

## Sommaire

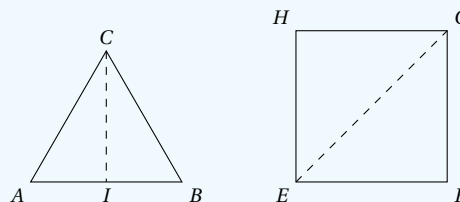
<b>1</b>	<b>Notation</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Cercle trigonométrique – Radian</b>	<b>1</b>
2.1	Cercle trigonométrique . . . . .	1
2.2	Abscisse curviligne d'un point . . . . .	2
2.3	Mesure d'un angle orienté – Radian . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Rapports trigonométriques d'un réel</b>	<b>4</b>
3.1	Repère direct . . . . .	4
3.2	Sinus et cosinus d'un réel . . . . .	4
3.3	Tangente d'un réel . . . . .	5
3.4	Mesures et valeurs remarquables . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Relations trigonométriques</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Équations et inéquations trigonométriques</b>	<b>7</b>
5.1	Équation de type $\cos(X) = a$ . . . . .	7
5.2	Équation de type $\sin(X) = a$ . . . . .	7
5.3	Équation de type $\tan(X) = a$ . . . . .	7
5.4	Inéquations trigonométriques . . . . .	8

# 1 Notation

## Activité 1

$ABC$  est un triangle équilatéral de côté 1, avec  $I$  milieu de  $[AB]$ , et  $EFGH$  est un carré de côté 1.

- Calculer les longueurs  $CI$  et  $EG$ .
- En déduire les valeurs exactes de  $\cos(60^\circ)$ ,  $\sin(60^\circ)$ ,  $\cos(30^\circ)$ ,  $\sin(30^\circ)$ ,  $\cos(45^\circ)$  et  $\sin(45^\circ)$ .

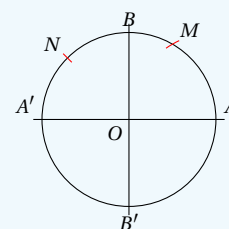


## Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soient  $(C)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, et  $A, A', B$  et  $B'$  sont ses points d'intersection respectifs avec les deux axes du repère.

On considère le point  $M$  situé au tiers de l'arc  $\widehat{AA'}$  à partir de  $A$ , et le point  $N$  placé au milieu de l'arc  $\widehat{BA'}$ .



- Quel est le périmètre du cercle  $(C)$ ?  
Quelle est la longueur du demi-cercle  $\widehat{AA'}$ ? du petit arc  $\widehat{AB}$ ? du grand arc  $\widehat{AB}$ ?
- Quelle est la longueur du petit arc  $\widehat{AM}$ ? du petit arc  $\widehat{AN}$ ?
- Compléter le tableau suivant :

Point	$B$	$A'$	$M$	$N$
Mesure de l'angle au centre associé	$\widehat{AOB} = \dots\dots\dots$	$\widehat{AOA'} = \dots\dots\dots$	$\widehat{AOM} = \dots\dots\dots$	$\widehat{AON} = \dots\dots\dots$
Longueur de l'arc	$\widehat{AB} = \dots\dots\dots$	$\widehat{AA'} = \dots\dots\dots$	$\widehat{AM} = \dots\dots\dots$	$\widehat{AN} = \dots\dots\dots$

- Vérifier que ce tableau représente une situation de proportionnalité, et donner son coefficient.
- Quelle est la longueur d'un arc correspondant à un angle de  $30^\circ$ ? de  $45^\circ$ ? de  $\alpha^\circ$ ?

