МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»

А.П.Яковлева

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні вказівки для студентів вищих навчальних закладів

(частина 1)

Київ
«Політехніка»
2007

ВСТУП

В економіці, техніці, біології, соціології, медицині, статистиці та інших науках з'являється велика кількість задач, при вирішенні яких виникає необхідність прийняти найкраще можливе рішення. Всі наші дії в умовах неоднозначності вибору визначаються деякою метою, яку ми прагнемо досягти якнайкраще. Тим самим діяльність людини постійно зв'зана з розв'язанням оптимізаційних задач.

При вивченні складних явищ при побудові математичних моделей до оптимізації звертаються для того, щоб визначити таку структуру і такі параметри, які забезпечили б найкраще узгодження моделей з реальністю.

Іншою традиційною областю застосування теорії оптимізації є процедури прийняття рішень, оскільки більшість з них спрямовані якраз на те, щоб зробити оптимальний вибір.

Дисципліна «Методи оптимізації» належить до циклу професійної та практичної підготовки для студентів базової бакалаврської програми «Системний аналіз» та базується на знаннях, отриманих при вивченні дисциплін «Математичний аналіз», «Алгебра і геометрія», «Диференціальні рівняння».

Метою посібника є оволодіння студентами математичним апаратом оптимізації та набуття практичного вміння та навичок в застосуванні математичних методів оптимізації для розв'язання практичних задач із різних галузей науки і техніки. Зміст глав відповідає темам курсу математичних методів оптимізації. Кожна глава містить стислі теоретичні відомості, приклади задач з розв'язанням та задачі для самостійної роботи (з відповідями в кінці посібника).

Цей посібник може бути рекомендований для студентів технічних спеціальностей різних вищих навчальних закладів.

ГЛАВА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

1.1. СПОСОБИ ФОРМАЛІЗАЦІЇ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Теорію задач для пошуку найбільших та найменших величин називають ***теорією екстремальних задач*** або ***теорією оптимізації***.

Екстремальні задачі, що з'являються у природничих науках або на практиці, зазвичай формулюються на словах в змістовних термінах тієї області, у якій ця задача з'явилася. Для того, щоб можна було використовувати теорію, необхідно перекласти задачі на мову математики. Цей переклад називається формалізацією задачі. Одна й та сама задача може бути формалізована по-різному, а простота розв'язку у значній мірі залежить від того, наскільки вдало вона формалізована.

ПРИКЛАДИ ФОРМАЛІЗАЦІЇ ЗАДАЧ

Задача 1.1.

Нехай є два продуктових склади, що знаходяться на деякій відстані від дороги. Біля дороги планують побудувати магазин. Де найліпше його розташувати, якщо необхідно, щоб з обох складів продукти надходили якнайшвидше?

Задача 1.2.

На круглій галявині необхідно побудувати прямокутний дім найбільшої площі.

Перша задача є задачею на мінімум, друга — на максимум (minimum з лат. означає – «найменший», а maximum – «найбільший»). Обидва ці поняття об'єднуються єдиним терміном – екстремум (від лат. «той, що з краю»). Іноді використовують слово «оптимальний» (найкращий).

Задачі 1.1 та 1.2 сформульовані словесно, без формул. Формалізуємо.

Розглянемо задачу 1.1. Задача зводиться до наступної:

Знайти на прямій таку точку, щоб сума відстаней від неї до двох заданих точок, була б мінімальною.

Виберемо осі наступним чином: нехай вісь Ox співпадає із заданою прямою, а Oy проходить через точку A.

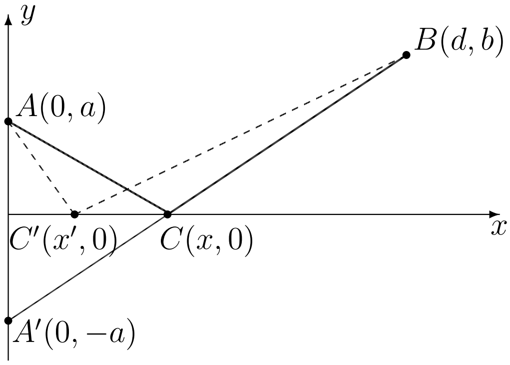

Рис. 1.1

Нехай координати точок A, B та C такі: $A(0, a)$, $B(d, b)$, $C(x, 0)$ (рис.1.1). Тоді отримаємо наступну задачу:

$$F(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \longrightarrow \min, \ x \in \mathbf{R}.$$

Розглянемо задачу 1.2. Задача зводиться до наступної:

Вписати у коло заданого радіусу прямокутник найбільшої площі.

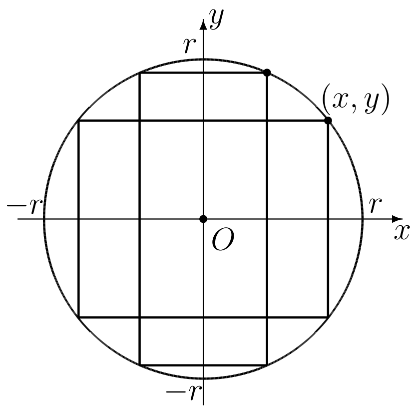

Рис. 1.2

Нехай коло описано рівнянням $x^2 + y^2 = r^2$. Направимо осі Ox та Oy паралельно до сторін прямокутника та позначимо через (x, y) координати вершини прямокутника, що лежить у першому квадранті.

Тоді площа прямокутника буде дорівнювати $4xy$. Отримаємо задачу: Знайти максимум функції $f_0(x,y) = 4xy$ за умов:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0, \\ f_2(x,y) = x \geq 0, \\ f_3(x,y) = y \geq 0. \end{cases}$$

Умови $x \geq 0$ та $y \geq 0$ зайві і отримана задача буде еквівалентна наступній:

$$\begin{cases} xy \longrightarrow \max, x^2 + y^2 - r^2 = 0, \\ (x,y) \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Задача 1.3.

Одна з прикладних оптимізаційних задач – розташування матеріалу на сторінках книги. Наприклад тут може бути система машинного набору TEX, призначена для того, щоб, дотримуючись заданих розмірів полів сторінки, розташувати на них текст, який вводиться у зручній для читання формі.

Досягається це так: система підбирає відстань між літерами, словами, рядками та параграфами і може розбивати останні слова рядків у відповідності до правил переносу. Кожна з цих відстаней має "ідеальне значення" і відповідні межі варіювання. При цьому за відхилення від ідеалу нараховується штраф. Різні штрафи вводяться також для того, аби запобігти небажаних ситуацій таких, як поява суміжних рядків, що закінчуються переносом, або розташування на початку сторінки формули, що занесена в окремий рядок. Сумарний штраф мінімізується.

Таким чином, в задачі пошуку гарного розташування тексту, що розв'язується системою TEX, присутні усі елементи загальної оптимізаційної постановки: функція виміру якості (цільова); змінні, значення яких підбираються із міркувань мінімізації цієї функції; обмеження на характер та розмір дозволених варіацій.

Задача 1.4.

Знайти проекцію заданої точки x^0 у просторі $\mathbf{R}^n$ на задану множину $X \subset \mathbf{R}^n$.

Розв'язання

Означення. ***Проекцією*** точки $x^0 \in \mathbf{R}^n$ на множину $X \subset \mathbf{R}^n$ називається точка з X, найближча до x^0 серед усіх точок цієї множини.

Проекція є глобальним розв'язком задачі:

$$f(x) = \left| x - x^0 \right|^2 \longrightarrow \min, \ x \in X,$$

де $f(x) = \left\| x - x^0 \right\|^2 = (x - x^0, x - x^0) = (x, x) - 2(x, x^0) + (x^0, x^0)$ – квадратична функція з одиничною матрицею.

1.2. КРИТИЧНІ ТОЧКИ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Теорія екстремальних задач дає правила знаходження розв'язків екстремальних задач, що дозволяють виділити деяку підмножину точок, серед яких повинен бути розв'язок. Ця множина точок називається ***критичною***. Після знаходження усіх критичних точок необхідно виділити серед них розв'язок.

Критичними точками є:

– стаціонарні точки, тобто ті точки, в яких похідна дорівнює нулю;

– точки, в яких похідної не існує;

– точки, що розташовані на границі допустимої множини.

Задача 1.5.

Знайти критичні точки, точки локальних та глобальних екстремумів в задачі: $f(x) = x^3(x^2 - 1) \longrightarrow extr, \ -1 \le x \le 2.$

Розв'язання

Якщо екстремум досягається у внутрішній точці, то в цій точці похідна дорівнює нулю: $f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{3}{5}};\ 0;\ \sqrt{\frac{3}{5}}$.

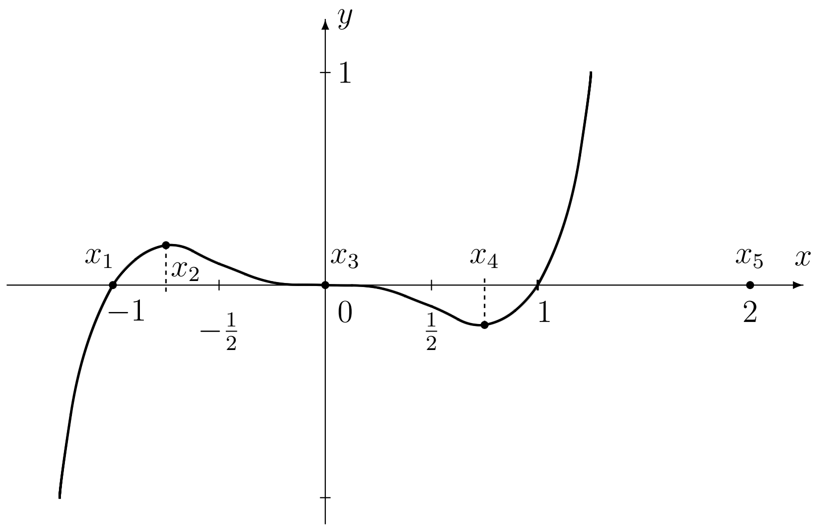

Рис. 1.3

Маємо п'ять критичних точок:

$$x_1 = -1;\ x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}};\ x_3 = 0;\ x_4 = \sqrt{\frac{3}{5}};\ x_5 = 2.$$

Серед них:

x_2, x_3 та x_4 – стаціонарні точки;

x_1 та x_4 – точки локального мінімума;

x_2 та x_5 – точки локального максимума;

x_4 – глобальний мінімум;

x_5 – глобальний максимум.

Задача 1.6.

Знайти критичні точки, точки локальних та глобальних екстремумів в задачі: $f(x) = \begin{cases} -\sin x + 1,\ \left[0; \frac{3\pi}{2}\right], \\ 2,\ \left(\frac{3\pi}{2}; +\infty\right). \end{cases}$

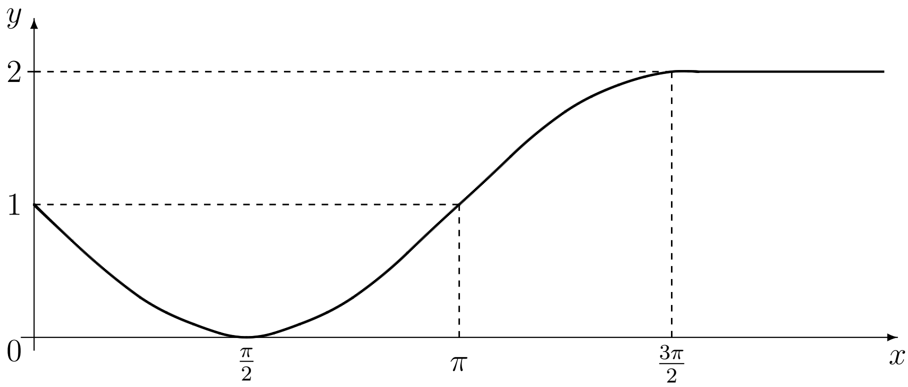

Рис. 1.4

Розв'язання

На множині $X = [0, +\infty)$:

– точка глобального мінімуму: $x_1^* = \frac{\pi}{2}$, значення функції: $f(x_1^*) = 0$;

– точка локального максимуму: $x_2^* = 0$, значення функції: $f(x_2^*) = 1$;

– точки глобального максимуму $\forall x_3^* \in [\frac{3\pi}{2}; +\infty)$, значення функції: $f(x_3^*) = 2$;

– точки локального мінімуму: $\forall x_4^* \in (\frac{3\pi}{2}; +\infty)$, значення функції: $f(x_4^*) = 2$.

