Chapitre 3

Ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Sommaire

1 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

1.1 Sous-ensembles remarquables

On distingue plusieurs ensembles de nombres.

- L'ensemble des «**entiers naturels**», noté $\mathbb{N}$, qui contient les nombres 0, 1, 2, 3, etc.
- L'ensemble des «**entiers relatifs**», noté $\mathbb{Z}$, qui contient les entiers naturels et leurs opposés -1, -2, -3, etc.
- L'ensemble des nombres «**décimaux**», noté $\mathbb{D}$, qui contient les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où a est un entier relatif et n est un entier naturel.
- L'ensemble des nombres «**rationnels**», noté $\mathbb{Q}$, qui contient les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif et b est un entier naturel non nul.
- L'ensemble des nombres «**réels**», noté $\mathbb{R}$, qui contient tout les nombres qu'on utilise à ce niveau.
- L'ensemble des nombres «**irrationnels**», noté $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$, qui contient tout les nombres réels qui ne sont pas rationnels.

Exemples

- 7 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$; on note $7 \in \mathbb{N}$.
- -5 n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{N}$ et appartient à $\mathbb{Z}$; on note $-5 \notin \mathbb{N}$ et $-5 \in \mathbb{Z}$.
- On a $2 \in \mathbb{D}$ car $2 = \frac{2}{10^0}$; $3,14 \in \mathbb{D}$ car $3,14 = \frac{314}{10^2}$; et $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{8} = \frac{375}{10^3}$.
- On a $-3 \in \mathbb{Q}$ car $-3 = \frac{-3}{1}$; $-24,8 \in \mathbb{Q}$ car $-24,8 = -\frac{124}{5}$; et $1,232323\ldots \in \mathbb{Q}$ car $1,232323\ldots = \frac{122}{99}$.
- On a $\sqrt{3} \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ et $\pi \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ car $\sqrt{3}$ et π ne sont pas des rationnels.

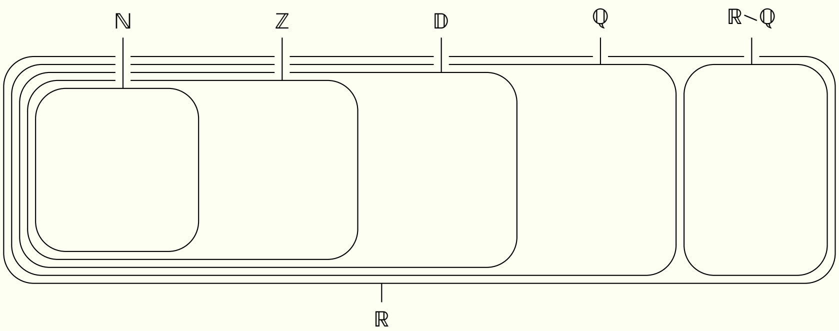
Remarques

- Un nombre écrit en virgule n'appartient pas nécessairement à $\mathbb{D}$.
  - S'il est avec un nombre limité de chiffres après la virgule, il appartient à $\mathbb{D}$.
  - S'il est avec un nombre de chiffres limité ou répété infiniment après la virgule, il appartient à $\mathbb{Q}$.
  - S'il est avec un nombre de chiffres illimité et sans répétition, après la virgule, il appartient à $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$.
- Tout nombre irrationnel est un nombre réel.
  On dit alors que «$\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ **est inclus dans** $\mathbb{R}$», et on écrit $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
  De même, on conclue que :
  - Tout entier naturel est un entier relatif, et on écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
  - Tout entier relatif est un nombre décimal, et on écrit $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
  - Tout nombre décimal est un nombre rationnel, et on écrit $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
  - Tout nombre rationnel est un nombre réel, et on écrit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

  On en déduit quee $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (voir le figure de l'exercice suivant).

Exercice

Mettre chacun des nombres suivants dans la zone correspondante, dans la figure ci-contre :
$-7,2$; $-\sqrt{169}$; $\frac{\pi-1}{2}$; $5+\sqrt{6}$; $\frac{357}{17}$; $\frac{\sqrt{81}}{27}$.



