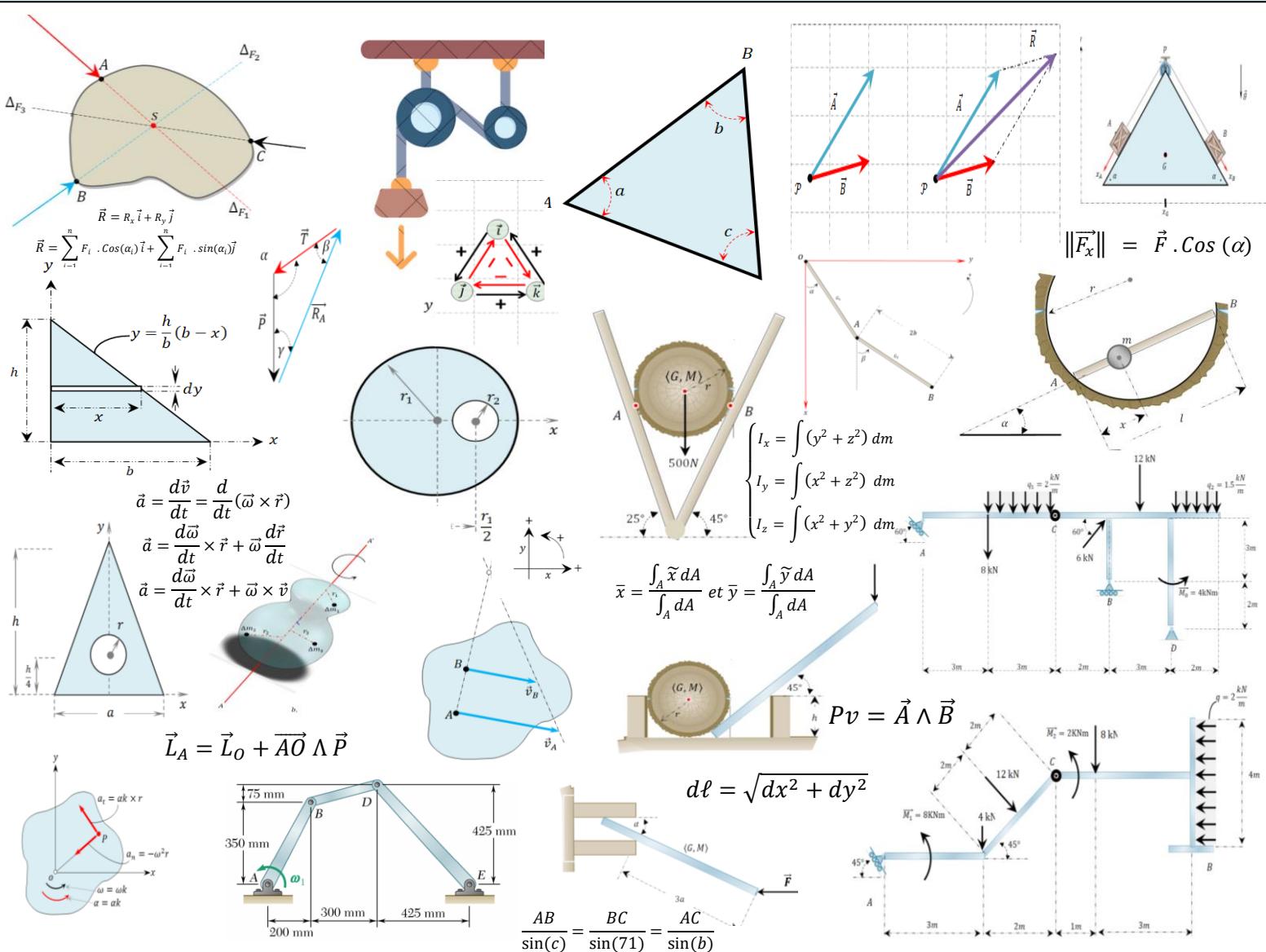


Mécanique Rationnelle

Cours et Exercices



Dr. KEZZAR Mohamed
Année universitaire
2023 / 2024

Mécanique

*Rationnelle
Cours et Exercices*

Avant Propos

Il s'adresse aux étudiants de 2^{ème} années science et technique (LMD) ainsi que aux étudiants de science de l'ingénieur.

Ce document, constitue des cours et de travaux dirigés de module mécanique rationnelle, et d'une façon particulière nous nous intéressons à les chapitres de base à savoir :

- ☞ Eléments de Calcul Vectoriel.
- ☞ Généralités et Définitions de base
- ☞ La Statique .
- ☞ La Cinématique du Solide Rigide
- ☞ Géométrie de Masse
- ☞ Dynamique du Solide Rigide

Tableau de Matière

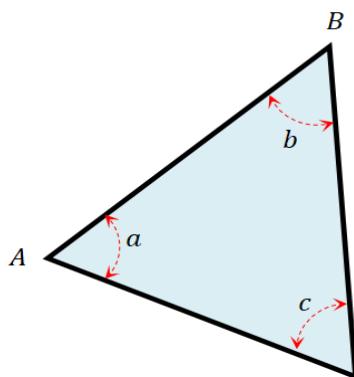
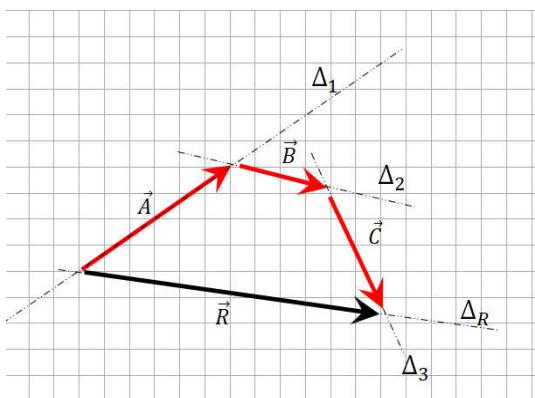
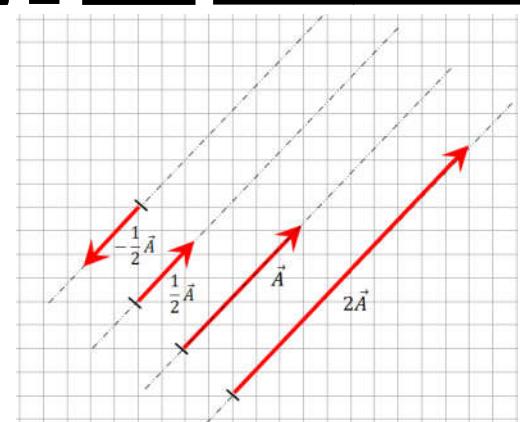
Chapitre 1 : Eléments de Calcul Vectoriel	3
1.1. Vecteur	4
1.2. Types de vecteurs	4
1.3. Vecteur unitaire	5
1.4. Quelque Opérations sur les vecteurs	5
1.4.1. Multiplication par un scalaire	5
14.2. Addition et Soustraction des Vecteurs	6
1.5 Coordonnées cartésiennes d'un vecteur :	7
1.5 .1. Coordonnées dans le plan 2D	7
1.5 .2. Coordonnées dans le plan 3D	7
1.6. Le produit scalaire de deux vecteurs	8
1.7 Le produit vectoriel de deux vecteurs	9
1.8. Le produit vectoriel des vecteurs de base	10
1.9. Le produit mixte	14
1.10. Le Double Produit Vectoriel	14
1.11. Cosinus directeurs d'un vecteur	14
1.12. Le Moment d'un vecteur	16
1.13. Règle des sinus ET cosinus dans un triangle	16
1.13.1. Loi de cosinus	16
1.13.2. Loi de sinus	16
Série de TD n°1 Eléments de Calcul Vectoriel	19
Chapitre 2 : Généralités et Définitions de base	22
2.1. Force	23
2.2. Opération sur la force	23
2.2.1. Projection/ Décomposition en 2D	23
2.2.2. Projection/ Décomposition en 3D	25
2.3. Notion de Résultante	27
2.3.1. La méthode graphique	27
2.3.2. La méthode analytique	28
2.4. Notion de Moment	30
2.4.1. Conventions de signe	31
2.4.2. Le Moment en 3D	32
2.4.3. Le Moment résultant d'un système de forces	33
2.5. Classification des forces	35
2.6. Types de forces	36
2.7. Modèle Mécanique	39
Série de TD n°2 Généralités et Définitions de base	40
Chapitre 3 : La Statique	46
3.1. Principe Actions-Réaction	47
3.2. Principe de transmissibilité des forces en statique	47
3.3. Isolement d'un solide	48
3.4. Les actions mécaniques	48
3.4.1. Actions mécaniques à distance	49
3.4.2. Actions mécaniques de contact	49
3.4.3. Actions de contact exercées dans les liaisons mécaniques	50
3.4.3. A L'appui Simple Ou Appui Glissant	50

3.4.3. B L'articulation Ou Appui Fixe	50
3.4.3. C L'encastrement	51
3.5. Méthode de résolution des problèmes de la statique	52
3.5.1. La Méthode Géométrique	52
3.5.2. La Méthode Analytique	56
Série de TD n° 3 ^A La Statique	61
Série de TD n° 3 ^B La Statique	65
Chapitre 4 : Cinématique du Solide Rigide	71
4.1. Rappels succinct sur les quantités cinématiques pour un point matériel	72
4.1.1. Position	72
4.1.2. Déplacement	72
4.1.3. Vitesse	73
4.1.4. Accélération	74
4.2. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe	80
4.2.1. Position	80
4.2.2 Déplacement	80
4.2.4 Accélération	81
4.3. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe présentation en 2D	81
4.4. Mouvement plan	85
4.4.1. Vitesse absolue et relative dans le mouvement plan	86
4.4.2. Centre de rotation instantané dans un mouvement plan	87
4.4.3. Accélération absolue et relative dans le mouvement plan	88
4.5. Mouvement composite	91
Série de TD n° 4 Cinématique du Solide Rigide	93
Chapitre 5 : Géométrie de Masse	98
5.1. Centre des Forces	99
5.2. Centre de gravité au Centre d'inertie	101
5.2.1. Cas d'une ligne	101
5.2.2. Cas d'une surface	103
5.2.2.1. Cas d'un système simple	103
5.2.2.2. Cas d'un système complexe	104
5.3. Centre de Masse d'un Corps	104
5.4. Théorème de Guldin	105
5.4.1. Premier théorème de Guldin	105
5.4.2 Deuxième théorème de Guldin	105
5.6 Opérateur d'inertie	106
5.6.1. Moment d'inertie d'un solide	106
5.6.2. Théorème des axes parallèles.	108
5.6.3 Produits d'inertie d'un CORPS solide	108
5.7 Théorème de HUYGENS	108
Série de TD n° 5 Géométrie de Masse	109
Chapitre 6 : Dynamique du solide rigide	115
6.1. Rappels sur les quantités dynamiques pour un point matériel	116
6.2. Centre d'inertie d'un système matériel	116
6.3. Référentiel barycentrique	117
6.4. La quantité de mouvement	118
6.5. Le moment cinétique	118

6.5.1. Moment cinétique par rapport à un axe	119
6.5.2. Torseur cinétique	119
6.5.3. Energie cinétique	120
6.6. Mouvement d'un solide	120
6.7. Le poids d'un système	120
6.8. Théorème du moment cinétique	122
6.8.1. Le théorème du moment cinétique en un point fixe	122
6.8.2. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe	122
6.8.3. Théorème du moment cinétique au point G	122
6.8.4. Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique	123
6.9. Théorème de l'énergie cinétique	124
Série de TD n° 6 Dynamique du Solide Rigide	125

Chapitre 1 :

Eléments de Calcul Vectoriel



Une grandeur physique en mécanique d'ingénierie peut être définie ou bien mesurée comme un scalaire ou un vecteur. Dans cette section on s'intéresse aux vecteurs et à leurs propriétés

1.1 Vecteur :

Un vecteur sera caractérisé par :

- ☞ La direction ou support (Δ),
- ☞ Le sens.
- ☞ Intensité (module)

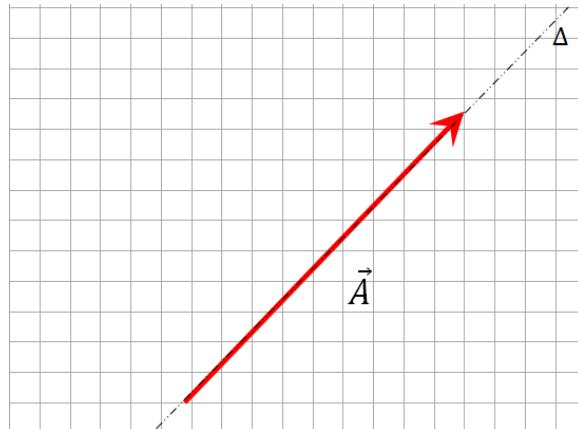


Figure 1.1 : Vecteur

Remarque : Les paramètres (sens et module) sont des mesures algébriques

Le module d'un Vecteur est noté $|\vec{A}|$ ou $\|\vec{A}\|$.

Exemple :

Vitesse $|\vec{v}|$, Force $|\vec{F}|$, déplacement,.....etc.

1.2 Types de vecteurs

Il existe plusieurs types de vecteurs :

☞ Vecteur libre	☞ Vecteur glissant	☞ Vecteur lié
A diagram showing a red vector arrow labeled \vec{A} on a grid. The vector starts at one point and ends at another. A dashed line labeled Δ represents its direction. There are several other points marked on the grid.	A diagram showing a red vector arrow labeled \vec{A} on a grid. The vector starts at one point and ends at another. A dashed line labeled Δ represents its direction. The starting point is labeled "Point d'application".	A diagram showing a red vector arrow labeled \vec{A} on a grid. The vector starts at a specific point marked with a dot. A dashed line labeled Δ represents its direction. The starting point is labeled "Point d'application".
Le point d'application n'est pas connu.	Le point d'application n'est pas fixé.	Le point d'application est donné ou bien connu.

1.3 Vecteur unitaire

Le Vecteur unitaire est un vecteur ou le module est égal à 1, et défini par :

$$\vec{u} = \frac{\vec{R}}{R}$$

Exemple :

Soit le Vecteur suivant : $\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$

le module du Vecteur est $r = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$

donc Vecteur unitaire est :

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\vec{j} - \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}$$

ou le module \vec{u}_r est égal à 1

$$u_r = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{29}}\right)^2} = 1$$

1.4 Quelque Opérations sur les vecteurs :

1.4.1 Multiplication par un scalaire.

Les sommes de deux vecteurs ($\vec{A} + \vec{A}$) et de trois vecteurs ($\vec{B} + \vec{B} + \vec{B}$) s'écrivent simplement sous la forme $2\vec{A}$ et $3\vec{B}$, d'autre part le produit des scalaires 0,5 et -0,5 par les vecteurs \vec{A} et \vec{B} . De la même façon, on peut écrire $\frac{1}{2}\vec{A}$ et $-\frac{1}{2}\vec{A}$. (voir la figure)

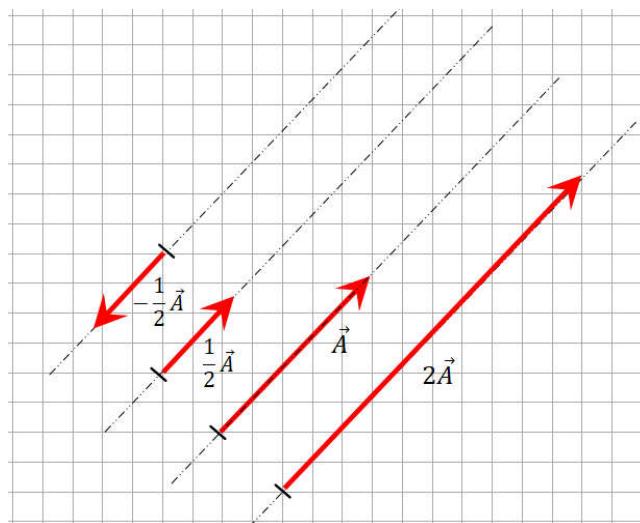


Figure 1.2 : Multiplication par un scalaire

14.2 Addition et Soustraction des Vecteurs

Soient deux vecteurs arbitraires \vec{A} et \vec{B} :

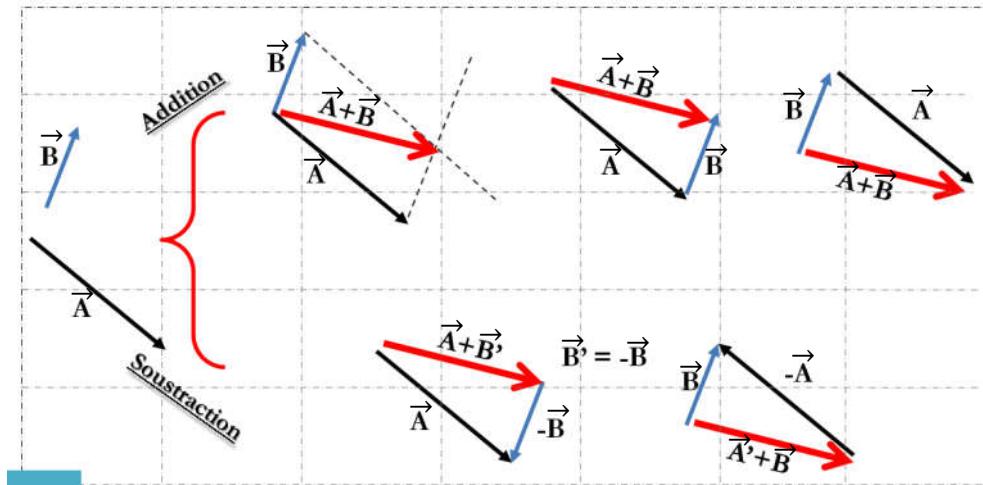


Figure 1.3 : Addition et Soustraction des Vecteurs

Cas de vecteurs parallèles (Colinéaires)

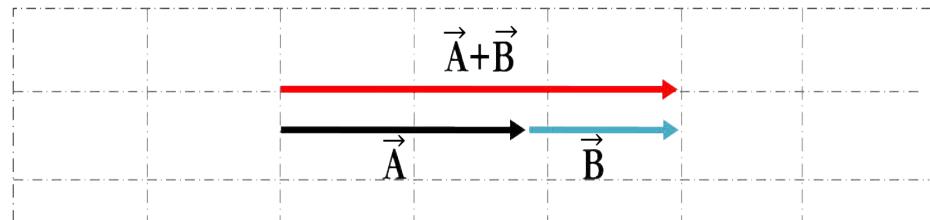


Figure 1.4 : Addition des Vecteurs parallèles

Remarque :



Dans le cas ou La somme de n Vecteurs :

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots \dots \dots + \vec{T}$$

Pour aller plus loin

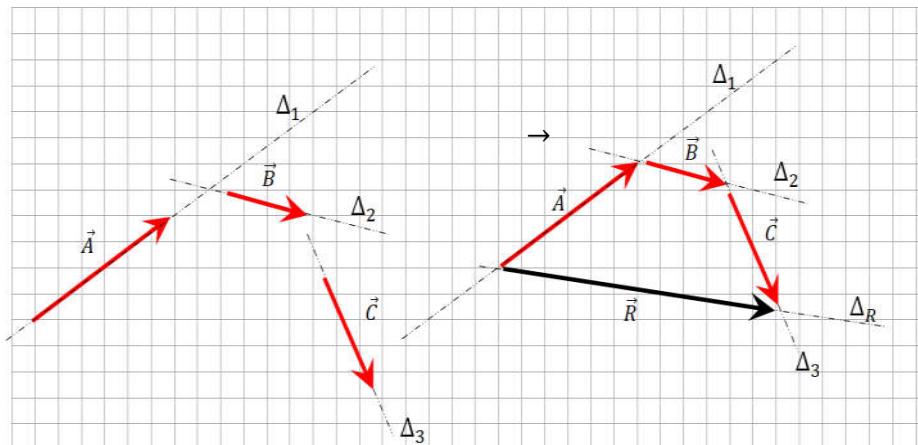


Figure 1.5 : La somme de n Vecteurs

Où les Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 sont les supports de trois vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} respectivement.

1.5 Coordonnées cartésiennes d'un vecteur :

1.5 .1 Coordonnées dans le plan 2D

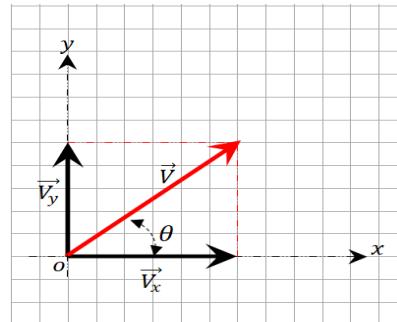
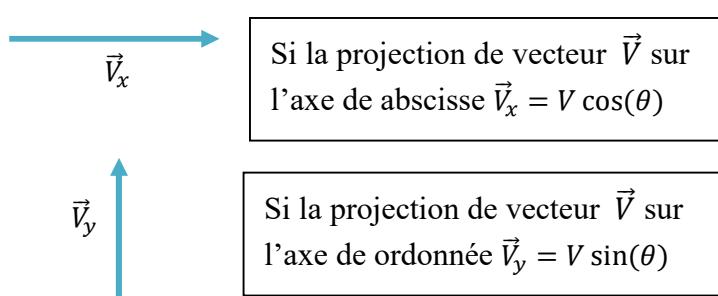


Figure 1.6 : La projection en 2D

Finalement le vecteur \vec{V} est écrit comme suit:

$$\vec{V} = V \cos(\theta) \vec{i} + V \sin(\theta) \vec{j}$$

Ou les V_x et V_y sont les composantes du vecteur V , et l'intensité de ce vecteur est :

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

1.5 .2 Coordonnées dans le plan 3D

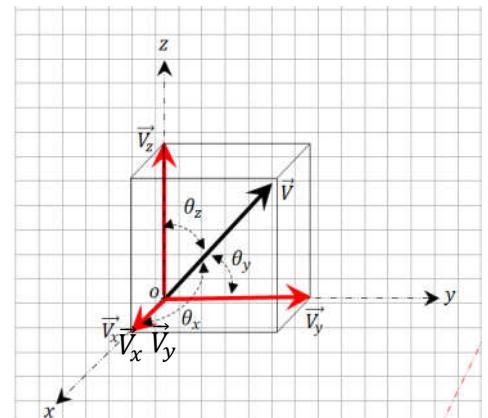
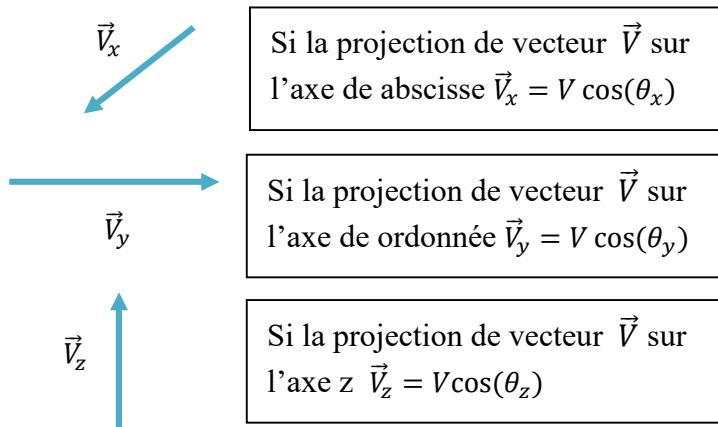


Figure 1.7 : La projection en 3D

Finalement le vecteur \vec{V} est écrit comme suit:

$$\vec{V} = V \cos(\theta_x) \vec{i} + V \cos(\theta_y) \vec{j} + V \cos(\theta_z) \vec{k}$$

Ou les V_x , V_y et V_z sont les composantes du vecteur V , et l'intensité de ce vecteur est :

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Les angles θ_x , θ_y et θ_z compris entre le vecteur \vec{V} et les axes Ox , Oy et Oz respectivement.

1.6 Le produit scalaire de deux vecteurs :

Soient deux vecteurs arbitraires \vec{A} et \vec{B} qui sont défini par : $\begin{cases} \vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \\ \vec{B} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} \end{cases}$

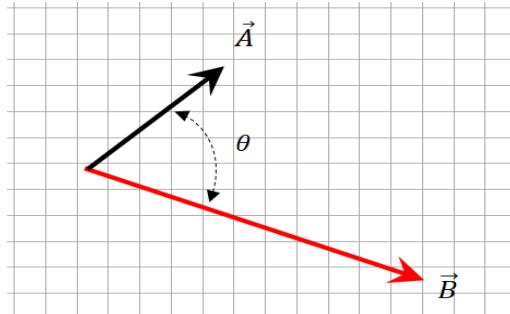


Figure 1.8 : Le produit scalaire

Le produit scalaire du vecteur \vec{A} par le vecteur \vec{B} , noté $Ps = \vec{A} \cdot \vec{B}$, s'écrit, soit **algébriquement**, soit **analytiquement**.

☞ Expression algébrique

$$Ps = \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\widehat{\vec{A}\vec{B}})$$

$$Ps = \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta)$$

☞ Expression analytique

$$\begin{aligned} Ps &= \vec{A} \cdot \vec{B} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}) \\ &= a_1 b_1 \left(\underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_1 \right) + a_1 b_2 \left(\underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_0 \right) + a_2 b_1 \left(\underbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}_0 \right) + a_2 b_2 \left(\underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_1 \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Ps &= \vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 \rightarrow 2D \\ Ps &= \vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + a_3 \times b_3 \rightarrow 3D \end{aligned}$$

Remarque : Le résultat d'un produit scalaire est un scalaire

Exemple 1.6.1: Calculer le produit scalaire de deux vecteurs suivants : $\begin{cases} \vec{A} = 2 \vec{i} - \vec{j} + 5 \vec{k} \\ \vec{B} = -5 \vec{i} + 4 \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$

Le produit scalaire selon l'expression analytique est $Ps = \vec{A} \cdot \vec{B} = -9$

Exemple 1.6.2:

☞ Déterminer l'angle entre les deux vecteurs θ ?

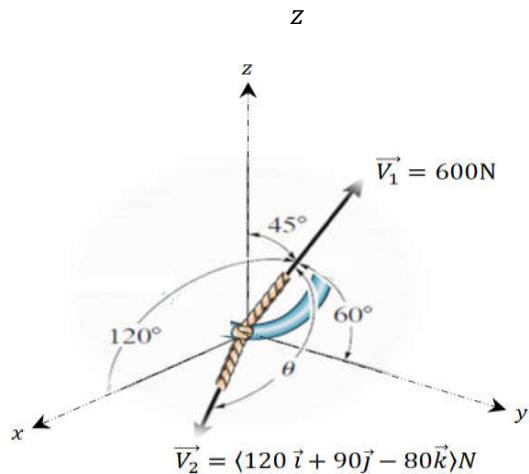


Figure 1.9 : Le produit scalaire

1. Le produit scalaire $\cos(\theta) = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|} \rightarrow$ Expression algébrique

2. $P_s = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_{1x} \times V_{2x} + V_{1y} \times V_{2y} + V_{3z} \times V_{3z} \rightarrow$ Expression analytique

3. La Décomposition en 3D de vecteur V_1

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= V_1 \cos(\theta_x) \vec{i} + V_1 \cos(\theta_y) \vec{j} + V_1 \cos(\theta_z) \vec{k} \\ \vec{V}_1 &= 600 \cos(120) \vec{i} + 600 \cos(60) \vec{j} + 600 \cos(45) \vec{k}\end{aligned}$$

D'autre part le module de vecteur V_2 est $|\vec{V}_2| = \sqrt{120^2 + 90^2 + (-80)^2} \quad \vec{V}_y$

Alors le produit scalaire est :

$$P_s = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 600 \cos(120) 120 + 600 \cos(60) 90 + 600 \cos(45) (-80) =$$

Donc l'angle entre \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est $\cos(\theta) = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|}$

1.7 Le produit vectoriel de deux vecteurs :

Le produit vectoriel du vecteur \vec{A} par le vecteur \vec{B} , noté $Pv = \vec{A} \wedge \vec{B}$, est un vecteur \vec{C} perpendiculaire au plan, $\langle \vec{A} \square \vec{B} \rangle$, il s'écrit :

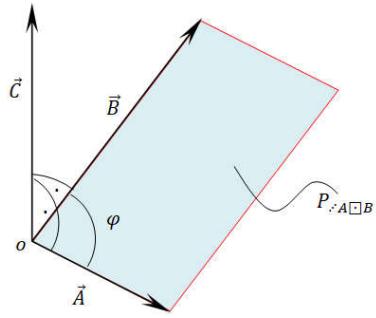


Figure 1.10 : Le produit vectoriel

Le produit vectoriel s'définie, soit algébriquement, soit analytiquement.

☞ Expression algébrique

$$Pv = \vec{A} \wedge \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\widehat{\vec{A}\vec{B}}) \vec{u}_c$$

$$Pv = \vec{A} \wedge \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\varphi) \vec{u}_c$$

☞ Expression analytique

Soient deux vecteurs arbitraires \vec{A} et \vec{B} qui sont défini par : $\begin{cases} \vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{B} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{cases}$

Alors le produit vectoriel définie par : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_y \\ + \\ - \end{array}$$

$$\vec{C} = (a_y b_z - b_y a_z) \vec{i} \quad -(a_x b_z - b_x a_z) \vec{j} \quad (a_x b_y - b_x a_y) \vec{k}$$

1.8 Le produit vectoriel des vecteurs de base :

Les deux vecteurs \vec{i} et \vec{j} ont une intensité égal à 1 et comme ils sont perpendiculaires l'un à l'autre, leur produit vectoriel sera également un vecteur unitaire \vec{k} . Alors le produit vectoriel est égal à zéro, puisque les deux vecteurs ont la même direction (c.à.d. $\vec{i} \wedge \vec{i} = 0$). Par exemple :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{i} \wedge \vec{i} = 0} \quad \vec{j} \wedge \vec{i} &= -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} \quad \underline{\vec{j} \wedge \vec{j} = 0} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} &= -\vec{j} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \underline{\vec{k} \wedge \vec{k} = 0} \end{aligned}$$

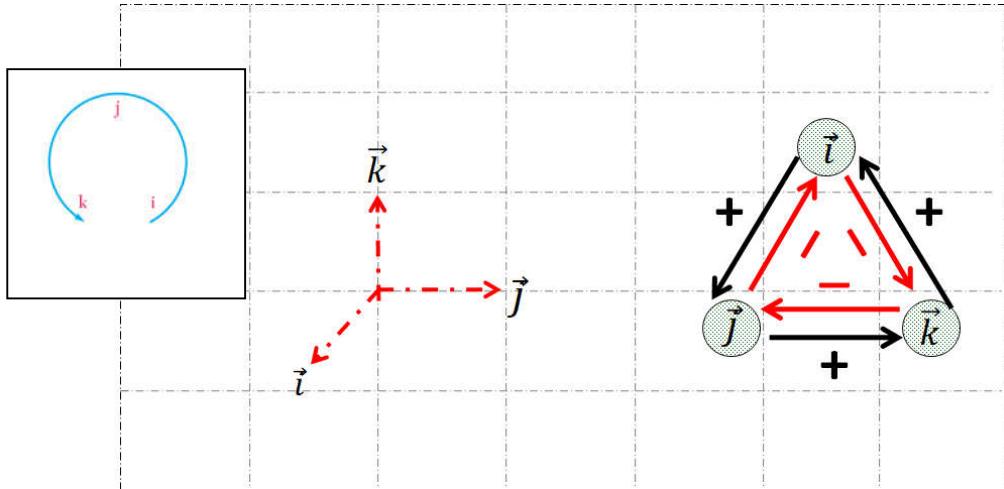


Figure 1.11 : Le produit vectoriel des vecteurs de base

En terme de **composantes** le produit vectoriel de deux vecteurs arbitraires \vec{A} et \vec{B}

$$Pv = \vec{A} \wedge \vec{B} = \langle a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \rangle \times \langle b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \rangle$$

$$\begin{aligned} & a_x b_x \vec{i} \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \vec{k} \\ & \underline{a_y b_x \vec{j} \vec{i}} + a_y b_y \vec{j} \vec{j} + \underline{a_y b_z \vec{j} \vec{k}} \\ & \underline{\underline{a_z b_x \vec{k} \vec{i}}} + a_z b_y \vec{k} \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \vec{k} \end{aligned}$$

Après simplification on a :

$$\vec{C} = (a_y b_z - b_y a_z) \vec{i} - (a_x b_z - b_x a_z) \vec{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \vec{k}$$

Exemple 1.8.1:

Soient les deux vecteurs représentés dans la figure Ci dessous:

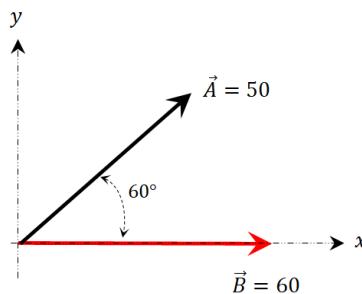


Figure 1.12 : Exemple 1.8.1

☞ Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

On a la **décomposition en 2D** de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B}

$$\begin{cases} \vec{A} = 60\vec{i} + 0\vec{j} \\ \vec{B} = 50 \cos(60)\vec{i} + 50 \sin(60)\vec{j} \end{cases}$$

Alors le produit vectoriel définie par : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 60 & 0 & 0 \\ 50 \frac{1}{2} & 50 \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} = (1500\sqrt{3})\vec{k}$

Ou bien $\vec{A} \wedge \vec{B} = 50 \cdot 60 \cdot \sin(60) \vec{u}_k = (1500\sqrt{3})\vec{k}$

Exemple 1.8.2:

Soient les deux vecteurs :

$$\begin{cases} \vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{B} = 5\vec{i} + 5\vec{j} \end{cases}$$

☞ Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

☞ Calculer l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} .

☞ Vérifier que $\vec{C} \perp (\vec{A} \text{ ou } \vec{B})$ avec $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

Alors le produit vectoriel définie par : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Donc le produit vectoriel $\vec{C} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$

☞ Calculer l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} .

L'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} est l'intensité du produit vectoriel \vec{C} .

Donc $S = |\vec{C}| = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2 + (5)^2} = 8.6$

☞ Vérifier que $\vec{C} \perp (\vec{A} \text{ ou } \vec{B})$ avec $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaire est toujours nul.

Donc Le produit scalaire de $\vec{A} \cdot \vec{C} = (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k})$

Le produit scalaire de $\vec{A} \cdot \vec{C} = 0$

Par analogie on peut constater que $\langle \vec{C} \perp \vec{A} \rangle$, $\langle \vec{C} \perp \vec{B} \rangle$ et $\langle \vec{C} \perp \text{Plan}(\vec{A} \square \vec{B}) \rangle$

Exemple 1.8.3:

Soient les trois vecteurs:

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{k} \\ \vec{V}_2 = 2\vec{j} + 5\vec{j} \\ \vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$

- ☞ Calculer les produits vectoriels $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$, Conclure.
- ☞ Calculer la norme de $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, Que représente ce résultat. En déduire l'aire de triangle formé par les vecteurs $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.

Le produit vectoriel défini par : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Donc le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 4\vec{i} - 15\vec{j} + 6\vec{k}$

Le produit vectoriel défini par : $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Donc le produit vectoriel $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 = -4\vec{i} + 15\vec{j} - 6\vec{k}$

Conclure. $\rightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \neq \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

Quelques propriétés des produits scalaire et vectoriel sont :

Le produit scalaire	Le produit vectoriel
$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$	$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$	$\vec{A} \wedge \vec{A} = 0$

1.9 Le produit mixte :

Soient trois vecteurs arbitraires \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} . Le produit mixte de ces vecteurs est un scalaire défini par : $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$.

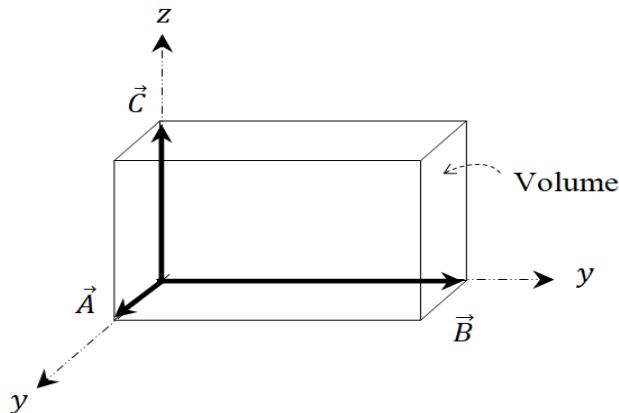


Figure 1.13 : Le produit mixte

On peut démontrer facilement dans le TD 01 que :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}).$$

1.10 Le Double Produit Vectoriel :

Le double produit vectoriel, parfois appelé triple produit vectoriel, est une opération vectorielle qui combine deux produits vectoriels. Si vous avez trois vecteurs \vec{A} , \vec{B} , et \vec{C} , le double produit vectoriel est défini comme suit :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

1.11 Cosinus directeurs d'un vecteur :

Soit un vecteur \vec{R} dans un système d'axes de référence (O, x, y, z), sont telles que :

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

Les angles θ_x , θ_y et θ_z compris entre le vecteur \vec{R} et les axes Oy et Oz sont les angles directeurs respectivement.

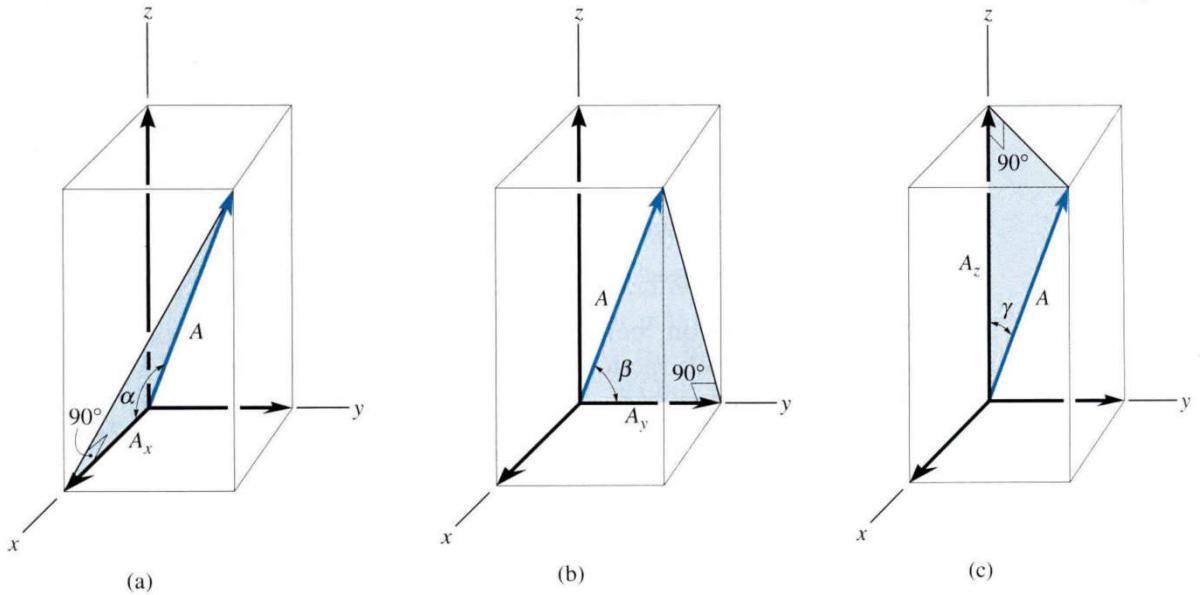


Figure 1.14 : **Cosinus directeurs d'un vecteur**

La relation entre les **Cosinus directeurs d'un vecteur est :**

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



Comment calculer les angles α , β et γ ?

