Chapitre 5

Ordre dans $\mathbb{R}$

Sommaire

1 Ordre et comparaison

Définitions

Soient a et b deux nombres réels.

- a est dit «**supérieur ou égal** » à b, écrit $a \geq b$, si $a - b \geq 0$.
- a est dit «**supérieur strictement** » à b, écrit $a > b$, si $a - b > 0$.
- a est dit «**inférieur ou égal** » à b, écrit $a \leq b$, si $a - b \leq 0$.
- a est dit «**inférieur strictement** » à b, écrit $a < b$, si $a - b < 0$.

Remarques

Comparer deux nombres réels a et b revient à étudier le signe de $a-b$, et déterminer lequel d'eux est le plus grand.

Exemples

Comparer $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{5}{6}$.

....

....

....

Propriété

Soient a,b et c des nombres réels. Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.

2 Ordre et opérations

2.1 Addition

Propriétés

Soient a,b,c et d des nombres réels.

• Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.

• Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

Exemples

- Comparer $a = 1 + \sqrt{12}$ et $b = \frac{1}{3} + \sqrt{12}$.

  ....

  ....

- Comparer $a = \frac{4}{5} + \sqrt{2}$ et $b = \frac{5}{4} + \sqrt{3}$.

  ....

  ....

  ....

2.2 Multiplication

Propriétés

Soient a, b, c et d des nombres réels.

• Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$.

• Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$.

• Si a, b, c et d sont positifs tels que $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

Exemples

- Comparer $a = 6\sqrt{3}$ et $b = 6\sqrt{7}$.

  ....

  ....

- Comparer $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$.

  ....

  ....

- Comparer $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 3\sqrt{7}$.

  ....

  ....

2.3 Opposé et inverse

Propriétés

Soient a et$b$ deux nombres réels.

• Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$.

• Si a et b sont non nuls et de même signe tels que $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Exemples

Comparer $a = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ et $b = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

....

....

....

2.4 Carré et racine carrée

Propriétés

Soient a et$b$ deux nombres réels positifs.

• Si $a \leq b$ et alors $a^2 \leq b^2$.

• Si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Exemples

Comparer $a = (1+\sqrt{2\sqrt{3}})^2$ et $b = (1+\sqrt{3\sqrt{7}})^2$.

....

....

....

3 Encadrement

Définitions

Soient a,b et x des réels.

Encadrer x signifie trouver deux réels a et b tels que :$a \leq x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x \leq b$ ou $a < x < b$.

- Le nombre réel positif $b - a$ est appelé amplitude de l'encadrement.
- a est appelé une valeur approchée par défaut de x à $b - a$ prés.

- b est appelé une valeur approchée par excès de x à $b-a$ prés.

Propriétés

Soient a,b,c,d,x et y tels $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.On a :

- $a+c \leq x+y \leq b+d$.
- $a-d \leq x-y \leq b-c$.
- Si a, b, c et d sont positifs, alors $ac \leq xy \leq bd$.
- Si a, b, c et d sont positifs non nuls, alors $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$.

Exemples

Soient x et y deux réels, tels que $\sqrt{2} < x < 2$ et $1 < y < \sqrt{3}$. Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$.

....

....

....

....

....

....

4 Valeur absolue

4.1 Distance entre deux réels

Définitions

La «**distance entre deux réels** x **et** y» est la différence entre le plus grand et le plus petit des deux, et se note $\mathrm{d}(x;y)$ ou $|x-y|$.

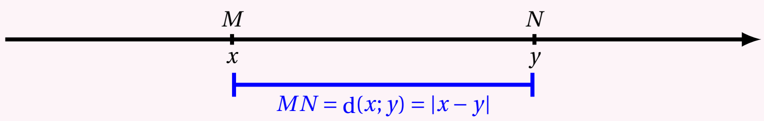
Exemples

Compléter ce qui suit :

- $\mathrm{d}(3,2) =$ ....
- $\mathrm{d}(1,-5) =$ ....
- $\mathrm{d}\left(-4,-\frac{1}{3}\right) =$ ....
- $\mathrm{d}(\sqrt{2},\sqrt{3}) =$ ....

