Notes de cours

Méthode des Eléments Finis

Mme Nawel MEZIGHECHE
Maitre Assistant
Université Badji Mokhtar de Annaba

1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :

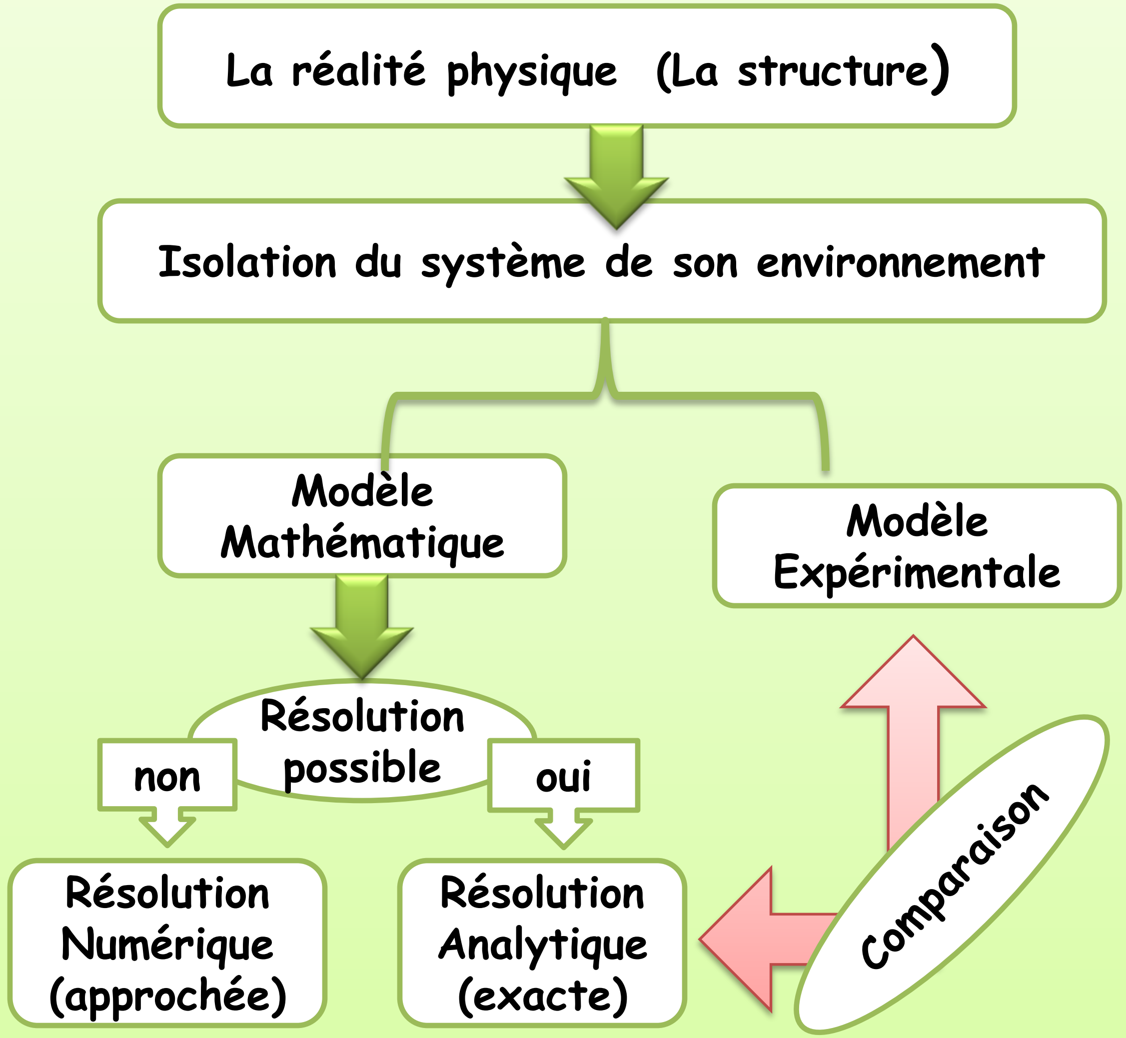
- La mission d'un ingénieur , est de concevoir et de dimensionner la structure de manière à fournir à l'entrepreneur les plans nécessaires à la réalisation de cette structure.

- L'ingénieur dans sa démarche de conception doit prévoir le comportement des systèmes physiques , il a recours donc à une simulation , et il doit être conscient qu'entre le modèle et la réalité physique il y a un grand nombre d'approximations maitrisées.

1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :



1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :

SIMULATION :

Définition de selon le dictionnaire français Larousse:

Représentation du comportement d'un processus physique au moyen d'un modèle matériel dont les paramètres et les variables sont les images de ceux du processus étudié.

(Les modèles de simulation prennent le plus souvent la forme de programmes d'ordinateurs auxquels sont parfois associés des éléments de calcul analogique.)

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- Les sciences de L'ingénieur traduisent le comportement des systèmes physiques (corps solides ou liquides …) par des équations d'équilibre aux dérivées partielles, qui sont pas faciles à intégrer.

- Dans la pratique , les solutions analytiques ne sont possibles que pour des cas très simples , dans le cas contraire , la résolution est impossible pour deux raisons :

➢ Le champs à modéliser est inconnu.
➢ La géométrie est trop complexe.

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- **La première difficulté** : pour déterminer les contraintes et les déformations , il faut déterminer les déplacements qui sont les inconnus du problèmes , mais ces derniers sont obtenus par la résolution des équations aux dérivées partielles qui sont pas faciles à intégrer.

- **La deuxième difficulté**: la géométrie des structures est souvent très compliquée ,il faut donc découper le système en composants plus simples, dans chaque partie découpée de la structure on doit déterminer les champs locaux des inconnus.

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- La connaissance des informations locales permettra de reconstituer la géométrie complexe initiale.

- L'idée de la MEF revient à remplacer la structure (milieu continu) par une structure discrétisée , elle sera alors divisée en un certain nombre de sous domaines appelés **éléments** , dont l'assemblage de ces éléments reconstituera la géométrie initiale .

Concept de la MEF (du milieu continu au milieu discrétisé)

En Elasticité, le comportement d'un solide (milieu continu) traduit par Equations d'Equilibre

→ **Méthode des résidus pondérés**

→ **Forme intégrale (milieu continu)**

→ **Méthode des Eléments Finis**

→ **Forme intégrale approximée avec interpolation entre les nœuds (milieu discrétisé)**

→ **Forme algébrique**
$\{f\}=[k]\ \{u\}$

→ **Solution numérique**
Détermination de
σ, ε et u

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

3) la MEF en calcul des structures

La MEF en calcul des structures

- La MEF consiste à décomposer la structure (milieu continu) en éléments simples appelés **éléments finis** , chaque éléments est relié à ses voisins par des **nœuds** ; dont les degrés de liberté de chaque nœud (**DDL**) constituent les inconnus du problème.

La MEF en calcul des structures

La structure → Se décompose → Eléments

Eléments → Sont raccordés → Nœuds

Nœuds → Reliés par → Forces

Déplacements | Forces

Relation de rigidité: {f}=[k] {u}

La MEF en calcul des structures

Un élément Fini :

- Est un domaine géométrique
- Des nœuds
- Des degrés de liberté
- Fonctions mathématiques aux nœuds

Eléments utilisés

- 1D: Barres, Poutres et Coques axisymétriques
- 2D: Elasticité plane, Plaques minces et coques minces.
- 3D: Solides massifs , plaques épaisses et coques épaisses.

1) Introduction générale
2) Concept de la Méthode des Eléments Finis
3) la MEF en calcul des structures

La MEF en calcul des structures

Eléments Finis 1D:

Eléments Finis 2D:

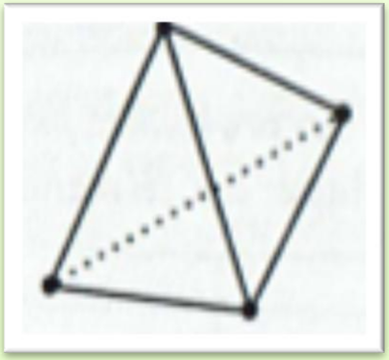
1) Introduction générale

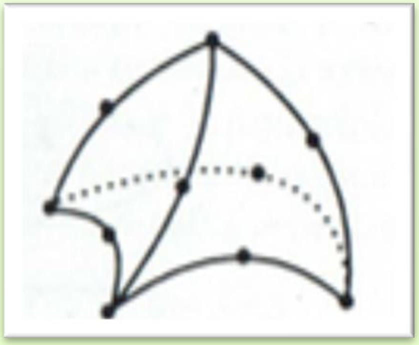
2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

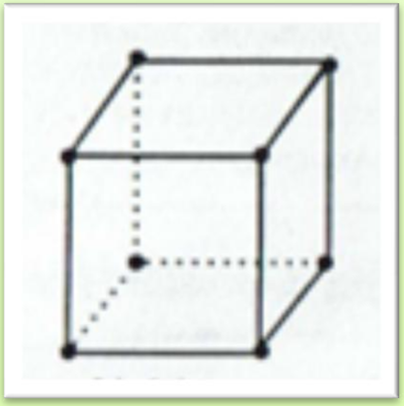
3) la MEF en calcul des structures

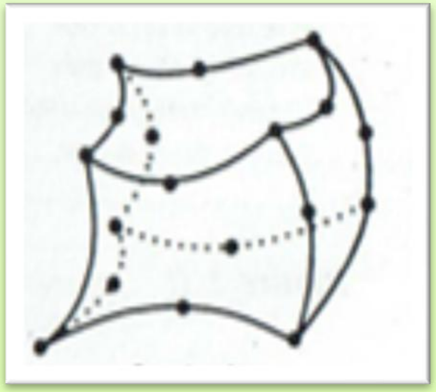
La MEF en calcul des structures

Eléments Finis 3D:







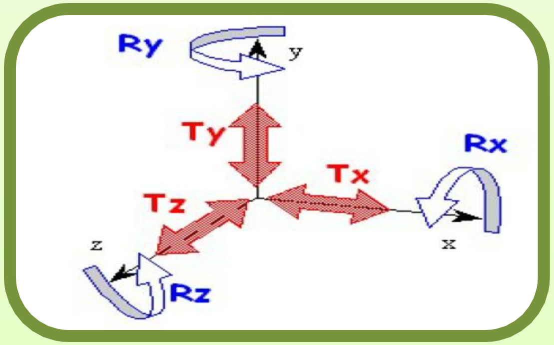


- **La MEF en calcul des structures**

Degré de liberté

Propriétés de mobilité d'un nœud

3 Translations et 3 Rotations



Élément Fini → Peut avoir → **Plusieurs nœuds**

Nœud → Peut avoir → **Plusieurs DDL**

Donc La relation de rigidité est un système d'équations

Principe de l'approximation.

- Le problème de l'analyse des solides déformables peut être totalement résolu si l'on connait le champ de déplacement en tous point du milieu .
- Le principe de la méthode des éléments finis consiste à restreindre la détermination de ce champ à un nombre fini de points du milieu appelés nœuds.

