

# Universidad Nacional de Río Negro

## Física Moderna A - 2017

- **Unidad** 04 – Aplicación a sistemas simples
- **Clase** UO4CO2
- **Fecha** 16 Mayo 2017
- **Cont** Barreras
- **Cátedra** Asorey
- **Web**

<https://github.com/asoreyh/unrn-moderna-a>

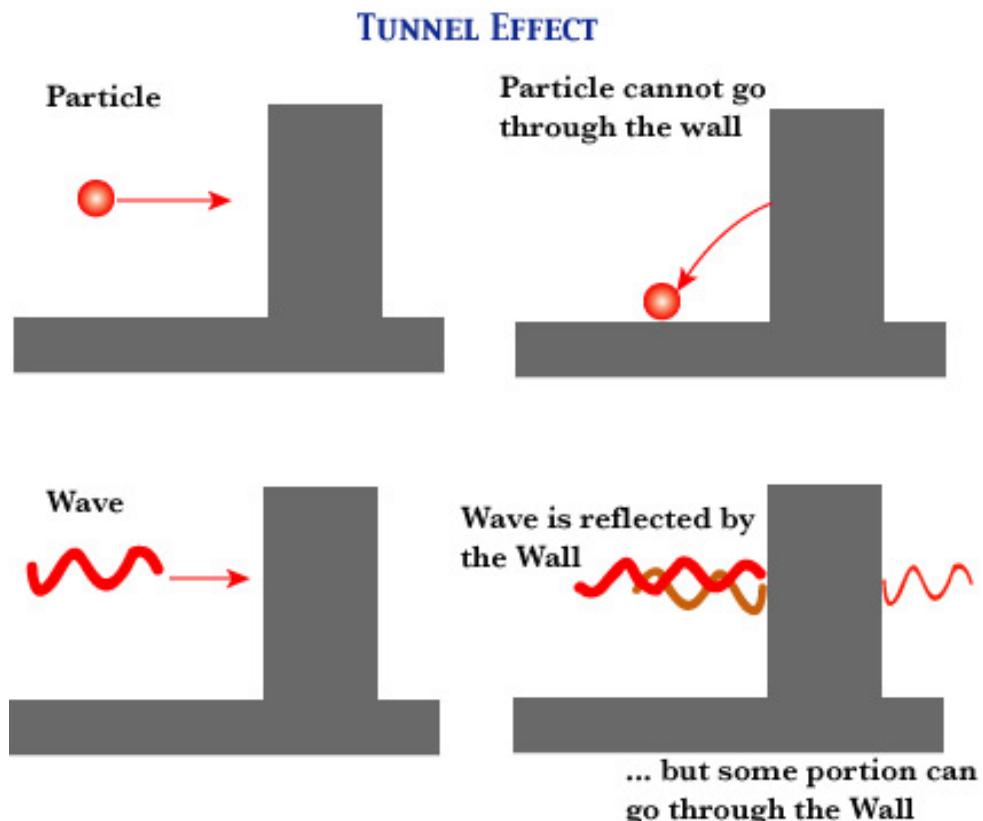


***“Los átomos se comportan como átomos, nada más”.***

John Gribbin

# Unidad 4: Aplicación a sistemas simples

## Martes 02 de mayo al Jueves 18 de mayo



- Pozos y barreras de potencial infinitos y finitos. Estado estacionario. La densidad de probabilidad. Corriente de probabilidad. Efecto túnel. Aplicaciones tecnológicas del efecto túnel. El oscilador armónico. Cuantización del oscilador armónico. Autovalores y autofunciones. Reinterpretación del principio de equivalencia.