## 2 Cercle trigonométrique – Radian

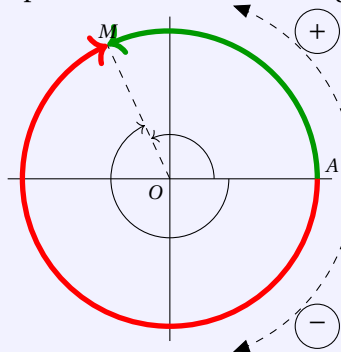
### 2.1 Cercle trigonométrique

#### Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

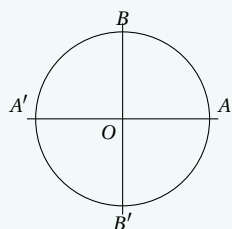
- On appelle «**cercle trigonométrique**» tout cercle  $(C)$  de centre  $O$ , de rayon 1, muni d'un point  $A$ , dit «**origine du cercle trigonométrique**», et orienté de la manière suivante :
  - Le sens «**positif**» ou «**directe**» est celui de la rotation autour du cercle, à partir de  $A$ , contrairement au sens des aiguilles d'une montre.
  - Le sens «**négatif**» ou «**indirecte**» est celui de la rotation autour du cercle, à partir de  $A$ , suivant le sens des aiguilles d'une montre.
- Pour tout point  $M$  du cercle trigonométrique, l'arc  $\widehat{AM}$  est dit «orienté», et est noté  $\widehat{AM}$ . On peut l'apercevoir de deux manières différentes :
  - L'arc orienté  $\widehat{AM}$  en vert est dit «**positif**» ou «**directe**».
  - L'arc orienté  $\widehat{AM}$  en rouge est dit «**négatif**» ou «**indirecte**».
- Pour tout point  $M$  du cercle trigonométrique, l'angle  $\widehat{AOM}$  est dit «orienté», et est noté  $\widehat{(\vec{OA}; \vec{OM})}$ . On peut l'apercevoir de deux manières différentes :
  - L'angle orienté  $\widehat{(\vec{OA}; \vec{OM})}$ , correspondant à l'arc orienté positif  $\widehat{AM}$ , est dit «**positif**» ou «**directe**».

- L'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$ , correspondant à l'arc orienté négatif  $\widehat{AM}$ , est dit «**négatif**» ou «**indirecte**».



### Exemples

En utilisant la figure ci-dessous, déterminer les mesures des arcs orientés  $\widehat{AA}$ ,  $\widehat{AA'}$ ,  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{AB'}$ .



Nombre de tours	0	1	2	$k$
Mesures de $\widehat{AA}$				
Mesures de $\widehat{AA'}$				
Mesures de $\widehat{AB}$				
Mesures de $\widehat{AB'}$				

## 2.2 Abscisse curviligne d'un point

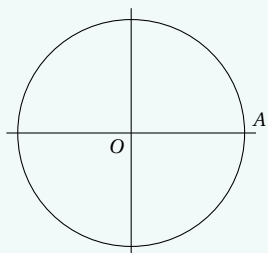
### Propriété

Soit  $M$  un point du cercle trigonométrique, d'origine  $A$ .

- Si  $x$  est une mesure de l'arc orienté  $\widehat{AM}$ , alors, toutes les mesures de cet arc sont de la forme  $x + 2k\pi$ , où  $k$  est un entier relatif.
- Les nombres de la forme  $x + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ , y compris  $x$ , sont appelés «**abscisses curvilignes**» du point  $M$ . On écrit  $M(x)$  ou  $M(x + 2k\pi)$ .
- Un abscisse curviligne est dit «**principale**», s'il appartient à l'intervalle  $] -\pi; \pi]$ .

### Exemples

Représenter sur le cercle trigonométrique les points  $E(-\frac{\pi}{2})$ ,  $F(\frac{\pi}{6})$ ,  $G(-\frac{\pi}{4})$ ,  $H(\frac{7\pi}{2})$  et  $K(\frac{7\pi}{4})$ . Que remarque-t-on?



.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Exercice

Déterminer l'abscisse curviligne principale des points d'abscisses  $-\frac{3\pi}{2}$ ,  $-\frac{17\pi}{4}$ ,  $\frac{23\pi}{4}$ ,  $-\frac{5\pi}{2}$ ,  $-\frac{4\pi}{3}$ ,  $\frac{27\pi}{3}$  et  $\frac{2005\pi}{3}$ .