Interprétation graphique

Sur une droite graduée d'origine O, Soient M le point d'abscisse x, et N le point d'abscisse y.
$\mathrm{d}(x;y)$ est la distance entre les points M et N, c'est à dire MN.



4.2 Valeur absolue d'un réel

Définitions

On appelle valeur absolue d'un réel x, notée $|x|$, la distance entre x et 0, c'est à dire $\mathrm{d}(x;0)$.

Exemples

Compléter ce qui suit :

- $|5| =$ ....
- $|-4| =$ ....
- $\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right| =$ ....
- $|1-\sqrt{2}| =$ ....

Remarque

Soit x un nombre réel. On a :

- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x - 0 = x$.
- Si $x \leq 0$ alors $|x| = 0 - x = -x$.

Propriétés

Soient x, y et a des réels tels que $a > 0$.On a :

- $|-x| = |x|$.
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- $|x - y| \geq |x| - |y|$.
- $|xy| = |x||y|$.
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ avec $y \neq 0$.
- Si $|x| = 0$ alors $x = 0$.
- Si $|x| = a$ alors $x = a$ ou $x = -a$.
- Si $|x| = |y|$ alors $x = y$ ou $x = -y$.

5 Approximations – Approximations décimales

5.1 Approximations

Définitions

Soient a et x deux réels et r un réel strictement positif.

- a est dit «**approximation par défaut**» (ou «**valeur approchée par défaut**») de x «**à r près**» (ou «**à la précision** r»), si $a \leq x \leq a + r$ (i.e. : $0 \leq x - a \leq r$).
- a est dit «**approximation par excès**» (ou «**valeur approchée par excès**») de x «**à r près**» (ou «**à la précision** r»), si $a - r \leq x \leq a$ (i.e. : $-r \leq x - a \leq 0$).
- a est dit «**approximation**» (ou «**valeur approchée**») de x «**à r près**» (ou «**à la précision** r»), si $a - r \leq x \leq a + r$ (i.e. : $|x - a| \leq r$).

5.2 Approximations décimales

Définitions

Soient x un réel tel que $p \times 10^{-n} \leq x \leq (p+1) \times 10^{-n}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

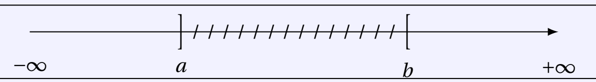
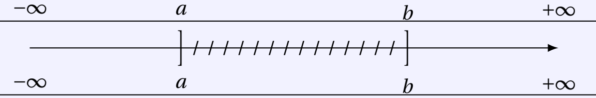
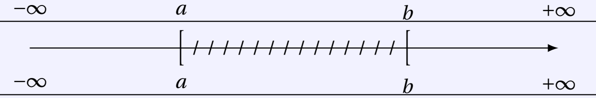
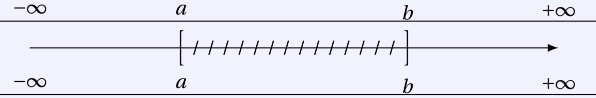
- $p \times 10^{-n}$ est dit «**approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près**».
- $(p+1) \times 10^{-n}$ est dit «**approximation par excès de x à 10^{-n} près**».

6 Intervalles de $\mathbb{R}$

6.1 Intervalles bornés

Définitions

Soient a et b deux réels.

