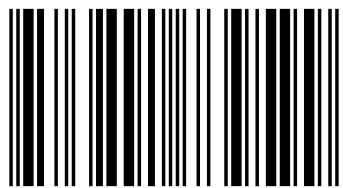


Ce livre d'introduction à la mécanique rationnelle contient des cours détaillés, avec des applications résolues et des exercices supplémentaires non résolus. Il est rédigé avec un style très simple, qui permet aux étudiants du premier cycle universitaire une compréhension rapide. Le contenu de ce livre est structuré en six chapitres. Le chapitre un expose un rappel mathématique sur quelques éléments de calcul vectoriel. Dans ce contexte, le chapitre deux traite des généralités sur les forces et leurs différents types. Ensuite, il présente les méthodes de quelques opérations sur les forces. Le chapitre trois expose les notions fondamentales de la statique à savoir : les axiomes de la statique, et les torseurs des forces extérieures, ainsi que les conditions d'équilibre statique. Par ailleurs, le chapitre quatre aborde la cinématique des corps solides qui traite le mouvement mécanique du point de vue géométrique. Le dernier chapitre sera étalé à la dynamique du corps solide. Dans un premier lieu, on introduit les grandeurs cinétiques telles que : la quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie cinétique. Enfin, on aborde les théorèmes généraux régissant la dynamique.



Dr Amar KASSOUL Professeur à l'Université Hassiba Benbouali - Chlef (Algérie). Il enseigne la matière mécanique rationnelle depuis 1997. Son domaine de recherche intéresse à la ductilité et la réhabilitation des structures en béton armé. Il est chef d'équipe structures dans le laboratoire Structures, Géotechnique et Risques.

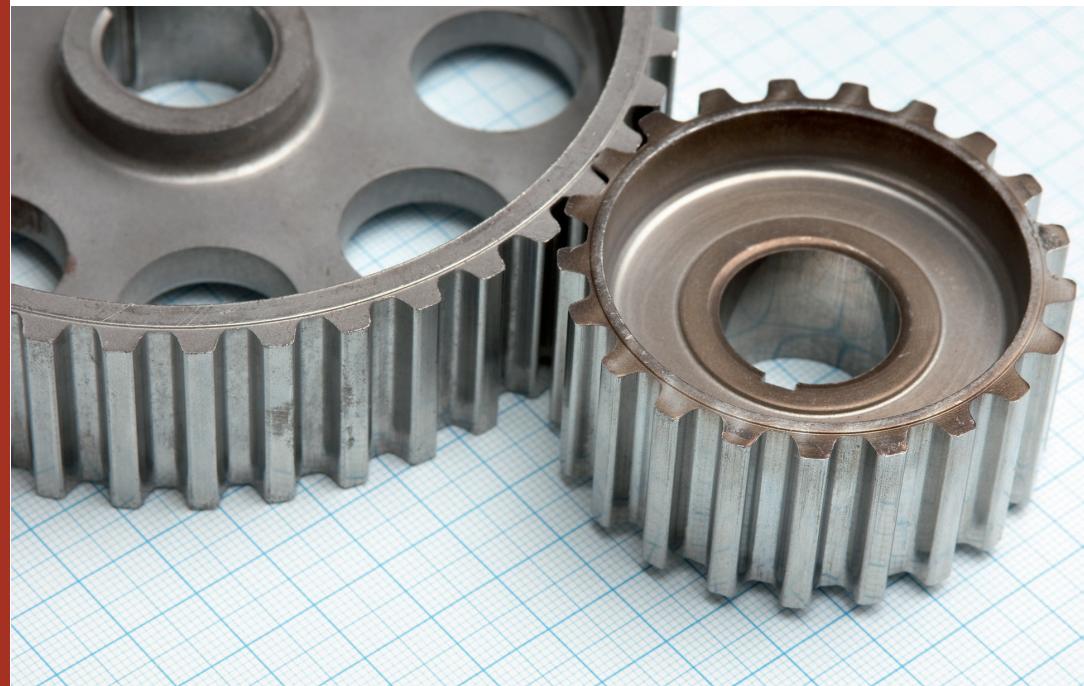


978-3-8417-3959-9

Mécanique rationnelle

Kassoul

EUE ÉDITIONS
UNIVERSITAIRES
EUROPÉENNES



Amar Kassoul

Introduction à la mécanique rationnelle - Cours et exercices

Amar Kassoul

Introduction à la mécanique rationnelle - Cours et exercices

Amar Kassoul

**Introduction à la mécanique
rationnelle - Cours et exercices**

Éditions universitaires européennes

Imprint

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:

Éditions universitaires européennes

is a trademark of

International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page

ISBN: 978-3-8417-3959-9

Copyright © Amar Kassoul

Copyright © 2017 International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

All rights reserved. Beau Bassin 2017

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES.....	1
NOTATIONS	7
AVANT PROPOS.....	9
INTRODUCTION.....	11

CHAPITRE 1 : RAPPELS MATHEMATIQUES (ELEMENTS DE CALCUL VECTORIEL)

1.1 VECTEUR LIBRE	13
1.2 PRODUIT SCALAIRES	13
1.3 BASE	14
1.4 PRODUIT VECTORIEL	14
1.4.1 Définition – Propriétés	14
1.4.2 Double produit vectoriel	15
1.4.3 Produit mixte	15
1.4.4 Division vectorielle.....	15
1.4.5 Champ de vecteurs libres	16
1.5 VECTEURS LIES ET SYSTEME VECTORIEL	16
1.5.1 Vecteur lié.....	16
1.5.2 Moment d'un vecteur lié	17
1.5.3 Système Vectoriel.....	17
1.5.4 Moment d'un système vectoriel.....	18
1.6 TORSEUR	19
1.6.1 Définition.....	19
1.6.2 Propriété des torseurs	19
1.7 EXERCICES RESOLUS	21
1.8 EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	27

CHAPITRE 2 : GENERALITES ET DEFINITIONS DE BASE

2.0	INTRODUCTION	29
2.1	DEFINITION ET SENS PHYSIQUE DE LA FORCE	29
2.2	REPRESENTATION VECTORIELLE D'UNE FORCE	30
2.3	OPERATIONS SUR LES FORCES	30
2.3.1	Résultante de deux forces concourantes	30
2.3.2	Résultante de plusieurs forces concourantes	31
2.3.3	Règle du polygone des forces	32
2.3.4	Décomposition géométrique d'une force	33
2.3.5	Projection d'une force	37
2.4	DIFFERENTS TYPES DE FORCES	38
2.5	FORCES INTERNES ET FORCES EXTERNES	41
2.6	POINT MATERIEL - CORPS SOLIDE	42
2.6.1	Point matériel	42
2.6.2	Corps solide	42
2.7	EXERCICES RESOLUS	43
2.8	EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	50

CHAPITRE 3 : STATIQUE DES CORPS SOLIDES

3.0	INTRODUCTION	53
3.1	AXIOMES DE LA STATIQUE	53
3.2	LIAISONS - APPUIS ET REACTIONS	55
3.2.1	Définition	55
3.2.2	Différents types des liaisons et de réactions	55
3.3	AXIOME DES LIAISONS	57
3.4	MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT	58
3.4.2	Moment d'une force par rapport à un axe – Cas Général.....	60
3.4.3	Théorème de VARIGNON.....	61
3.5	TORSEURS DES FORCES	62
3.5.1	Torseur d'action	62
3.5.2	Torseurs des forces extérieures sur un corps solide (S).....	62
3.6	CONDITION D'EQUILIBRE STATIQUE	61
3.6.1	Cas Général	61
3.6.2	Condition d'équilibre analytique	61
3.6.3	Condition d'équilibre géométrique.....	63
3.7	ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES EN PRÉSENCE DU FROTTEMENT.....	65
3.7.1.	Frottement de glissement.....	65
3.7.2.	Force de frottement cinématique.....	67
3.7	EXERCICES RESOLUS	68
3.8	EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	90

CHAPITRE 4 : CINEMATIQUE DU SOLIDE RIGIDE

4.0	INTRODUCTION	103
4.1	RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DU POINT MATERIE .	103
4.1.1.	Trajectoire	103
4.1.2.	Vecteur vitesse	104
4.1.3.	Vecteur accélération	105
4.1.3.	Mouvement circulaire	105
4.2	CINEMATIQUE DU CORPS SOLIDE	107
4.2.1.	Notion d'un solide parfait	107
4.2.2.	Repérage d'un solide	108
4.2.3.	Matrice de passage de R à R_0	109
4.2.4.	Torseur cinématique, distribution des vitesses.....	113
4.2.5.	Cas particulier de mouvements	116
4.2.6	Mouvement composé	119
4.3	SOLIDES EN CONTACT PONCTUEL	125
4.3.1.	Vitesse de glissement	125
4.3.2.	Plan tangent	125
4.4	MOUVEMENT PLAN SUR PLAN	126
4.6.1.	Définition.....	126
4.6.2.	Centre instantané de rotation (CIR)	127
4.7	EXERCICES RESOLUS.....	128
4.8	EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	154

CHAPITRE 5 : GÉOMÉTRIE DE MASSE

5.1	INTRODUCTION	158
5.2	MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL	158
5.2.1.	Système continu	158
5.2.1.	Système discret	159
5.3	CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTEME MATERIEL.....	160
5.3.1.	Définition	160
5.3.2.	Exemple d'application	161
5.3.3.	Cas d'un système complexe	163
5.3.4.	Théorème de GULDIN	164
5.3.5.	Exemples d'applications	166
5.4	TENSEUR D'INERTIE D'UN SOLIDE	168
5.4.1.	Définition	168
5.4.2.	Matrice d'inertie	168
5.4.3.	Cas particuliers	169
5.4.4.	Axes principaux d'inertie	171
5.5	THEOREME DE HUYGENS	171
5.6	MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UNE DROITE QUELCONQUE (Δ)	173
5.7	PRODUIT D'INERTIE PAR RAPPORT A DEUX DROITES PERPENDICULAIRES	174
5.8	EXERCICES RESOLUS	175
5.9	EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	188

CHAPITRE 6 : DYNAMIQUE DU SOLIDE RIGIDE

6.1	INTRODUCTION	191
6.2	ÉLEMENT DE CINETIQUE D'UN CORPS SOLIDE	191
6.2.1	Quantité de mouvement et moment cinétique.....	191
6.2.2	Torseur cinétique	192
6.2.3	Torseurs dynamiques	195
6.2.4	Énergie cinétique	197
6.3	ÉQUATION DE LA DYNAMIQUE POUR UN CORPS SOLIDE	200
6.3.1	Rappel de la dynamique des particules	200
6.3.2.	Principe fondamental de la dynamique	201
6.4	THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE	202
6.4.1	Puissance et travail d'une force	202
6.4.2	Théorème de l'énergie cinétique	203
6.5	EXERCICES RESOLUS	206
6.6	EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	233
	BIBLIOGRAPHIE.....	234

NOTATIONS

f_s	= Coefficient de frottement de glissement
f_k	= Coefficient de frottement de glissement en mouvement
m	= Masse d'un système matériel continu
E_C	= Énergie cinétique
F_x, F_y et F_z	= Composantes de la force \vec{F} avec les axes x, y et z
I_O	= Matrice d'inertie par rapport au centre O
I_{xx}, I_{yy} et I_{zz}	= Moments d'inertie par rapport aux axes x, y et z respectivement.
I_{xy}, I_{xz} et I_{yz}	= Produit d'inertie par rapport à deux droites perpendiculaires
I_Δ	= Moment d'inertie par rapport à une droite quelconque (Δ)
P	= Puissance d'une force \vec{F}
W	= Travail accompli entre deux instants t_0 et t_1 est donc:
R, r	= Rayon
$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	= Repère orthonormé lié au solide, où repère relatif.
R_0	= Repère fixe, où repère absolu
S, A_S	= Surface d'un corps solide
V	= Volume d'un corps solide,
\vec{a}	= Vecteur accélération de la particule (π).
\vec{a}_{A/R_0}	= Vecteur accélération du point A appartenant au solide (S) par rapport au R_0
$\vec{a}_c(M)$	= Vecteur accélération complémentaire où de Coriolis :
$\vec{a}_e(M)$	= Vecteur accélération d'entraînement
\vec{a}_m	= Vecteur accélération moyenne du mobile entre t et $t+\Delta t$
\vec{a}_{M/R_0}	= Vecteur accélération absolue

$\vec{a}_{M/R}$	= Vecteur accélération relative
\vec{n}, \vec{t}	= Vecteur directeur unitaire d'une droite quelconque
\vec{n}^t	= Transposé du vecteur directeur unitaire \vec{n}
\vec{p}	= Quantité de mouvement d'un système matériel
\vec{u}	= Vecteur unitaire
\vec{r}	= Vecteur position
\vec{v}	= Vecteur vitesse instantané
\vec{v}_m	= Vecteur vitesse moyenne du mobile entre les deux instants
\vec{D}	= Quantité d'accélération élémentaire du point M,
\vec{F}	= Vecteur de la force
$\vec{F}_{\max}, \vec{F}_s$	= Force de frottement de repos où statique
\vec{F}_x et \vec{F}_y	= Projections de F sur les axes Ox et Oy
$\vec{M}_o(\vec{F})$	= Moment de la force \vec{F} par rapport au point O
$\vec{M}_{ox}(\vec{F})$	= Moment par rapport à L'axe Ox
\vec{N}, \vec{R}	= Réaction normale,
\vec{P}, \vec{Q}	= Poids
\vec{R}	= Résultante de plusieurs forces concourantes
\vec{T}	= Tension d'une liaison flexible
\vec{V}_{A/R_0}	= Vecteur vitesse du point A appartenant au solide (S) par rapport au repère R_0 .
$\vec{V}_e(M)$	= Vecteur vitesse d'entraînement
\vec{V}_{M/R_0}	= Vecteur vitesse absolue d'un point M
$\vec{V}_{M/R}$	= Vecteur vitesse relative d'un point M du solide (S)
α, β	= Angle
φ	= Angle de frottement
ρ	= Masse volumique d'un corps solide
σ	= Densité surfacique d'un corps solide

λ	= Densité linéique d'une ligne matérielle
θ	= Angle de rotation
θ_x, θ_y et θ_z	= Angles définissent la direction d'une force avec les axes x,y,z
ω où $\dot{\theta}$	= Vitesse angulaire où Taux de rotation
$\vec{\sigma}_A$	= Moment cinétique du système en un point A
$\vec{\delta}_A$	= Moment dynamique en A
$\vec{\Omega}$	= Vecteur taux de rotation instantané
$\vec{\Omega}_{S/R_0}$	= Vecteur taux de rotation instantané du solide (S) par rapport au repère R_0

AVANT PROPOS

Ce livre d'introduction à la mécanique rationnelle contient des cours détaillés, avec des applications résolues et des exercices supplémentaires non résolus. Il est rédigé avec un style très simple, qui permet aux étudiants du premier cycle universitaire une compréhension très rapide. Le contenu de ce livre est structuré en six chapitres. Le chapitre un expose un rappel mathématique sur quelques éléments de calcul vectoriel à savoir les produits scalaires et vectoriels, le double produit vectoriel, le champ de vecteurs libres, liés et les torseurs. Dans ce contexte, le chapitre deux traite quelques généralités et définitions de base sur les forces et leurs différents types. Ensuite, il présente les méthodes de réalisation de quelques opérations sur les forces à savoir : la résultante géométrique et analytique des forces concourantes ; et la décomposition d'une force. Le chapitre trois expose des notions fondamentales de la statique à savoir : les axiomes de la statique, les liaisons et les réactions, le moment d'une force et les torseurs des forces extérieures. Ensuite, il expose les conditions d'équilibre des corps solides. Dans la même idée, le chapitre quatre aborde la cinématique des corps solides qui traite le mouvement mécanique uniquement du point de vue géométrique, sans tenir compte des causes qui ont provoqué le mouvement. Le chapitre cinq concerne les notions sur la masse, le centre de masse, le moment d'inertie et le produit d'inertie ; leurs intérêts mécaniques apparaîtront dans l'étude de la cinétique et de la dynamique. Le dernier chapitre sera étalé à la dynamique du corps solide. Dans un premier lieu, on introduit les grandeurs cinétiques telles que : la quantité de mouvement, le moment cinétique, la résultante dynamique, le moment dynamique et l'énergie cinétique. Ensuite, on aborde les théorèmes généraux régissant la dynamique. Enfin, il sera terminé avec quelques exercices résolus et autres supplémentaires non résolus.

L'auteur

INTRODUCTION

OBJET DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

La mécanique rationnelle ou théorique, est une science qui étudie le mouvement de la matière dans ces formes les plus simples. C'est une science qui vise objectivement le traitement des lois générales régissant le mouvement mécanique et l'état d'équilibre des corps ou des parties de corps matériels. Par mouvement de la matière, on entend tous les changements qui se produisent pendant les processus thermique, chimique, électromagnétique, intra-atomique et autres. La mécanique rationnelle s'est limitée par considérer la forme la plus élémentaire du mouvement, à savoir : Le mouvement mécanique. Par mouvement mécanique, on entend également le changement de position relative des corps matériels qui se produit au cours du temps. Puisque l'état d'équilibre (statique) n'est qu'un cas particulier du mouvement dont la mécanique rationnelle se donne aussi comme objet l'étude de l'équilibre des corps matériels. La mécanique rationnelle utilise des simplifications et des abstractions utiles, qui seront introduites pour examiner des questions sur le plan théorique et de dégager des solutions par le biais des moyens les plus faciles.

Le présent livre a pour objet traitement de la mécanique classique. Cette discipline a été considérée depuis longtemps comme branche mathématique dont les résultats des expériences menées en ce domaine sont interprétés mathématiquement. D'une part, celle statique est le premier domaine étudié par les savants depuis l'antiquité. Depuis cette période jusqu'au Moyen âge, cette discipline a évoqué des champs de réflexion et de théorisation comme la force, l'équilibre ou le bras de levier, et d'autre part, celle dynamique fondée sur des lois connues dont les premiers énoncés remontent à Galilée (1564-1642) et à Newton (1643-1727).

Vers la fin du 19^{eme} siècle et au début du 20^{eme} siècle, les chercheurs ont mis les insuffisances des règles de la mécanique de l'époque. Ils ont

constaté que les lois de la mécanique classique cessent d'être applicables au mouvement des particules microscopiques et des corps dès que leurs vitesses deviennent proches de celle de la vitesse de la lumière. Le début du 20^{eme} siècle marque l'apparition de la mécanique relativiste, qui a pour base la théorie de la relativité développée par A. Einstein (1879-1955). Cette théorie a précisé les limites de la validité des lois de la mécanique classique considérée comme un cas particulier dans cette nouvelle théorie dès que l'ancienne théorie fonctionne bien dans un contexte où en prenant les mouvements de corps à des vitesses faible en comparaison avec celle de la lumière, bien que dans la relativité en établissant des relations quantitatives rigoureuses entre l'espace, le temps, la masse et l'énergie.

MÉTHODES DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

Comme les autres sciences de la nature, la mécanique rationnelle repose sur une méthode deductive aussi bien que sur un raisonnement mathématiques en utilisant beaucoup les abstractions. La méthode des abstractions, jointe à la généralisation des résultats de l'observation immédiate, de la production et de l'expérience, permet de dégager quelques concepts premiers qui se posent en axiomes. Tous les développements de la mécanique classique se déduisent de ces axiomes par voie de raisonnement logique et de calcul mathématique. Ce passage explique de manière approfondie la méthode scientifique de la mécanique rationnelle par un de ces grands protagonistes. Le langage depuis cette période reste le même en instaurant les fondements d'une science façonnant la réalité et les phénomènes naturels par une pensée mathématicienne.

LES DIVISIONS DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

La mécanique rationnelle se divise en trois grandes parties :

- La statique qui traite l'équilibre des corps matériels et ses moyens de réduire un système de forces à une forme élémentaire.
- La cinématique qui étudie le mouvement des corps matériels de point de vue géométrique, c.à.d. sans tenir compte les causes qui engendrent le mouvement.
- La dynamique qui se propose d'étudier le mouvement des corps matériels en liaison avec les forces qui s'exercent sur eux.

CHAPITRE 1

RAPPELS MATHEMATIQUES

(ELEMENTS DE CALCUL VECTORIEL)

1.1 VECTEUR LIBRE

L'espace métrique tridimensionnel de la géométrie classique d'Euclide est considéré comme une représentation mathématique satisfaisante de l'espace physique où se meuvent les systèmes matériels ; on notera E_3 .

Les éléments de E_3 sont des points. A un couple ordonné de points (P, Q) de E_3 correspond un élément \vec{v} d'un espace vectoriel Euclidien :

$$(P, Q) \rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \quad (1.1)$$

L'application jouissante des propriétés :

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} \end{cases} \quad (1.2)$$

Il existe une infinité de (P, Q) correspond au même vecteur. Ces vecteurs sont appelés vecteurs libres.

1.2 PRODUIT SCALAIRES

Pour un couple (\vec{v}_1, \vec{v}_2) de vecteurs de E_3 , on peut correspondre un nombre réel appelé produit scalaire de \vec{v}_1 par \vec{v}_2 et noté $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$.

- On note $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ et on appelle $\|\vec{v}\|$, module de \vec{v} .
- Un vecteur est unitaire si son module est égal à 1.

Le produit scalaire s'écrit :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \quad (1.3)$$

1.3 BASE

On appelle base de E_3 un ensemble de trois vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ tels que tout vecteur de \vec{v} de E_3 soit d'une manière et une seule une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

La base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée si et seulement si $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$

Pour une base orthonormée de E_3 , on peut écrire :

$$\forall \vec{v} \in E_3 : \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i \quad (1.4)$$

On dit que v_1, v_2, v_3 sont les composantes de \vec{v} dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Les vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ constituant une base orthonormée ; v_1, v_2, v_3 sont les projections orthogonales de \vec{v} sur les 3 vecteurs de base :

$$v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i = \|\vec{v}\| \cos(\vec{v}, \vec{e}_i) \quad (1.5)$$

1.4 PRODUIT VECTORIEL

1.4.1 Définition – Propriétés

Soient $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ trois vecteurs quelconques de l'espace vectoriel à trois dimensions rapporté à une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormée et directe.

Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$ s'écrit :

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Notons que, si $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{x}$, nous aurons $\vec{v} \perp \vec{x}$ et $\vec{w} \perp \vec{x}$

Le produit vectoriel est déterminé autrement :

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin(\vec{v}, \vec{w}) \vec{u} \quad (1.7)$$

\vec{u} Étant le vecteur unitaire du produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$

1.4.2 Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{x})$ peut être donné par la relation suivante :

$$\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{v}) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{x} \quad (1.8)$$

1.4.3 Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs est écrit par $\vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{x})$, comme, on peut l'exprimer par

$$\vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{x}) = \vec{x} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{v}) \quad (1.9)$$

1.4.4 Division vectorielle

Si $\vec{x} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, on dit que \vec{x} est le résultat de la division vectorielle \vec{w} par \vec{v} .

S'il existe un réel positif λ , le résultat de la division s'écrit :

$$\vec{x} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2} + \lambda \vec{v} \quad (1.10)$$

1.4.5 Champ de vecteurs libres

Un champ de vecteurs est défini pour toute application qui, à un point M de E_3 , fait correspondre un vecteur libre \vec{v} de E_3 .

\vec{v} est le vecteur champ et l'application est notée $\vec{v}(M)$ où $\vec{v}(M, t)$ si le champ n'est pas stationnaire.

\vec{v} est donc un vecteur libre fonction du point M . on dit encore que $\vec{v}(M)$ est vecteur fonction du point :

$$\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Comme exemple de champ de vecteurs libres :

- le champ de pesanteur ;
- le champ des vitesses dans l'écoulement d'un fluide.

1.5 VECTEURS LIÉS ET SYSTÈME VECTORIEL

1.5.1 Vecteur lié

Un vecteur lié est un objet géométrique caractérisé par un vecteur libre \vec{v} et un point $P : (P, \vec{v})$.

La droite issue de P ayant \vec{v} pour vecteur directeur est le support du vecteur lié (P, \vec{v}) . Cette droite est aussi appelé axe $P\vec{v}$.

En mécanique, les forces sont des bons exemples de vecteurs liés.

1.5.2 Moment d'un vecteur lié

Le moment d'un vecteur lié (P, \vec{v}) par rapport à un point O est :

$$\vec{M}_o(P, \vec{v}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{v} \quad (1.12)$$

Le moment de ce vecteur est un vecteur libre fonction du point O .

Le moment d'un vecteur lié (P, \vec{v}) par rapport à un axe (Δ) est:

$$\vec{M}_\Delta(P, \vec{v}) = \vec{M}_o(P, \vec{v}) \vec{u} \quad (1.13)$$

O est un point quelconque de l'axe (Δ) et \vec{u} est le vecteur directeur de l'axe (Δ) .

1.5.3 Système Vectoriel

Un système vectoriel (S) est un ensemble de n vecteurs liés. On écrit symboliquement :

$$(S) = \sum_i (P_i, \vec{v}_i) \quad (1.14)$$

Car un tel système n'admet de somme géométrique que si les vecteurs sont concourants.

Par définition, on appelle résultante (ou somme) de (S) le vecteur libre \vec{R} tel que :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{v}_i \quad (1.15)$$

1.5.4. Moment d'un système vectoriel

Le moment d'un système vectoriel (S) par rapport à un point O est le vecteur libre fonction du point O :

$$\vec{M}_O = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \wedge \vec{v}_i \quad (1.16)$$

On démontre que, lors d'un changement d'origine, on a la relation :

$$\vec{M}_{O'}(S) = \vec{M}_O(S) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}(S) \quad (1.17)$$

Cette relation définit un champ de vecteurs dit champ de moment ou champ de vecteurs antisymétrique.

1.6 TORSEUR

1.6.1. Définition

Le torseur $[\tau]$ d'un système de vecteur, est formé :

- de sa résultante \vec{R} (Vecteur libre)
- d'un champ antisymétrique \vec{M} fonction du point appelé moment.

Sa représentation en un point O est notée :

$$[\tau]_O = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Quelque soit le point d'application, la résultante du torseur ne varie pas. Cependant, le moment dépend du point auquel il est exprimé.

1.6.2. Propriété des torseurs

On note :

$$[\tau]_{O1} = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{O1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\tau]_{O2} = \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{O2} \end{pmatrix}$$

On a alors les propriétés suivantes :

1.6.2.1. Égalité

Deux torseurs sont égaux si :

$$[\tau]_{O1} = [\tau]_{O2} \Leftrightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \vec{M}_{O1} = \vec{M}_{O2} \quad (1.19)$$

1.6.2.2. Somme

La résultante et le moment de la somme de deux torseurs sont respectivement la somme des deux résultantes et la somme des deux moments (exprimés en même point).

$$[\tau]_O = [\tau]_{O1} + [\tau]_{O2} \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \text{ et } \vec{M}_O = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} \quad (1.20)$$

1.6.2.3. Multiplication par un scalaire

La multiplication d'un torseur par un scalaire est égale à :

$$\lambda[\tau]_O = \begin{pmatrix} \lambda \vec{R} \\ \lambda \vec{M}_O \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

1.6.2.4. Torseur nul

Un torseur est nul si et seulement si sa résultante et son moment sont nuls.

$$[\tau]_O = 0 \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_O = \vec{0} \quad (1.22)$$

Si un torseur est nul en un point, alors il est nul en tout point.

1.6.2.5. Produit scalaire de deux torseurs

Le produit scalaire de deux torseurs $[\tau]_A$ et $[\tau]_B$ est donné par :

$$[\tau]_A \cdot [\tau]_B = \begin{pmatrix} \vec{R}_A \\ \vec{M}_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{R}_B \\ \vec{M}_B \end{pmatrix} = \vec{R}_A \cdot \vec{M}_B + \vec{R}_B \cdot \vec{M}_B \quad (1.23)$$

1.7. EXERCICES RESOLUS

1.1. On considère deux vecteurs :

$$\vec{v}_1 = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

Calculer:

- leurs longueurs (modules)
- leur produit scalaire
- leur angle
- les cosinus directeurs de leurs vecteurs unitaires
- le produit vectoriel $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$

Solution :

1- les longueurs (modules) des vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{6^2 + 8^2 + (-10)^2} = 14,14$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 12^2} = 12,8$$

2- le produit scalaire des vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 6 \cdot (-2) + 8 \cdot 4 + (-10) \cdot 12 = -100$$

3- l'angle entre les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2

Nous avons :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Donc :

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} = \frac{-100}{14.14 \times 12.8} = -0.55$$

D'où, l'angle entre les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 est :

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 123.54^\circ$$

4- les cosinus directeurs de leurs vecteurs unitaires :

- le vecteur unitaire du vecteur \vec{v}_1 est :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}}{14.14} = 0.42\vec{i} + 0.57\vec{j} - 0.71\vec{k}$$

D'où, les cosinus directeurs du vecteur unitaire de \vec{v}_1 est :

$$\vec{u}_1(0.42, 0.57, -0.71)$$

- le vecteur unitaire du vecteur \vec{v}_2 est :

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{-2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{12.8} = -0.16\vec{i} + 0.31\vec{j} + 0.94\vec{k}$$

Les cosinus directeurs du vecteur unitaire de \vec{v}_2 est :

$$\vec{u}_2(-0.16, 0.31, 0.94)$$

5- le produit vectoriel $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 8 & -10 \\ -2 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (8 \times 12 - (-10) \times 4)\vec{i} - ((6) \times 12 - (-10) \times (-2))\vec{j} + ((6) \times (4) - (8) \times (-2))\vec{k}$$

D'où, le produit vectoriel $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, s'écrit :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 136\vec{i} - 52\vec{j} + 40\vec{k}$$

1.2. Pour le triangle ABC les longueurs de ces cotés sont a , b et c et leurs angles \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} (Figure 1.1). Démontrer le théorème d'Al-KACHI suivant :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \cos(\widehat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \times c \cos(\widehat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times b \cos(\widehat{C})$$

Solution :

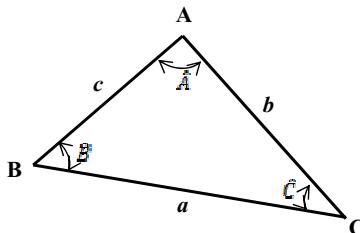


Figure 1.1

Nous avons $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$

Nous pouvons écrire le carré scalaire suivant :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2$$

D'après la relation de Chasles, on écrit :

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

$$a^2 = b^2 - 2 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + c^2$$

Or, le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AB \cos(\hat{A}) = b \times c \cos(\hat{A})$$

D'où :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b \times c \cos(\hat{A})$$

Ce qui a été fait avec a peut être reproduit avec b et c . On en déduit alors les formules demandées.

De la même manière pour les autres cotés, ce qui a été fait avec le côté a peut être reproduit avec les côtés b et c. On en déduit alors les formules demandées.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \times c \cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times b \cos(\hat{C})$$

Le théorème d'Al Kachi est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé. En effet, si l'angle \hat{A} est droit, alors la première formule devient :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

1.3. Pour un triangle ABC quelconque (Figure 2), Prouver la relation :

$$\frac{\|\overrightarrow{BC}\|}{\sin(\hat{A})} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\sin(\hat{B})} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\sin(\hat{C})}$$

Solution :

Dans le triangle ABC, on appelle H le pied de la hauteur issue du sommet A et S l'aire du triangle.

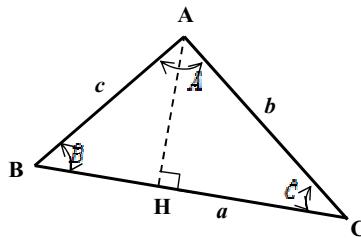


Figure 1.2

Nous avons l'aire du triangle ABC :

$$S = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(\hat{B})$$

En procédant de même en B et C, on établit alors la triple égalité :

$$S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(\hat{B}) = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin(\hat{C})$$

En divisant le produit ($a \times b \times c$) par les quatre membres de cette triple égalité, il vient :

$$\frac{a \times b \times c}{S} = \frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

C'est cela que l'on appelle la loi des sinus ou encore la formule des sinus.

Où bien sous forme vectoriel :

$$\frac{\|\vec{BC}\|}{\sin(\hat{A})} = \frac{\|\vec{AC}\|}{\sin(\hat{B})} = \frac{\|\vec{AB}\|}{\sin(\hat{C})}$$

1.8. EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

1.4. Dans un repère orthonormé (ox , oy), on donne le point Q tel que $|\overrightarrow{OQ}|=a$ et $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{Ox})=q$ et le point P tel que $|\overrightarrow{OP}|=b$ et $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{Ox})=p$.

A l'aide du produit scalaire, trouver une relation trigonométrique entre les angles p et q .

1.5. Dans un repère orthonormé direct, on considère deux vecteurs :

$$\vec{V}_1 = m\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{V}_2 = m\vec{i} - m\vec{j} + \vec{k}$$

1. Déterminer m pour que \vec{v}_1 soit perpendiculaire à \vec{V}_2 ; dans ce cas calculer le module de $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.

2. Déterminer m pour que $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ soit parallèle au vecteur \vec{V}_3 de composantes $(-1, -1, 0)$.

1.6. Dans un repère orthonormé direct, on définit les trois vecteurs :

$$\vec{V}_1 = 0\vec{i} + 1\vec{j} + m\vec{k}, \quad \vec{V}_2 = \vec{i} + n\vec{k}, \quad \vec{V}_3 = \vec{i} + n\vec{j}$$

Déterminer le volume du parallélépipède construit sur \overrightarrow{OM}_1 , \overrightarrow{OM}_2 et \overrightarrow{OM}_3 , ces trois derniers vecteurs étant respectivement équipollents à \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3

1.7. Montrer que les deux vecteurs $\vec{V}_1(1, 3, -4)$ et $\vec{V}_2(1, 5, 4)$ sont perpendiculaires et calculer:

$$\|\vec{V}_1\|, \|\vec{V}_2\|, \quad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2, \quad \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\|$$

1.8. Etant donnés les points A (1, 0,0), B (0, 1, 0) et C (0, 0, 1).

Calculer le volume du tétraèdre OABC. On utilisera les propriétés du produit mixte.

1.9. Montrer que si les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont les cotés d'un parallélogramme, l'aire sera égale à $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\|$

1.10. Déterminer le vecteur unitaire \vec{u} perpendiculaire aux vecteurs $\vec{V}_1 = \vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{V}_2 = \vec{i} - 2\vec{k}$.

1.11. On considère les trois vecteurs :

$$\vec{V}_1 = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{V}_2 = y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{V}_3 = z\vec{k} + x\vec{i}$$

calculer le produit mixte: $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$.

CHAPITRE 2

GENERALITES ET DEFINITIONS DE BASE

2.0 INTRODUCTION

L'objectif principal de ce chapitre est de permettre aux étudiants de comprendre les principales complications de forces dans la mécanique rationnelle. De cette idée, on présente la définition et le sens physique de la force, ainsi que la représentation vectorielle d'une force. Ensuite, on explique quelques opérations sur les forces concernant la réduction d'un système de forces à une seule résultante, et la décomposition d'une force à plusieurs composantes. Puis, on aborde des notions sur le point matériel, le corps solide parfait et les différents types de forces. Cette conduite des idées va nous permettre d'établir des relations logiques entre les concepts théoriques et les problèmes à résoudre lors de l'étude de la statique.

2.1 DEFINITION ET SENS PHYSIQUE DE LA FORCE

Une force désigne, en physique, l'interaction entre deux objets ou systèmes. On appellera force l'action d'un corps sur un autre, se traduisant par une pression, une attraction ou une répulsion. Au minimum deux forces exercées sur l'objet sont nécessaires pour induire une déformation de celui-ci. Isaac Newton a précisé ce concept en établissant les bases de la mécanique newtonienne.

2.2 REPRESENTATION VECTORIELLE D'UNE FORCE

L'action de la force sur le corps est déterminée par (Figure 2.1) :

- le point d'application de la force
- La direction de la force s'appelle aussi ligne d'action (Δ).
- le sens : $A \rightarrow B$

La force est une grandeur vectorielle ; elle se représente graphiquement par un vecteur \vec{F} . La valeur numérique où le module de la force s'obtient avec la comparaison avec l'unité de la force :

$$|\vec{F}| = |\overline{AB}|.$$

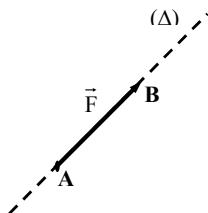


Figure 2.1 Représentation vectorielle d'une force

2.3 OPERATIONS SUR LES FORCES

2.3.1 Résultante de deux forces concourantes

Soient deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 appliquées à un point O du solide (Figure 2.2a). Pour la détermination de leur résultante \vec{R} , on construit un parallélogramme sur \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (Figure 2.2b). Le module et la direction de la résultante \vec{R} sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces (figure 2.2b- Règle du parallélogramme).

