

الجُمُهُورِيَّةِ الْجَزَائِيرِيَّةِ الْدِيمُقْرَاطِيَّةِ الشَّعُوبِيَّةِ  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Civil et Hydraulique  
Réf : .....



جامعة محمد خير بسكرة  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية والري  
..... المرجع :

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat LMD en Travaux Publics**  
**Option : Voies et Ouvrages D'art**

---

## Contribution de l'approche en déformation pour l'analyse des structures

---

Présentée par :  
**ASSAS Taqiyeddine**

Soutenue publiquement le : 27/06/2025

Devant le jury composé de :

Pr. Tati Abdelouhab	Professeur	Président	Université de Biskra
Pr. Bourezane Messaoud	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Pr. Mohamed-Ouejdi Belarbi	Professeur	Examinateur	Université de Biskra
Pr. Maalem Toufik	Professeur	Examinateur	Université de Batna 2

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## اهداء

إلى والدي العزيز، الذي كان رفيق دربي في مسيرة العلم، ومصدر القوة والإلهام. لقد كنت الداعم الأول لي في كل خطوة، و كنت النور الذي يضيء طريري.

إلى والدتي الغالية، التي أفضضت علي من حنانها ودفعه محبتها، والتي كانت دعواتها الحانية لي سراجاً أضاء لي الطريق. كانت يداكِ أماناً وسنداً لي، ولم تكن لحظة إلا وأنت تسهرين على راحتني وتدفعيني نحو النجاح. حفظك الله ورعاكِ.

إلى إخوتي الأعزاء: سفيان، نور الدين، وبلال، الذين كانوا دائمًا العون والسد في كل المحطات.

إلى أخواتي الغاليات: ياسمينة، أسمينة، وأمانى، اللاتي حملن في قلوبهن محبتهن لي ودعمنني في كل خطوة.

إلى خطيبتي وزوجتي المستقبلية عبير، التي كانت الحلم الجميل الذي يملأ حياتي بالسعادة والتفاؤل، والروح التي تجعلني أستمر وأبذل المزيد من الجهد.

إلى جميع أحبتني وأصدقائي.....

## Remerciements

Avant tout, **Alhamdulillah**, louange à Allah Tout-Puissant pour m'avoir accordé la force, la patience et la capacité de comprendre, d'apprendre et d'achever cette thèse. Merci Allah pour tout.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, le Professeur **Messaoud BOUREZANE**, pour sa disponibilité, ses conseils éclairés, son encadrement rigoureux et sa bienveillance tout au long de ce travail. Son accompagnement a été essentiel à la réalisation de cette recherche.

Je souhaite également remercier chaleureusement les membres du jury :

- Le Professeur **Abdelouhab TATI**, qui m'a fait l'honneur de présider cette soutenance,
- Ainsi que les Professeurs **Mohamed-Ouejdi BELARBI** et **Toufik MAALEM**, pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Leurs remarques pertinentes et leurs critiques constructives ont été d'une grande richesse et ont largement contribué à approfondir ma réflexion.

Mes remerciements vont également à mes chers collègues doctorants : Madjda CHENAFI, Soufiane BENOUNAS, Mohamed CHEDDAD, Imed GUEHLOUZ et Seyfedine BENABID, pour leur soutien, leur esprit de collaboration, les échanges fructueux et les précieux moments de convivialité partagés au cours de ce parcours.

À tous, je vous adresse mes remerciements les plus sincères.

## Publications et Communications

### Publications internationales

**T. Assas**, M. Bourezane, et M. Chenafi, « Static, free vibration, and buckling analysis of functionally graded plates using the strain-based finite element formulation », Arch. Appl. Mech., vol. 94, no 8, p. 2243-2267, **2024**.

**T. Assas**, M. Bourezane, M. Chenafi, et A. Tati, « Static and free vibration response of FGM plates using higher order shear deformation theory and strain-based finite element formulation », Mech. Based Des. Struct. Mach., p. 1-30, **2024**.

M. Chenafi , M. Bourezane, **T. Assas**, et A. Tati, « A novel strain-based approach with high-order shear deformation for enhanced static and buckling performance of functionally graded plates », Mech. Adv. Mater Struct, p. 1-20, **2025**.

### Communications internationales

**T. Assas**, M. Bourezane, et M. Chenafi, « Numerical modelling of a composite functionally graded material beam using the finite element method ». The first International Conference on materials sciences and applications (Hybrid) (ICMSA2023),08-09 February 2023, Khencela, Algeria

**T. Assas**, M. Bourezane, et M. Chenafi, « Contribution of the strain-based finite element for static bending and free vibration of the functionally graded plates ». 4th International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences ICEANS ,20-21 November 2023 at Konya/Turkey.

### Communications Nationales

**T. Assas**, M. Bourezane, M. Chenafi, et S. Benabid, « A novel C0 strain based finite element for static analyses of functionally graded plates ». 1ST National Conference on Mechanics and Materials NCMM'2023,06 - 07 December 2023, Boumerdes University-Algeria

**T. Assas**, M. Bourezane, M. Chenafi, et S. Benabid, « Buckling analysis of functionally graded material plates using the strain approach and first-order shear deformation theory elements ». The First National Conference Of Materials Sciences And Renewable Energy CMSRE23 on November 22-23, 2023 in Relizane, Algeria.

## Résumé

Le principal objectif de ce travail est de contribuer à la modélisation du comportement statique, du comportement en vibration libre et de la stabilité des plaques composites stratifiées et en matériaux à gradient de propriétés (FGMs).

**Tout d'abord**, un élément fini rectangulaire à quatre nœuds (SBRMP24), avec six degrés de liberté par nœud, basé sur l'approche en déformation et la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT), a été développé pour l'analyse statique, l'analyse des vibrations libres, et le flambement mécanique des plaques FGMs. La FSDT permet une description suffisamment précise de la réponse pour des plaques minces à moyennement épaisses. Toutefois, elle prédit des contraintes de cisaillement transverse constantes sur l'épaisseur, nécessitant ainsi un facteur de correction de cisaillement.

**Ensuite**, pour surmonter les limitations associées à la FSDT, un nouveau modèle de déformation par cisaillement trigonométrique (TrSDPT), à cinq inconnues, a été proposé pour l'analyse du comportement des plaques en FGMs. Ce modèle prend en compte la variation sinusoïdale des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites de cisaillement nul sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Un élément fini quadrilatérale à quatre nœuds, basé sur ce nouveau modèle (HSBQP20), a été formulé pour analyser le comportement statique, et le comportement dynamique des plaques en FGMs. Pour les deux éléments finis formulés, Le champ de déplacements contient des termes d'ordre supérieur, est basé sur des fonctions de déformation supposées satisfaisant les équations de compatibilité, la position de la surface neutre physique ont été prises en compte. Les performances et la précision des éléments développés ont été évaluées à travers des tests de validation. Par ailleurs, l'influence de divers paramètres sur le comportement des plaques en FGMs a également été étudiée.

**Enfin**, l'élément basé sur le modèle trigonométrique est testé pour l'analyse statique, l'analyse des vibrations libres des plaques composites stratifiées symétriques et antisymétriques, de différentes formes.

Les résultats obtenus ont été comparés à des solutions analytiques et numériques publiées dans la littérature, démontrant une excellente précision et une grande efficacité dans la prédiction du comportement en flexion ainsi que des vibrations libres des plaques composites stratifiées.

**Mots-clés** : Approche en déformation, matériaux à gradient fonctionnel (FGM), théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT), théorie de la déformation par cisaillement trigonométrique (TrSDPT), Statique, vibrations libres, flambement mécanique.

## Abstract

The main objective of this work is to contribute to the modeling of the static , free vibration, and stability behavior of laminated composite plates and Functionally Graded Materials (FGMs).

**Firstly**, a four-node rectangular finite element (SBRMP24), with six degrees of freedom per node, based on the strain approach and the First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), has been developed for static, free vibration, and mechanical buckling analysis of FGM plates. FSDT provides a sufficiently accurate description for thin to moderately thick plates. However, it predicts constant transverse shear stresses across the thickness, necessitating a shear correction factor.

**Next**, To overcome the limitations of FSDT, a new Trigonometric Shear Deformation Plate Theory (TrSDPT) model with five unknowns has been proposed for the analysis of FG plates behavior. This model accounts for the sinusoidal variation of transverse shear strains through the thickness and satisfies the zero shear stress boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate. A four-node quadrilateral finite element, based on this new model (HSBQP20), has been formulated to analyze the static and dynamic behavior of FGM plates. For both formulated finite elements, the displacement field includes higher-order terms, is based on assumed strain functions satisfying compatibility equations, and considers the position of the physical neutral surface.

The performance and accuracy of the developed elements have been evaluated through validation tests. Additionally, the influence of various parameters on the behavior of FGM plates have been also studied.

**Finally**, the element based on the trigonometric model has been also examined for static and free vibration analysis of symmetric and antisymmetric laminated composite plates of different shapes. The results were compared with published analytical and numerical solutions, demonstrating excellent accuracy and efficiency in predicting both the bending behavior and free vibrations of laminated composite plates

**Keywords:** Strain approach, Functionally graded materials (FGM), First-order shear deformation theory (FSDT), Trigonometric shear deformation plate theory (TrSDPT), Static analysis, Free vibration, Mechanical buckling.

## ملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو المساهمة في نمذجة السلوك الستاتيكي، وسلوك الاهتزازات الحرة، واستقرار الصفائح المركبة متعددة الطبقات والمواد ذات التدرج الوظيفي.(FGMs) .

أولاً، تم تطوير عنصر محدود مستطيل بأربعة عقد(SBRMP24) ، مع ست درجات من الحرية لكل عقدة، يعتمد على نظرية التسوب بالقصر من الدرجة الأولى(FSDT) ، وذلك لتحليل السلوك الستاتيكي(الساكن)، و الاهتزازات الحرة، والانتعاء



# Table des matières

آهادیه.....	3
<b>Remerciements.....</b>	<b>4</b>
<b>Publications et Communications.....</b>	<b>5</b>
<b>Résumé.....</b>	<b>5</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>6</b>
ملخص.....	7
<b>Chapitre 1 Les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel (FGM)...</b>	<b>22</b>
1.1    Introduction.....	22
1.2    Définition d'un matériau composite.....	22
1.3    Constituants des matériaux composites.....	23
1.3.1    Fibres.....	23
1.3.2    Matrices.....	24
1.3.3    Interphase .....	25
1.4    Classification des matériaux composites.....	25
1.4.1    Classification par la forme des renforts.....	25
1.4.2    Classification par la nature de la matrice .....	25
1.5    Architecture des matériaux composites.....	26
1.5.1    Monocouche .....	26
1.5.2    Stratifiés .....	26
1.5.3    Sandwichs.....	27
1.6    Applications des matériaux composites au génie civil.....	28
1.7    Les avantages et les inconvénients des matériaux composites.....	28
1.7.1    Les avantages .....	28
1.7.2    Les inconvénients .....	29
1.8    Mécanismes de rupture dans les matériaux composites .....	30
1.8.1    Rupture des stratifiés .....	30
1.9    Délaminage et matériaux à gradient fonctionnel (FGM) .....	33
1.9.1    Définition et historique des FGM.....	34
1.9.2    Conception des structures FGM .....	36
1.9.3    Le gradient.....	37
1.9.4    Domaine d'utilisation des FGMs .....	38
1.9.5    Caractéristiques effectives des matériaux à gradient fonctionnel. ....	39
1.9.6    Lois de variation des propriétés matérielles des plaques FGM : .....	41
1.10    Conclusion.....	45

<b>Chapitre 2 Revue des travaux antérieurs sur la modélisation des plaques FGM.....</b>	<b>46</b>
2.1    Introduction .....	46
2.2    Définition d'une plaque .....	47
2.2.1    Plaques isotropes .....	47
2.2.2    Plaques orthotropes .....	47
2.2.3    Plaques anisotropes .....	47
2.3    Modèles analytiques des plaques FGM .....	48
2.3.1    Théorie des plaques classiques (CPT).....	48
2.3.2    First-order shear deformation theory (FSDT) .....	49
2.3.3    Théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).....	50
2.3.4    Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques (RPT) : .....	53
2.4    Revue des études antérieures sur la modélisation des plaques FGM .....	54
2.4.1    Analyse statique de la plaque FG .....	54
2.4.2    Analyse des vibrations de la plaque FG .....	58
2.4.3    Analyse de flambage des plaques FG.....	59
2.5    Conclusion.....	62
<b>Chapitre 3 La méthode des éléments finis .....</b>	<b>63</b>
3.1    Introduction .....	63
3.2    Définition de la méthode des éléments finis .....	64
3.3    Étapes principales de la méthode des éléments finis (MEF) .....	64
3.3.1    Discrétisation du domaine .....	64
3.3.2    Choix des fonctions de forme.....	64
3.3.3    Détermination des propriétés de l'élément .....	65
3.3.4    Assemblage des matrices pour obtenir les systèmes d'équations .....	65
3.3.5    Imposition des conditions aux limites .....	65
3.3.6    Résolution du système d'équations .....	65
3.3.7    Post-traitement et calculs supplémentaires .....	66
3.4    Rappel de la MMC et de la MEF .....	66
3.4.1    Equations de base d'élasticité plane .....	66
3.4.2    La théorie des plaques du premier ordre (Reissner-Mindlin) .....	69
3.5    Les modèles éléments finis .....	77
3.5.1    Formulation en déplacement .....	77
3.5.2    Formulation d'équilibre .....	77
3.5.3    Formulation hybride .....	78
3.5.4    Formulation mixte .....	78
3.5.5    Formulation en déformation .....	78
3.6    Conclusion.....	91

## **Chapitre 4 Développement et validation d'éléments finis à champ de déformation pour l'analyse statique, vibration libre et flambement des plaques FGM ..... 92**

4.1	Introduction .....	92
4.2	Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini rectangulaire de plaque à champ de déformation basé sur la théorie FSDT .....	93
4.2.1	Champ de déplacement .....	93
4.2.2	Champ de déformation .....	93
4.2.3	Relations constitutives.....	94
4.2.4	Contraintes résultantes .....	95
4.2.5	Formulation de l'élément développé SBRMP24 .....	96
4.3	Validation de la SBRMP24- Résultats et discussions.....	104
4.3.1	Analyse statique .....	105
4.3.2	Analyse de la vibration libre d'une plaque FG .....	113
4.3.3	Analyse du flambage mécanique.....	118
4.4	Développement et validation numérique d'un nouvel élément fini quadrilatéral pour les plaques FGMs, basé sur l'approche en déformation et intégrant un nouveau modèle trigonométrique de déformation par cisaillement (TrSDPT) .....	126
4.4.1	Champ de déplacement .....	126
4.4.2	Cinématique .....	127
4.4.3	Equations constitutive .....	130
4.4.4	Les resultants de force et de moment .....	130
4.4.5	Formulation de l'élément HSBQP20 développé.....	131
4.4.6	Validation de la HSBQP20- Résultats et discussions .....	134
4.5	Conclusion.....	147

## **Chapitre 5 Développement et validation d'élément finis à champ de déformation pour l'analyse statique, et vibration libre des plaques composites ..... 149**

5.1	Introduction .....	149
5.2	Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini quadrilatère (HSBQLP20) de plaque composite à champ de déformation basé sur la théorie TrSDPT 150	150
5.2.1	Champ de déplacement et déformation .....	150
5.2.2	Équations constitutives.....	150
5.2.3	Les résultantes de force et de moment .....	152
5.3	Formulation de l'élément HSBQLP20 développé .....	153
5.4	Validation de la HSBQLP20 - Résultats et discussions .....	156
5.5	Conclusion.....	169

# Liste des figures

## Chapitre 1 Les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

<b>Figure 1.1.</b> Matériau composite [1].....	23
<b>Figure 1.2.</b> Organigramme de différents types de renforts [3].....	24
<b>Figure 1.3.</b> Organigramme de différentes natures de matrice [3].....	24
<b>Figure 1.4.</b> Classification des matériaux composites[6].....	25
<b>Figure 1.5.</b> Matériau composite monocouche[8].....	26
<b>Figure 1.6.</b> Constitution d'un stratifié[8].....	26
<b>Figure 1.7.</b> Désignation d'un stratifié[8].....	27
<b>Figure 1.8.</b> Illustration d'une structure sandwich[8].....	27
<b>Figure 1.9.</b> Mécanismes de rupture dans les stratifiés[6] .....	31
<b>Figure 1.10.</b> Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotrope, (b) Unidirectionnelle, (c) $\pm 45^\circ$ , (d) $0^\circ/90^\circ$ [15]. .....	31
<b>Figure 1.11.</b> Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement (a) $0^\circ/90^\circ$ tissu, (b) Unidirectionnelle, (c) Quasi-isotrope, (d) $0^\circ/90^\circ$ [15]. .....	32
<b>Figure 1.12.</b> Mécanismes de rupture dans un stratifié $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ [15].....	32
<b>Figure 1.13.</b> Les mécanismes d'endommagement accompagnant le délaminate [16]. .....	34
<b>Figure 1.14.</b> Configurations des composites et des FGM[6].....	35
<b>Figure 1.15.</b> Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -SUS304) [6].....	37
<b>Figure 1.16.</b> FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées[24].....	37
<b>Figure 1.17.</b> Changement schématique de la microstructure dans un profile FGM[26].....	38
<b>Figure 1.18.</b> Modèle analytique pour une couche de FGM : a) première approche : variation par morceaux b) deuxième approche : variation continue[20].....	39
<b>Figure 1.19.</b> Schéma de la microstructure à gradient continu avec des constituants métal-céramique :(a) Microstructure à gradient régulier ; (b) Vue agrandie et (c) FGM céramique-métal [32]. .....	40
<b>Figure 1.20.</b> Géométrie d'une plaque FGM. .....	42
<b>Figure 1.21.</b> Variations de la proportion volumique à travers l'épaisseur de la plaque FGM .43	
<b>Figure 1.22.</b> Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM...44	
<b>Figure 1.23.</b> Variation du module de Young E dans toute l'épaisseur de la plaque E-FGM.. 44	

<b>Chapitre 2 Synthèse des recherches antérieures sur la modélisation des plaques FGM</b>	
<b>Figure 2. 1.</b> Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (CPT) [42]. .....	49
<b>Figure 2. 2.</b> Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin (FSDT) [42].....	49
<b>Figure 2. 3.</b> Géométrie non déformée et déformée d'une plaque selon les CPT, FSDT et HSDT [42]. .....	51
<b>Chapitre 3 La méthode des éléments finis</b>	
<b>Figure 3. 1.</b> Corps solide soumis à de surfaces ( $\partial i$ ) et des forces de volume ( $fi$ )[163]. .....	66
<b>Figure 3. 2.</b> (a) Modèle en contrainte plane et (b) modèle en déformation plane[163].....	67
<b>Figure 3. 3.</b> Description d'une plaque[163]. .....	69
<b>Figure 3. 4.</b> Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène[163]. .....	71
<b>Figure 3. 5.</b> Efforts résultants[163]. .....	71
<b>Figure 3. 6.</b> Couche orthotrope.....	74
<b>Figure 3. 7.</b> Section d'une plaque stratifiée symétrique .....	76
<b>Figure 3. 8.</b> Coordonnées et point nodal pour l'élément SBRIE [211].....	84
<b>Figure 3. 9.</b> Elément SBRIEIR avec rotation dans le plan[204]. .....	86
<b>Figure 3. 10.</b> Géométrie de l'élément de plaque quadrilatéral Reissner–Mindlin SBQMP[193]. .....	88
<b>Chapitre 4 Développement et validation d'éléments finis à champ de déformation pour l'analyse statique, vibration libre et flambement des plaques fonctionnellement graduées</b>	
<b>Figure 4. 1.</b> Position du plan neutre de la plaque FGM.....	96
<b>Figure 4. 2.</b> Élément de plaque rectangulaire (SBRMP24).....	97
<b>Figure 4. 3.</b> Variation de la contrainte non dimensionnelle dans le plan d'une plaque carrée FG pour différentes valeurs de l'indices de gradient p ( $l/h = 10$ ). .....	109
<b>Figure 4. 4.</b> Variation de la contrainte non dimensionnelle de cisaillement dans le plan $\tau_{xy}$ d'une plaque carrée FG pour différentes valeurs de l'indices de gradient p ( $l/h = 10$ ). ....	110
<b>Figure 4. 5.</b> L'influence des rapports ( $l/h$ ) sur le déplacement non dimensionnelle ( $w$ ) des plaques carrées soumises à différentes conditions aux limites ( $p =1$ ).....	112
<b>Figure 4. 6.</b> L'influence de l'indice de gradient (p) sur le déplacement non dimensionnelle ( $w$ ) des plaques carrées soumises à différentes conditions aux limites ( $l/h =10$ ). ....	112
<b>Figure 4. 7.</b> L'effet du rapport longueur/épaisseur ( $l/ h$ ) sur la fréquence naturelle non dimensionnelle pour une plaque FG carrée avec différentes conditions aux limites et $p =2$ . 116	
<b>Figure 4. 8.</b> L'effet de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence naturelle non dimensionnelle ( $\omega$ ) pour une plaque FG carrée ( $l/h =20$ ) avec différentes conditions aux limites.	

.....	117
<b>Figure 4. 9.</b> L'effet du rapport d'aspect $l/L$ sur la fréquence naturelle non dimensionnelle $\omega$ pour une plaque FG rectangulaire simplement supportée (SSSS) ( $l/h = 10$ ).....	118
<b>Figure 4. 10.</b> La plaque rectangulaire soumise à des charges en plan.....	118
<b>Figure 4. 11.</b> L'effet de l'indice de loi de puissance $p$ sur la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) d'une plaque carrée simplement supportée ( $L = l = 100h$ ) sous différents types de charges. .....	121
<b>Figure 4. 12.</b> La variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) des plaques carrées ( $l/h=100$ ) avec différentes conditions aux limites sous compression uniaxiale. ....	124
<b>Figure 4. 13.</b> La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur $l/ h$ pour une plaque carrée simplement supportée ( $L=l=100$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance $p$ , sous compression uniaxiale .....	125
<b>Figure 4. 14.</b> La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/largeur ( $l/L$ ) pour une plaque carrée simplement supportée ( $L=l=100$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance $p$ , sous compression biaxiale. ....	125
<b>Figure 4. 15.</b> La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) en fonction du rapport ( $E_m/E_c$ ) pour une plaque carrée simplement supportée ( $L=l=10$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance $p$ , sous compression biaxiale.....	126
<b>Figure 4. 16.</b> Élément de plaque FG quadrilatère (HSBQP20). ....	132
<b>Figure 4. 17.</b> Plaques FG carrées soumises à des distributions de charges uniformes et sinusoïdales. ....	134
<b>Figure 4. 18.</b> Variation de la contrainte de cisaillement transverse ( $\tau_{xz}$ ) d'une plaque carrée FG soumise à une charge UDL avec plusieurs indices de gradient ( $p$ ).....	135
Figure 4. 19. Variations du déplacement non dimensionnelle ( $w$ ) d'une plaque carrée FG sous charge uniformément répartie (UDL) avec plusieurs rapports ( $l/h$ ).....	139
<b>Figure 4. 20.</b> Variation de la contrainte de traction dans le plan ( $\sigma_x$ ) d'une plaque carrée FG soumise à une charge uniformément répartie (UDL) pour différents rapports ( $l/h$ ). ....	140
<b>Figure 4. 21.</b> Variation de la contrainte de cisaillement dans le plan ( $\tau_{xy}$ ) d'une plaque carrée FG soumise à une charge uniformément répartie (UDL) pour différents rapports ( $l/h$ ). ....	140
<b>Figure 4. 22. (a), (b)</b> Plaques carrées et biaises avec un maillage NxN d'éléments. <b>(c), (d)</b> , et	

**(e)** plaques circulaires avec différents maillages comportant respectivement 60, 272 et 588 éléments quadrilatéraux..... 141

**Figure 4. 23.** L'effet du rapport de forme ( $L/l$ ) sur les fréquences naturelles non dimensionnelle ( $\beta$ ) des plaques rectangulaires Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ( $l/h = 10$ ). ..... 142

**Figure 4. 24.** Les trois premiers modes de déformation de la plaque biaisée Al/ZrO<sub>2</sub>-1 simplement supportée avec ( $p = 2$ ,  $a/h = 10$ ,  $\theta = 45^\circ$ ). ..... 145

**Figure 4. 25.** Les trois premières formes modales d'une plaque circulaire ( $h/R = 0.1$ )..... 146

## **Chapitre 5 Développement et validation d'élément finis à champ de déformation pour l'analyse statique, et vibration libre des plaques composites**

**Figure 5. 1.** (a) Plaque orthotrope. (b) Désignation de la plaque stratifiée. (c) Disposition et numérotation des couches pour une plaque stratifiée typique..... 151

**Figure 5. 2.** Quadrilateral laminated composite plate element (HSBQLP20). ..... 154

**Figure 5. 3.** Variation des contraintes normales et des contraintes dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée [0°/90°/90°/0°] (modèle M1) avec un rapport  $a/h = 10$ . . 158

**Figure 5. 4.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée [0°/90°/90°/0°] (modèle M1) avec un rapport  $a/h = 10$ ..... 159

**Figure 5. 5.** Géométrie d'une plaque composite stratifiée symétrique..... 159

**Figure 5. 6.** Convergence du déplacement centrale normalisée ( $w$ ) des plaques composites carrées à plis croisés soumises à une charge uniformément répartie (UDL). ..... 160

**Figure 5. 7.** Les six premières formes modales d'une plaque circulaire stratifiée encastrée [0°/90°/0°] ( $a/b = 1$  et  $a/h = 10$ ) ..... 163

**Figure 5. 8.** Effet du rapport côté/épaisseur  $a/h$  sur la fréquence propre adimensionnelle ( $\beta$ ) d'une plaque carrée à plis croisés simplement appuyée [0°/90°/90°/0°]. ..... 164

**Figure 5. 9.** L'effet du nombre de couches et du degré d'orthotropie ( $E_1/E_2$ ) sur les fréquences fondamentales adimensionnelles ( $\Omega$ ) ( $a/h=5$ )..... 165

**Figure 5. 10.** Géométrie de la plaque stratifiée en biais. .... 166

**Figure 5. 11.** Les quatre premières formes modales d'une plaque biaisée à cinq couches encastrée [90°/0°/90°/0°/90°] avec un angle d'inclinaison  $\theta = 30^\circ$  et un rapport  $a/h = 10$ . ... 167

**Figure 5. 12.** Géométrie et maillage d'éléments d'une plaque elliptique encastrée. .... 168

**Figure 5. 13.** Six formes modales d'une plaque elliptique stratifiée à quatre couches [0°/90°/0°] encastrée avec  $a/h = 10$ ..... 168

## Liste des tableaux

### Chapitre 4 Développement et validation d'éléments finis à champ de déformation pour l'analyse statique, vibration libre et flambement des plaques fonctionnellement graduées

<b>Tableau 4. 1.</b> Les propriétés des matériaux utilisés dans les plaques FGM .....	105
<b>Tableau 4. 2.</b> Conditions aux limites des plaques .....	105
<b>Tableau 4. 3.</b> Déplacement et contraintes non dimensionnelle pour une plaque carrée isotrope ( $l/h = 10$ ) soumise à une charge uniformément répartie (UDL).....	106
<b>Tableau 4. 4.</b> Déplacement non dimensionnelle ( $w$ ) et contraintes des plaques carrées en FG avec différents rapports de forme ( $l/h$ ). ....	107
<b>Tableau 4. 5.</b> Déplacements et contraintes non dimensionnelle d'une plaque carrée FG SSSS ( $l/h = 10$ ) sous charge UDL.....	109
<b>Tableau 4. 6.</b> Déplacement non dimensionnel ( $w$ ) des plaques carrées Al/ZrO <sub>2</sub> sous charges uniformes avec ( $l/h = 5$ ). ....	111
<b>Tableau 4. 7.</b> Déplacement non dimensionnelle ( $w$ ) des plaques carrées FG pour différentes conditions aux limites.....	113
<b>Tableau 4. 8.</b> Fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\beta$ ) des plaques carrées Al*/ZrO <sub>2</sub> . ....	114
<b>Tableau 4. 9.</b> Fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\beta$ ) des plaques carrées Al*/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . ....	115
<b>Tableau 4. 10.</b> Fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\omega$ ) des plaques carrées Al*/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	117
<b>Tableau 4. 11.</b> Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ( $l/L = 1$ ).....	120
<b>Tableau 4. 12.</b> Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) d'une plaque rectangulaire Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ( $l/L = 2$ ). ....	120
<b>Tableau 4. 13.</b> Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> sous compression uniaxiale et différentes conditions aux limites. ....	122
<b>Tableau 4. 14.</b> Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\lambda_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> sous compression biaxiales et différentes conditions aux limites.....	123
<b>Tableau 4. 15.</b> Déplacement non dimensionnelle (w) et contraintes des plaques carrées FG sous charge sinusoïdale distribuée (SDL) pour différents indices de loi de puissance (p). ....	136
<b>Tableau 4. 16.</b> Déplacement non dimensionnelle (w) et contraintes des plaques carrées FG sous charge uniformément répartie (UDL) pour différents indices de loi de puissance (p). ....	137

<b>Tableau 4. 17.</b> Le déplacement non dimensionnel ( $w$ ) et les contraintes des plaques carrées FG avec divers rapports de formes (l/h).....	138
<b>Tableau 4. 18.</b> Fréquences naturelles non dimensionnelle ( $\beta$ ) des plaques rectangulaires Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	143
<b>Tableau 4. 19.</b> Les trois premières fréquences naturelles normalisées $\omega$ d'une plaque biaisée Al/ZrO <sub>2</sub> -1, à la fois simplement supportée (SSSS) et encastrée (CCCC), avec un angle d'inclinaison $\theta = 45^\circ$ .....	144
<b>Tableau 4. 20.</b> Les trois premières fréquences non dimensionnelles ( $\omega$ ) d'une plaque circulaire encastrée (p =1).....	146
<b>Chapitre 5 Développement et validation d'élément finis à champ de déformation pour l'analyse statique, et vibration libre des plaques composites</b>	
<b>Tableau 5. 1 .</b> Propriétés des matériaux .....	156
<b>Tableau 5. 2.</b> Déplacement et contraintes normalisés d'une plaque carrée stratifiée à quatre couches [0°/90°/90°/0°] soumise à une charge sinusoïdale (SDL). .....	158
<b>Tableau 5. 3.</b> Déplacement centrale normalisée ( $w$ ) de plaques carrées à plis croisés simplement appuyées soumises à des charges uniformément réparties .....	160
<b>Tableau 5. 4.</b> Fréquences non dimensionnelles ( $\omega$ ) de plaques carrées à plis croisés encastrées, pour différents rapports longueur/épaisseur.....	162
<b>Tableau 5. 5.</b> Effet du rapport longueur /épaisseur sur la fréquence propre adimensionnelle ( $\beta$ ) d'une plaque carrée à plis croisés simplement appuyée [0°/90°/90°/0°]. .....	163
<b>Tableau 5. 6.</b> Fréquence propre adimensionnelle ( $\Omega$ ) de la plaque carrée composite SSSS avec différentes couches orthotropes et rapports de modules. .....	165
<b>Tableau 5. 7.</b> Fréquences propres adimensionnelles ( $\omega$ ) d'une plaque stratifiée à plis croisés [90°/0°/90°/0°/90°] simplement appuyée et encastrée, pour différents angles. .....	166
<b>Tableau 5. 8.</b> Fréquences propres adimensionnelles ( $\omega$ ) d'une plaque stratifiée à plis croisés [45°/-45°/45°/-45°/45°] simplement appuyée et encastrée, pour différents angles.....	167
<b>Tableau 5. 9.</b> Fréquences adimensionnelles $\omega$ d'une plaque elliptique encastrée à trois couches [0°/90°/0°]. .....	168

# Notations

- a** : Longueur de la plaque  
**p** : exposant de fraction volumique (ou un indice de loi de puissance).  
**k** : Facteur de correction du cisaillement  
 **$\rho$**  : Densité du matériau  
**v** : Coefficient de Poisson  
**E** : Module d'Young  
**h** : Épaisseur de la plaque  
 **$\theta$** : Angle d'inclinaison de la plaque biaisée  
**D** : Rigidité en flexion  
**G** : Module de cisaillement  
 **$\omega$**  : Fréquence fondamentale  
 **$\bar{\omega}$** : Fréquence propre adimensionnelle  
 **$\lambda_{cr}$** : Charge critique de flambage  
 **$\alpha_i$** : Constantes d'interpolation du déplacement  
**U, V, W** : Déplacements selon les axes **x**, **y** et **z**, respectivement  
 **$\beta_x, \beta_y$**  : Rotations autour des axes **y** et **x**, respectivement  
 **$\theta_x, \theta_y, \theta_z$** : Rotations autour des axes **x**, **y** et **z**, respectivement  
**x, y, z** : Coordonnées dans le système cartésien  
**[K<sub>e</sub>]** : Matrice de rigidité élémentaire  
**[M<sup>e</sup>]** : Matrice de masse élémentaire  
**[K<sup>e</sup><sub>g</sub>]** : Matrice géométrique élémentaire  
**[K]** : Matrice de rigidité de la structure  
**[M]** : Matrice de masse de la structure  
**[K<sub>g</sub>]** : Matrice géométrique de la structure  
**[C]** : Matrice de transformation  
**[P]** : Matrice d'interpolation des déplacements  
**[Q]** : Matrice d'interpolation des déformations  
**[G]** : Matrice géométrique des déformations  
**{F}** : Vecteur des forces nodales globales  
**{q}** : Vecteur des déplacements nodaux de la structure  
**{q<sub>e</sub>}** : Vecteur des déplacements nodaux élémentaires

# Introduction générale

## 1. Introduction

Les progrès scientifiques dans le domaine de la technologie des matériaux et le développement continu des industries modernes ont conduit à une demande constante de matériaux toujours plus avancés, possédant les propriétés et qualités nécessaires.

Le besoin en matériaux avancés avec des propriétés spécifiques a entraîné une transformation progressive des matériaux à partir de leur état de base (monolithique) vers des composites.

Un matériau composite est une catégorie de matériau avancé, constitué de deux matériaux ou plus de nature différente, dont la combinaison confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Il est composé d'une matrice dans laquelle sont incorporées des particules ou des fibres appelées "renfort". Ainsi, des propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids et bien d'autres encore sont améliorées.

Cependant, un problème majeur des matériaux composites conventionnels, qui sont généralement constitués de couches (c'est-à-dire des composites stratifiés), est la discontinuité des propriétés et des contraintes aux interfaces. Cette discontinuité entraîne de fortes concentrations de contraintes, des fissures dans la matrice et un problème sérieux de délamination en raison de la transition brusque de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Une solution pour surmonter ces effets indésirables est l'utilisation des Matériaux à Gradient de Fonctionnalité (FGM - Functionally Graded Materials), dans lesquels les propriétés du matériau varient de manière continue. Cela est obtenu en modifiant progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, généralement uniquement dans la direction de l'épaisseur. Le FGM élimine les interfaces nettes présentes dans les matériaux composites et à l'origine de défaillances. Il les remplace par une interface à gradient qui permet une transition douce d'un matériau à un autre. Une caractéristique unique du FGM est la possibilité d'adapter un matériau à une application spécifique.

Les FGMS existent naturellement sous forme d'os, de dents, etc., la nature ayant conçu ces matériaux pour répondre à leurs exigences fonctionnelles. Cette idée est imitée de la nature pour résoudre des problèmes d'ingénierie, de la même manière que le réseau neuronal artificiel s'inspire du cerveau humain. Les FGMS ont été conçus initialement au début des années 1980 par des scientifiques japonais, en tant que matériaux de barrière thermique pour des applications structurelles aérospatiales et des réacteurs de fusion. Aujourd'hui, ils trouvent des applications

dans divers domaines de l'ingénierie en tant qu'éléments structurels tels que des plaques, poutres, coques, etc., par exemple dans les structures aérospatiales, les industries de production d'énergie, les pièces de machines, etc.

Ces nouvelles classes de matériaux ont récemment suscité un intérêt considérable, motivant ainsi l'importance d'une compréhension approfondie de leur comportement.

Les FGMs présentent des comportements complexes nécessitant des outils numériques sophistiqués pour leur analyse. La méthode des éléments finis s'est imposée ces dernières années comme une méthode puissante et efficace, ce qui permet son utilisation étendue dans l'analyse du comportement complexe de ce type de matériaux.

En général, le comportement des éléments structurels réalisés en FGMs, comme les plaques, peut être décrit par des théories tridimensionnelles (3D) ou bidimensionnelles (2D). L'approche 3D est plus précise, mais difficile à mettre en œuvre. Ainsi, l'approche 2D est largement utilisée en raison de sa simplicité et de son faible coût de calcul. Pendant des décennies, les théories classiques et celles de la déformation par cisaillement de premier ordre ont été utilisées pour l'analyse du comportement des composants en structure FG. Bien que ces théories fournissent des résultats relativement précis, elles montrent leurs limites lorsqu'il s'agit d'évaluer les contraintes de cisaillement transversales et nécessitent des facteurs de correction de cisaillement.

Avec les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (Higher-Order Shear Deformation Theories, HSDTs), on obtient une représentation plus complète des contraintes/déformations de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque, et la condition aux limites de contrainte nulle de cisaillement est satisfaite aux surfaces supérieure et inférieure, car le champ de déplacement prend en compte des termes d'ordre supérieur, et aucun facteur de correction de cisaillement n'est nécessaire. Il convient de souligner que les résultats dérivés des HSDTs sont plus précis que ceux obtenus par les théories de cisaillement de premier ordre (FSDT).

## **2. Objectif de la thèse**

L'objectif principal de cette thèse est de contribuer à la modélisation du comportement statique, des vibrations libres et du flambement mécanique des plaques composites stratifiées et en matériaux à gradient de propriétés (FGMs) par le développement nouveaux modèles d'éléments finis basés sur l'approche de déformation. Ces modèles doivent répondre à des exigences spécifiques, telles que :

- Garantir un bon comportement en flexion des plaques
- Réduire la sensibilité aux distorsions de forme, afin de garantir une meilleure précision même avec des maillages de forme non régulière.
- Minimiser ou éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse (shear locking), pour permettre une déformation réaliste des éléments dans les structures minces.
- L'amélioration de la précision sans augmenter le nombre des nœuds

### **3. Plan de la thèse**

Pour atteindre l'objectif visé, le travail sera divisé en cinq chapitres suivant le plan ci-dessous :

**Le premier chapitre** est consacré à l'introduction des matériaux composites et des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), en présentant leurs architectures, leurs utilisations dans le domaine du génie civil, ainsi que leurs avantages et inconvénients. Ce chapitre aborde également des sujets clés tels que le délaminage des matériaux composites et la conception des structures FGM, tout en mettant en lumière leur historique, leurs domaines d'utilisation et les lois de distribution des propriétés matérielles dans les plaques FGM.

**Le deuxième chapitre** est consacré à un rappel des théories principales des plaques employées pour l'analyse et la modélisation des plaques FGM. Il comprend également une revue des recherches récentes dans la littérature concernant les analyses statiques, les vibrations libres et le flambage des plaques FGM.

**Le troisième chapitre** est consacré aux principes de base de la méthode des éléments finis, ainsi qu'à une recherche bibliographique sur les éléments finis développés à partir de diverses formulations, notamment les éléments finis à champ de déformation

**Le quatrième chapitre** est dédié au développement et à la formulation des éléments finis pour la modélisation des plaques, en utilisant l'approche en déformation pour la modélisation du comportement statique, des vibrations libres et du flambement des plaques en matériau à gradient fonctionnel (FGM).

**Le Cinquième chapitre** est consacré au développement et à la formulation d'élément quadratique à quatre nœuds avec cinq inconnues basées sur le modèle trigonométrique, en adoptant l'approche en déformation pour la modélisation du comportement statique et des vibrations libres des plaques en matériaux composites stratifiés.

**Enfin,** le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

# Chapitre 1

## Les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

### 1.1 Introduction

Les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) représentent des avancées significatives dans le domaine des sciences des matériaux, offrant des propriétés et des performances inégalées par rapport aux matériaux traditionnels. Ce chapitre a pour objectif d'explorer ces deux types de matériaux, en mettant en lumière leurs compositions, leurs mécanismes de fabrication et leurs applications.

Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs composants distincts, généralement une matrice et un renfort, qui se combinent pour offrir des caractéristiques supérieures, telles qu'une résistance accrue, une légèreté et une durabilité améliorée. Leur polyvalence leur permet d'être utilisés dans divers secteurs, allant de l'aéronautique à l'automobile, en passant par le bâtiment et l'électronique.

D'autre part, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) se distinguent par leur composition hétérogène, qui varie progressivement dans l'espace. Cette gradation confère aux FGM des propriétés mécaniques, thermiques et électriques optimisées, adaptées à des conditions environnementales spécifiques. Leur utilisation croissante dans des applications critiques, telles que les structures aérospatiales et les implants biomédicaux, souligne leur importance dans l'innovation matérielle.

Ce chapitre abordera d'abord les principes fondamentaux et les techniques de fabrication des matériaux composites, suivis d'une analyse détaillée des FGM, en mettant en avant leurs avantages et leurs défis. Cette exploration fournira une base solide pour comprendre comment ces matériaux peuvent transformer les industries modernes et répondre aux exigences de performance croissantes.

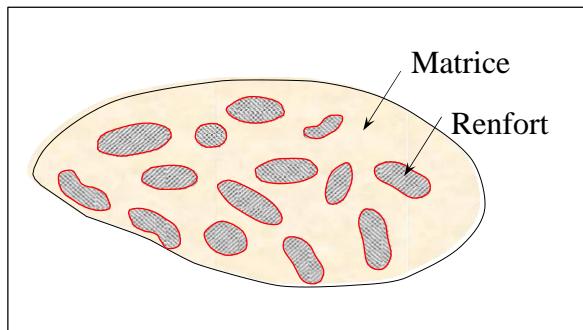
### 1.2 Définition d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes, dont l'association vise à créer un matériau aux performances supérieures à celles des composants pris séparément. En général, un composite se compose d'une ou plusieurs phases discontinues, appelées renforts, dispersées dans une phase continue, nommée matrice. Les renforts, qui peuvent se présenter sous forme de fibres continues ou discontinues, assurent

la résistance mécanique du matériau face aux efforts. La matrice, quant à elle, maintient la cohésion entre les renforts et répartit les sollicitations mécaniques. Cette structure permet d'optimiser des propriétés telles que la résistance, la légèreté et la durabilité [1].

### 1.3 Constituants des matériaux composites

Le matériau composite est composé d'une protection appelée « matrice » et d'une ossature désignée par « renfort » (Figure 1.1). Les renforts fibreux sont agencés de manière stratégique dans la matrice, qui préserve leur disposition géométrique et leur permet de transmettre les sollicitations mécaniques.



**Figure 1.1.** Matériau composite [1].

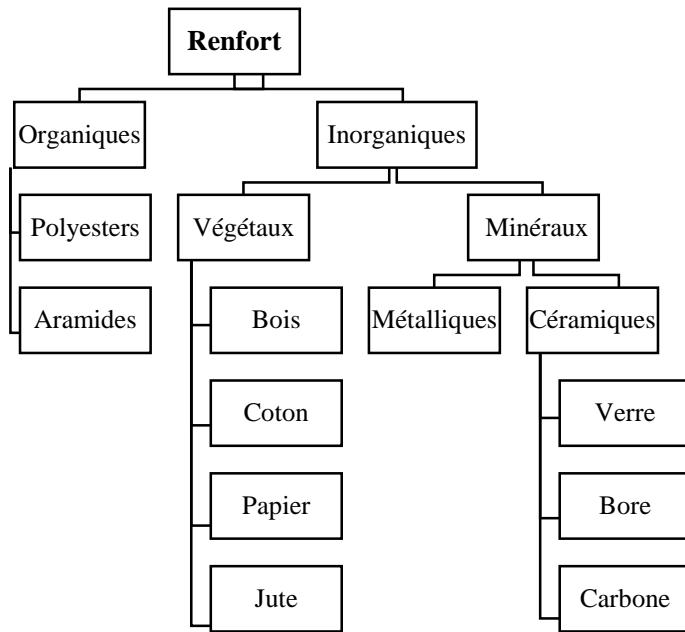
#### 1.3.1 Fibres

Les fibres jouent un rôle crucial dans la performance des composites. Elles sont responsables de la résistance et de la rigidité, offrant des caractéristiques mécaniques bien supérieures à celles de la matrice. La nature filamenteuse des fibres limite la taille des défauts, ce qui les rend intrinsèquement plus résistantes à la rupture par rapport aux matériaux massifs. En cas de rupture d'une ou plusieurs fibres, le chargement peut être redistribué sur les autres fibres, évitant ainsi une défaillance catastrophique[2] .

Les types de fibres les plus couramment utilisés incluent :

- Fibres de verre
- Fibres de carbone
- Fibres aramides

Les différents types de renforts sont présentés dans l'organigramme ci-dessous[3] :



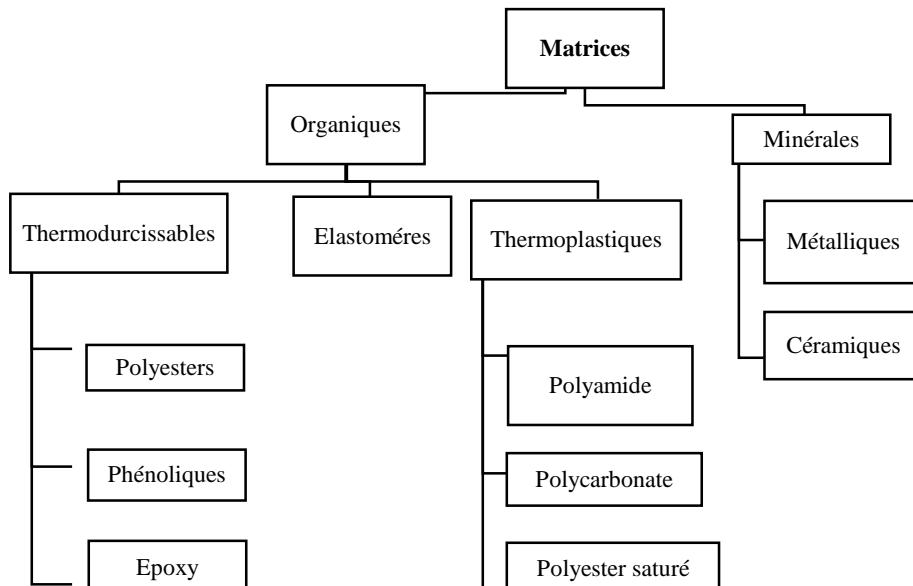
**Figure 1.2.** Organigramme de différents types de renforts [3].

### 1.3.2 Matrices

La matrice est responsable de l'assemblage des fibres grâce à ses propriétés cohésives et adhésives. Elle maintient les fibres en position et en orientation, distribue les efforts mécaniques entre elles, et joue un rôle important dans la résistance à la propagation des fissures et aux charges en cisaillement [2]. Les types de matrices les plus utilisés sont :

- Résines thermodurcissables
- Résines thermoplastiques

Les différents natures de la matrice sont présentés dans l'organigramme ci-dessous [3]:



**Figure 1.3.** Organigramme de différentes natures de matrice [3].

### 1.3.3 Interphase

L'interphase est la zone de contact entre la fibre et la matrice d'un matériau composite, comprenant à la fois l'interface et une région prolongée dans la matrice. Elle est considérée comme un constituant essentiel, possédant des propriétés chimiques, physiques et mécaniques distinctes de celles des fibres et de la matrice. Cette région joue un rôle crucial dans la liaison fibre-matrice et permet un transfert efficace des contraintes.

L'interphase influence significativement les propriétés mécaniques du composite, telles que la résistance à la traction, à la compression et à la fatigue. Les modifications de cette zone, notamment par le traitement de surface, peuvent améliorer l'adhésion fibre-matrice et, par conséquent, les performances mécaniques du matériau [4].

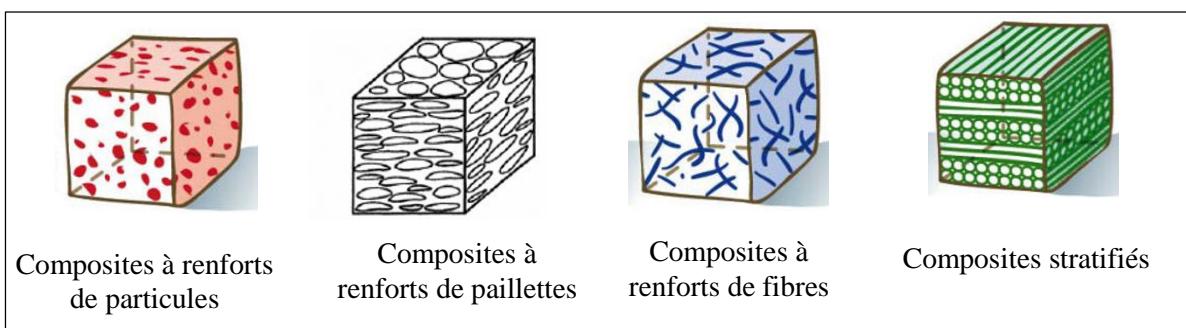
## 1.4 Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés de deux manières principales :

### 1.4.1 Classification par la forme des renforts

La classification des matériaux composites peut être réalisée de manière simple en fonction des formes des renforts [2],[5]. Les composites sont ainsi divisés en quatre catégories principales :

- Composites à renforts de particules
- Composites à renforts de paillettes
- Composites à renforts de fibres
- Composites stratifiés



**Figure 1.4.** Classification des matériaux composites[6].

### 1.4.2 Classification par la nature de la matrice

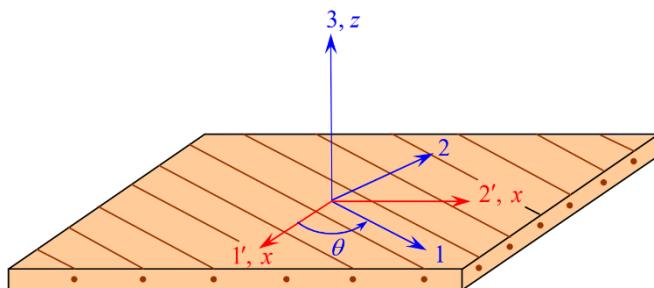
Il existe trois grandes familles de matériaux composites, classées selon la matrice qui les compose :

- Composite à Matrice Organique
- Composite à Matrice Céramique
- Composite à Matrice Métallique

## 1.5 Architecture des matériaux composites

### 1.5.1 Monocouche

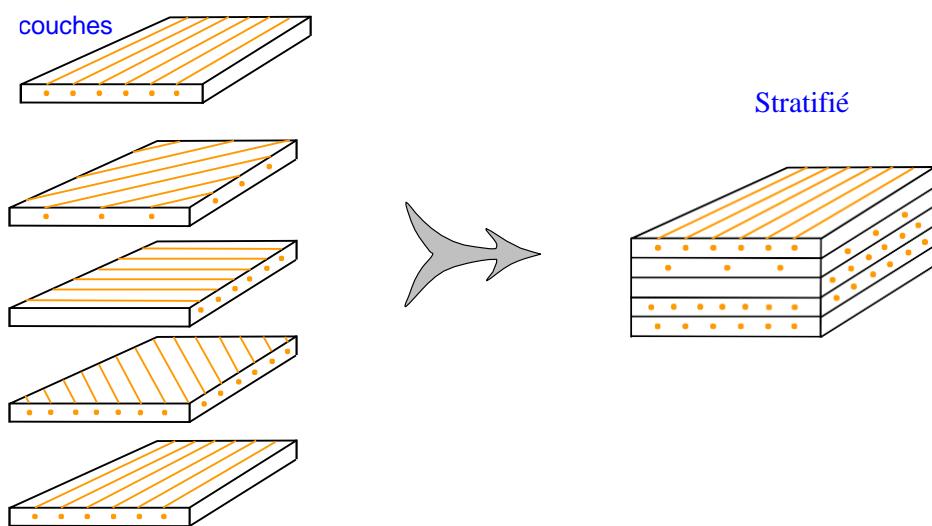
Les monocouches constituent l'élément fondamental des structures composites. Elles se distinguent par la forme du renfort, qui peut être : des fibres longues (unidirectionnelles, appelées UD, ou réparties aléatoirement), des fibres tissées, ou des fibres courtes. Dans une nappe UD, les fibres sont disposées parallèlement les unes aux autres, maintenues par une trame très légère (Figure 1.5). Cette configuration présente un taux de déséquilibre élevé [7].



**Figure 1.5.** Matériau composite monocouche[8].

### 1.5.2 Stratifiés

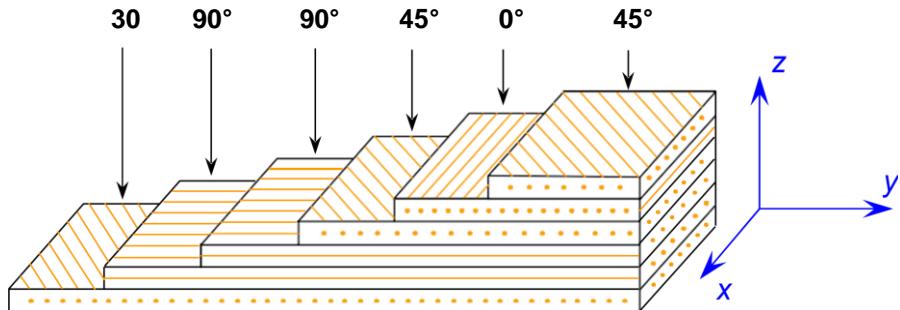
Les stratifiés sont composés de plusieurs couches successives (Figure 1.6), également appelées plis de renfort (tels que fils, stratifils, mats, tissus), imprégnées de résines. Cette architecture permet d'optimiser les propriétés mécaniques dans différentes directions, offrant ainsi une flexibilité dans la conception.



**Figure 1.6.** Constitution d'un stratifié[8].

Les stratifiés constitués de fils ou de tissus unidirectionnels représentent un type fondamental de stratifié, vers lequel tout autre type peut théoriquement être ramené. Ces stratifiés sont composés de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont l'orientation varie dans chaque

couche (Figure 1.7). Cette configuration permet d'optimiser les propriétés mécaniques du composite.



Désignation : [30 / 90<sub>2</sub> / 45 / 0 / 45]

**Figure 1.7.** Désignation d'un stratifié[8].

### 1.5.3 Sandwichs

Une structure sandwich se compose de deux semelles ou peaux, assemblées par collage ou soudure, et d'un matériau d'âme (Figure 1.8). Les peaux, bien que fines, présentent d'excellentes propriétés mécaniques, notamment un module élevé et une grande résistance. Entre ces deux peaux, on insère un matériau d'âme, plus épais et de faible densité. En maintenant une distance constante entre les peaux, l'introduction de ce matériau augmente le moment d'inertie de la structure, ce qui améliore sa rigidité en flexion tout en réduisant son poids [9].

Un troisième élément essentiel est l'adhésif, qui garantit un assemblage solide de la structure et une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Pour l'adhésif, la résistance au cisaillement constitue la caractéristique la plus importante. Lorsque les peaux sont en matériau composite, il est possible de se passer de cette troisième phase en utilisant une résine auto-adhésive.



**Figure 1.8.** Illustration d'une structure sandwich[8].

## 1.6 Applications des matériaux composites au génie civil

Grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques et aux nombreux avantages qu'ils présentent par rapport aux matériaux traditionnels, les matériaux composites connaissent une utilisation croissante dans le génie civil. Ces matériaux performants sont utilisés aussi bien dans la réhabilitation que dans la conception et la construction de nouvelles structures. Parmi les diverses applications des matériaux composites en génie civil, on peut citer [10]:

- Construction d'édifices et d'ouvrages d'art léger.
- Renforcement structurel des bâtiments existants pour se conformer à de nouvelles normes ou anticiper des changements d'utilisation (ajout d'étages, modifications d'exploitation). Ce renforcement implique principalement l'utilisation de la fibre de carbone pour les poutres, poteaux et dalles soumis à la flexion et au cisaillement.
- Conception de formes complexes à grande portée.
- Utilisation de produits dérivés du béton enrichis de fibres, tels que le béton armé avec renfort en fibres de verre ou de carbone.
- Développement de matériaux hybrides en associant des matériaux traditionnels à des composites.
- Mise en place de systèmes de transmission et de distribution d'électricité temporaires et durables, incluant des pylônes modulables et déplaçables.
- Structures dédiées à la gestion des réserves d'eau.
- Fabrication de panneaux pour murs et planchers.
- Produits dérivés du bois, tels que le bois aggloméré, le lamellé-collé, les panneaux OSB.
- Géotextiles utilisés pour le drainage, la stabilisation des sols et la construction de barrages.

## 1.7 Les avantages et les inconvénients des matériaux composites.

### 1.7.1 Les avantages

Les avantages les plus fréquemment cités des matériaux composites sont les suivants :

- **Propriétés mécaniques adaptables**

Un stratifié composite fibreux est constitué d'un empilement de plis élémentaires qui agissent ensemble comme un élément structural. Chaque pli est généralement anisotrope, voire orthotrope, présentant une résistance et une rigidité bien plus élevées dans la direction des fibres. En combinant différentes orientations de fibres, on obtient un stratifié capable de résister à diverses sollicitations. L'un des principaux avantages réside dans le fait que les plis peuvent être orientés de manière à maximiser la résistance dans les directions correspondant aux

chargements prévus, tout en minimisant l'utilisation de matériau dans les directions non sollicitées.

- **Haute résistance et haut module d'élasticité**

Les propriétés mécaniques élevées, notamment la résistance et le module d'élasticité des matériaux composites haute performance, répondent aux exigences de l'industrie aéronautique. D'autres secteurs en bénéficient également : par exemple, la vitesse d'une balle de tennis est augmentée grâce à des raquettes en carbone/époxy.

- **Poids**

Les matériaux composites haute performance ont une densité d'environ 1,6, contre 2,7 pour les alliages d'aluminium. Selon Airbus, cela permet un gain de poids de 10 à 30 % pour les éléments de structure[11]. Ce gain de masse permet l'utilisation de moteurs moins puissants, ce qui entraîne une réduction de la consommation de carburant et une diminution de la taille des réservoirs pour un même cahier des charges.

- **Production**

Les matériaux composites simplifient l'assemblage des structures, compensant en partie leur coût élevé. La réduction du nombre de pièces par rapport aux matériaux conventionnels peut être significative. Par exemple, un tronçon de fuselage, qui nécessitait typiquement mille pièces et plusieurs milliers de fixations, est désormais fabriqué en un seul morceau pour le Boeing 787[11].

- **Maintenance**

Les composites nécessitent moins d'entretien que les alliages métalliques. Ils ne sont pas sensibles à la corrosion et offrent une excellente résistance à la fatigue. Ainsi, l'intervalle entre deux révisions complètes du Boeing 787, qui utilise massivement des matériaux composites, est porté à douze ans, contre dix ans pour le 777[9].

### 1.7.2 Les inconvénients

Bien que les matériaux composites offrent des avantages indéniables, ils ne constituent pas une solution idéale pour toutes les applications. Plusieurs inconvénients peuvent freiner leur adoption. Les principaux inconvénients rencontrés sont les suivants :

- **Coût**

Les matériaux composites ont été principalement conçus pour l'aérospatiale, où leur coût élevé est compensé par des performances accrues. Cela freine leur adoption dans des produits de consommation courante.

- **Conception et analyse**

Souvent hétérogènes et anisotropes, les matériaux composites nécessitent des méthodes de conception et d'analyse plus complexes que celles utilisées pour les matériaux classiques. Les matériaux anisotropes exigent également un plus grand nombre de propriétés mécaniques pour établir les relations contrainte-déformation (lois de comportement)[12].

- **Assemblage**

Les composites sont généralement plus fragiles que les métaux, ce qui rend moins efficace la redistribution des contraintes autour des zones critiques, telles que les perforations. La résistance et la rigidité d'un stratifié ne se transmettent pas toujours intégralement à travers un joint. Il est courant de renforcer les trous à l'aide d'inserts métalliques ou d'augmenter l'épaisseur du stratifié à ces emplacements [12].

- **Tolérance aux dommages**

Les structures sont souvent exposées à divers types de dommages. Un matériau ductile absorbe mieux l'énergie d'un impact, permettant aux structures métalliques de se déformer plutôt que de se fracturer. En revanche, la fragilité des composites les rend plus susceptibles aux impacts, entraînant fréquemment des dommages[13].

