



CENTRE UNIVERSITAIRE AHMED BEN YAHIA EL-WANCHARISSI DE TISSEMSILT

Institut des Sciences et de la Technologie

Département des Sciences et de la Technologie

Cours :

Méthode des Éléments Finis

Cours préparé par :

Mr. BOURADA Fouad

Docteur au Centre Universitaire de Tissemsilt

Mars 2020

Préface

La méthode des éléments finis (MEF) est de nos jours un standard de calcul et de dimensionnement des structures et pièces. Elle offre des solutions numériques, et donc approchées, pour divers types de structures, de comportement, de liaison, etc. la connaissance de cette méthode est donc indispensable pour les étudiants de Master en génie civil. Les domaines d'application de cette méthode vont du calcul des structures à l'analyse acoustique, en passant par l'analyse thermique, électromagnétique et écoulement de fluide, avec la possibilité de faire du couplage entre ces différents phénomènes. Les systèmes étudiés peuvent être linéaires, non linéaires, transitoires, vibratoires hétérogènes, orthotrope, etc.

Depuis plus de trois décennies, la méthode des éléments finis n'a cessé de montrer son intérêt et sa robustesse à travers des tests de validation, de comparaison et de recalage. Il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles le promoteur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions :

- formaliser les non-dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème ;
- évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits ;
- analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés.

L'objectif de ce polycopié de cours est de présenter les principes de base de cette méthode en insistant sur l'enchaînement des tâches (démarche et hypothèses associées) qui assurent la cohérence du processus de calcul. Ces connaissances qui seront utiles pour maîtriser les principales difficultés de mise au point d'un problème.

Le présent cours s'adresse essentiellement aux étudiants de première année Master en génie Civil, option structures souhaitant découvrir en profondeur le fonctionnement et la formulation de cette méthode, dans le but de développer des codes de calcul.

Etant persuadé que la MEF n'est bien assimilée qu'à travers les applications, la pédagogie de ce polycopié de cours s'articule autour de deux approches :

- Donner des explications claires des principes de la MEF
- Illustrer la méthode par des exercices résolus, La résolution est effectuée pas-à-pas avec tous les détails de calcul.

Le présent polycopié de cours est organisé en quatre chapitres:

Le chapitre I est une introduction à la méthode des éléments finis.

Dans Le chapitre II, nous présentons les différents Éléments Finis en Une Dimension .

Le chapitre III est consacré à traiter les Éléments Finis en Deux et Trois Dimensions

Dans le chapitre VI, l'étude d'Éléments Finis en Dynamique

TABLE DES MATIERES

Préface	i
TABLE DES MATIERES	ii
<i>CHAPITRE I : INTRODUCTION ET OBJECTIFS</i>	
I.1. Introduction et objectifs	1
I.2. Rappel des équations de l'équilibre d'un solide élastique	2
I.3. Solution exacte versus résolution approchée	2
I.4. Etapes logiques du calcul par éléments finis	4
I.5. Types d'éléments finis	5
<i>CHAPITRE II : ÉLEMENTS FINIS EN UNE DIMENSION</i>	
II.1. Élément ressort	8
II.1.1. Matrice de rigidité par la méthode directe	8
II.1.2. Notion de degrés de liberté	8
II.1.3. Condition aux limites	11
II.2. Élément Barre et système Treillis	16
II.2.1. Formulation variationnelle	16
II.2.1.1. Forme forte	16
II.2.1.2. Forme faible	18
II.2.2. fonction de forme	19
II.2.3. Equation gouvernante	21
II.2.4. Formulation de l'élément	22
II.3. Structures planes à treillis	29
II.3.1. Matrice de transformation	30
II.3.2 Matrice de rigidité	32
II.3. Élément poutre et système portique	39
II.3.1. équation gouvernante	40
<i>CHAPITRE III : ÉLEMENTS FINIS EN DEUX ET TROIS DIMENSIONS</i>	
III.1. Éléments Finis en Deux dimension	50
III.1.1. Interpolation et fonctions de forme	50
III.1.2 Matrice de rigidité	59
III.1.3 Éléments Finis de Flexion des plaques	66

CHAPITRE IV : ÉLEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE

IV.1. Introduction	70
IV.2. Principe d'Hamilton	70
IV.3. Analyses dynamiques	72
IV.4. Construction de l'élément fini en Une Dimension	72
IV.4.1. Élément ressort	73
IV.4.2. Élément barre	77
IV.4.3. Élément poutre	80
IV.5. Généralisation pour autres problèmes	81
Références bibliographiques	85

CHAPITRE I : INTRODUCTION ET OBJECTIFS

I.1. Introduction et objectifs :

La méthode des éléments finis est une technique particulière d'approximation des solutions par sous-domaine. La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (**discrétiser**) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (**éléments finis**) interconnectés en des points appelés **nœuds**.

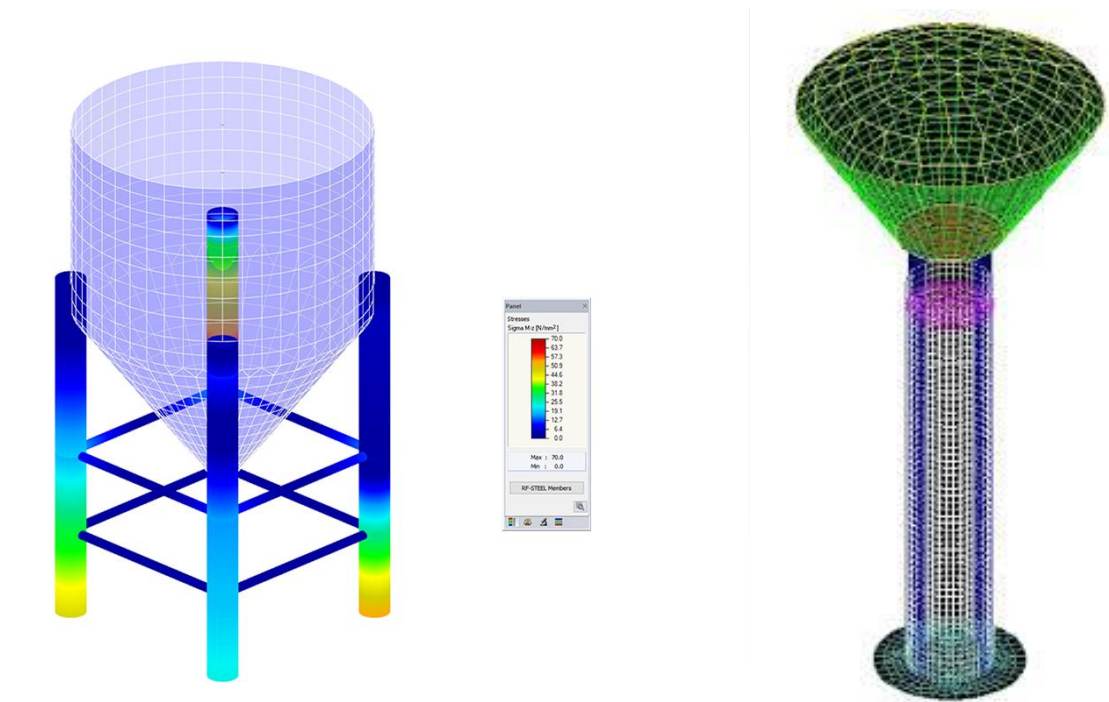


Figure I.1. *Discretisation des structures en élément finis.*

Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous **assemblons** ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

La MEF utilise des **approximations** simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de **précision de l'approximation**.

- **Les objectifs de ce cours sont :**

- Comprendre l'idée fondamentale de la MEF.
- Comprendre l'usage et le comportement de chaque type d'élément vu dans ce cours.
- Etre capable de mettre en place le modèle EF adéquat au problème traité.
- Etre capable d'évaluer la qualité des résultats.
- Prendre conscience des limites de cette méthode.

I.2. Rappel des équations de l'équilibre d'un solide élastique :

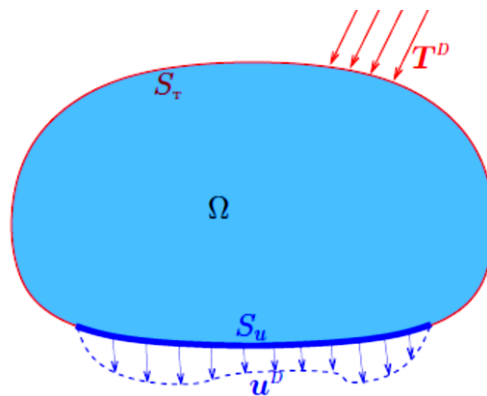


Figure I.2. Schéma d'un solide élastique.

- ✓ Equation de compatibilité :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \text{grad}(\bar{u})$$

- ✓ Equation d'équilibre :

$$\text{div}\sigma + \rho f = 0$$

- ✓ Equations de comportement :

$$\sigma = A\varepsilon$$

I.3. Solution exacte versus résolution approchée :

Si le modèle mathématique n'admet pas de solution analytique, il est alors nécessaire de chercher une solution approchée de ce modèle. Dès lors, la discrétisation du problème correspond au choix d'un modèle numérique permettant de traiter les équations mathématiques. Il est important de savoir distinguer et hiérarchiser les différents niveaux

d'hypothèse utilisés pour modéliser un phénomène physique. En effet, la solution exacte d'un modèle mathématique qui ne correspond pas à la réalité physique est inutile.

Pour discrétiser les modèles complexes de phénomènes physiques, l'ingénieur dispose de méthodes d'approximation permettant de résoudre la plupart des problèmes pour lesquels il n'existe pas de solution formelle. Toutes les méthodes d'approximation ont un même objectif, à savoir remplacer un problème mathématique défini sur un milieu continu (équations différentielles ou intégrales) par un problème mathématique discret (équations matricielles) de dimension finie que l'on sait résoudre numériquement.

Afin de montrer l'utilité de la méthode des éléments finis, nous allons exposer le calcul de la surface d'un cercle.

Nous pouvons diviser le cercle en N petits triangles isocèles en partant du centre comme le montre la figure I.3.

La surface d'un triangle est donné par : $S_i = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta_i$

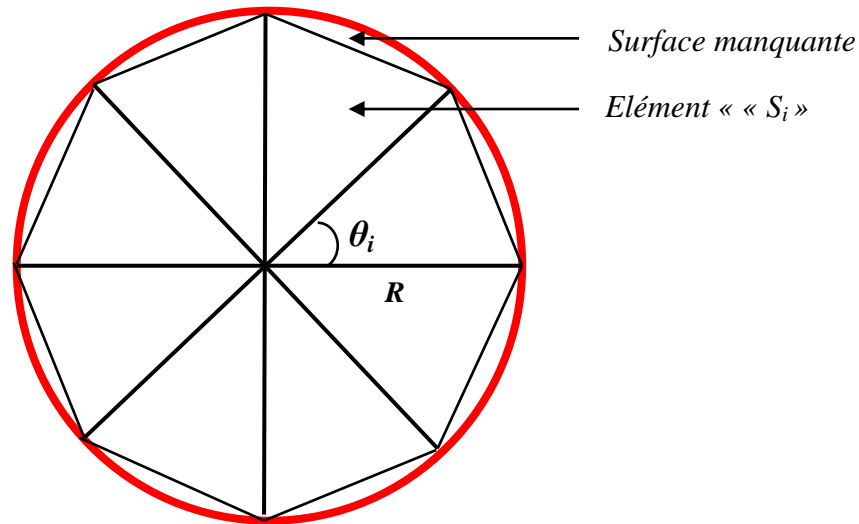


Figure I.3. Division du cercle en petits triangles.

La surface du cercle est donc approximativement la somme des surfaces des triangles :

$$S = \sum_i^N S_i = N \left(\frac{1}{2} R^2 \sin \theta_i \right)$$

L'angle θ_i est fonction du nombre de triangle N

$$\theta_i = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow S = \sum_i^N S_i = N \left(\frac{1}{2} R^2 \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right)$$

Si nous voulons trouver exactement la surface du cercle il suffit de tendre N vers l'infini, dans ce cas la surface du cercle est $S = \pi R^2$

Selon la figure1. Il reste des surfaces dans le cercle qui ne sont pas prises en compte dans le calcul. Pour éliminer ces restes, la solution serait d'augmenter le nombre des triangles N voir même le pousser jusqu'à l'infini.

il faut donc trouver le nombre de triangle qui constitue une bonne approximation Ceci montre tout l'intérêt de la méthode des éléments finis.

1.4. Etapes logiques du calcul par éléments finis :

- Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage)
- Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$ reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux $\{u^e\}$ et les forces appliquées aux nœuds :
$$[k^e]\{u^e\} = \{f^e\}$$
- Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K]\{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds
- Modifier le système global en tenant compte des conditions aux Limites
- Résoudre le système $[K]\{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $\{U\}$ aux nœuds
- Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux noeuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées.

Par ailleurs cette méthode peut être implémentée dans un programme informatique permettant de faire des calculs lourds que l'être humain n'est pas capable de faire.

Les programmes informatiques commercialisés sont nombreux nous citons par exemple :

- ANSYS (General purpose, PC and workstations).
- SDRC/I-DEAS (Complete CAD/CAM/CAE package).
- NASTRAN (General purpose FEA on mainframes).
- ABAQUS (Nonlinear and dynamic analyses).
- COSMOS (General purpose FEA).
- ALGOR (PC and workstations).
- PATRAN (Pre/Post Processor).
- HyperMesh (Pre/Post Processo.r)
- Dyna-3D (Crash/impact analysis)

1.5. Types d'éléments finis :

Il existe 3 grandes familles d'éléments. Les éléments unidimensionnels, bidimensionnels, tridimensionnels.

En 1D, grâce aux relations de la théorie des poutres.

Un modèle unidimensionnel s'appuie donc sur les hypothèses restrictives de la RDM.

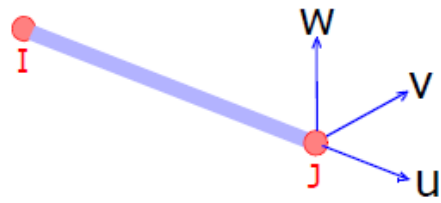
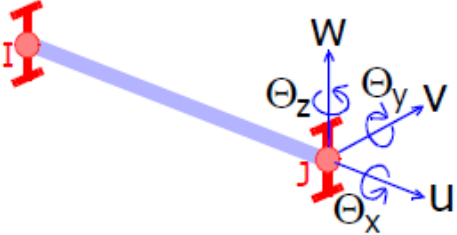
En 2D, en utilisant, selon les cas, les théories des membranes, des plaques et des coques.

Un modèle bidimensionnel s'appuie sur les hypothèses restrictives de ces différentes théories.

En 3D, en exploitant les relations de l'élasticité sans aucune hypothèse restrictive.

Dans le tableau qui suit, sont présentés les types d'éléments les plus courants qui constituent la bibliothèque de base de tout programme d'éléments finis.

Tableau I.1. Types d'éléments finis

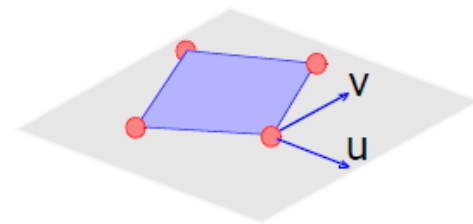
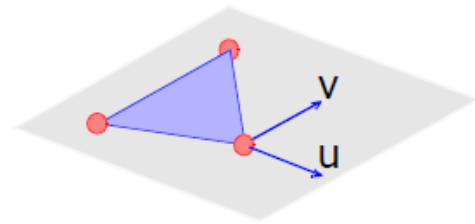
<p>Barre : Il schématise un composant [IJ] d'une structure qui travaille uniquement en traction ou compression.</p> <p>Dans cet élément, il est supposé que seule la contrainte normale σ_x est différente de zéro et qu'elle est constante sur la section droite.</p>	 <p>The diagram shows a bar element connecting node I (red dot) to node J (red dot). A local coordinate system is defined at node J with three axes: W (vertical), V (diagonal up-right), and U (diagonal down-right). The bar itself is represented by a blue line segment.</p>
<p>Poutre : C'est un élément unidimensionnel [IJ] qui reprend toutes les hypothèses des poutres longues. Il intègre les énergies d'effort normal, d'effort tranchant, de flexion et de torsion.</p>	 <p>The diagram shows a beam element connecting node I (red dot) to node J (red dot). At node J, a local coordinate system is defined with axes W, V, and U. Additionally, three rotational degrees of freedom are indicated by curved arrows: Θ_z around the W-axis, Θ_y around the V-axis, and Θ_x around the U-axis. The beam is represented by a blue line segment.</p>

MEMBRANE: C'est un élément bidimensionnel dans lequel on suppose que les contraintes sont uniformes dans l'épaisseur et que la contrainte σ_z est nulle (z est l'axe perpendiculaire au plan de l'élément). Il est utilisé pour modéliser :

-des structures minces travaillant en membrane c'est-à-dire sans rigidité de flexion

-des structures plus épaisses quand on peut considérer que les composantes du tenseur des contraintes ne varient pas dans l'épaisseur.

