# الدرس التاسع

# الإشتقاق

## محتوى الدرس

# 1. عموميات

## 1.1. العدد المشتق

**تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و $a$ عنصر من $I$.
نسمي معدل تغير الدالة $f$ بين كل عنصر $x$ من $I$ و العدد $a$ التعبير $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
نقول إن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق في $a$ عندما تكون نهاية معدل تغير الدالة $f$ بين $x$ و $a$، عندما يؤول $x$ إلى $a$، هي عدد حقيقي $\ell$ أو بتعبير آخر $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$.
العدد $\ell$ يسمى العدد المشتق للدالة $f$ في $a$ و يرمز له بالرمز $f'(a)$.

**ملاحظة**

بوضع $x-a=h$ أي $x=a+h$ نستنتج أن $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
عندما يؤول $x$ إلى $a$ فإن $h$ تؤول إلى 0.
نستنتج من ما سبق أن: لدراسة قابلية اشتقاق الدالة $f$ في $a$ يمكن كذلك أن نحسب النهاية $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

**أمثلة**

بين أن الدالة $f:\ x\mapsto x^2$ قابلة للإشتقاق في 2.
....................................................
....................................................
....................................................
....................................................
....................................................
....................................................
....................................................

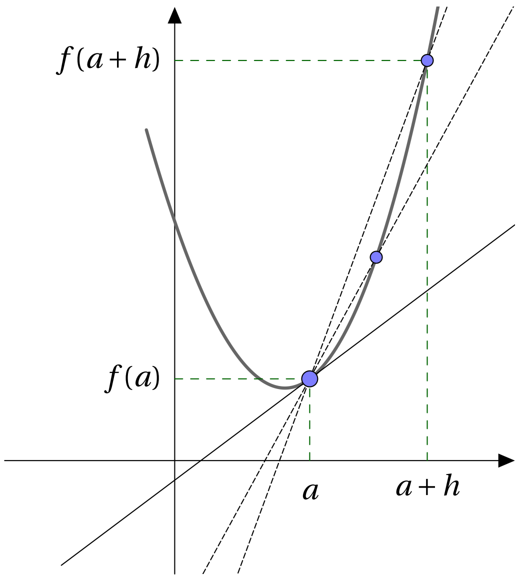
بين أن الدالة $g:\ x\mapsto \sqrt{x}$ غير قابلة للإشتقاق في 0.
....................................................
....................................................
....................................................
....................................................
....................................................
....................................................
....................................................

## 2.1. التأويل المبياني للعدد المشتق

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم. ليكن $a$ عنصرا من $I$.
إذا كانت $f$ قابلة للإشتقاق في $a$ فإن $f'(a)$ هو المعامل الموجه للمستقيم المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $A(a,f(a))$.
معادلة هذا المماس هي: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

لتكن $A(a,f(a))$ و $M(a+h,f(a+h))$ نقطتين من المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بحيث $h\neq 0$.
العدد $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ يمثل المعامل الموجه للمستقيم $(AM)$.
عندما تؤول $h$ إلى 0 فإن $M$ تقترب من $A$ و المستقيم $(AM)$ يكاد ينطبق مع المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $A$.




**مثال**

حدد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f:\ x\mapsto x^2$ في النقطة ذات الأفصول 2.

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## 3.1. التقريب التآلفي لدالة

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و قابلة للإشتقاق في $a$ من $I$.

- الدالة $x\mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة $f$ في $a$ و تكتب كذلك $h\mapsto f'(a)h+f(a)$ بوضع $x-a=h$.
- العدد $f(a)+f'(a)h$ يسمى التقريب التآلفي للعدد $f(a+h)$ بجوار 0. نكتب $f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)h$.

**مثال**

حدد تقريبا تآلفيا للعدد $(2+h)^2$ بجوار 0 و استنتج قيمة مقربة لكل من $(2{,}0003)^2$ و $(1{,}9995)^2$.

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## 4.1. الإشتقاق على اليمين و الإشتقاق على اليسار

### تعريف

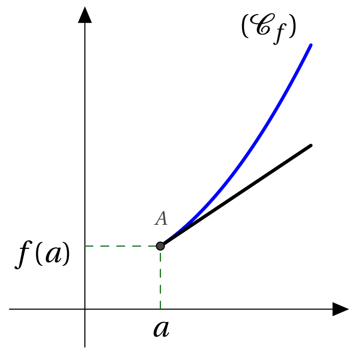
لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و $a$ عنصر من $I$.

