Chapitre 5

# Ordre dans $\mathbb{R}$

## Sommaire

# 1 Ordre et comparaison

**Définitions**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels.

- $a$ est dit «**supérieur ou égal** » à $b$, écrit $a \geq b$, si $a - b \geq 0$.
- $a$ est dit «**supérieur strictement** » à $b$, écrit $a > b$, si $a - b > 0$.
- $a$ est dit «**inférieur ou égal** » à $b$, écrit $a \leq b$, si $a - b \leq 0$.
- $a$ est dit «**inférieur strictement** » à $b$, écrit $a < b$, si $a - b < 0$.

**Remarques**

Comparer deux nombres réels $a$ et $b$ revient à étudier le signe de $a - b$, et déterminer lequel d'eux est le plus grand.

**Exemples**

Comparer $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{5}{6}$.

............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................

**Propriété**

Soient $a$,$b$ et $c$ des nombres réels. Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.

# 2 Ordre et opérations

## 2.1 Addition

**Propriétés**

Soient $a$,$b$,$c$ et $d$ des nombres réels.

- Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

**Exemples**

- Comparer $a = 1 + \sqrt{12}$ et $b = \frac{1}{3} + \sqrt{12}$.

  ....................................................................................................
  ....................................................................................................

- Comparer $a = \frac{4}{5} + \sqrt{2}$ et $b = \frac{5}{4} + \sqrt{3}$.

  ....................................................................................................
  ....................................................................................................
  ....................................................................................................

## 2.2 Multiplication

**Propriétés**

Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ des nombres réels.

- Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$.
- Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$.
- Si $a$, $b$, $c$ et $d$ sont positifs tels que $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

**Exemples**

- Comparer $a = 6\sqrt{3}$ et $b = 6\sqrt{7}$.

  ............................................................................................................
  ............................................................................................................

- Comparer $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$.

  ............................................................................................................
  ............................................................................................................

- Comparer $a = 2\sqrt{7}$ et $b = 3\sqrt{3}$.

  ............................................................................................................
  ............................................................................................................

### 2.3 Opposé et inverse

**Propriétés**

Soient $a$ et$b$ deux nombres réels.

- Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$.
- Si $a$ et $b$ sont non nuls et de même signe tels que $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

**Exemples**

Comparer $a = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ et $b = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................

### 2.4 Carré et racine carrée

**Propriétés**

Soient $a$ et$b$ deux nombres réels positifs.

- Si $a \leq b$ et alors $a^2 \leq b^2$.
- Si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

**Exemples**

Comparer $a = (1 + \sqrt{2\sqrt{7}})^2$ et $b = (1 + \sqrt{3\sqrt{3}})^2$.

............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................

## 3 Encadrement

**Définitions**

Soient $a$,$b$ et $x$ des réels.

Encadrer $x$ signifie trouver deux réels $a$ et $b$ tels que :$a \leq x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x \leq b$ ou $a < x < b$.

- Le nombre réel positif $b - a$ est appelé amplitude de l'encadrement.
- $a$ est appelé une valeur approchée par défaut de $x$ à $b - a$ prés.
- $b$ est appelé une valeur approchée par excès de $x$ à $b - a$ prés.

**Propriétés**

Soient $a$,$b$,$c$,$d$,$x$ et $y$ tels $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.On a :

- $a + c \leq x + y \leq b + d$.
- $a - d \leq x - y \leq b - c$.
- Si $a$, $b$, $c$ et $d$ sont positifs, alors $ac \leq xy \leq bd$.
- Si $a$, $b$, $c$ et $d$ sont positifs non nuls, alors $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$.

**Exemples**

Soient $x$ et $y$ deux réels, tels que $\sqrt{2} < x < 2$ et $1 < y < \sqrt{3}$. Encadrer $x + y$, $x - y$, $xy$ et $\frac{x}{y}$.

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

# 4 Valeur absolue

## 4.1 Distance entre deux réels

**Définitions**

La «**distance entre deux réels** $x$ **et** $y$ » est la différence entre le plus grand et le plus petit des deux, et se note $\mathrm{d}(x;y)$ ou $|x - y|$.

