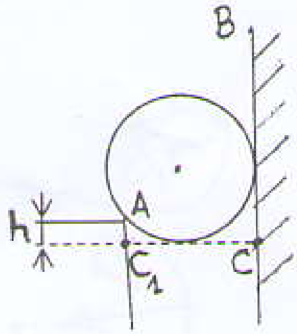
fb/ mehda abderrahmane

2ème Année ST, Université de Béjaïa 2010/2011

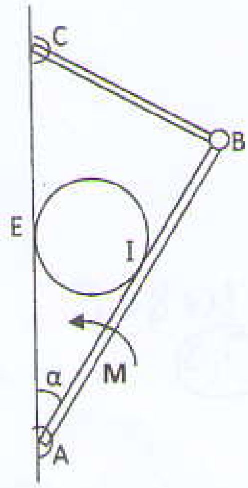
Examen de Rattrapage de Physique 4



Exercice N°1: (04pts)

Un cylindre lisse et homogène, de rayon R = 80cm et de poids P = 7KN, est posé entre un mur vertical BC et l'arête A telle que schématisé sur la figure ci-contre.
Si la distance AC_1 est h = 10cm, déterminer les forces d'appui du cylindre sur le mur BC et sur l'arête A.

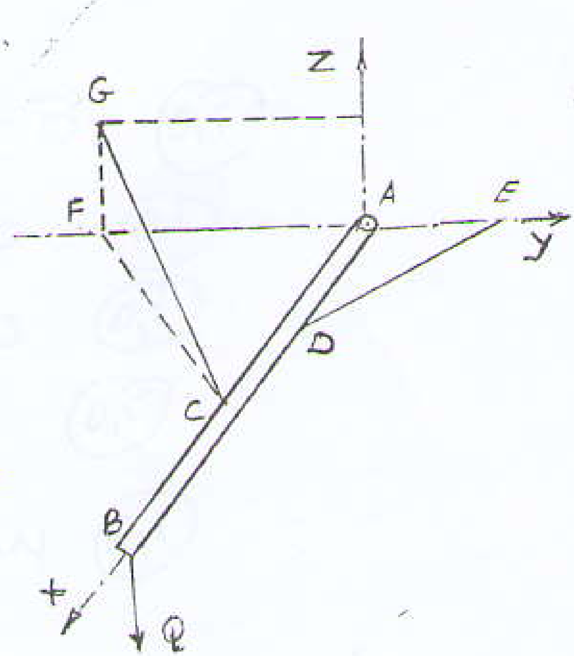
Exercice N°2 : (08pts)



Une boule d'acier de poids P=400N est maintenue en équilibre entre un mur vertical et une tige AB, de poids négligeable. La tige est articulée à son extrémité A au mur alors que l'extrémité B est articulée à une tige BC, de poids négligeable, laquelle de son côté est articulée au mur en C. La tige AB fait un angle α avec le mur et un angle droit avec la tige BC. La boule s'appuie sur le mur au point E et repose sur la tige au point I. Un couple M est appliqué sur la tige AB (voir figure ci-contre). On donne : AB=3m, AI=2m, α=30° et M = 100 N.m ~~BC=2m~~

1) Isoler et représenter les forces extérieures qui agissent sur le système composé (boule + tigeAB+tige BC) en équilibre.
2) Isoler la boule seule, la tige AB seule et la tige BC seule en représentant les forces extérieures qui s'exercent sur chaque système.
3) Ecrire, sous forme vectorielle, les équations d'équilibre pour chaque système seul.
4) Déduire les équations d'équilibre projetées
5) Déterminer les réactions R_A et R_c .

Exercice N°3 (08pts)



Une barre homogène AB de poids P et de longueur 4a est fixée à un mur vertical par une rotule sphérique en A. La barre est maintenue en position perpendiculaire au mur par des câbles DE et CG, le câble DE est en position horizontale alors que le câble CG est légèrement relevé par rapport à l'horizontal. A l'extrémité B de la barre est attachée une charge de poids Q. On donne : AE=AD=DC=a, AF=4a, FG=a

1) Isoler le système et représenter les forces extérieures.

2) Ecrire les conditions d'équilibre du système sous forme vectorielle.

3) Déterminer l'expression vectorielle de chaque force dans le système d'axes (**i**, **j**, **k**). Déduire les trois équations d'équilibre projetées.

4) Déterminer les vecteurs moments par rapport à A. Déduire les équations d'équilibre des moments projetées.

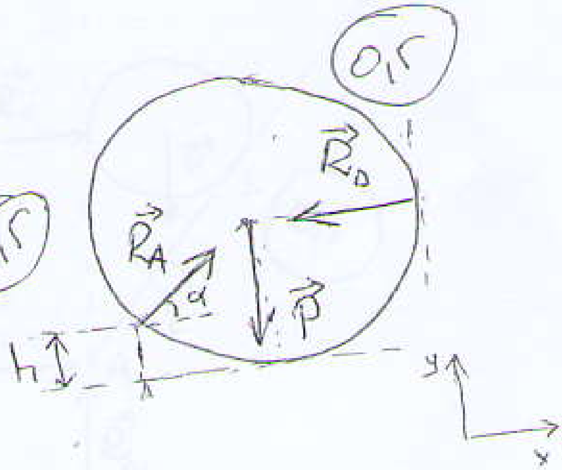
5) Si l'on donne : P=50N, Q=3KN et Calculer les tensions des câbles T_{DE} et T_{CG}. Déduire la réaction en A.

Exo 1 : /4

On isole le cylindre :

On a : $\boxed{\sin\alpha = \frac{R-h}{R}}$ 0,5

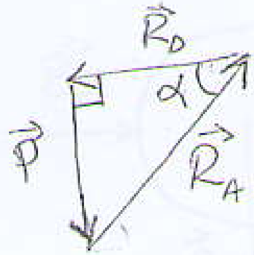
$\Rightarrow \sin\alpha = 0{,}875 \Rightarrow \boxed{\alpha = 61°}$ 0,5



Méthode ① : Triangle des forces

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{R_D}{\sin(90-\alpha)} = \frac{R_A}{\sin 90°}$$

0,5 0,5



0,5

$$\Rightarrow R_D = P\,\frac{\sin(90-\alpha)}{\sin\alpha} \Rightarrow R_D = P\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{P}{tg\,\alpha} = 3{,}88\ kN$$ 0,5

$$\Rightarrow R_A = \frac{P}{\sin\alpha} = 8\ kN$$ 0,5

Méthode ② : $\vec{R}_A + \vec{R}_D + \vec{P} = \vec{0}$ 0,5

Projection :

ox : $R_A\cos\alpha - R_D = 0$ 0,5

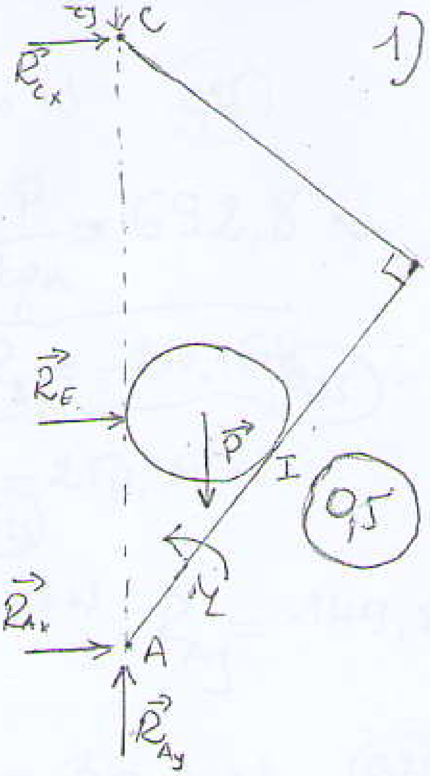
oy : $R_A\sin\alpha - P = 0$ 0,5

$$\Rightarrow R_A = \frac{P}{\sin\alpha} = 8\ kN$$ 0,5

$$R_D = \frac{P}{tg\,\alpha} = 3{,}88\ kN$$ 0,5

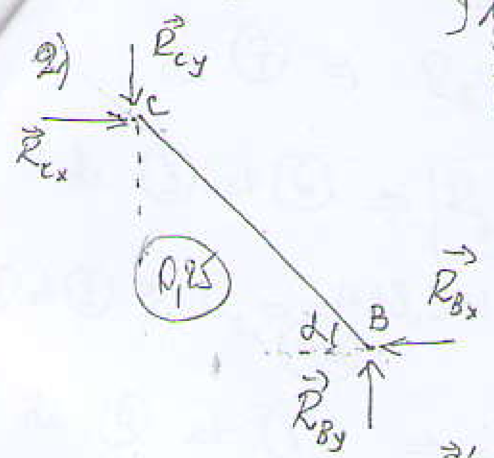
Exo 2 /8

1)

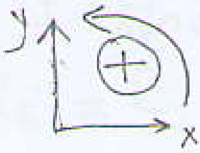


0,5

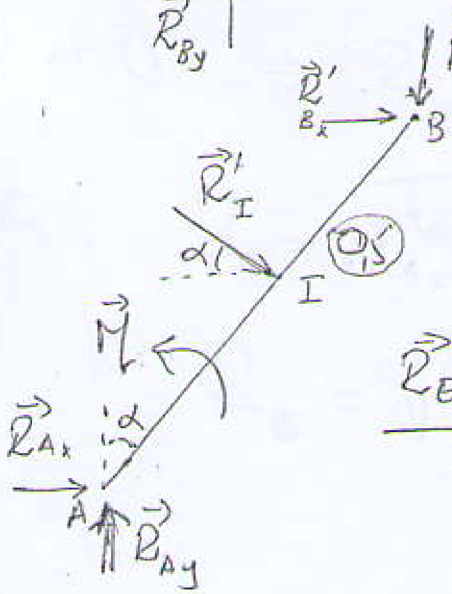
2)



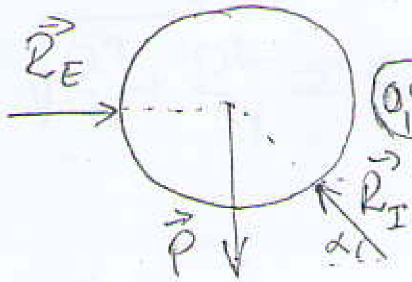
0,25



$\vec{R}'_B = -\vec{R}_B$



0,5



0,25

$\vec{R}'_I = -\vec{R}_I$

3) Tige BC

(0,25) $\begin{cases} \vec{R}_B + \vec{R}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_{/C}(\vec{R}_B) = \vec{0} \end{cases}$

Tige AB

$\begin{cases} \vec{R}'_B + \vec{R}'_I + \vec{R}_A = \vec{0} & (0,25) \\ \vec{M}_{/A}(\vec{R}'_B) + \vec{M}_{/A}(\vec{R}'_I) + \vec{M} = \vec{0} & (0,25) \end{cases}$

Boule : $\vec{R}_E + \vec{R}_I + \vec{P} = 0$ (0,25)

4) $R'_{Bx} = R_{Bx}$ (0,25), $R'_{By} = R_{By}$ (0,25), $R'_I = R_I$ (0,25)

Tige BC

$\begin{cases} R_{cx} - R_{Bx} = 0 \quad \ldots (1) & (0,25) \\ -R_{cy} + R_{By} = 0 \quad \ldots (2) & (0,25) \\ R_{By} \cdot BC \cos\alpha - R_{Bx} \cdot BC \cdot \sin\alpha = 0 \quad \ldots (3) & (0,5) \end{cases}$

Boule

(0,25) $R_E - R_I \cos\alpha = 0 \quad \ldots (7)$

(0,25) $-P + R_I \sin\alpha = 0 \quad \ldots (8)$

, $tg\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \sqrt{3}$ m

Tige AB

$\begin{cases} R'_{Bx} + R_{Ax} + R'_I \cos\alpha = 0 \quad \ldots (4) & (0,25) \\ -R'_{By} - R'_I \sin\alpha + R_{Ay} = 0 \quad \ldots (5) & (0,25) \end{cases}$

$-R'_I \cdot AI - R'_{Bx} AB \cos\alpha - R'_{By} AB \sin\alpha + M = 0 \quad \ldots (6)$ (0,5)

) de (8) $\Rightarrow R_I = \dfrac{P}{\sin\alpha} = 800\,N$ (0,25)

de (7) $\Rightarrow R_E = R_I \cos\alpha = \dfrac{P}{tg\alpha} = 692,8\,N$

de (3) et (6) $\Rightarrow \underbrace{\boxed{R_{B_x} = -433,3\,N}}_{0,25}, \underbrace{\boxed{R_{B_y} = -250,15\,N}}_{0,25}$

(1) et (2) $\Rightarrow R_{c_x} = -433,3\,N$ (0,25) , $R_{cy} = -250,15\,N$ (0,25)

de (4) et (5) $\Rightarrow R_{A_x} = -259,53\,N$ (0,25) , $R_{A_y} = 149,85\,N$ (0,25)

D'où : $R_A = \sqrt{R_{A_x}^2 + R_{A_y}^2} \simeq 300\,N$ (0,25)

et $R_B = \sqrt{R_{c_x}^2 + R_{c_y}^2} = 500,3\,N$ (0,25)

Autre méthode : Tige AB et BC

BC.

$\vec{R}_C + \vec{R}_B = 0 \Rightarrow R_C = R_B$

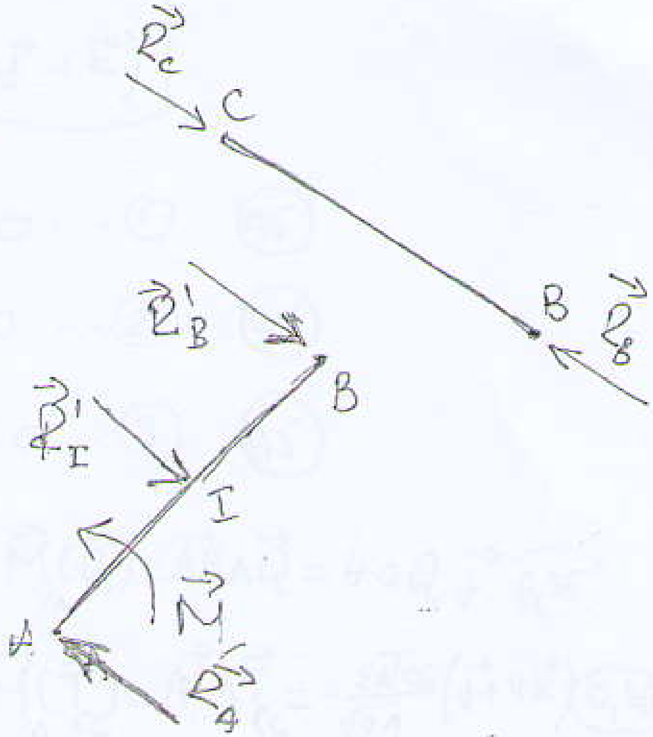
$\vec{R}'_B = -\vec{R}_B \Rightarrow R'_B = R_B$

AB : $\vec{R}_A + \vec{R}'_I + \vec{R}'_B = 0$

$\Rightarrow R_A = R_I + R_B$

$\vec{M} + \vec{M}_{/B}(\vec{R}_A) + \vec{M}_{/B}(\vec{R}'_I) = \vec{0}$

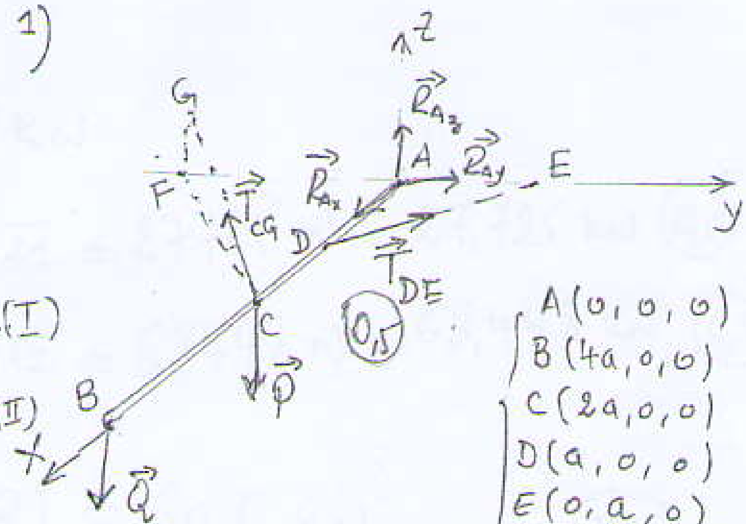
$+ M - R_A \cdot AB + R_I \cdot IB = 0$



18

Exo 3

1)



A(0, 0, 0)
B(4a, 0, 0)
C(2a, 0, 0)
D(a, 0, 0)
E(0, a, 0)
F(0, −4a, 0)
G(0, −4a, a)

2) Conditions d'équilibre :

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$: $\vec{R}_A + \vec{T}_{DE} + \vec{T}_{CG} + \vec{P} + \vec{Q} = \vec{0}$ ...(I)

$\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0}$: $\vec{M}_{/A}(\vec{T}_{DE}) + \vec{M}_{/A}(\vec{T}_{CG}) + \vec{M}_{/A}(\vec{P}) + \vec{M}_{/A}(\vec{Q}) = \vec{0}$ ...(II)

3) Expressions des vecteurs forces :

$\boxed{\vec{P} = -P\vec{k}}$ 0,25 , $\boxed{\vec{Q} = -Q\vec{k}}$ 0,25 , $\boxed{\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{i} + R_{Ay}\vec{j} + R_{Az}\vec{k}}$

0,5

$\vec{T}_{DE} = T_{DE}\dfrac{\vec{DE}}{\|\vec{DE}\|}$ avec : $\vec{DE} = -a\vec{i} + a\vec{j}$, $\|\vec{DE}\| = \sqrt{2}\,a$

$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{DE} = \dfrac{T_{DE}}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})}$

0,5

$\vec{T}_{CG} = T_{CG}\dfrac{\vec{CG}}{\|\vec{CG}\|}$ avec : $\vec{CG} = -2a\vec{i} - 4a\vec{j} + a\vec{k}$, $\|\vec{CG}\| = \sqrt{21}\,a$

$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{CG} = \dfrac{T_{CG}}{\sqrt{21}}(-2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k})}$

(I) $\Rightarrow \begin{cases} R_{Ax} - \dfrac{T_{DE}}{\sqrt{2}} - \dfrac{2T_{CG}}{\sqrt{21}} = 0 \quad \cdots (1) & 0,5 \\ R_{Ay} + \dfrac{T_{DE}}{\sqrt{2}} - \dfrac{4T_{CG}}{\sqrt{21}} = 0 \quad \cdots (2) & 0,5 \\ R_{Az} + \dfrac{T_{CG}}{\sqrt{21}} - P - Q = 0 \quad \cdots (3) & 0,5 \end{cases}$

4) $\vec{M}_{/A}(\vec{P}) = \vec{AC} \wedge \vec{P} = 2aP\,\vec{j}$ 0,25 , $\vec{M}_{/A}(\vec{Q}) = \vec{AB} \wedge \vec{Q} = 4aQ\,\vec{j}$ 0,25

$\vec{M}_{/A}(\vec{T}_{DE}) = \vec{AD} \wedge \vec{T}_{DE} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}T_{DE}\,\vec{k}$ 0,25 $\vec{M}_{/A}(\vec{T}_{CG}) = \vec{AC} \wedge \vec{T}_{CG} = -\dfrac{2aT_{CG}}{\sqrt{21}}(\vec{j} + 4\vec{k})$ 0,25

(II) $\Rightarrow \begin{cases} 2aP + 4aQ - \dfrac{2a}{\sqrt{21}}T_{CG} = 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}T_{DE} - \dfrac{8a}{\sqrt{21}}T_{CG} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P + 2Q - \dfrac{T_{CG}}{\sqrt{21}} = 0 \quad \cdots (4) & 0,5 \\ \dfrac{T_{DE}}{\sqrt{2}} - \dfrac{8}{\sqrt{21}}T_{CG} = 0 \quad \cdots (5) & 0,5 \end{cases}$

(4)

fb/ mehda abderrahmane

5) $P = 50\ N$, $Q = 3\ kN$

De (4) $\Rightarrow T_{CG} = (P + 2Q)\sqrt{21} \simeq 27725\ N = 27{,}725\ kN$ (0,5)

(6) $\Rightarrow T_{DE} = (P + 2Q)\,8\sqrt{2} \simeq 68448\ N = 68{,}448\ kN$ (0,5)

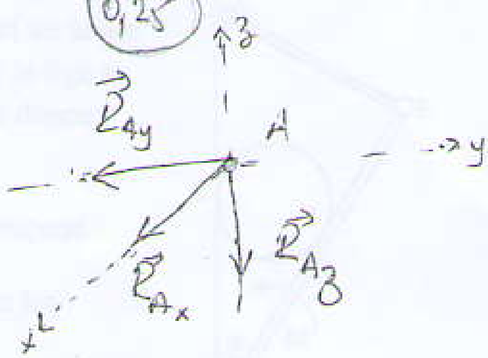
D'où :

$R_{Ax} = 10(P + 2Q) = 60{,}5\ kN$ (0,25)

$R_{Ay} = -4(P + 2Q) = -24{,}2\ kN$ (0,25)

$R_{Az} = -Q = -3\ kN$ (0,25)

D'où : $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 65{,}23\ kN$ (0,25)



Université de Béjaïa –Faculté de technologie
Département de Technologie- 2ème Année Année 2012/2013

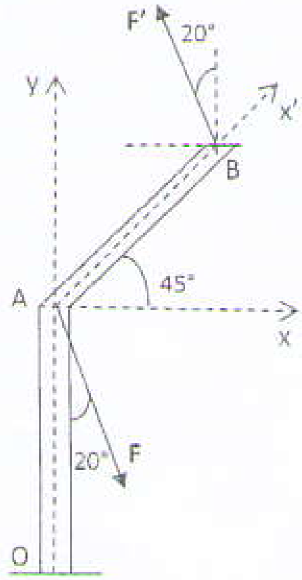
Examen Final de Physique 4

Durée : 2 heures

Exercice N°1: (05pts)

Deux forces parallèles F et F', ayant la même intensité, sont appliquées sur la barre OAB comme indiqué sur la figure ci-contre. On donne : F=40N, AB=50cm

1) Représenter la décomposition de la force F selon :
a) les axes (Ax) et (Ax'). b) les axes (Ax') et (Ay).
Déterminer, dans les deux cas, le module F_{AB} de la composante selon (Ax').
2) Déterminer le moment de couple M_F produit par les deux forces F et F'.
3) On veut remplacer le couple M_F par un autre couple M_p équivalent produit par deux forces horizontales P et P' appliquées en A et B. Déterminer le sens et le module de P et P'.

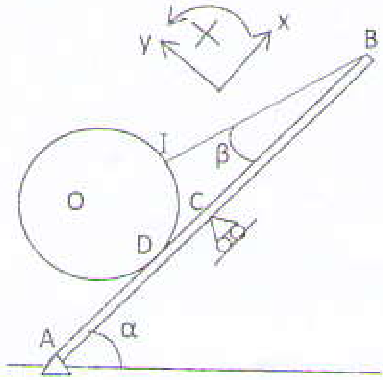


Exercice N°2 : (07pts)

Une barre AB, de masse négligeable, articulé en A, est maintenue en équilibre comme indiqué sur la figure ci-contre. Une boule d'acier de poids P=150N et de rayon r est posée sur la barre et retenue par un câble BI faisant un angle β avec la barre. On donne : AB=5r, AC=BC, AD=2r, α=45°.

1) a) Isoler et représenter les forces extérieures qui agissent sur la boule en équilibre. Justifier pourquoi <u>la ligne d'action</u> de la tension T du câble appliquée en I doit passer par le centre O de la boule.
b) Déduire la valeur de l'angle β.
c) Ecrire la condition d'équilibre de la boule puis déterminer la tension T et la réaction en D. (Indication : utiliser le triangle des forces ou bien la projection selon le système d'axes (x) et (y) indiqué sur la figure)

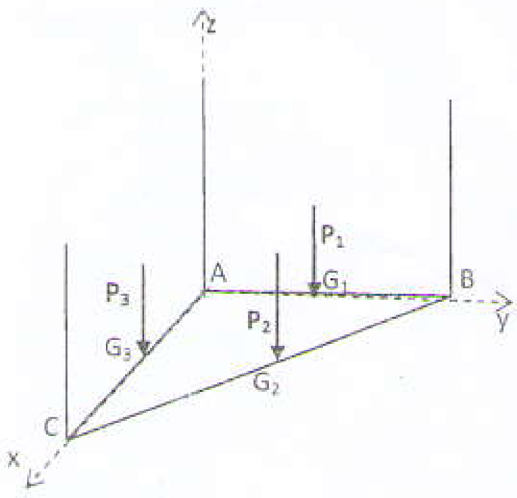
2) a) Isoler la barre AB en représentant les forces extérieures
b) A partir de l'équation d'équilibre des moments déterminer la valeur de la réaction en C de la tige sur la barre AB.
c) Déterminer alors la réaction de l'articulation en A.



Exercice N°3 (06pts)

Un plaque triangulaire ABC de masse négligeable est maintenue dans le plan horizontal (x,y) par trois câbles verticaux attachés aux points A, B et C. Trois charges verticales P_1, P_2, et P_3 sont appliquées respectivement aux milieux de AB, BC et AC. On donne : AB=AC=4m et $P_1=P_3=100N$, $P_2=145N$.

1) Déterminer les vecteurs moments par rapport à A des forces extérieures s'exerçant sur la plaque.
2) Déterminer les tensions T_A , T_B et T_C .



Questions de Cours : (02pts)

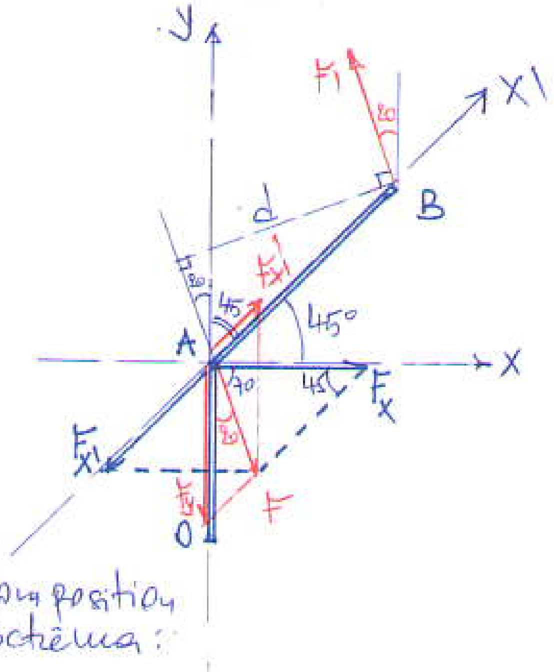
1) Dans le cas d'une échelle AB <u>en équilibre</u> reposant sur un sol et un mur vertical rugueux de même coefficient de frottement f : a) indiquer par un schéma le lieu où apparaît la force de frottement ainsi que la direction et le sens de cette force. b) Donner l'expression du module de cette force.
2) Si le sol et le mur étaient parfaitement lisses, l'échelle peut il être en équilibre ?

Exo 1

(5 points)

$\vec{F}, \vec{F'} \equiv$ couple ; $F = F' = 40N$

$AB = 0{,}5\,m$.



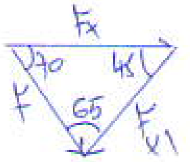
① Décomposition de $\vec{F}$ selon :

ⓐ syst d'axes obliques (Ax, Ax') :

→ par le ~~parallélépipède~~ parallélogramme des forces :

(0,25) $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_{x1}$: voir la décomposition sur le schéma :

(0,25)



règle des sinus : $\dfrac{F}{\sin 45} = \dfrac{F_x}{\sin 65} = \dfrac{F_{x1}}{\sin 70}$. (0,5)

$\Rightarrow F_x = \dfrac{\sin 65}{\sin 45} \cdot F$ = pas demandé

$F_{x1} = \dfrac{\sin 70}{\sin 45} \cdot F \equiv F_{AB} = 53{,}16N$. (0,25)

ⓑ Syst d'axes obliques (Ax', Ay) : par le parallélogramme des forces et règle des sinus :

(0,25)

(0,25) $\vec{F} = \vec{F'}_{x1} + \vec{F}_y$:

(0,5) $\dfrac{F}{\sin 45} = \dfrac{F_y}{\sin 115} = \dfrac{F'_{x1}}{\sin 20}$ $\Rightarrow F'_{x1} \equiv F'_{AB} = \dfrac{\sin 20}{\sin 45} \cdot F = 19{,}35N$ (0,25)

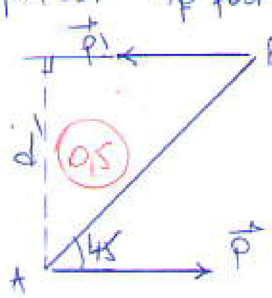
2,5

② Le moment de couple $(\vec{F}, \vec{F_1})$: $M_F \equiv d \cdot F$ avec $d = AB \cdot \sin(20+45)$ (0,25)

$\therefore d = 0{,}45m \Rightarrow M_F = 18\,N.m$ (0,25), Sens antihoraire.

0,5

③ remplacer M_F par M_P équivalent composé de 2 forces $(\vec{P}, \vec{P'})$ horizontales



(0,5) $M_P \equiv M_F \equiv (AB \cdot \sin 45) \cdot P$.

$\Rightarrow P = \dfrac{M_F}{AB \cdot \sin 45} = \dfrac{18}{0{,}5 \sin 45} = 50{,}9\,N$. (0,5)

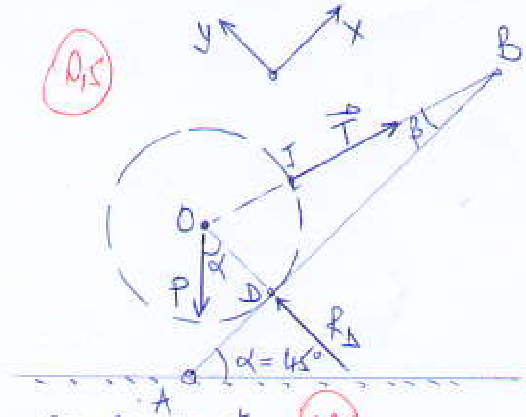
{0,5} pour la direction et sens de $\vec{P}$ et $\vec{P'}$.

2

Exo2 : 7,5

Données :
$\overline{OD} = r$; $\alpha = 45°$
$\overline{AB} = 5r$; $P = 150N$.
$\overline{AD} = 2r$
$\overline{AC} = \overline{BC} = 2,5r$.

0,5



① (a) : La boule est en équilibre sous L'action de 3 forces : $\vec{P}$, $\vec{R_D}$ et $\vec{T}$.
Celles-ci doivent être concourantes. 0,25
$\vec{P}$, $\vec{R_D}$ passent par "O" $\Rightarrow$ $\vec{T}$ doit être orientée ~~vers~~ ~~de~~ O vers B. 0,25

(b) : La valeur de L'angle β : $tg\,\beta = \frac{\overline{OD}}{\overline{DB}} = \frac{r}{3r} \Rightarrow \boxed{\beta = 18,4°}$ 0,25 0,25

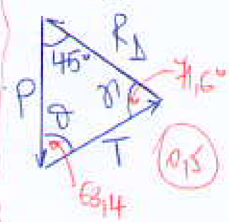
(c) : Condition d'équilibre de La boule : $\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0}$
c.a.d : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_D} = \vec{0}$ 0,5

3,5

* méthode Analytique : 1,5

$$\sum F_x = T\cos\beta - P\sin\alpha = 0 \quad \text{---} ①$$ 0,5
$$\sum F_y = R_D - T\sin\beta - P\cos\alpha = 0 \quad - ②$$ 0,5
de ① $\Rightarrow T = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \cdot P = \underline{111,78N}$ 0,25
de ② $\Rightarrow R_D = P\cos\alpha + T\sin\beta = \underline{141,35N}$ 0,25

* méthode graphique : Triangle des forces + règle des sinus : 1,5



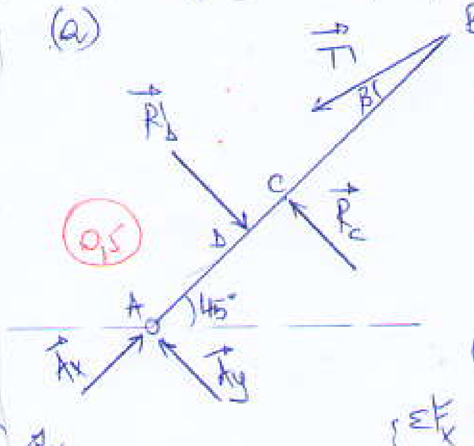
0,5

$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = 71,6°$
$\theta = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) = 63,4°$

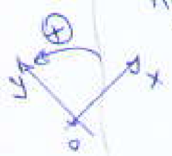
$$\frac{T}{\sin 45} = \frac{P}{\sin 71,6°} = \frac{R_D}{\sin 63,4°}$$ 0,5
$\Rightarrow T = \frac{\sin 45}{\sin 71,6°} \cdot P = \underline{111,78N}$ 0,25
$R_D = \frac{\sin 63,4}{\sin 71,6°} \cdot P = \underline{141,35N}$ 0,25

② Barre (AB) en Equilibre : 4

(a)



0,5



0,5
- Articulation en A : Appui double : $\vec{R_A} = \vec{A_x} + \vec{A_y}$
- Appui simple en A : $\vec{R_C} \perp (AB)$.
- $\vec{R'_D} = -\vec{R_D}$; $\vec{T'} = -\vec{T}$.

(b) : $\sum M_A = 0 \Rightarrow (T\sin\beta).\overline{AB} - \overline{AD}.R_D + \overline{AC}.R_C = 0$ 0,75
$\Rightarrow R_C = 0,8\,R_D - 2T\sin\beta = \underline{42,51\ N}$. 0,25

(c) : $\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} = \vec{R_A} + \vec{T'} + \vec{R'_D} + \vec{R_C}$. 0,25

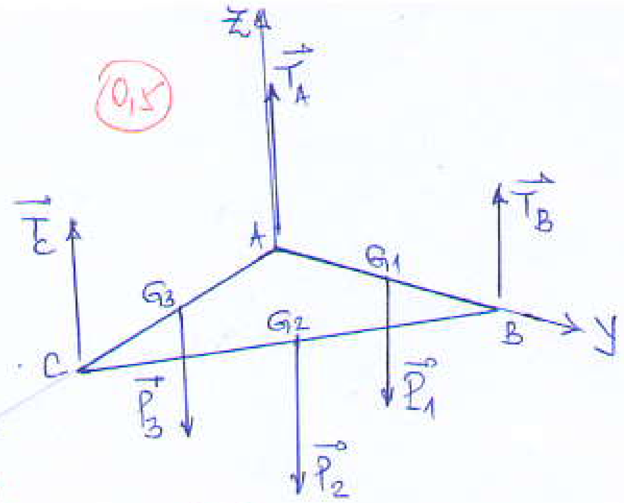
$$\sum F_x = A_x - T\cos\beta = 0$$ 0,5
$$\sum F_y = A_y + T\sin\beta - R_D + R_C = 0$$ 0,5

$\Rightarrow A_x = T\cos\beta = \underline{106,1N}$ 0,25
$A_y = R_D - T\sin\beta - R_C = \underline{63,56N}$ 0,25
$\Rightarrow R_A = \underline{123,68\ N}$ 0,25

fb/ mehda abderrahmane

Exo 3 /6,5

$\overline{AB} = \overline{AC} = 4m$
$P_1 = P_3 = 100N$
$P_2 = 145N$.



① Vecteurs Moments/A :

(0,25) . $\vec{M}_A(\vec{T}_A) = \vec{0}$
. $\vec{M}_A(\vec{T}_B) = \vec{AB} \wedge \vec{T}_B$ (0,25)
$= 4\vec{j} \wedge T_B\vec{k} = 4T_B\vec{i}$ (0,25)

(0,25) $\vec{M}_A(\vec{T}_C) = \vec{AC} \wedge \vec{T}_C = 4\vec{i} \wedge (T_C\vec{k}) = -4T_C\vec{j}$ (0,25)

(0,25) $\vec{M}_A(\vec{P}_1) = \vec{AG_1} \wedge (-P_1\vec{k}) = +2\vec{j} \wedge (-P_1\vec{k}) = -2P_1\vec{i}$ (0,25)

(0,25) $\vec{M}_A(\vec{P}_2) = \vec{AG_2} \wedge \vec{P}_2 = (2\vec{i} + 2\vec{j}) \wedge (-P_2\vec{k}) = 2P_2(\vec{j} - \vec{i})$ (0,25)

(0,25) $\vec{M}_A(\vec{P}_3) = \vec{AG_3} \wedge \vec{P}_3 = 2\vec{i} \wedge (-P_3\vec{k}) = 2P_3\vec{j}$ (0,25)

3,25

② Les Conditions d'équilibre de La plaque : $\Sigma\vec{F}_{ex} = \vec{0}$ et $\Sigma\vec{M}_A = \vec{0}$

$\therefore \Sigma\vec{F}_{ex} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C = \vec{0}$ (0,25)

et $\Sigma\vec{M}_A = \vec{M}_A(\vec{T}_B) + \vec{M}_A(\vec{T}_C) + \vec{M}_A(\vec{P}_1) + \vec{M}_A(\vec{P}_2) + \vec{M}_A(\vec{P}_3) = \vec{0}$ (0,25)

d'où : $\Sigma F_z = T_A + T_B + T_C - P_1 - P_2 - P_3 = 0$ ---- ① (0,25)

3,25

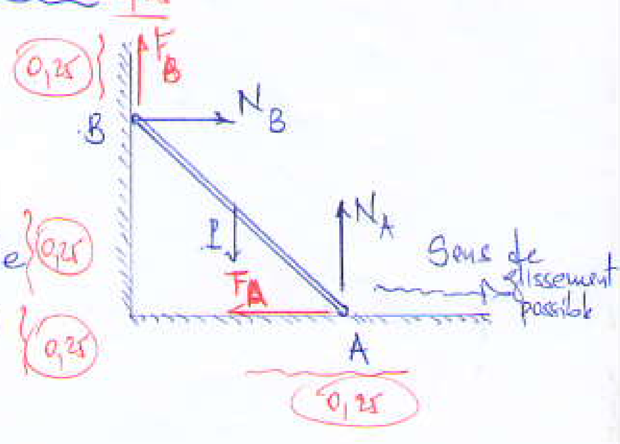
et $\Sigma\vec{M}_A \begin{cases} \Sigma M_x = 4T_B - 2P_1 - 2P_2 = 0 \text{ --- ②} \\ \Sigma M_y = -4T_C + 2P_3 + 2P_2 = 0 \text{ -- ③} \end{cases}$ (0,5) (0,5)

de ② $\Rightarrow$ (0,25) $T_B = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \underline{122,5 N}$ 0,25

de ③ $\Rightarrow$ (0,25) $T_C = \frac{1}{2}(P_2 + P_3) = \underline{122,5 N}$ 0,25

de ① $\Rightarrow$ (0,25) $T_A = (P_1 + P_2 + P_3) - (T_B + T_C) = \underline{100 N}$ 0,25

Exo 4 : Cours : /2



① a) - La force de frottement apparait en A et en B : $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$

$\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ sont Opposées au Sens de glissement possible de L'échelle (0,25)
et tangentes respectivement au (0,25)
Sol et au mur.

1,5

b) (0,25) $F_{A_{max}} = f \cdot N_A$ et (0,25) $F_{B_{max}} = f \cdot N_B$

② Si sol et mur parfaitement Lisses $\Rightarrow f = 0 \Rightarrow \vec{F}_A = \vec{F}_B = \vec{0}$. (0,25)
Dans ce cas, L'équilibre ne peut pas avoir Lieu (0,25)
Puisque $\Sigma\vec{F}_{ex} \neq \vec{0}$ (pas de force pour annuler N_B).

0,5

fb/ mehda abderrahmane

Université A. MIRA de Bejaia
faculté de technologie
département ST, 2eme année

Examen de physique 4
du mardi 28 janvier 2014

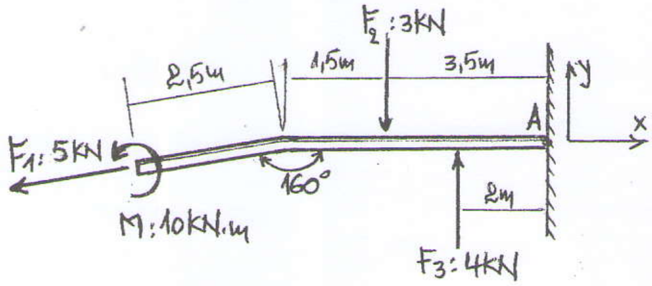
Exercice 1: questions de cours.

confirmez (vrai) ou infirmez (faux), et dans ce cas corrigez, les assertions suivantes:

- les composantes scalaires d'une force F selon un système d'axes quelconque sont toujours égales aux projections de celle-ci selon le système d'axes en question.
- la force de frottement est toujours tangentielle au surfaces de contact entre solides.
- la composante de frottement est toujours orientée dans le sens opposé au mouvement du solide s'il était libre.
- le coefficient de frottement statique ne dépend pas de l'aire (étendue) des surfaces en contact.
- la force de frottement cinétique peut être supérieure à la force maximale de frottement statique.

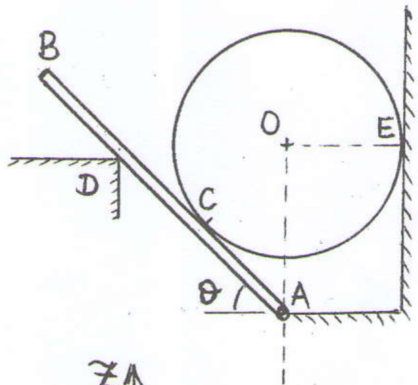
Exercice 2:

remplacez l'ensemble des 3 forces et du couple M agissant sur la barre par un système force-couple appliqué en A. (représentation sur le schéma).



Exercice 3:

un cylindre de rayon r et de poids Q repose entre un mur vertical et une barre (AB) de longueur $3r$ et de poids P. cette dernière tourne autour d'un axe horizontal en (A) et s'appuie simplement sur l'arête en (D) avec un angle $\theta = 45^0$ et $AD = 2r$.



déterminez, en fonction de P et Q:

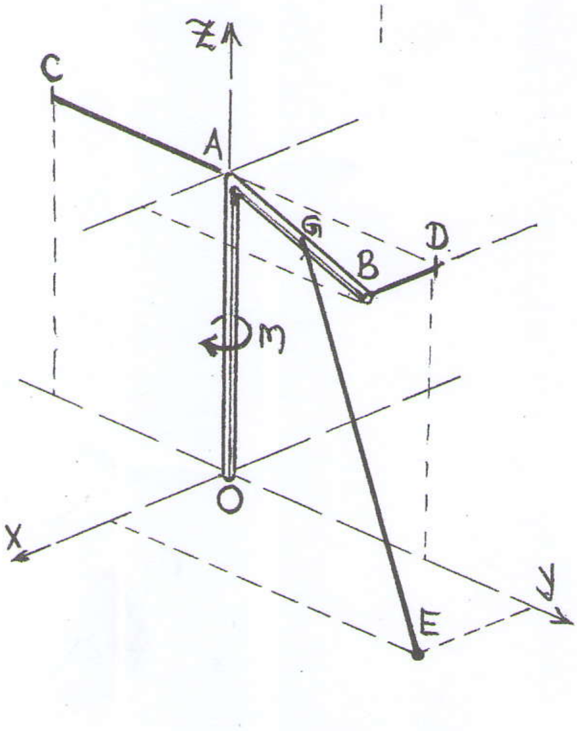
- l'action du mur sur le cylindre,
- la réaction de l'articulation A et la réaction de l'arête D sur la barre (AB).

Exercice 4:

une barre (OAB) en forme de 'L' inversé est articulée (liaison rotule) au point O et maintenue en équilibre par les 3 câbles *(AC), (BD) et (GE)* ainsi que le couple $\vec{M} = -M\vec{k}$ comme illustrés. le point G est situé au milieu de (AB). déterminez:

- les équations vectorielles et scalaires d'équilibre de la barre,
- la réaction de l'articulation en O , les tensions T_A, T_B, et T_G des 3 câbles en fonction de M.

on donne les coordonnées des différents points: *A(0,0,8), B(2,4,8), C(0,-2,8), D(0,4,8), E(5,10,0).*



Corrigé Examen physique 4 du mardi 28 janv 2014.

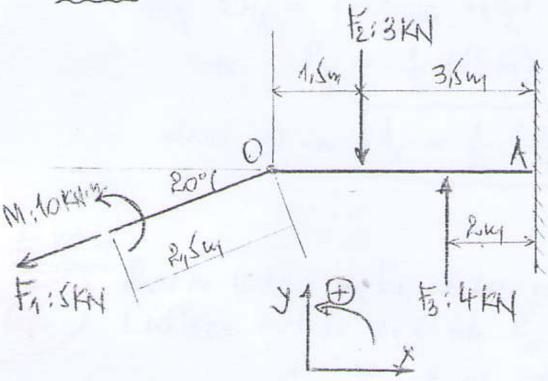
3,5

Exo1 : Questions de cours ; réponses par "vrai" ou "faux".

0,5 ① → Faux : 0,25 Les composantes scalaires = projections dans le cas d'un système d'axes perpendiculaires.
0,25 Les composantes scalaires ≠ projections dans un système d'axes obliques.

0,5 ② → Vrai
0,5 ③ → Vrai
0,5 ④ → Vrai
0,5 ⑤ → Faux : 0,5 La force de frottement cinétique est inférieure à la force maximale de frottement statique.

Exo2



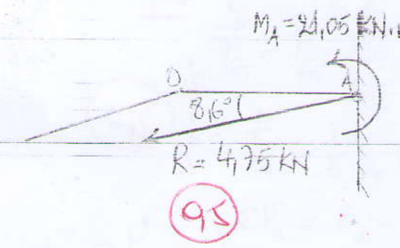
réduction du système (3 forces + couple M) en une [résultante (R) + moment résultant (M_A)] appliqués en A, avec :

* La résultante $\vec{R} = \sum \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$ — 0,5

$\therefore \begin{cases} R_x = \sum F_x = -F_1 \cos 20 = -4{,}70 \text{ KN} & 0{,}5 \\ R_y = \sum F_y = F_3 - F_2 - F_1 \sin 20 = -0{,}71 \text{ KN} & 0{,}5 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{R} = -4{,}70\vec{i} - 0{,}71\vec{j}$ [KN]

0,5 $\Rightarrow R = (R_x^2 + R_y^2)^{1/2} = 4{,}75$ KN et fait un angle θ avec l'horizontale : $\theta = tg^{-1}\left(\frac{|R_y|}{|R_x|}\right) = 8{,}6°$ 0,5



0,5

* Le moment résultant en (A) ; directement en module :

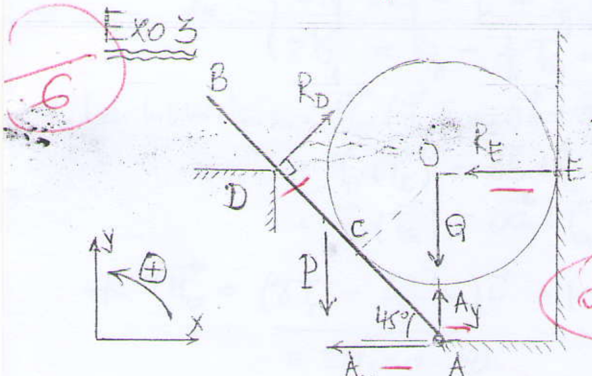
0,5 $M_A = M_A(F_2) + M_A(F_1) + M - M_A(F_3)$

$M_A = 3{,}5 \cdot F_2 + (3{,}5 + 1{,}5) F_1 \sin 20 + M - 2 \cdot F_3$ (F_1 déplacée au point "O")

0,5 $M_A = 21{,}05$ KN.m, sens positif

Exo 3

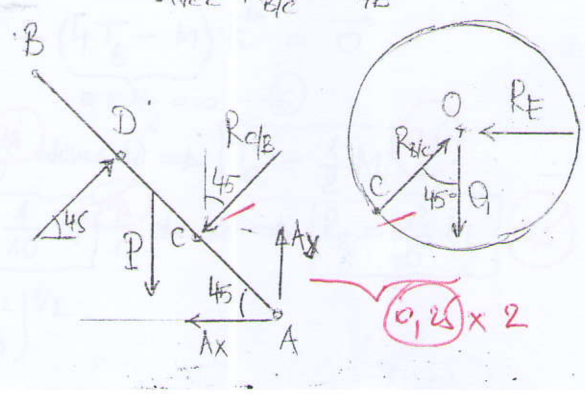
6



0,25 × 4

$\overline{AB} = 3r$; $\overline{AD} = 2r$.

On voit : R_E, R_D et $\vec{R_A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$ = 4 inconnues pour 3 équations d'équilibre pour le système (cylindre + barre AB) : solution impossible ⇒ décomposer en 2 sous systèmes en équilibre mutuel : avec $\vec{R_{B/C}} = -\vec{R_{C/B}}$

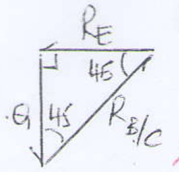


0,25 × 2

* Equilibre du cylindre : 3 forces concourantes ⇒ 2 méthodes :

a) graphique : Triangle des forces :

(0,5)



(0,5)

$$\frac{G}{\sin 45} = \frac{R_E}{\sin 45} = \frac{R_{B/C}}{\sin 90} \Rightarrow \boxed{R_E = G} \quad (0,5)$$

$$\text{et } R_{B/C} = \frac{G}{\sin 45} = \sqrt{2}\,G.$$

(b) méthode analytique : $\sum \vec{F}_{ex} = \vec{R}_E + \vec{G} + \vec{R}_{B/C} = \vec{0}$ (0,5)

ou bien

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = R_{B/C}\cos 45 - R_E = 0 \;\text{----}\; (1) & (0,25) \\ \sum F_y = R_{B/C}\sin 45 - G = 0 \;\text{---}\; (2) & (0,25) \end{cases}$$

de (2) $\Rightarrow R_{B/C} = \frac{G}{\sin 45} = \sqrt{2}\,G$

dans (1) $\Rightarrow R_E = G.$ 0,5

* . Equilibre de la barre (AB) : Analytique :

(0,25) $\sum \vec{F}_{ex} = \vec{R}_A + \vec{R}_D + \vec{P} + \vec{R}_{C/B} = \vec{0}$ avec $\vec{R}_{C/B} = -\vec{R}_{B/C}$

$$\Rightarrow \sum F_x = R_D\cos 45 - R_{C/B}\sin 45 - A_x = 0 \;\text{----}\; (3) \quad (0,25)$$

$$\sum F_y = R_D\sin 45 - R_{C/B}\sin 45 + A_y - P = 0 \;\text{---}\; (4) \quad (0,25)$$

(0,5) $\sum M_A = \overline{AC}\cdot R_{C/B} + (\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\cos 45)\,P - \overline{AD}\cdot R_D = 0$ -- (5) avec $\overline{AC} = r\cdot tg\,45° = r.$

$\Rightarrow \sum M_A = r\cdot R_{C/B} + (\frac{3}{2}r\cdot\cos 45)\,P - 2r\cdot R_D = 0$: avec $R_{C/B} = R_{B/C} = \sqrt{2}\,G.$

$$\Rightarrow R_D = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,G) + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}P \Rightarrow \boxed{R_D = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(G + \frac{3}{4}P\right)} \quad (0,5)$$

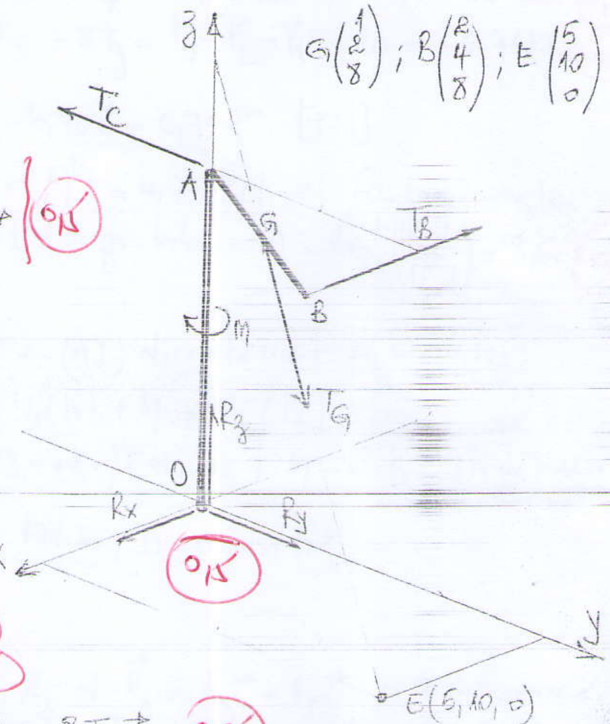
dans (3) $\Rightarrow \boxed{A_x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}P - G\right)}$ (0,5) ; dans (4) $\Rightarrow \boxed{A_y = \frac{1}{2}\left(G + \frac{5}{4}P\right)}$ (0,5)

Exo 4

(0,5) Barre (OAB) en Equilibre dans l'espace :

Liaison rotule en O $\Rightarrow \vec{R}_O(R_x, R_y, R_z)$.

