الأعداد العقدية

محتوى الدرس

1. مجموعة الأعداد العقدية

نشاط 1

الجزء الأول نعتبر المعادلة $(E): \; x^3 + 6x = 20$.

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلا في $\mathbb{R}$.
2. نضع $x = u + v$. بين أن $(E) \Leftrightarrow (u^3 + v^3 - 20) + (3uv + 6)(u + v) = 0$.
3. لتحديد قيمة x الذي يحقق المعادلة (E) يكفي تحديد u و v بحيث $(S): \begin{cases} u^3 + v^3 - 20 = 0 \\ 3uv + 6 = 0 \end{cases}$.
   (ا) بين أن العددين u^3 و v^3 هما حلا المعادلة $(E_0): \; X^2 - 20X + 8 = 0$.
   (E_0) تسمى المعادلة المكافئة للمعادلة (E).
   (ب) حدد حلول المعادلة (E_0) و استنتج العددين u و v.
   (ج) احسب $(1 + \sqrt{3})^3$ و $(1 - \sqrt{3})^3$.
   (د) استنتج تبسيطا للعددين u و v.
4. استنتج من خلال ما سبق حلا للمعادلة (E) و حدد جميع حلولها في $\mathbb{R}$.
5. حل في $\mathbb{R}$ بنفس الطريقة المعادلات $(E_1): x^3 + 3x = 36$ و $(E_2): x^3 = 36x + 91$.

الجزء الثاني نعتبر المعادلة $(E'): \; x^3 = 15x + 4$.

1. بين أن المعادلة (E') تقبل حلا في $\mathbb{R}$.
2. حدد (E'_0) المعادلة المكافئة للمعادلة (E'). هل المعادلة (E'_0) تقبل حلولا ؟
3. حتى نستمر في تطبيق طريقة الجزء الأول، نفترض وجود عدد "تخيلي" i بحيث $i^2 = -1$.
   (ا) بين أن $(E'_0) \Leftrightarrow (X - 2)^2 + 121 = 0$.
   (ب) مستعينا بالعدد i، عمل التعبير $(X - 2)^2 + 121$.
   (ج) حدد حلول المعادلة (E'_0).
   (د) احسب $(2 + i)^3$ و $(2 - i)^3$.
   (ه) استنتج حلا للمعادلة (E') و حدد جميع حلولها في $\mathbb{R}$.
4. حل في $\mathbb{R}$ بنفس الطريقة المعادلات $(E_1): x^3 + 4 = 6x$ و $(E_2): x^3 + 6 = 7x$.

تعاريف

- نقبل وجود عدد نرمز له بالرمز i و يحقق: $i^2 = -1$.
- بنفس خاصيات الضرب و الجمع في $\mathbb{R}$ نقبل وجود العددين ib و $a + ib$ حيث a و b عنصرين من $\mathbb{R}$.
- العدد ib يسمى عدد تخيليا صرفا.
- نرمز لمجموعة الأعداد التخيلية الصرفة بالرمز $i\mathbb{R}$، أي: $i\mathbb{R} = \{ib / b \in \mathbb{R}\}$.
- العدد $a + ib$ يسمى عدد عقديا.
- نرمز لمجموعة الأعداد العقدية بالرمز $\mathbb{C}$، أي: $\mathbb{C} = \{a + ib / (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$.
- كل عدد عقدي z يكتب بكيفية وحيدة $z = a + ib$ حيث a و b عنصرين من $\mathbb{R}$.
- الكتابة $z = a + ib$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z.

- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز $\mathrm{Re}(z)$.
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z يرمز له بالرمز $\mathrm{Im}(z)$.

أمثلة

$z = 2 - i\sqrt{3} \Rightarrow (\mathrm{Re}(z) = \cdots\cdots$ و $\mathrm{Im}(z) = \cdots\cdots)$ $\qquad (\mathrm{Re}(z) = \sqrt{5}$ و $\mathrm{Im}(z) = 4) \Rightarrow z = \cdots\cdots\cdots$

نتائج

لكل عدد عقدي z.

