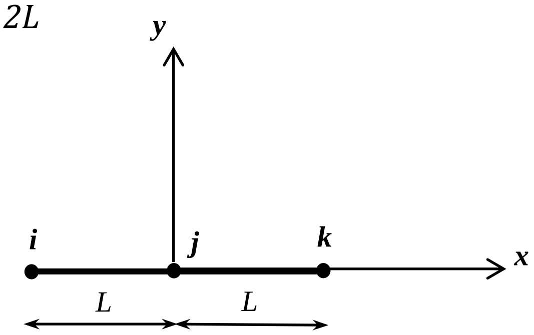
EXERCICE 01 -- (06 pts)

Soit l'élément barre à trois (*03*) nœuds de longueur *2L* tel qu'indiqué sur la figure.

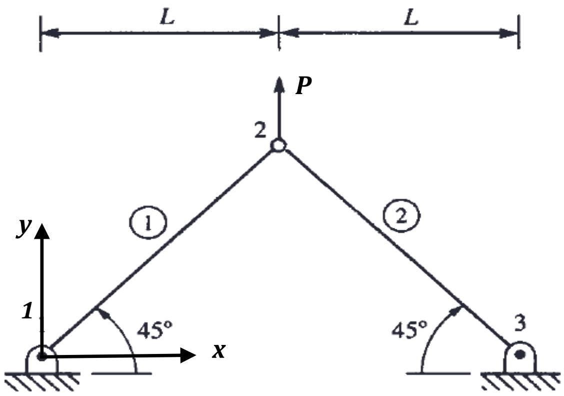
1. Déterminer la matrice [*B*] relative aux dérivées cartésiennes des fonctions de forme.
2. Établir la matrice de rigidité élémentaire [K_e] définie dans le repère local (*oxy*)



EXERCICE 02 -- (07 pts)

Soit la structure en treillis plan suivante :

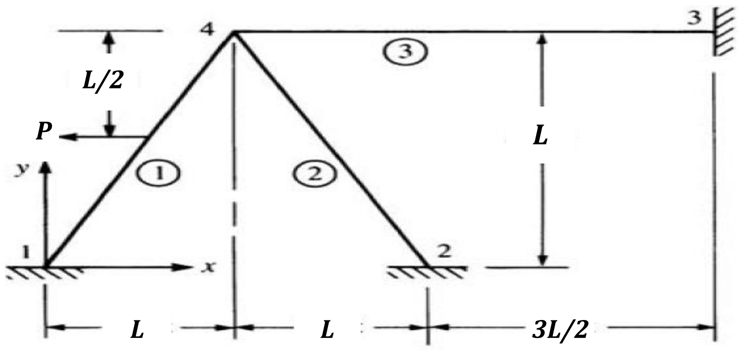
- Déterminer :
  1. La matrice de rigidité globale.
  2. Les déplacements du *nœud 2*.
  3. Les contraintes à l'intérieur de l'*élément 1*.



EXERCICE 03 -- (08 pts)

Le portique composé de trois *(03)* éléments poutres représenté ci-contre est soumis à une charge horizontale *P* appliquée au centre de l'*élément 1*.

Les nœuds *1*, *2* et *3* sont fixes.



- Déterminer les déplacements du *nœud 4*.

A.N : *A=2·10⁻³ m², E=210 GPa, I=33·10⁻⁵ m⁴, L=2 m, P=60 kN*

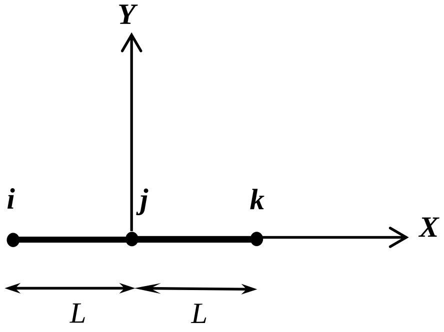
Indication : *Il n'est pas nécessaire de calculer toutes les composantes de la matrice de rigidité globale …*
S'intéresser uniquement au nœud concerné !!!

BON COURAGE

CORRIGÉ EXAMEN FINAL – MEF – SEMESTERE 3 – JANVIER 2019

EXERCICE 01 -- (06 pts)

1. $[B]=\partial[N]$: $[N]$ = ???



Élément à 03 nœuds donc : $u(x)=a+bx+cx^2$ …….. **(0.25)**

$x=0$; $u(0)=u_j$; $a=u_j$ ………………………… **(0.25)**

$x=L$; $u(L)=u_k$; $u_j+bL+cL^2=u_k$

$x=-L$; $u(-L)=u_i$; $u_j-bL+cL^2=u_i$

on aura :

$b = (u_k-u_i)/2L$ …….. **(0.25)** et $c = (u_k+u_i-2u_j)/2L^2$ ……….. **(0.25)**

soit : $u(x)=u_i[-x/2L+x^2/2L^2]+u_j[1-x^2/L^2]+u_k[x/2L+x^2/2L^2]$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

N_1 N_2 N_3 ………………………… **(3x0.5)**

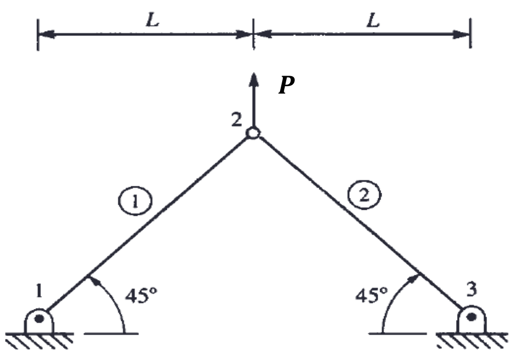
$$u(x)=[N_1 \quad N_2 \quad N_3]\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

d'ou : $[B]=[-1/2L+x/L^2 \qquad -2x/L^2 \qquad 1/2L+x/L^2]$ ………………………… **(3x0.5)**

2. $[K]$= ???

$$[K] = \frac{EA}{6L}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -6 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$ ……………………………. **(02)**

EXERCICE 02 -- (07 pts)



➢ ***Elément 1***

$$\theta = 45°, C = \frac{1}{\sqrt{2}}, S = \frac{1}{\sqrt{2}}, C^2 = \frac{1}{2}, S^2 = \frac{1}{2}\ , L_1 = L\sqrt{2}$$ … … … … … … …. **(0.5)**

$$k^1 = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$ … … … … … … … **(01)**

➢ ***Elément 2***

$$\theta = 135°, C = -\frac{1}{\sqrt{2}}, S = \frac{1}{\sqrt{2}}, C^2 = \frac{1}{2}, S^2 = \frac{1}{2}, L_2 = L\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(0.5)}$$

$$k^2 = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{array} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(01)}$$

➢ ***Assemblage***

$$K = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(01)}$$

➢ ***C.A.L***

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \\ p \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(01)}$$

➢ ***Déplacements du nœud 2***

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$u_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(0.5)}$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}PL}{EA} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(0.5)}$$

➢ ***Contraintes de l'élément 1***

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} C & S & -C & -S \\ -C & -S & C & S \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \end{Bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(0.5)}$$

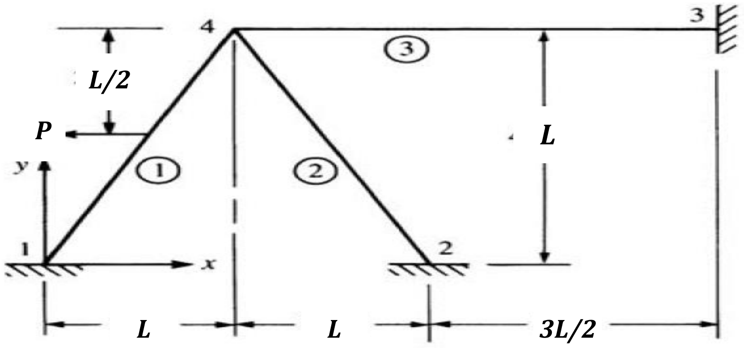
$$\sigma = \frac{\hat{f}_{2x}}{A} = \frac{E}{\sqrt{2}L} \cdot S \cdot v_2$$

$$\sigma = \frac{P}{\sqrt{2}A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(0.5)}$$

EXERCICE 03 -- **(08 pts)**

Remarque :

Concernant la matrice de rigidité globale [K], on s'intéresse uniquement à l'assemblage des éléments concernés pour les composantes relatives au nœud 4.



