Chapitre 3

Ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Sommaire

1 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

1.1 Sous-ensembles remarquables

On distingue plusieurs ensembles de nombres.

- L'ensemble des «**entiers naturels**», noté $\mathbb{N}$, qui contient les nombres 0, 1, 2, 3, etc.
- L'ensemble des «**entiers relatifs**», noté $\mathbb{Z}$, qui contient les entiers naturels et leurs opposés -1, -2, -3, etc.
- L'ensemble des nombres «**décimaux**», noté $\mathbb{D}$, qui contient les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où a est un entier relatif et n est un entier naturel.
- L'ensemble des nombres «**rationnels**», noté $\mathbb{Q}$, qui contient les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif et b est un entier naturel non nul.
- L'ensemble des nombres «**réels**», noté $\mathbb{R}$, qui contient tout les nombres qu'on utilise à ce niveau.
- L'ensemble des nombres «**irrationnels**», noté $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, qui contient tout les nombres réels qui ne sont pas rationnels.

Exemples

- 7 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$; on note $7 \in \mathbb{N}$.
- -5 n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{N}$ et appartient à $\mathbb{Z}$; on note $-5 \notin \mathbb{N}$ et $-5 \in \mathbb{Z}$.
- On a $2 \in \mathbb{D}$ car $2 = \frac{2}{10^0}$; $3,14 \in \mathbb{D}$ car $3,14 = \frac{314}{10^2}$; et $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{8} = \frac{375}{10^3}$.
- On a $-3 \in \mathbb{Q}$ car $-3 = \frac{-3}{1}$; $-24,8 \in \mathbb{Q}$ car $-24,8 = -\frac{124}{5}$; et $1,232323\ldots \in \mathbb{Q}$ car $1,232323\ldots = \frac{122}{99}$.
- On a $\sqrt{3} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $\pi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ car $\sqrt{3}$ et π ne sont pas des rationnels.

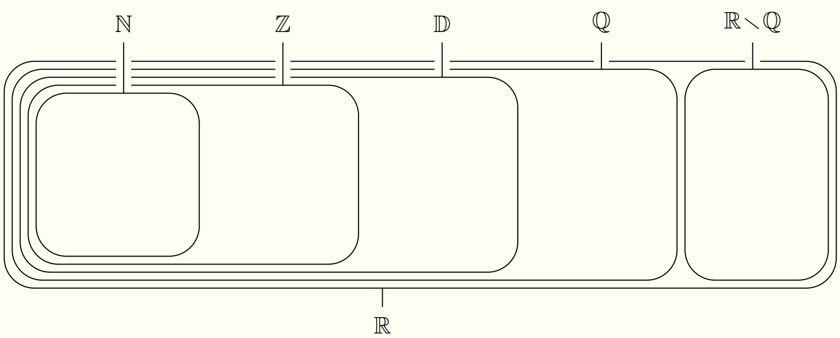
Remarques

- Un nombre écrit en virgule n'appartient pas nécessairement à $\mathbb{D}$.
  - S'il est avec un nombre limité de chiffres après la virgule, il appartient à $\mathbb{D}$.
  - S'il est avec un nombre de chiffres limité ou répété infiniment après la virgule, il appartient à $\mathbb{Q}$.
  - S'il est avec un nombre de chiffres illimité et sans répétition, après la virgule, il appartient à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
- Tout nombre irrationnel est un nombre réel.
  On dit alors que «$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **est inclus dans** $\mathbb{R}$», et on écrit $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
  De même, on conclue que :
  - Tout entier naturel est un entier relatif, et on écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
  - Tout entier relatif est un nombre décimal, et on écrit $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
  - Tout nombre décimal est un nombre rationnel, et on écrit $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
  - Tout nombre rationnel est un nombre réel, et on écrit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

  On en déduit quee $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (voir le figure de l'exercice suivant).

Exercice

Mettre chacun des nombres suivants dans la zone correspondante, dans la figure ci-contre : $-7,2$; $-\sqrt{169}$; $\frac{\pi-1}{2}$; $5+\sqrt{6}$; $\frac{357}{17}$; $\frac{\sqrt{81}}{27}$.



