النهايات و الإتصال

محتوى الدرس

1. الإتصال في نقطة - الإتصال على مجال

1.1. الإتصال في نقطة

نشاط 1

تعريف: نسمي دالة الجزء الصحيح، الدالة التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد n الذي يحقق $n \leq x < n+1$ ونرمز لها بالرمز $E(x)$ أو $[\cdot]$.

1. أحسب $[2,3]$ و $[-1]$ و $[\sqrt{3}]$ و $[100,3001]$.
2. نعتبر الدوال المعرفة على المجال $]-2;1[$ بما يلي: $f(x) = [x]$ و $g(x) = x - [x]$ و $h(x) = x^2 + 1$ و لتكن (C_f) و (C_g) و (C_h) تمثيلاتها المبيانية.
3. أرسم في معالم مختلفة (C_f) و (C_g) و (C_h).
4. هل يمكنك رسم المنحنيات (C_f) و (C_g) و (C_h) بدون تقطع (دون رفع القلم) ؟
5. هل تقبل الدوال f و g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I.
نقول إن الدالة f متصلة في النقطة a إذا كان ....

تمرين 1

بين أن الدالة $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1} & x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$ متصلة في 1.

2.1. الإتصال على اليمين وعلى اليسار

نشاط 2

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x) = x^2+1 & x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{x-1} & x < 0 \end{cases}$

1. تحقق من أن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$
2. هل الدالة f متصلة على اليسار في 0 ؟
3. هل الدالة f متصلة في 0 ؟

تعريف

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على شكل $[a; a+\alpha[$ حيث $\alpha > 0$.
نقول إن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة a إذا كان ....

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على شكل $]a-\alpha;a]$ حيث $\alpha > 0$.
نقول إن الدالة f متصلة على اليسار في النقطة a إذا كان ....

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I.
تكون f متصلة في النقطة a إذا كانت ....

تمرين 2

1. هل الدالة $\begin{cases} f(x) = -x & x \leq 0 \\ f(x) = x^2 & x > 0 \end{cases}$ متصلة في 0.
2. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x} & x < 0 \\ f(x) = \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{2} & x \geq 0 \end{cases}$

أدرس إتصال الدالة f في 0.
3. حدد قيمة كل من a و b بحيث تكون الدالة $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-a}{x-2} & x < 2 \\ f(x) = \dfrac{2x+b}{3} & x \geq 2 \end{cases}$ متصلة في 2.

3.1. الإتصال على مجال

تعريف

1. نقول إن f دالة متصلة على مجال $]a;b[$ إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$.
2. نقول إن f دالة متصلة على مجال $[a;b[$ إذا كانت ....
3. نقول إن f دالة متصلة على مجال $]a;b]$ إذا كانت ....
4. نقول إن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ إذا كانت ....

خاصية

- الدوال الحدودية و الدوال $\cos$ و $\sin$ متصلة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الجذرية و الدوال اللاجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.
- الدالة $\tan$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

تمرين 3

أدرس إتصال الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

(ا) $f(x) = 3x^3 - x^2 + 1$ و $I = [-5;2]$.

(ب) $f(x) = \sin(x)$ و $I = \left]\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

(ج) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+x+1}$ و $I =]-2;+\infty[$.

(د) $f(x) = \sqrt{x}$ و $I = [0;7[$.

2. العمليات على الدوال المتصلة

خاصيات

لتكن f و g دالتين عدديتين و I مجالا ضمن $\mathbb{R}$ و k عددا حقيقيا.

- إذا كانت f و g متصلتين على I فإن $f+g$ و $f\times g$ و kf دوال متصلة على I.
- إذا كانت f و g متصلتين على I و g لا تنعدم على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ دالتين متصلتين على I.
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على $f(I)$ فإن $g\circ f$ دالة متصلة على I.

