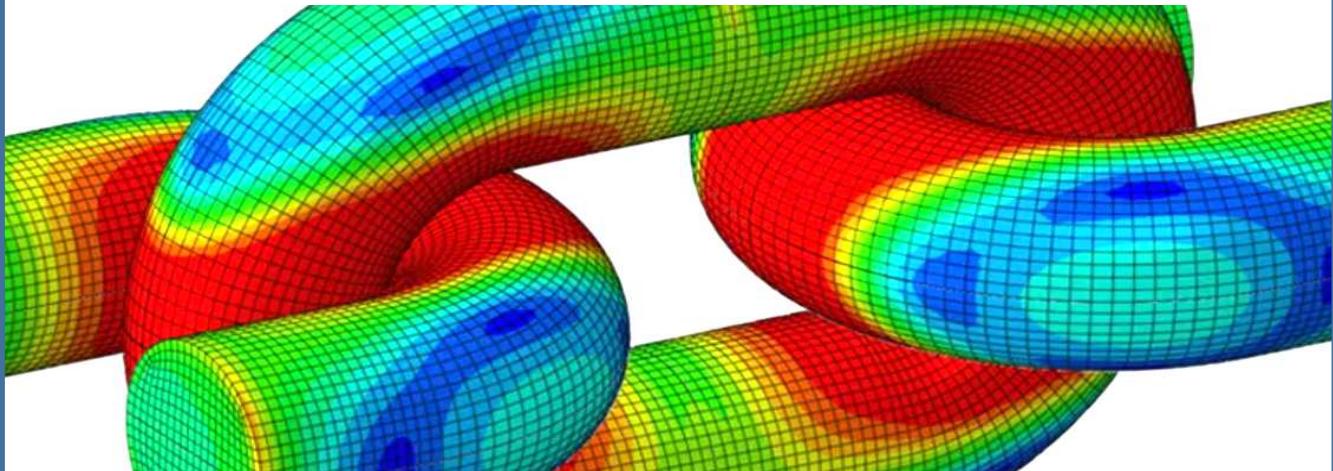


METHODE DES ELEMENTS FINIS



Dr. Mehiaoui Hadjebar M. Y.

Table des matières

CHAPITRE 1	
INTRODUCTION GENERALE	1
1.1. Généralités	1
1.2. Programme :	1
CHAPITRE 2	
QU'EST-CE QUE LA MEF ?	3
2.1. Principe général	3
2.2. Processus de l'analyse par éléments finis	5
2.3. Conclusion	5
CHAPITRE 3	
RAPPEL SUR LA MECANIQUE DU SOLIDE	7
3.1. Les contraintes	7
3.1.1. Equations internes	7
3.1.2. Equations externes	7
3.2. Les déformations	7
3.2.1. Les déplacements	7
3.2.2. Relations entre déplacements et déformations	8
3.3. Relation entre contraintes et déformations	8
3.4. Energie de déformation élastique	9
3.4.1. Cas d'un chargement uniaxial	9
3.4.2. Cas général	9
3.5. Conclusion	10
CHAPITRE 4	
PRINCIPE DE LA MEF EN STRUCTURES	11
4.1. Approximation nodale – Fonctions de forme	11
4.1.1. Exemple 1 - L'élément barre	12
4.2. Résolution d'un problème en structure	12
4.2.1. Cas d'une barre en traction	13
4.2.2. Energie de déformation élémentaire	13
4.2.3. Exemple 2	14
4.2.4. Travail élémentaire des forces de volume et de surface	14
4.2.5. Assemblage des matrices élémentaires	14

4.2.6. Exemple 3 – Structure en éléments ressorts	15
4.2.7. Exemple 4 – Structure en éléments barres	17
4.3. Conclusion	19
Problèmes :	19
CHAPITRE 5	
ELEMENT DE BARRE ET DE RESSORT	21
5.1. L'élément de barre	21
5.2. Matrice de rigidité élémentaire	21
5.3. Elément de ressort	22
5.4. Exemple 1	22
5.5. Exemple 2	25
5.6. Exemple 3 - Treillis	27
5.7. Exemple 4 – Appui incliné	30
5.8. Conclusion	33
Problèmes :	33
CHAPITRE 6	
ELEMENT DE POUTRE	35
6.1. Equation générale des poutres planes	35
6.2. Elément de poutre plane à deux nœuds en flexion simple	36
6.2.1. Champ de déplacement transversal	36
6.2.2. Champ de déformation	37
6.2.3. Matrice de rigidité élémentaire	37
6.2.4. Matrice de rigidité élémentaire dans le repère global :	38
6.2.5. Vecteurs charges	38
6.3. Exemple 1 – Poutre continue	40
6.4. Elément de poutre plane à deux nœuds en flexion composée	42
6.4.1. Champ de déplacement axial $u(x)$	42
6.4.2. Champ de déplacement vertical	43
6.4.3. Champ de déformation	43
6.4.4. Matrice de rigidité élémentaire	43
6.4.5. Matrice de rigidité élémentaire en repère global	43
6.5. Exemple 2 – Portique	45
6.6. Elément de poutre plane à deux nœuds en 3D	47
6.6.1. Elément de poutre plane à deux nœuds en torsion pure	47
6.6.2. Elément de poutre plane à deux nœuds en flexion simple et en torsion	49

6.6.3. Exemple	50
6.7. Conclusion	52
Problèmes :	53
CHAPITRE 7	
ELEMENT DE CONTRAINTE ET DE DEFORMATION PLANE	56
7.1. Etat plan de contrainte et de déformation	56
7.1.1. Déformation plane	56
7.1.2 Contrainte plane	56
7.1.3. Champ de déformation	57
7.2. Les éléments de contrainte plane	57
7.2.1. Le triangle droit isocèle	57
7.2.2. L'élément carré	59
7.3. Conclusion	60
Problèmes :	60
CHAPITRE 8	
LES ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES	62
8.1. Problématique du maillage	62
8.1.1. Exemple	64
8.2. Fonctions de forme	65
8.2.1. Méthode directe	66
8.2.2. Polynôme de Lagrange	68
8.3. Formulation des éléments isoparamétriques :	68
8.3.1. Matrice de rigidité	68
8.3.2. Forces élémentaires	73
8.3.3. Exemple 1	73
8.3.4. Exemple 2	79
Problèmes :	83
CHAPITRE 9	
L'INTEGRATION NUMERIQUES	87
9.1. Introduction	87
9.2. Méthode des trapèzes	87
9.2.1. Exemple 1	88
9.2. La méthode de quadrature de Gauss	88
9.2.2. Exemple 2	89
9.2.3. Exemple 3	90

9.3. La méthode de quadrature de Hammer	91
Problèmes :	92
CHAPITRE 10	
TECHNIQUES D'ELEMENTS FINIS	93
10.1. Conception du maillage	93
10.1.1. Les règles d'assemblage des éléments	93
10.1.2. Le contrôle de l'aspect des éléments	95
10.1.3. Maillage et largeur de bande	96
10.2. Structure générale d'un programme d'éléments finis en structures	97
10.3. Matrice élémentaire de rigidité en 2D	97
10.4. Introduction des conditions aux limites	98
10.4.1. Méthode du terme diagonal dominant	98
10.4.2. Méthode du terme unité sur la diagonale	99
10.4.3. Méthode de suppression des équations	99
10.4.4. Exemple 1	100
10.4.1. Exemple 2	100
10.5. Calcul des réactions d'appuis	101
10.5.1. Exemple 3	101
CONCLUSION GENERALE	102
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	103

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

1.1. Généralités

La méthode des éléments finis (MEF) est née il y a de cela presque 70 ans. Aujourd’hui, grâce à l’avènement des calculateurs numériques, elle est devenue le principal outil numérique de la conception assistée par ordinateur.

La MEF est une discipline où se mêlent étroitement les mathématiques, la mécanique et l’analyse numérique. Il existe, à l’heure actuelle, une riche documentation sur cette méthode. L’approche adoptée dans ce cours est essentiellement orientée vers la modélisation plutôt que vers la théorie afin de démystifier cet outil de calcul et de le rendre plus accessible aux étudiants.

Bien que la MEF puisse s’appliquer à un grand nombre de problèmes tels que ceux concernant les transferts thermiques, l’aéronautique, la mécanique des fluides, l’électromagnétisme, l’analyse des structures ..etc, ce cours est axé sur cette dernière discipline puisqu’il s’adresse à des étudiants en travaux publics.

1.2. Programme :

Le module s’étend sur deux semestres consécutifs. Le premier semestre est consacré à la méthode des éléments finis dite directe, alors que le second semestre est entièrement réservé à la méthode des éléments finis isoparamétriques.

Le présent polycopie de cours est donc organisé de la manière suivante :

Après une brève introduction générale, Le chapitre deux explique de manière succincte ce que sont les éléments finis en abordant leur principe général ainsi qu’en exposant le processus de base d’une analyse par éléments finis.

Par la suite, le chapitre trois reprend les notions de bases de la mécanique du solide, acquises grâce aux prérequis du module, et qui servent à l’établissement de la MEF en statique : Objet du chapitre quatre.

Les chapitres cinq, six et sept, présentent quelques éléments usuels de la MEF directe, à savoir :

- L’élément de barre et de ressort.
- L’élément de poutre à 02 nœuds en flexion plane, flexion composée et torsion.
- Les éléments de contrainte et de déformation plane.

Une fois toutes ces notions assimilées, l'étudiant est enfin prêt à aborder, dans le chapitre huit, la méthode des éléments finis isoparamétriques suivie d'un chapitre sur les principales techniques d'intégration numérique utilisée en MEF.

Le dernier chapitre du programme, le chapitre dix, aborde des notions complémentaires nécessaires à l'implémentation numérique de la MEF et est titré Techniques d'Eléments Finis.

Le cours se conclut avec un petit mot de fin et bien évidemment, une liste de références bibliographiques soigneusement sélectionnée parmi les nombreux ouvrages de la bibliothèque de l'ENSTP. Parmi la multitude de livres disponibles à la bibliothèque, seuls sont proposés aux étudiants ceux qui sont philosophiquement proches du programme étudié à l'école afin que le lecteur ne soit pas noyé par toutes les notions et applications possibles en MEF. Tout cela dans le but d'assurer un bon départ à nos étudiants.

CHAPITRE 2

QU'EST-CE QUE LA MEF ?

2.1. Principe général

Un problème d'ingénieur est généralement représenté par un modèle mathématique, i.e. des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur les frontières de ce domaine. De plus, étant un problème continu, il possède une infinité de degrés de liberté.

A l'exception de quelques cas ayant une géométrie très simple, il est très difficile voire impossible de trouver une solution analytique dite « exacte » au problème. La méthode des éléments finis consiste en premier lieu à remplacer un système continu par un système discret équivalent.

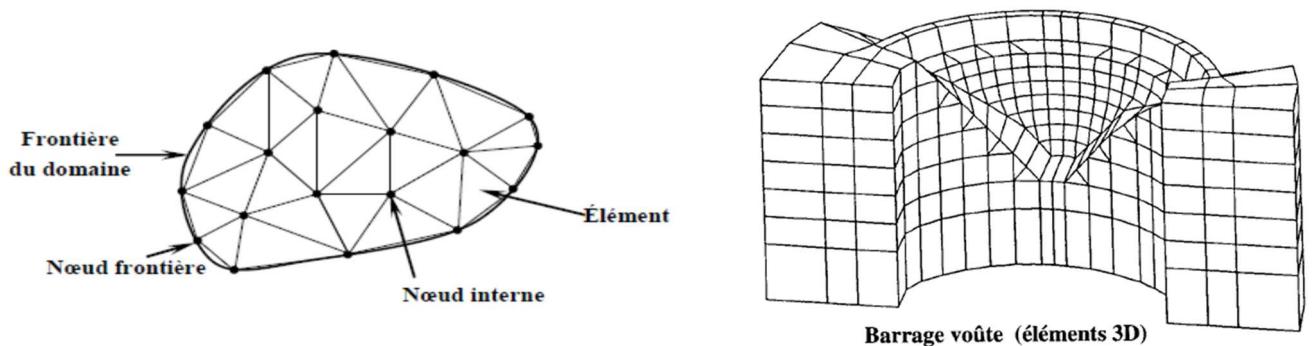


Figure 2.1. Milieu continu discréétisé [Rapin 1993]

La discréétisation se fait sur deux fronts. D'une part, le domaine est subdivisé en sous-domaines de formes géométriques simples appelés « éléments finis », connectés entre eux en des points appelés « nœuds ». D'autre part, les équations différentielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide de calculs variationnels ou des méthodes de minimisation de l'erreur comme la méthode des résidus pondérés.

Les éléments finis sont classés selon leurs formes géométriques (voir figure 2.2).

- Les éléments unidimensionnels : barres, poutres en flexion simple ou composée ..
- Les éléments bidimensionnels : triangles et rectangles en élasticité plane, plaques et coques ..
- Les éléments tridimensionnels : tétraèdres et hexaèdres ..
- Les éléments axisymétriques souvent utilisés pour modéliser les pieux, les sols..

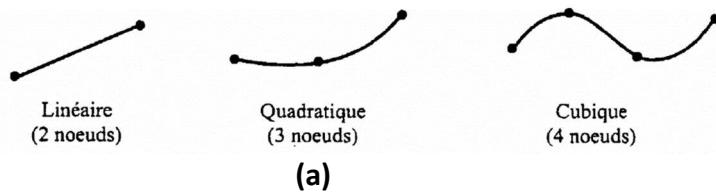
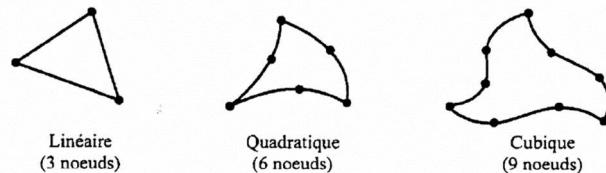
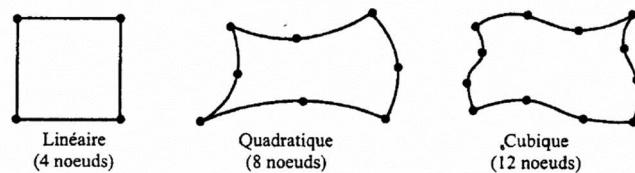
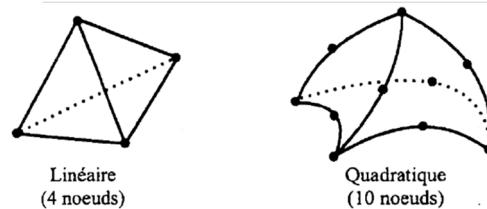
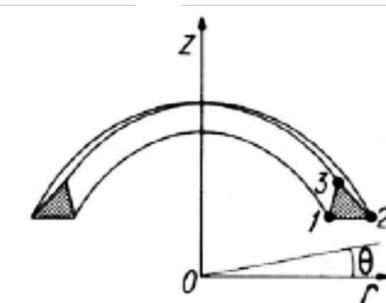
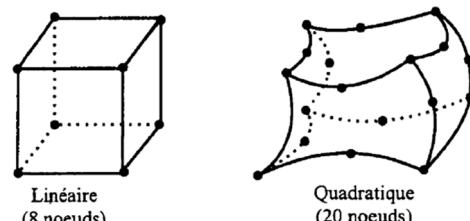
**Eléments triangulaires****Eléments quadrangulaires****Eléments tétraédriques****Eléments hexaédriques**

Figure 2.2. Exemples d'éléments finis (a) unidimensionnels (b) bidimensionnels (c) tridimensionnels et (d) axisymétriques [Chateauneuf 2010]

2.2. Processus de l'analyse par éléments finis

Lorsqu'on aborde un problème d'engineering, on commence par délimiter ses frontières physiques. Par exemple, si l'on s'intéresse à une structure quelconque (bâtiment, pont, barrage hydraulique ...), la première question à résoudre est la prise en compte ou pas de tels ou tels autres éléments de la structure, de la considérer comme étant parfaitement encastrée ou au contraire d'intégrer les fondations et voir même le sol sous-jacent dans le modèle physique... Ensuite, vient la question, non moindre, du choix des charges appliquées à la structures.

Une fois le modèle physique arrêté, il faut établir les équations différentielles qui régissent l'équilibre de notre modèle. Pour cela, l'ingénieur doit faire un certain nombre d'hypothèses relatives à la géométrie final du modèle, la loi de la cinématique, le type de comportement du matériau ..etc et par la suite, exprimer les conditions aux limites et les charges appliquées sous forme d'équations. Un modèle mathématique est ainsi créé.

La résolution par éléments finis nécessite la transformation des équations différentielles établies dans le modèle mathématique en équations algébriques. La structure étudiée est discrétisée à l'aide des éléments finis choisis et un maillage est ainsi réalisé. La solution du problème est obtenue en raffinant celui-ci jusqu'à atteindre la convergence de la méthode. Ce point est étudié en détail dans le chapitre 10.

L'interprétation des résultats finaux est indispensable afin de vérifier leur véracité autrement, il est impératif de revoir le modèle mathématique à commencer par les hypothèses de base. Si, au final, l'équilibre de la structure modélisée n'est pas satisfaisant ou que l'on désire optimiser son comportement, une amélioration de sa conception est nécessaire. Cette décision induit automatiquement une modification du problème physique et ainsi de suite jusqu'à la finalisation de l'étude.

2.3. Conclusion

La méthode des éléments finis est un puissant outil de modélisation numérique utilisé dans un grand nombre de logiciels de calcul des structures mais aussi d'équilibre des terres. L'écriture des équations de la MEF se fait de manière matricielle afin de permettre un calcul plus efficace mais surtout plus rapide par ordinateur.

Le prochain chapitre présente un rappel sur la mécanique des structures ainsi qu'une réécriture de la loi d'élasticité sous forme matricielle.

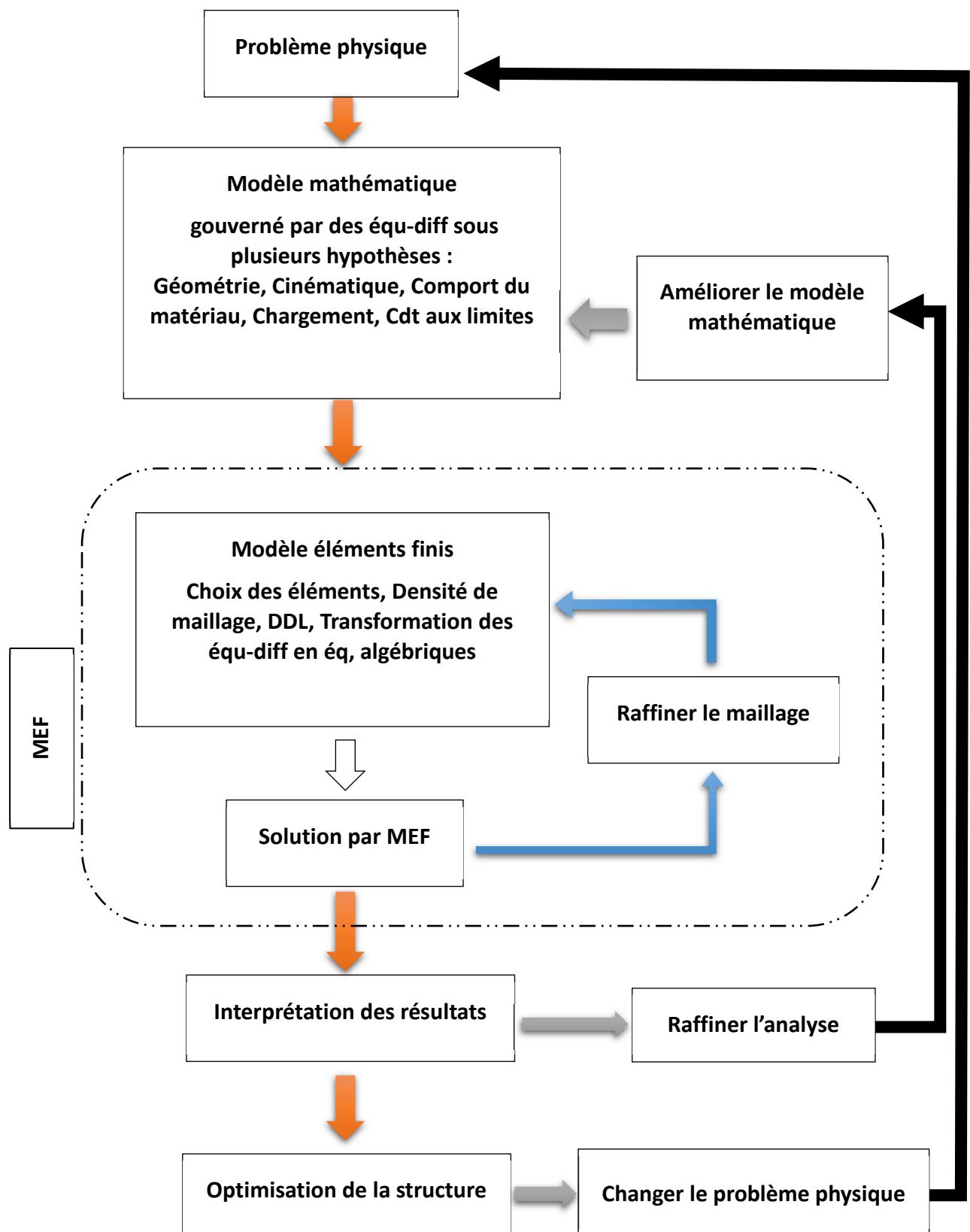


Figure 2.3. Processus d'une analyse d'un problème d'engineering

CHAPITRE 3

RAPPEL SUR LA MECANIQUE DU SOLIDE

3.1. Les contraintes

3.1.1. Equations internes

L'étude de l'équilibre d'un élément infiniment petit de cotés dx, dy, dz , soumis à des forces internes de volume f_x, f_y, f_z , permet d'établir l'équation d'équilibre de volume telle que

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (3.1)$$

3.1.2. Equations externes

L'équilibre de surface d'un élément infiniment petit correspond aux conditions aux limites du système d'équations aux dérivées partielles (3.1). Le vecteur contrainte \vec{T} issue du produit du tenseur des contraintes $[\sigma]$ par les cosinus directeurs de la normale d'une facette S , est égale aux charges réparties appliquées sur cette même facette.

$$\vec{T}_{(M,\vec{n})} = \vec{Q}_{ext} \text{ tel que } T_i = \sigma_{ij}n_j \quad (3.2)$$

3.2. Les déformations

3.2.1. Les déplacements

Le mouvement d'un point de la position O vers O' caractérisé par le vecteur \vec{U} , peut être décomposé dans un système d'axes ($oxyz$) en trois composantes u, v, w , qui représentent les déplacements de ce point sur les axes de référence soit

$$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (3.3)$$

On définit par ailleurs la norme du déplacement comme étant

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (3.4)$$

Ces déplacements sont en fonction de x pour les poutres, de x et y pour les plaques et les coques et de x, y et z pour les solides.

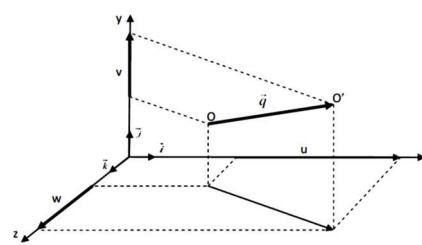


Figure 3.1 [Casenave 2010]

3.2.2. Relations entre déplacements et déformations

Ces relations sont appelées aussi lois de la cinématique telles que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.5)$$

Les déformations sont ainsi données en écriture matricielle

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Les termes de la diagonale expriment les changements de volume induits par les tractions et les compressions. Les termes extra-diagonaux, appelés demi-distorsions, expriment quant à eux les changements de forme provoqués par les cisaillements.

La méthode des éléments finis est une méthode numérique qui sollicite l'espace mémoire des ordinateurs, de manière plus ou moins importante, en fonction de la taille des problèmes étudiés. En effet, les systèmes d'équations à résoudre sont écrits sous une forme matricielle, il est donc primordial d'optimiser le volume numérique à traiter. Dans cette optique, certaines matrices symétriques sont réécrites lors de la formulation sous une forme vectorielle. C'est le cas, entre autres, de la matrice des déformations dont l'expression générale est donnée ainsi

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\partial]\{U\} \quad (3.7)$$

Il est important de noter que dans l'équation (3.7), les termes γ_{**} font référence aux distorsions et non aux demi-distorsions tel que dans l'équation (3.6)

3.3. Relation entre contraintes et déformations

Dans le domaine élastique, cette relation est régit par la loi de Hook faisant intervenir le module de Young E , le coefficient de Poisson ν et le module de cisaillement G . La loi de Hook est donnée ci-dessous sous forme matricielle.

$$\{\varepsilon\} = [H]\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

L'inversion de cette expression permet d'écrire

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Avec $[D] = [H]^{-1}$

Il est important de noter que la matrice $[D]$ n'est pas définie pour $\nu = 0.5$.

3.4. Energie de déformation élastique

3.4.1. Cas d'un chargement uniaxial

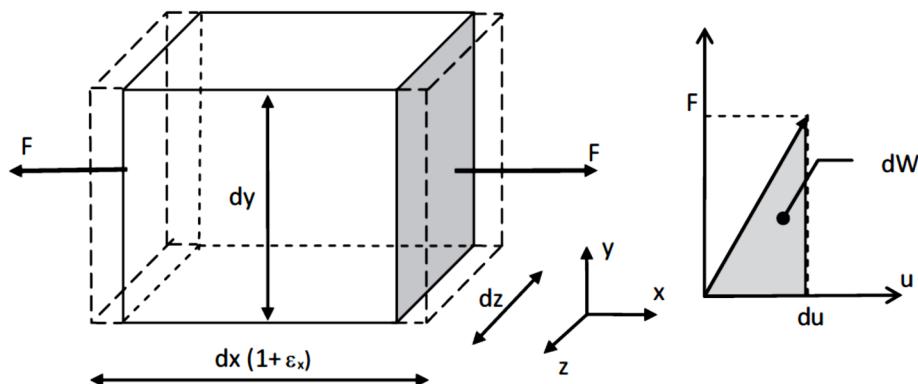


Figure 3.2 [Casenave 2010]

Soit un élément infiniment petit de dimensions y, dz , extrait d'un solide quelconque. L'énergie emmagasinée par le volume dV soumis à une charge F constante dans la direction x sera égale à

$$dW = \frac{1}{2} F du \quad (3.10)$$

Comme $du = \varepsilon_{xx} dx$ et $F = \sigma_{xx} dy dz$, dW peut s'écrire

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dx dy dz \quad (3.11)$$

Généralisée au volume du solide

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dx dy dz = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (3.12)$$

3.4.2. Cas général

L'extension du cas uniaxial aux deux autres axes y et z permet d'obtenir par superposition

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}) dV \quad (3.13)$$

La démarche est similaire pour les cisaillements

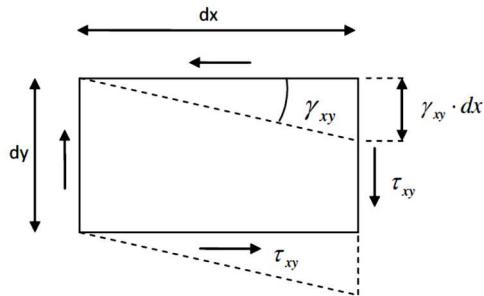


Figure 3.3

$$dW = \frac{1}{2} (\tau_{xy} dy dz) \gamma_{xy} dx = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz \quad (3.14)$$

L'énergie de déformation vaudra au final

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (3.15)$$

Soit sous forme matricielle

$$W = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.16)$$

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, un bref rappel des équations d'élasticité en statique a été présenté. Les équations ont été écrites sous forme matricielle afin d'être utilisées dans le chapitre suivant : Principe de la MEF en structures.

CHAPITRE 4

PRINCIPE DE LA MEF EN STRUCTURES

4.1. Approximation nodale – Fonctions de forme

Tel que cela a déjà été mentionné dans les chapitres précédents, l'équilibre d'un corps est régi par les équations d'équilibre des forces de volume et celui des forces de contacts, auxquels s'ajoutent les équations de compatibilité des déplacements. L'intégration de ces équations n'étant pas toujours aisée, une des méthodes les plus utilisées pour résoudre le problème est la MEF qui revient à remplacer un système continu par un système discret. Le solide est alors divisé en un certain nombre de sous-domaine appelés éléments finis, dont l'assemblage permet la reconstitution de la géométrie initiale.

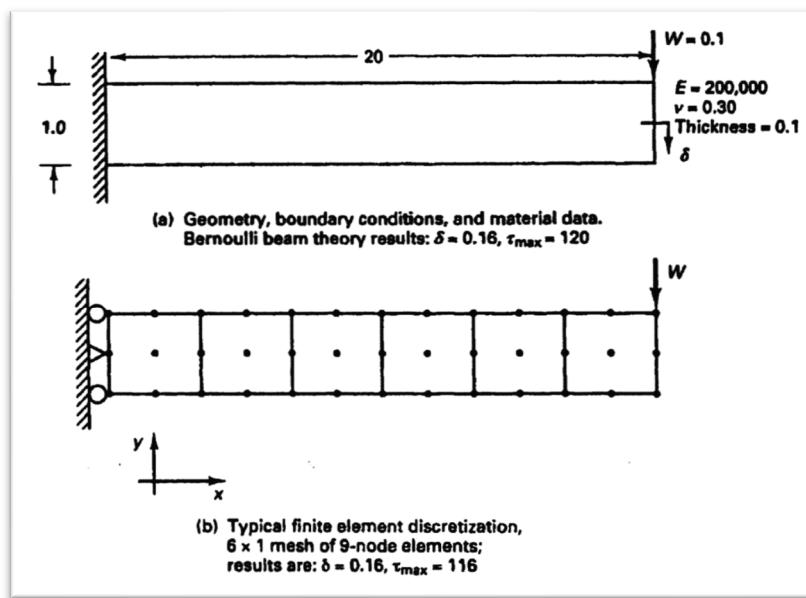


Figure 4.1 [K.J. Bath 2014]

Chaque élément est relié à ses voisins par des noeuds dont les degrés de liberté (DDL) constituent les inconnus du problème. En analyse des structures, les DDL sont le plus souvent des déplacements. La MEF consiste, en premier lieu, à approximer le champ de déplacement au moyen d'une fonction polynomiale formée d'un nombre fini de paramètres et à l'exprimer en fonction des déplacements nodaux.

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) u_i \quad (4.1)$$

$$u(x, y, z) = N_1(x, y, z) u_1 + N_2(x, y, z) u_2 + \dots + N_n(x, y, z) u_n \quad (4.2)$$

u_i représente les inconnues du problème et $N_i(x, y, z)$ les fonctions de forme de l'élément.

4.1.1. Exemple 1 - L'élément barre

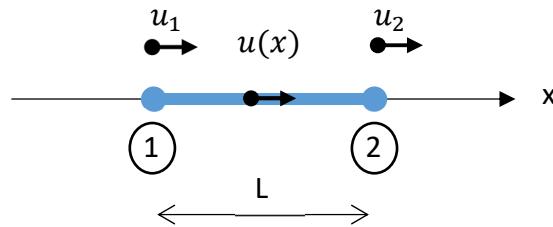


Figure 4.2

Soit un élément barre travaillant uniquement en traction ou en compression. Le matériau est supposé linéaire, la déformation est donc constante sur toute la section.

$u(x)$ sera toujours calculée en fonction des déplacements noraux u_1 et u_2 . Les fonctions de forme devront toujours assurer deux et uniquement deux conditions aux limites.

$$x = 0 ; u(0) = u_1 \quad (4.3)$$

$$x = L ; u(L) = u_2 \quad (4.4)$$

Le plus simple est de choisir une fonction d'interpolation linéaire pour $u(x)$ telle que :

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad (4.5)$$

$$\text{D'où : } u(0) = u_1 \Rightarrow a_0 = u_1 \quad (4.6)$$

$$u(L) = u_2 \Rightarrow u_1 + a_1 L = u_2 \text{ soit } a_1 = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (4.7)$$

$u(x)$ devient :

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x \Rightarrow u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 \quad (4.8)$$

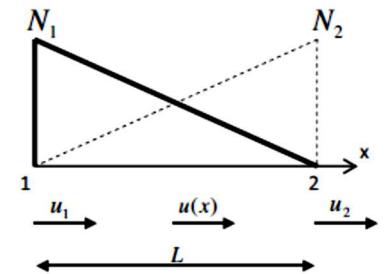


Figure 4.3

Soit

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

En regroupant les fonctions de formes de l'élément dans une matrice $[N]$ et les déplacements noraux dans un vecteur $\{u_e\}$:

$$\{u\} = [N]\{u_e\} \quad (4.10)$$

Il est important de noter que le degré du polynôme retenu pour l'interpolation est directement lié au nombre de nœuds et de DDL par nœud.

