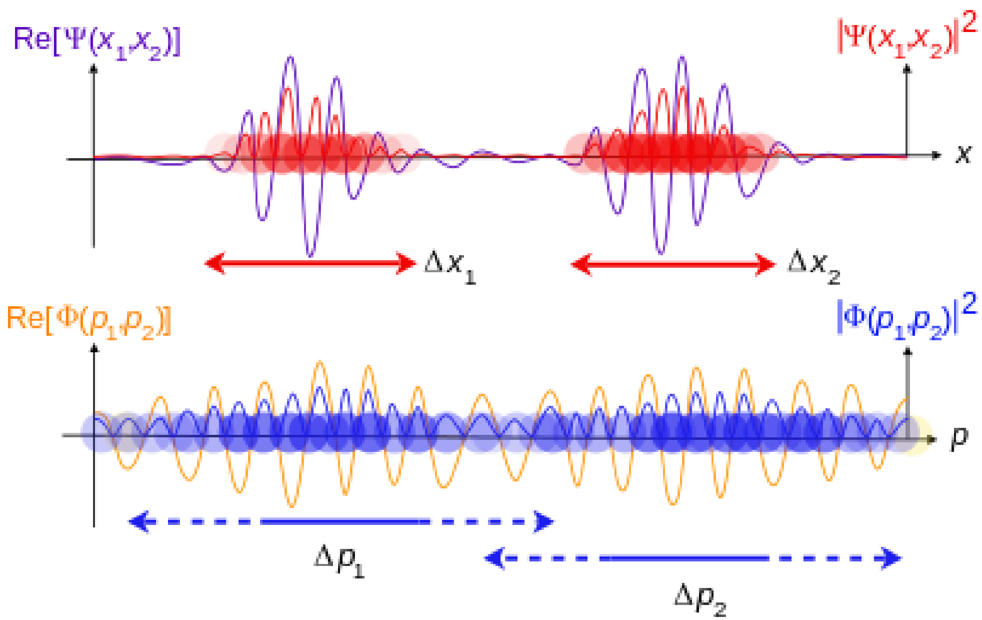
Universidad Nacional de Río Negro
Física Moderna A - 2017

- **Unidad** 03 – Principios de la MC
- **Clase** 8/27(U03C01)
- **Fecha** 11 Abril 2017
- **Cont** Repaso de ondas, partícula en caja I
- **Cátedra** Asorey
- **Web**

https://github.com/asoreyh/unrn-moderna-a

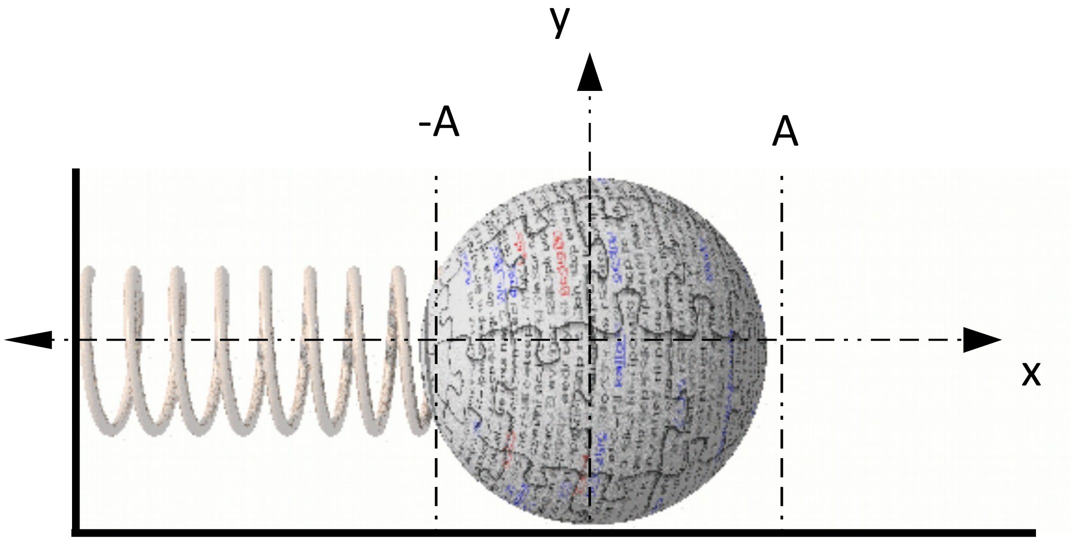
"*Los átomos se comportan como átomos, nada más*".
John Gribbin

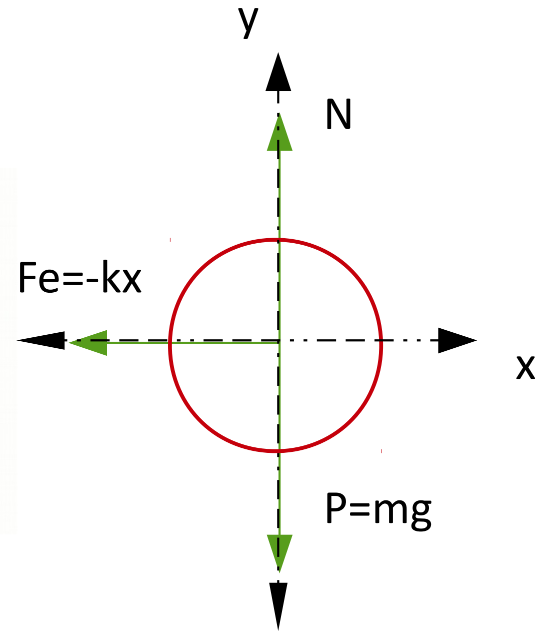
Unidad 3: Los postulados de la mec. Cuántica
Jueves 06 de abril al Jueves 27 de abril



- Heisenberg y el principio de incertidumbre. Los postulados de la mecánica cuántica y la función de onda. Reglas de cuantización. La ecuación de Schrödinger. Operadores. Valores de expectación. Interpretación de la mecánica cuántica. Partícula en una caja.
- *Apéndice matemático: ecuaciones diferenciales simples.*

Movimiento Armónico Simple





El sistema está inicialmente en equilibrio (x,y)=(0,0).
A t=0 la masa m es desplazada a la posición (x,y)=(A,0)
La masa comienza a oscilar. La sumatoria de fuerzas en la dirección y es 0. La ecuación de movimiento es:

$$F_e = m\vec{a}$$

$$-k\,x(t) = m\,a_x(t)$$

$$a_x(t) = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t)$$

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t)}$$

La ecuación de movimiento es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2

Solución de la ecuación de movimiento

- Tenemos una ecuación que relaciona la segunda derivada de una función, con esa función pero multiplicada por una constante negativa:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right) x(t)$$

- Recordando que

$$\frac{d\cos(t)}{dt} = -\sin(t) \Rightarrow \frac{d^2\cos(t)}{dt^2} = -\cos(t)$$

- Proponemos la más general posible: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{d^2\left(A\cos(\omega t+\varphi)\right)}{dt^2} = -\omega^2\left(A\cos(\omega t+\varphi)\right)$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

Concentración

- Entonces, la ecuación de movimiento era:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t)$$

- Y con nuestra solución obtuvimos:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

- Comparando ambas, vemos que x(t) es solución si hacemos

$$\omega^2 = \left(\frac{k}{m}\right) \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

ω es la frecuencia angular del movimiento periódico

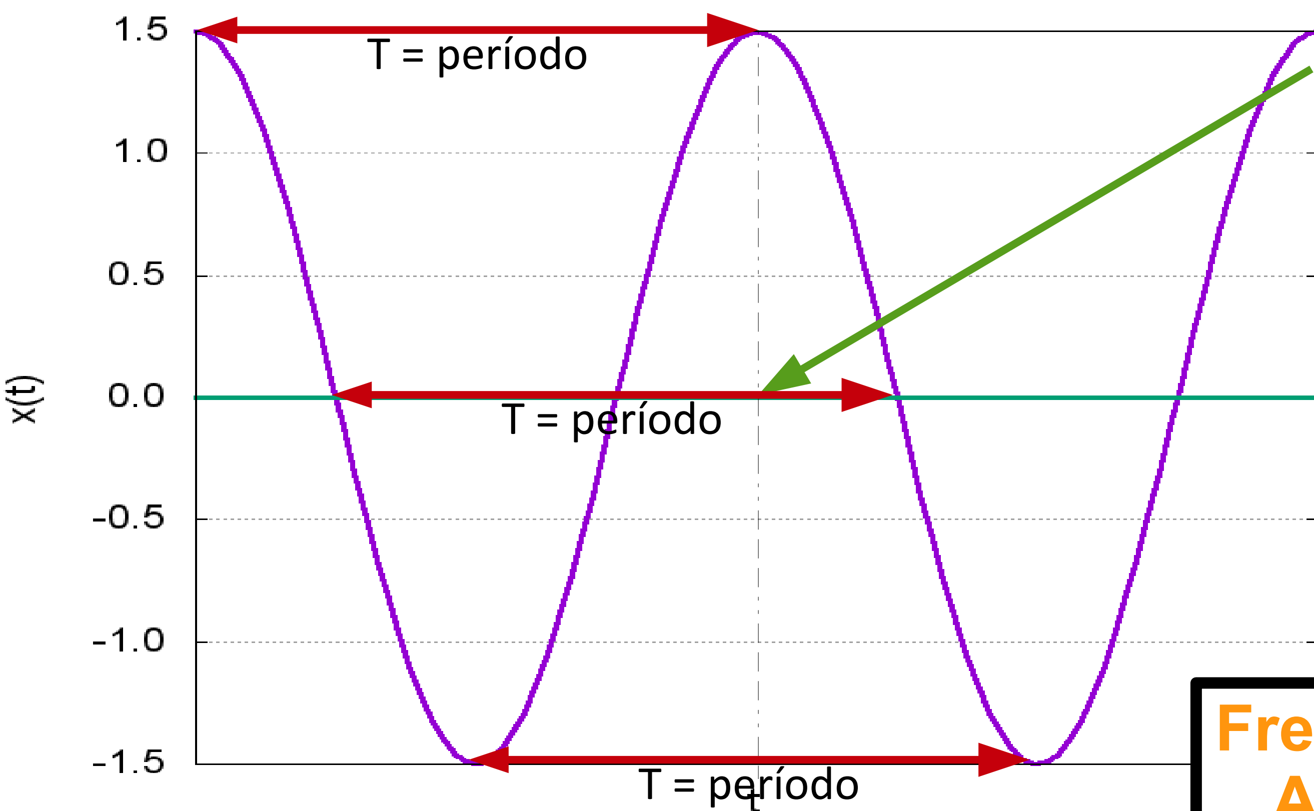
Alto... ¿qué es ω?

- Recordemos la solución a la ecuación de movimiento:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- Esto nos da la posición del cuerpo como f(t)

- Consideremos p. ej: $x(t)=1.5\cos(\omega t)$ (suponemos $\phi=0$):

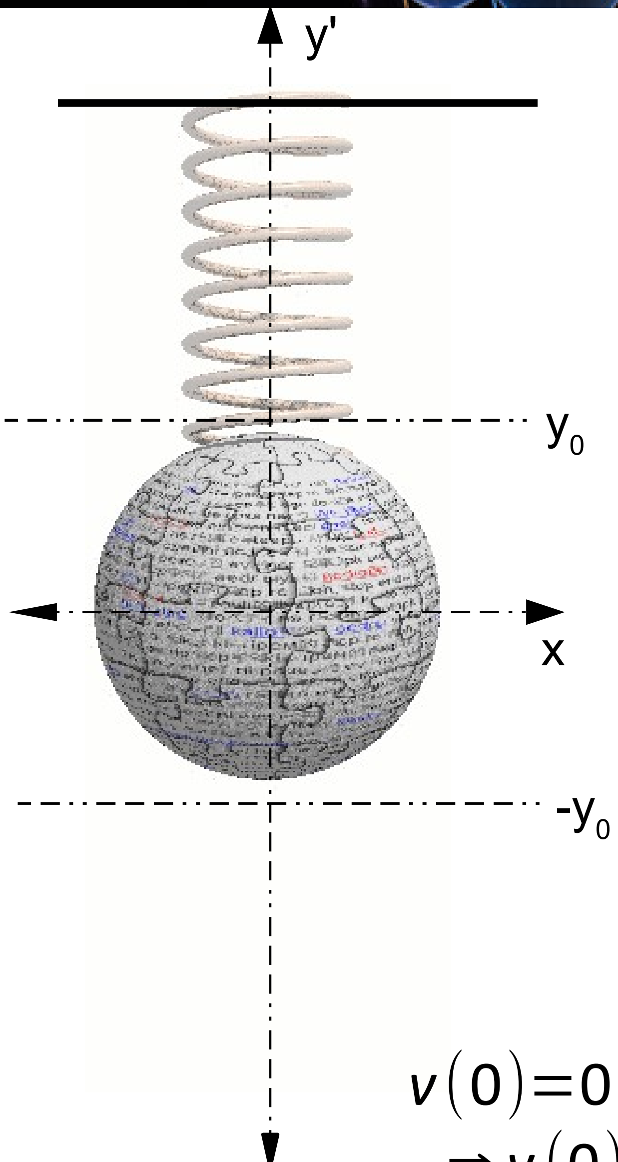


En ese instante, se verifica que t=T y x(T)=1.5, luego:

$$1.5\cos(\omega T) = 1.5$$
$$\cos(\omega T) = 1$$
$$\omega T = 2\pi$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

y como la frecuencia $f = \frac{1}{T}$,

Frecuencia Angular $\boxed{\omega = 2\pi f}$



- En el **instante inicial**, *t=0*, desplazamos la masa *m* de su posición de equilibro a:

$$t=0:\; y(0)=y_0,\; v(0)=0, \text{y recordar}, \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Recordando las sol. a la ec. de mov:

posición: $y(t) \rightarrow y(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

velocidad: $v(t)=\frac{d}{dt}y(t)\rightarrow v(t)=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

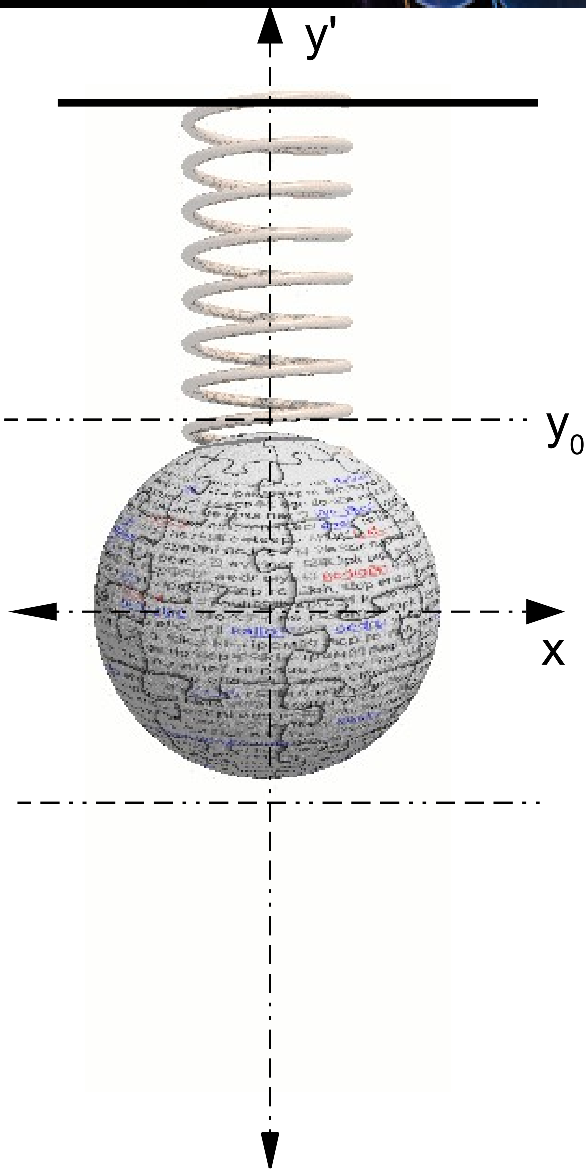
aceleración: $a(t)=\frac{d^2}{dt^2}y(t)\rightarrow a(t)=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$

- Con lo cual, de las **condiciones iniciales**:

$$v(0)=0\Rightarrow -A\omega\sin(\varphi)=0\rightarrow\varphi=0$$
$$\Rightarrow y(0)=A\cos(\varphi)=y_0\rightarrow A=y_0$$

$$y(t)=y_0\cos(\omega t)$$
$$v(t)=-y_0\omega\sin(\omega t)$$
$$a(t)=-y_0\omega^2\cos(\omega t)$$

Un ejemplo realista



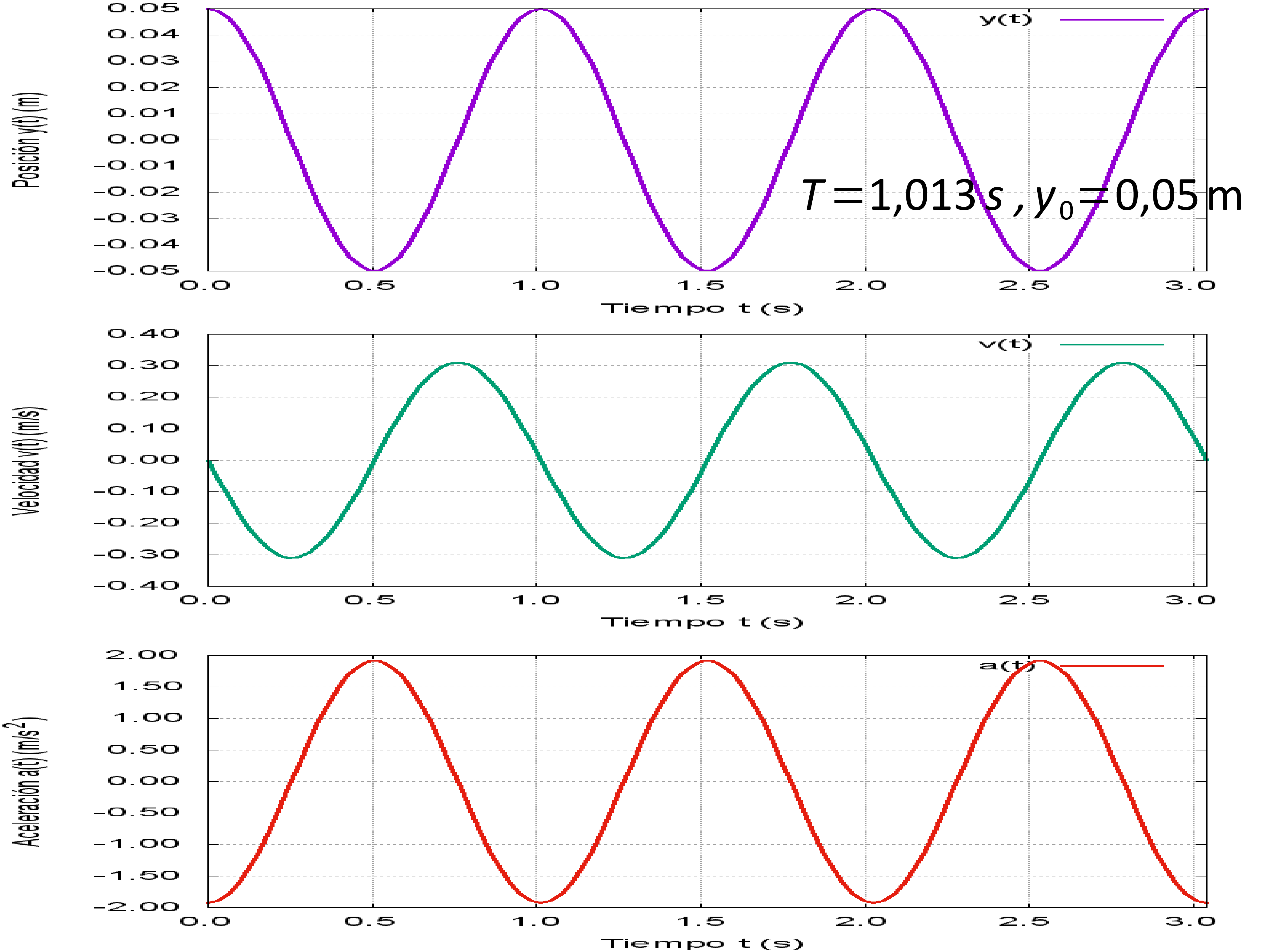
- Pongamos algunos números:

$$k = 5\,\mathrm{N\ m}^{-1} \text{ y } m = 0{,}13\,\mathrm{kg}$$
$$\Rightarrow \omega = 6{,}202\,\mathrm{rad\ s}^{-1} \text{ y } T = 1{,}013\,s$$
$$y_0 = 0{,}05\,\mathrm{m}$$

- Y las soluciones de las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{pmatrix} y(t) = 0{,}05\,\mathrm{m}\ \cos(6{,}202\,t) \\ v(t) = -0{,}31\,\mathrm{m/s}\ \sin(6{,}202\,t) \\ a(t) = -1{,}92\,\mathrm{m/s}^2\ \cos(6{,}202\,t) \end{pmatrix}$$

- Gráficos! →



$T = 1{,}013\,s\ ,\ y_0 = 0{,}05\,\mathrm{m}$
y(t)
Posición y(t) (m)
Tiempo t (s)
v(t)
Velocidad v(t) (m/s)
Tiempo t (s)
a(t)
Aceleración a(t) (m/s^2)
Tiempo t (s)

¿y la Energía?

