Chapitre 7

Équations, inéquations et systèmes

Sommaire

1 Définitions et vocabulaire

Définitions

- «**Une équation**» est une égalité $(=)$ dans laquelle une ou plusieurs valeurs, qu'on désigne par des lettres (le plus souvent x, y, z, $\ldots$), sont inconnues.
- «**Une inéquation**» est une inégalité $(\leq, <, \geq, >)$ dans laquelle une ou plusieurs valeurs, qu'on désigne par des lettres (le plus souvent x, y, z, $\ldots$), sont inconnues.
- le réel ou les réels qui vérifient une équation (ou une inéquation) sont appelés «**solutions**» de celle-ci.
- «**Résoudre**» une équation (ou une inéquation), c'est trouver tous les nombres réels qui la vérifient.
- L'«**ensemble des solutions**» d'une équation (ou d'une inéquation) est noté S.

Exemples

- Équations : $-2x+5=0$; $3x-5y=5$; $|x^2-1|=7$.
- Inéquations : $-3x^2-5x+6<3$; $3x+7y-3\geq 0$; $\sqrt{x^2+1}>3$.

2 Équation et inéquation du premier degré à une inconnue

2.1 Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

Définition

Toute équation pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$, avec a et b des réels connus, est appelée «**équation du premier degré à une inconnue**».

Règle

On considère l'équation (E) : $ax+b=0$, où a et b sont des réels.

- Si $a\neq 0$, alors, l'équation (E) admet une unique solution qui est $x=-\frac{b}{a}$. On écrit $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.
- Si $a=0$ et $b=0$, alors, l'équation (E) admet comme solution tous les nombres réels. On écrit $S=\mathbb{R}$.
- Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors, l'équation (E) n'admet pas de solution. On écrit $S=\emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $3x-5=-2x+1$ (b) $\frac{x}{6}-3=\frac{x}{4}-1$ (c) $3x-2=5x+3-2x$

(d) $2x+5-3x=3-x+2$ (e) $\frac{3x-2}{6}-\frac{5}{12}=\frac{2x-3}{4}$ (f) $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{5}=1-\frac{x+1}{3}$

2.2 Signe d'un binôme de la forme $ax+b$

Règle

On considère le binôme $ax+b$ avec $a\neq 0$. On a

- $x=-\frac{a}{b}$ si et seulement si $ax+b=0$.
- $x<-\frac{a}{b}$ si et seulement si $ax+b$ et a ont le même signe.
- $x>-\frac{a}{b}$ si et seulement si $ax+b$ et a ont des signes opposés.

On résume ses situations dans un tableau, appelé tableau de signe de $ax+b$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exercice

Etudier le signe des binômes suivants :

(a) $4x+2$ (b) $-2x+4$ (c) $3x-\sqrt{2}$ (d) $-4x-5$

2.3 Résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue

Définition

Toute inéquation pouvant se ramener à l'une des formes $ax+b \leq 0$, $ax+b < 0$, $ax+b \geq 0$ ou $ax+b > 0$, avec a et b des réels connus, est appelée «**inéquation du premier degré à une inconnue**».

Règle

- **Méthode 1** : Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, revient à isoler l'inconnue, en utilisant les règles de d'addition et de multiplication sur les inégalités.
- **Méthode 2** : Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, revient à étudier le signe de son binôme (premier membre de l'inéquation), et d'en déduire les réels x pour lesquels l'inéquation est vérifiée.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(a) $3x+5<0$ (b) $-2x+\frac{1}{2} \geq 0$ (c) $3x-\sqrt{2} \leq -2x+1$ (d) $-\frac{4x-1}{3} > \frac{5-3x}{2}+\frac{x}{6}$

3 Équation et inéquation du second degré à une inconnue

3.1 Résolution d'une équation du second degré à une inconnue

Définition

Toute équation pouvant se ramener à la forme $ax^2+bx+c=0$, avec a, b et c des réels connus tels que $a \neq 0$, est appelée «**équation du second degré à une inconnue**».

Remarques

- L'équation $ax^2+bx+c=0$ est dite complète si $b \neq 0$ et $c \neq 0$.
- L'équation $ax^2+bx+c=0$ est dite incomplète si $b=0$ ou $c=0$.

Exemples

L'équation $-2x^2-3x+4=0$ est complète, et les équations $5x^2+3x=0$ et $4x^2-1=0$ sont incomplètes.

Définition

On appelle «**discriminant**» d'une équation complète $ax^2+bx+c=0$ le réel b^2-4ac, noté Δ.

