

الرقم الدولي المعياري للكتاب ISBN (International Standard Book Number)	سنة النشر	دار النشر	عنوان الكتاب العلمي	الرقم
ISBN 978-620-9-37019-9	2025	<b>Éditions universitaires européennes</b> Siège sociale : 120 High Road, East Finchley London, N2 9ED United Kingdom Str. Armeneasca 28/1, office 1 Chisinau, MD-2012, Republic of Moldova Email : info@omniscryptum.com Email : k_tullo@editions-ue.com site web : www.editions-ue.com	<b>Modélisation des structures en matériaux composites par la méthode des éléments finis</b>	<b>01</b>

### خطوات الوصول إلى الكتاب:

1. افتح متصفح الإنترنت وادهب إلى الموقع الرسمي لدار النشر:

[www.editions-ue.com](http://www.editions-ue.com)

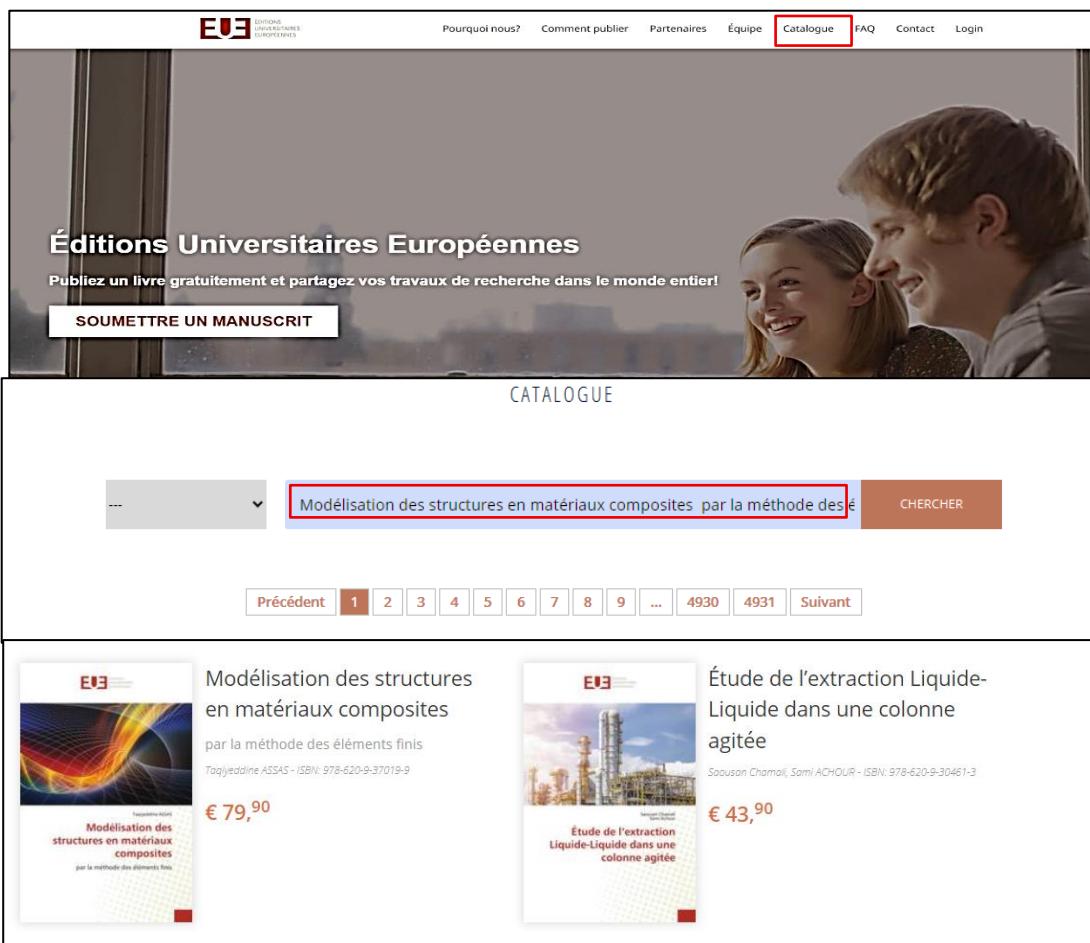
2. على الموقع، ابحث عن قسم الكتب العلمية أو البحث بواسطة ISBN.

3. استخدم رقم ISBN لكتاب الذي تبحث عنه:

4. ISBN: **978-620-9-37019-9**

5. يمكنك البحث مباشرة باستخدام عنوان الكتاب إذا توفر خيار البحث:

### Modélisation des structures en matériaux composites par la méthode des éléments finis



The screenshot shows the website's header with the logo and navigation links: Pourquoi nous?, Comment publier, Partenaires, Équipe, Catalogue (which is highlighted with a red box), FAQ, Contact, and Login.

The main banner features a photo of two people looking at a computer screen, with the text "Éditions Universitaires Européennes" and "Publiez un livre gratuitement et partagez vos travaux de recherche dans le monde entier!" Below the banner is a search bar with a dropdown menu, a search input field containing "Modélisation des structures en matériaux composites par la méthode des éléments finis", and a "CHERCHER" button.

Below the search bar is a pagination area with buttons for "Précédent", page numbers 1 through 9, "4930", "4931", and "Suivant".

The main content area displays two book covers with their titles, authors, ISBNs, and prices:

- Modélisation des structures en matériaux composites par la méthode des éléments finis** by Taghyedine ASSAS - ISBN: 978-620-9-37019-9 - € 79,90
- Étude de l'extraction Liquide-Liquide dans une colonne agitée** by Soussou Chammal, Sami ACHOUR - ISBN: 978-620-9-30461-3 - € 43,90

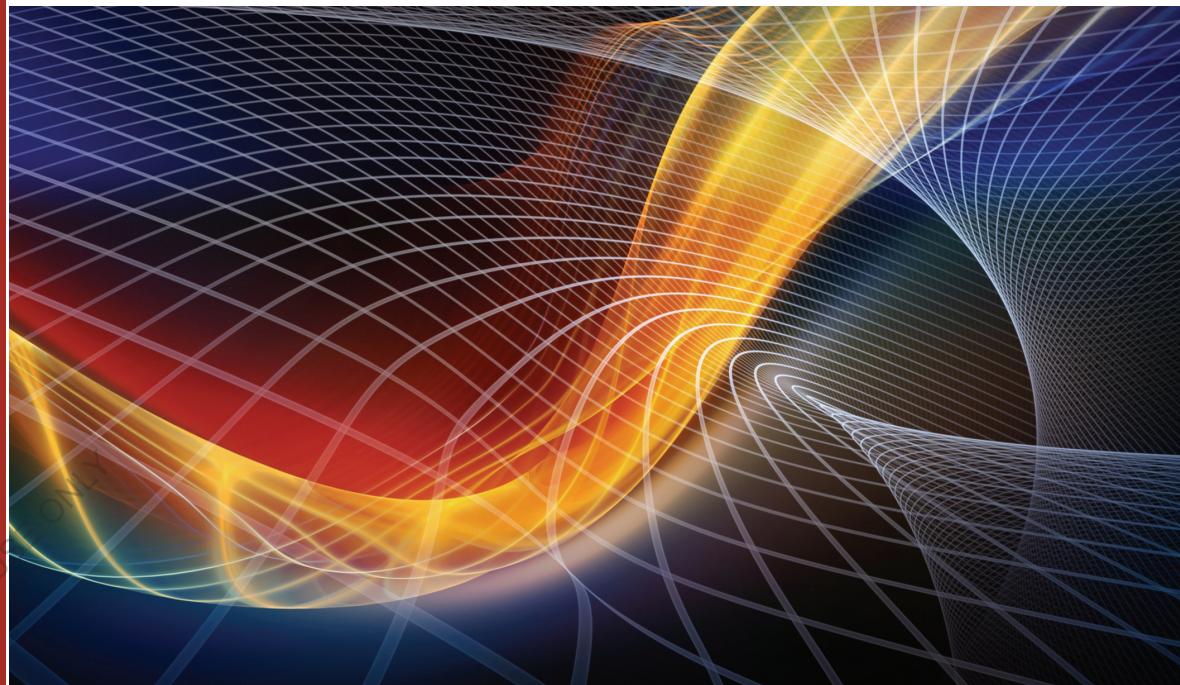
Ce livre traite de l'étude, de la modélisation et de l'analyse des structures en matériaux composites et à gradient fonctionnel (FGM), pour la première fois par la méthode des éléments finis basée sur l'approche en déformation. Destiné aux étudiants et chercheurs en génie civil et mécanique, il est structuré en quatre chapitres : introduction aux composites et FGM, fondamentaux de la méthode des éléments finis, développement d'un élément fini quadrilatéral pour plaques composites (HSBQLP20) avec validation numérique, et extension aux matériaux FGM avec l'élément HSBQP20 pour des analyses statiques, vibratoires et de flambement. L'ouvrage constitue une référence complète pour comprendre les matériaux composites et FGM et maîtriser les outils numériques avancés nécessaires à leur analyse et conception.



Dr. Assas Taqiyeddine – Ingénieur au Ministère des Travaux Publics et Infrastructures de Base (Algérie) et chercheur à l'Université de Biskra . Spécialiste des matériaux composites et fonctionnellement gradués (FGMs), des structures (plaques, coques, poutres), de la nanomécanique, du comportement mécanique et de la modélisation par éléments finis.



Taqiyeddine ASSAS



Taqiyeddine ASSAS

# Modélisation des structures en matériaux composites

par la méthode des éléments finis

Taqiyeddine ASSAS

**Modélisation des structures en matériaux composites**

FOR AUTHOR USE ONLY



Taqiyeddine ASSAS

# **Modélisation des structures en matériaux composites**

**par la méthode des éléments finis**

FOR AUTHOR USE ONLY

**Éditions universitaires européennes**

## **Imprint**

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: [www.ingimage.com](http://www.ingimage.com)

Publisher:

Éditions universitaires européennes

is a trademark of

Dodo Books Indian Ocean Ltd. and OmniScriptum S.R.L publishing group

120 High Road, East Finchley, London, N2 9ED, United Kingdom  
Str. Armeneasca 28/1, office 1, Chisinau MD-2012, Republic of Moldova,  
Europe

Managing Directors: Ieva Konstantinova, Victoria Ursu

[info@omniscriptum.com](mailto:info@omniscriptum.com)

Printed at: see last page

**ISBN: 978-620-9-37019-9**

Copyright © Taqiyeddine ASSAS

Copyright © 2025 Dodo Books Indian Ocean Ltd. and OmniScriptum S.R.L  
publishing group

FOR AUTHORISE ONLY

## TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES .....	1
LISTE DES FIGURES .....	4
LISTE DES TABLEAUX .....	8
AVANT PROPOS.....	12

### **CHAPITRE 1 : Introduction aux matériaux composites**

1.1     Introduction.....	12
1.2     Matériaux composites .....	13
1.2.1    Définition .....	13
1.2.2    Constituants des matériaux composites .....	13
1.2.3    Classification des matériaux composites .....	15
1.2.4    Architecture des matériaux composites .....	17
1.2.5    Applications des matériaux composites au génie civil	20
1.2.6    Les avantages et les inconvénients des matériaux composites. ....	22
1.2.8    Délaminage et matériaux à gradient fonctionnel (FGM) .....	29
1.3     Matériaux FGM – Functionally Graded Material .....	29
1.3.1    Définition .....	29
1.3.2    Historique du développement des FGM .....	30
1.3.3    Conception des structures FGM.....	32
1.3.4    Domaine d'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel (FGM).....	33
1.3.5    Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel. ....	35
1.3.6    Lois de variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	37
1.4     Conclusion .....	41

### **CHAPITRE 2 : Théorie des éléments finis**

2.1     Introduction.....	42
2.2     Définition de la méthode des éléments finis .....	42
2.3     Historique et évolution de la méthode des éléments finis (MEF) .....	42
2.4     Étapes principales de la méthode des éléments finis (MEF) .....	44
2.4.1    Discrétisation de la structure : .....	44
2.4.2    Définition des fonctions de forme :.....	44
2.4.3    Détermination des propriétés de l'élément .....	44

2.4.4	Assemblage de la matrice globale : .....	45
2.4.5	Application des conditions aux limites et des charges.... .....	45
2.4.6	Résolution du système d'équations : .....	45
2.4.7	Post-traitement : .....	45
2.5	Types d'éléments finis .....	45
2.5.1	Éléments à une dimension (1D).....	46
2.5.2	Éléments à deux dimensions (2D) .....	46
2.5.3	Éléments à trois dimensions (3D) .....	47
2.6	Rappel de la Mécanique des Milieux Continus (MMC) et de la MEF .....	48
2.6.1	Equations de base d'élasticité plan .....	48
2.6.2	Notion d'élasticité plane .....	48
2.6.3	Relation déformations-déplacements (relation cinématiques) .....	50
2.6.4	Équations d'équilibre en 2D (plan) .....	50
2.7	Modèles analytiques des plaques .....	53
2.7.1	Hypothèses générales.....	53
2.7.2	Contraintes et efforts résultants.....	54
2.7.3	Classification des modèles analytiques.....	55
2.8	Les modèles éléments finis .....	62
2.8.1	Formulation en déplacement.....	63
2.8.2	Formulation d'équilibre .....	63
2.8.3	Formulation hybride.....	63
2.8.4	Formulation mixte.....	64
2.8.5	Formulation en déformation.....	64
2.9	Conclusion .....	82

### **CHAPITRE 3: Développement et validation d'élément finis à champ de déformation pour l'analyse statique, et vibration libre des plaques composites**

3.1	Introduction .....	83
3.2	Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini quadrilatéral (HSBQLP20) de plaque composite à champ de déformation basé sur la théorie de la plaque à déformation de cisaillement trigonométrique .....	83
3.2.1	Champ de déplacement et déformation.....	83
3.2.2	Équations constitutives .....	84
3.2.3	Les résultantes de force et de moment .....	86
3.2.4	Formulation de l'élément HSBQLP20 développé .....	88
3.2.5	Dérivation des matrices élémentaires .....	93

3.3	Numerical findings and discussion .....	96
3.3.1	Analyse statique des plaques laminées .....	97
3.3.2	Analyse des vibrations libres .....	107
3.4	Conclusion .....	120
<b>CHAPITRE 04: Développement et validation d'élément finis à champ de déformation pour l'analyse statique, vibration libre,et flambement mécanique des plaques FGMs</b>		
4.1	Champ de displacement .....	121
4.2	Cinématique .....	121
4.2.1	Amélioration de la fonction de cisaillement dans la théorie des plaques de Reissner–Mindlin .....	123
4.3	Champ de déformation .....	125
4.4	Relations constitutives .....	126
4.5	Position du plan neutre .....	127
4.6	Contraintes resultants .....	128
4.7	Analyse statique .....	129
4.7.1	Dérivation des matrices élémentaires et du vecteur de charge élémentaire .....	129
4.8	Analyse des vibrations libres .....	130
4.9	Analyse du flambement mécanique .....	131
4.10	Validation de la HSBQP20- Résultats et discussions ...	134
4.10.1	Analyse statique .....	135
4.10.2	Analyse de la vibration libre .....	151
4.10.3	Analyse du flambement mécanique .....	161
4.11	Conclusion .....	170
Référence .....		172

## LISTE DES FIGURES

Figure 1. 1Matériaux composite [1] .....	13
Figure 1. 2.Organigramme de différentes natures de matrice. ....	14
Figure 1. 3.Organigramme de différents types de renforts.....	15
Figure 1. 4.Classification des matériaux composites.....	17
Figure 1. 5.Matériaux composite monocouche[3].....	17
Figure 1. 6.Constitution d'un stratifié[3].....	18
Figure 1. 7.Désignation d'un stratifié[3] .....	19
Figure 1. 8.Structure sandwich[4] .....	19
Figure 1. 9.Mécanismes de rupture dans les stratifiés.....	26
Figure 1. 10.Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotrope, (b) Unidirectionnelle, (c) $\pm 45^\circ$ , (d) $0^\circ/90^\circ[8]$ .....	27
Figure 1. 11.Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement (a) $0^\circ/90^\circ$ tissu, (b) Unidirectionnelle, (c) Quasi-isotrope, (d) $0^\circ/90^\circ[8]$ . ....	27
Figure 1. 12.Mécanismes de rupture dans un stratifié $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ [8]. .....	27
Figure 1. 13.Configurations des composites et des FGM.....	30
Figure 1. 14.Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -SUS304) [14] .....	33
Figure 1. 15.La gradation continue de la fraction volumique des constituants dans une structure FGM. ....	33
Figure 1. 16.Schéma de la microstructure à gradient continu avec des constituants métal-céramique:(a) Microstructure à gradient régulier ; (b) Vue agrandie et (c) FGM céramique-métal[20].....	37
Figure 1. 17.Variations de la proportion volumique à travers l'épaisseur de la plaque FGM.....	39
Figure 1. 18.Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM. ....	40
Figure 1. 19.Variation du module de Young E dans toute l'épaisseur de la plaque E-FGM. ....	41
Figure 2. 1éléments finis a une dimension (1D).....	46
Figure 2. 2.éléments finis a deux dimension (2D).....	47
Figure 2. 3.éléments finis a trois dimension (3D) .....	47
Figure 2. 4.Corps solide soumis à des forces de surface ( $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$ ) et de volume ( $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{v}$ )[29] .....	48
Figure 2. 5.a) Modèle en contrainte plane. (b) Modèle en déformation plan.....	50
Figure 2. 6.Description d'une plaque[29].....	53

Figure 2. 7.Schéma des contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque soumis à une charge transverse $q$ appliquée suivant l'axe $z$ [29].....	54
Figure 2. 8.Efforts résultants agissant sur un élément différentiel de plaque [29]. .....	55
Figure 2. 9.Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (CPT) [32].....	57
Figure 2. 10.Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin [32].....	58
Figure 2. 11.Géométrie non déformée et déformée d'une plaque selon les théories CPT, FSDT et HSDT [32]. .....	60
Figure 2. 12.Coordonnées et points nodaux de l'élément SBRIE [93].....	72
Figure 2. 13.Elément SBRIEIR avec rotation dans le plan[86].....	75
Figure 2. 14.Géométrie de l'élément de plaque quadrilatéral Reissner–Mindlin SBQMP[73].....	78
Figure 3. 1. a) Plaque orthotrope, (b) Désignation d'une plaque stratifiée, (c) Disposition et numérotation des couches pour une plaque stratifiée typique.....	85
Figure 3. 2.Quadrilateral laminated composite plate element (HSBQLP20). .....	89
Figure 3. 3.Plaque carrée sandwich simplement appuyée soumise à une charge uniforme. ....	97
Figure 3. 4.Représentation des plaques carrées stratifiées soumises à une distribution de charge uniforme et à une distribution de charge sinusoïdale. ....	99
Figure 3. 5.Variation des contraintes normales dans le plan et des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque laminée $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ (modèle M1) pour $a/h = 10$ . .....	102
Figure 3. 6.Géométrie d'une plaque composite laminée symétrique présentant une encoche croisée et type de maillage utilisé. ....	103
Figure 3. 7.Convergence du déplacement adimensionné ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées composites à couches croisées soumises à une charge (UDL).....	105
Figure 3. 8.Déplacement central non dimensionné ( $\bar{w}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur ( $a/h$ ) pour des plaques carrées laminées (SSSS) soumises à une charge (UDL). ....	105
Figure 3. 9.Types de maillages utilisés: régulier et déformé. ....	106
Figure 3. 10.Les six premiers modes propres d'une plaque carrée à trois couches $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ encastrée sur les quatre côtés ( $a/h = 10$ ). ....	109
Figure 3. 11.Influence du rapport d'aspect $a/h$ sur les fréquences naturelles adimensionnées ( $\beta$ ) d'une plaque carrée stratifiée SSSS de type $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ . ....	110

Figure 3. 12.Effet du nombre de couches et du degré d'orthotropie ( $E_1/E_2$ ) sur les fréquences fondamentales adimensionnées ( $a/h = 5$ ).....	112
Figure 3. 13.Géométrie de la plaque composite inclinée.....	113
Figure 3. 14.Les quatre premiers modes propres de la plaque biaisée à cinq couches encastrées sur les quatre côtés $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ avec $\theta = 30^\circ$ et $a/h = 10$ .....	114
Figure 3. 15.Géométrie et maillage d'une plaque elliptique laminée encastrée. .....	114
Figure 3. 16.Les six premiers modes propres d'une plaque elliptique laminée à quatre couches $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ encastrée sur les quatre côtés ( $a/h = 10$ ).....	115
Figure 3. 17.Modèles de plaques circulaires avec différentes densités de maillage: (a) 60, (b) 152, (c) 272, (d) 384 et (e) 588 éléments quadrilatéraux.	
Figure 3. 18.Les six premiers modes de vibration d'une plaque circulaire stratifiée encastrée avec l'empilement $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ .....	118
Figure 3. 19.Maillage de la plaque triangulaire avec 832 éléments quadrilatéraux.....	118
Figure 3. 20.Les six premiers modes propres d'une plaque triangulaire laminée totalement encastrée $[45^\circ/-45^\circ]$ . .....	119
Figure 4. 1.Position de la surface neutre pour la plaque FGM... ..	127
Figure 4. 2.Variation de la contrainte normale non dimensionnel $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque carrée FG (SSSS) soumise à une charge uniformément répartie (UDL) pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ( $l/h = 10$ ). ....	142
Figure 4. 3.Variation de contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xy}$ dans le plan non dimensionnel d'une plaque carrée FG (SSSS) soumise à une charge uniformément répartie (UDL) pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ( $l/h = 10$ ). .....	142
Figure 4. 4.Variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ d'une plaque carrée FG simplement appuyée sur les quatre côtés (SSSS), soumise à une charge uniformément répartie (UDL), pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance ( $l/h = 10$ ). ....	143
Figure 4. 5.Les déplacements et contraintes non dimensionnels des plaques circulaires FG, SSSS, sont analysés en fonction de l'indice de puissance $p$ . .....	148
Figure 4. 6.Effet du rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) sur le déplacement non dimensionnel ( $w$ ) des plaques carrées pour différentes conditions aux limites ( $p = 1$ ). .....	150

Figure 4. 7.Effet du de l'indice de gradient (p) sur le déplacement non dimensionnel ( $w$ ) des plaques carrées pour différentes conditions aux limites ( $l/h= 10$ ).....	151
Figure 4. 8.Effet du rapport d'aspect $l/L$ sur la fréquence naturelle non dimensionnel ( $\beta$ ) d'une plaque FG rectangulaire simplement supportée (SSSS) ( $l/h =10$ ) .....	154
Figure 4. 9.Variation de la fréquence naturelle non dimensionnel ( $\omega$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) pour une plaque carrée FG...	156
Figure 4. 10.Variation de la fréquence naturelle non dimensionnel ( $\omega$ ) en fonction de l'indice de loi de puissance p pour une plaque carrée FG( $l/h=20$ ). ....	156
Figure 4. 11.Plaque biaise représentée avec un maillage de $N \times N$ éléments. ....	158
Figure 4. 12.Six premiers modes de vibration d'une plaque biaise FG simplement supportée avec ( $p = 2$ , $a/h = 10$ , $\theta = 45^\circ$ ).....	159
Figure 4. 13.Les trois premières formes modales d'une plaque circulaire CCCC en Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ( $h/R = 0.1$ ).....	160
Figure 4. 14.Plaque rectangulaire FG soumise à un chargement en plan...	162
Figure 4. 15.L'effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge critiques de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) d'une plaque carrée simplement supportée ( $L = l = 100h$ ) sous différents types de charges. ....	164
Figure 4. 16.La variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) des plaques carrées ( $l/h=100$ ) avec différentes conditions aux limites sous compression uniaxiale. ....	165
Figure 4. 17.La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur $l/ h$ pour une plaque carrée SSSS ( $L=l=100$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p, sous compression uniaxiale.....	169
Figure 4. 18.La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/largeur ( $l/L$ ) pour une plaque carrée simplement supportée ( $L=l=100$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p, sous compression biaxiale .....	169
Figure 4. 19.La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) en fonction du rapport ( $E_m/E_c$ ) pour une plaque carrée SSSS ( $L=l=10$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p, sous compression biaxiale. ....	170

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3. 1.Propriétés des matériaux du stratifié composite. ....	96
Tableau 3. 2.Convergence du déplacement transverse ( $w$ ) et des contraintes $(\bar{\sigma}_{xx}^1)$ d'une plaque carrée sandwich. ....	98
Tableau 3. 3.Déplacements et contraintes normalisés de la plaque carrée laminée à quatre couches $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ soumise à une charge (SDL). ...	101
Tableau 3. 4.Déplacement non dimensionné ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées cross-ply simplement appuyées (SSSS) soumises à une charge uniformément répartie (UDL). ....	104
Tableau 3. 5.Déplacement transverse ( $\bar{w}$ ) au point A pour des plaques laminées simplement appuyées avec empilements $[0^\circ/90^\circ]$ et $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ soumises à une charge uniformément répartie.....	107
Tableau 3. 6.Fréquences naturelles adimensionnées ( $\bar{\omega}$ ) de plaques carrées stratifiées croisées encastrées pour différents rapports longueur/épaisseur. ....	108
Tableau 3. 7.Influence du rapport d'aspect sur la fréquence adimensionnée ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque carrée stratifiée SSSS de type $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ . ....	110
Tableau 3. 8.Fréquences naturelles adimensionnées ( $\bar{\Omega}$ ) de plaques composites carrées SSSS avec différents nombres de couches orthotropes et rapports de modules.....	111
Tableau 3. 9.Fréquences naturelles adimensionnées ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque carrée stratifiée à cinq couches $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ avec bords simplement appuyés et encastrés, pour différents angles d'inclinaison. ....	113
Tableau 3. 10.Fréquences fondamentales adimensionnées ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque laminée à cinq couches en angle $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ avec bords simplement appuyés et encastrés, pour différents angles d'inclinaison. ....	113
Tableau 3. 11.Fréquences naturelles normalisées ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque elliptique à trois couches $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ encastrée.....	115
Tableau 3. 12.Fréquences naturelles adimensionnées d'une plaque circulaire laminée à quatre couches encastrées. ....	117
Tableau 3. 13.Paramètre de fréquence non dimensionnel ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque triangulaire laminée encastrée. ....	119
Tableau 4. 1.Les propriétés des matériaux utilisés dans les plaques FGM.....	134
Tableau 4. 2.Conditions aux limites des plaques.....	135

Tableau 4. 3.Déplacement et contraintes non dimensionnelle pour une plaque carrée isotrope ( $l/h = 10$ ) soumise à une charge uniformément répartie (UDL). ....	136
Tableau 4. 4.Déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) et contraintes des plaques carrées en FG avec différents rapports de forme ( $l/h$ ). ....	137
Tableau 4. 5.Déplacement et contraintes nodimensionnel d'une plaque carrée Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> , (SSSS) et soumise à une charge (UDL), pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance ( $l/h = 10$ ).....	140
Tableau 4. 6.Déplacement et contraintes nodimensionnel d'une plaque carrée Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> , (SSSS) et soumise à une charge (SDL), pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance ( $L/h = 10$ ). ....	141
Tableau 4. 7.Displacement centrales des plaques carrées Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> sous charges uniformément réparties pour différentes conditions aux limites..	144
Tableau 4. 8.Déplacement central non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) des plaques circulaires Al/ZrO <sub>2</sub> -1, simplement appuyées.....	145
Tableau 4. 9.Déplacement central non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) des plaques circulaires Al/ZrO <sub>2</sub> -1, encastrée ..	146
Tableau 4. 10.Contraintes normales dans le plan ( $\bar{\sigma}_x$ ) et contraintes de cisaillement transverse ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) non dimensionnelles pour des plaques circulaires FG souples, simplement appuyées.....	147
Tableau 4. 11.Déplacement non dimensionnelle ( $w$ ) des plaques carrées FG pour différentes conditions aux limites. ....	150
Tableau 4. 12.Fréquence fondamentale non dimensionnel ( $\bar{\beta}$ ) des plaques carrées Al/ZrO <sub>2</sub> .....	152
Tableau 4. 13. Fréquence fondamentale non dimensionnel ( $\bar{\beta}$ ) des plaques rectangulaires Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> * .....	153
Tableau 4. 14.Fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques carrées Al*/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . ....	157
Tableau 4. 15.Trois premières fréquences naturelles non dimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque biaise Al/ZrO <sub>2</sub> -1 (SSSS et CCCC, $\theta=45^\circ$ ).....	159
Tableau 4. 16.Les trois premières fréquences non dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque circulaire encastrée ( $p = 1$ ).....	161
Tableau 4. 17.Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ( $l/L = 1$ ).....	163
Tableau 4. 18.Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque rectangulaire Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ( $l/L = 2$ ).....	164

## AVANT-PROPOS

Ce livre est consacré à l'étude, la modélisation et l'analyse des structures composites et des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), en mettant un accent particulier sur le développement d'éléments finis avancés basés sur le champ de déformation. Il s'adresse principalement aux étudiants en génie civil, en génie mécanique, ainsi qu'aux chercheurs et ingénieurs souhaitant approfondir leurs connaissances dans le domaine des matériaux composites, de la théorie des plaques et de la méthode des éléments finis (MEF).

L'ouvrage est structuré en quatre chapitres principaux qui se complètent de manière progressive et logique.

Le **premier chapitre** présente une introduction générale aux matériaux composites. Il expose leurs définitions, leurs constituants, leurs classifications, ainsi que les différentes architectures utilisées dans l'industrie. Une attention particulière est accordée aux applications en génie civil, aux avantages et limitations de ces matériaux, ainsi qu'au phénomène du déclaminage. Le chapitre se termine par une présentation détaillée des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), de leurs propriétés, de leurs domaines d'utilisation et des lois de variation de leurs caractéristiques mécaniques.

Le **deuxième chapitre** est consacré aux fondements de la méthode des éléments finis. Il couvre les définitions essentielles, l'historique et les étapes fondamentales de la MEF, depuis la discréétisation jusqu'au post-traitement. Divers types d'éléments (1D, 2D et 3D) y sont présentés, ainsi qu'un rappel des principes de la mécanique des milieux continus. Le chapitre se poursuit avec une description des modèles analytiques des plaques, et se termine par une classification des formulations d'éléments finis (déplacement, équilibre, hybride, mixte et déformation).

Le **troisième chapitre** introduit un nouvel élément fini quadrilatéral (HSBQLP20) de plaque composite basé sur la théorie de la déformation de cisaillement trigonométrique. Il développe successivement les champs de déplacement et de déformation, les relations constitutives, les résultantes d'efforts, ainsi que la formulation complète de l'élément et la dérivation des matrices élémentaires. Une large partie du chapitre

est dédiée à la validation numérique, incluant l'analyse statique et la vibration libre de plaques laminées.

Le **quatrième chapitre** étend ces développements aux matériaux à gradient fonctionnel (FGM) avec l'élément fini HSBQP20. Le chapitre couvre la cinématique, les champs de déformation, les relations constitutives, la position du plan neutre, ainsi que la formulation des matrices élémentaires pour les analyses statique, vibratoire et de flambement mécanique. Une validation complète, accompagnée de discussions approfondies, est présentée pour démontrer la performance et la précision de l'élément développé.

Enfin, l'ouvrage se clôt par une bibliographie riche permettant au lecteur de poursuivre l'étude ou d'approfondir ses recherches dans les domaines traités.

Ce livre ambitionne ainsi de fournir une référence complète et structurée pour la compréhension des matériaux composites et FGM, et pour la maîtrise des outils numériques avancés nécessaires à leur analyse.

# **Chapitre 1 : Introduction aux matériaux composites**

## **1.1 Introduction**

Les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) représentent des avancées majeures dans le domaine des sciences des matériaux et de l'ingénierie, offrant des propriétés et des performances supérieures à celles des matériaux traditionnels. Ce chapitre a pour objectif d'explorer ces deux types de matériaux, en mettant en évidence leurs compositions, leurs mécanismes de fabrication et leurs applications dans le Génie Civil et les Travaux Publics.

Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs composants distincts, généralement une matrice et un renfort, qui se combinent pour offrir des caractéristiques supérieures, telles qu'une résistance mécanique accrue, une légèreté et une durabilité améliorée. Cette polyvalence leur permet d'être utilisés dans divers secteurs, allant de l'aéronautique à l'automobile, en passant par le bâtiment et l'électronique. Dans le contexte civil, ils sont particulièrement adaptés pour les dalles, coques, ponts et structures modulaires, où la performance et la longévité sont essentielles.

D'autre part, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) se distinguent par leur composition hétérogène, qui varie progressivement dans l'espace. Cette gradation confère aux FGM des propriétés mécaniques, thermiques et parfois électriques optimisées, adaptées à des conditions environnementales spécifiques. Leur utilisation croissante dans des applications critiques, telles que les structures exposées à des gradients thermiques, les ponts et les infrastructures durables, souligne leur importance dans l'innovation matérielle et la conception avancée.

Ce chapitre abordera dans un premier temps les principes fondamentaux et les techniques de fabrication des matériaux composites, suivis d'une analyse détaillée des FGM, en mettant en avant leurs avantages et leurs défis. Cette exploration fournira une base solide pour comprendre comment ces matériaux peuvent transformer les structures civiles modernes, répondre aux exigences de performance croissantes et préparer le lecteur aux méthodes

d'analyse numérique avancée, telles que la méthode des éléments finis et l'approche en déformation.

## 1.2 Matériaux composites

### 1.2.1 Définition

Les matériaux composites sont des matériaux constitués de deux ou plusieurs phases distinctes combinées de manière à obtenir des propriétés supérieures à celles des matériaux individuels. Chaque phase conserve ses caractéristiques propres, mais la synergie entre les composants permet de tirer parti de leurs points forts tout en compensant leurs limites[1].

### 1.2.2 Constituants des matériaux composites

Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs phases principales : la matrice et le renfort. Chaque constituant joue un rôle spécifique et complémentaire pour assurer les propriétés mécaniques et fonctionnelles optimales du matériau composite.

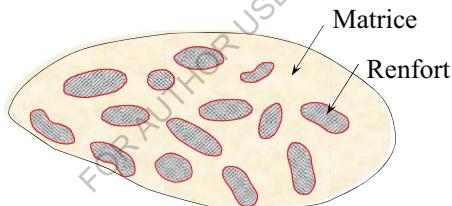


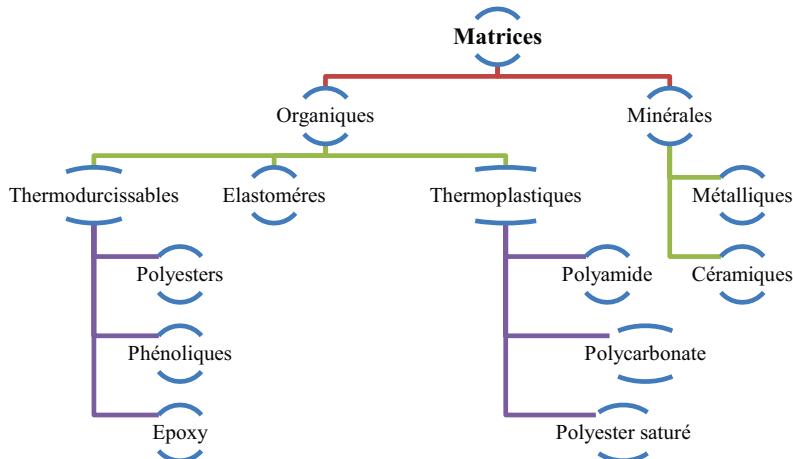
Figure 1. 1.Matériau composite [1].

#### 1.2.2.1 Matrice

La matrice est le composant fondamental qui assure l'assemblage des fibres grâce à ses propriétés cohésives et adhésives. Elle joue plusieurs rôles essentiels [2]:

- Maintenir les fibres en position et orientation correctes.
- Distribuer les efforts mécaniques entre les fibres.
- Jouer un rôle crucial dans la résistance à la propagation des fissures.
- Résister aux charges en cisaillement et assurer la stabilité globale du composite

Les différentes natures de la matrice peuvent être représentées par l'organigramme suivant :



**Figure 1. 2.Organigramme de différentes natures de matrice.**

### 1.2.2.2 Fibres

Les fibres constituent le renfort principal des matériaux composites. Elles déterminent la résistance mécanique, la rigidité et l'anisotropie du composite. Les types de fibres les plus couramment utilisés sont [2]:

a) **Fibres de verre :**

- o Légères et économiques, offrant une bonne résistance mécanique et chimique.
- o Utilisées dans les dalles, coques et panneaux modulaires.

b) **Fibres de carbone :**

- o Très résistantes et rigides, avec un excellent rapport résistance/poids.
- o Employées dans les structures critiques, poutres et coques nécessitant une performance élevée.

c) **Fibres aramides (Kevlar, Twaron) :**

- o Résistantes aux chocs et à l'abrasion, offrant une excellente ténacité.
- o Utilisées dans les structures soumises à des charges dynamiques ou à des impacts.

Les différents types de renforts dans les matériaux composites peuvent être représentés par l'organigramme suivant :

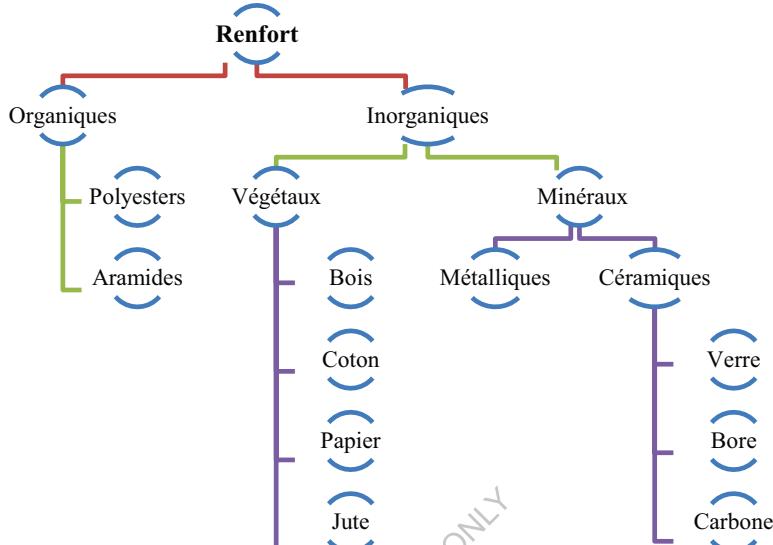


Figure 1. 3.Organigramme de différents types de renforts.

#### 1.2.2.3 Interphase

L'interphase représente la zone de transition entre la matrice et le renfort dans un matériau composite. Bien que souvent très fine (quelques micromètres seulement), cette région joue un rôle fondamental dans le transfert des contraintes mécaniques et la cohésion globale du composite.

#### 1.2.3 Classification des matériaux composites

Les matériaux composites se distinguent par la diversité de leurs structures, de leurs constituants et de leurs domaines d'application. Cette variété rend leur classification essentielle pour comprendre leur comportement mécanique, leurs procédés de fabrication et leurs utilisations possibles dans les structures du génie civil. La classification des composites peut se faire selon plusieurs critères[2] :

#### **1.2.3.1 Classification selon la nature de la matrice**

Le type de matrice influence largement les propriétés mécaniques, thermiques et chimiques du composite. On distingue principalement trois grandes catégories :

**a) Composites à matrice polymère (CMP)**

- Constitués de résines thermodurcissables (époxy, polyester, vinylester) ou thermoplastiques (PEEK, polyamide).
- Avantages : légèreté, facilité de mise en forme, résistance à la corrosion.
- Applications : structures de ponts, coques, réservoirs, conduites et éléments modulaires.

**b) Composites à matrice métallique (CMM)**

- Constitués d'une matrice métallique (aluminium, titane, magnésium, etc.) renforcée par des fibres ou particules céramiques.
- Avantages : résistance élevée à la température, rigidité et conductivité thermique.
- Applications : éléments de structures soumises à des charges élevées ou à la chaleur, comme les ponts métalliques ou structures hybrides.

**c) Composites à matrice céramique (CMC)**

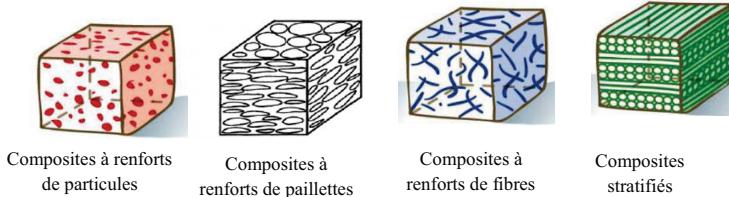
- Constitués d'une matrice en céramique (alumine, carbure de silicium, zircone) et d'un renfort en fibres ou particules céramiques.
- Avantages : excellente résistance à la chaleur et à l'usure, stabilité chimique.
- Applications : structures exposées à des environnements extrêmes, revêtements thermiques, systèmes de freinage et matériaux réfractaires.

#### **1.2.3.2 Classification selon la forme du renfort**

La classification des matériaux composites peut être établie selon plusieurs critères, tels que la nature de la matrice, le type de renfort ou encore la structure du matériau. Cependant, une approche couramment utilisée consiste à les classer en fonction de la forme et de la nature des renforts.

Selon cette méthode, on distingue quatre grandes catégories de composites[2] :

- Les composites à renforts de particules,
- Les composites à renforts de paillettes,
- Les composites à renforts de fibres,
- Les composites stratifiés.



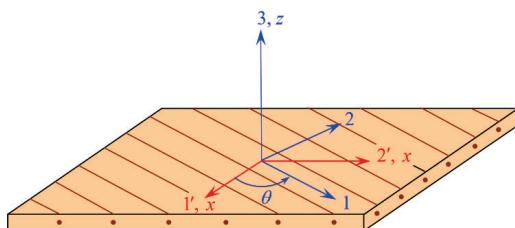
**Figure 1. 4.**Classification des matériaux composites.

#### 1.2.4 Architecture des matériaux composites

##### 1.2.4.1 Monocouche

Les monocouches représentent l'élément de base des structures composites. Elles se distinguent principalement par la forme et l'arrangement du renfort, qui peut être constitué de fibres longues unidirectionnelles (UD), de fibres tissées, ou encore de fibres courtes réparties aléatoirement dans la matrice.

Dans une nappe unidirectionnelle (UD), les fibres sont disposées parallèlement les unes aux autres, et maintenues entre elles par une trame légère servant de support (Figure 1.5). Ce type de configuration permet d'obtenir un matériau hautement performant dans la direction des fibres, mais présente une anisotropie marquée — autrement dit, les propriétés mécaniques diffèrent selon la direction considérée[3].



**Figure 1. 5.**Matériau composite monocouche[3].

#### 1.2.4.2 Stratifiés

Les composites stratifiés sont formés de plusieurs couches (ou plis) superposées (Figure 1.6), chacune composée de fibres de renfort et d'une matrice. Chaque couche peut être orientée différemment afin d'optimiser la résistance et la rigidité du matériau dans plusieurs directions.

Cette architecture multicouche permet de :

- Résister à des charges multidirectionnelles,
- Offrir une meilleure stabilité mécanique,
- Réduire le poids tout en maintenant une haute performance.

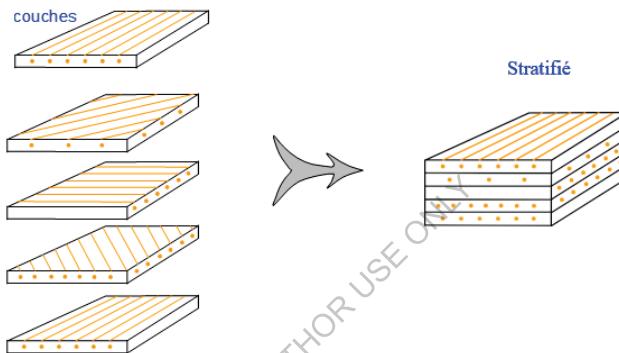
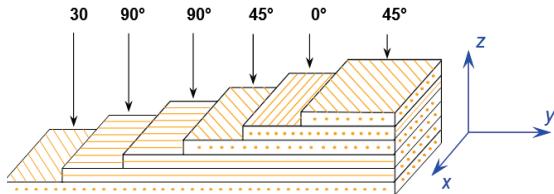


Figure 1. 6. Constitution d'un stratifié[3].

Les stratifiés composés de tissus ou de couches unidirectionnelles représentent la forme de base de ce type de matériau, vers laquelle tout autre type de stratifié peut être ramené. Dans ces configurations (Figure 1.7), les couches sont orientées selon différents angles par exemple  $[0^\circ/90^\circ]$ ,  $[\pm 45^\circ]$ , ou  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]$  afin d'assurer une meilleure résistance aux charges combinées et d'équilibrer les déformations internes dues aux différences de dilatation thermique ou mécanique.

Cette disposition des plis permet d'obtenir un comportement quasi isotrope, c'est-à-dire des propriétés mécaniques similaires dans plusieurs directions du plan. De plus, la nature et la séquence des couches influencent de manière notable la rigidité, la résistance à la fatigue, la résilience aux impacts et la stabilité au flambement du stratifié.



Désignation : [30 / 90° / 45 / 0 / 45]

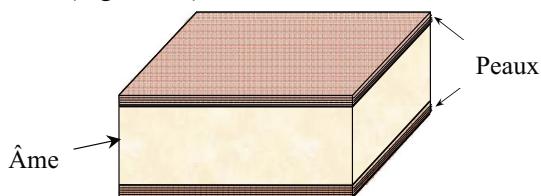
**Figure 1. 7.Désignation d'un stratifié[3].**

#### 1.2.4.3 Sandwichs

Les structures sandwichs constituent une catégorie particulière de matériaux composites, largement utilisées dans les domaines du génie civil, de l'aéronautique, du transport et de la construction navale, en raison de leur excellent rapport rigidité/poids[4].

Une structure sandwich est généralement composée de trois éléments principaux :

- Deux peaux externes (ou semelles), minces mais très résistantes, assurant la reprise des efforts de traction et de compression ;
- Un matériau d'âme, épais et léger, placé entre les deux peaux pour maintenir leur écartement et accroître le moment d'inertie de la section ;
- Un adhésif (ou une résine auto-adhésive) garantissant la liaison et la transmission des contraintes entre les différents composants (Figure 1.8).



**Figure 1. 8.Structure sandwich[4].**

Le principe de fonctionnement des structures sandwichs repose sur la séparation des peaux, ce qui augmente le moment d'inertie global sans ajout significatif de masse. Les peaux supportent les contraintes

normales (traction et compression), tandis que l'âme résiste principalement aux efforts de cisaillement et maintient la géométrie de l'ensemble. L'adhésif joue un rôle crucial dans la transmission des contraintes entre les couches et dans la prévention du déclaminage. Sa résistance au cisaillement est un paramètre déterminant pour la performance globale.

### **1.2.5 Applications des matériaux composites au génie civil**

#### **1.2.5.1 Renforcement et réhabilitation des structures existantes**

L'une des applications majeures des composites est le renforcement structurel des bâtiments, ponts et ouvrages d'art. Les polymères renforcés de fibres de carbone (CFRP), de verre (GFRP) ou d'aramide (AFRP) sont employés sous forme de bandes, plaques ou tissus collés sur les éléments en béton, acier ou maçonnerie. Ces solutions offrent plusieurs avantages :

- Augmentation de la résistance en flexion, traction ou cisaillement,
- Faible poids, facilitant la mise en œuvre,
- Excellente résistance à la corrosion et aux environnements agressifs,
- Minimisation de l'interruption de service des infrastructures.

#### **1.2.5.2 Construction de nouvelles structures**

Les matériaux composites sont également utilisés dans la construction d'ouvrages neufs, notamment pour :

- Les ponts piétonniers ou routiers (poutres et tabliers en FRP),
- Les structures modulaires et préfabriquées, légères et faciles à assembler,
- Les armatures non métalliques (barres et treillis en GFRP ou BFRP) en remplacement de l'acier pour le béton armé, réduisant les problèmes de corrosion,
- Les coffrages permanents en composite, améliorant la durabilité et la rapidité d'exécution.

### **1.2.5.3 Structures marines et hydrauliques**

Les composites sont particulièrement adaptés aux environnements humides ou corrosifs :

- Réservoirs, canalisations, buses, palplanches,
  - Ouvrages portuaires (pieux, pontons, jetées),
  - Gaines et conduites souterraines ou sous-marines.
- Leur résistance chimique et leur faible entretien en font une alternative idéale aux matériaux traditionnels tels que l'acier ou le béton armé.

