2ÈME ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

EXAMEN FINAL – SEMESTRE 3

JANVIER 2024 - Durée : 01h30

NOM : .... PRÉNOMS : .... GROUPE : ....

PARTIE COURS --

7,5

L'ouvrage étudié est un pont, implanté dans la wilaya de Chlef, constitué de deux travées centrales de 33.40 m de longueur et deux travées de rive de 25.00 m. Le tablier, réalisé en béton armé, présente une largeur de 10 m et une épaisseur de 20 cm (*Figure 1*), il repose sur *06* poutres exécutées en béton précontraint supportées par des appareils d'appui en élastomère.

Les piles, de sections circulaires de 1.20 m de diamètre, ont des hauteurs de 7.00 m et 8.00 m (*Figure 2*). L'ouvrage représente une symétrie longitudinale et transversale et une régularité appropriée.

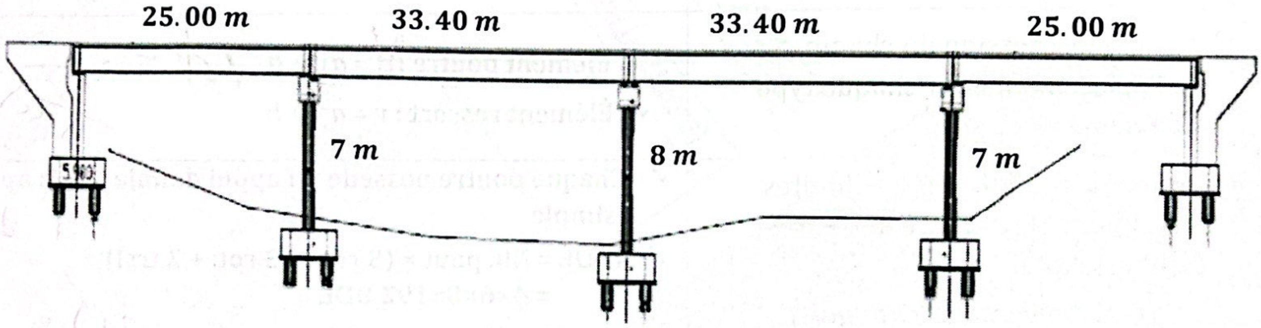
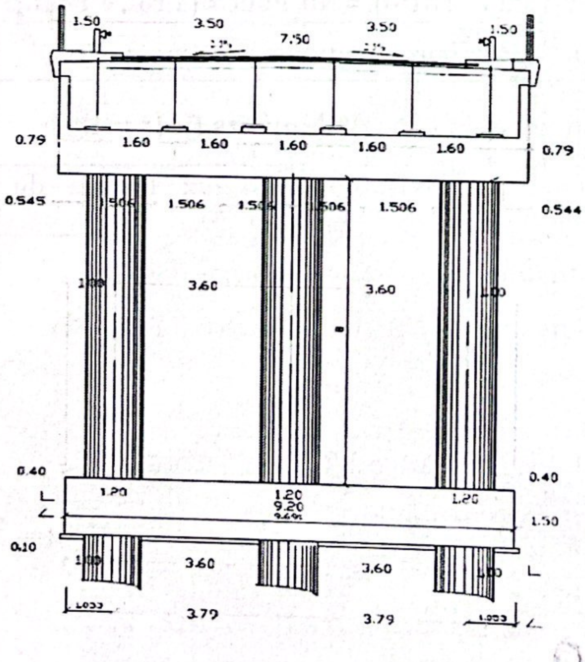


