الدرس العاشر

التمثيل المبياني لدالة عددية

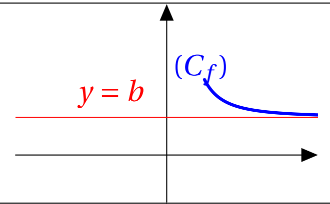
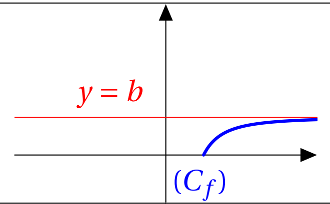
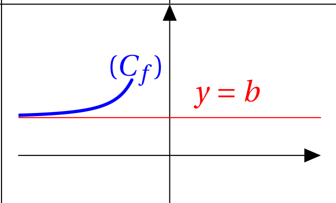
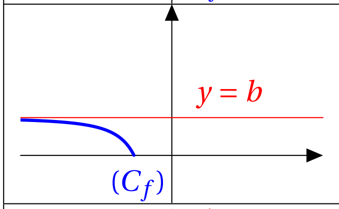
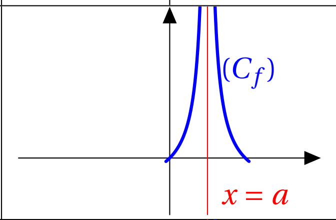
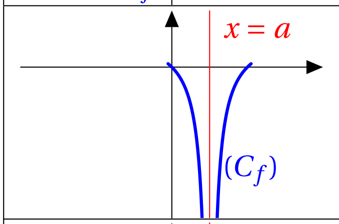
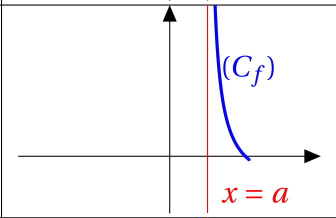
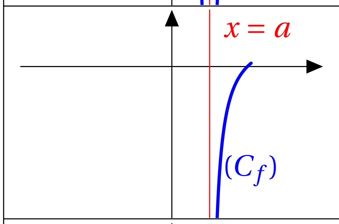
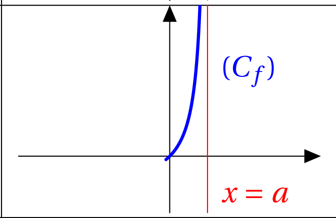
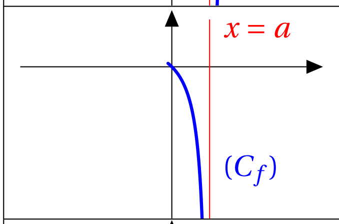
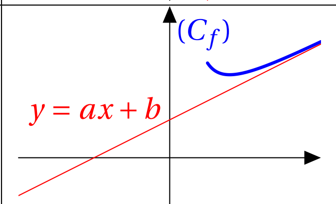
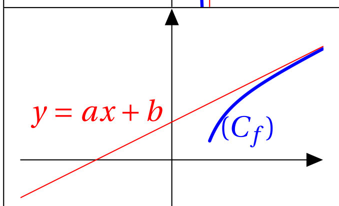
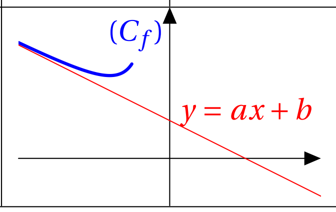
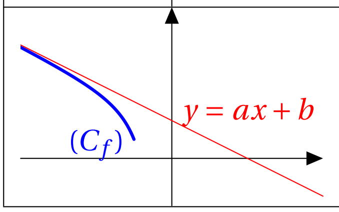
محتوى الدرس