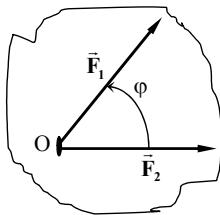


Figure 2.2a

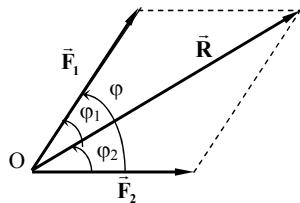


Figure 2.2b Parallélogramme de deux forces

On s'écrit :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2.1)$$

Son module s'obtient :

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(\pi - \varphi)} \quad (2.2)$$

Et sa direction se détermine :

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{R}{\sin \varphi} \quad (2.3)$$

Les formules 2.1, 2.2 et 2.3 définissent le module, la direction et le sens de la résultante des deux forces appliquées au même point et faisant un angle φ entre elles.

2.3.2 Résultante de plusieurs forces concourantes

2.3.2.1 Méthode du parallélogramme des forces

On peut faire la somme de plusieurs forces appliquées en un point commun illustrées sur la Figure 2.3 (Système de forces concourantes en plan). Faisant leur composition suivant la règle du parallélogramme par composer les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , trouver leur résultante \vec{R}_1 , puis composer

cette dernière et la force \vec{F}_3 , construire un parallélogramme sur \vec{R}_1 et \vec{F}_3 , trouver la résultante \vec{R}_2 , et ainsi de suite (Figure 2.4), jusqu'à obtention de la résultante finale \vec{R} (en double lignes dans la Figure 2.4).

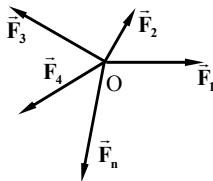


Figure 2.3 Système de forces concourantes en plan

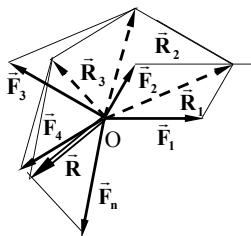


Figure 2.4

2.3.3 Règle du polygone des forces

Pour la construction du polygone des forces, on respecte le sens et la direction de chaque force (Figure 2.3). Tout d'abord, on place l'origine du vecteur \vec{F}_2 à l'extrémité B de \vec{F}_1 , puis de placer l'origine \vec{F}_3 à l'extrémité C de \vec{F}_2 , etc ; en joignant le point A d'application des forces et l'extrémité de \vec{F}_n , on obtient la résultante \vec{R} . La méthode porte le nom : **La règle du polygone des forces** (Figure 2.5).

La ligne brisée ABDCEF s'appelle polygone des forces et le segment AF, vecteur fermant le polygone s'appelle la résultante des forces.

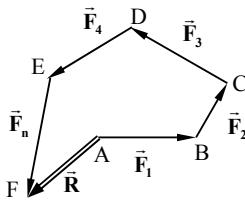


Figure 2.5 Polygone des forces

S'il y a n forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , ..., \vec{F}_n concourantes en O, leur résultante unique \vec{R} est appliquée en O, et vaut la somme géométrique des vecteurs forces :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.4)$$

2.3.4 Décomposition géométrique d'une force

2.3.4.1 Décomposition suivant deux directions

Décomposer une force revient à trouver les forces, appelées composantes, qui sont appliquées au même point, et produiront un effet équivalent à celui de la force décomposée.

La décomposition de la force \vec{F} (Figure 2.6a) est valable lorsque les directions **(m)** et **(n)** des composantes cherchées (Figure 2.6b) sont connues. Pour déterminer ces composantes, il suffit de mener par le point d'application A de la force \vec{F} et par l'extrémité B de \vec{F} deux droites parallèles à **(m)** et **(n)** : les points d'intersections définissent un parallélogramme ABCD dans lequel la force \vec{F} est la diagonale et les cotés AD et AC sont les composantes \vec{F}_m et \vec{F}_n (Figure 2.7). Soit :

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_n \quad (2.5)$$

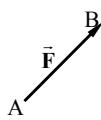


Figure 2.6a

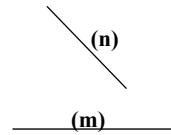


Figure 2.6b

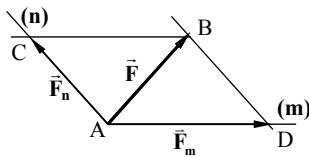


Figure 2.7

2.3.4.2 Décomposition suivant trois directions

On peut décomposer une force d'une façon unique, suivant trois directions arbitraires non parallèles à un plan (Figure 2.8a). La solution conduit à un parallélépipède dont les arêtes ont les directions données et dont la diagonale AB est constituée par la force décomposée (Figure 2.8b). La force \vec{F} est égale à la somme des composantes cherchées et sera écrite :

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_n + \vec{F}_p \quad (2.6)$$

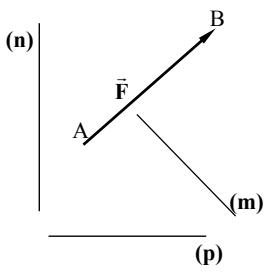


Figure 2.8a

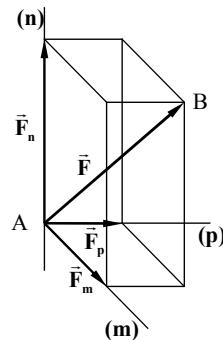


Figure 2.8b

La force \vec{F} fait les angles θ_x , θ_y , θ_z respectivement avec les axes x, y, et z du système de coordonnées cartésiennes orthogonales Oxyz (Figure 2.9). Pour décomposer \vec{F} suivant les trois axes, construisons un parallélépipède dans lequel \vec{F} sera une diagonale.

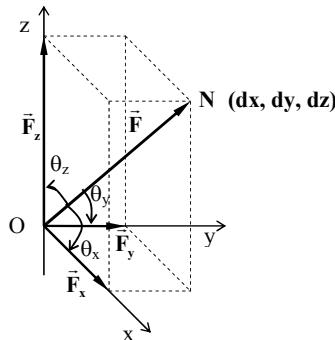


Figure 2.9

Le vecteur de la force \vec{F} s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \vec{x} + F_y \vec{y} + F_z \vec{z} \quad (2.7)$$

tel que F_x , F_y et F_z sont les composantes de la force \vec{F} et dont les modules sont :

$$F_x = \|\vec{F}\| \cos\theta_x, \quad F_y = \|\vec{F}\| \cos\theta_y, \quad F_z = \|\vec{F}\| \cos\theta_z \quad (2.8)$$

D'où le module de la force \vec{F} :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.9)$$

Les cosinus directeurs s'obtiennent :

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{\|\vec{F}\|}, \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{\|\vec{F}\|}, \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{\|\vec{F}\|} \quad (2.10)$$

Le module de la force \vec{F} , peut s'exprimer autrement, en utilisant les cosinus directeurs :

$$\|\vec{F}\| = \frac{F_x}{\cos \theta_x} = \frac{F_y}{\cos \theta_y} = \frac{F_z}{\cos \theta_z} \quad (2.11)$$

2.3.4.3 Décomposition de \vec{F} avec un point de leur direction connu

Si le point N de coordonnées dx , dy et dz appartenant à la ligne d'action de la force \vec{F} est connu (Figure 2.9). Le vecteur \overrightarrow{ON} forme les angles θ_x , θ_y et θ_z avec les axes x, y et z et d son module, nous pouvons écrire :

$$dx = d \cos \theta_x, \quad dy = d \cos \theta_y, \quad dz = d \cos \theta_z$$

Il vient :

$$\|\overrightarrow{ON}\| = d = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (2.12)$$

Comme, on peut l'exprimer par la relation ; en introduisant les cosinus directeurs :

$$d = \frac{dx}{\cos \theta_x} = \frac{dy}{\cos \theta_y} = \frac{dz}{\cos \theta_z} \quad (2.13)$$

Par divisions membre à membre les relations (2.11) et (2.13), nous obtenons :

$$\frac{F}{d} = \frac{F_x}{dx} = \frac{F_y}{dy} = \frac{F_z}{dz} \quad (2.14)$$

2.3.5 Projection d'une force

Considérons la force \vec{F} appliquée à l'origine O du système de coordonnées orthogonales x , y , z (Figure 2.10).

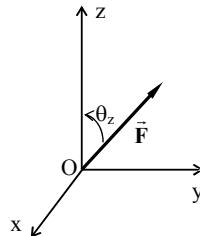


Figure 2.10

Pour définir la direction de \vec{F} , nous traçons le plan vertical OBAC contenant \vec{F} , tel qu'indique la Figure 2.11a. Le plan OBAC contient l'axe vertical z, l'orientation de ce plan peut être définie par l'angle φ qu'il forme avec l'axe y dans le plan (x, y), tandis que l'orientation de la force \vec{F} dans le plan OBAC est donnée par l'angle θ_z qu'elle fait avec l'axe z.

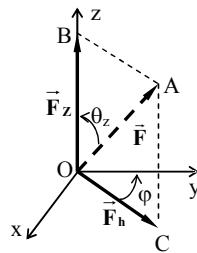


Figure 2.11a

Nous décomposons d'abord la force \vec{F} en ces composantes \vec{F}_z et \vec{F}_h . Cette dernière (F_h) étant contenue en plan (x, y) (Figure 2.11b). Les composantes scalaires de \vec{F} sont alors :

$$F_z = F \cos \theta_z \quad F_h = F \sin \theta_z$$

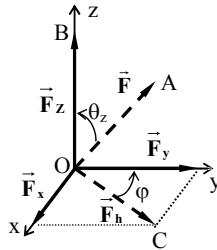


Figure 2.11b

Ensuite, la composante \vec{F}_h peut se décomposer, en \vec{F}_x et \vec{F}_y suivant les directions x et y. nous aurons alors les composantes scalaires (Figure 2.11b):

$$\begin{aligned} F_x &= F_h \sin \varphi = F \sin \theta_z \sin \varphi \\ F_y &= F_h \cos \varphi = F \sin \theta_z \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.4 Différents types de forces

Les forces se trouvent dans la nature sous forme ponctuelle, linéique, surfacique où volumique. Ces forces peuvent être de contact et les forces à distance.

Les forces à distances

Elles peuvent s'exercer sans contact entre les objets. Les différents cas principaux cas sont:

- La force de gravitation : ces forces agissent à distance entre les corps ayant une masse.
- La force magnétique (qui permet à un aimant d'attirer un morceau de fer ou qui oriente l'aiguille d'une boussole vers le nord)
- La force électrique : ces forces manifestent entre les charges électriques au repos ou en mouvement

- Les forces nucléaires : qui expliquent la cohésion de certains noyaux et l'instabilité de certains autres.

Les forces de contact

Elles se manifestent lorsqu'un corps est en contact avec un autre corps (solide, liquide et gazeux). Les principales forces de contact sont :

- La force de réaction d'une surface (sol, table ou autre) : il s'agit de force qui s'oppose au poids et empêche un objet de tomber. Cette force est en générale verticale et orientée vers le haut et compense souvent le poids.
- Le contact d'un objet avec un autre objet
- Les forces de pressions exercées par un gaz ou un liquide
- La poussée d'Archimède
- Les forces de frottement exercées par une surface ou par l'air sur un objet en mouvement

Dans l'étude la mécanique on retrouve les contacts suivants :

- le contact ponctuel
- le contact linéaire
- le contact surfacique

- Force ponctuel (localisée)

Elle s'applique en un point déterminé du corps.

Exemple : force exercée par une corde attachée à un objet T_c , par une barre rigide sur un objet suspendu (Figure 2.12), ...

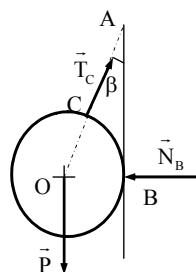


Figure 2.12

- **Force répartie** (linéaire, surfacique):

Lorsque l'action qui s'applique à un objet s'exerce sur toute une surface de l'objet ou sur chaque élément de son volume.

Exemple : le poids d'une poutre (Figure 2.13a) : la gravitation s'exerce sur chaque élément de volume de la poutre.

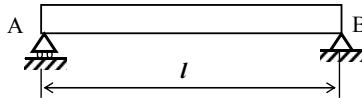


Figure 2.13a

Le poids propre est modélisé par une charge linéaire répartie q (Figure 2.13b).

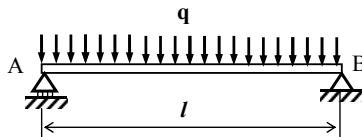


Figure 2.13b

Comme, il peut être modélisé par une charge ponctuelle $P = ql$ (Figure 2.13c).

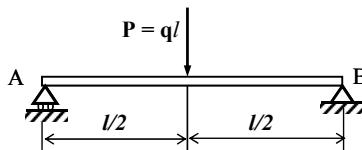


Figure 2.13c

Exemple :

Dans le cas d'une surface en contact rugueuse, la force du poids \bar{P} est équilibrée par la réaction \bar{N} . Le solide peut rester au repos, dans ce cas, il existe une autre force qui s'oppose au mouvement du solide de même direction et de sens opposée à la force motrice \bar{T} (Figure 2.14). On

appellera cette force de surface par la force de frottement de glissement \vec{F}_{fr} .

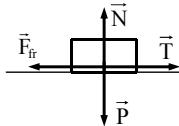


Figure 2.14 Force de frottement - forces de surface

Exemple : la poussée d'Archimède exercée par un fluide sur un objet immergé est une force répartie en surface.

2.5 FORCES INTERNES ET FORCES EXTERNES

Les forces exercées sur un solide sont de deux types. Les forces extérieures sont exercées par d'autres corps et appliquées aux points du solide donné (F_1 , F_2 ,, F_n) (Figure 2.15 a). Les forces intérieures sont les forces d'interaction qui se développent entre les points matériels du solide donné (M , N , T voir cours résistance des matériaux) (Figure 2.15 b).

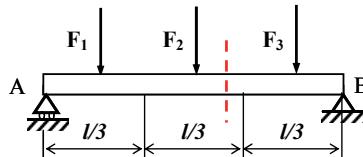


Figure 2.15 a

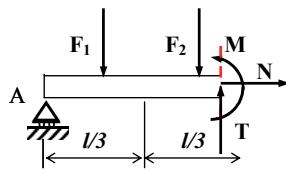


Figure 2.15 b

2.6 POINT MATERIEL - CORPS SOLIDE

2.6.1 Point matériel

On appelle un point matériel une particule matérielle dont les dimensions sont négligeables dans les conditions du problème considéré. La différence par rapport au point géométrique réside dans le fait que le point matériel est supposé contenir une certaine quantité de matière concentrée. Un point matériel jouit donc de la propriété d'inertie et d'interactions avec d'autres points matériels.

2.6.2 Corps solide

Tout corps physique se présente en mécanique comme un système de points matériels : on entend par-là un ensemble de particules matérielles qui agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction. Par corps solide, on entend un corps dont deux points quelconques restent en toutes circonstances séparés par une distance inchangée. Autrement, le corps solide conserve une forme géométrique constante (reste indéformable) tant dans son ensemble qu'en chacune de ses parties.

2.7 EXERCICES RESOLUS

2.1. Déterminer la résultante des deux forces concourantes appliquées sur le corps solide dans la figure 2.16a, en utilisons les deux méthodes suivants:

- la méthode du parallélogramme des forces
- la méthode de projection des forces sur les axes

Solution :

1^{ere} Méthode : Parallélogramme des forces

On trace le parallélogramme des forces **OABC** (Figure 2.16b), on joignant l'extrémité de chaque force une parallèle à l'autre force.

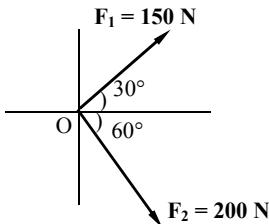


Figure 2.16 a

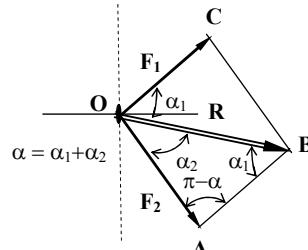


Figure 2.16 b

La diagonale **OB** représente la résultante des deux forces (F_1, F_2), de module :

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha)}$$

On obtient le module de R :

$$R = 250 \text{ N}$$

La direction de R , est obtenue par l'application du théorème des sinus du triangle OAB :

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin (\pi - \alpha)}$$

D'où :

$$\alpha_1 = 53,13^\circ \text{ et } \alpha_2 = 36,87^\circ$$

La Figure 2.16b montre la direction et le sens de la résultante R.

2^{eme} Méthode : projection des forces sur les axes

La projection des composantes des forces extérieures sur les axes x et y au point O (Figure 2.16c), s'écrit :

$$R_x = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ = 229,9 \text{ N}$$

$$R_y = F_1 \sin 30^\circ - F_2 \sin 60^\circ = -98,21 \text{ N}$$

Les composantes de la résultante R:

$$R_x = 229,9 \text{ N}$$

$$\text{et } R_y = -98,21 \text{ N.}$$

La résultante R:

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(229,9)^2 + (-98,21)^2}$$

D'où, la résultante R = 250 N

La direction de R est déterminée par :

$$\tan \beta = R_x/R_y = -2,34 \quad \beta = -66,7^\circ$$

où :

$$\tan \gamma = R_y/R_x = -0,43 \quad \gamma = -23,3^\circ$$

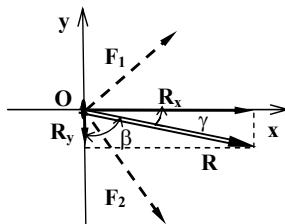


Figure 2.16 c

2.2. Déterminer la résultante du système de forces concourantes appliquées sur le corps solide dans la figure 2.17a.

Solution :

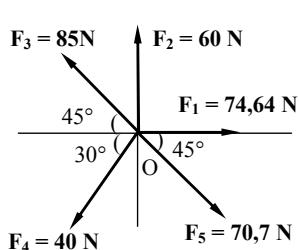


Figure 2.17a

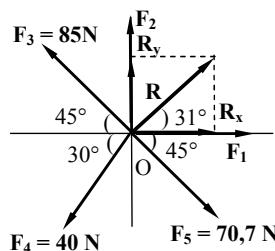


Figure 2.17b

La résultante du système de forces illustrées dans la figure 2.17b.

i	F_i (N)	Projection F_{xi} (N)	Projection F_{yi} (N)	
1	74,64	$74,64 \cos 0^\circ$	74,64	$74,64 \sin 0^\circ$
2	60	$60 \cos 90^\circ$	0	$60 \sin 90^\circ$
3	85	$-85 \cos 45^\circ$	-60	$85 \sin 45^\circ$
4	40	$-40 \cos 30^\circ$	-34,64	$-40 \sin 30^\circ$
5	70,7	$70,7 \cos 45^\circ$	50	$-70,7 \sin 45^\circ$
	R (N)		30	
				50

La résultante R:

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(30)^2 + (50)^2}$$

D'où, la résultante $\mathbf{R} = 58,3\text{N}$

La direction de \mathbf{R} :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{50}{30} = 1,67$$

D'où, $\alpha = 59^\circ$

La Figure 2.17b montre la direction et le sens de la résultante R.

2.3. La force $\mathbf{F} = 104\text{N}$ appliquée dans le point A de coordonnée $(2, 0, 0)$, dirigée selon la diagonale AF (Figure 2.18), sachant que les coordonnées du point F sont $(0, 2, 2)$.

- Déterminer les cosinus directeur de la force \mathbf{F} ,

Décomposer F suivant les trois directions x, y et z.

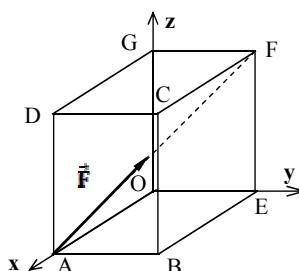


Figure 2.18

Solution :

Les cosinus directeur de la force F,

Les coordonnées des points A (2, 0, 0) et F (0, 2, 2)

Le vecteur de la diagonale AF :

$$\overrightarrow{AF} = (x_F - x_A)\vec{i} + (y_F - y_A)\vec{j} + (z_F - z_A)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AF} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Le module de \overrightarrow{AF}

$$\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{(x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2 + (z_F - z_A)^2}$$

$$\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{3} \text{ (m)}$$

Les cosinus directeur de la force F :

$$\cos \theta_x = \frac{(x_F - x_A)}{\|\overrightarrow{AF}\|} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \theta_y = \frac{(y_F - y_A)}{\|\overrightarrow{AF}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \theta_z = \frac{(z_F - z_A)}{\|\overrightarrow{AF}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta_x = 125,3^\circ \text{ et } \theta_y = \theta_z = 54,7^\circ$$

Les composantes de la force F suivant les trois directions x, y et z.

$$F_x = F \cos \theta_x = 104 \frac{-\sqrt{3}}{3} = -60 \text{ N}$$

$$F_y = F \cos \theta_y = 104 \frac{\sqrt{3}}{3} = 60 \text{ N}$$

$$F_z = F \cos \theta_z = 104 \frac{\sqrt{3}}{3} = 60 \text{ N}$$

2.4. L'angle entre le hauban du tribord AB et le mât du bateau est de 15° (Figure 2.19a). La tension dans le hauban est égale à 6 KN, calculer :

- les composantes de la force exercée par le hauban au point A,
- les angles θ_x , θ_y , et θ_z qui définissent la direction de cette force.

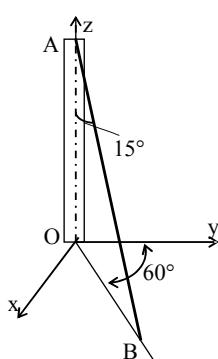


Figure 2.19a

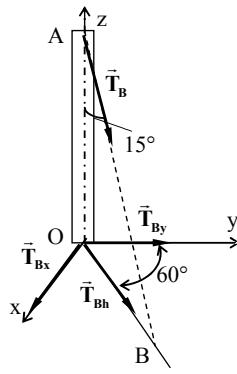


Figure 2.19b

Solution :

a- Les projections de la tension \vec{T}_B appliquée au point A sont :

$$T_{Bz} = -T_B \cos 15^\circ$$

$$T_{Bh} = T_B \sin 15^\circ$$

Et, les projections de T_{Bh} , dans le plan (x, y) sont :

$$T_{Bx} = T_{Bh} \sin 60^\circ = T_B \sin 15^\circ \sin 60^\circ$$

$$T_{By} = T_{Bh} \cos 60^\circ = T_B \sin 15^\circ \cos 60^\circ$$

D'où, les composantes de la tension \vec{T}_B sur les axes sont :

$$T_{Bx} = T_B \sin 15^\circ \sin 60^\circ = 1.34 \text{ KN}$$

$$T_{By} = T_B \sin 15^\circ \cos 60^\circ = 0.78 \text{ KN}$$

$$T_{Bz} = -T_B \cos 15^\circ = -5.79 \text{ KN}$$

b- les angles θ_x , θ_y , et θ_z qui définissent la direction de la tension \vec{T}_B sont déterminés par la relation :

$$T_B = \frac{T_{Bx}}{\cos \theta_x} = \frac{T_{By}}{\cos \theta_y} = \frac{T_{Bz}}{\cos \theta_z}$$

D'où

$$\cos \theta_x = \frac{T_{Bx}}{T_B} = 0.23, \quad \theta_x = 77^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{T_{By}}{T_B} = 0.129, \quad \theta_y = 82.6^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{T_{Bz}}{T_B} = -0.97, \quad \theta_z = 165^\circ$$

2.8 EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

- 2.5.** Déterminer la résultante des deux forces concourantes appliquées sur le corps solide dans la figure 2.20, en utilisons les trois méthodes suivants :
- la Règle du parallélogramme
 - le triangle des forces.
 - la méthode analytique.

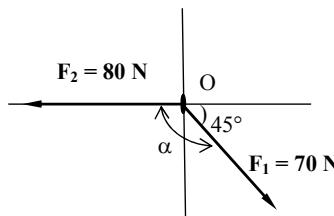


Figure 2.20

- 2.6** Même question que l'exercice 2.5 pour la figure 2.21 (a et b).

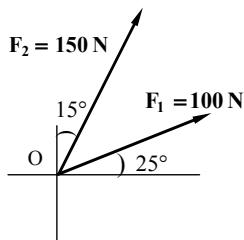


Figure 2.21a

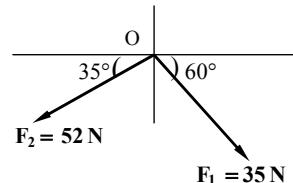


Figure 2.21b

- 2.7** Déterminer la résultante du système de forces concourantes appliquées sur le corps solide dans la figure 2.22.

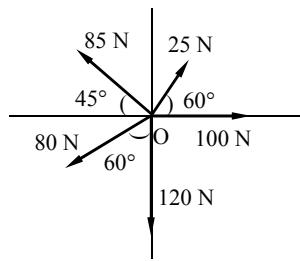


Figure 2.22

2.8 Même question que l'exercice 2.7 pour la figure 2.23 (a et b).

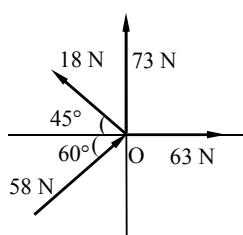


Figure 2.23a

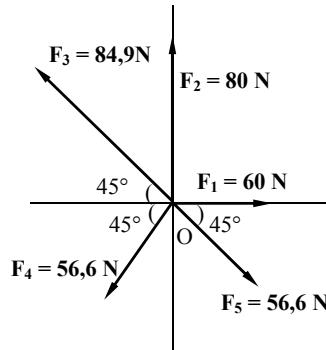


Figure 2.23b

2.9 Décomposer la forces F appliquées sur le corps solide dans la figure 2.24, suivant deux directions, en utilisons la méthode géométrique.

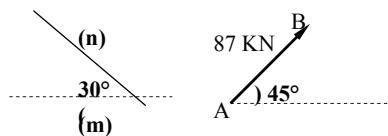


Figure 2.24

2.10 Même question que l'exercice 2.9 pour la figure 2.25.

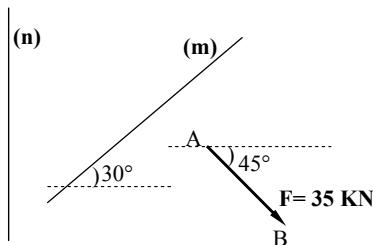


Figure 2.25

2.11 Décomposer la force $\mathbf{F} = 95 \text{ N}$ suivant les trois directions d'un parallélépipède, Sachant que \mathbf{F} fait avec les axes x , y et z les angles suivants : $\theta_x = 45^\circ$, $\theta_y = 75^\circ$, et $\theta_z = 48,8^\circ$.

2.12 Même question que l'exercice 2.11 pour $\mathbf{F} = 77 \text{ KN}$ et $\theta_x = 45^\circ$, $\theta_y = 55^\circ$, et $\theta_z = 75^\circ$.

2.13 Décomposer suivant les trois directions d'un parallélépipède, la force $\mathbf{F} = 108 \text{ KN}$ appliquée en O de coordonnée $(0, 0, 0)$, Sachant qu'un point N quelconque sur la direction de \mathbf{F} est défini par les coordonnées $(-4, 4, 7)$.

2.14 Même question que l'exercice 2.13 pour :

F	dx	dy	dz
69 N	-3	6	2
108 N	4	4	7
33 N	-9	-12	-8
52 N	6	-7	6
80 N	6	12	4

CHAPITRE 3

STATIQUE DES CORPS SOLIDES

3.0 INTRODUCTION

La statique est une branche de la mécanique rationnelle qui traite l'équilibre des corps matériels par rapport à un système de référence supposé fixe, et ses moyens de réduire un système de forces à une forme élémentaire, il a donc pour étudier des forces indépendamment.

Dans ce chapitre, on aborde les axiomes de la statique, puis les différents types des liaisons et de réactions des corps solides. Dans ce contexte, on donne l'axiome des liaisons. Les torseurs des forces extérieures sur le solide seront détaillés d'une manière explicite. Puis, on expose les conditions d'équilibre statique d'un corps solide. Enfin, ce chapitre sera terminé avec quelques exercices résolus et d'autres supplémentaires pour l'entraînement des étudiants sur ce type de problèmes.

3.1 AXIOMES DE LA STATIQUE

La méthode des abstractions et la généralisation de l'expérience accumulée pendant des siècles d'observation immédiate et d'activité pratique des hommes ont permis de dégager certains lois générales de la statique. Ces

lois s'appellent axiomes. Tous les développements ultérieurs de la statique élémentaire se déduisent des axiomes par raisonnement mathématique.

Axiome 1 : Pour que deux forces appliquées à un solide parfait se trouvent en équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient de module égal, de sens contraire et soient portées par la droite joignant leurs points d'application (Figure 3.1).

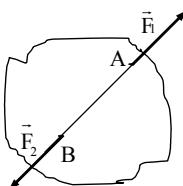


Figure 3.1

Axiome 2 : Au système de forces appliqué à un solide parfait, on peut ajouter ou retrancher n'importe quel système de forces équilibré sans que l'effet du premier système s'en trouve modifié.

Axiome 3 : Les forces exercées par deux solides l'un sur l'autre sont toujours de même module, de même direction et de sens opposé (Principe de l'action et de la réaction).

Axiome 4 : Si un système de force donné est équilibré sur un solide, il reste équilibré aussi sur tout autre solide. (Les dimensions et la forme du solide ne jouent aucun rôle dans la statique du solide parfait)

Axiome 5 : Si un corps déformable se trouve en équilibre, il le reste aussi après la solidification (Principe de solidification).

Axiome 6 : La résultante de deux forces appliquées à un même point du solide a son point d'application en ce même point ; son module et sa direction sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces (Règle du parallélogramme).

3.2 LIAISONS, APPUIS ET REACTIONS

3.2.1 Définition

Les solides considérés en mécanique peuvent être libres ou liés, suivant le cas. Un solide est dit libre s'il peut se déplacer en toute direction, par exemple une pierre lancée dans l'espace est un solide libre. Un solide est dit lié s'il ne peut se déplacer que dans des directions déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile.

Les corps matériels qui s'opposent au mouvement du solide sont appelés liaisons et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons.

3.2.2 Différents types des liaisons et de réactions

Les liaisons peuvent être matérialisées soit par des appuis, articulations, encastrements, ...etc. Dans les cas énumérés sont confectionnées à partir d'un matériau absolument rigide, et à partir que le frottement, aux points de contact avec les solides considérés, est considéré négligeable.

a) Liaison libre

Cette liaison est en fait une absence de liaison, le solide est « livré à lui même » (cas d'un satellite dans l'espace, ou d'un projectile). Il existe six degrés de liberté et aucun effort de contact transmis (pas de réaction).

b) Liaison ponctuelle et appui plan (appui simple)

Pour un solide repose simplement sur une surface polie (horizontale, verticale ou inclinée) Figure 3.2 (a, b) ou sur le rouleau cylindrique Figure 3.2c, la réaction de la surface est appliquée au solide en point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui. Elle s'appelle réaction normale et se note \vec{R} .

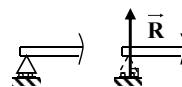
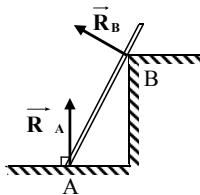
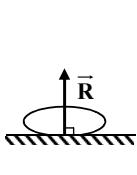


Figure 3.2a

Figure 3.2b

Figure 3.2c

c) Solides articulés (Appuis doubles)

Dans la pratique, on trouve parfois le corps solide articulé soit par:

- un appui articulé (Figure 3.3a),
- une articulation cylindrique (liaison pivot glissant, liaison linéaire annulaire) (Figure 3.3b),
- ou une articulation sphérique (liaison rotule) (Figure 3.3c).

Le module et la direction de la réaction \vec{R} dans son plan sont inconnus

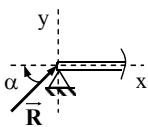


Figure 3.3a

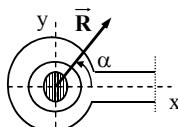


Figure 3.3b

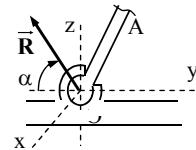


Figure 3.3c

d) Barres rigides

Les barres de poids négligeables peuvent servir comme des liaisons. Leur réaction sera dirigée suivant la longueur de celle-ci (Figure 3.4).

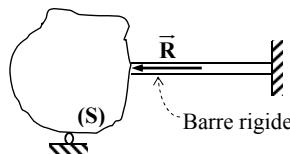


Figure 3.4

e) Liaison flexible (fil, corde, chaîne) (Figure 3.5)

La réaction \vec{T} porte le nom de tension. Elle est appliquée au point d'attache du lien flexible au solide, dirigée le long de la liaison flexible (du fil, de la corde, de la chaîne, etc....).

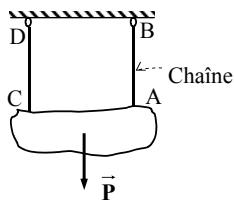


Figure 3.5a

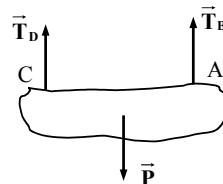


Figure 3.5b

f) Liaison Encastrement

La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre les deux solides (Figure 3.6). Leurs réactions sont représentées par un moment qui empêche la rotation du solide, et des réactions horizontale et verticale, qui empêchent les déplacements horizontaux et verticaux.

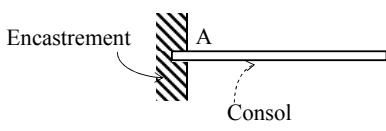


Figure 3.6a

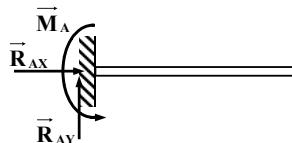


Figure 3.6b

3.3 AXIOME DES LIAISONS

Pour tout corps solide lié (Figure 3.7a), il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et, de lui considérer comme un corps solide libre (Figure 3.7b) soumis à l'action des forces données et des réactions de liaisons.

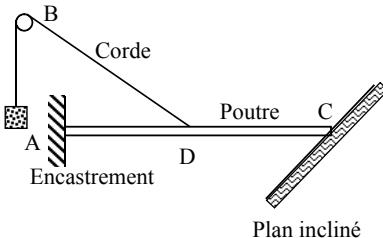


Figure 3.7a. Corps solide lié

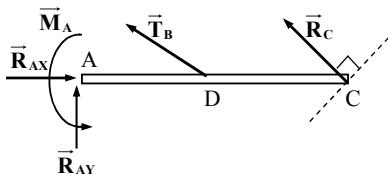


Figure 3.7b. Corps solide libre

3.4. MOMENT D'UNE FORCE

3.4.1 Moment d'une force par rapport à un point

Soit une force \vec{F} et un point O (Figure 3.8a). Menons par O un plan contenant \vec{F} . Abaissons de O une perpendiculaire OP sur la direction AB de la force \vec{F} . La longueur de la perpendiculaire est le bras de levier h de la force \vec{F} par rapport au point O ; ce point s'appelle pôle.

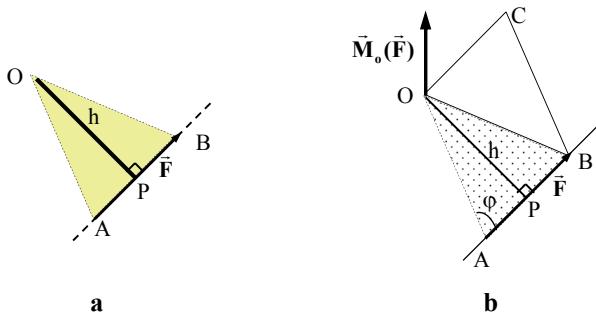


Figure 3.8 Moment d'une force par rapport à un point

Le moment de \vec{F} par rapport à O est le produit du module F du vecteur de la force \vec{F} par le bras de levier h (Figure 3.8b), qui peut être affecté de signe positif ou négatif.

$$M_o(\vec{F}) = \pm Fh \quad (3.1)$$

$M_o(\vec{F}) > 0$ si la force fait tourner le plan dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

$M_o(\vec{F}) < 0$ si la force fait tourner le plan dans le sens des aiguilles d'une montre.