1.2 Écritures et notations

- L'ensemble des entier naturels s'écrit $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\ldots\}$.
- L'ensemble des entier relatifs s'écrit $\mathbb{Z} = \{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$.
- L'ensemble des nombres décimaux s'écrit $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n} \ / \ a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$.
- L'ensemble des nombres rationnels s'écrit $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}\ ,\ b \in \mathbb{N} \text{ et } b \neq 0\}$.

- Le symbole * dans les ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ exclu le nombre 0 d'eux.
  Par exemple, $\mathbb{N}^* = \{1;2;3;\dots\}$ et $\mathbb{Z}^* = \{\dots;-3;-2;-1;1;2;3;\dots\}$.
- Les ensembles des nombres positifs, 0 y compris, sont notés $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{D}^+$, $\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{R}^+$.
  Par exemple, $\mathbb{Z}^+ = \{0;1;2;3;\dots\} = \mathbb{N}$.
- Les ensembles des nombres négatifs, 0 y compris, sont notés $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{D}^-$, $\mathbb{Q}^-$ et $\mathbb{R}^-$.
  Par exemple, $\mathbb{Z}^- = \{0;-1;-2;-3;\dots\}$.
- Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'«**ensemble vide**» et se note $\emptyset$.

Exercice

Compléter avec l'un des symboles $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:
$4\cdots\mathbb{N}$; $\frac{1}{2}\cdots\mathbb{N}$; $4,5\cdots\mathbb{Z}$; $\frac{1}{6}\cdots\mathbb{Q}$; $\frac{1}{4}\cdots\mathbb{D}$; $\frac{1}{3}\cdots\mathbb{D}$; $\sqrt{3}\cdots\mathbb{R}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\mathbb{Q}$; $\pi\cdots\mathbb{R}$; $\pi\cdots\mathbb{Q}$; $\sqrt{0,25}\cdots\mathbb{D}$; $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}\cdots\mathbb{Q}$; $\frac{17}{125}\cdots\mathbb{D}$; $\frac{2}{15}\cdots\mathbb{D}$;
$-2\cdots\mathbb{R}$; $\mathbb{Z}\cdots\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}\cdots\mathbb{Z}$; $\mathbb{R}^+\cdots\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}\cdots\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}^*\cdots\mathbb{Q}$; $\mathbb{D}^+\cdots\mathbb{Q}^-$; $\emptyset\cdots\mathbb{D}$.

2 Opérations dans $\mathbb{R}$

2.1 Addition

Propriétés

Soient a, b et c des nombres réels, on a :
(i) $a+b=b+a$ (ii) $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$ (iii) $a+0=0+a=a$
(iv) $(-a)+a=a+(-a)=0$ où $-a$ est appelé «**opposé de** a».

2.2 Multiplication

Propriétés

Soient a, b et c des nombres réels, on a :
(i) $a\times b=b\times a$ (ii) $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c=a\times b\times c$ (iii) $1\times a=a\times 1=a$
(iv) $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=\frac{a}{a}=1$; $a\neq 0$ où $\frac{1}{a}$ est appelé «**inverse de** a».

2.3 Opérations sur les fractions

Propriétés

Soient a, b, c et d des nombres réels tel que $b\neq 0$, $c\neq 0$ et $d\neq 0$, on a :
(i) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ (ii) $\frac{a}{b}+c=\frac{a+bc}{b}$ (iii) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
(iv) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ (v) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ (vi) $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$
(vii) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ est équivaut à $ad=bc$. (viii) $\frac{a}{b}=1$ est équivaut à $a=b$. (ix) $\frac{a}{b}=0$ est équivaut à $a=0$.

3 Racines carrées

Définition

Soit a un nombre réel positif.
On appelle «**racine carrée de** a» le nombre réel positif b vérifiant $a=b^2$.
Le nombre b est noté $\sqrt{a}$, et on écrit $(\sqrt{a})^2=a$.

Exemples

- $\sqrt{9}=3$ car $3^2=9$.
- $\sqrt{49}=7$ car $7^2=49$.
- $\sqrt{0}=0$ car $0^2=0$.

Propriétés

Soient a et b deux nombres de réels positifs, on a :

(i) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (ii) $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a$ (iii) $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$ où $n\in\mathbb{N}$.

(iv) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ où $b\neq 0$. (v) $\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}=a$ où $a\neq 0$.

