

## سلسلة 8: النهايات

## التمرين 1

أحسب النهايات التالية:

(ا)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 3x + 1$

(د)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 3}$

(ز)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x - 5}$

(ي)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x}$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+12} - \sqrt{x-2}}$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

(و)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - x - 20}$

(ط)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

(يب)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$

(يه)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}}$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^4 - 2x^2 - 7x - 1$

(ه)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9x + 8}$

(ح)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^3 - x^2 + x - 30}$

(يا)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x+2}$

(يد)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4} - 2}$

## التمرين 2

أحسب النهايات التالية:

(ا)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x^2 + 1$

(د)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 - x^2 - 1$

(ز)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-5}{x^3 + x^2 - 9}$

(ي)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 1} + 2x - 1$

(يب)  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}$

(يد)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{\sqrt{2-x}}$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - x^3 - 3x^2 - 1$

(و)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 3}$

(ط)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x - 2x}$

(يا)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - x} + x$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x-1}$

(يو)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^3+1}}$

(يه)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2-3x+1}}{x}$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 + 5x^2 - x$

(ه)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2+1}{2x^2-6}$

(ح)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x$

## التمرين 3

أحسب النهايات التالية:

(ا)  $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{4x+3}{x-6}$

(د)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + |x-2| - 4}{x-2}$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{(x-3)^2}$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x^2+2x-3}$

(ه)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x^2-4x+3}$

## التمرين 4

أحسب النهايات التالية:

(ا)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$

(د)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x) - \sqrt{3} \cos(x)}{x - \frac{\pi}{3}}$

(ز)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{1 - \tan(x)}$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \cos(2x)}{\cos(3x) + 3 \cos(4x)}$

(و)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(x)}{x - \pi}$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin^2(2x)}$

(ه)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos(2x)}}{x^2}$

## التمرين 5

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+1}{3-x} & x \leq 2 \\ f(x) = 1 - ax^2 & x > 2 \end{cases}$  حيث  $a$  عدد حقيقي.

1. أحسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
2. أحسب وناقش حسب قيم  $a$  النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. حدد قيمة العدد  $a$  إذا علمت أن  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ .

## التمرين 6

حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$  ثم أحسب نهاياتها عند محداث  $D_f$  في الحالات التالية:

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } f(x) = -3x^2 - 2x + 1 & \text{ب) } f(x) = \frac{-3x+1}{2x+1} \\ \text{ج) } f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x-3} & \text{د) } f(x) = \sqrt{x-2} \\ \text{هـ) } f(x) = x^2 + \sin(x) & \text{و) } f(x) = \sqrt{x^2+2x} + \frac{x}{x+1} \\ \text{ز) } f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} \end{array}$$

## التمرين 7

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-x+2}{3-x} & x \leq 1 \\ f(x) = \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} & x > 1 \end{cases}$

1. حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
  2. أحسب النهايات التالية:
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{أ)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{ج)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{د)}$$

## التمرين 8

1. لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$
- أ) بين أن  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : |f(x) - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{x^2}$  ب) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $g(x) = \frac{2x+\cos(x)}{x+1}$
- أ) بين أن  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : |g(x) - 2| \leq \frac{3}{x}$  ب) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
3. لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بما يلي:  $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{x}$
- أ) بين أن  $\forall x \in \mathbb{R}^* : h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} - 1$
- ب) بين أن  $\forall x \in \mathbb{R}^* : |h(x) + 1| \leq \frac{1}{2}|x|$
- ج) استنتج  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$