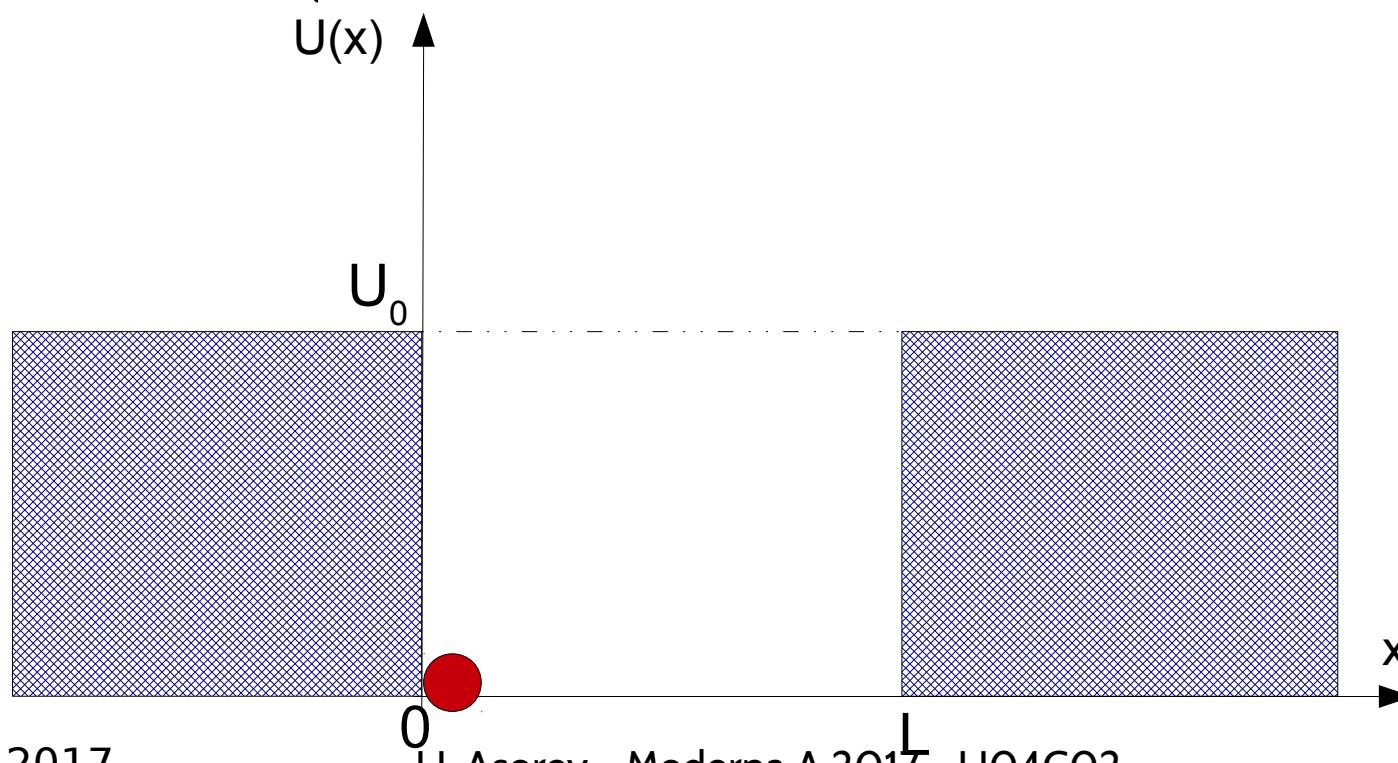
# Dualidad y el rol del observador

**WAVE  
PARTICLE DUALITY**

# Nuevo sistema: pozo finito

- El potencial es 0 en el interior, infinito en el exterior

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & \text{si } x \leq 0 \\ 0, & \text{si } 0 < x < L \\ U_0, & \text{si } x \geq L \end{cases} \rightarrow \begin{array}{ll} \Psi_I(x, t) & \\ \Psi_{II}(x, t) & \\ \Psi_{III}(x, t) & \end{array}$$



# Pozo finito, solución $U_0 > E$

$$p' = \sqrt{2m(U_0 - E)}$$

$$U(x)$$

$A, B, C$  y  $D \rightarrow$  condiciones de borde.

$$p = \sqrt{2mE}$$

$$U_0 > E$$

$$\Psi_I(x, t) = C \exp\left(\frac{p'}{\hbar} x\right)$$

Región clásicamente prohibida

I

II

$$\Psi_{III}(x, t) = F \exp\left(-\frac{p'}{\hbar} x\right)$$

Región clásicamente prohibida

III

$$\Psi_{II}(x, t) = A \sin\left(\frac{p}{\hbar} x\right) + B \cos\left(\frac{p}{\hbar} x\right)$$

