A REMETTRE AU PLUS TARD SAMEDI 23/01/2021 – 20H00

EXERCICE 1

Soit un système composé de trois ressorts reliés comme le montre la *figure 1*.

Le nœud *1* est encastré. On applique des forces $F_2 = F$ et $F_4 = 2F$ aux nœuds *2* et *4* respectivement.

1. Déterminer les déplacements nodaux et la force à appliquer au nœud *3* pour obtenir un déplacement imposé δ au nœud *3*.
2. Calculer les réactions d'appuis.

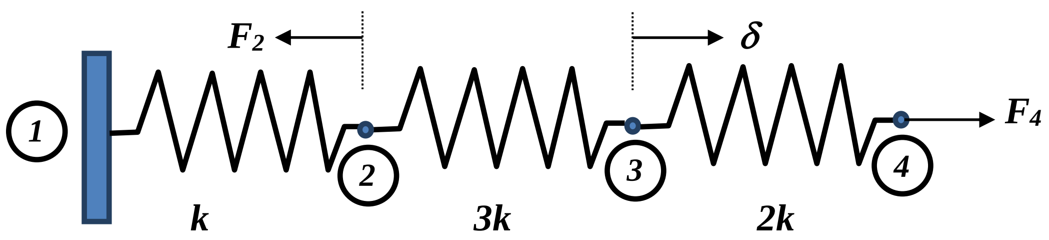


Figure 1

EXERCICE 2

Pour les assemblages d'éléments barres des figures *2.a* et *2.b*, déterminer :

- Les déplacements nodaux.
- Les forces élémentaires.
- Les réactions.

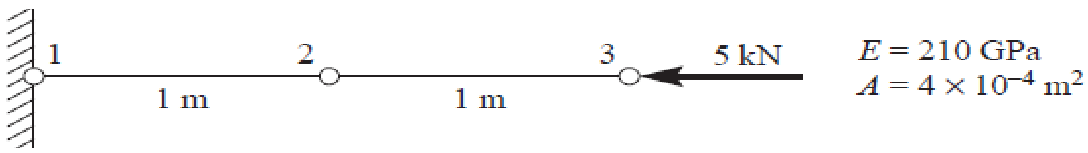


Figure 2.a

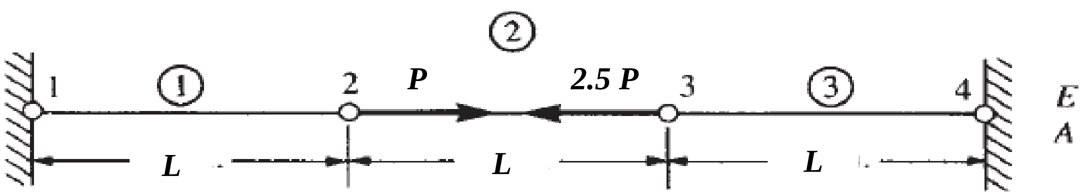


Figure 2.b

A REMETTRE AU PLUS TARD DIMANCHE 19/11/2023 – 18H00

EXERCICE 1

Soit un système composé de trois ressorts reliés comme le montre la *figure 1*.

Le nœud *1* est encastré. On applique des forces $F_2 = F$ et $F_4 = 2F$ aux nœuds *2* et *4* respectivement.

1. Déterminer les déplacements nodaux et la force à appliquer au nœud *3* pour obtenir un déplacement imposé δ au nœud *3*.
2. Calculer les réactions d'appuis.