## 2.3 Mesure d'un angle orienté – Radian

## Propriété

Soit  $M$  un point du cercle trigonométrique, d'origine  $A$ .

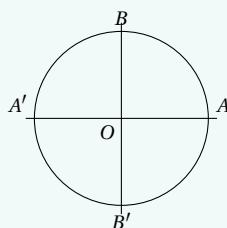
- Si  $x$  est une mesure de l'arc orienté  $\widehat{AM}$ , alors, la mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$  est dite  $x$  «**radian**». On écrit  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = x \text{ rad}$ .
- Si  $x$  est une mesure en radian de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$ , alors, toutes les mesures en radian de cet angle sont de la forme  $x + 2k\pi$ , où  $k$  est un entier relatif. On écrit  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , ou simplement  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) \equiv x[2\pi]$  (lue  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$  est congrue à  $x$  modulo  $2\pi$ ).
- Les nombres de la forme  $x + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ , y compris  $x$ , sont appelés «**abscisses curvilignes**» du point  $M$ . On écrit  $M(x)$  ou  $M(x + 2k\pi)$ .
- Une mesure en radian d'un angle orienté est dite «**principale**», s'il appartient à l'intervalle  $] -\pi; \pi]$ .

## Remarques

- Généralement, la mesure d'un angle peut être exprimée en degré ( $^\circ$ ), en radian ( $rad$ ) ou en grade ( $gr$ ).
- La mesure d'un angle plat vaut en degré  $180^\circ$ , en radian  $\pi \text{ rad}$ , en grade  $200 \text{ gr}$ . On a  $180^\circ = \pi \text{ rad} = 200 \text{ gr}$ .
- Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont respectivement des mesures du même angle, en degré, radian et grade, alors  $\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi} = \frac{c}{200}$ .

## Exemples

- Compléter à partir de la figure ce qui suit :



L'abscisse curviligne de A est .....	La mesure de l'arc orienté $\widehat{AA}$ est .....	La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA})$ est .....
L'abscisse curviligne de B est .....	La mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$ est .....	La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ est .....
L'abscisse curviligne de A' est .....	La mesure de l'arc orienté $\widehat{AA'}$ est .....	La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'})$ est .....
L'abscisse curviligne de B' est .....	La mesure de l'arc orienté $\widehat{AB'}$ est .....	La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB'})$ est .....

Conclusion :  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA}) \equiv \dots$ ,  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \dots$ ,  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'}) \equiv \dots$  et  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB'}) \equiv \dots$

- Déterminer, en radian, la mesure d'un angle valant en degré  $150^\circ$ . ....
- Déterminer, en degré, la mesure d'un angle valant en radian  $\frac{3\pi}{10} \text{ rad}$ . ....
- Déterminer, en grade, la mesure d'un angle valant en degré  $45^\circ$ . ....
- Déterminer, en radian, la mesure d'un angle valant en grade  $160 \text{ gr}$ . ....

## Propriétés

Soient  $M$ ,  $N$  et  $P$  des points du cercle trigonométrique, d'origine  $A$ .

$$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM}) \equiv 0[2\pi], \quad (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) \equiv -(\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OM})[2\pi] \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{ON}) \equiv (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON})[2\pi].$$

## Remarque

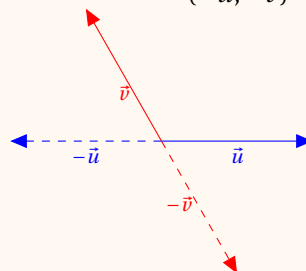
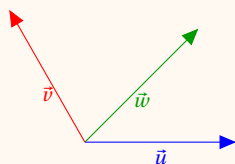
Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan, tels que  $\|\vec{u}\| = a$  et  $\|\vec{v}\| = b$ .