C'est généralement un élément triangulaire à 3 noeuds ou quadrangulaire à 4 noeuds qui comporte 2 inconnues par noeud : les 2 composantes du vecteur déplacement (u,v) dans le plan.



SHELL: Cet élément bidimensionnel permet d'analyser des plaques ou des coques soumises à de la flexion et repose sur les hypothèses suivantes:

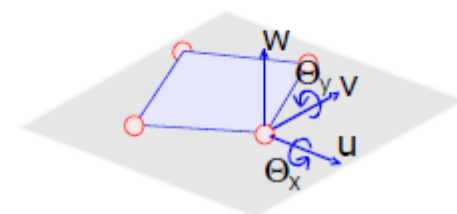
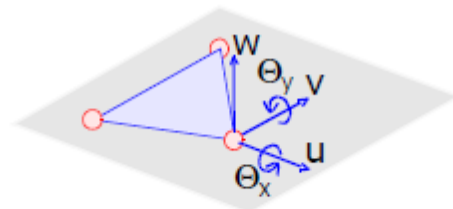
-la contrainte normale σ_z est négligeable,

-l'interaction entre les phénomènes de membrane et de flexion est négligée,

-les contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} varient linéairement suivant l'épaisseur.

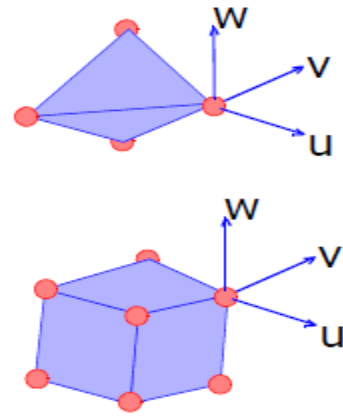
Il existe deux grandes catégories d'éléments suivant que l'on prend en compte ou pas les effets de cisaillement transverse.

Les éléments classiques sont triangulaires à 3 noeuds ou quadrangulaires à 4 noeuds et comportent 5 inconnues (DDL) par noeud : les 3 translations (u,v,w) et les 2 rotations (θ_x, θ_y). (z est l'axe perpendiculaire au plan de l'élément)



SOLID: Dans cet élément volumique, aucune hypothèse restrictive n'est posée. Toutes les composantes de contrainte sont calculées.

Les éléments classiques sont tétraédriques à 4 noeuds ou hexaédriques à 8 noeuds et comportent 3 inconnues (DDL) par noeud : les 3 translations (u,v,w)



CHAPITRE II : ÉLÉMENTS FINIS EN UNE DIMENSION

II.1. Élément ressort :

II.1.1. Matrice de rigidité par la méthode directe :

Le ressort (**spring**) est modélisé en utilisant un élément ligne (1D) avec deux nœuds.

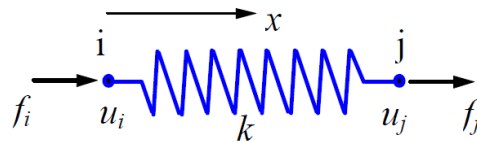


Figure II.1. Élément ressort.

Dans ce système on a :

- Deux nœuds : i, j
- Déplacements nodaux : u_i, u_j (m, mm)
- Forces nodales : f_i, f_j
- Raideur (stiffness): K (N/m, N/mm)

II.1.2. Notion de degrés de liberté :

Les degrés de liberté d'un nœud peuvent être définis comme étant les possibilités de déplacement de ce nœud dans un problème donné.

Un nœud a 6 degrés de liberté au maximum (3 translations et 3 rotations). Ces degrés de liberté peuvent être réduits en fonction du problème traité.

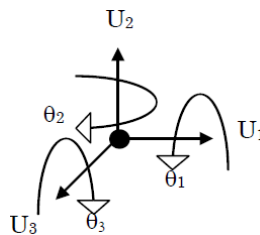


Figure II.2. Les six degré de liberté.

En effet, dans notre problème les nœuds ne peuvent se déplacer qu'en translation suivant une seule direction, chaque nœud a donc un seul degré de liberté u .

La relation linéaire entre force et déplacement est donnée par :

$$F = K\Delta \quad \text{Avec} \quad \Delta = u_j - u_i$$

Considérons l'équilibre des forces de ce système :

➤ **Au nœud i :** $f_i = -F = -k(u_j - u_i) = ku_i - ku_j$

➤ **Au nœud j :** $f_j = F = k(u_j - u_i) = -ku_i + ku_j$

Le système d'équation à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} ku_i - ku_j = f_i \\ -ku_i + ku_j = f_j \end{cases} \Rightarrow \text{Sous forme matricielle} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{K} \quad \mathbf{U} = \mathbf{F}$

K: matrice de rigidité élémentaire (stiffness matrix).

U: vecteur des déplacements nodaux.

F: vecteur des forces nodales.

NB:

- ✓ La matrice de rigidité \mathbf{K} est une matrice symétrique.
- ✓ Dans ce cas elle est singulière car son déterminant est nul, le système admet donc une infinité de solution.

Exemple1 : soit le système suivant :

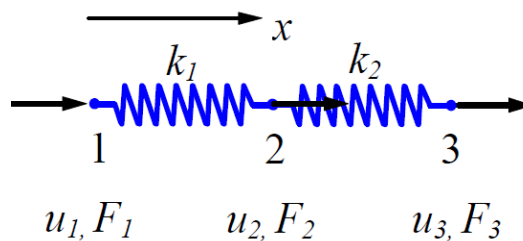


Figure II.3. Système à deux ressorts.

Pour l'élément 1 : $\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix}$

Pour l'élément 2 : $\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$

Considérons l'équilibre des forces de ce système :

Au nœud 1 : $F_1 = f_1^1$

Au nœud 2 : $F_2 = f_2^1 + f_1^2$

Au noeud 3 : $F_3 = f_2^2$

D'où :

$$\begin{cases} F_1 = k_1 u_1 - k_1 u_2 \\ F_2 = -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 \\ F_3 = -k_2 u_2 + k_2 u_3 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K} \quad \mathbf{U} \quad \mathbf{F}$$

Une autre façon pour construire ce système consiste à utiliser une matrice nulle dont la taille est égale au nombre de degrés de liberté du système.

Dans notre cas, on a 3 nœuds avec un seul degré de liberté pour chacun. On a donc 3 degrés de liberté ce qui donne une matrice de rigidité 3x3.

Cette matrice est ensuite remplie par les termes des matrices de rigidité élémentaire en respectant leurs positions dans la matrice globale.

Pour l'élément 1 :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour l'élément 2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

L'assemblage se fait en sommant les deux matrices de rigidité. On obtient alors le même résultat que celui obtenu en considérant l'équilibre des forces.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

II.1.3. Condition aux limites :

Afin de résoudre le système précédent, il nous faut des données supplémentaires car ce système contient trois équations avec 6 inconnus (les déplacements u_1, u_2, u_3 ainsi que F_1, F_2, F_3)

Ces données concernent tout d'abord les forces appliquées au système. Dans ce cas on supposera que $F_2 = F_3 = P$

Par ailleurs on supposera aussi que le déplacement au niveau du nœud 1 est bloqué, donc nul ($u_1 = 0$). Ceci est une condition aux limites dite géométrique.

Suite à l'application de ces conditions aux limites le système devient :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

Ce système se réduit donc à :

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} \quad \text{avec } F_1 = -k_1 u_2$$

L'inconnu est le vecteur $\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$ et la force F_1

La solution est facile à obtenir en inversant le système

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2P}{k_1} \\ \frac{2P}{k_1} + \frac{P}{k_2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}} C^T$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} = (-1)^{1+1} k_2 = k_2 \\ c_{12} = (-1)^{1+2} (-k_2) = k_2 \\ c_{21} = (-1)^{2+1} (-k_2) = k_2 \\ c_{22} = (-1)^{2+2} (k_1 + k_2) = k_1 + k_2 \end{array} \right. \Rightarrow C = \begin{bmatrix} k_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} k_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{k_2(k_1 + k_2) - k_2^2} \begin{bmatrix} k_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{k_1 k_2} \begin{bmatrix} k_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ p \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2p}{k_1} \\ \frac{2p}{k_1} + \frac{p}{k_2} \end{Bmatrix}$$

$$F_1 = -k_1 u_2 = -k_1 \frac{2p}{k_1} = -2p$$

Exemple 2 : soit le système suivant :

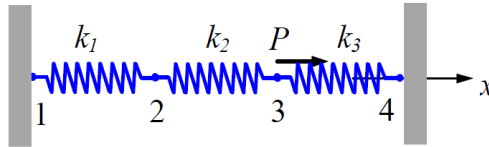


Figure II.4. Système à trois ressorts encastrés aux extrémités.

$$k_1 = 100 \text{ N/mm} ; k_2 = 200 \text{ N/mm} ; k_3 = 100 \text{ N/mm}$$

$$p = 500 \text{ N} ; u_1 = u_4 = 0$$

Trouver :

- 1) La matrice de rigidité globale
- 2) Les déplacements aux nœuds 2 et 3
- 3) Les réactions aux nœuds 1 et 4.

Solution (Exemple 2) :

$$\text{Pour l'élément 1 : } K_1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour l'élément 2 : } K_2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix}$$

Pour l'élément 3 : $K_3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$

En assemblant les trois matrices élémentaires, nous obtenons :

$$K = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

Le système d'équilibre s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ p \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

NB :

- La force $F_2 = 0$ car aucune force n'est appliquée au nœud 2
- Le système précédant tient compte des conditions aux limites

$$F_3 = p; u_1 = u_4 = 0$$

Le système se réduit alors :

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix} \quad \text{avec: } F_1 = -100u_2 \quad \text{et} \quad F_4 = -100u_3$$

En résolvant ce système, nous obtenons alors :

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p}{250} \\ \frac{3p}{500} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} (mm)$$

Nous obtenons ainsi les réactions au nœud 1 et 4 comme suit:

$$F_1 = -100u_2 = -200N \quad \text{et} \quad F_4 = -100u_3 = -300N$$

Exemple 3 :

Soit un système constitué de trois éléments ressort connectés à travers des masses m identiques (Figure II.5). Les raideurs des éléments ressorts 1, 2 et 3 sont respectivement $3k$, $2k$ et k . le nœud 1 est suspendu par un encastrement.

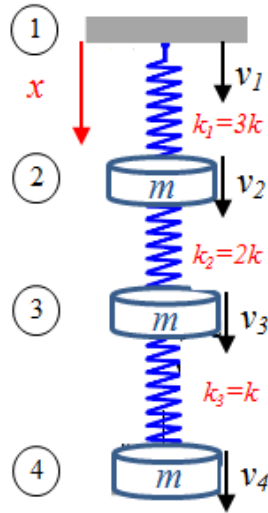


Figure II.5. Système à trois ressort encastré-libre.

Solution (Exemple 3) :

Chaque nœud possède un degré de liberté, donc la matrice globale sera de 4×4 .

Elément 1-2

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Elément 2-3

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Elément 3-4

$$\begin{Bmatrix} F_3^{(2)} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3^{(3)} \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

On remarque que les déplacements aux nœuds 2 et 3 sont les mêmes, donc on obtient :

$$v_1 = V_1, v_2^{(1)} = v_2^{(2)} = V_2, v_3^{(2)} = v_3^{(3)} = V_3 \text{ et } v_4 = V_4$$

En augmentant la taille de chaque matrice à 4x4 il vient :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3^{(2)} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

En procédant à l'assemblage on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3 = F_3^{(2)} + F_3^{(3)} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 5k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 3k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Conditions aux limites :

- Les nœuds 2, 3 et 4 sont sollicités à des poids extérieurs tels que : $F_2 = -mg = -P$,
 $F_3 = -P$ et $F_4 = -P$
- Au niveau de l'encastrement, les déplacements sont nuls, $V_1 = 0$. On obtient
 $F_1 = -3kV_2$

En introduisant les conditions aux limites, la forme matricielle (1) prend la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ -P \\ -P \\ -P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 5k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 3k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$-P = 5kV_2 - 2kV_3$$

$$-P = -2kV_2 + 3kV_3 - kV_4$$

$$-P = -kV_3 + kV_4$$

Après la résolution du système de trois équations à trois inconnus on obtient :

$$V_2 = \frac{-P}{k}, V_3 = \frac{-2P}{k} \text{ et } V_4 = \frac{-3P}{k}$$

Le signe (-) indique que les déplacements sont négatifs, dans le sens opposé de l'axe des ordonnées. Pour calculer les réactions d'appuis, il existe une seule composante selon la

direction verticale au niveau

de l'encastrement. Cela

devient :

$$F_1 = -3kV_3 = -3k \left(\frac{-P}{k} \right) = 3P$$

II.2. Élément Barre et système Treillis:

II.2.1. Formulation variationnelle:

Actuellement, le principe des travaux virtuels est bien connu et très répandu. Il est souvent formulé en termes d'égalité des travaux effectués par les forces extérieures et intérieures lors d'un déplacement virtuel quelconque. Ce concept est essentiel pour la résolution des équations aux dérivées partielles. En effet, les déplacements sont remplacés par une fonction arbitraire continue sur le domaine et l'équation est réécrite sous forme intégrale.

II.2.1.1. Forme forte:

Un problème classique d'équations différentielles gouvernant un système physique

S'énonce comme suit :

Trouver une fonction $u \in V$; V espace des fonctions, telle que :

$$A(u) = 0|_{\Omega} \quad ; \quad B(u) = 0|_{\Gamma} \quad (2.1)$$

Où $A(u)$ est l'ensemble d'équations gouvernantes définies sur le domaine Ω et $B(u)$ est l'ensemble des conditions aux limites que les fonctions u doivent vérifier sur le contour Γ (fig.II.6). La fonction u peut être un scalaire tel que la température, la pression, Ou un vecteur tel que le déplacement, la vitesse,...

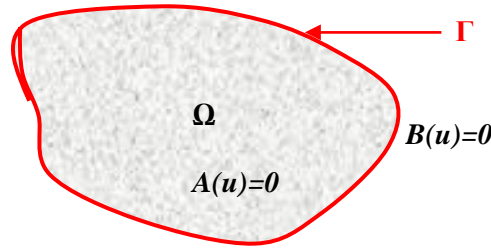


Figure II.6. *Domaine géométrique et le contour.*

Le problème variationnel associé au système (2.1) s'écrit en prenant l'intégrale du système d'équations gouvernantes pondérées par des fonctions poids, l'énoncé devient :

Trouver $u \in V$ tel que :

$$\forall w \in V : \int_{\Omega} w A(u) d\Omega = 0 \quad (2.2)$$

Cette équation est appelée forme intégrale forte de l'équation différentielle (ou du système d'équations différentielles). Elle est analogue à l'expression des travaux virtuels. En fait la solution de (2.2) a encore plus de portée, on peut affirmer que si elle est satisfaite pour toute fonction poids w alors l'équation différentielle (2.1) est satisfaite en tout point du domaine Ω .

Exemple 1 :

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$A(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + 1 - x = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3)$$

Définie dans le domaine unidimensionnel $\Omega = [0, L]$ avec les conditions aux limites :

$$u(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad u(x=1) = 0 \quad (2.4)$$

Dans ce cas $B(u)$ est l'ensemble des valeurs imposées aux deux bords du domaine. En unidimensionnel, Γ se réduit à deux points. La forme intégrale associée à l'équation $A(u)$ s'écrit :

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + 1 - x \right) d\Omega = 0 ; \quad \int_0^1 w \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx = \int_0^1 w(x-1) dx \quad (2.5)$$

Avec la forme des termes à intégrer, on voit que la recherche de solutions approximatives pour la fonction inconnue u , requiert l'utilisation de polynômes ou de fonctions d'interpolation dérivables au moins deux fois. De plus les conditions aux limites doivent être vérifiées à part puisqu'elles n'interviennent pas dans l'équation intégrale ci-dessus, d'où l'introduction de la forme intégrale faible.

II.2.1.2. Forme faible:

Pour satisfaire les conditions aux limites nous avons deux manières de procéder; soit par le choix de la fonction de pondération, soit vérifier que :

$$\int_{\Gamma} w B(u) d\Gamma = 0 \quad (2.6)$$

Dans la pratique, il est possible d'intégrer (2.2) par partie et de la remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(w) D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(w) F(u) d\Gamma = 0 \quad (2.7)$$

Les opérateurs C , D , E et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé, d'où un choix de fonctions d'approximation de u plus large.

Cette équation est la formulation faible de l'équation différentielle, elle forme la base de l'approximation par éléments finis.

Remarque : Pour obtenir de telles formulations intégrales, nous disposons de deux procédés: le premier est la méthode des résidus pondérés connue sous le nom de la méthode de Galerkin, le deuxième est la détermination de fonctionnelles variationnelles que l'on cherche à rendre stationnaire.

Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de trouver une fonctionnelle. Le premier procédé est plus utilisé; il consiste à choisir $w(u)$ fonction de Dirac (une perturbation de la

fonction cherchée) et d'utiliser l'approximation nodale pour la discrétisation. w s'appelle aussi fonction poids d'où le mot : "pondéré".

Exemple 2 :

Pour obtenir la forme variationnelle faible de l'exemple précédent (équation 2.5) on Intègre par partie le premier terme.

$$-\int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx + \left[w \frac{du}{dx} \right]_0^1 = \int_0^1 w(x-1) dx \quad (2.8)$$

On voit maintenant que les conditions aux limites notamment sur les dérivées sont explicitement prises en compte dans l'équation. Les valeurs imposées à la fonction elle-même seront traitées lors de la résolution des systèmes discrets.

II.2.2. fonction de forme:

Le point-clé de l'analyse par élément finis est de définir l'interpolation du champ continu $u(x,y,z)$ à partir des valeurs nodales u_i ; i étant le numéro du nœud considéré. Il est à rappeler que ce champ $u(x,y,z)$ n'est qu'une approximation du champ réel

$$\hat{u}(x, y, z) \approx u(x, y, z) = \sum_{\text{nœuds}} N_i(x, y, z) u_i$$

Où $N_i(x, y, z)$ est la fonction de forme (ou fonction d'interpolation) associée au nœud i et u_i est la valeur du déplacement au même nœud. Les fonctions de formes $N_i(x, y, z)$ représentent le poids associé à chacun des nœuds de l'élément. Elles permettent de prédire l'évolution du champ à l'intérieur du domaine d'application.

Pour que l'interpolation soit licite, les fonctions de forme doivent respecter les conditions suivantes :

- Elles doivent être continues sur le domaine. une discontinuée signifie que deux points infiniment voisins peuvent avoir des déplacements très différents. Or ceci n'est pas conforme à la mécanique du milieu continu (hormis les problèmes de fissuration)
- Pour un jeu unique de valeurs nodales, les fonctions de forme doivent conduire à des valeurs uniques du champ en tout point du domaine. Comme le cas précédant, un même point physique ne peut pas se déplacer dans deux directions en même temps.
- Les fonctions de forme doivent satisfaire les valeurs nodales. Cette condition implique qu'une fonction $N_i(x, y, z)$ doit avoir la valeur de 1 au nœud i et 0 à tous les autres nœuds.

Exemple 2: fonction de forme d'élément 1D

En utilisant les méthodes d'interpolation polynomiale, donner les fonctions de forme des éléments 1 D à deux, trois et quatre nœuds.

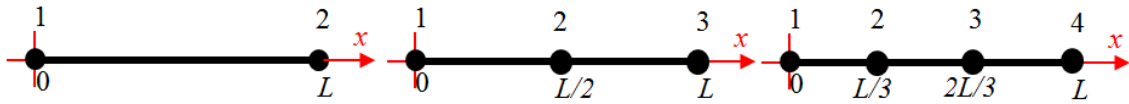


Figure II.7. *Eléments linéique à deux, trois et quatre nœuds.*

Pour l'élément à deux nœuds, l'interpolation doit être linéaire pour assurer la continuité de la solution, car il y'a exactement deux coefficients à déterminer par les deux conditions nodales. Le champ de déplacement s'écrit sous la forme :

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Les deux conditions nodales permettent de déterminer les coefficients α_1 et α_2

$$u(0) = \alpha_1 + \alpha_2 0 = u_1$$

$$u(L) = \alpha_1 + \alpha_2 L = u_2$$

Où u_1 et u_2 sont respectivement les déplacements au niveau du nœud 1 et 2. La solution donne les deux coefficients :

$$\alpha_1 = u_1$$

$$\alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

En regroupant les termes en facteur des valeurs nodales u_1 et u_2 , on obtient

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 \\ &= N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 \end{aligned}$$

D'où :

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{et} \quad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

II.2.2. Equation gouvernante:

L'élément barre est utilisé dans les assemblages de barres ou de tiges travaillant en traction ou compression. On les trouve surtout en charpente métallique et dans les systèmes à treillis.

Pour formuler cet élément, on considère une barre de section A de longueur L soumise à une traction $P(x)$ variant de P_0 à P_L .

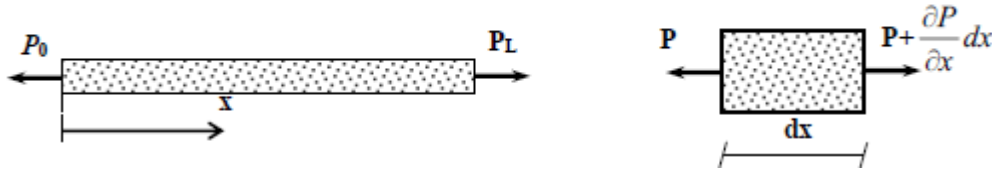


Figure II.8. Equilibre élémentaire.

Une portion infinitésimale de longueur dx située à la coordonnée x le long de la barre est en équilibre dynamique sous le système de forces suivant :

$$\sum F = 0$$

$$\left[P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right] - P = 0 \quad (2.9)$$

Dans cette expression u désigne le déplacement longitudinal, x est la coordonnée.

Si on désigne par E le module d'élasticité du matériau avec lequel est faite la barre, la loi de Hooke donne la contrainte axiale en fonction de la déformation longitudinale :

$$\frac{P}{A} = \sigma_x = E \varepsilon_x \quad (2.10)$$

La déformation est liée au déplacement par la dérivée par rapport à x :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.11)$$

En substituant (2.11) dans (2.10) on obtient l'expression de la traction P en fonction du déplacement u :

$$P = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.12)$$

D'où l'équation différentielle de l'équilibre de l'élément dx qui s'obtient en remplaçant

(2.12) dans (2.9)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (2.13)$$

Les conditions aux limites de cette équation dépendent de l'encastrement ou des déplacements imposés pour u , et du chargement aux noeuds pour les dérivées de u

II.2.2. Formulation de l'élément:

En prenant δu comme fonction de pondération, la formulation variationnelle forte de L'équation (2.13) s'écrit :

$$\int_0^L \delta u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx = 0$$

La formulation faible s'écrit en prenant l'intégration par parties:

$$\int_0^L \delta \frac{\partial u}{\partial x} EA \frac{\partial u}{\partial x} dx - \left[\delta u EA \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L = 0$$

Le deuxième terme n'est que la différence des forces appliquées aux extrémités de la barre

$$\delta u|_{x=L} P_L - \delta u|_{x=0} P_0$$

Pour la discrétisation de l'équation (2.15) on prend des fonctions de forme linéaires N_1 et N_2 avec $x_1=0$ et $x_2=L$.

Définissant le champ de déplacement $\{u\}$ en fonction des coordonnées généralisées α_1 et α_2

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$\begin{cases} u(0) = \alpha_1 \\ u(L) = \alpha_1 + \alpha_2 L \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Ainsi en remplaçant pour les différents opérateurs on obtient :

$$\delta \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Avec ces expressions l'équation intégrale faible (2.15) devient après simplification de $\{\delta u_1 \quad \delta u_2\}$

$$\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} EA \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} -P_0 \\ P_L \end{Bmatrix}$$

Sous forme matricielle :

$$Ku = F$$

Avec

$$\begin{aligned} K &= \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} EA dx \\ &= \frac{1}{L^2} \int_0^L EA \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

II.3. Exemple 3 (une tige encastrée) :

Une tige de longueur $L=3m$ et de section $A=25cm^2$ est encastrée à une de ses extrémité et soumise à une tension $P=250KN$ à l'autre extrémité. Le module de Young du matériau de la tige est $E=210\,000\,MPa$.

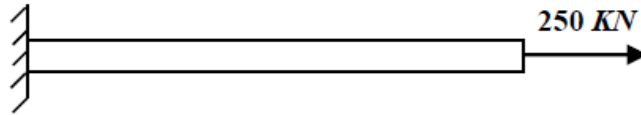


Figure II.9. Barre encastrée – libre.

La matrice de rigidité est :

$$K = 175.10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} N/m; F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 25.10^4 \end{Bmatrix} N$$

Compte tenu de la condition $u(0)=0$. La résolution donne un déplacement $u(L)=1.4mm$

Exemple 4 : soit l'assemblage suivant :

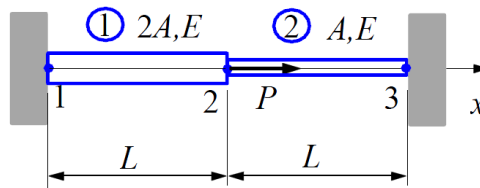


Figure II.10. Système a deux barres encastré aux extrémités.

Trouver les contraintes appliquées à chaque barres sachant que le système est chargé par la charge P au nœud 2 et encastré au nœuds 1 et 3 .

Solution :

Construisons tous d'abords les matrices de rigidité élémentaire :

$$\text{Elément 1 : } k_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elément 2 : } k_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En considérant un contact parfait entre les deux barres au nœud 2, nous obtenons la matrice de rigidité globale en appliquant les mêmes principes que dans le cas du ressort.

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi l'équilibre du système s'écrit :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Nous avons les conditions aux limites suivantes : $u_1 = u_3 = 0$ et $F_2 = P$

Le système devient alors :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

En supprimant la 1^{ère} et la 3^{ème} ligne nous obtenons :

$$3 \frac{EA}{L} \{u_2\} = \{P\}$$

D'où :

$$u_2 = \frac{PL}{3EA}$$

Pour calculer les contraintes il suffit d'appliquer la relation force-contrainte et force-déplacements :

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$F = k\Delta L = k(u_j - u_i)$$

$$\sigma = \frac{k(u_j - u_i)}{A}$$

Pour la barre (1) : $u_2 = \frac{PL}{3EA}$; $u_1 = 0$; $k_1 = \frac{2EA}{L}$

$$\sigma_1 = \frac{\frac{2EA}{L}(u_2 - u_1)}{2A} = \frac{E}{L} \left(\frac{PL}{3EA} - 0 \right) = \frac{P}{3A}$$

Pour la barre (2) : $u_2 = \frac{PL}{3EA}$; $u_3 = 0$; $k_2 = \frac{EA}{L}$

$$\sigma_2 = \frac{\frac{EA}{L}(u_3 - u_2)}{A} = \frac{E}{L} \left(0 - \frac{PL}{3EA} \right) = -\frac{P}{3A}$$

Exemple 5 : soit l'assemblage suivant :

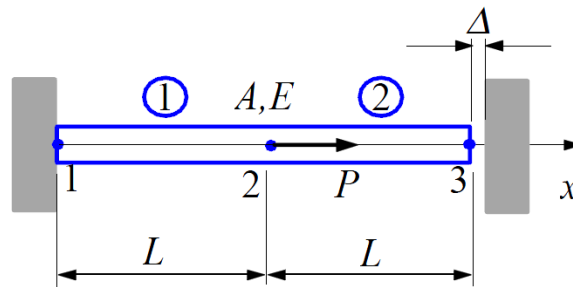


Figure II.11. Système d'une barre avec trois nœuds.

Trouver les réactions d'appuis de cet assemblage sachant que :

$$E = 2.10^4 \text{ N/mm}^2 ; A = 250 \text{ mm}^2 ; L = 150 \text{ mm} ; P = 6.10^4 \text{ N} ; \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

Solution :

Avant de calculer les réactions d'appuis il faut s'assurer que celles-ci existent, il s'agit bien sur du nœud 3 qui ne touche pas l'appui.

Pour s'en assurer il suffit juste de calculer le déplacement de la barre. Il faudrait que celui-ci soit supérieur à la distance Δ qui sépare la barre à l'appui de droite.

$$\text{On a : } P = \frac{EA}{L} \Delta_0 \Rightarrow \Delta_0 = \frac{PL}{EA} = \frac{6.10^4 \times 150}{2.10^4 \times 250} \approx 1,8 \text{ mm} \geq \Delta = 1,2 \text{ mm}$$

on a bien une réaction au nœud 3.

A présent construisons rigidité élémentaire :

$$\text{Elément 1 : } k_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elément 2 : $k_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice de rigidité globale est donc :

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi l'équilibre du système s'écrit :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Nous avons les conditions aux limites suivantes : $u_1 = 0$ et $u_3 = \Delta = 1,2mm$ $F_2 = P$ du fait de la présence de l'appui qui l'empêche de se déplacer plus

Le système devient alors :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

La deuxième équation donne :

$$\frac{EA}{L} [2 \quad -1] \begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \{P\} \Rightarrow \frac{2EA}{L} u_2 - \frac{EA}{L} \Delta = P \Rightarrow u_2 = \frac{\left(P + \frac{EA}{L} \Delta\right) L}{2EA} = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EA} + \Delta\right)$$

A.N :

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EA} + \Delta\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{6.10^4 \times 150}{2.10^4 \times 250} + 1,2\right) = 1,5mm$$

D'où : $u_2 = \frac{PL}{3EA}$

De la première équation du système nous obtenons :

$$F_1 = -\frac{EA}{L} u_2 = -\frac{2.10^4 \times 250}{150} \times 1,5 = -5.10^4 N$$

De la troisième équation du système nous obtenons :

$$F_3 = -\frac{EA}{L}u_2 + \frac{EA}{L}\Delta = \frac{2.10^4 \times 250}{150} \times (-1.5 + 1,2) = -10^4 \text{ N}$$

Exemple 6:

Considérons une barre à section représentée sur la figure 1. Soit E_1 et E_2 les modules d'élasticité des matériaux constituant la poutre tels que $E_1 = 3E_2$.

Les sections droites de diamètres respectivement d_1 et d_2 avec $d_1 = 2d_2$ et $L = L_1 = L_2$.

La barre est encastree à l'extrémité gauche et à l'autre elle est supportée par un ressort linéaire de rigidité k .

Au nœud (2) s'applique une charge d'intensité P .

-Calculer les déplacements nodaux.

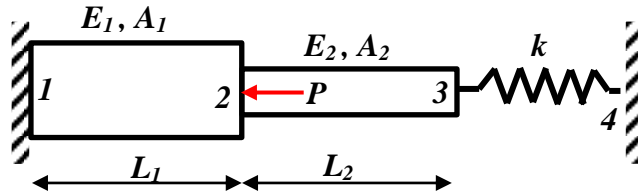


Figure II.12. Barre à section variables suspendue par un ressort.

Solution:

Chaque nœud possède un degré de liberté, donc la matrice globale sera de 4×4 .

Élément 1-2

Élément 2-3

Élément 3-4

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Nous remplaçons $E_1 = 3E_2$ et $d_1 = 2d_2$ par la valeur on obtient :

Élément 1-2

Élément 2-3

Élément 3-4

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{\pi E_1 d_1^2}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{\pi E_1 d_1^2}{3.16.L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Assemblage :

$$\begin{Bmatrix} F_1 = 0 \\ F_2 = -P \\ F_3 = 0 \\ F_4 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{\pi E_1 d_1^2}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{48} & -\frac{1}{48} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{48} & \frac{1}{48} + \frac{kL}{\pi E_1 d_1^2} & -\frac{kL}{\pi E_1 d_1^2} \\ 0 & 0 & -\frac{kL}{\pi E_1 d_1^2} & \frac{kL}{\pi E_1 d_1^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

On remarque que les déplacements au nœud 1 et 4 sont nuls, donc on obtient :

$$\begin{Bmatrix} -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\pi E_1 d_1^2}{L} \begin{bmatrix} \frac{13}{48} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{48} & \frac{1}{48} + \frac{kL}{\pi E_1 d_1^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

La solution du système nous permet de déterminer les déplacements :

$$u_2 = \frac{-4PL(1+48k)}{\pi E_1 d_1^2 (1+52k)} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{-4PL}{\pi E_1 d_1^2 (1+52k)}$$

II.3. Structures planes à treillis:

Les structures à treillis sont constituées par des assemblages de barres liées par des joints de telle sorte que le chargement extérieur soit repris uniquement par des forces axiales dans les barres. La figure 2.4 montre un exemple de système à treillis composé d'un assemblage de 13 barres et soumis à un chargement de deux forces.

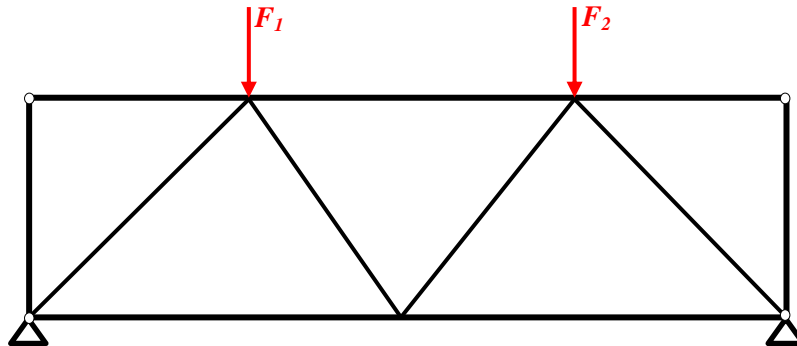


Figure II.13. Système à treillis.