La valeur absolue du moment d'une force est le double de l'aire du triangle OAB construit sur la force \vec{F} et le pôle O ou l'aire du parallélogramme OABC (Figure 3.8b).

$$|M_o(\vec{F})| = Fh = 2 S_{OAB}$$

où :

$$|M_o(\vec{F})| = Fh = F OA \sin \varphi = Fr \sin \varphi = \|\vec{r} \wedge \vec{F}\|$$

Où bien :

$$|M_o(\vec{F})| = \|\vec{r} \wedge \vec{F}\| \quad (3.2)$$

Le vecteur moment $\vec{M}_o(\vec{F})$ est égal en module à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{r} où \overrightarrow{OA} et \vec{F} . Il est perpendiculaire au plan de ces deux vecteurs.

Ainsi, le vecteur moment d'une force $\vec{M}_o(\vec{F})$ par rapport à un point O est un vecteur lié en O, qui s'écrit :

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (3.3)$$

3.4.2 Moment d'une force par rapport à un axe – Cas Général

Considérons la force \vec{F} dans le repère (Oxyz) (Figure 3.9) et \vec{r} le vecteur de position du point d'application de la force \vec{F} à l'origine O. La force \vec{F} s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \vec{x} + F_y \vec{y} + F_z \vec{z}$$

Où \vec{F}_x , \vec{F}_y et \vec{F}_z sont les projections de \vec{F} sur les axes Ox, Oy et Oz.

Ainsi le vecteur de position \vec{r} dans le même repère s'écrit :

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x \vec{x} + r_y \vec{y} + r_z \vec{z}$$

Où, \vec{r}_x , \vec{r}_y et \vec{r}_z sont les projections de \vec{r} sur les axes Ox, Oy et Oz.

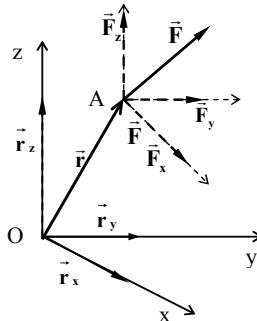


Figure 3.9

Le vecteur moment d'une force, $\vec{M}_o(\vec{F})$, par rapport au point O s'écrit :

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = (r_y F_z - r_z F_y) \vec{x} + (r_z F_x - r_x F_z) \vec{y} + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{z}$$

Où

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = M_{ox}(\vec{F}) \vec{x} + M_{oy}(\vec{F}) \vec{y} + M_{oz}(\vec{F}) \vec{z} \quad (3.5)$$

Les composantes du vecteur moment $\bar{M}_o(\vec{F})$:

$M_{ox}(\vec{F})$, $M_{oy}(\vec{F})$ et $M_{oz}(\vec{F})$ sont les moments par rapport aux axes Ox, Oy et Oz respectivement dans le point O, et sont exprimés comme suivant :

$$\begin{aligned}\left(\bar{M}_o(\vec{F})\right)_{ox} &= M_{ox}(\vec{F}) = (r_y F_z - r_z F_y) \\ \left(\bar{M}_o(\vec{F})\right)_{oy} &= M_{oy}(\vec{F}) = (r_z F_x - r_x F_z) \\ \left(\bar{M}_o(\vec{F})\right)_{oz} &= M_{oz}(\vec{F}) = (r_x F_y - r_y F_x)\end{aligned}\quad (3.6)$$

Les cas où le moment d'une force non nulle par rapport à un axe est égal à zéro sont les suivant :

- a)- la direction de la force rencontre l'axe ($h = 0$)
- b)- la force est parallèle à l'axe (la projection de \vec{F} sur un plan h à l'axe sera nulle).

3.4.3 Théorème de VARIGNON

Si un système de forces plan admet une résultante unique \vec{R} , le moment de cette résultante par rapport à un point quelconque est égal à la somme algébrique des moments de toutes les forces de ce système par rapport à ce même point (Figure 3.10).

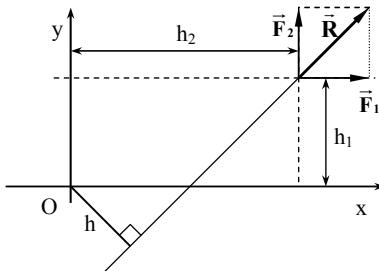


Figure 3.10

$$\bar{M}_o(\vec{R}) = \sum M_o(\vec{F}_i)$$

$$M_o(\vec{R}) = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) \quad (3.7)$$

Soit : $R.h = F_1.h_1 + F_2.h_2$

3.5. TORSEURS DES FORCES EXTERIEURES

3.5.1 Torseur d'action

Les efforts appliqués sur un système matériel peuvent être représentés mathématiquement par un torseur, appelé torseur d'action, qui s'écrit en un point O sous la forme :

$$[F]_O = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_O \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Où:

\vec{F} : La force d'action en un point O ;

\vec{M}_O : Le moment de la force \vec{F} par rapport au point O.

3.5.2 Torseurs des forces extérieures sur un corps solide (S)

Les efforts extérieurs à un système matériel (**S**) sont les efforts exercés sur (**S**) par d'autres systèmes extérieurs (Figure 3.11a). Si (**S**) est soumis à des forces \vec{F}_i et des couples \vec{M}_i (Figure 3.11a), le torseur des efforts extérieurs exercés sur (**S**) en un point O (Figure 3.11b), s'écrit :

$$[F_e]_O = \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_O(F_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \\ \sum \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

\vec{F}_e : La résultante \vec{R} des forces extérieures appliquées \vec{F}_i ;

$\vec{M}_O = \vec{M}_O(F_i)$: Le moment des forces extérieures \vec{F}_i par rapport au point O.

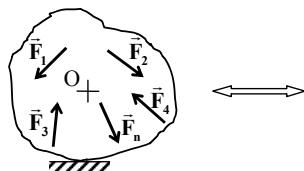


Figure 3.11a

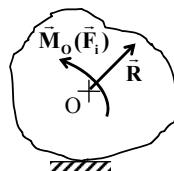


Figure 3.11b

3.6 CONDITION D'EQUILIBRE STATIQUE

3.6.1 Cas Général

Un solide (S) est en équilibre par rapport à un repère fixe (R) si chaque point de (S) reste fixe dans le temps par rapport à (R). En conséquence, le torseur des forces extérieurs en tout point O est nul où :

$$[F_e]_O = [0]_O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{R} = \vec{F}_e \\ \vec{M}_O(F_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Pour que le système de forces appliquées à un solide soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale du système et le moment résultant par rapport à un centre de réduction quelconque soient égaux à zéro, où :

$$\vec{R} = \vec{0}, \quad \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad (3.11)$$

3.6.2 Condition d'équilibre analytique

3.6.2.1 Système de forces quelconques

La condition d'équilibre analytique d'un corps solide est que la projection des éléments du torseur des forces extérieures soit nulle. Cette projection sur les axes d'un repère orthonormé R(O, xyz) permet d'obtenir en général six équations :

- Trois équations liées à la résultante des forces extérieures :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases} \quad (3.12)$$

Et, trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_{Ox} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{ix}(\vec{F}_i) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oy} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iy}(\vec{F}_i) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oz} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iz}(\vec{F}_i) = \vec{0} \end{cases} \quad (3.13)$$

3.6.2.2 systèmes de forces planes

Dans le cas d'un problème plan (par exemple X et Y), on aura trois équations d'équilibre.

-Deux équations liées à la résultante statique :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = 0 \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad (3.15)$$

3.6.2.4 Forces parallèles

Dans le cas d'un système de forces parallèles, où un couple, une équation pour le moment des forces par rapport au centre O :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad (3.16)$$

3.6.2.3 systèmes forces concourantes

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre O, le moment sera nul par rapport à O, il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases} \quad (3.17)$$

3.6.3 Condition d'équilibre géométrique

Pour que le système de forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone des forces soit fermé.

3.7. ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES EN PRÉSENCE DU FROTTEMENT

3.7.1. Frottement de glissement

On appelle frottement de glissement la résistance qui s'oppose au glissement de deux solides à paroi rugueuse en contact.

3.7.1.1. Expérience

Soit un solide de poids \vec{P} qui repose sur une surface horizontale. Appliquons à ce solide une force horizontale \vec{T} (Figure 3.12a).

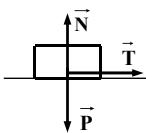


Figure 3.12a

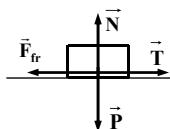


Figure 3.12b

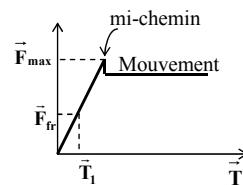


Figure 3.12c

1^{er} cas : Surfaces en contact polies

La force du poids \vec{P} est équilibrée par la réaction \vec{N} . Dans ce cas, aucune force ne s'oppose à la force motrice \vec{T} (Figure 3.12a). Le solide est en mouvement.

2^{eme} cas : Surfaces en contact rugueuses :

La force du poids \vec{P} est équilibrée par la réaction \vec{N} . Le solide peut rester au repos, dans ce cas, il existe une autre force qui s'oppose au mouvement du solide de même direction et de sens opposé à \vec{T} (Figure 3.12b). On appellera cette force par la force de frottement de glissement \vec{F}_{fr} .

Augmentons progressivement la force \vec{T} (Figure 3.12c). Tant que le solide reste au repos, la force \vec{F}_{fr} équilibre à chaque instant la force motrice \vec{T} , dans ce cas la force \vec{F}_{fr} augmente avec elle jusqu'à une valeur maximale \vec{F}_{max} ($\vec{F}_{fr} \leq \vec{F}_{max}$), où le corps solide est en mouvement. La force maximale \vec{F}_{max} correspond au cas limite de l'équilibre du solide, c'est à dire à l'instant où celui-ci est à mi-chemin (dans la zone de transition) entre le repos et le mouvement.

3.7.1.2. Force de frottement statique

La force de frottement de glissement est une force résistante qui agit dans le plan tangent aux deux surfaces de contact dans le sens opposé à la force motrice et de direction parallèle aux surfaces de contact.

La force de frottement qui agit lorsque le corps se trouve avant le mouvement (immobile) s'appelle force de frottement de repos ou force de frottement statique.

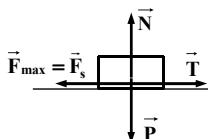


Figure 3.13

D'après la loi d'Amontons – Coulomb, la valeur maximale du module de la force de frottement de repos où statique \vec{F}_{\max} où \vec{F}_s (Figure 3.13) est proportionnelle à la pression normale du solide sur la surface d'appui :

$$\vec{F}_{\max} = f_s \vec{N} \quad (3.18)$$

Où f_s est le coefficient de frottement de glissement, sans dimension, qui est en fonction des matériaux des surfaces en contact et de l'état de ces surfaces.

Quelques valeurs du coefficient de frottement de glissement f_s pour quelques matériaux:

- Acier sur glace	0,027
- Acier sur acier	0,15
- Bronze sur fonte	0,16
- Cuir sur fonte	0,28

3.7.2. Force de frottement cinématique

La force de frottement qui agit quand un solide se déplace sur l'autre, est la force de frottement cinématique F_k . Elle est aussi proportionnelle à la réaction normale :

$$\vec{F}_k = f_k \vec{N} \quad (3.19)$$

Où f_k est le coefficient de frottement de glissement en mouvement. Il est fonction de la vitesse de mouvement. Il reste toujours inférieur au coefficient de frottement au repos ($f_k < f_s$)

3.7 EXERCICES RESOLUS

3.1. Une bille homogène de poids $P = 100 \text{ N}$, conserve son équilibre en plan par deux câbles inextensibles de poids négligeables CA et CB comme la montre la Figure 3.14a. La ligne d'action du câble CB est inclinée avec l'horizontale d'un angle de 50° .

- Déterminer les tensions dans les deux câbles CA et CB.

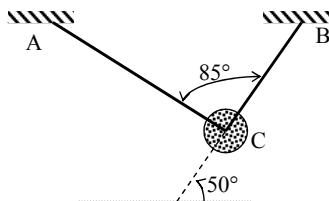


Figure 3.14a

Solution :

On remplace d'abord les liaisons par les réactions correspondantes, le câble CA par la tension \vec{T}_A et le câble CB par la tension \vec{T}_B (Figure 3.14b). D'après l'hypothèse des liaisons, la bille devient libre sous l'action du système de forces concourantes au centre C.

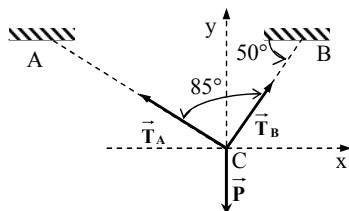


Figure 3.14b

1^{ère} Méthode : Condition d'équilibre analytique

La projection des éléments du torseur nuls des forces extérieures au point C, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow T_B \cos 50^\circ - T_A \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \Leftrightarrow T_B \sin 50^\circ + T_A \sin 45^\circ - P = 0 \quad (2)$$

La résolution des deux équations donne :

$$T_A = 64,5 \text{ N} \quad \text{et} \quad T_B = 71 \text{ N}$$

2^{eme} Méthode : Condition d'équilibre géométrique

Pour la construction du triangle des forces fermé, on commence par la force connue \vec{P} dirigée verticalement vers le bas du point C_1 vers l'extrémité C_2 . Ensuite, on trace la tension \vec{T}_B du point C_2 avec un angle de 40° avec la verticale, et enfin, on ferme le triangle avec la tension \vec{T}_A qui fait un angle de 45° avec la verticale (Figure 3.14c).

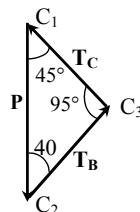


Figure 3.14c

Ecrivons le théorème des sinus du triangle des forces fermé $C_1C_2C_3$:

$$\frac{T_A}{\sin 40^\circ} = \frac{T_B}{\sin 45^\circ} = \frac{P}{\sin 95^\circ}$$

D'où, les réactions des liaisons sont :

$$T_A = 64,5 \text{ N} \quad \text{et} \quad T_B = 71 \text{ N}$$

3.2. Un ballon d'air de poids P , reste en état d'équilibre à l'aide d'un câble BC (Figure 3.15a). Il est soumis à l'action d'une force verticale dirigée vers le haut Q , et la pression horizontale du vent F . Déterminer la tension au point B du câble ainsi que sa direction.

Solution:

On supprime la liaison « le câble BC » et on la remplace par la tension correspondante \vec{T} (Figure 3.15b), ensuite, on représente les autres forces agissant sur le ballon d'air à savoir :

- le poids \vec{P} du ballon ;
- la pression du vent horizontale \vec{F} ;
- l'action de la force verticale \vec{Q} dirigée vers le haut.

1^{ere} Méthode : Condition d'équilibre analytique

Pour la détermination de la tension \vec{T} au point B du câble ainsi que sa direction, on écrit la condition d'équilibre statique du ballon. Cette condition est le torseur des forces concourantes au centre O du ballon (Figure 3.15b) est nul.

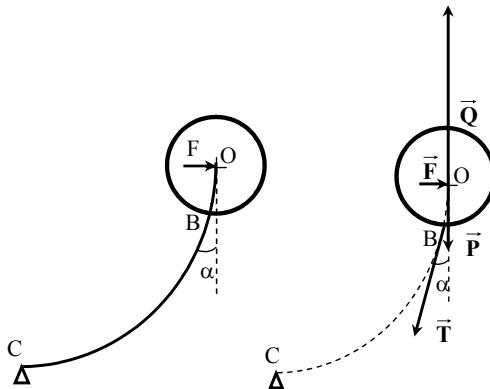


Figure 3.15a

Figure 3.15b

La projection des éléments de ce torseur nul, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow F - T \sin \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T \sin \alpha = F \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \Leftrightarrow Q - P - T \cos \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T \cos \alpha = Q - P \quad (2)$$

Ecrivons la somme des carrés des deux équations (1) et (2), on obtient, le module de la tension T :

$$T = \sqrt{F^2 + (Q - P)^2}$$

Divisons les deux équations (1) et (2), la direction de la tension \vec{T} sera:

$$\tan \alpha = \frac{F}{Q - P} \quad \text{où } \alpha = \arctan \frac{F}{Q - P}$$

2^{ième} méthode : Méthode géométrique

La condition d'équilibre géométrique : on emploi la règle du polygone des forces fermé.

On construit le polygone des forces agissant sur le ballon (Figure 3.15b). On trace d'abord la force connue \vec{P} dirigée vers le bas à partir du point O_1 et d'extrémité O_2 . Du point O_2 , on trace la force \vec{Q} dirigée vers le haut d'extrémité O_3 . Ensuite, on illustre la force horizontale \vec{F} à partir du point O_3 et d'extrémité O_4 . Enfin, on ferme le polygone par la tension \vec{T} dirigée en bas vers la gauche par un angle α inconnu du point O_4 vers O_1 (Figure 3.15c).

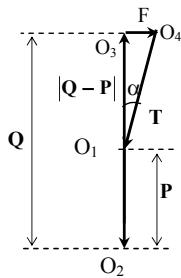


Figure 3.15c

Appliquons le théorème de Pythagore sur le triangle $O_1O_3O_4$ (Figure 3.15c), on obtient le module de la tension T :

$$T^2 = F^2 + (Q - P)^2$$

D'où :

$$T = \sqrt{F^2 + (Q - P)^2}$$

Et, la direction de cette tension α par la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{Q - P}$$

Où :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{F}{Q - P}$$

3.3. Le fardeau de poids \vec{Q} est maintenu en équilibre au point C par le système représenté dans la Figure 3.16a. Déterminer les réactions dans les barres CA de longueur **a**, CB de longueur **b** et la tension de la chaîne CD de longueur **d**. Les deux barres sont perpendiculaires entre elles et sont contenues dans un plan horizontal. (A.N : AC = a = 0.6m, BC = b = 0.8m, DC = d = 1.41m et $Q = 100$ KN).

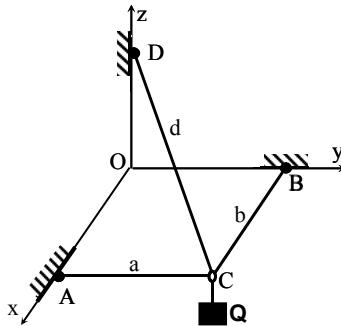


Figure 3.16a

Solution :

Pour la représentation des réactions dans les barres CA et CB et la tension dans le câble CD, on supprime les liaisons et on les remplace par les réactions qui leurs correspondent (Figure 3.16b). La tension \vec{T}_D fait un

angle β avec la verticale, sa projection sur le plan horizontal (OACB), $T_D \sin \beta$ fait un angle α avec AC (AC//Oy) (Figure 3.16c).

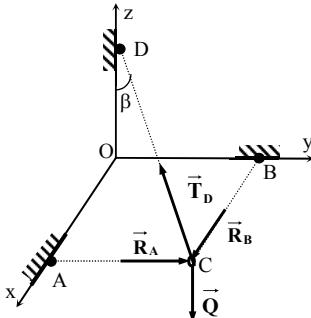


Figure 3.16b

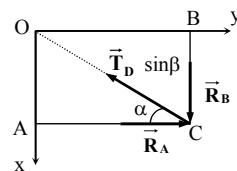


Figure 3.16c

Nous avons :

$$\sin \beta = \frac{OC}{CD} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{d}, \quad \cos \beta = \frac{OD}{CD} = \frac{\sqrt{d^2 - (a^2 + b^2)}}{d}$$

Et

$$\sin \alpha = \frac{BC}{OC} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A fin de calculer les réactions R_A et R_B et la tension T_D , on écrit la projection des éléments du torseur des forces nuls au nœud C, soit :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow R_B - T_D \sin \beta \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \Leftrightarrow R_A - T_D \sin\beta \cos\alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0} \Leftrightarrow -Q + T_D \cos\beta = 0 \quad (3)$$

La résolution de ces trois équations, donne :

$$T_D = \frac{Q}{\cos\beta} = \frac{d}{OD} Q$$

$$R_A = \frac{a}{OD} Q$$

$$R_B = \frac{b}{OD} Q$$

A.N.:

- $T_D = 1.41Q = 141 \text{ KN}$
- $R_A = 0.6Q = 60 \text{ KN}$
- $R_B = 0.8Q = 80 \text{ KN}$

3.4. Déterminer les réactions des appuis de la poutre représentée dans la Figure 3.17a. Le poids propre de la poutre est supposé négligeable.

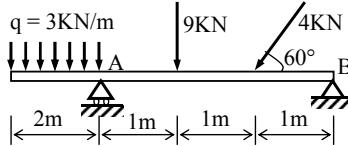


Figure 3.17a

Solution :

On supprime les liaisons dans la Figure 3.17a, et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 3.17b. D'après l'axiome des liaisons, la poutre devient libre sous l'action du système de forces en plan.

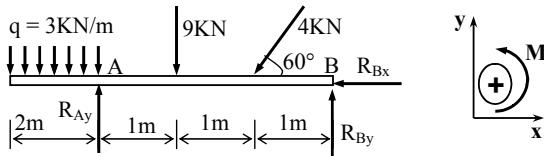


Figure 3.17b

Pour la détermination des réactions R_{Ay} , R_{Bx} et R_{By} , on écrit la projection des éléments du torseur des forces extérieurs nul en A :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow -R_{Bx} - 4 \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow -3 \times 2 + R_{Ay} - 9 - 4 \sin 60^\circ + R_{By} = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow 3x2x1 - 9x1 - 4\sin 60^\circ x 2 + R_{By}x3 = 0 \quad (3)$$

La solution des équations d'équilibres (1), (2) et (3) donne :

$$R_{Bx} = 2 \text{ KN}, \quad R_{By} = 3.31 \text{ KN}, \quad R_{Ay} = 15.15 \text{ KN}$$

3.5. Déterminer les réactions de l'encastrement A du portique (Figure 3.18). Le poids propre du portique est négligeable et les données nécessaires sont illustrées sur la Figure 3.18a.

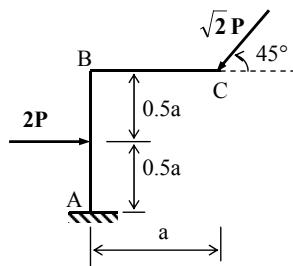


Figure 3.18a

Solution :

Pour la détermination des réactions de l'encastrement A du portique (Figure 3.18a), on supprime l'encastrement en A et on le remplace par les réactions correspondantes dans la Figure 3.18b. Ensuite, on écrit la condition d'équilibre statique du portique isolé (Figure 3.18b), sous l'action d'un système de force en plan.

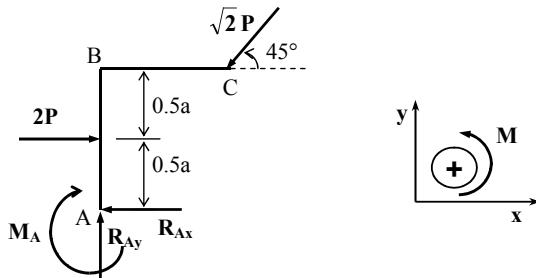


Figure 3.18b

La projection des éléments du torseur nul des forces extérieures dans le point A, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow -R_{Ax} + 2P - \sqrt{2} P \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \Leftrightarrow R_{Ay} - \sqrt{2} P \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -M_A - 2P \times 0.5a - \sqrt{2} P \cos 45^\circ \times a + \sqrt{2} P \sin 45^\circ \times a = 0 \quad (3)$$

De l'équation (1), on obtient :

$$R_{Ax} = P$$

Et de l'équation (2),

$$R_{Ay} = P$$

De l'équation (3)

$$M_A = -Pa$$

3.6. Déterminer les réactions des appuis de l'arc illustré dans la Figure 3.19a. Le poids propre de l'arc est négligeable et les données nécessaires sont illustrées sur la Figure 3.19a.

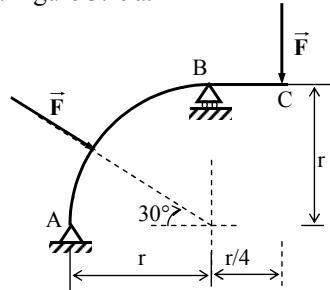


Figure 3.19a

Solution:

Pour la détermination des réactions de l'appui double en A et de l'appui simple en B de l'arc AC (Figure 3.19a), on supprime ces liaisons et on les remplace par les réactions correspondantes dans la Figure 3.19b. Ensuite, on écrit la condition d'équilibre statique de l'arc isolé (Figure 3.19b), sous l'action d'un système de forces en plan.

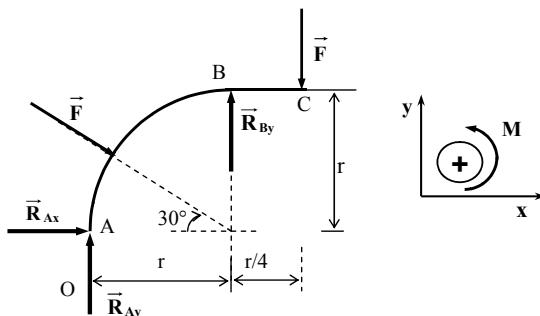


Figure 3.19b

La projection des éléments du torseur nul des forces extérieures au point O, de l'arc isolé dans la Figure 3.19b, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow R_{Ax} + F \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \Leftrightarrow R_{Ay} - F \sin 30^\circ + R_{By} - F = 0 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_O(F_i) = 0 \Leftrightarrow -R_{Ay} \times r - F \times 0.25r = 0 \quad (3)$$

De l'équation (1)

$$R_{Ax} = -0.87F$$

De l'équation (3), on obtient :

$$R_{Ay} = -0.25F$$

Et de l'équation (3),

$$R_{By} = 1.75 F$$

3.7. Un arc en treillis repose en B sur une articulation fixe et en A sur un rouleau dont le plan d'appui fait un angle de 30° avec l'horizontale. Le poids propre de l'arc est $P = 100\text{KN}$. La résultante horizontale \vec{F} des forces de pression du vent égale à 20 KN , et appliquée à 4m au-dessus du point B (Figure 3.20a). Déterminer les réactions aux appuis.

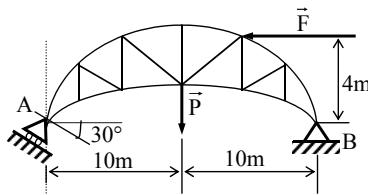


Figure 3.20a

Solution :

On remplace les liaisons dans la Figure 3.20a par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 3.20b. D'après l'axiome des liaisons, l'arc en treillis devient libre sous l'action du système de forces en plan.

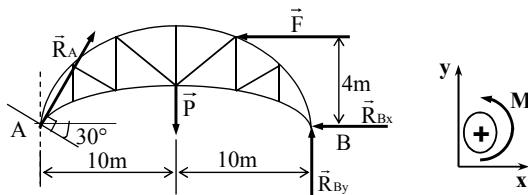


Figure 3.20b

Pour la détermination des réactions R_A , R_{Bx} et R_{By} , on écrit la projection des éléments du torseur nul des forces extérieures en B, où :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow R_A \sin 30^\circ - R_{Bx} - F = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \Leftrightarrow R_A \cos 30^\circ + R_{By} - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -R_A \cos 30^\circ \times 20 + P_x \times 10 + F_x \times 4 = 0 \quad (3)$$

La résolution des trois équations donne :

$$R_A = 62,4 \text{ KN}, \quad R_{Bx} = -11,18 \text{ KN}, \quad R_{By} = 46 \text{ KN}$$

3.8. Pour le système représenté dans la Figure 3.21a, déterminer le module de la force \vec{F} et les réactions des appuis cylindriques en A et B; sachant que le frottement dans les surfaces cylindriques C et D est négligeable, et nous avons :

$Q = 8 \text{ KN}$, $r = 5 \text{ cm}$, $AC = CB = 50 \text{ cm}$ et $AK = 40 \text{ cm}$.

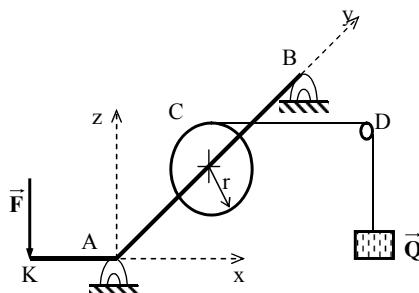


Figure 3.21a

Solution :

On supprime les liaisons du système représenté dans la Figure 3.21a et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans les Figures 3.17b et 3.17c. D'après l'axiome des liaisons, le système (Figures 3.17b) devient libre sous l'action du système de forces quelconques.

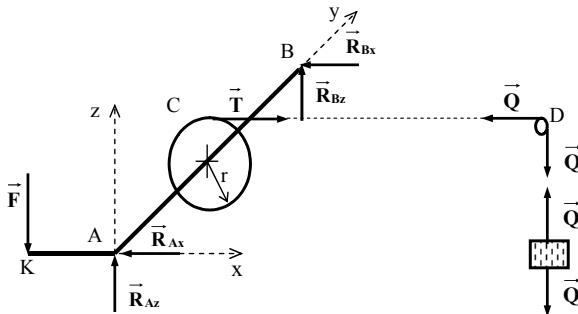


Figure 3.21b

Figure 3.21c

Puisque le frottement dans la poulie D est négligeable, la tension dans le câble CD reste constante (Figure 3.21c), d'où :

$$T = Q = 8 \text{ KN}$$

Pour la détermination du module de la force \vec{F} et les réactions dans les appuis cylindriques en A et B, nous écrivons la condition d'équilibre statique du corps solide isolé (Figure 3.21b), sous l'action d'un système de forces quelconques. Cette condition est traduite par le torseur des forces extérieures nuls en A où B. La projection des éléments de ce torseur sur les axes s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ax}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ay}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Az}(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

Où

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Bx}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{By}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Bz}(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow -R_{Ax} + Q - R_{Bx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0} \Leftrightarrow R_{Az} - F + R_{Bz} = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ax}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow R_{Bz} = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ay}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow F \cdot KA - Q \cdot r = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Az}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow R_{Bx} \cdot AB - Q \cdot AC = 0 \quad (5)$$

Où

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Bx}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -R_{Az} \cdot AB + F \cdot AB = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Bz}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -R_{Ax} \cdot AB + Q \cdot BC = 0 \quad (7)$$

De l'équation (4), on détermine le module de la force F:

$$F = Q \cdot r / KA = 1 \text{ KN}$$

Et, de (3), on détermine :

$$R_{Bz} = 0 \text{ KN}$$

Et, de (5), on détermine :

$$R_{Bx} = Q \cdot AC / AB = 4 \text{ KN}$$

Ainsi, de (2), on détermine :

$$R_{AZ} = F = 1 \text{ KN}$$

De (1), on détermine :

$$R_{Ax} = 4 \text{ KN}$$

La vérification des équations (6) et (7), nous confirme les résultats obtenus.

3.9. Un couvercle rectangulaire, articulé en A et B, conserve l'équilibre horizontal à l'aide d'une barre rigide FG de poids négligeable (Figure 3.22a). Sachant que le poids du couvercle est $P = 180 \text{ N}$, sa longueur CD = 2.3m et sa largeur CE = 0.75m, la distance EF = 1.5m et AC = BE = 0.15m, déterminer les réactions des liaisons.

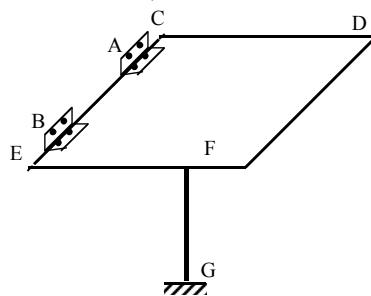


Figure 3.22a

Solution :

On supprime les liaisons dans la Figure 3.22a et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 3.22b.

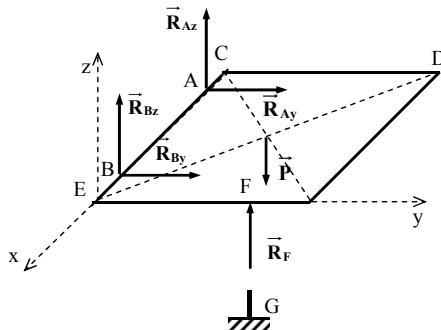


Figure 3.22b

Pour la détermination des réactions dans les appuis cylindriques en A et B, nous écrivons la condition d'équilibre statique du couvercle rectangulaire isolé (Figure 3.22b). La projection des éléments du torseur des forces extérieures nul dans le point A (Figure 3.22b), s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ax}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ay}(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Az}(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \Leftrightarrow +R_{Ay} + R_{By} = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0} \Leftrightarrow +R_{Az} + R_{Bz} + R_F - P = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ax}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -P \frac{CD}{2} + R_F EF = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ay}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -R_{Bz} AB + P \frac{AB}{2} - R_F AE = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Az}(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow R_{By} AB = 0 \quad (6)$$

La résolution de ces équations donne :

$$R_{Ay} = 0, \quad R_{Az} = 136 \text{ N}, \quad R_{By} = 0, \quad R_{Bz} = -94 \text{ N}, \quad R_F = 138 \text{ N}$$

3.10. Une barre homogène AB de poids P et de longueur l , appuyée en A sur une plate-forme rugueuse, et l'extrémité B est attachée par le câble BC, inclinée d'un angle de 45° avec l'horizontale (Figure 3.23a). Sachant que le coefficient de frottement de la barre avec l'horizontale est f_s . Déterminer l'angle φ que fait le câble BC avec l'horizontale permettant la barre à glisser vers le point D.

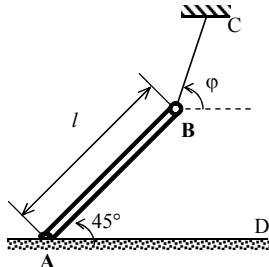


Figure 3.23a

Solution:

On supprime les liaisons dans la Figure 3.23a, et on les remplace par les réactions correspondantes dans la Figure 3.23b.

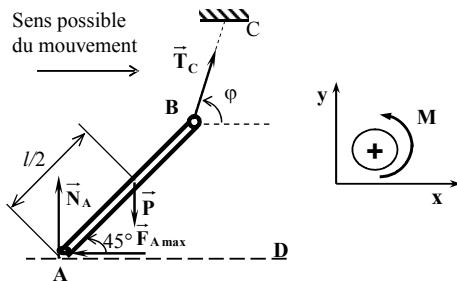


Figure 3.23b

La barre AB se trouve à mi-chemin entre le repos et le mouvement, donc la résultante de la force de frottement sera maximale, et elle s'écrit:

$$\mathbf{F}_{A\max} = f_s \mathbf{N}_A$$

Où N_A est la réaction de l'horizontale sur la barre AB. La force $F_{A\max}$ sera dirigée dans le sens opposé du mouvement.

Pour la détermination de l'angle φ à partir duquel la barre va glisser, on écrit la condition d'équilibre statique de la barre isolé (Figure 3.23b), sous l'action d'un système de forces en plan. La projection des éléments du torseur des forces extérieures nul dans le point A où B, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \text{ où } \sum_{i=1}^n \vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow -F_{A,\max} + T_C \cos \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow N_A + T_C \sin \varphi - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -P \frac{l \cos 45^\circ}{2} + T_C \sin \varphi l \cos 45^\circ - T_C \cos \varphi l \sin 45^\circ = 0 \quad (3)$$

Où

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow -N_A l \cos 45^\circ - f_s N_A l \sin 45^\circ + P \frac{l \cos 45^\circ}{2} = 0 \quad (4)$$

On remplace $F_{A\max}$ dans l'équation (1), on obtient :

$$f_s N_A = T_C \cos \varphi \quad (5)$$

Ensuite, de l'équation (3), on obtient la tension dans le câble BC :

$$T_C = \frac{P}{2(\sin \varphi - \cos \varphi)}$$

Et de l'équation (4), on aura la réaction normale N_A :

$$N_A = \frac{P}{2(1 + f_s)}$$

On remplace T_C et N_A dans l'équation (1), on trouve :

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 + \frac{1}{f_s}$$

Donc, l'angle φ que fait le câble BC avec l'horizontale à partir duquel la barre va glisser vers le point D, est :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(2 + \frac{1}{f_s} \right)$$

3.8 EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

3.11. Une bille homogène de poids $P = 100 \text{ N}$, conserve son équilibre en plan par deux chaînes AB et AC comme le montre la Figure 3.24. La ligne d'action de la chaîne AB est inclinée avec l'horizontale d'un angle de 50° .

- Déterminer les tensions dans les deux chaînes AB et AC.

