Chapitre 1

Calcul trigonométrique

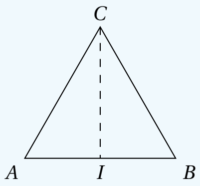
Sommaire

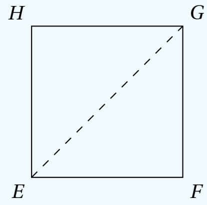
1 Activités

Activité 1

ABC est un triangle équilatéral de côté 1, avec I milieu de $[AB]$, et $EFGH$ est un carré de côté 1.

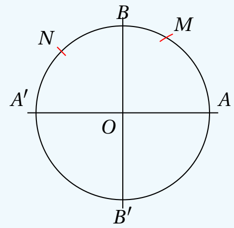
1. Calculer les longueurs CI et EG.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos(60°)$, $\sin(60°)$, $\cos(30°)$, $\sin(30°)$, $\cos(45°)$ et $\sin(45°)$.





Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soient (C) le cercle de centre O et de rayon 1, et A, A', B et B' sont ses points d'intersection respectifs avec les deux axes du repère.
On considère le point M situé au tiers de l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ à partir de A, et le point N placé au milieu de l'arc $\overset{\frown}{BA'}$.



1. Quel est le périmètre du cercle (C) ?
   Quelle est la longueur du demi-cercle $\overset{\frown}{AA'}$? du petit arc $\overset{\frown}{AB}$? du grand arc $\overset{\frown}{AB}$?
2. Quelle est la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AM}$? du petit arc $\overset{\frown}{AN}$?
3. Compléter le tableau suivant :

Point	B	A'	M	N
Mesure de l'angle au centre associé	$\widehat{AOB}=$..........	$\widehat{AOA'}=$.........	$\widehat{AOM}=$.........	$\widehat{AON}=$.........
Longueur de l'arc	$\overset{\frown}{AB}=$............	$\overset{\frown}{AA'}=$...........	$\overset{\frown}{AM}=$...........	$\overset{\frown}{AN}=$...........

4. Vérifier que ce tableau représente une situation de proportionnalité, et donner son coefficient.
5. Quelle est la longueur d'un arc correspondant à un angle de 30° ? de 45° ? de α° ?

2 Cercle trigonométrique – Radian

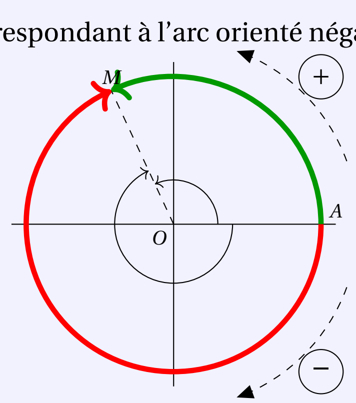
2.1 Cercle trigonométrique

Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

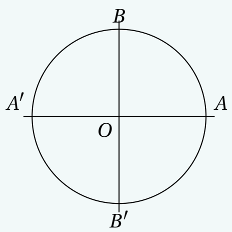
- On appelle «**cercle trigonométrique**» tout cercle (C) de centre O, de rayon 1, muni d'un point A, dit «**origine du cercle trigonométrique**, et orienté de la manière suivante :
  - Le sens «**positif**» ou «**directe**» est celui de la rotation autour du cercle, à partir de A, contrairement au sens des aiguilles d'une montre.
  - Le sens «**négatif**» ou «**indirecte**» est celui de la rotation autour du cercle, à partir de A, suivant le sens des aiguilles d'une montre.
- Pour tout point M du cercle trigonométrique, l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est dit «orienté», et est noté $\overset{\curvearrowright}{AM}$. On peut l'apercevoir de deux manière différentes :
  - L'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AM}$ en vert est dit «**positif**» ou «**directe**».
  - L'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AM}$ en rouge est dit «**négatif**» ou «**indirecte**».
- Pour tout point M du cercle trigonométrique, l'angle $\widehat{AOM}$ est dit «orienté», et est noté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$. On peut l'apercevoir de deux manière différentes :
  - L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$, correspondant à l'arc orienté positif $\overset{\curvearrowright}{AM}$, est dit «**positif**» ou «**directe**».

- ∘ L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$, correspondant à l'arc orienté négatif $\overset{\frown}{AM}$, est dit «**négatif**» ou «**indirecte**».



