ENSTP
المدرسة الوطنية العليا للأشغال العمومية
École Nationale Supérieure des Travaux Publics
National School of Built and Ground Works Engineering

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

EXAMEN FINAL – SEMESTRE 4

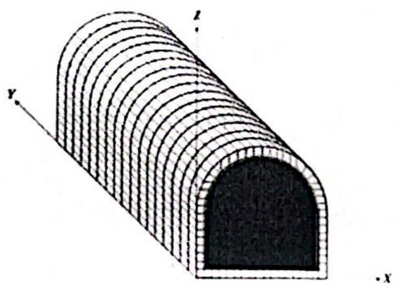
2ème ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS **JUIN 2024**

Nom : .... ***Prénom :*** .... ***Groupe :*** ....

L'introduction de la méthode des éléments finis (MEF) dans le domaine géotechnique est l'une des réalisations les plus significatives dans l'étude de l'interaction sol-structure au cours des dernières décennies.

L'excavation d'ouvrages souterrains et, en particulier, de tunnels représente un problème tridimensionnel complexe. La pratique courante de dimensionnement des tunnels, notamment vis-à-vis des déformations, s'appuie principalement sur l'approche numérique en déformations planes, basée sur les principes de la méthode convergence–confinement.

Cette étude présente un modèle THM (Thermal-Hydraulic-Mechanical) d'un tunnel rocheux où deux modèles en éléments finis (type CST et Q4) sont utilisés tels qu'illustrés sur la *figure 1*.



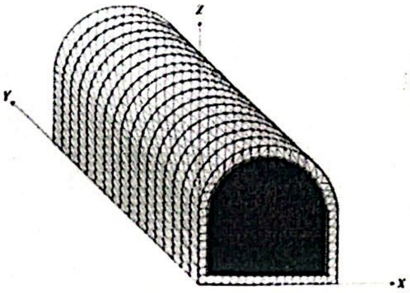


Figure 1. Modèles numériques par éléments finis

(1a) Modèle type Q4 ***(1b) Modèle type CST***

1ère Partie : (08 Points)		**NOTE PARTIE 01 :**	
N°	**QUESTIONS**	**RÉPONSES**	
1	Citer le type d'état de comportement que présente ce modèle de tunnel ? Choisir le plan et préciser l'orientation des axes en vérifiant les conditions de modélisation dans le plan.	**EDP / Plan X-Z** **Vérification des conditions :** **1- Troisième dim plus grande que les dim en plan** **2- Chargement dans le plan** **3- Section constante** **4- Même matériau sur toute la longueur**	
2	Si le type d'appui est bien choisi mais il est insuffisant, il y a erreur de :	Discrétisation	⊗
		Modélisation	
		Approximation	
3	Pour régler ce problème concernant les appuis, il est préférable de :	Raffiner le maillage	⊗
		Changer de type d'élément	
		Augmenter le degré d'approximation	
4	Pour utiliser une bonne approximation mathématique, l'élément de discrétisation utilisé dans les deux modèles est-il avantageux ? Justifier votre réponse.	**En termes de déformations le Q4 est plus avantageux par rapport au CST.** **Pour le modèle Q4, les déformations sont linéaires (variables suivant la position).**	

ENSTP

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

EXAMEN FINAL – SEMESTRE 4

2ème ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS **JUIN 2024**

Nom : .... ***Prénom :*** .... ***Groupe :*** ....

<table>
<tr><td rowspan="7">5</td><td rowspan="7">Pour les deux modèles adoptés, donner les dimensions de :</td><td></td><td>CST</td><td>Q4</td></tr>
<tr><td>Champ du déplacement</td><td>2×1</td><td>2×1</td></tr>
<tr><td>Vecteur de déformations</td><td>3×1</td><td>3×1</td></tr>
<tr><td>Matrice des fonctions d'interpolation nodales</td><td>2×6</td><td>2×8</td></tr>
<tr><td>Matrice B</td><td>3×6</td><td>3×8</td></tr>
<tr><td>Matrice de rigidité</td><td>6×6</td><td>8×8</td></tr>
<tr><td>Matrice de masse</td><td>6×6</td><td>8×8</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6</td><td rowspan="3">Pour valider la discrétisation (maillage) de ce modèle bidimensionnel qu'analysez-vous ?</td><td>Les contraintes</td><td colspan="2">⊗</td></tr>
<tr><td>Les déplacements</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Les déformations</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Quel modèle donne une meilleure représentation des conditions aux limites sachant que le nombre d'éléments CST est le double de celui de Q4 ?
Justifier votre réponse.</td><td colspan="3">Même représentation des CAL.
Puisque les deux éléments ont le même nombre de nœud au niveau des CAL</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Quelle est la différence entre les deux modèles en termes de précision lorsqu'on utilise :
1- Le même nombre d'éléments ?
2- Un nombre d'éléments CST égal au double des éléments Q4 ?</td><td colspan="3">1- Q4 assure une meilleure précision par rapport CST en termes de contrainte-déformation.
2- Les deux assurent une bonne précision</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Pourquoi les matrices de comportement des états de déformations et de contraintes planes sont-elles différentes ?</td><td colspan="3">▪ ECP : $\sigma_z = 0$ et $\varepsilon_z \neq 0$
▪ EDP : $\varepsilon_z = 0$ et $\sigma_z \neq 0$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Si on remplace l'élément fini utilisé dans les deux modèles par des éléments finis d'ordre supérieur tels que le LST et le Q9, en gardant le même nombre d'éléments mentionné dans la figure 1, peut-on avoir :
➢ Un degré de précision plus avantageux dans la représentation des conditions aux limites ?
➢ Des modèles de chargement équivalent ?
Justifier vos réponses.</td><td colspan="3">➢ Degré de précision : le même
➢ Chargement équivalent : le même</td></tr>
</table>

2ème Partie : (12 Points) **NOTE PARTIE 02 :** 05

- ***Pour le modèle type CST***

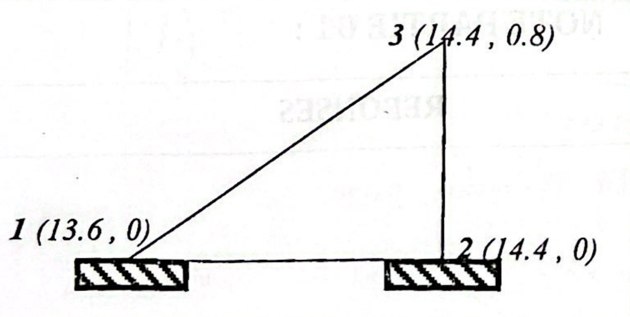
1. Pour *l'élément A*, en utilisant l'élément de référence triangulaire donné en annexe 1, donner l'expression du champ de déplacements associé.
2. Déterminer les fonctions de formes et écrire le champ du déplacement en fonction des déplacements nodaux.
3. Établir la relation déplacement-déformation.
4. Déterminer, par intégration numérique, la matrice de rigidité élémentaire de cet élément en introduisant les conditions aux limites des déplacements.