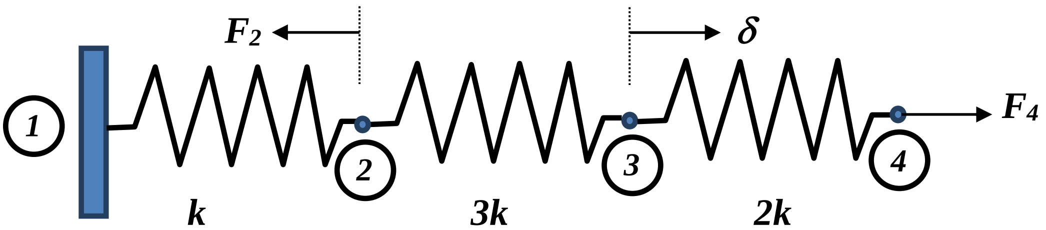


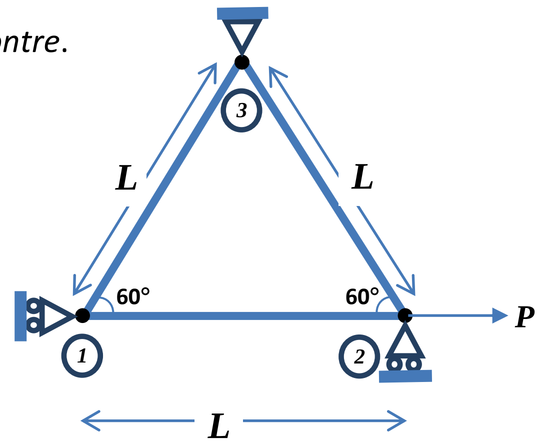
Figure 1

EXERCICE 2

Soit le système composé de trois (03) barres de la *figure ci-contre*.

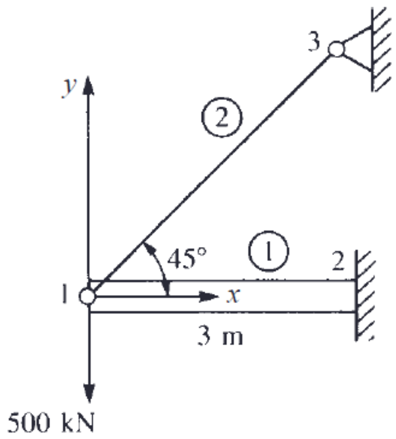
Toutes les barres possèdent la même longueur *L*
et la même rigidité *EA*.

1. Déterminer la matrice de rigidité du système.
2. Calculer les déplacements nodaux.
3. Calculer les efforts normaux dans les barres.



Exercice :

L'élément barre 2 est utilisé pour rigidifier l'élément de poutre console 1, comme indiqué dans la figure 1. Déterminez les déplacements au nœud 1 et les forces élémentaires. Pour la barre, prenons $A = 10^{-3}\, m^2$. Pour la poutre, prenons $A = 2\, 10^{-3}\, m^2$, $I = 5\, 10^{-5}\, m^4$ et $L = 3\, m$. pour tous les éléments $E = 210\, GPa$. Une force de 500 kN est appliquée au noeud 1.



Nom : BOUZIANE

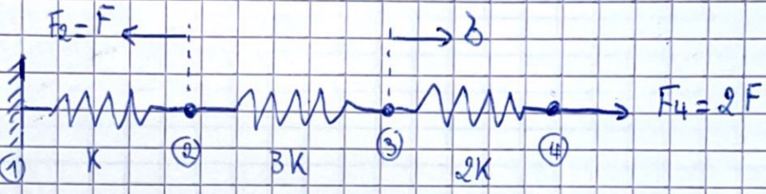
Prénom : Ayoub

Groupe : 01

MEF

Devoir N°1

Exercice 1 :



1. Détermine les déplacements nodaux :

- La Matrice de Rigidité élémentaire :

$$[K_1] = K\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [K_2] = K\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} ; \quad [K_3] = K\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Assemblage :

$$[K] = K\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = [K]\{U\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ -F \\ 0 \\ 2F \end{Bmatrix} \qquad \text{CAL : } U_1 = 0$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ -F \\ 0 \\ 2F \end{Bmatrix} = K\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 = 0 \\ U_2 \\ U_3 = \delta \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -F = K(4U_2 - 3\delta) \longrightarrow \boxed{U_2 = \dfrac{3\delta}{4} - \dfrac{F}{4K}} \\ 0 = K(-3U_2 + 5\delta - 2U_4) \\ 2F = K(-2\delta + 2U_4) \longrightarrow \boxed{U_4 = \dfrac{F}{K} + \delta} \end{cases}$$

$$0 = K(-3U_2 + 5z - 2U_4) \Rightarrow 0 = -3U_2 + 5z - 2U_4$$

$$\Rightarrow -3\left(\frac{3z}{4} - \frac{F}{4K}\right) + 5z - 2\left(\frac{F}{K} + z\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-9z}{4} + \frac{3F}{4K} + 5z - 2\frac{F}{K} - 2z = 0$$