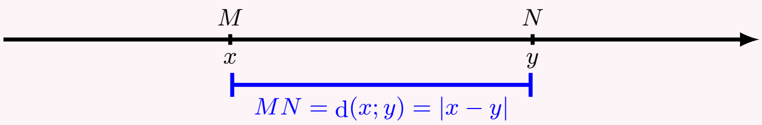
**Exemples**

Compléter ce qui suit :

- $\mathrm{d}(3,2) =$ ....................................
- $\mathrm{d}(1,-5) =$ ....................................
- $\mathrm{d}\left(-4, -\frac{1}{3}\right) =$ ....................................
- $\mathrm{d}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) =$ ....................................

**Interprétation graphique**

Sur une droite graduée d'origine $O$, Soient $M$ le point d'abscisse $x$, et $N$ le point d'abscisse $y$.
$\mathrm{d}(x;y)$ est la distance entre les points $M$ et $N$, c'est à dire $MN$.




## 4.2 Valeur absolue d'un réel

**Définitions**

On appelle valeur absolue d'un réel $x$, notée $|x|$, la distance entre $x$ et 0, c'est à dire $\mathrm{d}(x;0)$.

**Exemples**

Compléter ce qui suit :

- $|5| =$ ...............
- $|-4| =$ ...............
- $\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right| =$ ...............
- $|1 - \sqrt{2}| =$ ...............

**Remarque**

Soit $x$ un nombre réel. On a :

- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x - 0 = x$.
- Si $x \leq 0$ alors $|x| = 0 - x = -x$.

**Propriétés**

Soient $x$, $y$ et $a$ des réels tels que $a > 0$.On a :

- $|-x| = |x|$.
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $|x+y| \leq |x| + |y|$.
- $|x-y| \geq |x| - |y|$.
- $|xy| = |x||y|$.
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ avec $y \neq 0$.
- Si $|x| = 0$ alors $x = 0$.
- Si $|x| = a$ alors $x = a$ ou $x = -a$.
- Si $|x| = |y|$ alors $x = y$ ou $x = -y$.

# 5 Approximations – Approximations décimales

## 5.1 Approximations

**Définitions**

Soient $a$ et $x$ deux réels et $r$ un réel strictement positif.

- $a$ est dit «**approximation par défaut**» (ou «**valeur approchée par défaut**») de $x$ «**à $r$ près**» (ou «**à la précision $r$**»), si $a \leq x \leq a + r$ (i.e. : $0 \leq x - a \leq r$).
- $a$ est dit «**approximation par excès**» (ou «**valeur approchée par excès**») de $x$ «**à $r$ près**» (ou «**à la précision $r$**»), si $a - r \leq x \leq a$ (i.e. : $-r \leq x - a \leq 0$).
- $a$ est dit «**approximation**» (ou «**valeur approchée**») de $x$ «**à $r$ près**» (ou «**à la précision $r$**»), si $a - r \leq x \leq a + r$ (i.e. : $|x - a| \leq r$).

## 5.2 Approximations décimales

**Définitions**

Soient $x$ un réel tel que $p \times 10^{-n} \leq x \leq (p+1) \times 10^{-n}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

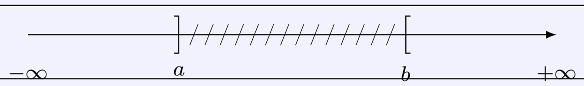
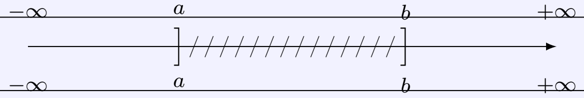
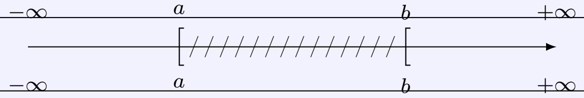
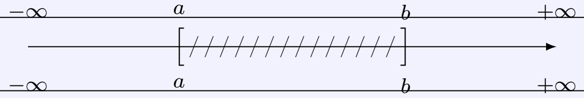
- $p \times 10^{-n}$ est dit «**approximation décimale par défaut de $x$ à $10^{-n}$ près**».
- $(p+1) \times 10^{-n}$ est dit «**approximation par excès de $x$ à $10^{-n}$ près**».