➢ ***Matrice de rigidité - élément 1*** **1 → 4**

$$\left.\begin{array}{c} L^{(1)} = \sqrt{2^2+2^2} = 2.82 \\ C = \frac{x_4-x_1}{L^{(1)}} = \frac{2-0}{2.82} = \frac{1}{\sqrt{2}} = cos45 \\ S = \frac{y_4-y_1}{L^{(1)}} = \frac{2-0}{2.82} = \frac{1}{\sqrt{2}} = sin45 \\ A = 2\cdot 10^{-3} m^2 \end{array}\right\}$$ ………………………. **(0.5)**

$$k^1 = 10^3 \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 92.33 & 55.84 & 37 \\ 55.84 & 92.33 & -37 \\ 37 & -37 & 98.28 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_4 \\ v_4 \\ \phi_4 \end{array}$$ ………………………… **(01)**

➢ ***Matrice de rigidité - élément 2*** **2 → 4**

$$\left.\begin{array}{c} L^{(2)} = \sqrt{2^2+2^2} = 2.82 \\ C = \frac{2-4}{2.82} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = cos135 \\ S = \frac{2-0}{2.82} = \frac{1}{\sqrt{2}} = sin135 \\ A = 2\cdot 10^{-3} m^2 \end{array}\right\}$$ ………………………. **(0.5)**

$$k^2 = 10^3 \begin{bmatrix} 92.33 & -55.84 & 37 \\ -55.84 & 92.33 & 37 \\ 37 & 37 & 98.28 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_4 \\ v_4 \\ \phi_4 \end{array}$$ ……………………….. **(01)**

➢ ***Matrice de rigidité - élément 3*** **3 → 4**

$A = 2\cdot 10^{-3} m^2$, $C = 1$, $S = 0$, *L3=5L/2=5* ………………….. **(0.5)**

$$k^3 = \begin{bmatrix} 84 & 0 & 0 \\ 0 & 6.636 & 16.632 \\ 0 & 16.632 & 55.44 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_4 \\ v_4 \\ \phi_4 \end{array}$$ ……………………………… **(01)**

➢ ***Assemblage***

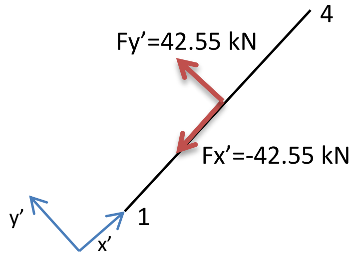
$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 268.66 & 0 & 74 \\ 0 & 191.29 & 16.632 \\ 74 & 16.632 & 252 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_4 \\ v_4 \\ \phi_4 \end{array}$$ ………………………… **(01)**

➢ ***Force appliquée au nœud 1 dans le système de coordonnées locales ……………….. (0.5)***

$$\theta = 45°$$

$$\cos\theta = \frac{fx'}{60} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad fx' = 42.55\ kN$$

$$\sin\theta = \frac{fy'}{60} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad fy' = 42.55\ kN$$



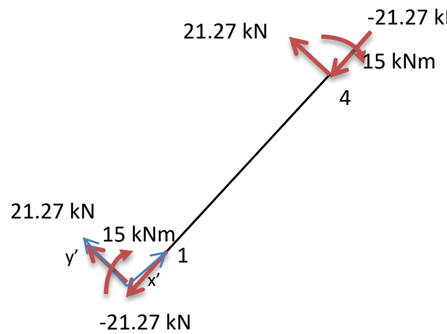
➢ ***Charges équivalentes dans le repère local ………………….. (0.5)***

$$\frac{p}{2} = 21.275\ kN$$

$$M = \frac{PL}{8}$$

$$M = \frac{42.55 \cdot 2.82}{8}$$

$$M = 15\ kN\ m$$



➢ ***Nous transformons les charges nodales équivalentes du présent repère local dans le repère global en utilisant l'équation $F = T^T\ F'$, tels que T est définie par :***

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{1y} \\ m'_1 \\ f'_{2x} \\ f'_{2y} \\ m'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -21.275 \\ 21.275 \\ 15 \\ -21.275 \\ 21.275 \\ -15 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -29.78 \\ 0 \\ 15 \\ -29.78 \\ 0 \\ -15 \end{Bmatrix}$$ ………………………………………………………… **(01)**

➢ ***Déplacements du nœud 4***

$$10^3 \begin{bmatrix} 268.66 & 0 & 74 \\ 0 & 191.29 & 16.632 \\ 74 & 16.632 & 252 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -29.78 \\ 0 \\ -15 \end{Bmatrix}$$

$$u_4 = -0.20 \cdot 10^{-3}\ m$$
$$v_4 = -0.11 \cdot 10^{-6}\ m$$ ……………………………… **(0.5)**
$$\phi_4 = 1.27 \cdot 10^{-6}\ rad$$

ENSTP

2ème ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
EXAMEN FINAL – SEMESTRE 3
JANVIER 2023 - Durée : 01h30

NOM : .... PRENOMS : .... GROUPE : ....

EXERCICE 1 ---(06.5 pts)

Un bâtiment industriel en charpente métallique, constitué de portiques espacés de $7\,m$ et soumis à une action climatique du vent externe, est modélisé par des éléments finis de type poutre.

- *La figure 1* illustre un cadre typique de ce bâtiment.

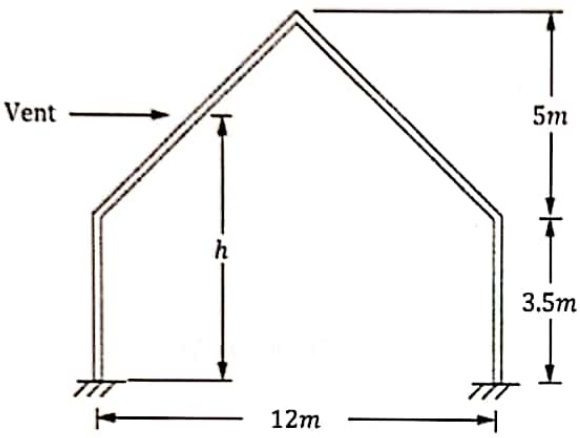


Figure 1. Modèle théorique

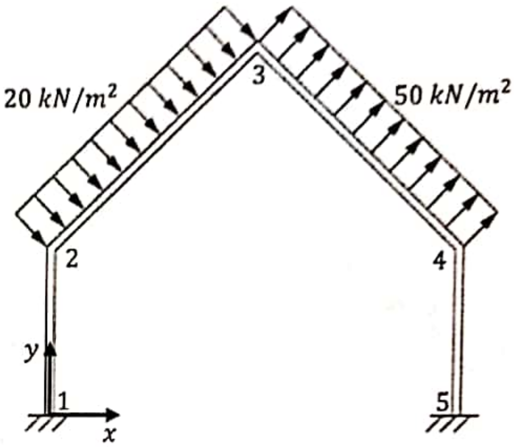
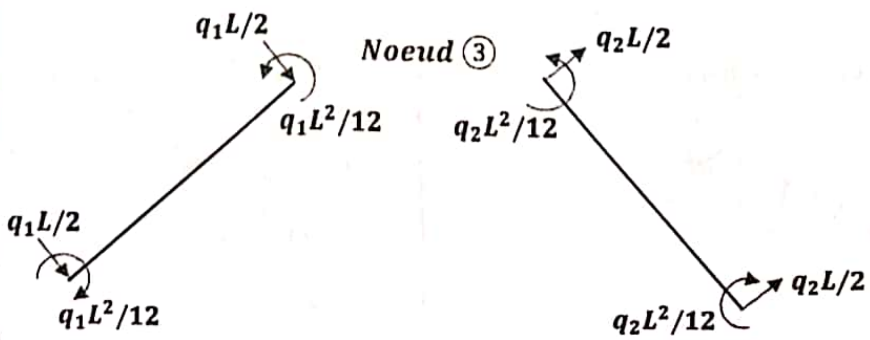


