سلسلة 2: الإشتقاق و تطبيقاته

التمرين 1

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي: $f(x) = x+1+\sqrt{x^2+4x}$
و ليكن $(\mathcal{C})$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. بين أن المستقيم ذي المعادلة $y = 2x+3$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 و على اليسار في -4 ثم أعط تأويلا هندسيا.
4. أعط جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$.
5. حل مبياني المتراجحة $f(x) > 0$.

التمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}; & x \geq 0 \\ f(x) = x\sqrt{x^2-x}; & x < 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. تحقق أن الدالة f متصلة في 0.
2. أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على اليمين و على اليسار في 0 ثم أعط تأويلا هندسيا.
3. أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C})$.
4. أحسب $f'(x)$ على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.
5. أعط جدول تغيرات الدالة f.
6. أرسم المنحنى $(\mathcal{C})$.

التمرين 3

الجزء الأول: لتكن u و v الدالين المعرفتين على $[1;+\infty[$ بما يلي: $u(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$ و $v(x) = 1+\frac{1}{x^2}$

1. أدرس تغيرات كل من الدالتين u و v على المجال $[1;+\infty[$.
2. أنشئ $(\mathcal{C}_u)$ و $(\mathcal{C}_v)$ المنحنيين الممثلين للدالتين u و v.
3. بين أن المعادلة $u(x) = v(x)$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;+\infty[$.
4. تحقق من أن العدد α ينتمي إلى المجال $]2;3[$.
5. استنتج مجموعة حلول المتراجحة $u(x) > v(x)$.

الجزء الثاني: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[1;+\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 1 على اليمين.
2. بين أن: $(\forall x \in]1;+\infty[) : \ f'(x) = \frac{u(x)-v(x)}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}$
3. استنتج أن f تقبل قيمة دنوية ثم حددها.

التمرين 4

لتكن f الجالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:
$f(x) = -1+\sqrt[3]{1-x}$
و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.
3. أدرس تغيرات الدالة f.
4. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
5. حدد $f(0)$ و $f'(0)$ ثم أنشئ $(\mathcal{C}_f)$.
6. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال I ينبغي تحديده.
7. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من I.
8. أنشئ $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ في نفس المعلم السابق.

التمرين 5

يعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما نلي:

$$\begin{cases} f(x)=1+\sqrt[3]{1-x^3}; & x<1\\ f(x)=x+\sqrt{x^2-1}; & x\geq 1\end{cases}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. أدرس اتصال f في 1 ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.
3. أدرس وضع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (D) على المجال $]1;+\infty[$.
4. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
5. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 1 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة.
6. أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]-\infty;1[$.
7. بين أن: $(\forall x\in]1;+\infty[):\ f'(x)>0$
8. أعط جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
9. لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1;+\infty[$.

   (ا) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده.

   (ب) حدد تعبير $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

   (ج) أنشئ $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ في نفس المعلم السابق.

التمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\frac{1}{2};+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=\sqrt{2x+1}-\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$ ثم أول هندسيا النتائج.
2. حدد $f'(x)$ لكل x من المجال $]-\frac{1}{2};+\infty[$ و أعط جدول تغيرات f.
3. بين أن: $(\forall x\in]-\frac{1}{2};+\infty[):\ f''(x)=(2x+1)^{-\frac{5}{2}}(1-x)$
4. بين أن النقطة A ذات الافصول 1 تمثل نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
5. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
6. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية على $[0;+\infty[$ ثم حدد دالتها العكسية.

التمرين 7

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{|2x^2-x-1|}{\sqrt{1-x^2}}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. حدد $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في $-\frac{1}{2}$ ثم أول هندسيا النتيجة.
4. أحسب $f'(x)$ على كل من المجالين $]-1;-\frac{1}{2}[$ و $]-\frac{1}{2};1[$.
5. أعط جدول تغيرات الدالة f.
6. أنشئ منحنى الدالة f.