الاشتقاق و تطبيقاته

محتوى الدرس

1 تذكير و إضافات

1.1 العدد المشتق - الدالة المشتقة

تعاريف

لتكن دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I.

- f قابلة للاشتقاق في a إذا و فقط اذا ....
- العدد l يسمى العدد المشتق للدالة في a و نرمز له بالرمز $f'(a)$.
- f قابلة للاشتقاق على I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I.
- الدالة المشتقة للدالة f على I هي الدالة $f' : x \mapsto f'(x)$.

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a فإن f متصلة في a.

2.1 المماس لمنحنى دالة - الدالة التآلفية المماسة

تعاريف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a.

- المماس لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصولa هو المستقيم الذي معادلته ....
- الدالة التآلفية المماسة للدالة f في a هي الدالة ....
- العدد $f'(a)h + f(a)$ يسمى ....للعدد $f(a+h)$ بجوار 0.

ملاحظة

الدالة φ تكتب كذلك $h \mapsto f'(a)h + f(a)$ بجوار 0 حيث $h = x - a$.
f' يمكن كتابتها كذلك $\frac{df}{dx}$ و تسمى الكتابة التفاضلية.

3.1 مشتقات دوال الاعتيادية

الدالة	قابلة للاشتقاق على	دالتها المشتقة
$x \mapsto a; (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto$ ....
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto$ ....
$x \mapsto x^n; (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto$ ....
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto$ ....

الدالة	قابلة للاشتقاق على	دالتها المشتقة
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \cdots\cdots\cdots\cdots$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cdots\cdots\cdots\cdots$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cdots\cdots\cdots\cdots$
$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \cdots\cdots\cdots\cdots$

4.1 العمليات على الدوال المشتقة

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I و k عدد حقيقي.

الدالة	قابلة للاشتقاق على	دالتها المشتقة
$f+g$	I	$(f+g)' = \cdots\cdots\cdots\cdots$
kf	I	$(kf)' = \cdots\cdots\cdots\cdots$
fg	I	$(fg)' = \cdots\cdots\cdots\cdots$
$\frac{1}{g}$	$\{x \in I / g(x) \neq 0\}$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \cdots\cdots\cdots\cdots$
$\frac{f}{g}$	$\{x \in I / g(x) \neq 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \cdots\cdots\cdots\cdots$

ملاحظات

يمكن التعبير عن مشتقة خارج دالتين بـ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} f' & f \\ g' & g \end{vmatrix}}{g^2}$ و مشتقة مقلوب دالة بـ $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ g' & g \end{vmatrix}}{g^2}$.

و كحالة خاصة، مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ هي $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & ax+b \\ c & cx+d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

نتائج

كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

تمرين 1

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty; 0]$ بما يلي: $f(x) = |x+1|\sqrt{x}$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في -1 ثم أول مبيانيا النتيجة.
2. هل الدالة f متصلة في -1؟
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 ثم أو ل مبيانيا النتيجة.
4. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1; 0[$
5. حدد معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول $\frac{1}{2}$.
6. حدد تقريبا للعدد $f(0,4997)$.

2 مشتقة مركب دالتين

خاصية

لتكن f و g دالتين معرفتين على التوالي على مجالين I و J بحيث $f(I) \subset J$ و a عنصر من I.

1. إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a و g قابلة للاشتقاق في $f(a)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في a.
   لدينا: $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$
2. إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I.
   لدينا: $(\forall x \in I) : (g \circ f)'(x) = f'(a)g'(f(x))$

نتائج

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I.

- الدالة f^n قابلة للاشتقاق على I و لدينا: .... $=(f^n)'$
- الدالة $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على $\{x \in I / f(x) > 0\}$ و لدينا: .... $=\left(\sqrt{f}\right)'$

تمرين 2

حدد مشتقات الدوال:
$f : x \mapsto \cos(x^2 + 7x - 1)$ و $g : x \mapsto \left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^3$ و $h : x \mapsto \sqrt{x^3 + x^2 - 2}$ و $i : x \mapsto \sin\left(\sqrt{x^2+5}\right)$

3 مشتقة الدالة العكسية

نشاط 1

لتكن f دالة متصلة، رتيبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية.

1. ليكن a عنصرا من I بحيث $f'(a) \neq 0$، بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(a)$ و حدد $(f^{-1})'(f(a))$.
2. نفترض أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J = \{x \in f(I) / f'(f^{-1}(x)) \neq 0\}$.
   (ا) حدد مشتقة الدالة $f \circ f^{-1}$ على J.
   (ب) استنتج تعبير الدالة $(f^{-1})'$.

خاصية

لتكن f دالة متصلة، رتيبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية.

- ليكن a عنصرا من I بحيث $f'(a) \neq 0$، الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(a)$.
  لدينا: $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$
- الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J = \{x \in f(I) / f'(f^{-1}(x)) \neq 0\}$.