0

L

x

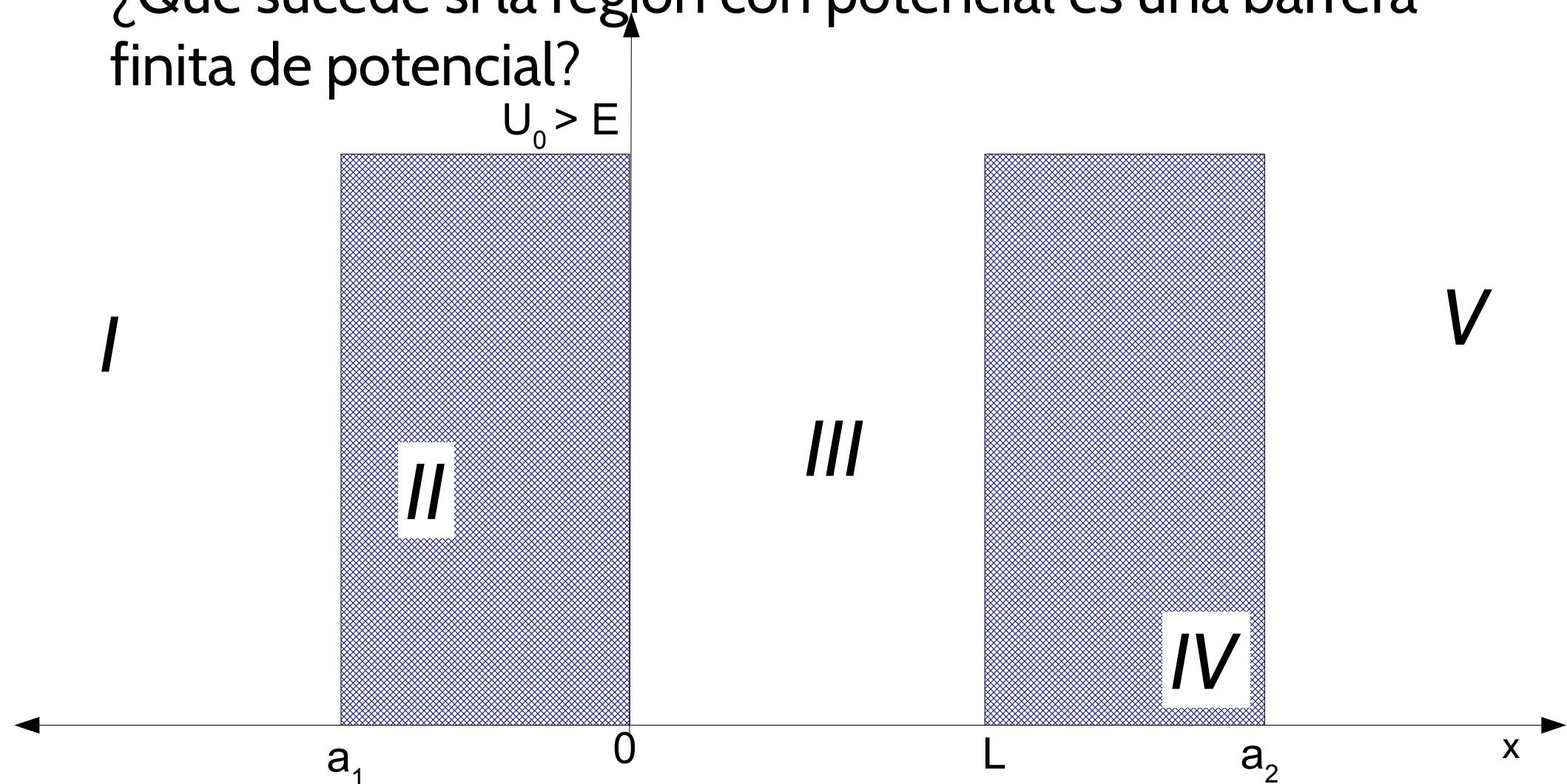


# Pozo finito de potencial

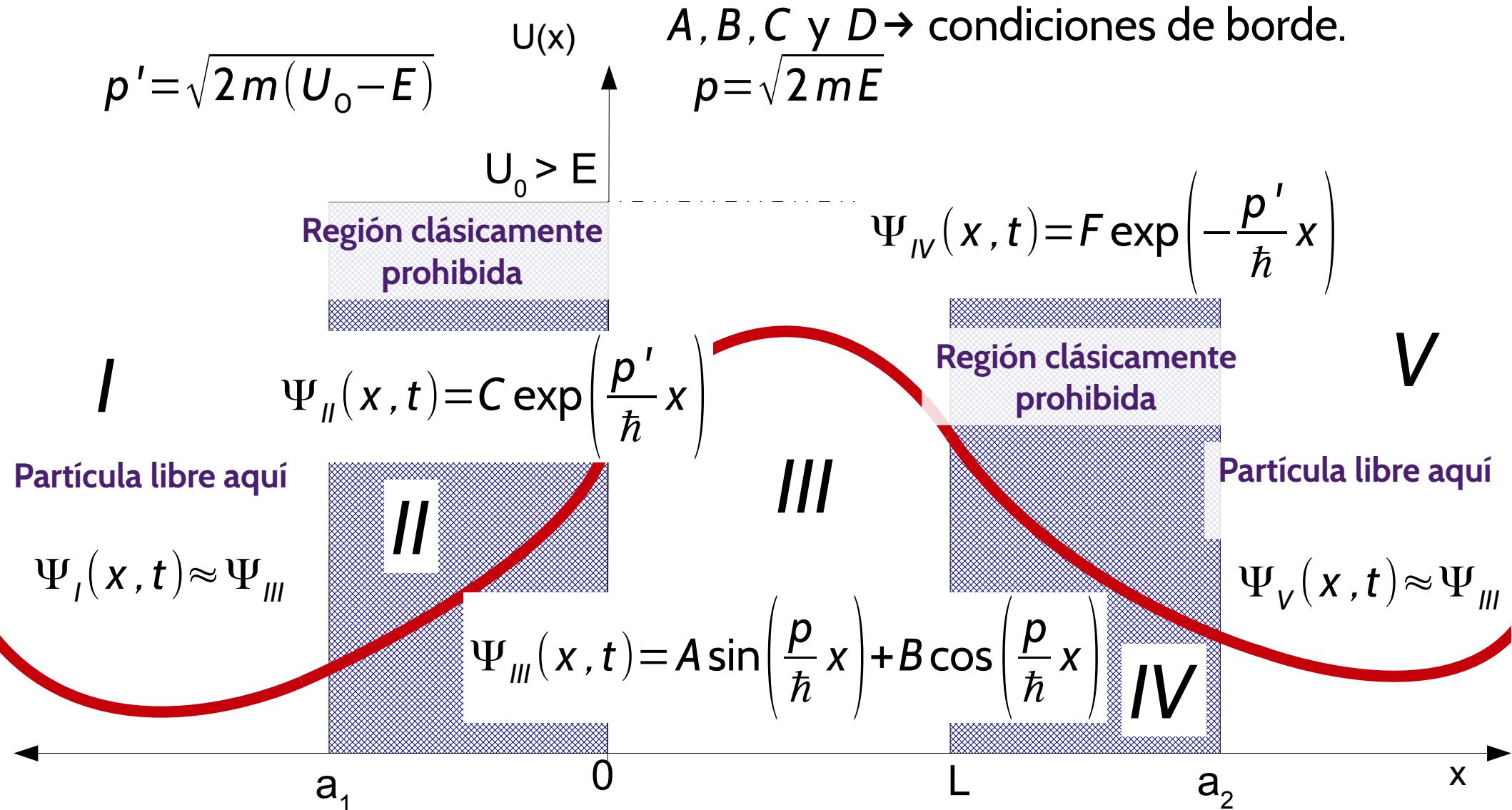
- Si  $U_0 < E$ 
  - Solución de partícula libre en todo el espacio.
  - Fuera del pozo (regiones I y III) la fase es diferente,  $(E-U_0)$ , a la de la región II,  $E$ .
- Si  $U_0 > E$ 
  - En el interior del pozo (región II), partícula libre
  - Fuera del pozo (regiones I y III) es la región clásicamente prohibida (energía menor al potencial)
  - Sin embargo, la función de onda es una exponencial decreciente → probabilidad no nula de encontrarla

# Barrera de potencial, $U_0 > E$

- ¿Qué sucede si la región con potencial es una barrera finita de potencial?



# Barrera de potencial, sol. $U_0 > E \rightarrow$ Efecto Túnel





# Efecto túnel

- En la **barrera del potencial**, la existencia de la función de onda y su continuidad, aseguran que existe una probabilidad no nula de ~~que la partícula escape encontrar a la partícula fuera de la barrera~~
- Clásicamente esto está prohibido.
- A este fenómeno se lo llama **efecto túnel**
- Tiene innumerables aplicaciones tecnológicas