$z = \cdots\cdots\cdots + \cdots\cdots\cdots$ $\qquad \mathrm{Re}(z) \in \cdots\cdots\cdots$ و $\mathrm{Im}(z) \in \cdots\cdots\cdots$

$\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \cdots\cdots\cdots$ $\qquad \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \cdots\cdots\cdots$

خاصية

يكون عددان عقديان متساويان إذا و فقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

$z = z' \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ و $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z'))$ و بتعبير آخر $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow (x = x'$ و $y = y')$

نتيجة

يكون عدد عقدي منعدما إذا وفقط إذا كان كل من جزئيه الحقيقي و التخيلي منعدمين.

$z = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z) = 0$ و $\mathrm{Im}(z) = 0)$ و بتعبير آخر $x + iy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ و $y = 0)$.

ملاحظة

لا وجود لمفهوم الترتيب في المجموعة $\mathbb{C}$.

2. العمليات على الأعداد العقدية

1.2. الجمع و الطرح

قاعدة 1

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ عددين عقديين بحيث a و a' و b و b' أعداد حقيقية، لدينا:

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$ و $z - z' = (a - a') + i(b - b')$

أمثلة

$(3 + 5i) + (2 - 3i) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(3 - 5i) + 6 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(-1 - 4i) - (2 + 3i) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$7i - (4 + 5i) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

2.2. الضرب

قاعدة 3

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ عددين عقديين بحيث a و a' و b و b' أعداد حقيقية، لدينا:
$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

أمثلة

$3(2+4i) = \dots\dots\dots\dots$
$(5-3i)i = \dots\dots\dots\dots$
$(2-7i)(3+4i) = \dots\dots\dots\dots$
$(-2-i)(2-3i) = \dots\dots\dots\dots$

ملاحظات

- $i^0 = \dots$ و $i^1 = \dots$ و $i^2 = \dots$ و $i^3 = \dots$ و $i^4 = \dots$ و $i^5 = \dots$ و $i^6 = \dots$ و $i^7 = \dots$
بصفة عامة $i^{4n} = \dots$ و $i^{4n+1} = \dots$ و $i^{4n+2} = \dots$ و $i^{4n+3} = \dots$ لكل n من $\mathbb{N}$.
- $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2) : z^n - z'^n = (z - z')(z^{n-1} + z^{n-2}z' + z^{n-3}z'^2 + \dots + z'^{n-1})$
- من أجل $z' = 1$ لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})(\forall z \in \mathbb{C}) : \ z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1)$

3.2. القسمة

قاعدة 4

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ عددين عقديين بحيث a و a' و b و b' أعداد حقيقية، لدينا:
$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{و} \quad \frac{z'}{z} = \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} + i\frac{ab'-ba'}{a^2+b^2}$$

أمثلة

$\dfrac{1}{2-3i} = \dots\dots\dots\dots$
$\dfrac{3}{1+i} = \dots\dots\dots\dots$
$\dfrac{4+7i}{2+5i} = \dots\dots\dots\dots$
$\dfrac{-3+2i}{3-4i} = \dots\dots\dots\dots$

تمرين 1

1. أكتب على الشكل الجبري ما يلي: $(4+3i)+(2-5i)$؛ $(1+i)(1-i)(2+i)$؛ $\frac{1}{3-i} - \frac{1}{3+i}$؛ $\frac{(1-i)^3}{(2+i)^2}$.
2. حدد العدد الحقيقي b بحيث يكون العدد $(3+2i)(1+ib)$:
(ا) عددا حقيقيا. (ب) عددا تخيليا صرفا

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلات:

(ا) $z(2+i)=3-2i$ (ب) $(z+i)(1-i)=2+3i$ (ج) $\frac{1}{z}+\frac{1}{2-i}=\frac{3}{1+i}$

4. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:

(ا) $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-2i}=1$ (ب) $\frac{a}{2-i}+\frac{bi}{i+3}=\frac{2}{1+i}$

4.2. المرافق

تعريف

مرافق عدد عقدي $z=a+ib$ حيث a و b عددان حقيقيان هو العدد العقدي $a-ib$ و نرمز له بالرمز $\overline{z}$.