### **1.2.5.4 Applications dans les infrastructures de transport**

Dans le domaine routier et ferroviaire, les composites trouvent des applications dans :

- Les chaussées renforcées par géocomposites (géotextiles, géogrilles, géonattes), améliorant la stabilité et la durabilité,
- Les panneaux de signalisation, poteaux, barrières de sécurité et abribus, offrant légèreté et résistance aux intempéries,
- Les composites bitumineux incorporant des fibres ou polymères pour renforcer la résistance aux fissures et à la fatigue.

### **1.2.5.5 Bâtiments et ouvrages architecturaux**

Les matériaux composites permettent également la création de formes architecturales complexes, grâce à leur grande liberté de mise en forme et leur aspect esthétique. On les retrouve dans :

- Les façades ventilées, toitures et panneaux décoratifs,
- Les éléments porteurs légers pour structures modulaires,
- Les composants d'isolation et d'étanchéité à hautes performances thermiques.

## **1.2.6 Les avantages et les inconvénients des matériaux composites.**

### **1.2.6.1 Les avantages**

Les matériaux composites présentent de nombreux avantages qui expliquent leur adoption croissante dans plusieurs secteurs industriels, notamment l'aéronautique, le transport, l'énergie et le génie civil. Les principaux avantages reconnus sont détaillés ci-dessous :

#### **a) Propriétés mécaniques adaptables**

Un stratifié composite fibreux est constitué d'un empilement de plis élémentaires, chacun présentant un comportement anisotrope (voire orthotrope) avec une résistance et une rigidité maximale dans la direction des fibres. En combinant des couches de fibres orientées différemment, on obtient un matériau dont les propriétés mécaniques peuvent être ajustées en fonction des contraintes prévues. Cet avantage explique l'usage des composites dans des ouvrages tels que les ponts à haubans, les poutres de renfort en fibre de carbone (CFRP) ou les réservoirs sous pression légers.

#### **b) Haute résistance et haut module d'élasticité**

Les composites à fibres de carbone, de verre ou d'aramide présentent des propriétés mécaniques remarquables. Ils combinent une résistance spécifique élevée (rapport résistance/masse) et un module d'élasticité élevé, ce qui les rend compétitifs par rapport aux alliages métalliques légers par exemple :

- Les composites carbone/époxy offrent un module d'environ 70 à 150 GPa, contre 70 GPa pour l'aluminium.
- Dans les sports, les raquettes ou cadres en composite augmentent la vitesse de frappe tout en réduisant la fatigue du joueur.

Dans le génie civil, ces caractéristiques sont exploitées pour la réhabilitation de structures en béton (renforcement par laminés CFRP) ou la construction de tabliers de ponts légers.

#### **c) Réduction du poids**

L'un des atouts majeurs des composites est leur faible densité. Les matériaux composites haute performance ont une densité moyenne d'environ 1,5 à 1,6 g/cm<sup>3</sup>, contre 2,7 g/cm<sup>3</sup> pour les alliages

d'aluminium et 7,8 g/cm<sup>3</sup> pour l'acier. Selon Airbus, cela permet un gain de poids de 10 à 30 % pour les éléments de structure[5].

#### **d) Simplification de la production**

Les procédés modernes (infusion, RTM, moulage, enroulement filamentaire, etc.) permettent de fabriquer des pièces composites de formes complexes en un seul moule, sans assemblages mécaniques multiples. Exemple : sur le Boeing 787, un tronçon de fuselage qui nécessitait autrefois près de 1 000 pièces métalliques et plusieurs milliers de fixations est désormais produit en une seule pièce monolithique [5].

Dans le bâtiment, les panneaux composites de façade ou les coques en GFRP sont également moulés d'un seul tenant, réduisant les coûts de main-d'œuvre et d'entretien.

#### **e) Maintenance réduite et durabilité accrue**

Les composites sont insensibles à la corrosion et présentent une très bonne résistance à la fatigue. Contrairement aux métaux, ils ne nécessitent ni protection contre la rouille ni peinture régulière, ce qui réduit considérablement les coûts d'entretien. Exemple : L'intervalle entre deux révisions complètes du Boeing 787 est de douze ans, contre dix ans pour le Boeing 777, grâce à l'emploi massif de matériaux composites [5].

Dans le domaine du génie civil, cela se traduit par une longévité accrue des ponts, passerelles et structures marines réalisés en composites, soumis à des environnements agressifs (humidité, sel, produits chimiques).

#### **1.2.6.2 Les inconvénients des matériaux composites**

Bien que les matériaux composites offrent des avantages indéniables, ils ne constituent pas une solution idéale pour toutes les applications. Plusieurs inconvénients peuvent freiner leur adoption, en particulier dans le domaine du génie civil. Les principaux inconvénients rencontrés sont les suivants :

### a) Coût

Les matériaux composites ont été initialement développés pour des domaines de haute technologie tels que l'aéronautique et l'aérospatiale, où leur coût élevé est compensé par des performances mécaniques exceptionnelles et une réduction de masse significative. Cependant, dans le secteur du génie civil, leur prix de fabrication et mise en œuvre demeure un obstacle majeur à une adoption généralisée :

- Le coût des fibres de carbone, en particulier, reste 10 à 20 fois supérieur à celui de l'acier [6].
- Les procédés de fabrication (moulage, infusion, polymérisation) nécessitent des équipements spécialisés et un personnel qualifié, augmentant les coûts initiaux des projets.

Exemple : Le renforcement d'un tablier de pont en CFRP peut être jusqu'à 40 % plus cher qu'un renforcement équivalent en acier, bien que le coût global sur la durée de vie soit souvent plus avantageux en raison d'un entretien réduit.

### b) Conception et analyse

Les matériaux composites sont hétérogènes et anisotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés varient selon la direction des fibres. Cela rend leur comportement mécanique plus complexe à modéliser que celui des matériaux traditionnels comme l'acier ou le béton.

- L'ingénieur doit déterminer un plus grand nombre de constantes mécaniques (modules d'élasticité, coefficients de Poisson, contraintes ultimes dans plusieurs directions) pour établir les relations contrainte-déformation.
- Les modèles numériques, notamment par la méthode des éléments finis, exigent une modélisation multicouche précise pour tenir compte de la distribution des fibres et de la matrice.

### c) Assemblage

L'assemblage des composites constitue un autre défi important. Ces matériaux, souvent plus fragiles que les métaux, présentent une faible capacité de redistribution des contraintes autour des zones critiques telles que les trous, les rivets ou les boulons[6].

- La résistance et la rigidité d'un stratifié ne se transmettent pas toujours intégralement à travers un joint mécanique.

- Pour éviter les concentrations de contraintes, il est courant de renforcer les perçages à l'aide d'inserts métalliques ou d'augmenter localement l'épaisseur du stratifié.
- Les techniques d'assemblage par collage offrent une alternative efficace, mais nécessitent un contrôle rigoureux des conditions de surface et de la qualité de l'adhésion.

#### **d) Tolérance aux dommages**

Les composites sont moins tolérants aux dommages que les matériaux ductiles.

- Un matériau métallique, grâce à sa ductilité, peut se déformer plastiquement sous impact, absorbant l'énergie avant la rupture.
- En revanche, un composite - notamment à fibres de carbone tend à se fracturer brutalement sans signe précurseur, rendant la détection des dommages internes (fissures, délaminations, décohésions) difficile.
- Ces défauts, souvent invisibles en surface, peuvent compromettre la résistance structurelle.

#### **1.2.7 Mécanismes de rupture dans les matériaux composites**

Les matériaux composites, du fait de leur structure hétérogène composée d'une matrice et d'un renfort fibreux, présentent des mécanismes de rupture complexes et multiples. Contrairement aux matériaux homogènes (comme les métaux), la rupture dans un composite n'est pas un phénomène unique, mais résulte de plusieurs modes d'endommagement successifs ou combinés. La compréhension de ces mécanismes est essentielle pour la conception, la modélisation et la prédiction de la durée de vie des structures en composite.

##### **1.2.7.1 Nature et origine des ruptures**

Dans un matériau composite, la rupture peut se produire :

- Au niveau des fibres, si la charge dépasse leur résistance en traction ;
- Dans la matrice, par fissuration, fluage ou rupture fragile ;
- À l'interface fibre/matrice, par décohésion ou glissement ;
- Ou encore dans le stratifié, par délamination entre les couches.

Ces phénomènes apparaissent souvent progressivement et peuvent interagir entre eux, rendant la rupture globale difficile à prédire.

### 1.2.7.2 Types de mécanismes de rupture

#### a) Rupture des stratifiés

Pour les stratifiés, en plus des mécanismes élémentaires mentionnés précédemment - tels que le décrochage entre les fibres et la matrice, la fissuration transversale ou longitudinale de la matrice, et la rupture des fibres - un mécanisme de défaillance supplémentaire peut apparaître entre les couches du matériau. Ce phénomène, appelé délaminage, correspond à une séparation interlaminaire due à une rupture d'adhérence entre deux plis adjacents (Figure 1.9).

La survenue du délaminage est souvent liée à des contraintes normales ou de cisaillement dépassant la résistance interlaminaire du composite. Ce mode de rupture peut être initié par des défauts de fabrication (bulles, gradients thermiques, ou manque de résine), par des charges d'impact, ou encore par la coalescence progressive de fissures intra-laminaires.

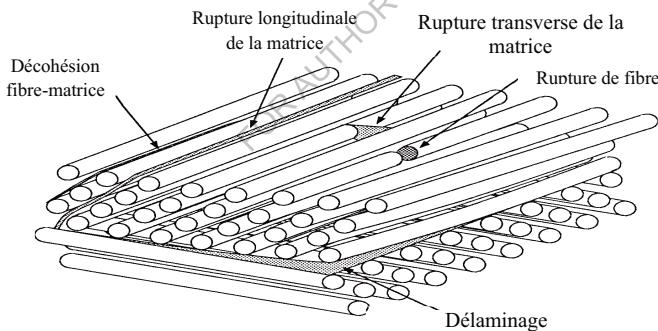
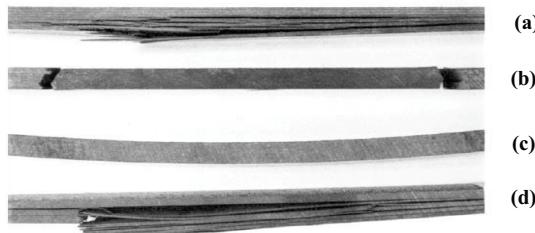


Figure 1. 9.Mécanismes de rupture dans les stratifiés.

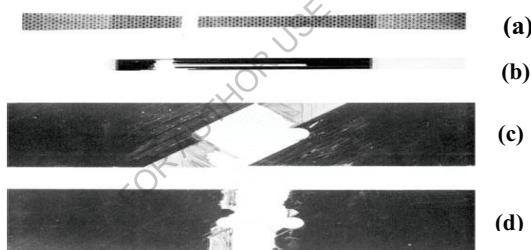
#### b) Mécanismes de rupture des composites stratifiés renforcés par des fibres longues.

Les composites stratifiés renforcés par des fibres longues sont largement utilisés dans les domaines où la légèreté et la résistance mécanique élevée sont des critères essentiels, tels que l'aéronautique, le spatial ou l'ingénierie automobile. Toutefois, leur comportement mécanique est complexe, et la rupture de ces matériaux résulte souvent

d'une interaction entre plusieurs modes d'endommagement. L'étude des mécanismes de rupture permet de mieux prédire la durée de vie et d'assurer l'intégrité des structures en service. Ces mécanismes dépendent principalement de la stratification, de l'orientation des fibres, et du type de chargement appliqué (traction, flexion, compression, cisaillage ou impact). Les figures 1.10 et 1.11 illustrent les différents types de rupture observés sous flexion et traction, respectivement[7].

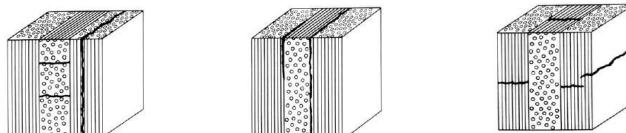


**Figure 1. 10.**Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotope, (b) Unidirectionnelle, (c)  $\pm 45^\circ$ , (d)  $0^\circ/90^\circ$ [8]



**Figure 1. 11.**Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement (a)  $0^\circ/90^\circ$  tissu, (b) Unidirectionnelle, (c) Quasi-isotope, (d)  $0^\circ/90^\circ$ [8].

Les modes de rupture observés dans les composites renforcés par fibres longues sont classés en trois catégories principales (Figure 1.12) :



Rupture intra-laminaire

Rupture inter-laminaire

Rupture trans-laminaire

**Figure 1. 12.**Mécanismes de rupture dans un stratifié  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  [8].

### ✓ **Rupture intra-laminaire**

La rupture intra-laminaire se produit à l'intérieur d'un même pli. Elle est généralement due à la faible résistance de la matrice et à la limitation de l'adhérence entre les fibres et la résine. Sous l'effet d'une contrainte normale perpendiculaire à la direction des fibres, des fissures transversales apparaissent dans la matrice. Ces fissures constituent souvent le premier signe d'endommagement avant la rupture complète du composite.

### ✓ **Rupture inter-laminaire**

La rupture inter-laminaire correspond à une séparation entre deux plis adjacents. Elle se manifeste par une décohésion de l'interface fibre/matrice ou par une rupture de la matrice elle-même. Cette rupture se produit généralement sous l'effet de contraintes de cisaillement ou de traction interlaminaires, et conduit au délaminateur, phénomène critique pouvant entraîner une perte de rigidité et une instabilité structurelle.

Comme pour les matériaux métalliques, la rupture interlaminare peut être décrite selon trois modes de propagation :

- Mode I (ouverture) : séparation perpendiculaire au plan des couches ;
- Mode II (cisaillement) : glissement parallèle entre couches ;
- Mode III (vissage) : torsion entre plis.

### ✓ **Rupture trans-laminaire**

La rupture trans-laminaire correspond à la rupture complète des fibres, traversant plusieurs couches. Elle intervient lorsque la contrainte appliquée dépasse la résistance en traction des fibres, provoquant la rupture fragile du stratifié. Ce type de rupture se produit soit par traction directe (rupture nette des fibres), soit par micro-flambage sous compression, phénomène souvent observé dans les plis orientés à 0°. La rupture trans-laminaire conduit généralement à la défaillance finale du matériau, car les fibres portent la majeure partie de la charge.

### **1.2.8 Délaminage et matériaux à gradient fonctionnel (FGM)**

Le délaminage constitue l'un des modes de défaillance les plus critiques dans les matériaux composites stratifiés. Il se manifeste par une séparation progressive des couches (ou plis) au niveau des interfaces, entraînant une perte de continuité mécanique et, par conséquent, une diminution significative de la rigidité et de la résistance globale de la structure. Ce phénomène est généralement initié par des contraintes interlaminaires élevées, résultant soit de charges mécaniques externes (flexion, impact, fatigue), soit de contraintes thermiques résiduelles induites lors du procédé de fabrication. Une fois amorcé, le délaminage peut se propager sous différents modes de rupture interlaminaire :

- Mode I (ouverture), dû à une traction perpendiculaire au plan des couches ;
- Mode II (cisaillement), correspondant à un glissement parallèle entre les plis ;
- Mode III (vissage), associé à une torsion entre couches.

Les modèles analytiques et numériques classiques (basés sur la théorie des stratifiés) présentent souvent des difficultés à décrire correctement ces phénomènes, car les discontinuités de propriétés entre les couches entraînent des sauts de contraintes aux interfaces. Ces zones concentrées de contraintes constituent les points d'amorçage du délaminage. Afin de réduire ou éliminer ces discontinuités interlaminaires, les chercheurs ont développé un nouveau type de matériau composite : le matériau à gradient fonctionnel (FGM – Functionally Graded Material).

## **1.3 Matériaux FGM – Functionally Graded Material**

### **1.3.1 Définition**

Les matériaux à gradient fonctionnel, souvent désignés par le sigle FGM (Functionally Graded Materials), constituent une nouvelle génération de matériaux composites dont les propriétés physiques et mécaniques varient progressivement selon une ou plusieurs directions de l'espace, le plus souvent dans l'épaisseur.

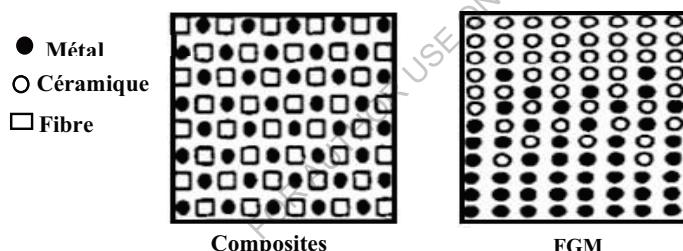
Contrairement aux composites stratifiés classiques, dans lesquels les couches successives présentent des interfaces nettes susceptibles de

générer des concentrations de contraintes et donc du déclaminage, les FGM assurent une transition continue entre les constituants (métal et céramique, par exemple) (Figure 1.14). Cette transition progressive permet d'obtenir une distribution lisse des contraintes et des déformations, améliorant ainsi la durabilité et la résistance aux environnements extrêmes.

Sur le plan microstructural, les FGM sont généralement constitués de deux phases principales :

- ✓ Une phase céramique, assurant la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation ;
- ✓ Une phase métallique, conférant la ténacité, la ductilité et la résistance à l'impact.

En combinant ces deux types de matériaux selon une loi de variation prédéfinie (souvent exponentielle ou en puissance), on obtient un matériau dont les propriétés mécaniques ( $E$ ,  $\rho$ ,  $v$ ) et thermiques ( $k$ ,  $\alpha$ ) évoluent de manière continue dans la direction du gradient.



**Figure 1. 13.**Configurations des composites et des FGM.

### 1.3.2 Historique du développement des FGM

L'idée générale du concept de matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials – FGM) trouve son origine au début des années 1980 grâce aux travaux de chercheurs japonais, dans le cadre du développement de revêtements résistants aux fortes températures pour des applications aérospatiales. Toutefois, les premières propositions théoriques relatives aux matériaux composites et polymères à structure graduée remontent à 1972, lorsque Bever et Duwez [9] ont suggéré la possibilité de créer des matériaux présentant des variations continues de composition et de propriétés. Leurs recherches, bien que pionnières,

ont eu un impact limité, principalement en raison du manque de technologies de fabrication adaptées à l'époque.

En 1986, le terme officiel « matériaux à gradient fonctionnel » (FGM) fut adopté au Japon. À la suite du troisième symposium international sur les FGM, tenu à Lausanne en 1994, la terminologie fut ajustée en 1995 pour préciser la dimension fonctionnelle et descriptive du concept[10]. Dans le cadre du programme national japonais FGM PART 1 (Research on Fundamental Technology for Development of Functionally Graded Materials for Thermal Stress Relaxation), un projet de recherche de cinq ans (1987–1992) fut lancé. L'objectif principal était de développer des FGM adaptés aux environnements à haute température, notamment pour les avions spatiaux hypersoniques. À la fin de ce programme, plusieurs échantillons expérimentaux furent réalisés, parmi lesquels des coques carrées de 300 mm et des bols hémisphériques de 50 mm de diamètre en SiC–C, destinés aux cônes de nez des véhicules spatiaux [11]. L'intérêt scientifique pour les FGM s'est accru avec la tenue de la première conférence internationale sur les matériaux à gradient fonctionnel (FGM'90), organisée à Sendai (Japon) en 1990, marquant le début d'une série de conférences internationales bisannuelles [19]. En 1992, les FGM furent officiellement classés parmi les dix technologies les plus avancées du Japon[12], confirmant leur importance stratégique. Un second programme de recherche, FGM PART 2 (1993–1998), fut ensuite initié sous le titre Research on Energy Conversion Materials with Functionally Graded Structures. Ce projet visait à améliorer l'efficacité de la conversion énergétique grâce à l'utilisation de structures FGM, ouvrant ainsi la voie à des applications dans les domaines thermoélectriques et énergétiques[13]. Au début des années 2000, les activités de recherche se sont internationalisées. En 2001, un atelier scientifique international, présidé par le professeur Naotake Ooyama, mit en avant les tendances émergentes et les perspectives futures des FGM. Les thématiques abordées concernaient la modélisation numérique, les procédés automatisés de fabrication, la mesure des contraintes résiduelles, l'imagerie ultrasonore et la biocompatibilité des FGM à usage biomédical. Depuis lors, les symposiums internationaux sur les FGM se tiennent régulièrement à travers le monde. Le plus

récent, la 16<sup>e</sup> Conférence internationale sur les FGM (FGM 2022), s'est déroulé du 7 au 10 août 2022 à Hartford (États-Unis), témoignant de la maturité scientifique et industrielle de cette discipline, aujourd'hui reconnue comme un pilier du développement des matériaux avancés.

### 1.3.3 Conception des structures FGM

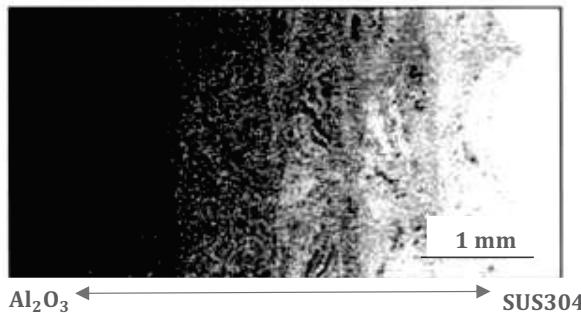
Un matériau à gradient fonctionnel (FGM) est un type de composite avancé dont la microstructure varie continûment dans l'espace, de manière à optimiser les performances mécaniques, thermiques ou fonctionnelles de la structure. Cette variation spatiale des propriétés permet de combiner, au sein d'un même matériau, les avantages de plusieurs constituants sans subir les inconvénients liés à leurs interfaces abruptes. Les matériaux FGM sont conçus pour répondre à des exigences multifonctionnelles, notamment dans les applications où il faut concilier résistance mécanique, dureté, tenacité et résistance à l'usure ou à la chaleur. Par exemple, dans une liaison entre particules, le cœur du matériau doit être suffisamment dur pour résister à la rupture, tandis que la surface externe doit être assez ductile et résistante pour limiter l'usure et l'endommagement superficiel.

La Figure 1.14 illustre une micrographie obtenue par microscope électronique à balayage (MEB) d'une section transversale d'une billette en FGM Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>–SUS304, montrant la transition progressive entre la phase céramique (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) et la phase métallique (SUS304).

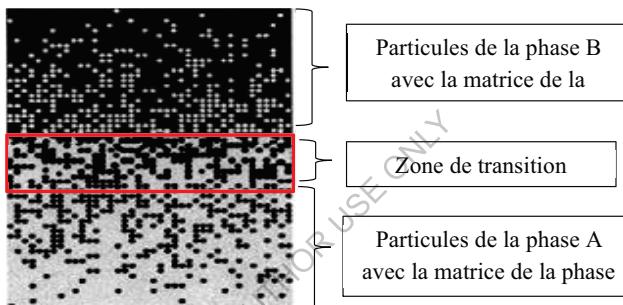
Dans un matériau à gradient fonctionnel, chaque phase microstructurale joue un rôle distinct :

- La phase céramique assure une résistance élevée à la chaleur et une stabilité chimique exceptionnelle, idéale pour les environnements thermiques extrêmes.
- La phase métallique, quant à elle, confère au matériau une ductilité et une résilience accrues, réduisant ainsi les risques de rupture fragile.

La gradation continue de la fraction volumique des constituants induit une transition fluide et progressive des propriétés mécaniques et thermiques à travers l'épaisseur du matériau. Cette transition élimine les problèmes d'interface observés dans les composites stratifiés classiques et atténue les concentrations de contraintes, améliorant ainsi la durabilité et la fiabilité globale du matériau (Figure 1.15).



**Figure 1. 14.**Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -SUS304) [14].



**Figure 1. 15.**La gradation continue de la fraction volumique des constituants dans une structure FGM.

### 1.3.4 Domaine d'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

Depuis leur apparition dans les années 1980, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont trouvé des applications dans de nombreux secteurs technologiques exigeants. Leur capacité à assurer une transition progressive des propriétés mécaniques, thermiques ou chimiques entre deux matériaux les rend particulièrement adaptés aux environnements extrêmes où les matériaux conventionnels échouent.

#### 1.3.4.1 Domaine aérospatial et aéronautique

Les FGM sont largement utilisés dans le secteur aérospatial pour les revêtements de moteurs à réaction, les bords d'attaque d'ailes, les tuiles de protection thermique des navettes spatiales et les structures soumises

à des gradients thermiques sévères. Les systèmes céramique-métal tels que ZrO<sub>2</sub>-Ni ou SiC-Ti permettent une résistance élevée aux chocs thermiques et à l'oxydation[15].

#### **1.3.4.2 Domaine de l'énergie**

Dans les systèmes de production et de conversion d'énergie, les FGM sont employés pour améliorer la résistance à la corrosion, la stabilité thermique et la durabilité mécanique[16]. Ils sont intégrés dans :

- Les turbines à gaz et à vapeur,
- Les réacteurs nucléaires,
- Les échangeurs thermiques,
- Et les panneaux solaires ou cellules thermoélectriques.  
Ces applications exploitent leur aptitude à gérer efficacement les flux thermiques et à minimiser les contraintes d'interface.

#### **1.3.4.3 Domaine biomédical**

Les FGM sont utilisés pour les implants orthopédiques et dentaires, où la gradation des propriétés permet de reproduire la transition naturelle entre os et tissus mous. Les systèmes Ti-HA (hydroxyapatite) sont les plus courants, assurant une bonne biocompatibilité, une résistance mécanique adaptée et une adhérence osseuse améliorée[17].

#### **1.3.4.4 Domaine du génie civil et mécanique**

Dans le génie civil, les FGM sont employés dans :

- Les structures de ponts et revêtements exposés à des gradients thermiques ;
- Les composants sandwichs ou plaque-coques FGM soumises à flexion thermique ;
- Et les systèmes de protection contre l'usure et la corrosion. En mécanique, ils sont utilisés dans les disques de frein, paliers, tôles composites et éléments soumis à fortes charges thermomécaniques.

#### **1.3.4.5 Domaine de la défense**

Les FGM sont employés pour la fabrication d'éléments balistiques, de blindages légers et de revêtements anti-choc thermique pour missiles ou véhicules militaires. Grâce à leur absorption progressive de l'énergie

d'impact, ils permettent une meilleure résistance aux projectiles tout en réduisant la masse. Des combinaisons typiques incluent Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ou Ti-TiC, qui offrent un compromis optimal entre dureté et ductilité[18].

#### **1.3.4.6 Domaine marin et sous-marin**

Les FGM trouvent également des applications dans l'industrie marine et océanique, notamment dans[19] :

- Les arbres d'hélice et systèmes de propulsion ;
- Les coques sous pression et dômes de sonar ;
- Les tuyauteries composites résistantes à la corrosion ;
- Et les structures immergées soumises à des charges cycliques. Leur résistance accrue à la corrosion saline, aux contraintes cycliques et à la fatigue thermique en fait une solution durable pour les environnements marins sévères.

#### **1.3.4.7 Domaine de l'optoélectronique et des nanotechnologies**

Dans les dispositifs optoélectroniques, les FGM sont utilisés pour contrôler la réflectivité, la conductivité et les propriétés optiques des couches minces[19]. On les retrouve dans :

- Les lentilles à indice gradué,
- Les capteurs photoniques,
- Les revêtements transparents conducteurs,
- Et les dispositifs laser à semi-conducteurs.

À l'échelle nanométrique, les FGM nanostructurés permettent une adaptation précise des propriétés optiques et électroniques, ouvrant la voie à la photonique intégrée et aux systèmes MEMS/NEMS.

### **1.3.5 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel.**

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) couramment utilisés sont généralement classés comme des matériaux à gradient continu dans une direction spécifique (souvent suivant l'épaisseur ou la longueur). Quelle que soit la nature du gradient, ces matériaux assurent une transition en douceur des propriétés thermomécaniques, ce qui permet de réduire considérablement les problèmes de délamination, de fissuration et de concentration de contraintes aux interfaces.

Les FGM sont en général constitués de matériaux isotropes, tels que les métaux et les céramiques. Une microstructure à gradient continu, combinant ces deux constituants, est schématiquement représentée dans la figure 1.19.

En pratique, les FGM métal–céramique sont largement employés dans des applications à haute température, notamment dans les environnements aéronautiques, nucléaires ou spatiaux. Dans ce type de configuration :

- La partie céramique offre une excellente résistance thermique et chimique, protégeant le matériau des environnements extrêmes,
- La phase métallique assure de bonnes propriétés mécaniques et une grande ténacité, réduisant ainsi le risque de rupture fragile,
- Tandis que la zone de transition joue un rôle crucial dans la réduction des contraintes interfaciales et l'amélioration de la résistance thermique [32].

### **1.3.5.1 Propriétés générales des céramiques utilisées dans les FGM**

Le choix des céramiques pour la conception des FGM repose sur leurs caractéristiques exceptionnelles, parmi lesquelles :

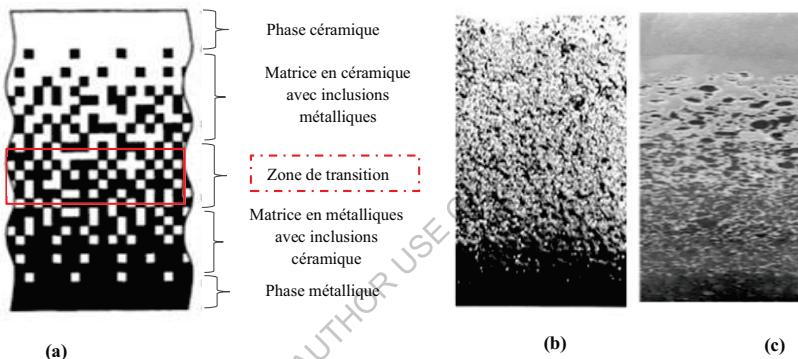
- ✓ Faible réactivité chimique et excellente résistance à la corrosion.
- ✓ Haute température de fusion ou de décomposition.
- ✓ Module d'élasticité élevé et grande dureté.
- ✓ Résistance mécanique élevée à la rupture.
- ✓ Faible coefficient de frottement et bonne résistance à l'usure.
- ✓ Stabilité des propriétés mécaniques à haute température.
- ✓ Faible coefficient de dilatation thermique, garantissant une bonne résistance aux chocs thermiques.
- ✓ Faible conductivité thermique, conférant une excellente isolation thermique.

Cependant, malgré ces atouts remarquables, les céramiques présentent une fragilité intrinsèque et une sensibilité accrue aux défauts microscopiques, limitant leur utilisation lorsqu'une ductilité ou une absorption d'énergie importante est requise.

### 1.3.5.2 Apport des métaux dans les FGM

Les métaux, utilisés comme phase complémentaire dans les FGM, compensent ces faiblesses grâce à leurs propriétés distinctes :

- ✓ Bonne résistance mécanique sous chargement complexe.
- ✓ Haute conductivité thermique et électrique.
- ✓ Excellente ténacité et capacité à absorber l'énergie avant rupture.
- ✓ Ductilité permettant d'atténuer la propagation des fissures.
- ✓ Bonne compatibilité avec divers procédés de fabrication (sintering, dépôt, pulvérisation, etc.).



**Figure 1. 16.**Schéma de la microstructure à gradient continu avec des constituants métal-céramique :(a) Microstructure à gradient régulier ; (b) Vue agrandie et (c) FGM céramique-métal[20].

### 1.3.6 Lois de variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont constitués de deux ou plusieurs matériaux présentant des propriétés structurales et fonctionnelles différentes, avec une transition continue de la composition, de la microstructure et de la distribution des porosités. Cette approche vise à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure finale. Les FGM se distinguent par leurs microstructures non uniformes et leurs propriétés macroscopiques variables dans l'espace. Un aspect essentiel de leur fabrication réside

dans la composition multiphasée à travers l'épaisseur, où les proportions relatives des constituants varient graduellement. La variation des propriétés matérielles en fonction de la position est généralement décrite par la loi des mélanges, selon le modèle de Voigt[21]:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (1.1)$$

- $P$ : Propriété définie le long de l'axe  $z$  ;
- $P_i$ : La propriété mécanique du constituant (i) ;
- $V_i$ : La fraction volumique du constituant (i) ;

Avec

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (1.2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont constituées de deux matériaux : une phase céramique et un métal (souvent inoxydable). La loi de Voigt se simplifie alors comme suit :

$$P(z) = P_c V_c + P_m V_m \quad (1.3)$$

Où :

- $P_c$  et  $P_m$  représentent respectivement les propriétés de la céramique et du métal, telles que la densité  $\rho$ , le module d'Young  $E$ , ou encore le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ .
- $V_c$  désignent leurs fractions volumiques respectives.

Les variations de ces fractions volumiques à travers l'épaisseur de la plaque déterminent le comportement global du matériau. Les chercheurs utilisent généralement trois types de lois pour modéliser cette gradation : loi de puissance(P-FGM), loi sigmoïde (S-FGM) et loi exponentielle(E-FGM).

### 1.3.6.1 Lois de puissance (P-FGM)

La loi de puissance a été introduite pour la première fois par Wakashima et al. [22] et demeure la plus utilisée dans les analyses mécaniques des FGM. Pour une plaque d'épaisseur uniforme  $h$ , la propriété effective  $P(z)$  le long de l'axe  $z$  est exprimée par:

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2) V(z) \quad (1.4)$$

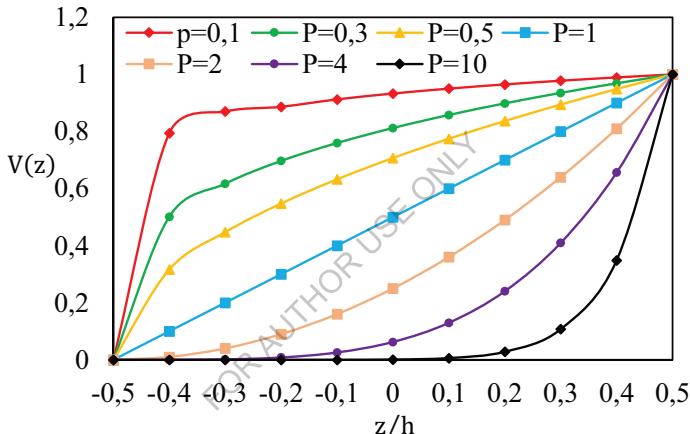
Où :

- $P_1$  et  $P_2$  sont les propriétés des surfaces supérieure ( $z = +h/2$ ) et inférieure ( $z = -h/2$ ),
- $p$  est l'indice de loi de puissance ou exposant de fraction volumique ( $0 \leq p \leq \infty$ ).

La fraction volumique de la céramique peut alors s'écrire :

$$V(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (1.5)$$

Comme le montre la figure 1.17, pour  $p < 1$ , la fraction volumique diminue rapidement près de la surface inférieure, tandis que pour  $p > 1$ , elle croît fortement vers la surface supérieure.



**Figure 1.17.** Variations de la proportion volumique à travers l'épaisseur de la plaque FGM.

### 1.3.6.2 Loi sigmoïde (S-FGM)

Lorsque la variation de composition selon une seule loi de puissance est appliquée à un composite multicouche, des concentrations de contraintes peuvent apparaître à certaines interfaces. Pour remédier à cela, Chung et Chi [23] ont proposé la loi sigmoïde, combinaison de deux lois de puissance, afin d'assurer une distribution plus régulière des contraintes et de réduire les facteurs d'intensité de contrainte dans les structures fissurées[24].

Les fractions volumiques de céramique et de métal sont définies respectivement par:

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1-6a)$$

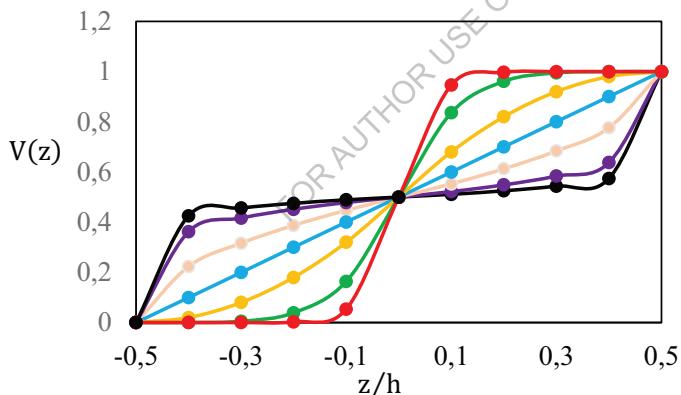
$$V_c(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1-6b)$$

En appliquant la règle des mélanges, les propriétés effectives correspondantes sont données par :

$$E(z) = V_c(z)E_c + (1 - V_c(z))E_m \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1-7a)$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + (1 - V_m(z))E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1-7b)$$

La figure 1.18 illustre la variation de la fraction volumique selon cette loi sigmoïde, montrant une transition douce entre les couches.



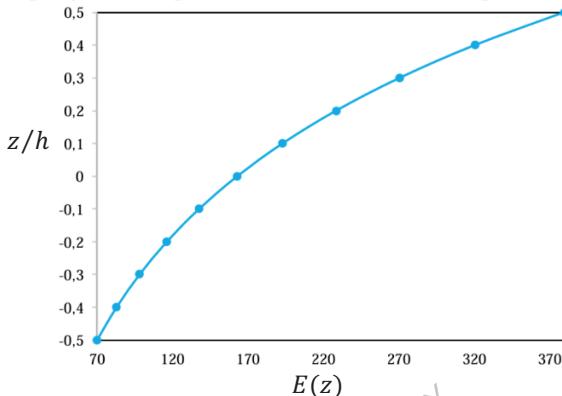
**Figure 1. 18.** Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.

### 1.3.6.3 Loi exponentielle (E-FGM)

La loi exponentielle, introduite par Kim et Paulino[25], est particulièrement adaptée pour l'analyse des mécanismes de fracture dans les FGM. La distribution des propriétés à travers l'épaisseur est donnée par :

$$P(z) = P_2 e^{\frac{1}{h} \left( \ln \frac{P_1}{P_2} \right) \left( z + \frac{h}{2} \right)} \quad (1-8)$$

La figure 1.19 montre la distribution du module d'Young E dans la direction de l'épaisseur selon cette loi exponentielle, où la variation est plus progressive que dans le modèle à loi de puissance



**Figure 1. 19.**Variation du module de Young E dans toute l'épaisseur de la plaque E-FGM.

#### 1.4 Conclusion

Les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) constituent une avancée majeure dans le domaine des matériaux modernes. Les composites offrent un excellent rapport résistance/poids et des propriétés mécaniques personnalisables, mais présentent des limites liées aux interfaces, telles que le déclaminage. Les FGM ont été développés pour surmonter ces problèmes en introduisant une variation continue des propriétés à travers l'épaisseur du matériau, réduisant ainsi les concentrations de contraintes. Nés dans les années 1980 au Japon, ils combinent les avantages des métaux et des céramiques. Grâce à leurs performances mécaniques et thermiques, ils trouvent des applications variées dans l'aéronautique, la défense, le biomédical, la marine et l'énergie. Leur conception optimise la résistance et la durabilité dans des environnements extrêmes. Ainsi, les FGM représentent une transition vers une nouvelle génération de matériaux multifonctionnels et intelligents, essentiels pour les structures avancées du futur.

## **2 Chapitre 2 : Théorie des éléments finis**

### **2.1 Introduction**

La modélisation des structures en matériaux composites représente un enjeu majeur dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile, de l'énergie et de la construction. Les matériaux composites, par leur nature hétérogène et anisotrope, offrent des performances mécaniques supérieures à celles des matériaux classiques tout en permettant une grande liberté de conception. Cependant, cette complexité nécessite des outils d'analyse performants pour prévoir le comportement structurel sous différentes conditions de charge.

La méthode des éléments finis (MEF) s'impose aujourd'hui comme l'outil le plus efficace pour l'analyse et la conception des structures composites. Cette méthode numérique permet de transformer des problèmes continus et souvent complexes en systèmes algébriques résolvables par ordinateur. Elle offre ainsi une grande flexibilité pour étudier des structures de géométrie variée, avec des propriétés matérielles hétérogènes et sous des conditions de charge multiples.

L'approche en déformation constitue l'une des formulations les plus adaptées aux composites laminés et fonctionnellement gradués. Elle permet de modéliser précisément la distribution des contraintes et des déformations à travers l'épaisseur des structures, ce qui est essentiel pour l'optimisation et la sécurité des structures complexes.

### **2.2 Définition de la méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis est une technique numérique qui consiste à diviser une structure continue complexe en un ensemble fini d'éléments simples, appelés éléments finis, reliés par des points appelés nœuds. Chaque élément est décrit par des fonctions de forme qui permettent d'approximer le comportement physique (déplacements, contraintes, températures, etc.) à l'intérieur de l'élément.

### **2.3 Historique et évolution de la méthode des éléments finis (MEF)**

La méthode des éléments finis (MEF) est aujourd'hui un outil incontournable dans l'ingénierie et l'analyse des structures complexes,

mais son développement a été progressif et motivé par la nécessité de résoudre des problèmes mécaniques difficiles à traiter analytiquement. L'origine de la MEF remonte aux années 1950 et 1960, principalement dans le domaine aéronautique. Les ingénieurs cherchaient des moyens de calculer les déformations et contraintes dans des structures comme les ailes ou les coques, pour lesquelles les méthodes classiques d'analyse étaient insuffisantes. Les travaux pionniers de Clough [26] et de Turner et Clough, [27] ont posé les bases de la MEF en introduisant le concept de subdivision d'une structure continue en éléments finis et en formalisant la notion de matrice de rigidité pour chaque élément. Dans les années 1970 et 1980, la méthode s'est étendue à des applications plus complexes, incluant les plaques, coques et structures tridimensionnelles[28]. L'apparition des premiers logiciels de calcul spécialisés a permis d'appliquer la MEF à des problèmes réels, et des analyses couplées (thermique-structure ou fluide-structure) ont vu le jour, élargissant considérablement le champ d'application de la méthode. Depuis les années 1990, la MEF est devenue un outil standard dans tous les logiciels industriels tels qu'ANSYS, Abaqus, Nastran ou COMSOL. Elle permet aujourd'hui d'analyser des structures composites multicouches, des matériaux fonctionnellement gradués et des systèmes intelligents, en prenant en compte des comportements non linéaires et des conditions de charge complexes. Elle est également intégrée dans les processus de conception assistée par ordinateur (CAO) et dans l'optimisation structurelle.

La compréhension de l'évolution historique de la MEF permet d'apprécier sa puissance et sa flexibilité. Elle montre comment une méthode initialement conçue pour des problèmes simples est devenue indispensable pour l'analyse des matériaux composites modernes, où l'hétérogénéité et l'anisotropie des propriétés rendent les méthodes analytiques classiques insuffisantes.

Ainsi, ce sous-chapitre situe la MEF dans son contexte scientifique et industriel, préparant le lecteur à comprendre les formulations théoriques et les applications numériques présentées dans les sections suivantes.

## **2.4 Étapes principales de la méthode des éléments finis (MEF)**

La méthode des éléments finis (MEF) repose sur une série d'étapes systématiques permettant de transformer un problème continu complexe en un système numérique résoluble par ordinateur. La compréhension de ces étapes est essentielle pour appliquer correctement la MEF aux structures composites et assurer la fiabilité des résultats.

### **2.4.1 Discrétisation de la structure :**

La première étape consiste à diviser la structure continue en un ensemble fini d'éléments simples, reliés par des nœuds. Cette subdivision, appelée maillage, permet d'approximer le comportement global de la structure à partir de comportements élémentaires. Le choix de la taille et du type de maillage influence directement la précision et la convergence des résultats.

### **2.4.2 Définition des fonctions de forme :**

Chaque élément est décrit à l'aide de fonctions de forme qui approximent la variation des déplacements, contraintes ou autres grandeurs physiques à l'intérieur de l'élément. Ces fonctions permettent de relier les valeurs aux nœuds et de construire la matrice de rigidité locale pour chaque élément.

### **2.4.3 Détermination des propriétés de l'élément**

Une fois les éléments et les fonctions de forme définis, il est nécessaire de calculer les propriétés physiques de chaque élément :

- La matrice de rigidité qui relie les forces et déplacements.
- D'autres matrices selon la nature du problème : conductivité thermique pour un problème thermique, capacité de résistance pour un problème mécanique, etc.

Ces matrices locales représentent le comportement physique précis de chaque élément avant leur assemblage global.

#### **2.4.4 Assemblage de la matrice globale :**

Les matrices de rigidité locales des éléments sont assemblées pour former la matrice de rigidité globale de la structure. Cette étape prend en compte les relations entre les éléments et les nœuds, assurant la continuité et la cohérence du modèle.

$$K * u = F \quad (2-1)$$

Où K est la matrice de rigidité globale, u le vecteur des déplacements nodiaux et F le vecteur des forces appliquées.

#### **2.4.5 Application des conditions aux limites et des charges**

Avant de résoudre le système global, il faut imposer les conditions aux limites :

- Valeurs connues des variables aux nœuds (déplacements fixes, températures imposées, etc.).
- Charges appliquées aux nœuds (forces mécaniques, flux thermiques, pressions).

Ces conditions sont essentielles pour garantir que la solution respecte correctement les contraintes physiques du problème.

#### **2.4.6 Résolution du système d'équations :**

Une fois le modèle complet, le système d'équations algébriques est résolu pour déterminer les déplacements nodiaux. Selon la nature du problème, la résolution peut être linéaire ou non linéaire, et nécessiter des méthodes directes ou itératives.

#### **2.4.7 Post-traitement :**

Enfin, les déplacements obtenus sont utilisés pour calculer les contraintes, déformations et autres grandeurs physiques. Le post-traitement inclut également la visualisation graphique, l'analyse des résultats et la vérification de leur cohérence.

### **2.5 Types d'éléments finis**

Chaque élément fini possède une géométrie précise dans laquelle sont définis :

- La forme de l'élément,
- La position de ses nœuds,
- Ses fonctions de forme (ou fonctions de base),

- Ses degrés de liberté (nombre de variables indépendantes à chaque nœud).

Selon leur dimension et leur usage, on distingue principalement trois types d'éléments finis :

### 2.5.1 Éléments à une dimension (1D)

- Ces éléments sont utilisés pour modéliser des structures linéaires, comme les barres, poutres rectilignes ou courbes.
- Ils permettent de calculer les déplacements, contraintes et moments fléchissant le long de l'axe de l'élément.
- Les degrés de liberté sont généralement associés aux déplacements et rotations aux nœuds.

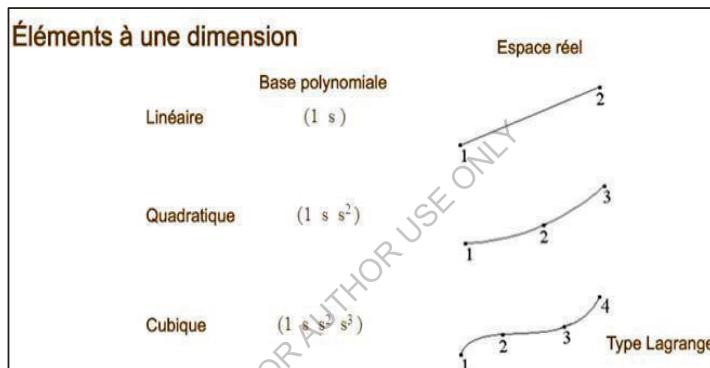


Figure 2. 1éléments finis a une dimension (1D)

### 2.5.2 Éléments à deux dimensions (2D)

- Destinés aux problèmes planaires ou de surface, tels que :
  - Élasticité plane : plaque ou dalle soumise à des forces dans le plan,
  - Plaques en flexion : déformations perpendiculaires au plan,
  - Coques courbes : structures minces en forme de dôme ou cylindre.
- Ces éléments peuvent avoir une forme triangulaire ou quadrangulaire, selon le maillage choisi.

- Les degrés de liberté incluent les déplacements dans les directions du plan et parfois les rotations, selon la théorie utilisée (Reissner-Mindlin, Kirchhoff, etc.).

