DEVOIR LIBRE 1

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel .
   (a) Étudier la parité des nombres suivants: (i) n^2+3n+4 (ii) $(2021)^n+4$ (iii) $2n^3+17n$
   (b) Chercher tous les entiers naturels n tel que: $\dfrac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que: $\dfrac{2^n}{5^m} \in \mathbb{D}$ pour tout m et n de $\mathbb{N}$.
   (d) Montrer que : $A = 7^{n+1} + 8 \times 7^n$ est divisible par 15.
2. Soient $a = 3060$, $b = 1224$ et $c = 71$.
   (a) Montrer que c est un nombre premier.
   (b) Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers.
   (c) Déterminer $PGCD(a,b)$ et $PPCM(a,b)$.
   (d) Simplifier (i) $A = \dfrac{a}{b}$ (ii) $B = \dfrac{7}{a} + \dfrac{11}{b}$ (iii) $C = \sqrt{ab}$

Exercice 2

1. Factoriser les expressions suivantes:
   (a) $A = (x-\sqrt{2})(3x-1) + (x^2-2)(1-x)$ (b) $B = x^3 - 8$
   (c) $C = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + (x^2-3)$
2. Développer et réduire: $(x-\sqrt{3})(2-x)(x+\sqrt{3}) - (x-3)^3$.

Exercice 3

ABC est un triangle.
Soient I, J et K des points du plan tels que:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CB}$.
2. Construire les points I, J et K.
3. (a) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) En déduire que les points I, J et K sont alignés.
4. Soit F un point tel que $\overrightarrow{AF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ}$.
   (a) Construire le point F.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
   (c) Montrer que F est le milieu du segment $[BC]$.

CORRECTION DU DEVOIR LIBRE 1

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel .

   (a) i. Étudier la parité de n^2+3n+4
   On a $n^2+3n+4=(n^2+n)+2(n+2)$.
   Puisque n^2 et n sont de même parité, alors leur somme n^2+n est pair.
   Et on a $2(n+2)$ est pair.
   Donc $(n^2+n)+2(n+2)$ est pair.
   D'où n^2+3n+4 est pair.

   ii. Étudier la parité de $(2021)^n+4$
   On a 2021 est impair, alors $(2021)^n$ l'est aussi.
   Et puisque 4 est pair, alors $(2021)^n+4$ est impair.

   iii. Étudier la parité de $2n^3+17n$
   On a $2n^3+17n=2(n^3+8n)+n$
   Et on a $2(n^3+8n)$ est pair.
   Donc, si n est pair, alors $2(n^3+8n)+n$ l'est aussi.
   Et si n est impair, alors $2(n^3+8n)+n$ l'est aussi.
   D'où $2n^3+17n$ a la même parité que n.

   (b) Chercher tous les entiers naturels n tel que: $\dfrac{2n+7}{n+2}\in\mathbb{N}$.
   Soit n un entier naturel tel $\dfrac{2n+7}{n+2}\in\mathbb{N}$.
   Alors $n+2$ divise $2n+7$.
   D'autre part, on a $2n+7=2(n+2)+3$.
   Et puisque $n+2$ divise $2(n+2)$, alors $n+2$ est un diviseur de $2n+7-2(n+2)=3$.
   Les diviseurs de 3 sont 1 et 3, alors $n+2=1$ ou $n+2=3$.
   Donc $n=1-2=-1\notin\mathbb{N}$ ou $n=3-2=1\in\mathbb{N}$.
   D'où, l'unique entier naturel n vérifiant $\dfrac{2n+7}{n+2}\in\mathbb{N}$ est $n=1$.

   (c) Montrer que: $\dfrac{2^n}{5^m}\in\mathbb{D}$ pour tout m et n de $\mathbb{N}$.
   On a $\dfrac{2^n}{5^m}=\dfrac{2^n\times 2^m}{5^m\times 2^m}=\dfrac{2^{n+m}}{(5\times 2)^m}=\dfrac{2^{n+m}}{10^m}$.
   Puisque $\dfrac{2^{n+m}}{10^m}\in\mathbb{D}$, alors $\dfrac{2^n}{5^m}\in\mathbb{D}$.

   (d) Montrer que : $A=7^{n+1}+8\times 7^n$ est divisible par 15.
   On a $A=7^{n+1}+8\times 7^n=7^n\times 7+8\times 7^n=7^n\times(7+8)=7^n\times 15$.
   D'où A est divisible par 15.

2. Soient $a=3060$, $b=1224$ et $c=71$.

   (a) Montrer que c est un nombre premier.
   On a $2^2=4<71$, et 2 ne divise pas 71.
   $3^2=9<71$, et 3 ne divise pas 71.
   $5^2=25<71$, et 5 ne divise pas 71.
   $7^2=49<71$, et 7 ne divise pas 71.
   $11^2=121>71$, alors $c=71$ est un nombre premier.

   (b) Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers.

On a

$a = 3060$	2	et	$b = 1224$	2
1530	2		612	2
765	3		306	2
255	3		153	3
85	5		51	3
17	17		17	17
1			1	

D'où $a = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 17$ et $b = 2^3 \times 3^2 \times 17$.

(c) Déterminer $PGCD(a,b)$ et $PPCM(a,b)$.

On a $PGCD(a,b) = 2^2 \times 3^2 \times 17 = 612$ et $PPCM(a,b) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 17 = 6120$.

(d) i. Simplifier $A = \dfrac{a}{b}$.

On a $a = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 17 = 5 \times PGCD(a,b)$ et $b = 2^3 \times 3^2 \times 17 = 2 \times PGCD(a,b)$.

Alors $A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{5 \times \cancel{PGCD(a,b)}}{2 \times \cancel{PGCD(a,b)}} = \dfrac{5}{2}$.

ii. Simplifier $B = \dfrac{7}{a} + \dfrac{11}{b}$.

