الحساب التكاملي

محتوى الدرس

1. تكامل دالة متصلة

1.1. تعريف و ترميز

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I و F دالة أصلية للدالة f على I.
نسمي تكامل الدالة f من a إلى b العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

ملاحظات

- العدد $\int_a^b f(x)dx$ غير مرتبطة باختيار الدالة الأصلية F للدالة f.
- لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نختار دالة أصلية F للدالة f على $[a;b]$ ثم نكتب:
  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$
- في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض المتغير x بأي متغير آخر $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \cdots$.

نتائج

- لكل عدد حقيقي k لدينا $\int_a^b kdx = [kx]_a^b = k(b-a)$.
- لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال $[a;b]$ بحيث الدالة f' متصلة و موجبة على $[a;b]$.
  لدينا $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b)-f(a)$.

تمرين 1

1. أحسب التكاملات التالية: $\int_1^2(-3x^2+1)dx$ و $\int_0^1 e^{2x-1}dx$ و $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)dx$.
2. (ا) تحقق أنه لكل x من $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$: $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.
   (ب) احسب التكامل $\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}dx$.

2.1. دالة معرفة بتكامل

خاصية

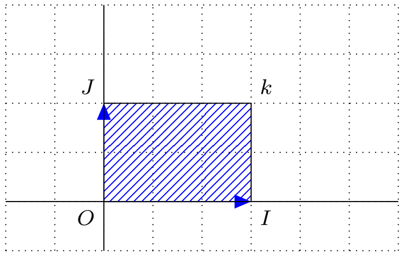
لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصر من I.
الدالة F المعرفة على I بـ $\int_a^x f(x)dx$ هي الدالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم في a.

مثال

الدالة ln هي الدالة الأصلية للدالة ....$x\mapsto$ على .... و التي تنعدم في ....
نكتب باستعمال التكامل ....

3.1. التكامل و المساحة

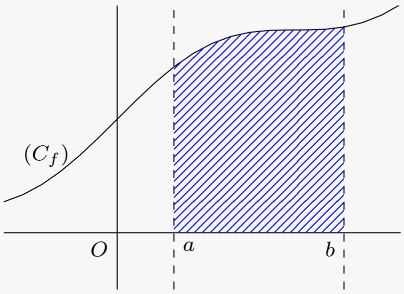
1.3.1. وحدة المساحة



في المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط $I(1;0)$ و $J(0;1)$ و $K(1;1)$.
وحدة المساحة هي مساحة الرباعي $OIKJ$ و يرمز لها بالرمز u.a.
من أجل $\|\vec{i}\| = OI = p$ cm و $\|\vec{i}\| = OJ = q$ cm
لدينا $1 \text{ u.a} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = pq \text{ cm}^2$.

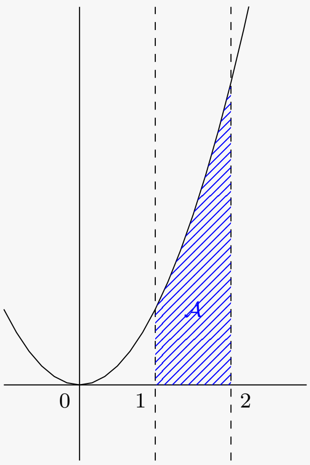
2.3.1. تكامل دالة موجبة و المساحة

خاصية



لتكن f دالة عددية متصلة و موجبة على مجال $[a;b]$ و F دالة أصلية للدالة f على $[a;b]$.
ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.
مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$.

مثال



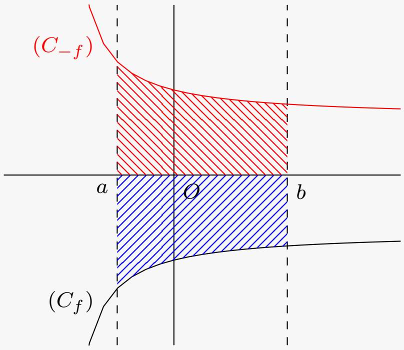
مساحة الحيز A المحدد بمنحنى الدالة $f\ :\ x \mapsto x^2$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ هي $A = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
....
....
....
....
....
من أجل $\|\vec{i}\| = 1,5\text{cm}$ و $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ فإن المساحة A بالسنتيمتر مربع هي
....
....
....
....

3.3.1. تكامل دالة سالبة و المساحة

خاصية

لتكن f دالة عددية متصلة و سالبة على مجال $[a;b]$ و F دالة أصلية للدالة f على $[a;b]$.
ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b -f(x)dx$.



مثال

مساحة الحيز $\mathcal{A}$ المحدد بمنحنى الدالة $f:\ x\mapsto -x^2$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ هي $\mathcal{A}=$ ....

....

....

....

....

....