لدينا: $\overline{z}=\overline{a+ib}=a-ib$

أمثلة

$\overline{3+8i}=\dots\dots\dots\dots$ $\overline{-2+4i}=\dots\dots\dots\dots$ $\overline{5-3i}=\dots\dots\dots\dots$ $\overline{-7-6i}=\dots\dots\dots\dots$

$\overline{i}=\dots\dots\dots\dots$ $\overline{-2i}=\dots\dots\dots\dots$ $\overline{-11}=\dots\dots\dots\dots$ $\overline{10}=\dots\dots\dots\dots$

نتائج

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث a و b.

$z+\overline{z}=2a=2\text{Re}(z)$ و $z-\overline{z}=2ib=2i\text{Im}(z)$

$\overline{z}=z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ و $\overline{z}=-z\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

$$z\overline{z}=a^2+b^2=(\text{Re}(z))^2+(\text{Im}(z))^2$$

خاصيات

عددان حقيقيان. ليكن z و z' عددين عقديين و n عددا صحيحا نسبيا.

$\overline{\overline{z}}=z$ و $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ و $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$

و $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ و $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$ و $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

5.2. المعيار

تعريف

معيار عدد عقدي $z=a+ib$ حيث a و b عددان حقيقيان هو العدد الحقيقي $\sqrt{a^2+b^2}$ و نرمز له بالرمز $|z|$.

لدينا: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\overline{z}}$.

أمثلة

$|1+i|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $|1-i|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$|-4-3i|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $|-2+3i|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$|5i|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $|7|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ملاحظات

$z\overline{z}=|z|^2$ و $|z|\in\mathbb{R}^+$. إذا كان z عددا حقيقيا فإن معيار z هو قيمته المطلقة.

خاصيات

ليكن z و z' عددين عقديين و n عددا صحيحا نسبيا.

$|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ و $|z|=|-z|=|\overline{z}|$ و $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ و $|z^n|=|z|^n$

و $|z\times z'|=|z|\times|z'|$ و $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ و $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$

6.2. العمدة

تعريف

عمدة عدد عقدي $z=a+ib$ غير منعدم حيث a و b عددان حقيقيان غير منعدمان هو أحد قياسات الزاوية θ (بالراديان) التي تحقق $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و نرمز له بالرمز $\arg(z)$.

لدينا: $\cos(\arg(z))=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\mathrm{Re}(z)}{\sqrt{z\overline{z}}}$ و $\sin(\arg(z))=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\mathrm{Im}(z)}{\sqrt{z\overline{z}}}$.

أمثلة

$$\begin{cases}\cos(\arg(2+2i))=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sin(\arg(2+2i))=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \Rightarrow \arg(2+2i)\equiv\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases}\cos(\arg(2-2i))=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sin(\arg(2-2i))=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \Rightarrow \arg(2-2i)\equiv\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases}\cos(\arg(1-i\sqrt{3}))=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sin(\arg(1-i\sqrt{3}))=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \Rightarrow \arg(1-i\sqrt{3})\equiv\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases}\cos(\arg(-3+i\sqrt{3}))=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sin(\arg(-3+i\sqrt{3}))=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \Rightarrow \arg(-3+i\sqrt{3})\equiv\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ملاحظات

- إذا كان θ هو عمدة z فإنه لكل k من $\mathbb{Z}$ القياس $\theta+2k\pi$ هو كذلك عمدة z.
- العدد 0 ليس له عمدة.

نتائج

ليكن z عددا عقديا غير منعدم.

$\arg(z)\equiv 0[2\pi]\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}^*_+$ و $\arg(z)\equiv\pi[2\pi]\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}^*_-$

و $\arg(z)\equiv 0[\pi]\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}^*$

و $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}^*_+$ و $\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}^*_-$

و $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}^*$

خاصيات

ليكن z و z' عددين عقديين و n عددا صحيحا نسبيا.

