

Epreuve fondamentale de mécanique rationnelle

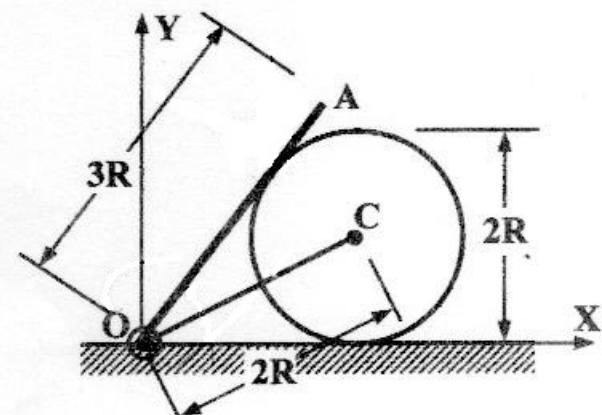
Documents non autorisés - temps alloué : 1^h 30 mn.

EXERCICE 1 : (6 points)

Une barre homogène OA, de poids $P = 100 \text{ N}$ et de longueur $3R$, est articulée en O, autour d'un axe horizontal OZ. Elle s'appuie sur un cylindre lisse (sans frottements) de rayon $R = 20 \text{ cm}$ et de poids $Q = 200 \text{ N}$; lequel s'appuyant sur un plan horizontal lisse.

Le cylindre est maintenu dans sa position d'équilibre ci-indiquée, par un fil inextensible OC de longueur $2R$.

Déterminer la tension du fil, ainsi que la réaction en O.



EXERCICE 2 : (7 points)

Une barre horizontale AB, de poids négligeable, liée au mur à l'aide d'une articulation sphérique A, est maintenue dans sa position perpendiculaire au mur, grâce à deux câbles CD et EC, comme indiqué sur la figure ci-contre.

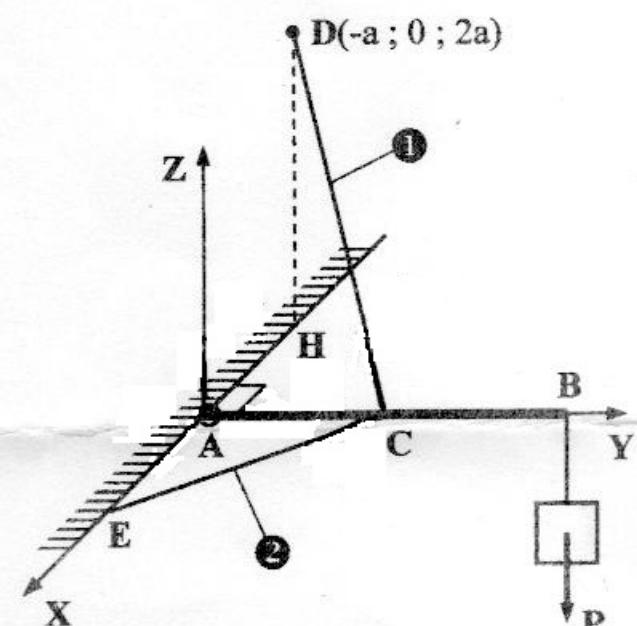
A son extrémité B est suspendu un poids $P = 100 \text{ N}$.

Données : $AC = AH = AE = a = 1 \text{ m}$

$$AB = HD = 2a = 2 \text{ m}$$

Les coordonnées de D sont : $(-a ; 0 ; 2a)$

Déterminer la réaction de l'articulation sphérique A, ainsi que les tensions T_1 (du câble ①) et T_2 (du câble ②).



EXERCICE 3: (7 points)

Soit le système mécanique composé :

- d'un cadre ① ayant un pivot (articulation cylindrique) en O, animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante $\dot{\phi}$ autour de l'axe OZ_O.

- d'un disque ② de rayon R et d'épaisseur négligeable, soudé à un axe AB, lié au cadre ① par les deux articulations cylindriques A et B; le disque est animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante $\dot{\beta}$ autour de l'axe CY₂.

On donne : $OC = AC = CB = L$; $\vec{CM} = R \vec{X}_3$.

$R_O(O, X_O, Y_O, Z_O)$: repère fixe ; $R_1(O, X_1, Y_1, Z_1)$: repère lié au cadre ①.

$R_2(C, X_2, Y_2, Z_2) // R_1$; $R_3(C, X_3, Y_3, Z_3)$: repère lié au disque ②.

1° Etablir les figures planes représentatives des différentes rotations.

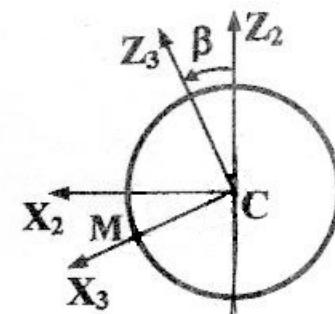
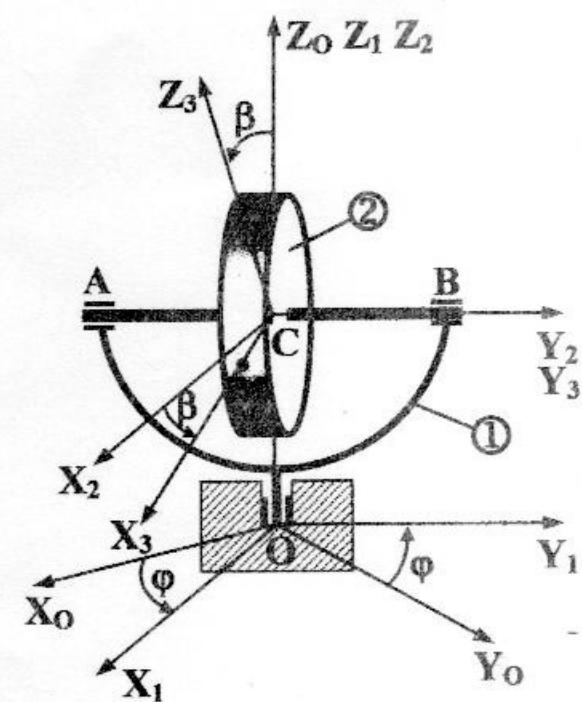
2° Déterminer le vecteur rotation instantanée du disque par rapport à R_O exprimé dans R_2 .