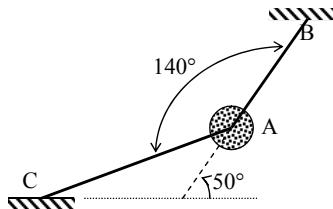


Figure 3.24

Solution Abrégé (S.A.) :

$$T_B = 1.53P = 153\text{N}, T_C = P = 100\text{N}$$

3.12. Un corps solide A de poids \vec{P} repose sur un plan incliné qui fait un angle α avec l'horizontal. Le corps solide étant lié avec un câble AB qui fait un angle β avec la verticale (Figure 3.25). Déterminer la tension dans le câble AB et la réaction du plan incliné sur le solide A.

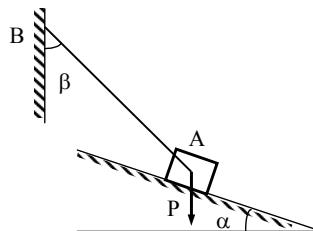


Figure 3.25

S.A. :

$$T_B = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, R_A = \frac{P \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

3.13. Une barre homogène AB de poids \vec{P} , articulée en A avec le mur vertical et faisant un angle α à l'aide d'un câble BC avec ce même plan (Figure 3.26). Sachant que $AB = AC$, déterminer la tension dans le câble et la réaction dans l'articulation A.

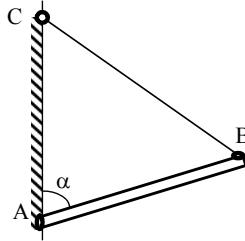


Figure 3.26

S.A. :

$$T_C = P \sin(\alpha/2), R_A = P \cos(\alpha/2)$$

3.14. Un réservoir métallique de poids $W = 48\text{KN}$, de rayon $r = 0.9\text{m}$, repose sur les arêtes de deux murs comme le montre la figure 3.27. La distance entre les deux murs $l = 1.4\text{m}$. En négligeant le frottement entre les surfaces de contacts, déterminer les pressions du réservoir sur les arêtes des murs en A et B.

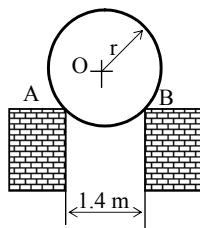


Figure 3.27

S.A. :

$$R_A = R_B = 38.13 \text{ KN}$$

3.15. Le câble BC et la barre AC sont attachés au poteau DC au point C comme le montre la Figure 3.28. Le poteau DC s'appuyant librement en D est maintenu en équilibre au point C par deux autres câbles métalliques perpendiculaires entre eux et parallèles aux axes du plan horizontal (**H**) et ayant des tensions égales, de grandeur $T = 25 \text{ KN}$. Sachant que les angles $\alpha = 30^\circ$ et $\varphi = 60^\circ$, déterminer la tension dans le câble BC, la réaction dans la barre AC et la réaction verticale du poteau CD.

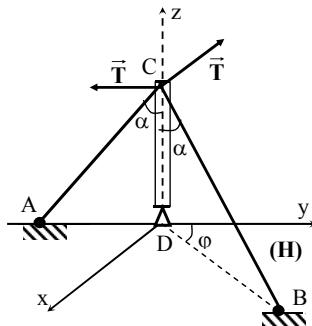


Figure 3.28

S.A. :

$$T_A = 21.5 \text{ KN}, T_B = 57.7 \text{ KN}, R_C = 32 \text{ KN}$$

3.16. Le système représenté dans la Figure 3.29, est formé de deux barres homogènes BD et CD, de poids négligeable, articulées en point D, faisant un angle droit entre elles dans le plan (yz) et qui sont liées au point D par un câble AD au point A. Le système est tiré en D par un tirant de tension $F = 495 \text{ N}$ dirigée dans le sens opposé et parallèle à l'axe ox. Déterminer les réactions dans les deux barres DB et DC ainsi que la tension dans le câble DA (les dimensions sont montrées dans la Figure 3.29).

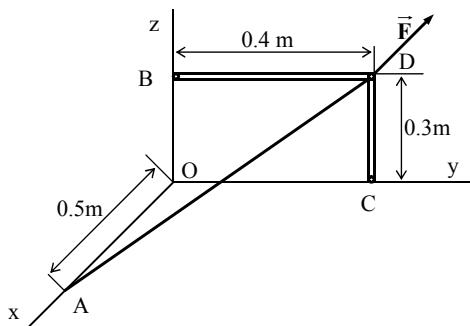


Figure 3.29

S.A. :

$$T_A = 700 \text{ N}, R_B = 396 \text{ N}, R_C = 296.9 \text{ N}$$

3.17. Le fardeau de poids $Q = 98 \text{ KN}$ est suspendu à l'anneau D par deux câbles AD et BD et soutenu par la barre CD (Figure 3.30).

- Déterminer les tensions dans les câbles AD et BD et la réaction de la barre CD, sachant que les coordonnées des points de liaisons sont données comme suit : A(5,2,3), B(0,2,7), C(2,2,3), D(2,6,3) (unité en dm)

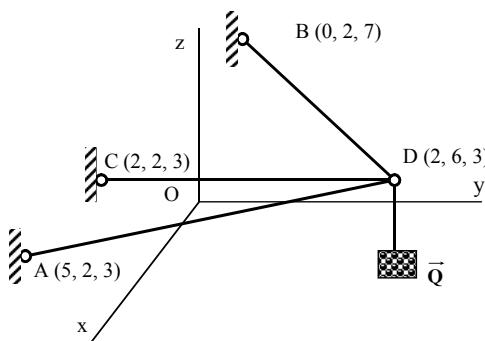


Figure 3.30

S.A. :

$$T_A = 74.17 \text{ KN}, T_B = 133.5 \text{ KN}, R_C = 148.33 \text{ KN}$$

3.18. Déterminer les réactions dans les liaisons représentées dans la Figure 3.31 (a, b, c, d, e, f et g). Le poids propre de chaque corps solide est négligeable, le reste des données nécessaires est représenté sur chaque figure.

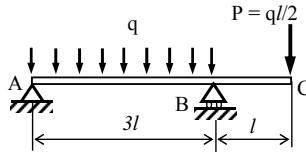


Figure 3.31a

S.A. :

$$R_{Ax} = 0, R_{Ay} = -28,5 \text{ KN}, R_{By} = 51,5 \text{ KN}$$

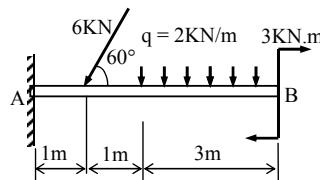


Figure 3.31b

S.A. :

$$M_A = 29.2 \text{ KN-m}, R_{Ax} = 3 \text{ KN}, R_{Ay} = 11.2 \text{ KN}$$

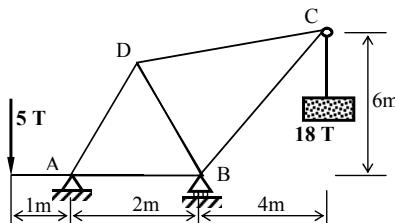
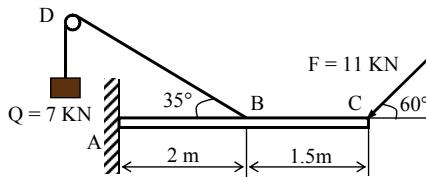


Figure 3.31c

S.A. :

$$R_{Ax} = 0, R_{Ay} = -28,5 \text{ T}, R_{By} = 51,5 \text{ T}$$



Le frottement dans la poulie D est négligeable

Figure 3.31d

S.A. :

$$M_A = 25.31 \text{ KN-m}, R_{Ax} = 11.23 \text{ KN}, R_{Ay} = 5.5 \text{ KN}$$

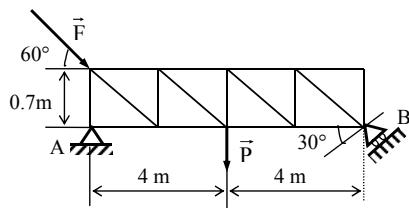


Figure 3.31 e

S.A. :

$$R_B = 20.7 \text{ KN-m}, R_{Ax} = 5.35 \text{ KN}, R_{Ay} = 25.72 \text{ KN}$$

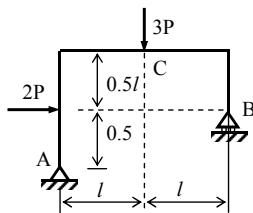


Figure 3.31f

S.A. :

$$R_{Ax} = 2P, R_{Ay} = P, R_{By} = 2P$$

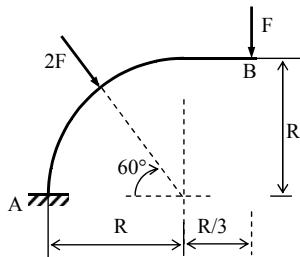


Figure 3.31g

S.A. :

$$R_{Ax} = F, R_{Ay} = 2.73F, M_A = 3FR$$

3.19. Une poutre AB de poids $W = 1 \text{ KN}$, fait un angle de 60° avec la verticale, articulée en A dans le mur et soutenue en B par un câble passant par une poulie C et portant une charge \vec{P} ; le tronçon du câble BC fait un angle de 45° avec la verticale. Une charge $Q = 0.8 \text{ KN}$ est suspendue au point D de la poutre. Le reste des données est montré dans la Figure 3.32, déterminer la charge P et la réaction en A (le frottement dans la poulie C est négligeable).

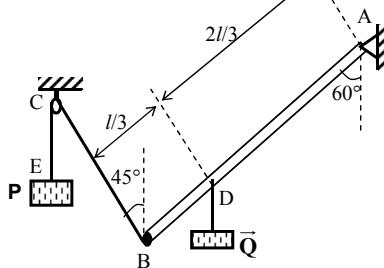


Figure 3.32

S.A. :

$$R_{Ax} = 0.65 \text{ KN}, R_{Ay} = 1.15 \text{ KN}, T_B = 0.93 \text{ KN}, P = T_C = 0.93 \text{ KN}$$

3.20. Un poteau de signalisation est fixé de la façon montré dans la Figure 3.33. Calculer les réactions de l'articulation en A et la tension dans le fil BC.

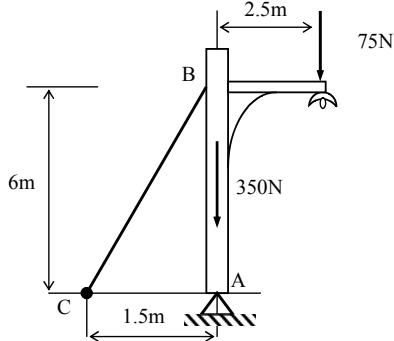


Figure 3.33

$$\text{S.A. : } R_{Ax} = 31.25 \text{ N}, R_{Ay} = 550 \text{ N}, T_C = 128.85 \text{ N}$$

3.21. Le couvercle rectangulaire ABCD d'une cave est soutenu à l'état ouvert par une béquille EC en C. le poids du couvercle est $P = 17 \text{ KN}$; $DC = DE$; l'angle $EDC = 60^\circ$ (Figure 3.34). Déterminer les réactions aux articulations cylindriques A, D et l'effort R dans la béquille (le poids de la béquille est négligeable).

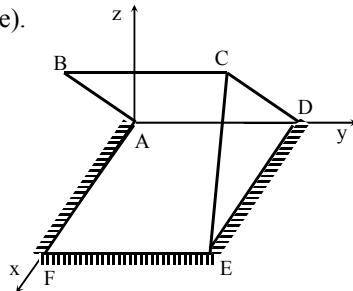


Figure 3.34

S.A. :

$$R_{Ax} = 0, R_{Az} = 8.5 \text{ KN}, R_C = 4.9 \text{ KN}, R_{Dx} = 2.45 \text{ KN}, R_{Dz} = 4.25 \text{ KN}$$

3.22. Un mât de charge de 4m de longueur est soumis à une force verticale de 20KN tel qu'indiqué sur la figure 3.35. Calculer l'effort de tension dans chaque câble et la résultante de réaction d'appui en O (articulation sphérique).

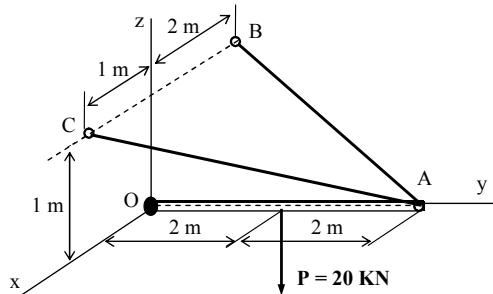


Figure 3.35

S.A. :

$$T_{AB} = 0.76P = 15.2 \text{ KN}, T_{AC} = 1.41P = 28.2 \text{ KN}, R_{ox} = 0, R_{oy} = 2P = 40 \text{ KN}, R_{oz} = 0.5P = 10 \text{ KN}$$

3.23. Le mât de 10m de hauteur est soumis à une force horizontale $Q = 9 \text{ KN}$, tel qu'illustre dans la Figure 3.36. Il est appuyé sur une rotule A et soutenu par deux câbles BD et BE. Supposons que le poids du mât est négligeable, calculer l'effort dans chaque câble ainsi que la réaction d'appui en A.

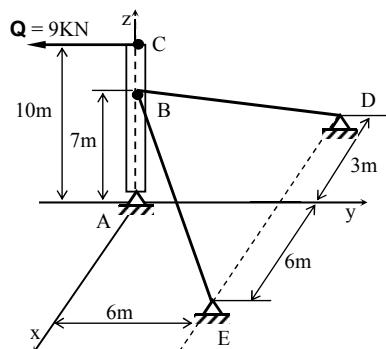


Figure 3.36

$$\text{S.A. : } R_{Az} = 15 \text{ KN}, R_{Ay} = 3.85 \text{ KN}, T_D = 14.33 \text{ KN}, T_E = 7.80 \text{ KN}$$

3.24. Une plaque carrée ABCD horizontale, de côté $a = 60\text{cm}$, de poids $P = 5\text{KN}$, est articulée en A par une articulation sphérique, en B par une articulation cylindrique et appuyée en E sur un appui simple. Au point H, elle est soumise à une force \vec{F} , inclinée d'un angle α avec le côté BC dans le plan horizontal (Figure 3.37). Sachant que l'angle $\alpha=30^\circ$, $CE = ED = 0.5a = 30\text{cm}$, $BH = a/3 = 20\text{cm}$ et $\mathbf{F} = 11\text{ KN}$; déterminer les réactions dans les liaisons A, B et E.

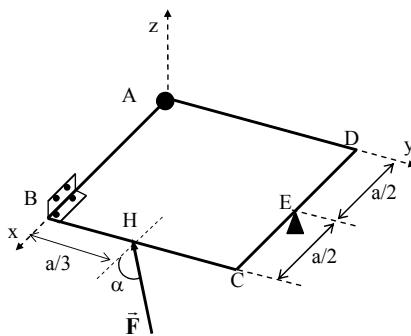


Figure 3.37

S.A. :

$$R_{Ax} = 9.52 \text{ KN}, R_{Ay} = 3.2 \text{ KN}, R_{Az} = R_{Bz} = 1.25 \text{ KN}, R_{By} = -2.3 \text{ KN}, R_{Ez} = 2.5 \text{ KN}$$

3.25. L'échelle AB de poids \vec{P} est appuyée contre un mur rugueux sur un sol rugueux. Le coefficient de frottement de l'échelle sur le mur est égal à f_m (Figure 3.38). Déterminer le coefficient de frottement f_s de l'échelle sur le sol si l'angle d'inclinaison maximale de l'échelle sur l'horizontale qui assure l'équilibre est égal à α .

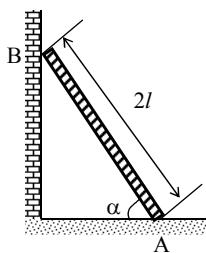


Figure 3.38

S.A. :

$$f_s = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha + f_m \cos \alpha}$$

3.26. On applique une force $F = 175$ KN sur un bloc $G = 300$ KN, placé sur un plan incliné comme le montre la Figure 3.39. Le coefficient de frottement statique sur le plan incliné est $f_s = 0.35$.

- Vérifier l'équilibre du bloc et calculer le module de la force de frottement, si $f_s = 0.15$, Que remarquez vous ?

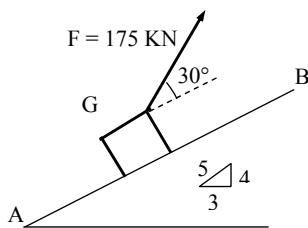


Figure 3.39

S.A. :

a- si $f_s = 0.35$, $F_{\max} = 53.4$ KN et $F_{fr} = 28.4$ KN , $F_{\max} > F_{fr}$ le bloc G reste en équilibre

b- si $f_s = 0.15$, $F_{\max} = 22.9$ KN et $F_{fr} = 28.4$ KN , $F_{\max} < F_{fr}$ le bloc G ne restera pas en équilibre

3.27. Un bloc reposant sur une surface cylindrique, est soumis à deux forces comme montre la figure 1.56. Si $\beta = 45^\circ$ (Figure 3.40), calculez :

- la force P nécessaire pour faire monter le bloc le long de la surface
- la plus petite force P qui empêche le bloc de descendre.

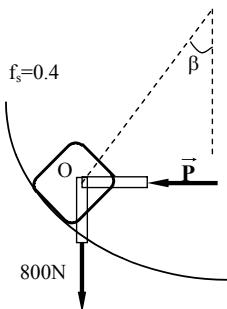


Figure 3.40

S.A. :

- $P_{\max} = 1661.5 \text{ KN}$,
- $P_{\min} = 386.5 \text{ KN}$

3.28. La barre rigide AB de poids \vec{P} et de longueur l , est appuyée contre deux plans inclinés, AC rugueux et BC poli, les données nécessaires sont représentées sur la Figure 3.41.

- Définir le rôle, le point d'application, la direction, le sens et le module de la force de frottement lorsque la barre se trouve à mi-chemin entre le repos et le mouvement.
- Dans ce cas, déterminer le coefficient de frottement f_s de la barre sur le plan incliné AC.

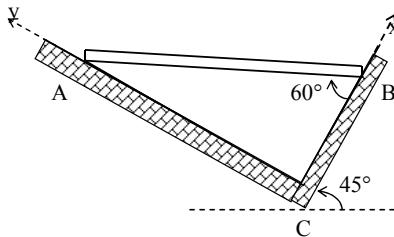


Figure 3.41

S.A. :

$$N_A = 0.71P, \quad N_B = 1.25P, \quad f_s = 0.77$$

3.29. Une échelle BC de poids P , de longueur l est appuyée sur un mur; son extrémité inférieure B est maintenue par un câble AB (Figure 3.42).

- a- En négligeant le frottement des surfaces de contacts, calculer les réactions des surfaces de contacts ainsi que la tension du câble AB.
- b- Si on supprime le câble pour que la tige repose librement sur le sol rugueux, déterminer le coefficient de frottement nécessaire pour que la tige reste en équilibre.

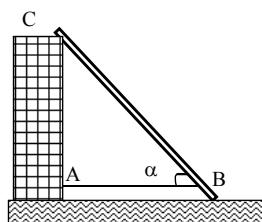


Figure 3.42

S.A. :

$$a- \quad N_C = 0.5P \cos \alpha, \quad N_B = P \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{2} \right), \quad T_A = 0.5P \cos \alpha \sin \alpha$$

$$b- \quad f_s = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2 - \cos^2 \alpha}$$

CHAPITRE 4

CINEMATIQUE DU SOLIDE RIGIDE

4.0 INTRODUCTION

La cinématique est une partie de la mécanique rationnelle. Elle traite le mouvement mécanique uniquement de point de vue géométrique, sans tenir compte des causes qui ont provoquées ce mouvement. La cinématique étudie le changement de position géométrique des corps dans le temps. Or, cela ne peut pas être fait que par rapport à un référentiel ou l'on pourrait déterminer la position du corps mobile.

4.1 RAPPELS SUR LA CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

4.1.1. Trajectoire

Soit un point M repéré dans un référentiel **R** (**O**, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) fixe. Sa position est déterminée par le vecteur position à l'instant t (Figure 4.1.)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Où $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les coordonnées du point M à l'instant t (Figure 4.1.)

$M(t)$ est la position du point M à l'instant t ;

$M'(t+\Delta t)$ est la position du point M à l'instant $(t+\Delta t)$;

$\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur déplacement du point M.

- (Γ) S'appelle trajectoire du mobile par rapport au référentiel.
 - Si (Γ) est une droite, le mouvement du point est rectiligne ;
 - Si (Γ) est une courbe, le mouvement du point est curviligne.

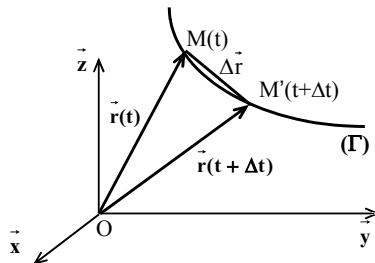


Figure 4.1. Trajectoire d'un point

4.1.2. Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse moyenne du mobile entre les deux instants est défini par :

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Le vecteur à vitesse instantané est :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.2)$$

Ce vecteur est constamment tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement.

4.1.3. Vecteur accélération

Le vecteur accélération moyenne du mobile entre t et $t+\Delta t$ est défini par :

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

L'accélération instantanée est :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (4.3)$$

4.1.3. Mouvement circulaire

Une particule M est animée d'un mouvement circulaire si, à tout instant t , elle est située en un point P appartenant à un cercle (c) de rayon r et de centre O (Figure 4.2). Choisissons un repère orthonormé d'origine O et de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} , se trouvant dans le plan de la trajectoire circulaire.

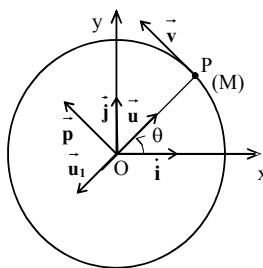


Figure 4.2 Mouvement circulaire

Soit \vec{u} le vecteur unitaire de \overrightarrow{OP} (Figure 4.2), le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r \vec{u} \quad (4.4)$$

Soit l'angle de rotation $\theta = (\vec{u}, \vec{u})$; supposons $\theta(t)$ deux fois dérivable. Le vecteur vitesse de la particule M au point P, est obtenu par la dérivation de (4.4).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{d\vec{u}}{dt} = r \frac{d\vec{u}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ est le vecteur unitaire \vec{p} , directement perpendiculaire à \vec{u} dans le plan,

donc :

$$\vec{v} = r \frac{d\theta}{dt} \vec{p} \quad (4.5)$$

Il est convenu de représenter le vecteur vitesse \vec{v} en prenant le point P pour origine, de même que pour le vecteur accélération. Sachant que :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\vec{p}}{d\theta}$ est le vecteur unitaire \vec{u}_1 opposé à \vec{u} , et directement perpendiculaire à

\vec{p} dans le plan:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = - \frac{d\theta}{dt} \vec{u}$$

On calcule, le vecteur accélération de la particule M au point P :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r \left[- \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u} + \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{p} \right] = - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{p} \quad (4.6)$$

$\frac{d\theta}{dt}$: la vitesse angulaire où le taux de rotation) ; noté $\dot{\theta}$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$: l'accélération angulaire ; noté $\ddot{\theta}$

$r \frac{d^2\theta}{dt^2}$: l'accélération tangentielle ; noté γ_t

$-r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$: l'accélération normale ; noté γ_n

Remarque :

Si (s) est l'abscisse curviligne de P sur le cercle, on a :

$$v = R \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

soit :

$$\vec{v} = R \frac{d\theta}{dt} \vec{p} = \frac{ds}{dt} \vec{p}$$

$$\gamma_t = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\gamma_n = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{v^2}{R}$$

$$\vec{\gamma} = -\frac{v^2}{R} \vec{u} + \frac{d^2s}{dt^2} \vec{p}$$

Où R est le rayon de courbure de la trajectoire en P ; le centre de courbure est sur la normale orientée suivant \vec{u} en P .

4.2 CINÉMATIQUE DU CORPS SOLIDE

4.2.1. Notion d'un solide parfait

Un solide (S) parfait, est un ensemble d'éléments matériels, dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps. Par conséquent, les vitesses entre ces points se ne sont pas indépendantes. D'ici, la cinématique

du solide traite la distribution des vitesses des points dans un corps, indépendamment des causes qui ont engendrées le mouvement du solide.

4.2.2. Repérage d'un solide

On étudie le mouvement d'un point M du solide (S) par rapport à un observateur lié au référentiel \mathbf{R}_0 . Si ce mouvement n'est pas simple, il peut être avantageux de faire apparaître le mouvement de M par rapport à un repère intermédiaire \mathbf{R} issu de M et lié à (S), on repère le mouvement de (M) en deux temps:

- Mouvement de (M) par rapport à \mathbf{R}_0 (3 degrés de libertés)
- Mouvement autour de M considérée fixe, c'est à dire le mouvement de \mathbf{R} par rapport à \mathbf{R}_k (M est l'origine de \mathbf{R}_k et ces axes sont couramment parallèles à ceux de \mathbf{R}_0)
- On peut passer de \mathbf{R}_k à \mathbf{R}_0 par 3 rotations ordonnées au plus (3 degrés de liberté dans le mouvement de R par rapport à \mathbf{R}_k)

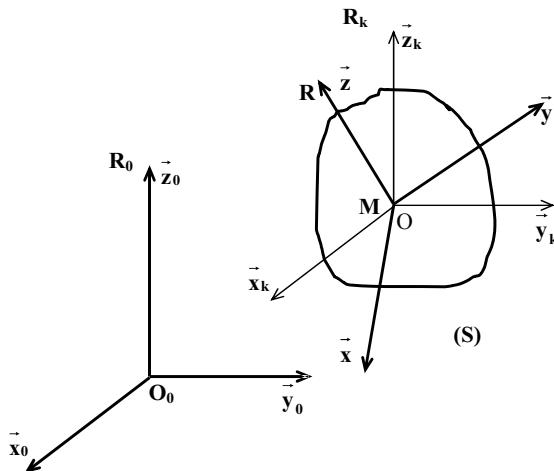


Figure 4.3 Repérage d'un solide

Le solide a donc au total 6 degrés de liberté. Son mouvement est entièrement repéré par les 3 coordonnées de \mathbf{M} par rapport à R_0 , et 3 angles. Pour cela, on considère le mouvement du solide (S) autour de O_0 comme fixe et l'origine du repère R_0 . Ici, on considère que le point O coïncide avec O_0 . Un tel mouvement peut être réalisé par une articulation sphérique. On peut transformer R en R_0 par trois rotations successives, qui définissent les angles d'Euler de type **I**.

4.2.3. Matrice de passage de \mathbf{R} à \mathbf{R}_0

Les angles d'Euler sont utilisés quand l'intersection des plans $(\mathbf{O}_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et $(\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y})$ existe. Cette intersection s'appelle ligne des noeuds. On passe du repère R_0 au repère R à l'aide de deux repères intermédiaires R_1 et R_2 qui seront définis par la suite.

4.2.3.1. Angle de précession

Un axe de R_1 est confondu avec R_0 ($\vec{z} = \vec{z}_0$). Soit $u(O, \vec{u})$ l'axe porté par la droite d'intersection des plans $(\mathbf{O}_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et $(\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y})$. L'angle de précession est définie par $\psi = (\vec{x}_0, \vec{u})$ (Figure 4.4). On a alors un nouveau repère $R_1(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$.

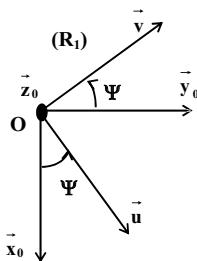


Figure 4.4. Angle de précession

Le vecteur taux de rotation de R_1 par rapport à R_0 est :

$$\vec{\Omega}(R_1 / R_0) = \frac{d\psi}{dt} \vec{z}_0 = \dot{\psi} \vec{z}_0$$

Les nouveaux axes de R_1 sont définis par :

$$\vec{u} = \cos \Psi \vec{x}_0 + \sin \Psi \vec{y}_0$$

$$\vec{v} = -\sin \Psi \vec{x}_0 + \cos \Psi \vec{y}_0$$

4.2.3.2. Angle de nutation

On fait subir au repère R_1 une rotation autour de l'axe (O, \vec{u}). L'angle de nutation θ est défini par $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z})$ (Figure 4.5). On a alors un nouveau repère R_2 ($O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}$).

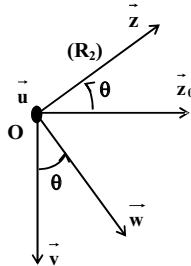


Figure 4.5. Angle de nutation

Ce nouveau repère R_2 est appelé repère de Résal. Le vecteur taux de rotation de R_2 par rapport à R_1 est :

$$\vec{\Omega}(R_2 / R_1) = \frac{d\theta}{dt} \vec{u} = \dot{\theta} \vec{u}$$

Les axes de R_2 sont définis par :

$$\vec{w} = -\cos \theta \sin \Psi \vec{x}_0 + \cos \theta \sin \Psi \vec{y}_0 + \sin \theta \vec{z}_0$$

$$\vec{z} = \sin \theta \sin \Psi \vec{x}_0 - \sin \theta \cos \Psi \vec{y}_0 + \cos \theta \vec{z}_0$$

4.2.3.3. Angle de rotation propre

On fait subir au repère \mathbf{R}_2 une rotation autour de l'axe (\mathbf{O}, \vec{z}) (Figure 4.6). L'angle de rotation propre φ est défini par $\varphi = (\vec{u}, \vec{x})$. On arrive au repère $\mathbf{R}(\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

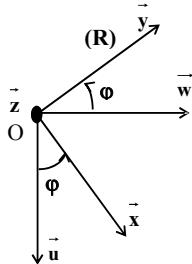


Figure 4.6. Angle de rotation propre

Le vecteur taux de rotation de \mathbf{R} par rapport à \mathbf{R}_2 est :

$$\vec{\Omega}(R / R_2) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{z} = \dot{\varphi} \vec{z}$$

Les axes de \mathbf{R} sont définis par :

$$\vec{x} = \cos \varphi \vec{u} + \sin \varphi \vec{w}$$

$$\vec{y} = -\sin \varphi \vec{u} + \cos \varphi \vec{w}$$

La matrice de passage de \mathbf{R} à \mathbf{R}_0 est indiquée dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1. Matrice de passage de \mathbf{R} à \mathbf{R}_0

	\vec{x}_0	\vec{y}_0	\vec{z}_0
\vec{x}	$\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi$	$\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi$	$\sin \varphi \sin \theta$
\vec{y}	$-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi$	$-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi$	$\cos \varphi \sin \theta$
\vec{z}	$\sin \theta \sin \psi$	$-\sin \theta \cos \psi$	$\cos \theta$

Le vecteur taux de rotation instantané de \mathbf{R} par rapport à \mathbf{R}_0 s'écrit :

$$\overrightarrow{\Omega}(\mathbf{R} / \mathbf{R}_0) = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{z}$$

Ce vecteur s'écrit différemment suivant qu'il est exprimé sur \mathbf{R}_0 où sur \mathbf{R} :

$$\overrightarrow{\Omega}(\mathbf{R} / \mathbf{R}_0) = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Où

$$\overrightarrow{\Omega}(\mathbf{R} / \mathbf{R}_0) = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

La Figure 4.7 résume le passage du repère \mathbf{R} au repère \mathbf{R}_0 par les trois angles d'Euler de type I.

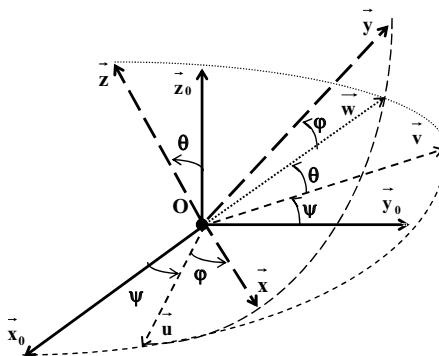


Figure 4.7. Angles d'Euler type I

4.2.4. Torseur cinétique – Distribution des vitesses

4.2.4.1. Champ des vitesses d'un solide en mouvement

A chaque point du solide (S), on peut associer son vecteur vitesse défini par:

$$\vec{V}_{A/R_0} = \frac{d^{R_0} \overrightarrow{OA}}{dt} \quad (4.7)$$

La définition d'un solide parfait entraîne, que la dérivée par rapport au temps de la distance entre deux de ses points quelconques A et B est nulle :

$$\frac{d(\overrightarrow{AB})^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 2\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{V}_B - \vec{V}_A) = 0$$

Cherchons la relation entre \vec{V}_{A/R_0} et \vec{V}_{B/R_0} .

D'après la formule de dérivation d'un vecteur :

$$\vec{V}_{A/R_0} = \frac{d^{R_0} \overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d^R \overrightarrow{OA}}{dt} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}_{B/R_0} = \frac{d^{R_0} \overrightarrow{OB}}{dt} = \frac{d^R \overrightarrow{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \overrightarrow{OB}$$

D'où :

$$\vec{V}_{B/R_0} - \vec{V}_{A/R_0} = \frac{d^R (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})}{dt} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\vec{V}_{B/R_0} - \vec{V}_{A/R_0} = \frac{d^R (\overrightarrow{AB})}{dt} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Or,

$$\overrightarrow{AB} = \text{cons tan te} \Rightarrow \frac{d^R(\overrightarrow{AB})}{dt} = 0$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{V}_{B/R_0} = \overrightarrow{V}_{A/R_0} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (4.8)$$

C'est la formule de distribution des vitesses dans un corps solide indéformable en mouvement. Elle montre que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique.

4.2.4.2. Torseur cinématique

Le torseur cinématique exprimé au point A du solide (**S**) dans son mouvement par rapport au repère **R₀**, est défini par :

$$(V_{S/R_0})_A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \\ \overrightarrow{V}_{A/R_0} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Le vecteur libre $\overrightarrow{\Omega}_{S/R_0}$ est le vecteur taux de rotation instantané du solide (**S**) par rapport au repère **R₀** et $\overrightarrow{V}_{A/R_0}$ est le vecteur vitesse du point A appartenant au solide (**S**) par rapport au repère **R₀**.

4.2.4.3 Champ des accélérations d'un solide en mouvement

A chaque point du solide (**S**), on peut associer son vecteur accélération défini par :

$$\overrightarrow{a}_{B/R_0} = \frac{d^{R_0} \overrightarrow{V}_{B/R_0}}{dt} \quad (4.10)$$

Sachant que :

$$\forall (A, B) \in (S) \quad \vec{V}_{B/R_0} = \vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{a}_{B/R_0} = \frac{d^{R_0} \vec{V}_{B/R_0}}{dt} = \frac{d^{R_0} (\vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB})}{dt}$$

$$\vec{a}_{B/R_0} = \frac{d^{R_0} \vec{V}_{A/R_0}}{dt} + \frac{d^{R_0} \vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt} \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \frac{d^{R_0} \vec{AB}}{dt}$$

Or, la dérivée d'une base mobile s'écrit:

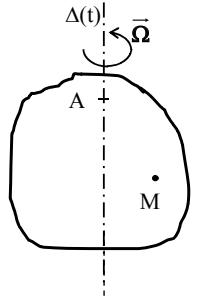
$$\begin{aligned} \frac{d^{R_0} \vec{AB}}{dt} &= \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB} \\ \dot{a}_{B/R_0} &= \frac{d^{R_0} \vec{V}_{A/R_0}}{dt} + \frac{d^{R_0} \vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt} \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

C'est la Formule de Rivals ou loi de distribution des accélérations dans un corps solide indéformable.

4.2.4.4 Axe instantané de rotation

On appelle axe instantané de rotation l'axe central du torseur cinématique. Cet axe est donc le lieu des points dont les vitesses sont parallèles au vecteur taux de rotation instantané.

A tout instant, le mouvement du solide (Figure 4.8) peut être considéré comme la composition d'une rotation autour de l'axe instantané de rotation $\Delta(t)$ de vitesse $\vec{\Omega}$ et d'une translation instantanée le long de l'axe instantané de rotation de vitesse \vec{V}_A , A étant un point de l'axe.



$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{MA} \wedge \vec{\Omega}$$

translation rotation

Figure 4.8 Mouvement général d'un solide

Nous avons vu que l'axe central d'un torseur est le lieu des points où les moments sont minimaux. Donc, si un solide possède au moins deux points de vitesses nulles, l'axe instantané de rotation passe obligatoirement par ces deux points.

