

# Introduction à la Méthode des Eléments Finis

Dr. CHIKH Benazouz, Maitre de Conférences A

October 5, 2022

## 1 Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique de résolution des problèmes d'ingénierie et de physique mathématique. Les problèmes typiques liés à ces disciplines comprennent l'analyse structurelle, le transfert de chaleur, l'écoulement des fluides, le transport de masse et le potentiel électromagnétique... etc.

Pour les problèmes impliquant une géométrie, des chargements et des propriétés de matériaux complexes, il n'est généralement pas possible d'obtenir des solutions mathématiques analytiques. Les solutions analytiques sont celles données par une expression mathématique qui donne les valeurs des quantités inconnues souhaitées à n'importe quel endroit dans un corps (ici la structure totale ou le système physique d'intérêt) et sont donc valables pour un nombre infini de localisations dans le corps.

Ces solutions analytiques nécessitent généralement la solution d'équations différentielles ordinaires ou partielles, qui, en raison des géométries, des chargements et des propriétés des matériaux compliqués, ne sont généralement pas disponibles. Par conséquent, nous devons nous appuyer sur des méthodes numériques, telles que la MEF, pour approcher au mieux la solution exacte. La formulation par éléments finis du problème aboutit à un système d'équations algébriques simples pour la solution, plutôt que d'exiger la solution d'équations différentielles.

Ces méthodes numériques aboutissent aux inconnues recherchés à des nombres discrets de points dans le milieu continu. Le processus de modélisation d'un corps en le divisant en un système équivalent de corps ou d'unités plus petits (éléments finis) interconnectés en des points communs à deux ou plusieurs éléments (points nodaux ou nœuds) et/ou lignes de limites et/ou surfaces est appelé discréttisation. Dans la MEF, au lieu de résoudre le problème pour le corps entier en une seule opération, nous formulons les équations pour chaque élément fini et les combinons pour obtenir la solution du corps entier.

En bref, la solution aux problèmes structurels se réfère généralement à la détermination des déplacements à chaque nœud et des contraintes au sein de chaque élément constituant la structure soumise aux charges appliquées. Dans les problèmes non structurels, les inconnues nodales peuvent, par exemple, être des températures ou des pressions de fluide dues à des flux thermiques ou fluides.

## 2 Bref historique

La naissance du calcul variationnel et du principe du travail virtuel remonte aux 17ème et 18ème siècles, et le premier essai d'une méthode variationnelle discrète avec des fonctions de forme triangulaires « élément par élément » a été donnée par Leibniz (1697). Les premières études analytiques ont été faites par Schellbach (1851) puis, déjà avec des résultats numériques, par Rayleigh (1877). Le mathématicien Ritz (1909) marque la première méthode variationnelle discrète (directe) pour la plaque élastique linéaire de Kirchhoff, et Galerkin en 1915 a publié son article fondateur de la MEF pour les systèmes continus élastiques linéaires, postulant l'orthogonalité des résidus d'équilibre par rapport aux fonctions de test, mais Ritz et Galerkin ont utilisé les fonctions de test et d'essai dans l'ensemble du domaine sous forme de supports.

Le développement moderne de la MEF a commencé dans les années 1940 dans le domaine de l'ingénierie des structures avec les travaux de Hrennikoff en 1941 et McHenry en 1943, qui ont utilisé un treillis d'éléments linéaires (unidimensionnels) (barres et poutres) pour la solution des contraintes dans les solides continus. Dans un article publié en 1943 mais peu reconnu depuis de nombreuses années Courant (1943) propose de mettre en place la solution des contraintes sous une forme variationnelle. Ensuite, il a introduit des fonctions d'interpolation (ou de forme) par élément sur des sous-régions triangulaires constituant la région entière comme méthode pour obtenir des solutions numériques approximatives. En 1947, Levy a développé « la méthode de flexibilité » ou « des forces » et, en 1953, ses travaux ont suggéré qu'une autre méthode « la méthode de rigidité ou de déplacement » pourrait être une alternative prometteuse pour l'analyse des structures aériennes statiquement redondantes. Cependant, ses équations étaient difficiles à résoudre à la main et la méthode n'est devenue populaire qu'avec l'avènement de l'ordinateur numérique à grande vitesse.

Courant (1943) a été le premier à introduire des éléments finis triangulaires et rectangulaires pour le problème de torsion 2D-St-Venant d'une barre prismatique (équation de Poisson), et Clough et son équipe (1956) ont publié le premier 2D-FEM pour les ailes d'avion fléchées. Aussi Wilson, Melosh et Taylor, Bathe et Simo ont promu à Berkeley la nouvelle discipline de « mécanique computationnelle ». Argyris (depuis 1959 à Stuttgart) et Zienkiewicz (depuis 1965 à Swansea), en collaboration avec Irons par exemple, ont développé la MEF primaire de manière systématique : des classes hiérarchiques d'éléments finis avec différents topologies et techniques pour la mécanique des solides et des fluides.

Argyris et Kelsey en 1954, ont développé des méthodes d'analyse structurale matricielle en utilisant des principes énergétiques. Ce développement a illustré le rôle important que les principes énergétiques jouent dans la MEF.

Le premier traitement des éléments bidimensionnels a été réalisé par Turner et al. en 1956. Ils ont dérivé des matrices de rigidité élémentaires pour les éléments barres, poutres et les éléments bidimensionnels triangulaires et rectangulaires en contrainte plane et ont décrit la procédure communément appelée méthode de rigidité directe pour obtenir la matrice de rigidité totale de la structure. Parallèlement au développement de l'ordinateur numérique à grande vitesse au début des années 1950, les travaux de Turner et al. 1950 a incité à développer les équations de rigidité des éléments finis exprimées en notation matricielle. L'expression élément fini a été introduite par Clough en 1960 lorsque des éléments triangulaires et rectangulaires ont été utilisés pour l'analyse des

contraintes planes.

Une matrice de rigidité élémentaire d'une plaque rectangulaire en flexion a été développée par Melosh en 1961. Cela a été suivi par le développement de la matrice de rigidité des éléments coques courbes en flexion pour les coques axisymétriques par Grafton et Strome en 1963.

L'extension de la MEF aux problèmes 3D avec le développement d'une matrice de rigidité tétraédrique a été réalisée par plusieurs auteurs (Martin 1961, Gallagher et al 1962, Melosh 1963). Des éléments 3D supplémentaires ont été étudiés par Argyris en 1964. Le cas particulier des solides axisymétriques a été considéré par Clough et Rashid (1965) et Wilson en 1965.

La plupart des travaux d'éléments finis jusqu'au début des années 1960 traitaient des petites déformations et des petits déplacements, du comportement élastique des matériaux et des chargements statiques. Cependant, une grande flèche et une analyse thermique ont été prises en compte par Turner et al. en 1960 et les non-linéarités matérielles par Gallagher et Padlog en 1963. Zienkiewicz et al (1968) ont étendu la méthode aux problèmes de viscoélasticité.

En 1965, Archer a considéré l'analyse dynamique dans le développement de la matrice de masse cohérente, qui est applicable à l'analyse des systèmes de masse distribuée tels que les barres et les poutres dans l'analyse structurelle. Avec la réalisation de Melosh en 1963 la MEF pouvait être établie en termes de formulation variationnelle, elle a commencé à être utilisée pour résoudre des applications non structurelles. Les problèmes de terrain, tels que la détermination de la torsion d'un arbre, l'écoulement des fluides et la conduction de la chaleur, ont été résolus par (Zienkiewicz et Cheung 1965, Martin 1968 et Wilson et Nickel 1966).

Une extension supplémentaire de la méthode a été rendue possible par l'adaptation des méthodes des résidus pondérés, d'abord par Szabo et Lee (1969) pour développer les équations d'élasticité précédemment connues utilisées en analyse structurelle, puis par Zienkiewicz et Parekh (1970) pour les problèmes transitoires de terrain. Il a alors été reconnu que quand les formulations directes et les formulations variationnelles soient difficiles ou impossibles à utiliser, la méthode applique la méthode des résidus pondérés à la détermination du champ magnétique.

En 1976, Belytschko a examiné les problèmes associés au comportement dynamique non linéaire à grand déplacement et a amélioré les techniques numériques pour résoudre les systèmes d'équations résultants.

### 3 Etapes générales de la méthode des éléments finis

Cette section présente les étapes générales incluses dans la formulation d'un problème statique par éléments finis. Nous utiliserons ces étapes pour développer des solutions aux problèmes structurels et non structurels dans les chapitres suivants. Pour le problème d'analyse des contraintes structurelles, l'ingénieur cherche à déterminer les déplacements dans toute la structure, qui est en équilibre et est soumise à des charges appliquées. Pour de nombreuses structures, il est difficile de déterminer la distribution des déformations à l'aide de méthodes conventionnelles étant donné le nombre de degré de liberté de la structure, et donc la méthode des éléments finis est nécessairement utilisée.

Il existe deux approches directes, traditionnellement associées à la méthode des éléments finis appliquée aux problèmes de mécanique des structures. Une première approche, appelée méthode des forces ou de flexibilité qui utilise les forces internes comme inconnues du problème. Pour obtenir les équations gouvernantes, on utilise d'abord les équations d'équilibre. Ensuite, les équations supplémentaires nécessaires sont trouvées en introduisant des équations de compatibilité. Le résultat est un ensemble d'équations algébriques pour déterminer les forces inconnues.

La deuxième approche, appelée méthode de déplacement ou de rigidité, suppose que les déplacements nodaux sont les inconnues du problème. Par exemple, les conditions de compatibilité exigeant que les éléments connectés à un nœud commun sur une surface commune avant le chargement restent connectés à ce nœud après la déformation sont initialement satisfaites. Ensuite, les équations gouvernantes sont exprimées en termes de déplacements nodaux en utilisant les équations d'équilibre et une loi applicable reliant les forces aux déplacements.

Ces deux approches directes se traduisent par des inconnues différentes (forces ou déplacements) dans l'analyse et différentes matrices associées à leurs formulations (flexibilités ou rigidités). Il a été montré en 1974 par Kardestuncer que, la méthode de déplacement (ou de rigidité) est plus souhaitable car sa formulation est plus simple pour la plupart des problèmes d'analyse structurelle. De plus, une grande majorité de programmes d'éléments finis à usage général ont incorporé la formulation en déplacement pour résoudre des problèmes structurels. Par conséquent, seule la méthode de déplacement sera utilisée tout au long de ce document.

Une autre méthode générale qui peut être utilisée pour développer les équations gouvernantes pour les problèmes structurels et non structurels est la méthode variationnelle. La méthode variationnelle comprend un certain nombre de principes. L'un de ces principes, qui sera largement utilisé dans ce cours parce qu'il est relativement facile à apprendre et souvent introduit dans les cours de mécanique de base, est le théorème d'énergie potentielle minimale qui s'applique aux matériaux se comportant de manière linéaire-élastique. Ce théorème est expliqué et utilisé dans diverses sections du cours, comme le chapitre 5 pour l'élément triangulaire à déformation constante et l'élément plan rectangulaire à quatre noeuds en état de contrainte plane et de déformation plane.

La méthode des éléments finis consiste à discréteriser la structure à l'aide de petits éléments interconnectés appelés éléments finis. Une fonction de déplacement est associée à chaque élément fini. Chaque élément interconnecté est lié, directement ou indirectement, à tous les autres éléments par des interfaces communes (ou partagées), y compris des noeuds et/ou des lignes aux limites et/ou des surfaces. En utilisant des propriétés de contrainte/déformation connues pour le matériau constituant la structure, on peut déterminer le comportement d'un nœud donné en termes de propriétés de tous les autres éléments de la structure. L'ensemble total d'équations décrivant le comportement de chaque nœud se traduit par une série d'équations algébriques, exprimées en notation matricielle.

Les étapes utilisées dans la formulation par la méthode des éléments finis et la résolution d'un problème structurel sont énumérées ci-dessous. La présentation de ces étapes permet de comprendre la procédure généralement suivie dans une formulation d'un problème statique par éléments finis. Des illustrerons spécifiquement pour les ressorts, les barres, les treillis, les poutres, les portiques plans, les contraintes planes seront exposées dans les chapitres suivants.

Les étapes générales de formulation d'un problème statique par éléments finis sont résumées dans ce qui suit :

1. Discréter et sélectionner les types d'éléments,
2. Sélectionnez une fonction de déplacement,
3. Définir les relations déformation/déplacement et contrainte/déformation,
4. Déterminer les matrices de rigidité et les équations élémentaires,
5. Assembler les équations élémentaires pour obtenir les équations globales ou totales et introduire les conditions aux limites,
6. Résoudre le système d'équations matricielles et déterminer les déplacements généralisés,
7. Déterminer les déformations et les contraintes des éléments,
8. Interpréter les résultats.

## 4 Applications de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis peut être utilisée pour analyser les problèmes structurels et non structurels. Les analyses structurelles typiques comprennent:

1. Analyse des déplacements,
2. Analyse des contraintes,
3. Flambement,
4. Analyse vibratoires,
5. Problèmes d'impact, analyse des collisions de véhicules, l'impact de projectiles et les chutes de corps et les impacts d'objets.

## 5 Avantages de la méthode des éléments finis

Comme indiqué précédemment, la méthode des éléments finis a été appliquée à de nombreux problèmes structurels et non structurels. Cette méthode présente un certain nombre d'avantages qui l'ont rendue très répondu. Nous citons, sa capacité de :

1. Modéliser assez facilement des corps de forme irrégulière,
2. Gérer les conditions générales de charge sans difficulté,
3. Modéliser des corps composés de plusieurs matériaux, car les équations des éléments sont évaluées individuellement,
4. Gérer un nombre et des types illimités de conditions aux limites,

5. Permet de faire varier la taille des éléments, pour pouvoir utiliser de petits éléments si nécessaire,
6. Modifier le modèle d'éléments finis assez facilement et à moindre coût,
7. Inclure des effets dynamiques,
8. Gérer le comportement non linéaire existant avec de grandes déformations et des matériaux non linéaires.

## 6 Programmes informatiques utilisés pour la méthode des éléments finis

Il existe de nombreux fournisseurs prenant en charge les programmes d'éléments finis, et l'utilisateur intéressé doit consulter attentivement le fournisseur avant d'acheter un logiciel. Cependant, différents programmes informatiques commerciaux sont actuellement disponibles, en effet pour résoudre des problèmes par la méthode des éléments finis, nous présentons une liste partielle des programmes existants.

- Algor,
- Abaqus,
- ANSYS,
- COSMOS/M,
- GT-STRUDL,
- LS-DYNA,
- MSC/NASTRAN,
- NISA,
- Pro/MECHANICA,
- SAP2000,

## 7 Organisation du cours

Le cours est divisé en deux parties. Il se concentre dans la première partie sur une introduction aux concepts fondamentaux de la méthode des éléments finis et leurs étapes générales. Dans cette partie, la formulation des problèmes statiques par éléments finis des éléments unidimensionnels en utilisant la méthode des rigidités directes, suivie par la formulation et le développement des matrices de rigidités élémentaires et des systèmes d'équations des différents types d'éléments 1D comme les barres et les poutres. Dans le cadre des analyses des structures, le cours traite des structures en treillis et en portiques. Ces formulations sont illustrées avec des applications pratiques liées au

domaine de génie civil. Dans la deuxième partie, le cours se focalise sur la formulation des problèmes statiques par éléments finis des éléments plans (2D). Il traite de l'analyse des structures en état de déformations planes et des contraintes planes en se basant sur une discrétisation bien définie et des bonnes approximations pour pouvoir analyser des phénomènes physiques. Par la suite, la formulation iso-paramétrique est utilisée pour développer les systèmes d'équations des structures planes et la réponse peut être établie dans cet aspect à partir des méthodes d'intégration numérique.

## 7.1 Pré-requis

Les étudiants doivent avoir les connaissances mathématiques habituelles acquises dans une grande école d'ingénieurs ainsi que de sérieuses notions de calcul matriciel et analyse numérique, théorie de l'élasticité, résistance des matériaux et calcul des structures.

## 7.2 Visées d'apprentissages

A la fin de ce cours l'étudiant doit être capable de:

- Déterminer les efforts internes et les déplacements d'un élément ou d'une structure en génie civil,
- Analyser les contraintes et les déformations des structures en génie civil,
- Choisir ou sélectionner une méthode de calcul adéquate de la réponse par éléments finis,
- Appliquer les notions de discrétisation par éléments finis,
- Proposer un modèle par éléments finis pour l'analyse statique d'une structure.

## 7.3 Modalités d'évaluation des apprentissages

Type : Enseignement avec TD sans TP

NMAT = 60 % NEF + 40 % NCC

NCC = 50 % Interro + 15 % Participation + 15 % Assiduité + 20 % Travail personnel

NMAT = Note de la matière,

NCC = Note de contrôle continu,

NEF = Note de l'examen final

## 7.4 Activités d'enseignement-apprentissage

- Un cours,
- Des travaux dirigés sont programmés en parallèle pour chaque chapitre,
- Des devoirs de maisons sont programmés à la fin de chaque chapitre,
- Une interrogation écrite est programmée pour chaque fin de deux chapitres,
- Examen final pour chaque fin de semestre.

# Méthode des Eléments Finis : Théories et Problèmes

Dr. CHIKH Benazouz, Maître de Conférences « A »

Département Matériaux et Structures « DMS »

Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics-Francis Jeanson « ENSTP-FJ »

## Chapitre 3

### 3. Elément Barre et Structures Treillis

---

#### Objectifs

- 3.1. Introduction
  - 3.2. Détermination de la matrice de rigidité d'un élément barre en coordonnées locales
  - 3.3. Transformation des vecteurs en deux dimensions
  - 3.4. Matrice de rigidité globale d'un élément barre arbitrairement orienté en plan
  - 3.5. Calcul des contraintes d'un élément barre en plan
  - 3.6. Structures treillis
  - 3.7. Appuis inclinés
  - 3.8. Problèmes
- 

#### Objectifs

Ce chapitre vise à :

- Développer la matrice de rigidité élémentaire locale d'un élément barre.
- Illustrer comment résoudre un assemblage de barres par la méthode de rigidité directe.
- Présenter des lignes directrices pour la sélection des fonctions de déplacement pour un élément barre.
- Décrire le concept de transformation de vecteurs dans deux systèmes plans de coordonnées différents.
- Développer la matrice de rigidité élémentaire d'un élément barre orienté arbitrairement en plan.
- Démontrer comment calculer la contrainte d'une barre en plan.
- Montrer comment résoudre un problème de treillis plans.
- Introduire et résoudre des problèmes avec des supports inclinés.

### 3.1. Introduction

Après avoir défini les fondements sur lesquels se base la méthode de rigidité directe, nous allons développer maintenant la matrice de rigidité élémentaire d'un élément barre (ou treillis) linéaire élastique en utilisant les étapes générales décrites dans le chapitre 1.

Nous inclurons à la fois l'introduction d'un système de coordonnées local, choisi en fonction des caractéristiques élémentaires, et d'un système de coordonnées global ou de référence, choisi pour être pratique (pour des propositions numériques) par rapport à la structure globale.

Nous discuterons également de la transformation d'un vecteur du système de coordonnées local au système de coordonnées global, en utilisant le concept des matrices de transformation pour exprimer la matrice de rigidité élémentaire d'un élément barre orienté arbitrairement dans le système global.

Nous résoudrons quelques exemples de problèmes treillis plans pour illustrer la procédure de détermination de la matrice de rigidité totale et du système d'équations. Par la suite, des structures en treillis avec des appuis inclinés seront traitées en utilisant les principes de transformations.

### 3.2. Détermination de la matrice de rigidité d'un élément barre en coordonnées locales

Maintenant, Nous considérons le développement de la matrice de rigidité de l'élément barre linéaire élastique à section transversale constante (prismatique) illustré à la figure 3.1. Le développement sera directement applicable à la solution des structures en treillis. La barre est soumise à des efforts de traction  $T$  dirigés suivant l'axe local de la barre et appliqués aux noeuds.