$G\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}$; $E\begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix}$



Equilibre $\Rightarrow \sum \vec{F}_{ex} = \vec{R}_O + \vec{T}_C + \vec{T}_B + \vec{T}_G = \vec{0}$

et $\sum \vec{M}_O = \vec{OA}\wedge\vec{T}_C + \vec{OB}\wedge\vec{T}_B + \vec{OG}\wedge\vec{T}_G + \vec{M} = \vec{0}$ (0,5)

avec : $\vec{M} = -M\vec{k}$;

(0,25) $\vec{T}_C = -T_C\vec{j}$; $\vec{T}_B = -T_B\vec{i}$ (0,25)

$\vec{T}_G = T_G\cdot\frac{\vec{GE}}{\|\vec{GE}\|}$; $\vec{GE} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}$ et $\|\vec{GE}\| = (144)^{1/2} = 12.$

(0,5) $\therefore \vec{T}_G = \frac{1}{3}T_G(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}).$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ex} = \begin{cases} \sum F_x = R_x - T_B + \frac{1}{3}T_G = 0 \;\text{---}\; (1) & (0,25) \\ \sum F_y = R_y - T_C + \frac{2}{3}T_G = 0 \;\text{---}\; (2) & (0,25) \\ \sum F_z = R_z - \frac{2}{3}T_G = 0 \;\text{----}\; (3) & (0,25) \end{cases}$$

Les moments : $\cdot\ \vec{M}_O(\vec{T}_C) = \vec{OA}\wedge\vec{T}_C = 8\vec{k}\wedge(-T_C\vec{j}) = 8T_C\vec{i}$ (0,25)

$\cdot\ \vec{M}_O(\vec{T}_B) = \vec{OB}\wedge\vec{T}_B = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k})\wedge(-T_B\vec{i}) = 4T_B(-2\vec{j} + \vec{k}).$ (0,25)

$\cdot\ \vec{M}_O(\vec{T}_G) = \vec{OG}\wedge\vec{T}_G = \vec{OE}\wedge\vec{T}_G = (5\vec{i} + 10\vec{j})\wedge\frac{1}{3}T_G(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = \frac{10}{3}T_G(-2\vec{i} + \vec{j})$ (0,25)

$$\Rightarrow \sum \vec{M}_O = \underbrace{\left(8T_C - \frac{20}{3}T_G\right)}_{=\sum M_x = 0 \text{ -- } (4)}\vec{i} + \underbrace{\left(-8T_B + \frac{10}{3}T_G\right)}_{=\sum M_y = 0 \text{ --- } (5)}\vec{j} + \underbrace{\left(4T_B - M\right)}_{=\sum M_z = 0 \text{ --- } (6)}\vec{k} = \vec{0}$$

de (6) $\Rightarrow \boxed{T_B = \frac{1}{4}M}$ (0,5) ; de (5) $\Rightarrow \boxed{T_G = \frac{3}{5}M}$ (0,5) ; dans (4) $\Rightarrow \boxed{T_C = \frac{1}{2}M}$ (0,5)

de (1) $\Rightarrow \boxed{R_x = \frac{1}{20}M}$ (0,5) ; de (2) $\Rightarrow \boxed{R_y = \frac{1}{10}M}$ (0,5) ; de (3) $\Rightarrow \boxed{R_z = \frac{2}{5}M}$ (0,5)

et bien sûr : $R_O = (R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{1/2}$

fb/ mehda abderrahmane

fb/ mehda abderrahmane

Université de Béjaïa 2012/2013

2ème Année Technologie

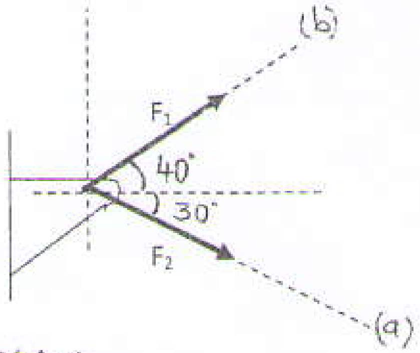
Examen de rattrapage de Physique 4

Exercice N°1: (05pts)

Les forces F_1 et F_2 agissent sur le support comme le montre la figure ci-contre. $F_1 = 100\,N$, $F_2 = 80\,N$

1) Représenter et déterminer la résultante R des deux forces F_1 et F_2.

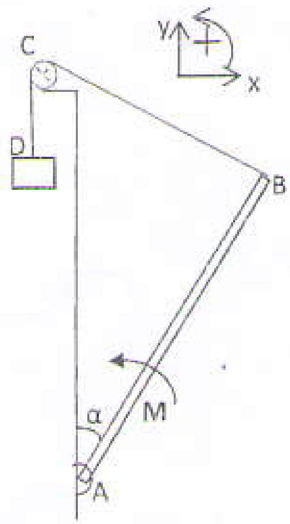
2) Déterminer la projection de R sur l'axe b.



Exercice N°2 : (07pts)

Une tige AB, de poids P est articulée à un mur vertical en son extrémité A et retenue au niveau de l'autre extrémité B par un fil BCD enroulé sur une poulie. La tige AB en équilibre fait un angle α avec le mur, et le fil fait un angle droit avec la tige. Au niveau de l'autre extrémité D du fil, un poids Q est suspendu. Un couple M est appliqué sur la tige afin de la maintenir en équilibre (voir figure ci-contre).

On donne : AB=3m, α=30° , Q=40N et le couple M = 100 N.m



1) Isoler et représenter les forces extérieures qui agissent sur la tige

2) Ecrire, sous forme vectorielle, les équations d'équilibre.

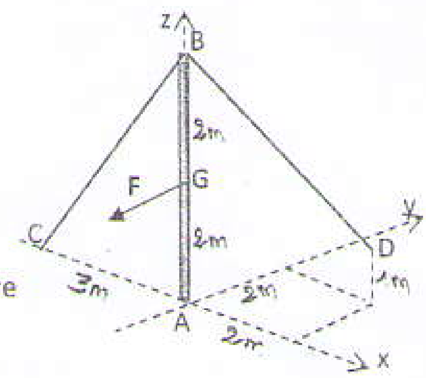
3) Déduire les équations d'équilibre projetées selon le système d'axes indiqué sur la figure.

4) Quelle est la valeur de la tension T dans le fil et du poids P nécessaire pour assurer l'équilibre de tige

5) Déterminer la réaction R_A de l'articulation.

Exercice N°3 (08pts)

Un mât vertical de poids négligeable est soumis à une force horizontale F de 4 KN (parallèle à l'axe y) et est maintenue à la vertical par deux câbles BC et BD et par une liaison rotules (sphérique) en A.



1) Exprimer vectoriellement la force F et les deux tensions T_{BC} et T_{BD} agissant sur le mât en fonction de i, j et k.

2) Ecrire l'équation vectorielle exprimant la première condition d'équilibre du mât désignant une résultante nulle. Déduire les équations projetées selon les trois axes x,y,z.

3) Déterminer les vecteurs moments par rapport à A de F, T_{BC} et T_{BD} .

4) Donner les équations d'équilibre, projetées selon les trois axes, caractérisant un moment résultant nul.

5) Déduire les deux tensions T_{BC} et T_{BD} ainsi que la réaction R_A.

fb/ mehda abderrahmane

Université A. MIRA de Bejaia
faculté de technologie
département ST, 2eme année

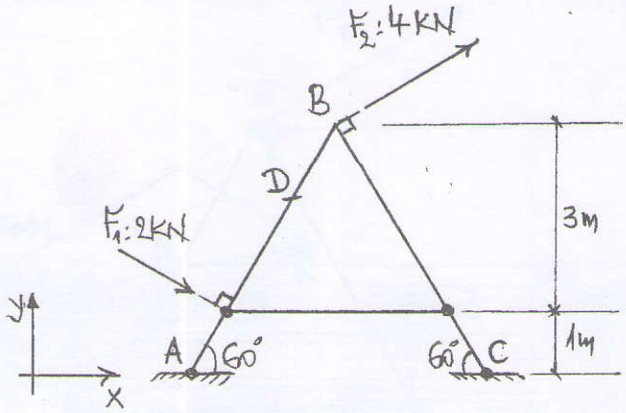
Rattrapage de physique 4
du dimanche 7 septembre 2014

Exercice 1:

1- représentez graphiquement la résultante R des forces agissant sur la charpente illustrée.

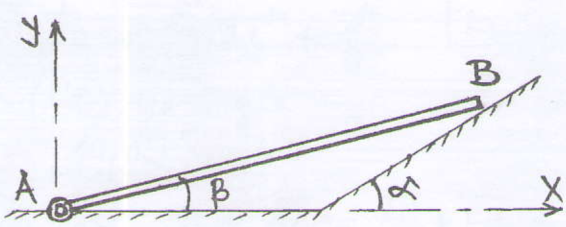
2- sachant que $R=F_1+F_2$, exprimez R en fonction des vecteurs unitaires (i,j), déduisez son module R et l'angle θ entre R et l'axe horizontal Ox,

3- si R passe par un point D de la barre AB, calculez la distance S = AD.



Exercice 2:

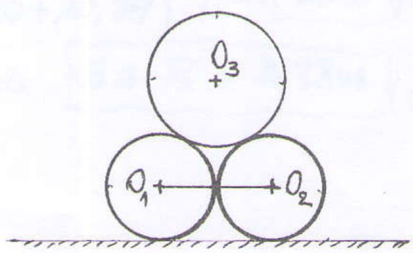
une barre AB de poids P est articulée en A et s'appuie simplement sur un plan incliné en B. déterminez les réactions R_A et R_B sur la barre AB



Exercice 3:

un cylindre homogène de rayon R et de poids Q est posé sur 2 cylindres identiques de rayon r et de poids P comme illustré sur la figure. les centres des 2 cylindres sont reliés par un fil long de $2r$. en fonction de Q, P, R et r déterminez:

- la tension T du fil,
- l'action du plan sur les 2 cylindres (N_1, N_2),
- l'action réciproque des cylindres (N_{13}, N_{23}).



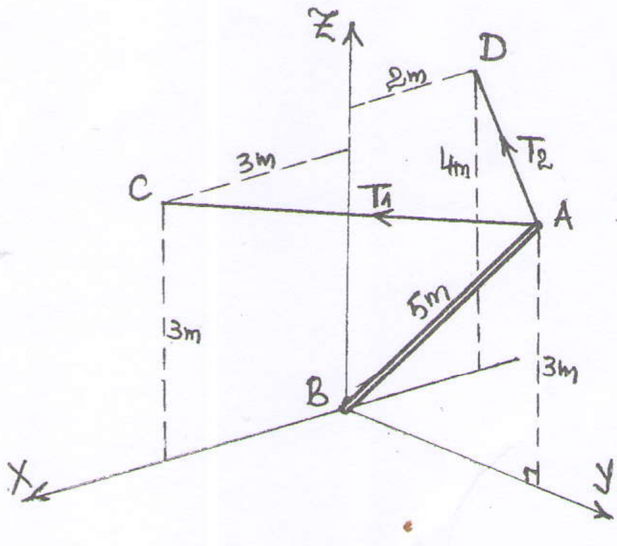
Exercice 4:

la tige d'acier homogène AB de $200Kg$ est retenue par les câbles AC et AD fixés au mur vertical et par l'articulation sphérique (rotule) en B. calculez:

- les expressions vectorielles de T_1, T_2 et mg,
- les vecteurs moments par rapport à B de T_1, T_2 et mg,

appliquez les conditions d'équilibre pour déduire la tension T_1 et la réaction R_B en B.

$(g = 10m/s^2)$



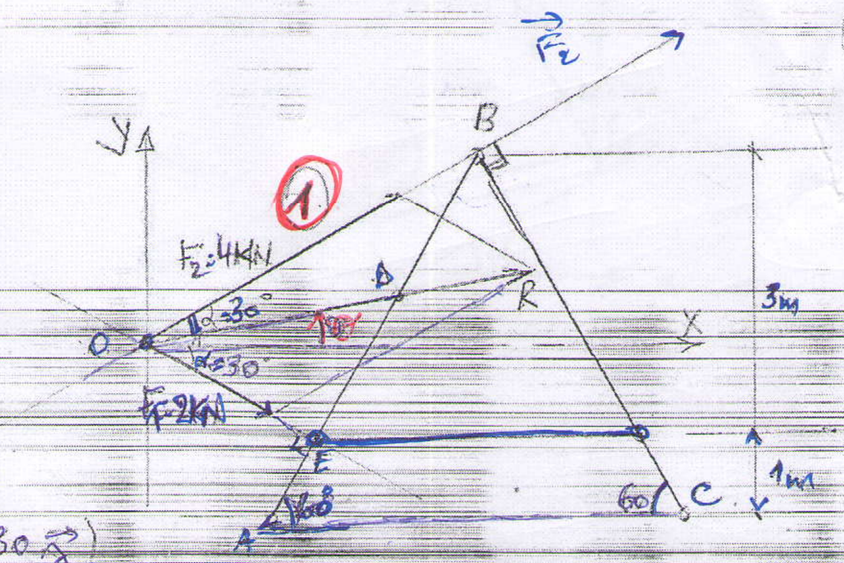
Exo 1 :

4

$F_1 \perp AB$ en E

$F_2 \perp BC$ en B.

{ L'angle $\alpha = 30$ est déduit facilement avec le graphe.



② On calcule $\vec{R}$

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

1

$= (F_1 \cos 30 \vec{i} - F_1 \sin 30 \vec{j})$

$+ (F_2 \cos 30 \vec{i} + F_2 \sin 30 \vec{j})$

$\Rightarrow \vec{R} = (F_1 + F_2)\cos 30 \vec{i} + (F_2 - F_1)\sin 30 \vec{j} = 5{,}19 \vec{i} + \vec{j}$ [kN]

$\|\vec{R}\| = 5{,}29$ kN, faisant avec l'axe (Ox) un Angle

0,5 $\theta = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 10{,}89°$ 0,5

③ R passe par Δ de la barre (AB) ; On veut $S = \overline{A\Delta} = \overline{AE} + \overline{E\Delta}$

- Le triangle (OEB) ; On déduit $\overline{OE}$

0,5

$tg 30 = \frac{OE}{EB} \Rightarrow \overline{OE} = \overline{EB} \cdot tg 30 = \left(\frac{3}{\sin 60}\right) \cdot tg 30 \Rightarrow \boxed{\overline{OE} = 2m}$

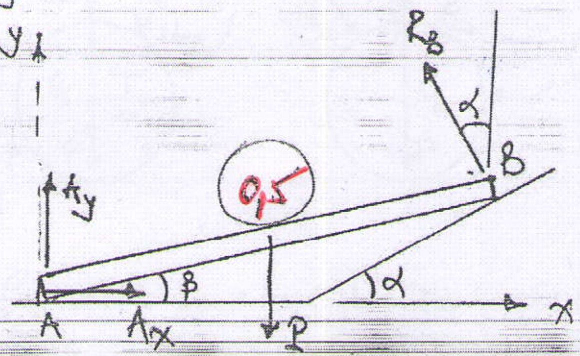
- Le Triangle (OEΔ) : $\overline{\Delta E} = \overline{OE} \cdot tg(30 + \theta)$

$= 2 \cdot tg(30 + 10{,}89) \Rightarrow \boxed{\overline{\Delta E} = 1{,}73 \text{ m}}$

$\Rightarrow S = \overline{A\Delta} = \overline{AE} + \overline{E\Delta} = \frac{1}{\sin 60} + 1{,}73 \Rightarrow \boxed{S = \overline{A\Delta} = 2{,}88m}$ 0,5

~~Corrigé de l'exercice N°1 de la synthèse du 12 juin 2005.~~

4



Equilibre $\Rightarrow$ $\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0}$

Projection

0,5 $\quad \sum F_x = A_x - R_B \sin\alpha = 0$ ---- (1)

0,5 $\quad \sum F_y = A_y - P + R_B \cos\alpha = 0$ ---- (2)

1 $\quad \sum M_A = \underbrace{(R_B \cos\alpha)}_{R_{By}} \cdot AB \cdot \cos\beta + \underbrace{(R_B \sin\alpha)}_{R_{Bx}} AB \sin\beta - P\frac{AB}{2}\cos\beta = 0$

$\Rightarrow R_B\left[\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\right] - \frac{1}{2}P\cos\beta = 0$ ---- (3)

de (3) $\Rightarrow R_B\left[\cos(\alpha-\beta)\right] = \frac{1}{2}P\cos\beta$

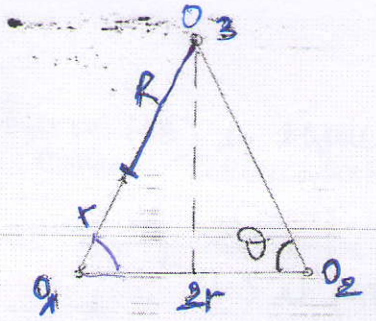
$\Rightarrow \boxed{R_B = \frac{1}{2}P \cdot \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)}}$ 0,5

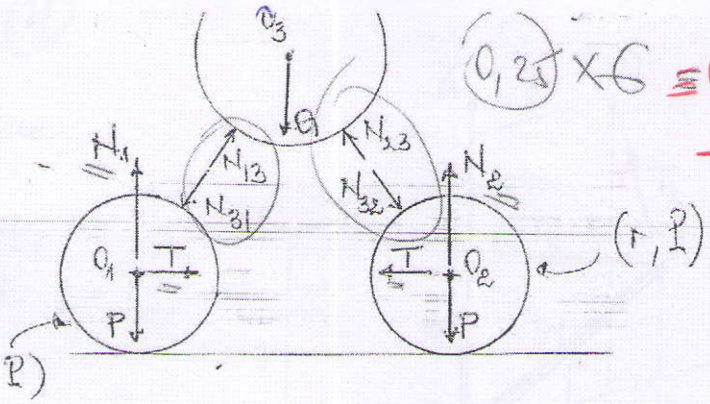
de (1) $\Rightarrow \boxed{A_x = \frac{1}{2}P\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)}}$ 0,5

de (2) $\Rightarrow A_y = P - \frac{1}{2}P\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)} = \boxed{P\left[1 - \frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}\right]}$ 0,5

6

(0,25) × 6 = 1,5





* On veut l'action des cylindres inférieurs sur le cylindre supérieur ⇒ N_{13} ou N_{23}
* La tension dans le fil (T?) et l'action du sol sur les cylindres O_1 et O_2 ⇒ N_1 ou N_2.

∴ On définit l'angle θ tq : $\cos\theta = \dfrac{r}{r+R}$, $\sin\theta = \dfrac{(R^2+2rR)^{1/2}}{(r+R)}$ 0,5

∴ Equilibre du cylindre O_3 :

0,5 * $\Sigma F_x = N_{23}\cos\theta - N_{13}\cos\theta = 0 \Rightarrow N_{23} = N_{13}$

0,5 * $\Sigma F_y = N_{13}\sin\theta + N_{23}\sin\theta - Q = 0 \Rightarrow N_{13} = N_{23} = \dfrac{Q}{2\sin\theta}$

$$\boxed{N_{13} = N_{23} \text{ et } N_{13} = \frac{Q\cdot(r+R)}{2(R^2+2rR)^{1/2}}}$$ 0,5

$N_{13} = N_{23} = N_{32} = N_{31}$ 0,5

∴ Equilibre de l'un des 2 cylindres (On prend O_1) :

0,5 * $\Sigma F_x = T - N_{31}\cos\theta = 0 \Rightarrow T = N_{31}\cos\theta = \dfrac{Q(r+R)}{2(R^2+2rR)^{1/2}}\cdot\dfrac{r}{(r+R)}$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{Q\cdot r}{2(R^2+2Rr)^{1/2}}}$$ 0,5

0,5 * $\Sigma F_y = N_1 - P - N_{31}\sin\theta = 0$

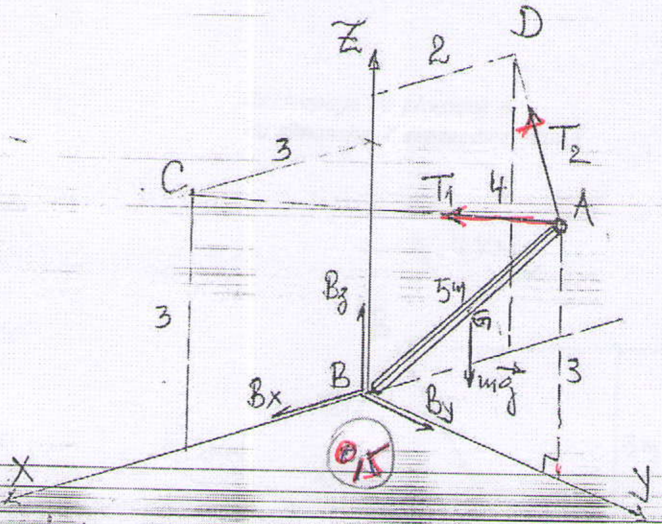
$$\Rightarrow N_1 = P + \frac{Q(r+R)}{2(R^2+2rR)^{1/2}}\cdot\frac{(R^2+2rR)^{1/2}}{(r+R)} = P + \frac{Q}{2}$$

$$\boxed{N_1 = N_2 = P + \frac{Q}{2}}$$ 0,5

Exo 4 : 6

Barre (AB) en équilibre comme schématisée.

- Tensions T_1, T_2 dans les fils (AC) et (AD)
- Poids $m\vec{g}$.
- réaction en B sous forme :
  $\vec{R}_B = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$
  (Liaison rotule).



1 Expressions vectorielles pour T_1, T_2 et mg.

- $\vec{T}_1 = T_1 \dfrac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$
- $\vec{T}_2 = T_2 \dfrac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|}$
- $m\vec{g} = -mg\vec{k}$

Coordonnées des points ; A $(0, \sqrt{25-9}, 3) \equiv (0,4,3)$; C $(3,0,3)$; D $(-2,0,4)$

$\Rightarrow \vec{AC} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$; $\|\vec{AC}\| = 5$; $\vec{AD} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$; $\|\vec{AD}\| = \sqrt{21}$

0,5 $\vec{T}_1 = \dfrac{T_1}{5}(3\vec{i} - 4\vec{j})$

0,5 $\vec{T}_2 = \dfrac{T_2}{\sqrt{21}}(-2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k})$

0,5 $m\vec{g} = -mg\vec{k} = -2000\vec{k}$ [N]

$$\begin{cases} \vec{T}_1 = T_1(0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j}) \\ \vec{T}_2 = T_2(-0{,}44\vec{i} + 0{,}87\vec{j} - 0{,}22\vec{k}) \end{cases}$$

2 Les vecteurs moments : $\vec{M}_B(\vec{T}_1)$; $\vec{M}_B(\vec{T}_2)$ et $\vec{M}_B(m\vec{g})$.

0,5 • $\vec{M}_B(\vec{T}_1) = \vec{BA} \wedge \vec{T}_1$ avec $\vec{BA} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$,

$= (4\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge \left(\frac{T_1}{5}\right)(3\vec{i} - 4\vec{j}) = \dfrac{T_1}{15}(4\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$

0,5 •• $\vec{M}_B(\vec{T}_2) = \vec{BA} \wedge \vec{T}_2 = (4\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge \left(-\dfrac{T_2}{\sqrt{21}}\right)(2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k})$

$= \dfrac{2T_2}{\sqrt{21}}(8\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k})$.

0,5 ••• $\vec{M}_B(m\vec{g}) = \vec{BG} \wedge m\vec{g} = \frac{1}{2}(\vec{BA}) \wedge (-mg\vec{k}) = -2mg\vec{i}$.

3 Conditions d'équilibre de (AB) : $\Sigma\vec{F}_{ex} = \vec{0}$ et $\Sigma\vec{M}_B = \vec{0}$

• $\underbrace{\Sigma\vec{F}_{ex} = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R}_B = \vec{0}}_{0,25} \Rightarrow$
$$\begin{cases} \Sigma F_x = B_x + \frac{3}{5}T_1 + \frac{16}{\sqrt{21}}T_2 = 0 \quad \ldots (1) \quad 0{,}25 \\ \Sigma F_y = B_y - \frac{4}{5}T_1 - \frac{8}{\sqrt{21}}T_2 = 0 \quad \ldots (2) \quad 0{,}25 \\ \Sigma F_z = B_z + \frac{T_2}{\sqrt{21}} - mg = 0 \quad \ldots (3) \quad 0{,}25 \end{cases}$$

•• $\Sigma\vec{M}_B = \vec{M}_B(\vec{T}_1) + \vec{M}_B(\vec{T}_2) + \vec{M}_B(m\vec{g}) = \vec{0}$ 0,25

$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{4T_1}{\sqrt{15}} + \frac{16}{\sqrt{21}}T_2 - mg\right)}_{(4)\ 0,25}\vec{i} + \underbrace{\left(\frac{3}{15}T_1 - \frac{6T_2}{\sqrt{21}}\right)}_{(5)\ 0,25}\vec{j} + \underbrace{\left(\frac{-4}{15}T_1 + \frac{8}{\sqrt{21}}T_2\right)}_{(6)\ 0,25}\vec{k} = \vec{0}$

de (5) $\Rightarrow T_2 = 0{,}153\,T_1$

dans (4) $\Rightarrow T_1 = 1{,}276\,mg = 2552{,}3$ N 0,25

$\Rightarrow T_2 = 390{,}5$ N

dans (1), (2) et (3)
$$\begin{cases} B_x = -2894{,}8 \text{ N} \\ B_y = 2723{,}5 \text{ N} \\ B_z = 1442{,}7 \text{ N} \end{cases}$$

$\Rightarrow R_B = \left[B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right]^{1/2} = 4228{,}4$ N 0,25

fb/ mehda abderrahmane

Université A. Mira Béjaïa
Faculté de la Technologie

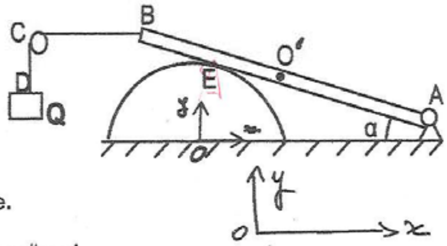
Février 2010

Département 2ème Année ST

Examen de Physique 4

Exercice N°1 : (08 pts)

Une barre AB, de poids P=400N et de longueur L=4a, articulée à son extrémité A et repose sur une surface cylindrique parfaitement lisse. Au niveau de l'autre extrémité B est attaché un fil BCD enroulé sur une poulie et soulevant une charge Q=200N. La partie BC du fil est horizontale comme l'indique la figure ci-contre.

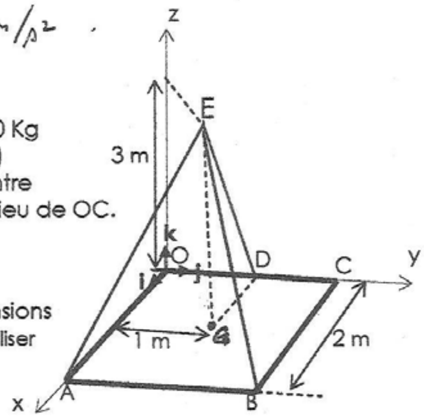


1) Isoler la barre et représenter les forces s'exerçant sur celle-ci.
2) Déterminer la réaction de l'articulation R_A.
3) Déduire la force de pression F exercée par la barre sur le la surface cylindrique.
4) Dans le cas d'une barre de poids négligeable, donner une représentation des trois forces qui agissent sur la barre et déduire le triangle des forces correspondant.

On donne : a=30° , O'A=O'B= 2a et BE= a. , $g = 10\ m/s^2$.

Exercice N°2 : (07 pts)

Un plaque en béton de forme carrée OABC de masse 500 Kg est maintenue en équilibre dans le plan horizontal (Ox,Oy) à l'aide de trois câbles AE, BE, DE. Le point G étant le centre de gravité de la plaque et le point d'attache D est au milieu de OC.

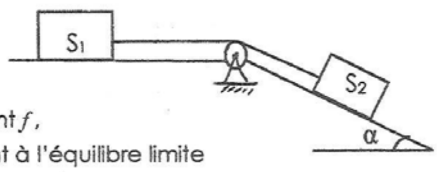


1) Exprimer vectoriellement les tensions T_{AE}, T_{BE}, T_{DE} .
2) Calculer la tension dans chaque câble.
3) Déterminer le vecteur moment résultant M_T des trois tensions par rapport au point O (indication : pour moins de calcul, utiliser l'équation d'équilibre des moments par rapport à O).

Exercice N°3 : (05 pts)

Deux blocs parallélépipédiques S_1 et S_2 ayant le même poids P et reliés par un fil passant sur une poulie (les frottements entre le fil et la poulie étant négligeables) reposent respectivement sur un plan horizontal et sur un plan incliné.

On désigne par f le coefficient de frottement entre les blocs et les surfaces de contact.



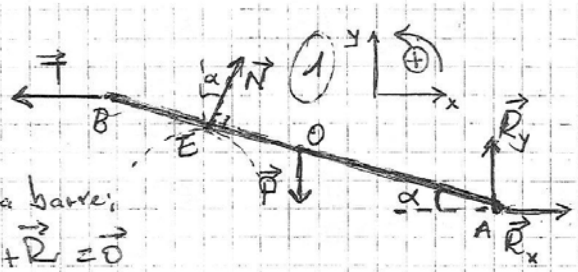
1°/ Déterminer, en fonction du coefficient de frottement f, l'angle d'inclinaison α du plan incliné correspondant à l'équilibre limite (juste avant que e bloc S_2 ne commence à descendre).

2°/ Calculer α pour $f = 0,25$.

Corrigé de l'examen
Physique 4

Exercice N°1 (/8)

1)



2) Conditions d'équilibre de la barre :

(0,5)
$$\begin{cases} (I) : \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \\ (II) : \sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{/A}(\vec{T}) + \vec{M}_{/A}(\vec{N}) + \vec{M}_{/A}(\vec{P}) = \vec{0} \end{cases}$$

; $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$

$\vec{M}_{/A}(\vec{R}) = \vec{0}$

Projection :

$$(I) \Rightarrow \begin{cases} x : -T + N\sin\alpha + R_x = 0 \quad -① \quad (0,5) \\ y : N\cos\alpha - P + R_y = 0 \quad -② \quad (0,5) \end{cases}$$

D'autre part : $T = Q$ (0,5) (Equilibre de la charge Q.)

D'où : $R_x = Q - N\sin\alpha$

$R_y = P - N\cos\alpha$

$N = ?$ $(II) \Rightarrow T.(4a)\sin\alpha - N.(3a) + P.(2a)\cos\alpha = 0$ (1,5)

$$\Rightarrow N = \frac{2}{3}\left(P\cos\alpha + 2Q\sin\alpha\right)$$

A.N : $N = 364,27\ N$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_x = 17,86\ N \quad (0,5) \\ R_y = 84,53\ N \quad (0,5) \end{cases}$$

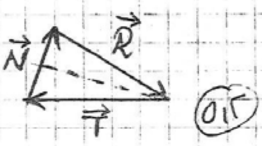
$\Rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 86,39\ N$ (0,5)

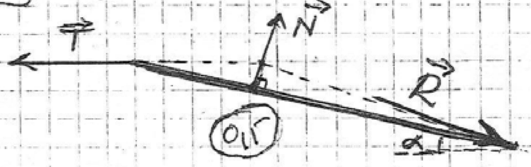
3) Force de pression $\vec{F}$:

$\vec{F} = -\vec{N} \Rightarrow F = N$ (0,5)

$\Rightarrow \boxed{F = 364,27\ N}$ (0,5)

4)





fb/ mehda abderrahmane

Exercice N° 2 : $P = mg = 5000\,N$

1) $A(2,0,0)$; $B(2,2,0)$; $D(0,1,0)$; $E(1,1,3)$, $G(1,1,0)$

* $\vec{T}_{AE} = T_{AE} \cdot \frac{\vec{AE}}{\|\vec{AE}\|}$; $\vec{AE}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$, $\|\vec{AE}\| = \sqrt{11} \Rightarrow \vec{T}_{AE} = \frac{1}{\sqrt{11}}(-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})\,T_{AE}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{AE} = (-0{,}3\,\vec{i} + 0{,}3\,\vec{j} + 0{,}9\,\vec{k})\,T_{AE}}$ (0,5)

* $\vec{T}_{BE} = T_{BE} \cdot \frac{\vec{BE}}{\|\vec{BE}\|}$; $\vec{BE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\|\vec{BE}\| = \sqrt{11} \Rightarrow \vec{T}_{BE} = \frac{1}{\sqrt{11}}(-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})\,T_{BE}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{BE} = (-0{,}3\,\vec{i} - 0{,}3\,\vec{j} + 0{,}9\,\vec{k})\,T_{BE}}$ (0,5)

* $\vec{T}_{DE} = T_{DE} \frac{\vec{DE}}{\|\vec{DE}\|}$, $\vec{DE} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$; $\|\vec{DE}\| = \sqrt{10} \Rightarrow \vec{T}_{DE} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{i} + 3\vec{k})\,T_{DE}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{DE} = (0{,}32\,\vec{i} + 0{,}96\,\vec{k})\,T_{DE}}$ (0,5)

(1)

2) Condition d'équilibre de la plaque : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

(0,5) $\vec{T}_{AE} + \vec{T}_{BE} + \vec{T}_{DE} + \vec{P} = \vec{0}$ avec : $\vec{P} = -P\,\vec{k}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}3\,T_{AE} - 0{,}3\,T_{BE} + 0{,}32\,T_{DE} = 0 & \text{---- (1)} \quad (0{,}5) \\ 0{,}3\,T_{AE} - 0{,}3\,T_{BE} = 0 & \text{---- (2)} \quad (0{,}5) \\ 0{,}9\,T_{AE} + 0{,}9\,T_{BE} + 0{,}96\,T_{DE} - P = 0 & \text{-- (3)} \quad (0{,}5) \end{cases}$$

de (2) $\Rightarrow$ $\underline{T_{AE} = T_{BE}}$ (0,5) $\Rightarrow \begin{cases} T_{DE} = 2604{,}17\,N & (0{,}5) \\ T_{AE} = 1388{,}88\,N & (0{,}5) \end{cases}$

3) Equation d'équilibre des moments : $\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{M}_{/O}(\vec{T}_{AE}) + \vec{M}_{/O}(\vec{T}_{BE}) + \vec{M}_{/O}(\vec{T}_{DE}) + \vec{M}_{/O}(\vec{P}) = 0$ (0,5)

D'où : (0,5) $\vec{M}_T = \vec{M}_{/O}(\vec{T}_{AE}) + \vec{M}_{/O}(\vec{T}_{BE}) + \vec{M}_{/O}(\vec{T}_{DE}) = -\vec{M}_{/O}(\vec{P}) = -(\vec{OG} \wedge \vec{P})$ (0,5)

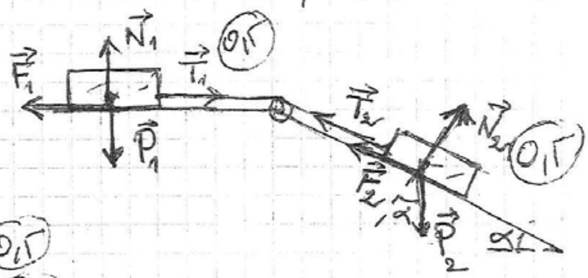
(0,5)

$\Rightarrow \vec{M}_T = -(\vec{i} + \vec{j}) \wedge (-P\,\vec{k}) = P(-\vec{j} + \vec{i}) = \underline{5000(\vec{i} - \vec{j})}$ .N

Ou bien : $\vec{M}_T = \vec{OA} \wedge \vec{T}_{AE} + \vec{OB} \wedge \vec{T}_{BE} + \vec{OD} \wedge \vec{T}_{DE}$ → (1,5) (après développe

$\Rightarrow \vec{M}_T = 5000(\vec{i} - \vec{j})$ (N.m) (0,5)

Exercice N°3 : Equilibre limite, avant que (S2) ne descend



1) Equilibre de chaque bloc :

(S1) : $\vec{N}_1+\vec{F}_1+\vec{T}_1+\vec{P}_1=\vec{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = P_1 & 0,5 \\ F_1 = T_1 & 0,5 \end{cases}$

(S2) : $\vec{N}_2+\vec{F}_2+\vec{T}_2+\vec{P}_2=\vec{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} N_2 = P_2\cos\alpha & 0,5 \\ P_2\sin\alpha - F_2 = T_2 & 0,5 \end{cases}$

D'autre part : $F_1 = f\,N_1$; $F_2 = f\,N_2$ 0,5

et 0,5 $T_1 = T_2$ (frottement fil/poulie négligeable)

D'où :

$$f N_1 = f P_1 = P_2\sin\alpha - f N_2 = P_2(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

$$P_1 = P_2 = P \Rightarrow f = \sin\alpha - f\cos\alpha$$

$$\Rightarrow f(1+\cos\alpha) = \sin\alpha \Rightarrow \boxed{f = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

On a : $\sin\alpha = \sin 2(\frac{\alpha}{2}) = 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = \cos 2(\frac{\alpha}{2}) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow f = tg(\tfrac{\alpha}{2}) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = Arctg(f) \Rightarrow \boxed{\alpha = 2\,Arctg(f)} \quad 0,5$$

2) **A.N** : $f = 0,25 \Rightarrow \alpha \simeq 28°$ 0,5

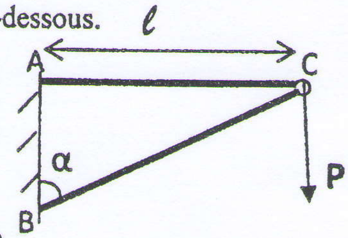
fb/ mehda abderrahmane

2ème Année ST, Université de Béjaïa — 2010/2011

Examen Final de Physique 4

Exercice N°1: (03pts)

Une force P verticale est appliquée sur la structure ACB comme indiqué sur la figure ci-dessous.



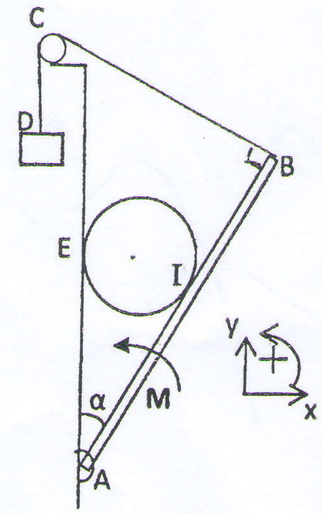
a) Représenter schématiquement la décomposition de la force **P** selon les deux axes AC et BC. On désigne par $\mathbf{P_{AC}}$ et $\mathbf{P_{BC}}$ les deux composantes.

b) Trouver l'expression de P_{AC} et de P_{BC} en fonction de P et α

c) Donner le module du moment de **P** et de $\mathbf{P_{AC}}$ par rapport au point B en fonction de P et ℓ. Comparer les deux moments et justifier.

Exercice N°2 : (08pts)

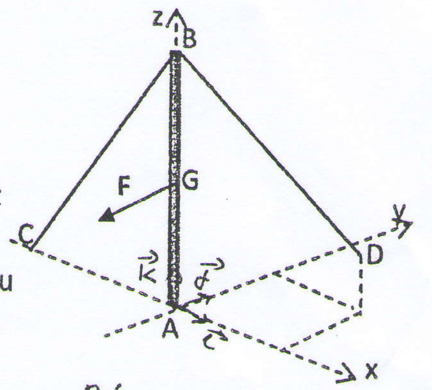
Une boule d'acier de poids P=400N est maintenue en équilibre entre un mur vertical et une tige AB, de poids négligeable. La tige est articulée au mur à son extrémité A et retenue au niveau de l'autre extrémité B par un fil BCD enroulé sur une poulie. La tige AB fait un angle α avec le mur et le fil fait un angle droit avec la tige en B. Au niveau de l'autre extrémité D du fil, un poids Q est suspendu. La boule s'appuie sur le mur au point E et repose sur la tige au point I. Un couple M est appliqué sur la tige afin de la maintenir en équilibre (voir figure ci-contre).
On donne : AB=3m, AI=2m, α=30° et le couple M = 100 N.m



1) Isoler et représenter les forces extérieures qui agissent sur le système composé (boule + tige) en équilibre.
2) Isoler la boule seule et la tige seule en représentant les forces extérieures qui s'exercent sur chacun des deux.
3) Ecrire, <u>sous forme vectorielle</u>, les équations d'équilibre de la boule et de la barre.
4) Déduire les équations d'équilibre projetées selon le système d'axes indiqué sur la figure.
5) Quelle est la valeur du poids Q nécessaire pour assurer l'équilibre du système.
6) Déterminer la réaction R_A de l'articulation.

Exercice N°3 (07pts)

Un mât vertical léger résiste à une force F de 4 KN et est gardé à la vertical par deux câbles BC et BD et par une liaison rotules (sphérique) en A.



1) Exprimer vectoriellement la force **F** et les deux tensions $\mathbf{T_{BC}}$ et $\mathbf{T_{BD}}$ agissant sur le mât en fonction de **i, j** et **k.**
2) Ecrire <u>l'équation vectorielle</u> exprimant la première condition d'équilibre du mât désignant une résultante nulle. Déduire les équations projetées selon les trois axes x,y,z.
3) Déterminer les vecteurs moments par rapport à A de **F**, $\mathbf{T_{BC}}$ et $\mathbf{T_{BD}}$.
4) Donner les équations d'équilibre, projetées selon les trois axes, caractérisant un moment résultant nul . Déduire les deux tensions T_{BC} et T_{BD}.

Questions de Cours : (02pts)

Dans le cas d'un corps de poids P reposant sur un plan horizontal rugueux de coefficient de frottement f_0:
a) Selon quelle direction et dans quelle sens agira la force de frottement F si on commence à pousser le corps vers la droite ?

Exo 1 : /03 pts

b) $P_{AC} = P \operatorname{tg}\alpha$, $P_{BC} = \dfrac{P}{\cos\alpha}$

c) $M_{/B}(\vec{P}) = P.AC = P.l$

$M_{/B}(\vec{P}_{AC}) = P_{AC}.AB = P.\operatorname{tg}\alpha.AB$

Or : $AB = \dfrac{l}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow M_{/B}(\vec{P}_{AC}) = P.l$

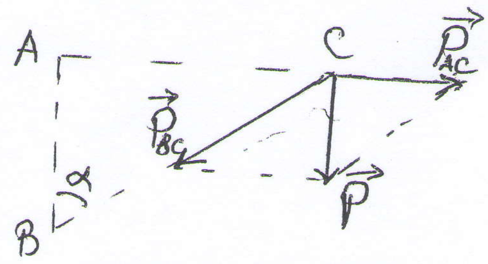
On constate que : $M_{/B}(\vec{P}) = M_{/B}(\vec{P}_{AC})$

Justification : $\vec{M}_{/B}(\vec{P}) = \vec{M}_{/B}(\vec{P}_{AC}) + \vec{M}_{/B}(\vec{P}_{BC})$

Or : $\vec{M}_{/B}(\vec{P}_{BC}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{/B}(\vec{P}) = \vec{M}_{/B}(\vec{P}_{AC})$

D'où : $M_{/B}(\vec{P}) = M_{/B}(\vec{P}_{AC})$.

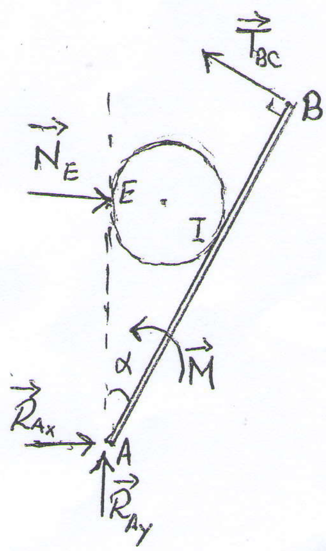
a)



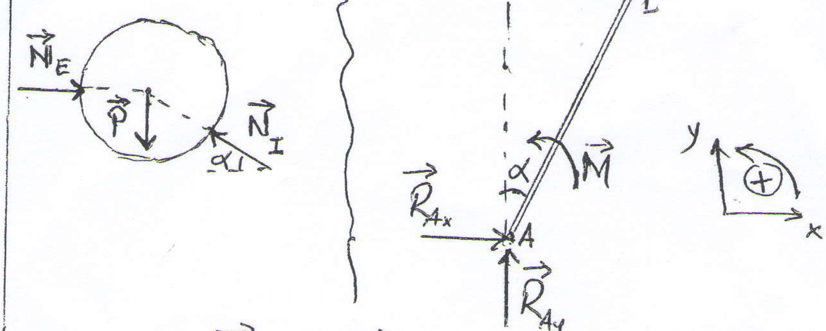
$\vec{P} = \vec{P}_{BC} + \vec{P}_{AC}$

Exo 2 : /08 pts

1)



2)



avec : $\vec{N}'_I = -\vec{N}_I$

3) Equilibre de la boule : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N}_E + \vec{N}_I = \vec{0}$ -- (I)

" " " tige : $\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{N}'_I + \vec{T}_{BC} = \vec{0} \text{ -- (II)} \\ \sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{/A}(\vec{N}'_I) + \vec{M}_{/A}(\vec{T}_{BC}) + \vec{M} = \vec{0} \text{ -- (III)} \end{cases}$

4) Equations projetées :

(I) : $\begin{cases} x : N_E - N_I \cos\alpha = 0 \text{ -- (1)} \\ y : -P + N_I \sin\alpha = 0 \text{ -- (2)} \end{cases}$

(II) : $\begin{cases} x : R_{Ax} + N'_I \cos\alpha - T_{BC}\cos\alpha = 0 \text{ -- (3)} \\ y : R_{Ay} - N'_I \sin\alpha + T_{BC}\sin\alpha = 0 \text{ -- (4)} \end{cases}$

(III) : $-N'_I.AI + T_{BC}.AB + M = 0$ -- (5)

et : $N'_I = N_I$

5) Le fil BCD étant inextensible et les frottements négligés

D'où : $T_{BC} = Q$

Ainsi : l'eqt° (5) donne : $T_{BC} = \dfrac{N_I \cdot AI - M}{AB}$

et (2) donne : $N_I = \dfrac{P}{\sin\alpha}$, $\underline{\alpha = 30°}$, $N_I = 800\,N$

D'où : $Q = \dfrac{2P}{3\sin\alpha} - \dfrac{M}{3} = \dfrac{4P - M}{3} = 500\,N.$

6) Des deux éqt°s (3) et (4) :

$R_{Ax} = (Q - N_I)\cos\alpha$, $R_{Ax} = -259{,}8\,N$

$R_{Ay} = (-Q + N_I)\sin\alpha$, $R_{Ay} = 150\,N$

$R_{Ax} < 0 \Rightarrow$ le sens de $\vec{R}_{Ax}$ doit être inverser..

$\Rightarrow R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 299{,}3\,N$

Exo 3 : /07 pts

1) $\vec{F} = -F\vec{j}$, $\vec{T}_{BC} = T_{BC}\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|}$, $\vec{T}_{BD} = T_{BD}\dfrac{\overrightarrow{BD}}{\|\overrightarrow{BD}\|}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 5\sqrt{5}$, $\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{T}_{BC} = \dfrac{T_{BC}}{\sqrt{5}}(-\vec{i} - 2\vec{k}) = -\dfrac{T_{BC}}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{k}) = -T_{BC}(0{,}447\vec{i} + 0{,}894\vec{k}) \\ \vec{T}_{BD} = \dfrac{T_{BD}}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) = T_{BD}(0{,}408\vec{i} + 0{,}408\vec{j} - 0{,}816\vec{k}) \end{cases}$$

2) Résultante nulle : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{F} + \vec{T}_{BC} + \vec{T}_{BD} = \vec{0}$

Eqt° projetées :
$$\begin{cases} \underline{x} : R_{Ax} - \dfrac{T_{BC}}{\sqrt{5}} + \dfrac{T_{BD}}{\sqrt{6}} = 0 \quad (1) \\ \underline{y} : R_{Ay} - F + \dfrac{T_{BD}}{\sqrt{6}} = 0 \quad (2) \\ \underline{z} : R_{Az} - \dfrac{2T_{BC}}{\sqrt{5}} - \dfrac{2T_{BD}}{\sqrt{6}} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{Az}$
$= R_{Ax}\vec{i} + R_{Ay}\vec{j} + R_{Az}\vec{k}$

3) $\vec{M}_{/A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} = 5F\vec{i}$

$\vec{M}_{/A}(\vec{T}_{BC}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \dfrac{T_{BC}}{\sqrt{5}} = -\dfrac{10}{\sqrt{5}} T_{BC}\vec{j}$

$\vec{M}_{/A}(\vec{T}_{BD}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \dfrac{T_{BD}}{\sqrt{6}} = \dfrac{10\,T_{BD}}{\sqrt{6}}(-\vec{i} + \vec{j})$

4) Moment résultant nul : $\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0}$

$$\vec{M}_{/A}(\vec{F}) + \vec{M}_{/A}(\vec{T}_{BC}) + \vec{M}_{/A}(\vec{T}_{BD}) = \vec{0}$$

D'où, les éqts projetées :

$$\begin{cases} 5F - \dfrac{10}{\sqrt{6}} T_{BD} = 0 & \text{--- (4)} \\ -\dfrac{10}{\sqrt{5}} T_{BC} + \dfrac{10}{\sqrt{6}} T_{BD} = 0 & \text{--- (5)} \end{cases}$$

On déduit de (4) : $T_{BD} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} F \Rightarrow T_{BD} = 4898\,N$
$\simeq 4{,}9\,KN$

et de (5) : $T_{BC} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} F \Rightarrow T_{BC} = 1118\,N$
$\simeq 1{,}12\,KN$

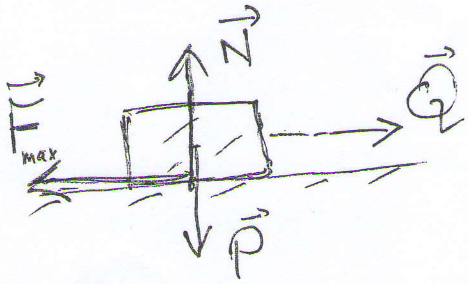
Questions de cours / 02 pts

a) La force de frottement $\vec{F}$ sera dirigée selon l'horizontale dans le sens opposé au déplacement éventuel, c.à.d, vers la gauche

b) La valeur maximale de F est :

$F_{max} = f_0 N$, avec : $N = P$, $\vec{N}$: la normale au plan

$\Rightarrow F_{max} = f_0 P$



F. Nait Bouda

Université H.B.B. – Chlef
Faculté de Génie Civil et d'Architecture
Département de Génie Civil

Mécanique Rationnelle

Mécanique Rationnelle
S3 _ Génie Civil et TP
Examen de Contrôle
Année Universitaire 2016/ 2017

EXERCICE N°1 : (4 POINTS)

Déterminer la résultante du système de forces concourantes appliquées sur le corps solide dans la figure 1.

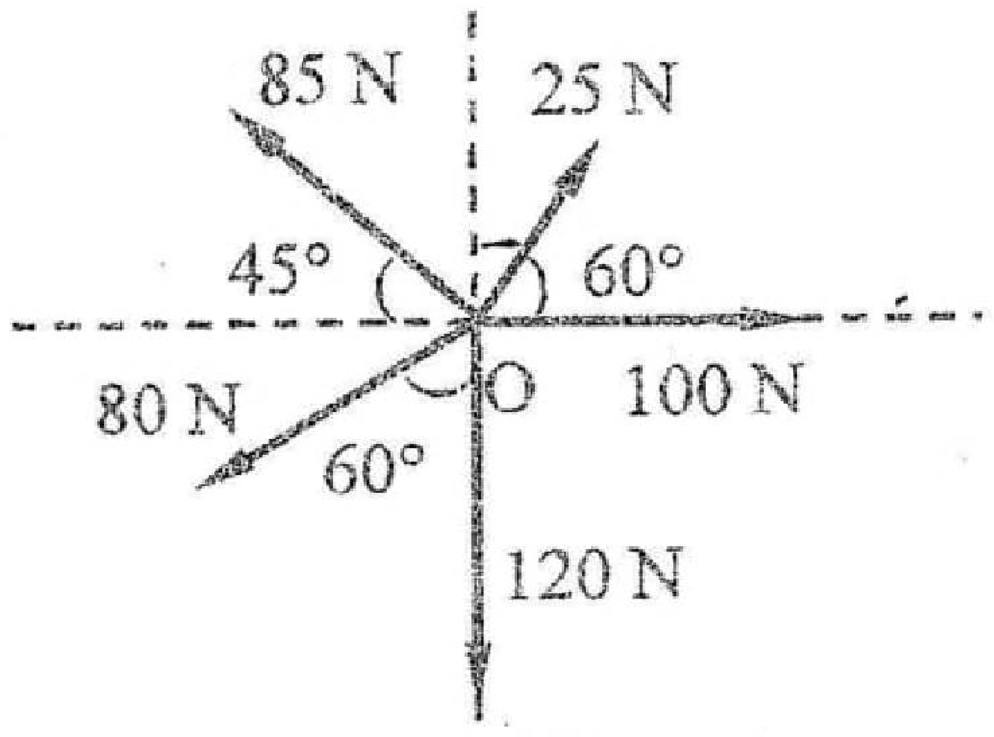


Figure 1

EXERCICE N°2 : (4 POINTS)

Décomposer suivant les trois directions d'un paralélépipède, la force **F = 70 KN** appliquée en O de coordonnée (0, 0, 0), Sachant qu'un point N quelconque sur la direction de F est défini par les coordonnées (-3, 6, 2).

EXERCICE N°3 : (5 POINTS)

Soit le portique AB en béton armé, représenté dans la Figure 2. Le poids propre du portique est négligeable, le reste des données nécessaires est représenté la Figure 2.

1. Définir le corps solide représenté sur la Figure 2 et ces liaisons ;
2. Définir le système des forces appliquées sur le corps solide ;
3. Illustrer les réactions des liaisons sur la Figure
4. Écrire la condition d'équilibre statique du corps solide
5. Déterminer les réactions dans les liaisons.