Exemples

- Le discriminant de l'équation $2x^2-x+3=0$ est $\Delta=(-1)^2-4\times2\times3=1-24=-23$.
- Le discriminant de l'équation $-x^2+3x+2=0$ est $\Delta=3^2-4\times(-1)\times2=9+8=-17$.
- Le discriminant de l'équation $\frac{1}{2}x^2+2x+2=0$ est $\Delta=2^2-4\times\frac{1}{2}\times2=4-4=0$.

Règle

Soit (E) : $ax^2+bx+c=0$ une équation complète de discriminant Δ.

- Si $\Delta>0$ alors l'équation (E) admet deux solutions x_1 et x_2 tels que $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta=0$ alors l'équation (E) admet une unique solution x_0 tel que $x_0=-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$ alors l'équation (E) n'admet de solution et $S=\emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $2x^2+3x+1=0$ (b) $\frac{1}{3}x^2-2x+3=0$ (c) $-x^2-x+2=0$ (d) $-3x^2+4\sqrt{3}x-3=0$

Règle

Si $(E):\ ax^2+bx+c=0$ est une équation incomplète, alors :

- si $b=0$ alors résoudre l'équation $ax^2+c=0$ revient à résoudre l'équation carrée $x^2=-\frac{c}{a}$.
  On pose $k=-\frac{c}{a}$.
  Si $k>0$, alors, l'équation (E) admet deux solutions $x_1=\sqrt{k}$ et $x_2=-\sqrt{k}$, sinon, si $k=0$, alors, elle admet une seule solution $x_0=0$, enfin, si $k<0$, alors, elle n'admet pas de solutions.
- si $c=0$ alors résoudre l'équation $ax^2+bx=0$ revient à résoudre l'équation produit $x(ax+b)=0$. Ce qui est équivaut à $x=0$ ou $ax+b=0$.
  L'équation (E) admet donc deux solutions $x_1=0$ et $x_2=-\frac{b}{a}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $3x^2+1=0$ (b) $-\frac{1}{5}x^2-x=0$ (c) $-x^2+3=0$ (d) $x^2+x\sqrt{2}=0$

3.2 Factorisation d'un trinôme de la forme ax^2+bx+c

Règle

Factoriser le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ revient à résoudre l'équation $(E):\ ax^2+bx+c=0$.

- Si l'équation (E) admet deux solutions x_1 et x_2 alors on a $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Si l'équation (E) admet une seule solution x_0 alors on a $P(x)=a(x-x_0)^2$.
- Si l'équation (E) n'admet de solution alors $P(x)$ est impossible à factoriser.

Exercice

Factoriser, si possible, les trinômes suivants :
(a) $2x^2+6x+18$ (b) $-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-6$ (c) $-x^2-x-2$ (d) $x^2-2(1-\sqrt{2})x+3+2\sqrt{2}$
(e) $4x^2-3$ (f) $2x^2+3$ (g) $-x^2+9$ (h) $-2x^2-5x$ (i) x^2+3x

3.3 Signe d'un trinôme de la forme ax^2+bx+c

Règle

Étudier le signe du trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$ revient à résoudre l'équation $(E):\ ax^2+bx+c=0$.

- Si l'équation (E) admet deux solutions x_1 et x_2 (avec $x_1<x_2$) alors on a :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si l'équation (E) admet une seule solution x_0 alors on a :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

- Si l'équation (E) n'admet de solution alors on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Exercice

Étudier le signe des trinômes suivants :

(a) $-x^2+3x+4$ (b) $\sqrt{3}x^2-2x-3\sqrt{3}$ (c) $-\frac{1}{2}x^2-2x-2$ (d) x^2+3x+3

(e) $-x^2+9$ (f) $4x^2+9$ (g) $-3x^2+2x$ (h) x^2+5x

3.4 Résolution d'une inéquation du second degré à une inconnue

Définition

Toute inéquation pouvant se ramener à l'une des formes $ax^2+bx+c\leq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$ ou $ax^2+bx+c>0$, avec a, b et c des réels connus tels que $a\neq 0$, est appelée «**inéquation du second degré à une inconnue**».

Règle

Résoudre une inéquation du second degré à une inconnue, revient à étudier le signe de son trinôme (premier membre de l'inéquation), et d'en déduire les réels x pour lesquels l'inéquation est vérifiée.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $x^2-4x+4>0$ (b) $-\frac{1}{3}x^2+x+6\geq 0$ (c) $x^2-\sqrt{2}x-2<0$ (d) $-3x^2+\sqrt{3}x-1\leq 0$

(e) $-x^2+16<0$ (f) $4x^2+9\leq 0$ (g) $4x^2-7x>0$ (h) $-x^2+5\geq 0$

4 Équations et inéquations d'autres types à une inconnue

4.1 Équation et inéquation produit – Équations et inéquations quotient

Définitions

- Toute équation de la forme $P(x)\times Q(x)=0$, avec $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes, est appelée «**équation produit nul à une inconnue**».
- Toute équation de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, avec $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes, est appelée «**équation quotient nul à une inconnue**».