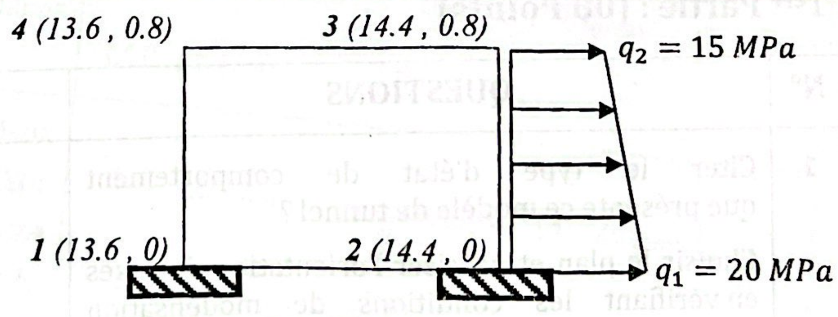
- ***Pour le modèle type Q4***

1. En utilisant la méthode de la quadrature de Gauss, déterminer la *composante* $k(5,6)$ de la matrice de rigidité élémentaire pour *l'élément B* (*dans son repère local*) en respectant la numérotation donnée dans l'élément de référence en annexe 1.
2. Déterminer, par intégration numérique, le vecteur de charge surfacique équivalente des charges actives qui sollicitent cet élément.

☆ ***On donne : $E = 20$ GPa et $\nu = 0.25$***

Elément A	*Elément B*
Les dimensions sont données en mètres	





BON COURAGE

Nom : .... Prénom : .... Groupe : ....

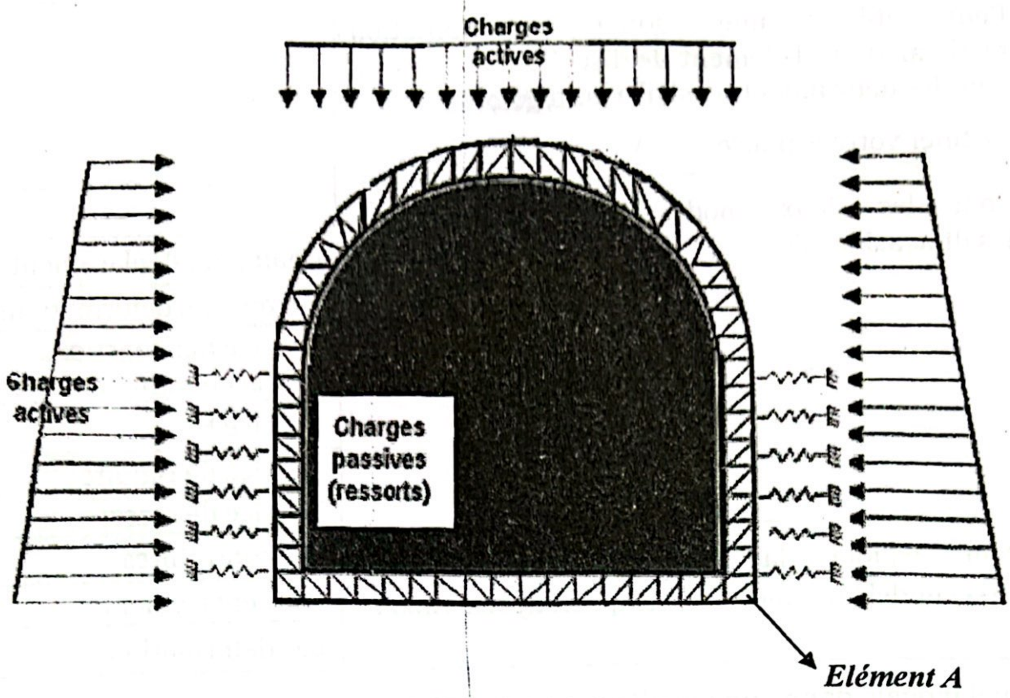


Figure 2. Schéma classique d'un modèle aux réactions hyperstatiques avec les charges actives (pressions des terres) et les charges passives (réactions des ressorts) (Modèle CST)