Alors, il existe deux points  $M$  et  $N$  du cercle trigonométrique, tels que  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{a}\vec{u}$  et  $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{b}\vec{v}$ .

## Corollaires

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs du plan.

- $(\vec{u}; \vec{u}) \equiv 0[2\pi]$
- $(\vec{u}; \vec{w}) + (\vec{w}; \vec{v}) \equiv (\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$
- $(\vec{u}; -\vec{u}) \equiv \pi[2\pi]$
- $(-\vec{u}; \vec{v}) \equiv (\vec{u}; -\vec{v})[2\pi]$
- $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv -(\vec{v}; \vec{u})[2\pi]$
- $(-\vec{u}; -\vec{v}) \equiv (\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$ .



## Remarque

On définit de même l'angle orienté déterminé par deux droites (ou demi-droites), à partir de leurs vecteurs directeurs, en gardant les mêmes propriétés.

Si  $(D)$  et  $(D')$  sont deux droites du plan, de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , alors  $(\overrightarrow{(D)}; \overrightarrow{(D')}) \equiv (\vec{u}; \vec{v})[\pi]$ .

## Exercice

1. Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisses curvilignes  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $-\frac{\pi}{6}$ ,  $-\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$  et  $-\frac{\pi}{4}$ .
2. Déterminer, dans chacun des cas suivants, si les deux abscisses curvilignes  $a$  et  $b$  représentent le même point : (i)  $a = \frac{50\pi}{3}$  et  $b = \frac{32\pi}{3}$  (ii)  $a = \frac{5\pi}{8}$  et  $b = -\frac{3\pi}{8}$  (iii)  $a = -\frac{5\pi}{12}$  et  $b = \frac{43\pi}{12}$ .
3. Convertir en radian  $20^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $135^\circ$  et  $125^\circ$ . Convertir en degré  $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ ,  $\frac{2\pi}{9} \text{ rad}$ ,  $\frac{\pi}{10} \text{ rad}$ ,  $\frac{3\pi}{5} \text{ rad}$ .
4.  $ABCD$  est un carré de centre  $O$ , tel que  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ . Donner les mesures des angles suivants :  
 (a)  $(\widehat{BA}; \widehat{BC})$  (b)  $(\widehat{DA}; \widehat{DC})$  (c)  $(\widehat{AB}; \widehat{AC})$  (d)  $(\widehat{BD}; \widehat{BC})$  (e)  $(\widehat{OA}; \widehat{OD})$  (f)  $(\widehat{AB}; \widehat{DC})$  (g)  $(\widehat{BC}; \widehat{DA})$  (h)  $(\widehat{OA}; \widehat{OC})$ .

## 3 Rapports trigonométriques d'un réel

## 3.1 Repère direct

## Définition

Un repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  est dit «**direct**», si l'angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$  est direct.

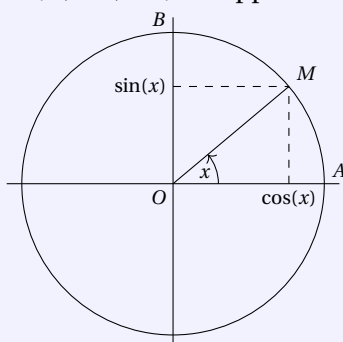
## 3.2 Sinus et cosinus d'un réel

## Définition

$(C)$  est le cercle trigonométrique de centre  $O$  et d'origine  $A$ , et  $B$  est un point tel que  $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  est un repère orthonormé direct.

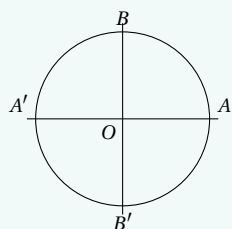
Soit  $x$  un nombre réel. Il existe un seul et unique point  $M$  de  $(C)$  tel que  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) \equiv x[2\pi]$ .

