

EXERCICE 1

Soit l'assemblage de ressorts représenté sur la *figure 1*, les nœuds d'extrémité 1 et 2 sont fixes (*encastrement*), une charge horizontale P est appliquée au nœud 4 :

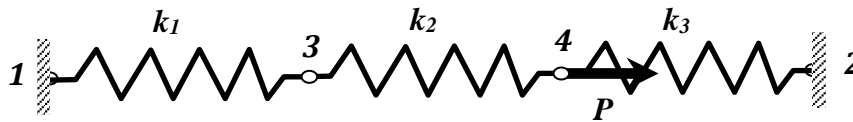


Figure 1

- Déterminer :
 1. La matrice de rigidité globale.
 2. Les déplacements des nœuds 3 et 4
 3. Les réactions aux nœuds 1 et 2
 4. L'effort dans chaque ressort

➤ On donne : $k_1=k$, $k_2=2k$, $k_3=3k$

EXERCICE 2

Soit l'assemblage de ressorts représenté sur la *figure 2*, le nœud d'extrémité 1 est fixe alors qu'un déplacement connu δ est imposé au nœud 5 :

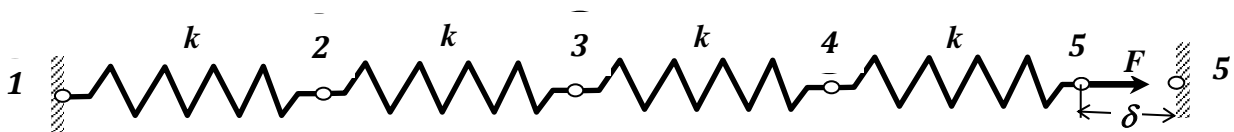


Figure 2

- Déterminer :
 1. La matrice de rigidité globale.
 2. Les déplacements des nœuds 2 et 4.
 3. Les forces nodales globales.
 4. Les forces élémentaires locales.

A.N : $k=200 \text{ kN/m}$ et $\delta=20 \text{ mm}$

EXERCICE 1

Une tige de longueur $L = 3\text{m}$ et de section $A = 25\text{cm}^2$ est encastrée à une de ses extrémités et soumise à une tension $P = 250\text{KN}$ à l'autre extrémité. Le module de Young du matériau de la tige est $E = 210\,000\text{ MPa}$.

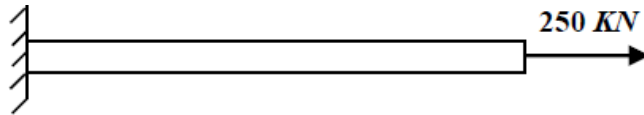


Figure 1

- Déterminer :
 1. La matrice globale de rigidité.
 2. La réaction aux nœud 1.

EXERCICE 2

Soit l'assemblage suivant :

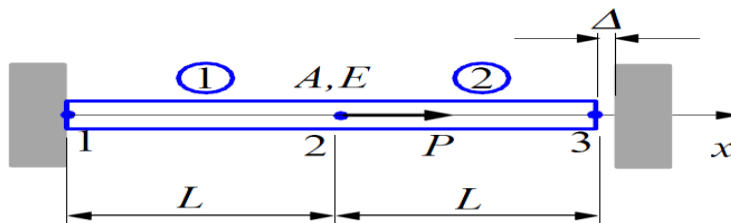


Figure 2

- Trouver les réactions d'appuis de cet assemblage sachant que :

$$E = 2.10^4\text{ N/mm}^2 ; A = 250\text{mm}^2 ; L = 150\text{mm} ; P = 6.10^4\text{ N} ; \Delta = 1.2\text{mm}$$

EXERCICE 3

Considérons l'assemblage de trois (03) barres de la figure 3.

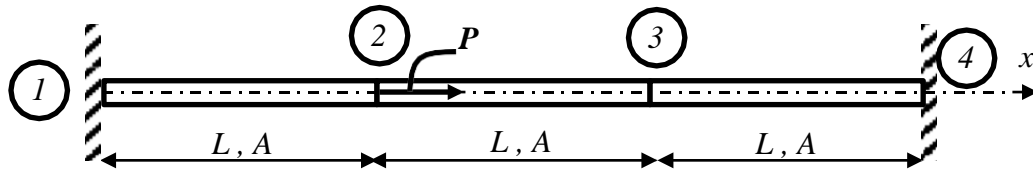


Figure 3

• Déterminer :

1. La matrice globale de rigidité.
2. Les déplacements des nœuds 2 et 3.
3. Les réactions aux nœuds 1 et 4.

EXERCICE 4

Considérons la barre composée d'éléments de sections variables représentée sur la figure 4. Soient E le module d'élasticité du matériau de la barre, les aires des sections droites sont :

A entre les nœuds 1 et 2, $2A$ entre les nœuds 2 et 3 et $3A$ entre les nœuds 3 et 4.

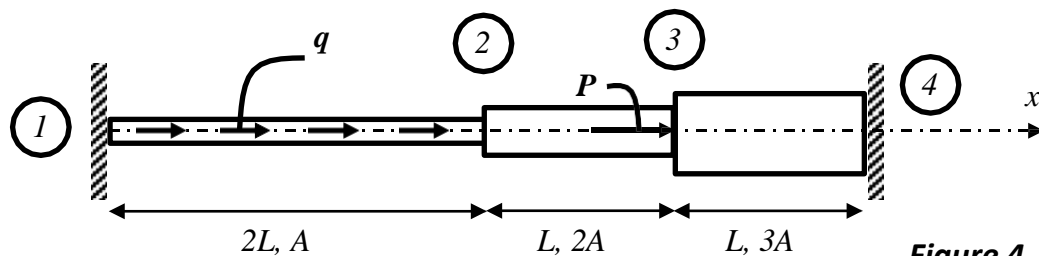


Figure 4

La barre est encastree à ses deux extrémités (nœuds 1 et 4) et sollicitée sur l'élément 1-2 par une charge q uniformément répartie.

Au nœud 3, on applique une force concentrée d'intensité $P=2qL$.

- Déterminer les déplacements nodaux ainsi que les réactions d'appuis.

EXERCICE 5

Considérons la structure représentée sur la figure 5.