## 1.8 Mécanismes de rupture dans les matériaux composites

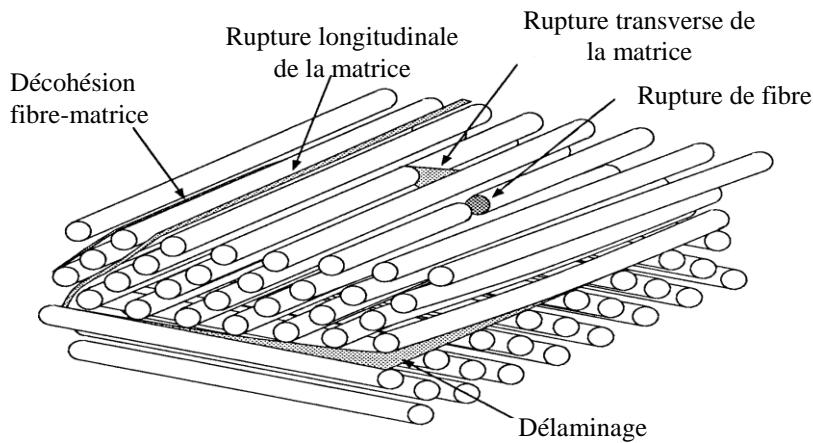
La rupture finale d'un composite résulte de l'accumulation de différents mécanismes élémentaires :

- La rupture des fibres.
- La rupture transversale de la matrice.
- La rupture longitudinale de la matrice.
- La rupture de l'interface entre les fibres et la matrice

En général, ces mécanismes ne sont pas indépendants ; plusieurs d'entre eux coexistent. Leur développement dépend de la nature des matériaux et des conditions de sollicitation mécanique appliquées.

### 1.8.1 Rupture des stratifiés

Pour les stratifiés, en plus des mécanismes élémentaires mentionnés précédemment (décrochage entre fibres et matrice, rupture transversale et longitudinale de la matrice, et rupture des fibres), un mécanisme de défaillance supplémentaire peut survenir entre les couches, désigné sous le terme de délaminage (Figure 1.9). Les modes de rupture qui se produisent dépendent de la nature des matériaux constitutifs, de la configuration des couches et du type de contrainte mécanique appliquée [14].

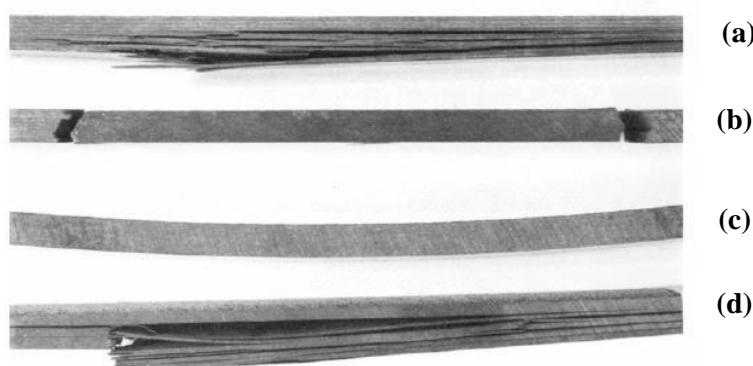


**Figure 1.9.** Mécanismes de rupture dans les stratifiés[6].

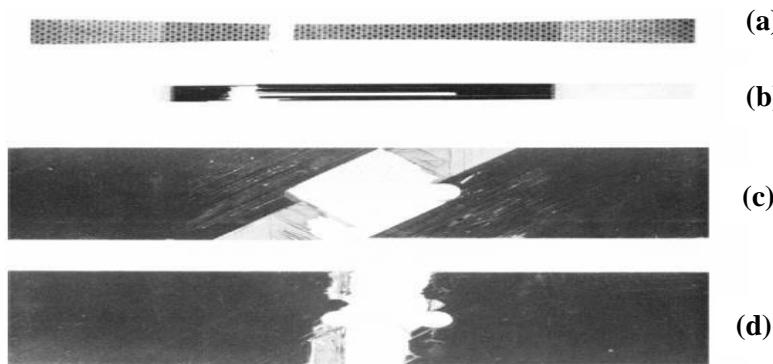
#### 1.8.1.1 Mécanismes de rupture des composites stratifiés renforcés par des fibres longues.

Le matériau composite renforcé par des fibres longues est couramment utilisé dans des applications où la réduction de poids est cruciale. Cependant, avec l'augmentation de son utilisation, le risque de rupture s'élève également. Il est donc essentiel de pouvoir identifier les différents types de rupture, notamment en analysant les modes de rupture, les paramètres caractéristiques et les valeurs critiques associés à ces ruptures. Cela est indispensable pour garantir l'intégrité des composants en service et pour concevoir de futurs produits.

La rupture dans les composites stratifiés se manifeste de manière complexe et variée. Les modes de rupture dépendent de la stratification des matériaux et de l'orientation du chargement par rapport aux fibres. Les figures 1.10 et 1.11 illustrent les différents types de rupture observés sous flexion et traction, respectivement [13].

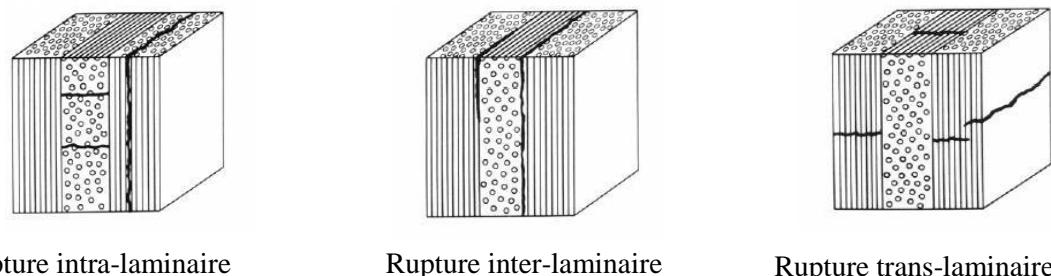


**Figure 1.10.** Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotope, (b) Unidirectionnelle, (c)  $\pm 45^\circ$ , (d)  $0^\circ/90^\circ$  [15].



**Figure 1.11.** Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement (a)  $0^\circ/90^\circ$  tissu, (b) Unidirectionnelle, (c) Quasi-isotrope, (d)  $0^\circ/90^\circ[15]$ .

La description des ruptures à l'échelle du pli permet de classer les mécanismes de rupture. Dans les stratifiés renforcés par des fibres longues, on distingue trois types de rupture : la rupture intra-laminaire, la rupture inter-laminaire et la rupture translaminaire, comme illustré à la Figure 1.12.



Rupture intra-laminaire                                  Rupture inter-laminaire                                  Rupture trans-laminaire

**Figure 1.12.** Mécanismes de rupture dans un stratifié  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  [15].

### a) Rupture intra-laminaire

La rupture intra-laminaire est principalement causée par la faible résistance de la matrice et l'adhérence entre celle-ci et les fibres. Elle se déclenche sous l'effet des contraintes dans le plan du stratifié. Lorsqu'un pli est soumis à une contrainte en traction dans la direction normale aux fibres, il se détériore, entraînant ce que l'on appelle couramment la fissuration transversale. Cette fissuration de la matrice survient généralement avant la rupture des fibres.

### b) Rupture inter-laminaire

La rupture inter-laminaire se produit à l'interface entre deux plis d'un stratifié. La surface de rupture présente généralement la défaillance de la matrice et la décohésion entre les fibres et la matrice, avec peu de rupture des fibres elles-mêmes. Comme c'est le cas pour les matériaux métalliques, la rupture peut se produire selon trois modes : le mode I (ouverture), le mode II (cisaillement) et le mode III (vissage).

### c) Rupture trans-laminaire

La rupture trans-laminaire se caractérise par la défaillance des fibres. Les surfaces de rupture présentent généralement une texture rugueuse due aux extrémités des fibres. La résistance à la rupture des fibres est supérieure à celle des autres composants d'un stratifié composite, ce qui conduit souvent à une défaillance complète du stratifié. Ce type de rupture peut être classé en deux modes selon les types de chargement : rupture par traction et micro-flambage par compression. La rupture peut résulter d'un mode isolé ou d'une combinaison des deux.

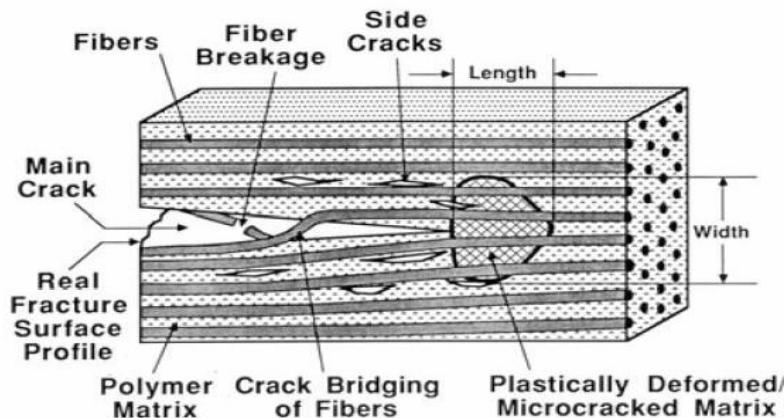
## 1.9 Délaminage et matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

L'un des principaux atouts des matériaux composites stratifiés renforcés par des fibres longues réside dans leur capacité à orienter les fibres de chaque couche. Cela permet d'optimiser des propriétés telles que la résistance et la rigidité en fonction des charges prévues dans des directions spécifiques. Par exemple, une plaque stratifiée peut présenter une rigidité en traction dans une direction qui est le double de celle d'une autre direction. Malgré leurs excellentes caractéristiques dans le plan, ces stratifiés sont confrontés à un problème lié à la stratification : la rupture inter-laminaire, souvent désignée sous le terme de « délaminage ».

Lorsqu'un stratifié est soumis à des charges, il traverse plusieurs étapes de dégradation. Dans le scénario classique d'évolution des défauts, la matrice et l'interface entre les fibres et la matrice sont généralement les premières à se détériorer. Les défauts initiaux incluent des microfissures dans la matrice et une décohésion à l'échelle microscopique. Par la suite, ces défauts peuvent se stabiliser et s'agrandir par coalescence, formant des fissures transversales. Ces fissures peuvent atteindre l'interface entre les couches, entraînant un délaminage dû aux contraintes inter-laminaires. L'évolution de ces défauts est influencée par le mode d'empilement, le nombre de couches, les charges appliquées, ainsi que la taille et la forme de la structure. Les principaux micro-mécanismes de dégradation associés au délaminage sont schématiquement illustrés dans la Figure 1.13. Ils comprennent [16] :

- Zone endommagée : Une forte concentration de contraintes au niveau de la pointe de fissure génère une zone affectée, où se produisent des déformations plastiques et/ou des microfissures au sein de la matrice.
- Fissures latérales : Après le passage de la fissure, les microfissures présentes dans la zone endommagée peuvent évoluer en fissures latérales dans la matrice, autour du plan de délaminage.
- Pontage de fibres : La présence de fissures au-dessus ou en dessous du plan de délaminage favorise la formation de ponts de fibres qui relient les deux surfaces

délaminées. Certains de ces ponts peuvent se rompre au fur et à mesure que le délamination progresse.



**Figure 1.13.** Les mécanismes d'endommagement accompagnant le délaminaage [16].

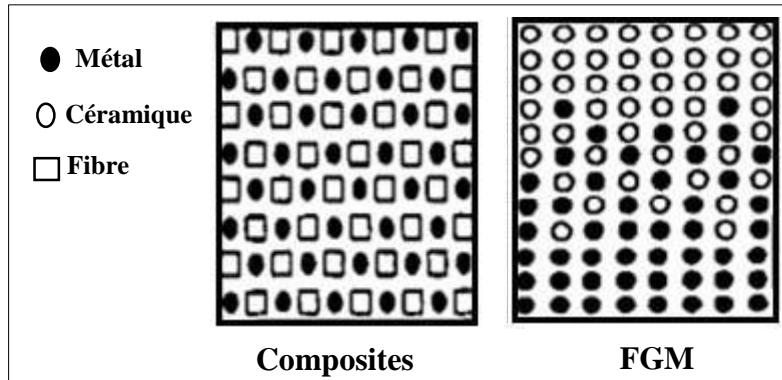
Le développement des matériaux composites a également permis de combiner des propriétés spécifiques de différents matériaux au sein d'une seule pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, comme par exemple l'association d'une surface de haute dureté à une base plus flexible, soulève des défis concernant l'interface entre les matériaux.

Cette transition brutale de composition peut engendrer des concentrations de contraintes importantes au niveau local. Pour atténuer ce problème, une approche consiste à utiliser un gradient de composition, permettant une transition progressive des propriétés recherchées. Ces matériaux à gradient de propriétés, connus en anglais sous le nom de Functionally Graded Materials (FGM), sont fabriqués en modifiant de manière continue les fractions volumétriques dans la direction de l'épaisseur pour obtenir un profil défini. Ces matériaux ont suscité un intérêt croissant récemment en raison de leur capacité à réduire les disparités dans les propriétés matérielles et à minimiser les contraintes.

### 1.9.1 Définition et historique des FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués, également appelés matériaux à gradient de propriétés ou matériaux à gradient évalués (FGM), sont des composites microscopiquement non homogènes. Ils sont généralement fabriqués à partir de deux matériaux distincts, souvent un métal et une céramique, ou en modifiant la microstructure d'un seul matériau (Figure 1.14).

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) constituent une catégorie de composites présentant une variation continue des propriétés d'un côté à l'autre. Cette gradation permet d'atténuer la concentration des contraintes souvent observée dans les composites stratifiés. En modulant les propriétés, les FGM réduisent les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les pics de concentration de contraintes [17], [18]



**Figure 1.14.** Configurations des composites et des FGM[6].

L'idée générale du concept de matériaux à gradient fonctionnel (FGM) a été introduite au début des années 1980 par des chercheurs japonais. Toutefois, les applications théoriques des matériaux composites et polymères à structure graduée ont été proposées pour la première fois en 1972 par Bever et Duwez [19]. Cependant, leurs travaux n'ont eu qu'un impact limité, probablement en raison d'un manque de méthodes et de technologies de production adaptées aux matériaux à gradient fonctionnel à cette époque.

En 1986, le terme officiel « matériaux à gradient fonctionnel », FGM, a été adopté. À la suite d'une discussion lors du troisième symposium international sur les matériaux à gradient fonctionnel, tenu à Lausanne en 1994, le nom a été modifié en 1995 en « matériaux à gradient fonctionnel », car cette dénomination est plus précise tant sur le plan descriptif que grammatical [20], [21]

En 1987, un projet de recherche de cinq ans (1987-1992) a été lancé, intitulé « Recherche sur la technologie de base pour le développement de FGM en vue de la relaxation des contraintes thermiques » (FGM PART 1). Ce programme visait à développer des FGM pour des applications à haute température, avec l'objectif de les utiliser dans des avions spatiaux hypersoniques. À la fin de ce projet, des échantillons de coques carrées de 300 mm et de bols hémisphériques de 50 mm de diamètre, destinés aux cônes de nez FGM SiC-C, ont été préparés [22].

En 1990, la première conférence internationale sur les FGM (FGM 1990) s'est tenue à Sendai, au Japon, suivie de conférences régulières tous les deux ans [19]. En 1992, les FGM ont été sélectionnés parmi les dix technologies les plus avancées au Japon [21]. Un autre projet de cinq ans (1993-1998), faisant suite à FGM (PARTIE 1), a été lancé en 1993 sous le nom de « Recherche sur les matériaux de conversion d'énergie avec des structures à gradient fonctionnel » (FGM PART 2). Ce projet visait à améliorer l'efficacité de la conversion énergétique en utilisant la technologie des structures FGM [23].

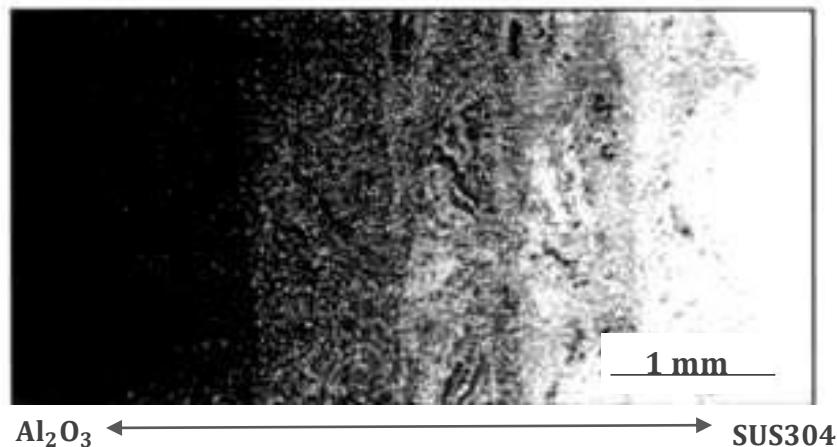
En 2001, un atelier international présentant les tendances récentes et les prévisions a été organisé sous la présidence du professeur Naotake Ooyama. Divers sujets ont été abordés, tels que la modélisation et la simulation, les systèmes de fabrication automatisés pour les FGM, la mesure des contraintes résiduelles, l'imagerie ultrasonore et la biocompatibilité des matériaux d'implant FG. Depuis lors, des programmes de recherche réguliers, des symposiums internationaux et des ateliers ont été organisés à travers le monde [18]. Enfin, la 16e conférence internationale sur les FGM (FGM 2022) s'est tenue du 7 au 10 août 2022 à Hartford, aux États-Unis.

### 1.9.2 Conception des structures FGM

Un matériau FGM (matériau à gradient fonctionnel) est un type de composite caractérisé par une microstructure variable dans l'espace, conçue pour optimiser la performance des éléments structurels grâce à une distribution spécifique des propriétés. Ces gradients de propriétés sont présents dans divers produits courants nécessitant des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles), comme les liaisons entre particules. Ces liaisons doivent être suffisamment dures à l'intérieur pour résister à la rupture, tout en étant assez résistantes à l'extérieur pour prévenir l'usure.

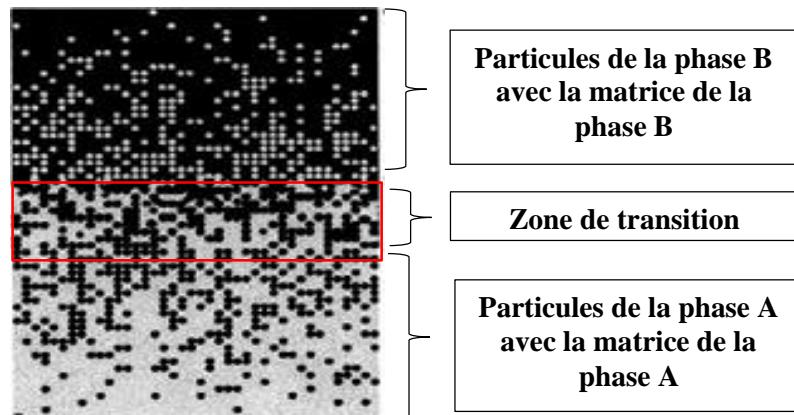
La figure 1.15 montre une micrographie obtenue par microscope électronique à balayage de la section transversale d'une billette en FGM (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SUS304).

Dans un matériau à gradient fonctionnel, les différentes phases microstructurales remplissent des fonctions variées, permettant au matériau global d'atteindre un statut multi-structural grâce à la gradation de ses propriétés. En variant progressivement la fraction volumique des constituants, les propriétés du matériau affichent une transition fluide et continue d'une surface à l'autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface et atténuant les concentrations de contraintes. Cela est rendu possible par le fait que le constituant céramique peut résister à des environnements à haute température grâce à ses excellentes caractéristiques de résistance thermique, tandis que le constituant métallique assure une meilleure performance mécanique et réduit le risque de rupture catastrophique.



**Figure 1.15.** Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ -SUS304) [6].

Un FGM typique, présentant un fort effet de couplage flexion-extension, est illustré à la Figure 1.16 [23]. Dans cette configuration, des particules sphériques ou quasi-sphériques sont intégrées dans une matrice isotrope. Cette conception permet d'optimiser les propriétés mécaniques et de répondre à des exigences spécifiques en matière de performance.



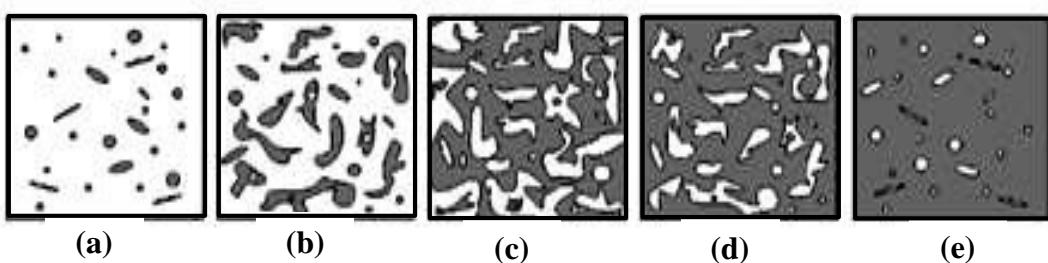
**Figure 1.16.** FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées[24].

### 1.9.3 Le gradient

Contrairement aux matériaux homogènes, les propriétés des FGM (matériaux à gradient fonctionnel) dépendent non seulement de leur composition, mais aussi de la connectivité au sein de leur réseau interne. La Figure 1.17 illustre schématiquement une microstructure typique qui se forme lorsque la proportion de la seconde phase augmente.

À de faibles fractions volumiques, la seconde phase apparaît sous forme de particules isolées dispersées dans la matrice (a). À mesure que cette proportion augmente, les particules commencent à entrer en contact et à former des agrégats (b). Avec une augmentation supplémentaire, une transition microstructurale critique se produit, rendant la seconde phase interconnectée sur de longues distances (c, d, e). Cette transition impacte significativement les

propriétés des matériaux, telles que la conductivité thermique ou électrique, de sorte qu'un léger changement dans la composition peut entraîner des variations marquées des propriétés [25]



**Figure 1.17.** Changement schématique de la microstructure dans un profile FGM[26].

#### 1.9.4 Domaine d'utilisation des FGMs

- **L'industrie aérospatiale**

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) sont largement utilisés dans l'industrie aérospatiale en raison de leur capacité à résister à des conditions extrêmes, telles que les variations de température et de pression. Ils sont particulièrement adaptés aux applications telles que les revêtements de protection thermique, les composants de moteurs de fusée et les structures de satellites, où une combinaison de légèreté, de résistance mécanique et de conductivité thermique est essentielle[27].

- **Médecine**

Les tissus humains, tels que les os et les dents, sont des FGM naturels. Ces tissus peuvent parfois subir des dommages irréparables, nécessitant leur remplacement. Pour ce faire, un matériau compatible, capable de remplir la fonction du tissu d'origine, est requis. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des candidats idéaux pour cette application. Ils ont trouvé un large éventail d'utilisations dans les domaines dentaire et orthopédique, notamment pour le remplacement des dents et des os[28].

- **Défense**

La capacité à inhiber la propagation des fissures est l'une des caractéristiques les plus importantes des matériaux à gradient fonctionnel, ce qui les rend particulièrement utiles dans les applications de défense, notamment comme matériaux résistants à la pénétration pour les plaques de blindage et les gilets pare-balles. Une autre application majeure des FGM est dans la conception de carrosseries de véhicules pare-balles [29].

- **Énergie**

Les FGM sont utilisés dans le secteur de l'énergie pour fournir d'excellentes barrières thermiques et des revêtements protecteurs sur les aubes de turbines dans les moteurs à turbine à gaz. Ils sont également appliqués dans les générateurs thermoélectriques, les dispositifs de

conversion d'énergie, les cellules solaires, les capteurs, et bien d'autres applications[30].

- **Marin**

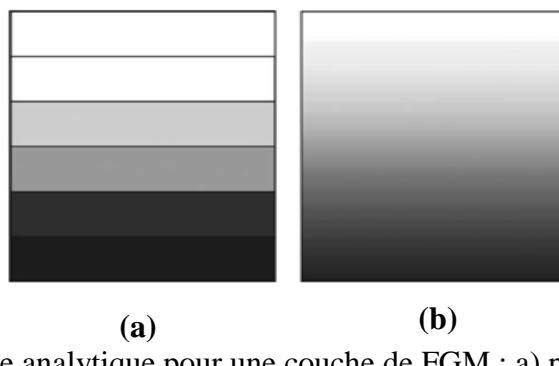
Les FGM trouvent également des applications dans l'industrie marine et sous-marine, notamment pour les arbres d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes de sonar, les systèmes de tuyauterie composite et les coques cylindriques sous pression[31].

- **Optoélectronique**

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs optoélectroniques en raison des gradients d'indice de réfraction qu'ils peuvent offrir. Parmi les exemples, on trouve les lasers, les supports de stockage magnétique, les capteurs, les fibres, les cellules solaires, les cartes de circuits imprimés et les applications de semi-conducteurs [31].

### 1.9.5 Caractéristiques effectives des matériaux à gradient fonctionnel.

Les FGM peuvent être classés en deux catégories : continus et discontinus, comme illustré schématiquement dans les figures 1.18 (a) et (b), respectivement. Dans les FGM continus, la composition et/ou la microstructure du matériau changent de manière continue en fonction de la position. Aucune ligne de séparation nette n'est observable, ce qui rend les propriétés de chaque zone indiscernable. En revanche, dans les FGM discontinus, la composition et/ou la microstructure varie progressivement, formant une structure multicouche avec des interfaces distinctes entre les couches[20].



**Figure 1.18.** Modèle analytique pour une couche de FGM : a) première approche : variation par morceaux b) deuxième approche : variation continue[20].

Les FGM couramment utilisés sont souvent classés en continu dans une direction spécifique. Cependant, quel que soit le type de FGM, une transition en douceur des propriétés thermomécaniques est assurée, ce qui permet de réduire les problèmes liés au délaminate et à la fissuration. Les FGM sont généralement constitués de matériaux isotropes, tels que les métaux et les céramiques. Une microstructure à gradient continu, combinant des constituants métalliques et céramiques, est schématiquement représentée dans la figure 1.19. En règle générale, les FGM métal-céramique sont utilisés dans des applications à haute température, où

la partie céramique assure une résistance aux environnements thermiquement exigeants grâce à ses excellentes propriétés thermiques. De son côté, la phase métallique garantit des performances mécaniques solides et réduit les risques de fracture catastrophique. La phase de transition, quant à elle, offre une protection thermique supplémentaire et élimine les problèmes d'interface [32].

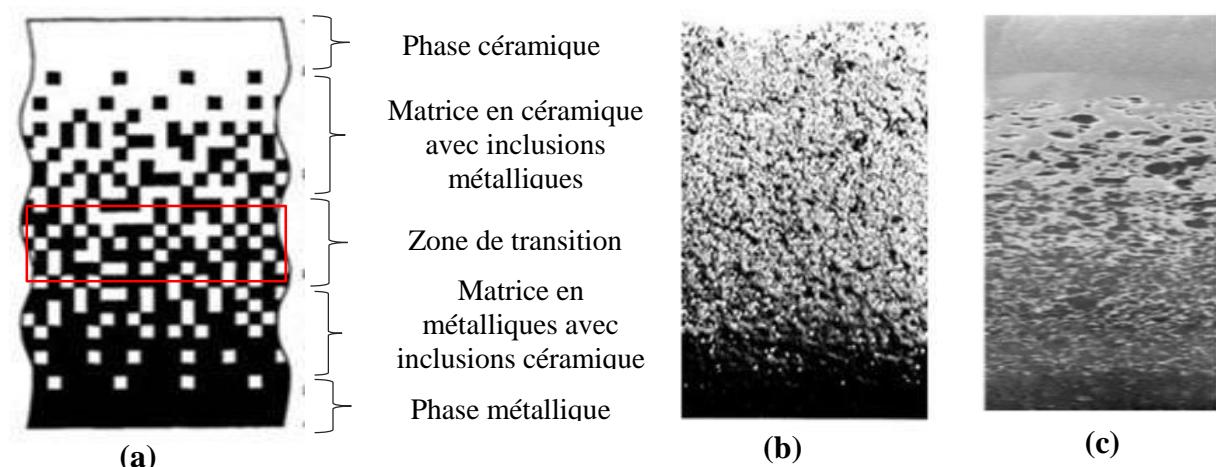
Le choix de la céramique pour les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) n'est pas anodin, car elle présente des caractéristiques exceptionnelles, telles que :

- Faible réactivité chimique et excellente résistance à la corrosion.
- Haute température de fusion ou de décomposition.
- Haut module d'élasticité et grande dureté.
- Élevée charge à la rupture.
- Faible coefficient de frottement et bonne résistance à l'usure.
- Conservation des propriétés à haute température.
- Faible coefficient de dilatation thermique, assurant une bonne résistance aux chocs thermiques.
- Faible conductivité thermique, offrant une bonne isolation thermique.

Cependant, bien que les céramiques présentent ces avantages, elles sont également connues pour leur fragilité et leur vulnérabilité aux défauts de petite taille.

En revanche, les métaux, qui complètent souvent les FGM, apportent des caractéristiques distinctes :

- Bonne résistance mécanique.
- Conductivité thermique élevée.
- Excellente ténacité.



**Figure 1.19.** Schéma de la microstructure à gradient continu avec des constituants métal-céramique : (a) Microstructure à gradient régulier ; (b) Vue agrandie et (c) FGM céramique-métal [32].

### 1.9.6 Lois de variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont composés de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles variées, avec une transition continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités. Cette approche vise à optimiser les performances de la structure résultante.

Les FGM se distinguent par leurs microstructures non uniformes et leurs propriétés macroscopiques qui varient dans l'espace. Un aspect essentiel lors de leur fabrication est la composition multiphasée à travers l'épaisseur. La variation des propriétés en fonction de la position est intégrée par la loi des mélanges, en utilisant le modèle de Voigt [33].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (1.1)$$

$P$ : Propriété définie le long de l'axe z;

$P_i$ : La propriété mécanique du constituant (i) ;

$V_i$ : La fraction volumique du constituant (i) ;

Avec

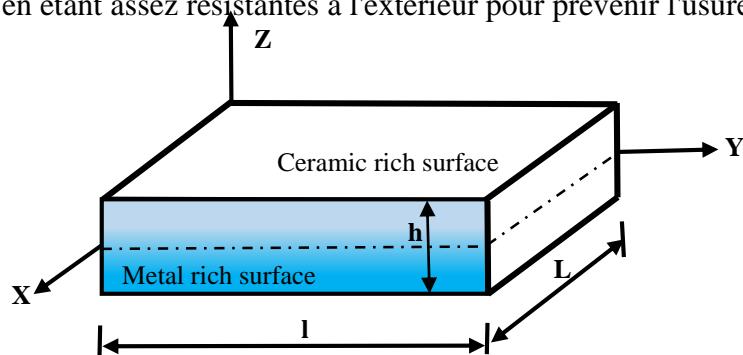
$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (1.2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont constituées de deux matériaux : de la céramique et un métal inoxydable. Dans ce cas, la loi de Voigt peut être simplifiée comme suit

$$P(z) = P_c V_c + P_m V_m \quad (1.3)$$

Où les indices m et c représentent respectivement le métal et la céramique.  $P_c$  et  $P_m$  sont les caractéristiques du matériau associées, telles que la densité ( $\rho$ ), le module d'Young (E) et diverses autres caractéristiques.  $V_c$  et  $V_m$  sont les fractions volumiques.

Un FGM se caractérise par la variation des fractions de volume. La majorité des chercheurs utilisent des fonctions de puissance, exponentielles ou sigmoïdes pour modéliser ces fractions. Les liaisons entre les particules doivent être suffisamment robustes à l'intérieur pour résister à la rupture, tout en étant assez résistantes à l'extérieur pour prévenir l'usure.



**Figure 1.20.** Géométrie d'une plaque FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est orienté perpendiculairement à sa surface médiane, s'étendant dans le sens de l'épaisseur. Les propriétés du matériau, telles que le module de Young et le coefficient de Poisson, présentent des variations entre les faces supérieure et inférieure, évoluant de manière continue en fonction de l'épaisseur, soit  $E = E(z)$  et  $\nu = \nu(z)$ .

Jin et Batra [34] ainsi que Ziou et al. [35] ont montré que l'influence du coefficient de Poisson sur les déformations est négligeable par rapport à celle du module de Young, permettant ainsi de considérer le coefficient de Poisson comme constant. En revanche, le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM varie selon des lois de puissance (P-FGM), exponentielle (E-FGM) ou sigmoïde (S-FGM).

#### 1.9.6.1 Lois de puissance (P-FGM)

La loi de puissance pour la gradation des matériaux a été introduite pour la première fois par Wakashima et al.[36]. De plus, cette loi est largement utilisée par de nombreux chercheurs et elle est couramment employée dans l'analyse des contraintes des FGM. Si une plaque FG d'épaisseur uniforme « h », comme le montre la figure 1.20, est utilisée pour l'analyse, alors selon cette loi, la propriété effective du matériau  $P(z)$  dans une direction spécifique (le long de l'axe z) peut être déterminée par :

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V(z) \quad (1.4)$$

$P$  représente l'ensemble des propriétés matérielles effectives (comme  $E$ ,  $\alpha$  et  $\rho$ ). Les valeurs  $P_1$  et  $P_2$  correspondent aux propriétés matérielles des surfaces supérieure ( $z = +h/2$ ) et inférieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque, respectivement. Il est important de noter que ces propriétés matérielles dépendent de la fraction volumique  $V$  de FGM, qui suit une loi de puissance, formulée comme suit :

$$V(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (1.5)$$

Où ( $0 \leq p \leq \infty$ ) est un exposant de fraction volumique (ou un indice de loi de puissance).

La figure 1.21 illustre la variation de la fraction volumique dans le sens de l'épaisseur de la plaque. On peut observer sur la figure que la fraction volumique diminue rapidement près de la surface inférieure pour  $p < 1$  et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .

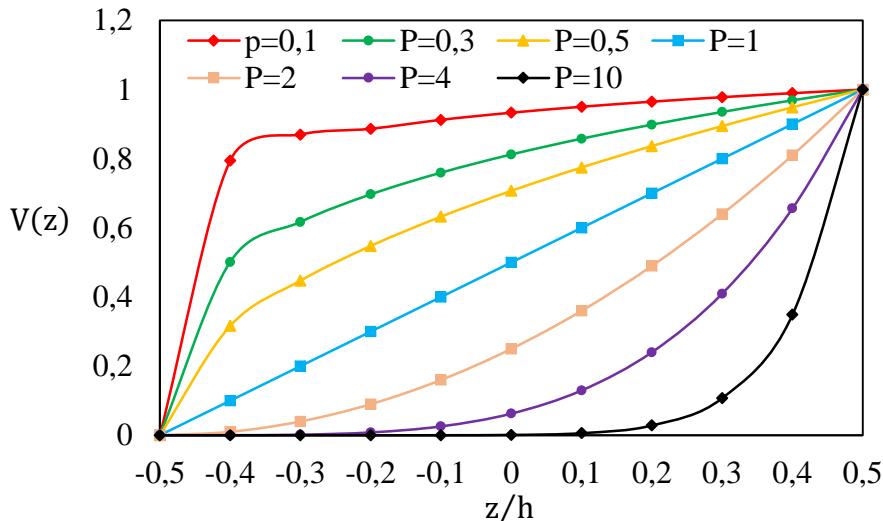


Figure 1.21. Variations de la proportion volumique à travers l'épaisseur de la plaque FGM

### 1.9.6.2 Loi sigmoïde (S-FGM)

Lorsqu'une seule fonction de loi de puissance FGM est ajoutée au composite multicouche, des concentrations de contraintes apparaissent à l'une des interfaces, où le matériau est continu mais change rapidement. Chung et Chi [37] ont donc développé une autre loi, appelée loi sigmoïde, qui est une combinaison de deux fonctions de loi de puissance, afin d'assurer une distribution régulière des contraintes entre toutes les interfaces. Cette loi est également utilisée pour réduire les facteurs d'intensité de contrainte dans les structures fissurées. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par [38]:

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1-6a)$$

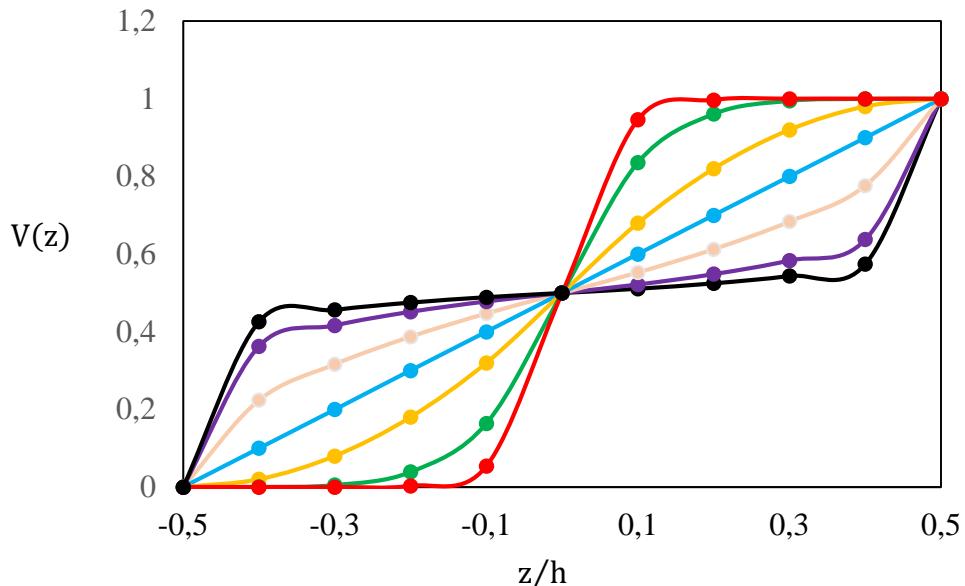
$$V_c(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1-6b)$$

En utilisant la règle du mélange, les propriétés effectives du S-FGM peuvent être calculées par :

$$E(z) = V_c(z)E_c + (1 - V_c(z))E_m \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1-7a)$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + (1 - V_m(z))E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1-7b)$$

La figure 1.22 montre la variation de la fraction volumique dans les équations (1-6a) et (1-6b) en fonction de l'épaisseur de la plaque S-FGM.



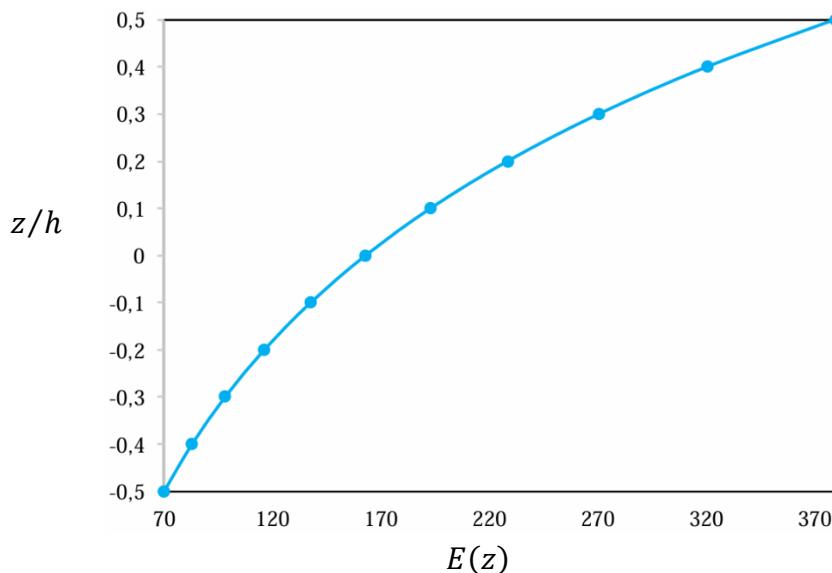
**Figure 1.22.** Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.

### 1.9.6.3 Loi exponentielle (E-FGM)

La loi exponentielle est généralement utilisée pour traiter les problèmes liés au mécanisme de fracture des FGM. Elle est donnée par Kim et Paulino [39]. La distribution des propriétés des plaques FG à travers l'épaisseur selon la loi exponentielle est la suivante :

$$P(z) = P_2 e^{\frac{1}{h}(\ln \frac{P_1}{P_2})(z + \frac{h}{2})} \quad (1-8)$$

La distribution du matériau (par exemple la distribution du module de Young E) dans le sens de l'épaisseur des plaques E-FGM est représentée sur la figure 1.23.



**Figure 1.23.** Variation du module de Young E dans toute l'épaisseur de la plaque E-FGM.

## 1.10 Conclusion

Ce chapitre a exploré les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel (FGM), en mettant en lumière leurs propriétés, leurs avantages et leurs applications. Les matériaux composites, composés de deux phases distinctes, offrent des performances supérieures grâce à leur architecture variée, avec des applications importantes dans le génie civil. Cependant, leur utilisation peut être entravée par des problèmes tels que le déclaminage, notamment dans les stratifiés renforcés par des fibres longues.

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont présentés comme une solution avancée pour surmonter certaines des limitations des matériaux composites classiques, notamment en offrant des transitions graduées de propriétés, comme la résistance thermique et mécanique. Les FGM sont utilisés dans des applications variées, notamment dans des environnements extrêmes, et ont évolué à partir de leur utilisation initiale comme barrières thermiques.

Le chapitre détaille également les lois de variation des propriétés matérielles des FGM (loi de puissance, loi sigmoïde, loi exponentielle), qui permettent de modéliser la distribution des propriétés dans ces matériaux. Ces lois sont essentielles pour la conception et l'optimisation des structures FGM en fonction des besoins spécifiques.

En raison de la large applicabilité des FGM, il est nécessaire d'étudier leur comportement de manière approfondie. Ainsi, pour prédire avec précision le comportement des structures FG, plusieurs théories et méthodes analytiques et numériques ont été rapportées dans la littérature. Le chapitre suivant présente ces différentes théories utilisées pour l'analyse des structures FG et résume les études portant sur leur comportement statique, vibratoire et de flambage.

# Chapitre 2

## Revue des travaux antérieurs sur la modélisation des plaques FGM

### 2.1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) gagnent en popularité dans le domaine de l'ingénierie, servant d'éléments structurels comme des plaques, des poutres et des coques. Dans une plaque FG, les propriétés sont ajustées par le mélange de deux matériaux différents, tels que la céramique et le métal. Ces matériaux offrent des avantages significatifs, notamment la réduction des contraintes thermiques, une résistance accrue aux environnements à haute température et une protection contre la corrosion.

Pour les plaques sandwich FG, on distingue généralement deux configurations : (a) des plaques avec un noyau FG et deux peaux isotropes ; (b) des plaques avec un noyau isotrope et deux peaux FG. Une compréhension approfondie de leur comportement en flexion, en dynamique et en flambage est essentielle pour une utilisation optimale.

Le comportement des plaques FG peut être modélisé à l'aide de théories tridimensionnelles (3D) ou bidimensionnelles (2D). Bien que les approches 3D soient plus précises, elles sont plus complexes à mettre en œuvre. En revanche, les théories 2D, en raison de leur simplicité et de leur coût de calcul réduit, sont largement adoptées.

Les théories 2D les plus courantes incluent :

- La théorie des plaques classiques (CPT), qui ignore les effets de cisaillement transversal, adaptée aux plaques minces.
- La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), qui prend en compte ces effets et convient aux plaques de moyenne épaisseur.
- Les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), qui sont adaptées aux plaques plus épaisses.

Ces modèles reposent sur des hypothèses concernant les déformations ou les contraintes à travers l'épaisseur de la plaque, permettant ainsi de simplifier le problème 3D en un problème 2D.

Étant donné qu'elles ont été largement utilisées dans la modélisation des plaques FG, les théories mentionnées ci-dessus seront brièvement décrites dans ce chapitre. De plus, une revue des études sur les analyses statiques, vibratoires et de flambage des plaques FG est présentée.

## 2.2 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide bidimensionnel défini par une surface plane (plan x,y) et une petite épaisseur notée h par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou non homogène. Les plaques se classent en trois catégories principales :

### 2.2.1 Plaques isotropes

Une plaque isotrope est une plaque dont le matériau présente les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions. Autrement dit, les propriétés telles que la résistance à la traction, la flexion, la compression ou la conductivité thermique sont identiques dans toutes les directions. Cette hypothèse est valable dans le cas où le matériau est homogène et ne présente pas de variation de ses caractéristiques en fonction de la direction, comme c'est le cas de certains matériaux métalliques ou plastiques.

### 2.2.2 Plaques orthotropes

Une plaque orthotrope est une plaque dont le matériau présente des propriétés mécaniques différentes selon trois directions principales. Ces directions sont généralement associées aux axes de la plaque, notamment les directions longitudinale (dans la direction de la longueur), transversale (dans la direction de la largeur) et normale (perpendiculaire à la plaque, c'est-à-dire dans l'épaisseur). Ce type de matériau est souvent utilisé dans des structures composites ou dans des matériaux stratifiés. Dans les plaques orthotropes, la rigidité et la résistance peuvent varier selon ces trois directions, et donc les propriétés mécaniques ne sont pas uniformes à travers le matériau.

### 2.2.3 Plaques anisotropes

Une plaque anisotrope est une plaque constituée d'un matériau dont les propriétés mécaniques varient de manière non uniforme selon toutes les directions de l'espace, pas seulement selon trois directions principales comme dans les plaques orthotropes. Autrement dit, dans une plaque anisotrope, les propriétés matérielles (comme la rigidité, la résistance, la conductivité thermique, etc.) sont fonction de la direction dans l'espace à partir de n'importe quel point de la plaque.

## 2.3 Modèles analytiques des plaques FGM

Dans l'analyse des plaques en flexion, trois théories fondamentales peuvent être utilisées :

### 2.3.1 Théorie des plaques classiques (CPT)

La théorie des plaques classiques, la plus ancienne et la plus simple, a été développée en 1888 par Love [40] en utilisant des hypothèses proposées par Kirchhoff en 1850[41]. Elle est également appelée « théorie des plaques de Kirchhoff », « théorie des plaques de Kirchhoff-Love » ou « théorie des plaques minces ». Il s'agit en fait d'une extension de la « théorie des poutres d'Euler-Bernoulli » aux plaques minces.

Les hypothèses fondamentales de la CPT (Théorie des Plaques Classiques) sont les suivantes :

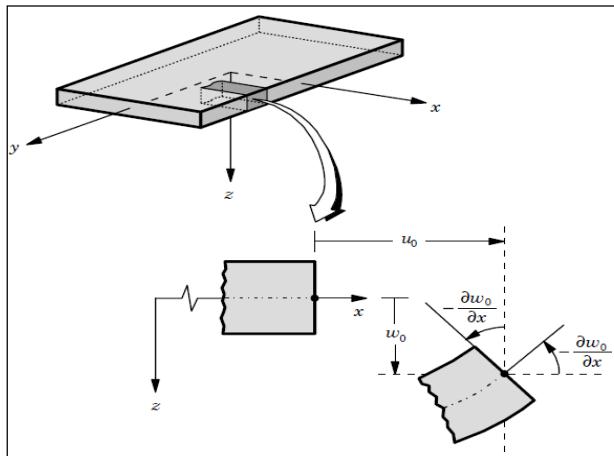
- Les sections planes initialement normales à la surface médiane restent planes et normales à la surface médiane après déformation (Figure 2.1). De manière analogue aux poutres, cette hypothèse implique que l'effet des contraintes de cisaillement transversales est négligeable. La déformation de la plaque est donc principalement associée aux contraintes de flexion. Par conséquent, la déformation normale transversale  $\varepsilon_z$  résultant du chargement transversal peut être négligée.
- La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est faible par rapport aux autres composantes de contrainte de la plaque et peut donc être négligée.

Pour une grande majorité des problèmes de plaques minces, la CPT fournit des résultats précis qui ne diffèrent pas significativement de ceux obtenus en utilisant la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. Sous les hypothèses mentionnées ci-dessus, le champ de déplacement de la CPT peut être exprimé sous la forme suivante [42]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + zw_{,x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + zw_{,y}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont les composantes de déplacement le long des axes x, y et z au niveau du plan médian ( $z=0$ ).  $w_{,x}$  et  $w_{,y}$  sont les rotations dues à la flexion dans les deux sens.

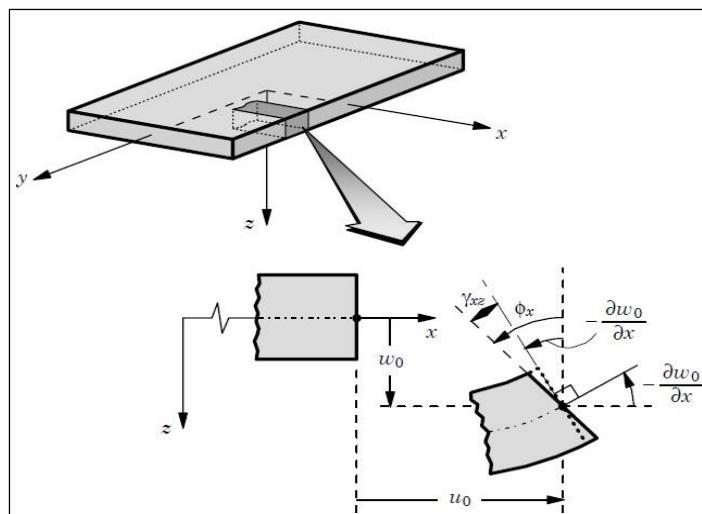
Étant donné que l'effet du cisaillement transversal n'est pas pris en compte dans cette théorie, les résultats pour les plaques épaisses (en particulier les plaques en composites avancés) peuvent être inexacts. À cet égard, la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre a été développée.



**Figure 2. 1.** Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (CPT) [42].

### 2.3.2 First-order shear deformation theory (FSDT)

La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre, également appelée théorie de Mindlin-Reissner (Reissner, 1945[43]; Mindlin, 1951[44]) ou théorie des plaques de Mindlin, a étendu la théorie classique des plaques en prenant en compte l'effet des contraintes de cisaillement transversales. Selon cette théorie, les lignes droites transversales avant déformation restent droites après déformation, mais elles ne sont pas nécessairement normales au plan médian après déformation (Figure 2.2). En conséquence, les contraintes de cisaillement transversales sont constantes sur toute l'épaisseur de la plaque. De plus, cette théorie suppose que la contrainte normale transversale,  $\sigma_z$ , est nulle.



**Figure 2. 2.** Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin (FSDT) [42].

Le champ de déplacement du FSDT peut être écrit comme suit [43],[44] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  désignent le déplacement d'un point sur le plan  $z = 0$ .  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  sont les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

Les déformations de cisaillement transversales étant constantes sur toute l'épaisseur de la plaque, il en résulte que la contrainte de cisaillement transversale sera également constante. En revanche, en théorie classique, la contrainte de cisaillement varie de manière parabolique sur l'épaisseur de la plaque. Par conséquent, un facteur de correction de cisaillement est requis dans la théorie des plaques de déformation par cisaillement (FSDT) pour compenser la variation parabolique réelle de la contrainte de cisaillement et pour satisfaire aux conditions limites, selon lesquelles la contrainte de cisaillement doit être nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

### 2.3.3 Théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)

Pour surmonter les limitations du CPT et du FSDT (c'est-à-dire pour obtenir une variation réaliste des contraintes et des déformations de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque, et pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, FCC), plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été développées[45], [46], [47], [48], [49], [50], [51]. Ces modèles reposent sur l'hypothèse d'une variation non linéaire des contraintes à travers l'épaisseur et sont capables de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure 2.3). Les HSDT les plus avancées s'appuient sur le développement en série de Taylor des champs de déplacement pour approcher la théorie tridimensionnelle[52]. Le déplacement est donc supposé être sous la forme suivante :

$$u_i(x, y, z) = u_i(x, y) + z\phi_i^{(1)}(x, y) + z^2\phi_i^{(2)}(x, y) + \dots + z\phi_i^{(j)}(x, y) \quad (2.3)$$

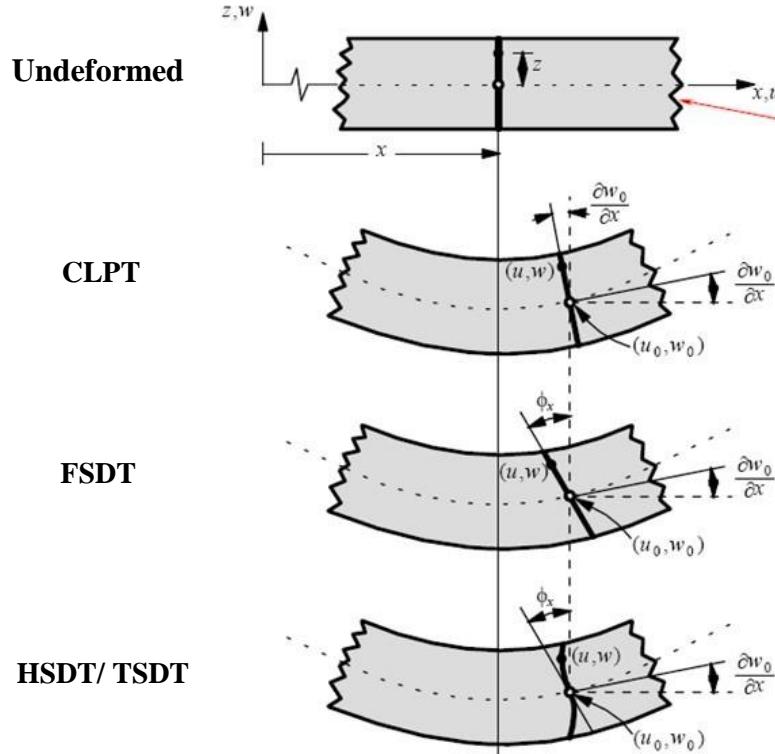
Où  $i = 1, 2, 3$ , et  $j$  définit l'ordre utilisé dans la théorie.

La théorie de premier ordre de Reissner-Mindlin correspond au développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre  $j = 1$  et  $\phi_3^{(1)} = 0$ . Dans les cas où un modèle de premier ordre ne permet pas d'approcher correctement un problème donné, il est nécessaire de passer à un modèle d'ordre supérieur ( $2^{\text{ème}}$  ordre,  $3^{\text{ème}}$  ordre, ou même plus) dans l'expansion des déplacements. Les théories de déformation par cisaillement du second ordre (SCSDT) [53] donnent des résultats légèrement meilleurs que la FSDT, mais souffrent des mêmes inconvénients, notamment la nécessité de facteurs de correction. Le champ de déplacement dans ces théories

est généralement exprimé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\phi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Où les paramètres  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  et  $\psi_z$  représentent les termes d'ordre supérieur.



**Figure 2.3.** Géométrie non déformée et déformée d'une plaque selon les CPT, FSDT et HSDT [42].

Plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (TSDT), telles que la théorie parabolique de déformation de cisaillement, ont été proposées par de nombreux chercheurs [44], [47], [48]. Le champ de déplacement de la TSDT de Reddy [50] est exprimé par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Où les paramètres  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\zeta_x$  et  $\zeta_y$  sont les termes d'ordre supérieur.

Avec l'augmentation de l'ordre d'expansion, le nombre de paramètres supplémentaires croît, ce qui rend souvent leur interprétation difficile. Des simplifications ont donc été apportées pour réduire le nombre de paramètres de déplacement. Ces simplifications consistent à tronquer les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une « fonction de cisaillement ». Après ces

simplifications, la forme du champ de déplacement est proposée comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Où  $f(z)$  est la fonction de cisaillement qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque  $h$ , et  $\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \emptyset_x$ ,  $\theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \emptyset_y$ , avec  $\theta_x$  et  $\theta_y$  désignent les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement. Selon l'équation (2.6), le champ de déplacement de la théorie des plaques classiques (CPT) est obtenu en posant  $f(z) = 0$ , tandis que celui de la théorie de la déformation par cisaillement (FSDT) est obtenu en posant  $f(z) = z$ .

### 2.3.3.1 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé (HSDT)

Pour dépasser les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont apporté des contributions significatives au développement de modèles d'ordre supérieur, qui se distinguent dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Ces modèles reposent sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, permettant ainsi de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée. Parmi ceux-ci, nous pouvons mentionner :

- Le champ de déplacement de la TSDT de Reddy [42] est obtenu en prenant la fonction suivante :

$$f(z) = z - \frac{4z^3}{3h^2} \quad (2.7)$$

- La théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) a été proposée par Touratier[54], basée sur une fonction trigonométrique sinusoïdale, appelée théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT). Cette théorie est un exemple fondamental de la famille des HSDT trigonométriques et est mise en œuvre en posant :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (2.8)$$

- Une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour les plaques (HSDPT) a été proposée par Soldatos[55]. Elle est obtenue en prenant :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.9)$$

- La théorie de déformation de cisaillement exponentielle (ESDPT) développée par Karama et al. [56] est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(\frac{z}{h})^2} \quad (2.10)$$

- La théorie de déformation par cisaillement hyperbolique des plaques (HSDPT), développée par Ait Atmane et al.[57], est formulée en considérant :

$$f(z) = z \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)} - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{z\pi}{h}\right)}{\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)} \quad (2.11)$$

- Un modèle d'éléments finis à cinq inconnues avec déformation de cisaillement d'ordre élevé développée par Tati[58]:

$$f(z) = \frac{5}{4} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (2.12)$$

- La théorie de déformation de cisaillement trigonométrique proposée par Sadgui et Tati[59] :

$$f(z) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \left( 1 - \sin^2\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \right) \quad (2.13)$$

#### 2.3.4 Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques (RPT) :

Shimpi [60] a développé une théorie des plaques simple appelée théorie des plaques raffinées (RPT) en séparant le déplacement transversal en parties de flexion et de cisaillement. La caractéristique la plus intéressante de la théorie de Shimpi est qu'elle comporte moins d'inconnues (quatre inconnues) et d'équations gouvernantes que la FSDT. De plus, cette théorie ne nécessite pas de FCC et donne une distribution parabolique du cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. De plus, elle présente de nombreuses similitudes avec la CPT en ce qui concerne les équations de mouvement, les conditions aux limites et les expressions résultantes des contraintes. Le champ de déplacement de la RPT est présenté comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où  $w_b$  et  $w_s$  sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal.

## 2.4 Revue des études antérieures sur la modélisation des plaques FGM

En raison de leur efficacité structurelle inhérente, l'analyse des structures en matériaux fonctionnellement gradés (FGM) suscite un intérêt croissant. Dans cette section, nous proposons une revue des travaux réalisés jusqu'à présent sur l'analyse des plaques FGM, en mettant l'accent sur les analyses statiques, vibratoires et de flambage des plaques monocouches et sandwich. L'objectif est de souligner l'étendue du champ de recherche concernant les FGM et de mettre en évidence les nombreuses pistes encore à explorer. Cette étude bibliographique présente divers travaux sur les structures en FGM, en se concentrant sur l'application de la méthode des éléments finis, qui a permis de mieux comprendre les comportements complexes de ces nouveaux matériaux au cours des deux dernières décennies.

### 2.4.1 Analyse statique de la plaque FG

La compréhension du comportement statique des plaques FG est l'un des enjeux les plus importants pour la conception de ce type de structure. Par conséquent, plusieurs chercheurs se sont consacrés à l'étude du comportement statique des plaques monocouches et sandwich FG, en utilisant une variété de théories des plaques ainsi que différentes méthodes analytiques et numériques. Certains des travaux sélectionnés dans la littérature sont présentés dans cette section.

Reddy et Cheng [61] ont étudié les déformations thermomécaniques en trois dimensions des plaques rectangulaires en matériaux fonctionnellement gradés (FG) avec un appui simple, en utilisant une méthode asymptotique. Vel et Batra [62] ont présenté une solution exacte pour les déformations en trois dimensions d'une plaque épaisse en matériaux fonctionnellement gradés (FG) à appui simple. Pan [63] a étendu la solution de Pagano [64] pour obtenir une solution 3D exacte pour le stratifié composite rectangulaire FG avec des conditions limites simplement supportées, sous une charge de surface. Kashtalyan [65] et Woodward et Kashtalyan [66] ont dérivé des solutions exactes pour l'analyse de flexion statique 3D de plaques FG simplement appuyées soumises à une charge transversale. Récemment, Gholami et al. [67] ont proposé une solution d'élasticité 3D pour l'analyse de la flexion des plaques en matériaux fonctionnellement gradés (FG) anisotropes.

Les solutions analytiques 3D pour les plaques FG sont très utiles, car elles fournissent des résultats de référence pour évaluer la précision de diverses théories des plaques 2D et formulations par éléments finis (EF). Cependant, leurs méthodes de résolution impliquent des complexités mathématiques et sont très difficiles et fastidieuses à résoudre.

De nombreuses théories 2D ont été développées pour l'analyse statique des plaques FG. Parmi elles, la théorie de la plaque classique (CPT) est la plus simple à utiliser. Toutefois, la CPT est principalement adaptée aux plaques minces et, par conséquent, peu de chercheurs l'ont exploitée pour analyser le comportement statique des plaques FG. Notamment, Chi et Chung [68], [69] ont réalisé une analyse de la flexion des plaques FG sous charge transversale en utilisant la CPT. Dans le travail d'Amirpour et al.[70], l'analyse de la flexion de plaques FG minces et sur toute la longueur a été réalisée à l'aide de la CPT. Les résultats analytiques ont été comparés à la simulation par éléments finis (EF) à l'aide d'éléments solides gradués.