- L'abscisse du point  $M$  dans le repère  $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  est appelé «**cosinus de  $x$** », et est noté  $\cos(x)$ .
- L'ordonnée du point  $M$  dans le repère  $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  est appelé «**sinus de  $x$** », et est noté  $\sin(x)$ .



**Remarque**

Si  $x$  est l'abscisse curviligne du point  $M$  du cercle trigonométrique, alors ses coordonnées sont  $M(\cos(x); \sin(x))$ .

**Exemple**

On a  $A(\dots\dots\dots)$  et  $A(\dots\dots\dots; \dots\dots\dots)$ .  
Donc  $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$  et  $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$

On a  $A'(\dots\dots\dots)$  et  $A'(\dots\dots\dots; \dots\dots\dots)$ .  
Donc  $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$  et  $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$

On a  $B(\dots\dots\dots)$  et  $B(\dots\dots\dots; \dots\dots\dots)$ .  
Donc  $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$  et  $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$

On a  $B'(\dots\dots\dots)$  et  $B'(\dots\dots\dots; \dots\dots\dots)$ .  
Donc  $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$  et  $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$

**Propriétés**

Soit  $x$  un nombre réel.

- $-1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$  écrite également  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ .
- Pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , on a  $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$  et  $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ .
- Le tableau de signe de  $\cos(x)$ , sur  $] -\pi; \pi]$  est comme suit :

$x$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$0$		$\frac{\pi}{2}$		$\pi$
$\cos(x)$	$-1$	$-$	$0$	$+$	$1$	$+$	$0$	$-$	$-1$

- Le tableau de signe de  $\sin(x)$ , sur  $] -\pi; \pi]$  est comme suit :

$x$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$0$		$\frac{\pi}{2}$		$\pi$
$\sin(x)$	$0$	$-$	$-1$	$-$	$0$	$+$	$1$	$+$	$0$

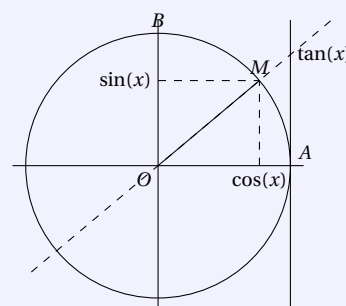
**3.3 Tangente d'un réel****Définition**

$(C)$  est le cercle trigonométrique de centre  $O$  et d'origine  $A$ , et  $B$  est un de points tel que  $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  est un repère orthonormé direct.

Soit  $x$  un nombre réel tel que  $\cos(x) \neq 0$ . Il existe un seul et unique point  $M$  de  $(C)$ , d'abscisse curviligne  $x$ .

Le coefficient directeur de la droite  $(OM)$  est appelé «**tangente de  $x$** », et est noté  $\tan(x)$ .

Pour tout réel  $x$ , tel que  $\cos(x) \neq 0$ , On a  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

**Propriété**

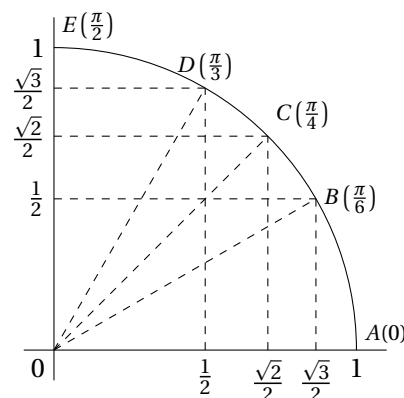
Soit  $x$  un nombre réel.

