

Chapitre I : Généralités et définition de base.

1. Définition(s) et sens physique d'une force

* L'observation et l'expérience montrent que dans certaines conditions, les corps naturels peuvent exercer des forces sur les autres des actions qui :

Modifient leur état au repos ou en mouvement

2. Représentation vectorielle d'une force

Composantes - direction (vecteur)

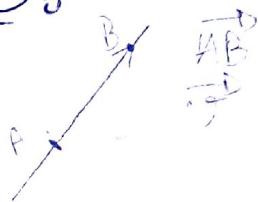
- sens (vecteur)

- point d'application

- intensité, module

OPÉRATEURS : - Addition (soustraction)

- Produit (scalaire multiplicatif)



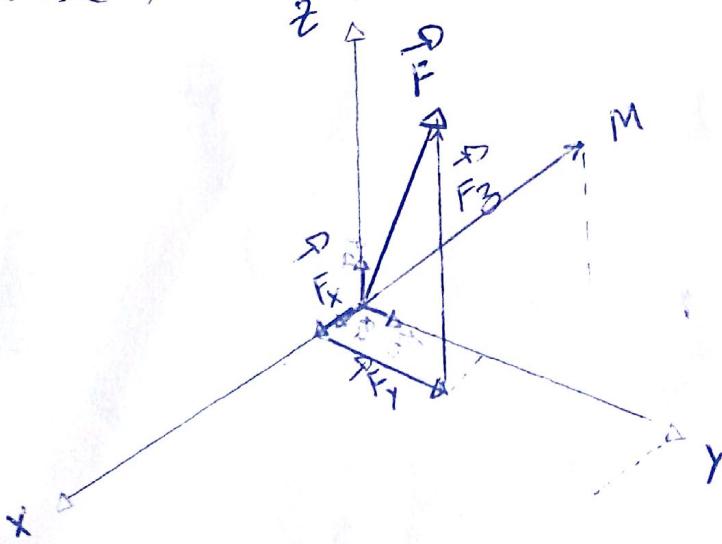
2.1. Représentation graphique et Analytique

Soit une base i, j, k de l'espace vectoriel de dimension 3 et un point O de l'espace affine (E), réel à 3D en définition dans (E). Le repère d'espace (R) : $R(O, i, j, k)$, où $\vec{R} =$ vecteur

$\forall M \in E$ on associe

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$



$$\vec{OM} = x_m \vec{i} + y_m \vec{j} + z_m \vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix}$$

$$R_0$$

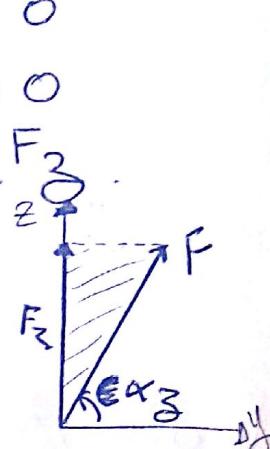
$$\Gamma_1$$

-2. Règles de décomposition des forces:

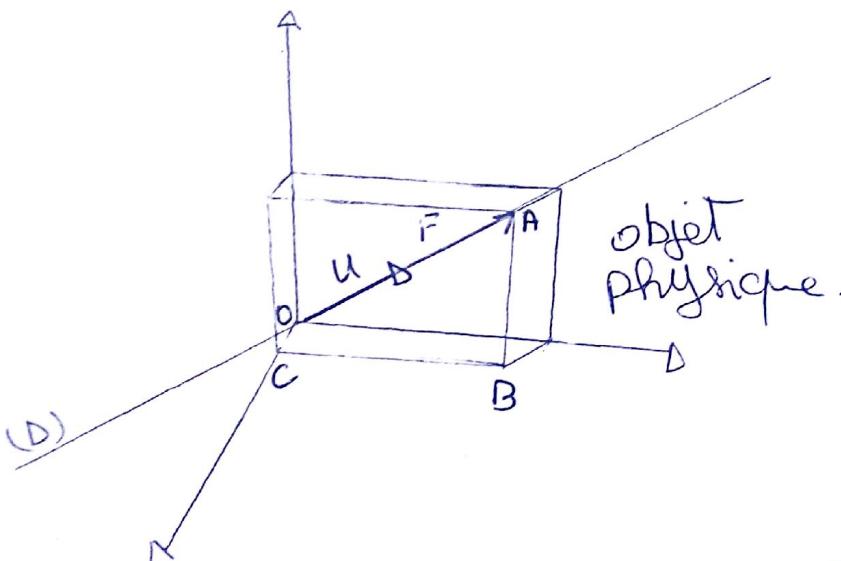
$$\vec{F} = \vec{F}_{x\vec{x}} + \vec{F}_{y\vec{y}} + \vec{F}_{z\vec{z}}$$

$$\vec{F} = F_{x\vec{x}} + F_{y\vec{y}} + F_{z\vec{z}} = \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases} = \begin{cases} F_x \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ F_y \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ F_z \end{cases}$$

Propriétés : $|F| = F = \sqrt{|F_x|^2 + |F_y|^2 + |F_z|^2}$
 cosinus directeurs : $\cos \alpha_3 = \frac{F_z}{F} = \boxed{\alpha_3}$



Exemples:



$$|\vec{u}| = 1$$

\vec{u} : Vecteur unitaire de la direction (D)

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} \quad \text{--- (1)}$$

$$\vec{OA} = \vec{OA} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} \text{ en remplace dans (1).}$$

$$F' = \frac{F}{|\vec{OA}|} \vec{OA}$$

$$\vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CB} + \vec{BA}$$

$$= \begin{cases} F_{x\vec{x}} \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ F_{y\vec{y}} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ F_{z\vec{z}} \end{cases}$$

3 - Classification des vecteurs :

3.1. Selon leur nature : libre, glissant, lié.

* libre :

càd \vec{v} est appliquée à n'importe quel point de l'espace

* glissant :

càd \vec{v} "glisse" sur un support

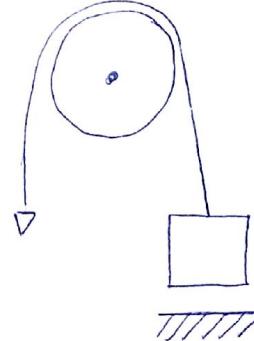
* lié :

\vec{v} est appliquée en un point fixe.

Exemples :

1 - Le vent sur une fenêtre libre.

2 -

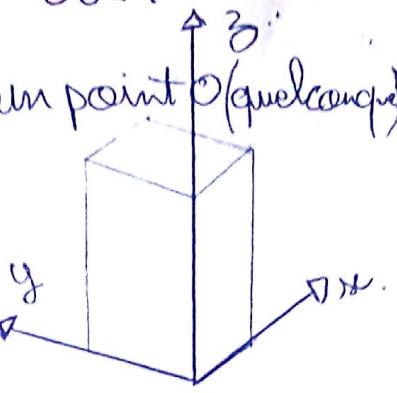
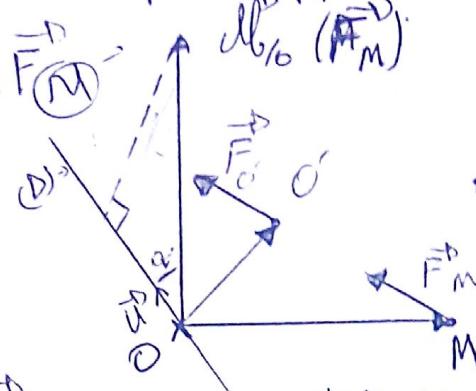


$$3 - \vec{P} = m \vec{g}$$

Moments d'une force :

- 1. Le Moment d'une force \vec{F}_M par rapport à un point O (quelconque)

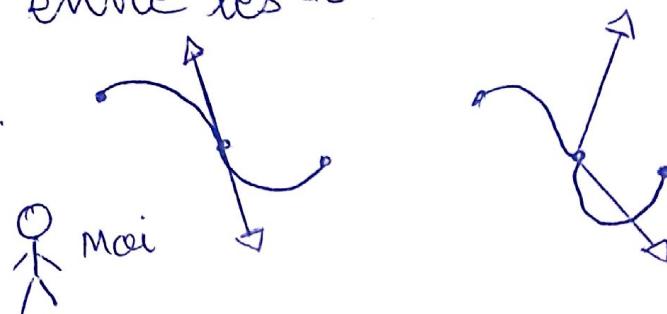
$$M_O (\vec{F}_M) = OM \wedge \vec{F}_M$$



- 2 - Moment d'une force \vec{F}_M par rapport à un axe (de vecteur unitaire \vec{U})

$$\begin{aligned} M_{\Delta} (\vec{F}_M) &= \vec{U} \cdot \vec{F}_M \\ &= |\vec{U}| \cdot |\vec{F}_M| \cdot \cos(\vec{U}, \vec{F}_M) \end{aligned}$$

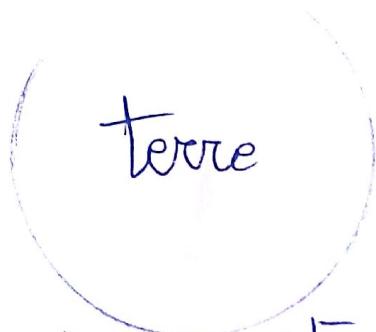
5 - Identification d'un système mécanique à étudier :
définissons "l'intérieur" de "l'extérieur" d'un système
sans qu'il y ait de "vide" entre les deux:
par analogie en maths.



Exemples:

Système Étudié

- ① terre + moi
- ② moi \rightarrow terre

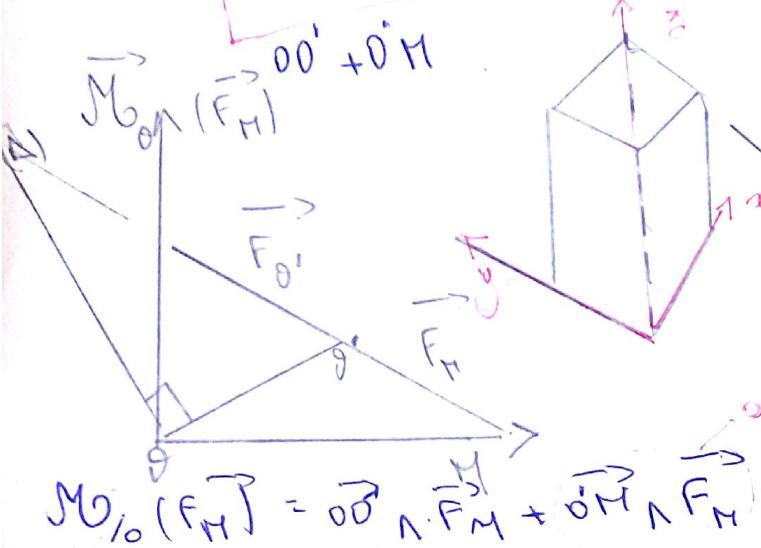


Nous ISOLONS le système étudié

H - Moments d'une force

H-1 Moment d'une force \vec{F}_H par rapport à un point O (que tan que)

$$M_O(\vec{F}_H) = \vec{O}\vec{M} \wedge \vec{F}_H \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ M_z \end{array} \right.$$



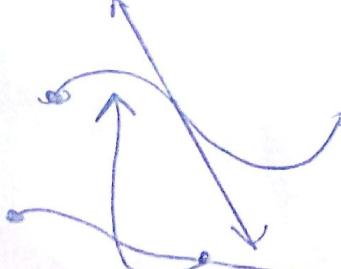
H-2 Moment d'une force \vec{F}_H par rapport à un axe (de vecteur uniforme \vec{u})

$$\begin{aligned} IR &= M_{\vec{u}}(\vec{F}_H) = \vec{u} \cdot \vec{F}_H \\ &= |\vec{u}| \cdot |\vec{F}_H| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{F}_H) \end{aligned}$$

5- Identification d'un système

Mécanique à étudier

définissons "l'intérieur" de "l'extérieur" d'un système sans qu'il y ait de vide entre les deux par analogie de en Maths



EX 1

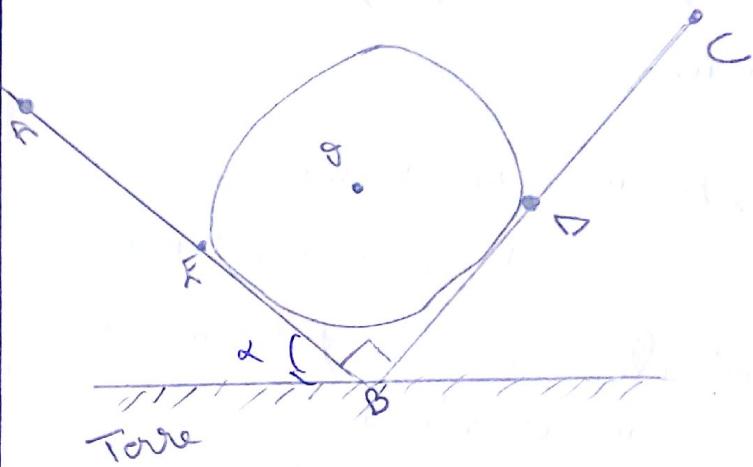
Terre
Système étudié

- terre + moi

- moi \rightarrow Terre

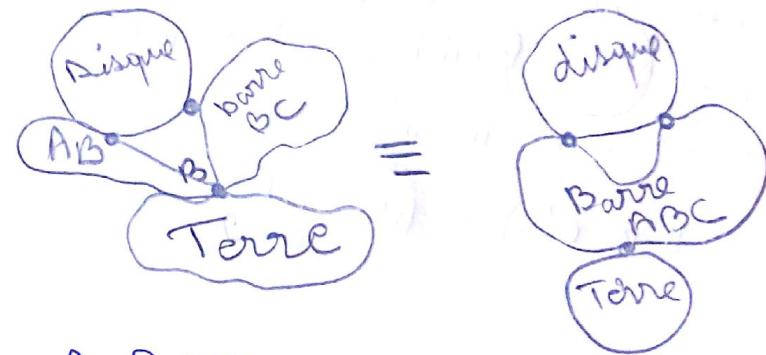
Nous isolons le système étudié

EX 2



2 barres AB et BC coincides en B.

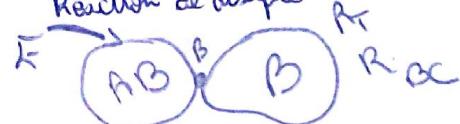
Disque



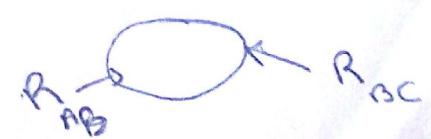
en isole la Terre

R_{AB} Reaction de la barre BC

- isolons Barre AB
Reaction de disque



- isole disque:



6 - Modèles mécaniques

6.1 : Introduction & selon le besoin nous sommes amenés à modéliser un système mécanique comme étant

- un point matériel
- un Σ point matériel = Solide

Ex : un Avion.

→ sur l'axe de statutement
d'un

→ sur un écran Radar

6.2 : Le point matériel c'est une particule de matière suffisamment petite pour en négliger les dimensions

6.3 : Le solide c'est un système de points matériel tel que tous les point sont fixés rigidelement les uns par rapport aux autres

$$\forall A, B \in S \Rightarrow \vec{AB} = \text{cst}$$

CHAPITRE 28

STATIQUE

1) **Définition :** c'est la partie de la mécanique qui étudie les compositions des forces et les conditions d'équilibre des corps soumis à l'action de celles-ci.

- un corps est en équilibre si il se trouve en état de repos par rapport à un autre corps matériel
- si ce dernier est immobile l'équilibre est absolu.
- sinon → relatif

Équilibre point fixe

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Solide

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_O (\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0}$$

2) Axiomes de la statique

1) Si 2 forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 agissent sur un solide (S) celui-ci sera en équilibre.

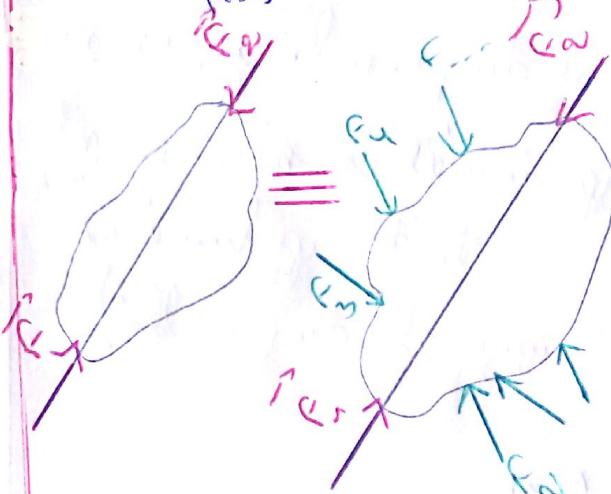
$$\text{Si } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$



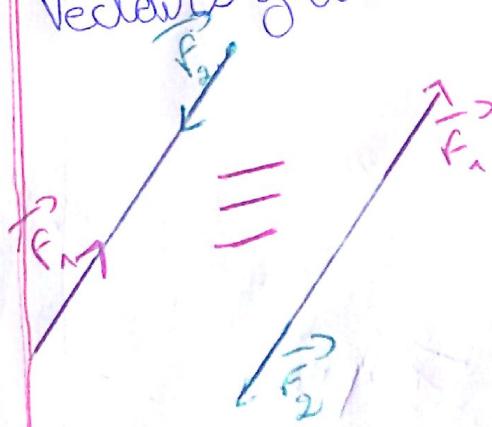
2)

$$\vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

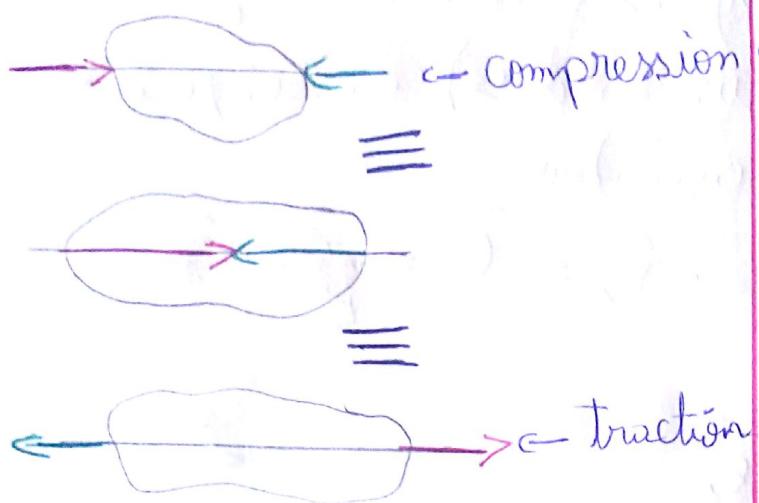
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \left(\sum_{i=3}^N \vec{F}_{\text{ext}} \right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$



3) Car \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont des vecteurs glissants



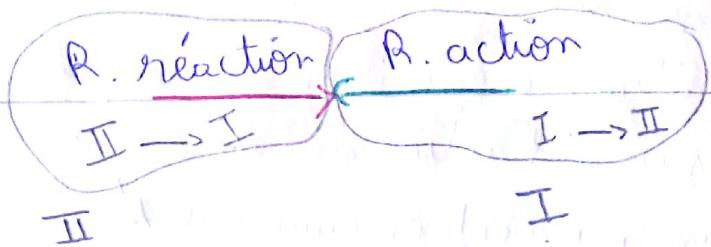
Remarque:



Les 3 forces sont appliquées en O

5) Action / Réaction

Lorsqu'un corps I exerce une action sur un corps II le dernier exerce une réaction Sur I

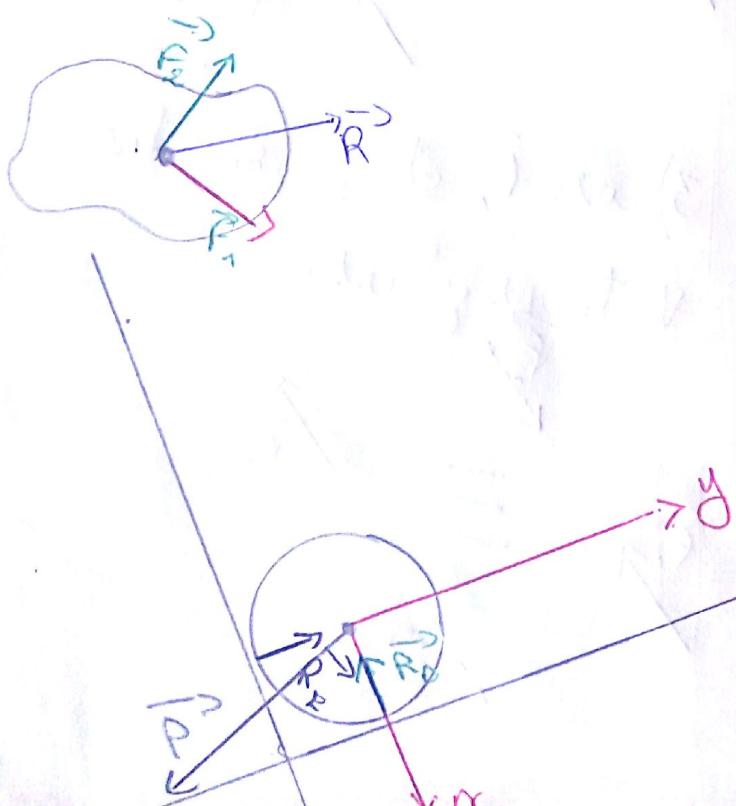


Les 3 systèmes sont :

- * Equivalents statique
- * Différents en RDM

4) Assicene du parallélogramme

2 forces appliquées en même point ont une résultante appliquée en ce point (diagonale du parallèle)

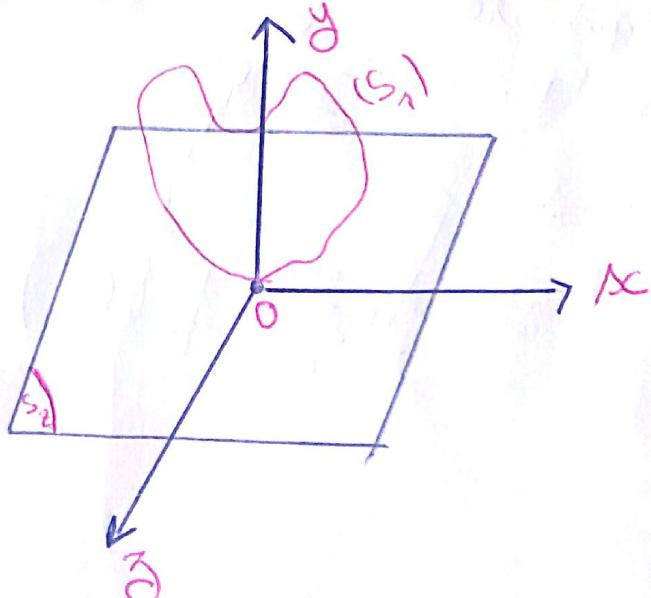


3) Liaisons entre 2 corps solides

1) types de liaison:

Définition = une liaison mécanique limite de déplacement relatif d'un solide (1) par rapport à un solide (2) dans une direction de l'espace ces déplacements sont =

- * une translation T_1 par rapport à
- * une rotation R_1 par rapport à



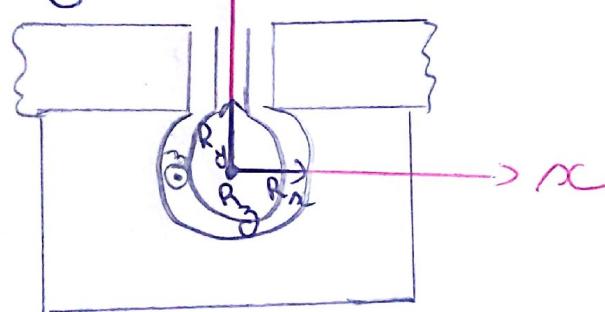
2) Appui Simple =

S_1 est \perp par rapport au plan de contact en O, de S_2

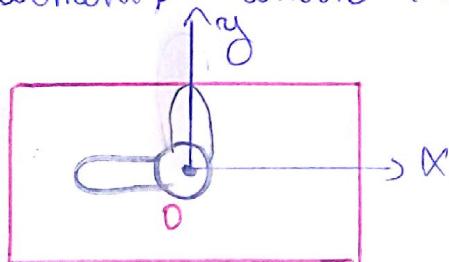
3) Articulation d'un solide

- Si O est articulé, s'il reste en permanence en (1) point fixe de l'espace. j'ai alors éliminé T_x , T_y , T_z en O, il y aura 3 réactions si ISOLATION

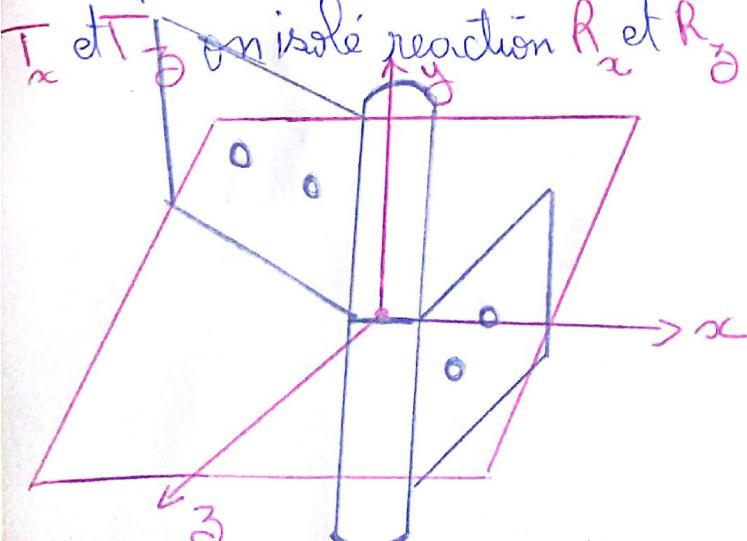
R_x , R_y et R_z



Si le mouvement se limite à un plan



exemple de la charniere on'élimine T_x et T_z on isolé réaction R_x et R_z

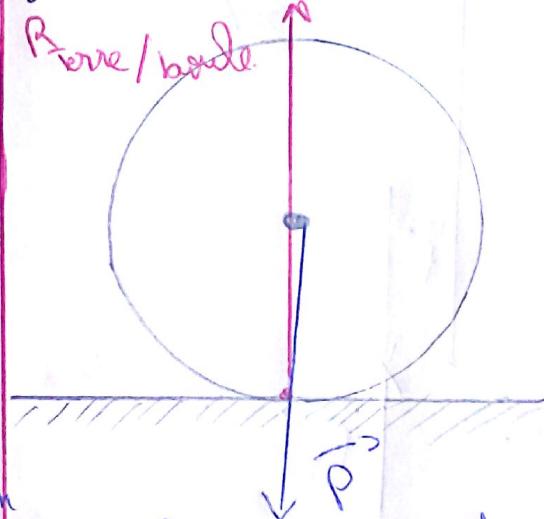


4) l'encastrement

Si il ne peut pas changer de position et d'orientation alors R. (2 ou 3 composants) et M (1, 2 ou 3 composants)

Si axe de la charniere est rouillé \Rightarrow plus de rotation après isolation = R_x , R_z et

Liaison idéale = (sans frottement)



$R \perp$ plan de contact a. l'équilibre

$$\vec{P} + \vec{R}_A = \vec{0}$$

$$\vec{R}_A = -\vec{P}$$

liaison avec frottement

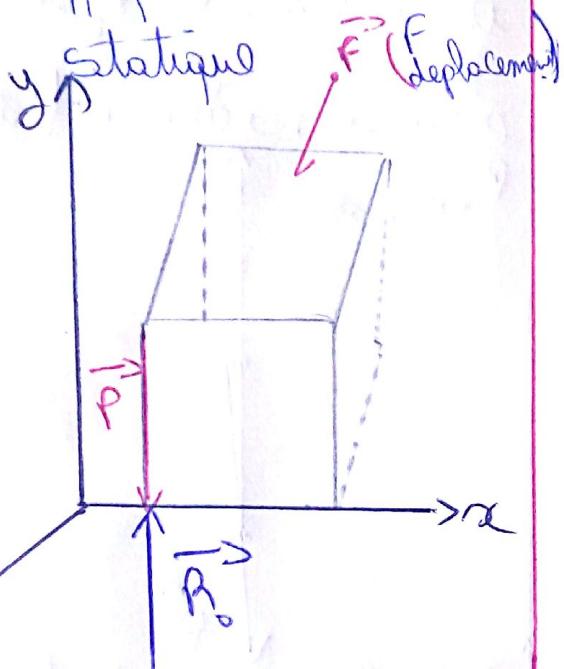
A l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{R}_0 + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R}_{\text{reaction}} = \vec{0}$$

$$|\vec{T}| = \mu_s \cdot |\vec{R}_0|$$

coeff frottement



liaison avec frottement

A l'équilibre:

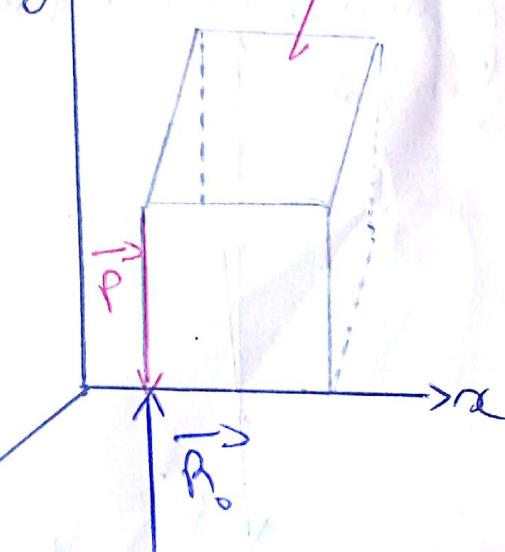
$$\vec{P} + \vec{R}_o + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R}_{\text{reaction}} = \vec{0}$$

$$|\vec{T}| = |\vec{s} \cdot \vec{R}_o|$$

coeff frottement

y statique \vec{F} (déplacement)



4) Condition d'équilibre d'un corps

H-1: Eq: point matériel

dans $R_o(x_o, y_o, z_o)$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Ex:

- Si on isole la boule

- Si liaison idéale en D

et E alors

O = X point matériel

H-2: Equilibre du solide:

Pour qu'un solide soit en EQ par rapport à un repère

$R_o(x_o, y_o, z_o)$ il faut que:

- * La résultante des moments soit nul
- * La résultante des forces soit nul

$$\vec{R}_e = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

et

$$\vec{M}_{\text{res/o}} = \sum \vec{M}_{I/o}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0}$$

Ce qui donne que dans l'espace

→ 3 équations (translation)

→ 3 équations (rotation)

après projections de ces forces

(moments) sur O_x, O_y, O_z

Si = Nombre inconnus ≤ 6

⇒ isostatique

Si, Nombre inconnus > 6

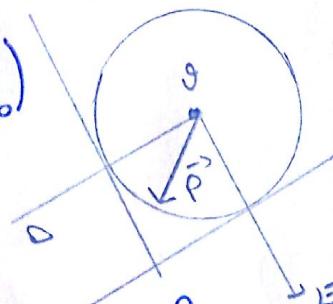
⇒ Hyperstatique

On peut ajouter d'autre équations

d'autres théories au besoin par

exemple en RDM équation des

déformations



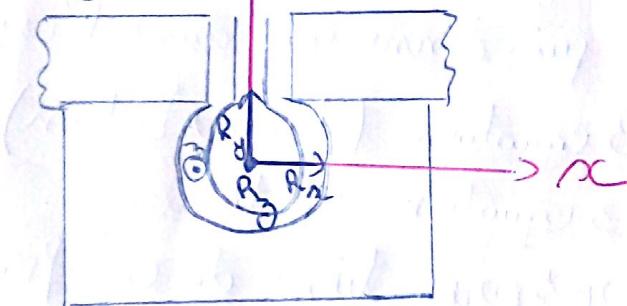
2) Appui Simple =

(S_1) est \perp par rapport au plan de contact en O, de (S_2)

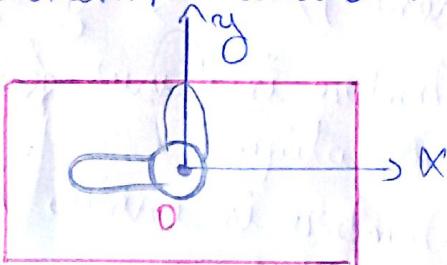
3) Articulation d'un solide

- Si O est articulé, si il reste en permanence en (1) point fixe de l'espace. J'ai alors éliminé T_x , T_y , T_z en O, il y aura 3 réactions si ISOLATION

$$R_x, R_y \text{ et } R_z$$

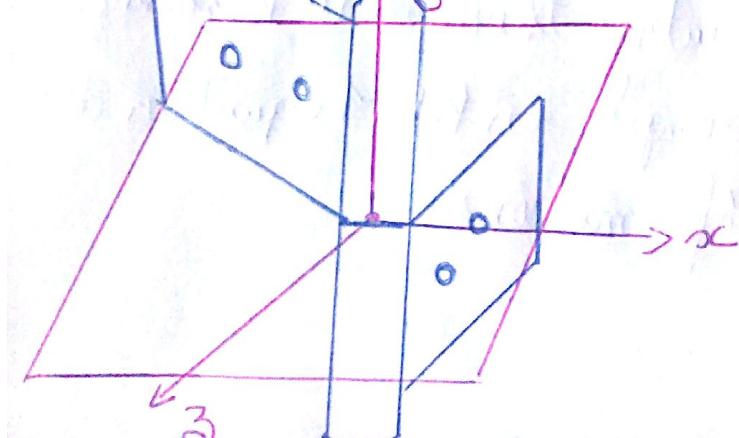


Si le mouvement se limite à un plan



exemple de la charnière on élimine T_x et T_z on isolé réaction R_x et R_z

$$T_x \text{ et } T_z \rightarrow \text{ on isolé réaction } R_x \text{ et } R_z$$

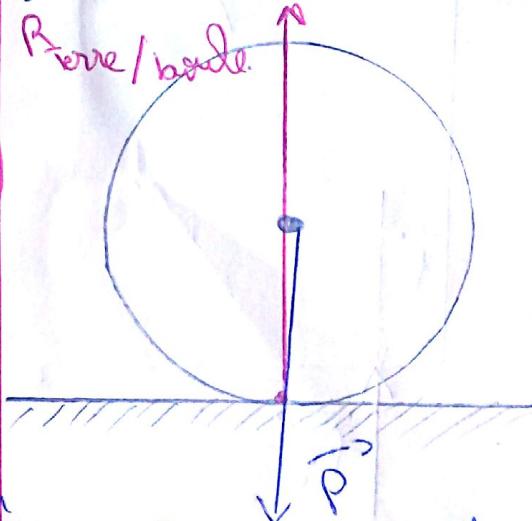


4) L'enca斯特rement

Si il ne peut pas changer de position et d'orientation alors R_x , $(2 \text{ ou } 3 \text{ Composants})$ et M_x, M_y, M_z ($2 \text{ ou } 3 \text{ Composants}$)

Si axe de la charnière est rouillé \Rightarrow plus de rotation après isolation = R_x, R_z et

Liaison idéale = (sans frottement)



$R \perp$ plan de contact a l'équilibre

$$\vec{P} + \vec{R}_A = \vec{0}$$

$$\vec{R}_A = -\vec{P}$$

Dans le plan :

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

Après avoir isolé les inconnues sont :

- Articulation sphérique en A

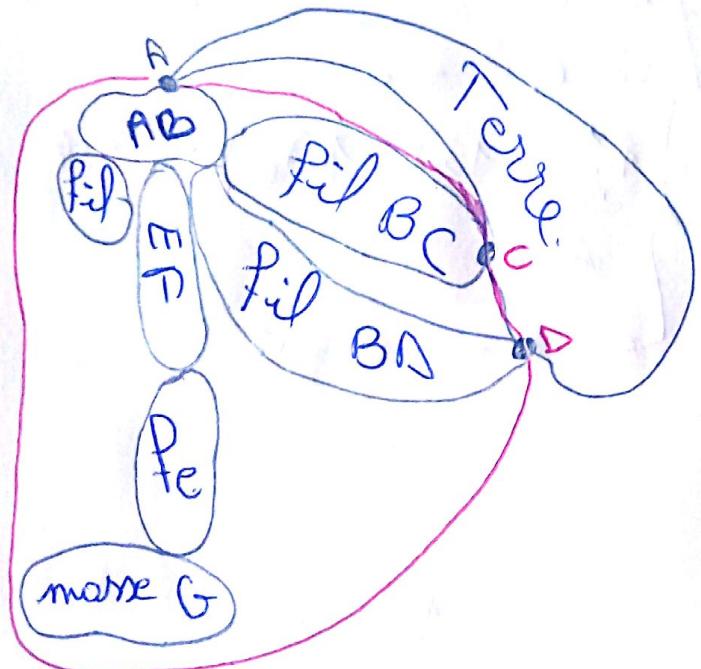
$$\Rightarrow R_{AY}, R_{AX}, R_{AZ}$$

$$\begin{aligned} \text{- Tension fil } BC &= T_C \\ BD &\Rightarrow T_D \end{aligned}$$

Ex = Exercice 1 : statique:

on isole -?

Système AB + fil BC + BD + masse G.



Après avoir isolé les inconnues sont :

- Articulation sphérique en A

$$\Rightarrow R_{AY}, R_{AX}, R_{AZ}$$

$$\begin{aligned} \text{- Tension fil } BC &= T_C \\ BD &\Rightarrow T_D \end{aligned}$$

* Calcul de la tension du fil BC

$$\begin{aligned} \vec{T}_C &= T_C \vec{m}_C \quad \vec{T}_C = \frac{T_C}{CB} \vec{CB} \\ \vec{CB} &= CB \vec{m}_C \end{aligned}$$

$$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} - (\vec{AM} + \vec{MC})$$

$$\begin{aligned} \vec{CB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ R_A &= \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$CB = |\vec{CB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{donc } \vec{T}_C = \frac{\vec{T}_C}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

même raisonnement pour \vec{T}_D

sauf pour la projection SWX

$$\vec{T}_D = \frac{\vec{T}_D}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0}$$

$$R_x = \frac{1}{5\sqrt{2}} (-3T_C + 3T_D) + R_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$R_y = \frac{1}{5\sqrt{2}} (4T_C + 4T_D) + R_{Ay} = 0 \quad (2)$$

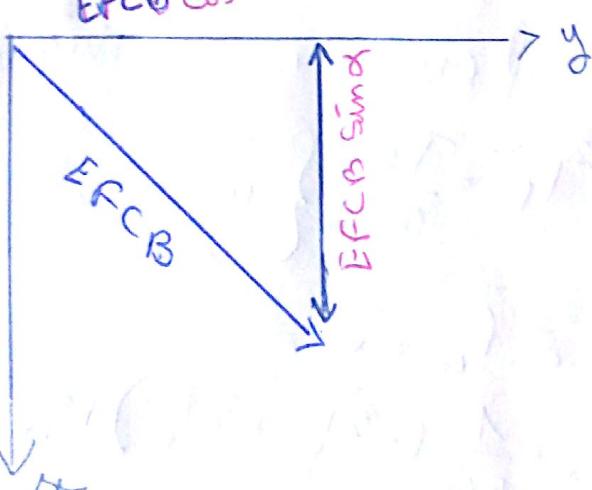
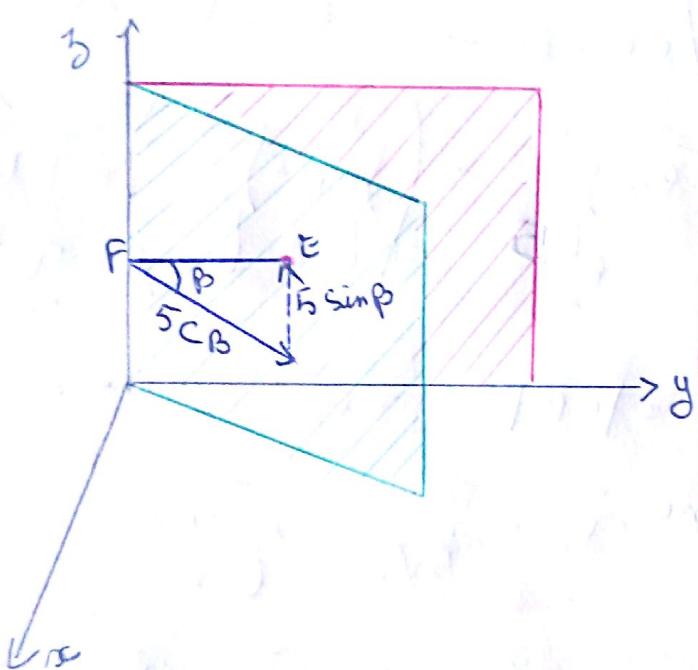
$$R_z = \frac{1}{5\sqrt{2}} (5T_C + 5T_D) + R_{Az} - P = 0 \quad (3)$$

$$\sum \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0}$$

$$\vec{AA} \wedge (\vec{R}_n) + \vec{AC} \wedge \vec{T}_c + \vec{AD} \wedge \vec{T}_d + \vec{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \vec{AF} + \vec{FE} + \vec{EG}$$

$$= \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \text{hauteur} \end{cases} + \begin{cases} 5 \cos \alpha \\ 5 \cos \beta \cos \alpha \\ 5 \sin \beta \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ -2 \\ 0 \end{array} \right\} \wedge \frac{T_c}{5\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} -3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -3 \\ -4 \\ 0 \end{array} \right\} \wedge \frac{T_d}{5\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 4 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 5 \cos \beta \sin \alpha \\ 5 \cos \beta \cos \alpha \\ 5 \sin \beta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\star \frac{1}{5\sqrt{2}} (-20T_c - 20T_d) - 5 \cos \beta$$

$$\cos \alpha P = 0$$

$$\star \frac{1}{5\sqrt{2}} (-15T_c + 15T_d) + 5 \cos \beta$$

$$\sin \alpha = 0$$

$$\star 0 + 0 + 0 = 0$$

Chapitre I : Généralités et définition de base.

1. Définition(s) et sens physique d'une force

* L'observation et l'expérience montrent que dans certaines conditions, les corps naturels peuvent exercer des forces sur les autres des actions qui :

Modifient leur état au repos ou en mouvement

2. Représentation vectorielle d'une force

Composantes - direction (vecteur)

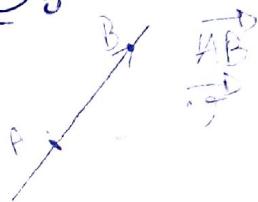
- sens (vecteur)

- point d'application

- intensité, module

OPÉRATEURS : - Addition (soustraction)

- Produit (scalaire multiplicatif)



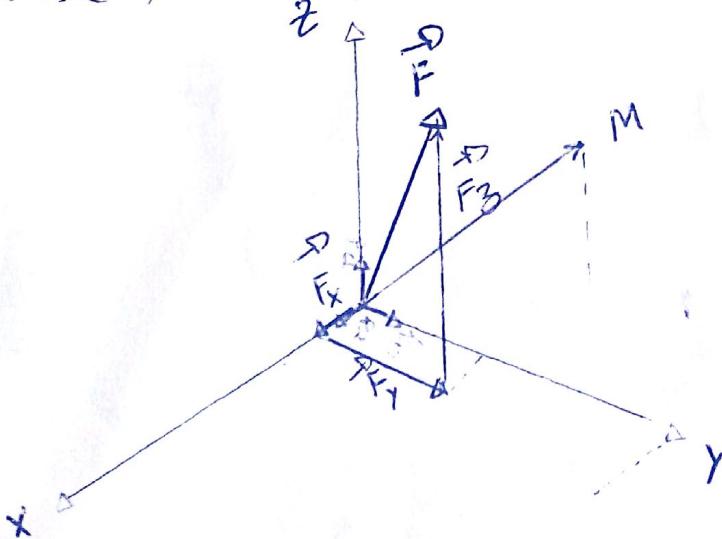
2.1. Représentation graphique et Analytique

Soit une base i, j, k de l'espace vectoriel de dimension 3 et un point O de l'espace affine (E), réel à 3D en définition dans (E). Le repère d'espace (R) : $R(O, i, j, k)$, où $\vec{R} =$ vecteur

$\forall M \in E$ on associe

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$



$$\vec{OM} = x_m \vec{i} + y_m \vec{j} + z_m \vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix}$$

$$R_0$$

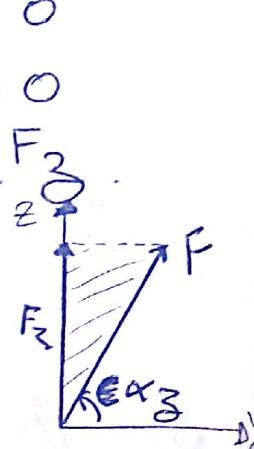
$$T$$

-2. Règles de décomposition des forces:

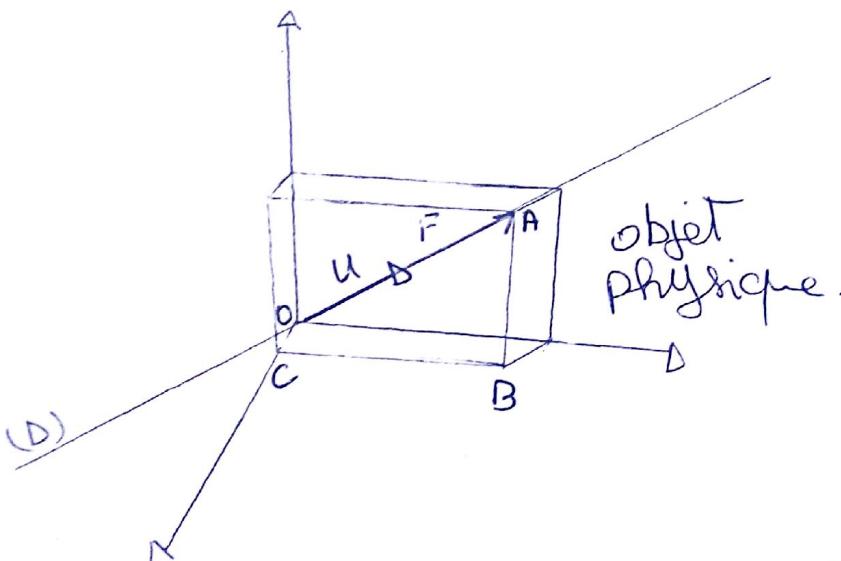
$$\vec{F} = \vec{F}_{x\vec{x}} + \vec{F}_{y\vec{y}} + \vec{F}_{z\vec{z}}$$

$$\vec{F} = F_{x\vec{x}} + F_{y\vec{y}} + F_{z\vec{z}} = \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases} = \begin{cases} F_x \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ F_y \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ F_z \end{cases}$$

Propriétés : $|F| = F = \sqrt{|F_x|^2 + |F_y|^2 + |F_z|^2}$
 cosinus directeurs : $\cos \alpha_3 = \frac{F_z}{F} = \boxed{\alpha_3}$



Exemples:



$$|\vec{u}| = 1$$

\vec{u} : Vecteur unitaire de la direction (D)

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} \quad \text{--- (1)}$$

$$\vec{OA} = \vec{OA} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} \text{ en remplace dans (1).}$$

$$F' = \frac{F}{|\vec{OA}|} \vec{OA}$$

$$\vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CB} + \vec{BA}$$

$$= \begin{cases} F_{x\vec{x}} \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ F_{y\vec{y}} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ F_{z\vec{z}} \end{cases}$$

3 - Classification des vecteurs :

3.1. Selon leur nature : libre, glissant, lié.

* libre :

càd \vec{v} est appliquée à n'importe quel point de l'espace

* glissant :

càd \vec{v} "glisse" sur un support

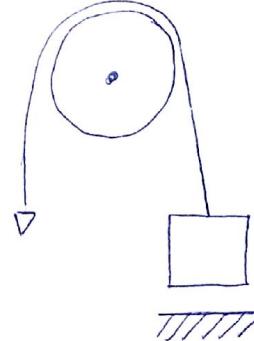
* lié :

\vec{v} est appliquée en un point fixe.

Exemples :

1 - Le vent sur une fenêtre libre.

2 -

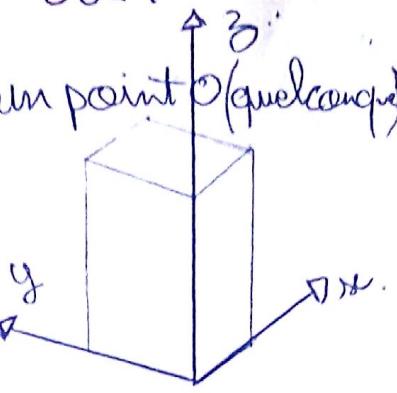
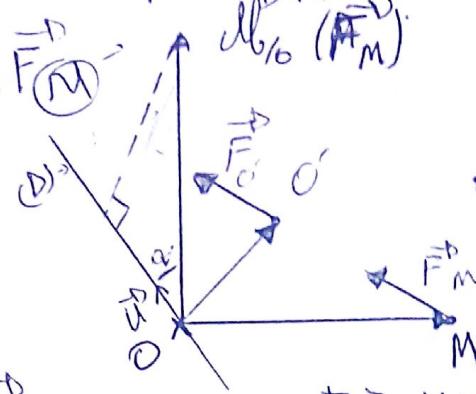


$$3 - \vec{P} = m \vec{g}$$

Moments d'une force :

- 1. Le Moment d'une force \vec{F}_M par rapport à un point O (quelconque)

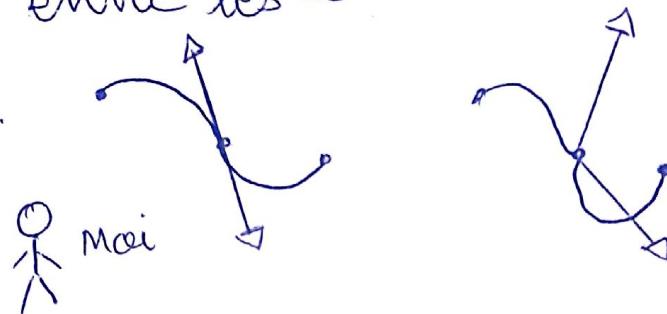
$$M_O (\vec{F}_M) = OM \wedge \vec{F}_M$$



- 2 - Moment d'une force \vec{F}_M par rapport à un axe (de vecteur unitaire \vec{u})

$$\begin{aligned} M_{\Delta} (\vec{F}_M) &= \vec{u} \cdot \vec{F}_M \\ &= |\vec{u}| \cdot |\vec{F}_M| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{F}_M) \end{aligned}$$

5 - Identification d'un système mécanique à étudier:
définissons "l'intérieur" de "l'extérieur" d'un système
sans qu'il y ait de "vide" entre les deux:
par analogie en maths.



Exemples:

Système Étudié

- ① terre + moi
- ② moi \rightarrow terre

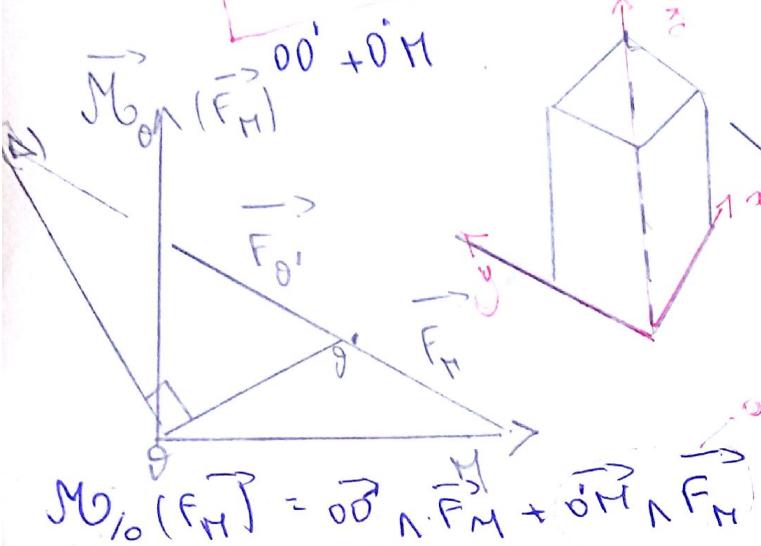


Nous ISOLONS le système étudié

H - Moments d'une force

H-1 Moment d'une force \vec{F}_H par rapport à un point O (que tan que)

$$M_O(\vec{F}_H) = \vec{O}\vec{M} \wedge \vec{F}_H \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ M_z \end{array} \right.$$



$$M_O(\vec{F}_H) = \vec{O}\vec{M} \wedge \vec{F}_H + \vec{O}\vec{M} \wedge \vec{F}_M$$

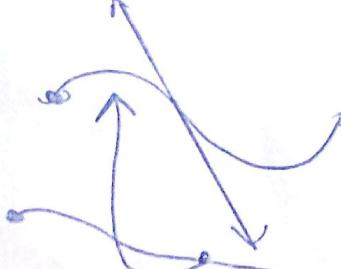
H-2 Moment d'une force \vec{F}_H par rapport à un axe (de vecteur uniforme \vec{u})

$$\begin{aligned} IR &= M_B(\vec{F}_H) = \vec{u} \cdot \vec{F}_H \\ &= |\vec{u}| \cdot |\vec{F}_H| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{F}_H) \end{aligned}$$

5- Identification d'un système

Mécanique à étudier

définissons "l'intérieur" de "l'extérieur" d'un système sans qu'il y ait de vide entre les deux par analogie de en Maths



EX 1

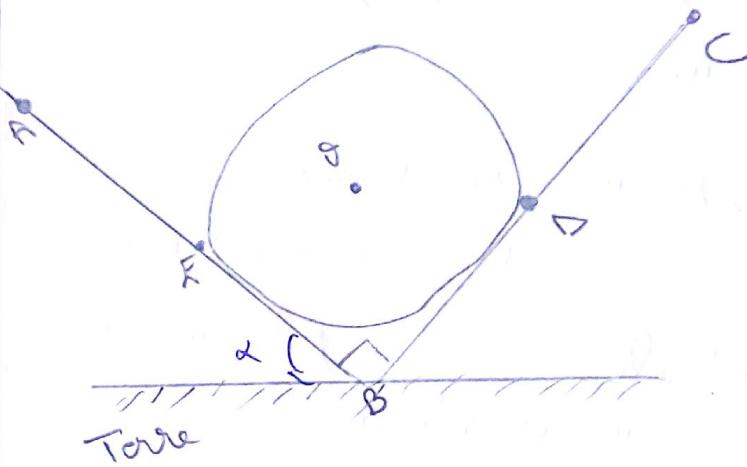
Terre
Système étudié

- terre + moi

- moi \rightarrow Terre

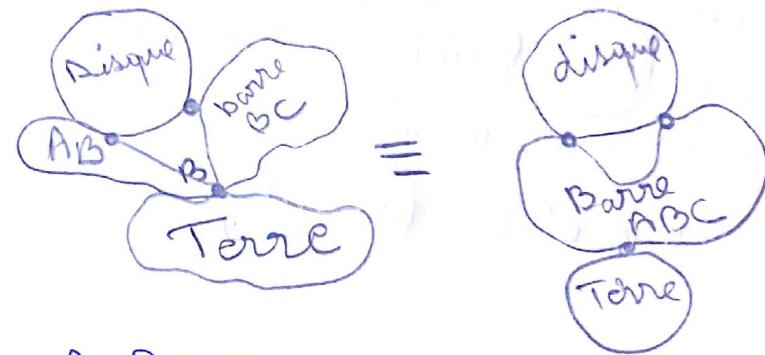
Nous isolons le système étudié

EX 2



2 barres AB et BC solidées en B.

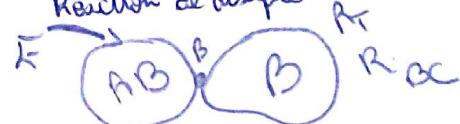
Disque



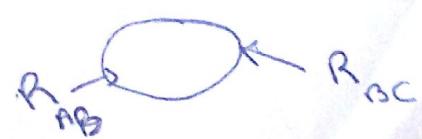
en isole la Terre

R_{AB} Reaction de la barre BC

- isolons Barre AB
Reaction de disque



- isole disque:



6 - Modèles mécaniques

6.1 : Introduction & selon le besoin nous sommes amenés à modéliser un système mécanique comme étant

- un point matériel
- un Σ point matériel = Solide

Ex : un Avion.

