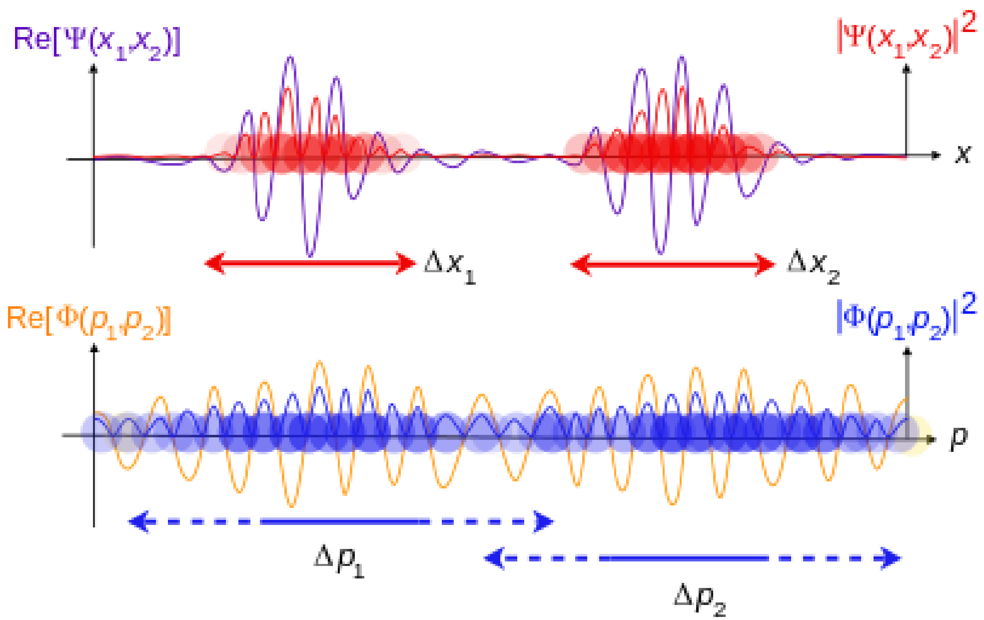
Universidad Nacional de Río Negro
Física Moderna A - 2017

- **Unidad** 03 – Principios de la MC
- **Clase** 10/27(U03C02)
- **Fecha** 20 Abril 2017
- **Cont** Postulados de la MC
- **Cátedra** Asorey
- **Web**

https://github.com/asoreyh/unrn-moderna-a

“***Los átomos se comportan como átomos, nada más***”.
John Gribbin

Unidad 3: Los postulados de la mec. Cuántica
Jueves 06 de abril al Jueves 27 de abril



- Heisenberg y el principio de incertidumbre. **Los postulados de la mecánica cuántica y la función de onda**. **Reglas de cuantización**. La ecuación de Schrödinger. Operadores. Valores de expectación. Interpretación de la mecánica cuántica. Partícula en una caja.
- *Apéndice matemático: ecuaciones diferenciales simples.*

¿y la Energía?

- Sistema conservativo! Entonces:

Notar el uso de la E_p! Estoy en el sistema dónde sólo estudio las variaciones debidas a la energía elástica (y')

$$E_m = E_p + E_k = \mathrm{cte}$$

$$E_m = \frac{1}{2} k\, y^2 + \frac{1}{2} m\, v^2 = \mathrm{cte}$$

- Entonces, recordando lo anterior, cuando t=T se da que:

$$y(T) = y_0,\, v(T) = 0$$

- Y luego, en ese instante la energía mecánica vale:

La energía es constante y proporcional a la amplitud al cuadrado

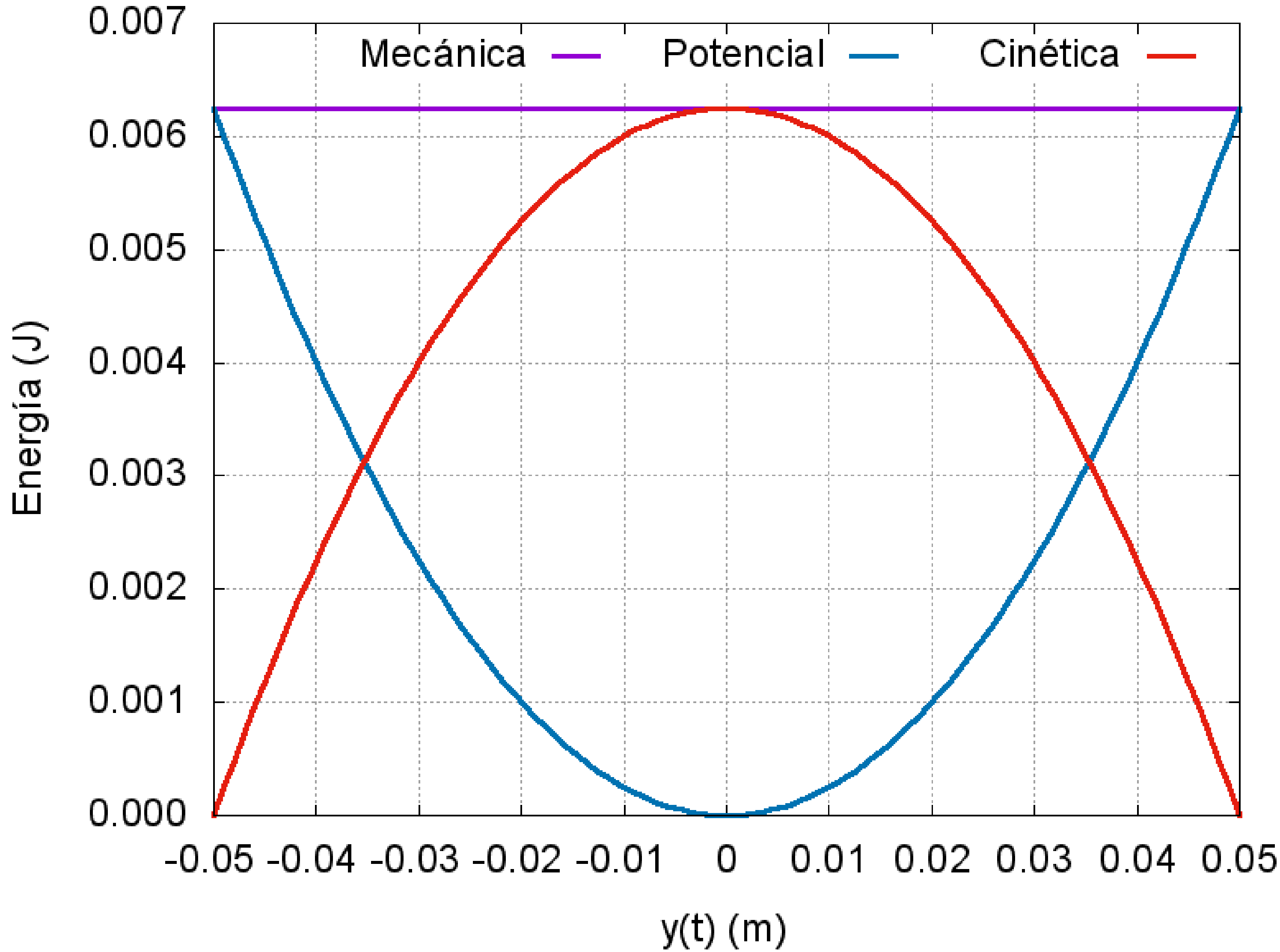
$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k\, y_0^2}$$