Exemples

En utilisant la figure ci-dessous, déterminer les mesures des arcs orientés $\overset{\frown}{AA}$, $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AB'}$.



Nombre de tours	0	1	2	k
Mesures de $\overset{\frown}{AA}$				
Mesures de $\overset{\frown}{AA'}$				
Mesures de $\overset{\frown}{AB}$				
Mesures de $\overset{\frown}{AB'}$				

2.2 Abscisse curviligne d'un point

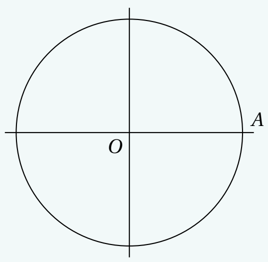
Propriété

Soit M un point du cercle trigonométrique, d'origine A.

- Si x est une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$, alors, toutes les mesures de cet arc sont de la forme $x+2k\pi$, où k est un entier relatif.
- Les nombres de la forme $x+2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, y compris x, sont appelés «**abscisses curvilignes**» du point M. On écrit $M(x)$ ou $M(x+2k\pi)$.
- Un abscisse curviligne est dit «**principale**», s'il appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exemples

Représenter sur le cercle trigonométrique les points $E\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $G\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $H\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ et $K\left(\frac{7\pi}{4}\right)$. Que remarque-t-on?



....
....
....
....
....
....

Exercice

Déterminer l'abscisse curviligne principale des points d'abscisses $\frac{-3\pi}{2}$, $\frac{-17\pi}{4}$, $\frac{23\pi}{4}$, $\frac{-5\pi}{2}$, $\frac{-4\pi}{3}$, $\frac{27\pi}{3}$ et $\frac{2005\pi}{3}$.

2.3 Mesure d'un angle orienté – Radian

Propriété

Soit M un point du cercle trigonométrique, d'origine A.

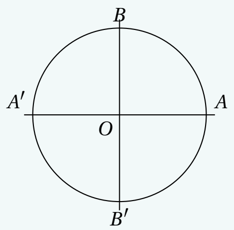
- Si x est une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$, alors, la mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$ est dite x «**radian**». On écrit $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}}) = x\ rad$.
- Si x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$, alors, toutes les mesures en radian de cet angle sont de la forme $x+2k\pi$, où k est un entier relatif. On écrit $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = x+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, ou simplement $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) \equiv x[2\pi]$ (lue $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ est congrue à x modulo 2π).
- Les nombres de la forme $x+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, y compris x, sont appelés «**abscisses curvilignes**» du point M. On écrit $M(x)$ ou $M(x+2k\pi)$.
- Une mesure en radian d'un angle orienté est dite «**principale**», s'il appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Remarques

- Généralement, la mesure d'un angle peut être exprimée en degré (°), en radian (rad) ou en grade (gr).
- La mesure d'un angle plat vaut en degré $180°$, en radian $\pi\ rad$, en grade $200\ gr$. On a $180° = \pi\ rad = 200\ gr$.
- Si a, b et c sont respectivement des mesures du même angle, en degré, radian et grade, alors $\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi} = \frac{c}{200}$.

Exemples

- Completer à partir de la figure ce qui suit :



L'abscisse curviligne de A est	La mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AA}$ est	La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}})$ est .....
L'abscisse curviligne de B est	La mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ est	La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ est .....
L'abscisse curviligne de A' est	La mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AA'}$ est	La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}})$ est ....
L'abscisse curviligne de B' est	La mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB'}$ est	La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB'}})$ est ....

Conclusion : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}) \equiv$..........., $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv$..........., $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}) \equiv$.......... et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB'}) \equiv$...........

- Déterminer, en radian, la mesure d'un angle valant en degré $150°$. ....
  Déterminer, en degré, la mesure d'un angle valant en radian $\frac{3\pi}{10}\ rad$. ....
  Déterminer, en grade, la mesure d'un angle valant en degré $45°$. ....
  Déterminer, en radian, la mesure d'un angle valant en grade $160\ gr$. ....