1. فرع لا نهائي لمنحنى دالة عددية

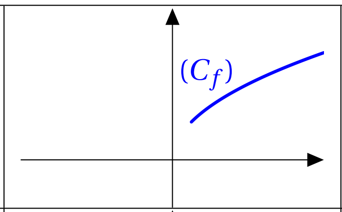
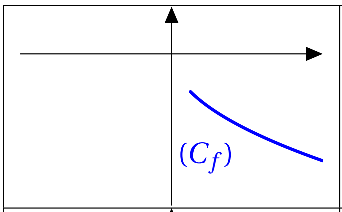
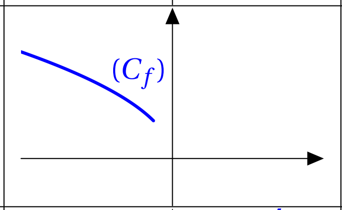
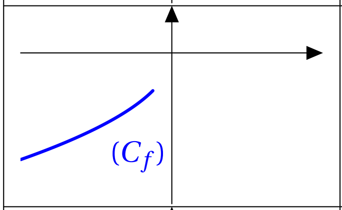
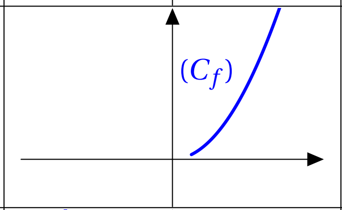
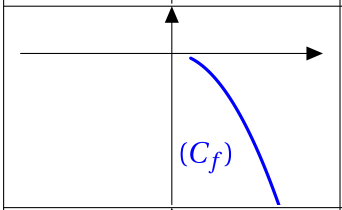
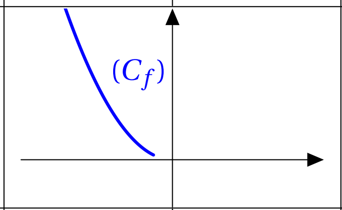
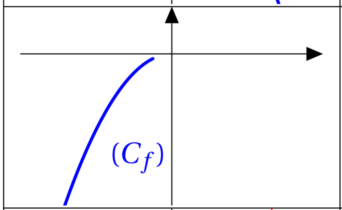
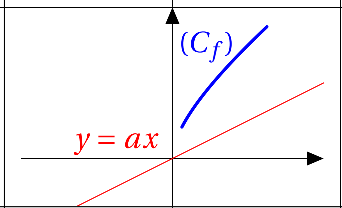
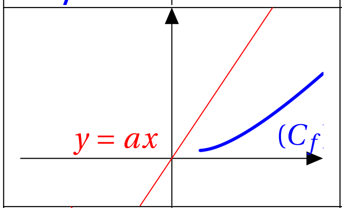
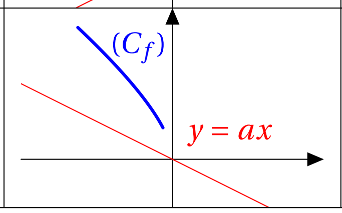
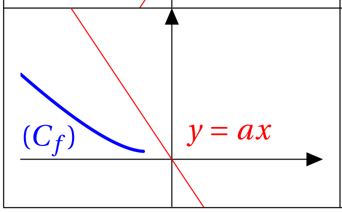
تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.
نقول إن (C_f) يقبل فرعا لا نهائيا إذا آلت x أو $f(x)$ إلى ما لا نهاية.

1.1. المستقيمات المقاربة

المقاربات الأفقية	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$	المنحنى (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=b$ بجوار $+\infty$.		
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$	المنحنى (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=b$ بجوار $-\infty$.		
المقاربات العمودية	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$	المنحنى (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=a$ بجوار a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\infty$	المنحنى (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=a$ على اليمين بجوار a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\infty$	المنحنى (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=a$ على اليسار بجوار a.		
المقاربات المائلة	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b$ أو فقط $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax-b)=0$	المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$.		
		المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=ax+b$ بجوار $-\infty$.		

.1.2 الفروع الشلجمية

فروع شلجمية	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=0$	المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.		
		المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$.		
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$	المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.		
		المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.		
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=\infty$	المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=ax$ بجوار $+\infty$.		
		المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=ax$ بجوار $-\infty$.		

تطبيق

أدرس الفروع اللانهائية للدوال: $f_4:\ x\mapsto x^2+2$; $f_3:\ x\mapsto\sqrt{x+4}$; $f_2:\ x\mapsto\frac{x^2}{3x+2}$; $f_1:\ x\mapsto\frac{3x+1}{2x-3}$;

.2 تقعر منحنى – نقطة الإنعطاف

تعريف

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

- نقول إن للمنحنى (C_f) تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة إذا كان (C_f) فوق جميع مماساته.
- نقول إن للمنحنى (C_f) تقعر موجه نحو الأراتيب السالبة إذا كان (C_f) تحت جميع مماساته.
- نسمي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) كل نقطة يغير فيها (C_f) تقعره.

خاصية

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

- إذا كانت $f'' \geq 0$ على I فإن للمنحنى (C_f) تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة.
- إذا كانت $f'' \leq 0$ على I فإن للمنحنى (C_f) تقعر موجه نحو الأراتيب السالبة.
- إذا كانت f'' تنعدم في عنصر a من I و تغير إشارتها بجواره فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف و هي النقطة التي إحداثيتيها $(a; f(a))$.

تطبيق

1. أدرس تقعر منحنيات الدوال: $f_1: x \mapsto x^2; \quad f_2: x \mapsto \frac{1}{x}; \quad f_3: x \mapsto -x^3 - x^2 + 2x - 1;$
2. حدد نقط انعطاف منحنيات الدوال: $f_1: x \mapsto x^3;\ f_2: x \mapsto x^3 + x^2 - 2x + 1;\ f_3: x \mapsto \frac{1}{x};\ f_4: x \mapsto x^4;$

3. محور تماثل - مركز تماثل

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x مجموعة تعريفها D_f و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

- المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تماثل المنحنى (C_f) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} \forall x \in D_f: (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f: f(2a - x) = f(x) \end{cases}$.
- النقطة $\Omega(a; b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} \forall x \in D_f: (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f: f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$.