1.2 Écritures et notations

- L'ensemble des entier naturels s'écrit $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$.
- L'ensemble des entier relatifs s'écrit $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$.
- L'ensemble des nombres décimaux s'écrit $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n} \ / \ a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$.
- L'ensemble des nombres rationnels s'écrit $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z} \ , \ b \in \mathbb{N} \text{ et } b \neq 0\}$.

- Le symbole * dans les ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ exclu le nombre 0 d'eux.
  Par exemple, $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$ et $\mathbb{Z}^* = \{\ldots; -3; -2; -1; 1; 2; 3; \ldots\}$.
- Les ensembles des nombres positifs, 0 y compris, sont notés $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{D}^+$, $\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{R}^+$.
  Par exemple, $\mathbb{Z}^+ = \{0; 1; 2; 3; \ldots\} = \mathbb{N}$.
- Les ensembles des nombres négatifs, 0 y compris, sont notés $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{D}^-$, $\mathbb{Q}^-$ et $\mathbb{R}^-$.
  Par exemple, $\mathbb{Z}^- = \{0; -1; -2; -3; \ldots\}$.
- Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'«**ensemble vide**» et se note $\emptyset$.

Exercice

Compléter avec l'un des symboles $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:
$4 \cdots \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \cdots \mathbb{N}$; $4,5 \cdots \mathbb{Z}$; $\frac{1}{6} \cdots \mathbb{Q}$; $\frac{1}{4} \cdots \mathbb{D}$; $\frac{1}{3} \cdots \mathbb{D}$; $\sqrt{3} \cdots \mathbb{R}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdots \mathbb{Q}$; $\pi \cdots \mathbb{R}$; $\pi \cdots \mathbb{Q}$; $\sqrt{0,25} \cdots \mathbb{D}$; $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} \cdots \mathbb{Q}$; $\frac{17}{125} \cdots \mathbb{D}$; $\frac{2}{15} \cdots \mathbb{D}$; $-2 \cdots \mathbb{R}$; $\mathbb{Z} \cdots \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \cdots \mathbb{Z}$; $\mathbb{R}^+ \cdots \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \cdots \mathbb{N}$; $\mathbb{Z}^* \cdots \mathbb{Q}$; $\mathbb{D}^+ \cdots \mathbb{Q}^-$; $\emptyset \cdots \mathbb{D}$.

2 Opérations dans $\mathbb{R}$

2.1 Addition

Propriétés

Soient a, b et c des nombres réels, on a :

(i) $a + b = b + a$
(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
(iii) $a + 0 = 0 + a = a$
(iv) $(-a) + a = a + (-a) = 0$ où $-a$ est appelé «**opposé de a**».

2.2 Multiplication

Propriétés

Soient a, b et c des nombres réels, on a :

(i) $a \times b = b \times a$
(ii) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times b \times c$
(iii) $1 \times a = a \times 1 = a$
(iv) $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = \frac{a}{a} = 1$; $a \neq 0$ où $\frac{1}{a}$ est appelé «**inverse de a**».

2.3 Opérations sur les fractions

Propriétés

Soient a, b, c et d des nombres réels tel que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :

(i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
(ii) $\frac{a}{b} + c = \frac{a+bc}{b}$
(iii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
(iv) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
(v) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
(vi) $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$
(vii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est équivaut à $ad = bc$.
(viii) $\frac{a}{b} = 1$ est équivaut à $a = b$.
(ix) $\frac{a}{b} = 0$ est équivaut à $a = 0$.

3 Racines carrées

Définition

Soit a un nombre réel positif.
On appelle «**racine carrée de a**» le nombre réel positif b vérifiant $a = b^2$.
Le nombre b est noté $\sqrt{a}$, et on écrit $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples

- $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.
- $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$.
- $\sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$.

Propriétés

Soient a et b deux nombres de réels positifs, on a :

(i) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (ii) $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a$ (iii) $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$ où $n\in\mathbb{N}$.

(iv) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ où $b\neq 0$. (v) $\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}=a$ où $a\neq 0$.

(vi) $\sqrt{a}=b$ est équivaut à $a=b^2$. (vii) $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ est équivaut à $a=b$. (viii) $\sqrt{a}=0$ est équivaut à $a=0$.