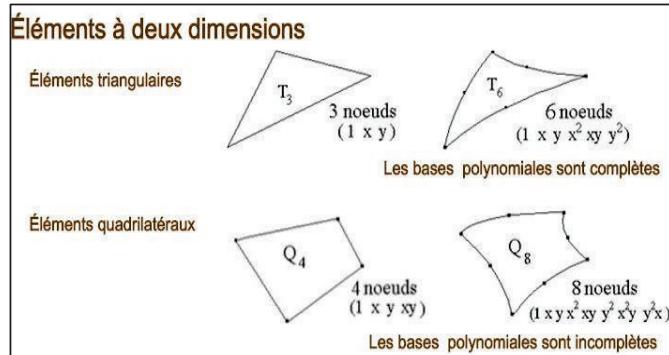


Figure 2. 2.éléments finis a deux dimension (2D)

### 2.5.3 Éléments à trois dimensions (3D)

- Utilisés pour modéliser des volumes ou coques épaisses, où les variations dans les trois directions sont importantes.
- Ils permettent de calculer :
  - Les déplacements dans les trois directions,
  - Les contraintes normales et de cisaillement volumique.
- Les formes les plus courantes sont tétraèdres, hexaèdres ou prismes, adaptés aux géométries complexes.

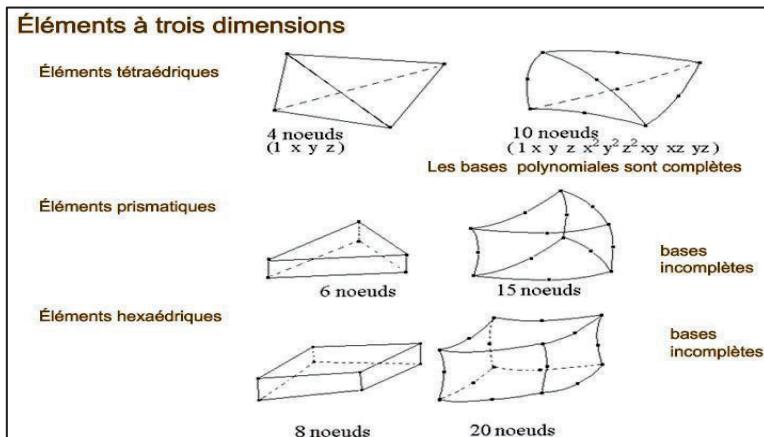


Figure 2. 3.éléments finis a trois dimension (3D)

## 2.6 Rappel de la Mécanique des Milieux Continus (MMC) et de la MEF

### 2.6.1 Equations de base d'élasticité plan

Le problème d'élasticité des solides consiste à déterminer, pour tout point  $M(x, y, z)$  d'un corps matériel (Figure 2.4), les champs de déplacements  $u_i$  et les champs de contraintes  $\sigma_{ij}$  dans un matériau soumis à des forces volumiques ( $f_i$ ) et à des forces de surface ( $\phi_i$ ). Autrement dit, il s'agit de résoudre les équations fondamentales de l'élasticité en tenant compte :

- Des conditions aux limites imposées au corps solide,
- Et des propriétés mécaniques du matériau

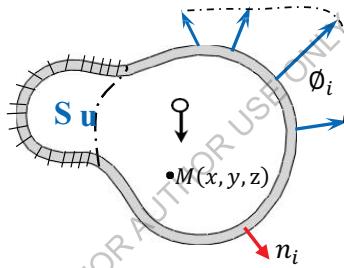


Figure 2. 4.Corpse solide soumis à des forces de surface ( $\phi_i$ ) et de volume ( $f_i$ )[29]

### 2.6.2 Notion d'élasticité plane

En mécanique des solides, l'élasticité plane est un cas particulier de la théorie générale de l'élasticité. Elle s'applique lorsque les déformations et les contraintes sont essentiellement confinées dans un plan (souvent le plan  $xy$ ), ce qui permet une simplification importante du problème tridimensionnel en un modèle bidimensionnel.

Les équations de champ en élasticité décrivent la manière dont un matériau se déforme sous l'action de charges appliquées. Elles sont formulées sous forme d'équations aux dérivées partielles (EDP) reliant les contraintes, les déformations, et les forces appliquées. Dans le cas de l'élasticité plane, ces équations sont simplifiées à l'aide d'hypothèses géométriques et physiques spécifiques.

Deux modèles principaux sont distingués selon les conditions géométriques du solide :

### 2.6.2.1 Le modèle en contrainte plane

Le modèle en contrainte plane est utilisé pour l'analyse des plaques minces sollicitées dans leur plan (plan xy), avec un axe z perpendiculaire au plan de la plaque (Figure 2.5a).

Dans ce modèle, on fait les hypothèses suivantes :

- a) Plaque mince : l'épaisseur de la plaque est suffisamment petite dans la direction z pour que les effets liés à cette dimension soient négligeables.
- b) Forces appliquées dans le plan : les forces volumiques et forces de surface sont appliquées dans le plan xy, et les variations des contraintes suivantes z sont considérées comme nulles.

Hypothèse de contrainte nulle dans la direction normale  
On suppose que la contrainte normale suivant z est nulle :  $\sigma_z = 0$

Ainsi, seules les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , et  $\tau_{xy}$  sont significatives.

Les déplacements  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  sont donc limités au plan xy.

Ce modèle est particulièrement adapté aux structures minces, telles que les membranes, plaques ou poutres planes, où les effets hors du plan peuvent être négligés.

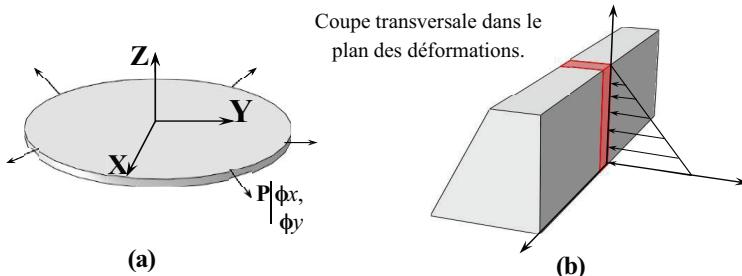
### 2.6.2.2 Le modèle en déformation plane.

Le modèle en déformation plane s'applique à des corps solides dont la dimension suivant l'axe z est grande par rapport à leurs dimensions dans le plan xy (Figure 2.5b). C'est le cas, par exemple, des barrages, longs murs, ou composants massifs où la variation suivant z est faible.

Les hypothèses principales sont :

- a) Déformation nulle dans la direction z : on impose que :  $\varepsilon_z = 0$ . Ce qui signifie que le solide ne se déforme pas selon l'axe z, bien que des contraintes puissent exister dans cette direction.
- b) Forces dans le plan : les forces externes (volumiques ou de surface) agissent essentiellement dans le plan xy, sans variation notable suivant z.

Ce modèle est particulièrement utile pour décrire le comportement des structures massives ou épaisses, où l'effet tridimensionnel est limité.



**Figure 2.5.a)** Modèle en contrainte plane. **(b)** Modèle en déformation plan

### 2.6.3 Relation déformations-déplacements (relation cinématiques)

Les relations cinématiques lient les déplacements d'un point du matériau aux déformations qu'il subit.

- Déplacements :  $u = [u, v, w]$  selon les axes x, y, z.
- Déformations infinitésimales :

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-2)$$

- Cas de l'élasticité plane :

$$\varepsilon_x = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right), \varepsilon_y = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right), \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2-3)$$

Ces relations constituent la base géométrique pour relier déplacements et contraintes dans l'analyse des structures, notamment en éléments finis.

### 2.6.4 Équations d'équilibre en 2D (plan)

Les équations d'équilibre décrivent la condition fondamentale selon laquelle les forces internes et externes appliquées sur un corps solide doivent se compenser afin que le corps soit en équilibre mécanique.

Dans le cas d'un corps bidimensionnel (plan x-y), les forces considérées sont :

- Les forces volumiques  $f_x$  et  $f_y$  (forces par unité de volume),
- Et les forces de surface  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  appliquées sur les bords du domaine.

#### 2.6.4.1 Équilibre des forces

Pour un petit élément différentiel de matériau, en négligeant les forces d'inertie (problème statique), les équations d'équilibre en 2D s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y &= 0\end{aligned}\tag{2-4}$$

Où :

- $\sigma_x$ , et  $\sigma_y$  sont les contraintes normales dans les directions x et y,
- $\tau_{xy}$  est la contrainte de cisaillement dans le plan,
- $f_x$ , et  $f_y$  sont les forces volumiques appliquées dans les directions correspondantes.

Ces équations expriment que la somme des forces internes et des forces externes doit être nulle pour assurer l'équilibre statique.

#### 2.6.4.2 Équilibre des moments

Dans la plupart des matériaux continus, on suppose que le tenseur des contraintes est symétrique, ce qui satisfait automatiquement l'équilibre des moments. Ainsi, pour les problèmes classiques de l'élasticité plane:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\tag{2-5}$$

#### 2.6.4.3 Équation de compatibilité

Les équations de compatibilité jouent un rôle fondamental en mécanique des milieux continus. Elles garantissent que les déformations dans un matériau sont cohérentes, c'est-à-dire que le corps déformé reste continu et sans déchirure.

En d'autres termes, ces équations assurent que les déformations obtenues à partir des déplacements sont compatibles entre elles, et que le matériau ne présente pas de distorsion impossible.

Pour l'élasticité plane, la relation de compatibilité s'écrit généralement en fonction des déformations comme suit:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0\tag{2.6}$$

#### 2.6.4.4 Relation contraintes-déformations (équations constitutives)

Les relations générales de la loi de Hooke pour un matériau isotrope s'écrivent sous la forme tensorielle suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.7)$$

Où:

- $\lambda$  et  $\mu$  sont les paramètres de Lamé, deux constantes matérielles caractérisant le comportement élastique du matériau,
- $\lambda$  est appelé paramètre de Lamé du premier ordre,
- $\mu$  est le module de cisaillement (ou module de rigidité).

Ces relations peuvent être écrites sous forme matricielle en regroupant les contraintes et les déformations dans des vecteurs, comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

avec

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.9)$$

Et où  $[D]$  désigne la matrice d'élasticité dépendant du modèle adopté :

##### a) Cas du modèle en déformation plane :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ 0 & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

##### b) Cas du modèle en contrainte plane :

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Où :

- E est le module d'Young,
- v st le coefficient de Poisson.

## 2.7 Modèles analytiques des plaques

L'étude analytique des plaques constitue un domaine fondamental de la mécanique des structures. Plusieurs modèles théoriques ont été développés au fil du temps afin de décrire avec plus ou moins de précision le comportement mécanique des plaques soumises à des chargements mécaniques et/ou thermiques. Ces modèles diffèrent principalement par les hypothèses qu'ils font concernant la distribution des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur.

### 2.7.1 Hypothèses générales

Une plaque est une structure plane de faible épaisseur  $h$  par rapport à ses dimensions dans le plan (figure 2.6) et qui possède généralement un plan de symétrie situé au niveau du milieu de l'épaisseur, correspondant au plan moyen ( $P_{moy}$ ,  $Oxy$ , avec  $z=0$ ). Les hypothèses communes aux modèles analytiques sont généralement les suivantes :

- a) Le matériau est élastique, homogène et isotrope (ou à propriétés variables dans le cas des FGM).
- b) Les déformations sont petites, et les équations de la théorie de l'élasticité linéaire s'appliquent.
- c) La surface moyenne de la plaque (située à mi-épaisseur) est utilisée comme surface de référence pour la description cinématique.

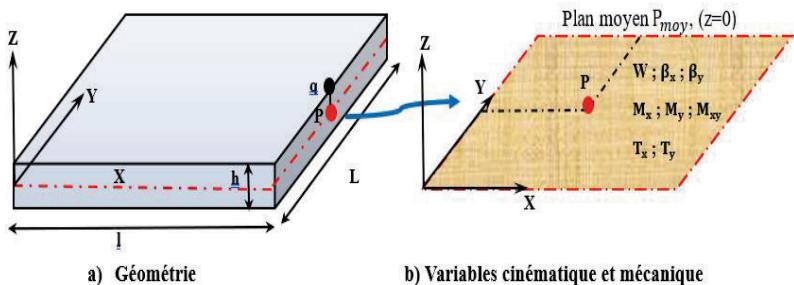
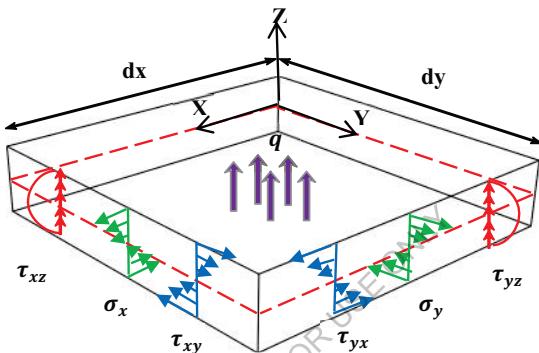


Figure 2.6. Description d'une plaque[29].

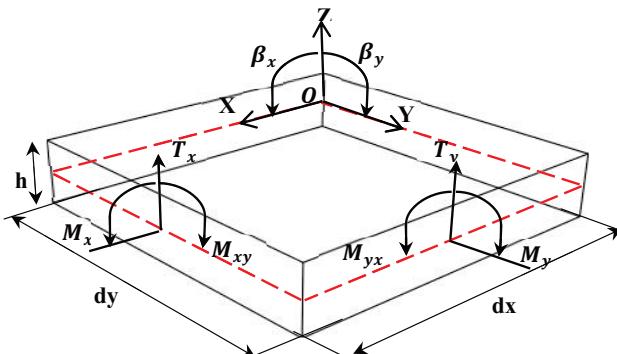
## 2.7.2 Contraintes et efforts résultants

La figure (2.7) illustre les contraintes internes agissant sur les faces d'un élément différentiel de plaque soumis à une charge extérieure uniforme  $q$  appliquée suivant l'axe  $z$ . Le matériau de la plaque est supposé homogène et linéairement élastique, conformément aux hypothèses de la théorie classique des plaques. Les composantes de contraintes normales et tangentielles ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) varient selon la position dans l'épaisseur, tandis que la charge transverse  $q$  représente l'action extérieure exercée sur la surface de la plaque.



**Figure 2. 7.**Schéma des contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque soumis à une charge transverse  $q$  appliquée suivant l'axe  $z$ [29].

Les contraintes normales ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) et la contrainte de cisaillement plan ( $\tau_{xy}$ ) varient linéairement selon l'épaisseur  $z$ . Elles sont directement liées aux moments de flexion ( $M_x, M_y$ ) et au moment de torsion( $M_{xy}$ ). En revanche, les contraintes de cisaillement transversal ( $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ) présentent une variation quadratique selon  $z$  et sont associées aux efforts tranchants  $T_x$ et  $T_y$  comme l'illustre la figure (2.8).



**Figure 2. 8.** Efforts résultants agissant sur un élément différentiel de plaque [29].

Les expressions analytiques de ces efforts résultants sont obtenues par intégration des contraintes sur l'épaisseur  $h$  de la plaque. Elles jouent un rôle essentiel dans la formulation des équations d'équilibre, ainsi que dans la modélisation de la flexion et du cisaillement des plaques. Ces expressions sont données par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}(z) dz; \quad \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.12)$$

Où :

- $N_x, N_y, N_{xy}$  sont les efforts normaux et de cisaillement dans le plan moyen,
- $M_x, M_y, M_{xy}$  sont les moments de flexion et de torsion,
- $T_x, T_y$  sont les efforts tranchants transversaux.

Ces grandeurs résultantes permettent de relier les contraintes locales à la réponse globale de la plaque, facilitant ainsi la formulation des équations différentielles d'équilibre en flexion et cisaillement.

### 2.7.3 Classification des modèles analytiques

Les principaux modèles analytiques se distinguent par la prise en compte (ou non) des effets de cisaillement transverse et par la forme du champ de déplacement à travers l'épaisseur.

### 2.7.3.1 Théorie classique des plaques (CPT – Kirchhoff–Love)

La théorie des plaques classiques (CPT, Classical Plate Theory), la plus ancienne et la plus simple, a été développée en 1888 par Love [30], sur la base des hypothèses formulées par Kirchhoff en 1850 [31]. Elle est également connue sous le nom de théorie des plaques de Kirchhoff, théorie des plaques de Kirchhoff–Love, ou encore théorie des plaques minces. Cette approche constitue une extension directe de la théorie des poutres d'Euler–Bernoulli aux plaques minces, dans laquelle les effets de cisaillement transverse sont négligés (Figure 2.9). La théorie repose sur les hypothèses fondamentales suivantes :

- Les normales à la surface moyenne de la plaque avant déformation restent droites et perpendiculaires à cette surface après déformation.
- L'épaisseur de la plaque ne varie pas pendant la déformation.
- Les déformations de cisaillement transverse sont négligées, c'est-à-dire :

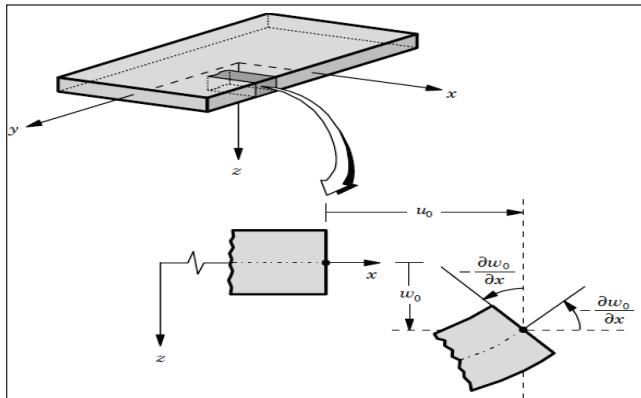
$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.13)$$

- Les rotations et déformations restent petites afin que la linéarisation des équations soit valable.

Sous ces hypothèses, le champ de déplacement dans une plaque de Kirchhoff–Love s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + zw_{,x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + zw_{,y}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  représentent respectivement les composantes de déplacement selon les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  au niveau du plan médian de la plaque ( $z=0$ ). Les termes  $w_{,x}(x, y) = \frac{\partial w_0}{\partial x}$  et  $w_{,y}(x, y) = \frac{\partial w_0}{\partial y}$  traduisent les rotations des normales à la surface moyenne dues à la flexion dans les directions  $x$  et  $y$ .



**Figure 2.9.**Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (CPT) [32].

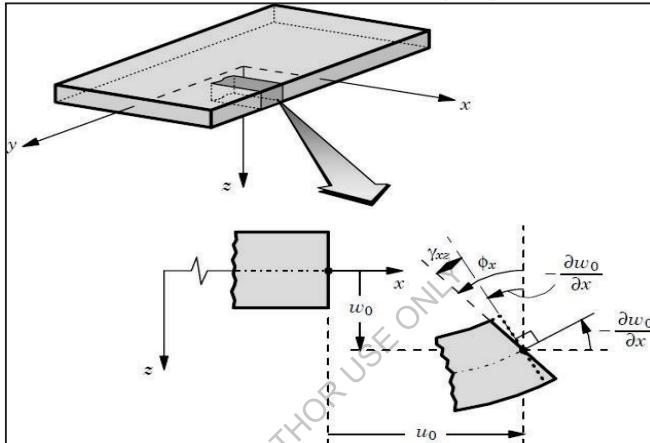
Étant donné que la théorie classique des plaques ne prend pas en compte les déformations de cisaillement transverse, ses prédictions deviennent inexactes pour les plaques épaisses, en particulier lorsqu'il s'agit de plaques composites ou à gradient fonctionnel où la distribution des contraintes de cisaillement joue un rôle important. Pour pallier cette limitation, la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT – First-Order Shear Deformation Theory), également connue sous le nom de théorie de Reissner–Mindlin, a été développée afin d'inclure l'effet du cisaillement transverse dans la modélisation du comportement des plaques.

#### 2.7.3.2 Théorie de Reissner–Mindlin (FSDT – First-order Shear Deformation Theory)

La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), également appelée théorie de Mindlin–Reissner (Reissner, 1945 [33] ; Mindlin, 1951 [34]), constitue une extension de la théorie classique des plaques de Kirchhoff–Love. Elle introduit l'effet des contraintes de cisaillement transversales, négligées dans la théorie classique, afin de mieux représenter le comportement des plaques épaisses et des matériaux composites ou à gradient fonctionnel (FGM).

Selon cette théorie, les lignes droites initialement perpendiculaires au plan médian demeurent rectilignes après déformation, mais ne restent pas nécessairement normales à ce plan (Figure 2.10). Cette relaxation de l'hypothèse de normalité permet d'inclure les déformations de

cisaillement transverse dans le modèle. En revanche, la contrainte normale transverse  $\sigma_z$  est supposée nulle sur toute l'épaisseur de la plaque. En conséquence, les contraintes de cisaillement transversales  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont considérées constantes sur l'épaisseur de la plaque, ce qui constitue une approximation valable pour des plaques d'épaisseur modérée. Afin de corriger la surestimation de l'énergie de cisaillement induite par cette hypothèse, un facteur de correction de cisaillement est généralement introduit dans la formulation énergétique.



**Figure 2. 10.**Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin [32].

Le champ de déplacement du FSDT peut être écrit comme suit [33],[34] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  représentent les déplacements du plan médian de la plaque selon les directions x, y et z, respectivement. Les termes  $\phi_x$  et  $\phi_y$  désignent les rotations de la normale au plan médian autour des axes y et x, respectivement. Ces rotations sont indépendantes des dérivées du déplacement transversal  $w_0$ , contrairement à la théorie classique des plaques. Ainsi, la FSDT permet de tenir compte explicitement des effets de cisaillement transverse, offrant une meilleure précision pour les plaques d'épaisseur modérée à élevée.

### 2.7.3.3 Théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)

Pour surmonter les limitations du CPT et de la FSDT, c'est-à-dire pour obtenir une variation réaliste des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque et pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement (FCC), plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été développées [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41].

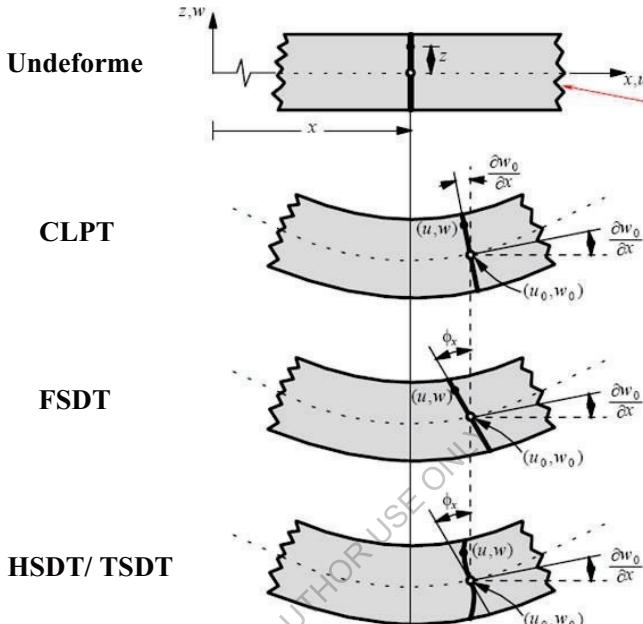
Ces modèles reposent sur l'hypothèse d'une variation non linéaire des contraintes à travers l'épaisseur et sont capables de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure 2.11). Les HSDT les plus avancées s'appuient sur un développement en série de Taylor des champs de déplacement afin d'approcher la théorie tridimensionnelle [42]. Le déplacement est donc supposé être sous la forme suivante :

$$u_i(x, y, z) = u_i(x, y) + z\phi_i^{(1)}(x, y) + z^2\phi_i^{(2)}(x, y) + \dots + z\phi_i^{(j)}(x, y) \quad (2.15)$$

Où  $j$  définit l'ordre de la théorie utilisé et  $\phi_i^{(j)}$  sont les fonctions associées à chaque terme de la série. La théorie de premier ordre de Reissner–Mindlin correspond au développement en série jusqu'à l'ordre  $j = 1$ , avec  $\phi_3^{(1)} = 0$ . Dans les situations où un modèle de premier ordre ne permet pas d'approcher correctement le comportement réel d'une plaque, il est nécessaire de passer à un modèle d'ordre supérieur (deuxième, troisième ou plus) dans l'expansion des déplacements. Les théories de déformation par cisaillement du second ordre (SCSDT) [43] donnent des résultats légèrement meilleurs que la FSDT, mais présentent encore certaines limitations, notamment la nécessité d'un facteur de correction de cisaillement. Le champ de déplacement dans ces théories d'ordre supérieur est généralement exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\phi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Où les paramètres  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  et  $\psi_z$  représentent les termes d'ordre supérieur permettant de modéliser la variation non linéaire des déformations de cisaillement transverse.



**Figure 2. 11.**Géométrie non déformée et déformée d'une plaque selon les théories CPT, FSDT et HSDT [32].

Plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (TSDT), telles que la théorie parabolique de déformation de cisaillement, ont été proposées par de nombreux chercheurs. Le champ de déplacement selon la TSDT de Reddy [40] peut-être exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Où les paramètres  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\zeta_x$  et  $\zeta_y$  représentent les termes d'ordre supérieur. Avec l'augmentation de l'ordre d'expansion, le nombre de paramètres supplémentaires croît, ce qui rend souvent leur interprétation difficile. Pour cette raison, des simplifications ont été

apportées afin de réduire le nombre de paramètres de déplacement. Ces simplifications consistent à tronquer les derniers termes de la série de Taylor et à introduire une fonction de cisaillement, notée  $f(z)$ . Après ces simplifications, le champ de déplacement est proposé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Où  $f(z)$  est la fonction de cisaillement qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur  $h$  de la plaque. Les rotations sont définies par

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y, \text{ avec } \theta_x \text{ et } \theta_y \text{ désignant les rotations}\text{ autour des axes } y \text{ et } x, \text{ respectivement.}$$

Selon l'équation (2.18), le champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenu en posant  $f(z) = 0$ , tandis que celui de la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT) est obtenu en posant  $f(z) = z$ .

#### a) Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé (HSDT)

Pour dépasser les limites des théories de premier ordre, plusieurs auteurs ont apporté des contributions significatives au développement de modèles d'ordre supérieur, qui se distinguent dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Ces modèles reposent sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, permettant de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée. Parmi ceux-ci, nous pouvons mentionner :

- Le champ de déplacement de la TSDT de Reddy [32] est obtenu en prenant la fonction suivante :

$$f(z) = z - \frac{4z^3}{3h^2} \quad (2.19)$$

- La théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) proposée par Touratier [44], basée sur une fonction trigonométrique sinusoïdale, est appelée théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT). Elle est mise en œuvre en posant :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (2.20)$$

- Une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour les plaques (HSDPT) a été proposée par Soldatos [45], obtenue en prenant :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.21)$$

- La théorie de déformation de cisaillement exponentielle (ESDPT), développée par Karama et al. [46], est obtenue en prenant :

$$f(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (2.22)$$

- La théorie de déformation par cisaillement hyperbolique des plaques (HSDPT), développée par Ait Atmane et al. [47],, est formulée en considérant :

$$f(z) = z \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)} - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{z\pi}{h}\right)}{\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)} \quad (2.23)$$

- Un modèle d'éléments finis à cinq inconnues avec déformation de cisaillement d'ordre élevé, développé par Tati [48] :

$$f(z) = \frac{5}{4} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (2.24)$$

## 2.8 Les modèles éléments finis

En analyse par éléments finis, on distingue généralement cinq formulations principales, selon le champ de base choisi pour l'approximation. Ces formulations déterminent les variables inconnues

primaires de l'élément et influencent la précision et la convergence des solutions. On distingue ainsi :

### 2.8.1 Formulation en déplacement

La formulation en déplacement repose sur l'interpolation du champ des déplacements sur l'ensemble de l'élément. Les déplacements aux nœuds constituent les degrés de liberté (ddl) principaux. Cette approche permet de déterminer les déplacements de manière précise et unique dans l'élément. Les contraintes sont ensuite obtenues à partir des déplacements par des relations constitutives (par exemple la loi de Hooke), mais elles sont généralement approximatives et non continues aux interfaces entre éléments. Le choix des fonctions de forme est essentiel : pour des éléments triangulaires, on utilise par exemple le triangle de Pascal, de manière à ce que le nombre de constantes d'interpolation corresponde exactement au nombre de ddl de l'élément. Cette formulation est la plus utilisée et la plus développée dans la pratique des éléments finis.

### 2.8.2 Formulation d'équilibre

La formulation d'équilibre est centrée sur les forces plutôt que sur les déplacements. Elle repose directement sur les équations de l'équilibre statique, en s'assurant que la somme des forces internes (issues des contraintes) et des forces externes (charges appliquées) est nulle sur chaque élément :

$$F_{\text{int}} + F_{\text{ext}} = 0 \quad (2.25)$$

Cette approche est particulièrement utile lorsque les charges appliquées sont mieux connues que les déplacements, ou dans les problèmes non linéaires, où les déplacements peuvent être difficiles à approximer directement. Les forces internes sont liées aux contraintes par les lois constitutives, tandis que les forces externes sont déterminées à partir des conditions de charge appliquées.

### 2.8.3 Formulation hybride

Le modèle hybride combine plusieurs formulations afin de tirer parti des avantages de chacune. Dans ce type d'élément, certaines zones du

domaine sont approximées via les déplacements, tandis que d'autres utilisent les contraintes comme inconnues principales.

Cette approche permet de représenter avec précision les effets locaux (par exemple, des concentrations de contraintes ou des zones de contact) tout en conservant une bonne approximation globale des déplacements. Elle est particulièrement pertinente dans les structures complexes où le comportement physique ne peut pas être correctement décrit par une seule variable principale.

#### **2.8.4 Formulation mixte**

La formulation mixte repose sur l'approximation indépendante de plusieurs champs inconnus, tels que les déplacements, les contraintes ou les déformations. Chaque champ conserve ses propres degrés de liberté, ce qui permet d'améliorer la précision des résultats.

Bien que le développement de ces éléments soit plus complexe et coûteux, ils offrent une qualité supérieure, notamment pour corriger certaines limitations des modèles en déplacement. Par exemple, certaines composantes de la déformation peuvent être interpolées de manière spécifique afin d'obtenir des contraintes plus précises. Ces degrés de liberté supplémentaires peuvent ensuite être éliminés par condensation, transformant l'élément mixte en un élément de type déplacement pour simplifier le calcul global.

#### **2.8.5 Formulation en déformation**

La formulation en déformation consiste à approximer directement le champ des déformations, de manière à satisfaire les équations de compatibilité à l'intérieur de l'élément. Cette approche permet de développer des éléments de haut ordre avec un nombre minimal de ddl tout en restant efficace et relativement simple à appliquer.

Dans ce modèle, les déplacements dans le plan sont représentés à l'aide de polynômes d'ordre élevé, améliorant la précision des éléments. Contrairement aux formulations classiques, les composantes du champ de déplacement ne sont pas indépendantes : elles sont liées aux déformations conformément aux relations déplacements-déformations. Cette liaison inclut à la fois les termes correspondant aux mouvements rigides et ceux correspondant aux déformations propres de l'élément

### **2.8.5.1 Avantages du modèle en déformation**

L'utilisation du modèle en déformation offre de nombreux avantages pour la modélisation du comportement des structures. Ce modèle permet de représenter avec précision les mouvements rigides et les déformations constantes, tout en nécessitant un nombre limité d'éléments, ce qui améliore l'efficacité et la précision des résultats. Les principaux avantages des éléments fondés sur ce modèle sont les suivants :

**a) Satisfaction plus facile des critères de convergence**

- Les critères de convergence, directement liés aux déformations (modes de déformation constante et modes de corps rigide), sont plus facilement satisfaits avec cette formulation.
- Cela garantit une meilleure stabilité numérique et une convergence rapide des solutions.

**b) Découplage des composantes de déformation**

- Le modèle permet un traitement indépendant des différentes composantes de déformations.
- Les déplacements sont interpolés de manière à générer des déformations qui peuvent ensuite être analysées et traitées séparément, facilitant ainsi l'interprétation et le contrôle de la précision des résultats.

**c) Enrichissement du champ des déplacements**

- Il est possible d'introduire des termes d'ordre élevé dans le champ des déplacements sans ajouter de nœuds supplémentaires.
- Cette approche améliore la représentation des variations locales et permet de réduire le phénomène de verrouillage ("locking"), notamment dans les éléments de type plaque ou coque.

**d) Représentation précise du comportement physique local et global**

- Les déplacements ne sont pas indépendants mais liés aux déformations conformément aux relations déplacements-déformations, ce qui garantit que les

mouvements rigides et les déformations propres de l'élément sont correctement pris en compte.

- Ceci est particulièrement important pour les structures soumises à des charges complexes ou à des gradients de contraintes élevés.

En résumé, le modèle en déformation combine efficacité numérique, richesse du champ d'approximation et précision physique, ce qui le rend particulièrement adapté aux analyses avancées de structures.

### **2.8.5.2 Synthèse bibliographique sur les éléments finis à champ de déformation**

#### **a) Éléments coques basés sur l'approche en déformation**

L'approche basée sur la déformation a été introduite en 1971 à l'Université de Cardiff (Royaume-Uni), dans le but de concevoir des éléments finis performants tout en réduisant le nombre de noeuds nécessaires à la modélisation. Ce défi a été relevé avec succès, ouvrant la voie à l'une des méthodes les plus efficaces et largement utilisées dans le domaine du calcul par éléments finis en sciences de l'ingénieur. Les premiers travaux dans ce domaine sont attribués à Ashwell et ses collaborateurs [49], [50], qui ont étudié des structures unidimensionnelles et bidimensionnelles (structures courbes, circulaires et coques) en utilisant des fonctions de déformation indépendantes. Cette approche a permis de développer des éléments précis et économies en noeuds, capables de représenter fidèlement les comportements structuraux.

Peu après, Sabir et Ashwell [51] ont démontré l'efficacité de cette approche dans l'analyse des oscillations libres de structures annulaires circulaires, confirmant la fiabilité du modèle en déformation pour les phénomènes dynamiques.

En 1972, Sabir et Lock [52] ont appliqué la méthode à des coques cylindriques, tandis que Ashwell [53] a poursuivi ses recherches en améliorant ses éléments pour les structures circulaires. Ces travaux ont produit des résultats particulièrement prometteurs, tant pour les déplacements que pour les contraintes, notamment lors d'essais sur un cylindre pincé libre sur ses côtés. Ashwell a également montré que ses

éléments, appliqués à des arcs circulaires en régime géométriquement non linéaire, surpassaient largement les éléments conventionnels.

Les recherches se sont ensuite étendues au développement d'éléments d'arcs se déformant hors du plan de courbure [54], [55], marquant une étape importante dans la modélisation tridimensionnelle des structures courbes. Parallèlement, des éléments de coques ont été élaborés pour traiter des charges concentrées et évaluer les contraintes locales autour de ces zones [56]. Les modèles obtenus ont montré une excellente concordance avec les solutions analytiques, notamment pour les coques minces soumises à des forces radiales ou à des moments concentrés. Plus tard, Sabir et Cherchafi [57] ont proposé des éléments rectangulaires et quadrilatéraux destinés à l'analyse des coques cylindriques, élargissant ainsi le champ d'application du modèle.

En 1985, Sabir et Ramadani [58] ont conçu un élément fini courbe simple, basé sur les équations des coques peu profondes, ne comportant que les degrés de liberté externes essentiels. Cet élément a été appliqué avec succès à l'analyse de structures cylindriques [58], sphériques [59], ainsi qu'à des coques paraboliques et hyperboliques, démontrant un haut degré de précision et une grande robustesse numérique.

Enfin, en 1988, Sabir et El-Erris [60] ont développé un élément fini destiné à l'étude de la flexion des coques coniques. Cet élément, à la fois simple et efficace, comportait 20 degrés de liberté et assurait une représentation exacte des mouvements rigides tout en réduisant les coûts de calcul. Les tests de convergence ont confirmé que des résultats précis pouvaient être obtenus même avec un maillage relativement grossier, soulignant ainsi la fiabilité et l'efficacité de cette approche dans le cadre de l'analyse des coques complexes.

#### **b) Eléments finis basés sur l'approche en déformation en coordonnées polaires**

Le succès de l'application de l'approche en déformation aux problèmes d'élasticité plane a conduit à l'extension de cette méthode vers le développement d'éléments finis sectoriels formulés dans un système de coordonnées polaires. Cette extension peut être réalisée selon deux approches principales :

- La première approche consiste à développer directement des éléments finis fondés sur le modèle en déformation, en supposant des expressions polynomiales des déformations en coordonnées polaires. Les équations ainsi obtenues sont ensuite intégrées analytiquement afin de déterminer les fonctions de déplacement correspondantes.
- La seconde approche repose sur l'utilisation du champ de déplacements obtenu à partir du modèle en déformation exprimé dans un système de coordonnées cartésiennes, puis sur sa transformation en coordonnées polaires.

Comme mentionné précédemment, la modélisation des structures courbes nécessite souvent une discréétisation fine, impliquant un grand nombre d'éléments pour obtenir une description précise du comportement. Cependant, dans le cas des structures cylindriques, il est non seulement plus approprié, mais également plus économique d'utiliser des éléments sectoriels en coordonnées polaires. En effet, pour les frontières circulaires, cette formulation se révèle particulièrement avantageuse.

Ainsi, de nombreux chercheurs ont adopté l'approche en déformation pour le développement d'éléments sectoriels en coordonnées polaires. À cet égard, Raju et Rao [61] ont proposé une matrice de rigidité permettant de déterminer l'état plan dans la zone élastique, en analysant des cylindres soumis à une pression interne, tout en évaluant l'efficacité de l'élément sectoriel proposé. Par la suite, plusieurs autres éléments sectoriels ont été développés dans le cadre de l'analyse de problèmes d'élasticité générale [62], [63], [64], [65], [66].

### **c) Éléments de plaques basés sur l'approche en déformation**

L'analyse par éléments finis des structures de type plaque représente un domaine majeur de la mécanique des structures, notamment pour la modélisation de comportements complexes soumis à différents types de charge. Parmi les diverses approches utilisées pour modéliser ces structures, l'approche en déformation (ou approche par le champ des déformations) s'impose comme l'une des plus efficaces, en raison de sa simplicité de mise en œuvre, de sa précision élevée et de sa capacité à

réduire significativement le coût de calcul par rapport aux formulations classiques. Un apport marquant dans ce domaine est celui de Belouar et Guenfoud [67], qui ont développé un nouvel élément fini rectangulaire fondé sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner–Mindlin. Cet élément, désigné sous le nom de SBRP (Strain Based Rectangular Plate), a démontré des performances supérieures à celles des éléments finis traditionnels formulés selon l'approche en déplacement, aussi bien en termes de précision que d'efficacité numérique. Plus récemment, plusieurs autres éléments robustes basés sur le modèle en déformation ont été proposés pour l'analyse du comportement en flexion des plaques [68], [69], [70], [71], [72], [73], [74], [75], [76], [77], [78], [79].

Ces développements ont permis d'améliorer la représentation des champs de déformation et de déplacement, d'assurer une meilleure convergence des résultats et d'accroître la stabilité des solutions obtenues.

#### **d) Éléments tridimensionnels basés sur l'approche en déformation**

Les éléments finis tridimensionnels fondés sur l'approche en déformation constituent une alternative performante aux formulations classiques basées sur le champ des déplacements, notamment pour l'analyse des structures relevant de l'élasticité tridimensionnelle. Cette approche repose sur la modélisation directe du champ de déformation, ce qui permet de mieux représenter les effets de flexion, de cisaillement et de contrainte dans les structures complexes (telles que les plaques et les coques), tout en réduisant le coût de calcul et la dépendance aux éléments d'ordre élevé comme les éléments hexaédriques ou prismatiques complexes.

Belarbi et Charif [80] ont proposé un élément hexaédrique à huit nœuds (SBH8), comportant trois degrés de liberté par nœud ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) et fondé sur le modèle en déformation. Cet élément modifie la matrice d'élasticité de manière à mieux prendre en compte les effets de la flexion tout en conservant une formulation simple et efficace, comparativement aux éléments tridimensionnels d'ordre supérieur.

De son côté, Maalem [81] a développé un élément tridimensionnel conforme aux équations d'équilibre, destiné à l'analyse de la flexion des plaques minces et épaisse. Cet élément exploite l'approche en déformation pour simplifier la formulation et le calcul, tout en assurant une excellente précision dans la représentation des champs de déformation et de contrainte. Dans la même lignée, Hamadi et Maalem [82] ont conçu un élément fini parallélépipédique appelé SBP8C (Strain Based Parallelepiped 8-node Condensed), élaboré à l'aide de la condensation statique. Cet élément est adapté aussi bien à l'analyse tridimensionnelle qu'à l'étude de la flexion des plaques minces et épaisse. Par ailleurs, Belounar et Guerraiche [83] ont introduit de nouveaux éléments finis tridimensionnels fondés sur l'approche en déformation, spécifiquement destinés à l'analyse linéaire de la flexion des plaques. Ces éléments incluent trois degrés de liberté externes ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) à chaque nœud d'angle ainsi qu'un nœud central, permettant une représentation plus fine et plus précise du comportement déformé de la structure. Enfin, Messai et al. [84] et [85] ont développé un élément fini tridimensionnel de type brique (SBBNN), également basé sur l'approche en déformation, comprenant trois degrés de liberté essentiels ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) par nœud. Cet élément se distingue par une matrice d'élasticité modifiée, intégrant les constantes de contrainte plane et un coefficient de cisaillement transversal, afin d'améliorer la modélisation des comportements élastiques complexes des matériaux et des structures tridimensionnelles.

**e) Eléments finis en élasticité plane basés sur l'approche en déformation**

L'approche en déformation a joué un rôle central dans le développement des éléments finis membranaires intégrant la rotation dans le plan, comme l'ont souligné de nombreuses études.

Sabir [86] a proposé deux éléments innovants : un élément rectangulaire SBRIEIR (Strain Based Rectangular In-plane Element with In-plane Rotation) et un élément triangulaire SBTIEIR, dans lesquels la rotation dans le plan est considérée comme un degré de liberté nodal. Par la suite, Sabir et Sfendji [87] ont développé deux autres éléments :

- Un élément triangulaire comportant deux degrés de liberté essentiels par nœud d'angle et un nœud au centre du côté de l'élément, soit huit degrés de liberté au total ;
- Un élément rectangulaire présentant les mêmes degrés de liberté aux quatre nœuds d'angle et au nœud central, pour un total de dix degrés de liberté. Ces éléments ont été utilisés avec des techniques telles que la condensation statique et sont conçus pour satisfaire les équations d'équilibre, fournissant des solutions précises aux problèmes d'élasticité plane bidimensionnelle.

Dans la même lignée, Belarbi et Bourezane [88] ont développé un élément membranaire triangulaire fondé sur le modèle en déformation, comportant trois degrés de liberté par nœud, avec des champs de déformation optimisés pour améliorer les performances de l'élément de Sabir [86]. Belarbi et Maalem [89] ont proposé un élément rectangulaire R4BM, également basé sur l'approche en déformation, avec deux degrés de liberté essentiels par nœud sommet, destiné à résoudre les problèmes d'élasticité plane linéaire. Plus récemment, Rebiai et Belounar [90], [91] ont introduit des éléments membranaires rectangulaires à quatre nœuds, comportant trois degrés de liberté par nœud (deux translations  $u$  et  $v$  et une rotation  $\theta_z$  dans le plan), toujours fondés sur le modèle en déformation. Enfin, Bouzidi et al. [92] ont proposé une solution numérique basée sur l'approche en déformation utilisant un élément quadrilatère pour l'analyse des comportements statiques et dynamiques des structures membranaires. Cet élément comprend deux degrés de liberté ( $u$  et  $v$ ) aux quatre nœuds d'angle et au nœud central, permettant une modélisation précise et efficace des déformations et rotations dans le plan.

#### **2.8.5.3 Procédure de la formulation de quelques éléments à champ de déformation existants dans la littérature**

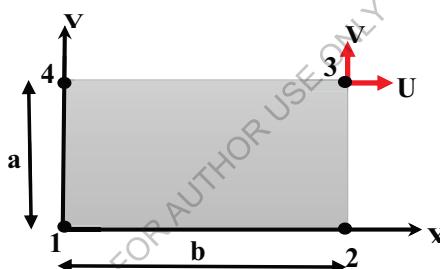
##### **a) Eléments finis membranaires (élément rectangulaire a 2 DDI)**

L'élément développé par Sabir [93] pour les problèmes d'élasticité plane repose sur une approche basée sur la déformation plutôt que sur celle du déplacement. Il s'agit d'un élément membranaire rectangulaire

à quatre nœuds, chaque nœud disposant de deux degrés de liberté correspondant aux translations dans les directions x et y.

Cet élément, appelé SBRIE (Strain-Based Rectangular In-plane Element), est construit à partir de fonctions supposées pour les différentes composantes de la déformation, et satisfait l'équation de compatibilité. Il permet également une représentation exacte des mouvements du corps rigide, garantissant ainsi la précision de la modélisation.

La géométrie de l'élément SBRIE et les variables cinématiques nodales correspondantes sont représentées schématiquement à la figure 2.12. Les dimensions de l'élément dans les directions x et y sont notées respectivement a et b. Chaque nœud est associé à deux degrés de liberté : u (déplacement dans la direction x) et v (déplacement dans la direction y), ce qui en fait un modèle bidimensionnel adapté à l'analyse des structures planes.



**Figure 2. 12.**Coordonnées et points nodaux de l'élément SBRIE [93].

Les trois composantes de la déformation s'expriment comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.26)$$

Lorsque ces trois composantes de déformation sont nulles, il est nécessaire d'intégrer les équations correspondantes pour obtenir les expressions des déplacements du corps rigide:

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 - \alpha_3 y \\ V &= \alpha_2 + \alpha_3 x \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'équation (3.37) fournit les trois composantes des déplacements correspondant au corps rigide. L'élément développé possède une forme

rectangulaire avec quatre nœuds, chacun disposant de trois degrés de liberté. Ainsi, le champ de déplacement comprend huit constantes indépendantes. Après avoir utilisé trois constantes pour représenter les déplacements liés au corps rigide, il reste cinq constantes pour décrire les déplacements induits par la déformation de l'élément. Ces constantes sont réparties entre les différentes composantes de déformation comme suit [93]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8\end{aligned}\tag{2.28}$$

Les déformations définies par les équations (2.28) satisfont l'équation (2.6) de compatibilité. Les expressions obtenues sont ensuite exprimées en fonction de x et y, conformément aux équations (2.26). En intégrant ces équations résultantes, on obtient:

$$\begin{aligned}U &= \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} \\ V &= -\alpha_5 \frac{x^2}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\tag{2.29}$$

Les fonctions de déplacement finales sont obtenues en combinant les contributions des équations (2.27) et (2.29), ce qui conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned}U &= \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} \\ V &= \alpha_2 + \alpha_3 x - \alpha_5 \frac{x^2}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Les fonctions de déplacement de l'élément SBRIE, présentées dans l'équation (2.30), peuvent être représentées sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [P_{SBRIE}] \{\alpha_m\}\tag{2.31}$$

Où  $[P_{SBRIE}]_{2 \times 8}$  est la matrice polynomiale représentant les fonctions de déplacement pour l'élément membranaire, et  $\{\alpha_m\}$  est le vecteur des paramètres constants.

