姓名：____________

暑期高中自主招生数学课程结业试题

答题时注意:

1、试卷满分 150 分;考试时间：120 分钟.

2、试卷共三大题，计 1 6 道题。考试结束后，将本卷及演算的草稿纸一并上交。

一、选择题（共 5 小题，每题 6 分，共 30 分）

1、如果关于 x 的方程 $x^2-ax+a^2-3=0$ 至少有一个正根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A、$-2<a<2$　　B、$\sqrt{3}<a\le 2$　　C、$-\sqrt{3}<a\le 2$　　D、$-\sqrt{3}\le a\le 2$

2、已知点 E 、 F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB、BC 的中点， BD、DF 分别交 CE 于点 G、H，若正方形 $ABCD$ 的面积是 240，则四边形 $BFHG$ 的面积等于……………………（　　）

A、26　　　　B、28

C、24　　　　D、30

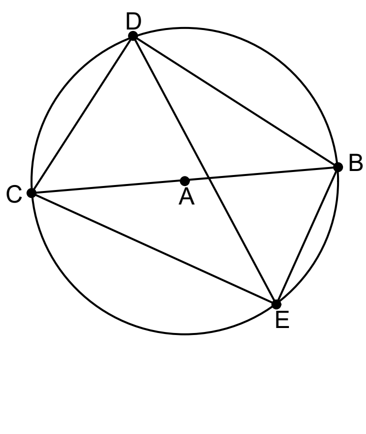
3 、设 x、y、z 是两两不等的实数，且满足下列等式：

$\sqrt[6]{x^3(y-x)^3}+\sqrt[6]{x^3(z-x)^3}=\sqrt[6]{y-x}-\sqrt[6]{x-z}$，则代数式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的值是………（　　）

A、0　　B、1　　C、3　　D、条件不足，无法计算

4、如图，四边形 $BDCE$ 内接于以 BC 为直径的⊙ A，已知：

$BC=10,\cos\angle BCD=\dfrac{3}{5},\angle BCE=30^\circ$，则线段 DE 的长是…………………（　　）



A、$\sqrt{89}$　B、$7\sqrt{3}$　C、$4+3\sqrt{3}$　D、$3+4\sqrt{3}$

5、某学校共有 3125 名学生，一次活动中全体学生被排成

一个n排的等腰梯形阵，且这n排学生数按每排都比前一排

多一人的规律排列，则当n取到最大值时，排在这等腰梯形阵最外面的一周的学生总人数是…………………（　　）

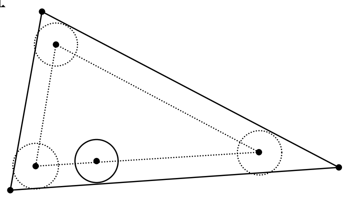
A、296　　　B、221　　　C、225　　　D、641

二、填空题：（共5小题，每题6分，共30分）

6、已知：实常数a、b、c、d同时满足下列两个等式：⑴$a\sin\theta+b\cos\theta-c=0$；

⑵ $a\cos\theta-b\sin\theta+d=0$（其中$\theta$为任意锐角），则$a$、$b$、$c$、$d$之间的关系式是：________________。

7、函数 $y=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+4|x-4|$的最小值是________。



8、已知一个三角形的周长和面积分别是84、210，一个单位圆在它的内部沿着三边匀速无摩擦地滚动一周后回到原来的位置（如图），则这个三角形的内部以及边界没有被单位圆滚过的部分的面积是______________________________。

9、已知：$x=\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$，则$\sqrt{2}$可用含$x$的有理系数三次多项式来表示为：$\sqrt{2}$

=____________________。

10、设p、q、r 为素数，则方程 $p^3=p^2+q^2+r^2$ 的所有可能的解p、q、r组成的三元数组 ($p,\ q,\ r$)是________________________________。