- Luego, la energía es proporcional a la amplitud al cuadrado:

$$E_m = \frac{1}{2} k\, y^2 + \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} k\, y_0^2$$

Energía en el sistema

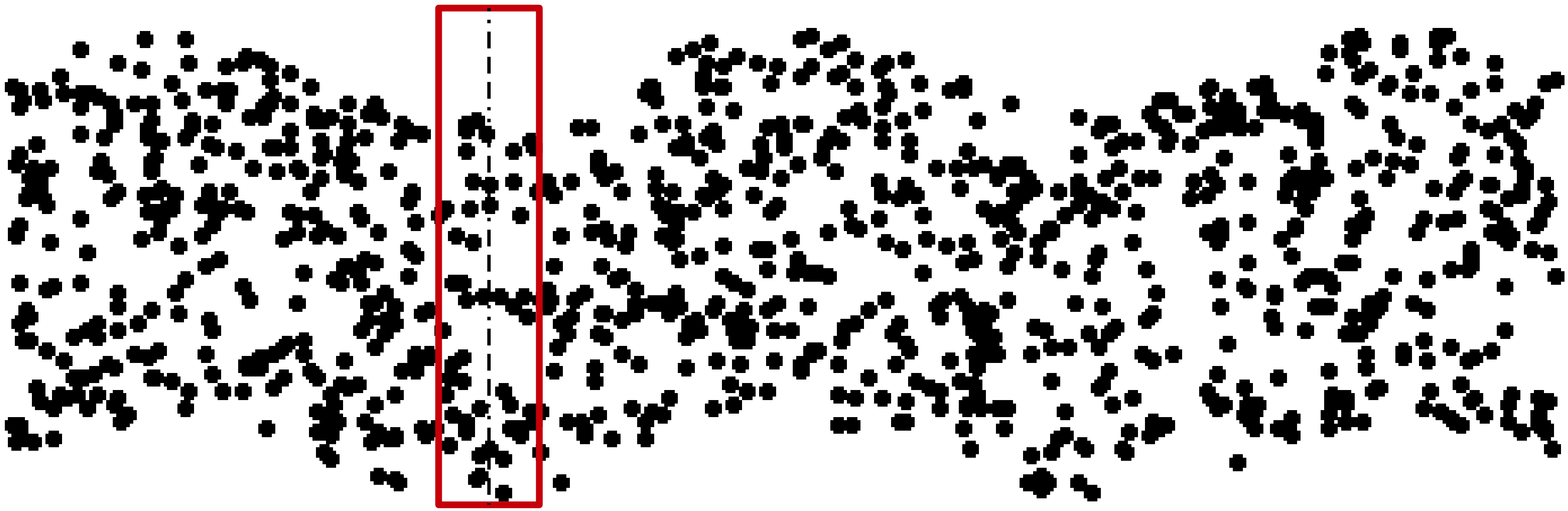
$$E_m = \frac{1}{2} k\, y^2 + \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} k\, y_0^2,\ k = 5\,\mathrm{N\,m}^{-1}$$, y_0 = 0,05 m



- **Una onda** es una **perturbación** **de** **alguna propiedad de un medio** **que tiene asociada una** **transferencia neta de energía** **(¡no dije masa!)**

