MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

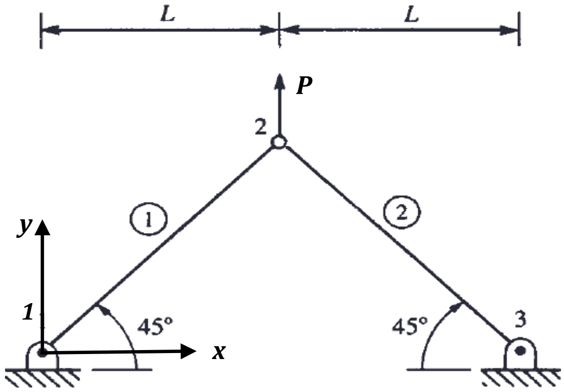
SÉRIE N°3

2ème ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR **LES ÉLÉMENTS BARRES EN TREILLIS**

EXERCICE 1

Soit la structure en treillis plan ci-contre :

- Déterminer :
  1. La matrice de rigidité globale.
  2. Les déplacements du *nœud 2*.
  3. Les contraintes à l'intérieur de l'*élément 1*.



SOLUTION 1

1. Matrice de rigidité globale

Pour une barre articulée inclinée d'un angle θ, la matrice de rigidité élémentaire dans le repère global (x, y) est donnée par :

$$k_e = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Où $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$.

- **Élément 1 (Nœuds 1-2) :** $\theta = 45^\circ$, donc $c = s = \frac{\sqrt{2}}{2}$. La longueur est $L_1 = \frac{L}{\cos(45^\circ)} = L\sqrt{2}$.
- **Élément 2 (Nœuds 3-2) :** $\theta = 135^\circ$ (ou 45° par rapport à l'horizontale négative). $L_2 = L\sqrt{2}$.

2. Déplacements du nœud 2

Le vecteur de force au nœud 2 est $\{F\} = \{0, P\}^T$ (charge verticale P vers le haut). En utilisant la relation $\{F\} = [K]\{U\}$:

- $U_{2x} = 0$ (par symétrie et calcul).
- $U_{2y} = \frac{P \cdot L\sqrt{2}}{EA}$.

3. Contraintes dans l'élément 1

La contrainte σ est donnée par $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$. L'allongement de la barre 1 dépend de la projection du déplacement de 2 sur l'axe de la barre :

$$\sigma_1 = \frac{E}{L\sqrt{2}}(U_{2x}\cos 45^\circ + U_{2y}\sin 45^\circ) = \frac{P}{A\sqrt{2}}$$

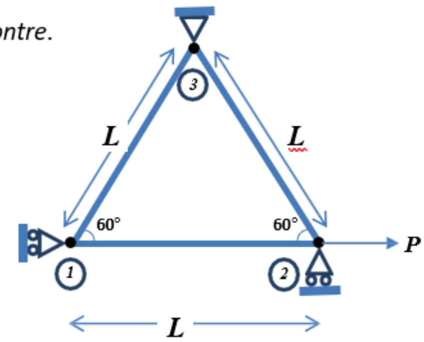
EXERCICE 2

Soit le système composé de trois (03) barres de la *figure ci-contre*.

Toutes les barres possèdent la même longueur *L*
et la même rigidité *EA*.

1. Déterminer la matrice de rigidité du système.
2. Calculer les déplacements nodaux.
3. Calculer les efforts normaux dans les barres.

i-contre.



Solution 2

1. Analyse Géométrique et Propriétés

Le système est composé de trois barres formant un triangle équilatéral, car toutes les barres ont la même longueur L.

- **Barre ① (Nœuds 1-2) :** Horizontale. Angle $\theta_{12} = 0^\circ$.
- **Barre ② (Nœuds 2-3) :** Inclinée. Angle $\theta_{23} = 120^\circ$ (par rapport à l'axe x positif).
- **Barre ③ (Nœuds 1-3) :** Inclinée. Angle $\theta_{13} = 60^\circ$.
- **Rigidité :** Toutes les barres ont la même rigidité extensionnelle EA.

2. Conditions aux Limites et Chargement

- **Nœud 1 :** Appui simple sur un mur vertical. Le déplacement horizontal est bloqué ($u_1 = 0$), mais le déplacement vertical v_1 est libre.
- **Nœud 2 :** Appui simple sur le sol. Le déplacement vertical est bloqué ($v_2 = 0$), mais le déplacement horizontal u_2 est libre.
- **Nœud 3 :** Appui fixe (rotule). Les déplacements sont nuls ($u_3 = 0, v_3 = 0$).
- **Chargement :** Une force horizontale P est appliquée au nœud 2 dans le sens positif des x

3. Étape 1 : Déterminer la matrice de rigidité du système

La matrice de rigidité élémentaire d'une barre inclinée d'un angle θ est :

$$k_e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

où $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$.