Soient E_1 et E_2 les modules d'élasticité des matériaux constituant les barres tels que $E_1 = 3E_2$. Les sections droites sont de diamètres d_1 et d_2 avec $d_1 = 2d_2$ et les longueurs sont toutes égales $L_1 = L_2 = L$.

La structure est encastree à l'extrémité gauche tandis qu'à l'autre elle est reliée à un ressort linéaire de rigidité $k = E_1 A_1 / L_1$. Au nœud 2 s'applique une charge d'intensité P .

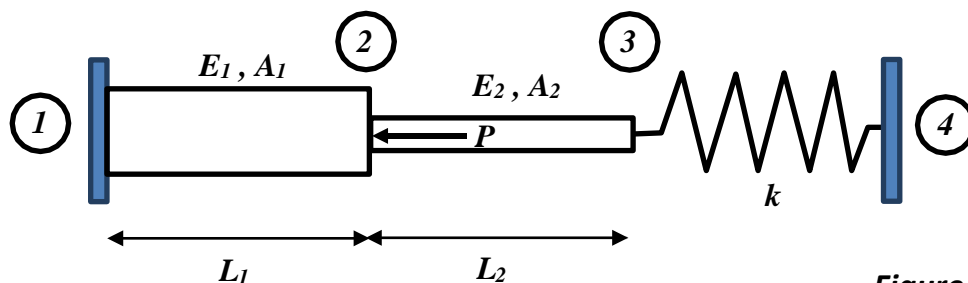


Figure 5

- Déterminer les efforts internes dans chaque élément.

EXERCICE 6

Soit l'élément barre représenté dans la figure 6.

- Evaluer la matrice de rigidité globale en respectant le système de coordonnées.

A.N :

- Section de l'élément : $A = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
- Longueur : $l = 1.2 \text{ m}$
- Module d'élasticité : $E = 210 \text{ GPa}$.
- L'élément présente angle de 30° par rapport à l'horizontale.

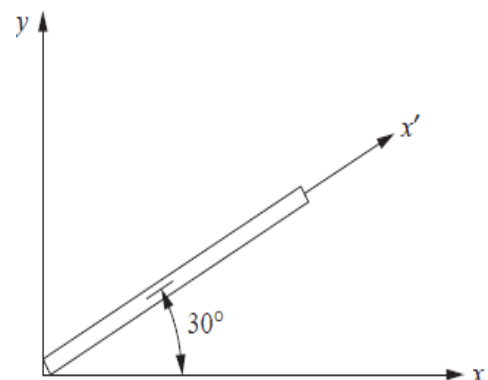


Figure 6

EXERCICE 7

Soit le système de barres schématisé sur la figure 7. Les modules de Young ainsi que les sections sont tels que $E_1=2E_2=2E_3$ et $A_1=2A_2=2A_3$.

Les deux nœuds 1 et 3 sont encastrés. La barre 1 est reliée aux barres 2 et 3 par le biais d'une plaque infiniment rigide. Les charges nodales P_1 et P_2 sont identiques i.e $P_1=P_2=P$.

- Calculer le déplacement du nœud 2 ainsi que les réactions d'appuis.

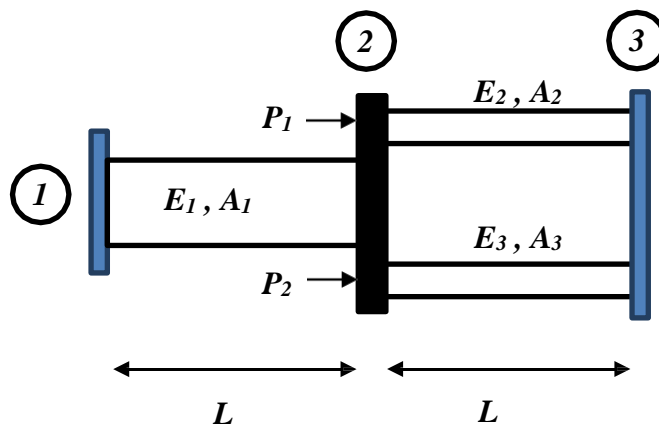


Figure 7

EXERCICE 1

Pour le treillis plan composé des trois éléments représentés à la figure 1, soumis à une force verticale dirigée vers le bas de 10 000 lb appliquée au nœud 1, déterminer les déplacements suivant x et y au nœud 1 ainsi que les contraintes dans chacun des éléments.

On donne : $E = 3 \times 10^6$ psi et $A = 2 \text{ in}^2$ pour tous les éléments.

Les longueurs des éléments sont indiquées dans la figure.

1 PSI= 6894,75729 PA ; $1 \text{ in}^2 = 0,00064516 \text{ PA}$; $1 \text{ lb} = 0,00444822 \text{ KN}$

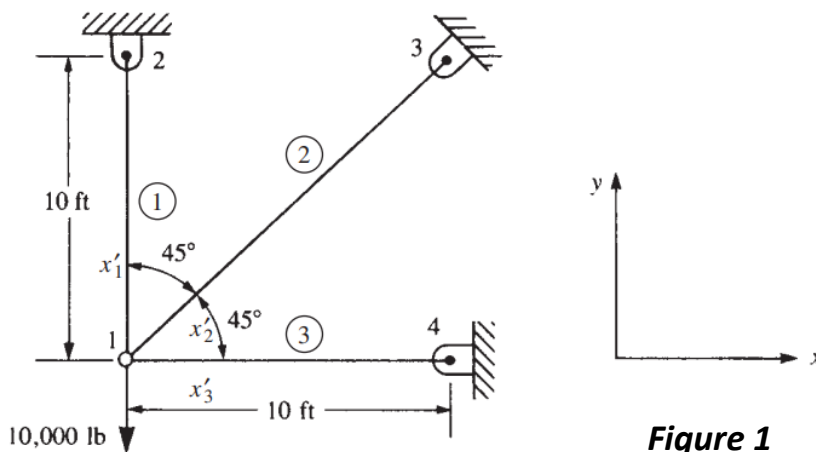


Figure 1

EXERCICE 2

Pour le treillis à deux barres représentées à la figure 2, déterminer le déplacement suivant y du nœud 1 ainsi que la force axiale dans chaque élément.

Une force de $P=1000 \text{ kN}$ est appliquée au nœud 1 dans la direction positive de y, tandis que le nœud 1 s'affaisse d'une valeur $\delta=50 \text{ mm}$ dans la direction négative de x.

