المدرسة الوطنية العليا للأشغال العمومية
Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics
National School of Built and Ground Works Engineering

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

SÉRIE N°8

FORMULATION ISOPARAMÉTRIQUE

2ème ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR

EXERCICE 2

La formulation isoparamétrique est utilisée pour la modélisation du barrage illustré sur *la figure 2*.

Le barrage présentant une hauteur de *6 m* est soumis à une pression hydraulique de forme triangulaire.

Le maillage choisi correspond à quatre (*04*) éléments à trois (*03*) nœuds de *3 m* de côté.

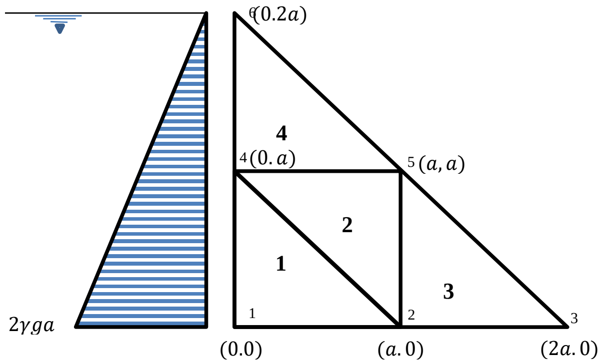
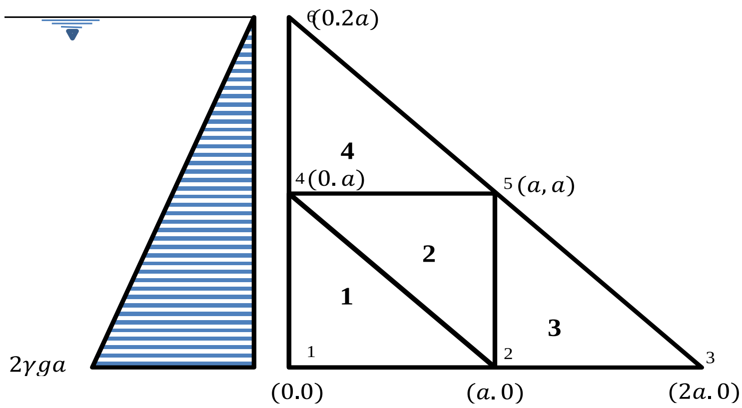


Figure 2

SOLUTION

$$e = 1m \ , \ a = 3m \ , \ E = 30GPa,$$
$$v = 0.2 \ , \ \gamma = 1t/m^3 \ ,$$
$$\rho = 2.5t/m^3, g = 10m/s^2$$



1- Type d'élément utilisé :

Dans cette modélisation, on utilise *des* ***éléments plans triangulaires à trois (03) nœuds avec deux (02) ddl/nœud.***

2- Fonctions de déplacement

$$u(\xi,\eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta$$
$$v(\xi,\eta) = \alpha_4 + \alpha_5\xi + \alpha_6\eta$$

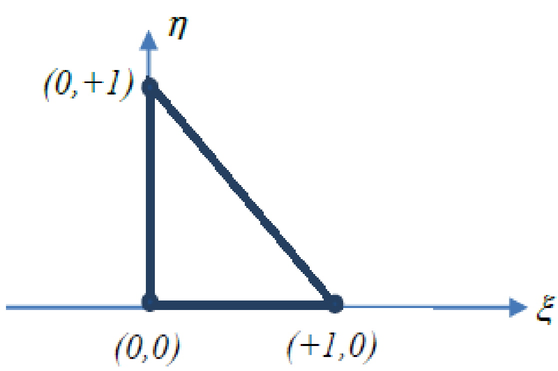
- ***Fonctions de forme***

On s'intéresse à l'***élément 4***

$$\begin{cases} u(\xi,\eta) = \alpha_0 + \alpha_1\,\xi + \alpha_2\,\eta \\ v(\xi,\eta) = \alpha_3 + \alpha_4\,\xi + \alpha_5\,\eta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,0) = \alpha_0 = u_1 \\ u(1,0) = \alpha_0 + \alpha_1 = u_2 \\ u(0,1) = \alpha_0 + \alpha_2 = u_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha_0 = u_1} \\ \boldsymbol{\alpha_1 = u_2 - u_1} \\ \boldsymbol{\alpha_2 = u_3 - u_1} \end{cases}$$