Avec  $\{\alpha_m\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}^T$

$$[P_{SBRIE}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -\frac{y^2}{2} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

La matrice de transformation  $[C_{SBRIE}]_{8 \times 8}$ , qui relie le vecteur des déplacements nodaux  $\{\delta^e\}^T = \{u_1, v_1; \dots, u_4, v_4\}^T$  au vecteur des paramètres constants  $\{\alpha_m\}$ , peut être exprimée sous forme matricielle comme suit :

$$\{\delta^e\} = [C_{SBRIE}] \{\alpha_m\} \quad (2.33)$$

$$\text{Avec } [C_{SBRIE}] = \{[P_{SBRIE}]_1 [P_{SBRIE}]_2 [P_{SBRIE}]_3 [P_{SBRIE}]_4\}^T$$

La matrice  $[C_{SBRIE}]_i$  est calculée à partir de l'équation (2.32) pour chacune des quatre coordonnées des nœuds de l'élément  $(x_i, y_i)$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Le vecteur des paramètres constants  $\{\alpha_m\}$  peut être obtenu à partir de l'équation (3.43) comme suit :

$$\{\alpha_m\} = [C_{SBRIE}]^{-1} \{\delta^e\} \quad (2.34)$$

L'équation (2.28) peut être exprimée sous forme matricielle comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q_{SBRIE}] \{\alpha\} \quad (2.35)$$

Où la matrice de déformation membranaire  $[Q_{SBRIE}]$  est donnée par :

$$[Q_{SBRIE}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Les relations entre les déformations membranaires  $\{\varepsilon\}$  et les déplacements nodaux des éléments  $\{\delta^e\}$  sont obtenues en remplaçant l'équation (2.34) dans les équations (2.35) pour obtenir :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q_{SBRIE}] [C_{SBRIE}]^{-1} \{\delta^e\} = [B_{SBRIE}] \{\delta^e\} \quad (2.37)$$

La matrice de rigidité élémentaire  $[K_{SBRIE}^e]$  peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$\left[ K_{SBRIE}^e \right] = \left[ C_{SBRIE}^{-1} \right]^T \left( \iint [Q_{SBRIE}]^T [D] [Q_{SBRIE}] dx dy \right) \left[ C_{SBRIE}^{-1} \right] \quad (2.38)$$

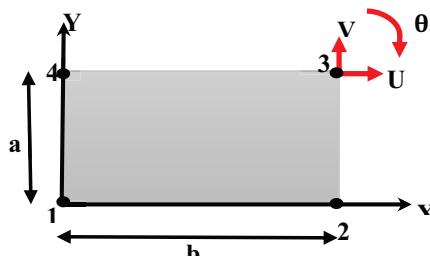
$$\left[ K_{SBRIE}^e \right] = \left[ C_{SBRIE}^{-1} \right]^T \left[ K_{SBRIE}^0 \right] \left[ C_{SBRIE}^{-1} \right] \quad (2.39)$$

Pour les problèmes en contrainte plane, la matrice d'élasticité  $D$  s'écrit comme suit :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

**b) Éléments finis membranaires (élément quadrilatéral à 3 degrés de liberté)**

Un autre élément rectangulaire basé sur le champ de déformation, développé par Sabir [86], intègre la rotation dans le plan comme degré de liberté nodal. Cet élément, nommé SBRIEIR (Strain-Based Rectangular In-plane Element with In-plane Rotation), comporte trois degrés de liberté par nœud : deux translations ( $U, V$ ) et une rotation dans le plan ( $\theta_z$ ), comme illustré à la figure 2.13. La procédure de formulation de cet élément suit les mêmes étapes que celles utilisées pour l'élément précédent.



**Figure 2. 13.** Élément SBRIEIR avec rotation dans le plan [86].

Le champ de déplacement de l'élément SBRIEIR est donné par [86]:

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 x y + \alpha_8 \frac{y^2}{2} + \alpha_{10} \frac{y^3}{2} + \alpha_{11} x y^2 + \alpha_{12} x^2 y^3 \\ V &= \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_6 y + \alpha_7 x y + \alpha_8 \frac{x^2}{2} + \alpha_9 \frac{x^3}{2} - \alpha_{11} x^2 y - \alpha_{12} x^3 y^2 \\ \theta_z &= \alpha_3 - \alpha_5 \frac{x}{2} + \alpha_7 \frac{y}{2} + \alpha_9 \frac{x}{2} - \alpha_{10} \frac{y}{2} - 2\alpha_{11} x y - 3\alpha_{12} x^2 y^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Le champ de déformations imposées pour l'élément SBRIEIR est défini comme suit [86] :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} x y^3 \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x - \alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} x^3 y \\ \gamma_{xy} &= \alpha_5 x + \alpha_7 y + \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y \end{aligned} \quad (2.42)$$

La matrice de rigidité élémentaire  $[K_{SBRIEIR}^e]$  de l'élément SBRIEIR peut s'écrire :

$$[K_{SBRIEIR}^e] = \left[ C_{SBRIEIR}^{-1} \right]^T \left( \iint [Q_{SBRIEIR}]^T [D] [Q_{SBRIEIR}] dx dy \right) \left[ C_{SBRIEIR}^{-1} \right] \quad (2.43)$$

$$[K_{SBRIEIR}^e] = \left[ C_{SBRIEIR}^{-1} \right]^T [K_{SBRIEIR}^0] \left[ C_{SBRIEIR}^{-1} \right]$$

Avec  $[C_{SBRIEIR}] = \{[P_{SBRIEIR}]_1 [P_{SBRIEIR}]_2 [P_{SBRIEIR}]_3 [P_{SBRIEIR}]_4\}^T$

$$[P_{SBRIEIR}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & -\frac{y^2}{2} & xy^2 & x^2 y^3 \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 & y & xy & \frac{x^2}{2} & \frac{y^2}{2} & 0 & -x^2 y & -x^3 y^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{y}{2} & 0 & \frac{x}{2} & -\frac{y}{2} & -2xy & -3x^2 y^2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$[Q_{SBRIEIR}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & -x^2 & -2x^3 y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & y & 1 & x & y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

### c) Éléments finis flexionnels (élément de plaque Reissner–Mindlin)

Bellounar et al. [73] ont proposé un nouvel élément de plaque Reissner–Mindlin à quatre noeuds, formulé à partir des déformations supposées plutôt qu'à partir des déplacements. Cet élément, appelé SBQMP (Strain-Based Quadrilateral Mindlin Plate), a été développé afin

d'éliminer le phénomène de verrouillage en cisaillement dans le cas des plaques très minces et d'améliorer la précision, aussi bien pour les plaques régulières que pour celles présentant une géométrie irrégulière. Dans cette formulation, les champs de déformation adoptent une variation linéaire, avec des courbures et des déformations de cisaillement transverse considérées comme indépendantes. L'élément SBQMP comporte trois degrés de liberté par nœud. La figure 2.14 illustre la configuration géométrique d'un élément quadrilatéral à quatre nœuds (élément réel et élément de référence), tandis que les relations déformation-déplacement correspondant à la théorie de Reissner-Mindlin y sont également présentées par :

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}; \kappa_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y}; \kappa_{xy} = \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x; \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y$$
(2.46)

Les courbures et les déformations de cisaillement transverse sont respectivement notées ( $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$ ) et ( $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ ). Toutefois, les cinq déformations introduites dans l'équation (2.46) ne peuvent pas être considérées comme totalement indépendantes, puisqu'elles dérivent des champs de déplacement  $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ .

Elles doivent donc satisfaire les relations de compatibilité imposées par la formulation, telles que présentées dans [73]:

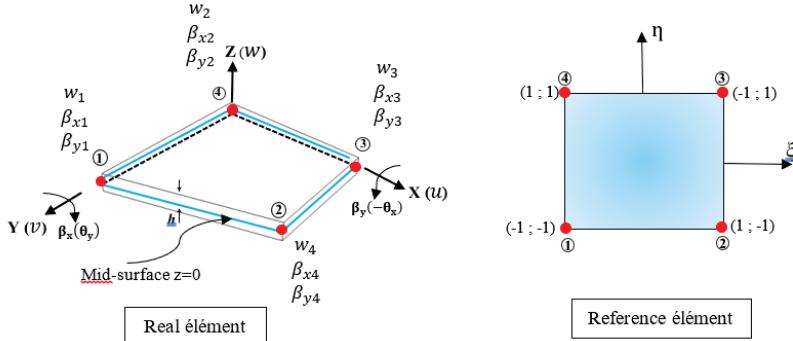
$$\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{\partial \kappa_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial \kappa_y}{\partial x}$$
(2.47)

Le champ de déplacements correspondant aux trois modes du corps rigide est obtenu en égalant l'équation (2.47) à zéro. Après intégration, les résultats suivants sont obtenus :

$$w = \alpha_1 - \alpha_2 x + \alpha_3 y; \beta_x = \alpha_2; \beta_y = \alpha_3 \quad (2.48)$$



**Figure 2. 14..**Géométrie de l'élément de plaque quadrilatéral Reissner–Mindlin SBQMP[73].

L'élément quadrilatéral proposé comporte trois degrés de liberté au niveau de chacun des quatre noeuds d'angle. Ainsi, son champ de déplacements doit inclure un total de douze constantes indépendantes. Étant donné que trois de ces constantes sont utilisées pour représenter les modes de corps rigide, les déplacements associés à la déformation de l'élément doivent alors être décrits à l'aide des neuf constantes restantes. Ces neuf constantes sont ensuite réparties entre les cinq déformations définies par [73]:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_7 \frac{x}{2}; \kappa_y = \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_5 \frac{y}{2} \\ \kappa_{xy} &= \alpha_8 + (2\alpha_5 x) + (2\alpha_7 y); \gamma_{xz} = \alpha_9 + \alpha_{10} y; \gamma_{yz} = \alpha_{11} + \alpha_{12} x \end{aligned} \quad (2.49)$$

Les termes entre crochets sont introduits de manière à satisfaire les équations de compatibilité (Eq. 2.47). Les composantes de déformation données par l'équation (2.49) sont ensuite substituées dans l'équation (2.46). Après intégration, on obtient :

$$\begin{aligned}
w = & -\alpha_4 \frac{x^2}{2} - \alpha_5 \left( \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{12} \right) - \alpha_6 \frac{y^2}{2} - \alpha_5 \left( \frac{x y^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right) - \alpha_8 \frac{x y}{2} + \alpha_9 \frac{x}{2} \\
& + \alpha_{10} \frac{x y}{2} + \alpha_{11} \frac{y}{2} + \alpha_{12} \frac{x y}{2} \\
\beta_x = & \alpha_4 x + \alpha_5 x y + \alpha_7 \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \right) + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 \frac{1}{2} + \alpha_{10} \frac{y}{2} - \alpha_{12} \frac{y}{2} \\
\beta_y = & \alpha_5 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \right) + \alpha_6 y + \alpha_7 x y + \alpha_8 \frac{x}{2} - \alpha_{10} \frac{x}{2} + \alpha_{11} \frac{1}{2} + \alpha_{12} \frac{x}{2}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Les fonctions de déplacement obtenues à partir de l'équation (2.50) sont ensuite combinées avec les déplacements associés aux modes de corps rigide définis par l'Équation (2.48). Cette superposition permet d'obtenir les fonctions finales de forme de déplacement:

$$\begin{aligned}
w = & \alpha_1 - \alpha_2 x + \alpha_3 y - \alpha_4 \frac{x^2}{2} - \alpha_5 \left( \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{12} \right) - \alpha_6 \frac{y^2}{2} - \alpha_7 \left( \frac{x y^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right) \\
& - \alpha_8 \frac{x y}{2} + \alpha_9 \frac{x}{2} + \alpha_{10} \frac{x y}{2} + \alpha_{11} \frac{y}{2} + \alpha_{12} \frac{x y}{2} \\
\beta_x = & \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_5 x y + \alpha_7 \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \right) + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 \frac{1}{2} + \alpha_{10} \frac{y}{2} - \alpha_{12} \frac{y}{2} \\
\beta_y = & \alpha_3 + \alpha_5 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \right) + \alpha_6 y + \alpha_7 x y + \alpha_8 \frac{x}{2} - \alpha_{10} \frac{x}{2} + \alpha_{11} \frac{1}{2} + \alpha_{12} \frac{x}{2}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Les fonctions de déplacement données par l'équation (2.51), ainsi que les fonctions de déformation issues de l'équation (2.49), peuvent être réécrites sous forme matricielle, respectivement, comme suit:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{SBQMP} \end{bmatrix} \{ \alpha_f \} = \begin{bmatrix} N_{SBQMP} \end{bmatrix} \{ \delta^e \} \tag{2.52}$$

$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{SBQMP} \end{bmatrix} \{ \alpha_f \} = \begin{bmatrix} B_{SBQMP} \end{bmatrix} \{ \delta^e \} \tag{2.53}$$

Avec

$$[N_{SBQMP}] = [P_{SBQMP}] [C_{SBQMP}]^{-1}; [B_{SBQMP}] = [Q_{SBQMP}] [C_{SBQMP}]^{-1} \quad (2.54)$$

Et les matrices  $[P_{SBQMP}]$  et  $[Q_{SBQMP}]$  sont données sous la forme :

$$[P_{SBQMP}] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & \frac{-x^2}{2} & \left(\frac{-x^2y}{2} - \frac{y^3}{12}\right) & \frac{-y^2}{2} & \left(\frac{-xy^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right) & \frac{-xy}{2} & \frac{x}{2} & \frac{xy}{2} & \frac{y}{2} & \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & xy & 0 & \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}\right) & -\frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & -\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left(\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2}\right) & y & xy & \frac{x}{2} & 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

$$[Q_{SBQMP}] = \begin{bmatrix} [Q_{SBQMP}]_f \\ [Q_{SBQMP}]_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & 0 & 2y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

La matrice de transformation  $[C_{SBQMP}]_i$ , qui relie les déplacements nodaux de l'élément  $\{\delta^e\}^T = \{W_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}; \dots; W_4, \beta_{x4}, \beta_{y4}\}^T$  aux douze constantes  $\{\alpha_f\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots; \alpha_{12}\}^T$ , peut être exprimée sous la forme :

$$\{\delta^e\}^T = [C_{SBQMP}] \{\alpha_f\} \quad (2.56)$$

$$\text{Avec } [C_{SBQMP}] = \{[P_{SBQMP}]_1 [P_{SBQMP}]_2 [P_{SBQMP}]_3 [P_{SBQMP}]_4\}^T$$

En appliquant la procédure classique utilisée pour les éléments finis à champ de déformation, la matrice de rigidité élémentaire  $[K_{SBQMP}^e]$ , ainsi que la matrice de masse  $[M_{SBQMP}^e]$  associées à l'élément SBQMP pour une plaque, s'obtiennent comme suit:

$$\begin{bmatrix} K_{SBQMP}^e \end{bmatrix} = \left[ C_{SBQMP}^{-1} \right]^T \left( \iint [Q_{SBQMP}]^T [D] [Q_{SBQMP}] dx dy \right) \left[ C_{SBQMP}^{-1} \right] \\ \begin{bmatrix} K_{SBQMP}^e \end{bmatrix} = \left[ C_{SBQMP}^{-1} \right]^T \left[ K_{SBQMP}^0 \right] \left[ C_{SBQMP}^{-1} \right] \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} M_{SBQMP}^e \end{bmatrix} = \left[ C_{SBQMP}^{-1} \right]^T \left( \iint [P_{SBQMP}]^T [T] [P_{SBQMP}] dx dy \right) \left[ C_{SBQMP}^{-1} \right] \\ \begin{bmatrix} M_{SBQMP}^e \end{bmatrix} = \left[ C_{SBQMP}^{-1} \right]^T \left[ M_{SBQMP}^0 \right] \left[ C_{SBQMP}^{-1} \right] \quad (2.58)$$

Avec

$$[D] = \begin{bmatrix} [D]_f & 0 \\ 0 & [D]_c \end{bmatrix}; [D]_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$[D]_c = \frac{kEh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [T] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Où  $[D]$ ,  $[D]_f$ ,  $[D]_c$  représentent respectivement les matrices de rigidité totale, de rigidité en flexion et de rigidité en cisaillement. La matrice  $[M]$  contient les termes associés à la densité du matériau, tandis que  $k$  désigne le coefficient de correction du cisaillement, généralement fixé à  $k=5/6$ .

## 2.9 Conclusion

L’analyse des structures complexes requiert aujourd’hui des outils de modélisation de plus en plus performants, capables de reproduire avec précision le comportement mécanique tout en prenant en compte les particularités propres aux matériaux et aux configurations étudiées. Dans ce contexte, les méthodes numériques, et en particulier la méthode des éléments finis, s’imposent comme des instruments essentiels pour la conception et l’évaluation de telles structures.

Ce chapitre a été consacré à la présentation des principes fondamentaux et des bases théoriques qui sous-tendent notre approche. Il a abordé les notions essentielles de la mécanique des milieux continus ainsi que les fondements de la méthode des éléments finis, avec un accent particulier sur les modèles à champ de déformation.

Enfin, la revue des éléments finis à champ de déformation a permis de mettre en évidence leur évolution et leur adoption croissante dans l’analyse des structures complexes, offrant ainsi un outil précieux pour relever les défis actuels et futurs en ingénierie.

### **3 Développement et validation d'élément finis à champ de déformation pour l'analyse statique, et vibration libre des plaques composites**

#### **3.1 Introduction**

Dans ce sous-chapitre, nous abordons le développement et la validation d'éléments finis à champ de déformation spécialement conçus pour l'analyse des plaques composites. L'objectif principal est de fournir un cadre numérique capable d'évaluer de manière précise le comportement statique et dynamique des plaques, en prenant en compte les particularités des matériaux composites, telles que l'orthotropie et la variation des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur.

Nous commencerons par présenter la formulation théorique des éléments finis à champ de déformation, en détaillant les hypothèses de modélisation et les relations constitutives utilisées. Ensuite, nous illustrerons le processus de validation des éléments développés à travers des études comparatives avec des solutions analytiques et des résultats publiés dans la littérature. Cette approche permettra d'assurer la fiabilité et la précision des modèles numériques avant leur application à des cas plus complexes.

#### **3.2 Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini quadrilatéral (HSBQLP20) de plaque composite à champ de déformation basé sur la théorie de la plaque à déformation de cisaillement trigonométrique**

##### **3.2.1 Champ de déplacement et déformation**

Basé sur la théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) [48], [94] les champs de déplacement ( $U$ ,  $V$ ,  $W$ ) dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour une plaque de épaisseur modérée peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \beta_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \beta_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= f(z) w_0(x, y) + (f(z) - 1) R(x, y) \end{aligned} \quad (3.01)$$

Avec

$$\beta_x(x, y) = \frac{\partial R(x, y)}{\partial x}; \beta_y(x, y) = \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \quad (3.02)$$

$$f(z) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{2\pi z}{h} \right) \right) \quad (3.03)$$

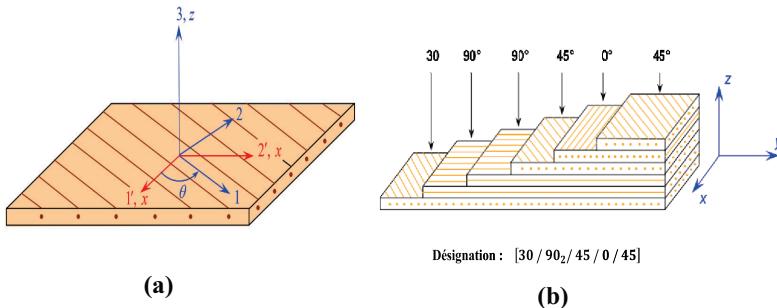
Les composantes du vecteur de déformation peuvent s'écrire comme :

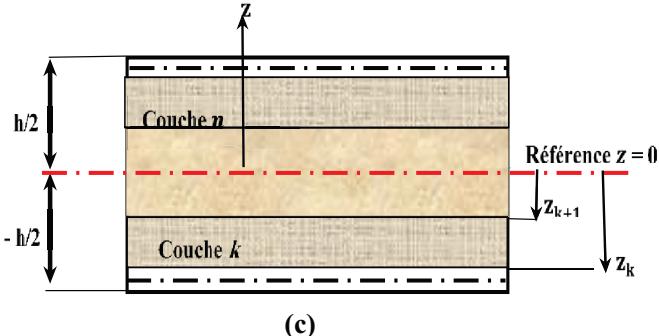
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^l \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^m \\ \kappa \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.04)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma \end{Bmatrix} = f(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.05)$$

### 3.2.2 Équations constitutives

Dans les plaques composites stratifiées, le matériau est composé de couches orthotropes définies dans un repère local (1,2,3) et est supposé isotrope dans le plan 2-3 (voir Fig. 1(a)). Les indices 1 et 2 désignent respectivement la direction des fibres et la direction dans le plan, perpendiculaire aux fibres, tandis que l'indice 3 correspond à la direction normale au plan de la plaque. Pour chaque couche, l'hypothèse de contrainte plane ( $\sigma_3 = 0$ ) est adoptée. Les équations constitutives, exprimées dans le repère local orthotrope (1-2-3), s'écrivent alors comme suit:





(c)

**Figure 3. 1.** a) Plaque orthotrope, (b) Désignation d'une plaque stratifiée, (c) Disposition et numérotation des couches pour une plaque stratifiée typique.

La relation contrainte-déformation pour un matériau orthotrope plan, exprimée dans le système de coordonnées locales (1–2–3), est donnée par :

$$\{\sigma_1\} = [C_b]\{\varepsilon_1\}; \{\tau_1\} = [C_s]\{\gamma_1\} \quad (3.06)$$

Où

$$\{\sigma_1\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}; \quad (3.07)$$

$$\{\tau_1\} = \begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}$$

Les constantes élastiques  $C_{ij}$ , associées aux axes principaux de coordonnées du matériau de chaque couche, sont définies par:

$$C_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; C_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; C_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \\ C_{66} = G_{12}; C_{55} = G_{23}; C_{44} = G_{13} \quad (3.08)$$

Dans l'équation (5.08), pour chaque couche,  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  représentent les modules de Young axiaux le long des axes principaux du matériau, tandis que  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  correspondent respectivement aux coefficients de Poisson majeur et mineur dans le plan. Les modules de cisaillement sont notés  $G_{12}$  pour la direction dans le plan, et  $G_{13}$  et  $G_{23}$  ainsi que pour les directions transversales.

Étant donné qu'une plaque composite stratifiée est constituée de plusieurs plis orthotropes, dont les axes principaux du matériau peuvent être orientés arbitrairement par rapport au repère global du stratifié (x,y,z), les relations constitutives de chaque pli doivent être transformées en conséquence.

Ainsi, les relations contrainte-déformation pour la  $k$ -ième couche hors axe (Fig. 1c), exprimées dans le repère global du stratifié, s'écrivent comme suit[95]:

$$\left\{ \sigma \right\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & 0 \\ \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.09)$$

$$\left\{ \tau \right\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{44} & 0 \\ 0 & \overline{C}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)}$$

$$\left\{ \sigma \right\}^{(k)} = \left[ \overline{C}_b \right]^{(k)} \left\{ \varepsilon \right\}^{(k)} ; \left\{ \tau \right\}^{(k)} = \left[ \overline{C}_s \right]^{(k)} \left\{ \gamma \right\}^{(k)} \quad (3.10)$$

Où  $\left[ \overline{C}_b \right]^{(k)}$  et  $\left[ \overline{C}_s \right]^{(k)}$  désignent respectivement les constantes matérielles transformées de flexion et de cisaillement pour la k-ième couche.

$$\left[ \overline{C}_b \right]^{(k)} = [T_b]^T [C_b] [T_b] ; \left[ \overline{C}_s \right]^{(k)} = [T_s]^T [C_s] [T_s] \quad (3.11)$$

Alors que les matrices de transformation  $[T_b]$  et  $[T_s]$  sont données comme :

$$[T_b] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & \cos \theta_k \sin \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -\cos \theta_k \sin \theta_k \\ -2 \cos \theta_k \sin \theta_k & 2 \cos \theta_k \sin \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} ; \quad (3.12)$$

$$[T_s] = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix}$$

### 3.2.3 Les résultantes de force et de moment

Les forces et moments par unité de longueur, exprimés en fonction des composantes de contrainte à travers l'épaisseur, sont donnés par [96]:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{array} \right\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} dz; \\
\left\{ \begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}(z) dz; \\
\left\{ \begin{array}{l} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z) \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} dz
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ou, en termes de déformations, en utilisant les équations (3.4), (3.5) et (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{array} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[ \overline{C}_b \right]^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} dz + \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[ \overline{C}_b \right]^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}(z) dz \right\} \\
\left\{ \begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[ \overline{C}_b \right]^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\}(z) dz + \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[ \overline{C}_b \right]^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}(z^2) dz \right\} \\
\left\{ \begin{array}{l} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[ \overline{C}_s \right]^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} f(z) dz \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[ \overline{C}_s \right]^{(k)} f^2(z) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{array} \right\} dz \right\}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

L'équation (3.14) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\{N\} &= [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{\kappa\} \\
\{M\} &= [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{\kappa\} \\
\{Q\} &= [S]\{\gamma^0\}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Sous forme matricielle, la relation liant les résultantes de contraintes aux déformations s'écrit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} N \\ M \\ Q \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma^0 \end{array} \right\} \tag{3.16}$$

Où

$$N = \begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \end{Bmatrix}^T, M = \begin{Bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{Bmatrix}^T, Q = \begin{Bmatrix} Q_x & Q_y \end{Bmatrix}^T \quad (5.17a)$$

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 & \varepsilon_y^0 & \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}^T, \kappa = \begin{Bmatrix} \kappa_x & \kappa_y & \kappa_{xy} \end{Bmatrix}^T, \gamma^0 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 & \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix}^T \quad (3.17b)$$

Pour une plaque composite constituée de nnn lames orthotropes, les matrices de rigidité [A], [B], [D] et [S], représentant respectivement les effets de membrane, de couplage membrane-flexion, de flexion et de cisaillement, s'écrivent comme suit:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix}; \quad (3.18)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{54} & S_{55} \end{bmatrix}$$

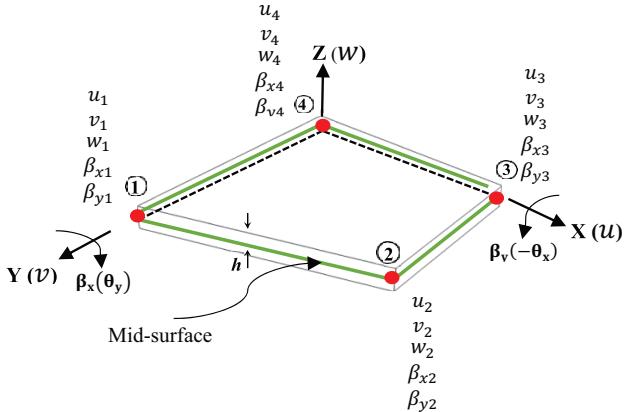
Les expressions des différents composants de rigidité sont données par:

$$(A_{ij} \quad B_{ij} \quad D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{C}_b]_{ij}^{(k)} (1, z, z^2) dz; (i, j) = (1, 2, 6) \quad (3.19)$$

$$S_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{C}_s]_{ij}^{(k)} [f(z)]^2 dz; (i, j) = (4, 5) \quad (3.20)$$

### 3.2.4 Formulation de l'élément HSBQLP20 développé

L'élément proposé, désigné HSBQLP20 (High-Order Strain-Based Quadrilateral Laminated Plate with 20 degrees of freedom), est un élément de plaque quadrilatère à quatre nœuds, avec cinq degrés de liberté par nœud ( $u, v, w, \beta_x, \beta_y$ ), comme illustré à la Figure 3.02. Ses fonctions de déplacement sont obtenues par la combinaison de deux formulations basées sur la déformation : le premier est un élément de membrane à deux degrés de liberté par nœud ( $u, v$ ), proposé par Sabir et Sfendji [93], et le second est un élément de plaque de type Reissner–Mindlin, avec trois degrés de liberté par nœud ( $w, \beta_x, \beta_y$ ), développé précédemment par Belounar et al. [73].



**Figure 3. 2.**Quadrilateral laminated composite plate element (HSBQLP20).

### 3.2.4.1 Champ de déplacements de l'élément (HSBQLP20)

L'élément HSBQLP20 est dérivé en utilisant l'approche par déformation et la théorie TrSDPT, et ses fonctions de forme de déplacement sont représentées par des fonctions polynomiales comportant 20 constantes  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}\}$ .

Les déformations de membrane ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ), de flexion ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ ) et de cisaillement transversal ( $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ) sont exprimées en fonction des cinq déplacements  $\{u, v, w, \beta_x, \beta_y\}$ , et leurs formules de compatibilité des déformations respectives sont décrites dans [97] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^0}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x} &= 2 \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial y} &= 2 \frac{\partial \kappa_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.21)$$

En supposant que l'équation (3.04) soit égale à zéro et en effectuant l'intégration, le champ de déplacements obtenu est exprimé à l'aide des constantes  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}\}$  comme suit :

$$u_0 = \alpha_1 - \alpha_3 y, v_0 = \alpha_2 + \alpha_3 x, w_0 = \alpha_9 - \alpha_{10} x - \alpha_{11} y, \beta_x = \alpha_{10}, \beta_y = \alpha_1 \quad .22)$$

Les 17 constantes restantes  $\{\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_{20}\}$  sont utilisées pour définir les modes de déformation, et les champs de déformations correspondants sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\
\varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x \\
\gamma_{xy} &= \alpha_8 \\
\kappa_x &= \alpha_{12} + \alpha_{13} y + \alpha_{15} \frac{x}{2} \\
\kappa_y &= \alpha_{13} \frac{y}{2} + \alpha_{14} + \alpha_{15} x \\
\kappa_{xy} &= 2\alpha_{13}x + 2\alpha_{15}y + \alpha_{16} \\
\gamma_{xz} &= \alpha_{17} + \alpha_{18}y \\
\gamma_{yz} &= \alpha_{19} + \alpha_{20}y
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Les fonctions de forme de déplacement pour l'élément actuel (HSBQLP20) sont obtenues en combinant deux champs de déformations supposés, comme indiqué dans l'équation (21).

Le premier  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$  correspond à un élément de membrane, possédant deux degrés de liberté par nœud  $(u_0, v_0)$ , tel que proposé par Sabir [93]. Le second champ  $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  correspond à un élément de plaque formulé selon la théorie de Reissner–Mindlin, avec trois degrés de liberté par nœud  $(w_0, \beta_x, \beta_y)$ , développé précédemment par Belounar et al. [73] :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} \\
v_0 &= -\alpha_5 \frac{x^2}{2} + y\alpha_6 + xy\alpha_7 + \frac{x}{2}\alpha_8 \\
w_0 &= -\left(\frac{x^2}{2}\right)\alpha_{12} - \left(\frac{x^2y}{2} + \frac{y^3}{12}\right)\alpha_{13} - \left(\frac{y^2}{2}\right)\alpha_{14} - \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right)\alpha_{15} \\
&\quad - \alpha_{16} \frac{xy}{2} + \alpha_{17} \frac{x}{2} + \alpha_{18} \frac{xy}{2} + \alpha_{19} \frac{y}{2} + \alpha_{20} \frac{xy}{2} \\
\beta_x &= x\alpha_{12} + xy\alpha_{13} + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right)\alpha_{15} + \frac{y}{2}\alpha_{16} + \frac{1}{2}\alpha_{17} + \frac{y}{2}\alpha_{18} - \frac{y}{2}\alpha_{20} \\
\beta_y &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right)\alpha_{13} + y\alpha_{14} + xy\alpha_{15} + \frac{x}{2}\alpha_{16} - \frac{x}{2}\alpha_{18} + \frac{1}{2}\alpha_{19} + \frac{x}{2}\alpha_{20}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En ajoutant aux fonctions de forme associées aux modes de corps rigide (éq. 3.22) celles correspondant aux modes de déformation (éq.3.24), les fonctions de forme complètes du déplacement de l'élément développé sont obtenues sous la forme des 20 constantes suivantes  $\{\alpha\}^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20})$  :

$$\{U_e\} = [P]\{\alpha\} \quad (3.25)$$

Avec

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & \frac{-y^2}{2} & \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x & -y & \frac{-x^2}{2} & -\left(\frac{x^2y}{2} + \frac{y^3}{12}\right) & \frac{-y^2}{2} & -\left(\frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right) & -\frac{xy}{2} & \frac{x}{2} & \frac{xy}{2} & \frac{y}{2} & \frac{xy}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & xy & 0 & \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right) & \frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & -\frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right) & y & xy & \frac{x}{2} & 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation  $[R]$ , qui relie le vecteur des déplacements nodaux élémentair  $\{\delta_e\}^T = (u_1, v_1, w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, \dots, u_4, v_4, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4})$  au vecteur des constantes  $\{\alpha\}^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20})$  , peut être représentée sous forme matricielle par la formule suivante :

$$\{\delta_e\} = [R]\{\alpha\} \quad (3.26)$$

Avec

$$[R] = \begin{bmatrix} [P_1] & [P_2] & [P_3] & [P_4] \end{bmatrix}^T \quad (3.27)$$

En utilisant l'équation (3.26), il est alors possible de déterminer le vecteur des constantes  $\{\alpha\}$  :

$$\{\alpha\} = [R]^{-1} \{\delta_e\} \quad (3.28)$$

Ensuite, en remplaçant l'équation (3.28) dans l'équation (3.25), on obtient :

$$\{U_e\} = [P][R]^{-1} \{\delta_e\} = [N]\{\delta_e\} \quad (3.29)$$

Avec

$$[N] = [P][R]^{-1} \quad (3.30)$$

### 3.2.4.2 Relations déformation–déplacement

Les fonctions de déformation de membrane  $\{\varepsilon^0\}$ ,  $\{\kappa\}$ , ainsi que les déformations de cisaillement transversal  $\{\gamma\}$  issues de l'équation (3.23) sont données comme suit [98]:

$$\{\varepsilon^0\} = [G_m]\{\alpha\} \quad (3.31)$$

$$\{\kappa\} = [G_b]\{\alpha\} \quad (3.32)$$

$$\{\gamma\} = [G_s]\{\alpha\} \quad (3.33)$$

Où les matrices de déformation de membrane  $[G_m]$ , de flexion  $[G_b]$  et de cisaillement transversal  $[G_s]$  sont définies comme suit [99]:

$$[G_m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$[G_b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & 0 & 2y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$[G_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

La relation entre les déplacements et les déformations peut être obtenue en substituant l'équation (3.28) dans les équations (3.31-3.33), ce qui donne :

$$\{\varepsilon^0\} = [G_m][R]^{-1}\{\delta_e\} = [B_m]\{\delta_e\} \quad (3.37)$$

$$\{\kappa\} = [G_b][R]^{-1}\{\delta_e\} = [B_b]\{\delta_e\} \quad (3.38)$$

$$\{\gamma\} = [G_s][R]^{-1}\{\delta_e\} = [B_s]\{\delta_e\} \quad (3.39)$$

Où  $[B_m]$ ,  $[B_b]$  et  $[B_s]$  représentent les matrices déformation déplacement, définies par :

$$[B_m] = [G_m][R]^{-1}; [B_b] = [G_b][R]^{-1}; [B_s] = [G_s][R]^{-1} \quad (3.40)$$

### 3.2.5 Dérivation des matrices élémentaires

#### 3.2.5.1 Analyse statique

La matrice de raideur est obtenue en appliquant le principe de l'énergie potentielle totale :

$$\pi = U - W \quad (3.41)$$

Où  $U$  et  $W$  représentent respectivement l'énergie de déformation et le travail des charges extérieures. L'expression du potentiel d'énergie de déformation est donnée par Tati [48] comme suit:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} + \{\gamma\}^T \{\tau\} \right) dV \quad (3.42)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( \{\varepsilon^0\}^T \{\sigma\} + z \{\kappa\}^T \{\sigma\} + \{\gamma\}^T \{\tau\} \right) dV$$

En effectuant l'intégration à travers l'épaisseur et en appliquant les équations (3.13) et (3.14), l'équation (3.42) devient:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \left( \{\varepsilon^0\}^T \{N\} + \{\kappa\}^T \{M\} + \{\gamma\}^T \{Q\} \right) dS \quad (3.43)$$

En substituant les équations (3.16), (3.37), (3.38) et (3.39) dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$U = \frac{1}{2} \int_S \left[ \begin{aligned} & \left\{ \delta_e \right\}^T \left[ \left[ B_m \right]^T [A] \left[ B_m \right] + \left[ B_m \right]^T [B] \left[ B_b \right] + \left[ B_b \right]^T [B] \left[ B_m \right] \right] \right\} \left\{ \delta_e \right\} \\ & + \left[ B_b \right]^T [D] \left[ B_b \right] + \left[ B_s \right]^T [S] \left[ B_s \right] \end{aligned} \right] dS \quad (3.44)$$

où  $\Omega$  et  $V$  représentent respectivement la surface supérieure et le volume de la plaque. Le travail des forces extérieures généré par la charge distribuée  $q(x, y)$  appliquée sur la plaque FGM est exprimé comme suit:

$$W = \int_S w_0 \times q(x, y) dS \quad (3.45)$$

En substituant l'équation (3.30) dans l'équation (3.45), on obtient :

$$W = \int_S \left\{ \delta_e \right\}^T [N]^T \times q(x, y) dS \quad (3.46)$$

En substituant les équations (3.44) et (3.46) dans l'équation (3.41), on obtient :

$$\pi = U = \frac{1}{2} \int_S \left\{ \delta_e \right\}^T \left( \begin{aligned} & [B_m]^T [A][B_m] + [B_m]^T [B][B_b] + [B_b]^T [B][B_m] \\ & + [B_b]^T [D][B_b] + [B_s]^T [S][B_s] \end{aligned} \right) \left\{ \delta_e \right\} dS - \int_S \left\{ \delta_e \right\}^T [N]^T \times q(x, y) dS \quad (3.47)$$

L'équation d'équilibre pour l'analyse de flexion linéaire peut s'écrire comme suit :

$$[K_e] \{ \delta_e \} = \{ F_e \} \quad (3.48)$$

Où  $[K^e]$  représente la matrice de raideur de l'élément, et  $\{F^e\}$  désigne le vecteur des forces nodales correspondant à l'élément, donné par:

$$\begin{aligned} [K_e] &= \int_s \left( [B_m]^T [A][B_m] + [B_b]^T [B][B_m] + [B_b]^T [D][B_b] + [B_s]^T [S][B_s] \right) dS \\ \{F_e\} &= \int_s [N] \times q(x, y) dS \end{aligned} \quad (3.49)$$

### 3.2.5.2 Analyse des vibrations libres

Pour obtenir la matrice de masse, le principe de Hamilton est utilisé [100]:

$$\delta \int_0^t [T - (U - W)] dt = 0 \quad (3.50)$$

Où T représente l'énergie cinétique, définie selon :

$$T = \frac{1}{2} \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left( \left\{ \dot{U}_e \right\}^T \left\{ \dot{U}_e \right\} dz \right) dS \quad (3.51)$$

Où  $\{U_e\} = \{u, v, w, \beta_x, \beta_y\}^T$  est le vecteur des déplacements nodaux et  $\rho(z)$  est la densité. En substituant l'équation (3.29) dans l'équation ci-dessus, on obtient:

$$T = \frac{1}{2} \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left( \left\{ \dot{\delta}_e \right\}^T [N]^T [N] \left\{ \dot{\delta}_e \right\} dz \right) dS \quad (3.52)$$

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\delta}_e \right\}^T \left( \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [N]^T \rho(z) [N] dz dS \right) \left\{ \dot{\delta}_e \right\} \quad (3.53)$$

La matrice de masse de l'élément  $[M_e]$  peut être calculée à l'aide de l'expression suivante:

$$[M_e] = \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [N]^T \rho(z) [N] dz dS = \int_S [N]^T [I_0] [N] dS \quad (3.54)$$

Où  $[I_0]$  est la matrice d'inertie surfacique (ou matrice intégrale sur l'épaisseur), définie à partir des moments de masse d'ordre zéro, un et deux:

$$[I_0] = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$m_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz = \rho h; m_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz = 0; m_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz = \rho \frac{h^3}{12} \quad (3.56)$$

Dans le cas des vibrations libres, lorsque le travail des forces extérieures ( $W$ ) est nul, le principe de Hamilton, formulé par l'équation (3.50), conduit à l'équation dynamique d'équilibre suivante pour le système:

$$\begin{aligned} [K_e] \{ \delta^e \} + [M_e] \{ \ddot{\delta}^e \} &= \{ 0 \} \\ ([K_e] - \omega^2 [M_e]) \{ \delta^e \} &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les matrices de raideur et de masse de l'élément,  $[K_e]$  et  $[M_e]$ , données respectivement par les équations (3.49) and (3.54), ainsi que le vecteur des charges nodales équivalent  $\{F_e\}$ , sont assemblés pour former la matrice de raideur globale  $[K]$ , la matrice de masse globale  $[M]$  et le vecteur de charges global  $\{F\}$  de la structure.

Pour le comportement statique, nous appliquons l'équation d'équilibre :

$$[K] \{ \delta^e \} = \{ F \} \quad (3.58)$$

Pour le comportement en vibrations libres, nous appliquons l'équation d'équilibre dynamique :

$$([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (3.59)$$

### 3.3 Numerical findings and discussion

Cette section étudie le comportement statique et vibratoire libre de plaques laminées carrées, trapézoïdales et elliptiques, en analysant les plaques complètes à l'aide de l'approche par éléments finis développée. Les résultats obtenus sont validés par rapport à plusieurs solutions disponibles, dérivées analytiquement et numériquement. L'influence de plusieurs paramètres des plaques, tels que le nombre de couches, le rapport d'aspect, l'orientation des fibres et les conditions aux limites, a été examinée. Les caractéristiques des matériaux utilisés dans cette étude sont présentées dans le Tableau 1.

Les deux types de condition aux limite suivants sont pris en compte :

- Pour des bords simplement appuyés (SSSS)

$$(v = w = \beta_y = 0) \text{ at } x = 0, a \quad (3.60a)$$

$$(u = w = \beta_x = 0) \text{ at } y = 0, b \quad (3.60b)$$

- Pour des bords encastrés (CCCC):

$$(u = v = w = \beta_y = \beta_x = 0) \quad (3.61)$$

**Tableau 3. 1.** Propriétés des matériaux du stratifié composite.

<b>Properties</b>	<b>Material (M)</b>						
	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>5</sub>	M <sub>6</sub>	M <sub>7</sub>
E <sub>11</sub> (Gpa)	25	3	10	20	30	40	2.45
E <sub>22</sub> (Gpa)	01	01	01	01	01	01	01
G <sub>12</sub> (Gpa)	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.48
G <sub>13</sub> (Gpa)	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.48
G <sub>23</sub> (Gpa)	0.2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.2
v <sub>12</sub> = v <sub>23</sub> = v <sub>13</sub>	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.23
<b>ρ</b>	01	01	01	01	01	01	01

### 3.3.1 Analyse statique des plaques laminées

#### 3.3.1.1 Plaque carrée sandwich soumise à une charge uniforme

Le premier test de validation du présent élément concerne une plaque carrée sandwich à trois couches simplement appuyée, soumise à une charge uniforme, proposée par Srinivas[101]. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont présentées à la Figure. 3.3, avec un rapport d'épaisseur  $a/h=10$ . Les propriétés du matériau du cœur sont exprimées dans la matrice constitutive  $[Q_c]$ :

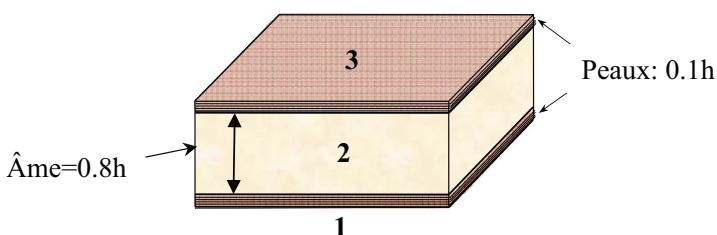
$$[Q_c] = \begin{bmatrix} 0.999781 & 0.231192 & 0 & 0 & 0 \\ 0.231192 & 0.524886 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.262931 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.262931 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.159914 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Et la matrice constitutive des peaux  $[Q_s]$  est dérivée de celle du cœur  $[Q_c]$ .

$$[Q_s] = [R][Q_c] \quad (3.63)$$

Les déplacements et contraintes normalisés de la plaque carrée sandwich sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{(0.99981)}{hq} w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right); \bar{\sigma}_{xx}^1 = \frac{\sigma_{xx}^{(1)}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{h}{2}\right)}{q}; \\ \bar{\sigma}_{xx}^2 &= \frac{\sigma_{xx}^{(1)}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{2h}{5}\right)}{q}; \bar{\sigma}_{xx}^3 = \frac{\sigma_{xx}^{(2)}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{2h}{5}\right)}{q} \end{aligned} \quad (3.64)$$



**Figure 3. 3.** Plaque carrée sandwich simplement appuyée soumise à une charge uniforme.

Les résultats obtenus à l'aide de l'élément HSBQLP20, présentés dans le Tableau 1 pour différents maillages, montrent que l'élément proposé présente un très bon comportement lorsqu'il est comparé à la solution en élasticité 3D de Srinivas et Rao [101], ainsi qu'aux autres solutions de référence disponibles dans la littérature, notamment celles basées sur la théorie LW [102] et les éléments finis de type HSDT [103]. L'analyse du Tableau 1 met en évidence que l'augmentation du rapport modulaire ( $R = 5-15$ ) entraîne une variation notable du déplacement normalisé ainsi que des composantes de contraintes dans le plan. De plus, l'élément HSBQLP20 présente un comportement de convergence régulier lorsque le maillage est affiné ( $8 \times 8 \rightarrow 16 \times 16 \rightarrow 32 \times 32$ ), le maillage le plus fin fournissant des résultats pratiquement identiques à ceux de la solution de référence en élasticité 3D.

**Tableau 3. 2.**Convergence du déplacement transverse ( $w$ ) et des contraintes  $(\bar{\sigma}_{xx}^1)$  d'une plaque carrée sandwich.

R	Méthode	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}^1$	$\bar{\sigma}_{xx}^2$	$\bar{\sigma}_{xx}^3$
5	LW [102]	258.1795	60.0626	46.3926	9.2785
	HSDT [103]	257.1100	60.3660	47.0028	9.4006
	Srinivas et Rao [101]	258.97	60.353	46.623	9.340
	<b>HSBQLP20(8×8)</b>	257.3001	57.6604	46.1845	9.2400
	<b>HSBQLP20(16×16)</b>	258.85	60.235	46.580	9.2690
	<b>HSBQLP20 (32×32)</b>	258.9587	60.3385	46.6038	9.3201
10	LW [102]	158.9117	64.9927	48.6009	4.8601
	HSDT [103]	154.6581	65.3809	49.9729	4.9973
	Srinivas et Rao [101]	159.38	65.332	48.857	4.903
	<b>HSBQLP20(8×8)</b>	158.8193	61.5550	48.0245	3.9836
	<b>HSBQLP20(16×16)</b>	159.3510	62.8820	48.1936	4.0194
	<b>HSBQLP20 (32×32)</b>	159.3701	65.3214	48.8471	4.8901
15	LW [102]	121.3474	66.4362	48.0104	3.2007
	HSDT [103]	114.6442	66.9196	50.3230	3.3549
	Srinivas et Rao [101]	121.72	66.787	48.299	3.238
	<b>HSBQLP20(8×8)</b>	120.9612	66.7106	48.1985	3.1956
	<b>HSBQLP20(16×16)</b>	121.0012	66.7200	48.2090	3.2005
	<b>HSBQLP20 (32×32)</b>	121.7012	66.7670	48.2791	3.2180

### 3.3.1.2 Plaques carrées stratifiées symétriques soumises à des charges sinusoïdales et uniformes

L'efficacité et les performances de l'élément quadrilatéral proposé pour l'analyse du comportement statique des plaques symétriques cross-ply simplement appuyées ont été évaluées à travers plusieurs exemples numériques. Le modèle de matériau M1 est utilisé dans cette étude, et les résultats obtenus sont comparés à des travaux numériques et analytiques publiés. Les plaques sont soumises à deux types de chargements, uniformes et sinusoïdaux, illustrés dans la Figure. 3.4 et définis comme suit :

- Charge uniformément répartie (UDL) :

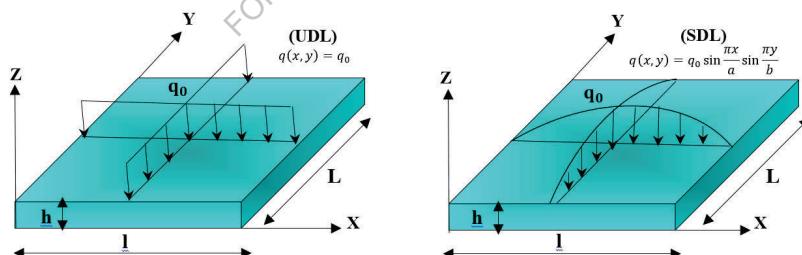
$$q(x, y) = q_0$$

- Charge distribuée selon une loi sinusoïdale (SDL) :

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Les déplacements et contraintes normalisés sont exprimés comme suit:

$$\begin{aligned} w &= \frac{(100E_2 h^3)}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right); \bar{\sigma}_x = \frac{(h^2)}{q_0 b^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right); \bar{\sigma}_y = \frac{(h^2)}{q_0 b^2} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4}\right) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{(h^2)}{q_0 b^2} \tau_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right); \bar{\tau}_{xz} = \frac{(h)}{q_0 b} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right); \bar{\tau}_{yz} = \frac{(h)}{q_0 b} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) \end{aligned}$$



**Figure 3. 4.**Représentation des plaques carrées stratifiées soumises à une distribution de charge uniforme et à une distribution de charge sinusoïdale.