Ensuite, la théorie des plaques de Reissner-Mindlin[44], également connue sous le nom de théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), aborde les limites de la théorie des plaques classiques (CPT). Dans ce modèle, la déformation par cisaillement transversal est supposée constante sur toute l'épaisseur de la plaque, ce qui permet l'analyse des plaques modérées et épaisses. Praveen et Reddy [71]ont analysé les réponses statiques et dynamiques non linéaires des plaques FG en utilisant la méthode des éléments finis (EF) et la FSDT, avec des hypothèses de von Karman. Della Croce et Venini [72] ont développé une famille hiérarchique d'éléments finis pour l'analyse de la flexion des plaques FG sous charges mécaniques et thermiques, en utilisant le FSDT et une formulation variationnelle. Singha et al. [73] ont étudié les comportements non linéaires des plaques FG sous charge transversale répartie à l'aide d'un élément fini (EF) de flexion de plaque de haute précision. La formulation a été développée sur la base du FSDT, en tenant compte du concept de position de surface neutre physique. Les FCC ont été introduites, et les équations d'équilibre ont été utilisées pour la détermination des contraintes de cisaillement transversales et des composantes de contrainte normale transversale. Thai et Choi [74] ont présenté un FSDT simplifié avec quatre inconnues pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques isotropes FG et des plaques sandwich avec noyau FG et peaux isotropes, en divisant le déplacement transversal en parties de flexion et de cisaillement. Thai et al. [75] ont présenté des solutions analytiques pour l'analyse de la flexion, du flambage et des vibrations libres des plaques isotropes FG et des plaques sandwich avec des peaux FG, dans diverses conditions limites, en utilisant un nouveau FSDT. Mantari et Granados [76] ont utilisé un nouveau FSDT avec seulement quatre inconnues pour l'analyse statique des plaques sandwich FG, en considérant les termes intégraux dans le champ de déplacement au lieu des termes dérivés. Bellifa et al. [77]ont présenté une solution analytique pour la flexion et la vibration libre des plaques FG en utilisant un nouveau FSDT avec seulement quatre inconnues, basé sur la position exacte de la surface neutre.

Récemment, Joshi et Kar [78] ont analysé le comportement en flexion d'une plaque FG

bidimensionnelle soumise à une charge uniforme, en utilisant la méthode FSDT et les éléments finis (FE). Belounar et al. [79] ont proposé un modèle à éléments finis utilisant l'approche de déformation et le FSDT pour le comportement statique et vibrationnel des plaques carrées et circulaires FG. Tati et al. [58] ont développé un élément de flexion de plaque de déformation par cisaillement d'ordre élevé à quatre nœuds, basé sur une théorie modifiée de déformation de cisaillement du premier ordre, pour analyser des plaques fonctionnellement gradées soumises à des charges transversales sinusoïdales ou uniformément réparties. Mohamed-Ouejdi Belarbi et al. [80] ont réalisé une analyse numérique par éléments finis des comportements de flexion, de vibrations libres et de flambement des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FG) poreux, en prenant en compte diverses distributions de porosité et en utilisant FSDT. Dans une autre étude, Mohamed-Ouejdi Belarbi et al.[81] ont formulé un modèle par éléments finis pour analyser de manière précise le comportement de flexion des plaques FG, en utilisant une version améliorée de la FSDT. Mohamed-Ouejdi Belarbi et al. [82] ont mené une étude approfondie sur le comportement en flexion et en vibration des nanoplaques fonctionnellement graduées dépendantes de la taille, en utilisant un modèle amélioré de FSDT. Benounas et al.[83] ont développé un modèle efficace d'élément isoparamétrique quadrilatère à huit nœuds basé sur une nouvelle théorie améliorée de la déformation par cisaillement de premier ordre (IFSDT) pour analyser la déflexion en flexion et la distribution des contraintes des coquilles minces doublement courbées en matériaux fonctionnellement gradués (FG).

Pour éviter l'utilisation des FCCs, plusieurs HSDT ont été proposés et appliqués aux plaques FG. Reddy [84] a présenté des formulations analytiques et des éléments finis (EF) basées sur son TSDT. Ferreira et al.[85] ont réalisé une analyse statique des plaques fonctionnellement graduées (FG) en utilisant la théorie TSDT. Zenkour [86] a présenté une solution analytique utilisant la SSDT pour le comportement en flexion des plaques FG. La réponse thermoélastique à la flexion des plaques sandwich FG a également été étudiée par Zenkour et Alghamdi [87]en utilisant la SSDT. Zenkour et Alghamdi [88] ont analysé la réponse en flexion de plaques sandwich constituées de peaux FG et d'un noyau isotrope soumis à des charges thermomécaniques réparties de manière sinusoïdale, en utilisant la SSDT. Zenkour [89] a utilisé le SSDT pour résoudre le problème de flexion des plaques FG avec la dérivation des relations de flexion entre les quantités SSDT et CPT. Mahi et al. [90]ont utilisé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique (HPSDT) pour l'analyse de la flexion et des vibrations libres des plaques composites isotropes, fonctionnellement graduées, sandwich et laminées. Mantari et al. [91] ont combiné des fonctions exponentielles et trigonométriques pour développer un HSDT destiné à l'analyse de la flexion des plaques FG.

La réponse statique des plaques à gradient exponentiel, où les propriétés mécaniques varient de manière exponentielle selon l'épaisseur, a été analysée par Mantari et Guedes Soares [92] en utilisant une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement de haut ordre (HSDT) avec une fonction tangentielle.

Récemment, Belkhodja et al. [93] ont étudié les comportements mécaniques de flexion, de vibration libre et de flambement des plaques carrées et rectangulaires fonctionnellement gradées (FG). En utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) avec 11 inconnues et des modèles par éléments finis (EF), Talha et Singh [94] ont étudié la réponse statique et analysé les vibrations libres des plaques fonctionnellement gradées (FG). Natarajan et Manickam [95] ont utilisé un élément quadrilatère à 8 nœuds de type C0, basé sur une HSDT avec 13 inconnues, pour étudier la défexion statique et l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich fonctionnellement gradées (FG). La défexion et les contraintes des plaques fonctionnellement gradées (FG) simplement supportées sous une charge uniformément répartie ont été analysées par Tu et al. [96] en utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) à huit inconnues, dérivée d'une HSDT complète à douze inconnues, tout en satisfaisant la condition de contraintes transversales nulles sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques FG.

En général, la plupart des HSDT sont coûteuses en termes de calcul en raison du grand nombre d'inconnues impliquées. Afin de réduire le coût computationnel, des HSDT à quatre inconnues ont été développées pour les plaques fonctionnellement gradées (FG). Mechab et al. [97] ont utilisé une théorie de la plaque à deux variables (RPT) pour analyser la flexion des plaques FG, reposant sur quatre inconnues et satisfaisant les conditions d'équilibre aux surfaces de la plaque sans besoin de facteur de correction de cisaillement. Abdelaziz et al. [98] ont étendu la théorie de la plaque à deux variables (RPT), développée par Shimpi et Patel [99], pour analyser la réponse statique des plaques sandwich fonctionnellement gradées (FG). De plus, Mechab et al. [100] ont présenté des solutions analytiques pour l'analyse statique et dynamique des plaques fonctionnellement gradées (FG) en utilisant une RPT à quatre inconnues avec une nouvelle fonction de cisaillement hyperbolique. Thai et Choi [101] ont présenté une formulation par éléments finis (EF) de diverses théories de déformation par cisaillement à quatre inconnues pour les analyses de flexion et de vibrations des plaques fonctionnellement gradées (FG). Thai et Kim [102] ont présenté des solutions analytiques pour l'analyse de la flexion et des vibrations libres des plaques fonctionnellement gradées (FG) simplement supportées, en utilisant une HSDT à quatre inconnues. Li et al. [103] ont étudié le comportement thermomécanique en flexion d'un nouveau type de plaques sandwich fonctionnellement gradées (FG), constituées de

peaux FG et d'un noyau FG, en utilisant une RPT à quatre inconnues.

#### 2.4.2 Analyse des vibrations de la plaque FG

Les réponses en vibration des plaques fonctionnellement gradées (FG) ont été largement étudiées. Plusieurs recherches ont été menées pour obtenir des solutions exactes en 3D pour l'analyse des vibrations des plaques FG. Vel et Batra [104] ont proposé une solution exacte en 3D pour les vibrations des plaques rectangulaires FG. De plus, Uymaz et Aydogdu [105] ont présenté des solutions 3D pour les vibrations de plaques rectangulaires FG avec des conditions aux limites arbitraires, en utilisant la méthode de Ritz avec des fonctions de déplacement de Chebyshev. Pour les plaques sandwich rectangulaires FG avec bords simplement supportés et encastrés, la réponse en vibrations libres a été étudiée sur la base de la théorie 3D de l'élasticité linéaire par Li et al.[106]. Reddy et Kant [107] ont présenté une solution analytique pour l'analyse des vibrations libres 3D des plaques FG simplement supportées suivant une distribution exponentielle, en utilisant la méthode des séries de puissances. Jin et al. [108] ont présenté une nouvelle solution exacte 3D pour les vibrations libres des plaques rectangulaires FG, de n'importe quelle épaisseur, avec des conditions aux limites générales. Singh et Kumari [109] ont présenté une solution analytique basée sur l'élasticité 3D pour l'analyse des vibrations libres des plaques rectangulaires FG de type Lévy dans le plan.

En utilisant la théorie des plaques classiques (CPT), Abrate [110] a étudié la réponse en vibrations libres des plaques FG. Zhang et Zhou [111] ont utilisé le concept de surface neutre physique ainsi que la théorie classique non linéaire de von Kármán pour l'analyse des vibrations des plaques FG fines. Liu et Chen [112] ont utilisé la CPT pour étudier les vibrations libres des plaques rectangulaires FG dans le plan. Yin et al. [113] ont réalisé une analyse des vibrations libres des plaques FG fines en utilisant la CPT et le concept de surface neutre physique. Ramu et Mohanty [114] ont proposé une approche par éléments finis (EF) pour l'analyse modale des plaques rectangulaires FG, basée sur la CPT. La méthode FSDT, couplée à la méthode FE, a été utilisée par Batra et Jin [115] pour l'analyse des vibrations libres d'une plaque rectangulaire anisotrope FG. Zhao et al. [116] ont également utilisé le FSDT et la méthode kp-Ritz sans maillage pour l'analyse des vibrations des plaques FG avec des conditions aux limites arbitraires. Mantari et Granados [117] ont utilisé une nouvelle théorie de FSDT avec seulement quatre inconnues pour analyser les vibrations libres des plaques monocouches et sandwich FG. Bernardo et al. [118] ont étudié les vibrations libres et les réponses statiques des plaques FG en utilisant différentes techniques numériques basées sur la théorie de FSDT. Pour calculer les fréquences naturelles des plaques FG, Ferreira et al. [119] ont utilisé la méthode FSDT, la

méthode TSDT et la méthode sans maillage. La technique de Mori-Tanaka a été employée pour homogénéiser les propriétés des matériaux. Sur la base du SSDT, Zenkour [120] a effectué l'analyse des vibrations libres des plaques FG épaisses en tenant compte des effets de l'inertie rotatoire. À l'aide d'un HSDT 2D, Matsunaga [121] a calculé les fréquences naturelles et les contraintes de flambage des plaques FG. Xiang et al. [122] ont proposé une théorie de déformation par cisaillement d'ordre n pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich FG et composites. De plus, Sheikholeslami et Saidi [123] ont utilisé la théorie de la plaque déformable normale et la théorie du cisaillement d'ordre élevé de Batra et Vidoli [124] pour étudier la vibration libre de plaques rectangulaires FG à appui simple reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. Sur la base d'une nouvelle fonction exponentielle, Mantari et al. [125] ont proposé un HSDT pour l'analyse des vibrations des plaques FG reposant sur des fondations élastiques. Ankit Gupta et al. [126] ont étudié les vibrations libres des plaques carrées FG simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques. Tabatabaei et Fattah [127] ont développé une approche par éléments finis (EF) pour l'analyse modale des plaques FG carrées en utilisant le logiciel ABAQUS.

Récemment, Sadgi et Tati [59] ont développé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement trigonométrique pour l'analyse du flambement et des vibrations libres des plaques fonctionnellement graduées. Belounar et al. [128] ont introduit un nouvel élément fini quadrilatère utilisant l'approche de déformation et un FSDT pour le flambement et la réponse vibratoire libre des plaques FG obliques, circulaires et carrées. Tati et al. [129] ont étudié l'analyse de la flexion et des vibrations libres des plaques circulaires FG en utilisant un HSDT à cinq inconnues. Benounas et al. [130] ont proposé un nouveau modèle d'élément fini basé sur la théorie améliorée de la déformation par cisaillement de premier ordre (IFSDT) pour étudier le comportement vibratoire des coques fonctionnellement graduées. Mudit Mishra et al. [131] ont réalisé une analyse des vibrations libres en utilisant la méthode de rigidité dynamique et la théorie de FSDT pour une plaque en matériau fonctionnellement gradué.

#### 2.4.3 Analyse de flambage des plaques FG

Le comportement de flambage constitue l'un des principaux critères de conception pour les plaques soumises à des compressions. De nombreuses études ont été menées pour analyser le flambage des plaques isotropes et des plaques sandwich en matériaux fonctionnellement gradués (FG), afin de prédire les charges de flambage critiques sous différentes conditions de bord et de chargement. Parmi les recherches majeures, on retrouve celles de Birman [132], qui a proposé une solution pour le flambage des plaques composites renforcées de fibres

FG plus rigides. Feldman et Aboudi [133] ont quant à eux étudié le flambage élastique par bifurcation des plaques FG sous une charge de compression appliquée dans le plan. Shariat et al. [134] ont étudié le comportement mécanique et thermique au flambage de plaques FG rectangulaires présentant des imperfections géométriques à l'aide de la théorie des plaque classiques (CPT). Mahdavian [135] a adopté le CPT pour réaliser l'analyse du flambage des plaques rectangulaires FG simplement appuyées sous une charge de compression non uniforme dans le plan. Mohammadi et al. [136] ont présenté la solution de Levy en utilisant le principe de l'énergie potentielle minimale pour l'analyse du flambage des plaques FG minces basées sur le CPT, soumises à différentes charges mécaniques et dans diverses conditions limites. Ramu et Mohanty [137] ont utilisé la méthode des éléments finis (EF) et le CPT pour étudier le comportement de flambage de plaques FG rectangulaires à appui simple sous des charges de compression uniaxiales et biaxiales. Can et al. [138] ont également utilisé la méthode des éléments finis (EF) pour analyser la stabilité des plaques FG minces sous diverses conditions limite. Le FSDT a été utilisé par Lanhe [139] pour l'analyse du flambage thermique d'une plaque rectangulaire FG d'épaisseur moyenne, simplement supportée, sous une augmentation de température uniforme et non linéaire. Zhao et al. [140] ont étudié le comportement de flambage mécanique et thermique des plaques FG en utilisant le FSDT et la méthode kp-Ritz sans éléments finis. L'analyse du flambage des plaques sandwich FG a été réalisée par Yaghoobi et Yaghoobi [141] en utilisant une approche analytique basée sur le FSDT, en considérant diverses conditions limites sous des charges thermiques, mécaniques et thermomécaniques. Les comportements de flambage thermique des plaques FG ont été étudiés par Lee et al. [142] sur la base du concept de surface neutre, en utilisant la méthode des éléments finis (EF) et le FSDT. Shahbaztabar et Arteshyar [143] ont utilisé la méthode FSDT et la méthode des éléments en quadrature différentielle (DQEM) pour étudier les caractéristiques de flambage des plaques FG reposant entièrement ou partiellement sur une fondation élastique et soumises à des charges uniaxiales et biaxiales dans le plan. Shariat et Eslami [144] ont présenté dans leur article une analyse du flambage des plaques fonctionnellement gradées (FG) épaisses de forme rectangulaire sous l'effet de charges mécaniques et thermiques. Une approche de calcul précise basée sur la méthode des éléments finis (EF) et un nouveau TSDT a été développée par Van Do et al. [145] pour analyser les comportements de flambage et de flexion des plaques FG bidirectionnelles. Moita et al. [146] ont utilisé le modèle des éléments finis (EF) pour comparer le flambage mécanique et thermomécanique, linéaire et non linéaire, des plaques FG rectangulaires basées sur le TSDT. La théorie de déformation par cisaillement de second ordre (SSDT) a été utilisée par Zenkour [147] pour étudier le flambage et les vibrations libres des

plaques sandwich FG simplement appuyées. De plus, Zenkour et Mashat [148] ont appliqué la SSDT pour obtenir la réponse de flambage des plaques FG sous différents types de charges thermiques, notamment uniformes, linéaires et non linéaires. Par ailleurs, Zenkour et Sobhy [149] ont étudié la température de flambage critique des plaques sandwich FG, en utilisant la SSDT pour déduire les équations de stabilité. Boghadi et Saidi [150] ont proposé une solution de type Levy pour l'analyse du flambage des plaques rectangulaires épaisses en FG, basée sur le HSDT. Neves et al. [151] ont utilisé une théorie de déformation par cisaillement sinusoïdal hyperbolique pour l'analyse du flambage linéaire des plaques sandwich FG. Dans une autre étude, Reddy et al. [152] ont développé et appliqué un HSDT pour calculer la charge de flambage mécanique des plaques FG rectangulaires, sans imposer de contraintes de cisaillement transversales nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Thinh et al. [153] ont proposé un nouveau HSDT à huit inconnues, dérivé d'un HSDT complet à douze inconnues, pour étudier le flambage et les vibrations libres des plaques FG. Zenkour et Aljadani [154] ont examiné l'analyse du flambage mécanique des plaques FG rectangulaires à appui simple en utilisant une théorie raffinée de cisaillement d'ordre supérieur, combinée à la déformation normale, ainsi que la technique de Navier. Récemment, Tati [155] a utilisé un élément fini (EF) à quatre nœuds, avec cinq degrés de liberté par nœud, basé sur un HSDT simple, pour étudier le comportement de flambage des plaques rectangulaires FG sous chargement mécanique et thermique. Farrokh et al. [156] ont étudié l'instabilité de flambage des plaques FG sous des charges mécaniques, ainsi que sous une élévation de température uniforme, linéaire et non linéaire. De leur côté, Adim et Daouadji [157] ont présenté une théorie raffinée de cisaillement et de déformation pour l'analyse du flambage des plaques FGM soumises à une charge mécanique. Van-Loi Nguyen et al. [158] ont étudié le flambage et la flexion statiques de nano-plaques constituées de nouveaux matériaux fonctionnellement gradués, en prenant en compte les effets de surface sur une base élastique. Sidda Reddy et al. [159] ont analysé le comportement de flambage des plaques poreuses fonctionnellement graduées bidirectionnelles sous des charges dans le plan. Khorshidvand et al. [160] ont présenté des solutions numériques pour l'analyse de la flexion, du flambement axial et du flambement par cisaillement des plaques poreuses FG, basées sur une théorie de plaque raffinée.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les théories les plus couramment utilisées pour la modélisation et l'analyse des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FG). La théorie la plus ancienne et la plus simple est la théorie classique des plaques (CPT), qui, bien qu'efficace pour les plaques minces, néglige les effets de la déformation par cisaillement transversal. Cela limite son application, car elle ne permet pas une prédition précise du comportement des plaques épaisses.

La théorie de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), quant à elle, suppose un champ de déplacement transversal constant à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui conduit à des contraintes de cisaillement transversal uniformes sur toute l'épaisseur. Or, ces contraintes suivent en réalité une variation parabolique à travers l'épaisseur de la plaque. Pour modéliser avec plus de précision ces effets, un facteur de correction de cisaillement est introduit, qui dépend de plusieurs facteurs, tels que les conditions aux limites, les propriétés des matériaux et la géométrie de la plaque.

Les théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSHT) vont plus loin en étendant le champ de déplacement plan à une variation d'ordre supérieur, prenant en compte la coordonnée d'épaisseur pour améliorer la précision des résultats, notamment pour les plaques plus épaisses.

Ce chapitre a également passé en revue diverses recherches portant sur l'analyse statique, vibratoire et de flambage des plaques FG. Nous avons observé que bien que plusieurs théories et méthodes analytiques et numériques aient été utilisées pour étudier le comportement de ces plaques, les études par éléments finis restent moins nombreuses comparées aux approches analytiques.

La motivation principale de cette thèse est d'étudier le comportement statique, vibratoire et de flambage des plaques FG en utilisant la méthode des éléments finis, appliquée à différentes théories des plaques. L'objectif est d'approfondir la compréhension des performances des plaques FG et d'explorer de nouvelles approches pour leur analyse et conception.

# Chapitre 3

## La méthode des éléments finis

### 3.1 Introduction

L'objectif principal en génie est d'analyser le comportement des structures soumises à diverses sollicitations externes, en étudiant leurs déplacements, déformations et contraintes. Pour les structures simples, ces variables peuvent être déterminées analytiquement, bien que souvent sous des hypothèses simplificatrices. Cependant, pour des structures plus complexes, la résolution analytique devient impraticable. C'est pourquoi on utilise la discréttisation en éléments finis, qui simplifie les équations et permet une résolution plus efficace.

Parmi les méthodes courantes pour résoudre ces problèmes discréttisés, on trouve la méthode des différences finies, les équations intégrales aux frontières et la méthode des éléments finis (MEF). La MEF repose sur une approche dite "faible", transformant un problème aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques par discréttisation de l'espace en éléments. Elle permet d'obtenir une solution approximative tout en respectant les conditions aux limites, mais soulève des questions sur l'existence, l'unicité, la stabilité et la convergence des solutions numériques.

L'émergence des méthodes d'éléments finis dans l'ingénierie a été rendue possible par l'apparition des ordinateurs, répondant au besoin de résoudre des problèmes complexes en génie civil et aéronautique. La MEF s'est véritablement développée dans les années 1950, grâce aux travaux de chercheurs tels que J.H. Argyris [161] et R.W. Clough[162]. Ce dernier a introduit le terme "méthode des éléments finis" dans un article de 1960. La base mathématique rigoureuse de la méthode a été solidement établie en 1973 par la publication de l'ouvrage *An Analysis of The Finite Element Method* de Strang et Fix, ce qui a permis son intégration dans les mathématiques appliquées pour la modélisation numérique dans de nombreuses disciplines. Ce chapitre vise à fournir une vue d'ensemble approfondie des modèles d'éléments finis à formulation en déformation, de leurs applications, et de leur évolution au sein de la recherche actuelle, en mettant en avant leur rôle crucial dans l'analyse moderne des structures.

### 3.2 Définition de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique numérique utilisée pour résoudre des problèmes de physique et d'ingénierie complexes, notamment dans les domaines de la mécanique des solides, de la thermique, de l'acoustique, de la dynamique des fluides, et bien d'autres. Elle permet de modéliser et de résoudre des équations différentielles partielles qui décrivent des phénomènes physiques dans des domaines géométriques compliqués, en les transformant en un problème d'algèbre linéaire.

### 3.3 Étapes principales de la méthode des éléments finis (MEF)

Les étapes principales de la méthode des éléments finis (MEF) sont les différentes phases par lesquelles on passe pour résoudre un problème physique complexe à l'aide de cette méthode numérique. Ces étapes permettent de transformer un problème continu en un système d'équations discrètes qu'il est possible de résoudre numériquement.

#### 3.3.1 Discréétisation du domaine

La première étape consiste à diviser le domaine physique (qui est généralement continu) en un ensemble d'éléments finis. Cela s'appelle la discréétisation.

- Le domaine de calcul est subdivisé en une grille ou un maillage constitué de petits éléments. Ces éléments peuvent être de différentes formes géométriques : triangles ou quadrilatères pour des problèmes en 2D, tétraèdres ou cubes pour des problèmes en 3D.
- La taille du maillage (ou la densité des éléments) joue un rôle important dans la précision de la solution. Plus le maillage est fin, plus la solution sera précise, mais cela augmente également la complexité du calcul.

#### 3.3.2 Choix des fonctions de forme

Ensuite, il faut affecter une fonction d'interpolation (fonctions de forme) pour chaque élément. Cette fonction permet de représenter la variation du champ (déplacement, température, pression, etc.) sur l'ensemble de l'élément, en fonction des valeurs aux nœuds.

Les fonctions d'interpolation sont souvent des polynômes (par exemple, polynômes de Lagrange), car elles sont faciles à manipuler, à intégrer et à dériver. Le choix du degré du polynôme dépend de :

- Le nombre de nœuds par élément.
- La nature du champ (scalaire, vecteur, ou tenseur).
- Les critères de continuité qui doivent être respectés au niveau des nœuds et des frontières des éléments (par exemple, la continuité des déplacements et des contraintes pour un problème mécanique).

### 3.3.3 Détermination des propriétés de l'élément

Une fois les éléments définis et les fonctions d'interpolation choisies, il est nécessaire de déterminer les propriétés physiques de chaque élément. Cela inclut des calculs pour obtenir les matrices de rigidité ou d'autres matrices représentant les caractéristiques physiques de l'élément (conductivité thermique, capacité de résistance mécanique, etc.).

### 3.3.4 Assemblage des matrices pour obtenir les systèmes d'équations

Après avoir calculé les propriétés de chaque élément (par exemple, les matrices de rigidité), il faut assembler toutes ces informations pour obtenir le système d'équations global représentant le comportement du système complet. Ce processus consiste à combiner les matrices locales (celles de chaque élément) en une grande matrice globale.

La particularité de la MEF est que, lorsqu'on assemble les équations des éléments, on doit prendre en compte que les nœuds sont partagés entre plusieurs éléments. Par conséquent, la solution pour un nœud doit être identique pour tous les éléments qui le partagent, ce qui permet de construire un système global.

### 3.3.5 Imposition des conditions aux limites

Avant de résoudre le système d'équations, il est nécessaire d'imposer les conditions aux limites du problème. Cela inclut :

- Les valeurs fixes des variables aux nœuds (par exemple, déplacements ou températures connues).
- Les forces ou charges nodales appliquées sur certains nœuds (par exemple, charges mécaniques ou flux thermiques).

Ces conditions aux limites sont essentielles pour garantir que la solution du système reflète correctement les contraintes physiques du problème.

### 3.3.6 Résolution du système d'équations

Une fois le système d'équations assemblé et les conditions aux limites appliquées, nous obtenons un système d'équations simultanées (linéaires ou non linéaires), que l'on résout pour trouver les valeurs inconnues aux nœuds.

- Si le problème est stationnaire (comme un problème d'équilibre statique), les équations sont généralement linéaires.
- Si le problème est dynamique (par exemple, avec des forces qui varient dans le temps), on résout des équations différentielles qui peuvent être linéaires ou non linéaires.

### 3.3.7 Post-traitement et calculs supplémentaires

Une fois que les valeurs nodales (par exemple, les déplacements, les températures, etc.) sont déterminées, il peut être nécessaire de calculer d'autres paramètres importants du problème. Par exemple :

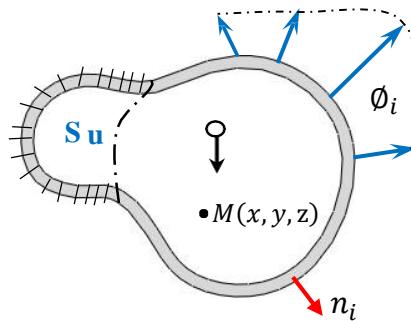
- Dans un problème de mécanique des structures, les inconnues nodales peuvent être les déplacements, et à partir de ceux-ci, on peut calculer les contraintes et déformations.
- Dans un problème thermique, les inconnues nodales peuvent être les températures, et on peut en déduire les flux de chaleur.

Le post-traitement inclut souvent des visualisations graphiques des résultats (comme des cartes de température ou de contrainte) et des analyses supplémentaires (comme le calcul de facteurs de sécurité ou de performance).

## 3.4 Rappel de la MMC et de la MEF

### 3.4.1 Équations de base d'élasticité plane

Le problème d'élasticité des solides consiste à déterminer, pour un point quelconque  $M(x, y, z)$  dans un matériau (Figure 3.1), les champs de déplacements  $u_i$  et les champs de contraintes  $\sigma_{ij}$  dans un matériau soumis à des forces volumétriques ( $f_i$ ) et de surface ( $\emptyset_i$ ). Cela revient à résoudre les équations de l'élasticité des solides en prenant en compte les conditions aux limites et les propriétés du matériau.



**Figure 3. 1.** Corps solide soumis à de surfaces ( $\emptyset_i$ ) et des forces de volume ( $f_i$ )[163].

Dans le cadre de la mécanique des solides, l'élasticité plane est un cas particulier de la théorie de l'élasticité qui se limite aux phénomènes se déroulant dans un plan bidimensionnel.

Les équations de champ en élasticité décrivent comment un matériau se déforme sous l'action de forces. Ces équations sont généralement des équations aux dérivées partielles qui modélisent la relation entre les contraintes, les déformations et les forces appliquées. En élasticité plane, ces équations sont simplifiées en tenant compte d'hypothèses géométriques et physiques spécifiques.

On distingue principalement deux types de problèmes en élasticité 2D : le modèle en contrainte plane et le modèle en déformation plane. Ces deux modèles correspondent à des approximations spécifiques selon les conditions géométriques du corps solide.

### 3.4.1.1 Modèle en contrainte plane

Le modèle en contrainte plane est utilisé pour des plaques minces sollicitées dans leur plan (xy), avec un axe z perpendiculaire au plan de la plaque. Dans ce modèle, on fait l'hypothèse que les contraintes normales dans la direction z, c'est-à-dire  $\sigma_z$ , sont nulles (Figure 3.2a).

Le modèle en contrainte plane est basé sur les trois hypothèses suivantes :

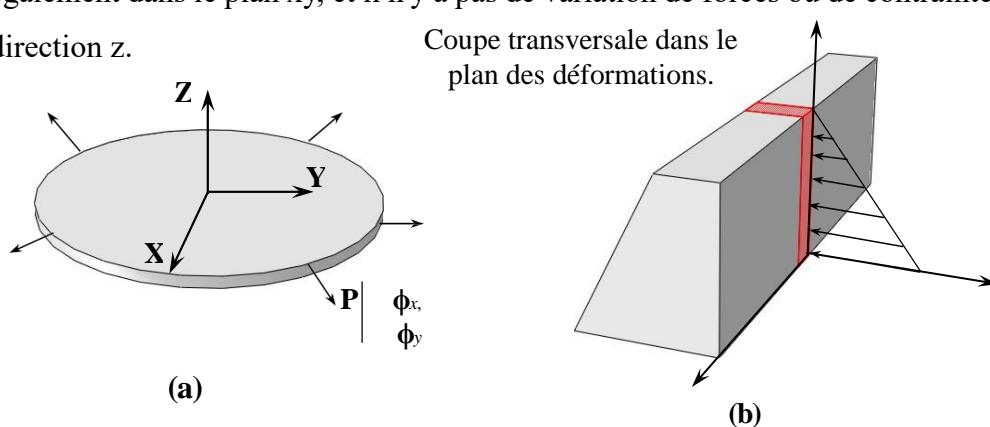
- Plaques minces : Le matériau est supposé suffisamment mince dans la direction z pour que les effets dans cette direction soient négligeables.
- Forces de surface et de volume : Les forces sont appliquées dans le plan xy, et il est supposé que les variations de contraintes dans la direction z sont négligeables.
- Degré de liberté : Les déplacements se produisent dans le plan xy, et les contraintes et déformations sont considérées dans ce même plan.

### 3.4.1.2 Modèle en déformation plane

Le modèle en déformation plane s'applique à des corps solides pour lesquels la dimension suivant l'axe z (la direction perpendiculaire au plan xy) est suffisamment grande par rapport aux autres dimensions. En d'autres termes, ce modèle est applicable lorsque l'extension dans la direction z est significativement plus grande que dans le plan xy (Figure 3.2b).

Le modèle en contrainte plane est basé sur les deux hypothèses suivantes :

- Déformation plane : La déformation du solide est limitée au plan xy, et il est supposé que les déformations dans la direction z sont nulles. Autrement dit, on impose ( $\varepsilon_z = 0$ ), ce qui signifie qu'il n'y a pas de variation de forme dans la direction z.
- Forces de surface et de volume : Les forces externes appliquées sur le corps solide sont également dans le plan xy, et il n'y a pas de variation de forces ou de contraintes dans la direction z.



**Figure 3. 2.** (a) Modèle en contrainte plane et (b) modèle en déformation plane[163].

### 3.4.1.2 Relation déformations-déplacements (relation cinématiques)

En élasticité plane, où les déplacements et déformations se produisent dans le plan xy (ce qui implique  $\epsilon_z = 0$  et  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ), les relations cinématiques sont réduites à deux dimensions (2D) :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

### 3.4.1.3 Équations d'équilibre en 2D (plan)

Pour un problème d'élasticité plane (dans le plan xy, avec z perpendiculaire au plan), les équations d'équilibre sont obtenues en appliquant la condition d'équilibre à chaque élément de volume. Elles expriment l'équilibre statique des forces dans le plan et sont généralement sous la forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles pour les contraintes internes.

- Équilibre des forces dans la direction x

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (3.2)$$

- Équilibre des forces dans la direction y

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_y = 0 \quad (3.3)$$

### 3.4.1.4 Equation de compatibilité

Pour un problème en élasticité plane, les déformations sont des fonctions des déplacements dans le plan xy, et les équations de compatibilité sont obtenues à partir des dérivées croisées des déformations normales et de cisaillement.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.4)$$

### 3.4.1.5 Relation contraintes-déformations (équations constitutives)

Les relations générales de la loi de Hooke pour un matériau isotrope sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2\mu\epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2\mu\epsilon_y \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Où

$\lambda$  et  $\mu$ : sont les paramètres de Lamé. Ces deux constantes sont des propriétés matérielles qui décrivent le comportement élastique du matériau.

- $\lambda$  est appelé le paramètre de Lamé du premier ordre.
- $\mu$  est le module de cisaillement (ou module de rigidité).

Ces relations peuvent être écrites sous forme matricielle en regroupant les contraintes et les déformations dans des vecteurs comme suit [164]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.7)$$

Où D est la matrice d'élasticité, donnée sous la forme du[164] :

- Cas modèle en déformation plane

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ 0 & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

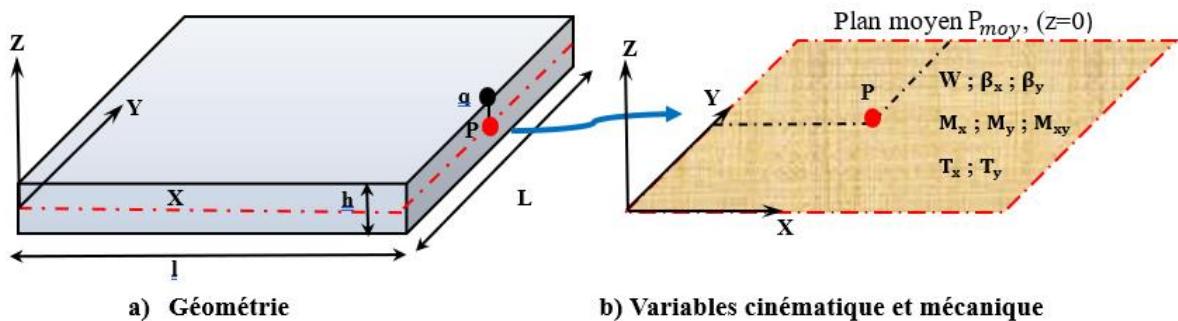
- Cas modèle en contrainte plane

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.4.2 La théorie des plaques du premier ordre (Reissner-Mindlin)

#### 3.4.2.1 Géométrie et hypothèse d'une plaque Reissner-Mindlin

Une plaque est un solide élastique tridimensionnel dont l'épaisseur h (figure 3.3) est faible par rapport aux deux autres dimensions, et qui possède généralement un plan de symétrie situé au niveau du milieu de l'épaisseur, correspondant au plan moyen ( $P_{moy}$ , Oxy, avec  $z = 0$ ).



**Figure3. 3.** Description d'une plaque[163].

La théorie de Reissner-Mindlin pour les plaques épaisses repose sur est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes [43],[44]:

- **H1 : Hypothèse des sections droites**

Toute section droite perpendiculaire à la surface moyenne non déformée reste droite après déformation, mais elle n'est pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée. Cette hypothèse permet de prendre en compte la rotation des sections internes de la plaque sous l'effet des charges, ce qui n'est pas considéré dans la théorie de Kirchhoff.

- **H2 : Hypothèse de non-variation de l'épaisseur ( $\varepsilon_z = 0$ )**

L'épaisseur de la plaque reste constante, ce qui signifie que la déformation dans la direction de l'épaisseur est négligeable. Cette hypothèse s'applique principalement aux déformations de flexion et de cisaillement, mais peut être inappropriée pour de grandes déformations ou en cas de torsion.

- **H3 : Hypothèse des contraintes planes**

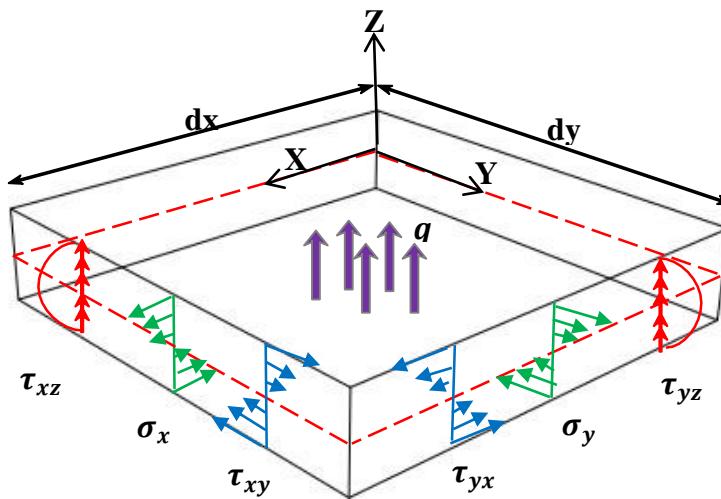
La contrainte ( $\sigma_z$ ) dans la direction de l'épaisseur (z) est considérée comme négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes (comme celles dans les directions x et y). Cette hypothèse est valable dans le cadre des plaques minces soumises à des charges principalement en flexion et cisaillement, où les contraintes transversales sont faibles.

- **H4 : Hypothèse d'anisotropie plane pour les plaques composites**

Dans le cas d'une plaque composite, chaque couche est considérée comme étant anisotrope dans le plan LT, avec z étant l'axe d'orthotropie. Cela signifie que les propriétés mécaniques de chaque couche peuvent être différentes dans le plan de la plaque, mais sont symétriques autour de l'axe z (comme dans le cas des matériaux composites avec plusieurs couches ayant des orientations spécifiques). L'orthotropie dans le plan LT (longitudinal-transversal) est donc prise en compte pour modéliser les comportements spécifiques des matériaux composites.

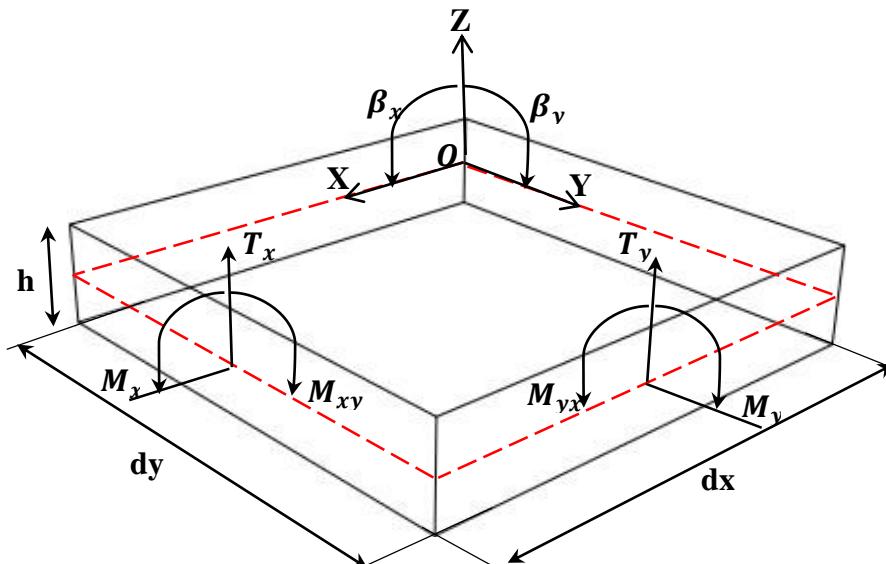
### 3.4.2.2 Contraintes et efforts résultants

La figure (3.4) illustre les contraintes agissant sur les sections d'un élément différentiel de plaque soumis à une charge extérieure q suivant l'axe z, avec un matériau homogène linéairement élastique.



**Figure 3.4.** Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène[163].

- Les contraintes normales ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) et la contrainte de cisaillement plan  $\tau_{xy}$  varient linéairement en  $z$  et sont liées aux moments de flexion ( $M_x, M_y$ ) et au moment de torsion  $M_{xy}$ .
- Les contraintes de cisaillement transversal ( $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ) varient quadratiquement en  $z$  et sont liées aux efforts tranchants  $T_x$  et  $T_y$  (figure 3.5).



**Figure3. 5.** Efforts résultants[163].

Les expressions des efforts résultants dans une plaque sont dérivées à partir des contraintes agissant sur une section différentielle de la plaque. Ces efforts résultants sont utilisés pour décrire l'équilibre global de la plaque sous charge et sont essentiels pour la formulation des équations de flexion et de cisaillement dans les plaques. Les expressions des efforts résultants sont données par [165]:

- **Moment résultant  $M_x$  et  $M_y$**

Ces moments sont associés aux courbures de la plaque sous flexion.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x(z)dz; M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_y(z)dz \quad (3.10)$$

- **Moment de torsion résultant  $M_{xy}$**

Ce moment est associé aux effets de torsion sur la plaque, qui induisent des contraintes de cisaillement dans le plan xy.

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{xy}(z)dz \quad (3.11)$$

- **Effort tranchant résultant  $T_x$  et  $T_y$**

Les efforts tranchants résultent des contraintes de cisaillement transversal agissant sur les faces de la plaque

$$T_x = \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz; T_y = \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (3.12)$$

### 3.4.2.3 Cinématique d'une plaque de Reissner-Mindlin

#### a) Champs de déplacements

Le champ de déplacements d'un point quelconque M (x, y, z) est :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les composants  $u_0$  et  $v_0$  représentent les déplacements dans le plan de la plaque à un point (x, y, 0), respectivement dans les directions x et y. Le déplacement transverse  $w(x, y)$  est supposé constant à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui signifie que ce déplacement est indépendant de la position verticale (direction z) dans la plaque. Les rotations autour des axes x et y sont données par  $\beta_y$  et  $\beta_x$  respectivement.

#### b) Champs de déformations

Le vecteur des champs de déformations  $\{\varepsilon\}$  peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^m\} + z\{\kappa\}; \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (3.14)$$

Les vecteurs  $\{\varepsilon^m\}$  et  $\{\kappa\}$  représentent respectivement les déformations de membrane et de flexion.

$$\{\varepsilon^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}; \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Le vecteur des déformations de cisaillement transversal  $\{\gamma\}$  est donné par :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

### 3.4.2.4 Equations de l'équilibre statique

Les équations d'équilibre d'une plaque s'énoncent de la manière suivante :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x = 0; \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y = 0; \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} - f_z = 0 \quad (3.17)$$

### 3.4.2.5 Lois de comportement élastique

#### a) Plaque homogène isotrope

Les relations entre les contraintes et les déformations pour un matériau homogène et isotrope s'expriment de la manière suivante :

$$\{\sigma\} = z[D]\{\kappa\}; \{\sigma\} = z[D]\{\kappa\}; [\tau] = [G]\{\gamma\} \quad (3.18)$$

Avec

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)} \quad [D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rangle$ ;  $\langle \tau \rangle = \langle \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle$ ;  $E$  module d'Young;  $\nu$  coefficient de poisson et  $\kappa$  et  $\gamma$  sont donnés par les relations (3.15) et (3.16).

Les relations entre les efforts résultants et les déformations peuvent être obtenues en développant les intégrales (3.10) et (3.12)

$$\{M\} = [D_f]\{\kappa\} \text{ et } \{T\} = [D_c]\{\gamma\} \quad (3.20)$$

Avec

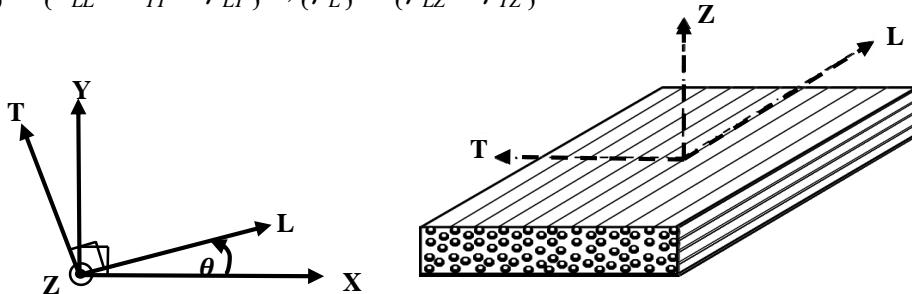
$$[D_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; [D_c] = k \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La matrice de comportement de cisaillement  $[D_c]$  dépend du coefficient  $k$  de correction du CT.  $k = 5/6$  pour les matériaux isotropes [166].

### b) Plaque composite (stratifiée)

Dans les plaques composites stratifiées, le matériau est constitué de couches orthotropes dans le repère local  $(L, T, Z)$  et isotropes dans le plan  $T-Z$  (figure 3.6). Les indices L et T correspondent respectivement à la direction des fibres et à la direction dans le plan, perpendiculaire à la direction des fibres, tandis que l'indice Z désigne la direction normale à la plaque. Pour chaque couche, l'hypothèse de contrainte plane ( $\sigma_z = 0$ ) est adoptée, et les équations constitutives dans les axes locaux (orthotropes)  $(L, T, Z)$  sont exprimées comme suit[167] :

$$\begin{aligned} \{\sigma_L\} &= [D_L]\{\varepsilon_L\}; \{\tau_L\} = [G_L]\{\gamma\} \\ \{\sigma_L\} &= \{\sigma_{LL} \quad \sigma_{TT} \quad \sigma_{LT}\}^T; \{\tau_L\} = \{\tau_{LZ} \quad \tau_{TZ}\}^T \\ \{\varepsilon_L\} &= \{\varepsilon_{LL} \quad \varepsilon_{TT} \quad \gamma_{LT}\}^T; \{\gamma_L\} = \{\gamma_{LZ} \quad \gamma_{TZ}\}^T \end{aligned} \quad (3.22)$$



**Figure 3.6.** Couche orthotrope.

Dans le repère d'orthotropie  $(L, T, Z)$ , les matrices de comportement élastiques s'écrivent comme suit [168] :

$$[D_L] = \begin{bmatrix} D_{LL} & D_{LT} & 0 \\ D_{LT} & D_{TT} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}; [G_L] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$D_{LL} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; D_{TT} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; D_{LT} = \frac{\nu_{TL}E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; G_{TZ} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TZ})}$$

Avec  $E_L$  et  $E_T$  sont les modules de Young dans les directions L et T, respectivement ;  $G_{LT}$ ,  $G_{TZ}$  et  $G_{LZ}$  sont les modules de cisaillement dans les plans L-T, T-Z et Z-L, respectivement ; et  $\nu_{LT}$  et  $\nu_{TT}$  sont les coefficients de poisson.

Les matrices de transformation  $[T_1]$  et  $[T_2]$  suivantes permettent de passer du repère d'orthotropie au repère cartésien (x, y, z) :

$$[T_1] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2sc & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}; [T_2] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Avec  $c = \cos(\theta)$ ,  $s = \sin(\theta)$

Enfin, la relation contrainte-déformation dans le système de coordonnées cartésiennes  $(X, Y)$  est donnée par [168]:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D]\{\varepsilon\}; \{\tau\} = [G]\{\gamma\} \\ [D] &= [T_1]^T [D_L] [T_1]; [G] = [T_2]^T [G_L] [T_2] \end{aligned} \quad (3.25)$$

#### • Composantes de contraintes résultantes

Les résultats de contraintes sont obtenus par l'intégration des composantes de contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque (h) comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(z) \\ \sigma_y(z) \\ \tau_{xy}(z) \end{Bmatrix} dz; \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(z) \\ \sigma_y(z) \\ \tau_{xy}(z) \end{Bmatrix} zdz; \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.26)$$

Pour obtenir les équations constitutives des forces de membrane, des moments de flexion et des forces de cisaillement, les équations (3.15), (3.16) et (3.25) sont substituées dans l'équation (3.26) pour obtenir :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [D_m] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + [D_{mf}] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D_{mf}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + [D_f] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = [D_c] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Après l'assemblage des couches en fonction de leur épaisseur, les matrices de rigidité homogénéisées (celles de membrane  $[D_m]$ , de flexion  $[D_f]$ , de couplage membrane-flexion  $[D_{mf}]$  et de cisaillement  $[D_c]$ ), obtenues par la technique de stratification, seront données par:

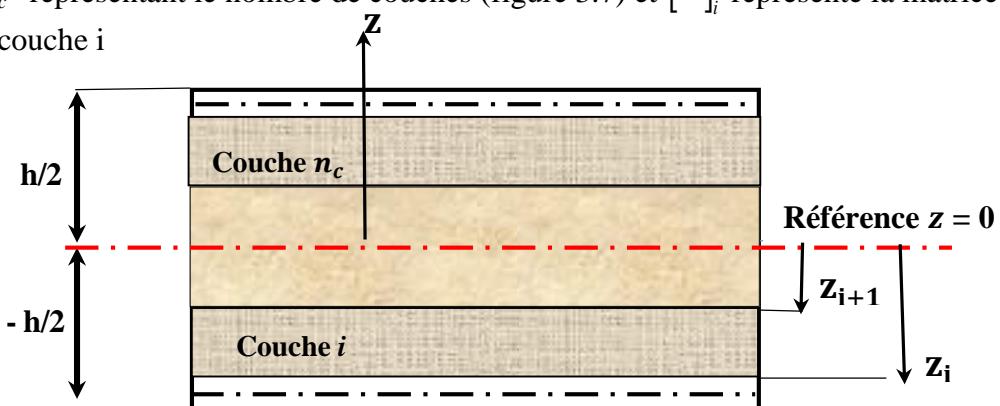
$$[D_m] = \sum_{i=1}^{n_c} [D]_i (z_{i+1} - z_i) \quad (3.30)$$

$$[D_f] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n_c} [D]_i (z_{i+1}^3 - z_i^3) \quad (3.31)$$

$$[D_{mf}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_c} [D]_i (z_{i+1}^2 - z_i^2) \quad (3.32)$$

$$[D_c] = \sum_{i=1}^{n_c} [G]_i (z_{i+1} - z_i) \quad (3.33)$$

Avec  $n_c$  représentant le nombre de couches (figure 3.7) et  $[D]_i$  représente la matrice  $[D]$  pour la couche  $i$



**Figure 3.7.** Section d'une plaque stratifiée symétrique.

Si une symétrie matérielle existe par rapport au plan  $z = 0$ , alors la matrice de couplage membrane-flexion  $[D_{mf}]$  est nulle. Dans ce cas, le plan  $xy$  est considéré comme le plan neutre, ce qui implique qu'il n'y a pas de couplage entre les effets de membrane et de flexion. En d'autres termes, des efforts de membrane appliqués dans le plan neutre ne génèrent aucune courbure, et des efforts de flexion ne causent aucune déformation de membrane. Cela conduit à la relation suivante:

$$\{N\} = [D_m]\{\varepsilon^m\}; \{M\} = [D_f]\{\kappa\}; \{T\} = [D_c]\{\gamma\} \quad (3.34)$$

La relation entre les résultantes de contraintes et les déformations peut donc être exprimée sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_m] & [D_{mf}] & 0 \\ [D_{mf}] & [D_f] & 0 \\ 0 & 0 & [D_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^m \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

### 3.5 Les modèles éléments finis

En général, on distingue cinq modèles utilisés dans la méthode des éléments finis, selon le champ de base, dont on cite :

#### 3.5.1 Formulation en déplacement

Les éléments finis basés sur cette formulation reposent sur une interpolation du champ des déplacements, étendue sur l'ensemble de l'élément. Cela permet de déterminer les déplacements de manière précise et unique au sein de la structure. Cependant, les contraintes ne peuvent être déterminées que par des moyennes et ne sont généralement pas continues aux frontières de l'élément. Le modèle de déplacement est le plus couramment utilisé et le plus développé. Dans ce modèle, les fonctions de déplacement sont choisies à l'aide du triangle de Pascal, de manière à ce que le nombre total de constantes soit égal au nombre total des degrés de liberté (ddl) de l'élément.

#### 3.5.2 Formulation d'équilibre

Le modèle d'équilibre repose directement sur les principes de l'équilibre statique. Plutôt que de résoudre pour les déplacements, ce modèle se concentre sur les forces internes et externes dans le domaine. L'objectif est de garantir que la somme des forces internes, générées par les contraintes, et des forces externes, correspondant aux charges appliquées, est nulle, ce qui correspond à l'état d'équilibre du système ou de la structure étudiée.

Dans ce modèle, l'accent est mis sur l'équilibre des forces. Les forces internes, liées aux contraintes par des relations constitutives telles que la loi de Hooke, et les forces externes, calculées en fonction des charges appliquées, sont utilisées pour établir un système d'équations d'équilibre à résoudre.

Les équations d'équilibre s'expriment sous la forme suivante :  $F_{\text{int}} = F_{\text{ext}}$

Ce modèle est particulièrement utile dans les analyses de structures où les forces externes sont mieux définies que les déplacements. Il est également souvent utilisé dans les problèmes non

linéaires, où les déformations sont importantes et difficilement approximables par des déplacements directs.

### 3.5.3 Formulation hybride

Le modèle hybride combine plusieurs formulations pour tirer parti des avantages de chacune, en particulier dans les problèmes où les contraintes ou les déplacements ne décrivent pas correctement le comportement physique de la structure dans certaines régions.

Dans ce modèle, certaines zones du domaine sont discrétisées en fonction des déplacements, tandis que d'autres utilisent les contraintes comme inconnues. Cette approche permet de mieux représenter les effets locaux dans des zones où les contraintes sont particulièrement importantes, tout en maintenant une représentation globale adéquate pour le reste du domaine. Ce modèle est souvent utilisé dans des situations où il est crucial de prendre en compte à la fois le comportement local des contraintes et les déplacements globaux. Cela est notamment pertinent dans les structures soumises à des charges de contact ou dans des zones où des concentrations de contraintes se produisent.

### 3.5.4 Formulation mixte

La formulation mixte repose sur des approximations indépendantes des différents champs inconnus (déplacements, déformations, contraintes), appliquées à l'ensemble de l'élément. En général, ces modèles conservent les paramètres inconnus de ces champs comme degrés de liberté. Bien que le développement de ce modèle puisse être long et coûteux, les éléments ainsi obtenus sont souvent d'excellente qualité. Le modèle mixte est parfois utilisé pour corriger certains défauts du modèle en déplacement ; par exemple, certaines composantes internes de la déformation sont interpolées pour améliorer la précision des contraintes. Les paramètres correspondants peuvent ensuite être éliminés par condensation, transformant ainsi l'élément en un modèle de type déplacement.

### 3.5.5 Formulation en déformation

Dans cette formulation, l'approximation est effectuée sur le champ des déformations de manière à ce que les équations de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. L'approche en déformation permet le développement d'éléments de haut ordre avec un nombre minimal de degrés de liberté, tout en étant relativement simple à appliquer et efficace. Cette approche permet de représenter les composantes des déplacements dans le plan à l'aide de polynômes d'ordre élevé, ce qui est particulièrement intéressant, car l'amélioration des éléments d'ordre élevé provient principalement de la représentation des déplacements dans le plan par des termes de polynômes d'ordre élevé.

Contrairement aux éléments conventionnels ordinaires et aux éléments d'ordre élevé, les composantes du champ des déplacements dans les éléments basés sur le modèle en déformation ne sont pas indépendantes, mais liées conformément aux exigences de la relation déplacements-déformations. Ce lien ne se limite pas aux termes correspondant aux mouvements rigides du corps, mais inclut également les termes relatifs aux déformations de l'élément.

### 3.5.5.1 Avantages du modèle en déformation

L'utilisation du modèle en déformation présente de nombreux avantages en termes de comportement des structures. En effet, ce modèle permet de tirer parti des bonnes adaptations pour décrire précisément les mouvements, tels que les corps rigides et les déformations constantes. Ainsi, les éléments développés à partir de ce modèle permettent d'améliorer les performances des résultats tout en utilisant un nombre limité d'éléments.

Les avantages des éléments basés sur le modèle en déformation sont les suivants[169]:

- **Satisfaction plus facile des critères de convergence :** Les deux principaux critères de convergence, directement liés aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide), sont plus facilement satisfaits.
- **Découplage des composantes de déformation :** Le modèle en déformation permet un découplage plus facile des différentes composantes des déformations. Un champ de déplacements découpé génère des déformations qui sont ensuite traitées séparément.
- **Enrichissement du champ des déplacements :** Il est possible d'enrichir le champ des déplacements en y introduisant des termes d'ordre élevé, sans avoir besoin d'ajouter des nœuds intermédiaires, ce qui permet de résoudre le problème de verrouillage ("locking").

### 3.5.5.2 Synthèse bibliographique sur les éléments finis à champ de déformation

#### a) Eléments coques basés sur l'approche en déformation

L'approche basée sur la déformation a été introduite en 1971 à l'Université de Cardiff, au Royaume-Uni, avec pour objectif de concevoir des éléments performants tout en réduisant le nombre de nœuds. Ce défi a été relevé avec succès, ce qui a conduit à l'émergence de l'une des méthodes les plus couramment utilisées en sciences de l'ingénieur. Les premiers travaux dans ce domaine ont été réalisés par Ashwell et al.[170], [171], qui, dans leurs études unidimensionnelles et bidimensionnelles sur des structures courbes, circulaires et en coques, ont utilisé des fonctions de déformation indépendantes, permettant ainsi de développer des éléments efficaces avec un nombre réduit de nœuds. Sabir et Ashwell[172], dans la même période, ont démontré l'efficacité des éléments basés sur cette approche en déformation à travers

des tests sur les oscillations libres de structures annulaires circulaires. L'année suivante, Sabir et Lock[173], dans leurs analyses de coques cylindriques, et Ashwell [174], qui améliora ses éléments, ont obtenu des résultats très prometteurs, tant pour les déplacements que pour les contraintes, notamment dans le cadre d'un test sur un cylindre pincé libre sur ses côtés. Dans ses travaux de recherche, Ashwell a également montré que ses éléments pour les arcs circulaires dans un domaine géométriquement non linéaire surpassaient les éléments classiques. Par la suite, des éléments d'arcs se déformant hors du plan de courbure [175], [176]ont été développés en extension de ces travaux.

Les éléments de coques ont également été étudiés, notamment pour les charges concentrées et le calcul des contraintes autour de ces charges[177], ainsi que pour les coques minces soumises à des forces radiales ou à des moments concentrés, où des résultats très proches des solutions théoriques ont été obtenus. Sabir et Cherchafi [178] ont ensuite développé des éléments rectangulaires et quadrilatéraux pour des coques cylindriques.

En 1985, Sabir et Ramadanhi [179]ont mis au point un élément fini courbe simple, fondé sur les équations de coques peu profondes et intégrant uniquement les degrés de liberté externes essentiels. Cet élément a été testé avec succès dans l'analyse de structures cylindriques [179], sphériques[180], ainsi que pour des coques paraboliques et hyperboliques, montrant ainsi un haut degré de précision. En 1988, Sabir et El-Erris [181] ont développé un élément fini destiné à l'analyse de la flexion des coques coniques. Cet élément, à la fois simple et efficace, intègre 20 degrés de liberté et permet de représenter avec exactitude les modes de déplacement des corps rigides, tout en minimisant les efforts de calcul. Les tests de convergence réalisés sur cet élément, appliqué à des analyses de flexion de coques coniques, ont démontré que des résultats d'une précision acceptable pouvaient être obtenus même avec un maillage relativement grossier.

### b) Eléments finis basés sur l'approche en déformation en coordonnées polaires

Le succès de l'application de l'approche en déformation aux problèmes d'élasticité plane a conduit à l'extension des travaux vers le développement d'éléments finis sectoriels dans un système de coordonnées polaires. Cette extension se réalise de deux manières :

- La première consiste à développer directement des éléments finis fondés sur le modèle en déformation, en supposant des expressions polynomiales pour les déformations en coordonnées polaires. Les équations obtenues sont ensuite intégrées pour déterminer les fonctions de déplacement correspondantes.
- La deuxième approche repose sur l'utilisation du champ de déplacements obtenu via l'approche en déformation dans un système de coordonnées cartésiennes, puis sur la transformation de ce champ en coordonnées polaires.