☞ Démonstration :

Le produit scalaire $\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{i}}{|\vec{A}| |\vec{i}|} \rightarrow$ Expression algébrique

2. $\mathbf{Ps} = \vec{A} \cdot \vec{i} = a_x \times 1 + a_y \times 0 + a_z \times 0 \rightarrow$ Expression analytique

Avec $\vec{i} = \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

D'autre part le module de vecteur A est $|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Alors le produit scalaire est :

$$\mathbf{Ps} = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = a_x$$

Donc l'angle entre \vec{A} et \vec{i} est $\cos(\alpha) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

Par analogie on peut déterminer les angles β et γ par les formules suivantes :

$$\cos(\beta) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

1.12 Le Moment d'un vecteur

Le moment d'un vecteur lié (SA) par rapport à un point O est exprimé par :

$$M_{/o} = \overrightarrow{oS} \wedge \vec{A}$$

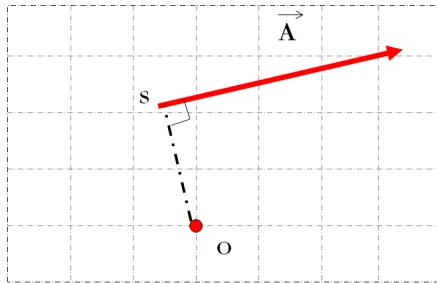


Figure 1.15 : Le Moment d'un vecteur

1.13 Règle des sinus ET cosinus dans un triangle

Soit un triangle quelconque $\triangle ABC$, nous pouvons établir une relation entre les trois côtés et les trois angles du triangle.

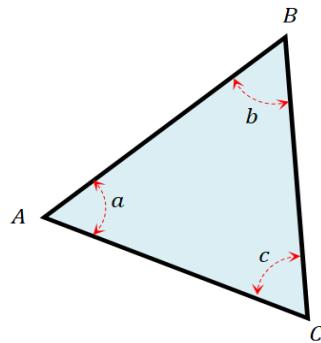


Figure 1.16 : Un triangle

1.13.1 Loi de cosinus

$$\begin{cases} AB^2 = AC + BC - 2AC \cdot BC \cdot \cos(c) \\ AC^2 = AB + BC - 2AB \cdot BC \cdot \cos(b) \\ BC^2 = AB + AC - 2AB \cdot AC \cdot \cos(a) \end{cases}$$

1.13.2 Loi de sinus

$$\frac{AB}{\sin(c)} = \frac{BC}{\sin(a)} = \frac{AC}{\sin(b)}$$

Exemple 1.13.1:

- ☞ Déterminer la mesure du segment AB dans le triangle ci-dessous.

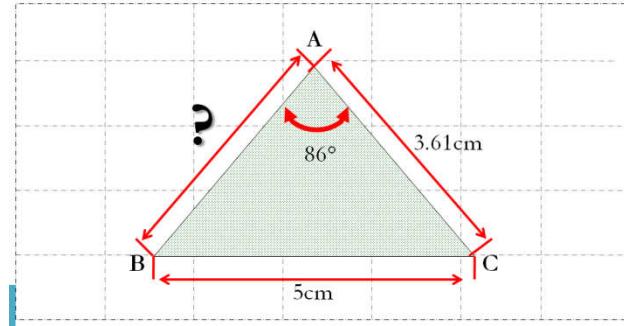


Figure 1.17 : Un triangle

Par l'application de **Loi de sinus** :

$$\frac{AB}{\sin(c)} = \frac{BC}{\sin(86)} = \frac{AC}{\sin(b)}$$

Donc

$$\sin(b) = \frac{3.61}{5} \sin(86) \rightarrow \hat{b} = \arcsin\left(\frac{3.61}{5} \sin(86)\right)$$

D'autre part $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180 \rightarrow \hat{c} = 180 - \left(\hat{a} + \hat{b}\right)$

$$AB = \frac{\sin(c)}{\sin(86)} (BC = 5)$$

Exemple 1.13.2:

☞ Déterminer la surface du triangle ABC est illustré dans la figure 1.12 ci-dessous.

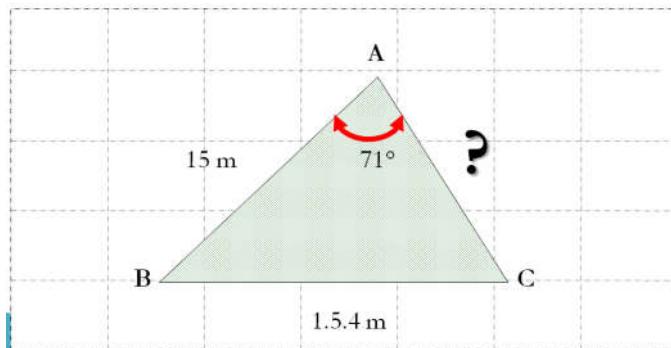


Figure 1.18 : Un triangle

Par l'application de **Loi de cosinus** :

$$\overbrace{BC}^{\text{?}}{}^2 = \overbrace{AB}^{15} \cdot \overbrace{AC}^{\text{?}}{}^2 + \overbrace{AB}^{15} \cdot \overbrace{AC}^{\text{?}}{}^2 \cdot \cos(\alpha)_{71}$$

$$AC = \sqrt{\frac{BC^2 - AB^2}{1 - 2 \cdot \overbrace{AB}^{15} \cdot \cos(\alpha)_{71}}} = 10.88 \text{ m}$$

Par l'application de **Loi de sinus** :

$$\frac{AB}{\sin(c)} = \frac{BC}{\sin(71)} = \frac{AC}{\sin(b)}$$

Donc

$$\sin(c) = \frac{AB}{BC} \sin(71) \rightarrow \hat{c} = \arcsin\left(\frac{15}{15.4} \sin(71)\right) = 67.07^\circ$$

D'autre part $\overset{71}{\hat{a}} + \hat{b} + \hat{c} = 180 \rightarrow \hat{b} = 180 - \left(\overset{71}{\hat{a}} + \hat{c}\right) = 41.93^\circ$

La surface du triangle ABC

$$S = \frac{1}{2} BC AC \sin(c) = 77.18 \text{ m}^2$$



Série de TD n°1
Éléments de
Calcul
Vectoriel

Question 1.1

- ☺ Le produit scalaire est nul, si :
 - Les deux vecteurs sont orthogonaux^[1] ;
 - Les deux vecteurs sont dans le même plan ;
- ☺ Le produit vectoriel est nul si :
 - Les deux vecteurs sont orthogonaux ;
 - Les deux vecteurs sont colinéaires ;
- ☺ Le produit mixte est nul, si
 - Les deux vecteurs sont colinéaires ;
 - Les deux vecteurs sont dans le même plan ;

[1] signifie qu'ils ont des directions perpendiculaires.

Exercice 1.1

On considère deux vecteurs : $\begin{cases} \vec{V}_1 = -6\vec{i} + 8\vec{j} - 10\vec{k} \\ \vec{V}_2 = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k} \end{cases}$

1. Calculer :

- ☞ leurs longueurs
- ☞ leur produit scalaire
- ☞ le produit Vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

2. Montrer que :

- a.) $\vec{V}_1(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_3(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$
- b.) $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) + \vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) + \vec{V}_2 \wedge (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = \vec{0}$
- c.) $\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\|$ Si $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$

Exercice 1.2

On considère deux vecteurs: $\begin{cases} \vec{V}_1 = m\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{V}_2 = m\vec{i} - m\vec{j} - \vec{k} \end{cases}$

1. Déterminer m pour que \vec{V}_1 soit perpendiculaire à \vec{V}_2
2. Déterminer m pour que $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ soit parallèle au vecteur \vec{V}_3 de composantes $(-1, -1, 0)$.
3. Déterminer le volume construit par les trois vecteurs \vec{V}_1, \vec{V}_2 et \vec{V}_3 respectivement. $\vec{V}_1 = +\vec{j} + m\vec{k}, \vec{V}_2 = \vec{i} + n\vec{k}$ et $\vec{V}_3 = \vec{i} + n\vec{j}$

Exercice 1.3

Par rapport à un repère $R(0, x, y, z)$ On considère deux vecteurs : $\begin{cases} \vec{V}_1 \langle 0, 3, 1 \rangle \\ \vec{V}_2 \langle 0, 1, 2 \rangle \end{cases}$

1. Calculer $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et déduire l'angle $\phi = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.
2. Déterminer les cosinus directeurs de \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .
3. Calculer les composantes de $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.
4. Montrer que : $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta = 1$ (α, β et δ sont les angles directeurs du vecteur \vec{V}_1)

Exercice 1.4

1. Soit un triangle ABC et M le milieu de BC. Montrer que

- ☞ $\frac{AB}{\sin(\theta_3)} = \frac{BC}{\sin(\theta_1)} = \frac{AC}{\sin(\theta_2)}$
- ☞ $AB^2 = AC + BC - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\theta_3)$
- ☞ $BC^2 = AB + AC - 2AB \cdot AC$

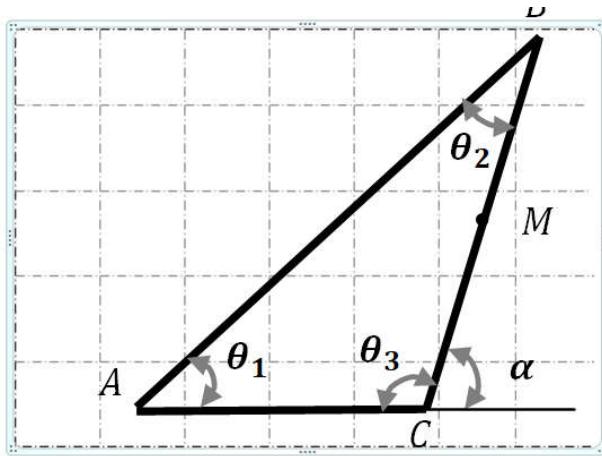


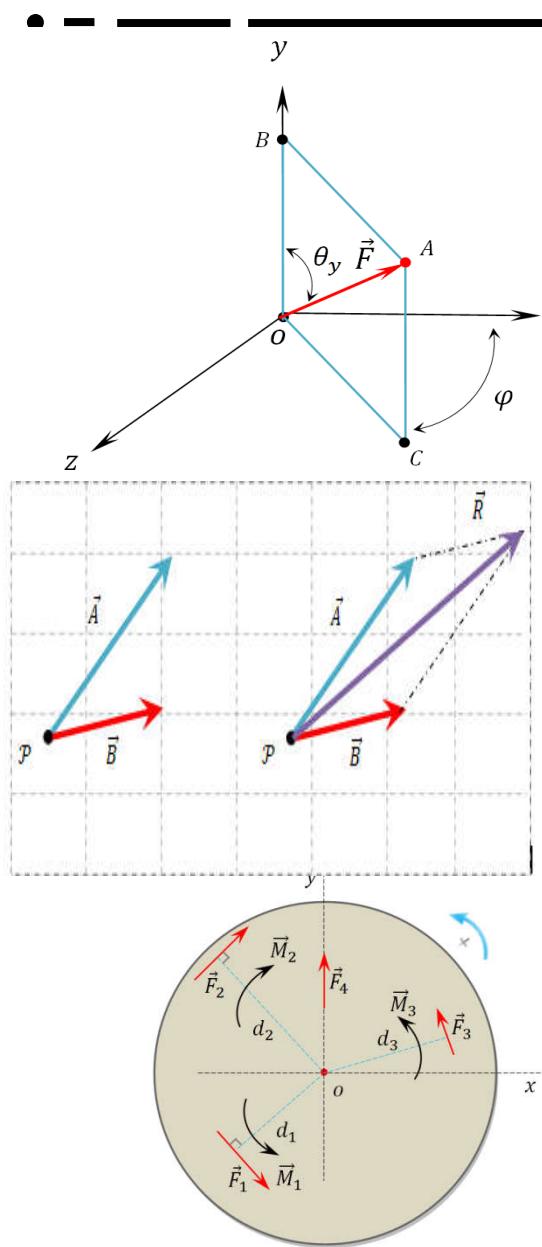
Figure 1.1 : triangle ABC

2. Trouver les angles θ_1, θ_2 et α sachant que :

$$\begin{cases} BC = 650\text{mm} \\ AB = 745\text{mm} \\ AC = 210\text{mm} \end{cases}$$

Chapitre 2 :

Généralités et Définitions de base



Avant de résoudre les problèmes de la Mécanique Rationnelle, il faut mettre en évidence la grandeur force ainsi que la Résultante, le Moment etetc., qui sera Objectif de ce chapitre.

2.1 Force

Une force est une quantité physique qui peut être mise en équilibre avec la gravité, est généralement caractérisé par le point d'application, le sens, le module et la direction.

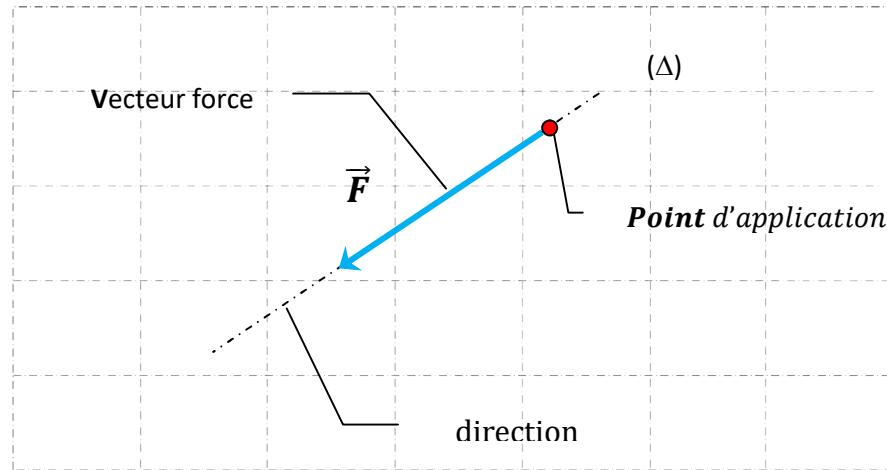


Figure 2.1 : Force

c.-à-d. on peut considérer la force comme un vecteur lié.

$$\text{Force} \left\{ \begin{array}{l} \text{Vecteur} \left\{ \begin{array}{l} \text{direction} \\ \text{sens} \\ \text{module} \\ + \end{array} \right. \\ \text{Point d'application} \end{array} \right.$$

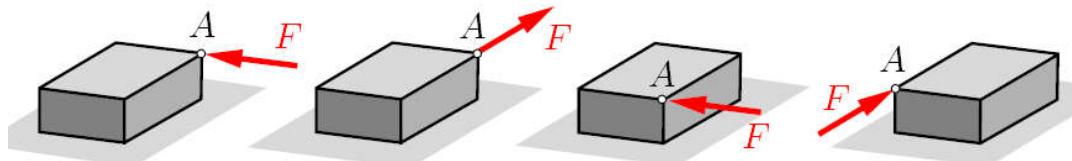


Figure 2.2 vecteur force

2.2 Opération sur la force :

2.2.1 Projection/ Décomposition en 2D :

Dans un plan, en choisissant un repère orthonormé (oxy), il est possible de décomposer une force en deux vecteurs orthogonaux.

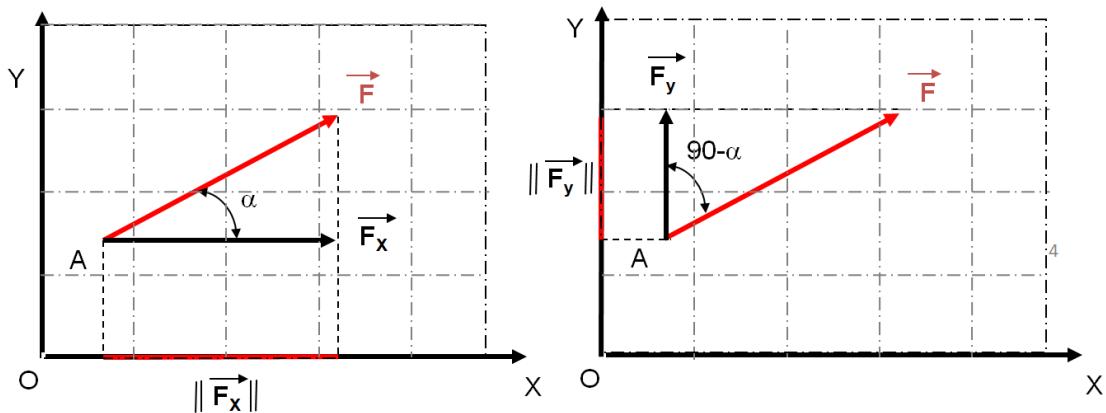


Figure 2.3 Projection en 2D

Alors les scalaires F_x et F_y peuvent être positifs ou négatifs, selon le sens de F ,

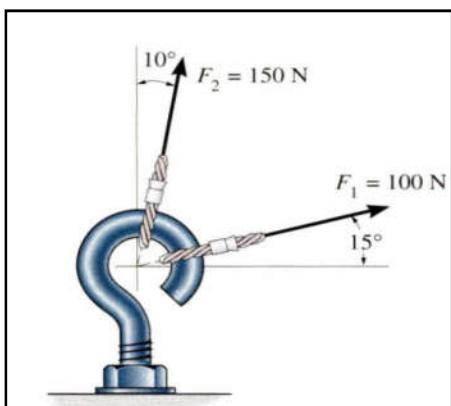
Avec :

$$\text{Norme de } \|\vec{F}_x\| = \vec{F} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{Norme de } \|\vec{F}_y\| = \vec{F} \cdot \begin{cases} \cos(90 - \alpha) \\ \sin(\alpha) \end{cases}$$

Exemple 2.2.1.1

☞ Déterminer la projection des deux forces illustrée dans la figure 2.12 ci-dessous.



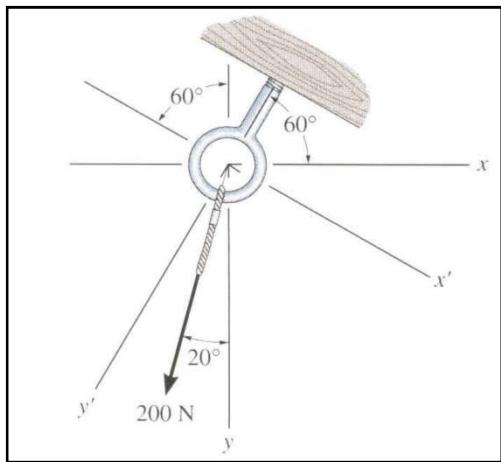
	<i>Projection /_{ox}</i>	<i>Projection /_{oy}</i>
\vec{F}_1 = 100 N	$\vec{F}_{1x} = 100\cos(15)$ ou bien $\vec{F}_{1x} = 100\sin(75)$	$\vec{F}_{1y} = 100\cos(75)$ ou bien $\vec{F}_{1y} = 100\sin(15)$
\vec{F}_2 = 150	$\vec{F}_{2x} = 150\cos(80)$ ou bien $\vec{F}_{2x} = 150\sin(10)$	$\vec{F}_{2y} = 150\cos(10)$ ou bien $\vec{F}_{2y} = 150\sin(80)$

Figure 2.4 : Exemple 2.2.1.1 de Projection

Exemple 2.2.1.2

☞ Déterminer la projection des trois forces illustrée dans la figure 2.12 ci-dessous.

Projection oxy



	Projection $/_{ox}$	Projection $/_{oy}$
\vec{F}_1 = 200 N	$\vec{F}_{1x} = -200\cos(70)$ ou bien $\vec{F}_{1x} = -200\sin(20)$	$\vec{F}_{1y} = 200\cos(20)$ ou bien $\vec{F}_{1y} = 200\sin(70)$
	Projection $ox'y'$	
	Projection $/_{ox'}$	Projection $/_{oy'}$
\vec{F}_1 = 200 N	$\vec{F}_{1x'} = -200\cos(70)$ ou bien $\vec{F}_{1x'} = -200\sin(20)$	$\vec{F}_{1y'} = 200\cos(20)$ ou bien $\vec{F}_{1y'} = 200\sin(70)$

Figure 2.5 :Exemple 2.2.1.2 de Projection

2.2.2 Projection/ Décomposition en 3D :

Dans la figure ci-dessous., Les composants F_x, F_y et F_z sont les projections de la force \vec{F} sur l'axe x, y et z respectivement.

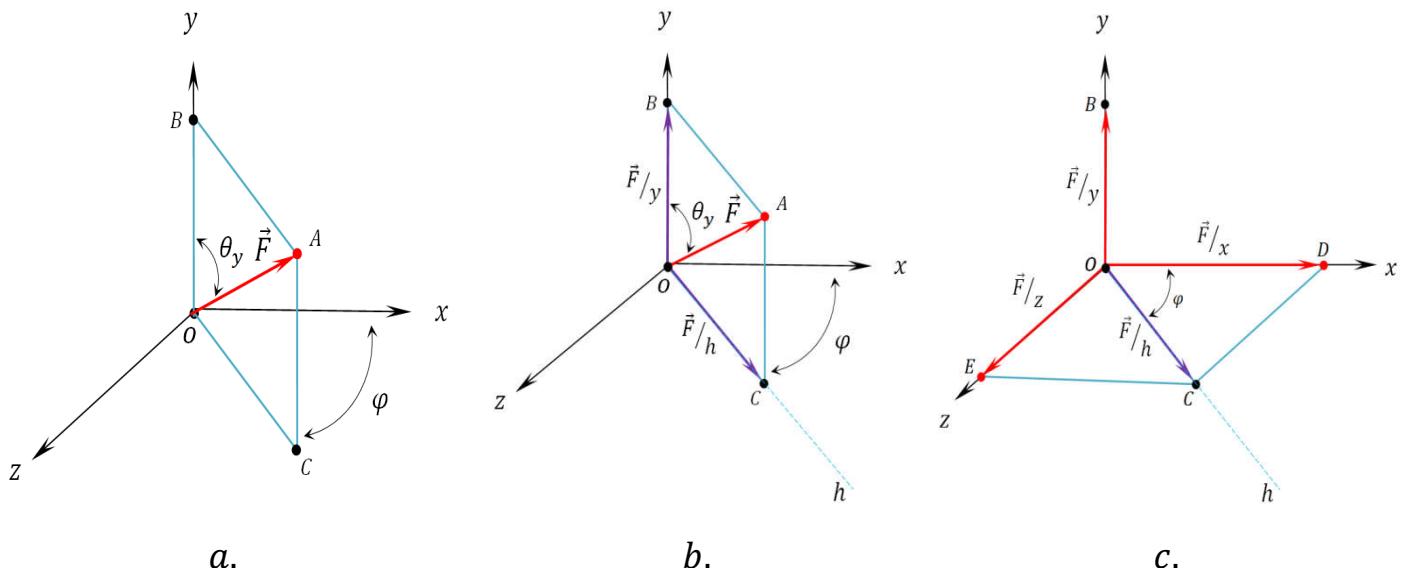
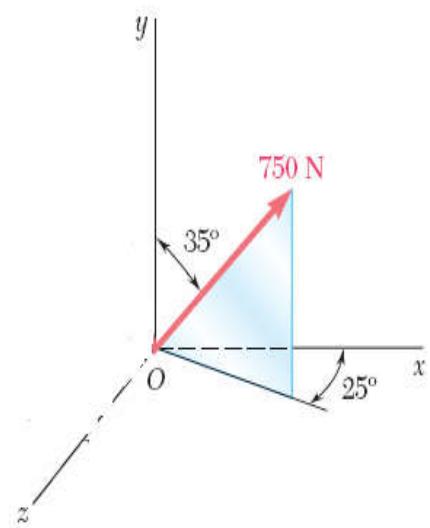


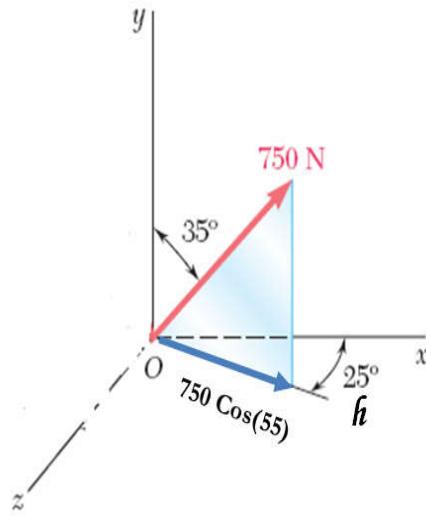
Figure 2.6. Projection en 3D

Exemple 2.2.2.2

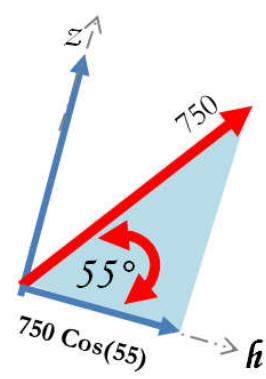
☞ : Déterminer la projection de la force \vec{F} .



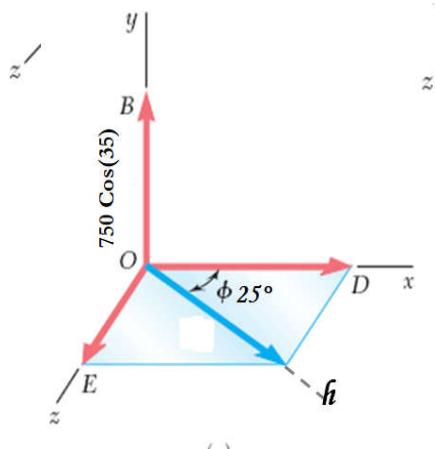
étape 1



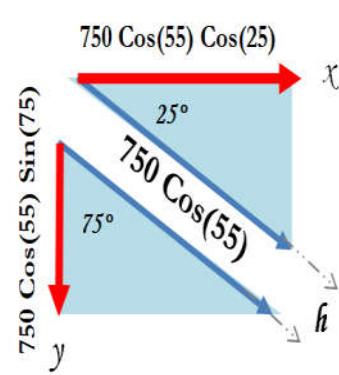
étape 2



étape 3



étape 5



étape 5

Finalement la projection devient

	$Projection /_{ox}$	$Projection /_{oy}$	$Projection /_{oz}$
F	$750 \cos(55) \cos(25)$	$750 \cos(35)$	$750 \cos(55) \sin(25)$

2.3 Notion de Résultante :

L'expérimentale montre que deux forces \vec{A} et \vec{B} agissant sur une particule \mathcal{P} (figure ci-dessous) peuvent être remplacées par une seule force R qui a le même effet sur la particule .

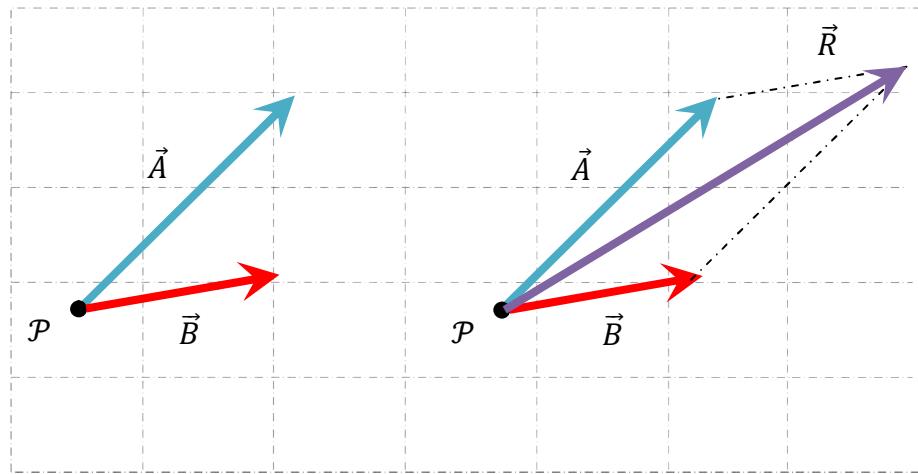
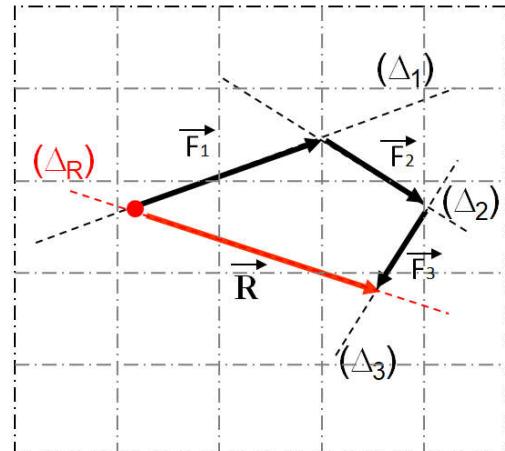
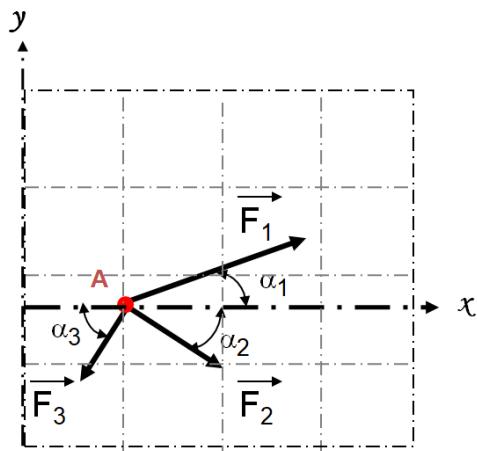


Figure 2.7 : la Résultante de Forces

Cette force est appelée résultante R des deux forces \vec{A} et \vec{B} , cette résultante peut être obtenue en utilisant deux méthodes :

- ☞ La méthode graphique.
- ☞ La méthode analytique.

2.3.1 La méthode graphique



- ☞ Étape 1 : définir une échelle graphique (1 cm équivaut à x Newton)
- ☞ Étape 2 : tracé du diagramme

Mais on peut déterminer la Résultante à partir des relations géométriques (**Loi de cosinus** et/ou **Loi de sinus**.....)

2.3.2 La méthode analytique.

Pour connaître la résultante R par la méthode analytique, il faut :

Étape 1 : Déterminer sa composante \vec{R}_x

$$\vec{R}_x = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \cos(\alpha_i)$$

Étape 2 : Déterminer sa composante \vec{R}_y

$$\vec{R}_y = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \sin(\alpha_i)$$

Étape 3 : Additionner \vec{R}_x et \vec{R}_y

$$\begin{aligned}\vec{R} &= R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \\ \vec{R} &= \sum_{i=1}^n F_i \cdot \cos(\alpha_i) \vec{i} + \sum_{i=1}^n F_i \cdot \sin(\alpha_i) \vec{j}\end{aligned}$$

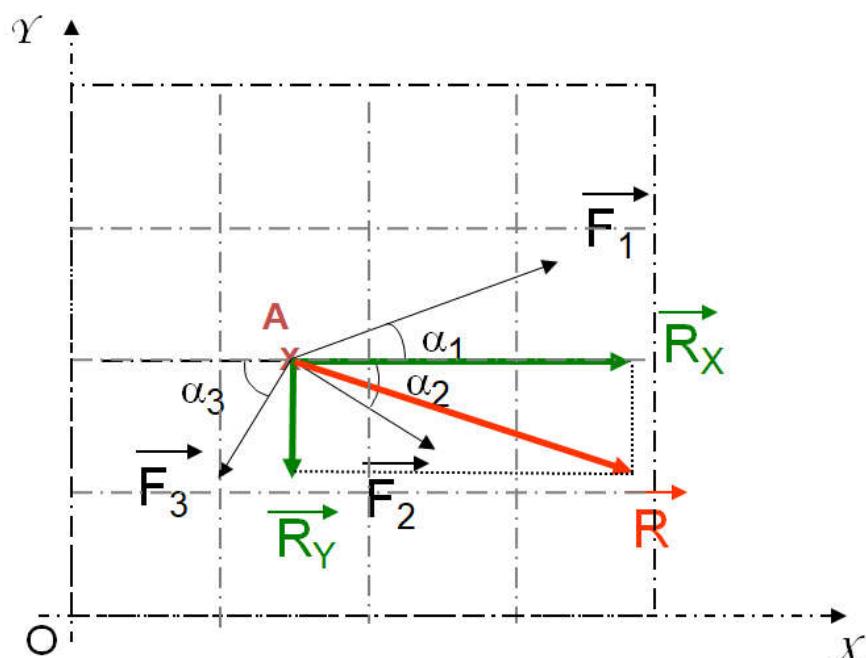
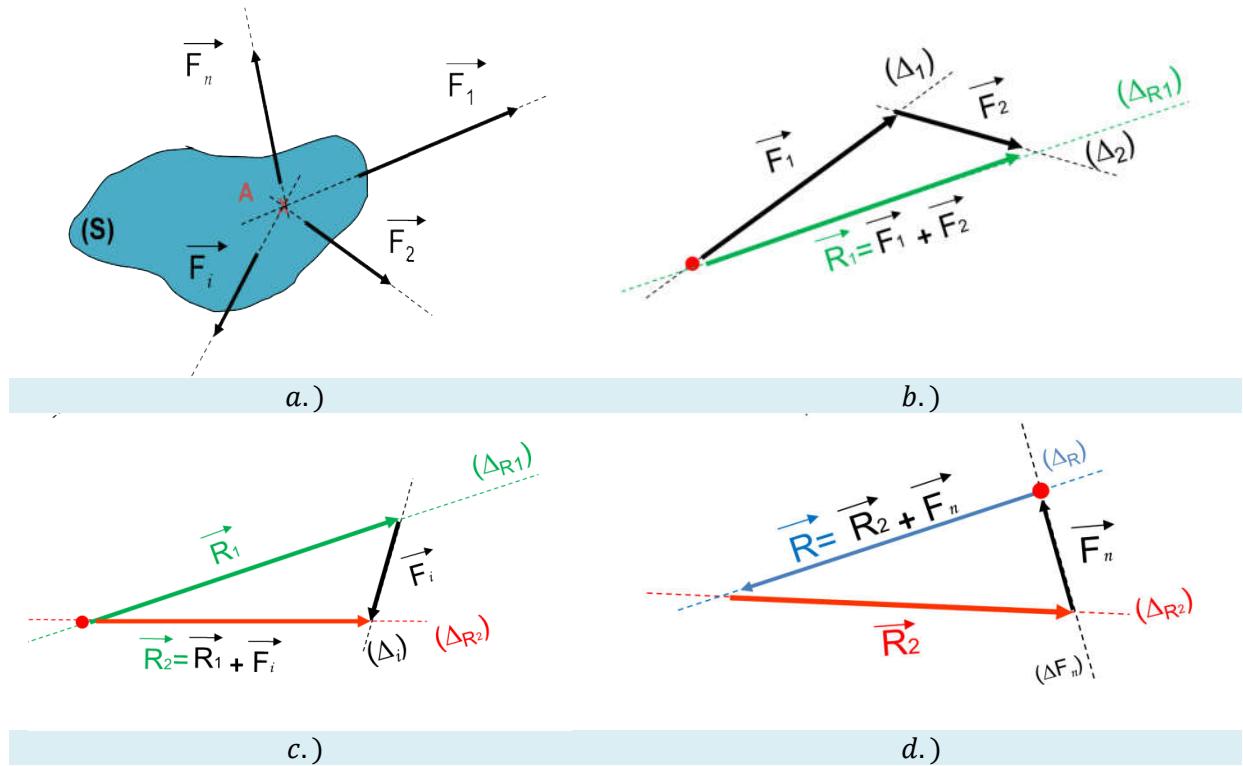


Figure 2.8 :La résultante R par la méthode analytique

Dans le cas où il existe plusieurs forces, On peut appliquer la méthode graphique par partie :



Dans le premier temps, on se pose que toutes les directions des forces convergent vers un même point (forces sont concourantes).

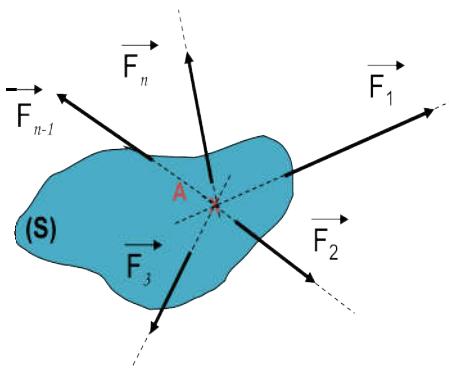


Figure 2.9 : les forces concourantes

Cas de forces parallèles (Co-linaires)

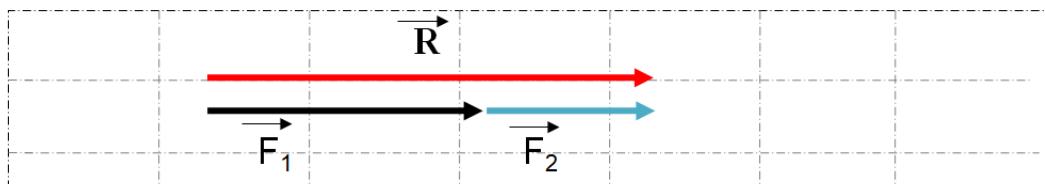
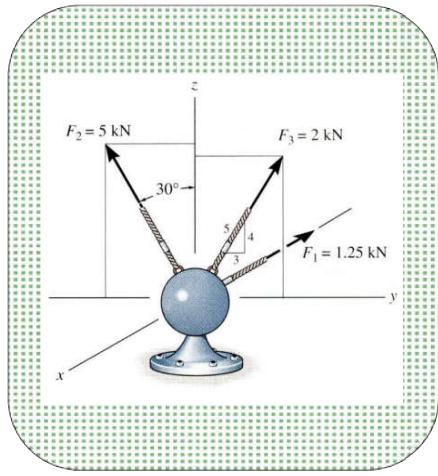


Figure 2.10 : la résultante forces parallèles

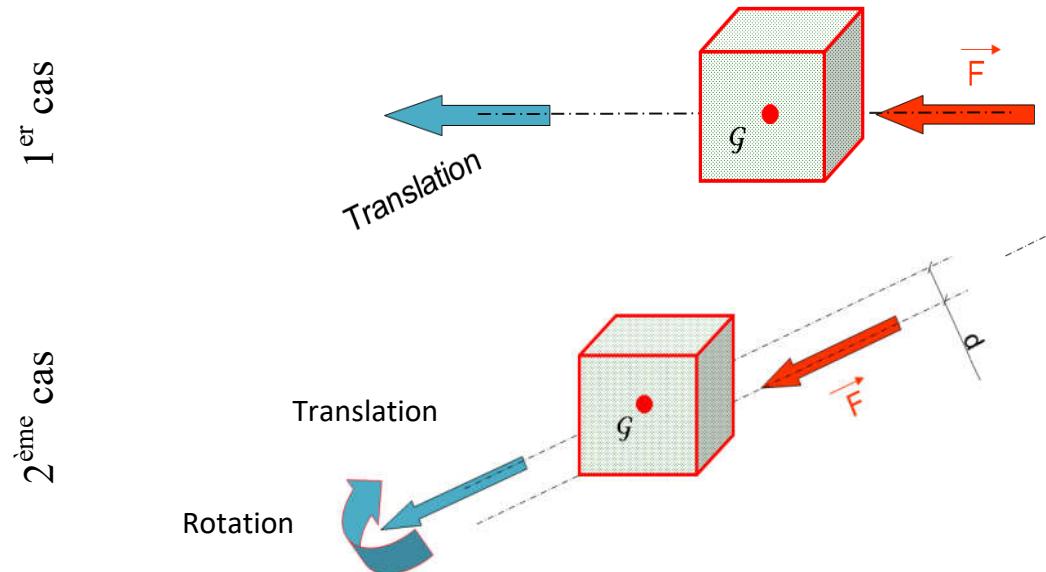
Exemple 2.3.1



	<i>Projection /_{ox}</i>	<i>Projection /_{oy}</i>	<i>Projection /_{oz}</i>
$\vec{F}_1 = 1.25 \text{ kN}$	-1.25	0	0
$\vec{F}_2 = 5 \text{ kN}$	0	$-5\sin(30)$	$5\cos(30)$
$\vec{F}_3 = 2 \text{ kN}$	0	$-2\frac{\cos(\alpha)}{3/5}$	$2\frac{\sin(\alpha)}{4/5}$
		$\vec{R}_x = (-1.25 + 0 + 0)\vec{i}$	
		$\vec{R}_y = \left(0 - 5\sin(30) + 2.\frac{3}{5}\right)\vec{j}$	
		$\vec{R}_z = \left(0 + 5\cos(30) + 2.\frac{4}{5}\right)\vec{k}$	
Avec : $\vec{R} = \vec{R}_x\vec{i} + \vec{R}_y\vec{j} + \vec{R}_z\vec{k}$ et $R = \sqrt{\vec{R}_x^2 + \vec{R}_y^2 + \vec{R}_z^2}$			

2.4 Notion de Moment :

Les effets d'une force sur un solide dépendent de la position de la force par rapport au corps



Le moment d'une force \vec{F} par rapport à un point O est exprimé par :

$$\overrightarrow{M_O F} = \overrightarrow{OF} \wedge \vec{F}$$

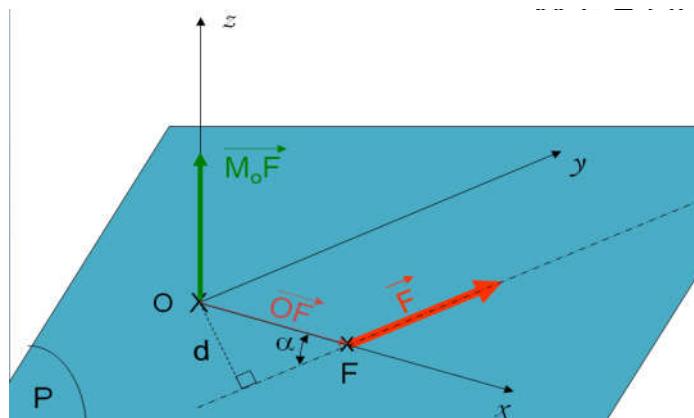
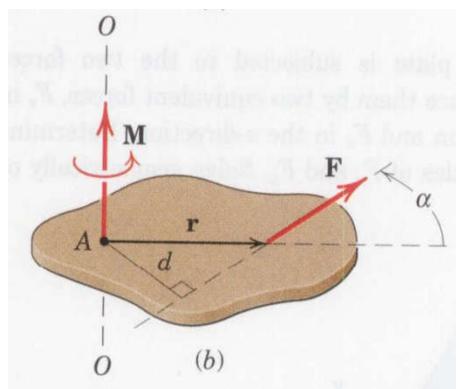


Figure 2.11 : Le moment d'une force

$$\overrightarrow{M/o F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ oF\sin(\alpha) & oF\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{M/o F} = oF\sin(\alpha)F\vec{k}$

$$|\overrightarrow{M/o F}| = \underbrace{oF\sin(\alpha)}_d F$$

Finalement $|\overrightarrow{M/o F}| = d \times F$ dans ce cas le signe est positif.

