المعادلات التفاضلية

محتوى الدرس

1. المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

تعاريف

كل متساوية على شكل $y' = ay + b$ حيث a و b عددين حقيقيين معلومين و y هي دالة عددية مجهولة و y' مشتقتها، تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.
كل دالة عددية f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق لكل x من $\mathbb{R}$ المتساوية $f'(x) = af(x) + b$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$.
حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو تحديد جميع الدوال f القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق المعادلة.

نشاط 1

حل حسب قيم العددين الحقيقيين a و b المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$.

خاصية

- المعادلة التفاضلية $y' = 0$ حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- المعادلة التفاضلية $y' = b$ حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto bx + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- المعادلة التفاضلية $y' = ay$ بحيث $a \neq 0$ حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.
- المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ بحيث $a \neq 0$ حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

نتيجة

ليكن a و b عددين حقيقيين.
لكل عددين حقيقيين x_0 و y_0، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل حلا وحيدا f يحقق الشرط $f(x_0) = y_0$.

تمرين 1

1. (ا) حل المعادلة التفاضلية $(E) :\ 2y' + y = 1$.
   (ب) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(-1) = 2$.
2. (ا) حل المعادلة التفاضلية $(E) :\ y' = 3y$.
   (ب) حدد الدالة f حل المعادلة (E) و التي منحناها يمر من النقطة $(2;3)$.
3. (ا) حل المعادلة التفاضلية $(E) :\ y' = -2y$.
   (ب) حدد الدالة f حل المعادلة (E) و التي منحناها يقبل مماس في النقطة ذات الافصول 0 موازٍ للمستقيم ذو المعادلة $y = -4x + 1$.

تمرين 2

نعتبر المعادلتين التفاضليتين $(E_0) :\ y' - 2y = 0$ و $(E) :\ y' - 2y = e^x$.
1. بين أن الدالة $f_0 :\ x \mapsto -e^x$ حل للمعادلة (E).
2. حل المعادلة التفاضلية (E_0).

3. بين أن f حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كانت $f - f_0$ حل للمعادلة التفاضلية (E_0).
4. استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E).
5. حدد الدالة φ حل المعادلة التفاضلية (E) التي تنعدم في 1.

2. المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

تعاريف

كل متساوية على شكل $y'' + ay' + by = 0$ حيث a و b عددين حقيقيين معلومين و y هي دالة عددية مجهولة و y' و y'' هما مشتقتيها الأولى و الثانية، تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.
كل دالة عددية f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق لكل x من $\mathbb{R}$ المتساوية $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$.
حل المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ هو تحديد جميع الدوال f القابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و التي تحقق المعادلة.
نسمي المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ حيث r هو المجهول.

خاصية

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E) :\ y'' + ay' + by = 0$.

- إذا كانت المعادلة المميزة للمعادلة (E) تقبل حلين حقيقيين r_1 و r_2 فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- إذا كانت المعادلة المميزة للمعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا وحيدا r فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{rx}$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- إذا كانت المعادلة المميزة للمعادلة (E) تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = \overline{r_1}$ فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto e^{px}(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

ملاحظة

حلول المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: ....

تمرين 3

1. (ا) حل المعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 13y = 0$.
(ب) حدد الحل f الذي يحقق $f(0) = 0$ و $f'(0) = 3$.
(ج) استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto e^{2x}\sin(3x)$.
2. نعتبر المعادلة التفاضلية $(E) :\ y' - 2y = xe^x$.
(ا) نقبل أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا φ يحقق $\varphi(0) = 1$، حدد معادلة المماس لمنحنى الدالة φ في النقطة ذات الأفصول 0.
(ب) حل المعادلة التفاضلية $(E_0) :\ y' - 2y = 0$.

(ج) بين أن الدالة $h_0 : \ x \mapsto -(1+x)e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية (E).
(د) بين أن h حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت $h - h_0$ حل للمعادلة (E_0).
(ه) استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E).
(و) حدد تعبير الدالة φ.