Figure 1. Plan d'ensemble



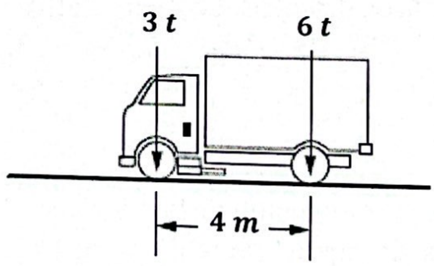


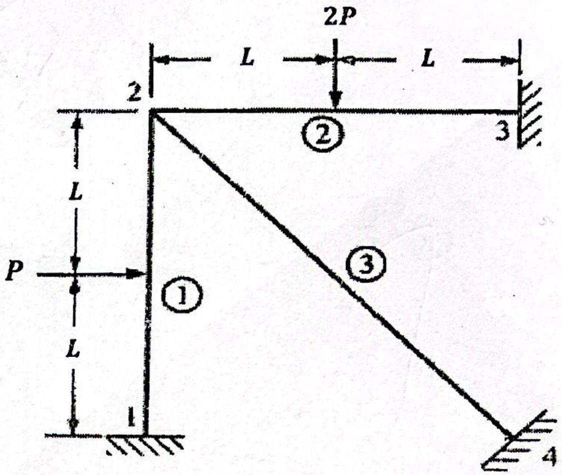
Figure 3. Charge d'un véhicule

Figure 2. ***Coupe transversale au niveau de la pile***

de la pile représentée dans la *figure 2.*	

EXERCICE 1 ---

Soit la structure illustrée ci-contre :



- Déterminer :
    1. Les déplacements du nœud 2.
    2. Les réactions au niveau de l'appui 4.
    3. Les forces locales dans l'élément ③.

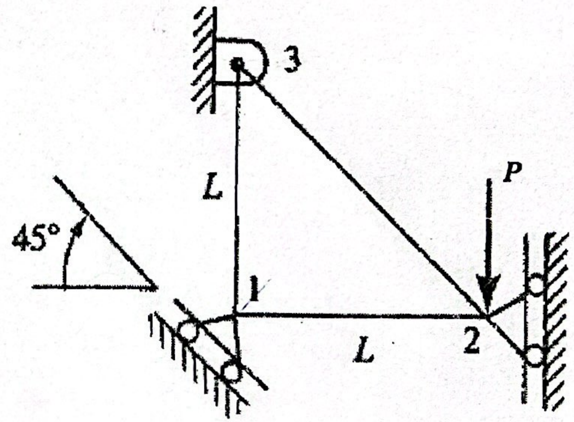
➢ *On donne* :

P=40 kN , L = 4 m , E = 210 GPa ,

I = 10^{-4} *m*^{4} *, A =* 10^{-2} *m*^{2}

EXERCICE 2 ---

Soit à analyser la structure en treillis ci-contre composée de trois (*03*) barres identiques de rigidité extensionnelle *EA*.



- Déterminer :

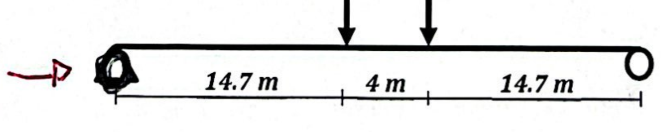
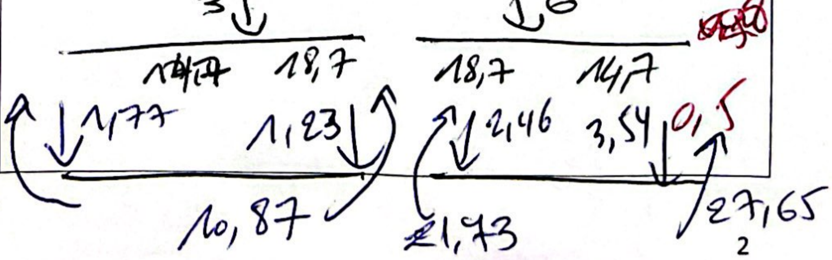
1. Les déplacements nodaux.
2. L'effort interne dans l'élément 1-2.
3. La contrainte dans l'élément *2-3*.

BON COURAGE

2ÈME ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
EXAMEN FINAL – SEMESTRE 3
JANVIER 2024 - Durée : 01h30

NOM : .... **PRÉNOMS :** .... **GROUPE :** ....