(vi) $\sqrt{a}=b$ est équivaut à $a=b^2$. (vii) $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ est équivaut à $a=b$. (viii) $\sqrt{a}=0$ est équivaut à $a=0$.

Exercice

1. Simplifier l'écriture des nombres suivants :
   (a) $\sqrt{27}\times 5\sqrt{6}$ (b) $7\sqrt{75}-2\sqrt{12}$
   (c) $(11\sqrt{5}-5\sqrt{11})(11\sqrt{5}+5\sqrt{11})$ (d) $3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}$
2. On pose $X=\sqrt{10-\sqrt{84}}+\sqrt{10+\sqrt{84}}$. Développer X^2, puis en déduire la valeur X.
3. Écrire les fractions suivantes sans racine carrée au dénominateur : (a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

4 Puissances – Puissances de 10 – Écriture scientifique

4.1 Puissances

Définition

Soient a un réel non nul et n un entier naturel.

- La «**puissance de a d'exposant** n», noté a^n, se définit par :
  - Si $n=0$ alors $a^0=1$.
  - Si $n=1$ alors $a^1=a$.
  - Si $n\neq 0$ et $n\neq 1$ alors $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ facteurs}}$
- La «**puissance de a d'exposant** $-n$», noté a^{-n}, est l'inverse de a^n, et on a :
  - Si $n=1$ alors $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.
  - Si $n\neq 0$ et $n\neq 1$ alors $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}=\dfrac{1}{\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ facteurs}}}$

Propriétés

Soient a et b deux nombres de réels non nuls, et n et m deux entiers relatifs, on a :

(i) $a^n\times a^m=a^{n+m}$ (ii) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ (iii) $(a^n)^m=a^{n\times m}$

(iv) $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ (v) $a^n\times b^n=(ab)^n$

4.2 Puissances de 10

Définition

Soit n un entier naturel, on a :

• $10^0=1$ • $10^1=10$ • $10^{-1}=0,1$ • $10^n=1\underbrace{000\cdots000}_{n\text{ fois le chiffre }0}$ • $10^{-n}=\underbrace{0,00\cdots0}_{n\text{ fois le chiffre }0}1$

4.3 Écriture scientifique

Définition

Tout nombre décimal x peut s'écrire sous la forme $x=a\times 10^n$, où $n\in\mathbb{Z}$, et $a\in\mathbb{D}$ vérifiant $1\leq a<10$ si x est positive, ou $-10<a\leq -1$ si x est négatif.
L'écriture $a\times 10^n$ est appelé l'«**écriture scientifique**» du nombre x .

Exercice

1. Simplifier les expressions suivantes : (a) $\frac{10^9\times 6^3}{25^4\times 3\times 2^{11}}$ (b) $\frac{1}{10^{118}}-\frac{1}{10^{119}}$ (c) $5^{108}\times 2^{106}\times 11\times\frac{1}{10^{107}}$
2. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants : (a) 2000000 (b) 0,0036 (c) $0,00000375\times 5000$

5 Identités remarquables – Développement et factorisation

5.1 Identités remarquables

Propriétés

Soient a ,b et k des réels, on a :

(i) $k(a+b)=ka+kb$ (ii) $k(a-b)=ka-kb$

(iii) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (iv) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(v) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

(vi) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (vii) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(viii) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ (ix) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

5.2 Développement et factorisation

Définitions

Dans une expression algébrique :

- «**Factoriser**» c'est transformer une somme de termes en un produit de facteurs.
- «**Développer**» c'est transformer un produit de facteurs en une somme de termes.
- «**Réduire**» c'est rassembler les termes de même nature (mêmes lettres et mêmes exposants).
- «**Ordonner**» c'est ranger les termes suivant les puissances (dé)croissantes et l'ordre alphabétique.