4.2. Résolution d'un problème en structure

On définit l'énergie potentielle E comme étant la différence entre l'énergie de déformation W et le travail T des forces de volume et de surface :

$$E = W - T = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{u\}^T \{f^v\} dV - \int_S \{u\}^T \{f^s\} dS \quad (4.11)$$

4.2.1. Cas d'une barre en traction

Soit une barre de longueur L et de section constante S soumis à une charge extérieure F .

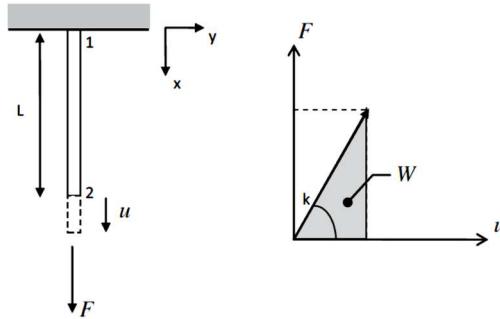


Figure 4.4 [M. Casenave 2010]

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dV \quad (4.12)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_{xx}^2 dV \quad (4.13)$$

$$W = \frac{E \varepsilon_{xx}^2}{2} \int_S dS \int_0^L dx = \frac{ESL}{2} \left[\frac{u}{L} \right]^2 = \frac{1}{2} k u^2 \quad (4.14)$$

$k = \frac{ES}{L}$ correspond dans le domaine élastique à la rigidité de la barre et à la pente de la droite $F = ku$.

Sachant que le travail de la force F est égal à $F \cdot u$, l'équation (4.11) donne

$$E = W - T = \frac{1}{2} k u^2 - F u \quad (4.15)$$

En statique, une fois l'équilibre atteint, le déplacement u n'évolue plus. La variation de l'énergie potentielle par rapport à u sera donc nulle

$$\begin{aligned} \frac{dE}{du} &= 0 \Rightarrow ku - F \\ \Rightarrow ku &= F \end{aligned} \quad (4.16)$$

D'où le déplacement u .

4.2.2. Energie de déformation élémentaire

Reprendons la relation (3.10) sous la forme $\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}$ et introduisons-y l'approximation polynomiale nodale

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{u_e\} = [B]\{u_e\} \quad (4.17)$$

Pour un élément barre, cette équation s'écrit

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Le champ de contrainte étant (équ. 3.9) $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$, l'énergie de déformation W_e associé à un élément e peut se déduire

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV_e \quad (4.19)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{u_e\}^T [B]^T [D] [B] \{u_e\} dV_e \quad (4.20)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \{u_e\}^T [k_e] \{u_e\} \quad (4.21)$$

Avec la matrice de rigidité de l'élément e telle que

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e \quad (4.22)$$

4.2.3. Exemple 2

Pour un élément barre tel que celui de l'exemple 1, le calcul de la matrice de rigidité élémentaire donne

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e = \int_0^L \int_{S_e} \begin{Bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dS dx \quad (4.23)$$

$$[k_e] = ES \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{-1}{L^2} \\ \frac{-1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

4.2.4. Travail élémentaire des forces de volume et de surface

Le travail des forces a déjà été défini dans l'équation (4.11) de manière générale. Pour un seul élément, les intégrations se font sur les volumes et surfaces élémentaires

$$T_e = \int_{V_e} \{u\}^T \{f^v\} dV_e + \int_{S_e} \{u\}^T \{f^s\} dS_e \quad (4.25)$$

Comme $\{u\}$ est égal à $[N]\{u_e\}$, cette expression devient

$$T_e = \int_{V_e} \{u_e\}^T [N]^T \{f^v\} dV_e + \int_{S_e} \{u_e\}^T [N]^T \{f^s\} dS_e \quad (4.26)$$

D'où finalement

$$T_e = \{u_e\}^T [\{f_e^v\} + \{f_e^s\}] \quad (4.27)$$

Avec

$$\{f_e^v\} = \int_{V_e} [N]^T \{f^v\} dV_e \quad \text{Forces nodales de volume} \quad (4.28)$$

$$\{f_e^s\} = \int_{S_e} [N]^T \{f^s\} dS_e \quad \text{Forces nodales de surface} \quad (4.29)$$

4.2.5. Assemblage des matrices élémentaires

L'énergie potentielle totale d'une structure est égale à

$$E = W - T = \sum_e W_e - \sum_e T_e \quad (4.30)$$

Les éléments n'ayant pas toujours le même repère local, la sommation des énergies de déformation et des travaux des forces extérieures ne peut se faire directement. Il est nécessaire de les exprimer dans un référentiel unique appelé repère global. Au final, l'expression de l'énergie potentielle devient

$$E = W - T = \frac{1}{2} \{\mathbf{U}\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} - \{\mathbf{U}\}^T \{\mathbf{F}\} \quad (4.31)$$

$\{\mathbf{U}\}$: Vecteur déplacement global.

$[\mathbf{K}]$: Matrice de rigidité globale de toute la structure.

$\{\mathbf{F}\}$: Vecteur des charges nodales de la structure.

L'équilibre est toujours caractérisé par une variation nulle de l'énergie potentielle par rapport au déplacement.

$$\frac{dE}{d\mathbf{U}} = 0 \Rightarrow [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.32)$$

4.2.6. Exemple 3 – Structure en éléments ressorts

De par son fonctionnement uniaxial, l'élément ressort suit exactement les mêmes règles de construction que l'élément barre. La seule différence réside dans le terme de rigidité k du ressort à la place de

$\frac{EI}{L}$ de l'élément barre.

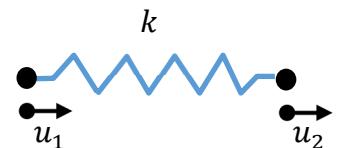


Figure 4.5

La matrice de rigidité de l'élément ressort est

$$[k_e] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Soit un système constitué de trois ressorts connectés à travers des masses m identiques. Les raideurs des éléments ressorts sont $k_1 = 3k$, $k_2 = 2k$ et $k_3 = k$. Le nœud 1 est suspendu à un encastrement.

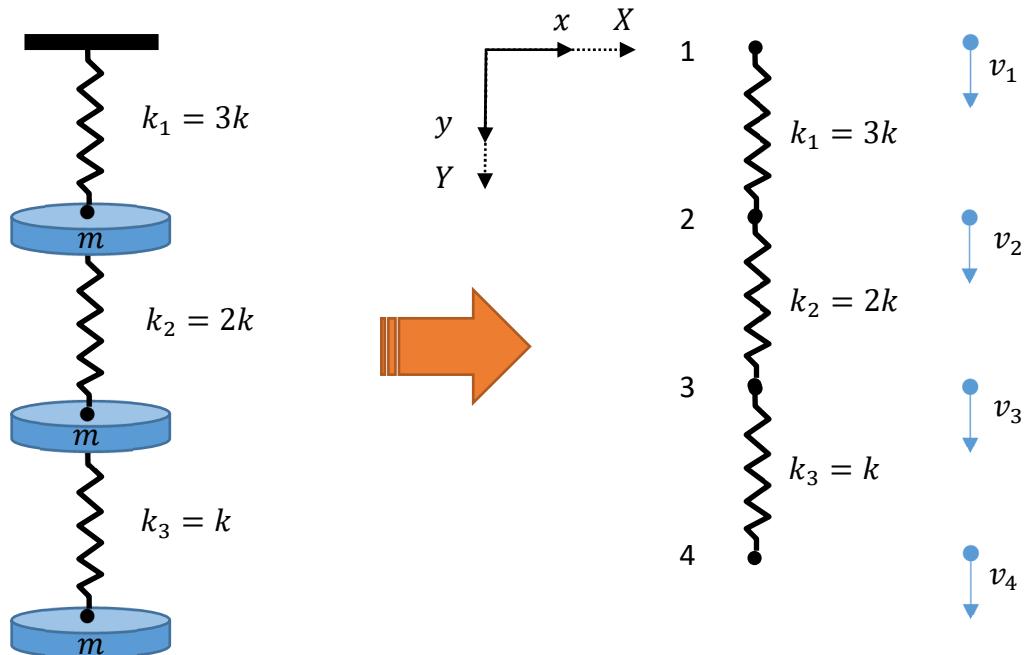


Figure 4.6

Il est important de noter que le repère local (*oxy*), i.e. propre à chaque élément ressort, est confondu avec le repère global (*OXY*). Aucun changement de base ne sera nécessaire lors de l'assemblage de la matrice de rigidité globale.

Tableau des connectivités

Elément	Nœud i	Nœud j	Rigidité
1	1	2	$3k$
2	2	3	$2k$
3	3	4	k

Matrices de rigidité élémentaires

Chaque élément possède 2 DDL ce qui donne une matrice de rigidité élémentaire $[k_e]$ (2x2).

$$[k_{e1}] = 3k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [k_{e2}] = 2k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [k_{e3}] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Si l'équation d'équilibre devait être écrite séparément pour chaque élément (équ. 4.16)

$$\text{Elément 1} \quad \begin{Bmatrix} F_{1(1)} \\ F_{2(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\text{Elément 2} \quad \begin{Bmatrix} F_{2(2)} \\ F_{3(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\text{Elément 3} \quad \begin{Bmatrix} F_{3(3)} \\ F_{4(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Assemblage

Le système global se compose de quatre nœuds avec 1 DDL à chacun d'eux. La matrice de rigidité globale $[K]$ est de dimension (4x4). Les vecteurs forces, revenant à chaque élément, contiennent les charges externes auxquelles s'ajoutent les liaisons inter-éléments. Ces dernières s'annulent au niveau de chaque nœud lors de l'assemblage des vecteurs forces. Il ne reste alors que les charges externes appliquées au niveau de chaque nœud.

Afin d'assembler les trois systèmes d'équations pour n'en obtenir qu'un seul, il est impératif d'augmenter la taille de chaque matrice élémentaire de rigidité à une dimension (4x4). Il vient

$$\text{Elément 1} \quad \begin{Bmatrix} F_{1(1)} \\ F_{2(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\text{Elément 2} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{2(2)} \\ F_{3(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\text{Elément 3} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{3(3)} \\ F_{4(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

En additionnant ces équations, un système assemblé est obtenu :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 5k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 3k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \text{ soit } \{F\} = [K]\{U\} \quad (4.41)$$

Les matrices de rigidité sont toujours symétriques (Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti).

Introduction des conditions aux limites et résolution

Si les déplacements sur appuis sont nuls, l'une des méthodes pour l'introduction des conditions aux limites consiste à barrer dans la matrice $[K]$, la ligne et la colonne du DDL considéré. Au niveau de l'encastrement, le déplacement est nul $u_1 = 0$. L'élimination de la première colonne et de la première ligne, correspondants à ce déplacement nul, induit un système d'équation réduit à résoudre.

Pour l'exemple présenté, les nœuds 2, 3 et 4 sont sollicités par des charges ponctuelles telles que

$$F_2 = F_3 = F_4 = P = mg \quad (4.42)$$

En introduisant tout ceci dans le système d'équations matricielle, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ P \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{3k} & \cancel{-3k} & 0 & 0 \\ \cancel{-3k} & 5k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 3k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} P \\ P \\ P \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

Après résolution du système, on obtient les déplacements nodaux $u_2 = P/k$; $u_3 = 2P/k$ et $u_4 = 3P/k$. Pour calculer la réaction d'appui au niveau de l'encastrement, il suffit de revenir à la première ligne d'équations pour trouver $F_1 = -3P$.

4.2.7. Exemple 4 – Structure en éléments barres

Considérons une poutre de section variable représentée ci-dessous. Soit E le module d'élasticité du matériau de la poutre. L'aire de la section droite est égale à A entre les nœuds 1 et 2, 2A entre les nœuds 2 et 3 et 3A entre les nœuds 3 et 4. La poutre est encastrée à ses deux extrémités (nœuds 1 et 4), et elle est sollicitée sur l'élément 1-2 par une charge q uniformément répartie. Au nœud 3, il existe une force concentrée d'intensité $P=2qL$.

Calculer les déplacements nodaux ainsi que les réactions d'appuis.

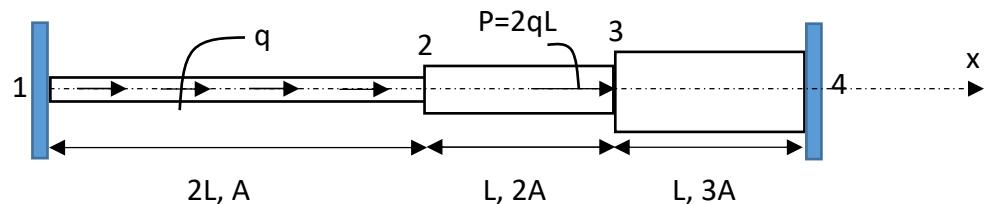


Figure 4.7

Tableau des connectivités

Elément	Nœud i	Nœud j	Longueur	Section
1	1	2	2L	A
2	2	3	L	2A
3	3	4	L	3A

Matrices de rigidité élémentaires

Pour un élément ressort (équ. 4.33) $[k_e] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, et donc

$$[k_1] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [k_2] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [k_3] = \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Assemblage

$$\begin{aligned} [k_1] &= \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [k_2] &= \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 5/2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \\ [k_3] &= \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Introduction des conditions aux limites et résolution

Les déplacements sont tels que $u_1 = u_4 = 0 ; u_3 = ? ; u_2 = ?$

Les forces nodales équivalentes aux chargement uniformément réparti (équ. 4.29) doivent être calculées

Avec $\{f^s\} = \{q\}$ et $[N] = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right]$ (équ. 4.9) d'où

$$\{f_e^s\} = \int_{S_e} [N]^T \{f^s\} dS_e \Rightarrow \{f_e^s\} = \int_0^{L_e=2L} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_e} \\ \frac{x}{L_e} \end{bmatrix} \{q\} dL_e \quad (4.46)$$

$$\text{soit } \{f_e^s\} = \begin{pmatrix} qL \\ qL \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

$$\{F\} = \begin{cases} qL + R_1 \\ qL \\ P \\ R_4 \end{cases} \quad (4.48)$$

R_1 et R_4 étant les réactions d'appuis.

L'introduction des conditions aux limites dans le système d'équations conduit à barrer les 1^{ère} et 4^{ème} lignes et colonnes (d'autres méthodes d'introduction des conditions aux limites seront présentées en détails au chapitre 10).

$$\begin{bmatrix} qL + R_1 \\ qL \\ P = 2qL \\ -R_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 5/2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Après résolution on trouve

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{18qL^2}{17EA} \\ \frac{14qL^2}{17EA} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } R_1 = -\frac{EA}{2L} u_2 \text{ soit } -\frac{26qL}{17} \quad (4.50)$$

$$R_4 = -3 \frac{EA}{L} u_3 \text{ soit } -\frac{42qL}{17} \quad (4.51)$$

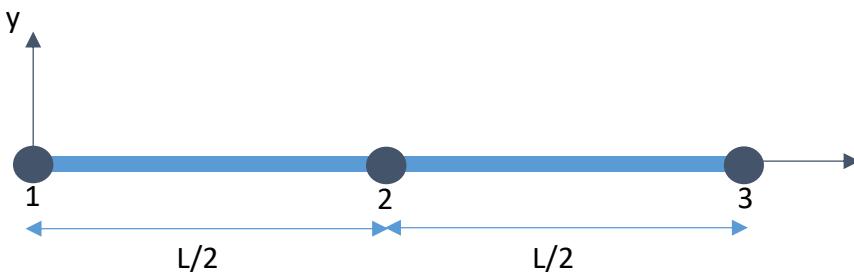
4.3. Conclusion

Les principes de bases de la méthode des éléments finis directe ont été présentés dans ce chapitre. La matrice de rigidité élémentaire a été développée pour l'élément barre ainsi que pour l'élément ressort. Dans le chapitre 5, ces deux éléments vont être utilisés afin de modéliser des structures en treillis articulés.

Problèmes :

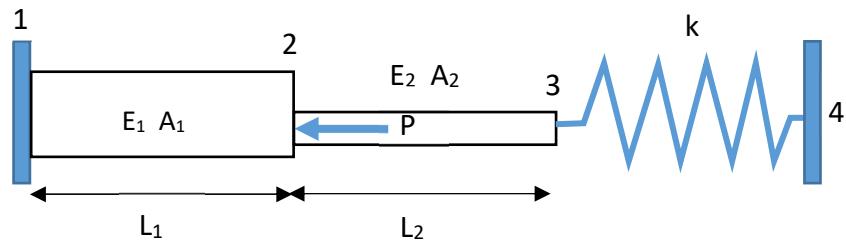
4.1. On se propose de construire la matrice de rigidité de l'élément fini barre à 3 nœuds de la figure ci-dessous. L'élément présente une inertie axiale EA constante.

- Développer les fonctions d'interpolation permettant le calcul de la matrice de rigidité élémentaire.
- Quel serait la taille de cette matrice de rigidité ?



4.2 Considérons une poutre à section variable représentée sur la figure 3. Soit E_1 et E_2 les modules d'élasticité des matériaux constitutifs la poutre tels que $E_1=3E_2$. Les sections droites sont de diamètres d_1 et d_2 avec $d_1=2d_2$ et les longueurs sont toutes égales, $L=L_1=L_2$.

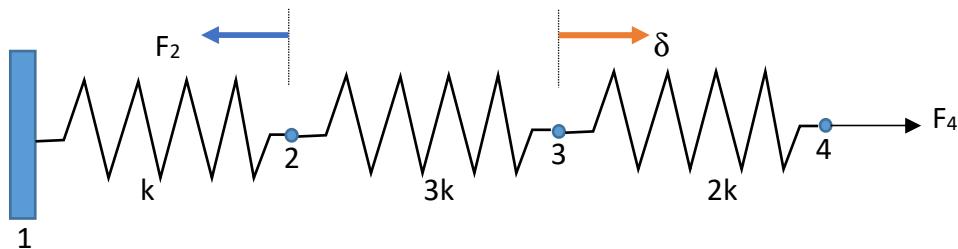
La poutre est encastrée à l'extrémité gauche, tandis qu'à l'autre elle est reliée à un ressort linéaire de rigidité $k=E_1A_1/L_1$. Au nœud 2 s'applique une charge d'intensité P . Calculer les déplacements nodaux.



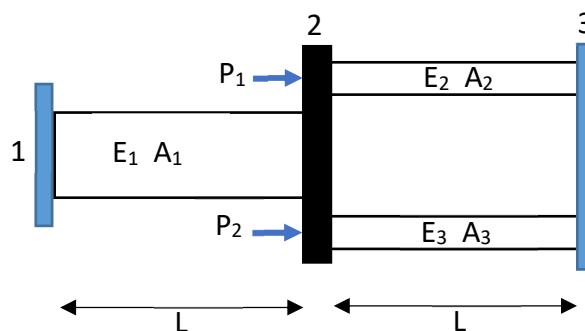
4.3. Soit un système de trois ressorts reliés. Le nœud 1 est encastré. On applique des forces $F_2=F$ et $F_4=2F$ aux nœuds 2 et 4 respectivement.

Déterminer les déplacements nodaux et la force à appliquer au nœud 3 afin d'avoir un déplacement imposé δ au nœud 3.

Calculer les réactions d'appuis ainsi que l'effort revenant à chaque ressort.



4.5. Soit le système de barres schématisé ci-dessous. Les modules de Young ainsi que les sections sont telles que $E_1=2E_2=2E_3$ et $A_1=2A_2=2A_3$. Les deux nœuds 1 et 3 sont encastrés. La barre 1 est reliée aux deux autres barres, 2 et 3, par le biais d'une plaque infiniment rigide. Les charges nodales P_1 et P_2 sont identiques i.e. $P_1=P_2=P$. Calculer les déplacements nodaux.



CHAPITRE 5

ELEMENT DE BARRE ET DE RESSORT

5.1. L'élément de barre

Comme vu au chapitre précédent, l'élément barre est un élément à deux nœuds comportant chacun un seul degré de liberté (DDL) dans son repère local. Cependant, dans le repère global, chaque nœud comporte deux ou trois DDL. Ses caractéristiques géométriques et matérielles se résument à une section S_e , une longueur L_e et un module de d'élasticité longitudinale E . Il fonctionne en traction ou en compression uniquement.

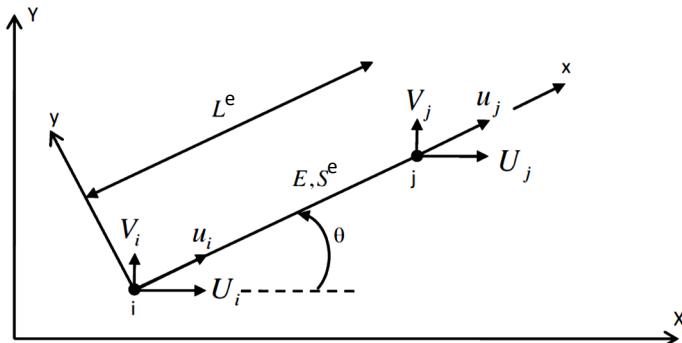


Figure 5.1

5.2. Matrice de rigidité élémentaire

L'élément barre ayant un DDL par nœud en repère local et deux DDL par nœuds en repère global, il est nécessaire d'exprimer $[ke]$ sous la forme d'une matrice 4×4 en ajoutant des zéros. Cette étape doit être effectuée avant le changement de base nécessaire à l'assemblage de la matrice de rigidité globale.

$$[ke] = \frac{ES_e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \frac{ES_e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \text{ fictif} \quad (5.1)$$

Le changement de base est maintenant possible en posant que

$$[K_e] = [T_e]'[ke][T_e] \text{ avec } [T_e] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$[T_e]$ est la matrice de passage du repère global vers le repère local telle que l'angle θ est positif selon le sens indiqué dans la figure 5.1. En utilisant l'équation (5.2) et en notant $\cos(\theta) = \lambda$ et $\sin(\theta) = \mu$, on trouve alors l'équation générale de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère global.

$$[K_e] = \frac{ES_e}{L_e} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

5.3. Élément de ressort

De même que pour l'élément barre, la matrice de rigidité présentée au chapitre 4 devient

$$[ke] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \text{ fictif} \quad (5.4)$$

Pour retrouver l'expression de l'équation (5.4) dans le repère global, il suffit de se referrer à l'équation (5.3) en remplaçant $\frac{ES_e}{L_e}$ par k .

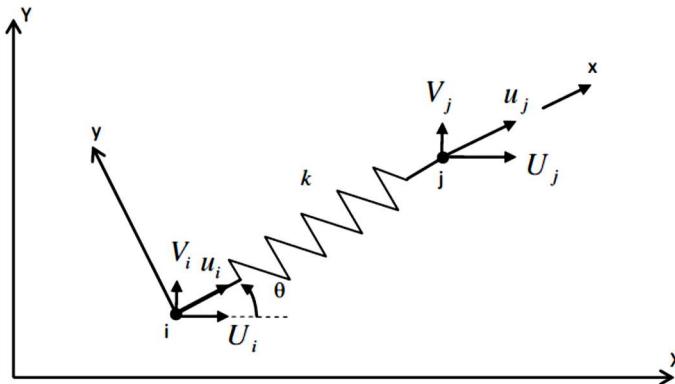


Figure 5.2

5.4. Exemple 1 [M.Casenave 2010 - modifié]

Soit une structure composée de deux éléments barres et d'un ressort tel que schématisée sur la figure 5.3. Les nœuds 1 et 2 sont doublement appuyés. Le nœud 3 supporte une charge verticale F .

On se propose de calculer les déplacements nodaux, les réactions d'appuis ainsi que les efforts, contraintes et déformations revenant à chaque élément.

On donne :

$$E=2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 ; L = 10 \text{ m} ; S = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ et } F = 10^4 \text{ N.}$$

Commençons par établir de tableau des connectivités de la structure sans ressort.

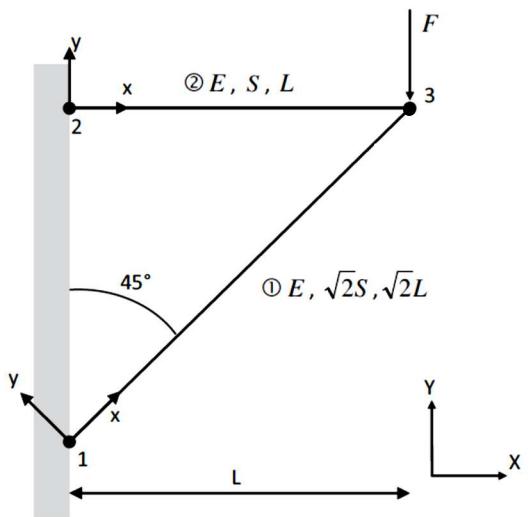


Figure 5.3

Tableau des connectivités

Elément	Nœud i	Nœud j	L(m)	S(m²)	θ (entre OXY et oxy)	λ	μ
1(barre)	1	3	$\sqrt{2}L$	$\sqrt{2}S$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2(barre)	2	3	L	S	0	1	0

Matrices de rigidité élémentaires dans le repère global (équ. 5.3)

$$\text{Elément 1 Nœud 1} \rightarrow \text{Nœud 3} \quad [K_1] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_3) \\ (V_3) \end{matrix} \quad (5.5)$$

$$\text{Elément 2 Nœud 2} \rightarrow \text{Nœud 3} \quad ; \quad [K_2] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \end{matrix} \quad (5.6)$$

Assemblage de la matrice de rigidité globale

La structure ayant 3 nœuds avec 2DDL chacun, la matrice de rigidité globale fait 6x6 éléments. Celle-ci peut être assemblée en utilisant la méthode d'expansion matricielle utilisée dans le chapitre 4. Néanmoins, la taille des matrices de rigidité élémentaire dans cet exemple doit passer de 4x4 à 6x6, ce qui est assez long pour un calcul manuel.

$$[K] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \end{matrix} + \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \end{matrix} \quad (5.7)$$

Au final, on trouve

$$[K] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \end{matrix} \quad (5.8)$$

Le terme K(4,4) est nul car la structure est en réalité incapable de fournir un effort dans le sens de (V₂). La barre 2 étant parfaitement horizontale et ne travaillant qu'en traction ou en compression, les deux DDL (v₂) et (V₂) sont égaux et donc fictifs tous les deux.

Conditions aux limites et chargement

Les Nœuds 1 et 2 étant doublement appuyés, leurs déplacements sont nuls i.e. $U_1 = V_1 = U_2 = V_2 = 0$. Ceci revient à barrer les lignes et les colonnes y correspondantes. Les charges nodales se réduisent aux réactions d'appuis et à la charge verticale F . Le système d'équations globales s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} R_{H1} \\ R_{V1} \\ R_{H2} \\ R_{V2} \\ 0 \\ -F \end{Bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

L'équ.(5.9) se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Résolution

La solution de l'équ. 5.10 donne

$$\begin{cases} U_3 = \frac{FL}{ES} \\ V_3 = -\frac{3FL}{ES} \end{cases} \text{ AN: } \begin{cases} U_3 = 4.762 \text{ mm} \\ V_3 = -14.286 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.11)$$

En revenant au système d'équations globale, les réactions d'appuis sont évaluées

$$\begin{aligned} R_{H1} = R_{V1} &= \frac{ES}{L} \left(-\frac{U_3}{2} - \frac{V_3}{2} \right) = F \\ R_{H2} &= \frac{ES}{L} (-U_3) = -F \quad ; \quad R_{V2} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Calcul des contraintes, déformations et efforts internes

L'équation (4.10) permet de calculer les déformations axiales telles que

$$\varepsilon_{xx} = \left[-\frac{1}{L_e} \quad \frac{1}{L_e} \right] \{u_i\} = \frac{u_j - u_i}{L_e} \quad (5.13)$$

Cette équation est écrite, dans le repère local de l'élément, en fonction des déplacements nodaux $\{u\}$. Or, la résolution du système se fait dans le repère global. L'utilisation de la matrice de passage $[T_e]$ (voir équ. (5.2)) permet de calculer $\{u\}$ à partir de $\{U\}$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

D'où $u_i = \lambda U_i + \mu V_i$ (5.15)

et $v_j = \lambda U_j + \mu V_j$ (5.16)

En injectant les équations (5.15) et (5.16) dans l'expression de la déformation axiale (équ.(5.13)), celle-ci est directement calculée à partir des déplacements nodaux $\{U\}$.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\lambda(U_j - U_i) + \mu(V_j - V_i)}{L_e} = \frac{\Delta L_e}{L_e} \quad (5.17)$$

Il est aisément d'obtenir la contrainte normale $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$, ainsi que l'effort normale N

$$N = \frac{ES_e}{L_e} [\lambda(U_j - U_i) + \mu(V_j - V_i)] \quad (5.18)$$

$$N = \frac{ES_e}{L_e} [\lambda \quad \mu] \begin{Bmatrix} U_j - U_i \\ V_j - V_i \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Élément 1 $\varepsilon_{xx1} = \frac{U_3 + V_3}{2L}$; $\sigma_{xx1} = E \frac{U_3 + V_3}{2L}$; $N_1 = ES \frac{U_3 + V_3}{\sqrt{2}L}$ (5.20)

AN : $\varepsilon_{xx1} = -4.762 \cdot 10^{-2}\%$; $\sigma_{xx1} = -100 \text{ MPa}$; $N_1 = -14142 \text{ N}$ (Compression)

Élément 2 $\varepsilon_{xx2} = \frac{U_3}{L}$; $\sigma_{xx2} = E \frac{U_3}{L}$; $N_2 = ES \frac{U_3}{L}$ (5.21)

AN : $\varepsilon_{xx2} = 4.762 \cdot 10^{-2}\%$; $\sigma_{xx2} = 100 \text{ MPa}$; $N_2 = 10000 \text{ N}$ (Traction.)

5.5. Exemple 2 [M.Casenave 2010]

La même structure que celle de l'exemple 1 est reprise en y ajoutant un élément ressort.

Tableau des connectivités

Elément	N i	N j	L(m)	S(m ²)	Rigidité	θ	λ	μ
1(barre)	1	3	$\sqrt{2}L$	$\sqrt{2}S$	-	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2(barre)	2	3	L	S	-	0	1	0
3(ressort)	3	4	-	-	$\frac{ES}{L}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	-1

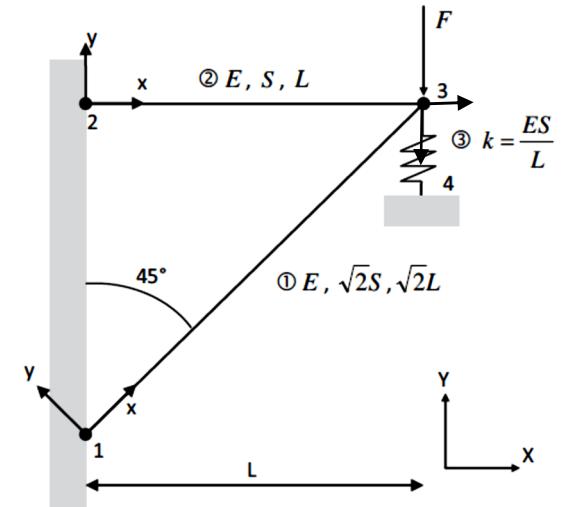


Figure 5.4

Matrices de rigidité élémentaires dans le repère global

Le calcul de $[K_1]$ et $[K_2]$ reste identique à celui de l'exemple 1. Il suffit d'ajouter $[K_3]$.

Élément 3 Nœud 3 → Nœud 4

$$[K_3] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{matrix} \quad (5.22)$$

Il est à noter que de même que la barre 2 ne peut développer de rigidité que dans le sens horizontal (selon U_2 et U_3), le ressort, orienté verticalement, ne peut développer de rigidité que dans le sens vertical (selon V_3 et V_4).