3° Déterminer par dérivation, la vitesse absolue (par rapport à R_O) de M, exprimée dans R_2 .

4° En déduire la vitesse absolue de M exprimée dans R_1 et ensuite dans R_O .

5° Déterminer par dérivation la vitesse de M par rapport à R_1 , exprimée dans R_2

6° Déterminer par dérivation, l'accélération absolue (par rapport à R_O) de M exprimée dans R_2 .



Corrigé de l'épreuve fondamentale de mécanique rationnelle

EX1 : le système barre + cylindre est hyperstatique \Rightarrow décomposer le système dans les 2 triangles OCB et OCA.

OCB : $\sin \alpha = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$$\Rightarrow \beta = 2\alpha = 60^\circ$$

$$\Rightarrow F_x = 0 \Rightarrow R_B \sin \beta - T \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow R_B = T \quad (1) \quad (0,5)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_D - T \sin \alpha - (Q - R_B \cos \beta) = 0$$

$$\Rightarrow R_D - Q = \frac{T + R_B}{2} \quad (2) \quad (0,5) \text{ B4(1) sans (3)}$$

$$\Sigma M_{Z_1/0} = 0 \Rightarrow (R_D - Q) \sqrt{3} R - R_B \sqrt{3} R = 0$$

$$\Rightarrow R_D - Q = R_B \quad (3) \quad (0,5) \text{ B4(1) sans (2)}$$

idem que (2) avec (1)

les 4 forces \vec{R}_D , \vec{R}_B , \vec{T} et \vec{Q} sont concourantes en C \Rightarrow on ne peut poser que 2 équations statiques

Equilibre de la barre isolée:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{DX} = R_B \sin \beta \quad (4) \quad (0,5)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_B \cos \beta - P + R_{Oy} = 0 \quad (5) \quad (0,5)$$

$$\Sigma M_{Z_1/0} = 0 \Rightarrow R_B \cdot \sqrt{3} R = P \frac{3R}{2} \cos \beta \quad (6) \quad (0,5)$$

$$(6) \Rightarrow R_B = \frac{\sqrt{3}}{4} P \quad (0,5)$$

$$(1) \Rightarrow T = R_B = \frac{\sqrt{3}}{4} P$$

$$(4) \Rightarrow R_{DX} = \frac{3}{8} P = 37,5 \text{ N} \quad (0,5) \quad (0,5) = 43,3 \text{ N}$$

$$(5) \Rightarrow R_{Oy} = \frac{(8 - \sqrt{3})}{8} P = 78,35 \text{ N} \quad (0,5)$$

EX2 :

Dans le ΔACE : $\alpha = 45^\circ$

$$\Rightarrow T_2 = \begin{cases} T_2 / \sqrt{2} \\ -T_2 / \sqrt{2} \\ 0 \end{cases} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \vec{R}_A = \begin{cases} R_{AX} \\ R_{AY} \\ R_{AZ} \end{cases} \quad (0,25)$$

$$\vec{P} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P \end{cases} \quad (0,25)$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \vec{e}_1 = T_1 \begin{cases} \vec{CD} \\ 1 \cdot \vec{CD} \end{cases} \quad ; \quad \vec{CD} = \begin{cases} -a \\ -a \\ 2a \end{cases}$$

$$|\vec{CD}| = \sqrt{8} a$$

$$\Rightarrow \vec{T}_1 = \begin{cases} -T_1 / \sqrt{8} \\ -T_1 / \sqrt{8} \\ 2T_1 / \sqrt{8} \end{cases} \quad (1) \quad (0,4)$$

$$\vec{AC} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 2a \end{cases}$$

$$\vec{AB} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{AX} - \frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{AY} - \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{AZ} - P + \frac{2T_1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{AX} - \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{AY} - \frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{AZ} - P - \frac{2T_1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad (2) \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{AX} - \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{AY} - \frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{AZ} - P - \frac{2T_1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad (3) \quad (0,5)$$

$$\Sigma \vec{M}_{IA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AC} \wedge (\vec{T}_1 + \vec{T}_2) + \vec{AB} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \\ -\frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} & -\frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} & \frac{2T_1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -P \end{cases} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2aT_1}{\sqrt{2}} - 2aP = 0 \\ a(\frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}}) = 0 \end{cases} \quad (4) \quad (0,75)$$

$$\Rightarrow T_1 = \sqrt{2} P \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow a(\frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}}) = 0 \quad (5) \quad (0,75)$$

$$\Rightarrow T_2 = \sqrt{2} P \quad (0,25)$$

$$(1) \Rightarrow R_{AX} = 0 \quad (0,25) \quad (2) \Rightarrow R_{AY} = 2P = 200 \text{ N} \quad (0,25)$$

$$(3) \Rightarrow R_{AZ} = -P = -100 \text{ N} \quad (0,25)$$

$$\text{EX3: } \Sigma M = \begin{cases} R \cos \beta \\ 0 \\ L - R \sin \beta \end{cases} \quad ; \quad R_2 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 4P \end{cases}$$

$$2 \cdot \sqrt{L^2} / R_2 = \sqrt{L^2} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 4P \end{cases} \quad (1)$$

$$3 \cdot \vec{DM} = \begin{cases} R \cos \beta \\ 0 \\ L - R \sin \beta \end{cases} \quad ; \quad R_2 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 4P \end{cases}$$

$$\vec{V}(M) / R_2 = \frac{d}{dt} (\vec{DM} / R_2) + \vec{P}_2 \wedge \vec{DM} = \begin{cases} -R \beta \sin \beta \\ R \dot{\beta} \cos \beta \\ -R \beta \cos \beta \end{cases} \quad (1)$$

$$4 \cdot \vec{V}(M) = \begin{cases} -R \beta \sin \beta \\ R \dot{\beta} \cos \beta \\ -R \beta \cos \beta \end{cases} = \begin{cases} -R \beta \sin \beta \cos \beta - R \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta \\ R \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta + R \beta \cos \beta \cos \beta \\ -R \beta \cos \beta \end{cases} \quad (0,25)$$