4.2.5. Cas particulier de mouvements

4.2.5.1 Mouvement de translation

Pour un mouvement de translation, à un instant donné, les vecteurs vitesses de tous les points du solide sont égaux et le vecteur taux de rotation est nul (Figure 4.9.).

$$\vec{\Omega} = \vec{0}, \quad \vec{V}_A = \vec{V}_B \quad \forall (A, B) \in \text{Solide} \quad (4.12)$$

Si les trajectoires des points du solide sont rectilignes (Figure 4.9a), nous parlerons de translation rectiligne. Si, de plus, leurs vitesses respectives sont constantes au cours du temps, nous aurons une translation rectiligne uniforme. Si les trajectoires des points du solide sont curvilignes (Figure 4.9b), on dit mouvement de translation curviligne.

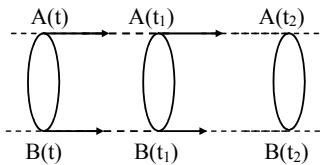


Figure 4.9a Mouvement de translation rectiligne

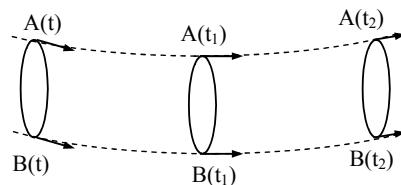


Figure 4.9b Mouvement de translation curviligne

4.2.5.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Le solide en rotation possède une liaison rotoïde ou pivot avec le solide de référence: chaque point du solide décrit alors une trajectoire circulaire autour de l'axe du rotoïde constituant l'axe instantané de rotation (Figure 4.10).

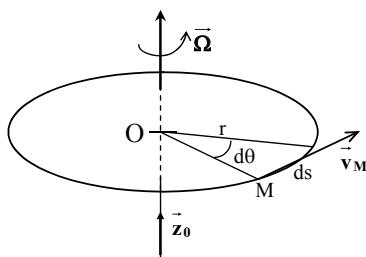


Figure 4.10 Mouvement de rotation autour d'un axe

Si O appartient à l'axe fixe du vecteur directeur \vec{z}_0 , on a alors :

$$\vec{v}_M = \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}$$

Cela est possible si $\vec{\Omega} = \vec{\Omega} z_0$ est colinéaire à \vec{z}_0 ,

Or par définition, nous avons :

$$\|\vec{v}_M\| = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt} = r\dot{\theta}$$

et

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z}_0 = \dot{\theta} \vec{z}_0$$

Si un solide est soumis à la rotation autour d'un axe de vecteur directeur \vec{z}_0 à une vitesse $\dot{\theta}$ dans le sens direct, le vecteur taux de rotation instantané de ce solide s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \quad (4.13)$$

4.2.5.3 Mouvement plan

Ce mouvement est la superposition d'une rotation autour d'un axe et une translation suivant ce même axe. C'est le cas, par exemple, du mouvement d'une vis dans un écrou. D'après la figure 4.9, le vecteur vitesse du point **M** s'écrit :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega} \quad (4.14)$$

Avec :

\vec{V}_A : le vecteur vitesse de translation du point A, qui représente le mouvement de translation;

$\vec{\Omega}$: le vecteur taux de rotation instantané, qui représente le mouvement de rotation.

4.2.6 Mouvement composé.

4.2.6.1. Dérivation composée (Rappel)

Soit le repère orthonormé $\mathbf{R}(\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au solide (Figure 4.11), et un repère fixe $\mathbf{R}_0(\mathbf{O}_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

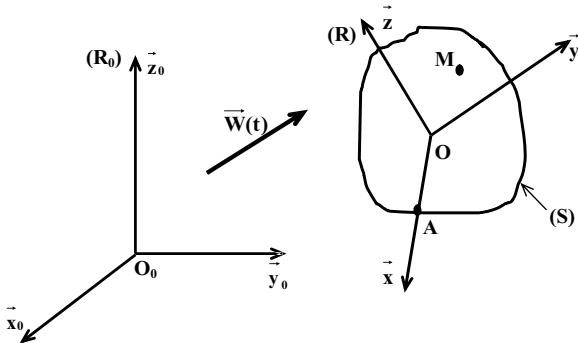


Figure 4.11 Composition de mouvements

On détermine l'expression de la dérivée de $(\frac{d\vec{x}}{dt})$ par rapport au temps t.

Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{x}$, on peut alors écrire :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{O_0} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0}$$

Or,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \vec{V}_A - \vec{V}_{O_0} = \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0} = -\overrightarrow{OA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = -\overrightarrow{OA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{x}$$

On a donc, plus généralement, la formule de base mobile :

$$\begin{aligned}
 \frac{\vec{dx}}{dt} &= \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{x} \\
 \frac{\vec{dy}}{dt} &= \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{y} \\
 \frac{\vec{dz}}{dt} &= \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{z}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Soit un vecteur $\vec{W} = \vec{W}(t)$ représentatif d'une grandeur physique variable dans les repères R_0 et R (Figure 4.11) et dans le temps.

Soient x_0 , y_0 et z_0 les composantes de \vec{W} dans R_0 au temps t , on écrit :

$$\vec{W}(t) = x_0(t)\vec{x}_0 + y_0(t)\vec{y}_0 + z_0(t)\vec{z}_0$$

Soient x , y et z les composantes de \vec{W} dans R au temps t :

$$\vec{W}(t) = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}$$

On appelle dérivée de $\vec{W}(t)$ par rapport à t dans les repères R_0 et R respectivement :

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \dot{x}_0(t)\vec{x}_0 + \dot{y}_0(t)\vec{y}_0 + \dot{z}_0(t)\vec{z}_0$$

Et,

$$\frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{x} + \dot{y}(t)\vec{y} + \dot{z}(t)\vec{z}$$

La dérivée de $\vec{W}(t)$ exprimé dans le repère R par rapport à t et par rapport à R_0 s'écrit:

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z} + x \frac{d^{R_0} \vec{x}}{dt} + y \frac{d^{R_0} \vec{y}}{dt} + z \frac{d^{R_0} \vec{z}}{dt}$$

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} + x \frac{d^{R_0} \vec{x}}{dt} + y \frac{d^{R_0} \vec{y}}{dt} + z \frac{d^{R_0} \vec{z}}{dt}$$

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} + x(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{x}) + y(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{y}) + z(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{z})$$

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z})$$

D'où la règle de dérivation composée ou règle de dérivation dans un repère mobile :

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{W}(t) \quad (4.16)$$

Dans le cas particulier où $\vec{W}(t) = \vec{\Omega}_{S/R_1}$, nous remarquons que :

$$\frac{d^{R_1}}{dt} \vec{\Omega}_{S/R_1} = \frac{d^R}{dt} \vec{\Omega}_{S/R_1}$$

4.2.6.2. Composition de vitesses

Soit R_0 le repère absolu et R le repère relatif.

Le vecteur vitesse absolue d'un point M quelconque (non forcément lié au solide, Figure (4.11), sera noté :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d^{R_0} \vec{O_0 M}}{dt}$$

Le vecteur vitesse relative d'un point M du solide (S) sera noté dans le repère R :

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^R \vec{O M}}{dt}$$

Le vecteur position absolue du point M par rapport au repère R_0 est noté :

$$\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM}$$

D'où

$$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d^{R_0} \overrightarrow{O_0M}}{dt} = \frac{d^{R_0} \overrightarrow{O_0O}}{dt} + \frac{d^{R_0} \overrightarrow{OM}}{dt}$$

Tenant compte la relation (4.16) qui donne la dérivée d'un vecteur mobile par rapport au repère fixe,

$$\frac{d^{R_0} \overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} + (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OM})$$

D'où :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{O \in S/R_0} + \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} + (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OM})$$

Cette relation devient :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O \in S/R_0} + (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OM}) \quad (4.17)$$

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

Le vecteur vitesse absolue \vec{V}_{M/R_0} est le vecteur vitesse du point M pour un observateur lié au repère absolu (fixe) R_0 . Cette vitesse peut être décomposée en deux parties :

- La vitesse relative :

$$\vec{V}_r(M) = \vec{V}_{M/R}$$

C'est la vitesse du point M pour un observateur lié au repère relatif (mobile) R.

- La vitesse d'entraînement :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O \in S/R_0} + (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OM})$$

C'est la vitesse du point M appartenant à R₀ et qui coïncide à l'instant t avec le point M.

4.2.6.3. Composition d'accélérations

- Accélération absolue

On notera le vecteur accélération absolue par :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^{2R_0} \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^{R_0} \vec{V}_{M/R_0}}{dt}$$

On a alors pour simplifier l'écriture ($\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}$) :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^{R_0} \vec{V}_{M/R_0}}{dt} = \frac{d^{R_0} (\vec{V}_{O \in S/R_0} + \vec{V}_{M/R} + (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}))}{dt}$$

$$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^{R_0} \vec{V}_{O \in S/R_0}}{dt} + \frac{d^{R_0} \vec{V}_{M/R}}{dt} + \frac{d^{R_0} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d^{R_0} \overrightarrow{OM}}{dt}$$

En tenant compte de la relation (4.16) de la dérivée d'un vecteur mobile par rapport au repère fixe,

$$\frac{d^{R_0} \vec{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}$$

D'où le vecteur accélération absolue du point M, s'écrit :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \vec{a}_{O \in S/R_0} + \left(\frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R} \right) + \frac{d^{R_0} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right)$$

Nous pouvons donc le réécrire sous la forme :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \vec{a}_{O \in S/R_0} + \vec{a}_{M/R} + 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right) + \frac{d^{R_0}}{dt} \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \quad (4.18)$$

Où :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M)$$

Cette accélération absolue peut être décomposée en trois parties :

- l'accélération relative

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R}$$

C'est le vecteur accélération du point M pour un observateur lié au repère relatif R.

- l'accélération d'entraînement (accélération de M par rapport à R₀ si M est supposé fixe dans R) :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O \in R/R_0} + \frac{d^{R_0}}{dt} \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$$

Elle s'obtient aussi par l'application de la formule de **Rivals** (4.11) entre O et M, rigidement lié à O dans le mouvement d'entraînement.

- L'accélération complémentaire où de Coriolis

$$\vec{a}_c(M) = 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}\right)$$

L'accélération de Coriolis est nulle si et seulement si :

- le vecteur taux de rotation du repère relatif par rapport au repère absolu est nul : $\vec{\Omega} = \vec{0}$
- la vitesse relative du point considéré est nulle : $\vec{V}_r(M) = \vec{V}_{M/R} = \vec{0}$
- la vitesse relative est colinéaire au vecteur taux de rotation : $\vec{\Omega} \parallel \vec{V}_{M/R}$

4.3. SOLIDES EN CONTACT PONCTUEL

4.3.1. Vitesse de glissement

Le vecteur vitesse de glissement d'un solide (S_2) par rapport à un solide (S_1) comme montre la Figure 4.12, est :

$$\vec{V}_{g(S_2/S_1)} = \vec{V}_{I_2 \in S_2} - \vec{V}_{I_1 \in S_1}$$

On remarque que $\vec{V}_{g(S_2/S_1)}$ est la vitesse de I_2 par rapport à un repère lié à (S_1) et que $\vec{V}_{g(S_2/S_1)}$ est contenue dans un plan tangent aux solides en I .

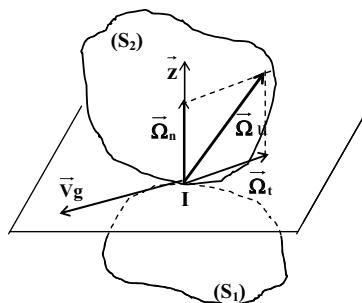


Figure 4.12 Solides en contact ponctuel

4.3.2. Plan tangent

Le point (I, \vec{V}_g) est toujours contenu dans le plan tangent entre (S_2) et (S_1). Sinon, il y aurait éloignement des solides ou pénétration de l'un dans l'autre.

4.3.2.1. Roulement sans glissement

Il y a roulement sans glissement si $\vec{V}_g = \vec{0}$. Dans ce cas, I appartient à l'axe instantané de rotation qui est alors défini par $(I, \vec{\Omega})$

Dans le cas de roulement sans glissement, on a :

$$\vec{V}_{g(S_2/S_1)} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_{I_1 \in S_1} = \vec{V}_{I_2 \in S_2} \quad (4.19)$$

La condition de roulement sans glissement est intéressante pour trouver la relation existante entre le vecteur taux de rotation instantané du solide et la vitesse d'un de ses points.

4.3.2.2. Roulement et Pivotement

On appellera $\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ le vecteur taux de rotation instantané de (S_2) par rapport à (S_1), on écrit :

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2) - \vec{\Omega}(S_1) \quad (4.20)$$

On peut décomposer le vecteur $\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ en deux vecteurs (Figure 4.13) :

- $\vec{\Omega}_t$, situé dans le plan tangent en I aux deux solides, est le vecteur taux de rotation instantanée de **roulement** de (S_2) par rapport à (S_1) ;
- $\vec{\Omega}_n$, situé dans le plan normale en I au plan tangent, est le vecteur taux de rotation instantanée de **pivotement** de (S_2) par rapport à (S_1).

4.4. MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

4.4.1. Définition

Un mouvement plan sur plan représente le mouvement d'une figure plane (section d'un solide par exemple) qui reste parallèle à un plan fixe P_0 et à une distance constante (Figure 4.13).

Tous les vecteurs vitesses de la figure plane considérée sont parallèles au plan P_0 . On ramène l'étude du mouvement de la figure plane considérée au mouvement de sa projection sur P_0 .

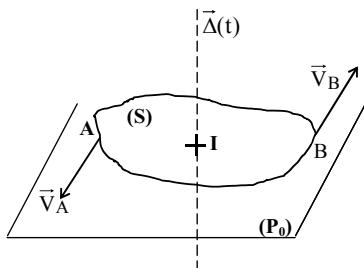


Figure 4.13 Mouvement plan sur plan

Le mouvement de tout point du solide est déterminé dès que l'on connaît le mouvement de sa projection dans le plan de référence.

4.4.2. Centre instantané de rotation (CIR)

Soient deux points A et B d'un solide (S) en mouvement plan sur plan (Figure 4.13), et les vecteurs vitesses \vec{v}_A et \vec{v}_B appartiennent au plan P_0 . D'après la loi de distribution des vitesses $(\vec{v}_A = \vec{v}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega})$, le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}$ appartient aussi au plan P_0 . Le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$ est donc normal au plan P_0 , ce qui signifie que l'axe instantané de rotation $\Delta(t)$ est perpendiculaire à P_0 . Or, par définition, tous les points de l'axe instantané de rotation ont une vitesse parallèle à cet axe. De plus, dans le cas d'un mouvement plan sur plan, les vitesses sont parallèles au plan P_0 . Par conséquent, le point d'intersection entre le plan P_0 et l'axe instantané de rotation a une vitesse nulle. Ce point est appelé **centre instantané de rotation (CIR)**.

4.5 EXERCICES RESOLUS

4.1. Soit une tige (T) homogène de longueur R, d'extrémités O et A. Cette tige est en rotation autour d'un axe fixe (\vec{O} , \vec{z}_1), par un angle de rotation θ (Figure 4.9), dans le repère fixe R_I (O , \vec{x}_1 , \vec{y}_1 , \vec{z}_1). Le repère R_T (A , \vec{u} , \vec{v} , \vec{z}_1) est lié à la tige, tel que $\overrightarrow{OA} = R \vec{u}$.

- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point A, en utilisant la méthode de dérivation directe et la méthode de distribution des vitesses.

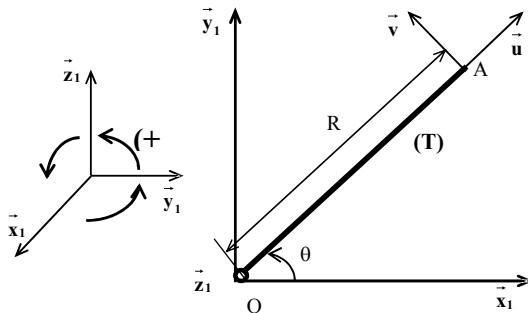


Figure 4.9

Solution:

Détermination des vecteurs vitesse et accélération du point A :

Nous avons l'angle de rotation de la tige autour de l'axe \vec{z}_1 : θ ;

Et le vecteur position du point A : $\overrightarrow{OA} = R \vec{u}$

1- la méthode de dérivation directe

Le vecteur vitesse du point A par rapport à R_I est défini par :

$$\vec{V}_{A/R_I} = \frac{d^{R_I} \overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d^{R_I} R \vec{u}}{dt} = R \frac{d^{R_I} \vec{u}}{dt}$$

Sachant que :

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{v} = -\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1$$

La dérivée du vecteur unitaire mobile \vec{u} est :

$$\begin{aligned}\frac{d^{R_1} \vec{u}}{dt} &= \frac{d \cos \theta}{dt} \vec{x}_1 + \frac{d \sin \theta}{dt} \vec{y}_1 \\ \frac{d^{R_1} \vec{u}}{dt} &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{x}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \vec{y}_1 = \dot{\theta} \left(-\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1 \right) = \dot{\theta} \vec{v}\end{aligned}$$

Donc, le vecteur vitesse du point A à l'extrémité de la tige s'écrit :

$$\vec{V}_{A/R_1} = R \dot{\theta} \vec{v}$$

Le vecteur accélération du point A est exprimé par :

$$\vec{a}_{A/R_1} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{A/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1} (R \dot{\theta} \vec{v})}{dt} = R \frac{d^{R_1} (\dot{\theta} \vec{v})}{dt}$$

$$\vec{a}_{A/R_1} = R \left(\vec{v} \frac{d^{R_1} \dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta} \frac{d^{R_1} \vec{v}}{dt} \right)$$

D'où, le vecteur accélération du point A est :

$$\vec{a}_{A/R_1} = R \left(\ddot{\theta} \vec{v} - \dot{\theta}^2 \vec{u} \right)$$

2- Méthode de distribution des vitesses dans un corps solide

Le taux de rotation de la tige autour de l'axe \vec{z}_1 est :

$$\vec{\Omega}_{T/R_1} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

D'après la formule de distribution des vitesses dans un corps solide, le vecteur vitesse du point A est exprimé par :

$$\vec{V}_{A/R_1} = \vec{V}_{O/R_1} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1}$$

Où, $\vec{V}_{O/R_1} = \vec{0}$, (O point fixe, centre de rotation de la tige).

D'ici :

$$\vec{V}_{A/R_1} = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1} = -R \vec{u} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_1 = R \dot{\theta} \vec{v}$$

On déduit le torseur cinématique dans le point A :

$$[V]_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{T/R_1} \\ \vec{V}_{A/R_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ R \dot{\theta} \vec{v} \end{pmatrix}$$

-le vecteur accélération du point A s'écrit :

$$\vec{a}_{A/R_1} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{A/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1})}{dt}$$

et, la dérivée d'un vecteur mobile, par rapport au repère fixe, s'écrit :

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{OA}}{dt} = \vec{\Omega}_{T/R_1} \wedge \overrightarrow{AO}$$

Donc, on retrouve la formule de Rivals concernant la loi de distribution des accélérations dans un corps solide :

$$\vec{a}_{A/R_1} = \vec{a}_{O/R_1} + \overrightarrow{AO} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{T/R_1}}{dt} + (\vec{\Omega}_{T/R_1} \wedge \overrightarrow{AO}) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1}$$

Où :

$$\vec{a}_{O/R_1} = \vec{0} \quad : \text{car } O \text{ point fixe,}$$

$$\overrightarrow{AO} \wedge \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = R \vec{u} \wedge \frac{d\dot{\theta} \vec{z}_1}{dt} = R \ddot{\theta} \vec{v}$$

$$(\vec{\Omega}_{T/R_1} \wedge \overrightarrow{AO}) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1} = (\vec{\theta} \vec{z}_1 \wedge -R \vec{u}) \wedge \dot{\vec{\theta}} \vec{z}_1 = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}$$

D'où, on retrouve le vecteur accélération du point A :

$$\vec{a}_{A/R_1} = R (\vec{\ddot{\theta}} \vec{v} - \dot{\theta}^2 \vec{u})$$

4.2. On considère le roulement d'un disque de centre C et de rayon \mathbf{r} sur un axe (O, \vec{x}_1). Le repère $R(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au disque (Figure 4.10).

- Ecrire le torseur cinématique au centre C du disque ;
- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point M sur la périphérie du disque ;
- Écrire la condition de roulement sans glissement au point de contact I avec l'axe (O, \vec{x}_1).

Solution :

1- Le torseur cinématique au centre C du disque :

Le disque est en mouvement hélicoïdal (rotation + translation)

θ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe Cz_1 , donc, le taux de rotation est (Figure 4.10) :

$$\vec{\Omega}_{C/R_1} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

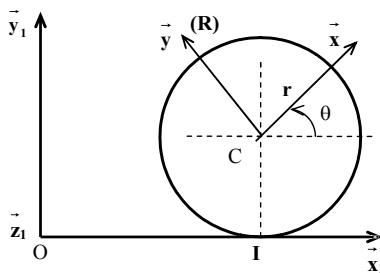


Figure 4.10.

Le déplacement du disque du point **O** jusqu'au point de contact **I**, est égal à \mathbf{x} , donc, la vitesse de translation du point **C** est :

$$\vec{V}_C = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IC})}{dt} = \frac{d(x\vec{x}_1 + Ry_1)}{dt} = \dot{x}\vec{x}_1$$

Par conséquent, le torseur cinématique du centre **C** du disque est :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{C/R_1} \\ \vec{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \dot{x}\vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

2- Les vecteurs vitesse et accélération du point **M** sur la périphérie du disque :

Appliquons la règle de distribution des vitesses dans un corps solide dans le point **M** :

$$\vec{V}_{M/R_1} = \vec{V}_C + \overrightarrow{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}$$

$$\vec{V}_{M/R_1} = \dot{x}\vec{x}_1 - r\vec{x} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = \dot{x}\vec{x}_1 + r\dot{\theta}\vec{y}$$

On exprime \vec{V}_{M/R_1} dans le repère fixe :

Sachant que :

$$\vec{x} = \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{y} = -\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1$$

Donc,

$$\vec{V}_{M/R_1} = \dot{x} \vec{x}_1 + r \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1)$$

Le vecteur accélération du point M :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1} (\vec{V}_{C/R_1} + \vec{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1})}{dt}$$

$$\vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{C/R_1}}{dt} + \vec{MC} \wedge \frac{d^{R_1} \vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1} \vec{MC}}{dt} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}$$

Or, la dérivée d'un vecteur mobile est :

$$\frac{d^{R_1} \vec{MC}}{dt} = \vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \vec{MC}$$

D'où, la formule de Rivals concernant la loi de distribution des accélérations dans un corps solide :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{C/R_1} + \vec{MC} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt} + (\vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \vec{MC}) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1}$$

Où :

$$\vec{a}_{C/R_1} = \ddot{x} \vec{x}_1$$

$$\vec{MC} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt} = -r \vec{x} \wedge \frac{d\dot{\theta} \vec{z}_1}{dt} = r \dot{\theta} \vec{y}$$

$$\left(\vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \overrightarrow{MC} \right) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1} = \left(\dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge -r \vec{x} \right) \wedge \dot{\theta} \vec{z}_1 = -r \dot{\theta}^2 \vec{x}$$

On remplaçant ces expressions dans \vec{a}_{M/R_1} , on obtient, le vecteur accélération du point M :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \ddot{x} \vec{x}_1 - r \dot{\theta}^2 \vec{x} + r \ddot{\theta} \vec{y}$$

3- La condition de roulement sans glissement au point de contact I avec l'axe (O, \vec{x}_1) :

Le vecteur vitesse du point de contact I :

Lorsque $\theta = \frac{3\pi}{2}$ le point M coïncide avec le point de contact I, dans ce cas:

$$\vec{y} = \vec{x}_1$$

C'est-à-dire que :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \vec{V}_{M/R_1} (\theta = \frac{3\pi}{2})$$

D'où :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \dot{x} \vec{x}_1 + r \dot{\theta} \vec{x}_1 = (\dot{x} + r \dot{\theta}) \vec{x}_1$$

La condition de roulement sans glissement au point de contact I, est la vitesse de glissement \vec{V}_g nulle, c'est-à-dire :

$$\vec{V}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_I = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\dot{x} + r \dot{\theta}) \vec{x}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow (\dot{x} + r \dot{\theta}) = 0$$

4.4. Un train d'engrenages est constitué par trois roues dentées **I**, **II**, et **III**, de rayon respectifs R_1 , R_2 , et R_3 , et dont les centres O, A et B restent alignés sur le bras OB tournant autour de Oz dans le plan (Ox , Oy) avec un taux de rotation $\vec{\Omega}_t$ (Figure 4.11). La roue dentée I étant fixe dans le plan (ox , oy), on demande de calculer les taux de rotations dans les trois roues. En déduire le vecteur vitesse du point C de la roue **III**.

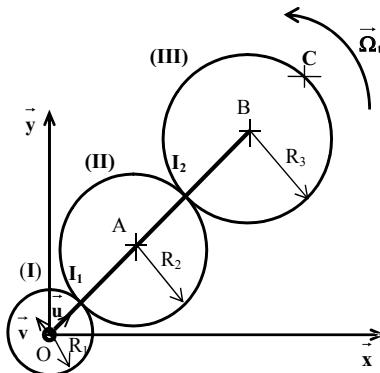


Figure 4.11.

Solution :

Détermination des taux de rotation des roues **I**, **II** et **III**.

La roue **I** étant fixe, donc le taux de rotation de la roue **I** est nul, où :

$$\vec{\Omega}_1 = \vec{0}$$

- Le taux de rotation de la roue **II**, $\vec{\Omega}_2$:

Considérons le contact entre la roue **I** et **II**, et puisque ces roues sont dentées, la vitesse de glissement on aura dans le point de contact **I**₁ entre ces deux roues est nulle (Figure 4.11), c.à.d :

$$\vec{V}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_I(I_1) - \vec{V}_{II}(I_1) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_I(I_1) = \vec{V}_{II}(I_1)$$

Or :

$$\vec{V}_I(I_1) = \vec{0} \text{ , car la roue } \mathbf{I} \text{ étant fixe.}$$

D'après la formule de distribution des vitesses dans un corps solide, on écrit :

$$\vec{V}_{II}(I_1) = \vec{V}_{A/O} + \vec{I_1 A} \wedge \vec{\Omega}_2$$

Puisque la tige est en rotation autour de l'axe Oz, avec un taux de rotation $\vec{\Omega}_t$, la vitesse du point A est :

$$\vec{V}_{A/O} = \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_t = -(R_1 + R_2) \vec{u} \wedge \vec{\Omega}_t \vec{z} = (R_1 + R_2) \vec{\Omega}_t \vec{v}$$

Et

$$\vec{I_1 A} \wedge \vec{\Omega}_2 = R_2 \vec{u} \wedge \vec{\Omega}_2 \vec{z} = -R_2 \vec{\Omega}_2 \vec{v}$$

D'où,

$$\vec{V}_{II}(I_1) = ((R_1 + R_2) \vec{\Omega}_t - R_2 \vec{\Omega}_2) \vec{v}$$

Puisque :

$$\vec{V}_{II}(I_1) = \vec{0} \Leftrightarrow ((R_1 + R_2) \vec{\Omega}_t - R_2 \vec{\Omega}_2) = 0$$

Donc, le taux de rotation de la roue II est :

$$\vec{\Omega}_2 = \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} \vec{\Omega}_t$$

Le taux de rotation de la roue III, $\vec{\Omega}_3$:

Puisque les roues II et III sont dentées, on aura dans le point de contact I_2 l'égalité des vitesses :

$$\vec{V}_{g2} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_{II}(I_2) - \vec{V}_{III}(I_2) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_{II}(I_2) = \vec{V}_{III}(I_2)$$

$$\vec{V}_{II}(I_2) = \vec{V}_{III}(I_2)$$

Or,

$$\vec{V}_{II}(I_2) = \vec{V}_{A/O} + \vec{I_2 A} \wedge \vec{\Omega}_2$$

Avec :

$$\vec{V}_{A/O} = \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_t = -(R_1 + R_2) \vec{u} \wedge \vec{\Omega}_t \vec{z} = (R_1 + R_2) \vec{\Omega}_t \vec{v}$$

Et

$$\overrightarrow{I_2 A} \wedge \overrightarrow{\Omega_2} = -R_2 \vec{u} \wedge \Omega_2 \vec{z} = +R_2 \Omega_2 \vec{v}$$

D'où

$$\overrightarrow{V}_{II}(I_2) = ((R_1 + R_2)\Omega_t + R_2\Omega_2)\vec{v} = 2((R_1 + R_2)\Omega_t)\vec{v}$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{V}_{III}(I_2) = \overrightarrow{V}_{B/O} + \overrightarrow{I_2 B} \wedge \overrightarrow{\Omega_3}$$

Le point B est aligné sur le bras OB tournant avec $\vec{\Omega}_t$, d'où le vecteur vitesse du point B qui s'écrit :

$$\overrightarrow{V}_{B/O} = \overrightarrow{BO} \wedge \Omega_t \vec{z} = -(R_1 + 2R_2 + R_3)\vec{u} \wedge \Omega_t \vec{z} = (R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t \vec{v}$$

Et

$$\overrightarrow{I_2 B} \wedge \overrightarrow{\Omega_3} = +R_3 \vec{u} \wedge \Omega_3 \vec{z} = -R_3 \Omega_3 \vec{v}$$

D'où :

$$\overrightarrow{V}_{III}(I_2) = ((R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t - R_3\Omega_3)\vec{v}$$

De la relation $\overrightarrow{V}_{II}(I_2) = \overrightarrow{V}_{III}(I_2)$ ci-dessus, on écrit :

$$2((R_1 + R_2)\Omega_t)\vec{v} = ((R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t - R_3\Omega_3)\vec{v}$$

Par conséquent, le taux de rotation de la roue **III** s'obtient :

$$\Omega_3 = \frac{(R_3 - R_1)}{R_3} \Omega_t$$

- Le vecteur vitesse du point C, $\overrightarrow{V}_{C/O}$, s'écrit :

$$\vec{V}_{C/O} = \vec{V}_{B/O} + \overrightarrow{CB} \wedge \Omega_3 \vec{z}$$

Nous avons :

$$\vec{V}_{B/O} = (R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t \vec{v}$$

Et :

$$\overrightarrow{CB} \wedge \Omega_3 \vec{z} = -R_3 \vec{u} \wedge \left(\frac{R_3 - R_1}{R_3} \right) \Omega_t \vec{z} = (R_3 - R_1) \Omega_t \vec{v}$$

D'où :

$$\vec{V}_{C/O} = (R_1 + 2R_2 + R_3)\Omega_t \vec{v} + (R_3 - R_1)\Omega_t \vec{v}$$

On en déduit :

$$\vec{V}_{C/O} = 2(R_2 + R_3)\Omega_t \vec{v}$$

4.4. On considère la roue (**D**), de centre C et de rayon R (Figure 4.12), située dans un plan vertical mobile et est solidaire à la tige CH. L'ensemble (Roue + tige) tourne autour de CH avec un angle de rotation ϕ . La tige **CH** elle même est liée à l'axe fixe (**O**, \vec{z}_1) par un pivot glissant d'axe (**H**, \vec{z}_1) et tourne autour de lui par un angle ψ . Sachant que la distance **CH** = ρ est considérée comme variable, et la roue (**D**) effectue un roulement sans glissement sur le plan de contact **R₁** (**O**, \vec{x}_1 , \vec{y}_1). Ecrire la condition de roulement sans glissement de la roue avec le plan de contact au point I.

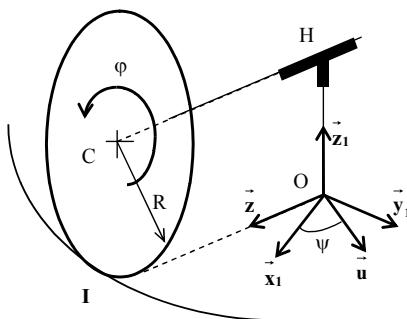


Figure 4.12

Solution :

- la roue (**D**) solidaire de la tige CH, tourne autour CH avec un angle de rotation φ ,
- La tige CH = ρ est considérée comme variable, parallèle à l'axe mobile (O, \vec{z}) ,
- La tige liée à l'axe fixe (O, \vec{z}_1) par pivot glissant d'axe (H, \vec{z}_1) , tourne autour de lui par un angle ψ .

La condition de roulement sans glissement :

Le torseur cinématique au centre C de la roue :

Puisque la roue est solidaire de la tige. Il y'a deux rotations en même temps, la première autour de l'axe CH d'un angle φ et la deuxième autour du pivot glissant (H, \vec{z}_1) par un angle ψ , le taux de rotation de la roue s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{D/R_1} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{z} + \frac{d\psi}{dt} \vec{z}_1 = \dot{\varphi} \vec{z} + \dot{\psi} \vec{z}_1$$

Le vecteur vitesse du centre C de la roue, s'exprime par :

$$\vec{V}_{C/R_1} = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{HC}}{dt} = \frac{d(\rho \vec{z})}{dt}$$

D'où :

$$\vec{V}_{C/R_1} = \dot{\rho} \vec{z} + \rho \frac{d\vec{z}}{dt}$$

Or, la dérivée d'une base mobile, est :

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{\Omega}_{(OH)} \wedge \vec{z} = \dot{\psi} \vec{z}_1 \wedge \vec{z} = \dot{\psi} \vec{u}$$

D'où :

$$\vec{V}_{C/R_1} = \dot{\rho} \vec{z} + \rho \dot{\psi} \vec{u}$$

Donc, le torseur cinématique dans le centre C de la roue s'écrit :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{D/R_1} \\ \vec{V}_{C/R_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \vec{z} + \dot{\psi} \vec{z}_1 \\ \dot{\rho} \vec{z} + \rho \dot{\psi} \vec{u} \end{pmatrix}$$

D'après la formule de distribution des vitesses dans un corps solide, la vitesse du point de contact I, s'écrit :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \vec{V}_{C/R_1} + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}_{D/R_1}$$

$$\vec{V}_{I/R_1} = \dot{\rho} \vec{z} + \rho \dot{\psi} \vec{u} + R \vec{z}_1 \wedge (\dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\phi} \vec{z})$$

D'où :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \dot{\rho} \vec{z} + (\rho \dot{\psi} + R \dot{\phi}) \vec{u}$$

La condition de roulement sans glissement permet alors d'écrire que cette vitesse est nulle. Nous obtenons alors deux équations scalaires qui sont :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \dot{\rho} = 0 \quad \text{et} \quad \rho \dot{\psi} + R \dot{\phi} = 0$$

4.5. Une meule, assimilée à un disque de rayon \mathbf{r} et de centre O, située dans un plan maintenu vertical, roule sur un chemin circulaire fixe qui est le cercle horizontal de rayon \mathbf{R} et de centre O_1 , comme le montre la Figure 4.13.

L'axe Oz de la meule rencontre en C l'axe O_1z_1 du chemin circulaire. A l'instant initial, le point P de la meule coïncide avec le point P_1 du chemin circulaire.

On utilise un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fixe, tel que (O_1, \vec{x}_1) passe par A_1 et (O_1, \vec{z}_1) passe par C, et un repère mobile $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, lié à la meule, tel que (O, \vec{x}) passe par A et (O, \vec{z}) passe C.

Sachant que la meule tourne dans le chemin circulaire fixe autour de l'axe (O_1, \vec{z}_1) par un angle $\psi = (\overrightarrow{O_1A_1}, \overrightarrow{O_1P_1})$ et elle tourne autour de son axe (O, \vec{z}) par un angle $\varphi = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA})$ (Figure 4.13).

1- Déterminer le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$ de la meule dans le mouvement de R par rapport à R_1 ?

2- Ecrire les éléments de réduction en O du torseur cinématique dans le mouvement de R par rapport à R_1 ?

3- En déduire la vitesse du point P et écrire la condition de roulement sans glissement.

