

Домашнее задание 2

Асписов Дмитрий Алексеевич, БПИ226

7 октября 2024 г.

Задача 1

Найдите решение системы сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

Решение:

1. Находим значения произведений модулей M_i :

$$M = 5 \times 6 \times 7 = 210$$

$$M_1 = \frac{M}{5} = 42, \quad M_2 = \frac{M}{6} = 35, \quad M_3 = \frac{M}{7} = 30$$

2. Решаем для N_i из уравнений:

$$\begin{aligned} 42 \times N_1 &\equiv 1 \pmod{5} &\Rightarrow 2 \times N_1 &\equiv 1 \pmod{5} &\Rightarrow N_1 = 3, \\ 35 \times N_2 &\equiv 1 \pmod{6} &\Rightarrow 5 \times N_2 &\equiv 1 \pmod{6} &\Rightarrow N_2 = 5, \\ 30 \times N_3 &\equiv 1 \pmod{7} &\Rightarrow 2 \times N_3 &\equiv 1 \pmod{7} &\Rightarrow N_3 = 4. \end{aligned}$$

3. Находим x :

$$x = (3 \cdot 42 \cdot 3) + (4 \cdot 35 \cdot 5) + (5 \cdot 30 \cdot 4) = 378 + 700 + 600 = 1678$$

Запишем решение в виде сравнения по модулю:

$$x \equiv 1678 \pmod{210}$$

$$\boxed{x \equiv 208 \pmod{210}}$$

Задача 2

Сколько решений в \mathbb{Z}_5 имеет система $x \equiv 3y \pmod{5}$?

Решение:

Рассмотрим все возможные значения y в \mathbb{Z}_5 и найдём соответствующие x :

$$1) y = 0 \implies x = 3 \times 0 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$2) y = 1 \implies x = 3 \times 1 \equiv 3 \pmod{5},$$

$$3) y = 2 \implies x = 3 \times 2 \equiv 1 \pmod{5},$$

$$4) y = 3 \implies x = 3 \times 3 \equiv 4 \pmod{5},$$

$$5) y = 4 \implies x = 3 \times 4 \equiv 2 \pmod{5}.$$

Таким образом, для каждого значения y существует уникальное значение x . Поскольку y может принимать 5 различных значений в \mathbb{Z}_5 , получаем:

5 решений в \mathbb{Z}_5

Задача 3

Может ли при составном n выполняться сравнение $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$?

Решение: