الدرس الحادي عشر

الهندسة الفضائية

محتوى الدرس

1. المتجهات في الفضاء

1.1. عموميات

يعمم مفهوم المتجهات في المستوى إلى الفضاء، و تبقى خاصة الخاصيات التالية صحيحة:

خاصيات

- لكل نقطة A و متجهة $\vec{u}$ من الفضاء، توجد نقطة وحيدة B بحيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.
- تبقى تعاريف و خصائص الجمع و الضرب في عدد حقيقي لمتجهة في المستوى صحيحة في الفضاء.
- لكل نقط A و B و C و D من الفضاء، $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ إذا و فقط إذا كان $ABCD$ متوازي الأضلاع.
- لكل نقط A و B و C و D من الفضاء، $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ إذا و فقط إذا كان $ABCD$ متوازي الأضلاع.
- لكل نقط A و B و C من الفضاء، لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. (علاقة شال)

1.2. الإستقامية - الإستوائية

خاصيات

- متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا و فقط إذا وجد عددين a و b من $\mathbb{R}^*$ بحيث $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}$. (1)
- متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتان إذا و فقط إذا كان $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow a=b=0$.
- متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا و فقط إذا وجدت أعداد a و b و c من $\mathbb{R}^*$ بحيث $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$. (2)
- متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا و فقط إذا كان $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow a=b=c=0$.

ملاحظات

- بوضع $x=-\frac{a}{b}$ تصبح الخاصية (1) كما يلي:
متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا و فقط إذا وجد عدد x من $\mathbb{R}^*$ بحيث $\vec{v}=x\vec{u}$.
- بوضع $x=-\frac{a}{c}$ و $y=-\frac{b}{c}$ تصبح الخاصية (2) كما يلي:
متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا و فقط إذا وجدت أعداد x و y من $\mathbb{R}^*$ بحيث $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

1.3. التعريف المتجهي لمستقيم - التعريف المتجهي لمستوى

تعاريف

- لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة من الفضاء.
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}$ حيث x عدد حقيقي، هي المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$ و يرمز له بالرمز $D(A,\vec{u})$.
اذا كانت A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء فإن $(AB)=D(A,\overrightarrow{AB})$.
- لتكن A نقطة و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين من الفضاء.
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ بحيث x و y عددين حقيقيين، هو المستوى المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يرمز له بالرمز $P(A,\vec{u},\vec{v})$.
اذا كانت A و B و C نقط غير مستقيمية من الفضاء فإن $(ABC)=P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

نتائج

لتكن A و B نقطتين و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u'}$ و $\vec{v'}$ متجهات من الفضاء.
نعتبر المستقيمان $D(A,\vec{u})$ و $D(B,\vec{v})$.

- $D(A,\vec{u})$ و $D(B,\vec{v})$ متوزيان أو منطبقان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان.
- $D(A,\vec{u})$ و $D(B,\vec{v})$ متقاطعان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستوائية مع $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتان.
- $D(A,\vec{u})$ و $D(B,\vec{v})$ غير مستوائيان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مستوائية مع $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتان.

نعتبر المستويان $P(A,\vec{u},\vec{v})$ و $P(B,\vec{u'},\vec{v'})$.

- $P(A,\vec{u},\vec{v})$ و $P(B,\vec{u'},\vec{v'})$ متوازيان أو منطبقان إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u'}$ مستوائية و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ مستوائية.
- $P(A,\vec{u},\vec{v})$ و $P(B,\vec{u'},\vec{v'})$ متقاطعان إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u'}$ غير مستوائية أو $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ غير مستوائية.

تمرين 1

1. $ABCD$ رباعي أوجه و I و L منتصفي $[AD]$ و $[DC]$ و J و K نقطتين بحيث $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
هل النقط I و J و K و L مستوائية ؟
2. $ABCDEFGH$ مكعب و I و J و K منتصفات $[AE]$ و $[EH]$ و $[AD]$ و L مركز ثقل المثلث DCH.