# Efecto Túnel y microscopio

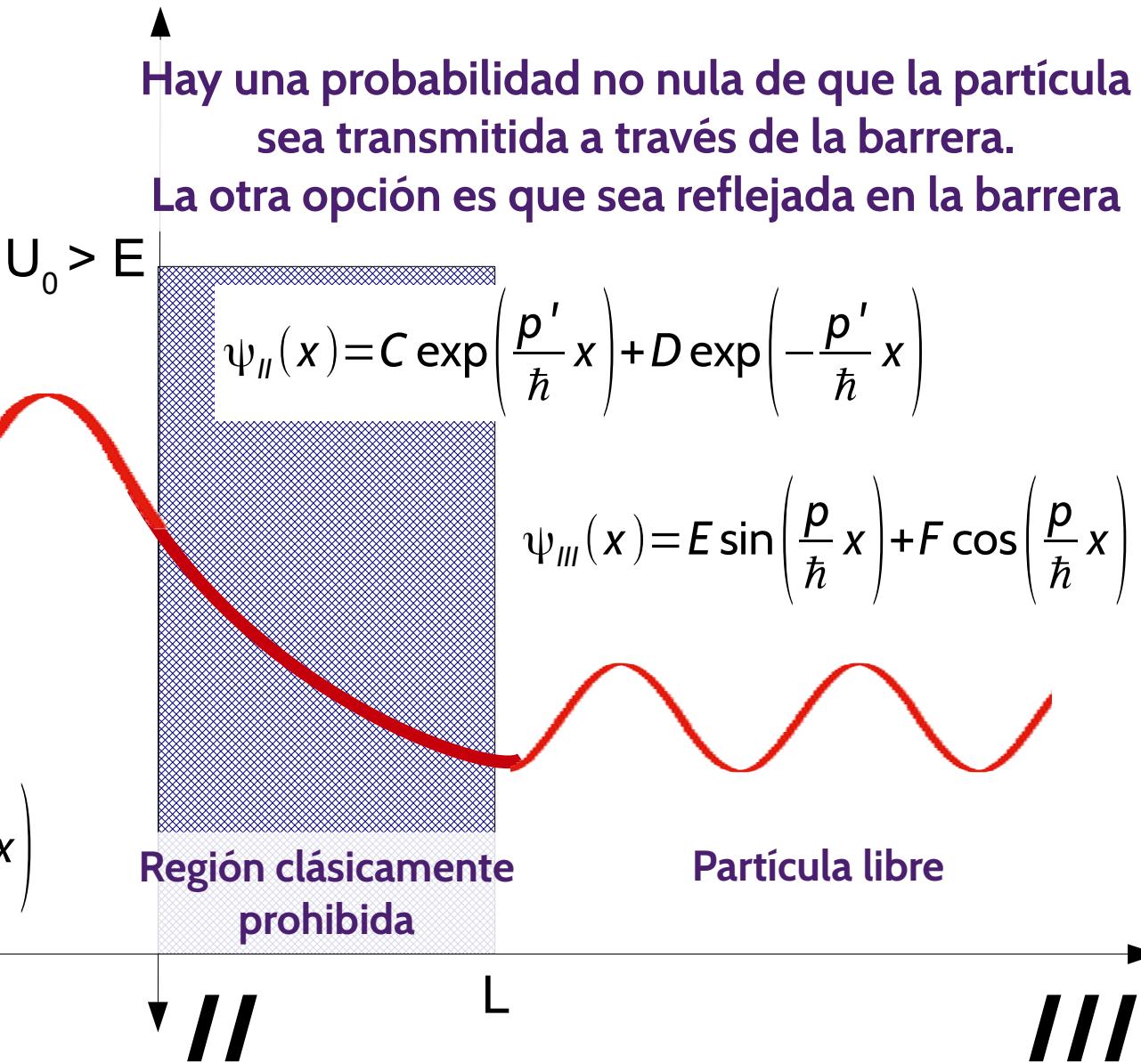
## TUNNEL EFFECT

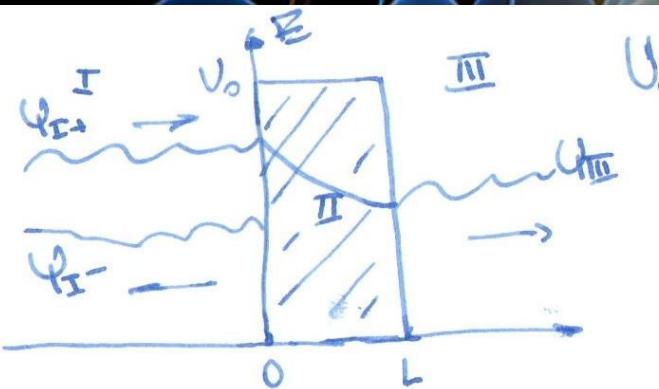
# Barrera de potencial, simplifiquemos

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \rightarrow \psi_I(x) \\ U_0, & \text{si } 0 < x < L \rightarrow \psi_{II}(x) \\ 0, & \text{si } x \geq L \rightarrow \psi_{III}(x) \end{cases}$$

$$\psi_I(x) = A \sin\left(\frac{p}{\hbar}x\right) + B \cos\left(\frac{p}{\hbar}x\right)$$

Partícula libre





# Barra de potencial

$\Psi_{I+}$  representa a los partículas incidiendo en la pared de onda Ly altura  $U_0$

$\Psi_{I-}$  es la partícula que no atraviesa la pared y rebota

$$\Psi_{I-} = A e^{i/\hbar p_i x} + B e^{-i/\hbar p_i x}$$

y dispersión  $p = \sqrt{2mE}$

$$\Psi_{III} = F e^{i/\hbar p_3 x} + G e^{-i/\hbar p_3 x}$$

Luego,

$$\Psi_{I+} = A e^{i/\hbar p_i x}$$

$$\text{y } \Psi_{III+} = F e^{i/\hbar p_3 x} = \Psi_{III}$$

$$\Psi_{I-} = B e^{-i/\hbar p_i x}$$

$$\Psi_{III-} = G e^{-i/\hbar p_3 x} \quad \times G=0$$

y para que no se refleje la partícula

## A la región II

## Barreira de potencial

$$\Psi_{\text{II}} = C e^{-i \frac{\beta}{\hbar} x} + D e^{i \frac{\beta}{\hbar} x}$$

$$\text{con } \beta = \sqrt{2m(U_0 - E)}$$

Probabilidad de transmisión

¿Cuál es la probabilidad de que un electrón pase a III?