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- Le processus du passage du champs continu aux valeurs nodales est appelé **discrétisation**

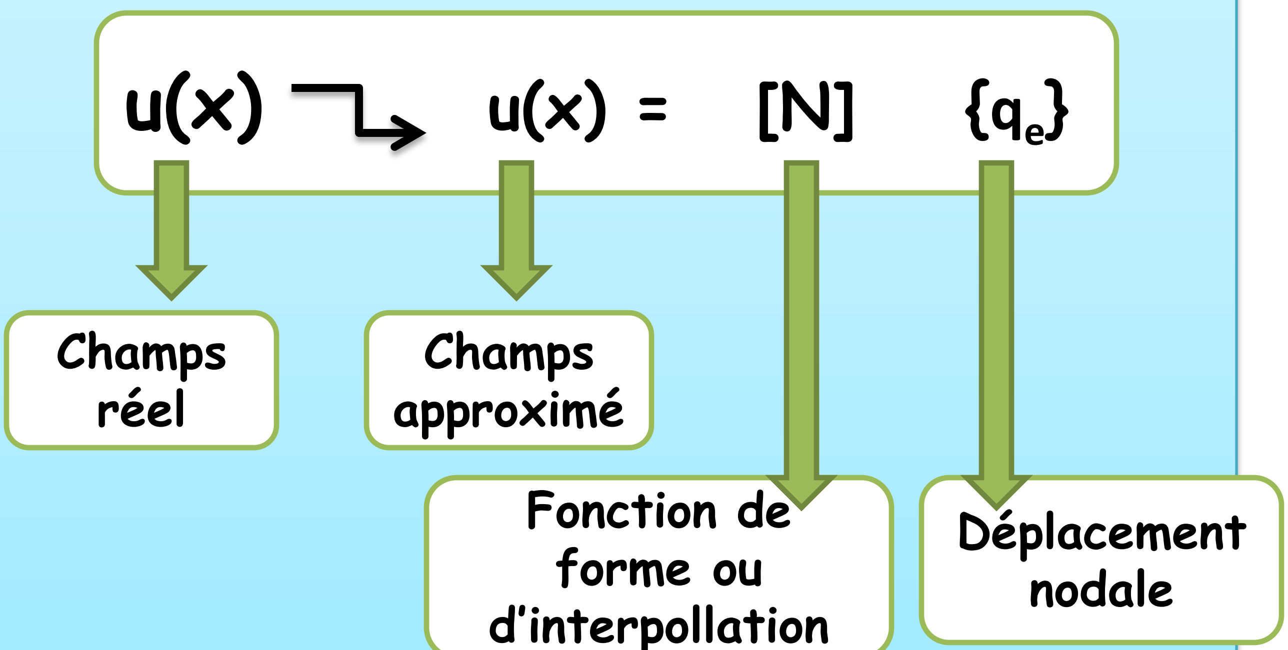
- Pour définir le champs approché par interpolation des valeurs nodales, on utilise les **fonctions de formes**.

- La fonction de forme permet d'exprimer les déplacements en un point de l'élément à partir des déplacements connus en ses nœuds

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- Le champs de déplacement **u(x)** d'un élément fini est approximé par une **fonction polynomiale** (de forme) **[N]** ,à partir des valeurs nodales de déplacements



Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- La forme générale de la fonction polynomiale (de forme) est:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \ldots\ldots$$

- Combien faut il de monômes ?

Élément → Nombre de nœuds → Nombre de DDL par nœuds → Nombre de DDL par élément

le nombre de monômes = nombre de DDL par élément

Principe de l'approximation.

Propriétés de la fonctions de forme

La fonction de forme ou **fonction de pondération** doit être :

- Licite: continue et dérivable
- Vérifiant les conditions aux limites : cinématiquement admissible
- Unique pour un élément et à la frontière entre deux éléments

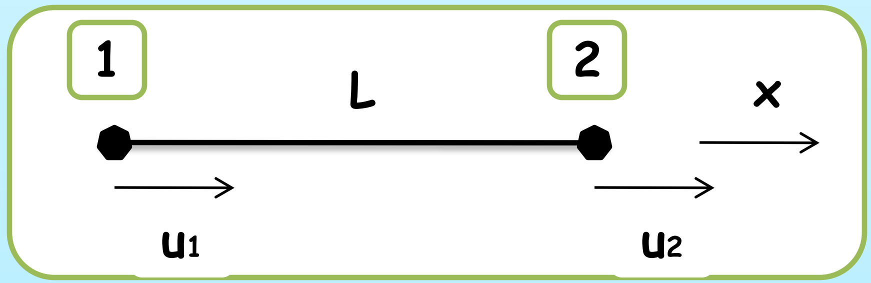
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Nœud 1 avec **1DDL**: translation selon (x) $\longrightarrow$ $\mathbf{u_1}$

Nœud 2 avec **1DDL**: translation selon (x) $\longrightarrow$ $\mathbf{u_2}$



Le champ de déplacement approximé s'écrit sous la forme:

$$u(x) = [N]\ \{q_e\}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

$$u(x) = [N]\{q_e\}$$

$$u(x) = [N]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

L'élément **1D** avec **2 nœuds** et **1DDL** par nœud se trouve avec **2DDL par élément**

Donc : la fonction de forme doit avoir deux monômes

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Pour déterminer les valeurs des deux coefficients (α_0)**et** (α_1) on a besoin des conditions aux limites:

Nœud 1 (x = 0) : $U(0) = u_1 \longrightarrow \alpha_0 = u_1$

Nœud 2 (x = L) : $U(L) = u_2 \longrightarrow \alpha_1 = (u_2 - u_1)/L$

Le champ de déplacement approximé devient

$$\boxed{u(x) = u_1 + [(u_2 - u_1)/L]\, x}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Le champ de déplacement approximé peut prendre la forme:

$$u(x) = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2$$

Après simplification nous obtenant les deux **fonctions de forme** de **l'élément 1D à 2noeuds et 1DDL par nœud :**

$$N_1(x) = 1 - x/L$$

$$N_2(x) = x/L$$

Principe de l'approximation

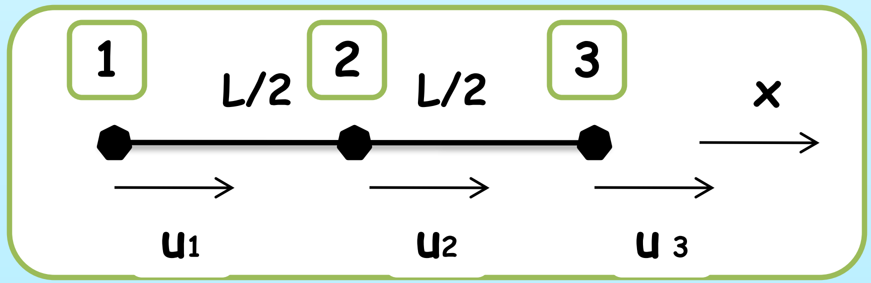
Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Nœud 1 avec **1DDL**: translation selon (x)

Nœud 2 avec **1DDL**: translation selon (x)

Nœud 1 avec **1DDL**: translation selon (x)



$$u(x) = [N]\,\{q_e\}$$

$$u(x) = [N] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

L'élément **1D** avec **3 nœuds** et **1DDL** par nœud se trouve avec **3DDL par élément**

Donc : la fonction de forme doit avoir trois monômes

$$\boxed{u(x)= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2}$$

Pour déterminer les valeurs des trois coefficients (α_0), (α_1) et (α_2) on a besoin des conditions aux limites:

Nœud 1 $(x = 0)$: $U(0)= u_1$

Nœud 2 $(x = L/2)$: $U(L/2)= u_2$

Nœud 3 $(x = L)$: $U(L)= u_3$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Après résoudre le système de trois inconnus et trois équations on obtient les valeurs:

$\alpha_0 = u_1$

$\alpha_1 = -(3/L)\, u_1 + (4/L)\, u_2 - (1/L)\, u_3$

$\alpha_2 = (2/L^2)\, u_1 - (4/L^2)\, u_2 + (2/L^2)\, u_3$

Le champ de déplacement approximé devient

$$\mathbf{u(x)} = u_1 + \left[-(3/L)\, u_1 + (4/L)\, u_2 - (1/L)\, u_3\right] \mathbf{x} + \left[(2/L^2)\, u_1 - (4/L^2)\, u_2 + (2/L^2)\, u_3\right] \mathbf{x^2}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Après simplification on obtient la forme :

$$u(x) = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2 + N_3(x).U_3$$

$$u(x) = \left[1-(3/L)X + (2/L^2)X^2\right]U_1 + \left[(4/L)X - (4/L^2)X^2\right]U_2 + \left[(-1/L)X + (2/L^2)x^2\right]U_3$$

Les trois fonctions de forme seront :

$$N_1(x) = 1-(3/L)X + (2/L^2)X^2$$

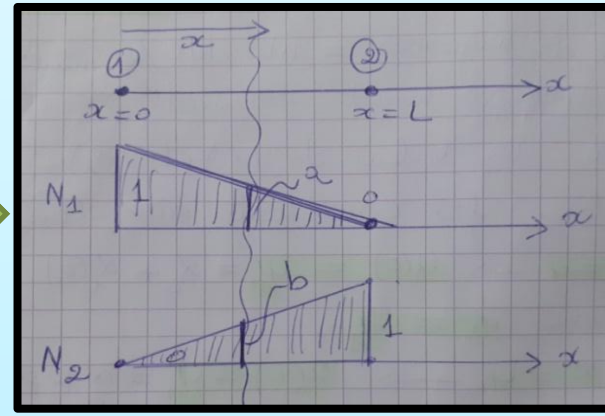
$$N_2(x) = (4/L)X - (4/L^2)X^2$$

$$N_3(x) = (-1/L)X + (2/L^2)x^2$$

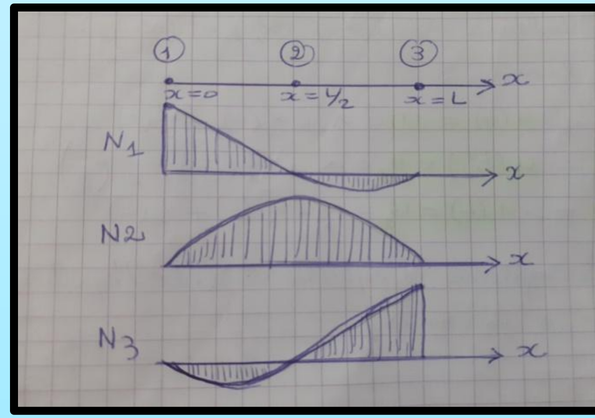
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Elément fini 1D à 2 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément



Elément fini 1D à 3 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément

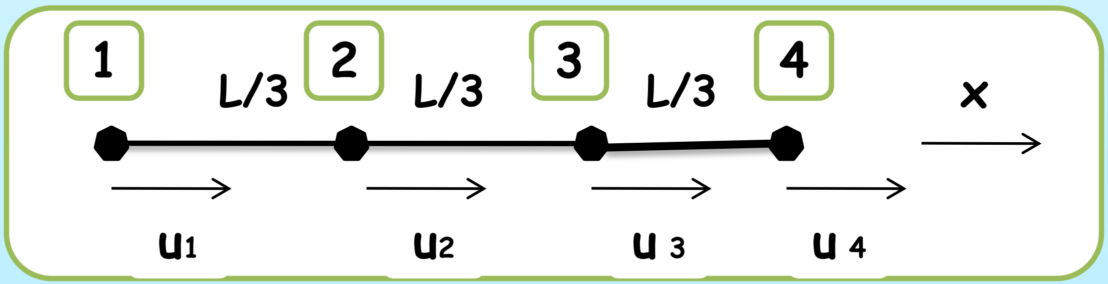


Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Devoir à domicile

Déterminer les fonctions de forme pour un élément (1D) avec quatre nœud et 1DDL par nœud



$$u(x) = [N]\{q_e\}$$

$$u(x) = [N_1\ N_2\ N_3\ N_4] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