2.4.1 Conventions de signe:

$$|\overrightarrow{M/o F}| = \begin{array}{c} \text{un signe} \\ (+) \quad (-) \end{array} \text{ ou } \begin{array}{c} \text{---} \\ + \\ - \end{array} \|\vec{F}\| \cdot d$$

Selon le sens de rotation



Unité de moment: $\frac{\overrightarrow{M/o F}}{[N.m]} = \frac{d}{[m]} \cdot \frac{F}{[N]}$ dans le système SI.

Cas particulier :

Dans le cas où la force passe par le centre de rotation, le Vecteur-moment de cette force devient nul figure ci-dessous. $\overrightarrow{M/o F} = \frac{d}{0} \cdot \frac{F}{\neq 0}$

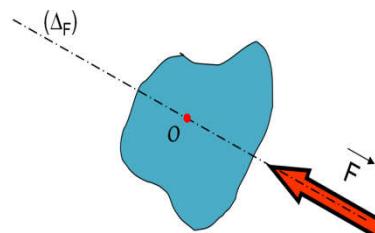
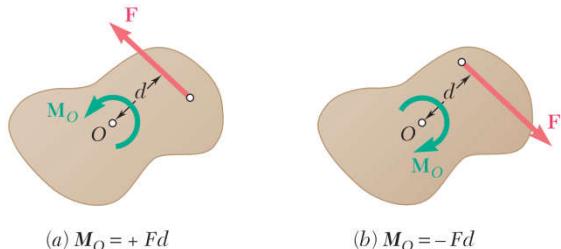


Figure 2.13 : Cas particulier

Par exemple :



Exemple 2.4.1

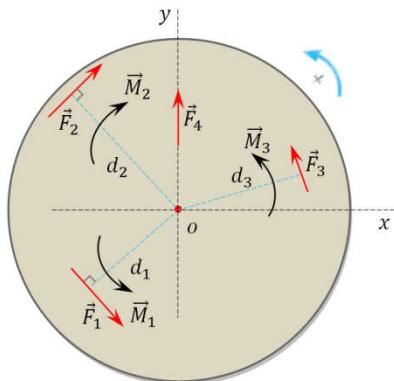


Figure 2.14 : Un système forces

Force \vec{F}_i	Signe $(+/-)$	Distance d_i	Moment $\vec{M}_{F_i}/_o$
\vec{F}_1	+	d_1	$= +F_1 d_1$
\vec{F}_2	-	d_2	$= -F_2 d_2$
\vec{F}_3	+	d_3	$= +F_3 d_3$
\vec{F}_4	\forall	$d_4 = 0$	$= \mathbf{0}$

2.4.2 Le Moment en 3D

Soit une force \overrightarrow{F} dans l'espace (figure ci-dessous)

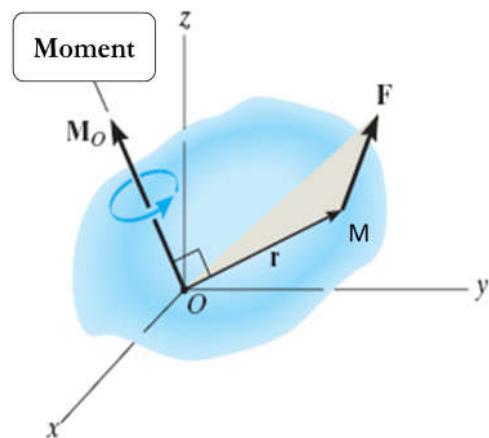


Figure 2.15 : Le Moment en 3D

Le moment de cette force \overrightarrow{F} par rapport à un point O est exprimé par :

$$\overrightarrow{M/O F} = \overrightarrow{oM} \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{M/O F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{M/O F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Ou

r_x, r_y et r_z représentent les composantes x, y, z de vecteur position OM .

F_x, F_y et F_z représentent les composantes de la force \vec{F} suivantes les axes x,y et z respectivement.

Finalement le moment est : $\overrightarrow{M/O F} = (r_y F_z - r_z F_y) \vec{i} - (r_x F_z - r_z F_x) \vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k}$

2.4.3 Le Moment résultant d'un système de forces :

Le moment résultant par rapport à un point O , d'un système de vecteurs-forces, correspond à la somme géométrique des vecteurs-moments de chacun des vecteurs forces.

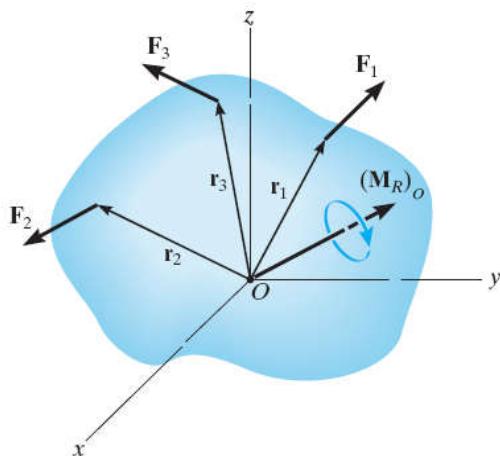


Figure 2.16 : Moment résultant

Le moment résultant est donné par : $\overrightarrow{M/O R} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$

Exemple 2.4.3.1

☞ Calculer le moment résultant de quatre forces illustrées dans la figure 2.15 ci-dessous, par deux méthodes.

$$\overrightarrow{M/O R} = \sum_{i=1}^5 \overrightarrow{M/O F_i}$$

$$\overrightarrow{M/O R} = \overrightarrow{M/O F_1} + \overrightarrow{M/O F_2} + \overrightarrow{M/O F_3} + \overrightarrow{M/O F_4} + \overrightarrow{M/O F_5}$$

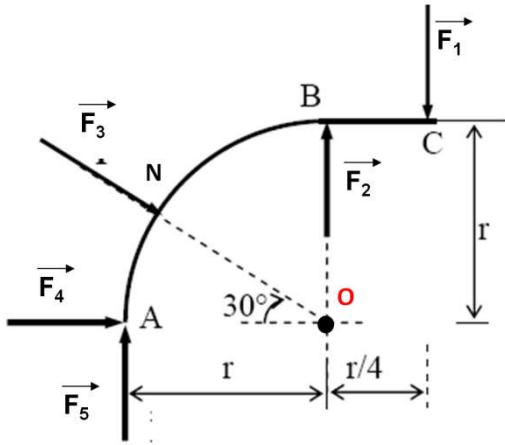


Figure 2.17 : Exemple 2.4.3.1

☞ 1^{er} Méthode :

	$\overrightarrow{M_o F_1}$	$\overrightarrow{M_o F_2}$	$\overrightarrow{M_o F_3}$	$\overrightarrow{M_o F_4}$	$\overrightarrow{M_o F_5}$
	$-\frac{r}{4}F_1$	0	d	0	$-rF_5$

☞ 2^{eme} Méthode : Cette méthode base sur le produit vectoriel.

	$\overrightarrow{M_o F_1}$	$\overrightarrow{M_o F_2}$	$\overrightarrow{M_o F_3}$	$\overrightarrow{M_o F_4}$	$\overrightarrow{M_o F_5}$
	$\overrightarrow{M_o F_1} = \overrightarrow{oC} \wedge \overrightarrow{F_1}$	$\overrightarrow{M_o F_2} = \overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{F_2}$	$\overrightarrow{M_o F_3} = \overrightarrow{oN} \wedge \overrightarrow{F_3}$	$\overrightarrow{M_o F_4} = \overrightarrow{oA} \wedge \overrightarrow{F_4}$	$\overrightarrow{M_o F_5} = \overrightarrow{oA} \wedge \overrightarrow{F_5}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_o F_1} = \overrightarrow{oC} \wedge \overrightarrow{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r/4 & r & 0 \\ 0 & -F_1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r}{4}F_1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_o F_2} = \overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & r & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_o F_3} = \overrightarrow{oN} \wedge \overrightarrow{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r & r & 0 \\ F_3 \cos(30) & -F_3 \sin(30) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M/oF_4} = \overrightarrow{oA} \wedge \overrightarrow{F_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r & 0 & 0 \\ F_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M/oF_5} = \overrightarrow{oA} \wedge \overrightarrow{F_5} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & F_5 & 0 \end{vmatrix} = -rF_5$$

Exemple 2.4.3.2

\Rightarrow Refaire le même travail pour la figure ci-dessous.

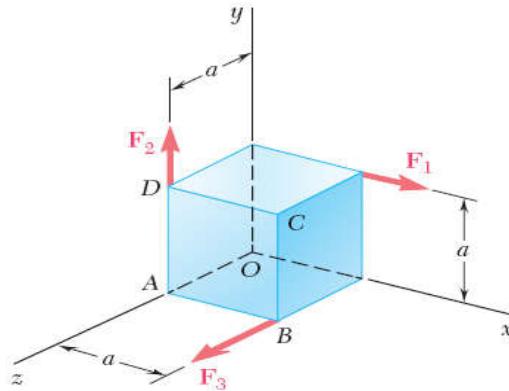


Figure 2.18 : Exemple 2.4.3.2

$\overrightarrow{M/oF_1}$	$\overrightarrow{M/oF_2}$	$\overrightarrow{M/oF_3}$
$\overrightarrow{oC} \wedge \overrightarrow{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a\overrightarrow{F_1}$	$\overrightarrow{oD} \wedge \overrightarrow{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & a \\ 0 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = -a\overrightarrow{F_2}$	$\overrightarrow{oB} \wedge \overrightarrow{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & a \\ 0 & 0 & F_3 \end{vmatrix} = -a\overrightarrow{F_3}$

2.5 Classification des forces :

On distingue les forces extérieures et les forces intérieures

Les forces extérieures : Toute force exercée sur le système par un « auteur » extérieur au système.

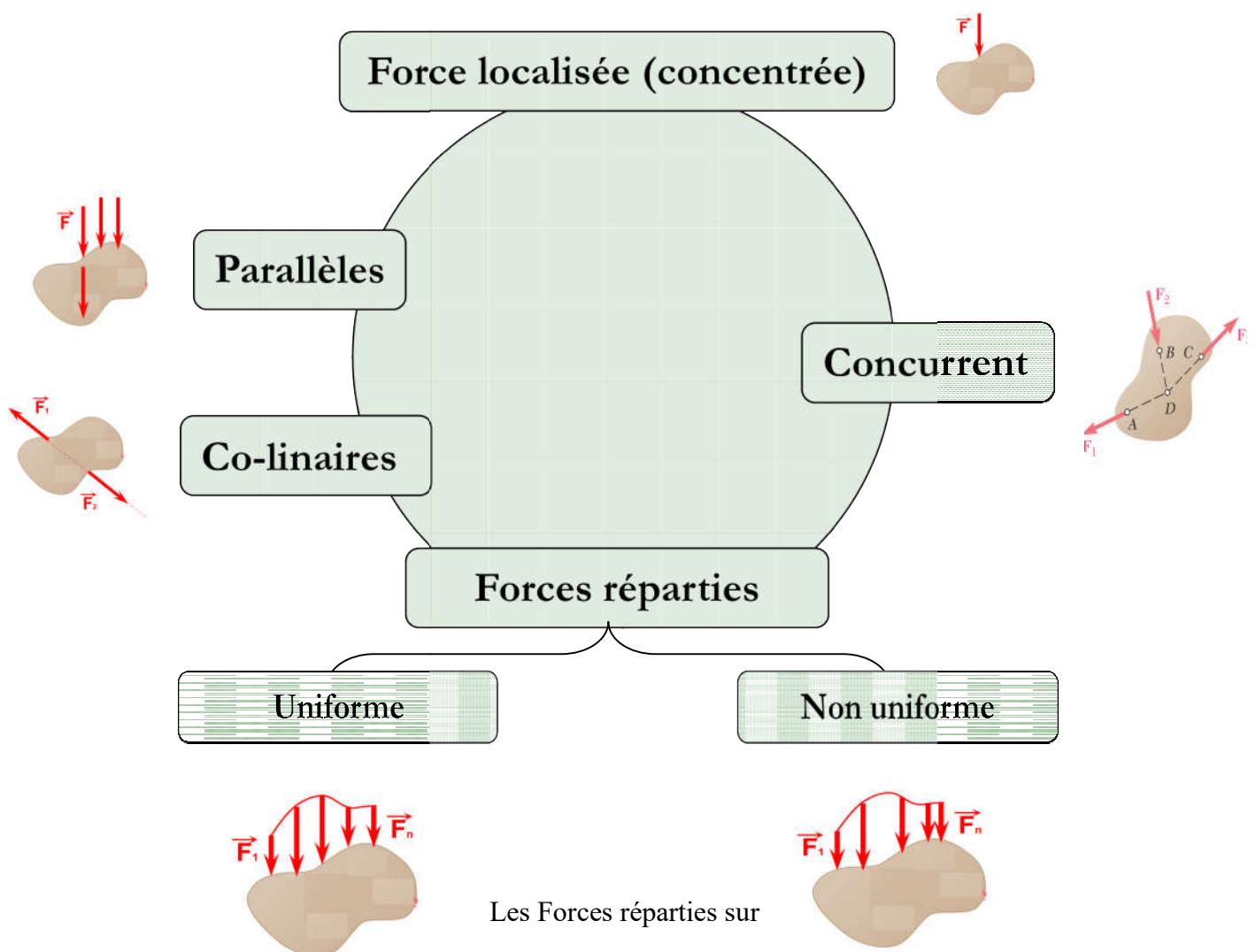
Les forces intérieures : Toute force agissant entre deux éléments du système.

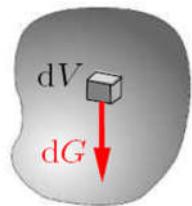


Figure 2.19 : les forces extérieures et intérieures

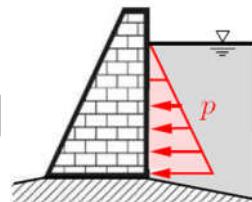
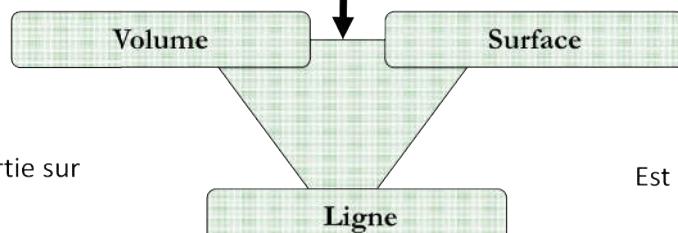
2.6 Types de forces :

D'autre part, Il existe plusieurs types de forces

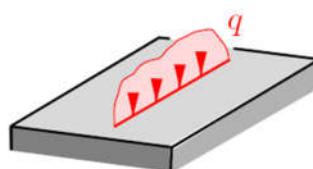




Est une force répartie sur un volume



Est une force répartie sur une surface

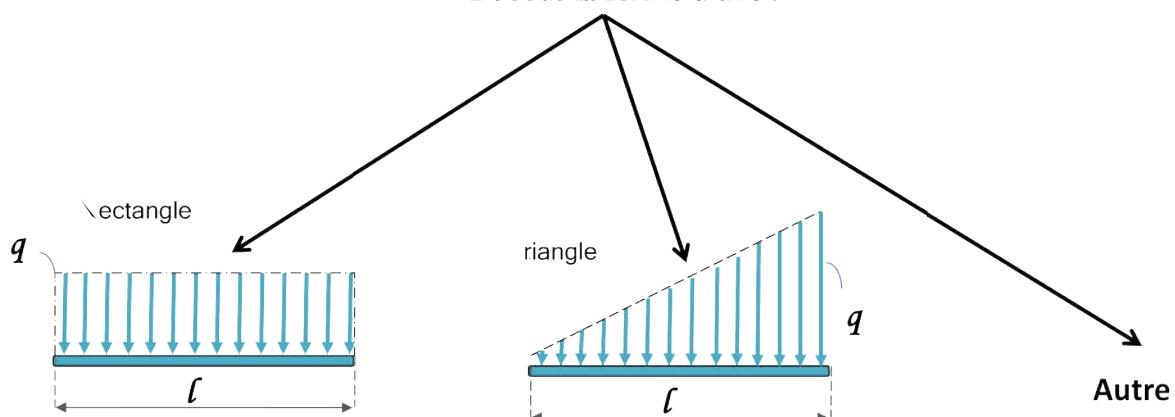


Est une force répartie sur une ligne

Une force répartie sur une et sous la forme d'un Rectangle, Triangle,.....

Une force répartie sur une Ligne

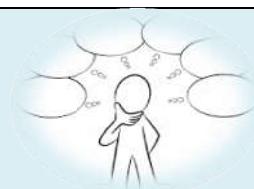
Et sous la forme d'une :

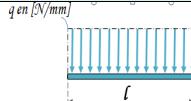
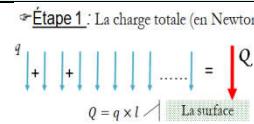
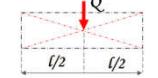
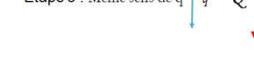
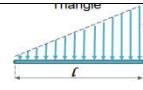
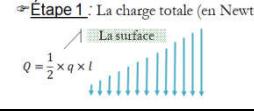
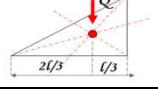
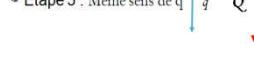


q ; une charge répartie sur unité de longueur N/m

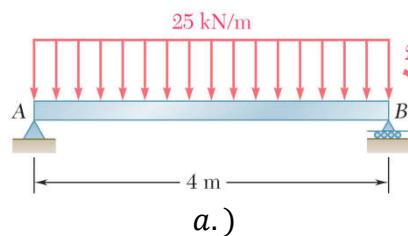
Dans ce cas Comment déterminer :

- ☞ **Résultante**
- ☞ **Sens**
- ☞ **point d'application**



	La forme	La charge totale	Le point d'application	Le sens
Rectangle		<p>Étape 1 : La charge totale (en Newton)</p>  $Q = q \times l \quad \quad \text{La surface}$	<p>Étape 2 : Le point d'application</p> 	<p>Étape 3 : Même sens de q</p> 
Triangle		<p>Étape 1 : La charge totale (en Newton)</p>  $Q = \frac{1}{2} \times q \times l \quad \quad \text{La surface}$	<p>Étape 2 : Le point d'application</p> 	<p>Étape 3 : Même sens de q</p> 
⋮	⋮			
⋮	⋮			
⋮	⋮			

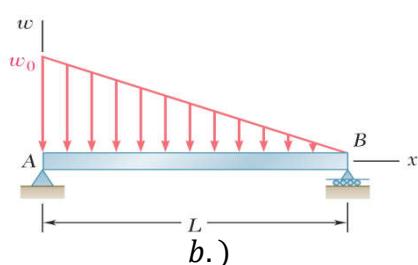
Exemple 2.6.1



La charge totale : $Q = 25 \times 4 = 100 \text{ kN}$

Le point d'application : $\leftarrow \frac{\text{---}}{2m} \rightarrow \frac{\text{---}}{2m}$

Le sens : $Q \downarrow$



La charge totale : $Q = w_0 \times L = w_0 L$

Le point d'application : $\leftarrow \frac{\text{---}}{\frac{L}{3}} \rightarrow \frac{\text{---}}{\frac{2L}{3}}$

Le sens : $Q \downarrow$

2.7 Modèle Mécanique :

2.7.1 Point Matériel : représente un système physique ou mécanique dont la position peut être décrite par trois coordonnées seulement, caractérisé par sa masse m et notée $M(m)$.

2.7.2 Corps Solide est un ensemble des points matériels qui considéré comme indéformable. La distance entre les différents points d'un solide (par exemple deux points A et B appartenant au corps) reste constante ($AB = \text{Cst}$).



Figure 2.20 : Corps Solide



Série de TD n°2

Généralités et Définitions de base

Question 2.1

☺ Dans un repère orthonormé (oxy), on peut écrire la force sous la forme ($\alpha + \beta = 90^\circ$):

$\vec{F} = F\cos(\alpha)\vec{i} + F\sin(\alpha)\vec{j};$

$\vec{F} = F\cos(\alpha)\vec{i} + F\cos(\beta)\vec{j};$

☺ Le Moment d'une force est nul si :

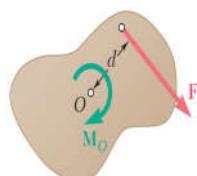
La force est négligeable

La force passe par le centre de rotation;

☺ Le Moment de la force illustrée dans la figure ci-dessous est :

$\overrightarrow{M_O R} = -d F$

$\overrightarrow{M_O R} = +d F$



Exercice 2.1

Soit les forces schématisent dans les figures suivantes :

Figure 2.1.A

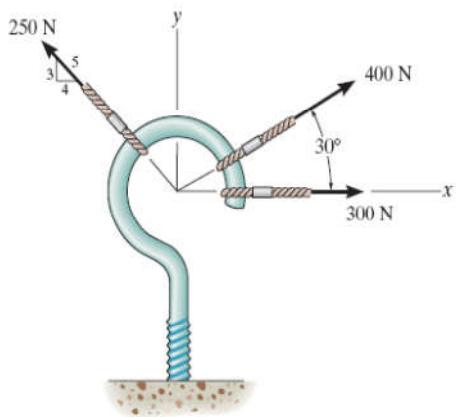


Figure 2.1.C

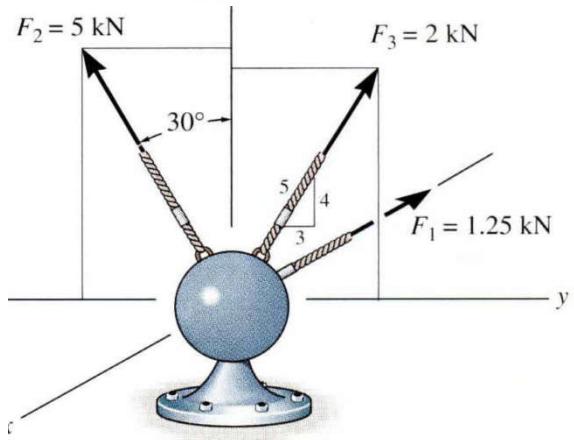


Figure 2.1.E

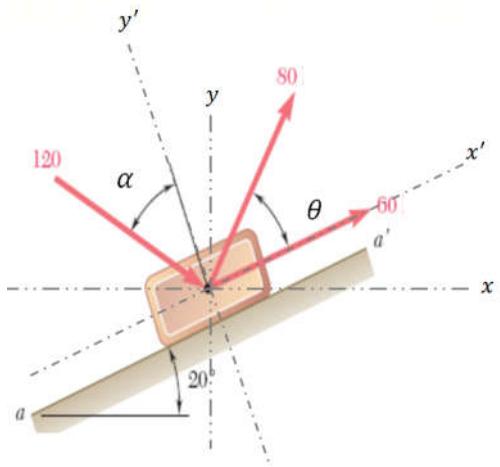


Figure 2.1.G

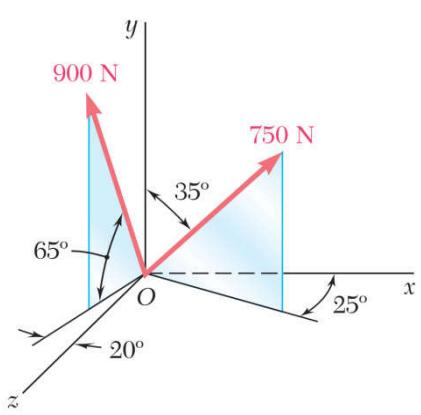


Figure 2.1.B

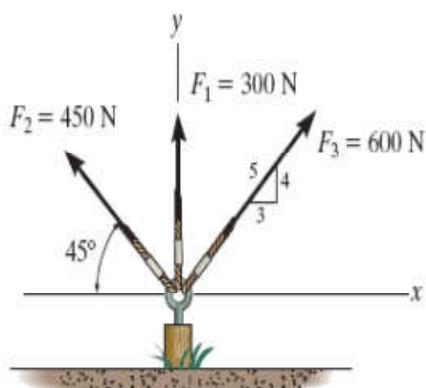


Figure 2.1.D

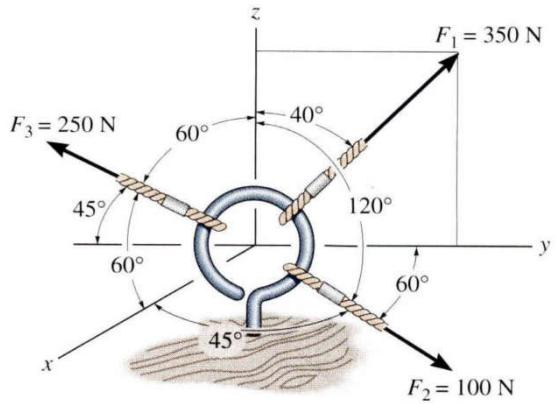


Figure 2.1.F

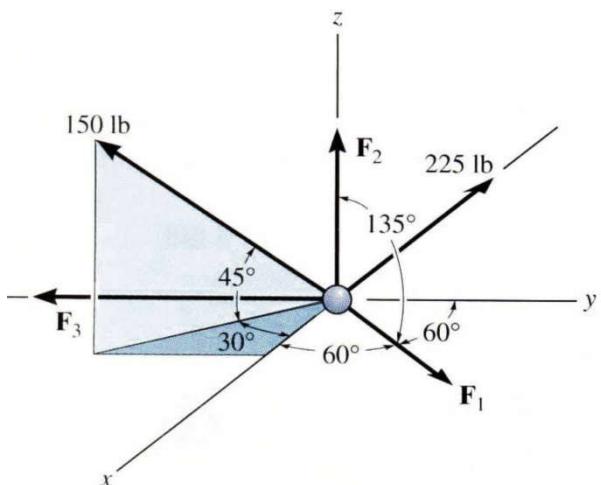
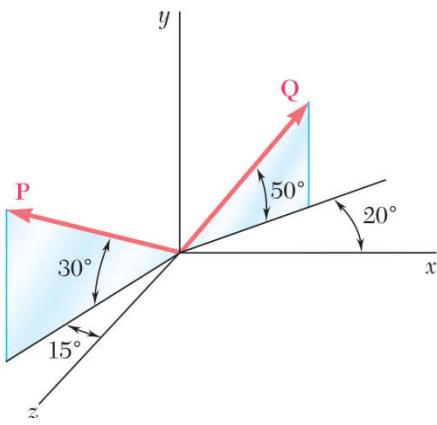


Figure 2.1.H



Exercice 2.2

On se pose que la résultante \vec{R} de forces agissant sur le support donnée par

$$\vec{R} = 750 \vec{i} + 0 \vec{j}$$

1. Déterminer le module de \vec{F} et sa direction θ .
2. Montre que la résultante \vec{R} de deux forces formant un angle θ entre elles est exprimée par la formule suivante :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\theta$$

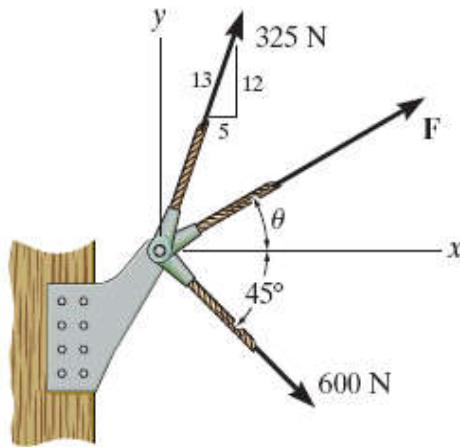


Figure 2.2.A : supore

Exercice 2.3 :

Soit un modèle du bateau proposée est placé dans un canal et suspendue par trois câbles, ces câbles sont utilisés pour maintenir à l'état d'équilibre.

- ☞ Déterminer la force de traînée exercée sur le bateau et la tension dans le câble AC .

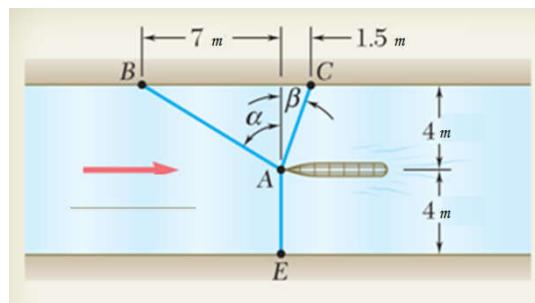


Figure 2.3.A :: bateau

Sachant que :

- ☞ Les tensions des câbles AB et AE sont 40 N et 60 N respectivement (Pour une vitesse donnée,).

Exercice 2.4 :

- ☞ Déterminer la résultante **force \vec{R}** / **Moment $(\overrightarrow{M_R})_A$** des forces illustrées dans la figure 2.12 ci-dessous par deux méthodes.

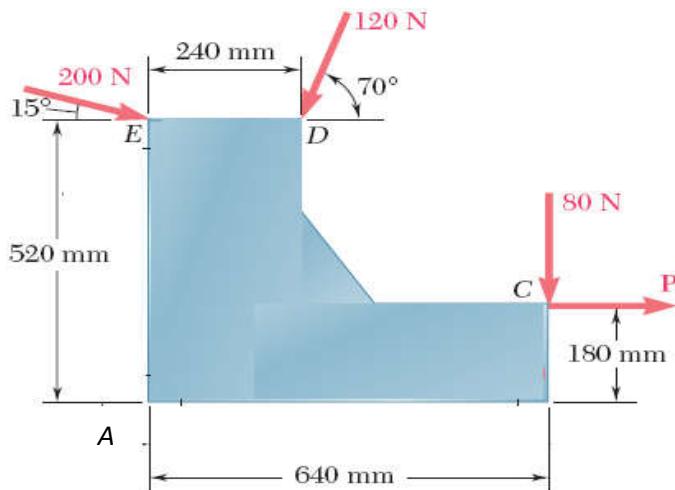


Figure 2.4.A :

Exercice 2.5 :

- ☞ Déterminer la résultante **force \vec{R}** / **Moment $(\overrightarrow{M_R})_A$** des forces illustrées dans la figure 2.12 ci-dessous.

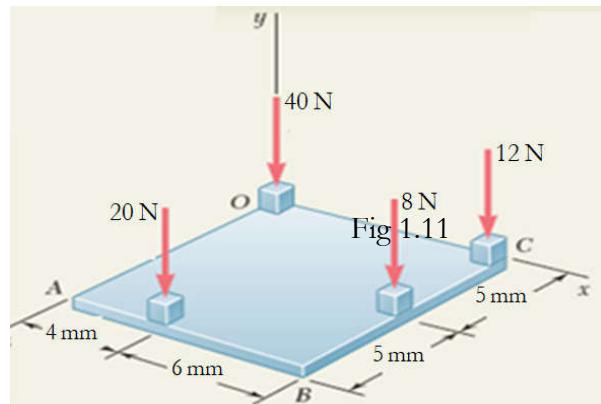


Figure 2.5.A :

Exercice 2.6 : (*Travail supplémentaire*)

Figure 2.5.B

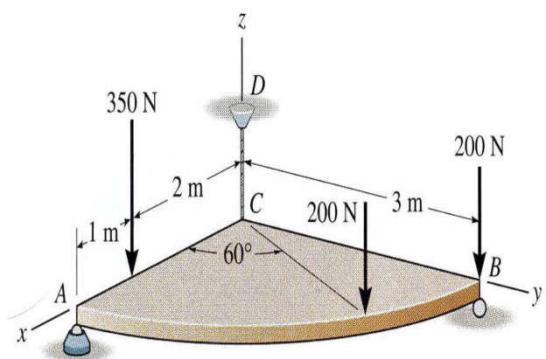


Figure 2.2.B

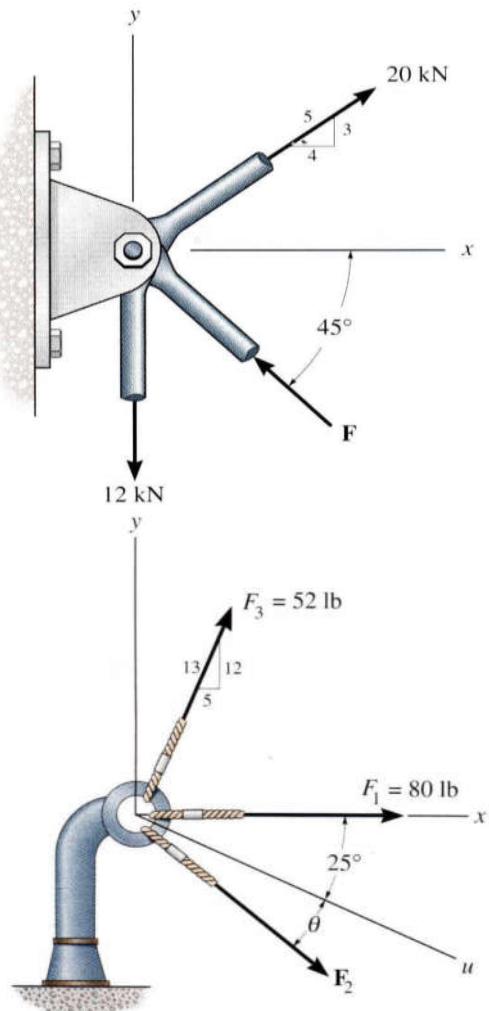


Figure 2.1.K

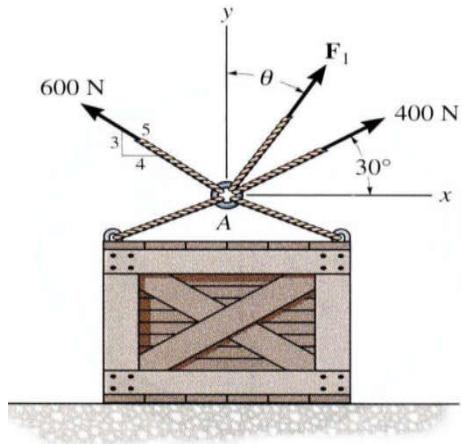


Figure 2.1.1

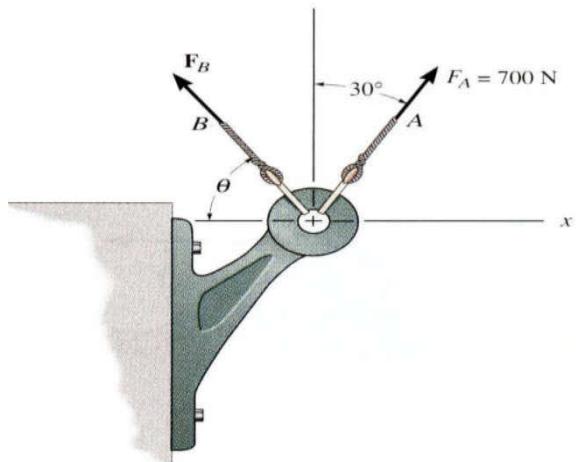


Figure 2.1.J

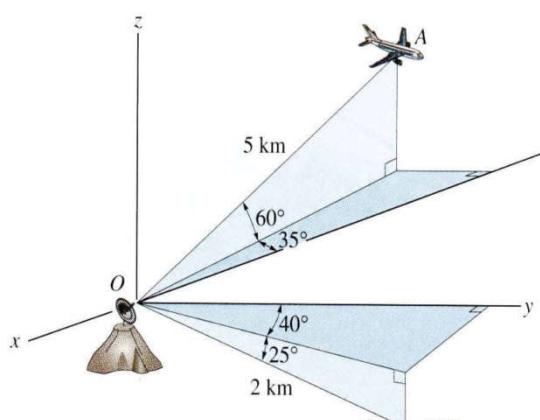


Figure 2.1.L

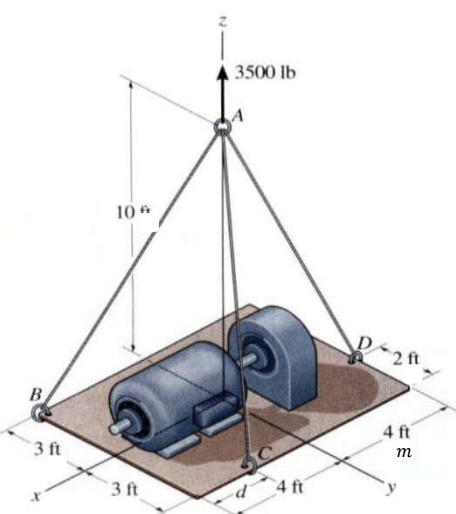


Figure 2.3.B

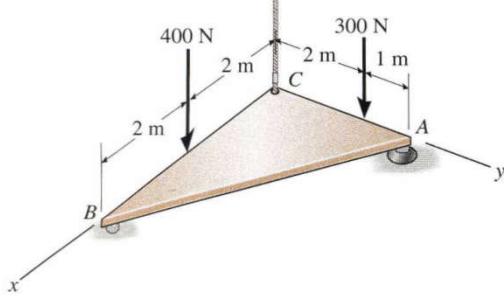
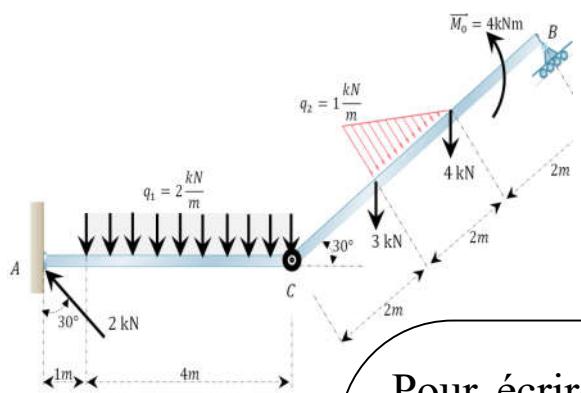
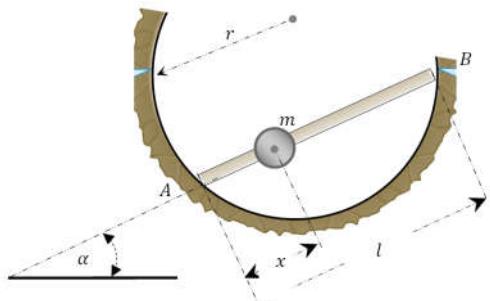
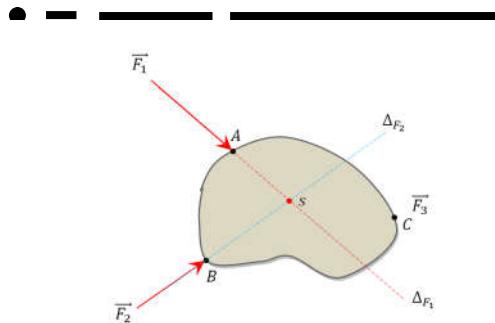


Figure 2.5.C

Chapitre 3 :

La Statique



Pour écrire les équations d'équilibre d'un corps rigide, il faut identifier toutes les forces agissant sur ce corps, ainsi que les réactions exercées sur le corps ou la structure. Ces équations obtenues peuvent être utilisées pour déterminer les inconnues appliquées au corps, à savoir : les forces et les réactions. Ces derniers seront l'objet de notre chapitre.