Les barres composant ce système subissent deux déplacements à leurs extrémités ; une composante horizontale et une autre verticale. Cependant, seul le déplacement axial à la Barre donne naissance à la force axiale. Ainsi, les matrices élémentaires d'une barre bidimensionnelle (fig. 2.14) deviennent des matrices 4×4 puisque le vecteur des déplacements élémentaires devient :

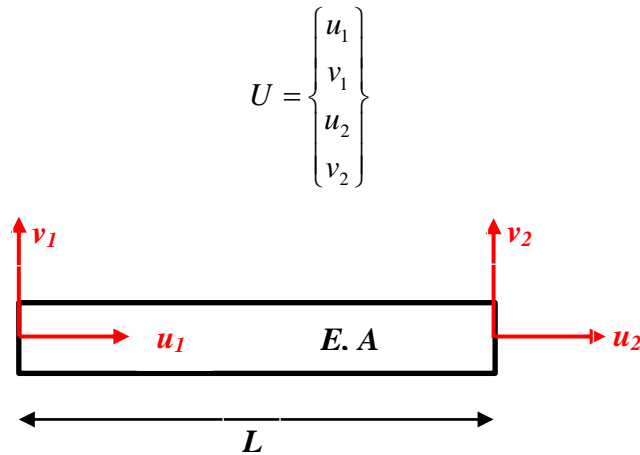


Figure II.14. *Élément barre bidimensionnel.*

Toutes les composantes de la matrice de rigidité associées à la composante v du déplacement sont nulles. Celles de la matrice masse, par contre, ne le sont pas toutes. Les effets de l'inertie existent aussi lorsque les extrémités de la barre se déplacent dans la direction orthogonale, seulement, il n'y a aucun couplage entre les deux composantes u et v du déplacement. La matrice de rigidité s'écrit :

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les expressions des matrices élémentaires sont valables dans un système d'axes confondu avec l'axe longitudinal de l'élément barre. Dans les cas pratiques, la barre peut être inclinée par rapport aux axes de référence. Il convient alors de faire une rotation d'axes pour revenir aux axes de la barre.

II.3.1. Matrice de transformation :

Un Grand nombre des structures en génie civil sont constituées de barres ou de poutres orienté dans plusieurs sens comme dans le cas des structures en béton armé ou les poutres à treillis.

Nous avons vu jusqu'à présent que des structures à éléments alignés, ce qui est loin d'être le cas des autres structures habituellement rencontrées dans le génie civil.

Analysons le cas d'une barre orienté d'un angle α par un repère fixe.

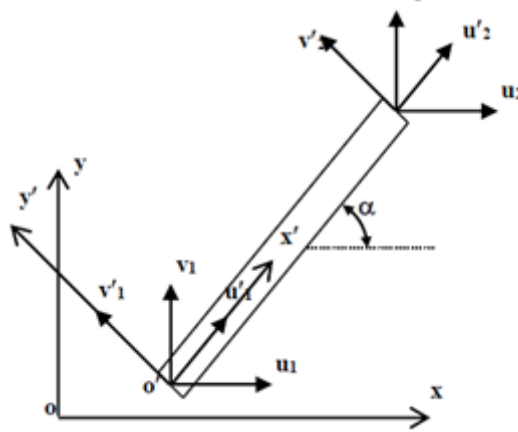


Figure II.15. *Élément barre bidimensionnel.*

La figure 2.15 montre une barre inclinée d'un angle α par rapport à l'axe horizontal du repère (oxy) . On note (u,v) les composantes du déplacement dans ce système et (u',v') celles du déplacement dans le repère $(o'x'y')$ lié à la barre. On note aussi \tilde{T} la matrice de rotation de repère qui permet de faire le passage du système (oxy) au nouveau système $(o'x'y')$. On peut ainsi écrire les relations suivantes :

$$u'_1 = u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha$$

$$v'_1 = -u_1 \sin \alpha + v_1 \cos \alpha$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow U'_1 = \tilde{T}U_1$$

Avec : $l = \cos \alpha$, $m = \sin \alpha$

La matrice \tilde{T} est dite matrice de transformation

La matrice \tilde{T} est orthogonale, son inverse $\tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^T$

Cette matrice permet le passage du repère local $(x'y')$ de la barre vers le repère globale (XY) du système assemblé. Sa transposé permet de faire le chemin inverse.

Si nous étendons le raisonnement au nœud 2 nous obtenons

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

On peut aussi écrire :

$$U' = TU \text{ avec } T = \begin{bmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & \tilde{T} \end{bmatrix}$$

De la même façon, nous pouvons démontrer la transformation des forces nodales. Nous obtenons alors :

$$F' = TF \text{ avec } T = \begin{bmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & \tilde{T} \end{bmatrix}$$

II.3.2 Matrice de rigidité :

A présent, nous allons voir comment passer de la matrice de rigidité dans le repère local vers le repère global :

Pour un élément barre, l'équilibre dans le repère local s'écrit :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_1 \end{Bmatrix}$$

Augmentons cette équation aux 4 degrés de liberté :

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow K'U' = F'$$

Transformons les vecteurs des déplacements et des forces du repère locale vers le repère global :

$$U' = TU$$

$$F' = TF$$

On obtient alors : $K'U' = F' \Rightarrow K'TU = TF$

Prémultiplions les deux membres de cette équation par T^T sachant que $T^T T = I$

$$T^T K' T U = T^T T F \Rightarrow F = \underbrace{T^T K' T}_K U$$

D'où la matrice de rigidité dans le repère globale s'écrit :

$$K = T^T K' T$$

La forme explicite de la matrice de rigidité dans le repère global pour un élément barre s'écrit comme suit :

$$K = \begin{bmatrix} l & -m & 0 & 0 \\ m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & -m \\ 0 & 0 & m & l \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

Exemple 7 :

Soit le système contenant trois barres de la figure II.16. Toutes les barres possèdent la même longueur L et la même rigidité axiale EA .

- Déterminer la matrice de rigidité du système
- Calculer les déplacements nœuds.

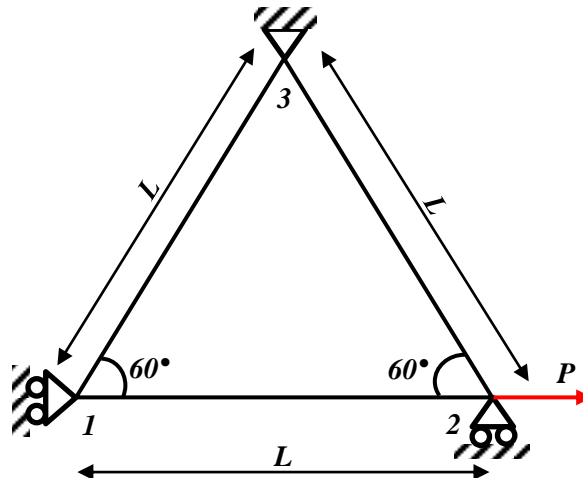


Figure II.16. Système en treillis à trois barres.

Solution

On détermine le tableau regroupant les caractéristiques géométriques du système :

Barre	Longueur	Angle θ	l	m	l^2	m^2	lm
1-2	L	0	1	0	1	0	0
2-3	L	$2\pi/3$	$-1/2$	$+\sqrt{3}/2$	$1/4$	$3/4$	$-\sqrt{3}/4$
1-3	L	$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/4$	$3/4$	$\sqrt{3}/4$

Elément 1-2

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Elément 2-3

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Elément 1-3

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

L'assemblage des matrices élémentaires nous permet d'écrire la matrice suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Conditions aux limites :

- Les déplacements au nœud 3 sont nuls : $u_3 = v_3 = 0$
- Le déplacement vertical au nœud 2 est nul : $v_2 = 0$
- Le déplacement horizontal au nœud 1 est nul : $u_1 = 0$

Les forces extérieures données se traduisent à la force \vec{F} appliquée au nœud 2, donc on écrit :

$$\begin{cases} F_{2x} = p \\ F_{1y} = 0 \end{cases}$$

La composante $F_{1y} = 0$ est nulle, car il n'y a pas de réaction.

En introduisant les conditions aux limites dans la matrice, on a :

$$\begin{cases} F_{x1} = ? \\ F_{y1} = 0 \\ F_{x3} = P \\ F_{y3} = ? \\ F_{x3} = ? \\ F_{y3} = ? \end{cases} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Il reste } \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{4L}{15EA} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} = \frac{4PL}{5EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Exemple 8 : soit l'assemblage de la figure II. 17:

Données : $P=1000$ KN; $L=1$ m; $E=210$ GPa. $A=6.10^{-4} \text{ m}^2$ pour les éléments 1 et 2.

$A= \sqrt{2} 6.10^{-4} \text{ m}^2$ pour l'élément 3.

Calculer :

- 1) Les déplacements en chaque nœud.
- 2) les réactions d'appuis.

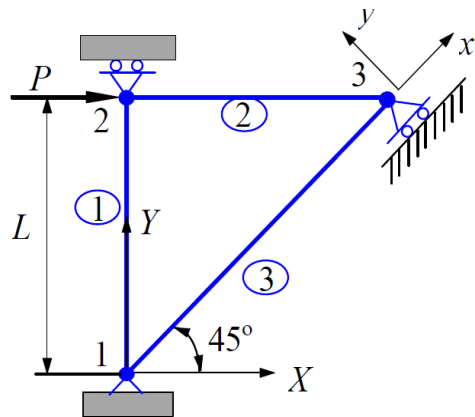


Figure II.17. Système en treillis a trois barres.

Solution :

Nous avons un appui roulant au nœud 3, il faut donc y prêter attention.

Commençant tout d'abords par construire le système d'équations global:

1) La barre 1 : $\theta_1 = 90^\circ; l = 0; m = 1$

$$K_1 = T^T K_1' T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \frac{(210 \times 10^9)(6 \times 10^4)}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} N/mm$$

2) La barre 2 : $\theta_1 = 0^\circ; l = 1; m = 0$

$$K_2 = T^T K_2' T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{(210 \times 10^9)(6 \times 10^4)}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N/mm$$

3) La barre 3 : $\theta_1 = 45^\circ; l = m = \frac{\sqrt{2}}{2} ; L' = \sqrt{2}L$

La longueur de cette barre est différente de celles des barres 1 et 2

Notons L' la longueur de la barre 3

En utilisant les relations trigonométriques, nous obtenons:

$$L = L' \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} L' \Rightarrow L' = \frac{2}{\sqrt{2}} L = \sqrt{2}L$$

$$K_3 = T^T K'_3 T = \frac{EA}{L'} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \frac{(210 \times 10^9)(6\sqrt{2} \times 10^4)}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} N/mm$$

En assemblant les trois matrices en faisant attention aux connexions des nœuds nous obtenons :

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & SYM & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1.5 & 0.5 \\ & & & & & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Application des conditions aux limites :

On a dans le repère global :

- 1) En termes de déplacement $u_1 = v_1 = v_2 = 0$
- 2) En termes de forces $F_{2X} = P$

Ces 4 conditions aux limites ne sont pas suffisantes pour permettre la résolution du système, il nous manque encore 2 autres conditions aux limites.

Regardons dans le repère local $(x'y')$

Dans ce repère nous avons : $v'_3 = 0$ et $F_{3x'} = 0$

Partons de la relation :

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u'_3 &= u_3 \cos \theta + v_3 \sin \theta \\ v'_3 &= -u_3 \sin \theta + v_3 \cos \theta \end{aligned} \Rightarrow -u_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + v_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (v_3 - u_3) = 0$$

$$\text{D'ou : } v_3 - u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = v_3$$

De la même façon nous avons aussi :

$$\begin{Bmatrix} F_{ix'} \\ F_{iy'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_{3x'} &= F_{3X} \cos \theta + F_{3Y} \sin \theta \\ F_{3y'} &= -F_{3X} \sin \theta + F_{3Y} \cos \theta \end{aligned} \Rightarrow F_{3X} \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{3Y} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (F_{3X} + F_{3Y}) = 0$$

$$\text{D'ou : } F_{3X} + F_{3Y} = 0 \Rightarrow F_{3X} = -F_{3Y}$$

Désormais, nous avons un système à 3 équations et 3 inconnus

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

De plus nous avons :

$$u_3 = v_3 \quad \text{et} \quad F_{3X} = -F_{3Y}$$

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ -F_{3X} \end{Bmatrix}$$

Ceci conduit à :

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ -F_{3X} \end{Bmatrix}$$

La troisième équation donne :

$$1260 \times 10^5 u_3 = -F_{3X}$$

En additionnant les équations 2 et 3, le système précédent se réduit alors à :

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2250 \times 10^5} \begin{Bmatrix} 3P \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,01191 \\ 0,003968 \end{Bmatrix}$$

En utilisant le système global nous obtenons les réactions d'appui comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -500 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \\ 500 \end{Bmatrix} (KN)$$

II.3. Élément poutre et système portique:

L'élément poutre est utilisé pour reprendre, en plus de l'effort axial comme l'élément barre, un chargement perpendiculaire à son axe. On retrouve les poutres dans beaucoup de structures de génie civil et de constructions mécaniques. Les cas les plus fréquents sont les portiques constituant les bâtiments d'habitation, les ponts ... etc.

On considère comme poutres les pièces élancées (en béton armé ou en acier), qui ont une dimension très grande par rapport aux deux autres et qui travaillent généralement en flexion.

La formulation de l'élément poutre peut être obtenue en se basant sur le théorie de la résistance des matériaux ; on considère une poutre de section A et de longueur L soumise à un chargement $q(x)$ variant le long de son axe longitudinal tel que montrée sur la figure 3.1 ci-dessous :

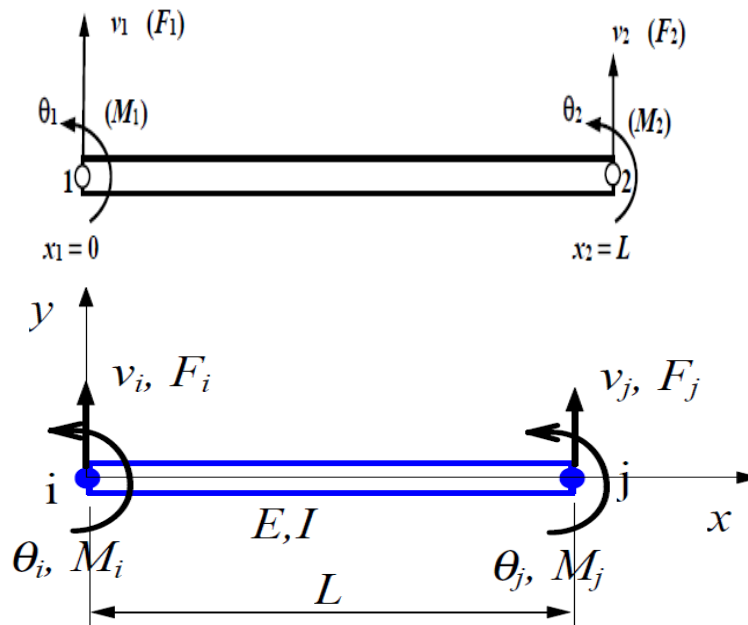


Figure II.18. Élément poutre à deux nœuds.

L : Longueur de la poutre (Length).

I : Moment d'inertie de la section transversale (moment of inertia of the cross-sectional area).

E : Module élastique (elastic modulus).

$v = v(x)$: Déplacement transversal (Deflexion).

$\theta = \theta(x)$: Rotation autour de l'axe sortant (z) (rotation about the z-axis)

$\sigma = \sigma(x)$: Contrainte (Stress).

$\varepsilon = \varepsilon(x)$: Déformation (Strain).)

$F = F(x)$: Force de cisaillement (shear force).

$M = M(x)$: Moment de flexion (bending moment).

II.3.1. équation gouvernante :

Sans doute, l'hypothèse la plus importante est la suivante :

Les sections planes et normales à la fibre moyenne avant la déformation restent planes et normales à la fibre moyenne après la déformation. Le déplacement d'une section droite est un déplacement de corps solide.

Cette hypothèse se traduit par les écritures mathématiques qui constituent la théorie des poutres classique :

$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\sigma(x) = \frac{-M(x)y}{I} = -Ey \frac{d^2 v}{dx^2} = E\varepsilon$$

Fonction de forme :

Le nombre de degrés de liberté atteint ainsi quatre et le polynôme d'interpolation doit être cubique (quatre constantes).

