מטלת אמצע אנליזה נומרית

אסף אסא

כמוכן השתמשתי בספריות הבאות במטלה :

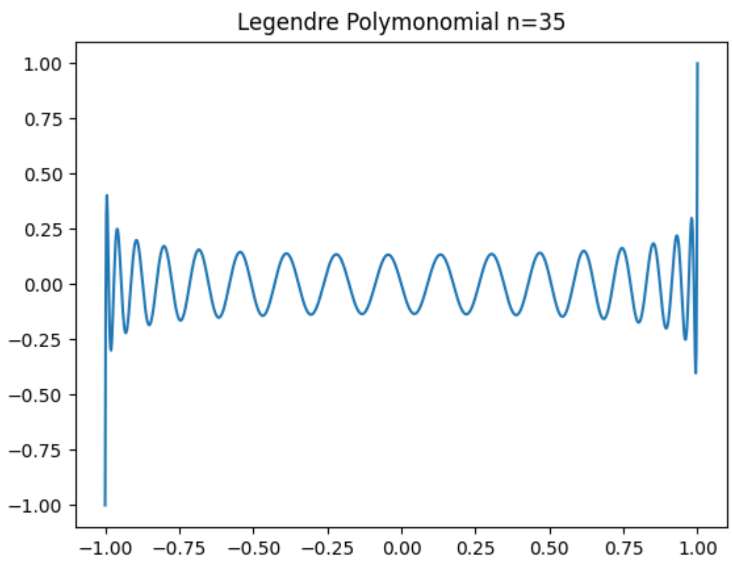
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import legendre
import scipy
import math
import scipy.interpolate
```

<u>1.א</u>

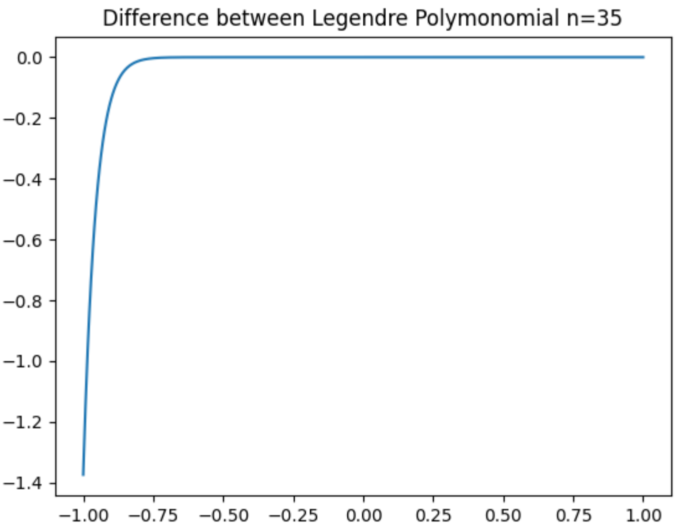
נוסחת רקורסיה לפולינומי לג'נדר (מוכיחים ע"י פונקציה יוצרת)

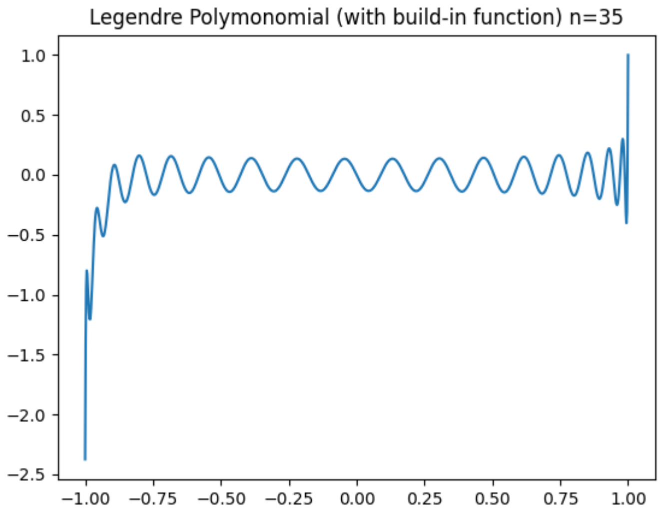
$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

הגרף שקיבלתי :



ב.1 הגרפים שקיבלתי :





כפי שניתן לראות הגרפים כמעט זהים מלבד קטע שקרוב ל- (1-). כמוכן, מתוך העובדה כי פולינום לג׳נדר 35 הוא פולינום אי-זוגי. אסיק הבעיה היא בפונקציה המובנית, שכן ניתן לראות שהיא אינה אי-זוגית. כנראה הדרך שבה הפונקציה המובנית מחשבת נקודות לא מדויקת באזור (1-), אם היינו יודעים כיצד הפונקציה מחשבת נקודות היה אפשר לענות על זאת יותר בהרחבה.

