

# Epreuve fondamentale de mécanique rationnelle

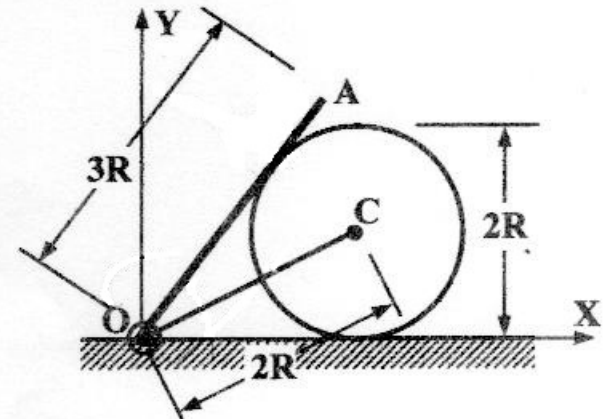
Documents non autorisés - temps alloué : 1<sup>h</sup> 30 mn.

## EXERCICE 1 : ( 6 points )

Une barre homogène  $OA$ , de poids  $P = 100 \text{ N}$  et de longueur  $3R$ , est articulée en  $O$ , autour d'un axe horizontal  $OZ$ . Elle s'appuie sur un cylindre lisse (sans frottements) de rayon  $R = 20 \text{ cm}$  et de poids  $Q = 200 \text{ N}$ ; lequel s'appuie sur un plan horizontal lisse.

Le cylindre est maintenu dans sa position d'équilibre ci-indiquée, par un fil inextensible  $OC$  de longueur  $2R$ .

**Déterminer** la tension du fil, ainsi que la réaction en  $O$ .



## EXERCICE 2 : ( 7 points )

Une barre horizontale  $AB$ , de poids négligeable, liée au mur à l'aide d'une articulation sphérique  $A$ , est maintenue dans sa position perpendiculaire au mur, grâce à deux câbles  $CD$  et  $EC$ , comme indiqué sur la figure ci-contre.

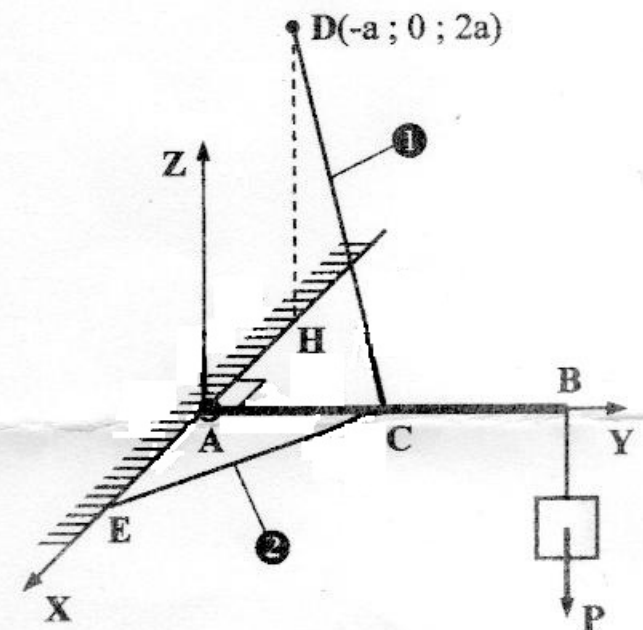
A son extrémité  $B$  est suspendu un poids  $P = 100 \text{ N}$ .

Données :  $AC = AH = AE = a = 1 \text{ m}$

$AB = HD = 2a = 2 \text{ m}$

Les coordonnées de  $D$  sont :  $(-a; 0; 2a)$

**Déterminer** la réaction de l'articulation sphérique  $A$ , ainsi que les tensions  $T_1$  (du câble ①) et  $T_2$  (du câble ②).



## EXERCICE 3 : ( 7 points )

Soit le système mécanique composé:

- d'un cadre ① ayant un pivot (articulation cylindrique) en  $O$ , animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante  $\dot{\phi}$  autour de l'axe  $OZ_0$ .

- d'un disque ② de rayon  $R$  et d'épaisseur négligeable, soudé à un axe  $AB$ , lié au cadre ① par les deux articulations cylindriques  $A$  et  $B$ ; le disque est animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante  $\dot{\beta}$  autour de l'axe  $CY_2$ .