Ensemble de nombres	Représentation	Intervalle
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$		$]a; b[$ ouvert
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$		$]a; b]$ semi-ouvert à gauche
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$		$[a; b[$ semi-ouvert à droite
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$		$[a; b]$ fermé

Exemples

- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ -3 \leq x \leq 2\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}\right\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $\left[-5; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right[= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $]1; \sqrt{2}[= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

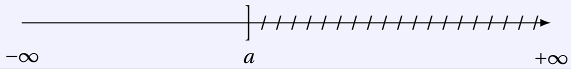
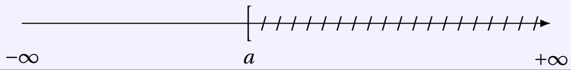
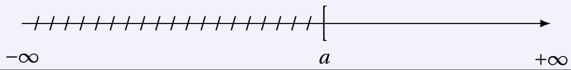
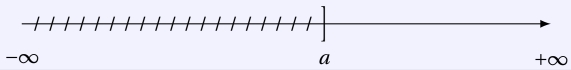
Remarques

- un intervalle réduit à un point a se note $\{a\}$.
- Un intervalle vide se note $\emptyset$.
- Pour tout réel a, on a $[a;a] = \{a\}$.
- Pour tout réel a, on a $]a;a[= \emptyset$.

6.2 Intervalles non bornés

Définitions

Soit a un réel.

Ensemble de nombres	Représentation	Intervalle
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$		$]a;+\infty[$ ouvert
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\}$		$[a;+\infty[$ fermé
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$		$]-\infty;a[$ ouvert
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a\}$		$]-\infty;a]$ fermé

Exemples

- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 2\} =$ ....
- $]-\infty;\sqrt{2}[=$ ....
- $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > -\frac{1}{3}\right\} =$ ....
- $[-3;+\infty[=$ ....

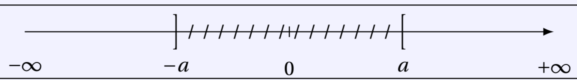
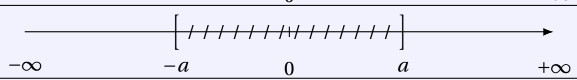
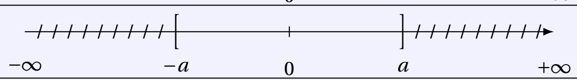
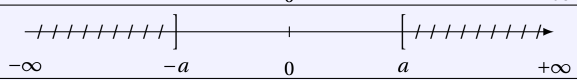
Remarques

- Les symboles $+\infty$ se lit "plus l'infini", et $-\infty$ se lit "moins l'infini". Ce ne sont pas des nombres.
- Les intervalles sont toujours ouvert du côté des symboles $+\infty$ et $-\infty$.
- On a les notations suivantes : $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$, $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ et $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$.

6.3 Intervalles et valeur absolue

Définitions

Soient a un réel positif.

Ensemble de nombres	Représentation	Intervalle
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert < a\}$		$]-a;a[$ ouvert
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert \leq a\}$		$[-a;a]$ fermé
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert > a\}$		$]-\infty;-a[\cup]a;+\infty[$ ouvert
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert \geq a\}$		$]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$ fermé

Exemples

- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert \leq 4\} =$ ....
- $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[=$ ....
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert \leq 0\} =$ ....
- $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert > \frac{3}{4}\right\} =$ ....
- $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[=$ ....
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ \lvert x\rvert > 0\} =$ ....

6.4 Intersection et réunion d'intervalles

Définitions

Soient I et J deux intervalles quelconque (ouverts, semi-ouvert ou fermés).

- L'«**intersection**» des deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres appartenant au premier **et** au deuxième intervalle, elle se note $I \cap J$, et se lit «I **inter** J».
- La «**réunion**» des deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres appartenant au premier **ou** au deuxième intervalle, elle se note $I \cup J$, et se lit «I **union** J».

Exercice

1. Représenter sur une même droite graduée les intervalles $[-3;5]$, $]2;7[$ et $[6;+\infty[$.
2. En déduire les intersections et les réunions deux à deux des intervalles $[-3;5]$, $]2;7[$ et $[6;+\infty[$.