Exercice

1. Simplifier l'écriture des nombres suivants :
   (a) $\sqrt{27}\times 5\sqrt{6}$ (b) $7\sqrt{75}-2\sqrt{12}$
   (c) $(11\sqrt{5}-5\sqrt{11})(11\sqrt{5}+5\sqrt{11})$ (d) $3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}$
2. On pose $X=\sqrt{10-\sqrt{84}}+\sqrt{10+\sqrt{84}}$. Développer X^2, puis en déduire la valeur X.
3. Écrire les fractions suivantes sans racine carrée au dénominateur : (a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

4 Puissances – Puissances de 10 – Écriture scientifique

4.1 Puissances

Définition

Soient a un réel non nul et n un entier naturel.

- La «**puissance de a d'exposant n**», noté a^n, se définit par :
  - Si $n=0$ alors $a^0=1$.
  - Si $n=1$ alors $a^1=a$.
  - Si $n\neq 0$ et $n\neq 1$ alors $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n \text{ facteurs}}$
- La «**puissance de a d'exposant $-n$**», noté a^{-n}, est l'inverse de a^n, et on a :
  - Si $n=1$ alors $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.
  - Si $n\neq 0$ et $n\neq 1$ alors $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}=\dfrac{1}{\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n \text{ facteurs}}}$

Propriétés

Soient a et b deux nombres de réels non nuls, et n et m deux entiers relatifs, on a :

(i) $a^n\times a^m=a^{n+m}$ (ii) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ (iii) $(a^n)^m=a^{n\times m}$

(iv) $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ (v) $a^n\times b^n=(ab)^n$

4.2 Puissances de 10

Définition

Soit n un entier naturel, on a :

- $10^0=1$ • $10^1=10$ • $10^{-1}=0,1$ • $10^n=1\underbrace{000\cdots000}_{n \text{ fois le chiffre } 0}$ • $10^{-n}=\underbrace{0,00\cdots0}_{n \text{ fois le chiffre } 0}1$

4.3 Écriture scientifique

Définition

Tout nombre décimal x peut s'écrire sous la forme $x=a\times 10^n$, où $n\in\mathbb{Z}$, et $a\in\mathbb{D}$ vérifiant $1\leq a<10$ si x est positive, ou $-10<a\leq -1$ si x est négatif.

L'écriture $a\times 10^n$ est appelé l'«**écriture scientifique**» du nombre x .

Exercice

1. Simplifier les expressions suivantes : (a) $\frac{10^9\times6^3}{25^4\times3\times2^{11}}$ (b) $\frac{1}{10^{118}}-\frac{1}{10^{119}}$ (c) $5^{108}\times2^{106}\times11\times\frac{1}{10^{107}}$
2. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants : (a) 2000000 (b) $0,0036$ (c) $0,00000375\times5000$

5 Identités remarquables – Développement et factorisation

5.1 Identités remarquables

Propriétés

Soient a ,b et k des réels, on a :

(i) $k(a+b)=ka+kb$
(ii) $k(a-b)=ka-kb$
(iii) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
(iv) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
(v) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
(vi) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
(vii) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
(viii) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
(ix) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

5.2 Développement et factorisation

Définitions

Dans une expression algébrique :

- «**Factoriser**» c'est transformer une somme de termes en un produit de facteurs.
- «**Développer**» c'est transformer un produit de facteurs en une somme de termes.
- «**Réduire**» c'est rassembler les termes de même nature (mêmes lettres et mêmes exposants).
- «**Ordonner**» c'est ranger les termes suivant les puissances (dé)croissantes et l'ordre alphabétique.