$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$ و $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$ و $\arg(-\overline{z}) \equiv \pi - \arg(z)[2\pi]$

و $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$ و $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$

و $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)[2\pi]$

تمرين 2

1. بين أنه لكل عدد عقدي z لدينا $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$.
2. حدد الشكل الجبري للعدد z علما أن

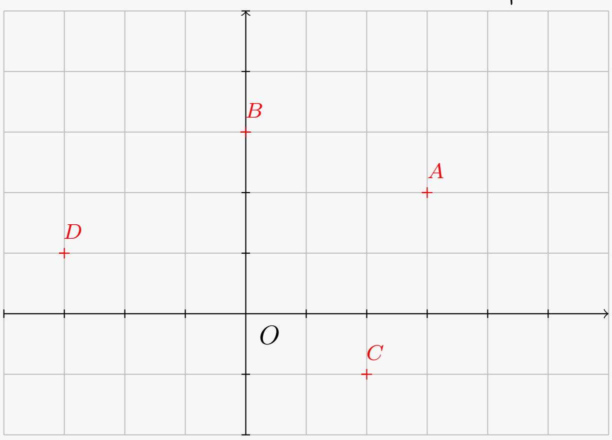
   (\tsk[a]) معياره هو 2 و عمدته هو $\frac{\pi}{3}$. (\tsk[a]) معياره هو $\sqrt{2}$ و عمدته هو $\frac{3\pi}{4}$.
3. علما أن $z_1 = 1+i$ و $z_2 = \sqrt{3}+i$ حدد معيار و عمدة z_1 و z_2 و z_1z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.
4. بين أنه لكل عدد عقدي z لدينا $z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow |1+z| = 1+|z|$.
5. بين أن $|\overline{z}| = |z|$ و $\arg(\overline{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$.
6. حدد قيم العدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $(1-i)^n$

   (\tsk[a]) حقيقيا موجبا. (\tsk[a]) حقيقيا. (\tsk[a]) تخيليا صرفا.

3. التمثيل الهندسي لعدد عقدي

نشاط 2

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و C و D الممثلة أسفله.



نربط كل نقطة $M(x;y)$ من المستوى بالعدد العقدي $z_M = x+iy$.

1. حدد الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D المرتبطة بالنقط A و B و C و D.
2. مثل النقطة I التي تحقق $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ ثم حدد العدد العقدي z_I المرتبط بها.
3. مثل النقطة J التي تحقق $\overrightarrow{OJ} = 2\overrightarrow{OA}$ ثم حدد العدد العقدي z_J المرتبط بها.

4. مثل النقط E و F و G المرتبطة بالأعداد العقدية التالية: $z_E=-2i$ و $z_F=5+i$ و $z_G=-3-i$.
5. لتكن N نقطة بحيث $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{AB}$.
   (أ) حدد زوج إحداثيات النقطة N.
   (ب) استنتج العدد العقدي z_N المرتبط بالنقطة N.
   (ج) تحقق من أن: $z_N=z_B-z_A$.

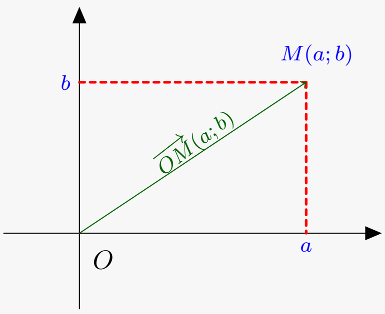
1.3. المستوى العقدي

تعاريف

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$.
نربط كل نقطة $M(a;b)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ بالعدد العقدي $z=a+ib$.
نقول إن:
- النقطة M هي صورة العدد العقدي z.
- المتجهة $\overrightarrow{OM}$ هي الصورة المتجهية للعدد العقدي z.

نقول كذلك إن:
- العدد العقدي z هو لحق النقطة M.
- العدد العقدي z هو لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$.