Notes de cours

Méthode des Eléments Finis

Mme Nawel MEZIGHECHE
Maitre Assistant
Université Badji Mokhtar de Annaba

1) Introduction générale

Introduction générale

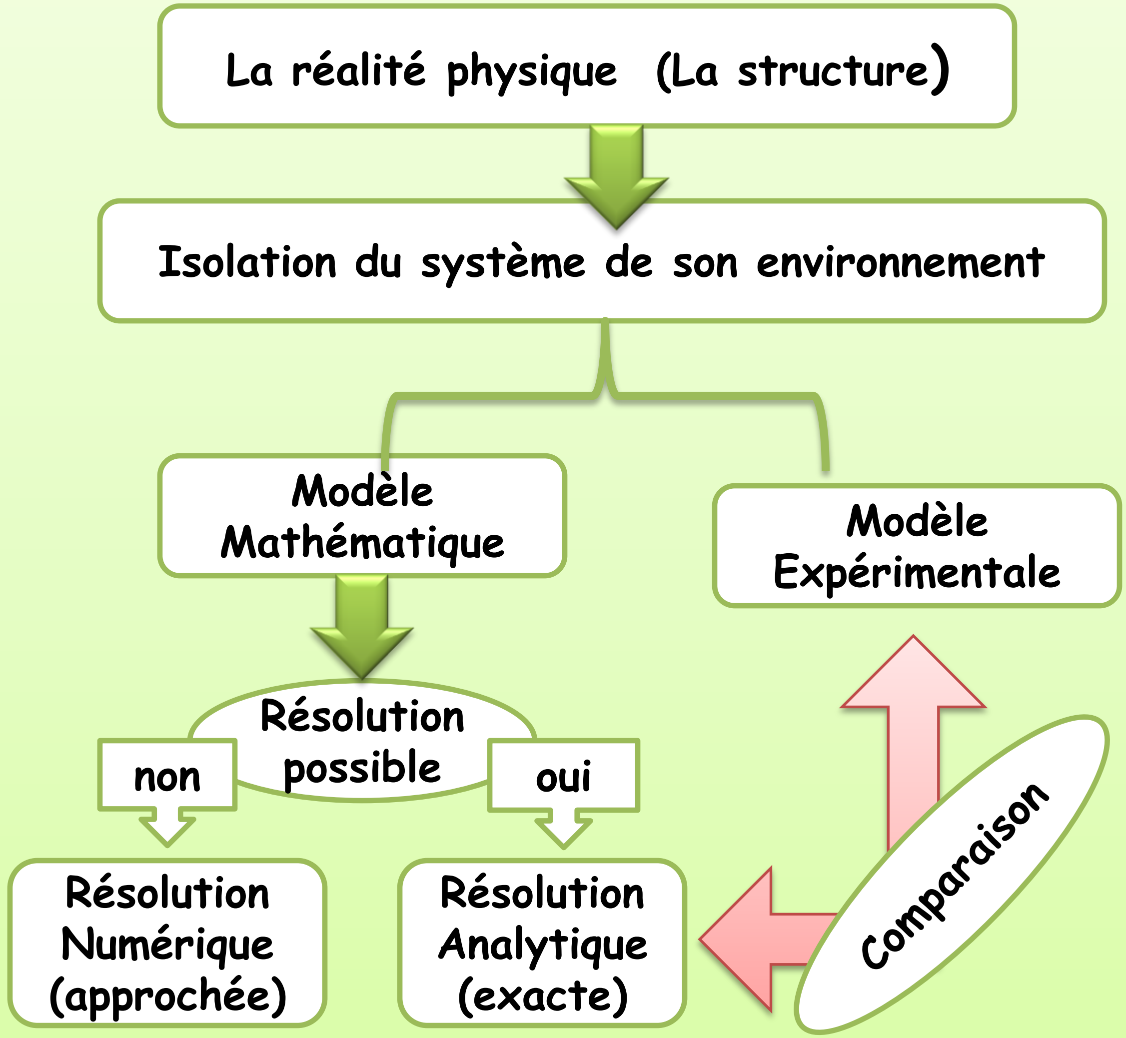
Mission et démarche de l'ingénieur :

- La mission d'un ingénieur , est de concevoir et de dimensionner la structure de manière à fournir à l'entrepreneur les plans nécessaires à la réalisation de cette structure.
- L'ingénieur dans sa démarche de conception doit prévoir le comportement des systèmes physiques , il a recours donc à une simulation , et il doit être conscient qu'entre le modèle et la réalité physique il y a un grand nombre d'approximations maitrisées.

1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :



1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :

SIMULATION :

Définition de selon le dictionnaire français Larousse:

Représentation du comportement d'un processus physique au moyen d'un modèle matériel dont les paramètres et les variables sont les images de ceux du processus étudié.

(Les modèles de simulation prennent le plus souvent la forme de programmes d'ordinateurs auxquels sont parfois associés des éléments de calcul analogique.)

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- Les sciences de L'ingénieur traduisent le comportement des systèmes physiques (corps solides ou liquides …) par des équations d'équilibre aux dérivées partielles, qui sont pas faciles à intégrer.

- Dans la pratique , les solutions analytiques ne sont possibles que pour des cas très simples , dans le cas contraire , la résolution est impossible pour deux raisons :

➢ Le champs à modéliser est inconnu.
➢ La géométrie est trop complexe.

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- **La première difficulté** : pour déterminer les contraintes et les déformations , il faut déterminer les déplacements qui sont les inconnus du problèmes , mais ces derniers sont obtenus par la résolution des équations aux dérivées partielles qui sont pas faciles à intégrer.

- **La deuxième difficulté**: la géométrie des structures est souvent très compliquée ,il faut donc découper le système en composants plus simples, dans chaque partie découpée de la structure on doit déterminer les champs locaux des inconnus.

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- La connaissance des informations locales permettra de reconstituer la géométrie complexe initiale.

- L'idée de la MEF revient à remplacer la structure (milieu continu) par une structure discrétisée , elle sera alors divisée en un certain nombre de sous domaines appelés **éléments** , dont l'assemblage de ces éléments reconstituera la géométrie initiale .

Concept de la MEF (du milieu continu au milieu discrétisé)

En Elasticité, le comportement d'un solide (milieu continu) traduit par Equations d'Equilibre

→ **Méthode des résidus pondérés**

→ **Forme intégrale (milieu continu)**

→ **Méthode des Eléments Finis**

→ **Forme intégrale approximée avec interpolation entre les nœuds (milieu discrétisé)**

→ **Forme algébrique $\{f\}=[k]\ \{u\}$**

→ **Solution numérique Détermination de σ, ε et u**

La MEF en calcul des structures

- La MEF consiste à décomposer la structure (milieu continu) en éléments simples appelés **éléments finis** , chaque éléments est relié à ses voisins par des **nœuds** ; dont les degrés de liberté de chaque nœud (**DDL**) constituent les inconnus du problème.

La MEF en calcul des structures

La structure → Se décompose → Eléments

Eléments → Sont raccordés → Nœuds

Nœuds → Reliés par → Déplacements / Forces

Déplacements, Forces → Relation de rigidité: {f}=[k] {u}

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

3) la MEF en calcul des structures

La MEF en calcul des structures

Un élément Fini :

- Est un domaine géométrique
- Des nœuds
- Des degrés de liberté
- Fonctions mathématiques aux nœuds

Eléments utilisés

- 1D: Barres, Poutres et Coques axisymétriques
- 2D: Elasticité plane, Plaques minces et coques minces.
- 3D: Solides massifs , plaques épaisses et coques épaisses.

La MEF en calcul des structures

Eléments Finis 1D:

Eléments Finis 2D:

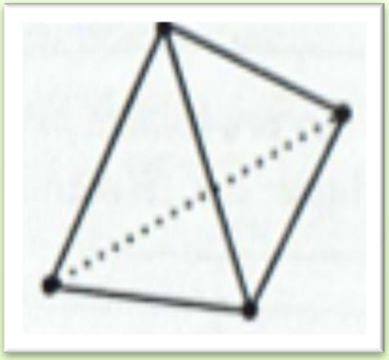
1) Introduction générale

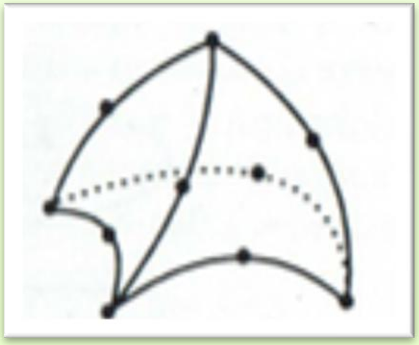
2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

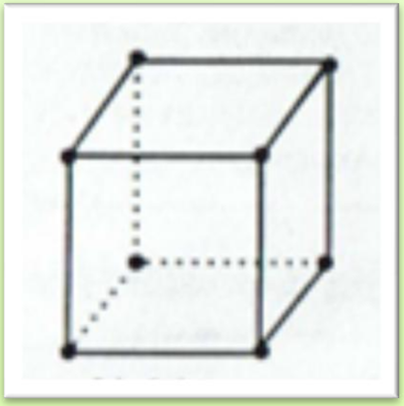
3) la MEF en calcul des structures

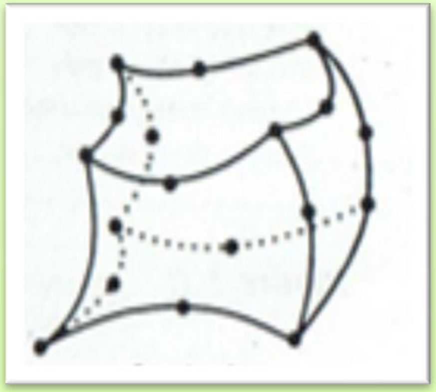
La MEF en calcul des structures

Eléments Finis 3D:







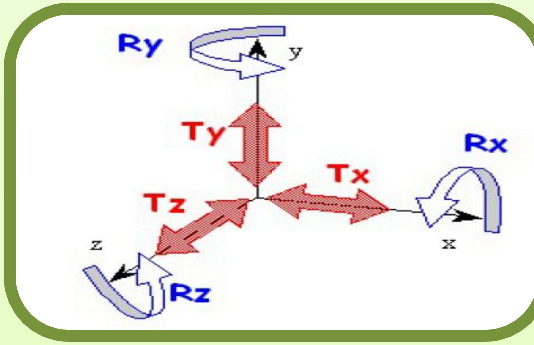


La MEF en calcul des structures

Degré de liberté

Propriétés de mobilité d'un nœud

3 Translations et 3 Rotations



Élément Fini → Peut avoir → **Plusieurs nœuds**

Nœud → Peut avoir → **Plusieurs DDL**

Donc La relation de rigidité est un système d'équations

1) Introduction générale
2) Concept de la Méthode des Eléments Finis
3) la MEF en calcul des structures
4) Principe de l'approximation

Principe de l'approximation.

