



**UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE**  
**FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE**  
**DEPARTEMENT DE GENI CIVIL**



**Auteur : DOCTEUR KHEBIZI MOURAD**  
**MAITRE DE CONFERENCES « A »**

---

# COURS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

---

**Destiné aux étudiants de :**

- Master I : géotechnique

**Année universitaire 2019-2020**



## **INTRODUCTION**

Ce cours a pour objet d'initier l'étudiant aux notions de base de la méthode des éléments finis. L'enseignement de ce cours nécessite des connaissances préalables à savoir l'analyse mathématique, calcul matriciel, résistance des matériaux, méthodes numériques et mécanique des milieux continus.

## CHAPITRE 2

### METHODE DES ELEMENTS FINIS 1D

#### 2.1. INTRODUCTION

L'étude des structures en barres et poutres par la méthode des déplacements contient une bonne part d'une analyse par éléments finis et conduit au système linéaire [1] :

$$[K_0]\{q\} = \{F\}$$

Où  $[K_0]$  est la matrice de rigidité,  $\{q\}$  le vecteur des  $n_d$  inconnues cinématiques (déplacement) ou degrés de liberté et  $\{F\}$  le vecteur force.

La méthode des éléments finis 1D consiste à discréteriser les structures par des éléments finis barres, des éléments finis poutres et des éléments finis portiques. La formulation de chaque type de ces éléments est présentée dans les sections suivantes de ce chapitre.

#### 2.2. LES ELEMENTS BARRES :

Les éléments finis barres sont utilisés pour discréteriser les structures et les matériaux sollicitées axialement.

##### 2.2.1. ELEMENT BARRE A DEUX NŒUDS

Nous considérons l'élément barre à deux nœuds de la figure 2.1. Cette barre est sollicitée par deux forces axiales  $F_1$  et  $F_2$ . Dans ce cas chaque nœud comporte un seul degré de liberté dans le repère local (une seule inconnue cinématique :  $n_d = 1$ ) et la barre comporte deux inconnues cinématiques ( $n_d = 2$ ) dans le repère local ( $x, y$ ).

$x, y$ : Système d'axes local

$X, Y$ : Système d'axes global

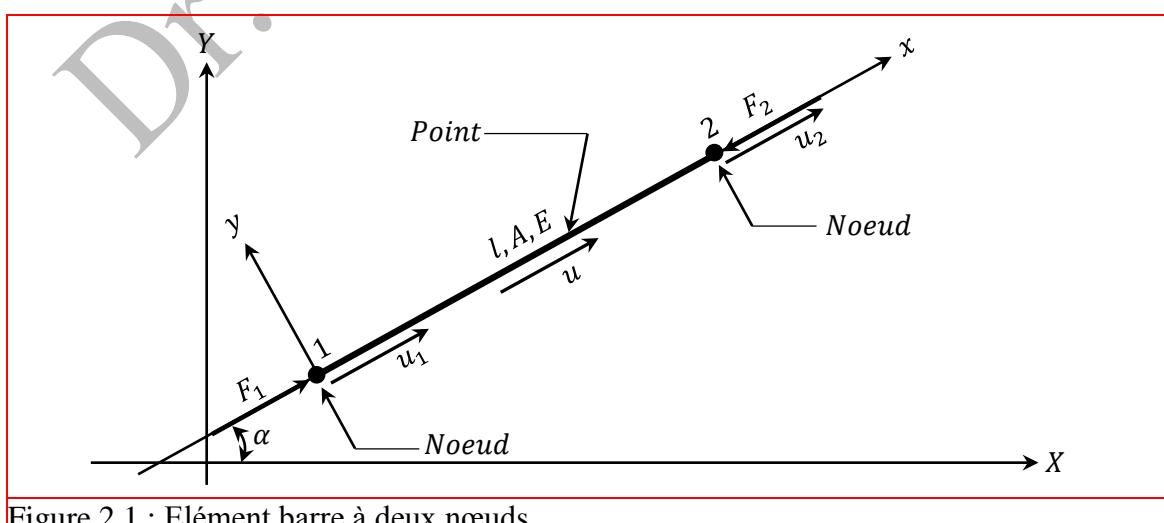


Figure 2.1 : Elément barre à deux nœuds

La matrice de rigidité de cet élément (élément à barre à 2 nœuds) dans le repère local s'exprime comme suit.

$$[K_0] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :  $E$  est le module d'élasticité de barre,  $A$  la section de la barre et  $l$  la longueur de la barre.

