ENSTP
المدرسة الوطنية العليا للأشغال العمومية
Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

EXAMEN FINAL – SEMESTRE 4

JUIN 2022

2ème ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

Nom : .... Prénom : .... Groupe : ....

ANNEXE

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{u_e\} = [B]\{u_e\}$$

$$[B] = [\partial][N] \quad , \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$[K^{(e)}] = \iiint_V [B]^T[D][B]\, dV_e$$

$$\{f_s\} = \iint_S [N_s]^T\{F_s\}\, dS$$

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right)^2}$$

$$\{f_v\} = \iiint_V [N]^T\{F_v\}\, dV$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \xi} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial \eta} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Etat de Contraintes Planes :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Etat de Déformations Planes :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

➢ *Méthode de GAUSS*

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \sum_{i=1}^{n_{G_\xi}}\sum_{j=1}^{n_{G_\eta}} \omega_i\omega_j f(\xi_i,\eta_j)$$

r	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	8/9
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	5/9
4	$\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6\sqrt{6/5}}$
	$\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{6\sqrt{6/5}}$

➢ *Méthode de HAMMER*

$$\int_{0}^{+1}\int_{0}^{1-\xi} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \sum_{i=1}^{n_H} \omega_i f(\xi_i,\eta_j)$$

Ordre m	n_H	ξ_i	η_j	ω_i
1	1	1/3	1/3	1/2
2	3	1/6	1/6	1/6
		2/3	1/6	
		1/6	2/3	
3	4	1/3	1/3	-27/96
		1/5	1/5	25/96
		3/5	1/5	25/96
		1/5	3/5	25/96

Nom :	Prénom :	Groupe : ....

Dans le cadre d'une analyse par éléments finis, on considère le mur de soutènement de *40 m* de longueur, représenté sur la *figure 1*, modélisé en utilisant différents éléments finis.

Le mur de soutènement est soumis à son poids propre ainsi qu'à la poussée des terres Q en amont et en aval.

- *On donne :* $E = 20\ GPa$, $\nu = 0.2$

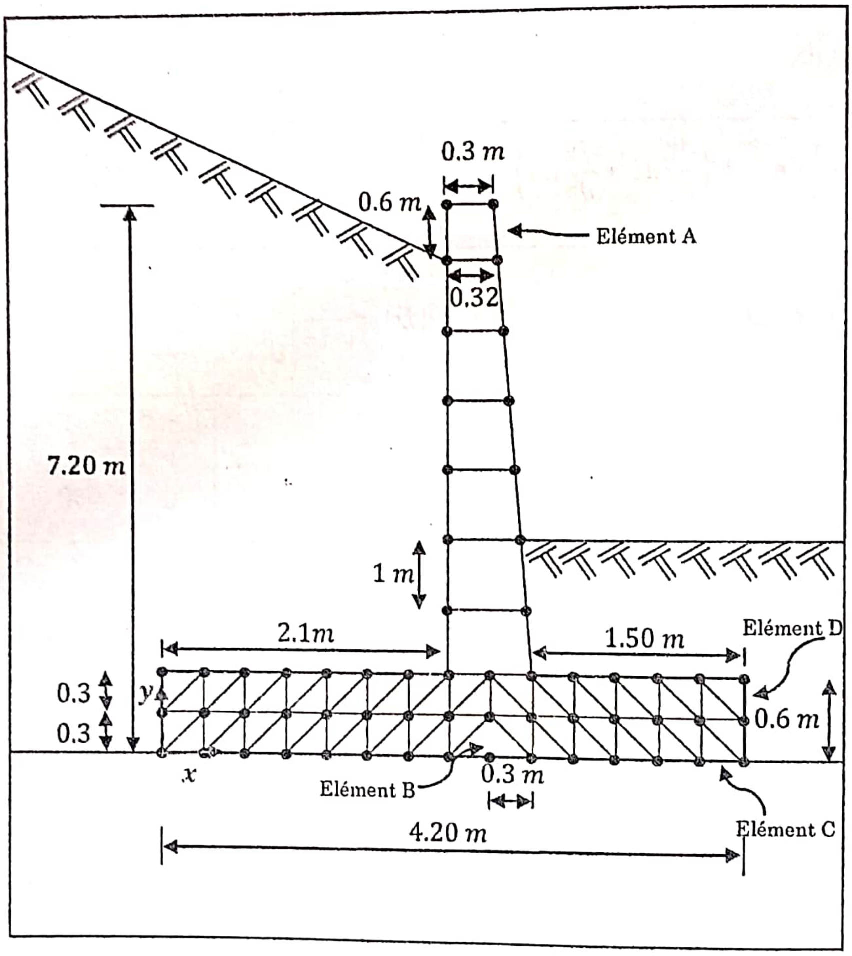


Figure 1

ENSTP
المدرسة الوطنية العليا للأشغال العمومية
École Nationale Supérieure des Travaux Publics

2ème ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

EXAMEN FINAL – SEMESTRE 4

JUIN 2022

Nom : .... Prénom : .... Groupe : ....

1ère Partie : (08 Points)		NOTE PARTIE 01 :
N°	QUESTIONS	RÉPONSES AVEC JUSTIFICATIONS
1.1	Quel type d'état de comportement présente ce mur de soutènement ? Justifier.	
1.2	En utilisant la quadrature de Gauss, déterminer la composante $k(8.8)$ de la matrice de rigidité élémentaire pour ***l'élément A*** (dans son repère local) en respectant la numérotation donnée dans l'élément de référence en annexe.	
1.3	Remplacer ***l'élément A*** par des éléments finis plans pour lesquels on souhaite avoir un champ de déformation linéaire.	
1.4	Combien de nœuds le nouvel élément de discrétisation doit-il inclure ? De combien de DDL cet élément dispose-t-il ?	
1.5	Établir les expressions du champ des déformations théoriques de cet élément.	
1.6	Exprimer le champ des déplacements de ***l'élément B***. Donner les dimensions des matrices élémentaires $[B]$ et $[K]$.	
1.7	Si on supprime le nœud du centre de la base de ***l'élément B***, y aura-t-il une influence sur l'approximation ? ▪ Si oui, préciser où se situe cette influence.	
1.8	Donner le type d'appui à utiliser pour assurer de bonnes conditions aux limites au niveau de la fondation ? Justifier votre réponse.	

2ème ANNÉE - CYCLE INGÉNIEUR - DMS

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

EXAMEN FINAL – SEMESTRE 4

JUIN 2022

Nom : .... ***Prénom :*** .... ***Groupe :*** ....

2ème Partie : (12 points) **NOTE PARTIE 02 :**

2.1. Pour l'élément C

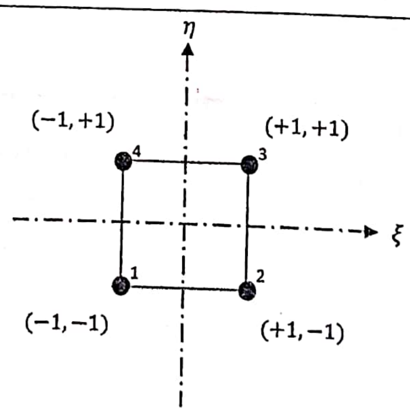
- Déterminer la matrice de rigidité réduite de l'élément en introduisant les conditions aux limites.

2.2. Pour l'élément D

1. Proposer une numérotation nodale adéquate (*respecter l'orientation du sens trigonométrique*) en déduisant les coordonnées.
2. Proposer un élément de référence.
3. Déterminer les fonctions de formes nécessaires.
4. Déterminer la matrice Jacobienne $[J]$ et la matrice élémentaire $[B]$.
5. Etablir le vecteur des forces surfaciques en considérant que la poussée des terres est uniformément répartie.

BON COURAGE

ANNEXE



$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Nom : .... **Prénom :** .... **Groupe :** ....

ANNEXE

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{u_e\} = [B]\{u_e\}$$

$$[B] = [\partial][N] \quad , \qquad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$[K^{(e)}] = \iiint_V [B]^T[D][B]\, dV_e$$

$$\{f_s\} = \iint_S [N_s]^T\{F_s\}\, dS$$

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right)^2}$$

$$\{f_v\} = \iiint_V [N]^T\{F_v\}\, dV$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \dfrac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \dfrac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Etat de Contraintes Planes :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Etat de Déformations Planes :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

➢ *Méthode de GAUSS*

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \sum_{i=1}^{n_{G\xi}}\sum_{j=1}^{n_{G\eta}} \omega_i\omega_j\, f(\xi_i,\eta_j)$$

r	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	8/9
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	5/9
4	$\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6\sqrt{6/5}}$
	$\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{6\sqrt{6/5}}$

➢ *Méthode de HAMMER*

$$\int_{0}^{+1}\int_{0}^{1-\xi} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \sum_{i=1}^{n_H} \omega_i\, f(\xi_i,\eta_j)$$

Ordre m	n_H	ξ_i	η_j	ω_i
1	1	1/3	1/3	1/2
2	3	1/6	1/6	1/6
		2/3	1/6	
		1/6	2/3	
3	4	1/3	1/3	-27/96
		1/5	1/5	25/96
		3/5	1/5	25/96
		1/5	3/5	25/96