Comme mentionné précédemment, concernant les structures courbes, celles-ci doivent être divisées en un grand nombre d'éléments pour une modélisation efficace. Dans le cas des cylindres, il est non seulement plus approprié, mais aussi plus économique d'employer des éléments sectoriels en coordonnées polaires. En effet, pour les frontières circulaires, l'utilisation d'éléments sectoriels en coordonnées polaires s'avère particulièrement avantageuse. De ce fait, de nombreux chercheurs ont adopté l'approche en déformation pour développer ces éléments sectoriels en coordonnées polaires. Raju et Rao [182] ont proposé une matrice de rigidité pour déterminer l'état plan dans la zone élastique, en analysant des cylindres soumis à une pression interne, tout en évaluant l'efficacité de cet élément sectoriel. Par ailleurs, plusieurs éléments sectoriels ont été développés en coordonnées polaires pour l'analyse de problèmes d'élasticité générale[183], [184], [185], [186], [187].

#### **c) Eléments plaques basés sur l'approche en déformation**

L'analyse des éléments finis pour les structures de type plaque est un domaine essentiel en mécanique des structures, en particulier pour la modélisation de comportements complexes sous chargements variés. Parmi les différentes approches pour modéliser les plaques, l'approche en déformation (ou approche par déformation) est l'une des plus utilisées en raison de sa simplicité et de sa capacité à offrir des solutions de haute précision, tout en réduisant les coûts computationnels. L'un des travaux les plus notables dans ce domaine est celui de Belounar et Guenfoud [188], qui ont développé un nouvel élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner/Mindlin. Cet élément, désigné sous le nom de SBRP (Strain Based Rectangular Plate), a montré de meilleures performances par rapport aux éléments finis classiques basés sur l'approche par déplacement. Récemment, plusieurs autres éléments robustes basés sur l'approche en déformation ont été formulés pour l'étude de la flexion des plaques [189], [79],[190],[191],[192],[193],[194], [168], [195],[196], [128],[197]

#### **d) Eléments tridimensionnels basés sur l'approche en déformation**

Les éléments tridimensionnels basés sur l'approche en déformation sont des modèles d'éléments finis qui intègrent la théorie de la déformation plutôt que celle des déplacements pour résoudre des problèmes de mécanique des structures, en particulier dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle. Cette approche repose sur des hypothèses de déformation qui permettent de mieux capturer les effets de la flexion et de la contrainte dans les structures complexes, telles que les plaques et les coques, tout en simplifiant les calculs et en évitant l'utilisation d'éléments de haut ordre (comme les éléments hexaédriques ou prismatiques de degré élevé).

Par exemple, Belarbi et Charif [198] ont proposé un élément hexaédrique simple (SBH8) à huit nœuds, chaque nœud ayant trois degrés de liberté ( $u, v, w$ ), fondé sur un modèle en déformation. Ce modèle modifie la matrice d'élasticité pour mieux gérer les effets de la flexion des plaques, tout en réduisant la complexité par rapport aux éléments tridimensionnels classiques d'ordre élevé. De plus, Maalem [199] a développé un autre élément tridimensionnel qui respecte les équations d'équilibre pour analyser la flexion des plaques minces et épaisses, en utilisant également l'approche en déformation pour simplifier les calculs tout en maintenant une grande précision dans la modélisation des déformations et des contraintes. Hamadi et Maalem [200] ont développé un nouvel élément fini parallélépipédique, appelé SBP8C (Strain Based Parallelepiped 8-node Condensed), formulé à l'aide de la condensation statique. Cet élément est conçu pour l'analyse de problèmes tridimensionnels, ainsi que pour l'étude de la flexion des plaques minces et épaisses. Par ailleurs, Belounar et Guerraiche [197] et [201] ont proposé de nouveaux éléments finis tridimensionnels basés sur l'approche par déformation, spécifiquement pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques. Ces éléments, qui intègrent les trois degrés de liberté externes ( $u, v$  et  $w$ ) à chaque nœud d'angle ainsi qu'au nœud centroïde, offrent une représentation plus précise des déformations dans les structures étudiées.

Messai et al. [202] et [203] ont, quant à eux, développé un élément fini de type brique (SBBNN) en 3D, également basé sur l'approche en déformation, avec trois degrés de liberté essentiels ( $u, v$  et  $w$ ) par nœud. Cet élément est dédié à l'analyse des structures et se distingue par une matrice d'élasticité modifiée, qui intègre les constantes de contraintes planes et un coefficient de cisaillement transversal, afin d'améliorer la modélisation des comportements élastiques complexes des matériaux.

#### e) Eléments finis en élasticité plane basés sur l'approche en déformation

L'importance de l'approche en déformation dans le développement des éléments finis membranaires avec rotation dans le plan a été soulignée dans de nombreuses études : Sabir [204] a développé deux éléments, un rectangulaire SBRIEIR (Strain Based rectangulaire In-plane Element with In-plane Rotation) et un triangulaire le SBTIEIR, dans lequel la rotation dans le plan est considérée comme un degré de liberté nodal. Sabir et Sfendji [205] ont développé deux éléments : le premier est un élément triangulaire avec deux degrés de liberté essentiels à chaque nœud d'angle et un nœud au centre du côté de l'élément, ce qui lui confère huit degrés de liberté au total. Le deuxième est un élément rectangulaire, avec les mêmes degrés de liberté que l'élément triangulaire aux quatre nœuds des coins et au nœud central, ce qui lui donne dix degrés de liberté. Ces éléments ont été utilisés sous diverses formes, y compris la condensation statique, et sont conçus pour satisfaire les équations d'équilibre afin de fournir des

solutions aux problèmes en élasticité plane 2D. Belarbi et Bourezane [206] ont développé un nouvel élément basé sur le modèle en déformation. Il s'agit d'un élément membranaire triangulaire avec trois degrés de liberté par nœud et les champs de déformation sont suggérés afin d'améliorer l'élément de Sabir [204]. Par ailleurs, Belarbi et Maalem [207] ont proposé un élément rectangulaire R4BM fondé sur l'approche en déformation, avec deux degrés de liberté essentiels pour chaque nœud sommet, destiné à résoudre les problèmes d'élasticité linéaire plane. Rebiai et Belounar[208], [209] ont proposé des éléments membranaires rectangulaires à quatre noeuds, chacun doté de trois degrés de liberté par nœud (deux translations  $u$  et  $v$ , ainsi qu'une rotation  $\theta_z$  dans le plan), en se basant sur l'approche en déformation. Bouzidi et al.[210] ont présenté une solution numérique basée sur l'approche en déformation en utilisant un élément fini quadrilatère pour analyser les comportements statiques et dynamiques des structures membranaires. L'élément quadrilatère proposé, qui possède deux degrés de liberté ( $u$  et  $v$ ) aux quatre nœuds d'angle ainsi qu'au nœud central.

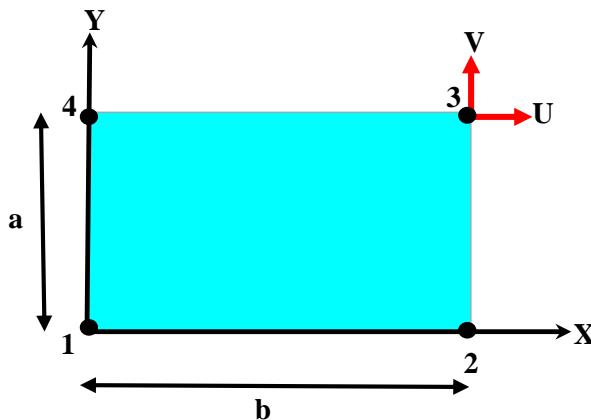
### **3.5.5.3 Procédure de la formulation de quelques éléments à champ de déformation existants dans la littérature**

#### **a) Eléments finis membranaires**

L'élément développé par Sabir [211] dans le cadre des problèmes d'élasticité plane repose sur une approche basée sur la déformation, plutôt que sur celle du déplacement. Il s'agit d'un élément membranaire rectangulaire à quatre noeuds, avec deux degrés de liberté par nœud (deux translations, notées  $U$  et  $V$ ). Cet élément est fondé sur les fonctions assumées des différentes composantes de la déformation, et respecte l'équation de compatibilité. L'élément, dénommé SBRIE (Strain-Based Rectangular In-plane Element), assure également une représentation exacte des mouvements du corps rigide.

La géométrie de l'élément SBRIE, ainsi que les variables cinématiques nodales correspondantes, sont représentées de manière schématique sur la figure 3.8. Les dimensions de l'élément dans les directions  $x$  et  $y$  sont respectivement notées  $a$  et  $b$ .

Chaque nœud de cet élément dispose de deux degrés de liberté associés : deux translations,  $U$  (déplacement dans la direction  $x$ ) et  $V$  (déplacement dans la direction  $y$ ), ce qui en fait un modèle bidimensionnel.



**Figure 3.8.** Coordonnées et point nodal pour l'élément SBRIE [211].

Les trois composantes de la déformation s'expriment par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.36)$$

Lorsque les trois composantes de la déformation, données par l'équation (3.36), sont égales à zéro, il est nécessaire d'intégrer ces équations afin d'obtenir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 - \alpha_3 y \\ V &= \alpha_2 + \alpha_3 x \end{aligned} \quad (3.37)$$

L'équation (3.37) donne les trois composantes des déplacements du corps rigide. L'élément développé est de forme rectangulaire, avec quatre nœuds, chaque nœud ayant trois degrés de liberté ( $U, V$ ). Par conséquent, le champ de déplacement doit contenir 8 constantes indépendantes. Après avoir utilisé trois constantes  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  pour représenter les composantes du corps rigide, il reste cinq constantes  $(\alpha_4, \dots, \alpha_8)$  pour décrire le déplacement dû à la déformation de l'élément. Ces constantes sont réparties entre les différentes déformations, comme suit [211]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Les déformations définies par les équations (3.38) satisfont l'équation (3.4) de compatibilité. Les expressions fournies par les équations (3.38) sont transformées en termes de  $U$  et  $V$ , selon les équations (3.36). Les équations résultantes sont ensuite intégrées pour donner :

$$\begin{aligned} U &= \alpha_4 x + \alpha_5 x y - \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} \\ V &= -\alpha_5 \frac{x^2}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 x y + \alpha_8 \frac{x}{2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Les fonctions finales de déplacement sont obtenues en additionnant les équations (3.37) et (3.39), ce qui permet d'obtenir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} \\ V &= \alpha_2 + \alpha_3 x - \alpha_5 \frac{x^2}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Les fonctions de déplacement de l'élément développé SBRIE, données par l'équation (3.40), peuvent être exprimées sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [P_{SBRIE}] \{\alpha_m\} \quad (3.41)$$

Où  $[P_{SBRIE}]_{2 \times 8}$  est la matrice polynomiale représentant les fonctions de déplacement pour l'élément membranaire, et  $\{\alpha_m\}$  est le vecteur des paramètres constants.

Avec  $\{\alpha_m\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}^T$

$$[P_{SBRIE}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -\frac{y^2}{2} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

La matrice de transformation  $[C_{SBRIE}]_{8 \times 8}$ , qui relie le vecteur des déplacements nodaux  $\{\delta^e\}^T = \{u_1, v_1; \dots; u_4, v_4\}^T$  au vecteur des paramètres constants  $\{\alpha_m\}$ , peut être exprimée sous forme matricielle comme suit :

$$\{\delta^e\} = [C_{SBRIE}] \{\alpha_m\} \quad (3.43)$$

Avec  $[C_{SBRIE}] = \{[P_{SBRIE}]_1, [P_{SBRIE}]_2, [P_{SBRIE}]_3, [P_{SBRIE}]_4\}^T$

La matrice  $[C_{SBRIE}]_i$  est calculée à partir de l'équation (3.42) pour chacune des quatre coordonnées des nœuds de l'élément ( $x_i, y_i$ ), ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Le vecteur des paramètres constants  $\{\alpha_m\}$  peut être obtenu à partir de l'équation (3.43) comme suit :

$$\{\alpha_m\} = [C_{SBRIE}]^{-1} \{\delta^e\} \quad (3.44)$$

L'équation (3.38) peut être exprimée sous forme matricielle comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q_{SBRIE}] \{\alpha\} \quad (3.45)$$

Où la matrice de déformation membranaire  $[Q_{SBRIE}]$  est donnée par :

$$[Q_{SBRIE}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Les relations entre les déformations membranaires  $\{\varepsilon\}$  et les déplacements nodaux des éléments  $\{\delta^e\}$  sont obtenues en remplaçant l'équation (3.44) dans les équations (3.45) pour obtenir :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q_{SBRIE}] [C_{SBRIE}]^{-1} \{\delta^e\} = [B_{SBRIE}] \{\delta^e\}$$

(3.47)

La matrice de rigidité élémentaire  $[K_{SBRIE}^e]$  peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

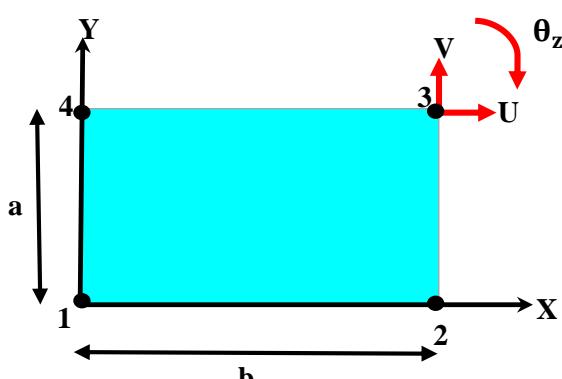
$$[K_{SBRIE}^e] = [C_{SBRIE}^{-1}]^T \left( \iint [Q_{SBRIE}]^T [D] [Q_{SBRIE}] dxdy \right) [C_{SBRIE}^{-1}] \quad (3.48)$$

$$[K_{SBRIE}^e] = [C_{SBRIE}^{-1}]^T [K_{SBRIE}^0] [C_{SBRIE}^{-1}] \quad (3.49)$$

Pour les problèmes en contrainte plane, la matrice d'élasticité  $D$  s'écrit comme suit :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Un autre élément rectangulaire à champ de déformation, développé par Sabir [204], intègre la rotation dans le plan comme un degré de liberté nodal. Cet élément, appelé SBRIEIR (Strain-Based Rectangular In-plane Element with In-plane Rotation), dispose de trois degrés de liberté par nœud : deux translations ( $U, V$ ) et une rotation dans le plan ( $\theta_z$ ), comme schématisé sur la figure 3.9. La procédure de formulation de cet élément suit les mêmes étapes que celle de l'élément précédent.



**Figure 3. 9.** Élément SBRIEIR avec rotation dans le plan[204].

Le champ de déplacement de l'élément SBRIEIR est donné par [204]:

$$\begin{aligned}
U &= \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 xy + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_{10} \frac{y^2}{2} + \alpha_{11} xy^2 + \alpha_{12} x^2 y^3 \\
V &= \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} + \alpha_9 \frac{x^2}{2} - \alpha_{11} x^2 y - \alpha_{12} x^3 y^2 \\
\theta_z &= \alpha_3 - \alpha_5 \frac{x}{2} + \alpha_7 \frac{y}{2} + \alpha_9 \frac{x}{2} - \alpha_{10} \frac{y}{2} - 2\alpha_{11} xy - 3\alpha_{12} x^2 y^2
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Le champ de déformations imposées pour l'élément SBRIEIR est décrit comme suit[204]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} xy^3 \\
\varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x - \alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} x^3 y \\
\gamma_{xy} &= \alpha_5 x + \alpha_7 y + \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y
\end{aligned} \tag{3.52}$$

La matrice de rigidité élémentaire  $[K_{SBRIEIR}^e]$  de l'élément SBRIEIR peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
[K_{SBRIEIR}^e] &= [C_{SBRIEIR}^{-1}]^T \left( \iint [Q_{SBRIEIR}]^T [D] [Q_{SBRIEIR}] dx dy \right) [C_{SBRIEIR}^{-1}] \\
[K_{SBRIEIR}^e] &= [C_{SBRIEIR}^{-1}]^T [K_{SBRIEIR}^0] [C_{SBRIEIR}^{-1}]
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Avec  $[C_{SBRIEIR}] = \{[P_{SBRIEIR}]_1 [P_{SBRIEIR}]_2 [P_{SBRIEIR}]_3 [P_{SBRIEIR}]_4\}^T$

$$[P_{SBRIEIR}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & \frac{y^2}{2} & xy^2 & x^2 y^3 \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 & y & xy & \frac{x}{2} & \frac{x^2}{2} & 0 & -x^2 y & -x^3 y^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{y}{2} & 0 & \frac{x}{2} & -\frac{y}{2} & -2xy & -3x^2 y^2 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

$$[Q_{SBRIEIR}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & -x^2 & -2x^3 y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & y & 1 & x & y & 0 \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

### b) Éléments finis flexionnels (élément de plaque Reissner–Mindlin)

Bellounar et al. [193] ont développé un nouvel élément de plaque Reissner–Mindlin à quatre nœuds, basé sur des déformations supposées plutôt que sur des déplacements. Cet élément, dénommé SBQMP (Strain-Based Quadrilateral Mindlin Plate), est conçu pour surmonter le verrouillage de cisaillement des plaques très fines et améliorer la précision pour les plaques ayant des formes régulières ou déformées. Les déformations supposées varient de manière linéaire, où les courbures et les déformations transversales de cisaillement sont indépendantes.

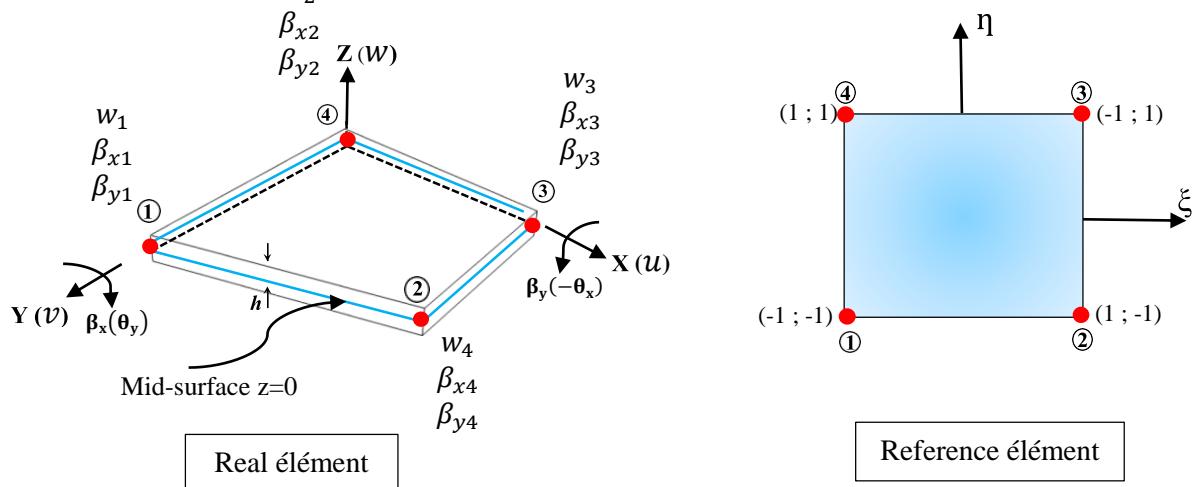
L'élément SBQMP possède trois degrés de liberté  $(w, \beta_x, \beta_y)$  par nœud. La géométrie d'un élément de plaque quadrilatéral à quatre nœuds (éléments réels et de référence) est montrée

dans la figure 3.10, et les relations déformation–déplacement pour la théorie des plaques de Reissner–Mindlin sont données par :

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}; \kappa_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y}; \kappa_{xy} = \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right); \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x; \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \quad (3.56)$$

Les courbures et les déformations transversales de cisaillement sont respectivement ( $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$ ) et ( $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ ). Les cinq déformations données dans l'équation (3.56) ne peuvent pas être considérées comme indépendantes, car elles dépendent des déplacements  $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ , et doivent donc satisfaire les équations de compatibilité données par [193]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} &= 2 \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} &= 2 \frac{\partial \kappa_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.57)$$



**Figure3. 10.** Géométrie de l'élément de plaque quadrilatéral Reissner–Mindlin SBQMP[193].

Le champ de déplacements correspondant aux trois modes du corps rigide est obtenu en égalant l'équation (3.57) à zéro. Après intégration, les résultats suivants sont obtenus :

$$w = \alpha_1 - \alpha_2 x + \alpha_3 y; \beta_x = \alpha_2; \beta_y = \alpha_3 \quad (3.58)$$

L'élément quadrilatère proposé possède trois degrés de liberté ( $w, \beta_x, \beta_y$ ) à chacun des quatre nœuds d'angle. Par conséquent, le champ de déplacements devrait contenir douze constantes indépendantes. En ayant utilisé trois constantes ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) pour représenter les modes du corps rigide, les déplacements dus à la déformation de l'élément devraient contenir les neuf constantes

restantes  $(\alpha_4, \alpha_4, \dots, \alpha_{12})$  qui seront réparties parmi les cinq déformations données par [193]:

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_7 \frac{x}{2}; \kappa_y = \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_5 \frac{y}{2}; \kappa_{xy} = \alpha_8 + (2\alpha_5 x) + (2\alpha_7 y) \\ \gamma_{xz} &= \alpha_9 + \alpha_{10} y; \gamma_{yz} = \alpha_{11} + \alpha_{12} x\end{aligned}\quad (3.59)$$

Les termes entre crochets sont ajoutés afin de satisfaire les équations de compatibilité (éq. 3.57), et les composants de la déformation  $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  donnés par (Éq. 3.59) sont substitués dans (Éq. 3.56). Après intégration, nous obtenons :

$$\begin{aligned}w &= -\alpha_4 \frac{x^2}{2} - \alpha_5 \left( \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{12} \right) - \alpha_6 \frac{y^2}{2} - \alpha_5 \left( \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right) - \alpha_8 \frac{xy}{2} + \alpha_9 \frac{x}{2} + \alpha_{10} \frac{xy}{2} + \alpha_{11} \frac{y}{2} + \alpha_{12} \frac{xy}{2} \\ \beta_x &= \alpha_4 x + \alpha_5 xy + \alpha_7 \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \right) + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 \frac{1}{2} + \alpha_{10} \frac{y}{2} - \alpha_{12} \frac{y}{2} \\ \beta_y &= \alpha_5 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \right) + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} - \alpha_{10} \frac{x}{2} + \alpha_{11} \frac{1}{2} + \alpha_{12} \frac{x}{2}\end{aligned}\quad (3.60)$$

Les fonctions de déplacement obtenues à partir de l'équation (3.60) sont additionnées aux déplacements des modes du corps rigide donnés par l'équation (3.58) pour obtenir les fonctions finales de forme de déplacement :

$$\begin{aligned}w &= \alpha_1 - \alpha_2 x + \alpha_3 y - \alpha_4 \frac{x^2}{2} - \alpha_5 \left( \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{12} \right) - \alpha_6 \frac{y^2}{2} - \alpha_7 \left( \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right) - \alpha_8 \frac{xy}{2} + \alpha_9 \frac{x}{2} + \alpha_{10} \frac{xy}{2} + \alpha_{11} \frac{y}{2} + \alpha_{12} \frac{xy}{2} \\ \beta_x &= \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_5 xy + \alpha_7 \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \right) + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 \frac{1}{2} + \alpha_{10} \frac{y}{2} - \alpha_{12} \frac{y}{2} \\ \beta_y &= \alpha_3 + \alpha_5 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \right) + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} - \alpha_{10} \frac{x}{2} + \alpha_{11} \frac{1}{2} + \alpha_{12} \frac{x}{2}\end{aligned}\quad (3.61)$$

Les fonctions de déplacement de l'équation (3.61) et les fonctions de déformation de l'équation (3.59) peuvent être exprimées sous forme matricielle, respectivement, comme suit :

$$\begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{SBQMP} \end{bmatrix} \{\alpha_f\} = \begin{bmatrix} N_{SBQMP} \end{bmatrix} \{\delta^e\} \quad (3.62)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{SBQMP} \end{bmatrix} \{\alpha_f\} = \begin{bmatrix} B_{SBQMP} \end{bmatrix} \{\delta^e\} \quad (3.63)$$

Avec

$$\begin{bmatrix} N_{SBQMP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{SBQMP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{SBQMP} \end{bmatrix}^{-1}; \begin{bmatrix} B_{SBQMP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{SBQMP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{SBQMP} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.64)$$

Et les matrices  $[P_{SBQMP}]$  et  $[Q_{SBQMP}]$  sont données sous la forme :

$$[P_{SBQMP}] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & \frac{-x^2}{2} & \left(\frac{-x^2y}{2} - \frac{y^3}{12}\right) & \frac{-y^2}{2} & \left(\frac{-xy^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right) & \frac{-xy}{2} & \frac{x}{2} & \frac{xy}{2} & \frac{y}{2} & \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & xy & 0 & \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}\right) & \frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & \frac{-y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left(\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2}\right) & y & xy & \frac{x}{2} & 0 & \frac{-x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$[Q_{SBQMP}] = \begin{bmatrix} [Q_{SBQMP}]_f \\ [Q_{SBQMP}]_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & 0 & 2y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

La matrice de transformation  $[C_{SBQMP}]_i$ , qui relie les déplacements nodaux de l'élément  $\{\delta^e\}^T = \{W_1, \beta_{x_1}, \beta_{y_1}; \dots; W_4, \beta_{x_4}, \beta_{y_4}\}^T$  aux douze constantes  $\{\alpha_f\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots; \alpha_{12}\}^T$ , peut être exprimée sous la forme :

$$\{\delta^e\}^T = [C_{SBQMP}] \{\alpha_f\} \quad (3.67)$$

Avec  $[C_{SBQMP}] = \{[P_{SBQMP}]_1 [P_{SBQMP}]_2 [P_{SBQMP}]_3 [P_{SBQMP}]_4\}^T$

Suivant la procédure bien connue pour les éléments finis à champ déformation, La matrice de rigidité élémentaire  $[K_{SBQMP}^e]$  ainsi que la matrice de masse  $[M_{SBQMP}^e]$  de l'élément SBQMP appliquée à la plaque sont données par :

$$[K_{SBQMP}^e] = [C_{SBQMP}^{-1}]^T \left( \iint [Q_{SBQMP}]^T [D] [Q_{SBQMP}] dx dy \right) [C_{SBQMP}^{-1}] \quad (3.68)$$

$$[K_{SBQMP}^e] = [C_{SBQMP}^{-1}]^T [K_{SBQMP}^0] [C_{SBQMP}^{-1}]$$

$$[M_{SBQMP}^e] = [C_{SBQMP}^{-1}]^T \left( \iint [P_{SBQMP}]^T [T] [P_{SBQMP}] dx dy \right) [C_{SBQMP}^{-1}] \quad (3.69)$$

$$[M_{SBQMP}^e] = [C_{SBQMP}^{-1}]^T [M_{SBQMP}^0] [C_{SBQMP}^{-1}]$$

Avec

$$[D] = \begin{bmatrix} [D]_f & 0 \\ 0 & [D]_c \end{bmatrix}; [D]_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; [D]_c = \frac{kEh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$[T] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Où  $[D]$ ,  $[D]_f$ ,  $[D]_c$  sont respectivement les matrices de rigidité, de rigidité à la flexion et de rigidité au cisaillement, et  $[T]$  est la matrice contenant la densité du matériau, k est le coefficient de correction, généralement pris égal à 5/6

### 3.6 Conclusion

Le calcul des structures complexes nécessite l'utilisation d'outils de modélisation de plus en plus avancés, capables de simuler le comportement mécanique tout en tenant compte des spécifications uniques de ces matériaux et structures. D'un point de vue pratique, les méthodes numériques, et plus particulièrement la méthode des éléments finis, sont indispensables pour la conception et l'analyse de telles structures. Ce chapitre a pour objectif de mettre en évidence les principes et les bases théoriques qui soutiennent notre développement. Il aborde ainsi les concepts relatifs à la mécanique des milieux continus et à la méthode des éléments finis, en particulier le modèle de champ de déformation. Enfin, la revue des éléments finis à champ de déformation met en lumière leur évolution et leur utilisation croissante dans les structures complexes, offrant ainsi une perspective précieuse pour résoudre les problématiques d'ingénierie modernes.

# **Chapitre 4 Développement et validation d'éléments finis à champ de déformation pour l'analyse statique, vibration libre et flambement des plaques fonctionnellement graduées**

## **4.1 Introduction**

Le présent chapitre se concentre sur le développement et la validation d'éléments finis à champ de déformation, spécifiquement conçus pour l'analyse des plaques fonctionnellement graduées (FGM). Ces plaques sont couramment rencontrées dans des applications d'ingénierie, telles que les structures aéronautiques et les composants de génie civil, en raison de leurs propriétés exceptionnelles, qui résultent de la variation progressive de la composition matérielle à travers l'épaisseur.

Les méthodes classiques d'analyse, fondées sur des hypothèses simplificatrices comme la théorie de la plaque de Kirchhoff ou la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), ne sont souvent pas suffisantes pour capturer avec précision les comportements complexes de ces plaques, notamment en ce qui concerne les effets de flexion, de vibration libre et de flambement.

Afin de surmonter ces limitations, ce chapitre propose des éléments finis à champ de déformation, qui intègrent des formulations plus sophistiquées et adaptées aux comportements complexes de ces matériaux. Ces éléments sont développés à partir de la théorie de la déformation par cisaillement (FSDT) et d'approches avancées, telles que la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), permettant une meilleure modélisation des déplacements, des contraintes et des déformations dans les plaques composites et FGM.

La validation numérique est réalisée en comparant les résultats obtenus avec ces éléments finis à ceux fournis par des solutions analytiques ou des résultats expérimentaux pour les problèmes statiques, les vibrations libres et les phénomènes de flambement. L'objectif principal de ce chapitre est de démontrer l'efficacité et la précision de ces nouveaux éléments finis dans l'analyse des structures complexes et multi-matériaux, tout en mettant en évidence les avantages de l'approche à champ de déformation pour ces types de problèmes.

## 4.2 Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini rectangulaire de plaque à champ de déformation basé sur la théorie FSDT

### 4.2.1 Champ de déplacement

Selon la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre, les composantes du vecteur de déplacement  $U$ ,  $V$  et  $W$  dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , respectivement, d'un point de coordonnées  $(x, y, z)$  à l'intérieur de la plaque FG, sont données par [42]:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) + z \beta_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= v(x, y) + z \beta_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= w(x, y) \\ \theta_z(x, y, z) &= \theta_z(x, y) \end{aligned} \quad (4.01)$$

Où  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont les déplacements de chaque point aux coordonnées  $(x, y, z)$ ;  $u$ ,  $v$  sont les composantes du vecteur de déplacement dans le plan en  $x$  et  $y$  respectivement, à tout point de la surface neutre.  $w(x, y)$  est le déplacement transverse des points de la surface neutre de la plaque.  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  et  $\theta_z$  sont les rotations de la normale par rapport aux plans  $y-z$ ,  $x-z$  et  $x-y$  respectivement.

Où la rotation dans le plan  $\theta_z$  est définie par[212]:

$$\theta_z(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) \quad (4.02)$$

### 4.2.2 Champ de déformation

Les composantes du vecteur de déformation, en utilisant la relation déformation-déplacement de von Kármán, peuvent être écrites comme suit [155] :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^l \\ \varepsilon_y^l \\ \gamma_{xy}^l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^l \end{Bmatrix} \quad (4.03)$$

$$\{\varepsilon^l\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^l \\ \varepsilon_y^l \\ \gamma_{xy}^l \end{Bmatrix} = \{\varepsilon^m\} + z \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.04)$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.05)$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^m\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.06)$$

$$\{\boldsymbol{\kappa}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x \\ \boldsymbol{\kappa}_y \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.07)$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{nl}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^{nl} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.08)$$

$$\{\boldsymbol{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.09)$$

Où  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^m\}$ ,  $\{\boldsymbol{\kappa}\}$  et  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{nl}\}$  sont respectivement les vecteurs de déformation de la membrane, de flexion et non linéaires.  $\{\boldsymbol{\gamma}\}$  est le vecteur de déformation par cisaillement transverse.

#### 4.2.3 Relations constitutives

Les expressions constitutives pour la plaque FGM élastique sont définies par [58]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^l \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^l \\ \gamma_{xy}^l \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Or

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [D_\sigma] \{\boldsymbol{\varepsilon}^l\} \quad (4.11)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Or

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = [D_\tau] \{\boldsymbol{\gamma}\} \quad (4.13)$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  sont respectivement les contraintes et les déformations. Les coefficients de rigidité  $D_{ij}$  peuvent être formulés selon les propriétés du matériau, données par l'équation (1.4), comme suit :

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}; D_{12} = D_{21} = \nu \frac{E(z)}{1-\nu^2}; D_{44} = D_{55} = D_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (4.14)$$

#### 4.2.4 Contraintes résultantes

Le couplage membrane-flexion causé par l'asymétrie de la plaque selon l'épaisseur peut être évité en calculant les forces et les moments par rapport au plan neutre, qui ne coïncide pas avec le plan médian de la plaque (Figure 4.1) [58].

$$z_{ns} = z - e \quad (4.15)$$

La position de la surface neutre peut être trouvée en sélectionnant  $e$  de manière à ce que la force membrane résultant de la flexion au niveau de  $z = e$  soit nulle [59].

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz_{Ns} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ D_{11} (z - e) \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + D_{12} (z - e) \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right] dz = 0 \quad (4.16)$$

En remplaçant l'équation (4.14) dans l'équation (4.16), nous obtenons :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{E(z)}{1-\nu^2} (z - e) \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{E(z)}{1-\nu^2} (z - e) \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right] dz = 0 \quad (4.17)$$

En simplifiant l'équation (4.17), nous obtenons :

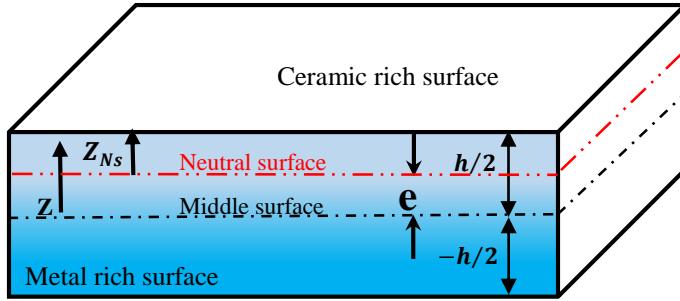
$$\frac{1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [E(z)(z - e)] dz = 0 \quad (4.18)$$

Donc

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [E(z)(z - e)] dz = 0; \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)(z) dz - (e) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz = 0 \quad (4.19)$$

Par conséquent, la position du plan neutre physique [213] est exprimée par :

$$e = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) z dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz} \quad (4.20)$$



**Figure 4. 1.**Position du plan neutre de la plaque FGM.

Les résultantes de contraintes de membrane {N}, de flexion {M} et de cisaillement {T} sont calculées en utilisant la position de la surface neutre comme suit [59] :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz; \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} (z - e) dz; \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (4.21)$$

La relation entre les résultantes de contraintes et les déformations peut donc être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_m] & 0 & 0 \\ 0 & [D_f] & 0 \\ 0 & 0 & [D_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^m \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

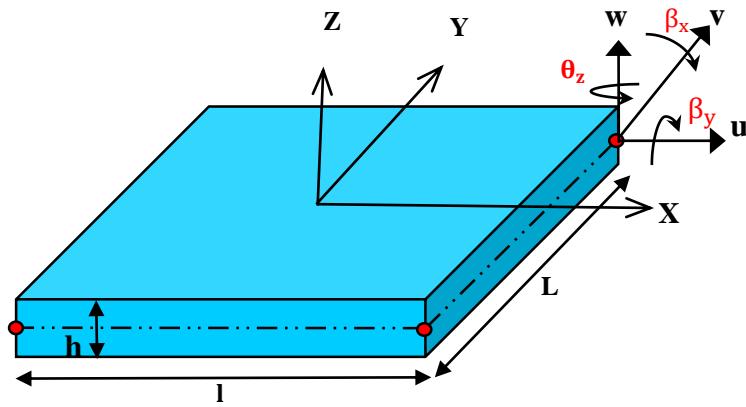
Où les matrices constitutives pour la membrane  $[D_m]$ , la flexion  $[D_f]$  et le cisaillement  $[D_c]$  sont données par :

$$[D_m] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [D_\sigma] dz; [D_f] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [D_\sigma] (z - e)^2 dz; [D_c] = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [D_\tau] dz \quad (4.23)$$

Où  $k = 5/6$  est le facteur de correction pour le cisaillement.

#### 4.2.5 Formulation de l'élément développé SBRMP24

L'élément proposé, désigné sous le nom SBRMP24 (Strain-Based Rectangular Mindlin Plate with 24 unknowns), est un élément de plaque rectangulaire qui intègre six degrés de liberté par nœud :  $u, v, \theta_z, w, \beta_x$ , et  $\beta_y$  comme illustré dans la Figure 4.2. Les expressions de déplacement de cet élément sont obtenues en combinant deux types d'éléments à champ de déformation. Le premier est un élément de membrane, proposé par Sabir [204], qui comporte trois degrés de liberté par nœud :  $(u, v, \theta_z)$ . Le second est un élément de flexion basé sur la théorie des plaques de premier ordre (FSDT), introduit par Belounar et al. [193], qui inclut également trois degrés de liberté par nœud :  $(w, \beta_x, \beta_y)$ .



**Figure 4. 2.** Élément de plaque rectangulaire (SBRMP24).

#### 4.2.5.1 Interpolation des déplacements de l'élément (SBRMP24)

Tout d'abord, pour la partie membrane, les déplacements dans le plan ( $u, v, \theta_z$ ) d'un point  $M(x, y)$  à l'intérieur de l'élément sont interpolés en fonction des douze constantes ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$ ) comme donné dans [204]:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta_z \end{Bmatrix} = [P_{SBRIEIR}] \{\alpha_m\} \quad (4.24)$$

Où  $\{\alpha_m\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}^T$  et la matrice  $[P_{SBRIEIR}]$  est donnée par l'équation (3.54).

Tandis que pour la partie flexion de Reissner–Mindlin, le déplacement latéral et les rotations ( $w, \beta_x, \beta_y$ ) d'un point  $M(x, y)$  à l'intérieur de l'élément sont donnés en fonction des douze constantes ( $\alpha_{13}, \alpha_{14}, \dots, \alpha_{24}$ ) comme indiqué dans [193]:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [P_{SBQMP}] \{\alpha_f\} \quad (4.25)$$

Où  $\{\alpha_f\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}^T$ , et la matrice  $[P_{SBQMP}]$  est donnée par l'équation (3.65). Les champs des déplacements  $u, v, \theta_z, w, \beta_x$ , et  $\beta_y$ , donnés par les équations (4.24, 4.25), ont été développés en utilisant l'approche par déformation, où ils satisfont les modes de corps rigide et les critères de déformations constantes, ainsi que les équations de compatibilité. Ces équations ont permis d'obtenir les fonctions d'interpolation des déplacements pour l'élément de plaque formulé (SBRMP24), qui peuvent être exprimées en termes des vingt-quatre constantes  $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{24}\}^T$ , comme suit :

$$\{U_e\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta_z \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_{SBRIEIR}] & [0]_{(3x12)} \\ [0]_{(3x12)} & [P_{SBQMP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_m\} \\ \{\alpha_f\} \end{Bmatrix} = [P_{SBRMP24}] \{\alpha\} \quad (4.26)$$

$$[P_{SBRMP24}] = \begin{bmatrix} [P_{SBRIEIR}] & [0]_{(3x12)} \\ [0]_{(3x12)} & [P_{SBQMP}] \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Où  $\{\alpha\} = \{\{\alpha_m\}, \{\alpha_f\}\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{24}\}^T$

La matrice de transformation  $[C_{SBRMP24}]$  qui relie les 24 degrés de liberté  $\{(q_e)^T = \{u_1, v_1, \theta_{z1}, w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}; \dots, u_4, v_4, \theta_{z4}, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4}\}\}$  aux 24 constantes  $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{24}\}^T$  peut être exprimée comme suit :

$$\{q_e\} = [C_{SBRMP24}] \{\alpha\} \quad (4.28)$$

Où

$$[C_{SBRMP24}] = \left\{ [P_{SBRMP24}]_1 [P_{SBRMP24}]_2 [P_{SBRMP24}]_3 [P_{SBRMP24}]_4 \right\}^T \quad (4.29)$$

Et les matrices  $[P_{SBRMP24}]_i$  (pour  $x_i, y_i$  à partir du nœud i ( $i = 1, 2, 3, 4$ )) sont décrites à l'aide de l'expression fournie dans l'équation (4.27) :

$$[P_{SBRMP24}] = \left[ \begin{bmatrix} [P_{SBRIEIR}] & [0]_{(3x12)} \\ [0]_{(3x12)} & [P_{SBQMP}] \end{bmatrix}_{node,i=1,2,3,4} \right] \quad (4.30)$$

Nous pouvons maintenant dériver le vecteur des paramètres constants  $\{\alpha\}$  conformément à l'équation (4.28) :

$$\{\alpha\} = [C_{SBRMP24}]^{-1} \{q_e\} \quad (4.31)$$

Ensuite, en substituant l'équation (4.31) dans l'équation (4.26), nous obtenons :

$$\{U_e\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta_z \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = [P_{SBRMP24}] [C_{SBRMP24}]^{-1} \{q_e\} = [N_{SBRMP24}] \{q_e\} \quad (4.32)$$

Où

$$[N_{SBRMP24}] = [P_{SBRMP24}] [C_{SBRMP24}]^{-1} \quad (4.33)$$

#### 4.2.5.2 Évaluation des matrices de déformation

Pour le comportement des membranes, les déformations  $\{\varepsilon^m\}$  sont exprimées en termes de déplacements à l'aide de l'équation (4.6) comme suit :

$$\{\varepsilon^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

La substitution de l'équation (4.26) dans l'équation (4.34) conduit à :

$$\{\varepsilon^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P_{SBRIEIR}] & [0]_{(3x12)} \end{bmatrix}_{(3x24)} \{\alpha\} = \begin{bmatrix} [Q_{SBRIEIR}] & [0]_{(3x12)} \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (4.35)$$

Où la matrice  $[Q_{SBRIEIR}]$  est donnée par l'équation (3.55).

Pour la théorie des plaques de Reissner–Mindlin, les courbures  $\{\kappa\}$  et les déformations de cisaillement transverse  $\{\gamma\}$  sont exprimées en termes de déplacements à l'aide des équations (4.7) et (4.9) comme suit :

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

En substituant l'équation (4.26) dans les équations (4.36) et (4.37), nous obtenons :

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_{(3x12)} & [P_{SBQMP}] \end{bmatrix}_{(3x24)} \{\alpha\} = \begin{bmatrix} [0]_{(3x12)} & [Q_{SBQMP}]_f \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (4.38)$$

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_{(3x12)} & [P_{SBQMP}] \end{bmatrix}_{(2x24)} \{\alpha\} = \begin{bmatrix} [0]_{(2x12)} & [Q_{SBQMP}]_c \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (4.39)$$

Où les matrices  $[Q_{SBQMP}]_b$  et  $[Q_{SBQMP}]_c$  sont données par l'équation (3.66).

Les déformations géométriques peuvent s'exprimer comme suit :

$$\{\varepsilon^g\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

La substitution du déplacement latéral ( $w$ ) de l'équation (4.25) dans l'équation (4.40) donne :

$$\{\varepsilon^g\} = \begin{bmatrix} [0]_{(2x12)} & [G_{SBQMP}] \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (4.41)$$

Avec

$$[G_{SBQMP}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -x & -xy & 0 & -\left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right) & -\frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right) & -y & -xy & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Les relations entre les déformations  $\{\varepsilon^m\}$ ,  $\{\kappa\}$ ,  $\{\gamma\}$ ,  $\{\varepsilon^g\}$  et les déplacements noraux de l'élément  $\{q_e\}$  sont obtenues en substituant l'équation (4.31) dans les équations (4.35), (4.38), (4.39), (4.41), donnant ainsi :

$$\{\varepsilon^m\} = \begin{bmatrix} [Q_{SBRIEIR}] & [0]_{(3x12)} \end{bmatrix} [C_{SBRMP24}]^{-1} \{q_e\} = [B_m] \{q_e\} \quad (4.44)$$

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} [0]_{(3x12)} & [Q_{SBQMP}]_f \end{bmatrix} [C_{SBRMP24}]^{-1} \{q_e\} = [B_f] \{q_e\} \quad (4.45)$$

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} [0]_{(2x12)} & [Q_{SBQMP}]_c \end{bmatrix} [C_{SBRMP24}]^{-1} \{q_e\} = [B_c] \{q_e\} \quad (4.46)$$

$$\{\varepsilon^g\} = \begin{bmatrix} [0]_{(2x12)} & [G_{SBQMP}] \end{bmatrix} [C_{SBRMP24}]^{-1} \{q_e\} = [B_g] \{q_e\} \quad (4.47)$$

Où  $\{\varepsilon^m\}$ ,  $\{\kappa\}$ ,  $\{\gamma\}$  et  $\{\varepsilon^g\}$  sont respectivement les déformations de la membrane, de la flexion, du cisaillement transverse et géométriques, et  $[B_m]$ ,  $[B_f]$ ,  $[B_c]$  et  $[B_g]$  sont les matrices de déformation-déplacement, qui sont décrites comme suit :

$$\begin{aligned} [B_m] &= \left[ \begin{bmatrix} Q_{SBRIEIR} & [0]_{(3x12)} \end{bmatrix} [C_{SBRMP24}]^{-1}; \begin{bmatrix} B_f \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} [0]_{(3x12)} & [Q_{SBQMP}]_f \end{bmatrix} [C_{SBRMP24}]^{-1} \right. \right. \\ [B_c] &= \left[ \begin{bmatrix} [0]_{(2x12)} & [Q_{SBQMP}]_c \end{bmatrix} [C_{SBRMP24}]^{-1}; \begin{bmatrix} B_g \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} [0]_{(2x12)} & [G_{SBQMP}] \end{bmatrix} [C_{SBRMP24}]^{-1} \right. \right. \end{aligned} \quad (4.48)$$

#### 4.2.5.3 Dérivation des matrices élémentaires et du vecteur de charge élémentaire

Les matrices de rigidité et géométriques sont obtenues en appliquant l'énergie potentielle totale

$$\pi = U - W \quad (4.49)$$

Où  $U$  et  $W$  représentent respectivement l'énergie potentielle de déformation et le travail des forces externes.

L'énergie potentielle de déformation de la plaque est définie comme[129]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( \{\varepsilon'\}^T \{\sigma\} + \{\gamma\}^T \{\tau\} \right) dV = \frac{1}{2} \int_V \left( \{\varepsilon^m\}^T \{\sigma\} + z \{\kappa\}^T \{\sigma\} + \{\gamma\}^T \{\tau\} \right) dV \quad (4.50)$$

En intégrant à travers l'épaisseur et en utilisant l'équation (4.21), l'équation (4.50) peut être reformulée comme suit [59]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \{\varepsilon^m\}^T \{N\} + \{\kappa\}^T \{M\} + \{\gamma\}^T \{T\} \right) d\Omega \quad (4.51)$$

En substituant les équations (4.22), (4.44), (4.45) et (4.46) dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \{q_e\}^T \left( [B_m]^T [D_m] [B_m] + [B_f]^T [D_f] [B_f] + [B_c]^T [D_c] [B_c] \right) \{q_e\} \right) d\Omega \quad (4.52)$$

Où  $V$  et  $\Omega$  représentent respectivement le volume et la surface supérieure de la plaque.

##### a) Analyse statique

Le travail externe effectué par la charge transversale distribuée  $q(x,y)$  appliquée à la plaque peut être exprimé comme suit [58]:

$$W = \int_{\Omega} w(x, y) q(x, y) d\Omega \quad (4.53)$$

En insérant l'équation (4.32) dans l'équation (4.53), on obtient :

$$W = \int_{\Omega} \{q_e\}^T [N_{SBRMP24}]^T q(x, y) d\Omega \quad (4.54)$$

En substituant les équations (4.52) et (4.54) dans l'équation (4.49), on obtient :

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \{q_e\}^T \left[ [B_m]^T [D_m] [B_m] + [B_f]^T [D_f] [B_f] + [B_c]^T [D_c] [B_c] \right] \{q_e\} \right) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \{q_e\}^T [N_{SBRMP24}]^T q(x, y) d\Omega \end{aligned} \quad (4.55)$$

L'annulation de la première variation de l'énergie potentielle totale,  $\delta\pi = 0$ , par rapport aux valeurs nodales  $\{q_e\}$ , conduit à l'équation d'équilibre suivante :

$$[K_{SBRMP24}^e] \{q_e\} = \{F_e\} \quad (4.56)$$

Où  $[K_{SBRMP24}^e]$  est la matrice de rigidité de l'élément SBRMP24 définie par :

$$[K_{SBRMP24}^e] = \int_{\Omega} \left( [B_m]^T [D_m] [B_m]_{membrane} + [B_f]^T [D_f] [B_f]_{flexion} + [B_c]^T [D_c] [B_c]_{cisalement} \right) d\Omega \quad (4.57)$$

$$\{F_e\} = \int_{\Omega} [N_{SBRMP24}]^T q(x, y) d\Omega \quad (4.58)$$

### b) Analyse des vibrations libres

La matrice de masse est obtenue en appliquant le principe de Hamilton[214]:

$$\delta \int_0^t (T - (U - W)) dt = 0 \quad (4.59)$$

L'énergie cinétique T des plaques FG est donnée par [59] :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left( (\dot{U})^2 + (\dot{V})^2 + (\dot{W})^2 \right) dz d\Omega \quad (4.60)$$

En remplaçant l'équation (4.1) dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} I_0 \left( (\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2 \right) + I_2 \left( (\dot{\beta}_x)^2 + (\dot{\beta}_y)^2 \right) dz d\Omega \quad (4.61)$$

Où les termes  $\rho(z)$  et  $I_0$ ,  $I_2$  représentent respectivement la densité de masse et les moments d'inertie, définis comme suit [59]:

$$(I_0, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( 1, (z - e)^2 \right) \rho(z) dz \quad (4.62)$$

Pour l'analyse des vibrations libres, le travail effectué par les forces extérieures (W) est négligé. L'équation fondamentale de Hamilton conduit à l'équation suivante de l'équilibre dynamique d'un système [215] :

$$\begin{aligned} [K_{SBRMP24}^e] \{q_e\} + [M_{SBRMP24}^e] \{\ddot{q}_e\} &= 0 \\ ([K_{SBRMP24}^e] - \omega^2 [M_{SBRMP24}^e]) \{q_e\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Où  $\omega$  désigne la fréquence fondamentale, et  $[M_{SBRMP24}^e]$  représente la matrice de masse, définie comme suit :

$$[M_{SBRMP24}^e] = \int_{\Omega} [N_{SBRMP24}]^T [I] [N_{SBRMP24}] d\Omega \quad (4.64)$$

[I] représente la matrice d'inertie, donnée par :

$$[I] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

### a) Analyse du flambement mécanique

Le travail externe des forces dans le plan, dû à la charge mécanique, peut être exprimé par [58]:

$$W = \int_{\Omega} \{\varepsilon^{nl}\}^T [N_{SBRMP24}] d\Omega \quad (4.66)$$

En utilisant les équations (4.47), (4.52) et (4.66), l'énergie potentielle totale peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \{q_e\}^T \left( [B_m]^T [D_m] [B_m] + [B_f]^T [D_f] [B_f] + [B_c]^T [D_c] [B_c] \right) \{q_e\} \right) d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{q_e\}^T [B_g]^T [\bar{N}] [B_g] \{q_e\} d\Omega \end{aligned} \quad (4.67)$$

Où  $[\bar{N}] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{yx} & N_y \end{bmatrix}$  est la matrice des résultantes de contraintes causées par la charge mécanique.

L'annulation de la seconde variation de l'énergie potentielle totale par rapport aux valeurs nodales  $\{q_e\}$  permet d'obtenir le problème propre suivant [59]:

$$([K_{SBRMP24}^e] + [K_{(g)SBRMP24}^e]) \{q_e\} = 0 \quad (4.68)$$

Où  $[K_{(g)SBRMP24}^e]$  est la matrice de rigidité géométrique, donnée par :

$$[K_g^e] = \int_{\Omega} [B_g]^T [\bar{N}] [B_g] d\Omega \quad (4.69)$$

En introduisant le facteur de charge  $\lambda$ , la matrice des résultantes de contraintes peut être exprimée comme suit  $[\bar{N}] = \lambda [\bar{N}_0]$ ; ensuite, la matrice de rigidité géométrique peut être écrite comme suit :

$$\left[ K_{(g0)SBRMP24}^e \right] = \int_{\Omega} \left[ B_g \right]^T \left[ \bar{N}_0 \right] \left[ B_g \right] d\Omega \quad (4.70)$$

Où  $\left[ \bar{N}_0 \right]$  est la matrice des résultantes de contraintes dans le plan due à la charge mécanique appliquée.

Le problème aux valeurs propres utilisé pour évaluer la charge critique de flambement peut être exprimé par [59]:

$$\det \left( \left[ K_e \right] + \lambda \left[ K_{(g0)SBRMP24}^e \right] \right) \{ q_e \} = 0 \quad (4.71)$$

Enfin, la charge critique de flambement est exprimée comme suit :

$$N_{cr} = \lambda_{cr} N_0 \quad (4.72)$$

Les matrices de rigidité de l'élément  $[K_e^{SBRMP24}]$ , de masse  $[M_e^{SBRMP24}]$  et géométrique  $[K_{(g)SBRMP24}^e]$ , données respectivement dans les équations (4.57), (4.64) et (4.69), ainsi que le vecteur de charge nodale équivalente de l'élément  $\{F_e\}$  de l'équation (4.58), sont calculés numériquement à l'aide d'une intégration exacte de Gauss. Ces matrices et vecteurs sont ensuite assemblés pour obtenir les matrices structurales de rigidité, de masse et géométriques ( $[K]$ ,  $[M]$  et  $[K_g]$ ), ainsi que le vecteur de charge structurelle  $\{F\}$ .

Pour les analyses statiques, de vibrations libres et de flambement, les formulations peuvent être écrites respectivement comme suit :

$$\begin{aligned} [K] \{q_e\} &= \{F\} \\ ([K] - \omega^2 [M]) \{q_e\} &= 0 \\ ([K] - \lambda_{cr} [K_g]) \{q_e\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

### 4.3 Validation de la SBRMP24- Résultats et discussions

Au cours de ce chapitre, plusieurs exemples numériques sont réalisés pour démontrer la performance et la précision du modèle par éléments finis proposé, dans la prévision des réponses statiques, du flambement mécanique et des vibrations libres des plaques rectangulaires FG à une seule couche. Les résultats numériques, en termes de déplacements, contraintes, charges critiques de flambement et fréquences, sont obtenus et comparés avec les résultats existants dans la littérature. Les effets de divers paramètres, tels que les conditions aux limites, le rapport d'aspect, l'épaisseur de la plaque et la distribution du matériau à travers l'épaisseur de la plaque, sont également étudiés. Différentes plaques FG ont été analysées, et leurs caractéristiques mécaniques sont présentées dans le tableau 4.1

**Tableau 4. 1.** Les propriétés des matériaux utilisés dans les plaques FGM.

Properties	Metal		Ceramic		
	Aluminum*	Aluminum (Al*)	Zirconia-2 (ZrO <sub>2</sub> – 2)	Zirconia-1 (ZrO <sub>2</sub> – 1)	Alumina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )
E(Gpa)	70	70	200	151	380
v	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$	2702	2707	5700	3000	3800

Par ailleurs, les différentes conditions aux limites considérées sont listées dans le tableau 4.2.

**Tableau 4. 2.** Conditions aux limites des plaques.

Conditions aux limites	Abréviations	Bords contraints
<b>Simplement Supporté</b>	SSSS	En $x=0, l: v = w = \beta_y = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
<b>Encastré</b>	CCCC	En $x=0, l; y=0, L: u = v = w = \beta_x = \beta_y = \theta_z = 0$
<b>Simplement Supporté - Encastré</b>	SCSC	En $x=0, l: u = v = w = \beta_x = \beta_y = \theta_z = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
<b>Simplement Supporté - Libre</b>	SFSF	En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
<b>Simplement Supporté - Libre - Simplement Supporté - Encastré</b>	SFSC	En $x=0: u = v = w = \beta_x = \beta_y = \theta_z = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
<b>Simplement Supporté - Libre</b>	SFSS	En $x=0: v = w = \beta_y = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$
<b>Simplement Supporté - Encastré</b>	SSSC	En $x=0: u = v = w = \beta_x = \beta_y = \theta_z = 0$ En $x= l: v = w = \beta_y = 0$ En $y=0, L: u = w = \beta_x = 0$

### 4.3.1 Analyse statique

Cette section présente l'analyse statique des plaques isotropes et des plaques fonctionnellement graduées (FG) à une seule couche, soumises à une charge transversale sous forme de charge uniformément répartie (UDL).

#### 4.3.1.1 Analyse des plaques isotropes

Tout d'abord, l'efficacité de la formulation actuelle est évaluée en étudiant le comportement statique des plaques isotropes carrées. Deux exemples ont été considérés. Le premier exemple concerne une plaque carrée isotrope avec des bords SSSS (simplement supportée sur les quatre côtés), soumise à une charge uniformément répartie (UDL). Le rapport longueur/épaisseur  $l/h=10$ . Les valeurs du module de Young et du coefficient de Poisson utilisées pour cet exemple sont  $E=210 \text{ GPa}$  et  $v=0.3$ . Un facteur de correction de cisaillement  $k = 5/6$  est appliqué. Les résultats sont présentés en termes de déplacements et de contraintes, basés sur les quantités non dimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{w} &= \frac{100E}{hq_0\left(\frac{l}{h}\right)^4} w\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}\right); \bar{\sigma}_x = -\frac{h}{q_0\left(\frac{l}{h}\right)^2} \sigma_x\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right) \\ \bar{\sigma}_y &= -\frac{h}{q_0\left(\frac{l}{h}\right)^2} \sigma_y\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right); \bar{\tau}_{xy} = -\frac{h}{q_0\left(\frac{l}{h}\right)^2} \tau_{xy}\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right)\end{aligned}\quad (4.74)$$

**Tableau 4. 3.** Déplacement et contraintes non dimensionnelle pour une plaque carrée isotrope ( $l/h = 10$ ) soumise à une charge uniformément répartie (UDL).

Taille du maillage	8x8	12x12	16x16	20x20	Reddy [50]	FSDT [50]	EXACT [216]
$\hat{w}$	0.465	0.4661	0.4663	0.4665	4.670	4.670	4.639
$\bar{\sigma}_x$	0.291	0.289	0.287	0.2885	0.289	0.287	0.290
$\bar{\sigma}_y$	0.291	0.289	0.287	0.2885	0.289	0.287	0.290
$\bar{\tau}_{xy}$	0.201	0.199	0.197	0.195	0.199	0.194	/

Les résultats obtenus pour différentes tailles de maillage sont présentés dans le tableau 4.3, en comparaison avec la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur de Reddy [50] ainsi que les solutions exactes de Shimpi et al. [216], et montrent une excellente concordance. Dans le deuxième exemple, une plaque carrée homogène entièrement en céramique, soumise à une charge uniformément répartie (UDL), est analysée afin de valider les résultats du modèle d'éléments finis proposé. Les propriétés du matériau céramique utilisé, à savoir l'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), sont détaillées dans le tableau 4.1. Trois rapports longueur/épaisseur longueur/épaisseur  $l/h = 4, 10, 100$  sont considérés pour cette étude. Le facteur de correction de cisaillement est fixé à  $k=5/6$ . Les résultats obtenus pour un maillage de 20x20 avec l'élément proposé, présentés dans le tableau 4.4, révèlent une excellente concordance avec ceux mentionnés par Tati [58], Zenkour [86] et Reddy [217] pour l'ensemble des cas étudiés, des plaques les plus minces aux plus épaisses.

**Tableau 4.4.** Déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) et contraintes des plaques carrées en FG avec différents rapports de forme (l/h).