- Le problème de l'analyse des solides déformables peut être totalement résolu si l'on connait le champ de déplacement en tous point du milieu .

- Le principe de la méthode des éléments finis consiste à restreindre la détermination de ce champ à un nombre fini de points du milieu appelés nœuds.

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

3) la MEF en calcul des structures

4) Principe de l'approximation

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- Le processus du passage du champs continu aux valeurs nodales est appelé **discrétisation**

- Pour définir le champs approché par interpolation des valeurs nodales, on utilise les **fonctions de formes**.

- La fonction de forme permet d'exprimer les déplacements en un point de l'élément à partir des déplacements connus en ses nœuds

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- Le champs de déplacement **u(x)** d'un élément fini est approximé par une **fonction polynomiale** (de forme) **[N]** ,à partir des valeurs nodales de déplacements

$$u(x) \rightarrow u(x) = [N] \{q_e\}$$

- $u(x)$: Champs réel
- $u(x)$: Champs approximé
- $[N]$: Fonction de forme ou d'interpollation
- $\{q_e\}$: Déplacement nodale

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- La forme générale de la fonction polynomiale (de forme) est:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \ldots\ldots$$

- Combien faut il de monômes ?

Élément → **Nombre de nœuds** → **Nombre de DDL par nœuds** → **Nombre de DDL par élément**

le nombre de monômes = nombre de DDL par élément

Principe de l'approximation.

Propriétés de la fonctions de forme

La fonction de forme ou **fonction de pondération** doit être :

- Licite: continue et dérivable
- Vérifiant les conditions aux limites : cinématiquement admissible
- Unique pour un élément et à la frontière entre deux éléments

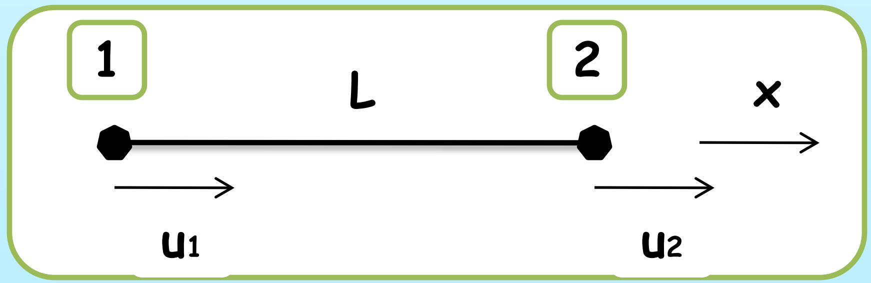
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Nœud 1 avec **1DDL**: translation selon (x) ⟶ u_1

Nœud 2 avec **1DDL**: translation selon (x) ⟶ u_2



Le champ de déplacement approximé s'écrit sous la forme:

$$\boxed{u(x) = [N]\,\{q_e\}}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

$$u(x) = [N]\{q_e\}$$

$$u(x) = [N]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

L'élément **1D** avec **2 nœuds** et **1DDL** par nœud se trouve avec **2DDL par élément**

Donc : la fonction de forme doit avoir deux monômes

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Pour déterminer les valeurs des deux coefficients (α_0)et (α_1) on a besoin des conditions aux limites:

Nœud 1 ($x = 0$) : $U(0)= u_1 \longrightarrow \alpha_0 = u_1$

Nœud 2 ($x = L$) : $U(L)= u_2 \longrightarrow \alpha_1 =(u_2 - u_1)/L$

Le champ de déplacement approximé devient

$$\boxed{u(x)= u_1 + [(u_2 - u_1)/L\ ]\ x}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Le champ de déplacement approximé peut prendre la forme:

$$u(x) = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2$$

Après simplification nous obtenant les deux **fonctions de forme** de **l'élément 1D à 2noeuds et 1DDL par nœud :**

$$N_1(x) = 1 - x/L$$

$$N_2(x) = x/L$$

Principe de l'approximation

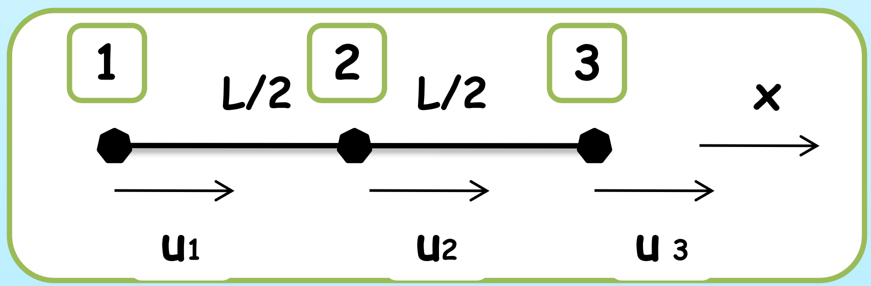
Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Nœud 1 avec **1DDL**: translation selon (x)

Nœud 2 avec **1DDL**: translation selon (x)

Nœud 1 avec **1DDL**: translation selon (x)



$$u(x) = [N]\{q_e\}$$

$$u(x) = [N]\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

L'élément **1D** avec **3 nœuds** et **1DDL** par nœud se trouve avec **3DDL par élément**

Donc : la fonction de forme doit avoir trois monômes

$$u(x)= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Pour déterminer les valeurs des trois coefficients (α_0), (α_1) **et** (α_2) on a besoin des conditions aux limites:

Nœud 1 ($x = 0$) : $U(0)= u_1$

Nœud 2 ($x = L/2$) : $U(L/2)= u_2$

Nœud 3 ($x = L$) : $U(L)= u_3$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Après résoudre le système de trois inconnus et trois équations on obtient les valeurs:

$\alpha_0 = u_1$

$\alpha_1 = -(3/L)\, u_1 + (4/L)\, u_2 - (1/L)\, u_3$

$\alpha_2 = (2/L^2)\, u_1 - (4/L^2)\, u_2 + (2/L^2)\, u_3$

Le champ de déplacement approximé devient

$$u(x) = u_1 + \left[-(3/L)\, u_1 + (4/L)\, u_2 - (1/L)\, u_3\right] x + \left[(2/L^2)\, u_1 - (4/L^2)\, u_2 + (2/L^2)\, u_3\right] x^2$$

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

3) la MEF en calcul des structures

4) Principe de l'approximation

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Après simplification on obtient la forme :

$$u(x) = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2 + N_3(x).U_3$$

$$u(x) = \left[1-(3/L)X+(2/L^2)X^2\right]U_1 + \left[(4/L)X-(4/L^2)X^2\right]U_2 + \left[(-1/L)X+(2/L^2)x^2\right]U_3$$

Les trois fonctions de forme seront :

$$N_1(x) = 1-(3/L)X+(2/L^2)X^2$$

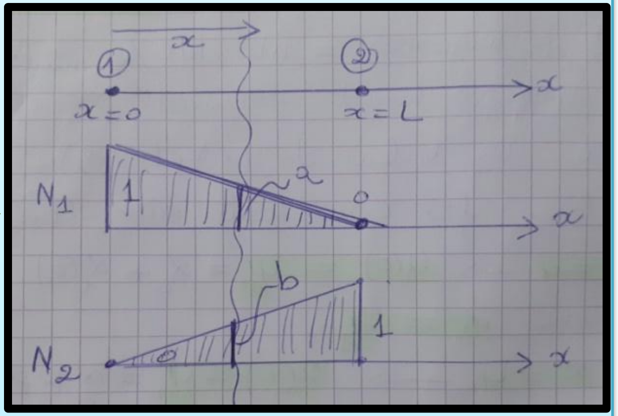
$$N_2(x) = (4/L)X-(4/L^2)X^2$$

$$N_3(x) = (-1/L)X+(2/L^2)x^2$$

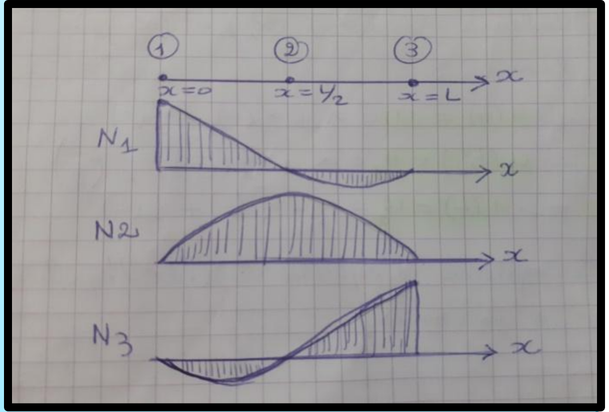
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Elément fini 1D à 2 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément



Elément fini 1D à 3 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément

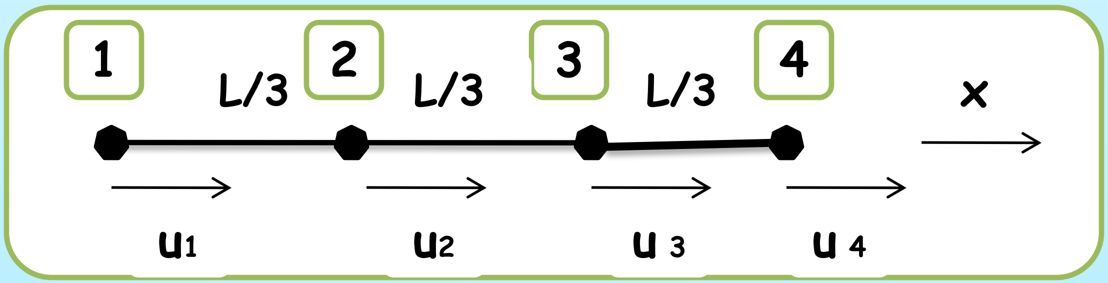


Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Devoir à domicile

Déterminer les fonctions de forme pour un élément (1D) avec quatre nœud et 1DDL par nœud

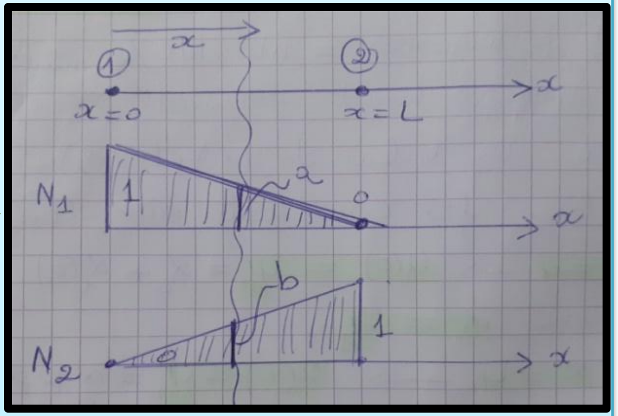


$$u(x) = [N] \{q_e\}$$

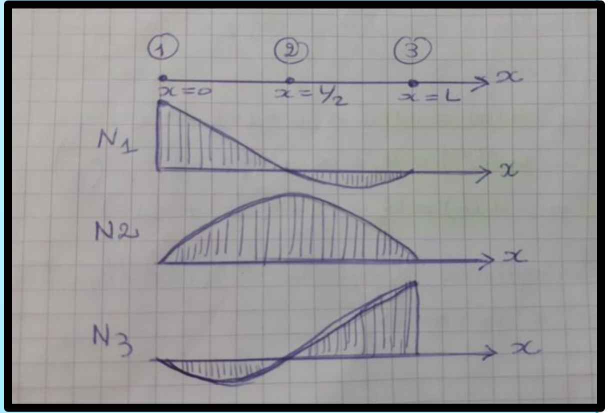
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Elément fini 1D à 2 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément



Elément fini 1D à 3 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément



Formulation des matrice de rigidité

- Pour obtenir le système matriciel du comportement élémentaire ,il faut définir les champs intervenant dans le comportement du milieu.