Calculen la probabilidad de lo que incide

$$|\Psi_{\text{I}}|^2 = \Psi_{\text{I}}^* \Psi_{\text{I}} = A^* e^{-i \frac{\beta}{\hbar} p_i x} A e^{i \frac{\beta}{\hbar} p_i x} = A^* A e^0 = |A|^2$$

Para lo visto reflejado:

$$|\Psi_{\text{I}}^-|^2 = |B|^2$$

$\Rightarrow$  Prob. de transmisión:

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

y es función de  
L y E

y la transmitida

$$|\Psi_{\text{III}}^+|^2 = |F|^2$$

Pueden ver

Puede verse

## Barriera de potencial

$$T(L, E) = \left[ 16 \frac{E}{U_0} \left( 1 - \frac{E}{U_0} \right) \right] e^{-2\beta L}$$

$$\text{y } \beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E)} \Rightarrow \beta = h/p$$

En general

$$T \approx e^{-2\beta L}$$

Ej: Una capa de óxido de cobre genera un barrera de potencial de  $U_0 = 10 \text{ eV}$ . Supongo un espesor de  $5 \text{ nm}$ . ¿Cuál es la prob de transmisión para electrones de  $7 \text{ eV}$ ? ¿y si fueran de  $9 \text{ eV}$ ? ¿y si tuviera un espesor de  $1 \text{ nm}$ ?

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E)} = \sqrt{26,254 (10 - E)} \text{ nm}^{-1}$$

$$\text{Si } E = 7 \text{ eV} \Rightarrow \beta = 8,875 \text{ nm}^{-1} \text{ y } L = 5 \text{ nm} \Rightarrow$$

# Barrera de potencial

$$\Rightarrow T \approx e^{-2\beta L} = e^{-2 \cdot 8.875 \text{ nm}^{-1} \cdot 5 \text{ nm}} = e^{-88.75} \approx 3 \times 10^{-39}$$

$$\text{Si } E = 9 \text{ eV} \Rightarrow \beta = \sqrt{26.254} \text{ nm}^{-1} = 5.13 \Rightarrow$$

$$T \approx e^{-2\beta L} = e^{-2 \cdot 5.13 \text{ nm}^{-1} \cdot 5 \text{ nm}} = e^{-51.238} \approx 5.4 \times 10^{-23}$$

$$\text{y si } L = 1 \text{ nm} \Rightarrow$$

$$T \approx e^{-2\beta L} = e^{-2 \cdot 5.13 \text{ nm}^{-1} \cdot 1 \text{ nm}} = e^{-10.26} \approx 10^{-4}$$

---

Si los aniones son de 1 Amp  $\Rightarrow$  la tasa sería 0.1 mA.

# Transmisión y reflexión

- Hay una probabilidad no nula (aunque puede ser muy pequeña) de que una partícula con energía  $E$  atraviese una barrera de ancho  $L$  y altura  $U_0 > E$ .
- La probabilidad de transmisión es:

$$T(L, E) = \frac{|\psi_{III}|^2}{|\psi_I(x)|^2} = \frac{F^* F}{A^* A} \approx e^{-2\beta L}$$