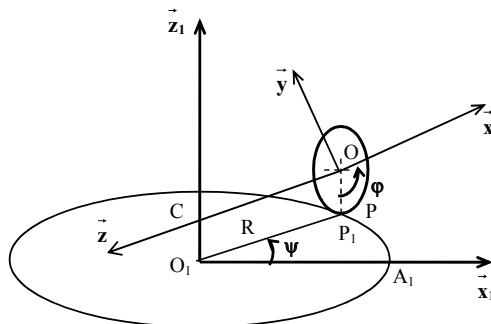


Figure 4.13

Solution :

$R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère fixe,

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, lié à la meule, repère mobile,

Le taux de rotation de la meule par rapport à R_1 est :

$$\vec{\Omega}_{M/R_1} = \vec{\Omega}_{M/R} + \vec{\Omega}_{R/R_1}$$

Le taux de rotation de la meule M par rapport à R est :

$$\vec{\Omega}_{M/R} = \frac{d\phi}{dt} \vec{z} = \dot{\phi} \vec{z}$$

Le taux de rotation d'entraînement, où le taux de rotation du repère R et la meule M par rapport à R_1 , est :

$$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \frac{d\psi}{dt} \vec{z}_1 = \dot{\psi} \vec{z}_1$$

Le vecteur taux de rotation absolu est :

$$\vec{\Omega}_{M/R_1} = \vec{\Omega}_{M/R} + \vec{\Omega}_{R/R_1} = \dot{\phi} \vec{z} + \dot{\psi} \vec{z}_1$$

Le torseur cinématique au centre O de la meule est :

$$[V]_O = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_O \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{O/R_1} = \vec{V}_{O_1} + \overrightarrow{OO_1} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_1}$$

$$\vec{V}_{O_1} = \vec{0} \text{ car } O_1 \text{ point fixe}$$

$$\overrightarrow{OO_1} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_1} = -R \vec{z} \wedge \vec{\psi} \vec{z}_1 = -R \dot{\psi} \vec{x}_2$$

$$\vec{V}_{O/R_1} = -R \dot{\psi} \vec{x}_2$$

Donc, le torseur cinématique dans le point O est :

$$[V]_O = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \vec{z} + \dot{\psi} \vec{z}_1 \\ -R \dot{\psi} \vec{x}_2 \end{pmatrix}$$

On déduit la vitesse du point P et la condition de roulement sans glissement.

$$\vec{V}_{P/R_1} = \vec{V}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_1}$$

$$\overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_1} = -r \vec{y}_2 \wedge (\dot{\phi} \vec{z} + \dot{\psi} \vec{z}_1) = +r \dot{\phi} \vec{x}_2$$

$$\vec{V}_{P/R_1} = -R \dot{\psi} \vec{x}_2 + r \dot{\phi} \vec{x}_2 = (-R \dot{\psi} + r \dot{\phi}) \vec{x}_2$$

Donc, la condition de roulement sans glissement de la meule sur le chemin circulaire est :

$$\vec{V}_{P/R_1} = \vec{0} \Leftrightarrow -R \dot{\psi} + r \dot{\phi} = 0$$

2.6 Un point matériel M mobile par rapport au repère R ($\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) orthonormé, direct et mobile, par rapport au repère fixe $R_1(\mathbf{O}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ (Figure 4.14). Les coordonnées du point M satisfont les conditions suivantes :

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} = t \mathbf{e}^t, \quad \mathbf{z} = \mathbf{0} \text{ (cm)}$$

Sachant que :

- l'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}$,

- $(\vec{y}_1, \vec{y}) = \psi$ où ψ est une fonction donnée du temps leur dérivée par rapport à t $\dot{\psi}$ est constante.

1. Donner le vecteur de la position relative du point M dans le repère mobile.
2. Donner le taux de rotation de \mathbf{R}/\mathbf{R}_1 ;
3. Déterminer l'expression analytique du vecteur vitesse absolue du point M,
4. On déduire les vecteurs vitesses relative, d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.
5. Déterminer l'expression analytique du vecteur accélération absolue du point M,
6. On déduire les vecteurs accélérations relative, complémentaire (Coriolis), d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

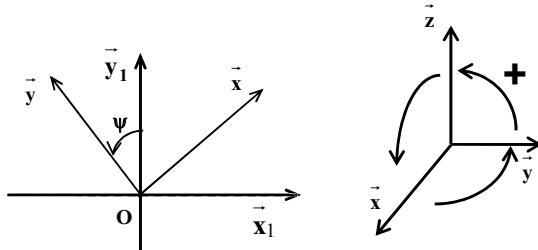


Figure 4.14

Solution :

Les données du problème sont :

- Le repère R ($\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) mobile (Repère relatif)
- Le repère $R_1(\mathbf{O}_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fixe (Repère absolu)
- Le vecteur de position d'entraînement de \mathbf{O} à \mathbf{O}_1 :
- L'angle de rotation de R/R_1 (\vec{y}_1, \vec{x}) = ψ (ψ constante)
- Le vecteur taux de rotation de R/R_1 , $\vec{\Omega}_{R/R_0}$:

$$\vec{\Omega}_{R/R_0} = \vec{\Omega} = \frac{d\psi}{dt} \vec{z}_1 = \dot{\psi} \vec{z}_1$$

Le point matériel M défini par les coordonnées :

$$x = t, y = te^t, z = 0 \text{ (cm)}$$

Le vecteur de position relatif du point M s'écrit :

1-le vecteur de la position relative du point M dans le repère mobile.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x}\vec{x} + \vec{y}\vec{y} + \vec{z}\vec{z} = \vec{0x} + t\vec{e^t}\vec{y} + \vec{0z}$$

Le vecteur de position absolu du point M est :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$

2-Le vecteur taux de rotation de R/R₁, $\vec{\Omega}_{R/R_1}$:

$$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \vec{\Omega} = \frac{d\psi}{dt} \vec{z}_1 = \dot{\psi} \vec{z}_1$$

3- l'expression analytique du vecteur vitesse absolue du point M,

Le vecteur vitesse absolue du point M dans le repère R s'écrit :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1M}}{dt} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1O}}{dt} + \frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt}$$

La dérivée du vecteur mobile \overrightarrow{OM} par rapport à un repère fixe est :

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1O}}{dt} = \vec{V}_{O/R_1}$$

Donc, la formule du vecteur vitesse absolue du point M, s'exprime:

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1M}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Avec

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} : \text{la vitesse relative du point } M$$

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} : \text{le vecteur vitesse d'entraînement du point } M$$

$$\vec{V}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1 O}}{dt} \text{ est la vitesse du point } O \text{ par rapport à } R_1.$$

4-On déduire les vecteurs vitesses relative, d'entraînement et absolue du point M dans le repère mobile.

Le vecteur vitesse relative du point M s'écrit :

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} = (1+t)e^t \vec{y} \text{ (cm/sec)}$$

le vecteur vitesses d'entraînement :

$$\vec{V}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1 O}}{dt} = \vec{0} \quad O_1 \text{ Coïncide avec } O$$

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \dot{\psi} \vec{z}_1 \wedge (te^t \vec{y}) = -\dot{\psi} te^t \vec{x} \text{ (cm/sec)}$$

D'où :

$$\vec{V}_e(M) = -\dot{\psi} te^t \vec{x} \text{ (cm/sec)}$$

Par conséquent, le vecteur vitesse absolue du point M par rapport à R_1 est :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = -\dot{\psi} te^t \vec{x} + (1+t)e^t \vec{y} \text{ (cm/sec)}$$

- l'expression analytique du vecteur accélération absolue du point M,

Le vecteur accélération absolue du point M par rapport au repère fixe R_1 , s'écrit :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^2 R_1 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{V}_{M/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1} (\overrightarrow{V}_{M/R} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt}$$

$$\vec{a}_A(M) = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{V}_{M/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1} \overrightarrow{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1} \overrightarrow{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt} \quad (1)$$

On applique la dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère fixe à la dérivée des vecteurs mobiles \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{V}_{M/R}$ par rapport au repère fixe R_0 :

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{V}_{M/R} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d^R \overrightarrow{V}_{M/R}}{dt} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}_{M/R}$$

Où :

$$\frac{d^R \overrightarrow{V}_{M/R}}{dt} = \vec{a}_{M/R} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}_{M/R}$$

Avec :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{d^R \overrightarrow{V}_{M/R}}{dt} \text{ le vecteur accélération relative,}$$

On remplace ces développements dans l'expression (1), on obtient l'expresse du vecteur accélération absolue :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R} + 2(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}_{M/R}) + \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1} \overrightarrow{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

-On déduire les vecteurs accélérations relative, complémentaire (Coriolis), d'entrainement et absolue du point M dans le repère mobile.

Le vecteur accélération relative du point M, est :

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R} = \frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} = (2+t)e^t \vec{y} \text{ (cm/sec}^2\text{)}$$

Le vecteur accélération complémentaire (Coriolis) :

$$\vec{a}_C(M) = 2 \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R} \right) = 2 \left(\vec{\psi} \vec{z}_1 \wedge ((1+t)e^t \vec{y}) \right) = -2\vec{\psi}(1+t)e^t \vec{x}$$

Le vecteur accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$$

Avec

$$\vec{a}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{O/R_1}}{dt} = \vec{0} \text{ (cm/sec}^2\text{)}$$

$$\frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM} = \vec{0} \quad (\psi \text{ constante})$$

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = -\vec{\psi}^2 t e^t \vec{y} \text{ (cm/sec}^2\text{)}$$

Donc, le vecteur accélération d'entraînement s'écrit :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = -\vec{\psi}^2 t e^t \vec{y} \text{ (cm/sec}^2\text{)}$$

Enfin, le vecteur accélération absolue du point M est :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = -2\vec{\psi}(1+t)e^t \vec{x} + (2 + (1 - \vec{\psi}^2)t)e^t \vec{y} \text{ (cm/sec}^2\text{)}$$

4.7. Un rectangle ABCD (repère R ($O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) mobile) tourne autour d'un axe fixe (O_1, \vec{z}_1) (Repère R_1 ($O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) fixe) avec un taux de rotation $\vec{\Omega} = \frac{\pi}{2} \vec{z}_1$ (rad/sec).

- Les cotés du rectangle $AD = CB = \mathbf{a}$ (cm) et $AB = CD = 2\mathbf{a}$ (cm) (Figure 4.15).

- $\overrightarrow{O_1O} = \mathbf{a} \vec{z}_1$

- $\vec{z}_1 = \vec{z}$.

Un point matériel M est mobile sur le côté AB, ses coordonnées x, y, z satisfont les conditions :

$$x = 0, y = \mathbf{a}, z = \mathbf{a} \sin(\pi t/3) \quad (\text{cm})$$

t désignant le temps.

Exprimer les vecteurs vitesse et accélération absolues du point M dans le repère mobile.

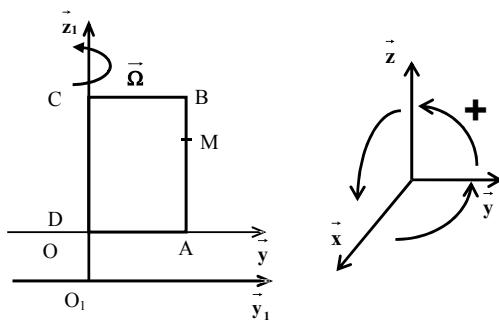


Figure 4.15

Solution :

Les données du problème sont :

Le taux de rotation de R/R_1 est :

$$\vec{\Omega} = \frac{\pi}{2} \vec{z}_1 \text{ (rad/sec).}$$

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: Repère mobile (relatif) lié au rectangle ABCD,

$R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: Repère fixe (absolu)

Le point matériel M défini par ses coordonnées :

$$x = 0, y = \mathbf{a}, z = \mathbf{a} \sin(\pi t/3) \text{ (cm)}$$

Le vecteur position relatif du point M :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z} = 0 \vec{x} + a \vec{y} + a \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) t \vec{z}$$

Le vecteur position absolu du point M

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = a \vec{z}_1 + a \vec{y} + a \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) t \vec{z}$$

Le vecteur vitesse absolue du point M dans le repère R :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1M}}{dt} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1O}}{dt} + \frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt}$$

Or, la dérivée d'un vecteur mobile par rapport à un repère fixe est:

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Avec :

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} , \text{ la vitesse relative du point M}$$

Et,

$$\vec{V}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1O}}{dt} , \text{ la vitesse du point O par rapport à } R_1.$$

D'où, l'expression du vecteur vitesse absolue du point M s'écrit :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1M}}{dt} = \vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Le vecteur vitesse relative du point M, s'exprime par :

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\pi}{3} a \cos \frac{\pi}{3} t \vec{z} \text{ (cm/sec)}$$

Le vecteur vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Avec :

$$\vec{V}_{O/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{O_1 O}}{dt} = \vec{0}$$

Et

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \frac{\pi}{2} \vec{z}_1 \wedge (a \vec{y} + a \sin \frac{\pi}{3} t \vec{z}) = -\frac{\pi}{2} a \vec{x} \text{ (cm/sec)}$$

En conséquence, le vecteur vitesse absolue du point M par rapport à R₁ est :

$$\vec{V}_A(M) = \vec{V}_{M/R_1} = -\frac{\pi}{2} a \vec{x} + \frac{\pi}{3} a \cos \frac{\pi}{3} t \vec{z} \text{ (cm/sec)}$$

Le vecteur accélération absolue du point M par rapport au repère fixe R₁, s'écrit :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^2 R_1 \overrightarrow{O_1 M}}{dt^2} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1} (\vec{V}_{M/R} + \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt}$$

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R}}{dt} + \frac{d^{R_1} \vec{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1} (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt}$$

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R}}{dt} + \frac{d^{R_1} \vec{V}_{O/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt}$$

Appliquons la dérivation d'un vecteur mobile par rapport au repère fixe :

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\frac{d^{R_1} \vec{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R} = \vec{a}_{M/R} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}$$

D'où, l'expression du vecteur accélération absolue s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{a}_A(M) &= \vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R} + 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}) + \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \\ \vec{a}_A(M) &= \vec{a}_{M/R} = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_C(M) + \vec{a}_e(M)\end{aligned}$$

On détermine chaque composante de l'accélération absolue.

- Le vecteur accélération relative du point M :

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R} = \frac{d^R \vec{V}_{M/R}}{dt} = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 a \sin \frac{\pi}{3} t \vec{z} \text{ (cm/sec}^2\text{)}$$

Le vecteur accélération complémentaire (Coriolis) :

$$\vec{a}_C(M) = 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{M/R}) = \vec{0}$$

Car $\vec{\Omega} \parallel \vec{V}_{M/R}$

Le vecteur accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O/R_1} + \frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

On a : $\vec{a}_{O/R_1} = \vec{0}$

Et

$$\frac{d^{R_1} \vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0} \quad (\vec{\Omega} : \text{constante})$$

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} z_1 \wedge \left(-\frac{\pi}{2} a \vec{x} \right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 a \vec{y} \text{ (cm/sec}^2)$$

En conséquence, le vecteur accélération absolue du point M est :

$$\vec{a}_A(M) = \vec{a}_{M/R} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 a \vec{y} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 a \sin \frac{\pi}{3} t \vec{z} \text{ (cm/sec}^2)$$

4.6 EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

4.8. Une sphère homogène mobile de rayon r , de centre G, est abandonnée sans vitesse initiale au pôle supérieur P d'une sphère homogène plus grande, fixe, de rayon R , avec roulement sans glissement (Figure 4.16). La position de la sphère mobile est déterminée par l'angle θ tel que :

$$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OG})$$

La rotation de la sphère mobile autour de son axe de rotation Gz est déterminée par l'angle φ .

1- déterminer le vecteur position \overrightarrow{OG} , le vecteur de vitesse $\vec{v}(G)$ et le vecteur accélération $\vec{a}(G)$ du centre de gravité G de la sphère mobile par rapport à O ;

2- écrire la condition de roulement sans glissement du point de contact I entre les deux sphères.

3- déterminer le vecteur accélération du point de contact I.

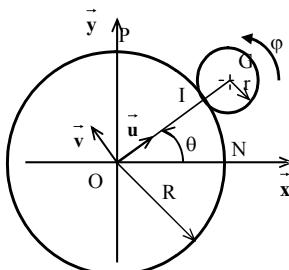


Figure 4.16

4.9. On considère le système matériel illustré dans la Figure 4.17. Ce système est constitué de :

- 2 barres OA et AG de même longueur a et de masses négligeables (solide 1 et 2),

- un disque homogène (solide 3) de masse \mathbf{m} , de centre G et de rayon \mathbf{a} .

La barre OA est liée au repère fixe R_1 par un pivot d'axe vertical (O, \vec{z}_1). La barre AG est en mouvement dans un plan perpendiculaire en A à OA grâce à un pivot d'axe (A, \vec{u}). Le disque est lié à la barre AG par une liaison pivot (G, \vec{z}), qui est l'axe du disque. Le repère relatif R ($G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) est lié au disque.

- Ecrire l'expression vectorielle du taux de rotation du disque par rapport à R_1 .

- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du centre de masse G du disque.

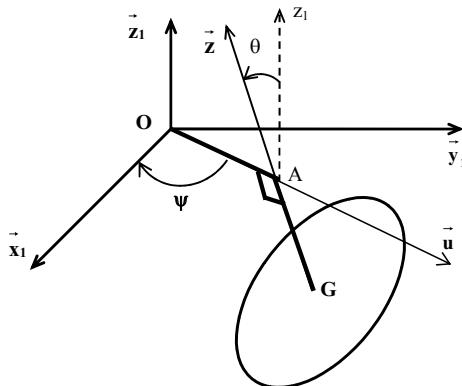


Figure 4.17

4.10. Soient le repère orthonormé direct $R_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fixe et un repère $R (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé, direct et mobile par rapport au repère précédent dans les conditions suivantes :

- $\overrightarrow{O_1 O} = r \vec{x}_1$ où r est une fonction donnée du temps ;
- $(\vec{x}_1, \vec{x}) = \psi$ où ψ est une fonction donnée du temps ;
- $\vec{z}_1 = \vec{z}$.

Un point matériel M mobile par rapport au repère R, ses coordonnées x, y, z satisfont la relation :

$$x = t, y = 2t, z = 5t^2$$

t désignant le temps.

- 1- que peut-on dire de la trajectoire relative de M ?
- 2- Exprimer le vecteur vitesse absolue de M dans le repère mobile.
- 3- Calculer le vecteur accélération absolue de M dans le cas où ψ est constant.

4.11. Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est orthonormé, direct et mobile, par rapport au repère fixe $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ dans les conditions suivantes (Figure 4.20) :

- a) $\overrightarrow{O_0O} = \beta t \vec{y}_0$ où β est un coefficient constant et t désigne le temps.
- b) $(\vec{x}_0, \vec{x}) = \psi$ où ψ est une fonction donnée du temps leur dérivée par rapport à t $\dot{\psi}$ est constante.
- c) $\vec{z}_1 = \vec{z}$.

Un point matériel M est mobile par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, ses coordonnées x, y, z satisfont les conditions suivantes :

$$x = t, \quad y = e^{2t}, \quad z = 0$$

Exprimer les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue du point M dans le repère mobile.

4.12. Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé, direct et mobile, par rapport au repère fixe $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ dans les conditions suivantes :

- a) $\overrightarrow{O_1O} = \alpha(t) \vec{y}_1$, où $\alpha(t)$ est une fonction donnée du temps;
- b) $(\vec{x}_0, \vec{x}) = \psi(t)$ où $\psi(t)$ est une fonction donnée du temps;
- c) $\vec{z}_1 = \vec{z}$.

Un point matériel M est mobile par rapport au repère R, ses coordonnées x, y, z satisfont la relation :

$$x = a \cos 2\omega t, \quad y = a \sin 2\omega t, \quad z = 0$$

Exprimer les vecteurs vitesse et accélération absolus du point M dans le repère mobile.

4.13. Soit le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ orthonormé est considéré comme fixe. Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé est mobile par rapport à R_1 de manière que l'on ait constamment :

$$\vec{z} = \vec{z}_1 ; \quad (\vec{x}, \vec{x}_2) = \omega t = \psi$$

t désignant le temps et ω une constante positive.

Un point matériel M est mobile par rapport à R et R_1 . On désigne par $\vec{a}_A(M)$ et $\vec{v}_A(M)$ respectivement l'accélération et la vitesse de M dans son mouvement par rapport à R_1 et par $\vec{a}_r(M)$ l'accélération de M dans son mouvement par rapport à R_1 . On suppose que dans le mouvement de M par rapport à R_1 , on a constamment :

$$z_1 = 0, \quad \vec{a}_a(M) = -K^2 \overrightarrow{OM} + 2\omega \vec{z}_1 \wedge \vec{v}_A(M)$$

1- Exprimer le vecteur $\vec{a}_r(M)$ au moyen du vecteur position \overrightarrow{OM}

2- Exprimer les coordonnées de M par rapport au repère R_1 en fonction de t.

CHAPITRE 5

GÉOMÉTRIE DE MASSE

5.1. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre traite des notions sur la masse des corps solides, à savoir : le centre de masse, le moment d'inertie, le produit d'inertie et, leur interaction et causalité gravitationnelle. L'intérêt mécanique de ces grandeurs apparaîtra dans la dynamique.

5.2. MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL

La masse mesure la quantité de la matière contenue dans un corps donné. Elle est invariable au cours du temps (en mécanique galiléenne) et possédant la propriété d'additivité, à savoir : la masse d'un système matériel est la somme des masses de ses parties élémentaires. La masse est une grandeur scalaire positive.

Un système matériel est un ensemble discret ou continu de points matériels.

5.2.1. Système continu

On appelle masse d'un système matériel continu, la grandeur scalaire :

$$m = \int_{p \in (S)} dm(p) \quad (5.1)$$

$dm(p)$: est la mesure de la masse élémentaire du système matériel au voisinage du point matériel P .

- Si le corps (S) a un volume V :

$$m = \int_V \rho(P) dv \quad (5.2)$$

Où dv est un élément de volume et $\rho(P)$ est la masse volumique du corps au point P.

Pour un système homogène, la masse volumique est constante et $m = \rho V$.

- Si le corps (S) a une surface S, le cas d'une plaque par exemple :

$$m = \int_S \sigma(P) ds \quad (5.3)$$

Où ds est un élément de surface et $\sigma(P)$ est la densité surfacique au point P.

- Si le corps (S) a une courbe L (le cas d'une ligne matérielle) :

$$m = \int_L \lambda(P) dl \quad (5.4)$$

Où dl est un élément de longueur et $\lambda(P)$ est la densité linéique au point P.

5.2.2. Système discret

La masse d'un système formé de n points matériels de masse m_i est la somme des masses :

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (5.5)$$

5.3. CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTEME MATERIEL

5.3.1. Définition

On appelle centre d'inertie ou centre des masses \mathbf{G} du solide, le point de l'espace où on applique les effets d'inertie, c'est le barycentre des différentes centres \mathbf{P} des éléments de masses élémentaires dm :

$$\int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} dm(P) = 0 \quad (5.6)$$

Si \mathbf{O} étant un point arbitraire de l'espace.

$$\int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} dm(P) = \int_{P \in (S)} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm(P) = \vec{0}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int dm} \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm$$

Si nous rapportons l'espace à un repère orthonormé R ($O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) d'origine O (Figure 5.1), nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{OG} = X_G \vec{x} + Y_G \vec{y} + Z_G \vec{z} \text{ et } \overrightarrow{OP} = x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z}$$

Les coordonnées du centre d'inertie d'un système matériel G sont donc exprimées par :

$$X_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} x dm, \quad Y_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} y dm, \quad Z_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} z dm \quad (5.7)$$

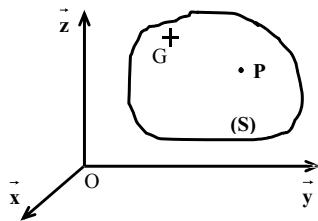


Figure 5.1

5.3.2. Exemple d'application

a)- (S) est un volume

Déterminer la position du centre d'inertie d'une demi-sphère homogène pleine de rayon R (Figure 5.2a).

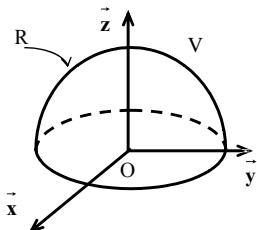


Figure 5.2a

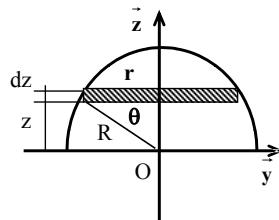


Figure 5.2b

Nous avons la formule générale :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm$$

Par raison de symétrie :

$$X_G = Y_G = 0$$

Sachant que :

$$dm = \rho dv \text{ et } M = \rho V$$

La côte du centre d'inertie est donc :

$$Z_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (m)} z dm \Rightarrow Z_G = \frac{1}{V} \iiint_{P \in (V)} z dv$$

Pour un élément de volume dv d'épaisseur dz (Figure 5.2b):

Nous avons :

$$R^2 = r^2 + z^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - z^2$$

Cet élément de volume dv choisi, s'écrit :

$$dv = \pi r^2 dz \Rightarrow dv = \pi (R^2 - z^2) dz$$

D'où :

$$Z_G = \frac{1}{V} \int_0^R \pi (R^2 - z^2) z dz$$

Et, par conséquent :

$$Z_G = \frac{\pi}{V} \left[\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{V} \frac{R^4}{4}$$

Or :

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

D'où :

$$Z_G = \frac{3}{8} R$$

5.3.3. Cas d'un système complexe

Très souvent un système est composé d'un ensemble de systèmes élémentaires pour lesquels les calculs sont aisés, chacun de ces systèmes a un centre d'inertie G_i et une masse m_i . D'après le théorème de l'intégration, le centre d'inertie du système complexe s'obtient par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n \int_{P \in S_i} \overrightarrow{OP} dm$$

Or :

$$\overrightarrow{OG}_i = \frac{1}{m_i} \int_{P \in S_i} \overrightarrow{OP} dm$$

Donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \overrightarrow{OG}_i \quad (5.8)$$

Le point \mathbf{G} est donc le barycentre des points \mathbf{G}_i affectés des coefficients \mathbf{m}_i .

On procède en deux étapes pour déterminer le centre d'inertie :

- On détermine le centre d'inertie \mathbf{G}_i de chacun des sous-ensembles de masse \mathbf{m}_i .
- On détermine le centre d'inertie \mathbf{G} comme barycentre des points \mathbf{G}_i affectés des coefficients \mathbf{m}_i .

Remarque

- Il ne faut pas confondre le centre d'inertie avec le centre de gravité. Le centre de gravité \mathbf{C} est, par définition, le point d'application du poids du solide.
- Le centre de gravité \mathbf{C} coïncide avec le centre d'inertie \mathbf{G} si et seulement si le champ de pesanteur est uniforme.

5.3.4. Théorème de GULDIN

Ce théorème exprimé par deux énoncés de géométrie euclidienne. Il a été mis par un mathématicien suisse P. GULDIN, pour la détermination du centre de gravité, comme suit :

1^{er} théorème : le centre d'inertie d'une courbe plane

Etant donné un arc de courbe plane Γ , de longueur L , de densité linéique λ , tournant autour d'un axe fixe de son plan, sans le rencontrer (Figure 5.3). La rotation de l'arc engendre une surface de révolution dont l'aire latérale est égale au produit de la longueur de l'arc par la longueur de la circonférence décrite par le centre d'inertie G de Γ .

$$S_{\Gamma} = \ell_{\Gamma} \cdot 2\pi \cdot R_G \quad (5.9)$$

Où R_G est le rayon du cercle décrit par le centre G .

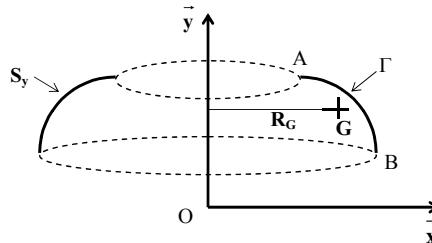


Figure 5.3.

Suivant l'axe x, pour $dm = \lambda dl$, d'après la relation (5.7) on écrit :

$$x_G = \frac{\int \lambda x dl}{m}$$

Si λ est constant et L est la longueur de Γ , on peut écrire pour ($R_G = x_G$) :

$$Lx_G = \int_{\Gamma} x dl \Leftrightarrow 2\pi \times Lx_G = 2\pi \times \int_{\Gamma} x dl = \int_{\Gamma} 2\pi x dl = S_y$$

Où S_y représente l'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe Γ autour de l'axe Oy. On a donc :

$$x_G = \frac{S_y}{2\pi L}$$

Lorsque la courbe tourne autour de l'axe x, elle engendre la surface S_x , d'où:

$$y_G = \frac{S_x}{2\pi L}$$

2^e théorème : le centre d'inertie d'une surface plane

Etant donné une portion de surface S , tournant autour d'un axe fixe de son plan, sans le rencontrer (Figure 5.4). Cette surface engendre un volume intérieur V égal au produit de l'aire A_S de la surface par la longueur de la circonférence décrite par le centre d'inertie G de cette aire supposée homogène.

$$V = A_S \cdot 2\pi R_G \quad (5.10)$$

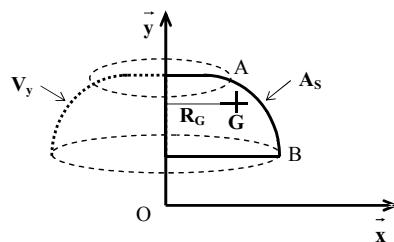


Figure 5.4.

Si V_y et V_x sont les volumes engendrés par la rotation de la surface S autour des axes Ox et Oy. Les coordonnées du centre d'inertie s'expriment :

$$x_G = \frac{V_y}{2\pi A_S} \quad ; \quad y_G = \frac{V_x}{2\pi A_S}$$

5.3.5. Exemples d'applications

a)- Déterminer le centre d'inertie d'un demi-cercle (Figure 5.5a).

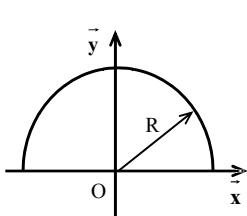


Figure 5.5a

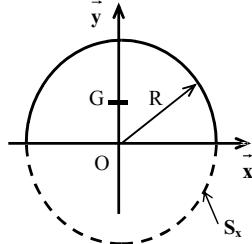


Figure 5.5b

Solution :

Par raison de symétrie G se trouve sur l'axe Oy ($X_G = 0$).

D'après le 1^{er} théorème de GULDIN :

$$S_\ell = L \times 2\pi x R_G = \pi R \times 2\pi x R_G$$

Or, la rotation du demi-cercle, autour de l'axe Ox engendre la forme d'une sphère de surface (Figure 5.5b):

$$S_\ell = 4\pi R^2$$

L'égalité entre les deux expressions de la surface donne :

$$R_G = Y_G = \frac{2R}{\pi}$$

b)- Déterminer le centre d'inertie d'un demi-disque matériel (Figure 5.6a):

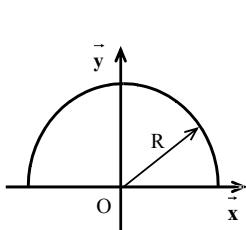


Figure 5.6a

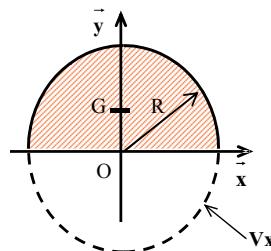


Figure 5.6b

Solution :

Le centre G se trouve sur Oy ($x_G = 0$: Centre de symétrie)

D'après le 2^{ième} théorème de Guldin

$$V = \frac{\pi R^2}{2} \times 2\pi x R_G$$

Or, la rotation du demi-disque autour de l'axe Ox (Figure 5.6b), engendre la forme d'une sphère de volume :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

D'où

$$R_G = Y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

5.4. TENSEUR D'INERTIE D'UN SOLIDE

5.4.1. Définition

On appelle moment d'inertie d'un système discret homogène par rapport à un axe Δ , la quantité :

$$I_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Où r_i est la distance du point P_i représentant l'élément matériel de masse m_i à l'axe Δ .

Pour un système continu, on a :

$$I_{\Delta} = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dv \quad (5.11)$$

On peut aussi écrire $I_{\Delta} = m R^2$, où m est la masse totale du système et R le rayon de giration.

5.4.2. Matrice d'inertie

Pour un solide (S) donné, un point O appartenant à (S) et un repère orthonormé R ($O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$), on appelle tenseur d'inertie de (S), en O , relativement au repère considéré, noté \mathbf{I}_O , la matrice symétrique :

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Où :

$$I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm : \text{Moment d'inertie par rapport à l'axe des } x.$$

$I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm$: Moment d'inertie par rapport à l'axe des y.

$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$: Moment d'inertie par rapport à l'axe des z.

$I_{xy} = \int_S xy dm$: Produit d'inertie par rapport aux axes Ox et Oy .

$I_{xz} = \int_S xz dm$: Produit d'inertie par rapport aux axes Ox et Oz .

$I_{yz} = \int_S yz dm$: Produit d'inertie par rapport aux axes Oy et Oz .

5.4.4. Cas particuliers

a)- Le système présente certains plans de symétrie

- Si Oxy est un plan de symétrie : à tout point M_1 de côté z, on peut associer le point M_2 de côté -z (Figure 5.7.):

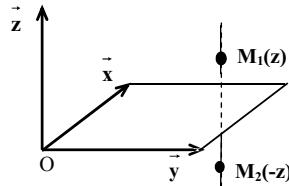


Figure 5.7.

$$I_{xz} = \int_{P \in S} xz dm = 0 \quad \text{et} \quad I_{yz} = \int_{P \in S} yz dm = 0 \quad \text{Car} \quad z_G = 0$$

- Si Oyz est plan de symétrie : à tout point M_1 de côté x, on peut associer le point M_2 de côté -x (Figure 5.8) :

$$I_{yx} = \int_{P \in (S)} y x dm = 0 \quad \text{et} \quad I_{zx} = \int_{P \in (S)} z x dm = 0 \quad \text{Car} \quad x_G = 0$$

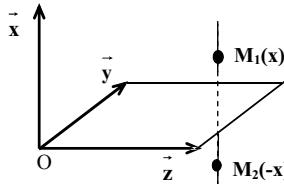


Figure 5.8.

- De même, Si Oyz est plan de symétrie : à tout point M_1 de côté y , on peut associer le point M_2 de côté $-y$ (Figure 5.9):

$$I_{yz} = \int_{P \in (S)} y z dm = 0 \quad \text{et} \quad I_{xy} = \int_{P \in (S)} x y dm = 0 \quad \text{Car} \quad y_G = 0$$

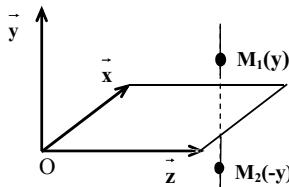


Figure 5.9

b)- Le système est un corps de révolution autour de l'axe Oz :

Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie ; en particulier les plans Oxz et Oyz, donc :

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$I_{xx} = I_{yy} \quad (\text{Ox et Oy ont le même rôle})$$

5.4.4. Axes principaux d'inertie

La matrice d'inertie \mathbf{I}_0 est diagonalisable, il existe une base orthonormée $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ dans laquelle elle est diagonale :

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} I_{0x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{0y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{0z_1} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Les termes de la diagonale sont les moments d'inertie principaux ou moments d'inertie autour des axes principaux Ox, Oy, Oz. Corrélativement, les produits d'inertie sont nuls.

Pour un solide quelconque, la recherche de ses axes principaux conduit à une équation du troisième degré (équation aux valeurs propres de la matrice d'inertie).

5.5 THEOREME DE HUYGENS

Connaissant le moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) passant par le centre d'inertie **O** (Figure 5.10), le théorème de Huygens permet de calculer le moment d'inertie par rapport à tout axe $A\vec{u}$ parallèle à $O\vec{u}$.

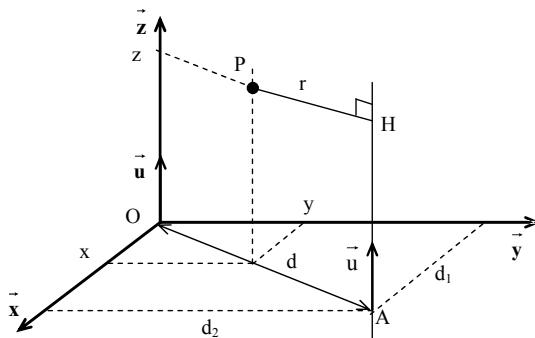


Figure 5.10.

Considérons le repère R ($O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) représenté sur la Figure 5.10 .

Soit :

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z), \quad \overrightarrow{OH} = (d_1, d_2, z)$$

On a alors :

$$\overrightarrow{HP} = (x - d_1, y - d_2, 0)$$

D'où

$$I_{Au}^- = \int_V ((x - d_1)^2 + (y - d_2)^2) dm$$

$$I_{Au}^- = \int_V (x^2 + y^2) dm + \int_V (d_1^2 + d_2^2) dm - 2 \int_V (xd_1 + yd_2) dm$$

$$I_{Au}^- = I_{O\vec{u}} + md^2 - 2 d_1 \int_V x dm - 2 d_2 \int_V y dm$$

Où d est la distance entre $O\vec{u}$ et $A\vec{u}$.