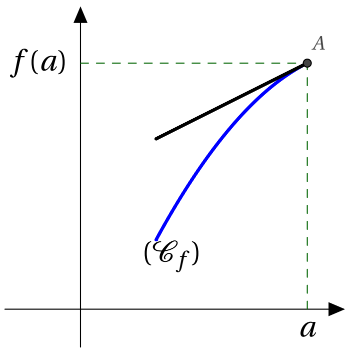
- نقول إن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على اليمين في $a$ عندما تكون نهاية معدل تغير الدالة $f$ بين $x$ و $a$، عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين، هي عدد حقيقي $\ell$ أو بتعبير آخر $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$.
العدد $\ell$ يسمى العدد المشتق للدالة $f$ على اليمين في $a$ و يرمز له بالرمز $f'_d(a)$.
- نقول إن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على اليسار في $a$ عندما تكون نهاية معدل تغير الدالة $f$ بين $x$ و $a$، عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليسار، هي عدد حقيقي $\ell'$ أو بتعبير آخر $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell'$.
العدد $\ell'$ يسمى العدد المشتق للدالة $f$ على اليسار في $a$ و يرمز له بالرمز $f'_g(a)$.

### التأويل المبياني

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم. ليكن $a$ عنصرا من $I$.

- إذا كانت $f$ قابلة للإشتقاق على اليمين في $a$ فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نصف مماس في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $f'_d(a)$ و معادلته هي $y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$ حيث $x\geq a$.
- إذا كانت $f$ قابلة للإشتقاق على اليسار في $a$ فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نصف مماس في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $f'_g(a)$ و معادلته هي $y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$ حيث $x\leq a$.




### خاصية

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و $a$ عنصر من $I$.
الدالة $f$ قابلة للإشتقاق في $a$ إذا كانت $f$ قابلة للإشتقاق على اليمين و على اليسار في $a$ و $f'_d(a)=f'_g(a)$.

### تمرين 1

1. بين أن الدالة $f:\ x\mapsto |x|$ غير قابلة للإشتقاق في 0 ثم أول مبيانيا النتيجة.
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $g:\ x\mapsto |x|+x^2$ في $-1$ ثم أول مبيانيا النتيجة.

# 2. حساب الدوال المشتقة

## 1.2. الدالة المشتقة لدالة عددية

**تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$.

- نقول إن $f$ قابلة للإشتقاق على $I$ إذا كانت قابلة للإشتقاق في $x$، لكل $x$ من $I$.
- الدالة المعرفة على $I$ بحيث $x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة $f$ و نرمز لها بالرمز $f'$ أو $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ أو $\dot{f}$.

## 2.2. الدوال المشتقة الإعتيادية

**خاصيات**

| $f(x)$ | $D_f$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $\mathbb{R}$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $\mathbb{R}$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n \ (n \geq 1)$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ |
| $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |

**أمثلة**

$(-3)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x^4)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\frac{11}{5}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x^2)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x^{57})' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(\sqrt{x})' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(\sqrt{7})' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x^3)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x^{2016})' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(\cos(x))' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

## 3.2. العمليات على الدوال المشتقة

**قاعدة 1**

لتكن $u$ و $v$ دالتين عدديتين قابلتين للإشتقاق على مجال $I$.

| تعبير الدالة | قابلة للإشتقاق على المجال | دالتها المشتقة |
|---|---|---|
| $u+v$ | $I$ | $(u+v)' = u' + v'$ |
| $ku \ (k \in \mathbb{R})$ | $I$ | $(ku)' = ku'$ |

## أمثلة

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)'=$ ..............................

$\left(\sqrt{x}-\sin(x)\right)'=$ ..............................

$(3x-5)'=$ ..............................

$\left(-x^2+4x-5\right)'=$ ..............................

$\left(-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)'=$ ..............................

$\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{4}x^3+5x-2\right)'=$ ..............................

## قاعدة 2

لتكن $u$ و $v$ دالتين عدديتين قابلتين للإشتقاق على مجال $I$.

| تعبير الدالة | قابلة للإشتقاق على المجال | دالتها المشتقة |
|---|---|---|
| $uv$ | $I$ | $(uv)'=u'v+uv'$ |
| $u^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$ | $I$ | $(u^n)'=nu^{n-1}u'$ |

## أمثلة

$((2x-3)(4-x))'=$ ..............................

$(2x\cos(x))'=$ ..............................

$\left(\frac{x^2-3x+7}{x}\right)'=$ ..............................

$\left(\sin^5(x)\right)'=$ ..............................

$\left((x^3-4x-5)^{11}\right)'=$ ..............................

$\left((x-3)^5(x+4)^3\right)'=$ ..............................

## قاعدة 3

لتكن $u$ و $v$ دالتين عدديتين قابلتين للإشتقاق على مجال $I$ بحيث $v\neq 0$ على $I$.

| تعبير الدالة | قابلة للإشتقاق على المجال | دالتها المشتقة |
|---|---|---|
| $\frac{1}{v}$ | $I$ | $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$ |
| $\frac{u}{v}$ | $I$ | $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| $v^n\ (n\in\mathbb{Z}^*)$ | $I$ | $(v^n)'=nv^{n-1}v'$ |

## أمثلة

$\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)'=$ ..............................

$\left(\frac{3}{-2x^3+\sqrt{5}x^2-3x+4}\right)'=$ ..............................

$\left(\frac{x^2-3x+7}{x}\right)'=$ ..............................