נוסחת הרקורסיה שקיבלנו בהרצאה

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$ 1.ג.

כמובן נרצה לחלק במקדם של החזקה הגבוהה ביותר.

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \circ \left[(x^2-1)^n\right] = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \circ \left[x^{2n} + q_{2n-1}(x)\right]$$ שכן

פולינום בחזקת 2n-1

$$= \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{(2n)!}{n!} x^n + \tilde{q}_{n-1}(x)\right] \Rightarrow \tilde{P}_n = \frac{(2^n)(n!)^2}{(2n)!} P_n$$

נציב בנוסחת רקורסיה:

$$\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} \tilde{P}_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\right) x \tilde{P}_n - \frac{n}{n+1} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}((n-1)!)^2} \tilde{P}_{n-1}$$

נחלק במקדם של $\tilde{P}_{n+1}$

$$\Rightarrow \tilde{P}_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} x \tilde{P}_n - \frac{n}{n+1} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}((n-1)!)^2} \frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \tilde{P}_{n-1}$$

$$= \frac{\cancel{(2n+1)} \cancel{(2n)!} \, 2 \cdot \cancel{2^n} (n+1)^2 \cancel{(n!)^2}}{(2n+2) \cancel{(2n+1)} \cancel{(2n)!} \cancel{2^n} \cancel{(n!)^2} (n+1)} x \tilde{P}_n - \frac{n \cdot 2^2 \cancel{2^{n-1}} (n+1)^2 n^2 \cancel{((n-1)!)^2} \cancel{(2n-2)!}}{\cancel{2^{n-1}} \cancel{((n-1)!)^2} (n+1)(2n+2)(2n+1) 2n (2n-1) \cancel{(2n-2)!}} \tilde{P}_{n-1}$$

$$= x \tilde{P}_n - \frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)} \tilde{P}_{n-1}$$

$$\Rightarrow \gamma_n^2 = \frac{n^2}{4n^2-1} \quad , \quad \beta_n = 0$$

ד.1

התוצאות שקיבלתי :

```
1.999999999999996

[ 4.47836213e-13 -8.29752933e-14 -1.35169653e-14  4.32709424e-14  -2.18158824e-14  2.05391260e-14  7.54951657e-15
2.27595720e-15 -4.21884749e-15  6.32827124e-15 -1.36002321e-14  6.93889390e-15 -1.44328993e-15  1.30451205e-15
1.80411242e-15 -8.32667268e-16 -1.31838984e-15  8.59705125e-17  1.31838984e-15  2.31759056e-15  1.24900090e-16 -
3.10862447e-15 -5.97910610e-13  1.32838185e-13 -3.94129174e-15  4.82947016e-14 -1.68476344e-14  8.63198402e-15

 -3.66373598e-15 -3.05311332e-16 -4.16333634e-16  3.85802501e-15 -2.19269047e-15 -1.38777878e-17 -2.49800181e-16]
```

התקבלו תוצאות בהתאם לנדרש, שכן התקבלו ערכים שרחוקים לאלו שציפינו במרחק בסדר של שגיאת המכונה.

$\gamma 0$ התיאורטי חושב לפי: $\gamma_0^2 \int_{-1}^{1} \rho(x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$

1. ה.

