# الدوال اللوغاريتمية

## محتوى الدرس

1 دالة اللوغاريتم النبيري 2
2 دراسة دالة اللوغاريتم 3
3 دالة اللوغاريتم ذات الأساس $a$ 4

# 1. دالة اللوغاريتم النبيري

## نشاط 1

1. بين أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ تقبل دالة اصلية على المجال $]0;+\infty[$.
2. لتكن $f$ الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ و التي تحقق $f(1)=0$.
   (ا) بين أن $f$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و حدد دالتها المشتقة.
   (ب) استنتج رتابة $f$ على $]0;+\infty[$.
   (ج) ليكن $a$ عددا حقيقيا موجبا قطعا و $r$ عددا جذريا. بين ما يلي:
   (i) $(\forall x \in ]0;+\infty[) : f(ax) = f(a)+f(x)$ (ii) $\forall x \in ]0,+\infty[: \ f\left(\frac{a}{x}\right) = f(a) - f(x)$
   (iii) $(\forall x \in ]0;+\infty[) : f(x^r) = rf(x)$

## تعريف

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري ونرمز لها بالرمز ln.

## نتائج

- مجموعة تعريف الدالة ln هي: $]0;+\infty[$
- $\ln(1) = 0$
- الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- $(\forall x \in ]0;+\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- الدالة ln متصلة على $]0;+\infty[$.
- الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.
- $(\forall (x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2) : x < y \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(y)$
- $(\forall (x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2) : x = y \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

## خاصيات

لكل $a$ و $b$ من $]0;+\infty[$ و لكل $r$ من $\mathbb{Q}$ لدينا:

(i) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ (ii) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ (iii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(iv) $\ln(a^r) = r\ln(a)$ (v) $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

## ملاحظات

- $(\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^*)^2) : xy > 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln(xy) = \ln(|x|) + \ln(|y|) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(|x|) - \ln(|y|) \end{cases}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \ln(x^2) = 2\ln(|x|)$

## تمرين 1

نعطي: $\ln 2 = 0,7$ و $\ln 5 = 1,6$. أحسب ما يلي:

(ا) $\ln(10)$ (ب) $\ln\left(\frac{4}{125}\right)$ (ج) $\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)$ (د) $\ln\left(\sqrt[3]{100}\right)$

(هـ) $\ln\left(\sqrt{5}\right)-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (و) $\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)-\ln\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

### تمرين 2

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(ا) $\ln(x)=2$ (ب) $\ln(x^2-2x-3)=-\ln(7)$

(ج) $\ln(x-1)=2-3\ln(2)$ (د) $\ln(x)+\ln(3x+2)=\ln(2x+3)$.

### تمرين 3

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

(ا) $\ln(x-1)\geq 0$ (ب) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>0$

(ج) $\ln(x+1)+\ln(3-x)<0;$ (د) $\ln(x^2-1)\geq\ln(4x-1)$.

## 2. دراسة دالة اللوغاريتم

### نشاط 2

1. نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ . أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}$ ثم أول هندسيا النتيجة.
3. بين أن: $(\forall x\in]1;+\infty[):0\leq\ln(x)\leq2\sqrt{x}$
4. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$ ثم اول هندسيا النتيجة.
5. ضع جدول تغيرات الدالة ln.
6. بين ان المعادلة $\ln(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $e$ على $]0;+\infty[$.
7. حدد معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول $e$.
8. أحسب $\ln''$ و استنتج تقعر منحنى الدالة ln.
9. أنشئ منحنى الدالة ln في معلم متعامد ممنظم (نعطي $e\approx2,72$ و $\frac{1}{e}\approx0,37$).
10. بين أن $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0$ وأن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.
11. لكل $n$ من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$ و أن $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln(x)=0$.

### دراسة

**مجموعة تعريف الدالة ln** $D_{\ln}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**النهايات عند محدات مجموعة تعريف الدالة ln** $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=\ldots\ldots$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=\ldots\ldots$

**قابلية اشتقاق الدالة ln** الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي:
$\forall x\in]0,+\infty[:\ \ln'(x)=\ldots\ldots\ldots$

**جدول تغيرات الدالة ln**

| $x$ | |
|---|---|
| ln | |

**الفروع اللانهائية** $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \cdots\cdots$: منحنى الدالة ln يقبل ..............................
.....................................................................................
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \cdots\cdots$: منحنى الدالة ln يقبل ..............................
.....................................................................................

**نتائج أخرى**
$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \cdots\cdots$
$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \cdots\cdots\cdots$ و $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \cdots\cdots$
$\lim_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
$\ln(]0;+\infty[) = \cdots\cdots\cdots\cdots$
المعادلة $\ln(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا $e$ على $]0;+\infty[$.
$(\forall a \in \mathbb{R}) : \ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$

### تمرين 4

أحسب النهايات التالية:
(ا) $\lim_{x\to+\infty} 2x - \ln(x)$ (ب) $\lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ (ج) $\lim_{x\to+\infty} x^2 + (\ln(x))^2$
(د) $\lim_{x\to 0^+} x^2 + (\ln(x))^2$ (هـ) $\lim_{x\to-\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (و) $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

