Домашнее задание 1

Асписов Дмитрий Алексеевич БПИ226

30 сентября 2024 г.

Задача 19

Приведите к ДНФ формулу:

$$(p \vee q) \to (p \vee \neg r)$$

Решение:

1. Преобразуем импликацию:

$$(p \vee q) \to (p \vee \neg r) \equiv \neg(p \vee q) \vee (p \vee \neg r)$$

2. Применим правило Де Моргана:

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg r)$$

3. Применим дистрибутивный закон:

$$(\neg p \vee (p \vee \neg r)) \wedge (\neg q \vee (p \vee \neg r))$$

4. Упростим:

   - $\neg p \vee (p \vee \neg r) \equiv \top \vee \neg r \equiv \top$
   - $\neg q \vee (p \vee \neg r)$ остаётся неизменным

5. Итоговая ДНФ:

$$\boxed{\neg q \vee p \vee \neg r}$$

Задача 20

Докажите, что следующая формула является тавтологией для любого n:

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij} \to \bigvee_{j=1}^{n} \bigvee_{i_1, i_2 = 1, i_1 < i_2}^{n+1} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j}).$$

Решение:

Предположим, что матрица p размером $(n+1) \times n$ содержит элементы из нулей и единиц.

Доказательство. (от противного)

1. Предположим, что левая часть истинна, а правая — ложна.
2. Левая часть: $\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij}$
   - В каждой строке матрицы p есть хотя бы одна единица.
3. Правая часть: $\bigvee_{j=1}^{n} \bigvee_{i_1,i_2=1,i_1<i_2}^{n+1} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j})$
   - Ни в одном столбце нет двух единиц.
4. Расставляем единицы:
   - По одной в каждой строке.
   - Не более одной в каждом столбце.
5. Противоречие:
   - Строк $n+1$, столбцов n.
   - После заполнения n столбцов, одна строка останется без единицы.
   - По принципу Дирихле найдётся столбец с двумя единицами.
6. Вывод: исходное предположение неверно.

   Следовательно, формула является тавтологией. □

Бонусная задача

Найдите число n-местных шефферовых функций, т.е. найдите формулу, которая по числу n даёт число n-местных шефферовых функций.

Решение:

Шефферова функция — это булева функция, которая может быть выражена с использованием только одной операции: штрих Шеффера (|), которая является отрицанием дизъюнкции.

Операция Шеффера является функционально полной, то есть любые булевы функции могут быть выражены с её помощью.

Чтобы найти количество всех n-местных шефферовых функций, рассмотрим следующее:

1. **Общее количество булевых функций:**
   - Для n-местной булевой функции существует 2^n различных наборов значений переменных. Для каждого набора переменных результат может быть либо 0, либо 1.
   - Поэтому общее количество булевых функций на n переменных равно 2^{2^n}. Это количество включает все возможные комбинации значений на выходе для всех наборов входных переменных.
2. **Шефферова функция:**

- Шефферова функция должна включать хотя бы одну ложь, то есть она не может быть тождественно истинной (функция, которая всегда возвращает 1). Это связано с тем, что штрих Шеффера (|) определён как отрицание дизъюнкции и всегда даёт ложь для некоторых входных значений.
- Поэтому из всех булевых функций исключаем одну — тождественно истинную функцию.

3. **Количество шефферовых функций:**

   - Количество шефферовых функций равно количеству всех булевых функций, за исключением одной тождественно истинной.
   - Следовательно, общее количество n-местных шефферовых функций равно $2^{2^n} - 1$.

Таким образом, количество n-местных шефферовых функций равно:

$$\boxed{2^{2^n} - 1}$$