Задача 1.7.

Нехай неперервна функція має точку глобального максимуму на $\mathbf{R}^n$. Чи випливає звідси, що f досягає глобального максимуму на будь-якій замкненій множині $X \subset \mathbf{R}^n$?

Розв'язання

Ні, не випливає. Розглянемо контрприклад:

$$f(x, y) = -x^2, \text{ а } X = \{(x, y) | xy \geq 1\}.$$

Хоча X – замкнена, але $f(x, y)$ не досягає на цій множині свого глобального максимуму $f^* = 0$, а лише прагне до нього.

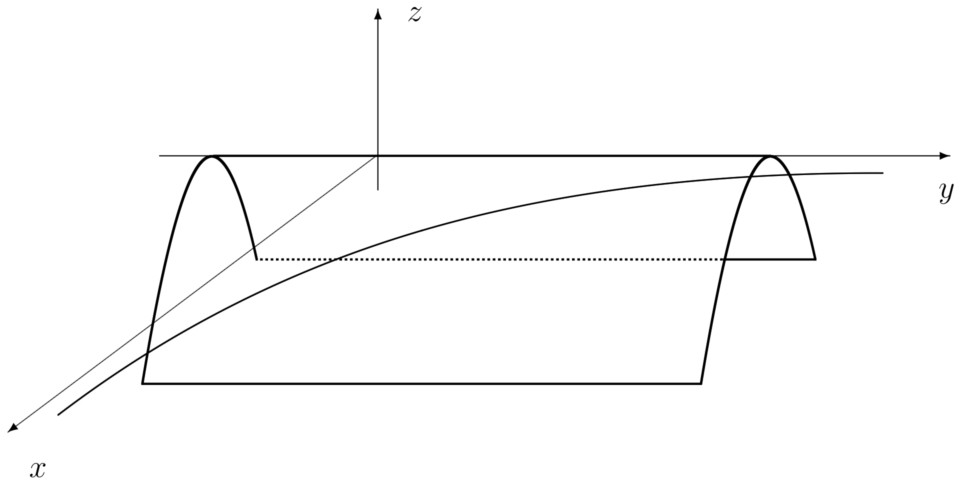

Рис. 1.5

1.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ, ТОЧКИ ЕКСТРЕМУМУ ТА ПРОБЛЕМИ ІСНУВАННЯ

Розглянемо задачу:

$$f(x) \longrightarrow \min,\ x \in X, \tag{1.1}$$

де $f(x)$ будемо називати цільовою функцією, X – допустимою множиною, а $\forall x \in X$ назвемо допустимою точкою задачі (1.1).

Означення. Точка $x^* \in X$ – точка глобального мінімума функції $f(x)$ на множині X або глобальний розв'язок задачі (1.1), якщо

$$f(x^*) \leq f(x),\ \forall x \in X.$$

Означення. Точка $x^* \in X$ – точка локального мінімума функції $f(x)$ на множині X або локальний розв'язок задачі (1.1), якщо

$$f(x^*) \leq f(x),\ \forall x \in X \bigcap U_\varepsilon(x^*), \text{ де } U_\varepsilon(x^*) = \left\{x \in R^n : \|x - x^*\| \leq \varepsilon\right\}.$$

Означення. x^* – точка строгого локального або глобального мінімума (строгий розв'язок), якщо нерівності виконуються як строгі при $x \neq x^*$.

Означення. Точна нижня границя функції f на X, тобто: $f^* = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ називається значенням задачі.

Можливі три випадки:

1. $f^* > -\infty$ та $f(x) = f^*$ при деяких $x \in X$, тобто значення задачі скінченне та досягається, при цьому $f^* = \min\limits_{x \in X} f(x)$ (Рис.1.6).

2. $f^* > -\infty$ та $f(x) > f^*$ при всіх $x \in X$, тобто значення задачі скінченне, але не досягається (Рис.1.7).

3. $f^* = -\infty$, тобто значення задачі нескінченне (Рис.1.8).

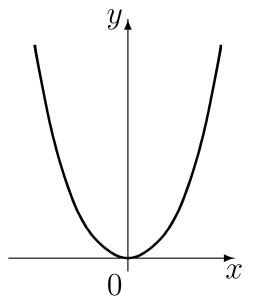

Рис. 1.6. $f(x) = ax^2,\ a > 0.$

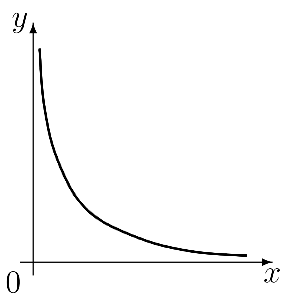

Рис. 1.7. $xy = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}.$

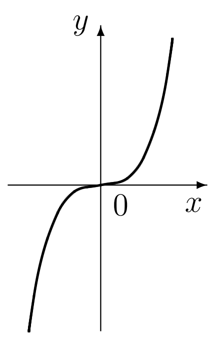

Рис. 1.8. $f(x) = x^3.$

У випадку (1) задача має глобальний розв'язок, у випадках (2) та (3) – не має.

Будемо говорити, що задача (1.1) має розв'язок тільки в першому випадку. Питання про існування глобального розв'язку задачі (1.1) вирішується на основі наступних теорем:

Теорема 1.1. (Вейєрштраса). Нехай X – компакт (замкнута і обмежена множина) в $\mathbf{R}^n$, f – неперервна функція на X. Тоді розв'язок задачі (1.1) існує.

Теорема 1.2. (наслідок з теореми Вейєрштраса). Нехай X – довільна множина в $\mathbf{R}^n$, f – нескінченно зростаюча неперервна функція на X. Тоді глобальний розв'язок задачі (1.1) існує.

Означення. Функція $f(x)$, що визначена на R^n називається ***нескінченно зростаючою*** на X, якщо $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^k) \to \infty$ для довільної послідовності $\{x^k\} \subset X$, такої, що або $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x \in \overline{X} \setminus X$, або $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k\| = \infty$.

За аналогією записується задача максимізації функції $f(x)$ на множині X:

$$f(x) \longrightarrow \max, \ x \in X, \tag{1.2}$$

Замінивши в означеннях точок мінімума знак на обернений, отримаємо поняття ***локального*** та ***глобального максимума*** задачі (1.2).

Розв'язки задач (1.1) та (1.2), тобто точки мінімума і максимума функції $f(x)$ на множині X називають ***точками екстремума***, а задачі (1.1) та (1.2) – ***екстремальними задачами***.

Наведемо декілька елементарних у формулюванні задач, які мають нетривіальний розв'язок (Розв'язок цих задач можна знайти у книзі «Числа и фигуры» Радамахер Т., Теплиц О., М.: Физмат, 1962г.).

1. Задано гострокутний трикутник. Необхідно вписати у нього трикутник мінімального периметру. 3.1. Вершинами цього трикутника є основи висот трикутника.

2. Довести, що в гострокутному трикутнику існує єдина точка P, сума відстаней від якої до вершин трикутника є мінімальною. 3.2. Усі сторони з цієї точки видно під кутом 120°.

3. На площині задано кінцеву кількість точок. Необхідно побудувати коло мінімального радіусу, що містить усі ці точки. 3.3. Необхідно показати, що існує більше, ніж 3 точки цього кола, що є критичними, тобто мінімальне коло, що містить лише ці точки, містить одночасно усі точки.

1.4. ЗАДАЧІ

Формалізувати задачі:

1.1. З квадратного аркуша паперу зі стороною a зробити коробку максимального об'єму, при чому вирізати з кутів однакові квадрати.

1.2. Обмежити прямокутну ділянку землі площею $S = 294$ м^2 та поділити її парканом на дві рівні частини так, щоб довжина усього паркану була б мінімальною.

1.3. Лампа висить над центром круглого столу радіусом r. При якій висоті лампи відносно столу освітлення предмета, що лежить на краю стола, буде найкращим?

1.4. Описати навколо квадрата зі стороною a прямокутник найбільшої площі.

1.5. Побудувати ванну даного об'єму V з найменшими витратами матеріалу.

1.6. Бізнесмен вирішив добудувати до свого дому башту у формі півкола (радіуса R), що знаходиться біля однієї зі сторін дому. Всередині башти повинна бути прямокутна кімната максимальної площі.

1.7. В океані є круглий острів діаметром D. Побудувати дім максимальної площі у формі прямокутного трикутника так, щоб він мав три виходи до моря.

1.8. Знайти найкоротшу відстань від точки $(x_0; y_0)$ на площині до прямої $Ax + By + C = 0$.

1.9. Знайти найкоротшу відстань від заданої точки до заданої площини у просторі.

1.10. Відшукати формули проекцій на:

а. кулю $X = \{x \in \mathbf{R}^n | \ \left\| x - x^0 \right\| \leq r\}$;

б. координатний паралелепіпед $X = \{x \in \mathbf{R}^n | \ b_j \leq x_j \leq c_j, \ j = 1, \ldots, n\}$;

в. невід'ємний ортант $X = \{x \in R^n | \ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n\}$;

г. гіперплощину $X = H_{p\beta} = \{x \in \mathbf{R}^n | \ (p, x) = \beta\}$ $(p \neq 0)$;

д. півпростір $X = H^+_{p\beta} = \{x \in \mathbf{R}^n | \ (p, x) \geq \beta\}$ $(p \neq 0)$.

1.11. Навести приклади задач $(x \in \mathbf{R})$, де:

а. глобальний мінімум і максимум досягаються у нескінченній кількості точок;

б. функція обмежена, глобальний максимум досягається, а мінімум – ні;

в. функція обмежена, але глобальний мінімум і максимум не досягаються.

1.12. Знайти точки екстремума функції $f(x) = -x^2$ на множині:

$$X = \{x | \ -2 \leq x \leq 1\}.$$

1.13. Знайти точки екстремума функції $f(x) = \ln x$ на множині:

$$X = \{x | \ 0 < x < 3\}.$$

ГЛАВА 2. ЗАДАЧА БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

2.1. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ. ПРАВИЛО ВИБОРУ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Нехай A – квадратна матриця розмірності $n \times n$.

Означення. ***Кутовим мінором*** називається визначник матриці, який отримується шляхом викреслювання рядків і стовпців, починаючи з деякого номера k до n.

Означення. ***Головним мінором*** називається визначник матриці, який отримується шляхом викреслювання рядків і стовпців з однаковими номерами.

Означення. Симетрична матриця A розмірності $n \times n$ називається ***невід'ємно (недодатньо) визначеною***, якщо для $\forall x \in \mathbf{R}^n$ виконується: $(Ax, x) \geq 0$ (≤ 0).

Означення. Симетрична матриця A розмірності називається ***додатньо (від'ємно) визначеною***, якщо для $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$ виконується: $(Ax, x) < 0$ (> 0).

Для встановлення факту визначеності матриці, як правило, використовується критерій Сильвестра.

Критерій Сильвестра. Нехай A – симетрична матриця $n \times n$. Тоді:

1. матриця A – ***невід'ємно визначена*** тоді і тільки тоді, коли всі її головні мінори невід'ємні;

2. матриця A – ***додатньо визначена*** тоді і тільки тоді, коли всі її кутові мінори додатні;

3. матриця A – ***від'ємно визначена*** тоді і тільки тоді, коли у її головних мінорів чергується знак, починаючи з від'ємного;

4. матриця A – ***недодатньо визначена*** тоді і тільки тоді, коли всі її

кутові мінори непарного порядку недодатні, а парного – невід'ємні.