On donne :  $OC = AC = CB = L$ ;  $\vec{CM} = R \vec{X}_3$ .

$R_0 (O, X_0, Y_0, Z_0)$  : repère fixe ;  $R_1 (O, X_1, Y_1, Z_1)$  : repère lié au cadre ①.

$R_2 (C, X_2, Y_2, Z_2) \parallel R_1$ ;  $R_3 (C, X_3, Y_3, Z_3)$  : repère lié au disque ②.

1°/ Etablir les figures planes représentatives des différentes rotations.

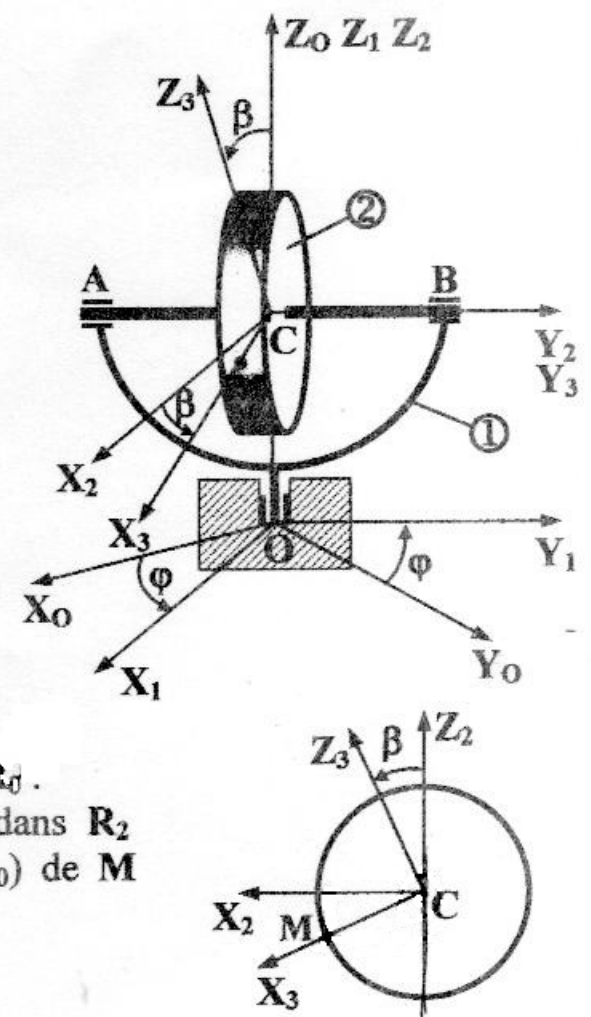
2°/ **Déterminer** le vecteur rotation instantanée du disque par rapport à  $R_0$  exprimé dans  $R_2$ .

3°/ **Déterminer** par dérivation, la vitesse absolue (par rapport à  $R_0$ ) de  $M$ , exprimée dans  $R_2$ .

4°/ En déduire la vitesse absolue de  $M$  exprimée dans  $R_1$  et ensuite dans  $R_0$ .

5°/ **Déterminer** par dérivation la vitesse de  $M$  par rapport à  $R_1$ , exprimée dans  $R_2$ .

6°/ **Déterminer** par dérivation, l'accélération absolue (par rapport à  $R_0$ ) de  $M$  exprimée dans  $R_2$ .



Bonne réussite

## Corrigé de l'épreuve fondamentale de mécanique rationnelle

EX1 : le système barre + cylindre est hyperstatique  $\Rightarrow$  décomposer le systèmeEquilibre du cylindre isolé:

dans les 2 triangles OCD et

OCB :  $\sin \alpha = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ 

$$\Rightarrow \beta = 2\alpha = 60^\circ \quad (0,5)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$R_B \sin \beta - T \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow R_B = T \quad (1) \quad (0,5)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_D - T \sin \alpha - Q - R_B \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow R_D - Q = \frac{T + R_B}{2} \quad (2) \quad (0,5) \text{ but (1) sans (3)}$$

