Chapitre 9

Généralités sur les fonctions

Sommaire

1 Fonction numérique d'une variable réelle

1.1 Vocabulaire et notation

Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
On appelle «**fonction numérique définie sur** D», toute relation f qui associe à tout élément x de D, un unique réel y.

On écrit $f: \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y \end{array}$ ou simplement $f: x \mapsto y$.

- L'élément x de D est appelé «**variable de** f».
- D est appelé «**ensemble de définition de** f» (noté aussi D_f). Il représente l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ existe, et s'écrit $D = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$.
- Le réel y, noté $f(x)$, est appelé «**image de** x **par** f».
- Le réel x vérifiant $f(x) = y$, est appelé «**antécédent de** y **par** f».

Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3;5]$ par l'expression : $f(x) = x^2 - x + 2$.

- L'ensemble de définition est $D_f = [-3;5]$.
- L'image de -1 par f est 4, car $f(4) = (-1)^2 - (-1) + 2 = 4$.
- L'image de 0 par f est 2, car $f(4) = 0^2 - 0 + 2 = 2$.
- L'image de 1 a par f est également 2, car $f(4) = 1^2 - 1 + 2 = 2$.
- Un antécédent de 4 par f est -1, car $f(-1) = 4$.
- Deux antécédents de 2 par f sont 0 et 2, car $f(0) = 2$ et $f(0) = 2$.

Exercice

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4, 4]$ par l'expression : $f(x) = 2x - 3$.
   (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Déterminer l'image par f de chacun des réels $-\frac{1}{2}$, 0 et 2.
   (c) Déterminer l'antécédent par f de chacun des réels -1, 0 et $\frac{1}{2}$.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par l'expression : $g(x) = -x^2 + x$.
   (a) Quel est le domaine de définition de g ?
   (b) Déterminer l'image par g de chacun des réels -2, 1 et $\frac{1}{3}$.
   (c) Déterminer les antécédents par g de chacun des réels -2, $\frac{1}{4}$ et 1.

1.2 Quelques types de fonctions numériques

Définitions

- Toute fonction f ayant pour expression un polynôme $P(x)$ est appelée «**fonction polynôme**», et son domaine définition est $D_f = \mathbb{R}$.
  - Une fonction polynôme f de la forme $f: x \mapsto ax + b$ est appelée «**fonction affine**».
    - Si $b = 0$, alors f est dite «**fonction linéaire**».
    - Si $a = 0$, alors f est dite «**fonction constante**».
  - La fonction f de la forme $f: x \mapsto x^2$ est appelée «**fonction carré**».
  - Une fonction polynôme f de la forme $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ est appelée «**fonction polynôme du second degré**».
- Toute fonction f ayant pour expression le quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes, est appelée «**fonction rationnelle**», et son domaine définition est $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$.
  - Toute fonction polynôme est une fonction rationnelle de dénominateur 1.
  - La fonction rationnelle f définie par $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est appelée «**fonction inverse**».

- ◦ Une fonction rationnelle f de la forme $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ est appelée «**fonction homographique**».
- Toute fonction f qui n'est pas rationnelle est appelée «**fonction irrationnelle**».
  - ◦ La fonction f de la forme $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée «**fonction de la racine carré**».
  - ◦ Une fonction de la forme $f : x \mapsto \sqrt{g(x)}$, où g est une fonction rationnelle a pour domaine de définition $D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$.

Exemple

- Le domaine de définition de la fonction $f : \; x \mapsto x^2 + x\sqrt{3} - 2$:
$$f \text{ est une fonction polynôme, donc } D_f = \mathbb{R}.$$
- Le domaine de définition de la fonction $g : \; x \mapsto \frac{x+3}{2x-1}$:
$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 2x-1 \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq \tfrac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\} = \left]-\infty; \tfrac{1}{2}\right[\cup \left]\tfrac{1}{2}; +\infty\right[.$$
- Le domaine de définition de la fonction $h : \; x \mapsto \sqrt{3x+4}$:
$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 3x+4 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq -\tfrac{4}{3}\right\} = \left[-\tfrac{4}{3}; +\infty\right[$$
- Le domaine de définition de la fonction $u : \; x \mapsto x^2 - 3\sqrt{x} + 5$:
$$D_u = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq 0\} = [0; +\infty[$$
- Le domaine de définition de la fonction $v : \; x \mapsto \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$:
$$\begin{aligned} D_v &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x+2 \geq 0 \text{ et } x-3 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq -2 \text{ et } x \neq 3\} \\ &= [-2; +\infty[\setminus \{3\} = [-2; 3[\cup]3; +\infty[\end{aligned}$$

