Chapitre 6

Polynômes

Sommaire

1 Définitions et vocabulaire

Définitions

- Toute expression de la forme ax^n, avec a un réel et n un entier naturel, est appelée «**monôme de degré** n», et le réel a est appelé «**coefficient du monôme de degré** n».
- Toute somme finie de monôme est appelée «**polynôme**».
- Toute expression de la forme $ax+b$, avec a et b des réels tels que $a \neq 0$, est appelée «**binôme de premier degré**».
- Toute expression de la forme ax^2+bx+c, avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$, est appelée «**trinôme du second degré**».
- Toute expression de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, avec a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1} et a_n des réels tels que $a_n \neq 0$, est appelée «**polynôme de degré** n».
- Un polynôme est souvent noté par $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$, $\ldots$.
- Le degré d'un polynôme P est noté $\deg(P)$ ou $\mathrm{d}^\circ P$.
- Un polynôme P est dit «**nul**», si tous ses coefficients sont nuls, ce qui signifie que $P(x) = 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exemples

On considère $P(x) = -x^5 + \frac{1}{2}x^4 + x^2\sqrt{2} + x - 5$.

- $-x^5$, $\frac{1}{2}x^4$, $x^2\sqrt{2}$, x et -5 sont des monôme de degrés respectifs 5, 4, 2, 1 et 0.
- les réels -1, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, 1, -5 sont les coefficients respectifs des monômes $-x^5$, $\frac{1}{2}x^4$, $x^2\sqrt{2}$, x et -5.
- $P(x)$ est un polynôme de degré 5. On a $\mathrm{d}^\circ P = 5$.
- les réels -1, $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{2}$, 1, -5 sont les coefficients du polynôme $P(x)$.

2 Égalité de deux polynômes

Propriétés

Deux polynômes sont égaux, si et seulement si, leurs coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exercice

Déterminer les réels a, b et c dans les cas suivants, sachant que $P(x) = Q(x)$:

1. $P(x) = 3x^2 + (b-1)x$ et $Q(x) = (a+1)x^2 + 2x + c$.
2. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ et $Q(x) = (x+1)(x-3)(ax+b)$.

3 Operations sur les polynômes

3.1 Somme de deux polynômes

Activité

Compléter les additions suivantes :

$$\begin{array}{c|cccc} & -7x^3 & \cdot & 2x & 11 \\ + & 2x^3 & -4x^2 & -5x & \cdot \\ \hline = & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 3x^4 & \cdot & +x^2 & -3x & -5 \\ + & \cdot & -2x^3 & -2x^2 & \cdot & +3 \\ \hline = & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Propriété

La somme de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est le polynôme, noté $(P+Q)(x)$, défini par :

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x),$$

et on a $\mathrm{d}^\circ(P+Q) \leq \sup(\mathrm{d}^\circ P; \mathrm{d}^\circ Q)$.

3.2 Produit de deux polynômes

Activité

1. Compléter la multiplication suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & x^2 & -x & +1 \\
\times & & & --x^3 & . & +x & -2 \\
\hline
 & & & & \dots & \dots & \dots \\
+ & & & \dots & \dots & \dots & . \\
+ & \dots & \dots & \dots & . & . & . \\
\hline
= & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

2. Développer $P(x) \times Q(x)$, où $P(x) = x^2 - x + 1$ et $Q(x) = -x^3 + x - 2$.

Propriété

Le produit de deux polynômes non nuls $P(x)$ et $Q(x)$ est le polynôme, noté $(P \times Q)(x)$, défini par

$$(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x),$$

et on a $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$.

3.3 Division d'un polynôme par un binôme de la forme $x - a$

Activité

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

1. Compléter les divisions euclidiennes ci-dessous.

$$\begin{array}{cccc|ccc}
x^3 & -4x^2 & -3x & +18 & x & -3 & \\
\cline{5-7}
\dots & \dots & & & \dots & \dots & \dots \\
\cline{1-2}
0 & \dots & \dots & & & & \\
 & \dots & \dots & & & & \\
\cline{2-3}
 & 0 & \dots & \dots & & & \\
 & & \dots & \dots & & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & \dots & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|ccc}
x^3 & -4x^2 & -3x & +18 & x & +2 & \\
\cline{5-7}
\dots & \dots & & & \dots & \dots & \dots \\
\cline{1-2}
\dots & \dots & \dots & & & & \\
 & \dots & \dots & & & & \\
\cline{2-3}
 & \dots & \dots & \dots & & & \\
 & & \dots & \dots & & & \\
\cline{3-4}
 & & \dots & \dots & & &
\end{array}$$

2. Calculer $P(3)$ et $P(2)$.

Propriété

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et a un réel.
Il existe un unique polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$.