Задача безумовної оптимізації формулюється наступним чином:

$$f(x) \to \min,\ x \in R^n \tag{2.1}$$

Для розв'язання задач безумовної оптимізації використовують наступні ***умови локальної оптимальності***.

Теорема 2.1. (необхідна умова локальної оптимальності першого роду). Нехай функція $f(x)$ диференційована в точці $x^* \in \mathbf{R}^n$. Тоді, якщо x^* – локальний розв'язок задачі (2.1), то $f'(x^*) = 0$.

Означення. Точка x^* називається стаціонарною точкою $f(x)$, якщо $f'(x^*) = 0$.

Теорема 2.2. (необхідна умова локальної оптимальності другого роду). Нехай функція $f(x)$ двічі диференційована в точці $x^* \in \mathbf{R}^n$. Тоді, якщо x^* – локальний розв'язок задачі (2.1), то матриця $f''(x^*)$ невід'ємно визначена, тобто $(f''(x^*)h, h) \geq 0,\ \forall h \in \mathbf{R}^n$.

Теорема 2.3. (достатня умова локальної оптимальності). Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна в точці $x^* \in \mathbf{R}^n$. Тоді якщо $f'(x^*) = 0$, а $f''(x^*)$ – додатньо визначена матриця, тобто $\forall h \in \mathbf{R}^n$: $(f''(x^*)h, h) \geq 0$, то x^* — строгий локальний розв'язок задачі (2.1).

Правило вибору глобального розв'язку: якщо відомо, що глобальний розв'язок існує, і до того ж функція диференційована на всьому $\mathbf{R}^n$, то цим розв'язком є стаціонарна точка, в якій функція приймає мінімальне значення. Якщо ця точка єдина, то вона є і глобальним розв'язком. Тому іноді при знаходженні глобального розв'язку немає необхідності використовувати теореми 2.2 і 2.3.

2.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Знайти всі розв'язки наступних задач безумовної оптимізації.

Задача 2.1.

$$F(x,y) = 5x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 12y \longrightarrow \min$$

Розв'язання

1. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 10x + 4y - 16 = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4x + 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

   Розв'язком системи рівнянь є точка $x^* = (-4, 14)$.

2. Матриця других похідних має вигляд:

$$F'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Перевіримо кутові мінори: $M_1 = 10 > 0$, $M_2 = 10 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 4 > 0$.

4. По критерію Сильвестра матриця додатньо визначена, тоді x^* – точка строгого локального мінімуму. Вона буде також точкою строгого глобального мінімуму, оскільки функція $F(x,y)$ нескінченно зростаюча на $\mathbf{R}^2$.

5. $F(x^*) = -52$.

Задача 2.2.

$$F(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \longrightarrow \min$$

Розв'язання

1. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 6x + 4y - 8 = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4x + 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

   Розв'язком системи рівнянь є точка $x^* = (8, -10)$.

2. Матриця других похідних має вигляд:

$$F'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Перевіримо кутові мінори: $M_1 = 6 > 0,\ M_2 = 6 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = -4 < 0.$

4. Матриця других похідних знаконевизначена, отже, функція F не має екстремумів.

Задача 2.3.

$$F(x,y) = xe^x - (1+e^x)\cos y \to \min$$

Розв'язання

1. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = e^x + xe^x - e^x\cos y = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = (1+e^x)\sin y = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^x(1+x-\cos y) = 0; \\ (1+e^x)\sin y = 0; \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+x-\cos y = 0; \\ \sin y = 0; \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0; \\ y = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2; \\ y = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}; \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, точками, які задовольняють системі рівнянь, будуть

$$(x^*, y^*) \in \{(0;\ 2\pi n); (-2; \pi + 2\pi k)\,|n, k \in \mathbf{Z}\}.$$

2. Матриця других похідних має вигляд:

$$F'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x + xe^x - e^x\cos y & e^x \sin y \\ e^x \sin y & (1+e^x)\cos y \end{pmatrix}$$

3. Дослідимо першу группу точок: $F''(0; 2\pi n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

   Перевіримо кутові мінори: $M_1 = 1 > 0, M_2 = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 > 0$. По критерію Сильвестра отримуємо, що матриця других похідних в точці $(0; 2\pi n),\ n \in \mathbf{Z}$, додатньо визначена. Отже, в цій точці маємо строгий локальний мінімум. Знайдемо значення функції $F(x,y)$ в точці $F(0; 2\pi n) = -2$. Ця точка буде точкою глобального мінімуму задачі, оскільки:

$$F(x, y) = xe^x - (1 + e^x)\cos y \geq xe^x - 1 - e^x = e^x(x - 1) - 1 = f(x).$$

Дослідимо останню функцію однієї змінної на екстремум:

$$f'(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x = 0 \Rightarrow [e^x \neq 0] \Rightarrow x = 0 \text{ – стаціонарна.}$$

Т.я. $f''(x) = xe^x + e^x = e^x(x + 1) \Rightarrow f''(0) = 1 > 0$, то $f(0) = -2$ — мінімум $\Rightarrow F(0; 2\pi n) = -2$ — глобальний мінімум $F(x; y)$.

4. Дослідимо другу групу точок: $F''(-2; \pi + 2\pi k) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & -1 - e^{-2} \end{pmatrix}$.

   Перевіримо кутові мінори: $M_1 = e^{-2} > 0, M_2 = -e^{-2}(1 + e^{-2}) < 0$.

   Отже, матриця других похідних в цій точці знаконевизначена.

   Тому $x^* = (-2; \pi + 2\pi k),\ k \in \mathbf{Z}$ не є точкою екстремуму.

Задача 2.4.

$$F(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2 \longrightarrow extr$$

Розв'язання

1. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - 2(x + y) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3 - 2(x + y) = 0. \end{cases} \quad \text{Маємо:}$$

$$\begin{cases} 2x^3 - (x + y) = 0; \\ 2y^3 - (x + y) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y; \\ 2x^3 - (x + y) = 0. \end{cases}$$

   Розв'язки системи рівнянь: $(x^*, y^*) \in \{(0; 0); (-1; -1); (1; 1)\}$.

2. Матриця других похідних має вигляд:

$$F'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$F''(-1;-1) = F''(1;1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Перевіримо кутові мінори: $M_1 = 10 > 0, M_2 = 10 \cdot 10 - 2 \cdot 2 > 0$.

   По критерію Сильвестра отримуємо, що матриця других похідних в точках $(-1;-1)$ і $(1;1)$ додатньо визначена. Отже, в цих точках маємо строгий локальний мінімум, який буде і глобальним, бо цільова функція нескінчено зростаюча на $\mathbf{R}^2$. Значення функції: $F(-1;-1) = F(1;1) = -2$.

4. $F''(-1;-1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

   Перевіримо кутові мінори $M_1 = -2 < 0, 2 = 2\cdot 2 - 2\cdot 2 = 0$. Матриця недодатньо визначена, тому в цій точці може бути локальний максимум. З'ясуємо це: $F(0;0) = 0$.

   За визначенням, якщо $x^* = (0;0)$ – точка локального максимуму, то в ε-околиці цієї точки $F(x) \geq F(x^*)$. Візьмемо точку $(-\varepsilon;\varepsilon)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \ F(-\varepsilon;\varepsilon) = 2\varepsilon^4 > 0 = F(0;0)$. Таким чином, знайдена точка, в якій умова не виконується, тому $x^* = (0;0)$ не є точкою екстремуму.

2.3. ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

Означення. Функція вигляду $f(x) = (Ax, x) + (b, x) + c$ називається ***квадратичною***, де $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ – симетрична матриця розмірності $n \times n$, b – вектор з $\mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$.

Квадратична функція або необмежена знизу на $\mathbf{R}^n$, або має в точку глобального мінімуму.

Якщо матриця A розмірності $n \times n$ додатньо визначена, тобто

$(Ax, x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}^n,\ x \neq 0$, то квадратична функція має точку глобального мінімуму на будь-якій замкненій множині $X \subset \mathbf{R}^n$.

2.4. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 2.5.

A – невід'ємно визначена симетрична матриця розмірності $n \times n$, $b \in \mathbf{R}^n$. Довести, що будь-яка стаціонарна точка квадратичної функції $F(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)$ є точкою глобального мінімуму.

Розв'язання

$F'(x) = Ax + b = 0 \Rightarrow Ax = -b \Rightarrow x^* = -A^{-1}b$.

Якщо x^* – точка глобального мінімуму, то $\forall y \in R^n\ \ F(y) - F(x*) \geq 0$, тобто: $\frac{1}{2}(Ay, y) + (b, y) - \frac{1}{2}(-AA^{-1}b, -A^{-1}b) - (b, -A^{-1}b) \geq 0$.

Візьмемо $y = x^* + \varepsilon$. Тоді:

$$\frac{1}{2}(Ax^* + A\varepsilon, x^* + \varepsilon) + (b, x^* + \varepsilon) - \frac{1}{2}(Ax^*, x^*) - (b, x^*) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(Ax^*, x^*) + (A\varepsilon, x^*) + (Ax^*, \varepsilon) - (Ax^*, x^*)\right] + (b, x^*) + (b, \varepsilon) -$$

$$-(b, x^*) \geq 0 \Leftrightarrow (Ax^*, \varepsilon) + (A\varepsilon, x^*) + (A\varepsilon, \varepsilon) + 2(b, \varepsilon) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A(-A^{-1}b), \varepsilon) + (A\varepsilon, -A^{-1}b) + (A\varepsilon, \varepsilon) + 2(b, \varepsilon) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b, \varepsilon) + (A\varepsilon, \varepsilon) + (\varepsilon, -b) \geq 0 \Leftrightarrow (A\varepsilon, \varepsilon) \geq 0.$$

Остання нерівність виконується, оскільки матриця А невід'ємно визначена по умові задачі, і доводить необхідне твердження.

Задача 2.6.

Знайти всі значення параметрів a, b, c, при яких в точці $(1, -4)$ досягається глобальний мінімум функції

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + y^2 + 6x + cy.$$

Розв'язання

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2ax + by + 6 = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + bx + c = 0. \end{cases}$$

Для того, щоб в точці $x^* = (1, -4)$ був глобальний мінімум функції $F(x, y)$, необхідно, щоб для цієї точки виконувалися необхідні умови екстремуму:

$$\begin{cases} 2a - 4b + 6 = 0; \\ b + c - 8 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - c; \\ a = 13 - 2c. \end{cases}$$

Матриця других похідних має вигляд: $F'' = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2 \end{pmatrix}$

Для того, щоб в точці $x^* = (1, -4)$ був глобальний мінімум функції $F(x, y)$, необхідно щоб: $M_1 = 2a > 0$ і $M_2 = 4a - b^2 > 0$.

Звідси одержуємо:

$$\begin{cases} b = 8 - c; \\ a = 13 - 2c; \\ 2a > 0; \\ 4a - b^2 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \in (2; 6); \\ a = 13 - 2c; \\ b = 8 - c. \end{cases}$$

Це і є відповідь.

Задача 2.7.

Знайти всі значення параметрів a і b, при яких точка $(0, 1)$ є екстремальною для функції $F(x, y) = 2x^2 + a^3 e^x + bxy + \frac{b^3 y^2}{2} + ay$.

