

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المدرسة الوطنية العليا للأشغال العمومية

Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics – National School of Built and Ground Works Engineering Francis Jeanson

TP 02 – Méthode des Éléments Finis

Éléments Barres (1D) – MATLAB

Théorie Exemple simple Exemple avancé Exercices

Théorie

Une barre 1D soumise à un effort axial est étudiée en élasticité linéaire :

- Loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \epsilon$
- Élément barre à deux nœuds :

$$k_e = (E \cdot A / L) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

où **E** est le module de Young, **A** la section et **L** la longueur de l'élément.

Exemple simple : 2 éléments

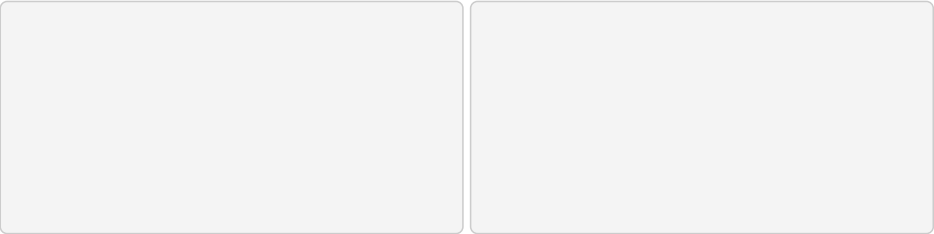
Barre encastree à gauche et soumise à une force concentrée à droite :

- Longueur totale : $L = 1 \text{ m}$
- Module d'Young : $E = 210 \text{ GPa}$
- Section : $A = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- Force appliquée : $F = 10\,000 \text{ N}$
- Discrétisation : 2 éléments (3 nœuds)

Code MATLAB :

```
// TP simple - Barre 2 éléments
clear; clc;
E=210e9; A=1e-4; L=1; F=10000; nElem=2; nNode=nElem+1; Le=L/nElem;
ke=(E*A/Le)*[1 -1;-1 1]; K=zeros(nNode);
for e=1:nElem, K(e:e+1,e:e+1)=K(e:e+1,e:e+1)+ke; end
Fglob=zeros(nNode,1); Fglob(end)=F;
Kred=K(2:end,2:end); Fred=Fglob(2:end);
u=zeros(nNode,1); u(2:end)=Kred\Fred;
N=zeros(nElem,1); sigma=zeros(nElem,1);
for e=1:nElem, ue=u(e:e+1); N(e)=E*A/Le*[-1 1]*ue; sigma(e)=N(e)/A; end
disp('Déplacements'); disp(u); disp('Efforts normaux'); disp(N); disp('Contraintes'); disp(sigma);
```

Diagrammes interactifs :



Exemple avancé : 4 éléments, sections variables, charge répartie

Schéma :

```
Nœud 1 (encastré) ---- Nœud 2 ---- Nœud 3 ---- Nœud 4 ---- Nœud 5
|----- L/4 -----|----- L/4 -----|----- L/4 -----|----- L/4 -----|
Section variable: A=[1e-4,1.2e-4,0.8e-4,1e-4]
Charge répartie: q=5000 N/m sur élément 2
Force concentrée: F=10000 N sur nœud 5
```

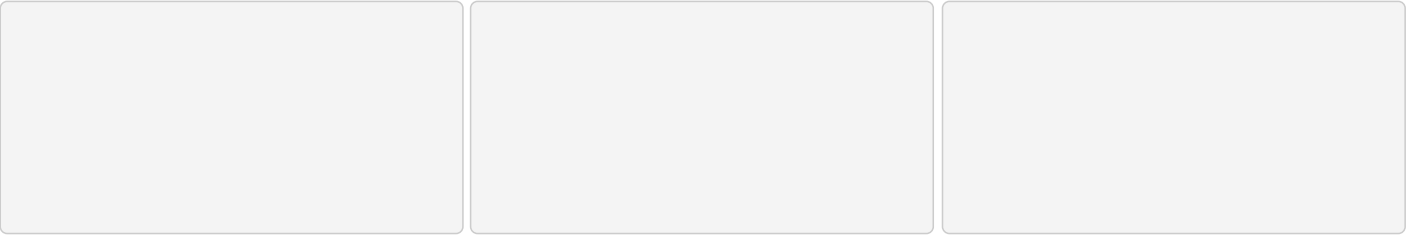
Données :

- Longueur totale : $L = 2\text{ m}$
- Module de Young : $E = 200\text{ GPa}$
- Sections : $A = [1\text{e-4}, 1.2\text{e-4}, 0.8\text{e-4}, 1\text{e-4}]\text{ m}^2$
- Force concentrée : $F = 10000\text{ N}$ au dernier nœud
- Charge répartie : $q = 5000\text{ N/m}$ sur élément 2

Code MATLAB :

```
// TP avancé - Barre 4 éléments avec charge répartie
clear; clc;
E=200e9; L=2; nElem=4; nNode=nElem+1; Le=L/nElem;
A=[1e-4,1.2e-4,0.8e-4,1e-4]; Fglob=zeros(nNode,1); Fglob(end)=10000;
q=5000; Fglob(2)=Fglob(2)+q*Le/2; Fglob(3)=Fglob(3)+q*Le/2;
K=zeros(nNode);
for e=1:nElem, ke=(E*A(e)/Le)*[1 -1;-1 1]; K(e:e+1,e:e+1)=K(e:e+1,e:e+1)+ke; end
Kred=K(2:end,2:end); Fred=Fglob(2:end);
u=zeros(nNode,1); u(2:end)=Kred\Fred;
N=zeros(nElem,1); sigma=zeros(nElem,1); epsilon=zeros(nElem,1);
for e=1:nElem, ue=u(e:e+1); N(e)=(E*A(e)/Le)*[-1 1]*ue; sigma(e)=N(e)/A(e); epsilon(e)=sigma(e)/E; end
disp('Déplacements'); disp(u); disp('Efforts normaux'); disp(N); disp('Contraintes'); disp(sigma); disp('Déformation'); disp(epsilon)
```

Diagrammes interactifs :



Exercices proposés

Facile

- Calculer le déplacement analytique de la barre simple.
- Tracer le diagramme de déplacement à la main.

Moyen

- Modifier la section ou la force appliquée dans le premier exemple et observer les variations.
- Augmenter le nombre d'éléments et comparer les résultats.

Difficile

- Résoudre l'exemple avancé en modifiant les sections et la charge répartie.
- Tracer les diagrammes de déplacement, déformation et contrainte.
- Comparer avec la solution analytique ou uniforme.