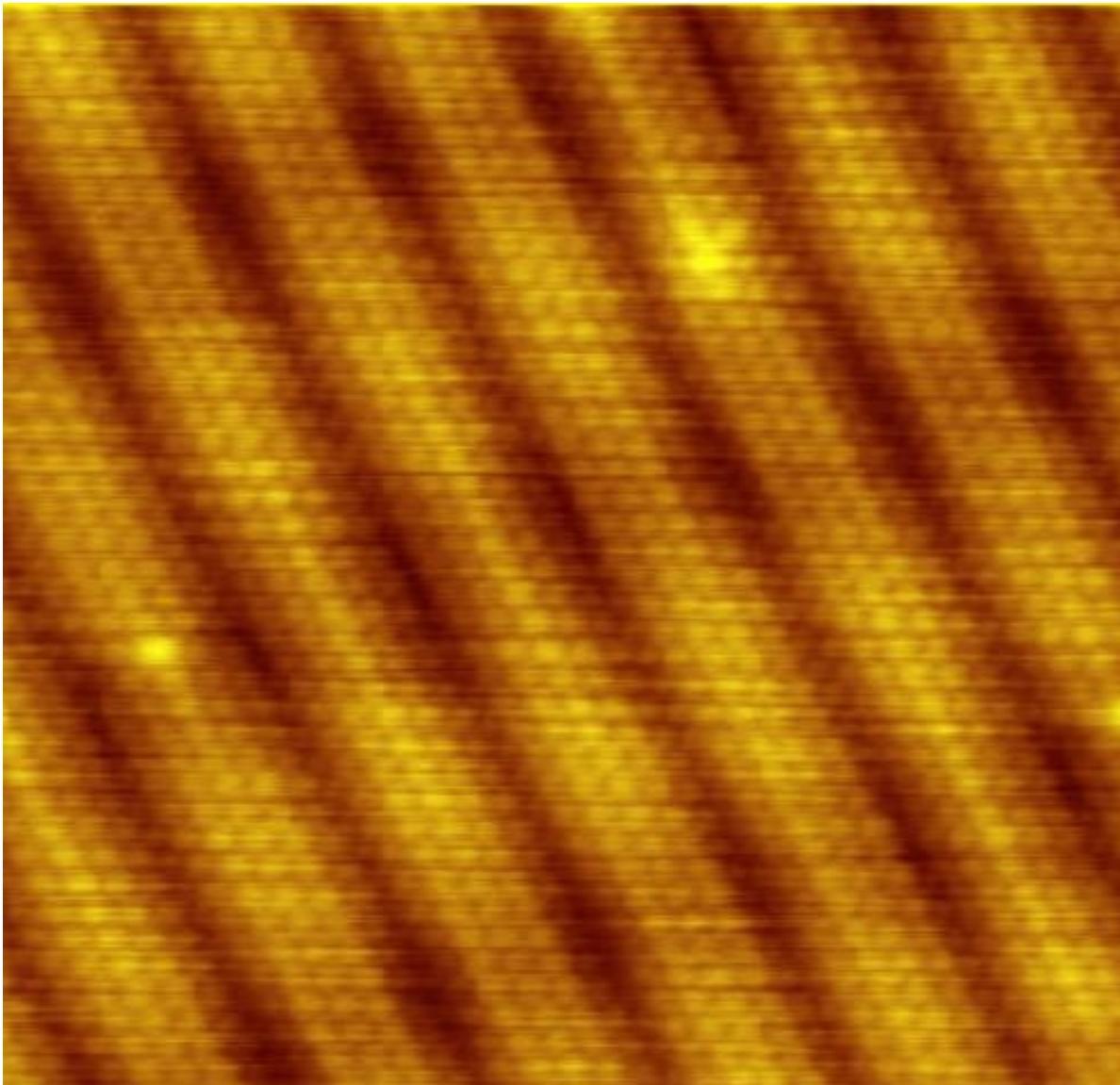
- La dependencia es muy fuerte con el ancho  $L$  de la barrera → dispositivos tecnológicos: diodo de efecto túnel, transistor de efecto túnel (TFET, MOSFET), microscopio de efecto túnel



