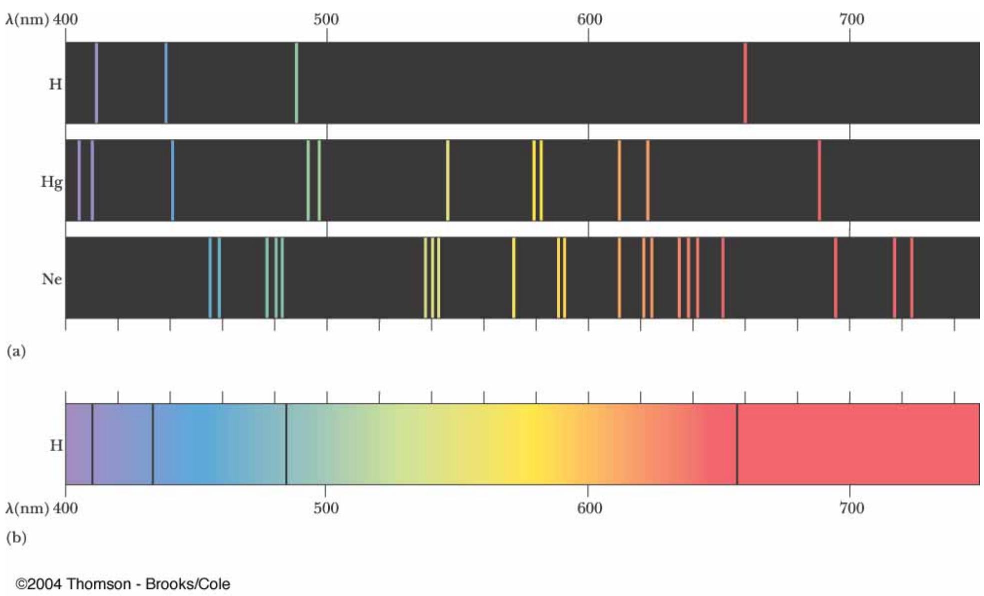
Universidad Nacional de Río Negro
Física Moderna A - 2017

- **Unidad** 02 – Los inicios de la MC
- **Clase** 6/27(U02C03) De Broglie, Bohr
- **Fecha** 30 Marzo 2017
- **Cont** De Broglie, Bohr-Sommerfeld
- **Cátedra** Asorey
- **Web**

https://github.com/asoreyh/unrn-moderna-a

"Los átomos se comportan como átomos, nada más".
John Gribbin

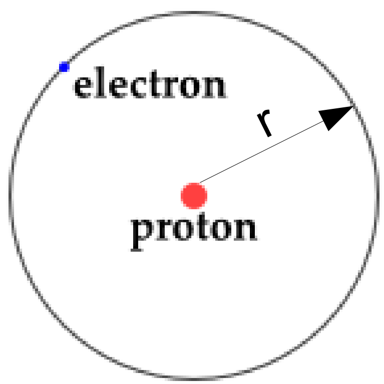
Unidad 2: Los inicios de la mecánica cuántica Martes 21 de marzo al Martes 04 de abril



- Los espectros atómicos y la estructura del átomo. Modelos de Thomson y Rutherford, aciertos y desaciertos. Cuantización de Bohr-Sommerfeld. El modelo atómico de Bohr. El principio de correspondencia. La hipótesis de de Broglie. Difracción de ondas de materia. Dualidad onda-corpúsculo.

Modelo del átomo de Rutherford

- Rutherford describe a su modelo atómico como un modelo planetario. El caso más sencillo → hidrógeno



$$F_c = \frac{m v^2}{r}, \quad y \quad F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

