الدرس الثالث

الحساب العددي (2)

محتوى الدرس

1. المعادلات من الدرجتين الأولى و الثانية بمجهول واحد

خاصية 1

نعتبر المعادلة $ax+b=0$.

- ✴ إذا كان $a\neq 0$ فإن $S=\{-\frac{b}{a}\}$.
- ✴ إذا كان $a=0$ و $b=0$ فإن $S=\mathbb{R}$.
- ✴ إذا كان $a=0$ و $b\neq 0$ فإن $S=\emptyset$.

تمرين 1

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات: (ا) $4x+3=5$ (ب) $3x-5=-2x+1$ (ج) $3x-2=5x+3-2x$
(د) $2x+5-3x=3-x+2$ (ه) $2(x-1)=\frac{3}{4}$ (و) $\frac{x}{6}-3=\frac{x}{4}-1$ (ز) $\frac{x-6}{6}=\frac{x-3}{4}$ (ح) $\frac{3x+1}{2}-x=\frac{2x-3}{5}$
(ط) $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{5}=1-\frac{x+1}{3}$

خاصية 2

نعتبر المعادلة $(E):\ ax^2+bx+c=0$.
نسمي مميز المعادلة (E) العدد الحقيقي الذي يرمز له بالرمز Δ و المعرف بما يلي: $\Delta=b^2-4ac$.

- إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين هما: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا هو: $x=-\frac{b}{2a}$.
- إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة (E) لا تقبل حلولا أي $S=\emptyset$.

تمرين 2

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (ا) $x^2-x-6=0$ (ب) $x^2+2x-3=0$ (ج) $x^2-x+2=0$
(د) $-x^2+2x-1=0$ (ه) $x^2+5x-6=0$ (و) $1-x-2x^2=0$ (ز) $x^2+x-1=0$
(ح) $2x^2+12x+18=0$ (ط) $-3x^2+7x+1=0$
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (ا) $x^2+3\sqrt{2}x+4=0$ (ب) $-x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}=0$ (ج) $\frac{5}{2}x^2+15x+30=0$
(د) $4x^2+1=0$ (ه) $5x^2-3=0$ (و) $x^2-2=x$ (ز) $-3x^2-2x=0$ (ح) $x^2+5x=0$
(ط) $x^2+x=-3$

قواعد

- $A\times B=0$ يكافئ $A=0$ أو $B=0$. • $\frac{A}{B}=0$ يكافئ $A=0$ و $B\neq 0$. • $|A|=|B|$ يكافئ $A=B$ أو $A=-B$.
- $|A|=B$ مع $B\geq 0$ يكافئ $A=B$ أو $A=-B$. • $A^2=B$ مع $B\geq 0$ يكافئ $A=\sqrt{B}$ أو $A=-\sqrt{B}$.

تمرين 4

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (ا) $(x-2)(2x-3)=0$ (ب) $\frac{x-2}{2x-3}=0$ (ج) $(x+3)(2x-1)(5x-2)=0$
(د) $\frac{(x-3)(x-1)}{x-7}$ (ه) $(x-1)(x^2+x-2)$ (و) $\frac{x-1}{x^2-2x+1}=0$
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (ا) $|x-2|=|x+2|$ (ب) $|2x-3|=|2-x|$ (ج) $|2x-7|=0$
(د) $|2x-7|=3$ (ه) $2|x|-7=3$ (و) $-2|x|+7=3$
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (ا) $(x^2-5x+6)^2=0$ (ب) $(-2x+1)^2=0$ (ج) $(2x-3)^2=4$
(د) $2(x-1)^2-3=5$ (ه) $(\sqrt{3}x-2)^2=-7$ (و) $(x^2-2x)^2-1=0$ (ز) $(3x^2-2x)^2+4=0$

2. إشارة الحدوديات من الدرجتين الأولى و الثانية

خاصية 1

نسمي حدودية من الدرجة الأولى كل تعبير على شكل $ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$.
حل المعادلة $ax+b=0$ هو العدد $x=-\frac{b}{a}$ و يسمى جذرا للحدانية $ax+b$.

- إذا كان $x > -\frac{b}{a}$ فإن إشارة $ax+b$ هي إشارة a.
- إذا كان $x < -\frac{b}{a}$ فإن إشارة $ax+b$ هي عكس إشارة a.

نلخص هذه النتائج في جدول يسمى جدول إشارة $ax+b$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		عكس إشارة a	0	إشارة a	

تمرين 5

أدرس إشارة التعابير التالية: (ا) $3x-2$ (ب) $-2x+3$ (ج) $-4x-8$ (د) $x+4$ (ه) $-x-\frac{1}{2}$

خاصية 2

نسمي حدودية من الدرجة الثانية كل تعبير على شكل ax^2+bx+c حيث a و b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.
حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ إن وجدت تسمى جذورا لثلاثية الحدود ax^2+bx+c.
مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هو $\Delta=b^2-4ac$ و هو كذلك مميز ثلاثية الحدود ax^2+bx+c.