3.1 Principe Actions-Réaction

Le solide S_1 exerce une force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ sur le solide S_2 (figure 3.1). Une force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ opposée et de même intensité agit à partir du Solide S_2 sur Le solide S_1 . Ces forces peuvent être visibles si les deux corps sont séparés dans la zone de contact.

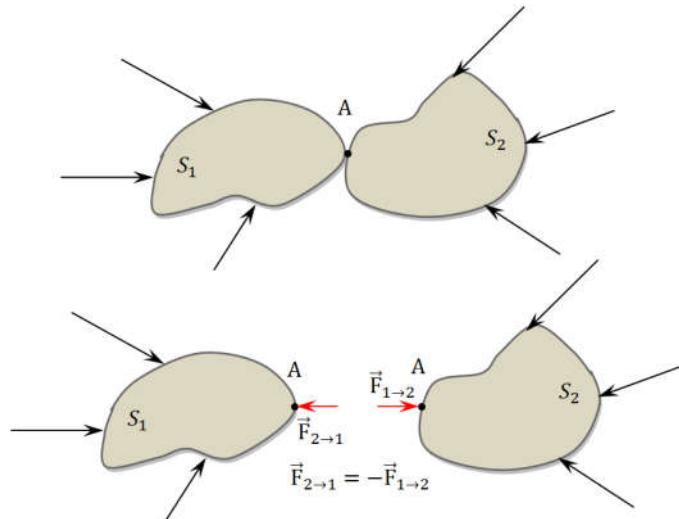


Figure 3.1 : Principe Actions-Réaction

3.2 Principe de transmissibilité des forces en statique

En l'équilibre, on peut remplacer une force \vec{F} agissant en un point N par une autre force \vec{F}' de même intensité, de même direction et de même sens mais agissant en un point M à condition que $M \in \Delta_F$.

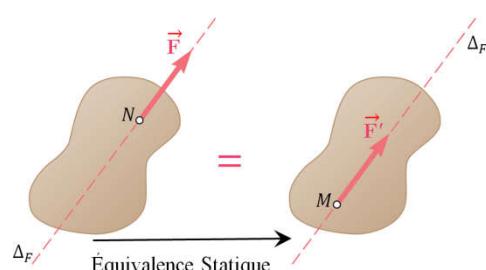


Figure 3.2 : Transmissibilité des forces

Et pour mieux comprendre

Selon le principe de transmissibilité les deux cas sont identiques



Le principe de transmissibilité n'est pas applicable aux autres matières par exemple la résistance des matériaux (Traction et Compression)

3.3 Isolement d'un solide.

La notion d'isolement d'un solide est un principe fondamental dans l'analyse et la résolution des problèmes de la mécanique.



Figure 3.3 : Problème réel

La situation physique réduite à son forme la plus simple

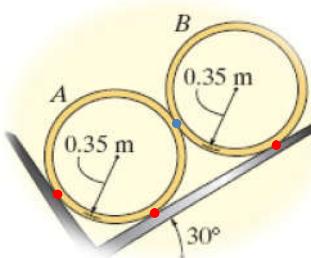


Figure 3.4 : Schématisation et représentation du problème

Selon le principe de d'isolement :

étape 1	étape 2	étape 4
<p>Trois points de contacts en rouge p_1, p_2 et p_3</p>	<p>Un point de contact en bleu p_4</p>	<p>Un point de contact en bleu p_4</p>

3.4 Les actions mécaniques

Les actions mécaniques représentent les efforts exercés sur et entre les solides réels. Ces actions sont schématisées ou modélisées par des forces, moments, pressions, etc.

On peut les diviser en deux grandes familles :

☞ Actions mécaniques à distance

☞ Actions mécaniques de contact

3.4.1 Actions mécaniques à distance

Par exemple l'action de la pesanteur (poids) : $P = m \cdot g$

- ☞ Sa direction est toujours verticale, son sens vers le bas.
- ☞ Cette action est toujours appliquée au centre de gravité g
- ☞ L'unité de cette action dans le système international est : $[N] = [kg] \times [m/s^2]$



Figure 3.5 : Actions mécaniques à distance

3.4.2 Actions mécaniques de contact

Les actions de contact se divisent en trois groupes :

- ☞ Actions ou charges concentrées
- ☞ Actions réparties sur une ligne
- ☞ Actions réparties sur une surface

Cas 1	Cas 2	Cas 3
 $T = T$	 $T = T$	 $F = F_s = k \Delta l$

Exemple 3.4.1

- ☞ Schématiser et représenter toutes les actions mécaniques de contact existantes dans la figure 3.6 ci-dessous.

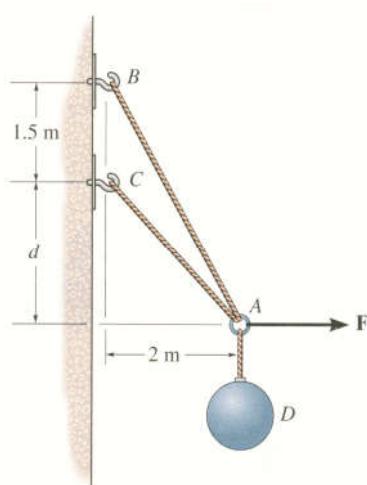


Figure 3.6 : La situation physique du problème

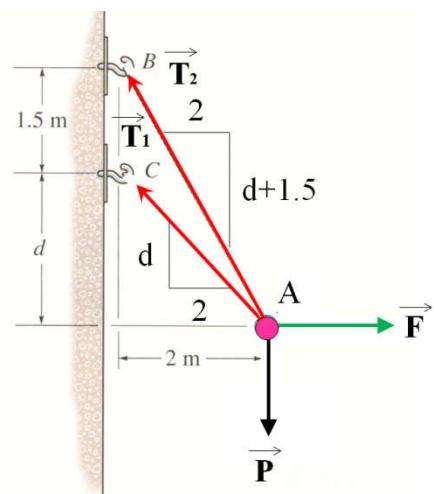


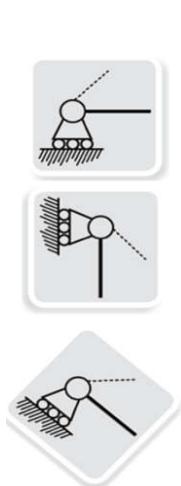
Figure 3.7 : Schématisation des actions

3.4.3 Actions de contact exercées dans les liaisons mécaniques

3.4.3. A L'appui Simple Ou Appui Glissant

L'appui simple est caractérisé par :

- ☞ deux degrés de liberté.
- ☞ une réaction d'appui : une force
- ☞ une inconnue dans les équations d'équilibre



Schématisation



Modélisation



réels



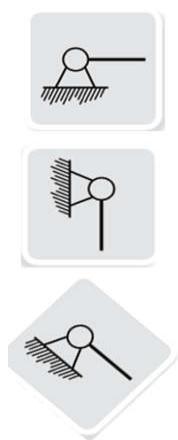
Figure 3.8 : L'appui Simple

3.4.3. B L'articulation Ou Appui Fixe

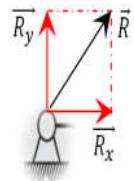
L'appui fixe est caractérisé par :

- ☞ Un degré de liberté
- ☞ deux réactions d'appui : deux forces

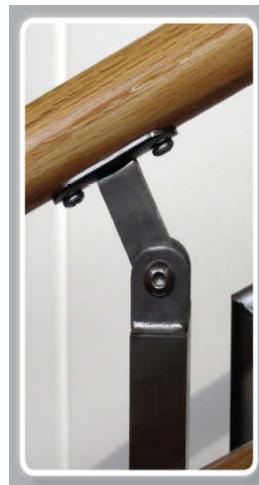
- ☞ Deux inconnues dans les équations d'équilibre



Schématisation



Modélisation



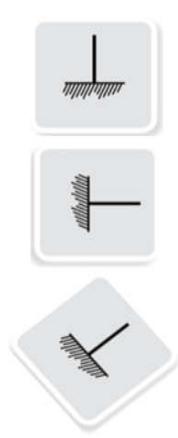
réels

Figure 3.9 : L'Appui Fixe

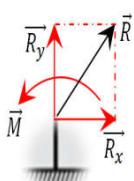
3.4.3. C L'encastrement

L'encastrement est caractérisé par :

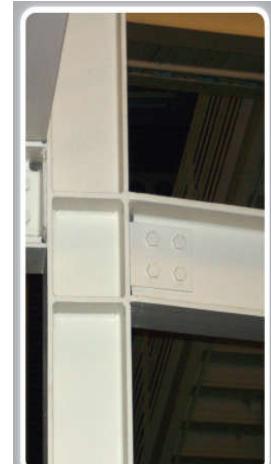
- ☞ Zéro degré de liberté
- ☞ Trois réactions d'appui : deux forces + un moment
- ☞ Trois inconnues dans les équations d'équilibre



Schématisation



Modélisation



réels

Figure 3.10 : L'encastrement

3.5 Méthode de résolution des problèmes de la statique

On a deux possibilités pour résoudre les problèmes de la statique telles que la méthode analytique et la méthode géométrique

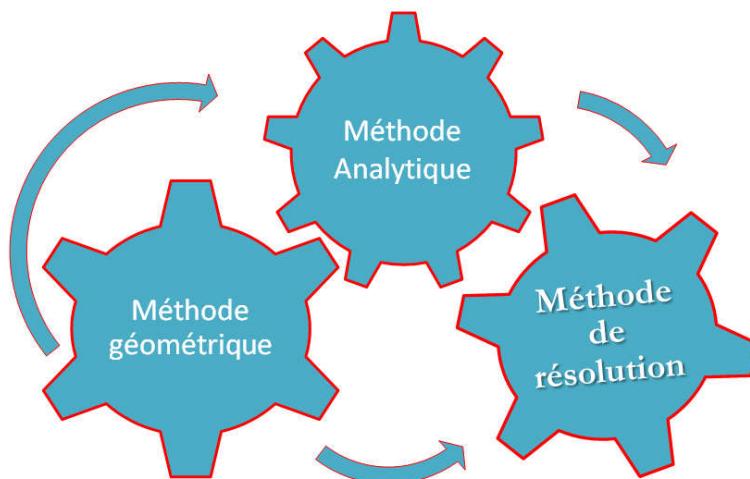


Figure 3.11 : Les méthodes de résolution

3.5.1 La Méthode Géométrique :

Cette Méthode basée sur le triangle des forces et les relations trigonométrie notamment loi sinus, loi cosinus,

Soit le problème schématisé dans la figure ci-dessous.

☞ Déterminer les expressions des inconnus \vec{F}_2 et \vec{F}_3 par la méthode géométrique.

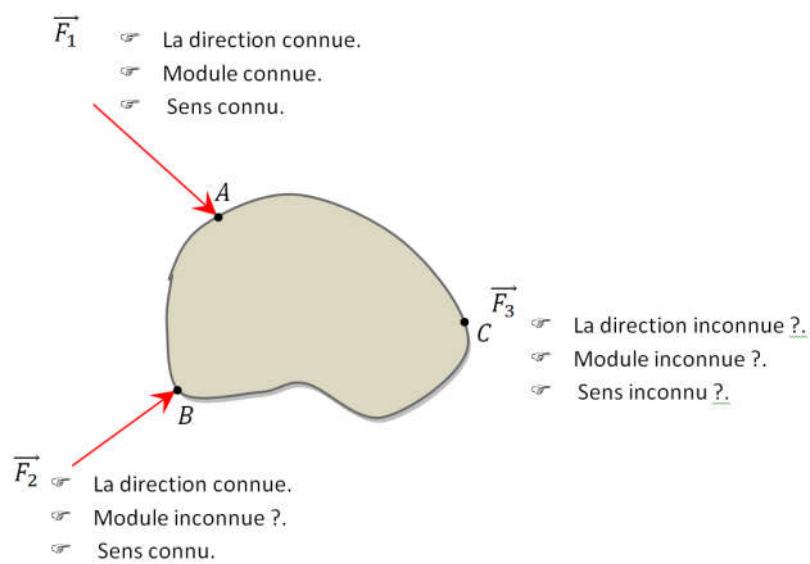
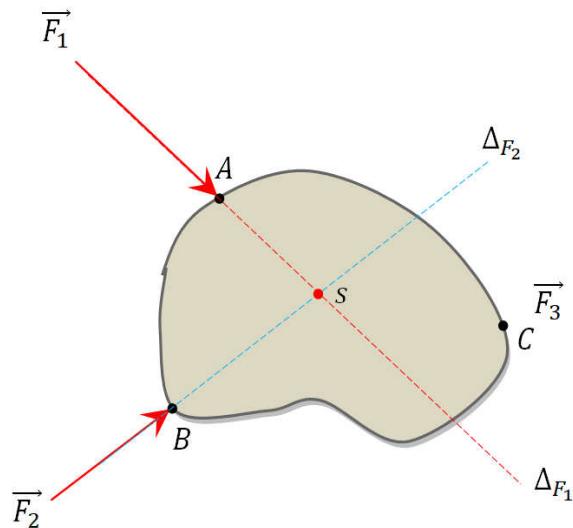


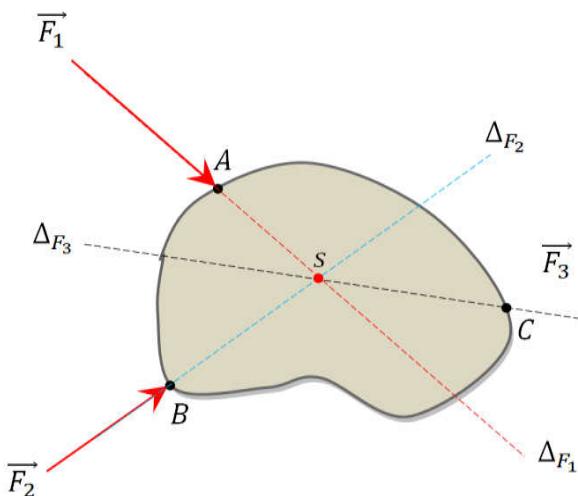
Figure 3.12 : Principe de la méthode géométrique

Selon le principe de cette méthode :

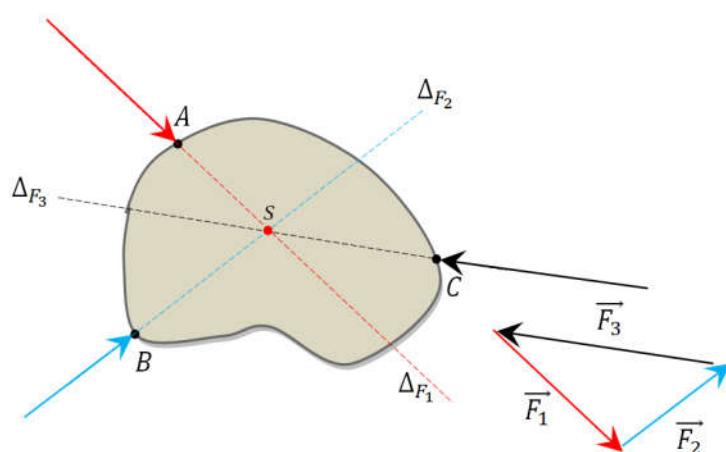
☞ Etape 1 → Point d'intersection



☞ Etape 2 → Direction de \vec{F}_3 passant par le point S

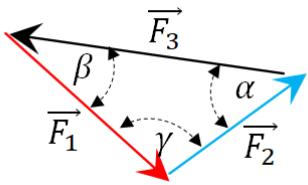


☞ Etape 3 → Construire le triangle des forces pour déterminer le sens de \vec{F}_3 (à condition que le triangle des forces devienne fermé)

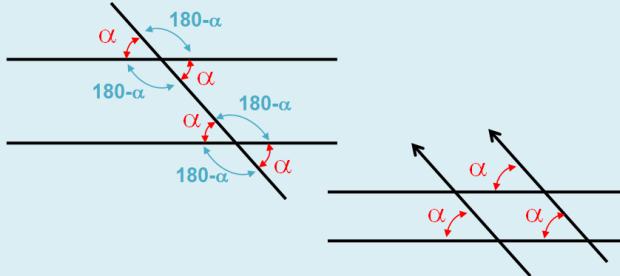


☞ Etape 4 → Appliquer la loi du sinus sur le triangle des forces

$$\frac{\vec{F}_1}{\sin(\alpha)} = \frac{\vec{F}_2}{\sin(\beta)} = \frac{\vec{F}_3}{\sin(\gamma)}$$



☞ Etape 5 → Déterminer les trois angles α , β et δ
 $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$



☞ Etape 6 → Déterminer les inconnus \vec{F}_2 et \vec{F}_3

$$\begin{cases} F_2 = F_1 \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \\ F_3 = F_1 \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} \end{cases}$$

Exemple 3.5.1

☞ Trouver la tension du câble et la réaction en A par la méthode géométrique.



Figure 3.13 : Application de la méthode géométrique

Donc le triangle des forces devient de la forme suivant :

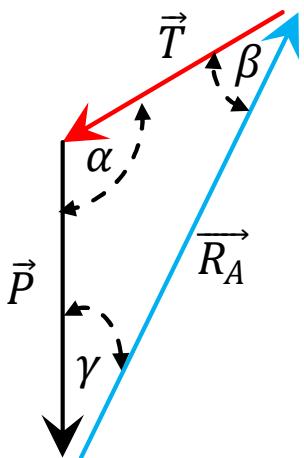


Figure 3.14 : Triangle des forces

Par l'application de **Loi de sinus** :

$$\frac{R_A}{\sin(\alpha)} = \frac{P}{\sin(\beta)} = \frac{T}{\sin(\gamma)}$$

Avec $\alpha = 110$, $\beta = 25$ et $\gamma = 45$.

Démonstration

On utilise la formule de la cosinus

$$\begin{aligned} & \text{que } \cos(\alpha) = \frac{P^2 + R_A^2 - T^2}{2PR_A} \\ & \Rightarrow \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) \\ & = 1(x_1y_2 - x_2y_1) \cdot \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) \\ & = 2x_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_1 \end{aligned}$$

3.5.2 La Méthode Analytique :

Cette Méthode basée sur le principe de Newton. Dans un repère GALILEEN :

1^{ere} condition d'EQUILIBRE d'un solide :

La somme des FORCES EXTERIEURES appliquées à un solide en équilibre est NULLE

$$\text{« Théorème des FORCES »} \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

Notation : Le Principe Fondamental De La Statique (PFS) :

☞ 2^{eme} condition d'EQUILIBRE d'un solide

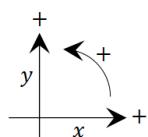
La somme des MOMENTS DES FORCES EXTERIEURES appliqués à un solide en équilibre est NULLE

$$\text{« Théorème des MOMENTS »} \quad \overrightarrow{M_A R} = \overrightarrow{M_A(F_1)} + \overrightarrow{M_A(F_2)} + \dots + \overrightarrow{M_A(F_n)} = \vec{0}$$

Finalement, pour qu'un Solide soit en équilibre, il faut que la somme des forces extérieures ET la somme des moments extérieurs appliqués sur le solide soient nulles.

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A R} = \overrightarrow{M_A(F_1)} + \overrightarrow{M_A(F_2)} + \dots + \overrightarrow{M_A(F_n)} = \vec{0} \end{cases}$$

Attention, pour passer de la relation vectorielle à la relation algébrique, il faut tenir compte du signe du moment par rapport au sens choisi.



Application 3.1 :

☞ Déterminer les réactions en A et B par les deux méthodes.

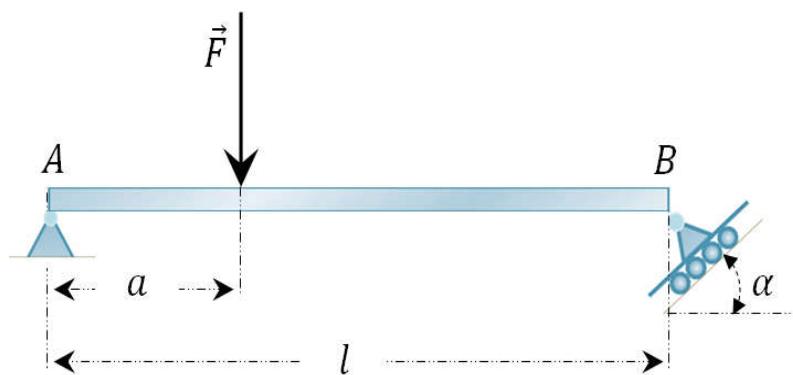


Figure 3.15 : Géométrique du problème

❖ La Méthode Géométrique

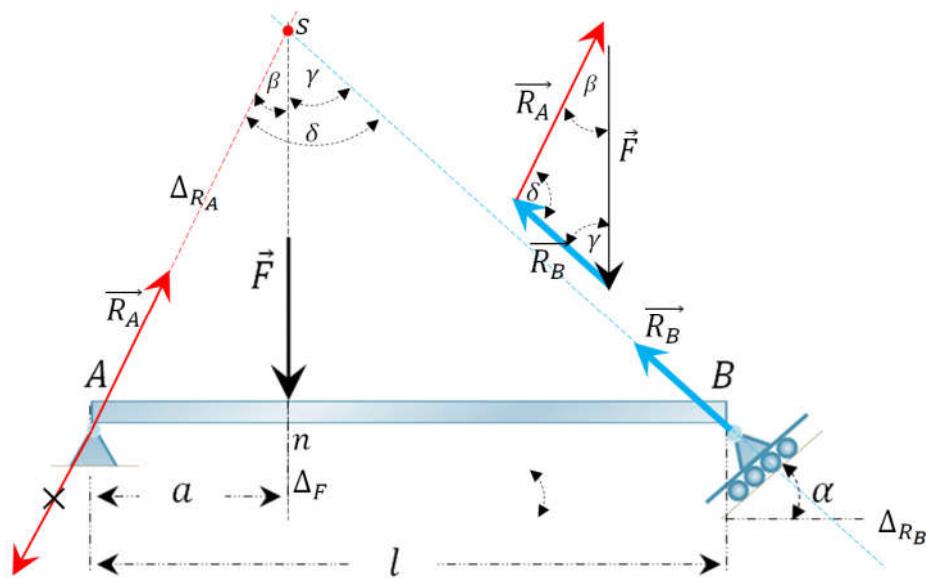


Figure 3.16 : Principe de la méthode géométrique

Selon le triangle des forces le **Loi de sinus** devient :

$$\frac{R_A}{\sin(\gamma)} = \frac{F}{\sin(\delta)} = \frac{R_B}{\sin(\beta)}$$

Donc les inconnues de l'**application** sont :

$$\begin{cases} R_A = F \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\delta)} \\ R_B = F \frac{\sin(\beta)}{\sin(\delta)} \end{cases}$$

Par la suite on passe à la détermination des angles β, γ et δ .

On a :

$$\beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

❖ La Méthode Analytique

Tout d'abord il faut identifier toutes les forces agissant sur ce corps, ainsi que les réactions exercées sur le corps ($\alpha = 45^\circ$).

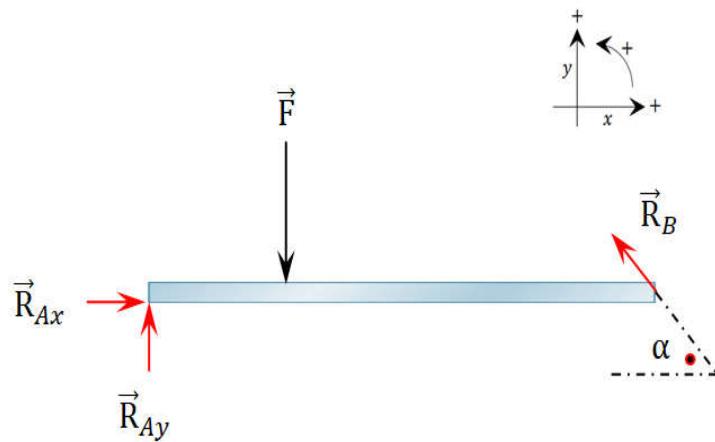


Figure 3.17 : Principe de la méthode Analytique

Selon le principe de cette méthode :

1^{ere} condition d'EQUILIBRE d'un solide :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{R_{Ax}} + \overrightarrow{R_{Ay}} + \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{F} = \vec{0}$$

2^{eme} condition d'EQUILIBRE d'un solide

$$\sum \overrightarrow{M_{\cdot A}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_{RAx}} + \overrightarrow{M_{RAY}} + \overrightarrow{M_{RB}} + \overrightarrow{M_F} = \vec{0}$$

Donc la projection de ces équations est illustrée ci-dessous.

	\vec{R}_{Ax}	\vec{R}_{Ay}	\vec{R}_B	\vec{F}
$\sum x \rightarrow +$	$+R_{Ax}$	0	$-R_B \cos(\alpha)$	0
$\sum y \uparrow +$	0	$+R_{Ay}$	$+R_B \sin(\alpha)$	$-F$
$\sum M_{\cdot A} \circlearrowleft +$	0	0	$-l \times R_B \times \sin(\alpha)$	$-a \times F$

Application 3.2 :

 Déterminer les réactions en A et B par les deux méthodes.

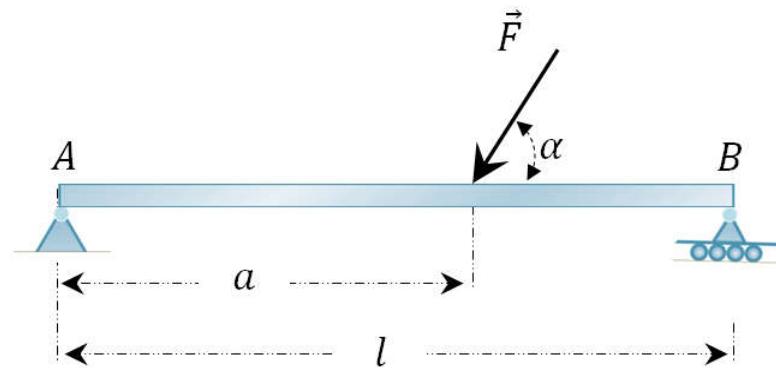


Figure 3.18 : Géométrique du problème

❖ La Méthode Géométrique

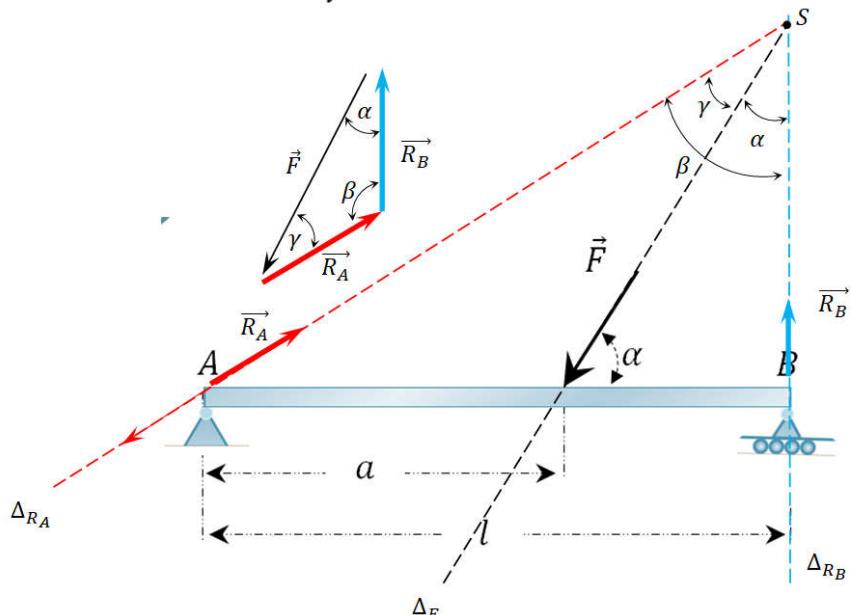


Figure 3.19 : Principe de la méthode géométrique

Selon le triangle des forces le **Loi de sinus** devient :

$$\frac{R_A}{\sin(\alpha)} = \frac{F}{\sin(\beta)} = \frac{R_B}{\sin(\gamma)}$$

Donc les inconnues de l'**application** sont :

$$\begin{cases} R_A = F \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \\ R_B = F \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} \end{cases}$$

Par la suite on passe à la détermination des angles β, γ et δ .

On a :

$$\beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

❖ La Méthode Analytique

Tout d'abord il faut identifier toutes les forces agissant sur ce corps, ainsi que les réactions exercées sur le corps ($\alpha = 45^\circ$).

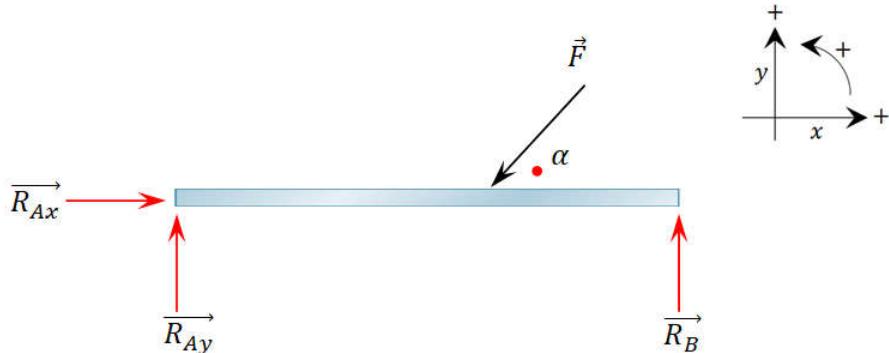


Figure 3.20 : Principe de la méthode Analytique

Selon le principe de cette méthode :

1^{ere} condition d'EQUILIBRE d'un solide :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{R_{Ax}} + \overrightarrow{R_{Ay}} + \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{F} = \vec{0}$$

2^{eme} condition d'EQUILIBRE d'un solide

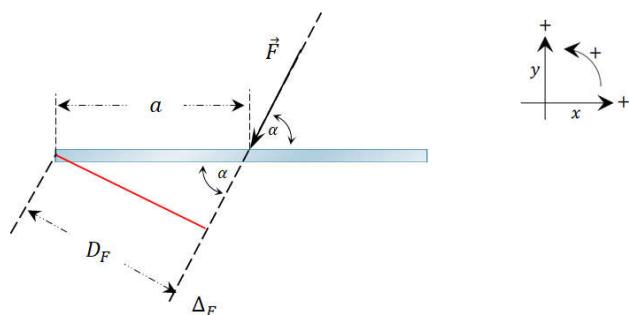
$$\sum \overrightarrow{M_{\cdot A}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_{RAx}} + \overrightarrow{M_{RAy}} + \overrightarrow{M_{RB}} + \overrightarrow{M_F} = \vec{0}$$

Donc la projection de ces équations est illustrée ci-dessous.

	\vec{R}_{Ax}	\vec{R}_{Ay}	\vec{R}_B	\vec{F}
$\sum x \rightarrow +$	$+R_{Ax}$	0	0	$-FCos(\alpha)$
$\sum y \uparrow +$	0	$+R_{Ay}$	$+R_B$	$-FSin(\alpha)$
$\sum M_{\cdot A} \circlearrowleft +$	0	0	$+l \times R_B$	$-a \times F$

Pour mieux comprendre comment calcule le moment de la force F:

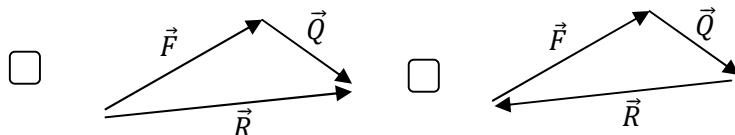




Série de TD n° 3^A

La Statique

triangle des forces est de la forme suivante :



- ☺ L'appui simple représenté par :
 - 1 inconnue dans les équations d'équilibre
 - 2 inconnues dans les équations d'équilibre
- ☺ L'appui double ou bien fixe représenté par :
 - 1 inconnue dans les équations d'équilibre
 - 2 inconnues dans les équations d'équilibre
- ☺ L'encastrement représenté par
 - 3 inconnues dans les équations d'équilibre
 - 2 inconnues dans les équations d'équilibre

Exercice 3^A.1

Déterminer la force (R_h) de contact à \mathbf{h} en fonction du poids de la sphère et de l'angle α (poids \mathbf{P} , rayon \mathbf{r}).

Exercice 3^A.2

Une sphère lisse S_1 (poids $\mathbf{P} = 20 \text{ N}$, rayon $r = 20\text{cm}$) est suspendue par un fil de longueur $a = 60 \text{ cm}$, comme indiqué sur la Figure. 3^A.2.

Déterminer par la méthode géométrique la tension dans le fil.

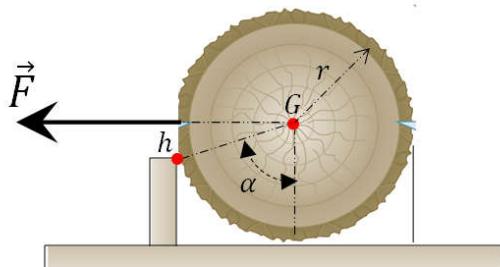


Figure 3^A.1. Une sphère

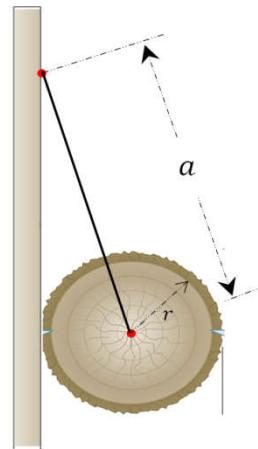


Figure 3^A.2. Une sphère lisse

Exercice 3^A.3

Une barre de longueur $l = \sqrt{2} r$ à l'intérieur d'une coque sphérique lisse de rayon r (figure 3^A.3), la barre est attachée à un poids P .

Calculer par la méthode géométrique les forces de contact à R_A et R_B .

Déterminer la distance x pour maintenir la barre à l'état d'équilibre.

Sachant que : l'angle $\alpha = 15$ et le poids du faisceau est négligeable.

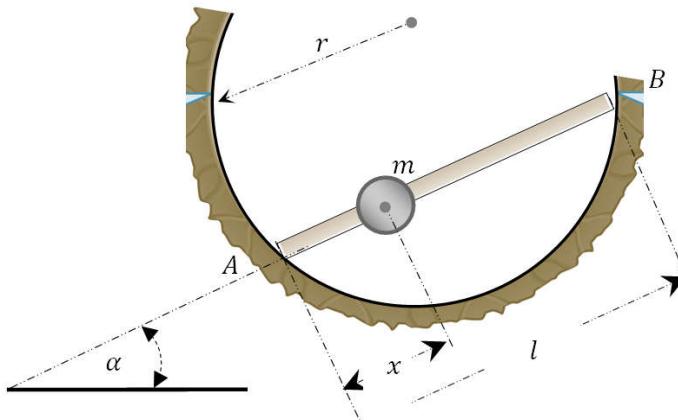


Figure 3^A.3.

Exercice 3^A.4

Une barre homogène de longueur $4a$ et de poids P est suspendue en C par un câble. La barre est en contact avec les deux murs en A et B (figure 3^A.4).

☞ Trouver la tension du câble et les réactions en A et B.

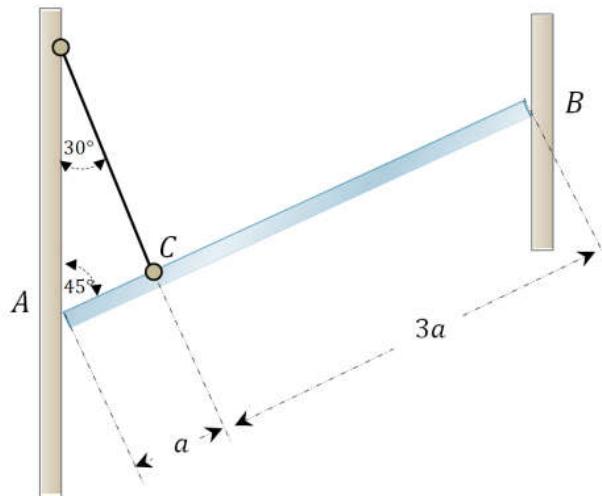


Figure 3^A.4.

Exercice 3^A.5

Une poutre homogène de longueur $4a$ et de poids P dénitrée dans l'ouverture voir Figure. 3^A.5.

☞ Déterminer l'intensité de la force F pour maintenir la poutre à l'état d'équilibre.

