# الدرس الثالث

# المتتاليات العددية

## محتوى الدرس

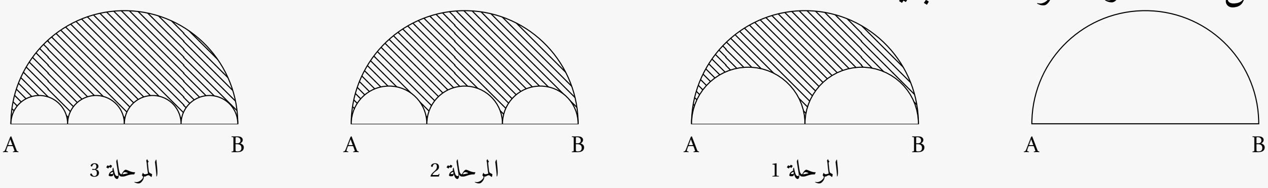
# 1. عموميات حول المتتاليات العددية

## نشاط 1

1. لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة اللوائح التالية:

(ا) $-2\ ;\ -\frac{3}{2}\ ;\ -1\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \ldots$ (ب) $-2\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ -\frac{8}{9}\ ;\ \frac{16}{27}\ ;\ \ldots$ (ج) $0\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ \ldots$

2. لتكن $(\mathscr{C})$ دائرة قطرها $[AB]$ بحيث $AB = 10\text{ cm}$.




نقسم القطعة $[AB]$ على التوالي إلى قطعتين، ثم إلى ثلاث قطع، ثم إلى أربع قطع، كلها متساوية. و في كل مرحلة ننشئ أنصاف دوائر أقطارها القطع المحصل عليها من التقسيم و نهتم بمساحة الحيز المخدش من الشكل.

(ا) نرمز بـ $a_1$ و $a_2$ و $a_3$ لمساحات الأحياز المخدشة في المراحل 1 و 2 و 3. أحسب $a_1$ و $a_2$ و $a_3$.

(ب) أنشئ الشكل المحصل عليه في المرحلة 4 ثم أحسب $a_4$.

(ج) في المرحلة $n$، نقسم القطعة $[AB]$ إلى $n+1$ من القطع المتساوية. تحقق من أن $a_n = \frac{25\pi}{2} \times \frac{n}{n+1}$.

### 1.1. تعاريف و مصطلحات

- كل لائحة غير منتهية من الأعداد الحقيقية تسمى متتالية عددية. كل عدد حقيقي من اللائحة يسمى حدا.
- ليكن $p$ عددا صحيحا طبيعيا، نضع $I = \{n \in \mathbb{N}\ /\ n \geqslant p\}$. لدينا $I = \{p; p+1; p+2; p+3; p+4; \ldots\}$.
نربط كل عنصر من $I$ بحد وحيد من متتالية عددية و نستعمل الترميز الموالي:

  - نرمز للحد الأول للمتتالية بالرمز $u_p$.
  نرمز للحد الثاني من المتتالية بالرمز $u_{p+1}$.
  نرمز للحد الثالث من المتتالية بالرمز $u_{p+2}$.
  نرمز للحد الرابع من المتتالية بالرمز $u_{p+3}$.
  $\vdots$
  نرمز للحد $n-1$ من المتتالية بالرمز .......
  نرمز للحد $n$ من المتتالية بالرمز .......
  $\vdots$
  - الكتابة $u_i$ تقرأ الحد ذو المدل $i$.
  - تعبير الحد $u_n$ بدلالة $n$ يسمي الحد العام للمتتالية.
  - نرمز للمتتالية العددية بالرمز $(u_n)_{n \in I}$ أو الرمز $(u_n)_{n \geqslant p}$.
  - إذا كان $I = \mathbb{N}$ (أي $p = 0$) فإننا نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)$.
  - إذا كان تعبير المتتالية $(u_n)_{n \geqslant p}$ معرف بدلالة $n$ فقط فإننا نقول إن المتتالية $(u_n)_{n \geqslant p}$ معرفة بصيغة صريحة.
  في هذه الحالة، حساب حدود المتتالية يتم بتعويض قيمة $n$.
  على سبيل المثال المتتاليات $u_n = 3n-1$، $u_n = 2^n$، $u_n = \frac{3}{n} + \sqrt{n}$.
  - إذا كان تعبير المتتالية $(u_n)_{n \geqslant p}$ معرف بدلالة الحد أو الحدود التي قبله ( $u_{n-1}$، $u_{n-2}$، $\cdots$ ) فإننا نقول إن المتتالية $(u_n)_{n \geqslant p}$ معرفة بصيغة ترجعية.
  في هذه الحالة، حساب حد من حدود المتتالية يتطلب معرفة الحد أو الحدود التي قبله.
  على سبيل المثال المتتاليات $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$، $\begin{cases} u_2 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 3} \end{cases}$، $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = n\sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$.

**أمثلة**

- لتكن $(u_n)_{n\geqslant 3}$ المتتالية المعرفة بما يلي: $u_n = \frac{1}{3}n^2 - 1$

لنحسب الحدود الأربعة الأولى:

| | |
|---|---|
| .......................................... | .......................................... |
| .......................................... | .......................................... |

- لتكن $(v_n)$ المتتالية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n^2 - 1 \end{cases}$

لنحسب الحدود الأربعة الأولى:

| | |
|---|---|
| .......................................... | .......................................... |
| .......................................... | .......................................... |

## 2.1. المتتالية المكبورة - المتتالية المصغورة - المتتالية المحدودة

**تعاريف**

لتكن $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية عددية.

