Chapitre 8

Droite dans le plan

Sommaire

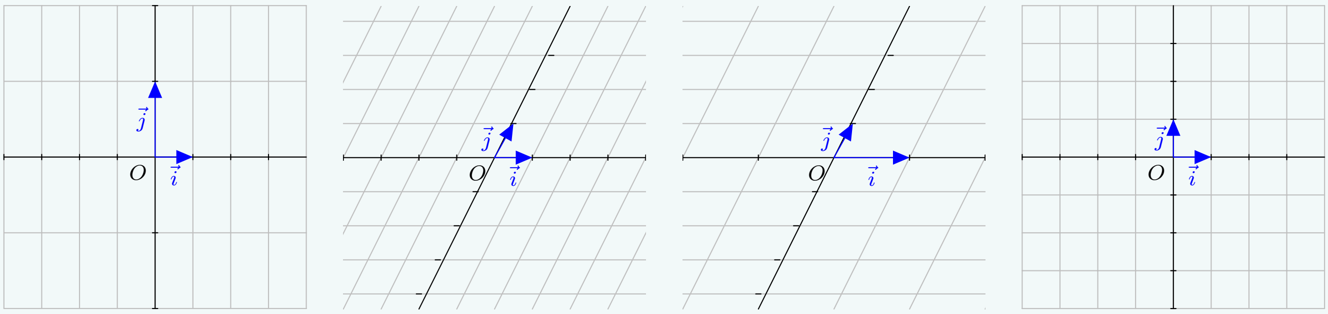
1 Repère du plan et coordonnées

1.1 Base et repère du plan

Définitions

- On appelle «**base**» du plan, tout couple $(\vec{i},\vec{j})$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
  - Une base $(\vec{i},\vec{j})$ est dite «**orthogonale**», si les droites portant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires.
  - Une base $(\vec{i},\vec{j})$ est dite «**normée**», si les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de même norme.
  - Une base $(\vec{i},\vec{j})$ est dite «**orthonormée**», s'elle est orthogonale et normée.
- On appelle «**repère**» du plan, tout triplet $(O;\vec{i},\vec{j})$, où $(\vec{i},\vec{j})$ est une base du plan, et O est un point quelconque, appelé «**origine du repère**».
  - Un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est dit «**orthogonal**», si sa base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthogonale.
  - Un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est dit «**normé**», si sa base $(\vec{i},\vec{j})$ est normé.
  - Un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est dit «**orthonormé**», si sa base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthogonale et normée.

Exemple



Repère orthogonal et non normé.	Repère normé, et non orthogonal.	Repère non orthogonal et non normé.	Repère orthonormé (orthogonal et normé).

Propriétés

- Tout trois points distincts non alignés du plan, forment une base de ce plan.
- Tout trois points distincts non alignés du plan, forment un repère de ce plan.

Exercice

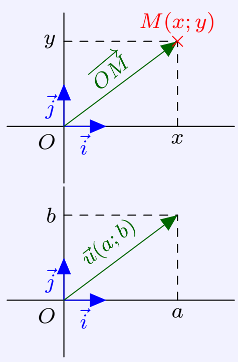
$ABCD$ est un losange de centre O.
Construire la figure, et relever de celle-ci trois repères :
(a) un repère orthogonal, non normé. (b) un repère normé, non orthogonal. (c) un repère orthonormé.

Dans toute ce qui suit, le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.2 Coordonnées d'un point – Coordonnées d'un vecteur

Définitions

- Pour tout point M du plan, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
  Le couple $(x;y)$ est appelé coordonnées du point M.
  On écrit $M(x;y)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe deux réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
  Le couple $(a;b)$ est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$.
  On écrit $\vec{u}(a;b)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



Exercice

$ABCD$ est un losange de centre O.
Construire la figure, et déterminer les coordonnées des points A, B, C, D et O, et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$, dans chacun des repères suivants :
(i) $(O;\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD})$ (ii) $(O;\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$ (iii) $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ (iv) $(C;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$