Or par définition, $\int_V x dm = \int_V y dm = 0$ car O est le centre d'inertie. On a

donc :

$$I_{Au}^- = I_{O\vec{u}} + md^2 \tag{5.14}$$

Enoncé du théorème de Huygens

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $A\vec{u}$ est égal au moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe parallèle à $O\vec{u}$ passant

par le centre de masse du solide augmenté du produit de la masse de ce solide par le carré de la distance du centre de masse à Ox.

5.6. MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UNE DROITE QUELCONQUE (Δ)

Le moment d'inertie par rapport à une droite est défini par :

$$I_{\Delta} = \int_{P \in (S)} r^2 dm$$

Où r représente la distance de l'élément matériel P à la droite (Δ) ;

Si le tenseur d'inertie en O étant connu I_O , le moment d'inertie par rapport à la droite Δ (Figure 5.11), passant par O et de direction \vec{n} est :

$$I_{\Delta} = \vec{n}^t I_O \vec{n} \quad (5.15)$$

Où \vec{n}^t est le transposé du vecteur directeur unitaire de la droite (Δ) ;

Donc le moment d'inertie du système (S) par rapport à la droite (Δ , \vec{n}) est le produit doublement contracté du tenseur d'inertie I_O par le vecteur unitaire \vec{n} .

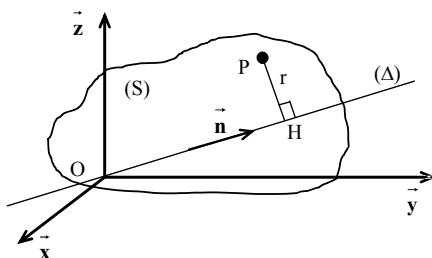


Figure 5.11

5.7 PRODUIT D'INERTIE PAR RAPPORT A DEUX DROITES PERPENDICULAIRES

Le produit d'inertie noté I_{nt} est défini par :

$$I_{nt} = \int_{P \in (S)} x_n x_t dm$$

Avec x_n et x_t sont les coordonnées de P sur les axes (Δ) et (Δ')

$$x_n = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} \quad x_t = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{t}$$

Le tenseur d'inertie étant connu en O, I_O , le produit d'inertie par rapport aux droites perpendiculaires $\Delta(O, \vec{n})$ et $\Delta'(O, \vec{t})$ (Figure 5.12) est :

$$I_{nt} = -(\vec{t})^t I_O \vec{n} \quad (5.16)$$

Où :

\vec{n} : Vecteur directeur unitaire de la droite (Δ) passant par O ;

$(\vec{t})^t$: Le transposé du vecteur directeur unitaire \vec{t} de la droite (Δ') perpendiculaire avec (Δ) en O.

Le produit d'inertie d'un système par rapport à deux droites perpendiculaires (O, \vec{n}) et (O, \vec{t}) est égal à l'opposé du produit doublement contracté du tenseur d'inertie par les vecteurs \vec{n} et \vec{t} .

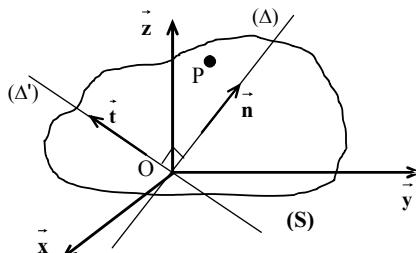


Figure 5.12.

5.8 EXERCICES RESOLUS

5.1. Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'un quart de cercle matériel (S), de rayon R (Figure 5.13a);

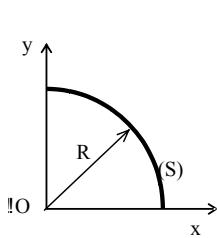


Figure 5.13a

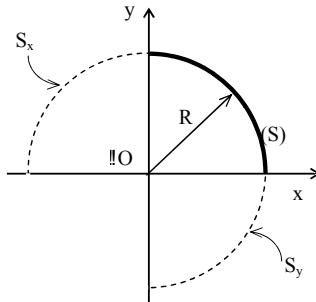


Figure 5.13b

Solution :

a- le premier théorème de Guldin.

La surface engendrée par la rotation du quart de cercle matériel autour de l'axe Ox est une demi-sphère de surface (Figure 5.13b) :

$$S_x = L_\Gamma 2\pi y_G$$

La longueur où le périmètre du quart de cercle est :

$$L_\Gamma = \pi R / 2$$

D'où :

$$S_x = S_y = \pi^2 R x_G = \pi^2 R y_G \quad (1)$$

D'autre part, la surface géométrique de la demi-sphère est :

$$S_x = 2\pi R^2 \quad (2)$$

Egalisant les relations (1) et (2), on obtient les coordonnées du centre de gravité du quart de cercle :

$$x_G = 2R/\pi$$

La même chose, lorsque (S) tourne autour de l'axe (Oy), on obtient :

$$y_G = 2R/\pi$$

b- la méthode analytique :

D'après la formule du centre de gravité d'une ligne matérielle de masse linéaire λ (Figure 5.13c):

$$x_G = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int \lambda x dl}{\lambda L} = \frac{\int x dl}{L}$$

Or, $dl = R d\theta$, avec $0 \leq \theta \leq \pi/2$

Et, $x = R \cos \theta$

$$x_G = \frac{\int R \cos \theta R d\theta}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2R \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta}{\pi} = \frac{2R}{\pi} [\sin \theta]_0^{\pi/2} = \frac{2R}{\pi}$$

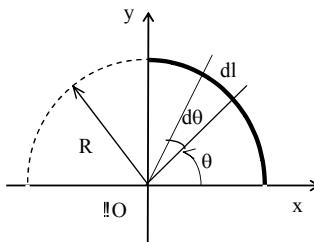


Figure 5.13c

La même chose avec y_G :

$$y_G = 2R/\pi$$

D'où, les coordonnées du centre de gravité du quart du cercle matériel :

$$x_G = y_G = 2R/\pi$$

5.2. Déterminer la matrice d'inertie dans le centre O, d'un cylindre homogène (S), de rayon R (Figure 5.14a) par rapport à un repère orthonormé (O, xyz).

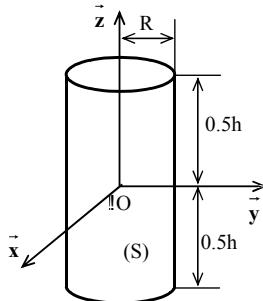


Figure 5.14a

Solution :

La matrice d'inertie d'un cylindre (S) plein, de centre O et de rayon R. l'axe Oz est parallèle à la génératrice L.

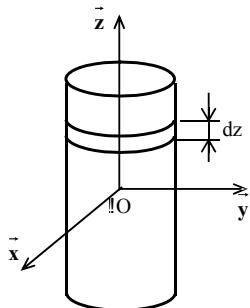


Figure 5.14b

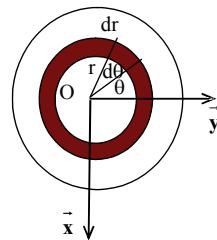


Figure 5.14c

La matrice d'inertie dans le centre O du cylindre (Figure 5.14a), s'écrit :

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Puisque l'axe Oz est un axe de révolution, les produits d'inerties sont nuls :

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Le reste des éléments de la matrice s'exprime :

$$I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm, \quad I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm, \quad I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

- Détermination de I_{zz} :

Puisque $x = y$, la base du cylindre forme l'équation du cercle (Figure 5.14c):

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

D'où:

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S r^2 dm$$

La masse m du cylindre de masse volumique ρ est :

$$m = \rho \pi R^2 h$$

Et l'élément de la masse (Figure 5.14c) :

$$dm = \rho r dr d\theta dz$$

avec :

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

D'ici,

$$I_{zz} = \int_S r^2 dm = \rho \int_0^{R/2} \int_0^{\pi/2} \int_{-h/2}^{h/2} r^3 dr d\theta dz = \rho \pi R^2 h \frac{R^2}{2} = \frac{m R^2}{2}$$

- Détermination de I_{xx} et I_{yy} :

Puisque $x = y$, on aura $I_{xx} = I_{yy}$

Pour la simplification, on détermine la somme :

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_S (x^2 + y^2) dm + 2 \int_S z^2 dm$$

D'où :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2} + \int_S z^2 dm$$

On pose :

$$I' = \int_S z^2 dm = \rho \int_V z^2 dV$$

L'élément de volume dV pour un disque d'épaisseur dz et de rayon R est :

$$dV = \pi R^2 dz$$

D'où:

$$I' = \rho \int_V z^2 dV = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{R/2} z^2 \pi R^2 dz d\theta dr = \rho \pi R^2 \frac{h^3}{12} = \frac{m h^2}{12}$$

Par conséquent,

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$$

Donc la matrice d'inertie du cylindre dans le centre O, s'écrit :

$$I_O = m \begin{bmatrix} \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}$$

5.4. En déduire la matrice d'inertie d'une barre AB, rectiligne, de longueur h, de milieu O (Figure 5.15).

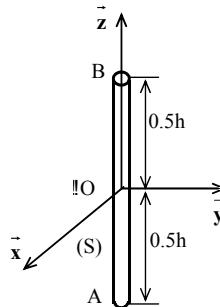


Figure 5.15

Solution :

- Matrice d'inertie d'une tige de longueur h, de centre O

La tige est un cylindre de rayon négligeable devant la longueur h ($r \ll h$) et h parallèle à l'axe de rotation Oz, d'où :

$$I_O = \frac{mh^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4. En déduire la matrice d'inertie d'un disque de centre O et de rayon R (Figure 5.16).

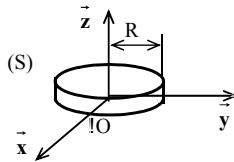


Figure 5.16

Solution :

– La matrice d'inertie d'un disque de rayon R et de centre O.

Le disque est un cylindre de centre O, d'épaisseur e négligeable devant le rayon R ($e \ll R$), donc la matrice d'inertie s'écrit :

$$I_O = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5.5. Déterminer la matrice d'inertie en O, par rapport à un repère orthonormé (O, xyz), d'un parallélépipède (S) de côtés a , b et c (Figure 5.17). Les axes Ox, Oy et Oz passent par le centre O et sont parallèles aux côtés du parallélépipède.

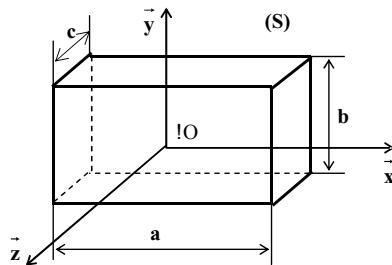


Figure 5.17

La matrice d'inertie au centre O du parallélépipède, s'écrit :

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Puisque l'axe Oz est un axe de symétrie, les produits d'inerties sont nuls ($I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$). Le reste des éléments de la matrice s'écrit alors :

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm, \quad I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm, \quad I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$$

La masse m du parallélépipède est :

$$m = \rho V = \rho abc$$

Et l'élément de la masse :

$$dm = \rho dx dy dz,$$

$$\text{et } -a/2 \leq x \leq a/2, \quad -b/2 \leq y \leq b/2, \quad -c/2 \leq z \leq c/2,$$

On remarque que les termes $\int_{(S)} x^2 dm$, $\int_{(S)} y^2 dm$ et $\int_{(S)} z^2 dm$ tendent vers le

$$\text{calcul d'un seul type d'intégrale } I^* = \int_{(S)} x^2 dm$$

$$I^* = \int_{(S)} x^2 dm = \rho \int_{(V)} x^2 dx dy dz = \rho \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz = \rho \frac{a^3 bc}{12} = \frac{ma^2}{12}$$

De la même manière :

$$\int_{(S)} y^2 dm = \frac{mb^2}{12}$$

Et

$$\int_{(S)} z^2 dm = \frac{mc^2}{12}$$

D'où :

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(S)} y^2 dm + \int_{(S)} z^2 dm = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$$

Et,

$$I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm = \int_{(S)} x^2 dm + \int_{(S)} z^2 dm = \frac{m}{12} (a^2 + c^2)$$

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(S)} x^2 dm + \int_{(S)} y^2 dm = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

D'où la matrice d'inertie du parallélépipède au centre O, s'écrit :

$$I_O = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

5.6. On considère une plaque rectangulaire sans épaisseur et de côtés **a** et **b** (Figure 5.18).

- 1- Déterminer la matrice d'inertie au centre O de la plaque,
- 2- Déterminer la matrice d'inertie au coin C de la plaque,
- 3- Déterminer le moment d'inertie par rapport à une diagonale (Δ) de la plaque.

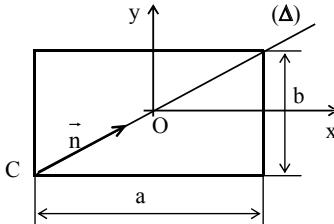


Figure 5.18

Solution :

1- La matrice d'inertie au centre O de la plaque

Puisque la plaque est un parallélépipède d'épaisseur négligeable ($c \approx 0$), la matrice d'inertie peut être déduite de l'exercice 5.5 précédent, où :

$$I_O = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

2- La matrice d'inertie au coin C de la plaque

La matrice dans le coin C de la plaque s'écrit :

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{Cx} & -I_{Cxy} & -I_{Cxz} \\ -I_{Cyx} & I_{Cy} & -I_{Cyz} \\ -I_{Czx} & -I_{Czx} & I_{Cz} \end{bmatrix}$$

Connaissant les éléments de la diagonale de la matrice en O, donc on peut utiliser le théorème de Huygens pour la détermination des éléments I_{Cx} , I_{Cy} et I_{Cz} .

$$I_{Cx} = I_{xx} + md_y^2 = \frac{mb^2}{12} + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_{Cy} = I_{yy} + md_x^2 = \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_{Cz} = I_{zz} + md_{OC}^2 = \frac{m(a^2 + b^2)}{12} + m\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2 = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$$

Les produits d'inerties I_{Cxy} , I_{Cxz} et I_{Cyz}

$$I_{Cxy} = \int_{(m)} xy dm, \quad I_{Cxz} = \int_{(m)} xz dm, \quad I_{Cyz} = \int_{(m)} yz dm$$

Puisque l'épaisseur de la plaque est négligeable, sa variation suivant l'axe z est nul, donc :

$$I_{Cxz} = I_{Cyz} = 0$$

La masse m de la plaque de densité surfacique σ est :

$$m = \sigma ab$$

Et l'élément de la masse dm, s'écrit :

$$dm = \sigma dx dy$$

avec : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$

$$I_{Cxy} = \int_{(m)} xy dm = \sigma \int_0^a x dx \int_0^b y dy = \frac{mab}{4}$$

Donc, la matrice d'inertie au coin C de la plaque s'écrit :

$$I_C = m \begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{3} \end{bmatrix}$$

3- Le moment d'inertie par rapport à la diagonale (Δ) de la plaque.

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par le centre O du solide, est donné par la relation :

$$I_\Delta = \vec{n}^t I_o \vec{n}$$

Où :

\vec{n} est le vecteur unitaire du vecteur de la diagonale (Δ);

\vec{n}^t est le transposé du vecteur \vec{n} ;

I_o le moment d'inertie par rapport au centre O.

Soit :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\vec{n}^t = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Et

$$I_{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{pmatrix} \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où le moment d'inertie par rapport à la diagonale (Δ) est :

$$I_{\Delta} = \frac{m}{6} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)}$$

5.9. EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

5.7. Le corps solide homogène dans la Figure 5.19, est composé d'une sphère de centre C et de rayon R, d'une barre de longueur L et d'un demi-cylindre de rayon r. Déterminer le moment d'inertie du corps solide par rapport à l'axe Oz.

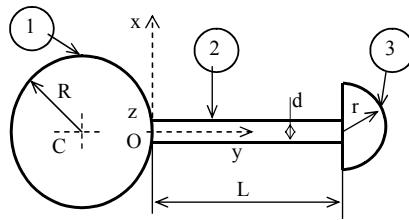


Figure 5.19

S.A. :

$$I_{zz}^1 = \frac{2}{5} m_1 R^2 + m_1 R^2 = \frac{7}{5} m_1 R^2, \quad I_{zz}^2 = \frac{m_2 L^2}{12} + m_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{m_2 L^2}{3}$$

$$I_{zz}^3 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{m_3 r^2}{2} \right) - m_3 \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 \right) + m_3 (L + \frac{4r}{3\pi})^2, \quad I_{zz}^O = I_{zz}^1 + I_{zz}^2 + I_{zz}^3$$

5.8. Déterminer le centre de gravité du solide homogène (S) dans chacune des cas suivants:

a - (S) est un quart de plaque matérielle elliptique ;

b - (S) est une plaque formée d'une plaque triangulaire surmontée d'une demi plaque elliptique.

5.9. Déterminer les produits d'inertie I_{xy} , I_{xz} , I_{zy} par rapport au centre O, pour la Figure 5.20, sachant que le corps solide homogène est composé de huit éléments identiques (barres) de longueur l et de masse m.

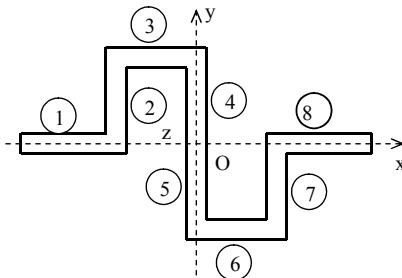


Figure 5.20

S.A. :

$$I_{yz}^O = 0, \quad I_{xy}^O = 0, \quad I_{xz}^O = 2ml^2$$

5.10. On considère le volume constitué du huitième (1/8) d'une sphère de masse volumique ρ . Calculer :

- 1- Les éléments de la matrice d'inertie en O, dans la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, en fonction de la masse \mathbf{m} de ce volume et du rayon R ;
- 2- les coordonnées du centre de masse G.

5.11. Déterminer la matrice d'inertie en O, par rapport au repère orthonormé (O, xyz), pour les solides (S) suivants, supposé tous homogènes et de masse \mathbf{m} .

- a - (S) est une sphère de centre O et de rayon R.
- b - (S) est un cylindre creux de centre O et de rayon R. l'axe Oz est parallèle à la génératrice L.
- c - (S) est un cercle de centre O et de rayon R. l'axe Oz est l'axe du cercle.
- d - (S) est un cône de révolution, plein, de sommet O, de demi-angle au sommet α , de hauteur h, de rayon de base R. Oz est l'axe du cône

5.12. Un disque homogène, de rayon R, de centre O, de masse surfacique σ , est rapporté à deux axes orthogonaux Ox, Oy. Il subit un alésage qui le

prive d'une partie circulaire de centre C et de rayon r ($r < R/2$) (Figure 5.21). Calculer :

- 1-La masse du disque évidé ;
- 2- Les coordonnées de son centre de masse G ;
- 3- Le moment d'inertie par rapport à l'axe Cz perpendiculaire au plan du disque

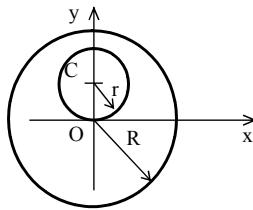


Figure 5.21

5.13. Un cube homogène (Figure 5.22), de masse \mathbf{m} , dont la longueur de son côté est \mathbf{a} , tourne autour de l'axe (Δ) colinéaire à la diagonale \mathbf{AB} , avec un taux de rotation ω .

- Déterminer le moment d'inertie par rapport à la l'axe (Δ) colinéaire à la diagonale \mathbf{AB} .

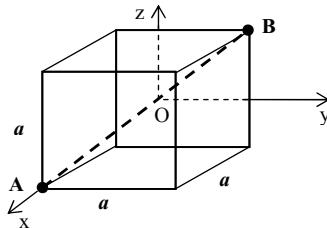


Figure 5.22

CHAPITRE 6

DYNAMIQUE DU SOLIDE RIGIDE

6.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on présente dans la première partie quelques éléments de la cinétiqe du corps rigide, qui traite les relations associant les grandeurs cinématiques et la répartition des masses, telles que : la quantité de mouvement, le moment cinétique, la quantité d'accélération, le moment dynamique et l'énergie cinétique. Ensuite, la deuxième partie sera réservée à la dynamique qui traite le mouvement des corps matériels en liaison avec les forces qui s'exercent sur ces corps. Enfin, la dernière partie de ce chapitre traite les théorèmes généraux régissant la dynamique et de l'énergie cinétique.

6.2 ÉLÉMENT DE CINETIQUE D'UN CORPS SOLIDE

6.2.1 Quantité de mouvement et moment cinétique

Dans ce paragraphe on va définir la quantité de mouvement et le moment cinétique d'un :

- Point matériel
- Ensemble de Points Matériels
- Système matériel continu

6.2.1.1 Point matériel

Soit \vec{V}_M le vecteur vitesse d'un point M ayant une masse m . On appelle quantité de mouvement du point M la grandeur vectorielle :

$$m\vec{V}_M$$

Le moment cinétique du point M est le moment par rapport à un point quelconque A de la quantité de mouvement. Il s'exprime par :

$$\overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}_M$$

6.2.1.2 Ensemble de points matériels

La quantité de mouvement d'un système de n points matériels M_i de masse m_i est la grandeur vectorielle :

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_{M_i}$$

Le moment cinétique en un point A de l'ensemble de n points matériels M_i est la somme des moments par rapport à ce point des quantités de mouvement élémentaires ($m_i \vec{V}_{M_i}$), soit :

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{V}_{M_i}$$

6.2.1.3. Système matériel continu

La quantité de mouvement d'un système matériel continu de volume V est :

$$\vec{p} = \int_V \vec{V}_M dm(M) \quad (6.1)$$

Le moment cinétique du système en un point A est :

$$\vec{\sigma}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm(M) \quad (6.2)$$

6.2.2 Torseur cinétique

6.2.2.1 Définition

Par définition, le moment cinétique au point **A** est :

$$\vec{\sigma}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm(M)$$

Il est alors évident que si on a :

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \int_V (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \wedge \vec{V}_M dm(M) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}$$

Le moment cinétique obéit donc à la loi du transport des moments, ce qui montre que qu'il est possible de construire un torseur cinétique ayant pour résultante la quantité de mouvement.

Le moment cinétique par rapport au point **A** s'écrit :

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}$$

Le torseur cinétique au point **A** s'écrit alors :

$$[C]_A = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{\sigma}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V \vec{V}_M dm(M) \\ \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm(M) \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

6.2.2.2 Calcul de la résultante

Soit **O** le point origine, la résultante du torseur cinétique où la quantité du mouvement du système peut s'écrire :

$$\vec{p} = \int_V dm \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \overrightarrow{OM} dm = \frac{d}{dt} (m \overrightarrow{OG}) = m \vec{V}_G$$

Où **G** est le centre d'inertie.

Le torseur cinétique au centre **A**, s'écrit alors :

$$[C]_A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{mV_G} \\ \overrightarrow{\sigma_A} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

6.2.2.3 Moment cinétique d'un solide indéformable en G (centre d'inertie)

Le moment cinétique d'un solide indéformable au centre d'inertie **G**, est :

$$\vec{\sigma}_G = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_M dm = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{V}_G + \overrightarrow{MG} \wedge \vec{\Omega}) dm$$

$$\vec{\sigma}_G = \left(\int_V \overrightarrow{GM} dm \right) \wedge \vec{V}_G + \int_V \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}) dm$$

Or $\int_V \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$, car **G** est le centre d'inertie du système matériel. D'autre

part :

$$I_G(\vec{\Omega}) = \int_V \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}) dm \quad (6.5)$$

D'où, le moment cinétique d'un solide indéformable s'écrit :

$$\vec{\sigma}_G = I_G \vec{\Omega} \quad (6.6)$$

6.2.2.4 Moment cinétique d'un solide indéformable en un point de vitesse nulle

Si le solide est indéformable, nous pouvons utiliser la règle de distribution des vitesses :

$$\vec{\sigma}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{V}_A + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}) dm$$

$$\vec{\sigma}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}) dm = I_A \vec{\Omega}$$

Alors, si \mathbf{A} est un point d'un solide indéformable tel que $\vec{V}_{A \in S} = \vec{0}$, le moment cinétique en \mathbf{A} de ce solide est :

$$\vec{\sigma}_A = I_A \vec{\Omega} \quad (6.7)$$

Si la rotation a lieu autour d'un fixe (A, \vec{z}) et que (A, \vec{z}) est un axe principal d'inertie, on a :

$$\vec{\sigma}_A = I_{zz} \vec{\Omega} \quad (6.8)$$

6.2.3 Torseurs dynamiques

6.2.3.1 Définition

Soit \vec{a}_M l'accélération d'un point M telle que :

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt}$$

On appelle le vecteur de la quantité d'accélération élémentaire du point M , la relation :

$$\vec{D} = \vec{a}_M dm$$

et le vecteur du moment dynamique au point A , la relation :

$$\vec{\delta}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_M dm(M)$$

En conséquence, le torseur dynamique en A s'écrit :

$$[D]_A = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V \vec{a}_M dm(M) \\ \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_M dm(M) \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Le moment dynamique obéit à la règle du transport des moments :

$$\vec{\delta}_A = \vec{\delta}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{D} \quad (6.10)$$

6.2.3.2 Calcul de la résultante

La résultante (la quantité d'accélération) \overrightarrow{D} du torseur dynamique s'écrit :

$$\overrightarrow{D} = \int_V dm \vec{a}_M = \int_V dm \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V dm \vec{V}_M = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{V}_G)}{dt}$$

Le point **G** est le centre d'inertie. S'il y a conservation de la masse, la résultante \overrightarrow{D} est donc égale au produit de la masse par l'accélération du centre d'inertie :

$$\overrightarrow{D} = m \vec{a}_G \quad (6.11)$$

6.2.3.3 Calcul du moment dynamique

Pour rappel, la dérivée de l'expression suivante $\int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm \vec{V}_M$ est :

$$\frac{d}{dt} \int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm \vec{V}_M = \int_V \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge dm \vec{V}_M + \int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm \frac{d\vec{V}_M}{dt}$$

D'ici, on peut écrire que :

$$\int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm \vec{V}_M - \int_V \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge dm \vec{V}_M$$

D'où, le moment dynamique qui s'écrit :

$$\vec{\delta}_A = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \overrightarrow{AM} \wedge dm - \int_V \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge dm \vec{V}_M$$

Donc:

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} - \int_V (\vec{V}_M - \vec{V}_A) \wedge dm \vec{V}_M$$

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}_A \wedge m \vec{V}_G$$

Le moment dynamique devient alors :

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}_A \wedge m \vec{V}_G \quad (6.12)$$

- si A est confondu avec le centre d'inertie G, on aura :

$$\vec{\delta}_G = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}$$

- si A est un point géométrique fixe ($\vec{V}_A = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \vec{0}$)

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}$$

6.2.4 Énergie cinétique

6.2.4.1 Définition

Pour un système matériel continu (S), on appelle énergie cinétique la quantité scalaire exprimée en joules (J) :

$$E_C = \int_V \frac{1}{2} dm(M) \vec{V}_M^2 \quad (6.13)$$

6.2.4.2 Energie cinétique d'un solide indéformable

Soit N un point d'un solide indéformable, nous pouvons écrire :

$$E_C = \frac{1}{2} \int_V dm(M) \vec{V}_M (\vec{V}_N + \vec{MN} \wedge \vec{\Omega})$$

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{V}_N \int_V dm \vec{V}_M + \frac{1}{2} \int_V dm \vec{V}_M (\vec{\Omega} \wedge \vec{NM})$$

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{V}_N m \vec{V}_G + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \int_V \overrightarrow{MN} \wedge dm \vec{V}_M$$

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{V}_N m \vec{V}_G + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \vec{\sigma}_N \quad (6.14)$$

D'où, l'énergie cinétique est :

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{V}_N m \vec{V}_G + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \vec{\sigma}_N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_N \\ \vec{\sigma}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \vec{V}_G \\ \vec{C}_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [V]_N [C]_N \quad (6.15)$$

Cas particuliers :

* Si $N = G$ centre d'inertie (Solide indéformable)

$$E_C = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} I_G \vec{\Omega} \quad (6.16)$$

Où:

$\frac{1}{2} m \vec{V}_G^2$: est l'énergie cinétique de translation ;

$\frac{1}{2} \vec{\Omega} I_G \vec{\Omega}$: est l'énergie cinétique de rotation.

* Si le solide a uniquement un mouvement de translation :

$$E_C = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2$$

* Si le solide est en rotation sans translation autour d'un axe fixe (O, \vec{z}); le moment cinétique au point N appartient à l'axe (O, \vec{z}), s'écrit :

$$\vec{\sigma}_N = I_N \vec{\Omega} \text{ car } \vec{V}_N = \vec{0}$$

Soit :

$$\boldsymbol{\sigma}_N = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xz} \Omega \\ I_{yz} \Omega \\ I_{zz} \Omega \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique est donc :

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_N = \frac{1}{2} I_{zz} \Omega^2$$

6.3 ÉQUATION DE LA DYNAMIQUE POUR UN CORPS SOLIDE

6.3.1 Rappel de la dynamique des particules

La dynamique des particules est régie par des principes basés sur les lois de Newton.

- Première loi de Newton

Dans un repère absolu (R_0), une particule π de masse m totalement isolée possède une quantité de mouvement constante. Elle s'exprime :

$$\vec{p}_O = m \vec{V}_O$$

- Deuxième loi de Newton

Une particule (π) est soumise à des actions de la part d'une autre particule. À l'instant t , ces actions sont représentées par le vecteur force \vec{F} s'exerçant sur π . On écrit :

$$\frac{d}{dt} (m \vec{V}_O) = \vec{F}$$

$$\vec{F} = m \vec{a}_O$$

Où \vec{a}_O est le vecteur accélération de la particule (π).

- Troisième loi de Newton

Si, à l'instant t , il y a une interaction entre deux particules π_1 et π_2 , les forces de π_1 sur π_2 ($\vec{F}_{1/2}$) et de π_2 sur π_1 ($\vec{F}_{2/1}$) sont égales et opposées sur la ligne d'action $\pi_1 \pi_2$ (Figure 6.1), où :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

C'est le principe de réciprocité où le principe **d'action – réaction**.

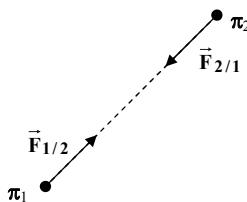


Figure 6.1. Principe d'action – réaction

6.3.2. Principe fondamental de la dynamique

Ce principe correspond à la généralisation des lois de Newton pour un système matériel possédant une dimension.

L'égalité des torseurs des efforts extérieurs et dynamique s'écrit :

$$[F_e]_O = [D]_O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_O(F_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_O \end{pmatrix}$$

Il en résulte deux égalités vectorielles qui seront traitées par la suite.

6.3.2.1 Théorème de la résultante cinétique

L'égalité des résultantes des deux torseurs se traduit par :

$$\vec{F}_e = \vec{D} \Leftrightarrow \vec{F}_e = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_G \quad (6.17)$$

Nous retrouvons la deuxième loi de Newton appliquée à une particule ou la première équation du principe fondamental de la dynamique.

6.3.2.2 Théorème du moment cinétique

L'égalité des moments des torseurs des efforts extérieurs et dynamique se traduit par :

$$\vec{M}_O(F_e) = \vec{\delta}_O$$

Si l'on écrit les torseurs en un point fixe A par rapport à un repère galiléen, on a la seconde équation du principe fondamental de la dynamique, qui s'écrit :

$$\vec{M}_A(F_e) = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} \quad (6.18)$$

6.3.2.3 Cas d'un solide mobile autour d'un axe fixe Δ

On considère l'axe Δ comme axe principal d'inertie, passant par un point O. Le théorème du moment cinétique en O permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O(F_e) \quad \Leftrightarrow \quad I_\Delta \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{M}_\Delta(F_e) \quad (6.19)$$

6.4 THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

6.4.1 Puissance et travail d'une force

La puissance d'une force \vec{F} appliquée à un point matériel M de vitesse \vec{V}_M à l'instant t est :

$$P = \vec{F}(t) \cdot \vec{V}(M) \quad (6.20)$$

L'unité de la puissance est le Watt (1 watt = 1 joule/sec)

Le travail élémentaire accompli pendant l'intervalle de temps dt est :

$$dW = Pdt = \vec{F}(t) \vec{V}(M)dt = \vec{F}(t)d\overline{OM}$$

Le travail accompli entre deux instants t_0 et t_1 est donc :

$$W = \int dW = \int_{t_0}^{t_1} Pdt \quad (6.21)$$

L'unité du travail est le joule.

Cas des solides indéformables

Le solide étant indéformable, si A et M sont deux points du solide, la puissance des efforts extérieurs est :

$$\begin{aligned} P &= \int_D \vec{V}_M d\vec{F} = \int \left(\vec{V}_A + \vec{MA} \wedge \vec{\Omega} \right) d\vec{F} \\ P &= \vec{V}_A \int d\vec{F} + \int \left(\vec{MA} \wedge \vec{\Omega} \right) d\vec{F} = \vec{V}_A \int d\vec{F} + \vec{\Omega} \int \left(\vec{MA} \wedge d\vec{F} \right) \end{aligned}$$

Finalement, la puissance des efforts extérieurs pour un solide indéformable est le produit du torseur cinématique par le torseur des efforts extérieurs :

$$P = \vec{V}_A \vec{F}_e + \vec{\Omega} \vec{M}_A (F_e) = [V]_A [F_e]_A \quad (6.22)$$

6.4.2 Théorème de l'énergie cinétique

Cas d'un système discontinu

L'énergie cinétique d'un système discontinu s'écrit :

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^2 \quad (6.23)$$

On a alors:

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v} \vec{a}_i$$

Connaissant $m\vec{a}_i = \vec{F}_i$, il vient :

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n P_i = P$$

La puissance des efforts intérieurs et extérieurs est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_C}{dt} = P = (P_{int} + P_{ext}) \quad (6.24)$$

Cas du solide indéformable (continu)

Dans le cas d'un solide continu, nous avons :

$$E_C = \frac{1}{2} \int_D \vec{V}_M^2 dm$$

Si A est un point du solide :

$$\frac{dE_C}{dt} = \int \vec{V}_M \vec{a}_M dm = \int (\vec{V}_A + \vec{MA} \wedge \vec{\Omega}) \vec{a}_M dm$$

$$\frac{dE_C}{dt} = \vec{V}_A \int \vec{a}_M dm + \vec{\Omega} \int \vec{AM} \wedge \vec{a}_M dm$$

$$\frac{dE_C}{dt} = \vec{V}_A \vec{D} + \vec{\Omega} \vec{\delta}_A = [V]_A [D]_A$$

La dérivée de l'énergie cinétique est égale au produit des torseurs cinétique et dynamique. Elle est donc égale à la puissance des quantités d'accélération absolue, soit :

$$\frac{dE_C}{dt} = P_{\text{ext}} \quad (6.25)$$

Conservation de l'énergie mécanique

Le théorème de l'énergie cinétique peut s'écrire :

$$dE_C = Pdt = dW \quad (6.26)$$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel, on a alors :

$$dW = - dU$$

Le théorème de l'énergie cinétique devient donc :

$$E_C + U = \text{Constante} \quad (6.27)$$

La quantité $E_C + U$ est appelée l'énergie mécanique totale du système considéré.

6.5 EXERCICES RESOLUS

6.1. Pour le disque de l'exercice 4.2, déterminer les torseurs cinétique et dynamique au centre C.

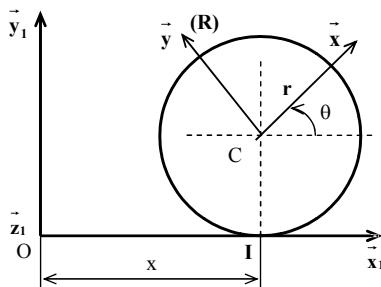


Figure 6.2.

Solution :

1- Le torseur cinématique au centre C (solution de l'exercice 4.2), est :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \dot{x} \vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

Où :

$\vec{\Omega}_{C/R_1} = \dot{\theta} \vec{z}_1$: le taux de rotation du disque autour de son axe

$\vec{V}_C = \dot{x} \vec{x}_1$: le vecteur vitesse de translation du centre C.