On donne : $E = 3 \times 10^6 \text{ GPa}$ et $A = 2 \text{ m}^2$ pour chaque élément.

Les longueurs des éléments sont indiquées dans la figure.

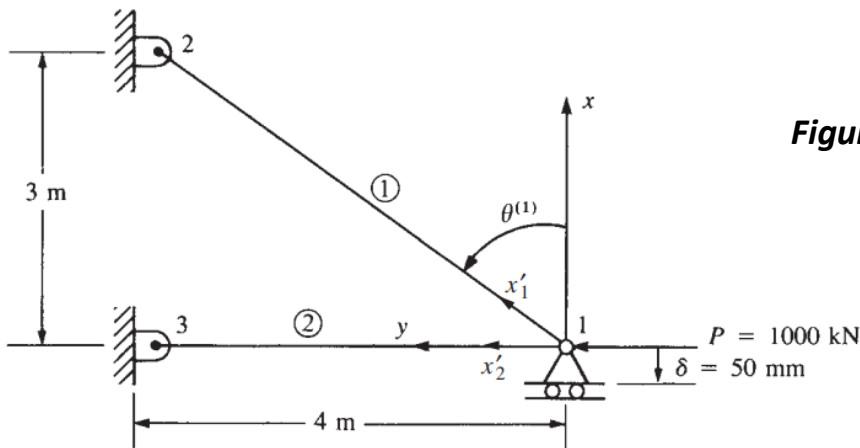


Figure 2

EXERCICE 3

Pour illustrer comment on peut combiner des éléments de type ressort et de type barre dans une même structure, on considère le treillis à deux barres appuyées sur un ressort représenté à la figure 3.

Les deux barres ont un module de Young $E = 210 \text{ GPa}$ et une section $E = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

La barre 1 a une longueur de 5 m et la barre 2 une longueur de 10 m.

La raideur du ressort est $k = 2000 \text{ kN/m}$.

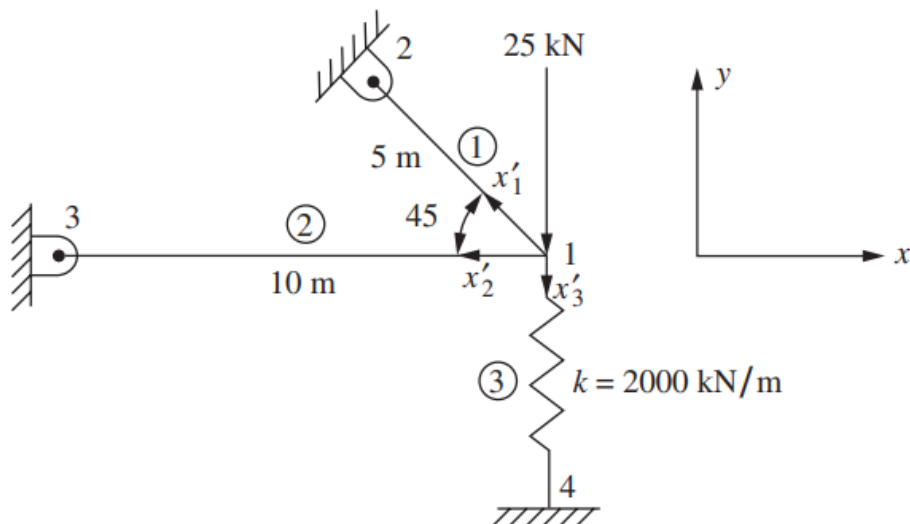


Figure 3

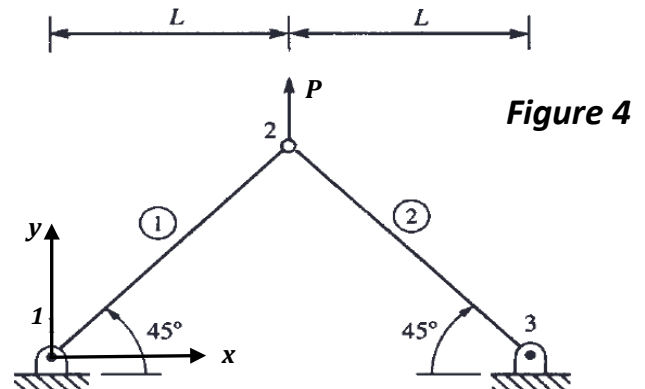
▪ Déterminer :

1. La matrice de rigidité globale.
2. Les déplacements du nœud 1.
3. Les contraintes à l'intérieur de l'élément 1 et 2.

EXERCICE 4

Soit la structure en treillis plan ci-contre :

- Déterminer :
 1. La matrice de rigidité globale.
 2. Les déplacements du nœud 2.
 3. Les contraintes à l'intérieur de l'élément 1.

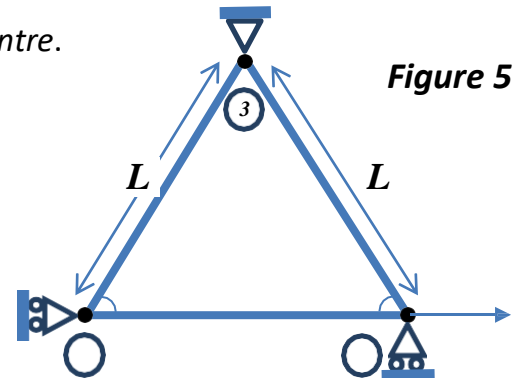


EXERCICE 5

Soit le système composé de trois (03) barres de la figure ci-contre.

Toutes les barres possèdent la même longueur L et la même rigidité EA .

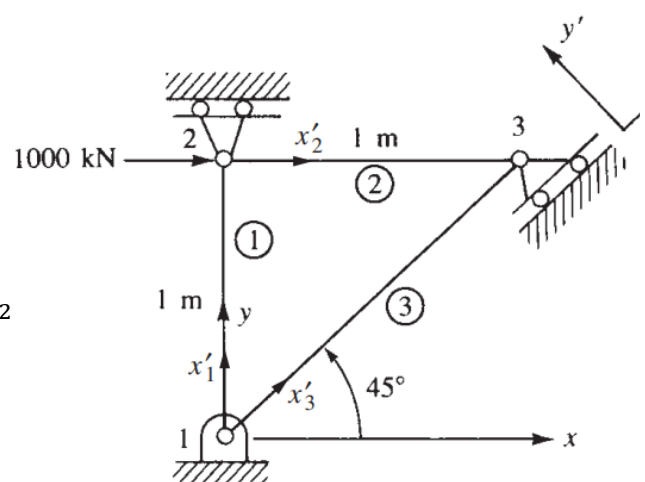
1. Déterminer la matrice de rigidité du système.
2. Calculer les déplacements nœaux.
3. Calculer les efforts normaux dans les barres.