Exercice

1. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :
   (a) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$ (b) $(2x+1)^2+(4x-1)(4x+1)$ (c) $(2x+3)^3$ (d) $(x-2)^3$
2. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $(3x+2)(x-1)-(1-x)(-2x+1)$ (b) $12x^3-16x^2+32x$ (c) $16-4x^2$
   (d) $(4x-8)(3x-1)-x^2+4x-4$ (e) $64x^3-27$ (f) x^2-2x-3

6 Exercices

Exercice 1

Compléter par les symboles "$\in$", "$\notin$", "$\subset$" et "$\not\subset$" :

(a) $-12\cdots\mathbb{N}$ (b) $37,9\cdots\mathbb{Q}$ (c) $\frac{95}{19}\cdots\mathbb{N}$ (d) $-1,4\cdots\mathbb{D}$ (e) $0\cdots\mathbb{Z}^*$ (f) $-5\cdots\mathbb{Z}^+$
(g) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\mathbb{R}^-$ (h) $\frac{-\sqrt{49}}{8}\cdots\mathbb{Q}$ (i) $\mathbb{N}\cdots\mathbb{Z}$ (j) $\mathbb{Q}^+\cdots\mathbb{R}^-$ (k) $\mathbb{N}^*\cdots\mathbb{Q}$ (l) $\mathbb{Z}^+\cdots\mathbb{Z}^*$

Exercice 2

1. Montrer que $\frac{\sqrt{5808}}{\sqrt{3675}}\in\mathbb{Q}$ et que $\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\in\mathbb{N}$.
2. Trouver l'entier naturel n vérifiant $\frac{3n+17}{n+4}\in\mathbb{N}$.

Exercice 3

1. Simplifier les expressions suivantes : (a) $\frac{2^2\times3\times(\sqrt{7})^4\times(\sqrt{21})^3}{7^2\times(\sqrt{3})^{-2}\times(\sqrt{2})^4}$ (b) $\frac{(2\sqrt{2})^4\times(-7\sqrt{3})^{-3}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^4}$
2. Donner l'écriture scientifiques de : (a) $0,0001234$ (b) $578,21\times10^5$ (c) $0,0074\times10^{-2}$ (d) 52×10^3

Exercice 4

Développer et réduire les expressions suivants :

(a) $(2x+3)^2$ (b) $(7x-3y)^2$ (c) $(x+y)^2-(x-y)^2$
(d) $(2x+3y)^3$ (e) $(x+y)^3-(x-y)^3$ (f) $(x+y-z)^3$

Exercice 5

Factoriser les expressions suivantes :

(a) $A = 9x^2 - 4$ (b) $B = 27x^4 + 81x$
(c) $C = 12x^3 - 16x^2 + 32x$ (d) $D = 36 - 16x^2$
(e) $E = (3x+2)^2 - 36(x+1)^2$ (f) $F = (7x+3)(x-1) - (1-x)(-2x+1)$
(g) $G = (-2x+1)^2 - (4-8x)(x+3) + (3-12x^2)$ (h) $H = (4x-8)\left(\frac{3}{2}x-1\right) - x^2 + 4x - 4$
(i) $I = x^5 + x^3 - x^2 - 1$ (j) $J = x^{12} - 2x^6 + 1$
(k) $K = x^3 - 27 - 4(x-3) + x^2 - 9$

Exercice 6

Soient x et y de deux réels non nuls.
Montrer que $\frac{-1+\frac{x}{x-y}}{1+\frac{y}{x-y}} = \frac{y}{x}$, et en déduire la valeur de $\frac{-1+\frac{1}{1+\sqrt{5}}}{1-\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$.

Exercice 7

Soient a et b deux réels tels que $a = \sqrt{14+6\sqrt{5}}$ et $b = \sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

1. Calculer $(3+\sqrt{5})^2$ et $(3-\sqrt{5})^2$.
2. En déduire les valeurs de a et b.
3. Chercher l'entier naturel t tel que $(7+3\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\sqrt{7-3\sqrt{5}} = t\sqrt{2}$.

Exercice 8

Soient x, y et z des réels deux à deux distincts. Montrer que $\frac{x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y}{(y-x)(y-z)} + \frac{z}{(z-x)(z-y)} = 0$.

Exercice 9

Soit a un réel non nul. On pose $A = a + \frac{1}{a}$.
Calculer en fonction de A les expressions suivants : (a) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ (b) $a^3 + \frac{1}{a^3}$ (c) $a^4 + \frac{1}{a^4}$

Exercice 10

a et b sont deux réels non nuls tels que $2(a^2+b^2) = 5ab$. Calculer la valeur de $A = \frac{a-b}{a+b}$.

Exercice 11

Soit x un réel positif tel que $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 18$. Calculer la valeur de $\sqrt{x+9} - \sqrt{x}$.