1.а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$

По признаку Даламбера $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ ряд сходится

если > 1 ряд расходится

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{3^n}{2^n}} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{3^n} = \frac{\cancel{3^n} \cdot 3}{\cancel{2^n} \cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{3^n}} = \frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2} > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$ расходится

1.б $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n^2 \cdot 5^n}$

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ряд сходится, а $\frac{n-3}{n^2 \cdot 5^n} < \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n^2 \cdot 5^n}$ ряд сходится

1.в $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+2n+1}$

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^3} = n^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$ ряд сходится

$\frac{\sqrt{n}}{n^3+2n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n^3} \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+2n+1}$ сходится

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

$-1 \le \cos n \le 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \cancel{\infty}\, 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right|$ сходящийся,

поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

3.а $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$

$U_n = x^{2n}$; $U_{n+1} = x^{2(n+1)}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{x^{2(n+1)}}{x^{2n}}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2(n+1)}}{x^{2n}} \right| = \left| \frac{x^{2n} \cdot x^2}{x^{2n}} \right| = |x^2| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n}}{x^{2n}} \right| = |x^2|$

$-1 < x < 1$

$x = -1$

$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = -1$, ряд сходится, значит $x=-1$ включаем в область сходимости

$\lim_{n\to\infty} 1^{2n} = 1$, ряд сходится, значит $x=1$ включаем в область сходимости

Обл. сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ $-1 \le x \le 1$

3б $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

$$U_n = \frac{x^n}{n^2}; \quad U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^n} = \frac{\cancel{x^n} \cdot x \cdot n^2}{(n+1)^2 \cancel{x^n}} = \frac{xn^2}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{xn^2}{(n+1)^2} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2}} =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = |x| \cdot 1 = |x|$$

$$-1 < x < 1$$

$x = -1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Ряд знакочередующийся, ряд сходится $\Rightarrow x = -1$ включаем в область сходимости.

$x = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} = 0$$

т.к. $p = 2 > 1$ ряд сходится

Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

$$-1 \le x \le 1$$

3в $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-3)^n x^n$

$u_n = (-3)^n x^n \; ; \; u_{n+1} = (-3)^{n+1} \cdot x^{n+1}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(-3)^n \cdot x^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-3)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(-3)^n x^n} \right| = \left| \frac{\cancel{-3^n} \cdot (-3) \cdot \cancel{x^n} \cdot x}{\cancel{(-3)^n} \cdot \cancel{x^n}} \right| = -3|x|$$

$-1 < -3x < 1$

$\frac{1}{3} < x < -\frac{1}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$

$$\lim_{n \to \infty} \left| (-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right| = \frac{3^n}{3^n} = 1$$

Ряд знакочередующийся, ряд сходится $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{3}$ включаем в область сходимости

$x = \frac{1}{3}$

$$\lim_{n \to \infty} \left| (-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \right| = \frac{3^n}{3^n} = 1$$

Ряд сходится, $x = \frac{1}{3}$ включаем в область сходимости

$\frac{1}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3}$