Exercice

Donner le domaine de définition D_f de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f : \; x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$.
2. $f : \; x \mapsto -2x^3 + 3x$.
3. $f : \; x \mapsto \frac{3x-1}{2x-4}$.
4. $f : \; x \mapsto \frac{5x+1}{x^2-x-2}$.
5. $f : \; x \mapsto \sqrt{3x-6}$.
6. $f : \; x \mapsto \frac{3x^3-x-1}{\sqrt{15-5x}}$.
7. $f : \; x \mapsto \sqrt{x^2-2x-3}$.

2 Représentation graphique d'une fonction numérique

Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
La «**représentation graphique**» de la fonction f, notée (C_f), est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$, tels que x est un élément de D et $y = f(x)$. On écrit $(C_f) = \{M(x; y) \;/\; x \in D \text{ et } y = f(x)\}$.
L'«**équation de la courbe** (C_f)» est $y = f(x)$.

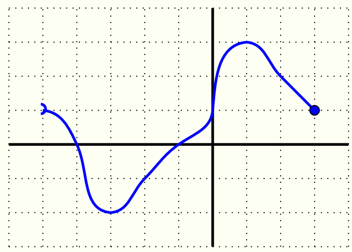
Remarques

- Si $A \in (C_f)$, on représente A comme suit :  .
- Si $A \in (C_f)$ et se trouve à l'extrémité de (C_f), alors, on représente A comme suit :  .
- Si $A \notin (C_f)$ et se trouve à l'extrémité de (C_f), alors, on représente A comme suit :  .

Exercice

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et (C_f) sa représentation graphique.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Les points $A(1; 0)$, $B\left(3; \frac{1}{2}\right)$ et $C(\sqrt{2}; \sqrt{2}+1)$ appartiennent-ils à (C_f) ?

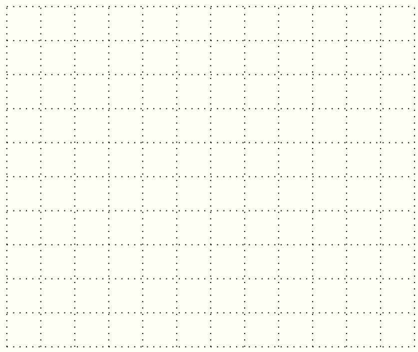
2. On considère la représentation graphique (C_g) ci-contre, d'une fonction g. Déterminer ce qui suit :
   (a) Le domaine de définition de g.
   (b) L'image de 1 par g.
   (c) Les antécédents de -1 par g.
   (d) Les points d'intersections de (C_g) avec l'axe des abscisses.
   (e) Les points d'intersections de (C_g) avec l'axe des ordonnés.



3. On considère la fonction $h: \ x \mapsto x^2$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de h.
   (b) Compléter le tableau des valeurs suivant :

x						
$h(x)$						

   (c) Construire ci contre (C_h) la courbe de h.



3 Égalité de deux fonctions numériques

Définition

Soient f et g deux fonctions de domaines de definitions respectifs D_f et D_g.
On dit que «**f et g sont égales**», et on écrit $f = g$, si et seulement si

$$\begin{cases} D_f = D_g = D \\ \text{Pour tout } x \text{ de } D, \text{ on a } f(x) = g(x) \end{cases}.$$

Exercice

Comparer les deux fonctions f et g dans les cas suivants :
(a) $f: \ x \mapsto x+1$ et $g: \ x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2-x+1}$. (b) $f: \ x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$ et $g: \ x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{x-2}$.

4 Parité d'une fonction numérique

4.1 Fonction paire – Fonction impaire

Définitions

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.
- On dit que f est une «**fonction pair**», si et seulement si
  - ◦ Pour tout x de D_f, on a $-x \in D_f$. ◦ Pour tout x de D_f, on a $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est une «**fonction impair**», si et seulement si
  - ◦ Pour tout x de D_f, on a $-x \in D_f$. ◦ Pour tout x de D_f, on a $f(-x) = -f(x)$.