Figure 2. Modèle MEF

1ère Partie : **NOTE PARTIE 01 :**

QUESTIONS	RÉPONSES (<u>*Toutes les réponses doivent être justifiées*</u>)
1. Tableau de connectivités 4x0,25	see table below
2. Nombre de degrés de liberté total 0,75	$N_{DDL} = 5\times3 = 15$
3. Dimensions de la matrice réduite de rigidité. 0,75	$Dim[K_{réd}] = 9\times9$ $u_1 = v_1 = \phi_1 = u_5 = v_5 = \phi_5 = 0$ …….. $15-2\times3=9$ ou $3\times3=9$
4. Force équivalente au *nœud* 3 dans le repère global (*Considérer une bande de 7m supportée par les poutres*).	$q_1=20\,N/m^2\times7m=140kN/ml$ et $q_2=50k\,N/m^2\times7m=350kN/ml$ 

Elément	L	θ	c	s
1-2	3.50 m	90°	0	1
2-3	7.81 m	39.8°	0.77	0.64
3-4	7.81 m	-39.8 ou 320.2°	0.77	-0.64
4-5	3.50 m	-90°	0	-1

$$\Rightarrow \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (0.5 point)}$$

$$\Rightarrow 2\beta^4 = 1 + \beta^4$$

$$\beta = 1 \text{ (0.5 point)}$$

$$\omega_n = \omega_g$$

$$T_n = 0.5\ sec \text{ (0.5 point)}$$

4- Déterminer le rapport entre le déplacement relatif de la structure à la résonance et le déplacement relatif de la structure maximum, (1 point)

$$u_{p,max} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{g0}$$

$$u_{pr} = u_{g0}$$

$$\frac{u_{pr}}{u_{p,max}} = \sqrt{2}$$

5- Déterminer l'accélération de sol $\ddot{u}_{g0}$ en fonction de l'accélération gravitationnelle, g, pour que l'effort tranchant maximum soit égale à $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ du poids de la structure. (4 points)

$$V_{b,max} = m\, \ddot{u}_{p,max} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, mg \text{ (0.5 point)}$$

$$\ddot{u}_{p,max} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, g \text{ (0.5 point)}$$

$$\ddot{u}_g = u_{g0}\, \omega_g^2 \sin \omega_g\, t$$

$$\ddot{u}_{g0} = u_{g0}\, \omega_g^2 \text{ (0.5 point)}$$

$$\ddot{u}_p(t) = -\frac{p_0}{k} \omega_g^2\, R_d \sin(\omega_g t - \phi) \text{ (0.5 point)}$$

$$\ddot{u}_{p,max} = \frac{m\, u_{g0}\, \omega_g^2}{k} \omega_g^2\, R_d \text{ (0.5 point)}$$

$$\ddot{u}_{p,max} = \ddot{u}_{g0}\, \beta^2\, R_d \text{ (0.5 point)}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\, g = \ddot{u}_{g0}\, \beta^2\, R_d$$

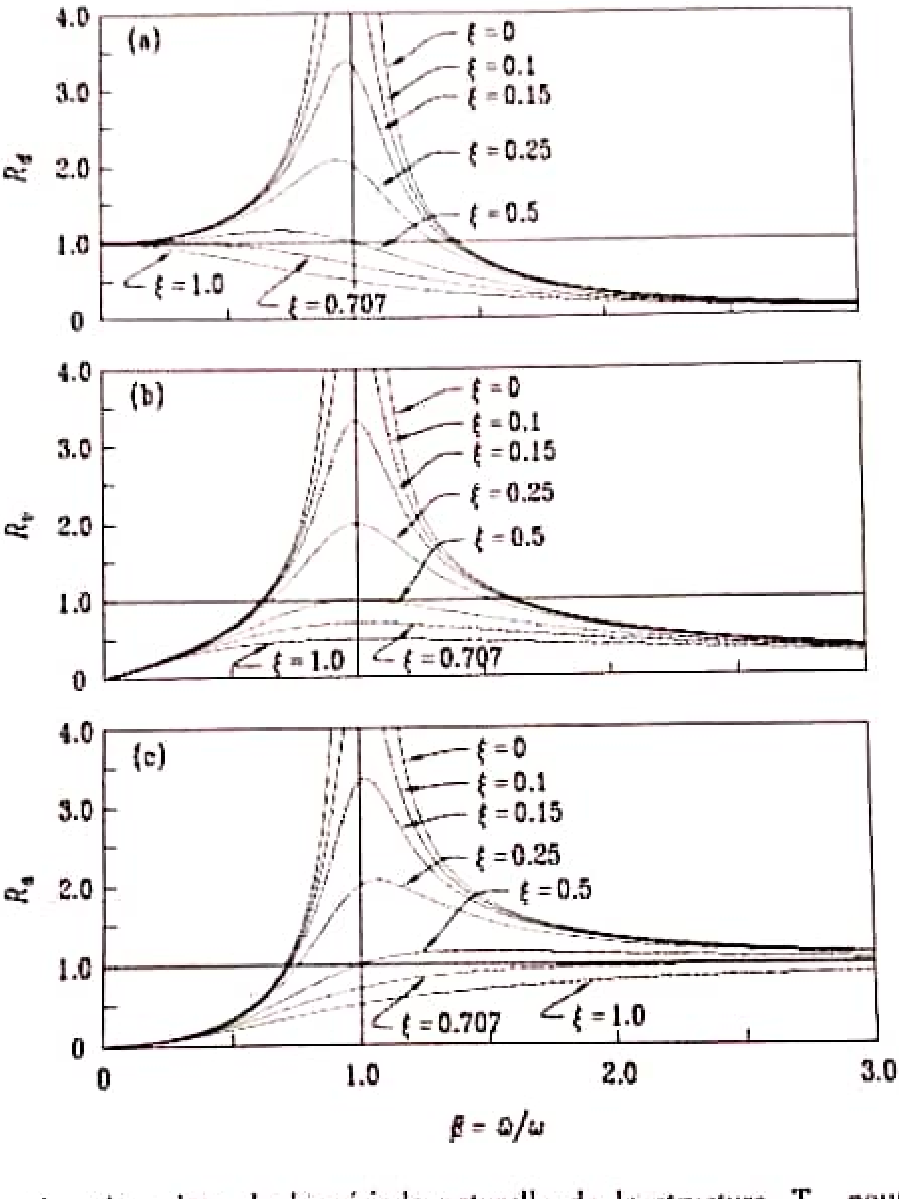
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\, g = \ddot{u}_{g0}\, \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (0.5 point)}$$

$$\ddot{u}_{g0} = 0.5\, g \text{ (0.5 point)}$$

$$R_{d,r} = \frac{(1-2\xi^2)}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \text{ (0.5 point)}$$

$$R_{a,r} = 0 \text{ (0.5 point)}$$

$$R_{a,r} = \beta_r^2 R_{d,r} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1$$



3- Déterminer la valeur de la période naturelle de la structure, T_n, pour laquelle le déplacement maximum relatif de la structure est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ du déplacement maximum du sol. (03 points)

$$u_{p,max} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{g0} \Rightarrow \frac{p_0}{k} R_d = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{g0} \text{ (0.5 point)}$$

$$\Rightarrow u_{g0} \beta^2 R_d = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{g0} \text{(0.5 point)}$$

$$\Rightarrow \beta^2 R_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (0.5 point)}$$

Exercice 02 (14 points) :

Une structure modélisée par un système d'un seul degré de liberté (masse-ressort-amortisseur) muni par un dispositif de dissipation d'énergie industriel (taux d'amortissement ξ >20%). On considère que la base de cette structure est soumise à un séisme horizontal qui peut être assimilé à une excitation harmonique de la forme $u_g = u_{g0} \sin 4\pi\, t$.