تطبيق

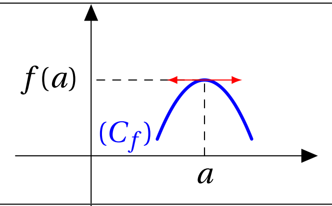
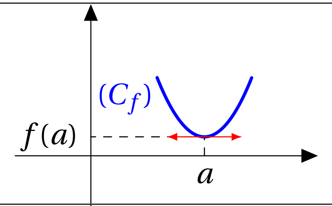
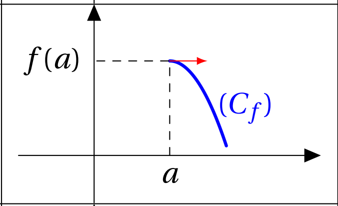
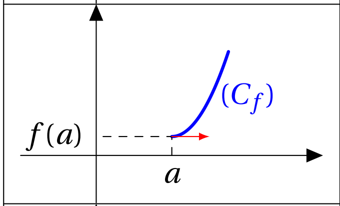
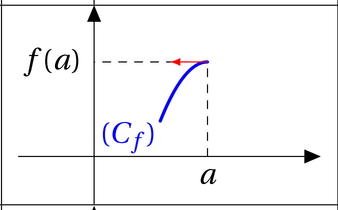
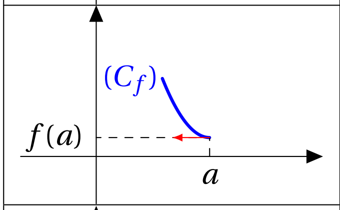
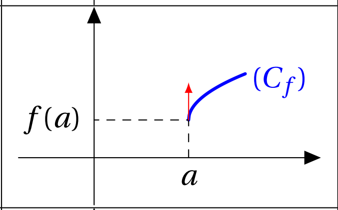
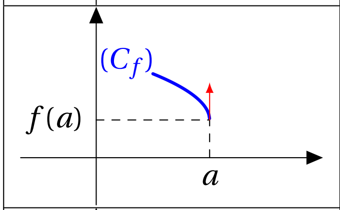
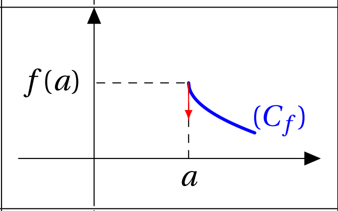
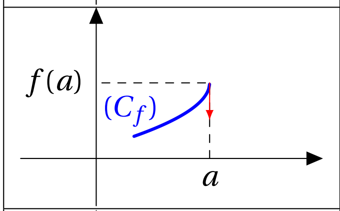
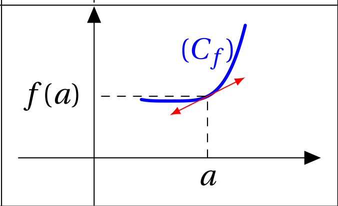
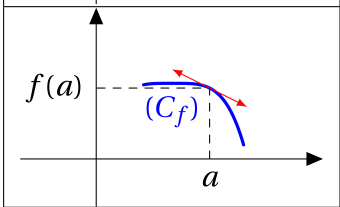
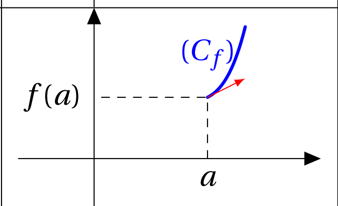
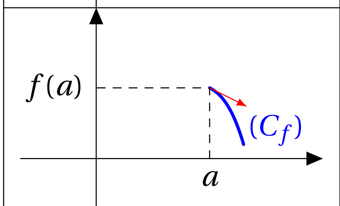
1. بين أن منحنى الدالة $f: x \mapsto x^2 - x + \frac{5}{4}$ متماثل بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $x = \frac{1}{2}$.
2. بين أن منحنى الدالة $g: x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$ متماثل بالنسبة للنقطة الذي $I(-2, 1)$.

4. دراسة دالة عددية

مراحل دراسة دالة عددية:

- تحديد مجموعة تعريف الدالة.
- دراسة زوجية و دورية الدالة.
- حساب نهايات الدالة عند محدات مجموعة تعريفها.
- دراسة قابلية اشتقاق الدالة على مجموعة تعريفها.
- حساب مشتقة الدالة.
- دراسة تغيرات الدالة.
- دراسة الفروع اللانهائية للدالة.
- دراسة الوضع النسبي لمنحنى الدالة و مقارباته.
- تحديد نقط تقاطع منحنى الدالة و محوري المعلم.
- إعطاء معادلات مماسات منحنى الدالة في نقط معينة.
- دراسة تقعر منحنى دالة و تحديد نقط إنعطافه إن وجدت.
- إنشاء التمثيل المبياني للدالة مع جميع عناصره.

5. المماسات

المماسات الأفقية	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$	المنحنى (C_f) يقبل مماسا أفقيا في النقطة ذات الأفصول a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة ذات الأفصول a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة ذات الأفصول a.		
المماسات العمودية	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة ذات الأفصول a.		
المماسات المائلة	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b\neq 0$	المنحنى (C_f) يقبل مماسا مائلا معامله الموجه b بجوار a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b\neq 0$	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مائلا معامله الموجه b على اليمين في النقطة ذات الأفصول a.		
	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b\neq 0$	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مائلا معامله الموجه b على اليسار في النقطة ذات الأفصول a.