- Sistema conservativo! Entonces:

Notar el uso de la E_p! Estoy en el sistema dónde sólo estudio las variaciones debidas a la energía elástica (y')

$$E_m = E_p + E_k = \text{cte}$$

$$E_m = \frac{1}{2} k\, y^2 + \frac{1}{2} m\, v^2 = \text{cte}$$

- Entonces, recordando lo anterior, cuando t=T se da que:

$$y(T) = y_0 , v(T) = 0$$

- Y luego, en ese instante la energía mecánica vale:

La energía es constante y proporcional a la amplitud al cuadrado

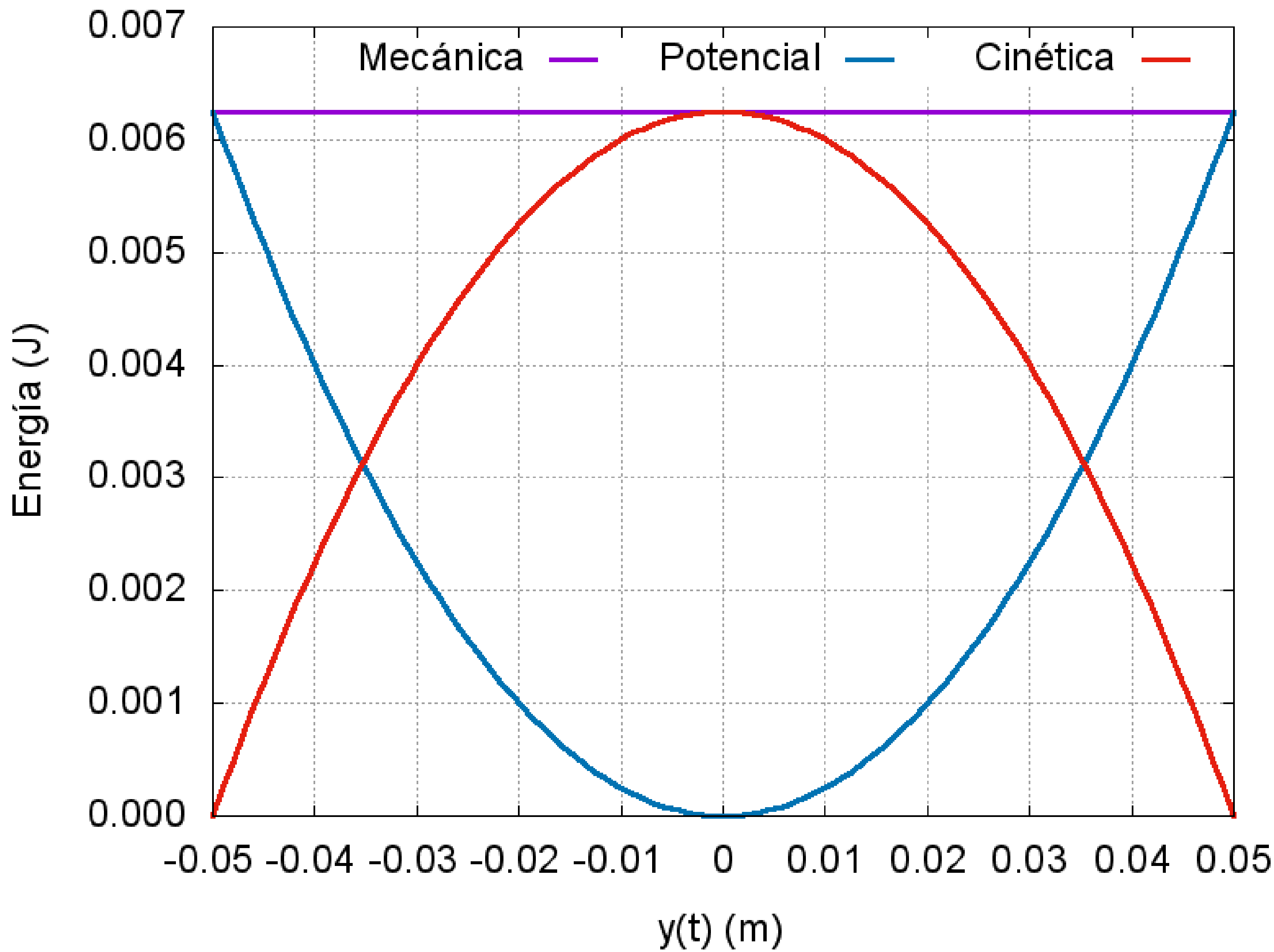
$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k\, y_0^2}$$

- Luego, la energía es proporcional a la amplitud al cuadrado:

$$E_m = \frac{1}{2} k\, y^2 + \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} k\, y_0^2$$

Energía en el sistema

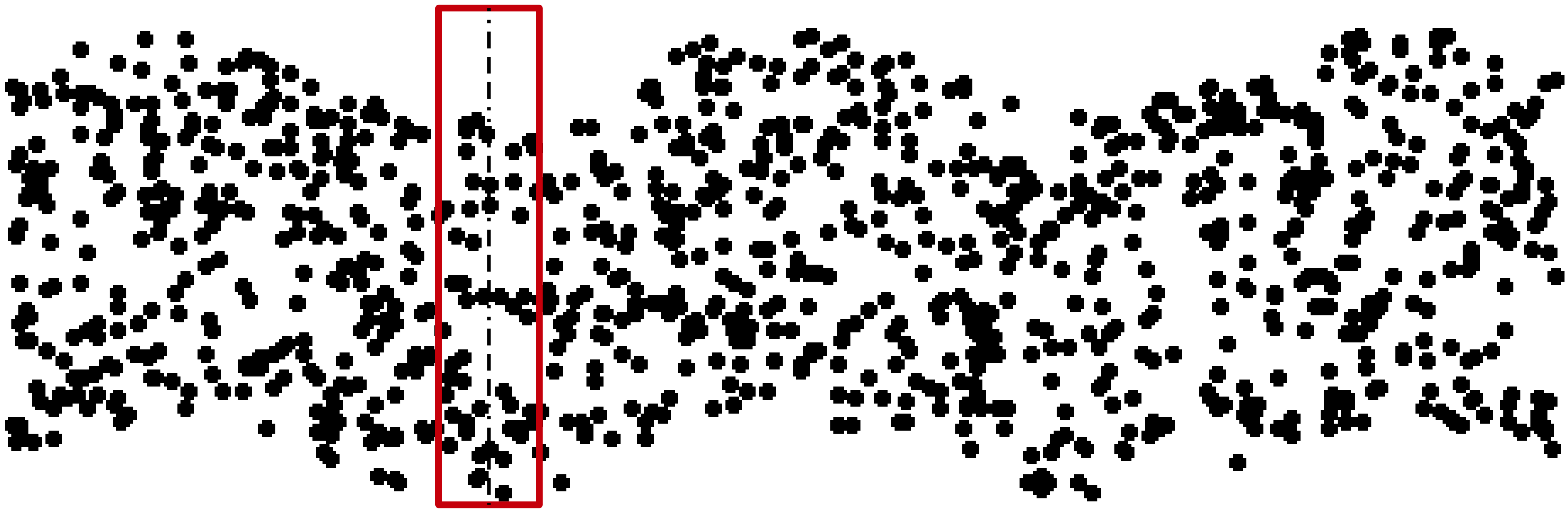
$$E_m = \frac{1}{2} k\, y^2 + \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} k\, y_0^2 ,\ k = 5\, \mathrm{N\ m^{-1}}$$, y_0 = 0,05 m



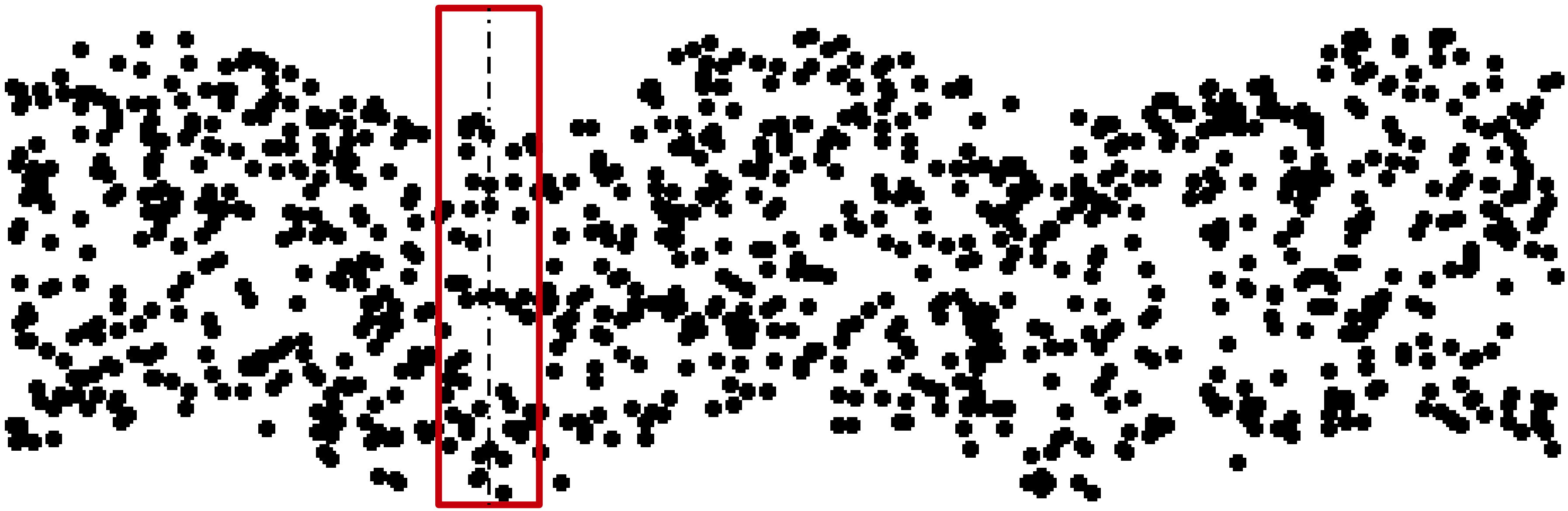
Ondas (recordando)

- **Una onda** es una **perturbación de alguna propiedad de un medio que tiene asociada una transferencia neta de energía** **(¡no dije masa!)**

Onda Mecánica: MAS y Ondas periódicas



- **Cada partícula describe un MAS alrededor de su posición de equilibrio**
- El MAS es perpendicular a la dirección de propagación (transversales) o a lo largo de la dirección de propagación (longitudinales)