<b>l/h</b>	<b>Théorie</b>	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$
<b>4</b>	SBRMP24 (20x20)	0.5870	1.1495	0.7664	0.5188
	Tati[56]	0.5872	1.1425	0.7617	0.5070
	Zenkour [86]	0.5865	1.1988	0.7534	0.4906
	Reddy [217]	0.5868	1.1959	0.7541	0.4913
<b>10</b>	SBRMP24 (20x20)	0.4661	2.8735	1.9156	1.2954
	Tati[56]	0.4663	2.8560	1.9040	1.2660
	Zenkour [86]	0.4665	2.8932	1.9103	1.2850
	Reddy [217]	0.4666	2.8920	1.9106	1.2855
<b>100</b>	SBRMP24 (20x20)	0.4429	28.7094	19.1396	12.9360
	Tati[56]	0.4435	28.5600	19.0400	12.6500
	Zenkour [86]	0.4438	28.7342	19.1543	13.0125
	Reddy [217]	0.4438	28.7341	19.1543	12.9885

#### 4.3.1.2 Analyse statique des plaques FG

##### a) Analyse statique d'une plaque FG (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) soumise à une charge uniformément répartie (UDL) et simplement supportée

Dans cet exemple, nous étudions une plaque carrée modérément épaisse, simplement supportée (SSSS), constituée d'un matériau fonctionnellement gradué (FG) composé d'aluminium (Al) et d'alumine (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), avec un rapport longueur/épaisseur ( $l/h = 10$ ). Cette plaque présente une surface supérieure riche en céramique (alumine) et une surface inférieure en aluminium pur. Les propriétés des matériaux, à savoir l'aluminium et l'alumine, sont précisées dans le tableau 4.1. Une charge transversale distribuée est appliquée uniformément sur la surface supérieure de la plaque sous forme de charge uniformément répartie (UDL), notée  $q(x, y) = q_0$ . L'objectif de cet exemple est d'analyser l'effet de l'indice de gradient ( $p$ ) sur le comportement en flexion des plaques FG. Le tableau 4.5 présente les résultats du déplacement ( $\bar{w}$ ) ainsi que les contraintes ( $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ ) obtenues à partir de différents maillages :  $8 \times 8$ ,  $12 \times 12$ ,  $16 \times 16$  et  $20 \times 20$ . Les résultats sont donnés sous forme non dimensionnel pour plusieurs valeurs de l'indice de gradient  $p$ , selon les formules suivantes :

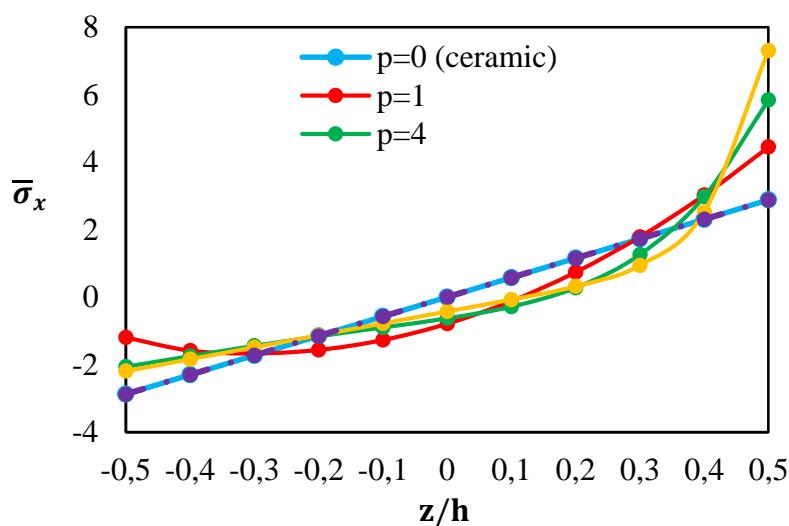
$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10h^3E_c}{q_0(l)^4} w\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}\right); \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{lq_0} \sigma_x\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right) \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{h}{lq_0} \sigma_y\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{3}\right); \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{lq_0} \tau_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Les résultats numériques obtenus avec l'élément actuel sont également comparés à ceux fournis par Zenkour [86] à l'aide de la théorie de déformation par cisaillement du second ordre (SSDT), Reddy [217] en utilisant la TSDT, et les résultats numériques basés sur la HSDT présentés par Tati [58]. De plus, le tableau 4.5 montre l'effet de l'indice de gradient  $p$  sur le comportement de la plaque. En effet, on peut observer que les contraintes sur une plaque métallique ( $p = \infty$ ) sont identiques à celles d'une plaque en céramique ( $p = 0$ ). Cela est dû au fait que, dans les deux cas, la plaque est totalement homogène. Ainsi, les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité. On peut également observer que le déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) et la contrainte dans le plan ( $\bar{\sigma}_x$ ) augmentent avec l'augmentation de  $p$ , tandis que la contrainte dans le plan ( $\bar{\sigma}_y$ ) diminue. La contrainte de cisaillement dans le plan ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) diminue lorsque  $p$  varie de 0 à 2, puis augmente à mesure que l'indice de gradient augmente.

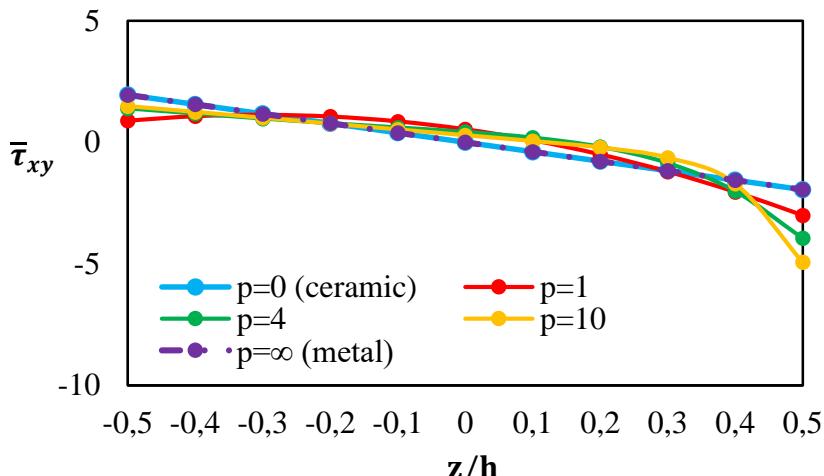
Pour une meilleure illustration, les figures 4.3 et 4.4 montrent respectivement la variation de la contrainte non dimensionnelle dans le plan ( $\bar{\sigma}_x$ ) et de la contrainte de cisaillement dans le plan ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) à travers l'épaisseur pour diverses valeurs de l'indice de gradient  $p$  allant de 1 à 10. Il est possible de constater que la distribution des contraintes normales et de cisaillement dans le plan à travers l'épaisseur est presque linéaire pour les plaques isotropes ( $p = 0$  (céramique) et  $p = \infty$  (métal)), et devient non linéaire pour les plaques graduées lorsque  $p = 1,4$ , et 10. De plus, la figure 4.3 illustre que la contrainte non dimensionnelle dans le plan ( $\bar{\sigma}_x$ ) augmente avec l'augmentation de la valeur de l'exposant  $p$ . Il est également observé que la contrainte ( $\bar{\sigma}_x$ ) est en traction à la surface supérieure et en compression à la surface inférieure. Pour la plaque céramique homogène ( $p = 0$ ), les contraintes compressives maximales sont générées à la surface inférieure, tandis que les contraintes de traction minimales apparaissent à la surface supérieure de la plaque. La figure 4.4 montre que la contrainte non dimensionnelle de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  est en traction à la surface inférieure et en compression à la surface supérieure des plaques FG. Pour la plaque céramique homogène ( $p = 0$ ), les contraintes maximales de traction se trouvent à la surface inférieure, tandis que les contraintes minimales de compression apparaissent à la surface supérieure de la plaque FG. Contrairement à la contrainte ( $\bar{\sigma}_x$ ), la contrainte non dimensionnelle de cisaillement dans le plan diminue avec l'augmentation de l'exposant  $p$ .

**Tableau 4. 5.** Déplacements et contraintes non dimensionnelle d'une plaque carrée FG SSSS ( $l/h = 10$ ) sous charge UDL.

p	Maillages	SBRMP 24				TSDT [217]	SSDT [86]	HSDT [58]
		8x8	12x12	16x16	20x20			
<b>0</b> (ceramic)	$\bar{w}$	0.4657	0.4662	0.4664	0.4665	0.4665	0.4665	0.4663
	$\bar{\sigma}_x$	2.9163	2.8923	2.8839	2.8800	2.8920	2.8932	2.8656
	$\bar{\sigma}_y$	1.9442	1.9282	1.9226	1.9200	1.9106	1.9103	1.904
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.2788	1.2902	1.2944	1.2963	1.2855	1.2850	1.266
<b>1</b>	$\bar{w}$	0.9270	0.9280	0.9284	0.9285	0.9421	0.9287	0.9282
	$\bar{\sigma}_x$	4.5075	4.4703	4.4573	4.4513	4.2598	4.4745	4.415
	$\bar{\sigma}_y$	2.2095	2.1912	2.1848	2.1819	2.2569	2.1692	2.164
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.1040	1.1140	1.1176	1.1194	1.1572	1.1143	1.093
<b>2</b>	$\bar{w}$	1.1886	1.1899	1.1903	1.1906	1.2227	1.1940	1.1948
	$\bar{\sigma}_x$	5.2631	5.2197	5.2045	5.1975	4.8881	5.2296	5.155
	$\bar{\sigma}_y$	2.0748	2.0577	2.0517	2.0490	2.1663	2.0338	2.032
	$\bar{\tau}_{xy}$	0.9840	0.9928	0.9961	0.9976	1.0448	0.9907	0.9745
<b>4</b>	$\bar{w}$	1.3744	1.3758	1.3763	1.3765	-	1.3890	1.3916
	$\bar{\sigma}_x$	5.9189	5.8702	5.8531	5.8452	-	5.8915	5.797
	$\bar{\sigma}_y$	1.7598	1.7453	1.7402	1.7379	-	1.7197	1.724
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.0265	1.0356	1.0390	1.0405	-	1.0298	1.016
<b>10</b>	$\bar{w}$	1.5668	1.5684	1.5689	1.5692	1.6054	1.5876	1.5934
	$\bar{\sigma}_x$	7.4053	7.3445	7.3232	7.3134	6.9539	7.3689	7.253
	$\bar{\sigma}_y$	1.3145	1.3038	1.3000	1.2982	1.3349	1.2820	1.288
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.0687	1.0781	1.0815	1.0831	1.1119	1.0694	1.058
<b><math>\infty</math></b> (metal)	$\bar{w}$	2.4996	2.5049	2.5104	2.5221	-	2.5327	-
	$\bar{\sigma}_x$	2.9163	2.8923	2.8839	2.8800	-	2.8932	-
	$\bar{\sigma}_y$	1.9442	1.9282	1.9226	1.9200	-	1.9103	-
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.2788	1.2902	1.2944	1.2963	-	1.2850	-



**Figure 4. 3.** Variation de la contrainte non dimensionnelle dans le plan d'une plaque carrée FG pour différentes valeurs de l'indices de gradient p ( $l/h = 10$ ).



**Figure 4.4.** Variation de la contrainte non dimensionnelle de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  d'une plaque carrée FG pour différentes valeurs de l'indice de gradient  $p$  ( $l/h = 10$ ).

**b) Analyse statique d'une plaque FG ( $ZrO_2 - 2$ ) soumise à une charge uniformément répartie (UDL) simplement supportée et encastrée**

Dans cette section, le comportement en flexion de la plaque carrée FG épaisse a également été examiné sous une charge uniformément répartie (UDL). La plaque est composée d'aluminium (Al) et de zirconium ( $ZrO_2-2$ ), et leurs caractéristiques matérielles correspondantes sont listées dans le tableau 4.1. Les résultats obtenus pour le déplacement non dimensionnel ( $\bar{w} = 100E_m \left(\frac{h^3}{l^4}\right) \frac{w_c}{12q_0(1-\vartheta^2)}$ ) sont présentés dans le tableau 4.6 pour différents indices de gradient ( $p$ ) et deux conditions aux limites : simplement supportée (SSSS) et encastrée (CCCC), avec un rapport longueur/épaisseur  $l/h = 5$ , en utilisant plusieurs tailles de maillage :  $8 \times 8$ ,  $12 \times 12$ ,  $16 \times 16$  et  $20 \times 20$ . Une comparaison est effectuée entre les résultats obtenus avec l'élément proposé et ceux trouvés dans la littérature [79], [218], [219], montrant une excellente concordance. Il peut également être noté que les résultats de l'élément actuel SBRMP24 convergent très rapidement pour tous les maillages.

**Tableau 4. 6.**Déplacement non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées Al/ZrO<sub>2</sub> sous charges uniformes avec (l/h = 5).

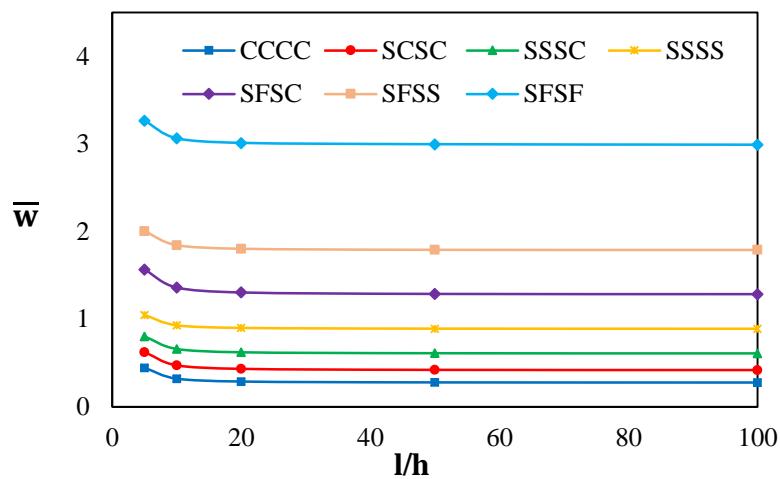
<b>BC</b>	<b>Methods</b>	<b>p</b>			
		0	0.5	1	2
<b>SSSS</b>	SBRMP24(8× 8)	0.1713	0.2320	0.2715	0.3111
	SBRMP24(12× 12)	0.1715	0.2322	0.2717	0.3113
	SBRMP24(16× 16)	0.1717	0.2324	0.2719	0.3115
	SBRMP24(20× 20)	0.1717	0.2324	0.2719	0.3115
	SBQP20 (20× 20) [79]	0.1714	0.2321	0.2716	0.3111
	IGA-Quadratic [219]	0.1717	0.2324	0.2719	0.3115
	MITC4 [218]	0.1715	0.2317	0.2704	0.3093
	NS-DSG3 [218]	0.1721	0.2326	0.2716	0.3107
<b>CCCC</b>	SBRMP24(8× 8)	0.0755	0.1006	0.1174	0.1359
	SBRMP24(12× 12)	0.0758	0.1010	0.1179	0.1365
	SBRMP24(16× 16)	0.0759	0.1011	0.1181	0.1367
	SBRMP24(20× 20)	0.0759	0.1012	0.1181	0.1368
	SBQP20 (20× 20) [79]	0.0759	0.1011	0.1180	0.1366
	IGA-Quadratic [219]	0.0760	0.1013	0.1183	0.1369
	MITC4 [218]	0.0758	0.1010	0.1179	0.1365
	NS-DSG3 [218]	0.0788	0.1051	0.1227	0.1420

**c) Les effets de différents paramètres sur le déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque carrée Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.**

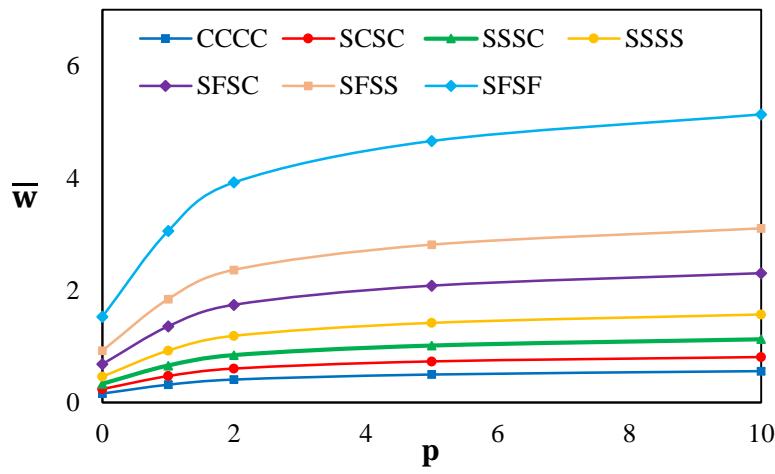
L'exemple suivant porte sur l'analyse des plaques carrées SSSS en Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, de différentes épaisseurs, allant de très minces à relativement épaisses. Le Tableau 4.7 présente le déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) de ces plaques Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> soumises à des charges uniformes. Le rapport longueur/épaisseur (l/ h) varie de 5 à 100, couvrant ainsi une gamme de plaques allant des plaques épaisses (pour l/h =5) aux plaques minces (pour l/h =100), avec des valeurs intermédiaires (10, 20, 50) correspondant à des plaques de moyennes épaisseurs. Cinq valeurs différentes de l'indice de loi de puissance sont également prises en compte. En outre, sept combinaisons de conditions aux limites sont étudiées pour cet exemple. L'objectif est d'analyser l'influence du rapport longueur/épaisseur (l/h), l'indice de la loi de puissance (p) et les conditions aux limites sur le comportement statique des plaques FG. Pour illustrer les résultats, certaines données du Tableau 4.7 sont représentées dans les Figures 4.5 et 4.6.

Figure 4.5 montre la variation du déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque carrée FG en fonction du rapport longueur/épaisseur (l/h) avec différentes conditions aux limites et pour p =1. Comme on peut l'observer, le déplacement non dimensionnel diminue à mesure que le rapport l/h augmente. Au-delà de l/h =10, les courbes du déplacement non dimensionnelle suivent un motif de lignes parallèle. On peut également observer sur ce graphique qu'une augmentation des contraintes aux bords de la plaque entraîne une diminution du déplacement non dimensionnelle.

Figure 4.6 illustre l'effet de l'indice de gradient  $p$  sur le déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées ( $l/h = 10$ ) avec différentes conditions aux limites. On observe sur la figure que l'augmentation de l'indice de gradient entraîne une augmentation du déplacement non dimensionnelle. Cela s'explique par le fait qu'une augmentation de l'indice de gradient accroît la fraction volumique du métal, ce qui réduit la rigidité en flexion de la plaque FG, rendant ainsi ces plaques FG plus flexibles et entraînant un déplacement plus élevé. Il est également noté sur la Figure 4.6 que le déplacement est maximal pour la condition de plaque simplement supportée et minimal pour la condition de plaque avec tous les bords encastrés. Ce comportement s'explique par le fait que des contraintes plus élevées aux bords augmentent la rigidité en flexion de la plaque, entraînant ainsi une réponse en flexion plus faible.



**Figure 4. 5.** L'influence des rapports longueur/épaisseur ( $l/h$ ) sur le déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées soumises à différentes conditions aux limites ( $p = 1$ ).



**Figure 4. 6.** L'influence de l'indice de gradient ( $p$ ) sur le déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées soumises à différentes conditions aux limites ( $l/h = 10$ ).

**Tableau 4. 7.** Déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques carrées FG pour différentes conditions aux limites.

		Boundary conditions						
I/h	p	CCCC	SCSC	SSSC	SSSS	SFSC	SFSS	SFSF
<b>5</b>	0	0.2369	0.3296	0.4178	0.5356	0.8045	1.0196	1.6531
	1	0.4451	0.6247	0.8035	1.0452	1.5652	2.0056	3.2649
	2	0.5731	0.8038	1.0327	1.3420	2.0102	2.5737	4.1885
	5	0.7283	1.0115	1.2791	1.6359	2.4587	3.1102	5.0392
	10	0.7938	1.0879	1.3481	1.6887	2.5477	3.1718	5.1067
<b>10</b>	0	0.1641	0.2406	0.3336	0.4665	0.6847	0.9248	1.5310
	1	0.3211	0.4728	0.6601	0.9285	1.3602	1.8452	3.0628
	2	0.4122	0.6068	0.8467	1.1906	1.7443	2.3655	3.9261
	5	0.5009	0.7341	1.0168	1.4201	2.0852	2.8142	4.6644
	10	0.5610	0.8118	1.1291	1.5692	2.3078	3.1036	5.1388
<b>20</b>	0	0.1447	0.2169	0.3114	0.4492	0.6521	0.8987	1.5022
	1	0.2882	0.4326	0.6223	0.8994	1.3046	1.8042	3.0106
	2	0.3696	0.5546	0.7977	1.1527	1.6723	2.3123	3.8584
	5	0.4405	0.6601	0.9473	1.3662	1.9834	2.7387	4.5681
	10	0.4865	0.7282	1.0433	1.5024	2.1825	3.0102	5.0196
<b>50</b>	0	0.1391	0.2100	0.3050	0.4443	0.6424	0.8935	1.4934
	1	0.2786	0.4210	0.6115	0.8912	1.2882	1.7922	2.9955
	2	0.3571	0.5395	0.7836	1.1421	1.6508	2.2968	3.8388
	5	0.4229	0.6387	0.9273	1.3510	1.9532	2.7167	4.5404
	10	0.4648	0.7018	1.0186	1.4837	2.1452	2.9832	4.9856
<b>100</b>	0	0.1382	0.2090	0.3040	0.4437	0.6409	0.8925	1.4902
	1	0.2771	0.4192	0.6098	0.8900	1.2856	1.7905	2.9896
	2	0.3552	0.5372	0.7815	1.1406	1.6475	2.2945	3.8312
	5	0.4202	0.6355	0.9243	1.3489	1.9485	2.7135	4.5306
	10	0.4614	0.6978	1.0149	1.4809	2.1394	2.9791	4.9741

### 4.3.2 Analyse de la vibration libre d'une plaque FG

Dans cette section, le comportement dynamique des plaques carrées FG est étudié numériquement. Afin de vérifier la précision de l'élément fini actuel, une étude de convergence et de comparaison est réalisée à travers plusieurs exemples, en comparant les résultats avec ceux disponibles dans la littérature. Deux types de combinaisons de matériaux métalliques et céramiques, à savoir Al\*/ZrO<sub>2</sub>-2 et Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, sont analysés, et les caractéristiques matérielles correspondantes sont présentées dans le Tableau 4.1.

Par convention et pour simplifier, les paramètres de fréquence naturelle adimensionnés suivants sont utilisés pour présenter les résultats numériques :

$$\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}; \bar{\omega} = \omega \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}; \bar{\omega} = 100 \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad (4.76)$$

### 4.3.2.1 Fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ pour une plaque carrée Al\*/ZrO<sub>2</sub>-2 simplement supportée

Dans le premier exemple, une plaque carrée Al\*/ZrO<sub>2</sub> simplement supportée est examinée. La fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) est obtenue en utilisant la formulation actuelle et comparée aux solutions exactes en 3D de Vel et Batra [104], aux solutions simplifiées de FSDT de Thai et Choi[74], les solutions de la théorie de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) de Matsunaga [121] et Mantari et al. [125], ainsi qu'à une nouvelle théorie trigonométrique de déformation par cisaillement (TSDT) proposée par Sadgui et Tati [59].

Les résultats sont présentés dans le Tableau 4.8 pour différentes valeurs de l'indice de gradient de puissance (p) et du rapport longueur/épaisseur (l/h). Il est à noter que les résultats actuels sont en bon accord avec les références citées, bien qu'ils soient plus proches des solutions HSDT[121].

**Tableau 4. 8.** Fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) des plaques carrées Al\*/ZrO<sub>2</sub>.

Théorie	<b>p = 0*</b>		<b>p = 1</b>		<b>l/h = 5</b>			
	<b>l/h=</b> <b>√10</b>	<b>l/h=10</b>	<b>l/h=5</b>	<b>l/h=10</b>	<b>l/h =20</b>	<b>p=2</b>	<b>p=3</b>	<b>p=5</b>
<b>SBRMP24 (8×8)</b>	0.4596	0.0571	0.2260	0.0613	0.0157	0.2247	0.2260	0.2275
<b>SBRMP24 (12×12)</b>	0.4608	0.0574	0.2269	0.0616	0.0158	0.2256	0.2269	0.2283
<b>SBRMP24 (16×16)</b>	0.4612	0.0575	0.2272	0.0617	0.0158	0.2259	0.2272	0.2286
<b>SBRMP24 (20×20)</b>	0.4614	0.0576	0.2273	0.0617	0.0158	0.2261	0.2273	0.2288
<b>3D [104]</b>	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
<b>S-FSDT [74]</b>	0.4618	0.0577	0.2173	0.0592	0.0152	0.2189	0.2207	0.2222
<b>(2D) HSDT [121]</b>	0.4658	0.0578	0.2285	0.0619	0.0158	0.2264	0.2270	0.2281
<b>HSDT [125]</b>	0.4624	0.0577	0.2277	0.0619	0.0158	0.2257	0.2263	0.2271
<b>TSDT [59]</b>	0.4625	0.0578	0.2280	0.0620	0.0159	0.2253	0.2254	0.2258

$$\bar{\beta}^* = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$$

### 4.3.2.2 Fréquence fondamentale $\bar{\beta}$ pour des plaques rectangulaires Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> simplement supportées

Dans le deuxième exemple, nous avons également étudié l'influence de certains paramètres tels que l'indice de gradient (p), les rapports longueur/épaisseur (l/h) et les rapports d'aspect (L/l) sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ). Les résultats sont présentés dans le Tableau 4.9 en utilisant une taille de maillage de 20×20 éléments. Le Tableau 4.9 présente la fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque FGM simplement supportée, constituée d'aluminium (Al\*) et d'alumine (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), pour différents indices de gradient (p) et rapports longueur/épaisseur (l/h). Des plaques carrées (L = l) et rectangulaires (l = 2L) sont

considérées. Les résultats obtenus sont comparés avec la méthode de vibration en 3D développée par Jin et al. [108], une HSDT non-polynomiale proposée par Mantari et al. [125], et la TSDT présentée par Sadgui et Tati [59]. Il ressort du Tableau 4.9 que les résultats actuels sont en bon accord avec les références mentionnées, des plaques minces aux plaques épaisses. Cependant, ils sont plus similaires à ceux présentés par Mantari et al. [125]. On peut également observer que la fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) tend à diminuer avec l'augmentation de l'indice de gradient (p) et du rapport d'aspect (l/L).

**Tableau 4. 9.** Fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) des plaques carrées Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

		Théorie				
		p	3D [108]	HSDT [125]	TSDT [59]	SBRMP24
I/L	l/h					
1	10	0	0.1135	0.1134	0.1136	0.1132
		1	0.0870	0.0868	0.0870	0.0866
		2	0.0789	0.0788	0.0788	0.0787
		5	0.0741	0.0740	0.0738	0.0748
	5	0	0.4169	0.4151	0.4156	0.4144
		1	0.3222	0.3205	0.3210	0.3200
		2	0.2905	0.2892	0.2883	0.2901
		5	0.2676	0.2666	0.2632	0.2708
2	2	0	1.8470	1.8277	1.8224	1.8197
		1	1.4687	1.4460	1.4435	1.4411
		2	1.3095	1.2896	1.2675	1.3003
		5	1.1450	1.1312	1.0829	1.1786
	10	0	0.0719	0.0717	0.0722	0.0716
		1	0.0550	0.0549	0.0553	0.0548
		2	0.0499	0.0498	0.0501	0.0498
		5	0.0471	0.0470	0.0472	0.0538
5	2	0	0.2713	0.2705	0.2721	0.2700
		1	0.2088	0.2081	0.2094	0.2077
		2	0.1888	0.1882	0.1888	0.1885
		5	0.1754	0.1750	0.1743	0.1768
	5	0	0.9570	1.2910	1.2943	0.9569
		1	0.7937	1.0137	1.0172	0.7961
		2	0.7149	0.9067	0.8988	0.7193
		5	0.6168	0.8064	0.7824	0.6214

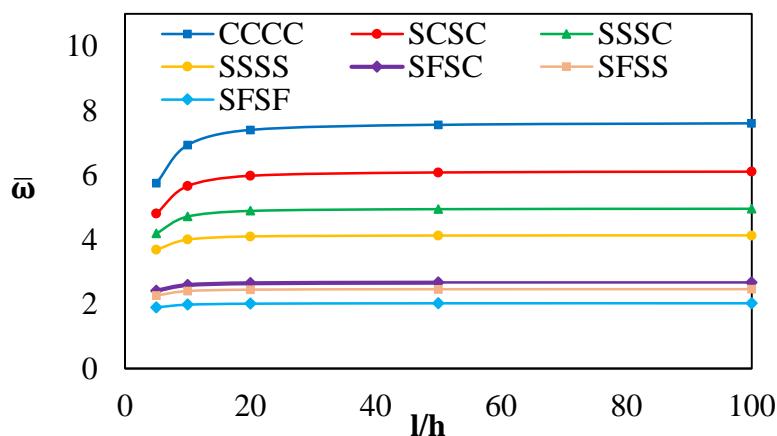
#### 4.3.2.3 Les effets de différents paramètres sur la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}$ )

##### d'une plaque carrée Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

Dans cette section, la fréquence naturelle non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> est déterminée afin de montrer l'effet de certains paramètres tels que le rapport longueur/épaisseur (l/h), l'indice de la loi de puissance(p), le rapport d'aspect (l/L) et les conditions aux limites sur le comportement vibratoire des plaques FG. Les résultats obtenus à l'aide de l'élément fini actuel

avec une taille de maillage de  $20 \times 20$  sont présentés dans le Tableau 4.10 et illustrés dans les Figures 4.7 et 4.8. Le Tableau 4.10 présente la fréquence naturelle non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) pour une plaque FG carrée soumise à différentes conditions aux limites, pour diverses valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$  et du rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ). La Figure 4.7 illustre la variation de la fréquence naturelle non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) pour une plaque FG carrée avec différentes conditions aux limites et  $p = 2$ . La variation de la fréquence naturelle non dimensionnelle en fonction de l'indice de loi de puissance  $p$  est montrée dans la Figure 4.8 pour une plaque FG carrée (avec  $l/h = 10$ ) et différentes conditions aux limites. Il peut être observé dans le Tableau 4.10 et la Figure 4.7 que, pour un indice de gradient particulier ( $p=2$ ), la fréquence naturelle non dimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport longueur/épaisseur jusqu'à  $l/h = 20$ , puis deviennent constantes dans tous les cas. Cela peut probablement s'expliquer par l'effet de la déformation par cisaillement, qui devient moins significatif lorsque l'épaisseur diminue ( $l/h > 20$ ), comme l'indiquent les travaux de Sadgui et Tati [59].

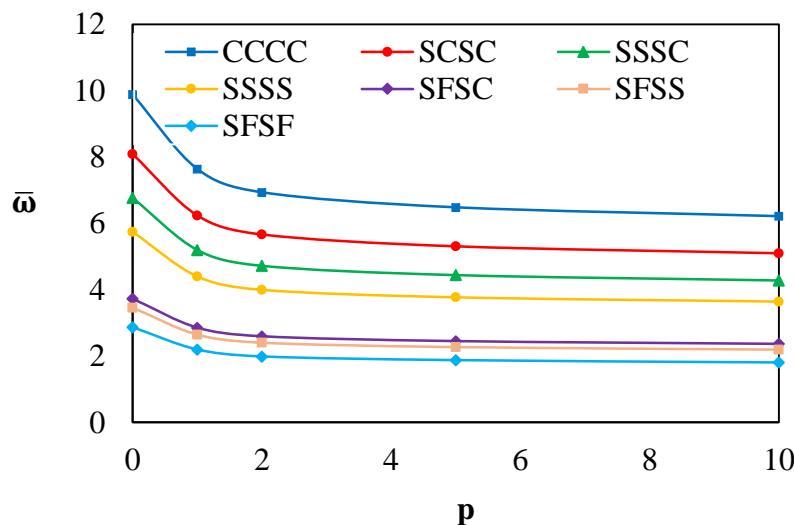
En conclusion, la fréquence naturelle non dimensionnelle des plaques FG épaisses est plus sensible aux variations du rapport longueur/épaisseur que celles des plaques minces. Il est également observé sur la Figure 4.7 que la fréquence naturelle non dimensionnelle augmente avec l'augmentation des contraintes aux bords des plaques. Ce comportement est dû au fait que des contraintes plus élevées aux bords augmentent la rigidité en flexion de la plaque, ce qui entraîne des réponses vibratoires plus importantes. Il peut aussi être observé dans le Tableau 4.10 et de la Figure 4.8 que l'augmentation de l'indice de loi de puissance entraîne une diminution de la fréquence naturelle non dimensionnelle. Cela s'explique par le fait qu'une augmentation de l'indice de loi de puissance accroît la fraction volumique du métal, ce qui réduit la rigidité en flexion de la plaque FG.



**Figure 4. 7.** L'effet du rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) sur la fréquence naturelle non dimensionnelle pour une plaque FG carrée avec différentes conditions aux limites et  $p = 2$ .

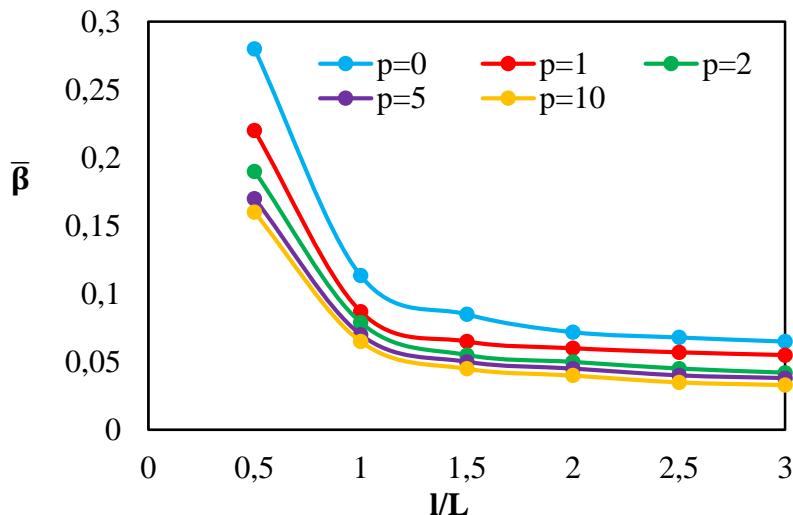
**Tableau 4. 10.** Fréquence fondamentale non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques carrées Al\*/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

		Boundary conditions						
<b><i>l/h</i></b>	<b><i>p</i></b>	CCCC	SCSC	SSSC	SSSS	SFSC	SFSS	SFSF
<b>5</b>	0	8.0644	6.7759	5.9548	5.2637	3.4524	3.2503	2.7238
	1	6.3544	5.3127	4.6297	4.0643	2.6618	2.5004	2.0930
	2	5.7554	4.8118	4.1946	3.6838	2.4141	2.2682	1.8996
	5	5.2616	4.4202	3.8876	3.4393	2.2587	2.1276	1.7542
	10	5.1168	4.3295	3.8525	3.4420	2.2671	2.14262	1.6824
<b>10</b>	0	9.8854	8.0891	6.7633	5.7466	3.7236	3.4563	2.8652
	1	7.6392	6.2372	5.1946	4.4015	2.8520	2.6447	2.1935
	2	6.9349	5.6631	4.7177	3.9982	2.5913	2.4032	1.9832
	5	6.4813	5.3055	4.4385	3.7732	2.4462	2.2711	1.8721
	10	6.2148	5.0962	4.2767	3.6438	2.3624	2.1950	1.8023
<b>20</b>	0	10.629	8.5901	7.0388	5.8949	3.8132	3.5205	2.9006
	1	8.1439	6.5760	5.3819	4.5036	2.9137	2.6891	2.2188
	2	7.4016	5.9770	4.8922	4.0940	2.6488	2.4448	2.0126
	5	6.9880	5.6481	4.6291	3.8774	2.5085	2.3161	1.9065
	10	6.7468	5.4567	4.4767	3.7523	2.4273	2.2417	1.8423
<b>50</b>	0	10.887	8.7553	7.1252	5.9391	3.8426	3.5408	2.9180
	1	8.3167	6.6867	5.4403	4.5339	2.9336	2.7030	2.2254
	2	7.5619	6.0799	4.9467	4.1226	2.6675	2.4579	2.0254
	5	7.1645	5.7617	4.6891	3.9087	2.5290	2.3304	1.9201
	10	6.9342	5.5773	4.5400	3.7849	2.4488	2.2566	1.8593
<b>100</b>	0	10.949	8.7914	7.1419	5.9457	3.8479	3.5440	2.9202
	1	8.3636	6.7134	5.4525	4.5385	2.9374	2.7052	2.2284
	2	7.6048	6.1044	4.9580	4.1269	2.6710	2.4599	2.0258
	5	7.2062	5.7860	4.7006	3.9134	2.5326	2.3326	1.9201
	10	6.9758	5.6018	4.5517	3.7898	2.4526	2.2590	1.8612



**Figure 4. 8.** L'effet de l'indice de loi de puissance *p* sur la fréquence naturelle non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) pour une plaque FG carrée ( $l/h = 20$ ) avec différentes conditions aux limites.

La Figure 4.9 montre la variation de la fréquence naturelle non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) pour une plaque FG rectangulaire simplement supportée (SSSS) (avec  $l/h = 5$ ) en fonction du rapport d'aspect  $l/L$  pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ . D'après cette figure, il ressort qu'à un indice de loi de puissance  $p$  donné, la fréquence naturelle non dimensionnelle diminue à mesure que le rapport d'aspect  $l/L$  augmente.



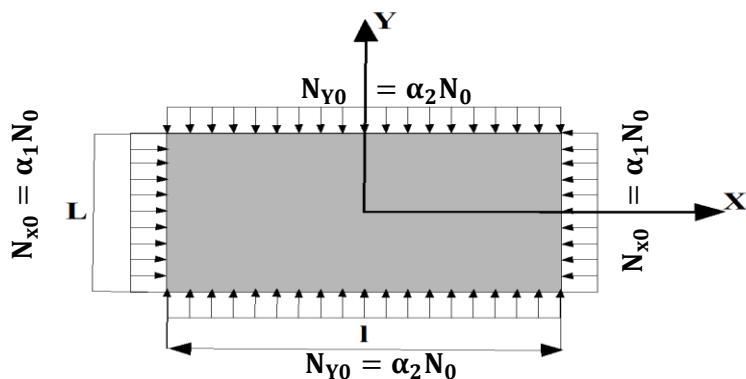
**Figure 4.9.** L'effet du rapport d'aspect  $l/L$  sur la fréquence naturelle non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour une plaque FG rectangulaire simplement supportée (SSSS) ( $l/h = 10$ ).

#### 4.3.3 Analyse du flambage mécanique

L'objectif de cette section est de vérifier la précision de l'élément fini actuel (SBRMP24) dans la prédiction de la charge critique de flambage des plaques FG. Deux types de charges en plan différentes sont considérés : compression uniaxiale ( $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ ) et compression biaxiale ( $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ ) (Figure 4.10).

Pour des raisons de simplicité, la charge critique de flambage non dimensionnelle suivante est utilisée :

$$\bar{\lambda}_{cr} = \lambda_{cr} \frac{(l^2)}{(E_m h^2)} \quad (4.77)$$



**Figure 4.10.** La plaque rectangulaire soumise à des charges en plan.

#### 4.3.3.1 Charge critique non dimensionnelle de flambage ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) pour des plaques rectangulaires Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> simplement supportées soumise à différentes charges.

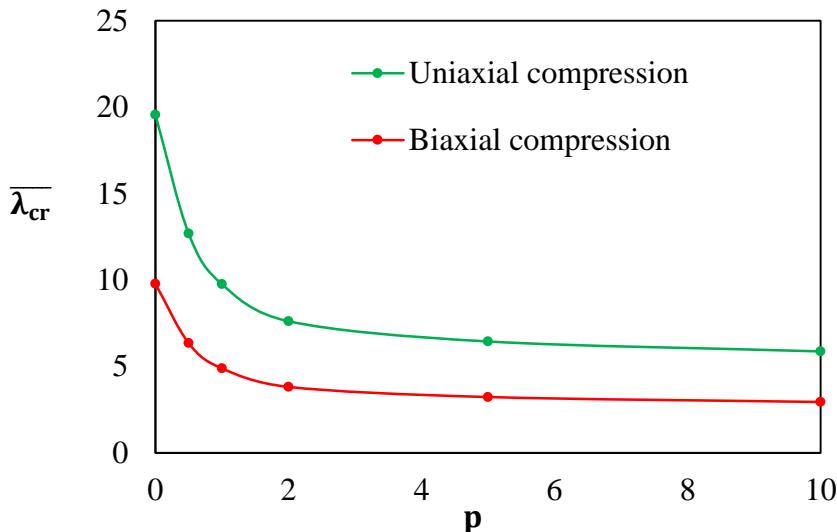
Cette section analyse le flambage des plaques rectangulaires en matériau fonctionnellement gradué (FG) sous une charge de flambage mécanique (Figure 4.10). Tout d'abord, les études de convergence des plaques rectangulaires Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> simplement supportées sous des charges de compression uniaxiales ( $N_{x0} = 1$ ,  $N_{y0} = 0$ ) et biaxiales ( $N_{x0} = N_{y0} = 1$ ) sont considérées pour deux rapports d'aspect ( $a/b = 1, 2$ ) et avec un rapport longueur/épaisseur ( $l/h = 100$ ). Les résultats du facteur de charge de flambage ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) dans l'équation (4.77) pour l'élément SBRMP24, avec différents maillages et plusieurs valeurs de l'exposant du facteur de fraction volumique ( $P$ ) sont présentés dans les Tables 4.11 et 4.12. Ces résultats sont comparés avec ceux de Thai et Choi [220]. Ils ont utilisé la théorie des plaques raffinée, la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) de Reddy [152], et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur raffinée (HSDT) de Zenkour et Aljadani [154]. On compare également avec les résultats numériques de Sadgui et Tati [59] utilisant la théorie TSDT et ceux de Belounar et al. [128] utilisant la théorie FSDDT. Les résultats de l'élément SBRMP24 sont en bon accord avec la solution numérique de Belounar et al [128]. Il est également observé que la charge critique de flambage pour le cas biaxial est plus faible que pour le cas uniaxial, comme l'illustre la figure 4.11. Cependant, les valeurs correspondant aux plaques rectangulaires ( $l/L = 2$ ) sont supérieures à celles des plaques carrées ( $l/L = 1$ ).

**Tableau 4. 11.** Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (l/L = 1).

$(\alpha_1, \alpha_2)$	Théories	<b>p</b>				
		<b>p = 0</b>	<b>p = 1</b>	<b>p = 2</b>	<b>p = 5</b>	<b>p = 10</b>
<b>(1, 0)</b>	SBRMP24 (8×8)	19.2601	9.6024	7.4930	6.3347	5.7692
	SBRMP24 (12×12)	19.4479	9.6945	7.5649	6.3966	5.8261
	SBRMP24 (16×16)	19.5198	9.7302	7.5928	6.4203	5.8477
	SBRMP24 (20×20)	19.5537	9.7472	7.6060	6.4315	5.8579
	Belounar et al. [128]	19.5534	9.7471	7.6058	6.4314	5.8576
	Sadgui and Tati [59]	19.6812	9.8107	7.6551	6.4724	5.8949
	Reddy [152]	19.5700	9.7500	7.6100	6.4300	5.8600
	Zenkour and Aljadani [154]	19.6145	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752
	Thai and Choi [220]	19.6145	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752
<b>(1, 1)</b>	SBRMP24 (8×8)	9.6300	4.8012	3.5374	3.1674	2.8846
	SBRMP24 (12×12)	9.7239	4.8472	3.7825	3.1983	2.9131
	SBRMP24 (16×16)	9.7599	4.8651	3.7964	3.2101	2.9239
	SBRMP24 (20×20)	9.7769	4.8736	3.8031	3.2158	2.9291
	Belounar et al. [128]	9.7767	4.8735	3.8029	3.2157	2.9288
	Sadgui and Tati [59]	9.8406	4.9053	3.8275	3.2362	2.9474
	Reddy [152]	9.7880	4.8790	3.8070	3.2190	2.9320
	Zenkour and Aljadani [154]	9.8072	4.8887	3.8146	3.2253	2.9375
	Thai and Choi [220]	9.8073	4.8888	3.8147	3.2254	2.9376

**Tableau 4. 12.** Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque rectangulaire Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (l/L = 2).

$(\alpha_1, \alpha_2)$	Théories	<b>p</b>				
		<b>p = 0</b>	<b>p = 1</b>	<b>p = 2</b>	<b>p = 5</b>	<b>p = 10</b>
<b>(1, 0)</b>	SBRMP24 (16×8)	76.8584	38.3241	29.9050	25.2783	23.0176
	SBRMP24 (24×12)	77.6567	38.7207	30.2146	25.5410	23.2572
	SBRMP24 (32×16)	77.9468	38.8654	30.3275	25.6364	23.3441
	Belounar et al. [128]	78.0780	38.9208	30.3704	25.6808	23.3898
	Sadgui and Tati [59]	78.7471	39.2647	30.6328	25.8836	23.5667
	Reddy [152]	77.7100	38.7400	30.2200	25.5400	23.2600
	Zenkour and Aljadani [154]	78.3256	39.0545	30.4707	25.7491	23.4455
	Thai and Choi [220]	78.3257	39.0546	30.4707	25.7491	23.4456
	SBRMP24 (16×8)	24.4534	12.1914	9.5133	8.0428	7.3244
<b>(1, 1)</b>	SBRMP24 (24×12)	24.4763	12.2026	9.5221	8.0504	7.3313
	SBRMP24 (32×16)	24.4854	12.2071	9.5256	8.0533	7.3340
	Belounar et al. [128]	24.5111	12.2180	9.5339	8.0621	7.3430
	Sadgui and Tati [59]	24.6209	12.2748	9.5770	8.0948	7.3714
	Reddy [152]	24.3780	12.5820	9.482	8.0150	7.299
	Zenkour and Aljadani [154]	24.4974	12.2132	9.5293	8.0549	7.3353
	Thai and Choi [220]	24.4974	12.2132	9.5294	8.0550	7.3353



**Figure 4. 11.** L'effet de l'indice de loi de puissance  $p$  sur la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque carrée simplement supportée ( $L = 1 = 100h$ ) sous différents types de charges.

#### 4.3.3.2 Charge critique non dimensionnelle de flambage ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) pour des plaques carrées Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec différents rapports (l/h) et valeurs d'indice de loi de puissance (p) sous différentes charges avec deux conditions aux limites.

Ensuite, l'étude porte sur une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous des charges uniaxiales ( $N_{x0} = 1$ ,  $N_{y0} = 0$ ) et biaxiales ( $N_{x0} = N_{y0} = 1$ ) avec deux conditions aux limites essentielles (SSSS, CSCS) et trois rapports d'épaisseur ( $l/h=10,20,100$ ). Les Tables 4.13 et 4.14 présentent les résultats calculés de la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) en utilisant un maillage  $20 \times 20$  et avec différentes valeurs de l'indice de puissance ( $p = 0, 0.5, 1, 2, 5, 10$ ). Ces résultats sont comparés avec des solutions semi-analytiques basées sur la méthode des éléments finis à frontière échelonnée (SBFEM) [221] ainsi qu'avec celles de la théorie raffinée de déformation de cisaillement proposée par Thai et Brian [222] et les résultats numériques de Belounar et al. [128] utilisant la théorie FSDT. Il ressort des tableaux mentionnés précédemment que les résultats obtenus sont en bon accord avec les références citées. Toutefois, il convient de noter que ces résultats sont plus en accord avec les solutions de la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre FSDT proposée par Belounar et al [128].

**Tableau 4. 13.** Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous compression uniaxiale ( $N_{x0} = 1$ ,  $N_{y0} = 0$ ) et différentes conditions aux limites.

CL	l/h	Methode	p					
			0	0.5	1	2	5	10
SSSS	100	SBRMP24	19.5537	12.6763	9.7472	7.6060	6.4315	5.8579
		QSBP20[128]	19.5534	12.6761	9.7471	7.6058	6.4314	5.8576
		Thai and Brian[222]	19.6145	12.7158	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752
		SBFEM[221]	19.6130	12.4186	9.8333	7.6720	6.4208	5.9333
	20	SBRMP24	19.2940	12.5261	9.6379	7.5197	6.3437	5.7679
		QSBP20[128]	19.2937	12.5259	9.6378	7.5195	6.3436	5.7676
		Thai and Brian[222]	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668
		SBFEM[221]	19.2814	12.2290	9.6771	7.5341	6.2771	5.7951
	10	SBRMP24	19.5251	12.0790	9.3119	7.2622	6.0844	5.5036
		QSBP20[128]	18.5248	12.0789	9.3118	7.2619	6.0843	5.5033
		Thai and Brian[222]	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
		SBFEM[221]	18.3744	11.9038	9.2449	7.1550	5.9836	5.4147
CSCS	100	SBRMP24	37.5707	24.3620	18.7346	14.6187	12.3568	11.2517
		QSBP20[128]	37.5704	24.3618	18.7345	14.6185	12.3567	11.2514
		Thai and Brian[222]	37.6718	24.4256	18.7823	14.6546	12.3860	11.2788
		SBFEM[221]	38.1225	24.1035	19.0888	14.8951	12.4588	11.5021
	20	SBRMP24	35.7618	23.3077	17.9647	14.0107	11.7470	10.6313
		QSBP20[128]	35.7615	23.3075	17.9646	14.0105	11.7469	10.6310
		Thai and Brian[222]	36.1863	23.5766	18.1547	14.1300	11.7889	10.6708
		SBFEM[221]	35.9817	23.7510	18.0749	14.0109	11.5415	10.6115
	10	SBRMP24	31.2925	20.6547	16.0114	12.4712	10.2471	9.1389
		QSBP20[128]	31.2922	20.6546	16.0113	12.4710	10.2470	9.13862
		Thai and Brian[222]	32.2263	21.2724	16.4430	12.7128	10.2507	9.1373
		SBFEM[221]	30.8280	21.3484	16.8081	12.8042	10.1034	9.1579

**Tableau 4. 14.** Charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) d'une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous compression biaxiale (N<sub>x0</sub> = N<sub>y0</sub> = 1) et différentes conditions aux limites.

CL	l/h	Methode	p					
			0	0.5	1	2	5	10
SSSS	100	SBRMP24	9.7769	6.3383	4.8736	3.8031	3.2158	2.9291
		QSBP20[128]	9.7767	6.3381	4.8735	3.8029	3.2157	2.9288
		Thai and Brian[222]	9.8073	6.3579	4.8888	3.8147	3.2254	2.9376
		SBFEM[221]	9.8065	6.2093	4.9166	3.8360	3.2104	2.9667
	20	SBRMP24	9.6470	6.2632	4.8191	3.7600	3.1719	2.8841
		QSBP20[128]	9.6468	6.2630	4.8189	3.7597	3.1718	2.8838
		Thai and Brian[222]	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834
		SBFEM[221]	9.6408	6.1148	4.8386	3.7671	3.1386	2.8976
	10	SBRMP24	9.2626	6.0397	4.6561	3.6313	3.0423	2.7520
		QSBP20[128]	9.2624	6.0395	4.6559	3.6310	3.0422	2.7517
		Thai and Brian[222]	9.2893	6.0615	4.6695	3.6315	3.0177	2.7264
		SBFEM[221]	9.1882	5.8527	4.6232	3.5777	2.9422	2.7078
CSCS	100	SBRMP24	18.7606	12.1636	9.3535	7.2987	6.1705	5.6195
		QSBP20[128]	18.7604	12.1634	9.3533	7.2984	6.1704	5.6192
		Thai and Brian[222]	18.7707	12.1696	9.3577	7.3015	6.1725	5.6213
		SBFEM[221]	19.2669	12.1595	9.6322	7.5196	6.2904	5.8742
	20	SBRMP24	18.1681	11.8196	9.1027	7.1006	5.9705	5.4152
		QSBP20[128]	18.1679	11.8194	9.1025	7.1003	5.9704	5.4149
		Thai and Brian[222]	18.2972	11.8995	9.1581	7.1345	5.9814	5.4262
		SBFEM[221]	18.4749	11.7192	9.2686	7.1984	5.9569	5.5607
	10	SBRMP24	16.5680	10.8790	8.4134	6.5567	5.4323	4.8737
		QSBP20[128]	16.5678	10.8788	8.4131	6.5564	5.4322	4.8734
		Thai and Brian[222]	16.9615	11.1284	8.5866	6.6592	5.4546	4.8963
		SBFEM[221]	16.8014	10.7365	8.4653	6.5017	5.2431	4.7921

#### 4.3.3.3 Les effets de différents paramètres sur la charge critique de flambage.

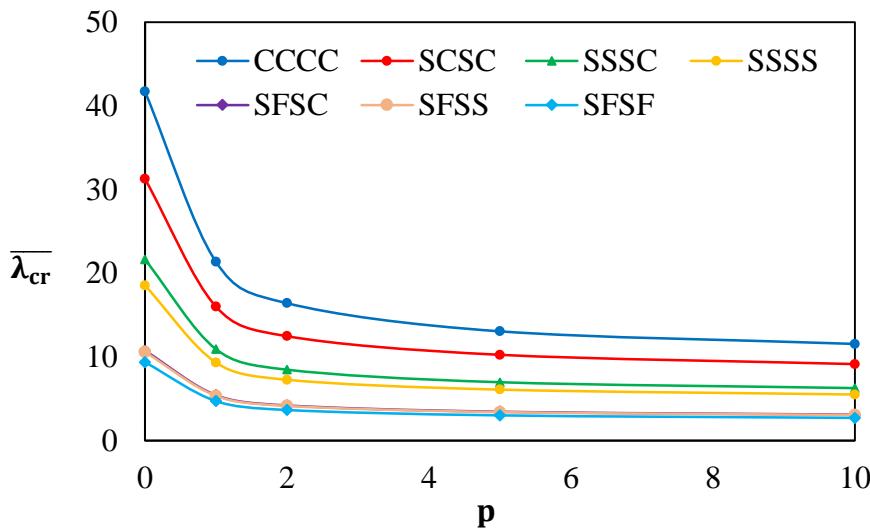
L'objectif principal de cet exemple est d'étudier les effets de certains paramètres, notamment l'indice de la loi de puissance (p), le rapport d'aspect (L/l) et le rapport longueur/épaisseur (l/h), sur la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) des plaques FG. Les résultats sont illustrés dans les Figures 4.12 à 4.15.

La Figure 4.12 montre la variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) des plaques carrées (l/h = 100) avec différentes conditions aux limites sous compression uniaxiale en fonction de l'indice de la loi de puissance p. Il peut être observé que la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) diminue lorsque l'indice de la loi de puissance p augmente. Cela s'explique par le fait que l'augmentation de l'indice de la loi de puissance réduit la fraction volumique de la céramique et, par conséquent, la rigidité à la flexion de la plaque. Il peut également être constaté, à partir de cette figure, que lorsque les contraintes aux

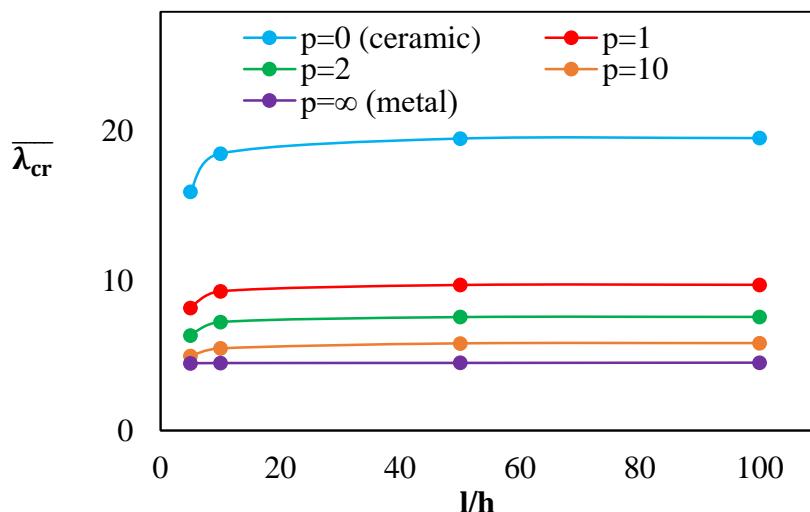
limites de la plaque augmentent, la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) augmente.

La Figure 4.13 montre la variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur  $l/h$  pour une plaque carrée FG avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ , soumise à une compression uniaxiale. Il peut être observé que la charge critique de flambage non dimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport longueur/épaisseur  $l/h$  jusqu'à  $l/h = 10$ , puis devient presque constante pour  $l/h > 10$ . La Figure 4.14 illustre l'évolution de la charge critique de flambage non dimensionnelle sous compression biaxiale en fonction du rapport longueur/largeur ( $l/L$ ), pour  $l/h=100$  et différents indices de gradient  $p$ . Il est également observé que cette charge critique augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $l/L$ )

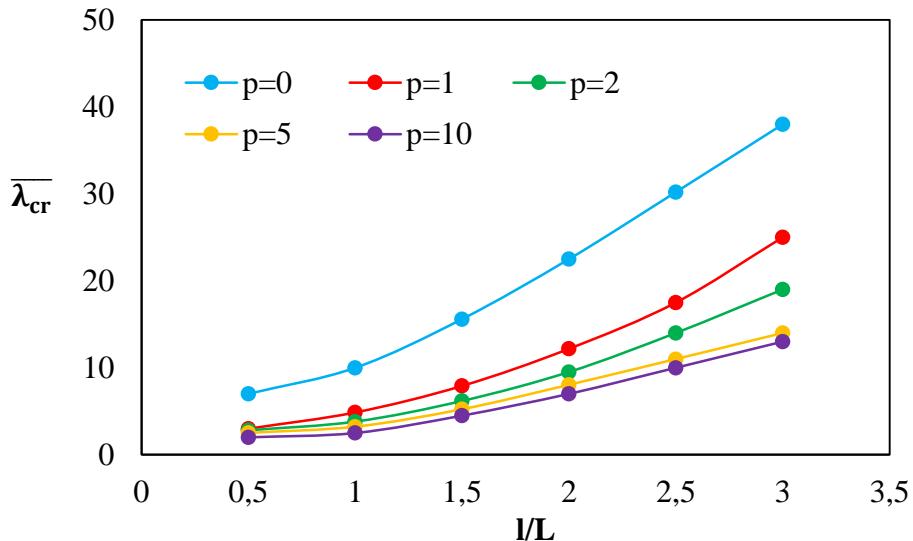
Les Figures 4.15 montrent l'évolution de la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) sous compression uniaxiale ( $l=L=10h$ ) en fonction du rapport des modules ( $E_m/E_c$ ). Il est à noter que la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) diminue à mesure que le rapport des modules ( $E_m/E_c$ ) augmente.



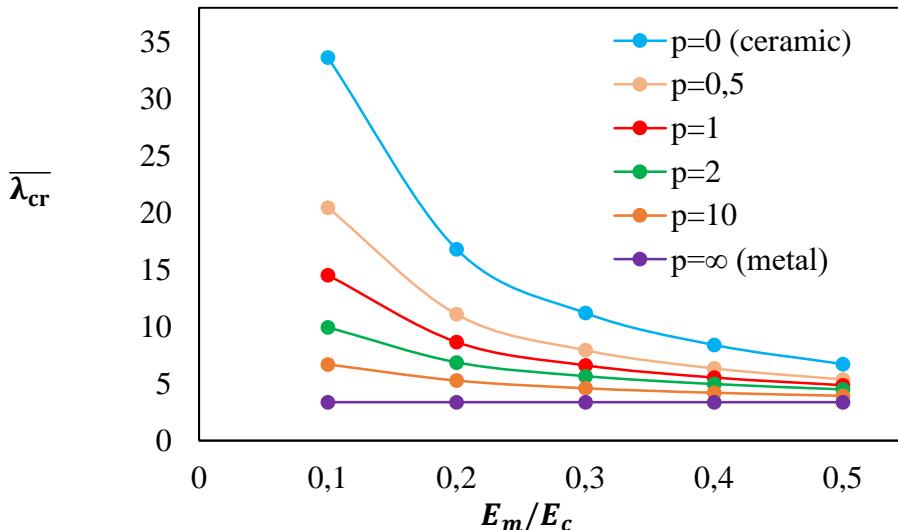
**Figure 4. 12.** La variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) des plaques carrées ( $l/h=100$ ) avec différentes conditions aux limites sous compression uniaxiale.



**Figure 4. 13.** La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/épaisseur  $l/h$  pour une plaque carrée SSSS ( $L=l=100$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ , sous compression uniaxiale



**Figure 4. 14.** La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\bar{\lambda}_{cr}$ ) en fonction du rapport longueur/largeur ( $l/L$ ) pour une plaque carrée simplement supportée ( $L=l=100$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ , sous compression biaxiale.



**Figure 4. 15.** La variation des charges critiques de flambage non dimensionnelle ( $\overline{\lambda}_{cr}$ ) en fonction du rapport ( $E_m/E_c$ ) pour une plaque carrée SSSS ( $L=l=10$ ) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ , sous compression biaxiale.

#### 4.4 Développement et validation numérique d'un nouvel élément fini quadrilatéral pour les plaques FGMS, basé sur l'approche en déformation et intégrant un nouveau modèle trigonométrique de déformation par cisaillement (TrSDPT))

##### 4.4.1 Champ de displacement

Basé sur le modèle de déformation de cisaillement trigonométrique inspiré du modèle d'ordre supérieur proposé par Tati [58], le champ de déplacement en chaque point de la plaque peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + \frac{h^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{2\pi z}{h} \right)^2 \psi_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Où  $u$ ,  $v$  et  $w$  désignent les déplacements d'un point M( $x, y, z$ ) à l'intérieur de la plaque FG.  $u_0$  et  $v_0$  sont les composantes du vecteur de déplacement dans le plan de la plaque aux points de la surface médiane, respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ .  $w_0(x, y)$  est le déplacement transverse des points du plan médian de la plaque, et  $\Psi_z$  représente les contributions de l'éirement dans la direction transverse. La variable  $\Psi_z$  sera éliminée sous l'hypothèse de contraintes de cisaillement nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et en supposant que les déformations de cisaillement transverses sont distribuées de manière sinusoïdale à travers l'épaisseur.