نكتب $M(z)$ أو $\overrightarrow{OM}(z)$.
نرمز للحق النقطة M بالرمز $\text{aff}(M)$ ، لدينا: $M(x;y)\Leftrightarrow \text{aff}(M)=a+ib$.
المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ يسمى المستوى العقدي.

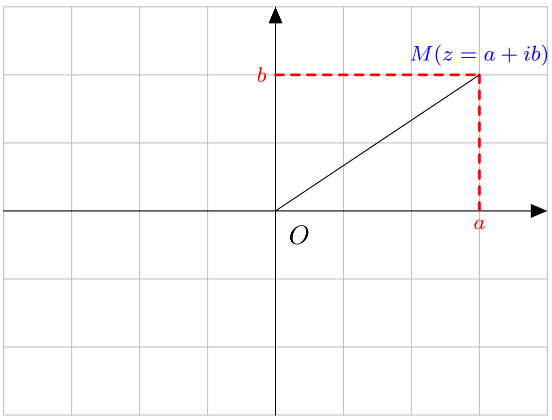


ملاحظات

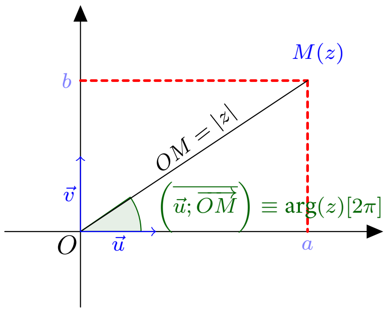
- الأعداد الحقيقية هي ألحاق نقط محور الأفاصيل الذي يسمى كذلك المحور الحقيقي. الأعداد التخيلية هي ألحاق نقط محور الأراتيب الذي يسمى كذلك المحور التخيلي.

2.3. التمثيل الهندسي لمقابل و مرافق عدد عقدي

في المستوى العقدي:
- النقطة $M_1(-z)$ هي مماثلة النقطة $M(z)$ بالنسبة ....
....
- النقطة $M_2(\overline{z})$ هي مماثلة النقطة $M(z)$ بالنسبة ....
....
- النقطة $M_3(-\overline{z})$ هي مماثلة النقطة $M(z)$ بالنسبة ....
....



3.3. التأويل الهندسي لمعيار و عمدة عدد عقدي



في المستوى العقدي:

- معيار عدد عقدي z هو ....

....

- عمدة عدد عقدي z هو ....

....

4.3. لحق متجهة - لحق مرجح نقط متزنة

تعريف

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$.
نربط كل متجهة $\vec{w}(a;b)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ بالعدد العقدي $z=a+ib$.
نقول إن العدد العقدي z هو لحق المتجهة $\vec{w}$ و نكتب $\vec{w}(z)$
نرمز للحق المتجهة $\vec{w}$ بالرمز $\text{aff}\,(\vec{w})$، لدينا: $\vec{w}(a;b) \Leftrightarrow \text{aff}\,(\vec{w}) = a+ib$

خاصيات

- تكون متجهتان متساويتان إذا وفقط إذا كان لحقاهما متساويان.
- إذا كانت $\vec{w}(z)$ و $\vec{w'}(z')$ فإن $\vec{w}+\vec{w'}(z+z')$.
- إذا كانت $\vec{w}(z)$ فإنه لكل عدد حقيقي k غير منعدم، $k\vec{w}(kz)$.
- إذا كانت $A(z_A)$ و $B(z_B)$ فإن $\overrightarrow{AB}(z_B-z_A)$ و $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B-z_A|$.
- إذا كانت G مرجح النقطتين المتزنتين $(A(z_A);\alpha)$ و $(B(z_B);\beta)$ فإن $G\left(\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}\right)$.
- إذا كانت G مرجح النقط المتزنة $(A(z_A);\alpha)$ و $(B(z_B);\beta)$ و $(C(z_C);\gamma)$ فإن $G\left(\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$.

نتائج

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ ثلاث نقط مختلفة من المستوى العقدي.