Les déplacements et les rotations le long de la poutre sont approximés par :

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$$

$$\begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

L'évaluation de ces polynômes aux nœuds donne :

$$v(0) = \alpha_1 = v_1$$

$$\theta(0) = \alpha_2 = \theta_1$$

$$v(L) = v_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3$$

$$\theta(L) = \theta_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = Nu$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 N}{dx^2} u = Bu$$

B est la matrice de déformation-déplacement

$$B = \frac{d^2 N}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{-2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

Considérant le potentiel de l'énergie de déformation conservée dans la poutre :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(\frac{-My}{I} \right)^T \frac{1}{E} \left(\frac{-My}{I} \right) dA dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L M^T \frac{1}{EI} M dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^T EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L (Bu)^T EI (Bu) dx \\
 &= \frac{1}{2} u^T \left(\int_0^L \mathbf{B}^T EI B dx \right) u
 \end{aligned}$$

le potentiel de l'énergie des forces externes est

$$W = \frac{1}{2} u^T f$$

Le principe de conservation d'énergie $U = W$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} u^T f &= \frac{1}{2} u^T \underbrace{\left(\int_0^L \mathbf{B}^T EI B dx \right)}_K u \\
 K &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- **Système portique :**

Pour modéliser un portique on fait appel à l'élément poutre 2D

C'est un élément subissant une flexion avec une compression ou une traction axiale. De tel élément nous pouvons le voir dans les poteaux subissant une compression et une flexion due à l'action du vent par exemple.

Construire la matrice de rigidité d'un élément poutre-barre revient à combiner la matrice de rigidité d'une poutre avec celle d'une barre en tenant compte des termes de rigidité adéquats à chaque degré de liberté. Ainsi la matrice de rigidité d'un élément poutre-barre s'écrit comme suit :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

- **Transformation de charges réparties en charges nodales :**

Nous avons, jusqu'à présent résolu des problèmes pour lesquelles les charges extérieures étaient appliquées aux nœuds. Ceci n'est souvent pas le cas car la plupart des structures en génie civil sont soumises à un chargement réparti.

Dans la méthode des éléments finis les charges doivent être appliquées aux nœuds il est donc nécessaire de trouver un moyen de transformer les charges réparties en charges nodale.

Le principe consiste à trouver un système de chargement aux nœuds équivalent que provoquera le même travail effectué par le chargement réparti.

Prenons le cas d'une barre soumise à une charge axiale répartie sur sa longueur :

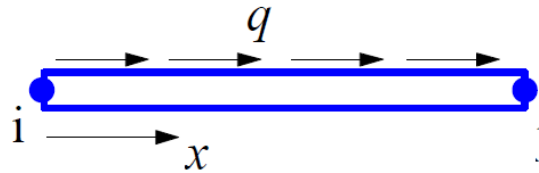


Figure II.19. Barre soumise à une charge axiale répartie sur sa longueur.

$$W_q = \frac{1}{2} \int_0^L q u dx$$

En utilisant les fonctions d'interpolation nous obtenons :

$$W_q = \frac{1}{2} \int_0^L q B u dx = \frac{1}{2} \int_0^L q \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} & \frac{qL}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$\text{D'où : } \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{Bmatrix}$$

Ainsi le système devient :



Figure II.20. Barre avec deux nœuds.

Pour un système à deux éléments, nous obtenons :

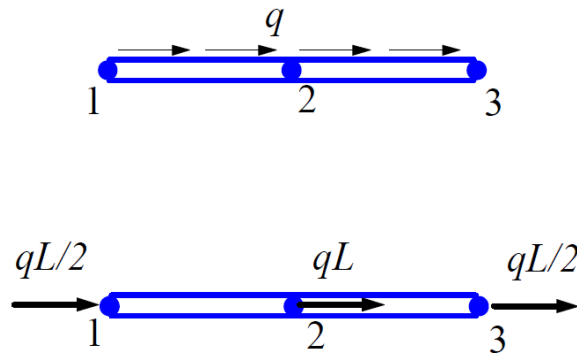


Figure II.21. Système à deux éléments.

En appliquant le même principe, nous pouvons obtenir les charges nodales équivalentes à un chargement transversal uniforme.

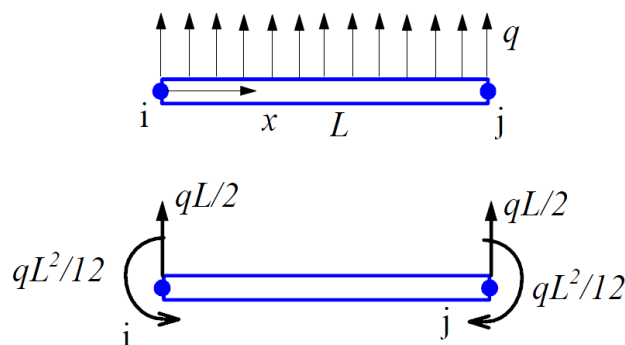


Figure II.22. Barre sous un chargement transversal uniforme.

Un assemblage de deux éléments conduit au résultat suivant :

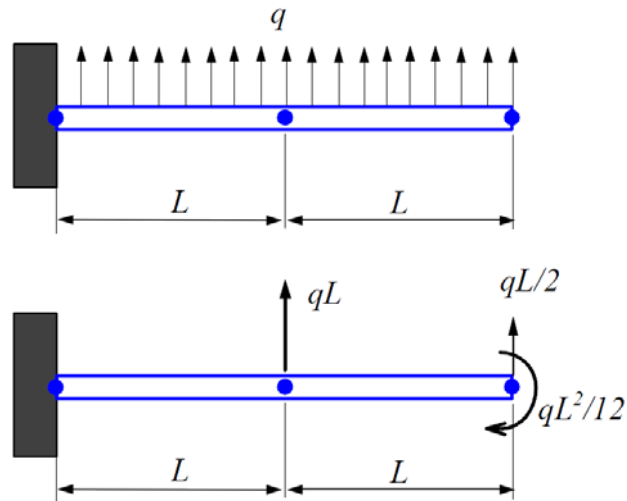


Figure II.23. Système à deux éléments (encastré-libre).

Exemple 9 :

Soit la structure formée de deux éléments barres élancés et trois nœuds (figure 4.20). Une charge est appliquée au nœud 3, fait un pliage de 45° par rapport à l'horizontal. La structure possède une section constante A. calculer les déplacements et les rotations.

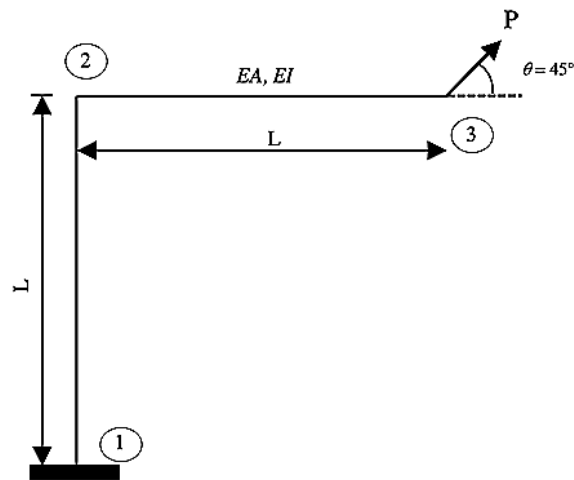


Figure II.24. Portique plan contenant deux barres.

Solution

La structure est composée des éléments de barres qui sont connectes à travers le nœud 2. Dans de cas chaque nœud possède trois degrés de liberté. Les sinus et cosinus directeur pour chaque élément barre sont regroupés dans le tableau suivant :

Barre	Longueur	Angle θ	λ	μ	λ^2	μ^2	$\lambda\mu$
1-2	L	$\pi/2$	0	1	0	1	0
2-3	L	2π	1	0	1	0	0

Déterminations des matrices élémentaires

Élément 1-2

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & -\left(\frac{12}{L^2}\right) & 0 & -\frac{6}{L} \\ 0 & R & 0 & 0 & -R & 0 \\ -\frac{6}{L} & 0 & 4 & \frac{6}{L} & 0 & 2 \\ -\left(\frac{12}{L^2}\right) & 0 & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} \\ 0 & -R & 0 & 0 & R & 0 \\ -\frac{6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Élément 2-3

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & -R & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\left(\frac{12}{L^2}\right) & \frac{6}{L} \\ 0 & \frac{6}{L} & 4 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{12}{L^2}\right) & -\frac{6}{L} & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & \frac{6}{L} & 2 & 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

L'assemblage des matrices élémentaires en repère global permet d'obtenir :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L} & 0 & 4 & \frac{6}{L} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & R + \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & -R & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 & 0 & R + \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & \frac{6}{L} & 8 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{L} & 2 & 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Conditions aux limites :

Au niveau de l'encastrement il n'y a pas de degré de liberté de liberté c'est-à-dire tous les déplacements et les rotations sont nuls. $u_1 = v_1 = \theta_1 = 0$ et $F_{2x} = F_{2y} = M_2 = M_3 = 0$. Les éléments nuls du vecteur de déplacement nous amènent à supprimer les lignes et les colonnes de la matrice de rigidité.

Donc ci-après on écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{x1} = ? \\ F_{y1} = ? \\ M_1 = ? \\ F_{x2} = 0 \\ F_{y2} = 0 \\ M_2 = 0 \\ F_{x3} = P \cos \frac{\pi}{4} \\ F_{y3} = P \sin \frac{\pi}{4} \\ M_3 = 0 \end{array} \right\} = \frac{EI}{L} \left[\begin{array}{ccccccccc} 12 & 0 & 6 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ L^2 & 0 & L & L^2 & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & L & L & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & R + \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & -R & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 & 0 & R + \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & \frac{6}{L} & 8 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{L} & 2 & 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\}$$

Soit après simplification :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} P \\ \frac{\sqrt{2}}{2} P \\ 0 \end{array} \right\} = \frac{EI}{L} \left[\begin{array}{cccccc} R + \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & -R & 0 & 0 \\ 0 & R + \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\left(\frac{12}{L^2}\right) & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & \frac{6}{L} & 8 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{12}{L^2}\right) & -\frac{6}{L} & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & \frac{6}{L} & 2 & 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(R + \frac{12}{L^2} \right) u_2 + \frac{6}{L} \theta_2 - R u_3 = 0 \\ \left(R + \frac{12}{L^2} \right) v_2 + \frac{6}{L} \theta_2 - \frac{12}{L^2} v_3 + \frac{6}{L} \theta_3 = 0 \\ \frac{6}{L} u_2 + \frac{6}{L} v_2 + 8\theta_2 - \frac{12}{L^2} v_3 - \frac{6}{L} \theta_3 = 0 \\ -R u_2 + R u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{PL}{EI} \\ \frac{12}{L^2} v_2 - \frac{6}{L} \theta_2 + \frac{12}{L^2} v_3 - \frac{6}{L} \theta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{PL}{EI} \\ \frac{6}{L} v_2 + 2\theta_2 - \frac{6}{L} v_3 + 4\theta_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{12} \frac{PL^3}{EI} \\ v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{PL}{EA} \\ \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{PL^2}{EI} \\ u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{PL}{EA} - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{PL^3}{EI} \\ v_3 = \frac{6\sqrt{2}}{2} \frac{PL}{EA} + \frac{5\sqrt{2}}{12} \frac{PL^3}{EI} \\ \theta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{PL^2}{EI} \end{array} \right.$$

Réactions d'appuis

Il y'a qu'un seul appui qui possède trois réactions au niveau de l'encastrement :

$$F_{x1} = \frac{EI}{L} \left(-\frac{12}{L^2} u_2 - \frac{6}{L} \theta_2 \right) = \frac{EI}{L} \left(-\frac{12}{L^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{12} \frac{PL^3}{EI} \right) - \frac{6}{L} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{PL^2}{EI} \right) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} P$$

$$F_{y1} = \frac{EI}{L} (-R v_2) = \frac{EI}{L} \left(-\frac{A}{I} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{PL}{EA} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

$$M_1 = \frac{EI}{L} \left(\frac{6}{L} u_2 + 2\theta_2 \right) = \frac{EI}{L} \left(\frac{6}{L} \left(-\frac{\sqrt{2}}{12} \frac{PL^3}{EI} \right) + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{PL^2}{EI} \right) \right) = 0$$

Exemple 10

Sur la figure II.25, on montre une structure contenant deux barres dont les extrémités sont complètement fixes. L'élément horizontal est soumis à une charge répartie q . la matrice de rigidité du système. Les éléments ont une longueur et une section identiques.

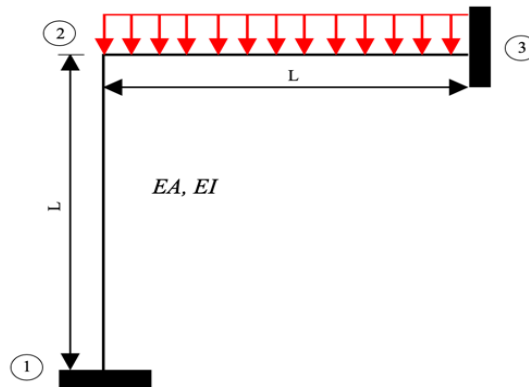


Figure II.25. Structure avec deux barres fixes aux extrémités.

Solution

Les matrices de rigidité des éléments 1-2 et 2-3 sont les mêmes que celles de l'exemple précédent.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} = ? \\ F_{y1} = ? \\ M_1 = ? \\ F_{x2} = 0 \\ F_{y2} = 0 \\ M_2 = 0 \\ F_{x3} = ? \\ F_{y3} = ? \\ M_3 = ? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L} & 0 & 4 & \frac{6}{L} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & R + \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & -R & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 & 0 & R + \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & \frac{6}{L} & 8 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{L} & 2 & 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

CHAPITRE III : ÉLÉMENTS FINIS EN DEUX ET TROIS DIMENSIONS

III.1. Éléments Finis en Deux dimension :

Les éléments plans (2D) sont utilisés pour la modélisation des milieux dont le comportement est entièrement défini dans l'espace à deux dimensions. Ils représentent les éléments de base pour l'étude, la compréhension et la formulation de la méthode des éléments finis. Le triangle de pascal sert comme base de l'interpolation polynomiale des champs dans l'élément.

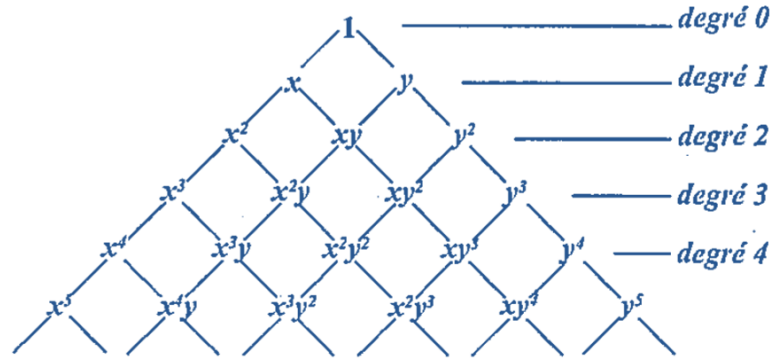


Figure III.1. Le triangle de pascal.

III.1.1. Interpolation et fonctions de forme :

- **Champ de déplacement :**

Dans le cas plan, le comportement est parfaitement défini en fonction de deux champs de déplacement $u(x,y)$ et $v(x,y)$ qui sont découplés.

- **Élément triangulaire**

Les éléments triangulaires sont bien adaptés aux géométries complexes, mais ils sont moins précis que les quadrangles.

- ✓ **Éléments à trois nœuds :**

Les vecteurs nodaux sont :

$$\begin{aligned} \{u\}^T &= \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\} \\ \{F\}^T &= \{F_{1x} \quad F_{1y} \quad F_{2x} \quad F_{2y} \quad F_{3x} \quad F_{3y}\} \end{aligned}$$

Pour chacun des deux champs de déplacement, on admet un polynôme bi-linéaires complet.

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

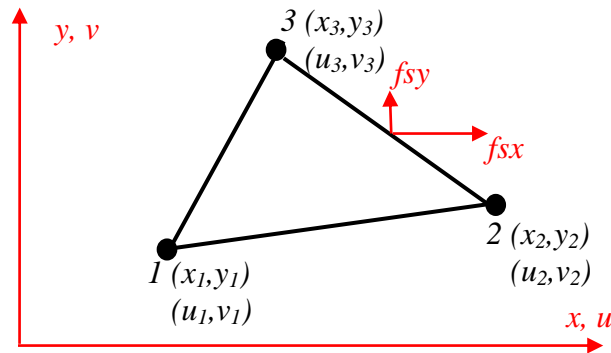


Figure III.2. Éléments triangulaire à trois nœuds.

✓ Éléments à six nœuds :

Dans cet élément on introduit un nœud supplémentaire au milieu de chaque arrête du triangle.

L'élément contient ainsi 12 variables nodales

$$\begin{aligned} \{u\}^T &= \{u_1 \quad v_1 \quad \dots \quad u_3 \quad v_3\} \\ \{F\}^T &= \{F_{1x} \quad F_{1y} \quad \dots \quad F_{3x} \quad F_{3y}\} \end{aligned}$$

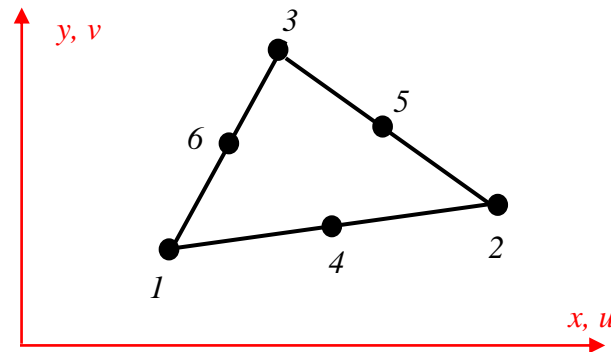


Figure III.3. Éléments triangulaire à six nœuds.

