المعادلات التفاضلية

محتوى الدرس

y'=ay+b المعادلة التفاضلية y''+ay'+by=0 المعادلة التفاضلية y''+ay'+by=0

y' = ay + b المعادلة التفاضلية 1.

تعاريف

y' كل متساوية على شكل y' = ay + b حيث a و a عددين حقيقيين معلومين و y هي دالة عددية مجهولة و y' مشتقتها، تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

كل دالة عددية f قابلة للإشتقاق على $\mathbb R$ و تحقق لكل x من $\mathbb R$ المتساوية f'(x)=af(x)+b تسمى حلا للمعادلة التفاضلية y'=ay+b.

حل المتعادلة التَّفاضلية y'=ay+b هو تحديد جميع الدوال f القابلة للإشتقاق على $\mathbb R$ و التي تحقق المعادلة.

نشاط 1

y'=ay+b على حسب قيم العددين الحقيبين a و b المعادلة التفاضلية

خاصية

- $c\in\mathbb{R}$ حيث $x\mapsto c$ على $x\mapsto c$ بما يلي: $x\mapsto c$ حيث المعادلة التفاضلية y'=0 حيث
- $c\in\mathbb{R}$ حيث $x\mapsto bx+c$. يليّ: $x\mapsto bx+c$ حيث الدوال المعرفة على $x\mapsto bx+c$ على الدوال المعرفة على •
- $k \in \mathbb{R}$ حيث $x \mapsto ke^{ax}$ بليان المعرّفة على \mathbb{R} بكيث $x \mapsto ke^{ax}$ على الدوال المعرّفة على $x \mapsto ke^{ax}$ على الدوال المعرّفة على المعرّفة على $x \mapsto ke^{ax}$
- المعادلة التفاضلية $a \neq 0$ بحيث $a \neq 0$ محيث $a \neq 0$ محيث على $a \neq 0$ بحيث $a \neq 0$ بحيث $a \neq 0$ محيث $a \neq 0$ بحيث $a \neq 0$ بحيث $a \neq 0$ بحيث $a \neq 0$ بحيث محيث مدين المعادلة التفاضلية على $a \neq 0$ بحيث بحيث محيث محيث محيث المعادلة التفاضلية على المعادلة التفاضلية بما يلي:

نتيجة

ليكن a و b عددين حقيقيين.

 $f(x_0) = y_0$ المعادلة التفاضلية y' = ay + b تقبل حلا وحيدا x_0 يحقق الشرط x_0

تمرين 1

- $\bullet(E): \ 2y' + y = 1$ مل المعادلة التفاضلية (۱) ما
- f(-1) = 2 حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق f
 - $\bullet(E): y'=3y$ حل المعادلة التفاضلية (۱) حل \bullet
- (2;3) حدّد الدالة f حل المعادلة (E) و التي منحناها يمر من النقطة (2;3)
 - •(E): y' = -2y على المعادلة التفاضلية (١) •3
- $(\dot{\psi})$ حدّد الدالة f حل المعادلة (E) و التي منحناها يقبل مماس في النقطة ذات الافصول (E) مواز للمستقيم ذو المعادلة y = -4x + 1.

تمرين 2

 $(E): y'-2y=e^x$ و $(E_0): y'-2y=0$ نعتبر المعادلتين التفاضليتين

- $\bullet(E)$ مين أن الدالة $f_0: x \mapsto -e^x$ مل للمعادلة \bullet
 - $\cdot(E_0)$ حل المعادلة التفاضلية .2

- $f-f_0$ على للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كانت $f-f_0$ حلى للمعادلة التفاضلية .3
 - $\bullet(E)$ استنتج حلول المعادلة التفاضلية \bullet
 - مدد الدالة arphi حل المعادلة التفاضلية (E) التي تنعدم في 0.5

y'' + ay' + by = 0 المعادلة التفاضلية .2

تعاريف

كل متساوية على شكل y'' + ay' + by = 0 حيث a و a عددين حقيقيين معلومين و y هي دالة عددية مجهولة و y'' و y'' هما مشتقتيها الأولى و الثانية، تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