Si pour tout x de D_f on a $-x \in D_f$, alors, D_f est dit «**symétrique par rapport à** 0», ou «**centré en** 0».

Remarques

- Les domaines $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R} \setminus \{-a; a\}$, où a est un réel non nul, sont symétrique par rapport à 0.
- Les intervalles de la forme $]-a; a[$ et $[-a; a]$, où a est un réel strictement positif, sont symétrique par

rapport à 0.
- Les réunions d'intervalles de la forme $]-\infty; -a[\cup]a; +\infty[$ et $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$, où a est un réel strictement positif, sont symétrique par rapport à 0.

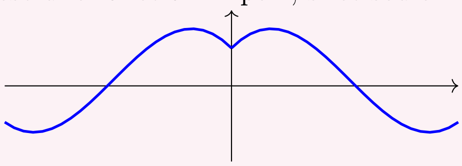
Exercice

Étudier la parité de la fonction f dans les cas suivants :
(a) $f:\ x \mapsto \frac{x^2+3}{|x|-1}$. (b) $f:\ x \mapsto \frac{\sin(x)-x}{x^2-1}$. (c) $f:\ x \mapsto x^3+x^2$.

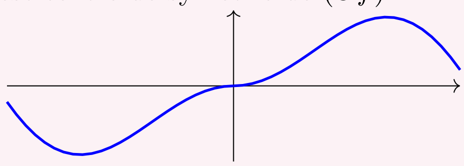
4.2 Parité et représentation graphique d'une fonction

Propriétés

Soit f une fonction numérique, D_f son domaine de définition et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- f est une fonction pair, si et seulement si, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de (Cf).
- f est une fonction impair, si et seulement si, le point O est centre de symétrie de (Cf).



Fonction pair



Fonction impair

Exercice

1. Déterminer la parité de la fonction f, dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ (b) $f(x) = x^2 - 3x$ (c) $f(x) = \frac{x}{4x^2+1}$ (d) $f(x) = \frac{x+1}{3\sqrt{x}}$.
2. Déterminer la parité des fonctions de représentations graphiques suivantes :

Figure (1)

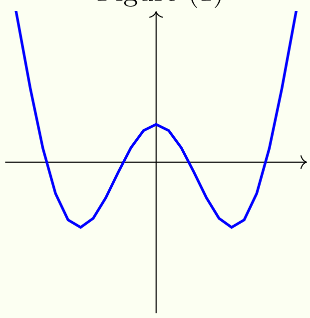


Figure (2)

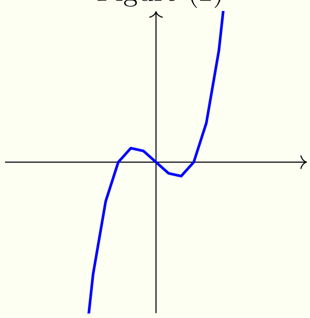


Figure (3)

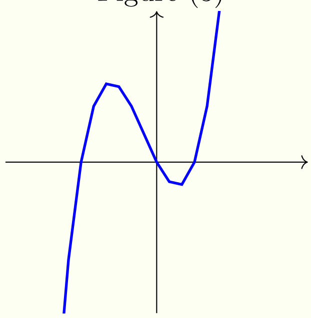
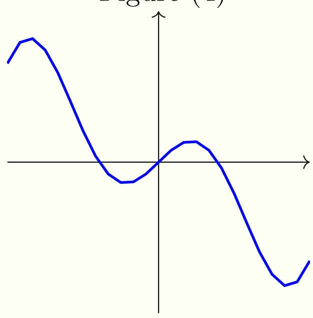


Figure (4)