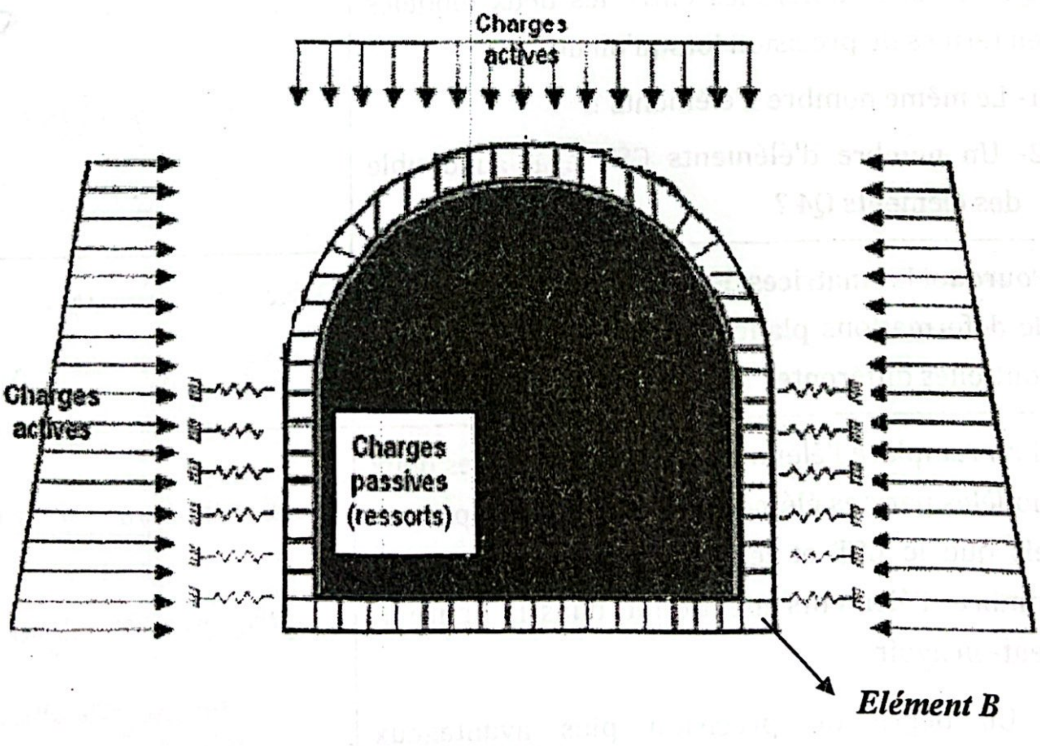


Figure 3. Schéma classique d'un modèle aux réactions hyperstatiques avec les charges actives (pressions des terres) et les charges passives (réactions des ressorts) (Modèle Q4)

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

EXAMEN FINAL – SEMESTRE 4

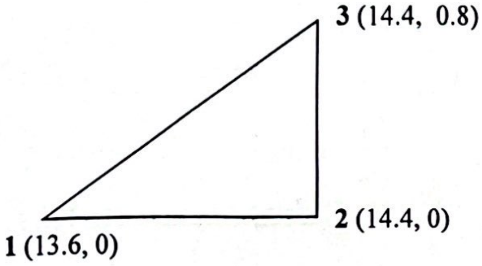
2ème ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS **JUIN 2024**

Nom :	*Prénom : ....*	*Groupe : ....*

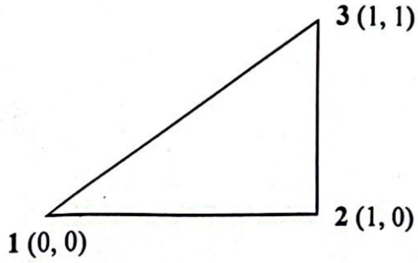
2ème Partie : (12 Points)	**NOTE PARTIE 02 :**

- ***Pour le modèle type CST (Élément A)***

1. Élément de référence



Élément parent



Élément de référence

❖ Champ de déplacement associé

$$\boldsymbol{u(\xi,\zeta) = a_1 + a_2\xi + a_3\zeta}$$
$$\boldsymbol{w(\xi,\zeta) = b_1 + b_2\xi + b_3\zeta}$$

2. Fonctions de formes

❖ CAL

$$\begin{cases} u(0,0) = a_1 = u_1 \\ u(1,0) = a_1 + a_2 = u_2 \\ u(1,1) = a_1 + a_2 + a_3 = u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_2 = u_2 - u_1 \\ a_3 = u_3 - u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{N_1 = 1 - \xi} \\ \boldsymbol{N_2 = \xi - \zeta} \\ \boldsymbol{N_3 = \zeta} \end{cases}$$

❖ Champ de déplacement en fonction des déplacements nodaux

$$\begin{Bmatrix} u(\xi,\zeta) \\ w(\xi,\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_1 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_1 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u(\xi,\zeta) \\ w(\xi,\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1-\xi} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\xi-\zeta} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\zeta} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1-\xi} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\xi-\zeta} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{v_3} \end{Bmatrix}$$

Nom : .... Prénom : .... Groupe : ....

3. Relation déformation-déplacement

$$\{\varepsilon\} = [B]\,\{u_e\}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} = [B]\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{Bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z}\\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial x}\end{bmatrix}$$

avec : $$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix} = [J]^{-1}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad [J] = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}$$

❖ Transformation géométrique

$$\begin{cases}x = \sum N_i\, x_i\\ z = \sum N_i\, z_i\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\boldsymbol{x = 13.6 + 0.8\,\xi}\\ \boldsymbol{z = 0.8\,\zeta}\end{cases}$$

$$[J] = \begin{bmatrix}\mathbf{0.8} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0.8}\end{bmatrix} = \mathbf{0.8}\,[I] \quad \Rightarrow \quad [J]^{-1} = \mathbf{1.25}\,[I]$$

donc :

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1.25 & 0\\ 0 & 1.25\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\frac{\partial N_i}{\partial x} = 1.25\,\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z} = 1.25\,\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial N_1}{\partial x} = -1.25\\ \frac{\partial N_1}{\partial z} = 0\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}\frac{\partial N_2}{\partial x} = 1.25\\ \frac{\partial N_2}{\partial z} = -1.25\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}\frac{\partial N_3}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial N_3}{\partial z} = 1.25\end{cases}$$

$$\boldsymbol{[B] = \frac{5}{4}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}}$$

4. Matrice de rigidité élémentaire élément A

$$[K_e] = \iiint_V [B]^T[D]\,[B]\;dV_{phy}$$

$$[K_e] = \int_0^1\int_0^{\xi} [B]^T[D]\,[B]\;|J|\;e\;d\xi\,d\zeta \qquad (e = 1\,m)$$

$$\boldsymbol{[K_e] = [B]^T[D]\,[B]\,|J|\;\int_0^1\int_0^{\xi} d\xi\,d\zeta}$$

Posons : $[M] = [B]^T[D]\,[B]\,|J|$ et $I = \int_0^1\int_0^{\xi} d\xi\,d\zeta \quad \Rightarrow \quad [K] = [M]\cdot I$

Nom :	*Prénom : ....*	*Groupe : ....*

- $[D]$ =???

$$[D]_{EDP} = \frac{20}{(1+0.25)(1-2\cdot 0.25)}\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$[D]_{EDP} = 8\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (GPa)$$

- $[M]$ =???

$$[M] = 8\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot 0.64\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] = 8\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (GN)$$

- $I = \int_0^1 \int_0^{\xi} d\xi\, d\zeta$ =???