2- Le torseur cinétique au centre C, du disque s'écrit :

$$[C]_C = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{\sigma}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V \vec{V}_M dm(M) \\ \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm(M) \end{pmatrix}$$

Avec :

\vec{p} : La quantité de mouvement au centre C du disque;

$$\vec{p} = m \vec{V}_C = m \dot{x} \vec{x}_1$$

$\vec{\sigma}_c$: Le moment cinétique au centre C du disque. Puisque le disque est en rotation autour de l'axe Cz, il s'écrit :

$$\vec{\sigma}_c = I_{Cz} \vec{\Omega} = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta} \vec{z}_1$$

D'où, le torseur cinétique au centre C qui s'exprime par :

$$[C]_C = \begin{pmatrix} m \dot{x} \vec{x}_1 \\ \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta} \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

3- Le torseur dynamique au centre C du disque, s'écrit :

$$[D]_C = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_C \end{pmatrix}$$

Avec :

\vec{D} : La quantité d'accélération du centre C du disque;

$$\vec{D} = m \frac{d\vec{V}_G}{dt} = m \frac{d\vec{V}_C}{dt} = m \ddot{x} \vec{x}_1$$

$\vec{\delta}_C$: Le moment dynamique au centre C du disque. Puisque le disque est en rotation autour de l'axe Cz, il s'écrit :

$$\vec{\delta}_C = \frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = I_{Cz} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{1}{2} mr^2 \ddot{\theta} \vec{z}_1$$

D'où, le torseur dynamique au centre C :

$$[D]_C = \begin{pmatrix} m\ddot{x}\vec{x}_1 \\ \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

6.2. Une bille pleine, de rayon R et de masse m , est placée dans une gouttière inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontal (Figure 6.3). La position du centre C est définie par le vecteur :

$$\overrightarrow{OC} = \vec{x}\vec{u} + \vec{a}\vec{v}$$

La rotation de la bille autour de Oz_0 est définie par l'angle θ . On demande d'écrire :

- 1- les torseurs cinématique, cinétique et dynamique du centre C de la bille;
- 2- la condition de roulement sans glissement dans les points de contact de la bille avec la gouttière

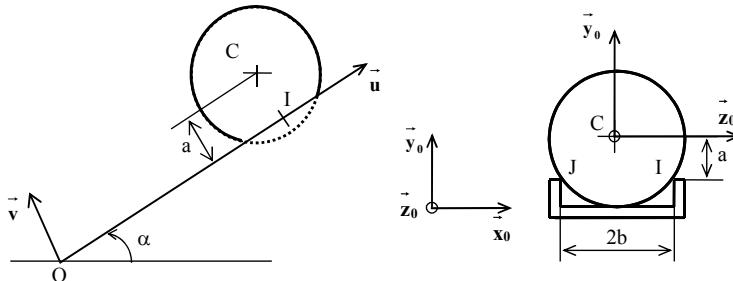


Figure 6.3.

Solution :

La bille est en mouvement hélicoïdal sur la gouttière.

Mouvement de rotation autour de l'axe Cz_0 avec un angle θ ;

Mouvement de translation sur la gouttière par une trajectoire x ;

- Le torseur cinématique au centre C du disque s'écrit :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_C \end{pmatrix}$$

Avec:

$\vec{\Omega}$: Le vecteur taux de rotation du centre C de la bille autour de l'axe Cz_0 ;

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z}_0 = \dot{\theta} \vec{z}_0$$

\vec{V}_C : Le vecteur vitesse de translation du centre C de la bille par rapport au point O. Il s'obtient par la dérivée du vecteur position \vec{OC} par rapport au repère fixe, où :

$$\vec{V}_C = \frac{d\vec{OC}}{dt} = \frac{d(\vec{x}u + \vec{av})}{dt} = \dot{\vec{x}}u$$

D'où le torseur cinématique au centre C de la bille qui s'écrit :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\theta} \vec{z}_0 \\ \vec{\dot{x}}u \end{pmatrix}$$

- Le torseur cinétique au centre C de la bille est :

$$[C]_C = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{\sigma}_C \end{pmatrix}$$

Avec :

\vec{p} : La quantité de mouvement au centre C de la bille, exprimée par :

$$\vec{p} = m\vec{V}_C = m\vec{\dot{x}}u$$

$\vec{\sigma}_c$: Le moment cinétique de la bille au centre C, il s'écrit :

$$\vec{\sigma}_c = I_{Cz} \vec{\Omega} = \frac{2}{5} m R^2 \dot{\theta} \vec{z}_0$$

Donc :

$$[C]_c = \begin{pmatrix} m \ddot{x} \vec{u} \\ \frac{2}{5} m R^2 \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

- Le torseur dynamique de la bille au centre C s'écrit :

$$[D]_c = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_c \end{pmatrix}$$

Avec :

\vec{D} : La quantité d'accélération de la bille au centre C. Elle s'obtient par la dérivée de la quantité de mouvement \vec{p} ;

$$\vec{D} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = m \ddot{x} \vec{u}$$

$\vec{\delta}_c$: Le moment dynamique au centre C de la bille. Il s'écrit :

$$\vec{\delta}_c = \frac{d\vec{\sigma}_c}{dt} = I_{Cz} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{2}{5} m R^2 \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

D'où :

$$[D]_c = \begin{pmatrix} m \ddot{x} \vec{u} \\ \frac{2}{5} m R^2 \ddot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

2- la condition de roulement sans glissement de la bille sur la gouttière :

La bille est en contact ponctuel avec la gouttière aux points **I** et **J**. la condition de roulement sans glissement, exige que :

$$\vec{V}_I = \vec{V}_J = \vec{0}$$

Or, la vitesse du point, s'obtient par l'application de la formule de distribution des vitesses dans un corps solide indéformable :

$$\vec{V}_I = \vec{V}_C + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}$$

D'après la figure 6.3, le vecteur position \vec{IC} , s'écrit :

$$\vec{IC} = \vec{av} - \vec{bz}_0$$

D'où :

$$\vec{V}_I = \vec{x} \vec{u} + (\vec{av} - \vec{bz}_0) \wedge \vec{\theta} \vec{z}_0 = (\dot{x} + a\dot{\theta}) \vec{u}$$

Donc, la condition de roulement sans glissement dans les points de contact de la bille avec la gouttière est :

$$\vec{V}_I = \vec{0} \Leftrightarrow \dot{x} + a\dot{\theta} = 0$$

6.3. Un pendule pesant de poids P , de longueur $2l$, est fixé dans le point O par une liaison pivot parfaite (Figure 6.4). A l'instant initial le pendule est lâché sans vitesse initiale de la position verticale par un angle de rotation θ . On demande d'écrire les torseurs cinématique, cinétique et dynamique au centre G du pendule.

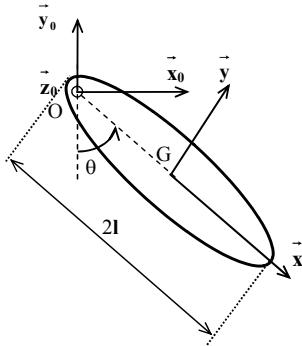


Figure 6.4.

Solution :

Le pendule est en mouvement de rotation autour de l'axe Oz_0 avec un angle θ ;

1- Le torseur cinématique au centre G est :

$$[V]_G = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_G \end{pmatrix}$$

Avec:

$\vec{\Omega}$: Le taux de rotation du centre G du pendule autour de l'axe Oz_0 ;

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z}_0 = \dot{\theta} \vec{z}_0$$

\vec{V}_G : La vitesse de rotation du centre G du pendule autour de l'axe Oz_0 , elle s'écrit :

$$\vec{V}_G = \vec{GO} \wedge \vec{\Omega}$$

$$\text{Où : } \vec{GO} = -l \vec{x}$$

Donc :

$$\vec{V}_G = -l \vec{x} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = l \dot{\theta} \vec{y}$$

D'où le torseur cinématique au centre G du pendule est :

$$[V]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ l \dot{\theta} \vec{y} \end{pmatrix}$$

2- Le torseur cinétique au centre G du pendule :

$$[C]_G = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{\sigma}_G \end{pmatrix}$$

Où la quantité de mouvement au centre G du pendule est :

$$\vec{p} = m \vec{V}_G = \frac{P}{g} l \dot{\theta} \vec{y}$$

Et, son moment cinétique qui s'écrit :

$$\vec{\sigma}_G = I_{Gz} \vec{\Omega} = I_{Gz} \dot{\theta} \vec{z}_0$$

D'où :

$$[C]_G = \begin{pmatrix} \frac{P}{g} l \dot{\theta} \vec{y} \\ I_{Gz} \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

3- Le torseur dynamique en G est :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix}$$

La quantité d'accélération du pendule est :

$$\vec{D} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{P}{g} d(l\dot{\theta}\vec{y}) = \frac{P}{g} (l\ddot{\theta}\vec{y} - l\dot{\theta}^2 \vec{x})$$

Et, le moment dynamique au centre G :

$$\vec{\delta}_C = \frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = I_{Gz} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = I_{Gz} \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

D'où, le torseur dynamique s'écrit :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Pl}{g} (-\dot{\theta}^2 \vec{x} + \ddot{\theta} \vec{y}) \\ I_{Gz} \ddot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

6.6. Une plaque rectangulaire homogène, de masse **m**, de largeur **a** et de longueurs **b**, tourne autour de l'une de ses diagonales avec un taux de rotation **Ω** (Figure 6.5). Déterminer le moment cinétique au centre de la plaque.

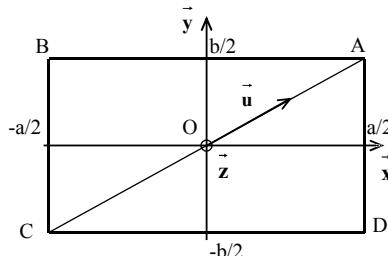


Figure 6.5.

Solution :

La matrice d'inertie au centre O de la plaque s'écrit (Exercice 5.6):

$$I_O = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

Le taux de rotation par rapport à l'axe de rotation est : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}\vec{u}$, \vec{u} est le vecteur unitaire de l'axe de rotation représenté par la diagonale CA de la plaque, il s'écrit :

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a\vec{x} + b\vec{y})$$

D'où :

$$\vec{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a\vec{x} + b\vec{y})$$

Puisque la plaque est en mouvement de rotation autour de la diagonale CA, le moment cinétique au centre O de la plaque est :

$$\vec{\sigma}_O = I_O \vec{\Omega} = \sigma_{Ox} \vec{x} + \sigma_{Oy} \vec{y} + \sigma_{Oz} \vec{z}$$

Les composantes σ_{Ox} , σ_{Oy} et σ_{Oz} du moment cinétique en O sont données par la relation matricielle :

$$\vec{\sigma}_O = \begin{bmatrix} \sigma_{Ox} \\ \sigma_{Oy} \\ \sigma_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

Il vient alors :

$$\vec{\sigma}_O = \begin{bmatrix} \sigma_{Ox} \\ \sigma_{Oy} \\ \sigma_{Oz} \end{bmatrix} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a\Omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b\Omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En conséquence,

$$\vec{\sigma}_O = \frac{m\Omega}{12\sqrt{a^2 + b^2}} (ab^2 \vec{x} + a^2 b \vec{y})$$

Il est évident que les composantes de $\vec{\sigma}_O$ s'expriment :

$$\sigma_{Ox} = \frac{m\Omega ab^2}{12\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sigma_{Oy} = \frac{m\Omega a^2 b}{12\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sigma_{Oz} = 0$$

6.5. Une sphère de masse **m**, de centre G, de rayon R, est mobile autour d'un point fixe O de sa surface. Elle roule sans glisser sur un plan horizontal P, P est situé à la distance R du point O, et I le point de contact de la sphère avec le plan (P) (Figure 6.6).

1- Déterminer l'axe instantané de rotation de la sphère.

2- Le taux de rotation autour de cet axe étant Ω , déterminer la quantité de mouvement \vec{p} .

3- Déterminer le moment cinétique en O. Calculer son module et l'angle qu'il fait avec \overrightarrow{OG} .

4- Calculer l'énergie cinétique de la sphère.

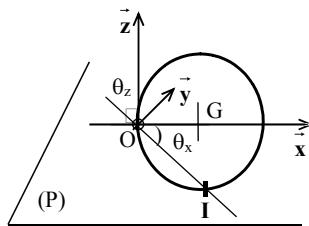


Figure 6.6.

Solution :

1- l'axe instantané de rotation le la sphère :

- Le point O de la sphère est fixe, donc sa vitesse est nulle, où :

$$\vec{V}_O = \vec{0}$$

- La sphère est en mouvement de rotation avec roulement sans glissement, donc le point de contact I de la sphère avec le plan (P) a une vitesse nulle, où :

$$\vec{V}_I = \vec{0}$$

Donc le vecteur \overrightarrow{OI} formé des points O et I de vitesses nulles est l'axe instantané de rotation de la sphère.

Or,

$$\overrightarrow{OI} = \cos \theta_x \vec{x} + \cos \theta_y \vec{y} + \cos \theta_z \vec{z}$$

Les cosinus directeurs s'obtiennent :

$$\cos \theta_x = \frac{|\overrightarrow{OG}|}{|\overrightarrow{OI}|} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta_y = 0$$

$$\cos\theta_z = -\frac{|\overrightarrow{OG}|}{|\overrightarrow{OI}|} = -\frac{R}{R\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où, l'axe instantané de rotation est :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} + 0\vec{y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{z}$$

2- la quantité de mouvement du centre G de la sphère :

$$\vec{p} = m \vec{V}_G$$

Puisque la sphère est en mouvement de rotation :

$$\vec{V}_G = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{\Omega}$$

Ainsi, le vecteur taux de rotation de la sphère est colinéaire avec l'axe \overrightarrow{OI} .
Donc, Il est évident que :

$$\vec{\Omega} = \Omega \frac{\overrightarrow{OI}}{\|\overrightarrow{OI}\|}$$

Donc,

$$\vec{\Omega} = \Omega \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} + 0\vec{y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{z} \right) = \Omega \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x} - \vec{z})$$

Et

$$\overrightarrow{GO} = -R \vec{x}$$

D'où :

$$\vec{V}_G = -R \vec{x} \wedge \Omega \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} + 0 \vec{y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{z} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \Omega \vec{y}$$

En conséquence,

$$\vec{p} = -\frac{\sqrt{2}}{2} m R \Omega \vec{y}$$

3- Le moment cinétique en O :

La sphère est en mouvement de rotation autour de OI, d'où le moment cinétique au point O est :

$$\vec{\sigma}_O = I_O \vec{\Omega} = \sigma_{Ox} \vec{x} + \sigma_{Oy} \vec{y} + \sigma_{Oz} \vec{z}$$

I_O est la matrice d'inertie au point O. Or, la matrice d'inertie de la sphère au centre G s'écrit :

$$I_G = \frac{2}{5} m R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant le théorème de Huygens, on obtient I_O :

$$I_O = \frac{m R^2}{5} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Les composantes σ_{Ox} , σ_{Oy} et σ_{Oz} du moment cinétique en O sont données par la relation matricielle suivante :

$$\vec{\sigma}_O = \begin{bmatrix} \sigma_{Ox} \\ \sigma_{Oy} \\ \sigma_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_O = \begin{bmatrix} \sigma_{Ox} \\ \sigma_{Oy} \\ \sigma_{Oz} \end{bmatrix} = \frac{mR^2}{5} \frac{\Omega\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\vec{\sigma}_O = mR^2 \frac{\Omega\sqrt{2}}{10} (2\vec{x} - 7\vec{z})$$

Ou encore la valeur absolue du moment cinétique qui s'écrit :

$$\|\vec{\sigma}_O\| = mR^2 \Omega \frac{\sqrt{106}}{10}$$

4- L'énergie cinétique de la sphère en rotation autour d'un point fixe est :

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_O \cdot \vec{\Omega}$$

On remplace $\vec{\sigma}_O$ et $\vec{\Omega}$ par leurs expressions respectives dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$E_C = \frac{9}{20} mR^2 \Omega^2$$

6.6 Un système est constitué de deux masses \mathbf{M} et \mathbf{M}' reliées entre elles par un câble inextensible qui passe sur une poulie de rayon R . la masse \mathbf{M}' est suspendue dans le vide et la masse \mathbf{M} glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle α (Figure 6.7a). On néglige le frottement du câble sur la poulie. On demande d'écrire :

1- la relation entre le taux de rotation de la poulie $\bar{\Omega}$ et l'accélération \bar{a}_G des deux corps solides

2- le principe fondamental de la dynamique et déterminer l'accélération du système en deux cas :

a) La masse de la poulie est négligeable ;

b) La masse de la poulie est égale à \mathbf{m} ;

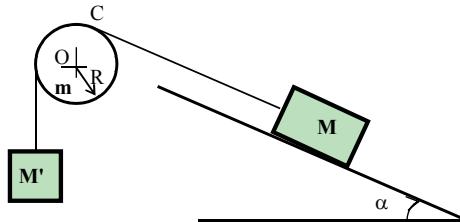


Figure 6.7a

Solution :

On supprime les liaisons dans la Figure 6.7a et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans les Figures 6.7b, 6.7c et 6.7d.

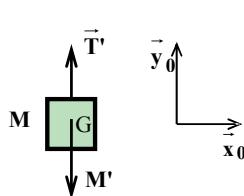


Figure 6.7b

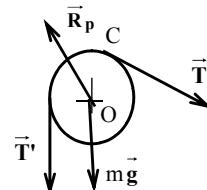


Figure 6.7c

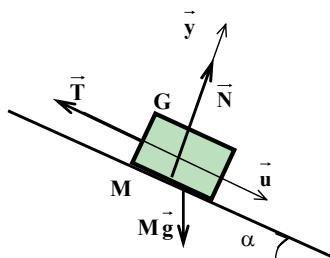


Figure 6.7d

1- la relation entre le taux de rotation de la poulie $\vec{\Omega}$ et l'accélération \vec{a}_G des deux corps solides :

Le vecteur vitesse du point de contact C entre le câble et la poulie s'écrit (Figure 6.7c) :

$$\vec{V}_C = \vec{V}_O + \vec{CO} \wedge \vec{\Omega} z_0 = -R \vec{v} \wedge \vec{\Omega} z_0 = -R \vec{\Omega} \vec{u}$$

Donc, le vecteur accélération de ce point est la dérivée de \vec{V}_C :

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{V}_C}{dt} = -R \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \vec{u}$$

Or, comme le câble est inextensible, et, il n'y a pas de glissement entre le câble et la poulie, les deux masses seront en mouvement de translation. Par conséquent, les accélérations des masses M et M' sont égales à l'accélération du point C de la poulie, où :

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C = -R \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \vec{u}$$

2 - Le principe fondamental de la dynamique et l'accélération du système;

a- La masse de la poulie est négligeable ;

- Le principe fondamental appliqué à la masse M' (Figure 6.7b)

Le torseur dynamique au centre G' du corps solide de masse M' s'écrit :

$$[D]_{G'} = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_{G'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M' \vec{a}_{G'} \vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}_G$$

Et, le torseur des forces extérieures au centre G' , s'obtient :

$$[F_e]_{G'} = \begin{pmatrix} \vec{F}_{ex} \\ \vec{M}_{G'}(F) \end{pmatrix}_{G'} = \begin{pmatrix} (T' - M'g)\vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité de la résultante des deux torseurs ($[D]_{G'} = [F_e]_{G'}$), permet d'écrire :

$$T' - M'g = M'a_G \Leftrightarrow T' = M'(a_G + g)$$

- Le principe fondamental appliqué à la masse M (Figure 6.7d)

Le torseur dynamique au centre G du corps solide de masse M s'écrit :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ma_G \vec{u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et le torseur des forces extérieures au centre G, s'obtient :

$$[F_e]_G = \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_G(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Mg \sin \alpha - T)\vec{u} + (R - Mg \cos \alpha)\vec{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité de la résultante des deux torseurs ($[D]_G = [F_e]_G$), permet d'écrire :

$$Mg \sin \alpha - T = Ma_G \Leftrightarrow T = M(g \sin \alpha - a_G)$$

L'accélération du système a_G :

Puisque le frottement est négligeable dans la poulie, la tension dans le câble reste constante, on écrit :

$$T = T',$$

On remplace les tensions T et T' par leurs expressions respectives dans la relation ci dessus, on obtient l'accélération du système :

$$a_G = \frac{Mg \sin \alpha - M'g}{M + M'}$$

b- La masse de la poulie est égale à m ;

- *Le principe fondamental appliqué à la poulie de masse m (Figure 6.7c)*

On écrit le torseur dynamique au centre O de la poulie :

$$[D]_O = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = I_{Oz} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} z_0 = \frac{mR^2}{2} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} z_0 \end{pmatrix}$$

Et le torseur des forces extérieures au centre O de la poulie, s'écrit:

$$[F_e]_O = \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_{O(F)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R}_p - mg + \vec{T} + \vec{T}' \\ (-RT + RT')z_0 \end{pmatrix}$$

L'égalité des moments des deux torseurs de la poulie, donne :

$$\frac{mR^2}{2} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = -RT + RT' \Leftrightarrow \frac{m}{2} R \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = -T + T'$$

Or:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C = -R \frac{d\vec{\Omega}}{dt} u$$

Ou encore :

$$-\frac{m}{2} a_G = T' - T$$

Cette équation nous permet d'obtenir l'accélération du système a_G :

$$a_G = \frac{Mg \sin \alpha - M'g}{M + M' + \frac{m}{2}}$$

Le même résultat obtenu pour a_G si $\mathbf{m} = \mathbf{0}$.

6.7 Pour le pendule de l'exercice 6.3. (Figure 6.4). On demande d'écrire l'équation du mouvement en utilisant le :

- principe fondamental de la dynamique ;
- théorème de l'énergie cinétique.

Solution :

On remplace les liaisons dans la Figure 6.4 par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 6.4b.

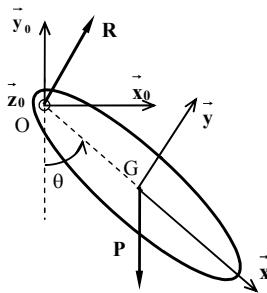


Figure 6.4a

Nous avons la réaction :

$$\vec{R} = R_x \vec{x} + R_y \vec{y}$$

et

$$\overrightarrow{OG} = L \vec{x}$$

1. Les résultats trouvés dans l'exercice 6.3 sont :

a- Le torseur cinématique au centre G, du pendule est :

$$[V]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ l\dot{\theta} \vec{y} \end{pmatrix}$$

b- Le torseur cinétique au centre G du pendule :

$$[C]_G = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{\sigma}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \vec{l} \dot{\theta} \vec{y} \\ g \\ I_{Gz} \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

c- Le torseur dynamique au centre G du pendule est :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \vec{l} (\ddot{\theta} \vec{y} - \dot{\theta} \vec{x}) \\ g \\ I_{Gz} \ddot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

A - L'équation du mouvement en utilisant le principe fondamental de la dynamique;

De la figure 6.4a, on écrit le torseur des forces extérieures au centre G du pendule :

$$[F_e]_G = \begin{pmatrix} (R_x + P \cos \theta) \vec{x} + (R_y - P \sin \theta) \vec{y} \\ -R_y l \vec{z} \end{pmatrix}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique ($[D]_G = [F_e]_G$) donne trois équations scalaires :

$$\begin{cases} -\frac{P}{g} l^2 \dot{\theta}^2 = R_x + P \cos \theta & (1) \\ \frac{P}{g} l \ddot{\theta} = R_y - P \sin \theta & (2) \\ I_G \ddot{\theta} = -l R_y & (3) \end{cases}$$

On remplace R_y de l'équation (3) dans l'équation (2), on obtient l'équation du mouvement en $\theta(t)$:

$$\left(I_G + \frac{P}{g} l^2 \right) \ddot{\theta} + Pl \sin \theta = 0 \quad (4)$$

La solution de cette équation permet de calculer R_x et R_y .

B- L'équation du mouvement par l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique :

Le pendule étant un solide indéformable, l'énergie cinétique est :

$$E_C = \frac{1}{2} [V]_G [C]_G = \frac{1}{2} \vec{V}_G \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_G = \frac{1}{2} \left(I_G + \frac{P}{g} l^2 \right) \dot{\theta}^2$$

La dérivée de l'énergie cinétique est donc :

$$\frac{dE_C}{dt} = \left(I_G + \frac{P}{g} l^2 \right) \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

D'autre part, la puissance des forces extérieures s'écrit :

$$P_{ext} = [V]_G [F_e]_G = \vec{V}_G \cdot \vec{F}_e + \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_0(F)$$

La puissance de la réaction R en O est :

$$P_{ext}(R) = [V]_O [F_e]_O = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

La puissance du poids P est :

$$P_{ext}(P) = [V]_G [F_e]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ l \dot{\theta} \vec{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ 0 \end{pmatrix} = -Pl \dot{\theta} \sin \theta$$

Or, le théorème de l'énergie cinétique, s'écrit :

$$\frac{dE_C}{dt} = P_{ext}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE_C}{dt} &= \left(I_G + \frac{P}{g} l^2 \right) \dot{\theta} \ddot{\theta} = -Pl \sin \theta \dot{\theta} \Leftrightarrow \left(I_G + \frac{P}{g} l^2 \right) \ddot{\theta} = -Pl \sin \theta \\ &\Leftrightarrow \left(I_G + \frac{P}{g} l^2 \right) \ddot{\theta} + Pl \sin \theta = 0 \quad (5)\end{aligned}$$

C'est l'équation du mouvement obtenue par l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique qui est similaire à l'équation (4) obtenue par l'utilisation du principe fondamental de la dynamique.

Puisque le système est conservatif, nous pouvons utiliser la conservation d'énergie :

Le potentiel U du poids P peut être calculé à partir de la relation :

$$dW = -P dz = -dU$$

$$W = mg(z_1 - z_2) = P(z_1 - z_2)$$

$$U = -Pl \cos \theta + \text{const}$$

$$E_C + U = \frac{1}{2} \left(I_G + ml^2 \right) \dot{\theta}^2 - Pl \cos \theta = \text{const.}$$

Cette équation est une intégrale première de l'équation (5).

Dans la position initiale $\theta = 0$ const = Pl

Le taux de rotation est calculé comme suit :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2P(l+\cos\theta)}{(I_G + ml^2)}$$

6.8 Un demi disque de rayon r , de masse m et de centre d'inertie G peut osciller sans glissement au point de contact I , avec un angle θ , dans le plan fixe R_0 (O_0 , \vec{x}_0 , \vec{y}_0 , \vec{z}_0). Le repère R (C , \vec{u} , \vec{v} , \vec{z}_0) est lié au solide tel que $\overrightarrow{GC} = \lambda \vec{u}$ (Figure 6.8a).

- On demande d'écrire l'équation du mouvement en utilisons le théorème de l'énergie cinétique.

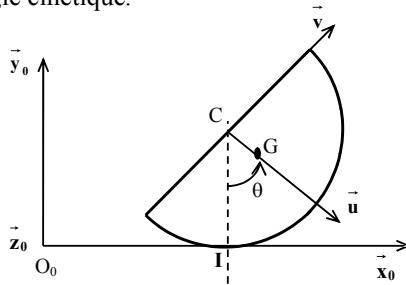


Figure 6.8a

Solution :

On remplace les liaisons dans la Figure 6.8a par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 6.8b.

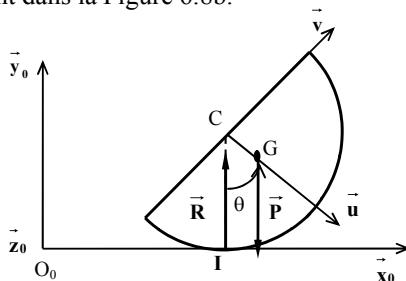


Figure 6.8b

Solution :

1- Le torseur cinématique dans le centre G du demi-disque :

Sachant que le demi-disque oscille avec un angle θ , donc le vecteur taux de rotation du demi-disque s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z}_0 = \dot{\theta} \vec{z}_0$$

Et, la vitesse du centre G, s'obtient par la formule de distribution des vitesses dans un corps solide indéformable :

$$\vec{V}_G = \vec{V}_I + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega}$$

Or,

$\vec{V}_I = \vec{0}$, car il y a oscillation sans glissement.

Et,

$$\vec{GI} = \vec{GC} + \vec{CI} = -\lambda \vec{u} - R \vec{y}_0$$

Donc,

$$\vec{V}_G = (-\lambda \vec{u} - R \vec{y}_0) \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = \lambda \dot{\theta} \vec{v} - R \dot{\theta} \vec{x}_0$$

Avec :

$$\vec{u} = \sin \theta \vec{x}_0 - \cos \theta \vec{y}_0$$

$$\vec{v} = \cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0$$

D'où :

$$\vec{V}_G = (\lambda \cos \theta - R) \dot{\theta} \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_0$$

Donc, le torseur cinématique au centre G, est :

$$[V]_G = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \vec{V}_G = (\lambda \cos \theta - R\dot{\theta}) \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_0 \end{pmatrix}$$

2- le torseur cinétique au centre G du demi-disque :

La quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p} = m \vec{V}_G = \frac{P}{g} (\lambda \dot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}) \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_0$$

Et, le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_G = I_G \dot{\theta} \vec{z}_0$$

Où I_G est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G, \vec{z}_0)

D'où, le torseur cinétique au centre G est :

$$[C]_G = \begin{pmatrix} \vec{p} = \frac{P}{g} (\lambda \dot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}) \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_0 \\ \vec{\sigma}_G = I_{Gz} \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Puisque, le solide étant indéformable, l'énergie cinétique est :

$$E_C = \frac{1}{2} [V]_G [C]_G = \frac{1}{2} \vec{V}_G \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \vec{\sigma}_G$$

$$E_C = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{g} (\lambda \dot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}) \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_0 \right) \left((\lambda \dot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}) \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_0 \right) + \frac{1}{2} \dot{\theta} \vec{z}_0 \left(I_{Gz} \dot{\theta} \vec{z}_0 \right)$$

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left((\lambda \dot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta})^2 + (\lambda \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right) + \frac{1}{2} I_{Gz} \dot{\theta}^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{g} \lambda^2 - 2 \frac{P}{g} \lambda R \cos \theta + \frac{P}{g} R^2 + I_{Gz} \right) \dot{\theta}^2$$

$$P_{\text{ext}} = \frac{dE_C}{dt}$$

$$\frac{dE_C}{dt} = \left(\frac{P}{g} \lambda^2 - 2 \frac{P}{g} \lambda R \cos \theta + \frac{P}{g} R^2 + I_{Gz} \right) \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{P}{g} \lambda R \sin \theta \dot{\theta}^3$$

D'autre part, la puissance des forces extérieures (figure 6.8b), s'écrit :

$$P_{\text{ext}} = [V]_G [F_e]_G = \vec{V}_G \cdot \vec{F}_e + \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_0(F)$$

La puissance de la réaction R est :

$$P_{\text{ext}}(R) = [V]_I [F_e]_I = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Comme il n'y a pas de glissement au point I, la puissance du poids P est :

$$P_{\text{ext}}(P) = [V]_G [F_e]_G = \begin{pmatrix} \vec{V}_G \\ \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P \vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda P \dot{\theta} \sin \theta$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne alors :

Donc, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\left(\frac{P}{g} \lambda^2 - 2 \frac{P}{g} \lambda R \cos \theta + \frac{P}{g} R^2 + I_{Gz} \right) \ddot{\theta} + \frac{P}{g} \lambda R \sin \theta \dot{\theta}^2 + \lambda P \sin \theta = 0$$

Où

$$(m\lambda^2 - 2m\lambda R \cos \theta + mR^2 + I_{Gz}) \ddot{\theta} + m\lambda R \sin \theta \dot{\theta}^2 + mg\lambda \sin \theta = 0$$

C'est l'équation du mouvement du demi-disque de rayon r.

6.6 EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

6.9. Deux tiges homogènes OA et AB de même longueur a , de même masse \mathbf{m} sont mobiles dans un plan Ox, Oy. OA tourne autour de O, on pose $\theta = (\overrightarrow{\text{Ox}}, \overrightarrow{\text{OA}})$.

L'extrémité A de AB est articulée en A à l'extrémité de OA. L'extrémité B est assujettie à glisser sur Ox (Figure 6.9). Calculer le moment cinétique en O et l'énergie cinétique du système.

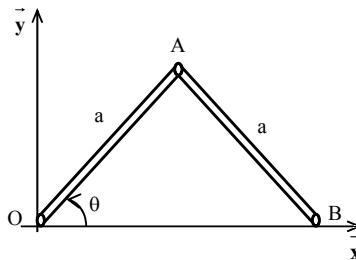


Figure 6.9.

6.10. Reprendre l'exercice 6.3, en remplaçant le pendule par une tige de longueur $2l$ et de masse \mathbf{m} .

6.11. Reprendre l'exercice 6.5, en remplaçant la sphère par un disque de rayon R et de masse \mathbf{m} .

6.12 Reprendre l'exercice 6.6, si la masse \mathbf{M} glisse sur le plan incliné avec un coefficient de frottement f_{s1} .

6.13 Reprendre l'exercice 6.6, si le coefficient de frottement du câble sur la poulie égale à f_{s2} .

6.14 Pour le corps solide de l'exercice 6.5,

- écrire le torseur des forces extérieures
- écrire le principe fondamental de la dynamique pour les deux cas suivants :

Roulement sans glissement

Roulement avec glissement.

BIBLIOGRAPHIE

COMBARNOUS M., DESJARDINS D., BACON C., "Mécaniques des solides – Cours et Exercices corrigés", 2^{eme} édition, Dunod, 199p.

DELANETTE M., DUBOIS M., " Mécanique théorique et appliquée", Librairie de la grave, Paris, 1986.

FERDINAND P. BEER , "Mécanique à l'usage des l'ingénieurs - STATIQUE", Edition Russell.

HAMZAOUI N., Mécanique Rationnelle (Module TEC005), polycopie, USTHB, 1986, 90p.

HANI T., "Mécanique générale – Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours ", Office des publications Universitaires, 1983, 386p.

MECHTCHERSKI I., Recueil de problèmes de mécanique rationnelle, édition Mir, Moscou, 1973, 504p.

McGILL D.J., WING W.W., "Engineering mechanics- Dynamics", Second Edition. Publishing Company, Pws - Kent. Boston, 1989, 608p.

McGILL D.J., WING W.W., "Engineering mechanics- Statics", Second Edition. Publishing Company, Pws - Kent. Boston, 1989, 607p.

MURAY R. SPIEGEL, "Mécanique générale - Théorie et application", Editions série schaum, 367p.

STARJINSKI V., "Mécanique rationnelle", Editions Mir (Moscou), 1984, 475p.

TARG S., Éléments De Mécanique Rationnelle, éditions Mir, Moscou, 1966, 479p.

TOUT LE MONDE, " Notions de mécanique statique et de résistance des matériaux", Tome 1, Editions TECHNIP, 402p.

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Force_\(physique\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Force_(physique)).
http://www.esffm.org/uploads/media/Cours_S4_Chapitre_1_Notion_de_forces.pdf
http://gyci.educanet2.ch/cours.physique.df.monard/.ws_gen/2/1%20M%E9canique%20DF.pdf
https://cours.etsmtl.ca/ctn258/notes/chapitre_5.pdf
<http://guy.chaumeton.pagesperso-orange.fr/ls03ph.htm>
https://cours.etsmtl.ca/ctn258/notes/chapitre_2.pdf
<http://www.physagreg.fr/Cours1ere/Physique/Cours/Physique-Chapitre3-forces.pdf>
<http://www4.ac-nancy-metz.fr/ssi/ressources/cours/>
<http://www.systemx.fr/meca/btsiut/statique.pdf>
<file:///D:/1%20PHYSIQUE%204/1%20PHYSIQUE%20%204%20%202014/statique.pdf>
https://cours.etsmtl.ca/ctn258/notes/chapitre_2.pdf
<http://passeport.univ-lille1.fr/site/Physique>
<http://www.al.lu/physics/troisieme/robinet/mecanique.pdf>
[http://www.itterbeek.org/uploads/documents/MecaChap3\(SystemesForces\)ExoSup.pdf](http://www.itterbeek.org/uploads/documents/MecaChap3(SystemesForces)ExoSup.pdf)



yes I want morebooks!

Oui, je veux morebooks!

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.get-morebooks.com

Achetez vos livres en ligne, vite et bien, sur l'une des librairies en ligne les plus performantes au monde!

En protégeant nos ressources et notre environnement grâce à l'impression à la demande.

La librairie en ligne pour acheter plus vite
www.morebooks.fr

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Bahnhofstr. 28
D - 66111 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omnascriptum.com
www.omnascriptum.com