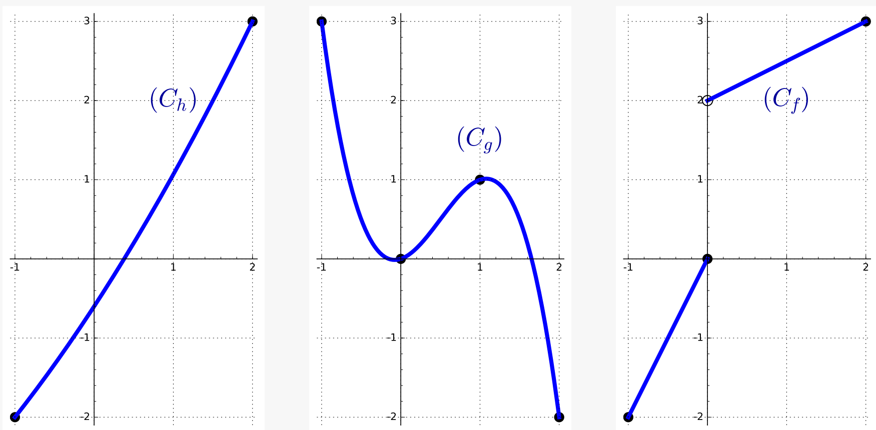
ملاحظة

إذا كانت f متصلة في النقطة a و g متصلة في النقطة $f(a)$ فإن $g\circ f$ متصلة في النقطة a.

3. صورة مجال بدالة متصلة

نشاط 3

نعتبر المنحنيات (C_f) و (C_g) و (C_h) الممثلة على التوالي للدوال f و g و h المعرفة على المجال $[-1;2]$ و ليكن k عنصرا من $[-2;3]$.



1. هل الدوال f و g و h متصلة على $[-1;2]$ ؟
2. أعط جدول تغيرات كل من f و g و h ؟
3. ماذا تمثل القيمتين -2 و 3 بالنسبة للدوال f و g و h ؟
4. حدد مبيانيا حسب قيم العدد k عدد حلول المعادلات التالية: $f(x)=k$، $g(x)=k$، $h(x)=k$.

1.3. صورة مجال

خاصية

صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.

أمثلة

في النشاط السابق لدينا:

$f\left([-1;2]\right)=$ ....

$g\left([-1;2]\right)=$ ....

$h\left([-1;2]\right)=$ ....

ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على $[a;b]$ فإن $f\left([a;b]\right)=[\min\limits_{x\in[a;b]}f(x);\max\limits_{x\in[a;b]}f(x)]$

تمرين 4

أدرس اتصال الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

(ا) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$ و $I=]0,+\infty[$

(ب) $f(x)=x\sin(x)$ و $I=]0,\pi]$

(ج) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}}$ و $I=]1;+\infty[$

(د) $\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x-2} & x\geq 2\\ f(x)=\dfrac{3}{3-x} & x<2\end{cases}$ و $I=\mathbb{R}$

تمرين 5

حدد مجموعة تعريف الدالة f و ادرس اتصالها على هذه المجموعة في كل حالة من الحالات التالية:

(ا) $f(x)=6x^2+8x+1$

(ب) $f(x)=\dfrac{x^4-2}{x^2-5x+3}$

(ج) $f(x)=\dfrac{2x+4}{|1-x|}$

(د) $f(x)=\sqrt{3x^2-2x}+2$

(ه) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x}}$

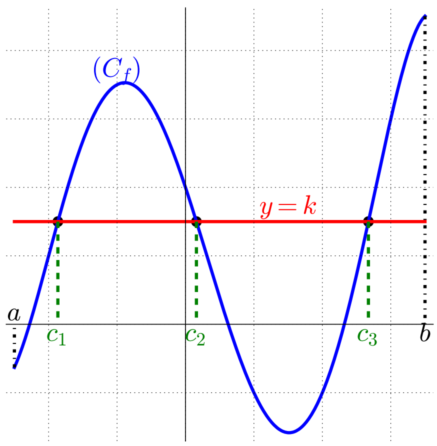
(و) $f(x)=\cos(4x^2+3x-1)$

2.3. مبرهنة القيم الوسطية

مبرهنة

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I.

لكل k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.



