Chapitre 10

Transformations du plan

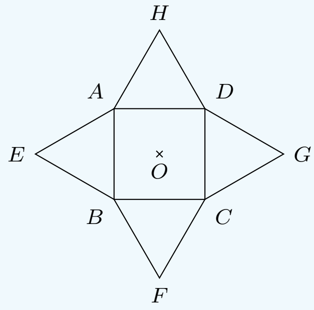
Sommaire

1 Rappels

Activité

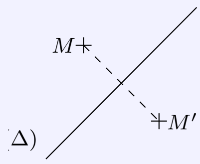
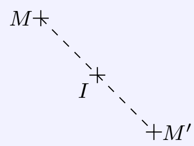
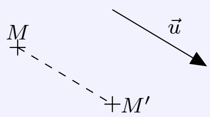
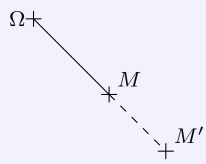
La figure ci-contre et composée d'un carré $ABCD$ de centre O et de quatre triangles équilatéraux

1. Déterminer les images des points B et C et H par la symétrie d'axe (OA).
2. Déterminer l'image du triangle BCG par la symétrie de centre O.
3. Déterminer l'image du segment $[CG]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$.



2 Définitions de quelques transformations de référence

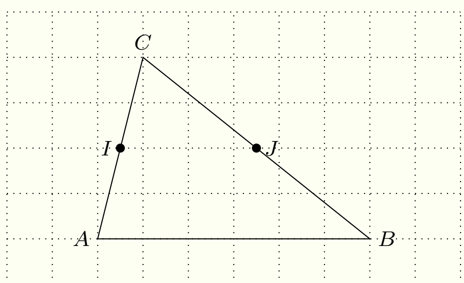
Définitions

Symétrie axiale	Soit (Δ) une droite. M et M' deux point du plan. La transformation qui lie tout point M avec un point M' du plan tel que la droite (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$ s'appelle symétrie axiale d'axe (Δ). On la note $S_{(\Delta)}$.	
Symétrie centrale	Soit I un point du plan. La transformation qui lie tout point M avec un point M' du plan tel que le point I est le milieu du segment $[MM']$ s'appelle symétrie centrale de centre I. On la note S_I.	
Translation	Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La transformation qui lie tout point M avec un point M' du plan tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ s'appelle translation de vecteur $\vec{u}$. On la note $t_{\vec{u}}$.	
Homothétie	Soit Ω un point du plan. La transformation qui lie tout point M avec un point M' du plan tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ s'appelle homothétie de centre Ω et rapport k On la note $h(\Omega, k)$.	

Exercice

Soit ABC un triangle de centre de gravité G.
Soient I et J sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$.
Construire les triangles suivants :

1. $A_1B_1C_1$ image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
2. $A_2B_2C_2$ image du triangle ABC par la symétrie d'axe (AB).
3. $A_3B_3C_3$ image du triangle ABC par la symétrie de centre G.
4. $A_4B_4C_4$ image du triangle ABC par l'homothétie de centre G et de rapport 2.



3 Propriétés de quelques transformations de référence

Propriété

Transformation T	Symétrie axiale $S_{(\Delta)}$	Symétrie centrale S_I	Translation $t_{\vec{u}}$	Homothétie $h_{(\Omega,k)}$
Points Invariant	Les points de (Δ)	Le point I		Le point Ω
Définition	Si $S_{(\Delta)}(M) = M'$ alors (Δ) est médiatrice de $[MM']$	Si $S_I(M) = M'$ alors $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$	Si $t_{\vec{u}}(M) = M'$ alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	Si $h_{(\Omega,k)}(M) = M'$ alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$
Propriété caractéristique		Si $S_I(M) = M'$ et $S_I(N) = N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$	Si $t_{\vec{u}}(M) = M'$ et $t_{\vec{u}}(N) = N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$	Si $h_{(\Omega,k)}(M) = M'$ et $h_{(\Omega,k)}(N) = N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
Conservation de l'alignement	Si $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC}$ et $T(A) = A'$ et $T(B) = B'$ et $T(C) = C'$ alors $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{A'C'}$.			
Conservation du parallélisme	Si $(D_1)//(D_2)$ et $T((D_1)) = (D'_1)$ et $T((D'_2)) = (D'_2)$ alors $(D'_1)//(D'_2)$.			
Conservation de l'orthogonalité	Si $(D_1)\perp(D_2)$ et $T((D_1)) = (D'_1)$ et $T((D'_2)) = (D'_2)$ alors $(D'_1)\perp(D'_2)$.			
Conservation du milieu	Si G est le milieu $[AB]$ et $T(A) = A'$ et $T(B) = B'$ et $T(G) = G'$ alors G' est le milieu de $[A'B']$.			
Conservation de la distance	Si $T(A) = A'$ et $T(B) = B'$ alors $A'B' = AB$.			
Conservation de la mesure d'un angle	Si $T(A) = A'$ et $T(B) = B'$ et $T(C) = C'$ alors $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$ (Angles géométrique).			
Conservation de la nature d'une figure	Si $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$ deux figures du plan tel que $T((\mathcal{E})) = (\mathcal{E}')$ alors $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$ sont de la même nature.			
Image de l'intersection de figures	Soient $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{F})$ deux figures du plan avec $T((\mathcal{E})) = (\mathcal{E}')$ et $T((\mathcal{F})) = (\mathcal{F}')$. Si $M \in (\mathcal{E}) \cap (\mathcal{F})$ alors $T(M) = M' \in (\mathcal{E}') \cap (\mathcal{F}')$.			

