Chapitre 8

Équations, inéquations et systèmes

Sommaire

1 Définitions et vocabulaire

Définitions

- «**Une équation**» est une égalité (=) dans laquelle une ou plusieurs valeurs, qu'on désigne par des lettres (le plus souvent x, y, z, ...), sont inconnues.
- «**Une inéquation**» est une inégalité ($\leq$, $<$, $\geq$, $>$) dans laquelle une ou plusieurs valeurs, qu'on désigne par des lettres (le plus souvent x, y, z, ...), sont inconnues.
- le réel ou les réels qui vérifient une équation (ou une inéquation) sont appelés «**solutions**» de celle-ci.
- «**Résoudre**» une équation (ou une inéquation), c'est trouver tous les nombres réels qui la vérifient.
- L'«**ensemble des solutions**» d'une équation (ou d'une inéquation) est noté S.

Exemples

- Équations : $-2x+5=0$; $3x-5y=5$; $|x^2-1|=7$.
- Inéquations : $-3x^2-5x+6<3$; $3x+7y-3\geq 0$; $\sqrt{x^2+1}>3$.

2 Équation et inéquation du premier degré à une inconnue

2.1 Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

Définition

Toute équation pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$, avec a et b des réels connus, est appelée «**équation du premier degré à une inconnue**».

Règle

On considère l'équation (E) : $ax+b=0$, où a et b sont des réels.

- Si $a\neq 0$, alors, l'équation (E) admet une unique solution qui est $x=-\frac{b}{a}$. On écrit $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.
- Si $a=0$ et $b=0$, alors, l'équation (E) admet comme solution tous les nombres réels. On écrit $S=\mathbb{R}$.
- Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors, l'équation (E) n'admet pas de solution. On écrit $S=\emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $3x-5=-2x+1$ (b) $\frac{x}{6}-3=\frac{x}{4}-1$ (c) $3x-2=5x+3-2x$

(d) $2x+5-3x=3-x+2$ (e) $\frac{3x-2}{6}-\frac{5}{12}=\frac{2x-3}{4}$ (f) $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{5}=1-\frac{x+1}{3}$

2.2 Signe d'un binôme de la forme $ax+b$

Règle

On considère le binôme $ax+b$ avec $a\neq 0$. On a

- $x=-\frac{a}{b}$ si et seulement si $ax+b=0$.
- $x<-\frac{a}{b}$ si et seulement si $ax+b$ et a ont le même signe.
- $x>-\frac{a}{b}$ si et seulement si $ax+b$ et a ont des signes opposés.

On résume ses situations dans un tableau, appelé tableau de signe de $ax+b$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exercice

Etudier le signe des binômes suivants :

(a) $4x+2$ (b) $-2x+4$ (c) $3x-\sqrt{2}$ (d) $-4x-5$

2.3 Résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue

Définition

Toute inéquation pouvant se ramener à l'une des formes $ax+b \leq 0$, $ax+b<0$, $ax+b \geq 0$ ou $ax+b>0$, avec a et b des réels connus, est appelée «**inéquation du premier degré à une inconnue**».

Règle

- **Méthode 1** : Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, revient à isoler l'inconnue, en utilisant les règles de d'addition et de multiplication sur les inégalités.
- **Méthode 2** : Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, revient à étudier le signe de son binôme (premier membre de l'inéquation), et d'en déduire les réels x pour lesquels l'inéquation est vérifiée.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(a) $3x+5<0$ (b) $-2x+\frac{1}{2} \geq 0$ (c) $3x-\sqrt{2} \leq -2x+1$ (d) $-\frac{4x-1}{3} > \frac{5-3x}{2}+\frac{x}{6}$

3 Équation et inéquation du second degré à une inconnue

3.1 Résolution d'une équation du second degré à une inconnue

Définition

Toute équation pouvant se ramener à la forme $ax^2+bx+c=0$, avec a, b et c des réels connus tels que $a \neq 0$, est appelée «**équation du second degré à une inconnue**».

Exemples

L'équation $-2x^2-3x+4=0$ est une équation du second degré à une inconnue.
Les équations $5x^2+3x=0$ et $4x^2-1=0$ le sont aussi.

Définition

On appelle «**discriminant**» d'une équation $ax^2+bx+c=0$ le réel b^2-4ac, noté Δ.

Exemples

- Le discriminant de l'équation $2x^2-x+3=0$ est $\Delta=(-1)^2-4\times 2\times 3=1-24=-23$.
- Le discriminant de l'équation $-x^2+3x+2=0$ est $\Delta=3^2-4\times(-1)\times 2=9+8=-17$.
- Le discriminant de l'équation $\frac{1}{2}x^2+2x+2=0$ est $\Delta=2^2-4\times\frac{1}{2}\times 2=4-4=0$.

Règle

Soit $(E): \; ax^2+bx+c=0$ une équation de discriminant Δ.