L'élément barre est caractérisé par une section transversale  $A$ , un module d'élasticité  $E$  et une longueur initiale  $L$  constantes. Les degrés de liberté noraux sont des déplacements axiaux locaux représentés par  $u_1$  et  $u_2$  aux extrémités de l'élément comme illustré à la figure 3-1.

A partir de la loi de Hooke, la contrainte axiale et sa déformation sont données par :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (a)$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (b)$$

En utilisant l'équilibre des forces, nous avons :

$$A \sigma_x = T = \text{constant} \quad (c)$$

Pour une barre soumise à des charges appliquées uniquement aux extrémités, en remplaçant l'Eq. (b) dans les Eqs. (a) et (c) et en différenciant par rapport à  $x$ , on obtient l'équation différentielle régissant le comportement linéaire-élastique de la barre sous la forme :

$$\frac{d}{dx} \left( A E \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (d)$$

Où  $u$  est la fonction de déplacement axial tout le long de l'élément dans la direction  $x$  et  $A$  et  $E$  sont écrits comme étant des fonctions de  $x$  sous la forme générale de l'équation différentielle, même si  $A$  et  $E$  seront supposés constants sur toute la longueur de la barre dans nos démonstrations à suivre.

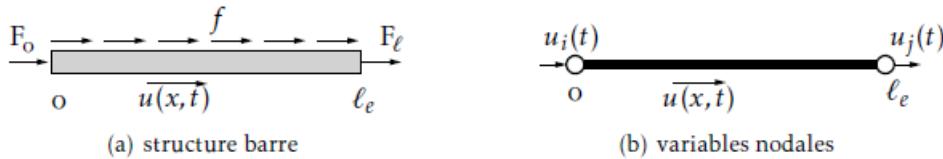


Figure 3.1. Elément barre à deux noeuds; les déplacements nodaux et les forces nodales sont orientés positivement selon l'axe des coordonnées  $x$ .

**Définition :** Une barre rectiligne ne travaillant qu'en traction-compression « c'est-à-dire ne transmet en fait que l'effort normal ». Considérons les hypothèses monodimensionnelles suivantes :

- 1- Petits déplacements et petites déformations.
- 2- Pas de moments, ni efforts tranchants  $f_{1y} = 0, f_{2y} = 0, m_1 = 0$  et  $m_2 = 0$ .
- 3- Section droite reste droite.
- 4- Milieu isotrope homogène élastique.
- 5- Etat de contrainte uni-axial.
- 6- EA constante (Prismatique).
- 7- Charge nodale et (1DDL/nœud).
- 8- Pas de charges intermédiaires appliquées.

Les étapes décrites précédemment dans le chapitre 1 sont utilisées pour développer la matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre, puis pour illustrer une solution complète pour un assemblage d'éléments barres.

### Etape 1 : Sélectionner le type de l'élément

La barre est représentée par un élément à deux noeuds (un noeud à chaque extrémité) comme il est illustré à la figure 3.1. Donc, c'est un élément à 2 noeuds avec 1 degré de liberté par noeud (1DDL/Nœud).

### Etape 2 : Sélectionner la fonction du déplacement

Supposons une variation linéaire du déplacement tout le long de l'axe  $x$  de la barre. Ces extrémités spécifiées sont les valeurs nodales  $u_1$  et  $u_2$ . Soit :

$$u = a_1 + a_2 x \quad (3.1)$$

Avec le nombre total de coefficients  $a_i$  qui est toujours égal au nombre total de degrés de liberté associés à l'élément. Dans notre cas, le nombre total de degrés de liberté est de deux déplacements axiaux (1 à chacun des deux nœuds de l'élément). En utilisant la même procédure que dans la section (2-2 du chapitre 2) pour l'élément ressort, nous exprimons l'équation (3.1) comme :

$$u = \left( \frac{u_2 - u_1}{L} \right) x + u_1 \quad (3.2)$$

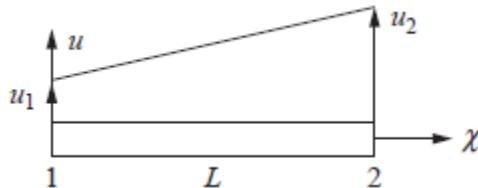


Figure 3.2. Déplacement  $u$  représente le long de l'élément.

La raison pour laquelle nous convertissons la fonction de déplacement de la forme de l'équation. (3.1) à l'Eq. (3.2) est que cela nous permet d'exprimer la déformation en termes de déplacements nodaux en utilisant la relation déformation/déplacement et de pouvoir par la suite relier ensuite les forces nodales aux déplacements nodaux.

Sous forme matricielle, Eq. (3.2) devient :

$$u = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Avec des fonctions de forme données par

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (3.4)$$

Ces fonctions de forme sont identiques à celles obtenues pour l'élément ressort. Le comportement et certaines propriétés de ces fonctions de forme ont été décrits dans la section 2.2. La fonction linéaire de déplacement  $u$  (Eq. (3.2)), est tracée sur la longueur de l'élément barre, et illustrée à la figure 3.2.

### Etape 3 : Définition des relations Déformations / Déplacements et Contraintes / Déformations

Les Eqs. (3.3) et (3.4) sont utilisées pour obtenir La relation déformations/déplacements suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (3.5)$$

A partir de la loi de Hooke, la relation contraintes / déformations est donnée par :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (3.6)$$

#### Etape 4 : Développement de la matrice de rigidité élémentaire et le système d'équations correspondant

A travers la définition de la contrainte axiale, nous avons (voir Figure 3.3) :

$$T = A \sigma_x \quad (3.7)$$

En introduisant les Eqs. (3.5) et (3.6) dans l'Eq. (3.7), nous obtenons

$$T = AE\left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right) \quad (3.8)$$

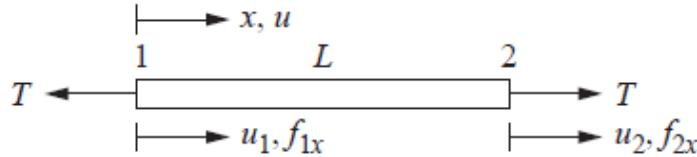


Figure 3.3. Barre soumise à des efforts de traction  $T$ ; les déplacements et les forces nodaux positifs sont orientés vers l'axe des coordonnées  $x$ .

De plus, par la convention des signes des forces nodaux de la figure 3.3,

$$f_{1x} = -T \quad (3.9)$$

Lorsque nous substituons l'Eq. (3.8), Éq. (3.9) devient :

$$f_{1x} = -\frac{AE}{L}(u_2 - u_1) \quad (3.10)$$

De la même manière :

$$f_{2x} = T \quad (3.11)$$

Donc :

$$f_{2x} = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1) \quad (3.12)$$

Exprimons les équations. (3.10) et (3.12) ensemble sous forme matricielle, cela donne :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

En utilisant  $\{f\} = [k]\{d\}$ , nous avons, à partir l'Eq. (3.13),

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

L'équation (3.14) représente la matrice de rigidité élémentaire pour un élément barre en coordonnées locales. Dans l'éq. (3.14),  $AE/L$  est analogue à la constante de rappel  $k$  pour un élément ressort.

### **Etape 5 : Assemblage des équations élémentaires pour obtenir les équations globales ou totales**

Assembler les matrices globales de rigidité en utilisant la méthode de rigidité directe décrite au chapitre 2. Cette étape s'applique aux structures composées de plusieurs éléments tels que :

$$[K] = \sum_{e=1}^N [k^{(e)}] \quad \text{et} \quad [F] = \sum_{e=1}^N [f^{(e)}] \quad (3.15)$$

Où toutes les matrices de rigidité élémentaires locales (dans le repère local)  $[k^{(e)}]$  doivent être transformées en matrices de rigidité élémentaires globales (dans le repère global)  $[k]$  (à moins que les axes locaux coïncident avec les axes globaux) avant que la méthode de rigidité directe ne soit appliquée comme indiqué par l'Eq (3.15). (Ce concept de transformations de matrice de coordonnées et de rigidité est décrit dans les sections 3.3 et 3.4).

### **Etape 6 : Résolution pour déterminer les déplacements globaux**

Déterminer les déplacements en introduisant les conditions aux limites et en résolvant simultanément le système d'équations,  $\{F\} = [K]\{d\}$ .

### **Etape 7 : Résolution pour déterminer les forces globales, les déformations et les contraintes élémentaires**

Enfin, déterminer les déformations et les contraintes dans chaque élément par rétro-substitution des déplacements dans les équations similaires aux Eqs. (3.5) et (3.6).

### **3.3. Transformation des vecteurs en deux dimensions**

Dans de nombreux problèmes, il est pratique d'introduire à la fois des coordonnées locales  $(x', y')$  et globales (de référence)  $(x, y)$ . Les coordonnées locales sont toujours choisies pour représenter commodément l'élément individuel. Les coordonnées globales sont choisies pour se rapprocher de la pratique à l'ensemble de la structure.

Étant donné le déplacement nodal d'un élément, représenté par le vecteur  $d$  sur la figure 3.4, nous voulons relier les composantes de ce vecteur d'un système de coordonnées aux composantes d'un autre. Pour des raisons générales, nous supposerons dans cette section que  $d$  ne coïncide ni avec l'axe local ni avec l'axe global. Dans ce cas, nous voulons relier les composantes de déplacement global aux composantes de déplacement locales. Pour cela, nous développerons une matrice de transformation qui sera ensuite utilisée pour développer la matrice de rigidité globale d'un élément barre. Nous définissons l'angle  $\theta$  comme étant positif lorsqu'il est mesuré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre de  $x$  à  $x'$ . Nous pouvons exprimer le déplacement vectoriel  $d$  en coordonnées globales et locales par :

$$d = u i + v j = u' i' + v' j' \quad (3.16)$$

Où  $i$  et  $j$  sont des vecteurs unitaires dans les directions globales  $x$  et  $y$  et  $i'$  et  $j'$  sont des vecteurs unitaires dans les directions locales  $x'$  et  $y'$ . Nous allons maintenant relier  $i$  et  $j$  à  $i'$  et  $j'$  en utilisant la figure 3.5.

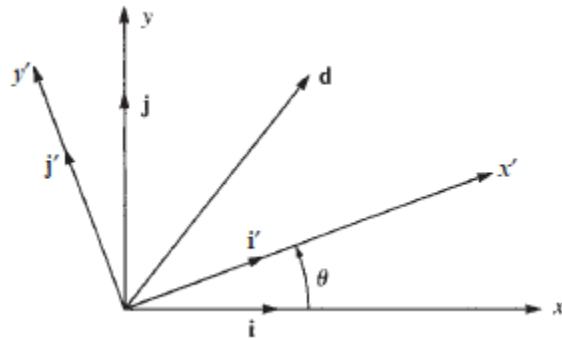


Figure 3.4. Vecteur général de déplacement.

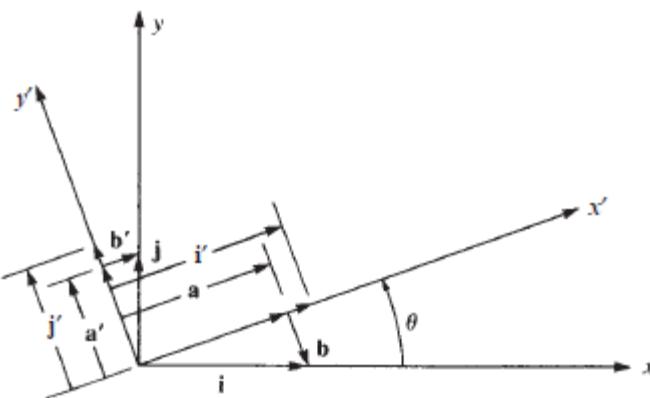


Figure 3.5. Relations entre les vecteurs unités locaux et globaux.



En utilisant la figure 3.5 et l'addition vectorielle, nous obtenons

$$a + b = i \quad (3.17)$$

De plus, d'après la loi des cosinus,

$$|a| = |i| \cos \theta \quad (3.18)$$

Et parce que  $i$  est, par définition, un vecteur unitaire, sa grandeur est donnée par

$$|i| = 1 \quad (3.19)$$

Par conséquent, on obtient :

$$|a| = 1 \cos \theta \quad (3.20)$$

De la même manière,

$$|b| = 1 \sin \theta \quad (3.21)$$

Maintenant  $a$  est dans la direction  $i'$  et  $b$  est dans la direction  $j'$ . Par conséquent,

$$a = |a| i' = (\cos \theta) i' \quad (3.22)$$

Et :

$$b = |b| (-j') = (\sin \theta) (-j') \quad (3.23)$$

En introduisant les équations. (3.22) et (3.23) dans l'équation. (3.17), on obtient :

$$i = \cos \theta i' + \sin \theta j' \quad (3.24)$$

De même, à partir de la figure 3.5, on obtient l'équation vectorielle

$$a' + b' = j \quad (3.25)$$

Tel que :

$$a' = \cos \theta j' \quad (3.26)$$

$$b' = \sin \theta i' \quad (3.27)$$

En utilisant les Eqs. (3.26) et (3.27) dans l'Eq. (3.25), nous avons :

$$j = \sin \theta i' + \cos \theta j' \quad (3.28)$$

Maintenant, en introduisant les Eqs. (3.24) et (3.28) dans l'Eq. (3.16), nous aurons :

$$u(\cos \theta i' - \sin \theta j') + v(\sin \theta i' + \cos \theta j') = u'i' + v'j' \quad (3.29)$$

En combinant les coefficients de  $i'$  et  $j'$  dans l'équation. (3.29), on obtient :

$$\begin{aligned} u \cos \theta + v \sin \theta &= u' \\ -u \sin \theta + v \cos \theta &= v' \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sous forme matricielle, les Eqs. (3.30) s'écrivent comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Tels que  $C = \cos \theta$  et  $S = \sin \theta$ .

L'équation (3.31) relie le vecteur de déplacements globaux  $\{d\}$  aux déplacements locaux  $\{d'\}$  comme

$$\{d'\} = [T]\{d\} \quad (3.32)$$

Où :

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \{d'\} = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

La matrice  $[T]$  est appelée matrice de transformation (ou de rotation). Elle sera utilisée dans la section 3.4 pour développer la matrice de rigidité globale d'un élément barre orienté arbitrairement et pour transformer les déplacements et forces du repère global au repère local.

Maintenant, pour le cas de  $v' = 0$ , nous avons, à travers l'Eq. (3.16),

$$u i + v j = u'i' \quad (3.34)$$

Dans la Figure 3.6, le déplacement  $u'$  est exprimé en termes de composantes globales  $x$  et  $y$ . En utilisant les fonctions trigonométriques et la figure 3.6, nous obtenons alors la magnitude de  $u'$  comme suit :

$$u' = C u + S v \quad (3.35)$$

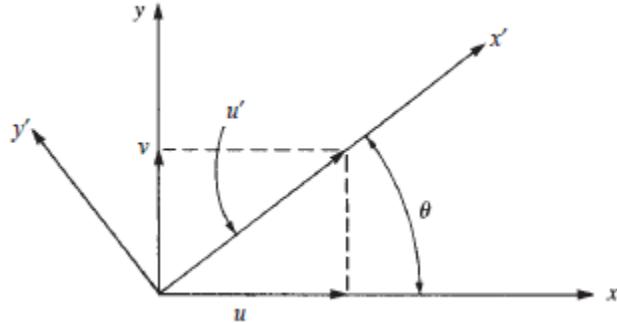


Figure 3.6. Relations entre les déplacements locaux et globaux.

### 3.4. Matrice de rigidité globale d'un élément barre arbitrairement orienté en plan

Considérons une barre inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe global  $x$  identifié par l'axe local  $x'$  dirigé du nœud 1 au nœud 2, comme le montre la figure 3.7. Ici, l'angle positif  $\theta$  est pris dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de  $x$  à  $x'$ .

Nous utilisons maintenant l'Eq. (3.13) où une notation principale est utilisée pour désigner la matrice de rigidité élémentaire locale  $[k']$  qui relie les forces nodales locales  $\{f'\}$  aux déplacements nodaux locaux  $\{d'\}$  comme le montre l'Eq. (3.36).

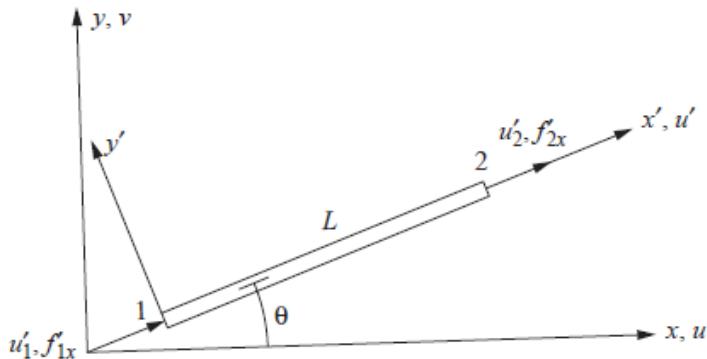


Figure 3.7. Élément barre arbitrairement orienté dans le plan global  $x - y$ .

$$\begin{cases} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{cases} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} u'_1 \\ u'_2 \end{cases} \quad (3.36)$$

Ou

$$\{f'\} = [k']\{d'\} \quad (3.37)$$

Nous voulons maintenant relier les forces nodales globales  $\{f\}$  aux déplacements nodaux globaux  $\{d\}$  pour un élément barre orienté arbitrairement par rapport aux axes globaux comme le montre la figure 3.7. Cette relation donnera la matrice de rigidité élémentaire globale  $[k]$ . C'est-à-dire que nous voulons trouver une matrice  $[k]$  tel que :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Ou, sous forme matricielle simplifiée, l'Eq. (3.38) devient :

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (3.39)$$

Nous observons à partir de l'Eq. (3.38) qu'un total de quatre composantes de force et quatre de déplacements se produisent lorsque les coordonnées globales sont utilisées. Cependant, un total de deux composantes de forces et deux de déplacements apparaissent pour la représentation en coordonnées locales d'un ressort ou d'une barre, comme le montre l'Eq. (3.36). En utilisant les relations entre les composantes de forces locales et globales et entre les composantes des déplacements locaux et globaux, nous pourrons obtenir la matrice de rigidité globale. Nous savons à partir de la relation de transformation Eq. (3.31) que :

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta \\ u'_2 &= u_2 \cos \theta + v_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (3.40)$$

Sous forme matricielle, les Eqs. (3.40) peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Ou comme :

$$\{d'\} = [T_1]\{d\} \quad (3.42)$$

Avec :

$$[T_1] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

De même, puisque les forces se transforment de la même manière que les déplacements, nous remplaçons les déplacements locaux et globaux dans l'équation. (3.41) par les forces locales et globales pour obtenir :

$$\begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{y1} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Similairement à l'Eq. (3.42), on peut écrire l'équation. (3.44) comme :

$$\{f'\} = [T_1]\{f\} \quad (3.45)$$

Maintenant, en remplaçant l'Eq. (3.42) dans l'équation. (3.37), on obtient :

$$\{f'\} = [k'][T_1]\{d\} \quad (3.46)$$

Et en utilisant l'Eq. (3.45) dans l'Eq. (3.46) donne :

$$[T_1]\{f\} = [k'][T_1]\{d\} \quad (3.47)$$

Cependant, pour écrire l'expression finale reliant les forces nodales globales aux déplacements nodaux globaux pour un élément, nous devons inverser  $[T_1]$  dans l'équation. (3.47). Ceci n'est pas immédiatement possible car  $[T_1]$  n'est pas une matrice carrée. Par conséquent, nous devons développer  $\{d'\}$ ,  $\{f'\}$ , et  $[k']$  dans l'ordre compatible avec l'utilisation des coordonnées globales même si  $f'_{1y}$  et  $f'_{2y}$  sont nuls. En utilisant l'éq. (3.31) pour chaque déplacement nodal, on obtient ainsi :

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Ou :

$$\{d'\} = [T_2]\{d\} \quad (3.49)$$

Tel que :

$$[T_2] = \begin{pmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

De la même façon, nous pouvons écrire :

$$\{f'\} = [T_2]\{f\} \quad (3.51)$$

Vu que les caractéristiques des forces et des déplacements sont les mêmes,  $[k']$  doit être étendu à une matrice (4\*4). Par conséquent, l'Eq. (3.36) sous forme développée devient :

$$\begin{pmatrix} f'_{1x} \\ f'_{1y} \\ f'_{2x} \\ f'_{2y} \end{pmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Dans l'Eq. (3.52), du fait que  $f'_{1y}$  et  $f'_{2y}$  sont nuls, des rangées de zéros correspondant aux numéros de rangée  $f'_{1y}$  et  $f'_{2y}$  apparaissent dans  $[k']$ . Maintenant, en introduisant les équations. (3.49) et (3.51) dans l'équation. (3.37), on obtient alors :

$$[T_2]\{f\} = [k'][T_2]\{d\} \quad (3.53)$$

L'équation (3.53) est l'équation. (3.47) étendue en multipliant les deux côtés de l'équation. (3.53) par  $[T_2]^{-1}$ , on aura :

$$\{f\} = [T_2]^{-1}[k'][T_2]\{d\} \quad (3.54)$$

Où  $[T_2]^{-1}$  est l'inverse de  $[T_2]$ . Cependant, on peut montrer que :

$$[T_2]^{-1} = [T_2]^T \quad (3.55)$$

Où  $[T_2]^T$  est la matrice transposée de  $[T_2]$ .