→ sur l'axe de statutement
d'un

→ sur un écran Radar

6.2 : Le point matériel c'est une particule de matière suffisamment petite pour en négliger les dimensions

6.3 : Le solide c'est un système de points matériel tel que tous les point sont fixés rigidelement les uns par rapport aux autres

$$\forall A, B \in S \Rightarrow \vec{AB} = \text{cst}$$

CHAPITRE 048 Géométrie des masses

1) Introduction :

L'objectif de ce chapitre est de modéliser les notions de masse et d'inertie d'un système matériel (S)

- On traduira la l'algebre des tenseurs pour représenter les moments (produits) d'inertie par rapport à des axes arbitraires formant un repère orthonormé direct et en l'appellera : Tenseur d'inertie
 - Ces notations seront nécessaires pour l'étude de la dynamique de (S)
- 2) La masse d'un point matériel

2) Rappels

Un système (S) est un système complexe dans lequel la position ou le mouvement de chaque point (ou solide) dépend de la position ou de mouvement de tout les autres

Ex:

- ⇒ Le système polaire est un système
- ⇒ Le moteur d'un véhicule
- ⇒ L'ensemble des étudiants de cet amphithéâtre n'est pas un système

2-2) masse d'un système :
La masse d'un système est l'arithmétique des masses de tous les points composant (S)

$$M = \sum_{i=1}^n dm_i$$

Remarque :

1) En mécanique galiléenne (Non quantique)

la masse M ne varie pas au cours du temps

- en utilisant la ^{1^{re} continuité de (S) $M = \int dm$ où p est}

un point matériel $\in (S)$

dm est la masse au voisinage de p

Si (S) est modélisé comme étant un volume homogène alors $M = \rho_v \cdot V$

$$M = \rho_v \cdot \iiint_{P \in (S)} dm$$

Si (S) est modélisé comme étant une surface S

$$M = \rho_s \iint_{P \in (S)} ds$$

Si (S) est modélisé comme étant une courbe C

$$M = C_e \cdot \int_{P \in S} dC$$

2) (S) est un ensemble fini discréte de points matériels (ou solide)

Ex:

⇒ une boîte de pâtisserie

$$M_T = M_{\text{atm}} + M_{\text{boîte}} + M_{\text{farine}}$$

$$M_T = C_v \iint dV + C_s \iint dS + C_f \iint dA$$

$$M_T = \sum_{i=1}^3 M_i$$

3) centre d'inertie de (S)

3.1) cas du point matériel p de (S)
on appelle centre d'inertie de (S)

le point (G) tel que

$$\int_{P \in S} G \cdot P \cdot dm = \vec{0}$$

par rapport à O , centre du repère $R_o(x-y-z)$

$$\vec{OG} = \frac{1}{\int dm} \int \vec{OP} \cdot dm$$

dans R_o :

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int \vec{OP} \cdot dm$$

si on projette

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{P \in S} x \cdot dm$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_{P \in S} y \cdot dm$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_{P \in S} z \cdot dm$$

3.2) cas d'un système discret

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N M_i} \sum_{i=1}^N \int_{P \in S_i} \vec{OP} \cdot dm$$

comme :

$$\vec{OG}_i = \frac{1}{M_i} \int_{P \in S_i} \vec{OP} \cdot dm$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum M_i} \sum_{i=1}^N \left[M_i \left(\frac{1}{M_i} \int_{P \in S_i} \vec{OP} \cdot dm \right) \right]$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N M_i} \sum_{i=1}^N M_i \cdot \vec{OG}_i$$

2.5 Dérivée d'un vecteur dans un repère variable:

soit $\vec{W}(t) = \begin{cases} X_k(t) \\ Y_k(t) \\ Z_k(t) \end{cases}$

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = (\dot{X}_k \vec{x}_k + \dot{Y}_k \vec{y}_k + \dot{Z}_k \vec{z}_k) +$$

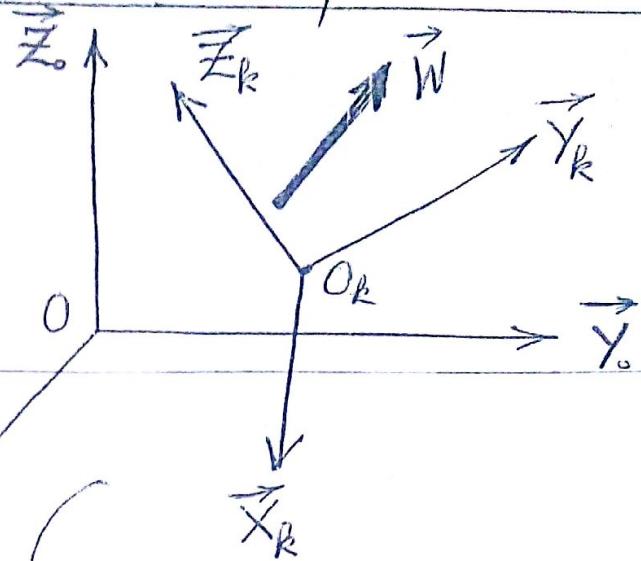
$$+ (X_k \frac{d\vec{x}_k}{dt} + Y_k \frac{d\vec{y}_k}{dt} + Z_k \frac{d\vec{z}_k}{dt})$$

Soit:

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = a_{11}(t) \vec{x}_k + a_{12}(t) \vec{y}_k + a_{13}(t) \vec{z}_k$$

$$\frac{d\vec{y}_k}{dt} = a_{21}(t) \vec{x}_k + a_{22}(t) \vec{y}_k + a_{23}(t) \vec{z}_k$$

$$\frac{d\vec{z}_k}{dt} = a_{31}(t) \vec{x}_k + a_{32}(t) \vec{y}_k + a_{33}(t) \vec{z}_k$$



$R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$: mobile

$R_o(0, t, \vec{j}, \vec{k})$: fixe

$$|\vec{x}_k| = |\vec{y}_k| = |\vec{z}_k| = 1 \quad \text{mais leur direction est variable}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{x}_k}{dt} \in \text{plan } \perp \vec{x}_k$$

$$\Rightarrow a_{11}(t) = a_{22}(t) = a_{33}(t) = 0$$

on a aussi:

$$\vec{x}_k \cdot \vec{y}_k = \vec{x}_k \cdot \vec{z}_k = \vec{y}_k \cdot \vec{z}_k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{x}_k \cdot \vec{y}_k) = \frac{d\vec{x}_k}{dt} \cdot \vec{y}_k + \vec{x}_k \cdot \frac{d\vec{y}_k}{dt}$$

$$0 = (a_{12} \vec{y}_k + a_{13} \vec{z}_k) \cdot \vec{y}_k + \vec{x}_k \cdot (a_{21} \vec{x}_k + a_{23} \vec{z}_k)$$

$$0 = a_{12} + a_{21} \Rightarrow a_{12} = -a_{21}$$

$$\text{d'où aussi : } a_{13} = -a_{31} \quad \text{on a donc : } \frac{d\vec{x}_k}{dt} = a_{12} \vec{y}_k - a_{31} \vec{z}_k$$

$$a_{23} = -a_{32}$$

$$\frac{d\vec{y}_k}{dt} = -a_{12} \vec{x}_k + a_{23} \vec{z}_k$$

$$\frac{d\vec{z}_k}{dt} = a_{31} \vec{x}_k - a_{23} \vec{y}_k$$



On a trouvé que :

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \underbrace{\begin{cases} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \\ \dot{z}_k \end{cases}}_{R_k} + \underbrace{\begin{cases} x_k \\ y_k \\ z_k \end{cases}}_{R_k} \cdot \underbrace{\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} \\ \frac{dy_k}{dt} \\ \frac{dz_k}{dt} \end{cases}}_{\text{produit scalaire}}$$

1^{er} terme 2^{ème} terme = $(\dot{x}_k \vec{x}_k + \dot{y}_k \vec{y}_k + \dot{z}_k \vec{z}_k) = (x_k \frac{dx_k}{dt} + y_k \frac{dy_k}{dt} + z_k \frac{dz_k}{dt})$

On remarque que :

$$(\vec{\Omega}_k \wedge \vec{W}) = 2^{\text{ème}} \text{ terme}$$

en posant $\vec{\Omega}_k = \begin{cases} +a_{23} \\ +a_{31} \\ +a_{12} \end{cases}$ et qqq:

$$= x_k (a_{12} \vec{y}_k - a_{31} \vec{z}_k) + y_k (-a_{12} \vec{x}_k + a_{23} \vec{z}_k) + z_k (a_{31} \vec{x}_k - a_{23} \vec{y}_k)$$

$$= (a_{31} z_k - a_{12} y_k) \vec{x}_k + (a_{12} x_k - a_{23} z_k) \vec{y}_k + (a_{23} y_k - a_{31} x_k) \vec{z}_k.$$

$$= \vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{W} : \text{dérivée des vecteurs de base.}$$

$\vec{\Omega}_k^\circ$: est appelé vecteur vitesse de rotation du repère R_k par rapport au repère R_0 .

(il est aussi appelé terme de la base mobile)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{W}^\circ}{dt/R_k} = \frac{d\vec{W}}{dt/R_k} + \vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{W}/R_k}$$

propriété : $\vec{\Omega}_k^\circ = -\vec{\Omega}_k$

Détails du calcul :

$$\left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_{R_k} = \left(\frac{d^k \vec{W}}{dt} \right)_{R_k} + \left(X_k \cdot \frac{d\vec{x}_k}{dt} + Y_k \cdot \frac{d\vec{y}_k}{dt} + Z_k \cdot \frac{d\vec{z}_k}{dt} \right)_{R_k}$$

on sait que :

$$\frac{d^\circ \vec{x}_k}{dt} \perp \vec{x}_k$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_k}{dt} &= (a_{12} \vec{y}_k + a_{13} \vec{z}_k) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{31} \\ a_{12} \end{pmatrix}}_{R_k} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ -a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \\ &= \vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{x}_k \end{aligned}$$

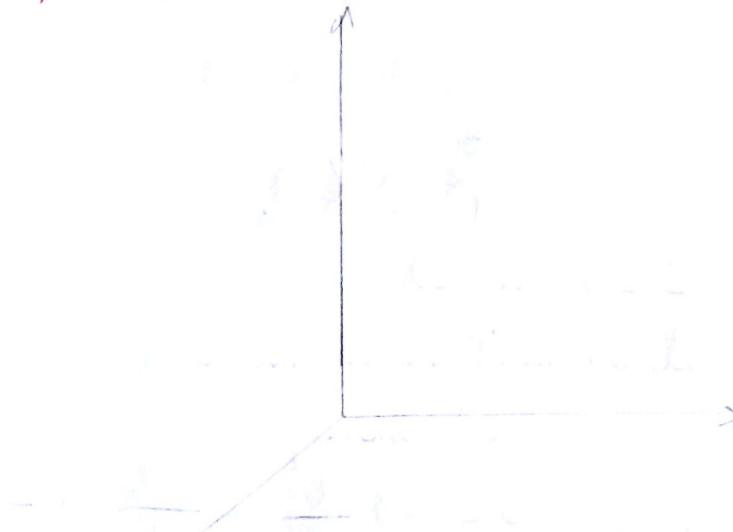
$$\text{car } \vec{\Omega}_k^\circ = \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{31} \\ a_{12} \end{pmatrix}_{R_k, R_k}$$

$$\text{d'où : } \frac{d^\circ \vec{y}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{y}_k$$

$$\frac{d\vec{z}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{z}_k$$

3-3) EXEMPLES

1) C.I d'un volume



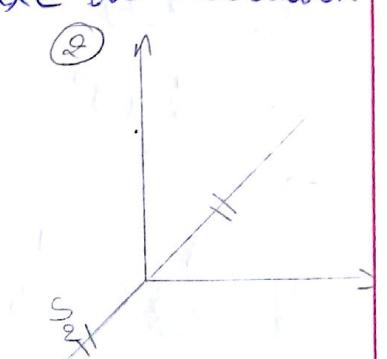
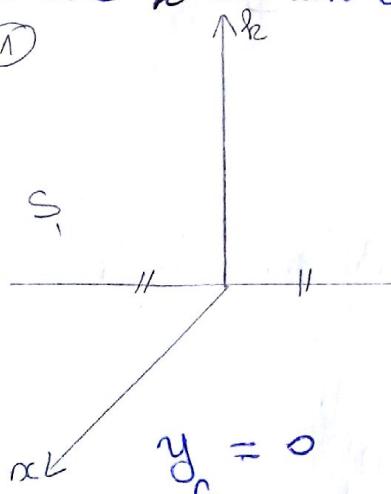
Calculer le centre d'inertie du solide homogène volumique ($\frac{1}{2}$ sphère)

Méthode 1:

1) y a t'il symétrie ?

L'axe ~~Z~~ est un axe de révolution

①

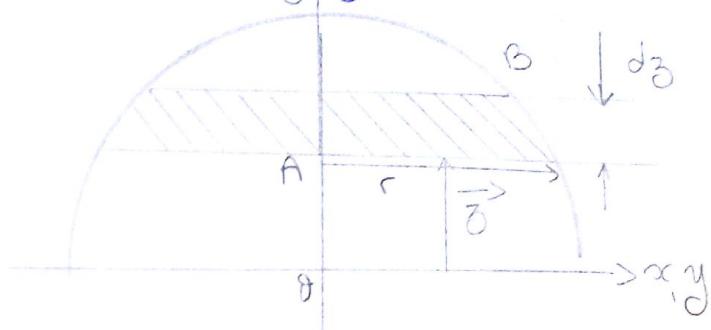


$$y_G = 0 \quad (\text{fig 1})$$

$$x_G = 0 \quad (\text{fig 2})$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_{(S)} z \cdot dm$$

2) élément d'intégration ?

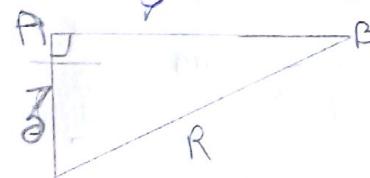


$$dV = S \cdot dz$$

$$S = \pi r^2$$

$$dV = \pi r^2 \cdot dz = \pi \left(R^2 - z^2 \right) dz$$

$$V = \iiint dV = \int \pi \left(R^2 - z^2 \right) dz$$



$$\text{avec } 0 \leq z \leq R$$

$$V = \pi \int_0^{R^2} R^2 dz - \pi \int_0^R z^2 dz$$

$$V = \pi \left[R^2 \cdot R - \frac{1}{3} R^3 \right] = \frac{2}{3} \pi R^3$$

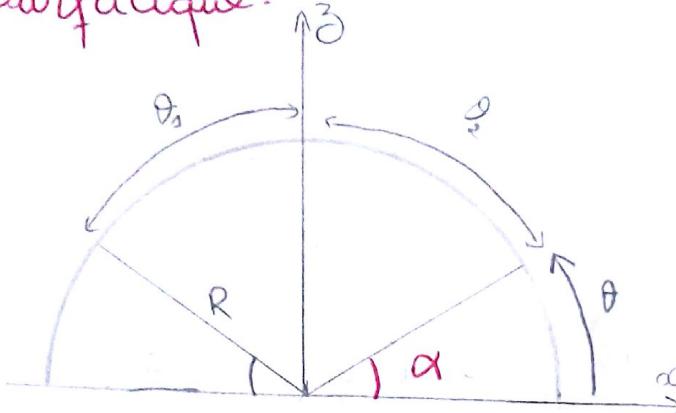
$$\bar{z} = \frac{1}{V} \int_0^R \pi z (R^2 - z^2) \cdot dz =$$

$$\frac{1}{V} \pi \left[\int z^2 R^2 dz - \int z^3 dz \right]$$

$$\bar{z}_G = \frac{1}{V} \pi \left[R^2 \cdot \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{6} R^4 \right]$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{3}{8} R$$

2) C.I. d'une partie disque
Surfacique.



Pas de matrice matière y
 $\Rightarrow y_G = 0$

Symétrie / 0z $\Rightarrow x_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{M} \int z \cdot dm = \frac{1}{g \cdot S} \iiint_S z \cdot ds$$

$$x = r \sin \theta' = r \cos \theta$$

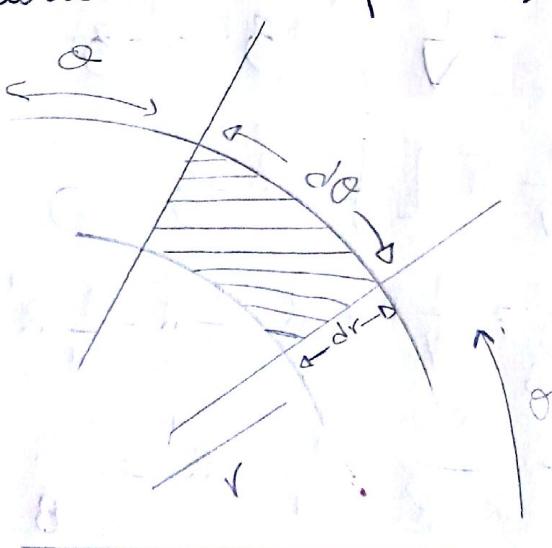
$$y = r \cos \theta' = r \sin \theta$$

Choix de l'élément d'intégration

$$ds = dx \cdot dz = dr (r \cdot d\theta)$$

Changement de coordonnées

(cartésienne \rightarrow polaire)



Bornes d'intégration

$$0 \leq r \leq R$$

$$\alpha \leq \theta \leq \alpha - \pi$$

$$-\theta_1 \leq \theta' \leq \theta_1$$

$$ds = r \cdot dr \cdot d\theta$$

déterminant de la matrice.

Jacobienne

$$S = \iint_S ds = 2\pi \frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2} =$$

$$ds = r dr \cdot d\theta'$$

$$S = \int_0^R r dr \int_{-\theta_1}^{\theta_1} d\theta' = \frac{1}{2} R^2 2\theta_1$$

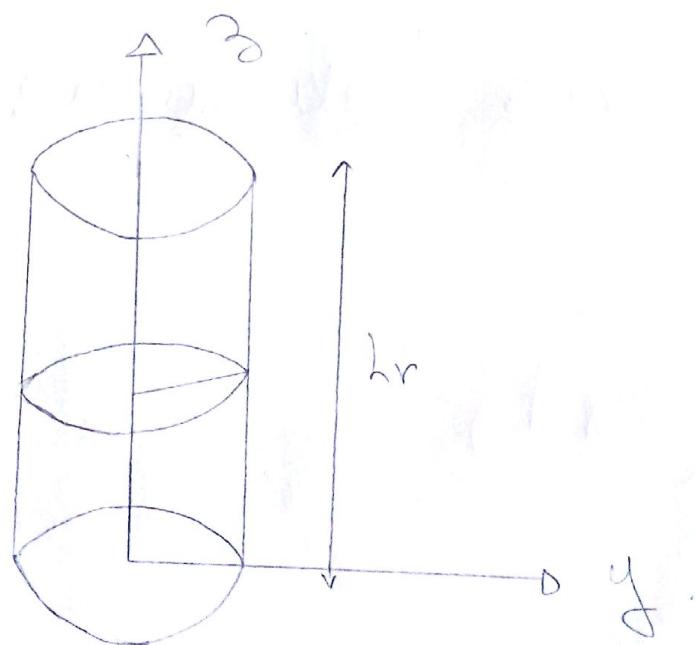
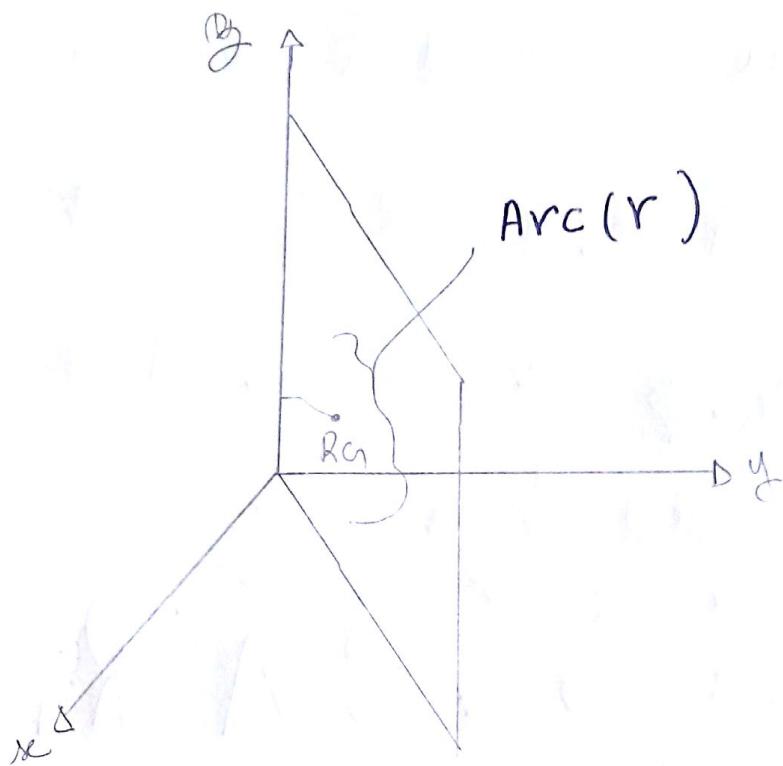
$$z_G = \frac{1}{S} \iint_S z \cdot ds = \frac{1}{S} \int_{\theta_1}^{\theta_1} \int_{\cos \theta'}^r \frac{\cos \theta'}{\sin \theta} dr d\theta'$$

$$z_G = \frac{1}{\theta_1 R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 2 \cdot \sin \theta_1$$

$$z_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \theta_1}{\theta_1}$$

4 - Théorème de Guldin

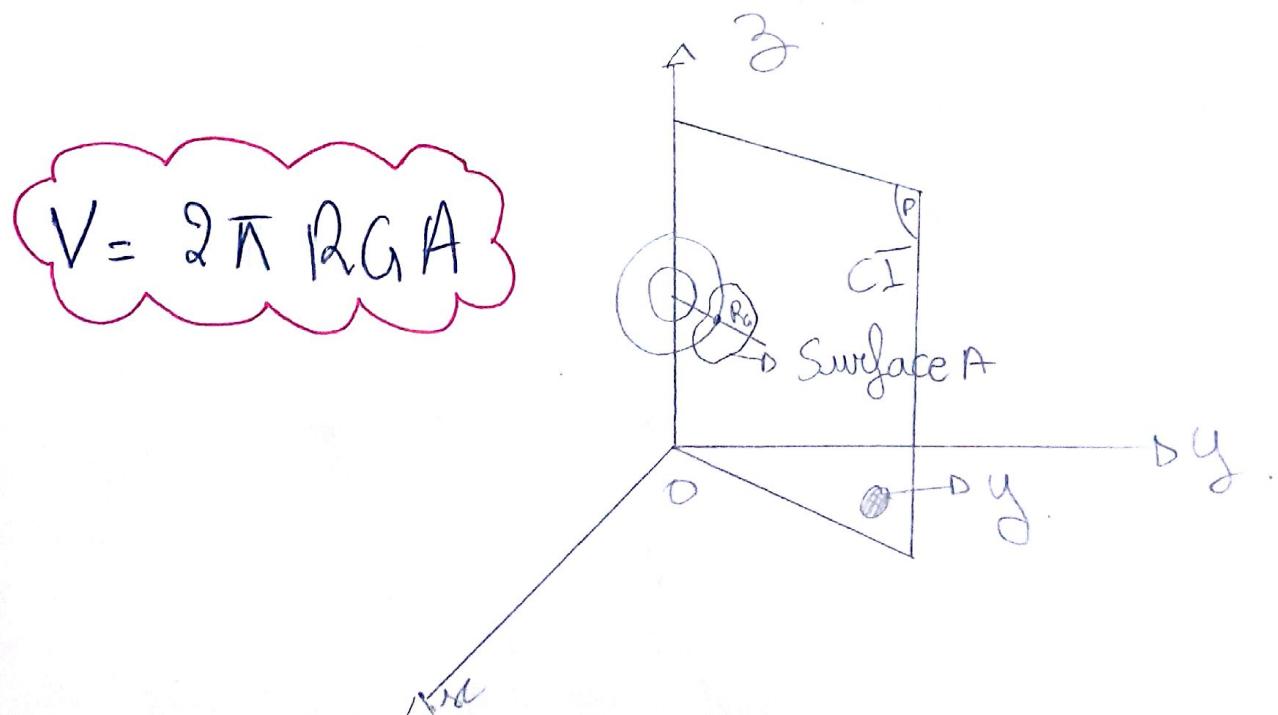
4-1/- Cas surfacique :



L'aire de la zone engendrée par un arc (r) d'un plan (P) tournant autour du bord du $\frac{1}{2}$ plan (Oz) est égale au produit de la longueur de l'arc par la longueur de l'arc de cercle décrit par son centre d'inertie

$$S = 2\pi R_A \cdot L_r$$

4 - 2 - Cas Volumique :



$$V = 2\pi R_A A$$

5.2) = produit d'inertie d'un solide

(S) en O, dans $R(0, \alpha, y, z)$ par rapport à 2 droites (Δ) et (Δ') \perp

$$I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dm$$

$$I_{x_3} = \int x \cdot z \cdot dm$$

$$I_{y,z} = \int_s y \cdot z \cdot dm$$

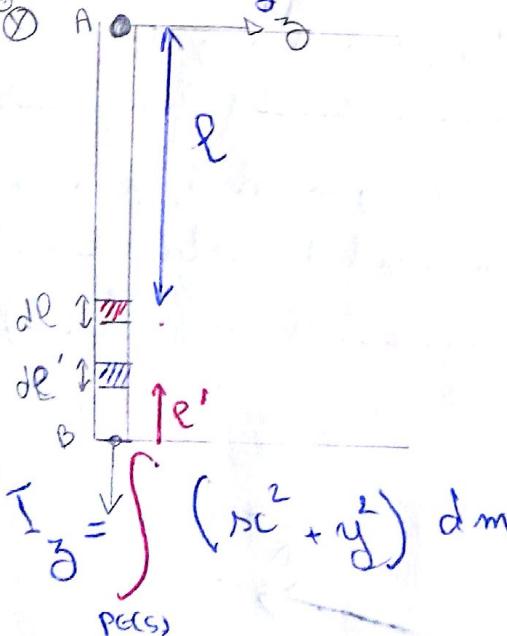
d'inertie

$$P_E(s) = \int_s^{\infty} (\text{distance})^2 \cdot dm$$

5.3) Exemple d'application

5-3-1) barre brasse mince homogène

Calculer I_3 dans $\mathbb{R}(x,y,z)$.



Si barre mince $z=0$ et $y=0$
de plus : (S) homogène

$$\rho_L = \frac{M}{L}$$

$$dm = \rho_1 \cdot dL$$

$$0 \leq L_{\text{MB}} \leq L \leq 0$$

$$I_3 = \frac{M}{L} \int_{\text{area}} (e^2 + o) dl$$

$$= \frac{H}{L_{AB}} \cdot \frac{\frac{L_{AB}}{3}}{3} \Rightarrow I_3 = \cancel{f(x)} \frac{HL^2}{27}$$

5-3.2) Anneau mince homogène
calcul de I_z .

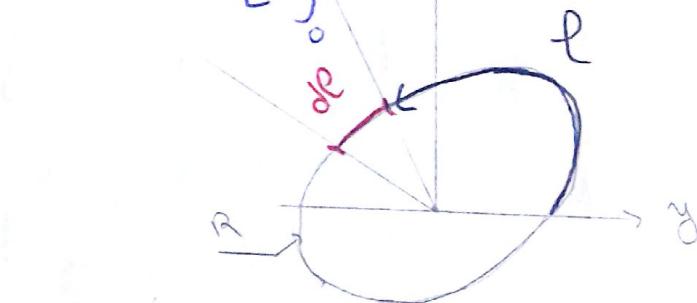
dE: élément d'intégration

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$I_3 = \int (x^2 + y^2) dm.$$

$$\text{ou: } (x^2 + y^2) = R^2 \quad \text{et}$$

$$I_3 = R \cdot \frac{M}{L} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dP$$



$$I_3 = M R^2$$

6-) Tenseur d'inertie d'un solide en (0) dans R(x, y, z)

6.1) définitions

$$J_{(0/x, y, z)} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{yz} & I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & I_{zy} \\ -I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Propriétés:

- Diagonales nulles
- 3 valeurs propres réelles et 3 directions propres et orthogonales tel que :
 - Valeurs propres à moments d'inertie principaux.

* directions (vecteur) propres

Axes I principaux.