$(\tan(x))'=$ ..............................

$\left(\frac{2x-1}{4x-3}\right)'=$ ..............................

## قاعدة 4

لتكن $u$ دالة عددية قابلة للإشتقاق على مجال $I$ بحيث $u>0$ على $I$.

| تعبير الدالة | قابلة للإشتقاق على المجال | دالتها المشتقة |
|---|---|---|
| $\sqrt{u}$ | $I$ | $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ |

## أمثلة

$(\sqrt{3x-4})' = \dots\dots\dots\dots$

$\left(\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}\right)' = \dots\dots\dots\dots$

$(2\sqrt{1-\cos(x)})' = \dots\dots\dots\dots$

## قاعدة 5

لتكن $u$ دالة عددية قابلة للإشتقاق على مجال $I$ بحيث لكل $x$ من $I$ لدينا $ax+b\in I$.

| تعبير الدالة | قابلة للإشتقاق على المجال | دالتها المشتقة |
|---|---|---|
| $x\mapsto u(ax+b)$ | $I$ | $(u(ax+b))'=a\times u'(ax+b)$ |

## أمثلة

$(\sin(2x+7))' = \dots\dots\dots\dots$

$(\cos(\frac{x}{3}))' = \dots\dots\dots\dots$

$\left(\tan\left(\dfrac{4x-3}{5}\right)\right)' = \dots\dots\dots\dots$

## ملاحظات

- كل دالة حدودية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.
- كل دالة جذرية أو لاجذرية قابلة للإشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

## تعريف

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للإشتقاق على مجال $I$.

- إذا كانت الدالة $f'$ قابلة للإشتقاق على $I$ فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية (أو من الرتبة 2) للدالة $f$ و نرمز لها بالرمز $f''$.
- إذا كانت الدالة $f''$ قابلة للإشتقاق على $I$ فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثالثة (أو من الرتبة 3) للدالة $f$ و نرمز لها بالرمز $f'''$ أو $f^{(3)}$.
- لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ نرمز للدالة المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ بالرمز $f^{(n)}$.

## تمرين 2

حدد الدالة المشتقة من الرتبة 4 للدالة $f:\ x\mapsto x^3-\cos(2x)$.

# 3. تطبيقات الإشتقاق

## 1.3. الإشتقاق و رتابة دالة

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للإشتقاق على مجال $I$.

- الدالة $f$ تزايدية (قطعا) على $I$ إذا وفقط إذا كانت $f'$ موجبة (قطعا) على $I$.
- الدالة $f$ تناقصية (قطعا) على $I$ إذا وفقط إذا كانت $f'$ سالبة (قطعا) على $I$.
- الدالة $f$ ثابتة على $I$ إذا وفقط إذا كانت $f'$ منعدمة على $I$.

**تمرين 3**

أدرس تغيرات الدالة $f$ على مجموعة تعريفها في الحالات التالية: $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$; $f(x)=x^3-3x+1$; $f(x)=-x^2+4x-2$;

## 2.3. الإشتقاق و مطاريف دالة

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للإشتقاق على مجال $I$ و $a$ عنصرا من $I$.

- إذا كان $f(a)$ مطرافا للدالة $f$ فإن $f'(a)=0$.
- إذا كان $f'$ تنعدم و تغير إشارتها في $a$ فإن $f(a)$ مطراف للدالة $f$.

$f(a)$ قيمة دنوية

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$f(a)$ قيمة قصوية

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

**تمرين 4**

حدد مطاريف الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2-2$

## 3.3. المعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$

**تعريف**

ليكن $\omega$ عددا حقيقيا.

- المعادلة $y''+\omega^2y=0$ ذات المجهول الدالة $y$ تسمى معادلة تفاضلية.
- كل دالة عددية $f$ قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق $f''(x)+\omega^2f(x)=0$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$.

## خاصية

ليكن $\omega$ عددا حقيقيا، نعتبر المعادلة التفاضلية $(E):\ y''+\omega^2 y=0$.

- إذا كان $\omega=0$ فإن حلول المعادلة التفاضلية $(E)$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$y:\ x\mapsto ax+b$$
حيث $a$ و $b$ عددين حقيقيين.
- إذا كان $\omega\neq 0$ فإن حلول المعادلة التفاضلية $(E)$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$y:\ x\mapsto a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$$
حيث $a$ و $b$ عددين حقيقيين.

## تمرين 5

1. حل المعادلات التفاضلية التالية:
$$y''+y=0;\quad y''+3y=0;\quad 4y''+y=0;\quad -2y''=y$$
2. نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E):\ 9y''+y=0$
   (ا) بين أن الدالة العددية $f:\ x\mapsto 2\sin(\frac{x}{3})$ هي حل للمعادلة التفاضلية $(E)$.
   (ب) حل المعادلة التفاضلية $(E)$.
   (ج) حدد الدالة العددية $g$، الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $(E)$، التي تحقق $g(\pi)=2$ و $g'(0)=-1$.