En substituant l'équation. (3.55) dans l'équation. (3.54), on obtient :

$$\{f\} = [T_2]^T[k'][T_2]\{d\} \quad (3.56)$$

La comparaison des Eqs. (3.39) et (3.56) donne la matrice de rigidité globale comme suit :

$$[k] = [T_2]^T [k'] [T_2] \quad (3.57)$$

En substituant l'Eq. (3.50) dans  $[T_2]$  et la forme développée de  $[k']$  donnée dans l'Eq. (3.52) dans l'équation (3.57), on obtient  $[k]$  donné sous forme explicite comme suit :

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

L'équation (3.58) est la matrice de rigidité explicite d'une barre orientée arbitrairement dans le plan x-y.

Pour avoir la matrice de rigidité globale d'une structure en treillis, les matrices de rigidité élémentaires peuvent être additionnée en utilisant la méthode de rigidité directe comme :

$$\sum_{e=1}^N [k^{(e)}] = [K] \quad (3.59)$$

Avec  $[K]$  étant la matrice de rigidité totale et  $N$  le nombre total d'éléments. De la même façon, le vecteur de forces totales est déterminé par cet assemblage :

$$\sum_{e=1}^N \{f^{(e)}\} = \{F\} \quad (3.60)$$

$[K]$  relie les forces nodales globales  $\{F\}$  aux déplacements nodaux globaux  $\{d\}$  pour l'ensemble de la structure par :

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (3.61)$$

### 3.5. Détermination des contraintes d'un élément barre en plan

Nous allons maintenant évaluer la détermination de la contrainte dans un élément barre. Pour une barre, les efforts locaux sont liés aux déplacements locaux par l'Eq. (3.36) ou Éq. (3.52). cette équation est répétée ici pour plus de commodité.

$$\begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

La définition habituelle de la contrainte axiale de traction est la force axiale divisée par la section transversale. Par conséquent, la contrainte axiale est :

$$\sigma = \frac{f'_{2x}}{A} \quad (3.63)$$

Où  $f'_{2x}$  est utilisé puisqu'il s'agit de la force axiale qui tend la barre, comme illustré à la Figure 3.8. Par l'Eq. (3.62) :

$$f'_{2x} = \frac{AE}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

Par conséquent, en combinant les équations. (3.63) et (3.64), nous obtenons :

$$\{\sigma\} = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \{d'\} \quad (3.65)$$

En utilisant l'Eq. (3.42), on obtient :

$$\{\sigma\} = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] [T_1] \{d\} \quad (3.66)$$

L'équation (3.66) peut être exprimée sous la forme la plus simple comme étant :

$$\{\sigma\} = [C'] \{d\} \quad (3.67)$$

Avec :

$$[C'] = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

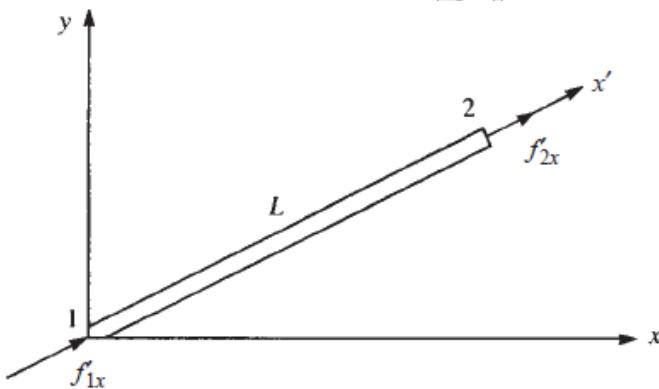


Figure 3.8. Elément barre général avec des forces nodales positives.

Après avoir multiplié les matrices dans l'Eq. (3.68), on obtient :

$$[C'] = \frac{E}{L} [-C \quad -S \quad C \quad S] \quad (3.69)$$

### 3.6. Structures treillis

Nous allons maintenant illustrer l'utilisation des équations développées dans les sections 3.4 et 3.5, ainsi que la méthode de rigidité directe d'assemblage de la matrice de rigidité totale et des équations, pour résoudre les problèmes des structures en treillis plan. Un treillis plan est une structure composée d'éléments barre qui se trouvent tous dans un plan commun et sont reliés par des rotules. Le treillis plan doit également avoir des charges agissant uniquement dans le plan commun et toutes les charges doivent être appliquées aux noeuds.

Tout d'abord, nous déterminons les matrices de rigidité globale pour chaque élément en utilisant l'équation. (3.58). cela nécessite la détermination de l'angle entre l'axe  $x$  global et l'axe  $x'$  local pour chaque élément.

Il est pratique de construire le tableau 3.1 pour aider à déterminer la matrice de rigidité de chaque élément.

Tableau 3.1. Tableau de données du treillis

Elément	Connectivité	$\theta$	$L$	$C$	$S$	$C^2$	$S^2$	$CS$

La matrice globale  $[K]$ , relie les forces globales aux déplacements globaux. Nous écrivons donc les équations de rigidité totale de la structure, tenant compte des conditions aux limites des forces et des déplacements.

### 3.7. Appuis inclinés

Dans les sections précédentes, les appuis ont été orientés de telle sorte que les conditions aux limites résultantes sur les déplacements soient dans les directions globales,  $x$  et  $y$ .

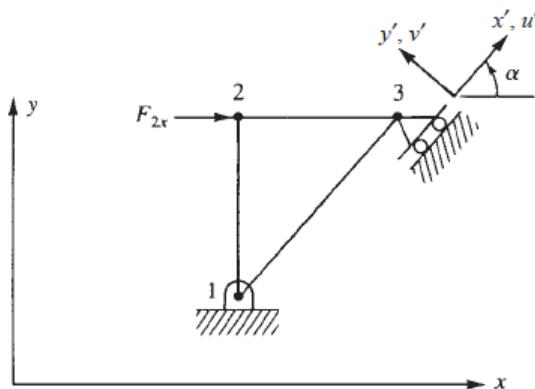


Figure 3.9 Treillis plan avec appui incliné au nœud 3

Cependant, si un support est aligné ou incliné à un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $x$  global, comme indiqué au nœud 3 dans le truss plan de la figure 3.9, les conditions aux limites résultantes sur les déplacements ne sont pas dans les directions  $x - y$  globales mais sont dans les directions locales  $x' - y'$  et peuvent être introduites en utilisant leurs projections sur les directions  $x - y$  globales, (voir la figure 3.10).

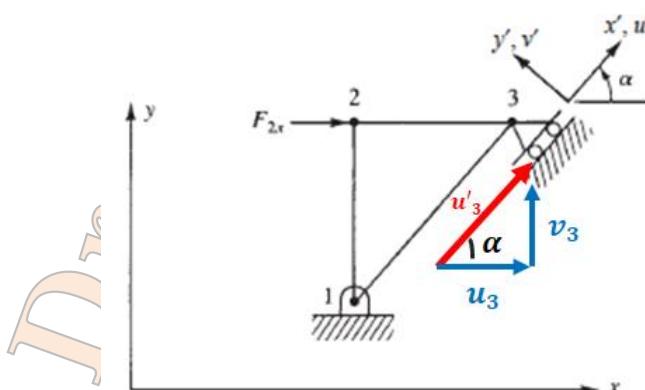


Figure 3.10. Treillis avec appui incliné

### 3.8. Problèmes

#### EXERCICE 1

Considérons l'assemblage de trois (03) barres de la figure 1.

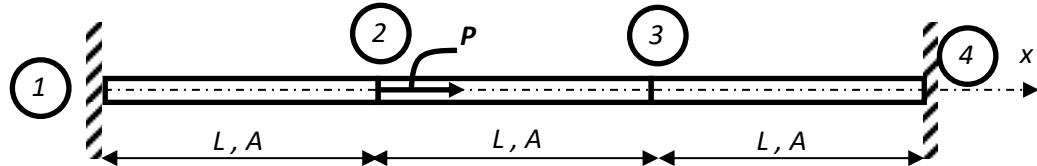


Figure 1

Déterminer :

- 1- La matrice globale de rigidité.
- 2- Les déplacements des nœuds 2 et 3.
- 3- Les réactions aux nœuds 1 et 4.

#### EXERCICE 2

Considérons la barre composée d'éléments de sections variables représentée sur la figure 2. Soient E le module d'élasticité du matériau de la barre, les aires des sections droites sont : A entre les nœuds 1 et 2, 2A entre les nœuds 2 et 3 et 3A entre les nœuds 3 et 4.

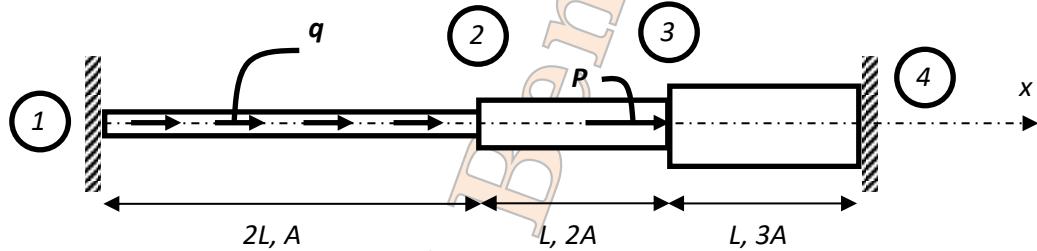


Figure 2

La barre est encastrée à ses deux extrémités (nœuds 1 et 4) et sollicitée sur l'élément 1-2 par une charge  $q$  uniformément répartie. Au nœud 3, on applique une force concentrée d'intensité  $P=2qL$ . Déterminer les déplacements nodaux ainsi que les réactions d'appuis.

#### EXERCICE 4

Soit à analyser la structure de la figure 3, composée d'une barre et d'un ressort.

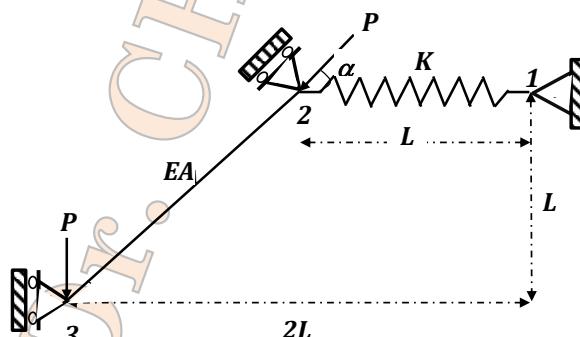
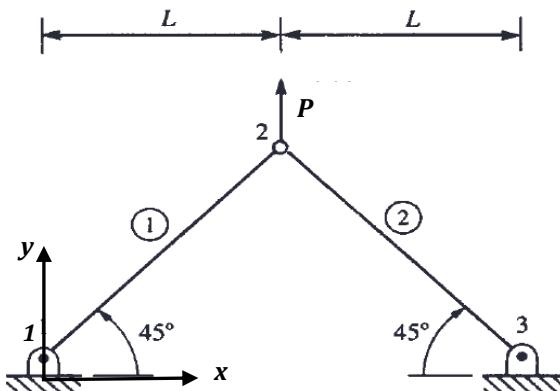


Figure 3

Déterminer les forces locales dans les deux éléments. On donne :  $K = \frac{EA}{2\sqrt{2}L}$

**EXERCICE 4**

Soit la structure en treillis plan ci-contre :



Déterminer :

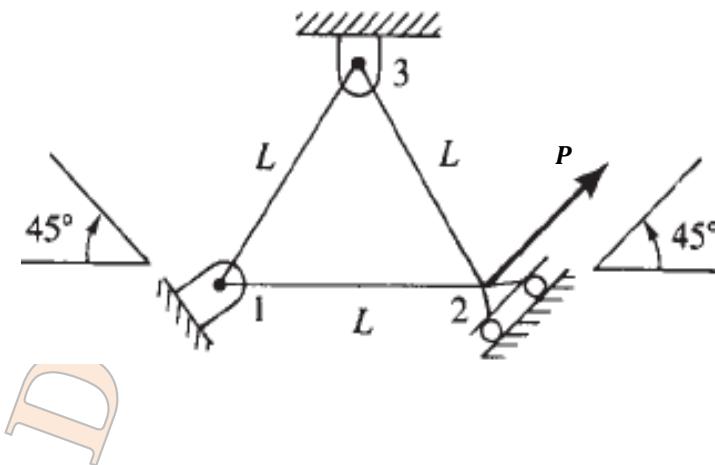
- 1- La matrice de rigidité globale.
- 2- Les déplacements du nœud 2.
- 3- Les contraintes à l'intérieur de l'élément 1.

**EXERCICE 5**

Soit à analyser la structure en treillis ci-contre composée de trois (03) barres semblables de rigidité extensionnelle EA.

Déterminer :

- 1- Les déplacements du nœud 2.
- 2- L'effort interne dans l'élément 2-3.
- 3- La contrainte dans l'élément 2-3.



# Méthode des Eléments Finis : Théories et Problèmes

Dr. CHIKH Benazouz, HDR, Maître de Conférences « A »

Département Matériaux et Structures « DMS »

Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics-Francis Jeanson « ENSTP-FJ »

## Chapitre 2

### 2. Introduction à la Méthode de Rigidité (Méthode des déplacements)

#### Objectifs

- 2.1. Introduction
- 2.2. Définition de la matrice de rigidité
- 2.3. Détermination de la matrice de rigidité d'un élément ressort
- 2.4. Assemblage des matrices élémentaires
- 2.5. Construction de la matrice de rigidité globale par superposition (Méthode de Rigidité directe)
- 2.6. Conditions aux limites et résolution du système d'équations

Résumé de cours

Références et problèmes

#### Objectifs

Ce chapitre vise à :

- Présenter les différentes étapes de la formulation des problèmes statiques par éléments finis.
- Développer la matrice de rigidité élémentaire.
- Démontrer la méthode de rigidité directe en considérant des modèles en éléments finis de ressorts.
- Etudier l'assemblage, les conditions aux limites, et la résolution du système d'équations linéaires.

## 2.1. Introduction

Ce chapitre présente certains concepts de base sur lesquels la méthode de rigidité directe est fondée. Le ressort linéaire est introduit en premier, car il fournit un outil simple mais généralement instructif pour illustrer les concepts de base. Nous commençons par une définition générale de la matrice de rigidité, puis nous déterminons la matrice de rigidité pour un élément ressort linéaire-élastique. Nous illustrons ensuite, comment assembler la matrice de rigidité totale d'une structure comprenant un assemblage d'éléments de ressorts en utilisant des concepts élémentaires d'équilibre et de compatibilité. Par la suite, nous allons montrer comment la matrice de rigidité globale d'un assemblage peut être obtenue en superposant de manière directe les matrices de rigidité élémentaires.

Après avoir établi la matrice de rigidité globale, nous illustrons comment introduire des conditions aux limites homogènes et non homogènes. On obtient ainsi une solution complète comprenant les déplacements noraux et les réactions.

### 2.1. Définition de la matrice de rigidité

Le plus simple concept idéalisant un élément de structure est le ressort articulé à ses deux extrémités (figure 2.1a). Pour un tel élément il existe une relation directe entre la force dans le ressort  $f$  et le déplacement  $d$  de son extrémité libre, cette relation prend la forme de l'équation 2.1.

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (2.1)$$

Tels que la matrice  $[k]$  relie les déplacements noraux  $\{d\}$  aux forces noraux  $\{f\}$  pour un seul élément, comme il est illustré à la figure 2.1a. Une seule valeur de rigidité est suffisante pour caractériser l'état de déformation du ressort.

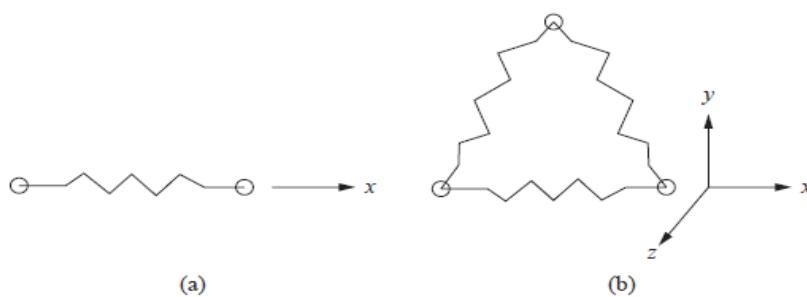


Figure 2.1. (a) Elément ressort et (b) Assemblage de 3 ressorts.

Supposons, que pour une structure complète (série de ressorts), comme l'assemblage illustré à la figure 2.1b, on puisse déterminer une quantité similaire à  $k$  de l'éq (2.1), il est alors nécessaire d'écrire cette dernière sous forme matricielle comme l'équation (2.2).

Les quantités  $\{F\}$  et  $\{d\}$  sont respectivement les vecteurs représentant les charges et les déplacements noraux.

La quantité  $[K]$  est la matrice de rigidité globale de la structure (de l'assemblage de ressorts). Elle relie les forces nodales  $\{F\}$  appliquées aux déplacements nodaux  $\{d\}$ .

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (2.2)$$

## 2.2. Détermination de la matrice de rigidité d'un élément ressort

En utilisant l'approche d'équilibre directe, nous allons maintenant démontrer la matrice de rigidité pour un ressort linéaire unidimensionnel, c'est-à-dire un ressort qui obéit à la loi de Hooke et résiste uniquement aux forces dans la direction du ressort.

Pour le ressort de la figure 2.2, un seul déplacement  $\delta$  est possible. Le ressort possède deux nœuds, chacun d'eux pouvant se déplacer et faire l'objet d'une force appliquée.

Sur la figure 2.2,  $f_{1x}, u_1$  et  $f_{2x}, u_2$ , sont les forces et les déplacements s'exerçant axialement.

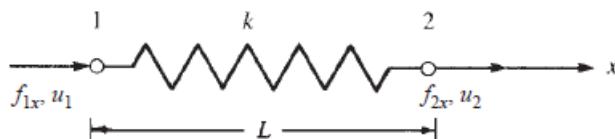


Figure 2.2. Élément ressort linéaire avec déplacement nodal positif et convention de signe de force.

Ces déplacements nodaux sont appelés les degrés de liberté à chaque nœud. Les directions positives pour les forces et les déplacements à chaque nœud sont prises dans la direction  $x$  positive comme indiqué du nœud 1 au nœud 2 sur la figure. Le symbole  $k$  est appelé la constante du ressort ou la rigidité du ressort.

Nous voulons maintenant développer une relation entre les forces nodales et les déplacements nodaux pour un élément ressort. Cette relation est assurée par la matrice de rigidité.