### خاصية

لتكن $u$ دالة قابلة للإشتقاق على مجال $I$ و لا تنعدم على $I$.
- إذا كانت $u > 0$ على $I$ فإن: $(\forall x \in I) : (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة $u$ على $I$.
- لدينا: $(\forall x \in I) : (\ln(|u(x)|))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على $I$ هي الدوال: $x \mapsto \ln(|u(x)|) + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

## 3. دالة اللوغاريتم ذات الأساس $a$

### تعريف

ليكن $a$ عددا حقيقيا موجبا بحيث: $a > 0$ و $a \neq 1$ .
دالة اللوغاريتم للأساس $a$ هي الدالة التي يرمز لها بالرمز $\log_a$ و المعرفة بما يلي: $(\forall x \in ]0;+\infty[) : \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\log_a(a) = \ldots$، $\log_a(e) = \ldots$، $\log_a(1) = \ldots$، $\log_e = \ldots$.

### خاصيات

لكل $x$ و $y$ من $]0;+\infty[$:
(i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ (ii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
(iii) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$ (iv) $(\forall r \in \mathbb{Q}) : \log_a(x^r) = r\log_a(x)$

## دراسة

**مجموعة تعريف الدالة $\log_a$** $\quad D_{\log_a} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

**النهايات عند محدات مجموعة تعريف الدالة $\log_a$**

إذا كان $0 < a < 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = \cdots\cdots\cdots$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = \cdots\cdots\cdots$

إذا كان $a > 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = \cdots\cdots\cdots$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = \cdots\cdots\cdots$

**قابلية اشتقاق الدالة $\ln$**

الدالة $\log_a$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي:

$\forall x \in ]0,+\infty[: \ \log'_a(x) = \cdots\cdots\cdots$

**جدول تغيرات الدالة $\log_a$**

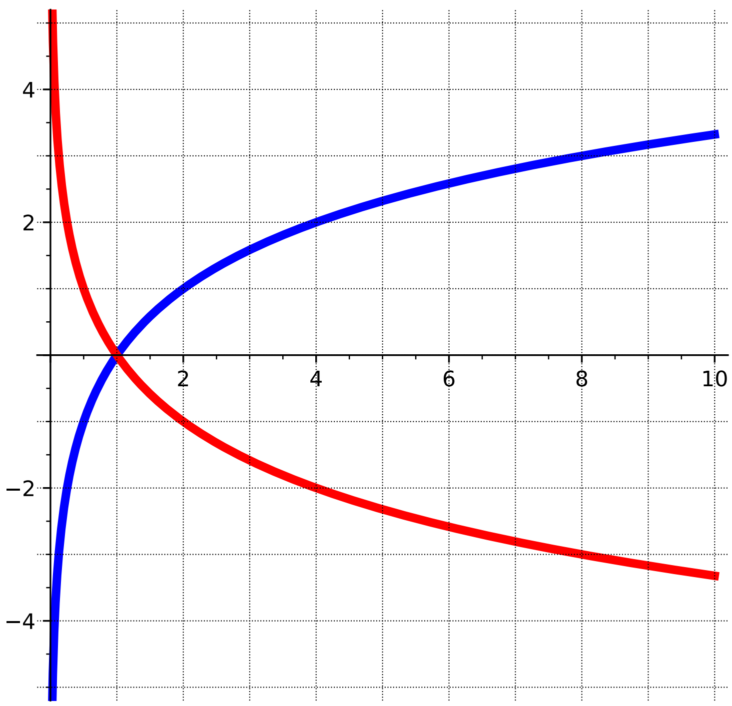
إذا كان $0 < a < 1$

| | |
|---|---|
| $x$ | |
| $\log_a$ | |

إذا كان $a > 1$

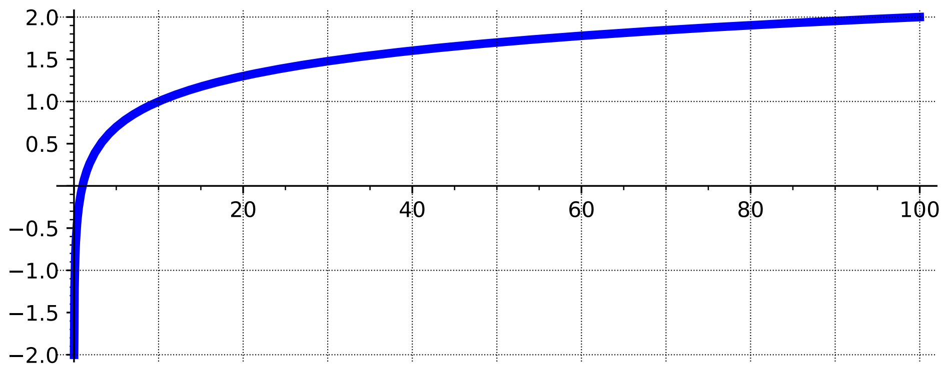
| | |
|---|---|
| $x$ | |
| $\log_a$ | |

**نتيجة** $\quad (\forall b \in \mathbb{R}) : \log_a(x) = b \Leftrightarrow x = a^b$




## تعريف

نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس 10 و نرمز لها بالرمز $\log$ عوض $\log_{10}$.


2.0
1.5
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
20
40
60
80
100