Contributions au système réduit :

Nous ne considérons que les degrés de liberté (DDL) libres : v_1 et u_2.

- **Barre ① (1-2) :** $\theta = 0^\circ \Rightarrow c = 1, s = 0$. Influence u_1, v_1, u_2, v_2.
- **Barre ② (2-3) :** $\theta = 120^\circ \Rightarrow c = -0.5, s = 0.866$. Influence u_2, v_2, u_3, v_3.
- **Barre ③ (1-3) :** $\theta = 60^\circ \Rightarrow c = 0.5, s = 0.866$. Influence u_1, v_1, u_3, v_3.

En assemblant uniquement pour v_1 et u_2, on obtient la matrice de rigidité globale réduite $[K_r]$:

$$[K_r] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\sin^2(60^\circ) & 0 \\ 0 & 1+\cos^2(120^\circ)\end{bmatrix}$$

$$[K_r] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}0.75 & 0 \\ 0 & 1.25\end{bmatrix}$$

4. Étape 2 : Calculer les déplacements nodaux

On utilise la relation $\{F\} = [K_r]\{U\}$. Le vecteur force correspondant aux DDL libres (v_1, u_2) est $\{F\} = \{0, P\}^T$.

$$\begin{Bmatrix}0 \\ P\end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}0.75 & 0 \\ 0 & 1.25\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1 \\ u_2\end{Bmatrix}$$

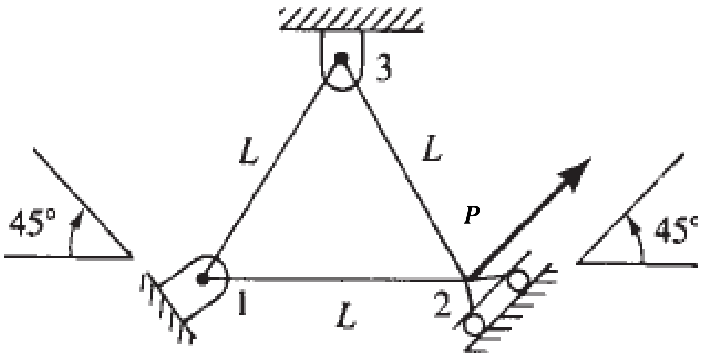
- **Déplacement vertical au nœud 1 :** $v_1 = 0$
- **Déplacement horizontal au nœud 2 :** $u_2 = \frac{P \cdot L}{1.25 \cdot EA} = 0.8\frac{PL}{EA}$

5. Étape 3 : Calculer les efforts normaux dans les barres

L'effort normal N dans une barre est donné par : $N = \frac{EA}{L}[(u_j - u_i)c + (v_j - v_i)s]$.

- **Barre ① (1-2) :** $c = 1, s = 0$. $N_1 = \frac{EA}{L}[(u_2 - 0)\cdot 1 + (0-0)\cdot 0] = \frac{EA}{L}(0.8\frac{PL}{EA}) = \mathbf{0.8P}$ (Traction)
- **Barre ② (2-3) :** $c = -0.5, s = 0.866$. (Nœud 3 est fixe). $N_2 = \frac{EA}{L}[(0 - u_2)\cdot(-0.5) + (0-0)\cdot 0.866] = \frac{EA}{L}(0.4\frac{PL}{EA}) = \mathbf{0.4P}$ (Traction)
- **Barre ③ (1-3) :** Comme $v_1 = 0$ et $u_1 = 0$, et que le nœud 3 est fixe : $N_3 = \mathbf{0}$ (Barre non sollicitée car ses deux extrémités ne se déplacent pas).

EXERCICE 3



Solution 3

1. Analyse de la structure

- **Composition** : Trois barres de même rigidité EA.
- **Géométrie** : Triangle rectangle au nœud 2. Les barres 1-2 et 2-3 ont une longueur L.
- **Conditions aux limites** :
  - **Nœud 1** : Appui fixe (rotule). $u_1 = 0, v_1 = 0$.
  - **Nœud 3** : Appui fixe (rotule). $u_3 = 0, v_3 = 0$.
  - **Nœud 2** : Appui simple incliné à 45° par rapport à l'horizontale.
- **Chargement** : Force P appliquée au nœud 2, perpendiculaire à la pente de l'appui (inclinée à 45° vers le haut).