$$z\left(-\frac{9}{4} + 5 - 2\right) = \frac{2F}{K} - \frac{3F}{4K}$$

$$z\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}\frac{F}{K}$$

$$\boxed{z = \frac{5}{3}\frac{F}{K}}$$

donc $\Rightarrow \begin{cases} U_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{3}\frac{F}{K}\right) - \frac{F}{4K} & \longrightarrow \boxed{U_2 = \frac{F}{K}} \\ U_4 = \frac{F}{K} + \left(\frac{5}{3}\frac{F}{K}\right) & \longrightarrow \boxed{U_4 = \frac{8}{3}\frac{F}{K}} \end{cases}$

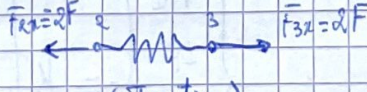
- Détermine la force à appliquer au nœud 3 :

On a dans l'élément 2 :

$$\begin{Bmatrix} F_{2x}^{(2)} \\ F_{3x}^{(2)} \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 = \frac{F}{K} \\ U_3 = z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{cases} K\left(3\frac{F}{K} - 3z\right) = K\left(\frac{3F}{K} - 3\frac{5F}{3K}\right) = \\ K\left(-3\frac{F}{K} + 3z\right) = K\left(\frac{-3F}{K} + 3\frac{5}{3}\frac{F}{K}\right) = \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2F \\ 2F \end{Bmatrix}$$



(Traction)

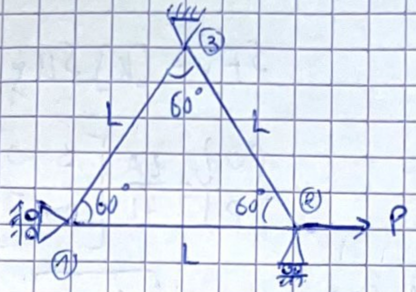
- Calcul des réaction d'appuis :

$$R_1 = K(1(\cancel{U_1}^{\,0}) - 1U_2)$$

$$R_1 = -KU_2 = -K \cdot \frac{F}{K}$$

$$\boxed{R_1 = -F}$$

Exercice 2 :



- Tableau de Connectivité :

element	noeuds	L	θ	C	S	C^2	S^2	CS
1	1-2	L	0	1	0	1	0	0
2	2-3	L	$2\pi/3$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$
3	1-3	L	$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

- Matrice de Rigidité élémentaire :

$$[K_1] = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [K_2] = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

Assemblage :

$$[K] = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

CAL : $U_1 = 0$

$V_2 = 0$ $\Rightarrow$ $[K_{réd}] = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$U_3 = V_3 = 0$

2- Calcule les déplacements nodaux :

On a $\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ F_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$ $\qquad \{F\} = [K]\{U\}$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{EA}{4L}(3V_1) \longrightarrow \boxed{V_1 = 0} \\ P = \frac{EA}{4L}(5U_2) \longrightarrow \boxed{U_2 = \frac{4PL}{5EA}} \end{cases}$$

avec $U_1 = V_2 = U_3 = V_3 = 0$

3- Calcul les efforts normaux dans les barres : $N_{ij} = \frac{EA}{L} [c \;\; s] \begin{Bmatrix} U_j - U_i \\ V_j - V_i \end{Bmatrix}$

barre 1 : $N_{1-2} = \frac{\cancel{EA}}{\cancel{L}} [1 \;\; 0] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{4P\cancel{L}}{5\cancel{EA}}$

$$\boxed{N_{1-2} = \frac{4P}{5}}$$

barre 2 : $N_{2-3} = \frac{\cancel{EA}}{\cancel{L}} \left[-\frac{1}{2} \;\; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{4P\cancel{L}}{5\cancel{EA}}$

$$\boxed{N_{2-3} = \frac{2}{5}P}$$

barre 3 : $N_{1-3} = \frac{EA}{L} \left[\frac{1}{2} \;\; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\boxed{N_{1-3} = 0}$$