التأويل المبياني

لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع منحنى الدالة f على الأقل في نقطة.

ملاحظة

إذا كان k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ حيث $a<b$ فإن k ينتمي إلى $f([a;b])$.

لدينا: $\forall k \in f([a;b]), \exists c \in [a;b] : f(c)=k$

نتيجة

إذا كانت f متصلة على مجال $]a;b[$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a;b[$.

تمرين 6

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل في المجال I:

(أ) $(E): x^3-4x+1=0$ و $I=[0,1]$

(ب) $(E): -\frac{1}{3}x^3-2x^2-10=5$ و $I=[-3,0]$

(ج) $(E): x^2-2x-2=0$ و $I=[-2,3]$

(د) $(E): -x^3+x^2-x+3=0$ و $I=[1,2]$

3.3. حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا

1.3.3. صورة مجال بدالة متصلة و رتيبة قطعا

f دالة متصلة و تزايدية قطعا	f دالة متصلة و تناقصية قطعا
$f([a;b])=[f(a);f(b)]$	$f([a;b])=[f(b);f(a)]$
$f(]a;b])=\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x);f(b)\right]$	$f(]a;b])=\left[f(b);\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)\right[$
$f([a;b[)=\left[f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x)\right[$	$f([a;b[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x);f(a)\right]$
$f(]a;b[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x);\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x)\right[$	$f(]a;b[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)\right[$

2.3.3. مبرهنة القيم الوسطية بالنسبة لدالة متصلة و رتيبة قطعا

نتيجة

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a;b]$ فإنه لكل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد وحيد c من المجال $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$.

تمرين 7

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في المجال I:

(أ) $(E): x^3+4x=1$ و $I=[0,1]$

(ب) $(E): \cos(x)-x=0$ و $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(ج) $(E): x^3-\frac{1}{x}-7=0$ و $I=[1,2]$

(د) $(E): \sqrt{x^2+1}-x=0$ و $I=[1,2]$

التفرع الثنائي

تمكن طريقة التفرع الثنائي من تحديد قيمة تقريبية لحل المعادلة $f(x)=0$ على مجال $[a;b]$:

نعيد العملية من أجل $a=m$

f ، a ، b $\longrightarrow$ حساب $m=\dfrac{a+b}{2}$

إذا كان $f(a)\times f(m)>0$ $\longrightarrow$ نضع $a=m$

إذا كان $f(a)\times f(m)<0$ $\longrightarrow$ نضع $b=m$

نعيد العملية من أجل $b=m$

تمرين 8

1. بين أن المعادلة $x^3=-x-1$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,1[$.
2. باستعمال طريقة التفرع الثنائي، أعط تأطيرا للعدد α سعته $5\cdot 10^{-1}$.

4. الدالة العكسية لدالة

1.4. تعريف الدالة العكسية

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I، فإن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في المجال I.

نشاط 4

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=[1;3]$ بما يلي: $f(x)=x^2-2x$

1. بين أن الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على I.
2. حدد المجال J صورة I بالدالة f.
3. ليكن x عنصرا من J و y عنصرا من I. بين أن: $f(y)=x \Longleftrightarrow y=1+\sqrt{1+x}$

تعريف

لتكن f دالة عددية متصلة ورتيبة قطعا على مجال I، و ليكن J صورة المجال I بالدالة f.
الدالة التي تربط كل عنصر x من J بالعنصر الوحيد y من I بحيث $f(y)=x$ تسمى الدالة العكسية للدالة f، و نرمز لها بالرمز f^{-1}.

نتائج

لتكن f دالة عددية متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية، لدينا:

$$\forall x\in f(I):\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x \qquad \forall x\in I:\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$$

$$\begin{cases} f^{-1}(x)=y \\ x\in f(I)\end{cases} \iff \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases}$$

2.4. خاصيات الدالة العكسية

خاصيات

لتكن f دالة عددية متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية، لدينا:
- f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$.
- f^{-1} رتيبة قطعا على المجال $f(I)$ و لها نفس رتابة f.
- منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ في معلم متعامد ممنظم.