Dans ce cas

$$J_{(x_p, y_p, z_p)} = \begin{bmatrix} I_{xp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zp} \end{bmatrix}$$

Cas particuliers:

- 1) Existence d'un plan de symétrie
 Si $\pi(0, x, y)$ est le plan $\forall M \in (S) \exists M' \in (S)$ tel que

$$0 = \int x \cdot z \cdot dm = \int y \cdot z \cdot dm = 0$$

2) Si il existe un axe de révolution

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

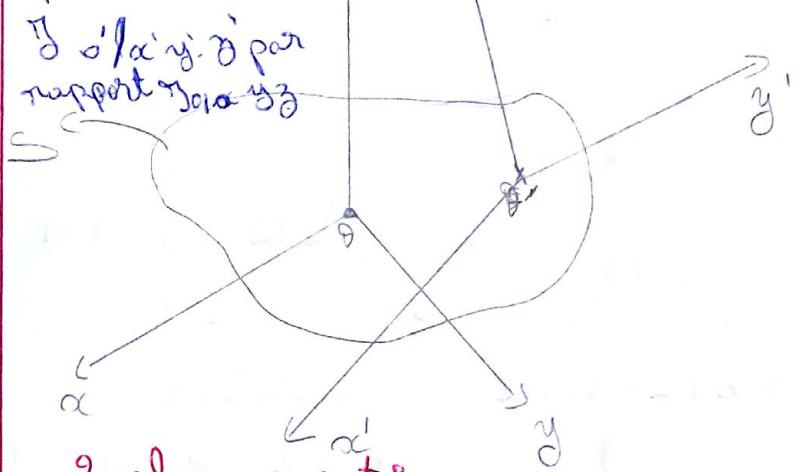
$$\text{et } I_{xx} = I_{yy} = I_z$$

6.2) Tenseur d'inertie de (S)

en O, dans R(x, y, z)

6.2.1) position du problème

peut se calculer



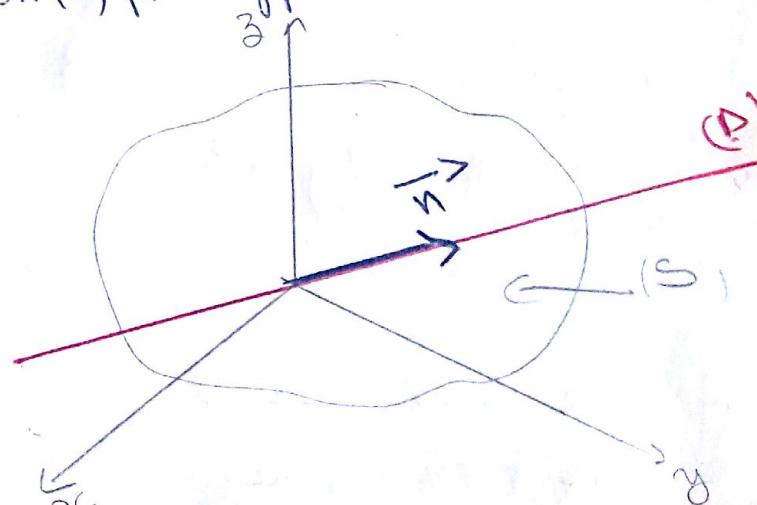
2. changement

* Translation de $R_0(x, y, z)$ jusqu'à $R_0'(x', y', z')$

* Rotations successives pour passer

de $R_0(x, y, z)$ à $R_0(x', y', z')$

6.2.2) moment d'inertie de (S) en (0) par rapport à un droit (Δ)



\vec{n}^* Vecteur unitaire de (Δ)
dans $R_{o,x,y,z}$

$$\vec{n} = \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases} \quad [3 \times 1] \quad R_{o,x,y,z}$$

$$I_{\Delta} = -\vec{n}^t \cdot I_{o,x,y,z} \cdot \vec{n}$$

$$[1 \times 3] \quad [3 \times 3] \quad [3 \times 1]$$

$$I_{\Delta} = -[\alpha, \beta, \gamma] \cdot \begin{bmatrix} I_x & -I_{yz} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & I_{zy} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

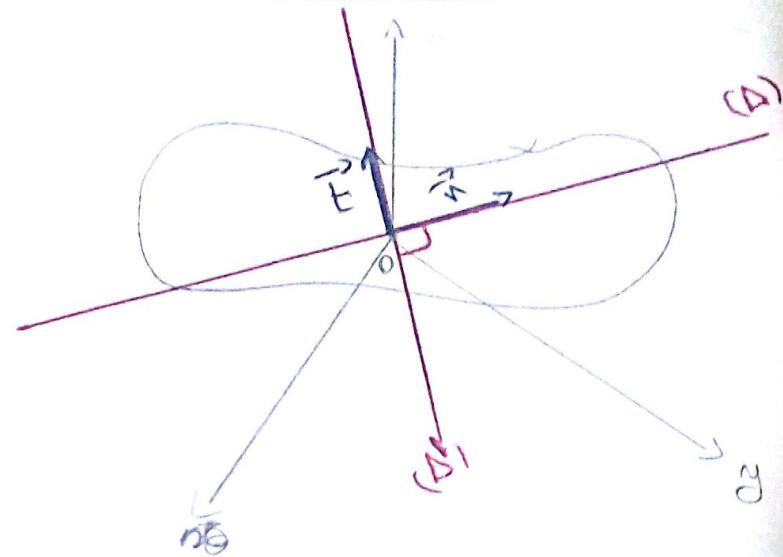
$$= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= -[\alpha I_x - \beta I_{xy} - \gamma I_{xz}] - \alpha I_{xy}$$

$$+ \beta I_y - \gamma I_{yz} | \alpha I_{xz} - \beta I_{yz} - \gamma I_x]$$

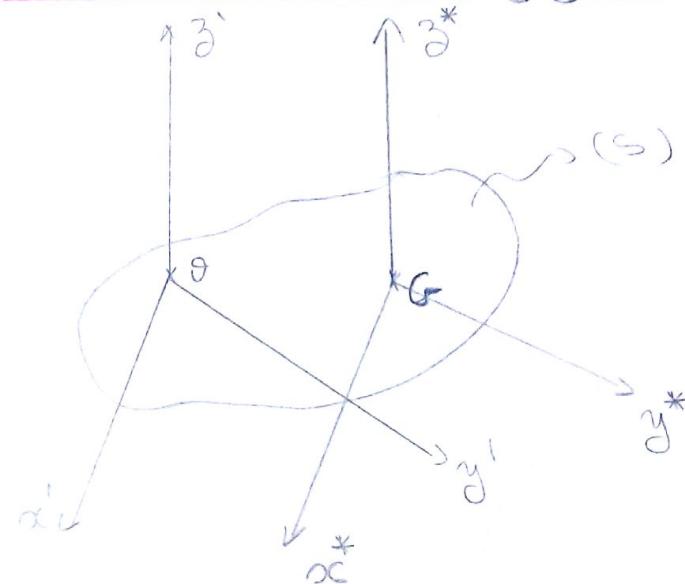
$$* \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

6.2.3) produit d'inertie de (S)
par rapport à 2 droites (Δ) (Δ')



$$\Pi_{nt} = -\vec{t}^t \cdot I_o \cdot \vec{n}$$

6.2.4) Théorème de Huygén



$$I_x^* = I_{xc^*} + m \cdot d_{GO}^2 \quad \text{la distance entre } G \text{ et } O$$

$$I_y^* = I_{yc^*} + m \cdot d_{GO}^2$$

$$I_z^* = I_{zc^*} + m \cdot d_{GO}^2$$

$$I_{xy}^* = I_{xyc^*} + m \cdot d_{GO} \cdot d_{yG}$$

$$I_{y_3} = I_{y_3^*} + m \cdot d_y \cdot d_z$$

$$I_{z_3} = I_{z_3^*} + m \cdot d_x \cdot d_z$$

CHAPITRE 04 : Géométrie des masses

1) Introduction :

L'objectif de ce chapitre est de modéliser les notions de masse et d'inertie d'un système matériel (S)

- Traduire l'algèbre des tenseurs pour représenter les moments (produits) d'inertie par rapport à des axes arbitraires formant un repère orthonormé direct et en l'appellera ϵ Tenseur d'inertie
- Ces notations seront nécessaires pour l'étude de la dynamique de S

2) Rappels

Un système (S) est un système complexe dans lequel la position ou le mouvement de chaque point (ou solide) dépend de la position ou de mouvement de tout les autres

Ex:

- ⇒ Le système polaire est un système
- ⇒ Le moteur d'un véhicule
- ⇒ L'ensemble des étudiants de cet amphithéâtre n'est pas un système

2-2) masse d'un système :
La masse d'un système est l'arithmétique des masses de tous les points composant (S)

$$M = \sum_{i=1}^n dm_i$$

Remarque :

1) En mécanique galiléenne (Non quantique)

la masse M ne varie pas au cours du temps

- en utilisant la ϵ continuité de (S) $M = \int dm$ où p est

un point matériel $\in S$

dm_p est la masse au voisinage de p

Si (S) est modélisé comme étant un volume homogène alors $M = \rho_v \cdot V$

$$M = \rho_v \cdot \iiint_{S \in (S)} dm$$

Si (S) est modélisé comme étant une surface S

$$M = \rho_s \iint_{S \in (S)} ds$$

Si (S) est modélisé comme étant une courbe C

$$M = C_e \cdot \int_{P \in S} dC$$

2) (S) est un ensemble fini discret de points matériels (ou solide)

Ex:

⇒ une boîte de pâtisserie

$$M_T = M_{\text{atm}} + M_{\text{boîte}} + M_{\text{farine}}$$

$$M_T = C_v \iint dV + C_s \iint dS + C_f \iint dA$$

$$M_T = \sum_{i=1}^3 M_i$$

3) centre d'inertie de (S)

3.1) cas du point matériel p de (S)
on appelle centre d'inertie de (S)

le point (G) tel que

$$\int_{P \in S} G \cdot P \cdot dm = \vec{0}$$

par rapport à O , centre du repère $R_o(x-y-z)$

$$\vec{OG} = \frac{1}{\int dm} \int \vec{OP} \cdot dm$$

dans R_o :

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int \vec{OP} \cdot dm$$

si on projette

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{P \in S} x \cdot dm$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_{P \in S} y \cdot dm$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_{P \in S} z \cdot dm$$

3.2) cas d'un système discret

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N M_i} \sum_{i=1}^N \int_{P \in S_i} \vec{OP} \cdot dm$$

comme :

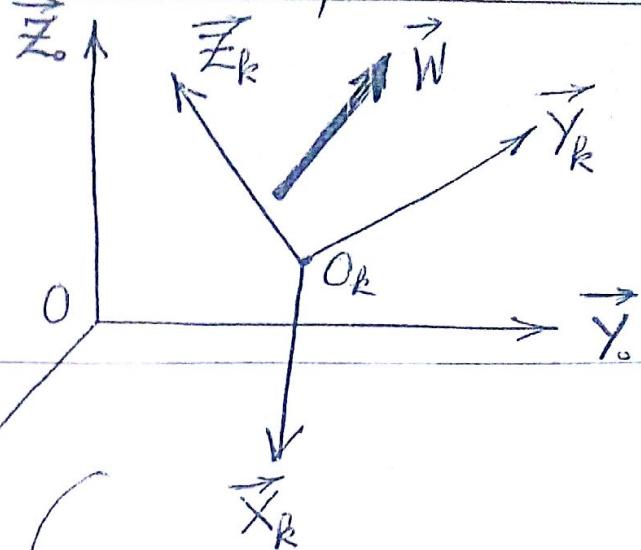
$$\vec{OG}_i = \frac{1}{M_i} \int_{P \in S_i} \vec{OP} \cdot dm$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum M_i} \sum_{i=1}^N \left[M_i \left(\frac{1}{M_i} \int_{P \in S_i} \vec{OP} \cdot dm \right) \right]$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N M_i} \sum_{i=1}^N M_i \cdot \vec{OG}_i$$

2.5 Dérivée d'un vecteur dans un repère variable:

soit $\vec{W}(t) = \begin{cases} X_k(t) \\ Y_k(t) \\ Z_k(t) \end{cases}$



$$\frac{d\vec{W}}{dt} = (\dot{X}_k \vec{x}_k + \dot{Y}_k \vec{y}_k + \dot{Z}_k \vec{z}_k) +$$

$$+ (X_k \frac{d\vec{x}_k}{dt} + Y_k \frac{d\vec{y}_k}{dt} + Z_k \frac{d\vec{z}_k}{dt})$$

Soit:

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = a_{11}(t) \vec{x}_k + a_{12}(t) \vec{y}_k + a_{13}(t) \vec{z}_k$$

$$\frac{d\vec{y}_k}{dt} = a_{21}(t) \vec{x}_k + a_{22}(t) \vec{y}_k + a_{23}(t) \vec{z}_k$$

$$\frac{d\vec{z}_k}{dt} = a_{31}(t) \vec{x}_k + a_{32}(t) \vec{y}_k + a_{33}(t) \vec{z}_k$$

$R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$: mobile

$R_o(0, i, j, k)$: fixe

$$|\vec{x}_k| = |\vec{y}_k| = |\vec{z}_k| = 1 \quad \text{mais leur direction est variable}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{x}_k}{dt} \in \text{plan } \perp \vec{x}_k$$

$$\Rightarrow a_{11}(t) = a_{22}(t) = a_{33}(t) = 0$$

on a aussi:

$$\vec{x}_k \cdot \vec{y}_k = \vec{x}_k \cdot \vec{z}_k = \vec{y}_k \cdot \vec{z}_k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{x}_k \cdot \vec{y}_k) = \frac{d\vec{x}_k}{dt} \cdot \vec{y}_k + \vec{x}_k \cdot \frac{d\vec{y}_k}{dt}$$

$$0 = (a_{12} \vec{y}_k + a_{13} \vec{z}_k) \cdot \vec{y}_k + \vec{x}_k \cdot (a_{21} \vec{x}_k + a_{23} \vec{z}_k)$$

$$0 = a_{12} + a_{21} \Rightarrow a_{12} = -a_{21}$$

d'où aussi : $a_{13} = -a_{31}$ on a donc :

$$a_{23} = -a_{32}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_k}{dt} &= a_{12} \vec{y}_k - a_{31} \vec{z}_k \\ \frac{d\vec{y}_k}{dt} &= -a_{12} \vec{x}_k + a_{23} \vec{z}_k \\ \frac{d\vec{z}_k}{dt} &= a_{31} \vec{x}_k - a_{23} \vec{y}_k \end{aligned}$$



On a trouvé que :

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \underbrace{\begin{cases} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \\ \dot{z}_k \end{cases}}_{R_k} + \underbrace{\begin{cases} x_k \\ y_k \\ z_k \end{cases}}_{R_k} \cdot \underbrace{\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} \\ \frac{dy_k}{dt} \\ \frac{dz_k}{dt} \end{cases}}_{\text{produit scalaire}}$$

1^{er} terme 2^{ème} terme = $(\dot{x}_k \vec{x}_k + \dot{y}_k \vec{y}_k + \dot{z}_k \vec{z}_k) = (x_k \frac{dx_k}{dt} + y_k \frac{dy_k}{dt} + z_k \frac{dz_k}{dt})$

On remarque que :

en posant $\vec{\Omega}_k = \begin{cases} +a_{23} \\ +a_{31} \\ +a_{12} \end{cases}$ et qqq:

$$(\vec{\Omega}_k \wedge \vec{W}) = 2^{\text{ème}} \text{ terme}$$

$$= x_k (a_{12} \vec{y}_k - a_{31} \vec{z}_k) + y_k (-a_{12} \vec{x}_k + a_{23} \vec{z}_k) + z_k (a_{31} \vec{x}_k - a_{23} \vec{y}_k)$$

$$= (a_{31} z_k - a_{12} y_k) \vec{x}_k + (a_{12} x_k - a_{23} z_k) \vec{y}_k + (a_{23} y_k - a_{31} x_k) \vec{z}_k.$$

$\vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{W}$: dérivée des vecteurs de base.

$\vec{\Omega}_k^\circ$: est appelé vecteur vitesse de rotation du repère R_k par rapport au repère R_0 .

(il est aussi appelé terme de la base mobile)

\Rightarrow

$$\boxed{\frac{d\vec{W}^\circ}{dt/R_k} = \frac{d\vec{W}}{dt/R_k} + \vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{W}/R_k}$$

propriété : $\vec{\Omega}_k^\circ = -\vec{\Omega}_k$

Détails du calcul :

$$\left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_{R_k} = \left(\frac{d^k \vec{W}}{dt} \right)_{R_k} + \left(X_k \cdot \frac{d\vec{x}_k}{dt} + Y_k \cdot \frac{d\vec{y}_k}{dt} + Z_k \cdot \frac{d\vec{z}_k}{dt} \right)_{R_k}$$

on sait que :

$$\frac{d^\circ \vec{x}_k}{dt} \perp \vec{x}_k$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_k}{dt} &= (a_{12} \vec{y}_k + a_{13} \vec{z}_k) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{31} \\ a_{12} \end{pmatrix}}_{R_k} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ -a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \\ &= \vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{x}_k \end{aligned}$$

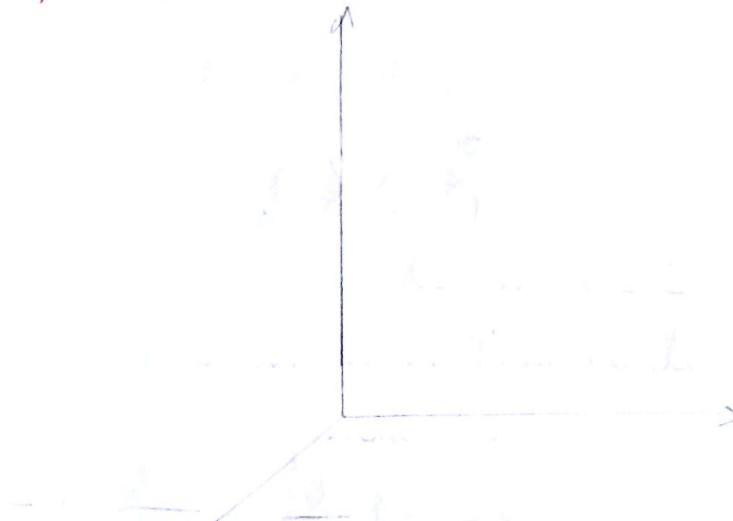
$$\text{car } \vec{\Omega}_k^\circ = \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{31} \\ a_{12} \end{pmatrix}_{R_k, R_k}$$

$$\text{d'où : } \frac{d^\circ \vec{y}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{y}_k$$

$$\frac{d\vec{z}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^\circ \wedge \vec{z}_k$$

3-3) EXEMPLES

1) C.I d'un volume



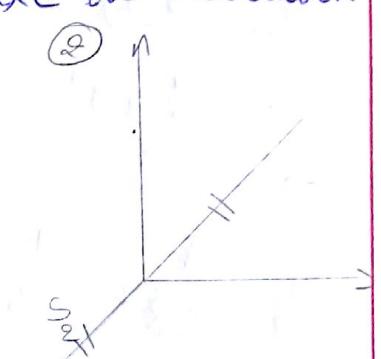
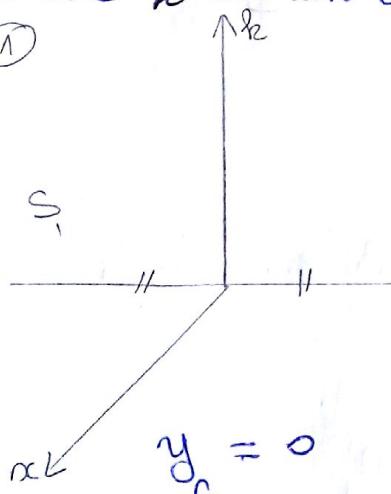
Calculer le centre d'inertie du solide homogène volumique ($\frac{1}{2}$ sphère)

Méthode 1:

1) y a t'il symétrie ?

L'axe ~~Z~~ est un axe de révolution

①

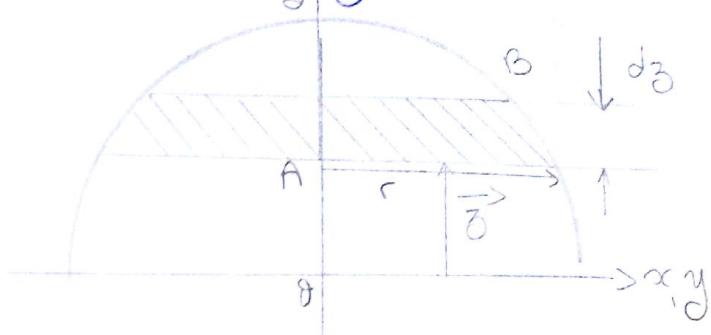


$$y_G = 0 \quad (\text{fig 1})$$

$$x_G = 0 \quad (\text{fig 2})$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_{(S)} z \cdot dm$$

2) élément d'intégration ?

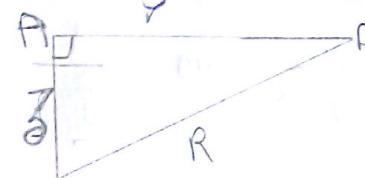


$$dV = S \cdot dz$$

$$S = \pi r^2$$

$$dV = \pi r^2 \cdot dz = \pi \left(R^2 - \frac{z^2}{3} \right) dz$$

$$V = \iiint dV = \int \pi \left(R^2 - z^2 \right) dz$$



$$\text{avec } 0 \leq z \leq R$$

$$V = \pi \int_0^{R^2} R^2 dz - \pi \int_0^R z^2 dz$$

$$V = \pi \left[R^2 \cdot R - \frac{1}{3} R^3 \right] = \frac{2}{3} \pi R^3$$

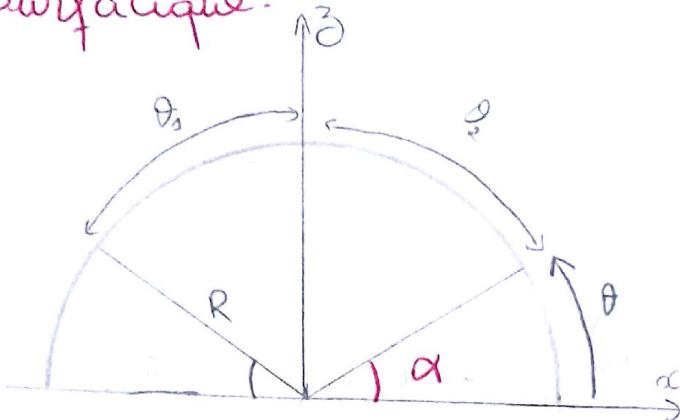
$$\bar{z} = \frac{1}{V} \int_0^R \pi R^2 (R^2 - z^2) \cdot dz =$$

$$\frac{1}{V} \pi \left[\int z^2 R^2 dz - \int z^3 dz \right]$$

$$\bar{z}_G = \frac{1}{V} \pi \left[R^2 \cdot \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{6} R^4 \right]$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{3}{8} R$$

2) C I d'une partie disque
Surfacique. $\uparrow 3$



Pas de matrice matière y
 $\Rightarrow y = 0$

Symétrie / O₃ => x_C = 0

$$\mathcal{Z}_G = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^S \mathcal{Z}_s \cdot d_m = \frac{1}{S \cdot S} \sum_{s=1}^S \sum_{s=1}^S \mathcal{Z}_s \cdot d_s$$

$$bc = r \sin \theta' = r \cos \theta$$

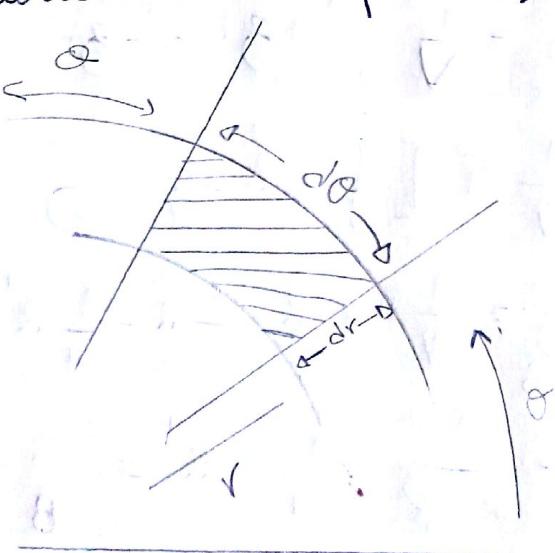
$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = r \sin \theta$$

Choix de l'élément d'intégration

$$dS = dx \cdot dz = dr(r \cdot d\theta)$$

Changement de coordonnées

(cartésienne \rightarrow polaire)



Bornes d'intégration

o $\Sigma r \Sigma R$

$$\alpha \leq \theta \leq \alpha - \pi$$

$$-\theta_1 \leq \theta' \leq \theta_1$$

$$dS = r \cdot dr \cdot d\theta$$

determinant de la matrice.

Jacobienne

$$S = \iint_D dS = 2\pi \frac{R^2}{2} = \frac{\pi D_1 R^2}{2}$$

$$dS = \int r dr \cdot d\theta$$

$$S = \int_0^R r \cdot dr \int_{-\theta}^{\theta} d\theta = \frac{1}{2} R^2 2\theta,$$

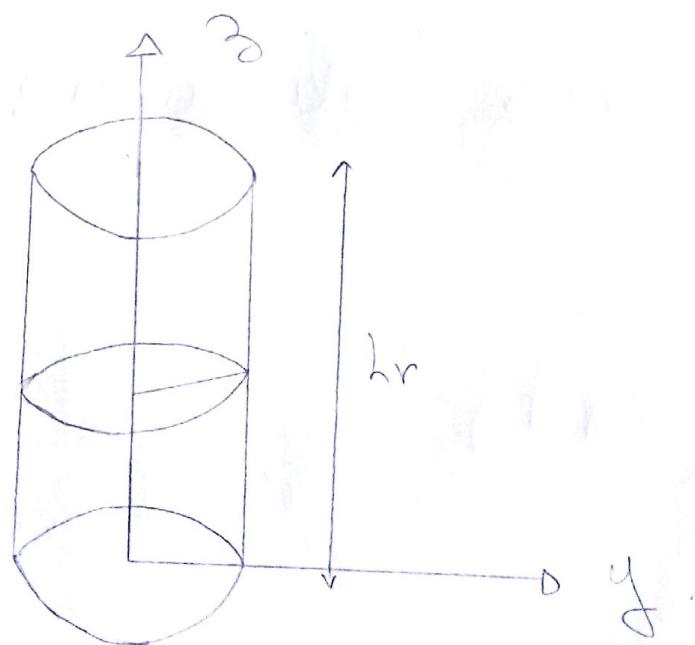
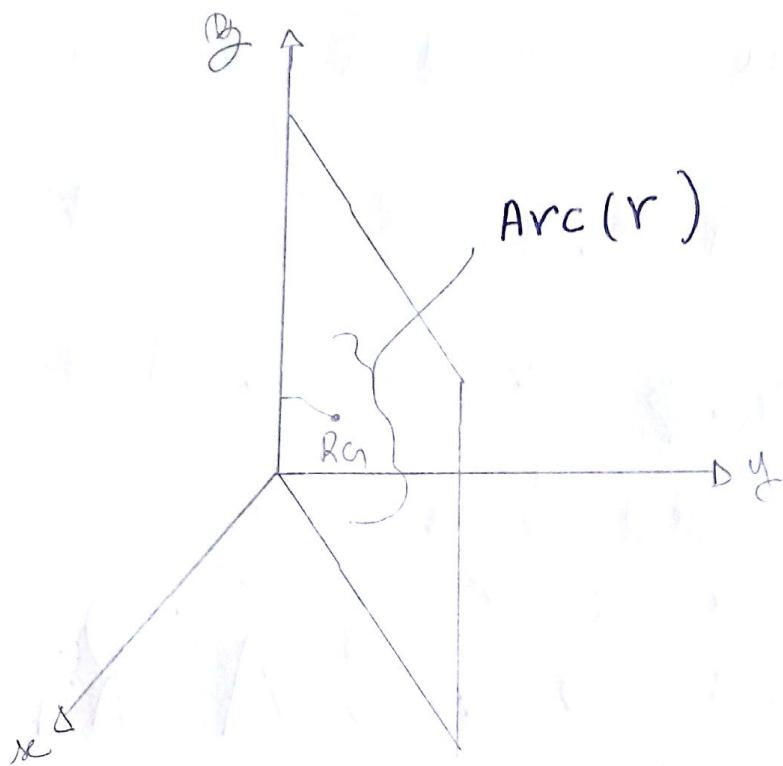
$$\int_{-\theta_1}^{\theta_1} \cos \theta' d\theta'$$

$$z_G = \frac{1}{\theta_1 R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 2 \cdot \sin \theta_1$$

$$Z_0 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \theta}{\theta}$$

4 - Théorème de Guldin

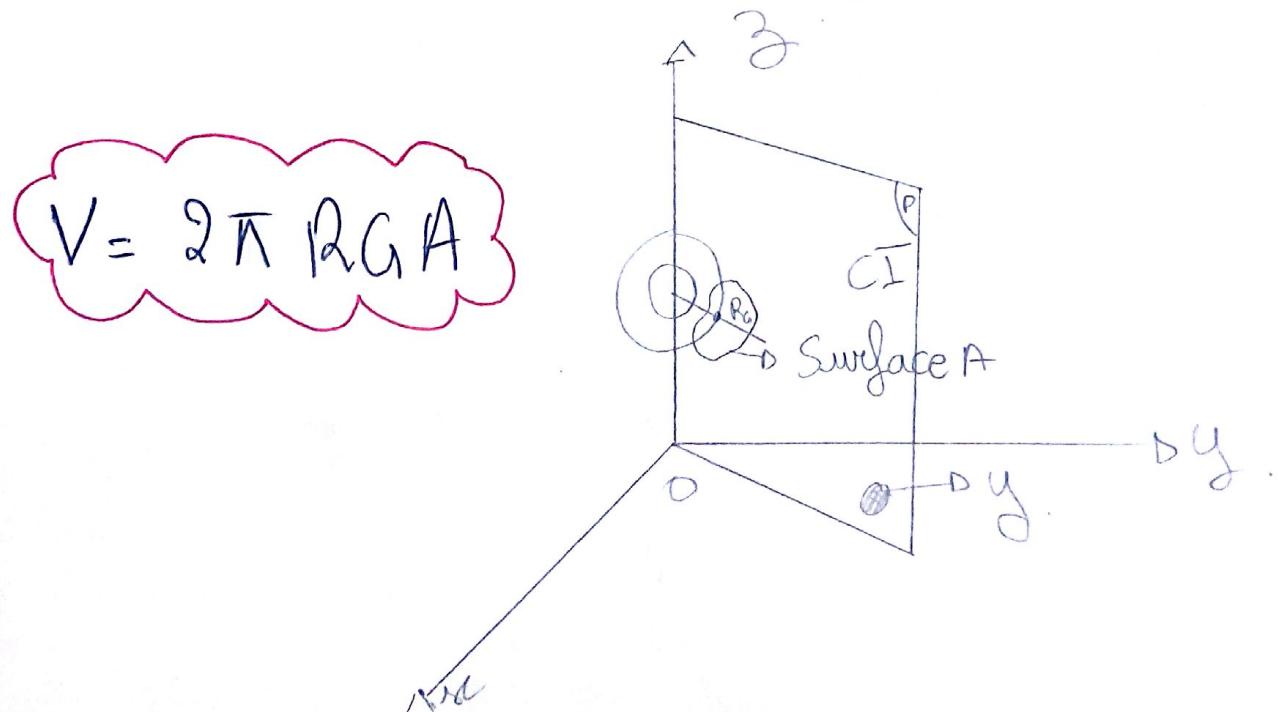
4-1/- Cas surfacique :



L'aire de la zone engendrée par un arc (r) d'un plan (P) tournant autour du bord du $\frac{1}{2}$ plan (Oz) est égale au produit de la longueur de l'arc par la longueur de l'arc de cercle décrit par son centre d'inertie

$$S = 2\pi R_A \cdot L_r$$

4 - 2 - Cas Volumique :



5.2) = produit d'inertie d'un solide

(S) en O, dans R(x, y, z) par rapport à 2 droites (Δ) et (Δ') \perp

$$I_{xy} = \int_s x \cdot y \cdot dm$$

$$I_{xz} = \int_s x \cdot z \cdot dm$$

$$I_{yz} = \int_s y \cdot z \cdot dm$$

d'inertie

$$I_{xx} = \int_s (\text{distance})^2 \cdot dm$$

(y² + z²)

5.3) Exemple d'application

5.3.1) barre fine mince homogène

calculer I_z dans R(A, x, y, z)



dm = l \cdot dl

dl

dl'

dl''

dl'''

dl''''

dl'''''

dl'''''

dl''''''

dl'''''''

dl'''''''

dl''''''''

6-) Tenseur d'inertie d'un solide en (0) dans R(x, y, z)

6.1) définitions

$$J_{(0/x, y, z)} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{yz} & I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & I_{zy} \\ -I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Propriétés:

- Diagonales nulles
- 3 valeurs propres réelles et 3 directions propres et orthogonales tel que :
 - Valeurs propres à moments d'inertie principaux.
 - directions (vecteurs) propres axes I principaux.