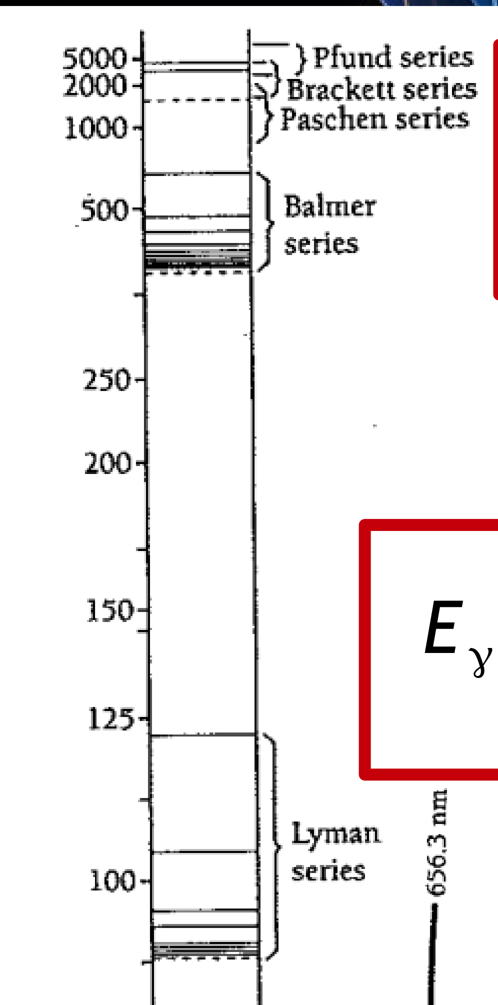
$$F_c = F_e \rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r}}$$

- Luego, para la energía total,

$$E = E_k + E_e = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \rightarrow \quad E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

- E < 0 → sistema ligado! Velocidad y radios típicos...

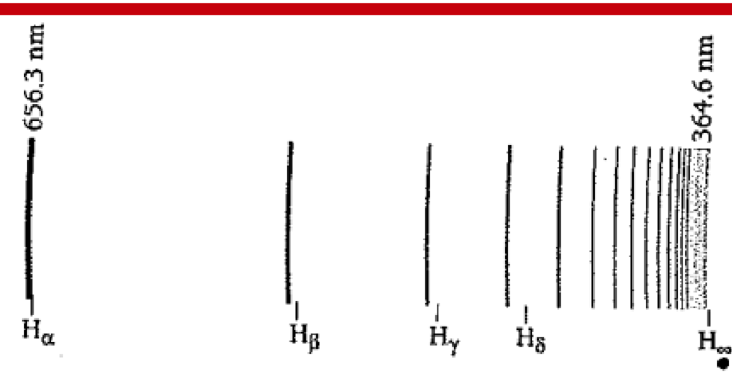
El espectro del átomo de hidrógeno

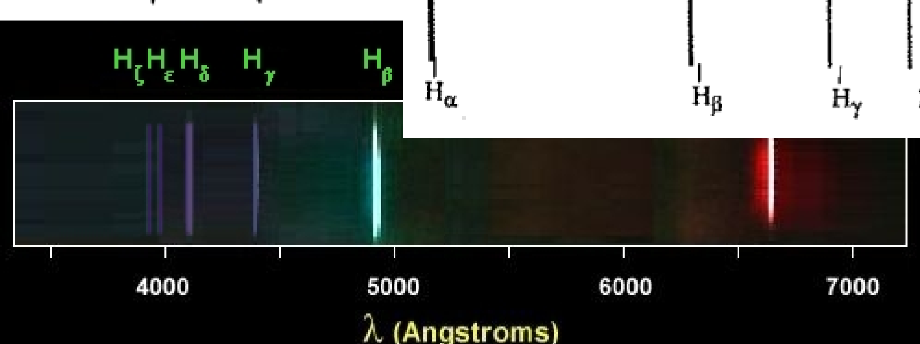


$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_f^2}\right),\quad n_i<n_f$$

$$E_n=-\frac{Ry}{n^2}\,\mathrm{eV},\quad E_n=-\frac{13.6}{n^2}\,\mathrm{eV}$$

$$E_\gamma=\mathrm{Ry}\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_f^2}\right)=\frac{hc}{\lambda}=hf$$





- **Para todas las series hay una longitud de onda mínima, a partir de la cuál no hay líneas separadas**
- **Disminuye λ, también lo hace intensidad de la línea**

Niveles de energía

- Bohr propone: $E = \dfrac{hc}{\lambda}$
  - espectro de emisión → emisión con energías específicas
  - espectro de absorción → captura con energías específicas
- Cada átomo tiene un conjunto de energías específicas
- **Un átomo hará una transición de un nivel de energía E_i a otro E_f tal que $E_i > E_f$ emitiendo un fotón con energía igual a la diferencia de energía entre los niveles**

$$\boxed{E_\gamma = E_i - E_f = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_n = -\frac{13.6}{n^2}\,\mathrm{eV}}$$