7 Exercices

Exercice 1

1. Comparer les nombres x et y dans chacun des cas suivants :
   (a) $x = 1 - \frac{1732}{735}$ et $y = \frac{1}{100} + 1$ (b) $x = \sqrt{2}$ et $y = \frac{2}{\sqrt{2}+1}$
   (c) $x = \sqrt{3} - 1$ et $y = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$ (d) $x = 17\sqrt{2}$ et $y = 15\sqrt{3}$.
2. On donne les encadrements suivants : $2 \leq x \leq 4$ et $-6 \leq y \leq 1$.
   Donner un encadrement aux expressions suivantes :
   (a) x^2 (b) y^2 (c) $x + y$ (d) $2x - 3y$ (e) xy (f) $\dfrac{1}{x}$.

Exercice 2

1. Déterminer les intervalles correspondants aux inégalités suivantes :
   (a) $x \geq 7$ (b) $x < 10$ (c) $x \leq 3$ (d) $x > 5$
   (e) $2 \leq x \leq 8$ (f) $-4 \leq x < 7$ (g) $0 < x \leq 3$ (h) $-7 < x < -2$
2. Déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$ dans les cas suivants :
   (a) $I =]-2;6]$ et $J = [-3;+\infty[$ (b) $I =]-\infty;7]$ et $J = \left[\frac{-3}{4};+\infty\right[$
   (c) $I =]-1;4[$ et $J = [5;7]$ (d) $I =]1;4]$ et $J =]-2;4]$
   (e) $I =]1;4]$ et $J = [4;+\infty[$ (f) $]-\infty;3]$ et $J = [5;+\infty[$

Exercice 3

1. Calculer ce qui suit :
   (a) $3|0,3-1| - 4|2-1,3| + \frac{1}{2}|1-2,5|$ (b) $|3\sqrt{2}-2| - |2\sqrt{2}-3| + |\sqrt{2}-2|$
   (c) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}| + 2|\sqrt{3}-\sqrt{2}| - |2\sqrt{2}-3\sqrt{3}|$ (d) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$.
2. a et b sont deux nombres réels tels que $a \in [-2;5]$ et $b \in [-3;-1]$.
   Simplifier $A = 2|2a+7| - |3b| + 2|b+8| - |2b-a|$.
3. On pose $A = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$. Calculer $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$, puis simplifier A.

Exercice 4

Soient a et b deux réels tels que $|a+2| \leq 3$ et $b \in [-1;4]$.

1. Établir que $-5 \leq a \leq 1$ et que $|a+b-1| \leq 7$.
2. On pose $E = ab + 6b - 5a$.
   (a) Vérifier que $E = (a+6)(b-5) + 30$.
   (b) En déduire un encadrement de E, et déterminer son amplitude.

Exercice 5

Soit a un réel tel que $a \in [1; +\infty[$. On pose $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$.

1. Montrer que $a(A+1)(A-1) = 1$.
2. Montrer que $2 \leq 1 + A \leq 3$, puis conclure que $1 + \frac{1}{3a} \leq A \leq 1 + \frac{1}{2a}$.
3. Montre que $1,1$ est une valeur approchée du $\sqrt{1,2}$ à $\frac{1}{30}$ prés.

Exercice 6

Soit x un réel positif strictement.

1. Montrer que $1 + \sqrt{1+x} > 2$.
2. Conclure que $0 < \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $1 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.
4. Donner un encadrement au nombre $\sqrt{1,04}$.

Exercice 7

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b \leq 2a$

1. (a) Montrer que $(a-b)(2a-b) \leq 0$.
   (b) Développer $(a-b)(2a-b)$ et $(a\sqrt{2}-b)^2$.
2. On pose $A = \frac{2a^2+b^2}{3ab}$. Montrer que $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq A \leq 1$.
3. Montrer que $\frac{(1+\sqrt{2})^2}{6}$ est une approximation du nombre A à $\frac{(1-\sqrt{2})^2}{6}$ prés.

Exercice 8

Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $E = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

1. Montrer que $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.
2. Montrer que $\sqrt{x^2+1}+1 \geq 2$, puis conclure que $|E - \frac{1}{x}| \leq \frac{1}{2}|x|$.
3. Déterminer une valeur approchée du nombre $\frac{\sqrt{1,0001}}{0,01}$ à 5×10^{-3} prés.