- il s'agit de:

Champ de déplacements {U}

Champ de contraintes {σ}

Champ de déformations {ε}

Formulation des matrice de rigidité

- Lorsqu'un solide est soumis à des forces extérieures , il se déforme et chaque point de coordonnées **(x,y,z)** se déplace en **(x+u,y+v,z+w)** ; les déplacements relatifs des points génèrent des déformations.

- Dans un élément , le champ de déplacements est défini par l'interpollation des valeurs nodales des déplacements **(u,v,w)** .

$$\boxed{u(x) = [N]\,\{q_e\}}$$

Formulation des matrice de rigidité

$$U(x) = [N] \{q_e\}$$

Dans le cas élastique linéaire ,les déformations sont donnés par les dérivées des déplacements

$$\{\varepsilon\} = [D] \{U\}$$ → cas (1D)

[D] :Matrice des opérateurs de dérivées partielles

Formulation des matrice de rigidité

En élasticité linéaire ,la loi de HOOK permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations .

$$\{\sigma\} = [H]\,\{\varepsilon\}$$

[H] :Matrice de HOOK en fonction du module d'élasticité (E) et coefficient de poisson (v)

Formulation des matrice de rigidité

Le comportement d'un élément fini peut être défini par un système d'équations linéaires sous la forme :

$$\{F_e\} = [K_e]\{q_e\}$$

$[K_e]$:Matrice de rigidité élémentaire
$\{q_e\}$:vecteur des déplacements nodaux
$\{F_e\}$:vecteur des forces nodales équivalentes

$$\{F_e\} = \{F_e^s\} + \{F_e^v\}$$

Forces surfaciques

Forces volumiques

Formulation des matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire peut être écrit sous la forme :

$$[K_e] = \int_V [B]^t.[H].[B]\, dv$$

$$[B] = [D].[N]$$

Matrice des opérateurs

Fonctions de forme

Formulation des matrice de rigidité

Matricede rigidité d'un élément fini (1D) avec (2 nœuds) ,(1DDL) par nœud et de longueur (l)

Nœud 1 avec **1DDL**:

translation selon (x) $\longrightarrow$ u_1

Nœud 2 avec **1DDL**:

translation selon (x) $\longrightarrow$ u_2

$$[K_e] = \int_V [B]^t.[H].[B]\, dv$$

$$[B] = [D].[N]$$

Formulation des matrice de rigidité

Sachant que :

$[N] = [\ N_1=(1-x)/l \qquad N_2=x/l\ ]$

$\varepsilon = \partial u/\partial x \rightarrow [D] = \partial/\partial x$

Nous avons donc:

$[B] = [\partial/\partial x]\ [(1-x)/l \quad x/l\ ]$

$= [-1/l \quad 1/l\ ]$

$[K_e] = \int_V \begin{pmatrix} -1/l \\ 1/l \end{pmatrix} . [H] . [-1/l \quad 1/l\ ]\ dv$

Formulation des matrice de rigidité

Nous avons :

$$dv = ds\ .dx$$

$$[H] = [E]$$

Nous avons donc:

$$[K_e] = ES.\ {}_{x}\!\int \begin{pmatrix} -1/l \\ 1/l \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1/l & 1/l \end{bmatrix} dx$$

$$[K_e] = ES.\ {}_{0}\!\int^{l} \begin{pmatrix} 1/l^2 & -1/l^2 \\ -1/l^2 & 1/l^2 \end{pmatrix} dx$$

Formulation des matrice de rigidité

Finalement on obtient:

$$[K_e]=ES/l.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes de cours

Méthode des Eléments Finis

Mme Nawel MEZIGHECHE
Maitre Assistant
Université Badji Mokhtar de Annaba

1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :

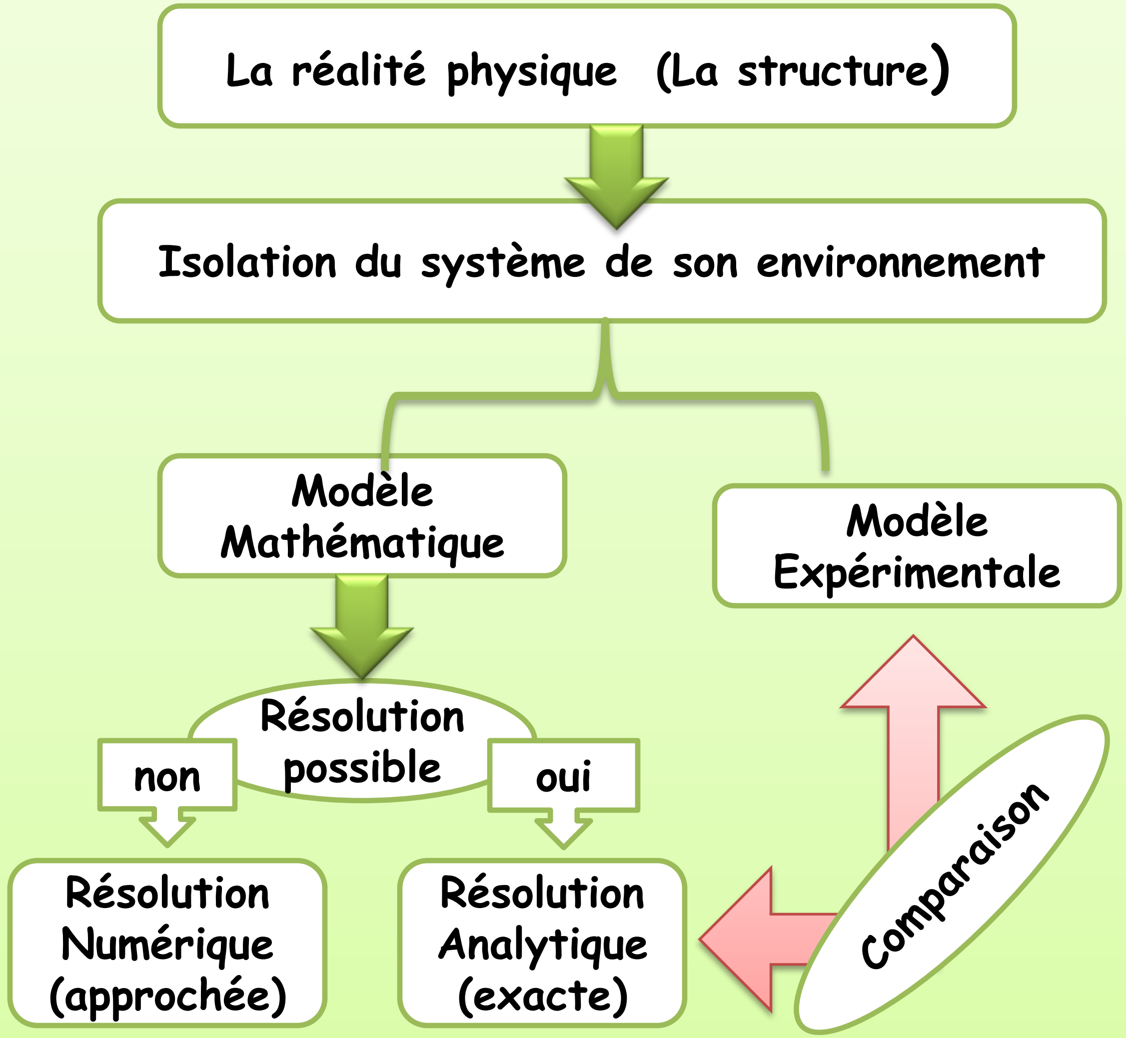
- La mission d'un ingénieur , est de concevoir et de dimensionner la structure de manière à fournir à l'entrepreneur les plans nécessaires à la réalisation de cette structure.

- L'ingénieur dans sa démarche de conception doit prévoir le comportement des systèmes physiques , il a recours donc à une simulation , et il doit être conscient qu'entre le modèle et la réalité physique il y a un grand nombre d'approximations maitrisées.

1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :



1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :

SIMULATION :

Définition de selon le dictionnaire français Larousse:

Représentation du comportement d'un processus physique au moyen d'un modèle matériel dont les paramètres et les variables sont les images de ceux du processus étudié.

(Les modèles de simulation prennent le plus souvent la forme de programmes d'ordinateurs auxquels sont parfois associés des éléments de calcul analogique.)

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- Les sciences de L'ingénieur traduisent le comportement des systèmes physiques (corps solides ou liquides …) par des équations d'équilibre aux dérivées partielles, qui sont pas faciles à intégrer.

- Dans la pratique , les solutions analytiques ne sont possibles que pour des cas très simples , dans le cas contraire , la résolution est impossible pour deux raisons :

➢ Le champs à modéliser est inconnu.
➢ La géométrie est trop complexe.

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- **La première difficulté** : pour déterminer les contraintes et les déformations , il faut déterminer les déplacements qui sont les inconnus du problèmes , mais ces derniers sont obtenus par la résolution des équations aux dérivées partielles qui sont pas faciles à intégrer.

- **La deuxième difficulté**: la géométrie des structures est souvent très compliquée ,il faut donc découper le système en composants plus simples, dans chaque partie découpée de la structure on doit déterminer les champs locaux des inconnus.