Elément de référence

$$u(\xi,\eta) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta$$

$$u(\xi,\eta) = \langle 1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$u(\xi,\eta) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{N_1 = 1 - \xi - \eta} \\ \boldsymbol{N_2 = \xi} \\ \boldsymbol{N_3 = \eta} \end{cases}$$

❖ ***De la même manière, nous obtenons des fonctions de forme identiques pour le déplacement v***

$$\begin{Bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

- ***Transformation géométrique***

$$\begin{cases} x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\, x_i \\ y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\, y_i \end{cases}$$

$$x(\xi,\eta) = N_1\, x_1 + N_2\, x_2 + N_3\, x_3$$

$$x(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)0 + \xi\, 3 + \eta\, 0$$

$$\boldsymbol{x(\xi,\eta) = 3\xi}$$

$$y(\xi,\eta) = N_1\, y_1 + N_2\, y_2 + N_3\, y_3$$

$$y(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)3 + \xi\, 3 + \eta\, 6$$

$$\boldsymbol{y(\xi,\eta) = 3\eta + 3}$$

3. Relations contraintes-déformations et déformations-déplacements

3.1. Relations déformations-déplacements

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [B]\{d\}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

avec : $\begin{cases} x(\xi,\eta) = 3\xi \\ y(\xi,\eta) = 3\eta + 3 \end{cases}$

donc : $[J] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $[J]^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\partial N_1}{\delta \xi} = -\frac{1}{3}$ $\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{1}{3}\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{3}$	$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{3}$ $\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{1}{3}\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0$	$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0$ $\frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{1}{3}\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{3}$

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \Rightarrow [B] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2. Relations contraintes-déformations

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

- ***Etat de Contraintes Planes***

$$[D] = \frac{E}{1 - v^2}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1 - v}{2} \end{bmatrix}$$

- ***Etat de Déformations Planes***

$$[D] = \frac{E}{(1 + v)(1 - 2v)}\begin{bmatrix} 1 - v & v & 0 \\ v & 1 - v & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1 - 2v}{2} \end{bmatrix}$$

- ***Dans le cas de déformation plane, le comportement s'écrit :***

$$[D] = \frac{10^7}{3} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 2.5 & 0 \\ 2.5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 \end{bmatrix}$$

4. Matrice de rigidité de l'élément 4

$$[k] = \iiint [B(x,y)]^T\, [D]\, [B(x,y)]\, dV_{physique}$$

$$= \iiint [B(\xi,\eta)]^T\, [D]\, [B(\xi,\eta)]\, |J|\, dV_{parent}$$

$$dV_{physique} = e\, dx\, dy = |J|\, dV_{parent} = e\, |J|\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [B(\xi,\eta)]^T [D]\, [B(\xi,\eta)]\, e\, |J|\, d\xi d\eta$$

$$= [B(\xi,\eta)]^T [D]\, [B(\xi,\eta)] \int_0^1 \int_0^{1-\xi} e\, |J|\, d\xi d\eta$$

❖ L'intégrale de cette expression est ***CONSTANTE***, un ***seul point d'intégration*** de ***HAMMER*** suffit pour une intégration exacte $\left(\boldsymbol{\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{3}\ et\ w_1 = 2}\right)$

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} e\, |J|\, d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{1} w_i\, e\, |J| = \left(\frac{1}{2}\right) 2\, A\, e = \frac{9}{2}\, m^3$$

$$[k] = \frac{9}{2} [B]^T [D]\, [B]$$

$$[\boldsymbol{K}] = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{55} & \mathbf{16} & \mathbf{-40} & \mathbf{-15} & \mathbf{-15} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{16} & \mathbf{55} & \mathbf{-1} & \mathbf{-15} & \mathbf{-15} & \mathbf{-40} \\ \mathbf{-40} & \mathbf{-1} & \mathbf{40} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{-15} & \mathbf{0} & \mathbf{15} & \mathbf{15} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{-15} & \mathbf{0} & \mathbf{15} & \mathbf{15} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{40} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{40} \end{bmatrix} \quad (\boldsymbol{kN/m})$$

