

**DEVOIR LIBRE 1****Exercice 1**

1. On considère le polynôme  $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 5x - 6$ .
  - (a) Déterminer les diviseurs de 6.
  - (b) Calculer l'image de chacun des diviseurs de 6 par le polynôme  $P(x)$ .  
En déduire une racine  $a$  de  $P(x)$ .
  - (c) Calculer l'image de chacun des diviseurs de 6 par le polynôme  $P(x)$ .  
En déduire une racine  $b$  de  $P(x)$ .
  - (d) Déterminer le polynôme  $Q(x)$  tel que  $P(x) = (x - a)(x - b)Q(x)$ .
2. On considère le polynôme  $R(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + 6$ .
  - (a) Déterminer la valeur du réel  $a$ , sachant que le reste de la division euclidienne de  $R(x)$  par  $x + 1$  est 12.
  - (b) Montrer que  $x - 3$  divise  $R(x)$ .
  - (c) Déterminer le polynôme  $S(x)$  tel que  $R(x) = (x - 3)S(x)$ .
  - (d) Montrer que  $-2$  est une racine de  $S(x)$ .
  - (e) En déduire une factorisation de  $R(x)$  en produit de binômes de premier degré.

**Exercice 2**

Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $]0; 1[$ . On pose  $A = \frac{1+\sqrt{x}}{2}$ .

1. Montrer que  $A - 1 = \frac{x-1}{2(1+\sqrt{x})}$ .
2. Montrer que  $0 < \frac{1}{1+\sqrt{x}} < 1$ .
3. Montrer que  $|A - 1| < \frac{1}{2}|x - 1|$ .
4. En déduire que 1 est une valeur approchée de  $\frac{1+\sqrt{0,8}}{2}$  à  $10^{-1}$  près.

**Exercice 3**

$ABCD$  est un parallélogramme de centre  $O$ .

Soient  $E$  et  $F$  deux points vérifiant:  $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ .

On considère le point  $K$ , intersection des deux droites  $(AC)$  et  $(EF)$ , et les points  $B'$  et  $D'$ , projetés respectifs de  $B$  et  $D$ , sur  $(AC)$  parallèlement à  $(EF)$ .

1. Construire une figure.
2. Montrer que  $O$  le milieu de  $[B'D']$ .
3. Montrer que:  $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB'}$  et  $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD'}$ .
4. Exprimer  $\overrightarrow{AC}$  en fonction de  $\overrightarrow{AK}$ .

## CORRECTION DU DEVOIR LIBRE 1

## Exercice 1

1. Soit  $n$  un entier naturel.

(a) i. Étudier la parité de  $n^2 + 3n + 4$

On a  $n^2 + 3n + 4 = (n^2 + n) + 2(n + 2)$ .

Puisque  $n^2$  et  $n$  sont de même parité, alors leur somme  $n^2 + n$  est pair.

Et on a  $2(n + 2)$  est pair.

Donc  $(n^2 + n) + 2(n + 2)$  est pair.

D'où  $n^2 + 3n + 4$  est pair.

ii. Étudier la parité de  $(2021)^n + 4$

On a 2021 est impair, alors  $(2021)^n$  l'est aussi.

Et puisque 4 est pair, alors  $(2021)^n + 4$  est impair.

iii. Étudier la parité de  $2n^3 + 17n$

On a  $2n^3 + 17n = 2(n^3 + 8n) + n$

Et on a  $2(n^3 + 8n)$  est pair.

Donc, si  $n$  est pair, alors  $2(n^3 + 8n) + n$  l'est aussi.

Et si  $n$  est impair, alors  $2(n^3 + 8n) + n$  l'est aussi.

D'où  $2n^3 + 17n$  a la même parité que  $n$ .

(b) Chercher tous les entiers naturels  $n$  tel que:  $\frac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$ .

Soit  $n$  un entier naturel tel  $\frac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$ .

Alors  $n+2$  divise  $2n+7$ .

D'autre part, on a  $2n+7 = 2(n+2) + 3$ .

Et puisque  $n+2$  divise  $2(n+2)$ , alors  $n+2$  est un diviseur de  $2n+7 - 2(n+2) = 3$ .

Les diviseurs de 3 sont 1 et 3, alors  $n+2 = 1$  ou  $n+2 = 3$ .

Donc  $n = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$  ou  $n = 3 - 2 = 1 \in \mathbb{N}$ .

D'où, l'unique entier naturel  $n$  vérifiant  $\frac{2n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$  est  $n = 1$ .

(c) Montrer que:  $\frac{2^n}{5^m} \in \mathbb{D}$  pour tout  $m$  et  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

On a  $\frac{2^n}{5^m} = \frac{2^n \times 2^m}{5^m \times 2^m} = \frac{2^{n+m}}{(5 \times 2)^m} = \frac{2^{n+m}}{10^m}$ .