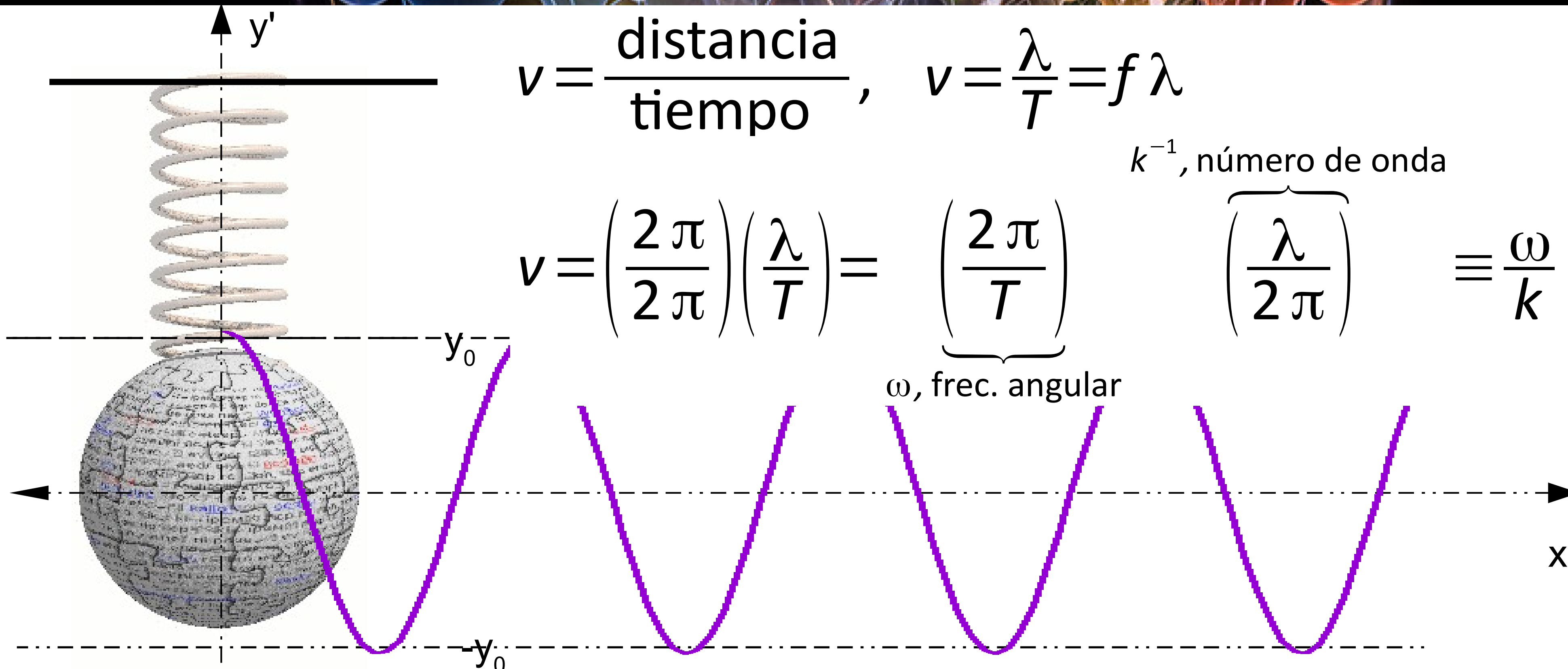


- El movimiento de la onda puede ser descrito por el movimiento de las partículas que la forman
  - **Desplazamiento en la dirección y**
    - Depende de la posición *x*
    - Depende del tiempo *t*

Función de Onda

$$y(x,t)$$

Función de onda

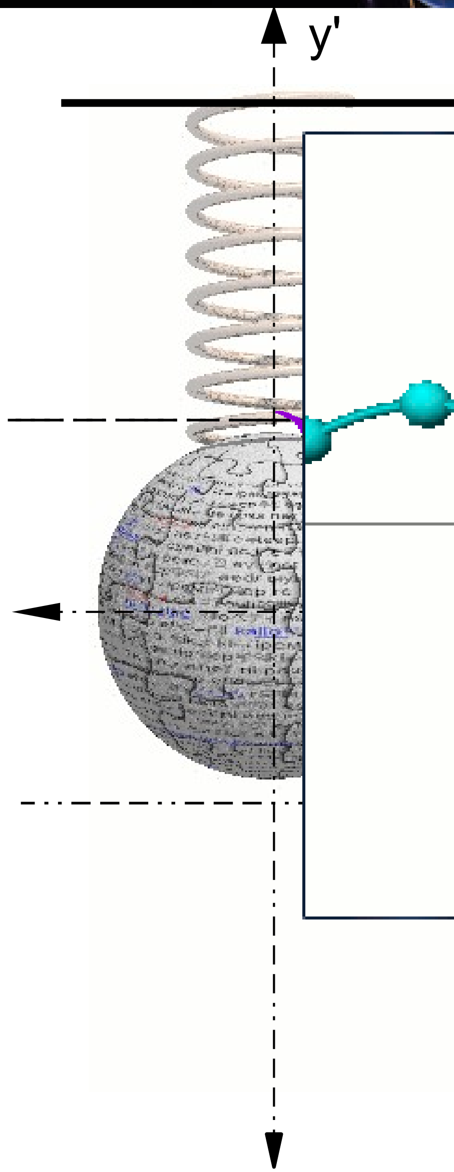


$$v=\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}, \quad v=\frac{\lambda}{T}=f\lambda$$

$$v=\left(\frac{2\pi}{2\pi}\right)\left(\frac{\lambda}{T}\right)=\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T}\right)}_{\omega\text{, frec. angular}}\overbrace{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)}^{k^{-1}\text{, número de onda}}\equiv\frac{\omega}{k}$$

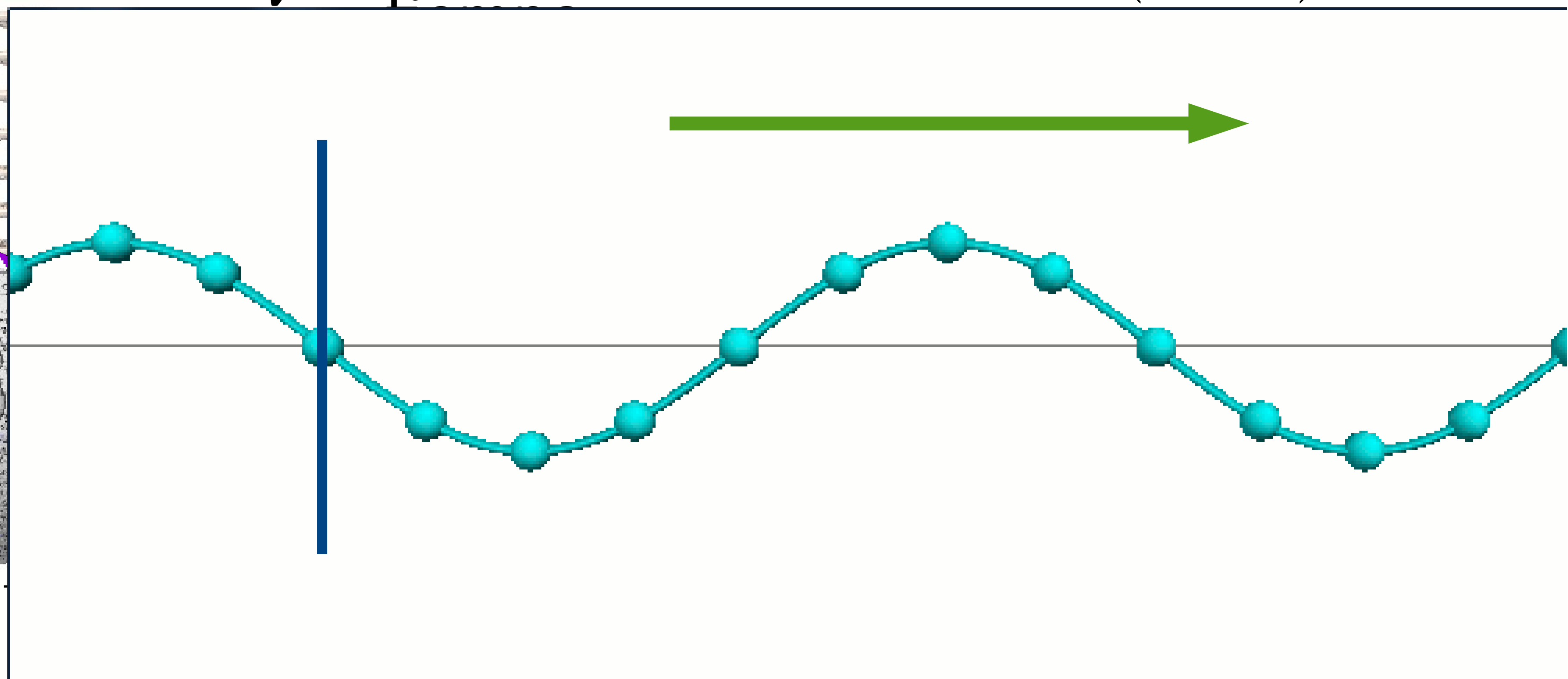
La función de onda nos da el valor de la amplitud de la onda en la posición x a tiempo t $y(x,t)$

Función de onda



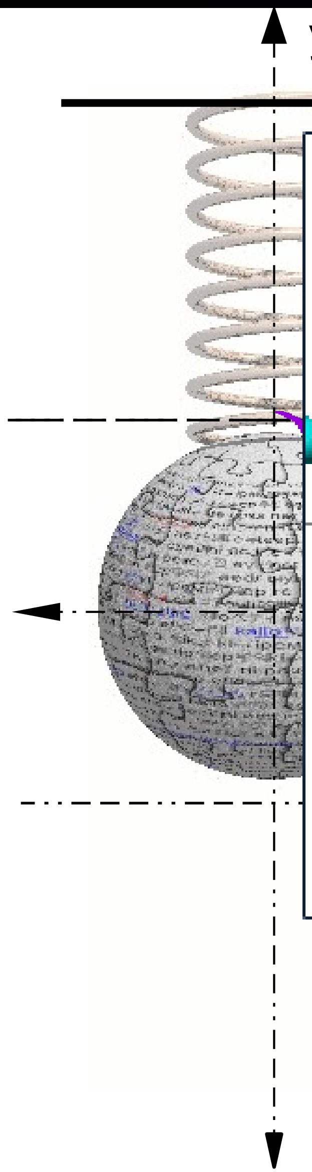
$$v=\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