Pour une intégration numérique sur un élément triangulaire, on utilise **la méthode Hammer** avec le changement de variable :

$$\begin{cases} \xi = 1-\xi' \\ \zeta = \zeta' \end{cases} \Rightarrow \ \zeta = \xi \ devient\ \zeta' = 1-\xi')\ avec : \begin{cases} d\xi = -d\xi' \\ d\zeta = d\zeta' \end{cases}$$

donc : $\mathbf{I} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi'} d\xi'\, d\zeta'$

$$f(\xi',\zeta') = 1 \ \Rightarrow \ i = j = 0 \ donc \ m > 0 \ soit \ m = 1 \ et \ n_H = 1 \ \dots \begin{cases} \xi' = \zeta' = \frac{1}{3} \\ \omega = \frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où : $I = \frac{1}{2}$

- En considérant les CAL : $u_1 = w_1 = u_2 = w_2 = 0$

$$[K_e]_{réd} = 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\int_0^1\int_0^{\xi} d\xi\, d\zeta$$

$$[K_e]_{réd} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (GN/m)$$

5/8

Nom : ………………………… Prénom : ………………………… Groupe : ………………

- ***Pour le modèle type Q4 (Élément B)***

1. $K(5,6) = ???$

$$K_{56} = 1\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\{B_5^T\}\,[D]\,\{B_6\}\,|J|\,d\xi\,d\eta$$

$$[B_{5,6}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

avec : $$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1}\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

❖ Transformation géométrique

$$\begin{cases} x = \sum N_i\, x_i \\ z = \sum N_i\, y_i \end{cases}$$

$$x = 13.6\left(\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\zeta)\right) + 14.4\left(\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\zeta)\right) + 14.4\left(\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\zeta)\right) + 13.6\left(\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\zeta)\right)$$

$$z = 0.8\left(\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\zeta)\right) + 0.8\left(\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\zeta)\right)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 14 + 0.4\,\xi} \\ \boldsymbol{z = 0.4 + 0.4\,\zeta} \end{cases}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \mathbf{0.4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0.4} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{2.5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2.5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad \textit{soit :} \quad \begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial x} = 2.5\,\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} = 2.5\,\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial N_3}{\partial x} = 2.5\,\frac{1+\zeta}{4} \\ \frac{\partial N_3}{\partial z} = 2.5\,\frac{1+\xi}{4} \end{cases}$$

$$[B_{5,6}] = \frac{\mathbf{2.5}}{\mathbf{4}}\begin{bmatrix} \mathbf{1+\zeta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1+\xi} \\ \mathbf{1+\xi} & \mathbf{1+\zeta} \end{bmatrix}$$

❖ $K_{56} = 1\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\{B_5^T\}\,[D]\,\{B_6\}\,|J|\,d\xi\,d\zeta$

$$K_{56} = \frac{20}{(1+0.25)(1-2\cdot 0.25)}\cdot\frac{2.5}{4}\cdot\frac{2.5}{4}\cdot 8\cdot 0.16\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix} 1+\zeta & 0 & 1+\xi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1+\xi \\ 1+\zeta \end{bmatrix}d\xi\,d\zeta$$

Nom : ………………………… **Prénom :** ………………………… **Groupe :** ……………

$$K_{56} = 32\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(1+\xi)(1+\zeta)\ d\xi\ d\zeta$$

Pour les deux variables, on a 2N$_G$-1=1 soit $N_{G\xi} = N_{g\eta} = 1$ …. Donc **un seul (01) point de Gauss** est suffisant pour les deux sens : $\begin{cases}\xi_1 = \zeta_1 = 0\\ \omega_{\xi 1} = \omega_{\zeta 1} = 2\end{cases}$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(1+\xi)(1+\zeta)\ d\xi\ d\eta = \sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{1}\omega_i\,\omega_j\,f(\xi_i\,,\zeta_j)$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(1+\xi)(1+\zeta)\ d\xi\ d\zeta = 2\cdot 2\cdot f(0{,}0) \quad\Rightarrow\quad \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(1+\xi)(1+\zeta)\ d\xi\ d\zeta = 4$$

$$K_{56} = 32\cdot 4 \quad\Rightarrow\quad K_{56} = 128\ GN/m$$

2. Vecteur de charge surfacique équivalente des charges actives

$$\{F_s\} = \iint_{dS}[N_s]^T\ \{T_s\}\ dS$$

- $[N_s]^T\ = ???$

La surface chargée a pour equation : $\xi = 1 \;\Rightarrow\; N_1 = 0,\ N_2 = \frac{1}{2}(1-\zeta),\ N_3 = \frac{1}{2}(1+\zeta),\ N_4 = 0$

$$[N_S]_{\xi=1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & (1-\zeta) & 0 & (1+\zeta) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1-\zeta) & 0 & (1+\zeta) & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- $\{T_S\}\ = ???$ (Chargement trapézoïdal≡Forces actives des terres … Action horizontale)

$$\{T_S\}\ = \begin{Bmatrix}-\left(q_1 + \dfrac{q_2 - q_1}{0.8}z\right)\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-\left(q_1 + \dfrac{q_2 - q_1}{0.8}0.4(1+\zeta)\right)\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\{T_S\}\ = \begin{Bmatrix}-(20 - 2.5(1+\zeta))\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (MPa)$$

- $dS = ???$

$$dS = e\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta\right)^2} \qquad ….. \quad pour\ \ \xi = 1 = cst \quad \text{et} \quad e = 1\,m$$

$$\Rightarrow \qquad dS = 0.4\ d\eta$$

- $\{F_S\}\ = ???$

$$\{F_s\} = \frac{0.4}{2}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1-\zeta & 0\\ 0 & 1-\zeta\\ 1+\zeta & 0\\ 0 & 1+\zeta\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-(20 - 2.5(1+\zeta))\\ 0\end{Bmatrix} d\zeta$$

Nom : .... Prénom : .... Groupe : ....

$$\{F_s\} = -0.2\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-\zeta)(20-2.5(1+\zeta)) \\ 0 \\ (1+\zeta)(20-2.5(1+\zeta)) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\zeta$$

- Posons : $I_1 = \int_{-1}^{+1}(1-\zeta)\big(20-2.5(1+\zeta)\big)\ d\zeta$ et $I_1 = \int_{-1}^{+1}(1+\zeta)\big(20-2.5(1+\zeta)\big)\ d\zeta$

  Le chargement trapézoïdal (forces actives des terres) est ***appliqué sur une surface quadrilatère***, donc pour une intégration numérique, on utilise **la méthode de Gauss** pour les deux intégrales.