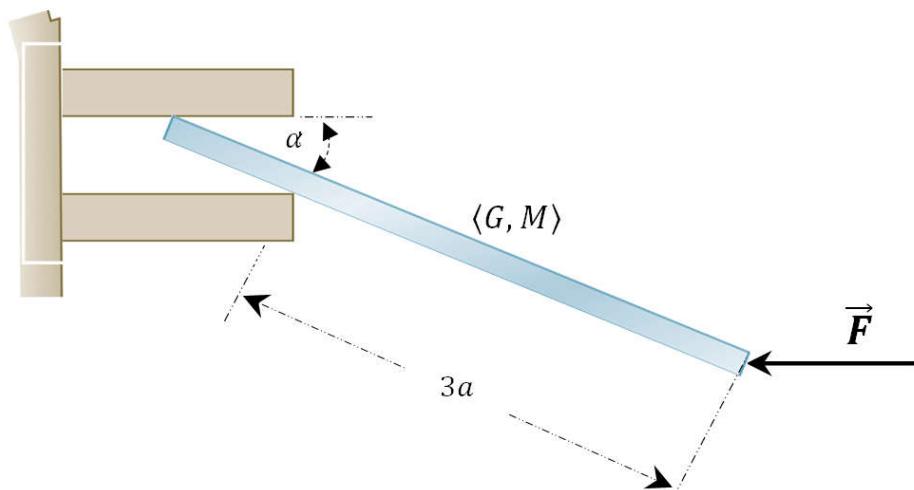


Figure 3^A.5.

Exercice 3^A.6

Une barre de longueur l soumise à une force \vec{F} verticale (figure 3^A.6) exerce une force de contact sur un cylindre (rayon r , poids \mathbf{P}).

 Déterminer la force de contact entre le cylindre et le sol

Sachant que : Le poids de la barre est négligeable.

Toutes les surfaces sont lisses.

La hauteur h est égale au rayon r du cylindre.

La force F est égale 100 N.

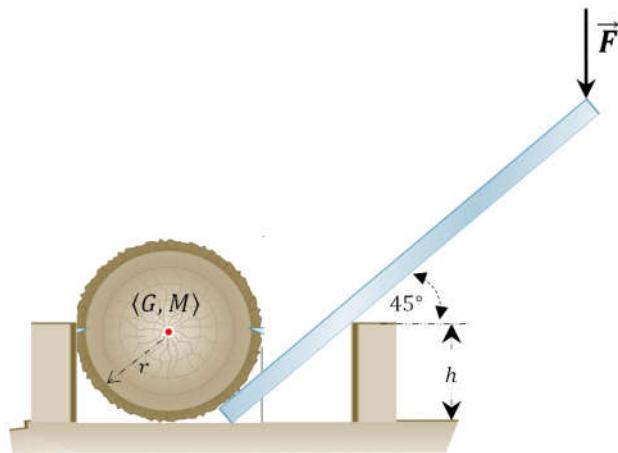


Figure 3^A.6.

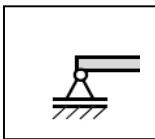


Série de TD n° 3^B
La
Statique

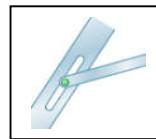
Question 3^B.1

☺ Schématiser la/les réaction(s) dans chaque cas :

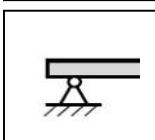
a).



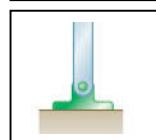
b).



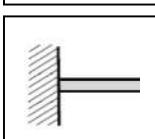
c).



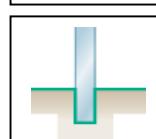
d).



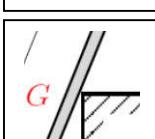
e).



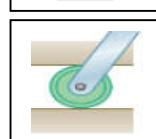
f).



g).



h).



Exercice 3^B.1

Etablir les équations d'équilibre dans les deux figures :

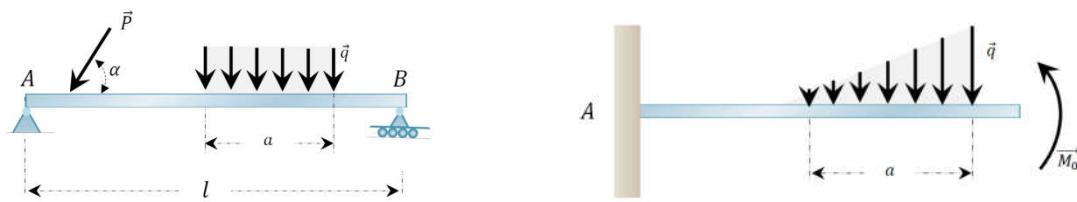


Figure 3^B.1.

Exercice 3^B.2

Déterminer les réactions en A et B dans les deux figures, par deux méthodes (Analytique et géométrique).

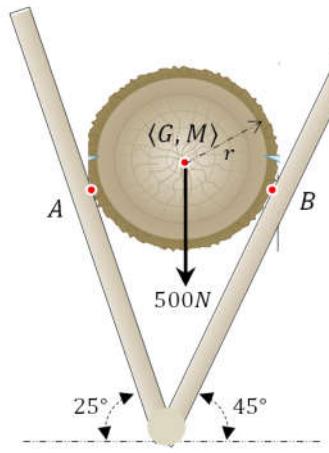


Figure 3^B.2.1.

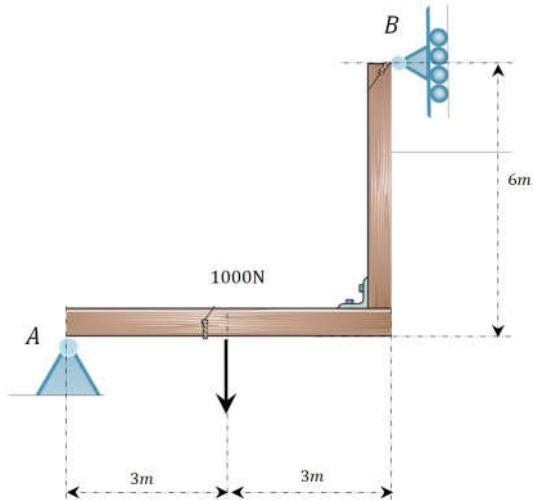


Figure 3^B.2.2.

Exercice 3^B.3

Une barre homogène de longueur l et de poids $P = 80 \text{ N}$ est liée à un mur par l'articulation **A**, et suspendue à l'autre extrémité **B** par un câble. Le câble fait un angle de 30° avec la barre voir Figure. 3^B.3 ($\theta = 120^\circ$).

Déterminer par la méthode géométrique la tension dans le câble et la réaction au point **A**.

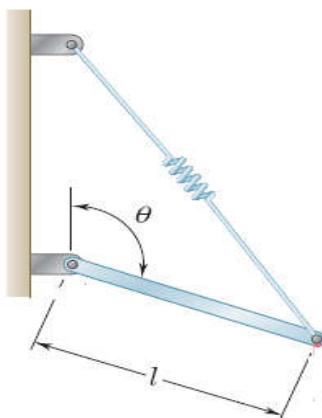


Figure 3^B.3.

Exercice 3^B.4

Une barre homogène de longueur $26a$ et de poids $P = 100 \text{ kN}$ est suspendue par trois câbles voir Figure. 3^B.4.

QUESTION Déterminer les tensions dans les câbles AB, CD et DE .

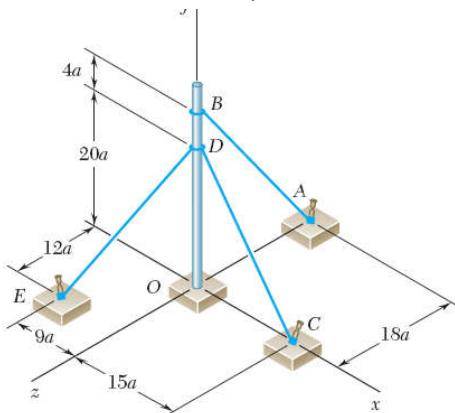


Figure 3^B.2.4.

Exercice 3^B.5 (cours)

La barre de longueur $3a$ est liée en B à un appui fixe et repose à son extrémité A sur un appui simple. Le poids de la barre est 50 N . (figure 3^A.5).

QUESTION Déterminer les réactions en A et B .

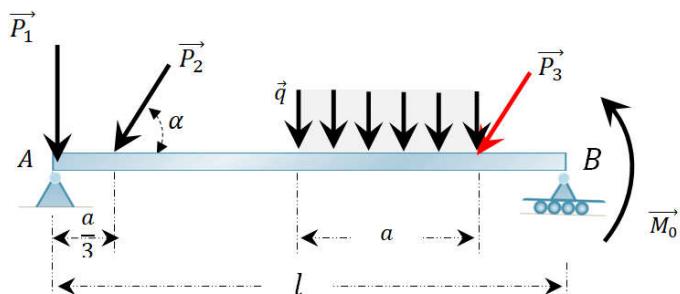


Figure 3^B.2.5.

Exercice 3^B.6

QUESTION Déterminer les réactions en A et B .

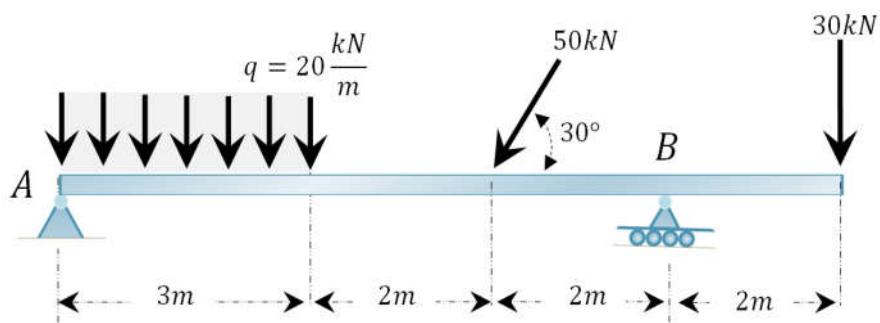


Figure 3^B.6

Exercice 3^B.7

Déterminer les réactions des appuis A, B et l'articulation C pour chaque figure.

Figure 3^B.7.1

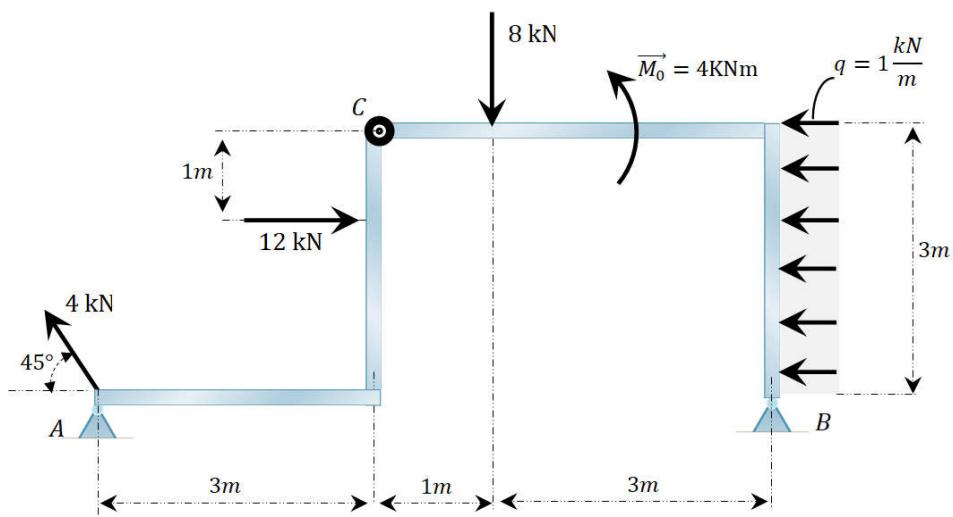


Figure 3^B.7.2

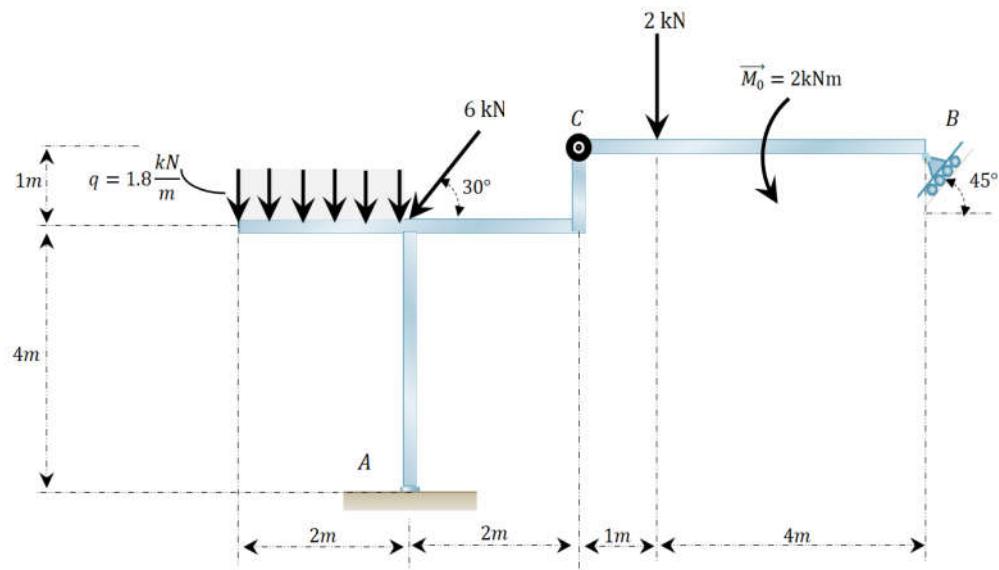


Figure 3^B.7.3

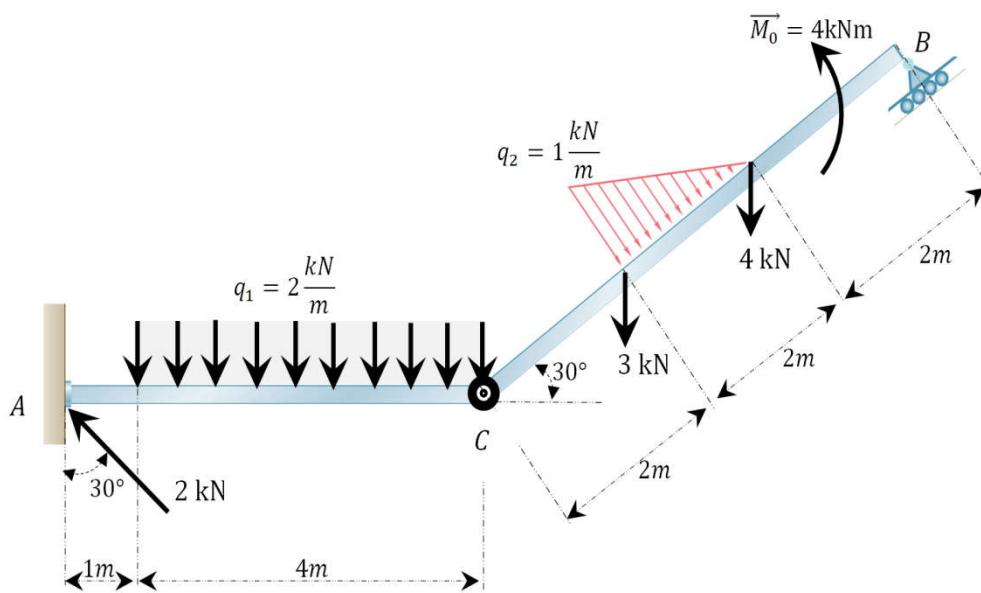
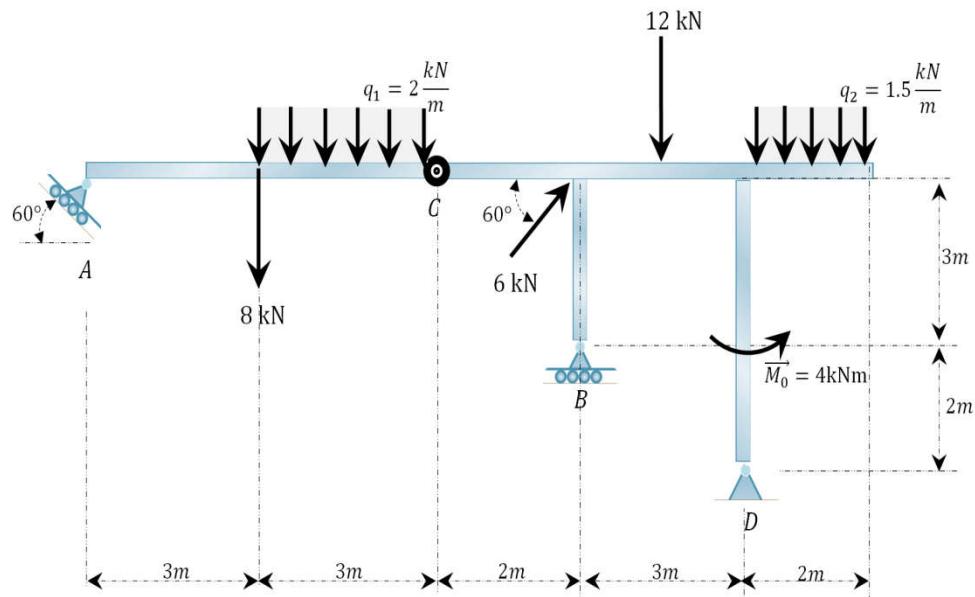
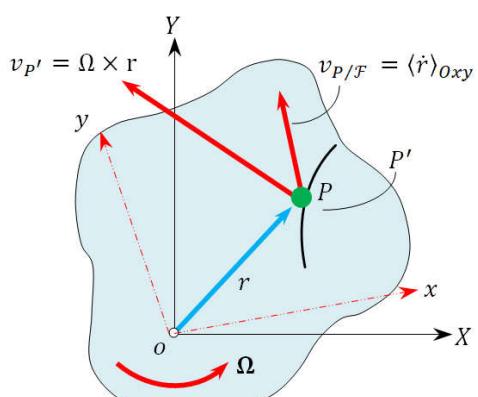
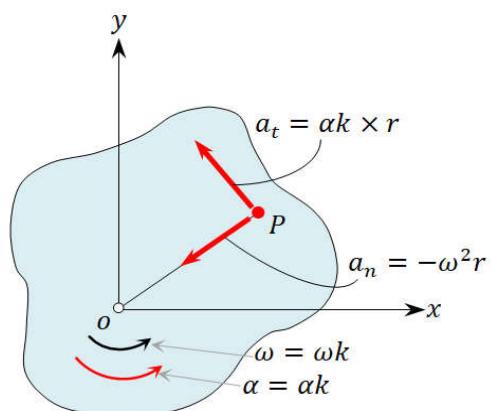
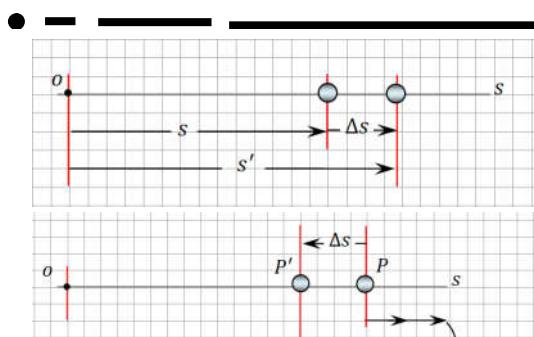


Figure 3B.7.4



Chapitre 4 :

Cinématique du Solide Rigide



La cinématique étudie le changement de position géométrique des corps dans le temps. Donc pour étudier la Cinématique des corps rigides, il faut identifier toutes les relations entre le temps et les positions, vitesses et accélérations des particules ou bien les corps rigides. Ces derniers seront l'objet de notre chapitre.

4.1 Rappels succinct sur les quantités cinématiques pour un point matériel

La cinématique d'une particule à un instant donné est caractérisé par : la position, de la vitesse et de l'accélération de la particule.

Soit M point matériel se déplace dans un repère fixe (x , y , z) Fig. (III.1) La position du point M dans ce repère $R(x, y, z)$ est définie par le vecteur de trajectoire à l'instant (t).

4.1.1 Position.

La trajectoire en ligne droite d'une particule sera définie à l'aide d'un seul axe de coordonnées x , Fig. 4.1. L'origine 0 sur le chemin est un point fixe, et à partir de ce point, la coordonnée de position s est utilisée pour spécifier l'emplacement de la particule à un instant donné t .

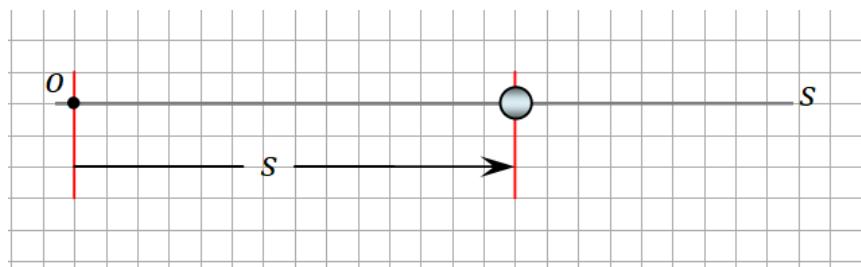


Figure 4.1 : La position

La magnitude de x est la distance entre 0 et la particule, généralement mesurée en mètres (m) ou en pieds.(ft), et le sens de la direction est défini par le signe algébrique sur s . Bien que le choix soit arbitraire,

Avec $:1m \rightarrow ft$

4.1.2 Déplacement.

Le déplacement de la particule est défini comme le changement de sa position. Par exemple, si la particule se déplace d'un point à un autre, Fig. 4.2,

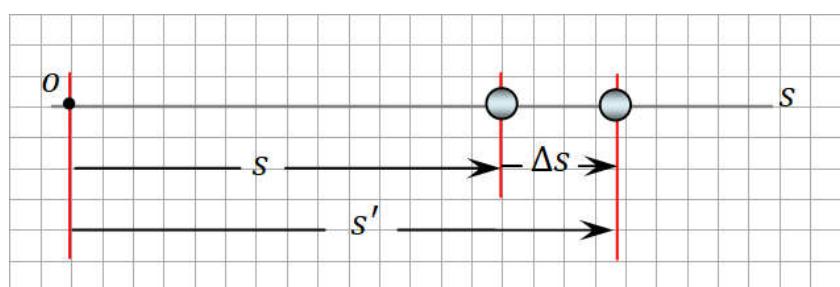


Figure 4.2 : Le déplacement

Le déplacement est

$$\Delta s = s' - s$$

Dans ce cas, Δx est positif puisque la position finale de la particule est à droite de sa position initiale, c'est-à-dire $s' > s$. De même, si la position finale était à gauche de sa position initiale, Δs serait négative.

Plus précisément, le déplacement d'une particule est également une quantité vectorielle, et elle doit être distinguée de la distance parcourue par la particule. c'est-à-dire, la distance parcourue est un scalaire positif qui représente la longueur totale du trajet parcouru par la particule.

4.1.3 Vitesse.

Si la particule se déplace selon un déplacement Δx pendant l'intervalle de temps Δt , la vitesse moyenne de la particule pendant cet intervalle de temps est :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

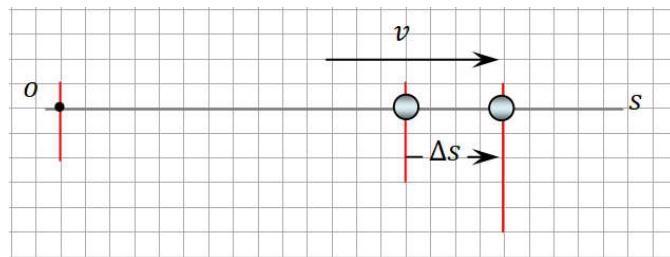


Figure 4.3 : La vitesse

La vitesse instantanée est un vecteur défini comme suite

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Donc

$$v = \frac{dx}{dt}_{\rightarrow +}$$

Comme Δt ou dt est toujours positif, le signe utilisé pour définir le sens de la vitesse est le même que celui de Δx ou dx . Par exemple, si la particule se déplace vers la droite, Fig. 4.3, la vitesse est positive ; alors que s'il se déplace vers la gauche, la vitesse est négative. L'amplitude de la vitesse est connue sous le nom de vitesse, et elle est généralement exprimée en unités de $\frac{m}{s}$ ou $\frac{ft}{s}$.

Parfois, le terme « vitesse moyenne » est utilisé. La vitesse moyenne est toujours un scalaire positif et est définie comme la distance totale parcourue par une particule, x_T , divisée par le temps écoulé Δt ; c'est à dire.,

$$v_{ST \text{ moy}} = \frac{x_T}{\Delta t}$$

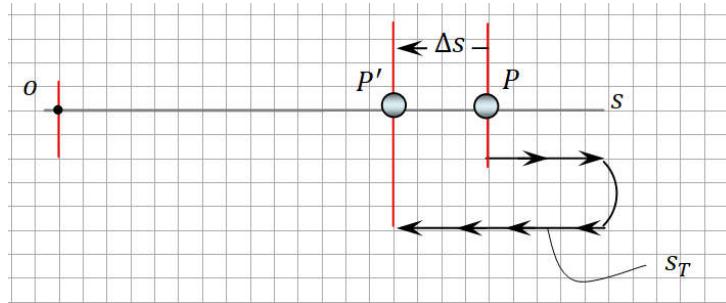


Figure 4.4 : La vitesse moyenne

Par exemple, la particule de la figure 4.4 se déplace le long du trajet de longueur s_T dans le temps Δt , donc sa vitesse moyenne est $v_{sT\ moy} = \frac{s_T}{\Delta t}$ lt, mais sa vitesse moyenne est

$$v_{moy} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

4.1.4 Accélération.

Dans la condition où la vitesse de la particule soit connue en deux points, l'accélération moyenne de la particule pendant l'intervalle de temps Δt est définie comme suite :

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Avec : $\Delta v \rightarrow$ représente la différence de vitesse pendant le temps intervalle Δt , c'est-à-dire $\Delta v = v' - v$, (Voir la Fig. 4.1).

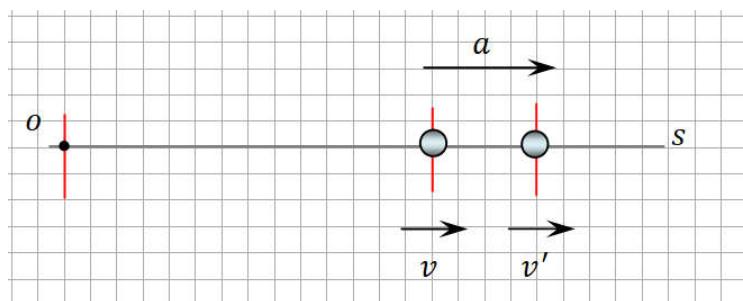


Figure 4.5 : l'accélération

L'accélération instantanée au temps t est un vecteur trouvé en prenant des valeurs de plus en plus petites de Δt et des valeurs correspondantes de plus en plus petites de Δv , de sorte que :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ou

$$a = \frac{dv}{dt}_{\rightarrow +}$$

L'accélération moyenne et instantanée peut être positive ou négative. En particulier, lorsque la particule ralentit ou que sa vitesse diminue, on dit que la particule décélère. Dans ce cas, v'

sur la figure 4.6 est inférieur à v , et donc $\Delta v = v' - v$ sera négatif. Par conséquent, a sera également négatif, et donc il agira vers la gauche, dans le sens opposé à v .

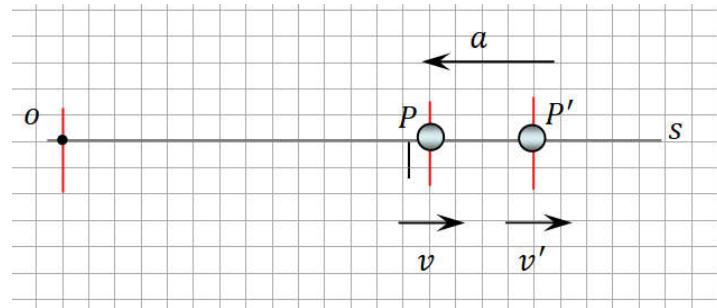


Figure 4.6 : L'accélération moyenne

On constate également que lorsque la vitesse est constante, l'accélération est nulle puisque $\Delta v = v - v = 0$. Les unités couramment utilisées pour exprimer l'ampleur de l'accélération sont $\frac{m}{s^2}$ ou $\frac{ft}{s^2}$

☞ Accélération constante $a = a_c$. Lorsque l'accélération est constante, chacune des trois équations cinématiques $a_c = dv/dt$, $v = ds/dt$ et $a_c \cdot ds = v dv$ peut être intégrée pour obtenir des formules qui relient a_c , v , s .

☞ Vitesse en fonction du temps. On Intégré $a_c = dv/dt$, en supposant qu'initialement $v = v_a$ lorsque $t = 0$.

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_c dt$$

$$v = v_0 + a_c t \rightarrow +$$

☞ Position en fonction du temps. On Intégré $v = ds/dt = v_0 + a_c t$ en supposant qu'initialement $s = s_o$ quand $t = 0$.

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_c t) dt$$

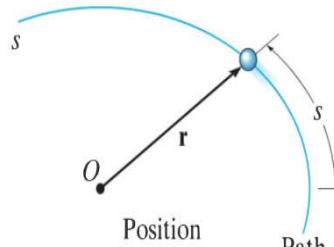
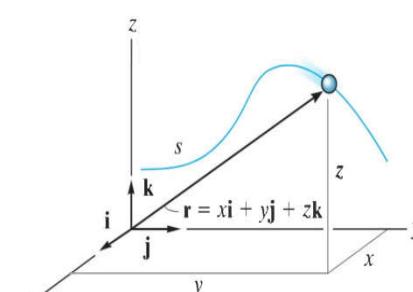
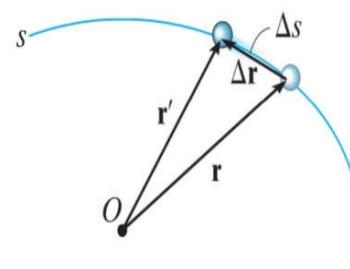
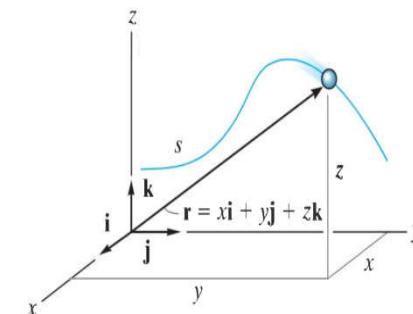
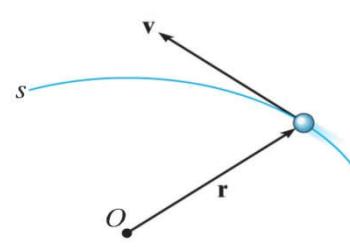
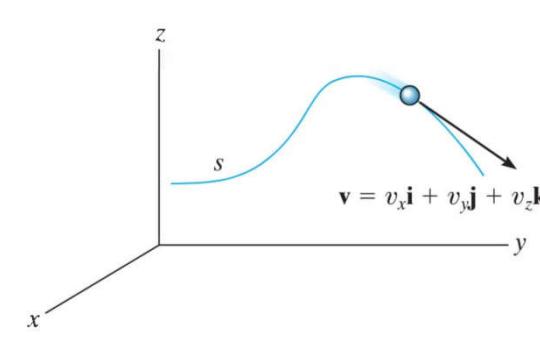
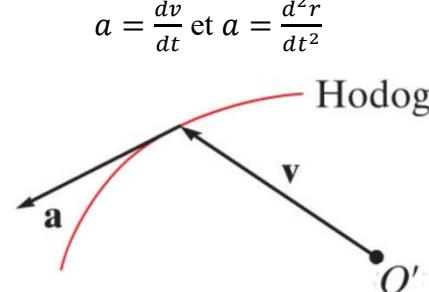
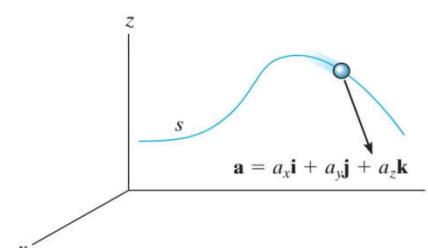
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \rightarrow +$$

☞ Vitesse en fonction de la position. On Intégré $v dv = a_c ds$, en supposant qu'initialement $v = v_0$ à $s = s_o$.

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s a_c ds$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \rightarrow +$$

Et pour mieux comprendre

	Mouvement curviligne général	Mouvement curviligne : rectangulaire Composants
Position.	$r = r(t)$  <p>Position Path</p>	$r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 
Déplacement	$r' = r + \Delta r$ 	$\Delta r = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$ 
vitesse.	$v = \frac{dr}{dt}$ 	$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ 
Accélération.	$a = \frac{dv}{dt}$ et $a = \frac{d^2r}{dt^2}$  <p>Hodog</p>	$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$ 
	Figure 4.7 : Mouvement curviligne en 2D	Figure 4.8 : Mouvement curviligne en 3D

Exemple 4.1

Une particule métallique est soumise à l'influence d'un champ magnétique lorsqu'elle se déplace vers le bas à travers un fluide qui s'étend de la plaque A à la plaque B , Figure. 4.9. Si la particule est libérée du repos au point médian C , $s = 100$ mm et que l'accélération est $a = (4s) \text{ m/s}^2$, où s est en mètres,

- ☞ Déterminer la vitesse de la particule lorsqu'elle atteint la plaque B , $s = 200$ mm. ,et le temps qu'il faut pour voyager de C à B .

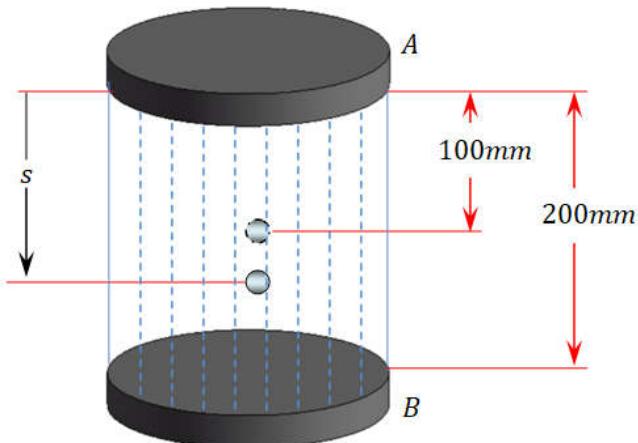
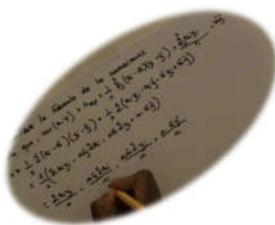


Figure 4.9 : Un système particule-deux plaques



Exemple 4.2

Une bicyclette se déplace le long d'une route rectiligne de telle sorte que sa position est décrite par le graphique représenté sur la figure 4.10.

☞ Construire les graphiques $\langle v - t \rangle$ et $\langle a - t \rangle$ pour $0 \leq t \leq 30 s$.

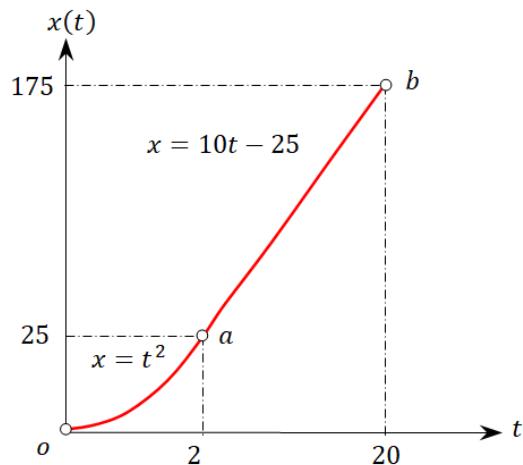
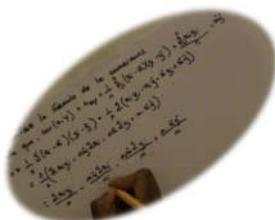


Figure 4.10 : Le déplace d'une bicyclette



Exemple 4.3

La position horizontale du ballon météo sur la Figure 4.11 est définie par $x = (8t)ft$, où t est en secondes. Si l'équation du chemin est $y = x^2/10$,

- ☞ déterminer l'amplitude et la direction de la vitesse et de l'accélération lorsque $t = 2 s$.

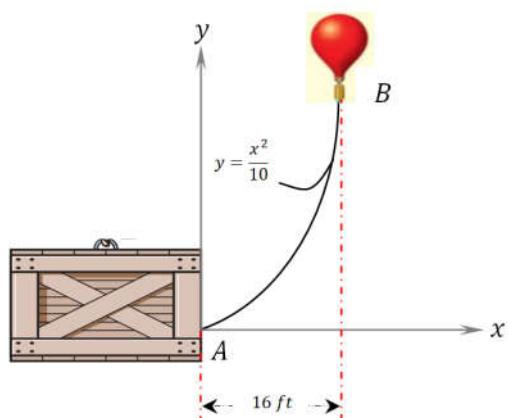
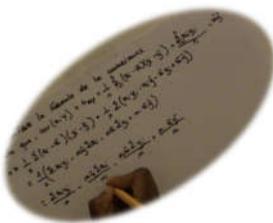


Figure 4.11 : Ballon météo



4.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Considérons la rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe AA'

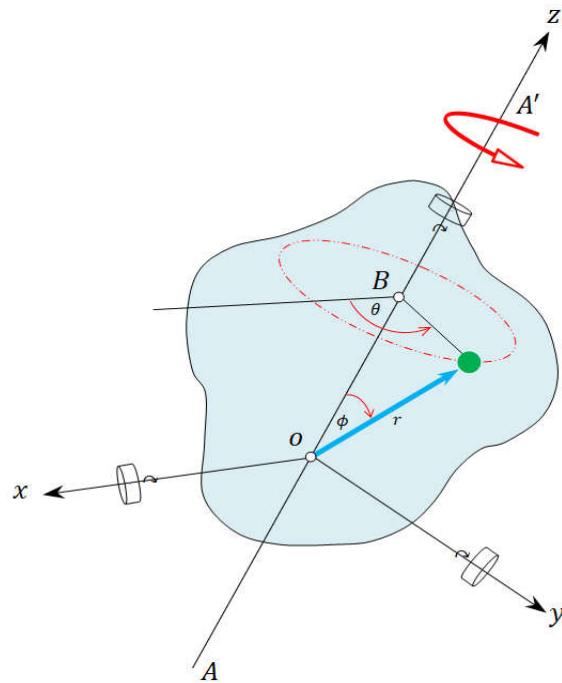


Figure 4.12 : La rotation d'un corps rigide autour d'un axe

4.2.1 Position.

La position de la particule P est définie par le vecteur de position

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

4.2.2 Déplacement.

Le déplacement de la particule est défini comme le changement de sa position.

$$\Delta s = BP\Delta\theta = rsin\varphi\Delta\theta$$

4.2.3 Vitesse.

Le vecteur vitesse \vec{v} de la particule P est tangent au chemin avec magnitude $v = ds/dt$

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (rsin\varphi) \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\dot{\theta}sin\varphi$$

$$v = \dot{r} = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_r$$

La vitesse peut s'écrire sous forme suivante

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

le terme $\omega = d\theta/dt$ est appelé vitesse angulaire, car il indique le taux de variation temporelle de l'angle θ . Les unités de θ est donnée par rad/s.