$$\int_{1}^{1.2} \cos(x^{24})\,dx = \left| \begin{matrix} y = 10x - 11 \\ dy = 10dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{10}\int_{-1}^{1} \cos\left(\left(\frac{y+11}{10}\right)^{24}\right) dy$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\cos\left(\left(\frac{y+11}{10}\right)^{24}\right)}{10}$$

כלל סימפסון מורכב (עבור n זוגי)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{j:1:2:n-1} f(x_j) + 2\sum_{j=2:2:n-2} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)$$

הנקודות יהיו $h = \dfrac{b-a}{\frac{2(n-1)}{2}} = \dfrac{2}{n-1}$

$$y_j = -1 + jh = -1 + \frac{2j}{(n-1)}$$

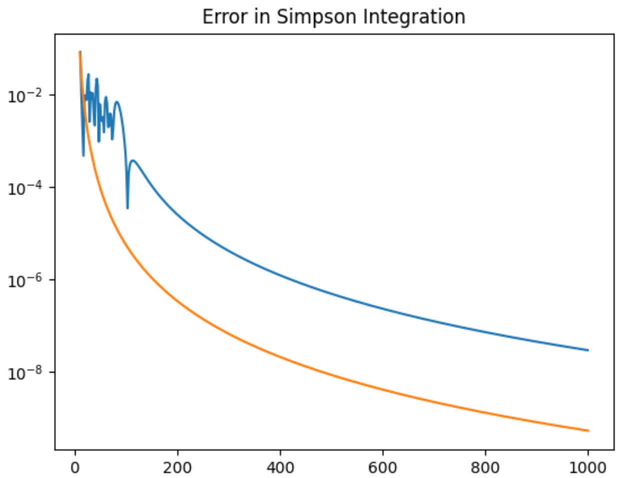
$$\Rightarrow f(y_i) = \frac{\cos\left(\left(\frac{-1 + \frac{2j}{(n-1)} + 11}{10}\right)^{24}\right)}{10} = \frac{1}{10}\cos\left(\left(1 + \frac{j}{5(n-1)}\right)^{24}\right)$$

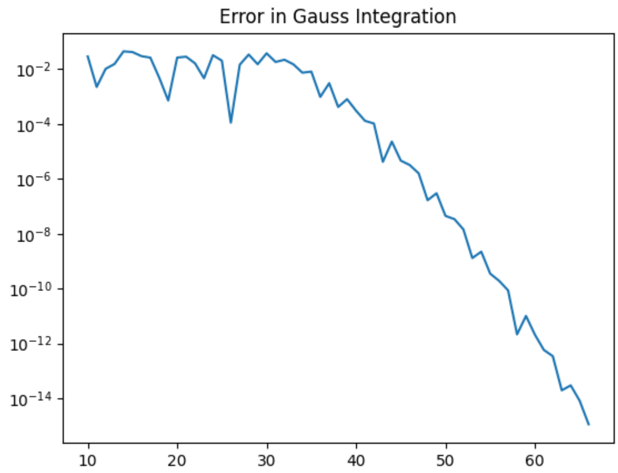
$E \propto \dfrac{1}{(n-1)^4} \approx \dfrac{1}{n^4} \Leftarrow O(h^4)$ השארית מתנהגת כמו

$n > \dfrac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon_M}} \approx 5{,}623 \Leftarrow 10^{-15} \approx \varepsilon_M > \dfrac{1}{n^4}$ מחישוב זה כדי ש

1.

הגרפים שקיבלתי:

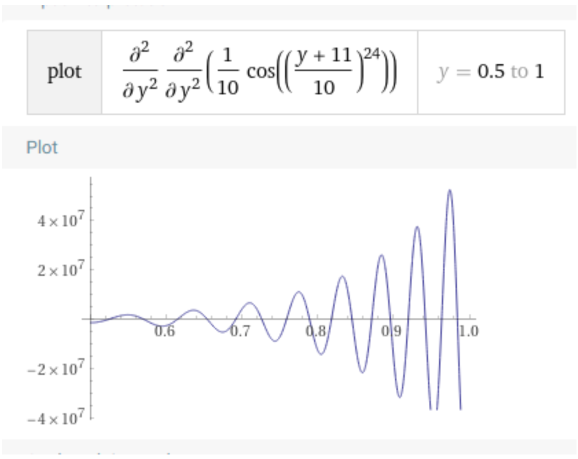




כמובן, רציתי לציין (גם כתבתי בקוד) כדי לחסוך בזמן, במיוחד עבור אינטגרציית גאוס שנדרש בה חישוב של ערכים ווקטורים עצמיים של מטריצה. הגרפים שייצרתי מחשבים את גוגל השגיאה מהערך התיאורטי שניתן עד מספר הנקודות שבה השגיאה קטנה מאפסילון מכונה. בנוסף בדומה לשאלה שלוש ציר y של השגיאה נמדד בסקאלה של log כדי לראות את סדר גודל השגיאה.