Розв'язання

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x + a^3 e^x + by = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = bx + b^3 y + a = 0. \end{cases}$$

Для того, щоб в точці $(0, 1)$ досягався екстремум функції $F(x, y)$ потрібно, щоб для цієї точки виконувалися необхідні умови екстремуму:

$$\begin{cases} a^3 + b = 0; \\ b^3 + a = 0. \end{cases} \Rightarrow (a, b) \in \{(0; 0),\ (1; -1);\ (-1; 1)\}.$$

Матриця других похідних для точки $(0, 1)$ має вигляд:

$$F'' = \begin{pmatrix} 4 + a^3 & b \\ b & b^3 \end{pmatrix}$$

В точці $x^* = (0, 1)$:

1. При $a = 0$, $b = 0$ досягається нестрогий глобальний мінімум;
2. При $a = 1$, $b = -1$ матриця знаконевизначена, отже, точка $(0, 1)$ не є екстремальною;
3. При $a = -1$, $b = 1$ досягається строгий локальний мінімум (не глобальний, оскільки $f(x, 0) = 2x^2 - e^x \longrightarrow -\infty$ при $x \longrightarrow \infty$).

Задача 2.8.

Нехай в $\mathbf{R}^n$ задано m точок $x^i = (x_1^i, ..., x_n^i)$, $i = \overline{1, m}$. Знайти таку точку $x \in \mathbf{R}^n$, сума квадратів відстаней від якої до цих точок мінімальна.

Розв'язання

Задача еквівалентна наступній: мінімізувати функцію

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left\| x - x^i \right\|^2, \; x \in R^n, \; x \neq 0.$$

Для функції $g(x) = \|x\|$ градієнт обчислюється таким чином:

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial \|x\|}{\partial x_k} = \frac{\partial \left(\sum x_k^2\right)^{1/2}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{2x_k}{(\sum x_k^2)^{1/2}} = \frac{x_k}{\|x\|}, \text{ тобто } g'_x = \frac{x}{\|x\|}.$$

Тому для $f(x) = \left\|x - x^1\right\|^2 + \ldots + \|x - x^m\|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'_x(x) = 2 \left\|x - x^1\right\| \cdot \left\|x - x^1\right\|' + \ldots + 2 \|x - x^m\| \cdot \|x - x^m\|' =$$

$$= 2 \left(\frac{\left\|x - x^1\right\| \cdot (x - x^1)}{\|x - x^1\|} + \ldots + \frac{\|x - x^m\| \cdot (x - x^m)}{\|x - x^m\|} \right) = 2 \sum_{i=1}^{m} (x - x^i) = 0.$$

Отже, стаціонарною точкою задачі буде $x^* = \frac{1}{m} \sum\limits_{i=1}^{m} x^i$, у якої кожна координата є середнім арифметичним відповідних координат всіх точок. $f''_{xx} = 2mI$ – додатньо визначена, тоді точка x^* буде точкою локального мінімуму задачі. Але це також і глобальний мінімум з наслідку з теореми Вейєрштраса ($f(x)$ – функція, що нескінченно зростає).

2.5. ЗАДАЧІ

Розв'язати наступні задачі безумовної оптимізації:

2.1. $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 2z \to extr$

2.2. $F(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \to extr$

2.3. $F(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2 - 2x - y \to extr$

2.4. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \to extr$

2.5. $F(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2 \to extr$

2.6. $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - xy + x - 3z \to extr$

2.7. $F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y \to extr$

2.8. $F(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \to extr$

2.9. $F(x, y, z) = xy^2z^3\,(1 - x - 2y - 3z) \to extr$

2.10. $F(x, y) = x^2 + y + \frac{1}{x+y} \to extr,\ (x + y > 0)$

2.11. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \to \min$

2.12. $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2\max\{x; y\} \to \min$

2.13. $F(x, y) = (x + y)(x - a)(y - b) \to extr$ залежно від параметрів і b.

2.14. Знайти точку глобального мінімуму функції:

$$F(x, y) = ax^2 + 2xy + by^2 - 2x - 3y, \text{ де}$$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
b	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

2.15. Знайти точки глобальних екстремумів і значення в цих точках функції: $F(x,y) = axy + \frac{b}{x} + \frac{c}{y}, x > 0, y > 0$, де

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	2	3	1	3	2	3	2	4	4	4	4	1	2	3	1	2	1
b	1	2	2	1	3	4	1	1	1	2	1	4	4	4	3	3	1
c	3	4	3	2	1	1	4	2	3	3	1	1	3	2	4	3	4

2.16. Знайти всі значення параметрів k і m, при яких квадратична функція $f(x,y) = kx^2 + 2axy + b^2y^2 + cx + my$ має точку глобального мінімуму на R^2 при наступних значеннях a, b і c:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a	2	1	3	4	5	1	3	5	2	4	5	1	4	2	3	4	5	3	1
b	3	8	4	5	2	4	2	3	5	3	2	4	5	3	7	3	6	4	3
c	6	-1	6	-8	10	-2	9	5	-4	-12	15	-3	-4	8	6	16	-10	-15	4

2.17. $F(x,y,z) = -x^2 + 2xy - y^2 - 4z^2 \to extr$

2.18. $F(x,y) = (x-1)^4 + (y-3)^2 \to extr$

ГЛАВА 3. ЛІНІЇ РІВНЯ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

3.1. ПОНЯТТЯ ЛІНІЇ РІВНЯ

Означення. При розгляді задачі умовної оптимізації важливу роль грає поняття лінії рівня цільової функції:

$$L_\alpha = \{(x, y) : \ f(x, y) = \alpha\}; \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

3.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1.

Зобразити на площині лінії рівня функції: $f(x, y) = ax + by$.

Розв'язання

$ax + by = c$

Якщо коефіцієнти a і b, одночасно дорівнюють нулю, то $c = 0$, і тоді геометричним місцем точок, які задовольняють цьому рівнянню, є вся площина xOy. При $c \neq 0$ рівняння не має сенсу.

Нехай $b \neq 0$. Тоді $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Це є пряма з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{a}{b}$, яка відсікає на осі координат відрізок довжиною $\left|\frac{c}{b}\right|$. Тобто $\frac{c}{b}$ – координата перетину прямої з віссю Oy. Якщо $-\frac{a}{b} > 0$, то пряма утворює з позитивним напрямом осі Ox гострий кут. Якщо $-\frac{a}{b} < 0$, то тупий (Рис.3.1).

Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то $y = \frac{c}{b}$. Це буде пряма, паралельна осі Ox, яка перетинає вісь Oy в точці $y(0; \frac{c}{b})$ (Рис.3.2).

Якщо $b = 0$, $a \neq 0$, то $ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a}$. Це пряма, паралельна осі Oy, яка перетинає вісь Ox в точці $(\frac{c}{a}; 0)$ (Рис.3.3).

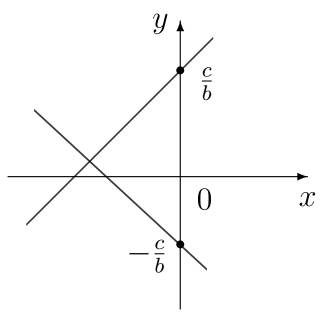

Рис. 3.1

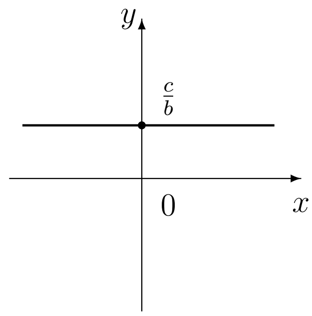

Рис. 3.2

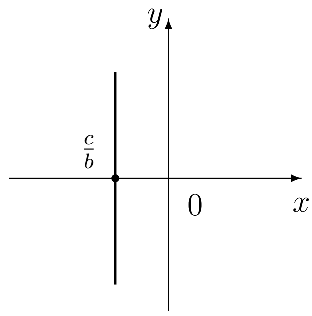

Рис. 3.3

Задача 3.2.

Зобразити на площині лінії рівня функції: $f(x, y) = ax^2 + by^2$.

Розв'язання

$ax^2 + by^2 = c$

Якщо коефіцієнти a і b, одночасно дорівнюють нулю, то $c = 0$, і тоді геометричним місцем точок, які задовольняють цьому рівнянню, є вся площина xOy. При $c \neq 0$ рівняння не має сенсу.

Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, рівняння має вигляд $by^2 = c \Rightarrow y^2 = \frac{c}{b}$. При $\frac{c}{b} > 0 : y = \pm\sqrt{\frac{c}{b}}$. Це буде пара паралельних прямих, які паралельні також осі Ox і проходять через вісь Oy в точках $(0; \pm\sqrt{\frac{c}{b}})$ (Рис.3.4).

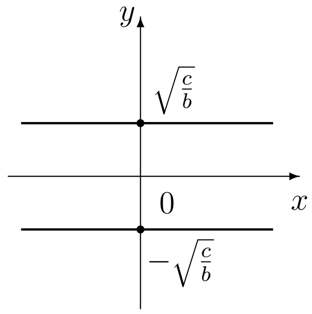

Рис. 3.4

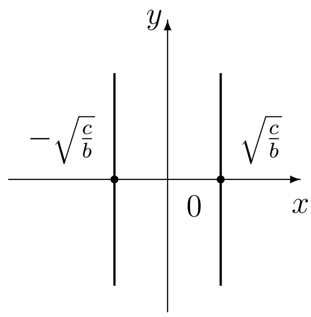

Рис. 3.5

Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Це буде пряма, яка співпадає з віссю Ox.

Якщо $\frac{c}{b} < 0$, то рівняння $y^2 = \frac{c}{b}$ не має розв'язків.

Якщо $b = 0$, $a \neq 0$, то $ax^2 = c \Rightarrow x^2 = \frac{c}{a}$. При $\frac{c}{a} > 0 : x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ – пара паралельних осі Oy прямих, які перетинають вісь Ox в точках $(\pm\sqrt{\frac{c}{a}}; 0)$ (Рис.3.5).

Якщо $c = 0$, то $x = 0$. Ця пряма співпадає з віссю Oy.

Якщо $\frac{c}{a} < 0$, то рівняння $x^2 = \frac{c}{a}$ розв'язків мати не буде.

Нехай $a \neq 0$, $b \neq 0$.

При $c = 0$ маємо $ax^2 + by^2 = 0$. Якщо $ab > 0$, тобто a і b одного знака, то розв'язком цього рівняння буде єдина точка $(0; 0)$.

Якщо $ab < 0$, тобто ці координати різних знаків, то $y^2 = -\frac{a}{b}x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \ y = \pm x\sqrt{-\frac{a}{b}}$. Це пара прямих, що проходять через початок координат з кутовими коефіцієнтами $\pm\sqrt{-\frac{a}{b}}$, тобто вони симетричні щодо осі Oy (Рис.3.6).

При $c \neq 0 : ax^2 + by^2 = c$. Поділимо на c дане рівняння і запишемо його у вигляді:

$$\frac{x^2}{\frac{c}{a}} + \frac{y^2}{\frac{c}{b}} = 1.$$

Якщо $\frac{c}{a} > 0$ і $\frac{c}{b} > 0$, то маємо канонічне рівняння еліпса, вершинами, якого будуть точки:

$$\left(\sqrt{\frac{c}{a}}; 0\right), \left(-\sqrt{\frac{c}{a}}; 0\right), \left(0; \sqrt{\frac{c}{b}}\right) \left(0; -\sqrt{\frac{c}{b}}\right) \text{ (Рис.3.7).}$$

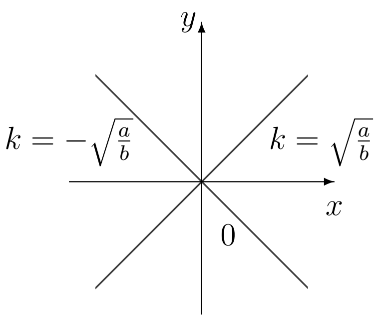

Рис. 3.6

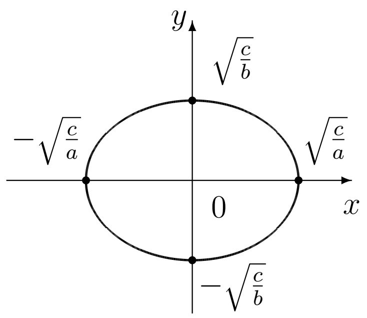

Рис. 3.7

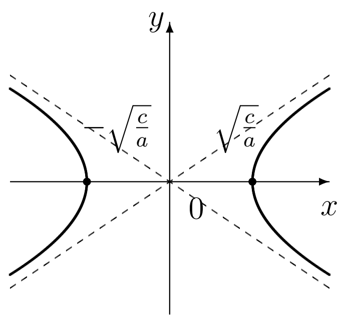

Рис. 3.8

При $a = b$ отримуємо коло з центром в точці $(0; 0)$ і радіусом $R = \sqrt{\frac{c}{a}}$.

