

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

О. А. Гончаров, Л. В. Васильєва, А. М. Юнда

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету



Суми
Сумський державний університет
2020

УДК 517.9:519.6:004.02

Г 65

Рецензенти:

Г. В. Корніч – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу та обчислювальної математики Національного університету «Запорізька політехніка»;

О. Ф. Тарасов – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних інформаційних технологій Донбаської державної машинобудівної академії (м. Краматорськ)

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 13 від 26 червня 2020 року)*

Гончаров О. А.

Г 65 Чисельні методи розв'язання прикладних задач :
навч. посіб. / О. А. Гончаров, Л. В. Васильєва,
А. М. Юнда. – Суми : Сумський державний університет,
2020. – 142 с.

ISBN 978-966-657-828-3

У навчальному посібнику наведені теоретичні відомості та варіанти завдань для виконання практичних і курсових робіт.

Рекомендований для студентів закладів вищої освіти спеціальностей «Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки».

УДК 517.9:519.6:004.02

© Гончаров О. А., Васильєва Л. В.,
Юнда А. М., 2020

© Сумський державний університет,
2020

ISBN 978-966-657-828-3

ЗМІСТ

	С.
Розділ 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК.....	8
1.1 Джерела похибок.....	8
1.2 Абсолютна і відносна похибки	8
1.3 Похибка округленого числа	10
1.4 Обчислювальна похибка.....	11
Розділ 2 ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ	13
2.1 Постановка задачі.....	13
2.2 Інтерполяція канонічним поліномом	14
2.3 Багатоінтервальна інтерполяція.....	16
2.3.1 Лінійна інтерполяція	16
2.3.2 Сплайн-інтерполяція	17
Розділ 3 ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ	19
ТА ІНТЕГРУВАННЯ	19
3.1 Диференціювання функцій, заданих аналітично	19
3.2 Інтегрування функцій, заданих аналітично	20
3.3 Метод Монте-Карло.....	22
Розділ 4 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ОДНІЄЮ	
ЗМІННОЮ	24
4.1 Основні визначення	24
4.2 Метод половинного ділення (дихотомії)	25
4.3 Метод хорд.....	26
4.4 Метод дотичних (метод Ньютона)	29
Розділ 5 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ	
РІВНЯНЬ	31
5.1 Розв'язування системи методом Крамера	31
5.2 Метод оберненої матриці	32
5.3 Метод прогону.....	33
Розділ 6 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ.....	35
НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	35
6.1 Запис задачі у векторній формі.....	35

6.2 Метод Ньютона розв'язування системи	36
нелінійних рівнянь	36
Розділ 7 ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	
ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	38
7.1 Методи Ейлера	44
7.2 Однопараметрична сім'я методів Рунге – Кутта	
другого порядку точності.....	53
7.3 Метод Рунге – Кутта четвертого порядку точності.....	57
7.4 Багатоточкові методи. Методи Адамса	57
7.5 Різницеві рівняння другого порядку. Задача Коші.	
Крайові задачі. Метод прогону.....	61
Розділ 8 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	
РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ.....	67
8.1 Основні поняття рівнянь у частинних похідних	67
8.2 Параболічні рівняння.....	70
8.3 Наближені методи розв'язування рівнянь	
гіперболічного типу	83
8.4 Наближені методи розв'язування.....	89
рівняння Пуассона	89
Розділ 9 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.....	90
Практична робота 1.....	90
Інтерполювання функцій.....	90
Практична робота 2.....	93
Чисельні методи обчислення визначених інтегралів	93
Практична робота 3.....	100
Розв'язання нелінійних рівнянь виду $f(x) = 0$	100
Практична робота 4.....	108
Методи чисельного розв'язання систем	108
нелінійних рівнянь	108
Практична робота 5.....	116
Методи чисельного розв'язання	116
систем лінійних рівнянь	116
Практична робота 6.....	121
Чисельне розв'язання звичайних.....	121

диференціальних рівнянь	121
Практична робота 7.....	128
Чисельне розв'язання рівняння коливань струни методом сіток	128
Практична робота 8.....	135
Чисельне розв'язання рівняння теплопровідності методом сіток	135

ПЕРЕДМОВА

Основним інструментом майбутньої діяльності спеціаліста з прикладної математики буде ЕОМ – електронно-обчислювальна машина. Перше слово у назві відображає принцип дії, останнє – нагадує, що, яким би «інтелектуальним» не був комп'ютер, він залишається не більше ніж машиною. Зверніть увагу на центральне слово «*обчислювальна*», воно свідчить про основне призначення ЕОМ – проводити обчислення.

Дослідження будь-якої фізичної або економічної системи, зазвичай, зводиться до побудови математичної моделі.

Математична модель – це сукупність математичних об'єктів (констант, змінних, функцій, рівнянь, систем рівнянь та ін.) і відношень між ними, що відображають деякі істотні характеристики досліджуваної системи.

Коли математична модель створена, її потрібно досліджувати, тобто обчислювати інтеграли, розв'язувати рівняння та системи рівнянь. На жаль, аналітично, тобто у вигляді деяких виразів від коефіцієнтів, розв'язується лише невелика кількість «класичних» рівнянь та систем (лінійні, квадратні рівняння, лінійні алгебраїчні системи, деякі типи диференціальних рівнянь і систем). Дослідження реальних систем потребує вміння обчислювати або розв'язувати практично будь-які задачі. Це роблять за допомогою чисельних методів.

Чисельний метод – метод наближеного або точного розв'язання математичної задачі, що ґрунтується на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел.

У визначенні чисельного методу необхідно звернути увагу на дві обставини:

1) визначення чисельного методу практично збігається з визначенням алгоритму;

2) поняття чисельного методу поширюється на одержання як наближеного, так і точного розв'язку.

Чисельний метод повинен задовольняти такі вимоги: бути стійким та збіжним.

Чисельний метод називають стійким, якщо результати безперервно залежать від вхідних даних задачі, і похибка округлення, що виникає в процесі реалізації чисельного методу на ЕОМ, залишається обмеженою за заданих меж зміни параметрів чисельного методу.

Чисельний метод називається *збіжним*, якщо результати можуть як завгодно близько наближатися до точного розв'язку.

Чисельні методи, які ми будемо розглядати, є усталеними та збіжними за замовчуванням. У разі якщо можливі порушення цих передумов, будуть наведені необхідні та достатні умови сталості й збіжності, виконання яких необхідно перевірити перед запуском чисельного методу на виконання.

Більшість чисельних методів реалізовані в пакетах прикладних програм: MathCad, Maple, Matematica та інших. Оволодіння цією спеціальністю зумовлює вміння використати той чи інший пакет для реалізації чисельного методу у разі розв'язання конкретної «одноразової» задачі або у разі проектування власної інтелектуальної системи, скласти алгоритм реалізації чисельного методу, написати програму, реалізувати цей алгоритм на комп'ютері.

Розділ 1

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

1.1 Джерела похибок

Є чотири джерела похибок чисельного методу:

- математична модель;
- початкові дані;
- наближений метод;
- округлення під час обчислень.

Вимірювання будь-якої фізичної величини (відстані, напруги, інтервалу часу та ін.) не може бути виконане точно. Похибка обчислень у фізиці й техніці досягає 1–10 %. Якщо, наприклад, величина напруги дорівнює +220,6483759 вольт, то можна говорити, що декілька молодших цифр цього значення недостовірні, що обумовлено точністю вимірювального приладу. Якщо раціональне число $1/3$ подати у вигляді кінцевого десяткового дробу, то таке подання не буде точним, оскільки це число подається у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

1.2 Абсолютна і відносна похибки

Визначення 1

Різниця між точним числом і його наближеним значенням a^* називається похибкою цього наближеного числа.

Якщо відомо, що $|a - a^*| \leq \Delta(a^*)$, то величина $\Delta(a^*)$ називається абсолютною граничною похибкою наближеної величини a^* ; відношення $\delta(a^*) = \left| \frac{\Delta(a^*)}{a^*} \right|$ називається

відносною граничною похибкою (часто визначається у відсотках, %).

Приклад 1.1

Число 3,14 – наближене значення $\pi = 3,14159$. Його похибка $\Delta(a^*) = |3,14159 - 3,14| = 0,00159$. Абсолютну граничну похибку можна вважати такою, що дорівнює 0,0016, а відносну граничну похибку, такою, що дорівнює $\frac{0,0016}{3,14} = 0,00051 = 0,051\%$.

(Для скорочення слово «гранична» використовувати не будемо).

Визначення 2

Значущими цифрами числа називають усі цифри в його записі, починаючи з першого ненульового запису зліва.

Приклад 1.2

1 куб. фут = 0,0283 м³, 1 дюйм = 2,5400 см. У першому випадку три значущі цифри, а в другому – п'ять.

Значущу цифру називають правильною, якщо модуль похибки числа не перевищує одиниці розряду, що відповідає цій цифрі. Якщо число a^* має n правильних значущих цифр, то його відносна похибка $\delta(a^*) \leq \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$,

де z – перша значуща цифра числа a^* .

У числі a^* з відповідною похибкою $\delta(a^*)$ правильні n значущих, де n – найбільше ціле число, що задовольняє нерівність

$$(1+z)\delta(a^*) \leq 10^{1-n}.$$

Приклад 1.3

Якщо число $a^* = 47,542$ одержане в результаті дії над наближеними числами і відомо, що $\delta(a^*) = 0,1\%$, то a^* має три правильних значущих цифри, оскільки $(1+4) \cdot 0,001 < 10^{-2}$.

Числа a^* , $\Delta(a^*)$ записують з однаковою кількістю знаків після коми:

$$a = 1,123 \pm 0,004,$$

$$a = 1,123 \pm 4 \cdot 10^{-3},$$

$$1,123 - 0,004 \leq a \leq 1,123 + 0,004.$$

1.3 Похибка округленого числа

Якщо наближене число містить зайві (або неправильні знаки), то його необхідно округлити. При округленні зберігаються лише правильні знаки, а зайві знаки відкидаються, причому:

- 1) якщо першою відкидають цифру більшу від чотирьох, то остання збережена цифра збільшується на одиницю;
- 2) якщо частина, яку відкидають складається лише з цифри 5, то округлюють так, щоб остання цифра залишалася парною.

Приклад 1.4

Округлюючи число $x = 1,1426$ до чотирьох значущих цифр, визначити абсолютну і відносну похибки одержаних наближень.

Розв'язання

Округлимо число x до чотирьох значущих цифр $x_1 = 1,143$. У разі визначення правильної цифри абсолютна похибка числа x дорівнює $e_x = 0,0001$. Похибка округлення $\Delta_{окр} = |1,143 - 1,1426| = 0,0004$.

Отже, похибка округленого числа x_1 дорівнює $e_{x_1} = 0,0004 + 0,0001 = 0,0005$. Тому абсолютна похибка дорівнює

$$\delta_{x_1} = |e_{x_1} / x_1| = 0,0005 / 1,143 = 0,000437 = 0,04 \%.$$

1.4 Обчислювальна похибка

Будемо позначати абсолютну похибку числа x як e_x , відносну похибку – δ_x . Наведемо формули для обчислення похибок, що виникають під час виконання арифметичних операцій над числами x та y .

1 Похибка суми

Абсолютна похибка

$$z = (x \pm e_x) + (y \pm e_y) = (x + y) \pm (e_x + e_y).$$

Відносна похибка

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{x + y} = \frac{|x|}{|x + y|} \cdot \delta_x + \frac{|y|}{|x + y|} \cdot \delta_y.$$

Аналогічно визначається похибка різниці.

2 Похибка добутку

Абсолютна похибка

$$z = (x \pm e_x) \cdot (y \pm e_y) = x \cdot y \pm y \cdot e_x \pm x \cdot e_y.$$

Відносна похибка

$$\delta_z = \frac{|y| \cdot e_x + |x| \cdot e_y}{|x \cdot y|} = \delta_x + \delta_y.$$

3 Похибка ділення

Абсолютна похибка

$$z = \frac{x \pm e_x}{y \pm e_y} \approx \frac{x}{y} + \frac{y \cdot e_x + x \cdot e_y}{y^2}.$$

Відносна похибка

$$\delta_z = \delta_x + \delta_y.$$

4 Похибка функції, що залежить від однієї змінної

Абсолютна похибка

$$f(x \pm e_x) \approx f(x) + f'(x) \cdot e_x,$$

$$\Delta f = |f'(x)| \cdot e_x.$$

Відносна похибка

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} \cdot e_x.$$

Розділ 2

ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

2.1 Постановка задачі

Нехай функція $y(x)$ задана безліччю своїх значень у точках $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ (тобто таблицею):

x	x_0	x_1	\dots	x_n
$y(x)$	y_0	y_1	\dots	y_n

Точки x_0, x_1, \dots, x_n називаються вузлами інтерполяції.

Потрібно знайти значення функції $y(x)$ у точках $x \neq x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$.

Поставлена проблема вирішується шляхом наближеної заміни функції $y(x)$ іншою функцією $F(x)$, заданою аналітичним виразом.

Наближення функції $y(x)$ більш простою функцією $F(x)$ називається апроксимацією.

Якщо значення апроксимувальної функції у вузлах інтерполяції збігаються з табличними значеннями заданої функції $y(x)$, то такий спосіб введення апроксимувальної функції $F(x)$ називається інтерполяцією.

Таким чином, інтерполяцією називається побудова апроксимувальної функції $F(x)$, що задовольняє умовам:

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n). \quad (2.1)$$

Умови (2.1) називаються умовами Лагранжа.

Інтерполяційною функцією називається апроксимувальна функція $F(x)$, що задовольняє умови Лагранжа.

Завдання інтерполяції в знаходженні наближених значень табличної функції $y(x)$ при аргументах x , що не

збігаються з вузлами інтерполяції, шляхом обчислення інтерполювальної функції $F(x)$. Якщо значення аргументу розміщене всередині інтервалу $[x_0, x_n]$, то знаходження наближеного значення табличної функції $y(x)$ називається інтерполяцією, якщо потрібно визначити значення апроксимувальної функції за межами інтервалу $[x_0, x_n]$, то цей процес називається екстраполяцією. Походження цих термінів пов'язане з латинськими словами: *inter* – між, *extra* – поза, *pole* – вузол.

Геометрично задача інтерполяції полягає в побудові кривої $y = F(x)$, що проходить через задану множину точок $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. На рисунку 2.1 показано побудову інтерполяційної кривої. Розглянемо тепер методи побудови інтерполяційної функції.

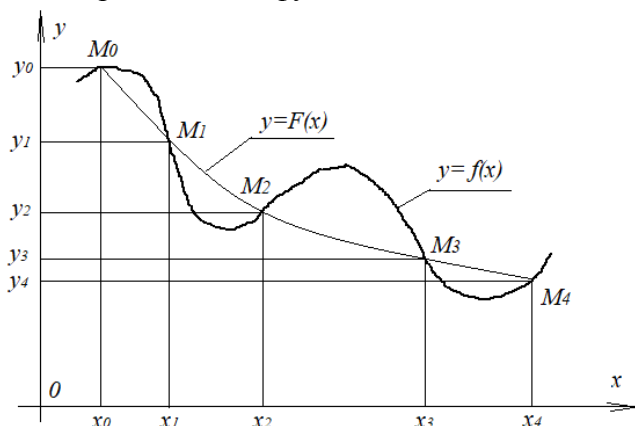


Рисунок 2.1 – Інтерполяційна крива

2.2 Інтерполяція канонічним поліномом

Будемо шукати функцію, що інтерполуює $F(x)$ у вигляді канонічного полінома степеня n :

$$F(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.2)$$

Коефіцієнти полінома a_i визначаються з умов Лагранжа $P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$, що з урахуванням виразу (2.2) дає систему лінійних рівнянь з $n+1$ невідомими:

[illegible]

Систему рівнянь (2.3) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n a_i x^i = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

або в матричній формі:

$$C \cdot a = \gamma, \quad (2.4)$$

де a – вектор, що має невідомі коефіцієнти полінома a_i ; y – вектор, що має значення функції у вузлах інтерполяції y_i , а матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок, якщо визначник матриці відмінний від нуля.

Цей визначник називається визначником Вандермонда, він відмінний від нуля, якщо серед вузлів x_i немає збіжних.

Розв'язання системи (2.3) у матричному вигляді має вигляд

$$a = C^{-1}y,$$

де C^{-1} – обернена матриця ($C^{-1} \cdot C = E$, E – одинична матриця).

2.3 Багатоінтервальна інтерполяція

Розглянута вище поліноміальна інтерполяція не завжди дає задовільні результати. Незважаючи на виконання умов Лагранжа у вузлах, інтерполяційна функція може мати значне відхилення від апроксимувальної кривої між вузлами.

Зі збільшенням кількості вузлів зростає й степінь інтерполяційного полінома, що призводить до різкого збільшення похибки, і в результаті виникає так зване явище хвилястості. Для того щоб уникнути високого степеня полінома, відрізок інтерполяції розбивають на декілька частин і на кожному інтервалі будують самостійний поліном невисокого степеня. Розглянемо найбільш часто використовувані види багатоінтервальної інтерполяції.

2.3.1 Лінійна інтерполяція

Кусково-лінійна інтерполяція є найпростішим видом багатоінтервальної інтерполяції, за якої вихідна функція на кожному інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$ апроксимується відрізком прямої, що з'єднує точки (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}) .

Рівняння прямої на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ має вигляд $r_i(x) = a_i + b_i x$. Для визначення коефіцієнтів a і b скористаємося умовами:

$$r_i(x_i) = a_i + b_i x_i = y_i \text{ і } r(x_{i+1}) = a_i + b_i x_{i+1} = y_{i+1}.$$

Розв'язуючи ці рівняння, визначимо коефіцієнти a_i і b_i :

$$a_i = y_{i-1} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot x_i, \quad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Таким чином, у разі лінійної інтерполяції інтерполяційна функція на кожному з відрізків $[x_i, x_{i+1}]$ визначається за формулою $F(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i)$.

2.3.2 Сплайн-інтерполяція

Істотним недоліком лінійної інтерполяції є те, що в точках стику різних інтерполяційних поліномів виявляється розрив їх першої похідної. Цей недолік усувається при використанні особливого виду багатоінтервальної інтерполяції.

Сплайн (англ. spline – рейка, лінійка) – це функція, яка на кожному частковому інтервалі подається поліномом деякого степеня, а на всьому заданому відрізку неперервна разом із кількома своїми похідними. На практиці широкого використання набули сплайни третього степеня (кубічні сплайни).

На інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$ кубічний сплайн можна подати у вигляді

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (2.5)$$

де a_i, b_i, c_i, d_i – коефіцієнти сплайнів; $i = 1, 2, \dots, n$ номер сплайна (інтервалу).

Коефіцієнти сплайна визначаються з таких умов:

1) умови Лагранжа:

$$s_i(x_i) = y_i, \quad s_i(x_{i-1}) = y_{i-1}; \quad (2.6)$$

2) умови неперервності першої і другої похідних сплайнів у вузлах:

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i), \quad s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i). \quad (2.7)$$

Крім того, необхідно задати додаткові умови на кінцях інтервалу, тобто в точках x_0 і x_n . Якщо необхідно одержати нульову кривизну сплайна в цих точках, то додатковою умовою буде рівність нулю інших похідних сплайнів на кінцях інтервалу інтерполяції:

$$s'_1(x_0) = 0, \quad s''_n(x_n) = 0. \quad (2.8)$$

Додаткові умови можуть бути й іншими, їх вибір залежить від конкретного завдання.

Підставивши вираз (2.5) в умови (2.6), (2.7), (2.8), одержимо систему з $4n$ рівнянь відносно коефіцієнтів сплайнів a_i, b_i, c_i і d_i . Розв'язавши цю систему, визначимо коефіцієнти сплайна.

Інтерполяція сплайнами має дуже просту та наочну фізико-механічну аналогію. Якщо спробувати поєднати пружну металеву лінійку з вузловими точками, то форма, якої набере в цьому разі лінійка, буде збігатися з графіком кубічного сплайна (суцільна лінія на рис. 2.1). Розміщення вузлових точок, де лінійка описується рівнянням прямої. Відповідна поведінка сплайна забезпечується умовою (2.8).

Розділ 3

ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ

3.1 Диференціювання функцій, заданих аналітично

За визначенням, похідна функції $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Переходячи від нескінченно малих до кінцевих різниць, одержимо наближену формулу чисельного диференціювання:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

З формули (3.2) випливає простий обчислювальний алгоритм:

- 1) поставити значення точки, в якій обчислюється похідна;
- 2) поставити значення приросту Δx ;
- 3) обчислити похідну відповідно до формули (3.2).

Заміна нескінченно малих збільшень кінцевими – причина виникнення помилки. Для її оцінювання розвинемо функцію $f(x)$ у точці $x + \Delta x$ у ряд Тейлора:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\Delta x)^n \dots \quad (3.3)$$

Підставивши (6.3) в (6.2), після зведення подібних членів одержимо

$$f'(x) \approx f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} \Delta x + \dots \quad (3.4)$$

Звідси бачимо, що всі члени, починаючи з другого, визначають відмінність значення похідної від її точного значення. Основний член похибки $f''(x) \cdot \Delta x / 2!$.

3.2 Інтегрування функцій, заданих аналітично

З геометричної точки зору визначений інтеграл

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

є площею фігури, обмеженою графіком функції $f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 3.1).

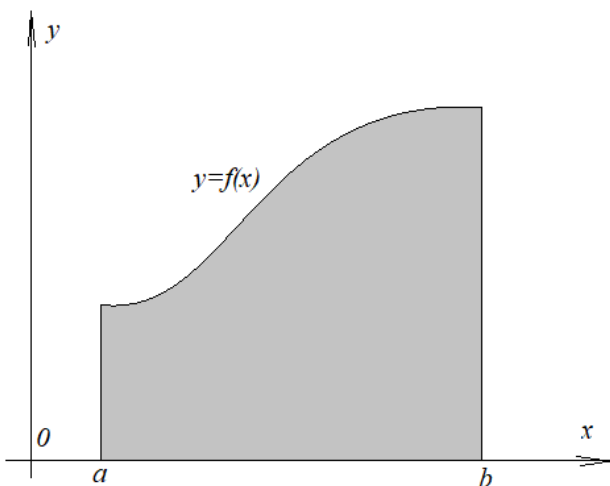


Рисунок 3.1

Розділимо відрізок $[a, b]$ на n рівних відрізків довжиною ΔX , де

$$\Delta X = \frac{b-a}{n}.$$

Тоді координата правого кінця i -го відрізка визначається за формулою

$$X_i = X_o + i\Delta X$$

де $x_0 = a$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Тоді значення певного інтеграла обчислюється за формулами:

$$F_L = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\Delta x \quad - \quad \text{метод лівих прямокутників}$$

(рис. 3.2);

$$F_R = \sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x \quad - \quad \text{метод правих прямокутників}$$

(рис. 3.3).

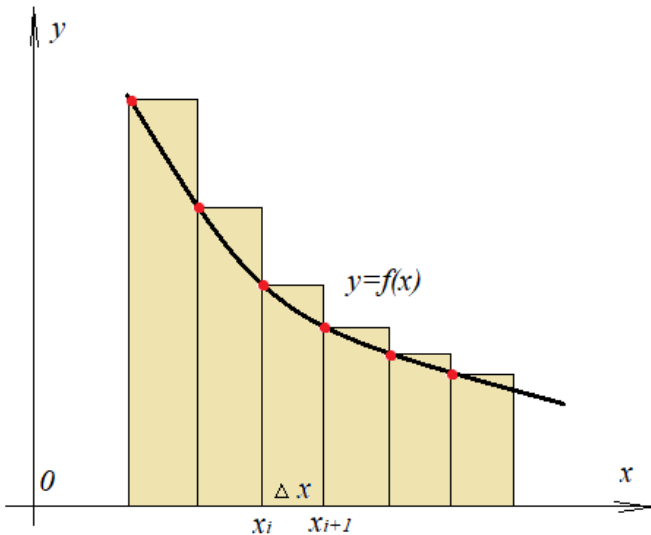


Рисунок 3.2 – Метод лівих прямокутників

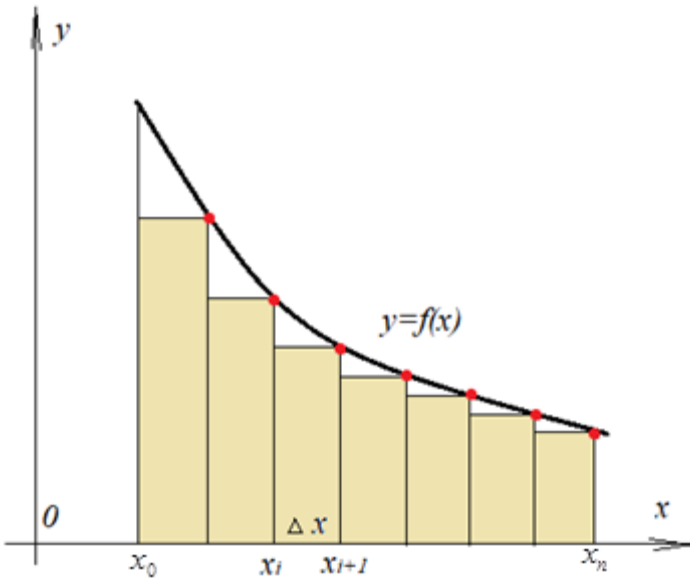


Рисунок 3.3 – Метод правих прямокутників

3.3 Метод Монте-Карло

Нехай необхідно обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Згенеруємо N пар випадкових чисел у прямокутнику $a \leq x_i \leq b$, $c \leq y_i \leq d$.