- A و B و C نقط مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ عددا حقيقيا.
- لحق منتصف القطعة $[AB]$ هو $\frac{z_A+z_B}{2}$ و لحق مركز ثقل المثلث ABC هو $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$.

5.3. زاوية محددة بمتجهتين

خاصيات

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$ نقط مختلفة من المستوى العقدي، لدينا:

- $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B-z_A)[2\pi]$

- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- A و B و C نقط مستقيمية إذا و فقط إذا كان: $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv 0[\pi]$
- (AB) و (CD) مستقيمان متوازيان إذا و فقط إذا كان: $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right) \equiv 0[\pi]$
- (AB) و (CD) مستقيمان متعامدان إذا و فقط إذا كان: $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

تمرين 3

1. مثل في المستوى العقدي النقط التي ألحاقها $z_1=2$ و $z_2=3i$ و $z_3=-i$ و $z_4=1+2i$ و $z_5=3-i$ و $z_6=-2+3i$.
2. الأعداد العقدية z_1 و z_2 و z_3 و z_4 هي على التوالي ألحاق النقط A و B و C و D.
   (أ) حدد z_3 علما أن $OABC$ متوازي الأضلاع و أن $z_1=1+i$ و $z_2=4+5i$.
   (ب) حدد z_2 و z_4 علما أن $ABCD$ مربع و أن
   (أ) $z_1=2+i$ و $z_3=6+7i$. (ب) $z_1=6-2i$ و $z_3=6i$.
3. حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z الذي يحقق:
   (أ) $|z-(1-i)|=2$ (ب) $|z-2|=|z-4i|$ (ج) $|z|=|z+2-2i|$
   (د) $|z-2|=3|z-10|$ (هـ) $\arg(z-2+3i)\equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ (و) $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

6.3. التمثيل العقدي لبعض التحويلات الإعتيادية

خاصيات

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتان من المستوى العقدي.

التماثل المركزي	الإزاحة
نعتبر S_I التماثل المركزي الذي مركزه $I(z_I)$. $S_I(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$ $\Leftrightarrow z'=2z_I-z$	نعتبر $t_{\vec{w}}$ الإزاحة التي متجهتها $\vec{w}(\omega)$. $t_{\vec{w}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{w}$ $\Leftrightarrow z'=z+\omega$
التحاكي	**الدوران**
نعتبر $h_{(\Omega;k)}$ التحاكي الذي مركزه $\Omega(z_\Omega)$ و نسبته k. $h_{(\Omega;k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ $\Leftrightarrow z'=k(z_\Omega-z)+z_\Omega$	نعتبر $r_{(\Omega;\alpha)}$ الدوران الذي مركزه $\Omega(z_\Omega)$ و زاويته α. $r_{(\Omega;\alpha)}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}\Omega M=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha[2\pi]\end{cases}$ $\Leftrightarrow z'=(z-z_\Omega)(\cos\alpha+i\sin\alpha)+z_\Omega$

تمرين 4

حدد التمثيل العقدي للتحويلات التالي:

1. التماثل المركزي الذي مركزه $I(i+1)$.
2. الإزاحة التي متجهتها $\vec{u}(-2i)$.
3. التحاكي الذي مركزه $\Omega(i)$ و نسبته $\frac{2}{3}$.
4. الدوران الذي مركزه $\Omega(i)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

4. الشكل المثلثي لعدد عقدي

تعريف

ليكن z عددا عقديا غير منعدم.
نسمي الشكل المثلثي للعدد العقدي z الكتابة $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ حيث $r=|z|$ و $\theta\equiv\arg(z)[2\pi]$.
نكتب باختصار $z=[r;\theta]$.