Якщо $\frac{c}{a} > 0$, $\frac{c}{b} < 0$, маємо канонічне рівняння гіперболи, яка перетинає вісь абсцис в точках $(\sqrt{\frac{c}{a}}; 0)$, $(-\sqrt{\frac{c}{a}}; 0)$ і не перетинають вісь ординат. Асимптотами цієї гіперболи будуть прямі, що проходять через початок координат і симетричні щодо осі Oy (Рис.3.8). Їх рівняння мають вигляд $y = \pm x\sqrt{-\frac{a}{b}}$.

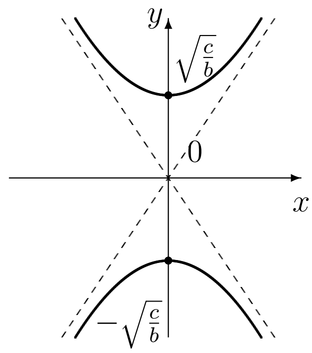

Рис. 3.9

Якщо $\frac{c}{a} < 0$, $\frac{c}{b} > 0$, маємо гіперболу з вершинами в точках $(\sqrt{\frac{c}{b}}; 0)$, $(-\sqrt{\frac{c}{b}}; 0)$ і з асимптотами $y = \pm x\sqrt{-\frac{b}{a}}$ (Рис.3.9).

Якщо $\frac{c}{a} < 0$, $\frac{c}{b} < 0$, то дане рівняння розв'язків мати не буде.

Задача 3.3.

Зобразити на площині лінії рівня функції: $f(x, y) = ax^2 - by^2$.

Розв'язання

Замінимо $a_1 = a$, $b_1 = -b$, отримаємо $a_1x^2 + b_1y^2 = c$. Переходимо до попередньої задачі і аналіз проводимо аналогічно.

Задача 3.4.

Зобразити на площині лінії рівня функції: $f(x, y) = ax^2 - by$.

Розв'язання

Якщо $a = b = 0$, то $c = 0$ і розв'язком рівняння буде вся площина xOy. При $\neq 0$ рівняння не має роз'язків.

Якщо $a = 0$, $b \neq 0$. Рівняння має вигляд $by = c$. Значить при $c = 0$ – пряма, яка співпадає з віссю абсцис (Рис.3.10). При $c \neq 0$ – пряма, яка паралельна осі абсцис і перетинає вісь ординат в точці $(0; \frac{c}{b})$.

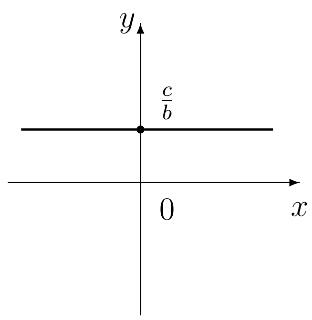

Рис. 3.10

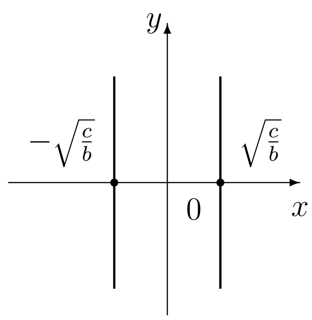

Рис. 3.11

Якщо $b = 0$, $a \neq 0$. Рівняння має вигляд $ax^2 = c \Rightarrow x^2 = \frac{c}{a}$. При $c = 0$ це буде пряма $x = 0$, тобто вісь ординат.

При $c \neq 0$ і $\frac{c}{a} > 0$ це буде пара прямих $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ паралельних осі Oy, які перетинають вісь Ox в точках $(\pm\sqrt{\frac{c}{a}}; 0)$ (Рис.3.11).

При $\frac{c}{a} < 0$ рівняння розв'язків мати не буде.

Якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$. Рівняння матиме вигляд $y = -\frac{a}{b}x^2 + \frac{c}{b}$.

При $-\frac{a}{b} > 0$ це буде парабола гілками вгору. При $c = 0$ вона проходить через початок координат. При $\frac{c}{b} > 0$ вона підіймається на $\frac{c}{b}$ одиниць вгору і не перетинає вісь Ox, при $\frac{c}{b} < 0$ – опускається на $-\frac{c}{b}$ одиниць вниз і перетинає вісь Oy в точці $(0; \frac{c}{b})$, а вісь Ox в точках $(\sqrt{\frac{c}{a}}; 0)$, $(-\sqrt{\frac{c}{a}}; 0)$.

При $-\frac{a}{b} < 0$ маємо параболу гілками вниз. При $c = 0$ вона проходить через початок координат. При $\frac{c}{b} < 0$ вона опускається на $-\frac{c}{b}$ одиниць вниз і не перетинає вісь Ox, при $\frac{c}{b} > 0$ вона підіймається на $\frac{c}{b}$ одиниць вгору і перетинає вісь Oy в точці $(0; \frac{c}{b})$, а вісь Ox в точках $(\sqrt{\frac{c}{a}}; 0)$, $(-\sqrt{\frac{c}{a}}; 0)$. Графіки в цих випадках побудувати самостійно.

3.3. ГРАФІЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Задача 3.5.

Розв'язати графічно наступну задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max; \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 18; \\ 2x_1 - x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Спочатку побудуємо область розв'язків системи нерівностей. У даному випадку отримуємо опуклий п‘ятикутник (Рис.3.12). Далі в цій системі координат будуємо вектор, $\overrightarrow{C} = (4, 2)$, нормальний до ліній рівня $4x_1 + 2x_2 = \alpha$.

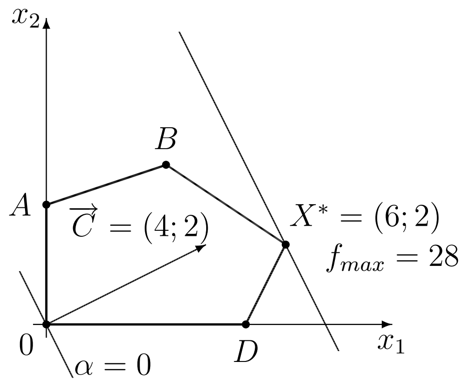

Рис. 3.12

Пряма, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{C}$, є лінією рівня, що відповідає значенню $\alpha = 0$. Паралельно пересуваючи цю пряму у напрямку вектора $\overrightarrow{C}$, до тих пір, поки вона зберігає загальні точки з областю дозволених розв‘язків, та знаходимо, що у крайньому з можливих положень лінія рівня містить точку X^*. Саме цьому розташуванню ліній рівня і відповідає $\alpha = f_{\max}$. Щоб знайти координати точки X^*, необхідно відшукати точку перетину граничних прямих BX^* та DX^*, а значить розв‘язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 18; \\ 2x_1 - x_2 = 10. \end{cases}$$

Отримуємо шуканий оптимальний розв‘язок $X^* = (6, 2)$.

Підставивши x_1 та x_2 у функцію f, знаходимо $f_{\max} = 28$.

Задача 3.6.

Розв'язати графічно наступну задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 11; \\ -2x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 - x_2 \leq 0; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Перший етап – побудова області дозволених розв'язків – виконується по аналогії до попередньої задачі. Після побудови, отримуємо необмежену багатокутну область, що зображена на Рис.3.13.

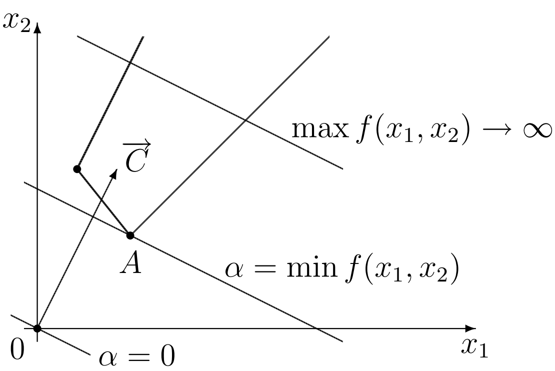

Рис. 3.13

На другому етапі розв'язку при паралельному зсуві ліній знаходимо, що такий зсув можна проводити необмежено. Тобто, функція зверху необмежена: $f(x_1,x_2) \longrightarrow \infty$. У таких випадках кажуть, що задача лінійного програмування не має розв'язку, тому що цільова функція необмежена. До речі, якби нам треба було у тих же умовах мінімізувати $f(x_1,x_2)$, то ми отримали б оптимальний розв'язок у точці $A(2,2;2,2)$.

Задача 3.7.

Розв'язати графічно задачу лінійного програмування, що задана у канонічній формі:

$$\begin{cases} f(x) = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 88 \longrightarrow \max, \ x = \{x_j\}_{j=\overline{1,7}}, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + 5x_2 + x_4 = 37; \\ 5x_1 + x_2 + x_5 = 49; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_6 = 11; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_7 = 19; \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Розв'язання

На відміну від попередніх задач, система обмежень задана не у формі нерівностей, а як система п'яти рівнянь. Тому спочатку необхідно перейти від канонічної форми до запису задачі з обмеженнями у формі нерівностей. Відкидаючи у кожному рівнянні базисні змінні x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 перейдемо до системи з п'ятьма нерівностями, що повинні задовольняти вільні змінні вихідної задачі x_1 та x_2. Використаємо ті ж самі пять нерівностей, не враховуючи базисні змінні також із виразу для функції f. Як наслідок цих нескладних перетворень, отримали наступну задачу, що містить лише дві змінні x_1 та x_2:

$$\begin{cases} f(x) = 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max; \\ -2x_1 + x_2 \leq 2; \\ -x_1 + 5x_2 \leq 37; \\ 5x_1 + x_2 \leq 49; \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 11; \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 19; \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

На Рис.3.14 зображено графічний розв'язок цієї задачі:

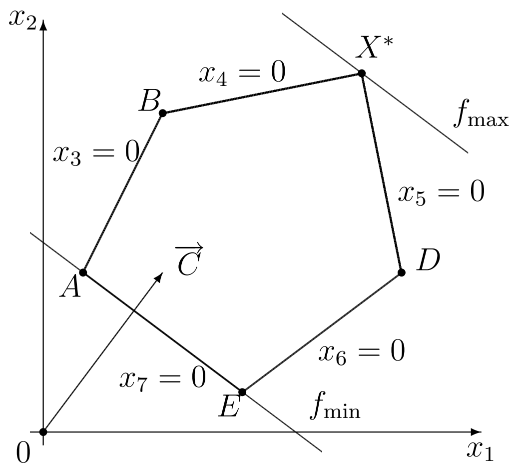

Рис. 3.14

Оптимальний розв'язок співпадає із точкою X^*, що є точкою перетину прямих BX^* та DX^*. На кожній з граничних прямих відповідна нерівність перетворюється на рівність, а тому базисна змінна, що була відкинута на час перетворення цієї нерівності, дорівнює нулю. Так у точці X^* маємо $x_4 = 0$ та $x_5 = 0$. Підставивши ці значення у друге та третє вихідні рівняння (рівняння граничних прямих BX^* та DX^*) отримуємо $x_1 = 8$ та $x_2 = 9$.