Тоді частка точок (x_i, y_i) з умовою $y_i \leq f(x_i)$ є оцінкою відношення інтеграла від $S(x)$ до площі розглянутого прямокутника.

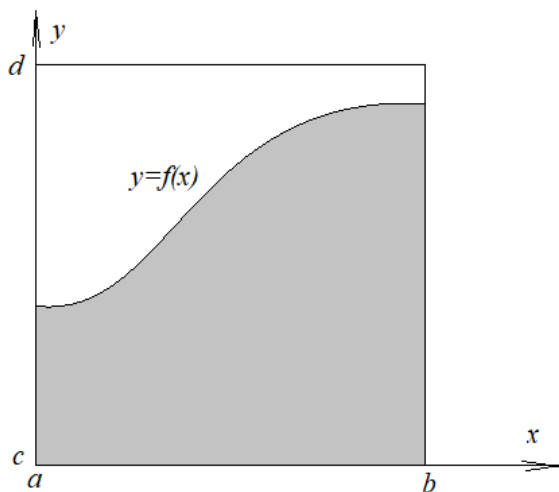


Рисунок 3.4 – До ілюстрації методу Монте-Карло

Оцінка інтеграла може бути одержана за формулою

$$F_N = A \frac{n_s}{N},$$

де n_s – число точок, що задовольняють умову $y_i \leq f(x_i)$, N – повна кількість точок; A – площа прямокутника.

Розділ 4

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

4.1 Основні визначення

Нелінійне рівняння має вигляд

$$f(x) = 0, \quad (4.1)$$

де $f(x)$ – функція, визначена на відрізку $[a, b]$. Тут a і b – дійсні числа.

Визначення 1

Будь-яке число $\xi \in [a, b]$, при якому $f(x) = 0$, називається коренем рівняння $f(x) = 0$.

Визначення 2

Якщо $f(x)$ – многочлен, відмінний від нульового, то рівняння називається алгебраїчним, інакше – трансцендентним (показниковим, логарифмічним, тригонометричним і т. ін.).

Задача наближеного обчислення коренів рівняння $f(x) = 0$ розпадається на дві:

1 Відділення коренів рівняння – процедура знаходження відрізків, на яких рівняння $f(x) = 0$ має лише один розв'язок.

2 Обчислення кореня із заданою точністю ε .

Справедлива така теорема:

Теорема Больцано – Коші. Якщо неперервна функція $f(x)$ набуває на кінцях відрізка $[a, b]$ значень різних знаків, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то всередині цього відрізка міститься принаймні один корінь. Цей корінь буде єдиним, якщо похідна $f'(x)$ існує і зберігає постійний знак усередині відрізка $[a, b]$.

Розглянемо наближені методи знаходження коренів.

4.2 Метод половинного ділення (дихотомії)

Нехай рівняння $f(x) = 0$ має на відрізку $[a, b]$ єдиний корінь, і $f(x)$ на даному відрізку – неперервна функція.

Розділимо відрізок $[a, b]$ навпіл точкою $c = \frac{a+b}{2}$

(рис. 4.1).

Якщо $f(c) \neq 0$, то можливі два випадки:

- 1) корінь лежить на відрізку $[a, c]$;
- 2) корінь лежить на відрізку $[c, b]$.

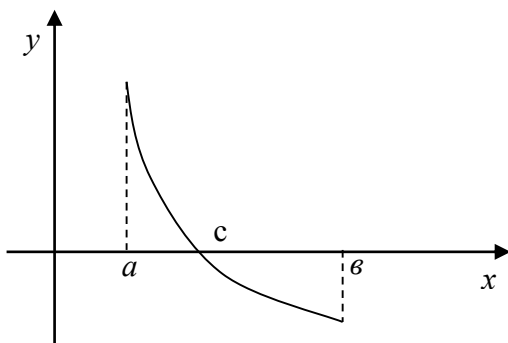


Рисунок 4.1

Якщо $f(a) \cdot f(c) < 0$, то корінь лежить на відрізку $[a, c]$, а якщо $f(c) \cdot f(b) < 0$, то корінь лежить на відрізку $[c, b]$. Вибираємо в кожному випадку той відрізок, на якому функція змінює знак, і продовжуємо процес половинного ділення. У результаті одержимо відрізок, що містить корінь рівняння.

4.3 Метод хорд

Замість поділу відрізка $[a, b]$ навпіл, як у методі половинного ділення, ділимо його відносно $f(a):f(b)$. Таким чином, перше наближення кореня знаходиться в точці перетину відрізка $[a, b]$ хордою, що проходить через точки з координатами $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$. Якщо функція змінює знак на відрізку $[a, c]$, тобто $f(a) \cdot f(c) < 0$, то корінь лежить на відрізку $[a, c]$, в іншому випадку корінь лежить на відрізку $[c, b]$. Вибравши за новий відрізок $[a, c]$ або $[c, b]$, продовжуємо процес до того часу, поки довжина відрізка, на якому знаходиться корінь, не стане меншою від будь-якого наперед заданого числа. Точку визначаємо таким чином. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки з координатами $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a). \quad (4.2)$$

Точка перетину цієї прямої з віссю Ox і буде шуканою точкою c . Отже,

$$c = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a). \quad (4.3)$$

(А): Метод хорд

Опис алгоритму

Припустимо, що $f(a) \cdot f(b) < 0$ та $f'(x)$, $f''(x)$ на інтервалі $[a, b]$ зберігають знак, тобто графік функції

$y = f(x)$ монотонний та опуклий, тоді можна застосовувати метод хорд.

Одержимо перше наближення. Проведемо через точки $A(a, f(a))$ та $B(b, f(b))$ пряму лінію (хорду), рівняння якої можна записати у вигляді

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Одержимо точку перетину хорди з віссю абсцис, припустимо, що $y = 0$:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \quad (4.4)$$

Далі можна вибрати один із двох варіантів побудови алгоритму пошуку кореня.

(A1): Друге наближення розраховується за формулою (1) залежно від того, на кінцях якого з відрізків $[a, x_1]$ чи $[x_1, b]$ функція набуває значень різних знаків. Якщо $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, то візьмемо $b = x_1$, якщо ні, то $a = x_1$.

(A2): Припустимо, що друга похідна $f''(x)$ на інтервалі $[a, b]$ має один знак. Тоді, якщо $f''(x) < 0$, графік функції $y = f(x)$ опуклий догори та лежить вище від хорди. У цьому разі точка перетину хорди з віссю абсцис знаходиться між коренем рівняння $f(x) = 0$ і тим кінцем відрізка $[a, b]$, на якому значення функції $f(x)$ додатне.

У разі якщо $f''(x) > 0$, графік функції $y = f(x)$ опуклий донизу і лежить нижче від хорди. У цьому разі точка перетину хорди з віссю абсцис знаходиться між

кореням рівняння $f(x)=0$ та тим кінцем відрізка $[a, b]$, на якому значення $f(x) < 0$.

Таким чином маємо, що в будь-якому випадку наближене значення кореня лежить між точним його значенням і тим кінцем відрізка $[a, b]$, на якому $f(x)$ та $f''(x)$ протилежні.

Висновок. Якщо відомо $(n-1)$ - не наближення кореня, то його n - не наближення обчислюється за формулою

$$x_n = \frac{[bf(x_{n-1}) - x_{n-1}f(b)]}{[f(x_{n-1}) - f(b)]}, \quad (4.5)$$

у разі якщо $f(a) \cdot f''(a) < 0$, або

$$x_n = \frac{[af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)]}{[f(x_{n-1}) - f(a)]}, \quad (4.6)$$

в разі якщо $f(b) \cdot f''(b) < 0$.

Незалежно від того, за якою схемою (A1) чи (A2) будується алгоритм наближеного розв'язку рівняння, умовою закінчення обчислень (виходу з циклу) може бути одна з умов:

$$f(x_n) < \varepsilon, \quad (4.7)$$

мінімізація нев'язки

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \quad (4.8)$$

більш надійною умовою є

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}|} < \varepsilon.$$

4.4 Метод дотичних (метод Ньютона)

Нехай рівняння $f(x) = 0$ має корінь на відрізку $[a, b]$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні і зберігають визначений знак при $a \leq x \leq b$. Нехай $x_0 = b$, причому $f(x_0) \cdot f''(x_0) = b$. Проведемо дотичну до графіка функції в точці з координатами $(b, f(b))$. Її рівняння матиме вигляд

$$y = f(b) + f'(b) \cdot (x - b). \quad (4.9)$$

Нехай у рівнянні (4.9) $y = 0$ і, враховуючи, що $f'(b) \neq 0$, розв'яжемо його відносно x . У результаті одержимо

$$x = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \quad (4.10)$$

Це значення вибираємо як перше наближення кореня x_1 . Проведемо дотичну до графіка функції в точці з координатами $(x_1, f(x_1))$. Знайдемо абсцису x_2 точки перетину дотичної з віссю Ox :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (4.11)$$

Це значення виберемо як друге наближення кореня. Аналогічно визначаємо $(k + 1)$ – це теж наближення:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (4.12)$$

Ітерації (4.12) проводимо до того часу, поки не досягнемо заданої точності.

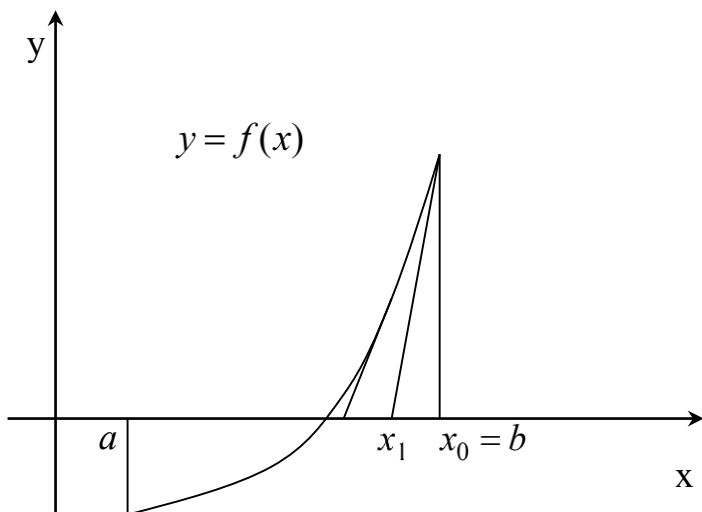


Рисунок 4.2 – Геометрична ілюстрація методу дотичних

Початкове наближення x_0 у методі дотичних вибираємо в такий спосіб: якщо $f(a) \cdot f''(a) > 0$, то $x_0 = a$, в іншому випадку $x_0 = b$.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Визначення 1

Розв'язком системи лінійних рівнянь називається така впорядкована сукупність чисел $x_1 = c_1, x_2 = c_2 \dots x_n = c_n$, яка перетворює всі рівняння системи на справедливі рівності.

Визначення 2

Прямими методами розв'язування систем лінійних рівнянь називаються методи, що дають розв'язки системи за кінцеве число арифметичних операцій. Якщо немає помилок округлення, то одержані розв'язки є точними. Розглянемо прямі методи розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Правило Крамера. Правило Крамера використовують для знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Якщо визначник $\Delta = \det A$ матриці системи з n рівнянь із n невідомими $AX = B$ не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок x_1, x_2, \dots, x_n , що визначається за формулами Крамера $x_i = \Delta_i / \Delta$, де Δ_i – визначник матриці, який одержують із матриці системи A заміною i -го стовпчика стовпчиком вільних членів B .

5.2 Метод оберненої матриці

Для розв'язання системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці запишемо її в матричному вигляді (5.2).

Помноживши (5.2) на A^{-1} , одержимо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Із цього випливає, що $X = A^{-1}B$.

5.3 Метод прогону

На практиці часто трапляються системи лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{pmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Їх називають системами з тридіагональною матрицею коефіцієнтів. Кожне з рівнянь такої системи містить три невідомих і може бути записане у вигляді

$$b_i \cdot x_{i-1} + c_i \cdot x_i + d_i \cdot x_{i+1} = r_i, \quad (5.7)$$

де $i = 1, 2, \dots, n$, $b_1 = 0$, $d_n = 0$.

Для розв'язання системи рівнянь (5.6) найбільш економним за витраченим часом є метод прогону, що враховує тридіагональність матриці системи (5.6).

Будемо шукати розв'язок системи (5.6) у вигляді

$$x_i = \delta_i \cdot x_{i+1} + \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.8)$$

де δ_i і λ_i – невідомі функції. Підставляючи

$x_{i-1} = \delta_{i-1} \cdot x_i + \lambda_{i-1}$ в (5.8), одержуємо

$$b_i \cdot \delta_{i-1} \cdot x_i + b_i \cdot \lambda_{i-1} + c_i \cdot x_i + d_i \cdot x_{i+1} = r_i. \quad (5.9)$$

Запишемо (5.9) у вигляді

$$x_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}} \cdot x_{i+1} + \frac{r_i - b_i \cdot \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}}. \quad (5.10)$$

Із (5.10) випливає, що відношення (5.9) справедливе, якщо для всіх $i = 1, 2, \dots, n$ виконуються рекурентні співвідношення:

$$\delta_i = \frac{d_i}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}}, \quad \lambda_i = \frac{r_i - b_i \cdot \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}}. \quad (5.11)$$

Оскільки $b_1 = 0$, то процес обчислення δ_i і λ_i за формулами (5.11) можна почати зі значень

$$\delta_1 = -\frac{d_1}{c_1}, \quad \lambda_1 = \frac{r_1}{c_1} \quad (5.12)$$

і продовжувати для $i = 2, 3, \dots, n$. У разі якщо $i = n$ і $d_n = 0$, одержимо, що

$$x_n = \lambda_n = \frac{r_n - b_n \cdot \lambda_{n-1}}{c_n + b_n \cdot \delta_{n-1}}, \quad \delta_n = 0, \quad (5.13)$$

де δ_{n-1} і λ_{n-1} були обчислені на попередньому кроці. Далі за формулами (5.10) знаходять значення $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$. Таким чином, метод прогону складається з двох кроків:

- знаходять коефіцієнти прогону δ_i і λ_i за формулами (5.11). Цей процес називають прямим прогоном;
- визначають невідомі $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ за формулами (5.12). Цей процес називають зворотним прогоном.

На рисунку 5.1 наведена блок-схема методу прогону.

6.1 Запис задачі у векторній формі

[illegible]
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$
$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$
$$F(x) = 0. \quad (6.4)$$

6.2 Метод Ньютона розв'язування системи нелінійних рівнянь

Припустимо, що відоме k -те наближення для одного з коренів x^k . Тоді точний корінь (6.4) можна подати у вигляді

$$x = x^k + \varepsilon^k, \quad (6.5)$$

де ε^k – похибка кореня.

Підставимо (6.5) в (6.4). Тоді одержимо

$$F(x^k + \varepsilon^k) = 0. \quad (6.6)$$

Якщо $F(x)$ неперервно-диференційована в деякій області, якій належать x і x^k , то

$$F(x^k + \varepsilon) = F(x^k) + F'(x^k) \cdot \varepsilon^k, \quad (6.7)$$

де

$$F'(x) = W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) - \text{матриця Якобі,}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$.

Співвідношення (6.7) може бути записане у вигляді

$$F(x^k) + W(x^k) \cdot \varepsilon^k = 0. \quad (6.8)$$

Співвідношення (6.8) являє собою систему лінійних рівнянь щодо невідомих ε^k , матриця якої дорівнює $W(x^k)$.

Якщо $\det W(x^k) \neq 0$, тоді

$$\varepsilon^k = -W^{-1}(x^k) \cdot F(x^k). \quad (6.9)$$

Із цього випливає основна формула Ньютона:

$$x^{k+1} = x^k + W^{-1}(x^k) \cdot F(x^k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.10)$$

де за x^0 можна взяти значення шуканого кореня.

Умова завершення алгоритму така:

$$|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon.$$

Алгоритм методу Ньютона:

- 1 Визначаємо початкове наближення x^0 .
- 2 Уточнюємо значення кореня за формулою $x^{k+1} = x^k - W^{-1}(x^k) \cdot F(x^k)$.
- 3 Якщо умова $|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon$ виконується, то задача розв'язана, і x^{k+1} – корені векторного рівняння $F(x) = 0$, інакше переходимо до п. 2.

Розділ 7

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Обчислювальні (чисельні) методи — методи розв'язування математичних задач у чисельному вигляді.

Основами для обчислювальних методів є:

- розв'язування систем лінійних рівнянь;
- інтерполяція і наближене обчислення функцій;
- чисельне інтегрування;
- чисельне розв'язання системи нелінійних рівнянь;
- чисельне розв'язання звичайних диференціальних рівнянь;
- чисельне розв'язання рівнянь у частинних похідних (рівнянь математичної фізики);
- розв'язання задач оптимізації.

У нашому курсі ми докладно розглянемо найбільш часто використовувані для вирішення прикладних завдань такі обчислювальні методи: чисельне розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, чисельне розв'язання рівнянь у частинних похідних (рівнянь математичної фізики).

У дуже великій кількості випадків закони природи, що керують тими чи іншими процесами, виражаються у формі диференціальних рівнянь, а розрахунок перебігу цих процесів зводиться до розв'язання диференціального рівняння. Спочатку диференціальні рівняння виникли із завдань механіки, в яких потрібно визначити координати тіл, їх швидкості та прискорення, що розглядаються як функції часу за різних впливів. До диференціальних рівнянь зводили також деякі розглянуті на той час геометричні завдання. Основою теорії диференціальних рівнянь стало диференціальне числення, створене

Г. Лейбніцем (1646–1716) та І. Ньютоном (1642–1727). Сам термін «диференціальне рівняння» був запропонований у 1676 році Лейбніцем.

Диференціальне рівняння – рівняння, що пов’язує значення похідної функції із самою функцією, значеннями незалежної змінної, числами (параметрами). Порядок похідних, що входять до рівняння, може бути різним (формально він нічим не обмежений). Похідні, функції, незалежні змінні й параметри можуть входити до рівняння в різних комбінаціях або всі, крім хоча б однієї похідної, відсутні зовсім.

Звичайні диференціальні рівняння (ЗДР) – це диференціальні рівняння для функції від однієї змінної. (Цим воно відрізняється від рівняння в частинних похідних, де невідома – це функція декількох змінних.) Таким чином, ЗДР – це рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (7.1)$$

де $y(x)$ – невідома функція (можливо, вектор-функція, тоді F зазвичай теж вектор-функція зі значеннями в просторі тієї самої розмірності; у цьому разі говорять про систему диференціальних рівнянь), що залежить від незалежної змінної x , штрих означає диференціювання за x . Число n (порядок старшої похідної, що входить до цього рівняння) називається порядком диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння порядку вище від першого можна перетворити на систему рівнянь першого порядку, в якій число рівнянь дорівнює порядку початкового рівняння.

Незалежна змінна x часто інтерпретується (особливо у диференціальних рівняннях, що виникають у фізичних та інших природно-наукових завданнях) як час, тому її часто позначають буквою t . Змінна y – деяка величина (або сукупність величин, якщо y є вектор-функцією), що змінюється з часом. Наприклад, y може

означати набір координат точки в просторі; в цьому разі рівняння (7.1) описує рух точки в просторі, тобто зміну її координат із плином часу.

Найчастіше трапляються диференціальні рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (7.2)$$

в яких старша похідна $y^{(n)}$ виражається у вигляді функції від змінних x , y і похідних $y^{(i)}$ порядків менше ніж n . Такі диференціальні рівняння називаються нормальними або дозволеними відносно похідної.

На противагу рівнянням вигляду (7.2) диференціальні рівняння вигляду (7.1) називаються рівняннями, не вирішеними відносно похідної, або неявними диференціальними рівняннями.

Класичним розв'язком диференціального рівняння (7.2) називається n разів диференційована функцію $y(x)$, що задовольняє рівняння в усіх точках своєї області визначення. Зазвичай існує безліч таких функцій і для вибору однієї з них потрібно накласти додаткову умову. Початковою умовою для рівняння (7.2) називають умову

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \\ y''(x_0) = y_0^2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

де x_0 – деяке фіксоване значення незалежної змінної (фіксований момент часу), а y_0 і y_0^i – відповідно фіксовані значення функції y та всіх її похідних до порядку $n-1$ включно. Диференціальне рівняння (7.2) разом із початковою умовою (7.3) називається *початковою задачею*, або *задачею Коші*:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \quad y''(x_0) = y_0^2, \dots, \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \end{cases} \quad (7.4)$$

За досить загальних обмежень на функцію f , що стоїть у правій частині рівняння (7.2), задача Коші для

цього рівняння має єдиний розв'язок, визначений на деякому інтервалі осі x , що містить початкове значення x_0 (цей інтервал, взагалі кажучи, може не збігатися з усією віссю).

Основні завдання та результати теорії диференціальних рівнянь: існування та єдиність розв'язання різних задач для ЗДР, методи розв'язання найпростіших ЗДР, якісне дослідження розв'язків ЗДР без знаходження їх явного вигляду.

Одне з найпростіших застосувань диференціальних рівнянь – це розв'язання нетривіальної задачі визначення траєкторії тіла за відомими проекціями прискорення. Наприклад, відповідно до другого закону Ньютона прискорення тіла пропорційне сумі діючих сил, відповідне диференціальне рівняння має вигляд $m\ddot{x} = F(x, t)$. Знаючи діючі сили (права частина), можна розв'язати це рівняння і, з огляду на початкові умови (координати і швидкість у початковий момент часу), визначити траєкторію руху точки.

Диференціальне рівняння $y' = y$ разом із початковою умовою $y(0) = 1$ задає експоненту $y(x) = e^x$. Якщо x позначає час, то ця функція описує, наприклад, зростання популяції в умовах необмеженості ресурсів, а також багато чого іншого.

Розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x)$, права частина якого не залежить від невідомої функції, є невизначений інтеграл: $y(x) = \int f(x) dx + C$, де C – довільна константа.

Диференціальні рівняння в часткових похідних (ДРЧП) – це рівняння, що містять невідомі функції від декількох змінних та їх частинні похідні.

Загальний вигляд таких рівнянь можна подати у вигляді

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_m^2}\right) = 0, \quad (7.5)$$

де x_1, x_2, \dots, x_m – незалежні змінні, а $y(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – функція цих змінних. Порядок рівнянь у частинних похідних визначається так само, як і для звичайних диференціальних рівнянь. Ще однією важливою класифікацією рівнянь у частинних похідних є їх поділ на рівняння еліптичного, параболічного та гіперболічного типів, особливо для рівнянь другого порядку.

Перше рівняння в частинних похідних історики виявили в статтях Л. Ейлера (1707–1783) з теорії поверхонь, що належать до 1734–1735 років (опубліковані в 1740 році).

Як звичайні диференціальні рівняння, так і рівняння в частинних похідних можна поділити на *лінійні* та *нелінійні*. Диференціальне рівняння є *лінійним*, якщо невідома функція та її похідні входять до рівняння лише в першому ступені (і не перемножуються одна з одною).

Важливим окремим класом лінійних рівнянь є лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами.

Розглянемо методи чисельного розв’язання задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Почнемо із задачі Коші для системи при $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{cases} \frac{dy^{(i)}}{dx} = f^{(i)}(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) & \text{для } a < x \leq b, \\ y^{(i)}(a) = y_0^i & \text{— задані значення.} \end{cases} \quad (7.6)$$

Будемо припускати, що на відрізку $[a, b]$ для задачі (7.6) виконані умови існування та єдиності розв’язку (під час аналізу точності різних чисельних алгоритмів будемо припускати також необхідну гладкість функцій $f^{(i)}$ за своїми аргументами).

Для простоти обговорювати методи розв'язання задачі Коші будемо на прикладі задачі для одного рівняння

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Побудова чисельних алгоритмів спирається на дискретизацію завдання. Уведемо до області розрахунку $x \in [a, b]$ дискретний набір точок $\omega^{(h)} = \{x_i = a + hi, i = 0, 1, \dots, N, N = \frac{b-a}{h}\}$, у яких буде обчислюватися наближений розв'язок. Точки x_i будемо називати *вузлами інтегрування*, або *вузлами сітки*, відстань h між ними – *кроком інтегрування*, або *кроком сітки*, а сукупність вузлів $\omega^{(h)}$ – *сітковою областю*, або *сіткою вузлів*.

Інші позначення, якими ми будемо далі користуватися:

$y^{(h)} = \{y_i, i = 0, 1, \dots, N\}$ – сукупність шуканих наближених значень розв'язку задачі (7.7) у вузлах сітки;

$[y]^{(h)} = \{y(x_i), i = 0, 1, \dots, N\}$ – сукупність точних значень розв'язку задачі (7.7) у вузлах сітки (проекція розв'язку вихідної задачі на сіткову область);

$f^{(h)} = \{f_i = f(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, N\}$ – значення правої частини (7.7) у вузлах.