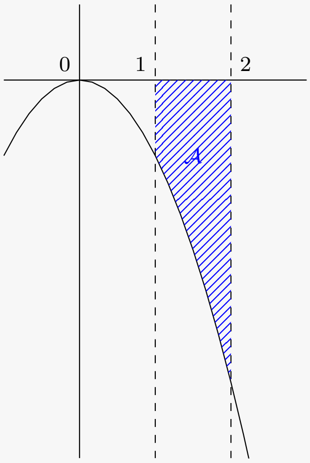
من أجل $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$ و $\|\vec{i}\|=2\text{cm}$ فإن المساحة $\mathcal{A}$ بالسنتيمتر مربع هي

....

....

....

....



2. خاصيات التكامل

1.2. خاصيات

خاصيات

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و a و b و c عناصر من I و k عددا حقيقيا.

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ و $\int_a^a f(x)dx=0$.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$. (علاقة شال)
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (الخطانية)
- $\forall x\in[a;b]:\ f(x)\le 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx\le 0$ و $\forall x\in[a;b]:\ f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx\ge 0$
- $\forall x\in[a;b]:\ f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

تمرين 2

1. أحسب التكامل $\int_0^3 |x^2-1|dx$.
2. نعتبر التكاملين $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)dx$.

أحسب $A+B$ و $A-B$ و استنتج قيمتي A و B.

3. نعتبر التكامل $I=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$. بين أن $\forall t\in[0;1]:\ \frac{1}{1+t^2}\leq 1$ ثم استنتج تأطيرا للعدد I.

4. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}+\cos(x)$ و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

(ا) أدرس تغيرات الدالة f و استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

(ب) حدد مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\pi$.

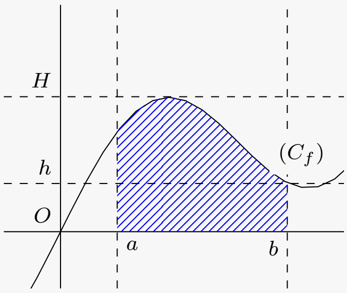
2.2. القيمة المتوسطة

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I و h و H عددين حقيقيين بحيث $h\leq H$.

$$\forall x\in[a;b]:\ h\leq f(x)\leq H \Rightarrow h(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx\leq H(b-a)$$

مساحة الحيز بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل محصورة بين مساحة مستطيلين لهما نفس القاعدة $b-a$، ارتفاعيهما h و H.

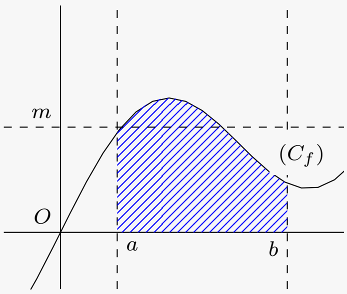


تعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$.

نسمي القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$ العدد الحقيقي $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

العدد m هو ارتفاع المستطيل الذي مساحته هي مساحة الحيز بين (C) و محور الأفاصيل و قاعدته هي $b-a$.



تمرين 3

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بما يلي: $f(x)=x^2$.

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على $[-1;1]$ ثم أول مبيانيا النتيجة.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=1+\ln(x+1)$.

(ا) أدرس تغيرات الدالة f على $[0;e-1]$ و استنتج تأطيرا للدالة f.

(ب) استنتج تأطيرا للعدد $\int_1^{e-1} f(x)dx$.

3. المكاملة بالأجزاء

خاصية

لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I بحيث u' و v' متصلتان على مجال I.
لكل عنصرين a و b من I لدينا: $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$
و هذه الصيغة تسمى صيغة المكاملة بالأجزاء.

مثال

حساب التكامل $I = \int_1^e x\ln(x)dx$.
نضع $I = \int_1^e u'(x)v(x)dx$ بحيث لكل x من $[1;e]$: $u(x) = \dots\dots\dots\dots\dots$ و $u(x) = \dots\dots\dots\dots\dots$.
الدالتان u و v .... على $[1;e]$.
و لدينا لكل x من $[1;e]$: $u'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ و $u'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$.
و الدالتان u' و v' ....
إذا $I = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
....

تمرين 4

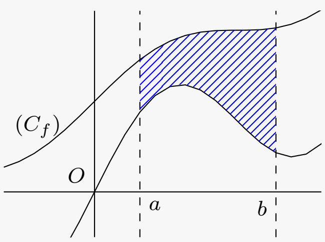
1. أحسب التكاملات التالية:
$A = \int_0^1 (2x-1)e^x dx$ و $B = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$ و $C = \int_0^\pi x^2\sin(x)dx$ و $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)dx$.
2. حدد الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$ التي تنعدم في 1.

4. مساحة حيز محدد بمنحنيين

خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$.
مساحة الحيز المحدد بمنحنيي الدالتين f و g و المستقيمين الذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$ هي:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$



تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.
و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

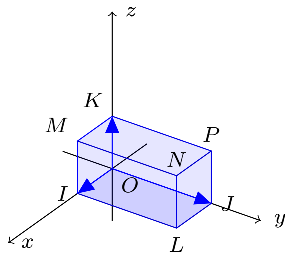
1. أدرس تغيرات الدالة f محددا نهايتيها عند 0 و $+\infty$.