Тепер, підставивши отриманні значення x_1 та x_2 до 1-го, 4-го та 5-го вихідних рівнянь, знаходимо значення інших трьох змінних задачі: $x_3 = 9$, $x_6 = 23$ та $x_7 = 41$. Таким чином, маємо оптимальний розв'язок: $X^* = (8, 9, 9, 0, 0, 23, 41)$. Відповідно значення функції f буде: $f_{\max} = 60$.

Задача 3.8.

За умовою попередньої задачі знайти мінімум f.

Розв'язання

Зрозуміло, що зберігається увесь напрямок роздумів, що привели нас до Рис.3.14. Паралельно пересуваючи лінію рівня у напрямку, що є протилежним до вектора $\overrightarrow{C}$, бачимо, що у крайньому положенні (при якому $f = f_{\min}$) вона проходить через сторону багатокутника AE. Тому на відміну від вищерозглянутої задачі, оптимальний розв'язок тут досягається у будь-якій точці відрізка AE, включаючи його крайні точки A та E. Такий випадок отримав назву «альтернативного оптимума». Так як увесь відрізок однозначно задається своїми крайніми точками, для опису усієї множини оптимальних розв'язків достатньо визначити розв'язки X_1^* та X_2^*, що відповідають вершинам A та E.

Для X_1^* маємо $x_3 = 0$ та $x_7 = 0$ (див. Рис.3.14). Розв'язуючи 1-е та 5-е рівняння знайдемо $x_1 = 1$ та $x_2 = 4$. Потім з 2, 3 та 4-го рівняння визначимо $x_4 = 18$, $x_5 = 4$, $x_6 = 24$. Аналогічно можна знайти другий оптимальний розв'язок: $X_2^* = (5, 1, 11, 37, 23, 0, 0)$.

Запишемо рівняння відрізка, що з'єднує точки X_1^* та X_2^*, у вигляді $X = tX_1^* + (1-t)X_2^*$, де $0 \le t \le 1$ і використаємо його: підставимо два знайдених оптимальних розв'язки, отримаємо формулу загального розвязку для визначення будь-якого оптимального розв'язку:

$$X = t(1, 4, 0, 18, 40, 24, 0) + (1-t)(5, 1, 11, 37, 23, 0, 0) =$$

$$= (5-4t, 1+3t, 11-11t, 37-19t, 23+17t, 24t, 0), \text{ де } 0 \le t \le 1.$$

Задавши параметри t будь-яких значень від 0 до 1, отримаємо різні оптимальні розв'язки задачі, при кожному з яких $f = f_{\min} = 19$.

Правила розв'язання задач лінійного програмування:

a. Графічно можуть бути розв'язані:

1. задачі з обмеженнями у вигляді системи нерівностей, що містять обидві змінні;
2. задачі, що задані у канонічній формі із кількістю вільних змінних $n - r \le 2$;
3. задачі загального вигляду, що після приведення їх до канонічної форми будуть містити не більше двох вільних змінних.

б. основною формою для графічного розв'язку є перший тип задач. Тому, якщо зустрічається другий або третій тип, то їх модель заздалегідь повинна бути приведена до першого;

в. розв'язки задачі першого типу виконується у два етапи: побудова області дозволених розв'язків і знаходження в цій області оптимального розв'язку;

г. при побудові області дозволених розв'язків може зустрітися один із наступних випадків: I – порожня область, II – опуклий багатокутник і III – необмежена опукла багатокутна множина. У випадку I задача не має розв'язку, у випадку II задача завжди має оптимальний розв'язок і у випадку III задача може мати або не мати розв'язків в залежності від напрямку вектора $\overrightarrow{C}$ (від коефіцієнта функції f). Останнє обумовлено необмеженим зростанням ($f_{\max} \to +\infty$) або спаданням ($f_{\min} \to -\infty$) функції у області дозволених розвя'зків;

д. задача може мати єдиний оптимальний розв'язок, що співпадає з вершиною області, та нескінченну множину розв'язків («альтернативний оптимум»);

е. при умові альтернативного оптимума і обмеженої області оптимальні розв'язки відповідають усім точкам відрізка, що з'єднує дві вершини області. В такому випадку необхідно знайти загальний оптимальний розв'язок, як це показано в кінці задачі 4.4.

   У випадку необмеженої області може трапитися так, що серед множини оптимальних розв'язків тільки один співпадає із вершиною області (Рис.3.15, точка X_1^*).

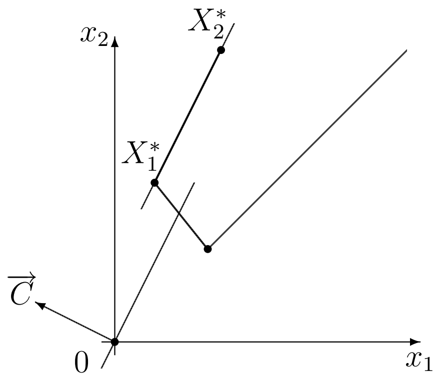

Рис. 3.15

Тоді на «оптимальній» граничній прямій знаходять ще один оптимальний розв‘язок (див. Рис.3.15) і далі загальний оптимальний розв‘язок описують за допомогою формули, що є аналогом формули відрізка, але зі зміною параметра t від нуля до нескінченності.

$$X = tX_1^* + (1-t)X_2^*, \text{ де } 0 \leq t \leq \infty.$$

Якщо у задачах лінійного програмування точки екстремума є вершинами багатокутників розв‘язків, то у задачі з нелінійною цільовою функцією вони можуть розташовуватися всередині області, на ребрі (грані) або у вершині багатогранника.

Задача 3.9.

$$f(x_1,x_2) = (x_1-4)^2 + (x_2-6)^2 \longrightarrow \min; \quad X : \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв’язання

Область дозволених значень представляє собою багатокутник $ABCE$. Лінії рівня $(x_1-4)^2 + (x_2-6)^2 = c$, $c > 0$ – кола із центром у точці $M(4;6)$ та радіусом $\sqrt{c}$ (зі зменшенням с значення функції зменшується). Проводячи кола різного радіусу маємо: мінімум функції f є точка D, $D(\frac{24}{13};\frac{36}{13}), f(D) = \frac{196}{13}$, де коло торкається області розв'язків. Точка D не знаходиться у куті, її координати знаходяться як розв'язок системи рівнянь прямих MD і CE. Функція f має 2 локальних максимума: у точці $A(1;0)$ і $E(6;0)$, $f(A) = 45$, $f(E) = 40$, $f(A) > f(E)$, значить A – точка глобального максимума (Рис.3.16).

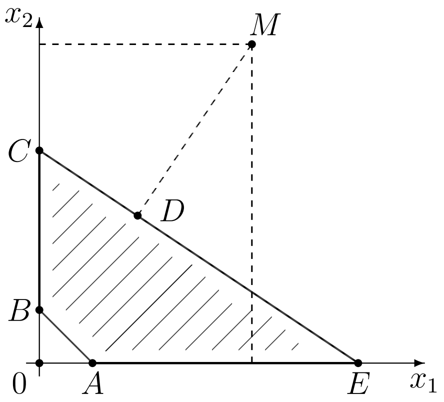

Рис. 3.16

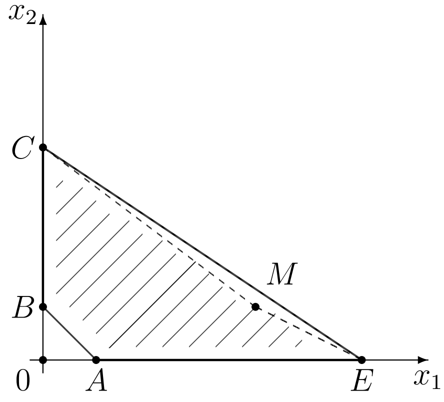

Рис. 3.17

Задача 3.10.

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 \longrightarrow extr;$ X – як у попередній задачі.

Розв'язання

Мінімальне значення функція f приймає у точці $M(4;1)$, $f_{\min} = 0$. Точка M – внутрішня. Маємо 2 локальних максимума: $(6;0)$ і $(0;4)$. $f(6;0) = 5$, $f(0;4) = 25$, тобто $(0;4)$ глобальний максимум (Рис.3.17).

Задача 3.11.

Знайти глобальний розв'язок задачі:

$$xy \longrightarrow \max,\ ax + by = 1,\ a > 0,\ b > 0.$$

Розв'язання

Підставимо y в рівняння $ax + by = 1$, отримаємо:

$$ax + b \cdot \frac{a}{b} \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2a} \Rightarrow y = \frac{1}{2b} \Rightarrow \left(\frac{1}{2a};\frac{1}{2b}\right) \text{ – шуканий розв'язок.}$$

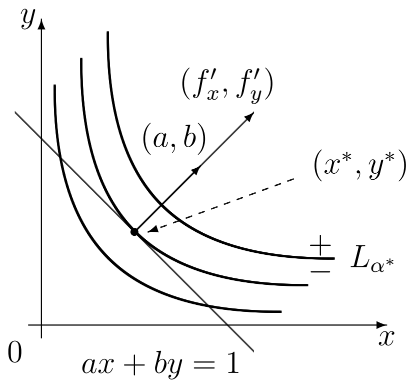

Рис. 3.18

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \mathrm{tg}\alpha \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{ax}{b}$$

Задача 3.12.

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to extr; \\ x_1 x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 \geq 5; \\ x_1 \leq 7; \\ x_2 \leq 6; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

X – не є опуклою областю. $A(1; 4)$ і $B(4; 1)$ – точки мінімума. Два локальних максимума: C, D – локальні максимуми, C – глобальний максимум.

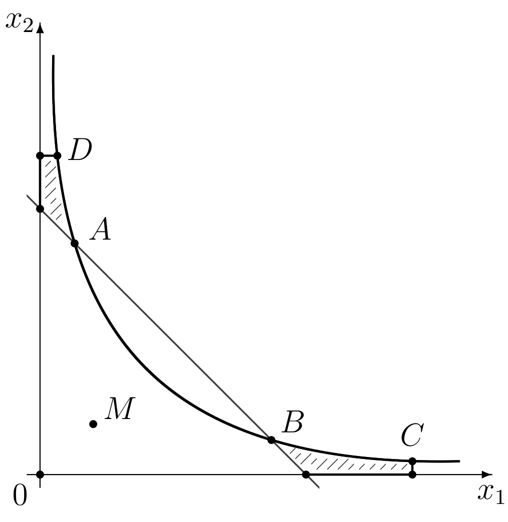

Рис. 3.19

3.4. ЗАДАЧІ

Побудувати на площині $\mathbf{R}^2$ лінії рівня наступних функцій:

3.1. $F(x, y) = a\,|x| + b\,|y|$

3.2. $F(x, y) = a\,|x| - b\,|y|$

3.3. $F(x, y) = ax^3 + by^3$

3.4. $F(x, y) = ax^3 - by^3$

3.5. Розв'язати геометрично:

$$\begin{cases} y \to \min; \\ x^2 + y^2 - 1 \le 0; \\ -x + y^2 \le 0; \\ x + y \ge 0. \end{cases}$$

ГЛАВА 4. КЛАСИЧНА ЗАДАЧА НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

4.1. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Означення. ***Класичною задачею на умовний екстремум*** називається задача де дозволена множина X задана у вигляді системи кінцевої кількості рівностей, тобто це задача:

$$\begin{cases} f(x) \to \min; \\ g_1(x) = 0, \\ \dots \\ g_m(x) = 0, \\ x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) \to \min; \\ g_i(x) = 0,\ i = \overline{1, m},\ x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{4.1}$$

Її функція Лагранжа визначається наступним чином:

$$L(x, y_0, y) = y_0 \cdot f(x) + y_1 \cdot g_1(x) + \ldots + y_m \cdot g_m(x), \text{ де}$$

$$y = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m,\ y_0 \in R.$$

Теорема 4.1. (про необхідні умови оптимальності) Нехай функції $f, g_1, \ldots, g_m$ неперервно-диференційовні у деякому околі точки $x^* \in \mathbf{R}^n$. Якщо x^* – локальний розв'язок задачі (4.1), то існують y_0^* та y^*, що не перетворюються у нуль одночасно і такі, що

$$L'_x(x^*, y_0^*, y^*) = 0 \tag{4.2}$$

Якщо при цьому $g'_1(x^*), \ldots, g'_m(x^*)$ лінійно незалежні (умова регулярності), то $y_0^* \neq 0$.