三、解答题（共 6 题，共 90 分）

11、（本题满分 12 分）

蔡徐坤，郭碧婷，王一博不但是同班同学，而且是非常要好的朋友，三个人的学习成绩不分伯仲，且在整个年级中都遥遥领先，初中毕业后三个人都如愿的考入自己心慕以久的高中. 后来三个人应母校邀请给全校学生作一次报告. 报告后三个人还出了一道数学题: 有一种密码把英文按字母分解，英文中的 a，b，c,……，z26 个字母（不论大小写）依次用 $1,2,3,\cdots,26$ 这 26 个自然数表示，并给出如下一个变换公式：

$$y=\begin{cases}[\frac{x}{2}]+1(\text{其中}x\text{是不超过}26\text{的正奇数}) \\ [\frac{x+1}{2}]+13(\text{其中}x\text{是不超过}26\text{的正偶数})\end{cases}$$

；已知对于任意的实数 x，记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数；将英文字母转化成密码，如 $8\to[\frac{8+1}{2}]+13=17$，即 h变成q ，再如 $11\to[\frac{11}{2}]+1=6$，即 k变成f 。他们给出下列一组密码：$etwcvcjw\quad ej\quad ncjw$

$wcabqcv$，把它翻译出来就是一句很好的临别赠言。现在赶紧把它翻译出来。

12、（本题满分 15 分）

如果有理数m可以表示成$2x^2-6xy+5y^2$（其中x、y是任意有理数）的形式，我们就称m为“杨波数”。

⑴ 两个“杨波数”a、b之积也是“杨波数”吗？为啥？

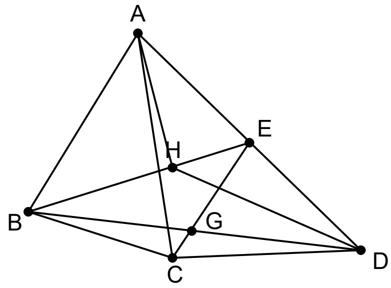
⑵ 证明：两个“世博数”a、b（$b\neq 0$）之商也是“杨波数”。

13、（本题满分 15 分）

如图，在美丽的四边形$ABCD$中，已知△ABC、△BCD、△ACD的面积之比是 3∶1∶4，点E在边AD上，CE交BD于G，设$\dfrac{BG}{GD}=\dfrac{DE}{EA}=k$。

⑴求$\sqrt[3]{7k^2+20}$的值；

⑵若点 H 分线段 BE 成 $\dfrac{BH}{HE}=2$ 的两段，且 $AH^2+BH^2+DH^2=p^2$，试用含 p 的代数式表示 $\triangle ABD$ 三边长的平方和。



14、（本题满分 16 分）

观察：$1^2=1, 1^2+2^2=5, 1^2+2^2+3^2=14, 1^2+2^2+3^2+4^2=30, \cdots\cdots\cdots$

⑴聪明的你能从中推导出计算 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$ 的公式吗？请写出你充满智慧的推导过程；

⑵请你用⑴中的公式来解决下列问题：

已知：如图，抛物线$y=-x^2+2x+3$与x、y轴的正半轴分别交于点A、B，将线段OA n等分，分点从左到右依次为A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、…、A_{n-1}，分别过这$n-1$个点作x轴的垂线依次交抛物线于点B_1、B_2、B_3、B_4、B_5、B_6、…、B_{n-1}，设△OBA_1、△$A_1B_1A_2$、△$A_2B_2A_3$、△$A_3B_3A_4$、…、△$A_{n-1}B_{n-1}A$的面积依次为S_1、S_2、S_3、S_4、…、S_n。

①当$n=2010$时，求$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+\cdots+S_{2010}$的值；

