Chapitre 2

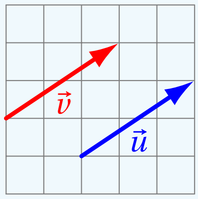
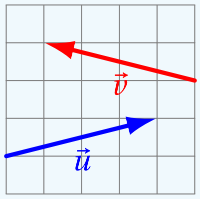
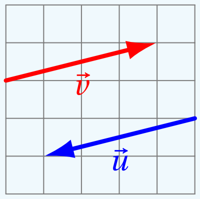
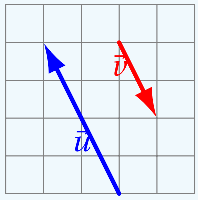
Calcul vectoriel dans le plan

Sommaire

1 Activités

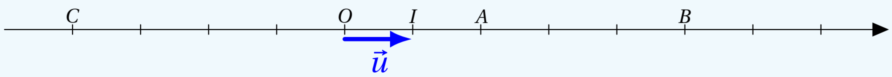
Activité 1

Compléter le tableau suivant par «oui» ou «non» :

				
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction				
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens				
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme				

Activité 2

Dans une droite graduée (OI), on considère les points A, B et C d'abscisses 2, 5 et -3.

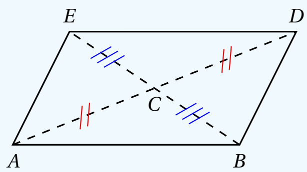


1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\vec{u}$.
2. Construire les points G et H définis par $\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ et $\overrightarrow{OH} = \frac{7}{3}\vec{u}$.
3. Construire le point K tel que : $\overrightarrow{BK} = 2\vec{u}$
4. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\vec{u}$.
5. Que représente le point A pour le segment $[CK]$?

Activité 3

En utilisant la figure ci-conte, compléter les égalités suivante :

(a) $\overrightarrow{AB} = \cdots$ (b) $\overrightarrow{BD} = \cdots$ (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \cdots$
(d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \cdots$ (e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \cdots$ (f) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CA} = \cdots$



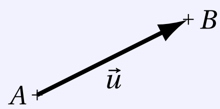
2 Vecteurs du plan (rappels)

2.1 Éléments d'un vecteur

Définition

Le vecteur $\vec{u}$, d'origine un point A et d'extrémité un autre point B (noté $\overrightarrow{AB}$), et est caractérisé par :

- Sa « **direction** » est la droite (AB).
- Son « **sens** » (De A vers B)
- Sa « **norme** » est la longueur du segment $[AB]$, notée $||\vec{u}|| = AB$.



Remarques

- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a la même direction et la même norme que le vecteur $\overrightarrow{AB}$, mais de sens contraire. Il est appelé l'« **opposé du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ », et est noté $-\overrightarrow{AB}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ (de même pour le vecteur $\overrightarrow{BB}$) n'a ni direction, ni sens, et sa norme est nulle. Il est appelé « **vecteur nulle** », et est noté $\vec{0}$.

2.2 Égalité de deux vecteurs

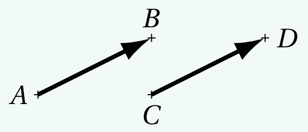
Définition

Deux vecteurs du plan sont dit « **égaux** » s'ils ont la même direction, la même norme et le même sens.

Exemple

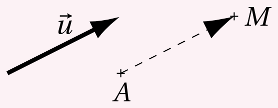
Dans la figure ci-contre, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ car :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction $((AB)//(CD))$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens (de A vers B et de C vers D).
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même norme $(AB = CD)$



Propriété

Soient $\vec{u}$ est un vecteur du plan.
Pour tout point A du plan, il existe unique un point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.



Remarques

Soient A, B et C trois points du plan.

- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $B = C$.

Théorème

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2.3 Somme de deux vecteurs

2.3.1 Règle du triangle (Relation de Chasles)

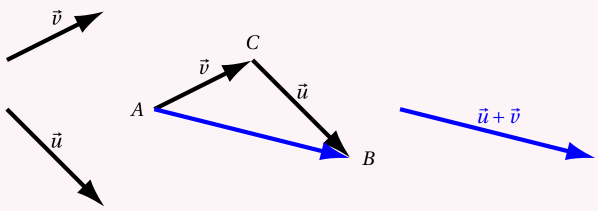
Propriété

Soient A et B deux points du plan.
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, pour tout point C du plan.