Теорема 4.2. (необхідна умова другого порядку) Нехай функції $f, g_1, \ldots, g_m$ двічі диференційовні у деякій точці $x^* \in \mathbf{R}^n$ і двічі неперервно-диференційовні в її околі, нехай також $g'_1(x^*), \ldots, g'_m(x^*)$ лінійно незалежні. Тоді, якщо x^* – локальний розв‘язок задачі (4.1) і існують y_0^* та y^*, що не перетворюються в нуль одночасно і такі, що виконується необхідна умова (4.2), то

$$L''_{xx}(x^*, y_0^*, y^*)h, h) \geq 0 \tag{4.3}$$

для усіх $h \in \mathbf{R}^m$ таких, що $(g'_x(x^*), h) = 0$ (4.4).

Теорема 4.3. (достатня умова) Нехай функції $f, g_1, \ldots, g_m$ двічі диференційовні у точці $x^* \in \mathbf{R}^n$ такій, що $g_i(x^*) = 0$, $i = \overline{1, m}$. Припустимо, що виконується умова (4.2) і $(L''_{xx}(x^*, y_0^*, y^*)h, h) > 0$ (4.5) при всіх ненульових h, для яких виконується умова (2). Тоді строгий локальний розв‘язок задачі (4.1).

Задача 4.1.

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} \to \min, \; a, b > 0; \\ g(x,y): \; x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо функцію Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + \lambda(x^3 + y^3 - 1)$.

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx} = ax + 3\lambda x^2 = 0; \\ \frac{dL}{dy} = by + 3\lambda y^2 = 0; \\ g(x,y) = x^3 + y^3 - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a + 3\lambda x) = 0; \\ y(b + 3\lambda y) = 0; \\ x^3 + y^3 - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}; \\ y = \frac{b}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}; \\ \lambda = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^3+b^3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0; \\ y = 1; \\ \lambda = -\frac{b}{3}. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1; \\ y = 0; \\ \lambda = -\frac{a}{3}. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$L''(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} a + 6\lambda x & 0 \\ 0 & b + 6\lambda y \end{pmatrix}$$

Маємо: $L''(1, 0, -\frac{a}{3}) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Перший кутовий мінор дорівнює $-a<0$, другий — $-ab<0$. Отже, матриця $L''(1,0,-\frac{a}{3})$ є знаконевизначеною.

Знайдемо розв'язок рівняння $(g'(x,y),h)=0$. Отримаємо:

$$g'(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2\\3y^2\end{pmatrix}_{(1;0)}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix};\ (g'(x,y),h)=\left(\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right)=$$

$$=3h_1+0\cdot h_2=0;\Rightarrow h_1=0,\ \forall h_2.$$

Для $h=\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}$ перевіримо нерівність $(L''h,h)\geq 0$:

$$\left(\begin{pmatrix}-a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}0\\bh_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}\right)=bh_2^2\geq 0.$$

Тобто точка $(1;0)$ – точка локального мінімума.

Аналогічно розрахуємо $L''(x,y,\lambda)$ для точок $(0,1,-\frac{b}{3})$ і $\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}},\frac{b}{\sqrt[3]{a^3+b^3}},-\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^3+b^3}\right)$.

$L''(0,1,-\frac{b}{3})=\begin{pmatrix}a&0\\0&-b\end{pmatrix}$. Перший кутовий мінор дорівнює $a>0$, другий — $-ab<0$. Тобто, матриця $L''(0,1,-\frac{b}{3})$ є знаконевизначеною.

$$g'(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2\\3y^2\end{pmatrix}_{(0;1)}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix};\ (g'(x,y),h)=\left(\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right)=$$

$$=0\cdot h_1+3h_2=0;\Rightarrow h_2=0,\ \forall h_1.$$

Для $h=\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}$ перевіримо нерівність $(L''h,h)\geq 0$:

$$\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}ah_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}\right)=ah_1^2\geq 0.$$

Тобто, точка $(0;1)$ – точка локального мінімума.

$L''\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}},\frac{b}{\sqrt[3]{a^3+b^3}},-\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^3+b^3}\right)=\begin{pmatrix}-a&0\\0&-b\end{pmatrix}$. Перший кутовий мінор дорівнює $-a<0$, другий — $-ab<0$. Тобто, матриця

$L''\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}, \frac{b}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}, -\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^3+b^3}\right)$ є від'ємно визначеною. Таким чином, точка $\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}, \frac{b}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}, -\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^3+b^3}\right)$ не є точкою мінімума.

Знайдемо значення функції у наших точках:

$$f_{\min}(1,0) = \frac{a}{2};\ f_{\min}(0,1) = \frac{b}{2};\ f_{\max}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}, \frac{b}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}\right) = \frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{2}.$$

Задача 4.2.

Знайти усі розв'язки наступної задачі умовної оптимізації:

$$F(x) = 9 - 8x - 6y;$$
$$G(x) : x^2 + y^2 = 25.$$

Розв'язання

Запишемо функцію Лагранжа: $L(x,y) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$.

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} L'_x = -8 + 2\lambda x; \\ L'_y = -6 + 2\lambda y; \\ x^2 + y^2 - 25 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1,\ x_1 = 4,\ y_1 = 3; \\ \lambda_2 = -1,\ x_2 = -4,\ y_2 = -3. \end{cases}$$

$$L'' = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Дослідимо:

1. $\lambda_1 = 1,\ M_1 = 2\lambda_1 = 2 > 0,\ M_2 = 4\lambda_1^2 = 4 > 0$. Тому у точці $(4;3)$ – умовний мінімум.

2. $\lambda_2 = -1,\ M_1 = 2\lambda_2 = -2 < 0,\ M_2 = 4\lambda_2^2 = 4 > 0$. Тому у точці $(-4;-3)$ – умовний максимум.

4.2. ЗАДАЧІ

Знайти екстремум функції $F(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ при обмеженні рівністю $G(x)$:

4.1. $F(x) = x - y,\ G(x):\ x^2 + y^2 = 4.$

4.2. $F(x) = x + 2y,\ G(x):\ x^2 + y^2 = 5.$

4.3. $F(x) = 4x + 3y,\ G(x):\ x^2 + y^2 = 1.$

4.4. $F(x) = 9 - 8x - 6y,\ G(x):\ x^2 + y^2 = 25.$

4.5. $F(x) = 2x - 3y,\ G(x):\ x^2 + y^2 = 25.$

4.6. $F(x) = x - 2y + 2z,\ G(x):\ x^2 + y^2 + z^2 = 9.$

4.7. $F(x) = x^2 + y^2,\ G(x):\ 3x + 4y = 1.$

4.8. $F(x) = 5x^2 + 4xy + y^2,\ G(x):\ x + y = 1.$

4.9. $F(x) = 3x^2 + 4xy + y^2,\ G(x):\ x + y = 1.$

4.10. $F(x) = xyz,\ G_1(x):\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ G_2(x):\ x + y + z = 0.$

4.11. $F(x) = xyz,\ G_1(x):\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ G_2(x):\ x + y + z = 1.$

4.12. $F(x) = xy^3,\ G(x):\ x + 5y = 8.$

ГЛАВА 5. ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Однією з найважливіших задач оптимізації є задача математичного програмування:

$$\begin{cases} f(x) \to \min; \\ g_i(x) \le 0,\ i = 1, ..., k; \\ g_i(x) = 0,\ i = k+1, ..., m; \\ x \in P. \end{cases} \tag{5.1}$$

Це задача умовної оптимізації з k обмеженнями-нерівностями, $m-k$ обмеженнями-рівностями та прямим обмеженням.

В простих випадках для розв'язку гладкої задачі з рівностями та нерівностями також можна використовувати правило множників Лагранжа.

Нехай в задачі (5.1): $P = \mathbf{R}^n$. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x, y_0, y) = y_0 f(x) + \sum_{k=1}^{m} y_i g_i(x).$$

Теорема 5.1. Нехай f та g_i – неперервно-диференційовні у деякій точці $x^* \in \mathbf{R}^n$. Якщо x^* – локальний розв'язок задачі (5.1), то $\exists y_0^*$, $y^* = (y_1^*, ..., y_m^*)$, які не дорівнюють нулю одночасно, що виконуються:

1. $L'(x^*, y_0^*, y^*) = 0$ (умова стаціонарності)
2. $y_i^* g_i(x^*) = 0,\ i = 1, ..., k$ (умова додаткової нежосткості)
3. $y_i^* \ge 0,\ i = 0, ..., k$ (умова невід'ємності)

Лема 5.1. Якщо $P = \{x \in R^n | -\infty \le a_i \le x_i \le b_i \le +\infty,\ i = 1, ..., n\}$ (координатний паралелепіпед), та x^* – локальний розв‘язок задачі (5.1), то:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = \begin{cases} = 0,\ a_i \le x_i^* \le b_i; \\ \ge 0,\ x_i^* = a_i \ne -\infty; \\ \le 0,\ x_i^* = b_i \ne +\infty. \end{cases}$$

5.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Знайти локальні та глобальні розв‘язки наступних задач:

Задача 5.1.

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2 \to \min; \\ 2x - y + z \le 5; \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

$L(x, y, z, y_0, \overline{y}) = y_0(x^2 + y^2 + z^2) + y_1(2x - y + z - 5) + y_2(x + y + z - 3).$

$$\begin{cases} L'_x = 2y_0x + 2y_1 + y_2 = 0; \\ L'_y = 2y_0y + y_2 - y_1 = 0; \\ L'_z = 2y_0z + y_1 + y_2 = 0; \\ y_1(2x - y + z - 5) = 0; \\ x + y + z = 3; \\ y_0 \ge 0,\ y_1 \ge 0. \end{cases}$$

Нехай $y_0 = 0$. Тоді система набуває вигляду: $\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 0; \\ y_2 - y_1 = 0; \\ y_1 + y_2 = 0. \end{cases}$

Звідки $y_1 = y_2 = 0$, протиріччя. Отже, $y_0 \neq 0$. Нехай $y_0 = 1$. Маємо:

$$\begin{cases} 2x + 2y_1 + y_2 = 0; \\ 2y + y_2 - y_1 = 0; \\ 2z + y_1 + y_2 = 0; \\ y_1(2x - y + z - 5) = 0; \\ x + y + z = 3; \\ y_0 \geq 0,\ y_1 \geq 0. \end{cases}$$

Нехай $y_1 = 0$. Тоді: $\begin{cases} 2x + y_2 = 0; \\ 2y + y_2 = 0; \\ 2z + y_2 = 0; \\ x + y + z = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x + y + z) + 3y_2 = 0; \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

Звідки $y_2 = -2$ та $\overrightarrow{y} = (1, 0, -2)$.

В результаті: $x = y = z = 1$ – точка локального мінімума. F – опукла, т.я. $F'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ додатньо визначена, тому $(1; 1; 1)$ – точка глобального мінімума.