- **Y viceversa, absorbiendo un fotón la transición es $E_i > E_f$**

Hasta aquí

- Modelo “planetario” del átomo (Rutherford): la carga positiva está concentrada en una región pequeña del centro, los electrones orbitan en torno al núcleo
- Explica los experimentos de dispersión, pero el átomo es inestable: pérdidas de energía de cargas aceleradas
- Hacia el modelo atómico de Bohr:
  - La observación de líneas de emisión y absorción se explican como transiciones entre niveles de energía
  - Los estados atómicos tienen energías específicas: esas y sólo esas

El átomo de Bohr

- Los átomos tienen estados de energía definidos:

$$E_n = -\frac{Ry}{n^2}\,\mathrm{eV}$$

- Los electrones de los átomos sólo pueden ocupar órbitas permitidas. Si están allí, no emiten radiación
- Una transición atómica se da cuando un electrón pasa de una órbita estable a otra órbita estable
- Cuando hay una transición, se emite (o se absorbe) un fotón con energía igual a la diferencia de energía entre esos niveles

$$\frac{h\,c}{\lambda} = E_i - E_f$$

Cuantización del momento angular

- **Bohr propone: el momento angular está cuantizado**, sólo se da en múltiplos enteros de h/2π

$$L = mvr \rightarrow L = n\left(\frac{h}{2\,pi}\right), \quad \hbar = \frac{h}{2\,\pi} \rightarrow \boxed{L = n\,\hbar}$$

Cuantización de Bohr-Sommerfeld

- Sólo las órbitas que verifican esta relación son estables:

$$L_n = m_e v_n r_n = n\,\hbar$$

n es el número cuántico principal

- Con lo cual obtenemos (ver filmina 9):

$$r_n = \frac{4\,\pi\,\epsilon_0\,\hbar^2}{m\,e^2}\,n^2 \rightarrow r_n = a_0\,n^2 \qquad v_n = \left(\frac{e^2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,\hbar}\right)\frac{1}{n}$$

Algunas cuentas para obtener r_n y v_n

$$\Rightarrow L_n = m v_n r_n = \hbar n \Rightarrow m^2 v_n^2 r_n^2 = \hbar^2 n^2$$

pero $v_n^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r_n}$

reemplazando:

$$m^{\cancel{2}} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cancel{m} \cancel{r_n}} r_n^{\cancel{2}} = \hbar^2 n^2$$

$$\Rightarrow \boxed{r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} n^2}$$

radio de Bohr

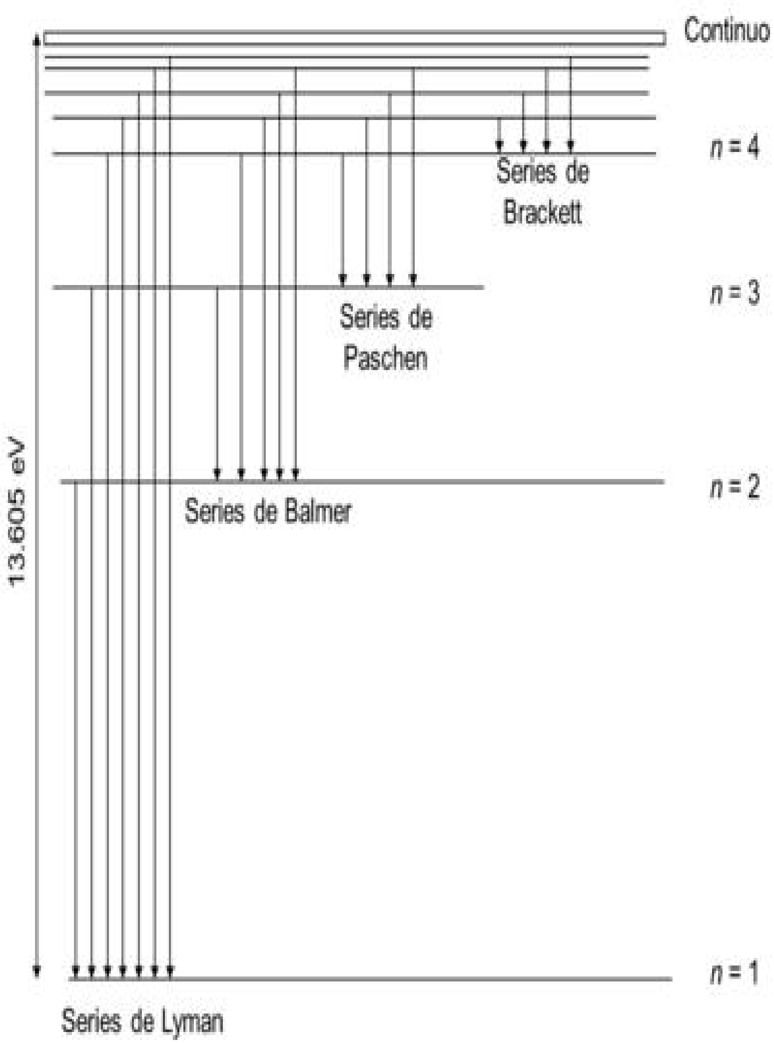
Si $n=1 \Rightarrow$ $\boxed{r_n = \dfrac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} = 5{,}1\times10^{-11}\,\mathrm{m} \equiv a_0}$

