

سلسلة 1: النهايات و الإتصال

التمرين 1

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 - 3x - 7}{x^2 - 5x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + x - 2}{x-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2 - 3x} - x}{\sqrt{2x} - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + \sin(x)} - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right).$$

التمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$

1. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول في \mathbb{R} .
2. ادرس إشارة $f(x)$ على \mathbb{R} .

التمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{2-x}} & x < 2 \\ f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2} & x > 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f في 2.

التمرين 3

1. نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sqrt{2-x} & x < 0 \\ f(x) = \frac{3\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} & x \geq 0 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على \mathbb{R} .

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g(x) = 2 + a\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x^2 - x - b}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

حدد a و b علما أن الدالة g متصلة على $[0; +\infty[$.

التمرين 4

لتكن f دالة متصلة على كل من المجالين $]-\infty; -2[$ و $]2; +\infty[$ و جدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f	-1	$+\infty$	5	1

1. حدد صور المجالات التالية: $]-\infty; -2[$; $]2; +\infty[$;

التمرين 6

1. لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

ادرس اتصال الدالة f على \mathbb{R} .

2. لتكن g الدالة المعرفة على $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ بما يلي:

$$g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$$

ادرس اتصال الدالة g على $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

3. لتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$h(x) = \cos(4x^2 + 3x - 1)$$

ادرس اتصال الدالة h على \mathbb{R} .

التمرين 7

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f .
2. بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) : E(x+1) = E(x) + 1$.
3. استنتج أن f دورية دورها العدد 1.
4. اكتب تعبير الدالة f على المجالين $[0; 1[$ و $[1; 2[$.
5. ادرس اتصال الدالة f في 1.
6. انشئ (C_f) منحنى الدالة f على المجال $[-3; 3]$.

التمرين 8

بين أن المعادلة $x^3 - 3x = 5$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R}

التمرين 13

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f .
2. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[1; +\infty[$.
4. بين أن g تقبل دالة عكسية محدا مجموعة تعريفها J .
5. اعط جدول تغيرات الدالة g^{-1} .
6. احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

التمرين 9

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = x^3 + 2x - 1$

1. بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$.
2. اعط تأطيرا للعدد α سعته أصغر من 10^{-1} .

التمرين 14

لتكن f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي: $f(x) = x^3$

1. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J ينبغي تحديده.
 2. الدالة العكسية للدالة f هي دالة الجذر المكعب $x \mapsto \sqrt[3]{x}$
- حدد قيم الأعداد التالية:
- $\sqrt[3]{0}; \sqrt[3]{1}; \sqrt[3]{8}; \sqrt[3]{27}; \sqrt[3]{0,125}$

التمرين 10

لتكن f و g الدالتين المعرفتين على \mathbb{R} بما يلي:

$$g(x) = 1 - x^2 \text{ و } f(x) = \sqrt{|x|}$$

1. بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} وأن $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$.
2. أنشئ منحنى f و g في معلم متعامد ممنظم.
3. حل مبيانيا المعادلة $f(x) = g(x)$ ثم المتراجحة $f(x) < g(x)$.

التمرين 15

بسط ما يلي: $\sqrt[8]{2167} \sqrt[8]{3}; \sqrt[5]{16} \sqrt[5]{2}; \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{4}; \sqrt[14]{4^7}; \sqrt[16]{3^8}; \sqrt[10]{2^5}; \sqrt[6]{125} \sqrt[6]{25} \sqrt[6]{5};$
 $\sqrt{2^4} + 3\sqrt[3]{3^9} - 4\sqrt[4]{2^{16}} - \sqrt[5]{4^{10}} - 2\sqrt[6]{2^{12}};$
 $\sqrt{5^4} + 2\sqrt[3]{5^6} - 3\sqrt[4]{5^8} + 4\sqrt[7]{5^{14}} - 5\sqrt[13]{5^{26}};$
 $\sqrt[5]{1024}; \sqrt[4]{\sqrt{256}}; \sqrt{\sqrt[3]{729}}; \sqrt[3]{\sqrt{27}}; \sqrt{\sqrt{4}}; \sqrt{\sqrt{16}};$
 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}; \sqrt[3]{a\sqrt{a^4}}; \sqrt{2\sqrt[3]{3}}; \sqrt{3\sqrt{3}}; \sqrt[3]{\sqrt{8}}; \sqrt[7]{\sqrt{7}};$
 $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}}; \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^4\sqrt[3]{a^6}}}; \sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}; \sqrt[3]{\sqrt{a^2\sqrt{a^4}}};$

التمرين 11

ليكن λ عددا حقيقيا موجبا قطعاً و f الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ بما يلي: $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

حدد حسب قيم العدد λ عدد حلول المعادلة $f(x) = \lambda$

التمرين 12

لتكن f الدالة المعرفة على $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ بما يلي:

$$f(x) = \sin(x)$$

1. بين أن f تقبل دالة عكسية g معرفة من المجال $[-1; 1]$ نحو $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
2. حدد صور الأعداد التالية بالدالة g : $0; 1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. ما هو منحنى تغيرات الدالة g على المجال $[-1; 1]$ ؟
4. مثل منحنى كل من الدالتين f و g .

التمرين 16

كل معادلة على شكل $x^3 = px + q$ حيث p و q عددين حقيقيين موجبين تقبل حلا هو:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}}$$

1. حل في \mathbb{R} المعادلة $x^3 = 6x + 40$
2. احسب $(2 + \sqrt{2})^3$ و $(2 - \sqrt{2})^3$.
3. استنتج تبسيطا لحل المعادلة السابقة.

التمرين 17

اكتب المقامات التالية على شكل عدد جذري:

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{5}+1}; \frac{1}{\sqrt[3]{5}-1};$$

التمرين 22

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = x + \sqrt{x+3}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f .
2. بين أن f متصلة و رتيبة قطاعا على D_f .
3. استنتج أن f تقبل دالة عكسية معرفة من مجال J ينبغي تحديده.
4. احسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .
5. بين أن المعادلة $f^{-1}(x) = f(x)$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-3; +\infty[$.

التمرين 18

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي: $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .
2. ادرس رتابة f على D .
3. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة من مجال J ينبغي تحديده نحو D .
4. احسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

التمرين 19

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي: $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} - 2$ لتكن g قصور الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

1. بين أن g تقبل دالة عكسية محددًا مجموعة تعريفها J .
2. احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

التمرين 23

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ بما يلي: $f(x) = \frac{x+1}{x^3-1}$

1. بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3-1)^2}$ حيث P دالة حدودية ينبغي تحديدها.
2. ادرس تغيرات الدالة P على \mathbb{R} .
3. بين أن المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .
4. حدد تأطيرا للعدد α سعته 10^{-2} .
4. استنتج إشارة $P(x)$ حسب قيم x .
5. ادرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها.
6. لتكن g قصور الدالة f على المجال $]-\infty; 1[$.

(أ) بين أن g تقبل دالة عكسية محددًا مجموعة تعريفها J .(ب) اعط جدول تغيرات الدالة g^{-1} .(ج) احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J .7. أنشئ منحنى كل من الدالتين f و g .

التمرين 20

أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2-x} - x^2; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+x+1} - x;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3+1} - 2x;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2-2}{x^3+1}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3+2x+1} - 3x + 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt[3]{3x-5}}{\sqrt{7x+2}-\sqrt{5x+6}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x^2-1};$$

التمرين 21

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-3; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+9}$$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. بين أن: $x^3+3x^2+3x+9 = (x+1)^3+8$.
3. بين أن f تزايدية قطاعا على $[-3; +\infty[$.