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن الحدودية ax^2+bx+c تقبل جذرين α_1 و α_2 و جدول إشارتها على شكل

x	$-\infty$		α_1		α_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن الحدودية ax^2+bx+c تقبل جذرا وحيدا α و جدول إشارتها على شكل

x	$-\infty$		α		$+\infty$
ax^2+bx+c		إشارة a	0	إشارة a	

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن الحدودية ax^2+bx+c لا تقبل أي جذر و جدول إشارتها على شكل

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		إشارة a	

تمرين 6

أدرس إشارة التعابير التالية: (ا) $x^2-3x-10$ (ب) $-2x^2+2x-3$ (ج) $4x^2-2x+\frac{1}{4}$ (د) $-\frac{1}{2}x^2-x\sqrt{5}+2$
(ه) $-x^2+3x$ (و) $3x^2+4$

قاعدة

نعتبر حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ من الدرجة الأولى أو الثانية (تعبيرهما على أحد شكلين $ax+b$ أو ax^2+bx+c).
لدراسة إشارة جداء أو خارج الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ ندرس إشارة كل حدودية على حدا ثم نستنتج كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$ جذور $P(x)$ و $Q(x)$ مرتبة تصاعديا $+\infty$
$P(x)$	إشارة $P(x)$
$Q(x)$	إشارة $Q(x)$
$P(x)Q(x)$ أو $\frac{P(x)}{Q(x)}$	جداء إشارتي $P(x)$ و $Q(x)$

تمرين 7

أدرس إشارة التعابير التالية: (أ) $(x-3)(2x+1)$ (ب) $\frac{x+4}{x+2}$ (ج) $(x-1)(x^2+x-2)$ (د) $\frac{-x^2+2x-1}{2x-1}$
(هـ) $(3x^2+1)(x^2-2x)$ (و) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

3. المتراجحات من الدرجتين الأولى و الثانية بمجهول واحد

قواعد

لحل متراجحة من الدرجة الأولى أو الثانية، ندرس إشارة الطرف الأول من المتراجحة ثم نستنتج حسب ما يلي:

- إذا كانت المتراجحة من النوع $ax+b \geq 0$ أو $ax^2+bx+c \geq 0$ فإن حلول المتراجحة هي المجالات التي تحتوي على الإشارة الموجبة بمحدات مغلقة.
على سبيل المثال حل المتراجحة $-x-3 \geq 0$ في $\mathbb{R}$.
....
....
....
....
- إذا كانت المتراجحة من النوع $ax+b \leq 0$ أو $ax^2+bx+c \leq 0$ فإن حلول المتراجحة هي المجالات التي تحتوي على الإشارة السالبة بمحدات مغلقة.
على سبيل المثال حل المتراجحة $x^2+5x+6 \leq 0$ في $\mathbb{R}$.
....
....
....
....
- إذا عوض الرمزين $\leq$ و $\geq$ بالرمزين $>$ و $<$ مجالات الحلول تصبح مفتوحة.
على سبيل المثال حل المتراجحة $x-4<0$ في $\mathbb{R}$.
....
....
....
....
- بنفس الطريقة نحل متراجحات طرفها الأول جداء أو خارج حدوديتين و طرفها الثاني 0.
على سبيل المثال حل المتراجحة $(x-1)(x+2)>0$ في $\mathbb{R}$.
....
....
....
....
....

تمرين 8

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات:
(أ) $5x-7>0$ (ب) $3x^2+7x+4\geq 0$ (ج) $-2x^2-4x+5<7$ (د) $3x-2\leq -4$ (هـ) $-2x+5\geq 3$
(و) $(3x-5)(2x-3)<0$ (ز) $\frac{x+2}{2x-1}>0$ (ح) $\frac{x+2}{2x-1}>2$ (ط) $4x-1<-2x+3$ (ي) $2x(x^2-1)\leq 0$
(يا) $x^2+x+1\leq 0$ (يب) $2x+5>4x+7-2x$ (يج) $\frac{-x^2-x+2}{x-3}$ (يد) $x-1-4x\geq -6-3x+3$
(يه) $\frac{x+3}{2x^2-15x+4}<0$

4. نظمات معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تذكير

لحل نظمة لمعادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين نعتمد على ثلاث طرق:

- طريقة التعوض، و تتم عبر المراحل التالية:

تحديد y في المعادلة الأولى بدلالة x. ← تعويض y بقيمته في المعادلة الثانية. ← حل المعادلة ذات المجهول الوحيد x. ← تعويض x بقيمته في تعبير y.

- طريقة التآلفية الخطية، و تتم عبر المراحل التالية:

ضرب كل معادلة في عدد للحصول على معاملين متقابلين y. ← جمع المعادلتين المحصل عليهما لحذف y. ← حل المعادلة ذات المجهول الوحيد x. ← إعادة نفس المراحل على x لتحديد قيمة y.

يمكن التأكد من الحل بتعويض قيمتي x و y المحصل عليها في النظمة.

تمرين 9

1. حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية باستعمال طريقة التعويض:

(أ) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} -x+4y=0 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ (ج) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -8x+4y=15 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} -4x-12y=8 \\ 2x+6y=-4 \end{cases}$

2. حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية باستعمال طريقة التآلفية الخطية:

(أ) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} -x+4y=0 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ (ج) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -8x+4y=15 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} -4x-12y=8 \\ 2x+6y=-4 \end{cases}$

خاصية

نعتبر النظمة $(S):\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

نسمي محددة النظمة (S) العدد الحقيقي D المعرف بما يلي: $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'$.

- إذا كان $D\neq 0$ فإن النظمة (S) تقبل حلا وحيدا $(x;y)$ بحيث: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$.
- إذا كان $D=0$ و $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=0$ فإن النظمة (S) تقبل ما لا نهاية من الحلول و مجموعة حلولها هي $S=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$.
- إذا كان $D=0$ و $\left(\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\neq 0 \text{ أو } \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}\neq 0\right)$ فإن النظمة (S) لا تقبل أي حل و مجموعة حلولها هي $S=\emptyset$.

تمرين 10

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية باستعمال طريقة المحددة:

(أ) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} -x+4y=0 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ (ج) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -8x+4y=15 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} -4x-12y=8 \\ 2x+6y=-4 \end{cases}$