2. Étape 1 : Transformation de coordonnées au nœud 2

Pour traiter l'appui incliné, on définit un repère local (x', y') au nœud 2:

- L'axe x' est parallèle à la pente de l'appui.
- L'axe y' est perpendiculaire à la pente (direction bloquée).

Le vecteur de déplacement global $\{U_2\} = \{u_2, v_2\}^T$ est lié au vecteur local $\{U_2'\} = \{u_2', v_2'\}^T$ par la matrice de rotation $[T]$:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2' \\ v_2' \end{Bmatrix}$$

Comme le nœud ne peut pas s'enfoncer dans l'appui, $v_2' = 0$. Le seul degré de liberté (DDL) inconnu est u_2'.

3. Étape 2 : Matrice de rigidité globale réduite

On exprime la rigidité des barres connectées au nœud 2 dans le repère global, puis on projette sur la direction autorisée (u'_2).

- **Barre 1-2** ($\theta = 0°$) : $k_{12} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ (contribution au nœud 2).
- **Barre 3-2** ($\theta = -90°$ ou $270°$) : $k_{32} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ (contribution au nœud 2).

La matrice de rigidité au nœud 2 dans le repère global est :

$$[K_{22}]_{global} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

On transforme cette matrice dans le repère local de l'appui :

$$[K'] = [T]^T[K_{22}][T] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

(Note : La matrice reste identique car les deux barres sont perpendiculaires et de même L).

4. Étape 3 : Calcul des déplacements du nœud 2

La force P est appliquée selon l'axe y' (perpendiculaire à la pente). Le système s'écrit dans le repère local :

$$\begin{Bmatrix}F'_x\\F'_y\end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u'_2\\v'_2\end{Bmatrix}$$

Ici, $F'_x = 0$ (pas de force parallèle à la pente) et $v'_2 = 0$ (bloqué). La réaction d'appui compensera la force P selon y'. Cependant, si l'on considère le déplacement provoqué par la rigidité de la structure :

- Le nœud 2 est bloqué dans la direction perpendiculaire à la pente.
- S'il n'y a pas de composante de force parallèle à la pente ($F'_x = 0$), alors $u'_2 = 0$.

Résultat : Le déplacement du nœud 2 est **nul** ($U_2 = 0$) car la force P est directement reprise par la réaction de l'appui incliné.

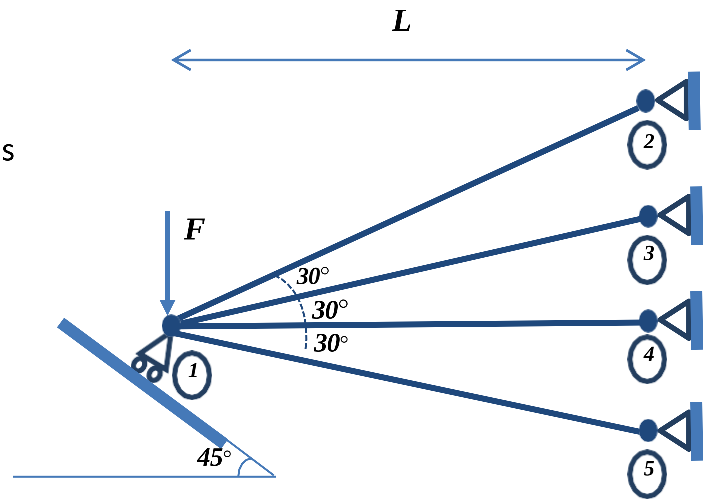
5. Étape 4 : Effort interne et contrainte dans l'élément 2-3

Comme les déplacements nodaux sont nuls ($u_1 = v_1 = 0, u_2 = v_2 = 0, u_3 = v_3 = 0$) :

- **L'effort interne** N_{23} est **0**.
- **La contrainte** σ_{23} est **0**.

> **Note importante** : Dans ce cas précis, la force P agit comme une charge de compression sur l'appui lui-même. Si la force P avait une composante parallèle à la pente, les résultats seraient différents de zéro.

EXERCICE 4



Soit la structure composée de quatre (*04)* barres et de *05* nœuds représentée ci-contre.

Le chargement se résume à la force verticale *F* appliquée au nœud *1*.

Toutes les barres présentent la même rigidité axiale *EA*.

- Déterminer :

1. La matrice de rigidité globale du système.
2. La réaction normale à la pente en *1* ainsi que les déplacements au nœud *1.*
3. Les efforts dans les barres.