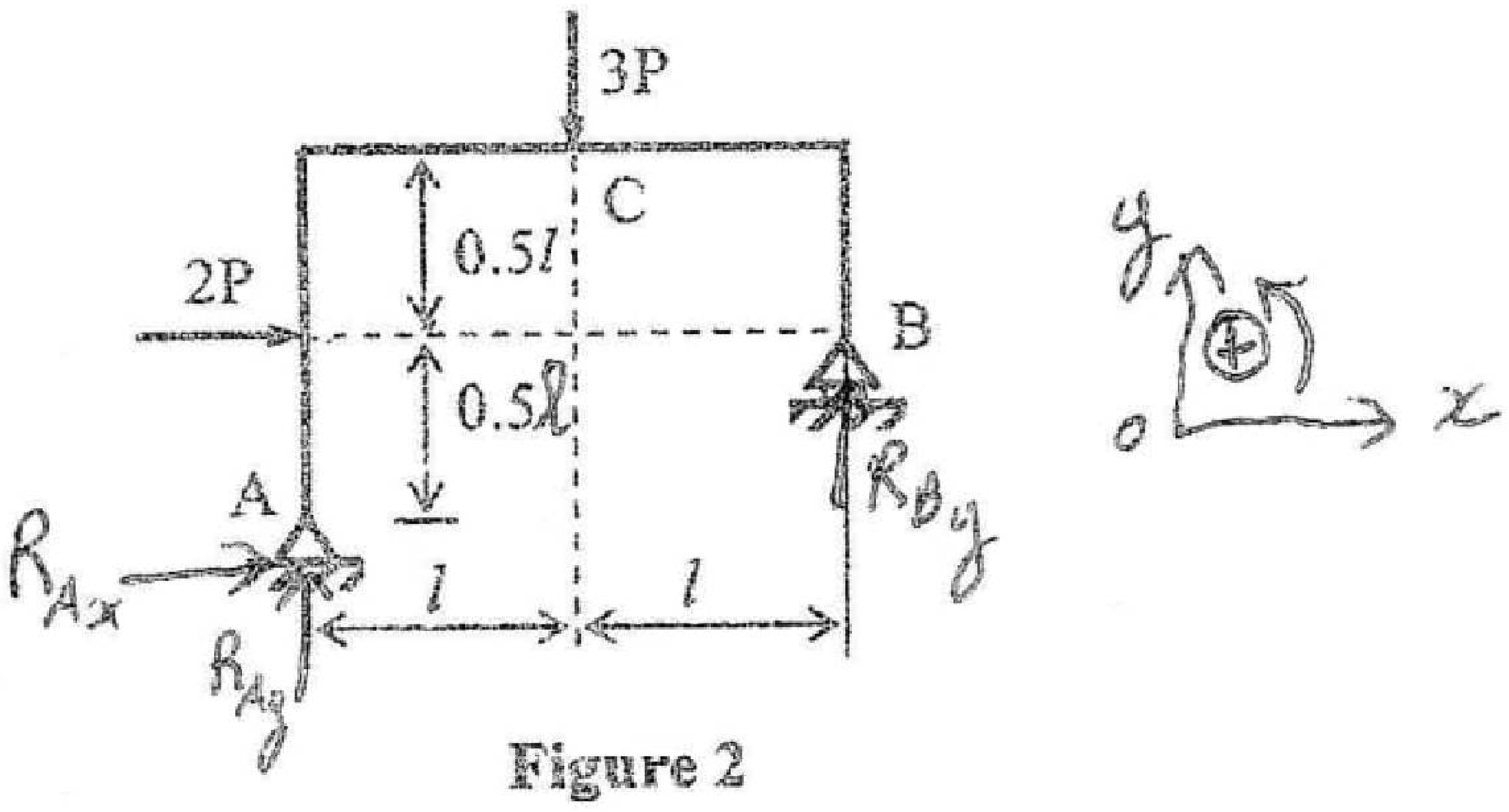


Figure 2

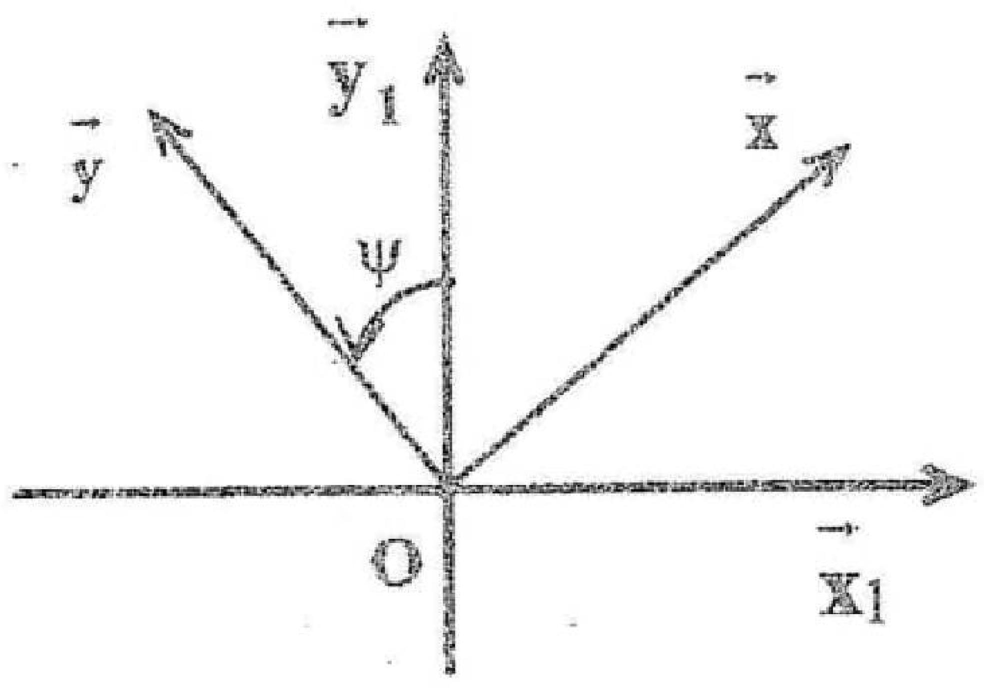


Figure 3

EXERCICE N°4 : (7 POINTS)

Un point matériel M mobile par rapport au repère R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé, direct et mobile, par rapport au repère fixe $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ (Figure 3). Les coordonnées du point M satisfont les conditions suivantes :

$$x = 0, \quad y = ae^t, \quad z = 0 \ \text{(cm)}$$

Sachant que l'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}$, et $(\vec{y}_1, \vec{y}) = \psi$ où ψ est une fonction donnée du temps leur dérivée par rapport à t $\dot{\psi}$ est constante et a une constante positive.

1. Donner le vecteur de la position relative du point M dans le repère mobile.
2. Donner le taux de rotation de R/R_1 ;
3. Déterminer l'expression analytique du vecteur vitesse absolue du point M,
4. On déduire les vecteurs vitesses relative, d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.
5. Déterminer l'expression analytique du vecteur accélération absolue du point M,
6. On déduire les vecteurs accélérations relative, complémentaire (Coriolis), d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

Université H.B.B. – Chlef

Faculté de Génie Civil et d'Architecture

Département de Génie Civil

Mécanique Rationnelle

Mécanique Rationnelle

S3 _ Génie Civil

Solution de l'Examen de Contrôle

Année Universitaire 2016/ 2017

EXERCICE N°1: 8×1

Déterminer la résultante du système de forces concourantes appliquées sur le corps solide dans la figure 1, en utilisons la règle du polygone des forces

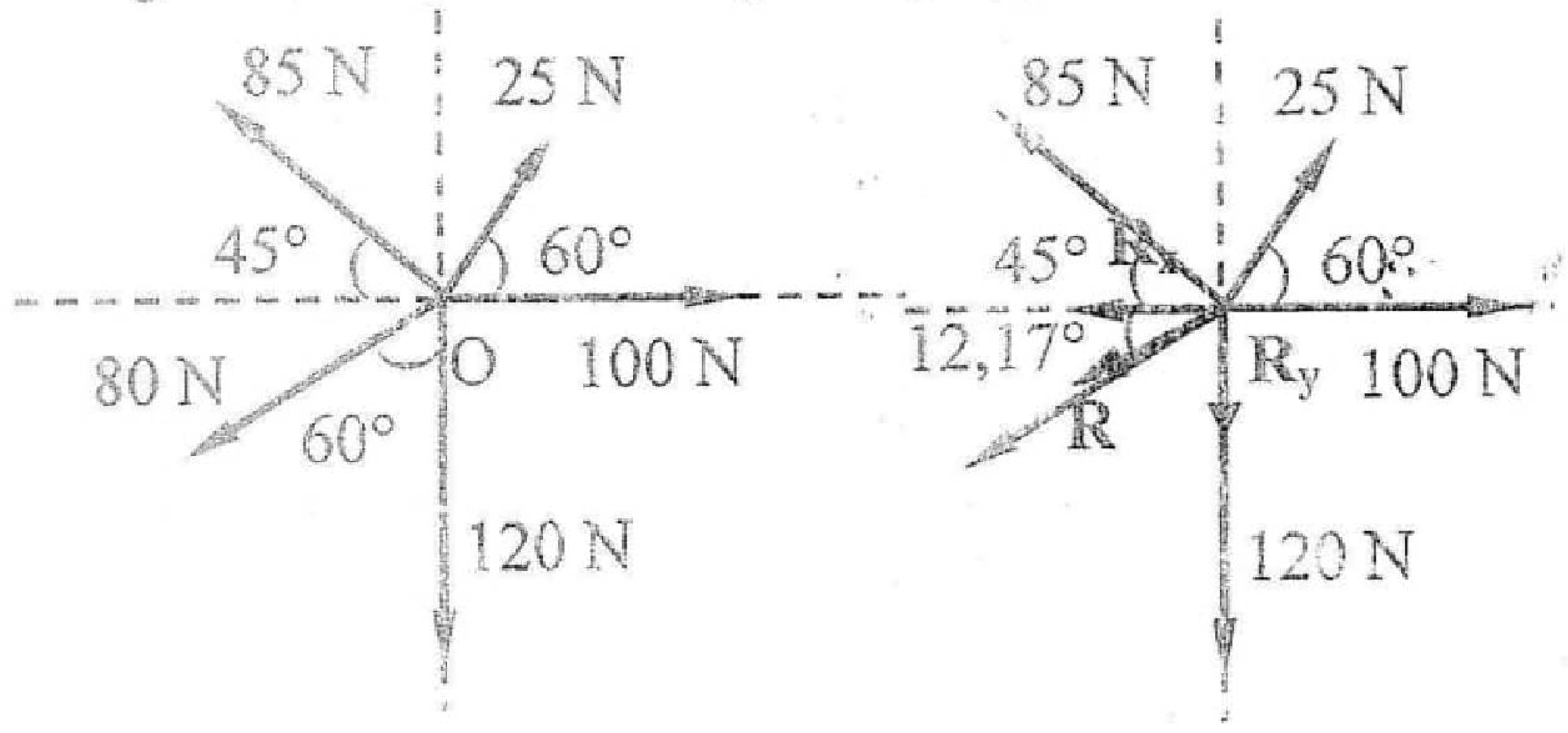


Figure 1a **Figure 1b**

La résultante du système de forces illustrées dans la figure 1

i	Fi (N)	Projection Fxi		Projection Fyi	
1	100	100 Cos 0°	100	100 Sin 0°	0
2	25	25 Cos 60°	12,5	25 Sin 60°	21,65
3	85	-85 Cos 45°	-60,1	85 Sin 45°	60,1
4	80	-80 Cos 30°	-69,3	-80 Sin 30	-40
5	120	-120 Cos 270°	0	-120 Sin 270	-120
	R		-16,9		-78,3

Les composantes de la résultante R:

Rx = -16,88 N et Ry = -78,25 N.

La résultante R:

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(R_X)^2 + (R_Y)^2}$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(-16,88)^2 + (-78,25)^2}$$

D'où, la résultante **R = 80,04N**

La direction de R :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_X}{R_y} = \frac{-16,88}{-78,25} = 0,215$$

D'où, $\alpha = 12,17°$

EXERCICE N°2: 8×1

La forces **F** = 70N appliquée dans le point O de coordonnée **(0, 0, 0)**, dirigée selon la diagonale ON, Sachant que les coordonnées du point N sont **(-3, 6, 2)**.

- Déterminer les cosinus directeur de la force **F**,

Décomposer F suivant les trois directions x, y et z.

Les cosinus directeur de la force **F**,

Les coordonnées des points O **(0, 0, 0)** et N **(-3, 6, 2)**

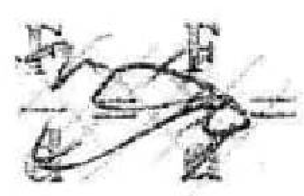
Le vecteur de la diagonale ON :

$$\overrightarrow{ON} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

Le module de $\overrightarrow{ON}$

$$d = \|\overrightarrow{ON}\| = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (2)^2} = 7\ (m)$$

Les cosinus directeur de la force F :



$$\frac{F}{d} = \frac{F_X}{d_X} = \frac{F_Y}{d_Y} = \frac{F_Z}{d_Z}$$

Les composantes de la force F suivant les trois directions x, y et z.

$$F_X = \frac{F}{d} \times d_X = -30\ N$$

$$F_Y = \frac{F}{d} \times d_Y = 60\ N$$

$$F_Z = \frac{F}{d} \times d_Z = 20\ N$$

EXERCICE N°3:

Soit le portique AB en béton armé représenté dans la Figure 3. Le poids propre du portique est négligeable, le reste des données nécessaires est représenté la figure 3.

- Définir le corps solide représenté sur la figure 3 et ces liaisons ;
- Définir la nature des différentes forces appliquées sur le corps solide ;
- Illustrer les réactions des liaisons sur la figure
- Ecrire la condition d'équilibre statique du corps solide
- Déterminer les réactions dans les liaisons.

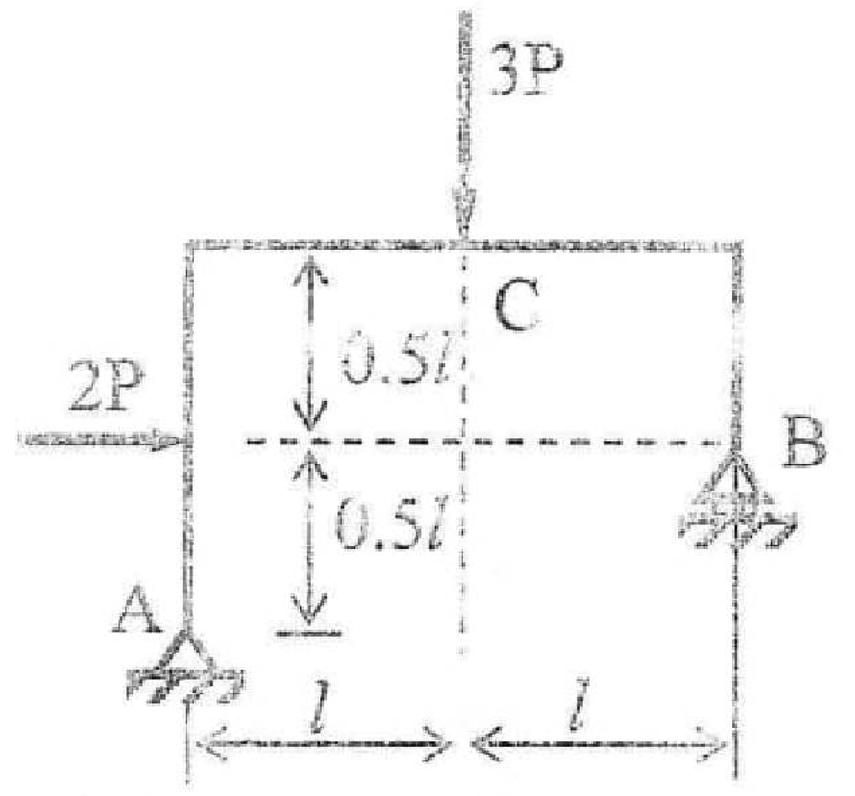


Figure 3.a

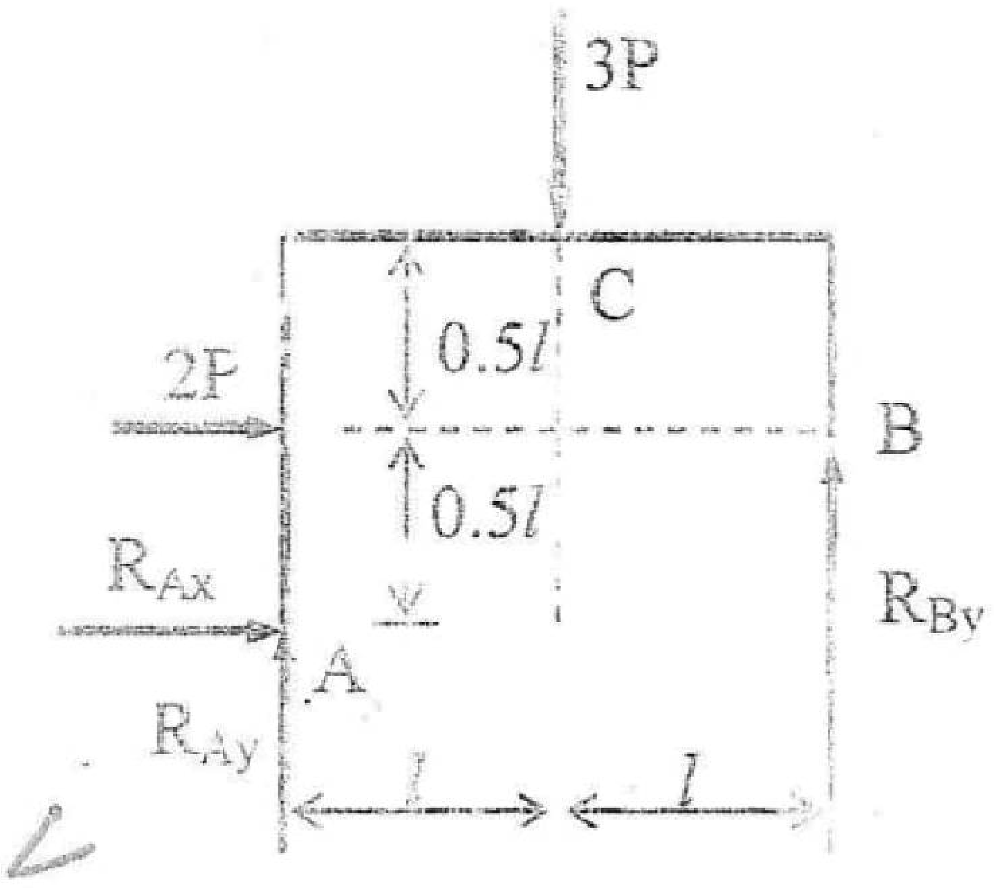
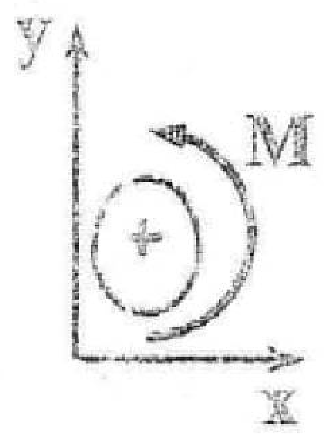


Figure 3.b



Solution:

- Le corps solide est le portique AB,
- Les liaisons sont : l'appui double en A et l'appui simple en B,
- Le système de forces est plan.
- On supprime les liaisons dans la Figure 3.a, et on les remplace par les réactions qui leurs correspondent dans la Figure 3.b. D'après l'axiome des liaisons, le portique AB devient libre sous l'action du système de forces en plan.
- Pour la détermination des réactions R_{Ay}, R_{Ax} et R_{By}, on écrit la condition d'équilibre statique du corps solide qui est le torseur des forces extérieures en A nul, où bien la projection de ces éléments sur les axes est nulle:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0},\quad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{A}(\vec{F}_i)=\vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad R_{Ax}+2P=0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad R_{Ay}-3P+R_{By}=0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{A}(\vec{F}_i)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\ -2Px0.5l\ -3Pxl+R_{By}x2l=0 \qquad (3)$$

La solution des équations d'équilibres (1), (2) et (3) donne :.

$$\mathbf{R_{Ax} = -\,2P,\quad R_{Ay}\ =\ P,\quad R_{By} = +2P}$$

8

16×

EXERCICE N°4 : (7 POINTS)

Un point matériel M mobile par rapport au repère R (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) orthonormé, direct et mobile, par rapport au repère fixe R_1(O, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) (Figure 4). Les coordonnées du point M satisfont les conditions suivantes :

$x = 0, \; y = ae^t, \; z = 0$ (cm)

Sachant que l'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}$, et $(\vec{y}_1, \vec{y}) = \psi$ où ψ est une fonction donnée du temps leur dérivée par rapport à t $\dot{\psi}$ est constante et a une constante positive.

1. Donner le vecteur du position relatif du point M dans le repère mobile.
2. Donner le taux de rotation de R/R_1 ;
3. Déterminer l'expression analytique du vecteur vitesse absolue du point M,
4. On déduire les vecteurs vitesses relative, d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.
5. Déterminer l'expression analytique du vecteur accélération absolue du point M,
6. On déduire les vecteurs accélérations relative, complémentaire (Coriolis), d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

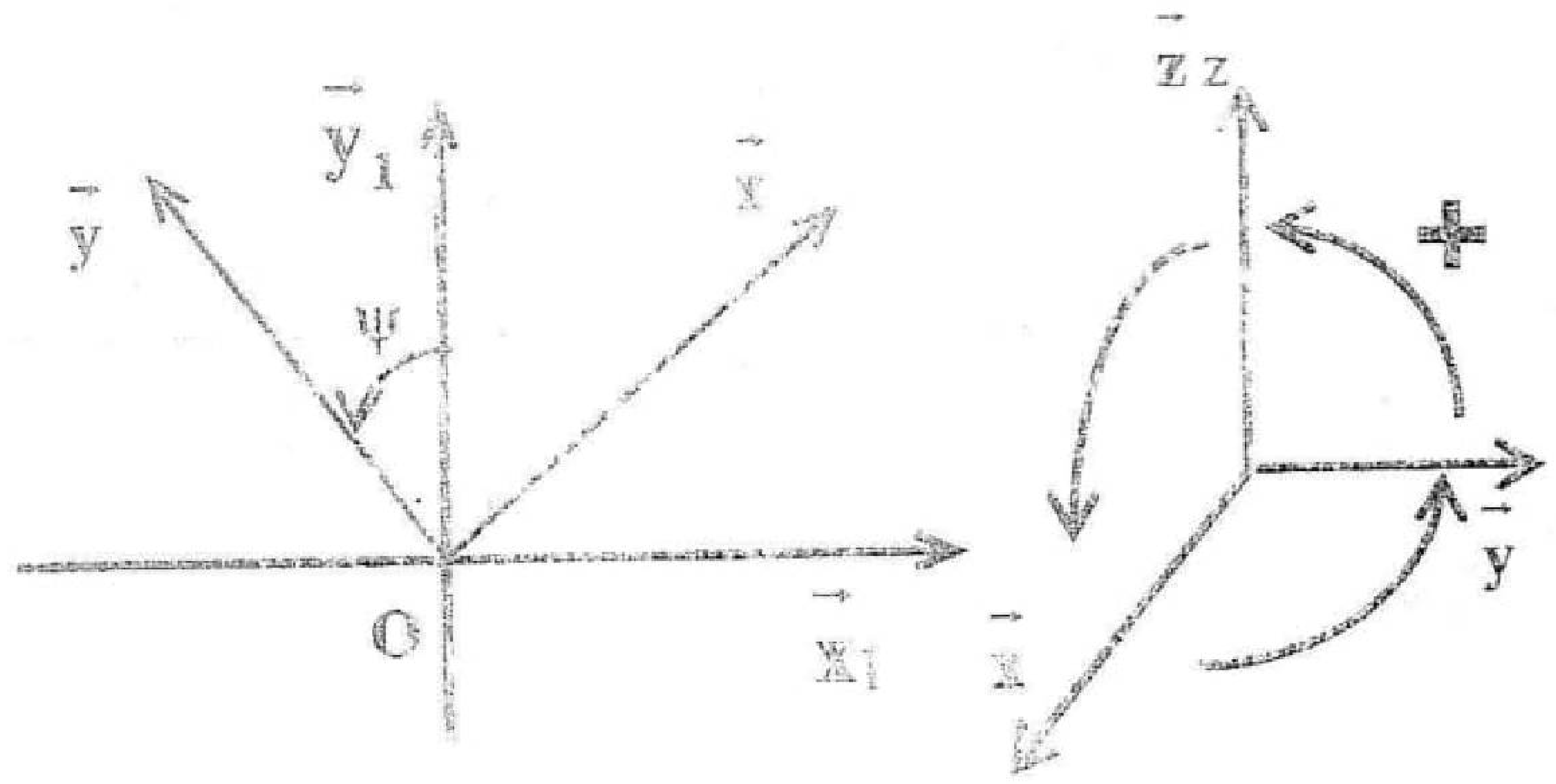


Figure 4.3

Solution :

Les données du problème sont :

Le repère R (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) mobile (Repère relatif)

Le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fixe (Repère absolu)

Le vecteur de position d'entrainement de O à O_1:

L'angle de rotation de R/R_1 $(\vec{y}_1, \vec{x}) = \psi$ ($\dot{\psi}$ constante)

Le vecteur taux de rotation de R/R_1, $\vec{\Omega}_{R/R_1}$:

$$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \vec{\Omega} = \frac{d\psi}{dt}\vec{z}_1 = \dot{\psi}\vec{z}_1$$

Le point matériel M défini par les coordonnées :

$$x = 0, \; y = ae^t, \; z = 0 \text{ (cm)}$$

Le vecteur de position relatif du point M s'écrit :

1-le vecteur de la position relative du point M dans le repère mobile.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} = 0\vec{x} + ae^t\vec{y} + 0\vec{z}$$

Le vecteur de position absolu du point M est :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$

2-Le vecteur taux de rotation de R/R_1, $\vec{\Omega}_{R/R_1}$:

$$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \vec{\Omega} = \frac{d\psi}{dt}\vec{z}_1 = \dot{\psi}\vec{z}_1$$

3- l'expression analytique du vecteur vitesse absolue du point M,

Le vecteur vitesse absolue du point M dans le repère R s'écrit :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La dérivée du vecteur mobile $\overrightarrow{OM}$ par rapport à un repère fixe est :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt} = \vec{V}_{O/R_1}$$

Donc, la formule du vecteur vitesse absolue du point M, s'exprime :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

Avec

$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt}$: la vitesse relative du point M

$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$: le vecteur vitesse d'entrainement du point M

$\vec{V}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt}$ est la vitesse du point O par rapport à R_1.

4-On déduire les vecteurs vitesses relative, d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

Le vecteur vitesse relative du point M s'écrit :

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} = ae^t \vec{y} \quad (cm/sec)$$

le vecteur vitesses d'entrainement :

$$\vec{V}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1O}}{dt} = \vec{0} \quad O_1 \text{ Coïncide avec } O$$

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \dot{\psi} \vec{z}_1 \wedge (ae^t \vec{y}) = -\dot{\psi} ae^t \vec{x} \quad (cm/sec)$$

$(\vec{z}_1 \wedge \vec{y}) = -\vec{x}$

D'où :

$$\vec{V}_e(M) = -\dot{\psi} ae^t \vec{x} \quad (cm/sec)$$

Par conséquent, le vecteur vitesse absolue du point M par rapport à R_1 est :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = -\dot{\psi} ae^t \vec{x} + ae^t \vec{y} \quad (cm/sec)$$

- l'expression analytique du vecteur accélération absolue du point M,

Le vecteur accélération absolue du point M par rapport au repère fixe R_1, s'écrit :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{2R_1} \overrightarrow{O_1M}}{dt^2} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1}\left(\vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_A(M) = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R}}{dt} + \frac{d^{R_1} \vec{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt} \quad (1)$$

On applique la dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère fixe à la dérivée des vecteurs mobiles $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}_{M/R}$ par rapport au repère fixe R_0

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}$$

Où :

$$\frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R}}{dt} = \vec{a}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}$$

Avec :

$\vec{a}_{M/R} = \dfrac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt}$ le vecteur accélération relative,

On remplace ces développements dans l'expression (1), on obtient l'expresse du vecteur accélération absolue :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R} + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right) + \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

-On déduire les vecteurs accélérations relative, complémentaire (Coriolis), d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

Le vecteur accélération relative du point M, est :

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R} = \frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} = ae^t \vec{y} \quad (cm/sec^2)$$

Le vecteur accélération complémentaire (Coriolis) :

$$\vec{a}_C(M) = 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right) = 2\left(\dot{\psi} \vec{z}_1 \wedge (ae^t \vec{y})\right) = -2\dot{\psi} ae^t \vec{x}$$

Le vecteur accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

Avec

$$\vec{a}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{O/R_1}}{dt} = \vec{0} \quad (cm/sec^2)$$

$$\frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0} \quad (\dot{\psi} \text{ constante})$$

$$\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\dot{\psi}^2 e^t \vec{y} \quad (cm/sec^2)$$

Donc, le vecteur accélération d'entraînement s'écrit :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\dot{\psi}^2 e^t \vec{y} \quad (cm/sec^2)$$

Enfin, le vecteur accélération absolue du point M est :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = -2\dot{\psi} ae^t \vec{x} + (ae^t - \dot{\psi}^2 e^t)\vec{y} \quad (cm/sec^2)$$

Université des sciences et Technologie H.B
Faculté de Génie Civil 2ème année LST

juin 2012

Epreuve de Mécanique Rationnelle (S2)

Exercice 1(8pts)

A- Déterminer, par intégration, la position du centre d'inertie du système volumique représenté par la figure 1.a (tout résultat doit être justifié).

B- Déterminer, par le théorème de GULDIN, la position du centre d'inertie du système surfacique donné par la figure 1b.

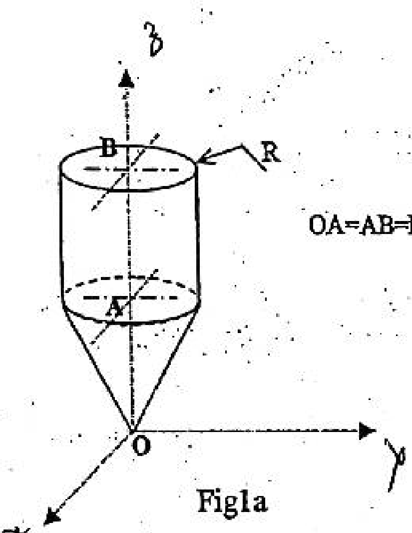


Fig1a

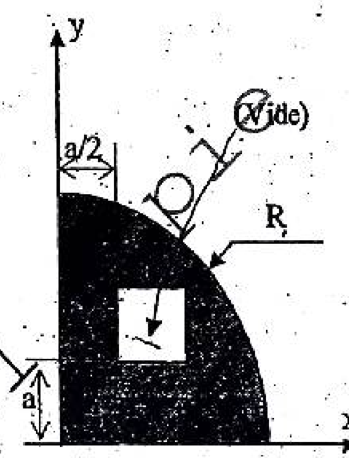


Fig1b

Exercice 2(8pts)

Soit le système surfacique de densité σ (fig2).
-Déterminer le tenseur d'inertie en O par rapport au repère (0 ,x,y,z).
- Déduire le moment d'inertie du système par rapport à la droite Δ.

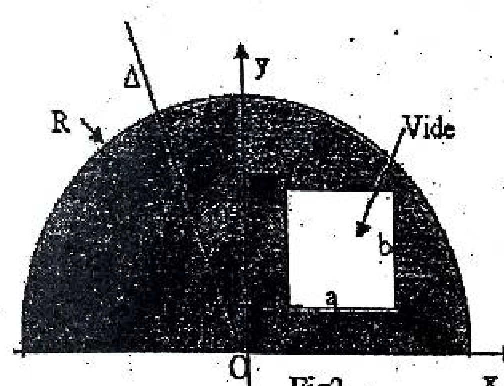


Fig2

Exercice 3(4pts)

Soit la barre OA de masse M (fig3) qui tourne autour de l'axe fixe Ox_0 avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. G est le centre de gravité de la barre.
En prenant R_1 comme repère de projection, déterminer pour la barre :

- La quantité de mouvement
- Le moment cinétique en G ensuite en O
- L'énergie cinétique de la barre

On donne le tenseur d'inertie de la barre

$$I_{G/(x_1,y_1,z_1)}=\begin{pmatrix} ML^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ML^2/3 \end{pmatrix}$$

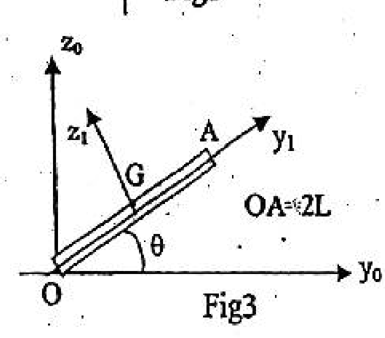


Fig3

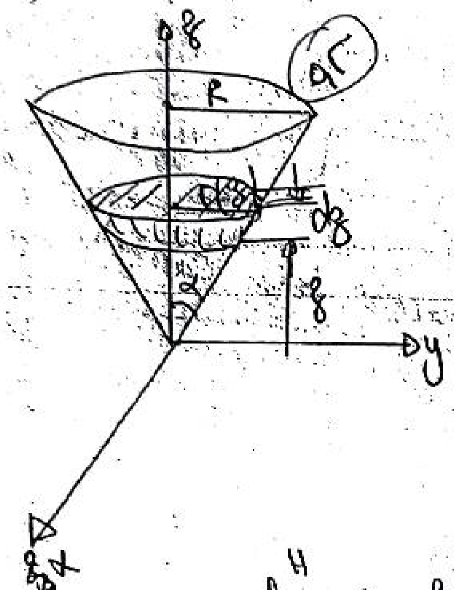
Corrigé épreuve finale
Méca-RAT (S2) Juin 2012

Exo 1

A] L'Axe Oz est un axe de symétrie $\Rightarrow x_G = y_G = 0$ (0,5)

$z_G = ?$ Il faut décomposer le système : (1) Cône + (2) Cylindre.

1) Cône :



(0,5)

$$z_G = \frac{\int z\,dm}{\int dm}, \quad dm = \rho\,dV$$

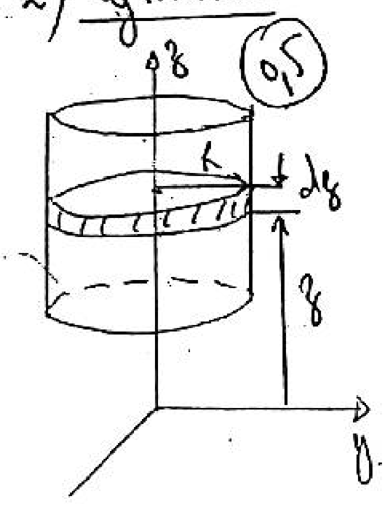
$$dV = \pi r(z)^2 dz \quad (0,5)$$

$$z_G = \frac{\int_0^H z\,\rho\,\pi\,r^2(z)\,dz}{\int_0^H \rho\,\pi\,r^2(z)\,dz}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{H} = \frac{r(z)}{z} \Rightarrow r(z) = \frac{R}{H}\cdot z \quad (0,5)$$

$$z_G = \frac{\int_0^H z\,\rho\,\pi\,\frac{R^2}{H^2}\,z^2\,dz}{\int_0^H \rho\,\pi\,\frac{R^2}{H^2}\,z^2\,dz} = \frac{\int_0^H z^3\,dz}{\int_0^H z^2\,dz} = \frac{3}{4}H \quad (0,5)$$

2°) Cylindre :



(0,5)

$$z_G = \frac{\int z\,dm}{\int dm} \qquad dm = \rho\,\pi R^2\,dV \quad (0,5)$$

$$z_G = \frac{\int_0^H z\,\pi R^2\,dz}{\int_0^H \pi R^2\,dz} = \frac{3}{2}H$$

$$V_2 = \pi R^2 \cdot H \quad (0,5)$$

Pour système $z_G = \dfrac{V_1 z_{G_1} + V_2 z_{G_2}}{V_1 + V_2}$

$$z_G = \frac{\frac{\pi R^2 H}{3} \cdot \frac{3H}{4} + \pi R^2 H \, \frac{3H}{2}}{\frac{\pi R^2 H}{3} + \pi R^2 H} = \frac{21}{16} H \quad 1$$

)

$$x_G = \frac{V_{/oy}}{2\pi S} = \frac{V(1/2 \text{ sphère}) - V(\text{tore à base carré})}{2\pi\left(\frac{\pi}{4} R^2 - a^2\right)}$$

$$x_G = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 - 2\pi\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)a^2}{2\pi\left(\pi/4\, R^2 - a^2\right)} \Rightarrow x_G = \frac{R^3/3 - a^3}{\pi/4\, R^2 - a^2} \quad 1{,}5$$

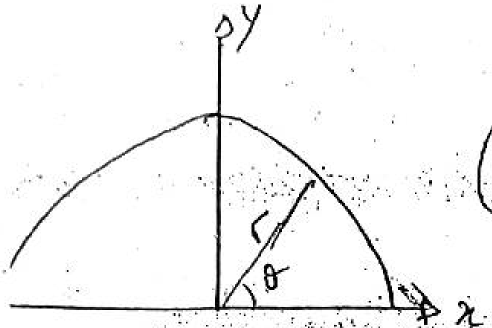
$$y_G = \frac{V_{/ox}}{2\pi S} = \frac{V(\frac{1}{2} \text{ sphère}) - V(\text{tore à base carré})}{2\pi\left(\frac{\pi}{4} R^2 - a^2\right)}$$

$$y_G = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 - 2\pi\left(a + \frac{a}{2}\right)a^2}{\frac{\pi}{4} R^2 - a^2}$$

$$y_G = \frac{\frac{R^3}{3} - \frac{3}{2} a^3}{\pi/4\, R^2 - a^2} \quad 1{,}5$$

Exo : 2 Système = $\frac{1}{2}$ disque (1) + rectangle (2)

(1) $\frac{1}{2}$ disque :



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $dm = \sigma r\,dr\,d\theta$

(0,5) $I_z = \int (x^2+y^2)\,dm = \iint r^2 \sigma r\,dr\,d\theta$

$I_z = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi d\theta = \sigma \frac{R^4}{4}\pi = \frac{MR^2}{2}$ (1)

$I_y = \int x^2 dm = \iint r^2\cos^2\theta\, r\,dr\,d\theta = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta$

avec : $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta$ (0,5)

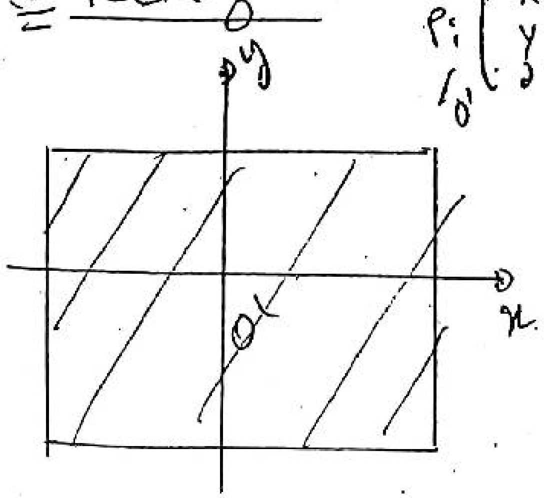
$I_y = \sigma \frac{R^4}{4}\frac{\pi}{2} = \sigma \frac{\pi}{8}R^4$ (1) $= \frac{MR^2}{4}$

$\begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & & \\ & \frac{MR^2}{4} & \\ & & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix}$

Donc : $I_x + I_y = I_z \Rightarrow I_x = I_z - I_y = \sigma\frac{\pi R^4}{8} = \frac{MR^2}{4}$ (0,5)

$I_{xz} = I_{yz} = 0$ (Car $z = 0$) , oy axe de symetrie
$\Rightarrow I_{xy} = 0$ (0,5)

2) rectangle :



$P_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{/O'}$

Déterminons d'abord

$I_{O'}/(x', y', z')$; O' : Centre de gravité de (2)

$I_{x'} = \int y^2 dm = \sigma \iint y^2\,dx\,dy$

$$I_{x'} = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2\, dy = \sigma a \cdot \frac{b^3}{12}$$ (0,5)

de la même façon, par analogie on trouve.

$I_{y'} = \sigma b \dfrac{a^3}{12}$ (0,5)

$I_z = I_x + I_y$

$I_z = \sigma ab\,(a^2 + b^2)$ (0,5)

$I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0$ par symétrie. (0,5)

n revient à $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par ~~Hy~~ Huyghens :

$$O' \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \\ b/2 + b/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$I_x = I_{x'} + M_2 b^2 = \sigma a \dfrac{b^3}{12} + \sigma a b^3$

$I_y = I_{y'} + M_2 a^2 = \sigma b \dfrac{a^3}{12} + \sigma b a^3$

$I_{xy} = I_{x'y'} + M_2 ab = \sigma a^2 b^2$

$I_{xz} = I_{yz} = 0$ (car $z = 0$)

(1,0)

<u>ur le système</u> : $I_x = I_x(1) - I_x(2)$

$I_y = I_y(1) - I_y(2)$

$I_z = I_z(1) - I_z(2)$

$I_{xy} = I_{xy}(1) - I_{xy}(2)$

1

$\cancel{0,5}$

$$I_\Delta = u_\Delta^t \cdot I_O \cdot u^t \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} A & -D & 0 \\ -D & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{A + 2D\sqrt{3} + 3B}{4} \quad 0,5$$

Exo 3

$$\vec{\sigma^0} = M\,\vec{V^0(G)} \quad , \quad \vec{V^0}(G) = \frac{d^0\,\vec{OG}}{dt} \quad , \quad \vec{OG}_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{V^0}(G) = \frac{d^1\,\vec{OG}}{dt} + \vec{\Omega_1^0} \wedge \vec{OG}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} \dot\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L\dot\theta \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\boxed{\vec{\sigma^0}_{/R_1} = \begin{pmatrix} -M\dot\theta L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}} \quad 1 \qquad \sigma^0_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ML\dot\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mu^0}(G) = I_G \cdot \vec{\Omega_1^0} = \begin{pmatrix} \frac{ML^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ 0 \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ML^2}{3}\dot\theta \\ 0 \\ \frac{ML^2}{3}\dot\theta \end{pmatrix}$$

1

$$\vec{\mu^0}(O) = \vec{\mu^0}(G) + \vec{OG} \wedge \sigma^0$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{ML^2}{3}\dot\theta \\ 0 \\ \frac{ML^2}{3}\dot\theta \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} -M\dot\theta L \\ 0 \\ M\dot\theta L \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} \frac{4ML^2}{3}\dot\theta \\ 0 \\ \frac{4}{3}ML^2\dot\theta \end{pmatrix}_{R_1}$$

1

$$E_C = \frac{1}{2} m V^2(G)^2 + \frac{1}{2} \Omega_1 \quad I_G \quad \Omega_1$$

$$= \frac{1}{2} M\dot{\theta}^2 L^2 + \frac{1}{2} (\dot{\theta}, 0, \dot{\theta}) \begin{pmatrix} \frac{ML^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_C = \frac{2}{3} ML^2 \dot{\theta}^2} \quad 1$$

USTHB / FGMGP — Rattrapage 2006/2007

Corrigé Rattrapage

Exo N° 1:

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$ 0,5

$\sum \vec{M}_{ext/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AG} \wedge (\vec{P} + \vec{F}) + \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AC} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ 0,5

$\dfrac{\vec{T}_{CD}}{|T_{CD}|} = \dfrac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} \Rightarrow \vec{CD} = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{3}a \end{vmatrix} \quad |\vec{CD}| = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$

$\boxed{\vec{T}_{CD} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}T \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}T \end{vmatrix}}$ 0,75

$R_{Ax} + R_{Bx} + F + \frac{T}{2} = 0$ — 0,5

$R_{Ay} = 0$ — 0,5

$R_{Az} + R_{Bz} - P - \frac{\sqrt{3}}{2}T = 0$ — 0,5

$\sum \vec{M}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ a \\ \frac{\sqrt{3}}{3}a \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F \\ 0 \\ -P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_{Bx} \\ 0 \\ R_{Bz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ a \\ \sqrt{3}a \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} T/2 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$-Pa + 2a R_{Bz} + a\frac{\sqrt{3}}{2}T = 0$ — 0,5

$-\frac{\sqrt{3}}{3}aF + \frac{\sqrt{3}}{2}aT = 0$ — 0,5

$aF - 2a R_{Bx} - a\frac{T}{2} = 0$ — 0,5

1/ $T = \frac{3}{2}F$ 0,25 $\qquad R_{Ay} = 0$

$R_{Bx} = \frac{-F}{8}$ 0,25 $\qquad R_{Ax} = \frac{21}{8}F$ 0,25

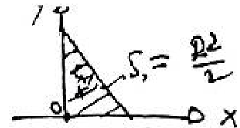
$R_{Bz} = \frac{P}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}F$ 0,25 $\qquad R_{Az} = \frac{P}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}F$ 0,25

~~EX N°2~~

Element S_1:

$$X_{G_1} = \frac{\iint x\,ds}{\iint ds} \Rightarrow X_{G_1} = \frac{\int_0^R \left[x \int_0^{\frac{R-x}{2}} dy\right] dx}{S_1} = \frac{1}{3}R \quad (0,5)$$

$0 \leq y \leq \frac{1}{2}(R-x)$



$OG_1 = \begin{vmatrix} R/3 \\ R/6 \end{vmatrix}$

$$Y_{G_1} = \frac{\iint y\,ds}{\iint ds} \Rightarrow Y_{G_1} = \frac{\int_0^{R/2} y \left[\int_0^{R-2y} dx\right] dy}{S_1} = \frac{1}{3}\left[\frac{R}{2}\right] \quad (0,5)$$

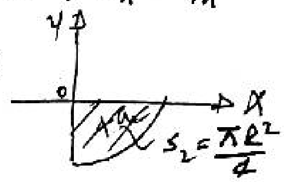
$\begin{vmatrix} 0 < x < R-2y \\ 0 < y < R/2 \end{vmatrix}$

Element S_2: La droite $y=-x$ est un axe de symétrie $\Rightarrow X_G = -Y_G$

$$X_{G_2} = \frac{\iint x\,ds}{\iint ds}$$

coordonnées polaires
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$0 \leq r \leq R$
$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$



$$X_{G_2} = \frac{\int_0^R r^2 dr \int_{-\pi/2}^{2\pi} \cos\theta\, d\theta}{S_2} = \frac{4R}{3\pi} \quad (0,5)$$

$$X_G = \frac{X_{G_1}S_1 + X_{G_2}S_2}{S_1+S_2} = \frac{5R}{3(1+\pi)}$$

d'où $Y_{G_2} = -X_{G_2} \Rightarrow Y_G = \frac{-4R}{3\pi}$ (0,5)

$$Y_G = \frac{Y_{G_1}S_1 + Y_{G_2}S_2}{S_1+S_2} = \frac{-7}{6}\frac{R}{(1+\pi)}$$

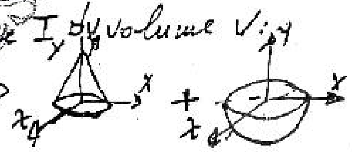
2/ Th. Guldin

$$V = 2\pi \cdot X_G \cdot (S_1+S_2) \Rightarrow V = 2\pi \frac{5R}{3(1+\pi)}\left(\frac{R^2}{4}+\frac{\pi R^2}{4}\right) = \frac{5}{6}\pi R^3 \quad (0,5)$$

3/ Le Moment d'inertie I_y du volume V / oy

Rq: oy axe de Révolution

$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} \Rightarrow$



Element I:

$I_{y_1} = \oint x^2+z^2\,dm = \rho_v \iiint (x^2+z^2)\,dV$

coordonnées cylindrique:
$x = r\cos\theta$
$z = r\sin\theta$
$y = y$

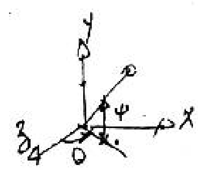
$0 \leq r \leq r(y)$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$
$0 \leq y \leq R/2$

$dv = r\,dr\,d\theta\,dy$

$r(y) = R - 2y$

$I_{y_1} = \rho_v \iiint r^2 dV$

$$I_{y_1} = \rho_v \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R/2}\int_0^{r(y)} r^3 dr\,dy = \rho_v 2\pi \int_0^{R/2} \frac{r(y)^4}{4} dy = \boxed{\rho_v \pi \frac{\cancel{6}}{60} R^5} \quad (1)$$



Element II:

coordonnées sphérique
$x = r\cos\psi\cos\theta$
$z = r\cos\psi\sin\theta$
$y = r\sin\psi$
$dV = r^2\cos\psi\,dr\,d\theta\,d\psi$

$0 \leq r \leq R$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$
$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 2\pi$

$I_{y_2} = \oint x^2+z^2\,dm = \rho_v \iiint (x^2+z^2)\,dV$ (1)

$I_{y_2} = \rho \frac{2}{\sqrt{3}} \oint r^2 dV$

$$\boxed{I_{y_2} = \rho_v \frac{2}{3} \int^R r^4 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi\, d\psi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{15}\rho_v \pi R^5}$$

$\rho_v \pi \cancel{6} R^5 + \rho_v \frac{4}{15} \pi R^5$ (0,5)

Exo N° 3 :

1/ $\vec{\Omega}^0_{3/R_2} = \Omega^2_3 + \Omega^1_2 + \Omega^0_1 = \begin{vmatrix} -\psi^\circ \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta^\circ \end{vmatrix} = {}_{R_2}\begin{vmatrix} -\psi^\circ \\ 0 \\ \beta^\circ \end{vmatrix}$ (0,5)

1/ $\vec{V}^0(G)_{/R_2} = \frac{d^0 \vec{OG}}{dt}_{/R_2} = \frac{d^2 \vec{OG}}{dt} + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{OG} \Rightarrow \vec{V}^0(G) = \begin{vmatrix} x^\circ(t) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \beta^\circ x(t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^\circ(t) \\ \beta^\circ x(t) \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{\gamma}^0(G)_{/R_2} = \frac{d^0 V^0(G)}{dt} = \frac{d^2 V^0(G)}{dt} + \Omega^0_2 \wedge V^0(G) \Rightarrow \vec{\gamma}^0(G) = {}_{R_2}\begin{vmatrix} x^{\circ\circ}(t) - \beta^{\circ 2} x(t) \\ \beta^\circ x^\circ(t) \\ 0 \end{vmatrix}$ (0,5)

%/ Par la cinématique du solide $V^0(M)$ et $\gamma^0(M)$?

$\vec{V}^0(M)_{/R_2} = \vec{V}^0(G)_{/R_2} + \vec{\Omega}^0_3 \wedge \vec{GM}$ (0,5) $\quad \vec{GM} = {}_{R_2}\begin{vmatrix} h \\ R\cos\psi \\ -R\sin\psi \end{vmatrix}$

$\vec{V}^0(M)_{/R_2} = {}_{R_2}\begin{vmatrix} x^\circ(t) - \beta^\circ R\cos\psi \\ \beta^\circ x(t) - R\psi^\circ \sin\psi + h\beta^\circ \\ -R\psi^\circ\cos\psi \end{vmatrix}$ (0,5)

$\gamma^0(M)_{/R_2} = \gamma^0(G) + \frac{d\Omega^0_3}{dt} \wedge \vec{GM} + \vec{\Omega}^0_3 \wedge (\vec{\Omega}^0_3 \wedge \vec{GM}) \Rightarrow \gamma(M) = \gamma(G) + \left(\frac{d\Omega^0_3}{dt} + \Omega^0_2 \wedge \Omega^0_3\right) \wedge \vec{GM} + \vec{\Omega}^0_3 \wedge (\vec{\Omega}^0_3 \wedge \vec{GM})$ (0,5) (0,5)

$\gamma^0(M)_{/R_2} = \begin{vmatrix} x^{\circ\circ}(t) - \beta^{\circ 2} x(t) \\ \beta^\circ x^\circ(t) \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R\psi^\circ\beta^\circ\sin\psi \\ 0 \\ h\psi^\circ\beta^\circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R\beta^\circ\psi^\circ\sin\psi - h\beta^{\circ 2} \\ -R\cos\psi(\beta^{\circ 2} + \psi^{\circ 2}) \\ R\psi^{\circ 2}\sin\psi - h\psi^\circ\beta^\circ \end{vmatrix} = {}_{R_2}\begin{vmatrix} x^{\circ\circ}(t) - \beta^{\circ 2}x(t) + 2R\psi^\circ\beta^\circ\sin\psi - h\beta^{\circ 2} \\ \beta^\circ x^\circ(t) - R\cos\psi(\beta^{\circ 2} + \psi^{\circ 2}) \\ R\psi^{\circ 2}\sin\psi \end{vmatrix}$ (0,5)

%/ par composition de Mvt :

$\vec{V}^0(M) = V^2(M) + \vec{V}_e(M)$ $\quad \vec{V}^2(M)_{/R_2} = \frac{d^2 \vec{GM}}{dt}_{/R_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ -R\psi^\circ\sin\psi \\ -R\psi^\circ\cos\psi \end{vmatrix}$ → vitesse Relative (0,5)

Vitesse d'ent : $\vec{V}^0_2(M) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{GM} \Rightarrow \vec{V}^0_2(M)_{/R_2} = \begin{vmatrix} x^\circ(t) - R\beta^\circ\cos\psi \\ \beta^\circ x(t) + \beta^\circ h \\ 0 \end{vmatrix}$ → vitesse d'ent. (0,5)

$\vec{V}^0(M)_{/R_2} = \begin{vmatrix} x^\circ(t) - R\beta^\circ\cos\psi \\ \beta^\circ x(t) + \beta^\circ h - R\psi^\circ\sin\psi \\ -R\psi^\circ\cos\psi \end{vmatrix}$ (0,5)

$\vec{\gamma}^0(M) = \gamma^2(M) + \gamma^0_2(M) + \gamma_c(M)$ (0,5)

$\gamma^2(M)_{/R_2} = \frac{d^2 V^2(M)}{dt}_{/R_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ -R\psi^{\circ 2}\cos\psi \\ R\psi^{\circ 2}\sin\psi \end{vmatrix}$ accé Relative

$\gamma_c(M)_{/R_2} = 2\vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{V}^2(M) = {}_{R_2}\begin{vmatrix} 2R\beta^\circ\psi^\circ\sin\psi \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ (0,5) accé coriolis

$\Rightarrow \vec{\gamma}^0(M)_{/R_2} = {}_{R_2}\begin{vmatrix} x^{\circ\circ}(t) - \beta^{\circ 2}x(t) - 2R\beta^\circ\psi^\circ\sin\psi \\ \beta^\circ x^\circ(t) - (\psi^{\circ 2} + \beta^{\circ 2})R\cos\psi \\ R\psi^{\circ 2}\sin\psi \end{vmatrix}$ (0,5)

$\vec{\gamma}^0_2(M)_{/R_2} = \gamma^0(G) + \frac{d\Omega^0_2}{dt} \wedge \vec{GM} + \vec{\Omega}^0_2 \wedge (\vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{GM})$ (0,5)

$\vec{\gamma}^0_2(M)_{/R_2} = \begin{vmatrix} x^{\circ\circ}(t) - \beta^{\circ 2}x(t) - h\beta^{\circ 2} \\ \beta^\circ x^\circ(t) - \beta^{\circ 2}R\cos\psi \end{vmatrix}$ accé d'ent (0,5)

Université H.B.B. – Chlef

Faculté de Génie Civil et d'Architecture

Département de Génie Civil

Mécanique Rationnelle

Mécanique Rationnelle

S3 _ Génie Civil et TP

Examen de Contrôle

Année Universitaire **2015/ 2016**

EXERCICE N°1 : (4 POINTS)

Déterminer la résultante du système de deux forces concourantes appliquées sur le corps solide dans la Figure 1 (on utilise la méthode géométrique).