y luego

$$v_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cancel{m} \dfrac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{\cancel{m} e^2}} = \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_n = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)\hbar} \frac{1}{n}}$$

Entonces la Energía



Energías.

Cinética $K_n = \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar}\frac{1}{n}\right)^2$

$$\Rightarrow K_n = \frac{1}{2} m \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}$$

Potencial: $E_{e\bar{n}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m e^2}}$

$$\Rightarrow E_{en} = -\frac{m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = -\frac{m e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}\frac{1}{n^2}}$$

¿Cuánto vale $\frac{m e^4}{2(4\pi\epsilon_0)\hbar^2} \stackrel{?}{=} 13.6$ eV

$$\Rightarrow \boxed{E_n = -\frac{E_1}{n^2}} \quad \text{y} \quad E_1 = \frac{m e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 13.6 \text{ eV}$$

Entonces los niveles de Energía

- El modelo de Bohr explica los espectros:

$$E_n = -\underbrace{\left(\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2}\right)}_{E_1=13.6\,\mathrm{eV}}\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \boxed{E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{13.6\,\mathrm{eV}}{n^2}}$$

- El momento angular está cuantizado, en múltiplos enteros de $h/2\pi$.
- Ionizar al átomo → $n_i=1$ ($E_1=-13.6$ eV) → n_f=infinito ($Ef=0$)

$$E_{\text{ionización}} = 0 - (-13.6)\,\mathrm{eV} = 13.6\,\mathrm{eV}$$

Último ingrediente: De Broglie

- De la relatividad especial:

$$\boxed{E^2=m^2c^4+p^2c^2}$$ luego para un **fotón** $E=pc$

$$p=\frac{E}{c}\rightarrow p=\frac{hc}{\lambda c}\rightarrow p=\frac{h}{\lambda}, \text{ o bien } \boxed{\lambda=\frac{h}{p}}$$

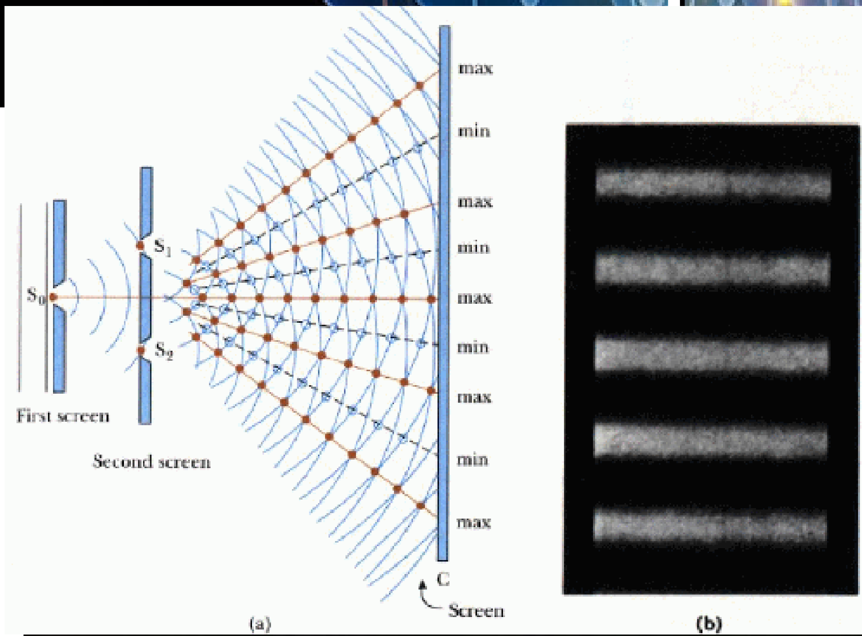
- De Broglie plantea que esta expresión es general:

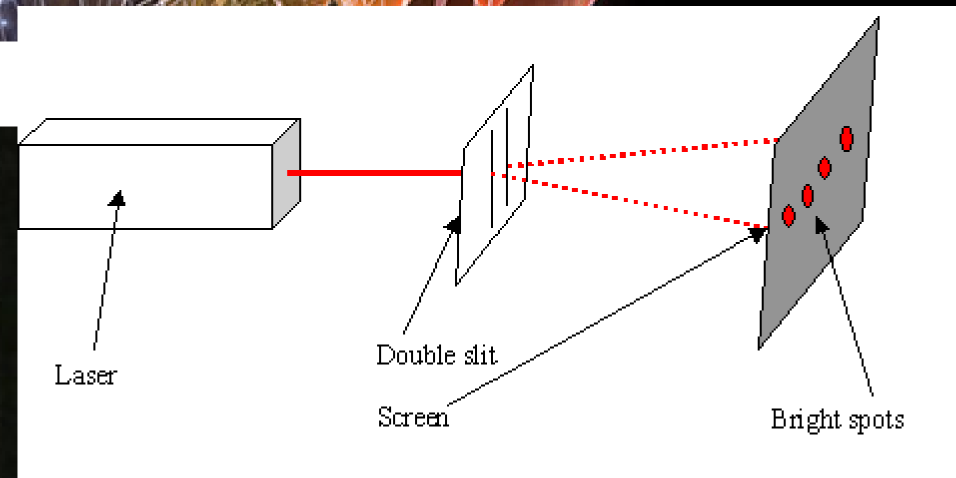
"Toda la materia presenta características tanto ondulatorias como corpusculares comportándose de uno u otro modo dependiendo del experimento específico"

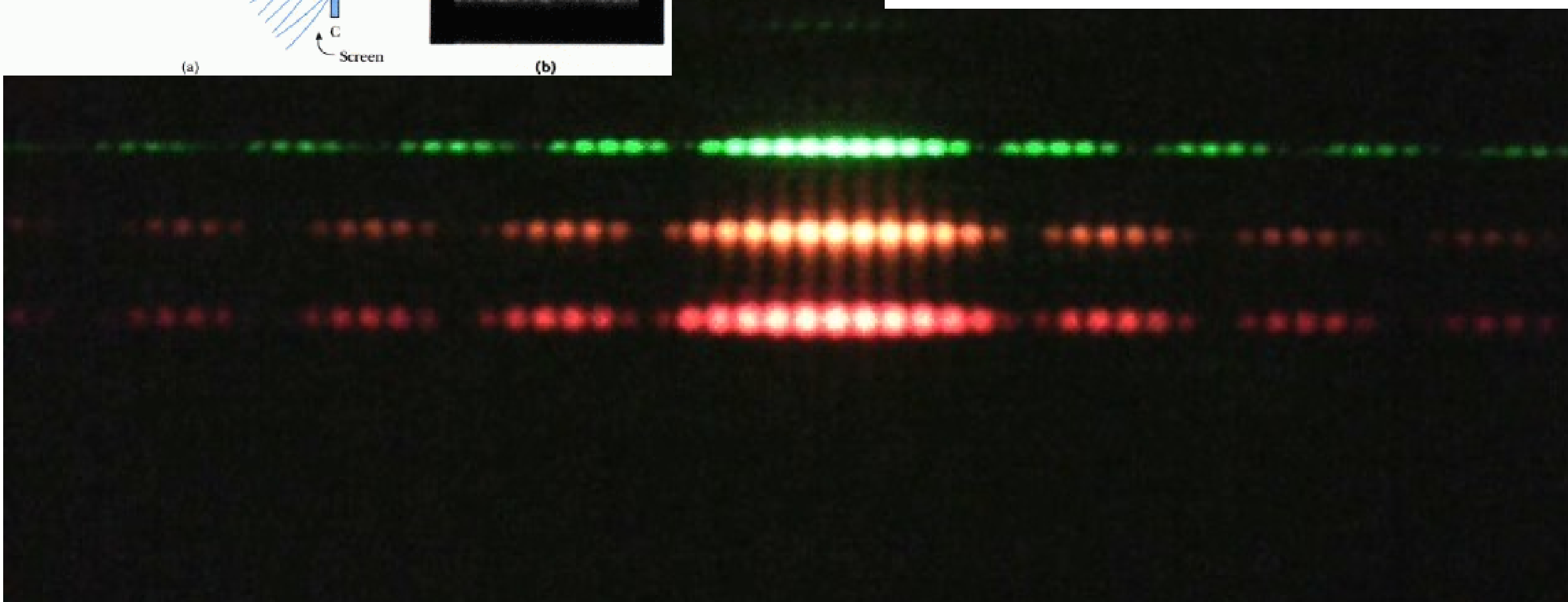
$$\boxed{\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}}$$