Construction

Pour construire la résultante $\vec{u} + \vec{v}$, des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par la méthode du triangle :

1. On prend l'extrémité d'un vecteur et on la place à l'origine du deuxième vecteur,
2. On réunit l'origine du premier vecteur à l'extrémité du deuxième vecteur,
3. Le vecteur obtenu est la résultante cherchée.



Remarque

La propriété précédente s'appelle « **relation de Chasles** », et peut s'appliquer dans le cas de plusieurs vecteurs.
En effet, si A et B deux points du plan, alors, pour tous points C, D, E et F du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}$$

2.3.2 Règle du parallélogramme

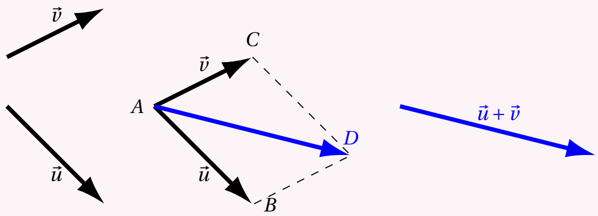
Propriété

Soient A, B, C et D quatre points du plan.
On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Construction

Pour construire la résultante $\vec{u} + \vec{v}$, des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par la méthode du parallélogramme :

1. On place les origines des deux vecteurs ensemble pour compléter un parallélogramme,
2. On réunit le sommet du parallélogramme, origine des deux vecteurs, à son opposé,
3. Le vecteur obtenu est la résultante cherchée.



Remarque

Soustraire un vecteur $\vec{u}$ d'un autre vecteur $\vec{v}$, c'est lui ajouter son opposé $-\vec{v}$.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

3 Multiplication d'un vecteur par un réel

3.1 Produit d'un vecteur par un réel

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur, noté $k\vec{u}$, caractérisé par :

1. Sa direction est la même que celle de $\vec{u}$.
2. Son sens est :
   - le même que celui de $\vec{u}$, si $k > 0$.
   - le contraire de celui de $\vec{u}$, si $k < 0$.
3. Sa norme est :
   - $||k\vec{u}|| = k||\vec{u}||$, si $k > 0$.
   - $||k\vec{u}|| = -k||\vec{u}||$, si $k < 0$.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, et pour tous réels k et k', on a :

- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.

3.2 Colinéarité de deux vecteurs – Alignement de trois points

Définition

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, sont dits « **colinéaires** » s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Théorèmes

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ son colinéaires.
- Trois points A, B et C du plan, sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

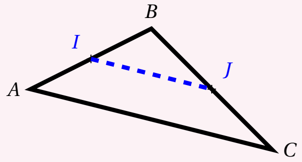
4 Milieu d'un segment

Théorème

Le milieu I d'un segment $[AB]$ du plan, est l'unique point qui vérifie l'une des propriétés suivantes :
• $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. • $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. • Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Propriété

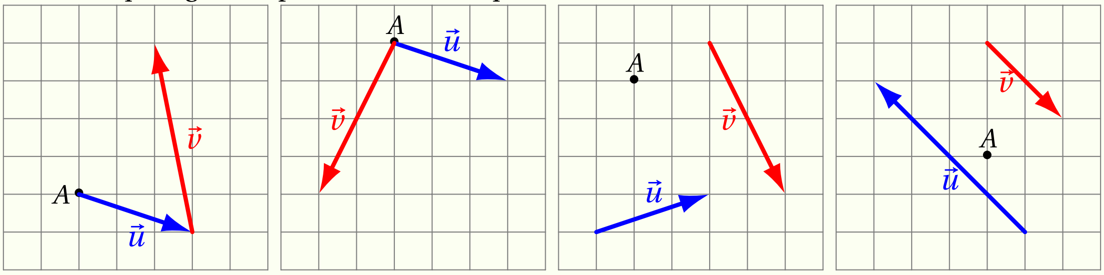
Soit ABC un triangle.
Si I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$, alors $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



5 Exercices

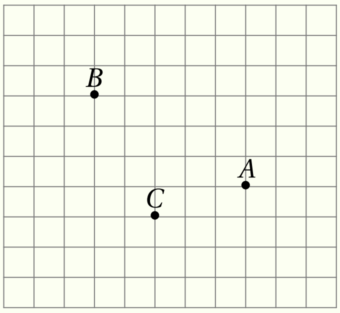
Exercice 1

Construire dans chaque figure, le point M sachant que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$.



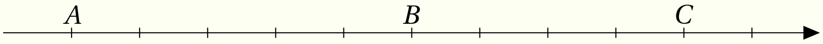
Exercice 2

1. Construire les points M, N ,P et Q tels que :
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$$
2. Montrer que $ABCP$ est un parallélogramme.
3. Montrer que A est le milieu de $[PQ]$.



Exercice 3

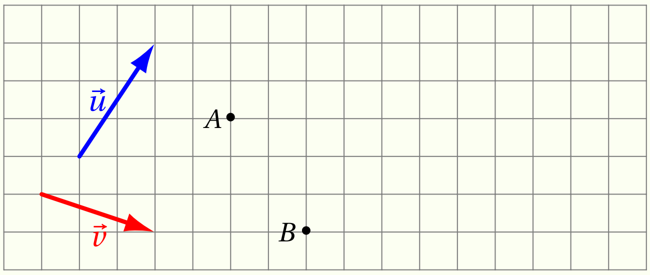
Soient A , B et C trois points sur une droite graduée :



Trouver x , y et z tels que : (a) $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}$; (b) $\overrightarrow{BC}=y\overrightarrow{BA}$; (c) $\overrightarrow{CA}=z\overrightarrow{CB}$.

Exercice 4

Construire les points M , N et P tels que :
(a) $\overrightarrow{AM}=2\vec{v}$;
(b) $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\vec{u}$;
(c) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{v}$.



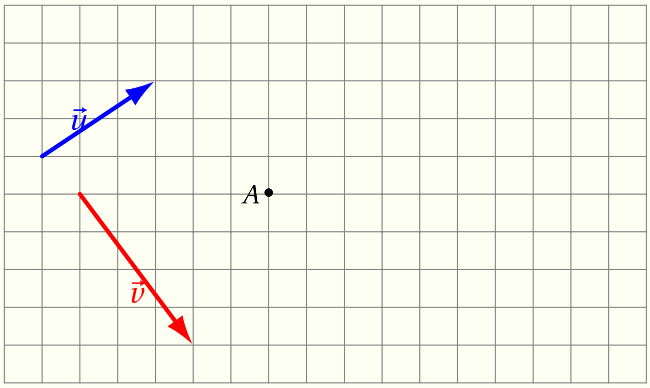
Exercice 5

Construire les points E, F et G tels que :

(a) $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{u}$;

(b) $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{4}\overrightarrow{v}$;

(c) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{u} + \frac{5}{4}\overrightarrow{v}$.



Exercice 6

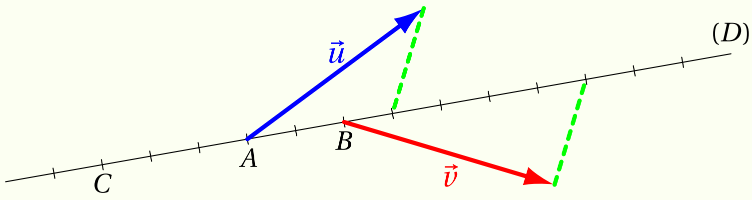
On considère la figure ci-contre :

Construire les points E , F et G tels que :

(a) $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{u}$;

(b) $\overrightarrow{BF} = \frac{7}{5}\overrightarrow{v}$;

(c) $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{u} + \frac{7}{5}\overrightarrow{v}$.



Exercice 7

Réduire les vecteurs suivants :

(a) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; (b) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; (c) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA}$;

(d) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$; (e) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{NP}$; (f) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EQ} - \overrightarrow{EP}$.

Exercice 8

Écrire en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ les vecteurs suivants :

(a) $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$; (b) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$; (c) $\overrightarrow{w} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}) + 3\overrightarrow{CA}$.

Exercice 9

Soient A ,B, C et M quatre points du plan.

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}$.

1. Montrer que : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 10

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On considère les points E et F définis par $\overrightarrow{DE} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$.

1. Construire une figure (on donne $AD = 4$cm et $DC = 6$cm).
2. Montrer que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$.
3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. Montrer que $2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FB}$, et en déduire que les points B, E et F sont alignés.

Exercice 11

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.
3. En déduire que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 12

Soit ABC un triangle. On considère les points M et N définis par $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

1. Construire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CN}$.
3. En déduire que les points M, N et B sont alignés.

Exercice 13

Soient A et B deux points distincts.

1. Construire C, D et E vérifiant les égalités suivantes :

   (a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$; (b) $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{BC}$; (c) $\overrightarrow{CE} = 5\overrightarrow{AB}$.
2. Montrer que le point C est le milieu de $[DE]$.