②试探究：当n取到无穷无尽时，题中所有三角形的面积和将是什么值？为什么？

15、（本题满分 16 分）

有如图所示的五种塑料薄板（厚度不计）：①两直角边分别为 3、4 的直角三角形 ABC；

②腰长为 4、顶角为$36°$的等腰三角形 JKL；

③腰长为 5、顶角为$120°$的等腰三角形 OMN；

④两对角线和一边长都是 4 且另三边长相等的凸四边形 $PQRS$；

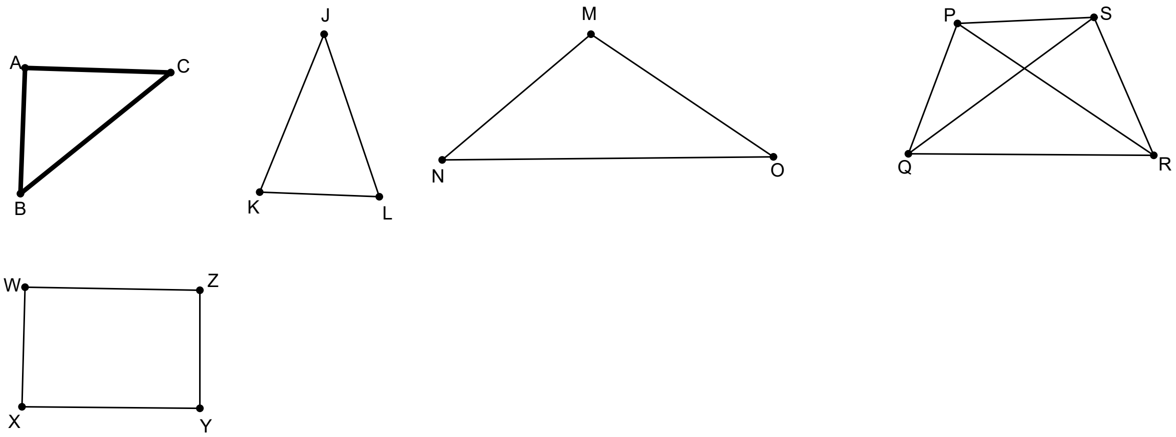
⑤长为 4 且宽（小于长）与长的比是黄金分割比的黄金矩形 $WXYZ$。

它们都不能折叠，现在将它们一一穿过一个内、外径分别为 2.4、2.7 的铁圆环。

我们规定：如果塑料板能穿过铁环内圈，则称为此板**“可操作”**；否则，便称为**“不可操作”**。

⑴证明：第④种塑料板**“可操作”**；

⑵求：从这五种塑料板中任意取两种至少有一种**“不可操作”**的概率。



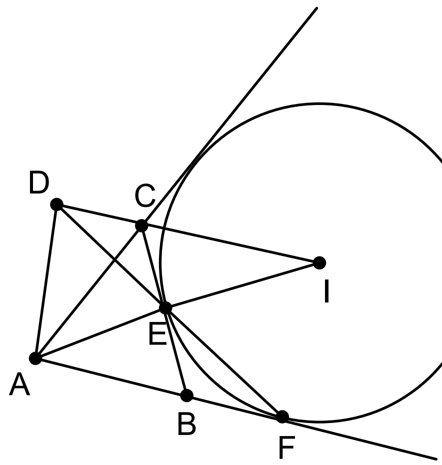
16、（本题满分 16 分）

【定义：和三角形一边和另两边的延长线同时相切的圆叫做三角形这边上的旁切圆。】

如图所示，已知：$\odot I$ 是$\triangle ABC$ 的 BC 边上的旁切圆，E、F 分别是切点，$AD \perp IC$ 于点 D。

⑴试探究：D、E、F 三点是否同在一条直线上？证明你的结论。

⑵设 $AB=AC=5, BC=6,$ 如果△DIE 和△AEF 的面积之比等于 m，$\dfrac{DE}{EF}=n$，试作出分别以 $\dfrac{m}{n}$、$\dfrac{n}{m}$ 为两根且二次项系数为 6 的一个一元二次方程。



参考答案与评分标准

一、选择题（共 5 小题，每题 6 分，共 30 分. 以下每小题均给出了代号为 A,B,C,D 的四个选项,其中有且只有一个选项是正确的. 请将正确选项的代号填入题后的括号内. 不填、多填或错填均不得分）

1、如果关于 x 的方程 $x^2-ax+a^2-3=0$ 至少有一个正根，则实数 a 的取值范围是（ C ）

A、$-2<a<2$　　B、$\sqrt{3}<a\le 2$　　C、$-\sqrt{3}<a\le 2$　　D、$-\sqrt{3}\le a\le 2$

2、如图，已知：点 E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB、BC 的中点，BD、DF 分别交 CE 于点 G、H，若正方形 $ABCD$ 的面积是 240，则四边形 $BFHG$ 的面积等于……………………（ B ）