Assemblage de la matrice de rigidité globale

La structure ayant maintenant 4 nœuds avec 2DDL chacun, la matrice de rigidité globale fait 4x4. Vu la numérotation des nœuds, il suffit d'expander la matrice de rigidité globale de l'exemple 1 (équ.(5.8)) et d'y ajouter la matrice $[K_3]$ expander elle aussi.

$$[K] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & (U_1) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & (V_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & (U_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (V_2) \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & (U_3) \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & (V_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (U_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (V_4) \end{bmatrix} + \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (U_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (V_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (U_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (V_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (U_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (V_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (U_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & (V_4) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

D'où

$$[K] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & (U_1) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & (V_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & (U_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (V_2) \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & (U_3) \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -1 & (V_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (U_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & (V_4) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Conditions aux limites et chargement

Les Nœuds 1, 2 et 4 sont doublement appuyés. Tous les déplacements sont nuls sauf U_3 et V_3 . Les charges nodales se réduisent aux réactions d'appuis et à la charge verticale F . Le système d'équations globales s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} R_{H1} \\ R_{V1} \\ R_{H2} \\ R_{V2} \\ 0 \\ -F \\ R_{H4} \\ R_{V4} \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_3 \\ V_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Résolution

La résolution du système réduit de l'équ.(5.25) conduit à :

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{FL}{4ES} = 1.190 \text{ mm} \\ V_3 &= -\frac{3FL}{4ES} = -3.571 \text{ mm} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Il vient les réactions d'appuis :

$$\begin{aligned}
 R_{V1} &= R_{H1} = \frac{F}{4} \\
 R_{H2} &= -\frac{F}{4} \\
 R_{V2} &= R_{H4} = 0 \\
 R_{V4} &= \frac{3F}{4}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Tous calculs fait, on trouve

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx1} &= -25 \text{ MPa}; \quad N_1 = -3536 \text{ N} \\
 \sigma_{xx2} &= 25 \text{ MPa}; \quad N_2 = 2500 \text{ N}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

5.6. Exemple 3 - Treillis [M.Casenave 2010]

Soit la structure suivante formée de cinq éléments barres et de quatre nœuds. On donne :

$$S = 10^{-2} \text{ m}^2;$$

$$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2;$$

$$H = 10 \text{ m};$$

$$P_x = 10^5 \text{ N} \text{ et } P_y = 20 \cdot 10^4 \text{ N}$$

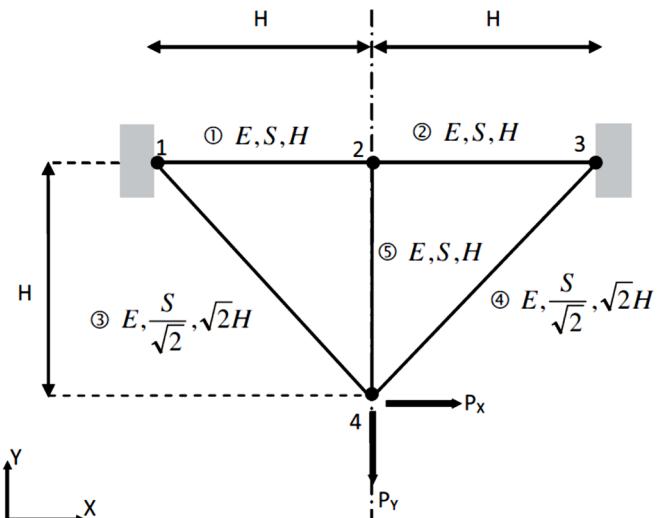


Figure 5.5

Tableau des connectivités

Elément	Nœud i	Nœud j	L(m)	S(m ²)	θ	λ	μ
1	1	2	H	S	0	1	0
2	2	3	H	S	0	1	0
3	1	4	$\sqrt{2}H$	$\frac{S}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	3	4	$\sqrt{2}H$	$\frac{S}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
5	2	4	H	S	$-\frac{\pi}{2}$	0	-1

Matrices de rigidité élémentaires dans le repère global

$$\text{Elément 1 } [K_1] = \frac{ES}{H} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \end{array} \quad (5.29)$$

$(U_1) \ (V_1) \ (U_2) \ (V_2)$

$$\text{Elément 2 } [K_2] = \frac{ES}{H} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \end{array} \quad (5.30)$$

$(U_2) \ (V_2) \ (U_3) \ (V_3)$

$$\text{Elément 3 } [K_3] = \frac{ES}{4H} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{array} \quad (5.31)$$

$(U_1) \ (V_1) \ (U_4) \ (V_4)$

$$\text{Elément 4 } [K_4] = \frac{ES}{4H} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{array} \quad (5.32)$$

$(U_3) \ (V_3) \ (U_4) \ (V_4)$

$$\text{Elément 5 } [K_5] = \frac{ES}{H} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -0 & 0 & 0 \\ -0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (U_2) \\ (V_2) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{array} \quad (5.32)$$

$(U_2) \ (V_2) \ (U_4) \ (V_4)$

Assemblage

La matrice de rigidité globale est de dimension 8x8. Son assemblage, selon la méthode utilisée jusqu'à maintenant dans ce cours, est possible mais assez long à effectuer. Au lieu de cela, une autre méthode d'assemblage est proposée dans cet exemple et qui consiste à placer chaque terme de la matrice de rigidité élémentaire directement dans la matrice de rigidité globale selon les degrés de liberté qui lui sont reliés. Ainsi, un terme K_{ij} de chaque matrice élémentaire est placé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice globale. A noter que les indices i et j font référence à des DDL et non des numéros. Prenons par exemple le premier terme de la matrice $[K_1]$. Tel que schématisé sur la figure 5.6, ce terme est relié à U_1 selon la ligne mais aussi selon la colonne. Dans la matrice de rigidité globale $[K]$, on doit

le placer selon ces mêmes DDL et ainsi de suite jusqu'à placer toutes les valeurs non nulles de chaque matrice élémentaire.

$$[K_1] = \frac{ES}{H} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \end{array}$$

$(U_1) \quad (V_1) \quad (U_2) \quad (V_2)$

$$[K] = \frac{ES}{H} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{array}$$

$(U_1) (V_1) (U_2) (V_2) (U_3) (V_3) (U_4) (V_4)$

Figure 5.6

La matrice de rigidité ainsi obtenue est :

$$[K] = \frac{ES}{4H} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 5 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 & -1 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{array} \quad (5.33)$$

Conditions aux limites et chargement

Il y a des appuis doubles au niveau des nœuds 1 et 3 d'où $U_1 = V_1 = U_3 = V_3 = 0$. Le chargement est composé des réactions d'appuis horizontales et verticales au niveau de ces mêmes nœuds auquel se superposent les deux charges externes P_x et P_y .

$$\begin{bmatrix} R_{H1} \\ R_{V1} \\ 0 \\ 0 \\ R_{H3} \\ R_{V3} \\ P_x \\ -P_y \end{bmatrix} = \frac{ES}{4H} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 5 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 & -1 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{array} \quad (5.34)$$

Résolution

En éliminant les lignes et colonnes numéro 1, 2 5 et 6 de la matrice de rigidité globale, le système à résoudre devient :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_x \\ -P_y \end{Bmatrix} = \frac{ES}{4H} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

On trouve :

$$U_2 = 0 ; V_2 = V_4 = -\frac{2P_y H}{ES} = -1.905 \cdot 10^{-3} m ; U_4 = \frac{2P_x H}{ES} = 0.952 \cdot 10^{-3} m \quad (5.36)$$

Ce qui permet d'évaluer les réactions d'appuis telles que :

$$R_{H1} = -R_{V1} = -\frac{P_x + P_y}{2} = -150 \text{ kN} ; R_{H3} = R_{V3} = 50 \text{ kN} \quad (5.37)$$

Le calcul des efforts internes n'est présenté que pour l'élément 3. En utilisant l'équ.(5.17),

$$\varepsilon_{xx3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(U_4) - \frac{\sqrt{2}}{2}(V_4)}{\sqrt{2}H} ; \varepsilon_{xx3} = \frac{P_x + P_y}{ES} \quad (5.38)$$

$$\sigma_{xx3} = \frac{P_x + P_y}{S} \quad (5.39)$$

$$N_3 = \frac{P_x + P_y}{\sqrt{2}} ; N_3 = 212132 \text{ N} \quad (5.40)$$

5.7. Exemple 4 – Appui incliné

Soit la structure, représentée dans la figure 5.6, composée de 4 barres et de 5 noeuds. Le chargement se résume à la force F verticale appliquée au noeud 1. Toutes les barres ont la même rigidité axiale EA. En utilisant le même système d'axe que celui du problème précédent, trouver :

- La réaction normale à la pente en 1, ainsi que les déplacements au noeud 1.
- Les efforts revenant à chaque barre.

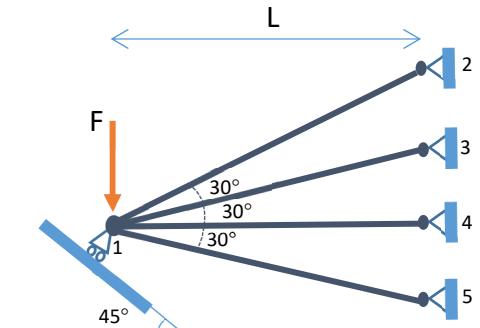


Figure 5.6

Tableau des connectivités

Elément	Nœud i	Nœud j	Longueur	θ°	λ	μ	λ^2	μ^2	$\lambda\mu$
1	1	2	2L	$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{3}/4$
2	1	3	$2L/\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\sqrt{3}/4$
3	1	4	L	0	1	0	1	0	0
4	1	5	$2L/\sqrt{3}$	$-\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\sqrt{3}/4$

Matrices de rigidité élémentaires dans le repère global

$$[K_1] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$[K_2] = \frac{\sqrt{3}EA}{2L} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$[K_3] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$[K_4] = \frac{\sqrt{3}EA}{2L} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Assemblage

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Conditions aux limites et chargement

Tous les déplacements nodaux sont bloqués sauf ceux du nœuds 1. De plus comme l'appui au nœud 1 est incliné de 45° , il est possible d'exprimer les deux réactions en fonction de leur résultante notée ici R_1 .

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \sin 45^\circ \\ R_1 \cos 45^\circ - F \\ R_{H2} \\ R_{V2} \\ R_{H3} \\ R_{V3} \\ R_{H4} \\ R_{V4} \\ R_{H5} \\ R_{V5} \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} U_1 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (5.46)$$

Résolution

Le système se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_1 \sqrt{2}}{2} \\ \frac{R_1 \sqrt{2}}{2} - F \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} U_1 \\ V_1 \end{array} \right\} \quad (5.47)$$

Le système comprend deux équations pour trois inconnues. En résolvant sur le croquis de la figure (5.7), il apparaît clairement que, conformément au système d'axe globale OXY, les deux déplacements U_1 et V_1 sont, dans tous les cas de figures possibles, égaux en valeurs absolus mais de signes contraires.

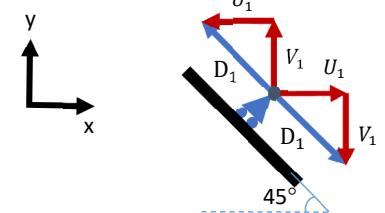


Figure 5.7

En remplaçant V_1 par $-U_1$ et en additionnant les deux équations du système (5.47), la réaction R_1 est éliminée

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_1 \sqrt{2}}{2} \\ \frac{R_1 \sqrt{2}}{2} - F \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} U_1 \\ -U_1 \end{array} \right\} \quad (5.48)$$

$$\Rightarrow F = \frac{(12+6\sqrt{3})EA}{8L} U_1 \quad (5.49)$$

D'où

$$U_1 = -V_1 = \frac{4FL}{3EA(2+\sqrt{3})} \quad (5.50)$$

$$R_1 = \frac{F(9+5\sqrt{3})}{3\sqrt{2}(2+\sqrt{3})} \quad (5.51)$$

Les efforts normaux revenant à chaque barre sont évalués à l'aide de l'équ. (5.19). Le résultat du calcul n'est donné que pour l'élément 1

$$N_1 = \frac{EA}{2L} \left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} -\frac{4FL}{3EA(2+\sqrt{3})} \\ \frac{4FL}{3EA(2+\sqrt{3})} \end{array} \right\} = \frac{F(\sqrt{3}-1)}{3(2+\sqrt{3})} \quad (\text{Traction}) \quad (5.52)$$

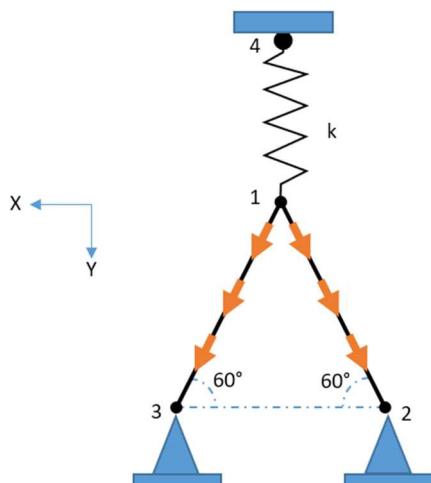
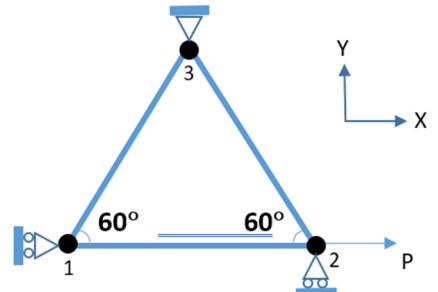
5.8. Conclusion

Les éléments de barre et de ressort présentés dans ce chapitre peuvent être utilisés pour modéliser un grand nombre de structures en treillis articulés. Un autre type de structures courante sont les portiques composés de poutres et de poteaux travaillant en flexion simple, en flexion composée et en torsion. Le chapitre 6 a pour objet de développer l'élément de poutre.

Problèmes :

5.1. Soit un système articulé contenant trois barres. Toutes les barres possèdent la même longueur L et la même rigidité EA.

- Déterminer la matrice de rigidité du système.
- Calculer les déplacements nodaux.
- Calculer les efforts normaux dans les barres.



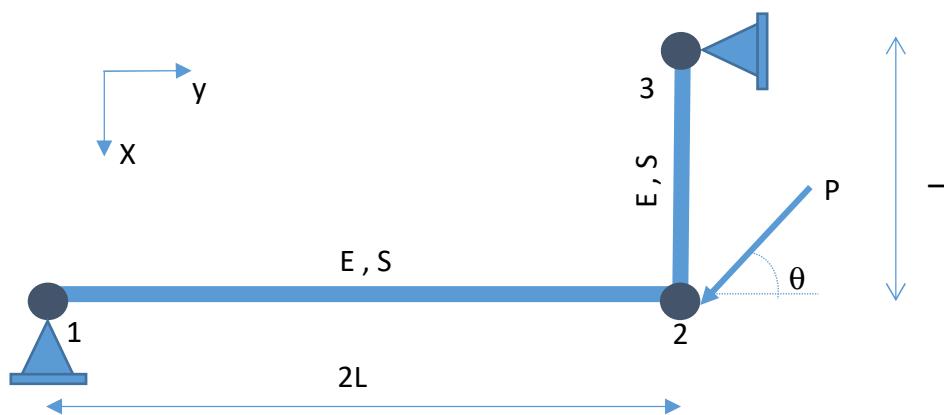
5.2. Deux éléments barres et un élément ressort forment la structure en treillis de la figure ci-dessous. Chacun des deux éléments barres fait une longueur L et supporte une charge axiale uniforme $q(x)=10\text{kN/ml}$.

- Quelle est la valeur à prendre pour la rigidité k du ressort afin que l'allongement du ressort soit limité à 0.1 cm ?
- Calculer les contraintes normales revenant aux deux éléments barres.

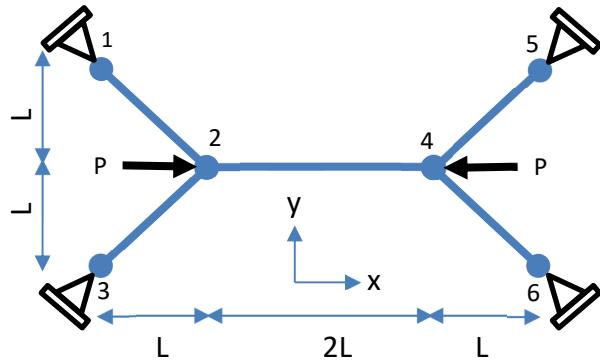
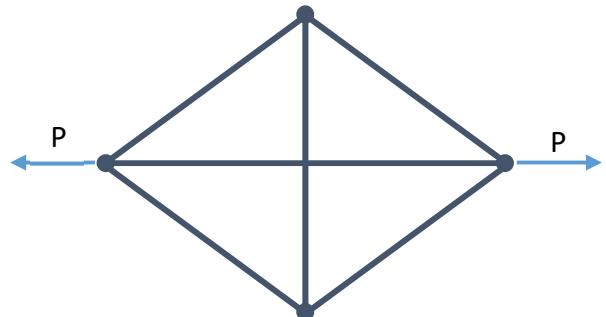
On donne : $E=6\text{GPa}$, $A = 5 \text{ cm}^2$, $L=1\text{m}$

5.3. Soit la structure en éléments finis de la figure 1. Les deux éléments 1-2 et 2-3 sont des éléments barres, de section S et de module de Young E. Les deux nœuds 1 et 3 reposent sur des appuis doubles. Une force ponctuelle P faisant un angle θ avec l'horizontale est appliquée au nœud 2.

- Calculer les déplacements du nœud 2 ainsi que toutes les réactions d'appuis.
- Evaluer les efforts normaux dans les éléments barres.
- Quelle est la valeur de l'angle θ pour laquelle les efforts normaux seraient égaux ?



5.4. Le système en treillis de la figure 2 est composé de six éléments barres et de 04 nœuds. Adopter un système d'axe et écrire les conditions aux limites de la structure en donnant toutes les justifications.



5.5. Soit une structure articulée, composée de cinq éléments barres de module de Young E , telle que schématisée dans la figure ci-contre. Cette structure est soumise à deux forces concentrées P , identiques, mais de sens contraires. La barre 2-4 possède une section constante A alors que toutes les autres barres présentent une section $\frac{A}{\sqrt{2}}$.

- Calculer les efforts normaux ainsi que les déformations axiales revenant à chaque élément. On donne : $E=1,9 \cdot 10^{11}$ Pa, $A=0,0001$ m 2 , $L=3$ m et $P=900$ N.

CHAPITRE 6

ELEMENT DE POUTRE

6.1. Equation générale des poutres planes

Sous l'effet des charges extérieures, un point situé sur l'axe neutre, à l'abscisse x , subira un déplacement vertical $v(x)$ et une rotation $\beta(x)$. L'équation générale d'une poutre en flexion simple peut s'écrire sous différentes formes (Théorie de Euler-Bernoulli).

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -M(x) \quad (6.1)$$

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = -T(x) \quad (6.2)$$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = q(x) \quad (6.3)$$

Avec $I = \int_S y^2 dS$ le moment d'inertie autour de z , $M(x)$ le moment de flexion, $T(x)$ l'effort tranchant et $q(x)$ la charge répartie.

Pour rappel, la rotation β est définie par

$$\beta = \frac{dv}{dx} \quad (6.4)$$

Et la déformation dûe à la flexion simple uniquement est

$$\epsilon_{xx} = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (6.5)$$

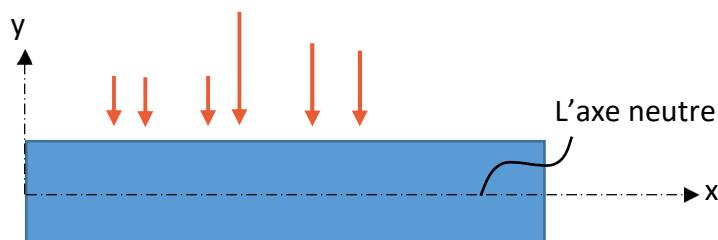


Figure 6.1

6.2. Élément de poutre plane à deux nœuds en flexion simple

Soit un élément de poutre plane de longueur L , de section S et d'inertie constante I et dont le matériau présente un module d'élasticité longitudinale E .

La poutre possède deux nœuds, chacun ayant deux DDL v_i et $\frac{dv_i}{dx}$ qui permettent de reconstituer la fonction de déplacement $v(x)$ et la rotation $\beta(x)$. Les inconnues étant les déplacements aux nœuds i et j , la première opération consiste à exprimer le champ de déplacement en fonction des valeurs nodales v_i, β_i, v_j et β_j .

6.2.1. Champ de déplacement transversal

La poutre possédant quatre DDL, la fonction d'approximation doit être prise sous la forme d'un polynôme du troisième degré.

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

A partir des conditions aux limites de $v(x)$

$$\begin{aligned} v(0) &= v_i \quad ; \quad v(L) = v_j \\ v'(0) &= \beta_i \quad ; \quad v'(L) = \beta_j \end{aligned} \quad (6.7)$$

En remplaçant l'expression (6.6) dans (6.7), le vecteur des déplacement nodaux peut s'écrire

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

D'où

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [P]^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

En injectant ce dernier résultat dans l'équ.(6.6)

$$v(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] [P]^{-1} \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

Ou encore

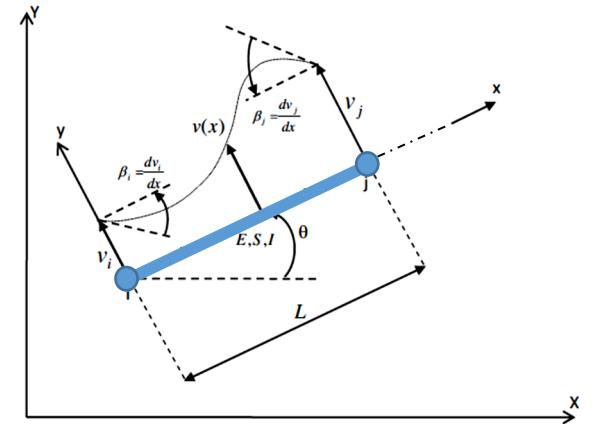


Figure 6.2

$$v(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

D'où finalement

$$v(x) = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

$$v(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

$$v(x) = [N]\{v_e\} \quad (6.14)$$

6.2.2. Champ de déformation

La déformation de la poutre résultant de la flexion simple est (équ. 6.5) $\varepsilon_{xx} = -y \frac{d^2v}{dx^2}$. En considérant l'équation (6.14), la déformation devient

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{d^2}{dx^2} [N]\{v_e\} \quad (6.15)$$

Et en utilisant l'équ. (6.12)

$$\varepsilon_{xx} = -y \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

$$\varepsilon_{xx} = [B]\{v_e\} \quad (6.17)$$

6.2.3. Matrice de rigidité élémentaire

Retenant la matrice de rigidité élémentaire $[k_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e$, et sachant que la matrice $[D]$ se réduit au module de Young E car

$$\sigma_{xx} = -yE \frac{d^2v}{dx^2} \quad (6.18)$$

L'expression de $[k_e]$ se réduit à

$$[k_e] = E \int_{S_e} \int_0^{L_e} [B]^T [B] dS_e dx \quad (6.19)$$

$$[k_e] = E \int_{S_e} \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) y \\ \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) y \\ \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) y \\ \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) y & \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) y & \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) y & \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) y \end{bmatrix} dS_e dx \quad (6.20)$$

Sachant que $\int_{S_e} dS_e = S_e$; $\int_{S_e} y^2 dS_e = I$ et $\int_{S_e} y dS_e = 0$ (le moment statique est nul par rapport à la fibre neutre), après intégration, la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local est

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

6.2.4. Matrice de rigidité élémentaire dans le repère global :

L'élément de poutre en flexion simple possédant deux nœuds à deux DDL chacun, à savoir un déplacement transversal et une rotation autour de z, il est incapable de fournir un effort normal. Il n'est donc utilisé que dans le cas où le repère local (oxy) est confondu avec le repère global (OXY) comme pour le cas des poutres continues en flexion simple chargées transversalement (selon y) uniquement.

6.2.5. Vecteurs charges

Considérant une poutre plane chargée uniformément. Le vecteur charges $\{f_e\}$ se réduit à celui des forces nodales de surfaces soit

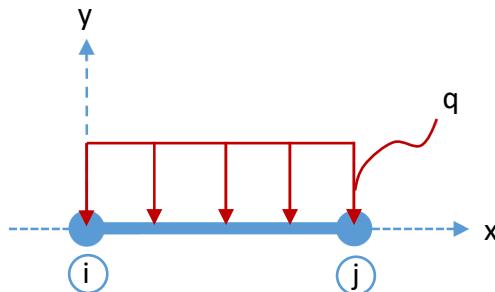


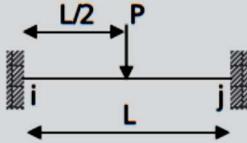
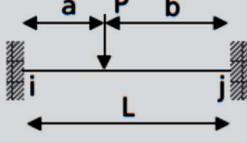
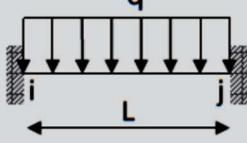
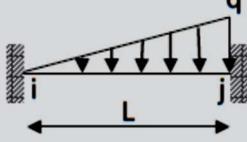
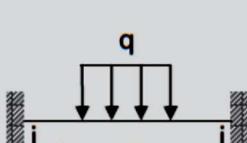
Figure 6.3

$$\{f_e^s\} = \int_{S_e} [N]^T \{f^s\} dS_e \quad (6.22)$$

La charge est appliquée par mètre linéaire le long de la poutre d'où

$$\{f_e^s\} = \begin{Bmatrix} F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \{-q\} dx \quad (6.23)$$

Tableau 6.1. Charges nodales équivalentes [M. Casenave 2010]

Type de chargement	F_{iy}	M_{iz}	F_{jy}	M_{jz}
	$-\frac{P}{2}$	$-\frac{PL}{8}$	$-\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$
	$-\frac{Pb^2}{L^3}(2a+L)$	$-\frac{Pab^2}{L^2}$	$-\frac{Pa^2}{L^3}(L+2b)$	$\frac{Pa^2b}{L^2}$
	$-\frac{qL}{2}$	$-\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL}{2}$	$\frac{qL^2}{12}$
	$-\frac{3qL}{20}$	$-\frac{qL^2}{30}$	$-\frac{7qL}{20}$	$\frac{qL^2}{20}$
	$-q \cdot \left\{ -\frac{\left((a+c)^3 - a^3 \right)}{L^2} + \frac{\left((a+c)^4 - a^4 \right)}{2L^3} \right\}$	$-\frac{q}{12L^2} \cdot \left\{ 6L^2 \left((a+c)^2 - a^2 \right) - 8L \left((a+c)^3 - a^3 \right) + 3 \left((a+c)^4 - a^4 \right) \right\}$	$-q \cdot \left\{ \frac{\left((a+c)^3 - a^3 \right)}{L^2} - \frac{\left((a+c)^4 - a^4 \right)}{2L^3} \right\}$	$\frac{q}{12L^2} \cdot \left\{ 4L \left((a+c)^3 - a^3 \right) - 3 \left((a+c)^4 - a^4 \right) \right\}$

On trouve

$$\begin{pmatrix} F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

En règle générale, le vecteur charges nodales d'un élément poutre soumis à un système de charges transversales est égal à l'inverse des réactions d'appuis de la poutre bi-encastré (Voir le tableau 1)

6.3. Exemple 1 – Poutre continue

Soit la poutre continue suivante formée de trois éléments et de quatre noeuds ; deux éléments poutres et un élément ressort. Une charge P est appliquée au point A situé au milieu de la première travée.

Calculer les déplacements nodaux, les réactions d'appuis et le déplacement à mi-longueur de la travée 1 (i.e. au point A). AN : $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa ; $I = 0.00001943 \text{ m}^4$; $L = 10\text{m}$; $k = 10^4 \text{ N/m}$; $P = 10^3 \text{ N}$

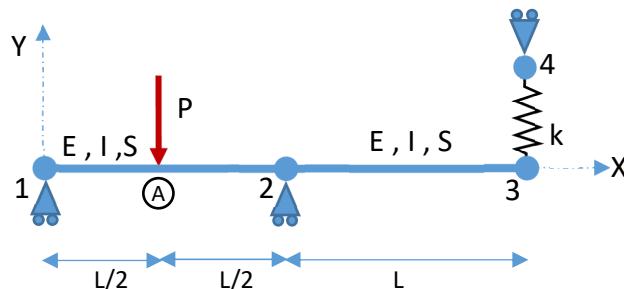


Figure 6.4

Tableau des connectivités

Elément	N i	N j	L(m)	S(m^2)	Inertie	Rigidité	θ	λ	μ
1(barre)	1	2	L	S	I	-	0°	1	0
2(barre)	2	3	L	S	I	-	0°	1	0
3(ressort)	3	4	-	-	-	k	90°	0	1

Matrices de rigidité élémentaires (équ.6.21)

$$[k_1] = [K_1] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (V_1) \\ (\beta_1) \\ (V_2) \\ (\beta_2) \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

$$[k_2] = [K_2] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} (V_2) \\ (\beta_2) \\ (V_3) \\ (\beta_3) \end{matrix} \quad (6.26)$$

(V₂) (β₂) (V₃) (β₃)

$$[k_3] = [K_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{matrix} \quad (6.27)$$

(U₃)(V₃) (U₄)(V₄)

Assemblage de la matrice de rigidité globale

L'assemblage se fera en positionnant chaque élément selon les DDL qui lui sont reliés. Il faut procéder élément par élément balayant à chaque fois tous les termes de la matrice de rigidité élémentaires. Le résultat obtenu est

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{24EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} + k & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -k \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (V_1) \\ (\beta_1) \\ (V_2) \\ (\beta_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \\ (\beta_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{matrix} \quad (6.28)$$

(V₁) (β₁) (V₂) (β₂) (U₃) (V₃) (β₃) (U₄) (V₄)

Conditions aux limites et charges nodales

La structure repose sur des appuis simples et donc $V_1 = V_2 = V_4 = 0$. De plus il n'y a aucune charge horizontale ce qui annule les déplacements dans ce sens $U_3 = U_4 = 0$.

Le vecteur des charges nodales se compose des réactions d'appuis et des charges nodales équivalentes à la charge ponctuelle.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} + R_{v1} \\ -\frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} + R_{v2} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{v4} \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

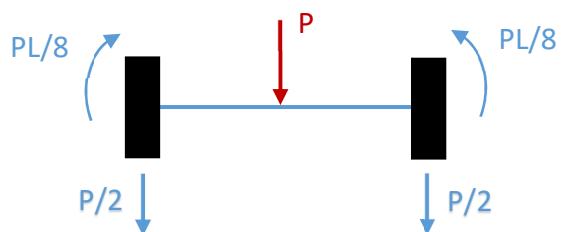


Figure 6.5

Le système à résoudre se réduit à

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} + k & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ V_3 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.30)$$

Resolution

On trouve : $\beta_1 = -\frac{3PL^2}{32EI} \frac{2EI+kL^3}{3EI+2kL^3}$; $\beta_1 = -0.00129 \text{ rad}$

$$\beta_2 = \frac{PL^2}{16EI} \frac{3EI+kL^3}{3EI+2kL^3}; \beta_2 = 0.00106 \text{ rad}$$

$$\beta_3 = \frac{PL^2}{32EI} \frac{2EI+kL^3}{3EI+2kL^3}; \beta_3 = 0.00034 \text{ rad}$$

$$V_3 = \frac{3PL^3}{16(3EI+2kL^3)}; V_3 = 0.005816 \text{ m}$$

Les réactions d'appuis $R_{v1} = 441.84 \text{ N}$; $R_{v2} = 616.31 \text{ N}$; $R_{v3} = -58.16 \text{ N}$.

6.4. Elément de poutre plane à deux nœuds en flexion composée

La poutre est caractérisée par un module d'élasticité E, une section S et une longueur L. Chaque nœuds possède trois DDL soit u_i , v_i et $\frac{dv_i}{dx}$ qui permettent de reconstituer les fonctions de déplacements axial $u(x)$ et transversal $v(x)$.

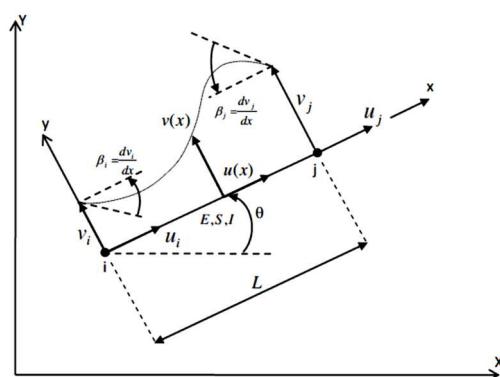


Figure 6.6

6.4.1. Champ de déplacement axial $u(x)$

Le déplacement axial $u(x)$ est mathématiquement indépendant du déplacement transversal $v(x)$. En l'absence d'un quelconque chargement transversal, l'élément poutre a un comportement identique à celui d'une barre ; $u(x)$ est donc de la forme $u(x) = a_0 + a_1 x$ et les déformations induites $\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = a_1$. (voir le chapitre 4).

De plus, et comme $u(0) = u_i$ et $u(L) = u_j$, on obtient la même fonction de déplacement que pour l'élément barre.