Le vecteur force pour le ressort sera donc:  $\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix}$

Le vecteur déplacement sera aussi:  $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

La matrice de rigidité pour le ressort est donc carrée d'ordre 2. L'équation 2.2 prend la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

**Etape 1 : Sélectionner le type de l'élément****Etape 2 : Sélectionner la fonction du déplacement**

La figure 2.3 illustre la principe de la fonction du déplacement

$$u = a_1 + a_2 x \quad (2.4)$$

$$= \langle 1 \quad x \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

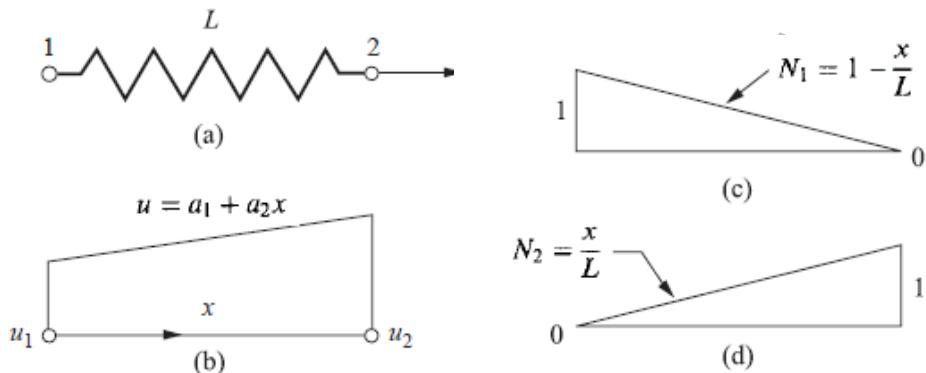


Figure 2.3. (a) Elément ressort (b) fonction du déplacement  $u$ , et les fonctions de formes (c)  $N_1$  et, (d)  $N_2$  sur la longueur de l'élément.

$$\begin{aligned} u(0) &= a_1 = u_1 \\ u(L) &= a_1 + a_2 L = u_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_2 = \frac{u_2 - u_1}{L} \end{cases}$$

$$u = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)x$$

$$u = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$u = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 = \frac{x}{L} \end{cases} \quad (2.7)$$

$N_i$  sont appelées les fonctions de forme.

**Etape 3 : Définition des relations Forces / Déplacements, Contraintes / Déformations et Déformations / Déplacements**

La déformation du ressort est représentée par (voir la figure 2.4) :

$$\delta = u(L) - u(0) = u_2 - u_1 \quad (2.8)$$

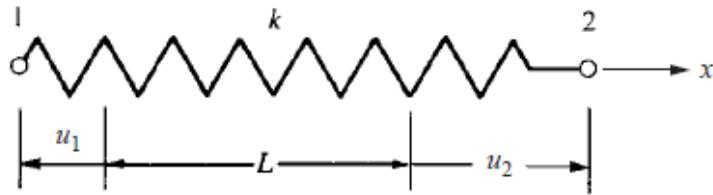


Figure 2.4. Déformations du ressort.

Pour un élément à ressort, on peut relier la force du ressort directement à sa déformation. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de définir la relation déformation / déplacement.

$$T = k\delta \quad (2.9)$$

Donc, nous utilisons Eq (2.8) et l'Eq (2.9), pour avoir (voir figure 2.5):

$$T = k(u_2 - u_1) \quad (2.10)$$

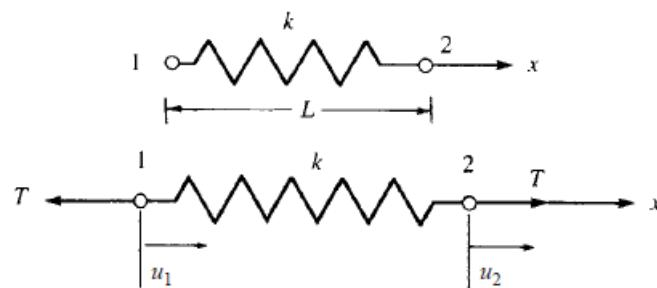


Figure 2.5. Élément ressort linéaire soumis à une force de traction.

#### Etape 4 : Détermination de la matrice de rigidité et les équations élémentaires

Nous déterminons maintenant la matrice de rigidité du ressort en utilisant la convention de signe et l'équilibre des forces nodales (voir figures 2.2 et 2.5), nous avons :

$$f_{1x} = -T \quad f_{2x} = T \quad (2.11)$$

Utilisons les équations (2.10) et (2.11), nous avons :

$$\begin{aligned} T &= -f_{1x} = k(u_2 - u_1) \\ T &= f_{2x} = k(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ces équations peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{aligned} f_{1x} &= k(u_1 - u_2) \\ f_{2x} &= k(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ou sous formes matricielles :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Ainsi la matrice élémentaire de rigidité pour un seul ressort est donnée par l'équation (2.15), l'indice ( $e$ ) étant utilisé pour indiquer que la matrice est élémentaire (pour un seul élément).

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$[k^{(e)}]$  est appelée la matrice de rigidité locale ou élémentaire. elle est en effet symétrique, le coefficient  $k_{12}$  étant égal au coefficient  $k_{21}$ ; c'est une conséquence attendue du théorème de réciprocité.

### Etape 5 : Assmblage des équations des éléments pour obtenir les équations globales et introduction des conditions aux limites

La matrice de rigidité globale et le vectuer des forces globales sont assemblés à l'aide d'équations d'équilibre des forces nodales, d'équations de force / déformation et de compatibilité, et de la méthode de rigidité directe. Cette étape s'applique aux structures composées de plus d'un élément telles que :

$$[K] = \sum_{e=1}^N [k^{(e)}] \quad \{F\} = \sum_{e=1}^N \{f^{(e)}\} \quad (2.16)$$

$[k^{(e)}$ ] et  $\{f^{(e)}$  sont la matrice de rigidité et le vecteur de forces élémentaires, respectivement, exprimées dans le repère global. (Le signe  $\Sigma$  utilisé dans ce contexte n'implique pas une simple sommation des matrices élémentaires mais indique plutôt que ces matrices élémentaires doivent être assemblées correctement selon la méthode de la rigidité directe).

### Etape 6 : Résolusion pour déterminer les déplacements nodaux

Les déplacements sont ensuite déterminés en introduisant des conditions aux limites, telles que des conditions d'appuis, et en résolvant le système d'équations suivant:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (2.17)$$

### Etape 7 : Résolusion pour déterminer les forces élémentaires

Enfin, les forces élémentaires sont déterminées par substitution inverse, appliquée à chaque élément, dans des équations similaires aux équations (2.14).

## 2.3. Assemblage des matrices élémentaires

### ❖ Exemple

La figure 2.6 illustre/un exemple de deux ressorts.

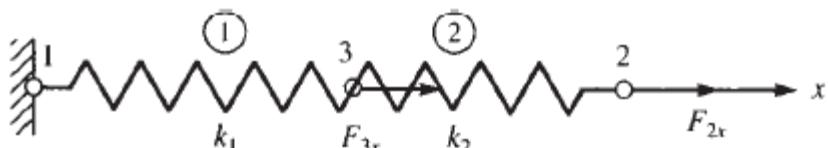


Figure 2.6. Assemblage de deux éléments ressorts.

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x}^{(2)} \\ f_{2x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

De plus, les éléments 1 et 2 doivent être connectés au nœud 3 (nœud commun). C'est ce qu'on appelle l'exigence de continuité ou de compatibilité qui donne :

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)} = u_3 \quad (2.18)$$

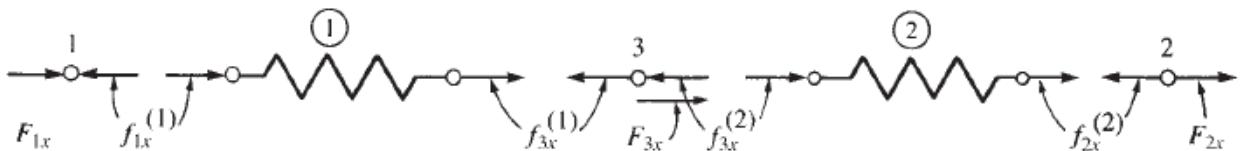


Figure 2.7. Forces nodales conformes à la convention de signe des forces élémentaires.

Sur la base des diagrammes de forces internes montrés dans la figure 2.7 et du fait que les forces externes doivent être égales aux forces internes à chaque nœud, nous pouvons écrire des équations d'équilibre nodales aux nœuds 3, 2 et 1 comme

$$\begin{aligned} F_{3x} &= f_{3x}^{(1)} + f_{3x}^{(2)} \\ F_{2x} &= f_{2x}^{(2)} \\ F_{1x} &= f_{1x}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Où  $F_{1x}$  résulte de la réaction externe appliquée à l'encastrement.

Les forces nodales sont déterminées en utilisant la 3<sup>ème</sup> loi de Newton

$$\begin{aligned} F_{3x} &= (-k_1 u_1 + k_1 u_3) + (k_2 u_3 - k_2 u_2) \\ F_{2x} &= (-k_2 u_3 + k_2 u_2) \\ F_{1x} &= (k_1 u_1 - k_1 u_3) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{2x} \\ F_{1x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

En réorganisant l'Eq (2.21) dans l'ordre numériquement croissant des degrés de liberté nodaux, nous obtenons

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Tels que :

$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix}$  est appelé le vecteur forces nodales globales,  $\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$  est appelé le vecteur déplacements nodaux globaux, et

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité globale ou totale.

## 2.4. Construction de la matrice de rigidité globale par superposition (Méthode de Rigidité directe)

Nous considérons maintenant une méthode plus pratique pour construire la matrice de rigidité totale. Cette méthode est basée sur une superposition directe des matrices de rigidité élémentaires constituant une structure.

En se référant à l'assemblage de deux ressorts de la section précédente où les matrices de rigidité élémentaires sont données comme suit :

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_3 \end{matrix} \quad [k^{(2)}] = \begin{bmatrix} u_3 & u_2 \\ k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_2 \end{matrix}$$

Pour l'élément 1, nous réécrivons sa matrice de rigidité sous forme globale comme :

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{2x}^{(1)} \\ f_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Pour l'élément 2, nous obtenons :

$$k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(2)} \\ f_{2x}^{(2)} \\ f_{3x}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Maintenant, nous utilisons l'équilibre des forces à chaque nœud.

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ 0 \\ f_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{2x}^{(2)} \\ f_{3x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Les vecteurs forces peuvent être remplacés par leurs systèmes de rigidité et de déplacement comme suit :

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{Bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

En utilisant les conditions de compatibilité, le système final peut s'écrire tout simplement comme suit:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Cette méthode d'assemblage directe des matrices de rigidité élémentaires pour former la matrice de rigidité globale de la structure et l'ensemble total d'équations est appelée méthode de rigidité directe. Elle est fiable et c'est une étape très importante dans la formulation des problèmes statiques par la méthode des éléments finis.

Pour l'exemple d'assemblage des ressorts, les lignes et les colonnes de chaque matrice de rigidité élémentaires peuvent être localisées en fonction des degrés de liberté qui leur sont associés.

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad [k^{(2)}] = \begin{bmatrix} u_3 & u_2 \\ k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$[K]$  est alors construite tout simplement en ajoutant directement les termes associés aux degrés de liberté de  $[k^{(1)}]$  et  $[k^{(2)}]$  dans leurs emplacements de degré de liberté correspondants dans la matrice de rigidité globale  $[K]$ .

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

## 2.5. Conditions aux limites et résolution du système d'équations

### 2.5.1. Conditions aux limites homogènes

Supposons que  $u_1 = 0$  (nœud 1 est fixe). Par conséquent, Eq (2.27) peut être écrit comme :

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

L'équation (2.29), s'écrit sous la forme développée comme suit :

$$\begin{aligned} k_1(0) + (0)u_2 - k_1u_3 &= F_{1x} \\ 0(0) + k_2u_2 - k_2u_3 &= F_{2x} \\ -k_1(0) - k_2u_2 + (k_1 + k_2)u_3 &= F_{3x} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Tels que  $F_{1x}$  est une réaction inconnue et  $F_{2x}$  et  $F_{3x}$  sont les charges appliquées aux noeuds.

En écrivant les deuxième et troisième lignes des équations (2.30) sous forme matricielle, nous aurons alors :

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Nous avons effectivement éliminé la première ligne et la première colonne du système d'équations pour arriver à l'équation (2.31).

### 2.5.2. Conditions aux limites non homogènes

Considérons maintenant le cas des conditions aux limites non homogènes. Par conséquent, un ou plusieurs déplacements spécifiés sont différents de zéro. Pour simplifier, soit  $u_1 = \delta$ , où  $\delta$  est un déplacement connu (figure 2.8). Le système d'équations devient maintenant :

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Sous forme développée :

$$\begin{aligned} k_1(\delta) + (0)u_2 - k_1u_3 &= F_{1x} \\ 0(\delta) + k_2u_2 - k_2u_3 &= F_{2x} \\ -k_1(\delta) - k_2u_2 + (k_1 + k_2)u_3 &= F_{3x} \end{aligned} \quad (2.33)$$

En écrivant les deuxième et troisième lignes des équations (1.33), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0(\delta) + k_2u_2 - k_2u_3 &= F_{2x} \\ -k_1(\delta) - k_2u_2 + (k_1 + k_2)u_3 &= F_{3x} \end{aligned} \quad (2.34)$$

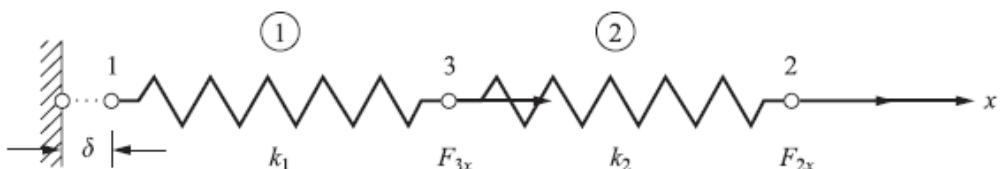


Figure 2.8. Assemblage de deux ressorts avec un déplacement connu  $\delta$  au noeud 1.

En arrangeant ces équations, on aura :

$$\begin{aligned} k_2u_2 - k_2u_3 &= F_{2x} \\ k_2u_2 + (k_1 + k_2)u_3 &= k_1(\delta) + F_{3x} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ou sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ k_1(\delta) + F_{3x} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

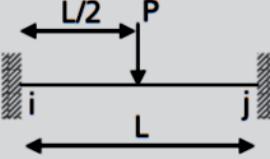
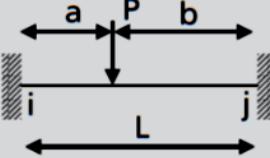
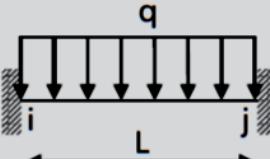
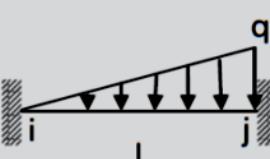
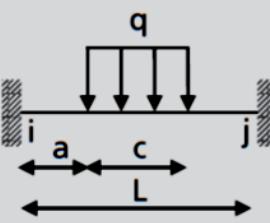
# ÉLÉMENTS POUTRES À DEUX NŒUDS EN FLEXION COMPOSÉE

## 1. MATRICE DE RIGIDITÉ ÉLÉMENTAIRE DANS LE REPÈRE GLOBAL

$$[K_e] = [R_e]^T [k_e] [R_e] =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{ES}{L} \cos^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \theta & \left( \frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \theta \sin \theta & -\frac{6EI}{L^2} \sin \theta & -\frac{ES}{L} \cos^2 \theta - \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \theta & \left( -\frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \theta \sin \theta & -\frac{6EI}{L^2} \sin \theta \\ \left( \frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \theta \sin \theta & \frac{ES}{L} \sin^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \theta & \frac{6EI}{L^2} \cos \theta & \left( -\frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \theta \sin \theta & -\frac{ES}{L} \sin^2 \theta - \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \theta & \frac{6EI}{L^2} \cos \theta \\ -\frac{6EI}{L^2} \sin \theta & \frac{6EI}{L^2} \cos \theta & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \sin \theta & -\frac{6EI}{L^2} \cos \theta & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} \cos^2 \theta - \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \theta & \left( -\frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \theta \sin \theta & \frac{6EI}{L^2} \sin \theta & \frac{ES}{L} \cos^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \theta & \left( \frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \theta \sin \theta & \frac{6EI}{L^2} \sin \theta \\ \left( -\frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \theta \sin \theta & -\frac{ES}{L} \sin^2 \theta - \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \theta & -\frac{6EI}{L^2} \cos \theta & \left( \frac{ES}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \theta \sin \theta & \frac{ES}{L} \sin^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \theta & -\frac{6EI}{L^2} \cos \theta \\ -\frac{6EI}{L^2} \sin \theta & \frac{6EI}{L^2} \cos \theta & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \sin \theta & -\frac{6EI}{L^2} \cos \theta & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

## 2. CHARGES NODALES ÉQUIVALENTES

Type de chargement	$F_{iy}$	$M_{iz}$	$F_{jy}$	$M_{jz}$
	$-\frac{P}{2}$	$-\frac{PL}{8}$	$-\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$
	$-\frac{Pb^2}{L^3}(2a+L)$	$-\frac{Pab^2}{L^2}$	$-\frac{Pa^2}{L^3}(L+2b)$	$\frac{Pa^2b}{L^2}$
	$-\frac{qL}{2}$	$-\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL}{2}$	$\frac{qL^2}{12}$
	$-\frac{3qL}{20}$	$-\frac{qL^2}{30}$	$-\frac{7qL}{20}$	$\frac{qL^2}{20}$
	$-q \cdot \begin{Bmatrix} c \\ -\frac{((a+c)^3 - a^3)}{L^2} \\ +\frac{((a+c)^4 - a^4)}{2L^3} \end{Bmatrix}$	$-\frac{q}{12L^2} \cdot \begin{Bmatrix} 6L^2((a+c)^2 - a^2) \\ -8L((a+c)^3 - a^3) \\ +3((a+c)^4 - a^4) \end{Bmatrix}$	$-q \cdot \begin{Bmatrix} \frac{((a+c)^3 - a^3)}{L^2} \\ -\frac{((a+c)^4 - a^4)}{2L^3} \end{Bmatrix}$	$\frac{q}{12L^2} \cdot \begin{Bmatrix} 4L((a+c)^3 - a^3) \\ -3((a+c)^4 - a^4) \end{Bmatrix}$

# Méthode des Eléments Finis : Théories et Problèmes

Dr. CHIKH Benazouz, Maître de Conférences « A »

Département Matériaux et Structures « DMS »

Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics-Francis Jeanson « ENSTP-FJ »

## Chapitre 5

### 5. Eléments plans (contraintes planes et déformations planes)

#### Objectifs

- 5.1. Introduction
- 5.2. Concepts de base des contraintes planes et des déformations planes
- 5.3. Formulation des éléments CST
- 5.4. Traitement des forces volumiques et surfaciques
- 5.5. Formulation des éléments finis quadrilatères Q4
- 5.6. Problèmes

#### Objectifs

Ce chapitre vise à :

- Revoir les concepts de base de la contrainte plane et de la déformation plane.
- Développer la matrice de rigidité et le système d'équations des éléments triangulaires à déformation constante (Constant-Strain Triangular, CST).
- Démontrer comment déterminer la matrice de rigidité et les contraintes pour un élément à déformation constante.
- Décrire comment traiter les forces volumiques et surfaciques pour les éléments bidimensionnels.
- Évaluer la matrice de rigidité explicite pour les éléments triangulaires à contrainte constante.
- Réaliser une solution détaillée par éléments finis d'un problème de contraintes planes.
- Développer la matrice de rigidité des éléments rectangulaires bilinéaire à quatre noeuds (Q4).
- Comparer les résultats des modèles CST et Q4 pour un problème de flexion de poutre et décrire certains des défauts des éléments CST et Q4.

## 5.1. Introduction

Dans les chapitres 2 et 3, nous n'avons considéré que les éléments unidimensionnels. Deux éléments 1D ou plus sont connectés uniquement aux nœuds communs, formant des structures à ossature ou articulées telles que des portiques et des treillis. Les éléments 1D ont des propriétés géométriques telles que la section transversale et le moment d'inertie associés à leurs sections transversales.