Dans ce cas les fonctions de forme sont bi-quadratique complète.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 \\ v(x, y) &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} xy + \alpha_{11} x^2 + \alpha_{12} y^2 \end{aligned}$$

• Éléments quadrangulaires :

Les éléments quadrangulaires sont généralement plus précis que les triangles de même ordre d'interpolation. Cette précision est la conséquence de la symétrie géométrique par rapport aux deux axes.

✓ **Élément à quatre nœuds :**

On se retrouve avec 8 variables nodales

$$\begin{aligned}\{u\}^T &= \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\} \\ \{F\}^T &= \{F_{1x} \quad F_{1y} \quad F_{2x} \quad F_{2y} \quad F_{3x} \quad F_{3y} \quad F_{4x} \quad F_{4y}\}\end{aligned}$$

Le polynôme utilisé est le suivant (élément de Lagrange) :

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x, y) &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} xy\end{aligned}$$

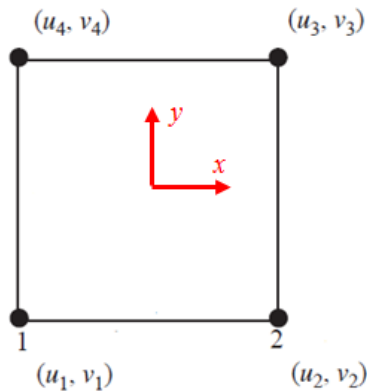


Figure III.4. Élément quadrangulaire à quatre nœuds.

❖ **Elasticité plane :**

Relation déformation déplacement :

Dans le plan de l'élément, la relation déformation déplacement est donnée par le tenseur de Green :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

❖ **Loi de comportement :**

- **Contraintes planes :**

Il n'existe pas de contrainte en dehors du plan (x,y), la déformation ε_z étant libre.

L'exemple d'une plaque mince correspond bien à cette situation.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Et $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy}$ sont fonction de (x,y) uniquement

Attention $\varepsilon_z \neq 0$

La matrice de comportement est défini par la relation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

- Déformations planes :

Dans ce cas, ce sont les déformation en dehors du plan (x,y) qui sont nulles, la contrainte σ_z étant libre. L'exemple d'une plaque à grande épaisseur (une coupe dans un barrage, par exemple) correspond à cette situation.

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Et $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy}$ sont fonction de (x,y) uniquement

Attention $\sigma_z \neq 0$

La matrice de comportement est défini par la relation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

• Construction des Fonctions de forme :

Exemple 1 :

- 1)- en utilisant la méthode directe, déterminer les fonctions de forme d'un élément triangulaire à trois nœuds.
- 2)- déterminer la matrice de rigidité.

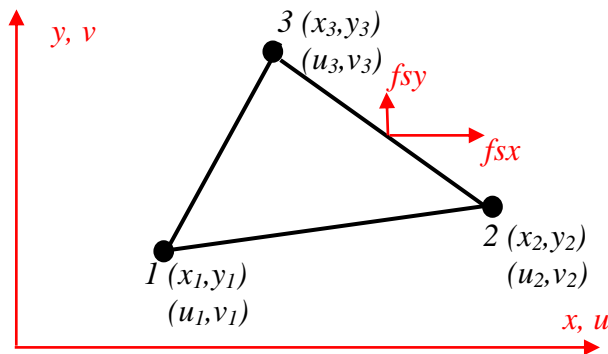


Figure III.5. Éléments triangulaire à trois nœuds.

Pour un triangle de trois nœuds en élasticité plane les champs de déplacement sont interpolés par :

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

Ou bien :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

Cette expression s'écrit sous une forme compacte par : $\{u\} = [X]\{\alpha\}$

Les conditions nodales permettent de déterminer les valeurs des coefficients. Dans notre exemple, ces conditions sont données par le système :

$$\begin{Bmatrix} u(x_1, y_1) \\ v(x_1, y_1) \\ u(x_2, y_2) \\ v(x_2, y_2) \\ u(x_3, y_3) \\ v(x_3, y_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Ce système est noté

$$\{u_i\} = [A]\{\alpha\}$$

Ou la matrice $[A]$ dépend des coordonnées des nœuds, $\{\alpha\}$ est le vecteur des coefficients et $\{u\}$ est le vecteur des déplacements nodaux. La solution de ce système est donc :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{u\}$$

Pour simplifier l'écriture, on note $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, $c_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$

L'inverse de la matrice $[A]$ donne :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} c_{23} & c_{31} & c_{12} \\ y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{31} & x_{31} & x_{12} \end{bmatrix}$$

Avec $D = c_{12} + c_{23} + c_{31}$. Pour obtenir l'expression des fonctions de forme, on introduit ce résultat dans l'équation du déplacement :

$$\{u\} = [X]\{\alpha\} = [X][A]^{-1}\{u_i\}$$

En comparant cette relation avec l'expression générale $\{u\} = N\{u_i\}$, on identifie $[N]$ par :

$$[N] = [X][A]^{-1}$$

D'une façon similaire pour :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

Pour le cas de l'élément triangulaire, en posant $d_{ij} = xy_{ij} - yx_{ij}$, on obtient :

$$\begin{aligned} [N] &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} c_{23} + d_{23} & 0 & c_{31} + d_{31} & 0 & c_{12} + d_{12} & 0 \\ 0 & c_{23} + d_{23} & 0 & c_{31} + d_{31} & 0 & c_{12} + d_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cela revient à :

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} c_{23} + d_{23} \\ c_{31} + d_{31} \\ c_{12} + d_{12} \end{bmatrix}$$

Matrice $[B]$:

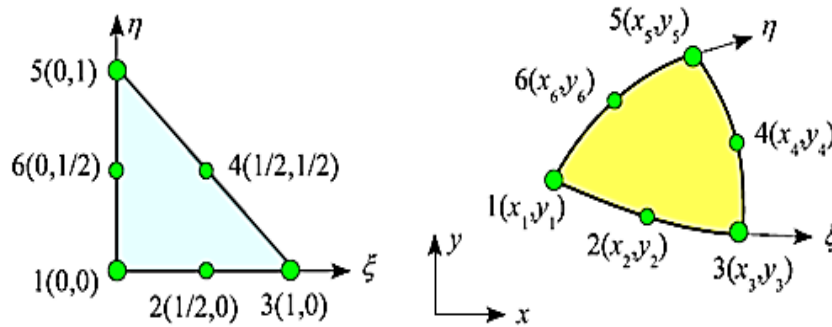
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_5 \end{Bmatrix} = B\{u_i\} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \{u_i\}$$

Matrice de rigidité :

$$K = \int_V B^T [C] B dV = t A B^T C B$$

Exemple 2 :

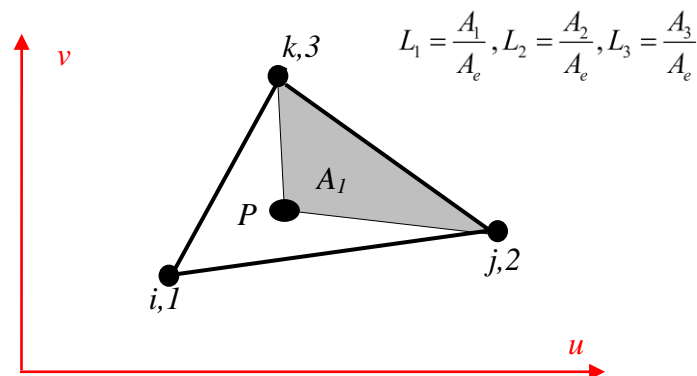
- 1)- donner les fonctions de forme d'un élément à six nœuds en coordonnées barycentriques.
- 2)- déterminer la matrice de rigidité.


Figure III.6. Éléments à six nœuds.

- **Méthode barycentrique :**

La construction des fonctions de formes des éléments triangulaire présente quelque difficulté. En plus de sa lourdeur, la méthode directe conduit dans certains cas à un système singulier. Pour ce type d'élément, une approche basée sur les coordonnées barycentriques semble mieux convenir.

Une coordonnées barycentrique d'un point est définie par le rapport entre l'aire du triangle formé par le point lui-même et l'arrête opposée au sommet considéré, et l'aire total du triangle les coordonnées barycentriques L_i sont ainsi :


Figure III.7. Éléments triangulaire.

Avec $L_1 + L_2 + L_3 = 1$

• **Elément isoparamétrique :**

A chaque élément réel, on associe un élément de référence

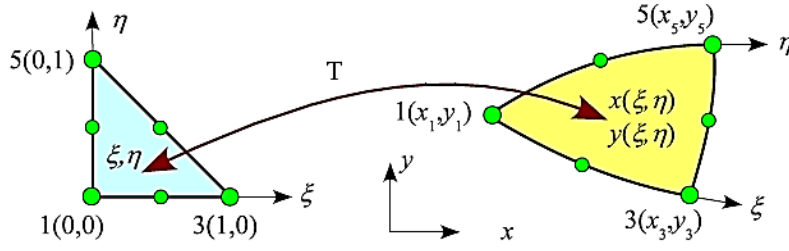


Figure III.8. Transformation géométrique.

La transformation géométrique qui fait passer de l'élément de référence à l'élément réel possède les propriétés suivantes :

- Elle est de la forme :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad ; \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i$$

Où :

- N est le nombre de nœud de l'élément.
- ξ, η sont les coordonnées d'un point de l'élément de référence.
- $x(\xi, \eta)$ et $y(\xi, \eta)$ sont les coordonnées d'un point de l'élément réel.
- x_i et y_i sont les coordonnées du i nœud de l'élément
- Les $N_i(\xi, \eta)$ sont les fonctions de forme.

Le développement des dérivées partielles donne :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Sous forme matricielle cette expression s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

La matrice jacobienne de la transformation est :

$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

La méthode barycentrique est utilisée pour l'élément triangulaire à six nœuds :

Les fonctions de forme des nœuds milieux sont quadratiques ; elles sont obtenues par l'intermédiaire du produit des coordonnées adjacentes à l'arrête concernée :

$$N_2 = 4L_1L_3 \quad N_4 = 4L_3L_5 \quad N_6 = 4L_1L_5$$

Ainsi, les fonctions de forme aux sommets sont :

$$N_1 = L_1 - 2L_1L_3 - 2L_1L_5 = L_1(1 - 2L_3 - 2L_5)$$

$$N_3 = L_3 - 2L_1L_3 - 2L_3L_5 = L_3(1 - 2L_1 - 2L_5)$$

$$N_5 = L_5 - 2L_3L_5 - 2L_1L_5 = L_5(1 - 2L_1 - 2L_3)$$

$$\text{Avec : } L_1 = 1 - \xi - \eta \quad L_3 = \xi \quad L_5 = \eta$$

Donc :

$$N_1 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta) = 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta$$

$$N_2 = 4\xi(1 - \xi - \eta) = 4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta$$

$$N_3 = -\xi(1 - 2\xi) = -\xi + 2\xi^2$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = -\eta(1 - 2\eta) = -\eta + 2\eta^2$$

$$N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta) = 4\eta - 4\eta^2 - 4\xi\eta$$

La matrice jacobéenne est calculée par dérivation :

$$J = \begin{bmatrix} 4\xi + 4\eta - 3 & 4 - 4\eta - 8\xi & 4\xi - 1 & 4\eta & 0 & -4\eta \\ 4\xi + 4\eta - 3 & -4\xi & 0 & 4\xi & 4\eta - 1 & 4 - 8\eta - 4\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix}$$

En remplaçant x_i et y_i par leurs valeurs, on obtient :

$$J = \begin{bmatrix} 4\xi + 4\eta - 3 & 4 - 4\eta - 8\xi & 4\xi - 1 & 4\eta & 0 & -4\eta \\ 4\xi + 4\eta - 3 & -4\xi & 0 & 4\xi & 4\eta - 1 & 4 - 8\eta - 4\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \\ 2a & 0 \\ a & a \\ 0 & 2a \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

On obtient $J = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ dont l'inverse est $[J]^{-1} = \frac{1}{2a}[I]$ est le déterminant est

$$|J| = 4a^2$$

La matrice $[B] = [B_1 \dots B_i \dots B_n]$ avec $B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$, $\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{matrix} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{matrix} \right\}$

La matrice $[B]$ s'écrit sous la forme :

$$[B] = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} 4\eta & 0 & 0 & 0 & -4\eta & 0 \\ 0 & 4\xi & 0 & 4\eta - 1 & 0 & 4 - 8\eta - 4\xi \\ 4\xi & 4\eta & 4\eta - 1 & 0 & 4 - 8\eta - 4\xi & -4\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

III.1.2 Matrice de rigidité

Dans le cas de déformation plane, la loi de comportement est :

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \alpha & \nu & 0 \\ \nu & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$K = \int_{Ve \text{ physique}} [B(x, y)]^T [C] [B(x, y)] dV$$

$$K = \int_{V_{\text{parent}}} [B(\xi, \eta)]^T [C] [B(\xi, \eta)] |J| dV$$

La matrice de rigidité K est obtenue par intégration :

$$[K] = \frac{eG}{6(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 4\alpha + 4\beta & 2\nu + 2\beta & 0 & 2\nu & -4\alpha & -2\nu - 2\beta \\ 2\nu + 2\beta & 4\alpha + 4\beta & 2\beta & 0 & -2\nu - 2\beta & -4\beta \\ 0 & 2\beta & \frac{3}{2}\beta & 0 & -2\beta & -2\beta \\ 2\nu & 0 & 0 & \frac{3}{2}\alpha & -2\nu & -2\alpha \\ 4\alpha & -2\nu - 2\beta & -2\beta & -2\nu & 4\alpha + 4\beta & 2\nu + 2\beta \\ -2\nu - 2\beta & -4\beta & -2\beta & -2\alpha & 2\nu + 2\beta & 4\alpha + 4\beta \end{bmatrix}$$

Exemple 3 :

1)- déterminez les fonctions de forme d'un élément quadrangulaire à 4 nœuds.

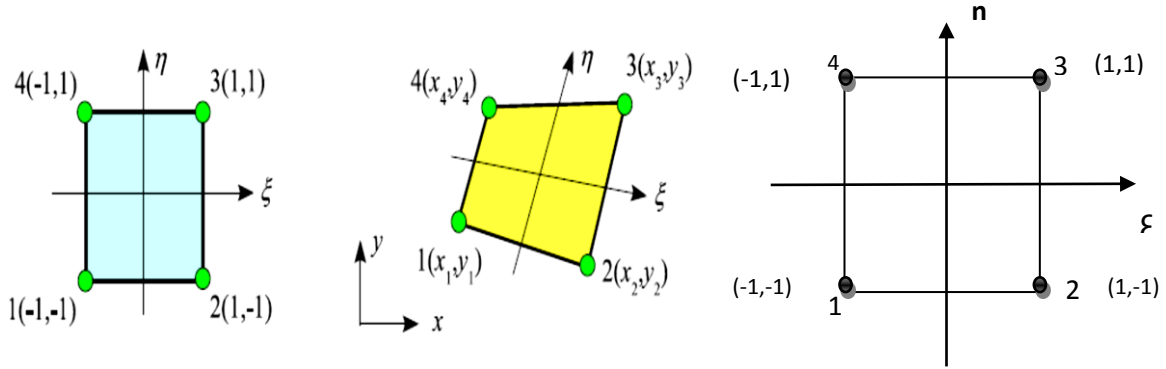


Figure III.9. Éléments quadrangulaires à 4 nœuds.

Les fonctions de forme du quadrangle à 4 nœuds sont :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

- **Caractéristique des fonctions de forme :**

Les fonctions $N_i(\xi, \eta)$ vérifient les conditions suivantes :

$N_i(\xi, \eta) = 1$ aux coordonnées (ξ_i, η_i) et $N_i(\xi, \eta) = 0$ aux coordonnées (ξ_j, η_j) avec $j \neq i$

Ces fonctions assurent la continuité.

Elles assurent le long des frontières entre les éléments.

Elles permettent la représentation du mouvement du corps rigide.

Elles permettent la représentation de l'état de déformation constante.

❖ Eléments de volume :

Les éléments volumiques sont bien adaptés à l'analyse du solide présentant des dimensions comparables dans toutes les directions, comme par exemple les blocs massifs.

Trois champs découplés sont considérés u , v , w selon les trois axes de repère.

❖ FORMULATION :

1- Eléments tétraédriques :

Ces éléments permettent facilement le maillage automatique des pièces de forme complexe.