EXERCICE 6

Soit à analyser la structure en treillis ci-contre composée de trois (03) barres semblables de rigidité extensionnelle EA .

- Déterminer les déplacements et les réactions.
On donne : $E = 210 \text{ GPa}$.
La section des éléments 1 et 2 vaut $A = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
La section de l'élément 3 vaut $A = 6\sqrt{2} \times 10^{-4} \text{ m}^2$.



EXERCICE 7

Soit la structure composée de quatre (04) barres et de 05 nœuds représentés ci-contre. Le chargement se résume à la force verticale F appliquée au nœud 1.

Toutes les barres présentent la même rigidité axiale EA .

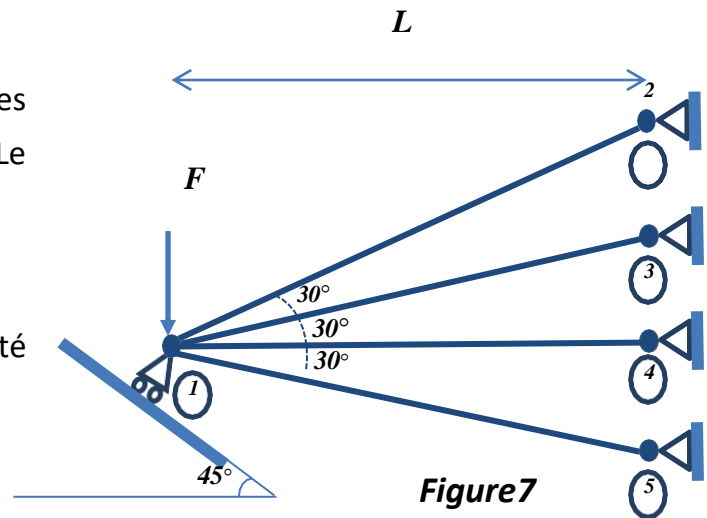


Figure 7

- Déterminer :

- La matrice de rigidité globale du système.
- La réaction normale à la pente en 1 ainsi que les déplacements au nœud 1.
- Les efforts dans les barres.

EXERCICE 8

Le treillis est composé de huit barres et de cinq nœuds comme indiqué. Une charge verticale de $2P$ est appliquée au nœud 4. Les nœuds 1 et 5 sont des appuis articulés.

Les barres 1, 2, 7 et 8 ont des rigidités axiales de $2AE$, tandis que les barres 3 à 6 ont une rigidité axiale de AE . Ici encore, A et E représentent respectivement l'aire de la section transversale et le module d'élasticité d'une barre.

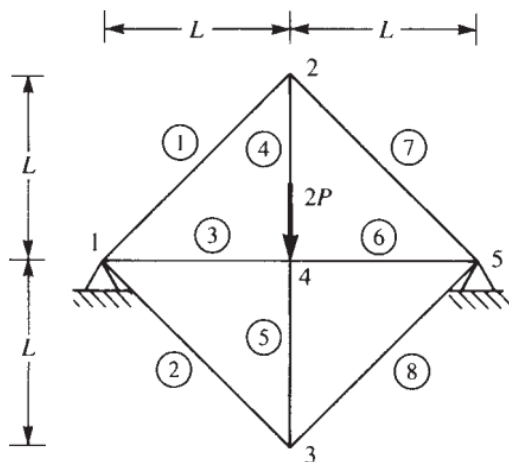


Figure 8.a : treillis plan

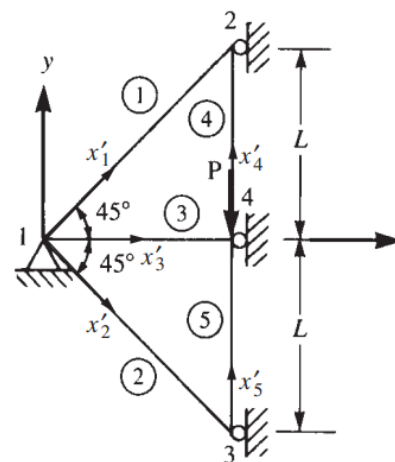


Figure 8.b: treillis de la figure 8.a réduite par symétrie

- Déterminer

- La matrice de rigidité globale du système.
- Les déplacements au nœud 2, 3 et 4.

EXERCICE 1

Soit le système suivant :

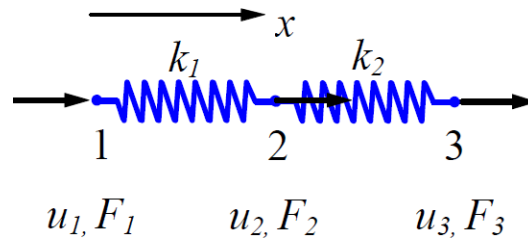


Figure 1

- Déterminer :
 1. La matrice globale de rigidité.
 2. Les déplacements des nœuds 1, 2 et 3.
 3. Les réactions aux nœuds 1, 2 et 3.

EXERCICE 2

Soit le système suivant :

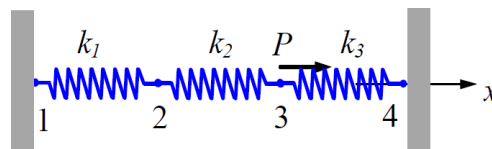


Figure 2

$$k_1 = 100 \text{ N/mm} ; k_2 = 200 \text{ N/mm} ; k_3 = 100 \text{ N/mm}$$

$$p = 500 \text{ N} ; u_1 = u_4 = 0$$

- Trouver :
 1. La matrice globale de rigidité.
 2. Les déplacements des nœuds 2 et 3.
 3. Les réactions aux nœuds 1 et 4.