Propriétés

Soient M, N et P des points du cercle trigonométrique, d'origine A.

$$(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM}) \equiv 0[2\pi], \quad (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}) \equiv -(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM})[2\pi] \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OP};\overrightarrow{ON}) \equiv (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})[2\pi].$$

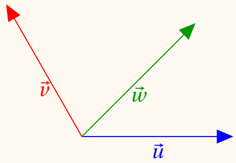
Remarque

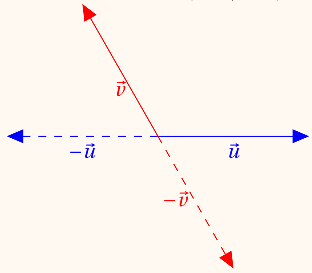
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, tels que $\|\vec{u}\| = a$ et $\|\vec{v}\| = b$.
Alors, il existe deux points M et N du cercle trigonométrique, tels que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{a}\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{b}\vec{v}$.

Corollaires

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan.

- $(\overline{\vec{u};\vec{u}}) \equiv 0[2\pi]$
- $(\overline{\vec{u};-\vec{u}}) \equiv \pi[2\pi]$
- $(\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv -(\overline{\vec{v};\vec{u}})[2\pi]$
- $(\overline{\vec{u};\vec{w}}) + (\overline{\vec{w};\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u};\vec{v}})[2\pi]$
- $(\overline{-\vec{u};\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u};-\vec{v}})[2\pi]$
- $(\overline{-\vec{u};-\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u};\vec{v}})[2\pi]$.





Remarque

On définit de même l'angle orienté déterminé par deux droites (ou demi-droites), à partir de leurs vecteurs directeurs, en gardant les mêmes propriétés.
Si (D) et (D') sont deux droites du plan, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $(\overline{(D);(D')}) \equiv (\overline{\vec{u};\vec{v}})[\pi]$.

Exercice

1. Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisses curvilignes $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{4}$.
2. Déterminer, dans chacun des cas suivants, si les deux abscisses curvilignes a et b représentent le même points : (i) $a = \frac{50\pi}{3}$ et $b = \frac{32\pi}{3}$ (ii) $a = \frac{5\pi}{8}$ et $b = -\frac{3\pi}{8}$ (iii) $a = -\frac{5\pi}{12}$ et $b = \frac{43\pi}{12}$.
3. Convertir en radian 20°, 140°, 135° et 125°. Convertir en degré $\frac{5\pi}{6} rad$, $\frac{2\pi}{9} rad$, $\frac{\pi}{10} rad$, $\frac{3\pi}{5} rad$.
4. $ABCD$ est un carré de centre O, tel que $(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Donner les mesures des angles suivants :
(a) $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$ (b) $(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}})$ (c) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ (d) $(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC}})$ (e) $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}})$ (f) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}})$ (g) $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DA}})$ (h) $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})$.

3 Rapports trigonométriques d'un réel

3.1 Repère direct

Définition

Un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ est dit «**direct**», si l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est direct.

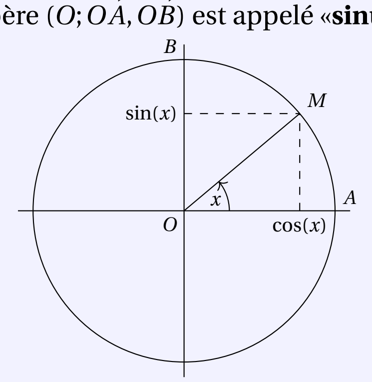
3.2 Sinus et cosinus d'un réel

Définition

(C) est le cercle triangulaire de centre O et d'origine A, et B est un de points tel que $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé direct.

Soit x un nombre réel. Il existe un seul et unique point M de (C) tel que $(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}}) \equiv x[2\pi]$.

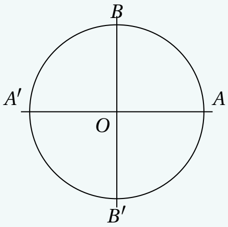
- L'abscisse du point M dans le repère $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est appelé «**cosinus de** x», et est noté $\cos(x)$.
- L'ordonnée du point M dans le repère $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est appelé «**sinus de** x», et est noté $\sin(x)$.



Remarque

Si x est l'abscisse curviligne du point M du cercle trigonométrique, alors ses coordonnées sont $M(\cos(x);\sin(x))$.

Exemple



On a $A(\dots\dots\dots)$ et $A(\dots\dots\dots;\dots\dots\dots)$. Donc $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$ et $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$	On a $A'(\dots\dots\dots)$ et $A'(\dots\dots\dots;\dots\dots\dots)$. Donc $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$ et $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$
On a $B(\dots\dots\dots)$ et $B(\dots\dots\dots;\dots\dots\dots)$. Donc $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$ et $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$	On a $B'(\dots\dots\dots)$ et $B'(\dots\dots\dots;\dots\dots\dots)$. Donc $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$ et $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$

Propriétés

Soit x un nombre réel.