Propriétés

- Si $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ sont deux vecteurs du plan, alors, $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si $a=a'$ et $b=b'$.
- Si $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ sont deux vecteurs du plan, alors, $\vec{u}+\vec{v}(a+a';b+b')$.
- Si $\vec{u}(a;b)$ est un vecteur du plan et k un nombre réel, alors, $k\vec{u}(ka;kb)$.
- Si $\vec{u}(a;b)$ est un vecteur du plan, alors, $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- Si $A(x_A;x_A)$ et $B(x_B;x_B)$ sont deux points du plan, alors, $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.
- Si $A(x_A;x_A)$ et $B(x_B;x_B)$ sont deux points du plan, alors, $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
- Si I est le milieu d'un segment $[A(x_A;x_A),B(x_B;x_B)]$ du plan, alors, $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Exercice

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1. On considère les points $A(-1;1)$, $B(1;-2)$, $C(5;1)$ et $D(3;4)$.
   (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$. Quelle-est la nature du quadrilatère $ABCD$?
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des diagonales de $ABCD$.
2. On considère les points $A(-2;1)$, $B(0;-2)$ et $C(3;-1)$.
   Déterminer les coordonnées du point D, pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer le rayon du cercle, dont l'un de ses diamètre est le segment $[A(2;-1),B(4;-5)]$.

2 Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ deux vecteurs du plan.
On appelle «**déterminant**» des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\det(\vec{u},\vec{v})$, défini par :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'$$

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v})=0$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v})\neq 0$.

Exercice

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1. Etudier la colinéarité des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans les cas suivants :
   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. (b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$. (c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2m-3\\m+3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.
2. On considère les points $A\left(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $C\,()$ et $D\left(\frac{13}{4};3\right)$.
   (a) Montrer que les points A, B et C sont alignés.
   (b) Les points B, C et D, sont-ils alignés ?

3 Droite dans le plan

3.1 Droite et vecteur directeur

Définition

$\vec{u}$ est un vecteur du plan, et A est un point donné.
L'ensemble des points M du plan, vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$, où k est un nombre réel, est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, et est noté $\mathrm{D}(A, \vec{u})$.
On écrit $\mathrm{D}(A, \vec{u}) = \{M \in (\mathcal{P}) \ / \ \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\}$.

Remarques

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, et A et B deux points distincts.

- Si M est un point de la droite $\mathrm{D}(A, \vec{u})$, alors, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors, les droites $\mathrm{D}(A, \vec{u})$ et $\mathrm{D}(B, \vec{v})$ sont parallèles.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors, les droites $\mathrm{D}(A, \vec{u})$ et $\mathrm{D}(A, \vec{v})$ sont confondues.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors, les droites $\mathrm{D}(A, \vec{u})$ et $\mathrm{D}(B, \vec{v})$ sont sécantes.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors, les droites $\mathrm{D}(A, \vec{u})$ et $\mathrm{D}(A, \vec{v})$ sont sécantes en A.
- Une droite passant par deux point A et B du plan, est de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. On a $(AB) = \mathrm{D}(A, \overrightarrow{AB})$.

3.2 Représentation paramétrique d'une droite

Activité

$\vec{u}(a; b)$ est un vecteur du plan et $A(x_A; y_A)$ est un point donné.
Soit $M(x; y)$ un point de la droite $\mathrm{D}(A, \vec{u})$.

1. Montrer qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
2. En déduire les coordonnées du point M en fonction de t.

Définition

Si $\vec{u}(a; b)$ est un vecteur directeur d'une droite (D) du plan, et $A(x_A; y_A)$ est un point donné de cette droite, alors, le système défini par $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ est appelé «**représentation paramétrique**» de (D), .

Exercice

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(3; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4; 2)$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) tel que $A(1; -3)$ et $B(2; -5)$.

3.3 Équation cartésienne d'une droite

Activité

$\vec{u}(a; b)$ est un vecteur du plan et $A(x_A; y_A)$ est un point donné.
Soit $M(x; y)$ un point de la droite $\mathrm{D}(A, \vec{u})$.