1) Introduction générale

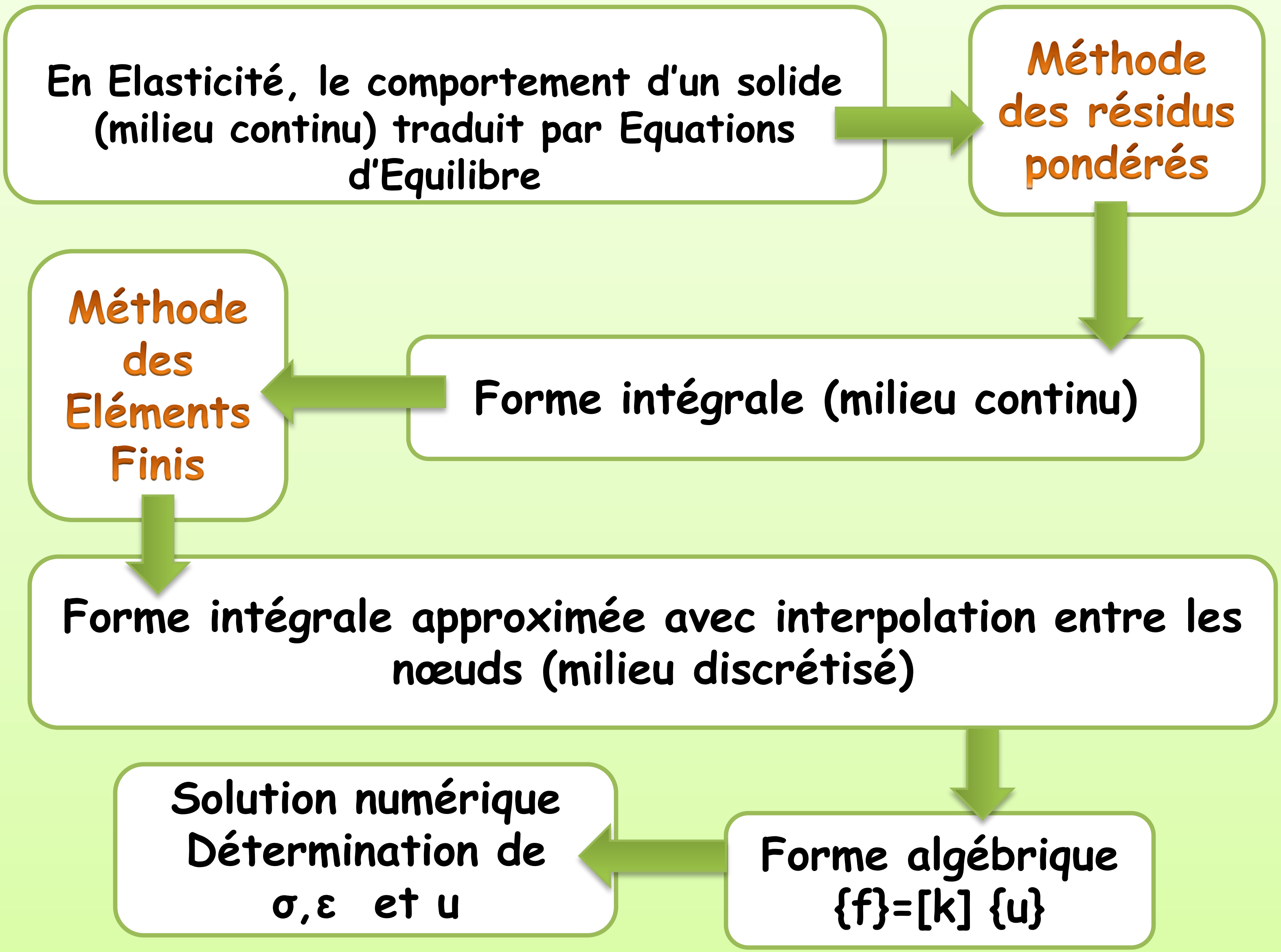
2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- La connaissance des informations locales permettra de reconstituer la géométrie complexe initiale.

- L'idée de la MEF revient à remplacer la structure (milieu continu) par une structure discrétisée , elle sera alors divisée en un certain nombre de sous domaines appelés **éléments** , dont l'assemblage de ces éléments reconstituera la géométrie initiale .

Concept de la MEF (du milieu continu au milieu discrétisé)



1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

3) la MEF en calcul des structures

La MEF en calcul des structures

- La MEF consiste à décomposer la structure (milieu continu) en éléments simples appelés **éléments finis** , chaque éléments est relié à ses voisins par des **nœuds** ; dont les degrés de liberté de chaque nœud (**DDL**) constituent les inconnus du problème.

La MEF en calcul des structures

La structure → Se décompose → **Eléments**

Eléments → Sont raccordés → **Nœuds**

Nœuds → Reliés par → **Déplacements** / **Forces**

Relation de rigidité: {f}=[k] {u}

La MEF en calcul des structures

Un élément Fini :

- Est un domaine géométrique
- Des nœuds
- Des degrés de liberté
- Fonctions mathématiques aux nœuds

Eléments utilisés

- 1D: Barres, Poutres et Coques axisymétriques
- 2D: Elasticité plane, Plaques minces et coques minces.
- 3D: Solides massifs , plaques épaisses et coques épaisses.

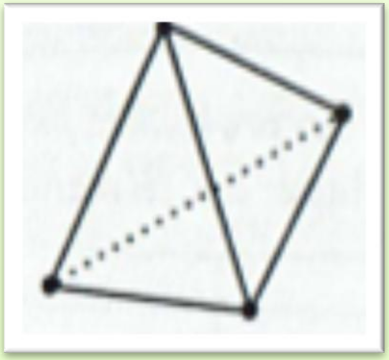
La MEF en calcul des structures

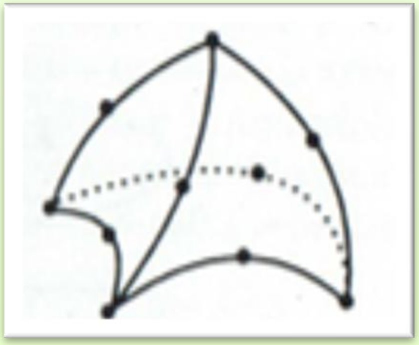
Eléments Finis 1D:

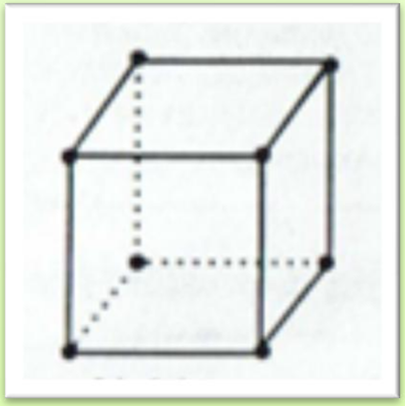
Eléments Finis 2D:

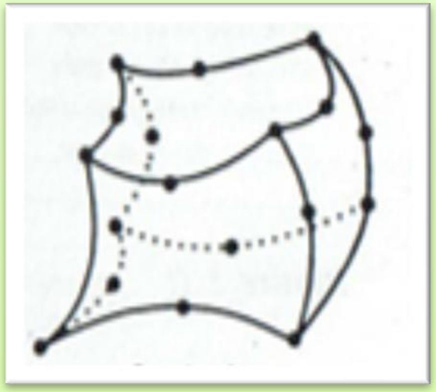
La MEF en calcul des structures

Eléments Finis 3D:







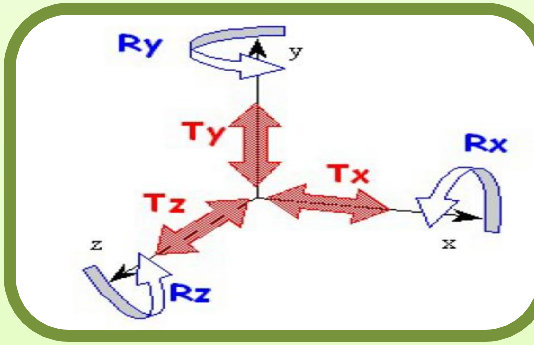


- La MEF en calcul des structures

Degré de liberté

Propriétés de mobilité d'un nœud

3 Translations et 3 Rotations



Élément Fini → Peut avoir → **Plusieurs nœuds**

Nœud → Peut avoir → **Plusieurs DDL**

Donc La relation de rigidité est un système d'équations

Principe de l'approximation.

- Le problème de l'analyse des solides déformables peut être totalement résolu si l'on connait le champ de déplacement en tous point du milieu .

- Le principe de la méthode des éléments finis consiste à restreindre la détermination de ce champ à un nombre fini de points du milieu appelés nœuds.

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- Le processus du passage du champs continu aux valeurs nodales est appelé **discrétisation**
- Pour définir le champs approché par interpolation des valeurs nodales, on utilise les **fonctions de formes**.
- La fonction de forme permet d'exprimer les déplacements en un point de l'élément à partir des déplacements connus en ses nœuds

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- Le champs de déplacement **u(x)** d'un élément fini est approximé par une **fonction polynomiale** (de forme) **[N]** ,à partir des valeurs nodales de déplacements

$$u(x) \rightarrow u(x) = [N] \{q_e\}$$

Champs réel

Champs approximé

Fonction de forme ou d'interpollation

Déplacement nodale

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- La forme générale de la fonction polynomiale (de forme) est:

$$u(x)= \alpha_0 +\alpha_1 x +\alpha_2 x^2 +\alpha_3 x^3 +\alpha_4 x^4 \ldots\ldots$$

- Combien faut il de monômes ?

Élément → Nombre de nœuds → Nombre de DDL par nœuds → Nombre de DDL par élément

le nombre de monômes = nombre de DDL par élément

Principe de l'approximation.

Propriétés de la fonctions de forme

La fonction de forme ou **fonction de pondération** doit être :

- Licite: continue et dérivable
- Vérifiant les conditions aux limites : cinématiquement admissible
- Unique pour un élément et à la frontière entre deux éléments

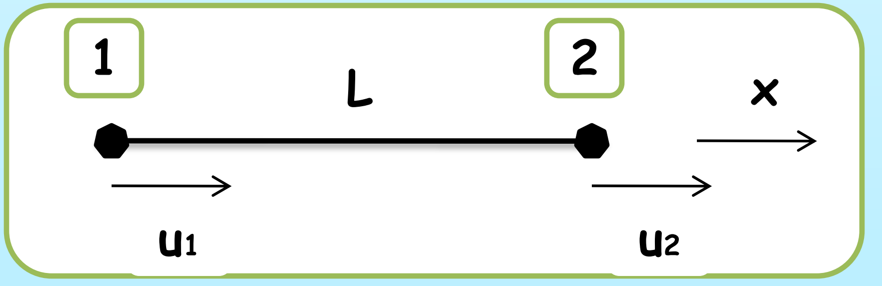
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Nœud 1 avec **1DDL**: translation selon (x) $\longrightarrow$ $\mathbf{u_1}$

Nœud 2 avec **1DDL**: translation selon (x) $\longrightarrow$ $\mathbf{u_2}$



Le champ de déplacement approximé s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{u(x) = [N]\ \{q_e\}}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

$$u(x) = [N]\{q_e\}$$

$$u(x) = [N]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

L'élément **1D** avec **2 nœuds** et **1DDL** par nœud se trouve avec **2DDL par élément**

Donc : la fonction de forme doit avoir deux monômes

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Pour déterminer les valeurs des deux coefficients (α_0)et (α_1) on a besoin des conditions aux limites:

Nœud 1 (x = 0) :$U(0)= u_1 \longrightarrow \alpha_0 = u_1$

Nœud 2 (x = L) : $U(L)= u_2 \longrightarrow \alpha_1 =(u_2 - u_1)/L$

Le champ de déplacement approximé devient

$$\boxed{u(x)= u_1 + [(u_2 - u_1)/L\ ]\, x}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Le champ de déplacement approximé peut prendre la forme:

$$u(x) = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2$$

Après simplification nous obtenant les deux **fonctions de forme** de **l'élément 1D à 2noeuds et 1DDL par nœud :**

$$N_1(x) = 1 - x/L$$

$$N_2(x) = x/L$$

Principe de l'approximation

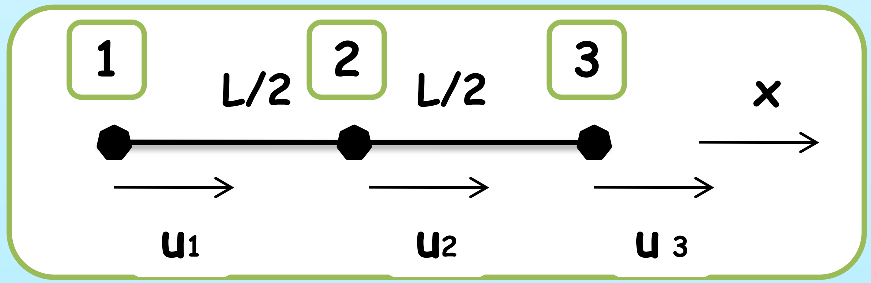
Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Nœud 1 avec **1DDL**: translation selon (x)