Dans ce cas

$$J_{(x_p, y_p, z_p)} = \begin{bmatrix} I_{xp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zp} \end{bmatrix}$$

Cas particuliers

- 1) Existence d'un plan de symétrie
Si $\pi(0, x, y)$ est le plan $\forall M \in (S) \exists M' \in (S)$ tel que

$$0 = \int x \cdot z \cdot dm = \int y \cdot z \cdot dm = 0$$

2) Si il existe un axe de révolution

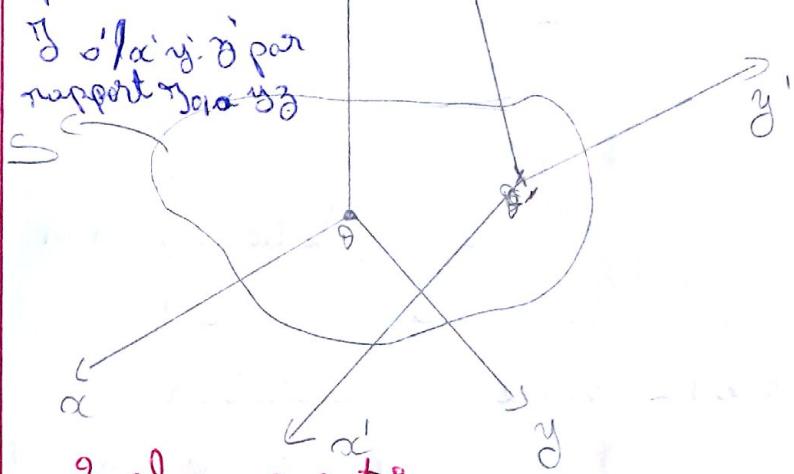
$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

et $I_{xx} = I_{yy} = I$

6-2) Tenseur d'inertie de (S) en O, dans R(x, y, z)

6.2.1) position du problème

peut se calculer



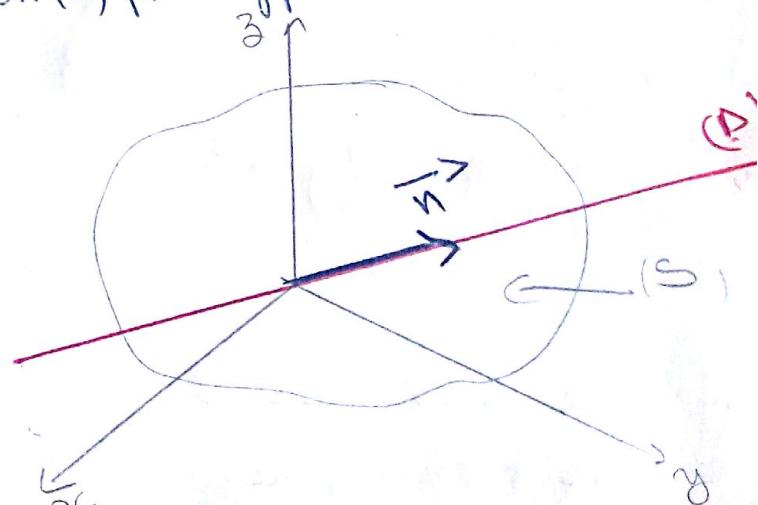
2. changement

- * Translation de $R_0(x, y, z)$ jusqu'à $R_0'(x', y', z')$

* Rotations successives pour passer

- de $R_0(x, y, z)$ à $R_0'(x', y', z')$

6-2.2) moment d'inertie de (S) en (0) par rapport à un droit (D)



\vec{n}^* Vecteur unitaire de (Δ)
dans $R_{o,x,y,z}$

$$\vec{n} = \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases} \quad [3 \times 1] \quad R_{o,x,y,z}$$

$$I_{\Delta} = -\vec{n}^t \cdot I_{o,x,y,z} \cdot \vec{n}$$

$$[1 \times 3] \quad [3 \times 3] \quad [3 \times 1]$$

$$I_{\Delta} = -[\alpha, \beta, \gamma] \cdot \begin{bmatrix} I_x & -I_{yz} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & I_{zy} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

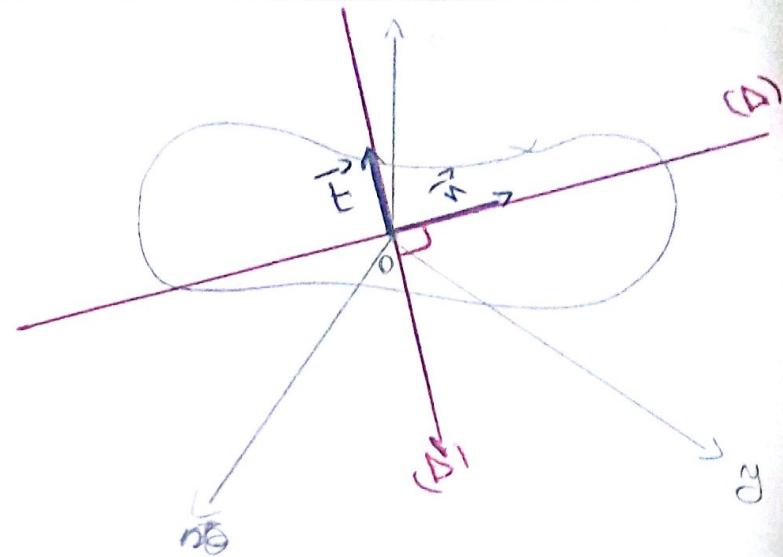
$$= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= -[\alpha I_x - \beta I_{xy} - \gamma I_{xz}] - \alpha I_{xy}$$

$$+ \beta I_y - \gamma I_{yz} | \alpha I_{xz} - \beta I_{yz} - \gamma I_x]$$

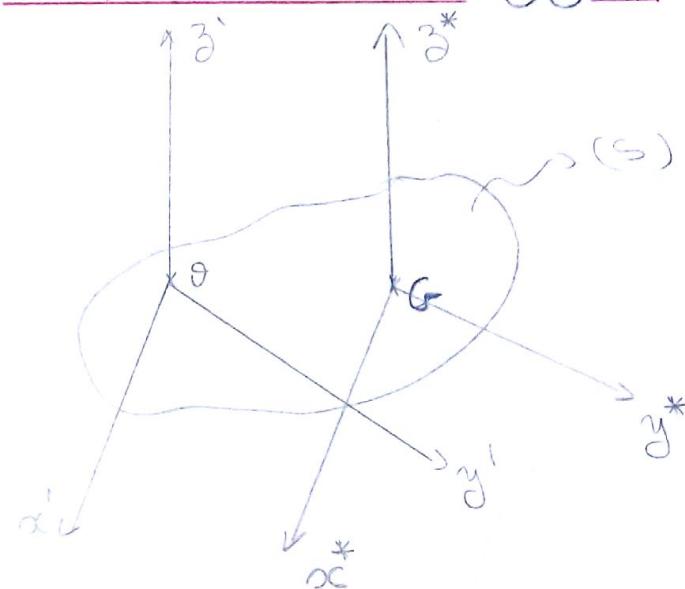
$$* \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

6.2.3) produit d'inertie de (S)
par rapport à 2 droites (Δ) (Δ')



$$\Pi_{nt} = -\vec{t}^t \cdot I_o \cdot \vec{n}$$

6.2.4) Théorème de Huygén



$$I_x^* = I_{xc^*} + m \cdot d^2 \quad \text{la distance entre G et O}$$

$$I_y^* = I_{yc^*} + m \cdot d^2$$

$$I_z^* = I_{zc^*} + m \cdot d^2$$

$$I_{xy}^* = I_{xyc^*} + m \cdot d \cdot dx \cdot dy$$

$$I_{y_3} = I_{y_3^*} + m \cdot d_y \cdot d_z$$

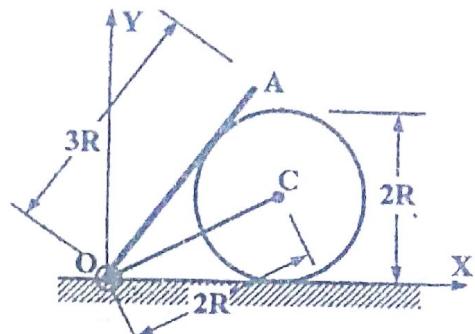
$$I_{z_3} = I_{z_3^*} + m \cdot d_x \cdot d_z$$

Série d'exercices n° 2 : Statique (4h30 min)

Exercices à faire en TD :**Exercice 1** (examen final – Janvier 2012)

Une barre homogène OA, de poids $P = 100 \text{ N}$ et de longueur $3R$, est articulée en O. Elle s'appuie sur un cylindre lisse de rayon $R = 20 \text{ cm}$ et de poids $Q = 200 \text{ N}$. Ce dernier, s'appuie sur un plan horizontal lisse. Le cylindre est maintenu en équilibre grâce à un fil inextensible OC de longueur $2R$ (voir figure ci-contre).

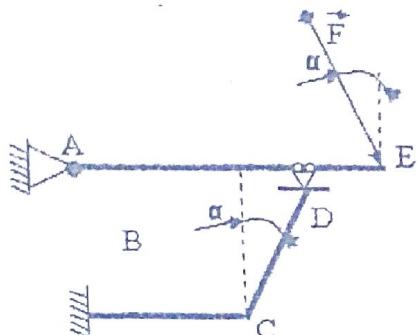
- Déterminer la tension du fil ainsi que la réaction de la liaison en O.

**Exercice 2** (examen de rattrapage Fév. 2011)

Soit le mécanisme formé de :

- Une barre AE de poids $P_1 = 2P$, articulée en A.
- Une barre BC de poids $P_2 = P$, encastrée en B.
- Une barre CD de poids $P_3 = P$, soudée en C et en contact sans frottements avec AE en D.

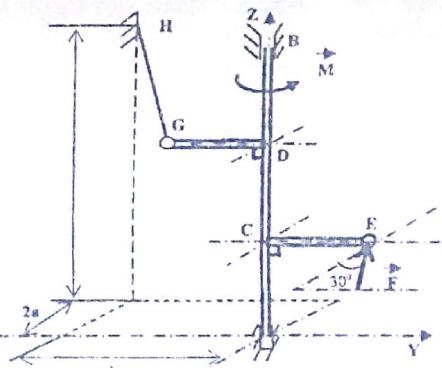
Une charge $F = P$ est appliquée à ce système en E. Déterminer, en fonction de P , les réactions des liaisons en A, B et D. On donne $AE = 2a$, $BC = CD = a$ et $\alpha = 30^\circ$.

**Exercice 3** (examen final – Janvier 2009)

Soit un corps constitué de deux barres CE et DG de poids P , soudées à la barre AB de poids $2P$ (voir la figure ci-contre). Le corps est situé dans le plan YZ et est maintenu en équilibre en position verticale par l'intermédiaire de l'articulation sphérique en A, l'articulation cylindrique en B et le câble inextensible GH. Ce système est soumis à un moment $M = aP$ autour l'axe Z et une force $F = P$ appliquée en E. Cette force est contenue dans un plan parallèle au plan XY et faisant un angle de 30° avec l'axe X.

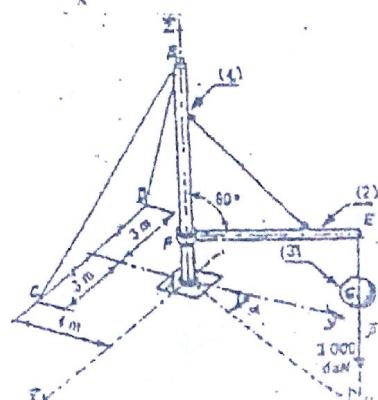
- Déterminer, en fonction de P , M et a , les réactions aux liaisons en A et B ainsi que la tension du câble HG.

On donne : $AC = CD = DB = CE = DG = 2a$.

Exercices supplémentaires**Exercice 4**

Un mât de charge, utilisé pour décharger les navires, se compose d'un mât principal vertical AB (1), articulé en A (liaison sphérique) et maintenu en B par deux câbles inextensibles BC et BD (voir figure ci-contre). La charge à lever $P = 3000 \text{ daN}$ est fixée en E sur un deuxième mât EF (2) articulé en F (liaison cylindrique). Un troisième câble inextensible relie le mât (1) au mât (2). Données : $AB = 5 \text{ m}$, $AF = 1 \text{ m}$, $EF = 5 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$.

- Exprimer les projections des tensions BC et BD dans le repère (A, X, Y, Z).
- Calculer les tensions des câbles BC et BD ainsi que la réaction en A.

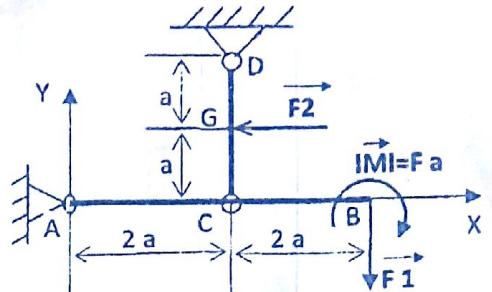


Exercice 5 (examen final – Janvier 2013)

Deux barres AB et CD de poids négligeables, articulées entre elles en C, reposent sur deux appuis doubles en A et D. L'ensemble est sollicité par deux forces F_1 et F_2 , appliquées respectivement en B et G ainsi que par un moment M autour du point B (voir figure ci-contre).

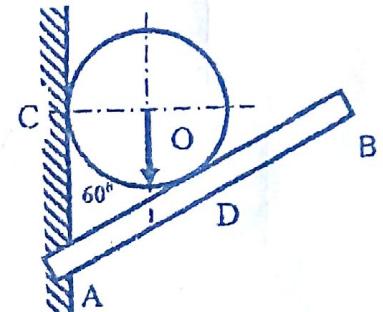
On donne $F_1 = F_2 = 1000 \text{ N}$, $a = 0,2 \text{ m}$ et $M = F.a = 200 \text{ Nm}$.

- Calculer les réactions aux articulations A, C et D.

**Exercice 6**

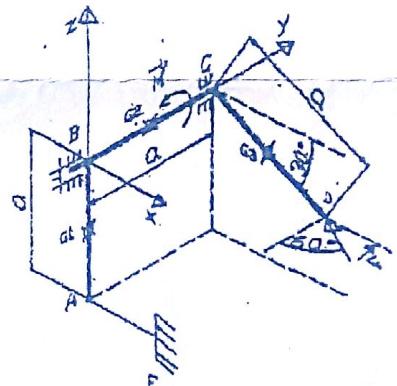
Une barre AB de longueur $L = 1\text{m}$ et de poids $P = 100 \text{ kgf}$ est encastrée dans un mur au point A. Elle forme un angle $\alpha = 60^\circ$ avec le mur. Un cylindre de poids $Q = 180 \text{ kgf}$ repose sans frottements sur la barre au point D et sur le mur au point C (voir figure ci-contre). On donne $AD = a = 0,4 \text{ m}$.

- Déterminer l'expression du moment d'enca斯特ment au point A en fonction de P , Q , L , α et a .
- Calculer les réactions aux points C, D et A.

**Exercice 7**

Une barre coudée ABCD s'appuie sur une articulation sphérique en B et une articulation cylindrique en C. Chacune des trois parties a un poids P et une longueur a ($AB = BC = CD = a$). La barre est soumise à une force F en D. Celle-ci est contenue dans un plan parallèle au plan XY et faisant un angle de 60° avec l'axe Y. Un moment M est appliqué en C autour de BC. L'équilibre de la barre est maintenu par un câble inextensible AE, parallèle à l'axe X (voir figure ci-contre).

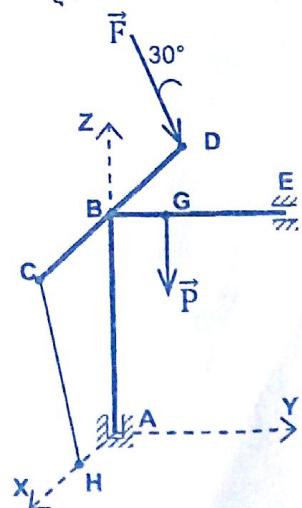
- Établir les équations scalaires de l'équilibre de la barre.
- Trouver les réactions aux appuis B et C ainsi que la tension de AE.

**Exercice 8 (examen final – Janvier 2015)**

Une structure de poids P , de centre d'inertie G, est constituée de 3 barres AB, CD et BE, soudées en B. Elle est maintenue en équilibre à la position indiquée sur la Fig.2 par une liaison sphérique en A, une liaison cylindrique en B ainsi qu'un câble fixé à la structure en C et au sol au point H. Une force $F=2P$ contenue dans le plan XZ, est appliquée en D et fait un angle de 30° avec l'axe Z.

On donne $AB = 5\text{m}$, $BC = BD = 3\text{m}$, $BE = 3\text{m}$ et $AH = BG = 1\text{m}$.

Déterminer les efforts des liaisons en A et E ainsi que la tension du câble en fonction du poids P .



Série 02: Statique

Exo1:

$$OB = OP = \sqrt{(2R)^2 + R^2} = R\sqrt{3}$$

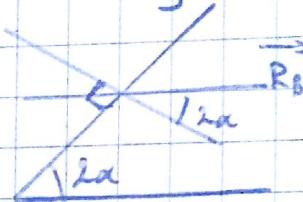
- à l'équilibre.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{RB} + \vec{RD} + \vec{Tc} + \vec{Q} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} RB \sin(2\alpha) \\ -RB \cos(2\alpha) \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ RD + -Tc \cos \alpha \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ -Tc \sin \alpha \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ -Q \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

R_B : Action de (OA) sur le cylindre
 R_D : Action du support sur le cylindre
 T_c : Action du fil sur le cylindre
 Q : Action de la terre sur le cylindre



$$10x: RB \sin(2\alpha) - Tc \cos \alpha = 0 \quad \dots \quad (i)$$

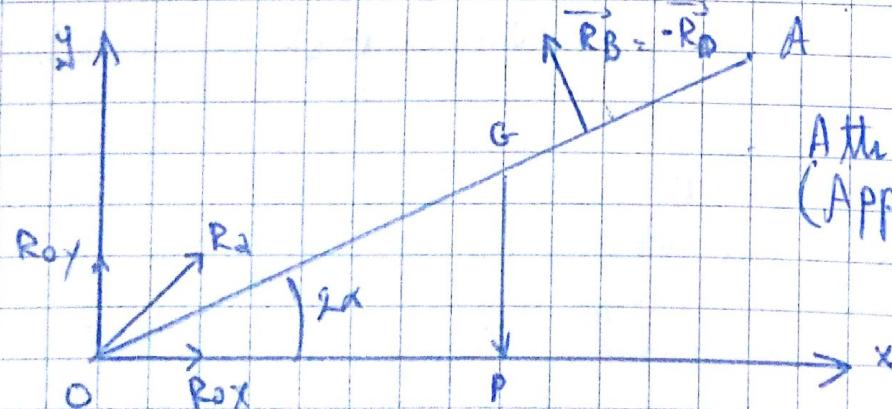
$$10y: -RB \cos(2\alpha) + RD - Tc \sin \alpha - Q = 0 \quad \dots \quad (ii)$$

- Toutes les forces sont concourantes en C \Rightarrow le cylindre est équivalent à un PI matériel \Rightarrow il n'y a pas d'équation des moments :

- On a 3 inconnues avec 2 éqts (R_B , R_D et T_c)

- Pour pouvoir résoudre, il faut: $n^{\text{bre}}_{\text{inc}} = n^{\text{bre}}_{\text{d'éqts}}$.

- Le système étudié : le bâme (OA)



Attraction cylindrique:
(Appui chariable)

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{n}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{R}_B + \vec{P} + \vec{R}_D = \vec{0}$$

$$\begin{cases} -R_B S = 2x \\ R_B \cos(2x) \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ -P \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} R_D \\ R_{Dy} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$-R_B S = 2x + R_D = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$R_B \cos 2x - P + R_{Dy} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

- On a "5 inc." et 4 éqts (Rox, Roy, RB, RD, Tc)

\Rightarrow On ne peut pas résoudre.

$$\sum \vec{n}(0) = \vec{0}$$

$$\vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{OB} \wedge \vec{RB} = \vec{0} ; \quad OG = 3R/2$$

$$\begin{cases} 3R/2 \cos 2x \\ 3P/2 S = 2x \wedge \\ 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \\ -P \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} R\sqrt{3} \cos 2x \\ R\sqrt{3} S = 2x \wedge \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -R_B S = 2x \\ R_B \cos 2x \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$-3R/2 P \cos 2x + R_B R\sqrt{3} (\overbrace{\cos^2(2x) + \sin^2(2x)}^= 1) = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$(5) \Rightarrow R_B = \frac{P\sqrt{3}}{4} ; \quad \text{Avec : } \cos 2x = \cos 60^\circ = 1/2 ; \quad S = 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\sin 2x = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

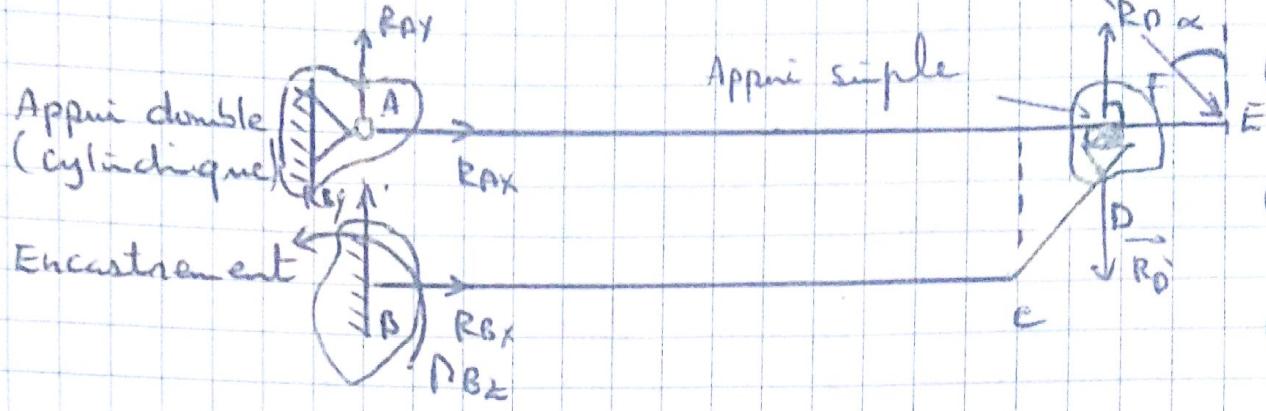
$$(4) \Rightarrow R_{Dy} = \left(\frac{B - \sqrt{3}}{8} \right) P$$

$$(3) \Rightarrow R_Dx = -\frac{3P}{8}$$

$$(1) \Rightarrow T_c = \frac{P\sqrt{3}}{4}$$

$$(2) \Rightarrow R_D = \frac{P\sqrt{3}}{4} \quad \text{--- (6)}$$

EX02:



Système Complet: 5 inconnues.

$(AE) + (BCD)$, $(RAX, RAY, RBX, RBY, RCZ) \Rightarrow$ il faut décomposer
5 > 3, 2 forces, 2 moments.

Système étudié: Barre (AE)

A l'équilibre:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{P}_{ext}(A) = \vec{0}$$

$$\vec{RA} + \vec{Pi} + \vec{Rd} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} RAX \\ RAY \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ -2P \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ Rd \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} F \sin \alpha \\ -F \cos \alpha \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{AG} \wedge \vec{Pi} + \vec{AD} \wedge \vec{Rd} + \vec{AE} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -2P \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} (a, a) \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ Rd \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 2a \\ 0 \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} F \sin \alpha \\ -F \cos \alpha \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

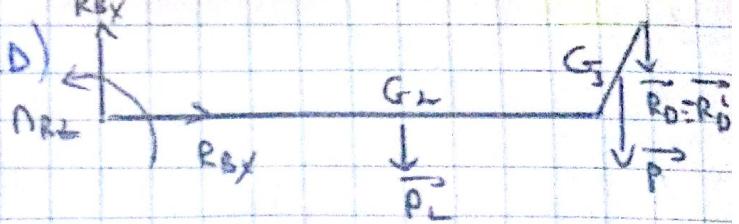
$$-2acP + a(1 + \sin \alpha)Rd - 2af \cos \alpha = 0$$

$$(1) \Rightarrow Rd = \frac{2P}{(1 + \sin \alpha)} \frac{(1 + \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)}$$

$$(2) \Rightarrow RAY = f \cos \alpha - \frac{2P(1 + \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)} + 2P$$

$$(3) \Rightarrow RAX = -PS \sin \alpha$$

Système étudié : Bone (BCD)



À l'équilibre :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{P}_{ext}(B) = \vec{0}$$

$$\vec{R}_{Bx} + \vec{P}_L + \vec{P}_S + \vec{P}_D = \vec{0}$$

$$\begin{cases} R_{Bx} \\ R_{By} + \frac{-P}{2} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ -\frac{P}{2} + \frac{P}{2} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ -P_D \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow /_{ox}: R_{Bx} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$/_{oy}: R_{By} - 2P - P_D = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$\sum \vec{P}_{ext}(B) = \vec{B}G_2 \wedge \vec{P}_L + \vec{B}G_3 \wedge \vec{P}_S + \vec{BD} + \vec{R}_D + \vec{N}_{BZ} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} G_2 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} (a + \frac{a}{2} \sin \alpha) \\ (\frac{a}{2} \cdot \cos \alpha) \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -P \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ a \cos \alpha \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -P_D \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$-\frac{a}{2} \cdot P - a \left(1 + \frac{\sin \alpha}{2}\right) P - a \left(1 + \sin \alpha\right) P_D + N_{BZ} = 0 \quad \dots \quad (6)$$

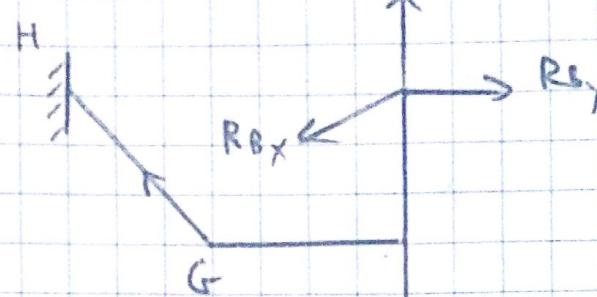
$$(6) \Rightarrow N_{BZ} = \frac{-\frac{3}{2}aP}{2} + a \cdot \frac{P}{2} \cdot \sin \alpha + 2aP \cos \alpha$$

$$(5) \Rightarrow R_{By} = 2P + \frac{2P(1 + \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)}$$

Ex 03:

• Forces Externes:

$$\vec{R}_A = \begin{cases} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_A \end{cases}; \quad \vec{R}_B = \begin{cases} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_B \end{cases}$$



$$\vec{F} = \begin{cases} -f \cos 30^\circ \\ -f \sin 30^\circ \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -P\sqrt{3}/2 \\ -P/2 \\ 0 \end{cases}$$

$$F = P; \quad N = cP$$

• Système Etudié:

$$(AB) + (DG) + (CE).$$

$$\vec{P}_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P \end{cases}; \quad \vec{P}_2 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -2P \end{cases}; \quad \vec{P}_3 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P \end{cases}, \quad \vec{T}_{G} = \vec{T}_{G} \cdot \vec{U}_{GH}$$

$$\sin 30^\circ = -\frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = -F \sin 30^\circ = -\frac{P}{2}$$

$$\cos 30^\circ = -\frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = -F \cos 30^\circ = -\frac{P\sqrt{3}}{2}$$

avec $\vec{U}_{GH} = \frac{\vec{GH}}{|\vec{GH}|}$: vect. unitaire.

$$\vec{GH} = \vec{AH} - \vec{AG}$$

$$\vec{AH} = \begin{cases} -2a \\ -4a \\ 0 \end{cases}$$

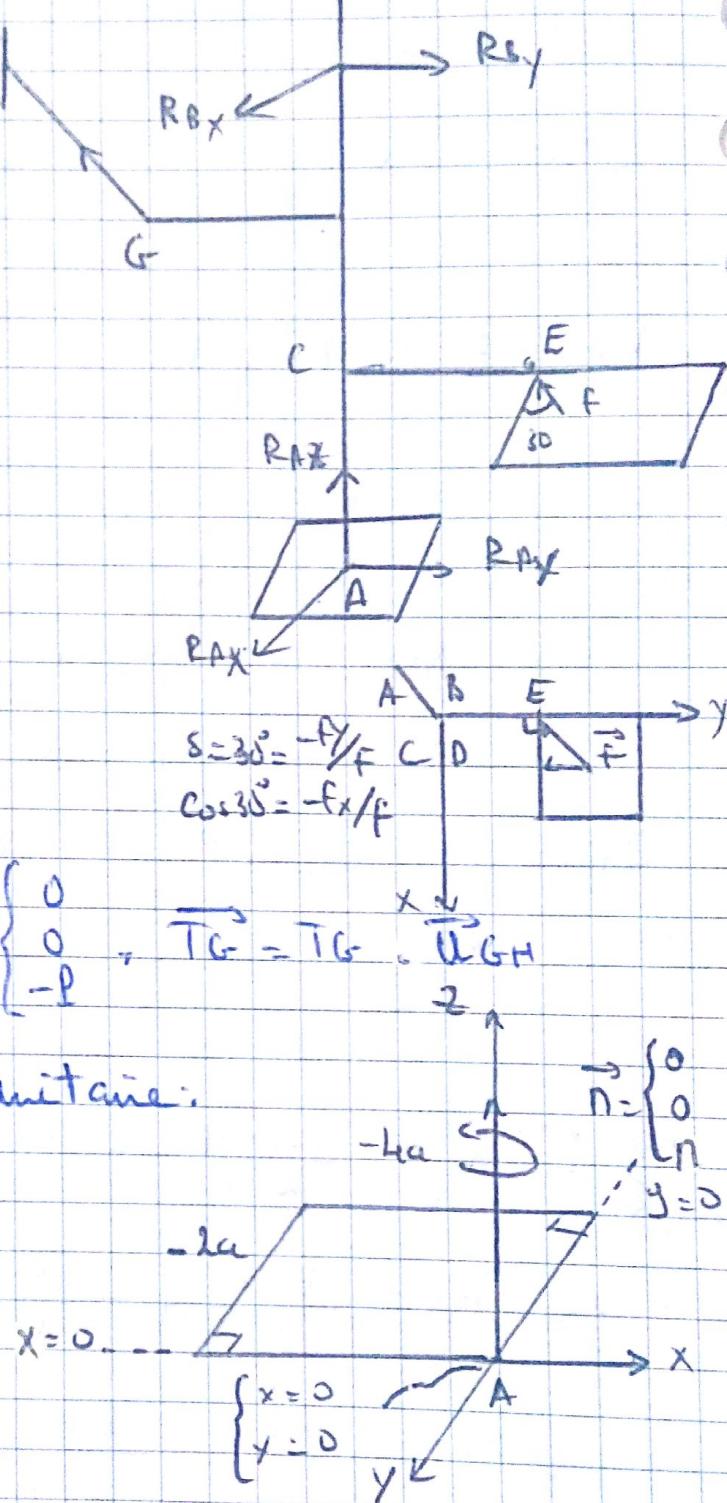
• A l'équilibre:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow R_A + R_B + T_G + P_1 + P_2 + P_3 + F = \vec{0}$$

$$\sum M_{ext}(A) = 0$$

$$\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DG} = \begin{cases} 0 \\ -2a \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{GH} = \begin{cases} -2a \\ -4a - (-2a) \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -2a \\ -2a \\ 0 \end{cases}$$

$$|\vec{GH}| = \sqrt{(-2a)^2 + (-2a)^2 + (0)^2} = 3a.$$



$$\vec{U}_{GH} = \begin{cases} -2a/3a \\ -2a/3a \\ a/3a \end{cases} = \begin{cases} -2/3 \\ -2/3 \\ +1/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_G = \begin{cases} -2/3 \cdot T_G \\ -2/3 \cdot T_G \\ T_G/3 \end{cases} \Rightarrow 6 \text{ incosines: } R_{AX}, R_{AY}, R_{AZ}, R_{BX}, R_{BY}, T_G.$$

$$10X: R_{AX} + R_{BX} - P\sqrt{3}/2 - 2/3 \cdot T_G = 0 \quad \dots (1)$$

$$10Z: R_{AZ} - 4P + T_G/3 = 0 \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} & \vec{AB} \wedge \vec{RB} + \vec{AG} \wedge \vec{T_G} + \vec{AE} \wedge \vec{F} + \vec{AG_1} \wedge \vec{P_1} + \vec{AG_2} \wedge \vec{P_2} \\ & + \vec{AC_{G3}} \wedge \vec{P_3} + \vec{N} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$R_{AZ} - 4P + T_G/3 = 0 \quad \dots (3).$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} 0 & \{ R_{BX} \\ 0 & \wedge \{ R_{BY} \\ 6a & \} \} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \{ -2/3 \cdot T_G \\ -2a & \wedge \{ -2/3 \cdot T_G \\ 4a & \} \} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \{ -P\sqrt{3}/2 \\ 2a & \wedge \{ -P/2 \\ 2a & \} \} \right] \\ & \{ \} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \{ 0 \\ a & \wedge \{ 0 \\ 1a & \} \} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \{ 0 \\ 3a & \wedge \{ -2P \\ -2P \\ 3a & \} \} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \{ 0 \\ -a & \wedge \{ 0 \\ -1a & \} \} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \{ 0 \\ 0 & - \{ 0 \\ n & \} \} \right] \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$-6a \cdot R_{BY} - 2a/3 \cdot T_G + 8a/3 \cdot T_G + P_2 - P_2 + P_2 = 0 \quad \dots (4)$$

$$6a - R_{BX} - 8a - T_G/3 - P_2 - \sqrt{3} = 0 \quad \dots (5)$$

$$-4a \cdot T_G/3 + P_2 \sqrt{3} + n = 0 \quad \dots (6).$$

o Resolution:

$$(6) \Rightarrow T_G = \left(\frac{3N}{4a} + \frac{3P\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{3P}{4} (1 + \sqrt{5})$$

$$(3) \Rightarrow R_{Nz} = \frac{75P}{4} - \frac{P\sqrt{3}}{4}$$

$$(4) \Rightarrow R_{By} = \frac{5P}{12} + \frac{P\sqrt{3}}{4}$$

$$(5) \Rightarrow R_{Bx} = \frac{P}{3} + \frac{P\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \Rightarrow R_{Nx} = \frac{7P}{12} + \frac{P\sqrt{3}}{4}$$

$$(1) \Rightarrow R_{Ax} = \frac{P}{6} - \frac{P\sqrt{3}}{2}$$

Exercice:

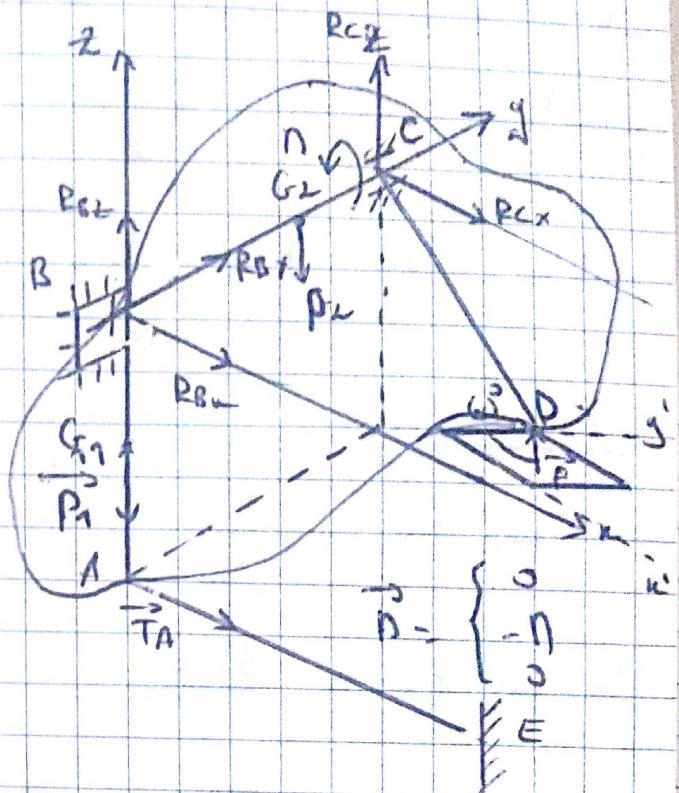
Système étudié: Bone ABCD

Forces extérieures:

$$\vec{R}_B = \begin{cases} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{cases}, \quad \vec{R}_C = \begin{cases} R_{Cx} \\ 0 \\ R_{Cz} \end{cases}, \quad \vec{T}_A = \begin{cases} T_h \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{F} = \begin{cases} -f \sin 60^\circ \\ f \cos 60^\circ \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -f \sqrt{3}/2 \\ f \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{P}_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P \end{cases}; \quad \vec{P}_2 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P \end{cases}; \quad \vec{P}_3 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P \end{cases}$$



À l'équilibre:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_B + \vec{R}_C + \vec{T}_A + \vec{F} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_{ext}(B) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{BC} \wedge \vec{R}_C + \vec{BA} \wedge \vec{T}_A + \vec{BD} \wedge \vec{F} + \vec{BG}_1 \wedge \vec{P}_1 + \vec{BG}_2 \wedge \vec{P}_2 + \vec{BG}_3 \wedge \vec{P}_3 + \vec{TA} = \vec{0}$$

$$/ \text{ox: } R_{Bx} + R_{Cx} + T_A - f \sqrt{3}/2 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$/ \text{oy: } R_{By} + \frac{f}{2} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$/ \text{ozi: } R_{Bz} + R_{Cz} - 3P = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{matrix} 0 & \{R_{Cx}\} \\ a \wedge 0 & 0 \\ 0 & \{R_{Cz}\} \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 0 & \{T_h\} \\ 0 \wedge 0 & 0 \\ -a & 0 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} a \cdot \sqrt{3}/2 & \{-f \cdot \sqrt{3}/2\} \\ a \wedge 0 & f/2 \\ -a/2 & 0 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 0 & \{0\} \\ 0 \wedge 0 & 0 \\ -a/2 & -P \end{matrix} \right) \\ & + \left(\begin{matrix} 0 & \{0\} \\ a/2 \wedge 0 & 0 \\ 0 & -P \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} a \cdot \sqrt{3}/4 & \{0\} \\ a \wedge 0 & 0 \\ -a/4 & -P \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 0 & \{0\} \\ 0 \wedge 0 & 0 \\ -a & -P \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} 0 & \{0\} \\ 0 \wedge 0 & 0 \\ -a & -P \end{matrix} \right) \\ & \vec{BG}_3 = \vec{BC} + \vec{CG}_3 \end{aligned}$$

$$aR_{C2} + \frac{Fa}{4} - \frac{Pa}{2} - Pa = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$-aT_A + \frac{Fa\sqrt{3}}{4} + \frac{Pa\sqrt{3}}{2} - N = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$-aR_{B1} + \frac{Fc\sqrt{3}}{4} + \frac{Fc\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \dots \quad (6)$$

- R_{B1} , R_{B2} ; R_{BZ} ; R_{C1} , R_{C2} , T_A : 6 inconnues.

Résolution:

$$(2) \Rightarrow R_{B1} = -\frac{F}{2}$$

$$(6) \Rightarrow R_{C2} = \frac{3F\sqrt{3}}{4}$$

$$(5) \Rightarrow T_A = \frac{F\sqrt{3}}{4} + \frac{P\sqrt{3}}{4} - \frac{N}{a}$$

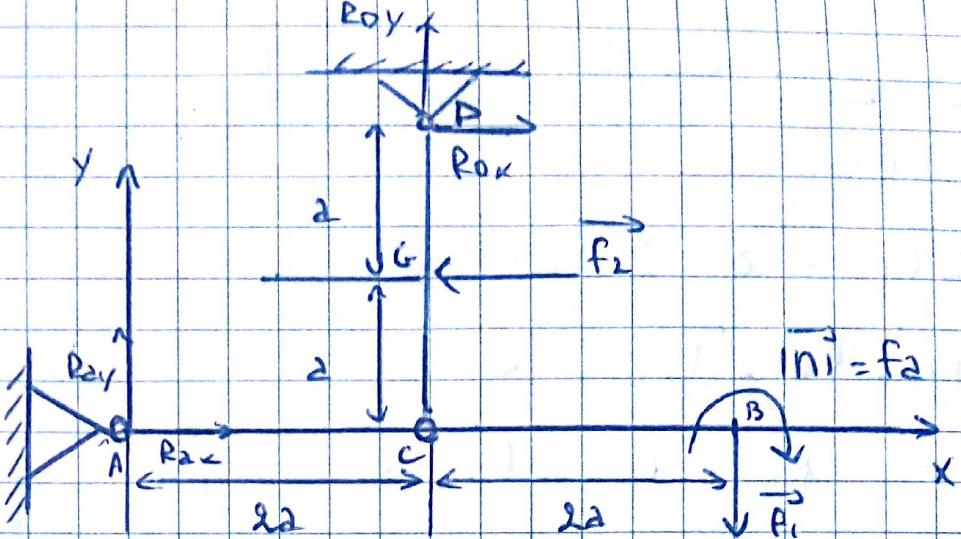
$$(7) \Rightarrow R_{B2} = \frac{F\sqrt{3}}{2} - \frac{F\sqrt{3}}{4} - \frac{P\sqrt{3}}{4} + \frac{N}{a}$$

$$(4) \Rightarrow R_{C1} = \frac{3F}{2} - \frac{F}{4}$$

$$(3) \Rightarrow R_{BZ} = 3P - \frac{3P}{2} + \frac{F}{4}$$

Ex 05:

- On a deux systèmes à étudier : (AB) et (CD).



Système complet: bancs (AB) + (CD):

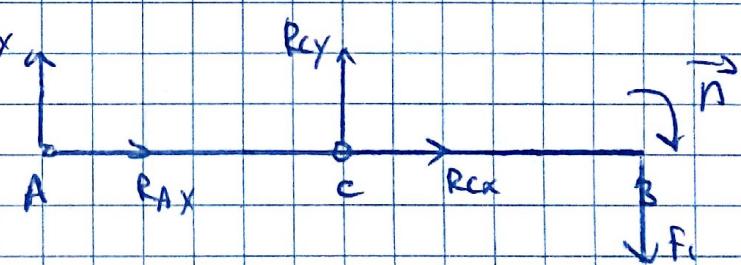
- On a 4 forces: R_{AX} , R_{AY} ; R_{CX} , R_{CY}
- plan 2D: 3 éqts = Le système est Hyperstatique \Rightarrow il faut décomposer.

Système étudié: banc (AB).

à l'équilibre:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{J} : \sum \vec{n}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$R_A + R_C - F_1 = \vec{J}$$



$$/ox: R_{AX} + R_{CX} = 0 \quad \dots (1)$$

$$/oy: R_{AY} + R_{CY} - F_1 = 0 \quad \dots (2)$$

$$\vec{AC} \wedge \vec{RC} + \vec{AB} \wedge \vec{F}_1 + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 2a \\ 0 \\ 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} R_{CX} \\ R_{CY} \\ 0 \end{array} \right\} + \begin{cases} 4a \\ 0 \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ -F_1 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -F_2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Système étudié : banc (CD)

- À l'équilibre :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}, \quad \sum \vec{P}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{R}_C + \vec{R}_D + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

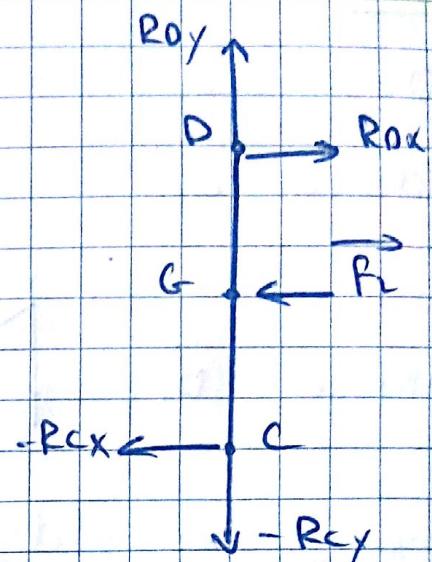
$$/ \text{dx} : -R_{Cx} + R_{Dx} - f_2 = 0 \quad \dots (4)$$

$$/ \text{dy} : -R_{Cy} + R_{Dy} = 0 \quad \dots (5)$$

$$\vec{CD} \wedge \vec{R}_D + \vec{CG} \wedge \vec{f}_2 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 0 \\ 2a \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} R_{Dx} \\ R_{Dy} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ a \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} -f \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

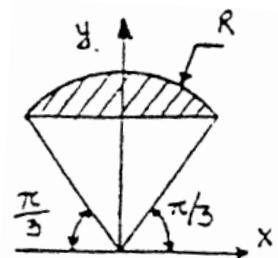
6 éqts. à 6 inc. \Rightarrow Gr peut résoudre



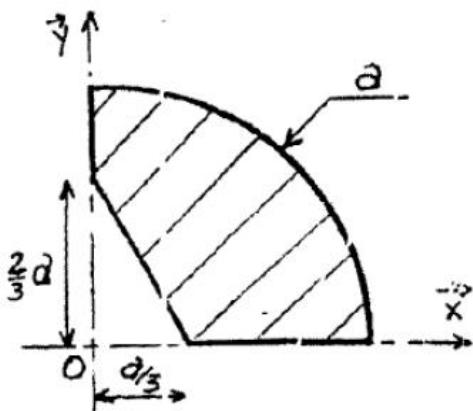
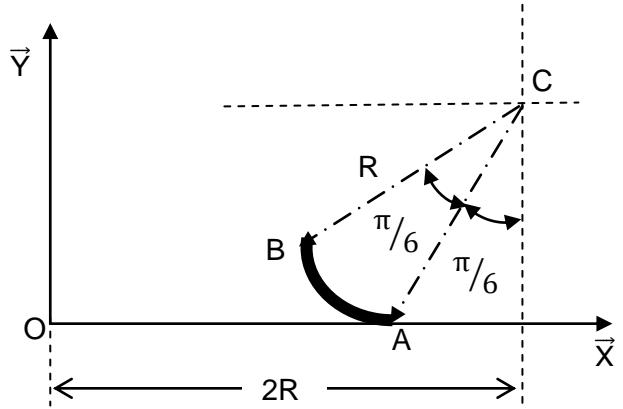
Série d'exercices n° 4 : géométrie des masses (4h30)

Exercices à faire en TD :

- 1- Déterminer, par intégration, la position du centre d'inertie du solide homogène suivant :



- 2- Soit **AB** un arc de cercle, de centre **C**, de rayon **R** et d'angle $\pi/6$ (voir figure ci-contre). Calculer l'aire engendrée par une rotation d'un tour complet de l'arc **AB**, autour de l'axe **OY**.

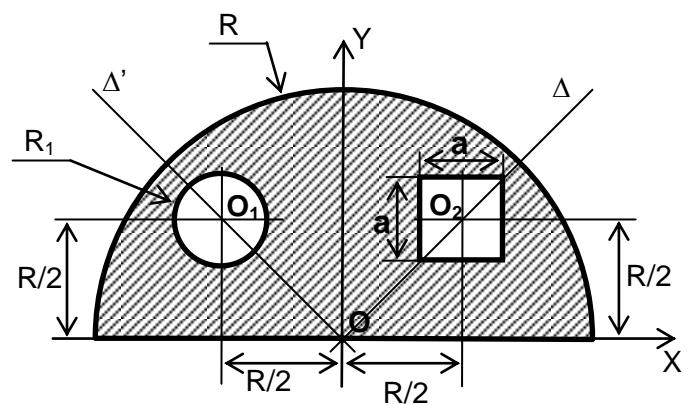


- 3- Déterminer, par application du théorème de Guldin, les coordonnées du centre d'inertie **G**, dans le repère (O, X, Y) , de la surface homogène suivante ci-contre.

Exercice 4

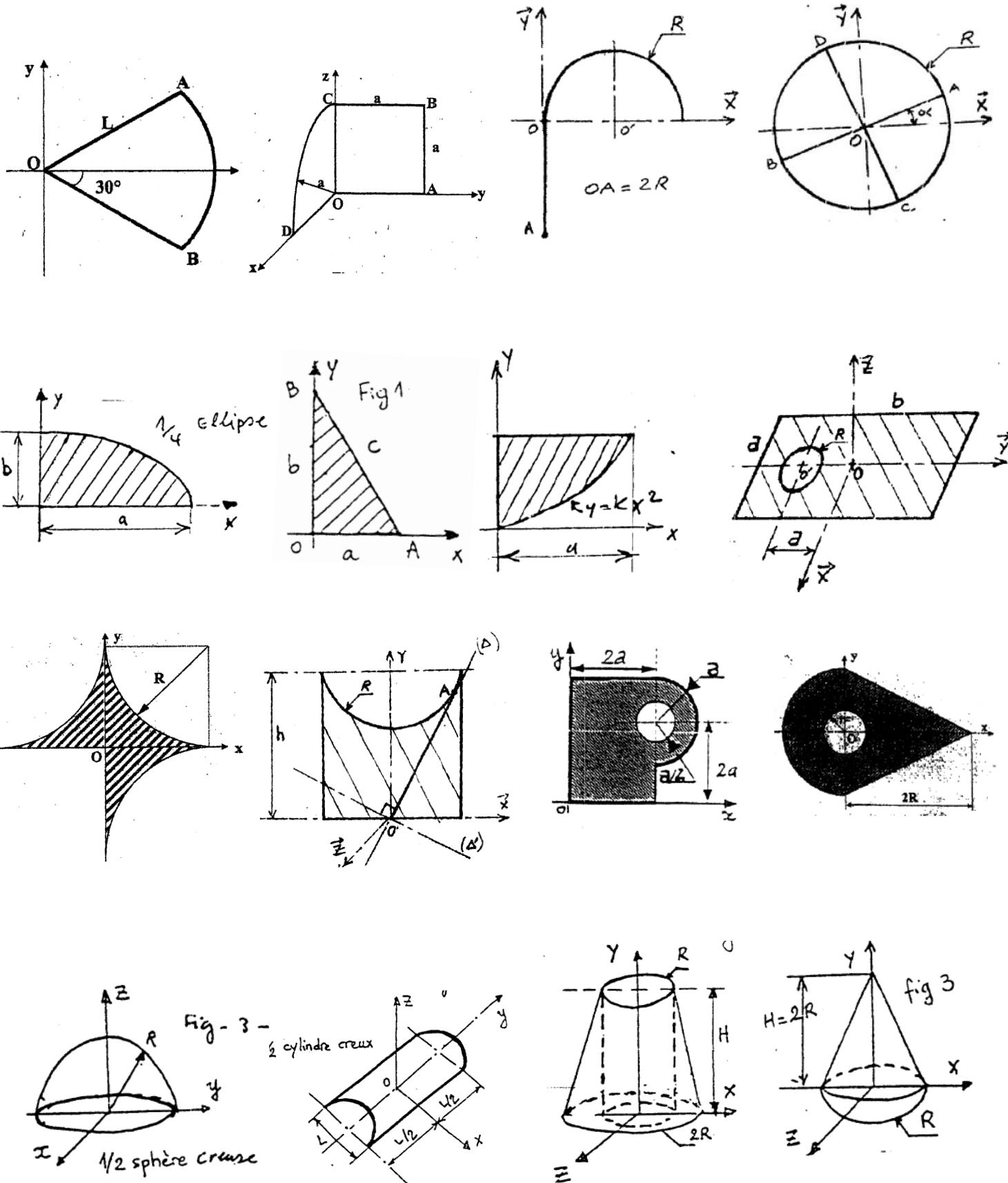
Un solide surfacique homogène est constitué d'un demi disque de rayon **R** et de centre **O**, auquel on retranche un disque de centre $O_1(-R/2, R/2, 0)$ et de rayon **R**, ainsi qu'un carré de côté **a** et de centre $O_2(R/2, R/2, 0)$ (voir ci-contre)

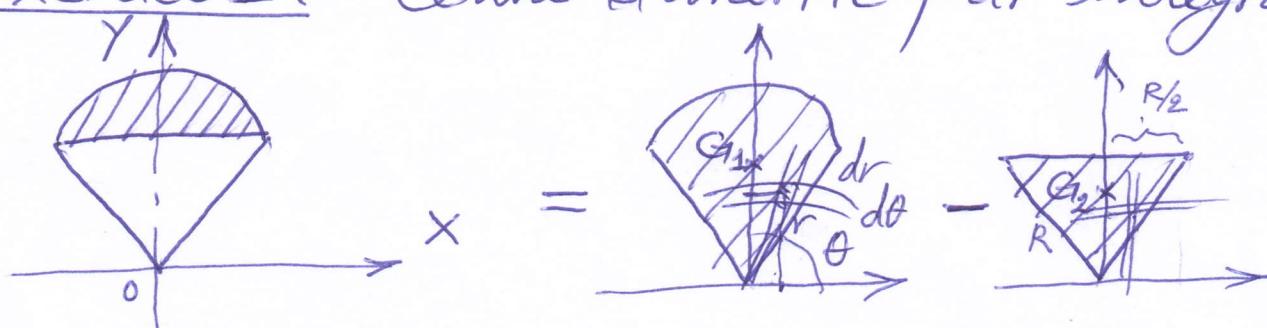
- 1- Déterminer le tenseur d'inertie du système par rapport à (O, X, Y, Z) .
 2- Calculer les moments d'inertie par rapport aux droites Δ et Δ' ainsi que le produits d'inertie $I_{\Delta\Delta'}$



Exercices supplémentaires

Déterminer, par intégration, la position du centre d'inertie des solides homogènes suivants, puis calculer le tenseur d'inertie $I_{o/(x,y,z)}$:



Exercice 1: centre d'inertie par intégration

$$x_G = 0 \quad \text{à symétrie / Oy}$$

$$y_{G_1} = \frac{\rho_s \int y \, ds}{\rho_s \int ds} = \frac{\int_0^{R \sqrt[3]{2\pi/3}} r \sin \theta \, r \, dr \, d\theta}{\int_0^R \int_{\pi/3}^{2\pi/3} r \, dr \, d\theta} = \frac{\int_0^R -(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) r^2 dr}{\int_0^R (2\pi/3 - \pi/3) r dr} = \frac{\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R}{\frac{\pi}{3} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R} = \frac{3/2 R^3}{\pi/3 R^2} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & \pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3 \\ y &= r \sin \theta & 0 \leq r \leq R \\ &= \int_0^R [-\cos \theta]_{\pi/3}^{2\pi/3} r^2 dr \\ &= \frac{\int_0^R [\theta]_{\pi/3}^{2\pi/3} r dr}{\int_0^R [r^3]_{\pi/3}^{2\pi/3}} \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{6} \int_0^R y^2 \, dr$$

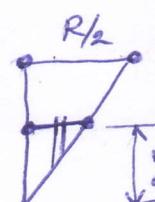
avec $ds = dx \, dy$

$$0 \leq y \leq \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$y_{max} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-x_{max} \leq x \leq x_{max}$$

$$\begin{aligned} y_{G_2} &= \frac{\int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \int_{-\frac{y\sqrt{3}}{3}}^{\frac{y\sqrt{3}}{3}} y \, dx \, dy}{\int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \int_{-\frac{y\sqrt{3}}{3}}^{\frac{y\sqrt{3}}{3}} dx \, dy} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} [x] dy} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} x dy} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \frac{2y\sqrt{3}}{3} dy} \\ &= \frac{\int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} y^2 dy}{\int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} y dy} = \frac{\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}}}{\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}}} = \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^3}{\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R\sqrt{3}}{3} \\ S_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{1}{2} \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y_G &= \frac{y_{G_1}S_1 - y_{G_2}S_2}{S_1 - S_2} = \frac{\left(\frac{2R}{\pi}\right)\left(\frac{\pi R^2}{6}\right) - \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}} \\
 &= \frac{R\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)} = \frac{R\left(\frac{1}{12}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{R}{6\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\
 &= \frac{R}{(2\pi - 3\sqrt{3})}
 \end{aligned}$$

Exercice 2:

$$L_{AB} = \int dl = \int_R^{4\pi/3} R d\theta$$

$$L_{AB} = R \left[\theta \right]_{\pi/6}^{4\pi/3} = R \frac{\pi}{6}$$

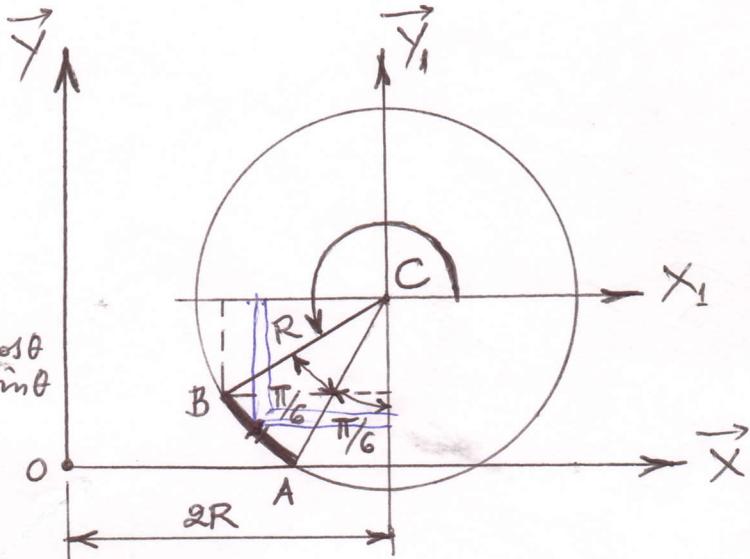
$$x_{1G} = \frac{\int x dl}{L_{AB}} = \frac{\int R \cos \theta R d\theta}{L_{AB}}$$

$$x_{1G} = \frac{R^2 \int_{\pi/6}^{4\pi/3} \cos \theta d\theta}{R \frac{\pi}{6}} = \frac{R \left[\sin \theta \right]_{\pi/6}^{4\pi/3}}{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{6R \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right)}{\pi} = \frac{3R(1-\sqrt{3})}{\pi} < 0 \quad \text{mais cette distance positive est : } \frac{3R(\sqrt{3}-1)}{\pi}$$

$$x_{0G} = 2R - \left(\frac{-3R(1-\sqrt{3})}{\pi} \right) = \frac{2\pi R + 3R - 3R\sqrt{3}}{\pi}$$

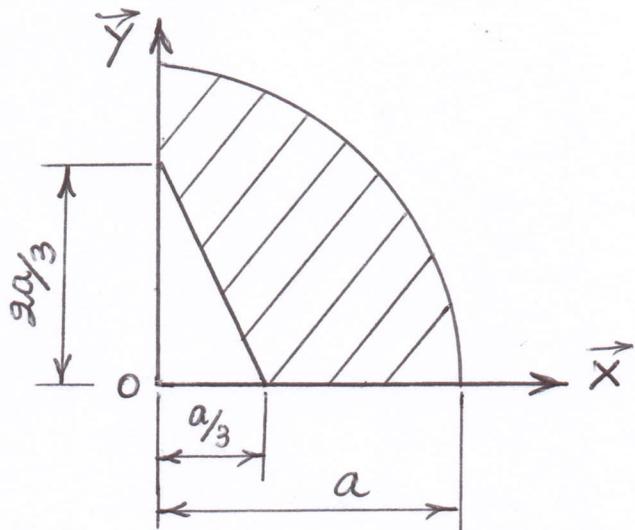
$$S = 2\pi x_{0G} L_{AB} = 2\pi \left(\frac{2\pi R + 3R - 3R\sqrt{3}}{\pi} \right) \left(R \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi R^2}{3} (2\pi + 3 - 3\sqrt{3})$$



$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

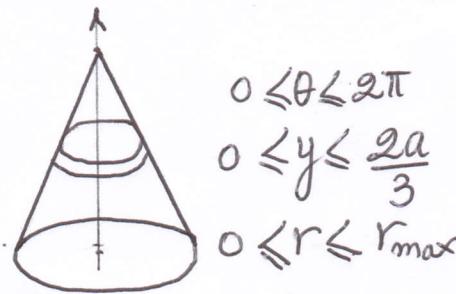
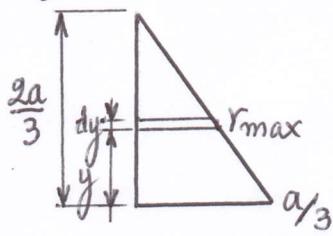
Exercice 3:



$$V_x = 2\pi y G S$$

$$V_y = 2\pi x G S$$

et $S = \frac{\pi a^2}{4} - \left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{9}$

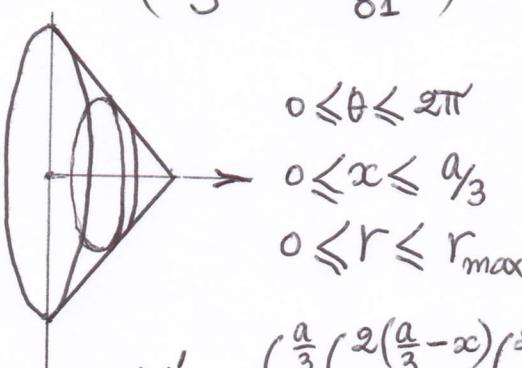
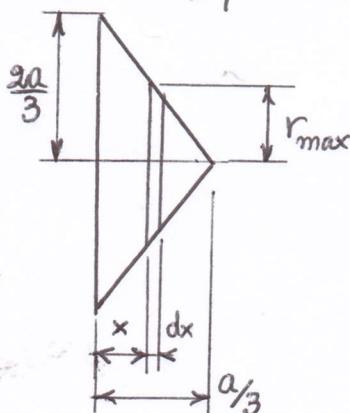


$$\frac{r_{\max}}{a/3} = \frac{\frac{2a}{3} - y}{2a/3} \Rightarrow r_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3} - y\right)$$

$$V_{\text{cone}} = \iiint dV = \int_0^{\frac{2a}{3}} \int_0^{\frac{1}{2}(\frac{2a}{3}-y)} \int_0^{2\pi} r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dy = \int_0^{\frac{2a}{3}} 2\pi \frac{1}{2} [r^2]_{0}^{\frac{1}{2}(\frac{2a}{3}-y)} dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{2a}{3}} (\frac{2a}{3} - y)^2 dy = \left(\frac{\pi}{4}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \left[(\frac{2a}{3} - y)^3\right]_{0}^{\frac{2a}{3}} = \frac{2\pi a^3}{81}$$

$$V_y = V_{\frac{1}{2}\text{sphère}} - V_{\text{cone}} = \left(\frac{2\pi a^3}{3} - \frac{2\pi a^3}{81}\right) = \frac{52\pi a^3}{81}$$



$$\frac{r_{\max}}{\frac{2a}{3}} = \frac{(a/3 - x)}{a/3} \Rightarrow r_{\max} = 2(a/3 - x)$$

$$V'_{\text{cone}} = \int_0^{a/3} \int_0^{2(\frac{a}{3}-x)} \int_0^{2\pi} r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dx$$

$$= \int_0^{a/3} \int_0^{2(\frac{a}{3}-x)} [\theta]_0^{2\pi} r \cdot dr \cdot dx = \int_0^{a/3} 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{0}^{2(\frac{a}{3}-x)} dx$$

$$= 4\pi \int_0^{a/3} \left(\frac{a}{3} - x\right)^2 dx = 4\pi \left(-\frac{1}{3}\right) \left[(\frac{a}{3} - x)^3\right]_0^{a/3} = \frac{4\pi a^3}{81}$$

$$V_{\infty} = \left(\frac{2\pi a^3}{3} - \frac{4\pi a^3}{81} \right) = \frac{50\pi a^3}{81}$$

$$x_G = \frac{V_y}{2\pi S} = \frac{25 a}{81 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{9} \right)}$$

$$y_G = \frac{V_x}{2\pi S} = \frac{25 a}{81 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{9} \right)}$$

Exercice 4 :

1) Demi-disque R

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

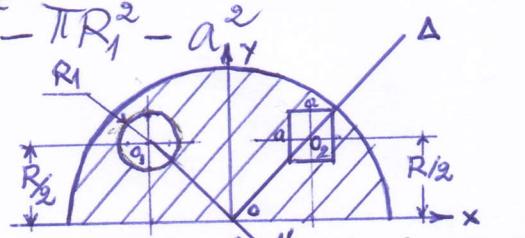
$$\begin{aligned} x_{G_1} &= 0 \\ y_{G_1} &= \frac{\rho \int y \, ds}{\rho \int ds} = \frac{\int_0^R r \sin \theta r \, dr \, d\theta}{\int_0^{R\pi} r \, dr \, d\theta} \end{aligned}$$

$$y_{G_1} = \frac{\int_0^R \left[-r \cos \theta \right]_0^\pi r^2 \, dr}{\int_0^R \left[\theta \right]_0^\pi r \, dr} = \frac{-(-1-1) \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R}{\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R} = \frac{2}{\pi} \frac{R^3}{3} \frac{2}{R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$y_G = \frac{y_{G_1} S_1 - y_{G_2} S_2 - y_{G_3} S_3}{S_1 - S_2 - S_3} = \frac{\left(\frac{4R}{3\pi} \right) \left(\frac{\pi R^2}{2} \right)}{\frac{\pi R^2}{2} - \pi R_1^2 - a^2} - \left(\frac{R}{2} \right) \left(\pi R_1^2 \right) - \left(\frac{R}{2} \right) a^2$$

$$\boxed{y_G = \frac{\frac{2R^3}{3} - \frac{\pi R R_1^2}{2} - \frac{R a^2}{2}}{\frac{\pi R^2}{2} - \pi R_1^2 - a^2}}$$

$$x_G = \frac{x_{G_1} S_1 - x_{G_2} S_2 - x_{G_3} S_3}{S_1 - S_2 - S_3} = \frac{0 - \left(-\frac{R}{2} \right) \left(\pi R_1^2 \right) - \frac{R}{2} a^2}{\frac{\pi R^2}{2} - \pi R_1^2 - a^2} = \frac{\frac{\pi R R_1^2}{2} - \frac{R a^2}{2}}{\frac{\pi R^2}{2} - \pi R_1^2 - a^2}$$



2) La condition est : $\pi R_1^2 = a^2$ pour que x_G soit égal à zéro.

$$\begin{aligned} 3) I_{ox}^R &= \rho \iint (y^2 + z^2) \, ds = \rho \iint r^2 \sin^2 \theta r \, dr \, d\theta = \rho \int_0^{R\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) r^3 \, d\theta \, dr \\ &= \rho \int_0^R \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi r^3 \, dr = \frac{\rho}{2} \int_0^R \pi r^3 \, dr = \frac{\rho \pi R^4}{2} = \frac{\rho \pi R^4}{8} \end{aligned}$$

$$M = \rho \pi \frac{R^2}{2} \Rightarrow I_{ox}^R = M R^2$$

$$I_{oy}^R = \rho \iint (x^2 + z^2) \, ds = \frac{\rho}{2} \int_0^R \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) r^3 \, d\theta \, dr = \frac{\rho \pi R^4}{8}$$

$$I_{oz}^R = \rho \iint (x^2 + y^2) \, ds = \frac{\rho \pi R^4}{4}$$

$$\begin{aligned} I_{oxy}^R &= \rho \iint r \cos \theta r \sin \theta r \, dr \, d\theta = \rho \int_0^R \int_0^{\pi} \sin(2\theta) r^3 \, d\theta \, dr \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^R -\frac{1}{2} [\cos 2\theta]_0^\pi r^3 \, dr = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [I_o^R] = \begin{bmatrix} \frac{\rho \pi R^4}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho \pi R^4}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho \pi R^4}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{matrix} I_{O_1}^{R_1} \\ I_{O_1}^{R_1} \end{matrix} \right]_{R_o} = \left[\begin{matrix} \rho_s \frac{\pi R_1^4}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_s \frac{\pi R_1^4}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_s \frac{\pi R_1^4}{2} \end{matrix} \right] \quad \overrightarrow{OO_1} = \begin{cases} -R/2 \\ +R/2 \\ 0 \end{cases}$$

$$I_{O_{xx}}^{R_1} = I_{O_{1xx}}^{R_1} + m_2 \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \rho_s \frac{\pi R_1^4}{4} + \rho_s \frac{\pi R_1^2}{4} \frac{R^2}{4} = A_2$$

$$= \rho_s \pi (R_1^4 + R_1^2 R^2)$$

$$I_{O_{yy}}^{R_1} = \rho_s \frac{\pi R_1^4}{4} + \rho_s \pi R_1^2 \left(-\frac{R}{2} \right)^2 = \rho_s \frac{\pi}{4} (R_1^4 + R_1^2 R^2) = B_2$$

$$I_{O_{zz}}^{R_1} = \rho_s \frac{\pi R_1^4}{2} + \rho_s \pi R_1^2 \left(\left(\frac{R}{2} \right)^2 + \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right) = \rho_s \frac{\pi}{2} (R_1^4 + R_1^2 R^2) = C_2$$

$$I_{O_{xy}}^{R_1} = \left(\rho_s \pi R_1^2 \right) \left(\frac{R}{2} \right) \left(\frac{R}{2} \right) = - \rho_s \frac{\pi R_1^2 R^2}{4} = D_2$$

$$\left[I_{O_2}^a \right] = ? \quad I_{O_{2xx}}^a = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) dx dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx = \rho_s \frac{a^4}{12}$$

$$I_{O_{2yy}}^a = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} I_{O_{2xx}}^a$$

$$I_{O_{2zz}}^a = 2 \left(\rho_s \frac{a^4}{12} \right) = \rho_s \frac{a^4}{6}$$

$$\overrightarrow{OO_2} = \begin{cases} R/2 \\ R/2 \\ 0 \end{cases}$$

$$I_{O_{xx}}^a = I_{O_{2xx}}^a + m_3 \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \rho_s \frac{a^4}{12} + \rho_s a^2 \frac{R^2}{4} = A_3$$

$$I_{O_{yy}}^a = I_{O_{xx}}^a = B_3$$

$$I_{O_{zz}}^a = \rho_s \frac{\pi R^4}{6} + \rho_s \pi R^2 \left(\left(\frac{R}{2} \right)^2 + \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right) = \rho_s \frac{a^4}{6} + \rho_s a^2 \frac{R^2}{2} = C_3$$

$$I_{O_{xy}}^a = \rho_s \pi R^2 \left(\frac{R}{2} \right) \left(\frac{R}{2} \right) = \rho_s \frac{a^2 R^2}{4} = D_3$$

$$\left[I_O \right]_{R_o} = \begin{bmatrix} A & D & 0 \\ D & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

avec $A = A_1 - A_2 - A_3$
 $B = B_1 - B_2 - B_3$
 $C = C_1 - C_2 - C_3$
 $D = -D_2 - D_3$

$$4) I_{\Delta\Delta}, I_{\Delta'\Delta'} \text{ et } I_{\Delta\Delta'} : \quad \left\{ \vec{e}_\Delta \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \left\{ \vec{e}_{\Delta'} \right\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$I_{\Delta\Delta} = \left\{ \vec{e}_\Delta \right\}^T [I_o] \left\{ \vec{e}_\Delta \right\} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right] \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & D & 0 \\ \hline D & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & C \\ \hline \end{array} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right] \begin{Bmatrix} \left(A \frac{\sqrt{2}}{2} + D \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \left(D \frac{\sqrt{2}}{2} + B \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{A}{2} + \frac{D}{2} + \frac{D}{2} + \frac{B}{2} = \left(\frac{A+B}{2} + D \right)$$

$$I_{\Delta'\Delta'} = \left\{ \vec{e}_{\Delta'} \right\}^T [I_o] \left\{ \vec{e}_{\Delta'} \right\} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right] \begin{Bmatrix} -A \frac{\sqrt{2}}{2} + D \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -D \frac{\sqrt{2}}{2} + B \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(\frac{A+B}{2} - D \right)$$

Exercice 2: Série 5

$$1) \vec{\sigma}_{OA/R_1}^{\circ} = m \vec{V}(G_1) = m \frac{d^{\circ} \vec{OG}_1}{dt} = m \frac{d^{\perp}}{dt} \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ mL\dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_{AB/R_1}^{\circ} = m \vec{V}(G_2)$$

$$\vec{OG}_2 = \begin{Bmatrix} L \\ -\frac{L}{2}\sin\alpha \\ -\frac{L}{2}\cos\alpha \end{Bmatrix}$$

$$\vec{V}(G_2)_{R_1} = \frac{d^{\circ} \vec{OG}_2}{dt} = \frac{d^{\perp}}{dt} \begin{Bmatrix} L \\ -\frac{L}{2}\sin\alpha \\ -\frac{L}{2}\cos\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} L \\ -\frac{L}{2}\sin\alpha \\ -\frac{L}{2}\cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\alpha \\ L\dot{\psi} - \frac{L}{2}\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \frac{L}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_{AB/R_1}^{\circ} = \begin{Bmatrix} mL\dot{\psi}\sin\alpha \\ mL\dot{\psi} - mL\dot{\alpha}\cos\alpha \\ mL\dot{\alpha}\sin\alpha \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_{sys/R_1}^{\circ} = \vec{\sigma}_{OA}^{\circ} + \vec{\sigma}_{AB}^{\circ} = \begin{Bmatrix} mL\dot{\psi}\sin\alpha \\ 3mL\dot{\psi} - mL\dot{\alpha}\cos\alpha \\ mL\dot{\alpha}\sin\alpha \end{Bmatrix}$$

$$2) \sum_{OA}^{\circ} = m \vec{Y}(G_1)$$

$$\sum_{AB}^{\circ} = m \vec{Y}(G_2)$$

$$\vec{Y}(G_1)_{R_1} = \frac{d^{\circ} \vec{V}(G_1)}{dt} = \frac{d^{\perp}}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{L}{2}\dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{L}{2}\dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{L}{2}\dot{\psi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Y}(G_2)_{R_1} = \frac{d^{\circ} \vec{V}(G_2)}{dt} = \frac{d^{\perp}}{dt} \begin{Bmatrix} \frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\alpha \\ L\dot{\psi} - \frac{L}{2}\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \frac{L}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\alpha \\ L\dot{\psi} - \frac{L}{2}\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \frac{L}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi}^2 + L\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \frac{L}{2}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\alpha \\ \frac{L}{2}\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\sum}_{sys/R_1}^{\circ} = \vec{\sum}_{OA}^{\circ} + \vec{\sum}_{AB}^{\circ} = \begin{Bmatrix} -mL\dot{\psi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -mL\dot{\psi}^2 + mL\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \frac{mL}{2}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\alpha \\ mL\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3mL}{2}\dot{\psi}^2 + mL\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \frac{mL}{2}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\alpha \\ mL\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{Bmatrix}$$

$$3) \frac{\vec{\mu}_{OA}^o(0)}{R_1} = [I_{\sigma}^{OA}] \frac{\vec{\Omega}_1^o}{R_1} + \underbrace{\vec{OG}_1 \wedge m \vec{V}^o(0)}_{= \vec{0}} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\frac{\vec{\delta}_{OA}^o(0)}{R_1} = \frac{d \frac{\vec{\mu}_{OA}^o(0)}{R_1}}{dt} + \underbrace{\vec{V}^o(0) \wedge m \vec{V}^o(G_1)}_{= \vec{0}} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 2A\ddot{\alpha} \end{cases} = \vec{0}$$

$$4) \frac{\vec{\Omega}_3^o}{R_1} = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^o = \begin{cases} -\ddot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \cos \alpha \end{cases} = \begin{cases} -\ddot{\alpha} \\ -\dot{\psi} \sin \alpha \\ \dot{\psi} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\vec{\mu}_{AB}^o(G_2)}{R_1} = \left([I_{G_2}] \frac{\vec{\Omega}_3^o}{R_3} \right) + \underbrace{\vec{G}_2 \vec{G}_2 \wedge m \vec{V}^o(G_2)}_{= \vec{0}} = \begin{cases} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{cases} \begin{cases} -\ddot{\alpha} \\ -\dot{\psi} \sin \alpha \\ \dot{\psi} \cos \alpha \end{cases} = \begin{cases} -\frac{mL^2}{12} \ddot{\alpha} \\ -\frac{mL^2}{12} \dot{\psi} \sin \alpha \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{\vec{\mu}_{AB}^o(G_2)}{R_1} = \frac{\vec{\mu}^o(G_2)}{R_2} = [P_{3-2}] \frac{\vec{\mu}^o(G_2)}{R_3} = \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{cases} \begin{cases} -\frac{mL^2}{12} \ddot{\alpha} \\ -\frac{mL^2}{12} \dot{\psi} \sin \alpha \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{mL^2}{12} \ddot{\alpha} \\ -\frac{mL^2}{12} \dot{\psi} \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{mL^2}{12} \dot{\psi} \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\vec{\mu}_{AB}^o(0)}{R_1} = \frac{\vec{\mu}^o(G_2)}{R_2} + \underbrace{\vec{OG}_2 \wedge m \vec{V}^o(G_2)}_{= \vec{0}} = \begin{cases} L \\ -\frac{L}{2} \sin \alpha \\ -\frac{L}{2} \cos \alpha \end{cases} \wedge \begin{cases} \frac{mL}{2} \dot{\psi} \sin \alpha \\ mL \dot{\psi} - \frac{mL}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha \\ \frac{mL}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha \end{cases} = \begin{cases} -\frac{mL^2}{4} \ddot{\alpha} + \frac{mL^2}{2} \dot{\psi} \cos \alpha \\ -\frac{mL^2}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{mL^2}{4} \dot{\psi} \sin \alpha \cos \alpha \\ mL^2 \dot{\psi} - \frac{mL^2}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha + \frac{mL^2}{4} \dot{\psi} \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\vec{\mu}_{AB}^o(0)}{R_1} = \begin{cases} -\frac{mL^2}{3} \ddot{\alpha} + \frac{mL^2}{12} \dot{\psi} \cos \alpha \\ -\frac{mL^2}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \sin \alpha \cos \alpha \\ mL^2 \dot{\psi} - \frac{mL^2}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha + \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\vec{\delta}_{AB}^o(0)}{R_1} = \frac{d \frac{\vec{\mu}_{AB}^o(0)}{R_1}}{dt} + \underbrace{\vec{V}^o(0) \wedge m \vec{V}^o(G_2)}_{= \vec{0}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\delta}_{AB}^{\circ}(0)_{R_1} &= \frac{d^1 \vec{\mu}_{AB}^{\circ}(0)}{dt} \Big|_{R_1} + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{\mu}_{AB}^{\circ}(0) \Big|_{R_1} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{mL^2}{12} \dot{\psi} \dot{\alpha} \sin \alpha \\ -\frac{mL^2}{2} \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} \cos^2 \alpha + \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} \sin^2 \alpha \\ \frac{mL^2}{2} \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - 2 \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha \end{array} \right. + \\
&\quad \left. \begin{array}{l} 0 \\ 0 \wedge \left\{ \begin{array}{l} -\frac{mL^2}{3} \dot{\alpha} + \frac{mL^2}{12} \dot{\psi} \cos \alpha \\ -\frac{mL^2}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \sin \alpha \cos \alpha \\ mL^2 \dot{\psi} - \frac{mL^2}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha + \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \sin^2 \alpha \end{array} \right. \\ -\frac{7mL^2}{12} \dot{\psi} \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{mL^2}{3} \dot{\psi}^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{mL^2}{2} \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} \cos^2 \alpha + \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} \sin^2 \alpha - \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} + \frac{mL^2}{12} \dot{\psi}^2 \cos \alpha \\ \frac{mL^2}{2} \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - 2 \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha \end{array} \right. \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{7mL^2}{12} \dot{\psi} \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{mL^2}{3} \dot{\psi}^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{mL^2}{2} \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} \cos^2 \alpha + \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} \sin^2 \alpha - \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} + \frac{mL^2}{12} \dot{\psi}^2 \cos \alpha \\ \frac{mL^2}{2} \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - 2 \frac{mL^2}{3} \dot{\psi} \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\vec{\delta}_{sys}^{\circ}(0)_{R_1} = \underbrace{\vec{\delta}_{OA}^{\circ}(0)}_{=\vec{\sigma}} + \vec{\delta}_{AB}^{\circ}(0) = \vec{\delta}_{AB}^{\circ}(0)_{R_1}$$

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_{ext} &= \sum_{sys}^{\circ} \quad \text{(I)} & \text{avec: } \vec{R}_0 = \begin{cases} R_{0x} \\ R_{0y} \\ R_{0z} \end{cases} & \vec{P}_{OA} = \vec{P}_{AB} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -mg \end{cases} \\
\sum \vec{M}_{ext}(0) &= \vec{\delta}_{sys}^{\circ}(0) \quad \text{(II)}
\end{aligned}$$

$$(I) \Rightarrow R_{0x} = -3 \frac{mL}{2} \dot{\psi}^2 + mL \dot{\psi} \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (1)$$

$$R_{0y} = \frac{mL}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\psi}^2) \sin \alpha \quad (2)$$

$$R_{0z} = 2mg + \frac{mL}{2} \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
(II) \Rightarrow \vec{OG}_1 \wedge \vec{P}_1 + \vec{OG}_2 \wedge \vec{P}_2 &= \left\{ \begin{array}{l} L/2 \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -mg \end{cases} + \begin{cases} L \\ -\frac{L}{2} \sin \alpha \\ -\frac{L}{2} \cos \alpha \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -mg \end{cases} \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \frac{mgl}{2} \sin \alpha \\ 3 \frac{mgl}{2} \\ 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{7mL^2}{12}\dot{\psi}\ddot{\alpha}\sin\alpha - \frac{mL^2}{3}\dot{\psi}^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{mgl}{2}\sin\alpha \quad (4)$$

$$-\frac{mL^2}{2}\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \frac{mL^2}{3}\dot{\psi}\ddot{\alpha}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) - \frac{mL^2}{3}\dot{\psi}\ddot{\alpha} + \frac{mL^2}{12}\dot{\psi}^2\cos\alpha = \frac{3mgl}{2} \quad (5)$$

$$\frac{mL^2}{2}\dot{\alpha}^2\sin\alpha - 2\frac{mL^2}{3}\dot{\psi}\ddot{\alpha}\cos\alpha\sin\alpha = 0 \quad (6)$$

inconnues : $R_{ox}, R_{oy}, R_{oz}, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$

$$\ddot{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\psi} = 0$$

$$\text{si } \dot{\psi} \text{ est donné alors de (6)} : \dot{\alpha} = \frac{4\dot{\psi}\cos\alpha}{3}$$

$$\text{tel que } \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \int d\alpha = \int \dot{\alpha} dt$$

$$\Rightarrow \alpha = \dot{\alpha}t + \alpha_0$$

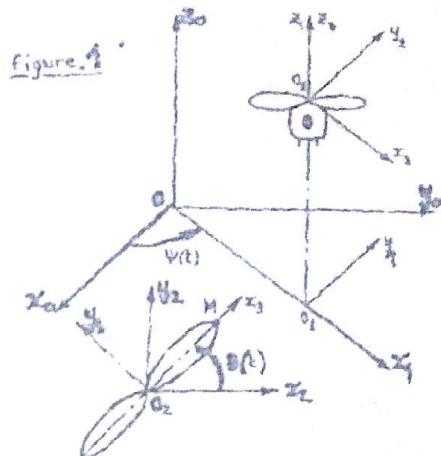
Série d'exercices n° 3 : cinématique (4h30)

Exercices à faire en TD

Exercice 1

Soit le mouvement hélicoïdal d'un hélicoptère autour de l'axe Z_0 (voir figure ci-contre). On donne $OO_1 = R$, $O_1O_2 = Z(t)$. $\dot{\psi}$ et θ sont constantes. Calculer par dérivation :

- 1- Le vecteur rotation de R_2 et les vecteurs vitesses de O_1 et de M par rapport à R_0 exprimés dans R_1 .
- 2- Le vecteur vitesse de O_2 par rapport à R_1 exprimé dans R_1 .
- 3- Le vecteur vitesse de M par rapport à R_1 exprimé dans R_1 , puis en utilisant les matrices de passage, exprimer ce vecteur dans R_2 et R_0 .
- 4- Le vecteur accélération de M par rapport à R_0 exprimé dans R_1 .