A、26　　B、28

C、24　　D、30

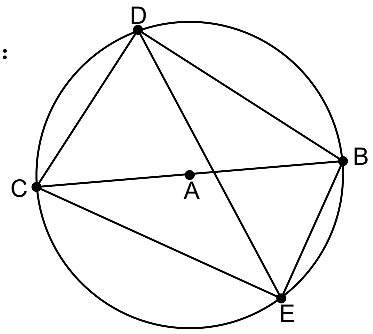
3、设 x、y、z 是两两不等的实数，且满足下列等式：

$\sqrt[6]{x^3(y-x)^3}+\sqrt[6]{x^3(z-x)^3}=\sqrt[6]{y-x}-\sqrt[6]{x-z}$，则代数式

$x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的值是…………………（ A ）

A、0　　B、1　　C、3　　D、条件不足，无法计算

4、如图，四边形 $BDCE$ 内接于以 BC 为直径的$\odot A$，已知：



$BC=10,\cos\angle BCD=\dfrac{3}{5},\angle BCE=30^\circ$，则线段 DE 的长是…………………　（　D　）

A、$\sqrt{89}$　B、$7\sqrt{3}$　C、$4+3\sqrt{3}$　D、$3+4\sqrt{3}$

5、某学校共有 3125 名学生，一次活动中全体学生被排成一个 n 排的等腰梯形阵，且这 n 排学生数按每排都比前一排多一人的规律排列，则当 n 取到最大值时，排在这等腰梯形阵最外面的一周的学生总人数是…………………（　B　）

A、296　　B、221　　C、225　　D、641

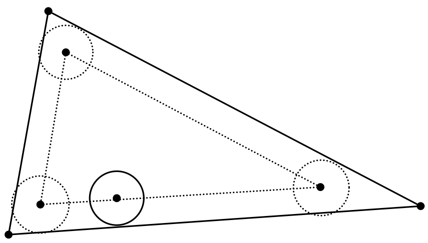
二、填空题：（共 5 小题，每题 6 分，共 30 分。不设中间分）

6、已知：实常数 a、b、c、d 同时满足下列两个等式：⑴ $a\sin\theta+b\cos\theta-c=0$；⑵ $a\cos\theta-b\sin\theta+d=0$（其中 θ 为任意锐角），则 a、b、c、d 之间的关系式是：

__$a^2+b^2=c^2+d^2$__。

7、函数 $y=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+4|x-4|$ 的最小值是____8____。

8、已知一个三角形的周长和面积分别是 84、210，一个单位圆在它的内部沿着三边匀速无摩擦地滚动一周后回到原来的位置（如图），则这个三角形的内部以及边界没有被单位圆滚过的部分的面积是____84—π____。



9、已知：$x=\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$，则 $\sqrt{2}$ 可用含 x 的有理系数三次多项式来表示为：$\sqrt{2}=$

$-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{11}{6}x$　。

10、设p、q、r 为素数，则方程 $p^3=p^2+q^2+r^2$ 的所有可能的解p、q、r组成的三元数组（p, q, r）是 (3,3,3)_________。

三、解答题（共 6 题，共 90 分。学生若有其它解法，也按标准给分）

11、（本题满分 12 分）

略解：由题意，密码 $etwcvcjw$ 对应的英语单词是 interest，ej 对应的英语单词是 is，$ncjw$ 对应的英语单词是 best，$wcabqcv$ 对应的英语单词是 teacher.　　　(9 分)

所以，翻译出来的一句英语是 Interest is best teacher,意思是“兴趣是最好的老师”。

（3 分）

12、（本题满分 15 分）

略解：$\because m=2x^2-6xy+5y^2=(x-2y)^2+(x-y)^2$，其中 x、y 是有理数，

$\therefore m=p^2+q^2$（其中 p、q 是任意有理数），只须 $p=x-2y, q=x-y$ 即可。　　　（3 分）

$\therefore$ 对于任意的两个两个 a、b，不妨设 $a=j^2+k^2, b=r^2+s^2$，其中 j、k、r、s 为任意给定的有理数，　　　（3 分）

则 $ab=(j^2+k^2)(r^2+s^2)=(jr+ks)^2+(js-kr)^2$；（3 分）

$$\frac{a}{b}=\frac{j^2+k^2}{r^2+s^2}=\frac{(j^2+k^2)(r^2+s^2)}{(r^2+s^2)^2}(3分)=\frac{(jr+ks)^2+(js-kr)^2}{(r^2+s^2)^2}$$

$$=\left(\frac{jr+ks}{r^2+s^2}\right)^2+\left(\frac{js-kr}{r^2+s^2}\right)^2。$$　　　（3 分）