Cependant, une seule coordonnée locale  $x$  sur la longueur de l'élément est nécessaire pour décrire une position le long de l'élément (par conséquent, ils sont appelés éléments linéaires ou éléments unidimensionnels). La compatibilité nodale est alors utilisée lors de la formulation des équations d'équilibre nodal pour un élément unidimensionnel.

Ce chapitre considère l'élément fini bidimensionnel (plan) définis par trois nœuds ou plus dans un plan bidimensionnel (c-à-d  $x - y$ ). Les éléments sont connectés à des nœuds communs et/ou le long des bords communs pour former des structures continues telles que celles représentées dans la figure 5.1.

La compatibilité de déplacement nodal est ensuite appliquée lors de la formulation des équations d'équilibre nodal pour les éléments bidimensionnels. Si les fonctions de déplacement appropriées sont bien choisies, la compatibilité le long des bords communs est également obtenue.

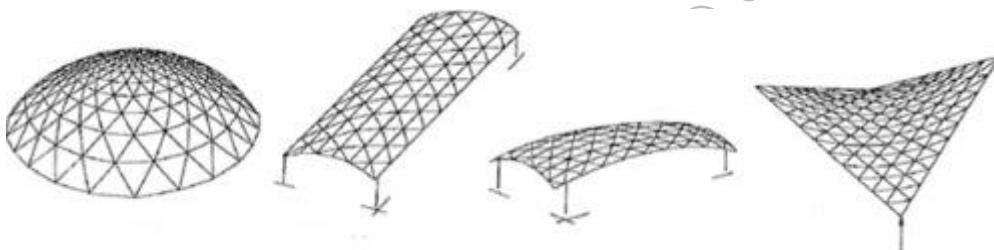


Figure 5.1. Modèle de discrétisation des coques

L'élément bidimensionnel est extrêmement important pour :

- L'analyse des contraintes planes traitant des problèmes tels que des plaques avec des trous ou d'autres changements de géométrie chargées dans leur plan entraînant des concentrations de contraintes locales, comme illustré dans la figure 5.2 ;
- L'analyse des déformations planes pour des problèmes tels que les éléments étendus souterrains soumis à une charge uniforme qui reste constante sur toute la longueur (ou la profondeur), les barrages et les tuyaux soumis à des charges qui restent constantes sur leur longueur, comme illustré à la figure 5.3.

Nous commençons ce chapitre par le développement de la matrice de rigidité pour un élément de base à deux dimensions ou un élément fini plan, appelé **constant-strain triangular element (CST)**. Nous considérons la matrice de rigidité de l'élément CST, car sa démonstration est la plus simple parmi les éléments bidimensionnels disponibles.

Nous démontrons la matrice de rigidité de l'élément CST en utilisant le principe de l'énergie potentielle minimale car la formulation énergétique est la plus utilisée pour le développement des équations des éléments finis bidimensionnels et tridimensionnels.

Nous présenterons par la suite un exemple de problème simple de contrainte plane d'une plaque mince pour illustrer l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires d'éléments plans à l'aide de la méthode de rigidité directe présentée au chapitre 2. Nous présenterons la solution totale, y compris les contraintes à l'intérieur de la plaque.

A la fin, nous développerons la matrice de rigidité d"élément rectangulaire simple à quatre noeuds (***Four-noded rectangular element, Q4***) et comparerons la solution par éléments finis d'un problème de flexion d'une poutre modélisée en utilisant les éléments CST et Q4.

## 5.2. Concepts de base des contraintes planes et des déformations planes

Dans cette section, nous décrirons les concepts de contrainte plane et de déformation plane. Ces concepts sont importants car les développements dans ce chapitre ne sont directement applicables qu'aux systèmes supposés se comporter en contrainte plane ou en déformation plane. Par conséquent, nous allons maintenant décrire ces concepts en détail.

### 5.2.1. Etat de contrainte plane

*La contrainte plane est définie comme un état de contrainte dans lequel les contraintes normales et tangentielle dirigées perpendiculairement au plan sont supposées nulles.*

Par exemple, dans les figures 5.2(a) et 5.2(b), les plaques représentées dans le plan  $x - y$  sont soumises à des tractions surfaciques  $T$  (pression agissant sur le bord de surface ou la face d'un élément en force par unité de surface) dans le plan où sont considérées sous un état de contrainte plane; c'est-à-dire que la contrainte normale  $\sigma_z$  et les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont supposées nulles.

En général, les éléments minces (ceux ayant une petite dimension  $z$  par rapport aux dimensions  $x$  et  $y$  dans le plan) et dont les charges agissent uniquement dans le plan  $x - y$  peuvent être considérés comme des contraintes planes.

### 5.2.2. Déformation plane

*La déformation plane est définie comme un état de déformation dans lequel les déformations normales  $\varepsilon_z$  et tangentielle  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  sont supposées nulles.*

Les hypothèses de déformation plane sont réalistes pour les corps longs (par exemple, dans la direction  $z$ ) avec une section transversale constante soumise à des charges agissant uniquement dans les directions  $x$  et/ou  $y$  et ne varient pas dans la direction  $z$ . Certains exemples de déformation plane sont illustrés à la figure 5.3.

Dans ces exemples, seule une épaisseur unitaire (1 mètre linéaire) de la structure est considérée, car chaque 1ml se comporte de manière identique (sauf près des extrémités).

Les modèles d'éléments finis des structures des figures 5.2 sont constitués de sections transversales discrétisées de manière appropriée dans le plan  $x - y$ , les charges agissant sur des épaisseurs unitaires uniquement dans les directions  $x$  et/ou  $y$ .

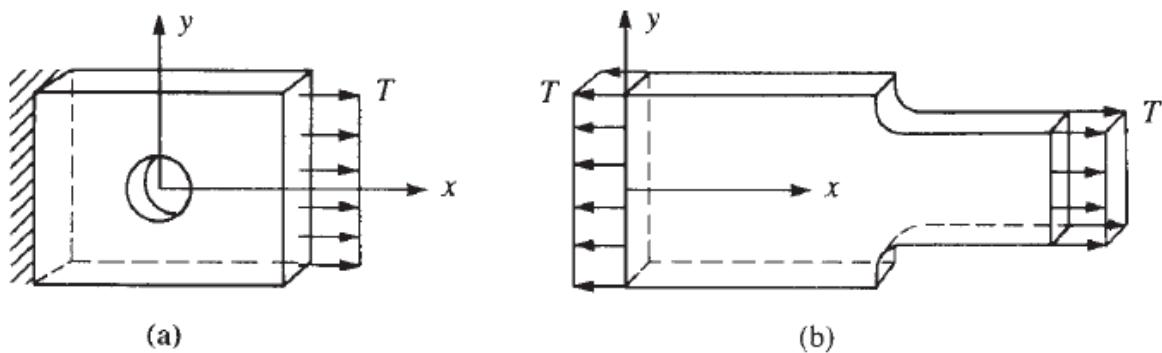


Figure 5.2. Problèmes de contraintes planes : (a) plaque avec trou ; (b) plaque avec filet

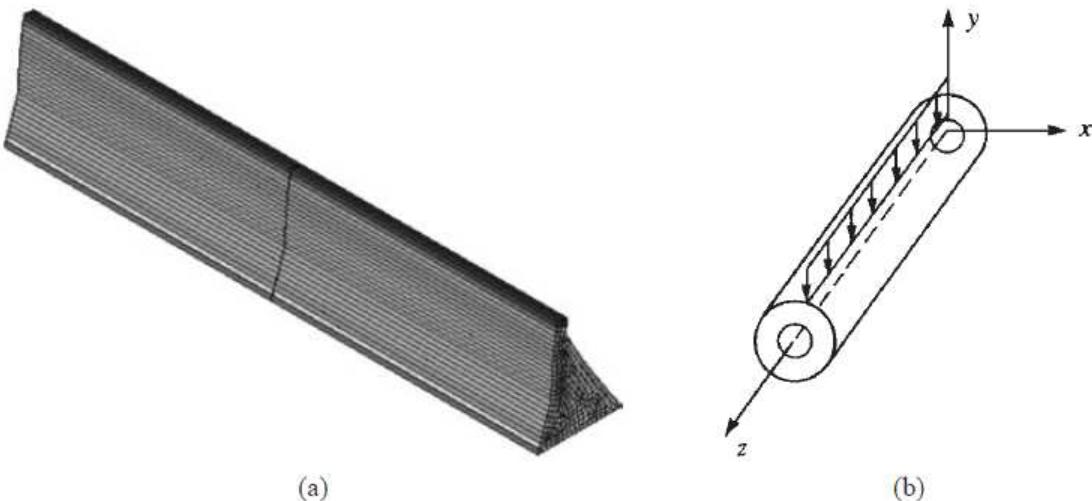


Figure 5.3. Problèmes de déformations planes

(a) barrage soumis à une charge horizontale; (b) tuyau soumis à une charge verticale

### 5.2.3. État bidimensionnel des contraintes et des déformations

Tout d'abord, nous illustrons l'état de contrainte 2D en utilisant la figure 5.4. L'élément infinitésimal de côtés  $dx$  et  $dy$  a des contraintes normales  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  agissant respectivement dans les directions  $x$  et  $y$  (ici sur les faces verticale et horizontale). La contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  agit sur le bord  $x$  (face verticale) dans la direction  $x$ .

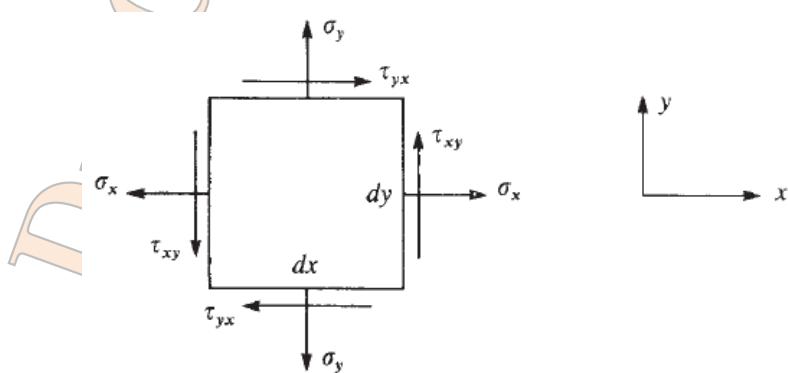


Figure 5.4. Etat bidimensionnel des contraintes

Trois contraintes indépendantes existent et sont représentées par le vecteur suivant :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Dans la figure 5.5, nous montrons un élément infinitésimal utilisé pour représenter l'état 2D général de déformation à un certain point dans une structure.

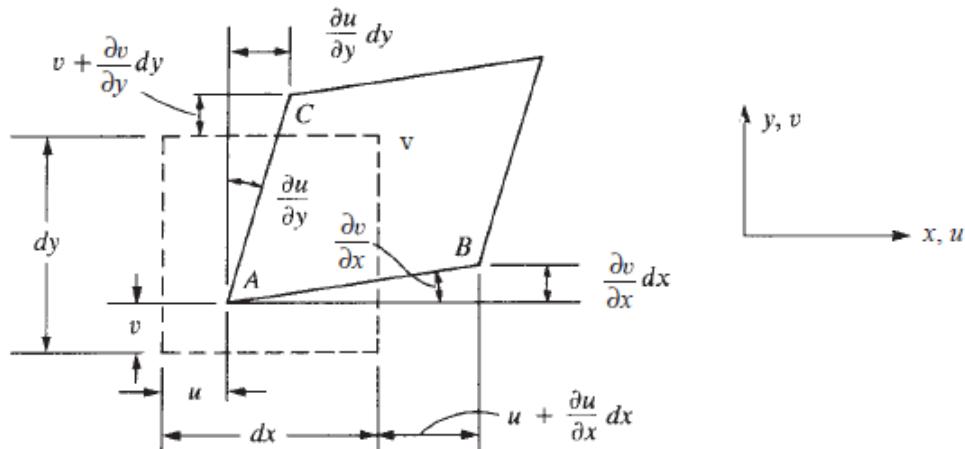


Figure 5.5. Déplacements et rotations d'un élément en plan  $x - y$

A partir des définitions générales des déformations normales et tangentialles et l'utilisation de la figure 5.5, nous obtenons :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.2)$$

Les déformations données par les équations (4.2) sont généralement représentées par le vecteur des déformations suivant :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Nous présentons maintenant les relations contrainte-déformation pour les matériaux isotropes dans le cas de contraintes planes et de déformations planes.

Pour les contraintes planes, nous supposons que les contraintes suivantes sont nulles :

$$\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad (5.4)$$

Application de l'équation (5.4) à la relation contrainte-déformation tridimensionnelle, les déformations tangentialles  $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$ , mais  $\varepsilon_z \neq 0$ . Pour les conditions de contraintes planes, nous avons alors :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (5.5)$$

Tel que :

$$[D] = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

[D] est appelée la matrice de comportement ou matrice de contrainte-déformation (matrice constitutive), E est le module d'élasticité et v est le coefficient de Poisson.

Pour la déformation plane, nous supposons que les déformations suivantes sont nulles:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (5.7)$$

Application de l'équation (5.7) à la relation contrainte-déformation tridimensionnelle, les contraintes tangentielles  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , mais  $\sigma_z \neq 0$ . Pour les conditions de déformations planes, nous avons alors :

$$[D] = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

### 5.3. Formulation des éléments CTS

Pour illustrer les étapes et introduire les équations de base nécessaires pour l'élément CST, considérons une plaque mince soumise à des charges de traction surfacique  $T_s$  illustrée sur les Figures 5-6 (a).

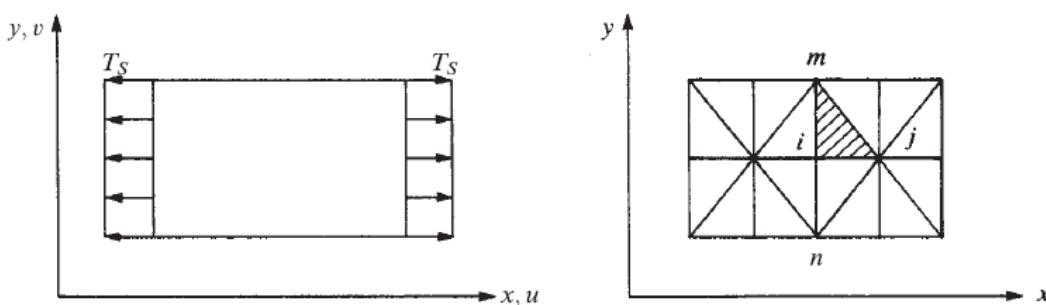


Figure 5.6. (a) Plaque mince en traction  
(b) Plaque discrétisée en utilisant l'élément CST

#### Etape 1 : Sélection du type d'élément

Pour analyser la plaque, nous considérons l'élément triangulaire de base de la figure 5.7 pris à partir de la plaque discrétisée, comme le montre la figure 5.6(b). La plaque discrétisée a été divisée en éléments triangulaires. Nous utilisons des éléments triangulaires car les limites (contours) des formes irrégulières des corps peuvent être rapprochées de cette manière, et parce que les expressions liées à l'élément triangulaire sont comparativement simples.

Chaque élément possède trois noeuds i, j et m et chaque noeud présente deux degrés de liberté, un déplacement suivant x et un déplacement suivant y. Les déplacements  $u_i$  et  $v_i$  représentent les composantes de déplacement du noeud i dans les directions x et y, respectivement.

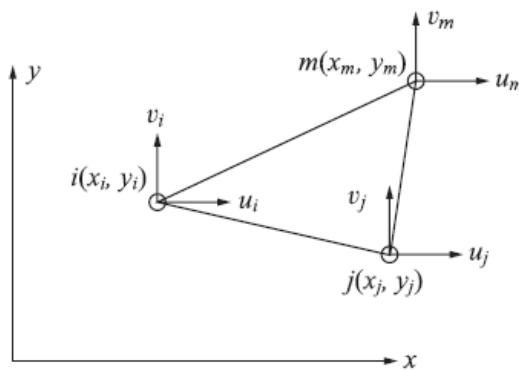


Figure 5.7. Elément triangulaire à trois nœuds (2DDL/nœud)

Ici, toutes les formulations sont basées sur ce système de sens inverse des aiguilles d'une montre pour numérotter les nœuds, bien qu'une formulation basée sur un système de sens des aiguilles d'une montre puisse être utilisée.

N'oubliez pas qu'une procédure de numérotation cohérente pour l'ensemble du corps est nécessaire pour éviter des problèmes dans les calculs tels que les zones d'éléments négatifs.

Ici  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$  et  $(x_m, y_m)$  sont les coordonnées nodales connues des nœuds i, j et m, respectivement.

Le vecteur des déplacements nœudaux est donné par :

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \{d_i\} \\ \{d_j\} \\ \{d_m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

### Etape 2 : Sélection des fonctions de déplacements

Nous sélectionnons une fonction de déplacement linéaire pour chaque élément comme :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x, y) &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  décrivent les déplacements en tout point intérieur  $(x_i, y_i)$  de l'élément.

La fonction linéaire garantit que la compatibilité sera satisfaite. Une fonction linéaire avec des points de limite spécifiés n'a qu'un seul chemin à travers lequel passer, c'est-à-dire à travers les deux points. Par conséquent, la fonction linéaire garantit que les déplacements le long du bord et aux nœuds communs par des éléments adjacents, tels que le bord i – j des deux éléments représentés sur la figure 5.6(b), sont égaux.

En utilisant les équations (5.10), la fonction générale de déplacement  $\{\psi\}$ , qui contient les fonctions  $u$  et  $v$ , peut être exprimée comme suit :

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ a_4 + a_5x + a_6y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Pour obtenir les  $a_i$  dans les équations (5.11), nous commençons par substituer les coordonnées des points nodaux pour avoir :

$$\begin{aligned} u_i &= u(x_i, y_i) = a_1 + a_2x_i + a_3y_i \\ u_j &= u(x_j, y_j) = a_1 + a_2x_j + a_3y_j \\ u_m &= u(x_m, y_m) = a_1 + a_2x_m + a_3y_m \\ v_i &= v(x_i, y_i) = a_4 + a_5x_i + a_6y_i \\ v_j &= v(x_j, y_j) = a_4 + a_5x_j + a_6y_j \\ v_m &= v(x_m, y_m) = a_4 + a_5x_m + a_6y_m \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nous pouvons résoudre le système (5.12) pour déterminer les  $a_i$  en commençant par les trois premières équations exprimées sous forme matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Donc, nous avons :

$$\{a\} = [x]^{-1}\{u\} \quad (5.14)$$

Une fois les  $a_i$  déterminés, nous pouvons réécrire les fonctions des déplacements comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v(x, y) &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned} \quad (5.15)$$

ou sous forme matricielle, nous avons

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\{\psi\} = [N]\{d\} \quad (5.17)$$

telle que  $[N]$  donnée par :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Nous avons maintenant exprimé les déplacements globaux comme des fonctions de  $\{d\}$ , en termes de fonctions de forme  $N_i$ ,  $N_j$  et  $N_m$ . Les fonctions de forme représentent la forme de  $\{\psi\}$  lorsqu'elles sont tracées sur la surface d'un élément typique.

Pour instance,  $N_i$  représente la forme de la variable  $u$  lorsqu'elle est tracée sur la surface de l'élément pour  $u_i = 1$  et tous les autres degrés de liberté égaux à zéro; c'est-à-dire :

$$v_i = u_j = v_j = u_m = v_m = 0.$$

De plus,  $u(x_i, y_i)$  doit être égal à  $u_i$ . Donc, nous devons avoir  $N_i = 1$ ;  $N_j = 0$  et  $N_m = 0$  en  $(x_i, y_i)$ . De même,  $u(x_j, y_j) = u_j$ . Par conséquent,  $N_i = 0$ ;  $N_j = 1$  et  $N_m = 0$  en  $(x_j, y_j)$ .