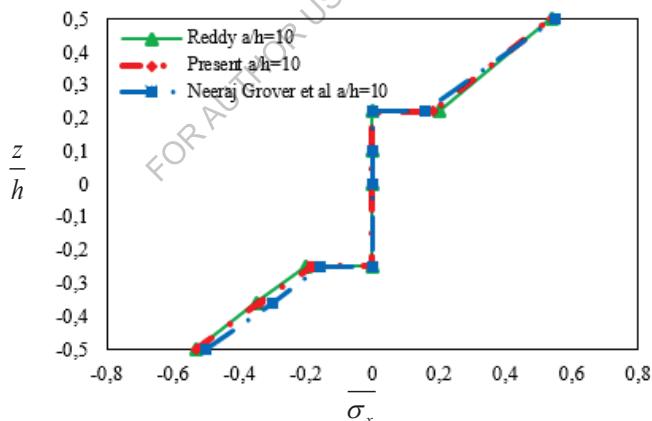
#### a) Four layer [0°/90°/90°/0°] symmetric cross ply laminated plate subjected to sinusoidal loads

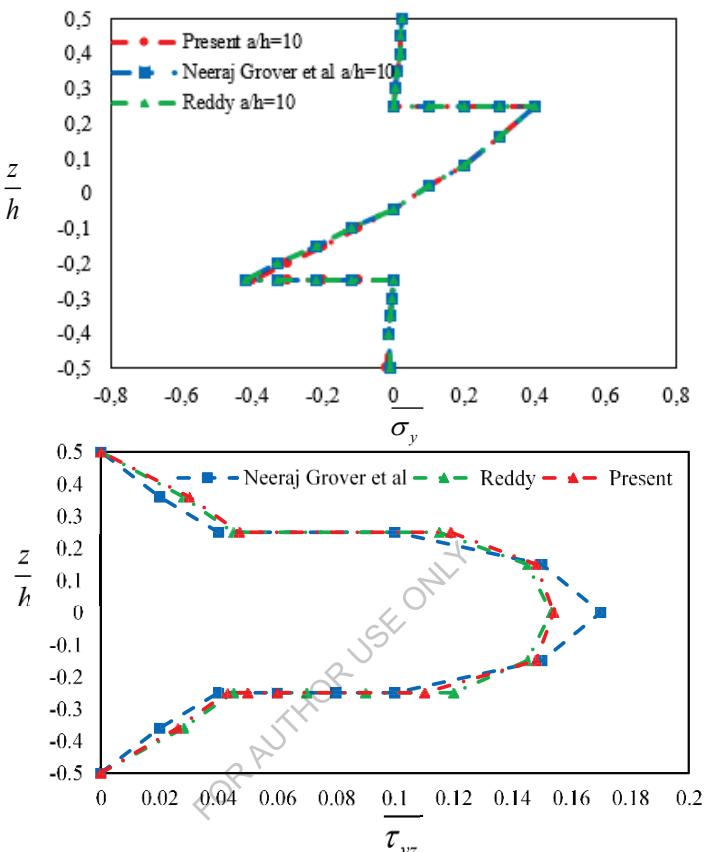
Une plaque laminée symétrique à quatre couches de type simplement appui et de stratification [0°/90°/90°/0°], soumise à un chargement sinusoïdal comme illustré à la Figure 3.4, est considérée

dans cet exemple. Le modèle de matériau M1 est adopté. Les valeurs numériques des déplacements et contraintes adimensionnés, obtenues pour plusieurs rapports d'épaisseur ( $a/h$ ) à l'aide d'un maillage de  $20 \times 20$ , sont présentées dans le Tableau 3.3. Ces résultats sont comparés à ceux d'autres méthodes, notamment la solution exacte basée sur la CPT proposée par Pagano et Hatfield[104], la méthode des bandes finies (FSM) basée sur la HSDT développée par Akhras et al., la théorie inverse hyperbolique des déformations au cisaillement (IHSDT) proposée par Neeraj Grover et al.[107], ainsi que la solution analytique fermée (CFS) issue de la théorie de cisaillement d'ordre supérieur (TSDT) de Reddy[108]. Les résultats montrent que la méthode proposée offre les performances les plus fiables pour l'ensemble des rapports  $a/h$  étudiés. Comparée à la solution analytique CFS-TSDT de Reddy, [108] l'approche HSBQLP20 fournit une précision accrue. Pour les plaques modérément épaisses ( $a/h = 10$ ), les déplacements, contraintes dans le plan et contraintes de cisaillement transverse normalisées obtenus sont significativement plus précis que ceux prédits par les méthodes basées sur la HSDT. Pour les plaques minces ( $a/h = 100$ ), les différentes approches donnent des résultats très proches, sans variations notables. La Figure. 3.5 présente la distribution des contraintes le long de la largeur de la plaque pour  $a/h = 10$ , en utilisant diverses théories. Il apparaît clairement que la distribution obtenue pour les contraintes dans le plan ( $\bar{\sigma}_x$ ) et ( $\bar{\sigma}_y$ ) coïncide parfaitement avec celle prédictive par la HSDT de Reddy [12]. De même, les contraintes de cisaillement transverse ( $\bar{\tau}_{yz}$ ) sont estimées avec une grande précision par rapport aux résultats de Reddy [108]. Enfin, il est important de noter que les contraintes de cisaillement latérales sont appliquées de manière continue aux couches internes du stratifié.

**Tableau 3.** Déplacements et contraintes normalisés de la plaque carrée laminée à quatre couches [0°/90°/90°/0°] soumise à une charge (SDL).

$a/h$	Theory	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
10	Present	<b>0.7153</b>	<b>0.5472</b>	<b>0.3896</b>	<b>0.0274</b>	<b>0.2646</b>	<b>0.1540</b>
	Exact[104]	0.743	0.559	0.401	0.028	0.301	0.196
	Reddy[108]	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640	0.1531
	Akhras[106]	0.7149	0.5589	0.3974	0.0273	0.2697	0.1568
20	Present	<b>0.5066</b>	<b>0.5399</b>	<b>0.3049</b>	<b>0.0234</b>	<b>0.2831</b>	<b>0.124</b>
	Exact[104]	0.517	0.543	0.308	0.023	0.328	0.156
	Reddy[108]	0.5060	0.5393	0.3043	0.0228	0.2825	0.1234
	Akhras [106]	0.5061	0.5523	0.3110	0.0233	0.2883	0.1272
100	Present	<b>0.4345</b>	<b>0.5391</b>	<b>0.2711</b>	<b>0.0214</b>	<b>0.2910</b>	<b>0.1125</b>
	Exact[104]	0.439	0.539	0.276	0.022	0.337	0.141
	Reddy[108]	0.4343	0.5387	0.2708	0.0213	0.2897	0.1117
	Akhras [106]	0.4343	0.5507	0.2769	0.0217	0.2948	0.1180



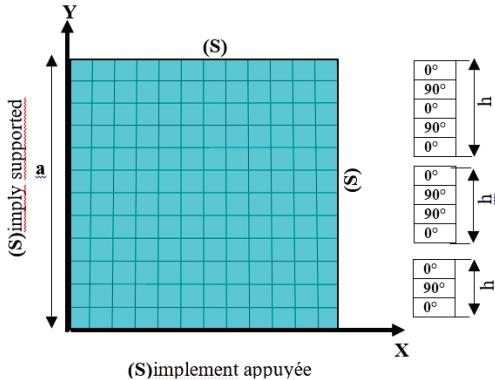


**Figure 3.5.** Variation des contraintes normales dans le plan et des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque laminée [0°/90°/90°/0°] (modèle M1) pour  $a/h = 10$ .

**b) Plaques carrées composites symétriques soumises à une charge uniformément répartie (UDL)**

Trois plaques carrées symétriques cross-ply, simplement appuyées et fabriquées en matériau M1 (de longueur  $a$  et d'épaisseur  $h$ ), sont étudiées sous une charge uniformément répartie (UDL).

Pour l'analyse, un maillage de  $12 \times 12$  éléments est utilisé, comme illustré à la Figure 3.6



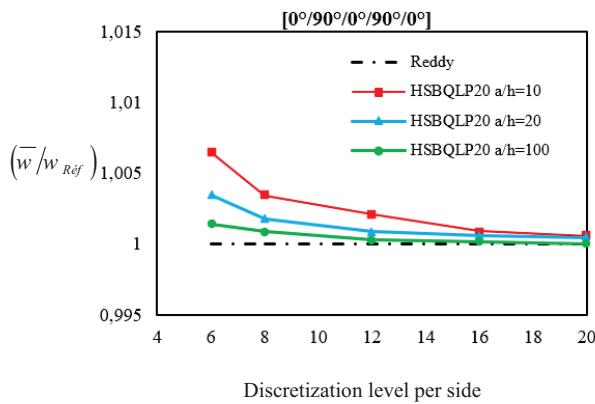
**Figure 3.6.**Géométrie d'une plaque composite laminée symétrique présentant une encoche croisée et type de maillage utilisé.

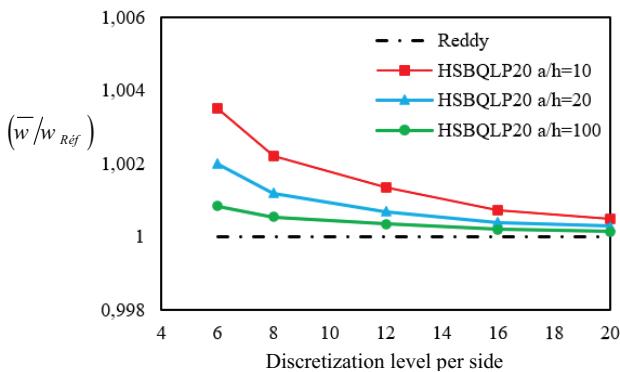
La convergence du déplacement central normalisé ( $\bar{w} = w_c 100 E_2 h^3 / (q_0 a^4)$ ) en fonction de différents rapports épaisseur-longueur ( $a/h$ ) est présentée dans le Tableau 3.3 et la Figure 3.7. L'élément HSBQLP20 fournit des résultats numériques très proches de la solution analytique FSDT de Reddy [109]. Il surpasse les éléments FEM-Q4 [110] et DSG3 [110] en termes de précision et présente des performances comparables à celles d'éléments plus avancés tels que ES-DSG [110], FEM-Q9 [110] et SBQLP de Bellounar [75].

De plus, un test de non-verrouillage au cisaillement (shear-locking-free) a été réalisé pour des plaques laminées carrées simplement appuyées soumises à une charge uniformément répartie, en considérant des configurations symétriques à trois et quatre couches. Les résultats numériques du déplacement central normalisé, obtenus avec un maillage de  $20 \times 20$  et pour différents rapports longueur/épaisseur ( $a/h$ ), sont présentés dans la Figure 3.8. Ces résultats confirment que l'élément SBQLP reste exempt de verrouillage au cisaillement et que sa précision n'est pas affectée par le rapport longueur/épaisseur, même pour des plaques fines.

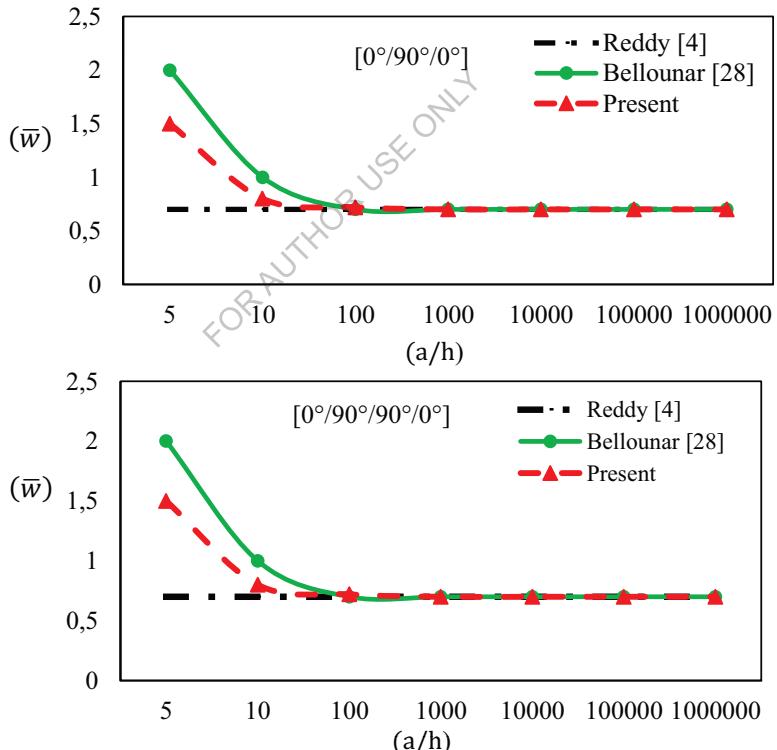
**Tableau 3. 4.**Déplacement non dimensionné ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées cross-ply simplement appuyées (SSSS) soumises à une charge uniformément répartie (UDL).

Theory	Layer	<b>a / h</b>		
		<b>10</b>	<b>20</b>	<b>100</b>
Present		<b>0.9780</b>	<b>0.7463</b>	<b>0.6722</b>
FEM-Q4 [110]		0.9874	0.7195	0.6307
FEM-Q9 [110]		1.0219	0.7573	0.6697
DSG3 [110]	[0°/90°/0°]	1.0159	0.7521	0.6642
ES-DSG3[110]		1.0287	0.7624	0.6743
SBQLP [75]		1.0218	0.7557	0.6677
Reddy [109]		1.0219	0.7572	0.6697
Present		<b>1.0272</b>	<b>0.77025</b>	<b>0.6836</b>
FEM-Q4 [110]		0.9883	0.7302	0.6430
FEM-Q9 [110]		1.0250	0.7694	0.6829
DSG3 [110]	[0°/90°/90°/0°]	1.0136	0.7604	0.6744
ES-DSG3[110]		1.0276	0.7716	0.6854
SBQLP [75]		1.0240	0.7671	0.6806
Reddy [109]		1.0250	0.7694	0.6833
Present		<b>1.0270</b>	<b>0.7605</b>	<b>0.6882</b>
FEM-Q4 [110]		0.9350	0.7182	0.6465
FEM-Q9 [110]		0.9727	0.7581	0.6868
DSG3 [110]	[0°/90°/0°/90°/0°]	0.9554	0.7404	0.6688
ES-DSG3[110]		0.9687	0.7515	0.6799
SBQLP [75]		0.9712	0.7555	0.6844
Reddy [109]		0.9727	0.7581	0.6874





**Figure 3. 7.**Convergence du déplacement adimensionné ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées composites à couches croisées soumises à une charge (UDL).



**Figure 3. 8.**Déplacement central non dimensionné ( $\bar{w}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur ( $a/h$ ) pour des plaques carrées laminées (SSSS) soumises à une charge (UDL).

c) Plaques carrées laminées symétriques et antisymétriques sous maillages déformés

Pour évaluer l'efficacité et la précision de la formulation proposée dans le calcul du déplacement central normalisé des plaques laminées composites, des analyses ont été effectuées en utilisant à la fois des maillages réguliers et déformés. L'étude porte sur une plaque carrée simplement appuyée de côté L, soumise à une charge transverse uniforme. Les différents maillages considérés, illustrés à la Figure 3.9, comprennent des configurations de  $3 \times 3$ ,  $9 \times 9$  et  $27 \times 27$  éléments finis. Le rapport longueur sur épaisseur de la plaque est égal à 10. Deux types de stratification ont été examinés : une plaque symétrique avec empilement  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  et une plaque antisymétrique avec empilement  $[0^\circ/90^\circ]$ . Toutes les couches ont la même épaisseur et les propriétés mécaniques sont définies selon le modèle de matériau M1.

Les résultats numériques obtenus avec l'élément proposé sont résumés dans le Tableau 3. 3. On constate une excellente concordance avec la solution analytique fondée sur la théorie des plaques à cisaillement de premier ordre (FSDT) de Reddy [109]. De plus, l'élément proposé offre une précision supérieure à celle de l'élément HQ4 développé par Daghia et al[111].

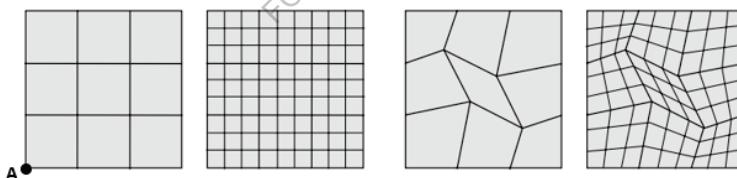


Figure 3. 9.Types de maillages utilisés: régulier et déformé.

**Tableau 3. 5.**Déplacement transverse ( $\bar{w}$ ) au point A pour des plaques laminées simplement appuyées avec empilements [0°/90°] et [0°/90°/0°] soumises à une charge uniformément répartie.

Theory	Stacking Sequence	$(\bar{w} = w_A 100 E_2 h^3 / (q_0 a^4))$		
		3x3	9x9	27x27
<b>Present, distorted</b>	<b>[0°/90°]</b>	1.95019	1.95065	1.95070
		1.95058	1.95058	1.95058
		1.97191	1.95293	1.95084
		1.96109	1.95077	1.95077
		1.16710	1.16723	1.16760
		1.16754	1.16754	1.16754
<b>Present, distorted</b>	<b>[0°/90°/0°]</b>	1.17482	1.16831	1.16763
		1.17610	1.16853	1.16765

### 3.3.2 Analyse des vibrations libres

Cette section présente plusieurs applications numériques visant à évaluer les performances de l'élément HSBQLP20 dans l'analyse des vibrations libres des plaques composites. Les études considèrent des plaques de géométries variées, différents rapports d'aspect, rapports de modules, angles d'orientation des fibres ainsi que diverses conditions aux limites.

Dans tous les exemples, les propriétés matérielles sont supposées identiques pour toutes les couches, tandis que l'orientation des fibres peut varier d'une couche à l'autre. Les caractéristiques des matériaux des différentes couches, appliquées à l'ensemble des plaques étudiées, sont fournies dans le Tableau 3.5.

Pour plus de commodité, les formules adimensionnées suivantes sont utilisées :

$$\bar{\omega} = (\omega a^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D_0} \text{ with } D_0 = (E_2 h^3 / 12(1 - \nu_{12} \nu_{21}))$$

$$\bar{\beta} = (\beta a^2 / h) \sqrt{\rho / E_2}; \bar{\Omega} = \Omega \sqrt{(h^2 \rho / E_2)}; \bar{\bar{\omega}} = (\omega a^2 / \pi^2 h) \sqrt{\rho / E_2}$$

### 3.3.2.1 Plaques carrées laminées

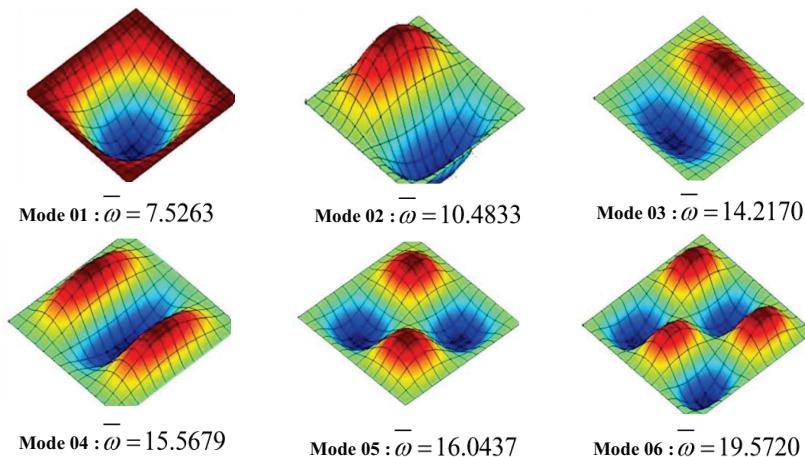
#### a) Étude de convergence

Les études de convergence ont été réalisées sur une plaque carrée à trois couches croisées [0°/90°/0°] avec des conditions aux limites encastrées, pour différents rapports d'aspect ( $a/h = 5, 10, 100$ ). Le matériau utilisé est le M6, dont les caractéristiques sont présentées dans le Tableau 3.1.

Les résultats des cinq premières fréquences non dimensionnées ( $\bar{\omega}$ ) obtenues avec l'élément HSBQLP20 pour quatre types de maillages ( $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  et  $20 \times 20$ ) sont présentés dans le Tableau 3.5. Les six premiers modes pour le cas  $a/h = 10$  sont illustrés à la Figure 3.10. Les résultats numériques ont été validés par comparaison avec les travaux de Liew[112], basés sur la théorie des plaques à cisaillement de premier ordre (FSDT), ainsi qu'avec les éléments finis lissés ES-DSG3 et MISQ20 développés par Nguyen-Van et al. [113] et Phan-Dao et al. [110], et avec l'approche basée sur le champ de déformation (SBQLP) de Belounar et al. [75], également fondée sur FSDT.

**Tableau 3. 6.** Fréquences naturelles adimensionnées ( $\bar{\omega}$ ) de plaques carrées stratifiées croisées encastrées pour différents rapports longueur/épaisseur.

a/h	Theory	Modes			
		1	2	3	4
5	<b>HSBQLP20 (8×8)</b>	<b>4.5476</b>	<b>6.8225</b>	<b>8.0183</b>	<b>9.4949</b>
	<b>HSBQLP20 (16×16)</b>	<b>4.5159</b>	<b>6.6902</b>	<b>7.8918</b>	<b>9.3376</b>
	<b>HSBQLP20 (20 × 20)</b>	<b>4.5123</b>	<b>6.6751</b>	<b>7.8768</b>	<b>9.3193</b>
	SBQLP (20 × 20) [75]	4. 4519	6. 6665	7. 7235	<b>9. 2113</b>
	p-Ritz (Liew) [112]	4. 447	6. 642	7. 700	<b>9. 185</b>
	MISQ20 [113]	4. 4671	6. 7365	7. 7706	<b>8. 7678</b>
10	<b>HSBQLP20 (8×8)</b>	<b>7.5521</b>	<b>10.7018</b>	<b>14.4007</b>	<b>16.1785</b>
	<b>HSBQLP20 (16×16)</b>	<b>7.5287</b>	<b>10.5035</b>	<b>14.2365</b>	<b>15.6587</b>
	<b>HSBQLP20 (20 × 20)</b>	<b>7.5263</b>	<b>10.4833</b>	<b>14.2170</b>	<b>15.5679</b>
	SBQLP (20 × 20) [75]	7. 4168	10. 4271	13. 9509	<b>15. 5788</b>
	p-Ritz (Liew) [112]	7. 411	10. 393	13. 913	<b>15. 429</b>
	MISQ20 [113]	7. 4542	10. 5909	14. 0808	<b>16. 0497</b>
100	<b>HSBQLP20 (8×8)</b>	<b>14.6200</b>	<b>17.4030</b>	<b>25.9367</b>	<b>39.3689</b>
	<b>HSBQLP20 (16×16)</b>	<b>14.4811</b>	<b>17.3542</b>	<b>24.4748</b>	<b>36.2394</b>
	<b>HSBQLP20 (20 × 20)</b>	<b>14.4675</b>	<b>17.3678</b>	<b>24.3908</b>	<b>35.8243</b>
	SBQLP (20 × 20) [75]	14. 7043	17. 6157	24. 6527	<b>36. 1657</b>
	p-Ritz (Liew) [112]	14. 666	17. 614	24. 511	<b>35. 532</b>
	MISQ20 [113]	14. 6199	17. 7013	25. 5625	38. 2411



**Figure 3. 10.** Les six premiers modes propres d'une plaque carrée à trois couches  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  encastrée sur les quatre côtés ( $a/h = 10$ ).

**b) Influence du rapport d'aspect sur les fréquences propres adimensionnées**

Dans cet exemple, les fréquences fondamentales adimensionnées ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque carrée stratifiée symétrique à quatre couches de type  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  et simplement appuyée (SSSS) sont présentées dans le Tableau 3. 6. L'analyse est réalisée à l'aide d'un maillage de  $20 \times 20$ , tandis que le rapport côté-sur-épaisseur ( $a/h$ ) varie de 5 à 100 afin d'étudier l'influence du rapport d'aspect sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées.

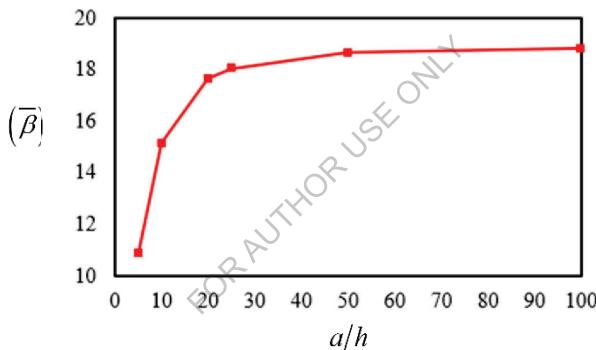
Les résultats numériques obtenus avec l'élément HSBQLP20 sont comparés à plusieurs solutions de référence, notamment la théorie des déformations au cisaillement transverse d'ordre supérieur de Reddy et Phan[114], la solution p-Ritz de Liew [112], ainsi que la théorie globale d'ordre supérieur proposée par Matsunaga[115].

La comparaison montre que les résultats obtenus concordent très bien avec les études de référence, avec une correspondance particulièrement proche de la solution p-Ritz de Liew [112].

**Tableau 3. 7.**Influence du rapport d'aspect sur la fréquence adimensionnée ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque carrée stratifiée SSSS de type [0°/90°/90°/0°].

Method	a / h				
	5	10	20	50	100
Present (20X20)	10.8500	15.1242	17.6315	18.6419	18.8033
p-Ritz [77]	10.8550	15.1434	17.6583	18.6734	18.8359
Reddy and Phan [78]	10.9891	15.2689	17.6669	18.4624	18.7561
Matsunaga [79]	10.6876	15.0721	17.6369	18.6702	18.8352

Pour une meilleure illustration, la Figure 3.11 présente l'influence du rapport d'aspect a/h sur les fréquences naturelles adimensionnées de la plaque carrée stratifiée. Les résultats montrent que lorsque le rapport d'aspect augmente, les fréquences adimensionnées augmentent également.



**Figure 3. 11.**Influence du rapport d'aspect a/h sur les fréquences naturelles adimensionnées ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque carrée stratifiée SSSS de type [0°/90°/90°/0°].

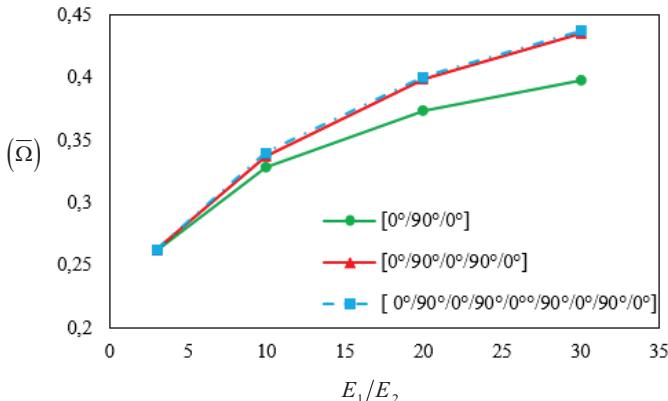
### c) Influence du nombre de couches et du degré d'orthotropie sur les fréquences naturelles

Dans le troisième exemple, des plaques carrées laminées cross-ply simplement appuyées de 3 couches [0°/90°/0°], 5 couches [0°/90°/0°/90°/0°] et 9 couches [0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°] sont analysées en utilisant les matériaux M2, M3, M4 et M5, dont les propriétés sont définies dans le Tableau 3.1. Les fréquences fondamentales adimensionnées ( $\bar{\Omega}$ ) pour différents rapports d'orthotropie sont résumées dans le Tableau 3.7, pour un rapport côté-

sur-épaisseur  $a/h = 5$ , en utilisant un maillage  $12 \times 12$ . Ces résultats sont validés par comparaison avec les solutions numériques obtenues par l'approche basée sur le champ de déformation (SBQLP) de Belounar et al. [75] fondée sur FSDT, l'approche couche par couche (FEM-Q4-LW) [119] et les théories d'ordre supérieur [120]. Pour les trois types de plaques laminées, un bon accord est observé avec les références mentionnées. La Figure 3.12 montre la variation des fréquences fondamentales adimensionnées pour les plaques à trois, cinq et neuf couches orthotropes (avec  $a/h = 5$ ) en fonction du degré d'orthotropie, représenté par le rapport  $E_1/E_2$ . On observe que les fréquences fondamentales adimensionnées augmentent lorsque le rapport des modules  $E_1/E_2$  augmente. En effet, une augmentation de ce rapport accroît la rigidité globale de la plaque laminée, rendant la structure moins flexible et plus résistante à la déformation, ce qui conduit à des fréquences fondamentales plus élevées. De plus, la plaque à neuf couches, qui possède le plus grand nombre de couches et des orientations de fibres alternées, présente la rigidité la plus élevée et atteint ainsi les fréquences fondamentales les plus importantes par rapport aux plaques à cinq et trois couches.

**Tableau 3.8.** Fréquences naturelles adimensionnées ( $\bar{\Omega}$ ) de plaques composites carrées SSSS avec différents nombres de couches orthotropes et rapports de modules

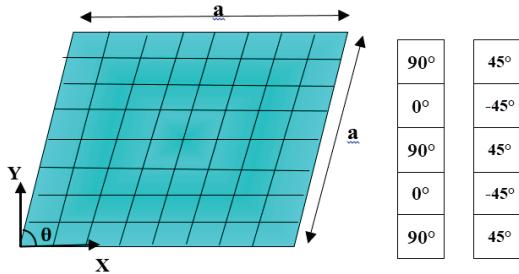
<b>Model</b>	<b>Number des couches</b>	<b><math>E_1/E_2</math></b>			
		<b>3</b>	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>30</b>
<b>Present (12 x 12)</b>		<b>0.2621</b>	<b>0.3282</b>	<b>0.3731</b>	<b>0.3982</b>
SBQLP [75]		0.2619	0.3262	0.3694	0.3935
FEM-Q9-LW [119]	3 couches	0.2621	0.3262	0.3691	0.3927
FEM-Q 4 -LW [119]		0.2683	0.3297	0.3685	0.3886
FEM-Q4-HSDT [120]		0.2628	0.3270	0.3703	0.3947
<b>Present (12 x 12)</b>		<b>0.2628</b>	<b>0.3368</b>	<b>0.3991</b>	<b>0.4354</b>
SBQLP [75]		0.2627	0.3357	0.3917	0.4256
FEM-Q9-LW [80]	5 couches	0.2618	0.3330	0.3858	0.4166
FEM-Q 4 -LW [80]		0.2683	0.3396	0.3918	0.4219
FEM-Q4-HSDT [81]		0.2641	0.3378	0.3935	0.4264
<b>Present (12 x 12)</b>		<b>0.2630</b>	<b>0.3399</b>	<b>0.4007</b>	<b>0.4377</b>
SBQLP [75]	9 couches	0.2631	0.3398	0.4002	0.4367
FEM-Q4-HSDT [81]		0.2641	0.3378	0.3935	0.4264



**Figure 3. 12.**Effet du nombre de couches et du degré d'orthotropie ( $E_1/E_2$ ) sur les fréquences fondamentales adimensionnées ( $a/h = 5$ ).

### 3.3.2.2 Plaques laminées biaisées

Cette étude se concentre sur les fréquences normalisées ( $\bar{\omega}$ ) de plaques carrées laminées biaisées à cinq couches avec deux séquences de stratification :  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$  et  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ . Les plaques sont analysées avec des conditions aux limites simples appuis sur les quatre côtés (SSSS) et encastrées sur les quatre côtés (CCCC), avec un rapport côté-sur-épaisseur  $a/h = 10$ , et le matériau choisi est le M6 (voir Tableau 3.1). Un maillage de  $13 \times 13$  noeuds est utilisé pour modéliser les plaques, comme illustré à la Figure 3.13. L'étude présente les fréquences normalisées obtenues avec l'élément HSBQLP20, en considérant des angles d'inclinaison ( $\theta$ ) variant de  $0^\circ$  à  $60^\circ$ , comme indiqué dans les Tableaux 3.8 et 3.9 pour les deux configurations de stratification. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par l'approche MISQ20 [113], le MLSDQ présenté par Liew et al. [112], et la méthode radiale de Ferreira et al.[123]. L'approche proposée montre une très bonne concordance avec les résultats précédents pour les plaques composites de type cross-ply et angle-ply. De plus, la Figure 3.14 illustre les quatre premiers modes propres de la plaque biaisée à cinq couches avec la configuration  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ .



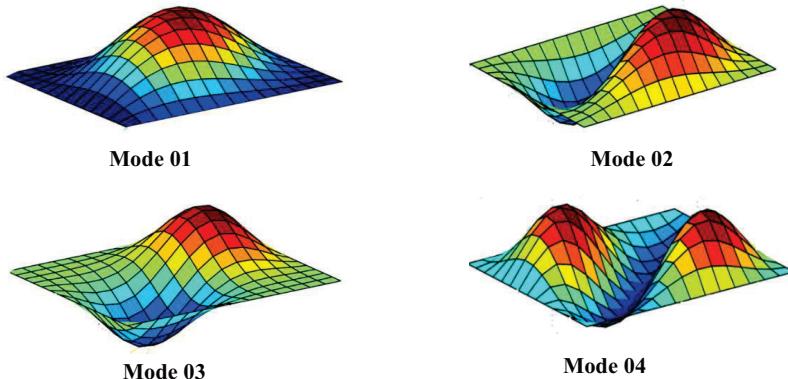
**Figure 3. 13.**Géométrie de la plaque composite inclinée.

**Tableau 3. 9.**Fréquences naturelles adimensionnées ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque carrée stratifiée à cinq couches [90°/0°/90°/0°/90°] avec bords simplement appuyés et encastrés, pour différents angles d'inclinaison.

Boundary	Theory	$\theta$				
		0°	15°	30°	45°	60°
SSSS	Present (12x12)	<b>1.5543</b>	<b>1.6690</b>	<b>2.0568</b>	<b>2.8647</b>	<b>4.5537</b>
	MISQ20[113]	1.5733	1.6896	2.0820	2.8855	4.5412
	MLSDQ[112]	1.5709	1.6886	2.1026	2.8798	4.4998
	RBF[82]	1.5791	1.6917	2.0799	2.8228	4.3761
CCCC	Present (12x12)	<b>2.3694</b>	<b>2.4611</b>	<b>2.77674</b>	<b>3.5005</b>	<b>5.0794</b>
	MISQ20[113]	2.3869	2.4803	2.7998	3.4893	4.9989
	MLSDQ[112]	2.379	2.4725	2.7927	3.4723	4.943
	RBF[82]	2.4021	2.4932	2.8005	3.4923	4.9541

**Tableau 3. 10.**Fréquences fondamentales adimensionnées ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque laminée à cinq couches en angle [45°/-45°/45°/-45°/45°] avec bords simplement appuyés et encastrés, pour différents angles d'inclinaison.

Boundary	Theory	$\theta$				
		0°	15°	30°	45°	60°
SSSS	Present (12x12)	<b>1.8785</b>	<b>1.93699</b>	<b>2.1194</b>	<b>2.6096</b>	<b>4.0856</b>
	MISQ20[113]	1.8413	1.8889	2.0955	2.5672	3,971
	MLSDQ[112]	1.8248	1.8838	2.0074	2.5028	4.0227
	RBF[82]	1.8357	1.8586	2.0382	2.4862	3.8619
CCCC	Present (12x12)	<b>2.2844</b>	<b>2.3627</b>	<b>2.6932</b>	<b>3.4453</b>	<b>4.9026</b>
	MISQ20[113]	2.2908	2.3570	2.6708	3.3683	4.8982
	MLSDQ[112]	2.2787	2.3504	2.6636	3.3594	4.8566
	RBF[82]	2.3324	2.3962	2.6981	3.3747	4.8548

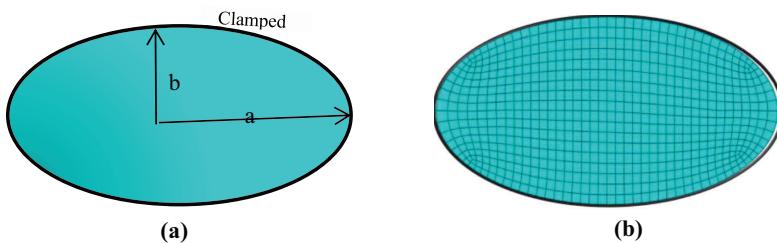


**Figure 3. 14.** Les quatre premiers modes propres de la plaque biaisée à cinq couches encastrées sur les quatre côtés  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$  avec  $\theta = 30^\circ$  et  $a/h = 10$ .

### 3.3.2.3 Plaques elliptiques

Ensuite, nous étudions la fréquence adimensionnée ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque elliptique laminée à trois couches  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  avec conditions aux limites encastrées sur les quatre côtés (CCCC), comme illustré à la Figure 3.15a. La plaque elliptique possède deux rayons principaux :  $a = 5$  et  $b = 2,5$ . Le matériau utilisé pour cette analyse est le M7.

Un maillage composé de 680 éléments est employé pour calculer les fréquences adimensionnées, comme illustré à la Figure 3.15b. En l'absence de solution analytique, les résultats sont comparés à ceux obtenus par les méthodes isogéométriques basées sur LW-FSDT[125], ainsi que les analyses isogéométriques généralisées utilisant TSDT, SSDT et ESDT [126] pour les composites stratifiés.

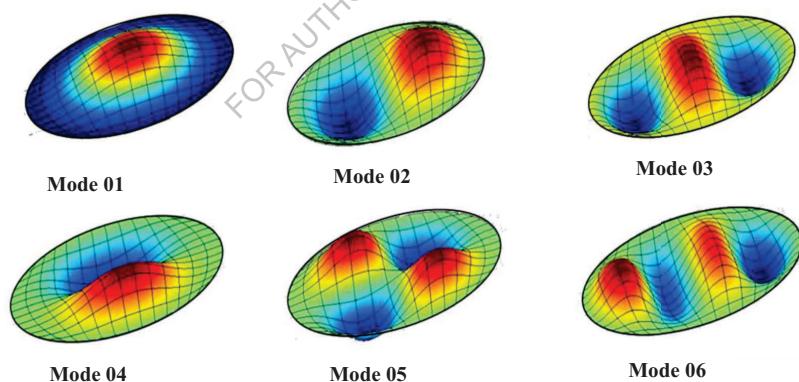


**Figure 3. 15.** Géométrie et maillage d'une plaque elliptique laminée encastrée.

Le Tableau 3.10 présente une comparaison des six premières fréquences adimensionnées entre la solution proposée et les autres méthodes, pour un rapport longueur-sur-épaisseur  $a/h = 10$ . On constate que l'élément HSBQLP20 fournit d'excellents résultats en accord avec les solutions basées sur LW-FSDT [125], IGA-TSDT [126], IGA-SSDT [126] et IGA-ESDT [126]. De plus, la Figure 3.16 illustre les six premiers modes propres d'une plaque elliptique composite à trois couches  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  totalement encastrée.

**Tableau 3.11.** Fréquences naturelles normalisées ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque elliptique à trois couches  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  encastrée.

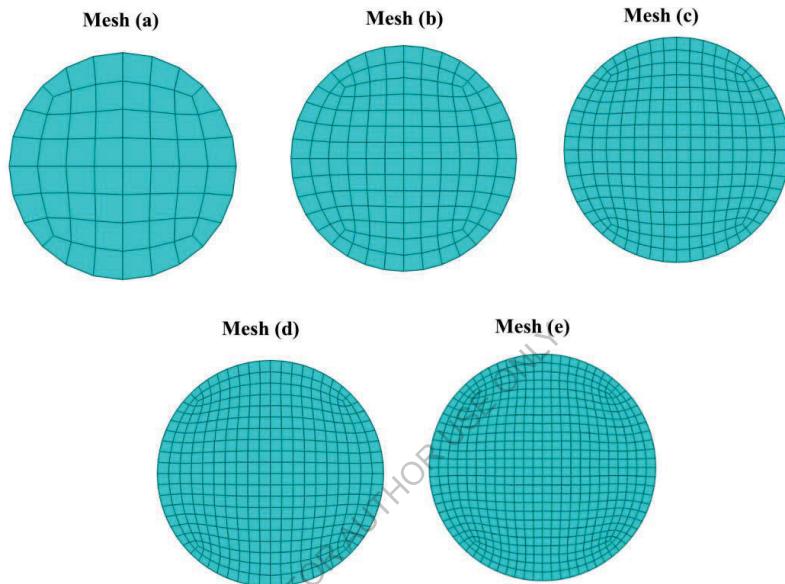
Method	Modes					
	1	2	3	4	5	6
<b>Present</b>	<b>17.1890</b>	<b>25.7460</b>	<b>37.0940</b>	<b>39.2080</b>	<b>49.1840</b>	<b>50.4010</b>
IGA-LW-FSDT[125]	17.184	25.714	36.982	39.196	49.148	50.259
IGA-TSDT [126]	17.188	25.7979	37.0987	39.0942	49.1092	50.3576
IGA-SSDT [126]	17.2128	25.8318	37.1416	39.2032	49.2466	50.4108
IGA-ESDT [126]	17.2446	25.876	37.1991	39.3431	49.4234	50.484



**Figure 3.16.** Les six premiers modes propres d'une plaque elliptique laminée à quatre couches  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  encastrée sur les quatre côtés ( $a/h = 10$ ).

### 3.3.2.4 Plaques circulaires

Dans cet exemple, une plaque circulaire laminée à quatre couches encastrées, avec une séquence de stratification  $[0/-\theta/-\theta/0]$  et un rapport diamètre/épaisseur  $D/h = 10$ , est analysée pour différents angles d'orientation des fibres. La plaque est discrétisée en utilisant le maillage illustré à la Figure 3.17.



**Figure 3. 17.**Modèles de plaques circulaires avec différentes densités de maillage: (a) 60, (b) 152, (c) 272, (d) 384 et (e) 588 éléments quadrilatéraux.

Les quatre premières fréquences naturelles adimensionnées, obtenues avec l'élément HSBQLP20, sont présentées dans le Tableau 3.11 et comparées aux résultats obtenus par d'autres éléments de référence. Les résultats montrent que l'élément HSBQLP20 fournit des fréquences en excellent accord avec celles obtenues par les formulations de Bellounar SBQLP [75], MLSDQ [112]et MISQ20[127].

Les six premiers modes propres correspondants de la plaque circulaire laminée à quatre couches  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$  encastrée sont représentés à la Figure 3.18

Tableau 3. 12.Fréquences naturelles adimensionnées d'une plaque circulaire laminée à quatre couches encastrées.

$\theta$	Method	Modes			
		1	2	3	4
$15^\circ$	<b>HSBQLP20 (Mesh a)</b>	<b>22.4112</b>	<b>31.5132</b>	<b>42.9615</b>	<b>43.3117</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh b)</b>	<b>22.5613</b>	<b>31.2217</b>	<b>43.2518</b>	<b>43.5819</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh c)</b>	<b>22.6355</b>	<b>31.3325</b>	<b>43.3969</b>	<b>43.7012</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh d)</b>	<b>22.6512</b>	<b>31.3622</b>	<b>43.4215</b>	<b>43.7789</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh e)</b>	<b>22.6600</b>	<b>31.3738</b>	<b>43.4311</b>	<b>43.7857</b>
	Bellounar SBQLP [75]	22.6565	31.3732	43.4306	43.7842
	MLSDQ [112]	22.774	31.455	43.350	43.469
	MISQ20 [127]	22.698	31.568	43.635	44.318
$30^\circ$	<b>HSBQLP20 (Mesh a)</b>	<b>23.6112</b>	<b>35.7813</b>	<b>43.4817</b>	<b>51.0220</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh b)</b>	<b>23.8320</b>	<b>36.0025</b>	<b>43.7033</b>	<b>51.2935</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh c)</b>	<b>23.9305</b>	<b>36.1012</b>	<b>43.8325</b>	<b>51.4236</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh d)</b>	<b>23.9569</b>	<b>36.1214</b>	<b>43.9425</b>	<b>51.4602</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh e)</b>	<b>23.9630</b>	<b>36.1305</b>	<b>43.9502</b>	<b>51.4705</b>
	Bellounar SBQLP [75]	23.9625	36.1299	43.9477	51.4653
	MLSDQ [112]	24.071	36.153	43.968	51.074
	MISQ20 [127]	24.046	36.399	44.189	52.028
$45^\circ$	<b>HSBQLP20 (Mesh a)</b>	<b>24.3112</b>	<b>38.6825</b>	<b>43.1233</b>	<b>56.7240</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh b)</b>	<b>24.5225</b>	<b>38.8935</b>	<b>43.3840</b>	<b>56.9825</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh c)</b>	<b>24.6312</b>	<b>39.0225</b>	<b>43.5235</b>	<b>57.1540</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh d)</b>	<b>24.6566</b>	<b>39.0705</b>	<b>43.5625</b>	<b>57.2322</b>
	<b>HSBQLP20 (Mesh e)</b>	<b>24.6688</b>	<b>39.0901</b>	<b>43.5827</b>	<b>57.2526</b>
	Bellounar SBQLP [75]	24.6585	39.0893	43.5772	57.2413
	MLSDQ [112]	24.752	39.181	43.607	56.759
	MISQ20 [127]	24.766 3	39.441	43.817	57.907

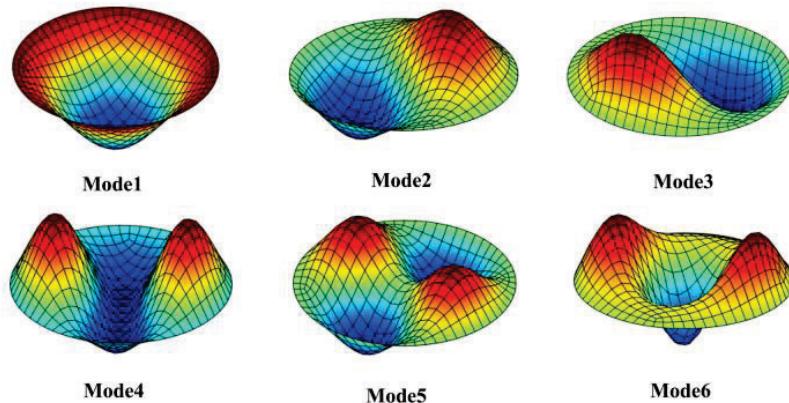


Figure 3. 18.Les six premiers modes de vibration d'une plaque circulaire stratifiée encastrée avec l'empilement [45°/-45°/-45°/45°].

### 3.3.2.5 Plaques laminées triangulaires

Dans cet exemple, des plaques triangulaires stratifiées entièrement encastrées, présentant un rapport côté-épaisseur  $a/h = 100$ , sont analysées pour deux configurations d'empilement : angle-ply [45°/-45°] et cross-ply [0°/90°/0°]. La plaque est discrétisée à l'aide d'un maillage composé de 384 éléments quadrilatéraux, comme illustré à la Figure 3.19, et les propriétés mécaniques utilisées correspondent au matériau M1 (voir Tableau 3.1).