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{N_G} \omega_i\ f(\xi_i)$$

✓ Pour la variable **ζ**, concernant I_1 et I_2, on a $2N_G$-1=2 soit $N_{G\zeta} = 2$ .... Donc **deux (02) point de Gauss** sont nécessaires pour ce sens : $\begin{cases} \zeta_{1,2} = \pm 0.577 \dots \\ \omega_{\zeta 1} = \omega_{\zeta 2} = 1 \end{cases}$

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\zeta)d\zeta = \sum_{i=1}^{2} \omega_i\ f(\zeta_i) = f(-0.577) + f(0.577)$$

$$I_1 = (1+0.577)\big(20-2.5(1-0.577)\big) + (1-0.577)\big(20-2.5(1+0.577)\big)$$

$$I_2 = (1-0.577)\big(20-2.5(1-0.577)\big) + (1+0.577)\big(20-2.5(1+0.577)\big)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_1 = 36.665} \quad \boldsymbol{et} \quad \boldsymbol{I_2 = 33.3335}$$

$$\{F_s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7.333 \\ 0 \\ -6.667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (MN)$$

EXERCICE 01 ---------------------- METHODE 1 --------------------------------------(06 pts)

1. I_x ? et I_y ?

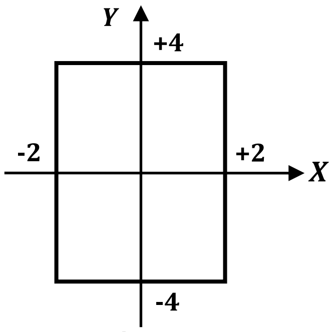


Figure 1

- $I_x = \int_S y^2 ds$

  $ds = 4\,dy$ .... **(0.5 pt)**

  $I_x = \int_{-4}^{+4} y^2\, 4\, dy$

  - Posons : $y = 4\,\eta \;\Rightarrow\; dy = 4\,d\eta$ .... **(0.5 pt)**

    $I_x = \int_{-1}^{+1} (4\,\eta)^2\, 4 \cdot (4\,d\eta)$

    $I_x = 256 \int_{-1}^{+1} \eta^2\, d\eta$ .... **(0.5 pt)**

  - *Intégrale de GAUSS* :

    2r-1=2 .... *r=3/2* .... deux points d'intégration sont nécessaires :

    $\eta_1 = -\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\omega_1 = \omega_2 = 1$ avec : *f(η)= η²* .... **(0.25 pt)**

  d'où : $I_x = 256\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] \;\Rightarrow\; \boldsymbol{I_x = 512/3}$ .... **(0.5 pt)**

- $I_y = \int_S x^2 ds$

  $ds = 8\,dx$ .... **(0.5 pt)**

  $I_y = \int_{-2}^{+2} x^2\, 8\, dx$

  - Posons : $x = 2\,\xi \;\Rightarrow\; dy = 2\,d\xi$ .... **(0.5 pt)**

  $I_y = \int_{-1}^{+1} (2\,\xi)^2\, 8 \cdot (2\,d\xi)$

  $I_y = 64 \int_{-1}^{+1} \xi^2\, d\xi$ .... **(0.5 pt)**

  - *Intégrale de GAUSS* :

    2r-1=2 .... *r=3/2* .... deux points d'intégration sont nécessaires :

    $\xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\omega_1 = \omega_2 = 1$ avec : *f(ξ)= ξ²* .... **(0.25 pt)**

  d'où : $I_y = 64\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] \;\Rightarrow\; \boldsymbol{I_y = 128/3}$ .... **(0.5 pt)**

2. Valeurs exactes I_x ? et I_y ?

- $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \;\Rightarrow\; I_x = \frac{4 \cdot 8^3}{12} = \frac{2048}{12}$ soit : $\boldsymbol{I_x = \frac{512}{3}}$ .... **(0.5 pt)**
- $I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} \;\Rightarrow\; I_y = \frac{8 \cdot 4^3}{12} = \frac{512}{12}$ soit : $\boldsymbol{I_y = \frac{128}{3}}$ .... **(0.5 pt)**

❖ L'intégration de GAUSS en utilisant deux points converge vers des résultats exacts. ... **(0.5 pt)**

EXERCICE 01 ---------------------- METHODE 2 -------------------------------------(06 pts)

3. I_x ? et I_y ?

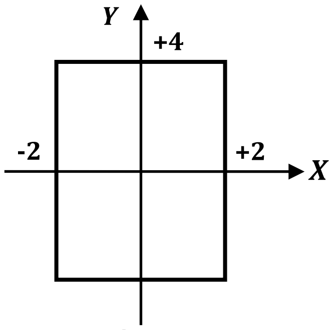


Figure 1

- $I_x = \int_S y^2 ds$

  $ds = dx\, dy$ .... **(0.5 pt)**

  $I_x = \int_{-2}^{+2} \int_{-4}^{+4} y^2\, dx\, dy$

  - Posons : $x = 2\,\xi \;\Rightarrow\; dx = 2\, d\xi$ .... **(0.5 pt)**

    et $y = 4\,\eta \;\Rightarrow\; dy = 4\, d\eta$ .... **(0.5 pt)**

    $I_x = 128 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \eta^2\, d\xi\, d\eta$ .... **(0.5 pt)**

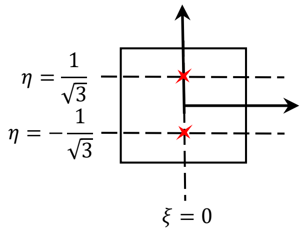
  - *Intégrale de GAUSS* :

    ✓ *Selon ξ : 2r-1=0 .... r=1/2 ....* un seul point d'intégration est suffisant :

    $\xi_1 = 0 \;\; et \;\; \omega_1 = 2$

    ✓ *Selon η : 2r-1=2 .... r=3/2 ....* deux points d'intégration sont nécessaires :

    $\eta_1 = -\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\; et \;\; \omega_1 = \omega_2 = 1$

    $\Rightarrow$ ***02 points de GAUSS :*** $(0\,,-\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $(0\,,+\frac{1}{\sqrt{3}})$

    avec : *$f(\xi,\eta)= \eta^2$* .... **(0.5 pt)**

    $I_x = 128\left[f(0\,,-\frac{1}{\sqrt{3}})\;\omega_{\xi 1}\omega_{\eta 1} + f(0\,,+\frac{1}{\sqrt{3}})\;\omega_{\xi 1}\omega_{\eta 2}\right]$

    $\boldsymbol{I_x = 512/3}$ .... **(0.5 pt)**

- $I_y = \int_S x^2 ds$ soit : $I_y = \int_{-2}^{+2} \int_{-4}^{+4} y^2\, dx\, dy$

  Sachant : $x = 2\,\xi \;\Rightarrow\; dx = 2\, d\xi$ et $y = 4\,\eta \;\Rightarrow\; dy = 4\, d\eta$