$$5 \cdot \vec{V}(M) / R_2 = \frac{d}{dt} (\vec{DM} / R_2) = \begin{cases} -R \dot{\beta} \sin \beta \\ 0 \\ R \dot{\beta} \cos \beta \end{cases} \quad (1)$$

$$6 \cdot \vec{V}(M) / R_2 = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M) / R_2 \right] + \vec{P}_2 \wedge \vec{V}(M) / R_2 = \begin{cases} -R \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ -R \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ R \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{cases} \quad (0,5)$$

$$= \begin{cases} -R \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ -R \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ R \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{cases} + \begin{cases} \vec{x}_2 \\ 0 \\ \vec{P} \end{cases} = \begin{cases} -R \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ -R \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ R \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{cases} - R \dot{\beta}^2 \cos \beta \quad (0,75)$$

$$= \begin{cases} -R \dot{\beta}^2 \cos \beta (\beta^2 + \dot{\beta}^2) \\ -2R \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta \\ R \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{cases} \quad (1)$$

$$R_2 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ R \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{cases}$$

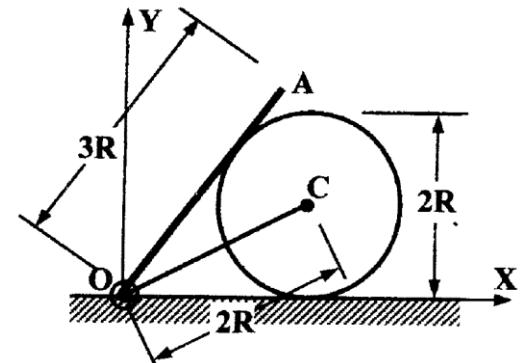
Série d'exercices n° 3 : équilibre du solide dans le plan (2h15 min)

Exercices à faire en TD :

Exercice 1 (examen final – Janvier 2012)

Une barre homogène OA, de poids $P = 100 \text{ N}$ et de longueur $3R$, est articulée en O. Elle s'appuie sur un cylindre lisse de rayon $R = 20 \text{ cm}$ et de poids $Q = 200 \text{ N}$. Ce dernier, s'appuie sur un plan horizontal lisse. Le cylindre est maintenu en équilibre grâce à un fil inextensible OC de longueur $2R$ (voir figure ci-contre).

- Déterminer la tension du fil ainsi que la réaction de la liaison en O.

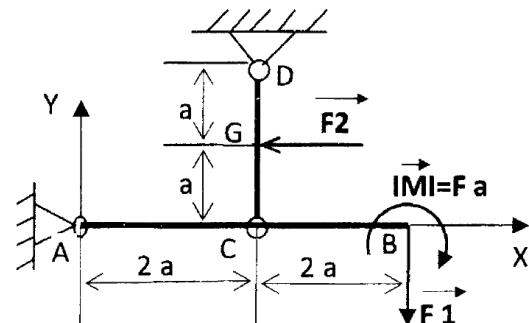


Exercice 2 (examen final – Janvier 2013)

Deux barres AB et CD de poids négligeables, articulées entre elles en C, reposent sur deux appuis doubles en A et D. L'ensemble est sollicité par deux forces F_1 et F_2 , appliquées respectivement en B et G ainsi que par un moment M autour du point B (voir figure ci-contre).

On donne $F_1 = F_2 = 1000 \text{ N}$, $a = 0,2 \text{ m}$ et $M = F.a = 200 \text{ Nm}$.

- Calculer les réactions aux articulations A, C et D.

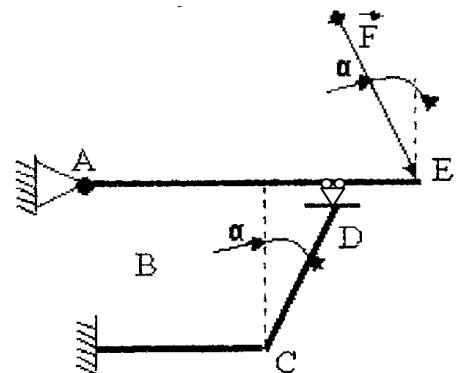


Exercice 3 (examen de rattrapage Fév. 2011)

Soit le mécanisme formé de :

- Une barre AE de poids $P_1 = 2P$, articulée en A.
- Une barre BC de poids $P_2 = P$, encastrée en B.
- Une barre CD de poids $P_3 = P$, soudée en C et en contact sans frottements avec AE en D.

Une charge $F = P$ est appliquée à ce système en E. Déterminer, en fonction de P , les réactions des liaisons en A, B et D. On donne $AE = 2a$, $BC = CD = a$ et $\alpha = 30^\circ$.

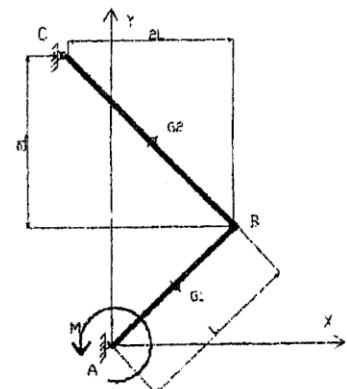


Exercices supplémentaires :

Exercice 4

Deux barres AB et BC de poids respectifs P_1 et P_2 , sont articulées entre elles en B et reposent sur deux articulations en A et en C. Les deux barres sont inclinées de 45° par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre). Un moment M d'intensité connue est appliqué au point A.

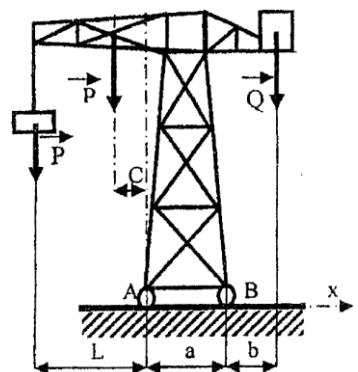
Déterminer les réactions aux articulations A, B et C. (on donne $P_1 = P$, $P_2 = \sqrt{2} P$ et $M = L P_2$).