- $-1 \le \cos x \le 1$ et $-1 \le \sin x \le 1$.
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ écrite également $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$.
- Le tableau de signe de $\cos(x)$, sur $]-\pi;\pi]$ est comme suit :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1

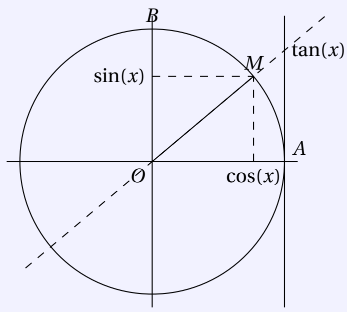
- Le tableau de signe de $\sin(x)$, sur $]-\pi;\pi]$ est comme suit :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0

3.3 Tangente d'un réel

Définition

(C) est le cercle triangulaire de centre O et d'origine A, et B est un de points tel que $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé direct.
Soit x un nombre réel tel que $\cos(x) \neq 0$. Il existe un seul et unique point M de (C), d'abscisse curviligne x.
Le coefficient directeur de la droite (OM) est appelé «**tangente de** x», et est noté $\tan(x)$.
Pour tout réel x, tel que $\cos(x) \neq 0$, On a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



Propriété

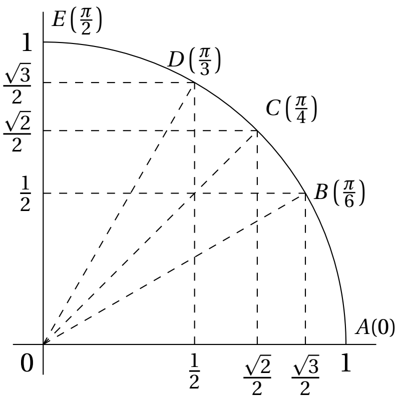
Soit x un nombre réel.

- $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ et $1 + \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$.
- Pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a $\tan(x+2k\pi) = \tan(x)$
- Le tableau de signe de $\tan(x)$, sur $]-\pi;\pi]$, tel que $\cos(x) \neq 0$, est comme suit :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\tan(x)$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0

3.4 Mesures et valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



Exercice

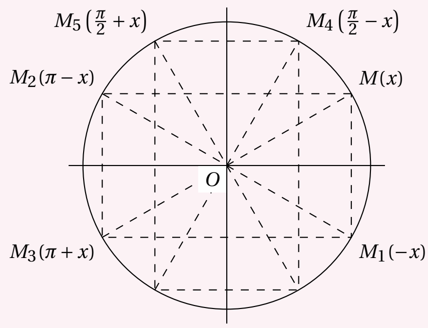
1. Calculer les valeurs exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$.
2. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$, sachant que $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ et que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.
3. Déterminer la valeur de $\sin(\beta)$, sachant que $\cos(\beta) = \frac{4}{5}$ et que $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

4 Relations trigonométriques

Propriétés

Soit x un nombre réel (pour les relations tan, x doit être différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$, on écrit $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$).

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan(x)$



Exercice

1. Déterminer le sinus, le cosinus et la tangente des réels $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{14\pi}{3}$ et $\frac{19\pi}{4}$.
2. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$.
3. On donne $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (a) Déterminer la valeur exacte du sinus du réel $\frac{\pi}{5}$.
   (b) En déduire les cosinus et sinus des réels $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{9\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{7\pi}{10}$.
4. Si x est un réel tel que $\tan(x) \neq 0$, l'inverse de $\tan(x)$ est appelé «cotangente de x», et est noté $\text{cotan}(x)$ ou $\cot(x)$. Montrer que $1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$.
5. (a) Sachant que $\tan(x) = 2$ et que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, déterminer $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   (b) Sachant que $\cos(x) = \frac{1}{3}$ et que $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, déterminer $\tan(x)$ et $\sin(x)$.
6. Simplifier les expressions suivantes :
   (a) $\cos(\pi + x) - \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
   (b) $\cos(5\pi + x) + \sin(11\pi - x) - \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)$
   (c) $\tan(-x) + \tan(x + \pi) + \tan(x - 3\pi)$
7. Donner la valeur exacte des additions suivantes :
   (a) $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
   (b) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