كل دالة عددية f قابلة للإشتقاق على $\mathbb R$ و تحقق لكل x من $\mathbb R$ المتساوية f قابلة للإشتقاق على $\mathbb R$ أسمى حلا للمعادلة التفاضلية y'' + ay' + by = 0

حلَ المعادلة التفاصليّة $\ddot{y}'' + \ddot{a}\ddot{y}' + \ddot{a}\ddot{y}'' + \ddot{a}\ddot{y}' + \ddot{b}\ddot{y} = 0$ هو تحديد جميع الدوال f القابلة للإشتقاق مرتين على \mathbb{R} و التي تحقق المعادلة.

نسمي المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $r^2+ar+b=0$ المعادلة y''+ay'+by=0 هو المجهول.

خاصية

 $\bullet(E): y'' + ay' + by = 0$ نعتبر المعادلة التفاضلية

- الدوال (E) المعادلة المميزة للمعادلة (E) بقبل حلين حقيقيين r_1 و r_2 فإن حلول المعادلة (E) في الدوال ($\alpha; \beta$) و $\alpha; \beta \in \mathbb{R}^2$ على المعادلة المعادلة ($\alpha; \beta$) حيث $\alpha; \beta \in \mathbb{R}^2$ على المعادلة المعادلة ($\alpha; \beta$) على الدوال المعادلة ($\alpha; \beta$) على الدوال المعادلة ($\alpha; \beta$) على الدوال المعادلة ($\alpha; \beta$) و الدوال المعادلة ($\alpha; \beta$) على الدوال المعادلة ($\alpha; \beta$) على الدوال المعادلة ($\alpha; \beta$) و المعادلة (α
- إذا كانت المعادلة المميزة للمعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا وحيدا r فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة على $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ على $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$
- و إذا كانت المعادلة المميزة للمعادلة (E) تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1=p+iq$ و أي حلول $r_2=\overline{r_1}$ و أي حلول $r_2=\overline{r_1}$ و أي حلول المعرفة على $r_2=\overline{r_1}$ على عقديين مترافقين $r_1=p+iq$ و أي حلول المعرفة على $r_2=\overline{r_1}$ على الدوال المعرفة على $r_2=\overline{r_1}$ على عقديين مترافقين $r_1=p+iq$ و أي حلول المعرفة على الدوال المعرفة على $r_2=\overline{r_1}$ على عقدين مترافقين عقدين مترافقين الدوال المعرفة على على الدوال المعرفة على على الدوال المعرفة على عقدين عقدين عقدين مترافقين المعرفة على عقدين عقدين عقدين مترافقين المعرفة على عقدين عقدين عقدين عقدين مترافقين المعرفة المعرفة المعرفة على عقدين عقدين عقدين عقدين مترافقين المعرفة المعرفة المعرفة على عقدين عقدين عقدين عقدين المعرفة المعرفة المعرفة على عقدين عقدين المعرفة المعر

ملاحظة

حلول المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb R$ بما يلي: $y'' + \omega^2 y = 0$

تمرين 3

- y'' 4y' + 13y = 0 حل المعادلة التفاضلية (ا) حل المعادلة التفاضلية
- f'(0) = 3 و f(0) = 0 و f(0) = 0 و f(0) = 0
- $x\mapsto e^{2x}\sin(3x)$ استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة (ج
 - $\bullet(E): \ y'-2y=xe^x$ نعتبر المعادلة التفاضلية .2
- (ا) نقبل أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا φ يحقق φ عدد معادلة المماس لمنحنى الدالة φ في النقطة ذات الأفصول φ .
 - •(E₀): y'-2y=0 حل المعادلة التفاضلية (-1)

- $\bullet(E)$ بين أن الدالة $h_0: x \mapsto -(1+x)e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية (ج)
- (E) بين أن h حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت $h-h_0$ حل للمعادلة (E_0) .
 - - (و) حدد تعبير الدالة φ.