# DEVOIR LIBRE 1

## Exercice 1

1. Soit $n$ un entier naturel .
   (a) Étudier la parité des nombres suivants: (i) $3n^2+5n+2$ (ii) $(2022)^n+3$ (iii) $4n^3+15n$
   (b) Chercher tous les entiers naturels $n$ tel que: $\dfrac{2n+8}{n+3}\in\mathbb{N}$.
   (c) Montrer que: $\dfrac{2^n}{5^m}\in\mathbb{D}$ pour tout $m$ et $n$ de $\mathbb{N}$.
   (d) Montrer que : $A=2\times5^{n+1}-3\times5^n$ est divisible par 7.
2. Soient $a=3060$, $b=1224$ et $c=89$.
   (a) Montrer que $c$ est un nombre premier.
   (b) Décomposer les nombres $a$ et $b$ en produit de facteurs premiers.
   (c) Déterminer $PGCD(a,b)$ et $PPCM(a,b)$.
   (d) Simplifier (i) $A=\dfrac{a}{b}$ (ii) $B=\dfrac{7}{a}+\dfrac{11}{b}$ (iii) $C=\sqrt{ab}$

## Exercice 2

1. Factoriser les expressions suivantes:
   (a) $A=(x-\sqrt{2})(3x-1)+(x^2-2)(1-x)$ (b) $B=x^3-8$
   (c) $C=x^2-2x\sqrt{3}+3+(x^2-3)$
2. Développer et réduire: $(x-\sqrt{3})(2-x)(x+\sqrt{3})-(x-3)^3$.

## Exercice 3

$ABC$ est un triangle.
Soient $I$, $J$ et $K$ des points du plan tels que:

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{CK}=3\overrightarrow{CB}$.
2. Construire les points $I$, $J$ et $K$.
3. (a) Montrer que $\overrightarrow{IJ}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) En déduire que les points $I$, $J$ et $K$ sont alignés.
4. Soit $F$ un point tel que $\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AJ}$.
   (a) Construire le point $F$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .
   (c) Montrer que $F$ est le milieu du segment $[BC]$.