# 6 Intervalles de $\mathbb{R}$

## 6.1 Intervalles bornés

**Définitions**

Soient $a$ et $b$ deux réels.

| Ensemble de nombres | Représentation | Intervalle |
|---|---|---|
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$ |  | $]a; b[$ ouvert |
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$ |  | $]a; b]$ semi-ouvert à gauche |
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$ |  | $[a; b[$ semi-ouvert à droite |
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$ |  | $[a; b]$ fermé |

**Exemples**

- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ -3 \leq x \leq 2\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}\right\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $\left[-5; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right[ = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $]1; \sqrt{2}[ = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

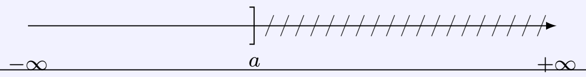
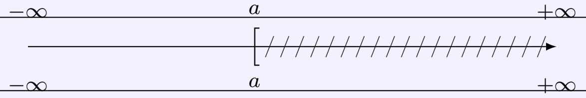
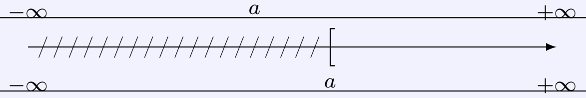
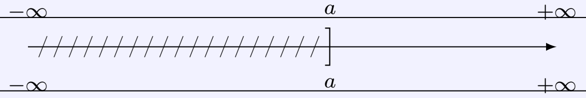
**Remarques**

- un intervalle réduit à un point $a$ se note $\{a\}$.
- Pour tout réel $a$, on a $[a; a] = \{a\}$.
- Un intervalle vide se note $\emptyset$.
- Pour tout réel $a$, on a $]a; a[ = \emptyset$.

## 6.2 Intervalles non bornés

**Définitions**

Soit $a$ un réel.

| Ensemble de nombres | Représentation | Intervalle |
|---|---|---|
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$ |  | $]a;+\infty[$ ouvert |
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\}$ |  | $[a;+\infty[$ fermé |
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$ |  | $]-\infty;a[$ ouvert |
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a\}$ |  | $]-\infty;a]$ fermé |

**Exemples**

- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 2\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > -\frac{1}{3}\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $]-\infty;\sqrt{2}[= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $[-3;+\infty[= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

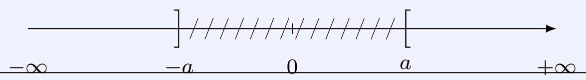
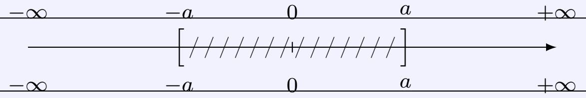
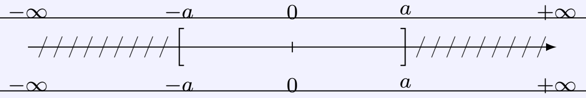
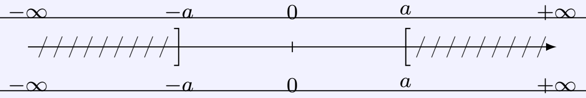
**Remarques**

- Les symboles $+\infty$ se lit “plus l’infini”, et $-\infty$ se lit “moins l’infini”. Ce ne sont pas des nombres.
- Les intervalles sont toujours ouvert du côté des symboles $+\infty$ et $-\infty$.
- On a les notations suivantes : $\mathbb{R} = ]-\infty;+\infty[$, $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ et $\mathbb{R}^- = ]-\infty;0]$.

## 6.3 Intervalles et valeur absolue

**Définitions**

Soient $a$ un réel positif.

| Ensemble de nombres | Représentation | Intervalle |
|---|---|---|
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert < a\}$ |  | $]-a;a[$ ouvert |
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert \leq a\}$ |  | $[-a;a]$ fermé |
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert > a\}$ |  | $]-\infty;-a[\cup]a;+\infty[$ ouvert |
| $\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert \geq a\}$ |  | $]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$ fermé |

**Exemples**

- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| \leq 4\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| > \frac{3}{4}\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| \leq 0\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| > 0\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

## 6.4 Intersection et réunion d’intervalles

**Définitions**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles quelconque (ouverts, semi-ouvert ou fermés).

- L’«**intersection**» des deux intervalles $I$ et $J$ est l’ensemble des nombres appartenant au premier **et** au deuxième intervalle, elle se note $I \cap J$, et se lit «$I$ **inter** $J$».
- La «**réunion**» des deux intervalles $I$ et $J$ est l’ensemble des nombres appartenant au premier **ou** au deuxième intervalle, elle se note $I \cup J$, et se lit «$I$ **union** $J$».

**Exercice**

1. Représenter sur une même droite graduée les intervalles $[-3;5]$, $]2;7[$ et $[6;+\infty[$.
2. En déduire les intersections et les réunions deux à deux des intervalles $[-3;5]$, $]2;7[$ et $[6;+\infty[$.