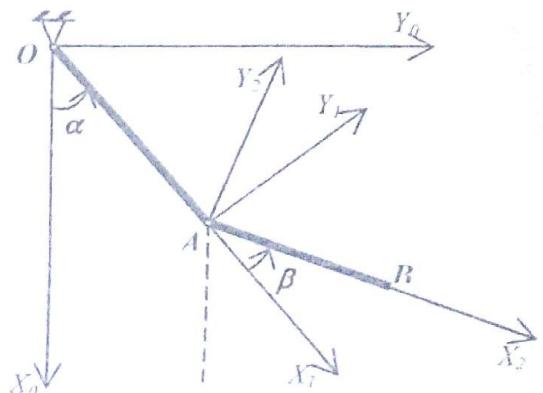
Exercice 2 (Examen final Janvier 2014)

Un pendule double est constitué de deux tiges OA et AB , articulée entre elles en A . La tige OA , articulée en O , est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe Z_0 . La tige AB est animée d'un mouvement de rotation autour de Z_1 .

On donne : $OA = a$ et $AB = b$.

R_1 repère de projection.

1. Déterminer, par dérivation :
 - a- Le vecteur vitesse absolue de A .
 - b- Le vecteur accélération absolue de A .
2. Déterminer, par la cinématique du solide :
 - a- Le vecteur vitesse absolue de B .
 - b- Le vecteur accélération absolue de B .
3. Exprimer le vecteur vitesse absolue de B , calculé à la question 2a, dans le repère R_0 , en utilisant la matrice de passage.



Exercice 3 (Examen de ratrappage janvier 2014)

Une barre coudée OAB tourne autour de l'axe Z_0 à la vitesse angulaire $\dot{\psi}$. Une hélice à deux pales qui tourne à la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ autour de l'axe \vec{Y}_2 , est montée à extrémité B de la barre OAB (Fig. 3). Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié à la barre coudée et $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère lié à l'hélice. On donne $OA=AB=L$. Soit R_1 le repère de projection et le repère relatif.

- Établir les 3 figures planes entre les repères successifs du mouvement de l'hélice/ R_0 ainsi que les matrices de passage associées. Déterminer, ensuite, le vecteur rotation de l'hélice par rapport à R_0 .
- Par dérivation, déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point B par rapport à R_0 .
- Par la cinématique du solide, déterminer les vecteurs vitesse et accélération absolues du point P , extrémité d'une pale, tel que $\overrightarrow{BP} = R \vec{x}_3$.
- Déterminer le vecteur accélération du point P par rapport à R_2 . Exprimer ce vecteur dans R_3 .

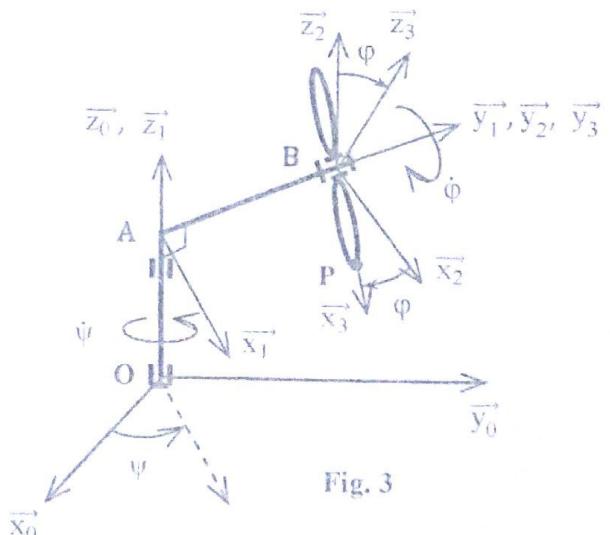


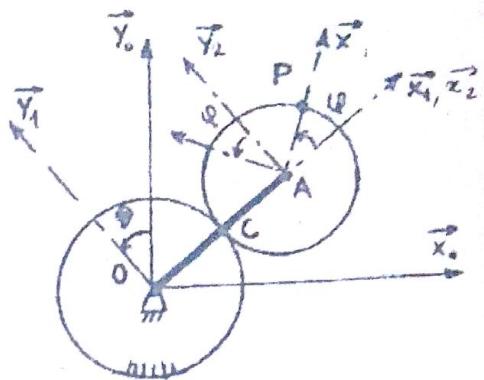
Fig. 3

Exercices supplémentaires

Exercice 4

Soit le système formé d'une barre OA articulée en O, entraînant une roue de rayon r qui roule sans glisser sur une roue fixe de rayon R (voir figure ci-contre). On supposera que les vitesses angulaires $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ sont constantes. Soit R_1 le repère de projection :

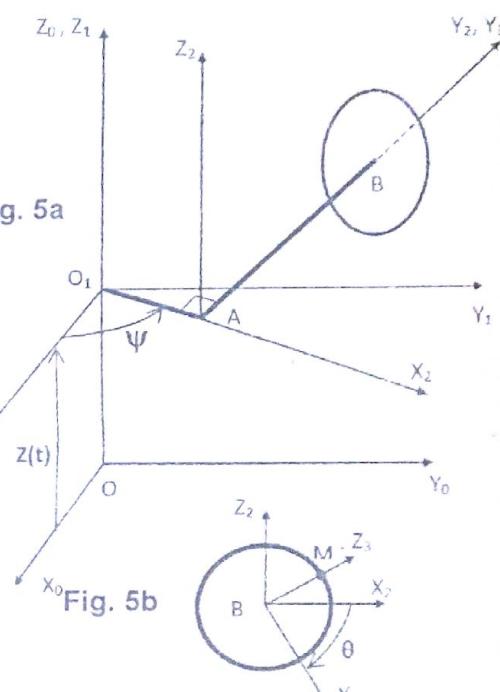
- 1- Déterminer, par dérivation, la vitesse et l'accélération absolues de A
- 2- En déduire, par la cinématique du solide, la vitesse et l'accélération absolues de P.



Exercice 5 (Examen de rattrapage Janvier 2014)

Un disque de rayon R , est monté sur une barre O_1AB coudée avec un angle de 90° au point A, tourne autour de l'axe Y_2 à une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (Fig. 5b). L'ensemble du système est animé simultanément d'un mouvement de rotation autour de l'axe Z_1 de vitesse angulaire $\dot{\psi}$ et d'un mouvement de translation selon l'axe Z_0 (Fig. 5a). On donne : $\overrightarrow{OO_1} = z(t)$, $O_1A=R$, $AB=2R$ et $\dot{\psi}$ est constante. Soit R_2 le repère de projection.

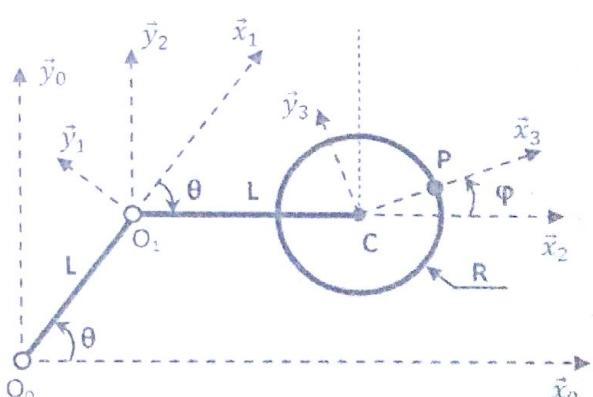
- Déterminer le vecteur de rotation instantanée du disque par rapport à R_0 .
- Par la méthode de dérivation, déterminer les vecteurs vitesse et accélération absolues du point B.
- Par la méthode de la cinématique du solide, déterminer les vecteurs vitesse et accélération absolues d'un point M de la périphérie du disque, tel que $\overrightarrow{BM} = R \cdot \vec{Z}_3$.
- Déterminer le vecteur vitesse du point M par rapport à R_2 puis exprimer ce vecteur dans R_3 , en utilisant la matrice de passage.



Exercice 6 (Examen de rattrapage Janvier 2015)

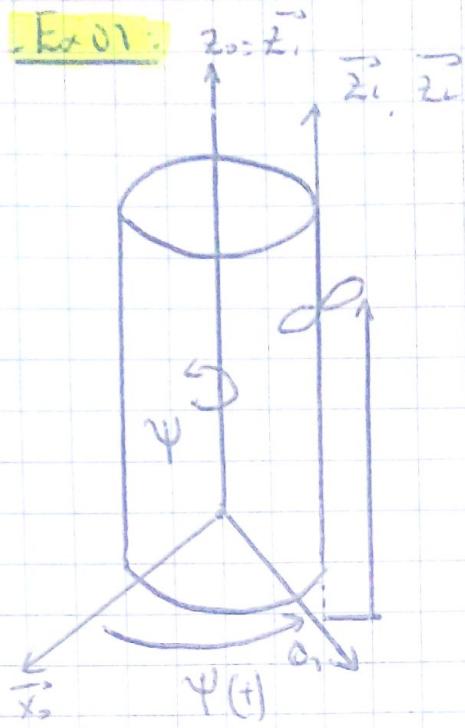
Soit un système mécanique formé d'une barre rigide O_0O_1 , de longueur L , liée au repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$; d'une autre barre rigide O_1C , de longueur L , liée au repère $R_2(O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ ainsi que d'un disque de centre C et de rayon R , lié au repère $R_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$. La barre O_0O_1 est animée d'une rotation d'angle θ autour de l'axe $\overrightarrow{O_0z_0}$. La barre O_1C reste toujours parallèle à l'axe $\overrightarrow{Ox_0}$. La position d'un point P sur le disque est repérée par l'angle φ (voir ci-contre). Les vitesses de rotation $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ sont constantes. Le repère de projection est R_1 .

- 1) Déterminer le vecteur rotation instantanée du disque par rapport à R_0 .
- 2) Déterminer, par la méthode de dérivation, les vecteurs vitesse et accélération absolues du point C.
- 3) Déduire, en utilisant la méthode de la cinématique de solide, les vecteurs vitesse et accélération absolues du point P.



Série 03: Cinématique

Ex 01:

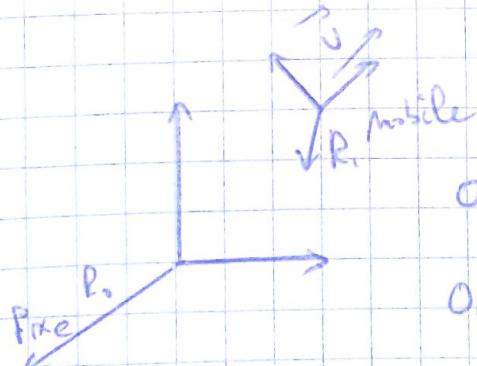


1. Calculer:

$$\vec{\Omega}_{/R_1} = \vec{\Omega}_{/e_1} + \vec{\Omega}_{/e_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}(O_1)/R_1 = \frac{d}{dt} \vec{v}(O_1)/R_1 = \frac{d}{dt} (\vec{v}_{/e_1} + \vec{\Omega}_{/e_1} \times \vec{v}_{/e_1})$$

$$\vec{v}_{/e_1}/R_1 = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{v}(O_1) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} R_1 \end{Bmatrix}}_{\text{la vitesse de la base mobile}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R\dot{\Psi} \end{Bmatrix}$$



$$O_1 = R$$

$$O_1 O_2 = z(t)$$

$$O_2 \Omega = r$$

$$\vec{V}(n)/R_1 = \frac{d^o(\vec{\omega}n)}{dt/R_1} + \frac{d'(\vec{\omega}n)}{dt} \frac{\vec{\Omega}}{R_1} \Delta \vec{\Omega n}/R_1$$

avec: $\vec{\Omega n} = \vec{\Omega O_1} + \vec{\Omega_1 \Omega_2} + \vec{\Omega_2 n} \Rightarrow \frac{R}{R_1} \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \frac{0}{R_2} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ Z \end{cases} + \frac{r \cos \theta}{R_1} \begin{cases} r \cos \theta \\ r s \sin \theta \\ 0 \end{cases}$

et: $\vec{\Omega_2 n} = \begin{cases} r \cos \theta \\ r s \sin \theta \\ 0 \end{cases}$

$$= \frac{R}{R_1} \begin{cases} R + r \cos \theta \\ r s \sin \theta \\ 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(n)/R_1 = \begin{cases} -r\theta' \sin \theta \\ -r\theta' \cos \theta \\ Z \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ Z \end{cases} + \begin{cases} R + r \cos \theta \\ -r\theta' \cos \theta + r\theta' \sin \theta \\ Z \end{cases} = \begin{cases} r \cos \theta \\ -r\theta' \cos \theta + r\theta' \sin \theta \\ Z \end{cases}$$

2. Calculer:

$$\vec{V}(O_2)/R_1 = \frac{d^o(\vec{\omega}_2)}{dt/R_1} = \frac{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ Z \end{cases}}{R_1}$$

$$R_1(O_1, n_1; y_1, z_1)$$

$$R_1(O_1, n_1; y_1, z_1) \quad \vec{\Omega O_2} = \frac{\begin{cases} R \\ 0 \\ Z \end{cases}}{R_1}$$

$$R_2(O_2, n_2; y_2, z_2)$$

$$R_3(O_3, n_3; y_3, z_3)$$

3. Calculer:

$$\vec{V}(n)/R_1 = \frac{d'(\vec{\omega}n)}{dt} \frac{R_1}{R_1} = \begin{cases} -r\theta' \sin \theta \\ -r\theta' \cos \theta \\ Z \end{cases}$$

avec la matrice de passage:

$$\vec{V}(n)/R_2 = [P_{3 \times 2}] \vec{V}(n)/R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{V}(n)/R_1 = \begin{cases} -r\theta' \sin \theta \\ r\theta' \cos \theta \\ Z \end{cases}$$

$$\vec{V}(n)/R_0 = [P_{z=0}] \vec{V}(n)/R_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r\theta \sin \theta \\ r\theta \cos \theta \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-r\theta \sin \theta + \cos \psi - r\theta \cos \theta \sin \psi) \\ r\theta \sin \theta \sin \psi + r\theta \cos \theta \cos \psi \\ z \end{bmatrix}$$

On a:

$$[P_{z=1}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [P_{z=0}] = [P_{z=1}]$$

u. Calcular:

$$\vec{v}(n)/R_1 = \frac{d^0[\vec{v}(n)]}{dt/R_1} + \frac{d^1[\vec{v}(n)]}{dt/R_1} + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i \wedge \vec{v}(n)/R_i$$

$$= \begin{bmatrix} -r\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\psi} \theta \cos \theta \\ -r\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\psi} \theta \sin \theta \\ z \end{bmatrix} + R_1 \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{bmatrix} -r\theta' \sin \theta - r\psi \sin \theta \\ r\theta' \cos \theta + R\psi' \cos \theta \\ R \end{bmatrix} \\ \hline 0 & z \end{array} \right]$$

$$\vec{v}(n)/R_1 = \begin{bmatrix} -r\dot{\theta}^2 \cos \theta - 2r\dot{\psi}\theta' \cos \theta - r\dot{\psi}^2 \cos \theta - R\psi^2 \\ -r\dot{\theta}^2 \sin \theta - 2r\dot{\psi}\theta' \sin \theta - r\dot{\psi}^2 \sin \theta \\ z \end{bmatrix}$$

$$= R_1 \left[\begin{array}{c|c} -r(\theta' + \psi')^2 \cos \theta - R\psi'^2 & \\ \hline -r(\theta' + \psi')^2 \sin \theta & z \end{array} \right]$$

Ex 02:

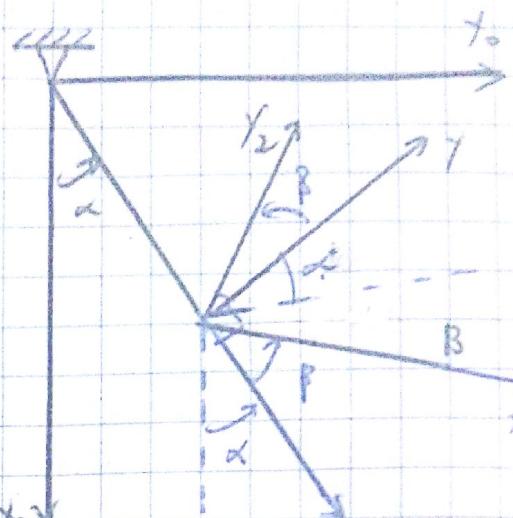
avec R_1 : repère de projection.

$$\vec{\Omega}_1^o / R_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \omega \end{cases}$$

$R_1 R_1$

$$\vec{\Omega}_2^o = \vec{\Omega}_2^o + \vec{\Omega}_3^o = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \beta \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ (\beta + \alpha) \end{cases}$$

$R_1 R_2$ $R_1 R_3$ R_1



1. Par dérivation: $\vec{V}^o(A) / R_1 = \frac{d^o(\vec{OA})}{dt / R_1} = \frac{d^o(\vec{OA})}{dt / R_1} + \vec{\Omega}_1^o \wedge \vec{OA} / R_1$

$$\vec{V}^o(A) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \omega \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \omega x \end{cases}$$

R_1

$$\vec{V}^o(B) / R_1 = \frac{d^o[\vec{V}^o(A)]}{dt / R_1} = \frac{d[\vec{V}^o(A)]}{dt / R_1} + \vec{\Omega}_1^o \wedge \vec{V}(A) / R_1$$

$$= \begin{cases} 0 \\ \ddot{\alpha}x \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \omega \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \omega x \end{cases} = \begin{cases} -\ddot{\alpha}x^2 \\ +\ddot{\alpha}x \\ 0 \end{cases}$$

Acc. Normale \nwarrow
Acc. Tangentielle \searrow

2. Par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^o(B) = \vec{V}^o(A) + \vec{\Omega}_2^o \wedge \vec{AB}$$

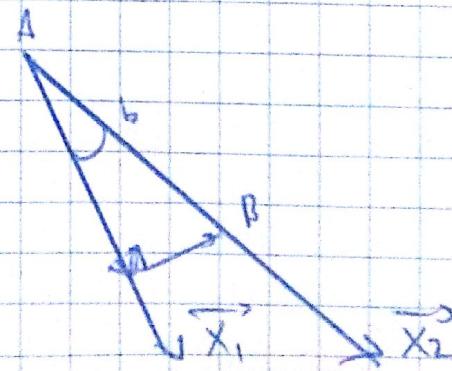
$\hookrightarrow R_2 \in \text{Solide } (AB)$

* A et B deux pts du m^e solide (AB)

* $R_2 \in \text{Solide } (AB)$.

~ Solide = tige (AB)

$$\vec{AB} = \begin{cases} b \cos \beta \\ b \sin \beta \\ 0 \end{cases}$$



$$\vec{R}_2 \wedge \vec{AB} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ (\alpha' + \beta') \end{cases} \wedge \begin{cases} b \cos \beta \\ b \sin \beta \\ 0 \end{cases} = R_1 \begin{cases} -b(\alpha' + \beta') \sin \beta \\ +b(\alpha' + \beta') \cos \beta \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}(B) = \begin{cases} -b(\alpha' + \beta') \sin \beta \\ a\alpha' + b(\alpha' + \beta') \cos \beta \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}^o(B) = \vec{\gamma}^o(A)_{/R_1} + \frac{d^o \vec{R}_2}{dt/R_1} \wedge \vec{AB} + \vec{R}_2 \wedge (\vec{R}_2 \wedge \vec{AB})$$

$$\frac{d^o \vec{R}_2}{dt/R_1} = \frac{d^o(\vec{R}_2)}{dt/R_1} + \vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2 = R_1 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ (\alpha'' + \beta'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \alpha' \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ (\alpha' + \beta') \end{cases}$$

$$\frac{d^o \vec{R}_2}{dt} \wedge \vec{AB} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ (\alpha'' + \beta'') \end{cases} \wedge \begin{cases} b \cos \beta \\ b \sin \beta \\ 0 \end{cases} = R_1 \begin{cases} -b(\alpha'' + \beta'') \sin \beta \\ +b(\alpha'' + \beta'') \cos \beta \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{R}_2 \wedge (\vec{R}_2 \wedge \vec{AB}) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ (\alpha' + \beta') \end{cases} \wedge \begin{cases} -b(\alpha' + \beta') \sin \beta \\ +b(\alpha' + \beta') \cos \beta \\ 0 \end{cases} = R_1 \begin{cases} -b(\alpha' + \beta')^2 \sin \beta \\ +b(\alpha' + \beta')^2 \cos \beta \\ 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}^o(B) = \begin{cases} -a\alpha'^2 - b(\alpha'' + \beta'') \sin \beta - b(\alpha' + \beta')^2 \cos \beta \\ +a\alpha'' + b(\alpha'' + \beta'') \cos \beta - b(\alpha' + \beta')^2 \sin \beta \\ 0 \end{cases}$$

3. Par la matrice de Passage:

$$\vec{V}^o(B)/R_0 = [P_{0-0}] \vec{V}^o(B)/R_i$$

On a:

$$[P_{0-1}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [P_{1-0}] = [P_{0-1}]^T$$

$$\vec{V}^o(B)/R_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_i \begin{cases} -b(\alpha + \beta) \sin \beta \\ b(\alpha + \beta) (\cos \beta + \alpha \sin \alpha) \\ 0 \end{cases}$$

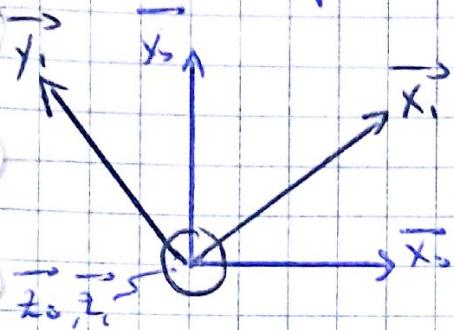
$$= \frac{\begin{cases} (-b(\alpha + \beta) \sin \beta \cos \alpha - b(\alpha + \beta) \cos \beta \sin \alpha - \alpha \sin \alpha) \\ (-b(\alpha + \beta) \sin \beta \sin \alpha + b(\alpha + \beta) \cos \beta \cos \alpha + \alpha \cos \alpha) \\ 0 \end{cases}}{R_0}$$

$$[P_{1-2}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P_{0-2}] = [P_{0-1}] \cdot [P_{1-2}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

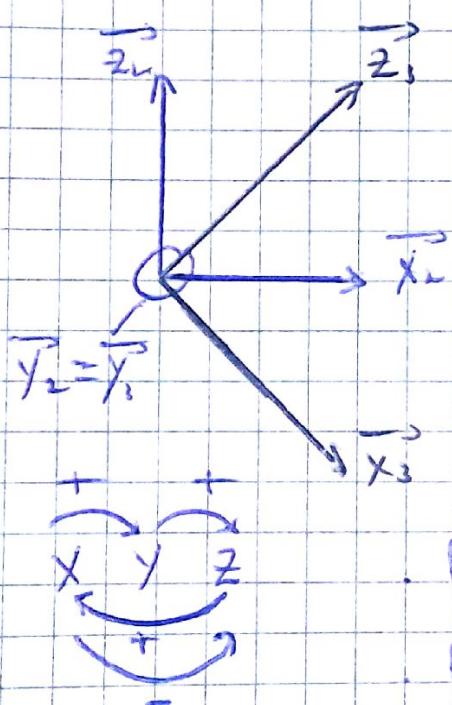
- Ex 03:

1. Figures planes entre les repères:



$$[P_{0 \rightarrow 1}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 \Rightarrow \vec{\Omega}_2 = \vec{0}$$



$$[P_{1 \rightarrow 2}] = [P_{0 \rightarrow 1}]^T$$

$$[P_{1 \rightarrow 2}] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P_{2 \rightarrow 3}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

$$R_1 (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

$$R_2 (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

$$R_3 (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$$

$$\vec{\Omega}_{3/R_1} = \vec{\Omega}_{3/R_0} + \vec{\Omega}_{2/R_1} + \vec{\Omega}_{1/R_1} \quad (\text{R}_3 \text{ repère fixé à l'hélico})$$

$$= \begin{cases} 0 \\ \psi \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \psi' \\ \varphi \end{cases}$$

R_3, R_2, R_1

Remarque: On peut calculer :

$$\vec{\Omega}_{3/R_1} = [P_{1-2}] \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi' \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\varphi' \sin \psi \\ +\varphi' \cos \psi \\ \psi' \end{Bmatrix}$$

$$OA = AB = L$$

$$BP = R$$

2. Par déivation :

$$\vec{V}(B)_{/R_1} = \frac{d^o(\vec{OB})}{dt/R_1} = \frac{d^i(\vec{OB})}{dt/R_1} + \vec{\Omega}_{1/R_1} \wedge \vec{OB}_{/R_1} \quad (\text{avec } \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB})$$

$$\vec{OB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L \\ L \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{Bmatrix} + \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ L \\ L \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} -L\psi' \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi' = \omega \\ \psi' = \dot{\psi} \end{matrix}$$

$$\vec{\gamma}(B)_{/R_1} = \frac{d^o[\vec{V}(B)]}{dt/R_1} = \frac{d^i[\vec{V}(B)]}{dt/R_1} + \vec{\Omega}_{1/R_1} \wedge \vec{V}(B)_{/R_1}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -L\psi' \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L\psi'^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3. Cinématique du solide :

- si l'axe solide = Axe

- deux pts B et P du solide

- R₁ repère lié (fixé) au solide.

$$\vec{V}(P) = \vec{V}(B) + \vec{\Omega}(s) \wedge \vec{BP}$$

$$\vec{BP} = \begin{Bmatrix} R \cos \varphi \\ 0 \\ -R \sin \varphi \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\Omega}_3 \wedge \vec{BP} = \begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{cases} \wedge \begin{cases} R \cos \varphi \\ 0 \\ R(-\dot{\varphi} \sin \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -R \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \\ +R \dot{\psi} \cos \varphi \\ -R \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}(P) = \begin{cases} -L \dot{\psi} - R \dot{\varphi} \sin \varphi \\ R \dot{\psi} \cos \varphi \\ -R \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\vec{\delta}(P) = \vec{\omega}(B) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_3}{dt/R_1} \wedge \vec{BP}_{/R_1} + \vec{\Omega}_3 \wedge (\vec{\Omega}_3 \wedge \vec{BP})_{/R_1}$$

Calculus-

$$\frac{d^0 \vec{\Omega}_3}{dt/R_1} = \frac{d^1 \vec{\Omega}_3}{dt/R_1} + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{\Omega}_3_{/R_1}$$

$$= \begin{cases} 0 \\ 0 + \begin{cases} 0 \\ \dot{\varphi} \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ \dot{\varphi} \end{cases} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -\dot{\varphi} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^0 \vec{\Omega}_3}{dt} \wedge \vec{BP} = \begin{cases} -R \dot{\varphi} \dot{\psi} \\ 0 \wedge \begin{cases} R \cos \varphi \\ 0 \end{cases} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -R \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_3 \wedge (\vec{\Omega}_3 \wedge \vec{BP}) = \begin{cases} 0 \\ \dot{\varphi} \wedge \begin{cases} -R \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \\ +R \dot{\psi} \cos \varphi \\ -R \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \\ \dot{\psi} \wedge \begin{cases} -R \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \\ +R \dot{\psi} \cos \varphi \\ -R \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \end{cases} = \begin{cases} -R \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - R \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \\ -R \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi + R \dot{\psi}^2 \cos \varphi \\ +R \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}(P) = \begin{cases} -R(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) \cos \varphi \\ -L \dot{\psi}^2 - 2R \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \\ R \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{cases}$$

$$4. \frac{\vec{v}^2(P)}{R_L} = \frac{\vec{v}^2(P)}{R_L} = \frac{d^2[\vec{v}^2(P)]}{dt^2/R_L} = \begin{cases} -R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ +R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases}$$

$$\frac{\vec{v}^2(P)}{R_L} = \frac{\vec{v}(P)}{R_L} = \frac{d^2(\vec{pp})}{dt^2 R_L} = \begin{cases} -R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \\ -R\dot{\varphi}\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\frac{\vec{BP}}{R_L} = \frac{\vec{BP}}{R_L}$$

$$\frac{\vec{x}(P)}{R_L} = [P_{2-3}] \frac{\vec{x}(P)}{R_L}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} -R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -R\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + R\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi \\ 0 \\ +R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$