**NB :** La matrice de rigidité de tous les éléments finis doit être symétrique.

Le vecteur des  $n_d$  inconnues cinématiques (déplacements) de l'élément barre à deux nœuds s'écrit dans le repère local par :

$$\{q_e\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

et le vecteur force de cet élément s'écrit dans le repère local par :

$$\{F_e\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

### 2.2.2. ELEMENT BARRE A TROIS NŒUDS

La figure suivante présente un élément barre à trois nœuds, dans lequel chaque nœud comporte un seul degré de liberté dans le repère local (une seule inconnue cinématique :  $n_d = 1$ ) et la barre comporte trois inconnues cinématiques ( $n_d = 3$ ) dans le repère local ( $x, y$ ). Ces trois inconnues cinématiques sont  $u_1, u_2, u_3$ .

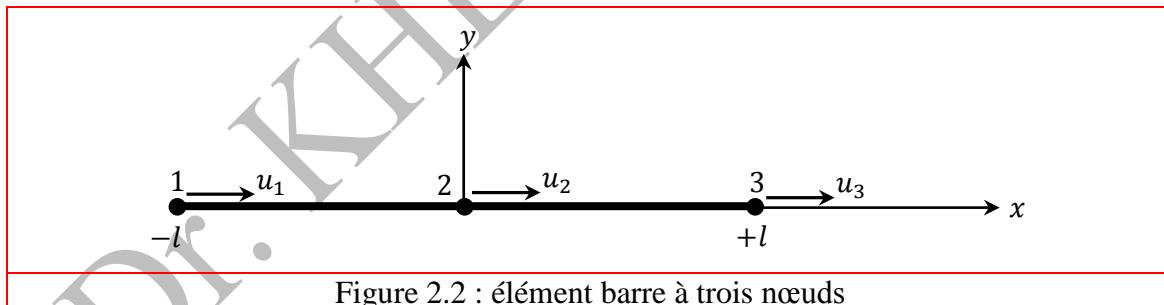


Figure 2.2 : élément barre à trois nœuds

La matrice de rigidité de cet élément (élément à barre à 3 nœuds) dans le repère local s'exprime par.

$$[K_0] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{8}{6} & \frac{16}{6} & -\frac{8}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix} = \frac{EA}{6l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

**N.B :** la longueur de la barre égale  $2l$ .

Le vecteur des  $n_d$  inconnues cinématiques (déplacement) de l'élément barre à trois nœuds s'écrit dans le repère local par :

$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

et le vecteur force de cet élément s'écrit dans le repère local par :

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

**Remarque :**  $K_0$  symétrique

### 2.2.3. CALCUL D'UNE STRUCTURE A BARRES :

Pour calculer une structure à barres par la méthode des éléments finis il faut suivre les étapes suivantes (figure 2.3):

- Nous choisissons un repère global,
- Nous proposons une numérotation globale (numérotation des nœuds et des éléments) ;
- Nous déduisons une connexion des éléments (la connectivité) (voir tableau 2.1).

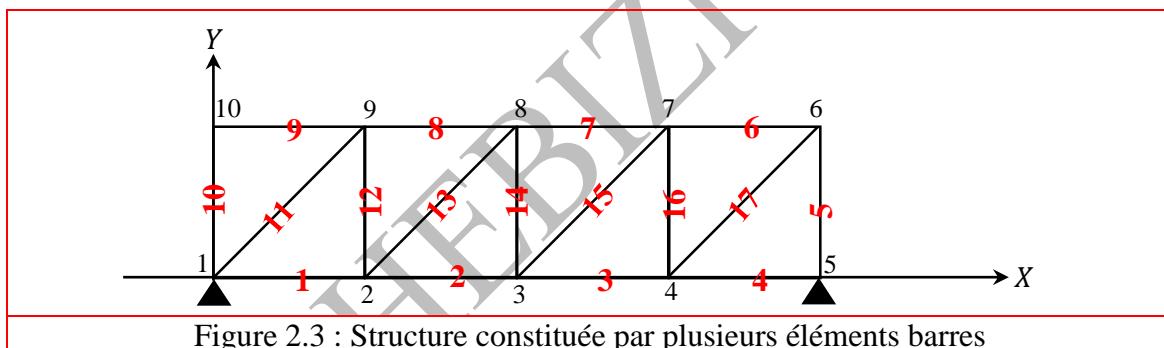


Tableau 2.3 : connexion des éléments (la connectivité)

	1 <sup>er</sup> nœuds	2 <sup>eme</sup> nœuds
Elément 1	1	2
Elément 12	2	9
Elément 15	3	7

- Nous tirons les coordonnées de tous les nœuds  $(0,0), (3,0), (6,0), \dots \dots$
- Nous calculons la longueur de chaque élément :

$$\text{Longueur de l'élément} = l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Nous calculons les matrices de rigidité élémentaires dans les repères locaux et dans le repère global (matrices de rigidité de chaque élément).
- Nous calculons la matrice de rigidité de la structure dans le repère global.
- Nous résolvons le système linéaire  $[K_0]\{q\} = \{F\}$ .