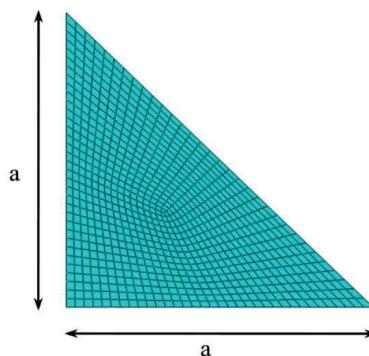
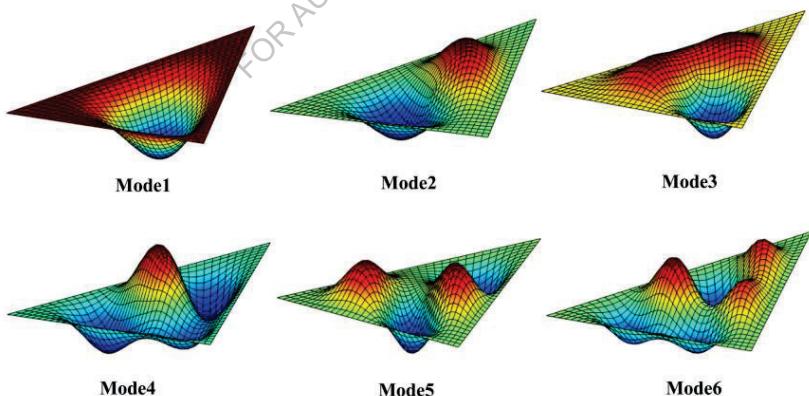


Figure 3. 19.Maillage de la plaque triangulaire avec 832 éléments quadrilatéraux.

Les six premières fréquences adimensionnées ( $\bar{\beta}$ ) obtenues avec l'élément proposé sont regroupées dans le Tableau 3.12, tandis que les formes modales associées sont présentées à la Figure 3.20. Les résultats obtenus montrent une excellente concordance avec ceux rapportés pour l'élément MISQ20 [127] ainsi qu'avec ceux issus de la formulation développée par Bellounar et al. [75], confirmant ainsi la précision et la fiabilité de l'approche proposée pour l'analyse des plaques triangulaires stratifiées.

**Tableau 3. 13.**Paramètre de fréquence non dimensionnel ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque triangulaire laminée encastrée.

Lay-up	Method	Modes				
		1	2	3	4	5
$[45^\circ/-45^\circ]$	HSBQLP20	<b>2.635</b>	<b>86.669</b>	<b>112.683</b>	<b>130.856</b>	<b>156.915</b>
	Bellounar [75]	52.585	86.586	112.573	130.654	156.824
	MISQ20 [127]	52.571	86.269	113.882	130.911	160.286
$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	HSBQLP20	<b>69.996</b>	<b>108.895</b>	<b>146.570</b>	<b>159.977</b>	<b>199.812</b>
	Bellounar [75]	69.939	108.728	146.459	159.309	199.549
	MISQ20 [127]	70.000	109.088	148.223	160.771	203.320



**Figure 3. 20.**Les six premiers modes propres d'une plaque triangulaire laminée totalement encastrée  $[45^\circ/-45^\circ]$ .

### **3.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, les comportements statiques et de vibration libre des plaques composites laminées de différentes géométries carrée, baissée, elliptique et circulaire ont été étudiés à l'aide de l'élément fini HSBQLP20. Basée sur l'approche basée sur les déformations et la nouvelle théorie de déformation par cisaillement trigonométrique (TSDT), cet élément permet de modéliser efficacement la distribution sinusoïdale des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque tout en assurant la compatibilité déplacement-déformation.

La validation sur des plaques laminées symétriques et antisymétriques, avec différentes conditions aux limites, séquences de stratification et types de chargement, a confirmé la précision et la fiabilité élevées du modèle, surpassant plusieurs approches analytiques et numériques existantes. Ainsi, l'élément HSBQLP20 se révèle être un outil robuste et polyvalent pour l'analyse des plaques composites laminées. Les travaux futurs viseront à étendre cette formulation aux structures composites plus complexes, notamment les coques, élargissant ainsi son champ d'application dans l'analyse et la conception avancée des structures.

## 4 Développement et validation d'élément finis à champ de déformation pour l'analyse statique, vibration libre, et flambement mécanique des plaques FGMs

### 4.1 Champ de déplacement

Les composantes de déplacement  $u$ ,  $v$  et  $w$  le long des directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , respectivement, en un point de coordonnées  $(x,y,z)$  à l'intérieur de la plaque à gradient de fonction (FG) sont définies comme suit

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + |z|\psi_z(x, y) \end{aligned} \quad (4.01)$$

Où  $u_0(x, y)$  et  $v_0(x, y)$  sont les composantes du vecteur déplacement dans le plan, en tout point de la surface médiane, respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ .  $w_0(x, y)$  représente le déplacement transverse des points de la surface médiane de la plaque, et  $\psi_z(x, y)$  correspond aux contributions d'extension du déplacement dans la direction transverse. La variable  $\psi_z$  sera éliminée en supposant que les contraintes de cisaillement sont nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et que les déformations de cisaillement transverse sont distribuées de manière quadratique à travers l'épaisseur.

### 4.2 Cinématique

Les composantes de déformation sont liées aux composantes de déplacement par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + |z| \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + |z| \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.02)$$

L'équation (4.02) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x + \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z\kappa_y + \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} + \gamma_{xy}^{nl} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 + |z| \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^0 + |z| \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{4.03}$$

Où

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= u_{0,x}(x, y); \varepsilon_y^0 = u_{0,y}(x, y); \gamma_{xy}^0 = u_{0,y}(x, y) + v_{0,x}(x, y) \\ \kappa_x &= \beta_{x,x}(x, y); \kappa_y = \beta_{y,y}(x, y); \kappa_{xy} = \beta_{x,y}(x, y) + \beta_{y,x}(x, y); \\ \gamma_{xz}^0 &= \beta_x(x, y) + w_{0,x}(x, y); \gamma_{yz}^0 = \beta_y(x, y) + w_{0,y}(x, y) \\ \varepsilon_x^{nl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2; \varepsilon_y^{nl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2; \gamma_{xy}^{nl} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.04}$$

En utilisant les conditions de contrainte de cisaillement nulle aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, la variable  $\psi_z(x, y, t)$  peut être exprimée en fonction de  $\gamma_{xz}^0; \gamma_{yz}^0$  comme suit :

$$\gamma_{xz} \left( \pm \frac{h}{2} \right) = \gamma_{yz} \left( \pm \frac{h}{2} \right) = 0\tag{4.05}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} = \left( \pm \frac{h}{2} \right) = 0 &\Rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 + \left| \pm \frac{h}{2} \right| \psi_{z,x} = 0 \\ \gamma_{yz} = \left( \pm \frac{h}{2} \right) = 0 &\Rightarrow \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0 + \left| \pm \frac{h}{2} \right| \psi_{z,y} = 0\end{aligned}\tag{4.06}$$

Donc

$$\begin{aligned}\psi_{z,x} &= -\frac{2}{h} \gamma_{xz}^0 \\ \psi_{z,y} &= -\frac{2}{h} \gamma_{yz}^0\end{aligned}\tag{4.07}$$

En appliquant l'équation (4.07), les composantes des déformations de cisaillement de l'équation (4.03) peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^0 \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right)\end{aligned}\tag{4.08}$$

Dans ce cas, le nombre d'inconnues se réduit à 5, comme dans le modèle de Reissner–Mindlin. Ainsi, les composantes de déformation de cisaillement peuvent être exprimées par :

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 f_1(z) \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^0 f_1(z)\end{aligned}\tag{4.09}$$

Où  $f_1(z)$  désigne la fonction de cisaillement, définie par :

$$f_1(z) = \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right)\tag{4.10}$$

#### 4.2.1 Amélioration de la fonction de cisaillement dans la théorie des plaques de Reissner–Mindlin

Dans le cas de la théorie de Reissner–Mindlin, des facteurs de correction sont introduits afin de tenir compte de l'hypothèse de déformation de cisaillement constante à travers l'épaisseur de la plaque. Ces facteurs sont obtenus en comparant l'énergie de déformation par cisaillement selon la théorie de l'élasticité tridimensionnelle à celle de la théorie de Reissner–Mindlin.

Pour les matériaux isotropes, la contrainte de cisaillement dans la théorie des plaques de Reissner–Mindlin s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= kG\gamma_{xz}^0 \\ \tau_{yz} &= kG\gamma_{yz}^0\end{aligned}\tag{4.11}$$

Où :

- G : module de cisaillement,
- k : facteur de correction du cisaillement, généralement 5/6 pour les plaques rectangulaires.

L'énergie de déformation par cisaillement par unité de surface est :

$$U_{sd}^{RM} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} \right) dz = \frac{1}{2} \left( \frac{5}{6} \right) Gh \left( \left( \gamma_{xz}^0 \right)^2 + \left( \gamma_{yz}^0 \right)^2 \right) \quad (4.12)$$

Dans les théories raffinées de déformation par cisaillement, la déformation de cisaillement est supposée varier à travers l'épaisseur en utilisant une fonction de forme  $f(z)$ , au lieu d'être constante :

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 f(z); \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0 f(z) \quad (4.13)$$

Où

$$f(z) = \lambda f_1(z) = \lambda \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (4.14)$$

$\lambda$  Représente le facteur d'amplification du cisaillement.

En utilisant  $f(z)$  les déformations de cisaillement transverse s'expriment comme :

$$\tau_{xz} = Gf(z) \gamma_{xz}^0; \tau_{yz} = Gf(z) \gamma_{yz}^0 \quad (4.15)$$

L'énergie de déformation par cisaillement par unité de surface s'exprime comme suit :

$$U_{sd}^{EN} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} \right) dz$$

$$U_{sd}^{EN} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{1}{2} G(f(z))^2 (\gamma_{xz}^0)^2 + \frac{1}{2} G(f(z))^2 (\gamma_{yz}^0)^2 \right) dz \quad (4.16)$$

L'égalité des expressions d'énergie dans les équations (4.12) et (4.16) conduit à :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{5}{6} \right) Gh = \frac{1}{2} Gh \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (4.17)$$

En conclusion, la fonction de cisaillement améliorée s'exprime comme suit :

$$f(z) = \frac{\sqrt{10}}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (4.18)$$

Ainsi, le champ de déplacement s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= f(z)w_0(x, y) + (f(z)-1)L(x, y) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Où la fonction  $L(x, y)$  est définie par :

$$\beta_x(x, y) = \frac{\partial L(x, y)}{\partial x}; \beta_y(x, y) = \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} \quad (4.20)$$

### 4.3 Champ de déformation

Selon les relations cinématiques non linéaires de von Kármán, les composantes du vecteur de déformation sont données par [128]:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} \\ \{\varepsilon'\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \{\gamma\} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = f(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Avec

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\{\gamma_z^0\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\left\{ \varepsilon^{nl} \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.24a)$$

$$\left\{ \varepsilon^{nl} \right\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left( F(z) \frac{\partial w_0}{\partial x} + (F(z)-1) \beta_x \right)^2 \\ \left( F(z) \frac{\partial w_0}{\partial y} + (F(z)-1) \beta_y \right)^2 \\ 2 \left( F(z) \frac{\partial w_0}{\partial x} + (F(z)-1) \beta_x \right) \left( F(z) \frac{\partial w_0}{\partial y} + (F(z)-1) \beta_y \right) \end{Bmatrix} \quad (4.24b)$$

#### 4.4 Relations constitutives

La plaque est constituée d'un matériau résultant d'un mélange de céramique et de métal. La face supérieure de la plaque est en céramique pure, tandis que la face inférieure est en métal pur. Les deux matériaux sont graduellement répartis de manière continue selon l'épaisseur. Les propriétés du matériau ainsi obtenu sont supposées varier en fonction de l'épaisseur de la plaque conformément à la loi de distribution en puissance suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Donc

$$\{\sigma\} = [Q_\sigma] \{\varepsilon\} \quad (4.26)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\{\tau_z\} = [Q_\tau] \{\gamma_z\} \quad (4.28)$$

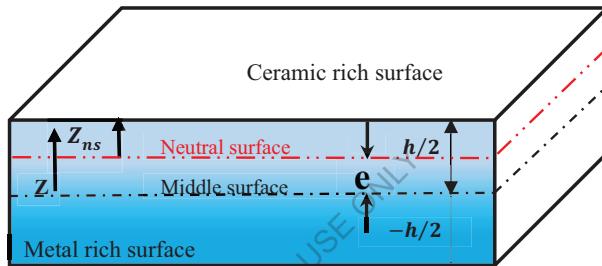
Où  $Q_{ij}$  sont les coefficients de raideur élastique donnés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}; Q_{12} = Q_{21} = \nu \frac{E(z)}{1-\nu^2}; Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (4.29)$$

Le module de Young  $E(z)$  et les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  varient selon l'épaisseur de la plaque, comme défini par l'équation (1.4).

#### 4.5 Position du plan neutre

Afin d'éviter le couplage membrane–flexion dû à l'asymétrie de la plaque selon son épaisseur, les efforts et les moments sont calculés par rapport au plan neutre, lequel ne coïncide pas avec le plan médian de la plaque, comme illustré dans la Figure 4.1.



**Figure 4. 1.**Position de la surface neutre pour la plaque FGM.

$$z_{ns} = z - e \quad (4.30)$$

Afin de déterminer la position de la surface neutre, la valeur «  $e$  » est choisie de manière à annuler la force membranaire générée par la flexion au point  $(z - e)$  [100]:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz_{ns} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ Q_{11}(z-e) \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + Q_{12}(z-e) \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right] dz = 0 \quad (4.31)$$

En remplaçant l'équation (4.29) dans l'équation (4.31), on obtient :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz_{ns} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{E(z)}{1-\nu^2}(z-e) \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{E(z)}{1-\nu^2}(z-e) \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right] dz = 0 \quad (4.32)$$

En simplifiant l'équation (4.32), on obtient :

$$\frac{1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)(z-e) dz = 0 \quad (4.33)$$

Donc

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)(z-e) dz = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zE(z) dz - (e) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz = 0 \quad (4.34)$$

Par conséquent, la position du plan neutre physique [129] est exprimée par :

$$e = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zE(z) dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz} \quad (4.35)$$

#### 4.6 Contraintes resultantes

Les résultantes des contraintes membranaires {N}, de flexion {M} et de cisaillement {T} sont calculées en intégrant les composantes de contrainte  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ , et  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque (h), comme suit[100]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz; \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} (z-e) dz; \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (4.36)$$

La relation entre les résultantes de contraintes et les déformations peut donc être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_m] & 0 & 0 \\ 0 & [D_f] & 0 \\ 0 & 0 & [D_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^m \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Où les matrices constitutives pour la membrane  $[D_m]$ , la flexion  $[D_f]$  et le cisaillement  $[D_c]$  sont données par :

$$[D_m] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} dz \quad (4.38)$$

$$[D_f] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (z-e)^2 dz \quad (4.39)$$

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (f(z))^2 dz \quad (4.40)$$

## 4.7 Analyse statique

### 4.7.1 Dérivation des matrices élémentaires et du vecteur de charge élémentaire

La matrice de rigidité de l'élément ainsi que le vecteur de charges de l'élément HSBQP20 sont obtenus en appliquant les mêmes formulations que celles décrites dans la section 3.2.5.1 (Chapitre 03). Par conséquent, ils s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} [K_{HSBQP20}^e] &= \int_{\Omega} \left( [B_m]^T [D_m] [B_m] + [B_f]^T [D_f] [B_f] + [B_c]^T [D_c] [B_c] \right) d\Omega \\ \{F_e\} &= \int_{\Omega} [N_{HSBQP20}]^T q(x, y) d\Omega \end{aligned} \quad (4.41)$$

Avec  $[B_m]$ ,  $[B_f]$  et  $[B_c]$  représentant les matrices de déformation-déplacement, définies dans l'équation (3.40) de la section 3.2.4.2 (Chapitre 03), comme suit:

$$[B_m] = [G_m][R]^{-1}; [B_b] = [G_b][R]^{-1}; [B_s] = [G_s][R]^{-1} \quad (4.42)$$

Les matrices  $[G_m]$ ,  $[G_b]$  et  $[G_c]$  représentent respectivement les matrices associées aux déformations membranaires, à la flexion et au cisaillement transversal, conformément aux expressions fournies dans les équations (3.34), (3.35) et (3.36).

#### 4.8 Analyse des vibrations libres

La matrice de masse est obtenue en appliquant le principe de Hamilton[130]:

$$\delta \int_0^t (T - (U - W)) dt = 0 \quad (4.43)$$

L'énergie cinétique T des plaques FG est donnée par [131] :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left( (\dot{U})^2 + (\dot{V})^2 + (\dot{W})^2 \right) dz d\Omega \quad (4.44)$$

En remplaçant l'équation (4.1) dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} I_0 \left( (\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2 \right) + I_2 \left( (\dot{\beta}_x)^2 + (\dot{\beta}_y)^2 \right) d\Omega \quad (4.45)$$

Où les termes  $\rho(z)$  et  $I_0$ ,  $I_2$  représentent respectivement la densité de masse et les moments d'inertie, définis comme suit [131]:

$$(I_0, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( 1, (z - e)^2 \right) \rho(z) dz \quad (4.46)$$

Pour l'analyse des vibrations libres, le travail effectué par les forces extérieures (W) est négligé. L'équation fondamentale de Hamilton conduit à l'équation suivante de l'équilibre dynamique d'un système [132] :

$$\begin{aligned} \left[ K_{HSBQP20}^e \right] \{ q_e \} + \left[ M_{HSBQP20}^e \right] \{ \ddot{q}_e \} &= 0 \\ \left( \left[ K_{HSBQP20}^e \right] - \omega^2 \left[ M_{HSBQP20}^e \right] \right) \{ q_e \} &= 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Où  $\omega$  désigne la fréquence fondamentale, et  $[M_{SBRMP24}^e]$  représente la matrice de masse, définie comme suit :

$$[M_{HSBQP20}^e] = \int_{\Omega} [N_{HSBQP20}]^T [m] [N_{HSBQP20}] d\Omega \quad (4.48)$$

$[m]$  représente la matrice d'inertie, qui est donnée par :

$$[m] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Les termes  $I_0$ ,  $I_2$  et  $\rho$  ( $z$ ) représentent respectivement les moments d'inertie et la densité massique le long de l'épaisseur, et peuvent être définis comme suit [100]:

$$(I_0, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, (z - e)^2) \rho(z) dz \quad (4.50)$$

#### 4.9 Analyse du flambement mécanique

Les déformations géométriques peuvent s'exprimer comme suit :

$$\{\varepsilon^g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

La substitution du déplacement latéral ( $w$ ) de l'équation (3.25) dans l'équation (4.51) donne :

$$\{\varepsilon^g\} = \left[ [0]_{(2x12)} \quad [G_{SBQMP}] \right] \{\alpha\} \quad (4.52)$$

Avec

$$[G_{SBQMP}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -x & -xy & 0 & -\left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right) & -\frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right) & -y & -xy & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

Les relations entre les déformations géométriques  $\{\varepsilon^g\}$  et les déplacements nodaux de l'élément  $\{\delta_e\}$  sont obtenues en substituant l'équation (4.28) dans les équations (4.52), ce qui donne :

$$\{\varepsilon^g\} = \begin{bmatrix} [0]_{(2x12)} & [G_{SBQP}] \end{bmatrix} [N_{HSBQP20}] [R]^{-1} \quad (4.53)$$

La matrice  $[B_g]$  représentent les matrices de déformation-déplacement de l'élément et sont définies comme suit :

$$[B_g] = \begin{bmatrix} [0]_{(2x12)} & [G_{SBQP}] \end{bmatrix} [R]^{-1} \quad (4.54)$$

Le travail externe des forces dans le plan, dû à la charge mécanique appliquée, peut être exprimé comme suit [100] :

$$W = \int_{\Omega} \{\varepsilon^{nl}\}^T [N_{HSBQP20}] d\Omega \quad (4.55)$$

En utilisant les équations (4.41), (4.53) et (4.55), l'énergie potentielle totale peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \{\delta_e\}^T [B_m]^T [D_m] [B_m] + [B_f]^T [D_f] [B_f] + [B_c]^T [D_c] [B_c] \right) \{\delta_e\} d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\delta_e\}^T [B_g]^T [\bar{N}] [B_g] \{\delta_e\} d\Omega \end{aligned} \quad (4.56)$$

Où  $[\bar{N}] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}$  est la matrice des résultantes de contraintes causées par la charge mécanique.

L'annulation de la seconde variation de l'énergie potentielle totale par rapport aux valeurs nodales  $\{\delta_e\}$  permet d'obtenir le problème propre suivant [100] :

$$\left( [K_{HSBQP20}^e] + [K_{(g)HSBQP20}^e] \right) \{\delta_e\} = 0 \quad (4.57)$$

Où  $[K_{(g)HSBQP20}^e]$  est la matrice de rigidité géométrique, donnée par :

$$[K_g^e] = \int_{\Omega} [B_g]^T [\bar{N}] [B_g] d\Omega \quad (4.58)$$

En introduisant le facteur de charge  $\lambda$ , la matrice des résultantes de contraintes peut s'écrire comme suit :

$$[\bar{N}] = \lambda [\bar{N}_0] \quad (4.59)$$

Où  $[\bar{N}_0]$  représente les résultantes de contraintes initiales.

Par conséquent, la matrice de rigidité géométrique  $[K_{(g0)HSBQP20}^e]$  peut être exprimée par :

$$[K_{(g0)HSBQP20}^e] = \int_{\Omega} [B_g]^T [\bar{N}_0] [B_g] d\Omega \quad (4.60)$$

Le problème aux valeurs propres, utilisé pour déterminer la charge critique de flambement, peut s'exprimer comme suit [100]:

$$\det([K_e] + \lambda [K_{(g0)HSBQP20}^e]) \{\delta_e\} = 0 \quad (4.61)$$

Enfin, la charge critique de flambement est exprimée comme suit :

$$N_{cr} = \lambda_{cr} N_0 \quad (4.62)$$

Les matrices de rigidité de l'élément  $[K_{HSBQP20}^e]$ , de masse  $[M_{HSBQP20}^e]$

et géométrique  $[K_{(g)HSBQP20}^e]$ , données respectivement dans les équations (4.41), (4.48) et (4.58), ainsi que le vecteur de charge nodale équivalente de l'élément  $\{F_e\}$  de l'équation (4.41), sont calculés numériquement à l'aide d'une intégration exacte de Gauss. Ces matrices et vecteurs sont ensuite assemblés pour obtenir les matrices structurales de rigidité, de masse et géométriques ( $[K]$ ,  $[M]$  et  $[K_g]$ ), ainsi que le vecteur de charge structurelle  $\{F\}$ .

Pour les analyses statiques, de vibrations libres et de flambement, les formulations peuvent être écrites respectivement comme suit :

$$\begin{aligned} [K] \{\delta_e\} &= \{F\} \\ ([K] - \omega^2 [M]) \{\delta_e\} &= 0 \\ ([K] - \lambda_{cr} [K_g]) \{\delta_e\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

## 4.10 Validation de la HSBQP20- Résultats et discussions

Dans ce chapitre, plusieurs exemples numériques sont présentés afin d'évaluer la performance et la précision du modèle par éléments finis proposé pour les plaques rectangulaires FG monocouches, en termes de réponses statiques, de flambement et de vibrations libres.

Les résultats, incluant les déplacements, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences propres, sont calculés et comparés avec les données disponibles dans la littérature.

L'influence de différents paramètres est également étudiée, tels que :

- Les conditions aux limites,
- Le rapport d'aspect,
- L'épaisseur de la plaque,
- Et la distribution du matériau à travers l'épaisseur.

Différents types de plaques FG ont été analysés, et leurs caractéristiques mécaniques sont présentées dans le Tableau 4.1.

**Tableau 4. 1.** Les propriétés des matériaux utilisés dans les plaques FGM.

Properties	Metal			Ceramic	
	Aluminum* (Al*)	Aluminum (Al)	Zirconia-2 (ZrO <sub>2</sub> – 2)	Zirconia-1 (ZrO <sub>2</sub> – 1)	Alumina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )
E(Gpa)	70	70	200	151	380
v	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$	2702	2707	5700	3000	3800

Par ailleurs, les différentes conditions aux limites considérées sont listées dans le tableau 4.2

**Tableau 4. 2.**Conditions aux limites des plaques.

Conditions aux limites	Abréviations	Bords contraints
Simplement Supporté	SSSS	En $x=0, l: v = w = \beta_y = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
Encastré	CCCC	En $x=0, l; y=0, L: u = v = w = \beta_x = \beta_y = \theta_z = 0$
Simplement Supporté - Encastré	SCSC	En $x=0, l: u = v = w = \beta_x = \beta_y = \theta_z = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
Simplement Supporté - Libre	SFSF	En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
Simplement Supporté - Libre - Simplement Supporté - Encastré	SFSC	En $x=0: u = v = w = \beta_x = \beta_y = \theta_z = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
Simplement Supporté - Libre	SFSS	En $x = 0: v = w = \beta_y = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
Simplement Supporté - Encastré	SSSC	En $x=0: u = v = w = \beta_x = \beta_y = \theta_z = 0$ En $x= l: v = w = \beta_y = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$

#### 4.10.1 Analyse statique

##### 4.10.1.1 Analyse des plaques isotropes

Tout d'abord, l'efficacité de la formulation proposée est vérifiée à travers l'analyse du comportement statique de plaques carrées isotropes. Deux cas d'étude ont été considérés. La première porte sur une plaque carrée isotrope simplement appuyée sur ses quatre côtés (condition SSSS) et soumise à une charge uniformément répartie (UDL). Le rapport longueur/épaisseur est fixé à  $l/h=10$ . Les propriétés mécaniques adoptées sont : un module de Young  $E=210$  GPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Les résultats sont exprimés en termes de déplacements et de contraintes, à l'aide des grandeurs non dimensionnelles suivantes :

$$\hat{w} = \frac{100E}{hq_0\left(\frac{l}{h}\right)^4} w\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}\right); \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0\left(\frac{l}{h}\right)^2} \sigma_x\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{h}{q_0\left(\frac{l}{h}\right)^2} \sigma_y\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right); \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{q_0\left(\frac{l}{h}\right)^2} \tau_{xy}\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right) \quad (4.64)$$

Les résultats obtenus pour différentes tailles de maillage sont présentés dans le tableau 4.3 et comparés à ceux issus de la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur de Reddy [40] ainsi qu'aux solutions exactes de Shimpi et al. [133]. Une excellente concordance est observée.

**Tableau 4.3.** Déplacement et contraintes non dimensionnelle pour une plaque carrée isotrope ( $l/h = 10$ ) soumise à une charge uniformément répartie (UDL).

Taille du maillage	8x8	16x16	20x20	Reddy [40]	FSDT [40]	EXACT [133]
$\hat{w}$	<b>0.465</b>	<b>0.4663</b>	<b>0.4665</b>	4.670	4.670	4.639
$\bar{\sigma}_x$	<b>0.291</b>	<b>0.287</b>	<b>0.2885</b>	0.289	0.287	0.290
$\bar{\sigma}_y$	<b>0.291</b>	<b>0.287</b>	<b>0.2885</b>	0.289	0.287	0.290
$\bar{\tau}_{xy}$	<b>0.201</b>	<b>0.197</b>	<b>0.195</b>	0.199	0.194	/

Dans le deuxième cas d'étude, une plaque carrée homogène entièrement en céramique, soumise à une charge uniformément répartie (UDL), est analysée afin de valider le modèle d'éléments finis proposé. Les propriétés de l'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) utilisée sont détaillées dans le tableau 4.1. Trois rapports longueur/épaisseur  $l/h=4,10,100$  sont considérés.

Les résultats obtenus pour un maillage de  $20\times20$  éléments, présentés dans le tableau 4.4, montrent une excellente concordance avec ceux rapportés par Tati [48], Zenkour [134] et Reddy [135] pour tous les cas, des plaques plus minces aux plaques plus épaisses..

**Tableau 4. 4.Déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) et contraintes des plaques carrées en FG avec différents rapports de forme (l/h).**

<b>l/h</b>	<b>Théorie</b>	<b><math>\bar{w}</math></b>	<b><math>\bar{\sigma}_x</math></b>	<b><math>\bar{\sigma}_y</math></b>	<b><math>\bar{\tau}_{xy}</math></b>	<b><math>\bar{\tau}_{xz}</math></b>	<b><math>\bar{\tau}_{yz}</math></b>
<b>4</b>	<b>Present (20x20)</b>	<b>0.5870</b>	<b>1.1495</b>	<b>0.7664</b>	<b>0.5188</b>	<b>0.4797</b>	<b>0.4213</b>
	HSDT [48]	0.5872	1.1425	0.7617	0.5070	0.4695	0.4173
	SSDT [134]	0.5865	1.1988	0.7534	0.4906	0.4906	0.4307
	TSDT [135]	0.5868	1.1959	0.7541	0.4913	0.4913	0.4304
<b>10</b>	<b>Present (20x20)</b>	<b>0.4661</b>	<b>2.8735</b>	<b>1.9156</b>	<b>1.2954</b>	<b>0.4798</b>	<b>0.4212</b>
	HSDT [48]	0.4663	2.8560	1.9040	1.2660	0.4700	0.4174
	SSDT [134]	0.4665	2.8932	1.9103	1.2850	0.5114	0.4429
	TSDT [135]	0.4666	2.8920	1.9106	1.2855	0.4963	0.4411
<b>100</b>	<b>Present (20x20)</b>	<b>0.4429</b>	<b>28.7094</b>	<b>19.139<sub>6</sub></b>	<b>12.936<sub>0</sub></b>	<b>0.4796</b>	<b>0.4213</b>
	HSDT [48]	0.4435	28.5600	19.040 <sub>0</sub>	12.650 <sub>0</sub>	0.4696	0.4174
	SSDT [134]	0.4438	28.7342	19.154 <sub>3</sub>	13.012 <sub>5</sub>	0.5164	0.4472
	TSDT [135]	0.4438	28.7341	19.154 <sub>3</sub>	12.988 <sub>5</sub>	0.5004	0.4448

#### 4.10.1.2 Analyse statique des plaques carée FG

- a) Analyse statique d'une plaque Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> simplement appuyée, soumise à des charges uniformément répartie et sinusoïdale (UDL et SDL)

Le comportement statique d'une plaque rectangulaire à matériau fonctionnellement gradient (FGM) composée d'Aluminium/Alumine (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) est étudié sous l'effet d'une charge transversale répartie. La surface supérieure de la plaque est enrichie en céramique (Alumine), tandis que la surface inférieure est constituée de métal pur

(Aluminium). Les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs sont présentées dans le tableau 4.1.

Une charge transversale  $q(x,y)$  est appliquée sur la surface supérieure ( $z=h$ ) de la plaque, comme illustré à la Figure 3.4. Cette charge peut adopter deux formes :

- Charge uniformément répartie (UDL) :

$$q(x, y) = q_0$$

- Charge distribuée selon une loi sinusoïdale (SDL) :

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Pour plus de commodité, les expressions suivantes des déplacements et des contraintes non dimensionnelles sont définies :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10h^3 E_c}{q_0(l)^4} w\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}\right); \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{lq_0} \sigma_x\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right); \bar{\sigma}_y &= \frac{h}{lq_0} \sigma_y\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{3}\right) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{lq_0} \tau_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right); \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{lq_0} \tau_{xy}\left(0, \frac{L}{2}, 0\right); \bar{\tau}_{yz} &= \frac{h}{lq_0} \tau_{xy}\left(\frac{l}{2}, 0, \frac{h}{6}\right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Dans un premier temps, une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> simplement appuyée et modérément épaisse, soumise à une charge uniformément répartie (UDL), est analysée pour un rapport longueur/épaisseur  $l/h=10$ . La plaque est discrétisée à l'aide de maillages de 8×8, 16×16 et 20×20. Le tableau 4.5 présente les déplacements et contraintes non dimensionnel pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance  $p$ . Les résultats obtenus avec l'élément fini proposé sont ensuite comparés à la solution analytique fondée sur la théorie raffinée des plaques (RPT) de Do et al. [136], au modèle éléments finis basé sur la HSDT développé par Tati [48], ainsi qu'à la solution semi-analytique numérique proposée par Ye et al. [137].

Le comportement en flexion de la plaque précédente a également été analysé sous une charge sinusoïdale (SDL). Les flèches et contraintes nondimensionnel, obtenues pour différentes tailles de maillage et pour plusieurs valeurs de l'exposant de la loi puissance  $p$ , sont présentées dans le Tableau 4.6. Les résultats obtenus sont comparés à ceux fournis par la solution analytique de Zenkour [134] utilisant SSDT, du modèle éléments finis basé sur la HSDT proposé par Tati [48], ainsi que de la solution analytique obtenue à l'aide de la théorie raffinée des plaques

(RPT) proposée par Do et al. [136]. Comme le montrent les Tableaux 4.5 et 4.6, il apparaît clairement que, pour toutes les valeurs de l'indice de la loi de puissance, les résultats obtenus avec l'élément HSBQP20 sont globalement en bon accord avec ceux rapportés dans les références citées précédemment.

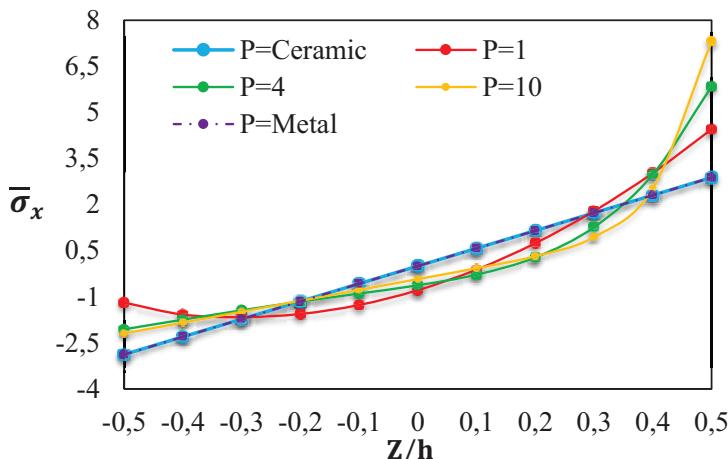
Les Tableaux 4.2 et 4.3 montrent que les contraintes d'une plaque entièrement céramique sont identiques à celles d'une plaque entièrement métallique. En effet, dans ces deux cas, la plaque est totalement homogène, et les contraintes ne dépendent pas du module de Young. Il est important de noter que la flèche non dimensionnel  $\bar{w}$  ainsi que la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  augmentent lorsque l'indice de la loi de puissance  $p$  augmente. La contrainte de cisaillement dans le plan,  $\bar{\tau}_{xy}$ , diminue pour  $p$  entre 0 et 2, puis croît à mesure que  $p$  continue d'augmenter. Quant aux contraintes transversales  $\bar{\tau}_{xz}$  et  $\bar{\tau}_{yz}$ , elles restent pratiquement constantes pour  $p$  entre 0 et 1, diminuent pour  $p$  compris entre 1 et 5, puis augmentent à nouveau avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance. Les Figures 4.2, 4.3 et 4.4 présentent respectivement la variation de la contrainte normale non dimensionnel  $\bar{\sigma}_x$ , de la contrainte de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  et de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur, pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance  $p$ , d'une plaque carrée FG simplement appuyée et soumise à une charge uniformément répartie (UDL). Le rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) est fixé à 10.

**Tableau 4. 5.**Déplacement et contraintes nodimensionnel d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, (SSSS) et soumise à une charge (UDL), pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance (l/h = 10).

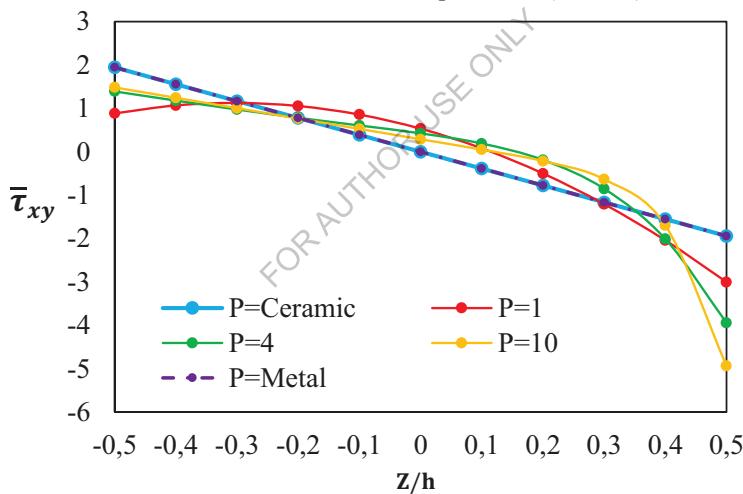
p	Mesh size	Present 8x8	Present 16x16	Present 20x20	Tati [48]	Ye et al. [137]	Do [136]
0	$\bar{w}$	<b>0.4638</b>	<b>0.4659</b>	<b>0.4661</b>	0.4663	0.4662	0.4666
	$\bar{\sigma}_x$	<b>2.8753</b>	<b>2.8736</b>	<b>2.8735</b>	2.8656	2.8249	2.8917
	$\bar{\sigma}_y$	<b>1.9169</b>	<b>1.9157</b>	<b>1.9156</b>	1.904	1.8870	1.9107
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>1.2752</b>	<b>1.2931</b>	<b>1.2954</b>	1.266	1.2759	1.2771
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.4265</b>	<b>0.4632</b>	<b>0.4798</b>	0.4696	0.4966	0.5059
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.3790</b>	<b>0.4138</b>	<b>0.4212</b>	0.4174	0.4980	0.4497
1	$\bar{w}$	<b>0.9230</b>	<b>0.9274</b>	<b>0.9279</b>	0.9283	0.9212	0.9260
	$\bar{\sigma}_x$	<b>4.4435</b>	<b>4.4413</b>	<b>4.4412</b>	4.415	4.4030	4.4403
	$\bar{\sigma}_y$	<b>2.1781</b>	<b>2.1770</b>	<b>2.1769</b>	2.164	2.1572	2.1655
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>1.1010</b>	<b>1.1167</b>	<b>1.1187</b>	1.093	1.1061	1.1417
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.4265</b>	<b>0.4632</b>	<b>0.4798</b>	0.4696	0.4882	0.4688
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.4657</b>	<b>0.5088</b>	<b>0.5180</b>	0.5133	0.5418	0.5124
4	$\bar{w}$	<b>1.3738</b>	<b>1.3799</b>	<b>1.3807</b>	1.3916	1.3779	1.3762
	$\bar{\sigma}_x$	<b>5.8358</b>	<b>5.8322</b>	<b>5.8320</b>	5.797	5.9532	5.8199
	$\bar{\sigma}_y$	<b>1.7351</b>	<b>1.7340</b>	<b>5.8320</b>	1.724	1.7204	1.7210
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>1.0237</b>	<b>1.0381</b>	<b>1.0399</b>	1.016	1.0335	1.0827
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.3754</b>	<b>0.4158</b>	<b>0.4285</b>	0.3926	0.4187	0.3382
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.4058</b>	<b>0.4431</b>	<b>0.4510</b>	0.5124	0.5105	0.4414
10	$\bar{w}$	<b>1.5776</b>	<b>1.5841</b>	<b>1.5849</b>	1.5934	1.5604	1.5774
	$\bar{\sigma}_x$	<b>7.3026</b>	<b>7.2972</b>	<b>7.2968</b>	7.253	7.2217	7.2931
	$\bar{\sigma}_y$	<b>1.2963</b>	<b>1.2954</b>	<b>1.2953</b>	1.288	1.2203	1.2843
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>1.0660</b>	<b>1.0806</b>	<b>1.0825</b>	1.058	1.1056	1.1187
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.4010</b>	<b>0.4489</b>	<b>0.4555</b>	0.4536	0.4298	0.4487
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.3461</b>	<b>0.3776</b>	<b>0.3843</b>	0.4096	0.4207	0.3752
$\infty$	$\bar{w}$	<b>2.4996</b>	<b>2.5104</b>	<b>2.5221</b>	/	/	2.5329
	$\bar{\sigma}_x$	<b>2.8753</b>	<b>2.8736</b>	<b>2.8735</b>	/	/	2.8917
	$\bar{\sigma}_y$	<b>1.9169</b>	<b>1.9157</b>	<b>1.9156</b>	/	/	1.9107
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>1.2752</b>	<b>1.2931</b>	<b>1.2954</b>	/	/	1.2771
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.4265</b>	<b>0.4632</b>	<b>0.4798</b>	/	/	0.5059
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.3790</b>	<b>0.4138</b>	<b>0.4212</b>	/	/	0.4497

**Tableau 4.** 6.Déplacement et contraintes nodimensionnel d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, (SSSS) et soumise à une charge (SDL), pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance (L/h = 10).

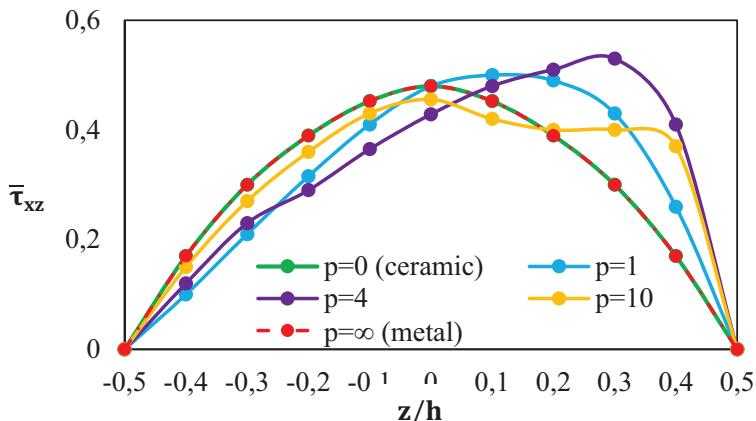
p	Mesh size	Present	Present	Present	Tati	Do	Zenkour
		8x8	16x16	20x20	[48]	[136]	[134]
0	$\bar{w}$	<b>0.2935</b>	<b>0.2955</b>	<b>0.2959</b>	0.2957	0.2961	0.2960
	$\bar{\sigma}_x$	<b>2.4294</b>	<b>2.0053</b>	<b>1.9960</b>	1.9570	1.9943	1.9955
	$\bar{\sigma}_y$	<b>1.5330</b>	<b>1.3375</b>	<b>1.3125</b>	1.3050	1.3124	1.3121
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>0.6940</b>	<b>0.6995</b>	<b>0.7030</b>	0.7025	0.7067	0.7065
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.2305</b>	<b>0.2360</b>	<b>0.2390</b>	0.2368	0.2387	0.2462
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.2027</b>	<b>0.2083</b>	<b>0.2113</b>	0.2105	0.2122	0.2132
1	$\bar{w}$	<b>0.5573</b>	<b>0.5794</b>	<b>0.5820</b>	0.5882	0.5870	0.5889
	$\bar{\sigma}_x$	<b>3.7067</b>	<b>3.1135</b>	<b>3.0545</b>	3.0240	3.0533	3.0870
	$\bar{\sigma}_y$	<b>1.8667</b>	<b>1.5261</b>	<b>1.4834</b>	1.4820	1.4856	1.4894
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>0.5993</b>	<b>0.6048</b>	<b>0.6083</b>	0.6066	0.6148	0.6110
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.2305</b>	<b>0.2360</b>	<b>0.2390</b>	0.2368	0.2212	0.2462
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.2494</b>	<b>0.2550</b>	<b>0.2580</b>	-0.2588	0.2418	0.2622
2	$\bar{w}$	<b>0.7141</b>	<b>0.7425</b>	<b>0.7458</b>	0.7575	0.7529	0.7573
	$\bar{\sigma}_x$	<b>4.4450</b>	<b>3.6344</b>	<b>3.4614</b>	3.5320	3.5585	3.6094
	$\bar{\sigma}_y$	<b>1.7523</b>	<b>1.4327</b>	<b>1.3946</b>	1.3920	1.3935	1.3954
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>0.5365</b>	<b>0.5420</b>	<b>0.5455</b>	0.5406	0.5493	0.5441
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.2180</b>	<b>0.2235</b>	<b>0.2266</b>	0.2202	0.1892	0.2265
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.2682</b>	<b>0.2738</b>	<b>0.2768</b>	0.2758	0.2369	0.2763
10	$\bar{w}$	<b>0.9258</b>	<b>0.9614</b>	<b>0.9956</b>	1.0125	1.0020	1.0089
	$\bar{\sigma}_x$	<b>6.1817</b>	<b>5.0741</b>	<b>4.9388</b>	4.9690	5.0142	5.0890
	$\bar{\sigma}_y$	<b>1.0973</b>	<b>0.9007</b>	<b>0.8790</b>	0.8822	0.8797	0.8775
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>0.5797</b>	<b>0.5852</b>	<b>0.5887</b>	0.5868	0.5964	0.5894
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.2090</b>	<b>0.2145</b>	<b>0.2190</b>	0.2167	0.1858	0.2198
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.1982</b>	<b>0.2038</b>	<b>0.2069</b>	0.2065	0.1770	0.2041
$\infty$	$\bar{w}$	<b>1.5067</b>	<b>1.5656</b>	<b>1.5725</b>	/	1.6072	1.6070
	$\bar{\sigma}_x$	<b>2.4294</b>	<b>2.0053</b>	<b>1.9960</b>	/	1.9943	1.9955
	$\bar{\sigma}_y$	<b>1.5330</b>	<b>1.3375</b>	<b>1.3125</b>	/	1.3124	1.3121
	$\bar{\tau}_{xy}$	<b>0.6940</b>	<b>0.6995</b>	<b>0.7030</b>	/	0.7067	0.7065
	$\bar{\tau}_{xz}$	<b>0.2305</b>	<b>0.2360</b>	<b>0.2390</b>	/	0.2387	0.2462
	$\bar{\tau}_{yz}$	<b>0.2027</b>	<b>0.2083</b>	<b>0.2113</b>	/	0.2122	0.2132



**Figure 4. 2.** Variation de la contrainte normale non dimensionnel  $\bar{\sigma}_x$  d'une plaque carrée FG (SSSS) soumise à une charge uniformément répartie (UDL) pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ( $l/h = 10$ ).



**Figure 4. 3.** Variation de contrainte de cisaillement  $\bar{\tau}_{xy}$  dans le plan non dimensionnel d'une plaque carrée FG (SSSS) soumise à une charge uniformément répartie (UDL) pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ( $l/h = 10$ ).



**Figure 4.4.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\tau}_{xz}$  d'une plaque carrée FG simplement appuyée sur les quatre côtés (SSSS), soumise à une charge uniformément répartie (UDL), pour différentes valeurs de l'indice de puissance ( $l/h = 10$ ).

Il peut être observé que toutes les contraintes des plaques entièrement céramique et métallique (homogènes) coïncident, car elles ne dépendent pas du module de Young. La Figure 4.2 montre que la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  est de traction à la surface supérieure de la plaque carrée FG, tandis qu'elle devient de compression à la surface inférieure. Pour les plaques homogènes, les contraintes compressives maximales apparaissent à la surface inférieure, tandis que les contraintes de traction minimales se situent à la surface supérieure de la plaque FG.

Contrairement à la contrainte normale, la contrainte de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  est de traction à la surface inférieure et de compression à la surface supérieure. Pour les plaques homogènes, la contrainte de cisaillement maximale se situe à la surface inférieure et la contrainte minimale à la surface supérieure, comme illustré à la Figure 4.3.

Comme le montre la Figure 4.4, la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\tau}_{xz}$  des plaques homogènes est distribuée de manière sinusoïdale à travers l'épaisseur. En revanche, pour les plaques FG, cette distribution n'est pas parfaitement sinusoïdale.

## b) Analyse statique d'une plaque Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous charges uniformes pour différentes conditions aux limites

Les résultats du déplacement centrale non dimensionnelle obtenus avec l'élément HSBQP20 pour des plaques carrées soumises à des charges uniformément réparties et pour différentes conditions aux limites sont présentés dans le Tableau 4.7, pour plusieurs valeurs de l'indice  $p$ . Pour les deux rapports d'épaisseur  $a/h = 20$ , et avec un maillage de  $20 \times 20$ , les résultats numériques montrent un excellent accord avec ceux disponibles dans la littérature, obtenus à l'aide méthode des éléments finis à frontières mises à l'échelle [139] et du FEM classique[138]. Pour toutes les valeurs de  $p$ , les valeurs maximales du déplacement centrale sont observées pour les plaques SFSF, tandis que les valeurs minimales correspondent aux plaques SCSC. De plus, on constate que l'augmentation des contraintes aux bords de la plaque entraîne une diminution de la déformation centrale, ce qui s'explique par l'accroissement de la raideur en flexion lié à ces contraintes supplémentaires.