Nœud 2 avec **1DDL**: translation selon (x)

Nœud 1 avec **1DDL**: translation selon (x)



$$u(x) = [N]\,\{q_e\}$$

$$u(x) = [N]\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

L'élément **1D** avec **3 nœuds** et **1DDL** par nœud se trouve avec **3DDL par élément**

Donc : la fonction de forme doit avoir trois monômes

$$\boxed{u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2}$$

Pour déterminer les valeurs des trois coefficients (α_0), (α_1) **et** (α_2) on a besoin des conditions aux limites:

Nœud 1 $(x = 0)$:$U(0) = u_1$

Nœud 2 $(x = L/2)$: $U(L/2) = u_2$

Nœud 3 $(x = L)$: $U(L) = u_3$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Après résoudre le système de trois inconnus et trois équations on obtient les valeurs:

$\alpha_0 = u_1$

$\alpha_1 = -(3/L)\, u_1 + (4/L)\, u_2 - (1/L)\, u_3$

$\alpha_2 = (2/L^2)\, u_1 - (4/L^2)\, u_2 + (2/L^2)\, u_3$

Le champ de déplacement approximé devient

$$u(x) = u_1 + \left[-(3/L)\, u_1 + (4/L)\, u_2 - (1/L)\, u_3\right] x + \left[(2/L^2)\, u_1 - (4/L^2)\, u_2 + (2/L^2)\, u_3\right] x^2$$

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Après simplification on obtient la forme :

$$u(x) = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2 + N_3(x).U_3$$

$$u(x) = \left[1-(3/L)X + (2/L^2)X^2\right]U_1 + \left[(4/L)X - (4/L^2)X^2\right]U_2 + \left[(-1/L)X + (2/L^2)x^2\right]U_3$$

Les trois fonctions de forme seront :

$$N_1(x) = 1-(3/L)X + (2/L^2)X^2$$

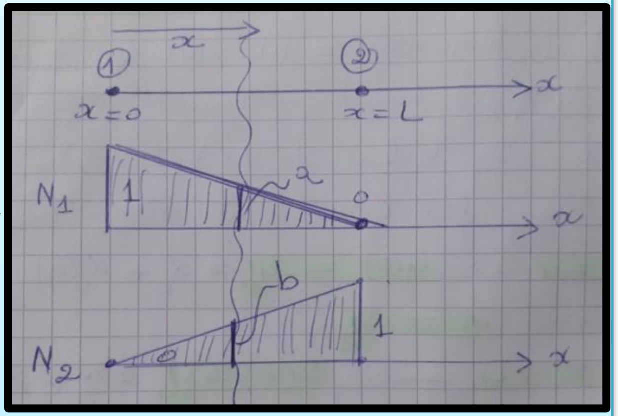
$$N_2(x) = (4/L)X - (4/L^2)X^2$$

$$N_3(x) = (-1/L)X + (2/L^2)x^2$$

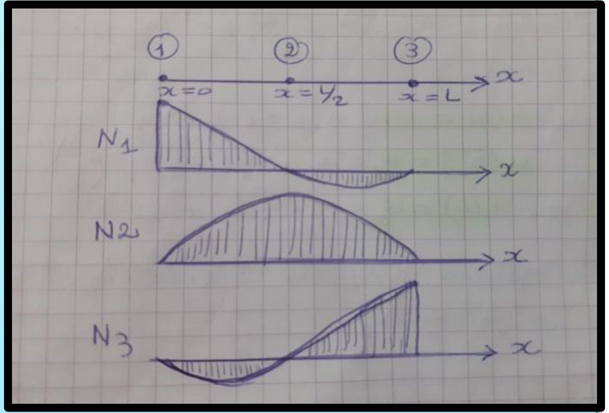
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Elément fini 1D à 2 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément



Elément fini 1D à 3 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément

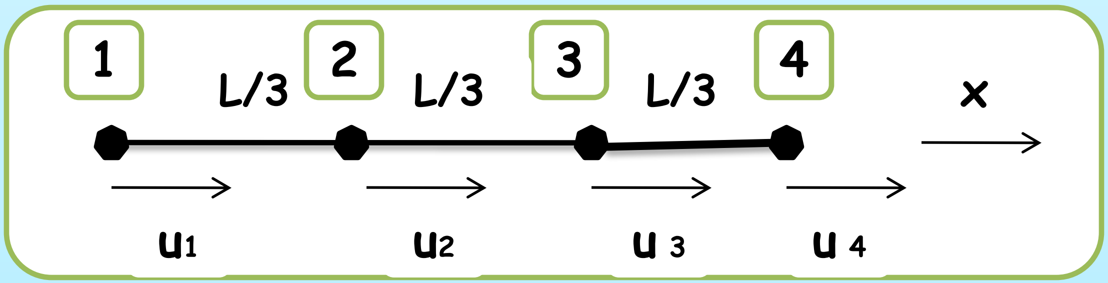


Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Devoir à domicile

Déterminer les fonctions de forme pour un élément (1D) avec quatre nœud et 1DDL par nœud



$$u(x) = [N]\,\{q_e\}$$

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

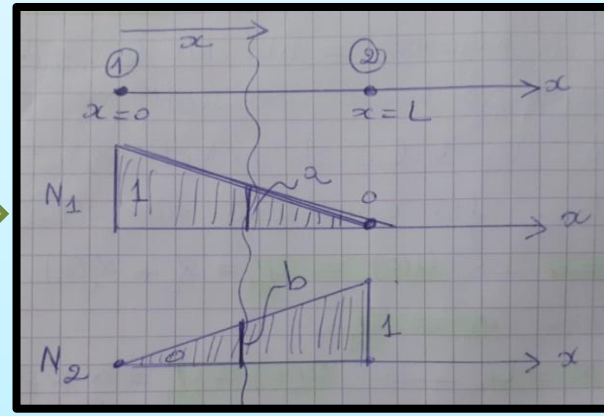
3) la MEF en calcul des structures

4) Principe de l'approximation

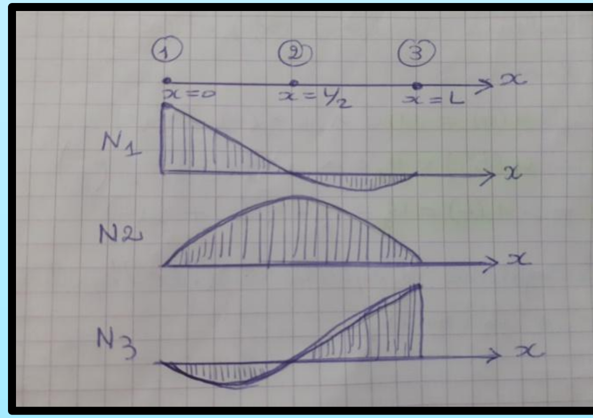
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Elément fini 1D à 2 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément



Elément fini 1D à 3 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément



Formulation des matrice de rigidité

- Pour obtenir le système matriciel du comportement élémentaire ,il faut définir les champs intervenant dans le comportement du milieu.
- il s'agit de:

Champ de déplacements {U}

Champ de contraintes {σ}

Champ de déformations {ε}

Formulation des matrice de rigidité

- Lorsqu'un solide est soumis à des forces extérieures , il se déforme et chaque point de coordonnées **(x,y,z)** se déplace en **(x+u,y+v,z+w)** ; les déplacements relatifs des points génèrent des déformations.

- Dans un élément , le champ de déplacements est défini par l'interpollation des valeurs nodales des déplacements **(u,v,w)** .

$$\boxed{u(x) = [N]\{q_e\}}$$

Formulation des matrice de rigidité

$U(x) = [N]\{q_e\}$

Dans le cas élastique linéaire ,les déformations sont donnés par les dérivées des déplacements

$\{\varepsilon\} = [D]\{U\}$ → cas (1D)

[D] :Matrice des opérateurs de dérivées partielles

Formulation des matrice de rigidité

En élasticité linéaire ,la loi de HOOK permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations .

$$\boxed{\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\}}$$

[H] :Matrice de HOOK en fonction du module d'élasticité (E) et coefficient de poisson (v)

Formulation des matrice de rigidité

Le comportement d'un élément fini peut être défini par un système d'équations linéaires sous la forme :

$$\{F_e\} = [K_e]\{q_e\}$$

$[K_e]$:Matrice de rigidité élémentaire
$\{q_e\}$:vecteur des déplacements nodaux
$\{F_e\}$:vecteur des forces nodales équivalentes

$$\{F_e\} = \{F_e^s\} + \{F_e^v\}$$

Forces surfaciques

Forces volumiques

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode des Eléments Finis

3) la MEF en calcul des structures

4) Principe de l'approximation

5) Formulation des matrices de rigidité élémentaires

Formulation des matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire peut être écrit sous la forme :

$$[K_e] = {}_V\int [B]^t.[H].[B]\, dv$$

$$[B] = [D].[N]$$

Matrice des opérateurs

Fonctions de forme

Formulation des matrice de rigidité

Matricede rigidité d'un élément fini (1D) avec (2 nœuds) ,(1DDL) par nœud et de longueur (l)

Nœud 1 avec **1DDL**:

translation selon (x) $\longrightarrow$ **u_1**

Nœud 2 avec **1DDL**:

translation selon (x) $\longrightarrow$ **u_2**

$$[K_e] = {}_V\int [B]^t . [H] . [B] \, dv$$

$$[B] = [D].[N]$$

Formulation des matrice de rigidité

Sachant que :

$[N] = [\ N_1=(1-x)/l \qquad N_2=x/l\ ]$

$\varepsilon = \partial u/\partial x \rightarrow [D] = \partial/\partial x$

Nous avons donc:

$$[B] = [\partial/\partial x]\ [(1-x)/l \quad x/l\ ]$$
$$= [-1/l \quad 1/l\ ]$$

$$[K_e] = \int_V \begin{pmatrix} -1/l \\ 1/l \end{pmatrix} . [H] . [-1/l \quad 1/l\ ]\, dv$$

Formulation des matrice de rigidité

Nous avons :

$$dv = ds\ .dx$$

$$[H] = [E]$$

Nous avons donc:

$$[K_e] = ES.\ {}_x\int \begin{pmatrix} -1/l \\ 1/l \end{pmatrix} [-1/l \quad 1/l\ ]\ dx$$

$$[K_e] = ES.\ {}_0\int^{l} \begin{pmatrix} 1/l^2 & -1/l^2 \\ -1/l^2 & 1/l^2 \end{pmatrix} dx$$

Formulation des matrice de rigidité

Finalement on obtient:

$$[K_e]=ES/l.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Assemblage

Pour résoudre un problèmes par la MEF :

1- Choix d'un élément fini simple.

2- Remplacer la structure initiale par la somme des éléments choisis ,reliés par des nœuds en recouvrant au mieux la forme initiale sans faille ni chevauchement.

3- Choisir une fonction d'interpollation pour l'élément fini, déterminer les rigidités élémentaires.