13、（本题满分 15 分）

略解：⑴不妨设$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle ACD$的面积分别为 3、1、4,

$\because \frac{BG}{GD}=\frac{DE}{EA}=k$，　　$\therefore \triangle ABD$的面积是 6，$\triangle BDE$的面积是$\frac{6k}{k+1}$，

$\triangle CDG$的面积是$\frac{1}{k+1}$，　$\triangle CDE$的面积为$\frac{4k}{k+1}$，$\triangle DEG$的面积是$\frac{6k}{(k+1)^2}$。　　（3 分）由此可得：$\frac{1}{k+1}+\frac{6k}{(k+1)^2}=\frac{4k}{k+1}$，即 $4k^2-3k-1=0$，$\therefore k=1$　（3 分）

$\therefore \sqrt[3]{7k^2+20}=3$　　（1 分）

⑵由⑴知：E、G 分别为 AD、BD 的中点，又$\because$点 H 分线段 BE 成$\frac{BH}{HE}=2$的两段,

$\therefore$点 H 是$\triangle ABD$的重心。　　（2 分）

而当延长 BE 到 K，使得 $BE=EK$，连结 AK、DK 后便得到平行四边形 $ABDK$，再利用“平行四边形的四边平方和等于两对角线的平方和”就可得：

$2(AB^2+BD^2)=AD^2+4BE^2$，类似地有$\begin{cases}2(BD^2+AD^2)=AB^2+4DM^2\\2(AB^2+AD^2)=BD^2+4AG^2\end{cases}$，其中点 M 为边 AB 的中点。$\therefore$ $3(AB^2+BD^2+AD^2)=4(BE^2+DM^2+AG^2)$。（3 分）$\because$ $AH=\frac{2}{3}AG, BH=\frac{2}{3}BE, DH=\frac{2}{3}DM$，$AH^2+BH^2+DH^2=p^2$，$\therefore$ $BE^2+DM^2+AG^2=\frac{9}{4}p^2$，$\therefore AB^2+BD^2+AD^2=3p^2$。（3 分）

14、（本题满分 16 分）

略解：⑴$\because n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$，$\therefore$当式中的$n$从 1、2、3、…依次取到$n$时，就可得下列$n$个等式：（2 分）

$1^3-0^3=3-3+1, 2^3-1^3=3\times 2^2-3\times 2+1, 3^3-2^3=3\times 3^2-3\times 3+1, \cdots\cdots,$

$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$，将这n个等式的左右两边分别相加得：

$n^3=3\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-3\times(1+2+3+\cdots+n)+n$　（2 分）

即$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\dfrac{n^3+3(1+2+3+\cdots+n)-n}{3}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。（3 分）

⑵先求得A、B两点的坐标分别为$(3,0)$、$(0,3)$，$\therefore$点A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、$\cdots$、A_{n-1}的横坐标分别为$\dfrac{3}{n}$、$\dfrac{6}{n}$、$\dfrac{9}{n}$、$\cdots$、$\dfrac{3(n-1)}{n}$，点B_1、B_2、B_3、B_4、B_5、B_6、$\cdots$、B_{n-1}的纵坐标分别为$-(\dfrac{3}{n})^2+2(\dfrac{3}{n})+3$、$-(\dfrac{6}{n})^2+2(\dfrac{6}{n})+3$、$\cdots$、$-[\dfrac{3(n-1)}{n}]^2+2\times\dfrac{3(n-1)}{n}+3$。

（3 分）$\therefore$

$$S_1=\frac{9}{2n}, S_2=\frac{9(n^2+2n-3)}{2n^3}, S_3=\frac{9(n^2+4n-12)}{2n^3}, \cdots, S_n=\frac{9[n^2+2(n^2-n)-3(n-1)^2]}{2n^3}\ \therefore$$

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=\frac{9\{n^3+2n(1+2+3+\cdots+n-1)-3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]\}}{2n^3}=$$

$$\frac{9[n^3+2n\times\dfrac{n(n-1)}{2}-3\times\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}}{2n^3}=\frac{9(2n^2+n-1)}{4n^2}。\qquad（3 分）$$