(ا) بين أن $(CK)//(IJB)$.

(ب) بين أن $(KL)//(IJB)$. ماذا تستنتج ؟

2. تحليلية الفضاء

2.1. الأساس و المعلم في الفضاء - الاحداثيات

تعاريف

- نسمي أساسا للفضاء كل مثلوث $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بحيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متجهات غير مستوائية.
- نسمي معلما للفضاء كل مربع $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بحيث $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس و O نقطة.
- كل أربع نقط غير مستوائية تكون أساسا و معلما للفضاء.
- لكل نقطة M من الفضاء توجد أعداد حقيقية x و y و z بحيث $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
المثلوث $(x;y;z)$ يسمى إحداثيات النقطة M.
نكتب $M(x;y;z)$ أو $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
- لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء توجد أعداد حقيقية x و y و z بحيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
المثلوث $(x;y;z)$ يسمى إحداثيات المتجهة $\vec{u}$.
نكتب $\vec{u}(x;y;z)$ أو $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

تمرين 2

ليكن $ABCD$ رباعي أوجه.

1. حدد إحداثيات النقط A و B و C و D في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.
2. حدد في نفس المعلم إحداثيات النقطة E بحيث يكون $ABED$ متوازي أضلاع.
3. حدد في نفس المعلم إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{DE}$ و إحداثيات منتصف القطعة $[DE]$.
4. حدد في نفس المعلم إحداثيات النقطة G مرجح النقط المتزنة $(B;2)$ و $(C;-3)$ و $(D;4)$.
5. أجب عن نفس الأسئلة في المعلم $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$.

في كل ما يلي المستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2.2. استقامية متجهتين

خاصية

لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين من الفضاء.

- تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$.
- تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \neq 0$.

تمرين 3

1. هل النقط A و B و C مستقيمية في الحالات التالية:
   ا) $A(1;-2;3)$ و $B(0;4;1)$ و $C(4;-20;9)$. ب) $A(1;2;5)$ و $B(2;4;10)$ و $C(-1;-2;-6)$.
2. نعتبر النقط $A(1;-1;1)$ و $B(-1;1;-1)$ و $C(1;-1;-1)$ و $D\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$.
   بين أن المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان.
3. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون النقط $A(0;1;0)$ و $B(2;0;1)$ و $C(a;b;2)$ مستقيمية.

2.3. استوائية ثلاث متجهات

خاصية

لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ و $\vec{w}(x'';y'';z'')$ متجهات من الفضاء.
نسمي محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ العدد الحقيقي:

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

- تكون المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا و فقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.
- تكون المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا و فقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$.

تمرين 4

1. بين أن المتجهات $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(1;1;-3)$ و $\vec{w}(0;-2;4)$ مستوائية.
2. هل النقط $A(3;-1;1)$ و $B(3;0;-1)$ و $C(2;-2;-0)$ و $D(4;2;-2)$ مستوائية ؟
3. $\vec{u}(1;0;1)$ و $\vec{v}(0;1;1)$ متجهتين من الفضاء و $A(2;-3;1)$ نقطة. بين أن $B \in P(A,\vec{u},\vec{v})$.
4. نعتبر النقط $A(0;0;4)$ و $B(1;0;3)$ و $C(0;1;7)$ و $D(4;1;2)$ و $E(5;2;4)$.
   (أ) بين أن النقط A و B و C تحدد مستوى.
   (ب) بين أن المستوى (ABC) و المستقيم (DE) متوازيان.

2.4. تمثيل بارامتري لمستقيم

تعريف

$\vec{u}(a;b;c)$ متجهة من الفضاء و $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة معلومة.

نسمي تمثيلا بارامتريا للمستقيم $D(A,\vec{u})$ النظمة: $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + ct \end{array}\right.$.