لدينا: $(\forall x \in J) : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

نتائج

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ و f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.
الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $(\forall x \in]0;+\infty[) : (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
الدالة $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على $\{x \in I / f(x) > 0\}$ و لدينا: $(\sqrt[n]{f})' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$.

ملاحظة

$(\forall r \in \mathbb{Q}^*)\ (\forall x \in]0;+\infty[) : (x^r)' = rx^{r-1}$ و $(\forall r \in \mathbb{Q}^*) : (f^r)' = rf'f^{r-1}$

تمرين 3

حدد مشتقات الدوال:
$f : x \mapsto (x^2+x)^{\frac{1}{3}}$ ، $g : x \mapsto \sqrt[3]{x^4} + (x-1)^{\frac{1}{3}}$ ، $h : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+7}}$ ، $i : x \mapsto x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[4]{x^3+1}$

تمرين 4

1. بين أن كل من الدوال sin و cos و tan تقبل دالة عكسية على التوالي على $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ و $[0;\pi]$ و $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
2. حدد مشتقات الدوال العكسية للدوال sin و cos و tan بدلالة x فقط.

4 الدوال الأصلية لدالة

نشاط 2

نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-3;+\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{-x^2-6x}{(x+3)^2}$ و $F(x) = \frac{2x-3}{x+3} - x$

1. تحقق من أن: $(\forall x \in]-3;+\infty[) : F'(x) = f(x)$
2. اقترح دالة أخرى G بحيث $(\forall x \in]-3;+\infty[) : G'(x) = f(x)$.
3. لتكن H دالة عددية تحقق $(\forall x \in]-3;+\infty[) : H'(x) = f(x)$
   (ا) أحسب $(H-F)'$ على $]-3;+\infty[$.
   (ب) استنتج تعبير الدالة H.

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I.
نسمي دالة أصلية للدالة f على I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I و مشتقتها هي f.

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على I.
الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $x \mapsto F(x)+k$ حيث $k \in \mathbb{R}$

تمرين 5

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$ و $g(x)=2x-\frac{x-1}{x+1}$

1. بين أن g دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$.
2. استنتج جميع الدوال الأصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$.

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصر من I.
إذا كانت f تقبل دالة أصلية على I فإنه توجد دالة أصلية G وحيدة للدالة f على I تحقق $G(a)=b$

تمرين 6

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\sin(x)\cos(x)$ و $g(x)=\cos 2x$

1. احسب الدالة المشتقة للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.
3. حدد الدالة الأصلية G للدالة g على $\mathbb{R}$ التي تحقق $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

خاصية

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I.

جدول دوال أصلية لدوال اعتيادية

الدالة f	المجال I	الدوال الأصلية للدالة f على I
$x \mapsto a; a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax+k; k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2+k; k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n; n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}+k; k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x}+k; k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto \frac{1}{(1-n)x^{1-n}}+k; k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto 2\sqrt{x}+k; k \in \mathbb{R}$

الدالة f	المجال I	الدوال الأصلية للدالة f على I
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto n\sqrt[n]{x} + k; k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x) + k; k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x) + k; k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \tan(x) + k; k \in \mathbb{R}$

ملاحظة

لكل r من $\mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$ الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto x^r$ على $\mathbb{R}_+^*$ هي: $x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1} + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

العمليات على الدوال الأصلية

u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	المجال	دوالة أصلية للدالة f على المجال
$u' + v'$	I	$u + v$
$u'v + v'u$	I	uv
$\frac{u'}{u^2}$	كل مجال ضمن I لا تنعدم عليه u.	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	كل مجال ضمن I لا تنعدم عليه v.	$\frac{u}{v}$
$u'u^n; n \in \mathbb{N}^*$	I	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	كل مجال ضمن I تكون عليه u موجبة قطعا.	$2\sqrt{u}$
$u'u^r; r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	كل مجال ضمن I تكون عليه u موجبة قطعا.	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$
$x \mapsto u'(ax+b); (a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	I	$x \mapsto \frac{1}{a}u(ax+b)$
$x \mapsto v'(x)u'(v(x))$	كل مجال I بحيث $v(I) \subset I$.	$u \circ v$

تمرين 7

حدد الدوال الأصلية للدالة f على I في الحالات التالية:

(ا) $I = \mathbb{R}\ ;\ f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 6$

(ب) $I =]0; +\infty[\ ;\ f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos(x) + 3$

(ج) $I =]0; +\infty[\ ;\ f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin(x) - 1$

(د) $I = \mathbb{R}\ ;\ f(x) = \cos(3x)$

(هـ) $I = \mathbb{R}\ ;\ f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

(و) $I = \mathbb{R}\ ;\ f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

(ز) $I = \mathbb{R}\ ;\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(ح) $I = \mathbb{R}\ ;\ f(x) = (x-2)(x^2-4x+1)^3$

تمرين 8

لتكن f دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

1. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث: $\forall x\in]1;+\infty[:\ \ f(x)=a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$
2. حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.
3. حدد الدالة الأصلية G للدالة f التي تنعدم في 2.