  $I_y = 32 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \xi^2\, d\xi\, d\eta$ .... **(0.5 pt)**

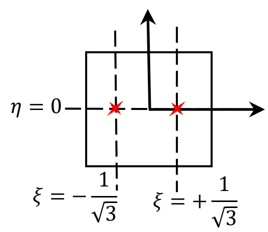
  - *Intégrale de GAUSS* :

    ✓ *Selon ξ : 2r-1=2 .... r=3/2 ....* deux points d'intégration sont nécessaires :

    $\xi_1 = -\,\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\; et \;\; \omega_1 = \omega_2 = 1$

    ✓ *Selon η : 2r-1=0 .... r=1/2 ....* un seul point d'intégration est suffisant :

    $\eta_1 = 0 \;\; et \;\; \omega_1 = 2$

    $\Rightarrow$ ***02 points de GAUSS :*** $(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,0)$ et $(+\frac{1}{\sqrt{3}}\,,0)$

    avec : *$f(\xi,\eta)= \xi^2$* .... **(0.5 pt)**

$$I_y = 32\left[f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},0)\,\omega_{\xi1}\omega_{\eta1} + f(+\tfrac{1}{\sqrt{3}},0)\,\omega_{\xi2}\omega_{\eta1}\right]$$

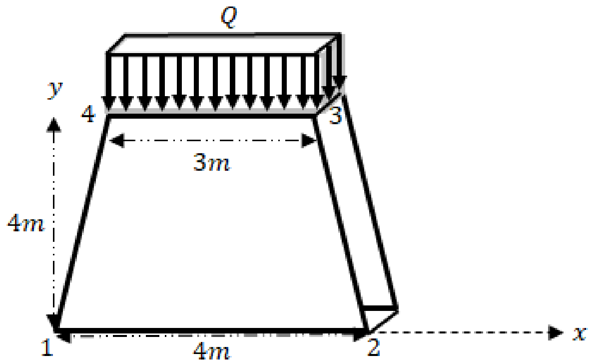
$\boldsymbol{I_y = 128/3}$ .... **(0.5 pt)**

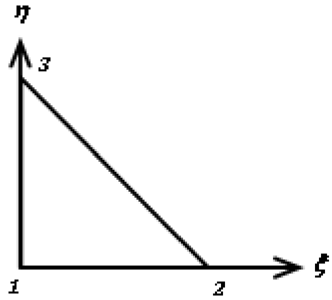
4. Valeurs exactes I_x ? et I_y ?

- $I_x = \frac{b\cdot h^3}{12} \Rightarrow I_x = \frac{4\cdot 8^3}{12} = \frac{2048}{12}$ soit : $\boldsymbol{I_x = 512/3}$ .... **(0.5 pt)**
- $I_y = \frac{h\cdot b^3}{12} \Rightarrow I_y = \frac{8\cdot 4^3}{12} = \frac{512}{12}$ soit : $\boldsymbol{I_y = 128/3}$ .... **(0.5 pt)**

❖ L'intégration de GAUSS en utilisant deux points converge vers des résultats exacts. ... **(0.5 pt)**

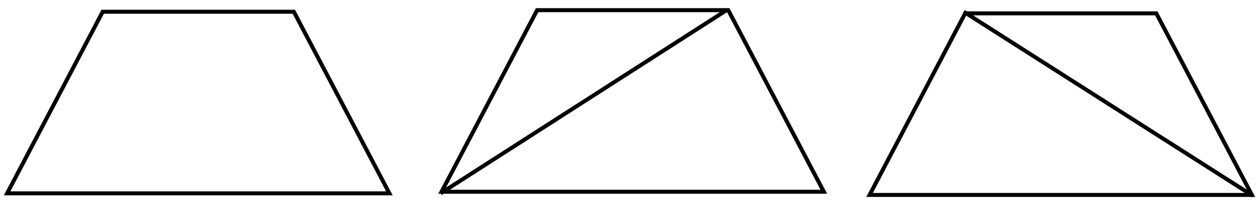
EXERCICE 02 ---(15 pts)



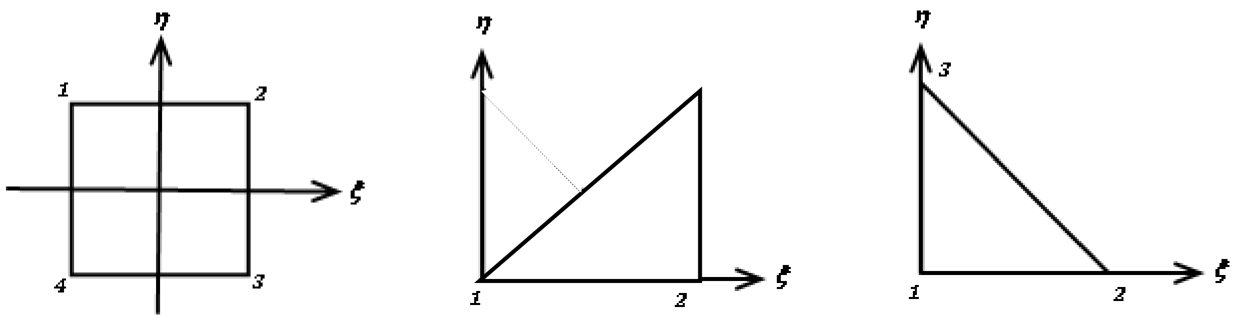


1. Proposer trois modèles numériques en éléments finis pour cette structure. Justifier votre choix. **(avec les coordonnées ξ, η)**

- **Modèles numériques** .... **(3x0.25)**



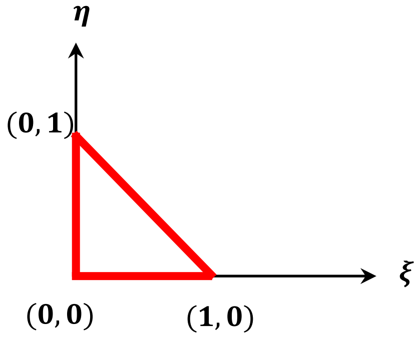
- **Éléments parents** .... **(3x0.25)**