Solution 4

Soit la structure, représentée dans la figure 5.6, composée de 4 barres et de 5 nœuds. Le chargement se résume à la force F verticale appliquée au nœud 1. Toutes les barres ont la même rigidité axiale EA. En utilisant le même système d'axe que celui du problème précédent, trouver :

- La réaction normale à la pente en 1, ainsi que les déplacements au nœud 1.
- Les efforts revenant à chaque barre.

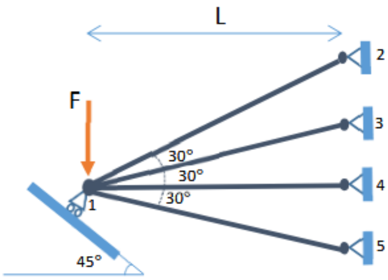


Figure 5.6

Tableau des connectivités

Elément	Nœud i	Nœud j	Longueur	θ°	λ	μ	λ²	μ²	λμ
1	1	2	2L	π/3	½	$\sqrt{3}/2$	¼	¾	$\sqrt{3}/4$
2	1	3	$2L/\sqrt{3}$	π/6	$\sqrt{3}/2$	½	¾	¼	$\sqrt{3}/4$
3	1	4	L	0	1	0	1	0	0
4	1	5	$2L/\sqrt{3}$	-π/6	$\sqrt{3}/2$	-1/2	¾	¼	$-\sqrt{3}/4$

Matrices de rigidité élémentaires dans le repère global

$$[K_1] = \frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \frac{\sqrt{3}EA}{2L}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_4] = \frac{\sqrt{3}EA}{2L}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Assemblage

$$[K]=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

Conditions aux limites et chargement

Tous les déplacements nodaux sont bloqués sauf ceux du nœuds 1. De plus comme l'appui au nœud 1 est incliné de 45°, il est possible d'exprimer les deux réactions en fonction de leur résultante notée ici R_1.

$$\begin{Bmatrix} R_1\sin 45° \\ R_1\cos 45° - F \\ R_{H2} \\ R_{V2} \\ R_{H3} \\ R_{V3} \\ R_{H4} \\ R_{V4} \\ R_{H5} \\ R_{V5} \end{Bmatrix}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (5.46)$$

Résolution

Le système se réduit à

$$\begin{Bmatrix} \frac{R_1\sqrt{2}}{2} \\ \frac{R_1\sqrt{2}}{2} - F \end{Bmatrix}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} \qquad (5.47)$$

Résolution

Le système se réduit à

$$\begin{Bmatrix} \frac{R_1\sqrt{2}}{2} \\ \frac{R_1\sqrt{2}}{2} - F \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} \tag{5.47}$$

Le système comprend deux équations pour trois inconnues. En résonant sur le croquis de la figure (5.7), il apparait clairement que, conformément au système d'axe globale OXY, les deux déplacements U_1 et V_1 sont, dans tous les cas de figures possibles, égaux en valeurs absolus mais de signes contraires.

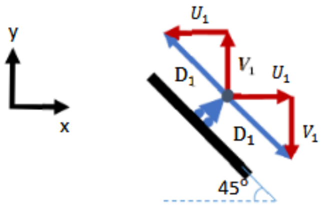


Figure 5.7

En remplaçant V_1 par $-U_1$ et en additionnant les deux équations du système (5.47), la réaction R_1 est éliminée

$$\begin{Bmatrix} \frac{R_1\sqrt{2}}{2} \\ \frac{R_1\sqrt{2}}{2} - F \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ -U_1 \end{Bmatrix} \tag{5.48}$$

$$\Rightarrow F = \frac{(12+6\sqrt{3})EA}{8L}U_1 \tag{5.49}$$

D'où

$$U_1 = -V_1 = \frac{4FL}{3EA(2+\sqrt{3})} \tag{5.50}$$

$$R_1 = \frac{F(9+5\sqrt{3})}{3\sqrt{2}(2+\sqrt{3})} \tag{5.51}$$

Les efforts normaux revenant à chaque barre sont évalués à l'aide de l'équ. (5.19). Le résultat du calcul n'est donné que pour l'élément 1

$$N1 = \frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\frac{4FL}{3EA(2+\sqrt{3})} \\ \frac{4FL}{3EA(2+\sqrt{3})} \end{Bmatrix} = \frac{F(\sqrt{3}-1)}{3(2+\sqrt{3})} \text{ (Traction)} \tag{5.52}$$