$$y(x,t)$$



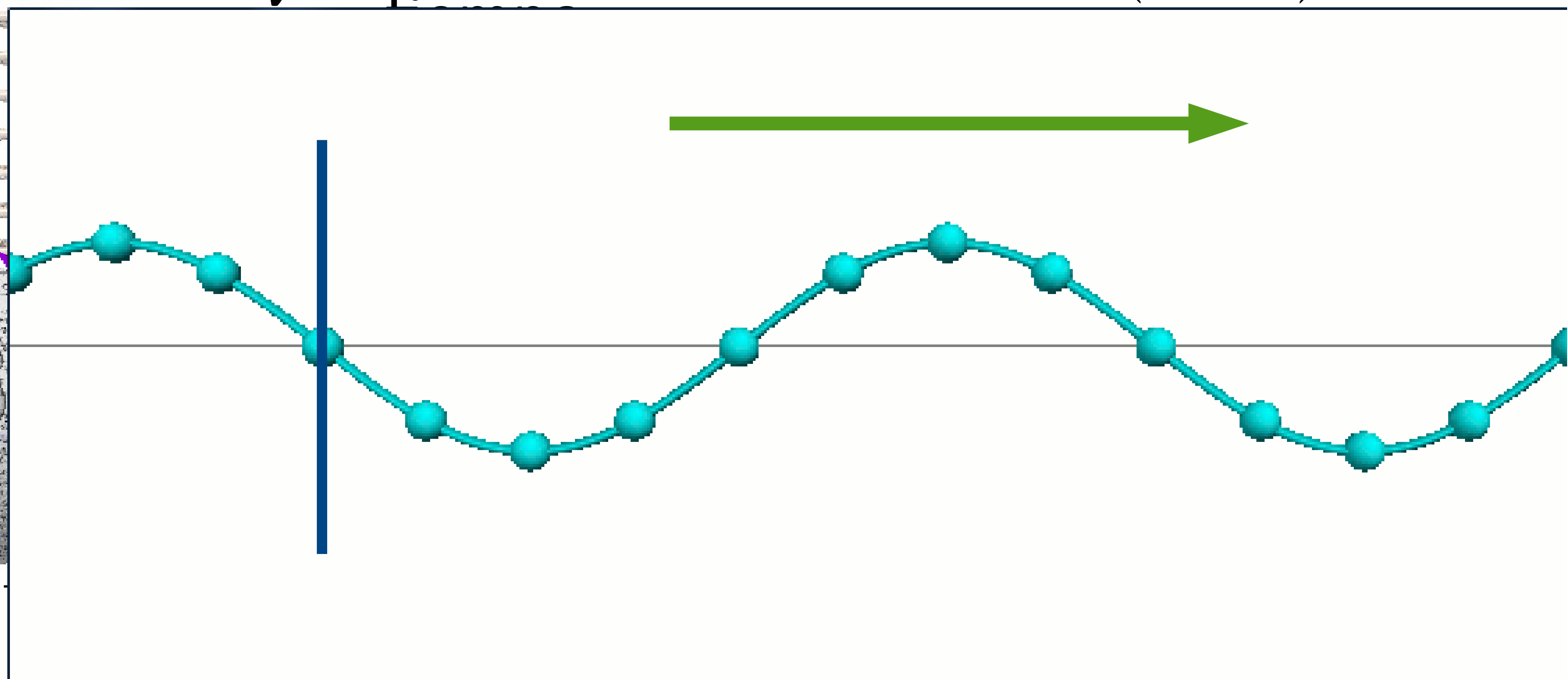
La función de onda nos da el valor de la amplitud de la onda en la posición x a tiempo t

Función de onda



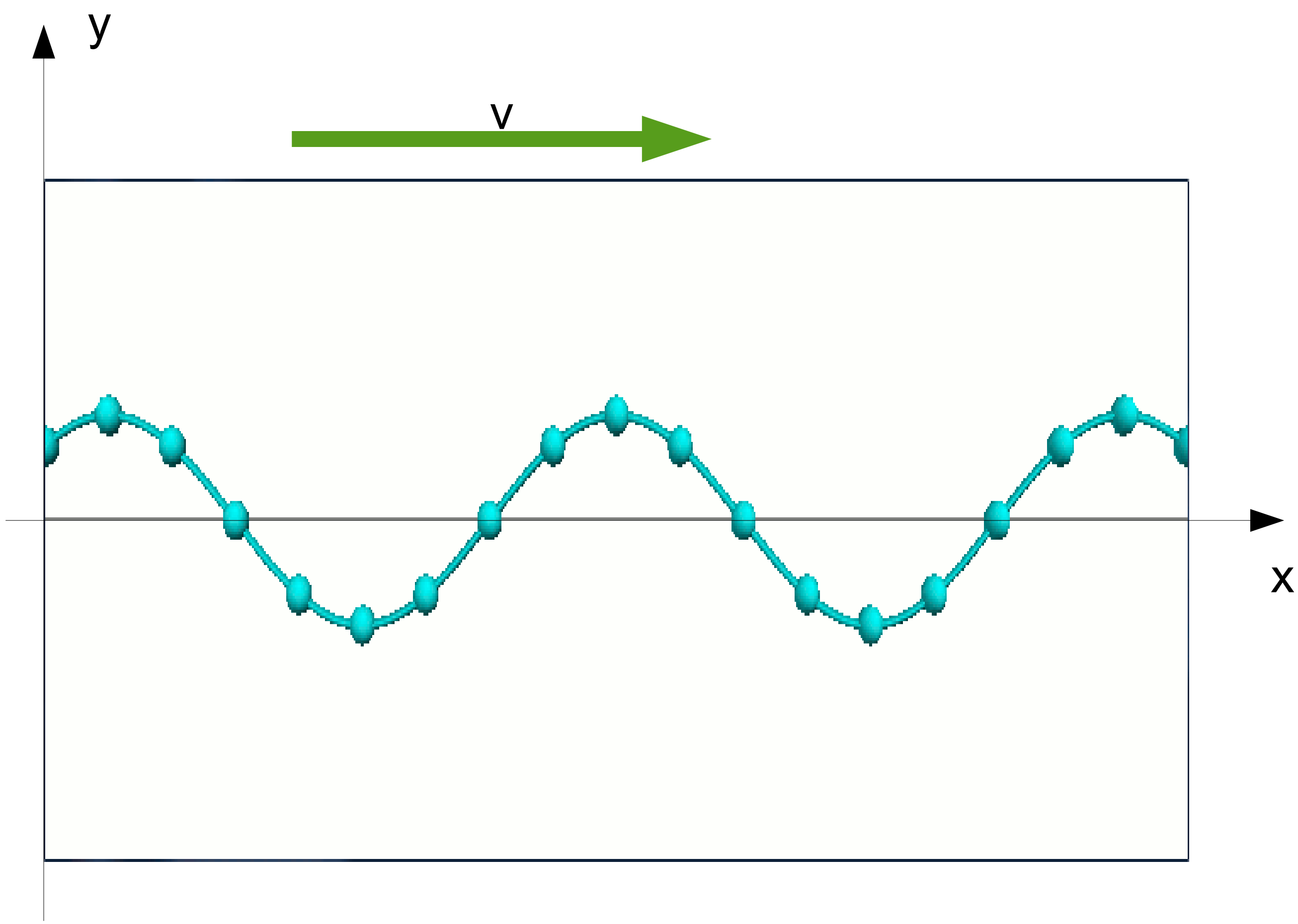
$$v=\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

$$y(x,t)$$



La función de onda nos da el valor de la amplitud de la onda en la posición x a tiempo t

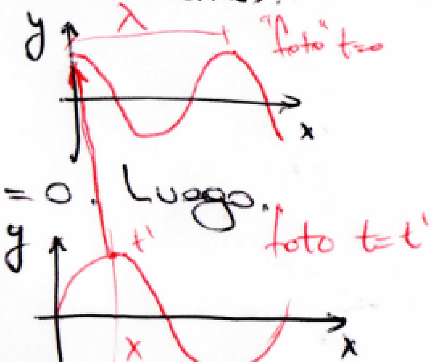
Onda transversal



Desarrollo

Cada punto describe un M.A.S. En $x=0$ tenemos:

$$y(x=0,t) = A\cos(\omega t + \phi)$$



Suponiendo que $t_0=0$ y $x_0=0 \Rightarrow \phi=0$. Luego,

$$y(x=0,t) = A\cos\omega t$$

En algún punto $x>0$, a $t'>t$ la posición de la partícula en x será igual a lo que tenía la partícula en 0 a tiempo t. En general

$$y(x,t') = A\cos(\omega t')$$

¿Cómo relacionar t con t'? → velocidad.

La perturbación avanza con velocidad $v=\Delta x/\Delta t$

y como $x_0=0$. Luego $t'=t+x/v \Rightarrow t=t'-x/v$

Entonces $y(x,t') = A\cos\left(\omega\left(t'-x/v\right)\right)$ y cambiando

t en t' $\Rightarrow$ $y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-x/v\right)\right]$

A

1)03-C01-1

aquí, recordando $v = \omega / k \Rightarrow$.

$$y(x,t) = A \cos\left[\omega t - \frac{\cancel{\omega} x}{\cancel{\omega}/k}\right]$$

$$= A \cos[\omega t - kx]$$

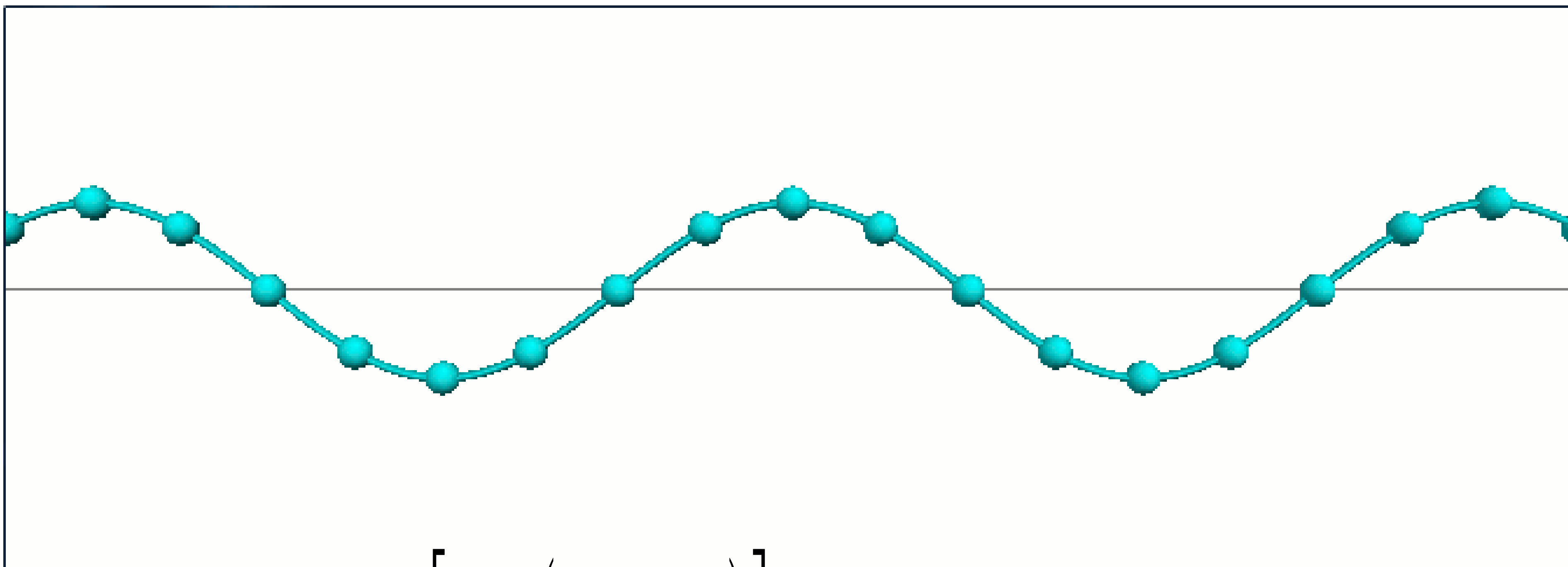
y como $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, sacando (-1) f.c.:

$$\boxed{y(x,t) = A \cos(kx - \omega t)}$$

y dado que $\omega = 2\pi f$ y $k = 2\pi/\lambda$ y $f = 1/T$

$$\boxed{y(x,t) = A \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]}$$

Onda transversal



$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \qquad y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

Ecuación de onda

Sabemos que $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

Entonces $v(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial t} = \omega A \,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$

y luego $a(x,t) = \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \overbrace{A\cos(kx - \omega t)}^{y(x,t)}$

$$\Rightarrow a(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x,t) \Rightarrow y(x,t) = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Lo mismo respecto a x:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-k A \sin(kx - \omega t)\right)$$

$$= -k^2 A\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 y(x,t) \Rightarrow y(x,t) = -\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \qquad (2)$$

De (1) y (2):

$$-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

y como $v = \omega / k \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

ECUACIÓN DE ONDA.