On a $PPCM(a,b) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 17 = a \times 2 = b \times 5$.

Alors $B = \dfrac{7}{a} + \dfrac{11}{b} = \dfrac{7 \times 2}{a \times 2} + \dfrac{11 \times 5}{b \times 5} = \dfrac{14}{PPCM(a,b)} + \dfrac{55}{PPCM(a,b)} = \dfrac{69}{6120}$.

iii. Simplifier $C = \sqrt{ab}$.

On a $a = 5 \times PGCD(a,b)$ et $b = 2 \times PGCD(a,b)$.

Donc $ab = (5 \times PGCD(a,b)) \times (2 \times PGCD(a,b)) = 10 \times (PGCD(a,b))^2$.

D'où $C = \sqrt{ab} = \sqrt{10 \times (PGCD(a,b))^2} = PGCD(a,b) \times \sqrt{10} = 612\sqrt{10}$.

Exercice 2

1. (a) Factoriser $A = (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - 2)(1 - x)$.

On a
$$\begin{aligned} A &= (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - 2)(1 - x) \\ &= (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - (\sqrt{2})^2)(1 - x) \\ &= (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(1 - x) \\ &= (x - \sqrt{2})[(3x - 1) + (x + \sqrt{2})(1 - x)] \\ &= (x - \sqrt{2})[3x - 1 + x - x^2 + \sqrt{2} - x\sqrt{2}] \\ &= (x - \sqrt{2})[-x^2 + 4x - x\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}] \\ &= (x - \sqrt{2})[-x^2 + (4 - \sqrt{2})x - 1 + \sqrt{2}] \end{aligned}$$

(b) Factoriser $B = x^3 - 8$.

On a
$$\begin{aligned} B &= x^3 - 8 \\ &= x^3 - 2^3 \\ &= (x - 2)(x^2 + x \times 2 + 2^2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

(c) Factoriser $C = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + (x^2 - 3)$.

$$\begin{aligned}
\text{On a}\quad C &= x^2-2x\sqrt{3}+3+(x^2-3)\\
&= x^2-x\sqrt{3}-x\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+(x^2-3)\\
&= x(x-\sqrt{3})-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})+(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\\
&= (x-\sqrt{3})[x-\sqrt{3}+(x+\sqrt{3})]\\
&= (x-\sqrt{3})[x\cancel{-\sqrt{3}}+x\cancel{+\sqrt{3}}]\\
&= 2x(x-\sqrt{3})
\end{aligned}$$

2. Développer et réduire: $(x-\sqrt{3})(2-x)(x+\sqrt{3})-(x-3)^3$.

$$\begin{aligned}
\text{On a}\quad B &= (x-\sqrt{3})(2-x)(x+\sqrt{3})-(x-3)^3\\
&= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(2-x)-(x-3)^3\\
&= (x^2-(\sqrt{3})^2)(2-x)-(x^3-3\times x^2\times 3+3\times x\times 3^2-3^3)\\
&= (x^2-3)(2-x)-(x^3-9x^2+27x-27)\\
&= (2x^2-x^3-6+3x)-(x^3-9x^2+27x-27)\\
&= 2x^2-x^3-6+3x-x^3+9x^2-27x+27\\
&= -2x^3+11x^2-24x+21
\end{aligned}$$

Exercice 3

ABC est un triangle.

Soient I, J et K des points du plan tels que:

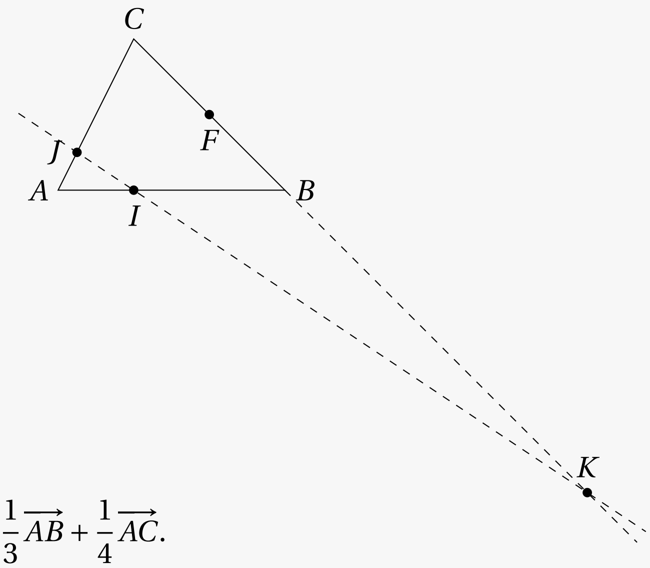
$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{CK}=3\overrightarrow{CB}$.

   On a $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$, alors $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$, donc $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CK}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CK}$.

   D'où $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CK}$, et par suite $\overrightarrow{CK}=3\overrightarrow{CB}$.

2. Construire les points I, J et K.



3. (a) Montrer que $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$

$=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

D'où $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

(b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}$

$=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+3(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+\frac{9}{3}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

D'où $\overrightarrow{IK}=\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

(c) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

On a $-8\overrightarrow{IJ}=-8\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{IK}$.

Alors, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

D'où, les points I, J et K sont alignés.

4. Soit F un point tel que $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AJ}$.

(a) Construire le point F.

Voir la figure.

(b) Montrer que $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AJ}$

$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\left(\frac{4}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\times\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

D'où $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

(c) Montrer que F est le milieu du segment $[BC]$.

$$
\begin{aligned}
\text{On a}\quad \overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}\\
&= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&= -\frac{2}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}
\end{aligned}
$$

D'où F est le milieu du segment $[BC]$.