- **Una onda** es una **perturbación que se propaga en el espaciotiempo**

Función de onda

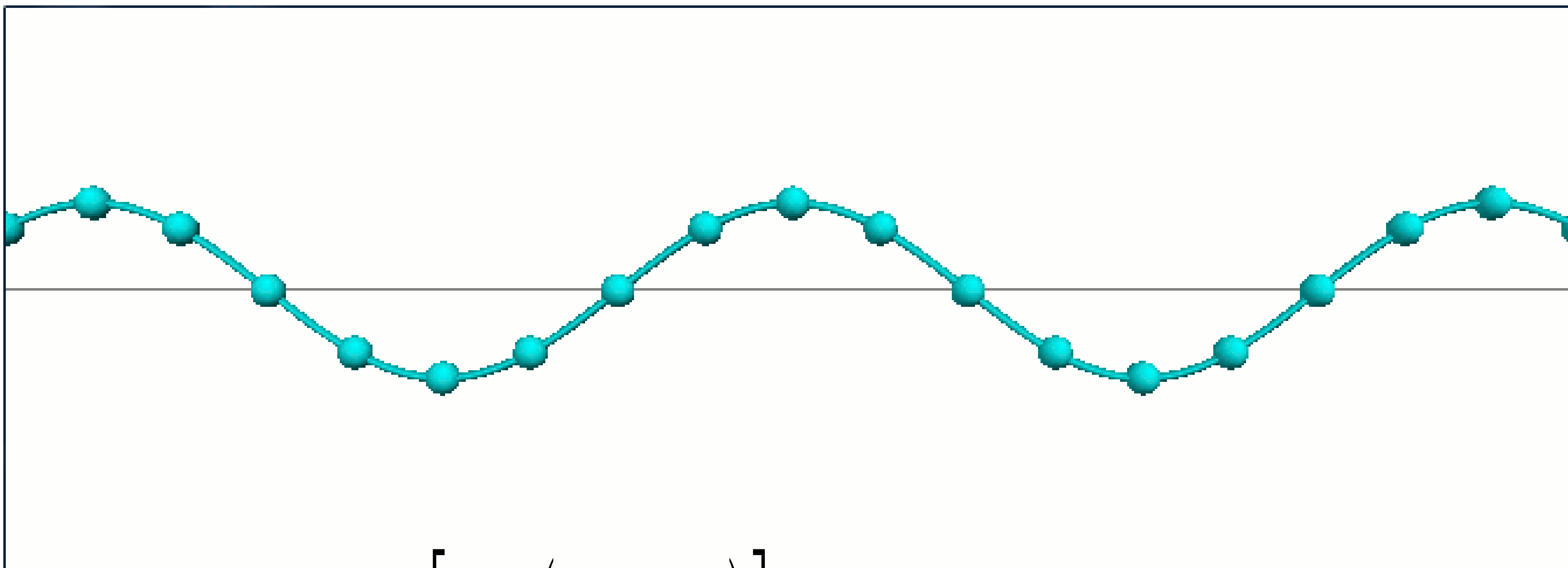


- El movimiento de la onda puede ser descrito por el movimiento de las partículas que la forman
  - **Desplazamiento en la dirección y**
    - Depende de la posición *x*
    - Depende del tiempo *t*

Función de Onda

$$y(x,t)$$

Onda transversal



$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \qquad y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

En general

- Lo anterior es para ondas (perturbaciones) periódicas
- En general, vamos a notar una función de onda cómo:

Función de onda $$\boxed{\Psi(\boldsymbol{r},t)=\Psi(x,y,z,t)}$$

- Las funciones de onda son, casi siempre, separables:

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{espacial}}\ \underbrace{\psi(t)}_{\text{temporal}}$$

- Y son soluciones de la ecuación de onda

Ecuación de onda $$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t)=c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)}$$

Interferencia

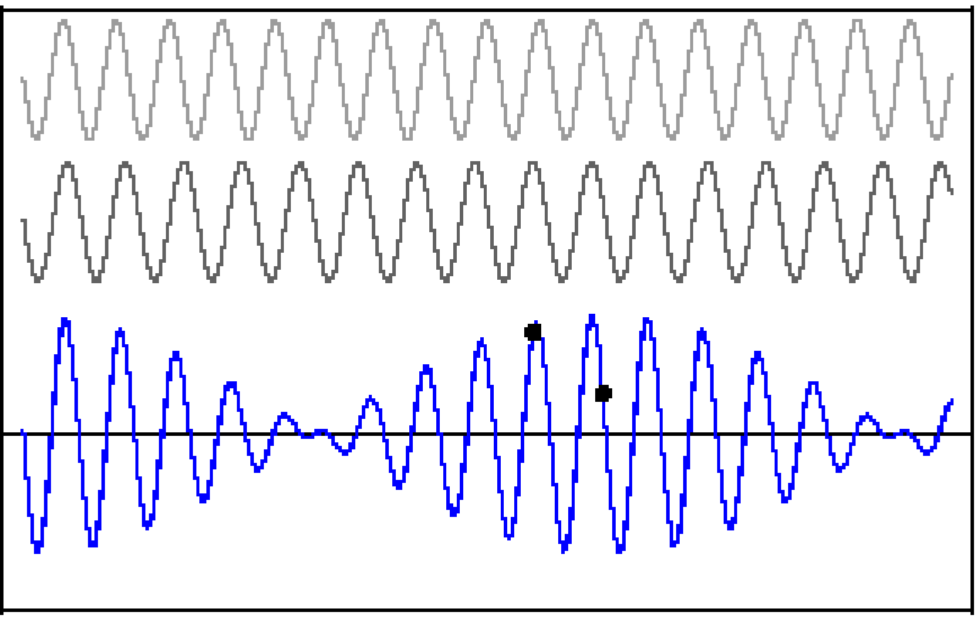
- Dos o más ondas coinciden en la misma región del espacio al mismo tiempo
- La función de onda resultante es la suma de las ondas que interfieren:

$$\boxed{\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \cdots + \Psi_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \Psi_i}$$

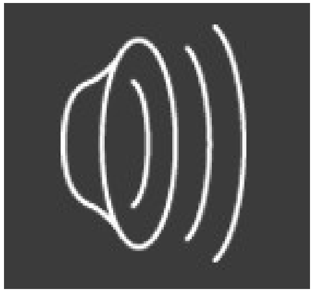
- Ejemplos:
  - Interferencia constructiva, interferencia destructiva,
  - batidos, ondas estacionarias