تمرين 5

1. حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم $D(A,\vec{u})$ في الحالات التالية:
   ا) $A(0;0;0)$ و $\vec{u}(1;1;1)$.
   ب) $A(-2;1;3)$ و $\vec{u}(-2;5;3)$.
2. حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AB) في الحالات التالية:
   ا) $A(1;-1;0)$ و $B(0;-1;1)$.
   ب) $A(3;-2;0)$ و $B(2;-3;3)$.

2.5. تمثيل بارامتري لمستوى

تعريف

$\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين من الفضاء و $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة معلومة.

نسمي تمثيلا بارامتريا للمستوى $P(A,\vec{u},\vec{v})$ النظمة: $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \quad ((t;t') \in \mathbb{R}^2) \\ z = z_A + ct + c't' \end{array}\right.$.

تمرين 6

1. تحقق أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتان ثم حدد تمثيلا بارامتريا للمستوى $P(A,\vec{u},\vec{v})$ في الحالات التالية:
   ا) $A(1;0;2)$ و $\vec{u}(2;-1;3)$ و $\vec{v}(0;1;-1)$.
   ب) $A(-3;1;1)$ و $\vec{u}(-1;-1;4)$ و $\vec{v}(2;1;-1)$.
2. تحقق أن A و B و C تحدد مستوى ثم حدد تمثيلا بارامتريا للمستوى (ABC) في الحالات التالية:
   ا) $A(-1;1;0)$ و $B(0;-1;1)$ و $C(-1;0;1)$.
   ب) $A(1;-2;0)$ و $B(2;-2;1)$ و $C(0;1;-1)$.

2.6. معادلة ديكارتية لمستوى

تعريف

$\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين من الفضاء و $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة معلومة.
نسمي معادلة ديكارتية للمستوى $P(A,\vec{u},\vec{v})$ المعادلة:

$$(x-x_A)\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - (y-y_A)\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + (z-z_A)\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$$

و تحدد انطلاقا من أن $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$ لكل نقطة $M(x;y;z)$ من $P(A,\vec{u},\vec{v})$.

تمرين 7

1. حدد معادلة ديكارتية للمستوى $P(A,\vec{u},\vec{v})$ في الحالات التالية:

ا) $A(1;0;2)$ و $\vec{u}(2;-1;3)$ و $\vec{v}(0;1;-1)$.
ب) $A(-3;1;1)$ و $\vec{u}(-1;-1;4)$ و $\vec{v}(2;1;-1)$.

2. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) في الحالات التالية:

ا) $A(-1;1;0)$ و $B(0;-1;1)$ و $C(-1;0;1)$.
ب) $A(1;-2;0)$ و $B(2;-2;1)$ و $C(0;1;-1)$.

2.7. معادلتان ديكارتيتان لمستقيم

تعريف

$\vec{u}(a;b;c)$ متجهة من الفضاء و $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة معلومة.
نسمي معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $D(A,\vec{u})$ النظمة (S) المعرفة حسب قيم الأعداد a و b و c كما يلي:

- إذا كانت هذه الأعداد جميعها غير منعدمة فإن $(S):\ \frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$.
- إذا كان أحد هذه الأعداد منعدما، مثلا $b=0$ فإن $(S):\ \begin{cases}\frac{x-x_A}{a}=\frac{z-z_A}{c}\\ y=y_A\end{cases}$.
- إذا كان اثنين من هذه الأعداد منعدمان، مثلا $b=0$ و $c=0$ فإن $(S):\ \begin{cases} y=y_A\\ z=z_A\end{cases}$.

تمرين 8

حدد معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $D(A,\vec{u})$ في الحالات التالية:

ا) $A(1;5;-2)$ و $\vec{u}(-2;3;1)$.
ب) $A(1;-2;2)$ و $\vec{u}(-3;2;0)$.
ج) $A(3;2;-5)$ و $\vec{u}(0;-3;0)$.