#### 4.4.2 Cinématique

Selon le tenseur de déformation de Von Kármán, les composantes des déformations vectorielles sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x}(x, y, z) \\ \varepsilon_y &= v_{,y}(x, y, z) \\ \gamma_{xy} &= u_{,y}(x, y, z) + v_{,x}(x, y, z) \\ \gamma_{xz} &= u_{,z}(x, y, z) + w_{,x}(x, y, z) \\ \gamma_{yz} &= v_{,z}(x, y, z) + w_{,y}(x, y, z)\end{aligned}\tag{4.79}$$

En exploitant l'équation (4.78), on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{0,x}(x, y, z) + z\beta_{x,x}(x, y) \\ \varepsilon_y &= v_{0,y}(x, y, z) + z\beta_{y,y}(x, y) \\ \gamma_{xy} &= u_{0,y}(x, y, z) + v_{0,x}(x, y, z) + z(\beta_{x,y}(x, y) + \beta_{y,x}(x, y)) \\ \gamma_{xz} &= \beta_x(x, y) + w_{0,x}(x, y) + \frac{h^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{2\pi z}{h} \right)^2 \psi_{z,x}(x, y) \\ \gamma_{yz} &= \beta_y(x, y) + w_{0,y}(x, y) + \frac{h^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{2\pi z}{h} \right)^2 \psi_{z,y}(x, y)\end{aligned}\tag{4.80}$$

L'équation (4.80) peut être reformulée comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x\tag{4.81a}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y\tag{4.81b}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}\tag{4.81c}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 + \frac{h^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{2\pi z}{h} \right)^2 \psi_{z,x}(x, y)\tag{4.81d}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0 + \frac{h^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{2\pi z}{h} \right)^2 \psi_{z,y}(x, y)\tag{4.81e}$$

Où

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= u_{0,x}(x, y); \varepsilon_y^0 = v_{0,y}(x, y); \gamma_{xy}^0 = u_{0,y}(x, y) + v_{0,x}(x, y) \\ \kappa_x &= \beta_{x,x}(x, y); \kappa_y = \beta_{y,y}(x, y); \kappa_{xy} = \beta_{x,y}(x, y) + \beta_{y,x}(x, y); \\ \gamma_{xz}^0 &= \beta_x(x, y) + w_{0,x}(x, y); \gamma_{yz}^0 = \beta_y(x, y) + w_{0,y}(x, y)\end{aligned}\tag{4.82}$$

Pour éliminer la variable  $\Psi_z(x, y, t)$ , la condition de contraintes de cisaillement nulles aux surfaces supérieure et inférieure libres de la plaque est imposée.

$$\gamma_{xz} \left( \pm \frac{h}{2} \right) = \gamma_{yz} \left( \pm \frac{h}{2} \right) = 0\tag{4.83}$$

Donc

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}\left(\pm\frac{h}{2}\right) &= \gamma_{xz}^0 + \frac{h^2}{\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi z}{h}\right)^2 \psi_{z,x}(x, y) = 0 \\ \gamma_{yz}\left(\pm\frac{h}{2}\right) &= \gamma_{yz}^0 + \frac{h^2}{\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi z}{h}\right)^2 \psi_{z,y}(x, y) = 0\end{aligned}\quad (4.84)$$

La variable  $\Psi_z(x, y, t)$  peut être exprimée en termes de  $\gamma_{xz}^0$  et  $\gamma_{yz}^0$  comme suit :

$$\psi_{z,x}(x, y) = -\left(\frac{\pi^2}{h^2}\right)\gamma_{xz}^0; \psi_{z,y}(x, y) = -\left(\frac{\pi^2}{h^2}\right)\gamma_{yz}^0 \quad (4.85)$$

En utilisant l'équation (4.85), les composantes des déformations de cisaillement transverses de l'équation (4.81d, 4.81e) peuvent être exprimées par :

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 \left(1 - \cos^2\left(\frac{2\pi z}{h}\right)\right) \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^0 \left(1 - \cos^2\left(\frac{2\pi z}{h}\right)\right)\end{aligned}\quad (4.86)$$

L'équation (4.86) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 f_1(z) \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^0 f_1(z)\end{aligned}\quad (4.87)$$

Avec  $f_1(z)$  étant une fonction de cisaillement définie par :

$$f_1(z) = \left(1 - \cos^2\left(\frac{2\pi z}{h}\right)\right) \quad (4.88)$$

#### 4.4.2.1 Amélioration de la fonction de cisaillement

Dans le cas de la théorie de Reissner–Mindlin, des facteurs de correction sont introduits pour tenir compte de l'hypothèse de déformation de cisaillement constante à travers l'épaisseur de la plaque. Ces facteurs sont obtenus en comparant l'énergie de déformation de cisaillement selon la théorie de l'élasticité tridimensionnelle et celle de la théorie de Reissner–Mindlin. Par conséquent, la contrainte de cisaillement pour un matériau supposé isotrope est donnée par :

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{5}{6} D_{44} \gamma_{xz}^0 \\ \tau_{yz} &= \frac{5}{6} D_{55} \gamma_{yz}^0\end{aligned}\quad (4.89)$$

Où  $D_{44}$  et  $D_{55}$  sont les coefficients de rigidité de la matrice d'élasticité du matériau, comme donné par l'équation (4.14).

L'énergie de déformation de cisaillement par unité de surface peut être exprimée par

$$U_{sd}^{RM} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xz} \gamma_{xz}^0 + \tau_{yz} \gamma_{yz}^0) dz = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{5}{6} D_{44} (\gamma_{xz}^0)^2 + \frac{5}{6} D_{55} (\gamma_{yz}^0)^2 \right) dz \quad (4.90)$$

En intégrant sur l'épaisseur, l'équation (4.90) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U_{sd}^{RM} = \frac{1}{2} \frac{5}{6} D_{44} h \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( (\gamma_{xz}^0)^2 (\gamma_{yz}^0)^2 \right) dz \quad (4.91)$$

La déformation de cisaillement variant à travers l'épaisseur est donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= f(z) \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz} &= f(z) \gamma_{yz}^0 \end{aligned} \quad (4.92)$$

Où

$$f(z) = Cf_1(z) \quad (4.93)$$

C désigne le facteur d'amélioration.

Les contraintes de cisaillement sont exprimées par :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= D_{44} f(z) \gamma_{xz}^0 \\ \tau_{yz} &= D_{55} f(z) \gamma_{yz}^0 \end{aligned} \quad (4.94)$$

L'énergie de déformation de cisaillement par unité de surface peut s'écrire comme suit :

$$U_{sd}^{SIN} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dz = \frac{1}{2} D_{44} \left( (\gamma_{xz}^0)^2 + (\gamma_{yz}^0)^2 \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z)^2 dz \quad (4.95)$$

L'intégration à travers l'épaisseur de l'équation (4.95) conduit à :

$$U_{sd}^{SIN} = \frac{1}{2} D_{44} \left( (\gamma_{xz}^0)^2 + (\gamma_{yz}^0)^2 \right) \frac{3}{8} C^2 h \quad (4.96)$$

L'égalisation des deux expressions d'énergie dans les équations (4.91) et (4.96) permet d'obtenir

$$\frac{3}{8} C^2 h = \frac{5}{6} h \quad (4.97)$$

Donc

$$C = \frac{2\sqrt{5}}{3} \quad (4.98)$$

Enfin, la fonction de cisaillement améliorée s'écrit sous la forme suivante :

$$f(z) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{2\pi z}{h} \right) \right) \quad (4.99)$$

Après l'élimination de la variable  $\Psi_z(x, y, t)$ , le champ de déplacements du nouveau modèle est donné comme suit [58] :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \beta_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \beta_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= f(z) w_0(x, y) + (f(z) - 1) G(x, y) \end{aligned} \quad (4.100)$$

Où  $G(x, y)$  est une fonction définie par :

$$\beta_x(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial x}; \beta_y(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \quad (4.101)$$

Il peut être observé que le champ de déplacements dans l'équation (4.100) contient seulement cinq inconnues, comme dans le modèle de Reissner–Mindlin.

Le champ de déformations peut être reformulé sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^l \\ \varepsilon^0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.102)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma \\ \gamma^l \end{Bmatrix} = f(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.103)$$

#### 4.4.3 Equations constitutive

Pour une plaque FG élastique, les relations constitutives peuvent être exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^l \\ \varepsilon_y^l \\ \gamma_{xy}^l \\ \gamma_{xz}^l \\ \gamma_{yz}^l \end{Bmatrix} \quad (4.104)$$

#### 4.4.4 Les resultants de force et de moment

Comme indiqué dans la section 4.2.4, afin d'éviter le couplage membrane-flexion causé par l'asymétrie de la plaque FGMs, les résultantes de force et de moment sont calculées par rapport au plan neutre physique, qui ne coïncide pas nécessairement avec le centre de la plaque.

En utilisant les équations constitutives, les résultantes de force et de moment peuvent être exprimées de la manière suivante [59]:

$$(N_i, M_i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, (z - e_N)) (\sigma_i) dz \text{ avec } (i = x, y, xy) \quad (4.105)$$

$$(T_i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) (\tau_i) dz \text{ avec } (i = xz, yz) \quad (4.106)$$

La relation entre les résultantes de contraintes et les déformations peut donc être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [D_m] & 0 & 0 \\ 0 & [D_f] & 0 \\ 0 & 0 & [D_c] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^m \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (4.107)$$

Les matrices constitutives pour la membrane  $[D_m]$ , la flexion  $[D_f]$  et le cisaillement  $[D_c]$  sont données par [59]:

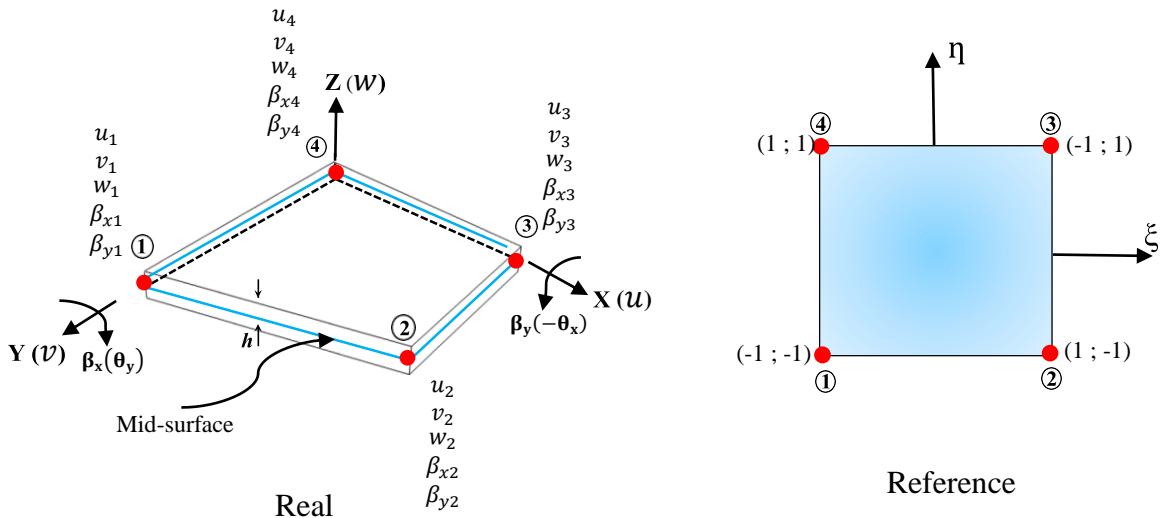
$$[D_m] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} dz \quad (4.108)$$

$$[D_f] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (z - e_N)^2 dz \quad (4.109)$$

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (f(z))^2 dz \quad (4.110)$$

#### 4.4.5 Formulation de l'élément HSBQP20 développé

L'élément proposé, nommé HSBQP20 (High-Order Strain-Based Quadrilateral Plate with 20 degrees of freedom), est un élément de plaque quadrilatère à quatre nœuds possédant cinq degrés de liberté ( $u, v, w, \beta_x, \beta_y$ ) par nœud comme illustré dans la Figure 4.16 et ses fonctions de déplacement sont obtenues par la superposition de deux éléments basés sur la déformation. Le premier est un élément de membrane avec deux degrés de liberté ( $u, v$ ) par nœud proposé par Sabir et Sfendji [211], tandis que le second est un élément de plaque de type Reissner–Mindlin qui contient trois degrés de liberté ( $w, \beta_x, \beta_y$ ) par nœud, développé précédemment par Boussem et al. [194]. Ainsi, l'élément HSBQP20 contient 20 degrés de liberté et ses fonctions de déplacement doivent être exprimées en termes de vingt constantes ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}$ ), où les huit premières constantes ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ ) sont utilisées pour la représentation des déplacements dans le plan ( $u, v$ ), tandis que les douze autres constantes ( $\alpha_9, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{20}$ ) sont utilisées pour exprimer le déplacement transversal et les rotations ( $w, \beta_x, \beta_y$ ).



**Figure 4. 16.** Élément de plaque FG quadrilatère (HSBQP20).

#### 4.4.5.1 Champ de déplacements de l'élément (HSBQP20)

La procédure de définition du champ de déplacements de l'élément HSBQP20 suit la même méthode que celle de l'élément SBRMP24, comme indiqué dans la section 4.2.5. Par conséquent pour déterminer le champ de déplacement de l'élément actuel (HSBQP20), nous avons combiné les champs de déplacement obtenus à partir de l'élément de plaque (MSBQP) proposé par Boussem et al. [194], et de l'élément membrane (SBRIE) suggéré par Sabir et Sfendji [211] donc :

$$\{U_e\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_{SBRIE}] & [0]_{(2x12)} \\ [0]_{(3x12)} & [P_{MSBQP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_m\} \\ \{\alpha_f\} \end{Bmatrix} = [P_{HSBQP\ 20}] \{\alpha\} \quad (4.111)$$

$$[P_{HSBQP\ 20}] = \begin{bmatrix} [P_{SBRIE}] & [0]_{(2x12)} \\ [0]_{(3x12)} & [P_{MSBQP}] \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

Où  $\{\alpha\} = \{\{\alpha_m\}, \{\alpha_f\}\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}\}^T$  et  $[P_{SBRIE}]_{2x8}$  est la matrice polynomiale représentant les fonctions de déplacement pour l'élément membranaire, définie dans l'équation (3.42) et  $[P_{MSBQP}]_{3x12}$  est la matrice polynomiale représentant les fonctions de déplacement pour l'élément de flexion donnés dans l'annexe.

L'équation (4.111) peut s'écrire comme suit :

$$\{U_e\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = [P_{HSBQP20}] [C_{HSBQP20}]^{-1} \{q_e\} = [N_{HSBQP20}] \{q_e\} \quad (4.113)$$

Où  $[C_{HSBQP20}]$  est la matrice de transformation reliant les vingt degrés de liberté  $\{\{q_e\}^T = \{u_1, v_1, w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, \dots, u_4, v_4, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4}\}\}$  aux vingt constantes  $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}\}^T$ , telles que présentées dans l'annexe, et  $[N_{HSBQP20}]$  est la matrice des fonctions de forme de l'élément HSBQP20, qui peut s'exprimer comme suit :

$$[N_{HSBQP20}] = [P_{HSBQP20}] [C_{HSBQP20}]^{-1} \quad (4.114)$$

#### 4.4.5.2 Dérivation des matrices élémentaires et du vecteur de charge élémentaire

La matrice de rigidité élémentaire ainsi que le vecteur de charge élémentaire de l'élément HSBQP20 sont obtenus en appliquant les mêmes formulations que celles de l'élément SBRMP24, comme décrit dans la section 4.2.5. Par conséquent, ils s'écrivent comme suit :

$$[K_e^e] = \int_{\Omega} ([B_m]^T [D_m] [B_m] + [B_f]^T [D_f] [B_f] + [B_c]^T [D_c] [B_c]) d\Omega \quad (4.115)$$

$$\{F_e\} = \int_{\Omega} [N_{HSBQP20}]^T q(x, y) d\Omega \quad (4.116)$$

Avec  $[B_m]$ ,  $[B_f]$ , et  $[B_c]$  sont les matrices de déformation-déplacement, qui sont décrites comme suit:

$$[B_m] = [[Q_{SBRIE}] \ [0]_{(2x12)}] [C_{HSBQP20}]^{-1}; [B_f] = [[0]_{(3x12)} \ [Q_{MSBQP}]_f] [C_{HSBQP20}]^{-1} \quad (4.117)$$

$$[B_c] = [[0]_{(2x12)} \ [Q_{MSBQP}]_c] [C_{HSBQP20}]^{-1};$$

Où les matrices  $[Q_{SBRIE}]$ ,  $[Q_{MSBQP}]_f$  et  $[Q_{MSBQP}]_c$  représentent respectivement les matrices associées aux déformations membranaires, à la flexion et au cisaillement transversal, conformément aux expressions figurant en annexe.

Pour la vibration libre, la matrice de masse élémentaire de l'élément s'exprime comme suit :

$$[M_e^e] = \int_{\Omega} [N_{HSBQP20}]^T [m] [N_{HSBQP20}] d\Omega \quad (4.118)$$

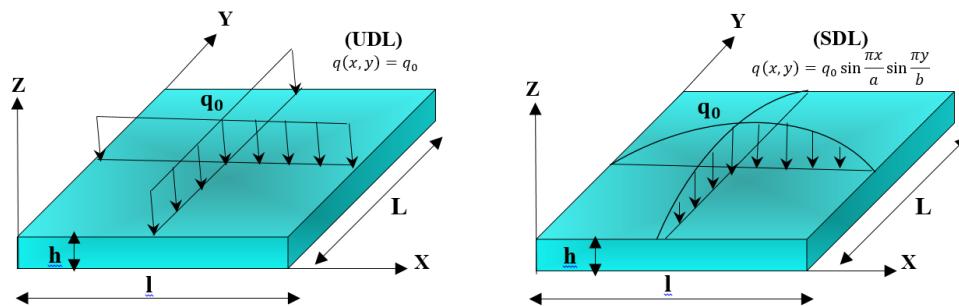
$[m]$  représente la matrice d'inertie, qui est donnée par :

$$[m] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

#### 4.4.6 Validation de la HSBQP20- Résultats et discussions

##### 4.4.6.1 Analyse statique

Le comportement statique d'une plaque FG rectangulaire composée d'Aluminium/Alumine ( $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ ) sous une charge transversale répartie est étudié. La surface supérieure de la plaque FG est riche en céramique (Alumine) et la surface inférieure est en métal pur (Aluminium). Les propriétés des matériaux de l'aluminium et de l'alumine sont indiquées dans le tableau 4.1. Une charge transversale  $q(x,y)$  est appliquée sur la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque comme indiqué sur la Figure 4.17. Cette charge peut prendre la forme d'une charge uniformément répartie (UDL), où  $q(x,y) = q_0$ , ou de charges sinusoïdales (SDL)  $q(x,y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ .



**Figure 4. 17.** Plaques FG carrées soumises à des distributions de charges uniformes et sinusoïdales.

Pour plus de commodité, les relations suivantes pour le déplacement et les contraintes non dimensionnelles sont données :

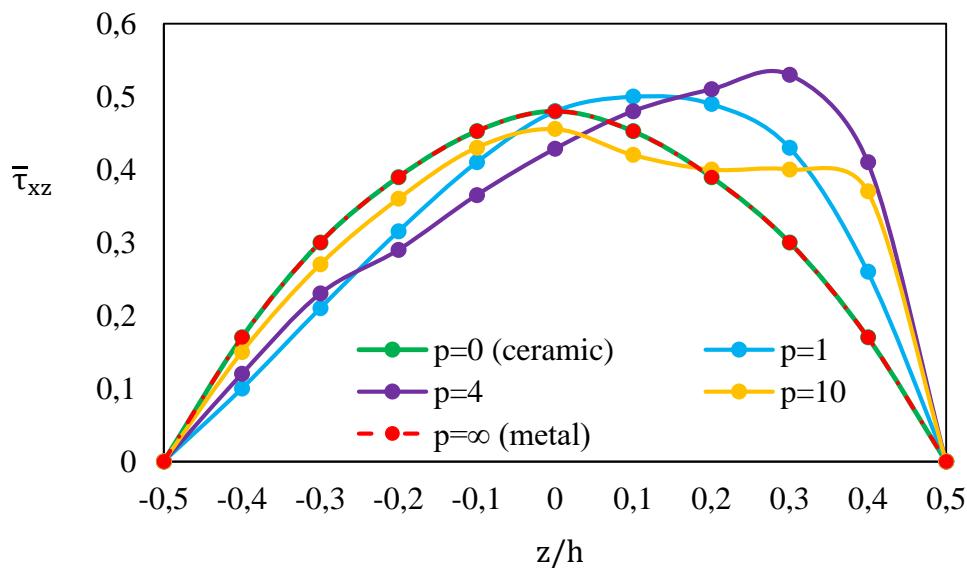
$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{10h^3E_c}{q_0(l)^4} w\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}\right); \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{lq_0} \sigma_x\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right); \bar{\sigma}_y &= \frac{h}{lq_0} \sigma_y\left(\frac{l}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{3}\right) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{lq_0} \tau_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right); \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{lq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{L}{2}, 0\right); \bar{\tau}_{yz} &= \frac{h}{lq_0} \tau_{yz}\left(\frac{l}{2}, 0, \frac{h}{6}\right)\end{aligned}\quad (4.114)$$

Dans ce premier exemple, une plaque carrée  $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$  simplement appuyée, avec un rapport longueur/épaisseur  $l/h = 10$ , est analysée. Les déplacements non dimensionnels et les contraintes de l'élément HSBQP20 pour les plaques FGM sous charge distribuée sinusoïdale (SDL) et charge uniformément répartie (UDL), comme illustré dans la Figure 4.17, sont présentés dans les Tableaux 4.15 et 4.16 respectivement, pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ . Les résultats obtenus avec l'élément fini HSBQP20 sont comparés à ceux obtenus analytiquement à l'aide de la théorie des plaques raffinée (RPT) de Do et al. [223], du modèle semi-analytique numérique de Ye et al. [221], d'une solution analytique de Zenkour [86] utilisant SSDT, et des solutions numériques basées sur HSDT par Tati [58]. Les résultats obtenus avec l'élément HSBQP20 montrent une précision satisfaisante par rapport aux autres

éléments, pour les deux cas de chargement et pour toutes les valeurs de l'indice de gradient  $p$ .

De plus, les Tableaux 4.15 et 4.16 montrent que les contraintes pour une plaque entièrement céramique sont les mêmes que pour une plaque entièrement métallique. Cela est dû au fait que, dans ces deux cas, la plaque est complètement homogène, et les contraintes ne dépendent pas du module de Young. Il est important de noter que le déplacement non dimensionnel  $\bar{w}$  et la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  augmentent à mesure que l'indice de la loi de puissance augmente. La contrainte de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  diminue dans la plage de  $p$  de 0 à 2, puis augmente avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance. La contrainte transverse  $\bar{\tau}_{xz}$  reste pratiquement inchangée dans la plage de  $p$  de 0 à 1, diminue dans la plage de  $p$  de 1 à 4, puis augmente avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance.

La Figure 4.18 illustre la distribution de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la plaque. Pour les plaques homogènes ( $p = 0$  and  $p = \infty$ ), la contrainte de cisaillement transverse ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) suit une distribution symétrique et sinusoïdale à travers l'épaisseur, avec la valeur maximale située au plan médian de la plaque. Cependant, dans le cas des plaques FG, la distribution n'est pas parfaitement sinusoïdale et ne présente pas son maximum au plan médian. De plus, pour  $p = 1$  et  $p = 4$ , la distribution devient asymétrique, avec les valeurs maximales des contraintes situées respectivement à  $z/h = 0.1$  et  $z/h = 0.3$ .



**Figure 4.18.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) d'une plaque carrée FG soumise à une charge uniformément répartie (UDL) avec plusieurs indices de gradient ( $p$ ).

**Tableau 4.15.** Déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) et contraintes des plaques carrées FG sous charge sinusoïdale distribuée (SDL) pour différents indices de loi de puissance ( $p$ ).

$p$	Mesh size	Present 8x8	Present 12x12	Present 16x16	Present 20x20	Tati [58]	Do et al. [223]	Zenkour [86]
<b>0 (Ceramic)</b>	$\bar{w}$	0.2935	0.2950	0.2955	0.2959	0.2957	0.2961	0.2960
	$\bar{\sigma}_x$	2.4294	2.1003	2.0053	1.9960	1.9570	1.9943	1.9955
	$\bar{\sigma}_y$	1.5330	1.4302	1.3375	1.3125	1.3050	1.3124	1.3121
	$\bar{\tau}_{xy}$	0.6940	0.6960	0.6995	0.7030	0.7025	0.7067	0.7065
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.2305	0.2325	0.2360	0.2390	0.2368	0.2387	0.2462
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.2027	0.2048	0.2083	0.2113	0.2105	0.2122	0.2132
<b>1</b>	$\bar{w}$	0.5573	0.5738	0.5794	0.5820	0.5882	0.5870	0.5889
	$\bar{\sigma}_x$	3.7067	3.3556	3.1135	3.0545	3.0240	3.0533	3.0870
	$\bar{\sigma}_y$	1.8667	1.6448	1.5261	1.4834	1.4820	1.4856	1.4894
	$\bar{\tau}_{xy}$	0.5993	0.6013	0.6048	0.6083	0.6066	0.6148	0.6110
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.2305	0.2325	0.2360	0.2390	0.2368	0.2212	0.2462
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.2494	0.2515	0.2550	0.2580	0.2588	0.2418	0.2622
<b>2</b>	$\bar{w}$	0.7141	0.7353	0.7425	0.7458	0.7575	0.7529	0.7573
	$\bar{\sigma}_x$	4.4450	3.9168	3.6344	3.4614	3.5320	3.5585	3.6094
	$\bar{\sigma}_y$	1.7523	1.5441	1.4327	1.3946	1.3920	1.3935	1.3954
	$\bar{\tau}_{xy}$	0.5365	0.5385	0.5420	0.5455	0.5406	0.5493	0.5441
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.2180	0.2200	0.2235	0.2266	0.2202	0.1892	0.2265
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.2682	0.2703	0.2738	0.2768	0.2758	0.2369	0.2763
<b>4</b>	$\bar{w}$	0.8523	0.8660	0.8773	0.8780	0.8832	0.8731	0.8819
	$\bar{\sigma}_x$	4.4015	4.110	3.9927	3.9723	3.9720	3.9984	4.0693
	$\bar{\sigma}_y$	1.3560	1.2536	1.2169	1.1777	1.1810	1.1794	1.1783
	$\bar{\tau}_{xy}$	0.5552	0.5578	0.5660	0.5680	0.5639	0.5740	0.5667
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.1967	0.1987	0.2005	0.2032	0.1979	0.1596	0.2029
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.2505	0.2530	0.2565	0.2585	0.2584	0.2083	0.2580
<b>10</b>	$\bar{w}$	0.9258	0.9524	0.9614	0.9956	1.0125	1.0020	1.0089
	$\bar{\sigma}_x$	6.1817	5.4583	5.0741	4.9388	4.9690	5.0142	5.0890
	$\bar{\sigma}_y$	1.0973	0.9689	0.9007	0.8790	0.8822	0.8797	0.8775
	$\bar{\tau}_{xy}$	0.5797	0.5817	0.5852	0.5887	0.5868	0.5964	0.5894
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.2090	0.211	0.2145	0.2190	0.2167	0.1858	0.2198
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.1982	0.2003	0.2038	0.2069	0.2065	0.1770	0.2041
<b><math>\infty</math> (Metal)</b>	$\bar{w}$	1.5067	1.5507	1.5656	1.5725	/	1.6072	1.6070
	$\bar{\sigma}_x$	2.4294	2.1003	2.0053	1.9960	/	1.9943	1.9955
	$\bar{\sigma}_y$	1.5330	1.4302	1.3375	1.3125	/	1.3124	1.3121
	$\bar{\tau}_{xy}$	0.6940	0.6960	0.6995	0.7030	/	0.7067	0.7065
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.2305	0.2325	0.2360	0.2390	/	0.2387	0.2462
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.2027	0.2048	0.2083	0.2113	/	0.2122	0.2132

$p$	Mesh size	Present 8x8	Present 12x12	Present 16x16	Present 20x20	Tati [58]	Ye et al. [221]	Do et al. [223]
$^0$ (Ceramic)	$\bar{w}$	0.4638	0.4653	0.4659	0.4661	0.4663	0.4662	0.4666
	$\bar{\sigma}_x$	2.8753	2.8737	2.8736	2.8735	2.8656	2.8249	2.8917
	$\bar{\sigma}_y$	1.9169	1.9158	1.9157	1.9156	1.904	1.8870	1.9107
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.2752	1.2883	1.2931	1.2954	1.266	1.2759	1.2771
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.4265	0.4489	0.4632	0.4798	0.4696	0.4966	0.5059
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.3790	0.4019	0.4138	0.4212	0.4174	0.4980	0.4497
$^1$	$\bar{w}$	0.9230	0.9263	0.9274	0.9279	0.9283	0.9212	0.9260
	$\bar{\sigma}_x$	4.4435	4.4413	4.4413	4.4412	4.415	4.4030	4.4403
	$\bar{\sigma}_y$	2.1781	2.1770	2.1770	2.1769	2.164	2.1572	2.1655
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.1010	1.1125	1.1167	1.1187	1.093	1.1061	1.1417
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.4265	0.4489	0.4632	0.4798	0.4696	0.4882	0.4688
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.4657	0.4941	0.5088	0.5180	0.5133	0.5418	0.5124
$^2$	$\bar{w}$	1.1850	1.1891	1.1905	1.1912	1.1948	1.1956	1.1875
	$\bar{\sigma}_x$	5.1885	5.1858	5.1858	5.1856	5.155	5.2970	5.1781
	$\bar{\sigma}_y$	2.0454	2.0444	2.0443	2.0443	2.032	1.9784	2.0320
	$\bar{\tau}_{xy}$	0.9813	0.9915	0.9952	0.9970	0.9745	0.9708	1.0290
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.4056	0.4268	0.4421	0.4569	0.4368	0.4479	0.4010
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.4673	0.4957	0.5105	0.5197	0.5469	0.5413	0.5021
$^4$	$\bar{w}$	1.3738	1.3784	1.3799	1.3807	1.3916	1.3779	1.3762
	$\bar{\sigma}_x$	5.8358	5.8325	5.8322	5.8320	5.797	5.9532	5.8199
	$\bar{\sigma}_y$	1.7351	1.7341	1.7340	5.8320	1.724	1.7204	1.7210
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.0237	1.0342	1.0381	1.0399	1.016	1.0335	1.0827
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.3754	0.3921	0.4158	0.4285	0.3926	0.4187	0.3382
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.4058	0.4303	0.4431	0.4510	0.5124	0.5105	0.4414
$^{10}$	$\bar{w}$	1.5776	1.5824	1.5841	1.5849	1.5934	1.5604	1.5774
	$\bar{\sigma}_x$	7.3026	7.2980	7.2972	7.2968	7.253	7.2217	7.2931
	$\bar{\sigma}_y$	1.2963	1.2955	1.2954	1.2953	1.288	1.2203	1.2843
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.0660	1.0767	1.0806	1.0825	1.058	1.1056	1.1187
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.4010	0.4231	0.4489	0.4555	0.4536	0.4298	0.4487
	$\bar{\tau}_{yz}$	0.3461	0.3667	0.3776	0.3843	0.4096	0.4207	0.3752
$^{\infty}$ (Metal)	$\bar{w}$	2.4996	2.5049	2.5104	2.5221	/	/	2.5329
	$\bar{\sigma}_x$	2.8753	2.8737	2.8736	2.8735	/	/	2.8917
	$\bar{\sigma}_y$	1.9169	1.9158	1.9157	1.9156	/	/	1.9107
	$\bar{\tau}_{xy}$	1.2752	1.2883	1.2931	1.2954	/	/	1.2771
	$\bar{\tau}_{xz}$	0.4265	0.4489	0.4632	0.4798	/	/	0.5059

$\bar{\tau}_{yz}$	0.3790	0.4019	0.4138	0.4212	/	/	0.4497
-------------------	--------	--------	--------	--------	---	---	--------

**Tableau 4. 16.** Déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) et contraintes des plaques carrées FG sous charge uniformément répartie (UDL) pour différents indices de loi de puissance (p).

Dans le deuxième exemple, des plaques carrées Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> minces et épaisses simplement appuyées sont analysées. Les déplacements et contraintes non dimensionnelle des plaques FGM pour différentes valeurs du rapport longueur-épaisseur (l/h) sont présentés dans le Tableau 4.17 en utilisant un maillage de 20×20 avec p = 0. Les résultats obtenus avec l'élément actuel montrent une bonne concordance avec ceux rapportés par Tati [58], Zenkour [86] et Reddy [217] pour tous les cas, des plaques plus minces aux plaques plus épaisses. De plus, les effets de plusieurs paramètres, tels que l'indice de loi de puissance (p) et le rapport longueur-épaisseur (l/h), sur le comportement en flexion des plaques FG ont également été analysés. Les résultats sont présentés dans les Figures 4.19 - 4.21.

**Tableau 4. 17.** Le déplacement non dimensionnel ( $\bar{w}$ ) et les contraintes des plaques carrées FG avec divers rapports de formes (l/h).

<b>l/h</b>	<b>Théorie</b>	<b><math>\bar{w}</math></b>	<b><math>\bar{\sigma}_x</math></b>	<b><math>\bar{\sigma}_y</math></b>	<b><math>\bar{\tau}_{xy}</math></b>	<b><math>\bar{\tau}_{xz}</math></b>	<b><math>\bar{\tau}_{yz}</math></b>
<b>4</b>	Present (20x20)	0.5870	1.1495	0.7664	0.5188	0.4797	0.4213
	HSDT [58]	0.5872	1.1425	0.7617	0.5070	0.4695	0.4173
	SSDT [86]	0.5865	1.1988	0.7534	0.4906	0.4906	0.4307
	TSDT [217]	0.5868	1.1959	0.7541	0.4913	0.4913	0.4304
<b>10</b>	Present (20x20)	0.4661	2.8735	1.9156	1.2954	0.4798	0.4212
	HSDT [58]	0.4663	2.8560	1.9040	1.2660	0.4700	0.4174
	SSDT [86]	0.4665	2.8932	1.9103	1.2850	0.5114	0.4429
	TSDT [217]	0.4666	2.8920	1.9106	1.2855	0.4963	0.4411
<b>100</b>	Present (20x20)	0.4429	28.7094	19.1396	12.9360	0.4796	0.4213
	HSDT [58]	0.4435	28.5600	19.0400	12.6500	0.4696	0.4174
	SSDT [86]	0.4438	28.7342	19.1543	13.0125	0.5164	0.4472
	TSDT [217]	0.4438	28.7341	19.1543	12.9885	0.5004	0.4448

La figure 4.19 montre la variation de l'indice de la loi de puissance (p) et du rapport

longueur/épaisseur ( $l/h$ ) en fonction de la déflexion centrale non dimensionnelle. On peut observer que la déflexion centrale non dimensionnelle diminue à mesure que le rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) augmente, tandis qu'elle augmente lorsque l'indice de la loi de puissance ( $p$ ) augmente. Cette augmentation est due à un indice de loi de puissance plus élevé, qui élève la fraction volumique de métal, réduisant ainsi la rigidité en flexion des plaques fonctionnellement gradées (FG) et les rendant plus souples, ce qui conduit à des déflexions plus importantes. Par ailleurs, l'élément étudié présente une grande résistance au verrouillage par cisaillement et assure des performances stables sur une large gamme de rapports longueur/épaisseur pour les plaques minces.

Comme l'illustre la figure 4.20, la contrainte normale non dimensionnelle ( $\bar{\sigma}_x$ ) augmente à mesure que le rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) augmente et diminue lorsque l'indice de gradient ( $p$ ) diminue.

La figure 4.21 montre l'évolution de la contrainte de cisaillement dans le plan non dimensionnelle ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) pour différents rapports longueur/épaisseur ( $l/h$ ) et indices de loi de puissance ( $p$ ). Elle montre que la contrainte de cisaillement dans le plan non dimensionnelle ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) augmente lorsque le rapport de forme ( $l/h$ ) augmente. De plus, elle diminue lorsque l'indice de la loi de puissance ( $p$ ) varie entre 0 et 2, puis augmente avec un indice de loi de puissance plus élevé ( $p$ ). Ce comportement est dû à la réduction de la rigidité de la plaque, qui influence la réponse de la contrainte de cisaillement.

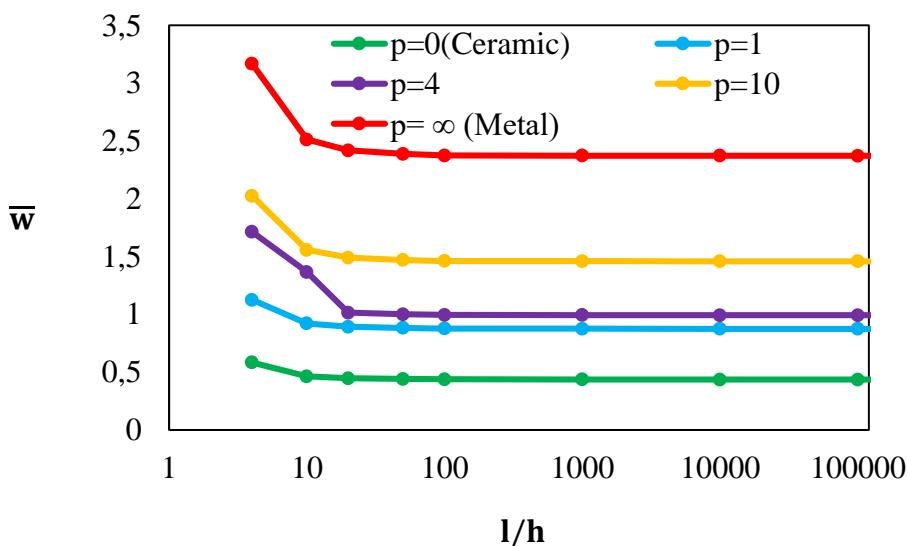
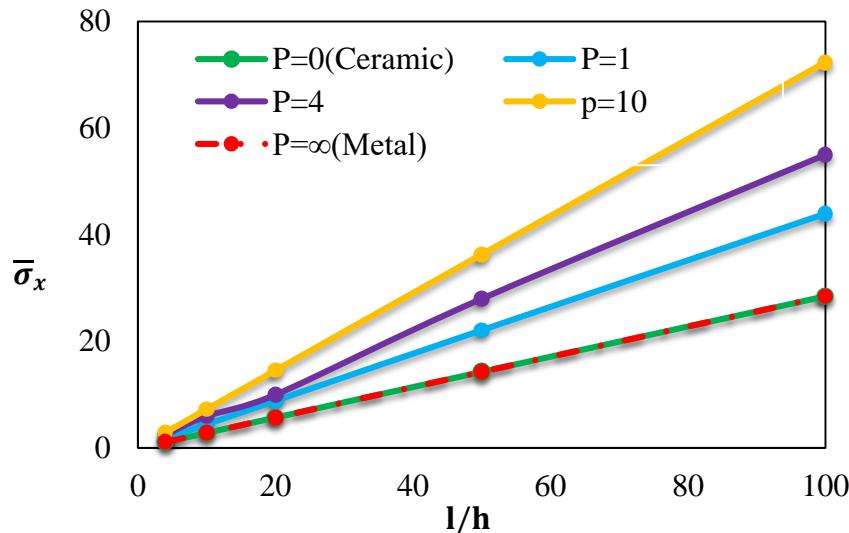
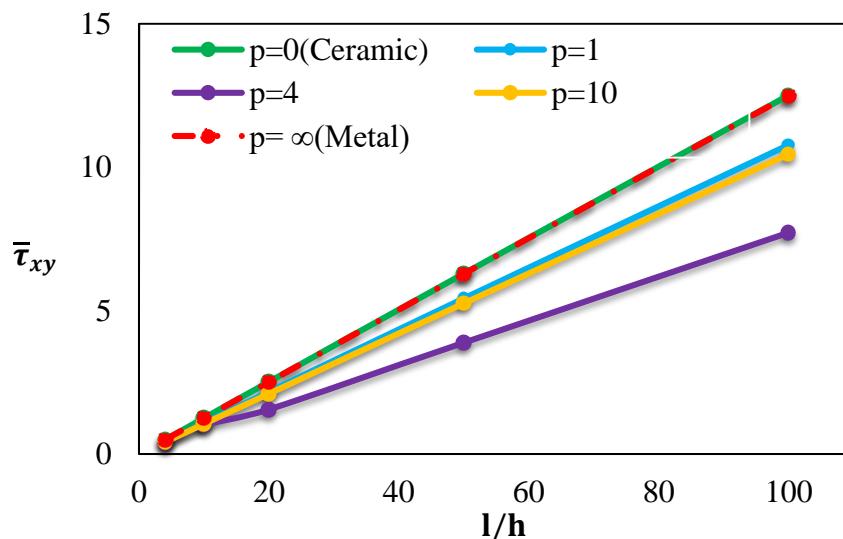


Figure 4. 19. Variations du déplacement non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque carrée FG sous charge uniformément répartie (UDL) avec plusieurs rapports ( $l/h$ ).



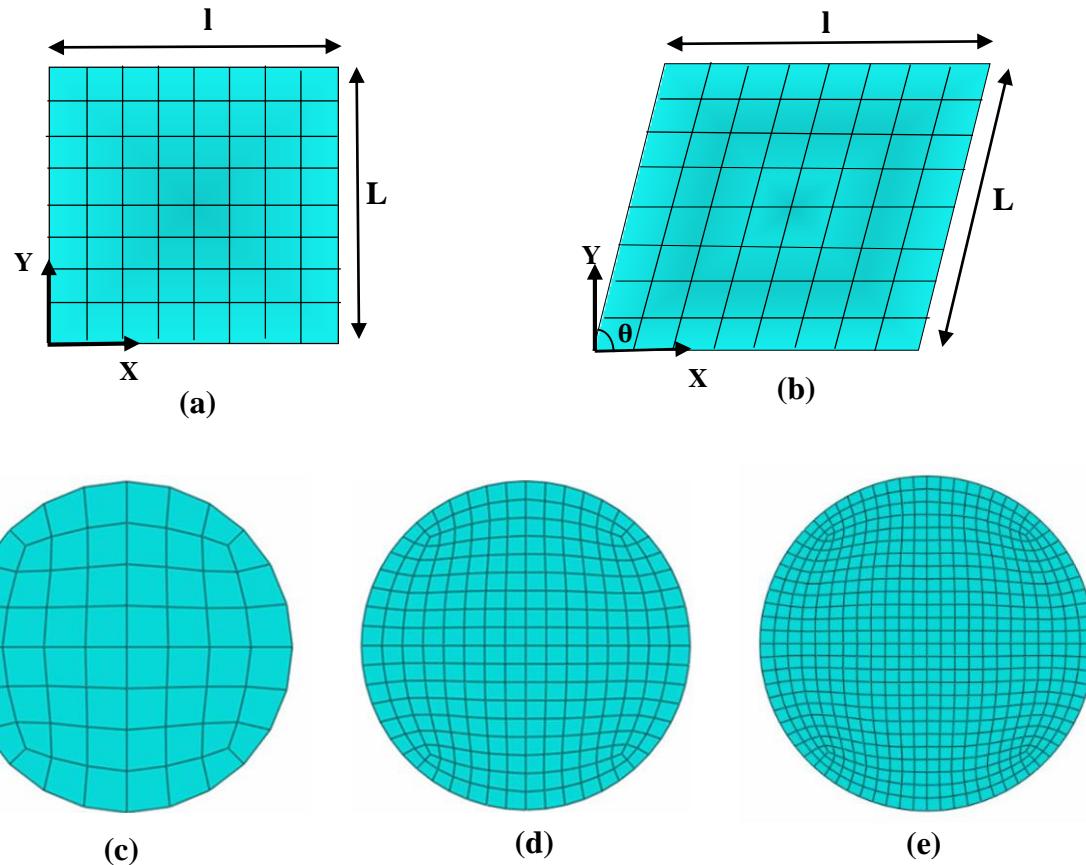
**Figure 4. 20.** Variation de la contrainte de traction dans le plan ( $\bar{\sigma}_x$ ) d'une plaque carrée FG soumise à une charge uniformément répartie (UDL) pour différents rapports ( $l/h$ ).



**Figure 4. 21.** Variation de la contrainte de cisaillement dans le plan ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) d'une plaque carrée FG soumise à une charge uniformément répartie (UDL) pour différents rapports ( $l/h$ ).

#### 4.4.6.2 Vibration libre.

Dans cette sous-section, la convergence de l'élément actuel (HSBQP20) a également été vérifiée pour les réponses de vibration libre de différents types de plaques FG, et les résultats sont comparés avec les méthodes numériques et analytiques disponibles.

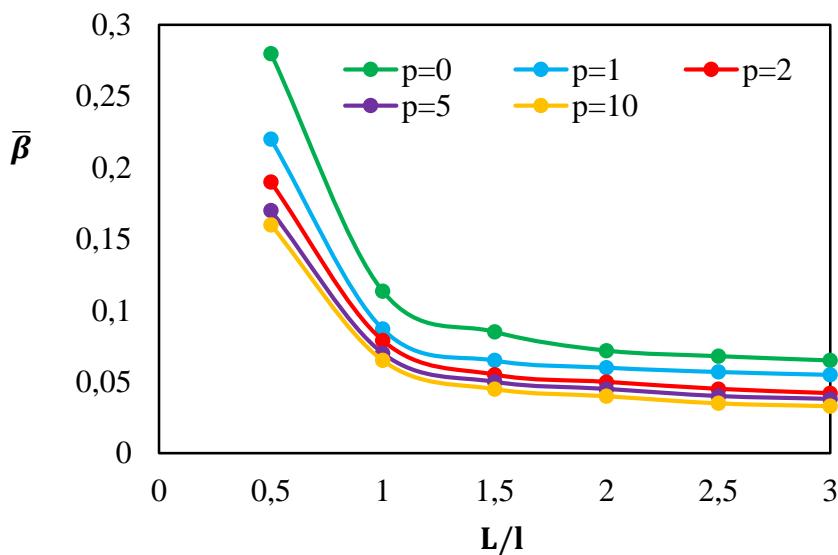


**Figure 4. 22.** (a), (b) Plaques carrées et biaises avec un maillage  $N \times N$  d'éléments. (c), (d), et (e) plaques circulaires avec différents maillages comportant respectivement 60, 272 et 588 éléments quadrilatéraux.

### a) Vibration libre des plaques rectangulaires

La vibration libre d'une plaque rectangulaire Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> simplement supportée est analysée. Les fréquences naturelles non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) sont dérivées à l'aide de la formulation actuelle et comparées aux solutions quasi-3D de Jin et al. [108], aux résultats de la théorie de cisaillement d'ordre supérieur de Sadgui et Tati [59]., ainsi qu'à ceux de Mantari et al. [125]. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.18, en utilisant un maillage de  $(20 \times 20)$  et pour diverses valeurs de l'indice de loi de puissance ( $p$ ), du rapport longueur/épaisseur ( $l/h$ ) et du rapport de forme ( $L/l$ ). Selon le tableau 4.18, on peut conclure que les résultats actuels sont en excellent accord avec les références mentionnées précédemment. De plus, ils sont similaires aux résultats obtenus par Mantari et al. [125]. Il peut également être observé que les fréquences naturelles non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) diminuent à mesure que l'indice de puissance ( $p$ )

augmente. Cela s'explique par le fait qu'un indice de loi de puissance plus élevé entraîne une augmentation de la fraction volumique du métal, ce qui réduit la rigidité en flexion de la plaque FG, entraînant ainsi des réponses vibratoires plus faibles. Il peut également être constaté que, pour un indice de loi de puissance  $p$  donné, les fréquences naturelles non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) diminuent à mesure que le rapport de forme  $L/l$  augmente, comme montré dans la figure 4.22. Cela est dû au fait qu'à mesure que le rapport de forme augmente, la plaque devient plus large par rapport à son épaisseur, ce qui réduit sa rigidité en flexion et son moment résistant effectif. Cela rend la plaque moins capable de résister à la flexion, entraînant des fréquences naturelles plus faibles. De plus, un rapport de forme plus élevé répartit la masse sur une plus grande surface, ce qui affecte les propriétés d'inertie et réduit l'énergie vibratoire nécessaire pour le mouvement, abaissant ainsi encore les fréquences naturelles.



**Figure 4. 23.** L'effet du rapport de forme ( $L/l$ ) sur les fréquences naturelles non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) des plaques rectangulaires  $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$  ( $l/h = 10$ ).

**Tableau 4. 18.** Fréquences naturelles non dimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) des plaques rectangulairesAl/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

		Théorie				
L/l	l/h	p	Present	Mantari et al. [125]	Sadgui and Tati[59]	Jin et al.[108]
1	10	0	0.1133	0.1134	0.1136	0.1135
		1	0.0868	0.0868	0.0870	0.0870
		2	0.0788	0.0788	0.0788	0.0789
		5	0.0741	0.0740	0.0738	0.0741
	5	0	0.4150	0.4151	0.4156	0.4169
		1	0.3204	0.3205	0.3210	0.3222
		2	0.2897	0.2892	0.2883	0.2905
		5	0.2686	0.2666	0.2632	0.2676
	2	0	1.8218	1.8277	1.8224	1.8470
		1	1.4422	1.4460	1.4435	1.4687
		2	1.2930	1.2896	1.2675	1.3095
		5	1.1508	1.1312	1.0829	1.1450
2	10	0	0.0716	0.0717	0.0722	0.0719
		1	0.0547	0.0549	0.0553	0.0550
		2	0.0498	0.0498	0.0501	0.0499
		5	0.0473	0.0470	0.0742	0.0471
	5	0	0.2714	0.2705	0.2721	0.2713
		1	0.2085	0.2081	0.2094	0.2088
		2	0.1886	0.1882	0.1888	0.1888
		5	0.1755	0.1750	0.1743	0.1754
	2	0	1.2915	1.2910	1.2943	0.9570
		1	1.0147	1.0137	1.0172	0.7937
		2	0.9050	0.9067	0.8988	0.7149
		5	0.8074	0.8064	0.7824	0.6168

### b) Vibration libre des plaques biaises

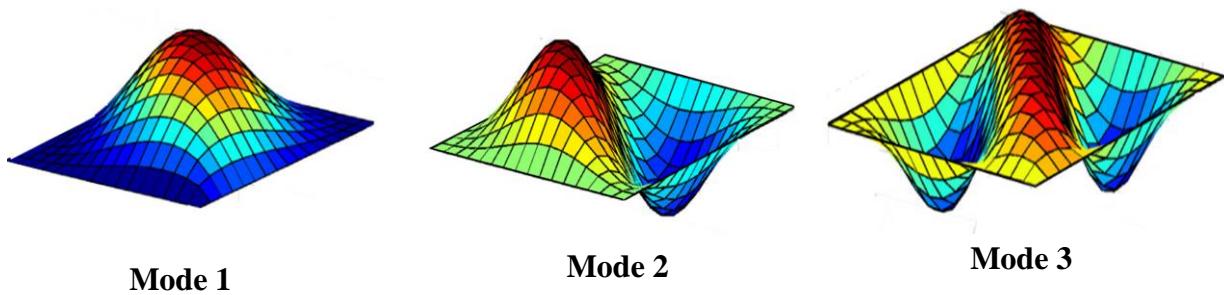
Les plaques biaises sont largement utilisées dans diverses disciplines de l'ingénierie, telles que l'aéronautique, le génie civil, le génie maritime et le génie mécanique. Morley [224] a mené l'étude

originale sur ce type de plaque. Plusieurs approches numériques ont été proposées pour l'étude efficace des plaques biaises en raison de la complexité des méthodes analytiques.

Le tableau 4.19 présente les fréquences naturelles non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des trois premiers modes pour des plaques biaises en Aluminium/Zirconia-1 ( $\text{ZrO}_2\text{-1}$ ) avec des conditions de support SSSS et CCCC, un angle d'inclinaison fixe de  $\theta = 45^\circ$ , et un rapport  $l/h = 10$ . L'analyse a utilisé un maillage de  $16 \times 16$  (Figure 4.22(b)) avec une valeur de gradient  $p$  allant de 0 à 3. Les résultats montrent une bonne concordance avec ceux obtenus à partir de la méthode Q4cs de Katili et al. [225] et de la méthode kp-Ritz sans éléments de Zhao et al [116]. Cela confirme l'efficacité et la fiabilité de la formulation actuelle pour les plaques FG avec des géométries complexes. Les trois premiers modes de déformation d'une plaque biaise FG simplement supportée sont représentés dans la figure 4.24 pour  $l/h = 10$  et  $p = 2$ . Selon le tableau 4.19, les fréquences naturelles non dimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) diminuent à mesure que l'indice de gradient  $p$  augmente. Ce comportement peut être attribué à un indice de gradient plus élevé, ce qui entraîne une fraction volumique plus faible de matériau céramique dans la plaque. Par conséquent, cette réduction du contenu céramique diminue la rigidité globale en flexion, entraînant des fréquences naturelles plus faibles. De plus, les conditions aux limites ont un impact significatif sur les fréquences naturelles ; la fréquence non dimensionnelle est minimisée pour des conditions de bords simplement supportés et maximisée pour des conditions totalement encastrées. Ce comportement découle du fait que des contraintes plus importantes aux bords renforcent la rigidité en flexion de la plaque, entraînant des réponses vibratoires plus élevées.

**Tableau 4. 19.** Les trois premières fréquences naturelles normalisées ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque biaise Al/ $\text{ZrO}_2\text{-1}$ , à la fois simplement supportée (SSSS) et encastrée (CCCC), avec un angle d'inclinaison  $\theta = 45^\circ$

<b><math>p</math></b>	<b>Mode</b>	<b>Bord simplement supporté (SSSS)</b>			<b>Bord encastré (CCCC)</b>		
		<b>Present (16×16)</b>	<b>Katili et al.[225]</b>	<b>Zhao et al.[116]</b>	<b>Present (16×16)</b>	<b>Katili et al.[225]</b>	<b>Zhao et al.[116]</b>
<b>0</b>	1	9.556	9.461	9.6709	16.713	16.785	16.635
	2	17.801	17.638	17.964	25.316	25.438	25.275
	3	25.794	25.364	24.985	33.406	33.616	33.377
<b>0.5</b>	1	8.662	8.593	8.7115	15.102	15.183	15.047
	2	16.083	15.965	16.202	22.957	23.053	22.902
	3	22.987	22.98	23.014	30.385	30.497	30.274
<b>1</b>	1	8.275	8.248	8.3025	14.403	14.468	14.338
	2	15.345	15.254	15.437	21.843	21.961	21.816
	3	21.928	21.949	21.907	28.940	29.048	28.833
<b>3</b>	1	7.861	7.839	7.884	13.584	13.646	13.523
	2	14.534	14.447	14.622	20.577	20.645	20.509
	3	20.399	20.742	20.056	27.154	27.254	27.054



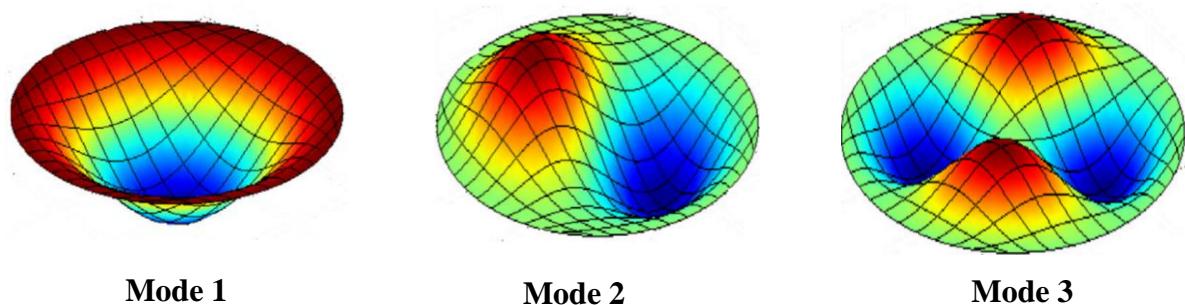
**Figure 4. 24.** Les trois premiers modes de déformation de la plaque biaisée Al/ZrO<sub>2</sub>-1 simplement supportée avec ( $p = 2$ ,  $a/h = 10$ ,  $\theta = 45^\circ$ ).

### c) Vibration libre d'une plaque circulaire encastrée

Pour examiner plus en détail la robustesse et la précision de l'élément HSBQP20 dans l'analyse des plaques FG avec une géométrie complexe, une plaque circulaire encastrée avec différents rapports épaisseur/ rayon ( $h/R$ ) est considérée. La plaque est constituée d'Aluminium (Al) en bas et d'Alumine ( $Al_2O_3$ ) en haut. Les résultats obtenus des trois premières fréquences non dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) avec différents maillages comportant respectivement 60, 272 et 588 éléments quadrilatéraux comme indiquée sur la Figure 4.22 sont illustrés dans le tableau 4.20, et les trois formes modales sont tracées dans la Figure 4.25 Afin de démontrer la supériorité de l'élément HSBQP20, les valeurs numériques des fréquences sont comparées à celles obtenues par la méthode des éléments finis (FEM) avec Abaqus[226], les solutions semi-analytiques avec la théorie de la plaque de cisaillement (FSDT)[227], et la solution numérique de Belounar et al. [128] basée sur la FSDT. À travers cette étude, il est évident que les résultats de l'élément HSBQP20 sont comparables aux autres méthodes mentionnées. De plus, l'élément HSBQP20 permet une convergence plus rapide des résultats, même pour les maillages grossiers. En résumé, les résultats démontrent la fiabilité de l'élément HSBQP20 pour l'analyse des vibrations libres des plaques circulaires FG. D'après le tableau, on peut observer qu'avec un indice de gradient particulier ( $p=1$ ), les fréquences naturelles non dimensionnelles augmentent avec l'augmentation des rapports épaisseur/ rayon ( $h/R$ ). Cela s'explique par le fait qu'augmenter le rapport  $h/R$  conduit généralement à une plus grande contribution de la rigidité en flexion. À mesure que l'épaisseur devient plus importante par rapport au rayon, la rigidité globale de la plaque augmente, ce qui entraîne des fréquences naturelles plus élevées. De plus, à mesure que l'épaisseur augmente par rapport au rayon, les effets inertIELS lors de la vibration deviennent également plus significatifs. Ce changement dans l'équilibre entre inertie et rigidité contribue à des fréquences naturelles plus élevées, car la plaque présente une plus grande résistance au mouvement.

**Tableau 4. 20.** Les trois premières fréquences non dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque circulaire encastrée ( $p=1$ ).

<b>h/R</b>	<b>Method</b>	<b>Mode 01</b>	<b>Mode 02</b>	<b>Mode 03</b>
<b>0.01</b>	<b>Present (mesh c)</b>	0.0240	0.0512	0.0846
	<b>Present (mesh d)</b>	0.0239	0.0497	0.0815
	<b>Present (mesh e)</b>	0.0238	0.0495	0.0811
	Belounar et al.[128]	0.0236	0.0493	0.0808
	Tran et al.[226]	0.0234	0.0486	0.0798
	Hosseini-Hashemi et al. [227]	0.0236	0.0491	0.0805
	<b>Present (mesh c)</b>	2.3104	4.7156	4.5223
	<b>Present (mesh d)</b>	2.3090	4.7066	4.5170
	<b>Present (mesh e)</b>	2.3067	4.7035	7.5142
	Belounar et al.[128]	2.3063	4.7030	7.5138
<b>0.1</b>	Tran et al.[226]	2.2888	4.6661	7.4808
	Hosseini-Hashemi et al. [227]	2.3053	4.6934	7.5146
	<b>Present (mesh c)</b>	8.6657	16.8160	25.6975
	<b>Present (mesh d)</b>	8.6595	16.8090	25.6780
	<b>Present (mesh e)</b>	8.6572	16.7990	25.6635
	Belounar et al.[128]	8.6568	16.7986	25.6630
<b>0.2</b>	Tran et al.[226]	8.6403	16.7890	25.7661
	Hosseini-Hashemi et al. [227]	8.6535	16.7666	25.6486

**Mode 1****Mode 2****Mode 3****Figure 4. 25.** Les trois premières formes modales d'une plaque circulaire CCCC en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ( $h/R = 0.1$ ).