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_i + \left(\frac{x}{L}\right) u_j \quad (6.31)$$

6.4.2. Champ de déplacement vertical

Il est parfaitement identique à celui développé pour la poutre à deux nœuds en flexion simple

6.4.3. Champ de déformation

En regroupant les résultats (6.25) et (6.12), le champ de déplacement complet de l'élément s'écrit

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 0 & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.32)$$

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = [N]\{u_e\} \quad (6.33)$$

La déformation de la poutre résultant à la fois de la flexion et de la compression (traction) est

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - \frac{yd^2v}{dx^2} \quad (6.34)$$

Le champ de déformation s'écrit alors en fonction des déplacements nodaux :

$$\varepsilon_{xx} = \left[-\frac{1}{L} \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) y \quad \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) y \quad \frac{1}{L} \quad \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) y \quad \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) y \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

$$\text{Soit } \varepsilon_{xx} = [B]\{u_e\} \quad (6.36)$$

6.4.4. Matrice de rigidité élémentaire

En reprenant l'équ.(6.16), sachant que $[D]$ se réduit à E, l'expression de $[k_e]$ est

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

6.4.5. Matrice de rigidité élémentaire en repère global

L'élément possédant deux nœuds à trois DDL chacun, la matrice de changement de base s'écrit

$$\{u_e\} = [T_e]\{U_e\}; \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \beta_i \\ U_j \\ V_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.38)$$

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} \cos^2\theta + \frac{12EI}{L^3} \sin^2\theta & \left(\frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) \cos\theta \sin\theta & -\frac{6EI}{L^2} \sin\theta & -\frac{ES}{L} \cos^2\theta - \frac{12EI}{L^3} \sin^2\theta & \left(-\frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3}\right) \cos\theta \sin\theta & -\frac{6EI}{L^2} \sin\theta \\ \left(\frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) \cos\theta \sin\theta & \frac{ES}{L} \sin^2\theta + \frac{12EI}{L^3} \cos^2\theta & \frac{6EI}{L^2} \cos\theta & \left(-\frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3}\right) \cos\theta \sin\theta & -\frac{ES}{L} \sin^2\theta - \frac{12EI}{L^3} \cos^2\theta & \frac{6EI}{L^2} \cos\theta \\ \frac{6EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \cos\theta & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \sin\theta & -\frac{6EI}{L^2} \cos\theta & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} \sin\theta & \frac{6EI}{L^2} \cos\theta & \frac{L}{E} & \frac{6EI}{L^2} \sin\theta & -\frac{6EI}{L^2} \cos\theta & \frac{L}{E} \\ -\frac{6EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \cos\theta & \frac{L}{E} & \frac{6EI}{L^2} \sin\theta & \frac{6EI}{L^2} \cos\theta & \frac{L}{E} \\ -\frac{6EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \sin\theta & \frac{L}{E} & \frac{6EI}{L^2} \cos\theta & \left(\frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) \cos\theta \sin\theta & -\frac{6EI}{L^2} \sin\theta \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

6.5. Exemple 2 – Portique [M.Casenave 2010]

Soit la structure ci-dessous composée de trois éléments poutres et quatre nœuds. Les nœuds 1, 3 et 4 sont encastrés. On se propose de calculer les déplacements nodiaux ainsi que les réactions d'appuis.

Données: $L = 10 \text{ m}$, $q = 10 \text{ kN/m}$, $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $S = 0.00459 \text{ m}^2$, $I = 0.0000579 \text{ m}^4$.

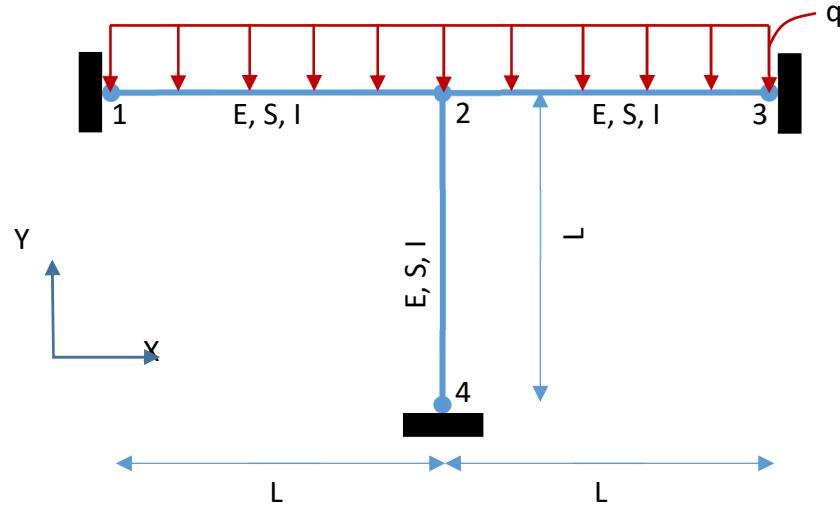


Figure 6.7

Tableau des connectivités

Elément	N i	N j	L(m)	S(m ²)	Inertie	θ	λ	μ
1(poutre)	1	2	L	S	I	0°	1	0
2(barre)	2	3	L	S	I	0°	1	0
3(ressort)	4	2	L	S	I	90°	0	1

Matrices de rigidité élémentaires (équ.6.33)

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Assemblage de la matrice de rigidité globale

L'assemblage conduit à une matrice globale de dimension 12×12 . Le résultat obtenu est

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{2ES}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{24EI}{L^3} + \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Conditions aux limites et charges nodales

La structure repose sur plusieurs encastrements. Seuls les déplacements et la rotation du nœuds 2 sont libres. En raison de la symétrie de la structure et du chargement, il est possible de déduire que $U_2 = 0$. Le système à résoudre se résume à

$$\begin{bmatrix} \frac{24EI}{L^3} + \frac{ES}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

On trouve $\beta_2 = 0$ et $V_2 = -\frac{qL}{\frac{24EI}{L^3} + \frac{ES}{L}}$; $V_2 = -1.034 \text{ mm}$.

6.6. Élément de poutre plane à deux nœuds en 3D

Pour un portique en trois dimensions, chargé dans le plan vertical, certains éléments peuvent être soumis à des moments de torsion. A titre d'exemple, dans la figure 6.8, les moments de flexions simples développés dans les poutres portées par l'axe OZ engendrent des moments de torsion dans les poutres portées par l'axe OZ . Dans cette section, nous allons développer un élément poutre capable de répondre à cette sollicitation.

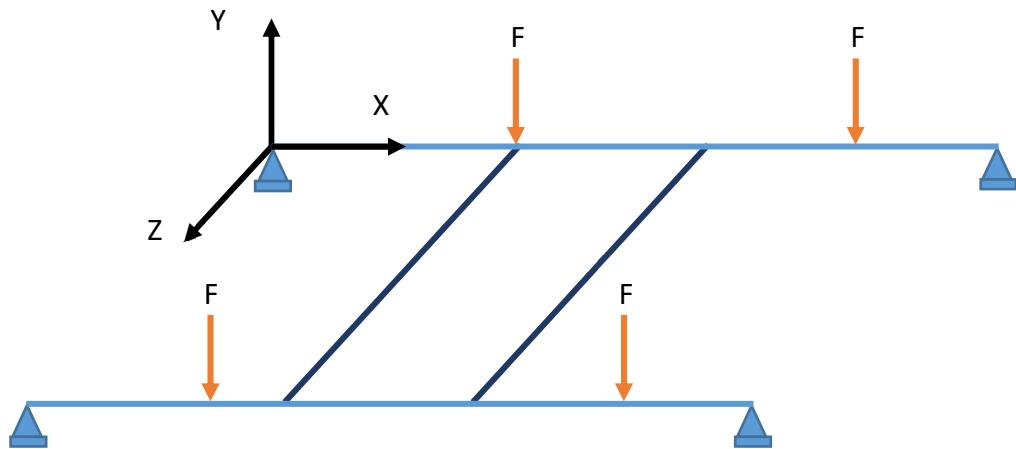


Figure 6.8

6.6.1. Élément de poutre plane à deux nœuds en torsion pure

Pour commencer, intéressons-nous à un élément poutre, à deux nœuds, soumis uniquement à des moments de torsion. Chacun des deux nœuds possède un seul degré de liberté, soit ϕ_i , une rotation autour de l'axe ox .

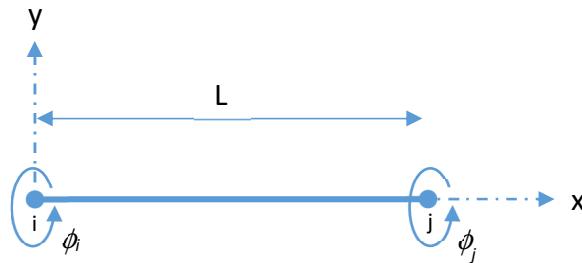


Figure 6.9

La poutre possédant deux DDL, la fonction d'approximation du champ de rotation doit être prise sous la forme d'un polynôme du premier degré, soit

$$\phi(x) = a_0 + a_1 x \quad (6.45)$$

Pour $x = 0$; $\phi(0) = \phi_1$ et pour $x = L$; $\phi(L) = \phi_2$ ce qui permet de trouver

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Etablissons maintenant la relation de la cinématique qui relie le degré de liberté ϕ , rotation autour de ox , et la distorsion γ_{max} (voir fig. 6.10). Il est d'abord supposé que tous les rayons tels que \overline{OA} restent linéaires et égales à R durant la torsion. Ceci nous permet d'écrire

$$\widehat{AB} = \gamma_{max} dx = R d\phi \quad * (6.47)$$

La résolution de l'équation (6.47) pour γ_{max} donne

$$\gamma_{max} = \frac{R d\phi}{dx} \quad (6.48)$$

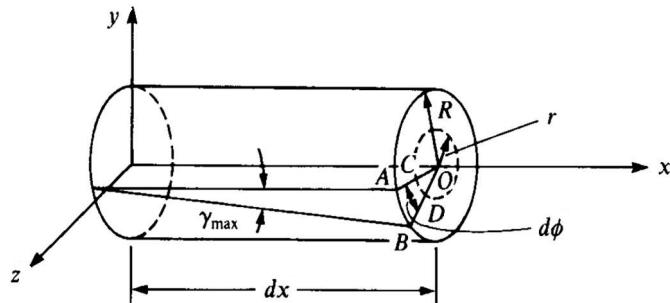


Figure 6.10 [D. L. Logan 2010]

De manière similaire, à un rayon quelconque r et en résonnant sur le triangle OCD au lieu du triangle OAB, l'équation (6.46) est utilisée afin d'obtenir

$$\gamma = \frac{r d\phi}{dx} = r \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Pour un matériau linéaire élastique isotrope, la relation contrainte-déformation pour une torsion pure s'écrit

$$\tau = G\gamma \quad (6.50)$$

Où G est le module de cisaillement. La matrice de rigidité élémentaire peut être évalué avec $[D] = G$

$$[k_e] = \int_0^{L_e} \int_{S_e} r^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dS_e dx \quad (6.51)$$

$$[k_e] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

J est le moment d'inertie $\int_{S_e} r^2 dS_e$ pour une section circulaire.

De manière générale et pour les sections non circulaires, J est appelée constante de torsion et est approximé par la formule (6.53) qui permet d'obtenir les résultats résumés dans la figure (6.11)

$$J = \sum \frac{1}{3} b_i t_i^3 \quad (6.53)$$

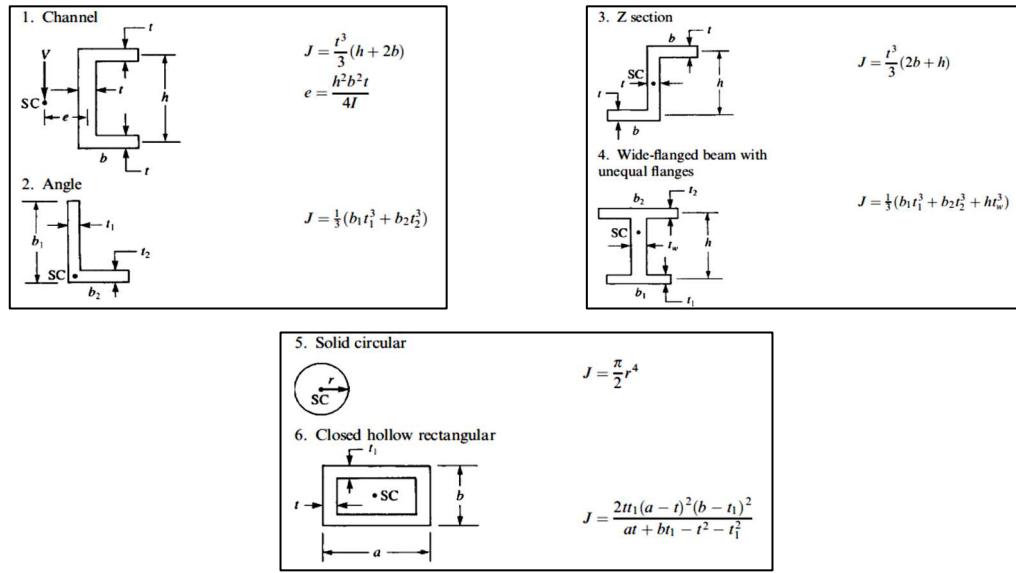


Figure 6.11 [D. L. Logan 2010]

6.6.2. Elément de poutre plane à deux nœuds en flexion simple et en torsion

En combinant les effets de la torsion avec ceux de la flexion simple, un élément à six degrés de liberté est obtenu tel que sur la figure (6.12)

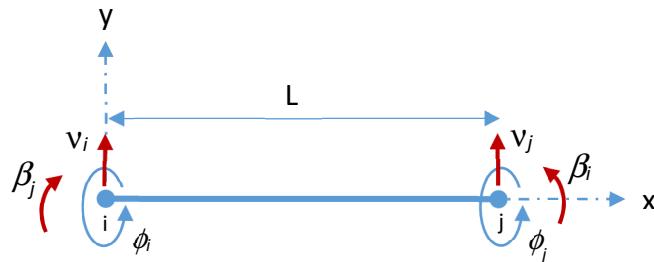


Figure 6.12

L'équation d'équilibre de cet élément mettant en exergue sa matrice de rigidité est

$$\begin{Bmatrix} F_{iy} \\ M_{ix} \\ M_{iz} \\ F_{jy} \\ M_{jx} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ \beta_i \\ v_j \\ \phi_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (6.54)$$

Ou encore

$$\{f_e\} = [k_e]\{u_e\} \quad (6.55)$$

Dont les degrés de liberté sont le déplacement transversal selon oy , la rotation autour de ox due à la torsion et enfin, la rotation autour de oz due à la flexion simple, soit trois DDL/nœud.

La matrice de passage pour cet élément permet de passer de OXZ à oxz est

$$[T_e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

L'angle θ est orienté positivement dans le sens indiqué sur la figure (6.13). L'axe oy est confondu avec l'axe OY et donc les déplacements transversaux sont inchangés.

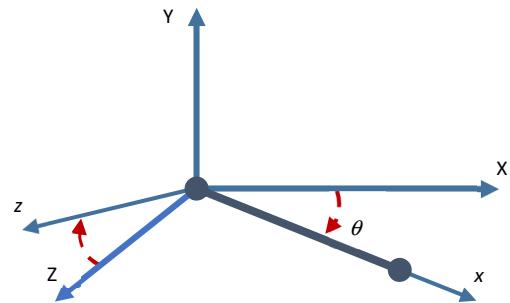


Figure 6.13

6.6.3. Exemple [D. L. Logan 2012]

Soit la structure en plan de la figure (6.14). Constituée de deux éléments poutres dans le plan OXZ , la structure supporte une force verticale au nœud 2. Les nœuds 1 et 3 sont parfaitement encastrés.

Données : $E = 210 \text{ GPa}$, $G = 84 \text{ GPa}$, $I = 16.6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
et $J = 4.6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$.

Calculer les déplacements nodaux ainsi que les efforts internes revenants à chacun des deux éléments

Tableau des connectivités

Elément	N i	N j	θ	λ	μ
1(poutre torsion)	1	2	0°	1	0
2(barre torsion)	2	3	90°	0	-1

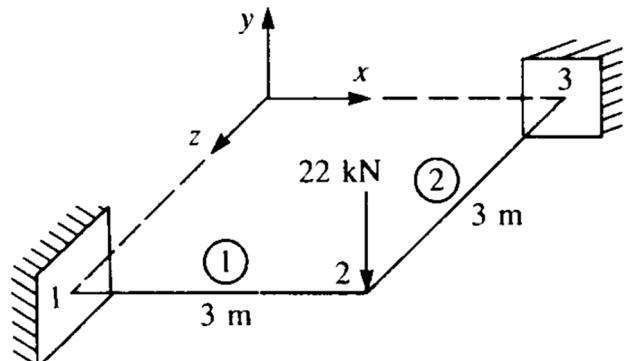


Figure 6.14

Matrices de rigidité élémentaires (équ.6.54 et équ.6.56)

Afin d'alléger les calculs, et comme les réactions d'appuis ne sont pas demandés dans l'exemple, seuls les termes intervenant dans le système de résolution réduits seront calculés.

$$[K_{1_{rédu}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.55 & 0 & -2.32 \\ 0 & 0.128 & 0 \\ -2.32 & 0 & 4.65 \end{bmatrix} 10^7 N/m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

$$[T_1]' \qquad [k_{1_{rédu}}] \qquad [T_1]$$

$$[K_{1réd}] = [k_{1réd}] \quad (6.58)$$

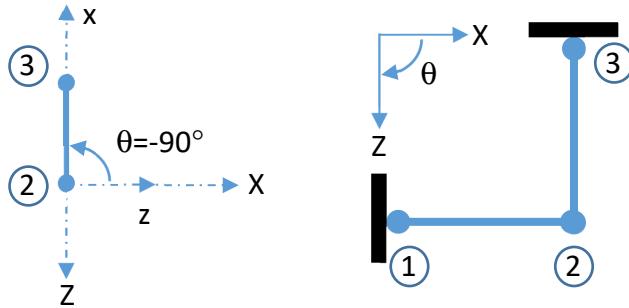


Figure 6.15

$$[K_{2réd}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.55 & 0 & 2.32 \\ 0 & 0.128 & 0 \\ 2.32 & 0 & 4.65 \end{bmatrix} 10^7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

$$[K_{2réd}] = \begin{bmatrix} 1.55 & 2.32 & 0 \\ 2.32 & 4.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0.128 \end{bmatrix} 10^7 N/m \quad (6.60)$$

Assemblage de la matrice de rigidité globale réduite

L'assemblage conduit à une matrice globale réduite de dimension 3x3.

$$[K_{réd}] = \begin{bmatrix} 3.1 & 2.32 & -2.32 \\ 2.32 & 4.78 & 0 \\ -2.32 & 0 & 4.78 \end{bmatrix} 10^7 N/m \quad (6.61)$$

Conditions aux limites et charges nodales

La structure est doublement encastrée. Seuls le déplacement et les rotations du nœud 2 sont permis.
Le système réduit à résoudre est

$$\begin{Bmatrix} -22.10^3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_{réd}] \begin{Bmatrix} V_2 \\ \Phi_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

Résolution

Le système d'équations (5.62) permet aisément d'obtenir les résultats suivants

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ \Phi_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.259 10^{-2} m \\ 0.126 10^{-2} rad \\ -0.126 10^{-2} rad \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

Afin de déterminer les forces revenant à chaque élément, il suffit d'utiliser les équations d'équilibres interne (équ. 6.55). Pour commencer, il est d'abord nécessaire d'écrire le vecteur déplacements nodaux de l'élément 1 dans le système d'axe local *oxz*.

$$\{u_1\} = [T_1]\{U_1\}; \{u_1\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.259 \cdot 10^{-2} \\ 0.126 \cdot 10^{-2} \\ -0.126 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} = \{U_1\} \quad (5.64)$$

Ainsi, nous obtenons

$$\{f_1\} = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ m_{1/ox} \\ m_{1/oz} \\ f_2^{(1)} \\ m_{2/ox} \\ m_{2/oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \cdot 10^3 N \\ -1.5 \cdot 10^3 N.m \\ 31 \cdot 10^3 N.m \\ -11 \cdot 10^3 N \\ 1.5 \cdot 10^3 N.m \\ 1.5 \cdot 10^3 N.m \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

En suivant la même méthode, les efforts revenant à l'élément 2 sont

$$\{f_1\} = \begin{pmatrix} f_2^{(2)} \\ m_{2/ox} \\ m_{2/oz} \\ f_3^{(2)} \\ m_{3/ox} \\ m_{3/oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \cdot 10^3 N \\ 1.5 \cdot 10^3 N.m \\ -1.5 \cdot 10^3 N.m \\ 11 \cdot 10^3 N \\ -1.5 \cdot 10^3 N.m \\ -31 \cdot 10^3 N.m \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

La figure 6.16 montre les représentations de ses efforts dans chaque élément. Il est à noter que chaque élément est dessiné à part pour plus de clarté.

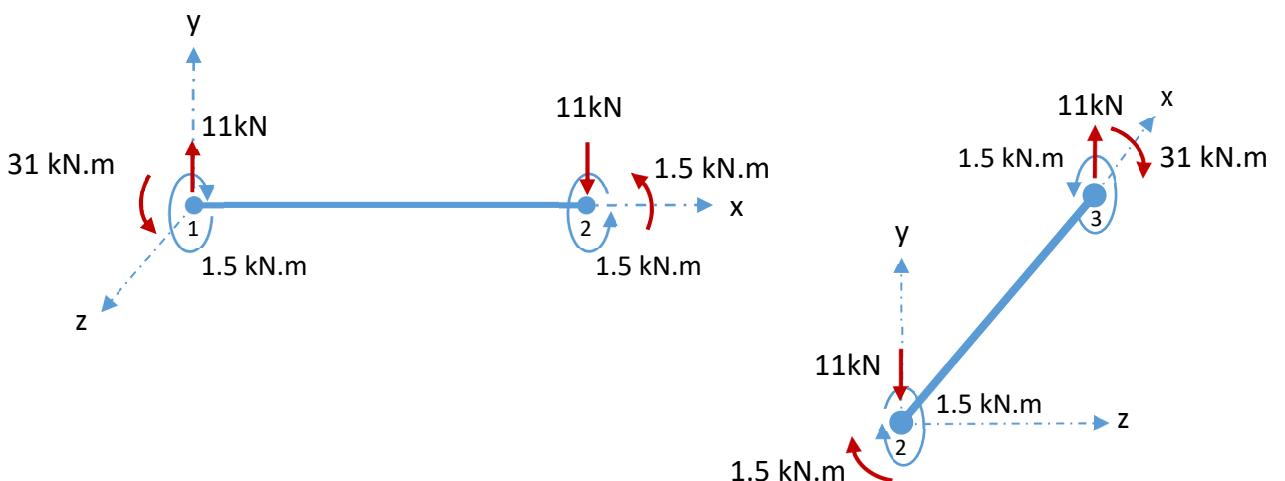


Figure 6.16

6.7. Conclusion

Les éléments en poutres sont indispensables pour le calcul, entre autres, des efforts internes mis en jeu dans les structures en portiques. Pour un élément plus complet que ceux présentés dans ce

chapitre, il faut considérer 03 translations et trois rotations par nœuds, afin de pouvoir prendre en charge tous les types de portiques en trois dimensions.

En effet, il faut considérer :

- un déplacement transversal selon oy et une rotation autour de oz pour la flexion dans le plan oxy
- un déplacement transversal selon oz et une rotation autour de oy pour la flexion dans le plan oxz ,
- un déplacement longitudinal selon ox pour la traction/compression,
- et enfin, une rotation autour de ox pour la torsion.

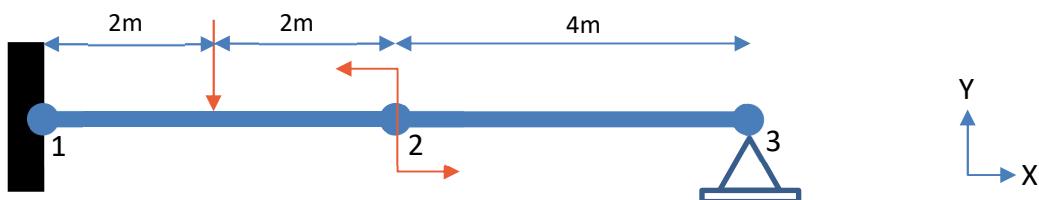
Tous les développements nécessaires à la construction d'un tel élément ont été présentés dans ce chapitre. Une simple superposition des différentes modélisations fournies conduit à l'élément à 06 DDL/nœuds capable de prendre en charge les différents effets cités ci-dessus.

Dans le prochain chapitre, et toujours dans le contexte de la méthode des éléments finis directe, nous allons aborder les éléments bidimensionnels. Les développements ne seront présentés, en détails, que pour des éléments de contrainte plane. L'élaboration d'éléments en déformation plane étant similaire, le lecteur est renvoyé à la littérature spécialisée citée dans les références bibliographiques.

Problèmes :

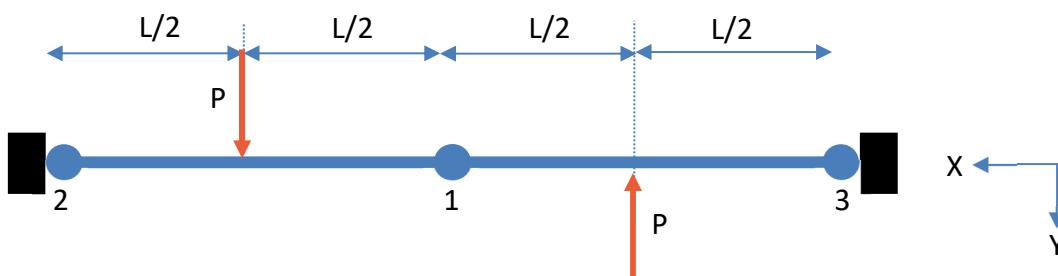
6.1. Considérons une poutre de rigidité flexionnelle constante EI (Figure 1). Une force de 4000 kN et un moment de 100 Nm lui sont appliqués. En utilisant deux éléments poutre à deux nœuds, déterminer

- la matrice de rigidité globale.
- les déplacements nodaux et les réactions d'appuis.
- les diagrammes des moments et efforts tranchants.



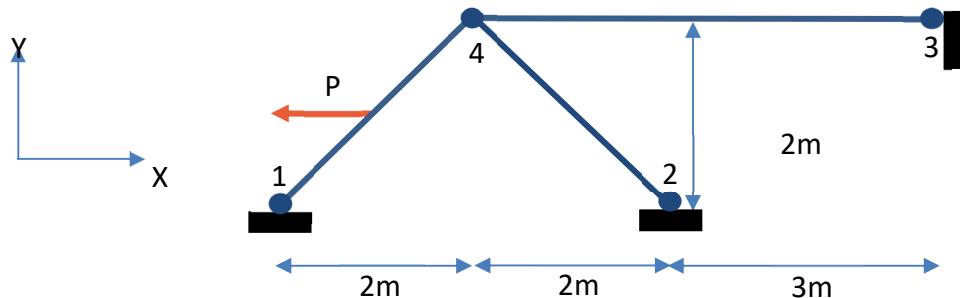
6.2. Une structure doublement encastrée est discrétisée, à l'aide de deux (02) éléments poutres, tel que schématisé dans la figure 2

- Tracer les diagrammes M, N et T.

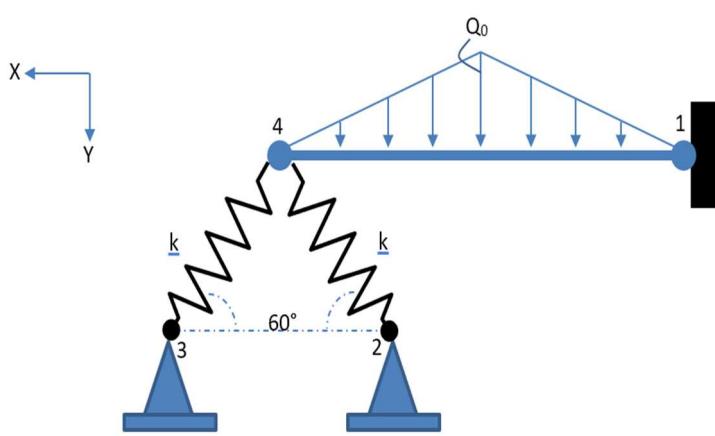


6.3. Le portique représenté ci-après, composé de trois (03) éléments poutres, est soumis à une charge horizontale P appliquée au centre de l'élément 1-4. Les nœuds 1, 2 et 3 sont fixes.

- Déterminer les déplacements du nœud 4 dus à l'application de la charge $P=60 \text{ kN}$.



On donne $S = 0.00285 \text{ m}^2$; $E = 210 \text{ GPa}$; $I = 0.00001943 \text{ m}^4$ pour tous les éléments.



6.4. Une poutre de longueur $L = 2\text{m}$, reposant sur deux ressorts identiques (de même rigidité k) est schématisée sur la figure 5. Chacun des deux ressorts est incliné de 60° par rapport à l'horizontale. Le système d'axes global est tel que précisé sur la figure.

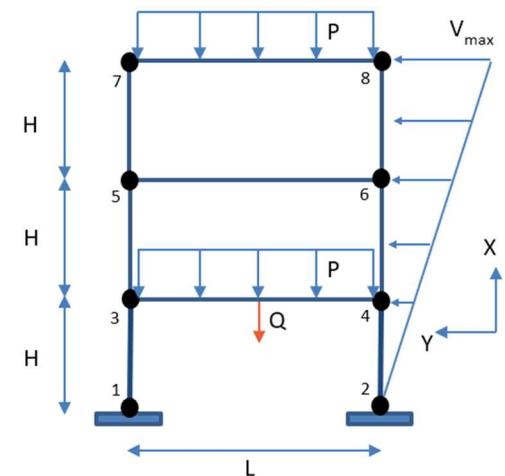
Le nœud 1 est parfaitement encastré alors que les nœuds 2 et 3 sont reliés à des appuis doubles. Elle supporte un chargement symétrique, dont la valeur maximale vaut Q_0 .

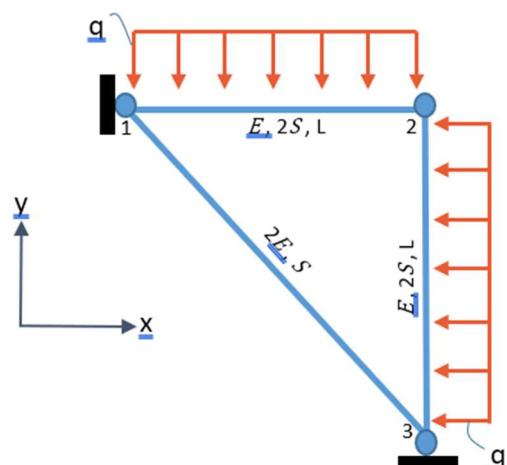
- Quelle est la valeur à prendre pour la rigidité k des ressorts afin que le nœud 4 ne subisse pas de rotation (c'est-à-dire $\beta_4 = 0$)?

On donne : $E \cdot I = 5 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$, $|Q_0| = 10 \text{ kN}$.

6.5. Soit un bâtiment en R+1 en portiques poteau-poutre, modélisé en deux dimensions à l'aide de 09 éléments finis poutre à 3ddl/nœuds. La structure est encastrée à la base, au niveau des fondations, et supporte des charges permanentes uniformément réparties sur les poutres (poids propre P), une surcharge d'exploitation (Q) concentrée à mi-travée et enfin des charges d'accompagnement (le vent V). Les poids propres des poteaux sont négligés.

- Donner le vecteur du chargement global en utilisant la combinaison à l'ELU ($1.35P + 1.5Q + V$).





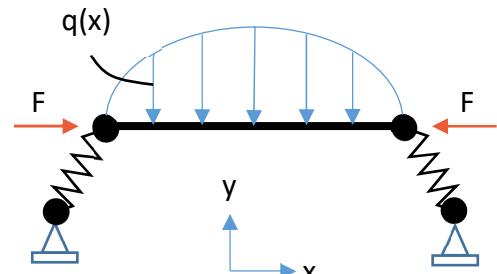
6.6. Soit la structure en éléments finis de la figure 6. Les deux éléments 1-2 et 2-3 sont des éléments poutres, de section $2S$ et de module d'élasticité E . L'élément 1-3 est un élément barre qui sert de tirant au portique. Il se caractérise par une section S et un module d'élasticité égal à $2E$. Le portique est bi-encastré.

- Calculer les déplacements du nœud 2 ainsi que toutes les réactions d'appuis avec et sans tirant.

