Κεφάλαιο 1

Διαχωρισμός Σημάτων με Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων

Στα προηγούμενα πειράματα εφαρμόσαμε τις τεχνικές διαχωρισμού σε διαφορετικές περιπτώσεις για τα σήματα που πήραμε από τους αισθητήρες (χωρίς προεπεξεργασία, υποδειγματοληψία-φιλτράρισμα, κλπ). Σε κάποιες περιπτώσεις πήραμε πολύ καλά αποτελέσματα, ενώ σε άλλες οι μέθοδοι απέτυχαν να διαχωρίσουν τα σήματά μας.

Στο παρόν κεφάλαιο θα επιχειρίσουμε μια νέα προσέγγιση για το διαχωρισμό βασισμένη στη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, μέσω της κατασκευής απλών συστημάτων που στηρίζονται στην ελαχιστοποίηση συναρτήσεων που μετράνε την ομοιότητα μεταξύ των πραγματικών και επιθυμητών σημάτων μας. Παρακάτω επεξηγούνται τα μοντέλα που δημιουργήσαμε και εφαρμόζονται σε τεχνητά και πραγματικά σήματα προκειμένου να ελέγξουμε τη λειτουργικότητά τους.

1.1 Μέθοδος 1

Θεωρούμε ότι τα σήματα των αισθητήρων είναι της μορφής:

$$x[n] = s_A[n] + s_K[n] + noise[n] \tag{1.1}$$

όπου: $\mathbf{s_A}$:συνιστώσα αναπνοής, $\mathbf{s_K}$:συνιστώσα καρδιακού παλμού, **noise**:θόρυβος και **n**:αριθμός δειγμάτων

Επιπλέον από την προηγούμενη επεξεργασία με τα φίλτρα έχουμε εξάγει τα σήματα:
$\mathbf{S_{af}}$:σήμα αναπνοής που εξάχθηκε με το low-pass φίλτρο
$\mathbf{S_{kf}}$:σήμα καρδιάς που εξάχθηκε με το band-pass φίλτρο
τα οποία θεωρούμε ως προσεγγίσεις των πραγματικών σημάτων.

Στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε μια μέθοδο που να εξάγει τις πραγματικές συνιστώσες της καρδιάς και της αναπνοής(s_A, s_K) χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις που πήραμε από το φιλτράρισμα(s_Af, s_Kf).

Για το σκοπό αυτό δημιουργούμε τη συνάρτηση:

$$\Phi(s_A, s_K) = \sum_{m=1}^{n} [(s_A[m] + s_K[m] - x[m])^2 + \lambda_1(s_K[m] - s_Kf[m])^2 + \lambda_2(s_A[m] - s_Af[m])^2] \tag{1.2}$$

την οποία και προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε. Είναι:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_K} = 0 \implies 2(s_K + s_A - x) + 2\lambda_1(s_K - s_Kf) = 0 \implies (1 + \lambda_1)s_K + s_A = x + s_Kf \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_A} = 0 \implies 2(s_K + s_A - x) + 2\lambda_2(s_A - s_A f) = 0 \implies (1+\lambda_2)s_A + s_K = x + s_A f \tag{1.4}$$

Οπότε δημιουργείται το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+\lambda_1 \\ 1+\lambda_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_A \\ s_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + s_K f \\ x + s_A f \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

το οποίο για $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ δίνει:

$$\begin{bmatrix} s_A \\ s_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.333 & 0.667 \\ 0.667 & -0.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + s_K f \\ x + s_A f \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

δηλαδή

$$s_A = -0.333(x + s_K f) + 0.667(x + s_A f) \tag{1.7}$$

$$s_K = 0.667(x + s_K f) - 0.333(x + s_A f) \tag{1.8}$$

1.2 Μέθοδος 2

Μια δεύτερη σκέψη είναι να εισάγουμε στις εξισώσεις και την παράμετρο της περιοδικότητας που παρουσιάζουν τα σήματά μας. Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με πριν δημιουργούμε μια καινούρια συνάρτηση :

$$\begin{aligned}\Psi(s_A, s_K) = \sum_{m=1}^{n} [&(s_A[m] + s_K[m] - x[m])^2 + \lambda_1(s_K[m] - s_K f[m])^2 + \lambda_2(s_A[m] - s_A f[m])^2 + \\ &\lambda_3(s_K[m] - s_K f[m+T_K])^2 + \lambda_4(s_A[m] - s_A f[m+T_A])^2]\end{aligned} \tag{1.9}$$

την οποία και προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε. Είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial s_K} = 0 &\implies 2(s_K + s_A - x) + 2\lambda_1(s_K - s_K f) + 2\lambda_3(s_K - s_K f[m+T_K]) = 0 \implies \\ &(1+\lambda_1+\lambda_3)s_K + s_A = x + \lambda_1 s_K f + \lambda_3 s_K f[m+T_K]\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial s_A} = 0 &\implies 2(s_K + s_A - x) + 2\lambda_2(s_A - s_A f) + 2\lambda_4(s_A - s_A f[m+T_A]) = 0 \implies \\ &(1+\lambda_2+\lambda_4)s_A + s_K = x + \lambda_2 s_A f + \lambda_4 s_A f[m+T_A]\end{aligned} \tag{1.11}$$

Οπότε δημιουργείται το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda_1+\lambda_3 & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2+\lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_K \\ s_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \lambda_1 s_K f + \lambda_3 s_K f[m+T_K] \\ x + \lambda_2 s_A f + \lambda_4 s_A f[m+T_A] \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

το οποίο για $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ δίνει:

$$\begin{bmatrix} s_K \\ s_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 & -0.125 \\ -0.125 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + s_K f + s_K f[m+T_K] \\ x + s_A f + s_A f[m+T_A] \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

δηλαδή

$$s_K = 0.375(x + s_K f + s_K f[m+T_K]) - 0.125(x + s_A f + s_A f[m+T_A]) \tag{1.14}$$

$$s_A = -0.125(x + s_K f + s_K f[m+T_K]) + 0.375(x + s_A f + s_A f[m+T_A]) \tag{1.15}$$