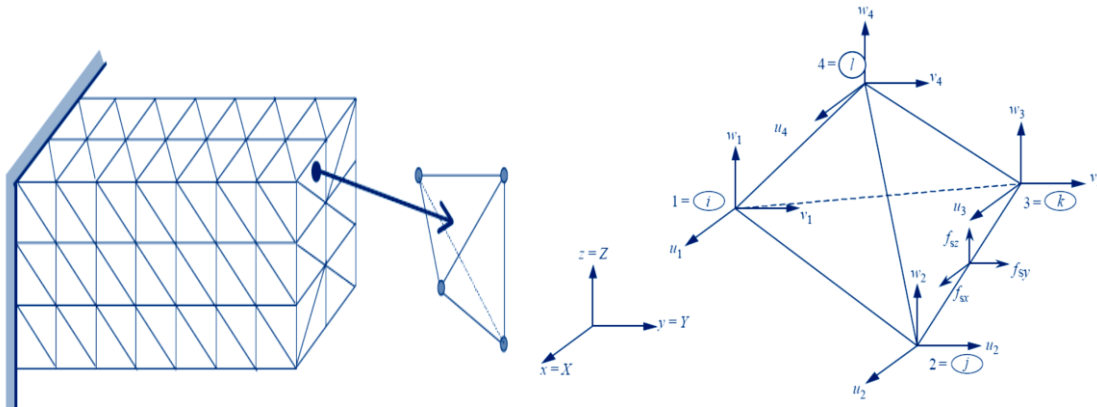


Figure III.10. Eléments tétraédriques.

✓ Tétraèdre à quatre nœuds :

Cet élément contient 12 variables nodales

$$\begin{aligned} \{u\}^T &= \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \dots \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4\} \\ \{F\}^T &= \{F_{1x} \quad F_{1y} \quad F_{1z} \quad \dots \quad F_{4x} \quad F_{4y} \quad F_{4z}\} \end{aligned}$$

Les interpolations du champ sont tri-linéaires

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = [1 \quad x \quad y \quad z] \{\alpha\}$$

2- Éléments hexaédriques :

C'est la version 3D des éléments rectangulaires ; ces éléments sont également appelés briques.

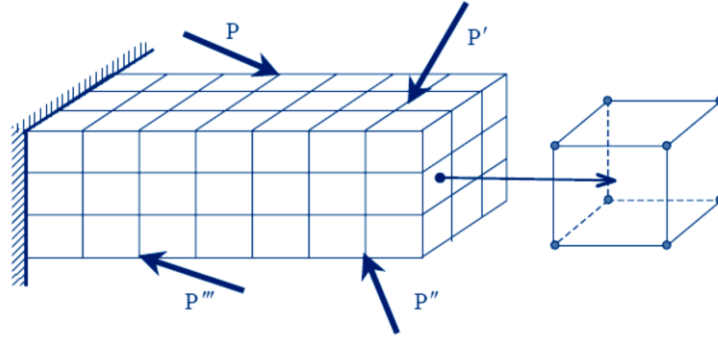


Figure III.11. *Éléments hexaédriques.*

✓ Hexaèdre à huit nœuds :

Les vecteurs nodaux sont (24 variables)

$$\begin{aligned}\{u\}^T &= \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \dots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8\} \\ \{F\}^T &= \{F_{1x} \quad F_{1y} \quad F_{1z} \quad \dots \quad F_{8x} \quad F_{8y} \quad F_{8z}\}\end{aligned}$$

Un polynôme de Lagrange est utilisé :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = [1 \quad x \quad y \quad z \quad xy \quad xz \quad yz \quad xyz] \{\alpha\}$$

Relation déformation déplacement :

Dans un milieu homogène, la relation déformation-déplacement est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

- **Loi de comportement :**

La loi de comportement élastique isotrope est la suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Ce qui permet l'identification des termes de l'expression générale :

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$$

- **Fonction de forme**

- ✓ **Tétraèdre à quatre nœuds :**

La matrice des fonctions de forme à la forme suivante :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Pour développer les fonctions de la forme, nous utilisons ce qu'on appelle les coordonnées du volume,

Qui est une extension des coordonnées naturelle de la surface pour les solides 2D. L'utilisation des coordonnées du volume rendent plus pratique la construction de la fonction de forme. Les coordonnées du volume pour le nœud 1 sont définies comme :

$$L_1 = \frac{V_{p234}}{V_{1234}}$$

Où V_{p234} et V_{1234} représentent, respectivement, les volumes des tétraèdres P234 et 1234. Les autres coordonnées de volume sont définis de la même façon :

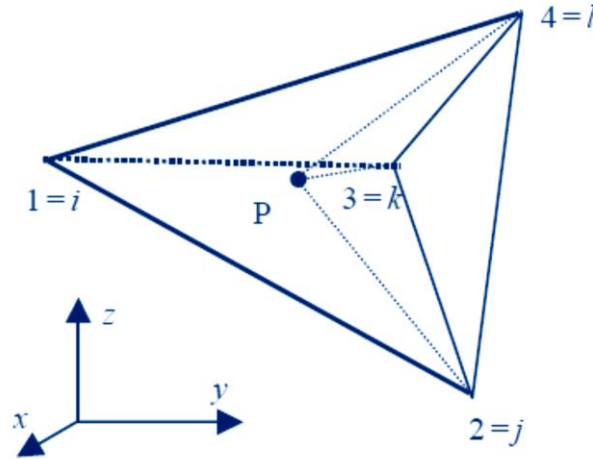


Figure III.12. Les coordonnées des volumes d'un tétraèdre.

$$L_2 = \frac{V_{p134}}{V_{1234}}$$

$$L_3 = \frac{V_{p124}}{V_{1234}}$$

$$L_4 = \frac{V_{p123}}{V_{1234}}$$

La coordonnée du volume peut également être considérée comme le rapport entre la distance du point P et le point 1 par rapport à la surface 234:

$$L_1 = \frac{d_{p-134}}{d_{1-234}}$$

$$L_2 = \frac{d_{p-134}}{d_{1-234}}$$

$$L_3 = \frac{d_{p-124}}{d_{1-234}}$$

$$L_4 = \frac{d_{p-123}}{d_{1-234}}$$

On peut facilement confirmer que :

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$

On peut aussi facilement confirmer que :

$$L_i = \begin{cases} 1 & \text{pour le noeud } i \\ 0 & \text{pour les autres noeuds } jkl \end{cases}$$

Exemple 4:

Construire les fonctions de forme de l'élément tétraédrique à quatre nœuds. Le tétraédre a les dimensions a, b, c selon les trois axes x, y et z , respectivement.

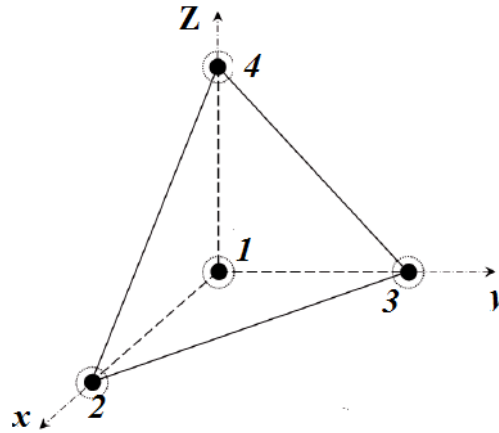


Figure III.13. Élément tétraédrique à quatre nœuds.

La fonction de forme d'un nœud est directement obtenue par l'équation du plan passant par les trois autres nœuds ; ce qui donne :

$$\begin{aligned} N_1(x, y, z) &= 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} & N_2(x, y, z) &= \frac{x}{a} \\ N_3(x, y, z) &= \frac{y}{b} & N_4(x, y, z) &= \frac{z}{c} \end{aligned}$$

✓ **Hexaèdre à quatre nœuds :**

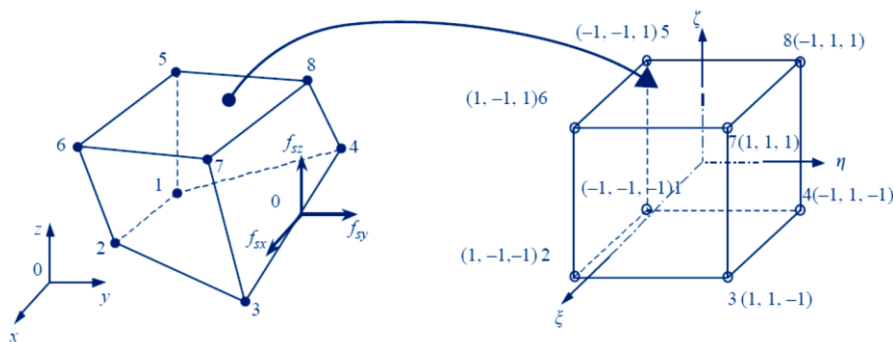


Figure III.14. Hexaèdre à quatre nœuds.

Les fonctions de forme sont déterminées par la formule suivante :

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta)$$

Avec ξ_i, η_i, ζ_i sont les coordonnées du nœud i .

Donc :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_5(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_6(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned}$$

III.1.3 Éléments Finis de Flexion des plaques

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface plane (plan x, y) et par une petite épaisseur notée (h) par rapport aux autres dimensions (longueur, largeur, figure I), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue empilement des différentes couches de matériaux orthotropes. De plus, le terme « plaque » signifie implicitement qu'elle n'est pas chargée dans son plan et qu'elle travaille essentiellement en flexion.

Pour étudier ce type de structure, on pose les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur h est très petite par rapport aux autres dimensions.
- Le chargement est perpendiculaire au plan de la plaque.
- La contrainte perpendiculaire σ_z est négligée ;
- La conservation de la section droite par rapport à la fibre neutre est respectée.

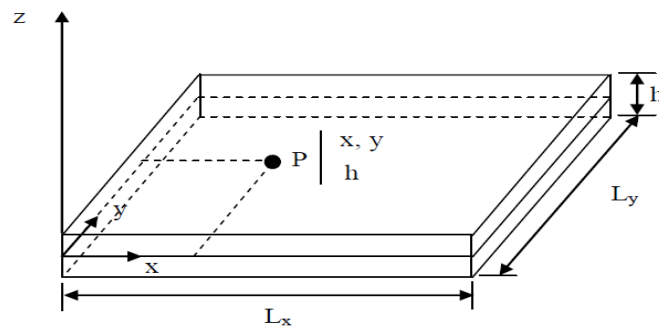


Figure III.15: Description d'une plaque.

• **Formulations :**

Les rotations autour des deux axes x et y sont notées θ_x et θ_y on

L'hypothèse de la section droite implique une variation linéaire du déplacement sur l'épaisseur de la plaque :

$$u(x, y, z) = z\theta_y(x, y)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y)$$

Il existe deux théories pour traiter la plaque selon l'influence de l'épaisseur (prise en compte du cisaillement transversal)

✓ **Théorie de Kirchhoff :**

L'hypothèse de Kirchhoff s'applique bien aux plaques minces. Les principes de base de cette théorie sont :

- Un seul champ $w(x, y)$ permet de définir le comportement de la plaque.
- Le cisaillement transversal est négligé : $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

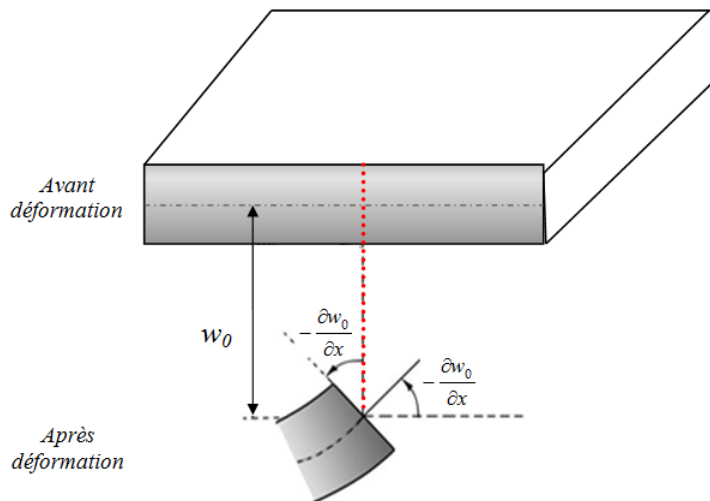


Figure III.6 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.

Les déplacements sont données par :

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

Le tenseur de green est donc :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

✓ **Théorie de Reissner-Mindlin :**

Dans cette théorie, le cisaillement n'est pas négligé. Ce qui bien adapté aux plaque épaisses.

- Trois variables indépendantes doivent être considéré.
- Le cisaillement transversal n'est pas négligé $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

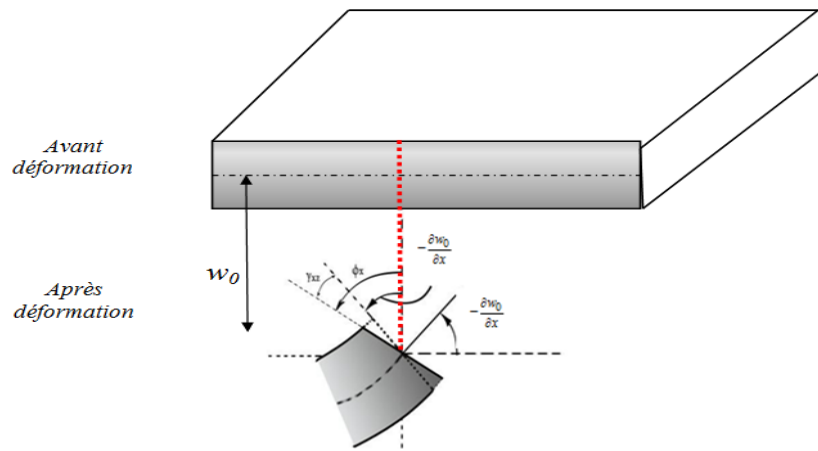


Figure II.3: Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.

- Les déplacements sont donnés par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) = z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases}$$

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la

- théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

• **Fonction de forme :**

On peut voir à partir de l'analyse ci-dessus des équations constitutives que les rotations, θ_x et θ_y sont indépendants de la flèche w . Par conséquent, lorsqu'il s'agit d'interpoler Les déplacements généralisés, la flèche et les rotations peuvent réellement être interpolés En

utilisant séparément des fonctions de forme indépendantes. Par conséquent, L'interpolation est la même que pour les problèmes solides 2D, sauf qu'il y a trois degré de liberté au lieu de deux DOF, pour un nœud. Pour les éléments de plaque épaisse rectangulaire à quatre nœuds, les flèches et les rotations peuvent être Résumé comme suit :

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i \quad \theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi}$$

Où la fonction de forme N_i est identique à celle de l'élément solide 2D à 4 nœuds

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

CHAPITRE IV : ÉLÉMENTS FINIS EN DYNAMIQUE

IV.1. Introduction :

En dynamique de structure, l'état du système évolue avec le temps. Pour un système à un degré de liberté, l'équation du mouvement est donnée par : $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t)$

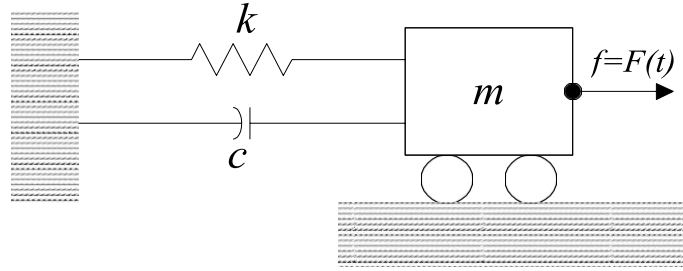


Figure IV.1. Système dynamique à un degré de liberté.

IV.2. Principe d'Hamilton :

Le principe de Hamilton est la base de l'étude énergétique des systèmes en dynamique. L'énergie totale du système est la somme de l'énergie potentielle, de l'énergie de dissipation et de l'énergie cinétique.

$$\Pi = W_{potentielle} + W_{cinétique} + W_{dissipation}$$

Si δu est un champ virtuel cinématiquement admissible tel que : $\delta u(t_1) = 0$ et $\delta u(t_2) = 0$, l'énergie totale du système est stationnaire ; c'est-à-dire :

$$\delta \Pi(t) = 0$$

Ou bien : $\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi(t) dt = 0$

Sachant que :

$$W_{potentielle} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_V \frac{1}{2} f_i^v u_i dV - \int_S \frac{1}{2} f_i^s u_i dS$$

$$W_{cinétique} = \int_V \frac{1}{2} \rho \ddot{u}_i u_i dV$$

$$W_{dissipation} = \int_V \frac{1}{2} c \dot{u}_i u_i dV$$

L'application du principe de Hamilton permet d'écrire l'équilibre sous la forme :

$$\int_V (C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i + c \dot{u}_i \delta u_i - f_i^v \delta u_i) dV - \int_S f_i^s \delta u_i dS = 0$$

- **Discretisation par éléments finis :**

On pose l'hypothèse de séparation entre l'évolution spatiale et temporelle des champs.