1ère Partie : *TABLIER*	**NOTE PARTIE 01 :**
QUESTIONS	**RÉPONSES (*Toutes les réponses doivent être justifiées*)**
1. La mauvaise représentation de la géométrie, des conditions aux limites ou des matériaux sera qualifiée par :	a. Une erreur de discrétisation ☐ b. **Une erreur de modélisation** ⊗ c. Les deux ☐
2. Citer les différents types d'éléments constituant l'ouvrage.	✓ **Élément poutre** ✓ **Élément ressort**
3. Donner l'expression du champ de déplacement pour chaque type d'élément.	✓ **Élément poutre :** V $v = a\,\cancel{y} + b$ 1 ∅ = ... Tab Pascal ✓ **Élément ressort :** $v = a\,y + b$
4. Donner les conditions aux limites du tablier et le nombre de degrés de liberté total. (*DDL concernant les appuis*)	✓ **Chaque poutre possède un appui double et un appui simple** 0,5 ✓ **NDDL = Nb. pout × (3 rot. + 3 rot. + 2 trsl)** **= 4×6×8=192 DDL** 0,5 ✓ **Dans le plan :** ➢ **Suivants X : NDDL = Nb. Pout × (1 rot. + 1 rot.)** ➢ **Suivants Y : NDDL = Nb. Pout × (1 rot. + 1 rot.)**
5. L'erreur de discrétisation est relative à :	a. La mauvaise approximation par éléments finis ☐ **b. La forme et le type d'éléments finis utilisé** ⊗ c. L'erreur sur les conditions aux limites du système ☐
6. Donner la dimension de la matrice réduite de rigidité du tablier. (*On ne considère que les poutres et les appareils d'appuis*).	➢ **Suivants X : NDDL = 4×6×2=48 DDL** ➢ **Suivants Y : NDDL = 4×6×2=48 DDL** **K(48,48)**
7. Proposer un modèle éléments finis en introduisant les charges induites par le véhicule type représenté sur la *figure 3* appliquées au milieu (mi-travée) de la poutre porteuse et les conditions aux limites pour l'élément poutre de *33.40 m*.	✓ **Modèle : Élt Poutre à 2 nœuds avec 2DDL/nœud** ✓ **CAL : Déplacement Vertical = 0** 0,5  0,5
8. Déterminer le vecteur des forces équivalentes du modèle demandé dans la question N°7.	

NOM : .... PRÉNOMS : .... GROUPE : ....

9. Vous avez décidé de modéliser un chargement par une charge ponctuelle sur un nœud du maillage, dans cette zone :	a. Il faut affiner le maillage	⊗
	b. Il est inutile de raffiner le maillage	
	c. L'erreur de modélisation sera importante	

2ème Partie : *PILES*	**NOTE PARTIE 02 :**
QUESTIONS	**RÉPONSES (*Toutes les réponses doivent être justifiées*)**
10. Proposer un modèle éléments finis pour modéliser la pile illustrée dans la *figure 2.*	✓ **Modèle portique**
11. Citer les différents types d'élément constituant la pile. Justifier par un schéma.	✓ **Élément poutre** ✓ **Élément ressort**
12. Quelle est la dimension de la matrice de rigidité réduite de la pile représentée dans la *figure 2.*	**NDDL = 6×6-3×6-3×1=15** ✓ $K_{réd}$**(15,15)**

NOM : .... PRÉNOMS : .... GROUPE : ....

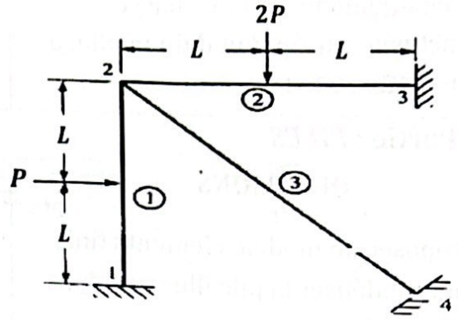
EXERCICE 1 -- (07 pts)

1. Les déplacements du nœud 2.
2. Les forces locales dans l'élément ③.
3. Les réactions au niveau de l'appui 4.

➢ <u>On donne</u> :

P=40 kN , L = 4 m , E = 210 GPa ,

I = 10^{-4} m^4 , A = 10^{-2} m^2



☆ ***Tous les nœuds sont bloqués sauf le nœud 2 ----- $u_1 = v_1 = \phi_1 = u_3 = v_3 = \phi_3 = u_4 = v_4 = \phi_4 = 0$ donc on peut limiter l'analyse au nœud 2***