ملاحظة

$z=z'\Leftrightarrow |z|=|z'|$ و $\arg(z)\equiv\arg(z')[2\pi]$ و بتعبير آخر $[r;\theta]=[r';\theta']\Leftrightarrow r=r'$ و $\theta\equiv\theta'[2\pi]$

خاصيات

ليكن $z=[r,\theta]$ و $z'=[r',\theta']$ عددين عقديين.
$-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$ و $\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$ و $-\overline{[r,\theta]}=[r,\pi-\theta]$ و $[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$
و $[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$ و $\frac{1}{[r,\theta]}=[\frac{1}{r},-\theta]$ و $\frac{[r',\theta']}{[r,\theta]}=[\frac{r'}{r},\theta'-\theta]$

تمرين 5

1. أكتب على الشكل المثلثي الأعداد $1-i$ و $1+i\sqrt{3}$ و $3-3i$ و $3+2i$.
2. أكتب على الشكل الجبري الأعداد $[4,\frac{\pi}{3}]$ و $[5,\frac{\pi}{2}]$ و $[3\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4}]$ و $[4,13\pi]$.
3. مثل في المستوى العقدي النقط التي ألحاقها $[4,0]$ و $[3,\frac{\pi}{2}]$ و $[2,-\frac{\pi}{3}]$ و $[3,\frac{\pi}{6}]$.
4. أكتب على الشكل المثلثي $z_1=1+i$ و $z_2=1-i\sqrt{3}$ ثم استنتج باستعمال الشكل $[r,\theta]$ الشكل المثلثي للأعداد z_1z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ و $\frac{z_2}{z_1}$ و z_1^2 و z_2^3 و $\frac{z_1^2}{z_2^4}$.
5. (أ) بين أن حلول المعادلة $z^3=1$ هي على شكل 1 و j و j^2.
   (ب) بين أن $1+j+j^2=0$.
   (ج) استنتج قيم $(1+j)^7$ و $(1-j)(1-j^2)$ و $\frac{j^5}{1+j}$.

5. الشكل الأسي لعدد عقدي

تعريف

كل عدد عقدي z غير منعدم معياره r و عمدته θ يمكن كتابته على الشكل $z=re^{i\theta}$ و تسمى هذا الشكل بالكتابة الاسية.
نكتب للاختصار $z=[r;\theta]$.

أمثلة

$e^{i\pi} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $e^{i2\pi} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $e^{i\frac{\pi}{2}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$e^{-i\frac{\pi}{4}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $e^{i\frac{\pi}{3}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

خاصيات

لكل عددين حقيقيين θ و θ'.

$|e^{i\theta}| = 1$ و $\arg(e^{i\theta}) = \theta$

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ و $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ و $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ و $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$

صيغة موافر: $(\forall\theta \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N}) :\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

صيغتا أولير: $(\forall\theta \in \mathbb{R}) :\quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ و $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

ملاحظة

$(\forall\theta \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) :\quad \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ و $\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$

تمرين 6

1. حدد بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ تعبير $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$.
2. بسط التعبيرين $\frac{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}$ و $\frac{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}$.
3. أخطط كلا من $\cos^3\theta$ و $\sin^3\theta$.

6. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في $\mathbb{C}$

خاصية

- حل المعادلة $z^2 = a$:
  ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم.
  - إذا كان $a > 0$ فإن $z = -\sqrt{a}$ أو $z^2 = a \Leftrightarrow z = \sqrt{a}$.
  - إذا كان $a < 0$ فإن $z = -i\sqrt{-a}$ أو $z^2 = a \Leftrightarrow z = i\sqrt{-a}$.
- حل المعادلة $az^2 + bz + c = 0$:
  ليكن a و b و c أعداد حقيقية بحيث $a \neq 0$. نعتبر $\Delta = b^2 - 4ac$ مميز المعادلة $az^2 + bz + c = 0$.
  - إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  - إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $z = \frac{-b}{2a}$.
  - إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين هما $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

تمرين 7

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلات:

(ا) $x^2 + 9 = 0$　　(ب) $9x^2 + 5 = 0$　　(ج) $x^2 + 2x + 2 = 0$

(د) $x^2 + x + 1 = 0$　　(ه) $2x^2 + 3x + 2 = 0$　　(و) $-3x^2 + 5x - 3 = 0$

2. حدد معادلة من الدرجة الثانية حليها $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = \overline{z_1}$.