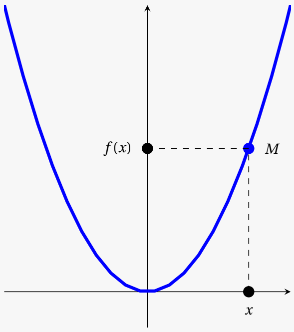
الدرس الثامن

النهايات

محتوى الدرس

نشاط 1



نعتبر الدالة f الممثلة جانبه و المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2$.
ليكن x عددا حقيقيا و M النقطة من منحنى الدالة f التي أفصولها x.
تغيير قيمة x على $\mathbb{R}$ (تمثل في حركة النقطة التي على محور الأفاصل) يؤدي إلى حركة النقطة M على منحنى الدالة f و بالتالي تتغير قيمة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ (تمثل في حركة النقطة التي على محور الأراتيب).
ماذا يحدث لقيمة $f(x)$ في الحالات التالية:

1. عندما تأخذ x قيما موجبة أكبر فأكبر.
2. عندما تأخذ x قيما أقرب فأقرب إلى 0.
3. عندما تأخذ x قيما سالبة أكبر فأكبر.

مصطلحات

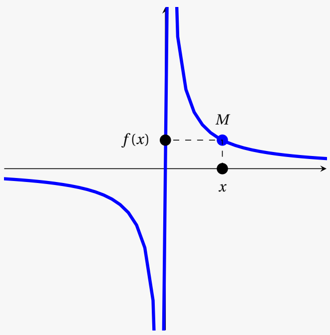
- نقول إن x (على التوالي $f(x)$) تؤول إلى $+\infty$ عندما تأخذ قيما موجبة أكبر فأكبر.
- نقول إن x (على التوالي $f(x)$) تؤول إلى 0 عندما تأخذ قيما أقرب فأقرب إلى 0.
- نقول إن x (على التوالي $f(x)$) تؤول إلى $-\infty$ عندما تأخذ قيما سالبة أكبر فأكبر.

ترميز

من خلال النشاط 1 نستنتج ما يلي:

- عندما تؤول x إلى .... فإن $f(x)=x^2$ تؤول إلى .... نكتب ....
و تقرأ: نهاية f عند .... هي ....
- عندما تؤول x إلى .... فإن $f(x)=x^2$ تؤول إلى .... نكتب ....
و تقرأ: نهاية f عند ....
- عندما تؤول x إلى .... فإن $f(x)=x^2$ تؤول إلى .... نكتب ....
و تقرأ: نهاية f عند ....

نشاط 2



نعتبر الدالة f الممثلة جانبه و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x)=\frac{1}{x}$.
ليكن x عددا حقيقيا و M النقطة من منحنى الدالة f التي أفصولها x.

1. ماذا يحدث لقيمة $f(x)$ في الحالتين التاليتين:
   (ا) عندما تأخذ x قيما موجبة أقرب فأقرب إلى 0.
   (ب) عندما تأخذ x قيما سالبة أقرب فأقرب إلى 0.
2. حدد مبيانيا نهايتي f عند $+\infty$ و $-\infty$.

مصطلحات

- نقول إن x (على التوالي $f(x)$) تؤول إلى 0 على اليمين عندما تأخذ قيما موجبة أقرب فأقرب إلى 0.
- نقول إن x (على التوالي $f(x)$) تؤول إلى 0 على اليسار عندما تأخذ قيما سالبة أقرب فأقرب إلى 0.

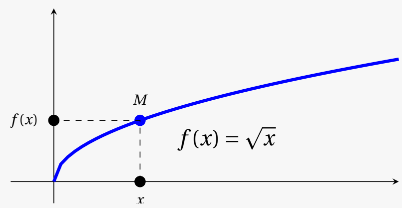
ترميز

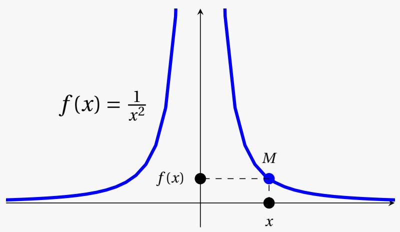
من خلال النشاط 2 نستنتج ما يلي:

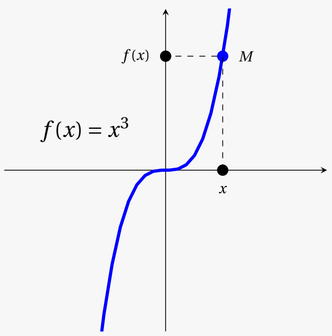
- عندما تؤول x إلى .... على اليمين فإن $f(x)=\frac{1}{x}$ تؤول إلى .... نكتب ....
  و تقرأ: نهاية f على اليمين في .... هي ....
- عندما تؤول x إلى .... على اليسار فإن $f(x)=\frac{1}{x}$ تؤول إلى .... نكتب ....
  و تقرأ: نهاية f على اليسار في .... هي ....
- عندما تؤول x إلى .... فإن $f(x)=\frac{1}{x}$ تؤول إلى .... نكتب ....
  و تقرأ: نهاية f عند .... هي ....
- عندما تؤول x إلى .... فإن $f(x)=\frac{1}{x}$ تؤول إلى .... نكتب ....
  و تقرأ: نهاية f عند ....

نشاط 3

حدد مبيانيا نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها في الحالات التالية:







ترميز

من خلال النشاط 3 نستنتج ما يلي:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1. نهاية دالة عددية عند $+\infty$ أو $-\infty$

نهايات مرجعية

نقبل النهايات التالية:

$\ast$ $\forall a \in \mathbb{R}: \lim\limits_{|x|\to+\infty} a = a$

$\ast$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\ast$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\ast$ $\forall n \in \mathbb{N}^*: \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فردي} \end{cases}$

$\ast$ $\forall n \in \mathbb{N}^*: \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

$\ast$ $\forall n \in \mathbb{N}^*: \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

أمثلة

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 5 = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{-7}} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{-5}} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-6} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-9} = \ldots\ldots$

قاعدة 1

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم. لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$\ast$ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} ax^n = a \times \lim\limits_{|x|\to+\infty} x^n$

$\ast$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a\sqrt{x} = a \times \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$

$\ast$ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{a}{x^n} = a \times \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x^n}$

$\ast$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{\sqrt{x}} = a \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

نقبل أن $a \times \infty = \infty$.

أمثلة

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{2}x^2 = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^7\sqrt{5} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\sqrt{x}}{4} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{3x}} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{4\sqrt{x}} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x^4} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{4}{x\sqrt{3}} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^{-8} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x}{x^3} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^7}{x^2} = \ldots\ldots$

قاعدة 2

نهاية دالة حدودية عند $-\infty$ أو $+\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة.

أمثلة

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 - 2x + 3 = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -7x^3 - 4x^5 + x^2 = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - 2x = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -1 + 3x - x^3 = \ldots\ldots$

قاعدة 3

نهاية خارج حدوديتين عند $-\infty$ أو $+\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة.

أمثلة

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{3x-4}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+x^2}{x\sqrt{2}-\sqrt{2}+x^5}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-1}{2x^2-3x-1}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{5x^4-3x^3-2x+1}=\dots\dots\dots\dots$

قاعدة 4

لتكن f دالة عددية موجبة معرفة على مجال I بجوار $+\infty$ أو $-\infty$.

✳ $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty\Longrightarrow\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

✳ $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=b>0\Longrightarrow\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{b}$

تمرين 1

أحسب النهايات التالية:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-2x^2-5x+2}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-3x^5+4x^3-4}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x^2-3x+3}{x^3+2}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x-2}{4x-3}}$

2. نهاية دالة عددية في عدد

نهايات مرجعية

نقبل النهايات التالية:

✳ $\forall a\in\mathbb{R}:\ \lim\limits_{x\to0}a=a$

✳ $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \lim\limits_{x\to0}x^n=0$

✳ $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$

✳ $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & n\ \text{زوجي}\\-\infty & n\ \text{فردي}\end{cases}$

✳ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}=0$

✳ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

أمثلة

- $\lim\limits_{x\to0}7=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to0}-\frac{1}{2}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to0}x=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to0}x=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to0}x^2=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to0}x^3=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to0}x^{44}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to0}x^{105}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^2}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^2}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^3}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^3}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^{102}}=\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^{213}}=\dots\dots\dots\dots$

قاعدة 5

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم. لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