- ***Système d'équations et conditions aux limites***

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

5. Vecteurs forces nodales équivalentes pour l'élément 4

5.1. Forces surfaciques

$$\{f_s\} = \iint [N_s]^T \{T_s\}\ ds_{physique}$$

- ***Pour les forces surfaciques, l'élément d'intégration dS est écrit dans le cas 2D par :***

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta\right)^2}$$

Cette quantité est généralement calculée sur une surface où l'une des coordonnées est constante, il vient que :

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\, d\xi \qquad \textbf{pour } \boldsymbol{\eta} \textbf{ constante}$$

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\, d\eta \qquad \textbf{pour } \boldsymbol{\xi} \textbf{ constante}$$

Sur la base de ces expressions, on désignera par $|J_S|$ le terme en facteur de la coordonnée intrinsèque. Ce qui permet d'écrire les forces surfaciques sous la forme :

$$\{f_s\} = \iint [N_s]^T \{T_s\}\ |J_s|\ dS_{parent}$$

$$dS = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} d\eta \qquad \text{soit} \qquad dS = 3\ d\eta$$

- $[N_s]^T$ ***pour une surface où*** $\boldsymbol{\xi = 0}$

$$[N_s]^T = \begin{bmatrix} N_1(0,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(0,\eta) \\ N_2(0,\eta) & 0 \\ 0 & N_2(0,\eta) \\ N_3(0,\eta) & 0 \\ 0 & N_3(0,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 \\ 0 & 1-\eta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$$

$$\{T_s\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1(1-\eta) + q_3\eta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_s\} = e \int_0^1 \begin{Bmatrix} 1-\eta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta \\ 0 \end{Bmatrix} (q_1(1-\eta) + q_3\eta)\ 3\ d\eta$$

$$\{\boldsymbol{f}_s\} = \begin{Bmatrix} q_1 + \frac{1}{2} q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} q_1 + q_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5.2. Forces volumiques (forces équivalentes au poids propre)

$$\{f_v\} = \iiint [N]^t \{F_v\}\, dV$$

$$\{f_v\} = \iint [N]^t \{F_v\}\, e\, |J| d\xi\, d\eta$$

$$\{f_v\} = \iint \begin{bmatrix} N_1(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) \\ N_2(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_2(\xi,\eta) \\ N_3(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_3(\xi,\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_v^x \\ F_v^y \end{Bmatrix} e\, |J| d\xi\, d\eta$$

$$\{f_v\} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta & 0 \\ 0 & 1-\xi-\eta \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} e|J| d\xi\, d\eta$$

$$\{f_v\} = -225 \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1-\xi-\eta \\ 0 \\ \xi \\ 0 \\ \eta \end{Bmatrix} d\xi\, d\eta$$

- ***L'intégration par un point de Hammer donne :*** $\boldsymbol{w_1 = \frac{1}{2}}$ ***et*** $\boldsymbol{\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{3}}$

$$\{\boldsymbol{f}_v\} = -\frac{225}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -37.5 \\ 0 \\ -37.5 \\ 0 \\ -37.5 \end{Bmatrix}$$

5.3. Forces Globales

$$\{F\} = \{f_v\} + \{f_s\}$$

$$\{\boldsymbol{F}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{30} \\ \mathbf{-37.5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-37.5} \\ \mathbf{15} \\ \mathbf{-37.5} \end{Bmatrix}$$

- ***Résolution du système d'équilibre***

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u_4} \\ \boldsymbol{v_4} \\ \boldsymbol{u_5} \\ \boldsymbol{v_5} \\ \boldsymbol{u_6} \\ \boldsymbol{v_6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{6.02} \\ \mathbf{-5.87} \\ \mathbf{4.84} \\ \mathbf{-4.78} \\ \mathbf{7.33} \\ \mathbf{-7.83} \end{Bmatrix} \ (\boldsymbol{mm})$$

6. Calcul des déformations et contraintes dans l'élément 4

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_x} \\ \boldsymbol{\varepsilon_y} \\ \boldsymbol{\gamma_{xy}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{-0.0035} \\ \mathbf{-0.0058} \\ \mathbf{+0.0072} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma_x} \\ \boldsymbol{\sigma_y} \\ \boldsymbol{\tau_{xy}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{-166.64} \\ \mathbf{-225.01} \\ \mathbf{+90.004} \end{Bmatrix} \quad (\boldsymbol{MPa})$$