**Tableau 4. 7.** Displacement centrales des plaques carrées Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous charges uniformément réparties pour différentes conditions aux limites.

CL	Méthode	p = 0	p = 1	p = 2	p = 5	p = 10
SCSC	HSBQP20	0,2165	0,4317	0,5551	0,6656	0,7355
	Thai & Choi[138]	0,2256	0,4448	0,5670	0,6776	0,7521
	Ye et al. [139]	0,2151	0,4265	0,5482	0,6618	0,7161
SSSS	HSBQP20	0,4485	0,8980	1,1522	1,3690	1,5064
	Thai & Choi[138]	0,4521	0,9033	1,1572	1,3747	1,5138
	Ye et al. [139]	0,4490	0,8946	1,1483	1,3714	1,4968
SFSC	HSBQP20	0,6279	1,2562	1,6125	1,9191	2,1134
	Thai & Choi[138]	0,6460	1,2838	1,6400	1,9493	2,1525
	Ye et al. [139]	0,6273	1,2480	1,6017	1,9232	2,0818
SFSS	HSBQP20	0,8714	1,7456	2,2389	2,6565	2,9213
	Thai & Choi[138]	0,8851	1,7670	2,2615	2,6835	2,9557
	Ye et al. [139]	0,8739	1,7415	2,2337	2,6761	2,8993
SFSS	HSBQP20	1,4334	2,8725	3,6835	4,3670	4,8003
	Thai & Choi[138]	1,4692	2,8851	3,7454	4,4427	4,8958
	Ye et al. [139]	1,4389	2,8682	3,6781	4,4035	4,7697

#### 4.10.1.3 Analyse statique des plaques circulaires FG

La convergence de l'élément proposé pour l'analyse en flexion des plaques circulaires FG est vérifiée à l'aide de différents maillages, comme présenté à la Figure 3.17. Dans un premier temps, des plaques circulaires Al/ZrO<sub>2</sub>-1 simplement appuyées et encastrées, soumises à des charges uniformément réparties, sont étudiées pour différentes valeurs de l'indice de fraction volumique ( $p=0,0,5,1, 2$ ). Les résultats de déplacement central non dimensionnel

$$\bar{w} = \frac{10h^3 w_c D_b}{q_0 (2R)^4}; D_b = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)},$$

obtenus à l'aide de l'élément proposé,

sont présentés dans les Tableaux 4.8 et 4.9 pour trois rapports diamètre/épaisseur ( $2R/h=5,10,20$ ). Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par Belounar et al[140]. et Tati et al[141], basés respectivement sur la HSDT.

**Tableau 4. 8.**Déplacement central non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) des plaques circulaires Al/ZrO<sub>2</sub>-1, simplement appuyées.

2R/h	Maillage	$p = 0$	$p = 0,5$	$p = 1$	$p = 2$
<b>5</b>	HSBQP20 (Mesh a)	<b>1,6117</b>	<b>2,1741</b>	<b>2,5601</b>	<b>2,9640</b>
	HSBQP20 (Mesh b)	<b>1,6359</b>	<b>2,1988</b>	<b>2,5893</b>	<b>2,9881</b>
	HSBQP20 (Mesh c)	<b>1,6400</b>	<b>2,2059</b>	<b>2,5966</b>	<b>2,9981</b>
	HSBQP20 (Mesh d)	<b>1,6450</b>	<b>2,2153</b>	<b>2,6002</b>	<b>3,0025</b>
	Q4R-HSDT [141]	1,6410	/	2,6043	3,0063
	ISBQP24 (Mesh e)[140]	1,6391	2,2158	2,6007	3,0022
<b>10</b>	HSBQP20 (Mesh a)	<b>1,4213</b>	<b>1,9499</b>	<b>2,2981</b>	<b>2,6023</b>
	HSBQP20 (Mesh b)	<b>1,4394</b>	<b>1,9655</b>	<b>2,3099</b>	<b>2,6363</b>
	HSBQP20 (Mesh c)	<b>1,4481</b>	<b>1,9766</b>	<b>2,3190</b>	<b>2,6481</b>
	HSBQP20 (Mesh d)	<b>1,4561</b>	<b>1,9880</b>	<b>2,3256</b>	<b>2,6565</b>
	Q4R-HSDT [141]	1,4540	/	2,3267	2,6565
	ISBQP24 (Mesh e)[140]	1,4550	1,9892	2,3299	2,6537
<b>20</b>	HSBQP20 (Mesh a)	<b>1,3835</b>	<b>1,8764</b>	<b>2,2052</b>	<b>2,5294</b>
	HSBQP20 (Mesh b)	<b>1,3955</b>	<b>1,9089</b>	<b>2,2353</b>	<b>2,5483</b>
	HSBQP20 (Mesh c)	<b>1,3996</b>	<b>1,9188</b>	<b>2,2453</b>	<b>2,5643</b>
	HSBQP20 (Mesh d)	<b>1,4081</b>	<b>1,9253</b>	<b>2,2592</b>	<b>2,5798</b>
	Q4R-HSDT [141]	1,4070	/	2,2572	2,5689
	ISBQP24 (Mesh e)[140]	1,4091	1,9293	2,2604	2,5710

**Tableau 4. 9.**Déplacement central non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) des plaques circulaires Al/ZrO<sub>2</sub>-1, encastrée .

<b>2R/h</b>	<b>Méthode</b>	<b>p = 0</b>	<b>p = 0,5</b>	<b>p = 1</b>	<b>p = 2</b>
<b>5</b>	HSBQP20 (Mesh a)	<b>0,5862</b>	<b>0,7725</b>	<b>0,9095</b>	<b>1,0801</b>
	HSBQP20 (Mesh b)	<b>0,5901</b>	<b>0,7781</b>	<b>0,9160</b>	<b>1,0871</b>
	HSBQP20 (Mesh c)	<b>0,5908</b>	<b>0,7791</b>	<b>0,9172</b>	<b>1,0883</b>
	HSBQP20 (Mesh d)	<b>0,5911</b>	<b>0,7796</b>	<b>0,9177</b>	<b>1,0889</b>
	ISBQP24 (Mesh e)[140]	0,5915	0,7802	0,9184	1,0896
	Q4R-HSDT [141]	0,5914	/	0,9185	1,0898
<b>10</b>	HSBQP20 (Mesh a)	<b>0,3960</b>	<b>0,5347</b>	<b>0,6275</b>	<b>0,7250</b>
	HSBQP20 (Mesh b)	<b>0,4017</b>	<b>0,5426</b>	<b>0,6368</b>	<b>0,7354</b>
	HSBQP20 (Mesh c)	<b>0,4027</b>	<b>0,5441</b>	<b>0,6385</b>	<b>0,7373</b>
	HSBQP20 (Mesh d)	<b>0,4032</b>	<b>0,5448</b>	<b>0,6393</b>	<b>0,7381</b>
	ISBQP24 (Mesh e)[140]	0,4038	0,5456	0,6403	0,7392
	Q4R-HSDT [141]	0,4040	/	0,6408	0,7399
<b>20</b>	HSBQP20 (Mesh a)	<b>0,3477</b>	<b>0,4742</b>	<b>0,5558</b>	<b>0,6348</b>
	HSBQP20 (Mesh b)	<b>0,3545</b>	<b>0,4836</b>	<b>0,5668</b>	<b>0,6472</b>
	HSBQP20 (Mesh c)	<b>0,3557</b>	<b>0,4853</b>	<b>0,5688</b>	<b>0,6495</b>
	HSBQP20 (Mesh d)	<b>0,3562</b>	<b>0,4860</b>	<b>0,5697</b>	<b>0,6504</b>
	ISBQP24 (Mesh e)[140]	0,3569	0,4869	0,5707	0,6516
	Q4R-HSDT [141]	0,3571	/	0,5714	0,6524

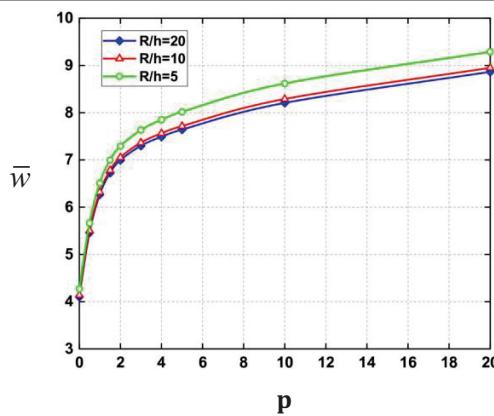
Le Tableau 4.10 présente les contraintes normales dans le plan non dimensionnelles ( $\bar{\sigma}_x$ ) et les contraintes de cisaillement transversal non dimensionnelles ( $\bar{\tau}_{xz}$ ), obtenues avec un maillage de 588 éléments pour des plaques circulaires FG souples, simplement appuyées et soumises à une charge uniforme. Les valeurs du rapport rayon-épaisseur considérées sont R/h=20,10 et 5, et les propriétés matérielles utilisées pour la plaque sont  $E_m/E_c = 0.396$  et  $\nu = 0,288$ . Premièrement, on observe une très bonne concordance entre les solutions fournies par l'élément HSBQP20 et celles rapportées dans les travaux de Bellounar [140]. L'influence de l'indice de puissance  $p$  sur les valeurs non dimensionnelles du déplacement central  $\bar{w}$ , de la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ) et de la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) pour des plaques FG souples simplement appuyées sous une charge uniforme est illustrée dans la Figure. 4.5. On remarque que le déplacement central et la

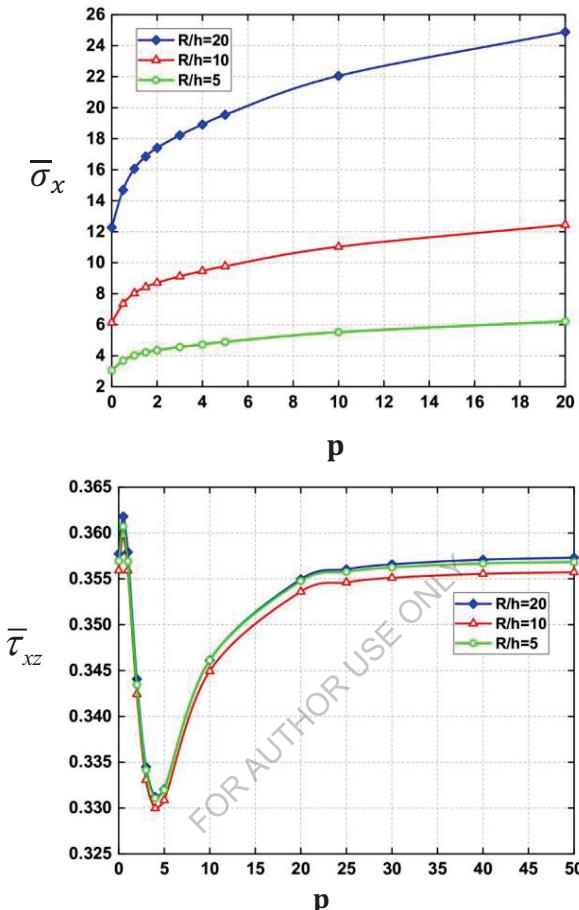
contrainte normale augmentent rapidement avec l'augmentation de l'indice de puissance jusqu'à  $p=5$ , puis continuent de croître légèrement. Par ailleurs, lorsque le rapport R/h augmente, la contrainte normale augmente tandis que le déplacement central diminue.

La Figure.4.6 montre également que la contrainte de cisaillement transverse augmente avec l'indice de puissance  $p$  jusqu'à atteindre une valeur maximale pour  $p=0.5$ , puis décroît rapidement jusqu'à son minimum pour  $p=4,5$ , avant d'augmenter de nouveau rapidement jusqu'à  $p=20$ , puis plus progressivement par la suite.

**Tableau 4. 10.** Contraintes normales dans le plan ( $\bar{\sigma}_x$ ) et contraintes de cisaillement transverse ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) non dimensionnelles pour des plaques circulaires FG souples, simplement appuyées.

<b>p</b>	<b>R/h</b>	$\bar{\sigma}_x$ (HSBQP20)	$\bar{\sigma}_x$ (ISBQP24)	$\bar{\tau}_{xz}$ (HSBQP20)	$\bar{\tau}_{xz}$ (ISBQP24)
<b>0</b>	20	<b>12.310</b>	12.278	<b>0.367</b>	0.3577
	10	<b>6.155</b>	6.1389	<b>0.367</b>	0.3559
	5	<b>3.077</b>	3.069	<b>0.3669</b>	0.357
<b>0.5</b>	20	<b>14.733</b>	14.695	<b>0.3708</b>	0.3618
	10	<b>7.440</b>	7.3472	<b>0.3709</b>	0.3597
	5	<b>3.701</b>	3.673	<b>0.3709</b>	0.3607
<b>2</b>	20	<b>17.445</b>	17.401	<b>0.353</b>	0.3441
	10	<b>8.720</b>	8.7	<b>0.353</b>	0.3424
	5	<b>4.361</b>	4.35	<b>0.353</b>	0.3434





**Figure 4.5.** Les déplacements et contraintes non dimensionnels des plaques circulaires FG, SSSS, sont analysés en fonction de l'indice de puissance  $p$ .

#### 4.10.1.4 Les effets de différents paramètres sur le déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque carrée Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

L'exemple suivant concerne l'analyse des plaques carrées simplement appuyées (SSSS) en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, de différentes épaisseurs, allant de très minces à relativement épaisses. Le Tableau 4.11 présente le déplacement central non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) de ces plaques soumises à des charges uniformes. Le rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) varie de 5 à 100, couvrant ainsi les plaques épaisses ( $l/h=5$ ), minces ( $l/h=100$ ) et

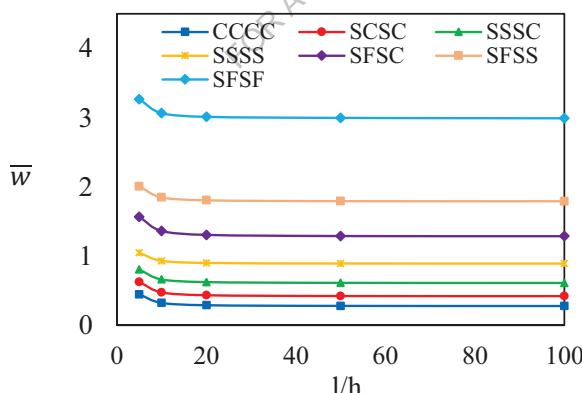
intermédiaires (10, 20, 50). Cinq valeurs de l'indice de loi de puissance sont considérées, ainsi que sept combinaisons de conditions aux limites. L'objectif est d'étudier l'influence du rapport  $l/h$ , de l'indice de puissance  $p$  et des conditions aux limites sur le comportement statique des plaques FG.

Pour illustrer les résultats, certaines données du Tableau 4.11 sont représentées dans les Figures 4.6 et 4.7. La Figure 4.6 montre la variation du déplacement central non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) en fonction de  $l/h$  pour différentes conditions aux limites et pour  $p=1$ . On observe que le déplacement diminue lorsque  $l/h$  augmente. Pour  $l/h > 10$ , les courbes deviennent presque parallèles, indiquant une variation plus faible du déplacement. De plus, une augmentation des contraintes aux bords de la plaque entraîne une diminution supplémentaire du déplacement central non dimensionnel.

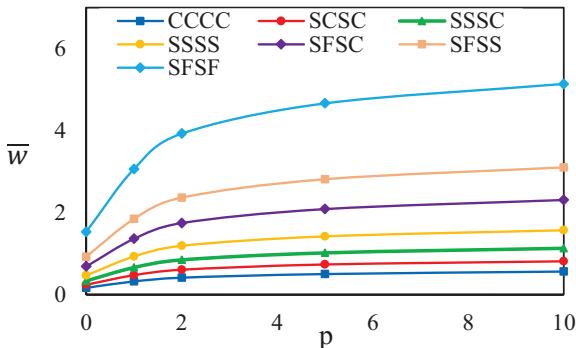
La Figure 4.7 illustre l'effet de l'indice de gradient  $p$  sur le déplacement central non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées avec  $l/h=10$  pour différentes conditions aux limites. On constate que l'augmentation de l'indice de gradient entraîne une augmentation du déplacement central. Cela s'explique par le fait qu'un indice de gradient plus élevé accroît la fraction volumique du métal, réduisant ainsi la rigidité en flexion de la plaque FG et rendant la plaque plus flexible. La figure montre également que le déplacement est maximal pour la plaque simplement appuyée et minimal pour la plaque avec tous les bords encastrés. Ce comportement s'explique par l'effet des contraintes aux bords : plus ces contraintes sont importantes, plus la rigidité en flexion de la plaque augmente, ce qui limite la déformation et réduit le déplacement central.

**Tableau 4. 11.**Déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées FG pour différentes conditions aux limites.

		Boundary conditions						
$l/h$	$p$	CCCC	SCSC	SSSC	SSSS	SFSC	SFSS	SFSF
<b>5</b>	0	0.2369	0.3296	0.4178	0.5356	0.8045	1.0196	1.6531
	1	0.4451	0.6247	0.8035	1.0452	1.5652	2.0056	3.2649
	2	0.5731	0.8038	1.0327	1.3420	2.0102	2.5737	4.1885
	5	0.7283	1.0115	1.2791	1.6359	2.4587	3.1102	5.0392
	10	0.7938	1.0879	1.3481	1.6887	2.5477	3.1718	5.1067
<b>10</b>	0	0.1641	0.2406	0.3336	0.4665	0.6847	0.9248	1.5310
	1	0.3211	0.4728	0.6601	0.9285	1.3602	1.8452	3.0628
	2	0.4122	0.6068	0.8467	1.1906	1.7443	2.3655	3.9261
	5	0.5009	0.7341	1.0168	1.4201	2.0852	2.8142	4.6644
	10	0.5610	0.8118	1.1291	1.5692	2.3078	3.1036	5.1388
<b>50</b>	0	0.1391	0.2100	0.3050	0.4443	0.6424	0.8935	1.4934
	1	0.2786	0.4210	0.6115	0.8912	1.2882	1.7922	2.9955
	2	0.3571	0.5395	0.7836	1.1421	1.6508	2.2968	3.8388
	5	0.4229	0.6387	0.9273	1.3510	1.9532	2.7167	4.5404
	10	0.4648	0.7018	1.0186	1.4837	2.1452	2.9832	4.9856
<b>100</b>	0	0.1382	0.2090	0.3040	0.4437	0.6409	0.8925	1.4902
	1	0.2771	0.4192	0.6098	0.8900	1.2856	1.7905	2.9896
	2	0.3552	0.5372	0.7815	1.1406	1.6475	2.2945	3.8312
	5	0.4202	0.6355	0.9243	1.3489	1.9485	2.7135	4.5306
	10	0.4614	0.6978	1.0149	1.4809	2.1394	2.9791	4.9741



**Figure 4. 6.**Effet du rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) sur le déplacement non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées pour différentes conditions aux limites ( $p = 1$ ).



**Figure 4.7.** Effet du de l'indice de gradient (p) sur le déplacement non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées pour différentes conditions aux limites ( $l/h = 10$ ).

#### 4.10.2 Analyse de la vibration libre

##### 4.10.2.1 Analyse de la vibration libre d'une plaque FG carrée

Dans cette section, le comportement dynamique des plaques carrées en matériau fonctionnellement gradé (FG) est étudié numériquement. Pour évaluer la précision de l'élément fini proposé, une étude de convergence et une comparaison avec des résultats issus de la littérature sont effectuées. Deux combinaisons métal-céramique,  $\text{Al}^*/\text{ZrO}_2\text{-2}$  et  $\text{Al}^*/\text{Al}_2\text{O}_3$ , sont analysées, et leurs propriétés matérielles sont listées dans le Tableau 4.1. Par convention et pour simplifier, les paramètres de fréquence naturelle adimensionnés suivants sont utilisés pour présenter les résultats numériques :

$$\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}; \bar{\omega} = \omega \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}; \bar{\omega} = 100 \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad (4.66)$$

##### a) Fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ pour une plaque carrée $\text{Al}^*/\text{ZrO}_2\text{-2}$ simplement supportée

Cet exemple vise à démontrer l'efficacité de l'élément fini proposé pour prédire la réponse en vibration libre d'une plaque carrée simplement supportée  $\text{Al}^*/\text{ZrO}_2\text{-2}$ . Les fréquences fondamentales non dimensionnelle  $\bar{\beta}$ , calculées avec la formulation actuelle et différents maillages, sont présentées dans le Tableau 4.12 pour plusieurs valeurs de l'indice de loi de puissance p et du rapport côté/épaisseur l/h. Les

résultats sont comparés aux solutions 3D exactes de Vel et Batra [142], aux solutions FSDT simplifiées de Thai et Choi [143], aux solutions HSDT de Matsunaga [144] et Mantari et al. [145], ainsi qu'à une nouvelle théorie trigonométrique de déformation par cisaillement (TSĐT) proposée par Sadgui et Tati [131].

Il apparaît que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la littérature. Le tableau montre également que l'élément fini proposé converge très bien vers les solutions HSDT[144].

**Tableau 4. 12.** Fréquence fondamentale non dimensionnel ( $\bar{\beta}$ ) des plaques carrées Al/ZrO<sub>2</sub>

Théorie	$p = 0^*$		$p = 1$		$l/h = 5$	
	$l/h=\sqrt{10}$	$l/h=10$	$l/h=5$	$l/h=10$	$p=2$	$p=5$
HSBQP20 (8×8)	0.4596	0.0571	0.2260	0.0613	0.2257	0.2270
HSBQP20 (12×12)	0.4608	0.0574	0.2269	0.0617	0.2258	0.2273
HSBQP20 (16×16)	0.4615	0.0578	0.2278	0.0618	0.2259	0.2278
HSBQP20 (20×20)	0.4657	0.0577	0.2284	0.0618	0.2260	0.2280
3D [142]	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.2197	0.2225
S-FSDT [143]	0.4618	0.0577	0.2173	0.0592	0.2189	0.2222
(2D)HSDT [144]	0.4658	0.0578	0.2285	0.0619	0.2264	0.2281
HSDT [145]	0.4624	0.0577	0.2277	0.0619	0.2257	0.2271
TSĐT [131]	0.4625	0.0578	0.2280	0.0620	0.2253	0.2258

$$\bar{\beta}^* = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$$

### b) Fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ pour des plaques rectangulaires Al<sup>\*</sup>/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> simplement supportées

Dans cet exemple, des plaques FG Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> à bords simplement supportés sont analysées. Le Tableau 4.13 présente les fréquences fondamentales adimensionnées ( $\bar{\beta}$ ) calculées pour différentes valeurs du rapport d'aspect l/L, du rapport côté/épaisseur l/h et de l'indice de loi de puissance p. Ces résultats sont comparés à la solution 3D exacte proposée par Jin et al. [146], aux solutions HSDT de Mantari et al. [145] et aux solutions basé sur la nouvelle théorie trigonométrique de

déformation par cisaillement (TSDT) proposée par Sadgui et Tati [131]. Le Tableau 4.13 montre que les résultats obtenus s'accordent bien avec les références citées, tant pour les plaques minces que pour les plaques épaisses, avec une meilleure correspondance avec les données de Mantari et al. [145]. On observe également que la fréquence fondamentale non dimensionnel ( $\bar{\beta}$ ) diminue lorsque l'indice de gradient p et le rapport d'aspect l/L augmentent.

**Tableau 4. 13.** Fréquence fondamentale non dimensionnel ( $\bar{\beta}$ ) des plaques rectangulaires Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>\*

		Théorie				
		p	3D [146]	HSDT [145]	TSDT [131]	HSBQP20
I/L	I/h					
1	10	0	0.1135	0.1134	0.1136	<b>0.1132</b>
		1	0.0870	0.0868	0.0870	<b>0.0866</b>
		2	0.0789	0.0788	0.0788	<b>0.0787</b>
		5	0.0741	0.0740	0.0738	<b>0.0748</b>
		5	0.4169	0.4151	0.4156	<b>0.4144</b>
5	5	0	0.3222	0.3205	0.3210	<b>0.3200</b>
		1	0.2905	0.2892	0.2883	<b>0.2901</b>
		2	0.2676	0.2666	0.2632	<b>0.2708</b>
		2	1.8470	1.8277	1.8224	<b>1.8197</b>
		5	1.4687	1.4460	1.4435	<b>1.4411</b>
2	10	0	1.3095	1.2896	1.2675	<b>1.3003</b>
		1	1.1450	1.1312	1.0829	<b>1.1786</b>
		2	0.0719	0.0717	0.0722	<b>0.0716</b>
		5	0.0550	0.0549	0.0553	<b>0.0548</b>
		2	0.0499	0.0498	0.0501	<b>0.0498</b>
2	5	0	0.0471	0.0470	0.0472	<b>0.0538</b>
		0	0.2713	0.2705	0.2721	<b>0.2700</b>
		1	0.2088	0.2081	0.2094	<b>0.2077</b>
		2	0.1888	0.1882	0.1888	<b>0.1885</b>
		5	0.1754	0.1750	0.1743	<b>0.1768</b>
2	2	0	0.9570	1.2910	1.2943	<b>0.9569</b>
		1	0.7937	1.0137	1.0172	<b>0.7961</b>
		2	0.7149	0.9067	0.8988	<b>0.7193</b>
		5	0.6168	0.8064	0.7824	<b>0.6214</b>

La Figure 4.8 illustre l'évolution de la fondamentale non dimensionnel ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque FG rectangulaire simplement supportée (SSSS) avec  $l/h=5$  en fonction du rapport d'aspect  $l/L$  pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ . On observe que, pour un  $p$  donné, la fréquence naturelle non dimensionnel diminue lorsque le rapport d'aspect  $l/L$  augmente.

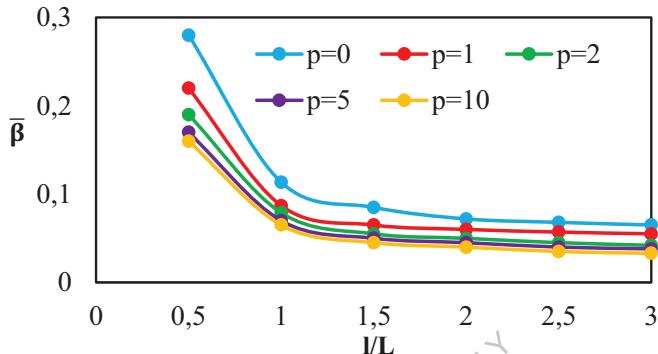


Figure 4.8. Effet du rapport d'aspect  $l/L$  sur la fréquence naturelle non dimensionnel ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque FG rectangulaire simplement supportée (SSSS) ( $l/h = 10$ )

### c) Effet de différents paramètres sur la fréquence fondamentale non dimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>\*

Dans cette section, l'étude porte sur la détermination de la fréquence naturelle non dimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) des plaques fonctionnellement graduées (FG) Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, dans le but d'analyser l'influence de différents paramètres sur leur comportement vibratoire. Plus précisément, les paramètres étudiés incluent le rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ), l'indice de la loi de puissance ( $p$ ), le rapport d'aspect ( $l/L$ ) ainsi que les conditions aux limites appliquées aux plaques. Ces facteurs sont connus pour affecter de manière significative la rigidité globale et la réponse vibratoire des structures minces et épaisses. Les calculs ont été réalisés à l'aide de l'élément fini développé dans le présent travail, en utilisant un maillage de  $20 \times 20$  éléments, permettant ainsi d'obtenir des résultats précis et convergents. Les fréquences naturelles non dimensionnel obtenues pour diverses combinaisons de paramètres sont regroupées dans le Tableau 4.14, tandis que les Figures 4.9 et 4.10 présentent graphiquement ces résultats

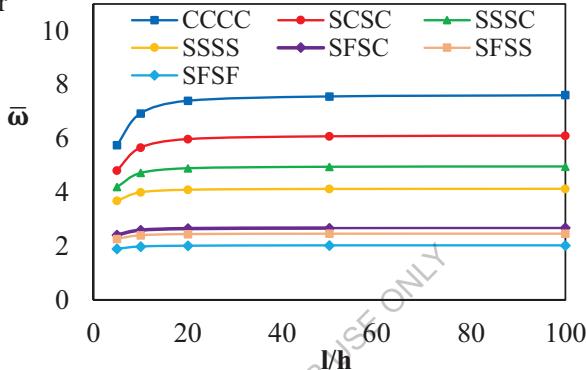
afin de mieux visualiser l'impact des variations de  $l/h$  et de  $p$  sur les réponses vibratoires. Le Tableau 4.14 fournit les valeurs de  $(\bar{\omega})$  pour une plaque FG carrée soumise à différentes conditions aux limites, en considérant plusieurs valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$  ainsi que différents rapports longueur/épaisseur  $l/h$ . La Figure 4.10 montre l'évolution de la fréquence naturelle non dimensionnel en fonction de  $l/h$  pour un indice de gradient fixé à  $p = 2$ , pour plusieurs conditions aux limites. Il est clairement observé que, pour cet indice, la fréquence naturelle augmente de manière quasi linéaire avec l'augmentation du rapport  $l/h$  jusqu'à une valeur critique de  $l/h = 20$ , au-delà de laquelle les fréquences tendent à se stabiliser. Ce comportement peut s'expliquer par la réduction progressive de l'effet de la déformation par cisaillement à mesure que la plaque devient plus mince, phénomène bien documenté dans les travaux de Sadgui et Tati [131]. En effet, pour des plaques minces ( $l/h > 20$ ), l'influence du cisaillement transverse devient négligeable, et la rigidité de flexion domine entièrement le comportement vibratoire. La Figure 4.9 permet également d'observer que la fréquence naturelle non dimensionnel augmente avec l'élévation des contraintes aux bords des plaques. Ce phénomène est directement lié à l'accroissement de la rigidité en flexion induit par des conditions de bord plus contraignantes, entraînant ainsi des amplitudes de vibration plus importantes. D'autre part, la Figure 4.10 illustre la dépendance de la fréquence naturelle non dimensionnel à l'indice de loi de puissance  $p$  pour une plaque FG carrée avec  $l/h=10$ . Il apparaît que l'augmentation de  $p$  entraîne une diminution de  $\bar{\omega}$ . Cette tendance peut être attribuée à l'augmentation de la fraction volumique de métal dans la plaque FG lorsque  $p$  croît, ce qui réduit la rigidité en flexion globale de la plaque et diminue sa fréquence naturelle.

En conclusion, cette étude met en évidence plusieurs points essentiels :

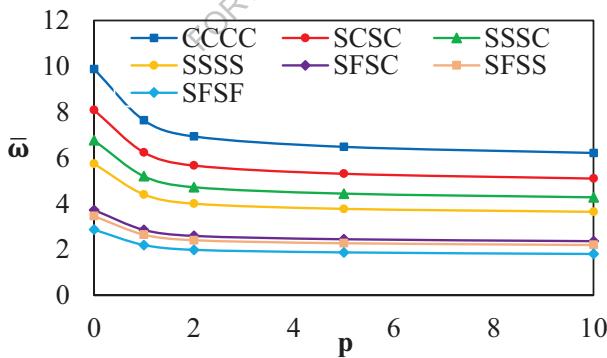
- Les plaques FG épaisses sont plus sensibles aux variations du rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) que les plaques minces, en raison de l'importance relative de la déformation par cisaillement.
- L'augmentation des contraintes aux bords accroît la rigidité en flexion et, par conséquent, la fréquence naturelle non dimensionnel.

- L'indice de loi de puissance p joue un rôle significatif dans la modification de la rigidité effective de la plaque FG : une fraction métallique plus élevée (valeurs plus grandes de p) réduit la rigidité en flexion et diminue la fréquence naturelle.

Ces observations confirment la capacité de l'élément fini développé à prédire avec précision le comportement vibratoire des plaques FG en tenant compte des effets combinés de l'épaisseur, des conditions aux limites et de la variation de la composition matérielle à travers l'épaisseur



**Figure 4.9.** Variation de la fréquence naturelle non dimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) pour une plaque carrée FG



**Figure 4.10.** Variation de la fréquence naturelle non dimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) en fonction de l'indice de loi de puissance p pour une plaque carrée FG ( $l/h=20$ ).

**Tableau 4. 14.** Fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques carrées Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

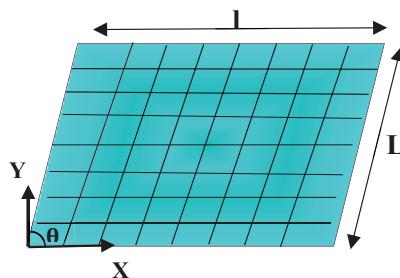
l/h	p	Boundary conditions						
		CCCC	SCSC	SSSC	SSSS	SFSC	SFSS	SFSF
5	0	8.0644	6.7759	5.9548	5.2637	3.4524	3.2503	2.7238
	1	6.3544	5.3127	4.6297	4.0643	2.6618	2.5004	2.0930
	2	5.7554	4.8118	4.1946	3.6838	2.4141	2.2682	1.8996
	5	5.2616	4.4202	3.8876	3.4393	2.2587	2.1276	1.7542
	10	5.1168	4.3295	3.8525	3.4420	2.2671	2.14262	1.6824
10	0	9.8854	8.0891	6.7633	5.7466	3.7236	3.4563	2.8652
	1	7.6392	6.2372	5.1946	4.4015	2.8520	2.6447	2.1935
	2	6.9349	5.6631	4.7177	3.9982	2.5913	2.4032	1.9832
	5	6.4813	5.3055	4.4385	3.7732	2.4462	2.2711	1.8721
	10	6.2148	5.0962	4.2767	3.6438	2.3624	2.1950	1.8023
50	0	10.887	8.7553	7.1252	5.9391	3.8426	3.5408	2.9180
	1	8.3167	6.6867	5.4403	4.5339	2.9336	2.7030	2.2254
	2	7.5619	6.0799	4.9467	4.1226	2.6675	2.4579	2.0254
	5	7.1645	5.7617	4.6891	3.9087	2.5290	2.3304	1.9201
	10	6.9342	5.5773	4.5400	3.7849	2.4488	2.2566	1.8593
100	0	10.949	8.7914	7.1419	5.9457	3.8479	3.5440	2.9202
	1	8.3636	6.7134	5.4525	4.5385	2.9374	2.7052	2.2284
	2	7.6048	6.1044	4.9580	4.1269	2.6710	2.4599	2.0258
	5	7.2062	5.7860	4.7006	3.9134	2.5326	2.3326	1.9201
	10	6.9758	5.6018	4.5517	3.7898	2.4526	2.2590	1.8612

#### 4.10.2.2 Vibration libre des plaques biaises

Les plaques biaises occupent une place importante dans de nombreux domaines de l'ingénierie, notamment l'aéronautique, le génie civil, le génie maritime et le génie mécanique, en raison de leur capacité à supporter des charges complexes et des déformations multidirectionnelles. L'étude originale sur ce type de plaque a été menée par Morley [147], qui a posé les bases de l'analyse théorique. Toutefois, en raison de la complexité géométrique et des conditions aux limites, les méthodes analytiques classiques présentent des limites, ce qui a conduit au développement de diverses approches numériques permettant une étude efficace et précise des plaques biaises.

Le Tableau 4.15 rassemble les fréquences naturelles non dimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) correspondant aux trois premiers modes de vibration pour des plaques biaises en Aluminium/Zirconia-1 (ZrO<sub>2</sub>-1). Ces plaques sont considérées sous deux types de conditions aux limites, à savoir

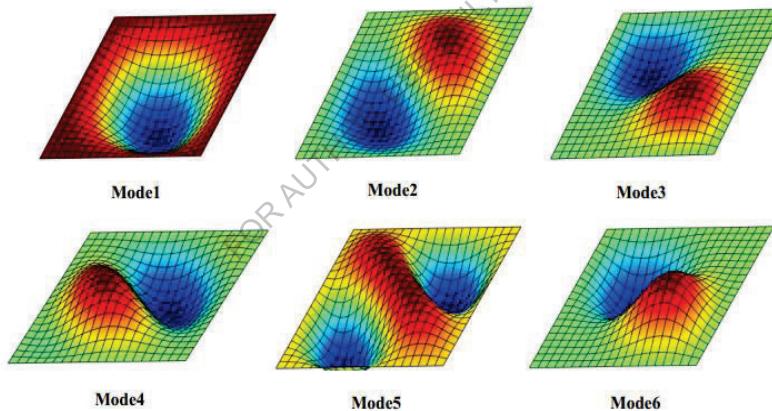
simplement supportées (SSSS) et totalement encastrées (CCCC), avec un angle d'inclinaison fixe de  $\theta=45^\circ$  et un rapport longueur/épaisseur  $l/h=10$ . L'analyse a été réalisée en utilisant un maillage de  $16 \times 16$  éléments (Figure 4.11), pour des valeurs de l'indice de gradient  $p$  comprises entre 0 et 3. Les résultats obtenus montrent une excellente concordance avec ceux calculés à l'aide de la méthode Q4cs proposée par Katili et al. [148] ainsi que de la méthode kp-Ritz sans éléments de Zhao et al. [149]. Cette correspondance confirme la robustesse et la fiabilité de la formulation actuelle pour la simulation des plaques FG présentant des géométries complexes et des conditions aux limites variées. Comme le montre le Tableau 4.15, les fréquences naturelles non dimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) diminuent lorsque l'indice de gradient  $p$  augmente. Ce phénomène peut s'expliquer par l'effet du gradient de matériau : une valeur plus élevée de  $p$  implique une fraction volumique plus faible de céramique dans la plaque, ce qui réduit la rigidité globale en flexion et entraîne des fréquences naturelles plus faibles. Par ailleurs, les conditions aux limites exercent une influence notable sur les fréquences naturelles. Les plaques avec bords simplement supportés présentent les valeurs minimales de fréquence, tandis que celles avec bords totalement encastrés atteignent les valeurs maximales. Ce comportement découle de l'augmentation de la rigidité en flexion induite par des contraintes de bord plus importantes, ce qui se traduit par des réponses vibratoires plus élevées. Les six formes modales sont représentées dans la Figure 4.12.



**Figure 4. 11.** Plaque biaise représentée avec un maillage de  $N \times N$  éléments.

**Tableau 4. 15.**Trois premières fréquences naturelles non dimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque biaise Al/ZrO<sub>2</sub>-1 (SSSS et CCCC,  $\theta=45^\circ$ )

$p$	Mode	Bord simplement supporté (SSSS)			Bord encastré (CCCC)		
		Present (16×16)	Katili et al.[148]	Zhao et al.[149]	Present (16×16)	Katili et al.[148]	Zhao et al.[149]
<b>0</b>	1	9.556	9.461	9.6709	16.713	16.785	16.635
	2	17.801	17.638	17.964	25.316	25.438	25.275
	3	25.794	25.364	24.985	33.406	33.616	33.377
<b>0.5</b>	1	8.662	8.593	8.7115	15.102	15.183	15.047
	2	16.083	15.965	16.202	22.957	23.053	22.902
	3	22.987	22.98	23.014	30.385	30.497	30.274
<b>1</b>	1	8.275	8.248	8.3025	14.403	14.468	14.338
	2	15.345	15.254	15.437	21.843	21.961	21.816
	3	21.928	21.949	21.907	28.940	29.048	28.833
<b>3</b>	1	7.861	7.839	7.884	13.584	13.646	13.523
	2	14.534	14.447	14.622	20.577	20.645	20.509
	3	20.399	20.742	20.056	27.154	27.254	27.054



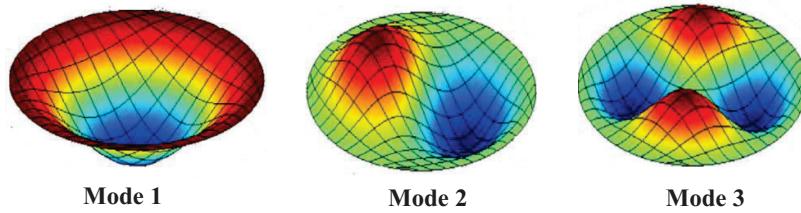
**Figure 4. 12.**Six premiers modes de vibration d'une plaque biaise FG simplement supportée avec ( $p = 2$ ,  $a/h = 10$ ,  $\theta = 45^\circ$ ).

#### 4.10.2.3 Vibration libre d'une plaque circulaire encastrée

Afin d'évaluer plus en profondeur la robustesse et la précision de l'élément HSBQP20 dans l'analyse des plaques FG présentant une géométrie complexe, une plaque circulaire encastrée est étudiée pour différents rapports épaisseur/rayon ( $h/R$ ). La plaque considérée est constituée d'Aluminium (Al) à la face inférieure et d'Alumine (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

à la face supérieure. Les six premières fréquences naturelles non dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) sont obtenues pour plusieurs raffinements de maillage comportant 60, 272 et 588 éléments quadrilatéraux, comme illustré sur la Figure 3.17. Ces résultats sont regroupés dans le Tableau 4.16, tandis que les trois modes de vibration correspondants sont représentés dans la Figure 4.13.

Pour mettre en évidence la performance de l'élément HSBQP20, les fréquences calculées sont comparées à celles issues de la méthode des éléments finis sous Abaqus [150], des solutions semi-analytiques basées sur la théorie de la plaque en cisaillement (FSDT) [151]et des résultats numériques de Belounar et al. [78] utilisant également la FSDT. Les comparaisons montrent que l'élément HSBQP20 fournit des résultats en excellent accord avec ces approches de référence. Il présente également une convergence rapide, même lorsque des maillages relativement grossiers sont employés, ce qui confirme son efficacité et sa fiabilité pour l'analyse vibratoire des plaques circulaires fonctionnellement graduées. L'examen du Tableau 4.16 révèle qu'avec un indice de gradient fixé ( $p = 1$ ), les fréquences naturelles non dimensionnelles augmentent avec la croissance du rapport  $h/R$ . Ce comportement s'explique par l'augmentation progressive de la rigidité en flexion lorsque l'épaisseur de la plaque devient relativement plus importante que son rayon. Une plaque plus épaisse possède une rigidité globale plus élevée et oppose une résistance accrue au mouvement vibratoire, ce qui conduit à des fréquences naturelles plus grandes. De plus, l'augmentation de l'épaisseur amplifie les effets inertIELS, contribuant également à l'élévation des fréquences.



**Figure 4.13.**Les trois premières formes modales d'une plaque circulaire CCCC en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ( $h/R = 0.1$ ).

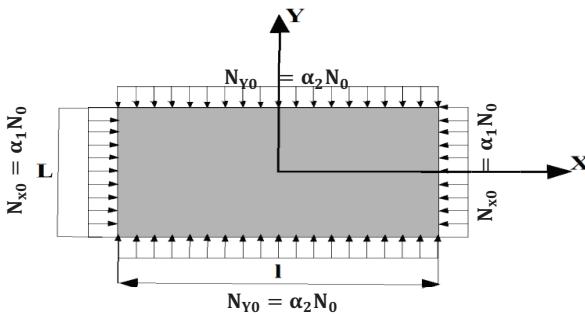
**Tableau 4. 16.**Les trois premières fréquences non dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque circulaire encastrée ( $p = 1$ ).

<b>h/R</b>	<b>Method</b>	<b>Mode 01</b>	<b>Mode 02</b>	<b>Mode 03</b>
<b>0.01</b>	Present (mesh c)	<b>0.0240</b>	<b>0.0512</b>	<b>0.0846</b>
	Present (mesh d)	<b>0.0239</b>	<b>0.0497</b>	<b>0.0815</b>
	Present (mesh e)	<b>0.0238</b>	<b>0.0495</b>	<b>0.0811</b>
	Belounar et al.[78]	0.0236	0.0493	0.0808
	Tran et al.[150]	0.0234	0.0486	0.0798
	Hosseini-Hashemi et al. [151]	0.0236	0.0491	0.0805
	Present (mesh c)	<b>2.3104</b>	<b>4.7156</b>	<b>4.5223</b>
<b>0.1</b>	Present (mesh d)	<b>2.3090</b>	<b>4.7066</b>	<b>4.5170</b>
	Present (mesh e)	<b>2.3067</b>	<b>4.7035</b>	<b>7.5142</b>
	Belounar et al.[78]	2.3063	4.7030	7.5138
	Tran et al.[150]	2.2888	4.6661	7.4808
	Hosseini-Hashemi et al. [151]	2.3053	4.6934	7.5146
<b>0.2</b>	Present (mesh c)	<b>8.6657</b>	<b>16.8160</b>	<b>25.6975</b>
	Present (mesh d)	<b>8.6595</b>	<b>16.8090</b>	<b>25.6780</b>
	Present (mesh e)	<b>8.6572</b>	<b>16.7990</b>	<b>25.6635</b>
	Belounar et al.[78]	8.6568	16.7986	25.6630
	Tran et al.[150]	8.6403	16.7890	25.7661
	Hosseini-Hashemi et al. [151]	8.6535	16.7666	25.6486

#### 4.10.3 Analyse du flambement mécanique

L'objectif de cette section est d'évaluer la précision de l'élément fini utilisé (HSBQP20) pour la prédiction de la charge critiques de flambement des plaques fonctionnellement graduées (FG). Deux types de chargement en plan sont considérés : la compression uniaxiale ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ) et la compression biaxiale biaxiale ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ), comme illustré sur le schéma de la Figure 4.14. Pour simplifier l'analyse, la charge critiques de flambement est présentée sous forme non dimensionnelle selon la relation suivante :

$$\bar{\lambda}_{cr} = \lambda_{cr} \frac{(l^2)}{(E_m h^2)} \quad (4.66)$$



**Figure 4. 14.** Plaque rectangulaire FG soumise à un chargement en plan

#### 4.10.3.1 Charge critique non dimensionnelle de flambage ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) pour des plaques rectangulaires Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> simplement supportées soumise à différentes charges.

Cette section porte sur l'analyse du flambement des plaques rectangulaires en matériau fonctionnellement gradué (FG) soumises à une charge mécanique de flambement, comme illustré sur la Figure 4.10. L'objectif principal est d'évaluer la charge critique de flambement non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) pour des plaques Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> simplement supportées, en tenant compte de différentes conditions de chargement et géométries. Dans un premier temps, des études de convergence sont réalisées pour des plaques soumises à des charges de compression uniaxiale ( $N_{x0} = 1$ ,  $N_{y0} = 0$ ) et biaxiales ( $N_{x0} = N_{y0} = 1$ ), pour deux rapports d'aspect  $a/b = 1$  et 2 et un rapport longueur/épaisseur  $l/h=100$ . Les résultats du facteur de charge de flambement ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ), défini dans l'équation (4.66), sont calculés à l'aide de l'élément HSBQP20 pour différents maillages et plusieurs valeurs de l'exposant du facteur de fraction volumique  $p$ , et sont présentés dans les Tables 4.17 et 4.18. Ces résultats sont ensuite comparés aux solutions basées sur la théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) de Reddy [152]. Des comparaisons supplémentaires sont effectuées avec les résultats numériques de Sadgui et Tati [131] utilisant la théorie TSST et ceux de Belounar et al. [78] basés sur la théorie FSDT.

Les comparaisons montrent que les résultats obtenus avec l'élément HSBQP20 sont en excellent accord avec ceux de Belounar et al. [78], confirmant la précision et la fiabilité de l'élément pour l'analyse du flambement des plaques FG. Il est également constaté que la charge

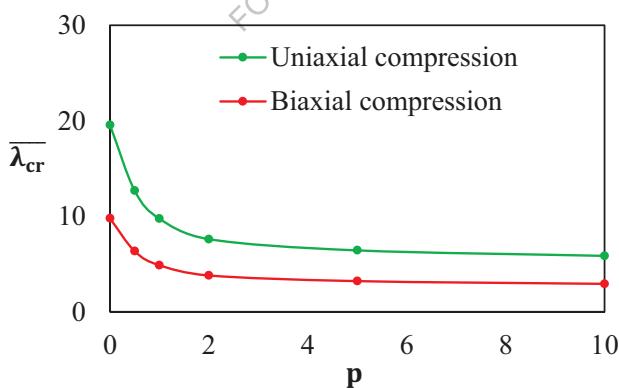
critique de flambement dans le cas biaxial est plus faible que dans le cas uniaxial, comme le montre la Figure 4.15. Par ailleurs, les plaques rectangulaires ( $l/L = 2$ ) présentent des valeurs de charge critique supérieures à celles des plaques carrées ( $l/L = 1$ ), ce qui met en évidence l'influence du rapport d'aspect sur le comportement au flambement.