✳ $\lim\limits_{x\to 0} ax^n = a\times\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$ ✳ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a}{x^n} = a\times\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n}$ ✳ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{a}{x^n} = a\times\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n}$

✳ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} a\sqrt{x} = a\times\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0$ ✳ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a}{\sqrt{x}} = a\times\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}}$

أمثلة

- $\lim\limits_{x\to 0} -7x = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{5}{x^7} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{9}{x^3} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{4}x^3 = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{3}{x^2} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-3}{4\sqrt{x}} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to 0} 3\sqrt{x} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-7}{2x^4} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{x}} = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to 0} -\sqrt{x} = \dots\dots\dots\dots\dots$

قاعدة 6

✳ نهاية دالة حدودية f في نقطة 0 هي $f(0)$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

✳ نهاية دالة حدودية f في نقطة a هي $f(a)$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x+a) = f(a)$

أمثلة

- $\lim\limits_{x\to 0} 4x^3-5x^2+3x-1 = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to -1} x^5-3x+1 = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to 2} -2x+3x^2+2 = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} 4x-2 = \dots\dots\dots\dots\dots$

3. العمليات على النهايات

خاصيات

ليكن a عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل ما يلي:

✳ $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ ✳ $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$

✳ $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ ✳ $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

ملاحظة

توجد عمليات لا يمكن حساب نتائجها و تسمى أشكال غير محددة و هي: $(+\infty)-(+\infty)$ و $\infty\times 0$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ و $\frac{\text{عدد}}{0}$.
في مثل هذه الحالات نلجأ لتبسيط التعبير إلى كتابة أو عملية يمكن تحديد نتيجتها باستعمال الطرق التالية:

✳ $(-\infty)+(+\infty)$: التعميل أو الضرب في المرافق. ✳ $\infty\times 0$: النشر.

✳ $\frac{\infty}{\infty}$: التعميل و الإختزال. ✳ $\frac{0}{0}$: التعميل و الإختزال. ✳ $\frac{\text{عدد}}{0}$: دراسة إشارة المقام.

تمرين 2

أحسب النهايات التالية:

ا) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{|3x-5|}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4x^3-5x-3}{x^2-x-1}$ ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-4)(x^2-3x-1)^3$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x}}{x-1}$ هـ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x^2+1}$ و) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}+3}{2x+1}$ ز) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$

ح) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1-\sqrt{1-2x}$ ط) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x+x^2}$ ي) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2+3x+2}{x+1}$

يا) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{x-2}$ يب) $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}} \frac{x-1}{-2x+1}$ يج) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \frac{x^2-4}{-x^2+2x+3}$

ملاحظات

- النهايات من النوع $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ تسمى نهاية الدالة f على اليمين في a و تكتب كذلك $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
- النهايات من النوع $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ تسمى نهاية الدالة f على اليسار في a و تكتب كذلك $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$

تمرين 3

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2-x+2}{x+1} & x \geqslant 1 \\ f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1} & x<1 \end{cases}$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ و استنتج قيمة $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

4. نهايات الدوال المثلثية

خاصيات

- $\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{bx^2} = \frac{a}{2b}$
- $\lim\limits_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$

تمرين 4

أحسب النهايات التالية:

ا) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos(x)-\sin(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to-1} \cos(3x)\tan(\pi x)$ ج) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x)$ د) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(5x)}$ و) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(4x)}{x\tan(2)}$ ز) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(x)}$ ح) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$

ط) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$ ي) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\tan(x)-3}{3x-\pi}$

5. النهايات و الترتيب

خاصية

ليكن a عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$ و I مجالا بجوار a.
لتكن f و u و v دوال معرفة على المجال I.

- $\begin{cases} \forall x \in I: \ u(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
- $\begin{cases} \forall x \in I: \ u(x) \geqslant f(x) \\ \lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
- $\begin{cases} \forall x \in I: \ |f(x) - b| \leqslant u(x) \\ \lim\limits_{x\to a} u(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$
- $\begin{cases} \forall x \in I: \ u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \\ \lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = b \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

تمرين 5

1. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بحيث: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ x^2 - x \leqslant f(x) \leqslant x^2 + x$
أحسب النهايات التالية:
(أ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x)$
(د) $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 2x^2)$ (هـ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (و) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$
2. باستعمال التأطير المناسب، أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} x - \cos(x)$