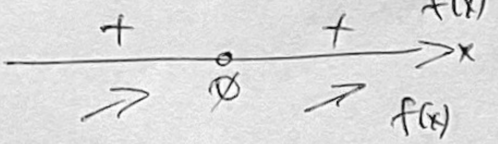
1.a $y=\frac{xe^x}{e^x-1}$

$D(y)$: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$$y'=\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)'=\frac{(xe^x)'(e^x-1)-xe^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-xe^x\cdot e^x}{(e^x-1)^2}=$$

$$=\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-xe^{2x}}{(e^x-1)^2}$$

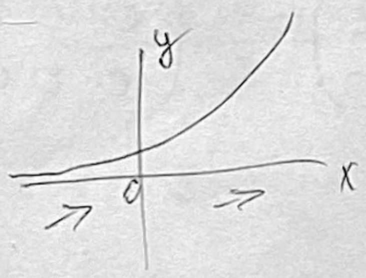
В т. $x=0$ функция не определена



$$f'(-1)=\frac{(e^{-1}-e^{-1})(e^{-1}-1)+1\cdot e^{-2}}{(e^{-1}-1)^2}=\frac{e^{-2}}{(e^{-1}-1)^2}=\frac{e^{-2}}{e^{-2}-2e^{-1}+1}=$$

$$=\frac{1}{1-2\frac{e^{-1}}{e^{-2}}+\frac{1}{e^{-2}}}=\frac{1}{1-2e+e^2}=\frac{1}{1-2\cdot 2{,}71+(2{,}71)^2}\approx 0{,}19>0$$

$$f'(1)=\frac{(e+e)(e-1)-e^2}{(e-1)^2}=\frac{9{,}34-7{,}3}{2{,}95}\approx 0{,}69>0$$



Функция возрастает от $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$$y'' = \left(\frac{(e^x + xe^x)(e^x-1) - x\cdot e^{2x}}{(e^x-1)^2} \right)' =$$

$$= \frac{\left((e^x+xe^x)(e^x-1) - xe^{2x}\right)'(e^x-1)^2 - \left((e^x+xe^x)(e^x-1) - xe^{2x}\right)\left((e^x-1)^2\right)'}{(e^x-1)^4} =$$

$$= \frac{\left(\left((e^x+xe^x)(e^x-1)\right)' - \left(e^{2x} + x(e^{2x})'\right)\right)(e^x-1)^2 - \left((e^x+xe^x)(e^x-1) - xe^{2x}\right)\cdot 2(e^x-1)\cdot e^x}{(e^x-1)^4} =$$

$$= \frac{(e^{3x} - e^{2x} - xe^x)(e^x-1) - 2e^x(e^{2x} - e^x - xe^x)}{(e^x-1)^3}$$

$y'' \geq 0$ $\qquad\qquad$ $y'' \leq 0$

$x \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x \leq 0$

От $(-\infty;+\infty)$ функция выпукла вниз

1.б $\quad y = \dfrac{\ln^2 x}{x} - 3x$

$D(y)$: $x \in (0;+\infty)$

$$y' = \frac{\left(2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right)x - \ln^2 x}{x^2} - 3 = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^3} - 3$$

В т. $x=0$ функция не определена

$$y'(e) = \frac{2\ln e - \ln^2 e}{e^2} - 3 = \frac{2\cdot 1 - 1}{7{,}38} - 3 \approx -2{,}86 < 0$$

$\searrow \quad y$

$0 \longrightarrow x$

$- \quad y'$

Функция убывает при $x \in (0;+\infty)$

$$y'' = \left(\frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} - 3\right)' = \frac{\left(2\cdot\frac{1}{x} - 2\,\frac{\ln x}{x}\right)x^2 - (2\ln x - \ln^2 x)2x}{x^4} \geq 0$$

Функция вогнутая вниз при $x \in (0;+\infty)$

1.в $\quad y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1-2x}\right) = \arccos\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)$

$D(y)$: $x \in (-\infty;0) \cup (\frac{1}{2};+\infty)$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}} \cdot \frac{-(1-2x)-(1-x)(-2)}{(1-2x)^2} =$$

$$= -\frac{1\cdot(-1+\cancel{2x}+2-\cancel{2x})}{(1-2x)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}} = -\frac{1}{(1-2x)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}}$$