EXERCICE 3

Soit l'assemblage de ressorts représenté sur la *figure 3*, les nœuds d'extrémité 1 et 2 sont fixes (*encastrement*), une charge horizontale P est appliquée au nœud 4 :

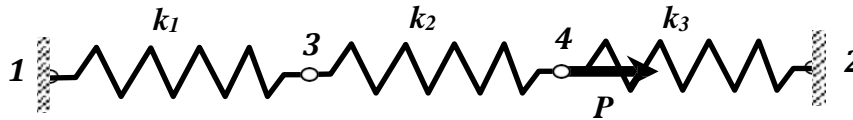


Figure 3

- Déterminer :
 1. La matrice de rigidité globale.
 2. Les déplacements des nœuds 3 et 4
 3. Les réactions aux nœuds 1 et 2
 4. L'effort dans chaque ressort

➤ On donne : $k_1=k$, $k_2=2k$, $k_3=3k$

EXERCICE 4

Soit l'assemblage de ressorts représenté sur la *figure 4*, le nœud d'extrémité 1 est fixe alors qu'un déplacement connu δ est imposé au nœud 5 :

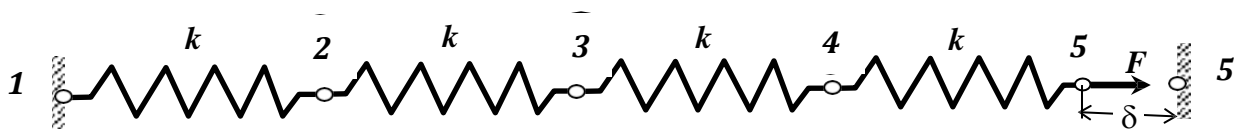


Figure 4

- Déterminer :
 1. La matrice de rigidité globale.
 2. Les déplacements des nœuds 2 et 4.
 3. Les forces nodales globales.
 4. Les forces élémentaires locales.

A.N : $k=200 \text{ kN/m}$ et $\delta=20 \text{ mm}$

EXERCICE 5

Soit l'assemblage de ressorts représenté sur la figure 5, où tous les ressorts ont la même raideur k et les nœuds d'extrémité sont fixes.

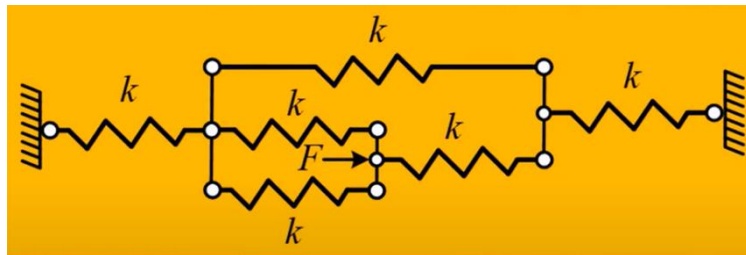


Figure 5

- Déterminer :
 1. La matrice de rigidité globale.
 2. Les déplacements des nœuds 2,3 et 4
 3. Les réactions aux nœuds 1 et 5
- A.N: $k=100 \text{ kN/m}$ et $F=10 \text{ kN}$

EXERCICE 5

Soit un système constitué de trois éléments ressort connectés à travers des masses m identiques (Figure 6). Les raideurs des éléments ressorts 1, 2 et 3 sont respectivement $3k$, $2k$ et k . le nœud 1 est suspendu par un encastrement.

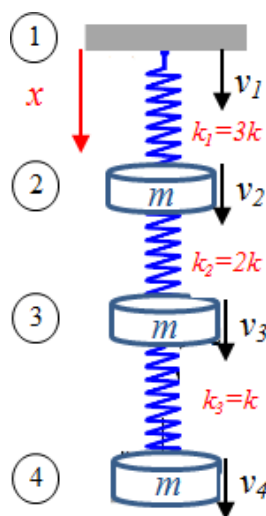


Figure 6

EXERCICE 1

Une tige de longueur $L = 3\text{m}$ et de section $A = 25\text{cm}^2$ est encastrée à une de ses extrémités et soumise à une tension $P = 250\text{KN}$ à l'autre extrémité. Le module de Young du matériau de la tige est $E = 210\,000\text{ MPa}$.

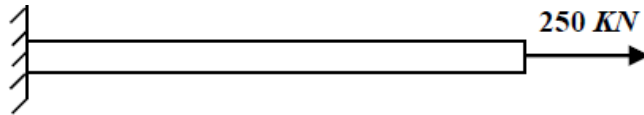


Figure 1

- Déterminer :
 1. La matrice globale de rigidité.
 2. La réaction aux nœud 1.

EXERCICE 2

Soit l'assemblage suivant :

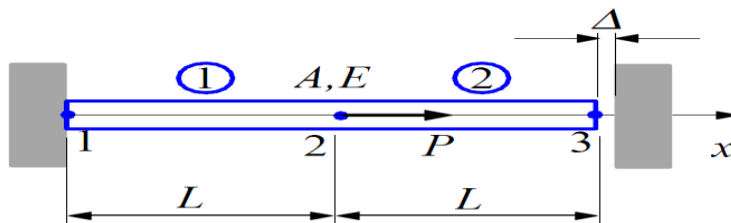


Figure 2

- Trouver les réactions d'appuis de cet assemblage sachant que :

$$E = 2.10^4 \text{ N/mm}^2 ; A = 250\text{mm}^2 ; L = 150\text{mm} ; P = 6.10^4 \text{ N} ; \Delta = 1.2\text{mm}$$

EXERCICE 3

Considérons l'assemblage de trois (03) barres de la figure 3.

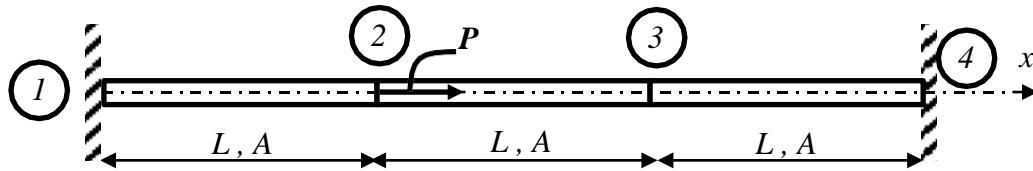


Figure 3

- Déterminer :

1. La matrice globale de rigidité.
2. Les déplacements des nœuds 2 et 3.
3. Les réactions aux nœuds 1 et 4.

EXERCICE 4

Considérons la barre composée d'éléments de sections variables représentée sur la figure 4. Soient E le module d'élasticité du matériau de la barre, les aires des sections droites sont :

A entre les nœuds 1 et 2, $2A$ entre les nœuds 2 et 3 et $3A$ entre les nœuds 3 et 4.

