1.a $27x^6+(a-x)^3+3x^2=x-a$

$3x^2=t$

$x-a=p$

$t^3+t=p+p^3$

$F(t)=F(p)$ тогда и только тогда, когда $t=p$

$\Rightarrow$ $x-a=3x^2$

$a=x-3x^2$

$x-3x^2=0$

$D=b^2-4ac$

$a=-3,\ b=1,\ c=0$

$D=1$

$x_1=\frac{-1-\sqrt{1}}{-6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{-1+\sqrt{1}}{-6}=\frac{0}{-6}=0$

При $a=0$ уравнение имеет два корня $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=0$

2.a $f(x) = 1 + 4x^2 - \frac{2x^4}{3}$

$f'(x) = 8x - \frac{2}{3} \cdot 4x^3$

$f''(x) = 8 - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 3x^2 = 8 - 8x^2$

$f''(x) \geq 0$ $\quad 8 - 8x^2 \geq 0$

$8x^2 \geq 8$

$x^2 \geq 1$

$x \geq -1 \; ; \; x \geq 1$

$f''(x) \leq 0$ $\quad 8 - 8x^2 \leq 0$

$8x^2 \leq 8$

$x^2 \leq 1$

$x \leq -1 \; ; \; x \leq 1$

$f''(x) = 0$ $\quad 8 - 8x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = -1 \; ; \; x = 1$

Функция выпукла вниз на интервале от $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, а выпукла вверх на интервале $(-1; 1)$

$x = 1$ и $x = -1$ являются точками перегиба

2.б $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(4-x^2)-x(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{4-x^2+2x^2}{(4-x^2)^2}=\frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4+x^2)'(4-x^2)^2-(4+x^2)((4-x^2)^2)'}{(4-x^2)^4}=$$

$$=\frac{2x(4-x^2)^2-(4+x^2)(-4x(4-x^2))}{(4-x^2)^4}=\frac{2x(4-x^2)^2}{(4-x^2)^4}+\frac{4x(4+x^2)(4-x^2)}{(4-x^2)^4}=$$

$$=\frac{2x(4-x^2)}{(4-x^2)^3}+\frac{4x(4+x^2)}{(4-x^2)^3}=\frac{8x-2x^3+4x^3+16x}{(4-x^2)^3}=$$

$$=\frac{2x^3+24x}{(4-x^2)^3}$$

$f''(x)$ существует только тогда, когда $x\neq-2$ и $x\neq2$

$f''(x)=0$, $\dfrac{2x^3+24x}{(4-x^2)^3}=0$

$x=0$

Интервалы $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$

Найдем $f''(x)$ в точках $-3, -1, 1, 3$

x	-3	-1	1	3
$f''(x)$	$1{,}008$	$-\frac{26}{27}$	$\frac{26}{27}$	$-1{,}008$
знак	$+$	$-$	$+$	$-$

Функция выпукла вверх на интервале $(-\infty; -2)$,
выпукла вниз на интервале $(-2; 0)$,
выпукла вверх на интервале $(0; 2)$,
выпукла вниз на интервале $(2; +\infty)$
$x=0$ является точкой перегиба

3.а $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$D(f(x)) \in (-\infty; +\infty)$

$f'(x) = 2x - 2$

$2x - 2 = 0$

$x = 1$ стационарная точка

$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$

$x = 1$ стационарная точка. При $x = 1$ функция принимает минимальное значение равное 2. Про максимум функции ничего сказать нельзя.

3.б $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$

$D(f(x)) \in (-\infty; +\infty)$

$f'(x) = x^4 - x^2$

$x^4 - x^2 = 0$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$ Стационарные точки

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{-3+5}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15}$$

На интервале $(-\infty; -1)$ максимум функции $\frac{2}{15}$, а о наименьшем значении выводов сделать нельзя.

На интервале $(-1; 0)$ максимум функции $\frac{2}{15}$, минимум 0.

На интервале от $(0, 1)$ максимум 0, минимум $-\frac{2}{15}$.

На интервале $(1; +\infty)$ минимум ф-ии $-\frac{2}{15}$, а о максимуме вывод сделать нельзя.

3.в $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$D(f(x)) = (-\infty; +\infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1, \ x_2 = -1$ Стационарные точки

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - 3x + 1) = -1 + 3 + 1 = 3$

$\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 3x + 1) = 1 - 3 + 1 = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

На интервале $(-\infty; -1)$ максимум функции равен 3, о минимуме вывод сделать нельзя.

На интервале $(-1; 1)$ максимум функции 3, минимум -1.

На интервале $(1; +\infty)$ минимум функции -1, а о максимуме функции вывод сделать нельзя.

3.2 $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$

$D(f(x)) = (-\infty; +\infty)$

$f'(x) = (2x + 3\sqrt[3]{x^2})' = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 2 + 2x^{-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)$ существует во всех x, что $x > 0$

$\lim\limits_{x \to 0} (2x + 3\sqrt[3]{x^2}) = 2 \cdot 0 + 3\sqrt[3]{0} = 0 + 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 3\sqrt[3]{x^2}) = +\infty$

При $x = 0$ функция имеет глобальный минимум.

О максимуме функции вывод сделать нельзя, при стремлении x к ∞ ($x \to \infty$) функция $\to$ на ∞

4.a $f(x)=\frac{x-5}{2x-5}$

$2x-5\neq 0$

$x\neq\frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to 5/2-0}\frac{x-5}{2x-5}=\lim_{x\to 5/2-0}(x-5)\cdot\lim_{x\to 5/2-0}\left(\frac{1}{2x-5}\right)=$$

$$=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}-5}=-\frac{5}{2}\cdot(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{5}{2}+0}\frac{x-5}{2x-5}=\lim_{x\to \frac{5}{2}+0}(x-5)\cdot\lim_{x\to \frac{5}{2}+0}\frac{1}{2x-5}=$$

$$=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}-5}=-\frac{5}{2}\cdot\infty=-\infty$$

В точке $x=\frac{5}{2}$ функция имеет разрыв второго рода.

4.б $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

$D(f(x))\in(0;+\infty)$

$$\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}\sin(x)\cdot\cos(x)=\sqrt{0}\cdot\sin(0)\cdot\cos(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0-0}\sqrt{x}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=\sqrt{0}\cdot\sin(0)\cdot\cos(0)=0$$

$f(0)=\sqrt{0}\cdot\sin(0)\cdot\cos(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = f(0)$

Функция непрерывна

4.в $f(x)=\dfrac{4}{xe^x}$

$D(f(x)) \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$xe^x=0$

$x=0$

$\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{4}{xe^x} = \dfrac{4}{0\cdot e^0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{4}{xe^x} = \dfrac{4}{0\cdot e^0} = -\infty$

В точке $x=0$ функция имеет разрыв второго рода.