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\theta} \vec{k}$$

Les vecteurs vitesse tangentielle v et vitesse angulaire ω sont illustré dans la figure 4.13

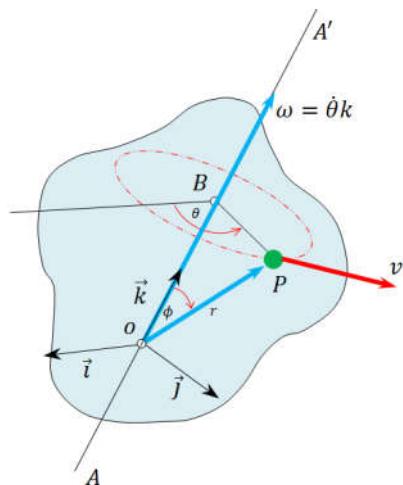


Figure 4.13 : Les vecteurs vitesses

4.2.4 Accélération.

L'accélération est définie comme suite :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}\end{aligned}$$

Le terme $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ est appelé accélération angulaire. Les unités de θ est donnée par rad/s .

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \vec{k} = \dot{\omega} \vec{k} = \ddot{\theta} \vec{k}$$

L'accélération de P est une combinaison de deux vecteurs, l'un est composante d'accélération tangentielle et l'autre est composante d'accélération radiale.

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Composante d'accélération tangentielle

$$\vec{\alpha} \times \vec{r}$$

Composante d'accélération radiale

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

4.3. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe présentation en 2D

Considérons le mouvement d'une plaque représentative dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation dans la Figure 4.14.

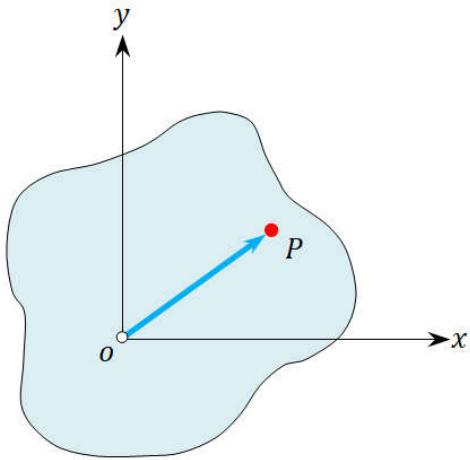


Figure 4.14 : Présentation en 2D d'un Mouvement de rotation autour d'un axe fixe
La vitesse de tout point P de la plaque est donné par

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{k} \times \vec{r}$$

$$v = \omega \times r$$

Le vecteur vitesse \vec{v} de la particule P est illustré dans la figure 4.14

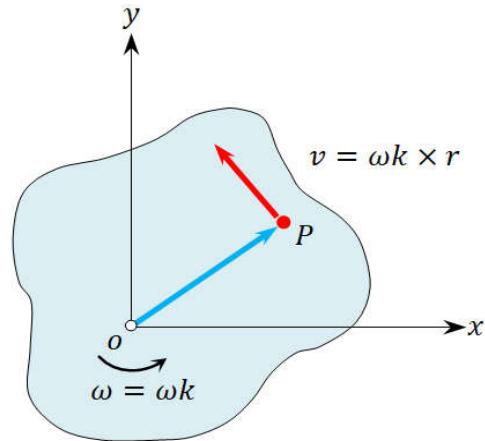


Figure 4.13 : Présentation du vecteur vitesse \vec{v} en 2D
Ainsi que l' accélération de tout point P de la plaque est donné par

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \alpha \vec{k} \times \vec{r} - \omega^2 \times \vec{r}$$

Les deux vecteurs accélération \vec{a}_t et \vec{a}_n de la particule P est illustré dans la figure 4.15

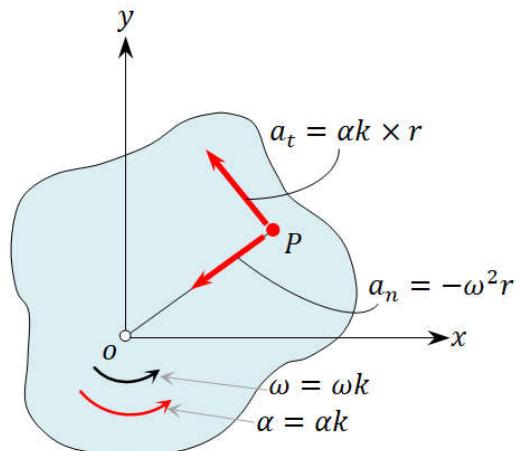


Figure 4.15 : Présentation de deux vecteurs accélération \vec{a}_t et \vec{a}_n en 2D

Les deux composantes de l'accélération tangentielle et normales sont données par :

Composante tangentielle

$$\vec{a}_t = \alpha \vec{k} \times \vec{r}$$

$$a_t = r\alpha$$

Composante normale

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \times \vec{r}$$

$$a_n = r\omega^2$$

Le mouvement d'un corps rigide qui tourne autour d'un axe fixe est souvent spécifié par le type d'accélération angulaire.

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\theta}{dt} \\ dt &= \frac{d\theta}{\omega} \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}\end{aligned}$$

Dans le cas de rotation uniforme, $\alpha = 0$:

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Dans le cas de rotation uniformément accélérée, $\alpha = \text{constante}$:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)\end{aligned}$$

Application 4.4 :

- ☞ Déterminer l'accélération a du solide (S) et la tension du fil ou cours du mouvement du système.
- ☞ Quelle est la vitesse angulaire du cylindre lorsque le solide parcourt une altitude $h = 5m$

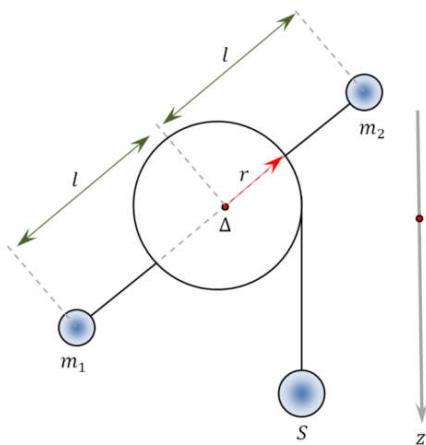
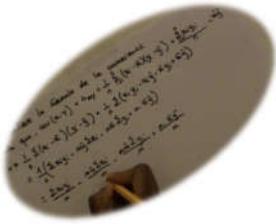


Figure 4.16 système mécanique



4.4. Mouvement plan

Le mouvement général du plan n'est ni une translation ni une rotation.

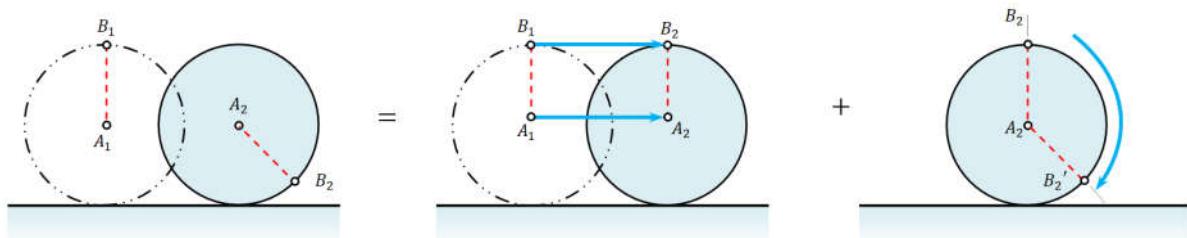


Figure 4.17 : Un mouvement général

Mais le mouvement général du plan peut être considéré comme la somme d'une translation et d'une rotation.

Le déplacement des particules A et B vers A_2 et B_2 peut être divisé en deux parties :

- ☞ Translation en $A_1 \rightarrow A_2$ et $B_1 \rightarrow B_2$
- ☞ Rotation d'environ B_2 vers B_2'

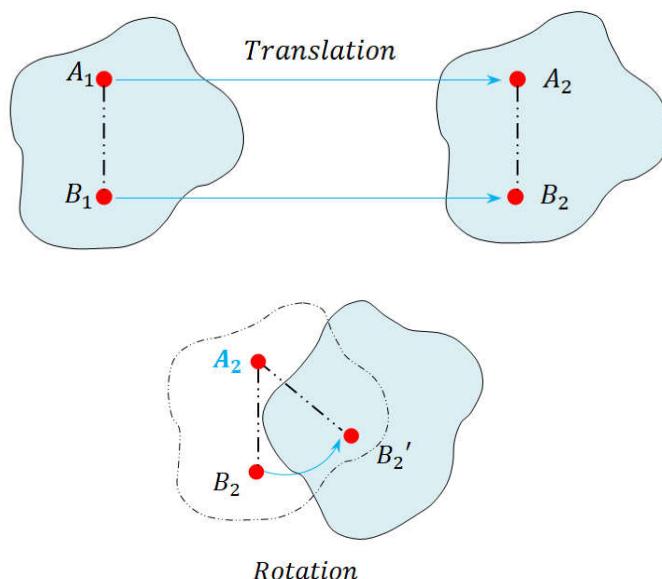


Figure 4.18 : Un mouvement combine

4.4.1 Vitesse absolue et relative dans le mouvement plan

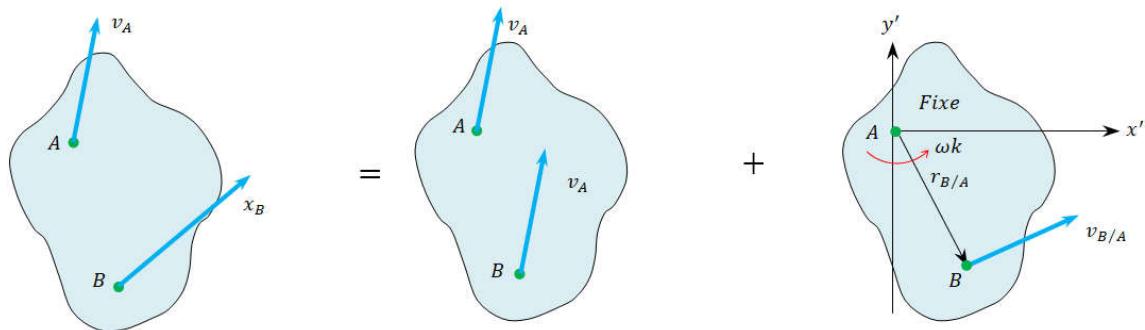
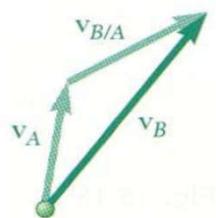


Figure 4.19 : Vitesse absolue et relative

Tout mouvement plan peut être remplacé par une translation d'un point de référence arbitraire (A) et une rotation simultanée autour de (A)



$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \\ \vec{v}_{B/A} &= \omega \vec{k} \times \vec{r}_{B/A} \\ v_{B/A} &= r\omega \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \omega \vec{k} \times \vec{r}_{B/A}\end{aligned}$$

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

Figure 4.20 : Le diagramme de vitesse

1^{er} Cas (Le point A comme point de référence)

En supposant que la vitesse v_A de l'extrémité A est connue, souhaitez déterminer la vitesse v_B de l'extrémité B et la vitesse angulaire ω en termes de v_A , l et θ .

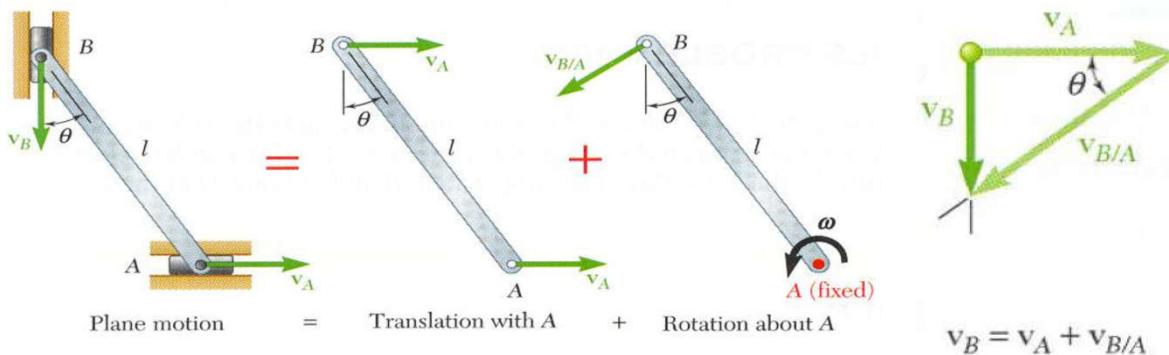


Figure 4.21 : Le diagramme de vitesse

Les directions de v_B et $v_{B/A}$ sont connues. Compléter le diagramme de vitesse.

$$\begin{aligned}\frac{v_B}{v_A} &= \tan \theta \\ v_B &= v_A \tan \theta \\ \frac{v_A}{v_{B/A}} &= \frac{v_A}{l \omega} = \cos \theta \\ \omega &= \frac{v_A}{l \cos \theta}\end{aligned}$$

2^{eme} Cas (Le point B comme point de référence)

La sélection du point B comme point de référence et la résolution de la vitesse v_A de l'extrémité A et de la vitesse angulaire ω conduisent à un triangle de vitesse équivalent.

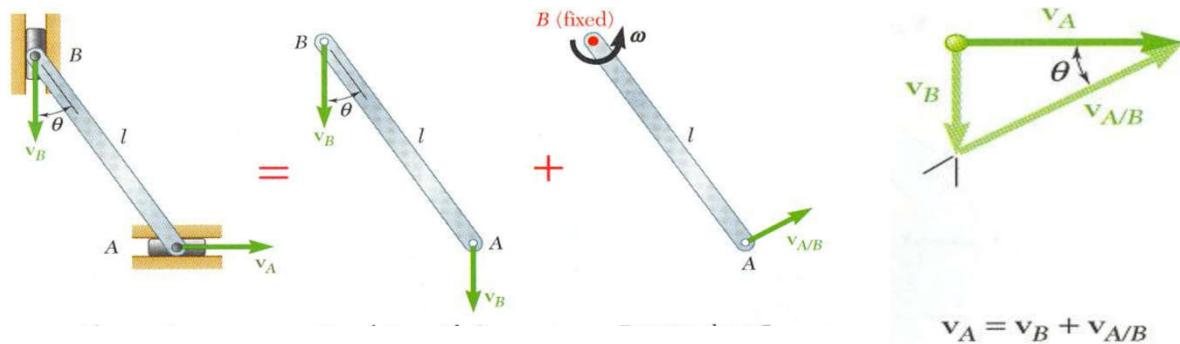


Figure 4.22 : Le diagramme de vitesse

$v_{A/B}$ et $v_{B/A}$ ont la même amplitudes mais le sens opposé de ($v_{B/A}$). Le sens de la vitesse relative dépend du choix du point de référence.

Par contre la vitesse angulaire ne dépend pas du choix du point de référence.

4.4.2 Centre de rotation instantané dans un mouvement plan

Soit les trois figures suivantes

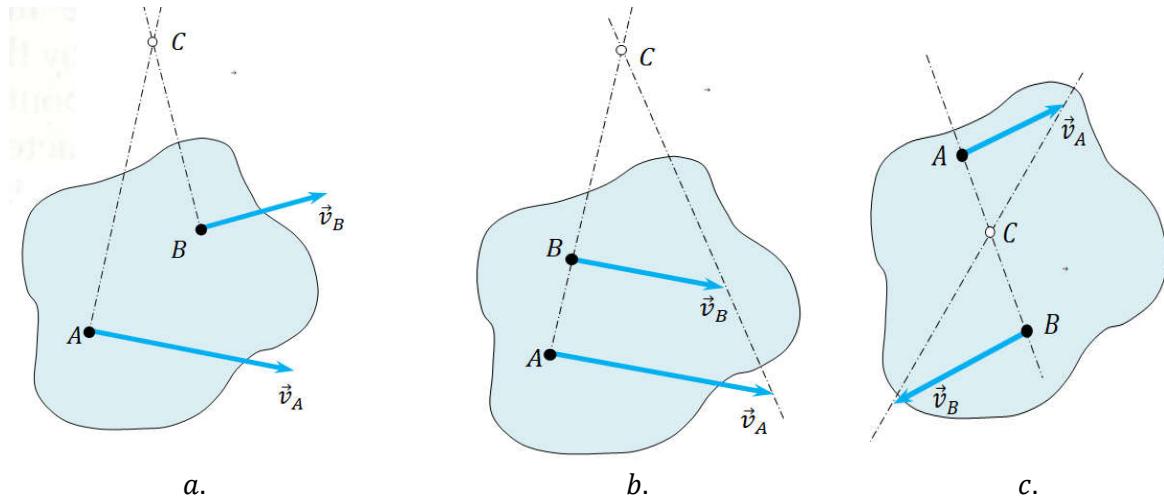


Figure 4.23 :Centre de rotation

➤ Dans le cas où la vitesse en deux points $\langle A \rangle$ et $\langle B \rangle$ est connue, Le centre de rotation instantané se situe à l'intersection de perpendiculaires aux vecteurs vitesse passant par $\langle A \rangle$ et $\langle B \rangle$.

➤ Dans le cas où les vecteurs vitesse en $\langle A \rangle$ et $\langle B \rangle$ sont perpendiculaires au droite $\langle AB \rangle$, le centre instantané de rotation se situe au intersection de la droite AB avec la droite joignant le extrémités des vecteurs vitesse en $\langle A \rangle$ et $\langle B \rangle$.

➤ Dans le cas où les vecteurs vitesses sont parallèles, le centre instantané de rotation est à l'infini et la vitesse angulaire est nulle.

- Dans le cas où les grandeurs de vitesse sont égales, le centre de rotation instantané est à l'infini et la vitesse angulaire est nulle.
- Le centre instantané de rotation se situe à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs vitesses passant par $\langle A \rangle$ et $\langle B \rangle$.

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \cos \theta}$$

$$v_B = BC\omega = (l \sin \theta) \frac{v_A}{l \cos \theta}$$

$$v_B = v_A \tan \theta$$

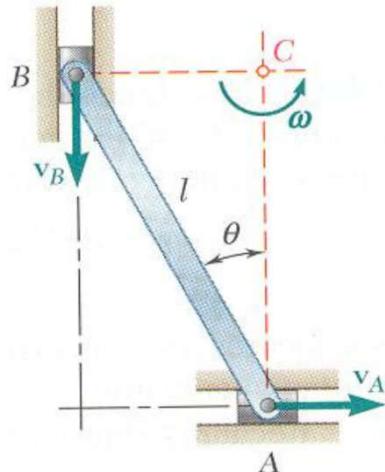


Figure 4.24 : Le centre instantané de rotation

- On constate que les vitesses de toutes les particules sur la tige sont comme si elles tournaient autour de $\langle C \rangle$.
- La particule au centre de rotation a une vitesse nulle.
- La particule coïncidant avec le centre de rotation change avec le temps et l'accélération de la particule au centre de rotation instantané n'est pas nulle.
- L'accélération des particules dans la plaque ne peut pas être déterminée comme si la plaque tournait simplement autour de $\langle C \rangle$.

4.4.3 Accélération absolue et relative dans le mouvement plan

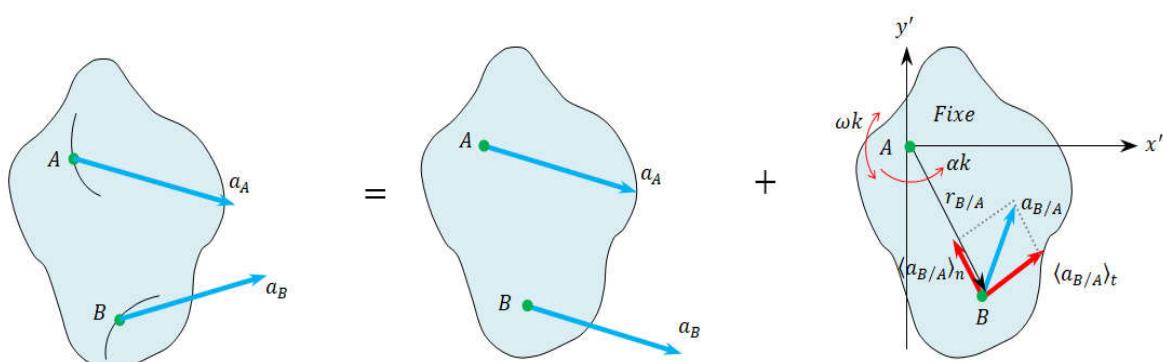


Figure 4.25 : Accélération absolue et relative

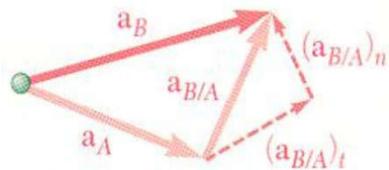


Figure 4.26 : Le diagramme de l'accélération

Accélération absolue d'une particule de la plaque est donne par,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

L'accélération relative $\vec{a}_{B/A}$ associée à la rotation autour de point $\langle A \rangle$, Ainsi que les composantes tangentielles $\langle \bullet \rangle_t$ et normales $\langle \bullet \rangle_n$,

Composante tangentielle	Composante normale
$\langle \vec{a}_{B/A} \rangle_t = \alpha \vec{k} \times \vec{r}_{B/A}$	$\langle \vec{a}_{B/A} \rangle_n = -\omega^2 \times \vec{r}_{B/A}$
$\langle a_{B/A} \rangle_t = \alpha \times r$	$\langle a_{B/A} \rangle_n = r \times \omega^2$

Pour mieux comprendre, soit l'exemple suivant

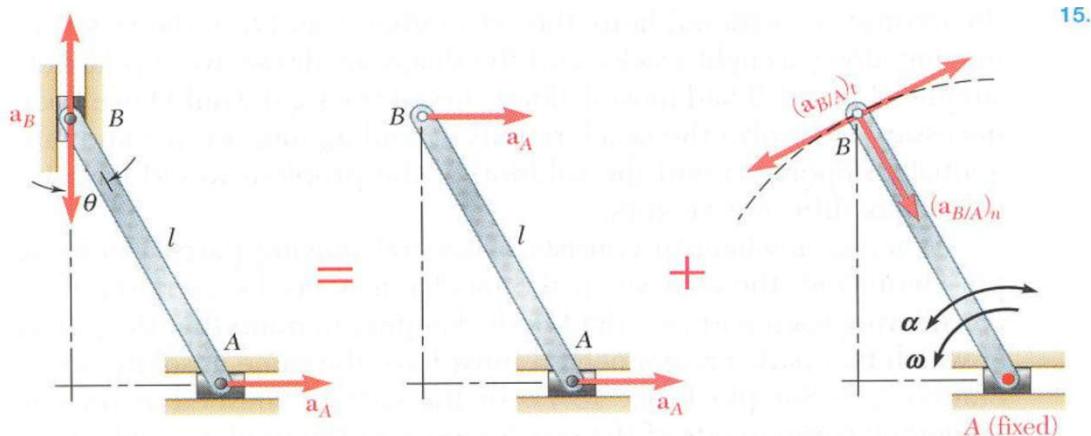


Figure 4.27. : Le diagramme de l'accélération

En supposant que la vitesse v_A et a_A sont connue, donc l'accélération devient comme suite

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \langle \vec{a}_{B/A} \rangle_n + \langle \vec{a}_{B/A} \rangle_t\end{aligned}$$

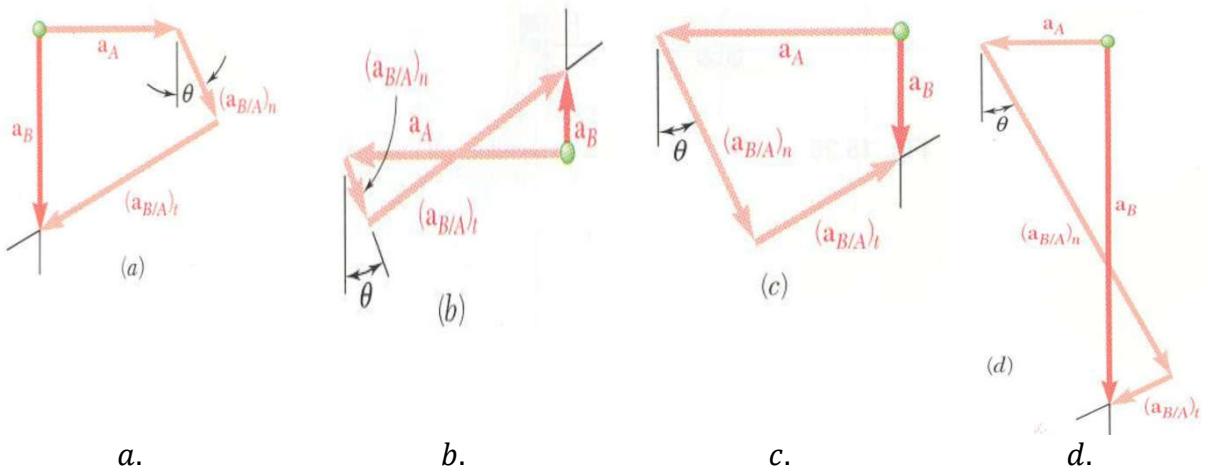


Figure 4.28 : Le diagramme de l'accélération

Le résultat vectoriel dépend du sens \vec{a}_A et des magnitudes relatives de a_A et $(a_{B/A})_n$
Doit également connaître la vitesse angulaire $\langle \omega \rangle$

Par la suite on déterminera les composantes de $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$ selon $\langle ox \rangle$ et $\langle oy \rangle$,

$$0 = a_A + l\omega^2 \sin\theta - l\alpha \cos\theta \quad \stackrel{+}{\rightarrow} \text{Composante } \langle x \rangle$$

$$-a_B = -l\omega^2 \cos\theta - l\alpha \sin\theta \quad \stackrel{+}{\uparrow} \text{Composante } \langle y \rangle$$

Dans ce qui suit, il est très important de trouver les values de a_A et α par la résolution de ce système des équations

Dans certains cas, il est avantageux de déterminer directement la vitesse absolue et l'accélération d'un mécanisme ou bien Solide Rigide par la façon suivante.

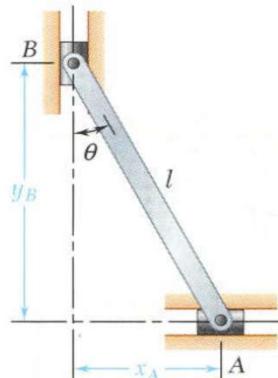


Figure 4.29 : Un mécanisme

- Selon l' axe de $\langle Ox \rangle$

La position	La vitesse	L'accélération
$x_A = l \sin\theta$	$v_A = \dot{x}_A$ $v_A = l\dot{\theta} \cos\theta$ $v_A = l\omega \cos\theta$	$a_A = \ddot{x}_A$ $a_A = -l\dot{\theta}^2 \sin\theta + l\ddot{\theta} \cos\theta$ $a_A = -l\omega^2 \sin\theta + l\alpha \cos\theta$

- Selon l' axe de $\langle Oy \rangle$

La position	La vitesse	L'accélération
$x_B = l \cos\theta$	$v_B = \dot{x}_B$ $v_B = -l\dot{\theta} \sin\theta$ $v_B = -l\omega \sin\theta$	$a_B = \ddot{x}_B$ $a_B = -l\dot{\theta}^2 \cos\theta - l\ddot{\theta} \sin\theta$ $a_B = -l\omega^2 \cos\theta - l\alpha \sin\theta$

4.5. Mouvement composite

Le mouvement arbitraire d'un corps rigide rencontré dans un environnement réel ou bien artificiel est composé d'une série de quatre mouvements instantanés de base de ce corps.

Laisser un corps rigide en mouvement par rapport au système de coordonnées $\langle Oxyz \rangle$. Puis, laissez ce système se déplacer par rapport au système absolu $\langle OXYZ \rangle$.

Le système de coordonnées $\langle Oxyz \rangle$ tourne autour de l'axe fixe $\langle OA \rangle$ avec la vitesse angulaire $\langle \Omega \rangle$

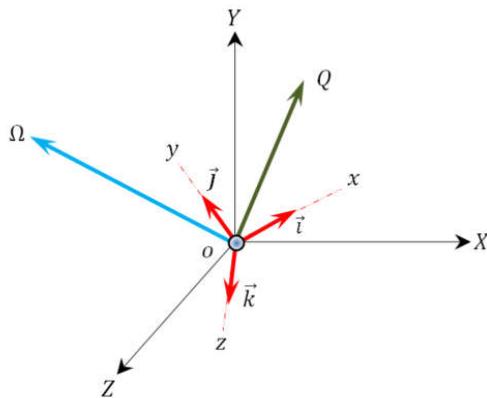


Figure 4.30 : Le système de coordonnées

Le vecteur $\langle Q \rangle$

$$\langle Q \rangle = Q_x \times \vec{i} + Q_y \times \vec{j} + Q_z \times \vec{k}$$

Différencier de $\langle Q \rangle$ par rapport à t :

$$\langle \dot{Q} \rangle = \dot{Q}_x \times \vec{i} + \dot{Q}_y \times \vec{j} + \dot{Q}_z \times \vec{k}$$

Pour obtenir le taux de changement de Q par rapport au repère fixe $OXYZ$, nous devons considérer les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ comme variables. Nous écrivons donc

$$\langle \dot{Q} \rangle_{OXYZ} = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k} + Q_x \times \frac{d\vec{i}}{dt} + Q_y \times \frac{d\vec{j}}{dt} + Q_z \times \frac{d\vec{k}}{dt}$$

La somme des trois premiers termes du membre de droite de représente le taux de changement $(\dot{Q})_{Oxyz}$. d'autre part, le taux de variation $(\dot{Q})_{OXYZ}$ se réduirait aux trois derniers termes si le vecteur Q était fixé dans le repère $Oxyz$, puisque $(\dot{Q})_{OXYZ}$ serait alors nul .

$$\Omega \times Q = Q_x \times \frac{d\vec{i}}{dt} + Q_y \times \frac{d\vec{j}}{dt} + Q_z \times \frac{d\vec{k}}{dt}$$

On obtient la relation fondamentale

$$\langle \dot{Q} \rangle_{oXYZ} = \langle \dot{Q} \rangle_{oxyz} + \Omega \times Q$$

Le taux de changement du vecteur $\langle \dot{Q} \rangle$ par rapport au référentiel fixe $\langle OXYZ \rangle$ est composé de deux parties : La première partie représente le taux de changement de $\langle \dot{Q} \rangle$ par rapport au référentiel rotatif $\langle Oxyz \rangle$; la deuxième partie, $\langle \Omega \times Q \rangle$, est induite par la rotation du repère $\langle Oxyz \rangle$

La vitesse absolue de P pouvait être exprimée par :

$$v_P = v_{P'} + v_{P/\mathcal{F}}$$

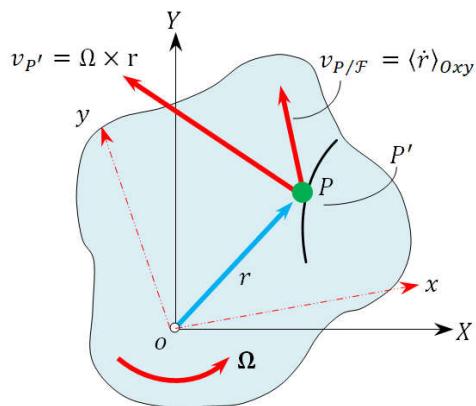


Figure 4.31 : La vitesse absolue

Où

v_p vitesse absolue de la particule P

$v_{p'}$ vitesse du point P' du repère mobile \mathcal{F} coïncidant avec P

$v_{p/\mathcal{F}}$ vitesse de P par rapport au repère mobile \mathcal{F}

L'expression de l'accélération de P contient un terme supplémentaire a_c appelé accélération complémentaire ou accélération de Coriolis. On a écrit

$$a_p = a_{p'} + a_{p/\mathcal{F}} + a_c$$

Où

a_p accélération absolue de la particule P

$a_{p'}$ accélération du point P' du repère mobile \mathcal{F} coïncidant avec P

$a_{p/\mathcal{F}}$ vitesse de P par rapport au repère mobile \mathcal{F}

a_c accélérations complémentaires, ou Coriolis, et exprime par

$$a_c = 2\Omega \times (\dot{r})_{oxy} = 2\Omega \times v_{p/\mathcal{F}}$$



Série de TD n°4
Cinématique du
Solide Rigide

Question 4.1

- ☺ Tout mouvement d'un solide rigide peut être décomposé en une combinaison de translations et de rotations. :
- Oui* *Non*
- ☺ Les équations fondamentales de la cinématique des solides rigides incluent les relations entre :
- La position et la vitesse
 La position, la vitesse et l'accélération
- ☺ Le centre instantané de rotation spécifique sur un solide rigide a une vitesse :
- Nulle
 Non Nulle
- ☺ La cinématique des solides rigides est largement utilisée dans divers domaines de l'ingénierie, tels que :
- La robotique
 L'ingénierie des véhicules
 Autre

Exercice 4.1

I. Soit le point $\langle M \rangle$ dans le plan $\langle oxy \rangle$ qui caractérisé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 3 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \end{cases}$$

Déterminer:

- ☞ Le vecteur vitesse du point M en fonction du temps.
- ☞ Les vecteurs accélérations tangentielle et normale du point M en fonction du temps.
- ☞ Le rayon de courbure de la trajectoire ;

II. On considère que le repère cartésien et le repère polaire ont la même origine et que l'angle θ est repéré par rapport à l'axe $\langle ox \rangle$.

- ☞ Calculer les vitesses, radiale, orthoradiale et angulaire

Exercice 4.2

Une barre uniforme de longueur $\langle l \rangle$ et de masse $\langle m \rangle$ est légèrement déplacée par rapport à sa position d'équilibre vertical à $\langle \theta = 0 \rangle$. Elle glisse le long d'un Mur et sol sans friction grâce à la gravité voir la Figure. 4-2. En supposant que le la barre reste dans un plan perpendiculaire au mur et au sol.

- ☞ Déterminer l'angle $\langle \theta \rangle$ auquel la barre quitte le mur.
- ☞ Calculer l'énergie cinétique totale de la barre.

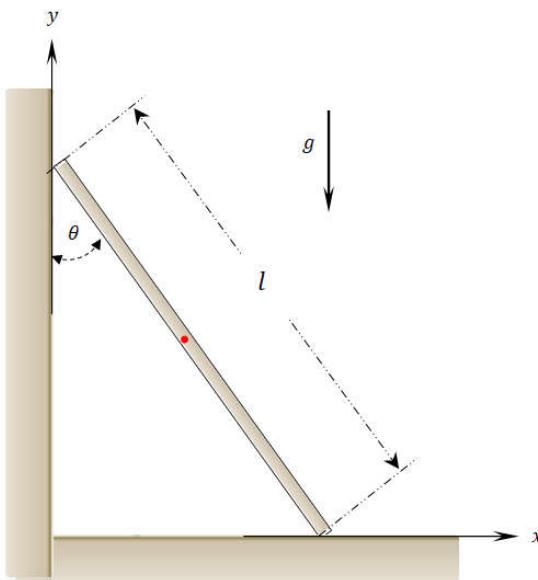


Figure. 4.2 Une barre uniforme

Exercice 4.3

La manivelle AB a une vitesse angulaire constante de 2000 tr/min.

☞ Déterminer :

- La vitesse angulaire de la bielle BD.
- La vitesse du piston P.

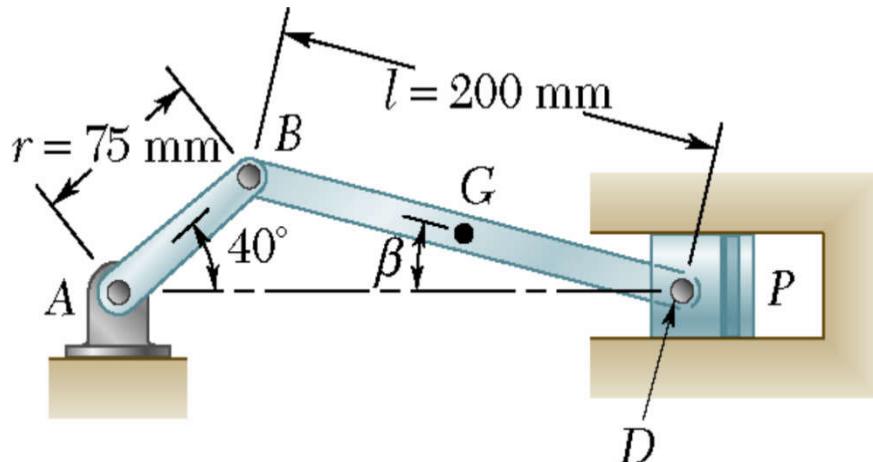


Figure. 4.3 Une bielle manivelle

Exercice 4.4

Soit le mécanisme de double engrenage dans la figure ci dessous

☞ Déterminer :

- l'accélération angulaire de l'engrenage
- l'accélération des points B, C et D.

Sachant que : Le panier inférieur est fixe et la vitesse et l'accélération vers la droite sont 1,2 m/s et 3 m/s², respectivement.

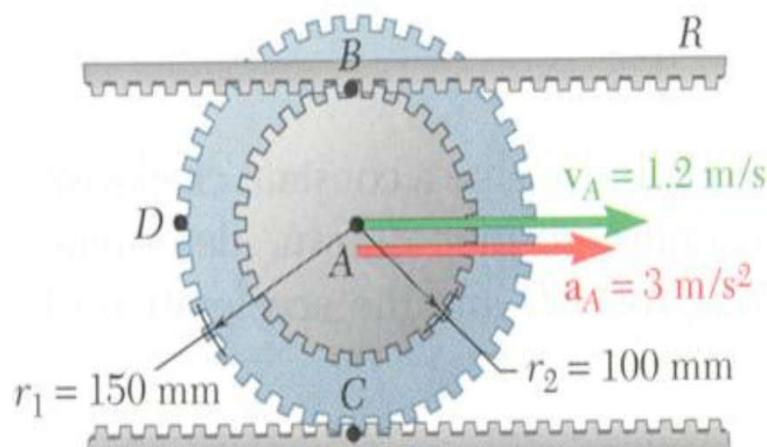


Figure. 4.4 Double engrenage

Exercice 4.5

Soit le mécanisme de présenté dans la figure , la manivelle AB a une vitesse angulaire constante $\omega_1 = 20 \text{ rad/s}$.

- ☞ Déterminer les vitesses angulaires et accélérations angulaires de la bielle BD et manivelle DE.

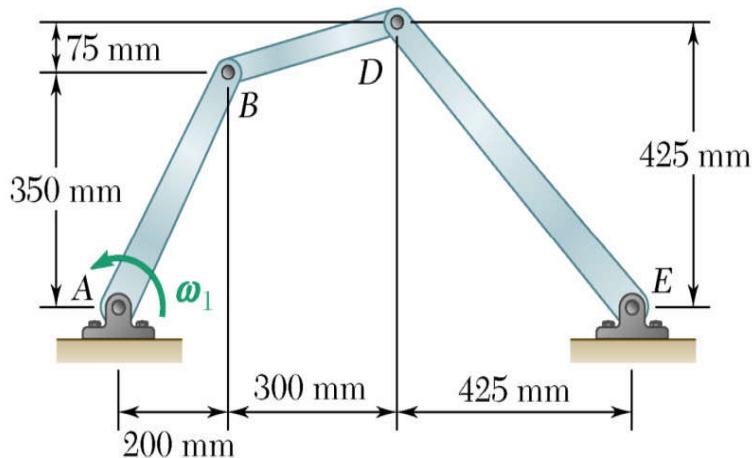


Figure. 4.5 Une bielle manivelle

Exercice 4.6

Soit le mécanisme de présenté dans la figure , Le disque (D) tourne avec vitesse angulaire constante est de $\omega_D = 10 \text{ rad/s}$.

- ☞ A l'instant $\phi = 150^\circ$ déterminer :
- La vitesse angulaire du disque S,
 - La vitesse de la broche P par rapport au disque S.

