Chapitre 12

Fonctions de références

Sommaire

1 Fonctions paraboles

1.1 Fonction $x \mapsto ax^2$ où $a \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^2$, où a est un réel non nul, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$ (f est une fonction polynôme).
- La fonction f est paire.
- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est appelée «**parabole de sommet** $O(0,0)$ **et d'axe** $x = 0$ (l'axe des ordonnées)».

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto 2x^2$ et $g : x \mapsto -\frac{2}{3}x^2$.

1.2 Fonction $x \mapsto ax^2 + b$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^2 + b$, où a et b sont des réels non nuls, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$ (f est une fonction polynôme).
- La fonction f est paire.
- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	b	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	b	$\searrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est une parabole de sommet $S(0,b)$ et d'axe $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto 2x^2 - 3$ et $g : x \mapsto -\frac{2}{3}x^2 + 1$.

1.3 Fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ax^2 + b$, où a est un réel non nul, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$ (f est une fonction polynôme).
- Pour tout x de D_f, on a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2-4ac}{4a}$.

- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est un parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$ et d'axe $x = \alpha$.

Remarques

- L'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est appelé «forme canonique» de l'expression $ax^2 + bx + c$.
- Il est à noter que $f(\alpha) = \beta$, c'est-à-dire $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2-4ac}{4a}$.
- Rappelons que le terme $b^2 - 4ac$, noté Δ, est le discriminant de l'expression $ax^2 + bx + c$.

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto 2x^2 + 8x + 5$ et $g : x \mapsto -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$.

2 Fonctions hyperboles

2.1 Fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$ où $a \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{a}{x}$, où a est un réel non nul, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.
- La fonction f est impaire.
- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

- La courbe (C_f) de la fonction f est appelée «**hyperbole de centre** $O(0,0)$ **et d'asymptotes** $x = 0$ **et** $y = 0$ (les axes du repère)».

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto \frac{4}{x}$ et $g : x \mapsto -\frac{3}{2x}$.

2.2 Fonction $x \mapsto \frac{a}{x} + b$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{a}{x} + b$, où a et b sont des réels non nuls, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.

- Le tableau des variations de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

- La courbe (C_f) de la fonction f est un hyperbole de centre $\Omega(0, b)$ et d'asymptotes $x = 0$ (l'axe des ordonnées) et $x = b$.

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto \frac{4}{x} - 1$ et $g : x \mapsto -\frac{3}{2x} + 2$.

2.3 Fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ où $ad - bc \neq 0$

Propriétés

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, où $ad - bc \neq 0$, et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- La fonction f a pour domaine de définition $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -\frac{d}{c}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.
- Pour tout x de D_f, on a $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$, où $\alpha = \frac{a}{c}$ et $\beta = -(ad - bc)$.
- Le tableau des variations de f dépend du signe de β :

Si $\beta > 0$, alors :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Si $\beta < 0$, alors :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

- La courbe (C_f) de la fonction f est un hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \alpha\right)$ et d'asymptotes $x = -\frac{d}{c}$ et $x = \alpha$.

Remarques

- L'écriture $\alpha + \frac{\beta}{cx+d}$ est appelé «forme canonique» de l'expression $\frac{ax+b}{cx+d}$.
- Rappelons que le terme $ad - bc$ est le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ issue de l'expression $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Exercice

Étudier et tracer les courbes des deux fonctions $f : x \mapsto \frac{-x+6}{x-2}$ et $g : x \mapsto -\frac{4x+1}{2x+2}$.

3 Exercices

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions numériques définies par $f(x) = -x^2 + 4x$ et $g(x) = \frac{4x}{x-2}$, et (C_f) et (C_g) leurs représentations graphiques dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer D_f et D_g les domaines de définitions respectifs de f et de g.
2. Déterminer la nature de (C_f) et (C_g).
3. Étudier les variations de f et g.

4. Déterminer l'intersection de (C_f) et les axes du repère.
5. Déterminer l'intersection de (C_g) et les axes du repère.
6. Tracer (C_f) et (C_g).
7. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.
8. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
9. Résoudre graphiquement suivant les valeurs du réels m les équations $f(x) = m$ et $g(x) = m$.