Hipótesis de De Broglie

Ondas o partículas: doble rendija con láser







Doble rendija con electrones (¡sólo hay un electrón por vez!)

¡Los electrones se comportan como ondas!

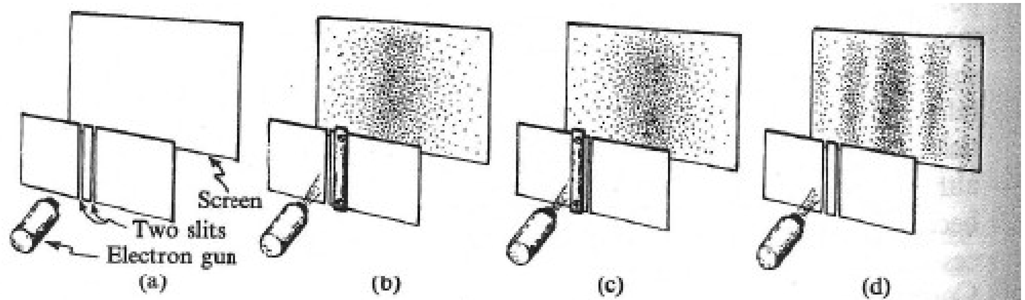
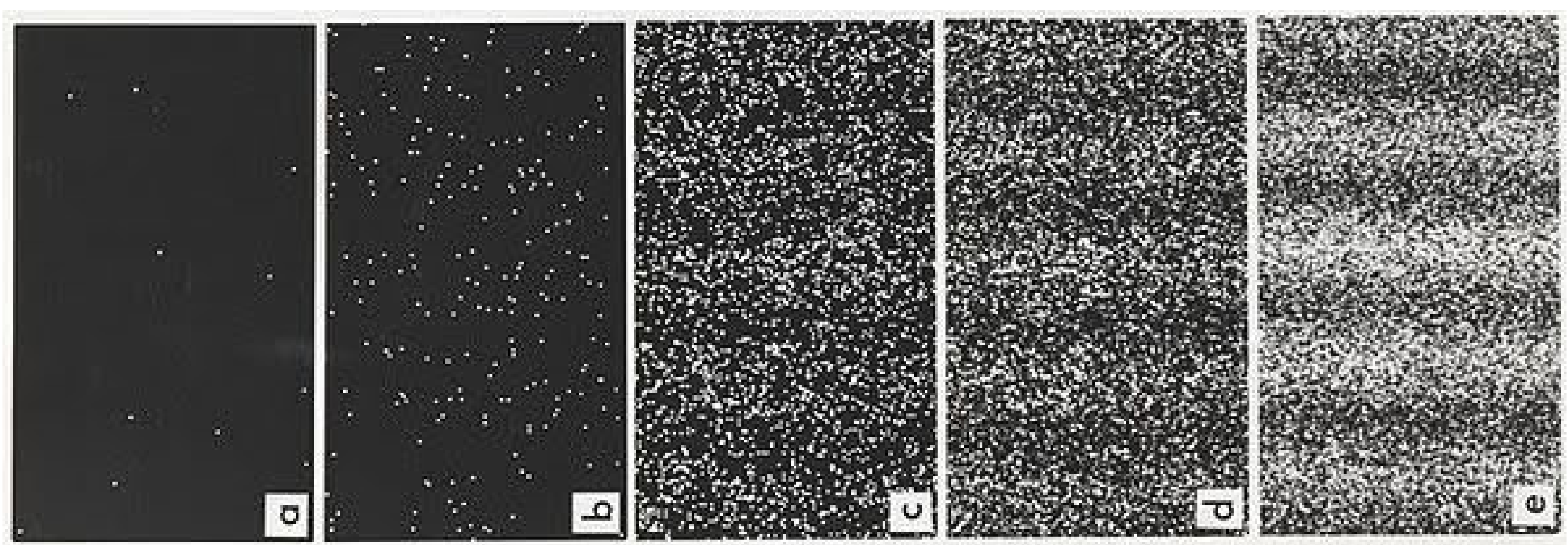