### 2.2.4. PASSAGE AU REPÈRE GLOBAL :

La matrice de passage (matrice de rotation) permet le passage des degrés de liberté globaux aux degrés de liberté locaux, elle s'écrit comme suit (valable pour l'élément barre à deux nœuds):

$$[RO] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

Les composantes locales et globales des degrés de liberté sont liées par la transformation.

$$\{q\}_L = [RO]\{q\}_G$$

Pour l'élément barre à deux nœuds, chaque nœud comporte un seul degré de liberté dans le

repère local et deux degrés de liberté dans le repère global :  $\{q\}_L = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  et  $\{q\}_G = \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$

$[RO]^{-1} = [RO]^T$ , elle permet le passage des degrés de liberté locaux aux degrés de liberté globaux

Les composantes locales et globales des forces nodales sont liées par la transformation

$$\{F_e\}_L = [RO]\{F_e\}_G$$

Avec :  $\{F_e\}_L = \begin{pmatrix} F_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  et  $\{F_e\}_G = \begin{pmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \end{pmatrix}$

La matrice de rigidité dans le repère global s'exprime par

$$[K_0]_G = [RO]^T [K_0]_l [RO]$$

Avec  $[K_0]_l$  est la matrice de rigidité dans le repère local :  $[K_0]_l = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$

### 2.2.5. VECTEUR CHARGE EQUIVALENTE :

Si l'élément support une charge distribué sur sa longueur (figure 2.4), le vecteur force (vecteur charge équivalente) s'exprime dans le repère local comme suit :

$$\{F_e\} = \begin{pmatrix} ql/2 \\ ql/2 \end{pmatrix}$$

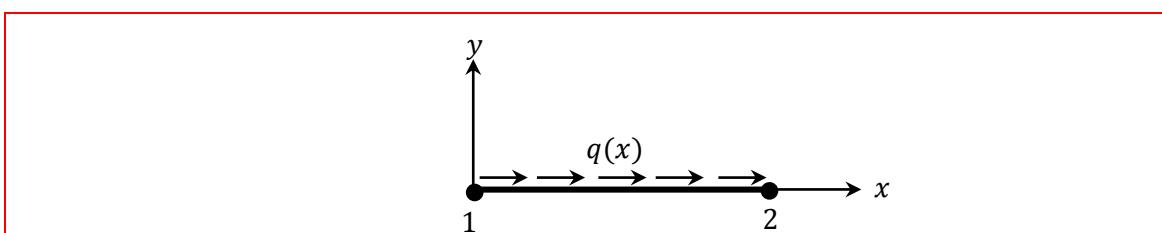


Figure 2.4 : Elément barre à deux nœuds support une charge distribué sur sa longueur

### 2.3. LES ELEMENTS POUTRES EN FLEXION SIMPLE :

Une poutre c'est un corps prismatique obtenu par la translation rigide d'une section quelconque.

Les éléments poutres sont utilisés pour discréteriser les poutres sollicitées à la flexion simple.

#### 2.3.1. Poutre en flexion simple :

Les théories des poutres sont basées sur plusieurs hypothèses simplificatrices.

Les théories classiques les plus connues et les plus utilisées sont :

- Théorie des poutres de Bernoulli,
- Théorie des poutres de Timoshenko.

#### 2.3.2. Hypothèses

##### Hypothèse 1 :

Les sections droites avant déformation restent droites après déformation (pas de gauchissement).

##### Hypothèse 2 :

- **Bernoulli** : La normale à une section avant déformation reste normale après déformation.

Poutres minces (poutres élancées).

- **Timoshenko** : La normale à une section avant déformation ne reste plus normale à cette section (mais elle reste droite).

Poutre d'épaisseur modérée.

**N.B :** Dans ce cours, nous allons étudier uniquement les poutres basées sur la cinématique de Bernoulli.

#### 2.3.3. Poutre basée sur la cinématique de Bernoulli :

Nous considérons un tronçon d'une poutre sollicitée à la flexion (figure 2.5). Ce tronçon doit discréteriser par un élément poutre (élément fini) à deux nœuds (figure 2.6), dans le cas chaque nœud comporte deux degrés de liberté (une translation et une rotation) et l'élément comporte deux inconnues cinématiques ( $n_d = 4$ ) dans le repère ( $x, y$ ). Le vecteur des  $n_d$  inconnues cinématiques (déplacements) de l'élément poutre à 2 nœuds s'exprime dans le repère local par :

$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

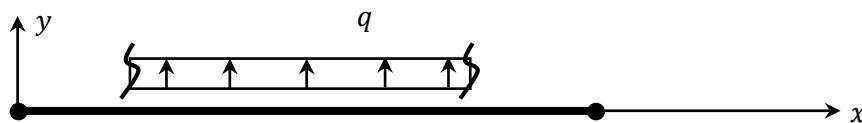


Figure 2.5 : Tronçon d'une poutre sollicité à la flexion simple

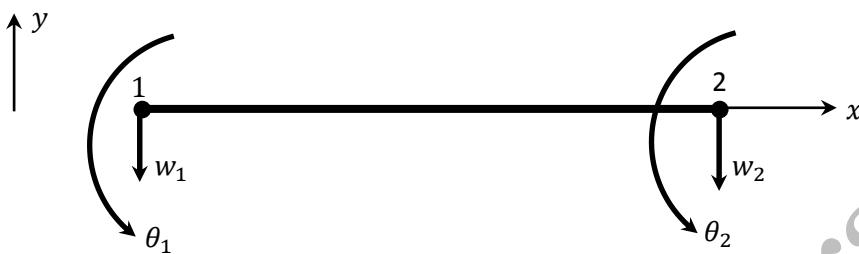


Figure 2.6 : degrés de liberté d'un élément poutre à 2 nœuds

La matrice de rigidité de l'élément poutre à deux nœuds ( $n_d \times n_d$ ) s'écrit comme suit :

$$[K_0] = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_2 & w_2 & \theta_2 \\ \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow w_1 \\ \rightarrow \theta_1 \\ \rightarrow w_2 \\ \rightarrow \theta_2 \end{array}$$

Avec  $l$  est la longueur de l'élément poutre et  $I$  son inertie.

Si l'élément supporte une charge transversale uniforme  $q$  (figure 2.7), on obtient

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix}$$

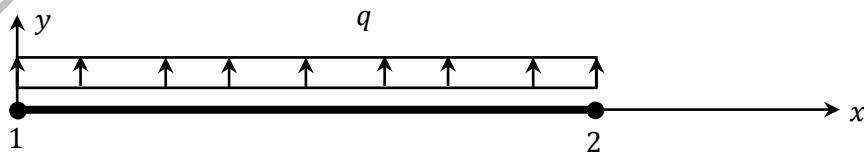


Figure 2.7 : Elément supporte une charge transversale uniforme

### 2.3.4. Poutre basée sur la cinématique de Timoshenko :

Il est demandé aux étudiants de faire un exposé sur les éléments poutres basées sur l'hypothèse de Timoshenko.

### 2.3.5. ELEMENT PORTIQUE :

Les éléments portique sont utilisés pour discréteriser les poutres (structures) sollicitées à la flexion composées (chargement axial + un moment fléchissant). La figure 2.8 présente un élément portique à deux nœuds, chaque nœud comporte trois degrés de liberté dans le repère local (trois inconnues cinématiques) et l'élément comporte six inconnues cinématiques ( $n_d = 6$ ) dans le repère local ( $x, y$ ). Le vecteur des  $n_d$  inconnues cinématiques (déplacements) de l'élément portique à deux nœuds s'exprime dans le repère local par :

$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

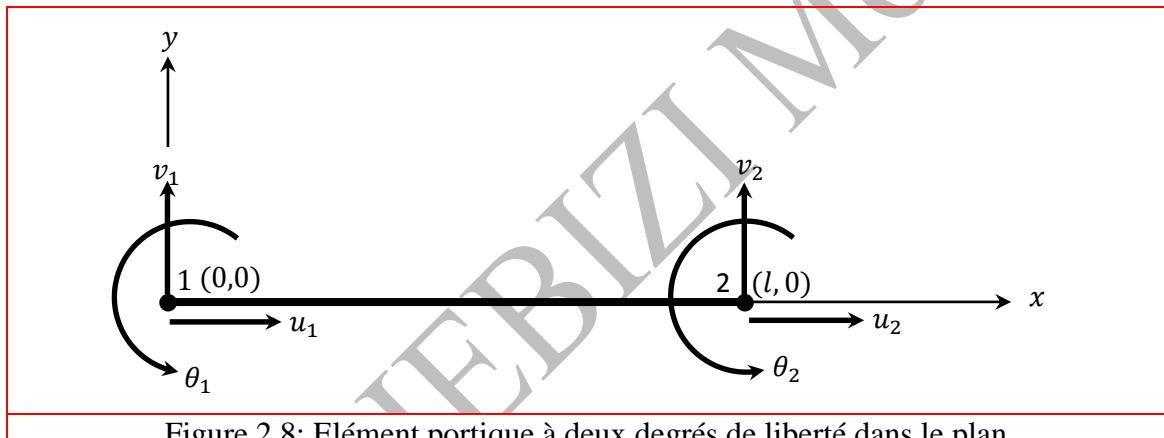


Figure 2.8: Elément portique à deux degrés de liberté dans le plan.

#### 2.3.5.1. Matrice de rigidité de l'élément portique à deux nœuds (dans le repère local et dans le plan) :

La matrice de rigidité de l'élément portique s'obtient par une combinaison entre la matrice de rigidité de l'élément barre et celle de l'élément poutre.

$$[K_0] \rightarrow \begin{cases} \rightarrow Menbranaire \rightarrow [K_0] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Elément\ barre \\ \rightarrow flexionnelle \rightarrow [K_0] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l^2} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \rightarrow Elément\ poutre \end{cases}$$

$$[K_0]_{portique} = [K_0]_{barre} + [K_0]_{poutre}$$

**N.B :** le signe (+) de l'expression précédente ne signifie pas la somme algébrique des deux matrice mais une combinaison entre les matrice.

La matrice de rigidité ( $(n_d \times n_d)$ ) de l'élément portique à deux nœuds dans le repère local s'écrite comme suit :

$$[K_0] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} & 0 & -12\frac{EI}{l^2} & 6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} & 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} & 0 & 12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} & 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow u_1 \\ \rightarrow v_1 \\ \rightarrow \theta_1 \\ \rightarrow u_2 \\ \rightarrow v_2 \\ \rightarrow \theta_2 \end{array}$$

### 2.3.5.2. Passage au repère global

La matrice de passage (matrice de rotation) permet le passage des degrés de liberté globaux (repère global  $X, Y$ ) aux degrés de liberté locaux (repère local  $x, y$ ) elle s'écrit comme suit (valable pour l'élément portique à deux nœuds dans le plan (figure 2.9)).

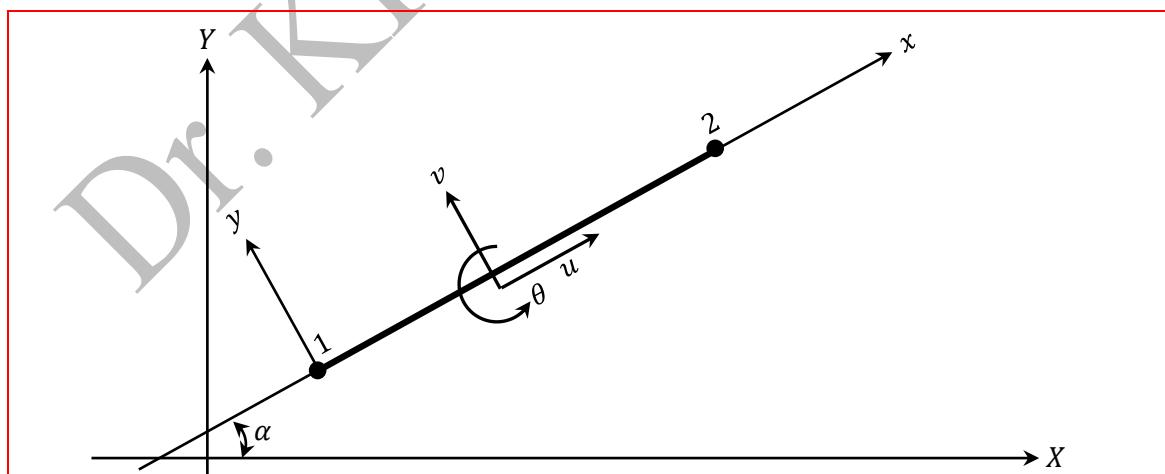


Figure 2.9 : Elément portique à deux nœuds dans le plan :  $X, Y$  est le repère global et  $x, y$  le repère local

La matrice de rotation du passage local-global est la suivante (pour 1 seul nœud) :

$$[RO] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes locales et globales des degrés de liberté, pour un seul nœud, sont liées par la transformation :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = [RO] \begin{Bmatrix} U \\ V \\ \theta \end{Bmatrix}$$

La matrice du passage local-global pour l'élément portique (à deux nœuds) est la suivante :

$$[\mathcal{R}\mathcal{O}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

Les composantes locales et globales des degrés de liberté sont liées par la transformation.

$$\{q\}_L = [\mathcal{R}\mathcal{O}]\{q\}_G$$

Pour l'élément portique à deux nœuds, chaque nœud comporte trois degrés de liberté dans le

repère local et trois degrés de liberté dans le repère global :  $\{q\}_L = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$  et  $\{q\}_G = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$

N.B : la matrice  $[RO]^{-1}$  permet le passage des degrés de liberté locaux aux degrés de liberté globaux.

Les composantes locales et globales des forces nodales de l'élément portique sont liées par la transformation

$$\{F_e\}_L = [RO]\{F_e\}_G$$

La matrice de rigidité de l'élément portique dans le repère global s'exprime par :

$$[K_0]_g = [\mathcal{R}\mathcal{O}]^T [K_0]_l [\mathcal{R}\mathcal{O}]$$

Avec  $[K_0]_l$  est la matrice de rigidité de l'élément portique dans le repère local.

## REFERENCES DU CHAPITRE 2

- [8].Guenfoud, M (2002-203). Cours de la méthode des éléments finis, destiné aux étudiants de 5ème année ingénieur promotion 2002-2003, département de génie civil, Université de Guelma.

Dr. KHEBIZI Mourad

## CHAPITRE 3

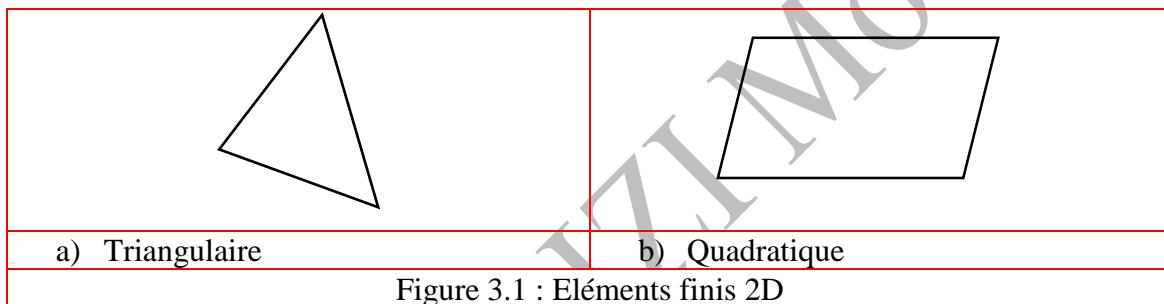
### METHODE DES ELEMENTS FINIS 2D

#### 3.1. INTRODUCTION :

La méthode des éléments finis 2D est utilisée pour discréteriser les structures (matériaux, sols,...) obéissent à l'hypothèse de déformation planes ou celle des contraintes planes :

- les sols (déformations planes,...)
- les refends (contraintes planes,...)
- les membranaires (contraintes planes,...)

#### 3.2. Leurs types :

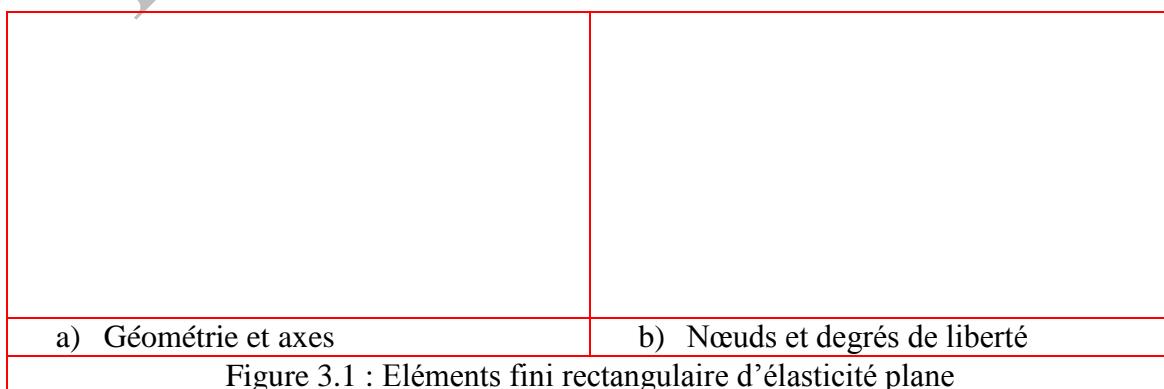


##### 3.2.1. Élément rectangle bilinéaire :

On considère, en élasticité plan, un élément fini rectangulaire de dimensions  $2ax2b$ , placé dans le système d'axes  $(x, y)$  indiqué (figure 4.1.a). La théorie enseigne que le champ de déplacement comporte les deux composantes  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  tant dans  $\Omega$  que sur  $\Gamma$  [1]. Il faut donc choisir comme degrés de liberté les valeurs de  $u$  et  $v$  en certains nœuds.

Si on sélectionne les quatre sommets du rectangle comme nœuds (figure 4.1.b), l'élément comporte huit inconnues cinématiques [1]

$$\{q\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\}$$



### 3.2.1.1. Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de l'élément rectangulaire, pour l'état plan de contrainte, s'écrit [1]

$$[K] = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} c_1 & c_7 & \vdots & c_3 & -c_8 & \vdots & c_9 & -c_7 & \vdots & c_5 & c_8 \\ c_2 & \vdots & c_8 & c_4 & \vdots & -c_7 & c_{10} & \vdots & -c_8 & c_6 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & c_1 & -c_7 & \vdots & c_5 & -c_8 & \vdots & c_9 & c_7 \\ & \vdots & & c_2 & \vdots & c_8 & c_6 & \vdots & c_7 & c_{10} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & & & \vdots & c_1 & c_7 & \vdots & c_3 & -c_8 \\ & \vdots & & & \vdots & & c_2 & \vdots & c_8 & c_4 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & c_1 & -c_7 \\ & \vdots & & & & & & & c_2 & & \end{bmatrix}$$

*sym*

Avec :

$t$  est l'épaisseur de l'élément.

$$\alpha = \frac{a}{b} \quad \mu = \frac{1-\nu}{2} \quad \beta = \frac{b}{a}$$

$$c_1 = \frac{\mu\alpha + \beta}{3} \quad c_3 = \frac{c_1 - \beta}{2} \quad c_5 = \frac{c_1 - \mu\alpha}{2} \quad c_7 = \frac{\mu + \nu}{4} \quad c_9 = -\frac{c_1}{2}$$

$$c_2 = \frac{\alpha + \mu\beta}{3} \quad c_4 = \frac{c_2 - \mu\beta}{2} \quad c_6 = \frac{c_2 - \alpha}{2} \quad c_8 = \frac{\mu - \nu}{4} \quad c_{10} = -\frac{c_1}{2}$$

### 3.2.1.2. Vecteurs forces

#### ➤ Force de volume

Soit  $b_x$  et  $b_y$  les composantes constantes de la force de volume (figure 3.2), le vecteur force dans ce cas s'écrit [1]

$$\{f\} = tab \left\{ \begin{array}{c} b_x \\ b_y \\ \dots \\ b_x \\ b_y \\ \dots \\ b_x \\ b_y \\ \dots \\ b_x \\ b_y \end{array} \right\}$$

C'est-à-dire une répartition égale à chaque nœud.

Figure 3.2 : Force de volume

### ➤ Charge concentrée

Pour une charge concentrée de composantes  $F_x$  et  $F_y$ , agissant au point  $H$  de coordonnées (figure 3.3) [1]

$$x_H = \xi a \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad y_H = \eta b \quad (-1 \leq \eta \leq 1)$$

Le vecteur force (pour le cas d'une charge concentrée) est donné par [1]

$$\{f\} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta)F_x \\ (1 - \xi)(1 - \eta)F_y \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (1 + \xi)(1 - \eta)F_x \\ (1 + \xi)(1 - \eta)F_y \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (1 + \xi)(1 + \eta)F_x \\ (1 + \xi)(1 + \eta)F_y \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (1 - \xi)(1 + \eta)F_x \\ (1 - \xi)(1 + \eta)F_y \end{Bmatrix}$$

Si le point  $H$  coïncide avec un nœud de l'élément, on vérifie aisément que seul ce nœud est chargé : on aboutit à une charge purement nodale [1].

