1.a $27x^6+(a-x)^3+3x^2=x-a$

$3x^2=t$

$x-a=p$

$t^3+t=p+p^3$

$F(t)=F(p)$ тогда и только тогда, когда $t=p$

$\Rightarrow$ $x-a=3x^2$

$a=x-3x^2$

$x-3x^2=0$

$D=b^2-4ac$

$a=-3,\ b=1,\ c=0$

$D=1$

$x_1=\frac{-1-\sqrt{1}}{-6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{-1+\sqrt{1}}{-6}=\frac{0}{-6}=0$

При $a=0$ уравнение имеет два корня $x_1=\frac{1}{3}; x_2=0$

2.a $f(x) = 1 + 4x^2 - \frac{2x^4}{3}$

$f'(x) = 8x - \frac{2}{3} \cdot 4x^3$

$f''(x) = 8 - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 3x^2 = 8 - 8x^2$

$f''(x) \geq 0 \qquad 8 - 8x^2 \geq 0$

$8x^2 \geq 8$

$x^2 \geq 1$

$x \geq -1 \; ; \; x \geq 1$

$f''(x) \leq 0 \qquad 8 - 8x^2 \leq 0$

$8x^2 \leq 8$

$x^2 \leq 1$

$x \leq -1 \; ; \; x \leq 1$

$f''(x) = 0 \qquad 8 - 8x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = -1 \; ; \; x = 1$

Функция выпукла вниз на интервале от $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, а выпукла вверх на интервале $(-1; 1)$

$x = 1$ и $x = -1$ являются точками перегиба

2.б $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(4-x^2) - x(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{4-x^2+2x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4+x^2)'(4-x^2)^2 - (4+x^2)((4-x^2)^2)'}{(4-x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(4-x^2)^2 - (4+x^2)(-4x(4-x^2))}{(4-x^2)^4} = \frac{2x(4-x^2)^2}{(4-x^2)^4} + \frac{4x(4+x^2)(4-x^2)}{(4-x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(4-x^2)}{(4-x^2)^3} + \frac{4x(4+x^2)}{(4-x^2)^3} = \frac{8x-2x^3+4x^3+16x}{(4-x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x^3+24x}{(4-x^2)^3}$$

$f''(x)$ существует только тогда, когда $x \neq -2$ и $x \neq 2$

$f''(x) = 0$, $\frac{2x^3+24x}{(4-x^2)^3} = 0$

$$x = 0$$

Интервалы $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$

Найдем $f''(x)$ в точках $-3, -1, 1, 3$

x	-3	-1	1	3
$f''(x)$	1,008	$-\frac{26}{27}$	$\frac{26}{27}$	-1,008
знак	+	−	+	−

Функция выпукла вверх на интервале $(-\infty; -2)$,
выпукла вниз на интервале $(-2; 0)$,
выпукла вверх на интервале $(0; 2)$,
выпукла вниз на интервале $(2; +\infty)$
$x=0$ является точкой перегиба

3. а $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$D(f(x)) \in (-\infty; +\infty)$

$f'(x) = 2x - 2$

$2x - 2 = 0$

$x = 1$ стационарная точка

$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

$x = 1$ стационарная точка. При $x = 1$ функция принимает минимальное значени равное 2. Про максимум функции ничего сказать нельзя.

3.б $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$

$D(f(x)) \in (-\infty; +\infty)$

$f'(x) = x^4 - x^2$

$x^4 - x^2 = 0$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$ Стационарные точки

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{-3+5}{15} = \frac{2}{15}$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15}$

На интервале $(-\infty; -1)$ максимум функции $\frac{2}{15}$, а о наименьшем значении выводов сделать нельзя.

На интервале $(-1; 0)$ максимум функции $\frac{2}{15}$, минимум 0.

На интервале от $(0, 1)$ максимум 0, минимум $-\frac{2}{15}$.

На интервале $(1; +\infty)$ минимум ф-ии $-\frac{2}{15}$, а о максимуме вывод сделать нельзя.

3.6 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$D(f(x)) = (-\infty; +\infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1$ Стационарные точки

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1} (x^3 - 3x + 1) = -1 + 3 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 3x + 1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

На интервале $(-\infty; -1)$ максимум функции равен 3, о минимуме вывод сделать нельзя.

На интервале $(-1; 1)$ максимум функции 3, минимум -1.

На интервале $(1; +\infty)$ минимум функции -1, а о максимуме функции вывод сделать нельзя.

3.2 $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$

$D(f(x)) = (-\infty; +\infty)$

$f'(x) = (2x + 3\sqrt[3]{x^2})' = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 2 + 2x^{-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)$ существует во всех x, что $x > 0$

$\lim\limits_{x \to 0} (2x + 3\sqrt[3]{x^2}) = 2 \cdot 0 + 3\sqrt[3]{0} = 0 + 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} (2x + 3\sqrt[3]{x^2}) = +\infty$

При $x = 0$ функция имеет глобальный минимум.

О максимуме функции вывод сделать нельзя, при стремлении x к ∞ $(x \to \infty)$ функция $\to$ на ∞

4.а $f(x) = \frac{x-5}{2x-5}$

$2x - 5 \neq 0$

$x \neq \frac{5}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{5}{2}-0} \frac{x-5}{2x-5} = \lim_{x \to \frac{5}{2}-0} (x-5) \cdot \lim_{x \to \frac{5}{2}-0} \left(\frac{1}{2x-5}\right) =$$

$$= -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{2} - 5} = -\frac{5}{2} \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{5}{2}+0} \frac{x-5}{2x-5} = \lim_{x \to \frac{5}{2}+0} (x-5) \cdot \lim_{x \to \frac{5}{2}+0} \frac{1}{2x-5} =$$

$$= -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{2} - 5} = -\frac{5}{2} \cdot \infty = -\infty$$

В точке $x = \frac{5}{2}$ функция имеет разрыв второго рода.

4.б $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

$D(f(x)) \in (0; +\infty)$

$$\lim_{x \to 0+0} \sqrt{x} \sin(x) \cdot \cos(x) = \sqrt{0} \cdot \sin(0) \cdot \cos(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0-0} \sqrt{x} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \sqrt{0} \cdot \sin(0) \cdot \cos(0) = 0$$

$f(0) = \sqrt{0} \cdot \sin(0) \cdot \cos(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = f(0)$

Функция непрерывна

4.в $f(x) = \frac{4}{xe^x}$

$D(f(x)) \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$x e^x = 0$

$x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{4}{xe^x} = \frac{4}{0 \cdot e^0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{4}{xe^x} = \frac{4}{0 \cdot e^0} = -\infty$

В точке $x=0$ функция имеет разрыв второго рода.