ניתן לראות, כי שגיאת בשיטת גאוס כבר עבור 67 נקודות קיבלנו שגיאה שקטנה מאפסילון מכונה, לעומת זאת לא קיבלנו שגיאה שקטנה מאפסילון מכונה בשיטת סימפסון, בהתאם לתיאוריה.

בשונה מהתיאוריה ניתן לראות בגרף השגיאה של סימפסון שהשגיאה לא דועכת כמו 1/(n-1)^4 . זאת אולי, בשל העובדה כי הנגזרת הרביעית של הפונקציה מגיעה לערכים בסדר גודל של 10^7 (לפי מה שבדקתי בwolfarm alpha)



ולכן לפי התיאוריה הנגזרת שבה לכל n נלקחת נקודה אחרת בקטע יכולה להשפיע על דעיכת השגיאה.

2.א. n^n יהיה מסוג int.
פעולת החילוק תחזיר ערך float, לכן הפונקציה תחזיר float.
השגיאה נובעת מהגבלת הגודל שניתן לכתוב ב 64 ביטים של נק' צפה.
ניתן לראות שבסדר תישוב כו הודפסו ערכים עד $n=143$ שכן ערך התוצאה הוא בערך $4.2\cdot10^{60}$.

כמובן ערך זה קטן בהרבה מהערך המקסימלי שניתן להציג בנק' הצפה.
ולמרות זאת, לא קיבלנו תוצאה.
זו מאחר ו n^n עובר את הגודל המקסימלי, שכן $142^{142} \approx 4.2\cdot10^{305}$.

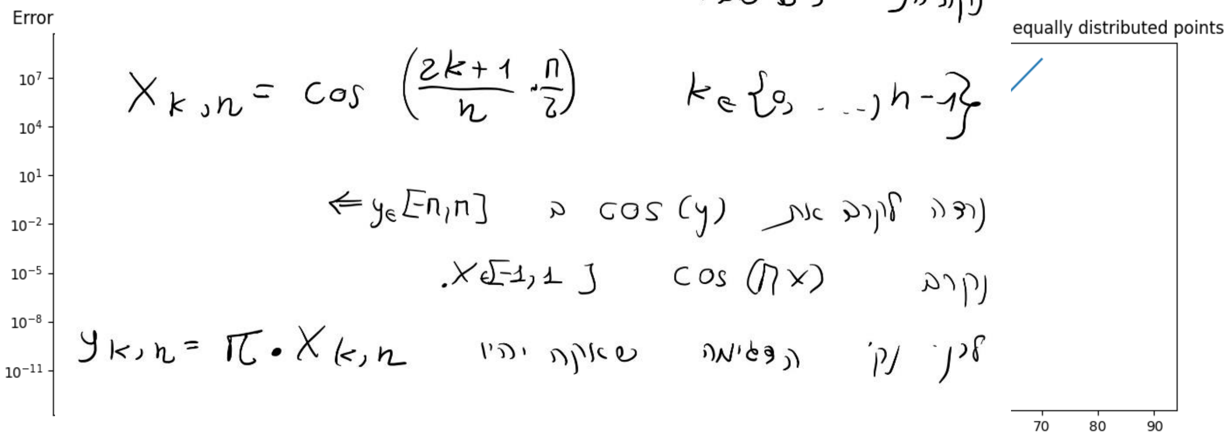
2.ב. שוב בגלל פעולת החילוק סוג התוצאות יהיו float
כעת בפונקציה החדשה קיבלנו ערכים עד $n=713$,
שכן התוצאה הגדולה ביותר הייתה בערך כ $6.7\cdot10^{307}$

2.ג. לסיכום, קיבלנו תוצאות רבות יותר לפי השיטה ב 2.ב.
שכן קיבלנו ערכים עבור מספרים שלמים עד 713, לעומת השיטה
ב 2.א. בה קיבלנו ערכים עד 143.

הבדל משמעותי זה נובע מ תוצאות הביניים שמקבלים בתוך הפונקציה.
ב 2.א. חישבנו קודם את n^n שהוא מתבדר מאוד מהר
שכן כבר ב $n=143$ קיבלנו שגיאת גודל עבור ייצוג בנק' הצפה.
