الدوال الأسية

محتوى الدرس

1. دالة الأسية النبيرية

نشاط 1

1. بين أن الدالة $\ln$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال I ينبغي تحديده.
2. حدد $\ln^{-1}(0)$ و $\ln^{-1}(1)$.
3. ليكن a عددا جذريا. حدد $\ln^{-1}(a)$.

فيما يلي نمدد النتيجة من مجموعة الأعداد الجذرية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

4. ليكن a و b عددين حقيقيين و r عددا جذريا. بين ما يلي:
$\ln^{-1}(a+b)=\ln^{-1}(a)\times\ln^{-1}(b)$؛ $\ln^{-1}(a-b)=\frac{\ln^{-1}(a)}{\ln^{-1}(b)}$؛ $\ln^{-1}(ra)=\left(\ln^{-1}(a)\right)^r$.

تعريف

الدالة العكسية للدالة $\ln$ هي الدالة .... و تسمى الدالة الأسية النبيرية و نرمز لها بالرمز $\exp$.

نتائج

- $\exp(0)=1$ و $\exp(1)=e$.
- $(\forall x\in\mathbb{R}):\exp(x)>0$.
- $(\forall y\in]0;+\infty[)\ (\forall x\in\mathbb{R}):\ln y=x\Leftrightarrow y=\exp(x)$.
- $(\forall x\in\mathbb{R}):\ln(\exp(x))=x$.
- $(\forall x\in]0;+\infty[):\exp(\ln(x))=x$.
- الدالة $\exp$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
- $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2):x<y\Leftrightarrow\exp(x)<\exp(x)$.
- $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2):x=y\Leftrightarrow\exp(x)=\exp(x)$.

خاصيات

لكل x و y من $\mathbb{R}$ و لكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا:

$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)\qquad \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}\qquad \exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}\qquad \exp(rx)=(\exp(x))^r$$

ملاحظات

الخاصيات السابقة هي نفسها خاصيات القوى.

نستعمل غالبا في التعابير الرياضية الرمز e^x بدل الرمز $\exp(x)$، أما الرمز $\exp$ فيستعمل للتعبير عن الدالة $x\mapsto e^x$.

تمرين 1

1. بسط ما يلي: $(e^{1-x})^2e^{-x}e^{3x}$ و $\frac{e^x+e^{2x}}{e^x}$ و $e^{\frac{3x}{2}}\sqrt{e^{1-2x}}$.
2. بين أن: $1-e^x+e^{-x}=e^{-x}\left(1+e^x-e^{2x}\right)$ و أن $\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=1-\frac{2}{e^x+1}$.
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات: $e^{2x}-3e^x+2=0$ و $e^x+3e^{-x}-4=0$.
4. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات: $e^{2x}+2e^x-3\geq 0$ و $\left(e^x-1\right)\left(e^{2x}-2\right)<0$ و $\frac{e^x-1}{e^x-2}>0$.
5. حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $\begin{cases} e^{2x}e^y=e^2\\ \ln(3x)+\ln(3+2y)=2\ln 3\end{cases}$.

2. دراسة الدالة الأسية النبيرية

نشاط 2

نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} \frac{\exp(x)-1}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجتين.
2. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x}$ ثم اول هندسيا النتيجة.
3. حدد $\exp'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.
4. ضع جدول تغيرات الدالة exp.
5. حدد معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 0.
6. أنشئ منحنى الدالة exp في معلم متعامد ممنظم (نعطي $e\approx 2,72$ و $\frac{1}{e}\approx 0,37$).
7. بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\exp(x) = 0$ لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$.

دراسة

مجموعة تعريف الدالة exp

$D_{\exp} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

النهايات عند محدات مجموعة تعريف الدالة ln

$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = \cdots\cdots$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = \cdots\cdots$

قابلية اشتقاق الدالة exp

الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي:

$\forall x\in\mathbb{R}:\ \exp'(x) = \cdots\cdots\cdots\cdots$

جدول تغيرات الدالة exp

x	
exp	

الفروع اللانهائية

$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = \cdots\cdots$: منحنى الدالة exp يقبل $\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = \cdots\cdots$: منحنى الدالة exp يقبل $\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

نتائج أخرى

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = \cdots\cdots$ و $\lim\limits_{x\to0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\exp(x) = \cdots$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \cdots$

$\exp(\mathbb{R}) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(\forall a\in]0;+\infty[) : \exp(x) = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$

تمرين 2

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-e^x}{e^{4x}+3e^x};\ \lim_{x\to+\infty} (e^{2x}-e^x+2);\ \lim_{x\to0} \frac{1+2x-e^x}{x};\ \lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-e^x}{x};\ \lim_{x\to-\infty} (1-x)e^x;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x};\ \lim_{x\to-\infty} (1-x+e^x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3};\ \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \exp\left(\frac{x^2-4}{1-x}\right);\ \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{3-4x^2}{1-x}\right);\ \lim_{x\to+\infty} (1+3x)e^{2-3x}$$

خاصية

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على I.

- الدالة $x \mapsto \exp(u(x))$ قابلة للاشتقاق على I، و لدينا: $(\forall x \in I) : (\exp(u(x)))' = u'(x)\exp'(u(x))$
- الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x)\exp'(u(x))$ على I هي الدوال المعرفة على I بما يلي: $x \mapsto \exp(u(x)) + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

3. دالة الأسية ذات الأساس a

تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا بحيث: $a > 0$ و $a \neq 1$.

الدالة الأسية للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز $\exp_a$ و المعرفة بما يلي: $(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp_a(x) = e^{x\ln(a)} = a^x$.

$\exp_a(1) = \cdots\cdots$ $\qquad$ $\exp_a(0) = \cdots\cdots$ $\qquad$ $\exp_e = \cdots\cdots\cdots$

خاصيات

لكل x و y من $\mathbb{R}$ و لكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا:

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y);\ \exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)};\ \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)};\ \exp_a(x^r) = (\exp_a(x))^r$$

دراسة

مجموعة تعريف الدالة $\exp_a$: $D_{\exp_a} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

النهايات عند محدات مجموعة تعريف الدالة $\log_a$:

إذا كان $0 < a < 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \cdots\cdots\cdots$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = \cdots\cdots\cdots$

إذا كان $a > 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \cdots\cdots\cdots$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = \cdots\cdots\cdots$

قابلية اشتقاق الدالة $\exp_a$:

الدالة $\exp_a$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي:

$\forall x \in \mathbb{R} :\ \exp'_a(x) = \cdots\cdots\cdots\cdots$

جدول تغيرات الدالة $\exp_a$:

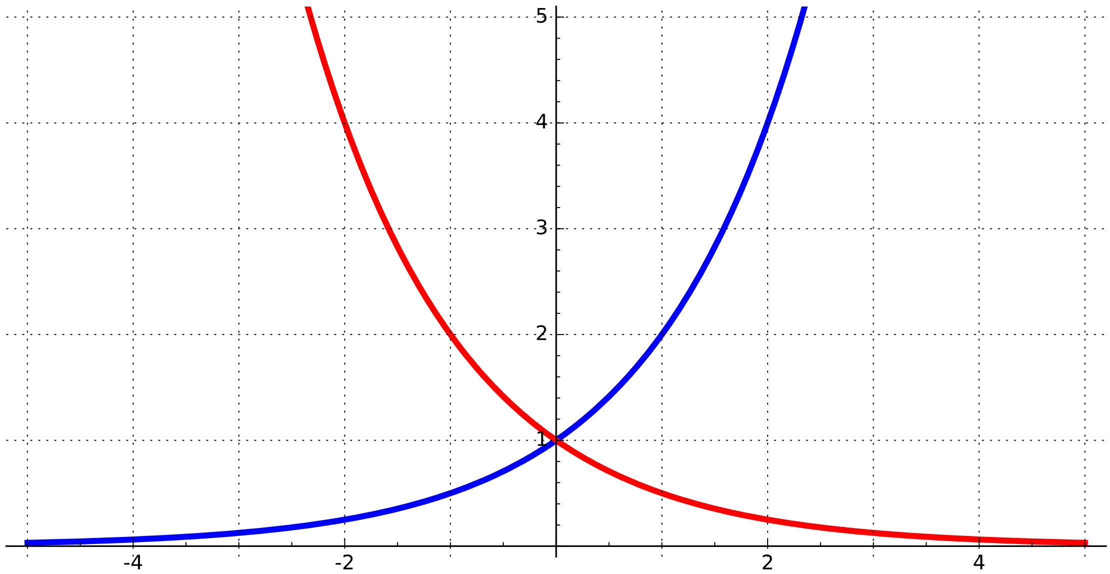
إذا كان $0 < a < 1$

x	
$\exp_a$	

إذا كان $a > 1$

x	
$\exp_a$	

نتيجة $(\forall b \in]0;+\infty[) : \exp_a(x) = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$



ملاحظة

الدالة $\exp_a$ هي الدالة العكسية للدالة $\log_a$ على $]0;+\infty[$.

تعريف

نسمي دالة الأسية العشرية الدالة الأسية ذات الأساس 10 أي $\exp_{10}$، لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp_{10}(x) = 10^x$.