

Sommaire

1	Définitions et vocabulaire	1
2	Égalité de deux polynômes	1
3	Operations sur les polynômes	1
3.1	Somme de deux polynômes	1
3.2	Produit de deux polynômes	2
3.3	Division d'un polynôme par un binôme de la forme $x - a$	2
3.4	Racine d'un polynôme	3
4	Exercices	3

1 Définitions et vocabulaire

Définitions

- Toute expression de la forme ax^n , avec a un réel et n un entier naturel, est appelée «**monôme de degré n** », et le réel a est appelé «**coefficient du monôme de degré n** ».
- Toute somme finie de monôme est appelée «**polynôme**».
- Toute expression de la forme $ax + b$, avec a et b des réels tels que $a \neq 0$, est appelée «**binôme de premier degré**».
- Toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, avec a , b et c des réels tels que $a \neq 0$, est appelée «**trinôme du second degré**».
- Toute expression de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, avec a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et a_n des réels tels que $a_n \neq 0$, est appelée «**polynôme de degré n** ».
- Un polynôme est souvent noté par $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$,
- Le degré d'un polynôme P est noté $\deg(P)$ ou $d^\circ P$.
- Un polynôme P est dit «**nul**», si tous ses coefficients sont nuls, ce qui signifie que $P(x) = 0$, pour tout x de \mathbb{R} .

Exemples

On considère $P(x) = -x^5 + \frac{1}{2}x^4 + x^2\sqrt{2} + x - 5$.

- $-x^5$, $\frac{1}{2}x^4$, $x^2\sqrt{2}$, x et -5 sont des monômes de degrés respectifs 5, 4, 2, 1 et 0.
- les réels -1 , $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, 1, -5 sont les coefficients respectifs des monômes $-x^5$, $\frac{1}{2}x^4$, $x^2\sqrt{2}$, x et -5 .
- $P(x)$ est un polynôme de degré 5. On a $d^\circ P = 5$.
- les réels -1 , $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{2}$, 1, -5 sont les coefficients du polynôme $P(x)$.

2 Égalité de deux polynômes

Propriétés

Deux polynômes sont égaux, si et seulement si, leurs coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exercice

Déterminer les réels a , b et c dans les cas suivants, sachant que $P(x) = Q(x)$:

1. $P(x) = 3x^2 + (b-1)x$ et $Q(x) = (a+1)x^2 + 2x + c$.
2. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ et $Q(x) = (x+1)(x-3)(ax+b)$.

3 Operations sur les polynômes

3.1 Somme de deux polynômes

Activité

Compléter les additions suivantes :

+	$-7x^3$	·	$2x$	11		+	$3x^4$	·	$+x^2$	$-3x$	-5
$\underline{\hspace{1cm}}$	$2x^3$	$-4x^2$	$-5x$	·		$\underline{\hspace{1cm}}$	·	$-2x^3$	$-2x^2$	·	$+3$
=		=

Propriété

La somme de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est le polynôme, noté $(P+Q)(x)$, défini par :

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x),$$

et on a $d^\circ(P+Q) \leq \sup(d^\circ P; d^\circ Q)$.

3.2 Produit de deux polynômes

Activité

1. Compléter la multiplication suivante :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \times \\
 -x^3 \\
 \hline
 + \\
 + \\
 \hline
 =
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \hline
 \dots
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x^2 \\
 \cdot \\
 \hline
 \dots \\
 \dots \\
 \cdot \\
 \hline
 \dots
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 -x \\
 +x \\
 \hline
 \dots \\
 \dots \\
 \cdot \\
 \hline
 \dots
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 +1 \\
 -2 \\
 \hline
 \dots \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline
 \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

2. Développer $P(x) \times Q(x)$, où $P(x) = x^2 - x + 1$ et $Q(x) = -x^3 + x - 2$.

Propriété

Le produit de deux polynômes non nuls $P(x)$ et $Q(x)$ est le polynôme, noté $(P \times Q)(x)$, défini par $(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$,
et on a $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$.

3.3 Division d'un polynôme par un binôme de la forme $x - a$

Activité

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

1. Compléter les divisions euclidiennes ci-dessous.

$ \begin{array}{r} x^3 \quad -4x^2 \quad -3x \quad +18 \\ \hline \dots \quad \dots \\ 0 \quad \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \\ 0 \quad \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \\ 0 \quad \dots \end{array} $	$ \begin{array}{r} x \quad -3 \\ \hline \dots \quad \dots \quad \dots \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^3 \quad -4x^2 \quad -3x \quad +18 \\ \hline \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \hline \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \end{array} $	$ \begin{array}{r} x \quad +2 \\ \hline \dots \quad \dots \quad \dots \end{array} $
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------

2. Calculer $P(3)$ et $P(2)$.

Propriété

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n , avec $n \in \mathbb{N}^*$, et a un réel.

Il existe un unique polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$.