לעומת זאת ב 2.ב הכפלנו כל פעם ב $\frac{n}{j}$ עבור j מ 1 עד $n-1$.
כך תוצאות הביניים היו קטנות יותר מאשר ב 2.א וקיבלנו
את שגיאת הגודל רק כאשר תוצאות הפונקציה הגיעה
לגודל המקסימלי, המיוצג בנק' צפה.

.3

הסבר לנקודות צ׳בישב:



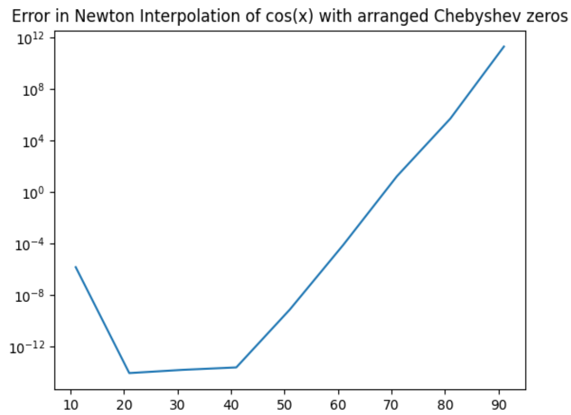
נקודות צ'בישב:

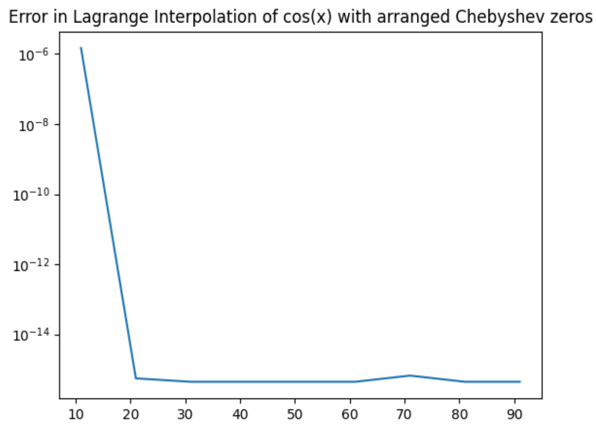
$$x_{k,n} = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad k\in\{0,\dots,n-1\}$$

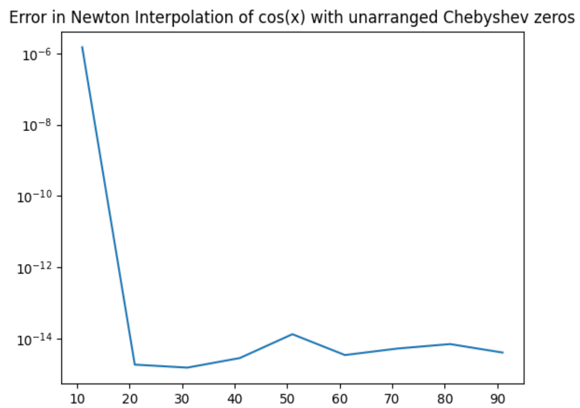
רצינו לקרב את $\cos(y)$ ב $y\in[-\pi,\pi]$ $\Leftarrow$

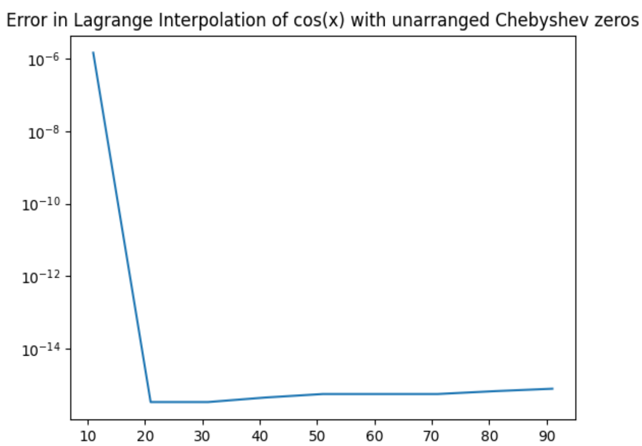
נקרב $\cos(\pi x)$ $x\in[-1,1]$.

