نهاية متتالية عددية

محتوى الدرس

1. أنشطة للتذكير

نشاط 1

لتكن المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \quad ; u_0 = 0$

1. بين أن (u_n) مصغورة بالعدد 0 و مكبورة بالعدد 4.
2. بين أن (u_n) تزايدية قطعا.
3. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$
4. استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

نشاط 2

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5} \quad ; u_1 = 1$

و لتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = \frac{5}{u_n}$

1. احسب v_1 ثم بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية محددا أساسها.
2. حدد u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}^*$.
3. نضع $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$، حدد S_n بدلالة n.

نشاط 3

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = 7u_n - 5; u_0 = 15$

1. احسب u_1 و u_2.
2. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_{n+1} - u_n$
   بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها، ثم حدد v_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.
3. لكل n من $\mathbb{N}$ نضع: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$
   بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = u_{n+1} - u_0$، ثم استنتج u_n بدلالة n.

2. نهاية متتالية عددية

تعاريف

- نقول إن نهاية متتالية (u_n) هي العدد الحقيقي l و نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ إذا كان:
  $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0) : |u_n - l| \leq \varepsilon$
  ابتداء من رتبة معينة n_0 تصبح حدود المتتالية (u_n) بجوار العدد l.
- نقول إن نهاية متتالية (u_n) هي $+\infty$ و نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذا كان:
  $(\forall A > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0) : u_n > A$

ابتداء من رتبة معينة n_0 تصبح حدود المتتالية (u_n) بجوار $+\infty$.

- نقول إن نهاية متتالية (u_n) هي $-\infty$ و نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ إذا كان:
$(\forall A > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0) : u_n < -A$
ابتداء من رتبة معينة n_0 تصبح حدود المتتالية (u_n) بجوار $-\infty$.
- نقول إن المتتالية (u_n) متقاربة إذا كانت (u_n) تقبل نهاية منتهية.
- نقول إن المتتالية (u_n) غير متقاربة أو متباعدة إذا كانت (u_n) غير منتهية أو لا تقبل نهاية.

خاصيات

- من أجل $p \geq 1$ لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$
- إذا كانت المتتالية (u_n) تقبل نهاية منتهية فإن هذه النهاية وحيدة.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0$
- $u_n < v_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $u_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$

تمرين 1

أحسب نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة:

1. $u_n = \frac{n}{3} - 4 + \frac{n+2}{n^2+1}$;
2. $u_n = 2n - \frac{2}{n+1}$;
3. $u_n = \frac{5n-2}{4n-3}$;
4. $u_n = \frac{3n+2}{2n-1}$
5. $u_n = \frac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$;
6. $u_n = \frac{\sqrt{n}+2}{2n+1}$;
7. $u_n = \frac{-n^2+4n+2}{(n+2)^2}$;
8. $u_n = \frac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}$;

3. العمليات على النهايات

العمليات على المتتاليات العددية هي نفس العمليات على الدوال العددية.
العمليات على نهايات متتالية تستنتج من نهايات الدوال العددية.

4. مصاديق التقارب

لتكن $(u_n)_{n\geq p}$ و $(v_n)_{n\geq p}$ و $(w_n)_{n\geq p}$ متتاليات عددية و l عددا حقيقيا.

خاصية 1

$$\begin{cases} (\forall n \geq p) : |u_n - l| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$$

خاصية 2

$$\begin{cases} (\forall n \geq p) : v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$$

خاصية 3

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \begin{cases} (\forall n \geq p) : u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$$ و $$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \begin{cases} (\forall n \geq p) : u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$$

خاصية 4

كل متتالية تزايدية و مكبورة أو تناقصية و مصغورة هي متقاربة.

تمرين 2

1. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$
   (ا) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ (ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$
   (ا) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n \geq \sqrt{n}$ (ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
3. حدد نهاية المتتالية $u_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{17}\right)$

5. متتاليات خاصة

نتائج

المتتالية	نهايتها
$u_n = a^n$ حيث $a \in \mathbb{R}$	$a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$
	$a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$
	$-1 < a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$
	$a \leq -1$ يستلزم أن (u_n) لا تقبل نهاية
$u_n = n^\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{Q}^*$	$\alpha > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$
	$\alpha < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$
$u_n = f(v_n)$ حيث f دالة عددية.	إذا كانت f متصلة في l فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(l)$
$u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.	إذا كانت f متصلة على I و تحقق $f(I) \subset I$ و (u_n) متقاربة فإن نهاية (u_n) هي حل المعادلة $f(x) = x$

تمرين 3

1. أحسب نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة:

(ا) $u_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

(ب) $u_n = \sin^n(208) \cdot \tan^n\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(ج) $u_n = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$

(د) $u_n = \cos\left(\frac{-3\pi n+2}{n+2\pi}\right)$

(هـ) $u_n = \sin\left(\frac{3\pi n+2}{2n+\pi}\right)$

(و) $u_n = \sqrt{\frac{n^2+2}{n+3}}$

(ز) $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{2n+1}}$

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(ا) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 1 < u_n < 3$

(ب) بين أن (u_n) متتالية متقاربة.

(ج) نضع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ بين أن: $l = 4 - \frac{3}{l}$ ثم استنتج قيمة l.