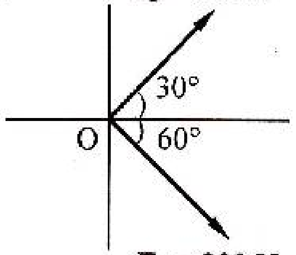


Figure 1

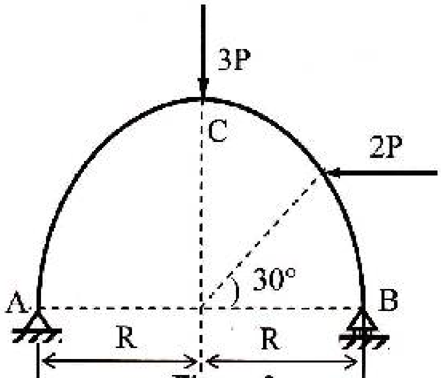


Figure 2

EXERCICE N°2 : (5 POINTS)

Soit l'arc AB en béton armé, de rayon R, représenté dans la Figure 2. Le poids propre de l'arc est négligeable, le reste des données nécessaires est représenté la Figure 2.

1. Définir le corps solide représenté sur la Figure 2 et ces liaisons ;
2. Définir le système des forces appliquées sur le corps solide ;
3. Illustrer les réactions des liaisons sur la Figure
4. Écrire la condition d'équilibre statique du corps solide
5. Déterminer les réactions dans les liaisons.

EXERCICE N°3 : (4 POINTS)

On considère le cube ABCDEFGH de côté **a** (Figure 3). Les axes Ox, Oy et Oz passent par le centre de symétrie O et sont parallèles aux côtés du cube.

1. Déterminer la matrice d'inertie au centre O du cube;
2. Déterminer le vecteur unitaire de la diagonale AF ;
3. Déterminer le moment d'inertie par rapport à la diagonale AF du cube.

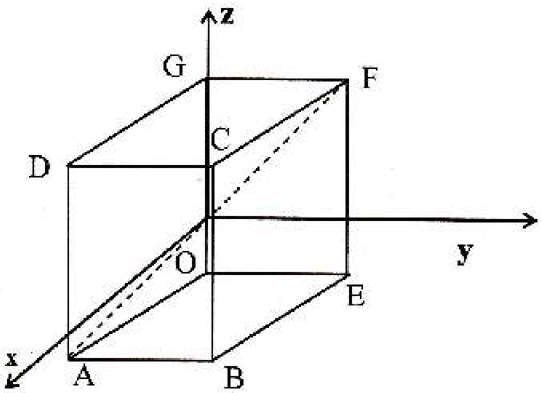


Figure 3

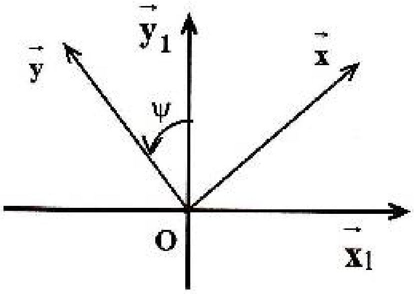


Figure 4

EXERCICE N°4 : (7 POINTS)

Un point matériel M mobile par rapport au repère R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé, direct et mobile, par rapport au repère fixe $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ (Figure 4). Les coordonnées du point M satisfont les conditions suivantes :

$$x = 0, \quad y = 2t, \quad z = 0 \ (\text{cm})$$

Sachant que l'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}$, et $(\vec{y}_1, \vec{y}) = \psi$ où ψ est une fonction donnée du temps leur dérivée par rapport à t $\dot{\psi}$ est constante.

1. Donner le vecteur de la position relative du point M dans le repère mobile.
2. Donner le taux de rotation de R/R_1 ;
3. Déterminer l'expression analytique du vecteur vitesse absolue du point M,
4. On déduire les vecteurs vitesses relative, d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.
5. Déterminer l'expression analytique du vecteur accélération absolue du point M,
6. On déduire les vecteurs vitesses relative, complémentaire (Coriolis), d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

EXERCICE N°1 : (4 POINTS) (8/2)

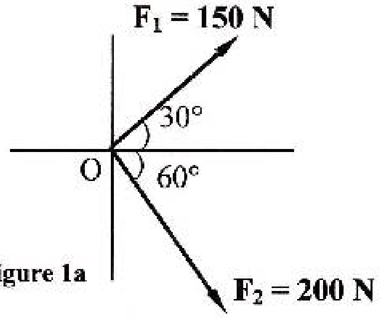


Figure 1a

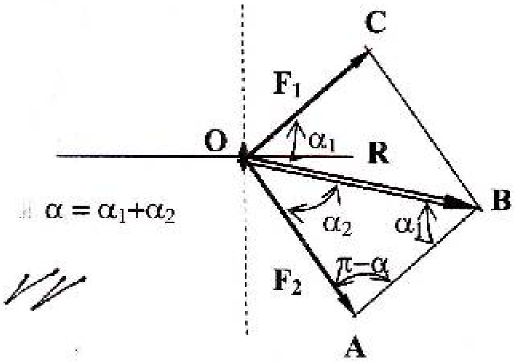


Figure 1b

Méthode de la règle du parallélogramme des forces :

On trace le parallélogramme des forces **OABC (Figure 1b)**, on joignant de l'extrémité de chaque force une parallèle de l'autre force. La diagonale **OB** représente la résultante des deux forces $\vec{R}$, de module :

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2Cos(\pi - \alpha)}$$

On obtient le module de **R = 250 N**

La direction de R, est obtenue par l'application du théorème des sinus du triangle OAB :

$$\frac{F_1}{Sin\ \alpha_2} = \frac{F_2}{Sin\ \alpha_1} = \frac{R}{Sin\ (\pi - \alpha)}$$

D'où :

$$\alpha_1 = 53{,}13° \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 36{,}87°$$

EXERCICE N°2 : (5 POINTS) (20/4)

Soit l'arc AB en béton armé, de rayon R, représenté dans la Figure 2.

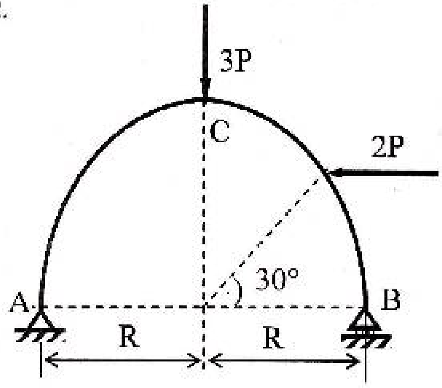


Figure 2.a

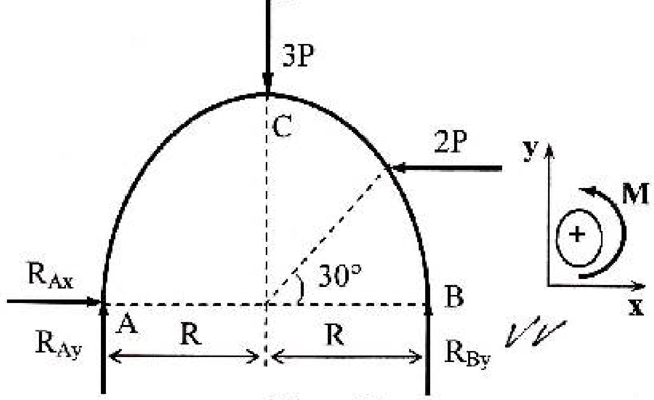


Figure 2.b

Solution:

-Le corps solide est l'arc AB en béton armé,

-Les liaisons sont : l'appui double en A et l'appui simple en B,

-Le système de forces est plan.

-On supprime les liaisons dans la Figure 2.a, et on les remplace par les réactions qui leurs correspondent dans la Figure 2.b. D'après l'axiome des liaisons, le portique AB devient libre sous l'action du système de forces en plan.

-Pour la détermination des réactions R_{Ay}, R_{Ax} et R_{By}, on écrit la condition d'équilibre statique du corps solide qui est le torseur des forces extérieures en A nul, où bien la projection de ces éléments sur les axes est nulle:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad R_{Ax} - 2P = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad R_{Ay} - 3P + R_{By} = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad -3P \times R + 2P \times R \sin 30° + R_{By} \times 2R = 0$$

(3)

La solution des équations d'équilibres (1), (2) et (3) donne :

$$R_{Ax} = 2P, \quad R_{Ay} = 2P, \quad R_{By} = P$$

EXERCICE N°3 : (4 POINTS) (16/4)

On considère le cube ABCDEFGH de côté a (Figure 3). Les axes Ox, Oy et Oz passent par le centre de symétrie O et sont parallèles aux côtés du cube.

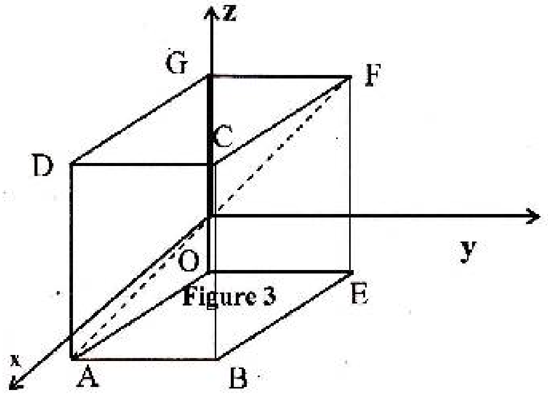


Figure 3

La matrice d'inertie au centre O du cube ABCDEFGH, s'écrit :

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zx} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Puisque l'axe Oz est un axe de symétrie, les produits d'inerties sont nuls ($I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$). Le reste des éléments de la matrice s'écrit alors :

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2+z^2)dm, \quad I_{yy} = \int_{(S)} (x^2+z^2)dm, \quad I_{zz} = \int_{(S)} (x^2+y^2)dm$$

La masse **m** du parallélépipède est :

$m = \rho V = \rho\, a^3$

Et l'élément de la masse :

$dm = \rho dxdydz,$

et $-a/2 \leq x \leq a/2, \quad -a/2 \leq y \leq a/2, \quad -a/2 \leq z \leq a/2,$

On remarque que les termes $\int_{(S)} x^2\, dm$, $\int_{(S)} y^2\, dm$ et $\int_{(S)} z^2\, dm$ tendent vers le calcul d'un seul type d'intégrale

$$I^* = \int_{(S)} x^2\, dm$$

$$I^* = \int_{(S)} x^2\, dm = \rho \int_{(V)} x^2\, dxdydz = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \rho a^3 \frac{a^2}{12} = \frac{ma^2}{12}$$

De la même manière :

$$\int_{(S)} y^2\, dm = \int_{(S)} z^2\, dm = \frac{ma^2}{12}$$

D'où :

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \int_{(S)} (y^2+z^2)dm = \int_{(S)} y^2 dm + \int_{(S)} z^2 dm = \frac{ma^2}{6}$$

D'où la matrice d'inertie du cube au centre O, s'écrit :

$$I_O = \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- le vecteur unitaire du vecteur de la diagonale AF ;

Les cosinus directeur de la diagonale AF,

Les coordonnées des points A **(0.5a, -0.5a, -0.5a) et F (-0.5a, 0.5a, 0.5a)**

Le vecteur de la diagonale AF :

$$\overrightarrow{AF} = (x_F - x_A)\vec{i} + (y_F - y_A)\vec{j} + (z_F - z_A)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AF} = -a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}$$

Le module de $\overrightarrow{AF}$

$$\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{(x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2 + (z_F - z_A)^2}$$

$$\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{(-a)^2 + (a)^2 + (a)^2} = a\sqrt{3}\ (m)$$

Les cosinus directeur de la force F :

$$\cos\theta_x = \frac{(x_F - x_A)}{\|\overrightarrow{AF}\|} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\theta_y = \frac{(y_F - y_A)}{\|\overrightarrow{AF}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\theta_z = \frac{(z_F - z_A)}{\|\overrightarrow{AF}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D'où :

le vecteur unitaire du vecteur de la diagonale (AF) $\vec{n}$ est :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta_x \\ \cos\theta_y \\ \cos\theta_z \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3- Le moment d'inertie par rapport à la diagonale (AF) du cube.

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par le centre O du solide, est donné par la relation :

$$I_{AF} = \vec{n}^t\, I_o\, \vec{n}$$

Où :

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire du vecteur de la diagonale (AF);

$\vec{n}^t$ est le transposé du vecteur $\vec{n}$;

I_O le moment d'inertie par rapport au centre O.

Nous avons :

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\vec{n}^t = \frac{\sqrt{3}}{3} (-1 \quad 1 \quad 1)$$

Et

$$I_{AF} = \frac{\sqrt{3}}{3} (-1 \quad 1 \quad 1)\ \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où le moment d'inertie par rapport à la diagonale (AF) est: $I_{AF} = \dfrac{ma^2}{6}$

EXERCICE N°4 : (7 POINTS) (14/2)

Un point matériel M mobile par rapport au repère R (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) orthonormé, direct et mobile, par rapport au repère fixe $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

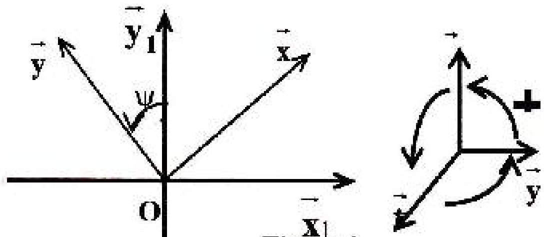


Figure 4.

Solution :

Les données du problème sont :

Le repère R (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) mobile (Repère relatif)

Le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fixe (Repère absolu)

Le vecteur de position d'entraînement de O à O_1:

L'angle de rotation de R/R_1

$$(\vec{y}_1, \vec{x}) = \psi \quad (\psi \quad \text{constante})$$

Le vecteur taux de rotation de R/R_0, $\vec{\Omega}_{R/R_0}$:

Le point matériel M défini par les coordonnées :

$x = t,\ y = e^{2t},\ z = 0$ (cm)

Le vecteur de position relatif du point M s'écrit :

1-le vecteur de la position relative du point M dans le repère mobile.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} = 0\vec{x} + 2t\vec{y} + 0\vec{z}$$

Le vecteur de position absolu du point M est :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$

2-Le vecteur taux de rotation de R/R_1, $\vec{\Omega}_{R/R_1}$:

$$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \vec{\Omega} = \frac{d\psi}{dt}\vec{z}_1 = \dot{\psi}\vec{z}_1$$

3- l'expression analytique du vecteur vitesse absolue du point M,

Le vecteur vitesse absolue du point M dans le repère R s'écrit :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La dérivée du vecteur mobile $\overrightarrow{OM}$ par rapport à un repère fixe est :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt} = \vec{V}_{O/R_1}$$

Donc, la formule du vecteur vitesse absolue du point M, s'exprime :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

Avec

$\vec{V}_{M/R} = \dfrac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt}$: la vitesse relative du point M

$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$: le vecteur vitesse d'entraînement

$\vec{V}_{O/R_1} = \dfrac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt}$ est la vitesse du point O par rapport à R_1.

4-On déduire les vecteurs vitesses relative, d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

Le vecteur vitesse relative du point M s'écrit :

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^{R}\overrightarrow{OM}}{dt} = 2\vec{y} \quad (cm/sec)$$

le vecteur vitesses d'entrainement :

$$\vec{V}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1}\overrightarrow{O_1O}}{dt} = \vec{0} \quad O_1 \text{ Coïncide avec } O$$

$$\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \dot{\psi}\vec{z}_1\wedge(t\vec{y}) = -\dot{\psi}t\,\vec{x} \quad (cm/sec)$$

D'où :

$$\vec{V}_e(M) = -\dot{\psi}t\,\vec{x} \quad (cm/sec)$$

Par conséquent, le vecteur vitesse absolue du point M par rapport à R_1 est :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = -2\dot{\psi}t\vec{x} + 2\vec{y} \quad (cm/sec)$$

- l'expression analytique du vecteur accélération absolue du point M,

Le vecteur accélération absolue du point M par rapport au repère fixe R_1, s'écrit :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{2R_1}\overrightarrow{O_1M}}{dt^2} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1}\left(\vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_A(M) = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1}\vec{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}\wedge\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (1)$$

On applique la dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère fixe à la dérivée des vecteurs mobiles $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}_{M/R}$ par rapport au repère fixe R_0 :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d^{R}\vec{V}_{M/R}}{dt} + \vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{M/R}$$

Où :

$$\frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R}}{dt} = \vec{a}_{M/R} + \vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{M/R}$$

Avec :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{d^{R}\vec{V}_{M/R}}{dt}$$ le vecteur accélération relative,

On remplace ces développements dans l'expression (1), on obtient l'expresse du vecteur accélération absolue :

$$\vec{a}_A(M)=\vec{a}_{M/R_1}=\vec{a}_{M/R}+2\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{M/R}\right)+\vec{a}_{O/R_1}+\frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$$

-On déduire les vecteurs vitesses relative, complémentaire (Coriolis), d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

Le vecteur accélération relative du point M, est :

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R} = \frac{d^{R}\vec{V}_{M/R}}{dt} = \vec{0}\ \ (\text{cm/sec}^2)$$

Le vecteur accélération complémentaire (Coriolis) :

$$\vec{a}_C(M) = 2\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{M/R}\right) = 2\left(\dot{\psi}\vec{z}_1\wedge(2\vec{y})\right) = -4\dot{\psi}\vec{x}$$

Le vecteur accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$$

Avec

$$\vec{a}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{O/R_1}}{dt} = \vec{0}\ \ (\text{cm/sec}^2)$$

$$\frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} = \vec{0} \qquad (\dot{\psi}\ \text{constante})$$

$$\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right) = -2\dot{\psi}^2 t\vec{y} \qquad (\text{cm/sec}^2)$$

Donc, le vecteur accélération d'entraînement s'écrit :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right) = -2\dot{\psi}^2 t\vec{y} \qquad (\text{cm/sec}^2)$$

Enfin, le vecteur accélération absolue du point M est :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = -4\dot{\psi}\,\vec{x}\cancel{+}2\dot{\psi}^2 t\vec{y} \qquad (\text{cm/sec}^2)$$

$\ominus$

$$\vec{a}_A(M)=\vec{a}_{M/R_1}=\vec{a}_{M/R}+2\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{M/R}\right)+\vec{a}_{O/R_1}+\frac{d^{R_1}\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$$

USTHB, FGC.
Faculté de géni Civil
2ème Année LST
Section: I, J, K, L

Le 11 juin 2011
Durée : 1H 30

Epreuve finale de Mécanique Rationnelle II

Remarque : ***A) les exercices 1 et 2 sont obligatoires.***

B) les exercices 3 et 4 sont au choix

Exercice 1 (7 points)

Déterminer, **par intégration**, la position du centre D'inertie du système surfacique présenté dans la **figure 1**
(Tout résultat doit être justifié).

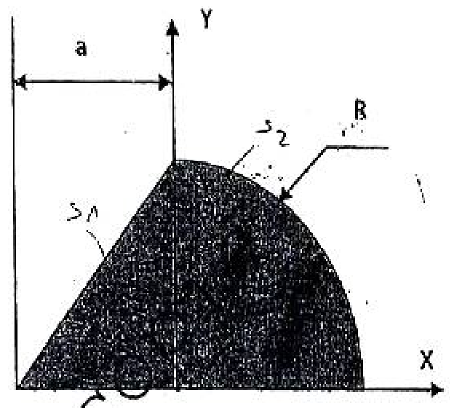


Fig. 1

Exercice 2 (7points)

1. En appliquant **le théorème de Guldin**, déterminer La position du centre d'inertie de la surface hachurée représentée par la figure 2.
2. Déterminer le tenseur d'inertie en O par rapport au Repère $R_0(O,X,Y,Z)$ de la surface hachurée.
3. Déterminer le moment d'inertie par rapport à la Droite (Δ) passant par l'origine O et faisant un angle α égale à 60° par rapport à l'axe OX.

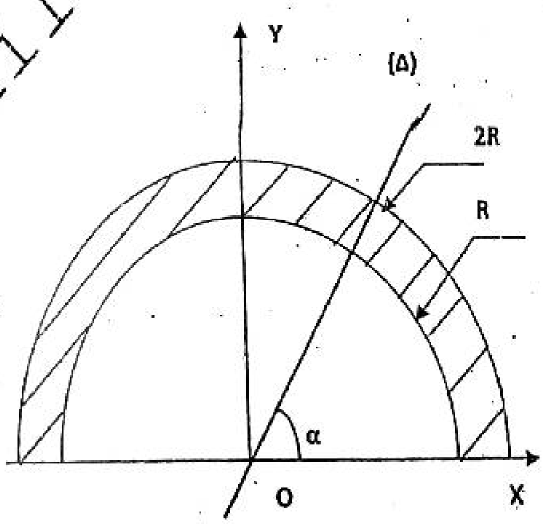


Fig. 2

Exercice 3 (6 points)

Soit le système volumique de densité volumique (ρ) (figure 3) formé d'un parallélépipède évidé d'un cylindre de rayon R.

- Déterminer Le Tenseur D'inertie du Système en O par rapport au repère (O,X,Y,Z).

G est le centre de gravité du cylindre (G est dans le plan OYZ)

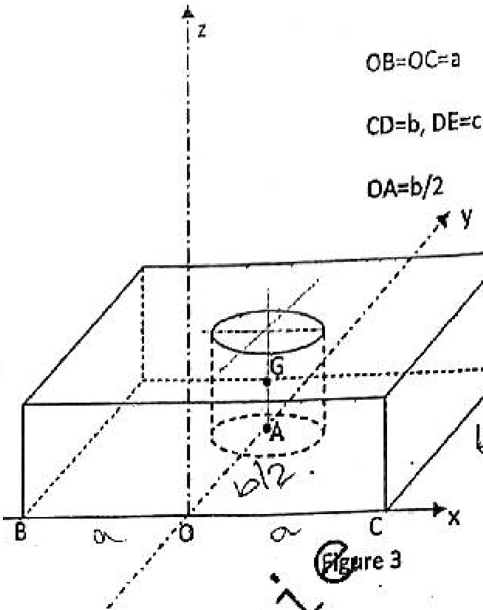


Figure 3

Exercice 4 (6 points)

Soit une plaque triangulaire de masse m qui tourne autour de OZ_0 avec une vitesse angulaire constante $\dot{\psi}$ (figure 4). R_0 Repère de projection.

1- Déterminer le moment cinétique de la plaque par rapport à R_0 aux points G et O.
2- Déterminer le moment dynamique de la plaque par rapport à R_0 aux points G et O.
3- Calculer l'énergie cinétique de la plaque.

On donne : $\overrightarrow{CO}=(a/3)\overrightarrow{X_1}$, $\overrightarrow{CB}=b\overrightarrow{X_1}$, $\overrightarrow{CA}=a\overrightarrow{Z_1}$

$$\overrightarrow{CG}= \begin{cases} b/3 \\ 0 \\ a/3 \end{cases}_{R_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V^0(G)}= \begin{cases} 0 \\ 1/3(b-a)\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

On donne également le tenseur d'inertie de la plaque en O par rapport à R_1:

$$J_{O/R_1}=\begin{bmatrix} A & -D & 0 \\ -D & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

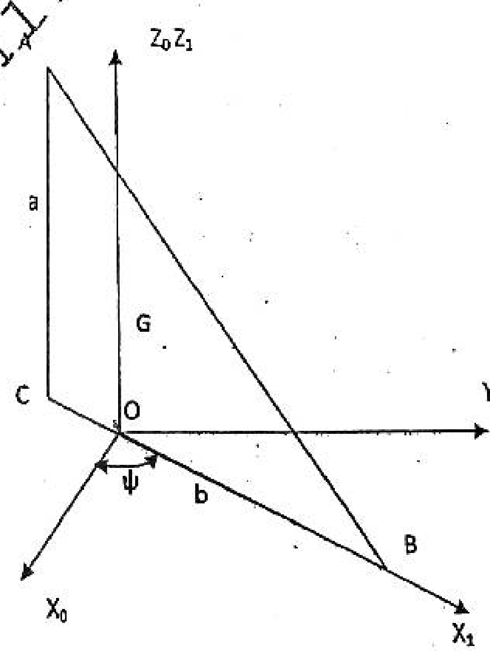


Fig. 4

$2^{ème}$ EMD Corrigé Meca-Rat

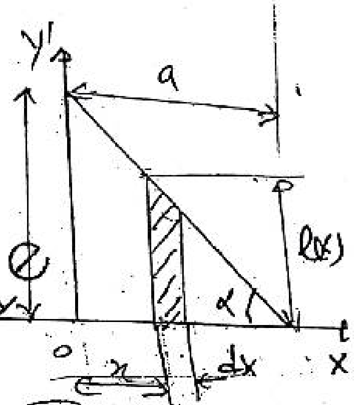
Examen Juin 2011 Génie-Civil

Exercice 1:

Système $\equiv$ Triangle (1) + $\frac{1}{4}$ Disque (2)

(1) tirangle:

Déterminons d'~~abord~~ la position de G dans le repère (x', y')

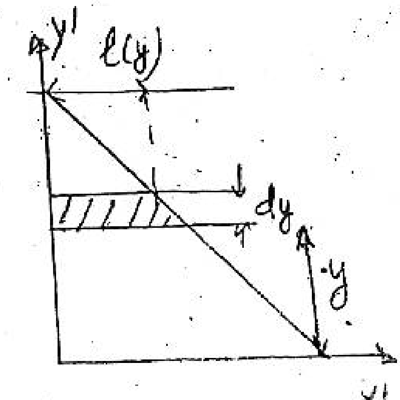


$$*) \; X_G = \frac{\int x\,dm}{\int dm} \quad , \quad dm = \sigma\, ds, \quad ds = \ell(x)\, dx, \quad S_1 = \frac{aR}{2}$$

$$Tg\,\alpha = \frac{R}{a} = \frac{\ell(x)}{a-x} \Rightarrow \ell(x) = \frac{R}{a}(a-x) \quad 0{,}5$$

$$X_G = \frac{\int_0^a x\,\sigma\,(R/a)(a-x)\,dx}{\int_0^a \sigma \frac{R}{a}(a-x)\,dx} = \frac{R/a \int_0^a (ax-x^2)\,dx}{R/a\int_0^a (a-x)\,dx} \quad 0{,}5$$

$$X_G = \frac{R/a\left[a.\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right]}{R/a\left[a^2 - a^2/2\right]} = \frac{a}{3} \quad ; \quad S_1 = \frac{aR}{2} \quad 0{,}25$$



$$*) \; Y_G = \frac{\int y\,dm}{\int dm} \quad , \quad dm = \sigma\, ds, \quad ds = \ell(y)\, dy$$

$$\ell(y) = \frac{a}{R}(R-y) \quad 0{,}5$$

$$Y_G = \frac{\int_0^R y\,\sigma\,\frac{a}{R}(R-y)\,dy}{\sigma . S_1}$$

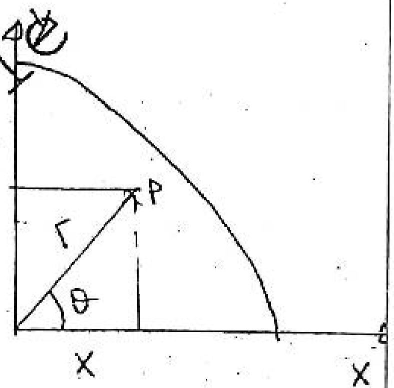
$$y_G = \frac{a/R\,[R^2/2 - R^2/3]}{aR/2} = \frac{R}{3} \quad (0{,}5)$$

$z_G = 0$ (0,5) $\to$ (Pas de matiere suivant Oz') dans $R'(O, x', y', z')$

$G_1 \begin{pmatrix} a/3 \\ R/3 \\ 0 \end{pmatrix}_{R'_1}$ (0,5) $\to$ En revenant au repère $R(O, x, y, z)$

$G_1 \begin{pmatrix} -a/3 \\ R/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0,5) , $S_1 = \frac{aR}{2}$

(2) $\frac{1}{4}$ Disque.



$$X_G = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\sigma \iint r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta}{\sigma \iint r\,dr\,d\theta}$$

avec : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $\begin{cases} dm = \sigma\, ds \\ ds = r\,dr\,d\theta \end{cases}$ (0,25)

$0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (0,25)

$$X_G = \frac{\int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta}{\int_0^R r\,dr \int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{R^3/3 \cdot [\sin\theta]_0^{\pi/2}}{R^2/2 \cdot \pi/2}$$

$\boxed{X_G = \frac{4R}{3\pi}}$ (0,5) $\qquad S_2 = \frac{\pi}{4} R^2$ (0,25)

*) $$Y_G = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\iint r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta}{S_2} = \frac{R^3/3\,[-\cos\theta]_0^{\pi/2}}{\frac{\pi}{4}R^2}$$

$\boxed{Y_G = \frac{4R}{3\pi}}$ (0,5)

Pour le système $G\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$

$$X_G = \frac{S_1 X_{G1} + S_2 X_{G2}}{S_1 + S_2} \quad 0,5$$

$$X_G = \frac{\frac{Ra}{2}\left(-\frac{a}{3}\right) + \frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)}{\frac{Ra}{2} + \frac{\pi R^2}{4}} = \boxed{\frac{-\frac{a^2}{6} + \frac{R^2}{3}}{a/2 + \frac{\pi}{4}R} = X_G}$$

0,5

$$Y_G = \frac{S_1 Y_{G1} + S_2 Y_{G2}}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{Ra}{2}\left(\frac{R}{3}\right) + \frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)}{\frac{Ra}{2} + \frac{\pi R^2}{4}}$$

$$\boxed{Y_G = \frac{Ra/6 + R^2/3}{a/2 + \pi R/4}} \quad 0,5$$

Exercice 2 :

1) Centre d'inertie de la surface hachurée

$$\vec{OG} = \begin{cases} x_G = 0 & (Oy \text{ axe de symétrie}) \\ y_G = \,? \\ z_G = 0 & (\text{Pas de matière selon } Oz) \end{cases} \quad 0,5$$

Th. de Guldin : rotation autour de Ox.

$$V_{/x} = 2\pi \cdot y_G \cdot S \Rightarrow y_G = \frac{V}{2\pi \cdot S}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4\pi}{3}\left(8R^3 - R^3\right) \Rightarrow V = \frac{28\pi}{3}R^3 \quad 0,5$$

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi}{2}\left(4R^2 - R^2\right) \Rightarrow S = \frac{3\pi}{2}R^2 \quad 0,5$$

D'où $\boxed{y_G = \frac{28}{9\pi} \cdot R}$ 0,5

1] Tenseur d'inertie de la [illegible]

* zoy plan de symétrie $\Rightarrow I_{xy} = I_{yz} = 0$ (0,5)

* axes ox et oy jouent le m rôle $\Rightarrow I_{xx} = I_{yy}$ (0,5)

Pas de matière selon $oz \Rightarrow I_{xz} = I_{yz} = 0$ (0,5)

Donc :
$$\begin{cases} I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0 & (0,5) \\ I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_{zz} & (0,5) \end{cases}$$

Coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \underline{\text{avec}} \quad \begin{matrix} R \leq r \leq 2R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{matrix} \quad (0,5)$$

$$dm = \rho\, dS \Rightarrow \rho\, r\, dr\, d\theta \Rightarrow m = \rho S = \frac{3}{2}\rho\pi R^2$$

$$I_{zz} = \rho\int r^2 dS = \rho\int_R^{2R} r^3 dr \int_0^{\pi} d\theta \Rightarrow I_{zz} = \frac{15\rho}{4}\pi R^4$$

$$\boxed{I_{zz} = \frac{5}{2} m R^2} \quad (0,5)$$

$$\boxed{I_{xx} = I_{yy} = \frac{15}{8}\rho\,\pi R^4 = \frac{5}{4} m R^2} \quad (0,5)$$

$$I_0 = \frac{5}{4} m R^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Moment d'inertie $/\Delta\Delta$

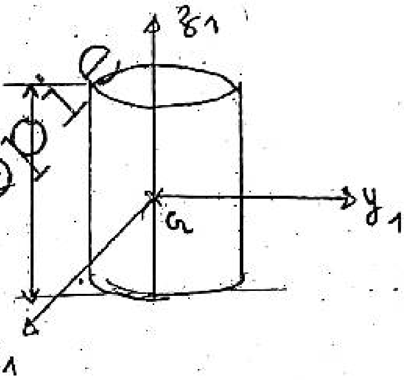
$I_{\Delta\Delta} = {}^t n \, [I_o] \, n$ avec $n = \begin{cases} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{cases} \Rightarrow n = \begin{cases} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{cases}$

0,5 $\qquad \alpha = 60°$.

D'où : $\boxed{I_{\Delta\Delta} = \frac{15}{8}\rho\pi R^4 = \frac{5}{2} m R^2}$ 0,5

Exercice 3 :

$I_{G/(x_1,y_1,z_1)}$ Pour le cylindre.



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{aligned} &0 \leq r \leq R \\ &-\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2} \end{aligned}$

$dm = \rho \, r \, dr \, d\theta \, dz$

$I_{z_1} = \int_{P \in (\text{cylindre})} (x^2+y^2)\,dm \qquad P : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_1}$

$I_{z_1} = \rho \iiint r^2 \, r \, dr \, d\theta \, dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-c/2}^{c/2} dz$

$= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi c = \frac{\rho\pi R^4 c}{2}$ 0,25

$I_{x_1} = \frac{I_{z_1}}{2} + \int z^2 dm$ avec $\int z^2 dm = \iiint z^2 r \, dr \, d\theta \, dz$

$= \rho \int_0^R r \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-c/2}^{c/2} z^2 dz = \frac{\rho \pi R^2 c^3}{12}$ 0,5

$\boxed{I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{\rho\pi R^4 c}{4} + \frac{\rho\pi R^2 c^3}{12}}$

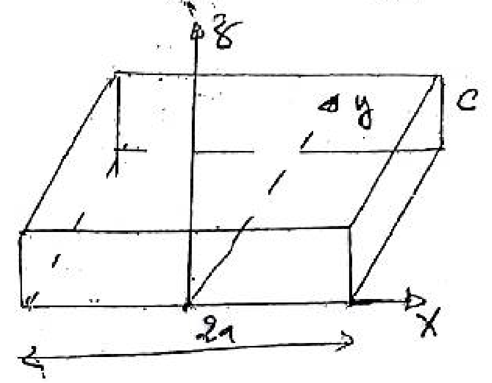
de symetrie $\Rightarrow$ $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ (0,5)

2) Parallélipipède :

$-a \leq x \leq a$

$0 \leq y \leq b$

$0 \leq z \leq c$



$$\int x^2 dm = \rho \iiint x^2 dx\, dy\, dz$$

$$= \rho \int_{-a}^{a} x^2 dx \int_0^b dy \int_0^c dz = \rho \frac{2}{3} a^3 bc \quad (0,5)$$

$$\int y^2 dm = \rho \iiint y^2 dx\, dy\, dz = \rho \int_{-a}^{a} dx \int_0^b y^2 dy \int_0^c dz = \rho \frac{2}{3} ab^3 c \quad (0,5)$$

$$\int z^2 dm = \rho \iiint z^2 dx\, dy\, dz = \rho \int_{-a}^{a} dx \int_0^b dy \int_0^c z^2 dz = \rho \frac{2}{3} abc^3 \quad (0,5)$$

$$I_x = \int y^2 dm + \int z^2 dm = \rho\, 2abc \left[b^2/3 + c^2/3 \right] \quad (0,25)$$

$$I_y = \int x^2 dm + \int z^2 dm = 2\rho\, abc \left[a^2/3 + c^2/3 \right] \quad (0,25)$$

$$I_z = \int x^2 dm + \int z^2 dm = \rho\, 2abc \left[a^2/3 + b^2/3 \right] \quad (0,25)$$

(oxy) est un plan de symetrie $\Rightarrow$ $I_{xy} = I_{xz} = 0$

$$I_{yz} = \int yz\, dm = \rho \iiint yz\, dm = \rho \int_{-a}^{a} dx \int_0^b y\, dy \int_0^c z\, dz$$

$$\boxed{I_{yz} = \rho \frac{ab^2c^2}{2}} \quad (0,25)$$

Page

3) Déterminons $J_O(x,y,z)$ (cylindre) d'abord, en utilisons Huygens :

$\vec{OG}\begin{pmatrix} 0 \\ a/2 \\ c/2 \end{pmatrix}$; $I_x = I_{x_1} + M_{cyl}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$ 0,25

$$\boxed{I_x = \frac{\rho\pi R^4}{4} + \frac{\rho\pi R^2 c^3}{12} + \rho\pi R^2 c\left[\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}\right]}$$

$$I_y = I_{y_1} + M_{cyl}\left[\left(c/2\right)^2\right] = \frac{\rho\pi R^4}{4} + \frac{\rho\pi R^2 c^3}{12} + \frac{\rho\pi R^2 c^3}{4}$$

$$= \frac{\rho\pi R^4}{4} + \frac{\rho\pi R^2 c^3}{3}$$ 0,25

$$I_z = I_{z_1} + M_{cyl}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{\rho\pi R^4 c}{2} + \rho\pi R^2 c\,\frac{a^2}{4}$$ 0,25

$$I_{xy} = \overset{=0}{I_{x_1y_1}} + M_{cyl}(0)\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$ 0,25

$$I_{xz} = \overset{=0}{I_{x_1z_1}} + M_{cyl}(0)\left(\frac{c}{2}\right) = 0$$ 0,25

$$I_{yz} = I_{y_1z_1} + M_{cyl}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right) = \rho\pi R^2\frac{ac^2}{4}$$ 0,25

Système ≡ Parallélipipède (1) − Cylindre (2)

$$J_{O/(x,y,z)}(\text{Système}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}$$

<u>avec</u>

$A = I_x(1) - I_x(2)$ $\quad B = I_y(1) - I_y(2)$

$C = I_z(1) - I_z(2)$ $\quad D = I_{xz}(1) - I_{yz}(2)$

0,5

NIVDOCS.COM

U.S.T.H.B.
Faculté de GM&GP
2ème année Licence ST
Sections : F, G, H

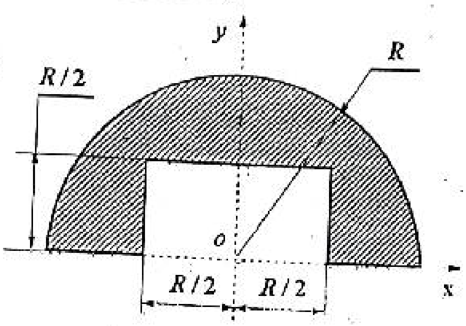
HB - P 07/06/2011.
8h30.

31 Mai 2011
Durée : 1 h 30

Epreuve Finale de Mécanique Rationnelle II

Exercice 1 : (6 pts)

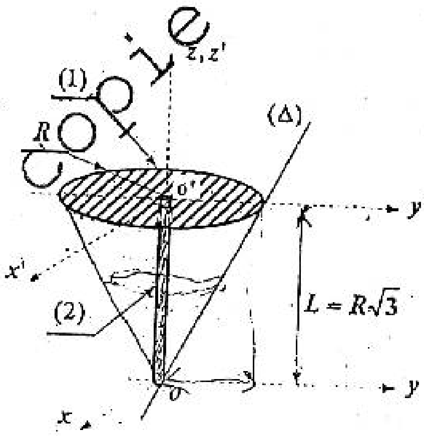
Soit un élément surfacique de centre d'inertie G formé d'un demi disque de rayon R, tronqué d'un rectangle de cotés R et R/2, comme le montre la figure ci-contre.



1. Calculer l'ordonnée Y_G du centre d'inertie de cette plaque, par les calculs d'intégrales et du barycentre.
2. Par le théorème de Guldin, et sans calcul du barycentre, retrouver directement l'ordonnée Y_G du centre d'inertie de cet élément.

Exercice 2 : (10 pts)

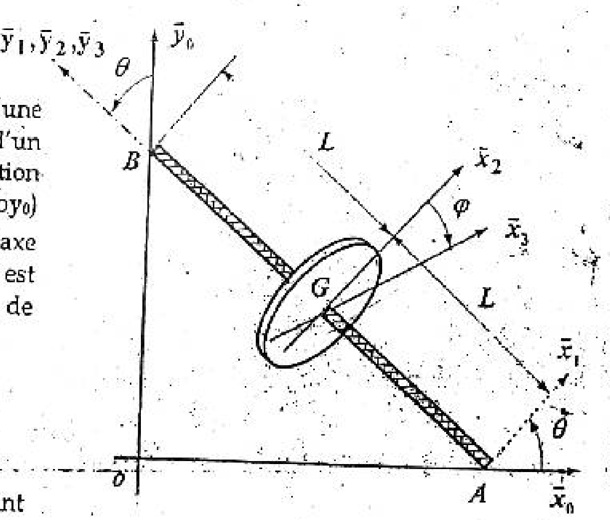
Soit le système matériel ci-contre, composé d'un disque (1) de rayon R et de masse M fixé au point o' à une tige (2) de longueur $L = R\sqrt{3}$ et de masse m.



1. Déterminer en fonction de M et R le tenseur d'inertie du disque au point o' par rapport au repère R'(o',x',y',z').
2. Déterminer en fonction de m et R le tenseur d'inertie de la tige au point o par rapport au repère R(o,x,y,z).
3. Déterminer le tenseur d'inertie du système (1+2) au point o par rapport au repère R(o,x,y,z), si m = M/4.
4. Calculer en fonction de M et R le moment d'inertie du système (1+2) par rapport à la droite (Δ).

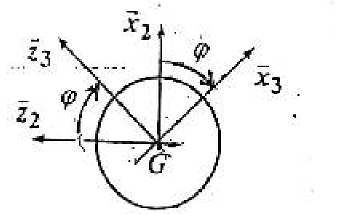
Exercice 3 : (4 pts)

Le système en mouvement ci-contre, est composé d'une tige AB de longueur 2L et de masse négligeable et d'un disque de rayon R et de masse m. La vitesse de rotation de la tige induite par son mouvement dans le plan (x_0oy_0) est $\dot{\theta}$ =cte, de tel sorte que son extrémité A glisse sur l'axe ox_0 et son extrémité B glisse sur l'axe oy_0. Le disque est animé d'un mouvement de rotation au point G autour de la tige AB, avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ =cte.



Sachant que $\overrightarrow{V^0(G)} = (L\dot{\theta}\cos 2\theta)\vec{x}_1 - (L\dot{\theta}\sin 2\theta)\vec{y}_1$ et en prenant le repère R_1 comme repère de projection :

1. Calculer la quantité de mouvement du système.
2. Calculer le moment cinétique du système au point A par rapport au repère R_o.
3. Calculer l'énergie cinétique du système.

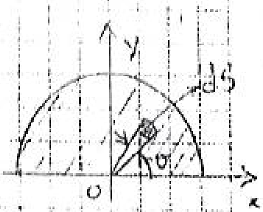


On donne : $\overline{\overline{J}}_G^{(disque)} = \begin{bmatrix} A/2 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A/2 \end{bmatrix}_{(G,R_1)}$

Bakri + Soufi
Copie

Corrigé du 2ème Partiel de Mécanique Rationnelle II — Mai 2011

Exercice 1 (6pts)

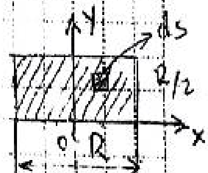


1°/ Calcul de Y_G du demi disque :

$Y_{G_d} = \frac{1}{S}\int y \cdot dS$; $dS = r\,d\theta\,dr$, $y = r\sin\theta$

$Y_{G_d} = \frac{2}{\pi R^2}\iint (r\sin\theta)(r\,d\theta\,dr) = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = \boxed{\frac{4R}{3\pi}}$

b/ Calcul de Y_G du Rectangle :



$Y_{G_{rect}} = \frac{1}{S}\int y \cdot dS = \frac{2}{R^2}\int y \cdot dx \cdot dy$

$Y_{G_{rec}} = \frac{2}{R^2}\int_0^{R/2} y\,dy \int_{-R/2}^{R/2} dx = \boxed{\frac{R}{4}}$

Calcul du barycentre du système :

$Y_G = \frac{\sum Y_{G_i} S_i}{\sum S_i} = \frac{\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi R^2}{2}\right) - \left(\frac{R}{4}\right)\left(\frac{R^2}{2}\right)}{\frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{2}} = \frac{R\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right)}{(\pi - 1)} = \frac{13}{12}\frac{R}{(\pi - 1)}$

2°/ Calcul par théorème de Guldin :

la rotation de la surface autour de l'axe $Ox \rightarrow$ Volume V

$V = 2\pi Y_G S \Rightarrow Y_G = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 R}{2\pi\left(\frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right)} = \frac{13}{12}\frac{R}{(\pi - 1)}$

Exercice 2 : (10pts)

1°/ Tenseur d'Inertie du Disque en O'

$I_{x'} = I_{y'} = \frac{I_{z'}}{2}$ (corps de Révolution)

$I_{z'} = \int (x^2 + y^2)\,dm = \int r^2 dm = \int r^2 (\rho\, r\,d\theta\,dr) = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$

$I_{z'} = \rho\frac{R^4}{4}2\pi = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 = \frac{1}{2}MR^2$; $M = \rho S = \rho\pi R^2$

$I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{2}I_{z'} = \frac{1}{4}MR^2$

$I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0$ (2 plans de symétrie et dm ... φ)

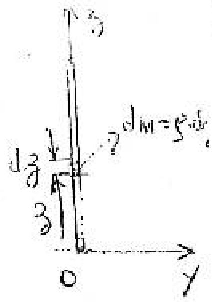
$$I_{O'}(\text{disque}) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{/R'}$$

2°/ Tenseur d'Inertie de la tige en $O/_R$: avec $m = \rho \cdot L = \rho \cdot R\sqrt{3}$

$I_x = I_y = \int z^2 \, dm$; $(dim\,x = 0,\ dim\,y = 0) \Rightarrow I_z = 0$ (0,5)

$I_x = I_y = \int z^2 (\rho \cdot dz) = \rho \int_0^L z^2 \cdot dz = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$ (0,5)

$l = R\sqrt{3} \Rightarrow I_x = I_y = mR^2$ (0,5)



$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \quad (x = y = 0)$ (0,5)

$$J_{O\,tige} = \begin{bmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{/R} \quad (0,5)$$

3°/ Tenseur d'Inertie du système en $O/_R$: $\boxed{\vec{OO'} = R\sqrt{3}\,\vec{z}}$ (0,5)

a/ $J_{O\,disque} = J_{O'\,disque} + M[H]$ (0,5) H : Matrice de Huyghens généralisée

$$J_{O\,dis} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3MR^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{/R}$$ (0,5) (0,5)

b°/ Calcul du Tenseur du Système (disque + tige)$/_O$ avec $m = \frac{M}{4}$

$$J_{O\,sys} = J_{O\,disque} + J_{O\,tige} = \begin{bmatrix} \frac{13MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{M}{4}R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}$$ (0,5)

4°/ Calcul de I_Δ : (0,5) $I_\Delta = \vec{n}^t \cdot J_O \, \vec{n}$ avec $\vec{n} = \begin{vmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{vmatrix}$ (0,5)

$$I_\Delta = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{7MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \frac{5}{4} MR^2$$ (0,5) + (0,5) = (1pt) (0,5)

EXERCICE 3 : (4pts)

1°/ $\vec{\sigma}^{\,0}/_{R_1} = m\vec{V}(G) = \begin{vmatrix} mL\dot\theta\cos 2\theta \\ -mL\dot\theta\sin 2\theta \\ 0 \end{vmatrix}$ (0,5)

$\vec{\Omega}^0_3 = \vec{\Omega}^2_3 + \vec{\Omega}^1_2 + \vec{\Omega}^0_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot\varphi \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot\varphi \\ \dot\theta \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,5)

$\vec{AG} = L\vec{y}_1$ (0,5)

2°/ $\vec{\mu}^0(A)/_{R_1} = (J_G \cdot \vec{\Omega}^0_3)/_{R_1} + \vec{AG} \wedge \vec{\sigma}^0$ (0,5)

$$\vec{\mu}^0(A)/_{R_1} = \begin{bmatrix} A/2 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot\varphi \\ \dot\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{vmatrix} mL\dot\theta\cos 2\theta \\ -mL\dot\theta\sin 2\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ A\dot\varphi \\ \frac{A}{2}\dot\theta - mL^2\dot\theta\cos 2\theta \end{vmatrix}_{R_1}$$ (0,5)

3°/ $E^0_C = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^{0\,t}_3 \, J_G \, \vec{\Omega}^0_3 + \frac{1}{2} m V^0(G)^2$ (0,5)

$E^0_C = \frac{1}{2}(0, \dot\varphi, \dot\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ A\dot\varphi \\ \frac{A}{2}\dot\theta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}m\left[(L\dot\theta\cos 2\theta)^2 + (-L\dot\theta\sin 2\theta)^2\right]$ (0,5)

$E^0_C = \frac{1}{2}\left(A\dot\varphi^2 + \frac{A}{2}\dot\theta^2\right) + \frac{1}{2}mL^2\dot\theta^2 = \frac{1}{2}A\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\dot\theta^2\left(mL^2 + \frac{A}{2}\right)$ (0,5)

Exercice 4

1) $\overrightarrow{\mu^0(G)} = I_{G/R_1} \cdot \overrightarrow{\Omega^0} + \cancel{\overrightarrow{GG}}^{\,0} \wedge m \overrightarrow{V^0(G)}$ 0,5

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & B & 0 \\ D & 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D\dot\varphi \\ 0 \\ C\dot\varphi \end{Bmatrix}_{R_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{R_1 \to R_0}} \begin{Bmatrix} D\dot\varphi \\ 0 \\ C\dot\varphi \end{Bmatrix}_{R_1}$$ 1

$$\overrightarrow{\mu^0(G)} = \begin{Bmatrix} D\dot\varphi\cos\varphi \\ D\dot\varphi\sin\varphi \\ C\dot\varphi \end{Bmatrix}_{R_0}$$ 0,5

0,5

$\overrightarrow{\mu^0(O)} = \overrightarrow{\mu^0(G)} + \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{V^0(G)}$ ou $\overrightarrow{\mu^0(O)} = I_G \overrightarrow{\Omega^0_1} + \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{V^0(G)}$

$$\overrightarrow{\mu^0(O)} = \begin{Bmatrix} D\dot\varphi\cos\varphi \\ D\dot\varphi\sin\varphi \\ C\dot\varphi \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} b-a/3 \\ 0 \\ a/3 \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{b-a}{3} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} \dot\varphi = \begin{Bmatrix} D\dot\varphi\cos\varphi \\ D\dot\varphi\sin\varphi \\ C\dot\varphi \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} -\frac{ma}{3}(b-a)\dot\varphi \\ 0 \\ \frac{m(b-a)}{9}\dot\varphi \end{Bmatrix}$$ 0,5

$$\overrightarrow{\mu^0(O)} = \begin{Bmatrix} \left[D - \frac{ma}{9}(b-a)\right]\dot\varphi\cos\varphi \\ \left[D - \frac{ma}{9}(b-a)\right]\dot\varphi\sin\varphi \\ \left[C + \frac{m}{9}(b-a)^2\right]\dot\varphi \end{Bmatrix}_{R_0}$$ 0,5

2) $\overrightarrow{\delta^0(G)} = \frac{d^0}{dt}\overrightarrow{\mu^0(G)} + \cancel{\overrightarrow{V^0(G)} \wedge m\overrightarrow{V^0(G)}}^{\,0} = \begin{Bmatrix} -D\dot\varphi^2\sin\varphi \\ D\dot\varphi^2\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$ 0,5 0,5

$$\overrightarrow{\delta^0(O)} = \frac{d^0}{dt}\overrightarrow{\mu^0(O)} = \begin{Bmatrix} -\left[D - \frac{ma}{9}(b-a)\right]\dot\varphi^2\sin\varphi \\ \left[D - \frac{ma}{9}(b-a)\right]\dot\varphi^2\cos\varphi \end{Bmatrix}$$ 0,5

3) $E_c^0 = \frac{1}{2}m\overrightarrow{V^0(G)}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega^0_1}^t \cdot I_G \cdot \overrightarrow{\Omega^0_1}$ 0,5

$E_c^0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{b-a}{3}\right)^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}C\dot\varphi^2$ 0,5

Tourne la page

USTHB
$2^{ème}$ Année LST

Epreuve fondamentale I de mécanique rationnelle

Le 05/01/2015
Durée : 1h30min

Exercice 1 (5 pts)

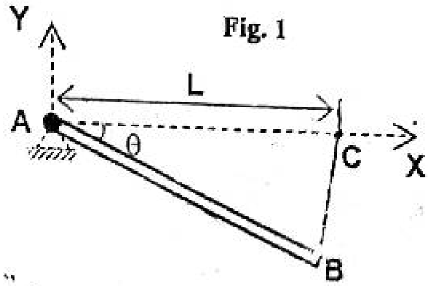


Fig. 1

Une barre AB de poids P et de longueur L, est articulée en A. Elle est maintenue en équilibre à la position indiquée sur la Fig. 1, par un câble inextensible. Ce dernier est fixé à l'extrémité de la barre en B et au mur en C, tel que AC = L. L'angle formé entre AB et l'horizontale est noté θ.

- Déterminer la réaction de la liaison en A ainsi que la tension du câble BC en fonction du poids P et de l'angle θ dans le système d'axes (A,X,Y).

Exercice 2 (6 pts)

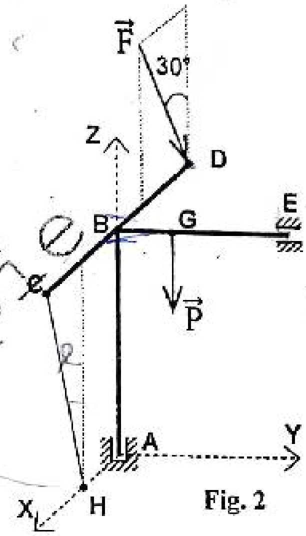


Fig. 2

Une structure de poids P, de centre d'inertie G, est constituée de 3 barres AB, CD et BE, soudées en B. Elle est maintenue en équilibre à la position indiquée sur la Fig.2 par une liaison sphérique en A, une liaison cylindrique en B ainsi qu'un câble fixé à la structure en C et au sol au point H. Une force F=2P contenue dans le plan XZ, est appliquée en D et fait un angle de 30° avec l'axe Z.
On donne AB = 5m, BC = BD = 1,5m, BE = 3m et AH = BG = 1m.

- Déterminer les efforts des liaisons en A et E ainsi que la tension du câble en fonction du poids P.

Exercice 3 (7 pts)

Une barre coudée OAB tourne autour de l'axe $\overrightarrow{Z_0}$ à la vitesse angulaire $\dot{\psi}$. Une hélice à deux pales qui tourne à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ autour de l'axe $\overrightarrow{Y_2}$, est montée à extrémité B de la barre OAB (Fig. 3). Soit $R_1(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ le repère lié à la barre coudée et $R_3(B,\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})$ le repère lié à l'hélice. On donne OA=AB=L. Soit R_1 le repère de projection et le repère relatif.

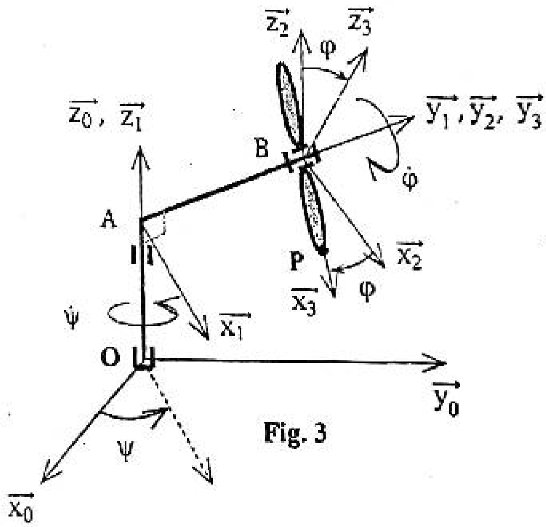


Fig. 3

- Etablir les 3 figures planes entre les repères successifs du mouvement de l'hélice/R_0 ainsi que les matrices de passage associées. Déterminer, ensuite, le vecteur rotation de l'hélice par rapport à R_0.
- Par dérivation, déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point B par rapport à R_0.
- Par la cinématique du solide, déterminer les vecteurs vitesse et accélération absolues du point P, extrémité d'une pale, tel que $\overrightarrow{BP} = R\,\overrightarrow{x_3}$.
- Par composition de mouvement retrouver le vecteur vitesse absolue du point P.
- Déterminer le vecteur accélération du point P par rapport à R_2. Exprimer ce vecteur dans R_3.

Questions de cours (2pts)

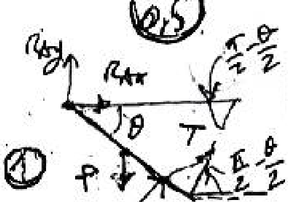
Soit $R_i(O_i,\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i})$ un repère de référence, $R_k(O_k,\overrightarrow{x_k},\overrightarrow{y_k},\overrightarrow{z_k})$ un repère relatif en mouvement par rapport à R_i. Soit un point M appartenant à un solide S_j en mouvement par rapport à R_k.

- Donnez les expressions des vecteurs vitesse relative et vitesse d'entrainement du point M.
- Que devient l'expression du vecteur vitesse relative si $R_j(O_j,\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{y_j},\overrightarrow{z_j})$, le repère lié à S_j, est un repère de projection.

Corrigé de l'EP. Fondamentale 1 de Méca - Rat. 1 — Jan. 2015

Exo 1 (0,5)

$\vec{R_A} + \vec{P} + \vec{T} = 0$ (1)



$R_{Ax} + T\sin\frac{\theta}{2} = 0$ (1)

$R_{Ay} - P + T\cos\frac{\theta}{2} = 0$ (1)

$\Sigma M_{/A}(F_{ext}) = -PL\cos\theta + TL\cos\theta/2 = 0$ $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow T = \frac{P}{2}\frac{\cos\theta}{\cos\theta/2}$ (0,5)

(0,5) $R_{Ax} = -T\sin\theta/2 = -\frac{P}{2}\cos\theta\,tg\,\theta/2$

Sens de R_{Ax} est à inverser

(1) $R_{Ay} = P - T\cos\theta/2 = P - \frac{P}{2}\cos\theta = P(1-\frac{\cos\theta}{2})$

Exo 2

$\vec{R_A} + \vec{R_E} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = 0$ (0,25)

$R_{Ax} + R_{Ex} - T\sin\beta - F\sin 30° = 0$ (0,75)

$R_{Ay} = 0$ (0,25)

$\Rightarrow R_{Az} + R_{Ez} - T\cos\beta - F\cos 30 = 0$ (0,25)

(0,25) $tg\,\beta = \frac{0,5}{5} = 0,1 \Rightarrow \beta = 5,71°$ (0,25)

$\Sigma M_{/A}(F_{ext}):\ \vec{AC}\wedge\vec{T} + \vec{AG}\wedge\vec{P} + \vec{AE}\wedge\vec{R_E} + \vec{AD}\wedge\vec{F} = 0$ (0,5)

$-P + 3R_{Ez} = 0$
$0,9951T + 5R_{Ex} - 7,598P = 0$ (1,5)
$-3R_{Ex} = 0$

$T = 7,..P$, $R_{Ex} = 0$, $R_{Ez} = P/3$ (1,5)

$R_{Ax} = 1,76P$, $R_{Ay} = 0$, $R_{Az} = 7,36P$

Exo 3 (1,5)

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & y_1 & z_1 \\ \hline x_0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ y_0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ z_0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$^1_2P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\Omega}^1_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$^2_3P = \begin{array}{c|ccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline x_2 & \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ y_2 & 0 & 1 & 0 \\ z_2 & -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{array}$$

$\vec{\Omega}^0_3 = \vec{\Omega}^0_1 + \vec{\Omega}^1_2 + \vec{\Omega}^2_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{vmatrix}_{0,1,2} + \begin{vmatrix} 0 \\ \dot\varphi \\ 0 \end{vmatrix}_{1,2}$

$\vec{\Omega}^0_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot\varphi \\ \dot\psi \end{vmatrix}$ (0,5)

$\vec{V}^0(B) = \frac{d^0\vec{OB}}{dt} = \frac{d^1\vec{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_1\wedge\vec{OB}$, $\vec{OB} = \begin{vmatrix} 0 \\ L \\ L \end{vmatrix}_1$

$\vec{V}^0(B) = \begin{vmatrix} -\dot\psi L \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_1$ (0,5)

$\vec{\gamma}^0(B) = \frac{d^1\vec{V}^0(B)}{dt} + \vec{\Omega}_1\wedge\vec{V}^0(B) = \begin{vmatrix} -\ddot\psi L \\ -\dot\psi^2 L \\ 0 \end{vmatrix}_1$ (0,5)

- $\vec{V}^0(P) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_3\wedge\vec{BP} = \begin{vmatrix} -\dot\psi L - R\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot\psi R\cos\varphi \\ -\dot\varphi R\cos\varphi \end{vmatrix}$ (0,75)

$\vec{BP} = \begin{vmatrix} R\cos\varphi \\ 0 \\ -R\sin\varphi \end{vmatrix}_{1/2}$

$\vec{\gamma}^0(P) = \vec{\gamma}^0(B) + \frac{d^0\vec{\Omega}_3}{dt}\wedge\vec{BP} + \vec{\Omega}_3\wedge(\vec{\Omega}_3\wedge\vec{BP})$ (0,25)

$\frac{d^0\vec{\Omega}_3}{dt} = \frac{d^1\vec{\Omega}_3}{dt} + \vec{\Omega}_1\wedge\vec{\Omega}_3 = \begin{vmatrix} -\dot\psi\dot\varphi \\ \ddot\varphi \\ \ddot\psi \end{vmatrix}$ (0,25)

$\frac{d^0\vec{\Omega}_3}{dt}\wedge\vec{BP} = \begin{vmatrix} -R\ddot\varphi\sin\varphi \\ \ddot\psi R\cos\varphi - R\dot\psi\dot\varphi\sin\varphi \\ -R\ddot\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$

$\vec{\Omega}_3\wedge(\vec{\Omega}_3\wedge\vec{BP}) = \begin{vmatrix} -R\cos\varphi(\dot\varphi^2+\dot\psi^2) \\ -R\dot\varphi\dot\psi\sin\varphi \\ R\dot\varphi^2\sin\varphi \end{vmatrix}$

$\vec{\gamma}^0(P) = \begin{vmatrix} -\ddot\psi L - R\ddot\varphi\sin\varphi - R\cos\varphi(\dot\varphi^2+\dot\psi^2) \\ -\dot\psi^2 L + \ddot\psi R\cos\varphi - 2R\dot\psi\dot\varphi\sin\varphi \\ -R\ddot\varphi\cos\varphi + R\dot\varphi^2\sin\varphi \end{vmatrix}$ (0,75)

- $\vec{V}^0(P) = \vec{V}^1(P) + \vec{V}^0_1(P)$

$\vec{V}^1(P) = \frac{d^1\vec{AP}}{dt} = \begin{vmatrix} -R\dot\varphi\sin\varphi \\ 0 \\ -R\dot\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}_1$ (0,5)

$\vec{V}^0_1(P) = \cancel{\vec{V}^0(A)} + \vec{\Omega}^0_1\wedge\vec{AP} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix} R\cos\varphi \\ L \\ -R\sin\varphi \end{vmatrix}$

$\vec{V}^0_1(P) = \begin{vmatrix} -\dot\psi L \\ \dot\psi R\cos\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{V}^0(P) = \begin{vmatrix} -\dot\psi L - R\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot\psi R\cos\varphi \\ -R\dot\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$ (0,5)

$\vec{\gamma}^2(P) = \frac{d^2\vec{V}^2(P)}{dt}$, $\vec{V}^2(P) = \frac{d^2\vec{BP}}{dt} = \frac{d^1\vec{BP}}{dt}$

$\vec{\gamma}^2(P) = \frac{d^1\vec{V}^2(P)}{dt} + \cancel{\vec{\Omega}^2_1\wedge\vec{V}^2(P)} = \begin{vmatrix} -R\ddot\varphi\sin\varphi - R\dot\varphi^2\cos\varphi \\ 0 \\ -R\ddot\varphi\cos\varphi + R\dot\varphi^2\sin\varphi \end{vmatrix}$ (0,5)

$\vec{\gamma}^2(P)/_{R_3} = {}^2_3P^t \ast \vec{\gamma}^2(P)/_{R_2} = \begin{vmatrix} -R\dot\varphi^2 \\ 0 \\ -R\ddot\varphi \end{vmatrix}_3$ (0,5)

Questions de cours

$\vec{V}^k(M) = \frac{d^k\vec{O_kM}}{dt}$ (0,5), $\vec{V}^l_k(M) = \vec{V}^l(O_k) + \vec{\Omega}^l_k\wedge\vec{O_kM}$ (0,75)

$\vec{V}^k(M) = \frac{d^j\vec{O_kM}}{dt} + \vec{\Omega}^k_j\wedge\vec{O_kM}$ (0,75)

Solution acceptée (question iv exercice 3)

- Composition de mvt :

$\vec{V^0}(P) = \vec{V^1}(P) + \vec{V_1^0}(P)$, $\vec{V^1}(P) = \vec{V^2}(P)$ (car $R_1 = R_2$ pas de mvt de R_1/R_2 $x_1 // x_2$, $y_1 // y_2$ et $z_1 // z_2$)

$= \vec{V^2}(P) + \vec{V_1^0}(P)$, $\vec{V^2}(P) = \vec{V_3^2}(P)$ (car P est 1 pt fixe ds R_3 ($P \in R_3$))

donc $\vec{V^0}(P) = \vec{V_3^2}(P) + \vec{V_1^0}(P)$

$\vec{V_3^2}(P) = \vec{\Omega_3^2} \wedge \vec{BP}$ (mvt de rotation de R_3/R_2)

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot\phi \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} R\cos\phi \\ 0 \\ -R\sin\phi \end{Bmatrix}_{R_1}$$

$$= \begin{pmatrix} -R\dot\phi\sin\phi \\ 0 \\ -R\dot\phi\cos\phi \end{pmatrix}_{R_1}$$

$\vec{V_1^0}(P) = \vec{\Omega_1^0} \wedge \vec{OP}$ (ou $\Omega_1^0 \wedge \vec{AP}$) (mvt de rotation de R_1/R_0)

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ L \\ L - R\sin\phi \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -L\dot\psi \\ R\dot\psi\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{V^0}(P) = \begin{pmatrix} -L\dot\psi - R\dot\phi\sin\phi \\ R\dot\psi\cos\phi \\ -R\dot\phi\cos\phi \end{pmatrix}_{R_1}$$

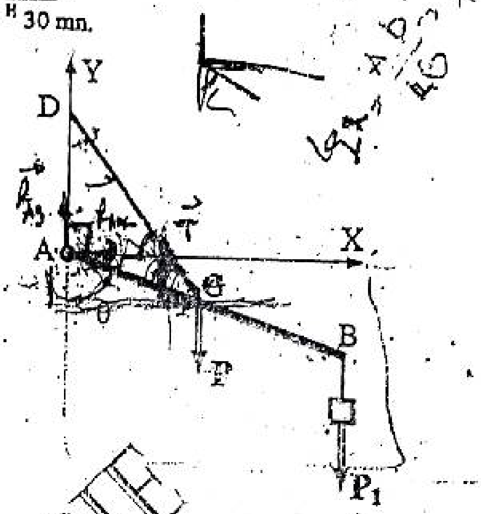
USTHB/FGMGP
$2^{ème}$ année Licence. ST

25 Janvier 2011

Epreuve fondamentale 1 de mécanique rationnelle

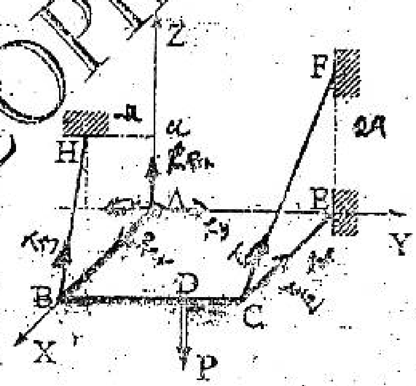
Documents non autorisés - temps alloué : 1 H 30 mn.

Exercice 1 : (5pts) : Une poutre homogène AB, disposée dans le plan vertical XY, est de poids P et de longueur 2a ; elle est liée en A par une articulation et maintenue en équilibre à la position indiquée, par l'intermédiaire d'un câble inextensible GD. Une charge P_1 est appliquée à son extrémité B.



On donne: AG = GB = AD = a = 1 m, P = P_1 = 100 N, θ = 60°
Calculer la réaction de liaison en A, ainsi que la tension du câble.

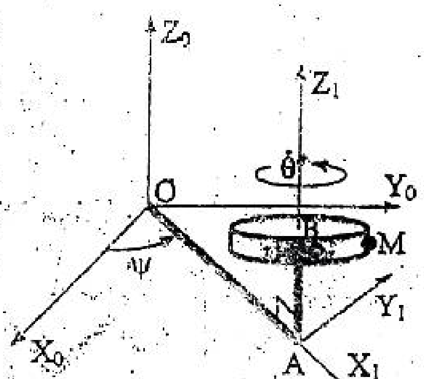
Exercice 2 : (8pts) : Une barre ABC coudée en B ($\widehat{ABC} = 90°$) de poids négligeable, sur laquelle est appliquée une charge P = 500 N au point D, elle est maintenue en position horizontale à l'aide d'une liaison sphérique en A et de trois câbles CE, CF et BH.



On donne : AB = BC = 2a, DC = 2a/3 ; les coordonnées des points H et F sont respectivement : (0, -a, a) et (0 2a 2a).
Calculer la réaction de la liaison sphérique A, ainsi que les tensions des câbles.

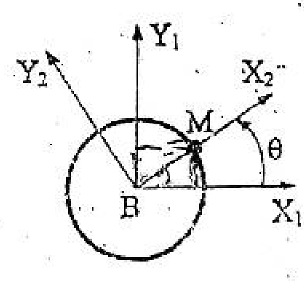
Exercice 3 : (7 pts) : Soit le manège composé :

- D'une barre coudée OAB (solide S_1) en rotation à vitesse constante autour de l'axe Z_0. Le repère R_1 lié à S_1 se déduit de R_0 par une rotation Ψ autour de l'axe Z_0.
- D'un disque de rayon R et d'épaisseur négligeable (solide S_2) en rotation à vitesse constante autour de l'axe Z_1. Le repère R_2 lié à S_2 se déduit de R_1 par une rotation θ autour de l'axe Z_1.



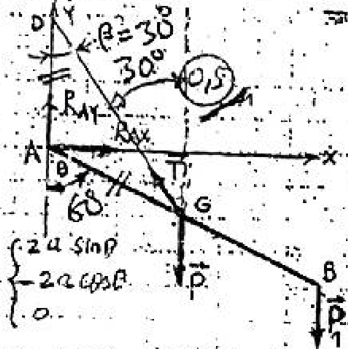
On donne OA=L, AB= a et $\mathbf{R_1}$ le repère de projection.
Calculer par dérivation:

1- Le vecteur rotation instantanée du disque par rapport à R_0
2- Les vecteurs vitesses des points A et B par rapport à R_0.
3- Le vecteur vitesse d'un point M de la périphérie du disque par rapport à R_0, tel que $\overrightarrow{BM} = R\ \overrightarrow{X2}$.
4- Le vecteur accélération du point M par rapport à R_0.
5- Le vecteur vitesse du point M par rapport à R_1, exprimé dans le repère R_2.



Corrigé de l'Epreuve de mécanique rationnelle

Exercice 1 : Isolons la poutre AB



Le Δ ADG est isocèle

$\widehat{GAD} = \pi - \theta = 120°$

$\Rightarrow \beta = 30°$

$\Rightarrow \vec{T} = \begin{cases} -T\sin\beta \\ T\cos\beta \\ 0 \end{cases}$ (0,75)

$\vec{AG} = \begin{cases} a\sin\theta \\ -a\cos\theta \\ 0 \end{cases}$; $\vec{AB} = \begin{cases} 2a\sin\theta \\ -2a\cos\theta \\ 0 \end{cases}$ (0,5)

$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{AX} - T\sin 30 = 0$ (0,5) (1)

$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{AY} - P - P_1 + T\cos 30 = 0$ (2) (0,5)

$\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AG}\wedge(\vec{P}+\vec{T}) + \vec{AB}\wedge\vec{P_1} = \vec{0}$ (0,5)

$\Rightarrow \sum M_{z/A} = \frac{aT}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}a\,P - \sqrt{3}\,a\,P_1 = 0$ (3) (1)

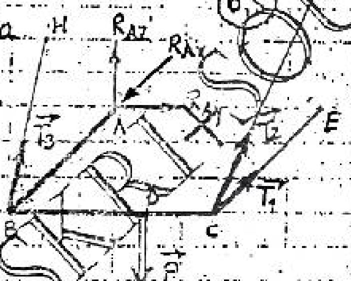
(3) $\Rightarrow T = \sqrt{3}\,(P + 2P_1) = 519{,}62\ N$ AN (0,25) x3

(1) $\Rightarrow R_{AX} = 259{,}81\ N$; (2) $\Rightarrow R_{AY} = 250\ N$

Exercice 2 : Isolons la barre ABC

$\vec{CF} = \begin{cases} -2a \\ 0 \\ 2a \end{cases}$; $|\vec{CF}| = 2\sqrt{2}\,a$

$\vec{BH} = \begin{cases} -2a \\ a \\ a \end{cases}$; $|\vec{BH}| = \sqrt{6}\,a$



$\vec{T_1} = \begin{cases} -T_1 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ (0,5)

$\vec{T_2} = T_2\,\frac{\vec{CF}}{|\vec{CF}|}$

$B\begin{cases} 2a \\ a \\ 0 \end{cases}$; $C\begin{cases} 2a \\ 2a \\ 0 \end{cases}$; $H\begin{cases} 0 \\ a \\ a \end{cases}$; $E\begin{cases} 0 \\ 2a \\ 2a \end{cases}$

$\vec{T_2} = \begin{cases} -T_2/\sqrt{2} \\ 0 \\ T_2/\sqrt{2} \end{cases}$ (0,5)

$\vec{AB} = \begin{cases} 2a \\ 0 \\ 0 \end{cases}$; $\vec{AD} = \begin{cases} 2a \\ \frac{4}{3}a \\ 0 \end{cases}$; $\vec{AC} = \begin{cases} 2a \\ 2a \\ 0 \end{cases}$ (0,5)

$\vec{T_3} = T_3\,\frac{\vec{BH}}{|\vec{BH}|} = \begin{cases} -2T_3/\sqrt{6} \\ -T_3/\sqrt{6} \\ T_3/\sqrt{6} \end{cases}$ (0,5)

$\sum\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R_A} + \vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} = \vec{0}$ (0,5)

ce qui conduit à :
$$\begin{cases} R_{AX} - T_1 - \frac{T_2}{\sqrt{2}} - \frac{2T_3}{\sqrt{6}} = 0 & (0{,}5)\ (1) \\ R_{AY} - \frac{T_3}{\sqrt{6}} = 0 & (0{,}5)\ (2) \\ R_{AZ} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} + \frac{T_3}{\sqrt{6}} - P = 0 & (0{,}5)\ (3) \end{cases}$$

(0,5) $\sum\vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB}\wedge\vec{T_3} + \vec{AD}\wedge\vec{P} + \vec{AC}\wedge(\vec{T_1}+\vec{T_2}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}aP + \sqrt{2}\,a\,T_2 = 0 & (4)\ (0{,}5) \\ -\frac{2a}{\sqrt{6}}T_3 + 2aP - \sqrt{2}\,a\,T_2 = 0 & (5)\ (0{,}5) \\ -\frac{2a}{\sqrt{6}}T_3 + 2aT_1 + \sqrt{2}\,a\,T_2 = 0 & (6)\ (0{,}5) \end{cases}$$

$\Rightarrow T_2 = 471{,}4\ N$; $T_3 = 408{,}26\ N$; $T_1 = -160{,}4$

$R_{AX} = 500\ N$; $R_{AY} = 166{,}66\ N$; $R_{AZ} = 0\ N$ AN (0,25) x6

Exercice 3

1°/ $\vec{\Omega}^0_2 = \vec{\Omega}^1_2 + \vec{\Omega}^0_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot\theta \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot\theta + \dot\psi \end{cases}_{R_1}$ (1)

2°/ $\vec{V}^0(A)_{/R_1} = \frac{d^1}{dt}\vec{OA} + \vec{\Omega}^0_1\wedge\vec{OA}$ (0,5) $\vec{OA} = \begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1}$

$= \vec{0} + \begin{cases} 0 \\ L\dot\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$ (0,5) $\vec{OB} = \begin{cases} L \\ 0 \\ a \end{cases}_{R_1}$

$\vec{V}^0(B)_{/R_1} = \frac{d^1}{dt}\vec{OB} + \vec{\Omega}^0_1\wedge\vec{OB} = \vec{0} + \begin{cases} 0 \\ L\dot\psi \\ 0 \end{cases}$ (1)

3°/ $\vec{V}^0(M)_{/R_1} = \frac{d^1}{dt}\vec{OM} + \vec{\Omega}^0_1\wedge\vec{OM}$ (0,5)

$\vec{OM} = \begin{cases} L + R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ a \end{cases}_{R_1}$ (0,5)

$\Rightarrow \vec{V}^0(M)_{/R_1} = \begin{cases} -R\sin\theta\,(\dot\theta+\dot\psi) \\ R\cos\theta\,(\dot\theta+\dot\psi) + L\dot\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$ (1,5)

4°/ $\vec{\gamma}^0(M)_{/R_1} = \frac{d^1}{dt}\vec{V}^0(M) + \vec{\Omega}^0_1\wedge\vec{V}^0$

$\vec{\gamma}^0(M)_{/R_1} = \begin{cases} -R\dot\theta\cos\theta\,(\dot\theta+\dot\psi) \\ -R\dot\theta\sin\theta\,(\dot\theta+\dot\psi) \\ 0 \end{cases} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \\ 0 & 0 & \dot\psi \\ -R(\dot\theta+\dot\psi)\sin\theta & \ldots & \end{vmatrix}$

$= \begin{cases} -R(\dot\theta+\dot\psi)^2\cos\theta - L\dot\psi^2 \\ -R(\dot\theta+\dot\psi)^2\sin\theta \\ 0 \end{cases}_{R_1}$ (1)

(0,5)

5°/ $\vec{V}^1(M)_{/R_2} = \frac{d^2}{dt}\vec{BM} + \vec{\Omega}^1_2\wedge\vec{BM}$ $\vec{BM} = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}_{R_2}$

$= \vec{0} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & \dot\theta \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{cases} 0 \\ R\dot\theta \\ 0 \end{cases}_{R_2}$ (0,5)

Fin

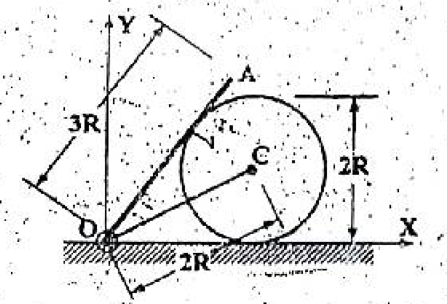
USTHB/FGMGP
2ème année Licence. ST

Epreuve fondamentale de mécanique rationnelle

Janvier 2012

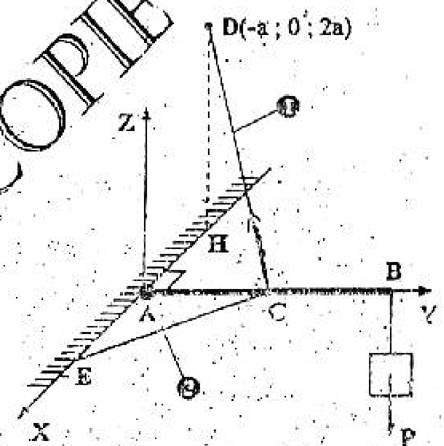
Documents non autorisés - temps alloué : 1 h 30 mn.

EXERCICE 1 : (6 points)



Une barre homogène OA, de poids P = 100 N et de longueur 3R, est articulée en O, autour d'un axe horizontal OZ. Elle s'appuie sur un cylindre lisse (sans Frottements) do rayon R = 20 cm et de poids **Q = 200 N** ; lequel s'appuyant sur un plan horizontal lisse.
Le cylindre est maintenu dans sa position d'équilibre ci-indiquée, par un fil inextensible OC de longueur 2R.
Déterminer la tension du fil, ainsi que la réaction en O.

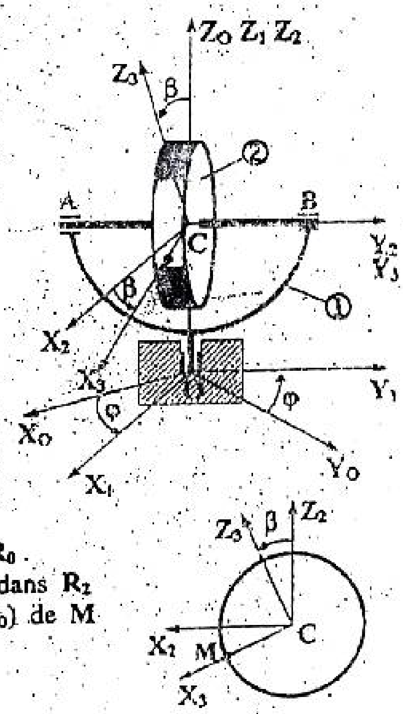
EXERCICE 2 : (7 points)



Une barre horizontale AB, de poids négligeable, liée au mur à l'aide d'une articulation sphérique A, est maintenue dans sa position perpendiculaire au mur, grâce à deux câbles CD et EC, comme indiqué sur la figure ci-contre.
A son extrémité B est suspendu un poids P = 100 N.
Données : AC = AH = AE = a = 1 m
AB = HD = 2a = 2 m
Les coordonnées de D sont : (-a ; 0 ; 2a)

Déterminer la réaction de l'articulation sphérique A, ainsi que les tensions T_1 (du câble ①) et T_2 (du câble ②).

EXERCICE 3: (7 points)



Soit le système mécanique composé :
- d'un cadre ① ayant un pivot (articulation cylindrique) en O , animé **d'un mouvement de rotation à vitesse constante $\dot{\varphi}$ autour de l'axe OZ_O.**
- d'un disque ② de rayon R et d'épaisseur négligeable, soudé à un axe **AB**, lié au cadre ① par les deux articulations cylindriques A et B ; le disque est animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante $\dot{\beta}$ autour de l'axe **CY_2**.

On donne : $OC = AC = CB = L$; $\overrightarrow{CM} = R\,\overrightarrow{X_3}$.
$R_O\ (O,X_O,Y_O,Z_O)$: repère fixe ; $R_1\ (O,X_1,Y_1,Z_1)$: repère lié au cadre ①.
$R_2\ (C,X_2,Y_2,Z_2)$ // à R_1 ; $R_3\ (C,X_3,Y_3,Z_3)$: repère lié au disque ②.

1°/ Etablir les figures planes représentatives des différentes rotations.
2°/ Déterminer le vecteur rotation instantanée du disque par rapport à **R_O** exprimé dans R_2.
3°/ Déterminer par dérivation, la vitesse absolue (par rapport à R_0) de M , exprimée dans R_2.
4°/ En déduire la vitesse absolue de M exprimée dans R_1 et ensuite dans R_0.
5°/ Déterminer par dérivation la vitesse de M par rapport à R_1, exprimée dans R_2
6°/ Déterminer par dérivation, l'accélération absolue (par rapport à R_0) de M exprimée dans R_2.

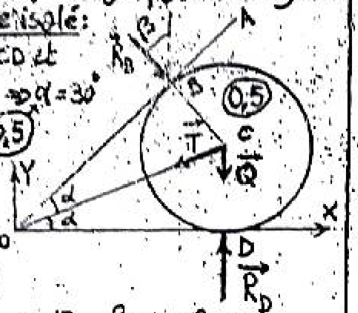
Bonne réussite

USTHB / FGMGP / 2ème année licence ST — Janvier 2012

Corrigé de l'épreuve fondamentale de mécanique rationnelle

EX1 : le système barre + cylindre est hyperstatique $\Rightarrow$ décomposer le système.

Equilibre du cylindre isolé :



dans les 2 triangles OCD et OCB : $\sin\alpha = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$ (0,5)

$\Rightarrow \beta = 2\alpha = 60°$ (0,5)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

$R_B \sin\beta - T\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow R_B = T$ (1) (0,5)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_D - T\sin\alpha - Q - R_B\cos\beta = 0$

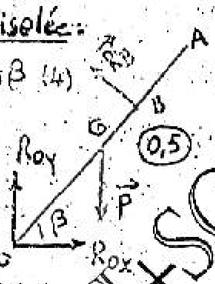
$\Rightarrow R_D - Q = \frac{T + R_B}{2}$ (2) (0,5) ou (1) sans (3)

$\Sigma M_{z/o} = 0 \Rightarrow (R_D - Q)\sqrt{3}R - R_B\sqrt{3}R = 0$

$\Rightarrow R_D - Q = R_B$ (3) (0,5) ou (1) sans (2) idem que (2) avec (1)

les 4 forces $\vec{R_D}$, $\vec{R_B}$, $\vec{T}$ et $\vec{Q}$ sont concourantes en C $\Rightarrow$ on ne peut poser que 2 équations statiques

Equilibre de la barre isolée :



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{0x} = R_B \sin\beta$ (4) (0,5)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$R_B\cos\beta - P + R_{0y} = 0$ (5) (0,5)

$\Sigma M_{z/o} = 0 \Rightarrow$

$R_B \cdot \sqrt{3}R = P\,\frac{3R}{2}\cos\beta$ (6)

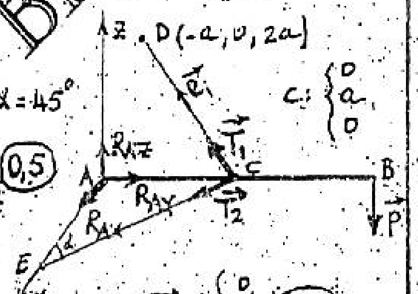
(6) $\Rightarrow R_B = \frac{\sqrt{3}}{4}P$ (0,5) (1) $\Rightarrow T = R_B = \frac{\sqrt{3}}{4}P$

(4) $\Rightarrow R_{0x} = \frac{3}{8}P = 37,5\,N$ (0,5) (0,5) $= 43,3\,N$

(5) $\Rightarrow R_{0y} = \left(\frac{8-\sqrt{3}}{8}\right)P = 78,35\,N$ (0,5)

EX2 :

Dans le Δ ACE : $\alpha = 45°$



D(-a, 0, 2a) ; C : $\begin{cases} 0 \\ a \\ 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{T_2} = \begin{cases} T_2/\sqrt{2} \\ -T_2/\sqrt{2} \\ 0 \end{cases}$ (0,5)

$\vec{R_A} = \begin{cases} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{cases}$ (0,25) $\qquad \vec{P} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P \end{cases}$ (0,25)

$\vec{T_1} = T_1 \cdot \vec{e_1} = T_1 \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|}$; $\vec{CD} = \begin{cases} -a \\ -a \\ 2a \end{cases}$

$|\vec{CD}| = \sqrt{6}\,a$

$\Rightarrow \vec{T_1} = \begin{cases} -T_1/\sqrt{6} \\ -T_1/\sqrt{6} \\ 2T_1/\sqrt{6} \end{cases}$ (1) ; $\vec{AC} = \begin{cases} 0 \\ a \\ 0 \end{cases}$ $\quad \vec{AB} = \begin{cases} 0 \\ 2a \\ 0 \end{cases}$

$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R_A} + \vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$ (0,25)

$\Rightarrow \begin{cases} R_{Ax} - \frac{T_1}{\sqrt{6}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 & (1)\ (0,5) \\ R_{Ay} - \frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 & (2)\ (0,5) \\ R_{Az} - P + \frac{2T_1}{\sqrt{6}} = 0 & (3)\ (0,5) \end{cases}$

$\Sigma \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AC} \wedge (\vec{T_1} + \vec{T_2}) + \vec{AB} \wedge \vec{P} = \vec{0}$ (0,5)

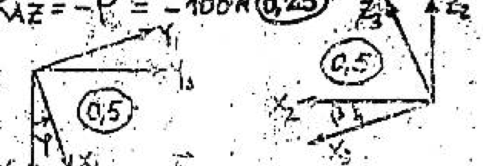
$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{T_1}{\sqrt{6}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} & -\frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} & \frac{2T_1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2a\,T_1}{\sqrt{6}} - 2aP = 0 \quad (0,75)\ (4) \Rightarrow T_1 = \sqrt{6}P = 245\,N\ (0,25) \\ \text{pas de moments autour de } \vec{y} \\ a\left(\frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad (0,75)\ (5) \Rightarrow T_2 = \sqrt{2}P = 141,42\,N\ (0,25) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow R_{Ax} = 0$ (0,25) (2) $\Rightarrow R_{Ay} = 2P = 200\,N$ (0,25)

(3) $\Rightarrow R_{Az} = -P = -100\,N$ (0,25)

EX3 1/



(0,5) (0,5)

2/ $\vec{\Omega}^0_{3/R_2} = \vec{\Omega}^1_3 + \vec{\Omega}^0_2 + \vec{\Omega}^0_1 = \begin{cases} 0 \\ \dot\beta \\ \dot\varphi \end{cases}_{R_2}$ (1)

3/ $\vec{OM} = \begin{cases} R\cos\beta \\ 0 \\ L - R\sin\beta \end{cases}_{R_2}$ (0,5) ;

$\vec{V^0}(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}_{/R_2}\right) + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{OM} = \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\varphi\cos\beta \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_2}$ (1)

4/ $\vec{V^0}(M) = \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\varphi\cos\beta \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_1}$ (0,25) $= \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta\cos\varphi - R\dot\varphi\cos\beta\sin\varphi \\ -R\dot\beta\sin\beta\sin\varphi + R\dot\varphi\cos\beta\cos\varphi \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_0}$ (0,75)

5/ $\vec{V^1}(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}_{/R_2}\right) = \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta \\ 0 \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_2}$ (1)

6/ $\vec{\gamma^0}(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left[\vec{V^0}(M)_{/R_2}\right] + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{V^0}(M)_{/R_2}$ (0,5)

$= \begin{cases} -R\dot\beta^2\cos\beta \\ -R\dot\varphi\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\beta^2\sin\beta \end{cases} + \begin{vmatrix} \vec{x_2} & \vec{y_2} & \vec{z_2} \\ 0 & 0 & \dot\varphi \\ -R\dot\beta\sin\beta & R\dot\varphi\cos\beta & -R\dot\beta\cos\beta \end{vmatrix}$

$= \begin{cases} -R\cos\beta\,(\dot\beta^2 + \dot\varphi^2) \\ -2R\dot\varphi\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\beta^2\sin\beta \end{cases}_{R_2}$ (1)

Fin

Epreuve fondamentale de Mécanique Rationnelle

Question de cours : (3 pts)

Soit un solide S en mouvement par rapport à R_0, le repère R_k est lié à (S) et les 2 points M et N $\in$ S.

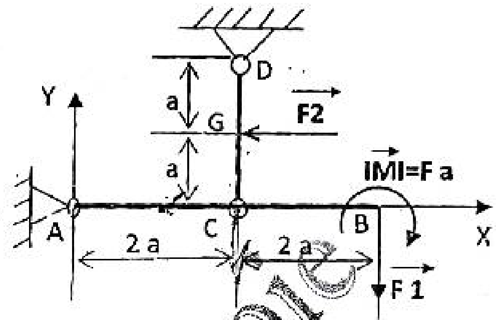
Démontrer que $\overrightarrow{V^0}(N) = \overrightarrow{V^0}(M) + \overrightarrow{\Omega^0}_k \wedge \overrightarrow{MN}$.

Exercice N°1 : (6 pts)

Deux barres AB et CD de poids négligeables, articulées entre elles en C, reposent sur deux appuis doubles en A et D. L'ensemble est sollicité par deux forces F_1 et F_2, appliquées respectivement en B et G, et un moment M autour de B.

On donne : $F_1 = F_2 = 1000$ N ; $a = 0{,}2$ m ; $M = F.a = 200$ N.m

- Calculer les réactions des appuis A et D.

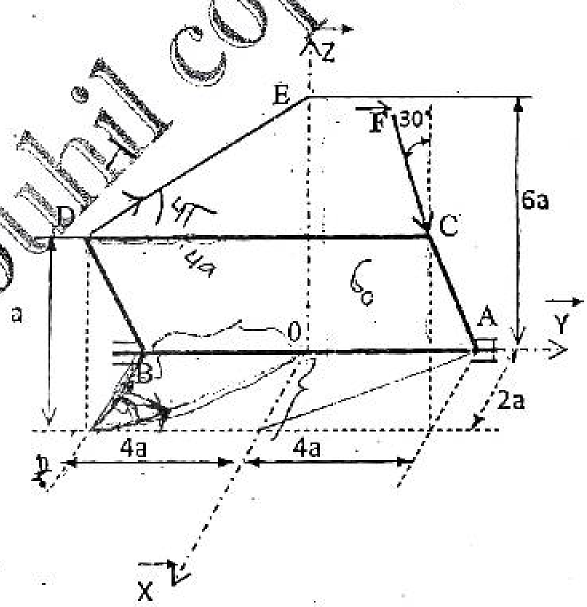


Exercice N°2 : (6 pts)

Un cadre rectangulaire ABCD est fixé au support par l'intermédiaire d'une articulation sphérique en A et d'une articulation cylindrique en B. Le câble DE maintient le cadre en position inclinée par rapport au plan horizontal. Le cadre est soumis à une force F appliquée en C, contenue dans un plan parallèle à [YZ] et faisant un angle de 30° avec l'axe Z.

On donne : F= 1000 N et a = 1 m.

- Calculer les réactions en A et B ainsi que la tension du câble.

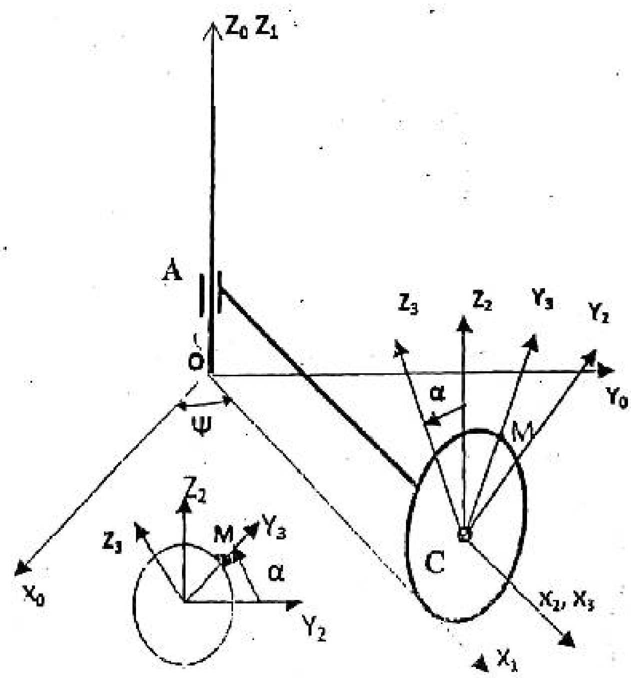


Exercice N°3 : (5 pts)

Soit le système composé d'une barre AC de longueur L tournant à vitesse angulaire constante $\dot{\psi}$ autour de $(\overrightarrow{Z_0})$ et d'une roue de rayon R, de centre C, tournant à vitesse angulaire constante $\dot{\alpha}$ autour de $(\overrightarrow{X_2})$.

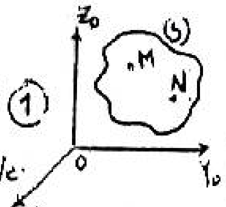
1- Déterminer le vecteur rotation instantanée de la roue par rapport à R_0, exprimé dans R_2.
2- Calculer, par dérivation, la vitesse et l'accélération de C par rapport à R_0, exprimées dans R_2.
3- Déduire par l'utilisation de la matrice de passage, la vitesse absolue de C, exprimée dans R_0.
4- Calculer par la cinématique du solide, la vitesse absolue de M, exprimée dans R_2.

On donne. OA = CM = R et R_1 // R_2.



Corrigé de l'Epreuve fondamentale de mécanique rationnelle

Question de cours :



$\frac{d^0}{dt}\overrightarrow{MN} = \frac{d^k}{dt}\overrightarrow{MN} + \vec{\Omega}^0_k \wedge \overrightarrow{MN}$ (1)

$\frac{d^k}{dt}\overrightarrow{MN} = \vec{0}$: solide indéformable (1)

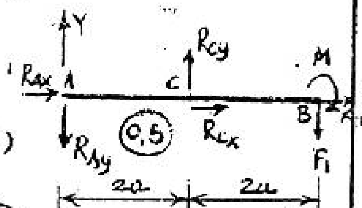
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \Rightarrow \frac{d^0}{dt}\overrightarrow{MN} = \vec{V}^0(N) - \vec{V}^0(M)$ (1)

d'où : $\vec{V}^0(N) = \vec{V}^0(M) + \vec{\Omega}^0_k \wedge \overrightarrow{MN}$

Exercice 1 :

le système est hyperstatique ⇒ séparons les 2 barres :

barre AB :



$\sum F_{ext/x} = 0$

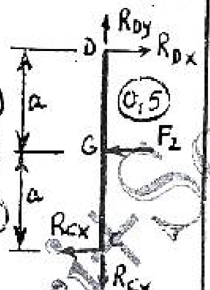
$\Rightarrow R_{Ax} + R_{Cx} = 0$ (1) (0,5)

$\sum F_{ext/y} = 0$

$\Rightarrow R_{Cy} - R_{Ay} - F_1 = 0$ (2) (0,5)

$\sum M_{ext/z,C} = 0 \Rightarrow 2a R_{Ay} - 2a F_1 - M = 0$ (3) (0,5)

barre CD :



$\sum F_{ext/x} = 0 \Rightarrow R_{Dx} - R_{Cx} - F_2 = 0$ (4) (0,5)

$\sum F_{ext/y} = 0 \Rightarrow R_{Dy} - R_{Cy} = 0$ (5) (0,5)

$\sum M_{ext/z,C} = 0 \Rightarrow F_2 a - 2a R_{Dx} = 0$ (6) (0,5)

(6) $\Rightarrow R_{Dx} = F_2/2 = 500N$ (0,5)

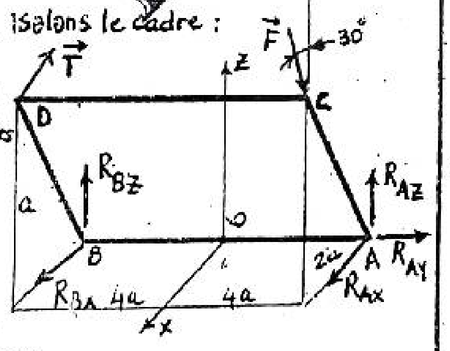
(3) $\Rightarrow R_{Ay} = \frac{2Fa + M}{2a} = 1500N$ (0,5)

(1) + (4) $\Rightarrow R_{Ax} + R_{Dx} - F_2 = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 500N$ (0,5)

(2) + (5) $\Rightarrow -R_{Ay} + R_{Dy} - F_1 = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 2500N$ (0,5)

Exercice 2 :

Isolons le cadre :



il est soumis aux forces ext suivantes

$\vec{R}_A = \begin{cases} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{cases}$ $\quad \vec{R}_B = \begin{cases} R_{Bx} \\ 0 \\ R_{Bz} \end{cases}$

$\vec{F} = \begin{cases} 0 \\ F\sin 30 \\ -F\cos 30 \end{cases}$ (0,25) ; $\vec{T} = |\vec{T}| \cdot \vec{u} = |\vec{T}| \cdot \frac{\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{DE}|}$

$D : \begin{cases} 2a \\ -4a \\ a \end{cases}$; $E : \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 6a \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \begin{cases} -2a \\ 4a \\ 5a \end{cases}$

$|\overrightarrow{DE}| = 3\sqrt{5}\, a$

$\Rightarrow \vec{T} = \begin{cases} -2T/3\sqrt{5} \\ 4T/3\sqrt{5} \\ 5T/3\sqrt{5} \end{cases}$ (0,5)

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$ (0,25)

$\Rightarrow \begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} - 2T/3\sqrt{5} = 0 & (1)\ (0,5) \\ R_{Ay} + \frac{F}{2} + 4T/3\sqrt{5} = 0 & (2)\ (0,5) \\ R_{Az} + R_{Bz} - \frac{\sqrt{3}}{2}F + 5T/3\sqrt{5} = 0 & (3)\ (0,5) \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{cases} 0 \\ -8a \\ 0 \end{cases}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{cases} 2a \\ 0 \\ a \end{cases}$ (0,25) ; $\overrightarrow{AD} = \begin{cases} 2a \\ -8a \\ a \end{cases}$ (0,25)

$\sum \vec{M}_{ext/A} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ (0,5)

$\xrightarrow{/a} \begin{cases} -2R_{Bz} - F/2 - 44T/3\sqrt{5} = 0 & (4)\ (0,5) \\ \sqrt{3}F - 12T/3\sqrt{5} = 0 & (5)\ (0,5) \\ 8R_{Bx} + F - 8T/3\sqrt{5} = 0 & (6)\ (0,5) \end{cases}$

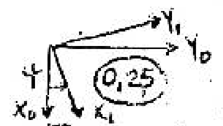
(5) $\Rightarrow T = 968,25N$ $\quad \xRightarrow{(6)} R_{Bx} = 19,34N$

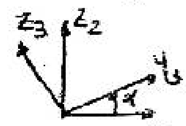
(4) $\Rightarrow R_{Bz} = -3425,44N$ $\quad \xRightarrow{(1)} R_{Ax} = 269,34N$

$\xRightarrow{(2)} R_{Ay} = -1077,35N$ $\quad \xRightarrow{(3)} R_{Az} = 3569,78N$

(1,5)

Exercice 3 :





1°/ $\vec{\Omega}^0_3 = \vec{\Omega}^2_3 + \cancel{\vec{\Omega}^1_2} + \vec{\Omega}^0_1 = \begin{cases} \dot\alpha \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} \dot\alpha \\ 0 \\ \dot\psi \end{cases}_{R_2}$ (0,5)

2°/ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ R \end{cases} + \begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} L \\ 0 \\ R \end{cases}_{R_2}$

$\vec{V}^0(C)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OC}_{/R_2}\right) + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \overrightarrow{OC} = \begin{cases} 0 \\ L\dot\psi \\ 0 \end{cases}_{R_2}$ (0,25) (0,5)

$\vec{\gamma}^0(C)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}^0(C)_{/R_2}\right] + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{V}^0(C) = \begin{cases} -L\dot\psi^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2}$ (0,25) (0,5)

3°/ $R_1 \parallel R_2 \Rightarrow \vec{V}^0(C)_{/R_2} = \vec{V}^0(C)_{/R_1}$

$\vec{V}^0(C)_{/R_0} = M_{01} \cdot \vec{V}^0(C)_{/R_1}$ (0,5) avec $M_{01} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{cases} -L\dot\psi \sin\psi \\ L\dot\psi \cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_0}$ (0,5)

4°/ $\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}^0_3 \wedge \overrightarrow{CM}$ (0,5) ; $\overrightarrow{CM} = \begin{cases} 0 \\ R\cos\alpha \\ R\sin\alpha \end{cases}_{R_2}$ (0,25)

$= \begin{cases} -R\dot\psi\cos\alpha \\ L\dot\psi - R\dot\alpha\sin\alpha \\ R\dot\alpha\cos\alpha \end{cases}_{R}$ (0,5)

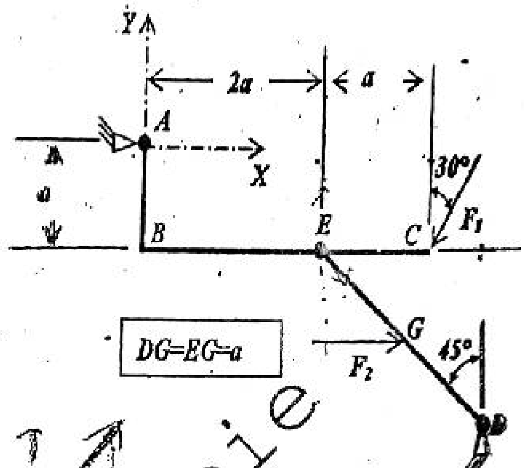
Fin

USTHB
2ème Année LST

Le.06/01/2014
Durée : 1h30min

Epreuve finale de Mécanique Rationnelle (S1)

Exercice n°1 : (7 points)



Le système mécanique ci-contre est composé de la barre ABC coudée au point B et de la barre DE. *Les deux barres sont articulées entre elles au point E* et reposent sur deux articulations en A et D.

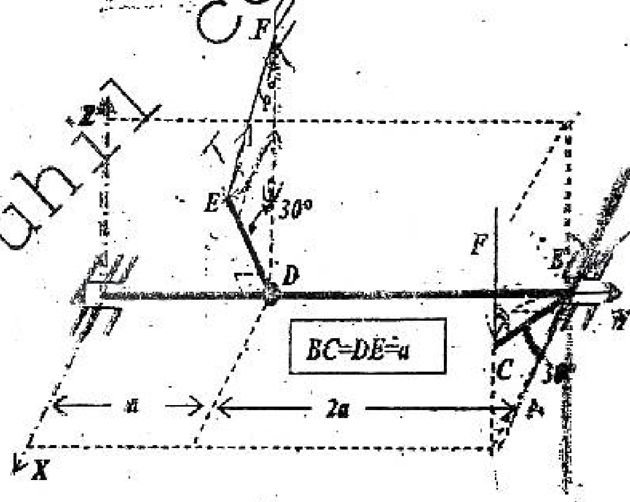
Deux forces F_1 et F_2 sont appliquées respectivement en C et G (centre de masse de la barre ED).

1. Déterminer les réactions aux articulations A, D et E.

Données : $F_1 = 2.F$; $F_2 = F$

N.B : Les masses des barres ABC et DE sont négligeables.

Exercice n° 2 : (6 points)

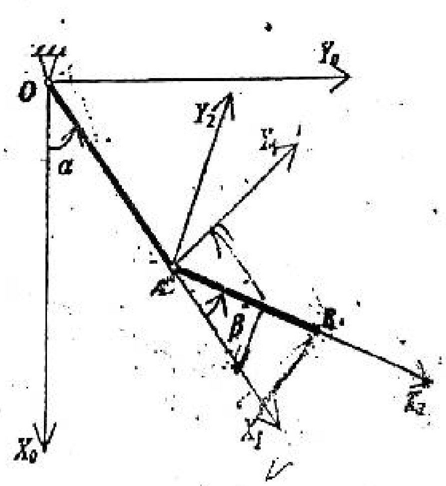


Soit le système mécanique ci-contre formé d'une barre coudée ABC reposant sur deux articulations cylindriques en A et B, et une barre DE *soudée au point D* à la barre ABC. La force F verticale est appliquée au point C. L'équilibre du système est maintenu par l'intermédiaire d'un fil inextensible EF.

1. Etablir les équations scalaires de l'équilibre du système.
2. Déterminer les réactions aux articulations A et B ainsi que la tension du fil EF.

N.B : Les masses des barres ABC et DE sont négligeables.

Exercice 3 (7 points)



Un pendule double est constitué de deux tiges OA et AB, articulée entre elles en A. La tige OA, articulée en O, est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe Z_0. La tige AB est animée d'un mouvement de rotation autour de Z_0.

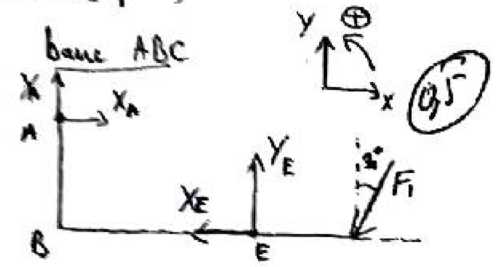
On donne : OA = a et AB = b.

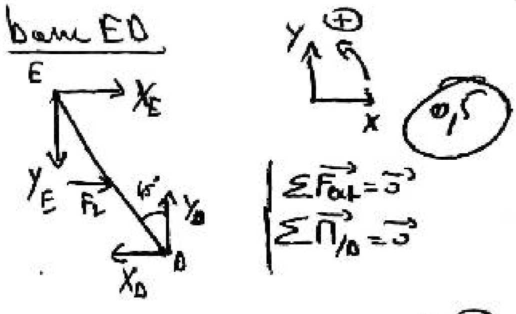
R_1 repère de projection.

1. Déterminer, par dérivation :
   - a- Le vecteur vitesse absolue de A.
   - b- Le vecteur accélération absolue de A.
2. Déterminer, par la cinématique du solide :
   - a- Le vecteur vitesse absolue de B.
   - b- Le vecteur accélération absolue de B.
3. Exprimer le vecteur vitesse absolue de B, calculé à la question 2a, dans le repère R_0, en utilisant la matrice de passage.

Corrigé de l'examen final de Mécanique Rationnelle – S1 (2013/2014) – 06/01/2014

Ex 1 (7 points)





$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{/A} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{/D} = \vec{0} \end{cases}$

$\begin{cases} X_A - X_E - F = 0 \;\ldots\; (1) & (0,75) \\ Y_A + Y_E - \sqrt{3}F = 0 \;\ldots\; (2) & (0,75) \\ 2Y_E - X_E - (1+3\sqrt{3})F = 0 \;\ldots\; (3) & (0,75) \end{cases}$

$\begin{cases} X_E - X_D + F = 0 \;\ldots\; (4) & (0,75) \\ Y_D - Y_E = 0 \;\ldots\; (5) & (0,75) \\ 2Y_E - 2X_E - F = 0 \;\ldots\; (6) & (0,75) \end{cases}$

$(3) - (6) \Rightarrow X_E = 3\sqrt{3}F$ (0,25)

$(6) \Rightarrow Y_E = X_E + \frac{F}{2} = \left(3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)F$ (0,25)

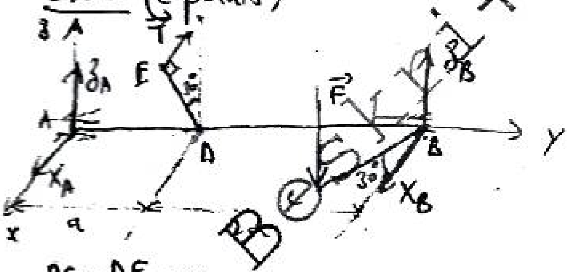
$(5) \Rightarrow Y_D = Y_E = \left(3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)F$ (0,25)

$(4) \Rightarrow X_D = X_E + F = (3\sqrt{3}+1)F$ (0,25)

$(1) \Rightarrow X_A = X_E + F = (3\sqrt{3}+1)F$ (0,25)

$(2) \Rightarrow Y_A = \sqrt{3}F - Y_E = -\left(2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)F$ (0,25)

Ex 2 (6 points)



$BC = DE = a$

Le système est en équilibre.

$\Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \end{cases}$ (0,5)

$\vec{R}_A \begin{pmatrix} X_A \\ 0 \\ Z_A \end{pmatrix}, \vec{R}_B \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix}, \vec{F} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}, \vec{T} = T \begin{pmatrix} -\cos 30° \\ 0 \\ \sin 30° \end{pmatrix}$, $\vec{T} = T\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} X_A + X_B - \frac{\sqrt{3}T}{2} = 0 \;\ldots\; (1) & (0,5) \\ 0 = 0 \;\ldots\; (2) \\ Z_A + Z_B - F + \frac{T}{2} = 0 \;\ldots\; (3) & (0,5) \end{cases}$

(0,5)

$\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AC} \wedge \vec{F} + \vec{AE} \wedge \vec{T} = \vec{0}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}$ (0,25), $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{BC} = a \begin{pmatrix} \cos 30° \\ 0 \\ \sin 30° \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = a \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ (0,5)

$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$, $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{DE} \begin{pmatrix} a \sin 30° \\ 0 \\ a \cos 30° \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, $\vec{AE} = a \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ (0,5)

$\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \cancel{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix} + \cancel{a} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} + \cancel{a} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \wedge T \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 Z_B \\ 0 \\ -3X_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3F \\ \frac{\sqrt{3}}{2}F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T/2 \\ -T \\ T\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3Z_B - 3F + \frac{T}{2} = 0 \;\ldots (4) \quad 0{,}5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}F - T = 0 \;\ldots (5) \quad 0{,}5 \\ -3X_B + \frac{\sqrt{3}}{2}T = 0 \;\ldots (6) \quad 0{,}5 \end{cases}$$

$(5) \Rightarrow T = \frac{\sqrt{3}}{2}F$ (0,25)

$(6) \Rightarrow X_B = \frac{\sqrt{3}}{2}T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{F}{4}$ (0,25)

$(4) \Rightarrow Z_B = F - \frac{T}{6} = F\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$ (0,25)

$(1) \Rightarrow X_A = \frac{\sqrt{3}}{2}T - X_B = \frac{F}{2}$ (0,25)

$(3) \Rightarrow Z_A = F - \frac{T}{2} - Z_B = -\frac{\sqrt{3}}{6}F$ (0,25)

Ex3 (7 points)

1) par dérivation (0,25)

a/ $\vec{V}^0(A) = \frac{d^0 \vec{OA}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OA}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OA}$ (0,25), $\vec{OA} = a\vec{x}_1 = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,25), $\vec{\Omega}_1^0 = \dot\alpha \vec{z}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,25)

$\vec{V}^0(A) = \cancel{\frac{d^1 \vec{OA}}{dt}} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ a\dot\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,25)

b/ $\vec{\gamma}^0(A) = \frac{d^0 \vec{V}^0(A)}{dt}$ (0,25) $= \frac{d^1 \vec{V}^0(A)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(A)$ (0,25) $= \begin{vmatrix} 0 \\ a\ddot\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ a\dot\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ a\ddot\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} + \begin{vmatrix} -a\dot\alpha^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} -a\dot\alpha^2 \\ a\ddot\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,25)

2) par la cinématique du Solide

a/ $\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB}$ (0,5), $\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0$ (0,25) $= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha+\dot\beta \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,25), $\vec{AB} = b\vec{x}_2 = b(\cos\beta\,\vec{x}_1 + \sin\beta\,\vec{y}_1)$ (0,25)

$\vec{AB} = \begin{vmatrix} b\cos\beta \\ b\sin\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,5)

$\vec{V}^0(B) = \begin{vmatrix} 0 \\ a\dot\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha+\dot\beta \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} b\cos\beta \\ b\sin\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ a\dot\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} + \begin{vmatrix} -b(\dot\alpha+\dot\beta)\sin\beta \\ b(\dot\alpha+\dot\beta)\cos\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$

$\Rightarrow \vec{V}^0(B) = \begin{vmatrix} -b(\dot\alpha+\dot\beta)\sin\beta \\ a\dot\alpha + b(\dot\alpha+\dot\beta)\cos\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,25)

b/ $\vec{\gamma}^0(B) = \vec{\gamma}^0(A) + \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB})$ (0,5)

$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} = \frac{d^1\vec{\Omega}_2^0}{dt} + \underbrace{\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\Omega}_2^0}_{=\vec{0}\ (\text{car } \vec{\Omega}_1^0 \parallel \vec{\Omega}_2^0)}$ (0,25) $= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\alpha+\ddot\beta \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,25) $\Rightarrow \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\alpha+\ddot\beta \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} b\cos\beta \\ b\sin\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} -b(\ddot\alpha+\ddot\beta)\sin\beta \\ b(\ddot\alpha+\ddot\beta)\cos\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,25)

$\vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha+\dot\beta \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} -b(\dot\alpha+\dot\beta)\sin\beta \\ b(\dot\alpha+\dot\beta)\cos\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} -b(\dot\alpha+\dot\beta)^2\cos\beta \\ -b(\dot\alpha+\dot\beta)^2\sin\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,25) $\Rightarrow \vec{\gamma}^0(B) = \begin{vmatrix} -a\dot\alpha^2 - b(\ddot\alpha+\ddot\beta)\sin\beta - b(\dot\alpha+\dot\beta)^2\cos\beta \\ a\ddot\alpha + b(\ddot\alpha+\ddot\beta)\cos\beta - b(\dot\alpha+\dot\beta)^2\sin\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$ (0,5)

3/ matrice de passage.

$\vec{V}^0(B)\Big|_{R_0} = [P]_1^0\, \vec{V}^0(B)\Big|_{R_1}$ (0,25), $[P]_1^0 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & y_1 & z_1 \\ \hline x_0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ y_0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ z_0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ (0,25) $\Rightarrow \vec{V}^0(B) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -b(\dot\alpha+\dot\beta)\sin\beta \\ a\dot\alpha + b(\dot\alpha+\dot\beta)\cos\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$

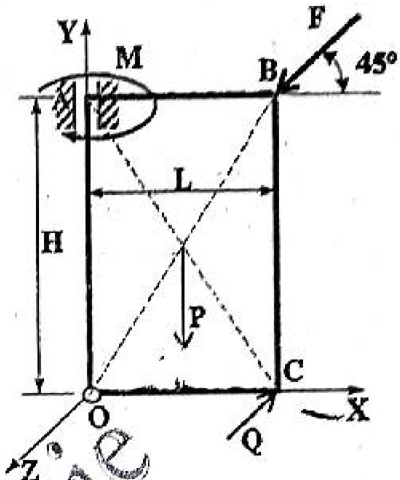
$\vec{V}^0(B) = \begin{vmatrix} -a\dot\alpha\sin\alpha - b(\dot\alpha+\dot\beta)\cos\alpha\sin\beta - b(\dot\alpha+\dot\beta)\sin\alpha\cos\beta \\ a\dot\alpha\cos\alpha + b(\dot\alpha+\dot\beta)\cos\alpha\cos\beta - b(\dot\alpha+\dot\beta)\sin\alpha\sin\beta \\ 0 \end{vmatrix}$ (0,25) $= \begin{vmatrix} -a\dot\alpha\sin\alpha - b(\dot\alpha+\dot\beta)\sin(\alpha+\beta) \\ a\dot\alpha\cos\alpha + b(\dot\alpha+\dot\beta)\cos(\alpha+\beta) \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0}$ (0,25)

USTHB - FGMGP
$2^{ème}$ Année LMD_ST

Année universitaire 2009/2010
Durée $1^{H}30$

EMD1 DE MECANIQUE RATIONNELLE

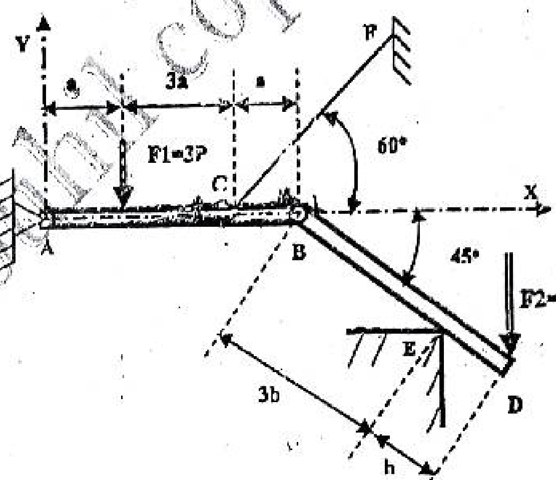
EXERCICE 1 : (7 points)



Une porte rectangulaire de poids P, de hauteur H et de largeur L, est libre de tourner autour de son axe OA. Elle est guidée par une articulation sphérique en O et une articulation cylindrique en A.
Une force F appliquée en B, située dans le plan de la porte (XY) est inclinée d'un angle de 45° par rapport à l'horizontale.
Une force Q appliquée en C, est parallèle à l'axe OZ.
Un moment M (négatif) appliqué en A, est portée par l'axe OY.
On donne : $P = 1000$ N ; $F = 500$ N ; $Q = 400$ N ; $H = 2$ m ; $L = 1$ m

1- Calculer le moment M nécessaire pour maintenir la porte en équilibre
2- Calculer les réactions des appuis O et A.

EXERCICE 2 : (6 points)

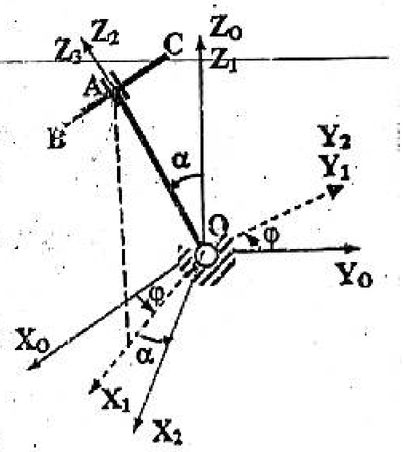


Une poutre AB de poids P est articulée au mur en A et maintenue horizontale par le câble CF. A son extrémité B est articulée une barre BD de poids Q qui s'appuie sur la saillie au point E. Deux forces F1 et F2 sont appliquées sur le mécanisme (voir la figure ci-contre)

1. Calculer les réactions aux appuis A, B et E, ainsi que la tension du câble CF.

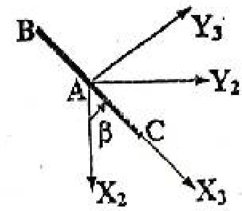
On donne : $Q=360$ N, $P=120$ N

EXERCICE 3 : (7 points)



Soit le système mécanique composé de deux barres perpendiculaires OA et BC. La barre OA ayant une articulation sphérique (rotule) en O, est animée d'un mouvement de rotation autour de OZ_0 avec une vitesse angulaire constante $\dot{\varphi}$ et elle fait un angle α ~~constant (α=0) avec l'axe~~ OZ_0.
La barre BC, de centre A, ayant une articulation cylindrique en A avec la barre OA, est animée d'un mouvement de rotation autour de OZ_2 avec une vitesse angulaire constante $\dot{\beta}$.
On donne : $OA = L$; $AB = AC = a$; $BC \perp OA$.

1°/ Etablir les figures planes représentatives des trois rotations.
2°/ Déterminer le vecteur rotation instantanée de la barre BC par rapport à R_0 exprimé dans R_2.
3°/ Déterminer par dérivation la vitesse absolue de A, exprimée dans R_2.
5°/ Déterminer par dérivation, l'accélération absolue de A, exprimée dans R_2.
6°/ Par la cinématique du solide, déduire la vitesse absolue de C, exprimée dans R_2.



Janvier 2010

Corrigé de l'examen de mécanique rationnelle

Exercice 1 : (7/7)

1°/ $\sum M_y = 0 \Rightarrow Q.L = M$; Les moments autour de y de $\vec{F}$; $\vec{P}$; $\vec{R_0}$ et $\vec{R_A}$ sont nuls

AN : $M = 400\ Nm$. (0,75)

2°/ conditions d'equilibre de la porte $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ $\quad \sum \vec{M}_{ext} = \vec{0}$

$$\vec{P} = \begin{cases} 0 \\ -P \\ 0 \end{cases} ; \quad \vec{Q} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -Q \end{cases} ; \quad \vec{F} = \begin{cases} -F\cos 45 \\ -F\sin 45 \\ 0 \end{cases} ; \quad \vec{R_A} = \begin{cases} R_{AX} \\ 0 \\ R_{AZ} \end{cases} ; \quad \vec{R_0} = \begin{cases} R_{0x} \\ R_{0y} \\ R_{0z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{Q} + \vec{F} + \vec{R_A} + \vec{R_0} = \vec{0} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -F\cos 45 + R_{AX} + R_{0x} = 0 & (1) \quad (0,5) \\ -P - F\sin 45 + R_{0y} = 0 & (2) \quad (0,5) \\ -Q + R_{AZ} + R_{0Z} = 0 & (3) \quad (0,5) \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{ext/0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OC} \wedge \vec{Q} + \vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{OB} \wedge \vec{F} + \vec{OA} \wedge \vec{R_A} + \vec{M} = \vec{0} \quad (0,75)$$

$$\vec{OC} = \begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases} ; \quad \vec{OG} = \begin{cases} L/2 \\ H/2 \\ 0 \end{cases} ; \quad \vec{OB} = \begin{cases} L \\ H \\ 0 \end{cases} ; \quad \vec{OA} = \begin{cases} 0 \\ H \\ 0 \end{cases} ; \quad \vec{M} = \begin{cases} 0 \\ -M \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{ext/0} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \frac{L}{2} & \frac{H}{2} & 0 \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ L & H & 0 \\ \frac{-F}{\sqrt{2}} & \frac{-F}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 0 & H & 0 \\ R_{AX} & 0 & R_{AZ} \end{vmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H R_{AZ} = 0 & (4) \quad (0,75) \\ LQ - M = 0 & (5) \quad (0,75) \\ -\frac{L}{2}P - \frac{LF}{\sqrt{2}} + \frac{HF}{\sqrt{2}} - HR_{AX} = 0 & (6) \quad (0,75) \end{cases}$$

Resolution des équations : $(4) \Rightarrow R_{AZ} = 0$ (0,25)

$(5) \Rightarrow$ confirme que $M = QL$; $\quad (6) \Rightarrow R_{AX} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{L}{\sqrt{2}H}\right)F - \frac{L}{2H}P$

$= -73,22\ N$ (0,25)

$(1) \Rightarrow R_{0x} = \frac{F}{\sqrt{2}} - R_{AX} = 426,77\ N$ (0,25)

$(2) \Rightarrow R_{0y} = \frac{F}{\sqrt{2}} + P = 1353,55\ N$ (0,25)

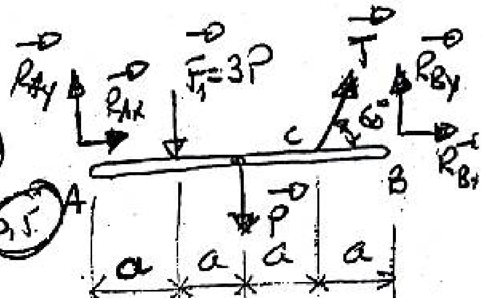
$(3) \Rightarrow R_{0Z} = Q - R_{AZ} = 400\ N$ (0,25)

Exo 2 : / 6 pts

Système hyperstatique (Nbre d'inconnus > Nbre d'équations)

On décompose le système

* **La poutre AB :**

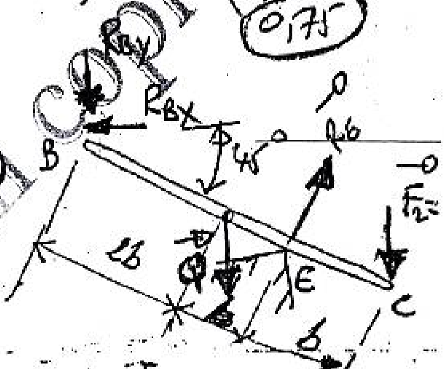


$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{F}_1 + \vec{P} = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} + \frac{1}{2}T = 0 \quad (1) & (0,5) \\ R_{Ay} + R_{By} + \frac{\sqrt{3}}{2}T - F_1 - P = 0 \quad (2) & (0,5) \end{cases}$

$\sum \vec{\mathcal{M}}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow -F_1 \cdot a - P \cdot 2a + \frac{\sqrt{3}}{2}T \cdot 3a + R_{By} \cdot 4a = 0 \quad (3)$ (0,75)

* **La poutre BC :**



$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_B + \vec{R}_E + \vec{F}_2 + \vec{Q} = \vec{0}$ (0,5)

$\Rightarrow \begin{cases} -R_{Bx} + \frac{\sqrt{2}}{2}R_E = 0 \quad (4) \\ -R_{By} + \frac{\sqrt{2}}{2}R_E - F_2 - Q = 0 \quad (5) & (0,5) \end{cases}$

$\sum \vec{\mathcal{M}}_{/B} = \vec{0} \Rightarrow -Q \cdot 2b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + R_E \cdot 3b - F_2 \cdot 4b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (6)$ (0,75)

(6) $\Rightarrow R_E = \frac{1}{3}(\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}F_2)$ $= 1866,76\ N$ (0,5)

$R_E = \frac{11\sqrt{2}}{3}Q$ $= 840\ N$ (0,5)

(5) $\Rightarrow R_{By} = F_2 + Q - \frac{\sqrt{2}}{2}R_E$ (0,5)

$R_{Bx} = \frac{\sqrt{2}}{2}R_E = \frac{11}{3}Q = 1320\ N$

(4) $\Rightarrow$ $= -923,7\ N$ (0,5)

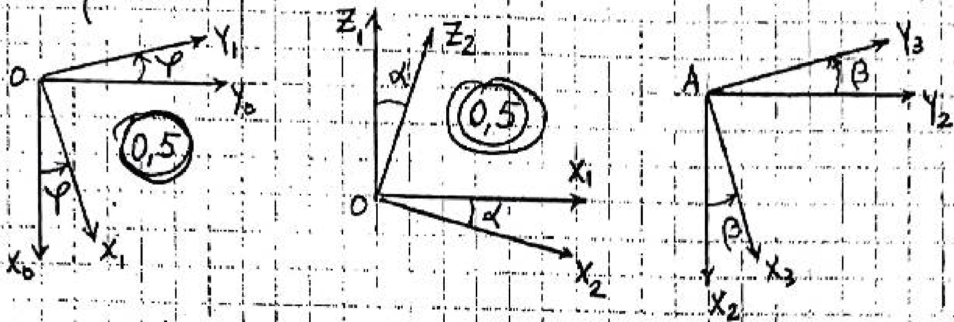
(3) $\Rightarrow T = \frac{2}{3\sqrt{3}}(F_1 + 2P - 4R_{By})$ $= -280,0\ N$ (0,2)

(2) $\Rightarrow R_{Ay} = F_1 + P - \frac{\sqrt{3}}{2}T - R_{By}$ $= -1366,18\ N$ (0,25)

(1) $\Rightarrow R_{Ax} = -R_{Bx} - \frac{1}{2}T$

Exercice 3

1°/



2°/ $\vec{\Omega}^0_3 = \vec{\Omega}^2_3 + \underbrace{\vec{\Omega}^1_2}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}^0_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot\beta \end{cases}_{R_2} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} -\dot\varphi \sin\alpha \\ 0 \\ \dot\beta + \dot\varphi\cos\alpha \end{cases}_{R_2}$ (1)

3°/ $\vec{V}^0(A)_{/R_2} = \frac{d^2}{dt}\left[\vec{OA}_{/R_2}\right] + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{OA}_{/R_2}$ (0,5)

$\vec{OA} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}_{R_2}$; $\vec{\Omega}^0_2 = \begin{cases} -\dot\varphi\sin\alpha \\ 0 \\ \dot\varphi\cos\alpha \end{cases}_{R_2}$; $\frac{d^2}{dt}\left[\vec{OA}_{/R_2}\right] = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{V}^0(A)_{/R_2} = \begin{vmatrix} \vec{x}_2 & \vec{y}_2 & \vec{z}_2 \\ -\dot\varphi\sin\alpha & 0 & \dot\varphi\cos\alpha \\ 0 & 0 & L \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 \\ L\dot\varphi\sin\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_2}$ (1)

4°/ $\vec{\gamma}^0(A)_{/R_2} = \frac{d^2}{dt}\left[\vec{V}^0(A)_{/R_2}\right] + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{V}^0(A)_{/R_2}$ (0,5) ; $\frac{d^2}{dt}\left[\vec{V}^0(A)_{/R_2}\right] = \vec{0}$

$\dot\varphi$ cte ; α cte.

$\vec{\gamma}^0(A)_{/R_2} = \begin{vmatrix} \vec{x}_2 & \vec{y}_2 & \vec{z}_2 \\ -\dot\varphi\sin\alpha & 0 & \dot\varphi\cos\alpha \\ 0 & L\dot\varphi\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -L\dot\varphi^2\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 \\ -L\dot\varphi^2\sin^2\alpha \end{cases}_{R_2}$ (1)

5°/ $\vec{V}^0(C) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}^0_3 \wedge \vec{AC}$ (0,5) nous allons tout exprimé dans R_2

$\vec{AC} = \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_3} = \begin{cases} a\cos\beta \\ a\sin\beta \\ 0 \end{cases}_{R_2}$

$\Rightarrow \vec{V}^0(C)_{/R_2} = \begin{cases} 0 \\ L\dot\varphi\sin\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_2} + \begin{vmatrix} \vec{x}_2 & \vec{y}_2 & \vec{z}_2 \\ -\dot\varphi\sin\alpha & 0 & \dot\beta+\dot\varphi\cos\alpha \\ a\cos\beta & a\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$

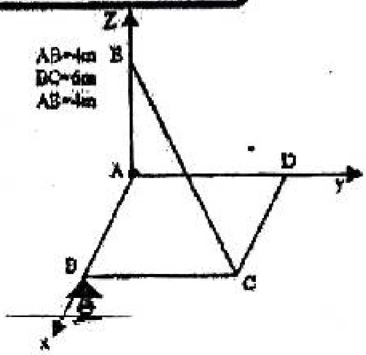
$= \begin{cases} -a\sin\beta\,(\dot\beta + \dot\varphi\cos\alpha) \\ L\dot\varphi\sin\alpha + a\cos\beta\,(\dot\beta + \dot\varphi\cos\alpha) \\ -a\dot\varphi\sin\alpha\sin\beta \end{cases}$ (1,5)

USTHB/FGMGP
2ème année Lic. ST

18 Février 2010
Durée 1h30mn

Examen de Rattrapage de Méca. Rat.

Exo.1 : (7pts)

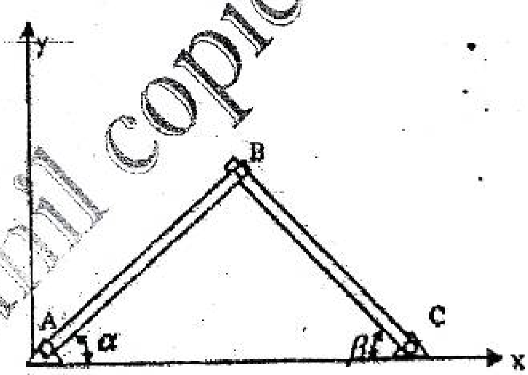


Une plaque rectangulaire (4x6m) soumise à son propre poids P, est maintenue horizontale dans le plan (xy) par une articulation sphérique en A, par un appui simple en B (perpendiculaire au plan xy) et par un câble CE.

1) écrire les équations scalaires d'équilibre de la plaque
2) Déterminer les forces des liaisons en A et B ainsi que la tension du câble.

On donne P=1000 N

Exo.2 : (5pts)

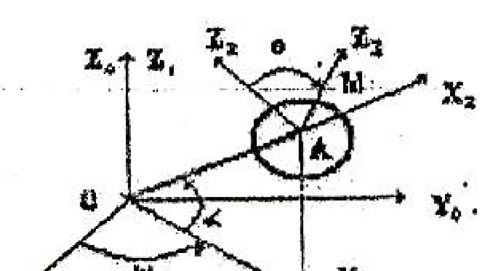


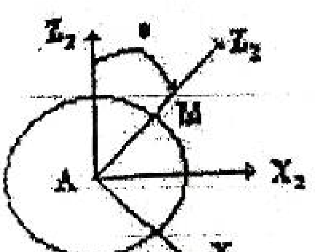
Deux poutre AB et BC de poids P_1 et P_2 respectivement sont articulées aux points A, B et C. On donne AB= L_1, BC= L_2, déterminer les forces des réactions aux niveaux des liaisons en A, B et C.

Exo.n°3 : (8pts)

Soit le système mécanique composé d'une tige OA de longueur L pouvant tourner autour de l'axe $\vec{Z}_0$ à la vitesse angulaire $\dot{\psi}$ constante et d'une roue liée à la tige au point A et pouvant tourner autour de l'axe $\vec{y}_2$ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante. La tige est inclinée d'un angle α constant par rapport au plan horizontal. Soit $R_2(O, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ le repère lié à la tige et $R_3(A, \vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$ le repère lié à la roue. Soit R_1 le repère de projection.

1) Calculer le vecteur de rotation instantanée de la roue par rapport à R_0.
2) Par dérivation, calculer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point A par rapport à R_0.
3) Par dérivation calculer le vecteur vitesse absolue d'un point M de la périphérie de la roue tel que $\overrightarrow{AM} = r\vec{Z}_3$.
4) Par la cinématique du solide, retrouver le résultat de la vitesse absolue du point M.
5) Calculer, par dérivation, le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point M par rapport R_2.



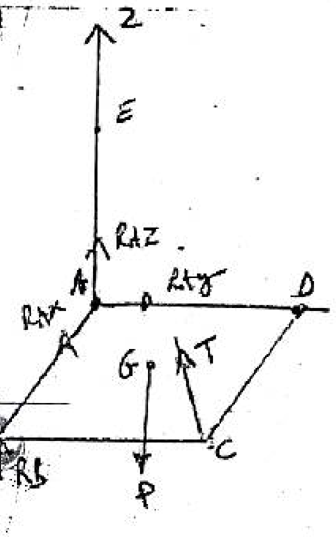


FGMGP
Dept CMP

Corrigé Rattrapage Meca-Rat. 2009_2010

Ex n° 1 :

$\frac{\vec{T}_{CE}}{|T_{CE}|} = \frac{\vec{CE}}{|\vec{CE}|}$, $\vec{CE} = \begin{vmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{T}_{CE} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{vmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{vmatrix}$ (1)



Eq. d'équilibre

$R_{Ax} - \frac{2}{\sqrt{17}} T_{CE} = 0$ (1) (0,5)

$R_{Ay} - \frac{3}{\sqrt{17}} T_{CE} = 0$ (2) (0,5)

$R_{Az} - P + \frac{2}{\sqrt{17}} T_{CE} + R_B = 0$ (3) (0,5)

$\sum \vec{M}_{/A} = 0 \quad \vec{AG} \wedge \vec{P} + \vec{AB} \wedge \vec{R_B} + \vec{AC} \wedge \vec{T_{CE}} = \vec{0}$ (0,...)

$-3P + \frac{12\, T_{CE}}{\sqrt{17}} = 0$ (4) (1) $\longrightarrow T_{CE} = \frac{P\sqrt{17}}{4} = 1{,}03P = 1030$

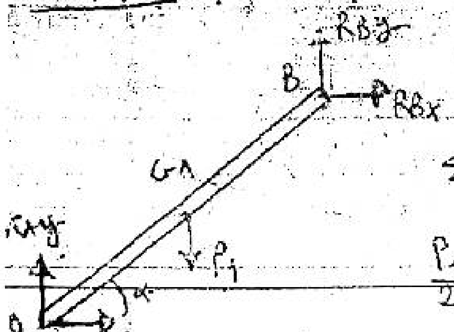
$2P - 4R_B + \frac{8\, T_{CE}}{\sqrt{17}} = 0$ (5) (1) $\longrightarrow R_B = 0$ (0,5)

$R_{Ax} = \frac{2}{\sqrt{17}} T_{CE} = P/2 = 500\ N$ (0,5)

$R_{Ay} = \frac{3}{\sqrt{17}} T_{CE} = \frac{3}{4} P = 750\ N$ (0,5)

$R_{Az} = P - \frac{2}{\sqrt{17}} T_{CE} = P/2 = 500\ N$ (0,5)

Ex n° 2 :



on isole la poutre AB

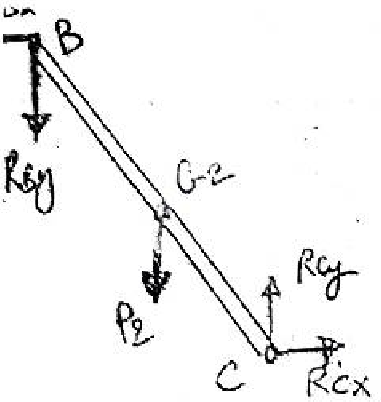
$R_{Ax} + R_{Bx} = 0$ (1) $\longrightarrow R_{Ax} = -R_{Bx}$ (0,...)

$R_{Ay} + R_{By} - P_1 = 0$ (2) (0,5)

$\sum \vec{M}_{/B} = \vec{BG_1} \wedge \vec{P_1} + \vec{BA} \wedge \vec{R_A} = \vec{0}$

$\frac{P_1}{2} \cos\alpha + R_{Ax} \sin\alpha - R_{Ay} \cos\alpha = 0$ (3) (0,5)

On isole la poutre BC :



$R_{Cx} - R_{Bx} = 0$ (4) 0,5

$R_{Cy} - R_{By} - P_2 = 0$ (5) 0,5

$\sum \vec{M}_{/C} = \vec{CG_2} \wedge \vec{P_2} + \vec{CB} \wedge \vec{R_B} = \vec{0}$

$\frac{P_2}{2} \cos\beta + R_{By} \cos\beta + R_{Bx} \sin\beta = 0$

on transforme les éq. (3) et (6) en 1 système d'éq. à 2 inconn

~~R_{Ax} et~~ R_{By} : $\frac{P_1}{2} \cos\alpha = R_{By} \cos\alpha + R_{Ax} \sin\alpha$ (3')

$\frac{P_2}{2} \cos\beta = -R_{By} \cos\beta + R_{Ax} \sin\beta$ (4')

(3') $\cos\beta$ + (4') $\cos\alpha \Rightarrow R_{Ax} \left[\sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha \right] = \frac{P_1}{2} \cos\alpha \cos\beta + \frac{P_2}{2} \cos\alpha$

$$\boxed{R_{Ax} = \frac{\frac{\cos\beta \cos\alpha}{2} \left[P_1 + P_2 \right]}{\sin(\alpha + \beta)}}$$ 0,5

(3') $\sin\beta$ − (4') $\sin\alpha \Rightarrow \frac{P_1}{2} \cos\alpha \sin\beta - \frac{P_2}{2} \cos\beta \sin\alpha = R_{By} \left[\cos\alpha \sin\beta + \dots \right.$

$$\Rightarrow \boxed{R_{By} = \frac{\frac{P_1}{2} \cos\alpha \sin\beta - \frac{P_2}{2} \cos\beta \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}}$$ 0,5

(5) $\Rightarrow R_{Cy} = P_2 + R_{By} \Rightarrow$ $$\boxed{R_{Cy} = \frac{P_2 \left[1/2 \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha \right] + \frac{P_1}{2} \cos\dots}{\sin(\alpha + \beta)}}$$

(2) $R_{Ay} = P_1 - R_{By} \Rightarrow$ $$\boxed{R_{Ay} = \frac{P_1 \left[\sin\alpha \cos\beta + 1/2 \sin\beta \cos\alpha \right] + \frac{P_2}{2} \cos\dots}{\sin(\alpha + \beta)}}$$

~~(4)~~ $\Rightarrow R_{Cx} = R_{Bx} = -R_{Ax}$

3 : Ex03

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_1^0 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_3^2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{vmatrix}_{0,1} + \begin{vmatrix} \dot\alpha = 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{1,3,1} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{vmatrix}_1 \quad (1)$$

$$\vec{V}_{A/0} = \frac{d^0 \vec{OA}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OA}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OA} \quad (0,5) \qquad \vec{OA} = \begin{vmatrix} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{vmatrix}_1$$

$$\vec{V^0(A)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot\psi L\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad (0,5) \quad (1,5)$$

$$\vec{\gamma}(A) = \frac{d^0 \vec{V^0(A)}}{dt} = \frac{d^1 \vec{V^0(A)}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V^0(A)} \quad (0,5) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot\psi L\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dot\psi^2 L \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V^0(M)} = \frac{d^0 \vec{OM}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OM}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OM} \quad (0,5), \quad \vec{OM} = \begin{vmatrix} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r\sin\theta \\ 0 \\ r\cos\theta \end{vmatrix}_2 \quad (1) = \begin{vmatrix} L\cos\alpha + r\ldots \\ 0 \\ L\sin\alpha + r\ldots \end{vmatrix}_1$$

$$\vec{V}(M) = \begin{vmatrix} r\dot\theta\cos(\theta-\alpha) \\ 0 \\ -r\dot\theta\sin(\theta-\alpha) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} L\cos\alpha + r\sin(\theta-\alpha) \\ 0 \\ = \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r\dot\theta\cos(\theta-\alpha) \\ \dot\psi L\cos\alpha + \dot\psi r\sin(\theta-\alpha) \\ -r\dot\theta\sin(\theta-\alpha) \end{vmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{V^0(M)} = \vec{V^0(A)} + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{AM} \quad (0,5) = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot\psi L\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} r\sin(\theta-\alpha) \\ 0 \\ r\cos(\theta-\alpha) \end{vmatrix}$$

$$\vec{V^0(M)} = \begin{vmatrix} \dot\theta r\cos(\theta-\alpha) \\ \dot\psi L\cos\alpha + \dot\psi r\sin(\theta-\alpha) \\ -r\dot\theta\sin(\theta-\alpha) \end{vmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{V^2(M)} = \frac{d^2 \vec{AM}}{dt} = \frac{d^1 \vec{AM}}{dt} + \cancel{\vec{\Omega}_1^2 \wedge \vec{AM}} \quad (0,5), \quad \vec{AM} = \begin{vmatrix} r\sin(\theta-\alpha) \\ 0 \\ r\cos(\theta-\alpha) \end{vmatrix}$$

$$\vec{V^2(M)} = \begin{vmatrix} r\dot\theta\cos(\theta-\alpha) \\ 0 \\ r\dot\theta\sin(\theta-\alpha) \end{vmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{\gamma^2(M)} = \frac{d^2 \vec{V^2(M)}}{dt} = \frac{d^1 \vec{V^2(M)}}{dt} + \cancel{\vec{\Omega}_1^2 \wedge \vec{V^2(M)}} \quad (0,5)$$

$$\vec{\gamma^2(M)} = \begin{vmatrix} -r\dot\theta^2\sin(\theta-\alpha) \\ 0 \\ -r\dot\theta^2\cos(\theta-\alpha) \end{vmatrix} \quad (0,5)$$

Université de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département du Génie de la Matière
2ième Année Tronc commun ST – F212-Physique 4

Année Universitaire 2015/2016

19/01/2016

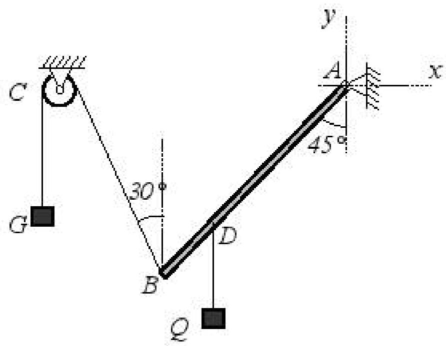
Examen final semestriel de la matière Physique 4

Problème de statique du solide (6Pts)

Une barre homogène AB de poids P=100N est articulée à un mur en A, et est soutenue sous un angle de 45° par rapport à la verticale par un câble passant sur une poulie et portant une charge G. Le tronçon BC du câble forme avec la verticale un angle de 30°. Une charge Q de 200N est suspendue au point D de la barre.

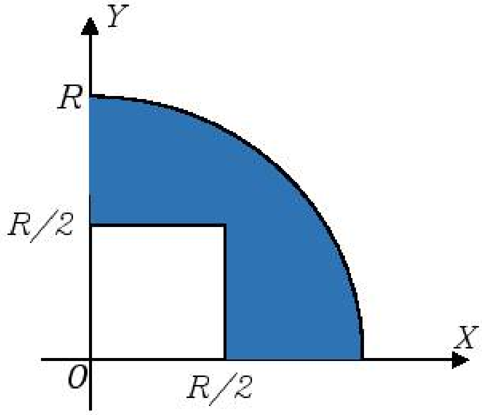
Déterminer le poids de la charge G et la réaction de l'articulation A, si BD=AB/4.

Négliger le frottement dans la poulie et utiliser le repère R (A, x, y, z) donné.



Problème de géométrie des masses (6Pts)

Trouvez le centre de gravité de la structure surfacique représentée par la figure ci-contre. Calculer le moment d'inertie I_{XX} de cette forme par rapport à l'axe (OX). En déduire les moments d'inertie notés I_{YY} et I_{ZZ} par rapport aux axes (OY) et (OZ).



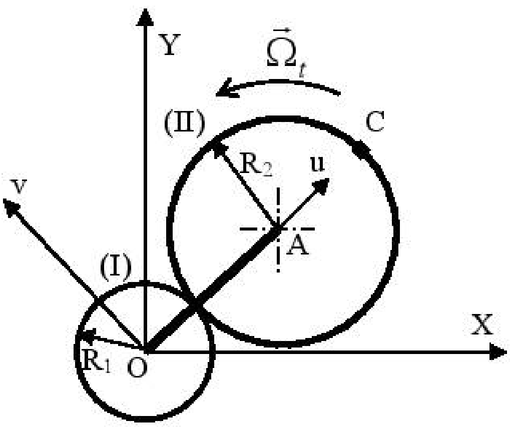
Problème de cinématique du solide (5Pts)

Un engrenage constitué de deux roues dentées I et II, de rayons R_1 et R_2, est entrainé en rotation par une tige alignée sur les centres O et A des deux roues.

La tige tourne autour de l'axe oz dans le plan (xoy) avec un taux de rotation $\vec{\Omega}_t$.

La roue I étant fixe, on demande de :

1. Déterminer les taux de rotation des deux roues.
2. Déterminer les vecteurs vitesses et accélération du point C, situé sur la circonférence de la roue II.
3. Déduire le torseur cinématique de la roue II au point C.



Question de cours (3Pts)

Montrer que pour un solide en mouvement quelconque, La puissance (la dérivée de l'énergie cinétique) est égale au produit des torseurs cinématique et dynamique.

$$\frac{dE_C^0}{dt} = [V]_G . [D]_G = P\left(\vec{F}_{ext}\right)$$

On part de l'expression de l'énergie cinétique : $E_C^0 = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}_0(M)\right)^2$

Bon courage

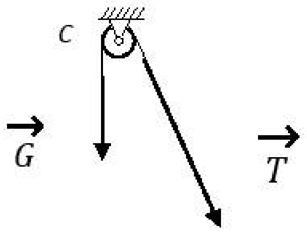
Université de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département du Génie de la Matière
2ième Année Tronc commun ST – F212-Physique 4

Année Universitaire 2015/2016
19/01/2016

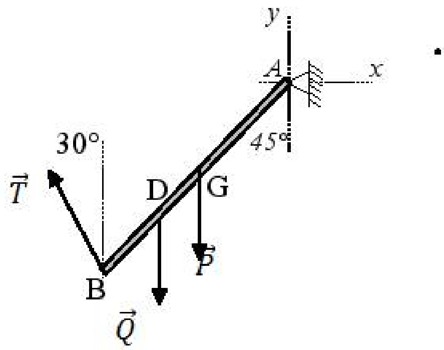
Corrigé de l'EFS de la matière Physique 4

Problème de statique du solide (6Pts)

Commençons par isoler la barre AB et le système poulie-câble



(0.5Pt)



Comme la poulie est de poids négligeable, le système poulie-câble donne :

$$T = G \qquad (1)$$ (0.5Pt)

Isoler la barre AB donne avec la projection sur les axes X et Y :

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{R_A} + \vec{P} + \vec{Q} + \vec{T} = \vec{0} \qquad (2)$$ (0.5Pt)

$$\sum \vec{M}_{Forces\ exterieurs\ /A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (3)$$ (0.5Pt)

Sachant que :

$$\overrightarrow{AB} \begin{cases} -AB\cos 45° \\ -AB\sin 45° \end{cases} \qquad \overrightarrow{AG} \begin{cases} -\dfrac{AB}{2}\cos 45° \\ -\dfrac{AB}{2}\sin 45° \end{cases} \qquad \overrightarrow{AD} \begin{cases} -\dfrac{3}{4}AB\cos 45° \\ -\dfrac{3}{4}AB\sin 45° \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{cases} -AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \overrightarrow{AG} \begin{cases} -\dfrac{AB}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{AB}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \overrightarrow{AD} \begin{cases} -\dfrac{3}{4}AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{3}{4}AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\vec{T} \begin{cases} -T\sin 30° \\ +T\cos 30° \end{cases} \qquad \vec{P} \begin{cases} 0 \\ -P \end{cases} \qquad \vec{Q} \begin{cases} 0 \\ -Q \end{cases}$$

L'équation (3) donne :

$$\begin{cases} -AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} -T\dfrac{1}{2} \\ +T\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} -\dfrac{3}{4}AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{3}{4}AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -Q \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} -\dfrac{1}{2}AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{1}{2}AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -P \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$= \left(-AB\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(+T\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-AB\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-T\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}AB\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-Q) + \left(-\frac{1}{2}AB\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-P) = 0$$ (01Pt)

$$\rightarrow T\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8}Q + \frac{\sqrt{2}}{4}P$$

T=G= 146,41N (0.5Pt)

L'équation (2) est projetée sur les axes :

$R_{Ax} - T\sin 30° = 0 \quad (4)$ (0.5Pt)

$R_{Ay} + T\cos 30° - P - Q = 0 \quad (5)$ (0.5Pt)

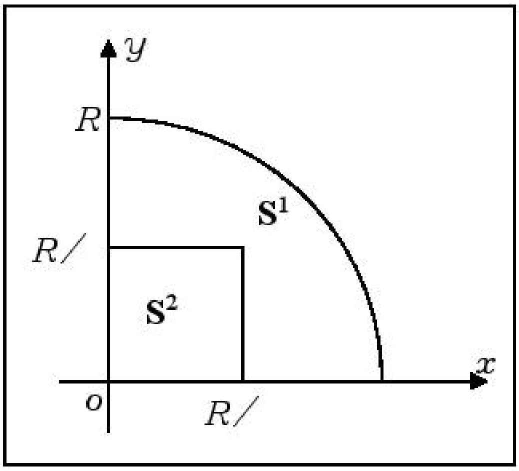
(4) et (1) donnent :

- $R_{Ax} = T\sin 30° = 73{,}2\ N$ (0.5Pt)
- $R_{AY} = -T\cos 30° + P + Q = 173{,}2N$ (0.5Pt)
- $R = \sqrt{{R_{Ax}}^2 + {R_{AY}}^2}$

R= 188N (0.5Pt)

Problème de géométrie des masses (6Pts)

(Centre de Gravité (3Pts), Moments d'Inertie (3Pts)



Le Centre de gravité de la forme :

Comme la forme possède un axe de symétrie y=x ; alors les coordonnées du CdG seront :

$X_G = Y_G$ et $Z_G = 0$. (01Pt) *(commun aux deux solutions)*

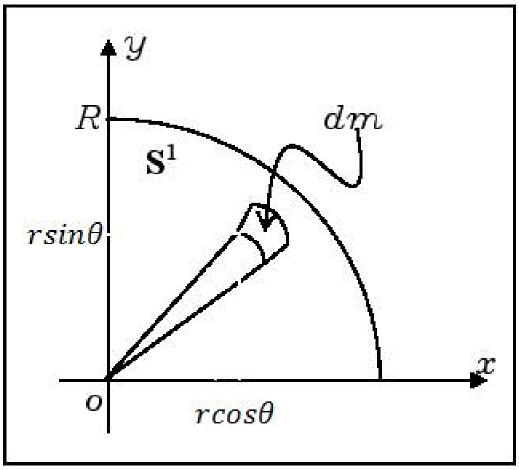
En appliquant le théorème de Gulden :

$$X_G = \frac{V_{/oy}}{2\pi\, S} \qquad Y_G = \frac{V_{/ox}}{2\pi\, S}$$ (0.5Pt)

$$V_{/oy} = V_{/ox} = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{R}{2}\pi\frac{R^2}{4} = \frac{13}{24}\pi R^3$$ (0.5Pt)

$$S = \pi\frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{4}(\pi - 1)$$ (0.5Pt)

$$X_G = \frac{\frac{13}{24}\pi R^3}{2\pi\frac{R^2}{4}(\pi-1)} = \frac{13R}{12(\pi-1)} = 0.506R$$ (0.5Pt)



Par intégration :

On distingue deux solides **S¹** et **S²**

On calcule le CdG pour le premier solide

$$x_G^1 = \frac{1}{m}\int x dm = y_G^1$$ (0.25Pt)

$$dm = \sigma ds = \sigma r d\theta dr \Rightarrow m = \sigma\int_0^{\pi/2}\int_0^R r dr d\theta = \frac{\sigma\pi R^2}{4} \Rightarrow S_1 = \frac{\pi R^2}{4}$$ (0.25Pt)

$$x_G^1 = \frac{1}{m}\int x dm = \frac{4\sigma}{\sigma\pi R^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r^2 cos\theta dr d\theta = \frac{4R}{3\pi} = y_G^1$$ (0.5Pt)

De là on écrit :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_G^i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad ; \qquad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_G^i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$ (0.5Pt)

$$X_G = \frac{x_G^1 S_1 - x_G^2 S_2}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{4R}{3\pi}\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R}{4}\frac{R^2}{4}}{\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{4}} = \frac{\frac{R}{3} - \frac{R}{16}}{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{13R}{12(\pi - 1)} = 0.506R$$ (0.5Pt)

Le moment d'inertie I_{xx} :

$$\boldsymbol{I_{xx}} = \boldsymbol{I_{xx}^{(1)}} - \boldsymbol{I_{xx}^{(2)}}$$ (0.5Pt)

$$\boldsymbol{I_{xx}^{(1)}} = \int (y^2 + z^2)dm = \int y^2 dm = \sigma \iint_{\substack{r=0 \\ \theta=0}}^{R\ \pi/2} r^3(sin\theta)^2 dr d\theta = \frac{1}{16}\sigma\pi R^4$$ (0.5Pt)

$$\boldsymbol{I_{xx}^{(2)}} = \int (y^2 + z^2)dm = \sigma \int_0^{R/2}\int_0^{R/2} y^2 dx dy$$

$$\boldsymbol{I_{xx}^{(2)}} = \sigma\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^{R/2} x\Big|_0^{R/2}\right) = \frac{\sigma}{3}\frac{R^3}{8}\frac{R}{2} = \sigma\frac{R^4}{48}$$ (0.5Pt)

$$\boldsymbol{I_{xx}} = \boldsymbol{I_{xx}^{(1)}} - \boldsymbol{I_{xx}^{(2)}} = \frac{\sigma\pi R^4}{16} - \sigma\frac{R^4}{48} = \frac{(3\pi - 1)}{48}\sigma R^4$$

Avec
$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{4}} = \frac{4m}{R^2(\pi - 1)}$$

$$\boldsymbol{I_{xx}} = \frac{1}{12}\frac{(3\pi - 1)}{(\pi - 1)} mR^2 = 0.328 mR^2$$ (0.5Pt)

Déduire I_{yy} et I_{zz} :

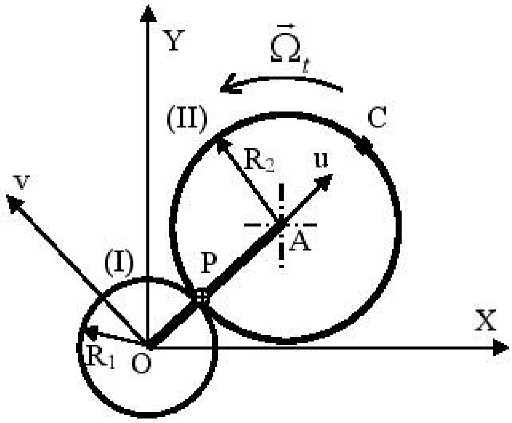
Nous pouvons remarquer que la structure est symétrique par rapport à l'axe (y=x), d'où l'on peut déduire que

$$\boldsymbol{I_{yy}} = \int x^2 dm = \int y^2 dm = I_{xx}$$ (0.5Pt)

Calcul de Izz : $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = 2I_{xx} = 0.656 mR^2$ (0.5Pt)

Problème de cinématique du solide (5Pts)

1. Détermination des taux de rotation des roues I et II.



La roue I est fixe, donc $\vec{\Omega}_I = 0$ (0.5Pt)

Détermination du taux de rotation de la roue II à partir de la vitesse du point de contact entre les deux roues :

$\vec{V}_I(P) = \vec{V}_{II}(P) = \vec{0}$ (0.25Pt)

Or, d'après la loi de distribution des vitesses dans un corps solide, nous avons : $\vec{V}_{II}(P) = \vec{V}(A)_{/O} + \vec{\Omega}_{II} \wedge \overrightarrow{AP}$ (0.25Pt)

Avec :

$$\vec{V}(A)_{/O} = \cancel{\vec{V}(O)} + \vec{\Omega}_t \wedge \overrightarrow{OA} = \Omega_t \vec{k} \wedge (R_I + R_{II})\vec{u} = \Omega_t (R_I + R_{II})\vec{v}$$

$$\vec{V}(A)_{/O} = \Omega_t (R_I + R_{II})\vec{v} \quad \text{(0.25Pt)}$$

$$\vec{\Omega}_{II} \wedge \overrightarrow{AP} = \Omega_{II}\vec{k} \wedge R_{II}\vec{u} = -\Omega_{II} R_{II}\vec{v} \quad \text{(0.25Pt)}$$

Donc : $\vec{V}_{II}(P) = \Omega_t (R_I + R_{II})\vec{v} - \Omega_{II} R_{II}\vec{v} = \vec{0}$ ce qui donne : $\vec{\Omega}_{II} = \dfrac{(R_I + R_{II})}{R_{II}}\vec{\Omega}_t$ (0.5Pt)

2. Détermination de la vitesse du point C à la circonférence de la roue II

Nous avons : $\vec{V}(C)_{/O} = \vec{V}(A)_{/O} + \vec{\Omega}_{II} \wedge \overrightarrow{AC}$ (0.25Pt)

Avec : $\vec{V}(A)_{/O} = \Omega_t (R_I + R_{II})\vec{v}$ *et* $\overrightarrow{AC} = R_{II}\vec{u}$ (0.25Pt)

$$\rightarrow \vec{V}(C)_{/O} = \Omega_t (R_I + R_{II})\vec{v} + \frac{(R_I + R_{II})}{R_{II}}\vec{\Omega}_t \vec{k} \wedge R_{II}\vec{u} = 2(R_I + R_{II})\vec{\Omega}_t \vec{v} \rightarrow \vec{V}(C)_{/O} = 2(R_I + R_{II})\Omega_t \vec{v} = 2\vec{V}(A)_{/O}$$

(0.5Pt)

3. Détermination de l'accélération du point C :

Une des deux solutions

a/ Par dérivation du vecteur vitesse

$$\vec{a}(C)_{/O} = \frac{d\vec{V}(C)_{/O}}{dt} = 2(R_I + R_{II})\frac{d(\Omega_t.\vec{v})}{dt} \quad \text{Avec : } \frac{d\Omega_t}{dt} = \dot{\Omega}_t \ \ et \ \ \frac{d\vec{v}}{dt} = \Omega_t \vec{k} \wedge \vec{v} = -\Omega_t \vec{u}$$

D'où : $\vec{a}(C)_{/O} = 2(R_I + R_{II})\left[\dot{\Omega}_t \vec{v} - \Omega_t^2 \vec{u}\right]$ (01Pt)

b/ Par utilisation de la loi de distribution des accélérations dans un corps solide ;

$$\vec{a}(C)_{/O} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}(A)_{/O} + \vec{\Omega}_{II} \wedge \overrightarrow{AP}\right) = \frac{d\vec{V}(A)_{/O}}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}_{II}}{dt} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\Omega}_{II} \wedge \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\Omega_t (R_I + R_{II})\vec{v}\right] + \dot{\Omega}_{II}\vec{k} \wedge R_{II}\vec{u} + \Omega_{II}\vec{k} \wedge \left(\Omega_t \vec{k} \wedge R_{II}\vec{u}\right) \quad \text{(01Pt)}$$

$$= (R_I + R_{II})\left[\dot{\Omega}_t \vec{v} - \Omega_t^2 \vec{u}\right] + \dot{\Omega}_{II} R_{II}\vec{v} - \Omega_{II}\Omega_t R_{II}\vec{v}$$

$$= 2(R_I + R_{II})\left[\dot{\Omega}_t \vec{v} - \Omega_t^2 \vec{u}\right]$$

4. Torseur cinématique de la roue au pont C : $\left[V_{II/R_0}\right]_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{II} \\ \vec{V}(C)_{/O} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{R_I + R_{II}}{R_{II}}\Omega_t \vec{k} \\ 2(R_I + R_{II})\Omega_t \vec{v} \end{Bmatrix}$ (01Pt)

Question de cours (03Pts)

$$\frac{dE_C^0}{dt} = \frac{1}{2}\int_{(S)} \left(\vec{V}_0(M)\right)^2 dm = \int_{(S)} \left(\vec{V}_0(G) + \vec{\Omega}_{R_G/R_0} \wedge \overrightarrow{GM}\right).\vec{a}(M)dm \quad \text{(01Pt)}$$

$$= \vec{V}_0(G).\int_{(S)} \vec{a}(M)\,dm + \vec{\Omega}_{R_G/R_0}.\int_{(S)} \left(\overrightarrow{GM} \wedge \vec{a}(M)\right)dm = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{R_G/R_0} \\ \vec{V}_0(G) \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} \int_{(S)} \vec{a}(M)dm \\ \int_{(S)} \left(\overrightarrow{GM} \wedge \vec{a}(M)\right)dm \end{Bmatrix} = [V]_G . [D]_G = P\left(\vec{F}_{ext}\right)$$

(01Pt) (0.5Pt) (0.5Pt)

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

2ème Année Préparatoire **Année Scolaire** : 2007/2008

Partiel N° 1

Module : MECANIQUE II **Date :** 13/01/2008 **Durée :** 02 heures

Exercice 1 (04 points)

Soit le système défini dans $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ par les trois vecteurs :

$$\vec{V}_1 = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -3 \end{cases} \quad ; \quad \vec{V}_2 = \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{V}_3 = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

Appliqués respectivement au points : $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} C_X \\ C_Y \\ 6 \end{pmatrix}$

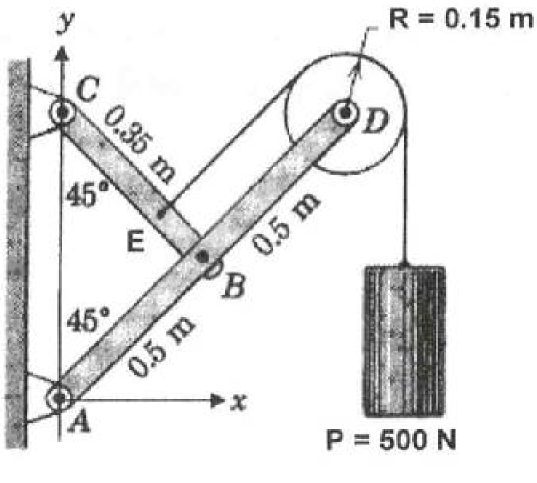
1. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{V}_3$ pour que le torseur $[T]$ constitué par les trois vecteurs, soit représenté par un couple.
2. Déterminer le vecteur $\vec{V}_3$ et les coordonnées de son point d'application C, pour que le torseur $[T]$ en O soit un torseur nul.
3. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{V}_3$ et les coordonnées C_x et C_y de son point d'application C, pour que, simultanément :
   - La résultante du torseur [T] soit parallèle à Ox.
   - Le moment résultant $\vec{M}_C = \vec{0}$.
   - Le moment résultant $\vec{M}_O = 6\vec{y} + 2\vec{z}$.

Exercice 2 (08 points)

Calculer, les composantes des réactions aux niveaux des articulations A, B, C et D du système articulé représenté ci-contre.

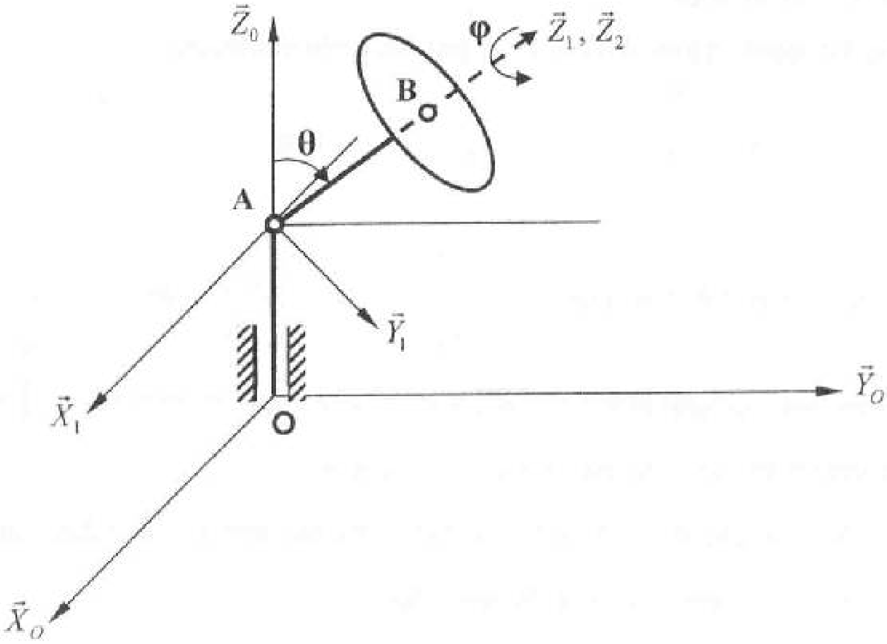
Hypothèses :

- Les deux barres AD et BC ainsi que la poulie sont de masses négligeables.
- Le fil supportant le poids P est supposé inextensible.



Exercice 3 (08 points)

Soit un système matériel constitué de trois solides : une tige 0A de longueur L, d'un arbre AB de même longueur L en rotation, autour de $\vec{X}_1$, à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante et d'un disque de rayon R de centre B en rotation autour de son axe propre à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ constante, comme le montre la figure ci-dessous :



Prendre R_1 comme repère de projection.

1. Déterminer le vecteur rotation du disque par rapport au repère fixe (R_0).
2. Calculer les vecteurs vitesse et accélération du point B.
3. Par la composition des mouvements, et en prenant le repère (R_1) comme repère relatif :
   a. calculer la vitesse absolue du point P de la périphérie du disque tel que : $\overrightarrow{CP} = R \cdot \vec{Y}_2$,
   b. calculer l'accélération absolue du point P.
4. Par le champ des accélérations, retrouver l'accélération du point P.

Correction du Partiel N°1	13 janvier 2008	2006/2008

Exercice 1 (04 pts)

1. Les composantes du vecteur $\vec{V}_3$

$\vec{R}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3=\begin{cases}x\\ y+1\\ z-3\end{cases}$ $[T]$ est un couple donc $\vec{R}=\vec{0}$ soit : $\begin{cases}x=0\\ y=-1\\ z=3\end{cases}$ 0.75

2. Pour que $[T]$ soit un torseur nul, il faut que $\vec{R}=\vec{0}$ et $\vec{M}_O=\vec{0}$
Soit :

$$\vec{M}_O=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}_1+\overrightarrow{OB}\wedge\vec{V}_2+\overrightarrow{OC}\wedge\vec{V}_3=\vec{0} \longleftarrow 0.25$$

$$\vec{M}_O=\begin{cases}1\\0\\0\end{cases}\wedge\begin{cases}1\\0\\-3\end{cases}+\begin{cases}0\\1\\0\end{cases}\wedge\begin{cases}-1\\1\\0\end{cases}+\begin{cases}C_X\\C_Y\\6\end{cases}\wedge\begin{cases}0\\-1\\3\end{cases}=\begin{cases}0\\3+\\0\end{cases}\begin{cases}0\\0+\\1\end{cases}\begin{cases}3C_Y+6\\3(1-C_X)\\1-C_X\end{cases}=\begin{cases}0\\0\\0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_Y=-2\\C_X=1\end{cases} \quad 0.5$$

Torseur nul : $\vec{R}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=-1\\ z=3\end{cases}$ $\vec{M}_O=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}C_Y=-2\\C_X=1\end{cases}$

3. Détermination des composantes $\vec{V}_3$ et des coordonnées C_x et C_y du point C :

On a : $\vec{R}=x\cdot\vec{x}+(y+1)\cdot\vec{y}+(z-3)\cdot\vec{z}$

- La résultante du torseur [T] soit parallèle à Ox. 0.25

$$\vec{R}\ //\ O\vec{x} \Rightarrow \begin{cases}y=-1\\z=3\end{cases} \Rightarrow \vec{R}=x\cdot\vec{x} \longleftarrow 0.25$$

0.25

- Le moment résultant $\vec{M}_C=\vec{0}$.

$$0.25 \longrightarrow \vec{M}_C=\vec{M}_O+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OC}$$

où $\vec{M}_O=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}_1+\overrightarrow{OB}\wedge\vec{V}_2+\overrightarrow{OC}\wedge\vec{V}_3$

$$\vec{M}_O=\begin{cases}1\\0\\0\end{cases}\wedge\begin{cases}1\\0\\-3\end{cases}+\begin{cases}0\\1\\0\end{cases}\wedge\begin{cases}-1\\1\\0\end{cases}+\begin{cases}C_X\\C_Y\\6\end{cases}\wedge\begin{cases}x\\-1\\3\end{cases}=\begin{cases}0\\3+\\0\end{cases}\begin{cases}0\\0+\\1\end{cases}\begin{cases}3C_Y+6\\6x-3C_X\\-C_X-xC_Y\end{cases}=\begin{cases}3C_Y+6\\3(1+2x-Cx)\\1-C_X-xC_Y\end{cases}$$

et donc : $\vec{M}_C=\begin{cases}3C_Y+6\\3(1+2x-Cx)+\\1-C_X-xC_Y\end{cases}\begin{cases}x\\0\\0\end{cases}\wedge\begin{cases}C_X\\C_Y\\6\end{cases}=\begin{cases}3C_Y+6\\3(1+2x-Cx)+\\1-C_X-xC_Y\end{cases}\begin{cases}0\\-6x\\xC_Y\end{cases}=\begin{cases}3C_Y+6\\3(1-Cx)\\1-C_X\end{cases}$ 0.75

$$\vec{M}_C=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}3C_Y+6\\3(1-Cx)\\1-C_X\end{cases}=\begin{cases}0\\0\\0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_Y=-2\\C_X=1\end{cases} \quad 0.5$$

- Le moment résultant $\vec{M}_O = 6\vec{y} + 2\vec{z}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 3C_Y + 6 \\ 3(1+2x-Cx) = \\ 1 - C_X - xC_Y \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 6 \\ 2 \end{cases}$

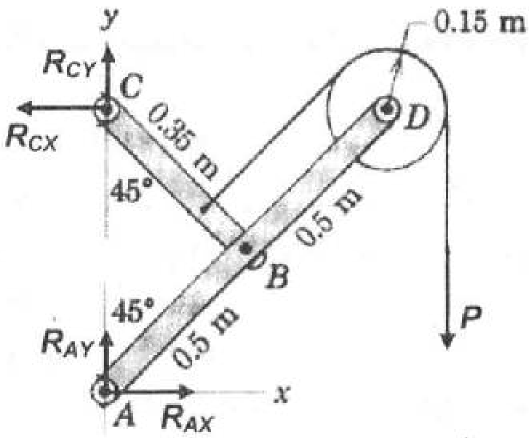
avec : $\begin{cases} C_Y = -2 \\ C_X = 1 \end{cases}$ de la question précédente on aura : $\left.\begin{matrix} 6x = 6 \\ 2x = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 1$ ⟵ 0.25

Exercice 2 (08 pts)

En isolant le système en entier on aura :

$\sum_i \vec{F}_{iext} = \vec{0}$ et $\sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_{iext}) = \vec{0}$

Ces équations vectorielles donnent trois équations scalaires :



$\boxed{\sum_i \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Rightarrow R_{AX} - R_{CX} = 0}$ ⟵ 0.25

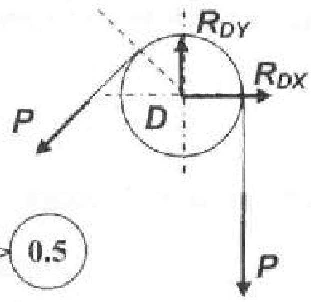
$\boxed{\sum_i \vec{F}_{iy} = \vec{0} \Rightarrow R_{AY} + R_{CY} - P = 0}$ ⟵ 0.25

$\boxed{\sum_i M_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \Rightarrow -(1\cdot\sin 45° + 0.15)P + (1\cdot\cos 45°)R_{CX} = 0}$ ⟵ 0.5

d'où on tire :

$R_{CX} = \dfrac{\sin 45° + 0.15}{\cos 45°} P$ soit : $\boxed{R_{CX} = 606\,N}$ 0.5 et $\boxed{R_{AX} = 606\,N}$ 0.5

Isolement de la poulie



$\sum_i \vec{F}_{iext} = \vec{0}$

ce qui donne :

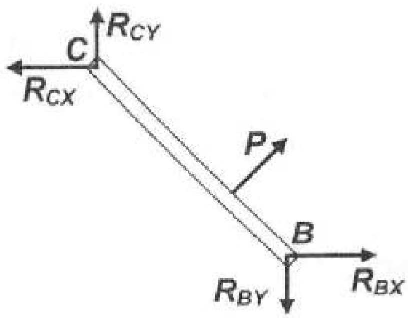
$\sum_i \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Rightarrow R_{DX} - P\cos 45° = 0$ 0.25

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} R_{DX} = 353.55\,N \\ R_{DY} = 853.55\,N \end{cases}}$ ⟵ 0.5

$\sum_i \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Rightarrow R_{DY} - P - P\sin 45° = 0$

0.25

Isolement de la tige BC



$\sum_i \vec{F}_{iext} = \vec{0}$ et $\sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_{iext}) = \vec{0}$

Ce qui donne :

$$\boxed{\begin{matrix} \sum_i \vec{F}_{iX} = \vec{0} \Rightarrow -R_{CX} + P\cos 45° + R_{BX} = 0 \\ \sum_i \vec{F}_{iY} = \vec{0} \Rightarrow R_{CY} - R_{BY} + P\sin 45° = 0 \end{matrix}}$$ ⟵ 1

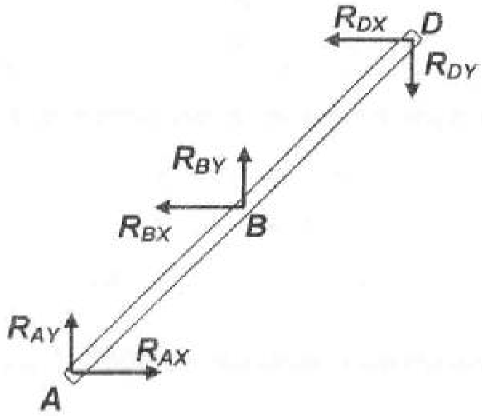
$\boxed{\sum_i M_B(\vec{F}_i) = \vec{0} \Rightarrow -(0.15)P + (0.5\cdot\cos 45°)R_{CX} - (0.5\cdot\cos 45°)R_{CY} = 0}$ ⟵ 0.5

Soit :

$$-0.15\cdot P+0.5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R_{CX}-0.5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R_{CY}=0\Rightarrow \boxed{R_{CY}=\frac{0.5\cdot\sqrt{2}\,R_{CX}-0.3\cdot P}{0.5\sqrt{2}}=393.87\,N}\quad 0.5$$

$\boxed{R_{BX}=R_{CX}-P\cos 45=252.45\,N}$ 0.5 et $\boxed{R_{BY}=P\sin 45°+R_{CY}=747.42\,N}$ 0.5

Isolement de la tige AD



$$\sum_i \vec{F}_{iext}=\vec{0}$$

Ce qui donne :

$$\sum_i \vec{F}_{iX}=\vec{0}\Rightarrow R_{AX}-R_{BX}-R_{DX}=0$$
$$\sum_i \vec{F}_{iY}=\vec{0}\Rightarrow R_{AY}+R_{BY}-R_{DY}=0$$

1

D'où on tire :

$R_{AX}=R_{BX}+R_{DX}$
$R_{AY}=R_{DY}-R_{BY}$

soit : $\boxed{R_{AX}=608\,N}$, $\boxed{R_{AY}=44\,N}$ 1

Exercice 3 (08 pts)

1. Vecteur rotation instantanée du disque par rapport au repère fixe (R_0),

$$\vec{\Omega}_{2/0}=\vec{\Omega}_{2/1}+\vec{\Omega}_{1/0}=\begin{cases}-\dot{\theta}\\0\\0\end{cases}_{R1}+\begin{cases}0\\0\\\dot{\varphi}\end{cases}_{R1}=\begin{cases}-\dot{\theta}\\0\\\dot{\varphi}\end{cases}_{R1}\quad 0.5$$

2. Calcul de la vitesse et l'accélération du point B, par dérivation,

$$0.5\quad\boxed{\vec{V}_{B/0}=\frac{d^0\overrightarrow{OB}}{dt}=\frac{d^1\overrightarrow{OB}}{dt}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{OB}}$$

avec : $$\overrightarrow{OB}=\begin{cases}0\\0+\\L\end{cases}_{R0}\begin{cases}0\\0=\\L\end{cases}_{R1}\begin{cases}0\\-L\sin\theta+\\L\cos\theta\end{cases}_{R1}\begin{cases}0\\0=\\L\end{cases}_{R1}\begin{cases}0\\-L\sin\theta\\L(1+\cos\theta)\end{cases}_{R1}\quad 0.5$$

$$\vec{V}_{B/0}=\begin{cases}0\\-L\dot{\theta}\cos\theta+\\-L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R1}\begin{cases}-\dot{\theta}\\0\\0\end{cases}_{R1}\wedge\begin{cases}0\\-L\sin\theta\\L(1+\cos\theta)\end{cases}_{R1}=\begin{cases}0\\-L\dot{\theta}\cos\theta+\\-L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R1}\begin{cases}0\\+L\dot{\theta}(1+\cos\theta)=\\+L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}_{R1}\begin{cases}0\\L\dot{\theta}\\0\end{cases}_{R1}\quad 0.25$$

$$0.5\quad\boxed{\vec{\gamma}_{B/0}=\frac{d^0\vec{V}_{B/0}}{dt}=\frac{d^1\vec{V}_{B/0}}{dt}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{V}_{B/0}}\quad \vec{\gamma}_{B/0}=\begin{cases}-\dot{\theta}\\0\\0\end{cases}_{R1}\wedge\begin{cases}0\\L\dot{\theta}=\\0\end{cases}_{R1}\begin{cases}0\\0\\-L\dot{\theta}^2\end{cases}_{R1}\quad 0.25$$

3. Vitesse absolue du point P, par la composition des vitesses

$$0.5\quad\boxed{\vec{V}_{P/0}=\vec{V}_{P/1}+\vec{V}_{P\in 1/0}}$$

$$\vec{V}_{P/1}=\frac{d^1\overrightarrow{AP}}{dr}\qquad \text{avec } \overrightarrow{AP}==\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\begin{cases}0\\0+\\L\end{cases}_{R1}\begin{cases}-R\sin\varphi\\R\cos\varphi\\0\end{cases}_{R1}=\begin{cases}-R\sin\varphi\\R\cos\varphi\\L\end{cases}_{R1}$$

d'où : $$\vec{V}_{P/1}= {}_{R1}\left\{\begin{matrix} -R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right. \quad 0.5$$

$$\boxed{\vec{V}_{P\in 1/0}=\vec{V}_{B\in 1/0}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{BP}} \quad 0.25$$

$$\vec{V}_{P\in 1/0}= {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{matrix}\right. + {}_{R1}\left\{\begin{matrix} -\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \wedge {}_{R1}\left\{\begin{matrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{matrix}\right. = {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{matrix}\right. + {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -R\dot{\theta}\cos\varphi \end{matrix}\right. = {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ -R\dot{\theta}\cos\varphi \end{matrix}\right. \quad 0.5$$

et donc on tire la vitesse absolue du point P

$$\vec{V}_{P/0}= {}_{R1}\left\{\begin{matrix} -R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right. + {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ -R\dot{\theta}\cos\varphi \end{matrix}\right. = {}_{R1}\left\{\begin{matrix} -R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ L\dot{\theta}-R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -R\dot{\theta}\cos\varphi \end{matrix}\right.$$

Accélération absolue du point P, par la composition des vitesses

$$\boxed{\vec{\gamma}_{P/0}=\vec{\gamma}_{P/1}+\vec{\gamma}_{P\in 1/0}+2\,\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{V}_{P/1}} \quad 0.5$$

- L'accélération relative

$$\vec{\gamma}_{P/1}=\frac{d^1\vec{V}_{P/1}}{dt}= {}_{R1}\left\{\begin{matrix} R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ -R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ 0 \end{matrix}\right. \quad 0.5$$

- L'accélération d'entraînement

$$\vec{\gamma}_{P\in 1/0}=\vec{\gamma}_{B\in 1/0}+\frac{d^0\vec{\Omega}_{1/0}}{dt}\wedge\overrightarrow{BP}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge(\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{BP})$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_{1/0}}{dt}=\frac{d^1\vec{\Omega}_{1/0}}{dt}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}=\vec{0}$$ e

$$\vec{\Omega}_{1/0}\wedge(\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{BP})= {}_{R1}\left\{\begin{matrix} -\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \wedge {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -R\dot{\theta}\cos\varphi \end{matrix}\right. = {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ -R\dot{\theta}^2\cos\varphi \\ 0 \end{matrix}\right. \quad 0.25$$

d'où on tire :

$$\vec{\gamma}_{P\in 1/0}= {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -L\dot{\theta}^2 \end{matrix}\right. + {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ -R\dot{\theta}^2\cos\varphi \\ 0 \end{matrix}\right. = {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ -R\dot{\theta}^2\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}^2 \end{matrix}\right. \quad 0.5$$

- L'accélération de Coriolis

$$\vec{\gamma}_{Coriolis}=2\,\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{V}_{P/1}=2 {}_{R1}\left\{\begin{matrix} -\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \wedge {}_{R1}\left\{\begin{matrix} -R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right. = {}_{R1}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi \end{matrix}\right. \quad 0.25$$

d'où l'accélération absolue du point P est :

$$\vec{\gamma}_{P/0}=\begin{cases}R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\\-R\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\\0\end{cases}_{R1}\begin{cases}0\\-R\dot{\theta}^2\cos\varphi+\\-L\dot{\theta}^2\end{cases}_{R1}\begin{cases}0\\0\\2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}_{R1}=\begin{cases}R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\\-R(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\cos\varphi\\-L\dot{\theta}^2+2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}_{R1}$$

4. Accélération absolue du point P, par le champ des accélérations

$$\boxed{\vec{\gamma}_{P/0}=\vec{\gamma}_{B/0}+\frac{d^0\vec{\Omega}_{2/0}}{dt}\wedge\overrightarrow{BP}+\vec{\Omega}_{2/0}\wedge(\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\overrightarrow{BP})} \quad 0.5$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_{2/0}}{dt}=\frac{d^1\vec{\Omega}_{2/0}}{dt}+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{\Omega}_{2/0}=\begin{cases}-\dot{\theta}\\0\\0\end{cases}_{R1}\wedge\begin{cases}-\dot{\theta}\\0\\\dot{\varphi}\end{cases}_{R1}=\begin{cases}0\\\dot{\theta}\dot{\varphi}\\0\end{cases}_{R1} \quad 0.25$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_{2/0}}{dt}\wedge\overrightarrow{BP}=\begin{cases}0\\\dot{\theta}\dot{\varphi}\\0\end{cases}_{R1}\wedge\begin{cases}-R\sin\varphi\\R\cos\varphi\\0\end{cases}_{R1}=\begin{cases}0\\0\\R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}_{R1} \quad 0.25$$

$$\vec{\Omega}_{2/0}\wedge(\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\overrightarrow{BP})=\begin{cases}-\dot{\theta}\\0\\\dot{\varphi}\end{cases}_{R1}\wedge\left[\begin{cases}-\dot{\theta}\\0\\\dot{\varphi}\end{cases}_{R1}\wedge\begin{cases}-R\sin\varphi\\R\cos\varphi\\0\end{cases}_{R1}\right]=\begin{cases}-\dot{\theta}\\0\\\dot{\varphi}\end{cases}_{R1}\wedge\begin{cases}-R\dot{\varphi}\cos\varphi\\-R\dot{\varphi}\sin\varphi\\-R\dot{\theta}\cos\varphi\end{cases}_{R1}$$

$$\vec{\Omega}_{2/0}\wedge(\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\overrightarrow{BP})==\begin{cases}R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\\-R(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\cos\varphi\\R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}_{R1} \quad 0.75$$

d'où on a :

$$\vec{\gamma}_{P/0}=\begin{cases}0\\0\\-L\dot{\theta}^2\end{cases}_{R1}+\begin{cases}0\\0\\R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}_{R1}+\begin{cases}R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\\-R(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\cos\varphi=\\R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}_{R1}\begin{cases}R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\\-R(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\cos\varphi\\-L\dot{\theta}^2+2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}_{R1}$$

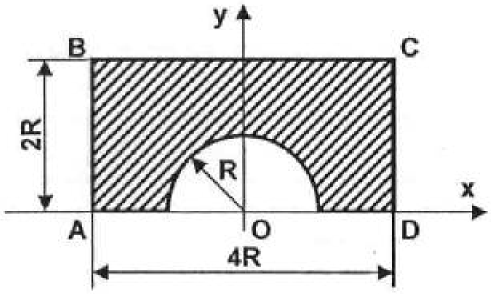
ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

2ème Année Préparatoire **Année Scolaire** : 2007/2008

Partiel N° 2

Module : MECANIQUE II **Date :** 02/04/2008 **Durée :** 02 heures

Exercice 1 (05 points)



Soit une plaque rectangulaire percée d'un demi disque comme le montre la figure ci-contre :

1. Déterminer l'ordonnée y_G du centre d'inertie de cette plaque.

1.1. Par intégration

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

y_G = ...

1.2. Par le théorème de Guldin, retrouver l'ordonnée y_G du centre d'inertie

....

....

....

....

....

....

2. Déterminer le tenseur d'inertie au point O de la plaque pleine ABCD de masse **M** ainsi que le tenseur d'inertie du demi disque de centre O, de rayon **R** et de masse **m**.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$\overline{\overline{J}}_0\,(Plaque) = \begin{bmatrix} ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... \end{bmatrix}$	$\overline{\overline{J}}_0\,(\tfrac{1}{2}\,disque) = \begin{bmatrix} ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... \end{bmatrix}$

3. En fonction de σ (la masse surfacique) et **R**, en déduire le tenseur d'inertie de la plaque percée par un demi disque.

$\boxed{\overline{\overline{J}}_0(Plaque\ percée) = \text{..}}$

....

....

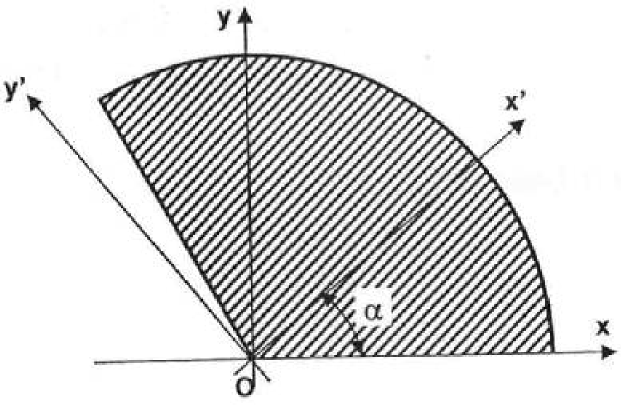
$$\overline{\overline{J}}_0\,(Plaque\ percée) = \begin{bmatrix} ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... \end{bmatrix}$$

Exercice 2 (05 points)

Soit un secteur circulaire d'angle **(2π/3)** radians, de rayon R et de masse **m**.

1. Déterminer le tenseur d'inertie du secteur circulaire au point O dans la base (x,y,z).

$$\overline{\overline{J_0}} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



2. En déduire le tenseur d'inertie au point O dans la base (x',y',z').

....

....

....

....

....

$$\overline{\overline{J_0}} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}_{(\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}')}$$

3. Déterminer l'angle α pour que les axes Ox' et Oy' soient des axes principaux d'inertie.

....

....

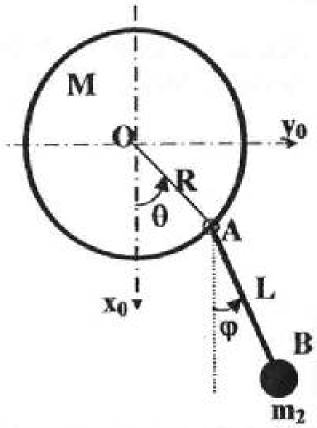
α = ...

4. En déduire alors les moments d'inertie principaux.

$I_{X'}$ = ...	$I_{Y'}$ = ...	$I_{Z'}$ = ...

Exercice 3 (05 points)

Soit un système composé d'un disque de centre O, de rayon **R** et de masse **M**, en rotation autour de l'axe Oz_0. Au point A du disque s'articule une tige mince de longueur **L** et de masse $\mathbf{m_1}$, portant à son extrémité B une masse ponctuelle $\mathbf{m_2}$.



1. Déterminer le moment cinétique au point O du disque.

$$\vec{\sigma}_0(Disque/R_0) = \text{..}$$

....

....

....

$$\vec{\sigma}_0(Disque/R_0) = \text{..}$$

2. Déterminer le moment cinétique au point O de la tige.

$$\vec{\sigma}_0(Tige/R_0) = \text{..}$$

....

....

....

$$\vec{\sigma}_0(Tige/R_0) = \text{..}$$

3. Déterminer le moment cinétique au point O de la masse B.

$$\vec{\sigma}_0(Masse\,B/R_0) = \text{..}$$

....

....

....

$$\vec{\sigma}_0(Masse\,B/R_0) = \text{..}$$

4. En déduire le moment cinétique au point O du système.

$\vec{\sigma}_0(\Sigma / R_0) =$ ....

5. En déduire le moment dynamique au point O du système.

$\vec{\delta}_0(\Sigma / R_0) =$ ....

....

....

....

....

$\vec{\delta}_0(\Sigma / R_0) =$ ....

6. Calculer l'énergie cinétique du système.

$T(\Sigma / R_0) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

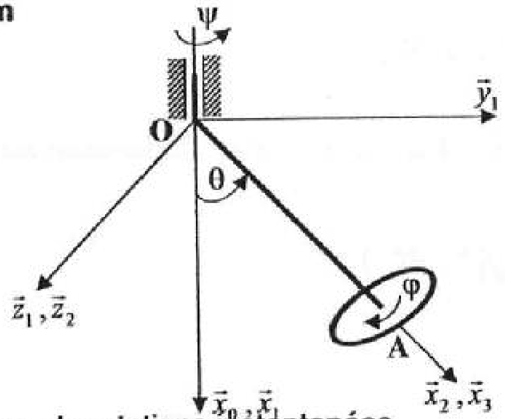
....

....

$T(\Sigma / R_0) =$ ....

Exercice 4 (05 points)

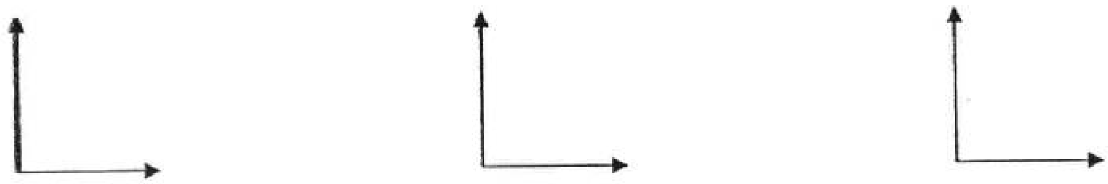
Un pendule sphérique est constitué d'une tige OA de masse **m** et de longueur **L** et d'un disque de masse **M** et de rayon **R**.
On donne :



$$I_A(Disque) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{4} \end{bmatrix}_{R2} \; ; \; I_O(Tige) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R2}$$

Prendre (R_2) comme repère de projection

1. Etablir les trois figures planes et en déduire les trois vecteurs de rotations instantanées.



$$\Omega_{1/0} = \begin{cases} .... \\ .... \\ .... \end{cases}_{R2} \qquad \Omega_{2/1} = \begin{cases} .... \\ .... \\ .... \end{cases}_{R2} \qquad \Omega_{3/2} = \begin{cases} .... \\ .... \\ .... \end{cases}_{R2\ R2}$$

2. Déterminer le moment cinétique au point O du système.

$\vec{\sigma}_0(\Sigma / R_0) =$ ....

3. Déterminer l'énergie cinétique du système.

$T(\Sigma / R_0) =$ ....

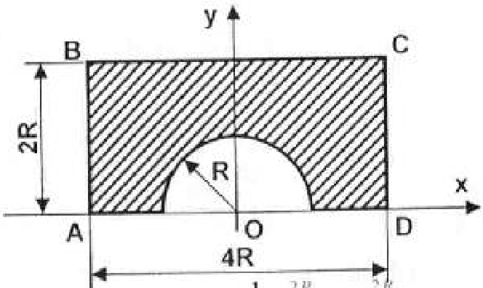
ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

$2^{ème}$ **Année Préparatoire** **Année Scolaire** : 2007/2008

Partiel N° 2

Module : MECANIQUE II **Date :** 02/04/2008 **Durée :** 02 heures

Exercice 1 (05 points)



Soit une plaque rectangulaire percée d'un demi disque comme le montre la figure ci-contre :

1. Déterminer l'ordonnée y_G du centre d'inertie de cette plaque.

1.1. Par intégration

Pour la plaque rectangulaire : $Y_{1G} = \dfrac{1}{S_1}\iint y\,dx\,dy$ avec $S_1 = 8R^2$ soit $Y_{1G} = \dfrac{1}{8R^2}\int_0^{2R} y\,dy \int_{-2R}^{2R} dx = R$ 0.25

Pour le demi disque circulaire : $Y_{2G} = \dfrac{1}{S_2}\iint y\,dS$ avec $S_2 = \dfrac{\pi R^2}{2}$, $y = r\sin\theta$ et $dS = r\,d\theta\,dr$

$$Y_{2G} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2\,dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$ 0.25 d'où : $\boxed{Y_{2G} = \dfrac{Y_{1G}\cdot S_1 - Y_{2G}\cdot S_2}{S_1 - S_2}}$ 0.25 soit : $Y_{2G} = \dfrac{R\cdot 8R^2 - \dfrac{4R}{3\pi}\cdot\dfrac{\pi R^2}{2}}{8R^2 - \dfrac{\pi R^2}{2}}$

0.5 $$\boxed{Y_G = \frac{22R}{3(8-\pi/2)} = 1.14R}$$

1.2. Par le théorème de Guldin, retrouver l'ordonnée y_G du centre d'inertie

Par rotation de 2π radians autour de l'axe Ox, le volume engendré est donné par :

$\boxed{V = 2\pi Y_G S}$ 0.25 avec : $V = V_1 - V_2 = 16\pi R^3 - \dfrac{4}{3}\pi R^3$

soit : $\boxed{V = \dfrac{44}{3}\pi R^3 = 46.08R^3}$ 0.5 et $\boxed{S = 8R^2 - \dfrac{\pi R^2}{2} = 6.43R^2}$ 0.5

d'où $Y_G = \dfrac{V}{2\pi S} = \dfrac{22R}{3(8-\pi/2)} = 1.14R$

2. Déterminer le tenseur d'inertie au point O de la plaque pleine ABCD de masse **M** ainsi que le tenseur d'inertie du demi disque de centre O, de rayon **R** et de masse **m**.

- Tenseur d'inertie de la plaque pleine :

Le plan (yoz) est un plan de symétrie et de plus (z=0), on a donc :

$$I_{XY}(S_1) = I_{XZ}(S_1) = I_{YZ}(S_1) = 0 \quad \text{et} \quad I_Z(S_1) = I_X(S_1) + I_Y(S_1)$$

$$I_X(S_1) = \int_\Sigma y^2\,dm = \sigma\int_{-2R}^{2R} dx\int_0^{2R} y^2\,dy = \frac{32}{3}\sigma R^4 = \frac{4}{3}MR^2$$

$$I_Y(S_1) = \int_\Sigma x^2\,dm = \sigma\int_{-2R}^{2R} x^2\,dx\int_0^{2R} dy = \frac{32}{3}\sigma R^4 = \frac{4}{3}MR^2 \quad \text{et} \quad I_Z(S_1) = I_X(S_1) + I_Y(S_1) = \frac{8}{3}MR^2$$

- Tenseur d'inertie de la plaque circulaire :

Le plan (yoz) est un plan de symétrie et de plus (z=0), on a donc :

$$I_{XY}(S_2) = I_{XZ}(S_2) = I_{YZ}(S_2) = 0 \quad \text{et} \quad I_Z(S_2) = I_X(S_2) + I_Y(S_2)$$

$$I_X(S_2) = \int_\Sigma y^2 dm = \sigma \int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta \int_0^R r^3 dr = \sigma \frac{\pi R^4}{8} = \frac{mR^2}{4}$$

$$I_Y(S_2) = \int_\Sigma x^2 dm = \sigma \int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta \int_0^R r^3 dr = \sigma \frac{\pi R^4}{8} = \frac{mR^2}{4} \quad \text{et} \quad I_Z(S_1) = I_X(S_1) + I_Y(S_1) = \frac{mR^2}{2}$$

0.75

Soit : $$\boxed{\overline{\overline{J}}_0\,(Plaque) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}MR^2 \end{bmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{\overline{J}}_0\,(\tfrac{1}{2}\ disque) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}}$$ 0.75

3. En fonction de σ (la masse surfacique) et R, en déduire le tenseur d'inertie de la plaque percée par un demi disque.

$$\boxed{\overline{\overline{J}}_0(Plaque\ percée) = \overline{\overline{J}}_0(Plaque\ pleine) - \overline{\overline{J}}_0(Demi-disque)}$$ 0.25

0.75

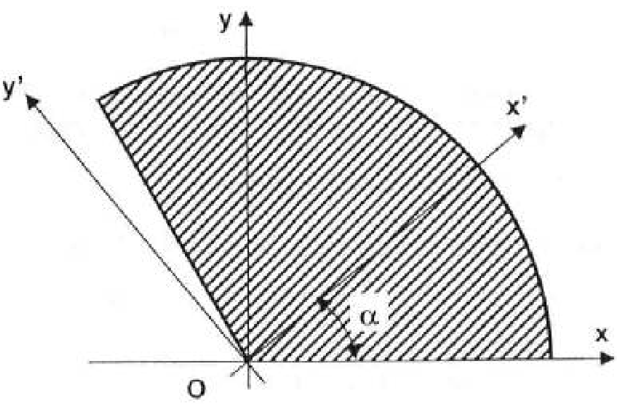
$$\overline{\overline{J}}_0\,(Plaque\ percée) = \begin{bmatrix} \left(\frac{32}{3} - \frac{\pi}{8}\right)\sigma R^4 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{32}{3} - \frac{\pi}{8}\right)\sigma R^4 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{64}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\sigma R^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.27 & 0 & 0 \\ 0 & 10.27 & 0 \\ 0 & 0 & 20.55 \end{bmatrix} \sigma R^4$$

Exercice 2 (05 points)

Soit un secteur circulaire d'angle **(2π/3)** radians, de rayon **R** et de masse **m**.

1. Déterminer le tenseur d'inertie du secteur circulaire au point O dans la base (x,y,z).

$$\overline{\overline{J}}_0 = \begin{bmatrix} \sigma \frac{R^4}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) & -\sigma \frac{3R^4}{32} & 0 \\ -\sigma \frac{3R^4}{32} & \sigma \frac{R^4}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \frac{\pi R^4}{6} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



$$\overline{\overline{J}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4}\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\right) & -\frac{9}{32\pi}mR^2 & 0 \\ -\frac{9}{32\pi}mR^2 & \frac{mR^2}{4}\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ 1

2. En déduire le tenseur d'inertie au point O dans la base (x',y',z').

$\boxed{I_{X'} = \vec{x}'^T \cdot \overline{\overline{J}}_O \cdot \vec{x}'}$ 0.25 $\quad I_{Y'} = \vec{y}'^T \cdot \overline{\overline{J}}_O \cdot \vec{y}' \quad , \quad I_{Z'} = I_Z$

$I_{X'Y'} = -\vec{y}'^T \cdot \overline{\overline{J}}_O \cdot \vec{x}'$ et $I_{X'Z'} = I_{Y'Z'} = 0$ (car z=0)

avec : $\vec{x}' = \begin{cases} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{cases}$ 0.25 et $\vec{y}' = \begin{cases} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{cases}$ 0.25 soit : $\overline{\overline{J}}_0 = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$$\overline{\overline{J}}_0 = \begin{bmatrix} A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha - F\dfrac{\sin 2\alpha}{2} & (A-B)\dfrac{\sin 2\alpha}{2} + F\cos 2\alpha & 0 \\ (A-B)\dfrac{\sin 2\alpha}{2} + F\cos 2\alpha & A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha + F\dfrac{\sin 2\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ 1

3. Déterminer l'angle α pour que les axes Ox' et Oy' soient des axes principaux d'inertie.

Pour que Ox' et Oy' soient des axes principaux d'inertie, il faut que : $\boxed{I_{X'Y'} = 0}$ 0.25

Soit : $(A-B)\dfrac{\sin 2\alpha}{2} + F\cos 2\alpha = 0$, c'est-à-dire :

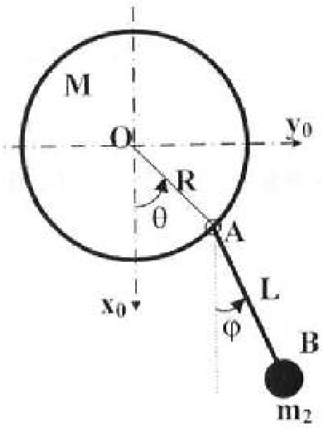
$$\frac{mR^2}{16}\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{9}{32\pi} mR^2 \cos 2\alpha = 0 \quad \text{soit : } \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ soit : } \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$ 0.5

4. En déduire alors les moments d'inertie principaux.

$\boxed{I_{Y'} = \dfrac{MR^2}{4}\left[1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right]}$ 0.5 $\quad \boxed{I_{X'} = \dfrac{MR^2}{4}\left[1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right]}$ 0.5 $\quad \boxed{I_{Z'} = \dfrac{MR^2}{2}}$ 0.5

Exercice 3 (05 points)

Soit un système composé d'un disque de centre O, de rayon **R** et de masse **M**, en rotation autour de l'axe Oz_0. Au point A du disque s'articule une tige mince de longueur **L** et de masse $\mathbf{m_1}$, portant à son extrémité B une masse ponctuelle $\mathbf{m_2}$.



1. Déterminer le moment cinétique au point O du disque.

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(Disque/R_0) = I_0(D)\cdot\vec{\Omega}_{1/0}}$$ 0.25

$$\vec{\sigma}_0(D/R_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{(R1)} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{(R1)} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dfrac{MR^2}{2}\dot{\theta} \end{cases}$$ 0.25

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(Disque/R_0)=\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\vec{z}_0=\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\vec{z}_1=\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\vec{z}_2=\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\vec{z}_3}$$

2. Déterminer le moment cinétique au point O de la tige. 0.5

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(Tige/R_0)=\vec{\sigma}_G(T/R_0)+\overrightarrow{OG}\wedge m_1\vec{V}_{G/0}=\overline{\overline{J}}_G(T)\cdot\vec{\Omega}_{2/0}+\overrightarrow{OG}\wedge m_1\vec{V}_{G/0}}$$

$$\vec{\sigma}_0(T/R_0)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac{m_1L^2}{12}&0\\0&0&\frac{m_1L^2}{12}\end{bmatrix}_{(R3)}\begin{cases}0\\0\\\dot{\varphi}\end{cases}_{R2}+\begin{cases}R\cos\theta+\frac{L}{2}\cos\varphi\\R\sin\theta+\frac{L}{2}\sin\varphi\\0\end{cases}_{R2}\wedge m_1\begin{cases}-R\dot{\theta}\sin\theta-\frac{L}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\\R\dot{\theta}\cos\theta+\frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\\0\end{cases}_{R2}$$ 0.5

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(Tige/R_0)=\begin{cases}0\\0\\m_1\left[R^2\dot{\theta}+\frac{RL}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos(\theta-\varphi)+\frac{L^2}{3}\dot{\varphi}\right]\end{cases}_{R2}}$$ ← 0.5

3. Déterminer le moment cinétique au point O de la masse B.

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(Masse\,B/R_0)=\overrightarrow{OB}\wedge m_2\cdot\vec{V}_{B/0}}$$ 0.25

$$\vec{\sigma}_0(B/R_0)=\begin{cases}R\cos\theta+L\cos\varphi\\R\sin\theta+L\sin\varphi\\0\end{cases}_{R0}\wedge m_2\begin{cases}-R\dot{\theta}\sin\theta-L\dot{\varphi}\sin\varphi\\R\dot{\theta}\cos\theta+L\dot{\varphi}\cos\varphi\\0\end{cases}_{R0}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(Masse\,B/R_0)=\begin{cases}0\\0\\m_2\left[R^2\dot{\theta}+L^2\dot{\varphi}+RL(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta-\varphi)\right]\end{cases}_{R0}}$$ → 0.5

4. En déduire le moment cinétique au point O du système.

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(\Sigma/R_0)=\vec{\sigma}_0(D/R_0)+\vec{\sigma}_0(T/R_0)+\vec{\sigma}_0(B/R_0)}$$

$$\vec{\sigma}_0(\Sigma/R_0)=\begin{cases}0\\0\\R^2\dot{\theta}\left[\frac{M}{2}+m_1+m_2\right]+RL(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos(\theta-\varphi)\left[\frac{m_1}{2}+m_2\right]+L^2\dot{\varphi}\left[\frac{m_1}{3}+m_2\right]\end{cases}_{R0}$$ 0.5

5. En déduire le moment dynamique au point O du système.

$$\boxed{\vec{\delta}_0(\Sigma/R_0)=\frac{d^0\vec{\sigma}_0(\Sigma/R_0)}{dt}}$$ 0.25

$$\vec{\delta}_0(\Sigma/R_0)=\begin{cases}0\\0\\R^2\ddot{\theta}\left[\dfrac{M}{2}+m_1+m_2\right]+RL\left[(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta})\cos(\theta-\varphi)-(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\sin(\theta-\varphi)\right]\left[\dfrac{m_1}{2}+m_2\right]+L^2\ddot{\varphi}\left[\dfrac{m_1}{3}+m_2\right]\end{cases}_{R0}$$

0.5

6. Calculer l'énergie cinétique du système.

$$\boxed{T(\Sigma/R_0)=T(Tige/R_0)+T(Disque/R_0)+T(B/R_0)}$$

0.25

$$T(Tige/R_0)=\frac{1}{2}m_1V_G^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_{2/0}\cdot\bar{\bar{J}}_0\cdot\vec{\Omega}_{2/0}$$

$$T(Tige/R_0)=\frac{1}{2}m_1\left[R^2\dot{\theta}^2+\frac{L^2}{3}\dot{\varphi}^2+RL\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\right]$$

$$T(Disque/R_0)=\frac{1}{2}\vec{\Omega}_{1/0}\cdot\bar{\bar{J}}_0\cdot\vec{\Omega}_{1/0}\qquad \text{soit : } T(Disque/R_0)=\frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2$$

$$T(B/R_0)=\frac{1}{2}m_2\cdot\vec{V}_B^2\qquad \text{soit : } T(B/R_0)=\frac{m_2}{2}\left[R^2\dot{\theta}^2+L^2\dot{\varphi}^2+2RL\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi)\right]$$

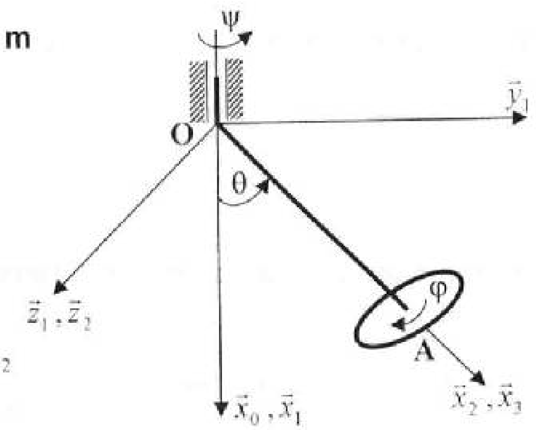
$$\boxed{T(\Sigma/R_0)=\frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2\left[m_1+m_2+\frac{M}{2}\right]+\frac{1}{2}L^2\dot{\varphi}^2\left[\frac{m_1}{3}+m_2\right]+RL\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi)\left[\frac{m_1}{2}+m_2\right]}$$

1

Exercice 4 (05 points)

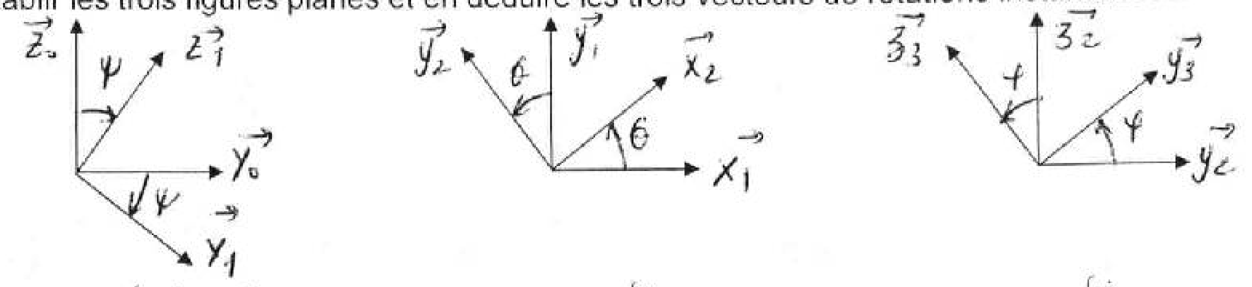
Un pendule sphérique est constitué d'une tige OA de masse **m** et de longueur L et d'un disque de masse **M** et de rayon **R**.
On donne :

$$I_A(Disque)=\begin{bmatrix}\dfrac{MR^2}{2}&0&0\\0&\dfrac{MR^2}{4}&0\\0&0&\dfrac{MR^2}{4}\end{bmatrix}_{R2}\ ;\ I_O(Tige)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\dfrac{mL^2}{3}&0\\0&0&\dfrac{mL^2}{3}\end{bmatrix}_{R2}$$



Prendre (R₂) comme repère de projection

1. Etablir les trois figures planes et en déduire les trois vecteurs de rotations instantanées.



$$\vec{\Omega}_{1/0}=\begin{cases}-\dot{\psi}\cos\theta\\\dot{\psi}\sin\theta\\0\end{cases}_{R2}\qquad \vec{\Omega}_{2/1}=\begin{cases}0\\0\\\dot{\theta}\end{cases}_{R2}\qquad \vec{\Omega}_{3/2}=\begin{cases}\dot{\varphi}\\0\\0\end{cases}_{R2}$$

2. Déterminer le moment cinétique au point O du système.

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(\Sigma/R_0)=\vec{\sigma}_0(Tige/R_0)+\vec{\sigma}_0(Disque/R_0)}$$

avec : $\vec{\sigma}_0(Tige/R_0) = \overline{\overline{J}}_0(Tige)\cdot\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R2} \begin{cases} -\dot\psi\cos\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\theta \end{cases}_{R2} = \begin{cases} 0 \\ \frac{mL^2}{3}\dot\psi\sin\theta \\ \frac{mL^2}{3}\dot\theta \end{cases}_{R2}$ 0.5

et : $\boxed{\vec{\sigma}_0(Disque/R_0) = \vec{\sigma}_A(Disque/R_0) + \overrightarrow{OA}\wedge M\vec{V}_{A/0} = \overline{\overline{J}}_A\cdot\overrightarrow{\Omega}_{3/0} + \overrightarrow{OA}\wedge M\vec{V}_{A/0}}$ 0.5

$$\vec{\sigma}_0(Disque/R_0) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{4} \end{bmatrix}_{R2} \begin{cases} \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi \\ -\dot\psi\sin\theta \\ \dot\theta \end{cases}_{R2} + \begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R2} \wedge \begin{cases} 0 \\ ML\dot\theta \\ -ML\dot\psi\sin\theta \end{cases}_{R2} = \begin{cases} \frac{MR^2}{2}\left[\dot\varphi - \dot\psi\cos\theta\right] \\ \left[ML^2 + \frac{MR^2}{4}\right]\dot\psi\sin\theta \\ \left[\frac{MR^2}{4} + ML^2\right]\dot\theta \end{cases}_{R2}$$ 0.75

D'où pour le système : $\vec{\sigma}_0(\Sigma/R_0) = \begin{cases} \frac{MR^2}{2}\left[\dot\varphi - \dot\psi\cos\theta\right] \\ \left[ML^2 + \frac{MR^2}{4} + \frac{mL^2}{3}\right]\dot\psi\sin\theta \\ \left[\frac{MR^2}{4} + ML^2 + \frac{mL^2}{3}\right]\dot\theta \end{cases}_{R2}$ 0.5

3. Déterminer l'énergie cinétique du système.

$$T(\Sigma/R_0) = T(Tige/R_0) + T(Disque/R_0)$$

$T(Tige/R_0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{2/0}\cdot\overline{\overline{J}}_0(Tige)\cdot\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \frac{mL^2}{6}\left[\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right]$ 0.5

$T(Dique/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}_A^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{3/0}\cdot\overline{\overline{J}}_A\cdot\overrightarrow{\Omega}_{3/0}$

$T(Disque/R_0) = \frac{1}{2}ML^2\left[\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{4}MR^2\left[(\dot\varphi - \dot\psi\cos\theta)^2 + \frac{\dot\psi^2\sin^2\theta}{2} + \frac{\dot\theta^2}{2}\right]$ 0.5

$T(\Sigma/R_0) = \frac{mL^2}{6}\left[\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right] + \frac{1}{2}ML^2\left[\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{4}MR^2\left[(\dot\varphi - \dot\psi\cos\theta)^2 + \frac{\dot\psi^2\sin^2\theta}{2} + \frac{\dot\theta^2}{2}\right]$ 0.5

ECOLE NATIONALE PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIORAT

2ème Année Préparatoire **Année Scolaire** : 2007/2008

SYNTHESE

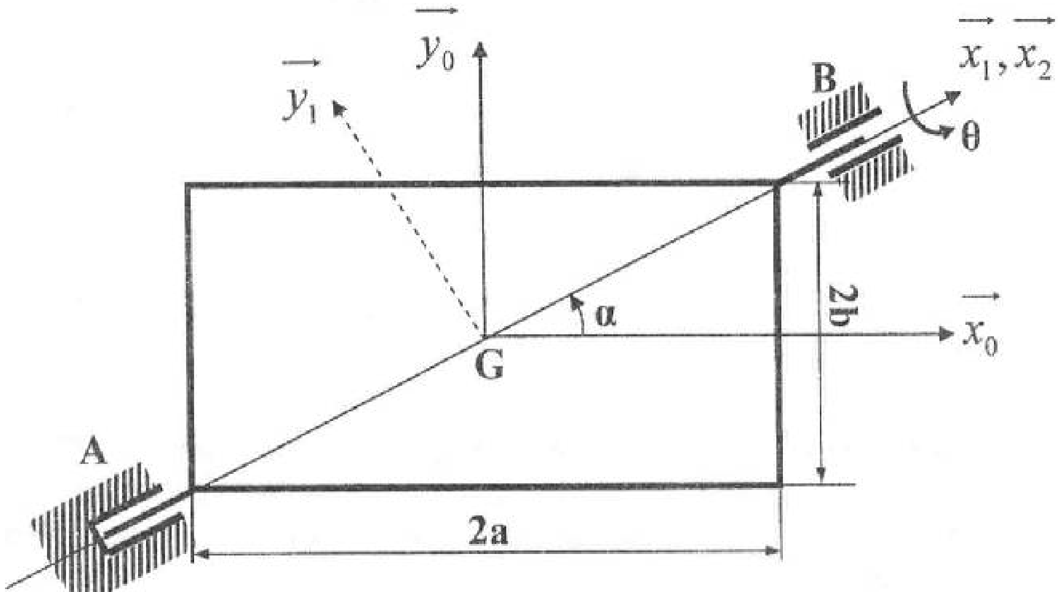
Module : MECANIQUE II **Semestre** : 4 **Date** : 28 05/ 2008 **Durée** : 2 heures

Exercice 1 (07 points)

Une plaque rectangulaire pesante de masse **M** et de dimension **2a** et **2b**, est fixée à un arbre *AB* tournant à une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante positive. La liaison en *A* est une liaison pivot glissant d'axe (G,x_1) et la liaison en *B* est une liaison du type pivot.