1- Déterminer le facteur d'amortissement ξ de cette structure pour que le déplacement relatif à la résonance soit égale au déplacement maximum du sol, (4 points)

$$u_g = u_{g0} \sin \omega_g\, t$$

$$p(t) = -m\ddot{u}_g(t) = m\, u_{g0}\, \omega_g^2 \sin \omega_g\, t \text{ (0.5 point)}$$

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} R_d \sin(\omega_g t - \phi) \text{ (0.5 point)}$$

$$u_{pr} = u_{g0} \Rightarrow \frac{p_0}{k} R_{d,r} = u_{g0} \quad \text{(0.5 point)}$$

$$\Rightarrow \frac{m\, u_{g0}\, \omega_g^2}{k} R_{d,r} = u_{g0}$$

$$\Rightarrow u_{g0}\, \beta_r^2\, R_{d,r} = u_{g0}$$

$$\Rightarrow \beta_r^2\, R_{d,r} = 1 \text{ (0.5 point)}$$

$$\frac{\partial \beta^2 R_d}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial R_d}{\partial \beta} = 0$$

$$\beta_r = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}} \text{ (0.5 point)}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta_r^2}{\sqrt{(1-\beta_r^2)^2 + (2\xi\beta_r)^2}} = 1 \text{ (0.5 point)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1 \text{ (0.5 point)}$$

$$\Rightarrow \xi = 0.707 \text{ (0.5 point)}$$

2- Calculer La pulsation de résonance ainsi que l'amplitude de la fonction d'amplification à la résonance. $(R_d)_{max}$, (2 points)

$$\omega_r = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\xi^2}} \to \infty \text{ (0.5 point)}$$

$$R_{d,r} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{1-2\xi^2})^2 + (2\xi\frac{1}{1-2\xi^2})^2}} \text{ (0.5 point)}$$

Exercice 01 (06 points) :

Afin de déterminer la période propre naturelle d'une structure à un étage en béton armé, on soumit à l'aide d'un vérin hydraulique une vitesse initiale latérale du toit de la structure égal à 15 m/s (le deplacement initial est nul). Le déplacement maximum et son successeur sont égaux à 26.51 mm et 19.36 mm successivement. Calculer (ξ^2 n'est pas négligeable) :

- Le taux d'amortissement. (02 points)

$$\xi = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{u_1}{u_2} = 5\%$$

- Le déphasage temporel. (6*0.5 = 03 point)

$$u(0) = 0, \dot{u}(0) = 15m/sec$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{\xi\omega_n u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_d\, u(0)} = \frac{\pi}{2}$$

$$u_0 = \sqrt{u(0)^2 + (\frac{\xi\omega_n u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_d})^2} = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_d}$$

$$u_0 = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_d}$$

$$u(t) = u_0\, e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \theta)$$

Pour $\quad t = t_1 = \theta/\omega_d$

$$u_{max} = u_0\, e^{-\frac{\xi\omega_n\theta}{\omega_d}} = u_0\, e^{-\xi\,\theta}$$

$$u_{max} = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_d}\; e^{-\xi\,\theta}$$

$$\omega_d = \frac{\dot{u}(0)}{u_{max}}\; e^{-\xi\,\theta}$$

$$\omega_d = 523.19\; rad/sec$$

$$t_1 = \frac{\theta}{\omega_d} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{523.19} = 3 \cdot 10^{-3}\; sec$$

- La période propre naturelle de cette structure. (1 point)

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_n = 523,84\; rad/sec$$

$$T_n = 0.012\; sec$$

NOM : .... PRENOMS : .... GROUPE : ....

2.1. Contrainte dans la barre ① :

0,75

$$\sigma_{12} = \frac{E}{L}\,[c \quad s] \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{L}\,[-1/2 \quad \sqrt{3}/2] \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} \qquad \text{où : } u_2 = v_2 = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma_{12}^{①} = 115\ MPa} \text{ ------------ } \textit{(Traction)}$$

2.2. Contrainte dans la barre ② :

0,75

$$\sigma_{13} = \frac{E}{L}\,[c \quad s] \begin{Bmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{L}\,[1/2 \quad \sqrt{3}/2] \begin{Bmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix} \qquad \text{où : } u_3 = v_3 = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma_{13}^{②} = 115\ MPa} \text{ ------------ } \textit{(Traction)}$$

2ÈME ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

EXAMEN FINAL – SEMESTRE 3

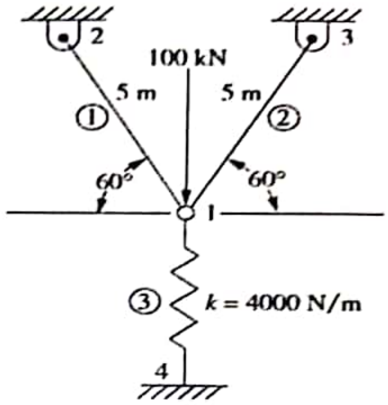
JANVIER 2023 - Durée : 01h30

NOM : .... PRENOMS : .... GROUPE : ....

EXERCICE 3 --

7

1. Les déplacements nodaux.
2. Les contraintes dans les éléments barres.



3x0,5

Elément ① (1-2)	Elément ② (1-3)	Elément ③ (1-4)
$\theta = 2\pi/3$ ou $120\,°$ $L=5\ m$ $c=-1/2\ ,\ \ s=\sqrt{3}/2$	$\theta = \pi/3$ ou $60\,°$ $L=5\ m$ $c=1/2\ ,\ \ s=\sqrt{3}/2$	$\theta = -\pi/2$ ou $-90\,°$ $K=4000N/m$ $c=0\ ,\ \ s=-1$

☆ ***Tous les nœuds sont bloqués sauf le nœud 1** -------------- $u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = 0$ **donc on peut limiter l'analyse au nœud 1***

1. Déplacements nodaux :

➢ ***Matrices élémentaires des rigidités : (N/m)***

3x0,5

$$[K_1] = \frac{2.1\cdot 10^7}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad [K_2] = \frac{2.1\cdot 10^7}{4}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad [K_3] = 4000\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_1] = 525\cdot 10^4\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad [K_2] = 525\cdot 10^4\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad [K_3] = 0.4\cdot 10^4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ ***Matrice globale de rigidité :***

$$[K] = 10^4\begin{bmatrix} 1050 & 0 \\ 0 & 3150.4 \end{bmatrix} \quad (N/m) \quad \text{--- (Réduite)}$$

2x0,5

➢ ***Vecteur force :***

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10^5 \end{Bmatrix} \quad (N) \quad \text{--- (Réduit)}$$

➢ ***Déplacements nodaux :*** $[K]\{U\}=\{F\}$

Système réduit ------- $[K] = 10^4\begin{bmatrix} 1050 & 0 \\ 0 & 3150.4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10^5 \end{Bmatrix}$

3x0,5

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3.17 \end{Bmatrix} \quad (mm)$$

NOM : .... PRENOMS : .... GROUPE : ....