Exercice 5

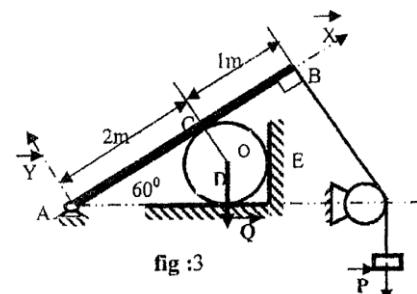
Le poids de la grue représentée ci-contre est égal, sans contrepoids, à P . La ligne d'action de P passe à une distance c de la roue gauche A. L'écartement des roues est $AB = a$. La charge maximale que peut soulever la grue est égale à P_1 . On veut garantir la stabilité de la grue en charge et à vide. On donne $L = 4a$, $b = a$, $c = a/2$ et $P_1 = P/2$. En fonction de P :

- Calculer les valeurs minimale Q_{1v} et maximale Q_{2v} du contrepoids correspondant au basculement de la grue à vide ($P_1 = 0$).
- Calculer les valeurs minimale Q_{1c} et maximale Q_{2c} du contrepoids correspondant au basculement de la grue à pleine charge ($P_1 = P/2$).
- En déduire la plage de variation du contrepoids Q pour un fonctionnement stable à vide et en charge.

**Exercice 6**

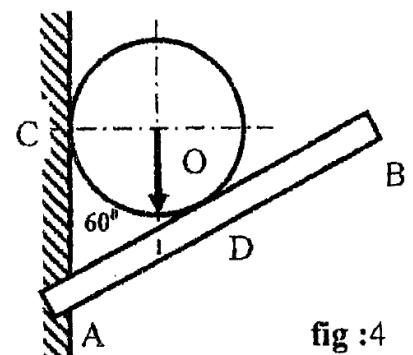
Soit le système composé d'une barre rigide AB, de poids P_1 , articulée en A et reposant au point C (sans frottements) sur une sphère de poids Q . La sphère repose sans frottements sur le sol au point D et sur le mur au point E. Au point B est fixé un fil inextensible s'enroulant autour d'une poulie de masse négligeable et supportant un poids P (voir figure ci-contre). On donne $P = 500 \text{ N}$, $P_1 = 400 \text{ N}$, $Q = 300 \text{ N}$.

- Déterminer les réactions de l'articulation ainsi que la réaction à point de contact C.
- En déduire les réactions du sol et du mur sur la sphère au point D et E.

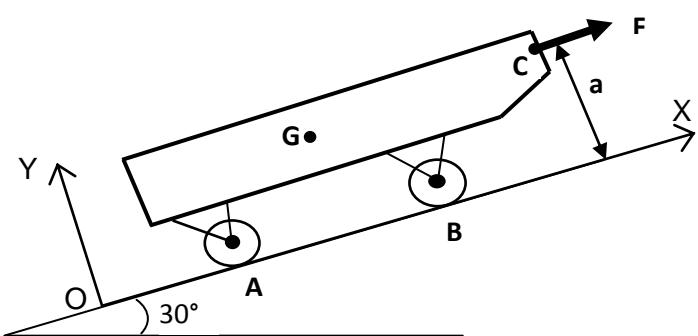
**Exercice 7**

Une barre AB de longueur $L = 1\text{m}$ et de poids $P = 100 \text{ kgf}$ est encastrée dans un mur au point A. Elle forme un angle $\alpha = 60^\circ$ avec le mur. Un cylindre de poids $Q = 180 \text{ kgf}$ repose sans frottements sur la barre au point D et sur le mur au point C (voir figure ci-contre). On donne $AD = a = 0,4 \text{ m}$.

- Déterminer l'expression du moment d'encastrement au point A en fonction de P , Q , L , α et a .
- Calculer les réactions aux points C, D et A.

**Exercice 8 : (examen de rattrapage – janvier 2014)**

Une benne de chargement de poids P est en position d'équilibre sur des rails inclinés d'un angle de 30° par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre). Une force F parallèle à la droite AB est appliquée en C sur un câble pour déplacer la benne. Déterminer la force de traction F et les réactions des roues aux points A et B à la position d'équilibre. Les frottements sont négligés. On donne $AB=a$, les composantes de $\vec{AG}=(a/2, 3a/4)$ dans le repère $R(O,X,Y)$.

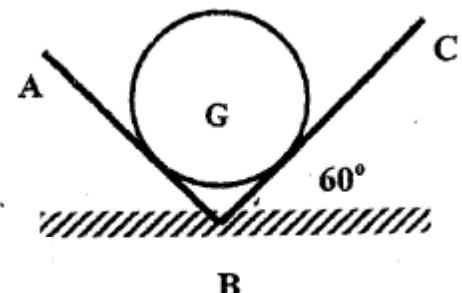


Série d'exercices n° 2 : équilibre du point matériel (1h30 min)

Exercices à faire en TD :

Exercice 1

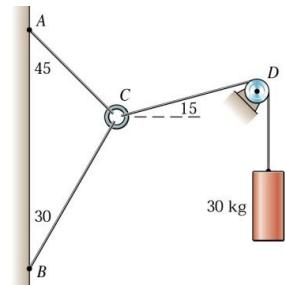
Une boule homogène pesant 6 kgf repose sur deux plans orthogonaux AB et BC parfaitement lisses. Le plan BC forme un angle de 60° avec l'horizontale. Déterminer la force exercée par la boule sur chaque plan



Exercice 2

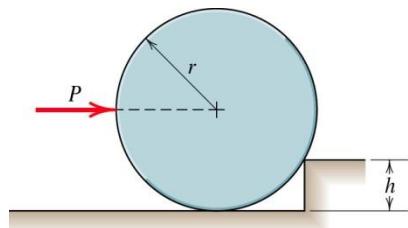
Une charge de masse $m=30$ kg est suspendue par l'intermédiaire d'un petit anneau C (assimilé à un point matériel) à deux câbles parfaitement flexibles AC et BC dont les poids sont négligeables.

Déterminer les tensions dans les deux câbles AC et BC.