Règles

Résoudre une équation de type $P(x)\times Q(x)=0$ ou $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, revient à résoudre les deux équations $P(x)=0$ et $Q(x)=0$. On écrit :

- $P(x)\times Q(x)=0$ est équivaut à $P(x)=0$ ou $Q(x)=0$.
- $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ est équivaut à $P(x)=0$ et $Q(x)\neq 0$ (on résout l'équation comme si on $=$ au lieu de $\neq$).

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $(x-3)(2x+5)=0$ (b) $(-x^2-2x+3)(2-3x)=0$ (c) $\frac{-x+3}{2x+1}=0$ (d) $\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=0$

Définitions

- Toute inéquation de l'une des formes $P(x)\times Q(x)\geq 0$, $P(x)\times Q(x)>0$, $P(x)\times Q(x)\leq 0$ ou $P(x)\times Q(x)<0$, avec $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynôme, est appelée «**inéquation produit à une inconnue**».
- Toute inéquation de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0$ ou $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$, avec $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynôme, est appelée «**inéquation quotient à une inconnue**».

Règles

Résoudre une inéquation de l'une des formes précédentes, revient à étudier les signes des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ et d'en déduire le signe $P(x) \times Q(x)$ ou $\frac{P(x)}{Q(x)}$, puis déterminer les réels x pour lesquels l'inéquation est vérifiée.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(a) $(2x-1)(x+5) > 0$ (b) $(3x+4)(x+\sqrt{3})(-2x+6) \geq 0$ (c) $\frac{-x+1}{3x+2} < 0$ (d) $\frac{3x(2x+4)}{2x^2-2x\sqrt{6}+3} \leq 0$

4.2 Équation et inéquation contenant la valeur absolue

Règles

Résoudre une équation ou inéquation contenant une ou plusieurs valeurs absolues, revient à les mettre du même côté de l'égalité, puis éliminer la valeur absolue, en utilisant ses propriétés, pour obtenir une équation ou inéquation de l'une des formes précédemment étudier. Les solutions obtenues doivent être vérifier, avant de les inclure dans l'ensemble des solutions.

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $|-4x+3| = 3$ (b) $|-x^2+x| = |x-1|$ (c) $2|x-2| + |2x+1| = 3-x$ (d) $|x^2-1| = x|x+1|$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   (a) $|3x-4| < 5$ (b) $|2x+5| \geq 3$ (c) $|4-2x| < 3|x+5| + 4$ (d) $|x^2-3x| \leq 5|x|$

4.3 Équation et inéquation contenant le carré ou la racine carrée

Règles

- Pour résoudre une équation de la forme $(P(x))^2 = Q(x)$, avec $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes, on procède comme suit :
  - Si $Q(x)$ est de degré 0, c'est-à-dire $Q(x) = a$, avec a un réel positif, alors l'équation devient $(P(x))^2 = a$ ce qui revient à résoudre l'équation $|P(x)| = \sqrt{a}$.
  - Sinon, on développe $(P(x))^2$ et on simplifie l'équation de sorte à obtenir une des formes précédemment étudier. Les solutions obtenues doivent être vérifier, avant de les inclure dans l'ensemble des solutions.
- Résoudre une équation de la forme $\sqrt{P(x)} = Q(x)$, avec $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes, revient à résoudre l'équation $(Q(x))^2 = P(x)$. On écrit $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ implique que $P(x) = (Q(x))^2$. Les solutions obtenues doivent être vérifier, avant de les inclure dans l'ensemble des solutions.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $(2x-3)^2 = 4$ (b) $(x+2)^2 = 2x+1$ (c) $\sqrt{5-x} = 3$ (d) $\sqrt{2x+4} = x+3$

Règles

- Pour résoudre une inéquation de la forme $(P(x))^2 \leq Q(x)$ (respectivement $(P(x))^2 \geq Q(x)$), avec $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes, on procède comme suit :
  - Si $Q(x)$ est de degré 0, c'est-à-dire $Q(x) \leq a$ (respectivement $Q(x) \geq a$), avec a un réel positif, alors l'inéquation devient $(P(x))^2 \leq a$ (respectivement $(P(x))^2 \geq a$) ce qui revient à résoudre l'inéquation $|P(x)| \leq \sqrt{a}$ (respectivement $|P(x)| \geq \sqrt{a}$).
  - Sinon, on développe $(P(x))^2$ et on simplifie l'inéquation de sorte à obtenir une des formes précé-

demment étudier. Les solutions obtenues doivent être vérifier, avant de les inclure dans l'ensemble des solutions.