Fig. 21.4 (a) Arrangement for the two-slit experiment. One electron is emitted at a time, aimed at the screen through the pair of slits. (b) Pattern on the screen when the right-hand slit is covered. (c) The same, when the left-hand slit is covered. (d) Interference occurs when both slits are open. Some regions on the screen cannot now be reached despite the fact that they can be with just one or the other slit open.



Longitud de onda del electrón

- Pelota de golf, v = 30 m/s:

$$\lambda_g = \frac{h}{p_g} = \frac{h}{m_g v} \rightarrow \lambda_e = 4.8 \times 10^{-34}\, m$$

- Electrón, v = 10^7 m/s:

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e v} \rightarrow \lambda_e = 7.3 \times 10^{-11}\, m$$

- Electrón átomo Rutherford, v_1= 2.2 x 10^6 m/s

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e v} \rightarrow \lambda_e = 0.33\,\mathrm{nm},\ \mathrm{pero}\ 2\pi r_1 = 0.33\,\mathrm{nm}\ (!!!!)$$

Relación: órbitas estables de Bohr y De Broglie

Relación entre long. de onda y órbitas estables

recordemos $v_n = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)\hbar}\frac{1}{n}$ y $r_n = \frac{(4\pi\epsilon_0)\hbar^2}{m e^2} n^2$

$\Rightarrow$ De Broglie: $\lambda_n = \frac{h}{m\, v_n} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{2\pi}\frac{h}{m v_n} \Rightarrow$

$\lambda_n = \frac{2\pi\hbar}{m v_n}$. Reemplazando v_n:

$$\lambda_n = \frac{2\pi\hbar\,(4\pi\epsilon_0)\,\hbar\, n}{m e^2} \Rightarrow n\lambda_n = 2\pi \overbrace{\frac{(4\pi\epsilon_0)\hbar^2 n^2}{m e^2}}^{r_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{n\lambda_n = 2\pi\, r_n}$$

Las órbitas estables corresponden a aquellas donde entra un número entero de long. de onda!

y además

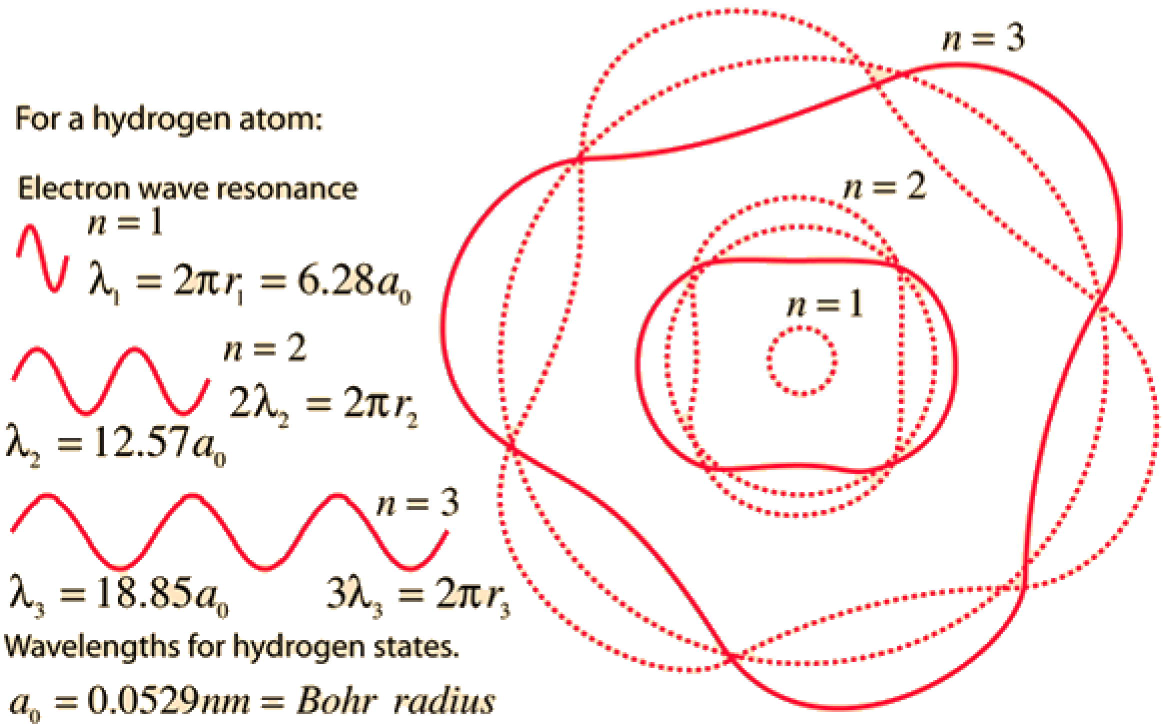
$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n}}$$

Relación: órbitas estables de Bohr y De Broglie

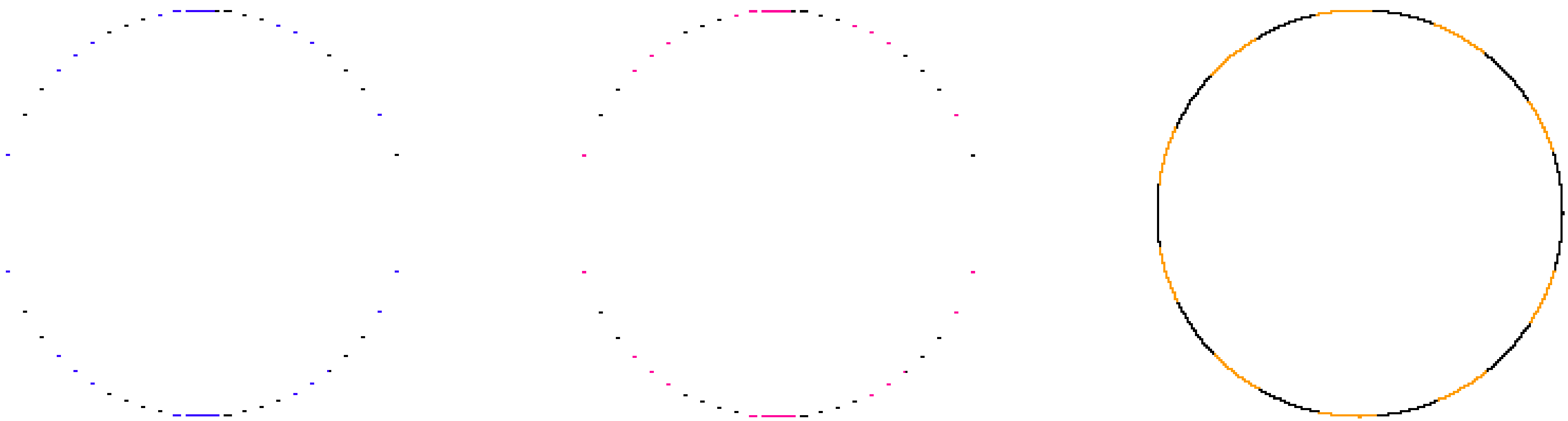
- **órbitas estables → número entero de long. de onda**

$$\boxed{n\lambda_n = 2\pi r_n} \quad \rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n}$$

- órbitas estables → estados estacionarios de las ondas



Órbitas → estados estacionarias



- Órbitas n=1, n=2, n=3

$$\lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n} \rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi a_0 n^2}{n} \rightarrow \lambda_n = 2\pi a_0 n$$

$$\lambda_n = (0{,}332\,n)\ \text{nm} = 0{,}332\ \text{nm},\ 0{,}665\ \text{nm},\ 0{,}998\ \text{nm},\ldots$$

Principio de correspondencia

- Bohr (1923): "Cuánto mayor es el número cuántico (*n*), la física cuántica se parece más a la física clásica"
(Esto llevó a Bohr a establecer la cuantización de *L*)