Exercice 3

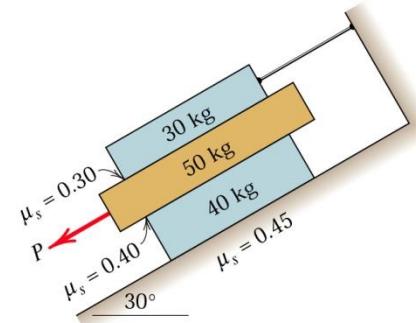
Un cylindre de rayon R et de masse m doit passer par-dessus un obstacle de hauteur h sous l'action d'une force horizontale P appliquée au point D (voir figure ci-contre). Exprimer, en fonction de m , g , R et h , la valeur minimale de P nécessaire pour initier le roulement du cylindre (on négligera les frottements).



Exercice 4

Trois blocs d'épaisseurs négligeables sont positionnés sur un plan incliné comme illustré sur la figure ci-contre.

Une force P parallèle au plan incliné est appliquée au bloc du milieu. Le bloc supérieur est maintenu en équilibre grâce à un câble relié à un support fixe. Les coefficients de frottement statique sont donnés au niveau des trois surfaces de contact (voir figure). Déterminer la valeur limite de la force P au-delà de laquelle l'équilibre du système sera rompu.

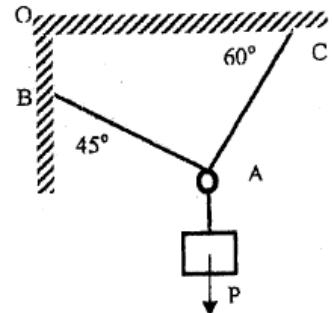


Exercices supplémentaires :

Exercice 5

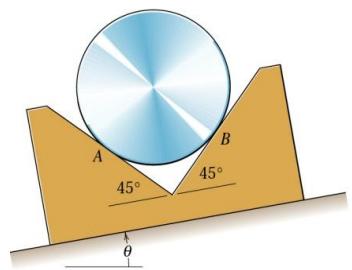
Une charge de poids $P=100\text{N}$ est suspendue par l'intermédiaire d'un petit anneau A (assimilé à un point matériel) à deux câbles parfaitement flexibles AB et AC dont les poids sont négligeables.

Déterminer les intensités des forces exercées par les deux câbles sur l'anneau

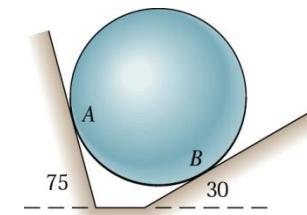


Exercice 6

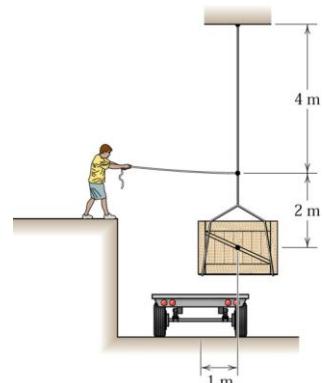
Trouver l'angle d'inclinaison θ de sorte que la réaction en B soit égale à la moitié de celle en A. On négligera les forces de frottement.

**Exercice 7**

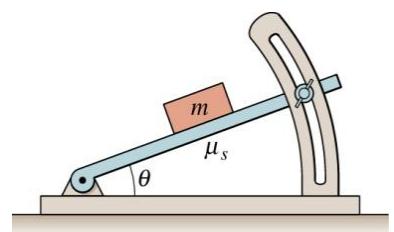
Une sphère homogène parfaitement lisse de masse $m = 20 \text{ kg}$ repose sur deux plans inclinés (voir figure ci-contre). Déterminer les réactions aux points de contact A et B

**Exercice 8**

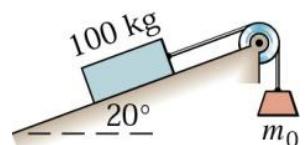
Quelle est la valeur de la force horizontale P qui doit être appliquée sur le câble AB afin de centrer la caisse pesant 50 kg au dessus de la remorque (voir figure ci-contre)

**Exercice 9**

Déterminer l'angle maximal θ_{\max} que peut avoir le plan incliné ajustable avec l'horizontale sans qu'il y ait de glissement du bloc de masse m (voir figure ci-contre). μ_s est le coefficient de frottement statique entre les surfaces du bloc et du plan incliné.

**Exercice 10**

Déterminer les valeurs limites maximale et minimale que peut admettre la masse m_0 de sorte que le bloc de 100 kg, illustré sur la figure ci-contre, demeure toujours en équilibre (aucun glissement, ni vers le haut, ni vers le bas). Le coefficient de frottement statique entre le bloc et le plan incliné est de 0.3



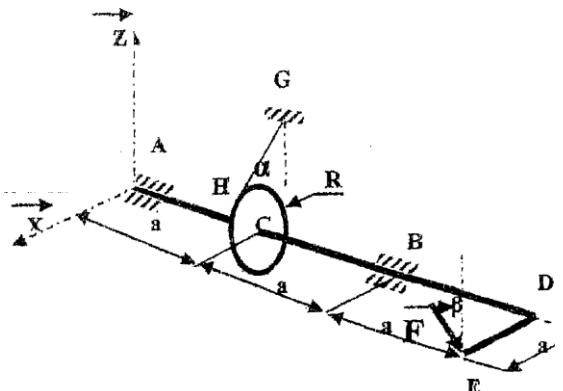
Série d'exercices n° 4 : équilibre du solide dans l'espace (3h00 min)

Exercices à faire en TD :

Exercice 1 :

Soit le système mécanique composé d'une barre coudée ADE de poids négligeable, reposant sur deux appuis cylindriques A et B, et d'un disque de rayon R, de masse négligeable, fixé à la barre en C. Le disque est relié à un câble inextensible qui forme avec la verticale un angle $\alpha = 60^\circ$ suspendu au point G (voir figure ci-contre). La force F appliquée au point E se trouve dans le plan parallèle au plan XAZ et est inclinée par rapport à la verticale d'un angle $\beta = 30^\circ$.

- Écrire les équations scalaires d'équilibre du système.
- En déduire les réactions aux appuis A et B, ainsi que la valeur de la tension du câble HG.