**Tableau 4. 17.** Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ( $l/L = 1$ ).

$(\alpha_1, \alpha_2)$	Théories	p				
		p = 0	p = 1	p = 2	p = 5	p = 10
(1, 0)	HSBQP20 (8×8)	19.2601	9.6024	7.4930	6.3347	5.7692
	HSBQP20 (12×12)	19.4479	9.6945	7.5649	6.3966	5.8261
	HSBQP20 (16×16)	19.5198	9.7302	7.5928	6.4203	5.8477
	HSBQP20 (20×20)	19.5537	9.7472	7.6060	6.4315	5.8579
	Belounar et al. [78]	19.5534	9.7471	7.6058	6.4314	5.8576
	Sadgui and Tati [131]	19.6812	9.8107	7.6551	6.4724	5.8949
(1, 1)	HSBQP20 (8×8)	9.6300	4.8012	3.5374	3.1674	2.8846
	HSBQP20 (12×12)	9.7239	4.8472	3.7825	3.1983	2.9131
	HSBQP20 (16×16)	9.7599	4.8651	3.7964	3.2101	2.9239
	HSBQP20 (20×20)	9.7769	4.8736	3.8031	3.2158	2.9291
	Belounar et al. [78]	9.7767	4.8735	3.8029	3.2157	2.9288
	Sadgui and Tati [131]	9.8406	4.9053	3.8275	3.2362	2.9474
	Reddy [152]	9.7880	4.8790	3.8070	3.2190	2.9320

**Tableau 4. 18.** Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque rectangulaire Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (l/L = 2).

$(\alpha_1, \alpha_2)$	Théories	p				
		p = 0	p = 1	p = 2	p = 5	p = 10
(1, 0)	HSBQP20 (16×8)	76.8584	38.3241	29.9050	25.2783	23.0176
	HSBQP20 (24×12)	77.6567	38.7207	30.2146	25.5410	23.2572
	HSBQP20 (32×16)	77.9468	38.8654	30.3275	25.6364	23.3441
	Belounar et al. [78]	78.0780	38.9208	30.3704	25.6808	23.3898
	Sadgui and Tati [131]	78.7471	39.2647	30.6328	25.8836	23.5667
	Reddy [152]	77.7100	38.7400	30.2200	25.5400	23.2600
(1, 1)	HSBQP20 (16×8)	24.4534	12.1914	9.5133	8.0428	7.3244
	HSBQP20 (24×12)	24.4763	12.2026	9.5221	8.0504	7.3313
	HSBQP20 (32×16)	24.4854	12.2071	9.5256	8.0533	7.3340
	Belounar et al. [78]	24.5111	12.2180	9.5339	8.0621	7.3430
	Sadgui and Tati [131]	24.6209	12.2748	9.5770	8.0948	7.3714
	Reddy [152]	24.3780	12.5820	9.482	8.0150	7.299

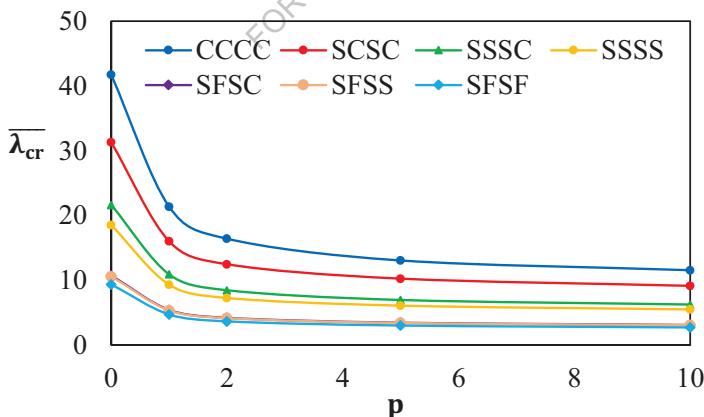


**Figure 4. 15.** L'effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge critiques de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque carrée simplement supportée (L = 1 = 100h) sous différents types de charges.

#### 4.10.3.2 Charge critique non dimensionnelle de flambage ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) pour des plaques carrées Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec différents rapports (l/h) et valeurs d'indice de loi de puissance (p) sous différentes charges avec deux conditions aux limites

L'étude suivante porte sur une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> soumise à des charges de compression uniaxiale ( $N_{x0} = 1$ ,  $N_{y0} = 0$ ) et biaxiale ( $N_{x0} = N_{y0} = 1$ ), avec deux types de conditions aux limites (SSSS, CSCS) et trois rapports d'épaisseur ( $l/h=10,20,100$ ). Les Tables 4.19 et 4.20 présentent les résultats de la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) calculés à l'aide d'un maillage  $20 \times 20$  pour différentes valeurs de l'indice de puissance ( $p=0,1,2,5$ , et  $10$ ).

Ces résultats sont comparés aux solutions semi-analytiques obtenues par la méthode des éléments finis à frontière échelonnée (SBFEM) [137], aux solutions basées sur la théorie raffinée de déformation par cisaillement de Thai et Brian [153], ainsi qu'aux résultats numériques de Belounar et al. [78] utilisant la théorie de déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT). L'analyse des tableaux montre un excellent accord avec les références citées, et il est particulièrement constaté que les résultats obtenus correspondent de manière plus rapprochée aux solutions de la FSDT proposées par Belounar et al. [78].



**Figure 4. 16.** La variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) des plaques carrées ( $l/h=100$ ) avec différentes conditions aux limites sous compression uniaxiale.

**Tableau 4. 19.** Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous compression uniaxiale ( $N_{x0} = 1$ ,  $N_{y0} = 0$ ) et différentes conditions aux limites.

CL	l/h	Methode	p				
			0	1	2	5	10
SSSS	100	<b>HSBQP20</b>	<b>19.5537</b>	<b>9.7472</b>	<b>7.6060</b>	<b>6.4315</b>	<b>5.8579</b>
		QSBP20[78]	19.5534	9.7471	7.6058	6.4314	5.8576
		Thai and Brian[153]	19.6145	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752
	20	SBFEM[137]	19.6130	9.8333	7.6720	6.4208	5.9333
		<b>HSBQP20</b>	<b>19.2940</b>	<b>9.6379</b>	<b>7.5197</b>	<b>6.3437</b>	<b>5.7679</b>
		QSBP20[78]	19.2937	9.6378	7.5195	6.3436	5.7676
10	10	Thai and Brian[153]	19.3528	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668
		SBFEM[137]	19.2814	9.6771	7.5341	6.2771	5.7951
		<b>HSBQP20</b>	<b>19.5251</b>	<b>9.3119</b>	<b>7.2622</b>	<b>6.0844</b>	<b>5.5036</b>
	10	QSBP20[78]	18.5248	9.3118	7.2619	6.0843	5.5033
		Thai and Brian[153]	18.5785	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
		SBFEM[137]	18.3744	9.2449	7.1550	5.9836	5.4147
CSCS	100	<b>HSBQP20</b>	<b>37.5707</b>	<b>18.7346</b>	<b>14.6187</b>	<b>12.3568</b>	<b>11.2517</b>
		QSBP20[78]	37.5704	18.7345	14.6185	12.3567	11.2514
		Thai and Brian[153]	37.6718	18.7823	14.6546	12.3860	11.2788
	20	SBFEM[137]	38.1225	19.0888	14.8951	12.4588	11.5021
		<b>HSBQP20</b>	<b>35.7618</b>	<b>17.9647</b>	<b>14.0107</b>	<b>11.7470</b>	<b>10.6313</b>
		QSBP20[78]	35.7615	17.9646	14.0105	11.7469	10.6310
10	10	Thai and Brian[153]	36.1863	18.1547	14.1300	11.7889	10.6708
		SBFEM[137]	35.9817	18.0749	14.0109	11.5415	10.6115
		<b>HSBQP20</b>	<b>31.2925</b>	<b>16.0114</b>	<b>12.4712</b>	<b>10.2471</b>	<b>9.1389</b>
	10	QSBP20[78]	31.2922	16.0113	12.4710	10.2470	9.13862
		Thai and Brian[153]	32.2263	16.4430	12.7128	10.2507	9.1373
		SBFEM[137]	30.8280	16.8081	12.8042	10.1034	9.1579

**Tableau 4. 20.** Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous compression biaxiale (N<sub>x0</sub> = N<sub>y0</sub> = 1) et différentes conditions aux limites.

CL	l/h	Methode	p				
			0	1	2	5	10
SSSS	100	<b>HSBQP20</b>	<b>9.7769</b>	<b>4.8736</b>	<b>3.8031</b>	<b>3.2158</b>	<b>2.9291</b>
		QSBP20[78]	9.7767	4.8735	3.8029	3.2157	2.9288
		Thai and Brian[153]	9.8073	4.8888	3.8147	3.2254	2.9376
		SBFEM[137]	9.8065	4.9166	3.8360	3.2104	2.9667
		<b>HSBQP20</b>	<b>9.6470</b>	<b>4.8191</b>	<b>3.7600</b>	<b>3.1719</b>	<b>2.8841</b>
	20	QSBP20[78]	9.6468	4.8189	3.7597	3.1718	2.8838
		Thai and Brian[153]	9.6764	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834
		SBFEM[137]	9.6408	4.8386	3.7671	3.1386	2.8976
		<b>HSBQP20</b>	<b>9.2626</b>	<b>4.6561</b>	<b>3.6313</b>	<b>3.0423</b>	<b>2.7520</b>
		QSBP20[78]	9.2624	4.6559	3.6310	3.0422	2.7517
CSCS	100	Thai and Brian[153]	9.2893	4.6695	3.6315	3.0177	2.7264
		SBFEM[137]	9.1882	4.6232	3.5777	2.9422	2.7078
		<b>HSBQP20</b>	<b>18.7606</b>	<b>9.3535</b>	<b>7.2987</b>	<b>6.1705</b>	<b>5.6195</b>
		QSBP20[78]	18.7604	9.3533	7.2984	6.1704	5.6192
		Thai and Brian[153]	18.7707	9.3577	7.3015	6.1725	5.6213
	20	SBFEM[137]	19.2669	9.6322	7.5196	6.2904	5.8742
		<b>HSBQP20</b>	<b>18.1681</b>	<b>9.1027</b>	<b>7.1006</b>	<b>5.9705</b>	<b>5.4152</b>
		QSBP20[78]	18.1679	9.1025	7.1003	5.9704	5.4149
		Thai and Brian[153]	18.2972	9.1581	7.1345	5.9814	5.4262
		SBFEM[137]	18.4749	9.2686	7.1984	5.9569	5.5607
10	10	<b>HSBQP20</b>	<b>16.5680</b>	<b>8.4134</b>	<b>6.5567</b>	<b>5.4323</b>	<b>4.8737</b>
		QSBP20[78]	16.5678	8.4131	6.5564	5.4322	4.8734
		Thai and Brian[153]	16.9615	8.5866	6.6592	5.4546	4.8963
		SBFEM[137]	16.8014	8.4653	6.5017	5.2431	4.7921

#### **4.10.3.3 Les effets de différents paramètres sur la charge critique de flambage.**

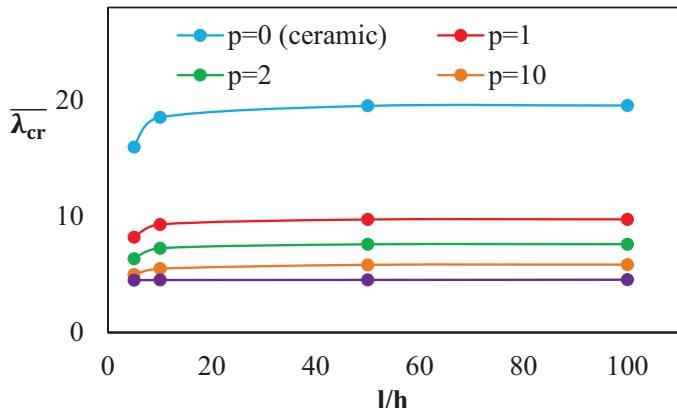
L'objectif principal de cet exemple est d'étudier l'influence de plusieurs paramètres, tels que l'indice de la loi de puissance  $p$ , le rapport d'aspect  $L/l$  et le rapport longueur/épaisseur  $l/h$ , sur la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) des plaques fonctionnellement graduées (FG). Les résultats sont illustrés dans les Figures 4.16 à 4.19. La Figure 4.16 présente la variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) pour des plaques carrées avec  $l/h=100$  et différentes conditions aux limites sous compression uniaxiale, en fonction de l'indice de la loi de puissance  $p$ . Il apparaît clairement que la charge critique diminue lorsque  $p$  augmente, ce qui s'explique par la réduction de la fraction volumique de céramique et, par conséquent, par la diminution de la rigidité en flexion de la plaque. De plus, cette figure montre que l'augmentation des contraintes aux limites renforce la rigidité de la plaque et entraîne une hausse de la charge critique de flambage non dimensionnelle.

La Figure 4.17 illustre la variation de ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur  $l/h$  pour une plaque carrée FG sous compression uniaxiale et pour différentes valeurs de l'indice  $p$ . Il est observé que la charge critique augmente avec l'accroissement de  $l/h$  jusqu'à  $l/h=10$ , puis tend à se stabiliser pour des valeurs supérieures.

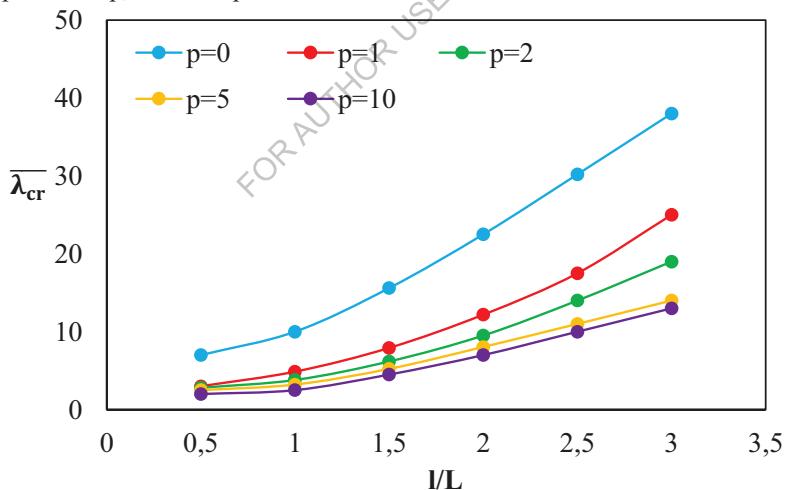
La Figure 4.18 montre l'évolution de la charge critique de flambage non dimensionnelle sous compression biaxiale en fonction du rapport longueur/largeur  $l/L$ , pour  $l/h=100$  et différents indices de gradient  $p$ . On remarque que la charge critique augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect  $l/L$ , mettant en évidence l'effet géométrique sur la stabilité de la plaque.

Enfin, les Figures 4.19 représentent la variation de ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) sous compression uniaxiale pour une plaque avec  $l=L=10h$  en fonction du rapport des modules ( $E_m/E_c$ ). Il ressort de ces résultats que la charge critique non dimensionnelle diminue lorsque le rapport ( $E_m/E_c$ )

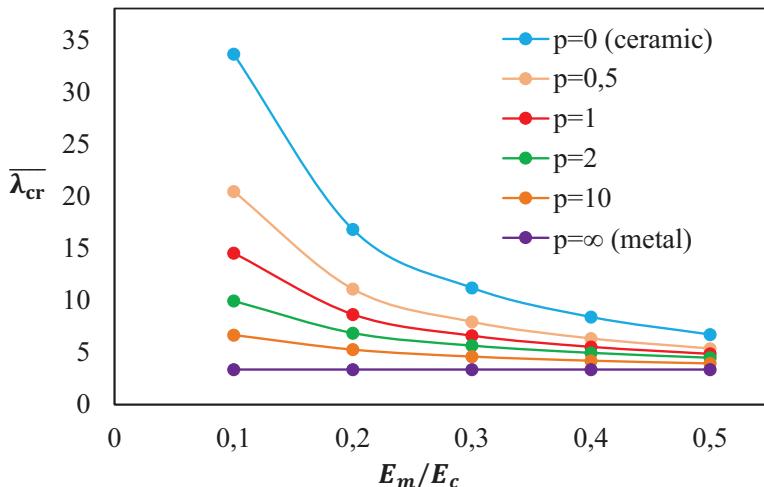
augmente, ce qui traduit la dépendance de la rigidité globale de la plaque à la variation des propriétés matérielles.



**Figure 4. 17.** La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur  $l/h$  pour une plaque carrée SSSS ( $L=l=100$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ , sous compression uniaxiale



**Figure 4. 18.** La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/largeur ( $l/L$ ) pour une plaque carrée simplement supportée ( $L=l=100$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ , sous compression biaxiale



**Figure 4.** La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) en fonction du rapport ( $E_m/E_c$ ) pour une plaque carrée SSSS ( $L=l=10$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ , sous compression biaxiale.

#### 4.11 Conclusion

Ce chapitre présente une étude approfondie du comportement statique, vibratoire et de flambement des plaques fonctionnellement graduées (FG) de différentes géométries, en utilisant la formulation d'élément fini HSBQP20, basée sur l'approche des déformations et la théorie de déformation d'ordre supérieur (HSDT). Les propriétés matérielles des plaques FG sont supposées varier selon l'épaisseur suivant une loi de puissance, et le concept de surface neutre est utilisé pour éliminer l'effet de couplage membrane-flexion. Les fonctions de déplacement des éléments, exprimées sous forme d'expressions d'ordre supérieur, reposent sur des fonctions de déformation supposées, respectant les modes de corps rigides et les équations de compatibilité. Le principe de Hamilton et l'énergie potentielle sont appliqués pour déterminer les matrices de rigidité, de masse et géométriques. Des études de convergence et de validation ont été réalisées afin de garantir la précision de la formulation. L'influence de plusieurs paramètres clés, tels que le rapport longueur/épaisseur  $l/h$ , l'indice de gradient  $p$ , le rapport d'aspect  $l/L$ , le type de chargement et les conditions aux limites,

a été analysée sur le comportement en flexion, la vibration libre et le flambement des plaques FG. Les principaux résultats sont les suivants:

- L'élément HSBQP20 est efficace et précis pour prédire les réponses en flexion, les fréquences naturelles et la stabilité des plaques FG.
- La déflexion non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) et la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ) augmentent avec l'indice de gradient p, tandis que ( $\bar{\sigma}_y$ ) et la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) diminuent.
- Les plaques entièrement céramiques ou métalliques présentent des contraintes identiques en raison de leur homogénéité.
- La déflexion diminue lorsque l/h augmente et augmente avec p.
- L'augmentation du rapport d'épaisseur réduit la déflexion et accroît les fréquences, en raison des effets de cisaillement transversal.
- L'accroissement de p réduit la rigidité des plaques FG, entraînant une augmentation de la déflexion et une diminution des fréquences naturelles.
- L'augmentation des contraintes aux bords accroît la rigidité en flexion, ce qui élève les fréquences naturelles et réduit la déflexion.
- Les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles augmentent avec le rapport l/h et les contraintes aux bords, mais diminuent avec p et le rapport l/L.
- La charge critique de flambement diminue lorsque le rapport des modules ( $E_m/E_c$ ) augmente.
- Enfin, la charge critique sous compression uniaxiale est plus élevée que sous compression biaxiale.

Dans l'ensemble, ces résultats confirment que l'élément HSBQP20 est fiable pour la modélisation de plaques FG de géométries variées, incluant des plaques carrées, biaises et circulaires, avec différentes conditions aux bords et indices de gradient, attestant de sa robustesse et de sa précision pour l'analyse statique, vibratoire et de flambement.

## Référence

- [1] D. Gay, Matériaux composites. in Collection Matériaux. Hermès, 1997.
- [2] T. W. Clyne et D. Hull, An Introduction to Composite Materials, 3<sup>e</sup> éd. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. doi: 10.1017/9781139050586.
- [3] J. M. Berthelot, Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures. Tec et Doc, 2005.
- [4] D. Zenkert et N. I. Fund, The Handbook of Sandwich Construction. in North European Engineering and Science Conference series. Engineering Materials Advisory Services, 1997.
- [5] T. Dubois, « Boeing 787: Les belles promesses de la légèreté », Science & vie, hors-série, n° 231, p. 22-29, 2005.
- [6] D. S. Vijayan, A. Sivasuriyan, P. Devarajan, A. Stefańska, Ł. Wodzyński, et E. Koda, « Carbon Fibre-Reinforced Polymer (CFRP) Composites in Civil Engineering Application—A Comprehensive Review », Buildings, vol. 13, n° 6, 2023, doi: 10.3390/buildings13061509.
- [7] R. E. Horton et J. E. McCarty, « Damage tolerance of composites », Engineered materials handbook., vol. 1, p. 259-267, 1993.
- [8] B. W. Smith, « Fractography for continuous fiber composites », Engineered materials handbook., vol. 1, p. 786-793, 1993.
- [9] M. B. Bever et P. E. Duwez, « On gradient composites », in Preliminary Reports, Memoranda and Technical Notes of the ARPA Materials Summer Conference, 1970, p. 117-140.
- [10]Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, et R. G. Ford, Functionally graded materials: design, processing and applications, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11]K. Ichikawa, Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts. Springer Science & Business Media, 2001.
- [12]P. G. Koppad, M. R. Ramesh, S. Joladarashi, S. T. Aruna, N. C. Reddy, et C. Siddaraju, « Gaseous Phase Processing Techniques for Functionally Graded Materials », in Functionally Graded Materials (FGMs), CRC Press, 2021, p. 49-76.
- [13]M. Koizumi, « FGM activities in Japan », Composites part b: engineering, vol. 28, n° 1-2, p. 1-4, 1997.

- [14] H. Ziou, « Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel », 2017.
- [15] M. Koizumi, « FGM activities in Japan », Composites Part B: Engineering, vol. 28, n° 1, p. 1-4, janv. 1997, doi: 10.1016/S1359-8368(96)00016-9.
- [16] Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, et R. G. Ford, « Graded microstructures », in Functionally graded materials: Design, processing and applications, Springer, 1999, p. 29-62.
- [17] S. Suresh et A. Mortensen, « Fundamentals of Functionally Graded Materials, IOM Commun », Ltd, Cambridge, 1998.
- [18] W. W. Chen, A. M. Rajendran, B. Song, et X. Nie, « Dynamic fracture of ceramics in armor applications », Journal of the American Ceramic Society, vol. 90, n° 4, p. 1005-1018, 2007.
- [19] P. M. Pandey, S. Rathee, M. Srivastava, et P. K. Jain, Functionally graded materials (FGMs): fabrication, properties, applications, and advancements. CRC Press, 2021.
- [20] D. K. Jha, T. Kant, et R. K. Singh, « A critical review of recent research on functionally graded plates », Composite structures, vol. 96, p. 833-849, 2013.
- [21] H.-S. Shen, Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. CRC press, 2016.
- [22] K. Wakashima, T. Hirano, et M. Niino, « Functionally Gradient Materials(Fgm) Architecture: A New Type of Ceramic-Metal Assemblage Designed for Hot Structural Components », 1990.
- [23] S.-H. Chi et Y.-L. Chung, « Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis », International Journal of Solids and Structures, vol. 43, n° 13, p. 3657-3674, 2006.
- [24] S. H. Chi et Y. L. Chung, « Cracking in sigmoid functionally graded coating », J Mech, vol. 18, n° 2002, p. 41-53p, 2002.
- [25] J.-H. Kim et G. H. Paulino, « Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials », International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 53, n° 8, p. 1903-1935, 2002.
- [26] R. W. Clough et E. L. Wilson, « Early finite element research at Berkeley », in Fifth US national conference on computational mechanics, 1999, p. 1-35.
- [27] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, et L. J. Topp, « Stiffness and deflection analysis of complex structures », journal of the Aeronautical Sciences, vol. 23, n° 9, p. 805-823, 1956.

- [28]R. D. Cook, Concepts and applications of finite element analysis. John wiley & sons, 2007.
- [29]A. BELOUNAR, « Eléments finis membranaires et flexionnels à champ de déformation pour l'analyse des structures », these Doctorat LMD en Génie Civil, Université Mohamed Khider – Biskra, Université Mohamed Khider – Biskra, 2019.
- [30]F. LNG, « A treatise on the mathematical theory of elasticity », Nature, vol. 105, n° 2643, p. 511-512, 1920.
- [31]G. Kirchhoff, « Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. », Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), vol. 1850, n° 40, p. 51-88, 1850.
- [32]J. N. Reddy, Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press, 2003.
- [33]E. Reissner, « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates », 1945, Consulté le: 7 janvier 2025.
- [34]R. Mindlin, « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates », 1951.
- [35]T. Kant et K. Swaminathan, « Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory », Composite structures, vol. 56, n° 4, p. 329-344, 2002.
- [36]M. Levinson, « An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates », Mechanics Research Communications, vol. 7, n° 6, p. 343-350, 1980.
- [37]K. H. Lo, R. M. Christensen, et E. M. Wu, « A high-order theory of plate deformation—Part 1: Homogeneous plates », 1977.
- [38]K. H. Lo, R. M. Christensen, et E. M. Wu, « A high-order theory of plate deformation—part 2: laminated plates », 1977.
- [39]M. V. V. Murthy, « An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates », 1981.
- [40]J. N. Reddy, « A simple higher-order theory for laminated composite plates », 1984.
- [41]E. Reissner, « On the derivation of boundary conditions for plate theory », Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, vol. 276, n° 1365, p. 178-186, 1963.
- [42]Y. M. Ghugal et R. P. Shimpi, « A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates », Journal of reinforced plastics and composites, vol. 21, n° 9, p. 775-813, 2002.

- [43] J. M. Whitney et C. T. Sun, « A higher order theory for extensional motion of laminated composites », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 30, n° 1, p. 85-97, 1973.
- [44] M. Touratier, « An efficient standard plate theory », *International journal of engineering science*, vol. 29, n° 8, p. 901-916, 1991.
- [45] K. Soldatos, « A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates », *Acta Mechanica*, vol. 94, n° 3, p. 195-220, 1992.
- [46] M. Karama, K. S. Afaq, et S. Mistou, « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity », *International Journal of solids and structures*, vol. 40, n° 6, p. 1525-1546, 2003.
- [47] H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, et E. A. Adda Bedia, « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory », *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 6, p. 113-121, 2010.
- [48] A. Tati, « A five unknowns high order shear deformation finite element model for functionally graded plates bending behavior analysis », *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 43, n° 1, p. 45, 2021.
- [49] D. G. Ashwell et A. B. Sabir, « Limitations of certain curved finite elements when applied to arches », *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 13, n° 2, p. 133-139, 1971.
- [50] D. G. Ashwell, A. B. Sabir, et T. M. Roberts, « Further studies in the application of curved finite elements to circular arches », *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 13, n° 6, p. 507-517, 1971.
- [51] A. B. Sabir et D. G. Ashwell, « A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems », *Journal of sound and vibration*, vol. 18, n° 4, p. 555-563, 1971.
- [52] A. B. Sabir et A. Lock, « A curved, cylindrical shell, finite element », *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 14, n° 2, p. 125-135, 1972.
- [53] D. G. Ashwell et A. B. Sabir, « A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions », *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 14, n° 3, p. 171-183, 1972.
- [54] A. B. Sabir, « Stiffness matrices for general deformation (out of plane and in-plane) of curved beam members based on independent strain functions », *The Math. of Finite Element and Applications II*, Academic Press, vol. 3, p. 411-421, 1975.

- [55] A. B. Sabir, « The application of the finite element method to the buckling of rectangular plates and plates on elastic foundations », Proc. Stravebnicky Casopsis Sav XXI, vol. 10, p. 689-712, 1973.
- [56] A. B. Sabir et D. G. Ashwell, « Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells », The mathematics of finite elements and applications III, p. 381-389, 1979.
- [57] A. B. Sabir et T. A. Charchaechi, « Curved rectangular and general quadrilateral shell finite elements for cylindrical shells », The math of finite element and application, p. 231-239, 1982.
- [58] A. B. Sabir et F. Ramadhan, « A shallow shell finite element for general shell analysis », in Variational methods in engineering, Proceedings of the 2nd International Conference, University of Southampton England, 1985, p. 48.
- [59] A. B. Sabir, « Strain based shallow spherical shell element », in Proc. Int. Conf on the Math. Finite elements and application, Brunel University, 1997.
- [60] A. B. Sabir et H. F. El-Erris, « A new conical shell finite element », in Computational Mechanics' 88: Volume 1, Volume 2, Volume 3 and Volume 4 Theory and Applications, Springer, 1988, p. 613-616.
- [61] I. S. Raju et A. K. Rao, « Stiffness matrices for sector elements. », AIAA Journal, vol. 7, n° 1, p. 156-157, 1969.
- [62] M. S. Djoudi, « Strain based finite elements for linear and geometrically non-linear analysis of structures. », University of Wales. Cardiff, 1990.
- [63] M. T. Belarbi et A. Charif, « Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan », Revue européenne des éléments finis, vol. 7, n° 4, p. 439-458, 1998.
- [64] A. B. Sabir et H. Y. Salhi, « A strain based finite element for general plane elasticity problems in polar coordinates », 1986.
- [65] A. B. Sabir et M. S. Djoudi, « A sector inplane finite element with a rotational degree of freedom », Struceng & Femcad-Structural Engineering and Optimization, p. 55-61, 1991.
- [66] C. Bouzrira, A. Sabir, et Z. Nemouchi, « A sector inplane finite element in polar coordinates with rotational degree of freedom », Archives of civil engineering, vol. 51, n° 4, p. 471-483, 2005.
- [67] L. Belounar et M. Guenfoud, « A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending », Thin-walled structures, vol. 43, n° 1, p. 47-63, 2005.
- [68] F. Boussem, A. Belounar, L. Belounar, et L. Fortas, « Strain-based mindlin finite element for vibration analysis of rectangular plates coupled

- with a fluid », Romanian Journal of Acoustics and Vibration, vol. 19, n° 2, p. 93-100, 2022.
- [69] A. Belounar, F. Boussem, M. N. Houhou, A. Tati, et L. Fortas, « Strain-based finite element formulation for the analysis of functionally graded plates », Archive of Applied Mechanics, vol. 92, n° 7, p. 2061-2079, 2022.
- [70] A. Belounar, S. Benmebarek, et L. Belounar, « Strain based triangular finite element for plate bending analysis », Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol. 27, n° 8, p. 620-632, 2020.
- [71] A. Belounar, S. Benmebarek, M. N. Houhou, et L. Belounar, « Static, free vibration, and buckling analysis of plates using strain-based Reissner–Mindlin elements », International Journal of Advanced Structural Engineering, vol. 11, p. 211-230, 2019.
- [72] L. Belounar et D. Hamadi, « Plate bending with a solid strain based element that satisfies the equilibrium equations », in 6 th European Solid Mechanics Conference. ESMC2006, Budapest,
- [73] A. Belounar, S. Benmebarek, M. N. Houhou, et L. Belounar, « Free vibration with mindlin plate finite element based on the strain approach », Journal of The Institution of Engineers (India): Series C, vol. 101, p. 331-346, 2020.
- [74] F. Boussem, A. Belounar, et L. Belounar, « Assumed strain finite element for natural frequencies of bending plates », World Journal of Engineering, vol. 19, n° 5, p. 620-631, 2022.
- [75] A. Belounar, L. Belounar, et A. Tati, « An assumed strain finite element for composite plates analysis », International Journal of Computational Methods, vol. 20, n° 01, p. 2250034, 2023.
- [76] B. Lamine et B. Sadoc, « A rectangular strain based finite element for plate bending analysis ».
- [77] F. Boussem et L. Belounar, « A Plate Bending Kirchhoff Element Based on Assumed Strain Functions. », Journal of Solid Mechanics, vol. 12, n° 4, 2020.
- [78] A. Belounar, F. Boussem, et A. Tati, « A novel C0 strain-based finite element for free vibration and buckling analyses of functionally graded plates », Journal of Vibration Engineering & Technologies, vol. 11, n° 1, p. 281-300, 2023.
- [79] L. Belounar et K. Guerraiche, « A new strain based brick element for plate bending », Alexandria Engineering Journal, vol. 53, n° 1, p. 95-105, 2014.
- [80] M. T. Belarbi et A. Charif, « Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des

- plaques minces et épaisses », Revue européenne des éléments finis, vol. 8, n° 2, p. 135-157, 1999.
- [81]T. Maalem, « Investigation numérique des problèmes de flexion de plaque par un élément fini parallélépipédique basé sur le modèle en déformation », Université de Constantine, Algérie, mémoire de Magistère, 2002.
- [82]D. Hamadi et T. Maalem, « Presentation of an Efficient Parallellepiped Finite Element Based on the Strain Approach" SBP8C », in Proceedings of the World Congress on Engineering, 2010, p. 27.
- [83]K. H. Guerraiche, L. Belounar, et L. Bouzidi, « A new eight nodes brick finite element based on the strain approach », Journal of Solid Mechanics, vol. 1, n° 1, p. 186, 2018.
- [84]A. Messai, L. Belounar, et T. Merzouki, « Static and free vibration of plates with a strain based brick element », European Journal of Computational Mechanics, p. 1-21, 2018.
- [85]A. MESSAI, « Contribution de l'approche en déformation dans l'analyse statique et dynamique des structures », Université Mohamed Khider-Biskra, 2019.
- [86]A. B. Sabir, « A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom », in Proceedings of the Second International Conference on Variational Methods in Engineering, Brebbia CA ed., Southampton University, 1985, p. 17-25.
- [87]A. B. Sabir et A. Sfendji, « Triangular and rectangular plane elasticity finite elements », Thin-walled structures, vol. 21, n° 3, p. 225-232, 1995.
- [88]M. T. Belarbi et M. Bourezane, « On improved Sabir triangular element with drilling rotation », Revue européenne de génie civil, vol. 9, n° 9-10, p. 1151-1175, 2005.
- [89]M. T. Belarbi et T. Maalem, « On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis », Revue Européenne des Eléments, vol. 14, n° 8, p. 985-997, 2005.
- [90]C. Rebiai et L. Belounar, « A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis », Archives of civil and mechanical engineering, vol. 13, p. 72-81, 2013.
- [91]C. Rebiai et L. Belounar, « An effective quadrilateral membrane finite element based on the strain approach », Measurement, vol. 50, p. 263-269, 2014.
- [92]L. Bouzidi, L. Belounar, et K. Guerraiche, « Presentation of a new membrane strain-based finite element for static and dynamic analysis »,

- International Journal of Structural Engineering, vol. 10, n° 1, p. 40-60, 2019.
- [93] A. Sabir, « A new class of finite elements for plane elasticité problems, CAFEM 7th, international Conf, structures », Mechanics. In reactor Technology Chicago, 1983.
- [94] T. Assas, M. Bourezane, M. Chenafi, et A. Tati, « Static and free vibration response of FGM plates using higher order shear deformation theory and strain-based finite element formulation », Mechanics Based Design of Structures and Machines, p. 1-30, 2024.
- [95] C. H. Thai, L. V. Tran, D. T. Tran, T. Nguyen-Thoi, et H. Nguyen-Xuan, « Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method », Applied Mathematical Modelling, vol. 36, n° 11, p. 5657-5677, 2012.
- [96] B. Bessaih, A. Lousdad, A. Lairedj, et A. Abdelmalek, « Higher order theory based analysis of laminated composite plates using functions trigonometric and trigonometric-hyperbolic », Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, vol. 42, n° 3, p. 822-830, 2024.
- [97] A. Belounar, S. Benmebarek, M. N. Houhou, et L. Belounar, « Free vibration with Mindlin plate finite element based on the strain approach », Journal of The Institution of Engineers (India): Series C, vol. 101, p. 331-346, 2020.
- [98] T. Assas, M. Bourezane, et M. Chenafi, « Static, free vibration, and buckling analysis of functionally graded plates using the strain-based finite element formulation », Archive of Applied Mechanics, vol. 94, n° 8, p. 2243-2267, 2024.
- [99] T. Assas, M. Bourezane, M. Chenafi, et A. Tati, « Static and free vibration response of FGM plates using higher order shear deformation theory and strain-based finite element formulation », Mechanics Based Design of Structures and Machines, p. 1-30, 2024.
- [100] A. Sadgui et A. Tati, « A novel trigonometric shear deformation theory for the buckling and free vibration analysis of functionally graded plates », Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol. 29, n° 27, p. 6648-6663, déc. 2022, doi: 10.1080/15376494.2021.1983679.
- [101] S. Srinivas et A. K. Rao, « Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates », International Journal of Solids and Structures, vol. 6, n° 11, p. 1463-1481, nov. 1970, doi: 10.1016/0020-7683(70)90076-4.

- [102] A. J. M. Ferreira, G. E. Fasshauer, R. C. Batra, et J. D. Rodrigues, « Static deformations and vibration analysis of composite and sandwich plates using a layerwise theory and RBF-PS discretizations with optimal shape parameter », Composite Structures, vol. 86, n° 4, p. 328-343, déc. 2008, doi: 10.1016/j.compstruct.2008.07.025.
- [103] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, R. N. Jorge, G. E. Fasshauer, et R. C. Batra, « Analysis of Functionally Graded Plates by a Robust Meshless Method », Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol. 14, p. 577-587, 2007.
- [104] N. J. PAGANG et S. J. HATFIELD, « Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites », AIAA Journal, vol. 10, n° 7, p. 931-933, juill. 1972, doi: 10.2514/3.50249.
- [105] G. Akhras, M. S. Cheung, et W. Li, « Finite strip analysis of anisotropic laminated composite plates using higher-order shear deformation theory », Computers & Structures, vol. 52, n° 3, p. 471-477, 1994.
- [106] G. Akhras, M. S. Cheung, et W. Li, « Finite strip analysis of anisotropic laminated composite plates using higher-order shear deformation theory », Computers & Structures, vol. 52, n° 3, p. 471-477, août 1994, doi: 10.1016/0045-7949(94)90232-1.
- [107] N. Grover, D. K. Maiti, et B. N. Singh, « A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates », Composite Structures, vol. 95, p. 667-675, janv. 2013, doi: 10.1016/j.compstruct.2012.08.012.
- [108] J. N. Reddy, « A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates », Journal of Applied Mechanics, vol. 51, n° 4, p. 745-752, déc. 1984, doi: 10.1115/1.3167719.
- [109] J. N. Reddy, Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press, 2003.
- [110] H. H. Phan-Dao, H. Nguyen-Xuan, C. Thai-Hoang, T. Nguyen-Thoi, et T. Rabczuk, « An edge-based smoothed finite element method for analysis of laminated composite plates », International Journal of Computational Methods, vol. 10, n° 01, p. 1340005, 2013.
- [111] F. Daghia, S. de Miranda, F. Ubertini, et E. Viola, « A hybrid stress approach for laminated composite plates within the first-order shear deformation theory », International Journal of Solids and Structures, vol. 45, n° 6, p. 1766-1787, 2008.
- [112] K. M. Liew, « solving the vibration of thick symmetric laminates by reissner/mindlin plate theory and the ritz method », Journal of Sound

- and Vibration, vol. 198, n° 3, p. 343-360, déc. 1996, doi: 10.1006/jsvi.1996.0574.
- [113] D. Ngo-Cong, N. Mai-Duy, W. Karunasena, et T. Tran-Cong, « Free vibration analysis of laminated composite plates based on FSDT using one-dimensional IRBFN method », Computers & Structures, vol. 89, n° 1, p. 1-13, janv. 2011, doi: 10.1016/j.compstruc.2010.07.012.
- [114] J. N. Reddy et N. D. Phan, « Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory », Journal of Sound and Vibration, vol. 98, n° 2, p. 157-170, janv. 1985, doi: 10.1016/0022-460X(85)90383-9.
- [115] H. Matsunaga, « Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory », Composite Structures, vol. 48, n° 4, p. 231-244, avr. 2000, doi: 10.1016/S0263-8223(99)00110-5.
- [116] K. M. Liew, « Solving the vibration of thick symmetric laminates by Reissner/Mindlin plate theory and the Ritz method », Journal of Sound and Vibration, vol. 198, n° 3, p. 343-360, 1996.
- [117] J. N. Reddy et N. Phan, « Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory », Journal of sound and vibration, vol. 98, n° 2, p. 157-170, 1985.
- [118] H. Matsunaga, « Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory », Composite Structures, vol. 48, n° 4, p. 231-244, 2000.
- [119] M. Marjanović et D. Vuksanović, « Layerwise solution of free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates with embedded delaminations », Composite Structures, vol. 108, p. 9-20, févr. 2014, doi: 10.1016/j.compstruct.2013.09.006.
- [120] A. K. Nayak, S. S. J. Moy, et R. A. Shenoi, « Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory », Composites Part B: Engineering, vol. 33, n° 7, p. 505-519, oct. 2002, doi: 10.1016/S1359-8368(02)00035-5.
- [121] M. Marjanović et D. Vuksanović, « Layerwise solution of free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates with embedded delaminations », Composite Structures, vol. 108, p. 9-20, 2014.
- [122] A. K. Nayak, S. S. J. Moy, et R. A. Shenoi, « Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory », Composites Part B: Engineering, vol. 33, n° 7, p. 505-519, 2002.

- [123] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, et R. M. N. Jorge, « Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions », Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, n° 39, p. 4265-4278, oct. 2005, doi: 10.1016/j.cma.2004.11.004.
- [124] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, et R. M. N. Jorge, « Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions », Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, n° 39-41, p. 4265-4278, 2005.
- [125] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, et H. Nguyen-Xuan, « Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory », Composite Structures, vol. 104, p. 196-214, oct. 2013, doi: 10.1016/j.compstruct.2013.04.002.
- [126] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, M. Abdel Wahab, et H. Nguyen-Xuan, « A generalized layerwise higher-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates based on isogeometric analysis », Acta Mechanica, vol. 227, n° 5, p. 1225-1250, mai 2016, doi: 10.1007/s00707-015-1547-4.
- [127] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, et T. Tran-Cong, « Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element », Journal of Sound and Vibration, vol. 313, n° 1, p. 205-223, juin 2008, doi: 10.1016/j.jsv.2007.11.043.
- [128] A. Tati, « Finite element analysis of thermal and mechanical buckling behavior of functionally graded plates », Archive of Applied Mechanics, vol. 91, n° 11, p. 4571-4587, nov. 2021, doi: 10.1007/s00419-021-02025-w.
- [129] M. R. Barati, « Dynamic response of porous functionally graded material nanobeams subjected to moving nanoparticle based on nonlocal strain gradient theory », Materials Research Express, vol. 4, n° 11, p. 115017, 2017.
- [130] Ç. Demir et Ö. Civalek, « A new nonlocal FEM via Hermitian cubic shape functions for thermal vibration of nano beams surrounded by an elastic matrix », Composite Structures, vol. 168, p. 872-884, 2017.
- [131] A. Sadgui et A. Tati, « A novel trigonometric shear deformation theory for the buckling and free vibration analysis of functionally graded plates », Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol. 29, n° 27, p. 6648-6663, 2022.

- [132] H. Hirane, M.-O. Belarbi, M. S. A. Houari, et A. Tounsi, « On the layerwise finite element formulation for static and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates », *Engineering with Computers*, p. 1-29, 2022.
- [133] R. P. Shimpi, H. Arya, et N. K. Naik, « A higher order displacement model for the plate analysis », *Journal of reinforced plastics and composites*, vol. 22, n° 18, p. 1667-1688, 2003.
- [134] A. M. Zenkour, « Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates », *Applied Mathematical Modelling*, vol. 30, n° 1, p. 67-84, 2006.
- [135] J. N. Reddy, « Analysis of functionally graded plates », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 47, n° 1-3, p. 663-684, janv. 2000.
- [136] V. T. Do, V. V. Pham, et H. N. Nguyen, « On the development of refined plate theory for static bending behavior of functionally graded plates », *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2020, n° 1, p. 2836763, 2020.
- [137] W. Ye, J. Liu, J. Zhang, F. Yang, et G. Lin, « A new semi-analytical solution of bending, buckling and free vibration of functionally graded plates using scaled boundary finite element method », *Thin-Walled Structures*, vol. 163, p. 107776, 2021.
- [138] H.-T. Thai et D.-H. Choi, « Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 75, p. 50-61, nov. 2013, doi: 10.1016/j.finel.2013.07.003.
- [139] W. Ye, J. Liu, J. Zhang, F. Yang, et G. Lin, « A new semi-analytical solution of bending, buckling and free vibration of functionally graded plates using scaled boundary finite element method », *Thin-Walled Structures*, vol. 163, p. 107776, juin 2021,
- [140] A. Belounar et L. Belounar, « An improved first-order strain-based finite element model with in-plane drilling rotation for static bending and free vibration analysis of functionally graded plates », *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, p. 1-32, 2025.
- [141] A. Tati, A. Belounar, et A. Sadgui, « Bending and free vibration analysis of FG circular plates using a five unknown high order shear deformation theory », *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 52, n° 10, p. 8116-8140, 2024.
- [142] S. S. Vel et R. C. Batra, « Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 272, n° 3-5, p. 703-730, 2004.

- [143] H.-T. Thai et D.-H. Choi, « A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates », Composite Structures, vol. 101, p. 332-340, 2013.
- [144] H. Matsunaga, « Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory », Composite structures, vol. 82, n° 4, p. 499-512, 2008.
- [145] J. L. Mantari, E. V. Granados, et C. Guedes Soares, « Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation », Composites Part B: Engineering, vol. 66, p. 407-419, nov. 2014, doi: 10.1016/j.compositesb.2014.05.026.
- [146] G. Jin, Z. Su, S. Shi, T. Ye, et S. Gao, « Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions », Composite Structures, vol. 108, p. 565-577, 2014.
- [147] L. S. D. Morley, « Skew plates and structures », (No Title), 1963.
- [148] I. Katili, J.-L. Batoz, I. J. Maknun, et A. M. Katili, « On static and free vibration analysis of FGM plates using an efficient quadrilateral finite element based on DSPM », Composite Structures, vol. 261, p. 113514, 2021.
- [149] X. Zhao, Y. Y. Lee, et K. M. Liew, « Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method », Journal of sound and Vibration, vol. 319, n° 3-5, p. 918-939, 2009.
- [150] L. V. Tran, A. J. M. Ferreira, et H. Nguyen-Xuan, « Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory », Composites Part B: Engineering, vol. 51, p. 368-383, 2013.
- [151] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, et M. Es' Haghi, « A novel approach for in-plane/out-of-plane frequency analysis of functionally graded circular/annular plates », International Journal of Mechanical Sciences, vol. 52, n° 8, p. 1025-1035, 2010.
- [152] B. S. Reddy, J. S. Kumar, C. E. Reddy, et K. V. K. Reddy, « Buckling analysis of functionally graded material plates using higher order shear deformation theory », Journal of composites, vol. 2013, n° 1, p. 808764, 2013.
- [153] H.-T. Thai et B. Uy, « Levy solution for buckling analysis of functionally graded plates based on a refined plate theory », Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 227, n° 12, p. 2649-2664, 2013.







**More  
Books!**

**yes**  
**I want morebooks!**

Buy your books fast and straightforward online - at one of world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at  
**[www.morebooks.shop](http://www.morebooks.shop)**

---

Achetez vos livres en ligne, vite et bien, sur l'une des librairies en ligne les plus performantes au monde!

En protégeant nos ressources et notre environnement grâce à l'impression à la demande.

La librairie en ligne pour acheter plus vite  
**[www.morebooks.shop](http://www.morebooks.shop)**



[info@omniscryptum.com](mailto:info@omniscryptum.com)  
[www.omniscryptum.com](http://www.omniscryptum.com)

OMNIScriptum