(pero válida en general).

U03-C01-3

En general

- Lo anterior es para ondas (perturbaciones) periódicas
- En general, vamos a notar una función de onda cómo:

Función de onda $\boxed{\Psi(\boldsymbol{r},t)=\Psi(x,y,z,t)}$

- Las funciones de onda son, casi siempre, separables:

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{espacial}}\ \underbrace{\psi(t)}_{\text{temporal}}$$

- Y son soluciones de la ecuación de onda

Ecuación de onda $\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t)=c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)}$

Principio de superposición

- La suma de dos funciones de onda (i.e. soluciones de la ecuación de onda) es también una función de onda:

Si Ψ_1 y Ψ_2 son soluciones de la ecuación de onda,

$\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$ ¿es solución?

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(a\Psi_1 + b\Psi_2\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} a\Psi_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} b\Psi_2$$

$$= a c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_1 + b c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_2 = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a\Psi_1 + b\Psi_2\right) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi}$$

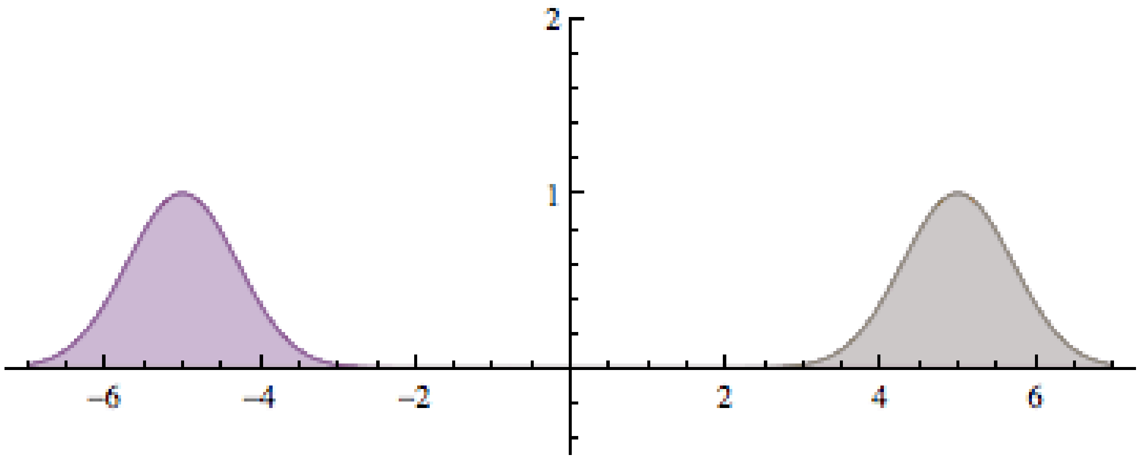
Interferencia

- Dos o más ondas coinciden en la misma región del espacio al mismo tiempo
- La función de onda resultante es la suma de las ondas que interfieren:

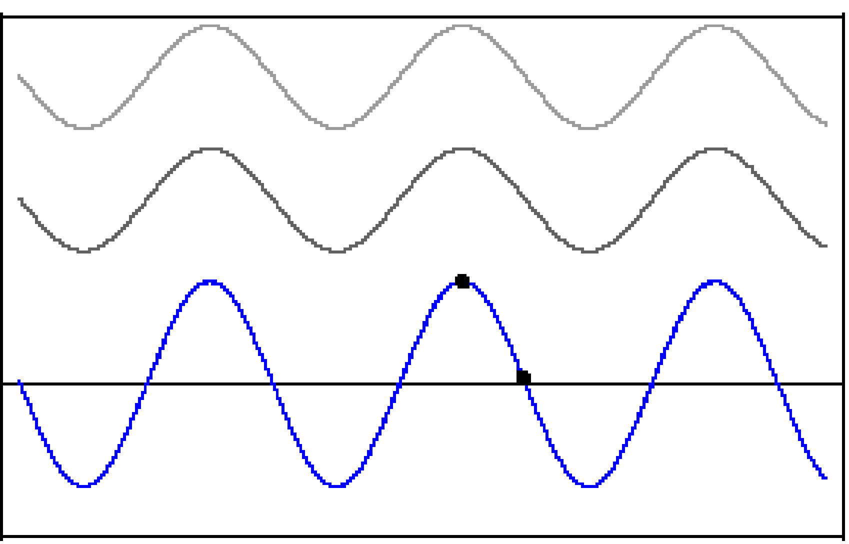
$$\boxed{\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \cdots + \Psi_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \Psi_i}$$

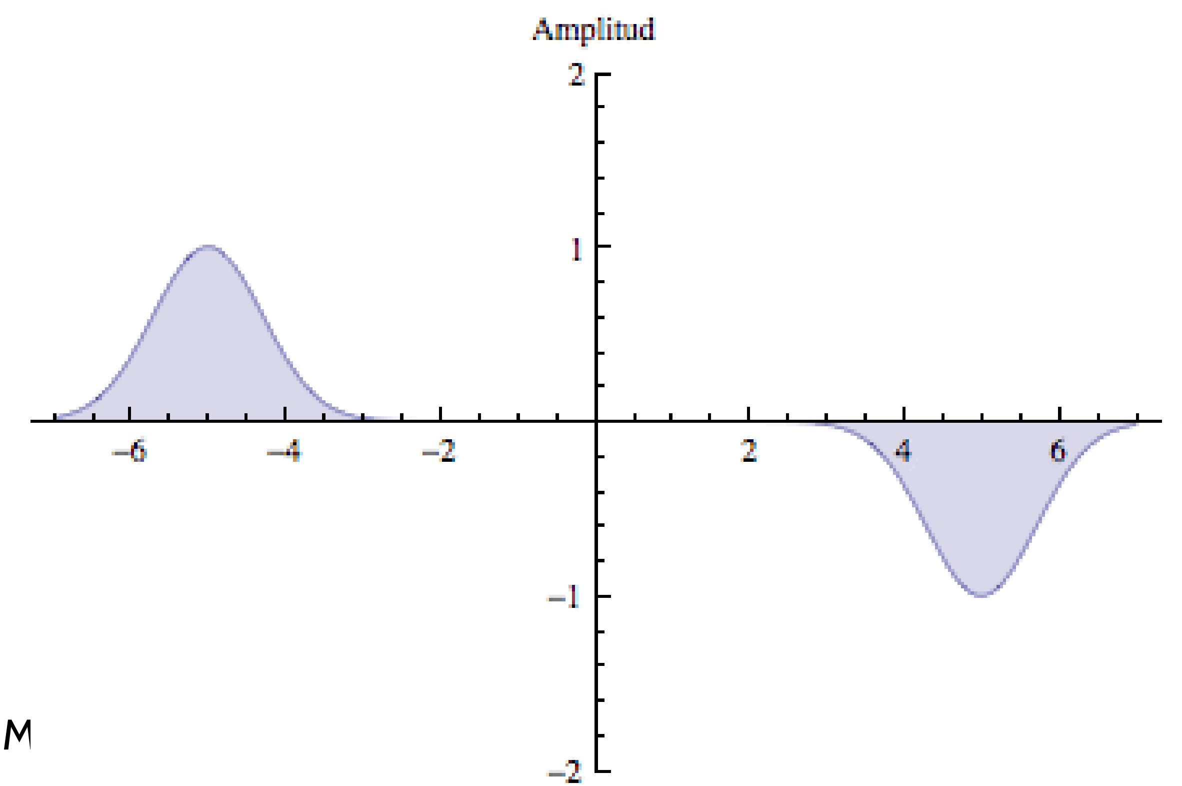
- Ejemplos:
  - Interferencia constructiva, interferencia destructiva,
  - batidos, ondas estacionarias