1. Montrer que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.
2. En déduire que les coordonnées du point M forment une solution d'une équation à déterminer.

Définition

Si $\vec{u}(a; b)$ est un vecteur directeur d'une droite (D) du plan, et $A(x_A; y_A)$ est un point donné de cette droite, alors, l'équation défini par $b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0$ est appelé «**équation cartésienne**» de (D), .

Exercice

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(3; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4; 2)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) tel que $A(1; -3)$ et $B(2; -5)$.

Propriété

Soient a et b deux réels non nuls.

- Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite du plan, et réciproquement, toute droite du plan a une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Un vecteur directeur de cette droite est celui de coordonnées $(-b; a)$.
- Une équation de droite de la forme $y = mx + p$ est dite «**équation réduite**» de celle-ci. Le réel m est appelé «**coefficient directeur**» ou «**pente**», et le réel p «**ordonnée à l'origine**» de la droite.
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées, a une équation cartésienne de la forme $x = c$, et toute droite parallèle à l'axe des abscisses, a une équation cartésienne de la forme $y = c$.

Exercice

Déterminer un vecteur directeur et le coefficient directeur de la droite (D), dans les cas suivant :

(a) $3x + 2y - 3 = 0$ (b) $x - 2y + 4 = 0$ (c) $4y - 2 = 0$ (d) $-x + 1 = 0$

Remarque

Une équation cartésienne de la droite du plan passant par un point $A(x_A; y_A)$ et de coefficient directeur m est $m(x - x_A) - (y - y_A) = 0$.

3.4 Positions relatives de deux droites

Rappel

Soient (D) et (D') deux droites du plan, de coefficients directeurs respectifs m et m'.

- (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
- (D) et (D') sont sécantes si et seulement si $m \neq m'$.
- (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si $m \times m' = -1$.

Propriétés

Soient (D) et (D') deux droites du plan, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- (D) et (D') sont sécantes si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

Exercice

Étudier la position relative des deux droites (D) et (Δ), dans les cas suivants :

(a) $(D) : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R})$ et $(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases} \ (\lambda \in \mathbb{R})$.

(b) $(D) :\ x - 4y - 2 = 0$ et $(\Delta) :\ 2x - 3y + 1 = 0$.

(c) $(D) : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R})$ et $(\Delta) :\ x + y - 2 = 0$.

4 Exercices

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $A(3;1)$, $B(-3;-2)$ et $C(5;-4)$.

1. Déterminer les coordonnées des points E et F sachant que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Donner une équation cartésienne de la droite (BF).
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (CE).
4. Étudier la position relative de des deux droites (BF) et (CE).
5. Déterminer les coordonnées de G, intersection des deux droites (BF) et (CE).
6. Déterminer les coordonnées du point I, milieu du segment $[BC]$.
7. Montrer que les points A, G et I sont alignés.
8. Soit $(\Delta) : x - 2y - 7 = 0$. Monter que les droites (Δ) et (AB) sont parallèles.
9. Donner une équation cartésienne de la droite (D), passant par C et parallèle à l'axe des ordonnées.
10. Donner une équation cartésienne de la droite (D'), passant par B et parallèle à l'axe des abscisses.
11. On considère le point $K(7,0)$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABIK$?

Exercice 2

ABC est un triangle, et F le milieu de $[BC]$.
Soient K et E deux points vérifiant $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

1. Déterminer les coordonnées de E, F et K dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Est-ce que les points E ,F et K sont alignés ?

Exercice 3

On considère un faisceau de droites d'équation $(D_m) : x + my + m - 2 = 0$, où m est un paramètre.

1. Déterminer la valeur de m dans les cas suivants :
   - La droite (D_m) passe par le point $A(-2;1)$.
   - La droite (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées.
   - La droite (D_m) est parallèle à la droite $(\Delta) : -x - y + 2 = 0$.
2. Montrer que les droites (D_m) se coupent en un point stable F, dont on donnera les coordonnées.