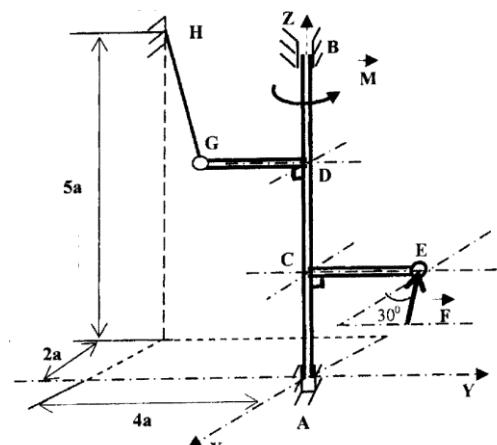


Exercice 2 (examen final – Janvier 2009)

Soit un corps de poids négligeable constitué de deux barres CE et DG soudées sur la barre AB (voir la figure ci-contre). Le corps est situé dans le plan YZ et est maintenu en équilibre en position verticale par l'intermédiaire de l'articulation sphérique en A, l'articulation cylindrique en B et le câble inextensible GH. Ce système est soumis à un moment M autour l'axe Z et une force F appliquée en E. Cette force est contenue dans un plan parallèle au plan XY et faisant un angle de 30° avec l'axe X.

- Déterminer les réactions aux liaisons en A et B ainsi que la tension du câble HG.

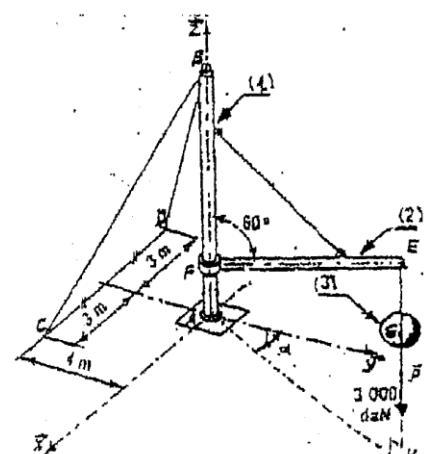
On donne : AC = CD = DB = CE = DG = 2a.



Exercice 3

Un mât de charge, utilisé pour décharger les navires, se compose d'un mât principal vertical AB (1), articulé en A (liaison sphérique) et maintenu en B par deux câbles inextensibles BC et BD (voir figure ci-contre). La charge à lever P = 3000 daN est fixée en E sur un deuxième mât EF (2) articulé en F (liaison cylindrique). Un troisième câble inextensible relie le mât (1) au mât (2). Données : AB = 5 m, AF = 1 m, EF = 5 m, $\alpha = 30^\circ$.

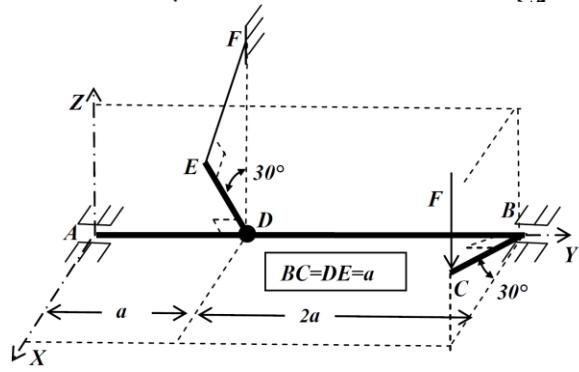
- Exprimer les projections des tensions des câbles BC et BD dans le repère (A, X, Y, Z).
- Calculer les tensions des câbles BC et BD ainsi que la réaction en A.



Exercices supplémentaires :

Exercice 4 (examen final – Janvier 2014)

Soit le système mécanique ci-contre formé d'une barre coudée ABC reposant sur deux articulations cylindriques en A et B, et d'une barre DE soudée au point D à la barre ABC. La force F verticale est appliquée au point C. L'équilibre du système est maintenu par l'intermédiaire d'un fil inextensible EF (voir figure ci-contre).



- Établir les équations scalaires de l'équilibre du système.
 - Déterminer les réactions aux articulations A et B ainsi que la tension du fil EF.
- N.B : Les poids des barres ABC et DE sont négligeables.

Exercice 5 (examen de rattrapage Jan. 2014)

Une barre homogène AB de longueur $4a$, de poids P , est articulée en A par une liaison sphérique. Cette barre supporte un panneau publicitaire de poids P_1 centré au point E. La barre est maintenue en position horizontale par deux câbles BC et BD (voir figure ci-contre).

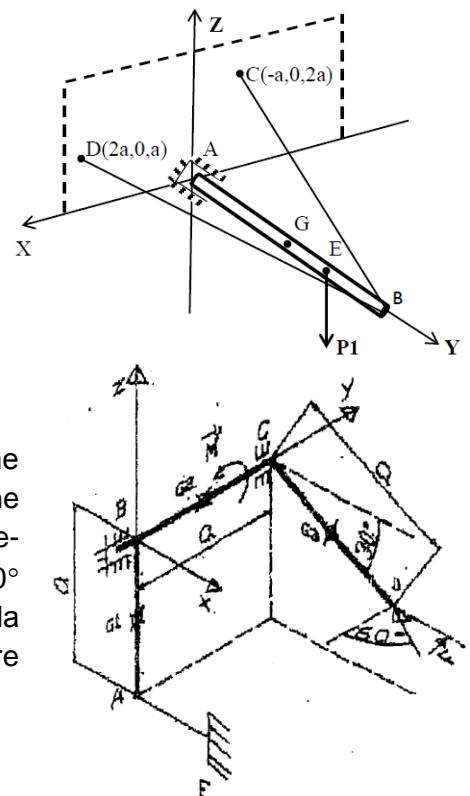
On donne $AE=3a$, les coordonnées des points $C(-a, 0, 2a)$, $D(2a, 0, a)$.

- Déterminer la réaction de la liaison sphérique en A et les tensions des câbles en fonction de P et P_1 .

Exercice 6

Une barre coudée ABCD s'appuie sur une articulation sphérique en B et une articulation cylindrique en C. Chacune des trois parties a un poids P et une longueur a ($AB = BC = CD = a$). La barre est soumise à une force F en D. Celle-ci est contenue dans un plan parallèle au plan XY et faisant un angle de 60° avec l'axe Y. Un moment M est appliqué en C autour de BC. L'équilibre de la barre est maintenu par un câble inextensible AE, parallèle à l'axe X (voir figure ci-contre).