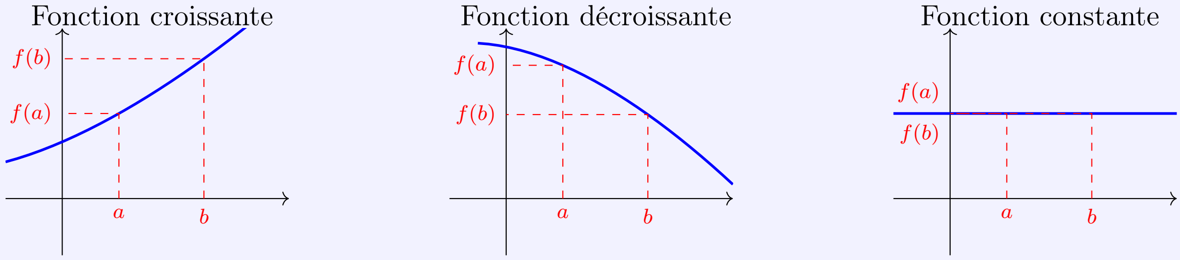
5 Variations d'une fonction numérique

5.1 Monotonie d'une fonction numérique

Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
- On dit que «f **est croissante sur** I» si et seulement si pour tout a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$.
- On dit que «f **est strictement croissante sur** I» si et seulement si pour tout a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
- On dit que «f **est décroissante sur** I» si et seulement si pour tout a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$.
- On dit que «f **est strictement décroissante sur** I» si et seulement si pour tout a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

- On dit que «f **est constante sur** I» si et seulement si pour tout a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) = f(b)$.



- On dit que «f **est monotone sur** I» si elle est croissante ou décroissante sur I.
- On dit que «f **est strictement monotone sur** I» si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Remarques

Étudier les variations d'une fonction f est déterminer les intervalles de son domaine de définition D_f, sur lesquels la fonction f est monotone ou strictement monotone.
Les résultats de cette étude peuvent être résumés dans un tableau appelé «**tableau de variations de la fonction** f», ou une flèche montante $\nearrow$ signifie que f est croissante ou strictement croissante, et une flèche descendante $\searrow$ signifie que f est décroissante ou strictement décroissante.

Exercice

Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants :
(a) $f : x \mapsto x^2 - 4x + 1$ et $I = [2; +\infty[$.
(b) $f : x \mapsto -3x + 4$ et $I = \mathbb{R}$.
(c) $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $I =]-\infty; -1[$.
(d) $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $I =]-1; +\infty[$.

5.2 Taux de variation d'une fonction numérique

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux réels quelconques de I tels que $a \neq b$.
On appelle «**taux de variation de la fonction** f **entre** a **et** b», le nombre $T(a, b) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

Remarque

Le taux de variation d'une fonction f entre deux réels distincts a et b est le coefficient directeur de la droite (MN), tel que $M(a; f(a))$ et $N(b; f(b))$.

Propriété

Soit $T(a, b)$ le taux de variations entre a et b de la fonction f.On a :
- f est croissante sur I si et seulement si $T(a, b) \geq 0$.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $T(a, b) > 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $T(a, b) \leq 0$.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $T(a, b) < 0$.
- f est constante sur I si et seulement si $T(a, b) = 0$.

Exercice

1. Étudier les variations de la fonction $f : \ x \mapsto x^2 - 4x + 3$ sur $[2, +\infty[$ et $]-\infty; 2]$.
2. Étudier les variations de la fonction $g : \ x \mapsto \frac{x+3}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$ et $]-\infty; 1[$.

5.3 Parité d'une fonction numérique et monotonie

Propriété

Soit f une fonction numérique de domaine de définition D_f. Soit I^+ un intervalle de $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et I^- son symétrique par rapport à 0 (intervalle de $D_f \cap \mathbb{R}^-$).

- Si f est une fonction pair, alors,
  - si f est croissante sur I^+, alors f est décroissante sur I^-.
  - si f est décroissante sur I^+, alors f est croissante sur I^-.
- Si f est une fonction impair, alors,
  - si f est croissante sur I^+, alors f est croissante sur I^-.
  - si f est décroissante sur I^+, alors f est décroissante sur I^-.

Exercice

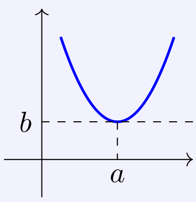
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$.
   (a) Donner D_f le domaine de définition de f.
   (b) Étudier la parité de la fonction f.
   (c) Étudier La monotonie de f sur $[0; +\infty[$
   (d) Dresser le tableau de variation da la fonction f.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
   (a) Donner D_g le domaine de définition de g.
   (b) Étudier la parité de la fonction g.
   (c) Étudier La monotonie de g sur$]0; 1]$ et $[1; +\infty[$.
   (d) Dresser le tableau de variation da la fonction g.