$x \neq 0$; $x \neq \frac{1}{2}$

$$y'(-1) = -\frac{1}{9\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = -\frac{1}{6{,}73} < 0$$

$$y'(1) = -\frac{1}{1\cdot\sqrt{1}} = -1 < 0$$

$\searrow \quad\quad \searrow \quad y$

$- \quad 0 \quad\quad \frac{1}{2} \quad - \quad y'$

Функция убывает от $(-\infty;0) \cup (\frac{1}{2};+\infty)$

$$y'' = \left(-\frac{1}{(1-2x)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}}\right)' = \frac{\left((1-2x)^2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}\right)'}{\left((1-2x)^2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-4(1-2x)\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2} + (1-2x)^2\,\frac{\left(1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2\right)'}{2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^2}}}{(1-2x)^4\left(1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2\right)} = \square$$

$$\bigcirc = \left(1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2\right)' = -2\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)' = -2\,\frac{1-x}{1-2x}\cdot\frac{-(1-2x)-(1-x)(-2)}{(1-2x)^2} =$$

$$= -2\,\frac{1-x}{1-2x}\cdot\frac{-1+\cancel{2x}+2-\cancel{2x}}{(1-2x)^2} = -2\,\frac{1-x}{(1-2x)^3}$$

$$\square = \frac{-4(1-2x)\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2} + (1-2x)^2\cdot\frac{-2\,\frac{1-x}{(1-2x)^3}}{2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}}}{(1-2x)^4\left(1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{-4(1-2x)\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2} - (1-2x)^2\,\frac{1-x}{(1-2x)^3\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}}}{(1-2x)^4\left(1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{-4\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2} - \frac{(1-x)(1-2x)}{(1-2x)^3\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}}}{(1-2x)^3\left(1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2\right)} = \frac{-4\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2} - \frac{1-x}{(1-2x)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}}}{(1-2x)^3\left(1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2\right)}$$

$$y''(-1)=\frac{-4\cdot 0{,}74-\frac{2}{9\cdot 0{,}74}}{27\left(1-\frac{4}{9}\right)}=\frac{-3{,}25}{15}=-0{,}27<0$$

$$y''(1)=\frac{-4\cdot 1-0}{(-1)\cdot(1)}=\frac{-4}{-1}=4>0$$

Ответ: на интервале $(-\infty;0)$ функция выпукла вверх, на интервале $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ - вниз.

2. а $y=x^3-6x^2+9x$

$D(y)$: $x\in(-\infty,+\infty)$

$y'=3x^2-12x+9=0$

$D=(-12)^2-4\cdot 3\cdot 9=36$

$x_1=\frac{12+6}{6}=3$; $x_2=\frac{12-6}{6}=1$ Стационарные точки

$3x^2-12x+9>0$

$3x^2-12x+9<0$

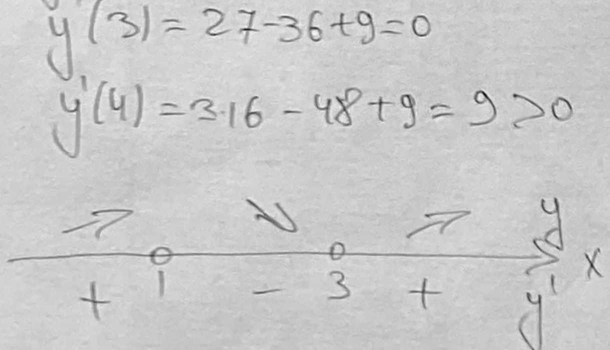
$y'(-1)=3+12+9=24>0$

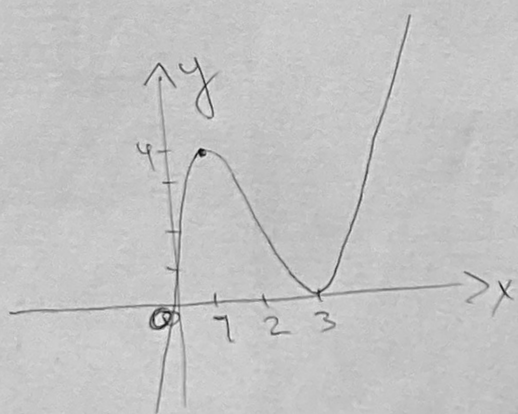
$y'(1)=3-12+9=0$

$y'(2)=12-24+9=-3<0$

$y'(3)=27-36+9=0$

$y'(4)=3\cdot 16-48+9=9>0$





Функция возрастает на интервале $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, убывает на интервале $(1; 3)$

$y'' = 6x - 12$

$6x - 12 \leq 0$ $\quad$ $6x - 12 \geq 0$

$x \leq 2$ $\quad$ $x \geq 2$

На интервале от $(-\infty; 2)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(2; +\infty)$ выпукла вниз

2.б $y = -x + \cos x$

$D(y): x \in (-\infty; +\infty)$

$y' = -1 - \sin x$

$y'(\pi) = -1 - \sin(\pi) = -1{,}05 < 0$

$y'(0) = -1 - \sin 0 = -1 < 0$

$y'(1) = -1 - \sin 1 = -1{,}017 < 0$

Функция убывает на интервале $(-\infty; +\infty)$

$y'' = (-1 - \sin x)' = -\cos x$

$-\cos x \leq 0$

$x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ $k \in Z$ $\quad$ Функция выпукла вниз

$-\cos x \geq 0$

$x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ $k \in Z$ $\quad$ Функция выпукла вверх