Різні сукупності величин, що належать до вузлів сітки, будемо називати *сітковими функціями*. Очевидно, введені таким чином сіткові функції можна трактувати як елементи $(N + 1)$ -вимірному векторному простору. Спираючись на це уявлення, визначимо похибку чисельного розв'язку:

$\delta^{(h)} = y^{(h)} - [y]^{(h)} = \{y_i - y(x_i), i = 0, 1, \dots, N\}$
і, залучаючи будь-яку норму в згаданому векторному просторі, оцінимо величину похибки як $\|\delta^{(h)}\|$.
(Наприклад, $\|\delta^{(h)}\| = \max_i |y_i - y(x_i)|$.)

Будемо говорити, що чисельний розв'язок збігається з точним ($y_i \rightarrow y(x_i)$), якщо $\|\delta^{(h)}\|_{h \rightarrow 0} \rightarrow 0$.

Будемо також говорити, що метод, за яким одержаний чисельний розв'язок, є методом h -го порядку точності, якщо $\|\delta^{(h)}\| \leq \text{const} \cdot h^p$.

Переходимо до обговорення конкретних методів обчислення розв'язку задачі (7.7) у вузлах сітки. Найпростіший спосіб їх конструювання спирається на заміну похідної в рівнянні (7.7) в околі кожного вузла сітки за формулами чисельного диференціювання, в яких використовуються значення шуканого розв'язку у вузлах сітки.

Наведемо найпростіші наближені формули для першої похідної від функції, заданої таблицею:

– *праве різностороннє відношення*:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}; \quad (7.8)$$

– *ліве різностороннє відношення*:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}; \quad (7.9)$$

– *центральне різностороннє відношення*:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (7.10)$$

Запишемо наближений вираз для другої похідної:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (7.11)$$

7.1 Методи Ейлера

Метод Ейлера (явний). Наближаючи похідну в околі кожного i -го вузла правим різницеvim відношенням (7.8), приходимо до методу Ейлера:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), & i = 0, 1, \dots, N, \\ y_0 = y_a. \end{cases} \quad (7.12)$$

Очевидно, в даному разі шукана інтегральна крива АВ наближається до ламаної ACDEF (рис. 7.1), нахил якої на елементарній ділянці $[x_i, x_{i+1}]$ визначається нахилом інтегральної кривої рівняння (7.7), з точки $((x_i, y_{i+1}))$. Послідовні значення y_i обчислюють за формулою

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

яку одержують із співвідношення (7.12).

Метод Ейлера (неявний). До цього методу доходимо, наближаючи похідну в околі i -го вузла лівим різницеvim відношенням

$$\begin{cases} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i), & i = 0, 1, \dots, N, \\ y_0 = y_a. \end{cases} \quad (7.13)$$

Під час обчислення розв'язку за цим методом виникають деякі труднощі, бо з урахуванням «напрямку рахунку» (зліва направо) невідома величина y_i до кожного i -го рівняння входить нелінійним чином. Але труднощі ці непринципові, досить згадати про методи розв'язання нелінійних рівнянь.

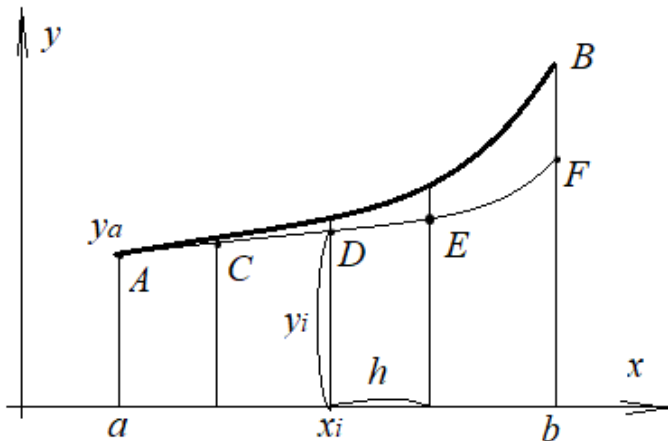


Рисунок 7.1

Алгебраїчні співвідношення між компонентами сіткової функції, якими замінюються вихідні диференціальні рівняння в околі кожного вузла сітки, будемо називати надалі різницеви́ми рівняннями (співвідношеннями).

Замкнену систему різницеви́х рівнянь разом із додатковими умовами (початковими або крайовими) називають різницевою схемою. Таким чином, метод (7.12) – це явна різницева схема Ейлера, (7.13) – неявна різницева схема Ейлера.

Метод (схема) називається явним, якщо система рівнянь, що визначає цей метод, може бути записана безпосередньо у вигляді розрахункових формул для обчислення наближених значень розв’язку у вузлах сітки. Якщо ж справа зводиться до необхідності розв’язувати систему рівнянь (лінійних або нелінійних), схему називають неявною.

Звернемося до питання про похибки чисельного розв’язання. Що стосується перших двох методів, які введені до розгляду, то похибку їх можна оцінити безпосередньо.

Спираючись на явний метод Ейлера, викладемо попередні міркування, що стосуються загального підходу до аналізу точності чисельних результатів.

Використовуючи визначення похибки, виразимо розв’язок через точний:

$$y_i = y(x_i) + \delta_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Підставляючи цей розв’язок у (12), одержимо

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h} - f(x_i, y(x_i) + \delta_i) = 0.$$

За теоремою Лагранжа (з математичного аналізу)

$$f(x_i, y(x_i) + \delta_i) = f(x_i, y(x_i)) + f'_y(x_i, \tilde{y})\delta_i, \quad (7.14)$$

де $f'_y(x_i, \tilde{y})$ – похідна від f за y у точці (x_i, \tilde{y}) такої, що $\tilde{y} \in [y(x_i), y(x_i) + \delta_i]$. Перепишемо попереднє співвідношення у вигляді

$$\frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h} - f'_y(x_i, \tilde{y})\delta_i = - \left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - f(x_i, y(x_i)) \right]. \quad (7.15)$$

Ми одержали різницеві рівняння, що описують поведінку похибки методу Ейлера при переході від вузла до вузла. Визначальне значення в цьому разі мають праві частини цих рівнянь, що являють собою результат підстановки точного розв'язку вихідного завдання (7.7) в різницеві рівняння методу Ейлера (7.12).

Розв'язком системи рівнянь (7.12) є сіткова функція $y^{(h)}$. При підстановці в різницеві рівняння якоїсь іншої сіткової функції рівняння не задовольняються, виникає так звана *неув'язка (непогодження)*, або *похибка апроксимації*.

У цьому разі помилка апроксимації

$$\psi^{(h)} = \left\{ \psi_i = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - f(x_i, y(x_i)), \right. \\ \left. i = 0, 1, \dots, N - 1 \right\}. \quad (7.16)$$

Як бачимо, саме ці величини знаходяться в правих частинах рівнянь (7.15).

Помилка апроксимації в кожному вузлі ψ_i певною мірою показує, наскільки різницеве рівняння в околі даного вузла відрізняється від вихідного, диференціального, а величина похибки $\|\psi^{(h)}\|$ характеризує в цілому «близькість» вихідної задачі (7.7) і відповідної різницевої, з якої визначають наближений розв'язок $y^{(h)}$ (в цьому разі завдання (7.12)). Важливим є те, що похибка чисельного розв'язку, одержуваного з якого-небудь збіжного методу, визначається похибкою апроксимації різницевих рівнянь, що відповідають цим методам.

Величину помилки апроксимації неважко оцінити. Наприклад, для методу Ейлера (7.12) відповідно до (7.16)

$$\psi_i = \left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - f(x_i, y(x_i)) \right].$$

Припускаючи необхідну (для нижченаведених викладок) гладкість розв'язання вихідної задачі, замінимо значення функції $y(x_{i+1})$ за формулою Тейлора щодо вузла x_i :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x \in [x_i, x_{i+1}]}.$$

Підставляючи у формулу для ψ_i після елементарних арифметичних перетворень одержимо:

$$\psi_i = \left[\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} - f(x_i, y(x_i)) \right] + \frac{h}{2} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x \in [x_i, x_{i+1}]}.$$

Або згідно з рівнянням (7.7):

$$\psi_i = \frac{h}{2} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x \in [x_i, x_{i+1}]}$$

припускаємо, що друга похідна $\frac{d^2y}{dx^2}$ існує та обмежена на $[a, b]$. Отже, $\|\psi^{(h)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{[a,b]} \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| h$ (якщо використовувати рівномірну метрику). Таким чином, явний метод Ейлера являє собою метод першого порядку точності.

Повернемося до обговорення інших методів чисельного розв'язання задачі (7.7).

Наблизивши похідну $\frac{dy}{dx}$ в околі i -го вузла за допомогою центрального різницевого відношення (7.10), доходимо до системи співвідношень:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = f(x_i, y_i), & i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a. \end{cases} \quad (7.17)$$

Система (7.17) не замкнена – необхідно якимось чином довизначити значення y_1 . Роблячи це, наприклад за допомогою методу Ейлера: $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, і

записуючи рівняння (7.17) у вигляді $y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$, одержуємо розрахункову формулу, за якою можна обчислити розв'язок в кожній вузловій точці.

Легко переконатися, що співвідношення (7.17) апроксимують вихідне диференціальне рівняння з другим порядком точності.

Згідно із (7.16) помилка апроксимації в цьому разі

$$\psi_i = \left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - f(x_i, y(x_i)) \right].$$

Замінімо значення функцій $y(x_{i+1})$ та $y(x_{i-1})$ за формулою Тейлора відносно вузла x_i :

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + h \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_i} \\ &\quad + \frac{h^3}{6} \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x \in [x_i, x_{i+1}]}, \\ y(x_{i-1}) &= y(x_i) - h \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_i} \\ &\quad - \frac{h^3}{6} \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x \in [x_i, x_{i+1}]}. \end{aligned}$$

Підставляючи у формулу для ψ_i , одержуємо після елементарних арифметичних перетворень:

$$\psi_i = \left[\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} - f(x_i, y(x_i)) \right] + \frac{h^2}{6} \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x \in [x_i, x_{i+1}]}.$$

Згідно з рівнянням (7.7):

$$\psi_i = \frac{h^2}{6} \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x \in [x_i, x_{i+1}]}$$

припускаємо, що третя похідна $\frac{d^3y}{dx^3}$ існує та обмежена на $[a, b]$. Таким чином, $\|\psi^{(h)}\| \leq \frac{1}{6} \max_{[a,b]} \left| \frac{d^3y}{dx^3} \right| h^2$. Отже,

різницева схема (7.17) являє собою метод другого порядку точності.

Щоб зрозуміти, як можна будувати інші методи другого порядку точності, звернемося до рисунка 7.2. Тут у межах відрізка $[x_i, x_{i+1}]$ в перебільшено збільшеному масштабі зображена інтегральна крива OP , що виходить із точки O з координатами (x_i, y_i) ; y_A – значення за x_{i+1} , яке одержують за явного методу Ейлера; y_B – значення, що обчислюють за неявним методом Ейлера (ланка відповідної ламаної виходить із точки O з нахилом, що дорівнює нахилу інтегральної кривої в точці P); y_C – значення, яке відповідає перетину $x = x_{i+1}$ із прямою, що виходить із точки O з нахилом, який дорівнює нахилу інтегральної кривої в середині відрізка $[x_i, x_{i+1}]$. Виходячи з наведеної картинки можна припустити, що точність y_C більша, ніж y_A або y_B . Спираючись на це припущення, сконструюємо такі розрахункові алгоритми.

Модифікований метод Ейлера. Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f_{i+1/2} = 0, & i = 0, 1, \dots, N, \\ y_0 = y_a, \end{cases} \quad (7.18)$$

де $f_{i+1/2} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2}\right)$.

У цьому разі значення $y_{i+1/2}$, що належить середині відрізка $[x_i, x_{i+1}]$, наближено обчислюється за методом Ейлера:

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.19)$$

Виключаючи із (7.19) проміжне значення $y_{i+1/2}$, можна записати цей метод у вигляді такої системи різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) = 0, \\ y_0 = y_a, \end{cases} \quad (7.20)$$

при $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Неважко переконатися, що система (7.20) апроксимує задачу (7.7) з другим порядком точності.

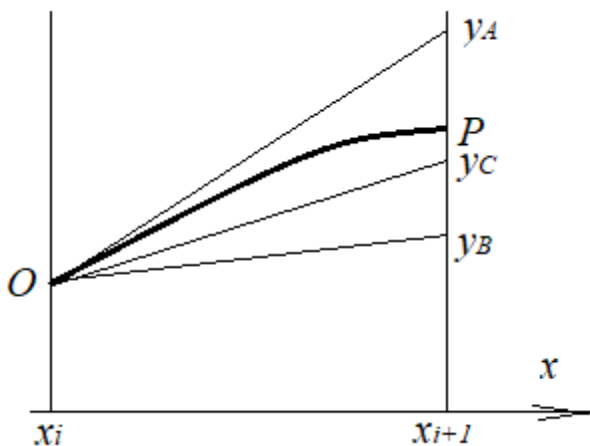


Рисунок 7.2

Метод Ейлера з перерахунком. Інший спосіб розрахунку, що спирається на викладені вище геометричні міркування, полягає в заміні початкової задачі (7.7) системою

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{1}{2} [f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i)] = 0, \\ y_0 = y_a. \end{cases} \quad (7.21)$$

Тут, як бачимо, нахил інтегральної кривої посередині відрізка $[x_i, x_{i+1}]$ наближено замінюється середнім арифметичним нахилом на кордонах цього відрізка. Знову неважко перевірити, що (7.21) апроксимує задачу (7.7) із другим порядком точності. Система (7.21) є неявною і для її розв'язання звернемося до ітераційного процесу (під час обчислення $y_{i+1}^{(s)}$ -го рівняння):

$$y_{i+1}^{(s+1)} = y_i - \frac{h}{2} [f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(s)}) + f(x_i, y_i)], \quad (7.22)$$

де s – номер наближення.

Зупинимося трохи докладніше на наступному варіанті цього методу, що впливає з ітераційного процесу (7.22). Обчислимо початкове («нульове») наближення $y_{i+1}^{(0)}$ за явним методом Ейлера:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (7.23)$$

Для першого наближення згідно із (7.22), одержимо формулу

$$y_{i+1} = y_i - \frac{h}{2} [f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) + f(x_i, y_i)]. \quad (7.24)$$

Якщо за допомогою (7.23) виключити із (7.24) $y_{i+1}^{(0)}$, одержимо

$$y_{i+1} = y_i - \frac{h}{2} [f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)) + f(x_i, y_i)]. \quad (7.25)$$

Можна переконатися, що рівняння (7.25) апроксимують початкове диференціальне рівняння (7.7) із другим порядком точності. Таким чином, у рамках методу ітерацій (7.22) другого порядку точності досягають уже на першій ітерації, якщо нульове наближення обчислювати за методом Ейлера (7.23).

Алгоритм обчислень, описуваний формулами (7.23) і (24), називається методом *предиктор-коректор*: предиктор (прогноз результату) – $y_{i+1}^{(0)}$ обчислюється за формулою (7.23), коректор (уточнення результату) – y_{i+1} обчислюється за формулою (7.24).

Методи (7.18), (7.19) і (7.23), (7.24) є окремими випадками однопараметричної сім'ї схем Рунге – Кутта другого порядку точності.

7.2 Однопараметрична сім'я методів Рунге – Кутта другого порядку точності

Узагальнюючи записи введених алгоритмів (7.20) і (7.25), розглянемо спосіб переходу від розв'язання в i -му вузлі до розв'язання в $(i + 1)$ -му, що являє собою різницеве рівняння:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \alpha f(x_i, y_i) - \beta f(x_i + \gamma h, y_i + \eta h f(x_i, y_i)) = 0, \quad (7.26)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ – поки що невизначені параметри, які знайдемо з вимоги, щоб співвідношення (7.26) апроксимувало початкове диференціальне рівняння (7.7) із другим порядком точності.

Помилка апроксимації в i -му вузлі як результат формальної підстановки розв'язку початкового завдання (7.7) в різницеве рівняння (7.26) має вигляд

$$\psi_i = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \alpha f(x_i, y(x_i)) - \beta f(x_i + \gamma h, y(x_i) + \eta h f(x_i, y(x_i)))$$

(під $y(x)$ розуміють точний розв'язок початкової задачі).

Вибираючи як «опорну» точку $x = x_i$ і замінюючи всі складові у виразі для ψ_i за формулою Тейлора щодо цієї точки, одержимо (аргумент x_i далі опущений для компактності таких записів)

$$\psi_i = \frac{y + hy' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y''' - y}{h} - \alpha f -$$

$$-\beta \left[f + \gamma h f_x + (\eta h f) f_y + \frac{\gamma^2 h^2}{2} \hat{f}_{xx} + \frac{\eta^2 h^2 f^2}{2} \hat{f}_{yy} + \gamma \eta h^2 f \hat{f}_{xy} \right].$$

Знак Λ над позначенням функцій означає, що зазначені похідні від них обчислюють в околі точки x_i для \hat{y}''' і точки $(x_i, y(x_i))$ для похідних від функції f .

Далі,

$$\begin{aligned} \psi_i = & y' + \frac{h}{2} y'' + \frac{h^2}{6} \hat{y}''' - (\alpha + \beta) f - \beta h (\gamma f_x + \eta f f_y) - \\ & - \frac{\beta h^2}{2} (\gamma^2 \hat{f}_{xx} + \eta^2 f^2 \hat{f}_{yy} + 2\gamma \eta f \hat{f}_{xy}). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Зауважимо, що внаслідок початкового рівняння

$$\begin{aligned} y' - f = 0, \quad y'' - (f_x + f f_y) = 0, \\ y''' - [(f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy}) + (f_x f_y + f f_y^2)] = 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

З огляду на (7.28) бачимо, що ψ_i буде величиною другого порядку малості, якщо

$$\alpha + \beta = 1, \quad \beta \gamma = \beta \eta = \frac{1}{2}.$$

Виходячи з цих трьох умов для чотирьох параметрів, виразимо α , γ , η через β :

$$\alpha = 1 - \beta, \quad \gamma = \eta = \frac{1}{2\beta}$$

(зіставлення останнього співвідношення із (7.28) із відповідними складовими із (7.27) приводить до висновку, що ні за якою β анулювати члени другого порядку малості в (7.27) не вдається).

Таким чином, ми прийшли до однопараметричних сімей схем (методів) другого порядку точності, які називають *методами Рунге – Кутта*:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1 - \beta)p_1 + \beta p_2, \quad (7.29)$$

де допоміжні значення p_1, p_2 обчислюються за формулами:

$$p_1 f(x_i, y_i), \quad p_2 f\left(x_i + \frac{h}{2\beta}, y_i + \frac{h}{2\beta} p_1\right). \quad (7.30)$$

Неважко бачити, що за $\beta = 1$ формули (7.29)–(7.30) переходять у формули модифікованого методу Ейлера (7.18)–(7.9), а за $\beta = \frac{1}{2}$ – у формули методу предиктор-коректор (7.23)–(7.24).

На рисунку 7.3 наведена геометрична інтерпретація методу Рунге – Кутта другого порядку за $\beta = \frac{1}{2}$ (формули (7.23)–(7.24)). Спочатку обчислюють наближене рішення ЗДУ в точці $x_0 + h$ за формулою Ейлера $y_E = y_0 + hf_0$. Потім визначають нахил інтегральної кривої у знайдений точці $f(x_0 + h, y_E)$ і після знаходження середнього нахилу на кроці h визначають уточнене значення $y_{PK} = y(x_0 + h)$.

На рисунку 7.4 подана геометрична інтерпретація методу Рунге – Кутта другого порядку за $\beta = 1$ (формули (7.18) та (7.19)). Тут при прогнозі визначають у точці $x_0 + \frac{h}{2}$ методом Ейлера розв’язок $y_E = y_0 + hf_0/2$, а після обчислення нахилу дотичної до інтегральної кривої у середній розв’язок коригують із цього нахилу.

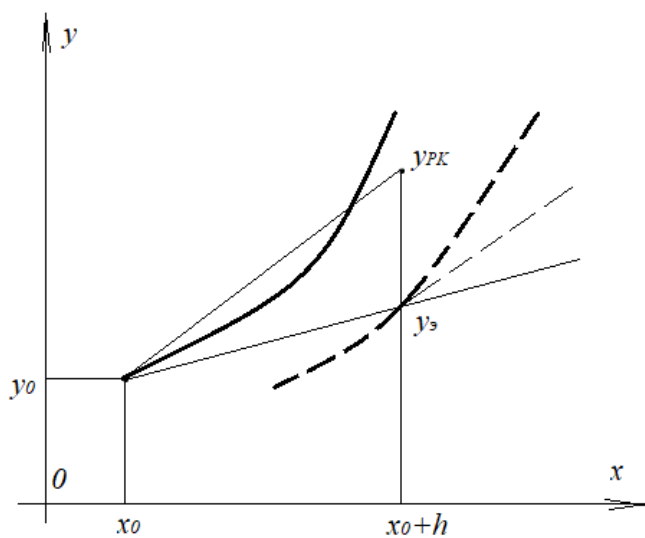


Рисунок 7.3

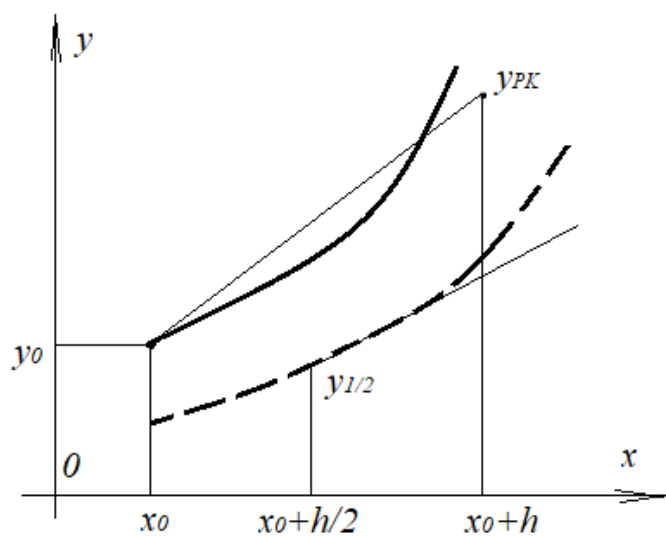


Рисунок 7.4

7.3 Метод Рунге – Кутта четвертого порядку точності

Наведемо без виведення розрахункові формули одного з найбільш часто використовуваних для чисельного розв'язання задачі Коші методу.

За значення y_{i+1} розрахунок здійснюють за формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4), \\ p_1 = f(x_i, y_i), \\ p_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}p_1\right), \\ p_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}p_2\right), \\ p_4 = f(x_i + h, y_i + hp_3), \end{array} \right. \quad (7.31)$$

де p_i – допоміжні величини.

7.4 Багатоточкові методи. Методи Адамса

Багатоточкові (іноді їх називають *багатокроковими*) методи розв'язання задачі Коші характерні тим, що значення розв'язку, обчислюваного в поточному вузлі, залежить від даних не лише в одному попередньому вузлі, а й у ряді попередніх. Ми вже стикалися з методом подібного роду (див. (7.17)). Відштовхуючись від цього прикладу, легко зрозуміти, що можна одержати інші варіанти багатокрокових методів, якщо похідну у вихідному рівнянні (7.7) замінювати за багатоточковими формулами чисельного диференціювання.

Можна також будувати такого роду методи, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Запишемо різницеве співвідношення в околі i -го вузла у вигляді

$$\frac{a_0 y_i + a_1 y_{i-1} + \dots + a_m y_{i-m}}{h} - (b_0 f_i + b_1 f_{i-1} + \dots + b_l f_{i-l}) = 0, \quad (7.32)$$

а коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_l$ підберемо вимагаючи, щоб рівняння (7.32) апроксимувало вихідне диференціальне рівняння з максимально можливим порядком точності.

Якщо припустити, що, $b_0 = 0$, будемо мати *явний метод*, співвідношення (7.32) можна безпосередньо записати у вигляді розрахункової формули для y_i .

За $b_0 \neq 0$ метод (7.32) є *неявним*.

Якщо $a_0 = -a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = a_m = 0$, то співвідношення (7.32) називають *методами Адамса*.

Звернемося до підходу, що дозволяє конструювати методи Адамса різної точності. Зауважимо, що розв'язок рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ задовольняє інтегральне співвідношення:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx. \quad (7.33)$$

Якщо рішення у вузлах аж до i -го вже обчислене, то за відомими значеннями $f_j = f(x_j, y_j), j = i, i-1, \dots$ можна інтерполювати підінтегральну функцію поліномами різного ступеня. Обчислюючи інтеграл інтерполяційного полінома, будемо одержувати різні формули Адамса:

а) змінюючи підінтегральну функцію її значенням у точці x_i (поліномом нульового степеня), одержуємо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx = f_i h + O(h^2)$$

або $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ – явний метод Ейлера;

б) змінюючи підінтегральну функцію її значенням у точці x_{i+1} , одержуємо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx = f_{i+1}h + O(h^2)$$

або $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_{i+1})$ – неявний метод Ейлера;

в) змінюючи підінтегральну функцію її значенням $f_{i+1/2} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2})$ у середині відрізка $[x_i, x_{i+1}]$, одержуємо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx = f_{i+1/2}h + O(h^3)$$

або $y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2})$.

