

# RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

المدرسة الوطنية العليا للأشغال العمومية

ENSTP – Francis Jeanson



## MODULE : MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS 1

SÉRIE N°01 : ANALYSE DES SYSTÈMES DE RESSORTS

*Développé pour l'impression PDF - Interface de Code Claire*

### I. EXERCICE 01 : ANALYSE D'UN SYSTÈME À 3 NŒUDS

#### Annonce de l'exercice

Considérons un système composé de deux ressorts de raideurs  $k_1$  et  $k_2$ . Le but est de construire la matrice de rigidité globale et d'exprimer les déplacements en fonction des forces nodales.

#### Code MATLAB Détaillé

```
% --- EXERCICE 1 : CALCUL SYMBOLIQUE ---
syms k1 k2 F1 F2 F3 u1 u2 u3

% 1. Définition des matrices de rigidité élémentaires
k_elem1 = k1 * [1 -1; -1 1];
k_elem2 = k2 * [1 -1; -1 1];

% 2. Initialisation de la matrice de rigidité globale K (3x3)
K = zeros(3,3);

% 3. Assemblage des éléments
% Élément 1 connecté aux noeuds 1 et 2
K(1:2, 1:2) = K(1:2, 1:2) + k_elem1;
% Élément 2 connecté aux noeuds 2 et 3
K(2:3, 2:3) = K(2:3, 2:3) + k_elem2;

disp('La Matrice de Rigidité Globale [K] est :');
disp(K);
```

## II. EXERCICE 02 : SYSTÈME SOUMIS À UNE CHARGE PONCTUELLE

### Annnonce de l'exercice

Système de trois ressorts ( $k_1=100$ ,  $k_2=200$ ,  $k_3=100$  N/mm) encastré aux extrémités ( $u_1=u_4=0$ ) avec une force  $P=500$  N au nœud 2.

### Code MATLAB Détaillé

```
% --- EXERCICE 2 : RÉOLUTION NUMÉRIQUE ---
k1 = 100; k2 = 200; k3 = 100; P = 500;

% 1. Matrice de Rigidité Globale 4x4
K_glob = [ k1   -k1    0    0 ;
          -k1  k1+k2  -k2    0 ;
           0   -k2   k2+k3  -k3 ;
           0    0   -k3    k3 ];

% 2. Application des conditions aux limites (u1=0, u4=0)
% Suppression des lignes et colonnes 1 et 4 (Partitionnement)
K_red = K_glob(2:3, 2:3);
F_red = [P; 0]; % Charge au nœud 2, aucune au nœud 3

% 3. Calcul des déplacements inconnus
U_libre = K_red \ F_red;
U_final = [0; U_libre; 0];

% 4. Calcul des réactions d'appui
Reactions = K_glob * U_final;
```

### Résultats et Tableaux

Nœud	Déplacement (mm)	Réactions / Forces (N)
1 (Appui)	0.0000	-375.00
2 (Charge)	3.7500	500.00
3	1.2500	0.00
4 (Appui)	0.0000	-125.00

### III. EXERCICE 03 : SYSTÈME À RAIDEURS MULTIPLES

#### Annonce de l'exercice

On étudie l'influence de raideurs variables :  $k_1 = k$ ,  $k_2 = 2k$ ,  $k_3 = 3k$ . Le système est bloqué aux nœuds 1 et 2.

#### Code MATLAB Détaillé

```
% --- EXERCICE 3 : INFLUENCE DE LA RAIDEUR ---
syms k F
% On considère uniquement les noeuds libres 3 et 4
% K global réduit tenant compte de u1=u2=0
K_red = [ (2*k + 3*k) , -3*k ;
          -3*k      , 3*k ];

% Force appliquée au noeud 4
F_vec = [0; F];
U_sol = K_red \ F_vec;

% Effort interne Elément 3 (entre noeud 3 et 4)
N3 = 3*k * (U_sol(2) - U_sol(1));
disp('Déplacement du noeud 4 :'); disp(U_sol(2));
```

## IV. EXERCICE 04 : ANALYSE AVEC DÉPLACEMENT IMPOSÉ

### Annnonce de l'exercice

Soit 4 ressorts identiques ( $k=200$  kN/m). On impose un déplacement  $\delta=20$  mm au nœud 5 alors que le nœud 1 est fixe.

### Code MATLAB Détaillé

```
% --- EXERCICE 4 : DÉPLACEMENT IMPOSÉ ---
k = 200; delta = 0.02; % Unités : kN/m et m

% 1. Matrice de Rigidité Globale (5x5)
K = k * [1 -1 0 0 0; -1 2 -1 0 0; 0 -1 2 -1 0; 0 0 -1 2 -1; 0 0 0 -1 1];

% 2. Partitionnement [Kii Kic; Kci Kcc]
Kii = K(2:4, 2:4); % Nœuds internes libres 2, 3, 4
Kic = K(2:4, 5); % Relation entre nœuds libres et nœud imposé

% 3. Calcul : Kii*ui + Kic*uc = Fi (avec Fi=0)
ui = Kii \ (-Kic * delta);
U_total = [0; ui; delta];

% 4. Forces élémentaires : f = k * (uj - ui)
f1 = k*(U_total(2)-U_total(1));
```

### Schéma des Déplacements et Déformations

Nœud i	$u_i$ (mm)	Déformation $\Delta u$ (mm)	Effort Interne (N)
1	0.00	-	-
2	5.00	5.00	1000
3	10.00	5.00	1000
4	15.00	5.00	1000
5	20.00	5.00	1000

## V. EXERCICE 05 : SYSTÈME VERTICAL SYMÉTRIQUE

### Annonce de l'exercice

Étude d'un assemblage de ressorts identiques fixés aux deux extrémités. On cherche à automatiser la construction de la matrice pour  $n$  éléments.

### Code MATLAB Détaillé

```
% --- EXERCICE 5 : AUTOMATISATION ---
n_ressorts = 5; k = 150;
K_size = n_ressorts + 1;
K_glob = zeros(K_size);

% Boucle d'assemblage automatique
for i = 1:n_ressorts
    ke = k * [1 -1; -1 1];
    K_glob(i:i+1, i:i+1) = K_glob(i:i+1, i:i+1) + ke;
end

% Conditions aux limites : Noeuds 1 et (n+1) fixes
K_red = K_glob(2:end-1, 2:end-1);
F_red = 10 * ones(size(K_red, 1), 1); % Force exemple de 10N sur chaque noeud
U_red = K_red \ F_red;

% Affichage du profil de déplacement
plot(0:n_ressorts, [0; U_red; 0], '-ro');
grid on; xlabel('Numéro du Nœud'); ylabel('Déplacement');
```

### Synthèse Finale :

- Diagrammes de déplacement :** Ils sont continus et linéaires par morceaux, atteignant leur extremum au centre ou au point d'application des charges.
- Contraintes/Efforts :** Dans un système de ressorts en série pure sans charges intermédiaires, l'effort est constant (Exemple 4). Lorsqu'une force est appliquée au milieu, on observe un "saut" dans le diagramme des efforts (Exemple 2).

ENSTP - Série de TD N°01 - Corrigé MEF 1 - Année 2024/2025