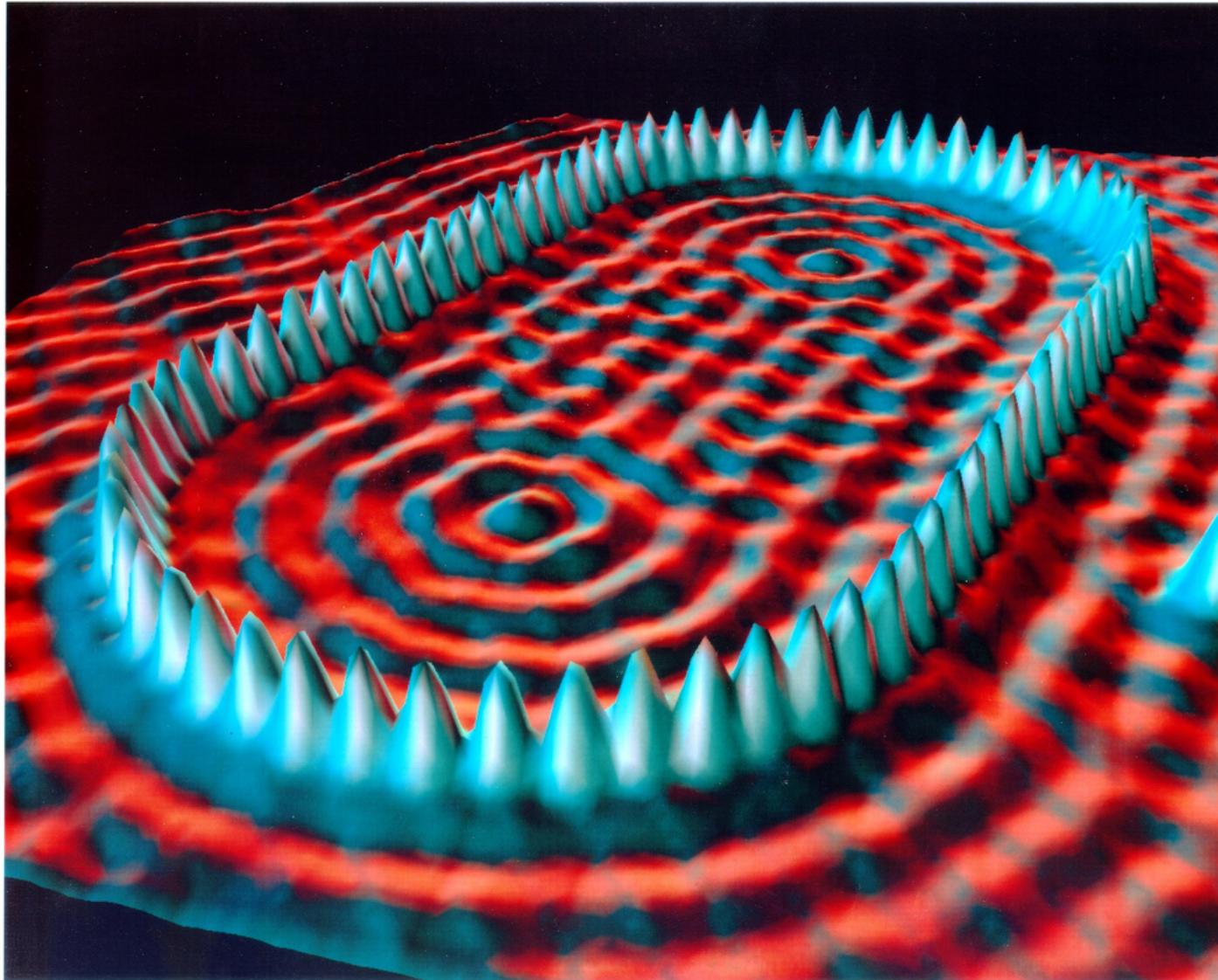
# Microscopio de efecto túnel

# Scanning Tunneling Microscope

# Superficie de una lámina de oro



# Corral de átomos (notar la estructura)



# Una película moviendo átomos





# Valores de expectación

- Si  $\Psi(x,t)$  es la solución de onda de un sistema, toda la información del sistema está contenida en  $\Psi$ .
- Nos preguntamos ¿cuál es la posición  $x$  de la partícula? Medir esto implica medir la posición de muchas partículas en la misma situación física al mismo tiempo  $t$ , y obtener el promedio de la posición,  $\langle x \rangle$
- $\langle x \rangle$  es el valor de expectación de la posición
- Imaginemos que tenemos  $N$  partículas, con  $N_1$  en la posición  $x_1$ ,  $N_2$  en la posición  $x_2$ , ...,  $N_n$  en la posición  $x_n$ .

# Valores de expectación

Sea una muestra de  $n$  realizaciones de un vector de aleatoria  $X$

$$\Rightarrow S = \{x_1, x_2, x_1, x_3, x_1, x_2, x_4, \dots\} = \{N_1 x_1, N_2 x_2, N_3 x_3, \dots N_n x_n\}$$

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + \dots + N_n x_n}{N_1 + N_2 + \dots + N_n} = \frac{\sum N_j x_j}{\sum N_j} = \sum \left( \frac{N_j}{N_r} \right) x_j = \sum p_j x_j$$

Si  $X$  es la posición de una partícula,  $\Rightarrow P_j$  es los prob de encuadre en  $x_j$

$$P_j = |\psi_j|^2 dx \quad (|\psi_j|^2 = \psi(x_j)^* \psi(x_j))$$

Luego, la posición será:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx} \rightarrow \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx$$

Luego el valor Esperado para la posición

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx$$

# Valores de expectación

Ejemplo,  $T(x) = \alpha x$   $0 < x < 1$  y  $T=0$  fuera.

a) Prob de encontrar a la partícula en  $0.45 < x < 0.55$

b) Hallar el valor de expectación de  $x$ :

$$\text{a)} \Rightarrow P = \int_{x_1}^{x_2} (T)^2 dx = \int_{0.45}^{0.55} \alpha^2 \cdot x^2 dx = [\frac{\alpha^2}{3} x^3] \Big|_{0.45}^{0.55}$$

$$\Rightarrow P = 0.0251 \alpha^2$$

---

$$\text{b)} \quad \langle x \rangle = \int_0^1 x |T|^2 dx = \alpha^2 \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \alpha^2 \int_0^1 x^3 dx$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \alpha^2 \left( \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \Rightarrow \langle x \rangle = \alpha^2 / 4$$

# Valores de expectación, operadores

Sin embargo, otra definición más física bien para operadores

Cifereando ( $\psi$ ),  $\hat{x}$  y  $\hat{H}$  p.ej) = 0. Generalizan:

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}^* \hat{x} \hat{T} dx$$

y en general, para un operador  $\hat{g}$ :

$$\boxed{\langle \hat{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{T}^* \hat{g} \hat{\Psi}) dx}$$

p. ej  $\hat{p}$ :

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{T}^* \hat{p} \hat{\Psi}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}^* \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \hat{\Psi} \right) dx$$

$$\Rightarrow \langle \hat{p} \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}^* \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} dx$$



# Valores de expectación

- En general, para un operador cualquiera, asociado a un observable  $g$ :

$$\langle g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi^* \hat{g} \Psi) dx$$

- Por ejemplo, el valor de expectación de  $p$ :

$$\langle \hat{p}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{p} \Psi dx$$

$$\langle \hat{p}(x) \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

(¡notar como aplica el operador diferencial!)