לכן נק' הדגימה שנקח יהיו $y_{k,n} = \pi\cdot x_{k,n}$









הגרפים שקיבלתי:

לפי התיאוריה, שיטת לגרנז' וניוטון הן דרכים 2 דרכים להביע את אותו פולינום אינטרפולציה, לכן ההנחה שלי הייתה שהשגיאה בשיטות יהיו דומות, לעומת זאת ניתן לראות עבור הבדלים בין שיטת ניוטון ללגראנז' עם נקודות צ'בישב המסודרות. אנסה להסביר זאת בהמשך.

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k).$$

לפי התיאוריה כי השגיאה בפולינום האינטרפולציה: לכל n נגזרת של קוסינוס חסומה ע"י 1. דיברנו על כך בהרצאה (ללא הוכחה) שעבור נקודות שוות מרחק השגיאה לא תשאף לאפס, ואכן ניתן לראות בגרפים של לגרנז' וניוטון עם נקודות שוות מרחק שהשגיאה לא שואפת לאפס.

כמוכן, עבור נקודות צ'בישב ראינו כי הפולינום הזה חסום על ידי 2^{-n} לכן נצפה כי לפי התיאוריה השגיאה צריכה לשאוף לאפס ככל שn עולה, וכן בשינוי סדר הנקודות עדיין נקבל את אותו הפולינום. לכן גם עבור נק' צ'בישב הלא מסודרות נצפה שהשגיאה תשאף לאפס. ויתרה מכך, לפי משפט המינמקס נצפה שהשגיאה תהיה קטנה יותר מכל בחירה אחרת של נקודות.

אכן, ניתן לראות בגרפי נקודות צ'בישב (מלבד ניוטון עם צ'בישב מסודרות) שהשגיאה שואפת לאפס ככל שn גדל. וכן בבחירת נקודות צ'בישב קיבלנו הערכה של שגיאות בסדר של 10^{-14} לעומת בנקודות שוות מרחק שקיבלנו שהשגיאה הקטנה ביותר הייתה 10^{-11} בהתאם לתיאוריה.

כעת אנסה להסביר את גרף שיטת ניוטון עבור נקודות צ'בישב המסודרות. כמוכן עפ"י הנוסחה בשיטת ניוטון משתמשים בכל השורשים מלבד השורש שקרוב ביותר לאחת.

$$q_0(x) \equiv 1, q_j(x) := \prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i), \quad j=1,\ldots,n.$$

הפולינומים $q_0, q_1, \ldots, q_n$ מהווים בסיס למרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר n. לכן בפרט ניתן לרשום

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j q_j(x) \tag{1}$$

מאחר ולקחתי 100 נקודות רנדומליות בקטע, ניתן להניח כי קיימת נק' אחת שמאוד קרובה ל1. כמוכן n/2 הנקודות הראשונות בעלות מרחק גדול מאחד מהנקודה (שקרובה לאחת) לכן סכום עד הכפל n/2 האיברים הראשונים שהוא איבר בנוסחה, יהיה גדול בהרבה מאשר הכפל בנק' לא מסודרות (שם יש יותר סיכוי שיהיו נק' שהמרחק קטן מאחד ולכן הכפל יהי קטן יותר). ולכן גם השגיאה תהיה גדולה יותר.

טענה זו אכן יכולה להסביר מדוע השגיאה אולי לא שואפת לאפס. אבל לא מדוע היא שואפת לאינסוף (כמו שנראה בגרף שקיבלתי), שכן ההפרשים המחולקים שואפים לאפס כמו $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ (עבור פונקציות חלקות כמו הקוסינוס), וכן הנגזרת של קוסינוס חסומה על ידי 1. לכן, כל איבר בסכום יהיה חסום על ידי $\frac{2^n}{n!}$ וכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = e^2 - 1 \approx 6.4$ ולא שואף לאינסוף.

יתרה מזו, הסבר נוסף שאולי יכול להסביר את הגרף, (בהתייחסות ליציבות של שיטת ניוטון), היא חוסר היציבות של השיטה עבור נקודות קרובות אחת לשנייה במרחקים קצרים. כמוכן, למדנו בהרצאה כי חיסור מספרים שהפרש שואף לאפס אינו יציב. חיסור זה מופיע בהפרשים המחולקים במכנה וגם במונה (מגזירות קוסינוס) עבור נקודות דגימה שוות מרחק ונקודות צ'בישב המסודרות. למקדם n יהיו כ2(n-1) הפרשים כאלה שכן, מוספים לכל מקדם $f[x_{n-1},x_n]$. לכן מגדיל את השגיאה שמתקבלת בשיטה.