6.7. Considérons une poutre à deux nœuds de longueur L , de module d'élasticité E et d'inertie I . Cet élément est relié à des appuis élastiques modélisés par des éléments ressorts de rigidités identiques k . (Voir figure ci-contre)

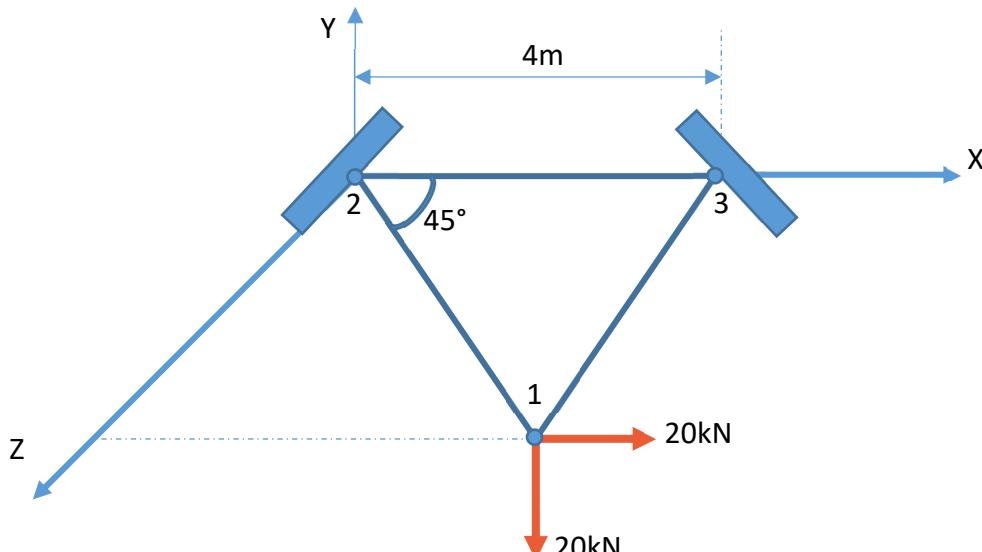
La poutre supporte une charge parabolique verticale $q(x)$ dont l'extremum q_{\max} vaut Q_0 au milieu de la poutre. Deux forces concentriques horizontales sont appliquées symétriquement de part et d'autre de la poutre.

- Quel type d'élément poutre faut-il choisir pour modéliser la poutre 2-3 ?
- Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale [K] ?
- Donner les conditions aux limites de la structure.



6.8. Une structure est composée de trois poutres travaillant en flexion et en torsion. La structure est dans le plan OYZ , alors qu'elle est soumise à deux charges telles que la première est portée par l'axe OY et la seconde par l'axe OX .

Les nœuds 2 et 3 sont parfaitement encastrés. On donne : $E = 200 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, $I = 18 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ et $J = 4.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$. Il est demandé d'évaluer les efforts internes revenant à chacune des trois poutres.



CHAPITRE 7

ELEMENT DE CONTRAINTE ET DE DEFORMATION PLANE

7.1. Etat plan de contrainte et de déformation

7.1.1. Déformation plane

Considérant un solide de section transversale constante, l'hypothèse de déformation plane consiste à considérer un comportement plan identique quelque soit la profondeur. En d'autres termes, le solide peut être décomposé en « tranche » d'épaisseur unitaire, le calcul se limitant à l'étude d'une seule de ses tranches.

Toutes les déformations associées à l'axe z sont nulles.

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (7.1)$$

La relation contrainte-déformation devient

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

et $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (7.3)$

7.1.2 Contrainte plane

A l'inverse de l'état de déformation plane, l'hypothèse de contrainte plane suppose que toutes les contraintes associées à l'axe z sont nulles.

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 ; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (7.4)$$

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

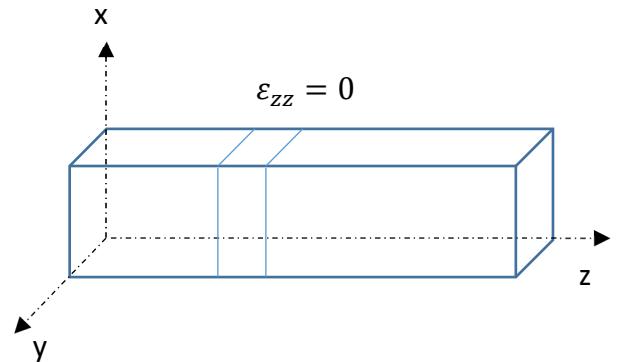


Figure 7.1

et $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (7.6)

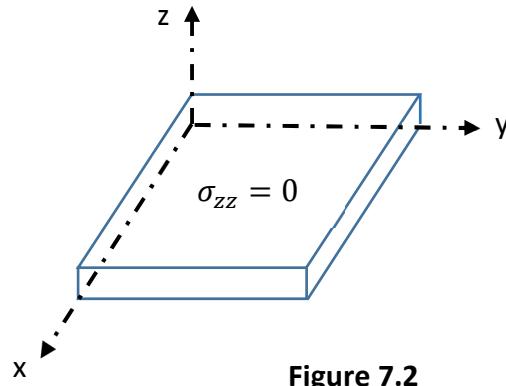


Figure 7.2

7.1.3. Champ de déformation

En examinant les équations précédentes, il est noté que le vecteur de déformation se réduit à 03 composantes dans les cas de contrainte ou de déformation plane. Seule la matrice $[D]$ change.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \{u\} = [\partial] \{u\} \quad (7.7)$$

7.2. Les éléments de contrainte plane

7.2.1. Le triangle droit isocèle

On se propose d'évaluer la matrice de rigidité élémentaire d'un élément plan d'épaisseur e et de géométrie triangulaire. Il s'agit d'un triangle isocèle droit à 03 nœuds. Chacun de ces nœuds possède 02 DDL : u et v fonction de x et de y .

Pour commencer, calculons les fonctions de forme pour le déplacement u . Soit une forme polynomiale proposée pour l'expression de $u(x)$ telle que :

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (7.8)$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0,0) = u_1 \Rightarrow a_0 = u_1$$

$$u(L, 0) = u_2 \Rightarrow u_2 = u_1 + a_1L \Rightarrow a_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$u(0, L) = u_3 \Rightarrow u_3 = u_1 + 0 + a_2L \Rightarrow a_2 = \frac{u_3 - u_1}{L}$$

D'où

$$u(x, y) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L}x + \frac{u_3 - u_1}{L}y \quad (7.9)$$

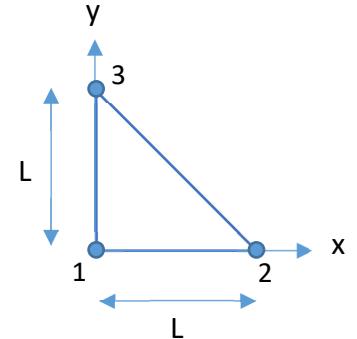


Figure 7.3

Ou encore

$$u(x, y) = u_1 \left[1 - \frac{x+y}{L} \right] + u_2 \left[\frac{x}{L} \right] + u_3 \left[\frac{y}{L} \right] \quad (7.10)$$

$$u(x, y) = u_1 N_1(x, y) + u_2 N_2(x, y) + u_3 N_3(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) u_i \quad (7.11)$$

Vérification $N_1(0,0) = 1$; $N_2(0,0) = 0$; $N_3(0,0) = 0$

$$N_1(L, 0) = 0 ; \quad N_2(L, 0) = 1 ; \quad N_3(L, 0) = 0$$

$$N_1(0, L) = 0 ; \quad N_2(0, L) = 0 ; \quad N_3(0, L) = 1$$

et $\sum_{i=1}^3 N_i(x, y) = 1$

En suivant un raisonnement similaire pour la deuxième composante du déplacement, $v(x, y)$, un résultat semblable est obtenu :

$$v(x, y) = v_1 N_1(x, y) + v_2 N_2(x, y) + v_3 N_3(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) v_i \quad (7.12)$$

D'où

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [N] \{u_e\} \quad (7.13)$$

La matrice $[B]$ est calculée à partir de l'équation de la cinématique (7.7).

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \text{ et } [B] = [\partial][N] \quad (7.14)$$

En combinant les équations (7.13) et (7.14), on trouve

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

En examinant les équations (7.14) et (7.16), il est noté que le vecteur déplacement de cet élément est identique en tout point du triangle. C'est ce qu'on appelle un élément à déformation constante.

La matrice $[D]$ étant définie par l'équation (7.5) en contrainte plane, il devient possible d'évaluer la matrice de rigidité élémentaire $[k_e]$.

$$[k_e] = \int_{V_e} \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{array} \right] \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{array} \right] dV_e \quad (7.17)$$

Avec

$$\int_{V_e} dV_e = \int_0^e \int_0^L \int_0^{L-x} dx dy dz \quad (7.18)$$

Et on trouve le résultat suivant

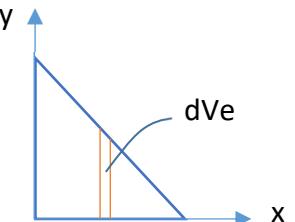


Figure 7.4
(7.18)

$$[k_e] = \frac{Ee}{4(1-\nu^2)} \left[\begin{array}{cccccc} 3-\nu & 1+\nu & -2 & \nu-1 & \nu-1 & -2\nu \\ 1+\nu & 3-\nu & -2\nu & \nu-1 & \nu-1 & -2 \\ -2 & -2\nu & 2 & 0 & 0 & 2\nu \\ \nu-1 & \nu-1 & 0 & 1-\nu & 1-\nu & 0 \\ \nu-1 & \nu-1 & 0 & 1-\nu & 1-\nu & 0 \\ -2\nu & -2 & 2\nu & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \quad (7.19)$$

Evidemment, un changement de base est nécessaire parfois lors de l'assemblage de plusieurs éléments. La matrice de passage à utiliser dans ces cas-là est

$$[T_e] = \left[\begin{array}{cccccc} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array} \right] \quad (7.20)$$

7.2.2. L'élément carré

On considère un élément carré ayant 04 nœuds possédant chacun 02 degrés de liberté u et v .

Les fonctions de forme de cet élément sont calculées en supposant un polynôme d'ordre 2 tel que

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \quad (7.21)$$

Les fonctions de forme obtenues sont

$$N_1 = \frac{1}{L^2}(L-x)(L-y) \quad (7.22)$$

$$N_2 = \frac{1}{L^2}x(L-y) \quad (7.23)$$

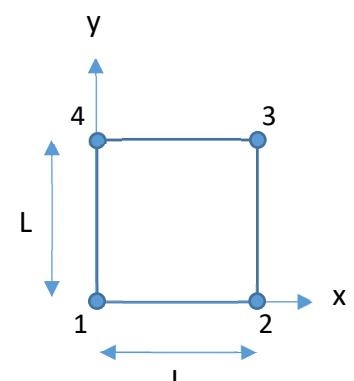


Figure 7.5

$$N_3 = \frac{xy}{L^2} \quad (7.24)$$

$$N_4 = \frac{1}{L^2} (L - x)y \quad (7.25)$$

D'où

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Et la matrice $[B]$

$$[B] = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} y - L & 0 & L - y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & x - L & 0 & -x & 0 & x & 0 & L - x \\ x - L & y - L & -x & L - y & x & y & L - x & -y \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

En contrainte plane, la matrice d'élasticité $[D]$ est toujours définie par l'équation (7.5), ce qui permet, tout comme pour l'élément triangulaire présenté précédemment, d'aboutir à la matrice de rigidité élémentaire

$$[k_e] = \int_0^L \int_0^L [B]'[D][B] dx dy e \quad (7.28)$$

$$[k_e] = \frac{E e}{2(1-\nu^2)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{3} & \frac{1+\nu}{4} & -\frac{3+\nu}{6} & \frac{3\nu-1}{4} & \frac{\nu-3}{6} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{\nu}{3} & \frac{1-3\nu}{4} \\ \frac{3-\nu}{3} & \frac{1-3\nu}{4} & \frac{\nu}{3} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{\nu-3}{6} & \frac{3\nu-1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{3+\nu}{4} \\ \frac{3-\nu}{3} & \frac{3-\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{3} & \frac{\nu}{3} & \frac{3\nu-1}{4} & \frac{\nu-3}{6} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{1-3\nu}{4} \\ \frac{3-\nu}{3} & \frac{3-\nu}{4} & \frac{1-3\nu}{3} & -\frac{3+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{6} & \frac{4}{3} & \frac{6}{3} & \frac{3\nu-1}{4} \\ \frac{3-\nu}{3} & \frac{3-\nu}{4} & \frac{3-\nu}{3} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{4}{3} & -\frac{3+\nu}{6} & \frac{3\nu-1}{4} & \frac{1-3\nu}{4} \\ \frac{3-\nu}{3} & \frac{3-\nu}{4} & \frac{3-\nu}{3} & \frac{1-3\nu}{4} & \frac{\nu}{3} & \frac{1-3\nu}{4} & \frac{\nu}{3} & \frac{3-\nu}{4} \\ \frac{3-\nu}{3} & \frac{3-\nu}{4} & \frac{3-\nu}{3} & \frac{1-3\nu}{4} & \frac{\nu}{3} & \frac{1-3\nu}{4} & \frac{\nu}{3} & \frac{3-\nu}{4} \end{bmatrix}}_{Sym} \quad (7.29)$$

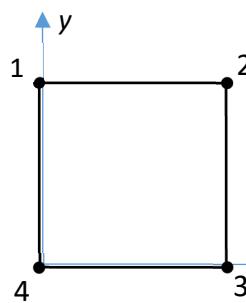
7.3. Conclusion

Les éléments exposés, dans ce chapitre, peuvent être très utiles dans la modélisation de certaines structures adaptables à la contrainte ou bien à la déformation plane. Néanmoins, pour des géométries plus complexes, ils restent assez limités. Le recours à des éléments plus sophistiqués, à savoir les éléments paramétrés, objets du prochain chapitre, est alors une nécessité incontournable.

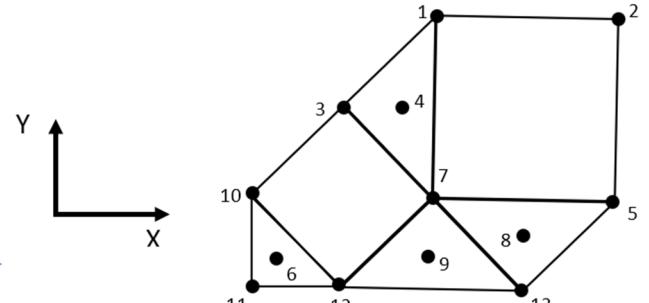
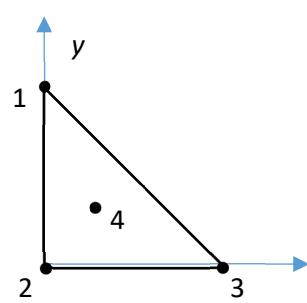
Problèmes :

7.1. Une structure est modélisée en contrainte plane. La discréétisation en MEF est effectuée à l'aide d'éléments carrées à 04 nœuds et d'éléments triangulaires isocèles à 04 nœuds tels que ceux schématisés dans la figure 1. Chaque nœud possède 2 ddl.

- Calculer les fonctions de forme relatives à chacun des deux éléments de référence.
- Etablir le tableau des connectivités du maillage.



Numérotation locale



Structure discrétisée

7.2. Considérons la plaque représentée dans la figure 1, discréteisée à l'aide de deux éléments triangulaires de contrainte plane, telle que :

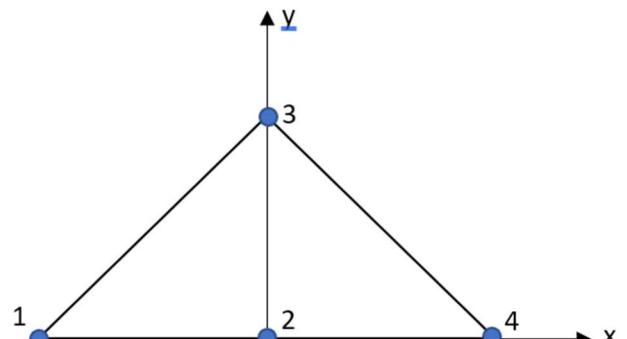
$$E = 200 \text{ GP}, \nu = 0.25, e = 2.5 \text{ cm}$$

Coordonnées nodales (en m)

$$1(-1, 0), 2(0, 0), 3(0, 1), 4(1, 0)$$

On donne les déplacements nodaux :

$$U_1 = 0 \text{ mm}, V_1 = 0.63 \text{ mm}, U_2 = 0 \text{ mm}, V_2 = 0 \text{ mm}, \\ U_3 = 0.3 \text{ mm}, V_3 = 0 \text{ mm}, U_4 = 0 \text{ mm} \text{ et } V_4 = 0.63 \text{ mm}.$$

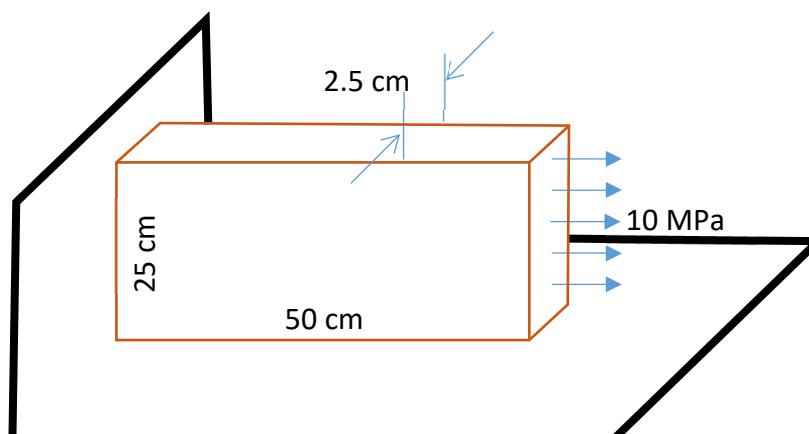


- Evaluer la matrice de rigidité globale de la structure
- Déterminer le vecteur charges globales ainsi que les contraintes dans les deux éléments.

7.3. Considérons la plaque mince soumise à la traction surfacique représentée dans la figure 2 :

- En discréteisant la plaque à l'aide de deux éléments carrés, déterminer les déplacements nodaux et les contraintes dans la plaque.
- Expliquer comment refaire l'exercice avec deux éléments triangulaires droits.

$$\text{A.N : } E = 200 \text{ GP}, \nu = 0.25, e = 2.5 \text{ cm}.$$



CHAPITRE 8

LES ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES

8.1. Problématique du maillage

Dans une modélisation linéaire, le respect de la géométrie, de la positions des appuis et du chargement suffisent à assurer la conformité des fonctions de formes. De ce fait une discréétisation intermédiaire est rarement nécessaire (voir fig. 8.1). Dans le cas des portiques par exemple, les éléments barres à deux nœuds en flexion composés, traités dans le chapitre 6, suffisent à modéliser la majorité des problèmes de structures concernant les portiques.

Par contre, dans les cas des problèmes bi et tridimensionnels, on a le plus souvent recours à des éléments de tailles et de formes différentes afin de reconstituer le plus fidèlement possible la géométrie de la structure discréétisée (voir fig 8.2)

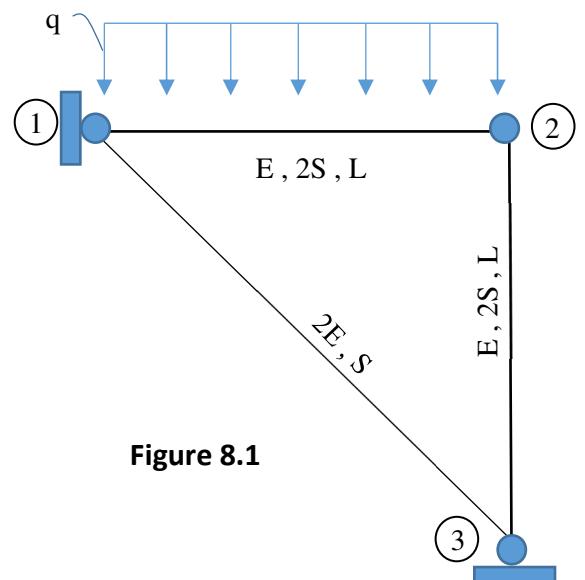


Figure 8.1

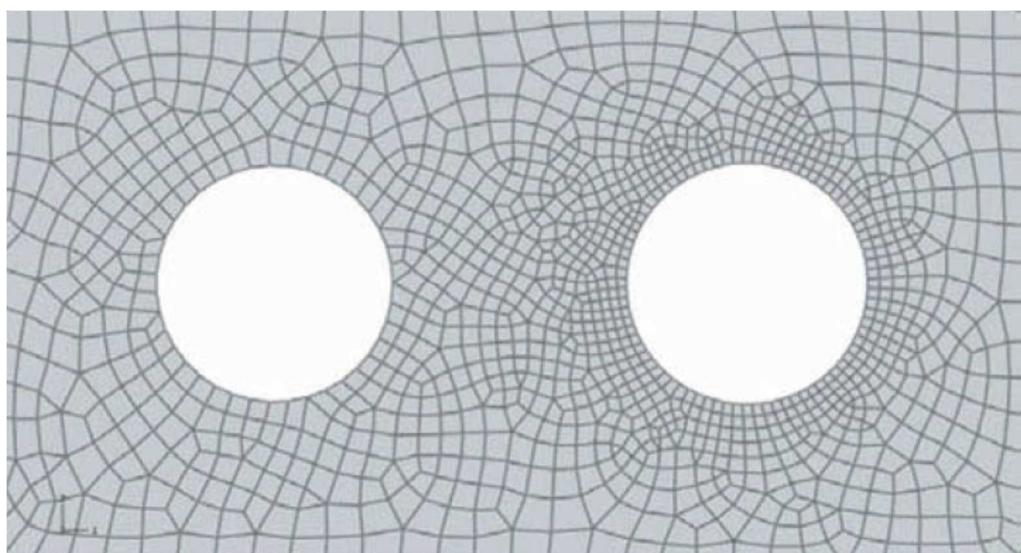


Figure 8.2

Il y a différentes possibilités de discrétisations mais il faut toujours faire attention à la qualité géométrique des éléments : la distorsion de chaque élément doit se rapprocher le plus possible de l'unité. On note à partir de la fig. 8.3 que parfois, il est nécessaire d'avoir un maillage plus raffiné avec des éléments de tailles et de formes différentes afin de pouvoir reconstituer certaines formes géométriques. Dans ce sens, on a souvent besoin d'un mailleur automatique qui va fournir en fonction de la forme des éléments choisis, les connectivités et les coordonnées des nœuds.

Pour le choix des éléments, deux grandes familles d'éléments se distinguent, à savoir : les éléments quadrilatéraux et les éléments triangulaires.

Dans une modélisation bi ou tridimensionnelle, il y a donc des éléments de tailles et de formes différentes. De ce fait, l'expression de la matrice de rigidité élémentaire est variable. Les calculs deviennent ainsi trop onéreux. La solution consiste en l'utilisation des éléments dits paramétriques. Un élément de référence unique peut se transformer en plusieurs éléments physiques réels.

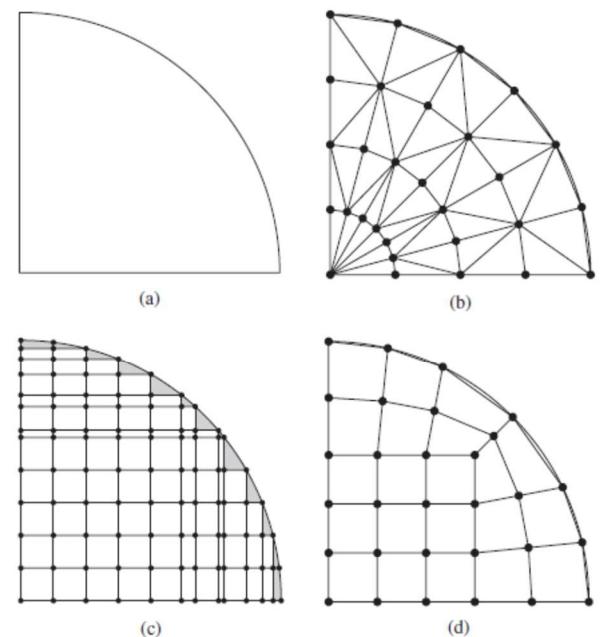


Figure 8.3

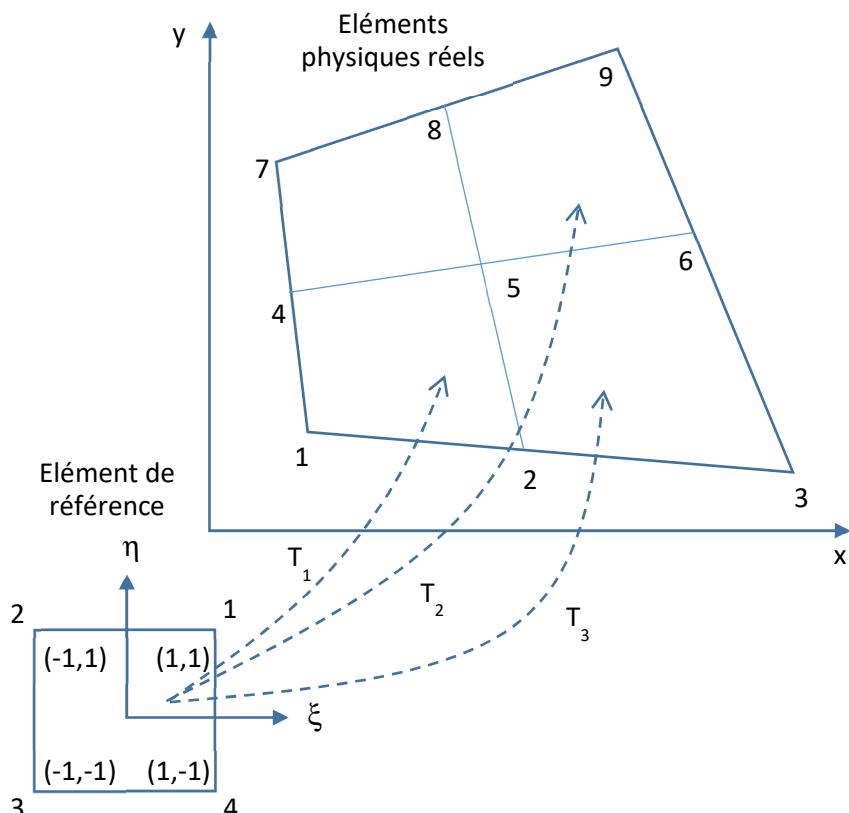


Figure 8.4

La transformation géométrique est bijective et unique pour chaque élément :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_e} \bar{N}_i(\xi, \eta) x_i \quad (8.1)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_e} \bar{N}_i(\xi, \eta) y_i \quad (8.2)$$

Les x_i, y_i représentent les points d'interpolations nodale et les \bar{N}_i les fonctions d'interpolations nодales. On distingue trois types d'éléments paramétriques.

- Les éléments subparamétriques : le nombre de nœuds géométriques est inférieur au nombre de nœuds d'approximation nodale.
- Les éléments isoparamétriques : le nombre de nœuds géométriques est égal au nombre de nœuds d'approximation nodale.
- Les éléments superparamétriques : le nombre de nœuds géométriques est supérieur au nombre de nœuds d'approximation nodale.

8.1.1. Exemple

Donner la relation géométrique entre les abscisses x et ξ , permettant de passer de l'élément de référence à l'élément physique de la figure ci-dessous.



Figure 8.5

Pour un élément barre, tel que celui de la figure ci-contre, la position d'un point matériel ne dépend que de son abscisse. Ainsi, c'est un élément unidimensionnel dont la transformation géométrique, reliant l'élément de référence à l'élément réel, ne peut être que fonction de ξ , soit

$$x(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 \quad (8.3)$$

Les conditions aux limites de cette équation permettent de retrouver les coefficients a , b et c , en fonction des coordonnées x_i de l'élément réel, de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} x(-1) = x_1 \Rightarrow a - b + c = x_1 \\ x(0) = x_2 \Rightarrow a = x_2 \\ x(+1) = x_3 \Rightarrow a + b + c = x_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = x_2 \\ b = \frac{x_3 - x_1}{2} \\ c = \frac{x_3 + x_1 - 2x_2}{2} \end{array} \right. \quad (8.4)$$

Soit la transformation géométrique qui relie l'élément de référence à l'élément réel

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)x_1 + (1 - \xi^2)x_2 + \frac{\xi}{2}(\xi + 1)x_3 \quad (8.5)$$

En injectant les coordonnées nodales de l'élément réel, on trouve la relation bijective suivante

$$x(\xi) = L/4(1 + \xi)^2 \quad (8.7)$$

L'équ. 8.1 est retrouvée à partir de l'équ. 8.5, telle que

$$x(\xi) = \bar{N}_1 x_1 + \bar{N}_2 x_2 + \bar{N}_3 x_3 \quad (8.6)$$

Ou encore

$$x(\xi) = [\bar{N}_1 \quad \bar{N}_2 \quad \bar{N}_3] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (8.7)$$

Il est important de noter que les fonctions d'interpolation nodale \bar{N}_i valent 1 au nœud i et 0 au niveau des autres nœuds.

8.2. Fonctions de forme

Pour les éléments isoparamétriques, les fonctions de forme N_i (voir chapitres précédents) sont égales aux fonctions d'interpolation géométrique \bar{N}_i . Les fonctions de forme sont définies sur l'élément parent, ou de référence, en fonction des coordonnées intrinsèques. Les champs de déplacements u et v sont donnés par

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\xi, \eta) u_i \quad (8.8)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\xi, \eta) v_i \quad (8.9)$$

Pour assurer la convergence, les fonctions de forme doivent assurer quatre conditions de conformité. Ces conditions garantissent que l'élément est capable de représenter fidèlement le champ réel.

Continuité et unicité du champ dans l'élément

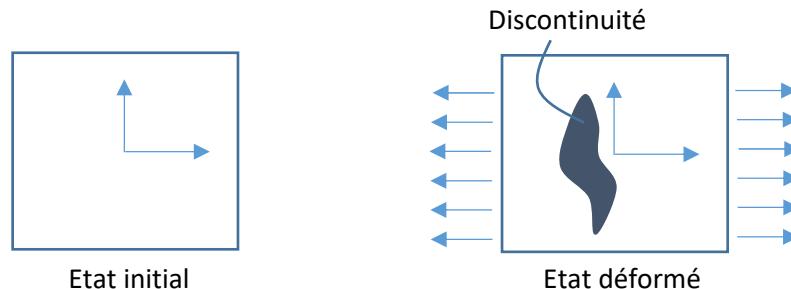


Figure 8.6

Continuité et unicité du champ sur la frontière de l'élément

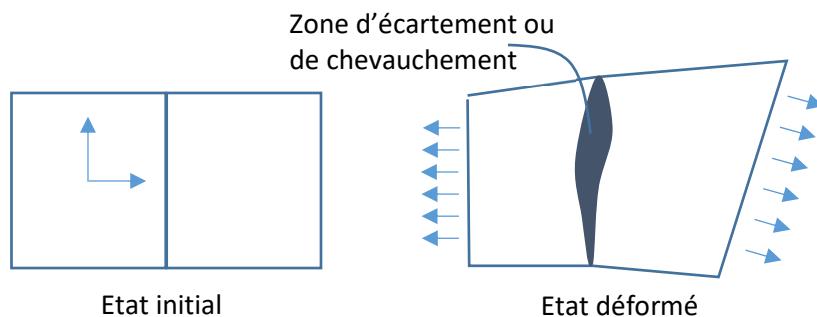


Figure 8.7

Représenter l'état de déformation constante dans l'élément

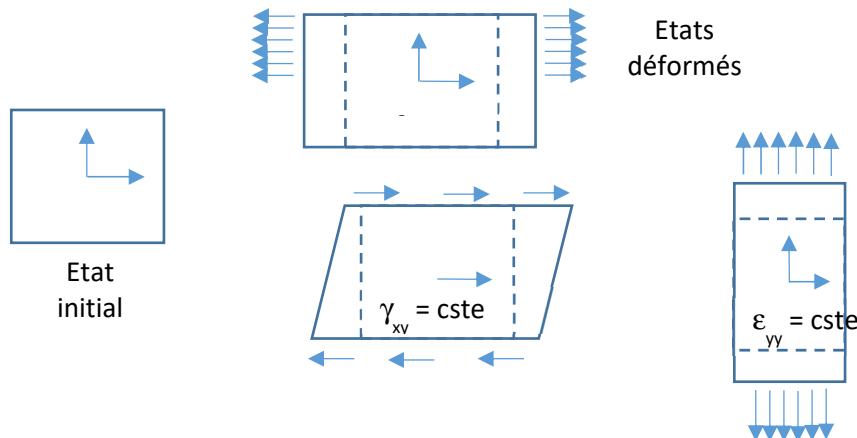


Figure 8.8

Représenter le mouvement du corps rigide

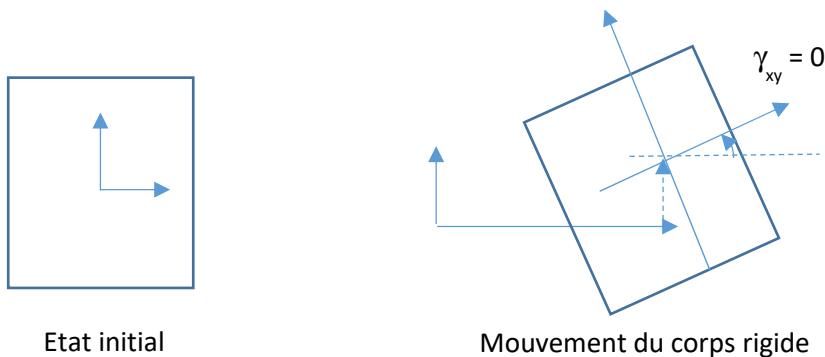


Figure 8.9

Il y a plusieurs méthodes de détermination des fonctions de forme qui garantissent la satisfaction des conditions de conformité. Seules les deux plus simples sont présentées dans ce cours.

8.2.1. Méthode directe

La méthode consiste à choisir un polynôme dont le nombre de coefficients est égal au nombre des variables nodales. On peut choisir le polynôme à partir du triangle de Pascal en veillant à respecter la symétrie.

Des polynômes complets ou incomplets peuvent être choisis à cet effet. Le choix étant directement conditionné par le nombre de nœuds de l'élément, il n'est pas toujours possible d'opter pour des polynômes complets. Pour plus de détails, consulter le Dhatt *et al* (2014).

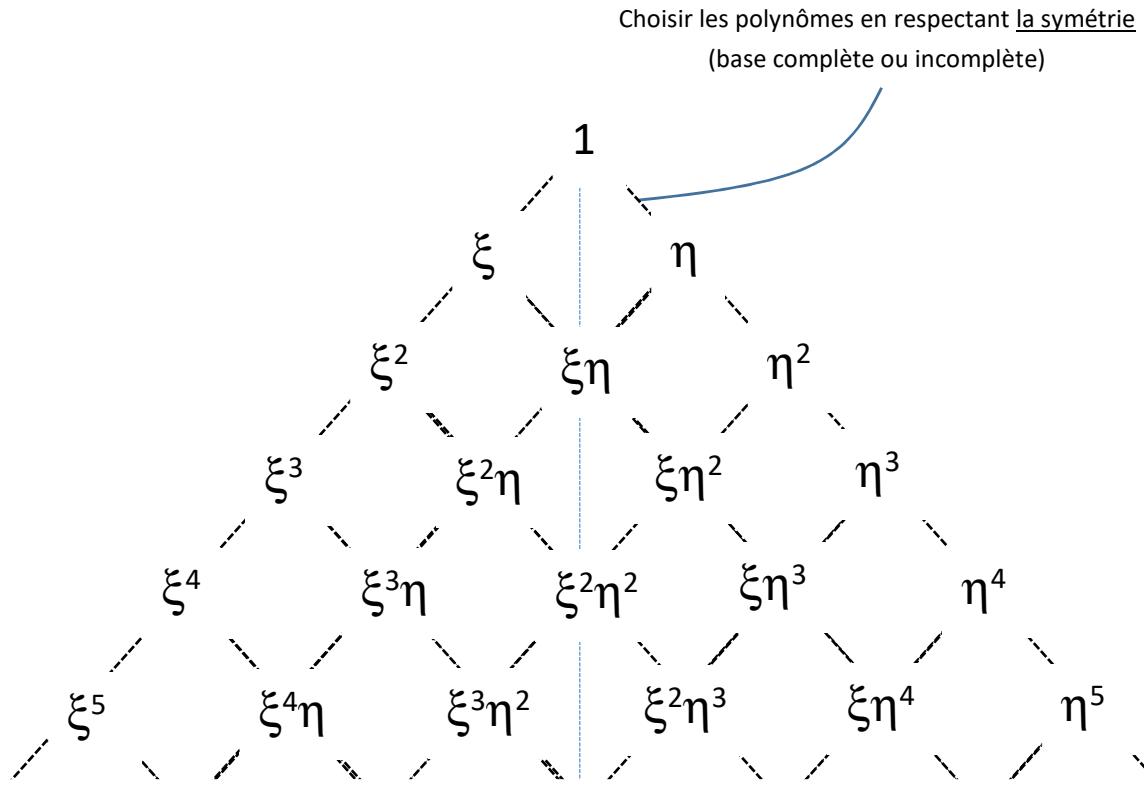


Figure 8.10

Exemple :

La première étape consiste à compter le nombre de nœuds nécessaire à la création de la transformation géométriques. De cette manière, le choix du polynôme se fait aisément comme suit

03 nœuds \Rightarrow 03 conditions aux limites pour chaque $N_i(\xi)$.

La forme générale du polynôme est donc

$$N_i(\xi) = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2.$$

Les coefficients sont calculés grâce aux conditions aux limites suivantes

$$N_1(-1) = 1 \quad ; \quad N_2(-1) = 0 \quad ; \quad N_3(-1) = 0$$

$$N_1(0) = 0 \quad ; \quad N_2(0) = 1 \quad ; \quad N_3(0) = 0$$

$$N_1(+1) = 0 \quad ; \quad N_2(-1) = 0 \quad ; \quad N_3(+1) = 1$$

Soit

$$a_1 = 0, b_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (8.10)$$

$$a_2 = 1, b_2 = 0 \text{ et } c_2 = -1 \Rightarrow N_2(\xi) = (1 - \xi^2) \quad (8.11)$$

$$a_3 = 0, b_3 = \frac{1}{2} \text{ et } c_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (8.12)$$

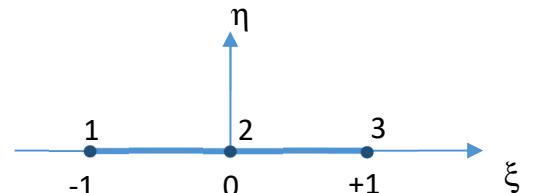


Figure 8.11

Il faut vérifier que $\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) = 1$. Ces fonctions de formes peuvent être directement utilisées dans l'exemple précédent afin de construire la transformation géométrique (équ. 8.1).

8.2.2. Polynôme de Lagrange

Pour les éléments rectangulaires, une méthode plus performante que la précédente consiste en l'utilisation des polynômes de Lagrange. Dans le cas unidimensionnel, l'expression du polynôme au nœud i est:

$$L_i(\xi) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\xi - \xi_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\xi_i - \xi_j)} \quad (8.13)$$

Les propriétés de ces polynômes leur permettent d'interpoler parfaitement le champ de déplacement et la géométrie. Ils vérifient les conditions de continuité et d'unicité, et possèdent une valeur unitaire au nœud i et nulle aux nœuds $j \neq i$.

Pour les cas multidimensionnels, il faut faire le produit dans les différentes directions. La condition essentielle est de disposer les nœuds de façon régulière dans chacune des directions orthonormées. On obtient de ce fait le quadrangle de Lagrange.

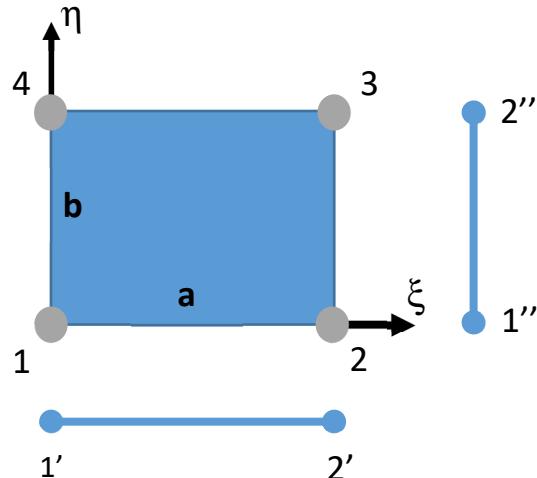


Figure 8.12

8.3. Formulation des éléments isoparamétriques :

L'introduction du principe de l'élément de référence modifie le calcul des matrices de rigidité et des forces nodales.

8.3.1. Matrice de rigidité

La matrice de rigidité d'un élément est définie sur l'élément réel par

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e \quad (8.14)$$

$[H]$ est la matrice d'élasticité et $[B]$ est celle qui relie les déformations aux déplacements nodaux

Pour rappel

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U_e\} \quad (8.15)$$

$$\{u\} = [N]\{U_e\} \quad (8.16)$$

et

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (8.17)$$

D'où

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{U_e\} = [\partial][N]\{U_e\} = [B]\{U_e\} \quad (8.18)$$

L'équation (8.12) s'écrit aussi

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad (8.19)$$

Pour un élément ayant n nœuds:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U_e\} = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_i \ \dots \ B_n]\{u_e\} \quad (8.20)$$

avec

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial z \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

Il reste à déterminer les dérivées des fonctions de formes dans le repère cartésien $\partial N_i / \partial x, \partial N_i / \partial y$ et $\partial N_i / \partial z$.

Les termes de la matrice $[B]$ sont définis par les dérivées des fonctions de forme, par rapport à coordonnées réelles (physiques). Par contre, les fonctions de formes sont définies dans le repère fictif (ξ, η) de l'élément de référence

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (8.22)$$

L'équation (8.14) sous forme matricielle s'écrit de la manière suivante:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (8.23)$$

$[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation géométrique de l'élément :

$$\text{Te: } x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\xi, \eta) x_i \quad ; \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\xi, \eta) y_i \quad (8.24)$$

D'où

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (8.25)$$

Ce qui permet d'écrire la matrice $[B]$ à partir des équations (8.18) et (8.19). Par ailleurs :

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^n N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^n N_i y_i \\ z = \sum_{i=1}^n N_i z_i \end{cases} \text{ d'où } [J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

Ainsi,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & y_i & z_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

Pour la transformation géométrique, on sait que

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix} \text{ et } dx dy dz = \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (8.28)$$

La matrice de rigidité devient

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (8.29)$$

Exemple 1: Élément barre à 02 nœuds

Il s'agit d'un élément unidimensionnel à deux nœuds, déjà rencontré dans le chapitre 4. Dans cet exemple, quoique la géométrie et les ddl sont identiques, l'élément est isoparamétrique. Ses fonctions de formes sont

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad ; \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (8.30)$$

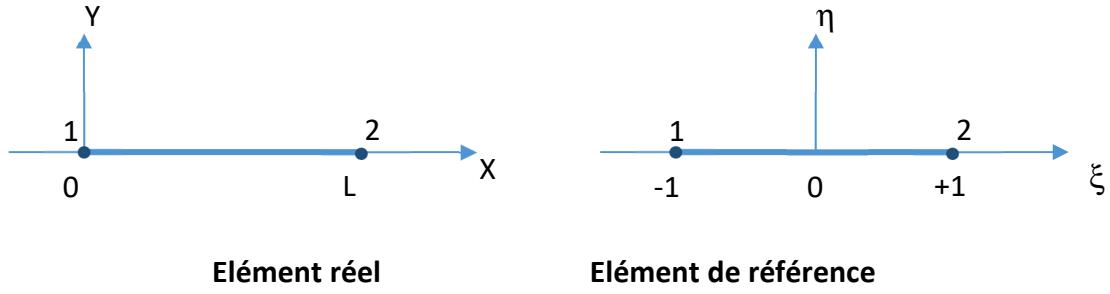


Figure 8.13

Calculons la matrice de rigidité de l'élément réel en utilisant les équations précédemment développées. Pour commencer, il est nécessaire d'évaluer la matrice jacobienne qui pour un élément unidimensionnel est un scalaire.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad [J] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

ce qui donne

$$[J] = \frac{L}{2}, \det[J] = \frac{L}{2} \quad \text{et} \quad [J]^{-1} = 2/L \quad (8.32)$$

Il est possible aussi d'utiliser la transformation géométrique

$$x(\xi) = \frac{L}{2}(1 + \xi) \Rightarrow \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2} = [J] \quad (8.33)$$

Les dérivées cartésiennes des fonctions de formes peuvent être calculées comme suit

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = [J]^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} = [J]^{-1} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} ; \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} = [J]^{-1} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \quad (8.34)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{2}{L} \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{-1}{L} ; \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{2}{L} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{L} \quad (8.35)$$

La matrice $[B]$ est

$$[B] = [dN1/dx \quad dN2/dx] \quad \text{d'où} \quad [B] = [-1/L \quad 1/L] \quad (8.36)$$

Ainsi

$$[ke] = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} ES[-1/L \quad 1/L] \frac{L}{2} d\xi \Rightarrow [ke] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

Exemple 2: Élément barre à 03 nœuds

Reprendons l'exemple de la fig 8.5 et 8.11. Pour cet élément unidimensionnel, la matrice $[J]$ se résume à

$$[J] = \frac{dx}{d\xi} \text{ soit } [J] = \frac{L}{2}(1 + \xi) \quad (8.38)$$

Il est noté ici que $\det[J] = 0$ pour $\xi = -1$ et donc que $[J]^{-1}$ est indéfinie au même point. Par voie de conséquences, les $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ en fonction de ξ sont indéfinies au même point. Cette singularité fait que la transformation géométrique entre l'élément de référence et l'élément réel ne fonctionne pas.

Si on recalcule la transformation géométrique pour $x_1 = 0$ et $x_3 = L$ et qu'on laisse x_2 inconnue, on obtient

$$x(\xi) = (1 - \xi^2)x_2 + \frac{L}{2}(\xi + \xi^2) \quad (8.39)$$

D'où $[J] = \det[J] = (\xi + 0,5)L - 2\xi x_2$ (8.40)

et $\det[J] = 0$ pour $\xi = \frac{0,5L}{2x_2 - L}$ avec $0 \leq x_2 \leq L$ et $-1 \leq \xi \leq +1$ (8.41)

Quand $L/4 < x_2 < 3L/4$, $\det[J] > 0$. Pour $x_2=L/4$, il y a une singularité pour $[J]$ en $\xi = -1$ (voir fig. 8.14).

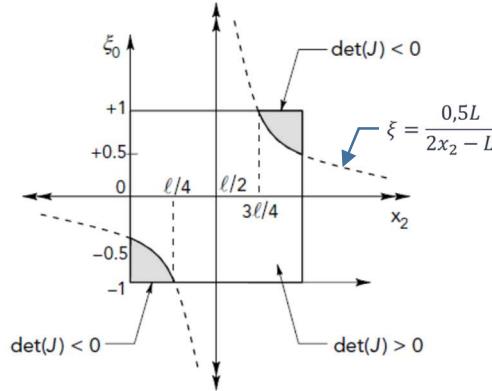


Figure 8.14

L'exercice peut se faire avec un autre élément (Fig. 8.15).

La transformation géométrique devient

$$x(\xi) = (1 - \xi^2)\frac{L}{3} + \frac{L}{2}(\xi + \xi^2) \quad (8.42)$$

$$[J] = \det[J] = (\xi + 0,5)L - 2\xi\frac{L}{3} \quad (8.43)$$

et $\det[J] = 0$ pour $\xi = -1,5$ (8.44)

$$[J] = \det[J] = L \left(\frac{\xi}{3} + 0,5 \right) > 0 \quad \forall \xi \in [-1, +1] ; [J]^{-1} = \frac{1}{L \left(\frac{\xi}{3} + 0,5 \right)} \quad (8.45)$$

Et ainsi

$$[B] = [J]^{-1} [dN_1/d\xi \quad dN_2/d\xi \quad dN_3/d\xi] ; [B] = \frac{1}{L \left(\frac{\xi}{3} + 0,5 \right)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \xi & -2\xi & \frac{1}{2} + \xi \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

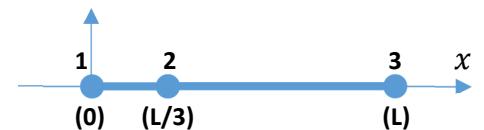


Figure 8.15

La matrice $[B]$ est continue sur l'intervalle $[-1,+1]$

$$[K_e] = EA \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{L(\xi + 0,5)} \right)^2 \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} + \xi \\ -2\xi \\ \frac{1}{2} + \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} + \xi & -2\xi & \frac{1}{2} + \xi \end{bmatrix} L\left(\frac{\xi}{3} + 0,5\right) d\xi \quad (8.47)$$

8.3.2. Forces élémentaires

Les forces nodales sont évaluées à l'aide des équations suivantes

$$\{F_e^v\} = \int_{v_e} [N]^T \{F^v\} dv_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{F^v\} \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (8.48)$$

$$\{F_e^s\} = e \int_{s_e} [N]^T \{F^s\} ds_e = e \int_{s_e} [N]^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} ds_e \quad (8.49)$$

$$\{F_e^p\} = \sum_{k=1}^n [N]^T \{p\}_k \quad (8.50)$$

Où e représente l'épaisseur de l'élément selon l'axe des z si le chargement est selon x et y . Pour chaque charge ponctuelle $\{p\}$, la matrice $[N]$ est évaluée au point d'application de celle-ci,

8.3.3. Exemple 1

Une structure modélisée en déformation plane est soumise à un chargement uniformément réparti q . Cette structure est discrétisée avec deux éléments finis de type quadrilatéral à quatre nœuds ayant chacun deux degrés de liberté.

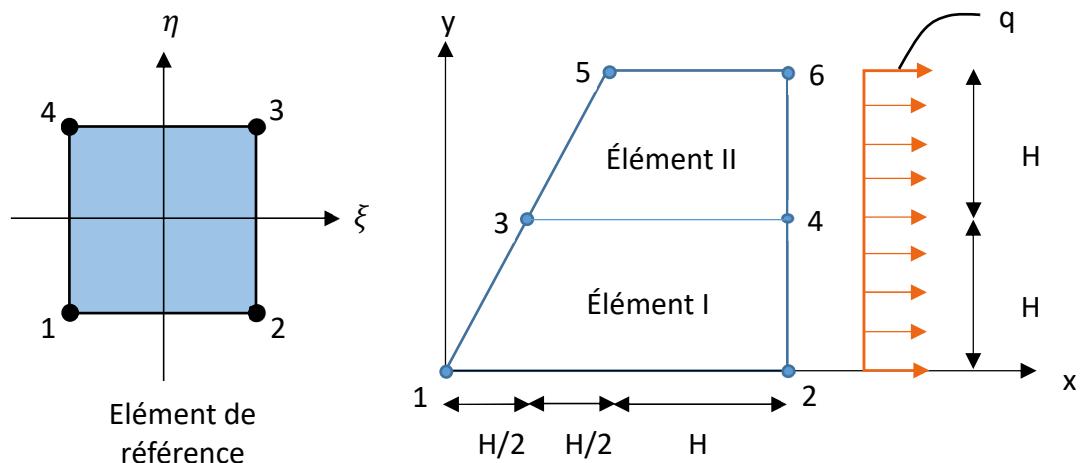


Figure 8.16

La structure étant considérée encastrée à la base, il est demandé de calculer les contraintes et les déformations au centre de gravité de l'élément I. Les étapes à suivre sont les suivantes :

1. Calculer la matrice jacobienne $[J]$ de chaque élément, ainsi que son inverse $[J]^{-1}$ et son déterminant $\det[J]$
2. Evaluer les expressions des dérivées cartésiennes des fonctions de forme puis former la matrice $[B]$ de chaque élément
3. Calculer la matrice de rigidité $[K_e]$ de chaque élément directement dans le repère physique

(réel) et assembler la matrice de rigidité globale $[K]$

4. Former le vecteur chargement externe $\{F_e^s\}$ pour chaque élément puis assembler le vecteur chargement global $\{F^s\}$
5. Résoudre le système $\{F\} = [K]\{U\}$
6. Calculer le vecteur déformation $\{\varepsilon\} = [B]\{U_e\}$ en utilisant la matrice $[B]$ et les déplacements $\{U_e\}$ de l'élément I
7. Evaluer les contraintes au CDG de l'élément considéré

Les fonctions de forme de l'élément de référence sont

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad (8.51)$$

Le tableau des connectivités

Elément	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3	Nœud 4
I	1	2	4	3
II	3	4	6	5

Coordonnées nodales

Nœuds	1	2	3	4	5	6
x_i	0	$2H$	$H/2$	$2H$	H	$2H$
y_i	0	0	H	H	$2H$	$2H$

Une fois toutes les données organisées dans le tableau des connectivités et celui des coordonnées nodales, la résolution de l'exercice peut commencer telle que suit

1- Matrice jacobienne

Si on dispose de la transformation géométrique, on peut directement dériver les expressions de $x(\xi, \eta)$ et $y(\xi, \eta)$ et par la suite, les remplacer dans l'expression de la matrice jacobienne (éq. 8.23)

Sinon, on la calcule à l'aide de l'équation (8.29) telle que

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & 1 + \eta & -1 - \eta \\ \xi - 1 & -1 - \xi & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

Pour le cas de l'élément I

$$[J_1] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & 1 + \eta & -1 - \eta \\ \xi - 1 & -1 - \xi & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2H & 0 \\ 2H & H \\ H/2 & H \end{bmatrix}; [J_1] = \frac{H}{8} \begin{bmatrix} 7 - \eta & 0 \\ 1 - \xi & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[J_1] = \frac{H^2(7 - \eta)}{16} \quad (8.53)$$

Il est à noter que pour $\eta \in [-1, +1]$, $\det[J_1] \neq 0$ d'où

$$[J_1]^{-1} = \frac{H}{8|J_1|} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \xi - 1 & 7 - \eta \end{bmatrix}; [J_1]^{-1} = \frac{2}{H} \begin{bmatrix} \frac{4}{7-\eta} & 0 \\ \frac{\xi-1}{7-\eta} & 1 \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

Pour l'élément II

$$[J_2] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & 1 + \eta & -1 - \eta \\ \xi - 1 & -1 - \xi & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{H}{2} & H \\ 2H & H \\ 2H & 2H \\ H & 2H \end{bmatrix}; [J_2] = \frac{H}{8} \begin{bmatrix} \eta - 5 & 0 \\ \xi - 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det[J_2] = \frac{H^2(5-\eta)}{16} \quad (8.55)$$

$$\text{Pour } \eta \in [-1, +1], \det[J_2] \neq 0 \text{ d'où } [J_2]^{-1} = \frac{H}{8|J_2|} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 - \xi & \eta - 5 \end{bmatrix}, [J_2]^{-1} = \frac{2}{H} \begin{bmatrix} \frac{4}{5-\eta} & 0 \\ \frac{\xi-1}{5-\eta} & 1 \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

2- Matrice $[B]$

Pour chaque élément, il faut calculer les dérivées cartésiennes grâce à l'expression

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J_i]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (8.57)$$

Pour l'élément I

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J_1]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{2}{H} \begin{bmatrix} \frac{4}{7-\eta} & 0 \\ \frac{\xi-1}{7-\eta} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} \eta - 1 \\ \xi - 1 \end{Bmatrix} \quad (8.58)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H} \begin{Bmatrix} \frac{4}{7-\eta} (\eta - 1) \\ \frac{\xi-1}{7-\eta} (\eta - 1) + \xi - 1 \end{Bmatrix} \quad (8.59)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J_1]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{2}{H} \begin{bmatrix} \frac{4}{7-\eta} & 0 \\ \frac{\xi-1}{7-\eta} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 - \eta \\ -\xi - 1 \end{Bmatrix} \quad (8.60)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H} \begin{Bmatrix} \frac{4}{7-\eta} (1 - \eta) \\ \frac{\xi-1}{7-\eta} (1 - \eta) - \xi - 1 \end{Bmatrix} \quad (8.61)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J_1]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{2}{H} \begin{bmatrix} \frac{4}{7-\eta} & 0 \\ \frac{\xi-1}{7-\eta} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 + \eta \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \quad (8.62)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H} \begin{Bmatrix} \frac{4}{7-\eta} (1+\eta) \\ \frac{\xi-1}{7-\eta} (1+\eta) + 1+\xi \end{Bmatrix} \quad (8.63)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J_1]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{2}{H} \begin{Bmatrix} \frac{4}{7-\eta} & 0 \\ \frac{\xi-1}{7-\eta} & 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} -1-\eta \\ 1-\xi \end{Bmatrix} \quad (8.64)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H} \begin{Bmatrix} 2H(-1-\eta) + (1-\xi)^2 \\ \frac{1-\xi}{7-\eta} (1+\eta) + 1-\xi \end{Bmatrix} \quad (8.65)$$

Il est aisément maintenant de former la matrice $[B_1]$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (8.66)$$

Pour l'élément II

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J_2]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{2}{H} \begin{Bmatrix} \frac{4}{5-\eta} & 0 \\ \frac{\xi-1}{5-\eta} & 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} \eta-1 \\ \xi-1 \end{Bmatrix} \quad (8.67)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2H} \begin{Bmatrix} \frac{4}{5-\eta} (\eta-1) \\ \frac{\xi-1}{5-\eta} (\eta-1) + \xi-1 \end{Bmatrix} \dots [B_2] \quad (8.68)$$

...etc

3- Matrices $[K_e]$

La structure peut être modélisée en déformation plane et donc l'épaisseur $e=1m$ dans le sens oz .

$$[K_1] = \int_{V_1} [B_1]^T [H] [B_1] dV_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_1]^T [D] [B_1] \det[J_1] 1 d\xi d\eta \quad (8.69)$$

Avec

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8.70)$$

La matrice d'élasticité est constante pour cet exemple. Tous les éléments sont faits avec le même matériau.

$$[K_2] = \int_{V_1} [B_2]^T [D] [B_2] dV_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_2]^T [D] [B_2] \det[J_2] 1 d\xi d\eta \quad (8.71)$$

4- Assembler la matrice [K]

L'assemblage de la matrice de rigidité globale se fait directement en disposant chaque terme à sa place en fonction des ddl qui lui sont relatifs. Contrairement à ce qui a été présenté dans la méthode des éléments finis directe (chapitres 5, 6 et 7), aucun changement de base n'est nécessaire avec les éléments paramétrés. L'utilisation de la transformation géométrique permet d'évaluer les matrices élémentaires dans le repaire de référence, mais les résultats obtenus sont valables dans le repaire réel.

5- Vecteurs $\{F_e^S\}$

Le chargement appliqué est réparti sur la surface latérale de chacun des deux éléments. Il est impératif de le transformer en chargement nodal équivalent.

$$\{F_e^S\} = \int_{s_e} [N]^T \{F^S\} ds_e = \int_{s_e} [N]^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} ds_e \quad (8.72)$$

La matrice des fonctions de forme est écrite en fonction de ξ et de η , il est donc nécessaire d'écrire ds_e avec les mêmes variables afin de pouvoir intégrer l'équ. (8.72)

$$ds_e = e \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (8.73)$$

$$ds_e = e \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \partial \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial \eta \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \partial \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \partial \eta \right) \right)^2} \quad (8.74)$$

Pour ce cas $\xi = \text{cste} = 1$ d'où

$$ds_e = e \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \partial \eta \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \partial \eta \right)^2} \quad (8.75)$$

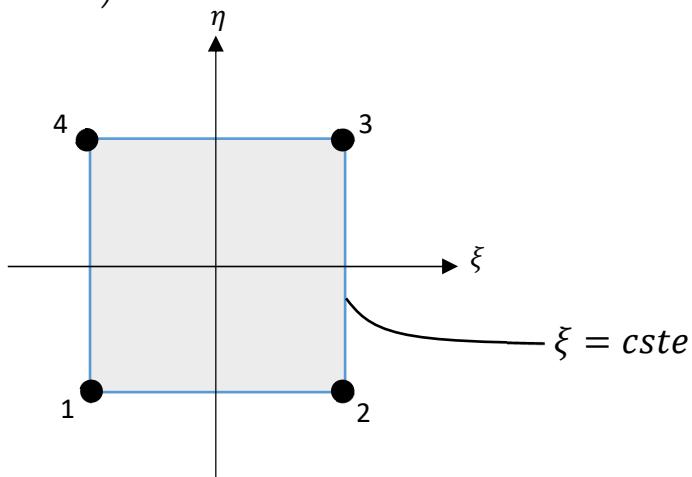


Figure 8.17 : Élément de référence

A partir de l'expression de la matrice jacobienne

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \text{ et } [J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & 1 + \eta & -1 - \eta \\ \xi - 1 & -1 - \xi & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (8.76)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [x_1(\xi - 1) + x_2(-1 - \xi) + x_3(\xi + 1) + x_4(1 - \xi)] \quad (8.77)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [y_1(\xi - 1) + y_2(-1 - \xi) + y_3(\xi + 1) + y_4(1 - \xi)] \quad (8.78)$$

Avec $\xi = 1$, on trouve

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [x_1(0) + x_2(-2) + x_3(+2) + x_4(0)] = 0 \quad (8.79)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [y_1(0) + y_2(-2) + y_3(+2) + y_4(0)] = \frac{1}{2}(y_3 - y_2) = \frac{H}{2} \quad (8.80)$$

D'où $ds_e = e \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta\right)^2} = e \frac{H}{2} d\eta$ pour les 02 éléments puisqu'ils sont de mêmes

Hauteurs. Ainsi

$$\{F_e^s\} = 1 \int_{-1}^{+1} [N]^T \{F^s\} ds_e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/2(1-\eta) & 0 \\ 0 & 1/2(1-\eta) \\ 1/2(1+\eta) & 0 \\ 0 & 1/2(1+\eta) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \frac{H}{2} d\eta ; \text{ pour } \xi = +1 \quad (8.81)$$

$$\{F_1^s\} = \{F_2^s\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qH}{2} \\ 0 \\ \frac{qH}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

6- Assembler $\{F^s\}$

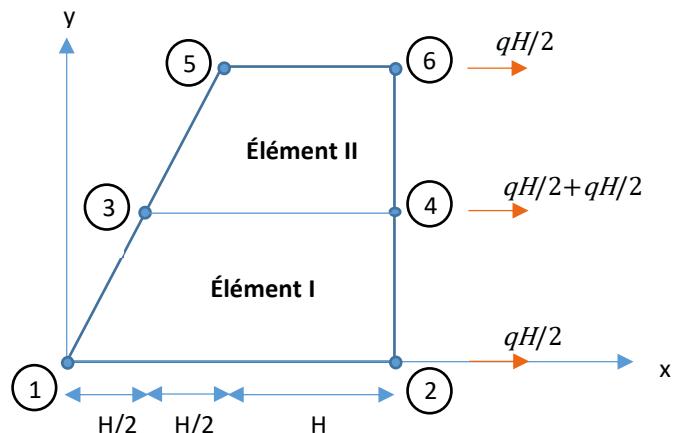


Figure 8.18

7- Déplacements Résoudre le système $\{F^s\} = [K]\{U\}$ (Ne pas oublier les conditions aux limites)

8- Déformations au CDG de l'élément I

Sachant que $\{\varepsilon\} = [B_1]\{U_1\}$, il faut d'abord former le vecteur $\{U_e\}$ à partir des résultats de l'étape précédente et du tableau des connectivités

(8.83)

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} = f(\xi, \eta) \quad (8.84)$$

Dans la matrice $[B_1]$, il faut injecter les coordonnées du centre de gravité (C) dans le repère $(o\xi\eta)$ qui sont $(0,0)$. On obtient

$$\{\varepsilon(C)\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(C) \\ \varepsilon_{yy}(C) \\ \gamma_{xy}(C) \end{pmatrix} = [B_1(C)] \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (8.85)$$

9- Contraintes au CDG de l'élément I

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}(C) \\ \sigma_{yy}(C) \\ \tau_{xy}(C) \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(C) \\ \varepsilon_{yy}(C) \\ \gamma_{xy}(C) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{zz}(C) = \nu(\sigma_{xx}(C)+\sigma_{yy}(C)) \quad (8.86)$$

$$\text{avec } [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8.87)$$

8.3.4. Exemple 2

Soit la structure, discrétisée à l'aide d'éléments isoparamétriques triangulaires, schématisée dans la figure 8.19. L'élément de référence choisi est triangulaire à trois nœuds. Chaque nœud possède 2 ddl à savoir un déplacement horizontal et un déplacement vertical.

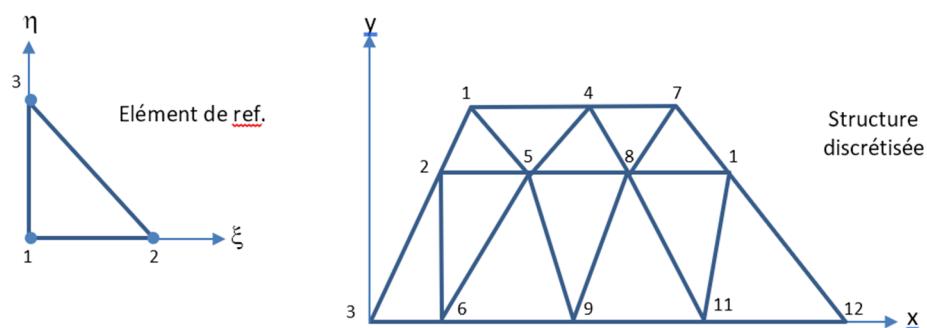


Figure 8.19

- Déterminer les fonctions de forme relatives à l'élément de référence en fonction des coordonnées intrinsèques (ξ, η) .