4- Faire l'assemblage

Assemblage

L'assemblage consiste à reconstituer la structure initiale discrétisée en éléments finis de manière à:

- **Un nœud appartenant à plusieurs éléments possède un seul déplacement.**
- **les forces agissant sur un nœud appartenant à plusieurs éléments doivent être équilibrées :**

$$\sum F_{ext} + \sum F_{int} = 0$$

- **les rigidités d'un nœud appartenant à plusieurs éléments est la somme des rigidités provenant de tous les éléments.**

Assemblage

- Les caractéristiques d'un élément fini (élémentaires) sont définies dans un repère local.

$$\{F_e\} = [K_e]\,\{q_e\}$$

- Les caractéristiques d'une structure (structurales) sont définies dans un repère global.

$$\{F_s\} = [K_s]\,\{q_s\}$$

Assemblage

Passage du domaine discrétisé au domaine continu :

Les caractéristiques(élémentaires):

$\{F_e\}$, $[K_e]$ et $\{q_e\}$

Doivent être sommer dans un **repère global** pour obtenir

Les caractéristiques(élémentaires):

$\{F_s\}$, $[K_s]$ et $\{q_s\}$

Assemblage

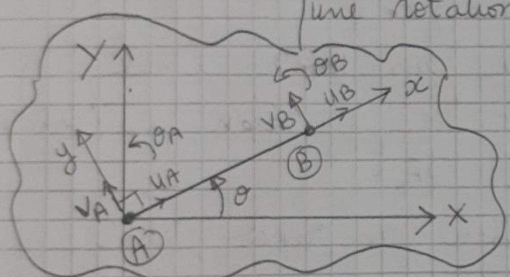
Pour obtenir la structure assemblée à partir des éléments finis , on doit transformer {Fe}, [Ke] et {qe} qui sont définis dans un repère local au repère global.

Changement de repère
cas d'un élément poutre générale

une poutre (AB), avec deux noeuds et 3ddl par noeud

noeud (A) : $\begin{cases} \text{possède deux translations } u_A \text{ et } V_A \\ \text{une rotation } \theta_A \end{cases}$

noeud (B) : $\begin{cases} \text{possède deux translations } u_B \text{ et } V_B \\ \text{une rotation } \theta_B \end{cases}$



(X, Y) → repère global

(x, y) → repère local orienté de (θ) par rapport à (X-Y)

noeud (A) : $\{q_{eA}\}[K_{eA}] = \{F_{eA}\}$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} u_A \\ V_A \\ \theta_A \end{Bmatrix} [K_{eA}] = \begin{Bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ M_A \end{Bmatrix}$$

noeud (B) : $\{q_{eB}\}[K_{eB}] = \{F_{eB}\}$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} u_B \\ V_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} [K_{eB}] = \begin{Bmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ M_B \end{Bmatrix}$$

Elément (AB) : $\{q_{AB}\}[K_{AB}] = \{F_{AB}\}$ (repère global)

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} u_{AG} \\ V_{AG} \\ \theta_{AG} \\ u_{BG} \\ V_{BG} \\ \theta_{BG} \end{Bmatrix} [K_{AB}] = \begin{Bmatrix} F_{AGx} \\ F_{AGy} \\ M_A \\ F_{BGx} \\ F_{BGy} \\ M_B \end{Bmatrix}$$

Après transformation on obtient :

$$\begin{cases} u_A = u_{AG}\cos\theta + V_{AG}\sin\theta \\ V_A = -u_{AG}\sin\theta + V_{AG}\cos\theta \\ \theta_A = \theta_{AG} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_B = u_{BG}\cos\theta + V_{BG}\sin\theta \\ V_B = -u_{BG}\sin\theta + V_{BG}\cos\theta \\ \theta_B = \theta_{BG} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{Ax} = F_{AGx}\cdot\cos\theta + F_{AGy}\cdot\sin\theta \\ F_{Ay} = -F_{AGx}\cdot\sin\theta + F_{AGy}\cdot\cos\theta \\ M_A = M_{AG} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{Bx} = F_{BGx}\cdot\cos\theta + F_{BGy}\sin\theta \\ F_{By} = -F_{BGx}\sin\theta + F_{BGy}\cos\theta \\ M_B = M_{BG} \end{cases}$$

on peut écrire

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ V_A \\ \theta_A \\ u_B \\ V_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{[R]} \begin{Bmatrix} u_{AG} \\ V_{AG} \\ \theta_{AG} \\ u_{BG} \\ V_{BG} \\ \theta_{BG} \end{Bmatrix}$$

Donc : $\{q_{AB}\} = [R]\{q_{ABG}\}$

$\{F_{AB}\} = [R]\{F_{ABG}\}$

$[R]$: matrice de rotation

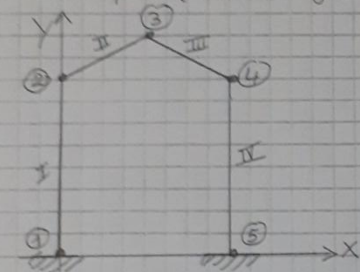
Nous avons : $[K_{AB}]\{q_{AB}\} = \{F_{AB}\} \longrightarrow$ repère local

Repère global $\longrightarrow [K_{AB}][R]\{q_{ABG}\} = [R]\{F_{ABG}\}$

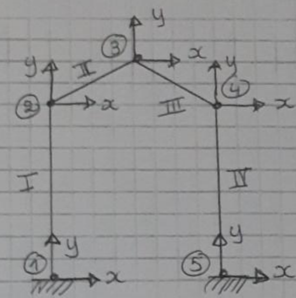
$$\underbrace{[R]^{-1}[K_{AB}][R]}_{[K_{ABG}]}\{q_{ABG}\} = \underbrace{[R]^{-1}[R]}_{[I]\ \text{matrice unitaire}}\{F_{ABG}\}$$

Donc : $[K_{ABG}] = [R]^{-1}[K_{AB}][R]$

Exemple (Assemblage) :



structure (système d'axes global)



structure (systèmes d'axes locaux)

Elément I : Noeud ① , Noeud ② $\rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Elément II : Noeud ② , Noeud ③ $\rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$

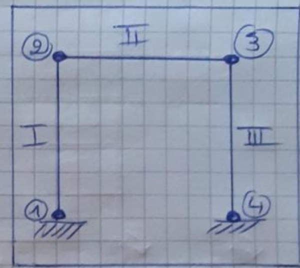
Elément III : Noeud ③ , Noeud ④ $\rightarrow \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$

Elément IV : Noeud ④ , Noeud ⑤ $\rightarrow \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$

$$[K_G] = \begin{array}{c|c} \text{noeud} & \begin{array}{ccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array} & \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \end{array}$$

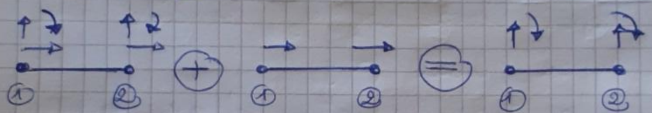
Exemple ② : Assemblage

Soit la structure composée de trois éléments (I, II, III) représentée ci-contre.



Elément : barre avec (02) noeuds

Comportement : $\begin{cases} \text{flexion + membrane} \\ \text{3 ddl par noeud} \end{cases}$

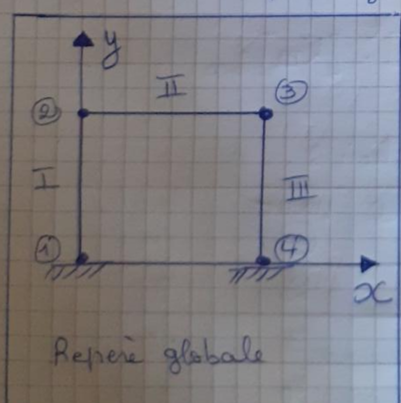


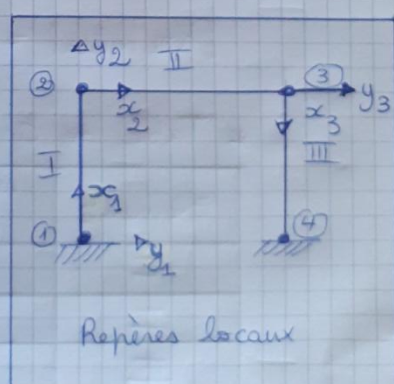
* Le vecteur déplacement élémentaire :

$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

→ donc la matrice de rigidité locale sera de taille 6×6

* Choix du repère globale pour la structure :





- Elément I : avec les noeuds ① et ②
  le repère local (x_1, y_1) ne coïncide pas avec le repère global (x, y)
  → il faut une transformation d'axes vers le global avec un angle de $(\theta = 90°)$

$$[K_I]_{global} = [D]^t \cdot [K_I]_{local} \cdot [D]$$

- Elément II : avec les noeuds ② et ③
  le repère local (x_2, y_2) coïncide avec le repère global (x, y)
  → la transformation d'axes n'est pas nécessaire.

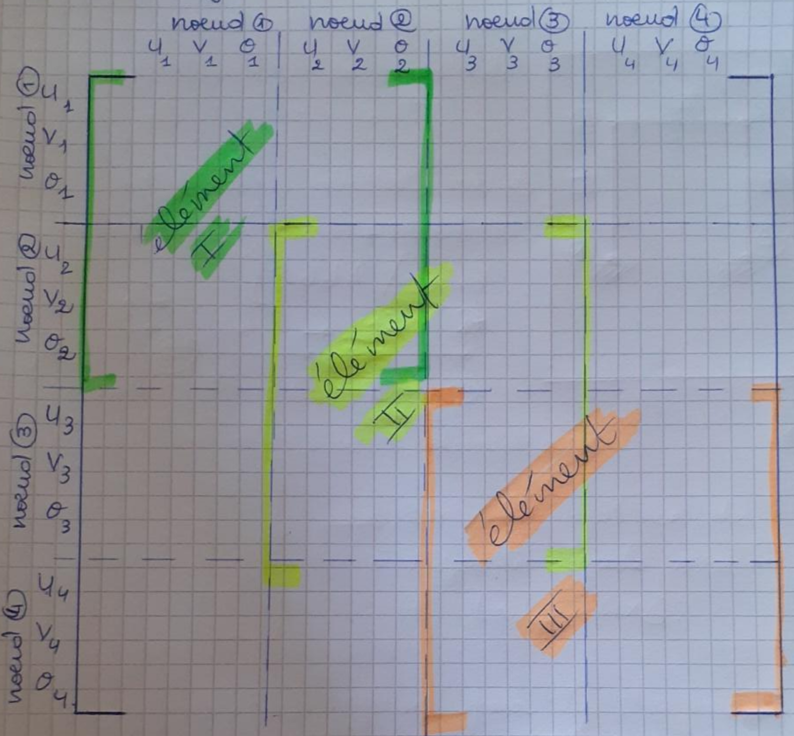
- Elément III : avec les noeuds ③ et ④
  le repère local (x_3, y_3) ne coïncide pas avec le repère global (x, y)
  → il faut une transformation d'axes vers le globale avec un angle de $(\theta = -90°)$

$$[K_{III}]_{global} = [D]^t \cdot [K_{III}]_{local} \cdot [D]$$

* Table de connection :

Eléments	noeud ①	noeud ②	Angle (θ)
I	1	2	90°
II	2	3	0°
III	3	4	-90°

* Assemblage :


noeud ①
noeud ②
noeud ③
noeud ④
u_1 v_1 θ_1
u_2 v_2 θ_2
u_3 v_3 θ_3
u_4 v_4 θ_4
élément I
élément II
élément III