- ***Déplacements nodaux :*** $[K]\{U\}=\{F\}$

Système réduit ... $\frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 2L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{7wL}{20} \\ 0 \end{Bmatrix}$

3 x 0,5

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{7\,wL^4}{3840\,EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2. *Réactions d'appui :*

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ & sym & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

avec : $v_1 = \phi_1 = v_3 = \phi_3 = 0$ *et* $L = L/2$

4x0,5

or : $\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - \frac{3wL}{20} \\ M_1^e - \frac{wL^2}{30} \\ -\frac{7wL}{10} \\ 0 \\ R_3 - \frac{3wL}{20} \\ M_3^e + \frac{qL^2}{30} \end{Bmatrix}$ *avec :* $L = L/2$

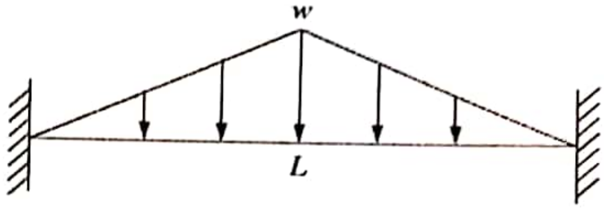
d'où : $\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1^e \\ R_3 \\ M_3^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} + \frac{3wL}{20} \\ M_1 + \frac{wL^2}{30} \\ F_{y3} + \frac{3wL}{20} \\ M_1 - \frac{wL^2}{30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{wL}{2} \\ \frac{5wL^2}{24} \\ \frac{wL}{2} \\ \frac{-5wL^2}{24} \end{Bmatrix}$ *avec :* $L = L/2$

soit : $\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1^e \\ R_3 \\ M_3^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{wL}{4} \\ \frac{5wL^2}{96} \\ \frac{wL}{4} \\ \frac{-5wL^2}{96} \end{Bmatrix}$

NOM : .... PRENOMS : .... GROUPE : ....

EXERCICE 2 ---------------------- 6,5 ----------------------

1. Le déplacement vertical et la rotation au centre de la poutre.
2. Les réactions aux appuis.



☆ ***Tous les nœuds sont bloqués sauf le nœud 2** ------------------------ $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$*
donc on peut limiter l'analyse au nœud 2

1. Le déplacement vertical et la rotation au centre de la poutre

➢ ***Matrices élémentaires de rigidité :***

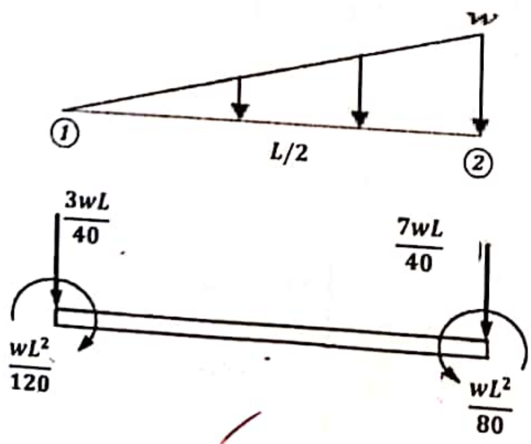
$$[K_1] = \frac{EI}{L_1^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L_1 \\ -6L_1 & 4L_1^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [K_2] = \frac{EI}{L_2^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_2 \\ 6L_2 & 4L_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{avec : } L_1=L_2=L/2$$

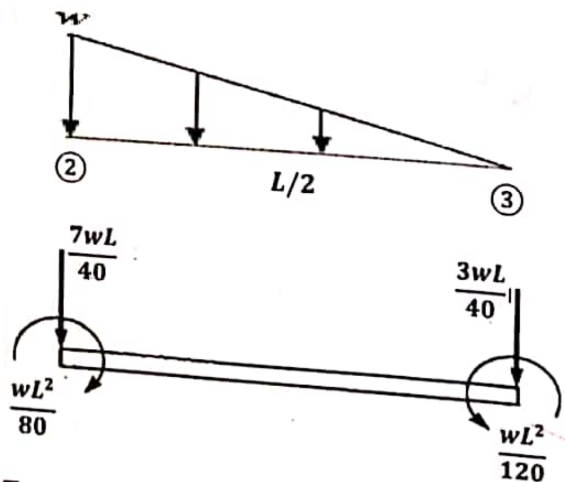
3×0,5

➢ ***Matrice globale de rigidité :***

$$[K]_{réd} = \frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 2L^2 \end{bmatrix}$$ -------------- ***(réduite au nœud 2)***

➢ ***Vecteur force :***





3×0,5

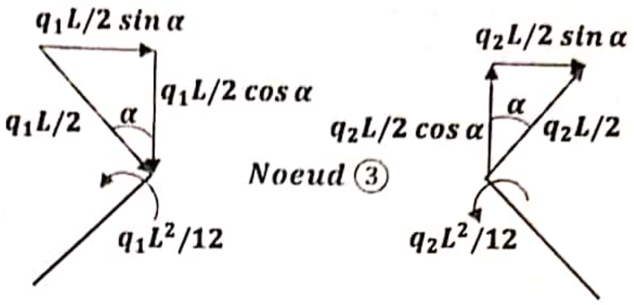
$$\{F_2\} = \begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{7wL}{20} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

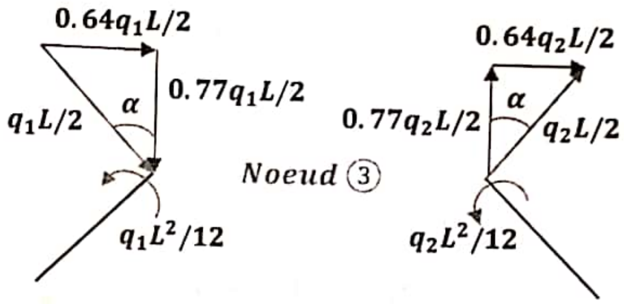
2ÈME ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

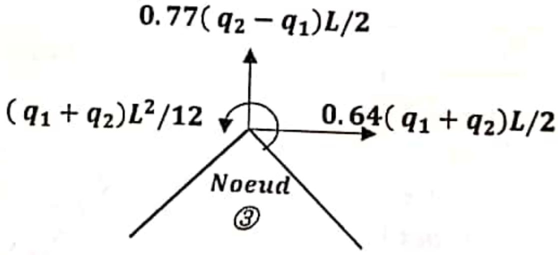
MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
EXAMEN FINAL – SEMESTRE 3
JANVIER 2023 - Durée : 01h30

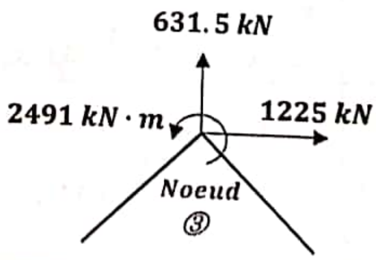
NOM : .... PRENOMS : .... GROUPE : ....

2 x 0,5



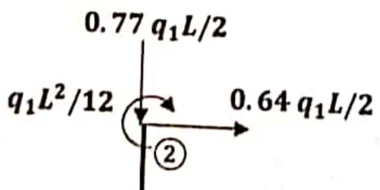




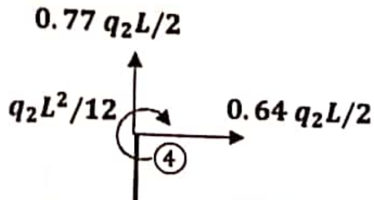


5. Vecteur forces équivalentes agissant sur les deux éléments 1-2 et 4-5.
(*Tracer un schéma*)

3 x 0,25



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 350\ kN \\ -421\ kN \\ -712\ kN.m \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} 875\ kN \\ 1052.5\ kN \\ -1779\ kN.m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ENSTP

2ÈME ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
EXAMEN FINAL – SEMESTRE 3
JANVIER 2023 - Durée : 01h30

NOM : .... **PRENOMS :** .... **GROUPE :** ....