Elément ① (1-2)	*Elément ② (2-3)*	*Elément ③ (2-4)*
$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = -\pi/4$
$L_1 = 2L = 8\ m$	$L_2 = 2L = 8\ m$	$L_3 = 2\sqrt{2}\ L = 8\sqrt{2}\ m$
$c = 0\ ,\ s = 1$	$c = 1\ ,\ s = 0$	$c = \sqrt{2}/2\ ,\ s = -\sqrt{2}/2$
$\frac{12\,I}{L^3} = 2.344 \cdot 10^{-6}$	$\frac{12\,I}{L^3} = 2.344 \cdot 10^{-6}$	$\frac{12\,I}{L^3} = 8.286 \cdot 10^{-7}$
$\frac{4\,I}{L} = 5 \cdot 10^{-5}$	$\frac{4\,I}{L} = 5 \cdot 10^{-5}$	$\frac{4\,I}{L} = 3.536 \cdot 10^{-5}$
$\frac{6\,I}{L^2} = 9.375 \cdot 10^{-6}$	$\frac{6\,I}{L^2} = 9.375 \cdot 10^{-6}$	$\frac{6\,I}{L^2} = 4.6875 \cdot 10^{-6}$
$\frac{A}{L} = 1.25 \cdot 10^{-3}$	$\frac{A}{L} = 1.25 \cdot 10^{-3}$	$\frac{A}{L} = 8.839 \cdot 10^{-4}$

1. Déplacements du nœud 2 : u_2 ? v_2 ? ϕ_2 ?

➢ ***Matrices élémentaires de rigidité --------------------- (KN/m)***

$$[K_1] = 210 \begin{bmatrix} 2.344 & 0.00 & 9.375 \\ 0.00 & 1250 & 0.00 \\ 9.375 & 0.00 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 492.24 & 0 & 1968.75 \\ 0 & 262500 & 0 \\ 1968.75 & 0 & 10500 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = 210 \begin{bmatrix} 1250 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.344 & 9.375 \\ 0.00 & 9.375 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262500 & 0 & 0 \\ 0 & 492.24 & 1968.75 \\ 0 & 1968.75 & 10500 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = 210 \begin{bmatrix} 442.364 & -441.536 & 3.315 \\ -441.536 & 442.364 & 3.315 \\ 3.315 & 3.315 & 35.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92896.44 & -92722.56 & 696.15 \\ -92722.56 & 92896.44 & 696.15 \\ 696.15 & 696.15 & 7425.6 \end{bmatrix}$$

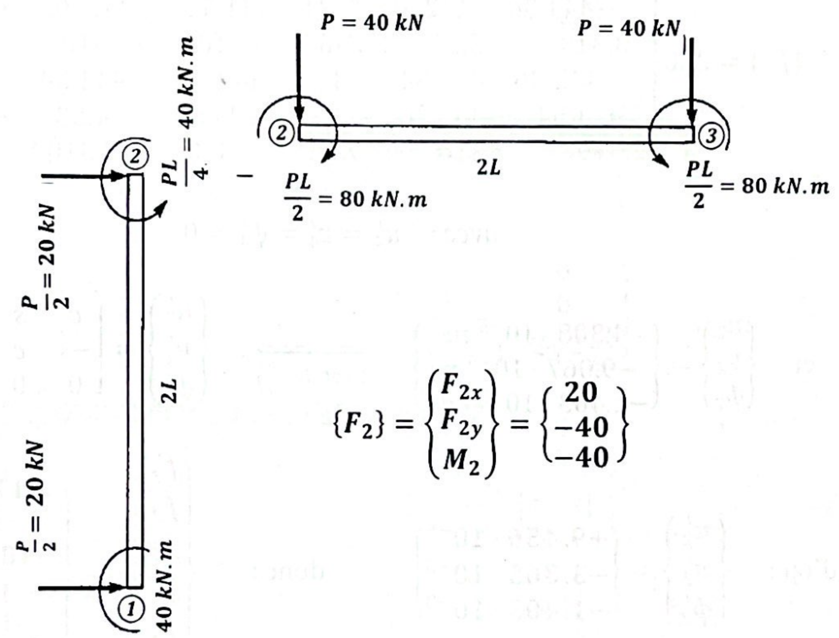
NOM : .... PRÉNOMS : .... GROUPE : ....

➤ ***Matrice globale de rigidité*** ---------------------- ***(KN/m)***

$$[K]_{réd} = 210\begin{bmatrix} 1694.708 & -441.536 & 12.69 \\ -441.536 & 1694.708 & 12.69 \\ 12.69 & 12.69 & 135.36 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{réd} = \begin{bmatrix} 355888.68 & -92722.56 & 2664.9 \\ -92722.56 & 355888.68 & 2664.9 \\ 2664.9 & 2664.9 & 28425.6 \end{bmatrix}$$ ------ ***(réduite au nœud 2)***

➤ ***Vecteur forces nodales :***



$$\{F_2\} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ -40 \\ -40 \end{Bmatrix}$$

➤ ***Déplacements nodaux :*** $[K]\{U\}=\{F\}$

Système réduit ... $$\begin{bmatrix} 355888.68 & -92722.56 & 2656.5 \\ -92722.56 & 355888.68 & 2664.9 \\ 2656.5 & 2664.9 & 28425.6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ -40 \\ -40 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.308 \cdot 10^{-5}\, m \\ -9.067 \cdot 10^{-5}\, m \\ -1.403 \cdot 10^{-3}\, rad \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0431\, mm \\ -0.0907\, mm \\ -0.0014\, rad \end{Bmatrix}$$

NOM : .... PRÉNOMS : .... GROUPE : ....

2. Les forces locales dans l'élément ③

$$\{f'_e\} = \{f'\} + \{f'_0\} = [k'_e]\{u'_e\} \qquad avec: \ \{f'_0\} = 0$$

$$\{f'_e\} = \begin{Bmatrix} f'_{2x} \\ f'_{2y} \\ m'_2 \\ f'_{4x} \\ f'_{4y} \\ m'_4 \end{Bmatrix} = \{f'\}$$

$$\{f'\} = 210 \begin{bmatrix} 442.36 & -441.54 & 3.31 & -442.36 & 441.54 & +3.31 \\ -441.54 & 442.36 & 3.31 & 441.54 & -442.36 & +3.31 \\ 3.310 & 3.31 & 35.36 & -3.310 & -3.310 & +17.68 \\ -442.36 & 441.54 & -3.31 & 442.36 & -441.54 & -3.31 \\ 441.54 & -442.36 & -3.31 & -441.54 & 442.36 & -3.31 \\ 3.310 & 3.310 & 17.68 & -3.3100 & -3.3100 & +35.36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \phi'_2 \\ u'_4 \\ u'_4 \\ \phi'_4 \end{Bmatrix}$$

$$avec: \quad u'_4 = v'_4 = \phi'_4 = 0$$

et $$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.308 \cdot 10^{-5}\, m \\ -9.067 \cdot 10^{-5}\, m \\ -1.403 \cdot 10^{-3}\, rad \end{Bmatrix} \xrightarrow[\left(Rot\ de - \frac{\pi}{4}\right)]{} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ \phi'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

d'où : $$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u'_2} \\ \boldsymbol{v'_2} \\ \boldsymbol{\phi'_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{+9.456 \cdot 10^{-5}} \\ \boldsymbol{-3.365 \cdot 10^{-5}} \\ \boldsymbol{-1.403 \cdot 10^{-3}} \end{Bmatrix}$$

donc : $$\begin{Bmatrix} f'_{2x} \\ f'_{2y} \\ m'_2 \\ f'_{4x} \\ f'_{4y} \\ m'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{17.55\ kN} \\ \boldsymbol{-1.40\ kN} \\ \boldsymbol{-10.51\ kN.m} \\ \boldsymbol{-17.55\ kN} \\ \boldsymbol{1.40\ kN} \\ \boldsymbol{-5.30\ kN.m} \end{Bmatrix}$$