2. بين أن (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديده.
3. حدد الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).
4. أحسب مساحة الحيز المحدد بالمستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x = \frac{1}{e}$ و $x = e$.

5. حساب الحجوم

1.5. وحدة قياس الحجوم

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $I(1;0;0)$ و $J(0;1;0)$ و $K(0;0;1)$ و $L(1;1;0)$ و $M(1;0;1)$ و $N(1;1;1)$ و $P(0;1;1)$.
وحدة الحجم هي حجم المضلع $OILJKMNP$ و يرمز لها بالرمز u.v.
من أجل $\left\|\vec{i}\right\| = OI = p$ cm و $\left\|\vec{i}\right\| = OJ = q$ cm و $\left\|\vec{k}\right\| = OK = r$ cm
لدينا $1\text{ u.v} = \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| = pqr\text{cm}^3$.

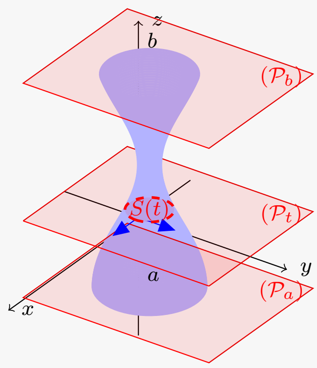


2.5. التكامل و حساب الحجوم

خاصية

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر مجسما $(\mathcal{E})$ محددا بالمستويين $(\mathcal{P}_a)$ و $(\mathcal{P}_b)$ اللذين معادلتاهما $z = a$ و $z = b$.
ليكن t عنصرا من المجال $[a;b]$ و $S(t)$ مساحة الحيز الناتج عن تقاطع المستوى $(\mathcal{P}_t)$ الذي معادلته $z = t$ مع المجسم $(\mathcal{E})$.
إذا كانت الدالة S متصلة على $[a;b]$ فإن حجم المجسم $(\mathcal{E})$ هو

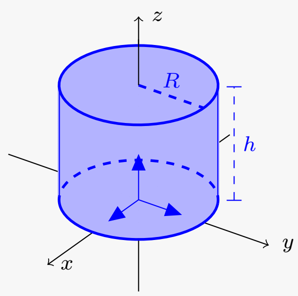
$$V = \int_a^b S(t)dt$$



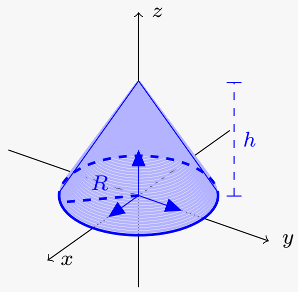
أمثلة

تستعمل الخاصية السابقة في تحديد أحجام بعض المجسمات الاعتيادية مثل الأسطوانة و الموشور و الفلكة و ...
- حجم أسطوانة ارتفاعها h و شعاع قاعدتها R.

....
....
....
....
....
....
....

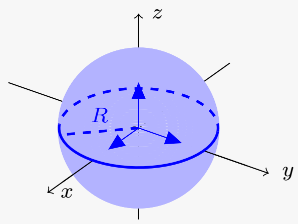


- حجم مخروط دوراني ارتفاعه h و شعاع قاعدته R.



....
....
....
....
....
....
....

- حجم فلكة شعاعها R.



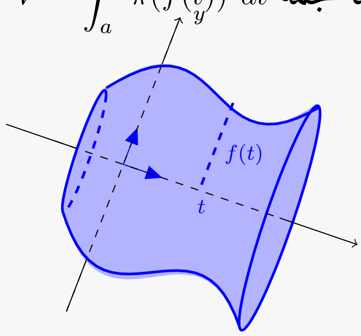
....
....
....
....
....
....
....

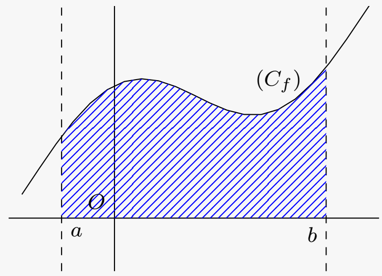
3.5. حجم مجسم مولد بدوران

خاصية

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

عندما يدور المنحنى (C_f) حول محور الأفاصيل فإنه يولد جسما حجمه $V = \int_a^b \pi(f(t))^2 dt$





تمرين 6

1. لتكن f الدالة المعرفة على $[0;9]$ بما يلي $f(x)=\sqrt{9-x}$.
   (أ) حدد مساحة الحيز A المحدد في الشكل.
   (ب) احسب حجم الجسم المولد بدوران منحنى الدالة f:
      i. حول محور الأفاصيل. نعطي $\left\|\vec{i}\right\| = \frac{1}{3}\text{cm}$ و $\left\|\vec{k}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1\text{cm}$.
      ii. حول محور الأراتيب. نعطي $\left\|\vec{k}\right\| = \left\|\vec{i}\right\| = \frac{1}{3}\text{cm}$ و $\left\|\vec{j}\right\| = 1\text{cm}$.
2. حدد حجم هرم قاعدته مربع طول أضلاعه L و ارتفاعه h.