- نقول إن $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية مكبورة إذا وجد عدد حقيقي $M$ بحيث: $\forall n \geqslant p:\ u_n \leqslant M$
- نقول إن $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية مصغورة إذا وجد عدد حقيقي $m$ بحيث: $\forall n \geqslant p:\ u_n \geqslant m$
- نقول إن $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية محدودة إذا وجد عددين حقيقيين $m$ و $M$ بحيث: $\forall n \geqslant p:\ m \leqslant u_n \leqslant M$

**تمرين 1**

1. لتكن $(u_n)$ المتتالية المعرفة بما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}:\ u_n = \frac{2n+3}{n+4}$.
   (ا) بين أن $(u_n)$ مكبورة بالعدد 2.
   (ب) بين أن $(u_n)$ مصغورة بالعدد $\frac{3}{4}$.
2. بين أن المتتالية $(v_n)$ المعرفة بـ $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \dfrac{5v_n + 3}{v_n + 7} \end{cases}$ محدودة بالعددين $-3$ و 1.

**ملاحظة**

تكون متتالية $(u_n)_{n\geqslant p}$ محدودة إذا وجد عدد حقيقي موجب $\alpha$ بحيث: $\forall n \geqslant p:\ |u_n| \leqslant \alpha$

## 3.1. رتابة متتالية

**تعاريف**

لتكن $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية عددية.

- نقول إن $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية تزايدية إذا كانت تحقق: $\forall n \geqslant p:\ n < m \Rightarrow u_n \leqslant u_m$
- نقول إن $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية تناقصية إذا كانت تحقق: $\forall n \geqslant p:\ n < m \Rightarrow u_n \geqslant u_m$
- نقول إن $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية ثابتة إذا كانت تحقق: $\forall n \geqslant p:\ n < m \Rightarrow u_n = u_m$

### خاصيات

لتكن $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية عددية.

- $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية تزايدية إذا كانت تحقق: $\forall n\geqslant p:\ u_n\leqslant u_{n+1}$
- $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية تناقصية إذا كانت تحقق: $\forall n\geqslant p:\ u_n\geqslant u_{n+1}$
- $(u_n)_{n\geqslant p}$ متتالية ثابتة إذا كانت تحقق: $\forall n\geqslant p:\ u_n=u_{n+1}$

### تمرين 2

أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geqslant p}$ في الحالات التالية:

(ا) $n\in\mathbb{N},\ u_n=1-\sqrt{n+2}$ (ب) $n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=3n-\frac{2}{n}$ (ج) $n\in\mathbb{N},\ u_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (د) $n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{2^{n+3}}{3^n}$

## 2. المتتالية الحسابية - المتتالية الهندسية

| | المتتالية الحسابية | المتتالية الهندسية |
|---|---|---|
| تعريف | ننتقل فيها من حد إلى حد يليه بإضافة نفس العدد $r$ الذي يسمى الأساس. | ننتقل فيها من حد إلى حد يليه بالضرب في نفس العدد $q$ الذي يسمى الأساس. |
| العلاقة الترجعية | $(u_n)_{n\geqslant p}:\begin{cases}u_p\in\mathbb{R}\\u_{n+1}=u_n+r\end{cases}$ | $(u_n)_{n\geqslant p}:\begin{cases}u_p\in\mathbb{R}\\u_{n+1}=u_n\times q\end{cases}$ |
| الحد العام ($u_\alpha$ حد معلوم) | $\forall n\geqslant p:\ u_n=u_\alpha+r(n-\alpha)$ | $\forall n\geqslant p:\ u_n=u_\alpha\times q^{n-\alpha}$ |
| العلاقة بين ثلاث حدود متتابعة | $\forall n\geqslant p(\geqslant 1):\ u_{n-1}+u_{n+1}=2u_n$ | $\forall n\geqslant p(\geqslant 1):\ u_{n-1}\times u_{n+1}=u_n^2$ |
| مجموع حدود متتابعة | $u_i+u_{i+1}+\cdots+u_j=\dfrac{(j-i+1)(u_i+u_j)}{2}$ | $u_i+u_{i+1}+\cdots+u_j=u_i\times\dfrac{1-q^{j-i+1}}{1-q}$ |

### تمرين 3

1. نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}:\ u_n=\frac{1}{2}n-1$
   (ا) بين أن $(u_n)$ متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول. (ب) أحسب المجموع $S=u_2+u_1+\cdots+u_{16}$.
2. نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}:\ v_n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n$
   (ا) بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول. (ب) أحسب المجموع $S'=v_0+v_1+\cdots+v_7$
3. لتكن $(x_n)$ متتالية حسابية بحيث $x_3=\frac{3}{4}$ و $x_5=\frac{1}{12}$.
   (ا) أحسب $x_4$ و استنتج أساس المتتالية $(x_n)$. (ب) حدد الحد العام المتتالية $(x_n)$.
4. لتكن $(y_n)$ متتالية هندسية بحيث $y_4=\frac{2}{7}$ و $y_6=\frac{1}{14}$.
   (ا) أحسب $y_5$ و استنتج أساس المتتالية $(y_n)$ علما أنه سالب. (ب) حدد الحد العام المتتالية $(y_n)$.
5. أحسب المجاميع التالية: (ا) $S_1=1+3+5+7+9+\cdots+(2n+1)$ (ب) $S_2=1+2+4+8+16+\cdots+2n$