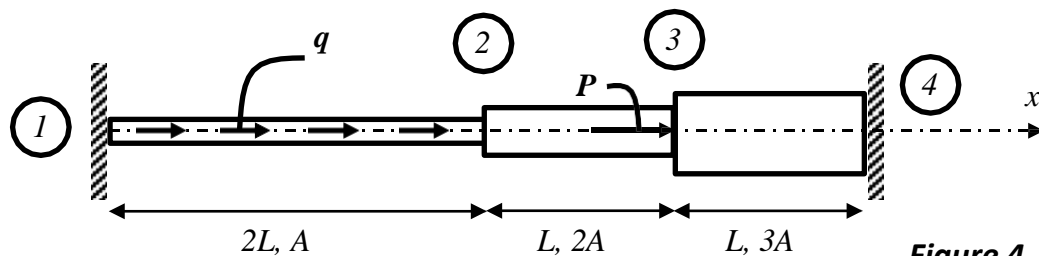


Figure 4

La barre est encastree à ses deux extrémités (nœuds 1 et 4) et sollicitée sur l'élément 1-2 par une charge q uniformément répartie.

Au nœud 3, on applique une force concentrée d'intensité $P=2qL$.

- Déterminer les déplacements nodaux ainsi que les réactions d'appuis.

EXERCICE 5

Considérons la structure représentée sur la figure 5.

Soient E_1 et E_2 les modules d'élasticité des matériaux constituant les barres tels que $E_1 = 3E_2$. Les sections droites sont de diamètres d_1 et d_2 avec $d_1 = 2d_2$ et les longueurs sont toutes égales $L_1 = L_2 = L$.

La structure est encastree à l'extrémité gauche tandis qu'à l'autre elle est reliée à un ressort linéaire de rigidité $k = E_1 A_1 / L_1$. Au nœud 2 s'applique une charge d'intensité P .

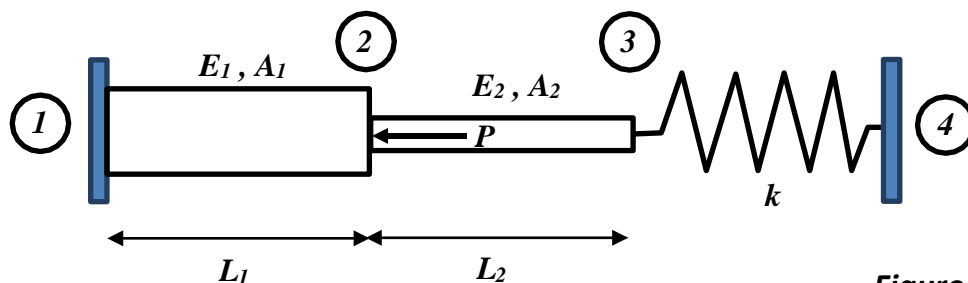


Figure 5

- Déterminer les efforts internes dans chaque élément.

EXERCICE 6

Soit l'élément barre représenté dans la figure 6.

- Evaluer la matrice de rigidité globale en respectant le système de coordonnées.

A.N :

- Section de l'élément : $A = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
- Longueur : $l = 1.2 \text{ m}$
- Module d'élasticité : $E = 210 \text{ GPa}$.
- L'élément présente angle de 30° par rapport à l'horizontale.

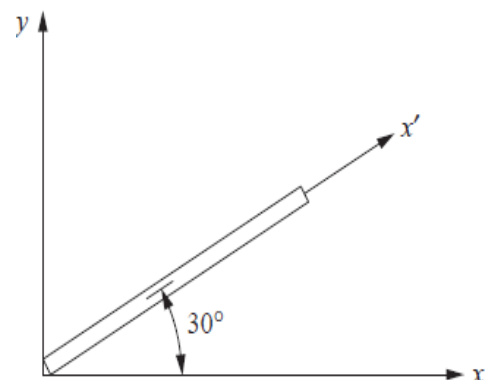


Figure 6

EXERCICE 7

Soit le système de barres schématisé sur la figure 7. Les modules de Young ainsi que les sections sont tels que $E_1=2E_2=2E_3$ et $A_1=2A_2=2A_3$.

Les deux nœuds 1 et 3 sont encastrés. La barre 1 est reliée aux barres 2 et 3 par le biais d'une plaque infiniment rigide. Les charges nodales P_1 et P_2 sont identiques i.e $P_1=P_2=P$.

- Calculer le déplacement du nœud 2 ainsi que les réactions d'appuis.

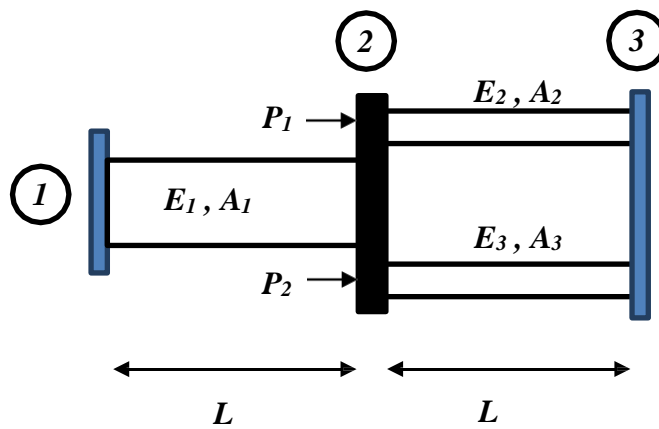


Figure 7

EXERCICE 1

Pour le treillis plan composé des trois éléments représentés à la figure 1, soumis à une force verticale dirigée vers le bas de 10 000 lb appliquée au nœud 1, déterminer les déplacements suivant x et y au nœud 1 ainsi que les contraintes dans chacun des éléments.

On donne : $E = 3 \times 10^6$ psi et $A = 2 \text{ in}^2$ pour tous les éléments.

Les longueurs des éléments sont indiquées dans la figure.

1 PSI= 6894,75729 PA ; $1 \text{ in}^2 = 0,00064516 \text{ PA}$; $1 \text{ lb} = 0,00444822 \text{ KN}$

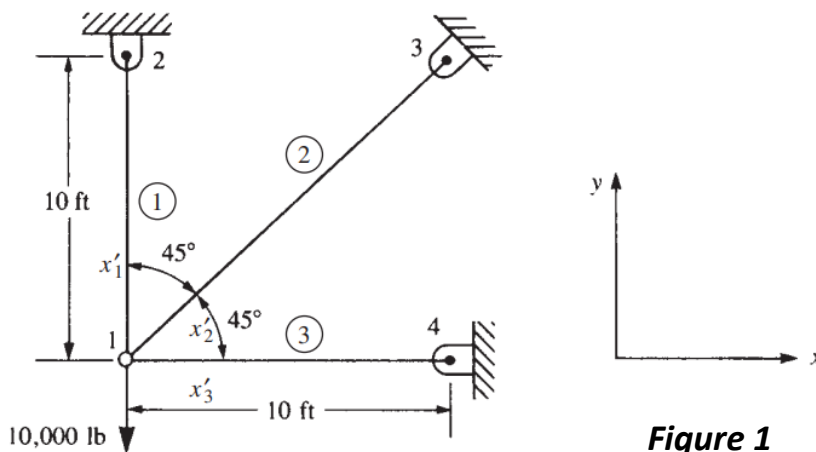


Figure 1

EXERCICE 2

Pour le treillis à deux barres représentées à la figure 2, déterminer le déplacement suivant y du nœud 1 ainsi que la force axiale dans chaque élément.

Une force de $P=1000 \text{ kN}$ est appliquée au nœud 1 dans la direction positive de y, tandis que le nœud 1 s'affaisse d'une valeur $\delta=50 \text{ mm}$ dans la direction négative de x.

On donne : $E = 3 \times 10^6 \text{ GPa}$ et $A = 2 \text{ m}^2$ pour chaque élément.

Les longueurs des éléments sont indiquées dans la figure.

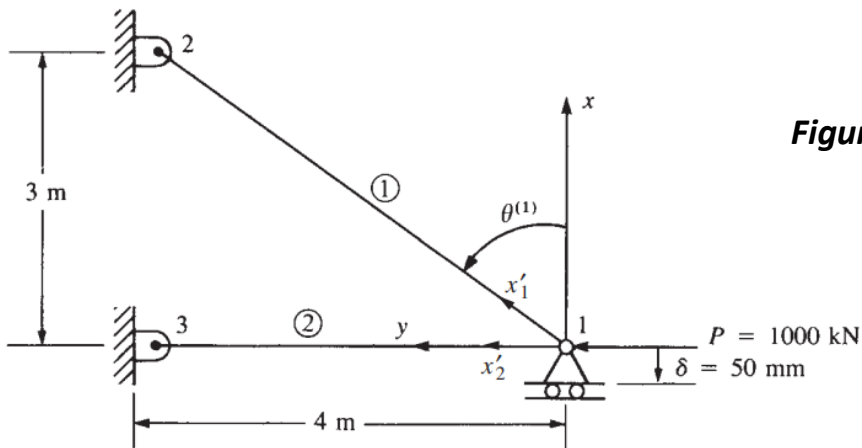


Figure 2

EXERCICE 3

Pour illustrer comment on peut combiner des éléments de type ressort et de type barre dans une même structure, on considère le treillis à deux barres appuyées sur un ressort représenté à la figure 3.

Les deux barres ont un module de Young $E = 210 \text{ GPa}$ et une section $E = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

La barre 1 a une longueur de 5 m et la barre 2 une longueur de 10 m.

La raideur du ressort est $k=2000 \text{ kN/m}$.

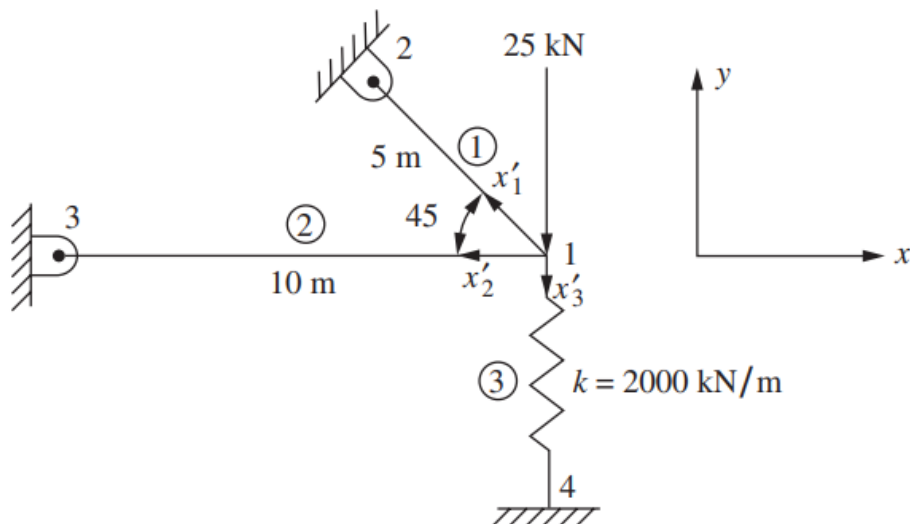


Figure 3

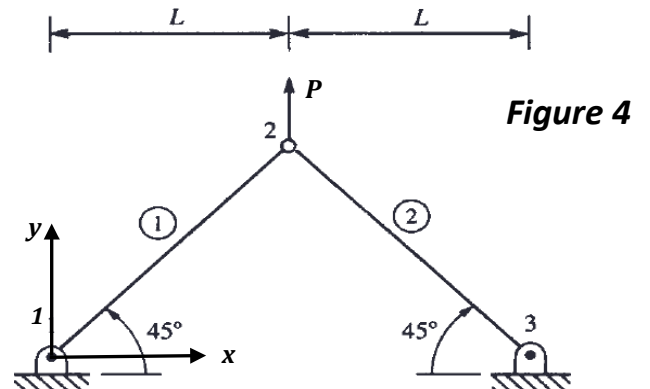
▪ Déterminer :

1. La matrice de rigidité globale.
2. Les déplacements du nœud 1.
3. Les contraintes à l'intérieur de l'élément 1 et 2.

EXERCICE 4

Soit la structure en treillis plan ci-contre :

- Déterminer :
 1. La matrice de rigidité globale.
 2. Les déplacements du nœud 2.
 3. Les contraintes à l'intérieur de l'élément 1.