$$\sum M_{I/O} = 0 \Rightarrow (R_D - Q) \sqrt{3} R - R_B \sqrt{3} R = 0$$

$$\Rightarrow R_D - Q = R_B \quad (3) \text{ idem que (2) avec (1)}$$

les 4 forces  $\vec{R}_D$ ,  $\vec{R}_B$ ,  $\vec{T}$  et  $\vec{Q}$  sont concourantes en C  $\Rightarrow$  on ne peut poser que 2 équations statiquesEquilibre de la barre isolée:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ox} = R_B \sin \beta \quad (4) \quad (0,5)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_B \cos \beta - P + R_{Oy} = 0 \quad (5) \quad (0,5)$$

$$\sum M_{Z/O} = 0 \Rightarrow R_B \cdot \sqrt{3} R = P \cdot \frac{\sqrt{3} R}{2} \cos \beta \quad (6)$$

$$(6) \Rightarrow R_B = \frac{\sqrt{3}}{4} P \quad (0,5) \quad (1) \Rightarrow T = R_B = \frac{\sqrt{3}}{4} P$$

$$(4) \Rightarrow R_{Ox} = \frac{3}{8} P = 37,5 \text{ N} \quad (0,5) \quad (0,5) = 43,3 \text{ N}$$

$$(5) \Rightarrow R_{Oy} = \left( \frac{8 - \sqrt{3}}{8} \right) P = 78,35 \text{ N} \quad (0,5)$$

EX2 :

dans le  $\Delta ACE$  :  $\alpha = 45^\circ$ 

$$\Rightarrow \vec{T}_2 = \begin{pmatrix} T_2 / \sqrt{2} \\ -T_2 / \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} \quad (0,25)$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \cdot \vec{e}_1 = T_1 \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$|\vec{CD}| = \sqrt{6} a$$

$$\Rightarrow \vec{T}_1 = \begin{pmatrix} -T_1 / \sqrt{6} \\ -T_1 / \sqrt{6} \\ 2T_1 / \sqrt{6} \end{pmatrix} \quad (1) \quad (0,4)$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (0,25)$$

$$\begin{cases} R_{Ax} - \frac{T_1}{\sqrt{6}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 & (1) \quad (0,5) \\ R_{Ay} - \frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 & (2) \quad (0,5) \\ R_{Az} - P + \frac{2T_1}{\sqrt{6}} = 0 & (3) \quad (0,5) \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{A/\vec{x}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AC} \wedge (\vec{T}_1 + \vec{T}_2) + \vec{AB} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ -\frac{T_1}{\sqrt{6}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} & -\frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} & \frac{2T_1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 2aT_1 - 2aP = 0 & (0,75) \quad (4) \Rightarrow T_1 = \sqrt{6} P \\ \text{pas de moments autour de } \vec{y} & 2L_1 = 2L_2 \quad (0,25) \\ a \left( \frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} \right) = 0 & (0,75) \quad (5) \Rightarrow T_2 = \sqrt{2} P = 141,42 \text{ N} \quad (0,25) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow R_{Ax} = 0 \quad (0,25) \quad (2) \Rightarrow R_{Ay} = 2P = 200 \text{ N} \quad (0,25)$$

$$(3) \Rightarrow R_{Az} = -P = -100 \text{ N} \quad (0,25)$$

EX3 :

$$2^\circ / \sqrt{2} \vec{J}_3 / R_2 = \sqrt{2} \vec{J}_3 + \sqrt{2} \vec{J}_2 + \sqrt{2} \vec{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$3^\circ / \vec{OM} = \begin{pmatrix} R \cos \beta \\ 0 \\ L - R \sin \beta \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{V}^{(M)} / R_2 = \frac{d}{dt} (\vec{OM} / R_2) + \vec{J}_2 \wedge \vec{OM} = \begin{pmatrix} -R \dot{\beta} \sin \beta \\ R \dot{\beta} \cos \beta \\ -R \dot{\beta} \cos \beta \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$4^\circ / \vec{V}^{(M)} = \begin{pmatrix} -R \dot{\beta} \sin \beta \\ R \dot{\beta} \cos \beta \\ -R \dot{\beta} \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \dot{\beta} \sin \beta \cos \varphi - R \dot{\beta} \cos \beta \sin \varphi \\ -R \dot{\beta} \sin \beta \sin \varphi + R \dot{\beta} \cos \beta \cos \varphi \\ -R \dot{\beta} \cos \beta \end{pmatrix} \quad (0,75)$$

