

Домашнее задание 1

Асписов Дмитрий Алексеевич БПИ226

30 сентября 2024 г.

Задача 19

Приведите к ДНФ формулу:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \vee \neg r)$$

Решение:

1. Преобразуем импликацию:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \vee \neg r) \equiv \neg(p \vee q) \vee (p \vee \neg r)$$

2. Применим правило Де Моргана:

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg r)$$

3. Применим дистрибутивный закон:

$$(\neg p \vee (p \vee \neg r)) \wedge (\neg q \vee (p \vee \neg r))$$

4. Упростим:

- $\neg p \vee (p \vee \neg r) \equiv \top \vee \neg r \equiv \top$
- $\neg q \vee (p \vee \neg r)$ остаётся неизменным

5. Итоговая ДНФ:

$$\boxed{\neg q \vee p \vee \neg r}$$

Задача 20

Докажите, что следующая формула является тавтологией для любого n :

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^n p_{ij} \rightarrow \bigvee_{j=1}^n \bigvee_{i_1, i_2=1, i_1 < i_2}^{n+1} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j}).$$

Решение:

Предположим, что матрица p размером $(n+1) \times n$ содержит элементы из нулей и единиц. (построим изоморфизм между множеством матриц и p).

Доказательство. (от противного)

1. Предположим, что левая часть истинна, а правая — ложна.
2. Левая часть: $\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^n p_{ij}$
 - В каждой строке матрицы p есть хотя бы одна единица.
3. Правая часть: $\bigvee_{j=1}^n \bigvee_{i_1, i_2=1, i_1 < i_2}^{n+1} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j})$
 - Ни в одном столбце нет двух единиц.
4. Расставляем единицы:
 - По одной в каждой строке.
 - Не более одной в каждом столбце.
5. Противоречие:
 - Строк $n + 1$, столбцов n .
 - После заполнения n столбцов, одна строка останется без единицы.
6. Вывод: исходное предположение неверно.

Следовательно, формула является тавтологией.

□