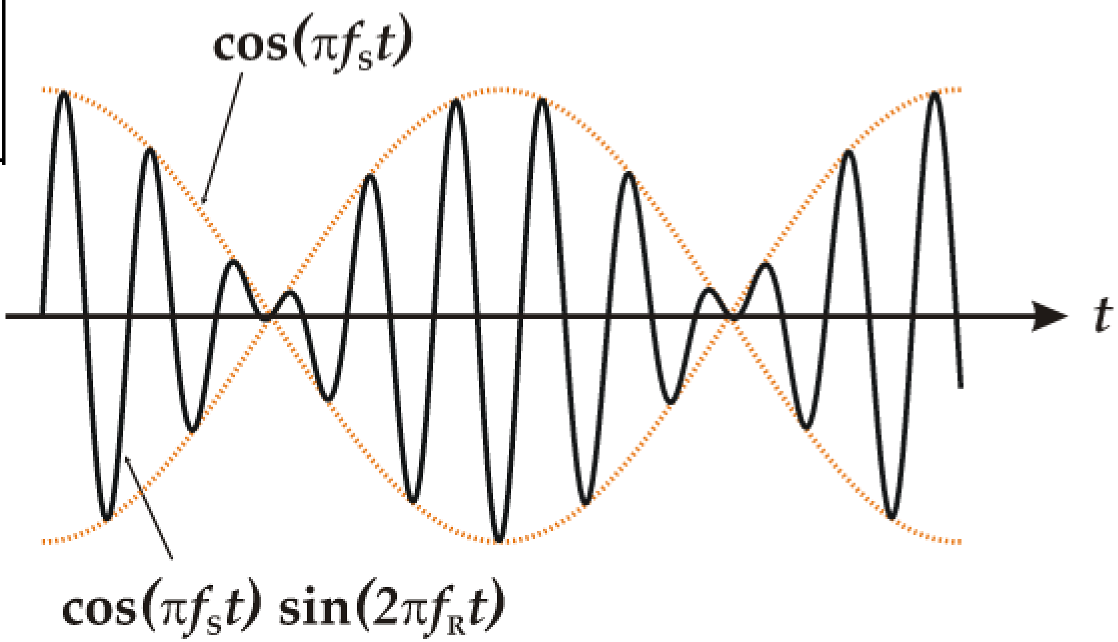
Batido, ondas con frecuencia similar

$$\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2\cos\left(2\pi\frac{f_1+f_2}{2}t\right)\cos\left(2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t\right)$$