En utilisant le triangle de Pascal, on choisit

$$N_i(\xi, \eta) = a_i + b_i\xi + c_i\eta \quad (8.88)$$

D'où

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta ; \quad N_2(\xi, \eta) = \xi ; \quad N_3(\xi, \eta) = \eta \quad (8.89)$$

- Déduire la fonction de transformation géométrique de l'élément 4 dont les nœuds sont (5-4-1) suivant les coordonnées suivantes :

$$\text{Nœud } 5 \text{ (6m , 6m)} ; \quad \text{Nœud } 4 \text{ (8m , 9m)} ; \quad \text{Nœud } 1 \text{ (4m , 9m)}$$

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = (1 - \xi - \eta) * 6 + \xi * 8 + \eta * 4 = 6 + 2\xi - 2\eta \quad (8.90)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i y_i = (1 - \xi - \eta) * 6 + \xi * 9 + \eta * 9 = 6 + 3\xi + 3\eta \quad (8.91)$$

- Pour un état de contrainte plan avec un matériau isotrope de module de Young E et de coefficient de Poisson v, écrire les relations déformations/déplacements et contraintes/déformations de l'élément 4. Le matériau est tel que $E = 25\text{GPa}$, $v = 0,2$ et la structure présente une épaisseur $e = 0,1\text{m}$.

La relation déformation/déplacement $\{\varepsilon\} = [B]\{U_e\}$ nécessite l'évaluation de la matrice $[B]$ et donc de la matrice jacobienne pour pouvoir calculer les dérivées cartésiennes

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Rightarrow [J] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } |J| = 12 \neq 0, \forall \xi \text{ et } \eta \in [0,1] \quad (8.92)$$

Remarque: Pour cet élément de référence, $|J| = 2 * \text{Aire du triangle}$ soit $2*6=12$. Cette particularité est bien pratique pour vérifier certains résultats dont le poids propre des structures !

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \quad (8.93)$$

Calcul des dérivées cartésiennes

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/3 \end{Bmatrix} \quad (8.94)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/6 \end{Bmatrix} \quad (8.95)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/4 \\ 1/6 \end{Bmatrix} \quad (8.96)$$

Calcul de la matrice $[B]$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/6 & 1/4 & 1/6 & -1/4 \end{bmatrix} \quad (8.97)$$

$$\text{On écrit } \{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} U_5 \\ V_5 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} \text{ soit } \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/6 & 1/4 & 1/6 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ V_5 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} \quad (8.98)$$

La relation contrainte/déformation est $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ et nécessite l'évaluation de la matrice $[D]$ correspondant à la contrainte plane (équ. 7.5)

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} ; \quad \text{AN: } [D] = 10^{+10} \begin{bmatrix} 2,6042 & 0,5208 & 0 \\ 0,5208 & 2,6042 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0417 \end{bmatrix} \text{ (Pa)} \quad (8.99)$$

- Déterminer la matrice de rigidité de l'élément étudié.

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e = \int_0^e \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [B]^T [D] [B] |J| d\eta d\xi d\zeta = [B]^T [D] [B] e |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} d\eta d\xi \quad (8.100)$$

On trouve

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} d\eta d\xi = \frac{1}{2} \quad (8.101)$$

qui vérifie

$$V = \int_{V_e} dV = e |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} d\eta d\xi = 0,1 * 12 * \frac{1}{2} = 0,6 m^3 \quad (8.102)$$

Il reste à calculer le produit matriciel $[B]^T [D] [B]$ qui donne après multiplication par $V = 0,6 m^3$

$$\begin{aligned}
 [K_e] = 1.0e+09 && 0.6944 && 0 && -0.3472 && -0.5208 && -0.3472 && 0.5208 && U5 \\
 && 0 && 1.7361 && -0.2604 && -0.8681 && 0.2604 && -0.8681 && V5 \\
 && -0.3472 && -0.2604 && 1.1502 && 0.3906 && -0.8030 && -0.1302 && U4 \\
 && -0.5208 && -0.8681 && 0.3906 && 0.8247 && 0.1302 && 0.0434 && V4 \\
 && -0.3472 && 0.2604 && -0.8030 && 0.1302 && 1.1502 && -0.3906 && U1 \\
 && 0.5208 && -0.8681 && -0.1302 && 0,0434 && -0.3906 && 0.8247 && V1 \\
 && U5 && V5 && U4 && V4 && U1 && V1 && && (8.103)
 \end{aligned}$$

- Refaire l'exercice en considérant l'élément numéroté

$$\text{Nœud 4 (8m, 9m)} ; \quad \text{Nœud 1 (4m, 9m)} ; \quad \text{Nœud 5 (6m, 6m)}$$

Si l'élément avait été numéroté de cette façon, la transformation géométrique serait différente comme suit

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = (1 - \xi - \eta) * 8 + \xi * 4 + \eta * 6 = 8 - 4\xi - 2\eta \quad (8.104)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i y_i = (1 - \xi - \eta) * 9 + \xi * 9 + \eta * 6 = 9 - 3\xi \quad (8.105)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Rightarrow [J] = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } |J| = 12 \neq 0, \forall \xi \text{ et } \eta \in [0,1] \quad (8.106)$$

Remarque: $|J| = 2 * \text{Aire du triangle}$ soit $2*6=12$ est le même que dans les calculs précédents

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/6 & -1/3 \end{bmatrix} \quad (8.107)$$

Calcul des dérivées cartésiennes

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +1/4 \\ +1/6 \end{Bmatrix} \quad (8.108)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/4 \\ +1/6 \end{Bmatrix} \quad (8.109)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/3 \end{Bmatrix} \quad (8.110)$$

Calcul de $[B]$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & -1/3 \\ 1/6 & 1/4 & 1/6 & -1/4 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.111)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & -1/3 \\ 1/6 & 1/4 & 1/6 & -1/4 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_4 \\ V_4 \\ U_1 \\ V_1 \\ U_5 \\ V_5 \end{Bmatrix} \quad (8.112)$$

La matrice $[D]$ est inchangée puisqu'il s'agit du même élément

Il reste à calculer le produit matriciel $[B]^T [D] [B]$ qui permet de donner

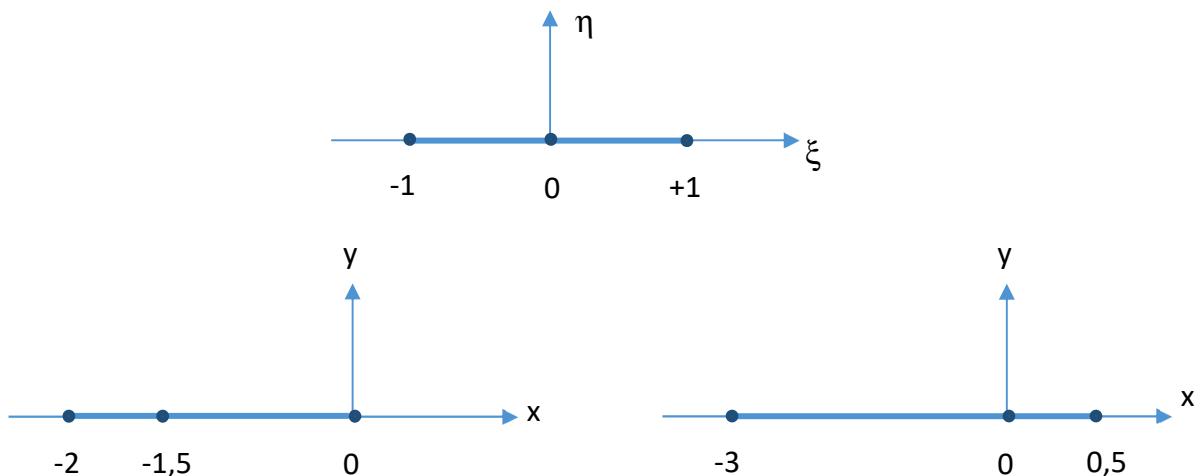
$$\begin{aligned}
 [K_e] = 1.0e+09 * & \quad 1.1502 \quad 0.3906 \quad -0.8030 \quad -0.1302 \quad -0.3472 \quad -0.2604 \quad U4 \\
 & 0.3906 \quad 0.8247 \quad 0.1302 \quad -0.0434 \quad -0.5208 \quad -0.8681 \quad V4 \\
 & -0.8030 \quad 0.1302 \quad 1.1502 \quad -0.3906 \quad -0.3472 \quad 0.2604 \quad U1 \\
 & -0.1302 \quad 0.0434 \quad -0.3906 \quad 0.8247 \quad 0.5208 \quad -0.8681 \quad V1 \\
 & -0.3472 \quad -0.5208 \quad -0.3472 \quad 0.5208 \quad 0.6944 \quad 0 \quad U5 \\
 & -0.2604 \quad -0.8681 \quad 0.2604 \quad -0.8681 \quad 0 \quad 1.7361 \quad V5 \quad (113) \\
 & \quad U4 \quad V4 \quad U1 \quad V1 \quad U5 \quad V5
 \end{aligned}$$

Il est noté que ce sont les mêmes rigidités élémentaires reliant les degrés de liberté qui sont retrouvées avec ce deuxième calcul, mais dans un ordre différent.

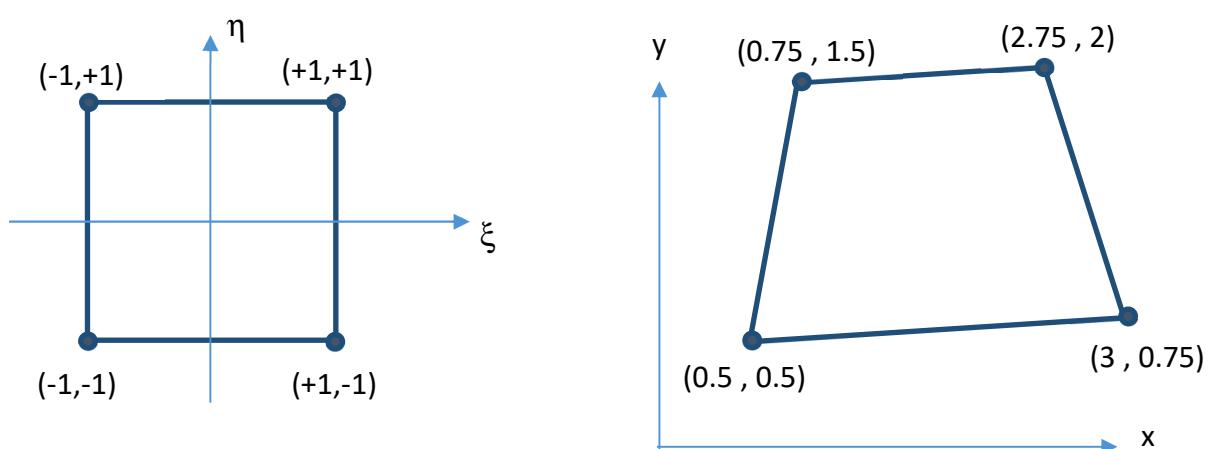
Problèmes :

8.1. Donner les fonctions de formes ainsi que la relation géométrique entre les coordonnées (x, y) et (ξ, η) permettant le passage de l'élément de référence aux éléments physiques. Evaluer la matrice jacobienne de chaque transformation géométrique.

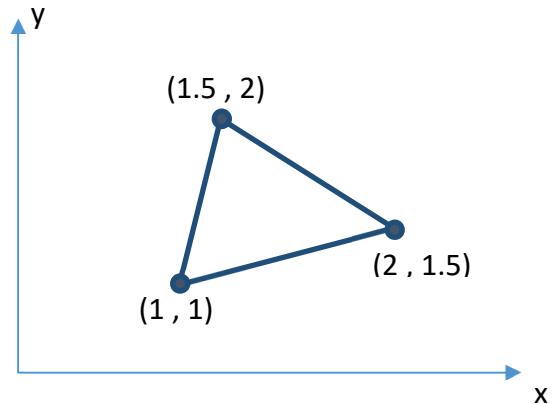
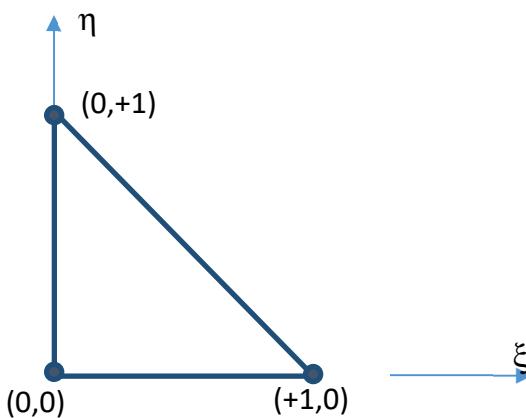
a.



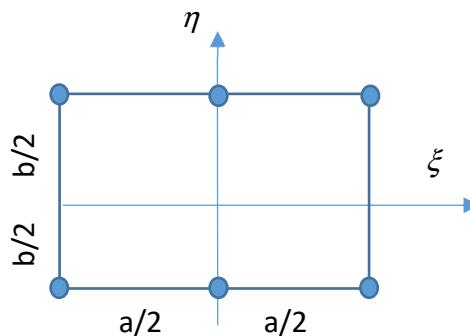
b.



c.

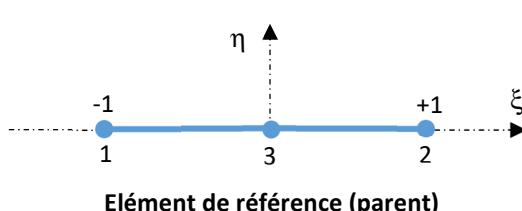


8.2. Donner les fonctions de forme d'un élément quadrangulaire de dimension $a \times b$ à 06 nœuds placés selon le schéma indiqué ci-dessous. Utiliser la méthode des polynômes de Lagrange.

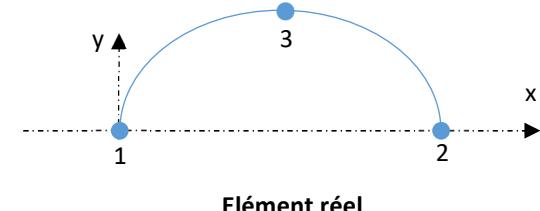


8.3. Soit un élément super-paramétrique à deux nœuds. L'élément physique suit la courbe $y = 0.4x(5 - x)$ dans l'intervalle $0 \leq x \leq 5$. Les degrés de libertés sont les déplacements axiaux définis au niveau des nœuds 1 et 2 alors que pour la transformation géométrique, trois nœuds sont nécessaires, à savoir : les nœuds 1, 2 et 3.

- A partir de l'élément parent (élément de référence), donner les fonctions de forme servant à interpoler les déplacements nodaux ainsi que celles servant à interpoler la géométrie.



Elément de référence (parent)



Elément réel

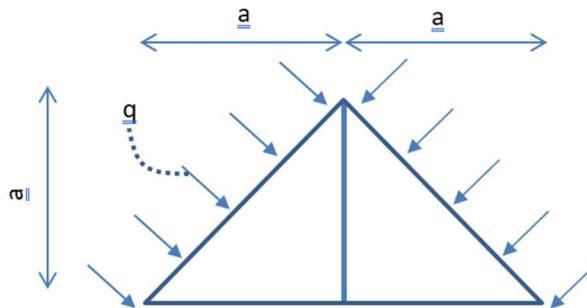
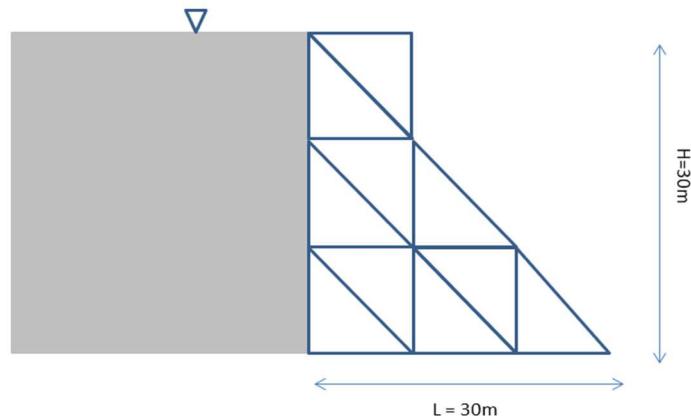
- Donner la transformation géométrique de cet élément en considérant trois points de contrôle géométrique tels que
- Ecrire la Jacobienne de cette transformation.

Points ou nœuds géométrique	X (m)	Y(m)
1	0	0
2	5	0
3	2.5	2.5

8.4. Le corps d'un barrage poids, en béton armé, est modélisé à l'aide d'éléments triangulaires tel que schématisé sur la figure ci-après. L'élément de référence est celui du problème 8.1 (c). Le barrage est soumis à son propre poids ainsi qu'à la poussée hydrostatique en amont.

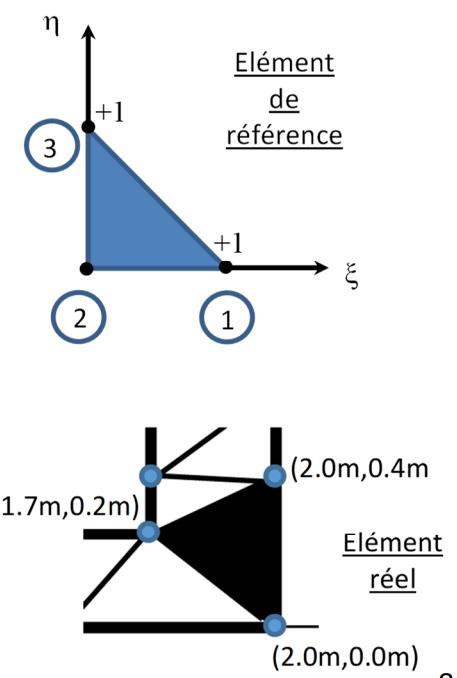
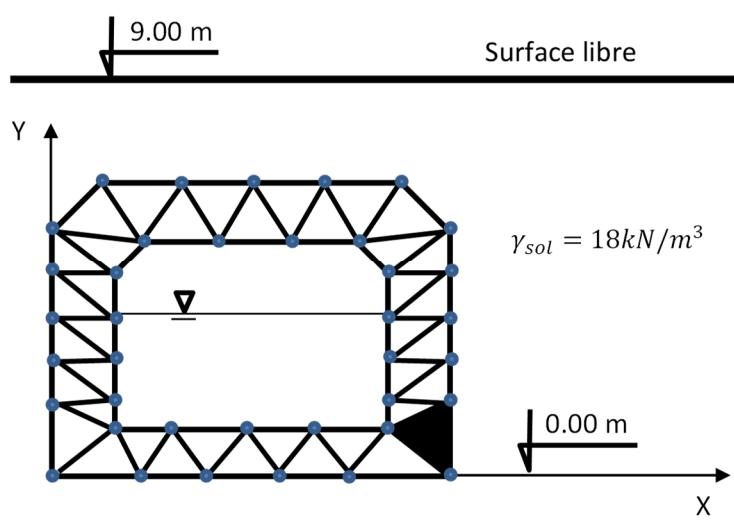
On donne la masse volumique du béton 2500 Kg/m^3 et celle de l'eau 1000 Kg/m^3 .

- Calculer les forces nodales équivalentes aux forces de volumes et aux forces de contacts.



8.5. Les deux éléments finis de la figure ci-dessous supportent un chargement uniformément réparti q par mètre linéaire. En utilisant le même élément de référence que celui du problème précédent, calculer et schématiser les forces nodales équivalentes.

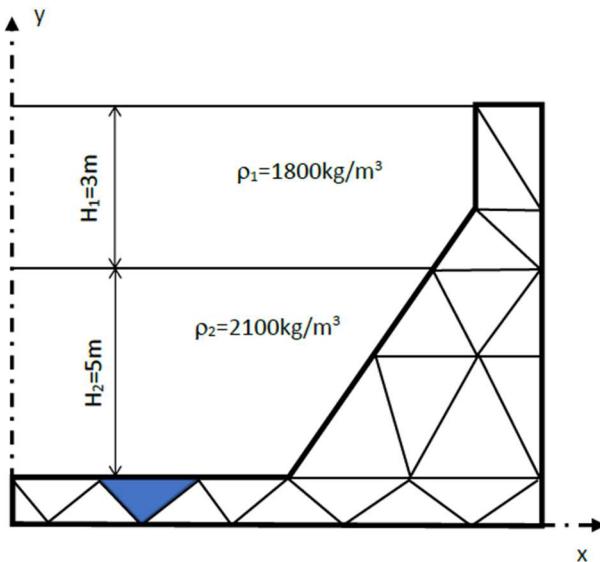
8.6. Soit un canal d'évacuation des eaux pluviales, enterré à 9 m de profondeur dans une couche de sable ayant un poids volumique égal à 18 kN/m^3 . Le canal présente une longueur totale de 200 m. La structure est modélisée en deux dimensions et discrétisée, telle que sur la figure 3, à l'aide de l'élément isoparamétrique triangulaire de la figure 4. L'élément de référence possède 03 nœuds avec 02 degrés de liberté chacun : un déplacement horizontal et un déplacement vertical.



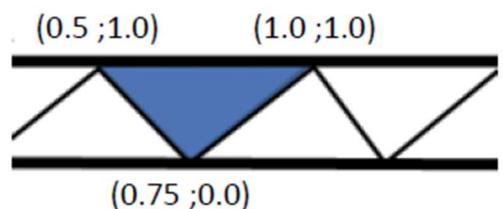
Le canal est soumis, entre autres sollicitations, aux contraintes verticales et horizontales du sol telles que $\sigma_H = K_0 \sigma_v$ avec K_0 étant le coefficient de poussée des terres égal à 0,5.

- Pour l'élément fini coloré en gris dans la figure ci-dessous, calculer les forces nodales équivalentes aux forces de volumes et aux forces de surfaces qui lui sont appliquées. Faire un croquis de ces forces.

8.7. Un mur de soutènement supporte un talus composé de deux couches de sol. Ce mur est discrétement à l'aide de l'élément de référence triangulaire à trois nœuds précédemment utilisés. On donne la masse volumique du béton et la gravité : $\rho_b=2500\text{kg/m}^3$; $g = 10\text{m/s}^2$.



- Pour l'élément en gras, évaluer et schématiser les forces de volumes et les forces de contacts.



CHAPITRE 9

L'INTEGRATION NUMERIQUES

9.1. Introduction

La méthode des éléments finis directes, présentées dans les premiers chapitres, utilise des matrices de rigidités élémentaires explicites. Celles-ci nécessitent uniquement la connaissance des paramètres géométriques et matériels des différents éléments composants le maillage ainsi que des connectivités entre eux.

A contrario, la méthode des éléments finis paramétrés implique des intégrations de volume et de surface sur chaque élément. Dans le cas statique, l'évaluation des matrices de rigidité, et parfois même du vecteur charge, implique un calcul sur chaque élément. Cette étape est effectuée à l'aide d'intégrales numériques ou de quadratures, sur une, deux ou trois dimensions. Il existe plusieurs méthodes de calcul numérique des intégrales. Dans ce chapitre, seule la méthode des trapèzes et celle de Gauss sont abordées.

9.2. Méthode des trapèzes

Pour une intégrale bornée d'une fonction $F(x)$ étant connue en $n + 1$ points F_0, F_1, \dots, F_n dans l'intervalle $[x_0, x_n]$

$$I = \int_{x_0}^{x_n} F(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_{i+1} + F_i}{2} (x_{i+1} - x_i) \quad (9.1)$$

Si l'échantillonnage est régulier c'est à dire si $x_{i+1} - x_i = h$

$$I = \frac{h}{2} (F_0 + F_n) + h \sum_{i=1}^{n-1} F_i \quad (9.2)$$

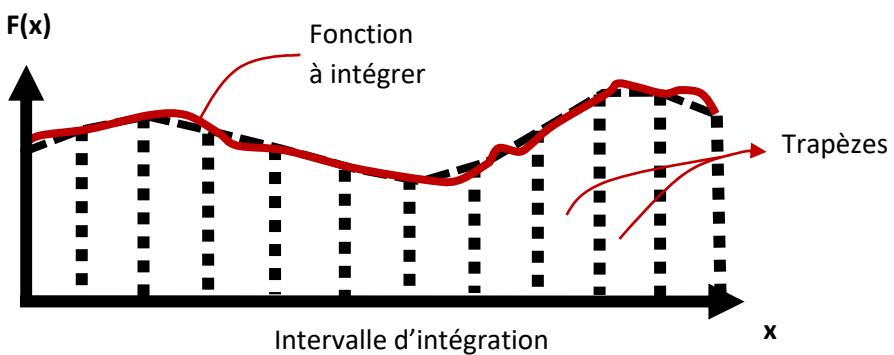


Figure 9.1

9.2.1. Exemple 1

Soit une fonction $F(z)$ connue en des points prédéterminés. Donner une approximation de son intégrale sur le domaine $[1, 11]$ en utilisant la méthode des trapèzes tel que

z	1	3	5	7	9	11
F(z)	0,8	0,9	1,2	0,7	1,0	0,8

L'échantillonnage est constant, soit $h = 2$, d'où

$$I = \int_1^{11} F(z) dz \quad (9.3)$$

$$I = \frac{2}{2}(0,8 + 0,8) + 2(0,9 + 1,2 + 0,7 + 1,0) \quad (9.4)$$

$$I = 9,2 \quad (9.5)$$

9.2. La méthode de quadrature de Gauss

Remplaçons l'intégrale bornée d'une fonction polynomiale $P(\xi)$ par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégrations ξ_i

$$\int_{-1}^{+1} P(\xi) d\xi = \omega_1 P(\xi_1) + \omega_2 P(\xi_2) + \dots + \omega_r P(\xi_r) = \sum_{i=1}^r \omega_i P(\xi_i) \quad (9.6)$$

Déterminons les r coefficients ω_i et les r points d'intégration ξ_i

$$P(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3 + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1} \quad (9.7)$$

En remplaçant l'équation (9.7) dans l'intégrale (9.6), celle-ci devient

$$\begin{aligned} & a_1 \int_{-1}^{+1} d\xi + a_2 \int_{-1}^{+1} \xi d\xi + a_3 \int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^{+1} \xi^{2r-1} d\xi \\ & = \omega_1 (a_1 + a_2 \xi_1 + a_3 \xi_1^2 + \dots + a_{2r} \xi_1^{2r-1}) + \\ & \quad + \omega_2 (a_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_2^2 + \dots + a_{2r} \xi_2^{2r-1}) + \omega_3 (a_1 + a_2 \xi_3 + \\ & \quad a_3 \xi_3^2 + \dots + a_{2r} \xi_3^{2r-1}) + \\ & \quad + \dots + \omega_r (a_1 + a_2 \xi_r + a_3 \xi_r^2 + \dots + a_{2r} \xi_r^{2r-1}) \end{aligned} \quad (9.8)$$

D'où

$$\begin{aligned} & a_1 \int_{-1}^{+1} d\xi + a_2 \int_{-1}^{+1} \xi d\xi + a_3 \int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^{+1} \xi^{2r-1} d\xi = a_1 (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_r) + \\ & \quad + a_2 (\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 + \dots + \omega_r \xi_r) + a_3 (\omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 + \omega_3 \xi_3^2 + \dots + \omega_r \xi_r^2) + \dots \\ & \quad + a_{2r} (\omega_1 \xi_1^{2r-1} + \omega_2 \xi_2^{2r-1} + \omega_3 \xi_3^{2r-1} + \dots + \omega_r \xi_r^{2r-1}) \quad \forall a_1, a_2 \dots a_{2r} \end{aligned} \quad (9.9)$$

L'équation (9.6) doit être vérifiée pour n'importe quel polynôme, i.e., $\forall a_1, a_2 \dots a_{2r}$

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \sum_{i=1}^r \omega_i \xi_i^\alpha \quad \text{et} \quad \alpha = 0, 1, 2 \dots 2r - 1 \quad (9.10)$$

La solution devient

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r \omega_i \xi_i^\alpha & \text{pour } \alpha = 0, 2, 4 \dots 2r-2 \\ \int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r \omega_i \xi_i^\alpha & \text{pour } \alpha = 1, 3, 5 \dots 2r-1 \end{cases} \quad (9.11)$$

Soit

$$\begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_r \\ 0 = \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 + \dots + \omega_r \xi_r \\ \frac{2}{3} = \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 + \omega_3 \xi_3^2 + \dots + \omega_r \xi_r^2 \\ \vdots \\ 0 = \omega_1 \xi_1^{2r-1} + \omega_2 \xi_2^{2r-1} + \omega_3 \xi_3^{2r-1} + \dots + \omega_r \xi_r^{2r-1} \end{cases} \quad (9.12)$$

Sous les conditions

$$\begin{cases} \omega_i > 0 \\ -1 \leq \xi_i \leq +1 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \dots r \quad (9.13)$$

9.2.2. Exemple 2

Calcul des r coefficients ω_i et positions ξ_i , de la méthode de Gauss, pour intégrer un polynôme entre -1 et +1

$$P(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3 \quad (9.14)$$

La méthode peut intégrer un polynôme d'ordre $2r - 1$ soit si

$$2r - 1 = 3 \Rightarrow r = 2 \quad (9.15)$$

Et donc $\int_{-1}^{+1} P(\xi) d\xi = \omega_1 P(\xi_1) + \omega_2 P(\xi_2)$
(9.16)

Pour que cette relation soit satisfaite, il faut que

Éqt (9.12) \Rightarrow

$$\begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 \\ 0 = \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 \\ \frac{2}{3} = \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 \\ 0 = \omega_1 \xi_1^3 + \omega_2 \xi_2^3 \end{cases} \quad (9.17)$$

On peut démontrer ce résultat en remplaçant les expressions de $P(\xi)$, $P(\xi_1)$ et $P(\xi_2)$ dans la relation (9.16).

La solution du système est :

$$\omega_1 = \omega_2 = 1 \quad \text{et} \quad \xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (9.18)$$

Dans la pratique, la position des points d'intégration ainsi que des coefficients de pondération est tirée à partir du tableau 1.

Pour les intégrales de surface, une double sommation est utilisée, ainsi (voir fig.9.2)

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{nG_\xi} \sum_{j=1}^{nG_\eta} \omega_i \omega_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (9.19)$$

Pour les intégrales de volumes, l'intégrale triple est transformée en une triple sommation

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{nG_\xi} \sum_{j=1}^{nG_\eta} \sum_{k=1}^{nG_\zeta} \omega_i \omega_j \omega_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (9.20)$$

En pratique, le nombre de points de gauss est réduit afin de gagner du temps machine, Par expérience, la méthode converge.

Number of points, n	Points, x_i	Weights, w_i
1	0	2
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

Tableau 9.1 : Position des points d'intégration et coefficients de pondération (Dhat et al. 2012)

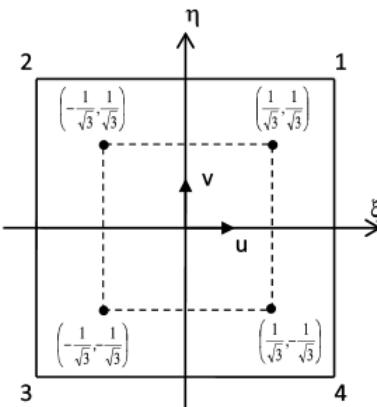


Figure 9.2 : Quadrature de Gauss pour une intégrale en 2D - 02 points dans chaque direction

9.2.3. Exemple 3

Evaluer l'intégrale suivante avec la méthode de Gauss et celle des trapèzes. Comparer avec la solution exacte.

$$I = \int_0^6 e^x dx \quad (9.21)$$

Solution exacte: $I = 402,42807935$

Méthode de Gauss: Il faut d'abord faire un changement de base entre $0 \leq x \leq 6$ et $-1 \leq \xi \leq +1$

$$x = a + b\xi \quad , \quad \begin{cases} x = 0 \text{ et } \xi = -1 \\ x = 6 \text{ et } \xi = +1 \end{cases} \Rightarrow a = b = 3 \quad (9.22)$$

La transformation géométrique est $x = 3(1 + \xi)$

$$dx = 3 d\xi \Rightarrow \int_0^6 e^x dx = 3 \int_{-1}^{+1} e^{3(1+\xi)} d\xi = 3 \sum_{i=1}^{n_G} \omega_i e^{3(1+\xi)} \quad (9.23)$$

1 pnt de Gauss $I = 3[2e^{3(1+0)}] = 120,513222$ erreur = -70 %

2 pnts de Gauss $I = 3[(1)e^{3(1-0,57735)} + (1)e^{3(1+0,57735)}] = 351,244850$ erreur = -12,7 %

3 pnts de Gauss $I = 3 \left[\left(\frac{8}{9}\right) e^{3(1-0)} + \left(\frac{5}{9}\right) e^{3\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)} + \left(\frac{5}{9}\right) e^{3\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)} \right] = 398,771$ erreur = -0,9 %

4 pnts de Gauss $I = 402,286901$ erreur = -0,09 %

5 pnts de Gauss $I = 402,425336$ erreur = -0,001 %

A partir de 3 pnts, l'erreur devient inférieure à 1 %

Avec la méthode des trapèzes: En utilisant 05 pnts d'intégration (0 1,5 3 4,5 6)

$$I = \frac{1,5}{2}[e^0 + e^6] + 1,5[e^{1,5} + e^3 + e^{4,5}] = 475,198131 \quad \text{erreur} = 18,1 \%$$

9.3. La méthode de quadrature de Hammer

Pour les éléments triangulaires, il existe une dépendance entre les bornes d'intégrations de ξ et de η . De ce fait, la méthode de quadrature de Gauss est inadaptée. C'est la méthode de Hammer qui est utilisée.