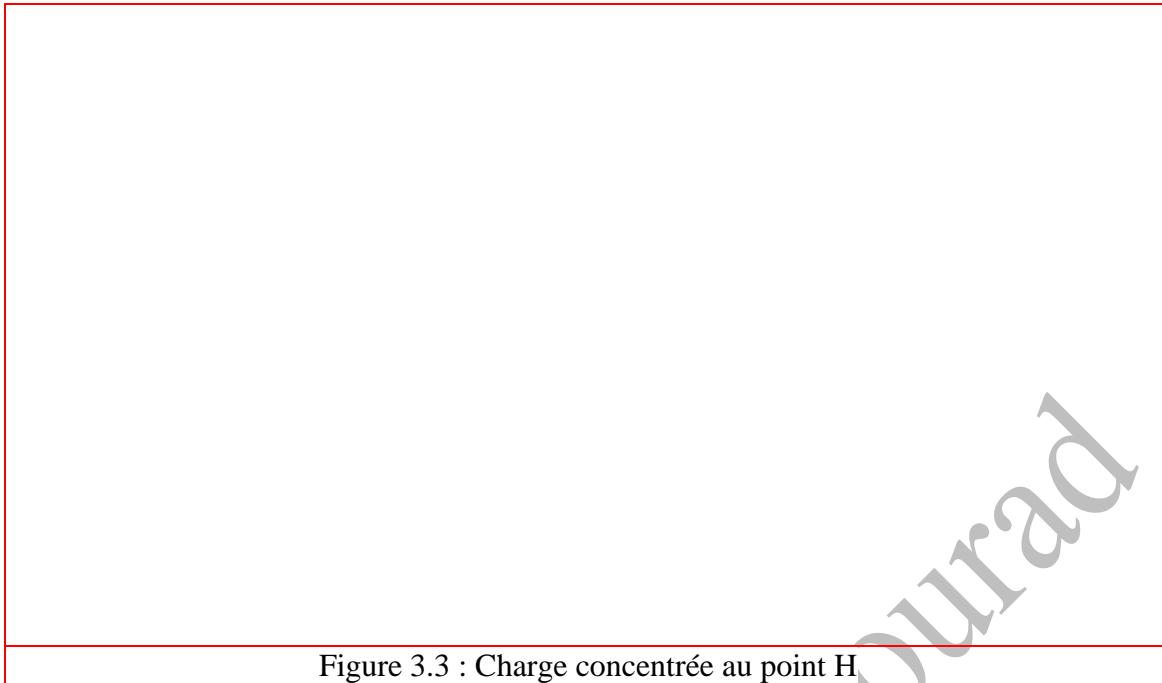


Figure 3.3 : Charge concentrée au point H

### 3.2.1.3. Transformation de coordonnées

On désigne par les indices  $l$  et  $g$  les grandeurs attachées aux systèmes d'axes *local* d'étude d'un élément et *global* d'étude de la structure. De manière générale, on peut toujours écrire une relation du genre [1]

$$\{q\}_l = [RO]\{q\}_g$$

Où  $[RO]$  est une matrice dite de transformation de coordonnées ou, plus simplement, de *rotation*, puisqu'elle opère la rotation de degrés de  $\{q\}_g$  d'un élément fini, exprimés en axes globaux, à ceux  $\{q\}_l$  définis en axes locaux.

La matrice de rigidité exprimée dans les axes globaux s'écrit donc

$$[K]_g = [RO]^T [K]_l [RO]$$

Le vecteur force défini en axes globaux s'exprime par

$$\{f\}_l = [RO]^T \{f\}_g$$

Considérons un élément fini rectangulaire d'élasticité plane (figure 3.4). La connaissance des coordonnées des nœuds permet de calculer l'angle  $\alpha$  orientant les axes locaux ( $x, y$ ) par rapport aux axes globaux ( $X, Y$ ). En chaque nœud, les déplacements sont  $u_i$  et  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). On a donc simplement

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_l = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_g = [RO]_\alpha \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_g$$

et, pour tous les nœuds, la relation  $\{q\}_l = [RO]\{q\}_g$  s'écrit

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \\ u_3 \\ v_3 \\ \dots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}_l = \begin{bmatrix} [RO]_\alpha & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \vdots & [RO]_\alpha & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & [RO]_\alpha & \vdots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & [RO]_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \\ u_3 \\ v_3 \\ \dots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}_g = [RO]\{q\}_g$$

Figure 3.4 : Rectangle à champ de déplacement bilinéaire en axes locaux et globaux

### REFERENCES DU CHAPITRE 3

- [1]. Frey, F., Jirousek, J. (1999), Analyse des structures et milieux continus – Méthode des éléments finis-, Presses polytechnique et universitaire Romandes, Lausanne.
- [8]. Guenfoud, M (2002-203). Cours de la méthode des éléments finis, destiné aux étudiants de 5ème année ingénieur promotion 2002-2003, département de génie civil, Université de Guelma.

## REFERENCES

- [2]. Frey, F., Jirousek, J. (1999), Analyse des structures et milieux continus – Méthode des éléments finis-, Presses polytechnique et universitaire Romandes, Lausanne.
- [3]. Dhatt, G. et Touzot, G. (1984), une présentation de la méthode des éléments finis (deuxième édition), Maloine S.A, Paris
- [4]. KHEBIZI, M. et GUENFOUD M., (2008), Modélisation d'un glissement de terrain lent par la méthode des éléments finis -Cas du glissement de CILOC à CONSTANTINE – (2008), séminaire national de génie civil 15-16 décembre 2008, Université de Chlef, Algérie.
- [5]. KHEBIZI, M., GUENFOUD, H. and GUENFOUD, M., (2018), Numerical modelling of soil-foundation interaction by a new non-linear macro-element, Geomechanics and Engineering, An International Journal “Tecno-press” , Vol.14, No.4 (2018), 377-386.
- [6]. Helwany, S. (2007), Applied soil mechanics with Abaqus applications, John Wiley & Sons, INC.
- [7]. Etemadi, E., Fallahnezhad, E. (2017), Behavior of reinforced concrete interior wide beam-column connections under lateral loading: A finite element study, International Journal of Engineering and Technology (IJET), Vol 9 No 3, PP. 2559-2570
- [8]. Frey, F. (1980), Analyse des structures et milieux continus – Mécanique des solides-, Presses polytechnique et universitaire Romandes, Lausanne.
- [9]. Guenfoud, M (2002-203). Cours de la méthode des éléments finis, destiné aux étudiants de 5ème année ingénieur promotion 2002-2003, département de génie civil, Université de Guelma.