# 7 Exercices

**Exercice 1**

1. Comparer les nombres $x$ et $y$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $x = 1 - \frac{1732}{735}$ et $y = \frac{1}{100} + 1$ (b) $x = \sqrt{2}$ et $y = \frac{2}{\sqrt{2}+1}$
   (c) $x = \sqrt{3} - 1$ et $y = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$ (d) $x = 17\sqrt{2}$ et $y = 15\sqrt{3}$.
2. On donne les encadrements suivants : $2 \leq x \leq 4$ et $-6 \leq y \leq 1$.
   Donner un encadrement aux expressions suivantes :
   (a) $x^2$ (b) $y^2$ (c) $x + y$ (d) $2x - 3y$ (e) $xy$ (f) $\dfrac{1}{x}$.

**Exercice 2**

1. Déterminer les intervalles correspondants aux inégalités suivantes :
   (a) $x \geq 7$ (b) $x < 10$ (c) $x \leq 3$ (d) $x > 5$
   (e) $2 \leq x \leq 8$ (f) $-4 \leq x < 7$ (g) $0 < x \leq 3$ (h) $-7 < x < -2$
2. Déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$ dans les cas suivants :
   (a) $I = ]-2;6]$ et $J = [-3;+\infty[$ (b) $I = ]-\infty;7]$ et $J = \left[\frac{-3}{4};+\infty\right[$
   (c) $I = ]-1;4[$ et $J = [5;7]$ (d) $I = ]1;4]$ et $J = ]-2;4]$
   (e) $I = ]1;4]$ et $J = [4;+\infty[$ (f) $]-\infty;3]$ et $J = [5;+\infty[$

**Exercice 3**

1. Calculer ce qui suit :
   (a) $3|0,3-1| - 4|2-1,3| + \frac{1}{2}|1-2,5|$ (b) $|3\sqrt{2-2| - |2}\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{2} - 2|$
   (c) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + 2|\sqrt{3} - \sqrt{2}| - |2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}|$ (d) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$.
2. $a$ et $b$ sont deux nombres réels tels que $a \in [-2;5]$ et $b \in [-3;-1]$.
   Simplifier $A = 2|2a+7| - |3b| + 2|b+8| - |2b-a|$.
3. On pose $A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$. Calculer $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$, puis simplifier $A$.

**Exercice 4**

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $|a+2| \leq 3$ et $b \in [-1;4]$.

1. Établir que $-5 \leq a \leq 1$ et que $|a+b-1| \leq 7$.
2. On pose $E = ab + 6b - 5a$.
   (a) Vérifier que $E = (a+6)(b-5) + 30$.
   (b) En déduire un encadrement de $E$, et déterminer son amplitude.

**Exercice 5**

Soit $a$ un réel tel que $a \in [1;+\infty[$. On pose $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$.

1. Montrer que $a(A+1)(A-1) = 1$.
2. Montrer que $2 \leq 1 + A \leq 3$, puis conclure que $1 + \frac{1}{3a} \leq A \leq 1 + \frac{1}{2a}$.
3. Montre que $1,1$ est une valeur approchée du $\sqrt{1,2}$ à $\frac{1}{30}$ prés.

**Exercice 6**

Soit $x$ un réel positif strictement.

1. Montrer que $1 + \sqrt{1+x} > 2$.
2. Conclure que $0 < \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2}$.

3. Montrer que $1 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.
4. Donner un encadrement au nombre $\sqrt{1,04}$.

## Exercice 7

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a \leq b \leq 2a$

1. (a) Montrer que $(a-b)(2a-b) \leq 0$.
   (b) Développer $(a-b)(2a-b)$ et $(a\sqrt{2}-b)^2$.
2. On pose $A = \frac{2a^2+b^2}{3ab}$. Montrer que $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq A \leq 1$.
3. Montrer que $\frac{(1+\sqrt{2})^2}{6}$ est une approximation du nombre $A$ à $\frac{(1-\sqrt{2})^2}{6}$ prés.

## Exercice 8

Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $E = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

1. Montrer que $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.
2. Montrer que $\sqrt{x^2+1}+1 \geq 2$, puis conclure que $|E - \frac{1}{x}| \leq \frac{1}{2}|x|$.
3. Déterminer une valeur approchée du nombre $\frac{\sqrt{1,0001}}{0,01}$ à $5 \times 10^{-3}$ prés.