La méthode permet d'intégrer un polynôme d'ordre m dont le terme le plus élevé est $\xi^k \eta^l$ tel que $m > k + l$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_H} \omega_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (9.24)$$

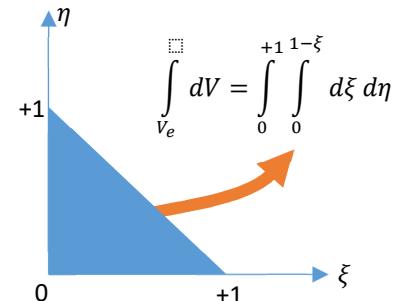


Figure 9.3

Ordre m	n_H	ξ_i	η_i	ω_i
1	1	1/3	1/3	1/2
2	3	1/6 2/3 1/6	1/6 1/6 2/3	1/6
3	4	1/3 1/5 3/5 1/5	1/3 1/5 1/5 3/5	-27/96 25/96 25/96 25/96

Tableau 9.2 : Positions des points de Hammer et coefficients de pondération (Dhatt et al. 2012)

Problèmes :

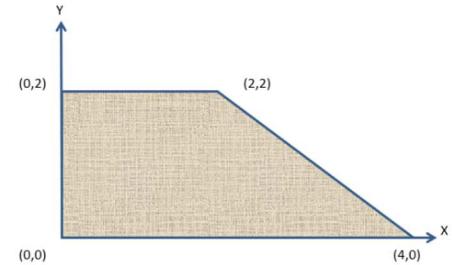
9.1. Calculer les intégrales suivantes avec la méthode des trapèzes en utilisant 05 points.

- $I_1 = \int_0^6 (x^2 - 4x + 1) dx$
- $I_2 = \int_{-4}^{12} (x^3 + 3x^2 + 10) dx$

9.2. Calculer les intégrales suivantes avec la méthode de Gauss

- $I_1 = \int_0^5 (x^3 + 5x) dx$
- $I_2 = \int_2^4 \int_0^3 (x + y^3) dx dy$

9.3. La figure ci-dessous montre une plaque trapézoïdale plane à épaisseur variable dans la direction z. Sachant que l'épaisseur est définie en tout point par $e=xy^2$, calculer numériquement le volume de la partie hachurée.



9.4. Soit un élément isoparamétrique quadrilatéral à quatre nœuds, relié à un élément de référence carré tel que sur la figure ci-après. Chaque nœud possède 1 ddl. On se propose de calculer une intégrale de volume sur l'élément réel

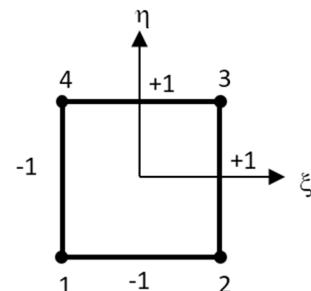
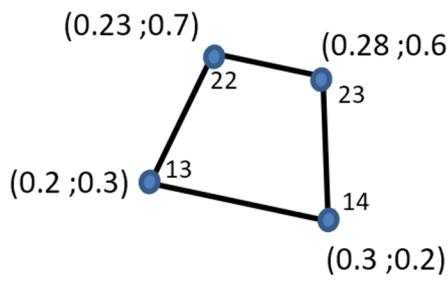
$$[M] = \int_{v_e} \rho [N]^T [N] d\nu$$

Sachant que $\rho=1800 \text{ kg/m}^3$ est la masse volumique et que l'épaisseur de l'élément réel vaut 0.01m, calculer numériquement l'élément $M(1,2)$ de la matrice masse. Les coordonnées nodales sont données en m. L'élément est numéroté 14-23-22-13.

Fonctions de forme

$$N_1 = 1/4(1 - \xi)(1 - \eta) \quad N_2 = 1/4(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = 1/4(1 + \xi)(1 + \eta) \quad N_4 = 1/4(1 - \xi)(1 + \eta)$$



9.5. Refaire les calculs d'intégrales des problèmes 8.6 et 8.7 avec la méthode d'intégration appropriée.

CHAPITRE 10

TECHNIQUES D'ELEMENTS FINIS

10.1. Conception du maillage

Il s'agit d'une étape très importante dans le calcul par éléments finis. La précision et le coût de l'analyse en dépendent directement. L'optimisation du maillage est atteinte en mettant le nombre d'éléments qu'il faut là où il faut, en vue de respecter les critères de précision et obtenir une convergence rapide.

Il est important de rappeler que la solution exacte est obtenue avec un nombre infini d'éléments. Un compromis est donc nécessaire lors du choix du nombre d'éléments à utiliser. Une solution numérique fiable implique une convergence vers la solution exacte avec une erreur acceptable. Néanmoins, il faut savoir que la convergence n'est pas linéaire, elle devient très lente au voisinage de la solution théorique. Dans la pratique, lorsqu'on double le maillage et que l'on trouve que la solution n'a pas beaucoup changé, on en conclut que l'on se situe au voisinage du résultat exact.

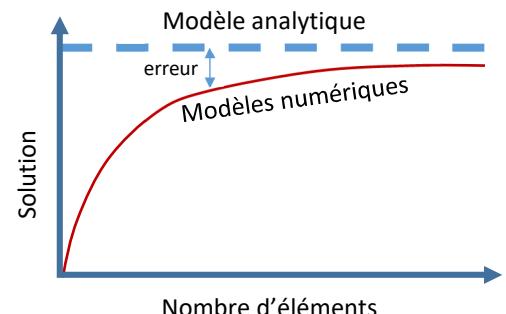


Figure 10.1

La construction d'un maillage doit respecter certains principes et prendre en compte quatre aspects :

- L'adaptation de la géométrie originale de la structure étudiée (choix des dimensions, exploitation des symétries, suppression des détails géométriques superflus, délimitation des régions où seront affectés des modèles de comportement différents...).
- Le choix des éléments en fonction du champ de déplacement et de contrainte ainsi que de la géométrie.
- La génération et le contrôle du maillage qui s'effectue généralement automatiquement avec plus ou moins l'intervention de l'utilisateur. Il faut ensuite vérifier que le maillage obtenu est d'une qualité acceptable.
- La considération de l'environnement extérieur.

La génération du maillage repose sur des règles topologiques, qui régissent la façon dont les éléments peuvent « s'assembler » entre eux. Il est nécessaire d'avoir une idée de ces règles pour comprendre le processus de réalisation et, si nécessaire, pour pouvoir intervenir manuellement sur le maillage.

10.1.1. Les règles d'assemblage des éléments

Ces règles, toujours vérifiées par défaut par la plupart des mailleurs automatiques, proviennent du fait que le champ de déplacement doit toujours être continu, notamment à la frontière entre deux éléments : pour que ceux-ci puissent s'assembler, les deux champs de déplacement portés par leurs fonctions de base doivent coïncider sur leur frontière. Tant que les éléments sont tous de même type,

cette condition est automatiquement vérifiée du moment que les éléments sont « bien raccordés », c'est-à-dire que pour toutes les paires d'éléments en contact (voir Fig. 10.2) :

- Si le contact est ponctuel, alors il doit s'agir d'un sommet commun,
- Si le contact est linéique, alors il doit s'agir d'une arête entièrement commune, dont les nœuds doivent coïncider,
- Si le contact est surfacique, alors il doit s'agir d'une face entièrement commune, dont les arêtes et les nœuds doivent coïncider.

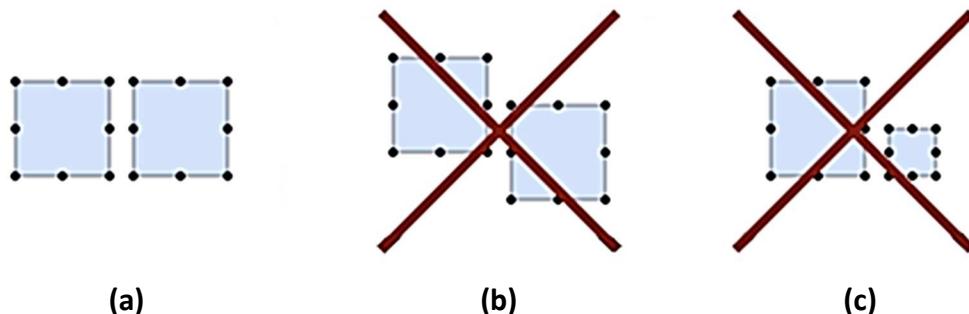


Figure 10.2 : Illustration des règles topologiques de validité des maillages avec des quadrilatères du second ordre : (a) maillage valide, (b,c) maillages non valides car la ligne de contact n'est pas une arête entièrement commune aux deux éléments [http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay]

Enfin, il est possible d'assembler des éléments d'ordres différents, et même des modèles formulés dans des théories différentes (par exemple, assembler un élément poutre ou plaque avec un groupe d'éléments volumiques). Pour passer par exemple d'un domaine maillé avec des éléments linéaires à un autre maillé avec des éléments quadratiques, il faut créer une zone de transitions. Pour cela, des éléments de transition peuvent être utilisés pour lier les deux domaines (voir fig. 10.3).

Remarque :

Pour le même nombre de nœuds, une interpolation plus puissante est mieux que l'assemblage d'un grand nombre d'éléments avec une faible interpolation (voir fig. 10.4).

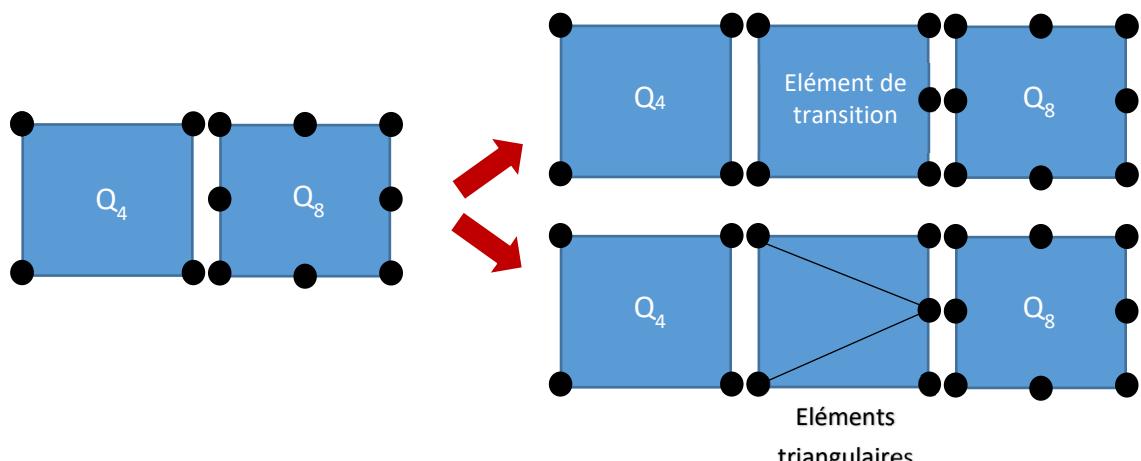


Figure 10.3

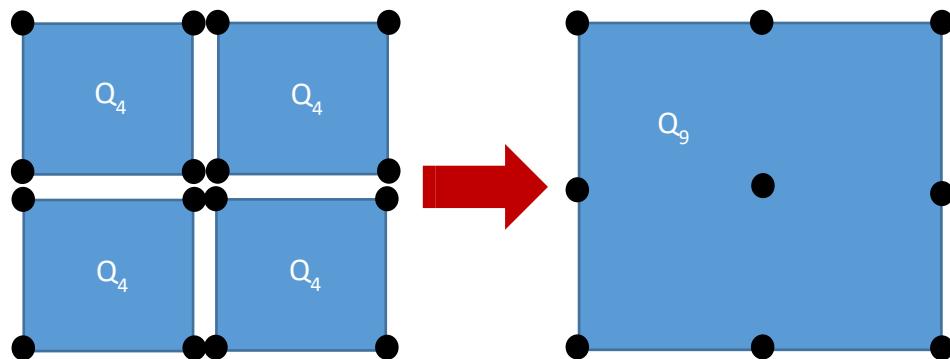


Figure 10.4

10.1.2. Le contrôle de l'aspect des éléments

Une fois la génération du maillage terminée, il reste un certain nombre de vérifications à effectuer avant de lancer les calculs de résolution. La plupart des logiciels en effectuent certaines automatiquement, mais cela n'a rien de systématique et il est donc important de connaître les critères que doivent respecter les éléments.

Il faut vérifier que le maillage ne contient aucun élément dégénéré, c'est-à-dire complètement plat, croisé ou muni d'un angle rentrant comme les éléments de la fig. 10.5.

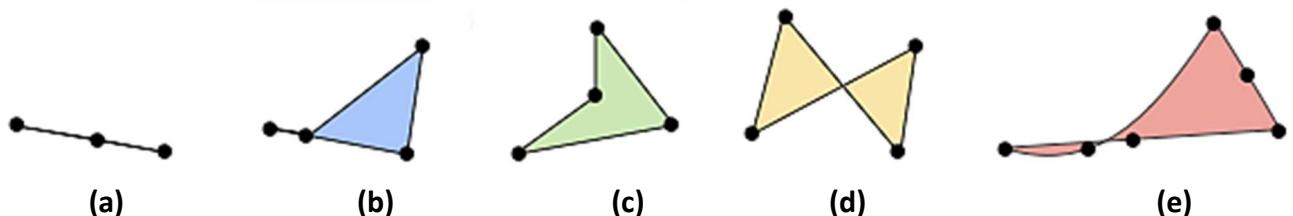


Figure 10.5 : Des éléments dégénérés, susceptibles de conduire à un résultat faux : (a) un triangle aplati, (b) un quadrilatère aplati, (c) un quadrilatère avec un angle rentrant, (d) un quadrilatère croisé, (e) un triangle quadratique croisé [http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay]

Enfin, il est fortement conseillé de contrôler l'aspect des éléments. Schématiquement, il s'agit de vérifier que les éléments ne sont pas trop distordus par rapport à leur géométrie de référence. Par exemple :

- Pour les triangles et les tétraèdres, éviter tout élément trop « allongé » ou « aplati » (fig. 10.6a)
- Pour les quadrilatères et les hexaèdres, utiliser des formes les plus rectangulaires possibles (fig. 10.6b)
- Pour les éléments d'ordre 2, n'employer les arêtes courbes que pour représenter des bords non plans, et pas à l'intérieur du volume (fig. 10.6c)

- Également pour les éléments d'ordre 2, toujours laisser les « nœuds milieu » à égale distance des deux sommets voisins (fig. 10.6) (sauf en mécanique de la rupture où on déplace parfois volontairement ces nœuds pour modéliser des singularités en pointe de fissure, ce qui sort du cadre de ce cours).

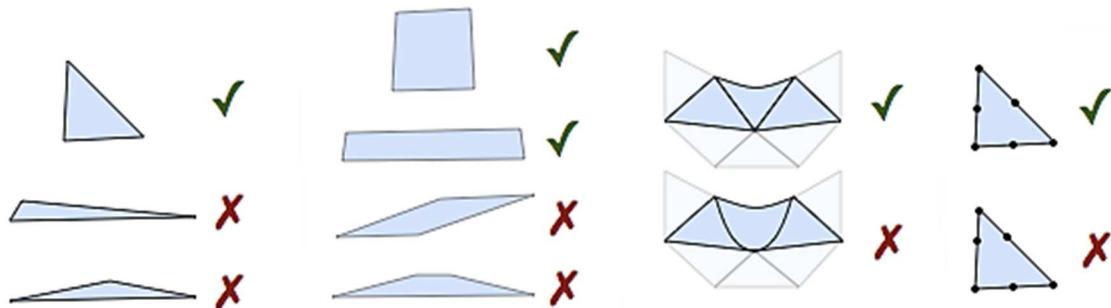
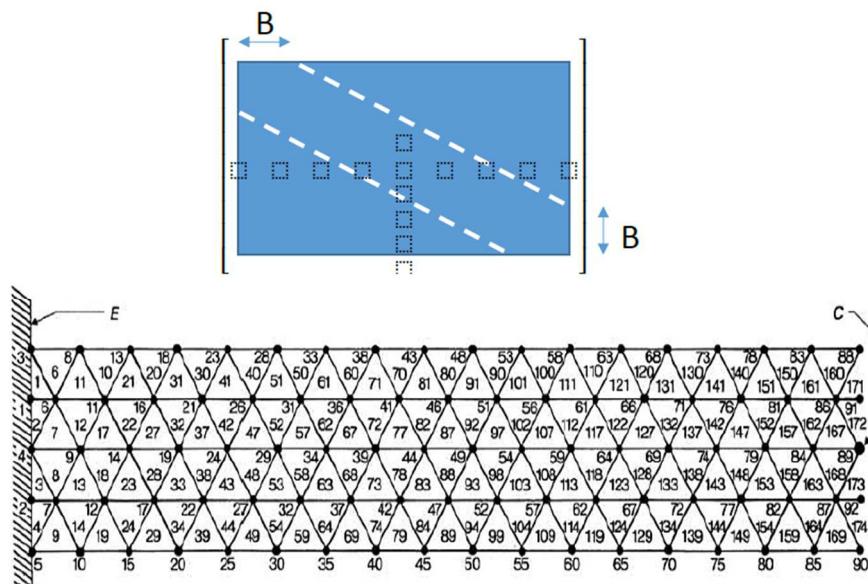


Figure 10.6 [<http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay>]

10.1.3. Maillage et largeur de bande

Un bon maillage doit faciliter les opérations prévues par un programme d'ordinateur. Pour ce faire, la numérotation se fait à partir de la plus petite dimension afin d'obtenir la plus petite largeur de bande possible au niveau des matrices globales. La MEF aboutit à la résolution d'importants systèmes d'équations linéaires, tels que ceux de la statique $F = KU$. Si la matrice de rigidité est de dimension 200 x 200, il y a donc 200 équations avec 200 variables inconnues.



La méthode la plus commode de résolution est celle de Gauss dans laquelle la matrice carrée est transformée en une matrice triangulaire. Si la largeur de la bande est réduite, le temps de résolution le sera, lui aussi.

Soit D la différence maximale, constatée sur tous les éléments, entre les numéros des nœuds. La demi-largeur de bande B est donnée par $B = (D+1)f$ avec f le nombre de ddl à chaque nœud. En règle générale,

Figure 10.7 : Exemple de numérotation et structure bande [Rapin 1993]

la numérotation se fait selon la plus petite dimension de la structure afin de minimiser la plus grande valeur de D .

10.2. Structure générale d'un programme d'éléments finis en structures

Un programme numérique d'éléments finis est structuré en trois parties à savoir :

- Un pré-processeur dans lequel toutes les données nécessaires au calcul numériques sont introduites telles que : les limites géométriques du problème, le type d'éléments à utiliser, les propriétés matérielles des éléments, les coordonnées nodales et l'épaisseur des éléments, le tableau des connectivités et les conditions aux limites dont les charges externes.
- Une solution ou un processeur pour le calcul des matrices élémentaires et leur assemblage, l'introduction des conditions aux limites, le calcul des valeurs et vecteurs propres, le calcul des solutions du problème (déplacement, température, pression hydraulique ..etc) et l'évaluation des déformations et des contraintes.
- Un post-processeur pour l'exploitation des solutions obtenues afin de repérer les contraintes et les déformations maximales, vérifier l'équilibre, calculer les facteurs de sécurité, dessiner les déformées de la structure ..etc.

10.3. Matrice élémentaire de rigidité en 2D

Par définition,

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e \quad (10.1)$$

Afin d'évaluer cette matrice, il est nécessaire en premier lieu de définir le type de problème à traiter, i.e. déformations planes ou contraintes planes. Ce choix va directement conditionner le type de matrice d'élasticité $[D]$ à utiliser.

Si on utilise les éléments isoparamétriques, l'équation (10.1) devient

$$[K_e] = \int \int \int [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (10.2)$$

Ce calcul est répété pour chacun des éléments qui composent le maillage de la structure étudiée. Il est effectué à l'aide d'une méthode d'intégration numérique et suit le schéma de la fig. 10.8.

Pour un élément quadrilatéral à 04 nœuds et 02 ddl/nœuds, les dimensions des matrices utilisées peuvent être comme suit :

Elcod (2x4)	N(2x8)	Der(2x4)		
Jacm(2x2)	Jacm ⁻¹ (2x2)	Cartd(2x4)	B(3x8)	D(3x3)
$B^T D B$ dvolu (8x8)				

Alors que pour un élément triangulaire à 03 nœuds et 02 ddl/nœuds, nous avons :

Elcod (2x3)	N(2x6)	Der(2x3)		
Jacm(2x2)	Jacm ⁻¹ (2x2)	Cartd(2x3)	B(3x6)	D(3x3)
$B^T D B$ dvolu (6x6)				

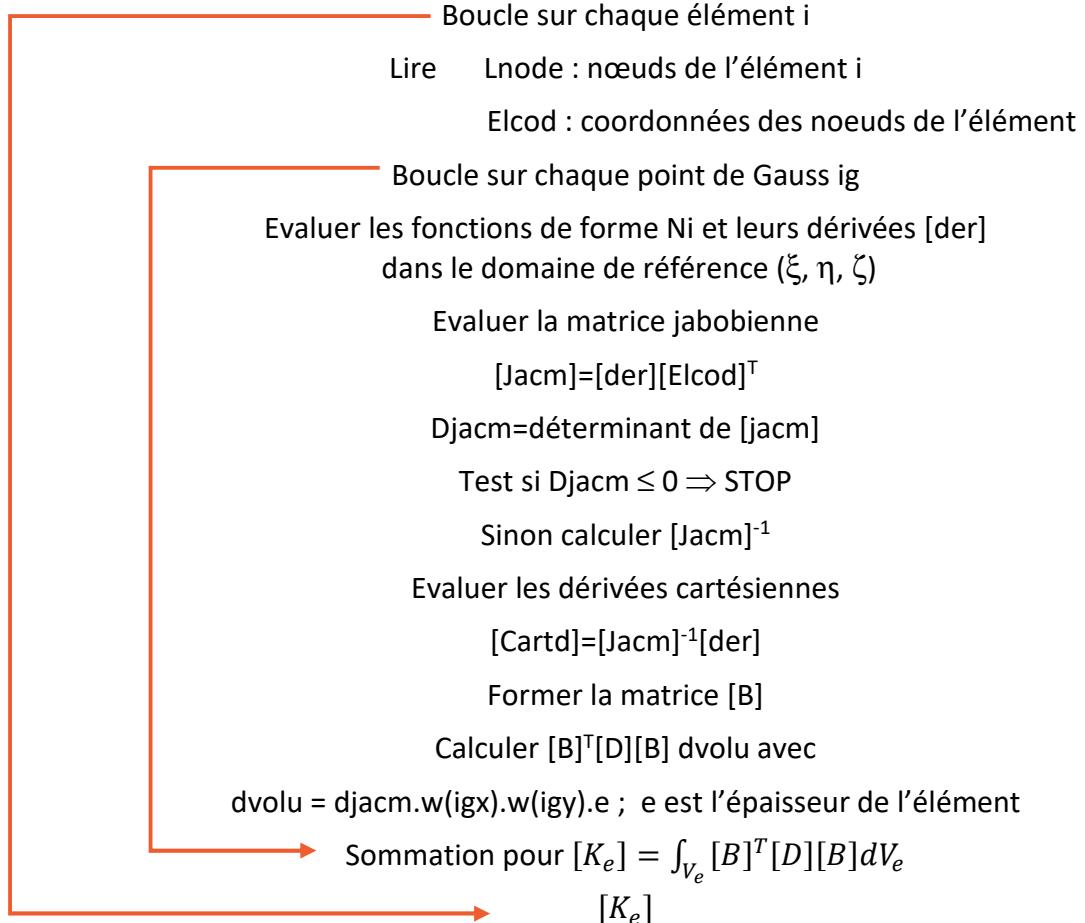


Figure 10.8 : Schéma de calcul de la matrice de rigidité élémentaire en 2D

10.4. Introduction des conditions aux limites

Avant de résoudre l'équation d'équilibre en statique $F=KU$, il est primordial d'introduire les conditions aux limites en termes de déplacement dans le système. Le vecteur des déplacements U étant l'inconnu du problème, le programme numérique d'MEF ne peut intervenir que sur les autres composantes de l'équation à savoir la matrice de rigidité K et le vecteur force F .

10.4.1. Méthode du terme diagonal dominant

La matrice $[K]$ est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites, puis chaque relation $U_i = \bar{U}_i$ est introduite en replaçant :

- K_{ii} par $K_{ii} + \alpha$, α étant un nombre très grand par rapport à tous les termes K_{ij} .
- F_i par $\alpha \bar{U}_i$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1i} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & & K_{ii} + \alpha & \cdots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & \cdots & K_{ni} & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \alpha \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (10.3)$$

L'équation i s'écrit

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} U_j + \alpha U_i = \alpha \bar{U}_i \quad (10.4)$$

Elle admet la solution approchée

$$U_i \simeq \bar{U}_i \text{ si } \alpha \bar{U}_i >> \sum_{j=1}^n K_{ij} U_j \quad (10.5)$$

En pratique, dans les programmes, on peut choisir $\alpha = 10^7 \max[K_{ij}]$ ou bien $\alpha = 10^{15} \max[K_{ij}]$ en fonction de l'ordinateur s'il utilise une précision à 07 ou 15 chiffres. Ceci conduit à une erreur sur U_i qui est du même ordre que la précision de l'ordinateur.

Cette méthode est très simple à mettre en œuvre mais peut poser des problèmes si la matrice K est mal conditionnée ou si certaines valeurs de U sont grandes.

10.4.2. Méthode du terme unité sur la diagonale

Elle consiste à modifier pour chaque relation $U_i = \bar{U}_i$, le vecteur F puis la matrice K de la manière suivante :

$$F_j = F_j - K_{ji} \bar{U}_i \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq i \quad (10.6)$$

$$F_i = \bar{U}_i \quad (10.7)$$

$$K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq i \quad (10.8)$$

$$K_{ii} = 1 \quad (10.9)$$

Ainsi

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1,i-1} & 0 & K_{1,i+1} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ K_{i-1,1} & & K_{i-1,i-1} & 0 & K_{i-1,i+1} & \cdots & K_{i-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{i+1,1} & & K_{i+1,i-1} & \vdots & K_{i+1,i+1} & \cdots & K_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{1i} \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_{i-1} - K_{i-1,i} \bar{U}_i \\ \bar{U}_i \\ F_{i+1} - K_{i+1,i} \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_n - K_{ni} \bar{U}_i \end{Bmatrix} \quad (10.10)$$

Cette méthode ne pose pas les problèmes numériques de la précédente. Par contre, elle est plus complexe à programmer.

10.4.3. Méthode de suppression des équations

Elle consiste à restructurer la matrice K de manière à supprimer les équations correspondant aux ddl imposés \bar{U}_i . Elle a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du problème. La restructuration de K et F correspondant à $U_i = \bar{U}_i$ conduit à l'équation (10.10) dans laquelle la ligne i et la colonne i sont supprimées.

10.4.4. Exemple 1

Soit la matrice de rigidité globale suivante :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

Introduisons la condition $U_1 = \bar{U}_1$ en utilisant à tour de rôle les trois méthodes présentées précédemment.

Terme diagonal dominant

$$\begin{bmatrix} K_{11} + 10^{15} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^{15} \bar{U}_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (10.12)$$

Terme diagonal unité

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ F_2 - K_{21} \bar{U}_1 \\ F_3 - K_{31} \bar{U}_1 \\ F_4 - K_{41} \bar{U}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.13)$$

Suppression de l'équation

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 - K_{21} \bar{U}_1 \\ F_3 - K_{31} \bar{U}_1 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (10.13)$$

10.4.1. Exemple 2

En utilisant la méthode du terme diagonal unitaire, insérer les conditions aux limites suivantes dans le système d'équation $F = KU$: $U_2 = -0.001$; $U_4 = 0.000$

Le système original est

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (10.14)$$

Le système modifié sera

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - 0.002 \\ -0.001 \\ F_3 + 0.003 \\ 0 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (10.15)$$

10.5. Calcul des réactions d'appuis

Les réactions d'appuis sont calculées directement après les déplacements par :

$$F_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} U_j \quad (10.16)$$

Néanmoins, une autre manière d'introduire les conditions aux limites consiste à inclure les réactions F_i dans la liste des inconnues. L'équation (10.10) devient :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1,i-1} & 0 & K_{1,i+1} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ K_{i-1,1} & & K_{i-1,i-1} & 0 & K_{i-1,i+1} & \cdots & K_{i-1,n} \\ K_{i,1} & \cdots & K_{i,i-1} & -1 & K_{i,i+1} & \cdots & K_{i,n} \\ K_{i+1,1} & & K_{i+1,i-1} & 0 & K_{i+1,i+1} & \cdots & K_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{i-1} \\ F_i \\ U_{i+1} \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{1i}\bar{U}_i \\ \vdots \\ F_{i-1} - K_{i-1,i}\bar{U}_i \\ -K_{ii}\bar{U}_i \\ F_{i+1} - K_{i+1,i}\bar{U}_i \\ \vdots \\ F_n - K_{ni}\bar{U}_i \end{Bmatrix} \quad (10.17)$$

La résolution de ce système donne à la fois $\{U_n\}$ et les réactions. Il faut cependant remarquer que la matrice de rigidité modifiée $[K]$ n'est pas symétrique.

10.5.1. Exemple 3

En utilisant la méthode de calcul directe des réactions d'appuis, insérer les conditions aux limites suivantes dans le système d'équation $F = Ku$: $U_1 = 0.002$; $U_3 = 0.000$

Le système original est

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (10.18)$$

Le système modifié sera

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ U_2 \\ F_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \times 0.002 \\ F_2 + 2 \times 0.002 - 3 \times 0.000 \\ -2 \times 0.000 \\ F_4 - 1 \times 0.000 \\ F_5 + 2 \times 0.000 \end{Bmatrix} \quad (10.19)$$

CONCLUSION GENERALE

Deux approches en éléments finis ont été exposées dans ce cours. La première était la méthode directe, et la seconde, la méthode des éléments isoparamétriques qui la complète. L'intégralité du document a été délibérément orientée vers la modélisation des structures puisque le module est enseigné dans une école de travaux publics.

Un grand nombre d'exemples d'applications ont été présentés afin d'étoffer le cours et le rendre plus explicite. Il aurait été judicieux d'ajouter, à la fin du polycopie, un complément sur la programmation numérique de la MEF. Néanmoins, ceci dépasse le cadre du programme et surtout le volume horaire alloué. Les étudiants trouveront dans les références bibliographiques tous les supports nécessaires à cette tâche s'ils le désirent.

Le cours présenté dans ce document a été pensé et adapté aux étudiants de l'ENSTP. Les principes de base de la MEF enseignés ici ont été, le plus possible, simplifiés afin de permettre à nos futurs ingénieurs de s'initier en douceur à cette technique ce qui leur facilitera, s'ils le désirent, d'approfondir leurs connaissances en la matière, grâce à la nombreuse documentation disponible.

L'enseignante que je suis aimeraï remercier les nombreux étudiants qui ont suivi mes cours d'MEF, depuis 2016 à ce jour, grâce à l'interactivité desquels j'ai pu perfectionner ce cours afin de répondre, au mieux de mes humbles capacités, à leurs besoins.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Il existe une foultitude de livres traitant de la méthode des éléments finis et notamment à la bibliothèque de l'ENSTP. La liste ci-jointe est volontairement très restreinte aux documents utilisés pendant la préparation de ce cours. Ces documents ont été soigneusement sélectionnés afin que l'étudiant, en initiation à la MEF, ne se retrouve pas noyé sous les multitudes de formulations et reste limité, pendant la durée du cours, à l'approche choisie. Une fois les notions de base assimilées, il pourra, s'il le désire, facilement approfondir ses connaissances en la matière.

1. K, J, Bath, Finit element procedure, K, J, Bath, Watertown, MA, 2nd Edition, 2014
2. A, Chateauneuf, Structure: Comprendre les éléments finis – Principes, formulation et exercices corrigés, Ellipse Marketing, 2010
3. M, Cazenave, Méthode des éléments finis: Approche pratique en mécanique des structures, Dunod, 2010
4. J, C, Craveur, Modélisation des structures: Calcul par éléments finis avec problèmes corrigés, Dunod, 1997
5. G, Dhatt, G, Touzot et E, Lefrançois, Méthode des éléments finis, Hermès Science Publication, 2014
6. D, L, Logan, A finit course in the finit element method, CL Engineering, 5th Revised Edition, 15 avril 2010
7. D, Ouinas, Application de la méthode des éléments finis - Cours et exercices corrigés à l'usage des ingénieurs, OPU, 2012
8. P, Rapin, Méthode des éléments finis, Techniques de l'ingénieur, 1993
9. <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay>