سلسلة 3: نهاية متتالية

التمرين 1

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n - 3 \end{cases}$$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم مثلها في معلم متعامد ممنظم.
2. لتكن (w_n) و (t_n) المتتاليتين المعرفتين لكل n من $\mathbb{N}$ بما يلي: $w_n = u_n - 2$ و $t_n = v_n + 2$.
   (ا) بين أن (w_n) و (t_n) متتاليتين هندسيتين ثم استنتج w_n و t_n بدلالة n.
   (ب) استنتج تعبير كل من u_n و v_n بدلالة n و احسب نهايتيهما.

التمرين 2

(u_n) متتالية معرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} \end{cases}$

1. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \sqrt{6}$
2. بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا.
3. نضع $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n^2 - 6$
   (ا) بين أن (v_n) متتالية هندسية.
   (ب) استنتج v_n بدلالة n.
   (ج) حدد u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 3

(u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3+3^n u_n} \end{cases}$

1. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$
2. بين أن (u_n) تناقصية ثم استنتج أنها مكبورة بـ 3.
3. استنتج أن (u_n) متقاربة.
4. نضع: $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{1}{3^n u_n}$
   (ا) بين أن (v_n) متتالية حسابية.
   (ب) حدد u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 4

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{1+u_n} \end{cases}$

1. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$
2. بين أن (u_n) رتيبة و استنتج أنها متقاربة.
3. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1 - u_n)$
4. استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$
5. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 5

الجزء الأول لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$$

1. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 < u_n < 4$
2. بين أن (u_n) رتيبة و استنتج أنها متقاربة.
3. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$
4. استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$
5. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

الجزء الثاني نضع: $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية.
2. حدد v_n ثم u_n بدلالة n.
3. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. نضع: $(\forall n \geq 1) : S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.
   أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين 6

(u_n) متتالية معرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 \end{cases}$

1. أحسب u_1 و u_2.
2. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$
3. أدرس رتابة (u_n).
4. استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

التمرين 7

الجزء الأول f دالة معرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}$

1. ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=x$
3. بين أن: $(\forall x\in[0;1[):f(x)>x$

الجزء الثاني (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $\begin{cases}u_0=0\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

1. بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):0\leq u_n\leq 1$
2. ادرس رتابة المتتالية (u_n) و حدد نهايتها.

الجزء الثالث نضع: $(\forall n\in\mathbb{N}):v_n={u_n}^2-1$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية.
2. حدد v_n ثم u_n بدلالة n.
3. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 8

الجزء الأول نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0;2]$ بما يلي: $g(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x}$

1. أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0;2[$.
2. ضع جدول تغيرات الدالة g.
3. استنتج أن: $(\forall x\in[0;2]):0\leq g(x)\leq 1$

الجزء الثاني (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $\begin{cases}u_0\in[0;1]\\u_{n+1}=g(u_n)\end{cases}$

1. بين أنه إذا كان $u_0=0$ أو $u_0=1$ فإن (u_n) متتالية ثابتة.
2. نفترض أن $0<u_0<1$.
   - (ا) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):0<u_n<1$
   - (ب) ادرس رتابة (u_n) و استنتج أنها متقاربة.
   - (ج) أحسب نهاية (u_n).

التمرين 9

(u_n) متتالية معرفة بما يلي: $\begin{cases}u_0=-1;u_1=\frac{1}{2}\\u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n\end{cases}$

1. أحسب u_2 و u_3.
2. نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ و $w_n=\frac{u_n}{v_n}$
   - (ا) بين أن (v_n) متتالية هندسية.
   - (ب) بين أن (w_n) متتالية حسابية.
   - (ج) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):u_n=\frac{2n-1}{2^n}$
3. تحقق أن: $(\forall n>4):2n^2>(n+1)^2$
4. بين أن: $(\forall n>4):2^n>n^2$
5. أثبت أن: $(\forall n>4):0<u_n<\frac{2}{n}$
6. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 10

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=x\sqrt{1+x^2}-x^2$
حيث (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. أحسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)$ ثم ادرس الفرعين اللا نهائيين للمنحنى (C).
2. بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}):f'(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f.
3. بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}):f(x)\leq x$.
4. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J ينبغي تحديده.
5. أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J.
6. أنشئ المنحنى (C) و (C') منحنى الدالة f^{-1}.
7. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $\begin{cases}u_0=-\frac{3}{4}\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$
   - (ا) بين أن (u_n) متتالية تناقصية.
   - (ب) استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):u_n\leq-\frac{3}{4}$
   - (ج) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):\sqrt{1+{u_n}^2}-u_n\geq 2$
   - (د) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):|u_{n+1}|\geq 2\,|u_n|$
   - (ه) استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}):|u_n|\geq\frac{3}{4}2^n$
   - (و) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.