- Le portique précédent est soumis, en plus de l'action du vent, à une charge de la neige de $7\ kN/m^2$ dans le sens gravitaire. Un modèle par éléments finis est utilisé pour modéliser cette structure.

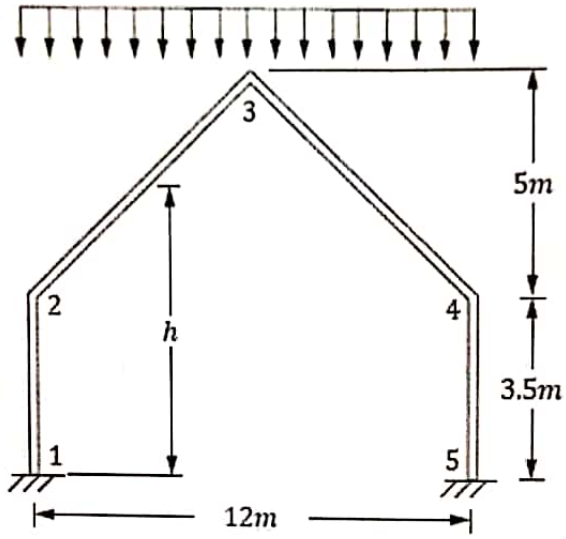
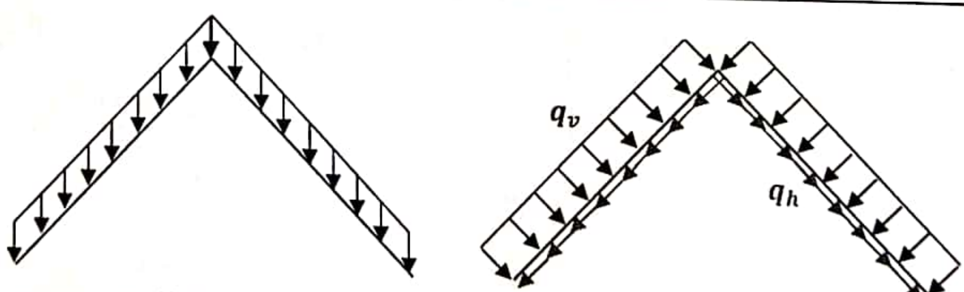
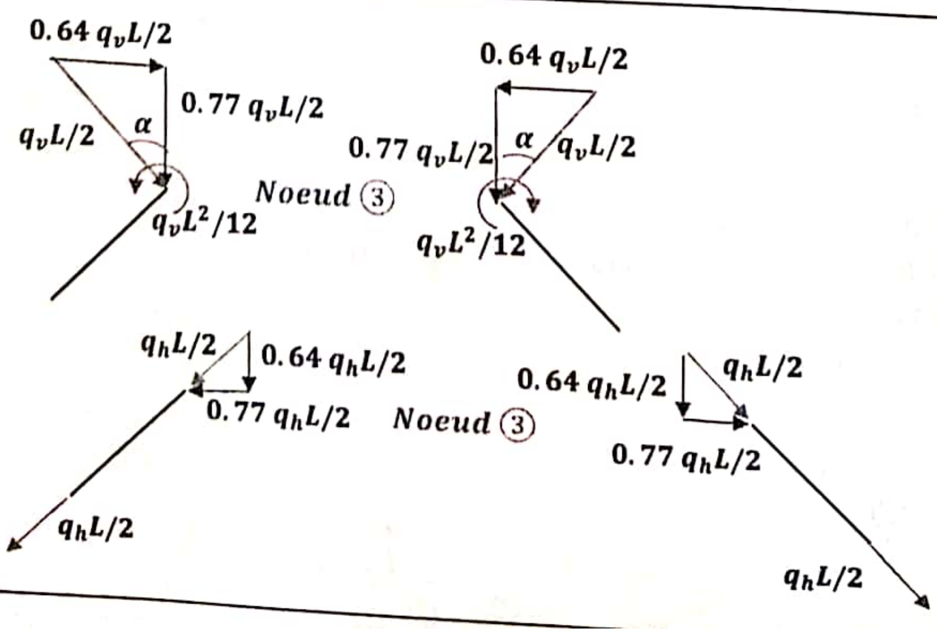


Figure 3. Modèle MEF avec chargement de la neige

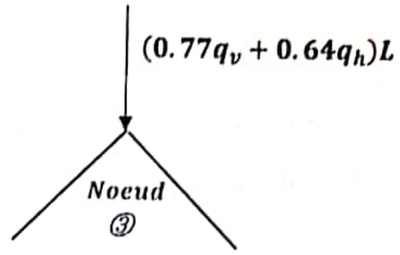
2ème Partie :	**NOTE PARTIE 02 :**
QUESTIONS	**RÉPONSES (*Toutes les réponses doivent être justifiées*)**
6. Faire un modèle du chargement de la neige dans le repère local (*sans calcul des forces nodales*). 0,5	 avec : q_h=7×7×0.64=31.36 kN/ml et q_v=7×7×0.77=37.73 kN/ml
7. Recalculer le vecteur des forces équivalentes au *nœud 3*.	

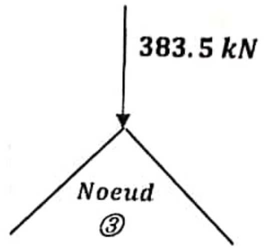
2ÈME ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
EXAMEN FINAL – SEMESTRE 3
JANVIER 2023 - Durée : 01h30

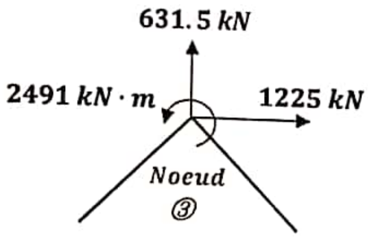
NOM : .... PRENOMS : .... GROUPE : ....

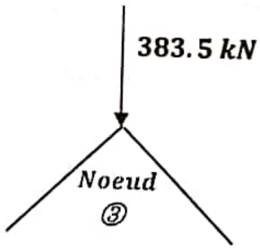
2x0,5



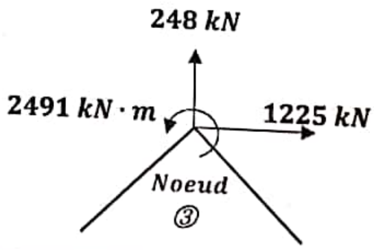


Action du Vent ---------------------- *Action de la Neige*



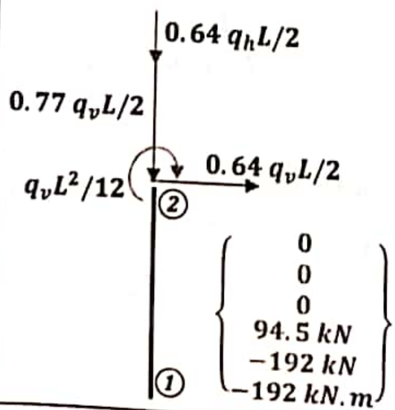


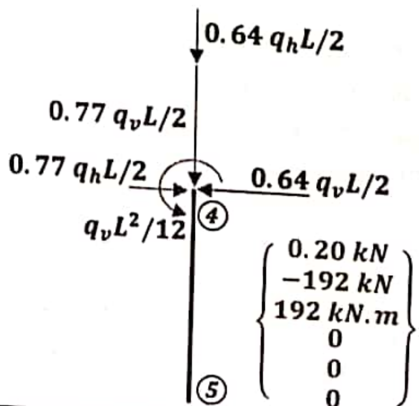
Action du Vent et de la Neige simultanément



8. Déterminer le vecteur des forces équivalentes agissant sur les deux éléments *1-2* et *4-5*. (*Tracer un schéma*)

3x0,25





Scanné avec CamScanner

EXERCICE 1 --(07 Pts)

Soit la structure représentée sur *la figure 1* constituée d'un assemblage de barres identiques doublement appuyées au niveau d'une extrémité et libre à l'autre extrémité .

- Déterminer :
  1. Les déplacements du nœud *1*.
  2. La contrainte dans les barres *1-2* et *1-4*.

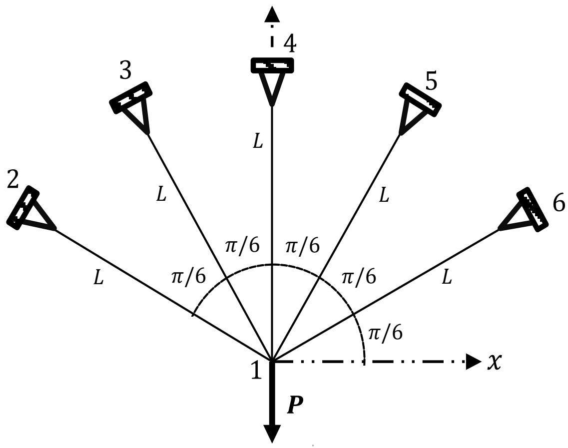


Figure 1

EXERCICE 2--(06 Pts)

Soit à analyser la structure ci-contre (*figure 2*) composée d'une barre et d'un ressort.

- Déterminer les forces locales dans les deux éléments.

➢ *On donne :* $K = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}$

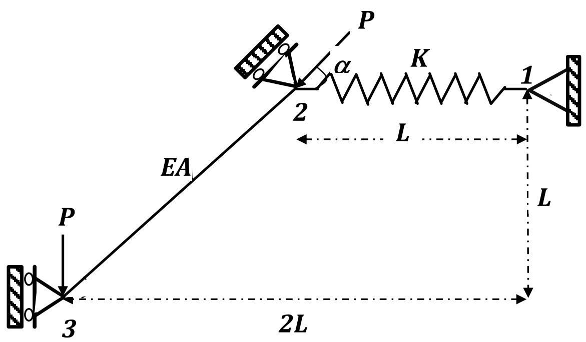


Figure 2

EXERCICE 3--(07 Pts)

Soit la structure en éléments finis de *la figure 3*.

Les quatre éléments *1-2, 2-3, 3-4* et *4-5* sont des *éléments poutres à 02 nœuds* travaillant en flexion composée.

L'élément *2-4* est *un élément barre à 02 nœuds* et les éléments *5-6* et *5-7* sont des *éléments ressorts*.

Le nœud *1* est relié à un appui double, alors que les nœuds *6* et *7* sont reliés à des appuis simples.

1. Quelle est la dimension de la matrice de rigidité globale *[K]* du système ?
2. Que devient la taille de la matrice *[K]* si l'élément *2-4* est éliminé ?
3. Donner les conditions aux limites détaillées de la structure.

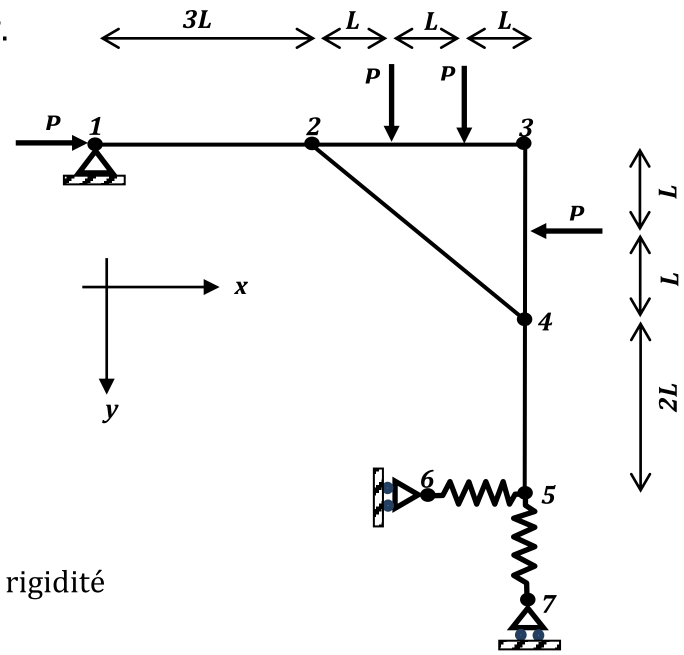
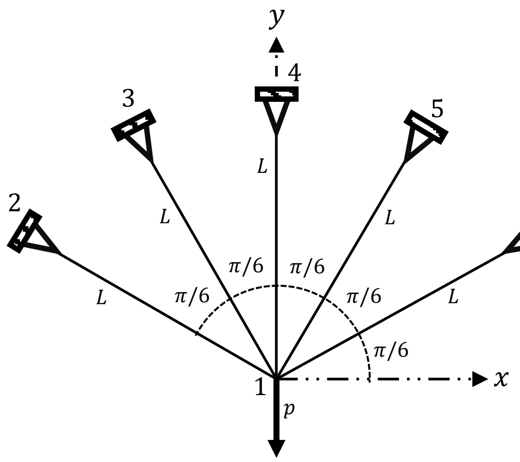


Figure 3

BON COURAGE

EXERCICE 1 : (06.5 PTS)



- **Tableau connectivités : (0.5 pt)**

element	θ	L	C	S	C^2	S^2	CS
1-2	$5\pi/6$	L	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$3/4$	$1/4$	$-\sqrt{3}/4$
1-3	$4\pi/3$	L	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/4$	$3/4$	$-\sqrt{3}/4$
1-4	$\pi/2$	L	0	1	0	1	0
1-5	$\pi/3$	L	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/4$	$3/4$	$\sqrt{3}/4$
1-6	$\pi/6$	L	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$3/4$	$1/4$	$\sqrt{3}/4$

- **Matrices élémentaires**

$$k_{1-6} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad k_{1-5} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad k_{1-4} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k_{1-3} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$k_{1-2} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$ **(5*0.5 pt)**

- **Conditions aux limites :**

$u_i = v_i = 0 \quad i=2,6$ **(0.5 pt)**

- **Déterminer les déplacements au nœud 1 :**

$$k = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ **(0.5 pt)**

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -p \end{Bmatrix} = F_1$$ **(0.5 pt)**

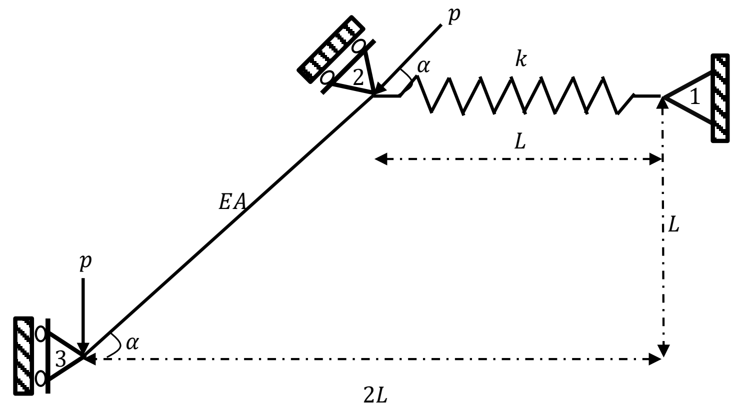
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -p \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = 0 \quad ; \quad v_1 = -\frac{pL}{3EA}$$ **(2*0.5 pt)**