Interferencia constructiva y destructiva



$$\Psi=\Psi_1+\Psi_2$$

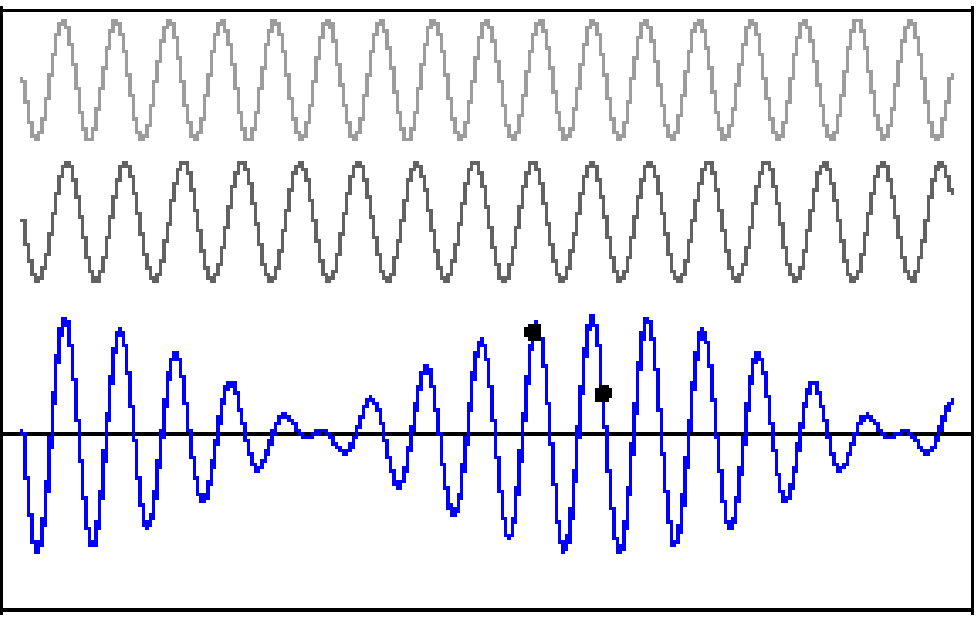




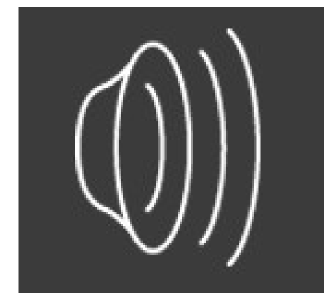
ey - M

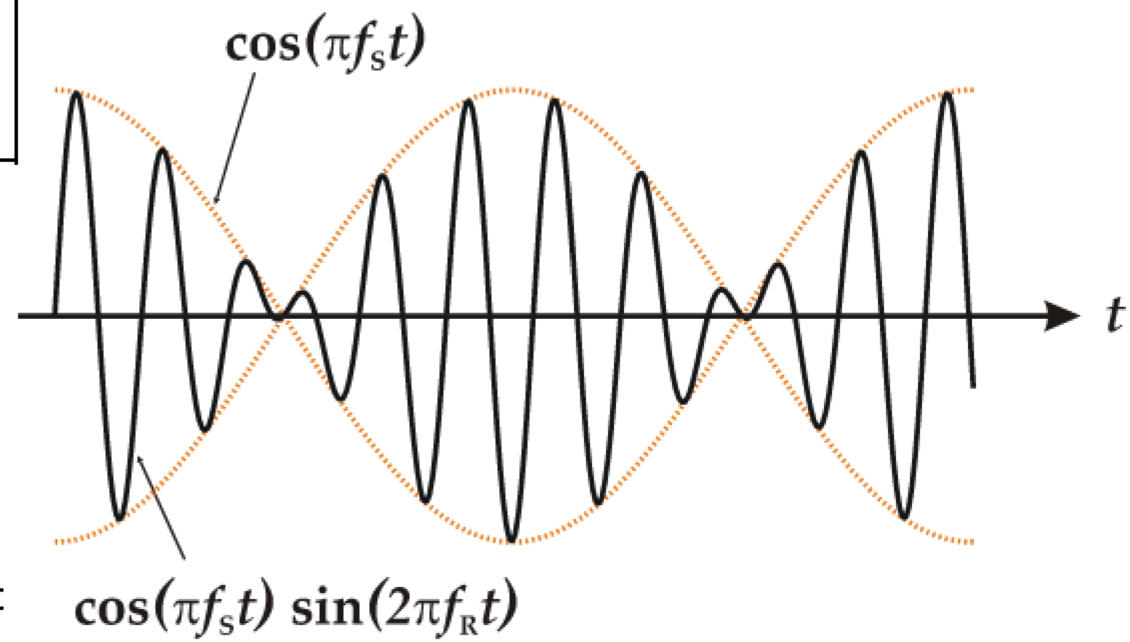
Batido, ondas con frecuencia similar

$$\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2\cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right)$$



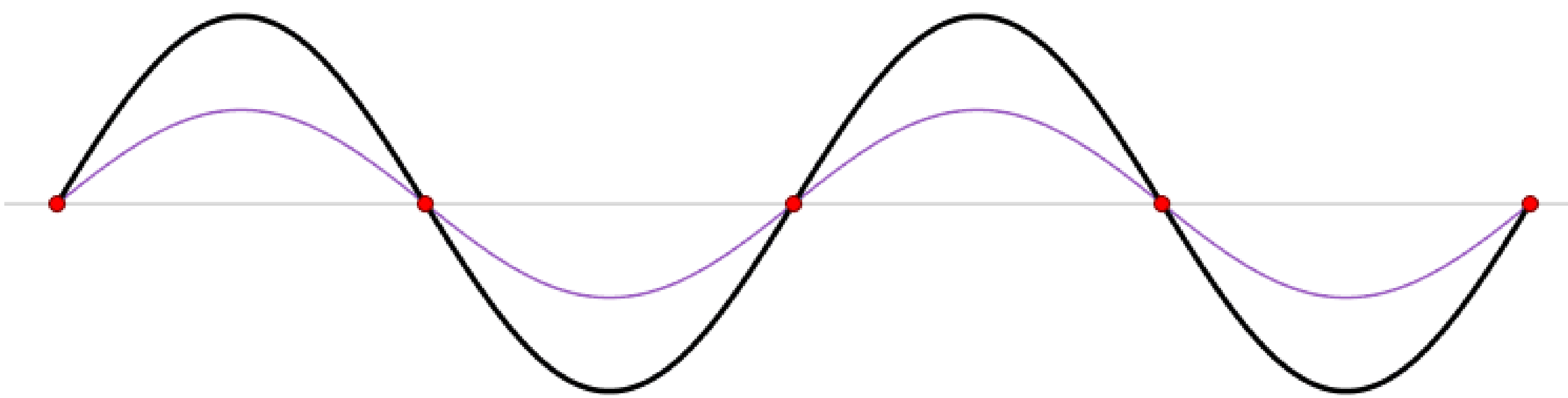
$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$





Ondas estacionarias

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$



- Una **onda estacionaria** se forma por la interferencia de dos ondas de igual frecuencia que se desplazan en sentidos contrarios
- La **amplitud** de la resultante **depende de la posición**:
  - **nodos** (mínimos) y **antinodos** (máximos)

Ondas estacionarias

$$\Psi_1(x,t) = A \sin(kx+\omega t) \qquad \Psi_2(x,t) = A \sin(kx-\omega t)$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = \Psi_1 + \Psi_2 = A\left[\sin(kx+\omega t) + \sin(kx-\omega t)\right]$$

Identidad: $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \Rightarrow$.

$$\Psi = A\left[2\sin\left(\frac{kx + \cancel{\omega t} + kx - \cancel{\omega t}}{2}\right) \cos\left(\cancel{kx} + \omega t - \cancel{kx} + \omega t\right)\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi(x,t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)}$$

Amplitud modula: $A'(x) = 2A \sin(kx)$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi(x,t) = A'(x) \cos \omega t}$$

Nodos: $A'(x_0) = 0 \Rightarrow \sin(kx_0) = 0 \Rightarrow kx_0 = n\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{n\pi}{k} \quad y \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow x_0 = \frac{n\cancel{\pi}\lambda}{2\cancel{\pi}} \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{\lambda}{2} n} \quad x_0 = 0, \pm\frac{\lambda}{2}, \pm\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda$$

U03-C01-4

Ondas estacionarias

- El resultado es una onda simple, no-viajera (estacionaria) cuya amplitud está modulada en la posición

$$\Psi(x,t)=\underbrace{2A\sin(kx)}_{A'(x)}\cos(\omega t)$$

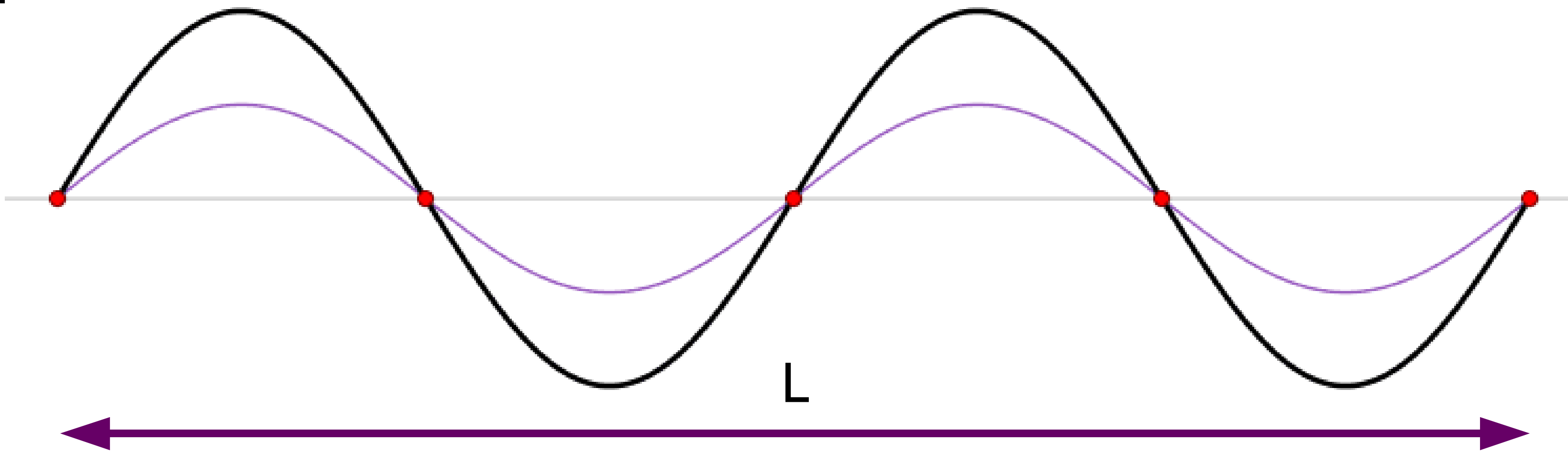
$$\Psi(x,t)=A'(x)\cos(\omega t)$$

- Nodos → ceros de *A'(x)*, antinodos → máximos de *A'(x)*

$$A'(x_0)=0 \Rightarrow 2A\sin(kx_0)=0 \Rightarrow \sin(kx_0)=0$$

$$\Rightarrow k\,x_0=n\pi \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

$$\text{nodos:}\quad x_0=\frac{n}{2}\lambda \qquad x_0=0,\pm\frac{1}{2}\lambda,\pm\frac{3}{2}\lambda,\ldots$$



nodos: $x_0 = \frac{n}{2}\lambda \quad x_0 = 0, \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \ldots \quad \Delta x_0 = \frac{\lambda}{2}$

en una cuerda, nodo en los extremos $\rightarrow L = \frac{\lambda}{2} n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Partícula en una caja, 1ra aproximación

- Imaginemos que tenemos una **partícula de masa *m*** en el interior de una **caja sólida de longitud *L***
- Si las paredes son infinitamente duras → la colisión de la partícula con la pared es perfectamente elástica
- No hay pérdidas de energía, la partícula va y vuelve en la dirección $\pm x$.
- **Nunca encontraremos a la partícula en $x<=0$ o en $x>=L$**
- La partícula se mueve a velocidad v, luego