La figure 5.8 montre la variation de fonctions de forme  $N_i$  tracées sur la surface d'un élément typique.

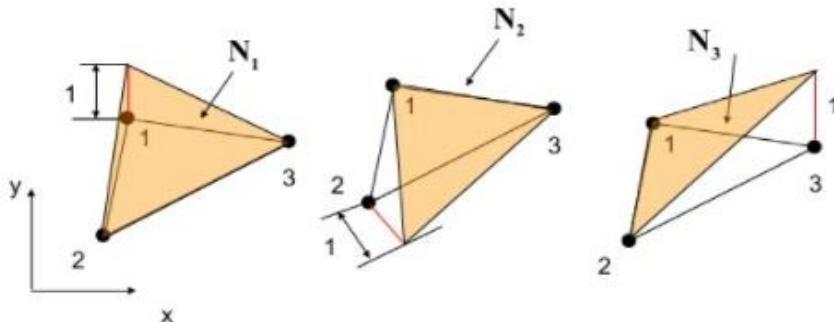


Figure 5.8. Variation de fonctions de forme pour CST

Enfin,  $N_i + N_j + N_m = 1$  pour toutes les coordonnées  $x$  et  $y$  sur la surface de l'élément de sorte que  $u$  et  $v$  donnent une valeur constante lors d'un déplacement de corps rigide.

### Etape 3 : Définition des relations contraintes-déformations et déformations-déplacements

Nous exprimons les déformations et les contraintes des éléments en termes de déplacements nodaux inconnus.

#### - Déformations-Déplacement

Les déformations associées à l'élément 2D sont données par :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.19a)$$

En substituant les fonctions de déplacement pour  $u$  et  $v$  des équations (5.10) à l'équation (5.19a), nous avons :

$$\varepsilon_x = a_2, \quad \varepsilon_y = a_6, \quad \gamma_{xy} = a_3 + a_5 \quad (5.19b)$$

On observe à partir de l'équation (5.19b) que les déformations dans l'élément sont constantes. L'élément est alors appelé un CST. Il convient également de noter que sur la base de l'hypothèse du choix des fonctions de déplacement linéaires en  $x$  et  $y$ , toutes les lignes de l'élément triangle restent droites lorsque l'élément se déforme.

L'équation (5.19a) peut s'écrire sous forme matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

ou

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{\psi\} \quad (5.21)$$

avec  $[\partial]$  : Opérateur de dérivation dont les dimensions dépendent de celles de l'élément étudié.

Le champs de déplacement est réécrit en utilisant l'équation (5.16), donc les déformations prennent cette nouvelle forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \\ 0 & 0 & N_i & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

La relation (5.22) fait intervenir une matrice  $[B]$  donnée par le produit suivant :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \\ 0 & 0 & N_i & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Nous obtenons :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

La matrice  $[B]$  (parfois appelée matrice de gradient) est indépendante des coordonnées  $x$  et  $y$ . Cela dépend uniquement des coordonnées nodales de l'élément, comme on le voit dans les équations (5.23) et (5.24). Les déformations dans l'équation (5.22) seront constantes donc cohérentes avec les expressions simples précédemment données par l'équation (5.19b).

### - Contraintes-Déformations

En général, les relations contraintes-déformations en plan sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

où  $[D]$  est donnée par l'équation (5.6) pour les problèmes de contrainte plane et par l'équation (5.8) pour les problèmes de déformation plane.

En utilisant l'équation (5.22) dans l'équation (5.25), nous obtenons les contraintes dans le plan en termes de degrés de liberté nodaux inconnus comme :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} \quad (5.26)$$

où les contraintes  $\{\sigma\}$  sont également constantes dans l'élément.

## Etape 4 : Développement des équations et de la matrice de rigidité élémentaire

En utilisant le principe de l'énergie potentielle minimale, nous pouvons générer les équations pour un élément CST typique. Gardez à l'esprit que pour l'élément de contrainte plane de base, l'énergie potentielle totale est maintenant fonction des déplacements nodaux  $u_i, v_i, u_j, \dots, v_m$  (c'est-à-dire  $\{d\}$ ) tels que :

$$\pi_p = \pi_p(u_i, v_i, u_j, \dots, v_m) \quad (7.27)$$

Donc, l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$\pi_p = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s \quad (5.28)$$

l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (5.29)$$

ou, en utilisant l'équation (5.25), nous avons :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV \quad (5.30)$$

où nous avons utilisé  $[D]^T = [D]$ .

L'énergie potentielle des forces volumiques est donnée par :

$$\Omega_b = - \iiint_V \{\psi\}^T \{X\} dV \quad (5.31)$$

où  $\{\psi\}$  est la fonction de déplacement général, et  $\{X\}$  est le poids volumique.

L'énergie potentielle des forces concentrées est donnée par :

$$\Omega_p = -\{d\}^T \{P\} \quad (5.32)$$

tel que  $\{d\}$  représente les déplacements nodaux, et  $\{P\}$  représente les charges exétrieures concentrées.

L'énergie potentielle des forces surfaciques est donnée comme suit :

$$\Omega_s = - \iint_S \{\psi_s\}^T \{T_s\} dS \quad (5.33)$$

où  $\{T_s\}$  représente les forces surfaciques,  $\{\psi_s\}$  représente le champ de déplacements de la surface où agissent les forces surfaciques, et  $S$  représente les surfaces sur lesquelles les tractions  $\{T_s\}$  s'appliquent.

Similaire à l'équation (5.17), nous exprimons  $\{\psi_s\}$  comme  $\{\psi_s\} = [N_s]\{d\}$ , où  $[N_s]$  représente la matrice de fonction de forme évaluée le long de la surface où la force surfacique agit.

En utilisant les équations (5.17) pour  $\{\psi\}$  et l'équation (5.21) pour les déformations dans les équations (5.31) à (5.33), nous avons :

$$\begin{aligned} \pi_p &= \frac{1}{2} \iiint_V \{d\}^T [B]^T [D] [B] \{d\} dV - \iiint_V \{d\}^T [N]^T \{X\} dV \\ &\quad - \{d\}^T \{P\} - \iint_S \{d\}^T [N_s]^T \{T_s\} dS \end{aligned} \quad (5.34)$$

Les déplacements nodaux  $\{d\}$  sont indépendants des coordonnées générales x-y, donc  $\{d\}$  peut être retiré des intégrales de l'équation (5.34). donc,

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{d\}^T \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \{d\} - \{d\}^T \iiint_V [N]^T \{X\} dV \\ - \{d\}^T \{P\} - \{d\}^T \iint_S [N_s]^T \{T_s\} dS \quad (5.35)$$

De l'équation (5.31) à travers (5.33), nous pouvons voir que les trois derniers termes des équations (5.35) représentent le système de charge totale  $\{f\}$  sur un élément; C'est :

$$\{f\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV + \{P\} + \iint_S [N_s]^T \{T_s\} dS \quad (5.36)$$

où les premier, deuxième et troisième termes du côté droit de l'équation (5.36) représentent respectivement les forces volumiques, les forces nodales concentrées et les forces surfaciques.

En utilisant l'équation (5.36) dans l'équation (5.35), nous obtenons :

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{d\}^T \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \{d\} - \{d\}^T \{f\} \quad (5.37)$$

En prenant la première variation, ou de manière équivalente, la dérivée partielle de  $\pi_p$  par rapport aux déplacements nodaux puisque  $\pi_p = \pi_p(\{d\})$ , on obtient :

$$\frac{\delta \pi_p}{\delta \{d\}} = \left[ \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{d\} - \{f\} = 0 \quad (5.38)$$

L'équation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\left[ \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{d\} = \{f\} \quad (5.39)$$

A partir de l'équation (5.39), nous pouvons voir que

$$[k] = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \quad (5.40)$$

Pour un élément avec une épaisseur constante, t, l'équation (5.40) devient :

$$[k] = t \iint_A [B]^T [D] [B] dx dy \quad (5.41)$$

où l'intégrale n'est pas fonction de x ou y pour l'élément CST et peut donc être retirée de l'intégrale pour donner :

$$[k] = t A [B]^T [D] [B] \quad (5.42)$$

À travers l'équation (5.42), nous voyons que  $[k]$  est une fonction des coordonnées nодales (parce que  $[B]$  et  $A$  sont définis en fonction de celles-ci) et des propriétés mécaniques E et v (dont  $[D]$  est une fonction). Le développement de l'équation (5.42) pour un élément s'écrit sous cette notation indicelle.

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] & [k_{im}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] & [k_{jm}] \\ [k_{mi}] & [k_{mj}] & [k_{mm}] \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

où les sous-matrices  $2 * 2$  sont données par :

$$\begin{aligned}[k_{ii}] &= [B_i]^T [D] [B_i] t A \\ [k_{ij}] &= [B_i]^T [D] [B_j] t A \\ [k_{im}] &= [B_i]^T [D] [B_m] t A\end{aligned}\quad (5.44)$$

Telles que  $[B_i]$ ,  $[B_j]$ , et  $[B_m]$  sont définies par l'équation (5.42).

La matrice  $[k]$  est de dimension 6\*6 (égale au nombre de degré de liberté par nœud (2DDL) multiplié par le nombre total des nœuds (3 nœuds)).

En général, l'équation (5.36) doit être utilisée pour évaluer les forces surfaciques et volumiques, sachant que, ces forces sont appelées charges cohérentes puisqu'elles sont développées de l'approche cohérente (énergétique).

Pour les éléments d'ordre supérieur, généralement avec des fonctions de déplacement quadratique ou cubique, l'équation (5.36) doit être utilisée. Cependant, pour l'élément CST, les forces volumiques et surfaciques peuvent être regroupées aux nœuds avec des résultats équivalents et ajoutées à toutes les forces nodales concentrées pour obtenir le système de forces de l'élément. Les équations des éléments sont alors données par :

$$\begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Enfin, en considérant que l'énergie de déformation U est le premier terme du côté droit de l'équation (5.30) et en utilisant l'expression de la matrice de rigidité donnée par l'équation (5.46), nous pouvons exprimer l'énergie de déformation dans la forme quadratique  $U = \frac{1}{2}\{\mathbf{d}\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}\}$ .

### **Etape 5 : Assemblage des équations élémentaires pour obtenir le système d'équations globales et introduction des conditions aux limites**

Nous obtenons la matrice de rigidité globale de la structure et les équations en utilisant la méthode de rigidité directe comme suit :

$$[\mathbf{K}] = \sum_{e=1}^N [\mathbf{k}^{(e)}] \quad (5.46)$$

et

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{d}\} \quad (5.47)$$

où, dans l'équation (5.46), toutes les rigidités élémentaires sont définies en fonction du système de coordonnées  $x - y$  global,  $\{\mathbf{d}\}$  est maintenant le vecteur de déplacement total de la structure,

et

$$\{\mathbf{F}\} = \sum_{e=1}^N \{f^{(e)}\} \quad (5.48)$$

est le vecteur des charges nodales globales équivalentes obtenues en regroupant les forces volumiques et les charges réparties aux nœuds appropriés (en incluant les charges nodales concentrées) ou en utilisant systématiquement l'équation (5.46).

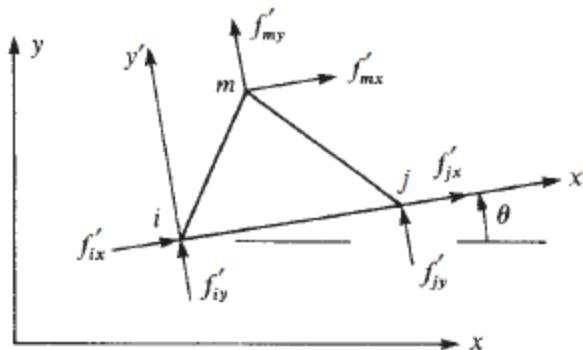


Figure 5.9. Elément CST avec des axes locaux arbitrairement orientés

Dans la formulation de l'équation de la matrice de rigidité élémentaire (5.42), la matrice a été développée pour une orientation générale en coordonnées globales. L'équation (5.42) s'applique alors à tous les éléments. Toutes les matrices élémentaires sont exprimées dans l'orientation des coordonnées globales. Par conséquent, aucune transformation des équations locales en équations globales n'est nécessaire.

Cependant, pour bien comprendre ce type de formulation, nous allons maintenant décrire la méthode à utiliser si les axes locaux de l'élément CST ne sont pas parallèles aux axes globaux de l'ensemble de la structure.

Si les axes locaux de l'élément CST ne sont pas parallèles aux axes globaux de l'ensemble de la structure, nous devons appliquer des transformations de rotation d'axes similaires à celles introduites au chapitre 3 à la matrice de rigidité élémentaire, le vecteur forces et le vecteur de déplacements nodaux.

Nous illustrons la transformation des axes pour l'élément triangulaire illustré à la figure 5.9, en considérant que l'élément a des axes locaux  $x' - y'$  non parallèles aux axes globaux  $x - y$ .

Les forces nodales locales sont représentées sur la figure. La transformation des équations locales en équations globales suit la procédure décrite dans le troisième chapitre. Nous avons les mêmes expressions générales, pour relier respectivement les déplacements locaux aux matrices globales de déplacement, de force et de rigidité :

$$\{d'\} = [T]\{d\} \quad ; \quad \{f'\} = [T]\{f\} \quad ; \quad [k] = [T]^T[k'][T] \quad (5.49)$$

Où la matrice de transformation  $[T]$  utilisée dans les équations (5.49) doit être développée, car deux degrés de liberté supplémentaires sont présents dans l'élément CST, nous avons :

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{matrix} \quad (5.50)$$

Tels que :  $C = \cos \theta$  ,  $S = \sin \theta$  et  $\theta$  est illustrée à la figure 5.10.

## Etape 6 : Résoudre pour les déplacements noraux

Nous déterminons les déplacements noraux de la structure globale en résolvant le système d'équations algébriques donné par l'équation (5.47)

## Etape 7 : Résoudre pour les forces élémentaires (contraintes)

Après avoir résolu les déplacements noraux, nous obtenons les déformations et les contraintes dans les directions globales x et y dans les éléments en utilisant les équations (5.21) et (5.26).

## 5.4. Traitement des forces volumiques et surfaciques

### 5.4.1. Forces volumiques

En utilisant le premier terme du côté droit de l'équation (5.36), nous pouvons évaluer les forces volumiques aux nœuds comme suit :

$$\{f_b\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV \quad (5.51)$$

Avec :

$$\{X\} = \begin{cases} X_b \\ Y_b \end{cases} \quad (5.52)$$

Et  $X_b$  et  $Y_b$  sont les poids volumiques dans les directions x et y en unités de force/unité de volume, respectivement. Ces forces peuvent provenir, par exemple, du poids réel (forces gravitationnelles), de la vitesse angulaire (appelées forces volumiques centrifuges) ou des forces inertielles en dynamique.

### 5.4.2. Forces surfaciques

En utilisant le troisième terme du côté droit de l'équation (5.36), nous pouvons évaluer les forces surfaciques aux nœuds comme :

$$\{f_s\} = \iint_S [N_s]^T \{T_s\} dS \quad (5.53)$$

Nous soulignons que l'indice S dans  $[N_s]$  dans l'équation (5.53) signifie les fonctions de forme évaluées le long de la surface où la force surfacique est appliquée ( $x = a$  par exemple) :

$$[N_s]^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

évaluée à  $x=a, y=y$

Et :

$$\{T_s\} = \begin{cases} p_x \\ p_y \end{cases} = \begin{cases} p \\ 0 \end{cases} \quad (5.55)$$

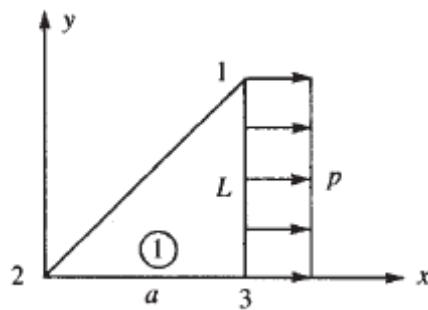


Figure 5.10. Exemple d'une charge surfacique

Nous pouvons conclure que pour un élément CST, une charge répartie sur un bord d'élément peut être traitée comme des charges concentrées agissant aux noeuds associés au bord chargé en rendant les deux types de charge statiquement équivalents.

## 5.5. Formulation des éléments finis quadrilatères Q4

Le Triangle de Pascal est aussi d'une utilité considérable dans la construction des fonctions de forme pour les éléments finis rectangulaires qui sont de deux principaux types :

Des exemples d'éléments finis Lagrangiens et les éléments finis Serendipes sont représentés dans les figures 5.11 et 5.12 respectivement.

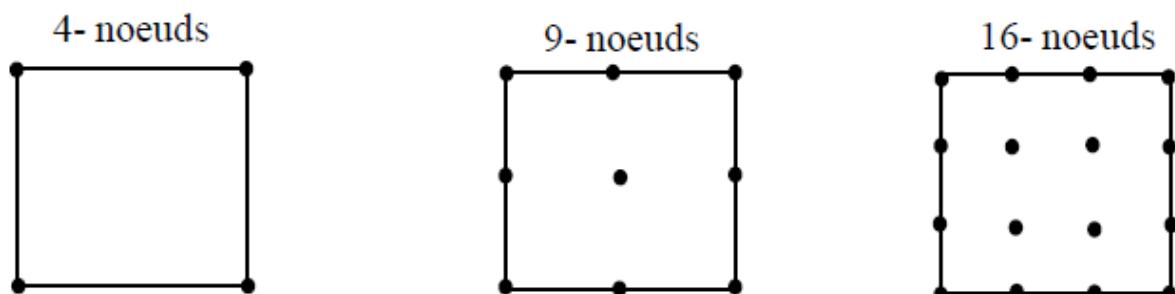


Figure 5.11. Eléments finis Lagrangiens

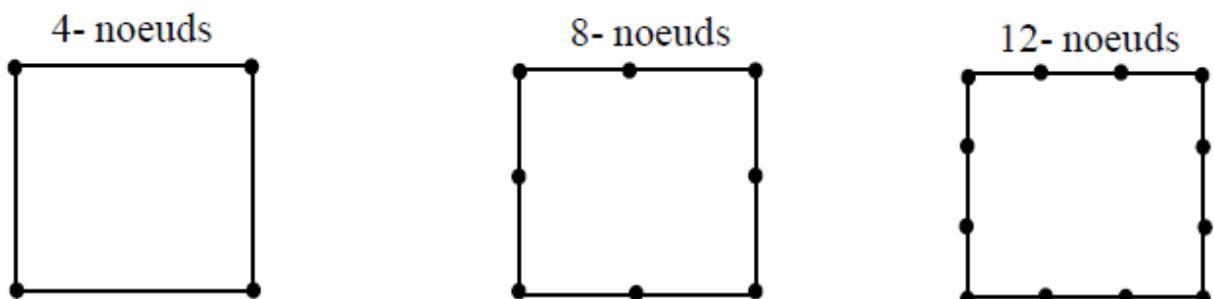


Figure 5.12. Eléments finis Serendipe

Les termes dans l'approximation de la fonction de déplacement  $u(x, y)$  pour chacun de ces éléments sont obtenus à partir du Triangle de Pascal comme le montre les figures 5.13 et 5.14.