- $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$  et  $1 + \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$ .
- Pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , on a  $\tan(x + 2k\pi) = \tan(x)$
- Le tableau de signe de  $\tan(x)$ , sur  $] -\pi; \pi]$ , tel que  $\cos(x) \neq 0$ , est comme suit :

$x$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$0$		$\frac{\pi}{2}$		$\pi$
$\tan(x)$	$0$	$+$	$\parallel$	$-$	$0$	$+$	$\parallel$	$-$	$0$

### 3.4 Mesures et valeurs remarquables

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



#### Exercice

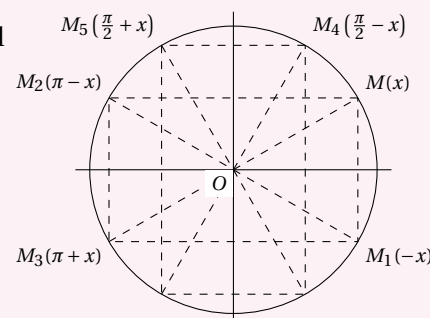
- Calculer les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ ,  $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$  et  $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ .
- Déterminer la valeur de  $\cos(\alpha)$ , sachant que  $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$  et que  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ .
- Déterminer la valeur de  $\sin(\beta)$ , sachant que  $\cos(\beta) = \frac{4}{5}$  et que  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ .

## 4 Relations trigonométriques

#### Propriétés

Soit  $x$  un nombre réel (pour les relations  $\tan$ ,  $x$  doit être différent de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ , on écrit  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ).

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan(x)$



#### Exercice

- Déterminer le sinus, le cosinus et la tangente des réels  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $-\frac{14\pi}{3}$  et  $\frac{19\pi}{4}$ .
- Montrer que, pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , on a  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$ .
- On donne  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
  - Déterminer la valeur exacte du sinus du réel  $\frac{\pi}{5}$ .
  - En déduire les cosinus et sinus des réels  $\frac{4\pi}{5}$ ,  $\frac{9\pi}{5}$ ,  $\frac{3\pi}{10}$  et  $\frac{7\pi}{10}$ .
- Si  $x$  est un réel tel que  $\tan(x) \neq 0$ , l'inverse de  $\tan(x)$  est appelé «cotangente de  $x$ », et est noté  $\cotan(x)$  ou  $\cot(x)$ . Montrer que  $1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$ .
- Sachant que  $\tan(x) = 2$  et que  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , déterminer  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .
  - Sachant que  $\cos(x) = \frac{1}{3}$  et que  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , déterminer  $\tan(x)$  et  $\sin(x)$ .
- Simplifier les expressions suivantes :
  - $\cos(\pi + x) - \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
  - $\cos(5\pi + x) + \sin(11\pi - x) - \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)$
  - $\tan(-x) + \tan(x + \pi) + \tan(x - 3\pi)$
- Donner la valeur exacte des additions suivantes :
  - $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
  - $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

## 5 Équations et inéquations trigonométriques

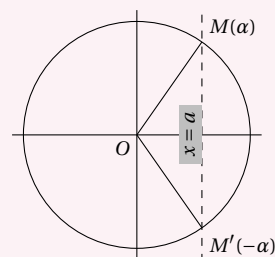
Dans toute la suite, et pour éviter toute confusion, l'abscisse curviligne d'un point quelconque  $M$  du cercle trigonométrique, sera noté  $X$ , et ses coordonnées cartésiennes seront notées  $(x; y)$ . Ce qui se traduit par les relations  $\cos(X) = x$ ,  $\sin(X) = y$  et  $\tan(X) = \frac{y}{x}$ , si  $x \neq 0$ . De plus, la droite  $(OM)$  aura pour équation cartésienne  $x \tan(X) - y = 0$ , si  $X \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ .

### 5.1 Équation de type $\cos(X) = a$

#### Propriété

Les solutions de l'équation  $\cos(X) = a$ , s'elles existent, sont les points d'intersection de la droite d'équation  $x = a$  avec le cercle trigonométrique.