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre présente une étude complète sur l'analyse statique, vibratoire libre et de flambement des plaques fonctionnellement graduées (FG) en utilisant des formulations d'éléments finis basées sur l'approche déformation et la théorie de déformation de cisaillement. Deux modèles d'éléments finis distincts ont été développés et testés pour évaluer leur efficacité et leur précision dans la simulation du comportement de ces plaques sous différentes conditions de charge et de bord. Le premier modèle est basé sur le champ de déformation et la théorie de déformation de premier ordre (FSDT), désigné SBRMP24, tandis que la deuxième repose sur la théorie de déformation de haut ordre (HSDT), désigné HSBQP20. Les caractéristiques des plaques FG sont supposées varier selon la direction de l'épaisseur, suivant une fonction de loi de puissance. Le concept de surface neutre est utilisé pour éliminer l'effet de couplage membrane-flexion. Les fonctions de déplacement des éléments, exprimées sous forme d'expressions d'ordre supérieur, reposent sur des fonctions de déformation supposées, satisfaisant à la fois les modes de corps rigides et les équations de compatibilité. Le principe de Hamilton et l'énergie potentielle sont appliqués pour obtenir les matrices de rigidité, de masse et géométriques. Des études de convergence et de validation ont été menées pour garantir l'exactitude des différentes formulations. En outre, les effets de plusieurs facteurs tels que les rapports d'épaisseur ( $l/h$ ), l'indice de gradient ( $p$ ), les rapports d'aspect ( $l/L$ ), ainsi que le type de chargement et les conditions aux limites variables, sur le comportement en flexion, la vibration libre et le flambement des plaques FG, sont discutés et analysés. Certains des impacts peuvent être résumés comme suit :

- Les éléments actuels sont efficaces et précis pour prédire les comportements en flexion, vibration libre et stabilité des plaques FGM.
- La déflection non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) et la contrainte normale en plan ( $\bar{\sigma}_x$ ) augmentent avec l'augmentation de l'indice de gradient ( $p$ ), tandis que la contrainte en plan ( $\bar{\sigma}_y$ ) et la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) diminuent.
- Les contraintes pour une plaque entièrement céramique sont identiques à celles d'une plaque entièrement métallique. Cela est dû au fait que, dans les deux cas, la plaque est complètement homogène.
- La déflection non dimensionnelle diminue lorsque le rapport ( $l/h$ ) augmente, tandis qu'elle augmente avec l'augmentation de l'indice de gradient.

- Indépendamment des conditions aux limites et de l'indice de gradient ( $p$ ), l'augmentation du rapport d'épaisseur entraîne une réduction de la défexion et une augmentation de la fréquence. Cela est dû aux effets de la déformation de cisaillement.
- Indépendamment des conditions aux limites et du rapport longueur/épaisseur, à mesure que l'indice de gradient ( $p$ ) augmente, la rigidité des plaques FGM diminue, ce qui conduit à une augmentation de la défexion non dimensionnelle et à une réduction des fréquences naturelles non dimensionnelles. Cela est dû au fait qu'un indice de gradient ( $p$ ) plus élevé correspond à une plus grande proportion de métal par rapport à la céramique, ce qui rend ces plaques FGM plus flexibles.
- Indépendamment de l'indice de gradient ( $p$ ) et du rapport d'épaisseur, l'augmentation des restrictions aux bords des plaques entraîne une augmentation des fréquences naturelles non dimensionnelles et une diminution de la défexion non dimensionnelle. Ce comportement s'explique par le fait que des contraintes plus élevées aux bords augmentent la rigidité en flexion de la plaque, ce qui conduit à des réponses vibratoires plus élevées et à une flexion plus faible.
- Les charges critiques de flambement non dimensionnelles et les fréquences naturelles augmentent à mesure que le rapport longueur/épaisseur et les contraintes aux bords augmentent, et diminuent à mesure que l'indice de gradient ( $p$ ) et le rapport d'aspect ( $l/L$ ) augmentent.
- La charge critique de flambement non dimensionnelle diminue à mesure que l'indice de gradient ( $p$ ) et le ratio de module ( $E_m/E_c$ ) augmentent.
- La charge critique de flambement non dimensionnelle d'une plaque sous charge de compression uniaxiale est plus grande que celle sous compression biaxiale.

Les résultats de l'élément HSBQP20 démontrent l'efficacité de l'élément dans la modélisation de plaques FG à géométrie complexe, y compris des plaques carrées, biaises et circulaires, avec des conditions aux bords clouées et simplement supportées, ainsi que pour diverses valeurs d'indice de gradient.

# **Chapitre 5 Développement et validation d'élément finis à champ de déformation pour l'analyse statique, et vibration libre des plaques composites**

## **5.1 Introduction**

Le développement de modèles numériques précis et efficaces pour l'analyse des plaques composites est essentiel dans divers secteurs de l'ingénierie, notamment l'aérospatial, l'automobile et les structures civiles. Les plaques composites, caractérisées par leur anisotropie et leur hétérogénéité, posent des défis spécifiques en matière de modélisation, surtout lorsqu'il s'agit d'analyser leurs réponses statiques et les vibrations libres.

Dans ce contexte, ce travail propose pour la première fois la formulation d'un élément fini quadrilatère à quatre nœuds, basés sur l'approche en déformation et la théorie TrSDPT, pour l'analyse du comportement en flexion et de la réponse dynamique de plaques stratifiées de formes carrée, biaisée et elliptique. Contrairement aux approches HSDT traditionnelles, qui nécessitent généralement plus de cinq variables, la méthode adoptée ici réduit le modèle à seulement cinq inconnues en supposant une distribution sinusoïdale des déformations de cisaillement, tout en imposant une contrainte de cisaillement transverse nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

L'élément développé, nommé HSBQLP20 (High-Order Strain-Based Quadrilateral Laminated Plate with 20 degrees of freedom), comporte cinq inconnues principales ( $u, v, w, \beta_x, \beta_y$ ) à chacun de ses quatre nœuds d'angle. Les fonctions de forme du déplacement de l'élément sont construites à l'aide de fonctions polynomiales comportant 20 coefficients, représentant avec précision à la fois les modes de corps rigide et de déformation, tout en assurant la compatibilité avec les équations de déformation de l'élément.

Une étude paramétrique a été menée afin d'évaluer l'influence de divers facteurs tels que le nombre de couches, le rapport d'aspect, l'orientation des fibres et les conditions aux limites. Les résultats, exprimés en termes de déplacements transverses et de fréquences propres, ont été analysés pour différents cas et comparés à des données issues de la littérature, confirmant ainsi la précision et la pertinence de l'approche proposée.

## 5.2 Formulation et validation numérique d'un nouvel élément fini quadrilatère (HSBQLP20) de plaque composite à champ de déformation basé sur la théorie TrSDPT

### 5.2.1 Champ de déplacement et déformation

Basé sur la théorie de déformation de cisaillement au premier ordre élevé[58], [228], les champs de déplacements ( $U, V, W$ ) dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour une plaque modérément épaisse peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \beta_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \beta_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= f(z) w_0(x, y) + (f(z) - 1) R(x, y) \end{aligned} \quad (5.01)$$

Avec  $\beta_x(x, y) = \frac{\partial R(x, y)}{\partial x}$ ;  $\beta_y(x, y) = \frac{\partial R(x, y)}{\partial y}$  et  $f(z) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{2\pi z}{h} \right) \right)$

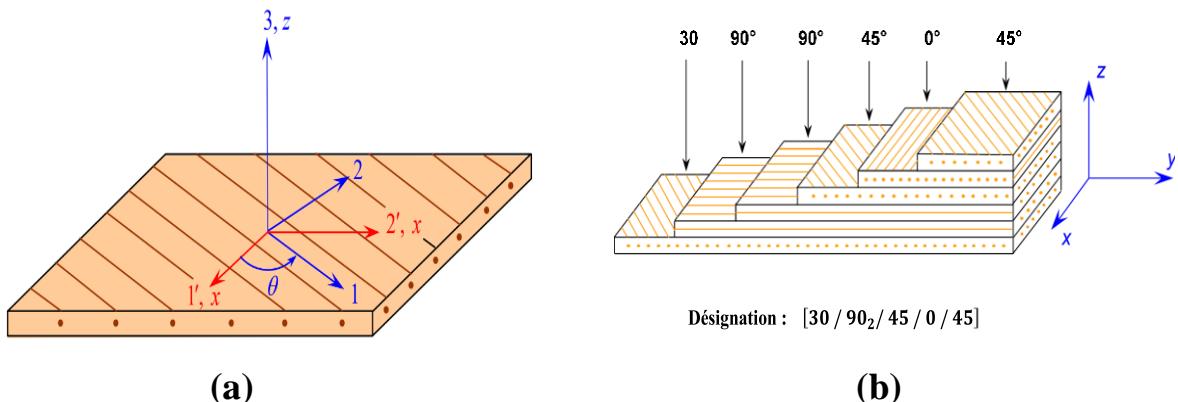
Les composantes du vecteur de déformation peuvent s'écrire comme :

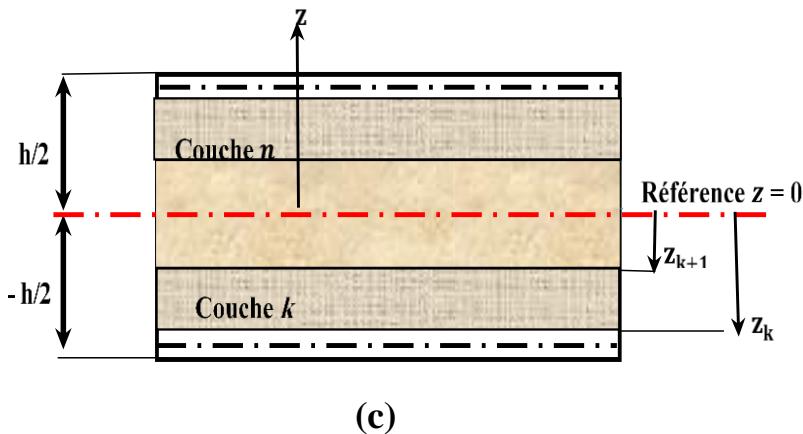
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^l \\ \varepsilon_m \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.02)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = f(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (5.03)$$

### 5.2.2 Équations constitutives

Dans les plaques composites stratifiées, le matériau est constitué de couches orthotropes définies dans un repère local (1,2,3), et est supposé isotrope dans le plan 2-3 [voir Fig. 1(a)]. Les indices 1 et 2 désignent respectivement la direction des fibres et la direction dans le plan, perpendiculaire aux fibres, tandis que l'indice 3 correspond à la direction normale au plan de la plaque. Pour chaque couche, l'hypothèse de contrainte plane ( $\sigma_3 = 0$ ) est adoptée. Les équations constitutives, exprimées dans le repère local orthotrope (1-2-3), s'écrivent alors comme suit :





**Figure 5. 1.** (a) Plaque orthotrope. (b) Désignation de la plaque stratifiée. (c) Disposition et numérotation des couches pour une plaque stratifiée typique.

La relation contrainte-déformation pour un matériau orthotrope plan dans le système de coordonnées locales (1-2-3) est définie comme suit [229] :

$$\{\sigma_1\} = [C_b]\{\varepsilon_1\}; \{\tau_1\} = [C_s]\{\gamma_1\} \quad (5.04)$$

Où

$$\{\sigma_1\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}; \{\tau_1\} = \begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (5.05)$$

Et les constantes élastiques  $C_{ij}$  relatives aux axes principaux de coordonnées du matériau de la couche sont définies par :

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; C_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; C_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; C_{66} = G_{12}; C_{55} = G_{23}; C_{44} = G_{13} \quad (5.06)$$

Dans l'équation (5.06), pour chaque couche  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  sont les modules de Young axiaux dans le plan le long des axes principaux du matériau, tandis que  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  sont respectivement les coefficients de Poisson majeur et mineur dans le plan. Les modules de cisaillement sont définis par  $G_{12}$  pour la direction dans le plan,  $G_{13}$  et  $G_{23}$  pour les directions transversales. Sachant que la plaque composite stratifiée est composée de plusieurs plis orthotropes, chacun ayant les axes principaux du matériau orientés arbitrairement par rapport au repère global du stratifié ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), les relations constitutives de chaque pli doivent être transformées en conséquence. Ainsi, les relations contrainte-déformation pour la  $k$ -ième couche hors axe (voir Fig. 1c), exprimées dans le repère du stratifié, sont obtenues par [229]:

$$\{\sigma\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} ; \{\tau\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{C}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.07)$$

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{C}_b]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} ; \{\tau\}^{(k)} = [\bar{C}_s]^{(k)} \{\gamma\}^{(k)} \quad (5.08)$$

Où  $[\bar{C}_b]^{(k)}$  et  $[\bar{C}_s]^{(k)}$  représentent les constantes matérielles transformées pour la flexion et le cisaillement de la k-ième lame, respectivement.

$$[\bar{C}_b]^{(k)} = [T_b]^T [C_b] [T_b]; [\bar{C}_s]^{(k)} = [T_s]^T [C_s] [T_s] \quad (5.09)$$

Alors que les matrices de transformation  $[T_b]$  et  $[T_s]$  sont données comme :

$$[T_b] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & \cos \theta_k \sin \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -\cos \theta_k \sin \theta_k \\ -2 \cos \theta_k \sin \theta_k & 2 \cos \theta_k \sin \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix}; [T_s] = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

### 5.2.3 Les résultantes de force et de moment

Les forces et moments par unité de longueur, représentés en fonction des composantes de contrainte à travers l'épaisseur, sont donnés par[230] :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz; \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}(z) dz; \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z) \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ou, en termes de déformations, en utilisant les équations (2), (3) et (8), on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{C}_b]^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz + \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{C}_b]^{(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}(z) dz \right\} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{C}_b]^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}(z) dz + \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{C}_b]^{(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}(z^2) dz \right\} \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{C}_s]^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} f(z) dz \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{C}_s]^{(k)} f^2(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} dz \right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

On peut réécrire l'équation (5.12) sous la forme :

$$\begin{aligned}\{N\} &= [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{\kappa\} \\ \{M\} &= [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{\kappa\} \\ \{Q\} &= [S]\{\gamma^0\}\end{aligned}\quad (5.13)$$

Sous forme matricielle, la relation entre les résultantes de contraintes et les déformations est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

Où

$$N = \{N_x \quad N_y \quad N_{xy}\}^T, M = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T, Q = \{Q_x \quad Q_y\}^T \quad (5.15a)$$

$$\varepsilon^0 = \{\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy}^0\}^T, \kappa = \{\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}\}^T, \gamma^0 = \{\gamma_{xz}^0 \quad \gamma_{yz}^0\}^T \quad (5.15b)$$

Pour une plaque composite composée de "n" lames orthotropes, les matrices de rigidité constitutives [A], [B], [D] et [S], représentant respectivement les effets de membrane, de couplage, de flexion et de cisaillement, sont formulées comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Les expressions des composants de rigidité sont les suivantes :

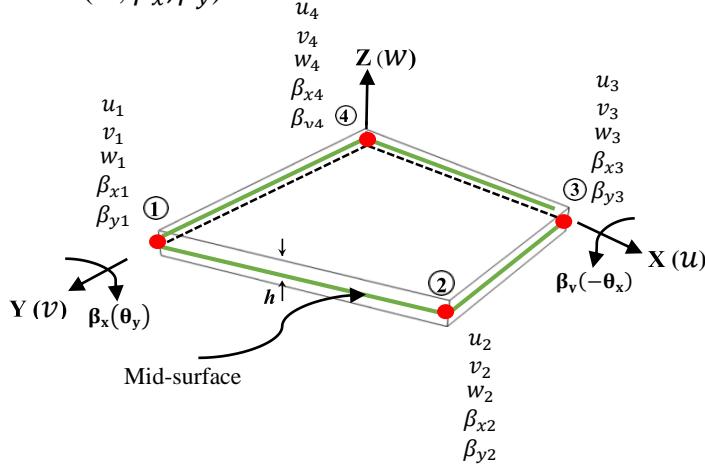
$$(A_{ij} \quad B_{ij} \quad D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{C}_b]_{ij}^{(k)} (1, z, z^2) dz; (i, j) = (1, 2, 6) \quad (5.17a)$$

$$S_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{C}_s]_{ij}^{(k)} [f(z)]^2 dz; (i, j) = (4, 5) \quad (5.17b)$$

### 5.3 Formulation de l'élément HSBQLP20 développé

L'élément proposé, nommé HSBQLP20 (High-Order Strain-Based Quadrilateral Laminated Plate with 20 degrees of freedom), est un élément de plaque quadrilatère à quatre nœuds possédant cinq degrés de liberté ( $u, v, w, \beta_x, \beta_y$ ) par nœud comme illustré dans la Figure 5.02 et ses fonctions de déplacement sont obtenues par la superposition de deux éléments basés sur la déformation. Le premier est un élément de membrane avec deux degrés de liberté ( $u, v$ ) par nœud proposé par Sabir et Sfendji [211], tandis que le second est un élément de plaque de type Reissner–Mindlin qui contient trois degrés de liberté ( $w, \beta_x, \beta_y$ ) par nœud, développé précédemment par Belounar et al. [193]

Ainsi, l'élément HSBQP20 contient 20 degrés de liberté et ses fonctions de déplacement doivent être exprimées en termes de vingt constantes ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}$ ), où les huit premières constantes ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ ) sont utilisées pour la représentation des déplacements dans le plan (u, v), tandis que les douze autres constantes ( $\alpha_9, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{20}$ ) sont utilisées pour exprimer le déplacement latéral et les rotations ( $w, \beta_x, \beta_y$ ).



**Figure 5. 2.** Quadrilateral laminated composite plate element (HSBQLP20).

### 5.3.1.1 Champ de déplacements de l'élément (HSBQLP20)

La procédure de définition du champ de déplacements de l'élément HSBQLP20 suit la même méthode que celle de l'élément HSBQP20, comme indiqué dans la section 4.4.5. Par conséquent pour déterminer le champ de déplacement de l'élément actuel (HSBQLP20), nous avons combiné les champs de déplacement obtenus à partir de l'élément de plaque (SBQMP) proposé par Belounar et al. [193], et de l'élément membrane (SBRIE) suggéré par Sabir et Sfendji [211] donc :

$$\{U_e\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_{SBRIE}] & [0]_{(2x12)} \\ [0]_{(3x12)} & [P_{SBQMP}] \end{bmatrix} \begin{cases} \{\alpha_m\} \\ \{\alpha_f\} \end{cases} = [P_{HSBQLP20}] \{\alpha\} \quad (5.18)$$

$$[P_{HSBQLP20}] = \begin{bmatrix} [P_{SBRIE}] & [0]_{(2x12)} \\ [0]_{(3x12)} & [P_{SBQMP}] \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Où  $\{\alpha\} = \{\{\alpha_m\}, \{\alpha_f\}\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}\}^T$  et  $[P_{SBRIE}]_{2 \times 8}$  est la matrice polynomiale représentant les fonctions de déplacement pour l'élément membranaire, définie dans l'équation (3.42) et  $[P_{SBQMP}]_{3 \times 12}$  est la matrice polynomiale représentant les fonctions de déplacement pour l'élément de flexion donnés dans l'équation 3.65.

L'équation (5.18) peut s'écrire comme suit :

$$\{U_e\} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} = [P_{HSBQLP20}] [C_{HSBQLP20}]^{-1} \{q_e\} = [N_{HSBQLP20}] \{q_e\} \quad (5.20)$$

Où  $[C_{HSBQLP20}]$  est la matrice de transformation reliant les vingt degrés de liberté  $\{\{q_e\}^T = \{u_1, v_1, w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, \dots, u_4, v_4, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4}\}\}$  aux vingt constantes  $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}\}^T$ , telles que présentées dans l'annexe, et  $[N_{HSBQLP20}]$  est la matrice des fonctions de forme de l'élément HSBQLP20, qui peut s'exprimer comme suit :

$$[N_{HSBQLP20}] = [P_{HSBQLP20}] [C_{HSBQLP20}]^{-1} \quad (5.21)$$

### 5.3.1.2 Dérivation des matrices élémentaires et du vecteur de charge élémentaire

La matrice de rigidité élémentaire ainsi que le vecteur de charge élémentaire de l'élément HSBQLP20 sont obtenus en appliquant les mêmes formulations que celles de l'élément HSBQP20, comme décrit dans la section 4.4.5. Par conséquent, ils s'écrivent comme suit :

$$[K_{HSBQLP20}^e] = \int_{\Omega} \left( \frac{[B_m]^T [A] [B_m]_{membrane}}{} + \frac{[B_m]^T [B] [B_f]_{membrane-flexion}}{} + \frac{[B_f]^T [D] [B_f]_{flexion}}{} \right. \\ \left. + \frac{[B_f]^T [B] [B_m]_{flexion-membrane}}{} + \frac{[B_c]^T [S] [B_c]_{cisaillement}}{} \right) d\Omega$$

$$\{F_e\} = \int_{\Omega} [N_{HSBQLP20}]^T q(x, y) d\Omega \quad (5.23)$$

Avec  $[B_m]$ ,  $[B_f]$ , et  $[B_c]$  sont les matrices de déformation-déplacement, qui sont décrites comme suit:

$$[B_m] = [[Q_{SBRIE}] \ [0]_{(2x12)}] [C_{HSBQLP20}]^{-1}; [B_f] = [[0]_{(3x12)} \ [Q_{SBQMP}]_f] [C_{HSBQLP20}]^{-1} \quad (5.24)$$

$$[B_c] = [[0]_{(2x12)} \ [Q_{SBQMP}]_c] [C_{HSBQLP20}]^{-1};$$

Où les matrices  $[Q_{SBRIE}]$ ,  $[Q_{SBQMP}]_f$  et  $[Q_{SBQMP}]_c$  représentent respectivement les matrices associées aux déformations membranaires, à la flexion et au cisaillement transversal, conformément aux expressions figurant en équation (3.66).

Pour la vibration libre, la matrice de masse élémentaire de l'élément s'exprime comme suit :

$$[M_{HSBQLP20}^e] = \int_{\Omega} [N_{HSBQLP20}]^T [m_0] [N_{HSBQLP20}] d\Omega \quad (5.25)$$

Où  $[m_0]$  est la matrice contenant l'épaisseur de la plaque ( $h$ ) et la masse volumique du matériau ( $\rho$ )[168] :

$$[m_0] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

#### 5.4 Validation de la HSBQLP20 - Résultats et discussions

Cette section étudie les réponses en vibrations statiques et libres de plaques stratifiées carrées, biaisée et elliptiques en analysant la plaque entière à l'aide du modèle aux éléments finis proposé. Les résultats obtenus sont comparés à diverses solutions analytiques et numériques existantes. L'influence de divers paramètres de la plaque, notamment le nombre de couches, le rapport d'aspect, l'orientation des fibres et les conditions aux limites, a été étudiée. Les caractéristiques des matériaux utilisés dans cette étude sont présentées dans le tableau 5.1. Deux types de conditions aux limites sont considérés comme suit :

- Simplement appuyée (SSSS) : En ( $x=0, a: v = w = \beta_y = 0$ ) et (En  $y=0, b: u = w = \beta_x = 0$ )
- Encastré (CCCC) : En  $x=0, a ; y=0, b : u = v = w = \beta_x = \beta_y = 0$

**Tableau 5. 1 .**Propriétés des matériaux

Propretés	Matériels (M)						
	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>5</sub>	M <sub>6</sub>	M <sub>7</sub>
E <sub>11</sub> (Gpa)	25	3	10	20	30	40	2.45
E <sub>22</sub> (Gpa)	01	01	01	01	01	01	01
G <sub>12</sub> (Gpa)	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.48
G <sub>13</sub> (Gpa)	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.48
G <sub>23</sub> (Gpa)	0.2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.2
v <sub>12</sub> = v <sub>23</sub> = v <sub>13</sub>	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.23
ρ	01	01	01	01	01	01	01

##### 5.4.1 Analyse statique des plaques stratifiées

L'efficacité et les performances de l'élément quadrilatère proposé pour l'analyse du comportement statique de plaques symétriques à plis croisés à appui simple ont été validées par plusieurs exemples numériques. Le modèle de matériau M1 est utilisé dans cette étude, et les résultats ont été comparés aux solutions numériques et analytiques existantes. Les plaques sont soumises à des distributions de charges uniformes et sinusoïdales, comme illustré à la figure 4.17. Le déplacement et les contraintes normalisés sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{(100E_2h^3)}{q_0a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right); \bar{\sigma}_x = \frac{(h^2)}{q_0b^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right); \bar{\sigma}_y = \frac{(h^2)}{q_0b^2} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4}\right) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{(h^2)}{q_0b^2} \tau_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right); \bar{\tau}_{xz} = \frac{(h)}{q_0b} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right); \bar{\tau}_{yz} = \frac{(h)}{q_0b} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

#### 5.4.1.1 Plaque stratifiée symétrique à quatre couches [0°/90°/90°/0°], à plis croisés, soumise à des charges sinusoïdales

Une plaque stratifiée symétrique à quatre couches, de configuration [0°/90°/90°/0°] et à plis croisés, est considérée avec des conditions aux limites de type simplement appuyées. Elle est soumise à une charge sinusoïdale, comme représenté à la figure 4.17. Pour cette étude, le modèle de matériau M1 est adopté. Les résultats numériques concernant la défexion et les contraintes adimensionnelles, obtenus pour différents rapports d'aspect (a/h) à l'aide d'un maillage  $20 \times 20$ , sont présentés dans le tableau 5.2.

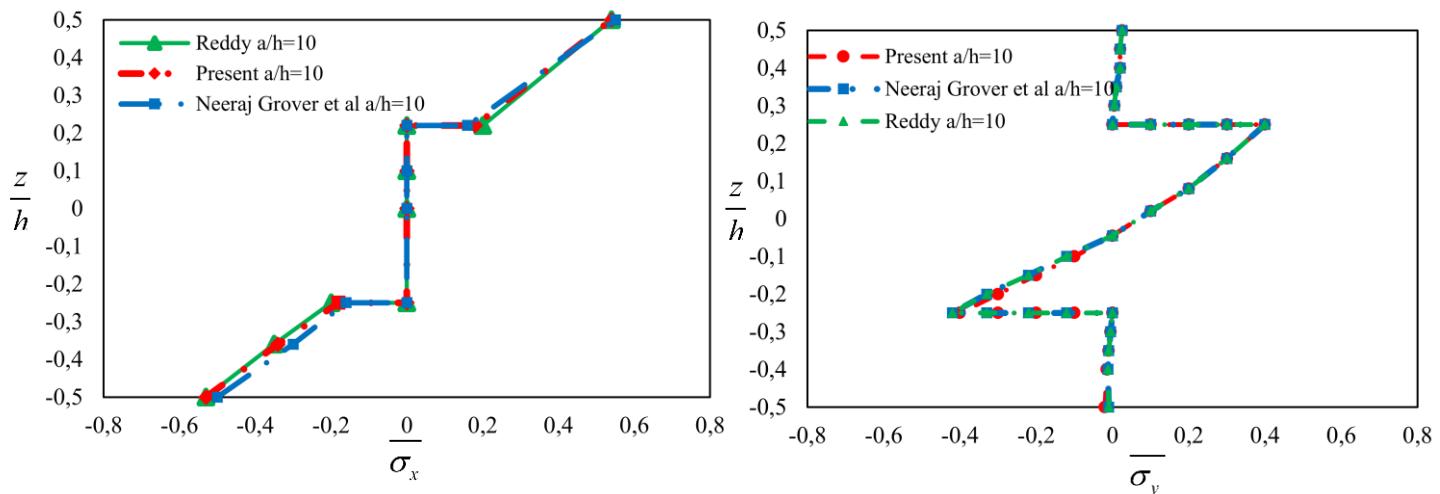
Ces résultats sont confrontés à ceux d'autres approches telles que la solution exacte basée sur la théorie des plaques classiques (CPT) de Pagano et Hatfield [231], la méthode de bande finie (FSM) reposant sur la théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) d'Akhras et al. [232], la théorie de déformation par cisaillement hyperbolique inverse (IHSDT) proposée par Neeraj Grover et al. [233], ainsi que la solution exacte en forme fermée (CFS) basée sur la théorie de déformation par cisaillement raffinée (TSDT) de Reddy [50].

Il est constaté que la méthode actuelle offre les meilleures performances pour tous les rapports a/h étudiés. En particulier, comparé à la solution CFS-TSDT de Reddy [50], l'élément HSBQLP20 utilisé dans cette étude fournit des résultats plus précis. Pour les plaques d'épaisseur moyenne ( $a/h = 10$ ), les résultats obtenus en termes de déplacement, de contraintes dans le plan et de contraintes de cisaillement transversal normalisées sont plus précis que ceux issus des méthodes HSDT [231–233]. En revanche, pour les plaques minces ( $a/h = 100$ ), les différentes approches donnent des résultats très similaires.

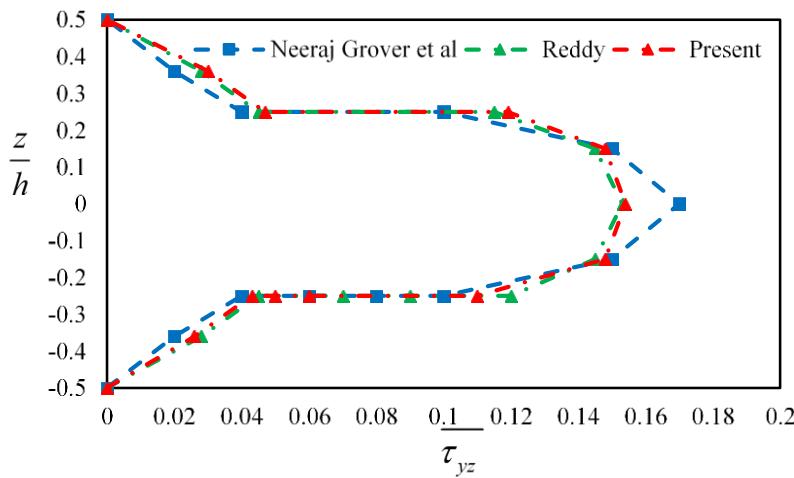
Les figures 5.3 et 5.4 illustrent les distributions de contraintes à travers l'épaisseur de la plaque pour  $a/h = 10$ , pour différentes théories. On y observe que la distribution actuelle des contraintes normales dans le plan ( $\bar{\sigma}_x$  et  $\bar{\sigma}_y$ ) est en parfait accord avec les résultats de la méthode HSDT de Reddy [50], tandis que les contraintes de cisaillement transversales ( $\bar{\tau}_{yz}$ ) sont également prédites avec précision. Il est également noté que ces contraintes de cisaillement sont continues à travers les interfaces des couches laminaires.

**Tableau 5. 2.** Déplacement et contraintes normalisés d'une plaque carrée stratifiée à quatre couches [0°/90°/90°/0°] soumise à une charge sinusoïdale (SDL).

a/h	Théorie	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
<b>10</b>	<b>Present</b>	0.7153	0.5472	0.3896	0.0274	0.2646	0.1540
	Exact[231]	0.743	0.559	0.401	0.028	0.301	0.196
	Reddy[50]	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640	0.1531
	Akhras et al. [232]	0.7149	0.5589	0.3974	0.0273	0.2697	0.1568
	Neeraj Grover et al. [233]	0.7284	0.5578	0.3947	0.0275	0.3287	0.1761
<b>20</b>	<b>Present</b>	0.5066	0.5399	0.3049	0.0234	0.2831	0.124
	Exact[231]	0.517	0.543	0.308	0.023	0.328	0.156
	Reddy[50]	0.5060	0.5393	0.3043	0.0228	0.2825	0.1234
	Akhras et al. [232]	0.5061	0.5523	0.3110	0.0233	0.2883	0.1272
	Neeraj Grover et al. [233]	0.5102	0.5425	0.3064	0.023	0.3542	0.1412
<b>100</b>	<b>Present</b>	0.4345	0.5391	0.2711	0.0214	0.2910	0.1125
	Exact[231]	0.439	0.539	0.276	0.022	0.337	0.141
	Reddy[50]	0.4343	0.5387	0.2708	0.0213	0.2897	0.1117
	Akhras et al. [232]	0.4343	0.5507	0.2769	0.0217	0.2948	0.1180
	Neeraj Grover et al. [233]	0.4345	0.5388	0.2710	0.0214	0.3643	0.1271



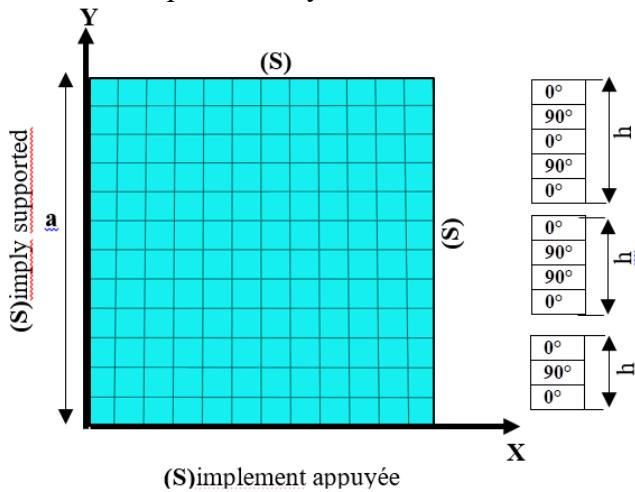
**Figure 5. 3.** Variation des contraintes normales et des contraintes dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée [0°/90°/90°/0°] (modèle M1) avec un rapport a/h = 10.



**Figure 5.4.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée [0°/90°/90°/0°] (modèle M1) avec un rapport  $a/h = 10$ .

#### 5.4.1.2 Plaques composites carrées symétriques soumises à une charge uniformément répartie (UDL)

Nous considérons trois plaques carrées symétriques à plis croisés, simplement appuyées, de longueur  $a$  et d'épaisseur  $h$ , constituées du matériau M1, comme indiqué dans le Tableau 5.1. Ces plaques sont soumises à une charge uniformément répartie (UDL) de valeur  $q_0$ . Un maillage de  $12 \times 12$  est utilisé pour l'analyse, comme illustré à la Figure 5.5.

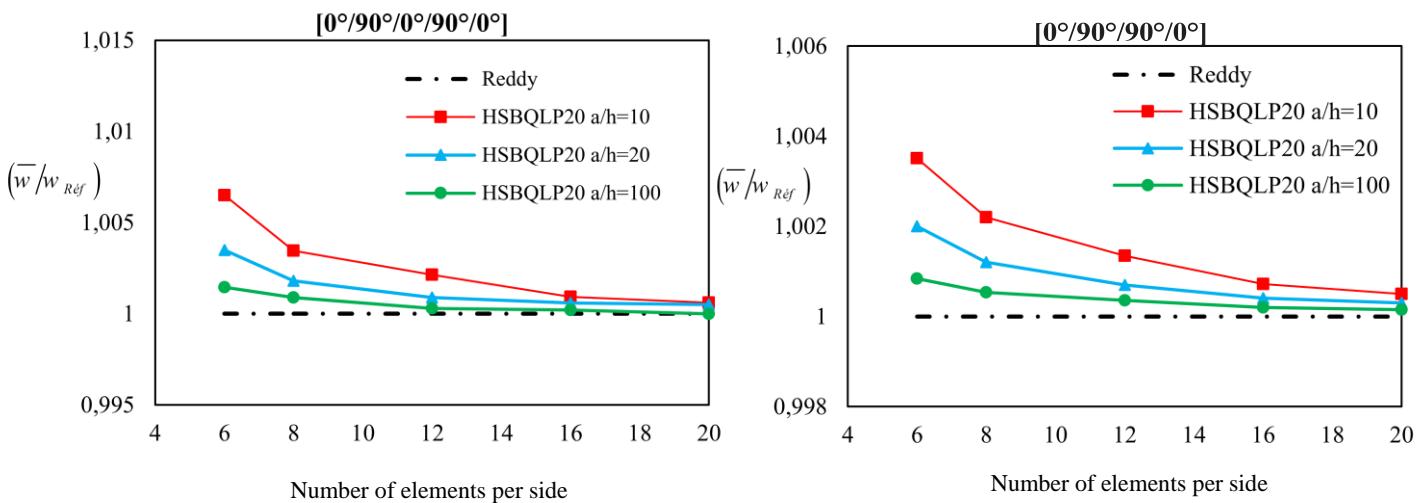


**Figure 5.5.** Géométrie d'une plaque composite stratifiée symétrique.

La convergence de la Déplacement centrale normalisée ( $\bar{w}$ ) en fonction de différents rapports  $a/h$  est présentée dans le Tableau 5.3 et la Figure 5.6. Les résultats numériques obtenus à l'aide de l'élément HSBQLP20 montrent un excellent accord avec la solution analytique basée sur la théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur de Reddy (FSDT) [42], et affichent une précision supérieure à celle des éléments FEM-Q4 [234] et DSG3 [234]. De plus, les résultats obtenus avec l'élément HSBQLP20 sont comparables à ceux des éléments ES-DSG [234], FEM-Q9 [234], ainsi qu'à ceux de l'élément SBQLP de Bellounar [168].

**Tableau 5. 3.** Déplacement centrale normalisée ( $\bar{w}$ ) de plaques carrées à plis croisés simplement appuyées soumises à des charges uniformément réparties

Theories	Nombre de couches	a / h		
		10	20	100
<b>Present</b>		0.9780	0.7463	0.6722
FEM-Q4 [234]		0.9874	0.7195	0.6307
FEM-Q9 [234]		1.0219	0.7573	0.6697
DSG3 [234]	[0°/90°/0°]	1.0159	0.7521	0.6642
ES-DSG3[234]		1.0287	0.7624	0.6743
SBQLP [168]		1.0218	0.7557	0.6677
Reddy [42]		1.0219	0.7572	0.6697
<b>Present</b>		1.0272	0.77025	0.6836
FEM-Q4 [234]		0.9883	0.7302	0.6430
FEM-Q9 [234]		1.0250	0.7694	0.6829
DSG3 [234]	[0°/90°/90°/0°]	1.0136	0.7604	0.6744
ES-DSG3[234]		1.0276	0.7716	0.6854
SBQLP [168]		1.0240	0.7671	0.6806
Reddy [42]		1.0250	0.7694	0.6833
<b>Present</b>		1.0270	0.7605	0.6882
FEM-Q4 [234]		0.9350	0.7182	0.6465
FEM-Q9 [234]		0.9727	0.7581	0.6868
DSG3 [234]	[0°/90°/0°/90°/0°]	0.9554	0.7404	0.6688
ES-DSG3[234]		0.9687	0.7515	0.6799
SBQLP [168]		0.9712	0.7555	0.6844
Reddy [42]		0.9727	0.7581	0.6874



**Figure 5. 6.** Convergence du déplacement centrale normalisé ( $\bar{w}$ ) des plaques composites carrées à plis croisés soumises à une charge uniformément répartie (UDL).

### 5.4.2 Analyse des vibrations libres des plaques stratifiées

Cette sous-section présente plusieurs exemples numériques afin d'évaluer la performance de l'élément HSBQLP20 dans l'analyse des vibrations libres de plaques composites, en prenant en compte différentes géométries, rapports d'aspect, rapports de modules, angles d'orientation des fibres, ainsi que les conditions aux limites. Dans tous les exemples, les propriétés du matériau sont supposées identiques pour toutes les couches, tandis que les orientations des fibres peuvent varier d'une couche à l'autre. Les paramètres matériels d'une couche, utilisés dans tous les exemples de plaques, sont indiqués dans le Tableau 5.1. Par souci de simplicité, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées :

$$\bar{\omega} = (\alpha a^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D_0} \quad \text{Avec } D_0 = (E_2 h^3 / 12(1 - \nu_{12} \nu_{21})) \quad (5.28a)$$

$$\bar{\beta} = (\beta a^2 / h) \sqrt{\rho / E_2}; \bar{\Omega} = \Omega \sqrt{(h^2 \rho / E_2)}; \bar{\omega} = (\alpha a^2 / \pi^2 h) \sqrt{\rho / E_2} \quad (5.28b)$$

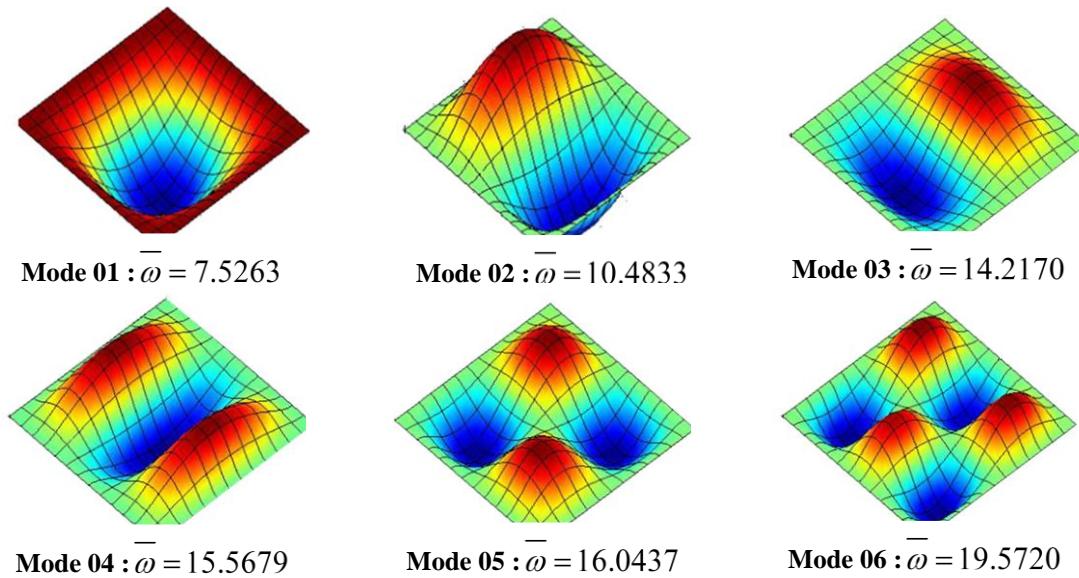
#### 5.4.2.1 Plaques stratifiées carrées

##### a) Étude de convergence

Les études de convergence sont réalisées sur une plaque carrée à trois couches croisées [0°/90°/0°] avec des conditions aux limites de type encastré et différentes valeurs de rapports d'épaisseur à côté ( $a/h=5,10,20, ,100$ ), en utilisant le matériau M6, dont les caractéristiques sont données dans le Tableau 1. Les résultats des cinq fréquences non dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) pour l'élément HSBQLP20, en utilisant quatre maillages ( $8 \times 8$ ,  $12 \times 12$ ,  $16 \times 16$  et  $20 \times 20$ ), sont présentés dans le Tableau 5.4. Les six premiers modes pour le cas où le rapport longueur/épaisseur  $a/h=10$  sont illustrés à la Figure 5.7. Les résultats numériques ont été comparés avec ceux de Liew[235], basés sur la FSDT, ainsi qu'avec les résultats de la méthode FEM lissée (MISQ20, ES-DSG3) développée par Nguyen-Van et al. [236] et Phan-Dao et al. [234], la méthode Aα-DSG3 proposée par Thai-Hoang et al.[237], et l'approche basée sur la déformation (SBQLP) de Belounar et al. [168] , qui basée également sur la FSDT.

**Tableau 5.4.** Fréquences non dimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) de plaques carrées à plis croisés encastrées, pour différents rapports longueur/épaisseur.

<b>a/h</b>	<b>Theories</b>	<b>Modes</b>				
		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Present (8×8)</b>	4.5476	6.8225	8.0183	9.4949	10.2620
	<b>Present (12 × 12)</b>	4.5239	6.7234	7.92430	9.3777	9.9373
	<b>Present (16×16)</b>	4.5159	6.6902	7.8918	9.3376	9.8282
	<b>Present (20 × 20)</b>	4.5123	6.6751	7.8768	9.3193	9.7785
	SBQLP (20 × 20) [168]	4.4519	6.6665	7.7235	9.2113	9.8215
	p-Ritz (Liew) [235]	4.447	6.642	7.700	9.185	9.738
	MISQ20 [236]	4.4671	6.7365	7.7706	8.7678	9.2988
	ES-DSG3 [234]	4.4722	6.7465	7.7576	9.3663	10.0061
	Aα-DSG3 [237]	4.3537	6.5104	7.5011	8.9717	9.5281
	<b>Present (8×8)</b>	7.5521	10.7018	14.4007	16.1785	16.5229
<b>10</b>	<b>Present (12 × 12)</b>	7.5343	10.5495	14.2788	15.8639	16.0798
	<b>Present (16×16)</b>	7.5287	10.5035	14.2365	15.6587	16.0542
	<b>Present (20 × 20)</b>	7.5263	10.4833	14.2170	15.5679	16.0437
	SBQLP (20 × 20) [168]	7.4168	10.4271	13.9509	15.5788	15.8220
	p-Ritz (Liew) [235]	7.411	10.393	13.913	15.429	15.806
	MISQ20 [236]	7.4542	10.5909	14.0808	16.0497	16.0868
	ES-DSG3 [234]	7.4779	10.6486	14.0799	16.0029	16.3540
	Aα-DSG3 [237]	7.2805	10.2523	13.5979	15.2147	15.5238
	<b>Present (8×8)</b>	11.1046	14.2101	21.8525	24.0092	24.9891
	<b>Present (12 × 12)</b>	11.0805	14.1334	20.9476	23.7557	25.1462
<b>20</b>	<b>Present (16×16)</b>	11.0728	14.1191	20.6972	23.6664	25.2138
	<b>Present (20 × 20)</b>	11.0694	14.1144	20.5917	23.6249	25.2466
	SBQLP (20 × 20) [168]	10.9664	14.0480	20.5667	23.2866	24.9647
	p-Ritz (Liew) [235]	10.953	14.028	20.388	23.196	24.978
	MISQ20 [236]	11.0454	14.2988	21.4609	23.6389	25.4605
	ES-DSG3 [234]	11.0964	14.5191	21.6658	23.6490	26.0711
	Aα-DSG3 [237]	10.8277	13.9417	20.3269	22.7984	24.7037
	<b>Present (8×8)</b>	14.6200	17.4030	25.9367	39.3689	39.6588
	<b>Present (12 × 12)</b>	14.5122	17.3362	24.7094	37.3000	38.6220
	<b>Present (16×16)</b>	14.4811	17.3542	24.4748	36.2394	38.2727
<b>100</b>	<b>Present (20 × 20)</b>	14.4675	17.3678	24.3908	35.8243	38.1146
	SBQLP (20 × 20) [168]	14.7043	17.6157	24.6527	36.1657	39.5037
	p-Ritz (Liew) [235]	14.666	17.614	24.511	35.532	39.157
	MISQ20 [236]	14.6199	17.7013	25.5625	38.2411	39.3269
	ES-DSG3 [234]	14.7278	18.3390	26.7313	39.2865	40.8216
	Aα-DSG3 [237]	14.4187	17.4883	24.5723	35.8873	37.7460



**Figure 5. 7.** Les six premières formes modales d'une plaque circulaire stratifiée encastrée  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  ( $a/b = 1$  et  $a/h = 10$ )

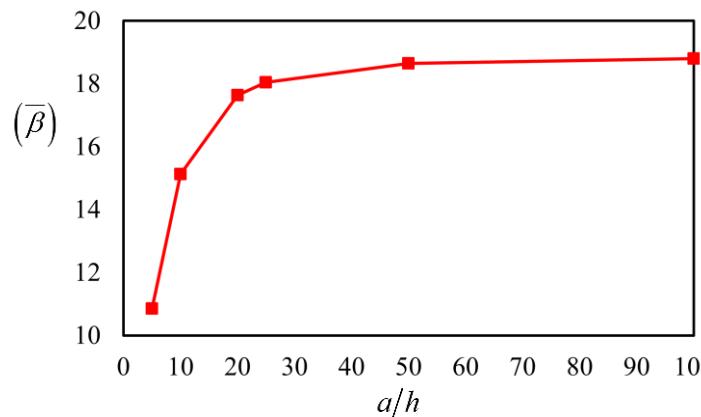
**b) Effet du rapport longueur/épaisseur sur la fréquence propre adimensionnelle**

Dans cet exemple, les fréquences fondamentales ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque carrée à plis croisés simplement appuyée ( $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ) sont présentées dans le Tableau 5.5. L'analyse est effectuée à l'aide d'un maillage de  $20 \times 20$ , avec un rapport côté/épaisseur variant de 5 à 100. L'objectif de cet exemple est d'étudier l'effet du rapport côté/épaisseur sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées carrées. Les résultats numériques obtenus avec l'élément proposé sont comparés à plusieurs théories existantes, notamment la théorie de déformation transverse d'ordre supérieur de Reddy et Phan [238], la solution p-Ritz de Liew [235], ainsi qu'à une théorie globale de plaque d'ordre supérieur présentée par Matsunaga[239]. Il est observé que les résultats actuels sont en bon accord avec les références mentionnées, et présentent une meilleure concordance avec la solution p-Ritz de Liew [235].

**Tableau 5. 5.** Effet du rapport longueur /épaisseur sur la fréquence propre adimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque carrée à plis croisés simplement appuyée  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .

Theories	a /h					
	5	10	20	25	50	100
Present (20X20)	<b>10.8500</b>	<b>15.1242</b>	<b>17.6315</b>	<b>18.0410</b>	<b>18.6419</b>	<b>18.8033</b>
p-Ritz [235]	10.8550	15.1434	17.6583	18.0718	18.6734	18.8359
Reddy and Phan [238]	10.9891	15.2689	17.6669	18.0490	18.4624	18.7561
Matsunaga [239]	10.6876	15.0721	17.6369	18.0557	18.6702	18.8352

Pour une meilleure illustration, la Figure 5.8 montre l'effet du rapport côté/épaisseur  $a/h$  sur la fréquence propre adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée. On peut observer sur cette figure qu'une augmentation du rapport  $a/h$  entraîne une élévation de la fréquence propre adimensionnelle.



**Figure 5.8** Effet du rapport côté/épaisseur  $a/h$  sur la fréquence propre adimensionnelle ( $\bar{\beta}$ ) d'une plaque carrée à plis croisés simplement appuyée [0°/90°/90°/0°].

### c) Effet du nombre de couches et du degré d'orthotropie sur les fréquences propres

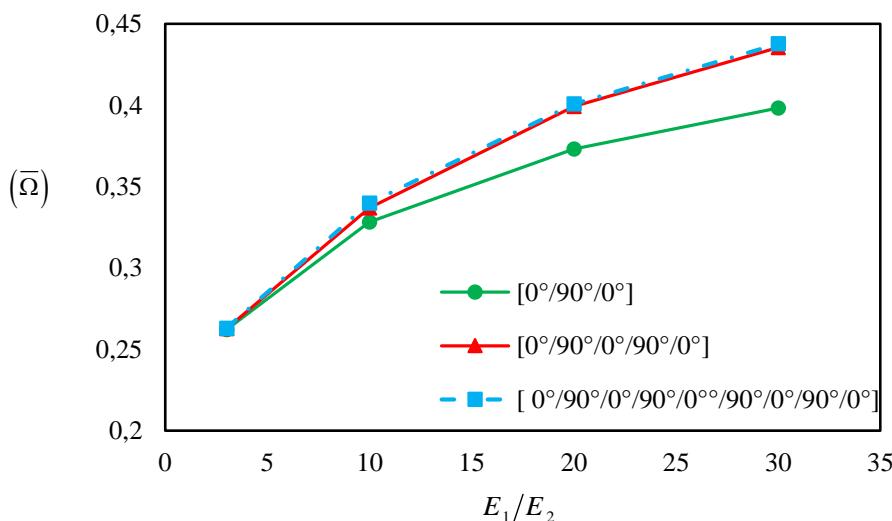
Dans le troisième exemple, une plaque carrée stratifiée symétrique à trois couches [0°/90°/0°], cinq couches [0°/90°/0°/90°/0°] et neuf couches [0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°] à plis croisés est analysée en utilisant les matériaux M2, M3, M4 et M5, dont les propriétés sont définies dans le Tableau 1. Les fréquences fondamentales adimensionnelles ( $\bar{\Omega}$ ) pour différents rapports d'orthotropie sont présentées dans le Tableau 5.6 pour un rapport côté/épaisseur  $a/h = 5$ , en utilisant un maillage de  $12 \times 12$ . Ces résultats sont comparés aux solutions numériques obtenues en utilisant l'approche basée sur la déformation (SBQLP) de Belounar et al. [168], basée sur la FSDT, l'approche couche par couche (FEM-Q4-LW, FEM-Q9-LW) [240], et les éléments d'ordre supérieur (FEM-Q4-HSDT, FEM-Q9-HSDT)[241]. Pour les trois types de plaques stratifiées, un bon accord est observé avec les références mentionnées.

La Figure 5.9 montre la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles pour trois, cinq et neuf couches orthotropes (avec un rapport côté/épaisseur de  $a/h=5$ ) en fonction du degré d'orthotropie, représenté par les rapports ( $E_1/E_2$ ). Il peut être observé que les fréquences fondamentales adimensionnelles augmentent à mesure que le rapport des modules ( $E_1/E_2$ ) augmente. Cela est dû au fait qu'une augmentation du rapport des modules renforce la rigidité globale de la plaque stratifiée, rendant la structure moins flexible et plus résistante à la déformation, ce qui conduit à des fréquences fondamentales plus élevées. Il est également

observé que la plaque à neuf couches, avec le plus grand nombre de couches et des orientations de fibres alternées, présente la rigidité la plus élevée. Par conséquent, elle atteint les fréquences fondamentales les plus élevées par rapport aux plaques à cinq et trois couches.

**Tableau 5. 6.** Fréquence propre adimensionnelle ( $\bar{\Omega}$ ) de la plaque carrée composite SSSS avec différentes couches orthotropes et rapports de modules.

Theories	Nombre de couches	$E_1/E_2$			
		3	10	20	30
<b>Present (12 x 12)</b>		<b>0.2621</b>	<b>0.3282</b>	<b>0.3731</b>	<b>0.3982</b>
SBQLP [168]		0.2619	0.3262	0.3694	0.3935
FEM-Q9-LW [240]	[0°/90°/0°]	0.2621	0.3262	0.3691	0.3927
FEM-Q 4 -LW [240]		0.2683	0.3297	0.3685	0.3886
FEM-Q9-HSDT [241]		0.2624	0.3264	0.3698	0.3941
FEM-Q4-HSDT [241]		0.2628	0.3270	0.3703	0.3947
<b>Present (12 x 12)</b>		<b>0.2628</b>	<b>0.3368</b>	<b>0.3991</b>	<b>0.4354</b>
SBQLP [28]		0.2627	0.3357	0.3917	0.4256
FEM-Q9-LW [240]	[0°/90°/0°/90°/0°]	0.2618	0.3330	0.3858	0.4166
FEM-Q 4 -LW [240]		0.2683	0.3396	0.3918	0.4219
FEM-Q9-HSDT [241]		0.2637	0.3373	0.3929	0.4258
FEM-Q4-HSDT [241]		0.2641	0.3378	0.3935	0.4264
<b>Present (12 x 12)</b>		<b>0.2630</b>	<b>0.3399</b>	<b>0.4007</b>	<b>0.4377</b>
SBQLP [28]		0.2631	0.3398	0.4002	0.4367
FEM-Q9-HSDT [241]	[ 0°/90°/0°/90°/0°°/90°/0°/90°/0° ]	0.2637	0.3373	0.3929	0.4258
FEM-Q4-HSDT [241]		0.2641	0.3378	0.3935	0.4264



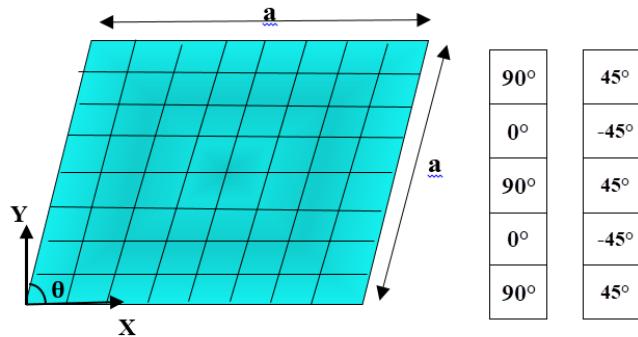
**Figure 5. 9.** L'effet du nombre de couches et du degré d'orthotropie ( $E_1/E_2$ ) sur les fréquences fondamentales adimensionnelles ( $\bar{\Omega}$ ) ( $a/h=5$ ).

#### 5.4.2.2 Plaques stratifiées en biais

Dans cette étude, nous examinons les fréquences normalisées ( $\bar{\omega}$ ) des plaques carrées stratifiées en biais à cinq couches avec les configurations [90°/0°/90°/0°/90°] et [45°/-45°/45°/-45°/45°], soumises à des conditions aux limites simplement appuyées et encastrées. Différents angles de

biais sont considérés dans l'analyse, avec un rapport longueur/épaisseur ( $a/h$ ) fixé à 10. Le matériau utilisé pour la plaque est le M6, comme indiqué dans le Tableau 5.1.

Pour la comparaison, la plaque est modélisée en utilisant un maillage de 13x13 nœuds, comme montré à la Figure 5.10. Les fréquences normalisées ( $\bar{\omega}$ ) pour l'élément proposé HSBQLP20, avec des angles de biais variant de  $0^\circ$  à  $60^\circ$ , sont présentées dans les Tableaux 5.7 et 5.8 pour les plaques stratifiées en biais à plis croisés [ $90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ ] et à plis en angle [ $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ$ ], respectivement. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la méthode MISQ20 [236], de la méthode MLSDQ de Liew et al.[245], de l'approche basée sur les noyaux radiaux de Ferreira et al.[246], et de la méthode B-spline de Wang[247]. Il est observé que les solutions obtenues par la méthode actuelle sont en bon accord avec les résultats existants pour les plaques stratifiées à plis croisés et à plis en angle. La Figure 5.11 présente les quatre premières formes modales de la plaque stratifiée en biais encastrée à cinq couches [ $90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ ].



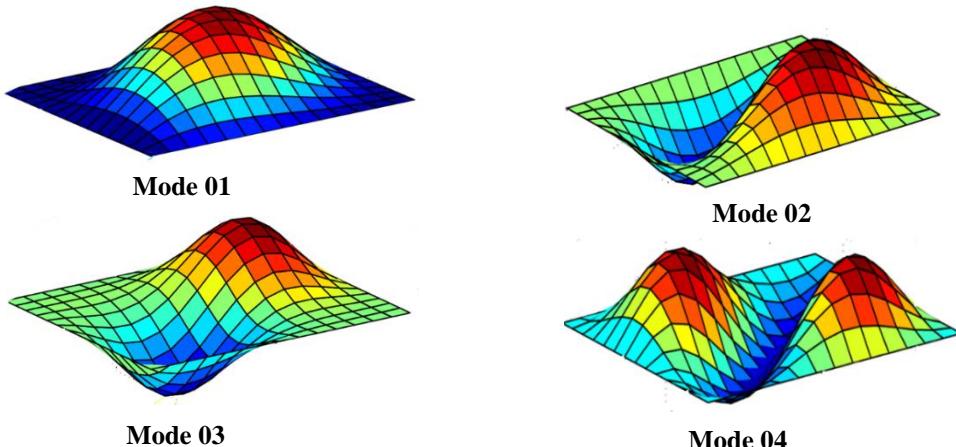
**Figure 5. 10.** Géométrie de la plaque stratifiée en biais.

**Tableau 5. 7.** Fréquences propres adimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque stratifiée à plis croisés [ $90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ ] simplement appuyée et encastrée, pour différents angles.

Conditions aux limites	Theories	$\theta$				
		$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
SSSS	<b>Present (12x12)</b>	<b>1.5543</b>	<b>1.6690</b>	<b>2.0568</b>	<b>2.8647</b>	<b>4.5537</b>
	MISQ20[236]	1.5733	1.6896	2.0820	2.8855	4.5412
	MLSDQ[245]	1.5709	1.6886	2.1026	2.8798	4.4998
	RBF[246]	1.5791	1.6917	2.0799	2.8228	4.3761
	FSDT[247]	1.5595	1.6697	2.0449	2.8126	4.3936
	HSDT[247]	1.5655	1.6787	2.0645	2.8598	4.5191
CCCC	<b>Present (12x12)</b>	<b>2.3694</b>	<b>2.4611</b>	<b>2.77674</b>	<b>3.5005</b>	<b>5.0794</b>
	MISQ20[236]	2.3869	2.4803	2.7998	3.4893	4.9989
	MLSDQ[245]	2.379	2.4725	2.7927	3.4723	4,943
	RBF[246]	2.4021	2.4932	2.8005	3.4923	4.9541
	FSDT[247]	2.3403	2.4327	2.7474	3.4245	4.8966
	<u>HSDT[247]</u>	<u>2.3522</u>	<u>2.4497</u>	<u>2.7830</u>	<u>3.5038</u>	<u>5.0849</u>

**Tableau 5. 8.** Fréquences propres adimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque stratifiée à plis croisés [45°-45°/45°/-45°/45°] simplement appuyée et encastrée, pour différents angles.