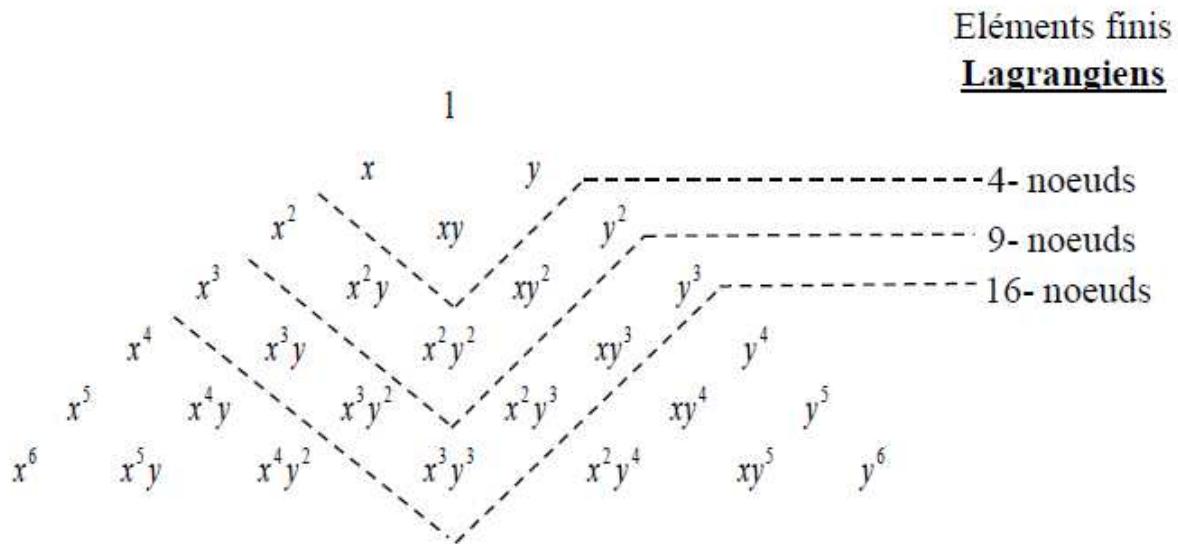


Figure 5.13. Triangle de Pascal-Eléments finis Lagrangiens

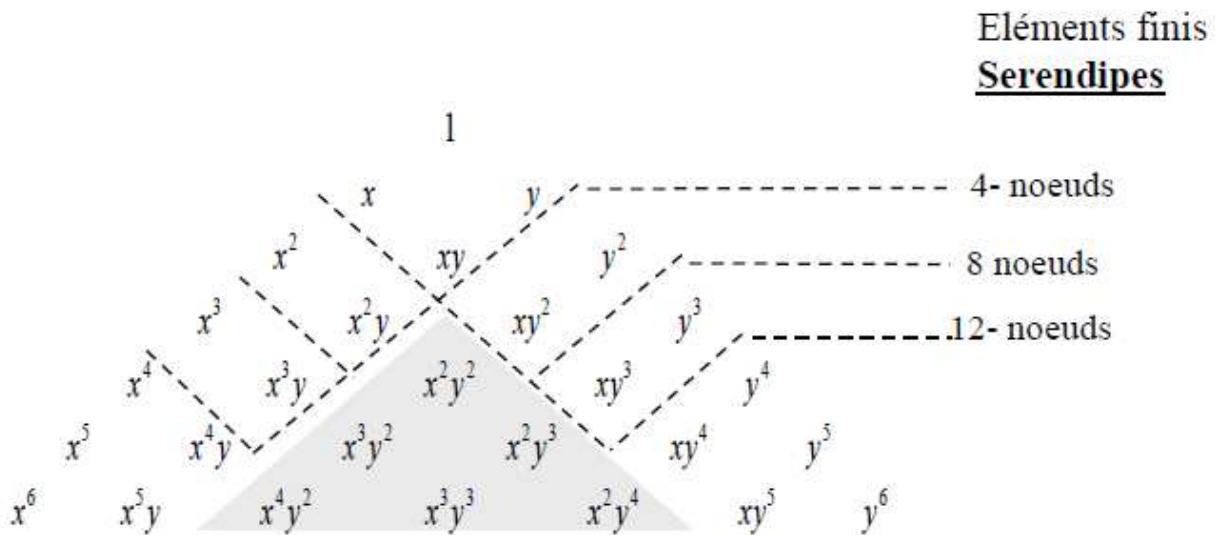


Figure 5.14. Triangle de Pascal-Eléments finis Serendipes

### Formulation de l'élément rectangulaire (Q4) à 04 nœuds (02 DDL/nœud)

- **Fonction du déplacement :**

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

$$u(x, y) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

- Relation : contraintes / déformations / déplacements :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} \\ \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

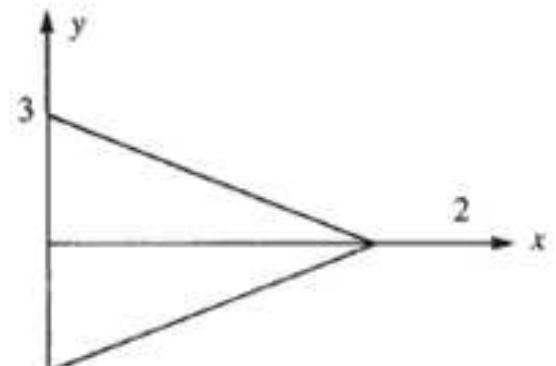
$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_2}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_3}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_4}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_1}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_2}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_3}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_4}{\delta y} \\ \frac{\delta N_1}{\delta y} & \frac{\delta N_1}{\delta x} & \frac{\delta N_2}{\delta y} & \frac{\delta N_2}{\delta x} & \frac{\delta N_3}{\delta y} & \frac{\delta N_3}{\delta x} & \frac{\delta N_4}{\delta y} & \frac{\delta N_4}{\delta x} \end{bmatrix}$$

## 5.6. Problèmes

### EXERCICE 1

Soit l'élément représenté illustré à la *figure 1* :

- Coordonnées (*m*) : 1 (0, -1), 2(2,0), 3(0,1)
- $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.25$
- Epaisseur :  $e = 2.5 \text{ cm}$
- Evaluer la matrice de rigidité pour l'élément.
- Déterminer les contraintes dans l'élément.

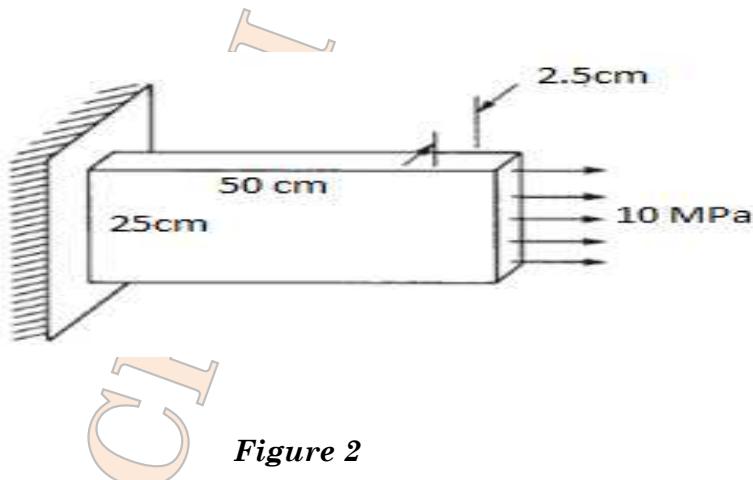


*Figure 1*

A.N :  $u_1 = 0$  ,  $v_1 = 0.63 \text{ mm}$  ,  $u_2 = 0.3 \text{ mm}$  ,  $v_2 = 0$  ,  $u_3 = 0$  et  $v_3 = 0.63 \text{ mm}$

### EXERCICE 2

Pour la plaque mince soumise à la traction surfacique représentée dans la *figure 2* :



*Figure 2*

- Déterminer les déplacements nodaux et les contraintes dans l'élément.

A.N :  $E = 200 \text{ GPa}$  ,  $\nu = 0.25$  ,  $e = 2.5 \text{ cm}$ .

# Méthode des Eléments Finis : Théories et Problèmes

Dr. CHIKH Benazouz, Maître de Conférences « A »

Département Matériaux et Structures « DMS »

Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics-Francis Jeanson « ENSTP-FJ »

## Chapitre 6

### 6. Formulation isoparamétrique

#### Objectifs

- 6.1. Introduction
- 6.2. Formulation isoparamétrique de la matrice de rigidité des éléments barres à 2 nœuds (1ddl/nœud)
- 6.3. Formulation isoparamétrique de la matrice de rigidité élémentaire en 3D (cas général)
- 6.4. Formulation iso-paramétrique des éléments CST
- 6.5. Formulation iso-paramétrique des éléments Q4
- 6.6. Intégration numérique
- 6.7. Problèmes

#### Objectifs

Ce chapitre vise à :

- Développer la formulation isoparamétrique de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément barre.
- Présenter la formulation isoparamétrique des éléments CST et Q4.
- Utiliser les méthodes d'intégration numérique (Quasrature de Gausse et la Méthode de Hammer) pour la détermination des matrices de rigidités des éléments Q4 et CST respectivement.

## 6.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons la formulation isoparamétrique des matrices de rigidité élémentaires. Après avoir étudié l'élément LST au chapitre 4, nous pouvons voir que le développement de matrices élémentaires et d'équations exprimées en termes de système de coordonnées global devient une tâche extrêmement difficile (si même possible) sauf pour les éléments les plus simples tels que l'élément CST. Par conséquent, la formulation isoparamétrique a été développée. La méthode isoparamétrique conduira à une formulation de programme informatique simple, et elle est généralement applicable pour l'analyse des contraintes en deux et trois dimensions et pour les problèmes non structuraux. La formulation isoparamétrique permet de créer des éléments qui ne sont pas rectangulaires ayant des côtés courbes. De plus, de nombreux programmes informatiques commerciaux ont adapté cette formulation pour leurs différentes bibliothèques d'éléments.

Nous illustrons d'abord la formulation isoparamétrique pour développer la matrice de rigidité élémentaire de barre simple. L'utilisation de l'élément bar est relativement simple afin de faciliter la compréhension de la méthode.

Par la suite, nous considérons le développement de la formulation isoparamétrique de la matrice de rigidité élémentaire des éléments triangulaires et quadrilatères simples.

Après, nous présenterons des méthodes d'intégration numérique pour évaluer la matrice de rigidité des éléments quadrilatérales et triangulaires et illustrerons l'adaptabilité de la formulation isoparamétrique aux méthodes d'intégration numériques courantes.

## 6.2. Formulation isoparamétrique de la matrice de rigidité des éléments barres à 2 nœuds (1ddl/nœud)

Les équations d'éléments isoparamétriques sont formulées à l'aide d'un système de coordonnées naturel (ou intrinsèque)  $\xi$  qui est défini par la géométrie de l'élément et non par l'orientation de l'élément dans le système de coordonnées global. En d'autres termes, la coordonnée axiale est attachée à la barre et reste dirigée le long de la longueur axiale de la barre, quelle que soit l'orientation de la barre dans l'espace. Il existe une relation (appelée transformation géométrique) entre le système de coordonnées isoparamétriques et le système de coordonnées global  $x$  pour chaque élément d'une structure spécifique, et cette relation doit être utilisée dans les formulations d'équation des éléments.

Nous allons maintenant développer la formulation isoparamétrique de la matrice de rigidité d'un élément barre linéaire simple.

- **Type d'élément**

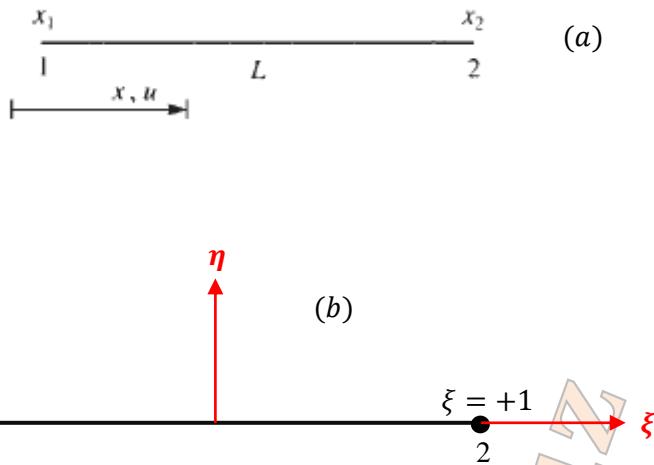


Figure 6.1. (a) élément barre en coordonnées réelles, (b) élément parent

- **Fonctions de déplacements et de formes**

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \xi \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} u(-1) = a_0 - a_1 = u_1 \\ u(+1) = a_0 + a_1 = u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{u_2 + u_1}{2} \\ a_1 = \frac{u_2 - u_1}{2} \end{cases}$$

$$u(\xi) = \frac{u_2 + u_1}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \xi$$

$$u(\xi) = \left\langle \begin{array}{cc} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{array} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

$$u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad (6.3)$$

- **Relation Déformations / Déplacements et contraintes / déformations**

Nous voulons maintenant formuler la matrice élémentaire  $[B]$  pour évaluer  $[k]$ . Nous utilisons la formulation isoparamétrique pour illustrer ses manipulations. Pour un simple élément barre, aucun avantage réel ne peut apparaître évident.

Pour construire la matrice de rigidité élémentaire, nous devons déterminer la déformation, qui est définie en termes de dérivée du déplacement par rapport à  $x$ . le déplacement  $u$ , cependant, est maintenant une fonction de  $\xi$  comme donné par l'équation (6.3). par conséquent, nous devons appliquer la règle de dérivation comme suit :

## Relation géométrique

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i \quad (6.4)$$

$$x = \left\langle \frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 \quad (6.5)$$

Vérification :

Pour  $\xi = -1 \rightarrow x = x_1, \quad \xi = 1 \rightarrow x = x_2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\delta u(\xi)}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x} \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ [B] &= \left\langle \frac{\delta N_1(\xi)}{\delta x} \quad \frac{\delta N_2(\xi)}{\delta x} \right\rangle \\ \frac{\delta N_i}{\delta x} &= \frac{\delta \xi}{\delta x} \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Jacobien  $j$

$$dx = j d\xi \Rightarrow j = \frac{dx}{d\xi} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta N_i}{\delta x} &= j^{-1} \left( \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \right) \\ j &= \frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} \\ [B] &= j^{-1} \left\langle \frac{\delta N_1(\xi)}{\delta \xi} \quad \frac{\delta N_2(\xi)}{\delta \xi} \right\rangle \\ [B] &= \frac{2}{x_2 - x_1} \left\langle -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (6.7)$$

### - Matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire est donnée par l'intégrale suivante :

$$[k] = \int_0^L [B]^T [D] [B] A dx \quad (6.8)$$

Cependant, en général, nous devons transformer la coordonnée  $x$  en  $\xi$  car  $[B]$  est, en général, une fonction de  $\xi$ .

$$\int_0^L f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\xi) |[J]| d\xi \quad (6.9)$$

Où  $[J]$  est appelé la matrice Jacobienne. Dans le cas 1D, on a  $|[J]| = J$ . Pour l'élément barre simple, de l'équation (6.6), nous avons

$$|[J]| = \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2} \quad (6.10)$$

En général,  $|[J]|$  est une fonction de  $\xi$  et dépend des valeurs numériques des coordonnées nodales. En utilisant les équations (6.9) et (6.10) dans l'équation (6.8), nous obtenons la matrice de rigidité en coordonnées naturelles comme suit :

$$[k] = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] A d\xi \quad (6.11)$$

Pour le cas 1D, nous avons utilisé le module d'élasticité  $E = [D]$  dans l'équation (6.11) et en effectuant l'intégration simple, on obtient :

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

### 6.3. Formulation isoparamétrique de la matrice de rigidité élémentaire en 3D (cas général)

#### 6.3.1. Matrice de rigidité élémentaire

L'expression de la matrice de rigidité élémentaire en repère réel local est définie par :

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e = \int \int \int [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad (6.13)$$

$[D]$  est la matrice de comportement et  $[B]$  est celle qui relie les déformations aux déplacements nodaux et peut également être développée en une série de sous matrices  $[B_1 \ B_2 \dots \ B_i]$  associées à chacun des nœuds de l'élément, comme suit :

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{d\} = [B]\{d\} \quad (6.14)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial x \\ \partial/\partial z & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Pour un élément ayant  $n$  nœuds:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_i \ \dots \ B_n]\{d\}$$

Avec

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

La détermination de  $[B_i]$  nécessitera de faire le calcul des différentes dérivées partielles ( $\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y}, \frac{\partial N_i}{\partial z}$ ) associées à chacun des noeuds. Ceci étant et comme vu en chapitre 4, les fonctions de forme  $N_i$  sont définies dans un repère unitaire  $(\xi, \eta, \zeta)$  et non dans le repère local  $(x, y, z)$  nous utilisons la transformation décrite dans le chapitre 4 qui permet de calculer les coordonnées  $(x, y)$  de chacun des points de l'élément réel à partir de celles du point correspondant de l'élément de référence. Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ou sous une forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

$[J]$  correspond à la matrice Jacobienne de la transformation  $T_e$ . En inversant l'équation (6.18), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

Tels que :

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^n N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^n N_i y_i \\ z = \sum_{i=1}^n N_i z_i \end{cases} \quad (6.20)$$

$[J]$  devient :

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

La matrice Jacobienne peut s'écrire sous forme d'un produit des dérivés des fonctions de forme et de coordonnées réelles :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & y_i & z_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Pour calculer l'intégrale sur le volume  $V_e$  et sachant que  $[B]$  est désormais fonction des coordonnées unitaires, il reste à effectuer un changement de variables entre les repères  $(x, y, z)$  et  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Ce changement de variables représente en fait les relations géométriques liant, via la transformation  $T_e$ , éléments réel et de référence. Ces relations sont obtenues à partir du Jacobien de la transformation. La matrice rigidité élémentaire exprimée dans le repère  $(\xi, \eta, \zeta)$  a donc pour expression :

$$[k_e] = \int \int \int [B]^T [H] [B] dx dy dz \quad (6.23)$$

Avec

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} \text{ et } dx dy dz = \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (6.24)$$

Nous obtenons la nouvelle expression de la matrice de rigidité en coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$

$$[k_e] = \int_{V_e} [B]^T [H] [B] dV_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [H] [B] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (6.25)$$

### 6.3.2. Vecteurs charges élémentaires

Pour les forces de volume, la démarche est similaire à celle suivie pour la rigidité élémentaire, le changement de base s'effectuant toujours via le Jacobien.