- Résoudre une inéquation de la forme $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$ (respectivement $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$), avec $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes, revient à résoudre l'inéquation $(Q(x))^2 \leq P(x)$ (respectivement $(Q(x))^2 \geq P(x)$). On écrit $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$ (respectivement $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$) implique que $P(x) \leq (Q(x))^2$ (respectivement $P(x) \geq (Q(x))^2$). Les solutions obtenues doivent être vérifier, avant de les inclure dans l'ensemble des solutions.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(a) $(x-6)^2 > 4$ (b) $(2x+1)^2 \geq 8x$ (c) $\sqrt{x+5} < 5$ (d) $\sqrt{x^2+3} \leq 2x$

5 Système d'équations à deux inconnues

Dans la suite, $\mathbb{R}^2$ représente l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

5.1 Équation du premier degré à deux inconnues

Définition

Toute équation pouvant se ramener à la forme $ax + by + c = 0$, avec a, b et c des réels connus, est appelée «**équation du premier degré à deux inconnues**».
Les solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ sont les couples $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$ la vérifiant.

Règle

On considère l'équation (E) : $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des réels.

- Si $a \neq 0$, alors, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a} \text{ et } y \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $b \neq 0$, alors, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ et } y \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$, alors, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \mathbb{R}^2$.
- Si $a = 0$, $b = 0$ et $c \neq 0$, alors, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $2x - 3y + 1 = 0$ (b) $2x - 3 = 0$ (c) $-3y + 1 = 0$ (d) $\frac{x+y-6}{3} - \frac{x-y-8}{4} = \frac{x+5y}{12} - y + 2$

5.2 Système d'équations du premier degré à deux inconnues

Définition

On considère le système (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, où a, a', b et b' sont des réels connus.

- On appelle «**déterminant**» du système (S), le nombre réel noté D tel que $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$.
- Le système (S) est dit «**de Cramer**», si $\mathrm{D} \neq 0$.
- On appelle «**déterminant extrait**» du système (S), le déterminant obtenu, en remplaçant dans le précédent, soit a et a', ou bien b et b', par c et c'. Le premier sera noté D_x, et le second D_y.
  En d'autres termes $\mathrm{D}_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$ et $\mathrm{D}_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$.

Exemples

On considère le système (S) : $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$.

- le déterminant de (S) est $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times (-1) = 6 + 1 = 7$.
- les déterminants extraits de (S) sont

$$\mathrm{D}_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 0 \times (-1) = 9 - 0 = 9 \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 1 \times 3 = 0 - 3 = -3.$$

Règle

On considère le système (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, où a, a', b et b' sont des réels connus.
Soit D le discriminant de (S), et D_x et D_y ses déterminants extraits.

- Si $\mathrm{D} \neq 0$, alors, le système (S) admet une unique solution $(x_0; y_0)$ tel que $x_0 = \frac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}}$ et $y_0 = \frac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}$. On écrit $S = \{(x_0; y_0)\}$.
- Si $\mathrm{D} = 0$, avec $\mathrm{D}_x = 0$ et $\mathrm{D}_y = 0$, alors, le système (S) admet une infinité de solutions. Ce sont les solutions de l'une de ses deux équations, puisqu'elles seront identiques ou équivalentes.
- Si $\mathrm{D} = 0$, avec $\mathrm{D}_x \neq 0$ ou bien $\mathrm{D}_y \neq 0$, alors, le système (S) n'admet pas de solutions, et l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -8x + 4y = 15 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} -4x - 12y = 8 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$

Remarque

Il est possible d'utiliser les deux méthodes de résolution d'un système, vues au secondaire collégial – méthode de substitution et méthode par combinaison linéaire – pour résoudre un système d'équations du premier degré à deux inconnues.

5.3 Système somme et produit de deux inconnues

Règle

On considère le système (S) : $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$, où p et q sont deux réels connus.
Résoudre le système (S), revient à résoudre l'équation (E) : $X^2 - pX + q = 0$, où X est l'inconnue.
Le discriminent de cette équation est $\Delta = p^2 - 4q$.

- Si $\Delta > 0$, alors, l'équation (E) admet deux solutions X_1 et X_2, et le système (S) a pour ensemble de solutions $S = \{(X_1; X_2); (X_2; X_1)\}$.
- Si $\Delta = 0$, alors, l'équation (E) admet une seule solution X_0, et le système (S) a pour ensemble de solutions $S = \{(X_0; X_0)\}$.
- Si $\Delta < 0$, alors, l'équation (E) n'admet pas de solutions, et le système (S) a pour ensemble de solutions $S = \emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} x + y = \frac{1}{6} \\ xy = -\frac{1}{6} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$