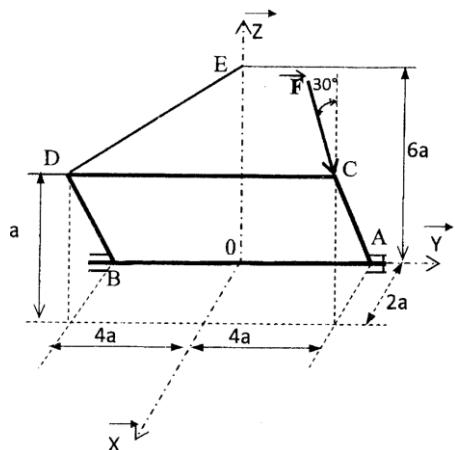
- Établir les équations scalaires de l'équilibre de la barre.
- Trouver les réactions aux appuis B et C ainsi que la tension de AE.



Exercice 7 (examen final –Janvier 2013)

Un cadre rectangulaire ABCD, de poids négligeable, est fixé à un support par l'intermédiaire d'une articulation sphérique en A et d'une articulation cylindrique en B. Le câble DE maintient le cadre en position inclinée par rapport au plan horizontal. Ce cadre est également soumis à une force F appliquée en C, contenue dans un plan parallèle au plan YOZ et faisant un angle de 30° avec l'axe Z. On donne $F = 1000 \text{ N}$ et $a = 1 \text{ m}$.

- Calculer les réactions en A et B ainsi que la tension du câble DE.

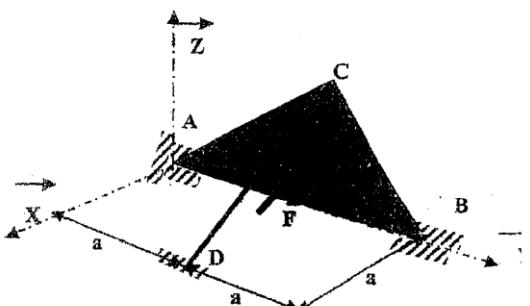


Exercice 8

Soit une plaque triangulaire équilatérale ABC de côté $2a$, de poids P , s'appuie sur une articulation sphérique en A et une articulation cylindrique en B. Une force F perpendiculaire à la plaque est appliquée au point G. La plaque est maintenue en position verticale dans le plan YAZ à l'aide d'un câble inextensible CD (voir figure ci-contre).

- Écrire les équations scalaires de l'équilibre du système.
- En déduire les réactions aux appuis A et B ainsi que la tension du câble CD.

Le point G est le centre d'inertie de la plaque ses coordonnées sont $(0, Y_G, Z_G)$.



Série d'exercices n° 2 : Statique (4h30 min)

Exercices à faire en TD :

Exercice 1 (examen final – Janvier 2017)

Une barre homogène coudée **ABC** repose sans frottement sur un cylindre fixe de poids **P**, de rayon **R** et de centre **E**. La partie **AB** de la barre dont le centre d'inertie est **G₁**, le poids est **P₁** et la longueur **L**, est articulée en **A** et est inclinée d'un angle $\alpha=30^\circ$ par rapport à l'horizontale. La partie **BC**, de centre d'inertie **G₂**, de poids **P₂**, est verticale. Le cylindre est en contact avec la barre coudée **ABC** aux points **G₁** et **C** et avec le sol au point **H** (voir Fig.1).

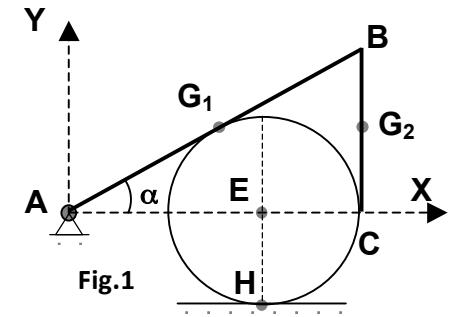
- Déterminer les réactions en **A**, **G₁**, **C** et **H**.

Exercice 2 (examen de rattrapage Fév. 2011)

Soit le mécanisme formé de :

- Une barre **AE** de poids **P₁ = 2P**, articulée en **A**.
- Une barre **BC** de poids **P₂ = P**, encastrée en **B**.
- Une barre **CD** de poids **P₃ = P**, soudée en **C** et en contact sans frottements avec **AE** en **D**.

Une charge **F = P** est appliquée à ce système en **E**. Déterminer, en fonction de **P**, les réactions des liaisons en **A**, **B** et **D**. On donne **AE = 2a**, **BC = CD = a** et $\alpha = 30^\circ$.

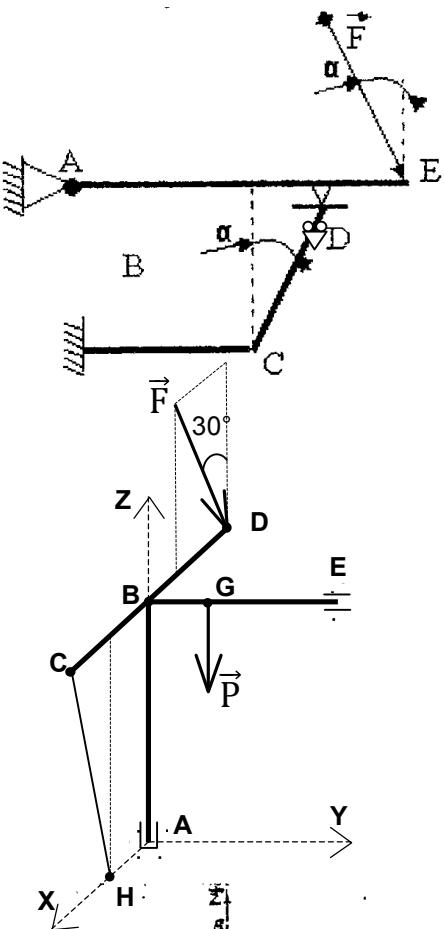


Exercice 3 (examen final – Janvier 2015)

Une structure de poids **P**, de centre d'inertie **G**, est constituée de 3 barres **AB**, **CD** et **BE**, soudées en **B**. Elle est maintenue en équilibre à la position indiquée sur la Fig.2 par une liaison sphérique en **A**, une liaison cylindrique en **B** ainsi qu'un câble fixé à la structure en **C** et au sol au point **H**. Une force **F=2P** contenue dans le plan **XZ**, est appliquée en **D** et fait un angle de 30° avec l'axe **Z**.