3. Réactions de l'appui 4

$$\begin{Bmatrix} R_{4x} \\ R_{4y} \\ M_{4e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f'_{4x} \\ f'_{4y} \\ m'_4 \end{Bmatrix}$$

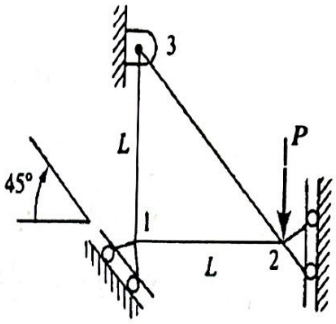
or : $$\begin{Bmatrix} f'_{4x} \\ f'_{4y} \\ m'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -17.55\ kN \\ +1.40\ kN \\ -5.30\ kN.m \end{Bmatrix}$$

donc : $$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{R_{4x}} \\ \boldsymbol{R_{4y}} \\ \boldsymbol{M_{4e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ \\ \\ \end{Bmatrix}$$

NOM : .... PRÉNOMS : .... GROUPE : ....

EXERCICE 2 --- (07 pts)

1. Les déplacements nodaux.
2. L'effort interne dans l'élément 1-2.
3. La contrainte dans l'élément 2-3.



Elément ① (1-2)	Elément ② (2-3)	Elément ③ (1-3)
$\theta = 0$ $L_1 = L$ $c = 1 \ , \ s = 0$	$\theta = 3\pi/4$ $L_2 = L\sqrt{2}$ $c = -\sqrt{2}/2 \ , \ s = \sqrt{2}/2$	$\theta = \pi/2$ $L_3 = L$ $c = 0 \ , \ s = 1$

1. Déplacements nodaux

➢ ***Matrices élémentaires des rigidités***

$$[K_1] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [K_2] = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

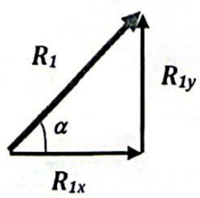
$$[K_3] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ ***Matrice globale de rigidité***

$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

➢ ***Vecteur forces nodales***

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ -P \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{Bmatrix}$$

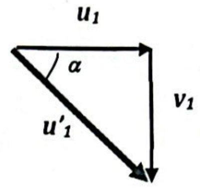


$$\{F\} = \begin{Bmatrix} R_1 \cos\alpha \\ R_1 \sin\alpha \\ R_{2x} \\ -P \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{Bmatrix}$$

NOM : .... PRÉNOMS : .... GROUPE : ....

➢ ***Vecteur déplacements nodaux***

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$



✓ *CAL :* $u_2 = u_3 = v_3 = 0$

✓ $tg\alpha = \frac{-v_1}{u_1} \underset{\alpha=\frac{\pi}{4}}{\Longrightarrow} v_1 = -u_1$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ -u_1 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

➢ ***Déplacements nodaux :*** $[K]\{U\}=\{F\}$

Système réduit --------- $\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ -u_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1\frac{\sqrt{2}}{2} \\ R_1\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -P \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{2}\frac{PL}{EA} \end{Bmatrix} \qquad et \qquad R_1 = 0$$

2. Effort interne dans l'élément 1-2

$$N_{12} = \frac{EA}{L}\,[c \quad s]\begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} \qquad \text{où : } u_1 = v_1 = u_2 = 0$$

$$N_{12} = \frac{EA}{L}[1 \quad 0]\begin{Bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{Bmatrix}\frac{PL}{EA} \qquad \Longrightarrow \qquad N_{12} = 0$$

3. Contrainte dans l'élément 2-3

$$\sigma_{23} = \frac{E}{L\sqrt{2}}\,[c \quad s]\begin{Bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{où : } u_2 = u_3 = v_3 = 0$$

$$\sigma_{23} = \frac{E}{L\sqrt{2}}\,[-\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{2}/2]\begin{Bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{Bmatrix}\frac{PL}{EA}$$

$$\sigma_{23} = \sqrt{2}\,\frac{P}{A} \text{ ------------ (Traction)}$$