Домашнее задание 1

Асписов Дмитрий Алексеевич БПИ226

30 сентября 2024 г.

Задача 19

Приведите к ДНФ формулу:

$$(p \lor q) \to (p \lor \neg r)$$

Решение:

1. Преобразуем импликацию:

$$(p \lor q) \to (p \lor \neg r) \equiv \neg(p \lor q) \lor (p \lor \neg r)$$

2. Применим правило Де Моргана:

$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

3. Подставим в исходное выражение:

$$(\neg p \land \neg q) \lor (p \lor \neg r)$$

4. Применим дистрибутивный закон:

$$(\neg p \lor (p \lor \neg r)) \land (\neg q \lor (p \lor \neg r))$$

5. Упростим:

   - $\neg p \lor (p \lor \neg r) \equiv \top \lor \neg r \equiv \top$
   - $\neg q \lor (p \lor \neg r)$ остаётся неизменным

6. Итоговая ДНФ:

$$\boxed{\neg q \lor p \lor \neg r}$$

Задача 20

Докажите, что следующая формула является тавтологией для любого n:

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij} \to \bigvee_{j=1}^{n} \bigvee_{i_1, i_2=1, i_1<i_2}^{n+1} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j}).$$

Решение:

Предположим, что матрица p размером $(n+1) \times n$ содержит элементы из нулей и единиц. (построим изоморфизм между множеством матриц и p.

Доказательство. (от противного)

1. Предположим, что левая часть истинна, а правая — ложна.
2. Левая часть: $\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij}$
   - В каждой строке матрицы p есть хотя бы одна единица.
3. Правая часть: $\bigvee_{j=1}^{n} \bigvee_{i_1, i_2=1, i_1<i_2}^{n+1} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j})$
   - Ни в одном столбце нет двух единиц.
4. Расставляем единицы:
   - По одной в каждой строке.
   - Не более одной в каждом столбце.
5. Противоречие:
   - Строк $n+1$, столбцов n.
   - После заполнения n столбцов, одна строка останется без единицы.
6. Вывод: исходное предположение неверно.

Следовательно, формула является тавтологией. □