$$\lambda=\frac{h}{mv}$$

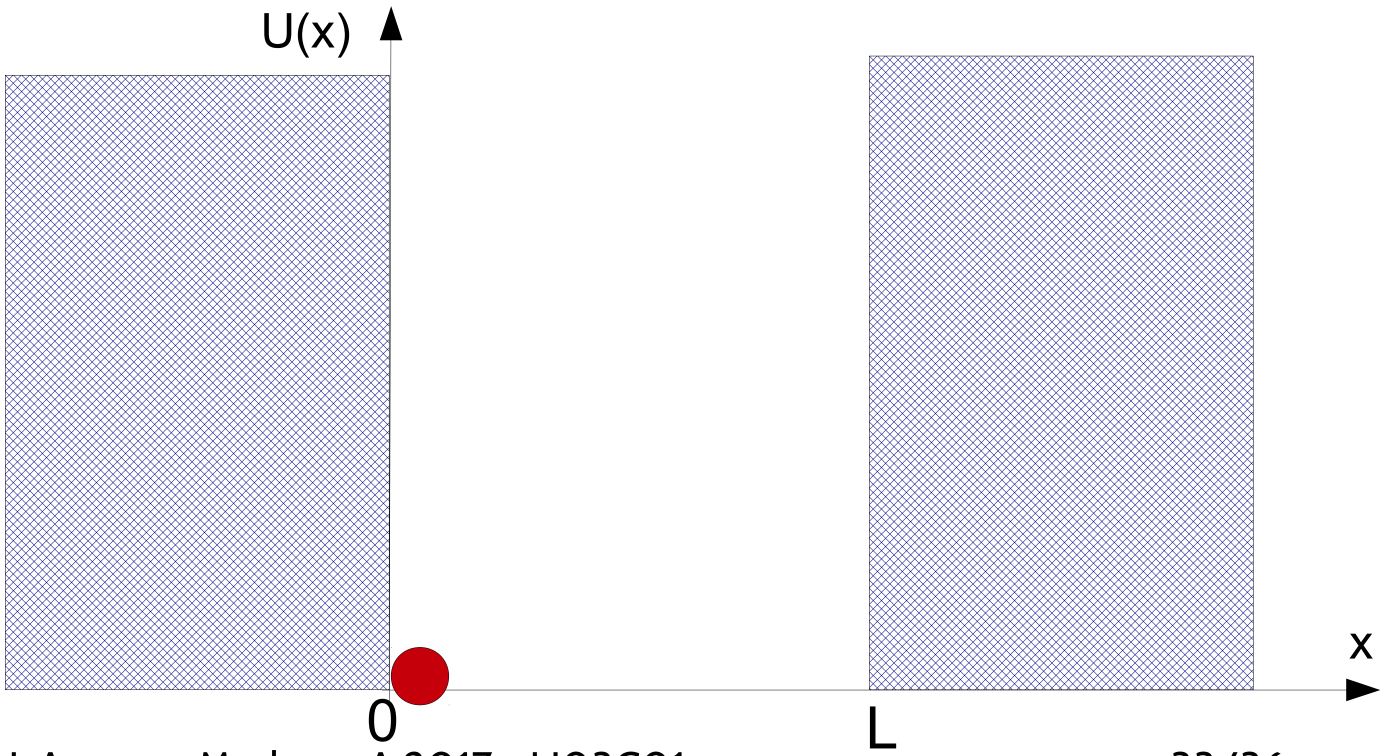
Representación ondulatoria

- La onda de la partícula no puede existir fuera de la caja y si debe hacerlo dentro de la misma
- Proponemos una onda tipo "cuerda de guitarra" entre las paredes de la caja

$$E = K + U$$

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$U(x) = \begin{cases} \infty, \text{ si } x \leqslant 0 \\ 0, \text{ si } 0 < x < L \\ \infty, \text{ si } x \geqslant L \end{cases}$$



Representación ondulatoria

- Proponemos una onda tipo "cuerda de guitarra" entre las paredes de la caja → onda estacionaria

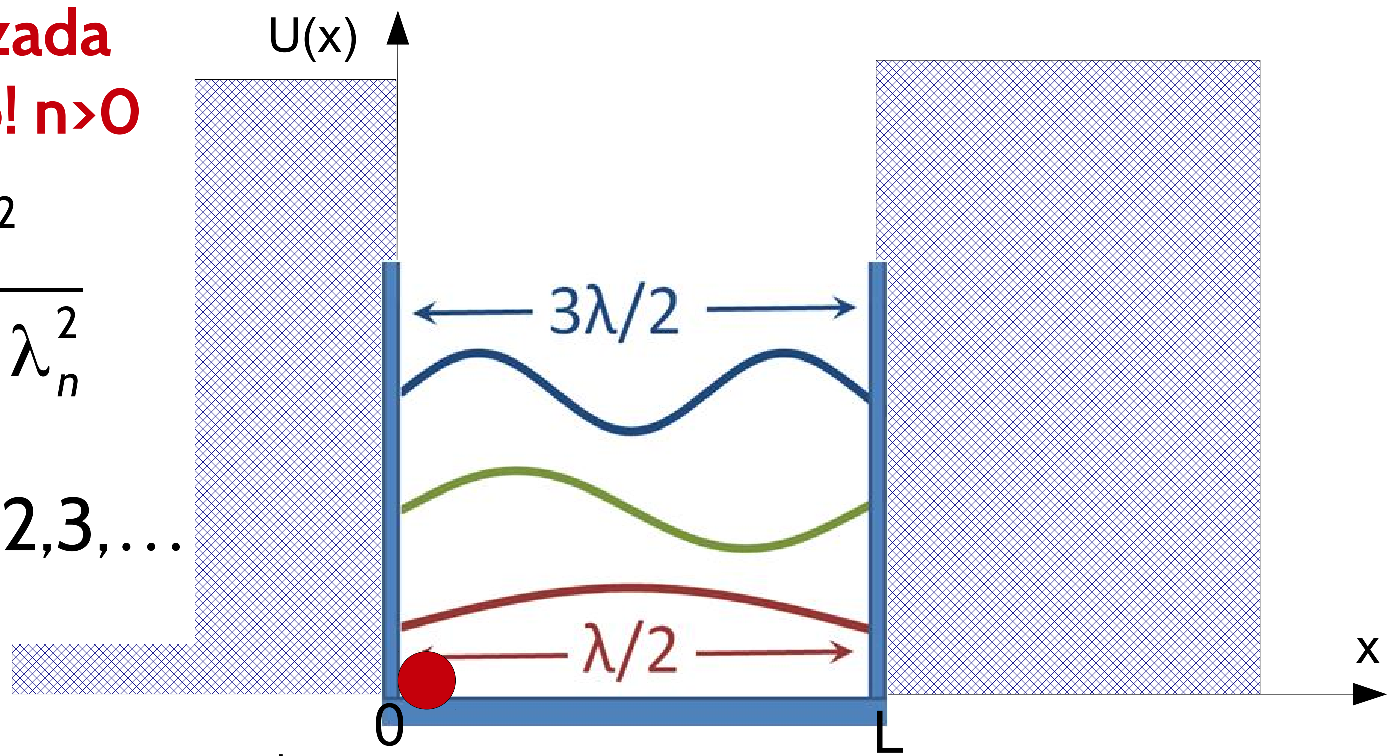
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \text{ y como } \lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p_n = \frac{h}{\lambda_n}$$

¡La cantidad de movimiento está cuantizada!

La energía está cuantizada ¡y nunca está en reposo! n>0

$$K = \frac{p^2}{2m} \rightarrow K_n = \frac{h^2}{2m\lambda_n^2}$$

$$K_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) n^2, \; n = 1,2,3,\ldots$$



Principio de correspondencia, otra vez

- La energía de una partícula en una caja es:

$$K_n = \left(\frac{h^2}{8\,m\,L^2}\right) n^2,\ n = 1,2,3,\ldots$$

- m=m$_e$, caja L=0.5 nm:

$$K_n = 1.5\,n^2\ \text{eV},\ n = 1,2,3,\ldots, \quad \rightarrow v_1 = 726400\,\text{m/s}$$

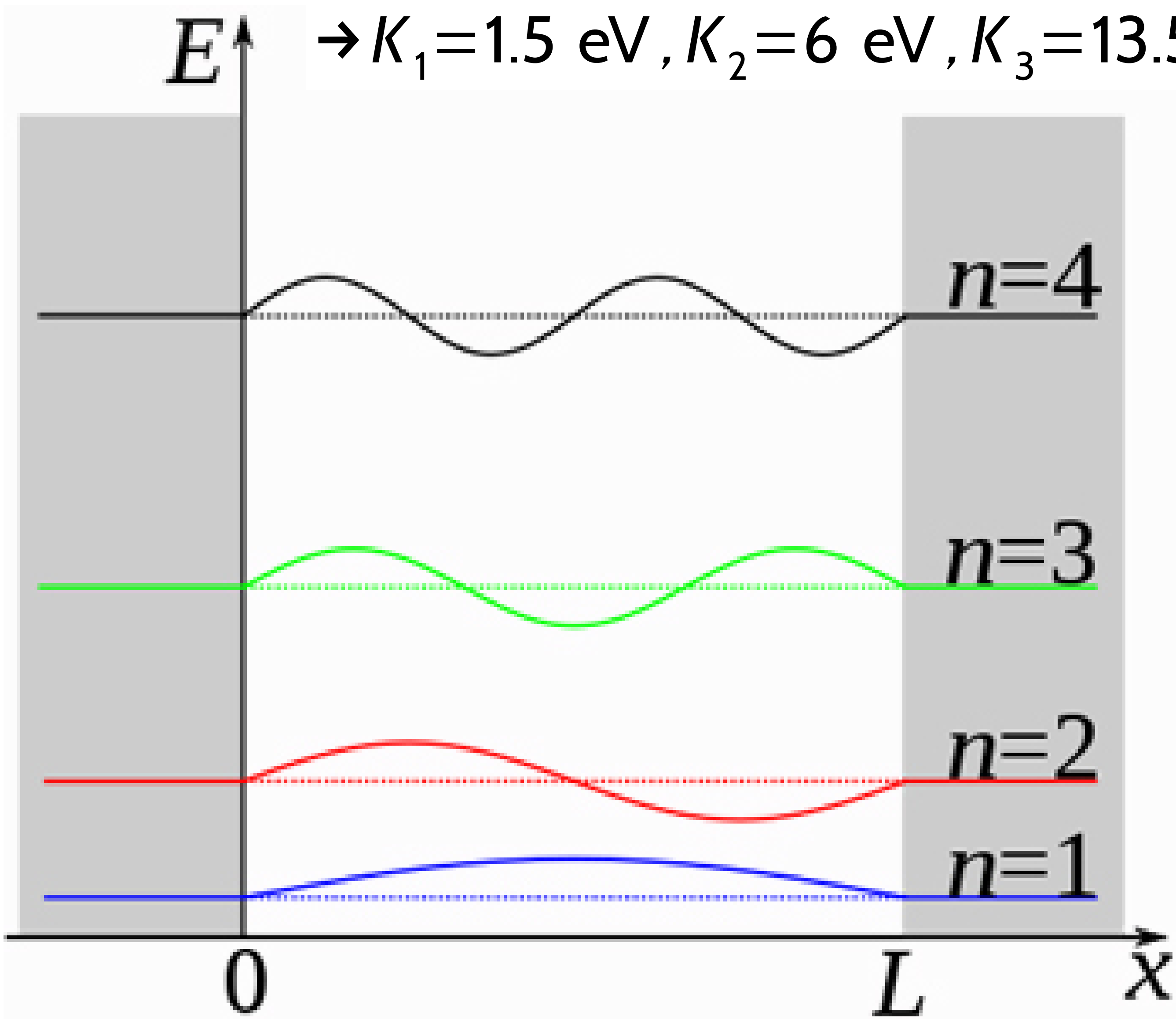
- m=70 kg, aula L=4 m

$$K_n = 3\times10^{-52}\,n^2\ \text{eV},\ n = 1,2,3,\ldots,\ \ v_1 = 1.2\times10^{-36}\,\text{m/s}$$

La energía del sistema está cuantizada

$$K_n = 1.5\,n^2 \text{ eV},\ n = 1,2,3,\ldots$$

$$\rightarrow K_1 = 1.5 \text{ eV}, K_2 = 6 \text{ eV}, K_3 = 13.5 \text{ eV}, K_4 = 24 \text{ eV}, \ldots$$



Volveremos...