$$5^\circ / \vec{V}^{(M)} / R_2 = \frac{d}{dt} (\vec{OM} / R_2) = \begin{pmatrix} -R \dot{\beta} \sin \beta \\ 0 \\ -R \dot{\beta} \cos \beta \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$6^\circ / \vec{\gamma}^{(M)} / R_2 = \frac{d}{dt} \left[ \vec{V}^{(M)} / R_2 \right] + \vec{J}_2 \wedge \vec{V}^{(M)} / R_2 \quad (0,5)$$

$$= \begin{pmatrix} -R \ddot{\beta} \cos \beta \\ -R \ddot{\beta} \sin \beta \\ R \ddot{\beta} \sin \beta \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \ddot{x}_2 & \ddot{y}_2 & \ddot{z}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -R \ddot{\beta} \cos \beta \\ -R \ddot{\beta} \sin \beta \\ R \ddot{\beta} \sin \beta \end{pmatrix}$$

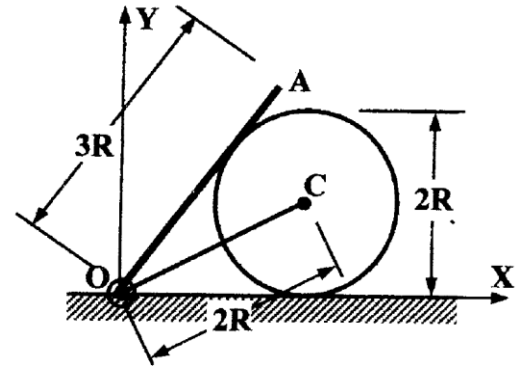
$$= \begin{pmatrix} -R \ddot{\beta} \cos \beta (\vec{i}^2 + \vec{j}^2) \\ -2R \ddot{\beta} \sin \beta \vec{j} \\ R \ddot{\beta} \sin \beta \vec{j} \end{pmatrix} \quad (1)$$

## Série d'exercices n° 3 : équilibre du solide dans le plan (2h15 min)

Exercices à faire en TD :**Exercice 1 (examen final – Janvier 2012)**

Une barre homogène OA, de poids  $P = 100 \text{ N}$  et de longueur  $3R$ , est articulée en O. Elle s'appuie sur un cylindre lisse de rayon  $R = 20 \text{ cm}$  et de poids  $Q = 200 \text{ N}$ . Ce dernier, s'appuie sur un plan horizontal lisse. Le cylindre est maintenu en équilibre grâce à un fil inextensible OC de longueur  $2R$  (voir figure ci-contre).

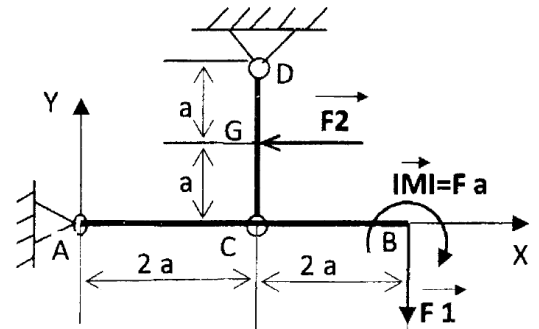
- Déterminer la tension du fil ainsi que la réaction de la liaison en O.

**Exercice 2 (examen final – Janvier 2013)**

Deux barres AB et CD de poids négligeables, articulées entre elles en C, reposent sur deux appuis doubles en A et D. L'ensemble est sollicité par deux forces  $F_1$  et  $F_2$ , appliquées respectivement en B et G ainsi que par un moment  $M$  autour du point B (voir figure ci-contre).

On donne  $F_1 = F_2 = 1000 \text{ N}$ ,  $a = 0,2 \text{ m}$  et  $M = F \cdot a = 200 \text{ Nm}$ .