Exercice

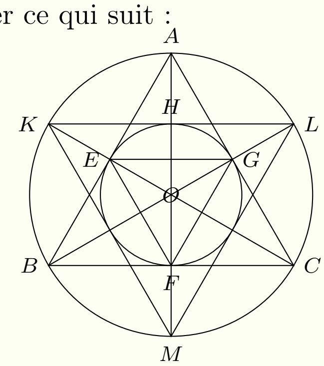
Soit T une des transformations en haut.

1. Montrer que si T n'est pas une symétrie axiale alors l'image d'une droite par cette transformation est une droite qui lui est parallèle.
2. Déterminer l'image d'un cercle par la transformation T.

4 Exercices

Exercice 1

On considere la figure suivante, où ABC est un triangle équilatéral. Compléter ce qui suit :



1. S_O est la symétrie centrale de centre O.
   (a) $S_O(A) = \cdots$ (b) $S_O(H) = \cdots$ (c) $S_O(C) = \cdots$
2. $S_{(OA)}$ est la symétrie axiale d'axe (OA).
   (a) $S_{(OA)}(B) = \cdots$ (b) $S_{(OA)}(H) = \cdots$ (c) $S_{(OA)}(G) = \cdots$
3. $t_{\overrightarrow{FE}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$.
   (a) $t_{\overrightarrow{FE}}(G) = \cdots$ (b) $t_{\overrightarrow{FE}}(F) = \cdots$ (c) $t_{\overrightarrow{FE}}(C) = \cdots$
4. $h_{(O,-2)}$ est l'homothétie de centre O et de rapport -2.
   (a) $h_{(O,-2)}(E) = \cdots$ (b) $h_{(O,-2)}(G) = \cdots$ (c) $h_{(O,-2)}(F) = \cdots$

Exercice 2

Déterminer la transformation T dans la cas suivant :

1. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $T(A) = C$ et $T(B) = D$.
2. $ABCD$ est un carré tel que $T(A) = B$ et $T(D) = C$.
3. ABC est un triangle isocèle tel que $T(A) = A$ et $T(B) = C$.
4. ABC est un triangle équilatéral, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ tel que $T(I) = B$ et $T(J) = C$.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
La droite (Δ) passant par O coupe (AD) en M et (BC) en N.
Soit S_O la symétrie centrale de centre O.
1. Déterminer l'image de la droite (Δ) par S_O. 2. Déterminer l'image de la droite (AD) par S_O.
3. Montrer que O est le milieu de $[MN]$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en B, I et J sont les milieux respectives de $[BC]$ et $[AB]$, et H le projeté orthogonal de B sur (AC).
Soit $S_{(IJ)}$ la symétrie axiale d'axe (IJ).
1. Montrer que $S_{(IJ)}(B) = H$. 2. Déduire que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

Exercice 5

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$ et $BC = 4$.
Soit I est le milieu de $[BC]$, et D l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.
Montrer que le triangle DBI est équilatéral.

Exercice 6

Soient A et B deux points du plan, et T la transformation du plan qui à chaque point M du plan on associe le point M' tel que $2\overrightarrow{M'A} - 2\overrightarrow{M'B} + 3\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.

1. Montrer que T est une translation.
2. Construire l'image du cercle $(\mathcal{C})$ de centre A est de rayon 2 par T.

Exercice 7

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O et H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
Soient A', B' et C' des points tels que $A' = S_A(B)$,$B' = S_H(B)$ et $C' = S_C(B)$.

1. Construire la figure.

2. Montrer que A', B', C' et D sont les images respectives de A, H, C et O par une homothétie h d'éléments à déterminer.
3. En déduire que :
   (a) A', B', C' et D sont alignés.
   (b) A', B', C' et D appartiennent à une droite parallèle à (AC).
   (c) D est le milieu du segment $[A'C']$.

Exercice 8

A, B, C et D des points d'une droite (D) tels que B est le milieu $[AD]$ et C est le milieu $[BD]$.
Soit M un point qui n'est sur la droite (D). La droite passant par B et parallèle à (AM) et celle passant par C et parallèle à (BM) se coupent au point N.

1. Construire la figure.
2. Soit h l'homothétie de centre D et rapport $\frac{1}{2}$.
   (a) Déterminer les images de A et B par l'homothétie h.
   (b) Montrer que N est l'image de M par l'homothétie h.
3. Montrer que les points M, N et D sont alignés.

Exercice 9

$ABCD$ est un parallélogramme et I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
Soit h l'homothétie de centre I qui transforme A en B.

1. Montrer que -3 est le rapport de h.
2. Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (IC).
   (a) Montrer que $h(E) = C$
   (b) En déduire que $BC = 3AE$.
3. On pose $h(D) = D'$. Montrer que les points B, C et D' sont alignés.

Exercice 10

ABC un triangle de centre de gravité G.
Soient A', B' et C' les milieux respectives de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, et M un point différent de A ,B et C.
On considère h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
2. Déduire que $A' = h(A)$.
3. Soient (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) les images respectives de (AM), (BM) et (CM) par h.

   Montrer que les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) se coupent en un point N tels que $\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$.

Exercice 11

ABC est un triangle.
Soient E est le symétrique de A par rapport à B et D est le symétrique de A par rapport à C.
Soit M le milieu de $[BD]$ et N le milieu de $[CE]$. Les droites (AM) et (BC) se coupent en un point P, et (AN) et (BC) en un point Q.

1. Montrer que P et Q sont les centres de gravité respectifs des triangles ABD et ACE.
2. En déduire que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AQ}$.
3. Soit I le milieu $[CD]$ et J le milieu $[BE]$.

   On considère l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.
   (a) Déterminer $h(C)$ et $h(B)$.
   (b) En déduire que I, J, M et N sont alignés.