- Si $\Delta>0$ alors l'équation (E) admet deux solutions x_1 et x_2 tels que $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta=0$ alors l'équation (E) admet une unique solution x_0 tel que $x_0=-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$ alors l'équation (E) n'admet de solution et $S=\emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $2x^2+3x+1=0$ (b) $\frac{1}{3}x^2-2x+3=0$ (c) $-x^2-x+2=0$ (d) $-3x^2+4\sqrt{3}x-3=0$

Règle

On considère l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$ avec $(a\neq 0)$.

- Si $b=0$ alors résoudre l'équation $ax^2+c=0$ revient à résoudre l'équation $x^2=-\frac{c}{a}$.
  - Si $-\frac{c}{a}>0$, alors, l'équation (E) admet deux solutions $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ et $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
  - Si $-\frac{c}{a}=0$, alors, l'équation (E) admet une seule solution $x_0=0$.
  - Si $-\frac{c}{a}<0$, alors, l'équation (E) n'admet pas de solutions.
- si $c=0$ alors résoudre l'équation $ax^2+bx=0$ revient à résoudre l'équation $x(ax+b)=0$.
  Ce qui signifie que $x=0$ ou $ax+b=0$.
  L'équation (E) admet donc deux solutions $x_1=0$ et $x_2=-\frac{b}{a}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $3x^2+1=0$ (b) $-\frac{1}{5}x^2-x=0$ (c) $-x^2+3=0$ (d) $x^2+x\sqrt{2}=0$

3.2 Factorisation d'un trinôme de la forme ax^2+bx+c

Règle

Factoriser le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ revient à résoudre l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$.

- Si l'équation (E) admet deux solutions x_1 et x_2 alors on a $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Si l'équation (E) admet une seule solution x_0 alors on a $P(x)=a(x-x_0)^2$.
- Si l'équation (E) n'admet de solution alors $P(x)$ est impossible à factoriser.

Exercice

Factoriser, si possible, les trinômes suivants :

(a) $2x^2+6x+18$ (b) $-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-6$ (c) $-x^2-x-2$ (d) $x^2-2(1-\sqrt{2})x+3+2\sqrt{2}$
(e) $4x^2-3$ (f) $2x^2+3$ (g) $-x^2+9$ (h) $-2x^2-5x$ (i) x^2+3x

3.3 Signe d'un trinôme de la forme ax^2+bx+c

Règle

Étudier le signe du trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$ revient à résoudre l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$.

- Si l'équation (E) admet deux solutions x_1 et x_2 (avec $x_1<x_2$) alors on a :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si l'équation (E) admet une seule solution x_0 alors on a :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

- Si l'équation (E) n'admet de solution alors on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Exercice

Étudier le signe des trinômes suivants :

(a) $-x^2+3x+4$ (b) $\sqrt{3}x^2-2x-3\sqrt{3}$ (c) $-\frac{1}{2}x^2-2x-2$ (d) x^2+3x+3

(e) $-x^2+9$ (f) $4x^2+9$ (g) $-3x^2+2x$ (h) x^2+5x

3.4 Résolution d'une inéquation du second degré à une inconnue

Définition

Toute inéquation pouvant se ramener à l'une des formes $ax^2+bx+c\leq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$ ou $ax^2+bx+c>0$, avec a, b et c des réels connus tels que $a\neq 0$, est appelée «**inéquation du second degré à une inconnue**».

Règle

Résoudre une inéquation du second degré à une inconnue, revient à étudier le signe de son trinôme (premier membre de l'inéquation), et d'en déduire les réels x pour lesquels l'inéquation est vérifiée.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(a) $x^2-4x+4>0$ (b) $-\frac{1}{3}x^2+x+6\geq 0$ (c) $x^2-\sqrt{2}x-2<0$ (d) $-3x^2+\sqrt{3}x-1\leq 0$
(e) $-x^2+16<0$ (f) $4x^2+9\leq 0$ (g) $4x^2-7x>0$ (h) $-x^2+5\geq 0$

4 Équations et inéquations d'autres types à une inconnue

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $(x-3)(2x+5)=0$ (b) $(-x^2-2x+3)(2-3x)=0$ (c) $\frac{-x+3}{2x+1}=0$ (d) $\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $|-4x+3|=3$ (b) $|2x^2-4|=0$ (c) $|1-2x|=|1+2x|$ (d) $|-x^2+x|=|x-1|$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $(2x-3)^2=4$ (b) $(x+2)^2=2x+1$ (c) $\sqrt{5-x}=3$ (d) $\sqrt{2x+4}=x+3$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $|-x^2+x|=3|x-1|$ (b) $|x^2-1|=x|x+1|$ (c) $|-4x+2|-|3x+2|=5$ (d) $2|x-2|+|2x+1|=3-x$

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(a) $(2x-1)(x+5)>0$ (b) $(3x+4)(x+\sqrt{3})(-2x+6)\geq 0$ (c) $\frac{-x+1}{3x+2}<0$ (d) $\frac{3x(2x+4)}{2x^2-2x\sqrt{6}+3}\leq 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(a) $|3x-4|<5$ (b) $|2x+5|\geq 3$ (c) $|4-2x|<3|x+5|+4$ (d) $|x^2-3x|\leq 5|x|$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(a) $(x-6)^2>4$ (b) $(2x+1)^2\geq 8x$ (c) $\sqrt{x+5}<5$ (d) $\sqrt{x^2+3}\leq 2x$

5 Système d'équations à deux inconnues

Dans la suite, $\mathbb{R}^2$ représente l'ensemble des couples (x,y) tels que $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$.