Conditions aux limites	Theories	$\theta$				
		0°	15°	30°	45°	60°
SSSS	<b>Present (12x12)</b>	<b>1.8785</b>	<b>1.93699</b>	<b>2.1194</b>	<b>2.6096</b>	<b>4.0856</b>
	MISQ20[236]	1.8413	1.8889	2.0955	2.5672	3.971
	MLSDQ[245]	1.8248	1.8838	2.0074	2.5028	4.0227
	RBF[246]	1.8357	1.8586	2.0382	2.4862	3.8619
	FSDT[247]	1.8611	1.9097	2.1179	2.6068	4.0599
	HSDT[247]	1.8028	1.8279	2.0199	2.5105	3.9104
CCCC	<b>Present (12x12)</b>	<b>2.2844</b>	<b>2.3627</b>	<b>2.6932</b>	<b>3.4453</b>	<b>4.9026</b>
	MISQ20[236]	2.2908	2.3570	2.6708	3.3683	4.8982
	MLSDQ[245]	2.2787	2.3504	2.6636	3.3594	4.8566
	RBF[246]	2.3324	2.3962	2.6981	3.3747	4.8548
	FSDT[247]	2.2462	2.3109	2.6185	3.3009	4.7841
	HSDT[247]	2.2413	2.2763	2.5504	3.1921	4.6325

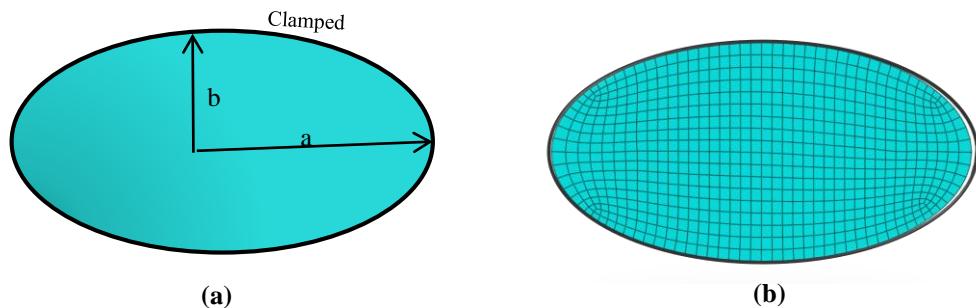


**Figure 5. 11.** Les quatre premières formes modales d'une plaque biaisée à cinq couches encastrées [90°/0°/90°/0°/90°] avec un angle d'inclinaison  $\theta = 30^\circ$  et un rapport  $a/h = 10$ .

#### 5.4.2.3 Plaque elliptique

Ensuite, nous étudions la fréquence non-dimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque elliptique stratifiée à 3 couches [0°/90°/0°] encastrée sur tout son pourtour (CCCC), comme illustré à la Figure 5.12a. La plaque elliptique présente deux rayons principaux :  $a = 5$  et  $b = 2,5$ , respectivement. Le matériau M7 est utilisé pour cette analyse. Un maillage composé de 680 éléments est utilisé pour calculer les fréquences adimensionnelles, comme montré à la Figure 5.12b. En l'absence de résultat analytique, les résultats sont comparés à ceux obtenus par l'analyse isogéométrique basée sur la LW-FSDT[248], ainsi qu'à l'analyse isogéométrique généralisée utilisant les théories TSDT, SSDT et ESDT [249] pour les composites stratifiés. Le tableau 5.9 présente une comparaison des six premières fréquences sans dimension entre la solution actuelle et d'autres méthodes, pour un rapport longueur/épaisseur de  $a/h = 10$ . Il ressort du tableau 5.9 que l'élément HSBQLP20 proposé présente une excellente concordance avec les autres

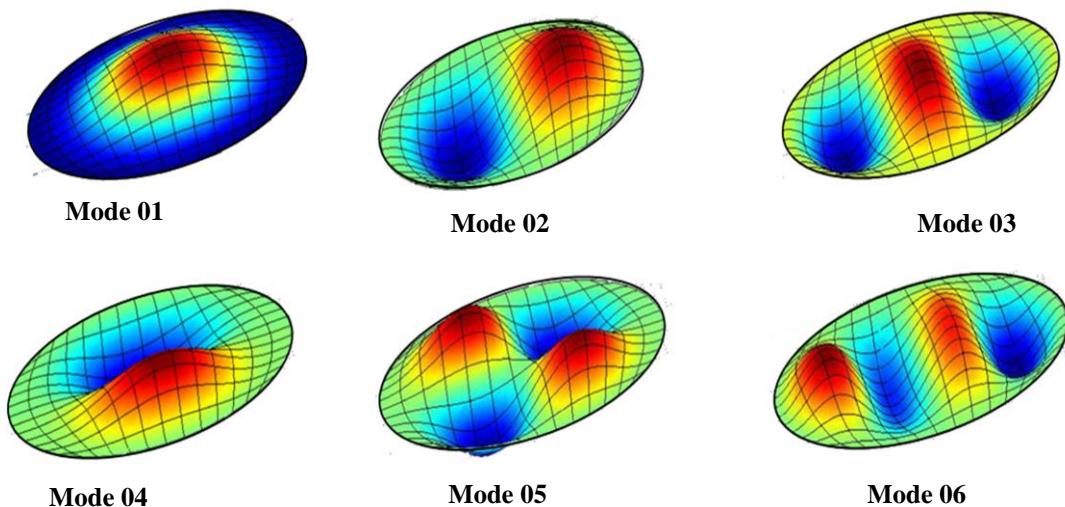
solutions basées sur LW-FSDT [248], IGA-TSDT [249], IGA-SSDT [249] et IGA-ESDT [249]. De plus, les six premières formes modales de la plaque elliptique stratifiée à trois couches  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , entièrement encastrée, sont illustrées à la Figure 5.13.



**Figure 5. 12.** Géométrie et maillage d'éléments d'une plaque elliptique encastrée.

**Tableau 5. 9.** Fréquences adimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) d'une plaque elliptique encastrée à trois couches  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .

Théories	Modes					
	1	2	3	4	5	6
Present	<b>17.1890</b>	<b>25.7460</b>	<b>37.0940</b>	<b>39.2080</b>	<b>49.1840</b>	<b>50.4010</b>
IGA-LW-FSDT [248]	17.184	25.714	36.982	39.196	49.148	50.259
IGA-TSDT [249]	17.188	25.7979	37.0987	39.0942	49.1092	50.3576
IGA-SSDT [249]	17.2128	25.8318	37.1416	39.2032	49.2466	50.4108
IGA-ESDT [249]	17.2446	25.876	37.1991	39.3431	49.4234	50.484



**Figure 5. 13.** Six formes modales d'une plaque elliptique stratifiée à quatre couches  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  encastrée avec  $a/h = 10$ .

## 5.5 Conclusion

Les comportements statiques et de vibration libre des plaques composites stratifiée carrées, biaises et elliptiques ont été étudiés à l'aide du modèle d'élément fini HSBQLP20, qui repose sur l'approche de déformation et la nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique (TSDT). Ce modèle suppose une distribution sinusoïdale des contraintes de cisaillement latéral à travers l'épaisseur de la plaque, avec des valeurs nulles aux surfaces libres. Les champs de déplacement pour l'élément HSBQLP20 sont développés dans le cadre de l'approche de déformation, reposant sur des fonctions de déformation supposées qui satisfont les équations de compatibilité.

Pour valider l'efficacité de cet élément, il a été appliqué à une variété de plaques composites laminées symétriques et antisymétriques avec différentes formes, conditions aux limites, rapports côté/épaisseur, séquences de superposition, angles d'orientation des fibres et types de charges. Les résultats ont été comparés avec des solutions analytiques et numériques publiées, montrant une excellente précision et efficacité dans la prédiction des comportements de flexion et de vibration libre des plaques composites laminées.

En perspective, le modèle d'élément fini HSBQLP20 offre un outil numérique robuste pour l'analyse et la simulation des plaques composites laminées. Il sera étendu à l'avenir pour l'étude de l'analyse du flambage des plaques stratifiée et des structures de coques stratifiée.

## Conclusion Générale

L'objectif principal de ce travail est de contribuer à la modélisation du comportement statique, free vibration et flambement des plaques en matériaux à gradient fonctionnel et composites stratifiées, en développant des éléments finis basées sur l'approche déformation capables de décrire précisément ces comportements.

**Dans le premier chapitre** de la thèse, un aperçu général sur les matériaux composite et FGMs a été présenté. Les théories des plaques les plus couramment utilisées pour l'analyse et la modélisation des plaques FG ont été brièvement décrites dans le chapitre deux. Une revue des différentes recherches existantes dans la littérature sur l'analyse statique, vibratoire et de flambement des plaques FG a également été présentée.

**Le troisième chapitre** a présenté l'application des éléments finis, notamment le modèle à champ de déformation, pour la modélisation des structures, tout en intégrant une synthèse bibliographique des éléments finis à champ de déformation.

**Dans le quatrième chapitre**, une étude complète sur l'analyse statique, vibratoire libre et de flambement des plaques fonctionnellement graduées (FG) en utilisant des formulations d'éléments finis basées sur l'approche déformation et la théorie de déformation de cisaillement. Deux éléments finis ont été développés et testés pour évaluer leur efficacité et leur précision dans la simulation du comportement de ces plaques sous différentes conditions de charge et de bord. Le premier élément fini rectangulaire à quatre nœuds avec six degrés de liberté par nœud (SBRMP24), basé sur la FSDT et initialement développé pour l'analyse statique, vibratoire libre et de flambement des plaques fonctionnellement graduées (FG), ensuite le deuxième élément basé sur une modèle trigonométrique à cinq inconnues a été proposé pour l'analyse des plaques FG. Ce modèle prend en compte une variation sinusoïdale des déformations de cisaillement transverses à travers l'épaisseur et satisfait les conditions limites de contrainte de cisaillement nulle aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, sans nécessité d'un facteur de correction de cisaillement. Basé sur ce modèle, un nouvel élément fini HSBQP20 a été formulé de la même manière que le premier élément SBRMP24. L'élément fini développé a été utilisé pour analyser les comportements statiques et dynamiques des plaques FG. Les caractéristiques des plaques FG sont supposées varier selon la direction de l'épaisseur, suivant une fonction de loi de puissance. Le concept de surface neutre est utilisé pour éliminer l'effet de couplage membrane-flexion. Les fonctions de déplacement des éléments développé (SBRMP24 et HSBQP20), exprimées sous forme d'expressions d'ordre supérieur, reposent sur

le champ de déformation satisfaisant à la fois les modes de corps rigides et les équations de compatibilité. Le principe de Hamilton et l'énergie potentielle sont appliqués pour obtenir les matrices de rigidité, de masse et géométriques. Des études de convergence et de validation ont été menées pour garantir l'exactitude des différentes formulations. En outre, les effets de plusieurs facteurs tels que les rapports d'épaisseur ( $l/h$ ), l'indice de gradient ( $p$ ), les rapports d'aspect ( $l/L$ ), ainsi que le type de chargement et les conditions aux limites variables, sur le comportement en flexion, la vibration libre et le flambement des plaques FG, sont discutés.

**Dans le cinquième chapitre,** la formulation d'un élément quadratique à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté ( $u, v, w, \beta_x$ , et  $\beta_y$ ) par nœud basée sur le modèle trigonométrique a été donnée pour l'étude statique et en vibration libre des plaques composites stratifiées. L'élément formulé, nommé HSBQLP20 (High Strain Based Quadratique Laminated Plate), est une combinaison d'un élément membranaire basé sur l'approche en déformation SBRIE à deux ddl ( $u, v$ ) par nœud et de l'élément flexionnel développé SBQMP à trois ddl ( $w, \beta_x$ , et  $\beta_y$ ) par nœud. Du plus les effets de certains paramètres comme le rapport côté/épaisseur  $a/h$ , nombre de couches et orientations des fibres sur les comportements des composites stratifiées, ont également été étudiés.

Les conclusions importantes qui ressortent de cette étude peuvent être résumées comme suit :

- Les éléments actuels sont efficaces et précis pour prédire les comportements en flexion, vibration libre et stabilité des plaques FGM et composites stratifiés.
- La déflection non dimensionnelle ( $\bar{w}$ ) et la contrainte normale en plan ( $\bar{\sigma}_x$ ) augmentent avec l'augmentation de l'indice de gradient ( $p$ ), tandis que la contrainte en plan ( $\bar{\sigma}_y$ ) et la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) diminuent.
- Les contraintes pour une plaque entièrement céramique sont identiques à celles d'une plaque entièrement métallique. Cela est dû au fait que, dans les deux cas, la plaque est complètement homogène.
- La déflection non dimensionnelle diminue lorsque le rapport ( $l/h$ ) augmente, tandis qu'elle augmente avec l'augmentation de l'indice de gradient.
- Indépendamment des conditions aux limites et de l'indice de gradient ( $p$ ), l'augmentation du rapport d'épaisseur entraîne une réduction de la déflection et une augmentation de la fréquence. Cela est dû aux effets de la déformation de cisaillement.
- Indépendamment des conditions aux limites et du rapport longueur/épaisseur, à mesure que l'indice de gradient ( $p$ ) augmente, la rigidité des plaques FGM diminue, ce qui

conduit à une augmentation de la déflexion non dimensionnelle et à une réduction des fréquences naturelles non dimensionnelles.

- Indépendamment de l'indice de gradient ( $p$ ) et du rapport d'épaisseur, l'augmentation des restrictions aux bords des plaques entraîne une augmentation des fréquences naturelles non dimensionnelles et une diminution de la déflexion non dimensionnelle.
- Les charges critiques de flambement non dimensionnelles et les fréquences naturelles augmentent à mesure que le rapport longueur/épaisseur et les contraintes aux bords augmentent, et diminuent à mesure que l'indice de gradient ( $p$ ) et le rapport d'aspect ( $L/L$ ) augmentent.
- La charge critique de flambement non dimensionnelle diminue à mesure que l'indice de gradient ( $p$ ) et le ratio de module ( $E_m/E_c$ ) augmentent.
- La charge critique de flambement non dimensionnelle d'une plaque sous charge de compression uniaxiale est plus grande que celle sous compression biaxiale.
- Les résultats de l'élément HSBQP20 démontrent l'efficacité de l'élément dans la modélisation de plaques FG à géométrie complexe, y compris des plaques carrées, biaises et circulaires, avec différentes conditions aux limites, ainsi que pour diverses valeurs d'indice de gradient.

## Perspectives

Les perspectives de ce travail incluent l'exploration de ces modèles dans le cadre de l'étude dynamique forcée ainsi que l'intégration des non-linéarités matérielles et géométriques.

Enfin, cette recherche doctorale s'inscrit dans les efforts du laboratoire LAHE pour le développement de nouvelles théories et éléments finis pour l'analyse des structures complexes

## Références bibliographiques

- [1] D. Gay, Matériaux composites. 3eme édition Hermès. Paris, 1991.
- [2] T. J. Reinhart et L. L. Clements, « Introduction to composites », Eng. Mater. Handb., vol. 1, p. 27-34, 1993.
- [3] J. Molimard, « Mécanique des Matériaux composites », EMsE Version, vol. 2, 2004.
- [4] J.-K. Kim et Y.-W. Mai, Engineered interfaces in fiber reinforced composites. Elsevier, 1998.
- [5] Z. Gürdal, R. T. Haftka, et P. Hajela, Design and optimization of laminated composite materials. John Wiley & Sons, 1999.
- [6] H. Ziou, « Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel », 2017.
- [7] M. BOUAMAMA, « Etude du comportement dynamique et stabilité des poutres en FGM », Doctorat en Sciences, Université de Sidi Bel Abbès - Djillali Liabes, Sidi Bel Abbès, 2019.
- [8] J.-M. Berthelot, Matériaux Composites—Comportement Mécanique et Analyse des Structures. 2012.
- [9] D. Zenkert, The handbook of sandwich construction. Engineering Materials Advisory Services, 1997.
- [10] M. HANTZ, « Etude de l'optimisation du renforcement par des fibres de carbones des dalles en béton armé munies de trémies, en utilisant l'optimisation topologique. », INSA de Strasbourg, 2011.
- [11] T. Dubois, « Boeing 787: Les belles promesses de la légèreté », Sci. Vie Hors-sér., n° 231, p. 22-29, 2005.
- [12] R. M. Jones, Mechanics of composite materials. CRC press, 2018.
- [13] R. E. Horton et J. E. McCarty, « Damage tolerance of composites », Eng. Mater. Handb., vol. 1, p. 259-267, 1993.
- [14] J.-M. Berthelot, Matériaux composites (5e éd.). Lavoisier, 2012.
- [15] B. W. Smith, « Fractography for continuous fiber composites », Eng. Mater. Handb., vol. 1, p. 786-793, 1993.
- [16] K. FRIEDRICH, « Fractographic analysis of polymer composites », in Composite materials series, vol. 6, Elsevier, 1989, p. 425-487.
- [17] A. Kawasaki et R. Watanabe, « Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials », Ceram. Int., vol. 23, n° 1, p. 73-83, 1997.
- [18] J. Holt, M. Koizumi, T. Hirai, et Z. Munir, « Ceramic transactions: Functionally gradient materials. Volume 34 », 1993. Consulté le: 6 janvier 2025. [En ligne]. Disponible sur: <https://www.semanticscholar.org/paper/Ceramic-transactions%3A-Functionally-gradient-Volume-Holt-Koizumi/89f0c5666792ce6bb27241e15c4fe1717b20543>
- [19] M. B. Bever et P. E. Duwez, « On gradient composites », in Preliminary Reports, Memoranda and Technical Notes of the ARPA Materials Summer Conference, 1970, p. 117-140.
- [20] Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, et R. G. Ford, Functionally graded materials: design, processing and applications, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] P. G. Koppad, M. R. Ramesh, S. Joladarashi, S. T. Aruna, N. C. Reddy, et C. Siddaraju, « Gaseous Phase Processing Techniques for Functionally Graded Materials », in Functionally Graded Materials (FGMs), CRC Press, 2021, p. 49-76.
- [22] K. Ichikawa, Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts. Springer Science & Business Media, 2001.
- [23] M. Koizumi, « FGM activities in Japan », Compos. Part B Eng., vol. 28, n° 1-2, p. 1-4, 1997.

- [24] H. M. Yin, L. Z. Sun, et G. H. Paulino, « Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions », *Acta Mater.*, vol. 52, n° 12, p. 3535-3543, 2004.
- [25] K. Morinaga et K. U. Toto, « Fabricate Thick Alumina-Tungsten FGM Using S lip Cast Method », *Sci Technol*, p. 4, 1993.
- [26] H. Ziou, « Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel », Doctorat, Université Mohamed Khider – Biskra, Biskra, 2017.
- [27] B. Saleh et al., « 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges », *Compos. Part B Eng.*, vol. 201, p. 108376, 2020.
- [28] F. Watari et al., « Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application », *Compos. Sci. Technol.*, vol. 64, n° 6, p. 893-908, 2004.
- [29] W. W. Chen, A. M. Rajendran, B. Song, et X. Nie, « Dynamic fracture of ceramics in armor applications », *J. Am. Ceram. Soc.*, vol. 90, n° 4, p. 1005-1018, 2007.
- [30] E. Mueller, Č. Drašar, J. Schilz, et W. A. Kaysser, « Functionally graded materials for sensor and energy applications », *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 362, n° 1-2, p. 17-39, 2003.
- [31] P. M. Pandey, S. Rathee, M. Srivastava, et P. K. Jain, *Functionally graded materials (FGMs): fabrication, properties, applications, and advancements*. CRC Press, 2021.
- [32] D. K. Jha, T. Kant, et R. K. Singh, « A critical review of recent research on functionally graded plates », *Compos. Struct.*, vol. 96, p. 833-849, 2013.
- [33] H.-S. Shen, *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. CRC press, 2016.
- [34] Z.-H. Jin et R. C. Batra, « Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock », *J. Therm. Stress.*, vol. 19, n° 4, p. 317-339, 1996.
- [35] H. Ziou, H. Guenfoud, et M. Guenfoud, « Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method », *Int. J. Struct. Eng.*, vol. 7, n° 3, p. 239-261, 2016.
- [36] K. Wakashima, T. Hirano, et M. Niino, « Functionally Gradient Materials(Fgm) Architecture: A New Type of Ceramic-Metal Assemblage Designed for Hot Structural Components », 1990.
- [37] S.-H. Chi et Y.-L. Chung, « Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 43, n° 13, p. 3657-3674, 2006.
- [38] S. H. Chi et Y. L. Chung, « Cracking in sigmoid functionally graded coating », *J Mech*, vol. 18, n° 2002, p. 41-53p, 2002.
- [39] J.-H. Kim et G. H. Paulino, « Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 53, n° 8, p. 1903-1935, 2002.
- [40] F. LNG, « A treatise on the mathematical theory of elasticity », *Nature*, vol. 105, n° 2643, p. 511-512, 1920.
- [41] G. Kirchhoff, « Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. », *J. Für Reine Angew. Math. Crelles J.*, vol. 1850, n° 40, p. 51-88, 1850.
- [42] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2003.
- [43] E. Reissner, « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates », 1945, Consulté le: 7 janvier 2025. [En ligne]. Disponible sur: <https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-abstract/12/2/A69/1103158>

- [44] R. Mindlin, « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates », 1951.
- [45] T. Kant et K. Swaminathan, « Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory », Compos. Struct., vol. 56, n° 4, p. 329-344, 2002.
- [46] M. Levinson, « An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates », Mech. Res. Commun., vol. 7, n° 6, p. 343-350, 1980.
- [47] K. H. Lo, R. M. Christensen, et E. M. Wu, « A high-order theory of plate deformation—Part 1: Homogeneous plates », 1977.
- [48] K. H. Lo, R. M. Christensen, et E. M. Wu, « A high-order theory of plate deformation—part 2: laminated plates », 1977.
- [49] M. V. V. Murthy, « An improved transverse shear deformation theory for laminated antisotropic plates », 1981.
- [50] J. N. Reddy, « A simple higher-order theory for laminated composite plates », 1984.
- [51] E. Reissner, « On the derivation of boundary conditions for plate theory », Proc. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Sci., vol. 276, n° 1365, p. 178-186, 1963.
- [52] Y. M. Ghugal et R. P. Shimpi, « A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates », J. Reinforced Plast. Compos., vol. 21, n° 9, p. 775-813, 2002.
- [53] J. M. Whitney et C. T. Sun, « A higher order theory for extensional motion of laminated composites », J. Sound Vib., vol. 30, n° 1, p. 85-97, 1973.
- [54] M. Touratier, « An efficient standard plate theory », Int. J. Eng. Sci., vol. 29, n° 8, p. 901-916, 1991.
- [55] K. Soldatos, « A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates », Acta Mech., vol. 94, n° 3, p. 195-220, 1992.
- [56] M. Karama, K. S. Afaq, et S. Mistou, « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity », Int. J. Solids Struct., vol. 40, n° 6, p. 1525-1546, 2003.
- [57] H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, et E. A. Adda Bedia, « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory », Int. J. Mech. Mater. Des., vol. 6, p. 113-121, 2010.
- [58] A. Tati, « A five unknowns high order shear deformation finite element model for functionally graded plates bending behavior analysis », J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., vol. 43, n° 1, p. 45, 2021.
- [59] A. Sadgui et A. Tati, « A novel trigonometric shear deformation theory for the buckling and free vibration analysis of functionally graded plates », Mech. Adv. Mater. Struct., vol. 29, n° 27, p. 6648-6663, 2022.
- [60] R. P. Shimpi, « Refined Plate Theory and Its Variants », AIAA J., vol. 40, n° 1, p. 137-146, janv. 2002, doi: 10.2514/2.1622.
- [61] J. N. Reddy et Z.-Q. Cheng, « Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates », Eur. J. Mech.-ASolids, vol. 20, n° 5, p. 841-855, 2001.
- [62] S. S. Vel et R. C. Batra, « Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates », AIAA J., vol. 40, n° 7, p. 1421-1433, 2002.
- [63] E. Pan, « Exact solution for functionally graded anisotropic elastic composite laminates », J. Compos. Mater., vol. 37, n° 21, p. 1903-1920, 2003.
- [64] N. J. Pagano, « Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates », J. Compos. Mater., vol. 4, n° 1, p. 20-34, 1970.
- [65] M. Kashtalyan, « Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates », Eur. J. Mech.-ASolids, vol. 23, n° 5, p. 853-864, 2004.

- [66] B. Woodward et M. Kashtalyan, « Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates », *Eur. J. Mech.-ASolids*, vol. 30, n° 5, p. 705-718, 2011.
- [67] M. Gholami, A. Hassani, S. S. Mousavi, et R. A. Alashti, « Bending analysis of anisotropic functionally graded plates based on three-dimensional elasticity », *Eur. J. Comput. Mech.*, p. 1-25, 2019.
- [68] S.-H. Chi et Y.-L. Chung, « Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part II: Numerical results », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 43, n° 13, p. 3675-3691, 2006.
- [69] S.-H. Chi et Y.-L. Chung, « Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 43, n° 13, p. 3657-3674, 2006.
- [70] M. Amirpour, R. Das, et E. I. S. Flores, « Bending analysis of thin functionally graded plate under in-plane stiffness variations », *Appl. Math. Model.*, vol. 44, p. 481-496, 2017.
- [71] G. N. Praveen et J. N. Reddy, « Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 35, n° 33, p. 4457-4476, 1998.
- [72] L. Della Croce et P. Venini, « Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 193, n° 9-11, p. 705-725, 2004.
- [73] M. K. Singha, T. Prakash, et M. Ganapathi, « Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load », *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 47, n° 4, p. 453-460, 2011.
- [74] H.-T. Thai et D.-H. Choi, « A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates », *Compos. Struct.*, vol. 101, p. 332-340, 2013.
- [75] H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, T. P. Vo, et J. Lee, « Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory », *Eur. J. Mech.-ASolids*, vol. 45, p. 211-225, 2014.
- [76] J. L. Mantari et E. V. Granados, « A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates », *Thin-Walled Struct.*, vol. 90, p. 150-158, 2015.
- [77] H. Bellifa, K. H. Benrahou, L. Hadji, M. S. A. Houari, et A. Tounsi, « Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position », *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, vol. 38, p. 265-275, 2016.
- [78] K. K. Joshi et V. R. Kar, « Bending analysis of bi-dimensional functionally graded plate using FEA », *Mater. Today Proc.*, vol. 26, p. 1766-1770, 2020.
- [79] A. Belounar, F. Boussem, M. N. Houhou, A. Tati, et L. Fortas, « Strain-based finite element formulation for the analysis of functionally graded plates », *Arch. Appl. Mech.*, vol. 92, n° 7, p. 2061-2079, 2022.
- [80] M.-O. Belarbi, A. Karamanli, S. Benounas, et A. A. Daikh, « Bending, free vibration and buckling finite element analysis of porous functionally graded plates with various porosity distributions using an improved FSDT », *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, p. 1-45, 2024.
- [81] M.-O. Belarbi et al., « An enhanced finite element model for static bending analysis of functionally graded plates with power-law, exponential, and sigmoid material gradients », *Arch. Appl. Mech.*, vol. 95, n° 1, p. 1-24, 2025.
- [82] M.-O. Belarbi et al., « A comprehensive investigation of the bending and vibration behavior of size-dependent functionally graded nanoplates via an enhanced nonlocal finite element shear model », *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, p. 1-40, 2024.

- [83] S. Benounas, M.-O. Belarbi, V. P. Van, et A. A. Daikh, « Precise analysis of the static bending response of functionally graded doubly curved shallow shells via an improved finite element shear model », Eng. Struct., vol. 319, p. 118829, 2024.
- [84] J. Reddy, « Analysis of functionally graded plates », Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 47, n° 1-3, p. 663-684, 2000.
- [85] A. J. M. Ferreira, R. C. Batra, C. M. C. Roque, L. F. Qian, et P. Martins, « Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method », Compos. Struct., vol. 69, n° 4, p. 449-457, 2005.
- [86] A. M. Zenkour, « Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates », Appl. Math. Model., vol. 30, n° 1, p. 67-84, 2006.
- [87] A. M. Zenkour et N. A. Alghamdi, « Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates », J. Mater. Sci., vol. 43, n° 8, p. 2574-2589, 2008.
- [88] A. M. Zenkour et N. A. Alghamdi, « Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads », Mech. Adv. Mater. Struct., vol. 17, n° 6, p. 419-432, 2010.
- [89] A. M. Zenkour, « Exact relationships between classical and sinusoidal theories for FGM plates », Mech. Adv. Mater. Struct., vol. 19, n° 7, p. 551-567, 2012.
- [90] A. Mahi et A. Tounsi, « A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates », Appl. Math. Model., vol. 39, n° 9, p. 2489-2508, 2015.
- [91] J. L. Mantari, A. S. Oktem, et C. G. Soares, « Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory », Compos. Struct., vol. 94, n° 2, p. 714-723, 2012.
- [92] J. L. Mantari et C. G. Soares, « Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory », Compos. Struct., vol. 94, n° 6, p. 1991-2000, 2012.
- [93] Y. Belkhodja, D. Ouinas, F. Z. Zaoui, et H. Fekirini, « An exponential-trigonometric higher order shear deformation theory (HSDT) for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates », Adv. Compos. Lett., vol. 29, p. 0963693519875739, 2020.
- [94] M. Talha et B. Singh, « Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory », Appl. Math. Model., vol. 34, n° 12, p. 3991-4011, 2010.
- [95] S. Natarajan et G. Manickam, « Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory », Finite Elem. Anal. Des., vol. 57, p. 32-42, 2012.
- [96] T. M. Tu, T. H. Quoc, et N. V. Long, « Bending analysis of functionally graded plates using new eight-unknown higher order shear deformation theory », Struct Eng Mech, vol. 62, n° 3, p. 311-324, 2017.
- [97] I. Mechab, H. A. Atmane, A. Tounsi, H. A. Belhadj, et E. A. A. Bedia, « A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates », Acta Mech. Sin., vol. 26, p. 941-949, 2010.
- [98] H. H. Abdelaziz, H. A. Atmane, I. Mechab, L. Boumia, A. Tounsi, et A. B. El Abbas, « Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory », Chin. J. Aeronaut., vol. 24, n° 4, p. 434-448, 2011.
- [99] R. P. Shimpi et H. G. Patel, « A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis », Int. J. Solids Struct., vol. 43, n° 22-23, p. 6783-6799, 2006.
- [100] I. Mechab, B. Mechab, et S. Benaissa, « Static and dynamic analysis of functionally graded plates using four-variable refined plate theory by the new function », Compos. Part B Eng., vol. 45, n° 1, p. 748-757, 2013.

- [101] H.-T. Thai et D.-H. Choi, « Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates », *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 75, p. 50-61, 2013.
- [102] H.-T. Thai et S.-E. Kim, « A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates », *Compos. Struct.*, vol. 96, p. 165-173, 2013.
- [103] D. Li, Z. Deng, G. Chen, H. Xiao, et L. Zhu, « Thermomechanical bending analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded core », *Compos. Struct.*, vol. 169, p. 29-41, 2017.
- [104] S. S. Vel et R. C. Batra, « Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates », *J. Sound Vib.*, vol. 272, n° 3-5, p. 703-730, 2004.
- [105] B. Uymaz et M. Aydogdu, « Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions », *J. Reinf. Plast. Compos.*, vol. 26, n° 18, p. 1847-1863, 2007.
- [106] Q. Li, V. P. Iu, et K. P. Kou, « Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates », *J. Sound Vib.*, vol. 311, n° 1-2, p. 498-515, 2008.
- [107] K. S. K. Reddy et T. Kant, « Three-dimensional elasticity solution for free vibrations of exponentially graded plates », *J. Eng. Mech.*, vol. 140, n° 7, p. 04014047, 2014.
- [108] G. Jin, Z. Su, S. Shi, T. Ye, et S. Gao, « Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions », *Compos. Struct.*, vol. 108, p. 565-577, 2014.
- [109] A. Singh et P. Kumari, « Three-Dimensional free vibration analysis of composite FGM rectangular plates with in-plane heterogeneity: An EKM solution », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 180, p. 105711, 2020.
- [110] S. Abrate, « Functionally graded plates behave like homogeneous plates », *Compos. Part B Eng.*, vol. 39, n° 1, p. 151-158, 2008.
- [111] D.-G. Zhang et Y.-H. Zhou, « A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface », *Comput. Mater. Sci.*, vol. 44, n° 2, p. 716-720, 2008.
- [112] D. Y. Liu, C. Y. Wang, et W. Q. Chen, « Free vibration of FGM plates with in-plane material inhomogeneity », *Compos. Struct.*, vol. 92, n° 5, p. 1047-1051, 2010.
- [113] S. Yin, T. Yu, et P. Liu, « Free vibration analyses of FGM thin plates by isogeometric analysis based on classical plate theory and physical neutral surface », *Adv. Mech. Eng.*, vol. 5, p. 634584, 2013.
- [114] I. Ramu et S. C. Mohanty, « Modal analysis of functionally graded material plates using finite element method », *Procedia Mater. Sci.*, vol. 6, p. 460-467, 2014.
- [115] R. C. Batra et J. Jin, « Natural frequencies of a functionally graded anisotropic rectangular plate », *J. Sound Vib.*, vol. 282, n° 1-2, p. 509-516, 2005.
- [116] X. Zhao, Y. Y. Lee, et K. M. Liew, « Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method », *J. Sound Vib.*, vol. 319, n° 3-5, p. 918-939, 2009.
- [117] J. L. Mantari et E. V. Granados, « Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT », *Compos. Part B Eng.*, vol. 75, p. 148-155, 2015.
- [118] G. M. S. Bernardo, F. R. Damásio, T. A. N. Silva, et M. A. R. Loja, « A study on the structural behaviour of FGM plates static and free vibrations analyses », *Compos. Struct.*, vol. 136, p. 124-138, 2016.
- [119] A. J. M. Ferreira, R. C. Batra, C. M. C. Roque, L. F. Qian, et R. M. N. Jorge, « Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method », *Compos. Struct.*, vol. 75, n° 1-4, p. 593-600, 2006.
- [120] A. M. Zenkour, « On vibration of functionally graded plates according to a refined trigonometric plate theory », *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, vol. 5, n° 02, p. 279-297, 2005.

- [121] H. Matsunaga, « Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory », Compos. Struct., vol. 82, n° 4, p. 499-512, 2008.
- [122] S. Xiang, Y. Jin, Z. Bi, S. Jiang, et M. Yang, « A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates », Compos. Struct., vol. 93, n° 11, p. 2826-2832, 2011.
- [123] S. A. Sheikholeslami et A. R. Saidi, « Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory », Compos. Struct., vol. 106, p. 350-361, 2013.
- [124] R. C. Batra et S. Vidoli, « Higher-order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle », AIAA J., vol. 40, n° 1, p. 91-104, 2002.
- [125] J. L. Mantari, E. V. Granados, et C. Guedes Soares, « Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation », Compos. Part B Eng., vol. 66, p. 407-419, nov. 2014, doi: 10.1016/j.compositesb.2014.05.026.
- [126] A. Gupta, M. Talha, et V. K. Chaudhari, « Natural frequency of functionally graded plates resting on elastic foundation using finite element method », Procedia Technol., vol. 23, p. 163-170, 2016.
- [127] S. S. Tabatabaei et A. M. Fattah, « A finite element method for modal analysis of FGM plates », Mech. Based Des. Struct. Mach., vol. 50, n° 4, p. 1111-1122, 2022.
- [128] A. Belounar, F. Boussem, et A. Tati, « A novel C0 strain-based finite element for free vibration and buckling analyses of functionally graded plates », J. Vib. Eng. Technol., vol. 11, n° 1, p. 281-300, 2023.
- [129] A. Tati, A. Belounar, et A. Sadgui, « Bending and free vibration analysis of FG circular plates using a five unknown high order shear deformation theory », Mech. Based Des. Struct. Mach., p. 1-25, 2024.
- [130] S. Benounas, M.-O. Belarbi, P. Van Vinh, A. A. Daikh, et N. Fantuzzi, « Finite element model for free vibration analysis of functionally graded doubly curved shallow shells by using an improved first-order shear deformation theory », Structures, vol. 64, p. 106594, juin 2024, doi: 10.1016/j.istruc.2024.106594.
- [131] M. Mishra, C. K. Srivastav, et S. Kumar, « Free vibration analysis using dynamic stiffness method and first-order shear deformation theory for a functionally graded material plate », Second Int. Conf. Adv. Mech. Eng. Mater. Sci., vol. 98, p. 7-15, janv. 2024, doi: 10.1016/j.matpr.2023.08.295.
- [132] V. Birman, « Stability of functionally graded hybrid composite plates », Compos. Eng., vol. 5, n° 7, p. 913-921, 1995.
- [133] E. Feldman et J. Aboudi, « Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading », Compos. Struct., vol. 38, n° 1-4, p. 29-36, 1997.
- [134] B. S. Shariat et M. R. Eslami, « Thermal buckling of imperfect functionally graded plates », Int. J. Solids Struct., vol. 43, n° 14-15, p. 4082-4096, 2006.
- [135] M. Mahdavian, « Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading », 2009.
- [136] M. Mohammadi, A. R. Saidi, et E. Jomehzadeh, « Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates », Appl. Compos. Mater., vol. 17, p. 81-93, 2010.
- [137] I. Ramu et S. C. Mohanty, « Buckling analysis of rectangular functionally graded material plates under uniaxial and biaxial compression load », Procedia Eng., vol. 86, p. 748-757, 2014.
- [138] N. Can, N. Kurgan, et A. H. A. Hassan, « Buckling analysis of functionally graded plates using finite element analysis », Int. J. Eng. Appl. Sci., vol. 12, n° 1, p. 43-56, 2020.
- [139] W. Lanhe, « Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate », Compos. Struct., vol. 64, n° 2, p. 211-218, 2004.

- [140] X. Zhao, Y. Y. Lee, et K. M. Liew, « Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates », *Compos. Struct.*, vol. 90, n° 2, p. 161-171, 2009.
- [141] H. Yaghoobi et P. Yaghoobi, « Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach », *Meccanica*, vol. 48, p. 2019-2035, 2013.
- [142] Y.-H. Lee, S.-I. Bae, et J.-H. Kim, « Thermal buckling behavior of functionally graded plates based on neutral surface », *Compos. Struct.*, vol. 137, p. 208-214, 2016.
- [143] A. Shahbaztabar et K. Arteshyar, « Buckling analysis of functionally graded plates partially resting on elastic foundation using the differential quadrature element method », *Acta Mech. Sin.*, vol. 35, p. 174-189, 2019.
- [144] B. S. Shariat et M. R. Eslami, « Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads », *Compos. Struct.*, vol. 78, n° 3, p. 433-439, 2007.
- [145] T. Van Do, D. K. Nguyen, N. D. Duc, D. H. Doan, et T. Q. Bui, « Analysis of bi-directional functionally graded plates by FEM and a new third-order shear deformation plate theory », *Thin-Walled Struct.*, vol. 119, p. 687-699, 2017.
- [146] J. S. Moita, A. L. Araújo, V. F. Correia, C. M. M. Soares, et J. Herskovits, « Buckling and nonlinear response of functionally graded plates under thermo-mechanical loading », *Compos. Struct.*, vol. 202, p. 719-730, 2018.
- [147] A. M. Zenkour, « A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 42, n° 18-19, p. 5243-5258, 2005.
- [148] A. M. Zenkour et D. S. Mashat, « Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates », *Nat. Sci.*, vol. 2, n° 09, p. 968, 2010.
- [149] A. M. Zenkour et M. Sobhy, « Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates », *Compos. Struct.*, vol. 93, n° 1, p. 93-102, 2010.
- [150] M. Bodaghi et A. R. Saidi, « Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory », *Appl. Math. Model.*, vol. 34, n° 11, p. 3659-3673, 2010.
- [151] A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, R. M. N. Jorge, et C. M. M. Soares, « Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions », *ZAMM-Journal Appl. Math. Mech. Für Angew. Math. Mech.*, vol. 92, n° 9, p. 749-766, 2012.
- [152] B. S. Reddy, J. S. Kumar, C. E. Reddy, et K. V. K. Reddy, « Buckling analysis of functionally graded material plates using higher order shear deformation theory », *J. Compos.*, vol. 2013, n° 1, p. 808764, 2013.
- [153] T. I. Thinh, T. M. Tu, T. H. Quoc, et N. V. Long, « Vibration and buckling analysis of functionally graded plates using new eight-unknown higher order shear deformation theory », *Lat. Am. J. Solids Struct.*, vol. 13, n° 3, p. 456-477, 2016.
- [154] A. M. Zenkour et M. H. Aljadani, « Mechanical buckling of functionally graded plates using a refined higher-order shear and normal deformation plate theory », *Adv. Aircr. Spacecr. Sci.*, vol. 5, n° 6, p. 615, 2018.
- [155] A. Tati, « Finite element analysis of thermal and mechanical buckling behavior of functionally graded plates », *Arch. Appl. Mech.*, vol. 91, n° 11, p. 4571-4587, 2021.
- [156] M. Farrokh, M. Afzali, et E. Carrera, « Mechanical and thermal buckling loads of rectangular FG plates by using higher-order unified formulation », *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 28, n° 6, p. 608-617, 2021.
- [157] B. Adim et T. H. Daouadji, « Analysis of Buckling Behavior of Functionally Graded Plates Under Mechanical Loading », *J. Nano- Electron. Phys.*, vol. 16, n° 2, 2024.

- [158] V.-L. Nguyen, V.-L. Nguyen, M.-T. Tran, et X.-T. Dang, « Investigation of static buckling and bending of nanoplates made of new functionally graded materials considering surface effects on an elastic foundation », *Acta Mech.*, p. 1-27, 2024.
- [159] B. Sidda Reddy et K. Vijaya Kumar Reddy, « Analyzing the buckling behavior of in-plane bidirectional functionally graded porous plates », *J. Comput. Appl. Mech.*, vol. 55, n° 3, p. 322-339, 2024.
- [160] A. R. Khorshidvand et A. R. Damercheloo, « Bending, axial buckling and shear buckling analyses of FG-porous plates based on a refined plate theory », *Aust. J. Mech. Eng.*, vol. 21, n° 2, p. 705-724, 2023.
- [161] J. H. Argyris et S. Kelsey, *Energy theorems and structural analysis*, vol. 60. Springer, 1960.
- [162] R. W. Clough et E. L. Wilson, « Early finite element research at Berkeley », in Fifth US national conference on computational mechanics, 1999, p. 1-35.
- [163] A. BELOUNAR, « Eléments finis membranaires et flexionnels à champ de déformation pour l'analyse des structures », these Doctorat LMD en Génie Civil, Université Mohamed Khider – Biskra, Université Mohamed Khider – Biskra, 2019.
- [164] C. REBIAI, « Contribution de l'approche en déformation pour l'analyse linéaire et non-linéaire des structures », Université Mohamed Khider–Biskra, 2013.
- [165] J.-L. Batoz et G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*. Presses Université Laval, 1990.
- [166] L. Bolle, *Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique*. Ed. de la Société du Bulletin technique de la Suisse romande, 1947.
- [167] J.-L. Batoz et G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*. Presses Université Laval, 1990.
- [168] A. Belounar, L. Belounar, et A. Tati, « An assumed strain finite element for composite plates analysis », *Int. J. Comput. Methods*, vol. 20, n° 01, p. 2250034, 2023.
- [169] M. T. Belarbi et A. Charif, « Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses », *Rev. Eur. Éléments Finis*, vol. 8, n° 2, p. 135-157, 1999.
- [170] D. G. Ashwell et A. B. Sabir, « Limitations of certain curved finite elements when applied to arches », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 13, n° 2, p. 133-139, 1971.
- [171] D. G. Ashwell, A. B. Sabir, et T. M. Roberts, « Further studies in the application of curved finite elements to circular arches », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 13, n° 6, p. 507-517, 1971.
- [172] A. B. Sabir et D. G. Ashwell, « A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems », *J. Sound Vib.*, vol. 18, n° 4, p. 555-563, 1971.
- [173] A. B. Sabir et A. Lock, « A curved, cylindrical shell, finite element », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 14, n° 2, p. 125-135, 1972.
- [174] D. G. Ashwell et A. B. Sabir, « A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 14, n° 3, p. 171-183, 1972.
- [175] A. B. Sabir, « Stiffness matrices for general deformation (out of plane and in-plane) of curved beam members based on independent strain functions », *Math Finite Elem. Appl. II Acad. Press*, vol. 3, p. 411-421, 1975.
- [176] A. B. Sabir, « The application of the finite element method to the buckling of rectangular plates and plates on elastic foundations », *Proc Struvebnicky Casopsis Sav XXI*, vol. 10, p. 689-712, 1973.
- [177] A. B. Sabir et D. G. Ashwell, « Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells », *Math. Finite Elem. Appl. III*, p. 381-389, 1979.
- [178] A. B. Sabir et T. A. Charchaechi, « Curved rectangular and general quadrilateral shell finite elements for cylindrical shells », *Math Finite Elem. Appl.*, p. 231-239, 1982.

- [179] A. B. Sabir et F. Ramadhani, « A shallow shell finite element for general shell analysis », in Variational methods in engineering, Proceedings of the 2nd International Conference, University of Southampton England, 1985, p. 48.
- [180] A. B. Sabir, « Strain based shallow spherical shell element », in Proc. Int. Conf on the Math. Finite elements and application, Brunel University, 1997.
- [181] A. B. Sabir et H. F. El-Erris, « A new conical shell finite element », in Computational Mechanics' 88: Volume 1, Volume 2, Volume 3 and Volume 4 Theory and Applications, Springer, 1988, p. 613-616.
- [182] I. S. Raju et A. K. Rao, « Stiffness matrices for sector elements. », AIAA J., vol. 7, n° 1, p. 156-157, 1969.
- [183] M. S. Djoudi, « Strain based finite elements for linear and geometrically non-linear analysis of structures. », University of Wales. Cardiff, 1990.
- [184] M. T. Belarbi et A. Charif, « Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan », Rev. Eur. Éléments Finis, vol. 7, n° 4, p. 439-458, 1998.
- [185] A. B. Sabir et H. Y. Salhi, « A strain based finite element for general plane elasticity problems in polar coordinates », 1986.
- [186] A. B. Sabir et M. S. Djoudi, « A sector inplane finite element with a rotational degree of freedom », Struceng Femcad-Struct. Eng. Optim., p. 55-61, 1991.
- [187] C. Bouzrira, A. Sabir, et Z. Nemouchi, « A sector inplane finite element in polar coordinates with rotational degree of freedom », Arch. Civ. Eng., vol. 51, n° 4, p. 471-483, 2005.
- [188] L. Belounar et M. Guenfoud, « A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending », Thin-Walled Struct., vol. 43, n° 1, p. 47-63, 2005.
- [189] F. Boussem, A. Belounar, L. Belounar, et L. Fortas, « Strain-based mindlin finite element for vibration analysis of rectangular plates coupled with a fluid », Romanian J. Acoust. Vib., vol. 19, n° 2, p. 93-100, 2022.
- [190] A. Belounar, S. Benmebarek, et L. Belounar, « Strain based triangular finite element for plate bending analysis », Mech. Adv. Mater. Struct., vol. 27, n° 8, p. 620-632, 2020.
- [191] A. Belounar, S. Benmebarek, M. N. Houhou, et L. Belounar, « Static, free vibration, and buckling analysis of plates using strain-based Reissner–Mindlin elements », Int. J. Adv. Struct. Eng., vol. 11, p. 211-230, 2019.
- [192] L. Belounar et D. Hamadi, « Plate bending with a solid strain based element that satisfies the equilibrium equations », in 6 th European Solid Mechanics Conference. ESMC2006, Budapest,
- [193] A. Belounar, S. Benmebarek, M. N. Houhou, et L. Belounar, « Free vibration with mindlin plate finite element based on the strain approach », J. Inst. Eng. India Ser. C, vol. 101, p. 331-346, 2020.
- [194] F. Boussem, A. Belounar, et L. Belounar, « Assumed strain finite element for natural frequencies of bending plates », World J. Eng., vol. 19, n° 5, p. 620-631, 2022.
- [195] B. Lamine et B. Sadoc, « A rectangular strain based finite element for plate bending analysis ».
- [196] F. Boussem et L. Belounar, « A Plate Bending Kirchhoff Element Based on Assumed Strain Functions. », J. Solid Mech., vol. 12, n° 4, 2020.
- [197] L. Belounar et K. Guerrache, « A new strain based brick element for plate bending », Alex. Eng. J., vol. 53, n° 1, p. 95-105, 2014.
- [198] M. T. Belarbi et A. Charif, « Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses », Rev. Eur. Éléments Finis, vol. 8, n° 2, p. 135-157, 1999.

- [199] T. Maalem, « Investigation numérique des problèmes de flexion de plaque par un élément fini parallélépipédique basé sur le modèle en déformation », Univ. Constantine Algér. Mém. Magistère, 2002.
- [200] D. Hamadi et T. Maalem, « Presentation of an Efficient Parallelepiped Finite Element Based on the Strain Approach" SBP8C », in Proceedings of the World Congress on Engineering, 2010, p. 27.
- [201] K. H. Guerraiche, L. Belounar, et L. Bouzidi, « A new eight nodes brick finite element based on the strain approach », J. Solid Mech., vol. 1, n° 1, p. 186, 2018.
- [202] A. Messai, L. Belounar, et T. Merzouki, « Static and free vibration of plates with a strain based brick element », Eur. J. Comput. Mech., p. 1-21, 2018.
- [203] A. MESSAI, « Contribution de l'approche en déformation dans l'analyse statique et dynamique des structures », Université Mohamed Khider-Biskra, 2019.
- [204] A. B. Sabir, « A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom », in Proceedings of the Second International Conference on Variational Methods in Engineering, Brebbia CA ed., Southampton University, 1985, p. 17-25.
- [205] A. B. Sabir et A. Sfendji, « Triangular and rectangular plane elasticity finite elements », Thin-Walled Struct., vol. 21, n° 3, p. 225-232, 1995.
- [206] M. T. Belarbi et M. Bourezane, « On improved Sabir triangular element with drilling rotation », Rev. Eur. Génie Civ., vol. 9, n° 9-10, p. 1151-1175, 2005.
- [207] M. T. Belarbi et T. Maalem, « On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis », Rev. Eur. Eléments, vol. 14, n° 8, p. 985-997, 2005.
- [208] C. Rebiai et L. Belounar, « A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis », Arch. Civ. Mech. Eng., vol. 13, p. 72-81, 2013.
- [209] C. Rebiai et L. Belounar, « An effective quadrilateral membrane finite element based on the strain approach », Measurement, vol. 50, p. 263-269, 2014.
- [210] L. Bouzidi, L. Belounar, et K. Guerraiche, « Presentation of a new membrane strain-based finite element for static and dynamic analysis », Int. J. Struct. Eng., vol. 10, n° 1, p. 40-60, 2019.
- [211] A. Sabir, « A new class of finite elements for plane elasticité problems, CAFEM 7th, international Conf, structures », Mech. React. Technol. Chic., 1983.
- [212] H. Guenfoud, M. Himeur, H. Ziou, et M. Guenfoud, « A consistent triangular thin flat shell finite element with drilling rotation based on the strain approach », Int. J. Struct. Eng., vol. 9, n° 3, p. 191-223, 2018.
- [213] M. R. Barati, « Dynamic response of porous functionally graded material nanobeams subjected to moving nanoparticle based on nonlocal strain gradient theory », Mater. Res. Express, vol. 4, n° 11, p. 115017, 2017.
- [214] Ç. Demir et Ö. Civalek, « A new nonlocal FEM via Hermitian cubic shape functions for thermal vibration of nano beams surrounded by an elastic matrix », Compos. Struct., vol. 168, p. 872-884, 2017.
- [215] H. Hirane, M.-O. Belarbi, M. S. A. Houari, et A. Tounsi, « On the layerwise finite element formulation for static and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates », Eng. Comput., p. 1-29, 2022.
- [216] R. P. Shimpi, H. Arya, et N. K. Naik, « A higher order displacement model for the plate analysis », J. Reinf. Plast. Compos., vol. 22, n° 18, p. 1667-1688, 2003.
- [217] J. N. Reddy, « Analysis of functionally graded plates », Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 47, n° 1-3, p. 663-684, janv. 2000, doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8.
- [218] H. Nguyen-Xuan, L. V. Tran, C. H. Thai, et T. Nguyen-Thoi, « Analysis of functionally graded plates by an efficient finite element method with node-based strain smoothing », Thin-Walled Struct., vol. 54, p. 1-18, 2012.

- [219] N. Valizadeh, S. Natarajan, O. A. Gonzalez-Estrada, T. Rabczuk, T. Q. Bui, et S. P. Bordas, « NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter », *Compos. Struct.*, vol. 99, p. 309-326, 2013.
- [220] H.-T. Thai et D.-H. Choi, « An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates », *Appl. Math. Model.*, vol. 36, n° 3, p. 1008-1022, 2012.
- [221] W. Ye, J. Liu, J. Zhang, F. Yang, et G. Lin, « A new semi-analytical solution of bending, buckling and free vibration of functionally graded plates using scaled boundary finite element method », *Thin-Walled Struct.*, vol. 163, p. 107776, 2021.
- [222] H.-T. Thai et B. Uy, « Levy solution for buckling analysis of functionally graded plates based on a refined plate theory », *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 227, n° 12, p. 2649-2664, 2013.
- [223] V. T. Do, V. V. Pham, et H. N. Nguyen, « On the development of refined plate theory for static bending behavior of functionally graded plates », *Math. Probl. Eng.*, vol. 2020, n° 1, p. 2836763, 2020.
- [224] L. S. D. Morley, « Skew plates and structures », No Title, 1963.
- [225] I. Katili, J.-L. Batoz, I. J. Maknun, et A. M. Katili, « On static and free vibration analysis of FGM plates using an efficient quadrilateral finite element based on DSPM », *Compos. Struct.*, vol. 261, p. 113514, 2021.
- [226] L. V. Tran, A. J. M. Ferreira, et H. Nguyen-Xuan, « Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory », *Compos. Part B Eng.*, vol. 51, p. 368-383, 2013.
- [227] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, et M. Es' Haghi, « A novel approach for in-plane/out-of-plane frequency analysis of functionally graded circular/annular plates », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 52, n° 8, p. 1025-1035, 2010.
- [228] T. Assas, M. Bourezane, M. Chenafi, et A. Tati, « Static and free vibration response of FGM plates using higher order shear deformation theory and strain-based finite element formulation », *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, p. 1-30, 2024.
- [229] C. H. Thai, L. V. Tran, D. T. Tran, T. Nguyen-Thoi, et H. Nguyen-Xuan, « Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method », *Appl. Math. Model.*, vol. 36, n° 11, p. 5657-5677, 2012.
- [230] B. Bessaïh, A. Lousdad, A. Lairedj, et A. Abdelmalek, « Higher order theory based analysis of laminated composite plates using functions trigonometric and trigonometric-hyperbolic », *Sigma J. Eng. Nat. Sci.*, vol. 42, n° 3, p. 822-830, 2024.
- [231] N. J. Pagang et S. J. Hatfield, « Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites », *AIAA J.*, vol. 10, n° 7, p. 931-933, juill. 1972, doi: 10.2514/3.50249.
- [232] G. Akhras, M. S. Cheung, et W. Li, « Finite strip analysis of anisotropic laminated composite plates using higher-order shear deformation theory », *Comput. Struct.*, vol. 52, n° 3, p. 471-477, 1994.
- [233] N. Grover, D. K. Maiti, et B. N. Singh, « A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates », *Compos. Struct.*, vol. 95, p. 667-675, 2013.
- [234] H. H. Phan-Dao, H. Nguyen-Xuan, C. Thai-Hoang, T. Nguyen-Thoi, et T. Rabczuk, « AN EDGE-BASED SMOOTHED FINITE ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE PLATES », *Int. J. Comput. Methods*, vol. 10, n° 01, p. 1340005, févr. 2013, doi: 10.1142/S0219876213400057.
- [235] K. M. Liew, « Solving the vibration of thick symmetric laminates by Reissner/Mindlin plate theory and the Ritz method », *J. Sound Vib.*, vol. 198, n° 3, p. 343-360, 1996.

- [236] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, et T. Tran-Cong, « Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element », *J. Sound Vib.*, vol. 313, n° 1-2, p. 205-223, 2008.
- [237] C. Thai-Hoang, N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, et T. Rabczuk, « An alternative alpha finite element method with discrete shear gap technique for analysis of laminated composite plates », *Appl. Math. Comput.*, vol. 217, n° 17, p. 7324-7348, 2011.
- [238] J. N. Reddy et N. Phan, « Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory », *J. Sound Vib.*, vol. 98, n° 2, p. 157-170, 1985.
- [239] H. Matsunaga, « Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory », *Compos. Struct.*, vol. 48, n° 4, p. 231-244, 2000.
- [240] M. Marjanović et D. Vuksanović, « Layerwise solution of free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates with embedded delaminations », *Compos. Struct.*, vol. 108, p. 9-20, 2014.
- [241] A. K. Nayak, S. S. J. Moy, et R. A. Shenoi, « Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory », *Compos. Part B Eng.*, vol. 33, n° 7, p. 505-519, 2002.
- [242] A. Belounar, L. Belounar, et A. Tati, « An assumed strain finite element for composite plates analysis », *Int. J. Comput. Methods*, vol. 20, n° 01, p. 2250034, 2023.
- [243] Z. Zou, « Free vibration analysis of composite laminated right triangular plates with the finite-element method », *Mech. Compos. Mater. Struct. Int. J.*, vol. 5, n° 1, p. 25-39, 1998.
- [244] L. Jun, H. Hongxing, et S. Rongying, « Dynamic finite element method for generally laminated composite beams », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 50, n° 3, p. 466-480, mars 2008, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2007.09.014.
- [245] K. M. Liew, Y. Q. Huang, et J. N. Reddy, « Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, n° 19, p. 2203-2222, 2003.
- [246] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, et R. M. N. Jorge, « Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 194, n° 39-41, p. 4265-4278, 2005.
- [247] S. Wang, « Buckling analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first-order shear deformation plate theory », *Compos. Struct.*, vol. 37, n° 1, p. 5-19, 1997.
- [248] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, et H. Nguyen-Xuan, « Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory », *Compos. Struct.*, vol. 104, p. 196-214, 2013.
- [249] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, M. Abdel Wahab, et H. Nguyen-Xuan, « A generalized layerwise higher-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates based on isogeometric analysis », *Acta Mech.*, vol. 227, n° 5, p. 1225-1250, mai 2016, doi: 10.1007/s00707-015-1547-4.

## Annexe

La matrice de transformation  $[C_{HSBQP20}]_{(20 \times 20)}$  de l'élément HSBQP20 est donnée par :

$$\left[ C_{HSBQP\ 20} \right] = \begin{bmatrix} \left[ P_{HSBQP\ 20} \right]_{node\ 01} \\ \left[ P_{HSBQP\ 20} \right]_{node\ 02} \\ \left[ P_{HSBQP\ 20} \right]_{node\ 03} \\ \left[ P_{HSBQP\ 20} \right]_{node\ 04} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Où la matrice de déplacement polynomiale de l'élément  $[P_{HSBQP20}]$  de dimension  $5 \times 20$ , qui contient les coordonnées  $(x_i, y_i)$  du nœud i (avec  $i = 1, 2, 3, 4$ ), est définie comme suit :

$$\left[ P_{HSBQP \text{ 20}} \right]_{node(i)} = \begin{bmatrix} \left[ P_{SBRIE} \right]_{node(i)} & \left[ 0 \right]_{(2x12)} \\ \left[ 0 \right]_{(3x12)} & \left[ P_{MSBQP} \right]_{node(i)} \end{bmatrix}_{i=1,2,3,4} \quad (\text{A.2})$$

$$\left[ P_{SBRIE} \right]_{node(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_i & x_i & x_i y_i & 0 & -\frac{y_i^2}{2} & \frac{y_i}{2} \\ 0 & 1 & x_i & 0 & -\frac{x_i^2}{2} & y_i & x_i y_i & \frac{x_i}{2} \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

$$\left[ P_{MSBQP} \right]_{node(i)} = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -y_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\left(\frac{x_i^2 y_i}{2} + \frac{x y_i^3}{6}\right) & -\frac{y_i^2}{2} & -\left(\frac{x y_i^2}{2} + \frac{x_i^3 y}{6}\right) & -\frac{x_i y_i}{2} & \frac{x}{2} & \frac{x_i y_i}{2} & \frac{y_i}{2} & \frac{x_i y_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_i & x_i y_i + \frac{y_i^3}{6} & 0 & \left(\frac{x^2 y_i}{2} + \frac{y_i^2}{2}\right) & \frac{y_i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y_i}{2} & 0 & -\frac{y_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left(\frac{x_i y_i^2}{2} + \frac{x_i^2}{2}\right) & y_i & x_i y_i + \frac{x^3}{6} & \frac{x_i}{2} & 0 & -\frac{x_i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x_i}{2} \end{bmatrix}$$

Les matrices  $[Q_{SBRIE}]$ ,  $[Q_{MSBQP}]_f$  et  $[Q_{MSBQP}]_c$  représentent respectivement les matrices associées aux déformations membranaires, à la flexion et au cisaillement transversal, conformément aux expressions figurant en annexe, et sont données comme suit:

$$\left[ Q_{MSBQP} \right]_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2x + y^2) & 0 & (2y + x^2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\left[ Q_{MSBQP} \right]_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$