- Le polynôme $Q(x)$ est appelé «**quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$** ».
- Le réel $P(a)$ est appelé «**reste de la division euclidienne $P(x)$ par $x - a$** ».

Exercice

Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de $P(x) = 4x^3 - 3x + 1$ par $x - 1$, puis par $x + 1$.

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n , avec $n \in \mathbb{N}^*$, et a un nombre réel.

$P(x)$ est dit «**divisible par $x - a$** » s'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$.

3.4 Racine d'un polynôme

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme.

Tout nombre réel a vérifiant $P(a) = 0$ est appelé «**racine**» ou «**zéro**» du polynôme $P(x)$.

Propriétés

Soit $P(x)$ un polynôme et a un nombre réel.

$P(x)$ est divisible par $x - a$ si et seulement si a est une racine du polynôme $P(x)$.

Exercice

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

1. Montrer que 2 est une racine de $P(x)$.
2. Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
3. Montrer que $Q(x)$ est divisible par $x + 3$.
4. Déterminer les réels a et b tel que $P(x) = (x - 2)(x + 3)(ax + b)$.

4 Exercices

Exercice 1

Déterminer le degré du polynôme $P(x)$, dans chacun des cas suivants :

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $P(x) = (x + 1)^2 - 2(x - 1)^2$. | (b) $P(x) = x^4 - 1 + 3x^5$. |
| (c) $P(x) = (2x^2)^3 - 3x^5$. | (d) $P(x) = (x + 2)^3 - (x^3 + 8)$. |

Exercice 2

Déterminer les réels a , b et c sachant que $P(x) = Q(x)$ dans les cas suivants :

- $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ et $Q(x) = (ax + b)(x + 1)(x + 3)$.
- $P(x) = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$ et $Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
- $P(x) = (x^2 - 1)(ax^3 + bx^2 + cx)$ et $Q(x) = x^5 + x^3 - 2x$.

Exercice 3

On considère les deux polynômes $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$ et $Q(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 1$.

Déterminer $2P(x) - Q(x)$ et $P(x) \times Q(x)$.

Exercice 4

Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$, dans les cas suivants :

- | | |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| (a) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ et $a = -2$ | (b) $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 3$ et $a = 1$ |
| (c) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 5$ et $a = -\frac{3}{2}$. | (d) $P(x) = 4x^5 - 5x^3 + 1$ et $a = 1$. |

Exercice 5

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $x - 1$.
2. Déterminer $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$.
3. Vérifier que -2 est une racine de $Q(x)$.
4. Écrire $P(x)$ sous forme de produit de binômes de premier degré.
5. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 6

On considère le polynôme P de variable réelle x tel que : $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

1. vérifier que 1 est une racine de $P(x)$.
2. Déterminer $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 1)Q(x)$.
3. vérifier que -1 est une racine de $Q(x)$.
4. Déterminer $h(x)$ tel que : $Q(x) = (x + 1)h(x)$
5. vérifier que 3 est une racine de $h(x)$.
6. Écrire $P(x)$ sous la forme de produit de binômes du premier degré.
7. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 7

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

1. Calculer $P(1)$ et $P(-3)$.
2. Factoriser $P(x)$ en produit de binômes du premier degré.
3. Soit $x \in [0; 1]$. Montrer que $\left| \frac{P(x)}{x+3} \right| \leq 2$.

Exercice 8

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

1. Calculer $P(-2)$ et $P(1)$
2. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 2$.
3. Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ l'est aussi.
4. Dédire toutes les racines de $P(x)$.

Exercice 9

On considère le polynôme P de variable réelle x tel que $P(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$.

1. Vérifier que -1 est une racine de $Q(x)$.
2. Déterminer $Q(x)$ tel que $P(x) = (x + 1)Q(x)$.
3. Calculer $Q(1 + \sqrt{2})$.
4. Déterminer a tel que $Q(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x + a)$.
5. Montrer que pour tout $x \in]2, 1 + \sqrt{2}[$: $-4 < P(x) < 0$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme P de variable réelle x tel que $P(x) = (x - 2)^{3n} + (x - 1)^{2n} - 1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
2. Déterminer le degré de $Q(x)$ en fonction de n .
3. Calculer $P(1)$ en fonction de n .
4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $P(x)$ est divisible par $x - 1$.
5. On suppose que $n = 1$.
Déterminer a et b deux réels tels que $P(x) = (x - 2)((x - a)^2 + bx)$.

Exercice 11

On considère le polynôme P de degré 3 vérifiant $P(1) = 7$, $P(4) = 16$, $P(3) = 9$ et $P(2) = 4$.

On pose $Q(x) = P(x) - x^2$.

1. Montrer qu'il existe k tel que $Q(x) = k(x - 2)(x - 3)(x - 4)$.
2. Calculer $Q(1)$, puis déduire la valeur de k .
3. Déterminer l'expression de $P(x)$.