Визнаючи значення $y_{i+1/2}$ (наприклад, як у (19)), доходимо модифікованого методу Ейлера.

Поки це були приклади вже знайомих нам двоточкових методів (одержані новим способом). Подивимися, який вигляд мають багатоточкові методи, які можна одержати таким чином. Наблизимо функцію f на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ поліномом, записаним у формі Ньютона:

$$f \approx f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}(x - x_i) + \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{2h^2}(x - x_i) \times (x - x_{i-1}) + \dots \quad (7.34)$$

З огляду на перші два доданки під час обчислення інтеграла одержимо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx = h \left[\frac{3}{2} f_i - \frac{1}{2} f_{i-1} \right] + O(h^3).$$

Звідси доходимо методу другого порядку точності:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \frac{1}{2}[3f_i - f_{i-1}]. \quad (7.35)$$

Висновок про точність методу зрозумілий без перевірки на апроксимацію із самого способу одержання співвідношення (7.35) (і наступних). Справді, оскільки тут розв'язок задачі Коші розглядається як обчислення інтеграла, то похибка методу не перевищує суми локальних похибок використаних квадратурних формул за всіма елементарними відрізками, на які розбивається розрахункова область.

З огляду на (7.34) три доданки, доходимо методу третього порядку точності:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \frac{1}{12}[23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]. \quad (7.36)$$

Нарешті, так само може бути одержаний метод Адамса четвертого порядку:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \frac{1}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]. \quad (7.37)$$

Цікавить запитання: який із двох нині відомих нам методів четвертого порядку точності кращий: метод Адамса (7.37) чи метод Рунге – Кутта (7.31)? Відповідаючи на це запитання, потрібно брати до уваги такі міркування: метод Адамса вимагає менших витрат (арифметичних операцій) під час визначення чергового значення y_{i+1} , оскільки під час обчислення за формулою (7.37) потрібно лише один раз обчислювати значення функції – f_i , інші потрібні значення – f_{i-1} , f_{i-2} , f_{i-3} – до цього моменту вже обчислені (достатньо їх зберігати в пам'яті ЕОМ), у той час як визначення y_{i+1} за формулами Рунге – Кутта вимагає в обов'язковому порядку обчислювати чотири допоміжних значення f (див. формули (7.31)).

З іншого боку, щоб почати обчислення за формулами Адамса, необхідно, крім заданого значення y_0 , якось визначити (наприклад, за тими самими формулами

Рунге – Кутта) значення y_1, y_2, y_3 в перших трьох вузлах інтегрування.

Крім того (і це більш важливо), формули Рунге – Кутта дозволяють без труднощів проводити обчислення зі змінним кроком інтегрування (наприклад, із кроком, що автоматично обирається з міркувань необхідної точності), за формулами Адамса – це складно.

Нарешті, при використанні багатокрокових методів є велика ймовірність несприятливої поведінки обчислювальних похибок, так званої *нестійкості*.

7.5 Різницеві рівняння другого порядку. Задача Коші. Крайові задачі. Метод прогону

Розглянемо тепер різницеве рівняння другого порядку. Зручна така форма запису різницевого рівняння другого порядку:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad (7.38)$$

$$i = 1, 2, \dots, A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0.$$

Перетворимо це рівняння. Введемо $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ і $\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}$. Тоді рівняння (38) набере вигляду

$$B_i \Delta y_i - A_i \Delta y_{i-1} - (C_i - B_i - A_i) y_i = -F_i. \quad (7.39)$$

Зауважимо, що

$$\Delta y_i - \Delta y_{i-1} = \Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1},$$

$$\Delta y_{i-1} = -\Delta^2 y_{i-1} + \Delta y_i.$$

З урахуванням цих формул рівняння (39) можна перетворити до вигляду

$$A_i \Delta^2 y_{i-1} + (B_i - A_i) \Delta y_i - (C_i - B_i - A_i) y_i = -F_i,$$

$$A_i \neq 0.$$

Таким чином, рівняння (7.38) – аналог диференціального рівняння другого порядку.

Для його розв'язання потрібно задати дві додаткові умови, якими можуть бути значення функції y і різниці першого порядку Δy . Якщо обидві умови (значення

функції y_i і першої різниці Δy_i) задати в одній точці, то одержимо *задачу Коші*, якщо додаткові умови задані в різних (несусідніх) точках, то одержану задачу називають *крайовою*.

Нехай розв'язується задача Коші й задані за $i = 0$ значення y_0 і $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, або, що те ж саме, задані y_0 і y_1 . Знаючи y_0 і y_1 , можна визначити послідовно значення y_i за $i = 2, 3, \dots$:

$$y_{i+1} = \frac{C_i y_i - A_i y_{i-1} - F_i}{B_i}, \quad B_i \neq 0.$$

Якщо задані y_0 і y_1 , то задачу можна розв'язати єдиним чином.

Але для рівнянь другого порядку в математичній фізиці найбільш типові крайові задачі, коли додаткові значення задані за різних i , наприклад, за $i = 0$ задано y_0 і за $i = N$ задано y_N , тобто потрібно знайти розв'язок y_i , $0 < i < N$, рівняння (7.38), якщо

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad (7.40)$$

де μ_1, μ_2 – задані числа.

Безліч точок (вузлів) $i = 0, 1, 2, \dots, N$ називається *сіткою*. У граничних вузлах сітки $i = 0$ і $i = N$ можуть бути задані не лише значення функції, й значення першої різниці або лінійної комбінації функції і першої різниці.

Загальну умову можна записати у вигляді

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2. \quad (7.41)$$

Підставляючи $y_1 = y_0$ в першу з умов (7.41), одержуємо

$$\chi_1 \Delta y_0 - (1 - \chi_1) y_0 = -\mu_1. \quad (7.42)$$

Випадок $\chi_1 = 0$ означає, що в граничному вузлі $i = 0$ задане значення функції y_0 (так звана *гранична умова*

першого роду). Якщо $\chi_1 = 1$, то задане значення Δu_0 (гранична умова другого роду). У разі $\chi_1 \neq 0$, $\chi_1 \neq 1$ у точці $i = 0$ задана лінійна комбінація функції і першої різниці (гранична умова третього роду).

Основний інтерес становлять різницеві крайові задачі. Велике досягнення обчислювальної математики полягає в тому, що для величезної кількості завдань математичної фізики обчислення будують таким чином, що на кожному кроці доводиться розв'язувати такі триточкові рівняння, як (7.38), з умовами (7.41).

Ця задача є класичною, до неї зводиться багато складних завдань теорії обчислювальних методів. Матриця такої системи рівнянь є тридіагональною. Вона має вигляд

$$\begin{bmatrix} 1 & -\chi_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & A_i & -C_i & B_i & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -\chi_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Її порядок дорівнює $N + 1$, якщо задані крайові умови другого або третього роду. Для системи рівнянь (7.38), (7.40) маємо матрицю $(N - 1)$ -го порядку. У цій матриці від нуля відмінні лише коефіцієнти, що стоять на трьох діагоналях – головній та двох сусідніх.

Для систем лінійних рівнянь із матрицями такого типу є ефективний метод розв'язання – метод винятку Гаусса, що приводить до формул прогону, викладених нижче.

Метод прогону. Розглянемо задачу (7.38) з умовами (7.41). Необхідно наголосити на простому способі розв'язання цієї системи. Ідея полягає у зведенні різницевого рівняння другого порядку до трьох різницевих

рівнянь першого порядку, взагалі кажучи, нелінійних. Припустимо, що має місце рекурентне співвідношення:

$$y_i = p_{i+1}y_{i+1} + q_{i+1}, \quad (7.43)$$

із невизначеними коефіцієнтами p_i і q_i . Вираз $y_{i-1} = p_i y_i + q_i$ підставимо у (7.38):

$$(A_i p_i - C_i) y_i + A_i q_i + B_i y_{i+1} = -F_i.$$

Скористаємося співвідношенням (7.43):

$$[(A_i p_i - C_i) p_{i+1} + B_i] y_{i+1} + A_i q_i + (A_i p_i - C_i) q_{i+1} = -F_i.$$

Це рівняння виконане для будь-яких y_i , якщо

$$(A_i p_i - C_i) p_{i+1} + B_i = 0,$$

$$A_i q_i + (A_i p_i - C_i) q_{i+1} + F_i = 0.$$

Звідси одержимо рекурентну формулу для p_{i+1} :

$$p_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i p_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (7.44)$$

(припускаємо, що знаменник у (7.44) відмінний від нуля) і рекурентну формулу для обчислення q_{i+1} :

$$q_{i+1} = \frac{A_i q_i + F_i}{C_i - A_i p_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1. \quad (7.45)$$

Ми виходили зі співвідношення (7.43).

Якщо коефіцієнти p_i і q_i відомі та відоме значення y_N , то, рухаючись справа наліво (від $i + 1$ до i), ми визначимо послідовно всі y_i . Рівняння для p_i – нелінійні, вони пов'язують значення цих функцій у двох сусідніх точках. Для p_i , q_i задача розв'язується зліва направо, для y_i – у протилежному напрямку. Для кожної з

функцій p_i , q_i , y_i необхідно розв'язувати задачу Коші. Щоб визначити початкові значення для цих функцій, використаємо граничні умови. Оскільки формула (7.43) справедлива за $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$, то за $i = 0$ маємо $y_0 = p_1 y_1 + q_1$;

з іншого боку, $y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1$. Тому

$$p_1 = \chi_1, \quad (7.46)$$

$$q_1 = \mu_1. \quad (7.47)$$

Таким чином, для функцій p_i і q_i одержимо задачі Коші: для p – (7.44), (7.46), для q – (7.45), (7.47) (формули прямого прогону).

Після того як функції p_i і q_i визначені для всіх $i = 1, 2, 3, \dots, N$, необхідно знайти граничне значення y_N . Його визначають із розв'язання системи рівнянь:

$$y_N = \chi_2 y_{N+1} + \mu_2, \quad y_{N-1} = p_N y_N + q_N,$$

звідси, якщо

$$y_N = \frac{1 - \chi_2 p_N \neq 0,}{\frac{\mu_2 + \chi_2 q_N}{1 - \chi_2 p_N}}. \quad (7.48)$$

Таким чином, для визначення y_i одержимо задачу Коші (7.43), (7.48) (формули зворотного прогону).

Викладений тут метод називають *методом прогону (правого прогону)*. Всі формули правого прогону запишемо в порядку використання:

$$(\rightarrow) \quad p_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i p_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1, \quad p_1 = \chi_1,$$

$$(\rightarrow) \quad q_{i+1} = \frac{A_i q_i + F_i}{C_i - A_i p_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1, \quad q_1 = \mu_1,$$

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 q_N}{1 - \chi_2 p_N},$$

$$(\leftarrow) \quad y_i = p_{i+1} y_{i+1} + q_{i+1}, \quad i = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0.$$

Стрілки вгорі зазначають напрямок рахунку:
(\rightarrow) від i до $i + 1$, (\leftarrow) – від $i + 1$ до i .

Стійкість методу прогону. У попередньому пункті формули прогону були виведені формально. Ми ділили на вирази $C_i - A_i p_i$ та $1 - \chi_2 p_N$, не знаючи, коли це можна робити. Зазначимо достатні умови, за яких формули (7.43) і (7.48) мають сенс:

$$\begin{aligned} |C_i| &\geq |A_i| + |B_i|, & i = 1, 2, 3, \dots, N - 1, \\ |\chi_j| &\leq 1, & j = 1, 2, & |\chi_1| + |\chi_2| < 2. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Легко показати, що за цих умов $|p_i| \leq 1$ для $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

За умов (7.49) знаменники у формулах (7.44), (7.45) і (7.48) відмінні від нуля.

Таким чином, у разі виконання умов (7.49) задача (7.38) з умовами (7.41) має єдиний розв'язок, який визначають за формулами (7.43)–(7.48). Обчислення за цими формулами проводять на ЕОМ наближено з кінцевим числом значущих цифр. У результаті помилок округлення фактично знаходять не функцію y_i – розв'язок задачі (7.38) з умовами (7.41), а \tilde{y}_i – розв'язок тієї самої задачі зі збуреними коефіцієнтами \tilde{A}_i , \tilde{B}_i , \tilde{C}_i і $\tilde{\chi}_1$, $\tilde{\chi}_2$ і правими частинами \tilde{F}_i , $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$. Виникає природне запитання: чи не відбувається в процесі обчислень наростання помилки округлення, що може призвести як до втрати точності, так і до неможливості продовжувати обчислення через зростання одержуваних величин.

Покажемо, що в методі прогону внаслідок умови $|p_i| \leq 1$ помилка $\delta y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$ у щодо визначення y_{i+1} не наростає при визначенні y_i . Справді, з рівнянь

$$y_i = p_{i+1} y_{i+1} + q_{i+1}, \quad \tilde{y}_i = p_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + q_{i+1}$$

впливає

$$\delta y_i = p_{i+1} \delta y_{i+1}, \quad |\delta y_i| \leq |p_{i+1}| \cdot |\delta y_{i+1}|,$$

тобто $|\delta y_i| \leq |\delta y_{i+1}|$, оскільки $|p_i| \leq 1$.

Розділ 8

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

8.1 Основні поняття рівнянь у частинних похідних

У попередньому розділі вивчені наближені методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. Цей розділ присвячений рівнянням у частинних похідних, із якими пов'язані завдання опису руху суцільних середовищ (газу, рідини, твердих тіл), а також задачі теплопровідності, теорії пружності, електричних і магнітних полів та багато інших. Незалежними змінними у фізичних задачах є час t і просторові координати x , y , z . Як залежні змінні використовують компоненти швидкості частинок середовища, густину, тиск, температуру, пружне напруження та інші характеристики.

Припустимо, що розв'язок потрібно знайти на часовому проміжку $[t_0, t_1]$ у деякій області зміни незалежних змінних $G(x, y, z)$. Математична постановка задачі складається з диференціального рівняння, а також додаткових умов, що дозволяють виділити єдиний розв'язок серед сім'ї всіх розв'язків даного рівняння. Додаткові умови, задані за $t = t_0$, називають початковими даними, а умови, задані на границі області $G(x, y, z)$ – граничними, або крайовими, умовами. Як вихідні й крайові умови зазвичай задають значення шуканих функцій та їх похідних. Задачу, в якій є лише початкові умови, називають задачею Коші. Задачу з початковими даними і граничними умовами називають змішаною крайовою задачею або нестационарною крайовою задачею. Під час дослідження сталих станів або стаціонарних (не залежних від часу) процесів використовують рівняння, що не залежать від часу. У цьому разі розв'язок шукають в

області $G(x, y, z)$, на границі якої задають граничні умови. Такі завдання називають крайовими.

Особливим питанням у теорії диференціальних рівнянь є коректність постановки початкових і змішаних задач. Коректною називають таку постановку додаткових (початкових та граничних) умов, за якої розв'язок задачі в цілому існує, єдино й безперервно залежить від цих даних і коефіцієнтів рівняння. Вимога безперервної залежності необхідна, для того щоб невеликі зміни коефіцієнтів рівняння, початкових даних і крайових умов не спричиняли сильних змін розв'язання задачі. У механіці й фізиці існують задачі, розв'язання яких є нестійким. Вивченням таких некоректних задач займається спеціальний розділ математики. Ми будемо розглядати лише задачі з коректною постановкою, під час розв'язування яких не виникає нестійкості, пов'язаної з вихідними рівняннями.

Велика кількість фізичних задач призводить до розв'язання рівнянь другого порядку, які досить добре вивчені в теоретичному плані і для яких розроблені стандартні методи наближеного розв'язання. Якщо йдеться про одну просторову змінну, то нестационарне рівняння в частинних похідних другого порядку можна записати у вигляді

$$Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + Du_t + Eu_x = F.$$

Тут $u(t, x)$ – шукана функція; t, x – незалежні змінні; A, B, C, D, E і F – коефіцієнти рівняння, які, взагалі кажучи, залежать від t, x і u . Якщо всі коефіцієнти є константами, то це лінійне рівняння з постійними коефіцієнтами. Якщо коефіцієнт F – лінійна функція від невідомої u , а інші коефіцієнти від u не залежать, то таке рівняння називають лінійним зі змінними коефіцієнтами. І,

нарешті, якщо всі коефіцієнти лінійно залежать від u , то такі рівняння називають квазілінійними.

Якщо коефіцієнти A , B , C нульові, а $D \neq 0$ і $E \neq 0$, то рівняння має перший порядок і називається рівнянням перенесення. Якщо хоча б один із коефіцієнтів A , B , C відмінний від нуля, рівняння має другий порядок і може бути класифіковане за типами аналогічно кривим другого порядку. Тип рівняння визначається коефіцієнтами при старших похідних. Якщо дискримінант $B^2 - 4AC$ додатний, то рівняння називають гіперболічним, якщо дорівнює нулю – параболічним, якщо від’ємний – еліптичним. Така класифікація рівнянь пов’язана з наявністю характеристичних напрямків, або характеристик. Характеристичним називають напрямок, уздовж якого вихідне рівняння може бути записане у вигляді повного диференціала і, отже, може бути проінтегроване. Гіперболічні рівняння мають дві дійсні характеристики, параболічні рівняння – одну, а еліптичні рівняння не мають дійсних характеристик. Фізичні процеси, що описуються рівняннями перелічених типів, коректні постановки задач властивості розв’язань істотно відрізняються один від одного. Далі будуть наведені приклади рівнянь різних типів та описані методи їх розв’язання.

Одним з ефективних чисельних підходів до розв’язання рівнянь у частинних похідних є застосування скінченнорізницевих методів. Сутність методу розв’язання крайової задачі для ОДУ полягає в тому, що вихідна диференціальна задача замінюється різницевою, далі розв’язується система алгебраїчних рівнянь. Наближений розв’язок у цьому разі шукають у вузлах сітки.

Для розв’язання задачі за допомогою скінченнорізницевих методів необхідно побудувати такі різницеві схеми, які б забезпечували збіжність

одержуваного розв'язку різницевої задачі з розв'язком вихідної диференціальної при подрібненні сітки. У теорії різницевих схем доведена теорема про те, що якщо різницева крайова задача апроксимує диференціальну задачу і стійка, то при подрібненні сітки розв'язок різницевої задачі збігається з розв'язком диференціальної. З цього випливає, що необхідно будувати апроксимувальні різницеві схеми і вибирати серед них стійкі.

8.2 Параболічні рівняння

Постановка задачі

До параболічних рівнянь приводять задачі теплопровідності, дифузії та інші. Розглянемо рівняння цього типу на прикладі одновимірного (тобто з однією просторовою змінною) лінійного рівняння теплопровідності з постійними коефіцієнтами, що описують поширення тепла в тонких однорідних стрижнях:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t). \quad (8.1)$$

Тут $A > 0$ – константа (коефіцієнт теплопровідності); $u(x, t)$ – шуканий розв'язок; $F(x, t)$ – права частина. Будемо шукати розв'язок в області $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$. Коректна постановка задачі, крім рівняння (8.1), містить початкові дані та крайові умови:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (8.2)$$

Найкраще вивчені лінійні задачі, в яких крайові умови, як і саме рівняння, лінійні. Існує три типи крайових умов, які називають умовами першого, другого і третього родів. Умови першого роду означають, що на границях області задана залежність температури від часу:

$$u(0, t) = \mu_{11}(T), \quad u(L, t) = \mu_{12}(T). \quad (8.3')$$

Умови другого роду задають теплові потоки (похідні від температури) через границі області:

$$u_x(0,t) = \mu_{21}(t), u_x(L,t) = \mu_{22}(t). \quad (8.3'')$$

І нарешті, умови третього роду задають на межі лінійну комбінацію шуканої функції та її похідної:

$$u(0,t) + \alpha_1 u_x(0,t) = \mu_{31}(t), \quad (8.3''')$$

$$u(L,t) + \alpha_2 u_x(L,t) = \mu_{32}(t) t^i.$$

У курсі диференціальних рівнянь доведено, що рівняння (8.1) з початковими даними (8.2) і крайовими умовами або (8.3'), або (8.3''), або (8.3''') має єдиний розв'язок. Розглянемо методи наближеного розв'язання поставленого завдання.

Звичайно-різницеві схеми для одновимірного рівняння

Введемо в області розв'язання прямокутну рівномірну різницеву сітку. Для цього розіб'ємо відрізок $[0, T]$ на M рівних частин: $t^i = i \cdot \tau$, $\tau = T/M$, а відрізок $[0, L]$ – на N рівних частин: $x_j = jh$, $h = L/N$. Замість точного розв'язку $u(x, t)$ будемо шукати наближений, заданий у вузлах сітки $u_j^i = u(x_j, t^i)$. Область розв'язання і побудована сітка наведені на рисунку 8.1. На лініях $t = 0$, $x = 0$ і $x = L$ розв'язання визначено початковими даними і крайовими умовами, в усіх інших вузлах сітки розв'язок необхідно знайти з різницевих аналогів рівняння (8.1).

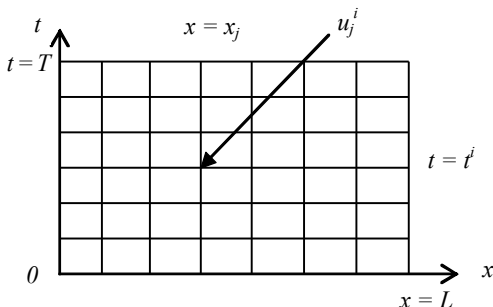


Рисунок 8.1 – Розрахункова область і сітка

Наблизимо (апроксимуємо) вихідну диференціальну задачу до скінченнорізницевої. Для цього замінімо всі вхідні в рівняння (8.1) і крайові умови (8.3'), (8.3'') похідні їх скінченнорізницеви аналогами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^i) &\approx \frac{u(x_j, t^{i+1}) - u(x_j, t^i)}{\tau} = \frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\tau}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^i) &\approx \frac{u(x_{j+1}, t^i) - 2u(x_j, t^i) + u(x_{j-1}, t^i))}{h^2} = \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{h^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t^i) &= \frac{u_1^i - u_0^i}{h}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_M, t^i) = \frac{u_M^i - u_{M-1}^i}{h}.\end{aligned}$$

Підставляючи вирази для похідних у рівняння, одержимо різницеву схему:

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\tau} = A \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{h^2} + F(x_j, t^i). \quad (8.4)$$

В першому часовому інтервалі розв'язок відомий: $u^0_j = u(x_j, t^0) = u(x_j, 0) = u_0(x_j)$. В усіх внутрішніх точках розрахункової області його обчислюють за явними формулами, які легко впливають зі схеми (8.4):

$$u_j^{i+1} = u_j^i + \tau A \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{h^2} + F(x_j, t^i),$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Для знаходження розв'язку в крайніх точках відрізка $[0, L]$ необхідно використовувати крайові умови. Якщо задані крайові умови першого роду, то можна відразу визначити значення шуканих функцій: $u^i_0 = \mu_{11}(t^i)$, $u^i_M = \mu_{12}(t^i)$. Для умов другого роду одержимо:

$$u^{i+1}_0 = u^{i+1}_1 - h\mu_{21}(t^{i+1}), \quad u^{i+1}_M = u^{i+1}_{M-1} + h\mu_{22}(t^{i+1}).$$

Нехай $u(t, x)$ – точний розв'язок. Досліджуємо, наскільки чисельне розв'язання, одержане за схемою (8.4),

відрізняється від точного. Для цього розвинемо $u(t^i, x_{j\pm 1})$, i (t^{i+1}, x_j) в ряд Тейлора в околі точки (x_j, t^i) :

$$u_{j\pm 1}^i = u(t^i, x_j \pm h) = u_j^i \pm h(u_x)_j^i + \frac{h^2}{2}(u_{xx})_j^i \pm \frac{h^3}{6}(u_{xxx})_j^i + \frac{h^4}{24}(u_{xxxx})_j^i \dots,$$

$$u_j^{i+1} = u(t^i + \tau, x_j) = u_j^i + \tau(u_t)_j^i + \frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_j^i + \dots$$

і підставимо ці вирази в різницеву схему (8.4):

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{i1} - u_j^i}{\tau} - A \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{h^2} - F(x_j, t^i) = \\ & = \frac{u_j^i + \tau(u_t)_j^i + \frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_j^i + \dots - u_j^i}{\tau} - \\ & - A \left[\frac{u_j^i + h(u_x)_j^i + \frac{h^2}{2}(u_{xx})_j^i + \frac{h^3}{6}(u_{xxx})_j^i + \frac{h^4}{24}(u_{xxxx})_j^i - 2u_j^i}{h^2} + \right. \\ & \left. + \frac{u_j^i - h(u_x)_j^i + \frac{h^2}{2}(u_{xx})_j^i - \frac{h^3}{6}(u_{xxx})_j^i + \frac{h^4}{24}(u_{xxxx})_j^i \dots}{h^2} \right] - F(x_j, t^i) = \\ & = (u_t)_j^i - A(u_{xx})_j^i - F(x_j, t^i) + \frac{\tau}{2}(u_{tt})_j^i - A \frac{h^2}{12}(u_{xxxx})_j^i. \end{aligned}$$

Перші три члени є відхили цього рівняння в точці (t^i, x_j) і рівні 0, оскільки $u(x, t)$ – розв’язок рівняння (8.1). Отже, похибка цієї схеми

$$\frac{\tau}{2}(u_{tt})_j^i - A \frac{h^2}{12}(u_{xxxx})_j^i,$$

тобто схема є схемою першого порядку апроксимації за часом і другого порядку – за простором. Перевагою явної схеми є те, що розв’язок може бути знайдене за явними алгебраїчними формулами. Однак, як показали розрахунки,

наближений розв'язок, одержаний за допомогою явної схеми, може бути нестійким. Нестійкість призводить до швидкого (експоненціального) зростання похибок, що вносяться до чисельного розв'язання за рахунок помилок округлення. Дослідження стійкості, виконане за найпростішими розв'язаннями у вигляді одиначної гармоніки (Фур'є-аналіз), показує, що ці розв'язки будуть стійкими, якщо

$$\gamma = A \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (8.5)$$

Параметр γ називають числом Куранта. В разі порушення умови (8.5) в чисельному розв'язанні виникають пилкоподібні осциляції, амплітуда яких швидко зростає, і за кілька тимчасових кроків розв'язання «розвалюється».