Exercice

1. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :
   (a) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$ (b) $(2x+1)^2+(4x-1)(4x+1)$ (c) $(2x+3)^3$ (d) $(x-2)^3$
2. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $(3x+2)(x-1)-(1-x)(-2x+1)$ (b) $12x^3-16x^2+32x$ (c) $16-4x^2$
   (d) $(4x-8)(3x-1)-x^2+4x-4$ (e) $64x^3-27$ (f) x^2-2x-3

6 Exercices

Exercice 1

Compléter par les symboles "$\in$", "$\notin$", "$\subset$" et "$\not\subset$" :

(a) $-12\cdots\mathbb{N}$ (b) $37,9\cdots\mathbb{Q}$ (c) $\frac{95}{19}\cdots\mathbb{N}$ (d) $-1,4\cdots\mathbb{D}$ (e) $0\cdots\mathbb{Z}^*$ (f) $-5\cdots\mathbb{Z}^+$

(g) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\mathbb{R}^-$ (h) $\frac{-\sqrt{49}}{8}\cdots\mathbb{Q}$ (i) $\mathbb{N}\cdots\mathbb{Z}$ (j) $\mathbb{Q}^+\cdots\mathbb{R}^-$ (k) $\mathbb{N}^*\cdots\mathbb{Q}$ (l) $\mathbb{Z}^+\cdots\mathbb{Z}^*$

Exercice 2

1. Montrer que $\frac{\sqrt{5808}}{\sqrt{3675}}\in\mathbb{Q}$ et que $\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\in\mathbb{N}$.
2. Trouver l'entier naturel n vérifiant $\frac{3n+17}{n+4}\in\mathbb{N}$.

Exercice 3

1. Simplifier les expressions suivantes : (a) $\frac{2^2\times 3\times(\sqrt{7})^4\times(\sqrt{21})^3}{7^2\times(\sqrt{3})^{-2}\times(\sqrt{2})^4}$ (b) $\frac{(2\sqrt{2})^4\times(-7\sqrt{3})^{-3}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^4}$
2. Donner l'écriture scientifiques de : (a) 0,0001234 (b) $578,21\times 10^5$ (c) $0,0074\times 10^{-2}$ (d) 52×10^3

Exercice 4

Développer et réduire les expressions suivants :

(a) $(2x+3)^2$ (b) $(7x-3y)^2$ (c) $(x+y)^2-(x-y)^2$

(d) $(2x+3y)^3$ (e) $(x+y)^3-(x-y)^3$ (f) $(x+y-z)^3$

Exercice 5

Factoriser les expressions suivantes :

(a) $A=9x^2-4$ (b) $B=27x^4+81x$

(c) $C=12x^3-16x^2+32x$ (d) $D=36-16x^2$

(e) $E=(3x+2)^2-36(x+1)^2$ (f) $F=(7x+3)(x-1)-(1-x)(-2x+1)$

(g) $G=(-2x+1)^2-(4-8x)(x+3)+(3-12x^2)$ (h) $H=(4x-8)\left(\frac{3}{2}x-1\right)-x^2+4x-4$

(i) $I=x^5+x^3-x^2-1$ (j) $J=x^{12}-2x^6+1$

(k) $K=x^3-27-4(x-3)+x^2-9$

Exercice 6

Soient x et y de deux réels non nuls.

Montrer que $\frac{-1+\frac{x}{x-y}}{1+\frac{y}{x-y}}=\frac{y}{x}$, et en déduire la valeur de $\frac{-1+\frac{1}{1+\sqrt{5}}}{1-\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$.

Exercice 7

Soient a et b deux réels tels que $a=\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ et $b=\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

1. Calculer $(3+\sqrt{5})^2$ et $(3-\sqrt{5})^2$.
2. En déduire les valeurs de a et b.
3. Chercher l'entier naturel t tel que $(7+3\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\sqrt{7-3\sqrt{5}}=t\sqrt{2}$.

Exercice 8

Soient x, y et z des réels deux à deux distincts. Montrer que $\frac{x}{(x-y)(x-z)}+\frac{y}{(y-x)(y-z)}+\frac{z}{(z-x)(z-y)}=0$.

Exercice 9

Soit a un réel non nul. On pose $A=a+\frac{1}{a}$.

Calculer en fonction de A les expressions suivants : (a) $a^2+\frac{1}{a^2}$ (b) $a^3+\frac{1}{a^3}$ (c) $a^4+\frac{1}{a^4}$

Exercice 10

a et b sont deux réels non nuls tels que $2(a^2+b^2)=5ab$. Calculer la valeur de $A=\frac{a-b}{a+b}$.

Exercice 11

Soit x un réel positif tel que $\sqrt{x+9}+\sqrt{x}=18$. Calculer la valeur de $\sqrt{x+9}-\sqrt{x}$.