算法分析与设计-作业八

王宸昊 2019214541

2019 年 12 月 2 日

1 CLRS, Page, 395 24-1

1.1 a. 证明无环和拓扑排序顺序

G_f 中的边两边的顶点下标是递增的，如果有环路的话，那么一定会出现顶点坐标递减，跟 G_f 边的定义相反，所以 G_f 是无环的。同理 G_b 也是无环的。
根据 G_f 的定义，其所有的顶点都是从低到高的，因此其拓扑排序的顺序就是 $< V_1, V_2, \ldots, V_{|V|} >$。同理 G_b

1.2 b. 证明松弛操作次数

在最好的情况下，当每个顶点都以正序或倒序的顺序排列时，通过对 $E_f E_b$ 中的边进行一次松弛操作就可以得到各个顶点的最短路径。
在最坏的情况下，顶点的顺序先增后减或者先减后增的顺序交替出现，所以整个路径中有 $|V| - 2$ 次顺序的改变，每两次顺序改变就要对所有的边进行松弛操作，因此一共进行 $|V|/2$ 遍松弛操作。

1.3 c. 是否改善了 Bellman-Ford 算法渐进时间

并没有降低 Bellan-Ford 算法的渐进运行时间。只是降低了常数项，而整体的渐进复杂度还是 O(VE)

$$\because a + b = n$$
$$\therefore b = n - a > 2$$
$$\therefore ab = a(n - a), n > a + 2$$

算法 1 切绳子

输入: n 绳子的长度

输出: 切割的最大乘积

function CutRope(n)
    if $n == 1 or 2$ **then return** 1
    end if
    if $n == 3$ **then return** 2
    end if
    if $n == 4$ **then return** 4
    end if
    $k \leftarrow 0$
    for $i = n$ to $i \leq 4$ **do**
        $k \leftarrow k + 1$
        $i \leftarrow i - 3$
    end for
    $q \leftarrow i$
    $res \leftarrow k * 3 * q$
    return res
end function=0

$$
\begin{aligned}
\because ab-(a+b) &= a(n-a)-n \\
&= na-a^2-n \\
&= (a-1)n-a^2 \\
&> (a-1)(a+2)-a^2 \\
&= a^2+a-2-a^2 \\
&= a-2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\because a > 2 \\
&\therefore ab-(a+b) > a-2 > 0 \\
&\therefore ab > a+b
\end{aligned}
$$

2 CLRS, Page, 370 23.2-7

2.1 说明如何在 O^2 时间内更新传递闭包

借鉴有向图的闭包：假设添加的边为 (u,v), 假设添加该边后，顶点 x,y 可以添加到传递闭包当中，则当且仅当存在边（x, u）和 (v,y) 时可以添加。所以依次遍历每一对顶点，判断是否满足上述条件，复杂度为 O^2

2.2 证明更新传递闭包的复杂度为 $\Omega(V^2)$

假设现在图 G(V,E)，随机给所有顶点一个序号，顶点按照递增的顺序排列，每个顶点只与相邻顶点存在一条边，则目前存在 |V|-1 条边
假设现在再插入一条末尾指向第一个顶点的边，则每条边都可以抵达其他顶点，则必须通过 $n^2/2$ 次更新。
所以无论什么算法，更新传递闭包的复杂度都是 $\Omega(V^2)$。

2.3 设计算法任意 n 次插入序列，算法总时间为 $O(V^3)$

```
PASSIVE-CLOUSURE-OF-DYNAMIC-GRAPH(T, u, v)
    let T be |V| * |V| matrixs
    for i = 1 to |V|
        if t[i][u] == 1 and t[i][v] == 0
            for j = 1 to |V|
```

```
            if  t[v][j] == 1
                t[i, j] = 1
```

对于插入边的规模 N，最大是 $|V^2|$

对于外层循环需要循环 V 次，所以插入 n 次边，总的时间复杂度为 $O(V^3)$ 需要注意的是内层循环最多执行 V^2 次，因为再插入多余的边时，内层循环并不执行，由聚合分析可知，插入 V^2 次边，可以在 V^3 内更新到最终的二维闭包矩阵。