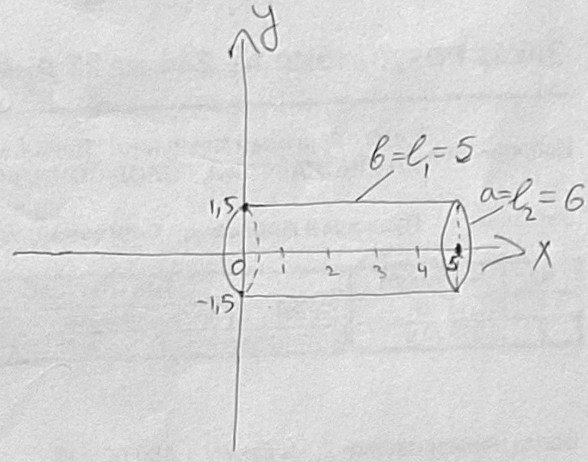
1. $S = 30\ м^2$



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$S = a \cdot b$

Пусть $a = 6$, $b = 5$

Тогда $f(x) = 1,5$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^5 \left(\frac{3}{2}\right)^2 dx = \pi \frac{9}{4} x \Big|_0^5 = \pi \cdot \frac{9}{4} \cdot 5 - \pi \cdot \frac{9}{4} \cdot 0 = \frac{45}{4} \pi\ м^3$$

2.а $f(x) = (x-3)^6$

$D(y)$: $x \in (-\infty; +\infty)$

$f'(x) = 6(x-3)^5$

$6(x-3)^5 = 0$

$x = 3$ стационарная точка

$f(3) = (3-3)^6 = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} (x-3)^6 = (+\infty)^6 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x-3)^6 = (-\infty)^6 = +\infty$$

В точке $x=3$ функция имеет глобальный минимум. О максимуме функции вывод сделать нельзя.

2.б $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg}(x)$

$D(y): x \in (-\infty; +\infty)$

$$f'(x) = (\ln\sqrt{1+x^2})' + (\operatorname{arctg}(x))' = \frac{(\sqrt{1+x^2})'}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x}{1+x^2}$$

$$\frac{1+x}{1+x^2} = 0$$

$x = -1$ $\quad$ $1+x^2 = 0$

$D = -4 < 0$

Нет действительных корней

$$f(-1) = \ln\sqrt{1+1} + \operatorname{arctg}(-1) = \ln\sqrt{2} - \operatorname{arctg}(1) = \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} =$$

$$= 0{,}34 - 0{,}785 \approx -0{,}445$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln\sqrt{1+x^2}) + \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{\pi}{2} = \ln\sqrt{\infty^2} + \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x) = \ln\sqrt{(-\infty)^2} + \frac{\pi}{2} = \infty$$

В точке $x=-1$ функция имеет глобальный минимум. О максимуме функции вывод сделать нельзя

2.6 $f(x,y) = x^2y^2 + \frac{x^2+y^2}{2} + xy + 1$

$$\frac{df}{dx} = 2xy^2 + \frac{1}{2}\cdot 2x + y = 2xy^2 + x + y$$

$$\frac{df}{dy} = \left(x^2y^2 + \frac{x^2+y^2}{2} + xy + 1\right)'_y = 2yx^2 + y + x$$

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy^2 + x + y = 0 \\ 2yx^2 + y + x = 0 \end{cases}$$

$$x + y = -2xy^2$$

$$2yx^2 - 2xy^2 = 0$$

$$2yx^2 = 2xy^2$$

$$x = y \Rightarrow 2y\cdot y^2 + y + y = 0$$

$$2y(y^2+1) = 0$$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$M_0(0,0)$ - Стационарная точка

$$AC - B^2 > 0$$

$$A = f''_{xx}(M_0), \quad B = f''_{xy}(M_0); \quad C = f''_{yy}(M_0)$$

$$f''_{xx} = (2xy^2 + x + y)'_x = 2y^2 + 1$$

$$f''_{xy} = (2yx^2 + y + x)'_y = 2\cdot 2yx + 1 = 4xy + 1$$

$$f''_{yy} = (2yx^2 + y + x)'_y = 2x^2 + 1$$

$AC-B^2=(2\cdot 0+1)(2\cdot 0+1)-(0+1)^2=1-1=0$

$A=f''_{xx}(M_0)=1$

$B=f''_{xy}(M_0)=1$

$C=f''_{yy}(M_0)=1$

$f_{min}(M_0)=0+0+0+1=1$

В точке $M_0(0,0)$ функция имеет минимум равный 1.

2.2 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

$\frac{df}{dx}=(x^3+y^3-3xy)'_x=3x^2-3y$

$\frac{df}{dy}=(x^3+y^3-3xy)'_y=3y^2-3x$

$\begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases}$

$3x=3y_2$

$y=x^2 \Rightarrow 3(x^2)^2-3x=0$

$3x(x^3-1)=0$

$x=0\ ;\ y=0$

$x=1\ ;\ y=1$

т. $M_0(0,0)$

$M_0(1,1)$ Стационарные точки

$A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$

$f''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x$

$f''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = \cancel{6x} = -3$

$f''_{yy} = (3y^2 - 3x)'_y = 6y$

$AC - B^2 = 6 \cdot 0 \cdot 6 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ => Нет экстремума в точке $M_0(0,0)$

Проверим в т. $M_0(1,1)$

$AC - B^2 = 6 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$

=> если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то минимум функции

$f(M_0) = x^3 + y^3 - 3xy = 1 + 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$

Ответ: в т. $M_0(1,1)$ функция имеет минимум равный -1

2.g $f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 - 2y)$

$\frac{df}{dx} = (e^{2x}(x + y^2 - 2y))' = 2e^{2x}(x + y^2 - 2y) + e^{2x}$

$\frac{df}{dy} = (e^{2x}(x + y^2 - 2y))' = e^{2x}(2y - 2)$

$$\begin{cases} 2e^{2x}(x+y^2-2y)+e^{2x}=0 \\ e^{2x}(2y-2)=0 \end{cases}$$

Из второго уравнения $\Rightarrow$, что $y=1$

$2e^{2x}(x+1^2-2\cdot 1)+e^{2x}=0$

$2e^{2x}(x-1)+e^{2x}=0$

$2e^{2x}(x-1)=-e^{2x}$

$2(x-1)=-1$

$2x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ т. $M_0(\frac{1}{2};1)$ стационарная точка

$A=f''_{xx}=(2e^{2x}(x+y^2-2y)+e^{2x})'_x=4e^{2x}(x+y^2-2y)+2e^{2x}+2e^{2x}=$

$=4e^{2x}(x+y^2-2y)+4e^{2x}$

$B=f''_{xy}=(2e^{2x}(x+y^2-2y)+e^{2x})'_y=2e^{2x}(2y-2)$

$C=f''_{yy}=(e^{2x}(2y-2))'_y=2e^{2x}$

$AC-B^2=(4e^1(\frac{1}{2}+1-2)+4e^1)\cdot 2e^1-\underbrace{2e^1(2\cdot 1-2)}_{=0}=4e^1(-\frac{1}{2})+4e^1\cdot 2e^1$

$=(-2e^1+4e^1)\cdot 2e^1=4e^1\approx 10{,}87>0$

т.к. $AC-B^2>0$ и $A>0 \Rightarrow$ минимум функции в т. $M_0(\frac{1}{2},1)$

$f(M_0)=e^{2x}(x+y^2-2y)=e^1(\frac{1}{2}+1-2)=-\frac{e}{2}$

Ответ: в т. $M_0(\frac{1}{2};1)$ минимум функции равен $-\frac{e}{2}$