$\therefore$①当$n=2010$时,

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+\cdots+S_{2008}=\frac{9(2\times 2010^2+2009)}{4\times 2010^2}=\frac{72739881}{16160400}\ ;$$

②$\because S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=\dfrac{9(2n^2+n-1)}{4n^2}=\dfrac{9}{2}+\dfrac{9}{4n}-\dfrac{9}{4n^2}$

$\therefore$当 n 取到无穷无尽时，上式的值等于$\dfrac{9}{2}$，即所有三角形的面积和等于$\dfrac{9}{2}$。　（3 分）

15、（本题满分 16 分）

略解：⑴由题意可知四边形$PQRS$必然是等腰梯形，（2 分）不妨设

$QS=PR=QR=4, PQ=PS=RS=x$，分别过点S、Q作QR、RS的垂线，垂足为I、F，则由$\triangle QRF \backsim \triangle RSI$得到$\dfrac{RI}{RF}=\dfrac{RS}{QR}$，即$\dfrac{\frac{4-x}{2}}{\frac{x}{2}}=\dfrac{x}{4}$，解得$x=2\sqrt{5}-2$。

$\therefore SI=\sqrt{RS^2-IR^2}=\sqrt{x^2-(\frac{4-x}{2})^2}=\sqrt{10-2\sqrt{5}}<2.4,$

$\therefore$第④种塑料板**"可操作"。**　（5 分）

⑵如上图所示，分别作直角三角形ABC斜边BC上的高AH、等腰三角形JKL的腰JL上的高KE、等腰三角形OMN底边上的高MG，易求得：$AH=2.4$，$MG=2.5$.　(2 分)

又由⑴可得等腰梯形$PQRS$的锐角底角是$72°$，$\triangle JKL \cong \triangle PQR$，$\therefore KE=SI$.

而黄金矩形$WXYZ$的宽等于$4\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=2\sqrt{5}-2>2.4,$　（4 分）

$\therefore$第①②④三种塑料板**"可操作"**；而第③⑤两种塑料板**"不可操作"。**

$\therefore$从这五种塑料板中任意取两种至少有一种**"不可操作"**的概率$P=\dfrac{7}{10}$。（3 分）

16、（本题满分 16 分）

略解：⑴结论：D、E、F 三点是同在一条直线上。（1 分）

证明：分别延长 AD、BC 交于点 K，由旁切圆的定义及题中已知条件得：

$AD = DK$， $AC = CK$，再由切线长定理得：$AC + CE = AF, BE = BF$，（3 分）

$\therefore KE = AF$。$\therefore \frac{KD}{DA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EK} = 1$，由梅涅劳斯定理的逆定理可证 D、E、F 三点共线。（3 分）

⑵$\because AB = AC = 5, BC = 6, \therefore A$、$E$、$I$ 三点共线，$CE = BE = 3, AE = 4$，连结 IF，则$\triangle ABE \backsim \triangle AIF$，$\triangle ADI \backsim \triangle CEI$，$A$、$F$、$I$、$D$ 四点共圆。（2 分）

设$\odot I$ 的半径为 r，则：$\frac{3}{r} = \frac{4}{8}, r = 6, \therefore AI = 10, \frac{AD}{ID} = \frac{3}{6}$,即 $AD = 2\sqrt{5}$，$ID = 4\sqrt{5}$，

$\therefore$由$\triangle AEF \backsim \triangle DEI$ 得：$m = (\frac{4\sqrt{5}}{8})^2 = \frac{5}{4}, \frac{DE}{AE} = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}, DE = 2\sqrt{5}$，$\frac{IE}{EF} = \frac{\sqrt{5}}{2}, EF = \frac{12}{5}\sqrt{5}$，$\therefore n = \frac{5}{6}$。（4 分）

$\therefore \begin{cases} \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{13}{6} \\ \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1 \end{cases}$，因此，由韦达定理可知：分别以$\frac{m}{n}$、$\frac{n}{m}$为两根且二次项系数为 6 的一个一元二次方程是 $6x^2 - 13x + 6 = 0$。（3 分）