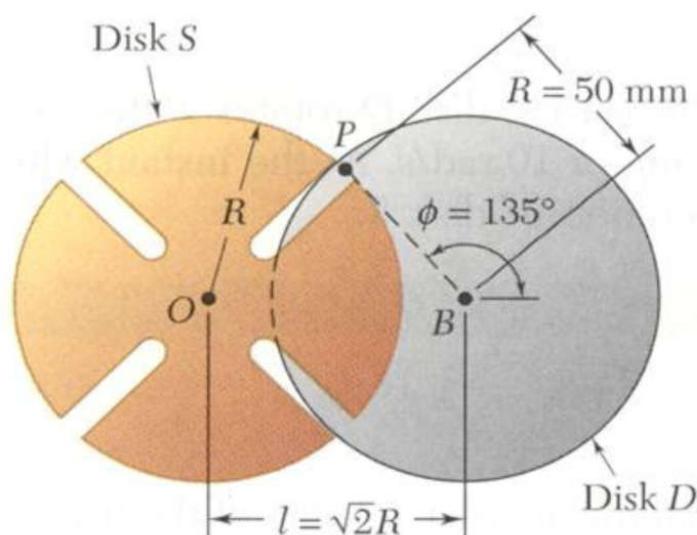


Figure. 4.6 Deux disques

Exercice 4.7

Un disque monté sur le bras, les deux vitesses de rotation angulaire ω_1 et ω_2 sont constantes.

☞ Déterminer:

- La vitesse du point P,
- L'accélération de P, et
- La vitesse angulaire et l'accélération angulaire du disque.

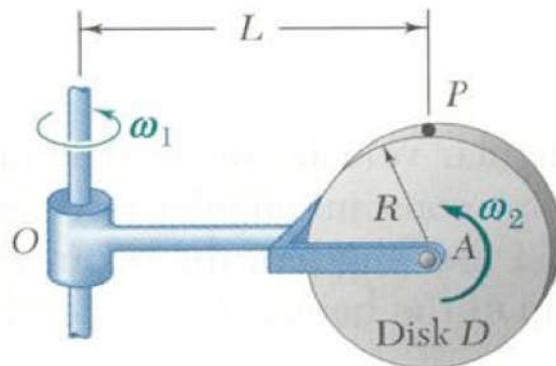
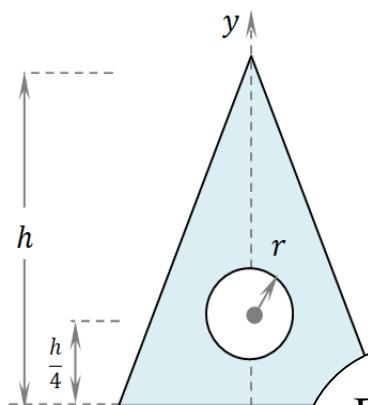
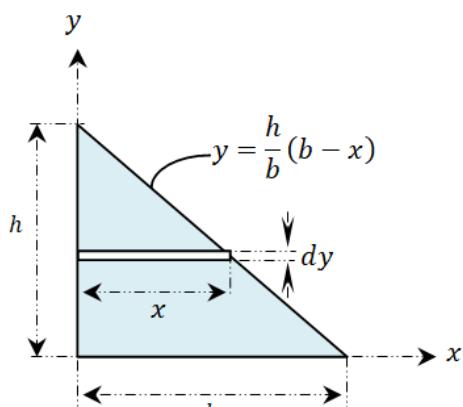
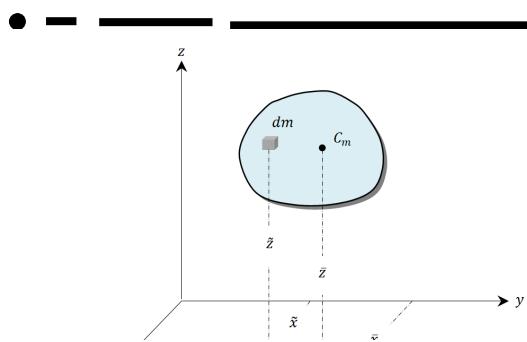


Figure. 4.7 mécanisme disque - bras

Chapitre 5 :

Géométrie de Masse



Dans la réalité, la terre exerce une force sur chacune des particules d'un corps rigide, c.-à-d. que l'effet de la terre sur un corps rigide doit être représenté par un grand nombre de petites forces réparties sur tout le corps. Est-il donc possible de remplacer toutes ces petites forces par une seule force et faire de même pour le point d'application? La réponse à la première partie de cette question vu précédemment et la deuxième partie sera l'objet de notre chapitre



5.1 Centre des Forces

Les connaissances de base de la mécanique rationnelle montrent qu'il est possible de remplacer un système de forces (qui ne sont pas en équilibre) par une seule force, (la résultante R).

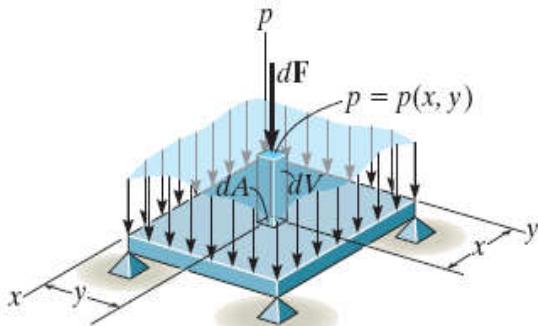


Figure 5.1. Un système de forces surfacique

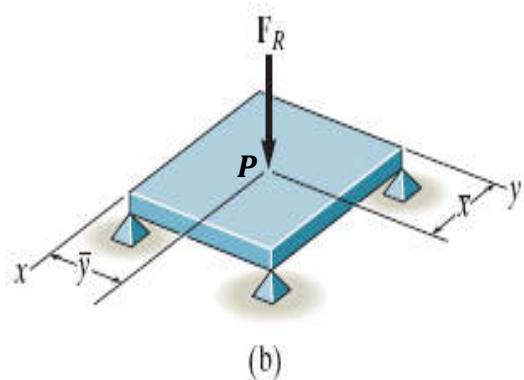


Figure 5.2. La résultante R

Avec P est le point d'application

Dans le cas particulier d'un système de forces parallèles, la direction de la résultante R coïncide avec la direction des forces individuelles.

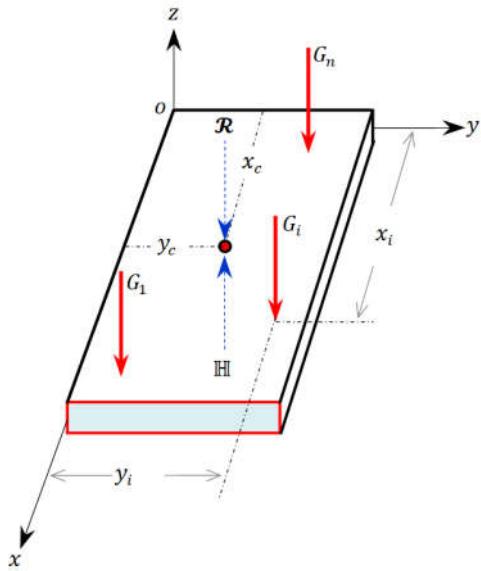
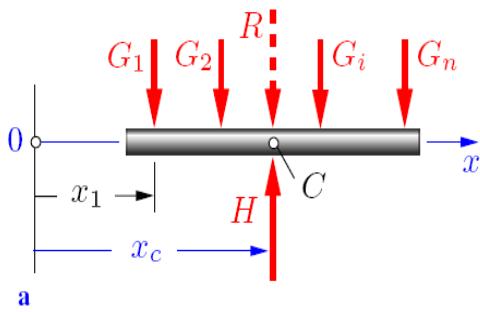


Figure 5.3. La résultante R d'un système de forces parallèles

On suppose une force $H = -R$, qui a la même ligne d'action que R .

La force R est en équilibre avec la force H, et d'après **le PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS)**.



a

La distance x_G

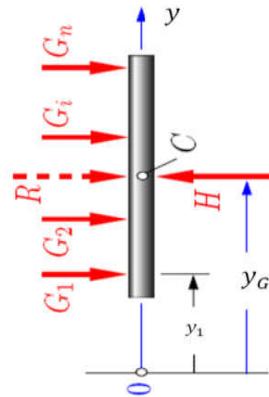
$$\sum_1^n \overrightarrow{M_m} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} & \pm G_1 d_1 \pm G_2 d_2 \pm G_3 d_3 \pm G_n d_n \pm H d_h = 0 \\ & -G_1 x_1 - G_2 x_2 - G_3 x_3 - G_n x_n + H x_G = 0 \\ & +H x_G = +G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 + G_n x_n \\ & x_G = \frac{+G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 + G_n x_n}{H} \\ & x_G = \frac{\sum_1^n G_m x_m}{H} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\sum_1^n \overrightarrow{F_m} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} & \pm G_1 \pm G_2 \pm G_3 \pm G_n \pm H = 0 \\ & -G_1 - G_2 - G_3 - G_n + H = 0 \\ & +H = \underbrace{+G_1 + G_2 + G_3 + G_n}_{\sum_1^n G_m} = R \end{aligned}$$



La distance y_G

$$\sum_1^n \overrightarrow{M_m} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} & \pm G_1 d_1 \pm G_2 d_2 \pm G_3 d_3 \pm G_n d_n \pm H d_h = 0 \\ & -G_1 y_1 - G_2 y_2 - G_3 y_3 - G_n y_n + H y_G = 0 \\ & +H y_G = +G_1 y_1 + G_2 y_2 + G_3 y_3 + G_n y_n \\ & y_G = \frac{+G_1 y_1 + G_2 y_2 + G_3 y_3 + G_n y_n}{H} \\ & y_G = \frac{\sum_1^n G_m y_m}{H} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\sum_1^n \overrightarrow{F_m} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} & \pm G_1 \pm G_2 \pm G_3 \pm G_n \pm H = 0 \\ & -G_1 - G_2 - G_3 - G_n + H = 0 \\ & +H = \underbrace{+G_1 + G_2 + G_3 + G_n}_{\sum_1^n G_m} \end{aligned}$$

La distance x_c est donnée par :

$$x_G = \frac{\sum x_i G_i}{\sum G_i}$$

De la même manière, on trouve la distance y_c

$$y_G = \frac{\sum y_i G_i}{\sum G_i}$$

Finalement, et pour un système matériel continu, les coordonnées du point d'application de la résultante $\langle R \rangle$ par rapport aux x, y, z prennent la forme suivante:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dw}{\int dw}, \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dw}{\int dw} \text{ et } \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dw}{\int dw}$$

Avec :

\tilde{x}, \tilde{y} et \tilde{z} sont les coordonnées de chaque particule dans le corps.

\bar{x}, \bar{y} et \bar{z} sont les coordonnées du points d'application

5.2 Centre de gravité au Centre d'inertie

5.2.1 Cas d'une ligne

Soit un segment de ligne ou bien une barre qui se trouve dans le plan (oxy par exemple) et caractérisé par une courbe de la forme $y = f(x)$,

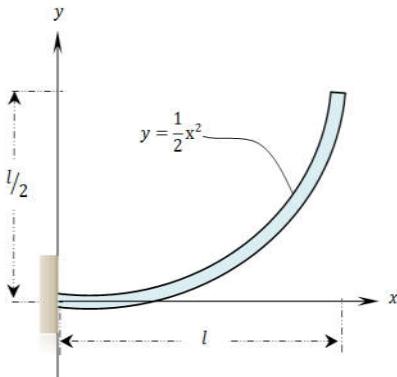


Figure 5.4. Cas d'une ligne caractérisé par
 $y = \frac{1}{2}x^2$

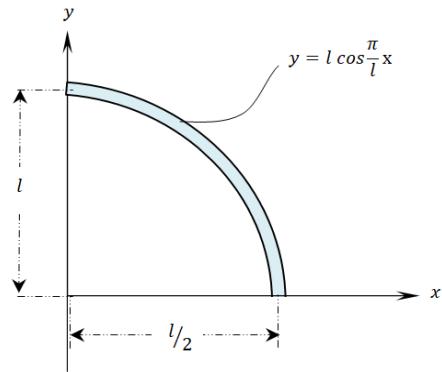


Figure 5.5. Cas d'une ligne caractérisé par
 $y = l \cos \frac{\pi}{l} x$

Le Centre de gravité d'une ligne ou bien d'une barre est déterminé à partir de cette formule :

$$\bar{x} = \frac{\int_{\ell} \tilde{x} d\ell}{\int_{\ell} d\ell} \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{\int_{\ell} \tilde{y} d\ell}{\int_{\ell} d\ell}$$

La longueur de l'élément différentiel est donnée par la formule suivante

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

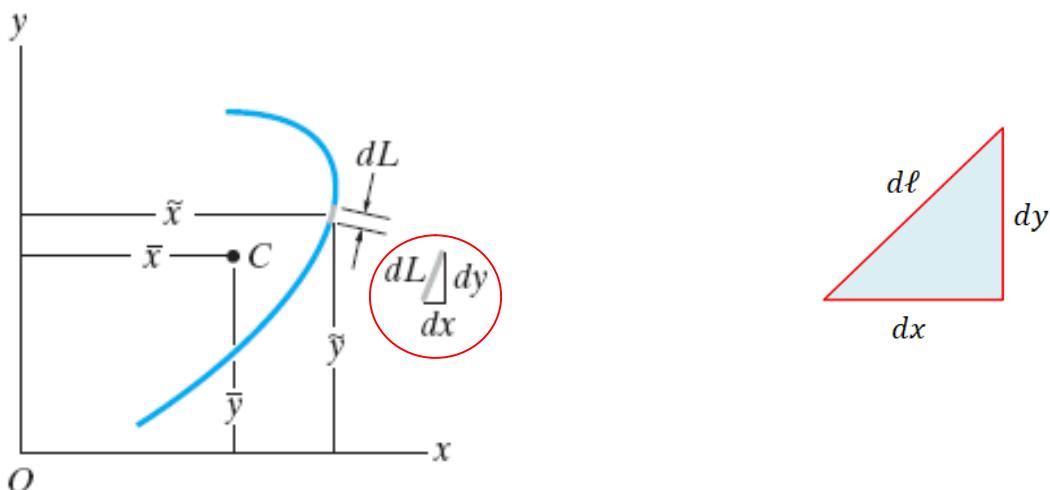


Figure 5.6. Un élément différentiel

Qui peut aussi être écrit sous les deux formes :

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2}$$

$$= \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right) dx$$

Ou bien

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2}$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \right) dy$$

L'une de ces expressions peut être utilisée.

Exemple 5.1

Localiser le Centre de gravité de la tige sous forme d'un arc parabolique (quart de cercle) Voir la Figure.

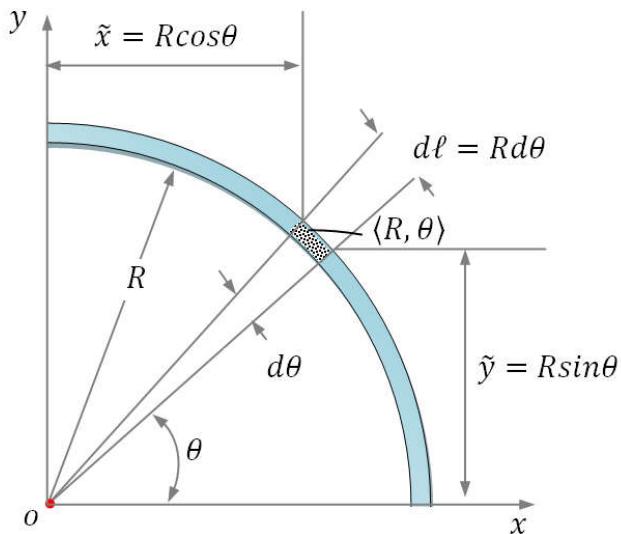
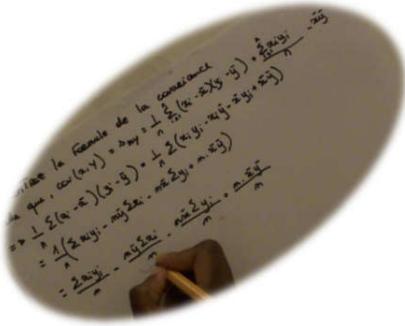


Figure 5.7. Une tige sous forme d'un 1/4 de cercle

Les coordonnées polaires seront utilisées pour résoudre ce problème



5.2.2 Cas d'une surface

5.2.2.1 Cas d'un système simple

Soit une aire ou bien une surface qui se trouve dans le plan (oxy par exemple) et délimitée par une courbe de la forme $y = f(x)$,

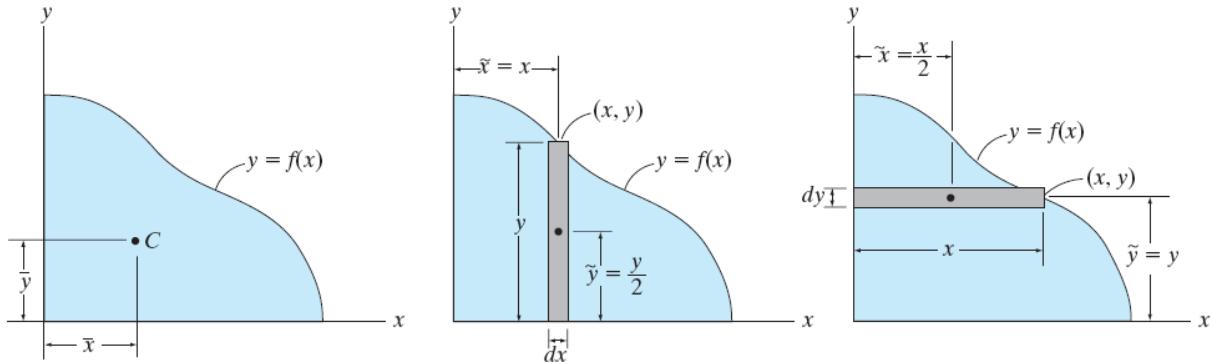


Figure 5.8. Une surface simple

Le Centre de gravité d'une surface est déterminé à partir de d'intégrale :

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \text{ et } \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}$$

Exemple 5.2

Localiser le Centre de gravité de la surface sous la forme d'un triangle Voir la Figure.

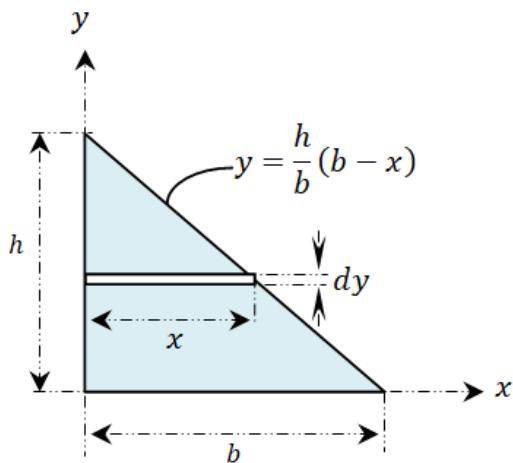


Figure 5.9. Un triangle

Les coordonnées cartésiennes seront utilisées pour résoudre ce problème

Dans le cas général le centre de gravité d'un triangle se trouve donc toujours au tiers de la hauteur, mesurée à partir de la base du triangle.

5.2.2.2 Cas d'un système complexe

La majorité des corps (surface, ligne, volume) peuvent être décomposés en plusieurs parties de formes rectangulaires, triangulaires, semi-circulaires..... etc , à condition que les centres de la gravité de chacune de ces parties soit connu .

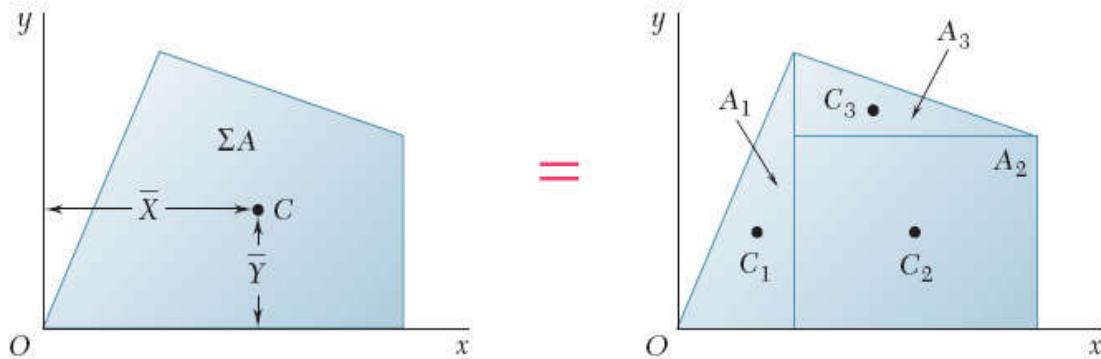


Figure 5.10. Une surface complexe

Le Centre de gravité d'un système complexe est déterminé à partir de cette formule :

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} W}{\sum W}; \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} W}{\sum W} \text{ et } \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} W}{\sum W}$$

Avec :

\tilde{x}, \tilde{y} et \tilde{z} sont représentent les coordonnées du centre de gravité de chaque partie du corps.

\bar{x}, \bar{y} et \bar{z} sont représentent les coordonnées du centre de gravité G de la corps composite.

5.3 Centre de Masse d'un Corps

Pour la suite et pour aborder la dynamique d'un corps solide, il devient important de localiser le centre de masse du corps, qui peut être déterminé par la formule suivante :

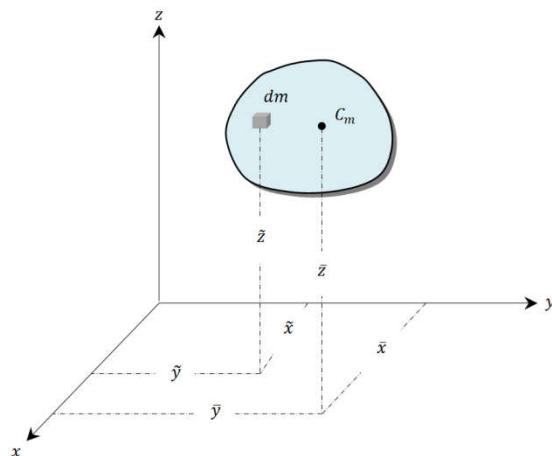


Figure 5.11. Le centre de Masse d'un Corps

Le Centre de gravité d'un corps solide est déterminé à partir de cette formule :

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm}; \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm} \text{ et } \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dm}{\int dm}$$

Remarque

Le centre de masse représente le centre géométrique d'un corps. Ce point coïncide avec le centre de gravité si le corps est uniforme ou homogène.

Dans certains cas, le centre de masse ou bien le centre de gravité est situé à un point qui n'appartient au corps

5.4 Théorème de Guldin

5.4.1 Premier théorème de Guldin

L'aire de surface engendrée par une courbe plane C tournant autour d'un axe Δ de son plan P , **ne la traversant pas**, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité : $S = 2\pi R_G L$

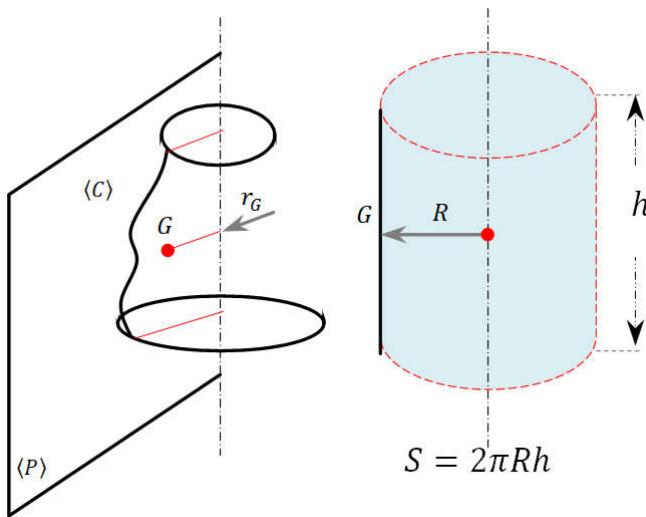


Figure 5.12. Le premier théorème de Guldin

5.4.2 Deuxième théorème de Guldin

Le volume engendré par une surface S plane tournant autour d'un axe Δ de son plan, **ne la traversant pas**, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité : $V = 2\pi R_G S$

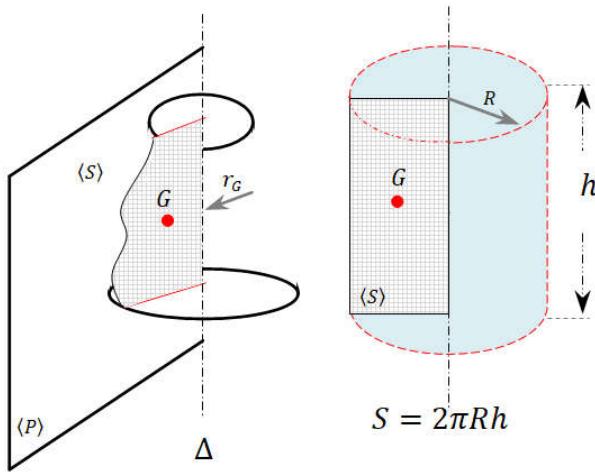


Figure 5.13. Deuxième théorème de Guldin

Ces deux théorèmes permettent de trouver des surfaces, des volumes, ou encore la position de centres de gravité d'une ligne ou d'une aire.

5.6 Opérateur d'inertie

5.6.1 Moment d'inertie d'un solide

Considérons une petite masse Δm montée sur une tige de masse négligeable pouvant tourner librement autour d'un axe AA' (Fig. 9.20a). Si un couple est appliqué au système, la tige et la masse, supposées initialement au repos. Le produit $r^2 \Delta m$ fournit donc une mesure de l'inertie du système. Pour cette raison, le produit $r^2 \Delta m$ est appelé moment d'inertie de la masse Δm par rapport à l'axe AA' .

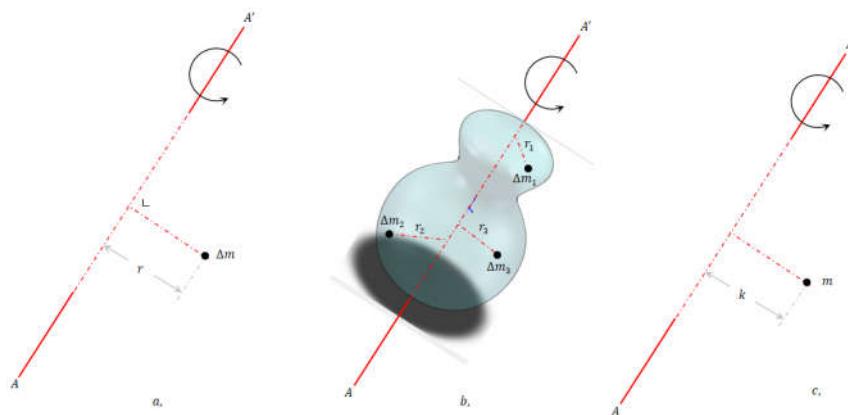


Figure 5.14. Le moment d'inertie d'un solide

Un corps de masse m qui doit tourner autour d'un axe AA' (Fig. 9.20b). En divisant le corps en éléments de masse $\Delta m_1, \Delta m_2$, etc., nous constatons que la résistance du corps à la rotation est mesurée par la somme $r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots$. Cette somme définit donc le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe AA' . En augmentant le nombre d'éléments, on trouve que le moment d'inertie est égal, à la limite, à l'intégrale

$$I = \int r^2 dm$$

La distance à laquelle doit se trouver toute la masse du corps concentré k du par rapport à l'axe AA' (Fig. 9.20c) est défini par la relation

$$\begin{cases} I = k^2 m \\ k = \sqrt{\frac{I}{m}} \end{cases}$$

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe de coordonnées peut être exprimé en termes de coordonnées x, y, z de l'élément de masse dm (Fig. 9.21).

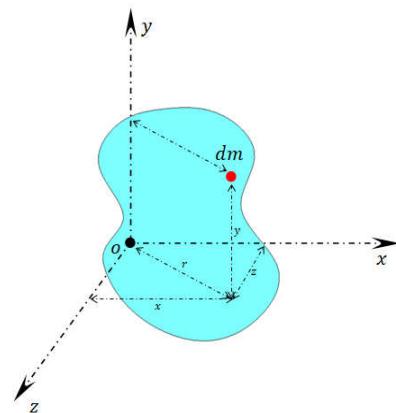


Figure 5.15. Les coordonnées d'un moment d'inertie

Par exemple, le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe y est donné par la formule suivante

$$I_y = \int r^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm$$

Pour les moments d'inertie par rapport aux axes x, z et Par analogique peuvent être obtenues les formules suivantes

$$\begin{cases} I_x = \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y = \int (x^2 + z^2) dm \\ I_z = \int (x^2 + y^2) dm \end{cases}$$

5.6.2 Théorème des axes parallèles.

Le moment d'inertie I d'un corps solide m par rapport à un axe AA' donné est égal à la somme du moment de l'inertie \bar{I} de ce corps par rapport à un axe BB' (parallèle à l'axe AA') et le produit md^2 , (Fig. 9.20b).

$$I = \bar{I} + md^2$$

Où d est la distance entre les deux axes.

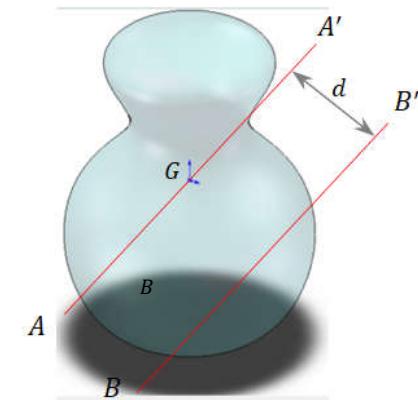


Figure 5.16. Le théorème des axes parallèles

5.6.3 Produits d'inertie d'un CORPS solide

Les moments d'inertie I_{xy} , I_{yz} et I_{zx} du corps par rapport aux axes oxy , oyz et ozx . sont appelées produits d'inertie du corps par rapport aux axes x et y , aux axes y et z et aux axes z et x , respectivement. Nous écrivons

$$\begin{cases} I_{xy} = \int xy \, dm \\ I_{yz} = \int yz \, dm \\ I_{zx} = \int zx \, dm \end{cases}$$

5.7 Théorème de HUYGENS

Considérons un corps solide m . Soit $Oxyz$ un système de coordonnées cartésienne, et $\langle Gx'y'z' \rangle$, un système d'axes parallèles aux système $\langle Oxyz \rangle$, où G est le centre de gravité G du corps† et les axes x' , y' et z' sont respectivement parallèles aux axes x , y et z (Fig. 9.22)).

Les coordonnées de G par rapport à $Oxyz$, on écrit les relations suivantes

$$\begin{cases} x = x' + \bar{x} \\ y = y' + \bar{y} \\ z = z' + \bar{z} \end{cases}$$

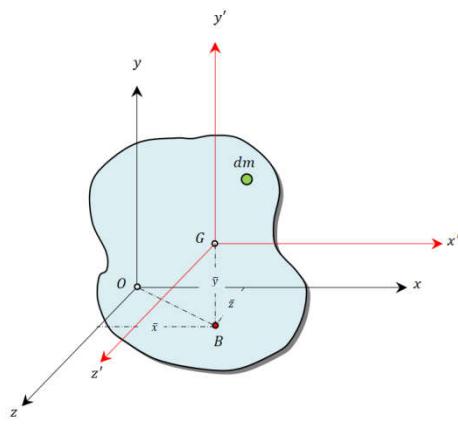


Figure 5.17. Théorème de HUYGENS

La définition des produits d'inertie d'un corps solide donné dans les équations. (9.45) est une extension de la définition du produit d'inertie. le théorème des axes parallèles reste valable pour les produits de l'inertie est exprimé par des relations suivantes

$$\begin{cases} I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x} \end{cases}$$

Où

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sont les coordonnées du centre de gravité G du corps

$\bar{I}_{x'y'}, \bar{I}_{y'z'}, \bar{I}_{z'x'}$ sont les produits d'inertie du corps par rapport aux axes x', y', z' , (Fig. 9.22).



Série de TD n°5
Géométrie de
Masse

Question 5.1

☺ Dans certains cas, le centre de masse ou bien le centre de gravité est situé à un point qui n'appartient au corps :

 Oui Non

☺ Le centre de masse coïncide avec le centre de gravité si le corps est :

 Uniforme Homogène

☺ Les formules utilisées pour localiser le centre de gravité représentent un équilibre entre la somme des moments de toutes les parties du système et le moment de la résultante :

 Oui Non

Exercice 5.1

Déterminer l'emplacement du centre de gravité dans chaque cas

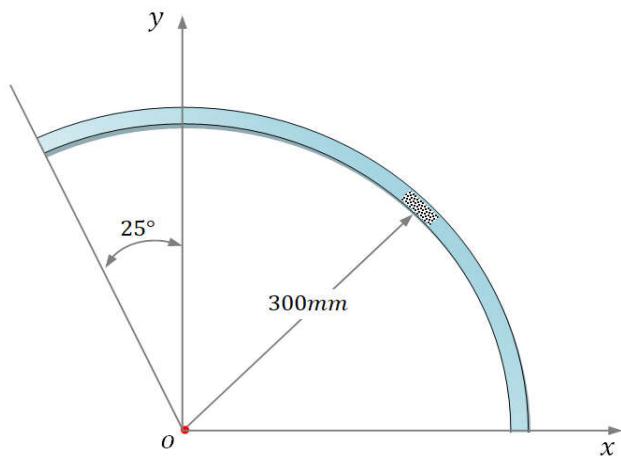


Figure 5.1.a

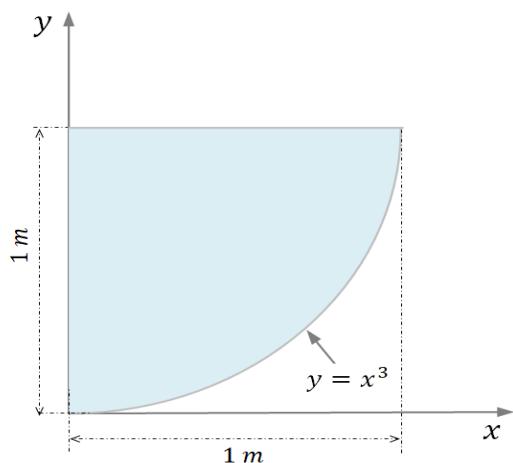


Figure 5.1.b

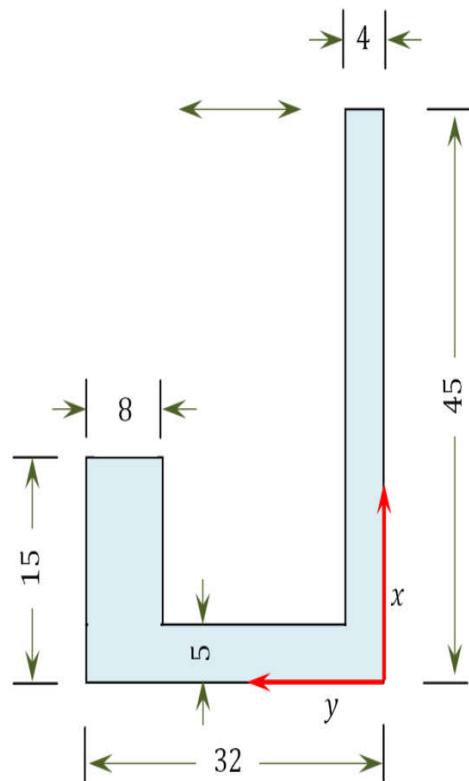


Figure 5.1.c

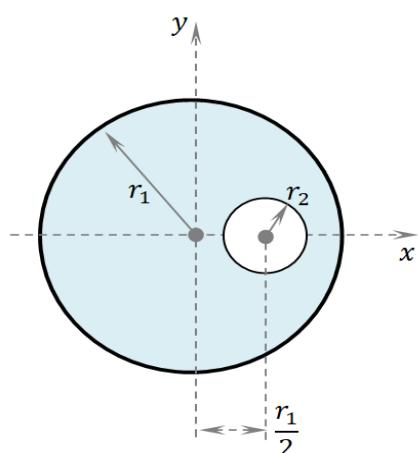


Figure 5.1.d

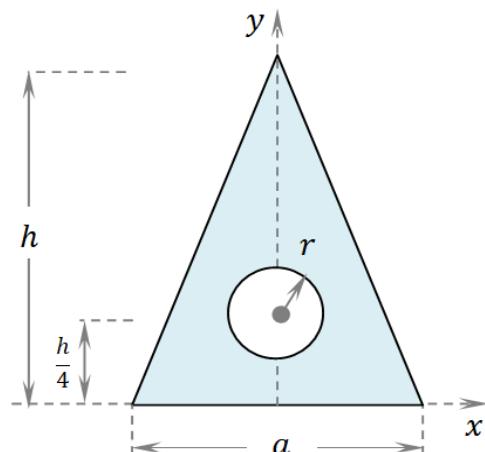


Figure 5.1.e

Exercice 5.2

 Déterminer moments d'inertie axiale de la géométrie suivante :

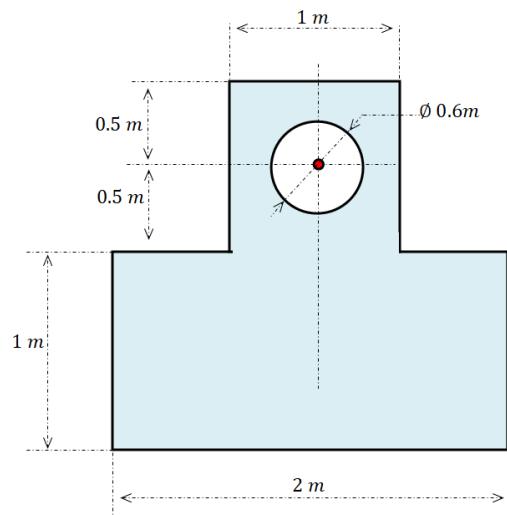


Figure 5.2

Exercice 5.3

 Déterminer moments d'inertie axiale en fonction de a , b et l de la géométrie suivante :

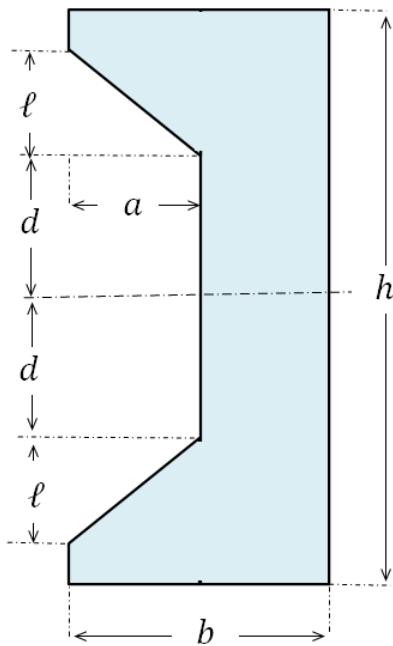


Figure 5.3

Exercice 5.4

- ☞ Déterminer moments d'inertie de la cylindrique géométrie représenté dans la figure suivante :