- Si  $a \notin [-1; 1]$ , alors cette équation n'admet pas de solutions.  
L'ensemble des solutions est  $S = \emptyset$ .
- Si  $a = 1$ , alors,  $\cos(X) = \cos(0)$  et  $X = 0 + 2k\pi = 2k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .  
L'ensemble des solutions est  $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Si  $a = -1$ , alors,  $\cos(X) = \cos(\pi)$  et  $X = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .  
L'ensemble des solutions est  $S = \{(2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Si  $a \in ]-1; 1[$ , alors,  $\cos(X) = \cos(\alpha)$  et  $X = \alpha + 2k\pi$  ou  $X = -\alpha + 2k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .  
L'ensemble des solutions est  $S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

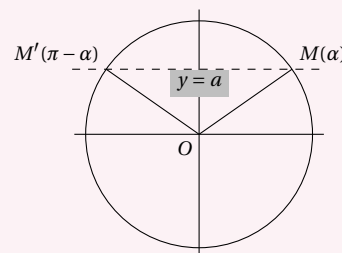


### 5.2 Équation de type $\sin(X) = a$

#### Propriété

Les solutions de l'équation  $\sin(X) = a$ , s'elles existent, sont les points d'intersection de la droite d'équation  $y = a$  avec le cercle trigonométrique.

- Si  $a \notin [-1; 1]$ , alors cette équation n'admet pas de solutions.  
L'ensemble des solutions est  $S = \emptyset$ .
- Si  $a = 1$ , alors,  $\sin(X) = \sin(\frac{\pi}{2})$  et  $X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .  
L'ensemble des solutions est  $S = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Si  $a = -1$ , alors,  $\sin(X) = \sin(-\frac{\pi}{2})$  et  $X = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .  
L'ensemble des solutions est  $S = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Si  $a \in ]-1; 1[$ , alors,  $\sin(X) = \sin(\alpha)$  et  $X = \alpha + 2k\pi$  ou  $X = \pi - \alpha + 2k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .  
L'ensemble des solutions est  $S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

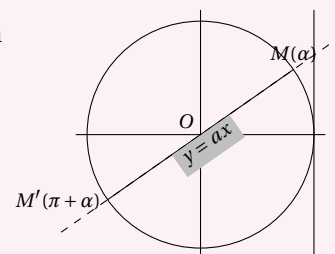


### 5.3 Équation de type $\tan(X) = a$

#### Propriété

Les solutions de l'équation  $\tan(X) = a$ , s'elles existent, sont les points d'intersection de la droite d'équation  $y = ax$  avec le cercle trigonométrique.

- Si  $a = 0$ , alors,  $\tan(X) = \tan(0)$  et  $X = 0 + k\pi = k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .  
L'ensemble des solutions est  $S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Si  $a \neq 0$ , alors,  $\tan(X) = \tan(\alpha)$  et  $X = \alpha + k\pi$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .  
L'ensemble des solutions est  $S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .



#### Exercice

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations  $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ,  $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$  et  $\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{11})$ .
2. Résoudre dans  $[0; 2\pi[$  les équations  $2\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 1$ ,  $\sin(\frac{\pi}{3} - 2x) = 0$  et  $\sqrt{3}\tan(4(x + \frac{\pi}{3})) = 3$ .



## 5.4 Inéquations trigonométriques

### Exercice

1. On considère dans  $[-\pi; \pi[$  l'inéquation  $(I) : \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
  - (a) Résoudre dans  $[-\pi; \pi[$  l'équation  $(E) : \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
  - (b) Représenter les solutions de l'équation  $(E)$  sur le cercle trigonométrique.
  - (c) En déduire les solutions de l'inéquation  $(I)$ .
2. Résoudre dans  $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$  l'inéquation  $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , et dans  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  l'inéquation  $-\sqrt{3} \leq \tan x < 1$ .
3. Résoudre dans  $]-\frac{\pi}{2}; \pi]$  les inéquations  $2 \cos(x) + 1 > 0$ ,  $-1 < 2 \sin(x) < \sqrt{3}$ ,  $\sin(x) \cos(x) < 0$  et  $\tan(x) \geq 0$ .