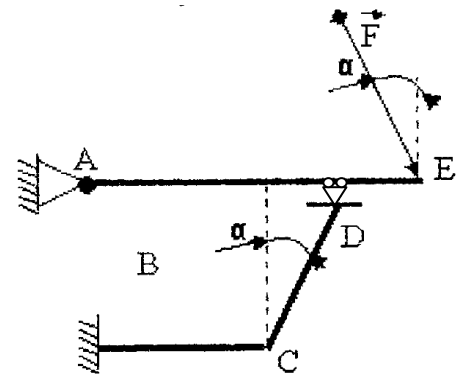
- Calculer les réactions aux articulations A, C et D.

**Exercice 3 (examen de rattrapage Fév. 2011)**

Soit le mécanisme formé de :

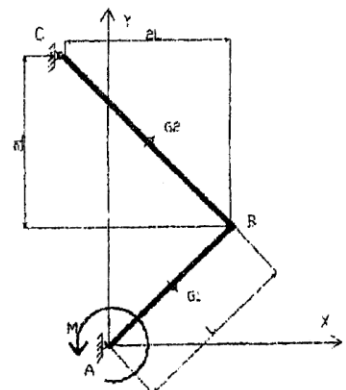
- Une barre AE de poids  $P_1 = 2P$ , articulée en A.
- Une barre BC de poids  $P_2 = P$ , encastrée en B.
- Une barre CD de poids  $P_3 = P$ , soudée en C et en contact sans frottements avec AE en D.

Une charge  $F = P$  est appliquée à ce système en E. Déterminer, en fonction de  $P$ , les réactions des liaisons en A, B et D. On donne  $AE = 2a$ ,  $BC = CD = a$  et  $\alpha = 30^\circ$ .

Exercices supplémentaires :**Exercice 4**

Deux barres AB et BC de poids respectifs  $P_1$  et  $P_2$ , sont articulées entre elles en B et reposent sur deux articulations en A et en C. Les deux barres sont inclinées de  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre). Un moment  $M$  d'intensité connue est appliqué au point A.

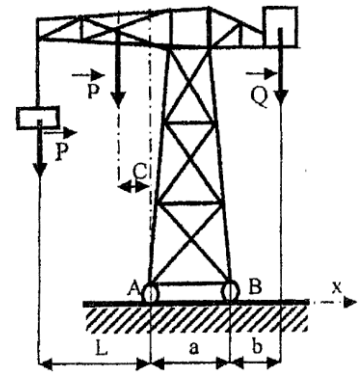
Déterminer les réactions aux articulations A, B et C. (on donne  $P_1 = P$ ,  $P_2 = \sqrt{2} P$  et  $M = L P_2$ ).



**Exercice 5**

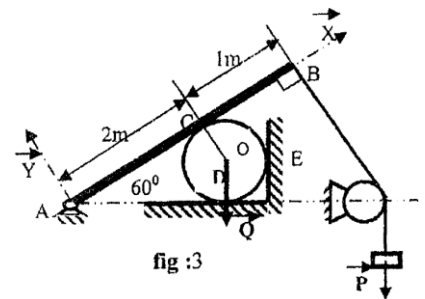
Le poids de la grue représentée ci-contre est égal, sans contrepoids, à  $P$ . La ligne d'action de  $P$  passe à une distance  $c$  de la roue gauche  $A$ . L'écartement des roues est  $AB = a$ . La charge maximale que peut soulever la grue est égale à  $P_1$ . On veut garantir la stabilité de la grue en charge et à vide. On donne  $L = 4a$ ,  $b = a$ ,  $c = a/2$  et  $P_1 = P/2$ . En fonction de  $P$  :

- Calculer les valeurs minimale  $Q_{1v}$  et maximale  $Q_{2v}$  du contrepoids correspondant au basculement de la grue à vide ( $P_1 = 0$ ).
- Calculer les valeurs minimale  $Q_{1c}$  et maximale  $Q_{2c}$  du contrepoids correspondant au basculement de la grue à pleine charge ( $P_1 = P/2$ ).
- En déduire la plage de variation du contrepoids  $Q$  pour un fonctionnement stable à vide et en charge.

**Exercice 6**

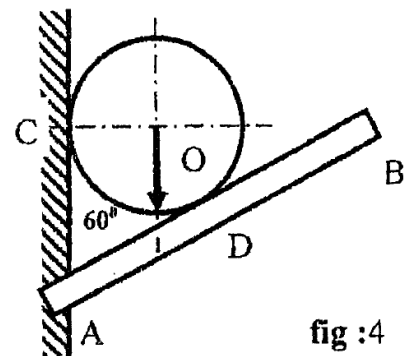
Soit le système composé d'une barre rigide  $AB$ , de poids  $P_1$ , articulée en  $A$  et reposant au point  $C$  (sans frottements) sur une sphère de poids  $Q$ . La sphère repose sans frottements sur le sol au point  $D$  et sur le mur au point  $E$ . Au point  $B$  est fixé un fil inextensible s'enroulant autour d'une poulie de masse négligeable et supportant un poids  $P$  (voir figure ci-contre). On donne  $P = 500$  N,  $P_1 = 400$  N,  $Q = 300$  N.

- Déterminer les réactions de l'articulation ainsi que la réaction au point de contact  $C$ .
- En déduire les réactions du sol et du mur sur la sphère au point  $D$  et  $E$ .

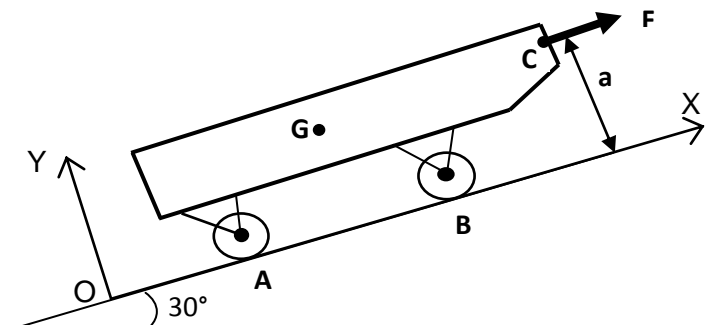
**Exercice 7**

Une barre  $AB$  de longueur  $L = 1$  m et de poids  $P = 100$  kgf est encastrée dans un mur au point  $A$ . Elle forme un angle  $\alpha = 60^\circ$  avec le mur. Un cylindre de poids  $Q = 180$  kgf repose sans frottements sur la barre au point  $D$  et sur le mur au point  $C$  (voir figure ci-contre). On donne  $AD = a = 0,4$  m.

- Déterminer l'expression du moment d'encastrement au point  $A$  en fonction de  $P$ ,  $Q$ ,  $L$ ,  $\alpha$  et  $a$ .
- Calculer les réactions aux points  $C$ ,  $D$  et  $A$ .

**Exercice 8 : (examen de rattrapage – janvier 2014)**

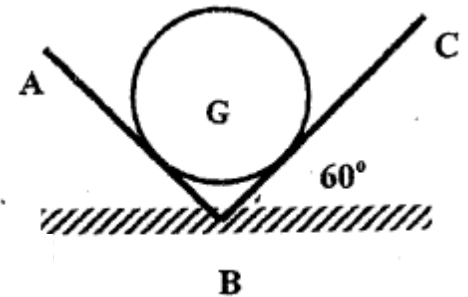
Une benne de chargement de poids  $P$  est en position d'équilibre sur des rails inclinés d'un angle de  $30^\circ$  par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre). Une force  $F$  parallèle à la droite  $AB$  est appliquée en  $C$  sur un câble pour déplacer la benne. Déterminer la force de traction  $F$  et les réactions des roues aux points  $A$  et  $B$  à la position d'équilibre. Les frottements sont négligés. On donne  $AB = a$ , les composantes de  $\vec{AG} = (a/2, 3a/4)$  dans le repère  $R(O, X, Y)$ .



## Série d'exercices n° 2 : équilibre du point matériel (1h30 min)

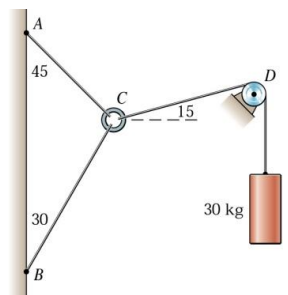
Exercices à faire en TD :**Exercice 1**

Une boule homogène pesant 6 kgf repose sur deux plans orthogonaux AB et BC parfaitement lisses. Le plan BC forme un angle de  $60^\circ$  avec l'horizontale. Déterminer la force exercée par la boule sur chaque plan

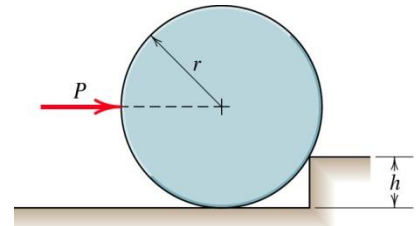
**Exercice 2**

Une charge de masse  $m=30$  kg est suspendue par l'intermédiaire d'un petit anneau C (assimilé à un point matériel) à deux câbles parfaitement flexibles AC et BC dont les poids sont négligeables.