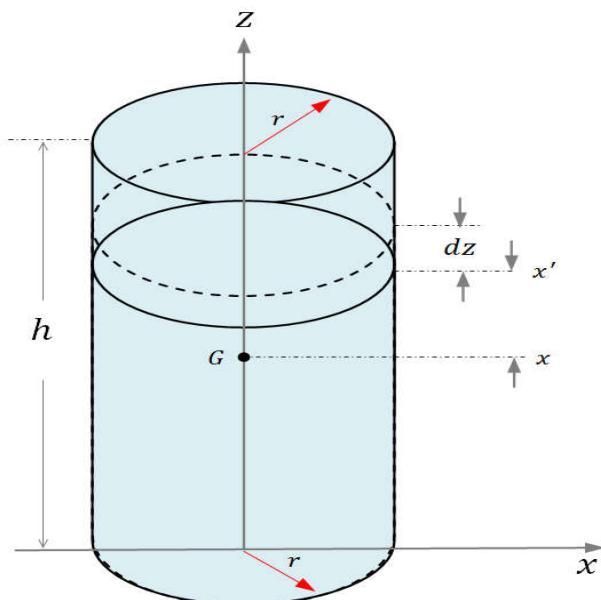


Figure 5.4

Exercice 5.5

- ☞ Déterminer moments d'inertie de la géométrie représenté dans les deux figures suivantes :

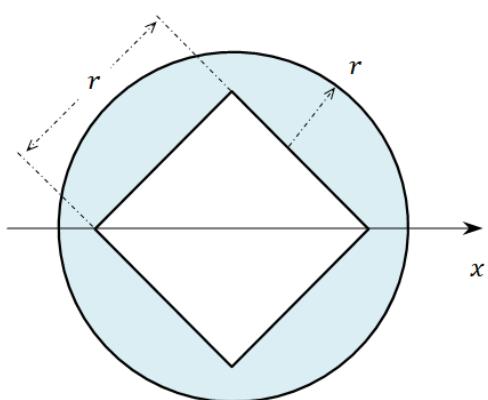


Figure 5.5.a

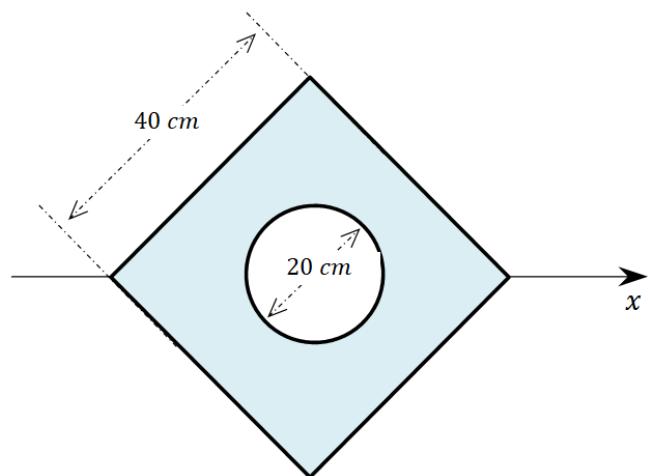


Figure 5.5.b

Exercice 5.6

- ☞ Déterminer moments d'inertie de la géométrie représenté dans les deux figures suivantes :

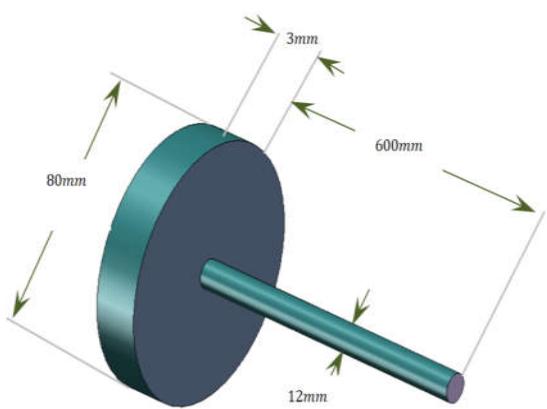


Figure 5.6.a

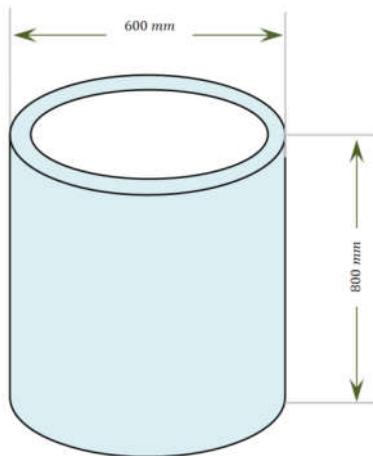
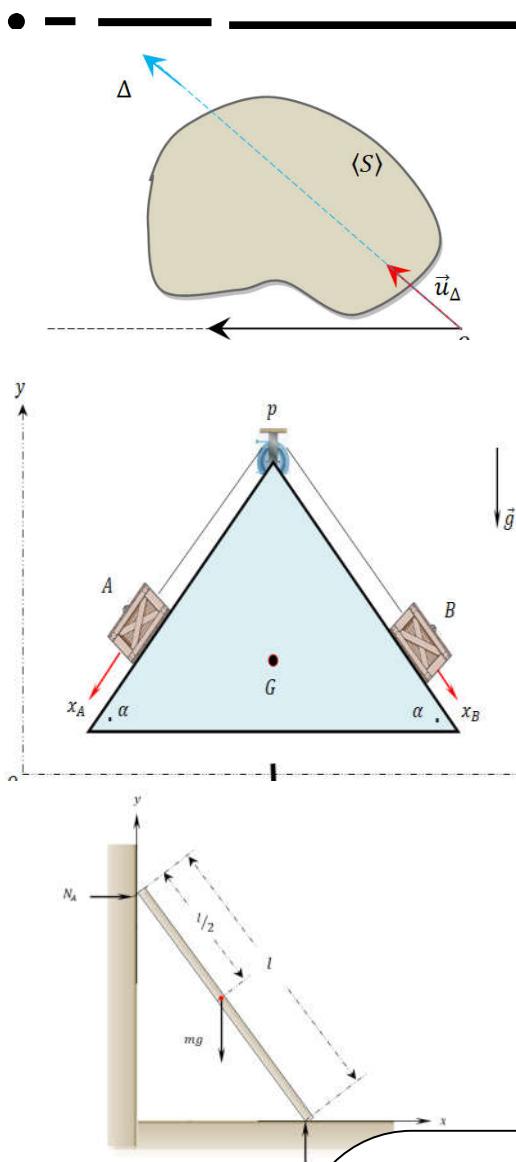


Figure 5.6.b

Chapitre 6 :

Dynamique du solide rigide



Dans divers domaines tels que la physique, l'ingénierie et la biomécanique, la compréhension de la dynamique des corps rigides est essentielle. Le but de cette discipline est de prédire et d'analyser le mouvement combiné de translation (mouvement linéaire) et un mouvement de rotation sous effet de toutes les forces ainsi que les couples externes agissant sur le corps. Ces derniers seront l'objet de notre chapitre.

6.1. Rappels sur les quantités dynamiques pour un point matériel

Soit (R) un repère référentiel absolu « $Oxyz$ » et $\langle R' \rangle$ un repère référentiel relatif « $O'x'y'z'$ » en mouvement par rapport à $\langle R \rangle$.

On suppose que $\langle R' \rangle$ est en translation par rapport à $\langle R \rangle$:

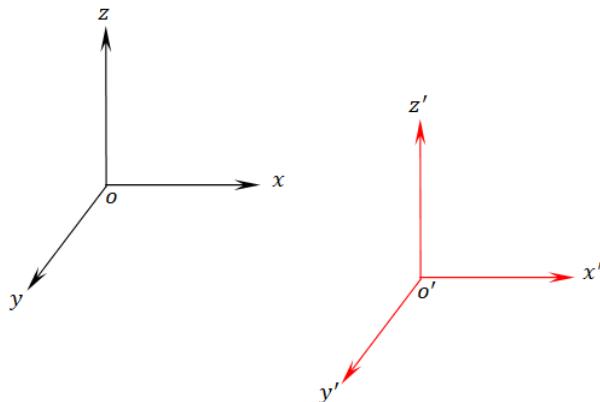


Figure 6.1, Les repères absolu et relatif

Composition des vitesses :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}_e = \vec{v}'(M) + \vec{v}(O')$$

Composition des accélérations :

$$\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e = \vec{a}'(M) + \vec{a}(O')$$

D'autre part $\langle R' \rangle$ est en rotation autour d'un axe fixe de $\langle R \rangle$: (O et O' sont confondus)

Composition des vitesses :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}_e = \vec{v}'(M) + \vec{\Omega}_{(R')/(R)} \Lambda \overrightarrow{OM}$$

Composition des accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M) &= \vec{a}'(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_c \\ \vec{a}(M) &= \vec{a}'(M) + \left[\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \Lambda \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{R'/R} \Lambda (\vec{\Omega}_{R'/R} \Lambda \overrightarrow{OM}) \right] + [2\vec{\Omega}_{R'/R} \Lambda \vec{v}'(M)] \end{aligned}$$

6.2. Centre d'inertie d'un système matériel

Dans le cas de solides ou de systèmes matériels, on peut définir une masse volumique, surfacique ou bien linéique :

$$m = \int_{\langle v \rangle} \rho(M) d\tau$$

$$m = \int_{\langle s \rangle} \sigma(M) dS$$

$$m = \int_{\langle l \rangle} \lambda(M) d\ell$$

Donc le centre d'inertie d'un système sera défini par :

Dans le cas où on a une distribution discontinue :

$$\begin{cases} \sum m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0} \\ \overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OM}_i}{m} \end{cases}$$

Dans le cas où on a une distribution continue volumique :

$$\begin{cases} \iiint_{\langle v \rangle} \rho(M) \overrightarrow{GM} d\tau \\ \overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_{\langle v \rangle} \rho(M) \overrightarrow{OM} d\tau}{m} \end{cases}$$

Par exemple le centre d'inertie G d'un système (S), constitué de deux systèmes S_1 et S_2 de masse m_1 et m_2 et de centres d'inertie G_1 et G_2 , est défini par :

$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{OG} = (m_1) \overrightarrow{OG}_1 + (m_2) \overrightarrow{OG}_2$$

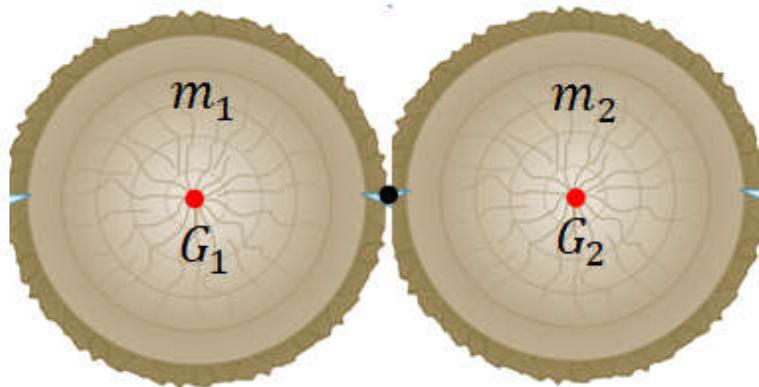


Figure 6.2 : un système (S)

6.3. Référentiel barycentrique :

Le mouvement du système est étudié dans le référentiel (R). On appelle référentiel barycentrique (R_b) relatif au référentiel (R), le référentiel de centre G et animé d'un mouvement de translation à la vitesse $v(G)$ r par rapport à (R).

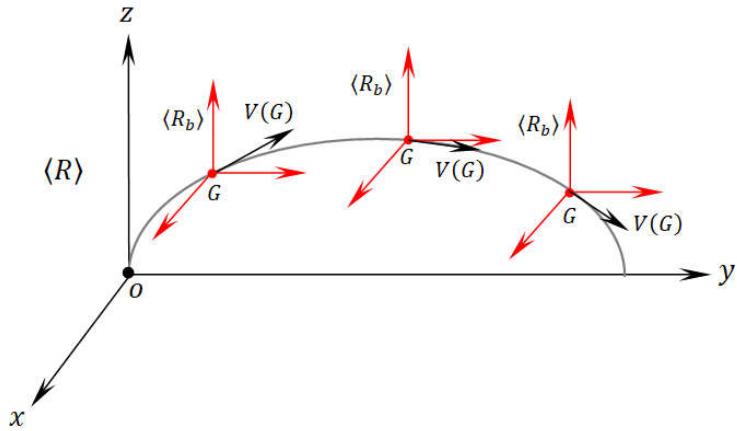


Figure 6.3 : Référentiel barycentrique

La loi de composition des vitesses s'écrit sous la forme :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}_b(M) + \vec{v}(G)$$

6.4. La quantité de mouvement :

La quantité de mouvement totale du système

$$\vec{P} = \iiint_v \rho(M) \vec{V}(M) d\tau = m \overrightarrow{V_G} / R$$

La résultante cinétique est évidemment nulle (Dans le cas où le référentiel barycentrique).

6.5. Le moment cinétique :

Le moment cinétique ou bien le Moment de la quantité de mouvement par rapport à O du système, dans le référentiel (R) est :

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= \iiint_v \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \vec{V}(M) d\tau \\ \vec{L}_0 &= \overrightarrow{OM} \wedge m \overrightarrow{V_G} / R\end{aligned}$$

Le moment cinétique selon le Théorème de Koenig est :

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= \iiint_v \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \vec{V}(M) d\tau = \iiint_v (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) \wedge \rho(M) (\overrightarrow{V}_b(M) + \vec{V}(G)) d\tau \\ \vec{L}_0 &= \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{V}(G) + \iiint_v \overrightarrow{GM} \wedge \rho(M) \overrightarrow{V}_b(M) d\tau\end{aligned}$$

Soit :

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{v}(G) + \vec{L}_{G,b}$$

Remarque : Le moment cinétique barycentrique ne dépend pas du point où on le calcule. En effet :

$$\vec{L}_G = \vec{L}_{G,b} = \vec{L}_{A,b} = \vec{L}_A$$

6.5.1. Moment cinétique par rapport à un axe :

La projection du moment cinétique \vec{L}_o du système $\langle S \rangle$ sur un axe Δ passant par O définit le moment cinétique L_Δ de $\langle S \rangle$ par rapport à Δ .

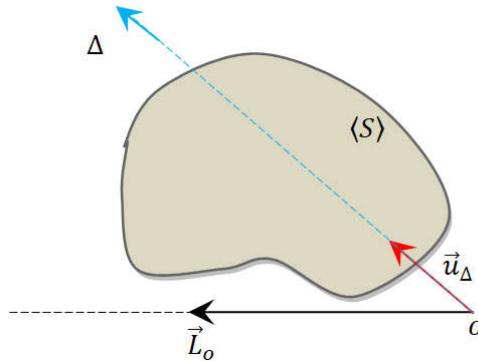


Figure 6.4 : Moment cinétique par rapport à un axe

Ainsi, en introduisant le vecteur unitaire \vec{u}_Δ de l'axe (Δ), on obtient :



$$L_\Delta = \vec{L}_o \vec{u}_\Delta$$

La notion de moment cinétique par rapport à un axe est intéressante lorsque le solide est en rotation autour de cet axe Δ .

6.5.2. Torseur cinétique :

On considère un ensemble de points M_i et à chacun de ces points on associe un vecteur \vec{q}_i (ce vecteur pourra être la vitesse, la quantité de mouvement, une force qui agit en ce point, ...). On définit alors :

☞ La résultante :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{q}_i$$

☞ Le moment en O :

$$\vec{M}_o = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{q}_i$$

Donc la relation entre le moment en deux points O et A est :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_o + \overrightarrow{AO} \Lambda \vec{R} = \vec{M}_o + \vec{R} \Lambda \overrightarrow{OA}$$

On vérifie que, dans le référentiel $\langle R \rangle$, la résultante cinétique \vec{P} et le moment cinétique \vec{L}_o en un point O d'un système matériel $\langle S \rangle$ forment les éléments de réduction d'un torseur, appelé torseur cinétique et noté $T_C(\vec{P}, \vec{L}_o)$. On a notamment :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_o + \overrightarrow{AO} \Lambda \vec{P}$$

6.5.3. Energie cinétique :

L' Energie cinétique d'un système est défini par

$$E_C = \iiint_v \frac{1}{2} \rho(M) \vec{v}(M) d\tau$$

Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique :

Le moment cinétique de $\langle S \rangle$ par rapport à $\langle G \rangle$ est défini par :

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} m \vec{v}(G)^2 + \iiint_v \frac{1}{2} \rho(M) \vec{v}_b(M)^2 d\tau \\ E_C &= \frac{1}{2} m \vec{v}(G)^2 + E_{c,b} \end{aligned}$$

Soit :

$$\vec{L}_o = \overrightarrow{OG} \Lambda m \vec{v}(G) + \vec{L}_{c,b}$$

6.6. Mouvement d'un solide :

Le solide $\langle S \rangle$ se déplace dans le référentiel $\langle R \rangle$. On considère le référentiel $\langle R_S \rangle$ lié au solide $\langle S \rangle$ d'origine P (point rigidement lié au solide).

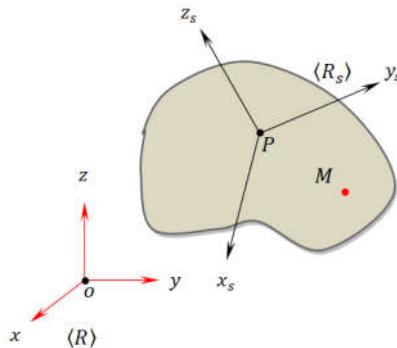


Figure 6.5 : Le mouvement d'un solide

on note $\vec{\Omega}_{R_S/R} = \vec{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire instantanée du référentiel (R_S) par rapport à (R) .

La formule de Varignon (loi de dérivation dans les référentiels (R) et (R_S)) donne :

$$\left| \frac{d(\overrightarrow{PM})}{dt} \right|_{(R)} = \left| \frac{d(\overrightarrow{PM})}{dt} \right|_{(R_S)} + \vec{\Omega} \Lambda \overrightarrow{PM}$$

Après calculs :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(P) + \vec{\Omega} \Lambda \overrightarrow{PM}$$

On s'intéresse aux actions mécaniques extérieures qui agissent sur un système matériel $\langle S \rangle$, en commençant par quelques exemples classiques.

6.7. Le poids d'un système :

La résultante de tous les poids élémentaires est :

$$\vec{P} = \iiint_v \overrightarrow{g_0} dm = \iiint_v \rho(M) d\tau \overrightarrow{g_0} = m \overrightarrow{g_0}$$

Le moment résultant en un point A quelconque est :

$$\overrightarrow{M_A} = \iiint_v \overrightarrow{AM} \Lambda \rho(M) \overrightarrow{g_0} d\tau = \left(\iiint_v \overrightarrow{AM} \Lambda \rho(M) d\tau \right) \overrightarrow{g_0} = \overrightarrow{AG} \Lambda m \overrightarrow{g_0}$$

On montre ainsi que le poids du système est équivalente à une force unique $\vec{P} = m \overrightarrow{g_0} = 0$ qui s'applique en $\langle G \rangle$.

Les forces de pression sur la paroi d'un récipient : On considère un récipient cubique de côté a , contenant une hauteur h d'eau (de masse volumique uniforme ρ).

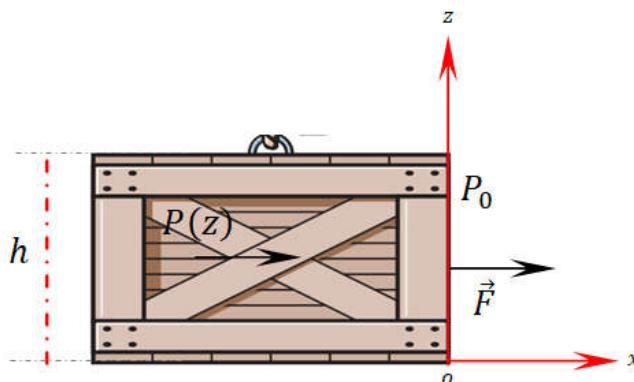


Figure 6.6 : La force de pression

On va montrer que l'action des forces de pression sur une paroi verticale du récipient peut être caractérisée par un glisseur.

Le calcul de la résultante des forces de pression est classique :

$$\vec{F} = \int_0^h \rho g_0 (h - z) dz \vec{u}_x = \rho g_0 a \frac{h^2}{2} \vec{u}_x$$

Le moment en $\langle O \rangle$ des forces de pression est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_0 &= \iint_{Paroi} \overrightarrow{AM} \Lambda \rho g_0 (h - z) dy dz \vec{u}_x = \iint_{Paroi} z \vec{u}_z \Lambda \rho g_0 (h - z) dy dz \vec{u}_x \\ \overrightarrow{M}_0 &= \int_0^h z \rho g_0 (h - z) a dz \vec{u}_y = \rho g_0 a \frac{h^3}{3} \vec{u}_y \end{aligned}$$

On constate que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{M}_0 = \overrightarrow{OB} \Lambda \vec{F} \quad \text{avec } \overrightarrow{OB} = \frac{h}{3} \vec{u}_y$$

L'action des forces de pression sur la paroi est donc caractérisée par une force unique \vec{F} passant par le point B .

On obtient bien un glisseur dont les éléments de réduction en B sont :

La résultante est égale à

$$\vec{F} = \rho g_0 a \frac{h^2}{2} \vec{u}_x$$

Le moment en $\langle B \rangle$ est nul

$$\vec{M}_B = 0$$

Couple s'exerçant sur un système en rotation autour d'un axe fixe :

On prend l'exemple d'un couple créé par deux forces opposées. La résultante des forces est nulle et le moment des deux forces au point $\langle O \rangle$ est indépendant du point où on le calcule. Un couple représente un exemple de torseur de résultante nulle. Le moment est donc indépendant du point considéré.

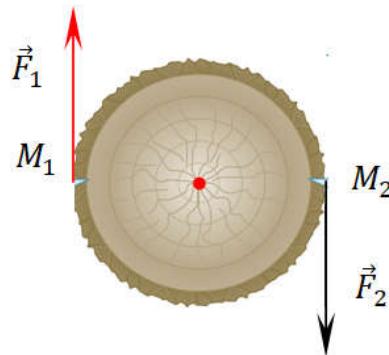


Figure 6.7 : Exemple d'un couple

Le moment en un point A quelconque est en effet : (avec : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$)

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_2 = \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_2$$

Il est bien indépendant du point A.

6.8. Théorème du moment cinétique

6.8.1 Le théorème du moment cinétique en un point fixe : On considère un point fixe A du référentiel galiléen (R). Alors :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}}$$

La dérivée du moment cinétique du système par rapport au point fixe A est égal au seul moment en A des forces extérieures au système (celui des forces intérieures est nul).

6.8.2 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe :

On considère un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire \vec{u}_Δ , fixe dans (R). En projetant le théorème du moment cinétique sur cet axe, on obtient le théorème du moment cinétique par rapport l'axe Δ :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} \vec{u}_\Delta = M_{\Delta,ext} \\ L_\Delta = \vec{L}_\Delta \cdot \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

Ce théorème sera couramment utilisé dans le paragraphe sur le mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.

6.8.3 Théorème du moment cinétique au point G :

Soit le moment cinétique

$$\vec{L}_A = \iiint_v \overrightarrow{AM} \wedge dm \vec{v}(M) = \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}(G) + \vec{L}_G$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \overrightarrow{AG} \wedge \frac{d}{dt} (m \vec{v}(G)) + \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F}_{ext} + \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

D'autre part :

$$\vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} = \iiint_v \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_{ext} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F}_{ext} + \vec{M}_{G,\vec{f}_{ext}}$$

Avec $\vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$ et $\vec{M}_{G,\vec{f}_{ext}} = \frac{d\vec{L}_G}{dt}$

Ainsi, le théorème du moment cinétique peut s'appliquer au point G, même si celui-ci est mobile dans (R).

6.8.4 Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique :

On a vu que :

$$L_G = L_{G,b}$$

Ainsi que :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d\vec{L}_{G,b}}{dt} = \vec{M}_{G,ext}$$

Le théorème du moment cinétique s'applique au point G dans le référentiel barycentrique (R_b) du système comme en un point fixe d'un référentiel galiléen (bien que le référentiel barycentrique ne soit pas a priori galiléen).

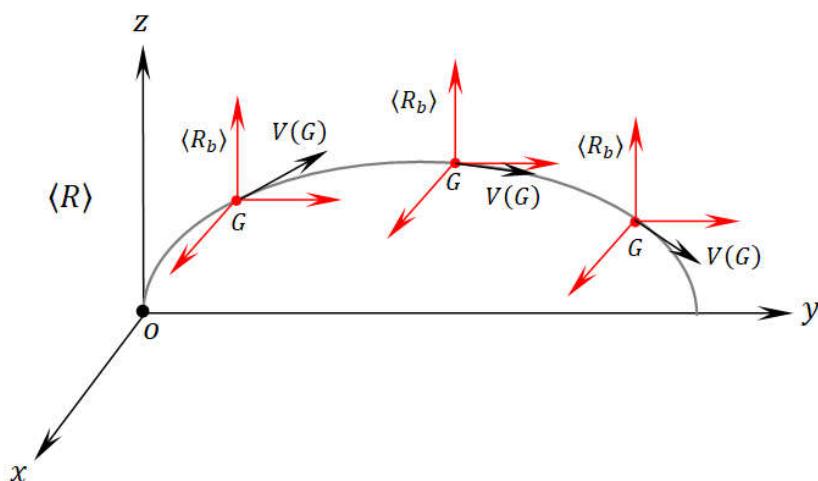


Figure 6.8 : Un référentiel galiléen

– Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen : Il faut prendre en compte les forces d'inertie :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}(G) = \vec{f}_{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

Et, en un point fixe du référentiel mobile :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} + \vec{M}_{A,\vec{f}_{ie}} + \vec{M}_{A,\vec{f}_{ic}}$$

6.9. Théorème de l'énergie cinétique (ou de la puissance cinétique) :

Dans la suite, on se place dans un référentiel (R) supposé galiléen. • Pour un solide :

$$P = \iiint_V \vec{v}(M) \cdot \vec{f}(M) d\tau = \iiint_V \vec{v}(M) \cdot dm \vec{a}(M) d\tau$$

$$P = \iiint_V \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} dm \vec{v}(M)^2 \right) d\tau = \frac{dE_c}{dt}$$

Ainsi, pour un solide :

$$P = \vec{v}(G) \cdot \vec{f}_{ext} + \vec{M}_{G,\vec{f}_{ext}} \cdot \vec{\Omega} = \frac{dE_c}{dt} \quad \langle \text{Théorème de la puissance cinétique} \rangle$$

Rappelons ici que P représente la puissance uniquement des actions extérieures subies par le solide (la puissance des actions intérieures est nulle pour un solide).

Le théorème de l'énergie cinétique s'en déduit :

$$\Delta E_c = W_{\vec{f}_{ext}}$$



Série de TD n°6

Dynamique du Solide Rigide

Question 6.1

☺ La dynamique des solides rigides est une branche de la physique qui étudie :

<input type="checkbox"/>	Le mouvement	<input type="checkbox"/>	La vitesse	<input type="checkbox"/>	La quantité de mouvement
--------------------------	--------------	--------------------------	------------	--------------------------	--------------------------

☺ Un solide rigide, également appelé corps rigide, est un objet physique dont la forme et les dimensions :

<input type="checkbox"/>	Ne changent pas	<input type="checkbox"/>	Changent avec le temps
--------------------------	-----------------	--------------------------	------------------------

☺ L'énergie totale (K_{totale}) d'un solide rigide en mouvement est :

<input type="checkbox"/>	La somme de son énergie cinétique de translation et de son énergie cinétique de rotation
<input type="checkbox"/>	Le produit de son énergie cinétique de translation et de son énergie cinétique de rotation

☺ Le moment d'inertie dépend de l'axe de rotation choisi. Pour un solide donné :

<input type="checkbox"/>	Oui	<input type="checkbox"/>	Non
--------------------------	-----	--------------------------	-----

Exercice 6.1

Soit une barre uniforme de longueur l et de masse m repose sur des surfaces lisses comme le montre dans la figure 6.1.

- ☞ Décrire son mouvement,

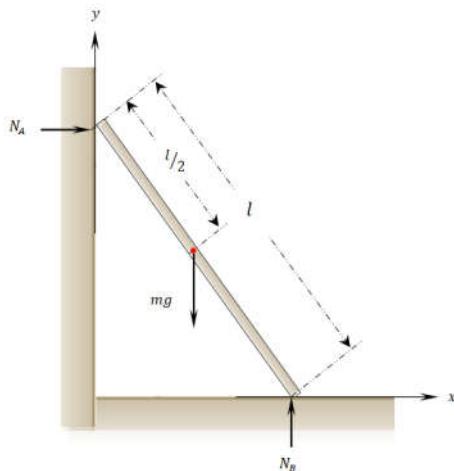


Figure 6.1. Une barre

Exercice 6.2

Soit un satellite est constitué d'un disque de rayon r , de masse $2m$ et de moment d'inertie I autour de l'axe de symétrie (Δ). Deux particules de masse m chacune sont attachées par des tiges rigides sans masse de longueur l à des points opposés de la circonférence (Voir la figure 6.2). On suppose que les deux tiges se trouvent toujours dans un plan qui contient l'axe de symétrie et tourne avec le disque. Initialement, le disque est tournant autour de son axe de symétrie à ω_0 rad/sec avec $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Pour un mouvement libre,

- ☞ Résoudre la vitesse de rotation du satellite ω ainsi que la valeur de $\dot{\theta}$ en fonction de θ .

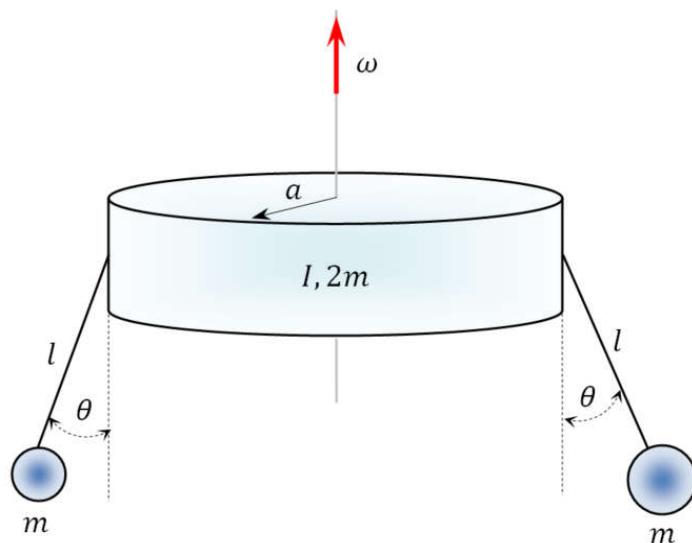


Figure 6.2. Un satellite

Exercice 6.3

Calculer l'énergie cinétique de la roue dans la figure. 6.1.

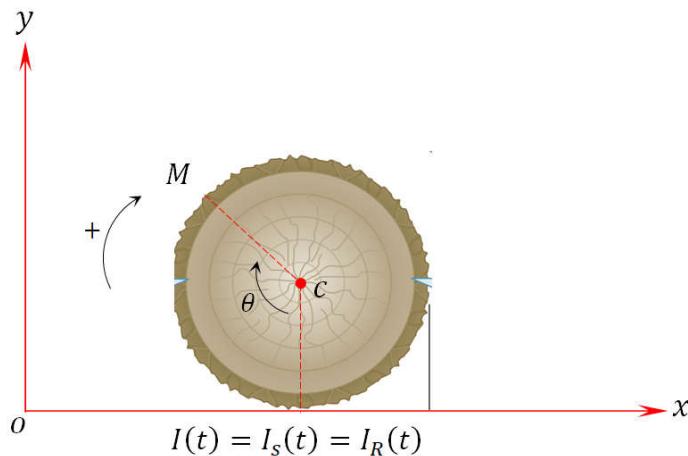


Figure 6.3 : Une roue

Exercice 6.4

On considère le pendule double est constitué de deux barres OA et AB identiques, homogènes, de masse m , de longueur $2b$ et articulées en A .

Les deux barres se déplacer dans le plan vertical $\langle Oxy \rangle$ et leurs inclinaisons sont définies par les angles α et β (voir figure 6.2).

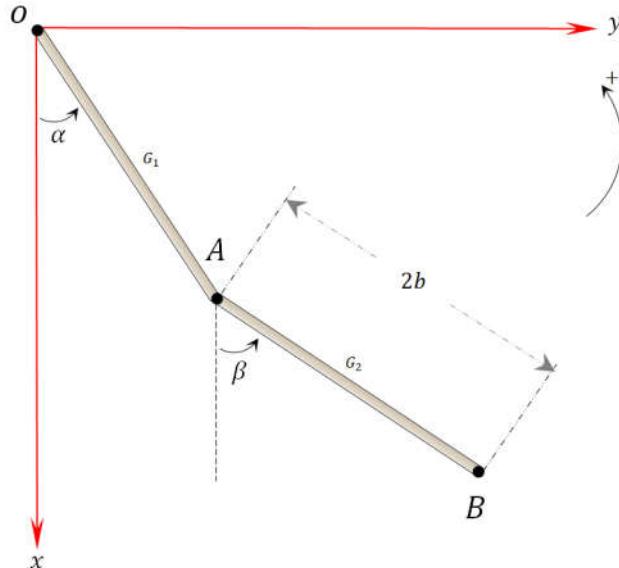


Figure 6.4 Un pendule double

Calculer le moment cinétique par rapport à l'axe $\langle Oz \rangle$ ainsi que l'énergie cinétique de ce pendule double.

Sachant que : Le moment d'inertie par rapport à sa médiatrice est : $J = \frac{1}{3}mb^2$.

Exercice 6.5

Un prisme homogène de masse M , de centre d'inertie G , dont la section droite a la forme d'un triangle isocèle d'angle α , peut glisser sur le sol horizontal, parallèlement à l'axe Ox . Sur ce prisme, peuvent glisser deux cubes ; l'un de masse $2m$ centré en A et l'autre de masse m centré en B ; reliés par un fil inextensible passant par une petite poulie P ; le fil et la poulie ont une masse négligeable et les deux brins de fil sont en permanence parallèles aux lignes de plus grande pente du prisme.

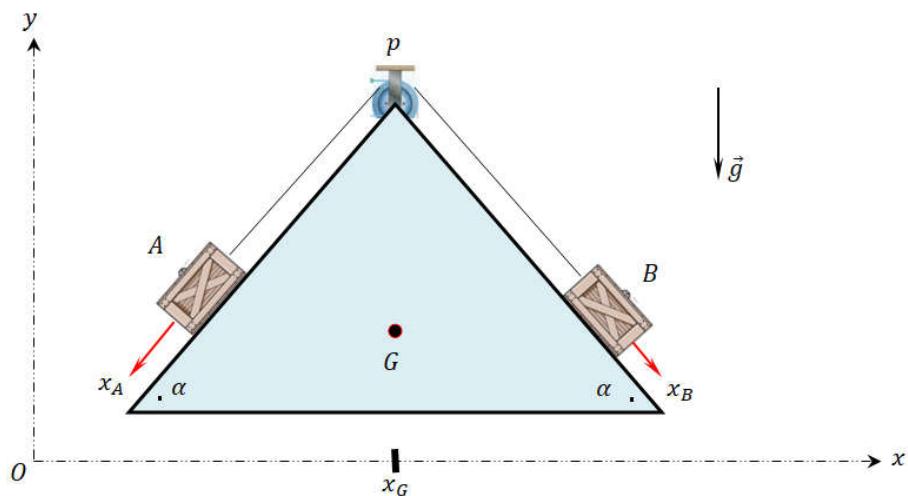


Figure 6.5. Un prisme

On négligera tout type de frottement.

1. Déterminer les accélérations de A et B dans le référentiel R.
2. Appliquer, en projection sur l'axe Ox , le théorème de la résultante cinétique, dans le référentiel R supposé galiléen, à l'ensemble (prisme, cube A , cube B , fil et poulie).
3. Écrire, en projection sur l'axe Px_A , le théorème de la résultante cinétique, dans le référentiel R, du cube A .
4. Écrire, en projection sur l'axe Px_B , le théorème de la résultante cinétique, dans le référentiel R, du cube B .
5. Établir la relation entre la norme de la force exercée par le fil sur le cube A et celle exercée par le fil sur le cube B .
6. Quelle relation simple relie l'accélération de A et celle de B dans le référentiel lié au prisme.
7. Déduire, de ce qui précède, l'accélération a du prisme en fonction de m , M , g et α .

Exercice 6.6

On considère un système mécanique constitué de deux solides $\langle S_1 \rangle$ et $\langle S_2 \rangle$. Une barre AB de longueur L , et de masse $\langle m_1 \rangle$ et un disque homogène de centre C , de rayon R et de masse $\langle m_2 \rangle$. Le système est en mouvement dans un repère galiléen tel que l'extrémité A de glisse sans frottement sur l'axe (O, \vec{t}_0) . Le solide $(S1)$ est en contact avec $\langle S_2 \rangle$ en D tel que $\langle S_1 \rangle$ glisse sur $\langle S_2 \rangle$.

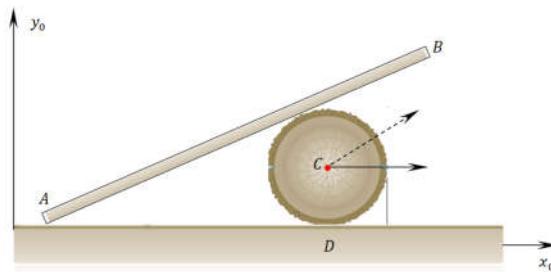


Figure 6.6. Un système mécanique

1. Exprimer, dans la base $R_0(\vec{t}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ les vecteurs vitesses de rotation $\overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}}$ et déduire $\overrightarrow{\Omega_C/R_0}$
2. Calculer les vitesses, ainsi que les accélérations.
4. Calculer les moments cinétiques et dynamiques.
5. Calculer les énergies cinétiques du système $\langle S_1 \rangle$ et $\langle S_2 \rangle$.



Bibliographie

- [1] Élément de mécanique rationnelle. S.Targ Editions Mir Moscou.3
- [2] Mécanique a l'usage des ingénieurs. Statique. Editions Russell. Ferinand P. Beer
- [3] Mécanique générale. Cours exercices corrigés. Sylvie Pommier. Yves Berthaud
DUNOD
- [4] Mécanique générale. Théorie et application, série. Muray R. Spiegel
- [5] Mécanique générale. exercices et problèmes résolus avec rappels de cours, office des publications Universitaires, Tahar HANI 1983-386p
- [6] Rajapakse, Wolfgang A. Wall Nimal, Dietmar Gross, and Werner Hauger Jörg Schröder. Engineering Mechanics 1 Statics. Springer publication, 2013.
- [7] Johnston, Elwood Russell, et al. Vector mechanics for engineers: statics. McGraw-Hill Companies, 1995.
- [8] Meriam, James L., L. Glenn Kraige, and Jeff N. Bolton. Engineering mechanics: dynamics. John Wiley & Sons, 2020.
- [9] Pao, Yih-Hsing. "Applied Mechanics in Science and Engineering." Journal of Mechanics 16.2 (2000): 53-66.
- [10] Plesha, Michael E., Gary L. Gray, and Francesco Costanzo. Engineering Mechanics: Statics. New York, NY, USA: McGraw-Hill Higher Education, 2010.
- [11] Kumar, Anil, and D. C. Kushreshtha. Engineering Mechanics: Statics and Dynamics. Jaypee University of Information Technology, Solan, HP, 2015
- [12] Osgood, Libby, Cameron Gayla, and Emma Christensen. "Engineering Mechanics: Statics." (2023).
- [13] Mécanique des solides rigides, Jean-Marie Berthelot.2006