- **La contrainte 1-2 :** $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{E}{L}(C \quad S)\begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \; \frac{1}{2}\right)\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{pL}{3EA} \end{Bmatrix} = \frac{p}{6A}$ **(0.5 pt)**

- **La contrainte 1-4 :** $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{E}{L}(C \quad S)\begin{Bmatrix} u_4 - u_1 \\ v_4 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L}(0 \quad 1)\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{pL}{3EA} \end{Bmatrix} = \frac{p}{3A}$ **(0.5 pt)**

EXERCICE 2 : (06.5 PTS)



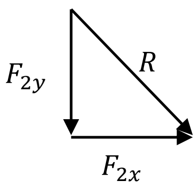
- **Connectivities : (0.5 pt)**

element	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{C^2}$	$\boldsymbol{S^2}$	$\boldsymbol{CS}$
1-2	π	L	-1	0	1	0	0
2-3	$5\pi/4$	$\sqrt{2}\,L$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$1/2$	$1/2$	$1/2$

- **Element 1-2 :** $\boldsymbol{k_{1-2} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ **(0.5 pt)**

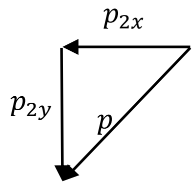
- **Element 2-3 :** $\boldsymbol{k_{2-3} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$ **(0.5 pt)**

- **Conditions aux limites :** $\boldsymbol{u_1 = v_1 = u_3 = 0}$ **et** $\boldsymbol{u_2 = v_2}$ **(0.5 pt)**



$$R/\sqrt{2} = F_{2x}$$

$$-R/\sqrt{2} = F_{2y}$$

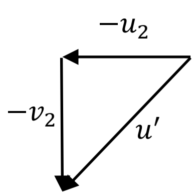


$$\frac{p}{\sqrt{2}} = -p_{2x}$$

$$\frac{p}{\sqrt{2}} = -p_{2y}$$

$$p_{2x} = p_{2y} = -\frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$p_{3y} = -p$$



$$\frac{u'}{\sqrt{2}} = -v_2$$

$$\frac{u'}{\sqrt{2}} = -u_2$$

- **Vecteur forces** $\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ (R-p)/\sqrt{2} \\ -(R+p)/\sqrt{2} \\ F_{3x} \\ -p \end{Bmatrix}$ **(0.5 pt)**

- **Assemblage** **(0.5 pt)**

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ (R-p)/\sqrt{2} \\ -(R+p)/\sqrt{2} \\ F_{3x} \\ -p \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ u_2 \\ 0 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} (R-p)/\sqrt{2} \\ -(R+p)/\sqrt{2} \\ -p \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{R-p}{\sqrt{2}} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\,(3u_2 - v_3) \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{-R-p}{\sqrt{2}} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\,(2u_2 - v_3) \quad \textbf{(2)}$$

$$-p = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\,(-2u_2 + v_3) \quad \textbf{(3)}$$

(2)+(3) $\quad R = -(\sqrt{2}+1)p \quad$ **(0.5 pt)**

(1)-(2) $\quad u_2 = -(\sqrt{2}+1)\frac{4\,p\,L}{EA} = v_2 \quad$ **(0.5 pt)**

$$v_3 = (-10\sqrt{2} - 8)(\frac{pL}{EA}) \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

- **Les efforts**

  - **Element 1-2**

$$\begin{Bmatrix} \acute{f}_{1x} \\ \acute{f}_{1y} \\ \acute{f}_{2x} \\ \acute{f}_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$\acute{f}_{1x} = -\frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}u_2 = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)p \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

$$\acute{f}_{2x} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}u_2 = -\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)p \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

  - **Element 2-3**

$$\begin{Bmatrix} \acute{f}_{2x} \\ \acute{f}_{2y} \\ \acute{f}_{3x} \\ \acute{f}_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\acute{f}_{2x} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}(2u_2 - v_3) = p \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

$$\acute{f}_{2x} = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,L}(-2u_2 + v_3) = -p \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

EXERCICE 3 : (07 PTS)

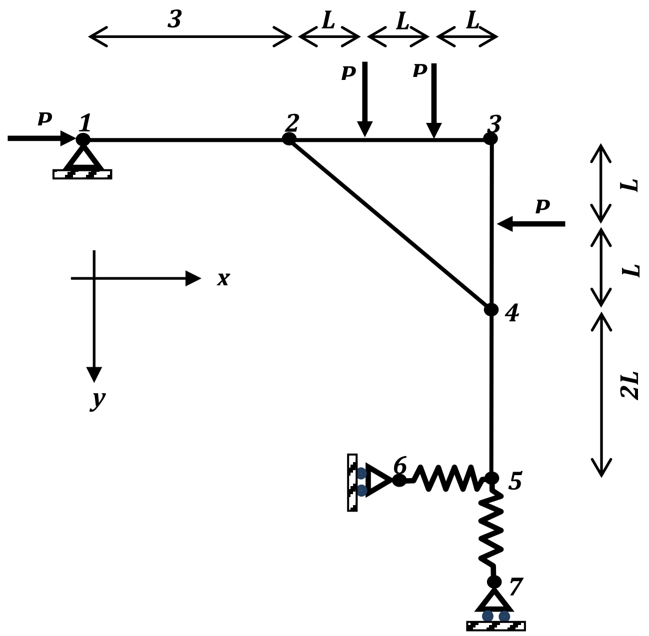


Figure 3

1. La matrice de rigidité globale a pour dimension 19×19 (5×3+2×2).

   (0.5 pt)

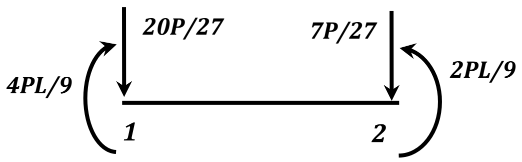
2. En supprimant la barre 2-4, la taille de la matrice de rigidité globale est de 19×19 (5×3+2×2). **(0.5 pt)**

3. **Les conditions aux limites** :

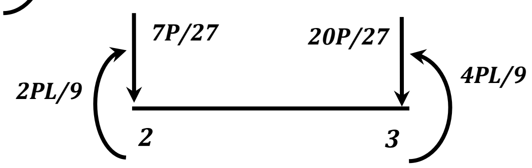
   ➢ ***Pour les déplacements :*** **(0.5 pt)**

   $u_1=v_1=u_6=v_7=0$

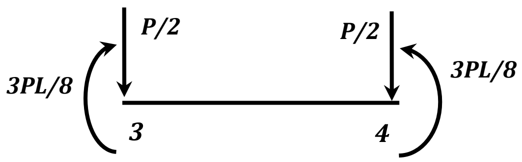
   ➢ ***Pour les charges :***



(01 pt)



(01 pt)



(01 pt)

✓ ***Nœud 1 :*** $F_1\begin{Bmatrix} P+R_{H1} \\ R_{V1} \\ 0 \end{Bmatrix}$

✓ ***Nœud 2 :*** $F_2\begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ -2PL/3 \end{Bmatrix}$

✓ ***Nœud 3 :*** $F_3\begin{Bmatrix} -P/2 \\ P \\ 7PL/24 \end{Bmatrix}$

✓ ***Nœud 4 :*** $F_4\begin{Bmatrix} -P/2 \\ 0 \\ 3PL/8 \end{Bmatrix}$ **(02.5 pt)**

✓ ***Nœud 5 :*** $F_5\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

✓ ***Nœud 6 :*** $F_6\begin{Bmatrix} R_{H6} \\ 0 \end{Bmatrix}$

✓ ***Nœud 7 :*** $F_7\begin{Bmatrix} 0 \\ R_{V7} \end{Bmatrix}$