5 Équations et inéquations trigonométriques

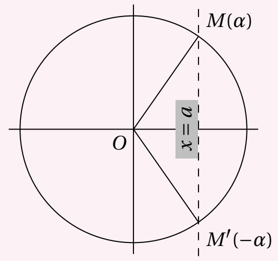
Dans toute la suite, et pour éviter toute confusion, l'abscisse curviligne d'un point quelconque M du cercle trigonométrique, sera noté X, et ses coordonnées cartésiennes seront notées $(x; y)$. Ce qui se traduit par les relations $\cos(X) = x$, $\sin(X) = y$ et $\tan(X) = \frac{y}{x}$, si $x \neq 0$. De plus, la droite (OM) aura pour équation cartésienne $x\tan(X) - y = 0$, si $X \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

5.1 Équation de type $\cos(X) = a$

Propriété

Les solutions de l'équation $\cos(X) = a$, s'elles existent, sont les points d'intersection de la droite d'équation $x = a$ avec le cercle trigonométrique.

- Si $a \notin [-1; 1]$, alors cette équation n'admet pas de solutions.
  L'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.
- Si $a = 1$, alors, $\cos(X) = \cos(0)$ et $X = 0 + 2k\pi = 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
  L'ensemble des solutions est $S = \{2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $a = -1$, alors, $\cos(X) = \cos(\pi)$ et $X = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
  L'ensemble des solutions est $S = \{(2k + 1)\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $a \in]-1; 1[$, alors, $\cos(X) = \cos(\alpha)$ et $X = \alpha + 2k\pi$ ou $X = -\alpha + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
  L'ensemble des solutions est $S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

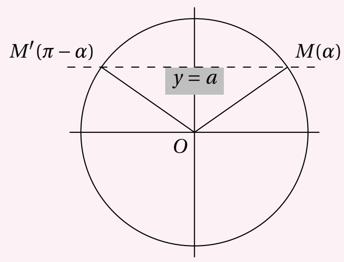


5.2 Équation de type $\sin(X) = a$

Propriété

Les solutions de l'équation $\sin(X) = a$, s'elles existent, sont les points d'intersection de la droite d'équation $y = a$ avec le cercle trigonométrique.

- Si $a \notin [-1; 1]$, alors cette équation n'admet pas de solutions.
  L'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.
- Si $a = 1$, alors, $\sin(X) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
  L'ensemble des solutions est $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Si $a = -1$, alors, $\sin(X) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $X = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
  L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Si $a \in]-1; 1[$, alors, $\sin(X) = \sin(\alpha)$ et $X = \alpha + 2k\pi$ ou $X = \pi - \alpha + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
  L'ensemble des solutions est $S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

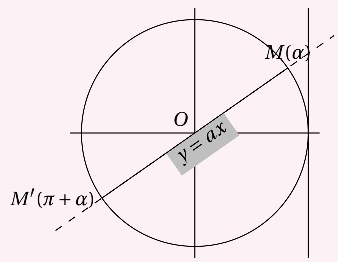


5.3 Équation de type $\tan(X) = a$

Propriété

Les solutions de l'équation $\tan(X) = a$, s'elles existent, sont les points d'intersection de la droite d'équation $y = ax$ avec le cercle trigonométrique.

- Si $a = 0$, alors, $\tan(X) = \tan(0)$ et $X = 0 + k\pi = k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
  L'ensemble des solutions est $S = \{k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $a \neq 0$, alors, $\tan(X) = \tan(\alpha)$ et $X = \alpha + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
  L'ensemble des solutions est $S = \{\alpha + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.



Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$ et $\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{11}\right)$.
2. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ les équations $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 0$ et $\sqrt{3}\tan\left(4\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 3$.

5.4 Inéquations trigonométriques

Exercice

1. On considère dans $[-\pi;\pi[$ l'inéquation (I) : $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Résoudre dans $[-\pi;\pi[$ l'équation (E) : $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (b) Représenter les solutions de l'équation (E) sur le cercle trigonométrique.
   (c) En déduire les solutions de l'inéquation (I).
2. Résoudre dans $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ l'inéquation $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, et dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation $-\sqrt{3} \leq \tan x < 1$.
3. Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ les inéquations $2\cos(x)+1>0$, $-1<2\sin(x)<\sqrt{3}$, $\sin(x)\cos(x)<0$ et $\tan(x)\geq 0$.