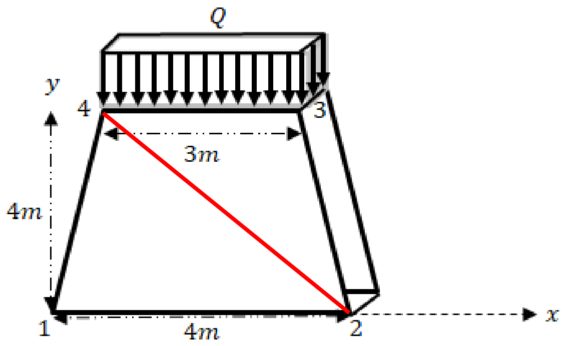


- **Justification** .... **(0.5)**

4.1. Fonctions de déplacements adéquates / fonctions de forme / transformation géométrique

- **Elément 1-2-4**





$$\boldsymbol{u(\xi,\eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta}$$
$$\boldsymbol{v(\xi,\eta) = b_0 + b_1\xi + b_2\eta}$$

$$\begin{cases} u(0,0) = a_0 = u_1 \\ u(1,0) = a_0 + a_1 = u_2 \\ u(0,1) = a_0 + a_2 = u_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = u_1 \\ a_1 = u_2 - u_1 \\ a_2 = u_4 - u_1 \end{cases}$$ ……………………… **(0.5)**

$$\boldsymbol{u(\xi,\eta) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_4 - u_1)\eta}$$

$$\boldsymbol{u(\xi,\eta) = \langle 1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix}}$$ ………………………… **(0.5)**

$$\begin{Bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{ng} N_i(\xi,\eta)\, x_i$$

$$x(\xi,\eta) = N_1\,(0) + N_3\,(4) + N_4\,(1/2)$$

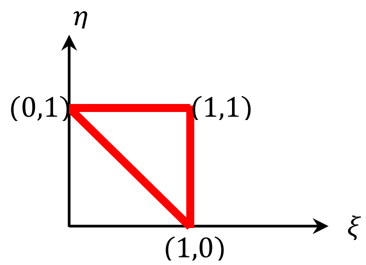
$$\boldsymbol{x(\xi,\eta) = 4\xi + \frac{\eta}{2}}$$ ………………………… **(0.5)**

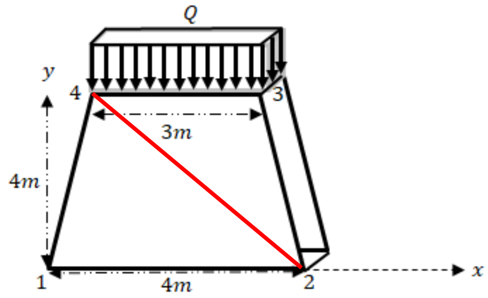
$$y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{ng} N_i(\xi,\eta)\, y_i$$

$$y(\xi,\eta) = N_1\,(0) + N_3\,(0) + N_4\,(4)$$

$$\boldsymbol{y(\xi,\eta) = 4\eta}$$ ……………………………… **(0.5)**

- **Elément 2-3-4**





$$\boldsymbol{u(\xi,\eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta}$$

$$\boldsymbol{v(\xi,\eta) = b_0 + b_1\xi + b_2\eta}$$

$$\begin{cases} u(1.0) = a_0 + a_1 = u_2 \\ u(1.1) = a_0 + a_1 + a_2 = u_3 \\ u(0.1) = a_0 + a_2 = u_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = u_4 - u_3 + u_2 \\ a_1 = u_3 - u_4 \\ a_2 = u_3 - u_2 \end{cases} \quad \text{.......................} \ \mathbf{(0.5)}$$

$$\boldsymbol{u(\xi,\eta) = u_4 - u_3 + u_2 + (u_3 - u_4)\xi + (u_3 - u_2)\eta}$$

$$\boldsymbol{u(\xi,\eta) = \langle 1-\eta \quad -1+\xi+\eta \quad 1-\xi \rangle \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}} \quad \text{.......................} \ \mathbf{(0.5)}$$

$$\begin{Bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{ng} N_i(\xi,\eta)\, x_i$$

$$x(\xi,\eta) = N_2\,(4) + N_3\,(7/2) + N_4\,(1/2)$$

$$\boldsymbol{x(\xi,\eta) = 1 + 3\xi - \frac{\eta}{2}} \quad \text{.......................................} \ \mathbf{(0.5)}$$

$$y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{ng} N_i(\xi,\eta)\, y_i$$

$$y(\xi,\eta) = N_2\,(0) + N_3\,(4) + N_4\,(4)$$

$$\boldsymbol{y(\xi,\eta) = 4\eta} \quad \text{...} \ \mathbf{(0.5)}$$

4.2. Déformations en fonction des déplacements nodaux

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_3 & 0 & N_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\end{Bmatrix}=[B]\{d\}$$

$$[B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\delta N_i}{\delta \xi}=\frac{\delta N_i}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta \xi}+\frac{\delta N_i}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta \xi}$$

$$\frac{\delta N_i}{\delta \eta}=\frac{\delta N_i}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta \eta}+\frac{\delta N_i}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta \eta}$$

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{Bmatrix}$$

- **Pour élément 1-2-4**

$$[J]=\begin{bmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1/2} & \mathbf{4}\end{bmatrix}$$ .... **(0.5)**

$$[J]^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{1/4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1/32} & \mathbf{1/4}\end{bmatrix}$$ .... **(0.5)**

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4 & 0\\ -1/32 & 1/4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}=\frac{1}{4}\frac{\partial N_1}{\partial \xi}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y}=-\frac{1}{32}\frac{\partial N_1}{\partial \xi}+\frac{1}{4}\frac{\partial N_1}{\partial \eta}=\frac{1}{32}-\frac{1}{4}=-\frac{7}{32}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{4}\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = -\frac{1}{32}\frac{\partial N_2}{\partial \xi} + \frac{1}{4}\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{32}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{1}{4}\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = -\frac{1}{32}\frac{\partial N_4}{\partial \xi} + \frac{1}{4}\frac{\delta \partial}{\partial \eta} = \frac{1}{4}$$

$$[B] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7/8 & 0 & -1/8 & 0 & 1 \\ -7/8 & -1 & -1/8 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ………………………… (01)

- **Pour élément 2-3-4**

$$[J] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1/2 & 4 \end{bmatrix}$$ …………………………………… (0.5)