6 Extremums d'une fonction numérique

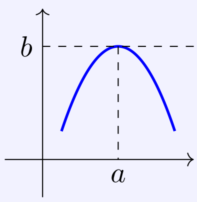
Définitions

Soit f une fonction numérique de domaine de définition D_f, I un intervalle de D_f, et a un élément de I.

- On dit que «f **admet un maximum ou une valeur maximale sur** I **en** a» ou que «$f(a)$ **est le maximum ou la valeur maximale de** f **sur** I», si pour tout x de I, on a $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que «f **admet un minimum ou une valeur minimale sur** I **en** a» ou que «$f(a)$ **est le minimum ou la valeur minimale de** f **sur** I», si pour tout x de I, on a $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que «f **admet un extremum ou une valeur extrême sur** I **en** a» ou que «$f(a)$ **est un extremum ou une valeur extrême de** f sur I», si $f(a)$ est un maximum ou un minimum de f sur I.



Fonction admettant un minimum $b = f(a)$ en a.



Fonction admettant un maximum $b = f(a)$ en a.

Exercice

Soit f la fonction de tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-4		-2		0		3		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	-1 ‖ 1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Donner les images de -4, de 0 et de 3 par f.
3. Donner un encadrement des images de -1, de 2 et de 5 par f.
4. Donner un des antécédents de $\sqrt{3}$ et de 2 par f.
5. Donner un encadrement des autres antécédents de $\sqrt{3}$ par f.
6. Donner un encadrement de f sur $[0;3]$ et sur $]-2;0]$.
7. Donner un encadrement de f sur $]-2;3]$ et sur $[0;+\infty[$.
8. Déterminer les extremums de f sur $[0;3]$ et sur $]-2;3]$.
9. Déterminer les extremums de f sur $]-\infty;-2]$ et sur D_f.

7 Position relative de deux courbes

Propriété

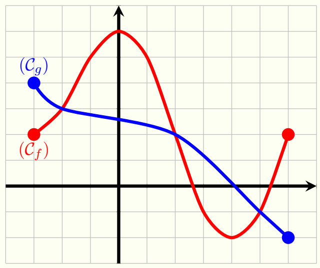
Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I, et (C_f) et (C_g) leurs représentations graphiques respectives.

- (C_f) est strictement au dessus de (C_g) sur I, si pour tout x de I, on a $f(x) > g(x)$.
- (C_f) est strictement au dessous de (C_g) sur I, si pour tout x de I, on a $f(x) < g(x)$.
- Les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (C_g) sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice

Soit (C_f) et (C_g) les représentations graphiques respectives de deux fonctions f et g.

1. Donner les tableaux des variations de f et de g.
2. Déterminer les extremums de f et de g sur $[-3;6]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = g(x)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $f(x) < g(x)$ et $f(x) > g(x)$.



8 Exercices

Exercice 1

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Montrer que pour tout réels distincts a et b de D_f, on a $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 4(a+b) - \frac{1}{ab}$.
3. Étudier la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty;0[$, $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Déduire les extremums de f sur $]0;+\infty[$.
6. Montrer que pour tout réel x dans $\left[\frac{1}{3};1\right]$, on a $3 \leq f(x) \leq 5$.

Exercice 2

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = 2(x + \frac{4}{x})$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Déterminer la parité de f.
3. Montrer que pour tout réels distincts a et b de D_f, on a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2\left(1 - \frac{4}{ab}\right)$.
4. Étudier la monotonie de f sur les intervalles $]0;2]$ et $[2;+\infty[$.
5. Donner le tableau des variations de f.
6. On considère un rectangle de surface 4 et l'une de ses dimensions est égale à x.
   (a) Déterminer le périmètre de ce rectangle.
   (b) Déduire la valeur minimale de son périmètre.

Exercice 3

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \frac{|x-2|+|x+2|}{|x|-1}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Déterminer la parité de f.
3. Étudier la monotonie de f sur les intervalles $[0;1[$, $]1;2]$, et $[2;+\infty[$.
4. Donner le tableau de variation de f .

Exercice 4

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = |x+3| - 2$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Donner l'expression de f sans la valeur absolue.
3. Tracer (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$.
4. Étudier la monotonie de f, puis donner son tableau des variations.
5. Construire dans le même repère la droite d'équation $y = -3x$.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -3x$.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq -3x$.