5.1 Équation du premier degré à deux inconnues

Définition

Toute équation pouvant se ramener à la forme $ax+by+c=0$, avec a, b et c des réels connus, est appelée «**équation du premier degré à deux inconnues**».
Les solutions de l'équation $ax+by+c=0$ sont les couples $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$ la vérifiant.

5.2 Système d'équations du premier degré à deux inconnues

Définition

On considère le système $(S) : \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où a, a', b et b' sont des réels connus.

- On appelle «**déterminant**» du système (S), le nombre réel noté D tel que $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$.
- Le système (S) est dit «**de Cramer**», si $\mathrm{D} \neq 0$.
- On appelle «**déterminant extrait**» du système (S), le déterminant obtenu, en remplaçant dans le précédent, soit a et a', ou bien b et b', par c et c'. Le premier sera noté D_x, et le second D_y.
  En d'autres termes $\mathrm{D}_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$ et $\mathrm{D}_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$.

Exemples

On considère le système $(S) : \begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=0 \end{cases}$.

- le déterminant de (S) est $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 - 1\times(-1) = 6+1 = 7$.
- les déterminants extraits de (S) sont

$$\mathrm{D}_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\times 3 - 0\times(-1) = 9-0 = 9 \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\times 0 - 1\times 3 = 0-3 = -3.$$

Règle

On considère le système $(S) : \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où a, a', b et b' sont des réels connus.
Soit D le discriminant de (S), et D_x et D_y ses déterminants extraits.

- Si $\mathrm{D} \neq 0$, alors, le système (S) admet une unique solution $(x_0; y_0)$ tel que $x_0 = \frac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}}$ et $y_0 = \frac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}$.
  On écrit $S = \{(x_0; y_0)\}$.
- Si $\mathrm{D} = 0$, avec $\mathrm{D}_x = 0$ et $\mathrm{D}_y = 0$, alors, le système (S) admet une infinité de solutions. Ce sont les solutions de l'une de ses deux équations, puisqu'elles seront identiques ou équivalentes.
- Si $\mathrm{D} = 0$, avec $\mathrm{D}_x \neq 0$ ou bien $\mathrm{D}_y \neq 0$, alors, le système (S) n'admet pas de solutions, et l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x+4y=0 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -8x+4y=15 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} -4x-12y=8 \\ 2x+6y=-4 \end{cases}$

5.3 Système somme et produit de deux inconnues

Règle

On considère le système $(S) : \begin{cases} x+y=p \\ xy=q \end{cases}$, où p et q sont deux réels connus.
Résoudre le système (S), revient à résoudre l'équation $(E) :\ X^2 - pX + q = 0$, où X est l'inconnue.
Le discriminent de cette équation est $\Delta = p^2 - 4q$.

- Si $\Delta > 0$, alors, l'équation (E) admet deux solutions X_1 et X_2, et le système (S) a pour ensemble de solutions $S = \{(X_1; X_2); (X_2; X_1)\}$.
- Si $\Delta = 0$, alors, l'équation (E) admet une seule solution X_0, et le système (S) a pour ensemble de solutions $S = \{(X_0; X_0)\}$.
- Si $\Delta < 0$, alors, l'équation (E) n'admet pas de solutions, et le système (S) a pour ensemble de solutions $S = \emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} x+y=\frac{1}{6} \\ xy=-\frac{1}{6} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=12 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=0 \\ x+y=-2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$

6 Régionnement du plan

6.1 Régionnement et signe de $ax+by+c$

Propriété

On considère la droite $(D) : ax+by+c=0$.
La droite (D) définit deux demi-plans ouverts :

- L'un d'eux est l'ensemble des points $M(x,y)$ qui vérifient l'inégalité $ax+by+c>0$.
- L'autre est l'ensemble des points $M(x,y)$ qui vérifient l'inégalité $ax+by+c<0$.

Pour distinguer entre les deux demi-plans, on calcule la valeur de $ax+by+c$ pour les coordonnées d'un point qui n'est pas sur la droite (D). Généralement, on choisit $O(0;0)$ l'origine du repère si c'est possible.

Exercice

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes :

(a) $2x+3x-1>0$ (b) $-3x+2x<4$ (c) $-x-2y+1\geq 0$ (d) $-2x+3y+4\leq 0$ (e) $2y-1>0$

6.2 Résolution graphique d'un système d'inéquations

Exercice

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} 2x+y<0 \\ 3x+y\leq 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-y+4>0 \\ 2x+5y+8>0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x+3y\geq 1 \\ -x+2y\geq 4 \end{cases}$