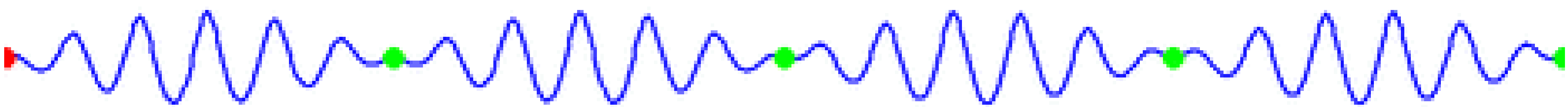


$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$





Velocidad de grupo y velocidad de fase

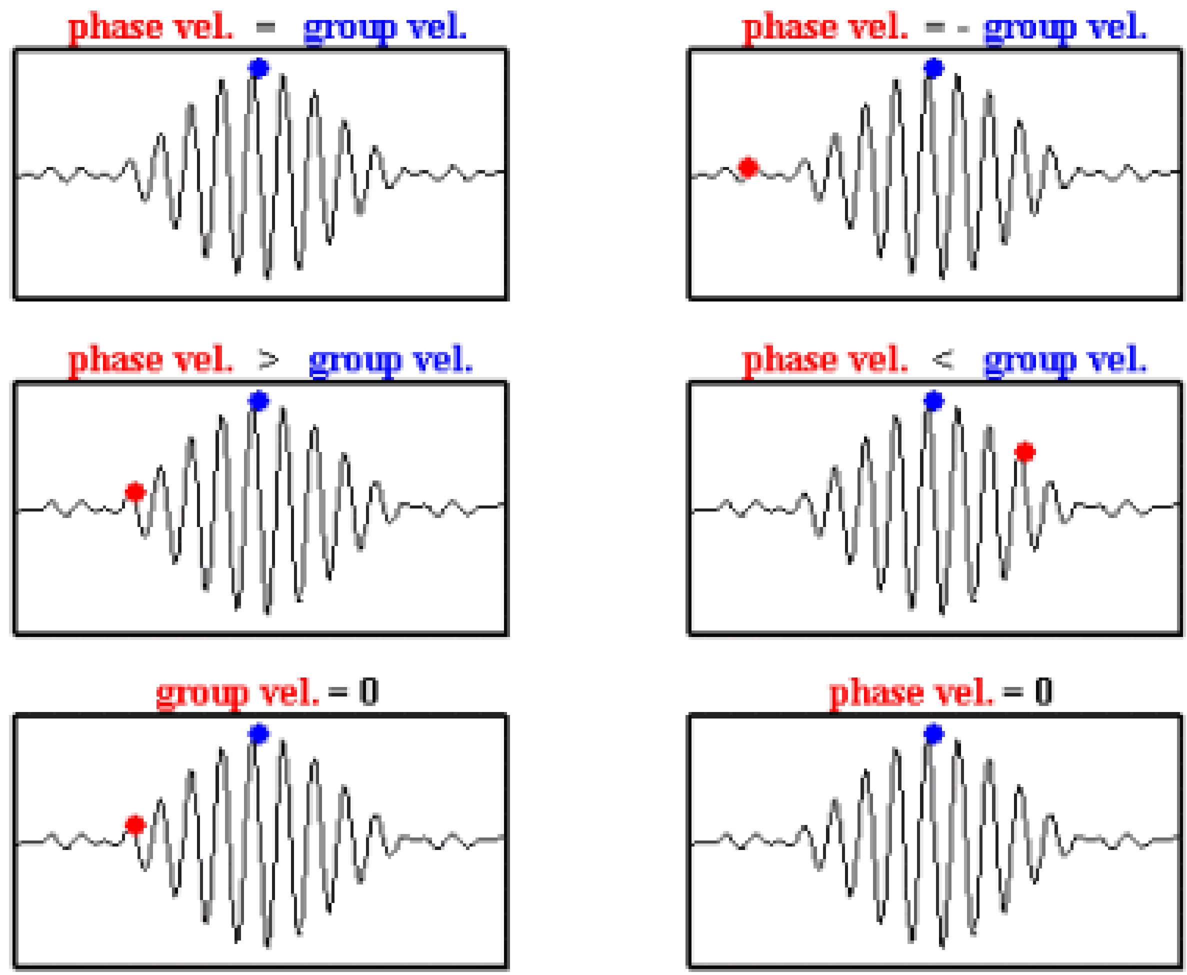


- velocidad de fase

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k}}$$

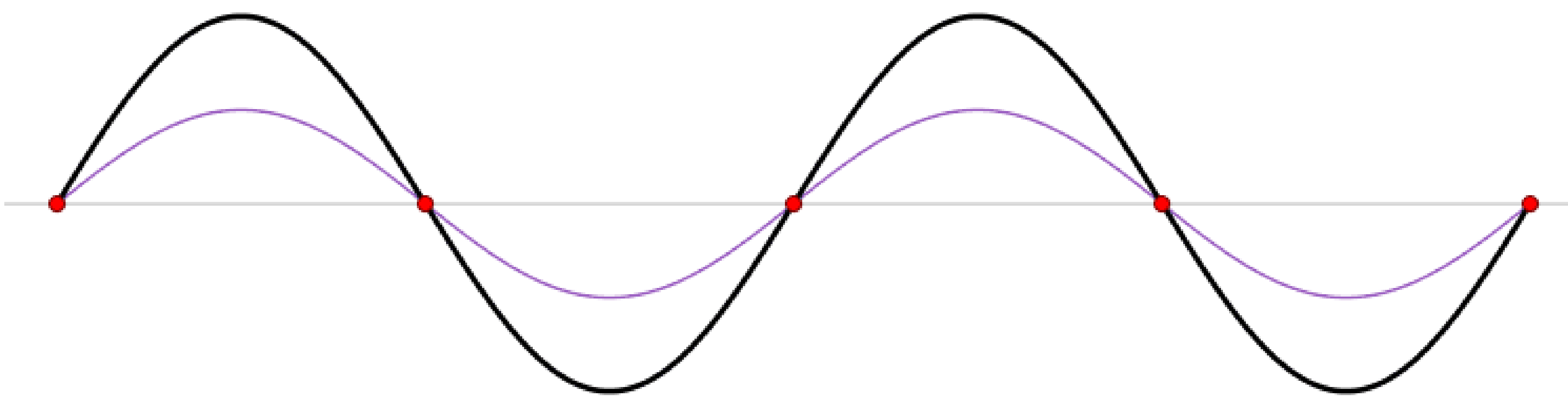
- velocidad de grupo

$$\boxed{v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}}$$



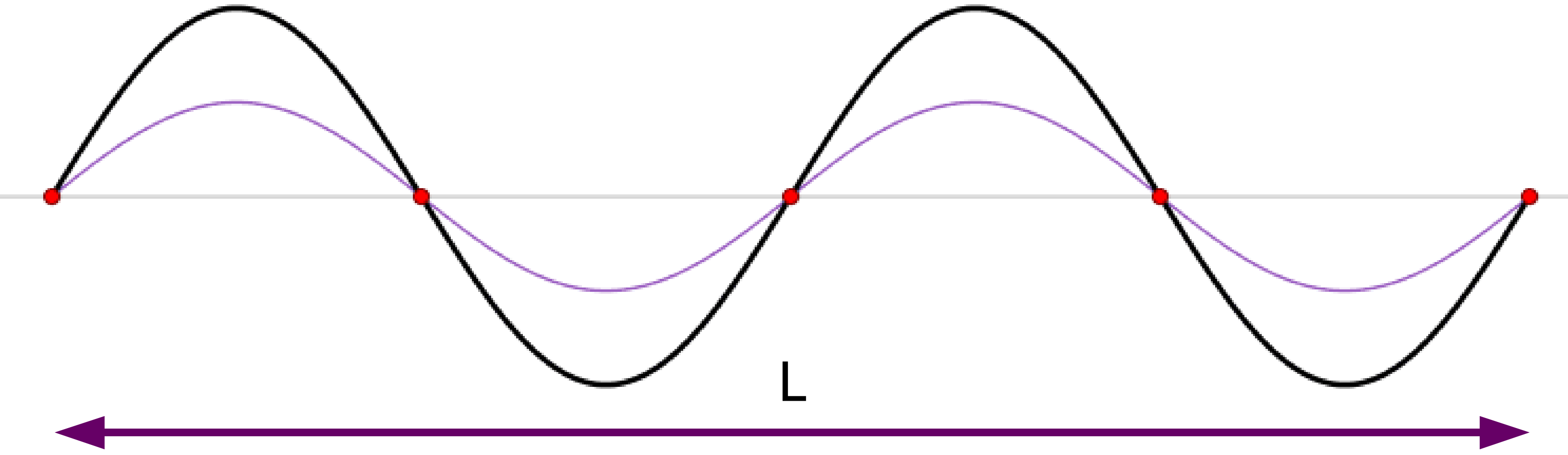
Ondas estacionarias

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$



- Una **onda estacionaria** se forma por la interferencia de dos ondas de igual frecuencia que se desplazan en sentidos contrarios
- La **amplitud** de la resultante **depende de la posición**:
  - **nodos** (mínimos) y **antinodos** (máximos)

Ondas estacionarias



nodos: $x_0 = \frac{n}{2}\lambda \quad x_0 = 0, \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \ldots \quad \Delta x_0 = \frac{\lambda}{2}$

en una cuerda, nodo en los extremos $\rightarrow L = \frac{\lambda}{2} n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Partícula en una caja, 1ra aproximación

- Imaginemos que tenemos una **partícula de masa *m*** en el interior de una **caja sólida de longitud *L***
- Si las paredes son infinitamente duras → la colisión de la partícula con la pared es perfectamente elástica
- No hay pérdidas de energía, la partícula va y vuelve en la dirección $\pm x$.
- **Nunca encontraremos a la partícula en $x<=0$ o en $x>=L$**
- La partícula se mueve a velocidad v, luego