تمرين 9

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;3]$ بما يلي: $f(x)=(x-3)^2-1$

1. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J ينبغي تحديده.
2. أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J.
3. مثل في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم كل من (C_f) و $(C_{f^{-1}})$.

5. الجذور من الرتبة n

نشاط 5

لتكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x^3$

1. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J ينبغي تحديده.
2. أحسب $f^{-1}(0)$ و $f^{-1}(1)$ و $f^{-1}(8)$ و $f^{-1}(27)$ و $f^{-1}(0,125)$.

1.5. دالة الجذر من الرتبة n

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.
الدالة $f : x \mapsto x^n$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0; +\infty[$.
إذن f تقبل دالة عكسية.

تعريف

الدالة العكسية للدالة f معرفة على $[0; +\infty[$ و تسمى دالة الجذر من الرتبة n و نرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{\cdot}$.

لدينا: $\begin{cases} \sqrt[n]{y} = x \\ y \in [0; +\infty[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^n = y \\ x \in [0; +\infty[\end{cases}$

خاصيات

- الدالة $\sqrt[n]{\cdot}$ متصلة و تزايدية قطعا على $[0; +\infty[$ و لدينا: $\lim\limits_{x \odot +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
- في معلم متعامد ممنظم، منحنى الدالة $\sqrt[n]{\cdot}$ هو مماثل منحنى الدالة $x \mapsto x^n$ بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$.

نتائج

- $\forall a \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a}^a = a$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Longleftrightarrow a = b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Longleftrightarrow a < b$

2.5. العمليات على على الجذور من الرتبة n

خاصيات

ليكن n و m عنصرين من $\mathbb{N}^*$ و a و b عنصرين من $\mathbb{R}+$.

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$ و $\sqrt[n\times m]{a^n} = \sqrt[m]{a}$
- $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- إذا كان $b \neq 0$ فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ و $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$

تمرين 10

أحسب بدون استعمال الآلة الحاسبة ما يلي:

(ا) $\sqrt[3]{0,001}$ (ب) $\sqrt[4]{625}$ (ج) $\sqrt[5]{32}$ (د) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$ (ه) $\sqrt[10]{2^5}$ (و) $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$ (ز) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ (ح) $\sqrt{\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt{3}}}$

3.5. القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب

تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و r عددا جذريا غير منعدم .
نسمي القوة الجذرية للعدد a ذات الاس r العدد الذي نرمز له بالرمز a^r المعرف بما يلي $a^r = \sqrt[m]{a^n}$ حيث $r = \frac{n}{m}$

مع $n \in \mathbb{Z}$ و $m \in \mathbb{N}^*$.

ملاحظات

- العدد a^r غير مرتبط بالعددين n و m، لدينا: $r = \frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \iff a^r = \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m']{a^{n'}}$
- $\forall (r, r') \in \mathbb{Q}, \forall a \in \mathbb{R}^+ : a^r = a^{r'} \iff r = r'$
- $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$ و $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

خاصيات

تمدد الخاصيات المتعلقة بالقوى الصحيحة النسبية إلى القوى الجذرية.
لكل عددين جذريين r و r' و لكل عددين حقيين a و b موجبين، لدينا:

- $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$
- $(a^r)^{r'} = a^{r \times r'}$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
- $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$
- $a^r \times b^r = (a \times b)^r$
- $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

تمرين 11

1. اكتب على شكل جذور مايلي:
(ا) $5^{\frac{1}{2}}$ (ب) $3^{\frac{5}{6}}$ (ج) $36^{\frac{3}{2}}$ (د) $4^{-\frac{1}{2}}$ (ه) $7^{-\frac{1}{3}}$ (و) $3^{-\frac{5}{6}}$
2. اكتب على شكل قوى جذرية مايلي:
(ا) $\sqrt[3]{3^2}$ (ب) $\sqrt[11]{5^6}$ (ج) $-\sqrt[4]{2^8}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ه) $-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ (و) $-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$