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(x, y) u_i(t)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N] \{u_e\} \\ \{\dot{u}\} &= [N] \{\dot{u}_e\} \\ \{\ddot{u}\} &= [N] \{\ddot{u}_e\} \end{aligned}$$

La discrétisation du principe de Hamilton donne :

$$\begin{aligned} &\{\delta u_e\}^T \int_V \left([B]^T [C] [B] \{u_e\} + \rho [N]^T [N] \{\delta \ddot{u}_e\} + c [N]^T [N] \{\delta \dot{u}_e\} - [N]^T \{f^v\} \right) dV - \\ &\{\delta u_e\} \int_S [N]^T \{f^s\} dS = 0 \end{aligned}$$

Ainsi l'équilibre dynamique de l'élément prend la forme :

$$[M_e] \{\ddot{u}_e\} + [C_e] \{\dot{u}_e\} + [K_e] \{u_e\} = \{F_e\}$$

Avec :

$$\begin{aligned}[M_e] &= \int_V \rho [N]^T [N] dV \\ [C_e] &= \int_V c [N]^T [N] dV \\ [K_e] &= \int_V [B]^T [C] [B] dV \\ \{F_e\} &= \int_V [N]^T \{f^v\} dV + \int_S [N]^T \{f^s\} dS\end{aligned}$$

$[M_e]$ est la matrice de masse de l'élément, $[C_e]$ est la matrice d'amortissement, $[K_e]$ est la matrice de rigidité et $\{F_e\}$ est le vecteur des forces nodales.

IV.3. Analyses dynamiques :

Dans ce paragraphe, on examine l'analyse de la vibration libre non amorties :

Le système se réduit à :

$$[M_e]\{\ddot{u}_e\} + [K_e]\{u_e\} = \{0\}$$

Pour un mouvement harmonique :

$$\begin{cases} u_e(t) = C_e \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_e(t) = -\omega^2 C_e \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad ([K] - \omega^2 [M])\{u_e\} = \{0\}$$

La solution triviale existe si : $[K] - \omega^2 [M] = 0$

Les résultats sont les pulsations propres ω_i .

IV.4. Construction de l'élément fini en Une Dimension :

Dans cette section, nous présentons le concept des modes de vibration par l'intermédiaire du système oscillatoire harmonique simple. En utilisant les concepts des éléments finis

développés dans les chapitres précédents, l'oscillateur harmonique simple est représenté comme un élément fini.

IV.4.1. Élément ressort :

Soit un exemple simple de masse ressort, d'un seul degré de liberté, l'une des extrémités du ressort élastique étant fixée, appliquons à l'autre extrémité une masse ;

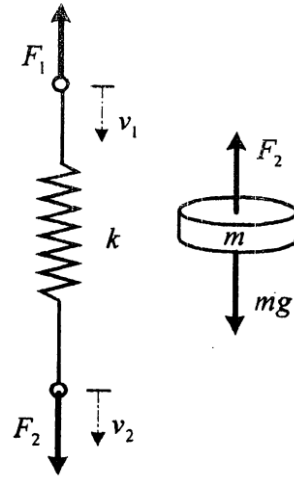


Figure IV.2. Système masse ressort en équilibre.

Nous avons vu dans le chapitre 2, la matrice de rigidité de l'élément ressort :

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad 4.1$$

Et les équations d'équilibre de l'élément ressort sont :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad 4.2$$

Cependant, l'élément de ressort n'est pas en équilibre statique, ainsi nous devons examiner les forces nodales en détails. La figure 4.2 montre la masse et le ressort où la masse est négligeable. On suppose que le déplacement dépend du temps où le système est en mouvement.

Pour la masse, nous prenons :

$$\sum F_{/y} = m\gamma = m \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = mg - F_2 \quad 4.3$$

$$F_2 = mg - m \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = m(g - \ddot{v}_2) \quad 4.4$$

En substituant la force F_2 dans l'équation 4.2, on a :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ mg - m\ddot{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad 4.5$$

L'effet dynamique de l'inertie de la masse attachée est montré par le second membre de l'équation ci-après :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ mg \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{Bmatrix} \quad 4.6$$

Où la matrice masse est :

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad 4.7$$

Et le vecteur d'accélération s'écrit :

$$\{\ddot{v}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{Bmatrix} \quad 4.8$$

Exemple1 :

La figure 4.3 montre un système de deux éléments ressort ayant suspendu des masse attachées aux nœuds 2 et 3. Le système est soumis à la pesanteur et le premier ressort est fixé à un appui encastré au nœud 1. Nous allons calculer les fréquences naturelles.

Nous déterminons aisément la matrice de rigidité globale du système :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad 4.9$$

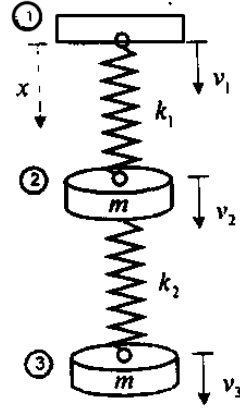


Figure IV.3. Système dynamique à un degré de liberté.

La matrice masse du système :

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad 4.10$$

Les équations du mouvement peuvent être exprimées par :

$$[K] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} + [M] \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 = mg \\ F_3 = mg \end{Bmatrix} \quad 4.11$$

Où F_1 est la réaction dynamique au nœud 1.

Sachant qu'à l'encastrement les déplacements sont nuls $v_1 = 0$, il en résulte :

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mg \\ mg \end{Bmatrix} \quad 4.12$$

Ceci est un système de deux équations différentielles du second ordre, linéaires et ordinaires de deux déplacements inconnus v_2 et v_3 , les forces de gravité indiquées par la fonction force représente l'état d'équilibre statique, celles-ci sont négligées et le système des équations s'écrit

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 4.13$$

Le système des équations de second ordre, linéaire, ordinaire, homogène données par l'équation 4.13 représente la réponse vibratoire du système libre de deux degrés de liberté. La solution d'un tel système est sous la forme de mouvement harmonique :

$$\begin{cases} v_2(t) = C_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ v_3(t) = C_3 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad 4.14$$

Leurs deuxièmes dérivées s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{v}_2(t) = -\omega^2 C_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{v}_3(t) = -\omega^2 C_3 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad 4.15$$

Où C_2 et C_3 sont les amplitudes de vibration de nœuds 2 et 3 (les masses sont attachées aux nœuds 2 et 3). ω est la fréquence harmonique du mouvement ; et φ est l'angle de phase.

En substituant les équations 4.14 et 4.15 dans 4.13, on obtient :

$$\sin(\omega t + \varphi) \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 4.16$$

La solution du système précédant s'obtient par :

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad 4.17$$

On suppose que : $k_1 = k_2 = k$

Donc le déterminant s'écrit :

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m\omega^4 - 3km\omega^2 - k^2 = 0 \quad 4.18$$

En résolvant cette équation, il vient :

$$\omega_1^2 = \frac{3km - \sqrt{5}km}{2m^2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \left(\frac{k}{m} \right) = 0.382 \left(\frac{k}{m} \right) \quad 4.19$$

$$\omega_2^2 = \frac{3km + \sqrt{5}km}{2m^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{k}{m} \right) = 2.62 \left(\frac{k}{m} \right) \quad 4.20$$

IV.4.2. Élément barre:

Soit un élément barre de longueur L , du module d'élasticité E , d'une section constante A et d'une densité de masse ρ , la manière la plus simple pour expliquer l'effet de la force d'inertie est de mettre la moitié de la masse totale (ρAL) dans chaque extrémité de l'élément de barre, comme le montre la figure 4.4

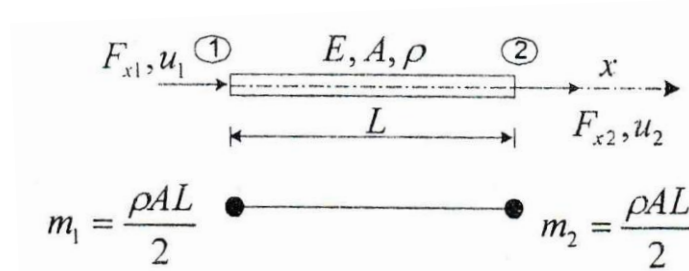


Figure IV.4. Discrétisation de l'élément barre.

Les forces d'inertie qui existent aux extrémités de la barre agissent dans le sens opposé aux forces élastique F_{x1} et F_{x2} , à l'état d'équilibre on a :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} - \frac{\rho AL}{2} \ddot{u}_1 \\ F_{x2} - \frac{\rho AL}{2} \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

Où symboliquement,

$$Ku + M\ddot{u} = F$$

Exemple 2 :

Soient E et ρ respectivement le module de young et la masse volumique du matériau de la poutre pleine représentée sur la figure 4.5. La poutre circulaire pleine est encastree dans une extrémité et libre dans l'autre. En utilisant deux éléments de barre de longueur identique, déterminez les fréquences naturelles.

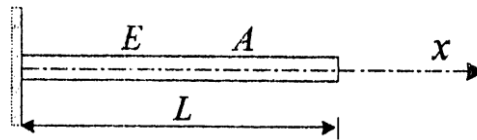


Figure IV.5. Système dynamique à un degré de liberté.

Solution :

La poutre est discrétisée en deux éléments

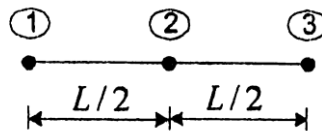


Figure IV.6. discrétisation d'un element.

Les matrices de rigidité des éléments s'écrivent :

$$[K]_{1-2} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K]_{2-3} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Et Les matrices de masses :

$$[m]_{1-2} = \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [m]_{2-3} = \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

L'équation globale du système peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Au niveau de l'encastrement, le déplacement est nul $u_1 = 0$, ainsi nous assimilons les réponses sinusoïdales suivantes :

$$\begin{cases} u_2(t) = C_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ u_3(t) = C_3 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{u}_2(t) = -\omega^2 C_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_3(t) = -\omega^2 C_3 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Nous substituons les déplacements et les accélérations dans l'équation globale, il en résulte :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \frac{\rho L^2}{24E} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho L^2}{24E} \omega^2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On pose : $\xi = \frac{\rho L^2}{24E}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4\xi\omega^2 & \xi\omega^2 \\ \xi\omega^2 & 2\xi\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-4\xi\omega^2 & -1-\xi\omega^2 \\ -1-\xi\omega^2 & 1-2\xi\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7\xi\omega^4 - 10\xi\omega^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = 0.11 / \xi \\ \omega_2^2 = 1.318 / \xi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \pm \frac{1.625}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ rad / s} \\ \omega_2 = \pm \frac{5.624}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ rad / s} \end{cases}$$

Nous avons obtenu quatre fréquences, dont deux sont négatives ; on ne garde que les fréquences positives.

IV.4.3. Élément poutre:

Dans cette partie nous allons calculer la matrice masse d'un élément poutre à deux nœuds en utilisant l'expression :

$$[M_e] = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV = \int_L \int_S \rho [N]^T [N] dS dx$$

Pour l'élément poutre, les fonctions de forme sont données par (voir chapitre 2) :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & N_3(x) &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & N_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned}$$

$$[M_e] = \rho S \int_L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

L'intégration donne la matrice de masse de l'élément poutre :

$$[M_e] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Exemple 3 :

Calculer les modes de vibrations du système (fig IV.7) ci-dessous :

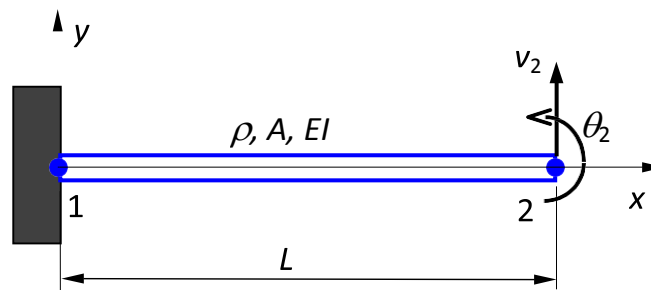


Figure IV.7. Système encastré-libre.

Nous avons les équations qui régissent le système :

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} = ? \\ M_1 = ? \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les réponses sinusoïdales sont :

$$\begin{cases} v_2 = C_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ v_3 = C_3 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}, \begin{cases} \theta_2 = \dot{v}_2 = C_2 \omega \cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_3 = \dot{v}_3 = C_3 \omega \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{\theta}_2 = \frac{d\dot{v}_2}{dt} = -\omega^3 C_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{\theta}_3 = \frac{d\dot{v}_2}{dt} = -\omega^3 C_3 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Il en résulte donc :

$$-\frac{\rho AL}{420} \omega^3 \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} - \frac{EI}{L^3} \omega \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t + \varphi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\rho AL}{420} \omega^2 \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \left(-\frac{\rho AL}{420} \omega^2 / \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

On pose : $\xi = \frac{\rho AL}{420} \omega^2 / \frac{EI}{L^3}$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 12 - 156\xi & 22L\xi - 6L \\ 22L\xi - 6L & 4L^2(1 - \xi) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 35\xi^2 - 102\xi + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = 0.029714 \\ \xi_2 = 2.8845 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{3.532}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \text{ rad / s} \\ \omega_2 = \frac{34.806}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \text{ rad / s} \end{cases} \end{aligned}$$

IV.5. Généralisation pour autres problèmes.

Dans cet exemple on va calculer les modes de vibration d'un carré de côté a , modélisé par un élément plans à quatre nœuds et constitué d'un matériau ayant un coefficient de Poisson $\nu = 0$

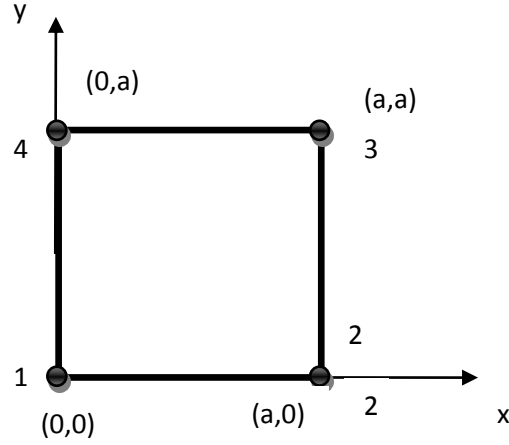


Figure IV.8. Elément plan à quatre nœuds.

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{(a-x)(a-y)}{a^2} & 0 & \frac{x(a-y)}{a^2} & 0 & \frac{xy}{a^2} & 0 & \frac{y(a-x)}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{(a-x)(a-y)}{a^2} & 0 & \frac{x(a-y)}{a^2} & 0 & \frac{xy}{a^2} & 0 & \frac{y(a-x)}{a^2} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -a+y & 0 & a-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & -a+x & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ -a+x & -a+y & -x & a-y & x & y & a-x & -y \end{bmatrix}$$

Le calcul des matrices de rigidité et de masse donne :

$$[K_e] = \int_0^a \int_0^b [B]^T [C] [B] dx dy$$

$$[K_e] = \frac{E}{8} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[M_e] = \rho \int_0^a \int_0^b [N]^T [N] dx dy$$

$$[M_e] = \frac{\rho a^2}{18} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Les modes de vibration se calculent par le déterminant : $[[K] - \omega^2 [M]] = 0$

$$[[K][M]^{-1} - \omega^2 [I]] = \frac{3E3}{2a^2 2} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & -4 \\ -4 & 1 & 6 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 6 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 6 & 1 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & 1 & 6 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} - \omega^2 [I] = 0$$

Les valeurs propres de ce système sont :

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 0 \\ \omega_2^2 = \frac{12E}{\rho a^2} \\ \omega_3^2 = \frac{18E}{\rho a^2} \end{cases}$$

Les modes de vibration sont donnés par les vecteurs propres ci-dessous. On remarque que les trois premiers modes correspondent au mouvement du corps rigide.

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\omega_1^2} \quad \underbrace{\omega_2^2} \quad \underbrace{\omega_3^2} \\
 \begin{bmatrix}
 -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Références bibliographiques

1. *La méthode des éléments finis par les exercices*, ALLA CHATEAUNEUF, institut Français de Mécanique Avancées. 2005.
2. *Introduction to Finite Element Method*, YIJUN LIU, University of Cincinnati, 1998
3. *Méthode des éléments finis*. François Frey & Jaroslav Jirousek
4. *A First Course in Finite Elements*. Jacob Fish & Ted Belytschko
5. *Cours Méthode des éléments finis*, Abdeghani SEGHIR, Université A.Mira, Béjaia, Algérie
6. Gouri Dhatt, Gilbert Touzot, Emmanuel Lefrançois « méthode des éléments finis » hermes science publications-2004.
7. Olek C Zienkiewicz, Robert L Taylor, J.Z. Zhu, *The finite element method: its basis and fundamentals*. ISBN: 978-1-85617-633-0-Butterworth-Heinemann; 7 edition, 2013
8. Jacob Fish, Ted Belytschko *A First Course In Finite Elements*, Wiley, 2007
9. Christian Wielgozes *Cours et exercices de résistance de matériaux, élasticité-plasticité, éléments finis*. ISBN-10: 2729879315 Ellipses, 2000.
10. *Cours Méthode des éléments finis*, Attia amina, Centre Universitaire Belhadj Bouchaib de Ain Témouchent, Algérie