כן אי יציבות זו נפתרת עבור צ'בישב הלא מסודרות, שכן יש סיכויים רבים שהנק' לא יהיו מסודות וסמוכת אחת לשנייה, לכן המרחק בניהן לא שואף לאפס. בהתאם לכך, ניתן לראות בגרף שעבור נק' צ'בישב הלא מסודרות השגיאה של שיטת ניוטון שואפת לאפס.

לעומת בצורת לגראנג' שבה יש הרבה פחות הפרשים של נקודות דגימה סמוכות כפי שניתן לראות בנוסחה לכל איבר יש 2 הפרשים קרובים:

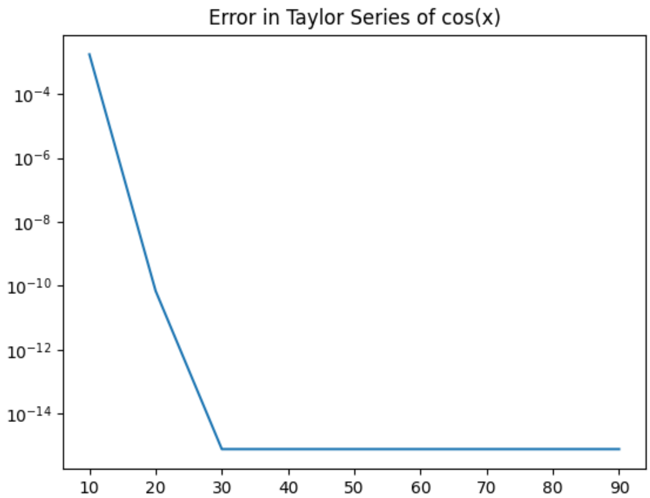
$$P_j = \prod_{k=1;k\neq j}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k} = \frac{(x-x_1)}{(x_j-x_1)}\cdots\frac{(x-x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})}\frac{(x-x_{j+1})}{(x_j-x_{j+1})}\cdots\frac{(x-x_n)}{(x_j-x_n)},$$

לכן היציבות הנומרית של צורת לגראנז' טובה יותר מאשר של ניוטון.

ד.3

טור טיילור של cosx ממעלה n (זוגי): $\sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

הגרף שקיבלתי:



ה.3. לפי הגרפים בסעיפים ד' וה', ניתן לראות שבעזרת שני הקרובים הצלחנו להגיע לשגיאה בסדר גודל של שגיאת מכונה. (עבור לגראנז' עם צ'בישב וניוטון עם צ'בישב לא מסודר). כמוכן, ניתן לראות כי הגענו מהר יותר לשגיאת המכונה בקירובים אלה (כבר לאחר 20 נקודות) לעומת בקירוב טיילור שהגענו לשגיאת המכונה לאחר 30 נקודות. לכן, נסיק מהגרפים כי קירוב פולינום אינטרפולציה מקרב טוב יותר את הפונקציה מאשר פולינום טיילור בכל הקטע.

תוצאה זו היא בהתאם למה שלמדנו בקורס, שכן פולינום טיילור מקרב טוב בסביבה קטנה סביב נקודת הפיתוח, אך ככל שמתרחקים מהנקודה הדיוק הולך וקטן. בהתאם לנוסחה:

$$\max_{x\ in\ [-\pi,\pi]} e_n(taylor) = \max_{x\ in\ [-\pi,\pi]} \frac{f^{(n)}(\xi)(x)^n}{n!} = \frac{\pi^n}{n!}$$

$$\max_{x\ in\ [-\pi,\pi]} e_n(interpolation) = \max_{x\ in\ [-\pi,\pi]} \frac{\mathrm{f}^{(n+1)}(\xi)}{(\mathrm{n}+1)!} \mathrm{Pn}_{chebyshev}(\mathrm{x}) = \frac{2^{-n}}{(n+1)!}$$

לכן הגרפים תואמים לתיאוריה, כשלוקחים שגיאה על נקודות בכל הקטע מקבלים שגיאה יותר גדולה מאשר פולינום האינטרפולציה (בנק' צבישב).