On donne :
AG = GB = L

On prendra :
$\overrightarrow{M_A}=\overrightarrow{M_B}=\vec{0}$



1. Déterminer le tenseur d'inertie en *G* de la plaque dans un repère local centré au point *G*.
2. En déduire le tenseur d'inertie en *G* de la plaque dans le repère lié à la plaque (R_2).
3. Pour la suite, on pose : $I_{G/R2}=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R2}$

4. **En prenant (R_1) comme repère de projection** :

5. Calculer le moment cinétique en *G* de la plaque et en déduire son moment dynamique au même point.
6. Appliquer les théorèmes généraux de la dynamique à la plaque et en déduire les expressions des réactions R_A et R_B au niveau des paliers *A* et *B*.

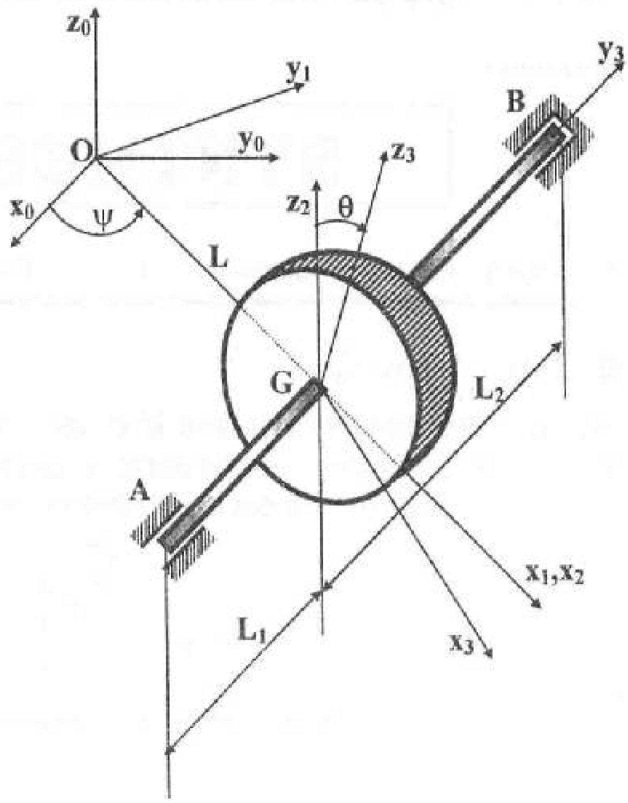
Exercice 2 (07 points)

Un disque de centre *G*, de rayon **R**, de masse **m**, fixé rigidement sur un arbre, de masse négligeable, est supporté par deux paliers *A* et *B*. Le système admet deux mouvements, comme le montre la figure ci-dessous ; un mouvement par rapport au repère (R_0) et le second par rapport au repère (R_2).

On donne : **OG = L = Cte.** $\overrightarrow{R_A}=\begin{cases} R_{Ax} \\ 0 \\ R_{Az} \end{cases}_{R2}$, $\overrightarrow{R_B}=\begin{cases} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{cases}_{R2}$ et $\overrightarrow{M_A}=\overrightarrow{M_B}=\vec{0}$

On donne :

$$I_{G/R3} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}_{R3,R2}$$



R_2 est le repère de projection, déterminer :

1. Le vecteur rotation instantanée du disque par rapport à (R_0).
2. La vitesse et l'accélération absolues du point G.
3. Les vecteurs moments cinétique et dynamique du disque au point G par rapport à (R_0).
4. L'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport à (R_0).
5. En appliquant les théorèmes généraux de la dynamique, déterminer les réactions d'appuis aux points A et B.
6. Calculer alors, le couple gyroscopique

Exercice 3 (06 points)

Soit un cylindre (S_2) plein et homogène de rayon **r** et de masse **m** pouvant rouler dans un cylindre creux (S_0) de rayon **R**. Les axes des deux cylindres sont horizontaux et parallèles. Les deux cylindres sont en contact suivant une génératrice.

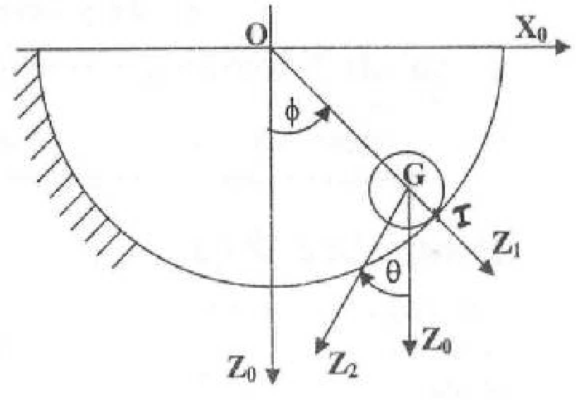
Le point I désigne le point de contact situé dans le plan de symétrie perpendiculaire aux axes des cylindres.

Le roulement de (S_2) se fait sans glissement.

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: désigne le repère fixe

$R_1(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$: suit le mouvement du point G

$R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$: repère lié à (S_2)



$$I_{G/R_2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_2}$$

R_1 est le repère de projection

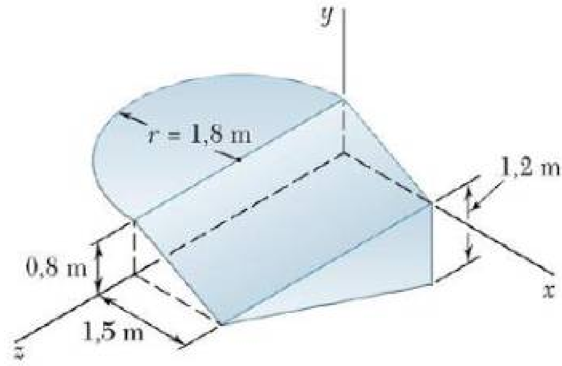
1. Par la relation de non glissement au point I, déterminer la relation entre θ et φ.
2. Calculer l'énergie cinétique du cylindre (S_2), en fonction de : θ, **r et R**.
3. Par le théorème de conservation de l'énergie mécanique déterminer l'expression de : $\ddot{\theta}$.

Université Larbi Ben M'Hidi d'OEB — le 25/01/2022
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
2ième année Licence Génie Mécanique, Génie civile et Hydraulique — Durée 1H30

Examen de Mécanique Rationnelle

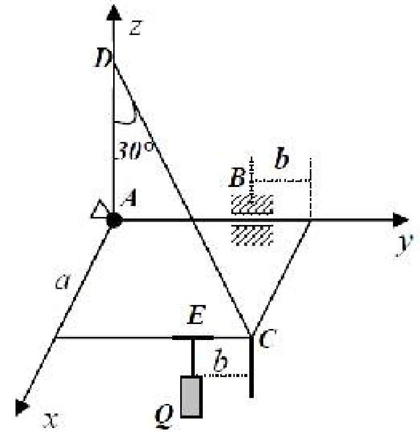
Exercice 1 : (6 pts)

Localisez le centre de gravité de la surface composée suivante :



Exercice 2 : (8 pts)

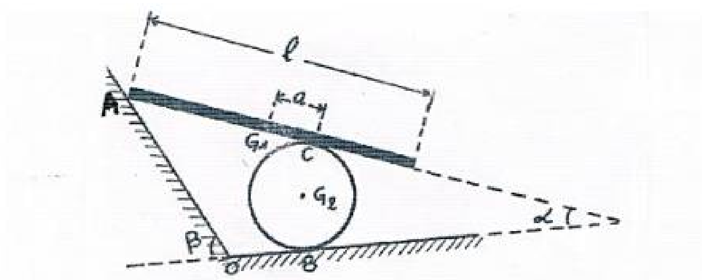
Une plaque carrée de côté ***a***, de poids ***P*** est fixée à un mur à l'aide d'une articulation sphérique au point A et d'une articulation cylindrique au point ***B***. Un câble ***CD*** inextensible et de masse négligeable maintient la plaque en position horizontale. Une charge ***Q* = 2*P*** est suspendue au point E de la plaque. Les données sont : $b = \frac{a}{3}$, $\alpha = 30$



Déterminer les réactions des articulations en ***A*** et ***B*** ainsi que la tension dans le câble en fonction de ***a*** et ***P*** ?

Exercice 3 : (6 pts)

Un système formé par une plaque linéaire (centre G_1, longueur L, masse m_1) et d'un cylindre (centre G_2, rayon R, masse m_2) est en équilibre comme montré à la figure suivante. Le plan ***OA*** est supposé lisse tandis que les contacts ***B*** et ***C*** sont rugueux.



Déterminer, les réactions en ***A***, ***B*** et ***C*** en fonction des angles α et β. Prendre $CG_1 = a$.

التمرين 1 :حدد موقع نقطه مركز الثقل للسطح المركب التالي .

التمرين 2 :يتم تثبيت لوحة مربعة ذات جانب a ، بوزن P على جدار باستخدام مفصل كروي عند النقطة A ومفصل أسطواني عند النقطة B. ويحافظ كبل غير قابل للتمدد من كتلة مهملة على اللوحة في وضع أفقي. تم تعليق الشحنة (Q =2P عند النقطة E من اللوحة. البيانات هي: b = a/3 ، ; α = 30

حدد ردود افعال المفاصل في A و B بالإضافة إلى التوتر في الكبل بدلالة a و P؟

التمرين 2 :النظام المكون من لوحة خطية (المركز G1 ، الطول L ، الكتلة m1)وأسطوانة(المركز G2 ، نصف القطر R، الكتلة m2) في حالة توازن كما هو موضح في الشكل التالي. يُفترض أن يكون المستوى OA املس بينما تكون جهات الاتصال B و C خشنة.

أوجد ردود الفعل في A و B و C بدلالة α و β؟

Bonne chance

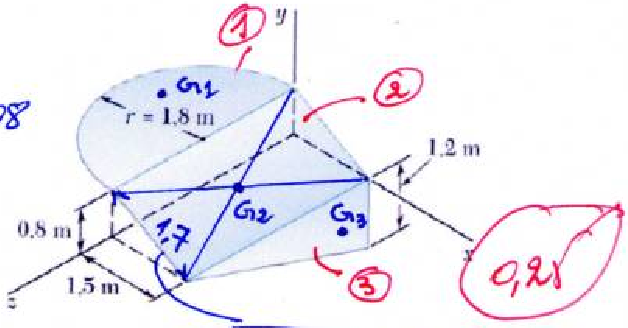
Université Larbi Ben M'Hidi d'OEB
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
2ième année Licence Génie Mécanique, Génie civile et Hydraulique

le 25/01/2022

Durée 1H30

Corrigé Type : Examen de Mécanique Rationnelle

Exercice 1 : (7 pts) Localisez le centre de gravité de la surface composée suivante :



$$\vec{OG_1} = \begin{cases} -\frac{4r}{3\pi} = -0,76 \quad 0,5 \\ 0,8 \quad 0,5 \\ 1,8 \quad 0,5 \end{cases} \qquad S_1 = \frac{\pi r^2}{2} = 5,08 \quad 0,5$$

$$\vec{OG_2} = \begin{cases} \frac{1,5}{2} = 0,75 \quad 0,5 \\ 0,8/2 = 0,4 \quad 0,5 \\ 1,8 \quad 0,5 \end{cases} \qquad S_2 = (2 \times 1,8) \times 1,7 \qquad S_2 = 6,12 \quad 0,5$$

$$\sqrt{0,8^2 + 1,5^2} = 1,7$$

$$\vec{OG_3} = \begin{cases} 1,5 \quad 0,5 \\ -\frac{1,2}{3} = -0,4 \quad 0,5 \\ \frac{3,6}{3} = 1,2 \quad 0,5 \end{cases} \qquad S_3 = \frac{2,6 \times 1,2}{2} = 1,56 \quad 0,5$$

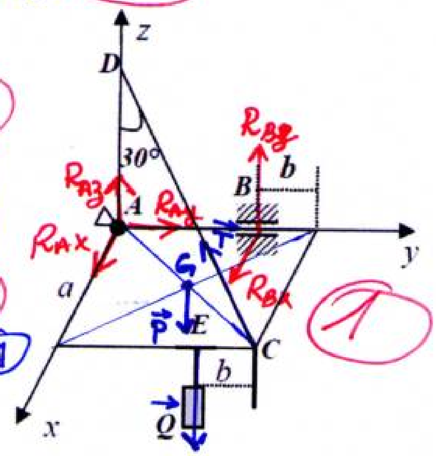
$$x_G = \frac{\sum x_{Gi} S_i}{\sum S_i} \qquad y_G = \frac{\sum y_{Gi} S_i}{\sum S_i} \qquad z_G = \frac{\sum z_{Gi} S_i}{\sum S_i}$$

$$x_G = \frac{x_{G1} S_1 + x_{G2} S_2 + x_{G3} S_3}{S_1 + S_2 + S_3}$$

$$x_G = \frac{-0,76 \cdot 5,02 + 0,75 \cdot 6,12 + 1,5 \cdot 1,56}{5,08 + 6,12 + 1,56} = 0,24\ m \quad 0,25$$

$$y_G = 0,46\ m \quad 0,25 \ ; \quad z_G = 1,72\ m. \quad 0,25$$

Exercice 2 : (9 pts)



$$\vec{R_A}\begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} 0,5 \ ; \ \vec{R_B}\begin{pmatrix} R_{Bx} \\ 0 \\ R_{Bz} \end{pmatrix} 0,5 \ ; \ \vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} 0,5 \ ; \ \vec{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Q \end{pmatrix} 0,5$$

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R_A} + \vec{R_B} + \vec{T} + \vec{P} + \vec{Q} = \vec{0} \quad 0,5 \quad (1)$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -T\cos 60° \cos 45° \\ -T \cos 60° \sin 45° \\ T \sin 60 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad 0,5$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} - T\frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \\ R_{Ay} - T\frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \\ R_{Az} + R_{Bz} + T\sin 60° - 3P = 0 \end{cases} \quad 0,75$$

$* \quad \sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0}$

$$\vec{AB} \wedge \vec{R_B} + \vec{AC} \wedge \vec{T} + \vec{AG} \wedge \vec{P} + \vec{AE} \wedge \vec{Q} = \vec{0} \quad (0,5) \longrightarrow (2)$$

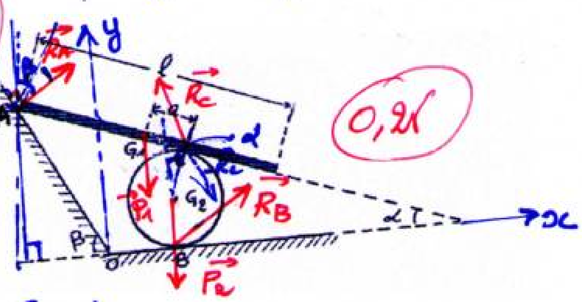
$$\vec{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}a \\ 0 \end{pmatrix} (0,5) \; ; \; \vec{AC}\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} (0,5) \; ; \; \vec{AG}\begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ 0 \end{pmatrix} (0,5) \; ; \; \vec{AE}\begin{pmatrix} a \\ \frac{2}{3}a \\ 0 \end{pmatrix} (0,5)$$

$$(2) \Leftrightarrow \; (0,75) \begin{cases} \frac{2}{3}a R_{Bz} + aT\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4aP}{3} - \frac{aP}{2} = 0 \\ -aT\frac{\sqrt{3}}{2} + 2aP + \frac{aP}{2} = 0 \\ -\frac{2}{3}a R_{Bx} = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_{Bx} = 0 \\ R_{Bz} = -P \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{R_B = P} \; (0,5) \; ; \quad R_{Ax} = \frac{5\sqrt{6}}{12}P \; ; \; R_{Ay} = \frac{5\sqrt{6}}{12}P \; ; \; R_{Az} = \frac{3}{2}P.$$

$$\underline{R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 17,39\,P} \quad (0,5)$$

Exercice 3 : (3 pts)



(0,25)

$*$ Equilibre de la plaque

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{P_1} + \vec{R_A} + \vec{R_C} = \vec{0} \quad (0,25)$$

$$(0,25) \; \vec{P_1}\begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \end{pmatrix} ; \; \vec{R_A}\begin{pmatrix} \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix} R_A \; (0,25) \; ; \; \vec{R_C}\begin{pmatrix} R_{Cx} \\ R_{Cy} \end{pmatrix} (0,25)$$

$$(0,5) \begin{cases} R_A \sin\beta + R_{Cx} = 0 \quad \text{— (1)} \\ R_A \cos\beta + R_{Cy} - m_1 g = 0 \quad \text{— (2)} \end{cases}$$

$*$ Equilibre du cylindre

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{P_2} + \vec{R_B} - \vec{R_C} = \vec{0} \; ; \; \vec{P_2}\begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \end{pmatrix} (0,25) ; \; \vec{R_B}\begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \end{pmatrix} (0,25) ; \; -\vec{R_C}\begin{pmatrix} -R_{Cx} \\ -R_{Cy} \end{pmatrix} (0,25) \; (0,25)$$

$$(0,5) \begin{cases} R_{Bx} - R_{Cx} = 0 \quad \text{— (3)} \\ R_{By} - R_{Cy} - m_2 g = 0 \quad \text{— (4)} \end{cases}$$

$$* \quad \sum \vec{M}_C(\vec{F_i}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{CG_1} \wedge \vec{P_1} + \vec{CA} \wedge \vec{R_A} = \vec{0} \quad (0,25)$$ (équilibre de la plaque seule)

$$(0,25) \; \vec{CG_1}\begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} a \; ; \; \vec{CA}\begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \left(a + \frac{L}{2}\right) (0,25)$$

$$\Rightarrow a\, m_1 g \cos\alpha - \left(a + \frac{L}{2}\right) R_A \cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow R_A = \frac{a\, m_1 g \cos\alpha}{\left(a + \frac{L}{2}\right)\cos(\alpha - \beta)} \; (0,25)$$

$$R_{Bx} = R_{Cx} = \frac{a\, m_1 g \cos\alpha \sin\beta}{\left(a + \frac{L}{2}\right)\cos(\alpha - \beta)} \quad (0,25)$$

$$R_{Cy} = m_1 g + \frac{a\, m_1 g \cos\alpha \cos\beta}{\left(a + \frac{L}{2}\right)\cos(\alpha - \beta)} \; (0,25) \; ; \; R_{By} = (m_1 + m_2)g + \frac{a\, m_1 g \cos\alpha \cos\beta}{\left(\alpha + \frac{L}{2}\right)\cos(\alpha - \beta)} \; (0,25)$$

Université de Boumerdès **Année 2007-2008**
Faculté des sciences
Département de physique

EMD02 : **Mécanique rationnelle** **02 juin 2008**
Durée : 01h30

Soit un disque homogène (1), de centre C, de masse *M* et de rayon *R*. En un point A du disque est articulée une barre AB (2) ; mince, homogène, de centre d'inertie G_2 ,de masse m et de longueur *2L*, telle que : $AC = a = cste$.

Le disque roule sans glisser sur le sol (0) muni du repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le point de contact *I* entre le disque et le sol (0) est repéré par $\vec{OI} = x(t)\,\vec{x}_0$, où t est le paramètre temps.

On désigne par :

$R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: Repère lié au disque qui se déduit de R_0, par la rotation autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$, telle que $\left(\vec{x}_0, \vec{x}_1\right) = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right) = \theta(t)$

$R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: Repère lié à la barre qui se déduit de R_1, par la rotation autour de l'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$, telle que $\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = \left(\vec{y}_1, \vec{y}_2\right) = \varphi(t)$

On choisira R_1 comme repère <u>relatif</u> et de <u>projection</u> R_0 étant le repère <u>absolu</u>.

A : <u>Cinématique</u> : (*9 Points*)

Déterminer :

A-1 : les vitesses de rotation des deux solides par rapport à R_0 ;

A-2 : la vitesse du point *C*, par rapport à R_0, par dérivation ;

A-3 : la vitesse du point *A*, par rapport à R_0, par la cinématique du solide ;

A-4: la condition de roulement sans glissement du disque sur le sol en I ;

A-5 : les vitesses relative, d'entraînement et absolue du centre de masse G_2 de la barre ;

A-6 : les accélérations relative et de Coriolis de G_2 .

B : <u>Géométrie des masses</u> : (*4 Points*)

B-1 : Donner la matrice d'inertie du disque au point C dans R_1 ;

B-2 : Ecrire la matrice d'inertie de la barre au point A dans R_2 ;

B-3 : En déduire le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe $\left(A, \vec{x}_1\right)$.

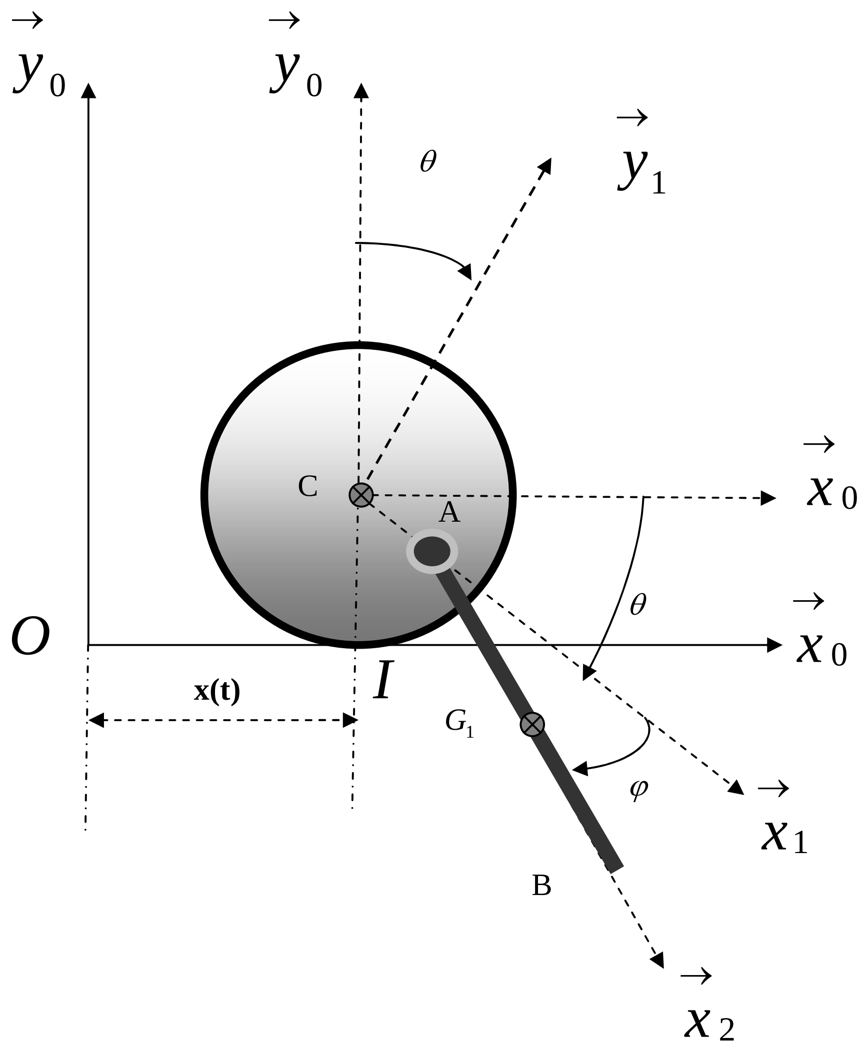
C : <u>Cinétique</u> : (*5 Points*)

Calculer **:**

C-1 : Le moment cinétique de (1) par rapport au repère R_0, au point C ;

C-2 : Le moment cinétique de (2) par rapport au repère R_0 , au point A ;

C-3 : L'énergie cinétique du système (1)+(2).


$\vec{y}_0$
$\vec{y}_0$
θ
$\vec{y}_1$
C
A
$\vec{x}_0$
θ
$\vec{x}_0$
O
I
x(t)
G_1
φ
$\vec{x}_1$
B
$\vec{x}_2$

Corrigé EMD02 : Mécanique rationnelle 02 juin 2008

A	Cinématique

1- Vitesses instantanées de rotation des solides S_1 et S_2 par rapport à R_0 :

$$\vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\theta}\,\vec{z}_1 \quad 0{,}5 \qquad ; \qquad \vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = -\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\vec{z}_1 \quad 0{,}5$$

2- vitesse absolue de C, par dérivation :

$$\overrightarrow{OC} = {}_{R_0}\begin{cases} x \\ R \\ 0 \end{cases} \quad 0{,}5 \qquad ; \qquad \vec{V}^0(C) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{d^0}{dt}\,{}_{R_0}\begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases} = {}_{R_0}\begin{cases} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \dot{x}\,\overrightarrow{x_0} = \dot{x}(\cos\theta\,\overrightarrow{x_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_1}) \quad 0{,}5$$

0,5

3- vitesse absolue du point A, par la cinématique du solide :

$$0{,}5 \quad \vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CA} \qquad ; \qquad \vec{V}^0(A) = {}_{R_1}\begin{cases} \dot{x}\cos\theta \\ \dot{x}\sin\theta \\ 0 \end{cases} + {}_{R_1}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{cases} \wedge {}_{R_1}\begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases} = {}_{R_1}\begin{cases} \dot{x}\cos\theta \\ \dot{x}\sin\theta - a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases} \quad 0{,}5$$

4- condition de roulement sans glissement :

La vitesse de glissement du point I du disque par rapport au sol est :

$$\vec{V}(I \in 1/0) = \vec{V}^0(I \in 1) - \vec{V}^0(I \in 0) \quad 0{,}5$$

S'il n'y a pas glissement, on a alors : $\vec{V}^0(I \in 1) = \vec{V}^0(I \in 0) = \vec{0}$ 0,5

$$\vec{V}^0(I \in 1) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CI} = {}_{R_0}\begin{cases} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{cases} + {}_{R_0}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases} \wedge {}_{R_0}\begin{cases} 0 \\ -R \\ 0 \end{cases} = {}_{R_0}\begin{cases} \dot{x} - R\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{cases} = {}_{R_0}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{x} - R\dot{\theta} = 0 \quad 1$$

5- vitesse absolue du point G_2, par la composition du mouvement :

$$\vec{V}^0(G_2) = \vec{V}^1(G_2) + \vec{V}_1^0(G_2) \quad 0.5$$

* vitesse relative de G_2 :

On a : $\overrightarrow{AG_2} = L\,\vec{x}_2 = L(\cos\varphi\,\vec{x}_1 - \sin\varphi\,\vec{y}_1) = \left\{\begin{array}{l} L\cos\varphi \\ -L\sin\varphi \\ 0 \end{array}\right._{R_1}$ 0.5

$$\vec{V}^1(G_2) = \frac{d^1\,\overrightarrow{AG_2}}{dt} = \left\{\begin{array}{l} -L\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{array}\right._{R_1}$$ 0.5 0.5

* <u>vitesse d'entraînement de G₂</u> :

$$\vec{V}_1^0(G_2) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{AG_2} \quad ;$$ 0.5

$$\vec{V}_1^0(G_1) = \left\{\begin{array}{l} \dot{x}\cos\theta \\ \dot{x}\sin\theta - a\dot{\theta} \\ 0 \end{array}\right._{R_1} + \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{array}\right._{R_1} \wedge \left\{\begin{array}{l} L\cos\varphi \\ -L\sin\varphi \\ 0 \end{array}\right._{R_1} = \left\{\begin{array}{l} \dot{x}\cos\theta - L\dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{x}\sin\theta - a\dot{\theta} - L\dot{\theta}\cos\varphi \\ 0 \end{array}\right._{R_1}$$ 0.5

D'où la vitesse absolue deG_1 :

$$\vec{V}^0(G_2) = \left\{\begin{array}{l} \dot{x}\cos\theta - L\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\sin\varphi \\ \dot{x}\sin\theta - a\dot{\theta} - L\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\cos\varphi \\ 0 \end{array}\right._{R_1}$$ 0.5

6- accélérations relative et de Coriolis du point G_2 :

- accélération relative : $\vec{\gamma}^1(G_2) = \dfrac{d^1\,\overrightarrow{V^1(G_2)}}{dt} = \left\{\begin{array}{l} -L(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \\ -L(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ 0 \end{array}\right._{R_1}$ 0.5 0.5

- accélération de

$$\text{Coriolis : } \vec{\gamma}_C(G_2) = 2\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{V^1}(G_2) = 2 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{array} \right._{R_1} \wedge \left\{ \begin{array}{l} -L\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{array} \right._{R_1} = \left\{ \begin{array}{l} -2L\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi \\ 2L\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{array} \right._{R_1}$$

0.5 0.5

B	Géométrie des masses

1- **Matrice d'inertie du disque au point C, dans** R_1 :

$$\overline{\overline{I_C}}(S_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_1}$$

1

2- **Matrice d'inertie de la barre au point C, dans** R_2 :

0.5

Le théorème de Huygens généralisé donne : $\overline{\overline{I_A}}(S_2) = \overline{\overline{I_{G_2}}}(S_2) + m\left[\overline{\overline{d^2}}\right]$

$$\overline{\overline{I_A}}(S_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m(2L)^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m(2L)^2}{12} \end{bmatrix}_{R_2} + m\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{3}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{3}mL^2 \end{bmatrix}_{R_2}, \; avec \; \overrightarrow{AG_1} = \left\{ \begin{array}{l} L \\ 0 \\ 0 \end{array} \right._{R_2}$$

1

3- **Moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe** $\left(A, \overrightarrow{x_1}\right)$:

$$Ix_1x_1 = \vec{x}_1^{\,t}\, \overline{\overline{I_A}}(S_2).\vec{x}_1 \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

0.5 0.5

$$I_{Ax_1} = (\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{3}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{3}mL^2 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = (\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{4}{3}mL^2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}mL^2\sin^2\varphi$$

0.5

C	Cinétique

1- Moment cinétique de (1) par rapport au repère R_0, au point C ;

$$\vec{\sigma}_C^0(S_1) = \overline{\overline{I_C}}\,\vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{MR^2}{2}\dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

0,5

0,5

2- Le moment cinétique de (2) par rapport au repère R_0 , au point A ;

$$\vec{\sigma}_A^0(S_2) = \overline{\overline{I_A}}\,\vec{\Omega}_2^0 + m\,\vec{AG_2} \wedge \vec{V}_A^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3mL^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mL^2}{4} \end{bmatrix}_{R_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right) \end{pmatrix}_{R_2} + m \begin{Bmatrix} L\cos\varphi \\ -L\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta \\ \dot{x}\sin\theta - a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$$

0,5

$$\vec{\sigma}_A^0(S_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3mL^2}{4}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right) \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mL\,\dot{x}\cos\theta\sin\varphi + mL\,\dot{x}\sin\theta\cos\varphi - mL\,\dot{\theta}\cos\varphi \end{Bmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\sigma}_A^0(S_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3mL^2}{4}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right) \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mL\,\dot{x}\cos\theta\sin\varphi + mL\,\dot{x}\sin\theta\cos\varphi - mL\,\dot{\theta}\cos\varphi \end{Bmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\sigma}_A^0(S_2)=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{3mL^2}{4}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)+mL\dot{x}\sin(\theta+\varphi)-mL\dot{\theta}\cos\varphi \end{array}\right._{R_1}$$ 0,5

3- L'énergie cinétique du système (1)+(2) :

$$T^{(0)}(S_1+S_2)=T^{(0)}(S_1)+T^{(0)}(S_2)$$ 0,5

$$T^{(0)}(S_1)=\frac{1}{2}M\left(\vec{V}_C^{(0)}\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0\,T}\,\overline{\overline{I_C}}\,\vec{\Omega}_1^0=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -\dot{\theta}\end{pmatrix}_{R_1}\begin{bmatrix}\frac{MR^2}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2}\end{bmatrix}_{R_1}\begin{pmatrix}0\\0\\-\dot{\theta}\end{pmatrix}_{R_1}$$ 0,5

$$T^{(0)}(S_1)=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2$$ 0,5

$$T^{(0)}(S_2)=\frac{1}{2}m\left(\vec{V}_A^{(0)}\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^{0\,T}\,\overline{\overline{I_A}}\,\vec{\Omega}_2^0+m\left(\vec{V}_A^{(0)},\vec{\Omega}_2^0,\vec{AG}_2\right)$$ 0,5

$$=\frac{1}{2}m\begin{pmatrix}\dot{x}\cos\theta\\ \dot{x}\sin\theta-a\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}^2+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\end{pmatrix}_{R_2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{4mL^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{4mL^2}{3}\end{bmatrix}_{R_2}\begin{pmatrix}0\\0\\-(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\end{pmatrix}_{R_2}$$

$$+m\begin{pmatrix}\dot{x}\cos\theta\\ \dot{x}\sin\theta-a\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}_{R_1}\bullet\left[\begin{pmatrix}0\\0\\-(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\end{pmatrix}_{R_1}\wedge\begin{pmatrix}L\cos\varphi\\ -L\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}_{R_1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+a^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}\dot{\theta}a\sin\theta\right)+\frac{2mL^2}{3}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+m\begin{pmatrix}\dot{x}\cos\theta\\ \dot{x}\sin\theta-a\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}_{R_1}\bullet\begin{pmatrix}-L(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin\varphi\\ -L(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}_{R_1}$$

$$T^{(0)}(S_2)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+a^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}\dot{\theta}a\sin\theta\right)+\frac{2mL^2}{3}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+mL(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\left(-\dot{x}\sin(\theta+\varphi)+a\dot{\theta}\cos\varphi\right)$$

0,5

D'où : $$T^{(0)}(S_1+S_2)=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+a^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}\dot{\theta}a\sin\theta\right)+\frac{2mL^2}{3}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2$$
$$+mL(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\left(-\dot{x}\sin(\theta+\varphi)+a\dot{\theta}\cos\varphi\right)$$

0,5

USTHB/FGMGP
$2^{ème}$ année Licence. ST

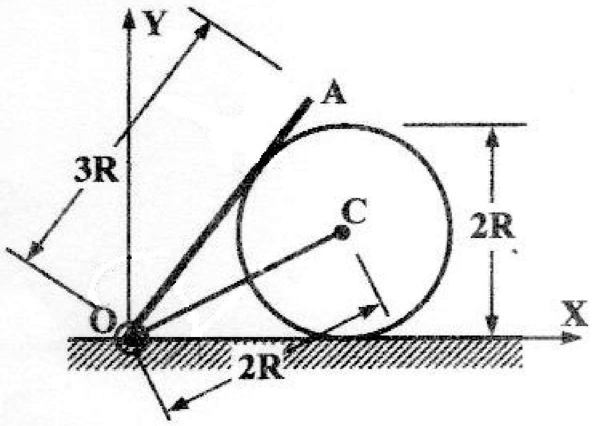
Janvier 2012

Epreuve fondamentale de mécanique rationnelle

Documents non autorisés - temps alloué : 1^H 30 mn.

EXERCICE 1 : (6 points)

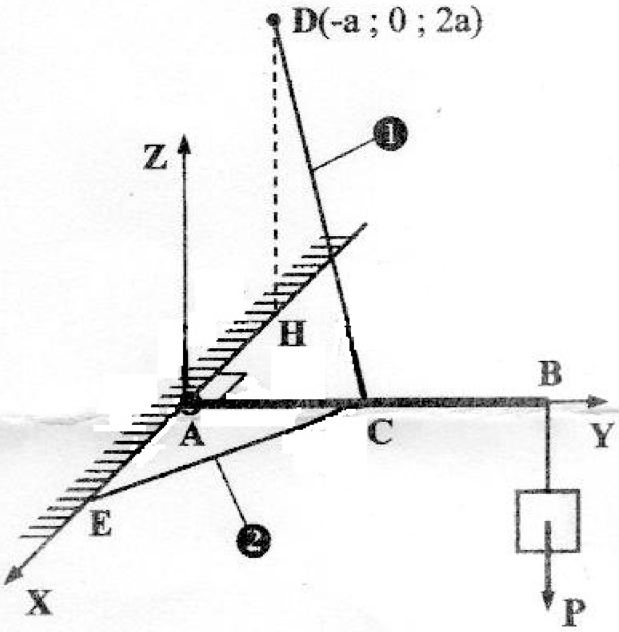
Une barre homogène **OA**, de poids **P = 100 N** et de longueur **3R** , est articulée en **O**, autour d'un axe horizontal **OZ.** Elle s'appuie sur un cylindre lisse (sans Frottements) de rayon **R = 20 cm** et de poids **Q = 200 N** ; lequel s'appuyant sur un plan horizontal lisse.
Le cylindre est maintenu dans sa position d'équilibre ci-indiquée, par un fil inextensible **OC** de longueur **2R.**
Déterminer la tension du fil, ainsi que la réaction en **O**.



EXERCICE 2 : (7 points)

Une barre horizontale **AB**, de poids négligeable, liée au mur à l'aide d'une articulation sphérique **A**, est maintenue dans sa position perpendiculaire au mur, grâce à deux câbles **CD** et **EC**, comme indiqué sur la figure ci-contre.
A son extrémité **B** est suspendu un poids **P = 100 N.**
Données : **AC = AH = AE = a = 1 m**
AB = HD = 2a = 2 m
Les coordonnées de **D** sont : **(-a ; 0 ; 2a)**

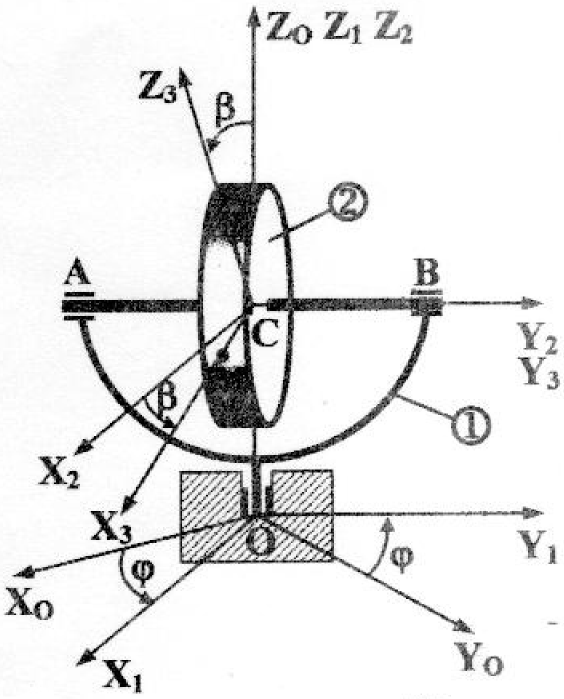
Déterminer la réaction de l'articulation sphérique **A** , ainsi que les tensions $\mathbf{T_1}$ (du câble ❶) et $\mathbf{T_2}$ (du câble ❷) .



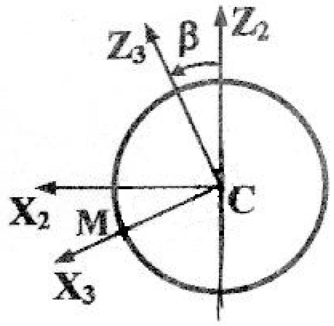
EXERCICE 3: (7 points)

Soit le système mécanique composé:
- d'un cadre ① ayant un pivot (articulation cylindrique) en **O** , animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante $\dot{\varphi}$ autour de l'axe $\mathbf{OZ_O}$.
- d'un disque ② de rayon **R** et d'épaisseur négligeable, soudé à un axe **AB** , lié au cadre ① par les deux articulations cylindriques **A** et **B** ; le disque est animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante $\dot{\beta}$ autour de l'axe $\mathbf{CY_2}$.

On donne : **OC = AC = CB = L** ; $\overrightarrow{CM} = R\,\overrightarrow{X_3}$.
$\mathbf{R_O}$ (O,X_O,Y_O,Z_O) : repère fixe ; $\mathbf{R_1}$ (O,X_1,Y_1,Z_1) : repère lié au cadre ①.
$\mathbf{R_2}$ (C,X_2,Y_2,Z_2) // à $\mathbf{R_1}$; $\mathbf{R_3}$ (C,X_3,Y_3,Z_3) : repère lié au disque ② .



1°/ Etablir les figures planes représentatives des différentes rotations.
2°/ Déterminer le vecteur rotation instantanée du disque par rapport à $\mathbf{R_O}$ exprimé dans $\mathbf{R_2}$.
3°/ Déterminer par dérivation, la vitesse absolue (par rapport à R_0) de **M** , exprimée dans $\mathbf{R_2}$.
4°/ En déduire la vitesse absolue de **M** exprimée dans $\mathbf{R_1}$ et ensuite dans $\mathbf{R_0}$.
5°/ Déterminer par dérivation la vitesse de **M** par rapport à $\mathbf{R_1}$, exprimée dans $\mathbf{R_2}$
6°/ Déterminer par dérivation, l'accélération absolue (par rapport à R_0) de **M** exprimée dans $\mathbf{R_2}$.



Bonne réussite

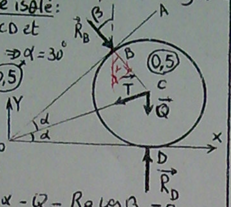
USTHB / FGMGP / 2ème année licence ST

Janvier 2012

Corrigé de l'épreuve fondamentale de mécanique rationnelle

EX1 : Le système barre + cylindre est hyperstatique ⇒ décomposer le système

Equilibre du cylindre isolé :



dans les 2 triangles OCD et OCB : $\sin\alpha = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

$\Rightarrow \beta = 2\alpha = 60°$. (0,5)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

$R_B \sin\beta - T\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow R_B = T$ (1) (0,5)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_D - T\sin\alpha - Q - R_B\cos\beta = 0$

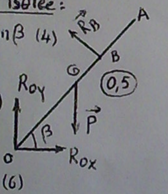
$\Rightarrow R_D - Q = \frac{T + R_B}{2}$ (2) (0,5) ou (1) sans (3)

$\Sigma M_{z/0} = 0 \Rightarrow (R_D - Q)\sqrt{3}R - R_B\sqrt{3}R = 0$

$\Rightarrow R_D - Q = R_B$ (3) (0,5) ou (1) sans (2) idem que (2) avec (1)

les 4 forces $\vec{R}_D$, $\vec{R}_B$, $\vec{T}$ et $\vec{Q}$ sont concourantes en C ⇒ on ne peut poser que 2 équations statiques

Equilibre de la barre isolée :



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ox} = R_B \sin\beta$ (4) (0,5)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$R_B\cos\beta - P + R_{Oy} = 0$ (5) (0,5)

$\Sigma M_{z/0} = 0 \Rightarrow$

$R_B \cdot \sqrt{3}R = P\,\frac{3R}{2}\cos\beta$ (6)

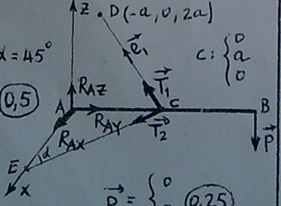
(6) $\Rightarrow R_B = \frac{\sqrt{3}}{4}P$ (0,5) (1) $\Rightarrow T = R_B = \frac{\sqrt{3}}{4}P$

(4) $\Rightarrow R_{Ox} = \frac{3}{8}P = 37{,}5\ N$ (0,5) (0,5) $= 43{,}3\ N$

(5) $\Rightarrow R_{Oy} = \left(\frac{8-\sqrt{3}}{8}\right)P = 78{,}35\ N$ (0,5)

EX2 :

Dans le Δ ACE : $\alpha = 45°$



C : $\begin{cases} 0 \\ a \\ 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{T}_2 = \begin{cases} T_2/\sqrt{2} \\ -T_2/\sqrt{2} \\ 0 \end{cases}$ (0,5) 0,5

$\vec{R}_A = \begin{cases} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{cases}$ (0,25) $\vec{P} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P \end{cases}$ (0,25)

$\vec{T}_1 = T_1\,\vec{e}_1 = T_1 \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|}$; $\vec{CD} = \begin{cases} -a \\ -a \\ 2a \end{cases}$

$|\vec{CD}| = \sqrt{6}\,a$

$\Rightarrow \vec{T}_1 = \begin{cases} -T_1/\sqrt{6} \\ -T_1/\sqrt{6} \\ 2T_1/\sqrt{6} \end{cases}$ (1) ~0,4 ~0,4 ; 0,81 $\vec{AC} = \begin{cases} 0 \\ a \\ 0 \end{cases}$ $\vec{AB} = \begin{cases} 0 \\ 2a \\ 0 \end{cases}$

$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ (0,25)

$\Rightarrow \begin{cases} R_{Ax} - \frac{T_1}{\sqrt{6}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 & (1)\ (0{,}5) \\ R_{Ay} - \frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 & (2)\ (0{,}5) \\ R_{Az} - P + \frac{2T_1}{\sqrt{6}} = 0 & (3)\ (0{,}5) \end{cases}$

$\Sigma\vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AC}\wedge(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) + \vec{AB}\wedge\vec{P} = \vec{0}$ (0,5)

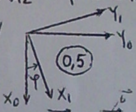
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{T_1}{\sqrt{6}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} & -\frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} & \frac{2T_1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} = \vec{0}$$

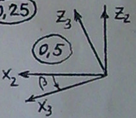
$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2aT_1}{\sqrt{6}} - 2aP = 0 \quad (0{,}75)\ (4) & \Rightarrow T_1 = \sqrt{6}P = 245\ N\ (0{,}25) \\ \text{pas de moments autour de } \vec{y} & \\ a\left(\frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad (0{,}75)\ (5) & \Rightarrow T_2 = \sqrt{2}P = 141{,}42\ N\ (0{,}25) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow R_{Ax} = 0$ (0,25) (2) $\Rightarrow R_{Ay} = 2P = 200\ N$ (0,25)

(3) $\Rightarrow R_{Az} = -P = -100\ N$ (0,25)

EX3 : 1°/





2°/ $\vec{\Omega}^0_{3/R_2} = \vec{\Omega}^2_3 + \vec{\Omega}^1_2 + \vec{\Omega}^0_1 = \begin{cases} 0 \\ \dot\beta \\ \dot\varphi \end{cases}_{R_2}$ (1)

3°/ $\vec{OM} = \begin{cases} R\cos\beta \\ 0 \\ L - R\sin\beta \end{cases}_{R_2}$ (0,5) ;

$\vec{V}^0(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}_{/R_2}\right) + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{OM} = \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\varphi\cos\beta \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_2}$ (1)

4°/ $\vec{V}^0(M) = \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\varphi\cos\beta \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_1}$ (0,25) $= \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta\cos\varphi - R\dot\varphi\cos\beta\sin\varphi \\ -R\dot\beta\sin\beta\sin\varphi + R\dot\varphi\cos\beta\cos\varphi \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_0}$ (0,75)

5°/ $\vec{V}^1(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}_{/R_2}\right) = \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta \\ 0 \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_2}$ (1)

6°/ $\vec{\gamma}^0(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}^0(M)_{/R_2}\right] + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{V}^0(M)_{/R_2}$ (0,5)

$$= \begin{cases} -R\dot\beta^2\cos\beta \\ -R\dot\varphi\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\beta^2\sin\beta \end{cases} + \begin{vmatrix} \vec{x}_2 & \vec{y}_2 & \vec{z}_2 \\ 0 & 0 & \dot\varphi \\ -R\dot\beta\sin\beta & R\dot\varphi\cos\beta & -R\dot\beta\cos\beta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} -R\cos\beta\,(\dot\beta^2 + \dot\varphi^2) \\ -2R\dot\varphi\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\beta^2\sin\beta \end{cases}_{R_2} \quad (1)$$

Fin