Chapitre 12

Fonctions de références

Sommaire

1 Fonctions paraboles

1.1 Fonction $x \mapsto ax^2$ où $a \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^2$, où a est un réel non nul, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$ (f est une fonction polynôme).
- La fonction f est paire.
- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est appelée «**parabole de sommet** $O(0,0)$ **et d'axe** $x = 0$ (l'axe des ordonnées)».

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto 2x^2$ et $g : x \mapsto -\frac{2}{3}x^2$.

1.2 Fonction $x \mapsto ax^2 + b$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^2 + b$, où a et b sont des réels non nuls, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$ (f est une fonction polynôme).
- La fonction f est paire.
- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	b	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	b	$\searrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est une parabole de sommet $S(0, b)$ et d'axe $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto 2x^2 - 3$ et $g : x \mapsto -\frac{2}{3}x^2 + 1$.

1.3 Fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^2 + b$, où a est un réel non nul, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$ (f est une fonction polynôme).
- Pour tout x de D_f, on a $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est un parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$ et d'axe $x = \alpha$.

Remarques

- L'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est appelé «forme canonique» de l'expression $ax^2 + bx + c$.
- Il est à noter que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2-4ac}{4a}$.
- Rappelons que le terme $b^2 - 4ac$, noté Δ, est le discriminant de l'expression $ax^2 + bx + c$.

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto 2x^2 + 8x + 5$ et $g : x \mapsto -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$.

2 Fonctions hyperboles

2.1 Fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$ où $a \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{a}{x}$, où a est un réel non nul, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.
- La fonction f est impaire.
- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est appelée «**hyperbole de centre** $O(0,0)$ **et d'asymptotes** $x = 0$ **et** $y = 0$ (les axes du repère)».

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto \frac{4}{x}$ et $g : x \mapsto -\frac{3}{2x}$.

2.2 Fonction $x \mapsto \frac{a}{x} + b$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{a}{x} + b$, où a et b sont des réels non nuls, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.

- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :
  Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

  Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est un hyperbole de centre $\Omega(0, b)$ et d'asymptotes $x = 0$ (l'axe des ordonnées) et $x = b$.

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto \frac{4}{x} - 1$ et $g : x \mapsto -\frac{3}{2x} + 2$.

2.3 Fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ où $ad - bc \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, où $ad - bc \neq 0$, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -\frac{d}{c}\right\} = \mathbb{R} \smallsetminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.
- Pour tout x de D_f, on a $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$, où $\alpha = \frac{a}{c}$ et $\beta = -\frac{ad-bc}{c}$.
- Le tableau des variations de f dépend du signe de β :
  Si $\beta > 0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

  Si $\beta < 0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est un hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \alpha\right)$ et d'asymptotes $x = -\frac{d}{c}$ et $x = \alpha$.

Remarques

- L'écriture $\alpha + \frac{\beta}{cx+d}$ est appelé «forme réduite» de l'expression $\frac{ax+b}{cx+d}$.
- Rappelons que le terme $ad - bc$ est le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ issue de l'expression $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto \frac{-x+6}{x-2}$ et $g : x \mapsto -\frac{4x+1}{2x+2}$.

3 Exercices

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions numériques définies par $f(x) = -x^2 + 4x$ et $g(x) = \frac{4x}{x-2}$, et (C_f) et (C_g) leurs représentations graphiques dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer D_f et D_g les domaines de définitions respectifs de f et de g.
2. Déterminer la nature de (C_f) et (C_g).
3. Étudier les variations de f et g.

4. Déterminer l'intersection de (C_f) et les axes du repère.
5. Déterminer l'intersection de (C_g) et les axes du repère.
6. Tracer (C_f) et (C_g).
7. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.
8. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
9. Résoudre graphiquement suivant les valeurs du réels m les équations $f(x) = m$ et $g(x) = m$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{2x-2}$.
Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer D l'ensemble de définition f, et montrer que : $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{x-1}$ pour tout x de D.
2. Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.
3. Étudier les variations de f sur $]1;+\infty[$ et $]-\infty;1[$.
4. Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
5. Construire dans le même repère la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{3|x|-1}{2|x|-2}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

1. (a) Déterminer les images des réels $0\,;\,1\,;\,-1$ et 2 par f.
   (b) Déterminer les antécédents éventuels des réels $3\,;\,0$ et 5 par f.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = 4 - (x-1)^2$.
3. (a) Donner le tableau des variations de f.
   (b) En utilisant la courbe de la fonction $x \mapsto -x^2$, et une translation, construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^2 + 2|x| + 3$.
   (a) Étudier la parité de la fonction h.
   (b) Déduire des résultats précédents, la représentation graphique de h dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. (a) Déterminer D_f le domaine de définition f.
   (b) Calculer les images des réels $0\,;\,-2\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-3$ et 2 par f.
   (c) Déterminer les antécédents éventuels des réels suivants (s'ils existent) $1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,5$ et -1 par f.
2. (a) Montrer que pour tout x de D_f, on a $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$.
   (b) En déduire le tableau des variations de f.
   (c) À partir de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$, déduire la construction de la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \left|\frac{2x+1}{x+1}\right|$.
   (a) Déterminer D_g le domaine de définition de g.
   (b) Construire, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe de g.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$, et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.
2. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4$.
3. Déterminer la monotonie de f sur les deux intervalles $]-\infty;-4]$ et $[-4;+\infty[$.
4. Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.

6. Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$. Discuter selon les valeurs du paramètre réel m.
7. Construire dans le même repère la courbe de la fonction $g(x) = |f(x)|$.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ et $g(x) = \frac{x}{x-1}$.

1. Déterminer les variations de f, et en déduire que $f(x) \leq 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Tracer (C_f) la courbe représentative de f.
3. Déterminer les variations de g.
4. Tracer (C_g) la courbe représentative de g.
5. Soit a l'abscisse du point d'intersection des courbes (C_f) et (C_g).

   Résoudre graphiquement l'inéquation : $-2x^2 + 4x - \frac{2x-1}{x-1} > 0$.