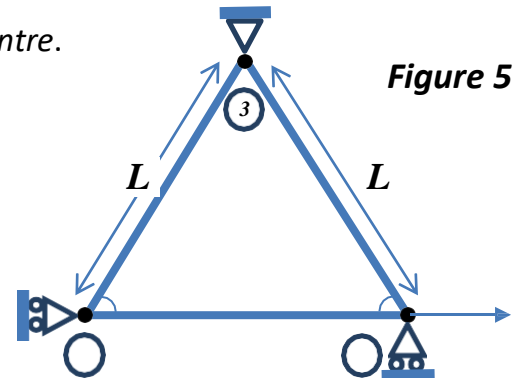


EXERCICE 5

Soit le système composé de trois (03) barres de la figure ci-contre.

Toutes les barres possèdent la même longueur L et la même rigidité EA .

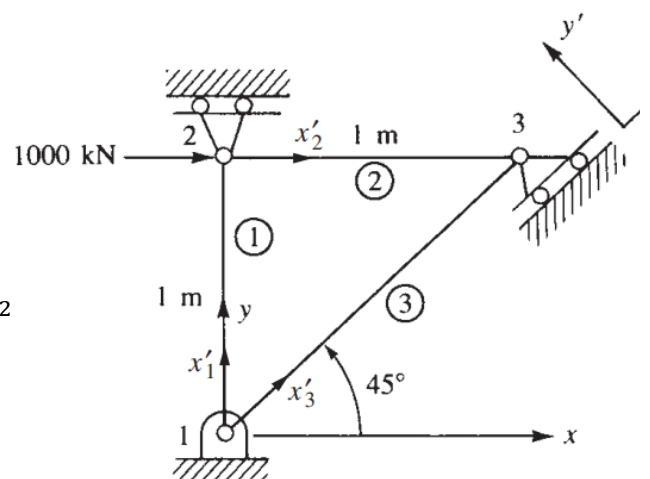
1. Déterminer la matrice de rigidité du système.
2. Calculer les déplacements nœaux.
3. Calculer les efforts normaux dans les barres.



EXERCICE 6

Soit à analyser la structure en treillis ci-contre composée de trois (03) barres semblables de rigidité extensionnelle EA .

- Déterminer les déplacements et les réactions.
On donne : $E = 210 \text{ GPa}$.
La section des éléments 1 et 2 vaut $A = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
La section de l'élément 3 vaut $A = 6\sqrt{2} \times 10^{-4} \text{ m}^2$.



EXERCICE 7

Soit la structure composée de quatre (04) barres et de 05 nœuds représentés ci-contre. Le chargement se résume à la force verticale F appliquée au nœud 1.

Toutes les barres présentent la même rigidité axiale EA .

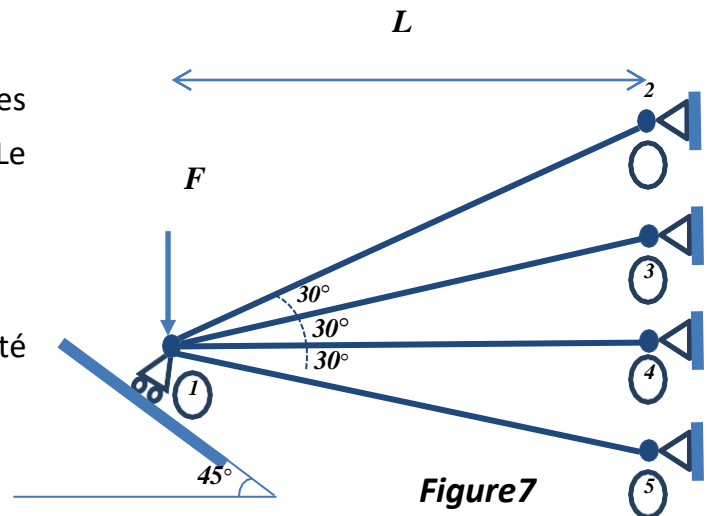


Figure 7

- Déterminer :

- La matrice de rigidité globale du système.
- La réaction normale à la pente en 1 ainsi que les déplacements au nœud 1.
- Les efforts dans les barres.

EXERCICE 8

Le treillis est composé de huit barres et de cinq nœuds comme indiqué. Une charge verticale de $2P$ est appliquée au nœud 4. Les nœuds 1 et 5 sont des appuis articulés.

Les barres 1, 2, 7 et 8 ont des rigidités axiales de $2AE$, tandis que les barres 3 à 6 ont une rigidité axiale de AE . Ici encore, A et E représentent respectivement l'aire de la section transversale et le module d'élasticité d'une barre.

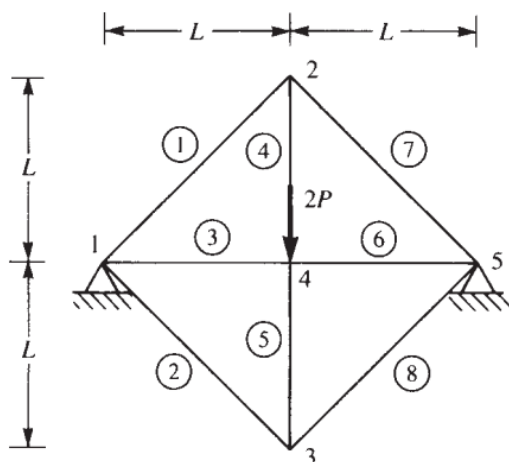


Figure 8.a : treillis plan

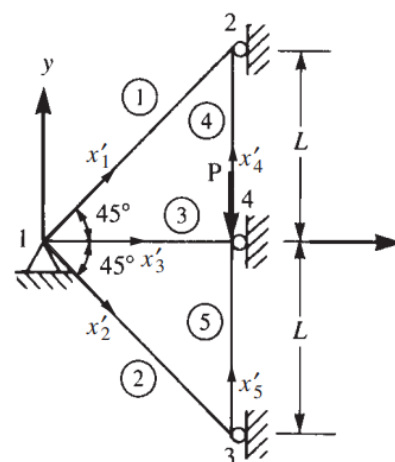


Figure 8.b: treillis de la figure 8.a réduite par symétrie

- Déterminer

- La matrice de rigidité globale du système.
- Les déplacements au nœud 2, 3 et 4.