$$\lambda = \frac{h}{m v}$$

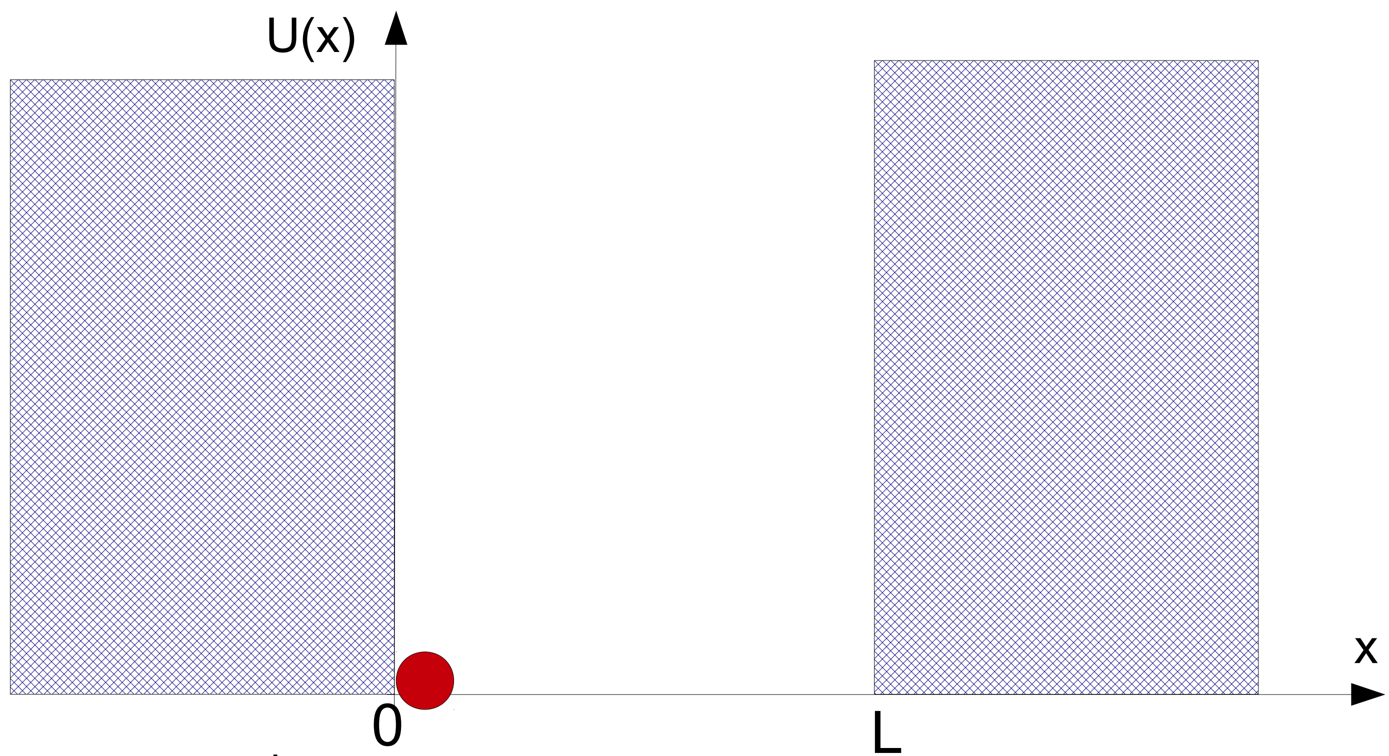
Representación ondulatoria

- La onda de la partícula no puede existir fuera de la caja y si debe hacerlo dentro de la misma
- Proponemos una onda tipo "cuerda de guitarra" entre las paredes de la caja

$$E = K + U$$

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$U(x) = \begin{cases} \infty, \text{ si } x \leqslant 0 \\ 0, \text{ si } 0 < x < L \\ \infty, \text{ si } x \geqslant L \end{cases}$$



Representación ondulatoria

- Proponemos una onda tipo "cuerda de guitarra" entre las paredes de la caja → onda estacionaria

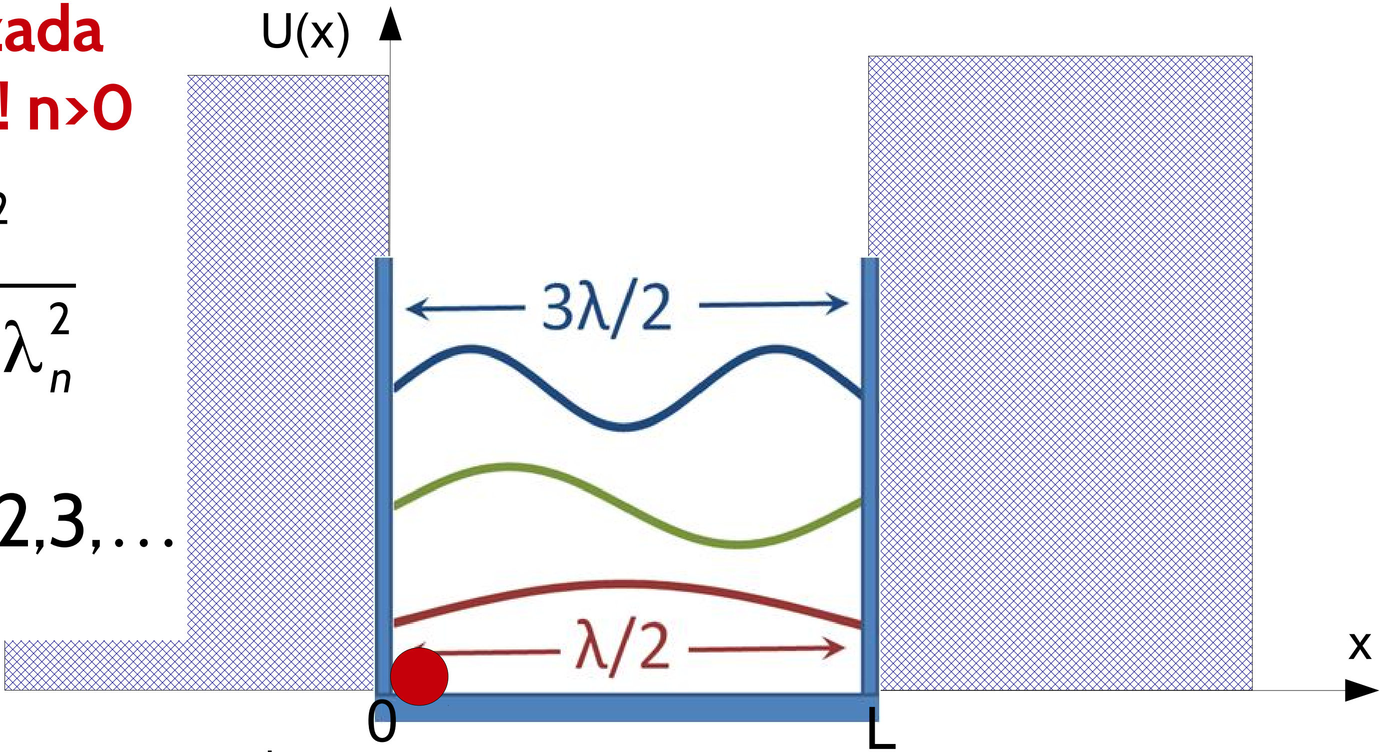
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \text{ y como } \lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p_n = \frac{h}{\lambda_n}$$

¡La cantidad de movimiento está cuantizada!