- Le polynôme $Q(x)$ est appelé «**quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$**».
- Le réel $P(a)$ est appelé «**reste de la division euclidienne $P(x)$ par $x - a$**».

Exercice

Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de $P(x) = 4x^3 - 3x + 1$ par $x - 1$, puis par $x + 1$.

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et a un nombre réel.
$P(x)$ est dit «**divisible par $x - a$**» s'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$.

3.4 Racine d'un polynôme

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme.
Tout nombre réel a vérifiant $P(a) = 0$ est appelé «**racine**» ou «**zéro**» du polynôme $P(x)$.

Propriétés

Soit $P(x)$ un polynôme et a un nombre réel.
$P(x)$ est divisible par $x - a$ si et seulement si a est une racine du polynôme $P(x)$.

Exercice

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

1. Montrer que 2 est une racine de $P(x)$.
2. Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
3. Montrer que $Q(x)$ est divisible par $x + 3$.
4. Déterminer les réels a et b tel que $P(x) = (x - 2)(x + 3)(ax + b)$.

4 Exercices

Exercice 1

Déterminer le degré du polynôme $P(x)$, dans chacun des cas suivants :
(a) $P(x) = (x + 1)^2 - 2(x - 1)^2$.
(b) $P(x) = x^4 - 1 + 3x^5$.
(c) $P(x) = (2x^2)^3 - 3x^5$.
(d) $P(x) = (x + 2)^3 - (x^3 + 8)$.

Exercice 2

Déterminer les réels a, b et c sachant que $P(x) = Q(x)$ dans les cas suivants :
(a) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ et $Q(x) = (ax + b)(x + 1)(x + 3)$.
(b) $P(x) = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$ et $Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
(c) $P(x) = (x^2 - 1)(ax^3 + bx^2 + cx)$ et $Q(x) = x^5 + x^3 - 2x$.

Exercice 3

On considère les deux polynômes $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$ et $Q(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 1$.
Déterminer $2P(x) - Q(x)$ et $P(x) \times Q(x)$.

Exercice 4

Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$, dans les cas suivants :
(a) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ et $a = -2$
(b) $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 3$ et $a = 1$
(c) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 5$ et $a = -\frac{3}{2}$.
(d) $P(x) = 4x^5 - 5x^3 + 1$ et $a = 1$.

Exercice 5

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $x - 1$.
2. Déterminer $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$.
3. Vérifier que -2 est une racine de $Q(x)$.
4. Écrire $P(x)$ sous forme de produit de binômes de premier degré.
5. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 6

On considère le polynôme P de variable réelle x tel que : $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

1. vérifier que 1 est une racine de $P(x)$.
2. Déterminer $Q(x)$ tel que :$P(x) = (x-1)Q(x)$.
3. vérifier que -1 est une racine de $Q(x)$.
4. Déterminer $h(x)$ tel que :$Q(x) = (x+1)h(x)$
5. vérifier que 3 est une racine de $h(x)$.
6. Écrire $P(x)$ sous la forme de produit de binômes du premier degré.
7. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 7

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

1. Calculer $P(1)$ et $P(-3)$.
2. Factoriser $P(x)$ en produit de binômes du premier degré.
3. Soit $x \in [0;1]$. Montrer que $\left|\frac{P(x)}{x+3}\right| \leq 2$.

Exercice 8

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

1. Calculer $P(-2)$ et $P(1)$
2. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$.
3. Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ l'est aussi.
4. Déduire toutes les racines de $P(x)$.

Exercice 9

On considère le polynôme P de variable réelle x tel que $P(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$.

1. Vérifier que -1 est une racine de $Q(x)$.
2. Déterminer $Q(x)$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$.
3. Calculer $Q(1+\sqrt{2})$.
4. Déterminer a tel que $Q(x) = (x-1-\sqrt{3})(x+a)$.
5. Monter que pour tout $x \in \left]2, 1+\sqrt{2}\right[$: $-4 < P(x) < 0$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme P de variable réelle x tel que $P(x) = (x-2)^{3n} + (x-1)^{2n} - 1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-2)Q(x)$.
2. Déterminer le degré de $Q(x)$ en fonction de n.
3. Calculer $P(1)$ en fonction de n.
4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $P(x)$ est divisible par $x-1$.
5. On suppose que $n = 1$.
   Déterminer a et b deux réels tels que $P(x) = (x-2)((x-a)^2 + bx)$.

Exercice 11

On considère le polynôme P de degré 3 vérifiant $P(1) = 7$, $P(4) = 16$, $P(3) = 9$ et $P(2) = 4$.
On pose $Q(x) = P(x) - x^2$.

1. Montrer qu'il existe k tel que $Q(x) = k(x-2)(x-3)(x-4)$.
2. Calculer $Q(1)$, puis déduire la valeur de k.
3. Déterminer l'expression de $P(x)$.