سلسلة 3: المتتاليات العددية

التمرين 1

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4(n+1) \end{cases}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4.
2. بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}: \ u_n = 2n(n+1)$.

التمرين 2

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي: $u_n = \frac{3(2^n-1)+4n}{2}$ و $v_n = \frac{3(2^n+1)-4n}{2}$

لتكن (a_n) و (b_n) المتتاليتان المعرفتين بما يلي: $a_n = u_n + v_n$ و $b_n = u_n - v_n$

1. بين أن (a_n) متتالية هندسية و أن (b_n) متتالية حسابية.
2. أحسب بدلالة n المجموعين $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

التمرين 3

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3.
2. بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}: \ 0 < u_n \leq 1$.

التمرين 4

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n-4}{u_n+1} \end{cases}$

1. أحسب u_1 و u_2.
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n-2}$

(ا) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$.

(ب) استنتج تعبير v_n ثم u_n بدلالة n.

التمرين 5

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_1 = 1 \text{ و } u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2 \end{cases}$

لتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة بما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. أحسب v_1 و v_2 و v_3.
2. حدد طبيعة المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$.

التمرين 6

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ و } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

1. أحسب u_2 و u_3 و u_4.
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   (ا) بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.
   (ب) أعط تعبير v_n بدلالة n.
   (ج) أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
   (د) استنتج تعبير u_n بدلالة n.

التمرين 7

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3.
2. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ 0 < u_n < 1$.
3. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.
4. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بما يلي: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$
   (ا) أحسب v_0 و v_1 و v_2.
   (ب) بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.
   (ج) استنتج تعبير v_n ثم u_n بدلالة n.

التمرين 8

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بما يلي: $v_n = u_n - 3$.

1. حدد طبيعة المتتالية (v_n).
2. استنتج تعبير v_n ثم u_n بدلالة n.
3. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

التمرين 9

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ و } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$ و $v_n = u_n - 3^n$.

1. بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.
3.
4. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

التمرين 10

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ u_{n+1} = \frac{1+\sqrt{u_n}}{2} \end{cases}$

1. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 < u_n < 1$.
2. تحقق أن: $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{u_n}\right)\left(1 + 2\sqrt{u_n}\right)$
3. استنتج رتابة المتتالية (u_n).
4. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : \ |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{2}|u_n - 1|$.
5. استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N} : \ |u_n - 1| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.