Déterminer les tensions dans les deux câbles AC et BC.

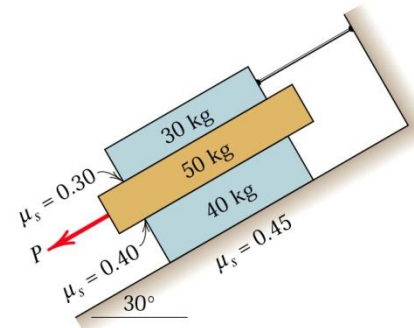
**Exercice 3**

Un cylindre de rayon  $R$  et de masse  $m$  doit passer par-dessus un obstacle de hauteur  $h$  sous l'action d'une force horizontale  $P$  appliquée au point D (voir figure ci-contre). Exprimer, en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $R$  et  $h$ , la valeur minimale de  $P$  nécessaire pour initier le roulement du cylindre (on négligera les frottements).

**Exercice 4**

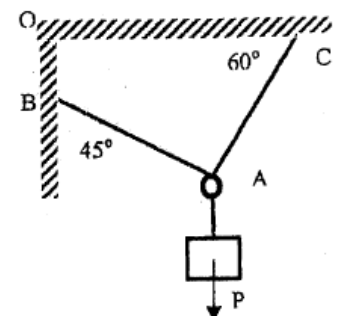
Trois blocs d'épaisseurs négligeables sont positionnés sur un plan incliné comme illustré sur la figure ci-contre.

Une force  $P$  parallèle au plan incliné est appliquée au bloc du milieu. Le bloc supérieur est maintenu en équilibre grâce à un câble relié à un support fixe. Les coefficients de frottement statique sont donnés au niveau des trois surfaces de contact (voir figure). Déterminer la valeur limite de la force  $P$  au-delà de laquelle l'équilibre du système sera rompu.

Exercices supplémentaires :**Exercice 5**

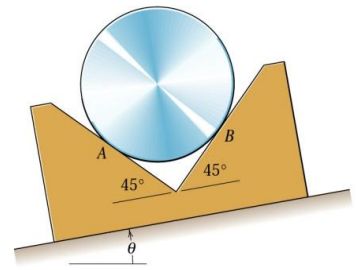
Une charge de poids  $P=100$  N est suspendue par l'intermédiaire d'un petit anneau A (assimilé à un point matériel) à deux câbles parfaitement flexibles AB et AC dont les poids sont négligeables.

Déterminer les intensités des forces exercées par les deux câbles sur l'anneau

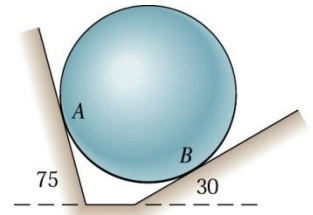


**Exercice 6**

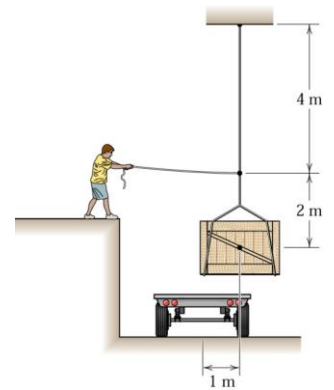
Trouver l'angle d'inclinaison  $\theta$  de sorte que la réaction en B soit égale à la moitié de celle en A. On négligera les forces de frottement.