Для ілюстрації наведемо приклад розв'язування в пакеті MathCAD рівняння (8.1), $A = 1$, $F(x, t) = 0$, з нульовими крайовими умовами першого роду $u(0, t) = u(1, t) = 0$ і з початковими даними у вигляді гауссоїди, центрованої щодо точки $x = 1/2$:

$$\phi(x, 0) = e^{-20(x-0,5)^2} - e^{-20(x-1,5)^2} - e^{-20(x+0,5)^2}. \quad (8.6)$$

Завдання має точне розв'язання:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+80t}} \left(e^{-\frac{20(x-0,5)^2}{1+80t}} - e^{-\frac{20(x-1,5)^2}{1+80t}} - e^{-\frac{20(x+0,5)^2}{1+80t}} \right),$$

графік якого наведений на рисунку 8.2.

Із рисунка 8.2 бачимо, що точне розв'язання монотонно спадає з часом. Для розв'язок скористаємося явною схемою (8.4) на сітці $h = 0,1$, $\tau = 0,02$. Легко перевірити, що в цьому випадку умова (8.5) порушується.

Дійсно, $A \frac{\tau}{h^2} = \frac{0,02}{0,01} = 2 > \frac{1}{2}$, і потрібно очікувати, що розв'язання буде нестійким. Розв'язання в MathCAD,

наведене на рисунку 8.3, показує, що вже через кілька тимчасових кроків чисельне розв'язання стає немонотонним, і в подальшому його графік набуває характерного «пилкоподібного» вигляду. Амплітуда «осциляцій» швидко зростає, що призводить до переповнення арифметичного пристрою.

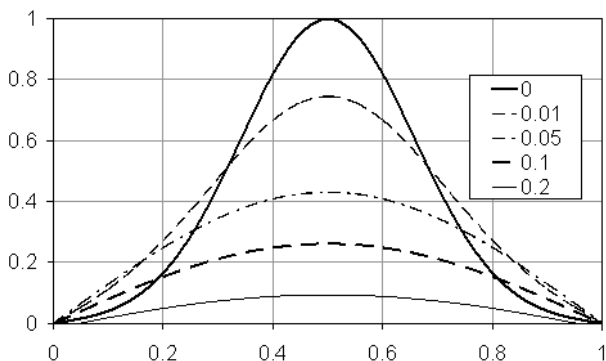


Рисунок 8.2 – Точне розв'язання (8.1), (8.6) у різні моменти часу

На практиці умова (8.5) означає, що розрахунок доводиться проводити з дуже маленьким кроком за часовою змінною, що істотно обмежує застосування явних схем для розв'язування рівняння теплопровідності. Справді, нехай $h = 10^{-2}$, $A = 1$, тоді згідно з (8.5) для одержання стійкого розв'язку необхідно додержуватися умови $\tau < 5 \cdot 10^{-5}$. Якщо розв'язок потрібно одержати на момент часу $T = 1$, то для цього необхідно зробити $N = 2 \cdot 10^4$ тимчасових кроків.

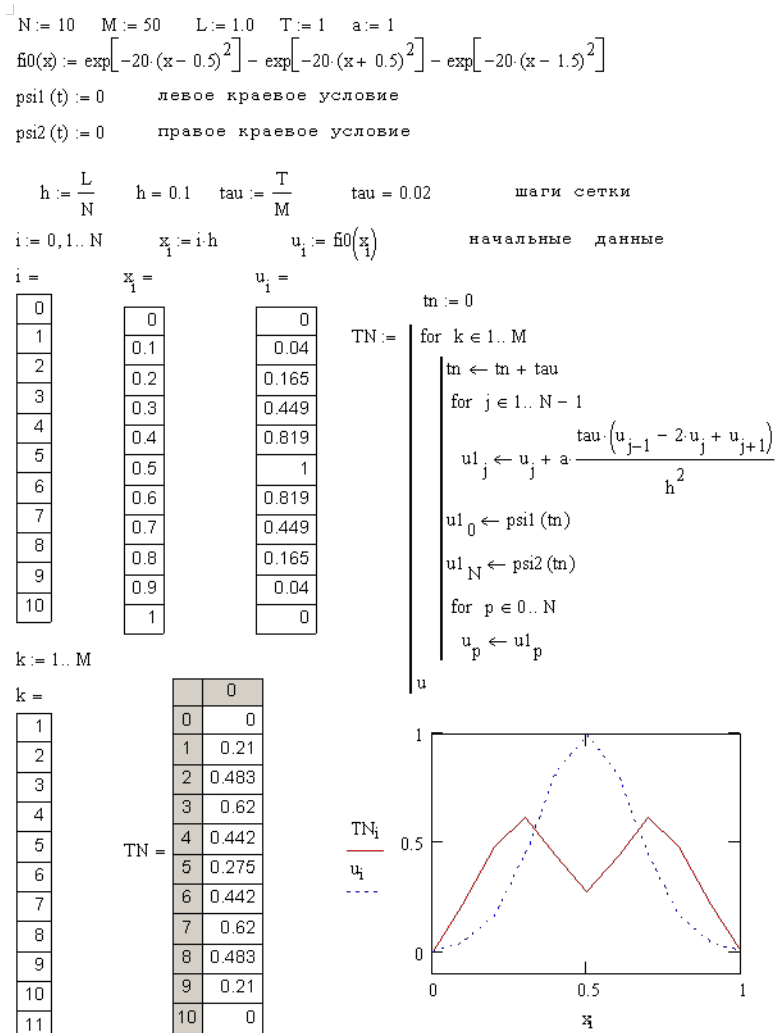


Рисунок 8.3 – Розв’язування рівняння теплопровідності за допомогою явної схеми

Якщо ж розв’язок потрібно отримати на більш докладній сітці за просторовою змінною, наприклад

$h = 10^{-3}$, то число тимчасових кроків зросте до $N = 2 \cdot 10^6$, і використання явної схеми робить розв'язання задачі нереалізованим.

Застосуємо для розв'язування завдань (8.1)–(8.3) неявну схему:

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\tau} = A \frac{u_{j+1}^{i+1} - 2u_j^{i+1} + u_{j-1}^{i+1}}{h^2} + F(x_j, t^i). \quad (8.7)$$

Дослідження апроксимації показує, що ця схема також має похибку порядку $\tau^1 + h^2$. Схема стійка за будь-якого співвідношення кроків τ , h . Це означає, що розрахунок можна вести з як завгодно великим тимчасовим кроком. Такі схеми називають абсолютно стійкими.

Для одержання розв'язку необхідно на кожному часовому кроці розв'язати СЛАР із тридіагональною матрицею:

$$\begin{aligned} u_o^i &= \mu_{11}(t^i), \\ \mu_{j-1}^{i+1} - (1 + 2\gamma)u_j^{i+1} + \mu_{j+1}^{i+1} &= u_j^i + \tau F(x_j, t^i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_M^i &= \mu_{12}(t^i). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Розв'язок системи (8.8) знаходять за допомогою методу прогону.

На рисунку 8.4 наведене розв'язання в MathCAD, в якому неявна схема (8.8) використана для розв'язок завдання (8.1), (8.6).

Як показує приклад, неявна схема дозволяє одержати близький до точного розв'язок за досить великого значення кроку з часом $\tau = 0,067$.

Для випадків другої і третьої крайової задач зміняться перше й останнє рівняння (8.8), з яких визначаються значення перших прогонкових коефіцієнтів і розв'язання в останньому вузлі сітки.

Схеми (8.4) і (8.7) є представниками сім'ї двохарових схем

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\tau} = A\sigma \frac{u_{j+1}^{i+1} - 2u_j^{i+1} + u_{j-1}^{i+1}}{h^2} + A(1-\sigma) \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{h^2} + F(x_j, t^i), \quad (8.9)$$

де $1 \geq \sigma \geq 0$ – параметр, який можна вибирати для того, щоб домогтися поліпшення тих чи інших властивостей схеми. При $\sigma = 0$ схема (8.9) переходить в явну схему (8.4), а при $\sigma = 1$ – в чисто неявну схему (8.6).

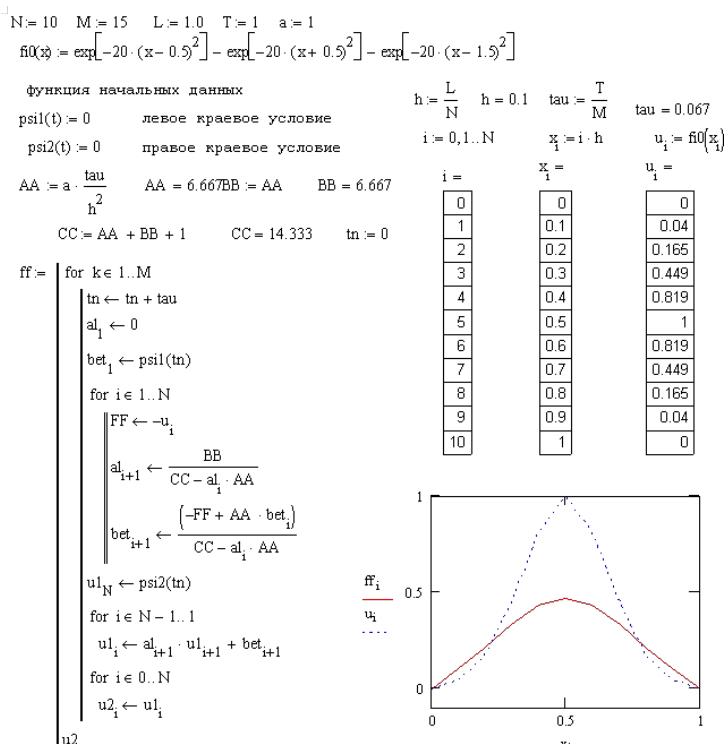


Рисунок 8.4 – Розв’язування рівняння теплопровідності за допомогою неявної схеми

За всіх інших значень σ у кожному різницевому рівнянні будуть використані значення невідомої функції в шести різних точках, на відміну від схем (8.4), (8.8), в яких зв'язано по чотири різні точки. Графічне подання точок розрахункової області, що входять до кожного різницевого рівняння, називають шаблоном звичайно – різницевої схеми. Шабини схем при $\sigma \neq 0$ наведені на рисунку 8.5.

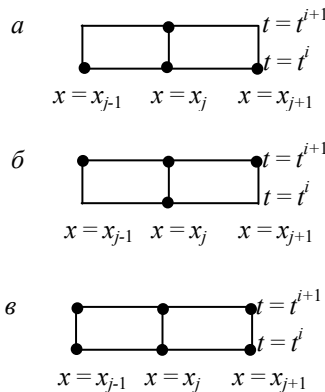


Рисунок 8.5 – Шабини схем: а – (8.4); б – (8.8); в – (8.9)

Як було зазначено вище, за рахунок вибору параметра σ можна домогтися, щоб схема мала більш високий порядок апроксимації. Зокрема, легко показати, що при $\sigma = 0,5$ схема буде мати порядок апроксимації $\tau^2 + h^2$. Крім того, за рахунок спеціального вибору вагового параметра $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12A\tau}$ можна домогтися, щоб схема мала порядок апроксимації $\tau^2 + h^4$.

Знаходження розв'язку різницевих схем типу (8.9) при $\sigma \neq 0$ аналогічно випадку неявної схеми. Система

третичкових рівнянь, що пов'язують розв'язання в точках верхнього $(i + 1)$ -го шару, має вигляд

$$\sigma \gamma u_{j-1}^{i+1} - (1 + 2\sigma \gamma) u_j^{i+1} + \gamma \sigma u_{j+1}^{i+1} = u_j^i + \tau(1 - \sigma) \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{h^2} + \tau F(x_j, t^i),$$

$$i = 0, 1, \dots, M-1; j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Воно відрізняється від рівняння (8.8) лише правою частиною і, отже, також розв'язується методом прогону.

Звичайно-різницеві схеми для двовимірної задачі

Нехай $G = [0, L_x] \cdot [0, L_y]$ – прямокутна область на площині (x, y) ; ∂G – межа області G ; $u(x, y, t)$ – функція, визначена в області $G \cdot [0, T]$. Розглянемо задачу знаходження розв'язку $u(x, y, t)$, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t), \quad (8.10)$$

доповненого початковими даними

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

і крайовими умовами першого роду

$$u(x, y, t) \big|_{\partial G} = \mu(t).$$

Введемо в області $G \cdot [0, T]$ скінченнорізницеву сітку з кроками $h_x = L_x/N_x$, $h_y = L_y/N_y$ і $\tau = T/M$. $t^n = n \cdot \tau$, $x_i = i h_x$, $y_j = j h_y$. Побудуємо сім'ю двошарових скінченно-різницевих схем:

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau} = & A \sigma \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) + \\ & + A(1 - \sigma) \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{h_y^2} \right) + F(x_i, y_j, t^n). \end{aligned}$$

Можна бачити, що шаблон схеми, наведений на рисунку 8.6, включає п'ять точок на невідомому, $(n + 1)$ -му часовому шарі і дев'ять точок – на відомому n -му шарі. При $\sigma = 0$ схема є явною, і її розв'язки можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned}
 u_{ij}^{n+1} = & u_{ij}^n + \tau A \left(\frac{u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{h_y^2} \right) + \\
 & + F(x_i, y_j, t^n), \quad 8.11) \\
 i = & 1, 2, \dots, Nx, \quad j = 1, 2, \dots, Ny, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1.
 \end{aligned}$$

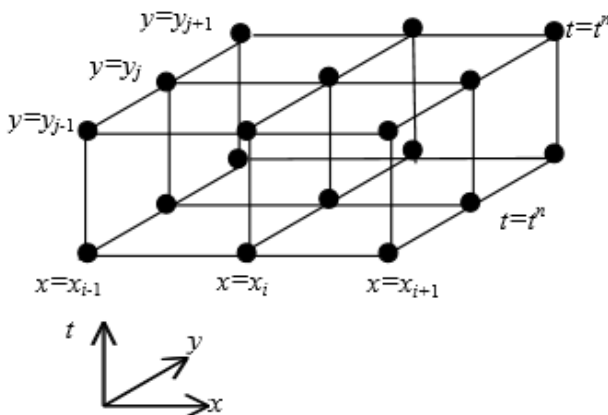


Рисунок 8.6 – Шаблон схеми для двовимірного рівняння теплопровідності

Явна схема має порядок апроксимації $\tau + h_x^2 + h_y^2$. Однак, як і в разі однієї просторової змінної, схема є умовно стійкою. Щоб одержати стійкий наближений розв'язок, кроки різницевої сітки повинні задовольняти умову

Куранта: $A \left(\frac{\tau}{h_x^2} + \frac{\tau}{h_y^2} \right) \leq \frac{1}{2}$. Схема буде мати

властивість безумовної стійкості при $\sigma > \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau A}$,
 $h = \max(h_x, h_y)$.

При $\sigma \neq 0$ шаблон схеми (8.11) буде включати п'ять точок на верхньому часовому шарі. Для знаходження розв'язку необхідно для кожного t^n вирішувати СЛАР із заповненою матрицею, для яких економічний метод прогону не застосовують. У цьому разі використовують так звані методи дрібних кроків, в яких процес знаходження розв'язку на новому $n + 1$ -часовому шарі розбивається на кілька проміжних (дрібних) кроків таким чином, щоб на кожному кроці за одним із просторових напрямів схема була явною, а за іншим – неявною. Неявність схеми за обраним напрямом робить її безумовно стійкою. У той самий час для знаходження розв'язку на новому часовому шарі не потрібно вирішувати СЛАР із заповненою матрицею, а можна обчислити розв'язок за допомогою декількох прогонів. Ця методика широко використовується у процесі розв'язання багатовимірних рівнянь теплопровідності. Існує багато різних схем для дрібних кроків. Наведемо одну з можливих схем для двовимірного рівняння теплопровідності:

$$\frac{u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^n}{\tau/2} = A \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{h_y^2} \right) + F(x_i, y_j, t^n),$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = A \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) + F(x_i, y_j, t^{n+\frac{1}{2}}).$$

Спочатку з першого різницевого рівняння за допомогою прогону в напрямку x необхідно знайти розв'язок на проміжному $(n + 1/2)$ -му часовому шарі. Потім із другого рівняння також за допомогою прогону визначають рішення на $(n + 1)$ -му часовому шарі.

8.3 Наближені методи розв'язування рівнянь гіперболічного типу

Постановка задачі

Типовим представником рівнянь гіперболічного типу є так зване хвильове рівняння, що описує поширення різних хвиль:

$$u_{tt} = g^2(x, t) u_{xx} + f(x, t). \quad (8.12)$$

Нехай потрібно розв'язати рівняння в області G :

$$x \in (0, 1), \quad t \in (0, T).$$

Доповнимо рівняння початковими даними

$$u(x, 0) = \sigma_1(x), \quad u_t(x, 0) = \sigma_2(x) \quad (8.13)$$

і крайовими умовами

$$\begin{aligned} p_0 u(0, t) + p_1 u_x(0, t) &= A(t), \\ s_0 u(1, t) + s_1 u_x(1, t) &= B(t). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Явна скінченнорізницька схема

Для наближеного розв'язування застосуємо скінченнорізницький метод. Для цього введемо в області G різницьку сітку, за яку використаємо сукупність точок перетину прямих $x = ih$, $t = j\tau$, $I = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, M$, де h і τ – кроки сітки за просторовою і тимчасовою координатами. Припустимо, що кроки h і τ пов'язані співвідношенням $\tau = rh$, $r = \text{const}$, то сітка буде залежати лише від одного параметра h .

Через u_i^j позначимо значення сіткової функції в точці (x_i, t^j) . Апроксимуємо вхідні в (8.12)–(8.14) похідні скінченнорізницевими співвідношеннями другого порядку точності:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^j) \approx \frac{u(x_i, t^{j+1}) - 2u(x_i, t^j) + u(x_i, t^{j-1}))}{\tau^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^j) \approx \frac{u(x_{i+1}, t^j) - 2u(x_i, t^j) + u(x_{i-1}, t^j))}{h^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

Підставивши ці вирази в (8.12), одержимо явну різницеву схему:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = (g_i^j)^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + f_i^j. \quad (8.15)$$

Схемі (8.15) відповідає шаблон типу «хрест», зображений на рисунку 8.7. Він ілюструє той факт, що для обчислення значення шуканої функції на часовому шарі $j + 1$ необхідно знати значення цієї функції на двох попередніх шарах: j і $j-1$. Отже, щоб почати розрахунок, необхідно знати значення сіткової функції на перших двох тимчасових шарах.

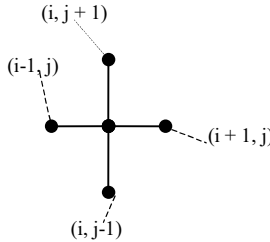


Рисунок 8.7 – Шаблон явної схеми для хвильового рівняння

Розв'язок на часовому шарі $t = t_0$ визначено початковими даними (8.13): $u_i^0 = \sigma_1(x_i)$. Щоб знайти розв'язок за $t = t_1$, скористаємося формулою Тейлора, а також початковими даними (8.13) і рівнянням (8.12):

$$\begin{aligned}
u(t^1, x) &= u(t^0, x) + \tau u_t(t^0, x) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t^0, x) + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt}(t^0, x) + \dots = \\
&= \sigma_1(x) + \tau \sigma_2(x) + \frac{\tau^2}{2} \left(g^2(t^0, x) \frac{d^2 \sigma_1(x)}{dx^2} + f(t^0, x) \right) + C\tau^3.
\end{aligned}$$

Для знаходження значень сіткової функції u_i^j у внутрішніх точках $x_i = ih$, $i = 1, \dots, N-1$ на тимчасових шарах t_j , $j = 2, 3, \dots, M$, використаємо різницеву схему (8.15):

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + r^2 g^2(u_i^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \tau^2 f_i^j, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (8.16)$$

Для визначення шуканої сіткової функції на лініях $x = x_0$, $x = x_N$ скористаємося крайовими умовами. У разі першої крайової задачі ($p_1 = 0$, $s_1 = 0$) значення функції в граничних точках задаються точно: $u_0^j = A(t^j)$, $u_N^j = B(t^j)$. Якщо $p_1 \neq 0$, $s_1 \neq 0$ (друга або третя крайові завдання), похідні у співвідношеннях (8.14) необхідно замінити звичайно-різницевиими співвідношеннями. Використовуємо формули першого порядку апроксимації:

$$p_0 u_0^j + p_1 \frac{u_1^j - u_0^j}{h} = A^j, \quad s_0 u_N^j + s_1 \frac{u_N^j - u_{N-1}^j}{h} = B^j,$$

звідки

$$u_0^j = \frac{p_1 u_1^j - A^j h}{p_1 - p_0 h}, \quad u_N^j = \frac{B^j h + s_1 u_{N-1}^j}{h s_0 + s_1}, \quad j = 2, 3, \dots, M. \quad (8.17)$$

Можна показати, що схема (8.16) має другий порядок апроксимації щодо h . Однак співвідношення (8.17) мають лише перший порядок апроксимації, що, безсумнівно, знижує загальну точність одержаного наближеного рішення. Щоб загальний порядок апроксимації завдань не знижувався, для апроксимації похідних у граничних умовах (8.14) необхідно використовувати співвідношення другого порядку апроксимації:

$$p_0 u_0^j + p_1 \frac{-3u_0^j + 4u_1^j - u_2^j}{2h} = A^j, \quad s_0 u_N^j + s_1 \frac{3u_N^j - 4u_{N-1}^j + u_{N-2}^j}{2h} = B^j,$$

звідки легко одержати вирази для u_0^j, u_N^j , що мають другий порядок апроксимації.

Дослідження стійкості різницевої схеми

Щоб розв'язок задачі (8.16) збігався з розв'язком вихідної задачі, потрібно, щоб ця схема була стійкою. Наведемо один із методів дослідження стійкості. Розглянемо задачу Коші:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < T, \quad g = \text{const}, \\ u(x, 0) &= \psi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (8.18)$$

яку апроксимуємо різницевою схемою

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{j+1} - 2u_m^j + u_m^{j-1}}{\tau^2} - g^2 \frac{u_{m+1}^j - 2u_m^j + u_{m-1}^j}{h^2} &= 0, \\ j &= 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$u_m^0 = \psi_1(x_m), \quad \frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \psi_2(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Для стійкості різницевої схеми необхідно, щоб розв'язання задачі (8.19) задовольняло умову

$$\max_m |u_m^j| \leq C \cdot \max_m |u_m^0|, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (8.20)$$

дійсний параметр. Тоді розв'язування задачі (8.18) можна подати у вигляді

$$u_m^j = \lambda^j e^{i\alpha m}, \quad (8.21)$$

де $\lambda = \lambda(\alpha)$. Умова (8.21) виконується, якщо числа $\lambda(\alpha)$ лежать усередині кола одиничного радіуса, тобто

$$|\lambda(\alpha)| \leq 1. \quad (8.22)$$

Нерівність (8.22) виражає необхідну умову стійкості Неймана. Підставивши (8.21) в (8.19), для визначення $\lambda(\alpha)$ одержимо рівняння

$$\lambda^2 - 2(1 - 2r^2 g^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2})\lambda + 1 = 0. \quad (8.23)$$

За теоремою Вієта добуток коренів цього рівняння дорівнює 1, тобто для виконання умови (8.22) потрібно, щоб корені $\lambda_{1,2}$ рівняння (8.23) були комплексно з'єднаними і лежали на одиничному колі. Для цього необхідно, щоб дискримінант $D(\alpha)$ рівняння (8.23) був від'ємним:

$$D(\alpha) \equiv 4r^2 g^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(r^2 g^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) < 0.$$

Ця нерівність виконується за всіх α , якщо $gr \leq 1$. Отже, умовою стійкості схеми (8.19) буде

$$\tau \leq \frac{h}{g}. \quad (8.24)$$

Нехай тепер $g = g(x, t) \neq \text{const}$. У цьому разі застосовується принцип «заморожених коефіцієнтів», відповідно до якого необхідну умову стійкості Неймана можна записати у вигляді

$$\tau \leq \frac{h}{g_*}, \quad g_* = \max_{x,t} g(x, t). \quad (8.25)$$

Питання впливу граничних умов на стійкість різницевої схеми тут не розглядається.

Неявна різницева схема

При побудові схеми (8.15) похідна u_{xx} була заміненa на скінченну різницю на часовому шарі $t_j = j\tau$. Якщо ж використовувати значення з тимчасового шару t_{j+1} , то одержимо схему

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = g_i^{j+1/2} \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \tau^2 f_i^{j+1}, \quad (8.26)$$

якій відповідає шаблон, зображений на рисунку 8.8.

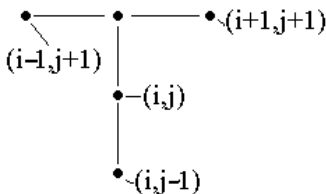


Рисунок 8.8 – Шаблон неявної схеми для хвильового рівняння

Із рівняння (8.26) неможливо явно визначити u_i^{j+1} через значення функції u з попередніх шарів за часом $(j \text{ і } j-1)$, оскільки в (8.23) разом із u_i^{j+1} входять невідомі u_{i+1}^{j+1} і u_{i-1}^{j+1} . Тому цю схему називають неявною.

Аналіз стійкості свідчить що неявна схема безумовно стійка, тобто забезпечує збіжність різницевої задачі до розв'язання відповідної диференціальної за будь-якого відношення τ/h . Розв'язок на перших двох тимчасових шарах визначають із початкових даних, як це зроблено для явної схеми. Позначивши $\gamma = g_i^{j+1/2} r^2$, перепишемо (8.26) у вигляді

$$\gamma u_{i+1}^{j+1} - (1 + 2\gamma) u_i^{j+1} + \gamma u_{i-1}^{j+1} = -2u_i^j + u_i^{j-1} + \tau^2 f_i^{j+1}, i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (8.27)$$

Доповнивши (8.26) формулами, що апроксимуються крайовими умовами, одержимо СЛАР із тридіагональною матрицею, яку знаходять за допомогою методу прогону.

8.4 Наближені методи розв'язування рівняння Пуассона

Розглянемо розв'язання еліптичного рівняння на прикладі рівняння Пуассона:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y), \quad (8.28)$$

що описує, наприклад, розподіл електростатичного поля або стаціонарний розподіл температури. Нехай потрібно визначити розв'язок в деякій області G на площині (x, y) . Коректна постановка задачі вимагає завдання граничних умов на границі цієї області ∂G .

Порівнюючи рівняння Пуассона (8.28) і рівняння (8.10), можна зрозуміти, що рівняння Пуассона є стаціонарним, тобто не залежним від часу варіантом рівняння теплопровідності. Тому для розв'язування рівняння Пуассона часто застосовують так званий метод встановлення. Для цього до правої частини рівняння (8.28)

додають доданок $\frac{\partial u}{\partial t}$, потім розв'язують одержане

рівняння теплопровідності за допомогою описаних раніше методів до того часу, поки розв'язок не буде сталим, тобто не перестане змінюватися залежно від часу. Час у цьому завданні є фіктивним, і в різницевих схемах необхідно використовувати максимально можливий крок. Процес установлення розв'язку може зайняти тривалий час, особливо якщо використовуються явні схеми, які мають жорстке обмеження на тимчасовий крок. У цьому разі застосування схем дрібних кроків допомагає істотно скоротити час розв'язання.

Для розв'язування рівняння Пуассона використовують й інші методи, не пов'язані зі зведенням його до рівняння теплопровідності. Зазвичай, усі ці методи приводять до розв'язку СЛАР із заповненою матрицею, яку розв'язують одним з ітераційних методів.

Розділ 9 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Практична робота 1 Інтерполювання функцій

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів та програм, які здійснюють глобальне та локальне (лінійне та квадратичне) інтерполювання поліномами Лагранжа.

Теоретичні відомості

Нехай задана система точок:
 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$, водночас
 $x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_n$. Надалі ці точки будемо називати вузлами інтерполяції.

Задача інтерполяції полягає в побудові деякої функції $y = f(x)$, графік якої проходить через вузли інтерполяції, тобто для будь-якого x_i маємо $y_i = f(x_i)$. Таку функцію називають інтерполяційною, для заданого набору вузлів.

Найпростішим серед можливих інтерполяційних функцій є інтерполяційний многочлен, зокрема, многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \quad (9.1)$$

Якщо многочлен Лагранжа будують один для всієї системи точок, то таку інтерполяцію будемо називати глобальною.

Досить часто для кожної пари точок $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ будують лінійні інтерполяційні поліноми:

$$L_1(x) = y_i \frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)}, \quad (9.2)$$

де $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

У багатьох наближених обчисленнях (наприклад, формула Сімпсона, під час обчислення інтегралів) використовують також квадратичну інтерполяцію. Для цього область інтерполювання необхідно поділити на парне число відрізків.

Беремо три вузли інтерполяції $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$, де $i = (0, 2, 4, \dots, n-2)$:

$$L_2(x) = y_i \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} + y_{i+2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})}. \quad (9.3)$$

Інтерполяцію за формулами (9.2), (9.3) називають відповідно локальною лінійною та локальною квадратичною інтерполяцією.

Індивідуальне завдання

Для функцій, заданих у таблиці 1, побудувати графік (для цього можна використати пакети MathCad, Maple). Інтервал інтерполювання для змінної x підібрати так, щоб на ньому функція мала один максимум та один мінімум. Обчислити координати шести характерних точок, які лежать на графіку функції (за ці точки краще взяти кінці відрізка інтерполювання, точку максимуму, мінімуму та перегину). Взяти ці точки за вузли інтерполяції.

Скласти програму, що реалізує:

- 1) глобальну інтерполяцію;
- 2) локальну лінійну інтерполяцію;
- 3) локальну квадратичну інтерполяцію;
- 4) побудувати сумісно графіки заданої функції та трьох видів інтерполяції;

5) для довільно вибраної точки $x_0 < x < x_n$, яка не збігається з вузлами інтерполяції для кожного виду інтерполяції, передбачити обчислення відносної похибки за формулою

$$\delta = \frac{|y_{\text{набл}} - y_{\text{точн}}|}{y_{\text{точн}}} 100 \%. \quad (9.4)$$

Зробити висновки.

Таблиця 9.1 – Варіанти завдань

Номер варіанта	Функція	Номер варіанта	Функція
1	2	3	4
1	$y = 4 - \cos x^2$	14	$y = \ln(4 - \cos x)$
2	$y = e^{\sin(x+2)}$	15	$y = 3 + \cos(x^2)$
3	$y = e^{\cos 2x}$	16	$y = 2 \sin x + \cos^2 x$
4	$y = 2 + \ln(4 + \sin x)$	17	$y = e^{\cos(2+x)}$
5	$y = 4 + \sin(2 + x^2)$	18	$y = 2 - \sin(x/2)$
6	$y = \ln(4 - \cos x)$	19	$y = e^{(1+\sin(x/2))}$
7	$y = e^{\sin 2x}$	20	$y = \ln(3 + \sin(x/2))$
8	$y = \ln(4 + \sin 2x)$	21	$y = e^{\sin(x/2)}$
9	$y = 2 + \cos x$	22	$y = \ln(3 - \cos x^2)$
10	$y = 3 \sin(e^x)$	23	$y = 2 - \sin(x^2/2)$
11	$y = 2 + \cos(e^x)$	24	$y = \sin 3x + \cos(x+5)$
12	$y = 2 + \sin(x^2)$	25	$y = 3 + \sin x$
13	$y = 4 + \ln(2 + \sin x)$		

Практична робота 2

Чисельні методи обчислення визначених інтегралів

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів і програм чисельних методів обчислення визначених інтегралів.

Теоретичні відомості

Чисельні методи обчислення визначеного інтегралу ґрунтуються на його визначенні та геометричній інтерпретації. З геометричної точки зору визначений інтеграл

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (9.5)$$

є площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$ та прямими $x = a, x = b$.

Розділимо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин довжиною h . Надалі h будемо називати кроком чисельного методу:

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Тоді координати кінців відрізків поділу визначаються за формулою

$$x_i = x_0 + ih,$$

де $x_0 = a, i = 0, 1, \dots, n$. Через кожну точку поділу проведемо пряму паралельно осі oy , тим самим криволінійну трапецію розіб'ємо на n частинних криволінійних трапецій.

Найпростіші чисельні методи наближеного обчислення визначеного інтегралу – це *метод лівих прямокутників* та *метод правих прямокутників*.

А Метод лівих прямокутників одержуємо, якщо площу кожної i -ї частинної криволінійної трапеції замінимо на прямокутник, ширина якого h , висота дорівнює значенню функції $f(x_i)$ (надалі це значення будемо позначати f_i).

Розрахункова формула має вигляд

$$S_{n-1} = h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}).$$

Для організації циклу краще використати її аналог

$$S_0 = hf_0 \Rightarrow S_i = S_{i-1} + hf_i, (i = 1, \dots, n-1). \quad (9.6)$$

Б Метод правих прямокутників одержуємо якщо площу кожної i -ї частинної криволінійної трапеції замінимо на прямокутник, ширина якого h , висота дорівнює значенню функції на правому кінці частинної криволінійної трапеції. Розрахункова формула має вигляд

$$S_n = h(f_1 + f_2 + \dots + f_n).$$

Для організації циклу краще використати її аналог

$$S_0 = hf_1, S_i = S_{i-1} + hf_i, (i = 1, \dots, n). \quad (9.7)$$

В Метод трапецій. Маємо площу кожної i -ї трапеції з висотою h та основами f_{i-1}, f_i .

Розрахункова формула має вигляд

$$S_n = h \left(\frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \dots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} \right).$$

Для організації циклу краще використовувати її аналог

$$S_1 = \frac{f_0 + f_1}{2} h, S_i = S_{i-1} + h \frac{f_{i-1} + f_i}{2}, (i = 2, \dots, n). \quad (9.8)$$

Зауваження: якщо врахувати результати лабораторної роботи 1, то формулу трапеції ми одержуємо заміною функції $f(x)$ кусково-лінійною інтерпретацією з подальшим інтегруванням.

Г *Метод парабол (формула Сімпсона).* Більш висока точність обчислення інтегралів забезпечується під час виконання кусково-парабаличної інтерпретації підінтегральної функції $f(x)$, водночас відрізок інтегрування розбивається на парне $n = 2m$ число відрізків із кроком

$$h = \frac{b-a}{2m}.$$

Беремо три точки (вузли інтерполяції). Почнемо з (x_0, f_0) , (x_1, f_1) , (x_2, f_2) . Здійснюємо локальну квадратичну інтерполяцію (дивись лабораторну роботу 1) і беремо інтеграл. Тоді площа під параболою на відрізку $[x_0, x_2]$ дорівнює

$$I_0 = \frac{1}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)h.$$

Візьмемо наступну пару відрізків $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$ і повторимо попередні обчислення:

$$I_2 = \frac{1}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4).$$

Продовжуючи обчислення, знаходимо наближено інтеграл над останньою парою відрізків $[x_{2m-2}, x_{2m-1}]$, $[x_{2m-1}, x_{2m}]$:

$$I_{2m-2} = \frac{1}{3}(f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}).$$

Шукане наближення значення інтегралу на відрізку $[a, b]$ одержимо, якщо визначимо суму площин усіх параболічних сегментів:

$$S_{2m-2} = \sum_{i=0}^{m-1} I_{2i}.$$

Після деяких перетворень одержимо формулу Сімпсона:

$$S_{2m-2} = \frac{1}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}]h.$$

Більш зручною для програмування є формула

$$S_0 = \frac{1}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)h; S_{2i} = S_{2i-2} + \frac{1}{3}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2})h, \quad (9.9)$$

$(i = 1, \dots, m-1).$

Оцінювання похибки

Похибкою чисельного методу (зокрема, обчислення інтегралу) є $\delta = |S_{\text{точне}} - S_{\text{набл}}|$, але ми точне значення ніколи не знаємо, тому похибку потрібно оцінити зверху.

Оцінюванням похибки називають досить мале число $\varepsilon > 0$, таке, що $\delta < \varepsilon$, в цьому разі говоримо, що інтеграл обчислено з точністю ε .

Зрозуміло, що похибка залежить від точності чисельного методу та від числа частинних відрізків n , на яке розбивають відрізок інтегрування $[a, b]$.

Доведено, що похибка методів лівих та правих прямокутників пропорційна n^{-1} , або h . Це записують так: $\delta \approx O(n^{-1}) \approx O(h)$.

Похибка методу трапеції $\delta \approx O(n^{-2}) \approx O(h^2)$.

Похибка методу Сімпсона $\delta \approx O(n^{-4}) \approx O(h^4)$.

Ці похибки відповідно називають похибками нульового, першого, другого та третього порядків.

Звичайно відрізок $[a, b]$ розбивають на таке число n частинних відрізків, щоб забезпечити необхідний порядок або оцінювання похибки.

Існують більш складні, але більш конкретні оцінювання похибки, а саме:

– для методу трапецій

$$\delta \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \text{ де } M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|, \quad (9.10)$$

де $f''(x)$ – друга похідна функції $f(x)$;

– для методу Сімпсона

$$\delta \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4, \text{ де } M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|, \quad (9.11)$$

де $f^{IV}(x)$ – четверта похідна функції $f(x)$.

На практиці часто для досягнення заданої точності використовують метод подвійних перерахунків. Обчислення інтегралу починають для невеликих n , а потім число відрізків, на яке розбивають $[a, b]$, подвоюють, умовою виходу з циклу є

$$|S_{2n} - S_n| < \varepsilon. \quad (9.12)$$

Індивідуальні завдання

1 Обчислити інтеграл запропонованими двома методами (табл. 9.2).

2 Забезпечити в першому методі заданий порядок похибки.

3 В другому методі забезпечити задане оцінювання похибки.

4 Порівняти результати.

Таблиця 9.2 – Варіанти завдань

Номер варіанта	Інтеграл	Метод	Порядок похибки	Оцінка похибки
1	2	3	4	5
1	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$	А, В	0,01	0,001 (за формулою (9.12))
2	$\int_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3,2}}$	Б, Г	0,001	0,01
3	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1,3}}$	А, Г	0,0001	0,001
4	$\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$	Б, В	0,01	0,0001
5	$\int_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$	Б, Г	0,001	0,01
6	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2 + 2}}$	В, Г	0,001	0,0001 (за формулою (9.12))
7	$\int_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 1}}$	А, В	0,01	0,0001
8	$\int_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0,5}}$	А, Г	0,001	0,01
9	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$	Б, В	0,0001	0,01
10	$\int_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$	Б, Г	0,01	0,0001 (за формулою (9.12))

Продовження таблиці 9.2

1	2	3	4	5
11	$\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$	В, Г	0,001	0,01
12	$\int_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$	А, В	0,0001	0,01
13	$\int_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0,6}}$	А, Г	0,01	0,0001 (за формулою (9.12))
14	$\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$	Б, В	0,001	0,01
15	$\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$	Б, Г	0,0001	0,01
16	$\int_{1,6}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2,5}}$	В, Г	0,01	0,0001 (за формулою (9.12))
17	$\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0,8}}$	А, В	0,001	0,01
18	$\int_{1,2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1,2}}$	А, Г	0,001	0,01
19	$\int_{1,4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0,7}}$	Б, Г	0,0001	0,01
20	$\int_{3,2}^4 \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2 + 1}}$	В, Г	0,01	0,0001

Продовження таблиці 9.2

1	2	3	4	5
21	$\int_{0,8}^{1,7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0,3}}$	А, В	0,001	0,01
22	$\int_{1,2}^2 \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2 + 1,5}}$	А, Г	0,0001	0,01
23	$\int_{2,1}^{3,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}$	Б, В	0,01	0,001
24	$\int_{1,3}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2 + 1}}$	Б, Г	0,001	0,01
25	$\int_{2,3}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$	В, Г	0,0001	0,01

Практична робота 3

Розв'язання нелінійних рівнянь вигляду $f(x) = 0$

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів і програм чисельних методів розв'язування нелінійних рівнянь $f(x) = 0$.

Теоретичні відомості

Будь-яке рівняння з одним невідомим можна записати у вигляді $f(x) = 0$.

Розв'язком рівняння називають таке значення x (корінь рівняння), за якого $f(x) \equiv 0$. Звичайно точне знаходження коренів рівняння неможливе, крім деяких спеціальних випадків, які вивчались у школі (лінійні, квадратичні рівняння та рівняння, що зводяться до них).

Задача знаходження наближеного значення кореня розпадається на два етапи:

- 1) відокремлення коренів;
- 2) уточнення кореня.

Відокремлення коренів – це знаходження відрізка, на якому лежить цей і лише цей корінь рівняння.

Для відокремлення коренів корисні дві теореми з математичного аналізу.

Теорема 1 Якщо функція $y = f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$, то всередині відрізка $[a, b]$ існує меншою мірою один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Теорема 2 Якщо функція $y = f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$ $f(a) \cdot f(b) < 0$ та $f'(x)$ на інтервалі зберігає знак, то всередині відрізка $[a, b]$ існує лише один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Для відокремлення коренів використовують також графік функції $y = f(x)$. Коренями рівняння є ті значення, за яких графік функції $y = f(x)$ спричиняє вісь абсцис. Якщо побудова графіка функції $y = f(x)$ спричиняє утруднення, то рівняння потрібно звести до вигляду $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ таким чином, щоб графіки функцій $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ були достатньо простими. Абсциси точок перетину цих графіків і будуть коренями рівняння.

Уточнення кореня. Припустимо, що корінь рівняння відокремлено і він знаходиться на відрізку $[a, b]$. Подальше уточнення кореня будемо знаходити одним із чисельних методів.

А Метод половинного ділення

Опис алгоритму. Припустимо, що $f(a) \cdot f(b) < 0$. Поділимо відрізок $[a, b]$ навпіл та знайдемо значення

функції $f(x)$ в точці $x = \frac{a+b}{2}$. Може статися, що

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, тоді корінь рівняння знайдено. Якщо ж

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то на кінцях одного з відрізків $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ або

$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ функція буде набувати значення різних знаків.

Позначимо цей відрізок через $[a_1, b_1]$ і відзначимо, що

$|b_1 - a_1| = \frac{|b-a|}{2}$. Якщо $|b_1 - a_1| < \varepsilon$, то будь-яка точка з

інтервалу $[a_1, b_1]$ може бути прийнята за наближене

значення кореня. Якщо ж $|b_1 - a_1| \geq \varepsilon$, то приймаємо $a = a_1$,

$b = b_1$ і продовжується процес ділення відрізка навпіл.

Через деяку скінченну кількість кроків одержуємо точне значення кореня або довжина відрізка $[a, b]$ буде меншою,

ніж ε . В останньому випадку за наближене значення

кореня можна взяти будь-яку точку відрізка $[a, b]$, часто

беруть його середину.

Б *Метод хорд*

Опис алгоритму. Припустимо, що $f(a) \cdot f(b) < 0$ та $f'(x)$, $f''(x)$ на інтервалі $[a, b]$ зберігають знак, тобто графік функції $y = f(x)$ монотонний та опуклий, тоді можна застосовувати метод хорд.

Одержимо перше наближення. Проведемо через точки $A(a, f(a))$ та $B(b, f(b))$ пряму лінію (хорду), рівняння якої можна записати так:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Одержимо точку перетину хорди із віссю абсцис, припустимо, що $y=0$, тоді

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \quad (9.13)$$

Далі можна вибрати один із двох варіантів побудови алгоритму пошуку кореня.

Б1 Друге наближення розраховуємо за формулою (9.13) залежно від того, на кінцях якого з відрізків $[a, x_1]$ чи $[x_1, b]$ функція набуває значення різних знаків. Якщо $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, то візьмемо $b = x_1$, якщо ні – $a = x_1$.

Б2 Припустимо, що друга похідна $f''(x)$ на інтервалі $[a, b]$ має один знак. Тоді, якщо $f''(x) < 0$, графік функції $y = f(x)$ опуклий догори та лежить вище від хорди. У цьому разі точка перетину хорди з віссю абсцис розміщена між коренем рівняння $f(x) = 0$ і тим кінцем відрізка $[a, b]$, на якому значення функції $f(x)$ додатне.

При $f''(x) > 0$ графік функції $y = f(x)$ опуклий донизу і лежить нижче від хорди. У цьому разі точка перетину хорди з віссю абсцис розміщена між кореням рівняння $f(x) = 0$ та тим кінцем відрізка $[a, b]$, на якому значення $f(x) < 0$.

Таким чином, маємо, що в будь-якому разі наближене значення кореня лежить між точним його значенням і тим кінцем відрізка $[a, b]$, в якому $f(x)$ та $f''(x)$ протилежні.

Висновок. Якщо відомо $(n-1)$ -не наближення кореня, то його n -не наближення обчислюється за формулою

$$x_n = \frac{[bf(x_{n-1}) - x_{n-1}f(b)]}{[f(x_{n-1}) - f(b)]}, \quad (9.14)$$

у разі якщо $f(a) \cdot f''(a) < 0$, або

$$x_n = \frac{[af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)]}{[f(x_{n-1}) - f(a)]}, \quad (9.15)$$

у разі якщо $f(b) \cdot f''(b) < 0$.

Незалежно від того, за якою схемою (Б1) чи (Б2) будується алгоритм наближеного розв'язку рівняння, умовою закінчення обчислень (виходу з циклу) може бути одна з умов:

$$f(x_n) < \varepsilon, \quad (9.16)$$

мінімізація нев'язки

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \quad (9.17)$$

більш надійною умовою є

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}|} < \varepsilon. \quad (9.18)$$

В Метод дотичних (метод Ньютона)

Нехай $f(a) \cdot f(b) < 0$ та $f''(x)$ зберігає знак на інтервалі $[a, b]$. Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ на тому кінці відрізка $[a, b]$, де знаки $f(x)$ та $f''(x)$ збігаються. Рівняння дотичної має вигляд

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \text{ якщо } f(a)f''(a) > 0,$$

$$y - f(b) = f'(b)(x - b), \text{ якщо } f(a)f''(a) < 0.$$

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю абсцис. Візьмемо, що $y = 0$, тоді

$$x_1 = a - f(a) / f'(a), \text{ якщо } f(a)f''(a) > 0,$$

$$x_1 = b - f(b) / f'(b), \text{ якщо } f(a)f''(a) < 0.$$

Одержане значення x_1 візьмемо за наближене значення кореня.

Наступні наближення обчислимо за формулою

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1}), n = 2, 3 \dots \quad (9.19)$$

Обчислення повторюють до того часу, поки не виконається одна з умов (9.16–9.18), залежно від того, яку з них обрано за критерій виходу з циклу.

Г Комбінований метод

Нехай $f''(x)$ зберігає знак на інтервалі $[a, b]$. Було показано, що уточнення кореня методом хорд та дотичних відбувається з різних сторін: один – із недостатчею, інший із надлишком. Комбінований метод полягає в послідовному застосуванні методу хорд та дотичних.

Якщо, наприклад, $f(a)f''(a) > 0$, то зліва застосуємо метод дотичних

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

а праворуч – метод хорд

$$b_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Припустимо $a = a_1$ та $b = b_1$, тоді одержимо новий відрізок $[a, b]$, довжина якого менша від довжини попереднього. Обчислення повторюємо до того часу, поки $|b - a| < \varepsilon$.

За наближене значення кореня беруть

$x^* = a$ – з нестачею;

$x^* = b$ – з надлишком,

або

$$x^* = \frac{a+b}{2} - \text{середнє значення.}$$

Д Метод ітерацій (метод послідовних наближень)

Замінімо рівняння $f(x)=0$ еквівалентним йому рівнянням

$$x = \varphi(x). \quad (9.20)$$

Це можна зробити, наприклад, так:

$$x = x + cf(x), \text{ де } c - \text{константа.}$$

Припустимо, що обрано деяке початкове наближення до кореня x_0 рівняння (9.20).

Визначимо числову послідовність за формулою (задамо ітераційний процес):

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.21)$$

Теорема про нерухому точку. Якщо на відрітку $[a, b]$, що містить точку x_0 та всі наступні наближення x_n , буде виконуватись умова $|\varphi'(x)| \leq q \leq 1$, то ітераційний процес збігається з єдиним на відрітку $[a, b]$ коренем рівняння (9.20).

Іноді виконання умови збіжності вдається досягти вдалим вибором константи c .

Вихід із циклу відбувається в разі виконання однієї з умов ((9.16–9.18)).

Зауваження. На практиці умову $|\varphi'(x)| < 1$ часто не перевіряють, а запускають ітераційний процес із заданим числом ітерацій, якщо збіжність не відбувається, то

шукають розв'язок за іншого значення константи c , або взагалі змінюють метод пошуку кореня.

Індивідуальні завдання

1 Відділити корені запропонованого рівняння (табл. 9.3).

2 Якщо коренів декілька, то уточнити один із них із заданою точністю ε двома зазначеними методами.

3 Порівняти результати, зробити перевірку.

Таблиця 9.3 – Варіанти завдань

Номер варіанта	Рівняння	Метод	Умова виходу з циклу	Оцінка похибки ε
1	$x - \sin x = 0.25$	А, Б1	(9.16), (9.17)	0,001
2	$3x - \cos x - 1 = 0$	А, Б2	(9.16), (9.18)	0,01
3	$x + \ln x = 0.25$	А, В	(9.17), (9.18)	0,001
4	$x^2 + 4 \sin x = 0$	Б1, Д	(9.16), (9.17)	0,0001
5	$3x + \cos x + 1 = 0$	Г, Д	(9.16), (9.18)	0,01
6	$3x - e^x = 0$	В, Д	(9.17), (9.18)	0,001
7	$x^2 = \sin x$	Б2, Д	(9.16), (9.17)	0,0001
8	$x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$	А, Г	(9.16), (9.18)	0,01
9	$2 - x = \ln x$	А, Д	(9.17), (9.18)	0,001
10	$x^3 + 4x - 6 = 0$	Г, Д	(9.16), (9.17)	0,01
11	$x + \cos x = 1$	А, Д	(9.16), (9.18)	0,001
12	$x^3 = \sin x$	Б1, Д	(9.17), (9.18)	0,01
13	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$	А, Г	(9.17), (9.18)	0,001
14	$\operatorname{tg}(0,55x + 0,1) = x^2$	А, В	(9.16), (9.17)	0,0001
15	$e^x \sin x - 1 = 0$	А, Д	(9.16), (9.18)	0,001
16	$\arcsin x - 2x - 0,1 = 0$	А, Б2	(9.17), (9.18)	0,001
17	$x^2 - 2 \cos x = 0$	Г, Д	(9.18), (9.16)	0,01
18	$x^2 - 20 \sin x = 0$	А, Б1	(9.16), (9.17)	0,001
19	$\operatorname{ctgx} - \frac{x}{4} = 0$	В, Д	(9.18), (9.17)	0,001

Продовження таблиці 9.3

20	$x^3 + 4x - 6 = 0$	А, Г	(9.16), (9.17)	0,0001
21	$e^x(2-x) - 0,5 = 0$	А, Г	(9.16), (9.17)	0,001
22	$(x-2)^2 \cdot 2^x = 1$	А, Б1	(9.17), (9.16)	0,001
23	$x^4 \cdot 3^x = 2$	А, Б2	(9.17), (9.18)	0,01
24	$2e^x = 5x + 2$	А, Д	(9.18), (9.16)	0,001
25	$x^3 + 2x - 4 = 0$	А, Д	(9.18), (9.16)	0,001

Практична робота 4

Методи чисельного розв'язання систем нелінійних рівнянь

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Теоретичні відомості

Розглянемо систему нелінійних рівнянь з невідомими

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ (x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (9.22)$$

де f_i – деякі нелінійні функції.

Якщо ввести позначення $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, то систему (9.22) можна записати в матричному вигляді:

$$F(X) = 0. \quad (9.23)$$

Системи нелінійних рівнянь розв'язуються ітераційними методами, які є узагальненням методів розв'язування одного рівняння $f(x) = 0$.

А Метод простої ітерації

У методі простої ітерації ітераційна формула має вигляд

$$X_{k+1} = X_k + HF(X_k), k = 0, 1, \dots, n. \quad (9.24)$$

Збіжність методу простої ітерації залежить від вдалого вибору початкової точки X_0 та вектора $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, де h_i – деякі константи.

Зупинимося більш детально на системі двох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (9.25)$$

Саме такі системи необхідно розв'язати в цій лабораторній роботі.

Зведемо систему до вигляду зручного для застосування методу простої ітерації та методу Зейделя:

$$\begin{cases} x = x + h_1 f_1(x, y), \\ y = y + h_2 f_2(x, y), \end{cases}$$

або позначивши $\varphi_1(x, y) = x + h_1 f_1(x, y)$,

$\varphi_2(x, y) = y + h_2 f_2(x, y)$, одержимо

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x, y), \\ y &= \varphi_2(x, y). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Тоді ітераційна формула в методі простої ітерації має вигляд

$$x_{k+1} = \phi_1(x_k, y_k), \quad (9.27)$$

$$y_{k+1} = \phi_2(x_k, y_k), k = 0, 1, \dots, n.$$

$X_0 = (x_0, y_0)$ – початкове наближення.

Б Метод Зейделя

Метод Зейделя відрізняється від методу простої ітерації тим, що в ньому поліпшення кожного наступного наближення відбувається покоординатно, а в методі простої ітерації – повекторно. Зазвичай збіжність у методі Зейделя більш висока.

Для системи (9.25) ітераційна формула за методом Зейделя має вигляд

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \phi_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= \phi_2(x_{k+1}, y_k), k = 0, 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{9.28}$$

де $X_0 = (x_0, y_0)$ – початкове наближення.

Умовою досягнення заданої точності $\varepsilon > 0$ в методах **A** та **B** є

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leq \varepsilon,$$

збіжність за евклідовою нормою.

Для системи двох рівнянь (9.26) ця умова матиме вигляд

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \leq \varepsilon.\tag{9.29}$$

Можна також використати умову мінімізації нев'язки:

$$\sqrt{f_1^2(x_{k+1}, y_{k+1}) + f_2^2(x_{k+1}, y_{k+1})} \leq \varepsilon.\tag{9.30}$$

Оскільки достатні умови збіжності ми не розглядали, то якщо точність не досягається за задану кількість ітерацій, обчислювальний процес переривається з повідомленням «точність не досягнуто, розв'язок не знайдено». У цьому разі потрібно повернутися до системи (4) і спробувати уточнити $X_0 = (x_0, y_0)$ – початкову умову, або більш вдало вибрати $H = (h_1, h_2)$.

Чисельне розв'язання системи лінійних рівнянь

Нехай задана система n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (9.31)$$

або в матричному вигляді

$$A \cdot X = B.$$

Із курсу вищої математики відомо, що необхідною і достатньою умовою розв'язання системи (10) є умова

$$\det(A) = |A| \neq 0. \quad (9.32)$$

Якщо умова (9.32) виконана, то система (9.31) розв'язується точно, причому існує декілька методів такого розв'язання (метод Крамера, метод Гауса, матричний метод та інші).

Недоліком є те, що точний розв'язок можна одержати лише для систем, в яких кількість рівнянь невелика. Якщо кількість рівнянь велика, то поряд із технічними труднощами виникають похибки обчислень і одержуємо, по суті, наближений розв'язок.

Будемо розв'язувати лінійну систему алгебраїчних рівнянь (9.31) наближено. Оскільки система є частковим випадком нелінійної, то до неї можна застосовувати запропоновані вище методи простої ітерації та метод Зейделя.

***АЛ** Метод простої ітерації для системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

Зведемо систему $A \cdot X = B$ до вигляду

$$X = C \cdot X + D.$$

Запишемо детально цю систему для трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + d_1, \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + d_2, \\ x_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + d_3. \end{cases} \quad (9.33)$$

Метод простої ітерації для системи (12) має вигляд

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + d_2, \\ x_3^{(k+1)} = c_{31}x_1^{(k)} + c_{32}x_2^{(k)} + c_{33}x_3^{(k)} + d_3, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{cases} \quad (9.34)$$

За початкове наближення можна взяти будь-яку точку, але звичайно беруть

$$X_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \quad (9.35)$$

БЛ Метод Зейделя для системи лінійних рівнянь

Метод Зейделя для системи (9.32) має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + d_2, \\ x_3^{(k+1)} = c_{31}x_1^{(k+1)} + c_{32}x_2^{(k+1)} + c_{33}x_3^{(k)} + d_3, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{cases} \quad (9.36)$$

За початкову умову також можна взяти (9.35).

Для системи (9.30) методи простої ітерації та Зейделя збігаються в разі виконання умови

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.37)$$

Тобто модулі діагональних коефіцієнтів для кожного рівняння системи більші від суми модулів усіх інших коефіцієнтів цього рівняння.

Для системи лінійних рівнянь у вигляді (9.33) достатньою умовою збіжності є одна з умов:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |c_{ij}| &< 1, i = \overline{1, n}, \\
\sum_{i=1}^n |c_{ij}| &< 1, i = \overline{1, n}, \\
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}|^2 &< 1.
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Якщо система у вигляді (9.31) не задовольняє умову збіжності, то її можна звести до еквівалентної системи рівнянь, що буде задовольняти умову збіжності. Це роблять шляхом додавання та віднімання рівнянь системи.

Приклад. Подана система рівнянь

$$\begin{cases} 4,5x_1 - 1,8x_2 + 3,6x_3 = -1,7, \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 - 1,2x_3 = 3,6, \\ 1,8x_1 + 2,5x_2 + 4,6x_3 = 2,2. \end{cases}$$

Звести систему до вигляду, в якому елементи головної діагоналі були б більшими за модулем інших елементів (умова (9.36)).

Зробимо перетворення:

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9, & (I + II) \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7, & (2III + II - I) \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4; & (III - II). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7,6}(-0,5x_2 - 2,4x_3 + 1,9), \\ x_2 = \frac{1}{9,1}(-2,2x_2 - 4,4x_3 + 9,7), \\ x_3 = \frac{1}{5,8}(1,3x_2 - 0,2x_3 - 1,4). \end{cases}$$

Тепер можна застосовувати методи **АЛ** та **БЛ**.

Індивідуальні завдання

Запропонованим методом розв'язати систему нелінійних рівнянь (табл. 9.4), обравши за початкове наближення точку X_0 . За точність обчислень виберіть $\varepsilon = 10^{-4}$. Зробіть перевірку. Спробуйте змінити початкову умову та знайти інший розв'язок системи.

Таблиця 9.4 – Варіанти завдань

Номер варі- анта	Система рівнянь	Початкова точка	Умова досяг- нення точності	Метод
1	2	3	4	5
1	$\begin{cases} x = e^x \cos y - 1, \\ y = e^x \sin y + 1 \end{cases}$	$(-0,9; 1,4)$	9,29	А
2	$\begin{cases} x = 0,25(x^2 - y^2) - x^2 y^2 + 0,5, \\ y = xy(x^2 - y^2) + 0,5 \end{cases}$	$(1; 1)$	9,29	Б
3	$\begin{cases} x = x / (x^2 - y^2) + 0,4, \\ y = -y(x^2 - y^2) + 1,4 \end{cases}$	$(1; 1)$	9,30	Б
4	$\begin{cases} x = x^2 + 0,8y^2 + 0,1, \\ y = 2xy + 0,1 \end{cases}$	$(0; 0)$	9,29	Б
5	$\begin{cases} x = x^2 - y^2 + 0,1, \\ y = 2xy + 0,1 \end{cases}$	$(0; 0)$	9,30	А
6	$\begin{cases} x = x^2 - y^2 - 0,1, \\ y = 2xy + 0,1 \end{cases}$	$(0; 0)$	9,30	Б
7	$\begin{cases} x = x^2 + y^2 + 0,1, \\ y = 2xy - 0,1 \end{cases}$	$(0; 0)$	9,29	Б

Продовження таблиці 9.4

1	2	3	4	5
8	$\begin{cases} x = 1 - e^x \cos y, \\ y = e^{-x} \sin y + 1 \end{cases}$	(0,9; 1,4)	9,29	Б
9	$\begin{cases} x = x^2 + y^2 - 0,1, \\ y = 2xy - 0,1 \end{cases}$	(0; 0)	9,30	А
10	$\begin{cases} x = x / (x^2 + y^2) + 0,4, \\ y = (1 - y) / (x^2 + y^2) + 1 \end{cases}$	(1; 1)	9,30	А
11	$\begin{cases} x = x^2 y^2 - 0,25(x^2 - y^2)^2 - 0,5, \\ y = xy(y^2 - x^2) + 0,5 \end{cases}$	(-0,5; 0,5)	9,30	А
12	$\begin{cases} x = x / (x^2 + y^2) - 0,4, \\ y = 1,4 - y / (x^2 + y^2) \end{cases}$	(-1; 1)	9,30	Б
13	$\begin{cases} x = -x^2 - 0,8y^2 - 0,1, \\ y = y^2 - x^2 - 0,1 \end{cases}$	(0; 0)	9,30	А
14	$\begin{cases} x = -x^2 + y^2 - 0,1, \\ y = -2xy + 0,1 \end{cases}$	(0; 0)	9,29	А
15	$\begin{cases} x = -x^2 + y^2 + 0,1, \\ y = 0,1 - 2xy \end{cases}$	(0; 0)	9,30	Б
16	$\begin{cases} x = -x^2 - y^2 - 0,1, \\ y = -2xy - 0,1 \end{cases}$	(0; 0)	9,29	Б
17	$\begin{cases} x = -x^2 - y^2 + 0,1, \\ y = -2xy - 0,1 \end{cases}$	(0; 0)	9,30	А

Продовження таблиці 9.4

1	2	3	4	5
18	$\begin{cases} x = x / (x^2 + y^2) - 0,4, \\ y = e^x \sin y - 1 \end{cases}$	$(-1; 1)$	9,29	А
19	$\begin{cases} x = -1 + e^x \cos y, \\ y = e^x \sin y - 1 \end{cases}$	$(-0,9; -1,4)$	9,30	А
20	$\begin{cases} xy^2 - 1 = 0, \\ y + e^x = 0 \end{cases}$	$(0,5; -1,5)$	9,29	Б
21	$\begin{cases} xy^2 - 1 = 0, \\ y - e^x = 0 \end{cases}$	$(0,5; 1,5)$	9,30	А
22	$\begin{cases} 1 - x^2 + e^y = 0, \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$	$(2; 2)$	9,30	А
23	$\begin{cases} x^2 y - 1 = 0, \\ x - e^y = 0 \end{cases}$	$(1,5; 0,5)$	9,29	Б
24	$\begin{cases} 1 - y^2 + e^x = 0, \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$	$(-2; 2)$	9,29	Б
25	$\begin{cases} 1 - y^2 + e^{-x} = 0, \\ y - \operatorname{tg} x = 0 \end{cases}$	$(0; 1)$	9,30	Б

Практична робота 5

Методи чисельного розв'язання систем лінійних рівнянь

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання систем лінійних рівнянь.

Завдання. Запропонованим методом розв'язати систему лінійних рівнянь із точністю 0,001 (табл. 9.5). Спочатку звести систему до зручного для ітерацій вигляду.

Таблиця 9.5 – Варіанти завдань

Номер варіанта	Система рівнянь	Умова досягнення точності	Метод
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 2,7x_1 + 3,3x_2 + 1,3x_3 = 2,1, \\ 3,5x_1 - 1,7x_2 + 2,8x_3 = 1,7, \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 - 1,7x_3 = 0,8 \end{cases}$	9,29	БЛ
2	$\begin{cases} 3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,2, \\ 1,9x_1 + 3,1x_2 + 2,1x_3 = 2,1, \\ 7,5x_1 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,6 \end{cases}$	9,30	БЛ
3	$\begin{cases} 9,1x_1 + 5,6x_2 + 7,8x_3 = 9,8, \\ 3,8x_1 + 5,1x_2 + 2,8x_3 = 6,7, \\ 4,1x_1 + 5,7x_2 + 1,2x_3 = 5,8 \end{cases}$	9,30	АЛ
4	$\begin{cases} 1,7x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,7, \\ 2,1x_1 + 3,4x_2 + 1,8x_3 = 1,1, \\ 4,2x_1 - 1,7x_2 + 1,3x_3 = 2,8 \end{cases}$	9,30	АЛ
5	$\begin{cases} 3,3x_1 + 2,1x_2 + 2x_3 = 0,8, \\ 4,1x_1 + 3,7x_2 + 4,8x_3 = 5,7, \\ 2,7x_1 + 1,8x_2 + 1,1x_3 = 3,2 \end{cases}$	9,29	БЛ

Продовження таблиці 9.5

1	2	3	4
6	$\begin{cases} 3,2x_1 - 2,5x_2 + 3,7x_3 = 6,5, \\ 0,5x_1 + 0,34x_2 + 1,7x_3 = -0,24, \\ 1,6x_1 + 2,3x_2 - 1,5x_3 = 4,3 \end{cases}$	9,29	БЛ
7	$\begin{cases} 3,6x_1 + 1,8x_2 - 4,7x_3 = 3,8, \\ 2,7x_1 - 3,6x_2 + 1,9x_3 = 0,4, \\ 1,5x_1 + 4,5x_2 + 3,3x_3 = -1,6 \end{cases}$	9,29	БЛ
8	$\begin{cases} 2,4x_1 + 3,7x_2 - 8,3x_3 = 2,3, \\ 1,8x_1 + 4,3x_2 + 1,2x_3 = -1,2, \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 5,2x_3 = 3,5, \end{cases}$	9,30	БЛ
9	$\begin{cases} 2,4x_1 + 2,5x_2 - 2,9x_3 = 4,5, \\ 0,8x_1 + 3,5x_2 - 1,4x_3 = 3,2, \\ 1,5x_1 - 2,3x_2 + 8,6x_3 = -5,5 \end{cases}$	9,29	АЛ
10	$\begin{cases} 1,5x_1 + 2,3x_2 - 3,7x_3 = 4,5, \\ 2,8x_1 + 3,4x_2 + 5,8x_3 = -3,2, \\ 1,2x_1 + 7,3x_2 - 2,3x_3 = 5,6 \end{cases}$	9,30	АЛ
11	$\begin{cases} 3,7x_1 - 2,3x_2 + 4,5x_3 = 2,4, \\ 2,5x_1 + 4,7x_2 - 7,8x_3 = 3,5, \\ 1,6x_1 + 5,3x_2 + 1,3x_3 = -2,4 \end{cases}$	9,29	АЛ
12	$\begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8, \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5, \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5 \end{cases}$	9,30	БЛ

Продовження таблиці 9.5

1	2	3	4
13	$\begin{cases} 5,4x_1 - 2,4x_2 + 3,x_3 = 5,5, \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5, \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5 \end{cases}$	9,29	БЛ
14	$\begin{cases} 5,4x_1 - 2,4x_2 + 3,8x_3 = 5,5, \\ 2,5x_1 + 6,8x_2 - 1,1x_3 = 4,3, \\ 2,7x_1 - 0,6x_2 + 1,5x_3 = -3,5 \end{cases}$	9,30	БЛ
15	$\begin{cases} 0,9x_1 + 2,7x_2 - 3,8x_3 = 2,4, \\ 2,5x_1 + 5,8x_2 - 0,5x_3 = 3,5, \\ 4,5x_1 - 2,1x_2 + 3,2x_3 = -1,2 \end{cases}$	9,29	БЛ
16	$\begin{cases} 6,3x_1 + 5,2x_2 - 0,6x_3 = 1,5, \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = 2,7, \\ 0,8x_1 + 1,4x_2 + 3,5x_3 = -2,3 \end{cases}$	9,30	АЛ
17	$\begin{cases} 4,1x_1 + 5,2x_2 - 5,8x_3 = 7,0, \\ 3,8x_1 - 3,1x_2 + 4,0x_3 = 5,3, \\ 7,8x_1 + 5,3x_2 - 6,3x_3 = 5,8 \end{cases}$	9,29	АЛ
18	$\begin{cases} 7,1x_1 + 6,8x_2 + 6,1x_3 = 7,0, \\ 5x_1 + 4,8x_2 + 5,3x_3 = 6,1, \\ 8,2x_1 + 7,8x_2 + 7,1x_3 = 5,8 \end{cases}$	9,30	БЛ
19	$\begin{cases} 2,8x_1 + 3,8x_2 - 3,2x_3 = 4,5, \\ 2,5x_1 - 2,8x_2 + 3,3x_3 = 7,1, \\ 6,5x_1 - 7,1x_2 + 4,8x_3 = 6,3 \end{cases}$	9,29	БЛ

Продовження таблиці 9.5

1	2	3	4
20	$\begin{cases} 3,8x_1 + 4,1x_2 - 2,3x_3 = 4,8, \\ -2,1x_1 + 3,9x_2 - 5,8x_3 = 3,3, \\ 1,8x_1 + 1,1x_2 - 2,1x_3 = 5,8 \end{cases}$	9,30	БЛ
21	$\begin{cases} 5,4x_1 - 6,2x_2 - 0,5x_3 = 0,52, \\ 3,4x_1 + 2,3x_2 + 0,8x_3 = -0,8, \\ 2,4x_1 - 1,1x_2 + 3,8x_3 = 1,8 \end{cases}$	9,29	БЛ
22	$\begin{cases} 4,5x_1 - 3,5x_2 + 7,4x_3 = 2,5, \\ 3,1x_1 - 0,6x_2 - 2,3x_3 = -1,5, \\ 0,8x_1 + 7,4x_2 - 0,5x_3 = 6,4 \end{cases}$	9,30	АЛ
23	$\begin{cases} 5,6x_1 + 2,7x_2 - 1,7x_3 = 1,9, \\ 3,4x_1 - 3,6x_2 - 6,7x_3 = -2,4, \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 3,7x_3 = 1,2 \end{cases}$	9,29	АЛ
24	$\begin{cases} 5,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = -3,5, \\ 4,2x_1 + 1,7x_2 - 2,3x_3 = 2,7, \\ 3,4x_1 + 2,4x_2 + 7,4x_3 = 1,9 \end{cases}$	9,30	БЛ
25	$\begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,1, \\ 3,8x_1 + 4,1x_2 + 2,7x_3 = 9,7, \\ 2,9x_1 + 2,1x_2 + 3,8x_3 = 7,8 \end{cases}$	9,30	АЛ

Практична робота 6

Чисельне розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Теоретичні відомості

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку має вигляд

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (9.39)$$

Розв'язати диференціальне рівняння (9.39) – це означає знайти на відрізку $[x_0, a]$ функцію $y = y(x)$, яка в разі підставлення її в рівняння та початкову умову перетворює їх на тотожність.

Типи рівнянь, для яких можна знайти точний розв'язок, охоплюють невелику частину задач, які виникають на практиці. Тому потрібні чисельні методи розв'язання задачі Коші (9.39).

Загальний підхід чисельного розв'язання диференціальних рівнянь, це розбити відрізок $[x_0, a]$ на частинні відрізки точками $x_i = x_0 + ih, i = \overline{1, n}$, потім на кожному частинному відрізку замінити похідну деяким її різницеvim наближенням та одержати замість диференціального рівняння систему скінченнорізницеvих рівнянь. Розв'язавши цю систему, одержимо систему точок $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$. Чисельним розв'язком є ламана лінія, що з'єднує ці точки.

A *Метод Ейлера*

На частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ замінимо $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, одержимо $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$, звідки

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (9.40)$$

Формула (9.40) описує реалізацію методу Ейлера.

Цей метод має перший порядок точності (порядок апроксимації). Його похибка дорівнює $\delta = kh^2$, або, що те саме, $\delta = O(h^2)$.

B *Налагоджений метод Ейлера*

Для практичних обчислень частіше застосовують модифікований метод Ейлера.

На частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ замінимо похідну на середнє арифметичне похідних (нахилів) на кінцях відрізка і одержимо розрахункову формулу налагодженого методу Ейлера:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + f(x_i, y_i))]. \end{cases}$$

Під час програмування краще використовувати більш поетапну модифікацію цієї формули:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ \overline{y_{i+1}} = y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overline{y_{i+1}})], \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (9.41)$$

Метод має другий порядок точності, його помилка апроксимації дорівнює $\delta = O(h^3)$.

В *Модифікований метод Ейлера*

У модифікованому методі похідну на частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ замінюють нахилом у середній точці відрізка. Рекурентні співвідношення мають вигляд

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + h \left[f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hf(x_i, y_i)}{2}\right) \right], i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (9.42)$$

Цей метод також має другий порядок точності з помилкою апроксимації $\delta = O(h^3)$.

Г *Метод Рунге – Кутта четвертого порядку*

На практиці найбільш часто використовують саме цей метод, що описується системою співвідношень

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ k_1 = hf(x_i, y_i), \\ k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4], i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (9.43)$$

Помилка апроксимації методу $\delta = O(h^5)$, тому його називають методом Рунге – Кутта четвертого порядку.

*Оцінювання похибки чисельних методів розв'язання
диференціальних рівнянь*

Необхідно зазначити: наближеним розв'язком є функція, яка задана множиною точок $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$. Це означає, що похибку потрібно оцінювати для кожної із цих точок.

Для практичного оцінювання похибки в точці $[x_i, y_i]$ використовують правило Рунге подвійного перерахунку:

$$\delta_i \approx \frac{|y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|}{2^p - 1},$$

де $y_h(x_i)$ та $y_{h/2}(x_i)$ – наближені розв'язки, обчислені в точці x_i з кроком h та $h/2$; p – точність чисельного методу.

Для методу Ейлера $p = 1$

$$\delta_i \approx |y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|. \quad (9.44)$$

Для налагодженого та модифікованого методів Ейлера $p = 2$

$$\delta_i \approx \frac{|y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|}{3}. \quad (9.45)$$

Для методу Рунге – Кутта $p = 4$

$$\delta_i \approx \frac{|y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|}{15}. \quad (9.46)$$

Знайти наближений розв'язок із заданою точністю $\varepsilon > 0$ – це означає підібрати такий крок h_i , щоб виконувалась умова

$$\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i < \varepsilon. \quad (9.47)$$

На практиці діють одним із двох способів.

1 Забезпечення точності з постійним кроком ($h_{\text{пост}}$)

Вибирають деякий досить малий крок h . У кожній точці роблять подвійний перерахунок із кроками $h/2$ та h і оцінюють похибку.

Якщо умова (9.45) не виконується, то за нове h беруть $h/2$ і повторюють подрібнення кроку до того часу, поки умова (9.45) не буде виконана.

2 Забезпечення точності з автоматичним вибором кроку ($h_{\text{змін}}$)

Вибирають деякий досить малий крок h . У першій точці роблять подвійний перерахунок із кроками $h/2$ та h і оцінюють похибку. Величину подальших кроків вибирають за одним із двох правил:

$$h_{i+1} = \begin{cases} 0,5h_i, & \text{якщо } \delta > \varepsilon, \\ h_i, & \text{якщо } \varepsilon/10 \leq \delta \leq \varepsilon, \\ 1,5h_i, & \text{якщо } \delta < \varepsilon/10. \end{cases} \quad (9.48)$$

(правило трьох зон).

$$h_{i+1} = \begin{cases} 0,5h_i, & \text{якщо } \delta > \varepsilon, \\ h_i \sqrt[p+1]{\varepsilon / \delta}, & \text{якщо } \delta \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (9.49)$$

Якщо невдалим був уже перший крок, то його зменшують (перший крок повинен завжди бути вдалим).

Індивідуальні завдання

Розв'язати запропонованим чисельним методом задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

На відрізку $[x_0, a]$ забезпечити точність розв'язку $\varepsilon \leq 0,01$. Побудувати графік наближеного розв'язку (табл. 9.6).

Таблиця 9.6 – Варіанти завдань

Номер варіанта	$f(x, y)$	x_0	y_0	a	Метод	Спосіб забезпечення точності ($1-h_{ном}$; $2-h_{змн}$)
1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$	1	0	2	А	1
2	$\frac{y}{1+x}$	0	2	3	Б	2
3	$y - \frac{2x}{y}$	0	1	1	В	1
4	$x^3 - \frac{2y}{x}$	1	2	3	Г	2
5	$\frac{y}{2\sqrt{x}}$	4	1	6	А	1
6	$\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$	1	0	2	Б	1
7	$\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$	1	1	3	В	2

Продовження таблиці 9.6

1	2	3	4	5	6	7
8	$\frac{x+1-y^3}{3y^2}$	1	-1	3	Г	2
9	$\frac{xy^2+xy}{1+x^2}$	0	0	3	А	1
10	$\frac{2xy}{3x^2-y^2}$	1	1	2	Б	2
11	$\frac{1+y^2}{xy}$	1	1	4	В	1
12	$-\frac{y^2}{2x+1}$	4	1	6	Г	2
13	$\frac{x^2+y^2}{10}$	1	1	2	А	1
14	x^2+xy^3	0	0	3	Б	2
15	$\sqrt{xy}+1$	0	0	2	В	2
16	x^2+xy+y^2	0	0	3	А	2
17	$2xy^3-1$	0	0	2	Г	1
18	$\frac{x^2+y^2}{12}$	2	3	3	Б	1

Продовження таблиці 9.6

1	2	3	4	5	6	7
19	$\frac{4x^2 + y^2}{4}$	0	-1	2	A	2
20	$\sqrt{xy} - 2$	1	2	3	Б	1
21	$y^3 - x^3$	0	1	2	В	2
22	$\frac{x^2 + 3y^2}{4}$	2	0	5	Г	1
23	$x^2 + y^3$	0	0	2	A	1
24	$x + y^2$	0	1	3	Б	2
25	$2x + y^2$	0	0	2	В	1

Практична робота 7

Чисельне розв'язання рівняння коливань струни методом сіток

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання змішаної крайової задачі для диференціального рівняння коливань струни методом сіток.

Теоретичні відомості

У звичайних диференціальних рівняннях невідома функція $y = y(x)$ залежить від однієї змінної. Такими

рівняннями можна описати лише невелику кількість процесів із фізики та інших наук.

У більшості диференціальних рівнянь невідома функція $U = U(t, x, y, z)$ залежить від багатьох змінних (звичайно це час t та просторові координати x, y, z). Такі диференціальні рівняння будемо називати рівняннями з частинними похідними.

Найчастіше це рівняння другого порядку, оскільки згідно із законами механіки перша похідна – швидкість, друга – прискорення.

Позначимо

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}; U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; U_{xt} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}; U_{tt} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \text{тоді лінійне}$$

диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку можна записати у вигляді

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xt} + a_{22}U_{tt} + b_1U_x + b_2U_t + cU = f(x, t). \quad (9.50)$$

де a_{ij} , b_i , c – константи;

$U(x, t)$ – невідома функція.

Рівняння вигляду (9.50) поділяють на три класи:

1 Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то рівняння належить до класу еліптичних рівнянь.

Еліптичними рівняннями описують різноманітні електричні, магнітні та гравітаційні поля (в цьому разі, звичайно, замість t застосовують позначення y).

2 Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то рівняння належить до класу гіперболічних рівнянь.

Гіперболічними рівняннями описують процеси коливань.

3 Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то рівняння належить до класу параболічних рівнянь.

Параболічними рівняннями описують процеси поширення тепла (теплопровідності) та дифузійні процеси.

Найбільш поширеним методом розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод сіток.

Сутність методу сіток полягає в тому, що область, в якій шукають розв'язок прямими, паралельними осям координат, розбивають на сітку. Вузлами цієї сітки є точки $(x_i, t_j) = (x_0 + ih, t_0 + jk)$, де h, k – відповідно крок по осях $0x$ та $0t$, $i, j = 0, 1, \dots$.

Невідому функцію $U(x, t)$ відшуковують наближено у вузлах сітки.

Позначимо $U_{ij} = U(x_i, t_j)$.

Частинні похідні у вузлах сітки замінюють скінченнорізницевиими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k}, \\ U_x &= \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h}, \\ U_{tt} &= \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}, \\ U_{xx} &= \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Зупинимося більш детально на методі сіток для розв'язання гіперболічного рівняння коливань струни.

Розглянемо фізичну задачу. Є струна довжиною L , натягнута між двома точками осі $x: x=0, x=L$. Якщо відхилити струну від положення рівноваги та відпустити, то вона почне коливатися (рис. 9.1). Ми опишемо процес коливань, коли знайдемо функцію $U = U(x, t)$ величини

відхилення струни від положення рівноваги в точці x в момент часу t .

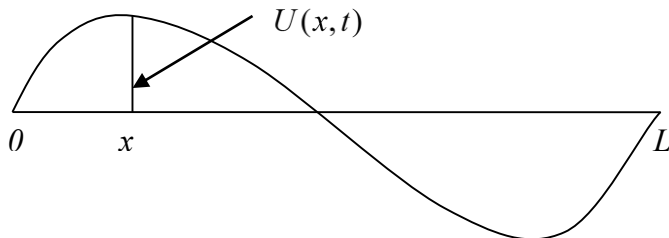


Рисунок 9.1 – Коливання струни

Відхилення струни $U(x, t)$ описується диференціальним рівнянням

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}.$$

Стала a^2 враховує фізичні характеристики струни. Заміною змінних ми можемо досягти виконання умови $a^2 = 1$. Для однозначного завдання процесу коливань потрібно задати граничні умови, які задають режим коливань на кінцях струни, початкові умови, що задають форму струни в момент часу $t = 0$ та початкову швидкість. Таку задачу називають змішаною крайовою задачею.

У загальній постановці крайова задача має такий вигляд:

$$U_{tt} = U_{xx}, \quad (9.52)$$

$$U(0, t) = p(t), \quad (9.53)$$

$$U(L, t) = q(t), \quad (9.54)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad (9.55)$$

$$U_t(x, 0) = g(x). \quad (9.56)$$

(9.53)–(9.54) – граничні умови, (9.55)–(9.56) – початкові умови.

Таким чином, область, де шукаємо розв'язок, є напівсмугою $D: \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq +\infty\}$. Зрозуміло, що повинні виконуватись умови узгодження:

$$p(0) = f(0), q(0) = f(L), p'(0) = g(0), q'(0) = g(L).$$

Замінімо задачу (9.52)–(9.56) її скінченнорізницеvim аналогом:

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{k^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad (9.52)$$

$$U_{0,j} = p_j, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.53)$$

$$U_{n,j} = q_{nj}, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.54)$$

$$U_{i,0} = f_j, i = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.55)$$

$$\frac{U_{i1} - U_{i0}}{k} = g_i. \quad (9.56)$$

Таким чином, умови (9.53)–(9.56) задають значення функції $U(x, t)$ на границі області D .

За допомогою умови (9.56) відшукуємо значення в першому прошарку

$$U_{i1} = U_{i0} + kg_i.$$

Таким чином, значення функцій на нульовому та першому прошарку відомі. Позначимо $\lambda = k/h$ і зведемо рівняння (3') до вигляду

$$U_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)U_{ij} + \lambda^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1}, \quad i = 1 \dots n-1; j = 1, 2, \dots \quad (9.57)$$

Для спрощення користування формулою (9.57) використовуємо трафарет (рис. 9.2).

За допомогою (9.57) (трафарету) (рис. 9.2), спираючись на відомі значення функції у вузлах сітки на попередніх двох прошарках, знаходимо значення у вузлах наступного прошарку.

Розв'язок різницевої задачі (9.52)–(9.56) рівномірно збігається з розв'язком вихідної крайової задачі (9.52)–(9.56) при $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, якщо $\lambda < 1$, тобто $k < h$.

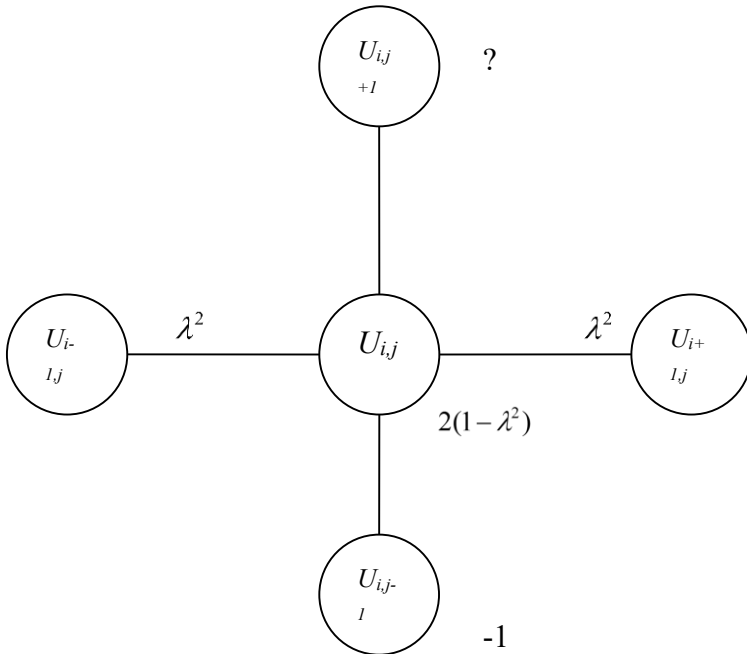


Рисунок 9.2 – Трафарет

Ця умова є достатньою для збіжності методу, але не є необхідною.

Індивідуальні завдання

Використовуючи метод сіток, знайти функцію $U = U(x, t)$ у вузлах сітки, яка є чисельним розв'язком змішаної крайової задачі для рівняння коливань струни:

$$U_{tt} = U_{xx};$$

$$U(0, t) = p(t) \text{ – гранична умова;}$$

$$U(1, t) = q(t) \text{ – гранична умова;}$$

$U(x, 0) = f(x)$ – початкова умова;

$U_t(x, 0) = g(x)$ – початкова умова.

В області $D: \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq t \leq 5\}$, вибираючи відповідні дані з таблиці 9, побудувати:

1) форму струни в момент часу $t = 0, t = 3, t = 5$;

2) графіки положення точок струни для $x = 0, 3; x = 0, 5; x = 0, 7$.

Таблиця 9.7 – Варіанти завдань

Номер варіанта	dt	dx	Гранична умова		Початкова умова	
			$p(t)$	$q(t)$	$f(t)$	$g(t)$
1	2	3	4	5	6	7
1	0,1	0,05	0	0	$\sin \pi x$	0
2	0,05	0,025	0	0	0	$2 \sin \pi x$
3	0,1	0,025	0	$1, 2(t+1)$	$(x+0,2) \sin \frac{\pi x}{2}$	$1 + x^2$
4	0,2	0,05	0	$0,5t$	$(x+1) \sin \pi x$	$x^2 + x$
5	0,1	0,05	$1+0,4t$	0	$(1-x^2) \cos \pi x$	$2x+0,6$
6	0,05	0,025	$2t$	0	$3x(1-x)$	$\cos(x+0,5)$
7	0,1	0,025	0	$0,2+0,5t$	$1,2x-x^2$	$(x+0,6) \sin x$
8	0,2	0,05	$2t+1$	0	$(1-x) \cos \frac{\pi x}{2}$	$2x+1$
9	0,1	0,05	$0,5t$	0	$(x+0,4) \sin \pi x$	$(x+1)^2$
10	0,1	0,025	$0,5t$	0	$(2-x) \sin \pi x$	$(x+0,6)^2$
11	0,2	0,1	$0,4t$	0	$(2+x) \sin \pi x$	$(x+0,3)^2$
12	0,05	0,025	$2t+1$	0	$\cos \frac{\pi x}{2}$	x^2
13	0,1	0,025	$2t$	0	$x \sin \pi x$	$(x+1)^2$
14	0,2	0,05	0	t^2	$x \cos \frac{\pi x}{2}$	$2x^2$
15	0,1	0,025	0	$2(t+1)$	$x(x+1)$	$\cos x$

Продовження таблиці 9.7

1	2	3	4	5	6	7
16	0,05	0,025	0	$2(t+1)$	$x(x+1)$	$\cos x$
17	0,1	0,025	$3t$	2	$x \cos \pi x$	$x(4-x)$
18	0,05	0,025	2	$2(t+3)$	$x(x+1)$	$\cos x$
19	0,1	0,05	$0,5t$	2	$(x+1) \sin \frac{\pi x}{2}$	$1-x^2$
20	0,1	0,025	1	$0.5t$	$(x^2+1)(1-x)$	$1-\sin x$
21	0,2	0,025	$2t^2$	1	$0,5x(x+1)$	$x \cos x$
22	0,1	0,05	1	$1,2(t+2)$	$(x+0,5) \sin \frac{\pi x}{2}$	$1+x^2$
23	0,1	0,025	$t-0,5$	$3t$	$(x+0,5)(x-1)$	$\sin(x+0,2)$
24	0,1	0,05	0,5	$2-3t$	$0,5(x+1)$	$(x+0,5) \cos \pi x$
25	0,05	0,025	t^2	1,5	$x(2x-0,5)$	$\cos(2x)$

Практична робота 8

Чисельне розв'язання рівняння теплопровідності методом сіток

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів і програм чисельного розв'язання змішаної крайової задачі для диференціального рівняння теплопровідності методом сіток.

Теоретичні відомості

Рівняння вигляду $U_t = a^2 U_{xx}$ є параболічним диференціальним рівнянням з частинними похідними, яке описує процеси теплопровідності та дифузії. У цьому рівнянні $U(x, t)$ задає температуру в будь-якій точці стрижня довжиною L на момент часу t . Будемо вважати, що $a^2 = 1$, цього завжди можна досягти зміною змінних.

Для однозначного задання процесу теплопровідності потрібно задати граничні умови, які задають теплові

режими на кінцях стрижня, та початкову умову, що задає розподіл температури в момент часу $t=0$. Таку задачу називають змішаною крайовою задачею для рівняння теплопровідності.

У загальній постановці задача має такий вигляд:

$$U_t = U_{xx}, \quad (9.58)$$

$$U(0, t) = p(t), \quad (9.59)$$

$$U(L, t) = q(t), \quad (9.60)$$

$$U(x, 0) = f(x). \quad (9.61)$$

(9.59)–(9.60) – граничні умови, (9.61) – початкова умова.

Таким чином, область, де шукаємо розв'язок є напівсмугою $D: \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq \infty\}$. Зрозуміло, що повинні виконуватись умови узгодження:

$$p(0) = f(0); q(0) = f(0).$$

Замінімо задачу (1–4) її скінченнорізницеvim аналогом (дивись формули (9.51) практичної роботи № 6):

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad (9.58)$$

$$U_{0,j} = p_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.59)$$

$$U_{n,j} = q_{nj}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.60)$$

$$U_{i,0} = f_j, \quad i = \overline{0, n}. \quad (9.61)$$

Таким чином, умови (9.58)–(9.61) задають значення функції $U(x, t)$ на границі області D . Позначимо $\lambda = \frac{k}{h^2}$ і

зведемо рівняння (1) до вигляду

$$U_{i,j+1} = \lambda U_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)U_{i,j} + \lambda U_{i+1,j}; i = \overline{1, n-1}; j = 1, 2, \dots \quad (9.62)$$

Для спрощення користування формулою (9.62) використовуємо трафарет (рис. 9.3):

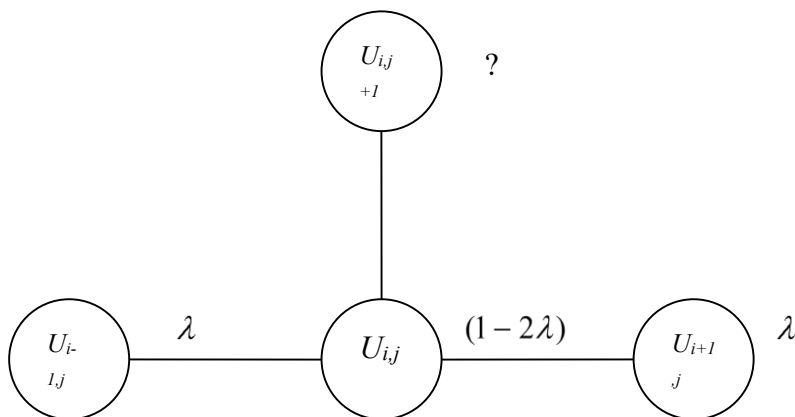


Рисунок 9.3 – Трафарет

За допомогою формули (9.62) або трафарету, спираючись на значення функції у вузлах сітки на попередньому прошарку, знаходимо значення функції у вузлах наступного прошарку. Ітераційний процес починаємо, спираючись на відомі значення на нульовому прошарку (9.61).

Процес розв'язання за цією схемою збігається і є стійким, якщо $\lambda \leq 0,5$, тобто якщо $k < \frac{h^2}{2}$, що потребує дуже дрібного кроку за часом. Це є недоліком запропонованого методу.

Індивідуальні завдання

Використовуючи метод сіток, знайти функцію $U(x, t)$, яка є розв'язком змішаної задачі для рівняння теплопровідності:

$$U_t = U_{xx};$$

$$U(0, t) = p(t) \text{ – гранична умова;}$$

$U(0, 6, t) = q(t)$ – гранична умова;

$U(x, 0) = f(x)$ – початкова умова;

$$0 \leq x \leq 0,6; 0 < t \leq t_1.$$

Крок за h, t вибрати самостійно, але не менше ніж $h = 0,1$, величину t_1 також обрати самостійно.

Передбачити графічне виведення розподілу температур у стрижні для довільного фіксованого значення $0 < t \leq t_1$.

Побудувати графіки розподілу температур за $t_0 = 0, t_0 = \frac{t_1}{2}, t_0 = t_1$.

Таблиця 9.8 – Варіанти завдань

Номер варіанта	$f(x)$	$p(t)$	$q(t)$
1	2	3	4
1	$\cos(2x)$	$1 - 6t$	0,3624
2	$(x + 1)x$	$2t$	0,960
3	$1,3 + \ln(x + 0,4)$	$0,8 + t$	1,2
4	$\sin(2x)$	$2t$	0,932
5	$3x(2 - x)$	t	2,52
6	$\sin(0,55x + 0,33)$	$t + 0,33$	0,354
7	$2x(1 - x) + 0,2$	$0,2 + t$	0,680
8	$\sin x + 0,08$	$0,08 + 2t$	0,6446
9	$2x(x + 0,2) + 0,4$	$2t + 0,4$	1,36
10	$0,3 + x(x + 0,4)$	$0,3 + t$	0,9
11	$(x - 0,2)(x + 1) + 0,2$	$6t$	0,84
12	$\ln(263 - x)$	$3(0,14 - t)$	0,3075
13	$1,5 - x(1 - x)$	$3(0,5 - t)$	1,26

Продовження таблиці 9.8

1	2	3	4
14	$\cos(x + 0,845)$	$6(t + 0,11)$	0,1205
15	$0,6 + x(0,8 - x)$	$0,6 + t$	0,72
16	$\ln(1,95 + x)$	$0,29 + 6t$	0,4065
17	$2 \cos(x + 0,55)$	$0,8179 + 3t$	1,705
18	$\sin(0,48 + x)$	$0,882 + 3t$	0,4618
19	$\sin(3x)$	$3t$	0,932
20	$x(x + 3)$	$2t$	0,94
21	$\ln(x + 0,4)$	$0,6 + t$	1,2
22	$\sin(3x)$	$2t$	0,532
23	$3x(2 + x)$	$3t$	2,78
24	$\cos(x - 0,45)$	$0,123 - 2t$	0,485
25	$\sin(0,9 + x)$	$0,02 + 3t$	0,581

Список використаної літератури

1. Андруник В. А. Чисельні методи в комп'ютерних науках / В. А. Андруник. – Львів : Новий світ-2000, 2019. – Т. 1. – 470 с.
2. Чисельні методи розв'язання інженерних задач у пакеті Mathcad. Курс лекцій та індивідуальні завдання : навч. посіб. із дисципліни «Інформатика» для студентів вищих навчальних закладів / Л. В. Васильєва, О. А. Гончаров, В. А. Коновалов, Н. А. Соловйова. – Краматорськ : ДДМА, 2006. – 108 с.
3. Кухакер Д. Численные методы и программное обеспечение / Д. Кухакер, К. Моулер, С. Нэш. – 2-е изд., стер. – Москва : Мир, 2001. – 575 с.
4. Рудаков К. М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій : навч. посіб. / К. М. Рудаков. – Київ : Нац. техн. ун-т Укр. «Київський політехн. ін-т ім. І. Сікорського», 2007. – 379 с.
5. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці : підручник / Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва. – Київ : ВНУ, 2006. – 480 с.
6. Херхагер М. MathCad 2000: полное руководство / М. Херхагер. Х. Партолль ; пер. с нем. ; под ред. К. Ю. Королькова. – Киев : ВНУ, 2000. – 416 с.
7. Цегелик Г. Г. Чисельні методи : підручник / Г. Г. Цегелик. – Львів : Львівський нац. ун-т ім. І. Франка, 2004. – 408 с.
8. Чисельні методи в задачах механіки : метод. посіб. Ч. 1: Теоретична та прикладна механіка / уклад. Г. М. Зражевський. – Київ : Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2015. – 99 с.
9. Чисельні методи в комп'ютерних науках : навч. посіб. / В. А. Андруник, В. А. Висоцька, В. В. Пасічник та ін. – Львів : Новий світ-2000, 2017. – Т. 1. – 470 с.

10. Чисельні методи в комп'ютерних науках : навч. посіб. / В. А. Андруник, В. А. Висоцька, В. В. Пасічник та ін. ; за ред. В. В. Пасічника. – Львів : Новий світ-2000, 2018. – Т. 2. – 536 с.

11. Чисельні методи в прикладній фізиці : навч. посіб. / В. О. Катрич, Д. В. Майборода, С. О. Погарський, С. Л. Просвірнін. – Харків : Харківський нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна, 2011. – 172 с.

12. Численные методы в прикладной физике : учеб. пособие / В. А. Катрич, Д. В. Майборода, С. А. Погарский и др. – Харьков : Харьковский нац. ун-т им. В. Н. Каразина, 2008. – 156 с.

Навчальне видання

**Гончаров Олександр Андрійович,
Васильєва Людмила Володимирівна,
Юнда Андрій Миколайович**

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки О. А. Гончарова
Редактори: Н. З. Клочко, С. М. Симоненко
Комп'ютерне верстання О. А. Гончарова

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 8,37. Обл.-вид. арк. 7,21. Тираж 300 пр. Зам. № .

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.