La energía está cuantizada ¡y nunca está en reposo! n>0

$$K = \frac{p^2}{2m} \rightarrow K_n = \frac{h^2}{2m\lambda_n^2}$$

$$K_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) n^2,\ n = 1,2,3,\ldots$$



Principio de correspondencia, otra vez

- La energía de una partícula en una caja es:

$$K_n = \left(\frac{h^2}{8\,m\,L^2}\right) n^2,\ n=1,2,3,\ldots$$

- $m=m_e$, caja L=0.5 nm:

$$K_n = 1.5\,n^2\ \text{eV},\ n=1,2,3,\ldots, \quad \rightarrow v_1 = 726400\,\text{m/s}$$

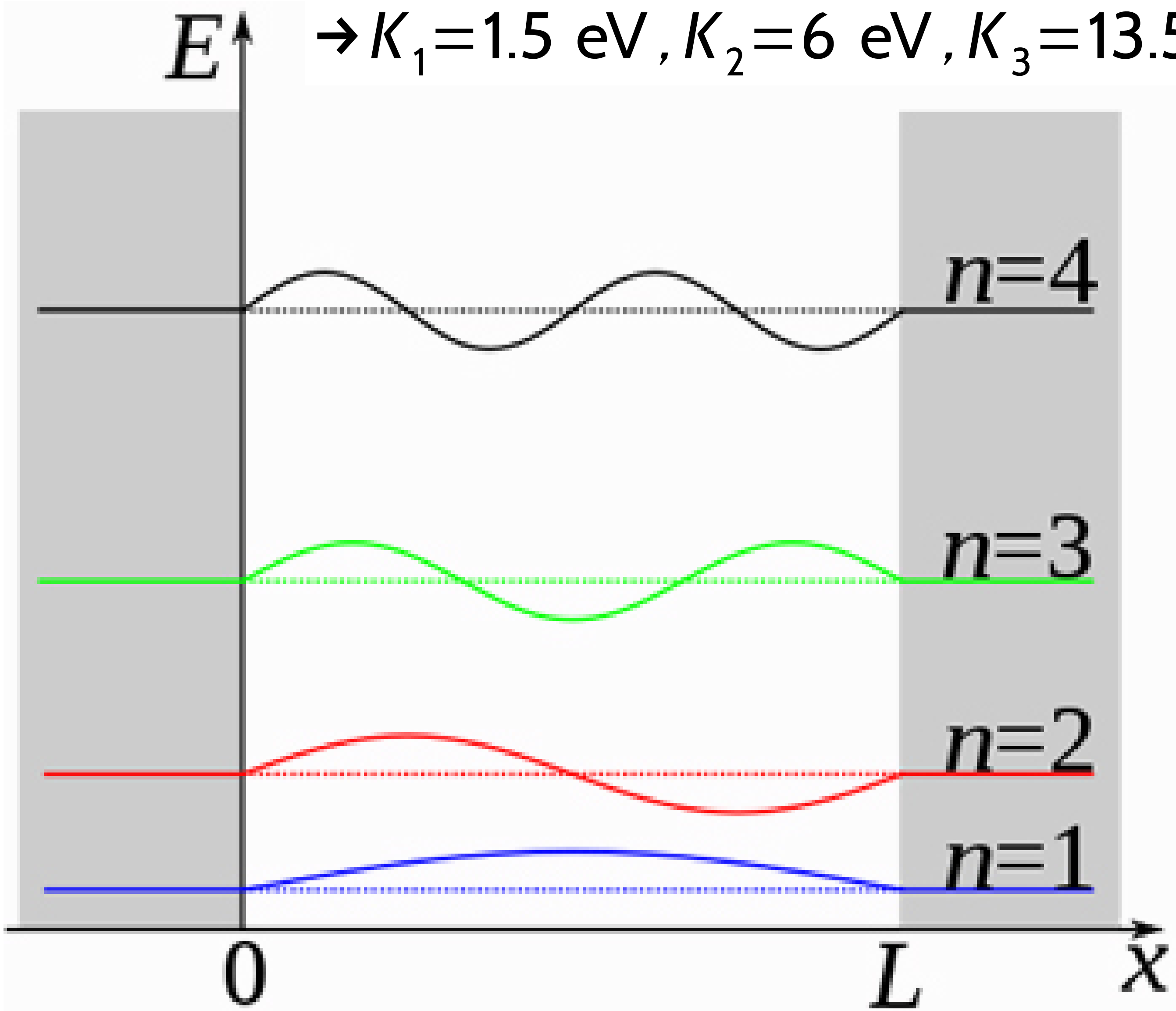
- m=70 kg, aula L=4 m

$$K_n = 3\times10^{-52} n^2\ \text{eV},\ n=1,2,3,\ldots,\ \ v_1 = 1.2\times10^{-36}\,\text{m/s}$$

La energía del sistema está cuantizada

$$K_n = 1.5\, n^2 \text{ eV},\ n = 1,2,3,\ldots$$

$$\rightarrow K_1 = 1.5 \text{ eV},\ K_2 = 6 \text{ eV},\ K_3 = 13.5 \text{ eV},\ K_4 = 24 \text{ eV},\ \ldots$$



Volveremos...

La función de onda en cuántica: propiedades

- 1) La función de onda es una función compleja

$$\Psi(\mathbf{r},t):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C},\ \Psi(\mathbf{r},t)=a(\mathbf{r},t)+i\,b(\mathbf{r},t)$$
$$a=\Re(\Psi)\ \text{ y }\ b=\Im(\Psi)$$

- Por definición, el conjugado de una función compleja es:

$$\Psi^*(\mathbf{r},t):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C},\ \Psi(\mathbf{r},t)=a(\mathbf{r},t)-i\,b(\mathbf{r},t)$$

- Y entonces:

$$\Psi\Psi^*=(a+i\,b)(a-i\,b)=a^2+b^2=\Psi^*\Psi\equiv|\Psi^2|$$
$$|\Psi^2|:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\text{, es real}$$

La función de onda en cuántica: propiedades

- 1) La función de onda **es una función compleja**
- 2) La función de onda y su primera deriva **son continuas**
- 3) La función de onda **es de cuadrado integrable** (*L*2)...

$$\Psi \in L^2 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\Psi^2\right)\right| dV = c,\quad c \in \mathbb{R},\ y\quad 0 < \left|\left(c\right)\right| < \infty$$