Puisque  $\frac{2^{n+m}}{10^m} \in \mathbb{D}$ , alors  $\frac{2^n}{5^m} \in \mathbb{D}$ .

(d) Montrer que :  $A = 7^{n+1} + 8 \times 7^n$  est divisible par 15.

On a  $A = 7^{n+1} + 8 \times 7^n = 7^n \times 7 + 8 \times 7^n = 7^n \times (7 + 8) = 7^n \times 15$ .

D'où  $A$  est divisible par 15.

2. Soient  $a = 3060$ ,  $b = 1224$  et  $c = 71$ .

(a) Montrer que  $c$  est un nombre premier.

On a  $2^2 = 4 < 71$ , et 2 ne divise pas 71.

$3^2 = 9 < 71$ , et 3 ne divise pas 71.

$5^2 = 25 < 71$ , et 5 ne divise pas 71.

$7^2 = 49 < 71$ , et 7 ne divise pas 71.

$11^2 = 121 > 71$ , alors  $c = 71$  est un nombre premier.

(b) Décomposer les nombres  $a$  et  $b$  en produit de facteurs premiers.

On a	$a = 3060$	$\begin{array}{c c} 2 & \\ \hline 1530 & \\ \hline 765 & \\ \hline 255 & \\ \hline 85 & \\ \hline 17 & \\ \hline 1 & \end{array}$	et	$b = 1224$	$\begin{array}{c c} 2 & \\ \hline 612 & \\ \hline 306 & \\ \hline 153 & \\ \hline 51 & \\ \hline 17 & \\ \hline 1 & \end{array}$
------	------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----	------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

D'où  $a = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 17$  et  $b = 2^3 \times 3^2 \times 17$ .

(c) Déterminer  $PGCD(a, b)$  et  $PPCM(a, b)$ .

On a  $PGCD(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 17 = 612$  et  $PPCM(a, b) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 17 = 6120$ .

(d) i. Simplifier  $A = \frac{a}{b}$ .

On a  $a = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 17 = 5 \times PGCD(a, b)$  et  $b = 2^3 \times 3^2 \times 17 = 2 \times PGCD(a, b)$ .

$$\text{Alors } A = \frac{a}{b} = \frac{5 \times \cancel{PGCD(a, b)}}{2 \times \cancel{PGCD(a, b)}} = \frac{5}{2}.$$

ii. Simplifier  $B = \frac{7}{a} + \frac{11}{b}$ .

On a  $PPCM(a, b) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 17 = a \times 2 = b \times 5$ .

$$\text{Alors } B = \frac{7}{a} + \frac{11}{b} = \frac{7 \times 2}{a \times 2} + \frac{11 \times 5}{b \times 5} = \frac{14}{PPCM(a, b)} + \frac{55}{PPCM(a, b)} = \frac{69}{6120}.$$

iii. Simplifier  $C = \sqrt{ab}$ .

On a  $a = 5 \times PGCD(a, b)$  et  $b = 2 \times PGCD(a, b)$ .

Donc  $ab = (5 \times PGCD(a, b)) \times (2 \times PGCD(a, b)) = 10 \times (PGCD(a, b))^2$ .

D'où  $C = \sqrt{ab} = \sqrt{10 \times (PGCD(a, b))^2} = PGCD(a, b) \times \sqrt{10} = 612\sqrt{10}$ .

### Exercice 2

1. (a) Factoriser  $A = (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - 2)(1 - x)$ .

$$\text{On a } A = (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - 2)(1 - x)$$

$$= (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x^2 - (\sqrt{2})^2)(1 - x)$$

$$= (x - \sqrt{2})(3x - 1) + (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(1 - x)$$

$$= (x - \sqrt{2})[(3x - 1) + (x + \sqrt{2})(1 - x)]$$

$$= (x - \sqrt{2})[3x - 1 + x - x^2 + \sqrt{2} - x\sqrt{2}]$$

$$= (x - \sqrt{2})[-x^2 + 4x - x\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}]$$

$$= (x - \sqrt{2})[-x^2 + (4 - \sqrt{2})x - 1 + \sqrt{2}]$$

(b) Factoriser  $B = x^3 - 8$ .

$$\text{On a } B = x^3 - 8$$

$$= x^3 - 2^3$$

$$= (x - 2)(x^2 + x \times 2 + 2^2)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

(c) Factoriser  $C = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + (x^2 - 3)$ .

$$\begin{aligned}
\text{On a } C &= x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + (x^2 - 3) \\
&= x^2 - x\sqrt{3} - x\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + (x^2 - 3) \\
&= x(x - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \\
&= (x - \sqrt{3})[x - \sqrt{3} + (x + \sqrt{3})] \\
&= (x - \sqrt{3})[x - \cancel{\sqrt{3}} + x + \cancel{\sqrt{3}}] \\
&= 2x(x - \sqrt{3})
\end{aligned}$$

2. Développer et réduire:  $(x - \sqrt{3})(2 - x)(x + \sqrt{3}) - (x - 3)^3$ .

$$\begin{aligned}
\text{On a } B &= (x - \sqrt{3})(2 - x)(x + \sqrt{3}) - (x - 3)^3 \\
&= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(2 - x) - (x - 3)^3 \\
&= (x^2 - (\sqrt{3})^2)(2 - x) - (x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3) \\
&= (x^2 - 3)(2 - x) - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) \\
&= (2x^2 - x^3 - 6 + 3x) - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) \\
&= 2x^2 - x^3 - 6 + 3x - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 \\
&= -2x^3 + 11x^2 - 24x + 21
\end{aligned}$$

### Exercice 3

$ABC$  est un triangle.