Задача 5.2.

$$\begin{cases} F(x,\, y) = 2x^2 + xy + y^2 \to \min; \\ -1 \leq x \leq 1; \\ y \geq 1. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x + y \begin{cases} = 0,\ -1 < x < 1; \\ \geq 0,\ x = -1; \\ \leq 0,\ x = 1. \end{cases} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2y \begin{cases} = 0,\ y > 1; \\ \geq 0,\ y = 1. \end{cases}$$

Отже, можливі 6 випадків. Однак $F'' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ – строго додатньо визначена $\Rightarrow$ цільова функція F строго опукла й існує єдина точка глобального мінімума, тобто, тільки одна з шести систем має розв'язок:

$$\begin{cases} 4x+y=0,\ -1<x<1; \\ x+2y\geq 0,\ y=1. \end{cases} \quad \text{Звідки } x=-\frac{1}{4},\ y=1.$$

$(x;y)=(-\frac{1}{4};1)$ – точка глобального мінімума.

Задача 5.3.

$$\begin{cases} F(x,\,y)=4x^2-xy+2y^2\to\min; \\ 4\leq x\leq 8; \\ -1\leq y\leq 2. \end{cases}$$

Розв'язання

Відповідь: $(x;y)=(4;1)$ – точка глобального мінімума.

Задача 5.4.

$$\begin{cases} F(x,\,y)=ax^2+xy+y^2\to\min; \\ 2\leq x\leq 3; \\ 3\leq y\leq 4. \end{cases} \qquad (a \text{ – параметр})$$

Розв'язання

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2ax+y\begin{cases} =0,\ 2<x<3; \\ \geq 0,\ x=2; \\ \leq 0,\ x=3. \end{cases} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=x+2y\begin{cases} =0,\ 3<y<4; \\ \geq 0,\ y=3; \\ \leq 0,\ y=4. \end{cases}$$

Мають розв'язок 3 з дев'яти систем. Таким чином:

– при $a\leq -\frac{3}{4}:\ (x;y)=(3;3)$ – точка локального мінімума;

– при $a\in(-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}):\ (x;y)=(3;3),\ (x;y)=(2;3),\ (x;y)=(-\frac{3}{2a};3)$ – точки локального мінімума;

– при $a\geq -\frac{1}{2}:\ (x;y)=(2;3)$ – точка локального мінімума, а при $a\geq\frac{1}{4}$ – й глобального, т.я. цільова функція опукла.

Задача 5.5.

$$\begin{cases} F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2\to\min; \\ -1\leq x\leq 1; \\ y\geq 1. \end{cases} \qquad (a>0,\ 4ac>b^2)(*)$$

Розв'язання

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2ax + by \begin{cases} = 0, \ -1 < x < 1; \\ \geq 0, \ x = -1; \\ \leq 0, \ x = 1. \end{cases} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = bx + 2cy \begin{cases} = 0, \ y > 1; \\ \geq 0, \ y = 1. \end{cases}$$

Отже, можливі 6 випадків. Але з умови $(*)$ випливає, що цільова функція F строго випукла та існує єдина точка глобального мінімума, тобто, тільки одна з шести систем має розв'язок. (Відмітимо також, що з умови $(*)$ випливає, що $c > 0$). Маємо:

– при $a > 0, \ c > 0, \ -2a < b < 2a$: $(x; y) = (-\frac{b}{2a}; 1)$ – точка глобального мінімума;

– при $0 < 2a \leq b \leq 2c$: $(x; y) = (-1; 1)$ – точка глобального мінімума;

– при $-2c \leq b \leq -2a < 0 (x; y) = (1; 1)$ – точка глобального мінімума.

(Ці випадки взаємовиключають один одного)

Задача 5.6.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = xyz \to extr; \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1. \end{cases}$$

Розв'язання

$L(x, \, y, \, z, y_0, \overrightarrow{y}) = y_0 xyz + y_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$

$$\begin{cases} L'_x = y_0 yz + 2y_1 x = 0; \\ L'_y = y_0 xz + 2yy_1 = 0; \\ L'_z = y_0 xy + 2y_1 z = 0; \qquad (**) \\ y_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0; \\ y_0 \geq 0, \ y_1 \geq 0. \end{cases}$$

Нехай $y_0 = 0$. Тоді з $(**)$ отримуємо, що або і $y_1 = 0$ (протирічить умові теореми), або $x = y = z = 0$, що неможливо, т.я. при $y_1 \neq 0$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Отже, $y_0 \neq 0$. Нехай $y_0 = 1$. З $(**)$ отримуємо, що при $y_1 = 0$: $x = y = z = 0$ (не підходить). Тому $y_1 \neq 0$. Перетворивши $(**)$, отримуємо:

$$\begin{cases} (x-y)(2y_1 - z) = 0; \\ (x-z)(2y_1 - y) = 0; \\ (y-z)(2y_1 - x) = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \quad (**)$$

Можливі випадки:

1. $\begin{cases} x - y = 0; \\ x - z = 0; \\ y - z = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow y_1 = \mp\frac{1}{2\sqrt{3}};\ x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

2. $\begin{cases} x - y = 0; \\ 2y_1 - x = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow (***) \Rightarrow \begin{cases} x = y = 2y_1; \\ z = -2y_1; \\ 2y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow y_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}};$

$$(x, y, z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

3. $\begin{cases} x - z = 0; \\ 2y_1 - x = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow (***) \Rightarrow \begin{cases} x = z = 2y_1; \\ y = -2y_1; \\ 2x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow y_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}};$

$$(x, y, z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \mp\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

4. $\begin{cases} y - z = 0; \\ 2y_1 - x = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow (***) \Rightarrow \begin{cases} y = z = 2y_1; \\ x = -2y_1; \\ 2y^2 + x^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow y_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}};$

$$(x; y; z) = \left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}; \quad F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

За теоремою Вейєрштраса неперервна функція на компакті досягає максимума та мінімума. Отже:

- $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ – точки максимума;
- $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ – точки мінімума.

Задача 5.7.

$$\begin{cases} F(x, y) = x^2 + y^2 \to extr; \\ x^4 + y^4 \leq 1. \end{cases}$$

Розв'язання

$L(x, y, y_0, \overrightarrow{y}) = y_0(x^2 + y^2) + y_1(x^4 + y^4 - 1)$

$$\begin{cases} L'_x = 2y_0 x + 4y_1 x^3 = 0; \\ L'_y = 2y_0 y + 4y_1 y^3 = 0; \\ y_1(x^4 + y^4 - 1) = 0; \\ y_0 \geq 0, \ y_1 \geq 0. \end{cases}$$

Нехай $y_0 = 0$. Тоді або $y_1 = 0$ (протирічить умові теореми), або $x = y = 0$. Так як цільова функція опукла й $(0; 0)$ – внутрішня точка області, то $(0; 0)$ – глобальний мінімум.

Нехай $y_0 \neq 0$. Покладемо $y_0 = 1$. При $y_1 = 0:\ x = y = 0$. При $y_1 \neq 0$:

$\begin{cases} x(2 + 4y_1 x^2) = 0; \\ y(2 + 4y_1 y^2) = 0; \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$ звідки знаходимо точки екстремума:

$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$, $(0;1)$, $(0;-1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$ – лежать на межі області, отже, це точки глобального максимума.

Задача 5.8.

$$\begin{cases} F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \le 1. \end{cases}$$

Відповідь:

$(0, ..., 0)$ – точка глобального мінімума, $\left(\pm n^{-\frac{1}{4}}, ..., \pm n^{-\frac{1}{4}}\right)$ – точки глобального максимума.

ГЛАВА 6. ВІДПОВІДІ

6.1. ГЛАВА 1

1.1. $x \cdot (a - 2x)^2 \rightarrow max,\ x \in X = \left(0; \frac{a}{2}\right)$. 1.2. — 1.3. — 1.4. $\frac{1}{2} \cdot a^2 \sin\varphi \cos\varphi \rightarrow max,\ \varphi \in X = \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$. 1.5. — 1.6. — 1.7. $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{D^2 - x^2} \rightarrow max,\ x \in X = (0; D)$. 1.8. —

1.9. а. $\pi_X a = x^0 + \frac{a - x^0}{a - x^0} \cdot r$; б. $(\pi_X a)_j = \begin{cases} b_j, \text{ якщо } a_j < b_j; \\ a_j, \text{ якщо } b_j \leq a_j \leq c_j; \\ c_j, \text{ якщо } a_j > c_j. \end{cases}$

в. $\pi_X a = (\max(0, a_1), \max(0, a_2), \ldots, \max(0, a_n))$;

г. $\pi_X a = a + (\beta - (p, a)) \cdot \frac{p}{\|p\|^2}$; д. $\pi_X a = a + \max(0, (\beta - (p, a)) \cdot \frac{p}{\|p\|^2})$.

1.10. а. cos, sin, const; б. e^{-x^2}, $e^{|x|}$; в. arctg, arcctg. 1.11. $f(1) = -1$ – локальний мінімум, $f(-2) = -4$ – глобальний мінімум. 1.12. Функція не має точок локального і глобального екстремуму.

6.2. ГЛАВА 2

2.1. $(2; 2; 1)$ – точка глобального мімімуму. 2.2. $(2; 1)$ – точка глобального мінімуму, $(-2; -1)$ – точка глобального максимуму.

2.3. — 2.4. $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)$ – точка глобального мімімуму. 2.5. — 2.6. —

2.7. $(1; 0)$ – точка глобального мімімуму. 2.8. $(24; -144; -1)$ – точка локального мімімуму. 2.9. $\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)$ – точка строгого локального максимуму; якщо $xz(1 - x - 3z) > 0$, то $(x; 0; z)$ – точка нестрогого локального мінімуму, якщо $xz(1 - x - 3z) < 0$, то $(x; 0; z)$ – точка нестрогого локального максимуму. 2.10. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ – точка глобального мімімуму. 2.11. $(1; 1)$ – точка локального мінімуму, а в точці $(0; 0)$ екстремуму немає.

2.12. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ – точка глобального мімімуму.

2.13. якщо $(a + b) < 0$, то $\left(\frac{2a-b}{3}; \frac{2b-a}{3}\right)$ – точка локального мінімуму, якщо $(a + b) > 0$, то $\left(\frac{2a-b}{3}; \frac{2b-a}{3}\right)$ – точка локального максимуму.

2.14. — 2.15. — 2.16. —

2.17. На множині точок $X = \{(x; x; 0) | \forall x \in \mathbf{R}^3\}$ функція досягає глобального максимуму. 2.18. $(3; 1)$ – точка глобального мімімуму.

6.3. ГЛАВА 3

3.1. — 3.2. — 3.3. — 3.4. — 3.5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6.4. ГЛАВА 4

4.1. — 4.2. — 4.3. $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ – точка глобального мінімуму; $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ – точка глобального максимуму. 4.4. — 4.5. — 4.6. — 4.7. $\left(\frac{3}{25}; \frac{4}{25}\right)$ – точка глобального мінімуму. 4.8. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ – точка глобального мінімуму. 4.9. Функція не має екстремальних точок. 4.10. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ – точки глобального мінімуму; $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ – точки глобального максимуму.

4.11. *Розв'язання:* Градієнти функцій обмежень задачі дорівнюють $(2x; 2y; 2z)$ та $(1; 1; 1)$. Вони лінійно залежні лише якщо $x = y = z$. Але точки вигляду $(x; x; x)$ не лежать в припустимій множині, а значить, можна розглядати регулярну функцію Лагранжа:

$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - -1) + \mu(x + y + z - 1)$.

З необхідних умов екстремуму отримуємо шість стаціонарних точок: $(0; 0; 1)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $(1; 0; 0)$, $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $(0; 1; 0)$, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

$$f(\overrightarrow{x}) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \overrightarrow{x} \in X_1 = \{(0; 0; 1), (1; 0; 0), (0; 1; 0)\}; \\ -\frac{4}{27}, \text{ якщо } \overrightarrow{x} \in X_2 = \left\{\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)\right\}. \end{cases}$$

Оскільки глобальні екстремуми існують, то $(0; 0; 1), (1; 0; 0), (0; 1; 0)$ – точки глобального максимуму, а $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ – точки глобального мінімуму. 4.12. —

ЗМІСТ