... y por lo tanto **es normalizable**. Entonces debe cumplir:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\Psi^2\right)\right| dV = 1}$$

donde dV es la integral en volumen. En cartesianas

$$dV = dx\,dy\,dz$$

Postulados de la mecánica cuántica

I. El estado de un sistema está completamente especificado por una función de onda $\Psi(x,y,z,t)$

II. La probabilidad de encontrar a una partícula en un volumen V centrado en la posición (*x,y,z*) a tiempo *t* es

$$\int_V \left|\left(\Psi(x,y,z,t)^2\right)\right| dV \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\Psi(x,y,z,t)^2\right)\right| dV = 1$$

III. A cada observable clásico (energía *E*, energía cinética *K*, energía potencial *V*, cant. movimiento *p*, cant. mov. Angular *L*,...) le corresponde un operador cuántico:

$$E \rightarrow \hat{H};\ K \rightarrow \hat{K};\ V \rightarrow \hat{V};\ p \rightarrow \hat{p};\ L \rightarrow \hat{L}$$

IV. Para obtener información del sistema, se aplica el operador sobre la función de onda y verifica

$$\hat{A}\,\Psi_a(x,y,z,t)=a\,\Psi_a(x,y,z,t)$$ ecuación de autovalores

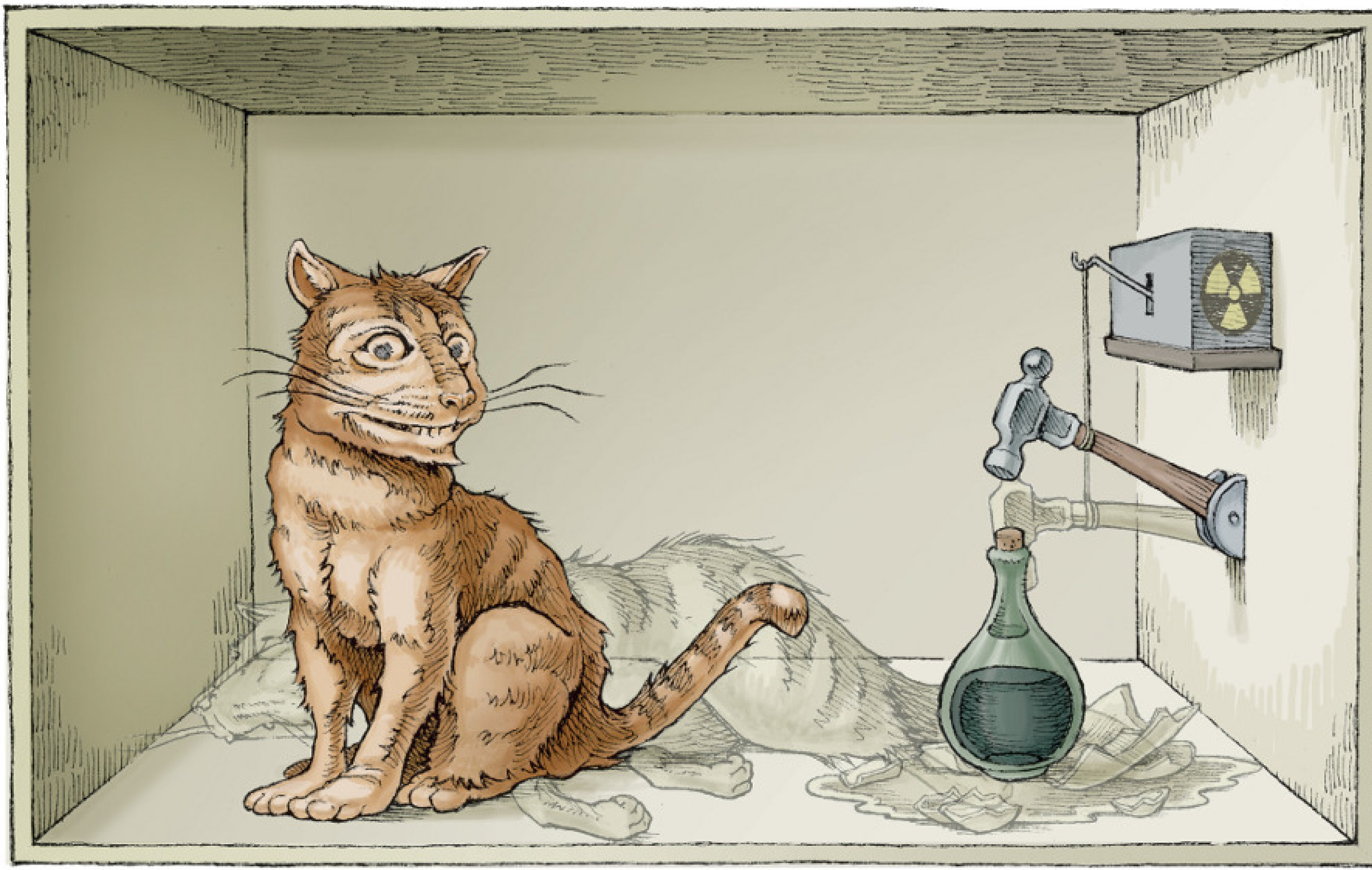
donde Ψ_a es uno de los posibles estados del sistema, el asociado al autovalor a.

Corolario: cuando se "mide" al estado asociado al autovalor a, la funcion de onda "colapsa" al correspondiente autovector Ψ_a

El gato de Schrödinger y el rol del observador

El gato de Schrödinger y el rol del observador

El gato de Schrödinger y el rol del observador



Ejemplo: partícula en una caja, estados

- Problema conservativo clásico, E = K+V, los operadores:

$$E=K+V \;\;\rightarrow\;\; \hat{H}=\hat{K}+\hat{V} \;\;\Rightarrow\;\; \hat{H}\Psi=E\Psi$$

H es el operador **Hamiltoniano**.

- Vimos que para una partícula en una caja

$$E_n=K_n+V_n=\left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2,\; n=1,2,3,\ldots(\text{y } V_n=0)$$

- Entonces, al "medir" la energía del sistema $\hat{H}\Psi_n=E_n\Psi_n$ si mido, por ejemplo, E_2, el estado del sistema colapsa a Ψ_2.