Soient  $I$ ,  $J$  et  $K$  des points du plan tels que:

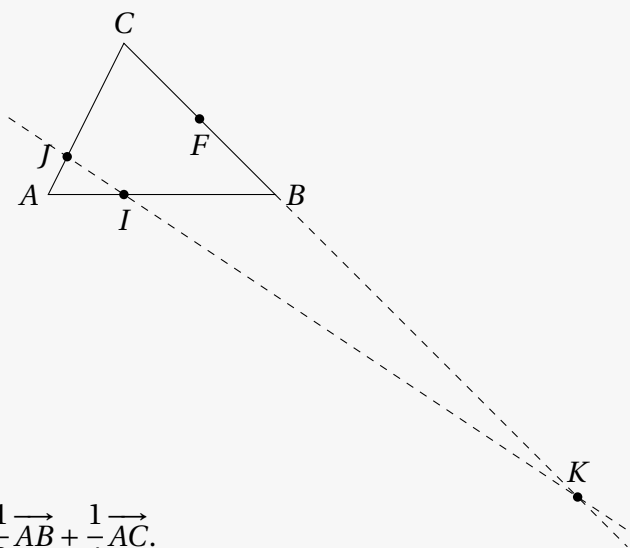
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

1. Montrer que  $\overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CB}$ .

$$\text{On a } \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}, \text{ alors } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}, \text{ donc } \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CK}.$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CK}, \text{ et par suite } \overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CB}.$$

2. Construire les points  $I$ ,  $J$  et  $K$ .



3. (a) Montrer que  $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ .

$$\begin{aligned}
\text{On a } \vec{IJ} &= \vec{IA} + \vec{AC} + \vec{CJ} \\
&= -\vec{AI} + \vec{AC} + \vec{CJ} \\
&= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{CA} \\
&= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{4}\vec{AC} - \frac{3}{4}\vec{AC} \\
&= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} \\
\text{D'où } \vec{IJ} &= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}.
\end{aligned}$$

(b) Exprimer le vecteur  $\vec{IK}$  en fonction de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .

$$\begin{aligned}
\text{On a } \vec{IK} &= \vec{IA} + \vec{AC} + \vec{CK} \\
&= -\vec{AI} + \vec{AC} + \vec{CK} \\
&= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AC} + 3\vec{CB} \\
&= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AC} + 3(\vec{CA} + \vec{AB}) \\
&= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AC} + 3(-\vec{AC} + \vec{AB}) \\
&= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AC} - 3\vec{AC} + 3\vec{AB} \\
&= -\frac{1}{3}\vec{AB} - 2\vec{AC} + \frac{9}{3}\vec{AB} \\
&= \frac{8}{3}\vec{AB} - 2\vec{AC} \\
\text{D'où } \vec{IK} &= \frac{8}{3}\vec{AB} - 2\vec{AC}.
\end{aligned}$$

(c) En déduire que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont alignés.

$$\text{On a } -8\vec{IJ} = -8\left(-\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}\right) = \frac{8}{3}\vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{IK}.$$

Alors, les vecteurs  $\vec{IJ}$  et  $\vec{IK}$  sont colinéaires.

D'où, les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont alignés.

4. Soit  $F$  un point tel que  $\vec{AF} = \frac{3}{2}\vec{AI} + 2\vec{AJ}$ .

(a) Construire le point  $F$ .

Voir la figure.

(b) Montrer que  $\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ .

$$\begin{aligned}
\text{On a } \vec{AF} &= \frac{3}{2}\vec{AI} + 2\vec{AJ} \\
&= \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\vec{AB} + 2(\vec{AC} + \vec{CJ}) \\
&= \frac{1}{2}\vec{AB} + 2\left(\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{CA}\right) \\
&= \frac{1}{2}\vec{AB} + 2\left(\frac{4}{4}\vec{AC} - \frac{3}{4}\vec{AC}\right) \\
&= \frac{1}{2}\vec{AB} + 2 \times \frac{1}{4}\vec{AC} \\
&= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \\
\text{D'où } \vec{AF} &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}.
\end{aligned}$$

(c) Montrer que  $F$  est le milieu du segment  $[BC]$ .

On a  $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$

$$\begin{aligned} &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{2}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

D'où  $F$  est le milieu du segment  $[BC]$ .