On donne **AB = 5m**, **BC = BD = 3m**, **BE = 3m** et **AH = BG = 1m**.

Déterminer les efforts des liaisons en **A** et **E** ainsi que la tension du câble en fonction du poids **P**.

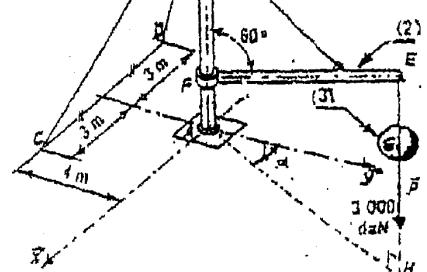


Exercices supplémentaires

Exercice 4

Un mât de charge, utilisé pour décharger les navires, se compose d'un mât principal vertical **AB** (1), articulé en **A** (liaison sphérique) et maintenu en **B** par deux câbles inextensibles **BC** et **BD** (voir figure ci-contre). La charge à lever **P = 3000 daN** est fixée en **E** sur un deuxième mât **EF** (2) articulé en **F** (liaison cylindrique). Un troisième câble inextensible relie le mât (1) au mât (2). Données : **AB = 5 m**, **AF = 1 m**, **EF = 5 m**, $\alpha = 30^\circ$.

- Exprimer les projections des tensions **BC** et **BD** dans le repère (**A,X,Y,Z**).
- Calculer les tensions des câbles **BC** et **BD** ainsi que la réaction en **A**.

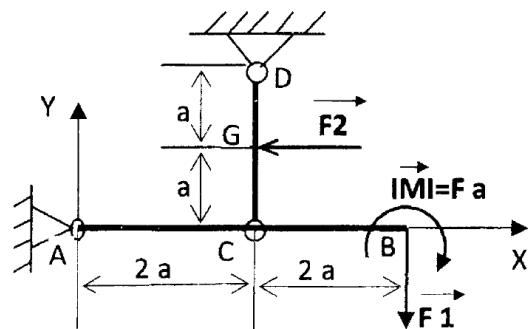


Exercice 5 (examen final – Janvier 2013)

Deux barres AB et CD de poids négligeables, articulées entre elles en C, reposent sur deux appuis doubles en A et D. L'ensemble est sollicité par deux forces F_1 et F_2 , appliquées respectivement en B et G ainsi que par un moment M autour du point B (voir figure ci-contre).

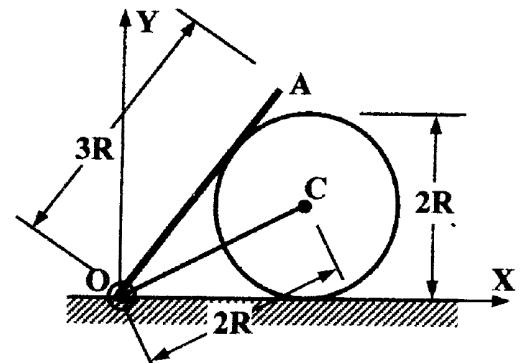
On donne $F_1 = F_2 = 1000 \text{ N}$, $a = 0,2 \text{ m}$ et $M = F \cdot a = 200 \text{ Nm}$.

- Calculer les réactions aux articulations A, C et D.

**Exercice 6 (examen final – Janvier 2012)**

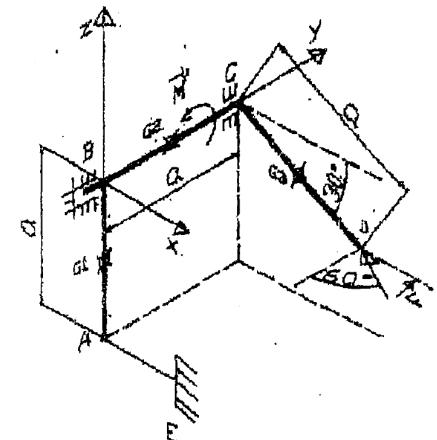
Une barre homogène OA, de poids $P = 100 \text{ N}$ et de longueur $3R$, est articulée en O. Elle s'appuie sur un cylindre lisse de rayon $R = 20 \text{ cm}$ et de poids $Q = 200 \text{ N}$. Ce dernier, s'appuie sur un plan horizontal lisse. Le cylindre est maintenu en équilibre grâce à un fil inextensible OC de longueur $2R$ (voir figure ci-contre).

- Déterminer la tension du fil ainsi que la réaction de la liaison en O.

**Exercice 7**

Une barre coudée ABCD s'appuie sur une articulation sphérique en B et une articulation cylindrique en C. Chacune des trois parties a un poids P et une longueur a ($AB = BC = CD = a$). La barre est soumise à une force F en D. Celle-ci est contenue dans un plan parallèle au plan XY et faisant un angle de 60° avec l'axe Y. Un moment M est appliqué en C autour de BC. L'équilibre de la barre est maintenu par un câble inextensible AE, parallèle à l'axe X (voir figure ci-contre).

- Établir les équations scalaires de l'équilibre de la barre.
- Trouver les réactions aux appuis B et C ainsi que la tension de AE.

**Exercice 8 (examen final – Janvier 2009)**

Soit un corps constitué de deux barres CE et DG de poids P , soudées à la barre AB de poids $2P$ (voir la figure ci-contre). Le corps est situé dans le plan YZ et est maintenu en équilibre en position verticale par l'intermédiaire de l'articulation sphérique en A, l'articulation cylindrique en B et le câble inextensible GH. Ce système est soumis à un moment $M=aP$ autour l'axe Z et une force $F=P$ appliquée en E. Cette force est contenue dans un plan parallèle au plan XY et faisant un angle de 30° avec l'axe X.

- Déterminer, en fonction de P , M et a , les réactions aux liaisons en A et B ainsi que la tension du câble HG.

On donne : $AC = CD = DB = CE = DG = 2a$.