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/24 & 1/4 \end{bmatrix}$$ ……………………………… (0.5)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/24 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{1}{24}\frac{\partial N_2}{\partial \xi} + \frac{1}{4}\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -1/4$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 1/3$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{1}{24}\frac{\partial N_3}{\partial \xi} + \frac{1}{4}\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 7/24$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -1/3$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{1}{24}\frac{\partial N_4}{\partial \xi} + \frac{1}{4}\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -1/24$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$ ………………………… (01)

4.3. K(4,4)

Pour l'élément 1-2-4 $$K(4,4) = \iiint [B_{124}(4,j)]^T [D][B_{124}(i,4)]\ dv$$

Pour l'élément 2-3-4 $$K(4,4) = \iiint [B_{234}(2,j)]^T [D][B_{234}(i,2)]\ dv$$

$$K(4{,}4) = e[B_{124}(4,j)]^T[D]\,[B_{124}(i,4)]\,|J| \iint d\xi\, d\eta + e[B_{234}(2,j)]^T[D]\,[B_{234}(i,2)]\,|J| \iint d\xi\, d\eta$$

$$K(4{,}4) = \frac{63}{8}[B_{124}(4,j)]^T[D]\,[B_{124}(i,4)] \iint d\xi\, d\eta - \frac{12}{2}[B_{234}(2,j)]^T[D]\,[B_{234}(i,2)] \iint d\xi\, d\eta$$

- ✓ Probleme ECP $(e \ll b \; et \; h)$ $\quad donc:$ .... **(0.5)**

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \frac{300 \cdot 10^6}{1-0.2^2}\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0.2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{[D] = 312.5 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}}$$ .... **(0.5)**

$$\boldsymbol{[B_{124}(4,j)]^T[D][B_{124}(i,4)]} = \frac{1}{16} \cdot 312.5 \cdot 10^6 \langle 0 \quad -1/8 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/8 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 312.5 \cdot 10^6 \langle -0.025 \quad -\frac{1}{8} \quad 0.4 \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{8.11 \cdot 10^6}$$

$$\boldsymbol{[B_{234}(2,j)]^T[D][B_{234}(i,2)]} = 312.5 \cdot 10^6 \langle 0 \quad -1/4 \quad 0 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 312.5 \cdot 10^6 \langle -0.05 \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{19.53 * 10^6}$$

$$\boldsymbol{K(4,4) = 63.86 \cdot 10^6 \iint d\xi\, d\eta - 117.18 * 10^6 \iint d\xi\, d\eta}$$ .... **(01)**

4.4. Vecteur des forces nodales équivalentes de la structure

$$\{f_s\} = \iint [N_s]^T\{T_s\}\; ds_{physique}$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta \xi}d\xi + \frac{\delta x}{\delta \eta}d\eta\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta \xi}d\xi + \frac{\delta y}{\delta \eta}d\eta\right)^2}$$

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta \xi}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta \xi}\right)^2}\, d\xi \quad \text{pour} \quad \eta \text{ constante}$$

$$\{f_s\} = \iint [N_s]^T\{T_s\}\; |J_S|\; dS_{parent}$$

$$dS = \sqrt{(3)^2 + (0)^2}\, d\xi \quad \Rightarrow \quad dS = 3\, d\xi$$

- $[N_s]^T$ pour une surface où $\eta = 1$:

$$[N_s]^T = \begin{bmatrix} N_2(\xi,1) & 0 \\ 0 & N_2(\xi,1) \\ N_3(\xi,1) & 0 \\ 0 & N_3(\xi,1) \\ N_4(\xi,1) & 0 \\ 0 & N_4(\xi,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ 1-\xi & 0 \\ 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{T_s\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q \end{Bmatrix}$$

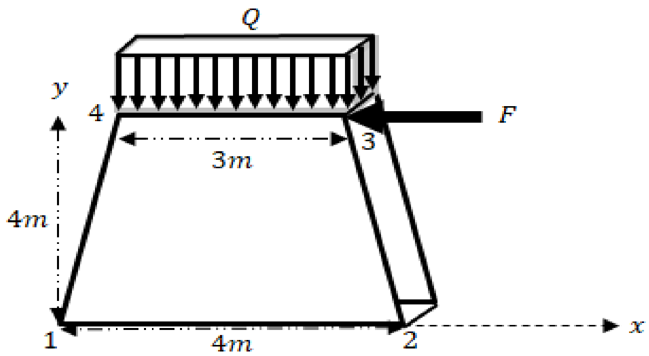
$$\{f_s\} = e\int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi \\ 0 \\ 1-\xi \end{Bmatrix} (-Q)\ 3\, d\xi$$

$$\boldsymbol{\{f_s\} = \frac{3}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}Q \\ 0 \\ -\frac{1}{2}Q \end{Bmatrix}}$$ .... **(01)**

5. Déterminer les contraintes

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D][B]\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$



- **Elément 1-2-4**

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 312.5\cdot 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7/8 & 0 & -1/8 & 0 & 1 \\ -7/8 & -1 & -1/8 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6 \\ -4.3 \\ -0.6 \\ -4.4 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{312.5}{4}\cdot 10^6 \begin{bmatrix} -1 & -0.175 & 1 & -0.025 & 0 & 0.2 \\ -0.2 & -7/8 & 0.2 & -1/8 & 0 & 1 \\ -0.35 & -0.4 & -0.05 & 0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6 \\ -4.3 \\ -0.6 \\ -4.4 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

$$\boldsymbol{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1347 \\ -2.923 \\ -1.554 \end{Bmatrix} \quad (GPa)}$$ .... **(01)**

- **Elément 2-3-4**

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = 312.5\cdot 10^6 \begin{bmatrix}1 & 0.2 & 0\\ 0.2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{24} & 0 & -\frac{1}{24}\\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0.6\\ -4.3\\ -0.6\\ -4.4\end{Bmatrix}\cdot 10^{-2}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = 312.5\cdot 10^6 \begin{bmatrix}0 & -0.05 & 1/3 & 0.05 & -1/3 & -0.008\\ 0 & -1/4 & 0.066 & 7/24 & -0.066 & -1/24\\ -0.1 & 0 & 0.116 & 0.133 & -0.016 & -0.13\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0.6\\ -4.3\\ -0.6\\ -4.4\end{Bmatrix}\cdot 10^{-2}$$

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\sigma_x}\\ \boldsymbol{\sigma_y}\\ \boldsymbol{\tau_{xy}}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{0.58}\\ \mathbf{-3.12}\\ \mathbf{0.29}\end{Bmatrix} \qquad (\boldsymbol{GPa})$$ ………………………………………………………… **(01)**