |M| |M| |J| = |M|^2 |J|$$

Es una condición adicional para las T. Canónicas.

Entonces $|M|^2 |J| = |J| \Rightarrow |M|^2 = 1 \Rightarrow |M| = \pm 1$

y luego su modulo es 1 $\Rightarrow$

$$d\eta = d\xi \Rightarrow dV = \text{Constante}.$$

$\Rightarrow$ Si $dN = cte$ y $dV = cte \Rightarrow \rho = cte.$ y queda probado el teorema de Liouville.

El Grupo de las transformaciones canónicas.

Un Grupo G es un conjunto de elementos y una operación $(\cdot)$ que los relaciona de forma tal que se verifiquen las siguientes propiedades

1) Clausura. Si $a, b \in G \Rightarrow (a \cdot b) \in G$
2) Asociatividad: Si $a, b, c \in G \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3) Identidad: $\exists! \, e \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$
4) Inverso: $\forall a \in G \; \exists \, a^{-1} \in G : a a^{-1} = a^{-1} a = e$

Si además la op es conmutativa, $a \cdot b = b \cdot a \Rightarrow$ El Grupo es Abeliano

Magma
↓
Semigrupo
↓
Monoide
↓
Grupo
↓
Abeliano

Veamos si las transformaciones canónicas son grupo.
En este caso, la operación será la composición de transformaciones canónicas.

$1:\ \eta \rightarrow \Psi \qquad M_1 J M_1^t = J \qquad (M_1)_{ij} = \partial \Psi_i / \partial \eta_j$

$2:\ \Psi \rightarrow \xi \qquad M_2 J M_2^t = J \qquad (M_2)_{ij} = \partial \xi_i / \partial \Psi_j$

$\Rightarrow M_3 = \eta \rightarrow \Psi \rightarrow \xi \Rightarrow (M_3)_{ij} = \dfrac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} = \dfrac{\partial \xi_i}{\partial \Psi_k} \dfrac{\partial \Psi_k}{\partial \eta_j} = (M_2 M_1)_{ij}$

1) Clausura: M_1 y M_2 son canónicos $\Rightarrow$ ¿M_3 es canónica?

$M_3 J M_3^t = (M_2 M_1) J (M_2 M_1)^t = M_2 \underbrace{M_1 J M_1^t}_{J} M_2^t$

$= M_2 J M_2^t = J \Rightarrow M_3$ es canónica ✓

2) Es asociativo? Multiplicación de Matrices.

3) La identidad es canónica. Lo mismo ya que $F_2(q,P)$ genera la transformación identidad. En la condición simpléctica $\eta \to \eta \Rightarrow \mathbb{M} = \mathbb{1} \Rightarrow$

$$\mathbb{M}\,\mathbb{J}\,\mathbb{M}^t = \mathbb{1}\,\mathbb{J}\,\mathbb{1}^t = \mathbb{J} \Rightarrow \mathbb{1} \text{ es canónica}$$

4) Inversa: $\eta \to \xi$ ¿existe $\xi \to \eta$? Las funciones son invertibles, lo cual garantiza la existencia. En la f. simpléc tiene $(\mathbb{J}^2 = -\mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{J}^{-1} = -\mathbb{J})$ luego:

$$\mathbb{M}\,\mathbb{J}\,\mathbb{M}^t = \mathbb{J} \Rightarrow (\mathbb{M}^{-1}\mathbb{M})\,\mathbb{J}\,\mathbb{M}^t = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}$$

M^{-1} es canónico

$$\Rightarrow \mathbb{J}\,\mathbb{M}^t\,\mathbb{M}^{t^{-1}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}\,\mathbb{M}^{t^{-1}} \Rightarrow \mathbb{J} = \mathbb{M}^{-1}\,\mathbb{J}\,(\mathbb{M}^{-1})^t$$