#### Forces de volume

$$\{F_e^v\} = \int_{V_e} [N]^T \{F^v\} dv_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \{F^v\} \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (6.26)$$

#### Forces de surface

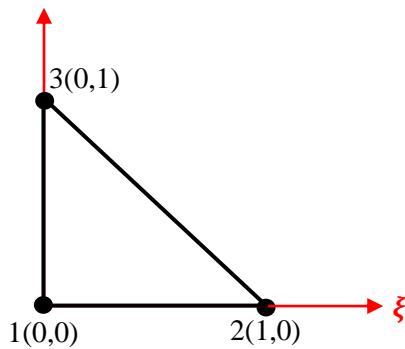
$$\{F_e^s\} = e \int_{S_e} [N]^T \{F^s\} ds_e = e \int_{S_e} [N]^T \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} ds_e \quad (6.27)$$

e : Épaisseur de l'élément

$$ds_e = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (6.28a)$$

$$ds_e = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \partial \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial \eta\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \partial \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \partial \eta\right)\right)^2} \quad (6.28b)$$

## 6.4. Formulation iso-paramétrique des éléments CST



### - Fonctions de déplacement et de formes

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta \\ v(\xi, \eta) = a_3 + a_4\xi + a_5\eta \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\begin{cases} u(0,0) = a_0 = u_1 \\ u(1,0) = a_0 + a_1 = u_2 \\ u(0,1) = a_0 + a_2 = u_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = u_1 \\ a_1 = u_2 - u_1 \\ a_2 = u_3 - u_1 \end{cases}$$

$$u(\xi, \eta) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta$$

$$u(\xi, \eta) = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \xi - \eta \\ N_2 = \xi \\ N_3 = \eta \end{cases} \quad (6.30)$$

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (6.31)$$

### - Relation Déformations / Déplacements

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} \\ \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [B] &= \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_2}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_3}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_1}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_2}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_3}{\delta y} \\ \frac{\delta N_1}{\delta y} & \frac{\delta N_1}{\delta x} & \frac{\delta N_2}{\delta y} & \frac{\delta N_2}{\delta x} & \frac{\delta N_3}{\delta y} & \frac{\delta N_3}{\delta x} \end{bmatrix} \tag{6.32}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta N_i}{\delta \xi} = \frac{\delta x}{\delta \xi} \frac{\delta N_i}{\delta x} + \frac{\delta y}{\delta \xi} \frac{\delta N_i}{\delta y}$$

$$\frac{\delta N_i}{\delta \eta} = \frac{\delta x}{\delta \eta} \frac{\delta N_i}{\delta x} + \frac{\delta y}{\delta \eta} \frac{\delta N_i}{\delta y}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \xi} & \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\delta x}{\delta \eta} & \frac{\delta y}{\delta \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} \end{Bmatrix} \tag{6.33}$$

Matrice Jocobienne

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \xi} & \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\delta x}{\delta \eta} & \frac{\delta y}{\delta \eta} \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

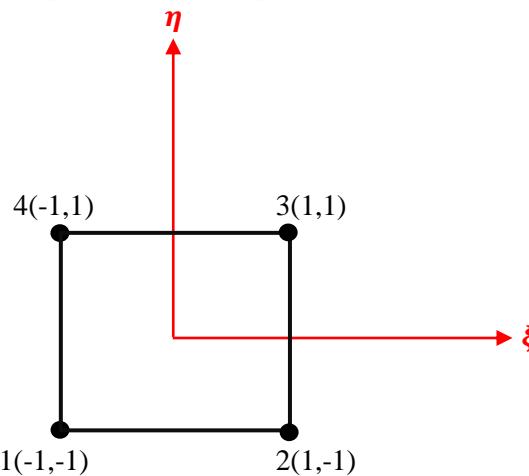
$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta \xi} & \frac{\delta N_2}{\delta \xi} & \frac{\delta N_3}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_1}{\delta \eta} & \frac{\delta N_2}{\delta \eta} & \frac{\delta N_3}{\delta \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \end{Bmatrix} \tag{6.37}$$

## 6.5. Formulation iso-paramétrique des éléments Q4



- Fonctions de déplacement et de formes

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \\ v(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \end{cases} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{cases} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

- Relation Déformations / Déplacements

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_2}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_3}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_4}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_1}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_2}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_3}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_4}{\delta y} \\ \frac{\delta N_1}{\delta y} & \frac{\delta N_1}{\delta x} & \frac{\delta N_2}{\delta y} & \frac{\delta N_2}{\delta x} & \frac{\delta N_3}{\delta y} & \frac{\delta N_3}{\delta x} & \frac{\delta N_4}{\delta y} & \frac{\delta N_4}{\delta x} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \xi} & \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\delta x}{\delta \eta} & \frac{\delta y}{\delta \eta} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta \xi} & \frac{\delta N_2}{\delta \xi} & \frac{\delta N_3}{\delta \xi} & \frac{\delta N_4}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_1}{\delta \eta} & \frac{\delta N_2}{\delta \eta} & \frac{\delta N_3}{\delta \eta} & \frac{\delta N_4}{\delta \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{-1+\eta}{4} & \frac{1-\eta}{4} & \frac{1+\eta}{4} & \frac{-1-\eta}{4} \\ \frac{-1+\xi}{4} & \frac{-1-\xi}{4} & \frac{1+\xi}{4} & \frac{1-\xi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

## 6.6. Intégration numérique

- En analyse numérique, les méthodes de quadrature sont des approximations de la valeur numérique d'une intégrale. En général, on remplace le calcul de l'intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration.
- La méthode de quadrature de Gauss développée par Carl Friedrich Gauss, est une méthode de quadrature exacte pour un polynôme de degré  $2n - 1$  avec  $n$  points pris sur le domaine d'intégration.
- Les formules de Gauss jouent un rôle fondamental dans la MEF.

### 6.6.1. Quadrature de Gauss (Legendre)

Soit une fonction  $f$  d'une seule variable , l'intégrale de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  pourra être évaluée numériquement par la méthode de Gauss en posant que:

$$I = \int_a^b f(x) \bar{\omega}(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) \quad (6.45)$$

où  $\bar{\omega}$  est une fonction de pondération continue strictement positive, qui peut assurer l'intégrabilité de  $f$ . Les  $\omega_i$  sont appelés les coefficients de quadrature (ou poids). Les points  $x_i$  sont appelés les nœuds de la quadrature. Les  $n$  abscisses sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre  $r \leq 2n - 1$ .

Pour  $n$  donné :

- Les  $n$  nœuds  $x_i$  sont réels, distincts, uniques et sont les racines du polynôme unitaire de degré  $n$ , orthogonal au sous-espace des polynomes de degré  $n - 1$  pour le produit scalaire  $\langle h, g \rangle = \int_a^b h(x)g(x)\bar{\omega}(x)dx^2$ .
- Pour tout  $i$ ,  $\omega_i$  est égale à  $\int_a^b l_i(x)\bar{\omega}(x)dx$ , où  $l_i$  est le polynome interpolateur de Lagrange de degré  $n - 1$ , prenant la valeur 1 en  $x_i$  et 0 en les  $x_k$  pour  $k$  différent de  $i$ .
- Pour les polynômes de degré inférieur ou égale à  $2n - 1$ , il y a égalité entre  $\int_a^b f(x) \bar{\omega}(x)dx$  et  $\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$ .

Le domaine d'intégration et la fonction de pondération déterminent le type de la quadrature de Gauss. Le tableau suivant résume les situations les plus communes.

Tableau 6.1. Principales configurations de quadrature de Gauss

Domaine d'intégration ( $a, b$ )	Fonction de pondération $\bar{\omega}(x)$	Famille de polynomes orthogonaux
-------------------------------------	--	-------------------------------------

$[-1, +1]$	1	Legendre
$] -1, +1[$	$(1-x)^\alpha(1-x)^\beta, \alpha, \beta > -1$	Jacobi
$] -1, +1[$	$1/\sqrt{1-x^2}$	Tchebychev (premier type)
$] -1, +1[$	$\sqrt{1-x^2}$	Tchebychev (second type)
$R^*$	$e^{-x}$	Laguerre
$R$	$e^{-x^2}$	Hermite

Pour les éléments isoparamétriques, l'intervalle  $[a, b]$  sera bien évidemment égal à  $[-1, +1]$ .

Une fois le type de quadrature choisi, la formule à  $n$  points s'écrit :

$$I(f) = \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) \quad (6.46)$$

On définit l'erreur comme  $E(f) = |I - I(f)|$ . Le degré d'exactitude d'une formule de quadrature est le degré le plus élevé de la famille des polynômes annulant  $E(f)$ . On a le résultat suivant : une formule à  $n$  points admet un degré d'exactitude de  $2n - 1$ .

L'intégration numérique consiste alors à faire passer un polynôme  $\psi(\xi)$  par un certain nombre de valeurs de  $f(\xi)$  de telle manière à obtenir comme  $\int_a^b \psi(\xi) d\xi$  approximation de  $\int_a^b f(\xi) d\xi$ .

Remplaçons l'intégrale bornée d'une fonction polynomiale  $P(\xi)$  par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégrations  $\xi_i$

$$\int_{-1}^{+1} P(\xi) d\xi = \omega_1 P(\xi_1) + \omega_2 P(\xi_2) + \dots + \omega_r P(\xi_r) = \sum_{i=1}^r \omega_i P(\xi_i) \quad (6.47)$$

Déterminons les  $n$  coefficients  $\omega_i$  et les  $n$  points d'intégration  $\xi_i$

$$P(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3 + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1} \quad (6.48)$$

En remplaçant l'équation (6.48) dans l'intégrale (6.47), celle-ci devient

$$\begin{aligned} a_1 \int_{-1}^{+1} d\xi + a_2 \int_{-1}^{+1} \xi d\xi + a_3 \int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^{+1} \xi^{2r-1} d\xi &= \omega_1(a_1 + a_2 \xi_1 + a_3 \xi_1^2 + \dots + a_{2r} \xi_1^{2r-1}) + \\ &+ \omega_2(a_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_2^2 + \dots + a_{2r} \xi_2^{2r-1}) + \omega_3(a_1 + a_2 \xi_3 + a_3 \xi_3^2 + \dots + a_{2r} \xi_3^{2r-1}) + \\ &+ \dots + \omega_r(a_1 + a_2 \xi_r + a_3 \xi_r^2 + \dots + a_{2r} \xi_r^{2r-1}) \end{aligned} \quad (6.49)$$

D'où

$$\begin{aligned} &= a_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_r) + \\ &a_2(\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 + \dots + \omega_r \xi_r) + a_3(\omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 + \omega_3 \xi_3^2 + \dots + \omega_r \xi_r^2) + \dots + a_{2r}(\omega_1 \xi_1^{2r-1} + \omega_2 \xi_2^{2r-1} + \omega_3 \xi_3^{2r-1} + \dots + \omega_r \xi_r^{2r-1}) \end{aligned} \quad (6.50)$$

$\forall a_1, a_2, \dots, a_{2r}$

L'équation (6.49) doit être vérifiée pour n'importe quel polynôme, i.e.,  $\forall a_1, a_2, \dots, a_{2r}$

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \sum_{i=1}^r \omega_i \xi_i^\alpha \quad \text{et} \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, 2r-1 \quad (6.51)$$

La solution devient

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r \omega_i \xi_i^\alpha & \text{pour } \alpha = 0, 2, 4, \dots, 2r-2 \\ \int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r \omega_i \xi_i^\alpha & \text{pour } \alpha = 1, 3, 5, \dots, 2r-1 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_r \\ 0 = \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 + \dots + \omega_r \xi_r \\ \frac{2}{3} = \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 + \omega_3 \xi_3^2 + \dots + \omega_r \xi_r^2 \\ \vdots \\ 0 = \omega_1 \xi_1^{2r-1} + \omega_2 \xi_2^{2r-1} + \omega_3 \xi_3^{2r-1} + \dots + \omega_r \xi_r^{2r-1} \end{cases} \quad (6.52)$$

Exemple de calcul des coefficients  $\omega_i$  et positions  $\xi_i$ , de la méthode de Gauss, pour intégrer le polynôme entre -1 et +1

- $P(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3$
- $2n-1 = 3 \Rightarrow n = 2$
- $\int_{-1}^{+1} P(\xi) d\xi = \omega_1 P(\xi_1) + \omega_2 P(\xi_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 \\ 0 = \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 \\ \frac{2}{3} = \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 \\ 0 = \omega_1 \xi_1^3 + \omega_2 \xi_2^3 \end{cases}$$

- Donc

$$\omega_1 = \omega_2 = 1 \quad \text{et} \quad \xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Pour les intégrales de surface, une double sommation est utilisée, ainsi

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{nG_\xi} \sum_{j=1}^{nG_\eta} \omega_i \omega_j f(\xi_i, \eta_j)$$

Pour les intégrales de volumes, l'intégrale triple est transformée en une triple sommation

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{nG_\xi} \sum_{j=1}^{nG_\eta} \sum_{k=1}^{nG_\zeta} \omega_i \omega_j \omega_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

### 6.6.2. Intégration de Hammer

Cette méthode donne une approximation de l'intégration d'une fonction sur un triangle quelconque :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_H} \omega_i f(\xi_i, \eta_i)$$

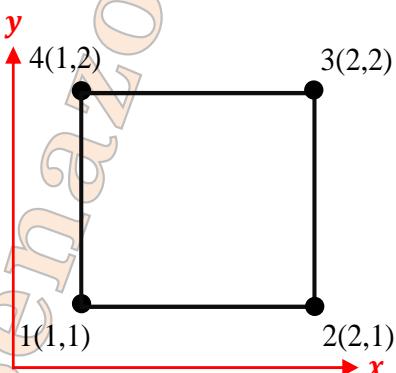
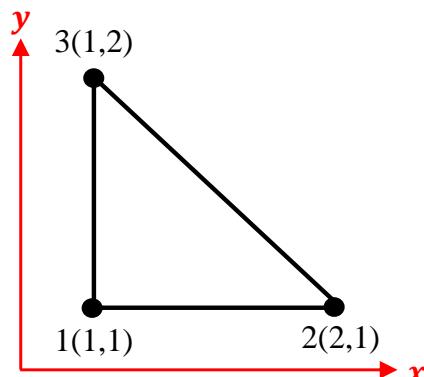
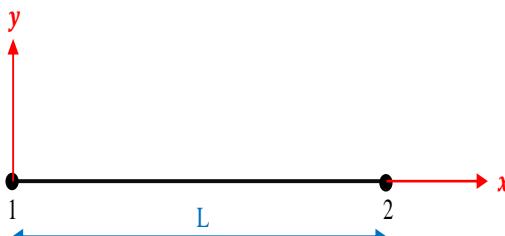
La méthode permet d'intégrer un polynôme d'ordre  $m$  dont le terme le plus élevé est  $\xi^k \eta^l$  tel que  $m > k + l$

Dr. CHIKH Benazouz

## 6.7. Problèmes

### EXERCICE 1

Soit les éléments représentés ci-dessous :



▪ Pour chaque élément :

1. Ecrire les fonctions de formes relatives aux déplacements de l'élément de référence en fonction des coordonnées intrinsèques  $(\xi, \eta)$ .
2. Déduire la transformation géométrique.
3. Écrire les relations déformations-déplacements et contraintes-déformations.
4. Déterminer et calculer par intégration numérique la matrice de rigidité.

➤ N.B :

Pour les éléments 2D, considérer un état de déformation plane :

$$E = 20 \text{ GPa} , \nu = 0.2 , e = 1 \text{ m}$$

## EXERCICE 2

La formulation isoparamétrique est utilisée pour la modélisation du barrage illustré sur *la figure 1*.

Le barrage présentant une hauteur de  $6 \text{ m}$  est soumis à une pression hydraulique de forme triangulaire.

Le maillage choisi correspond à quatre (04) éléments à trois (03) nœuds de  $3 \text{ m}$  de côté.

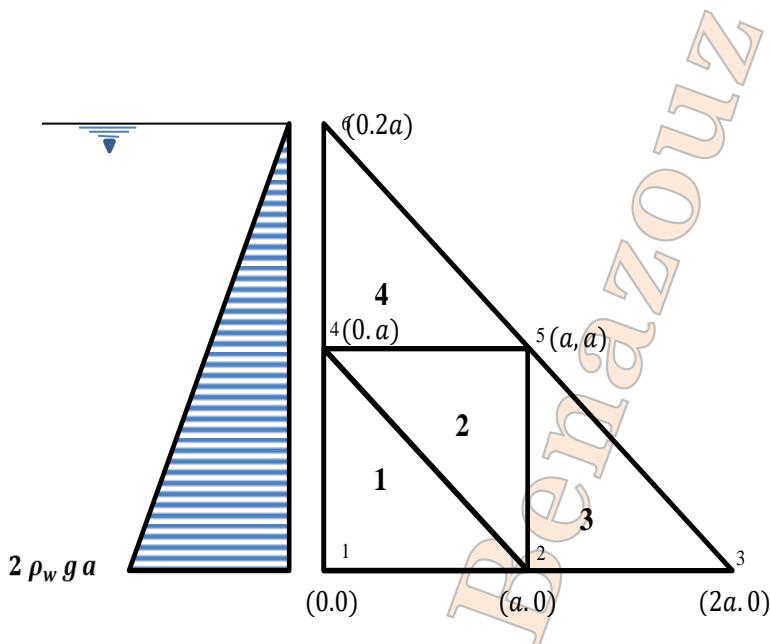


Figure 1

- 1- Quel est le type d'élément utilisé dans cette modélisation ?
- 2- Sélectionner la fonction du déplacement et déterminer les fonctions de forme relatives aux déplacements de l'élément parent en fonction des coordonnées intrinsèques  $(\xi, \eta)$ .  
En déduire la fonction de transformation géométrique de l'élément 4.
- 3- Écrire les relations déformations-déplacements et contraintes-déformations de l'élément 4.
- 4- Pour un état de déformation plane avec un matériau isotrope de *module de Young E* et de *coefficient de Poisson v*, déterminer et calculer par intégration numérique la matrice de rigidité de l'élément 4.
- 5- Calculer les différents vecteurs des forces nodales équivalentes de l'élément 4.
- 6- Considérons que l'assemblage des éléments est fait pour obtenir la matrice de la structure en intégrant les conditions aux limites, les déplacements sont donnés comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.02 \\ -5.87 \\ 4.84 \\ -4.78 \\ 7.33 \\ -7.83 \end{pmatrix} mm$$

- Déterminer les déformations et les contraintes relatives à l'élément 4.

On donne :  $e = 1 m$ ,  $a = 3 m$ ,  $E = 30 GPa$ ,  $\nu = 0.2$ ,

$$\rho_w = 1 t/m^3, \quad \rho_{BA} = 2.5 t/m^3, \quad g = 10 m/s^2$$

### EXERCICE 3

Dans le cadre de l'analyse du comportement de la structure représentée dans la figure 2.a, on opte pour une formulation isoparamétrique en éléments finis. La structure présente un axe de symétrie vertical et est considérée encastrée à sa base.

On donne :

$$E=300 GPa, \nu=0.2, Q=100 MPa, l'épaisseur e=0.5 m.$$

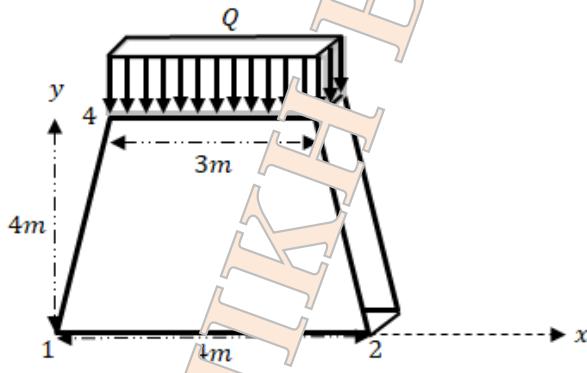
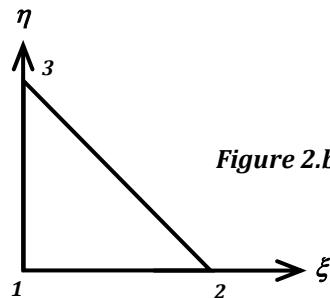


Figure 2.a

On utilise **uniquement** quatre nœuds à savoir 1, 2, 3 et 4.

- Proposer trois (03) modèles numériques utilisant trois discrétisations différentes en éléments finis pour cette structure. Donner les éléments de référence correspondant à chacun des trois modèles proposés. Justifier votre choix.
- Adopter l'élément de référence de la figure 2.b pour :
  - Ecrire la fonction de déplacement adéquate ainsi que les fonctions de forme correspondantes.

- 2.2. Etablir les déformations en fonction des déplacements nodaux.
- 2.3. Déterminer la composante  $K_{44}$  de la matrice de rigidité.
- 2.4. Calculer le vecteur des forces nodales équivalentes.



Dans une deuxième phase, la structure est soumise à une force additionnelle concentrée au nœud 3 (figure 2.c). Les déplacements nodaux ont été calculés, après assemblage des éléments en introduisant toutes les conditions aux limites, et sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} u_3 &= +0.6 & u_4 &= -0.6 \\ v_3 &= -4.3 & v_4 &= -4.4 \quad \dots \dots \quad (\text{cm}) \end{aligned}$$

3. Déterminer les contraintes.

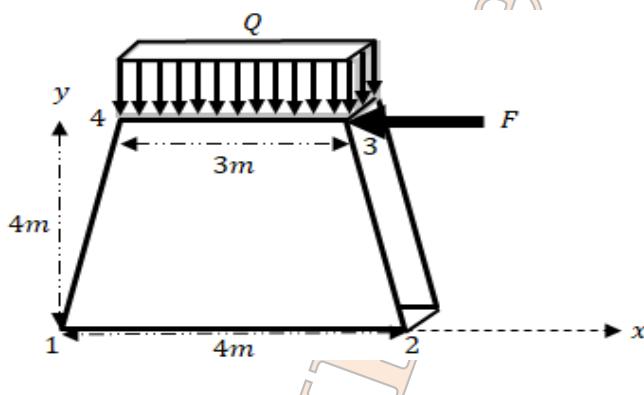


Figure 2.c