**Exercice 7**

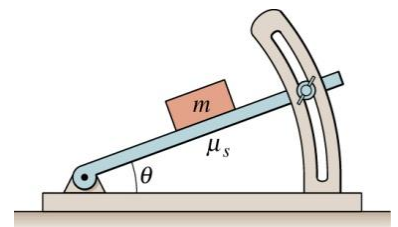
Une sphère homogène parfaitement lisse de masse  $m = 20 \text{ kg}$  repose sur deux plans inclinés (voir figure ci-contre). Déterminer les réactions aux points de contact A et B

**Exercice 8**

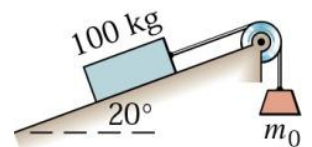
Quelle est la valeur de la force horizontale  $P$  qui doit être appliquée sur le câble AB afin de centrer la caisse pesant 50 kg au dessus de la remorque (voir figure ci-contre)

**Exercice 9**

Déterminer l'angle maximal  $\theta_{\max}$  que peut avoir le plan incliné ajustable avec l'horizontale sans qu'il y ait de glissement du bloc de masse  $m$  (voir figure ci-contre).  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique entre les surfaces du bloc et du plan incliné.

**Exercice 10**

Déterminer les valeurs limites maximale et minimale que peut admettre la masse  $m_0$  de sorte que le bloc de 100 kg, illustré sur la figure ci-contre, demeure toujours en équilibre (aucun glissement, ni vers le haut, ni vers le bas). Le coefficient de frottement statique entre le bloc et le plan incliné est de 0.3

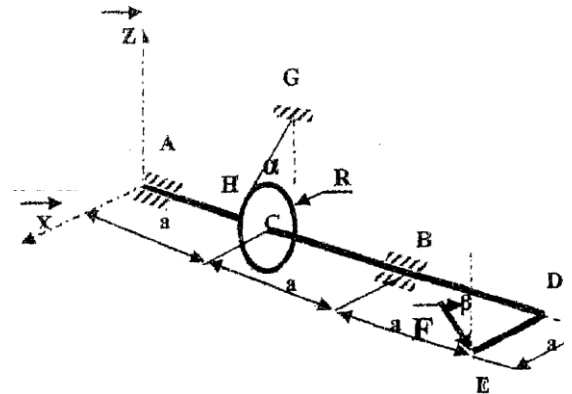


## Série d'exercices n° 4 : équilibre du solide dans l'espace (3h00 min)

Exercices à faire en TD :**Exercice 1 :**

Soit le système mécanique composé d'une barre coudée ADE de poids négligeable, reposant sur deux appuis cylindriques A et B, et d'un disque de rayon R, de masse négligeable, fixé à la barre en C. Le disque est relié à un câble inextensible qui forme avec la verticale un angle  $\alpha = 60^\circ$  suspendu au point G (voir figure ci-contre). La force F appliquée au point E se trouve dans le plan parallèle au plan XAZ et est inclinée par rapport à la verticale d'un angle  $\beta = 30^\circ$ .

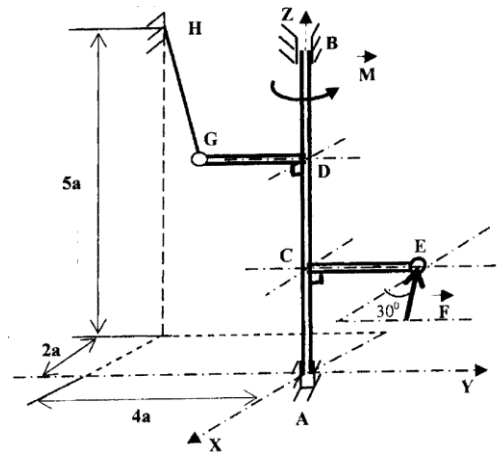
- Écrire les équations scalaires d'équilibre du système.
- En déduire les réactions aux appuis A et B, ainsi que la valeur de la tension du câble HG.

**Exercice 2 (examen final – Janvier 2009)**

Soit un corps de poids négligeable constitué de deux barres CE et DG soudées sur la barre AB (voir la figure ci-contre). Le corps est situé dans le plan YZ et est maintenu en équilibre en position verticale par l'intermédiaire de l'articulation sphérique en A, l'articulation cylindrique en B et le câble inextensible GH. Ce système est soumis à un moment M autour l'axe Z et une force F appliquée en E. Cette force est contenue dans un plan parallèle au plan XY et faisant un angle de  $30^\circ$  avec l'axe X.

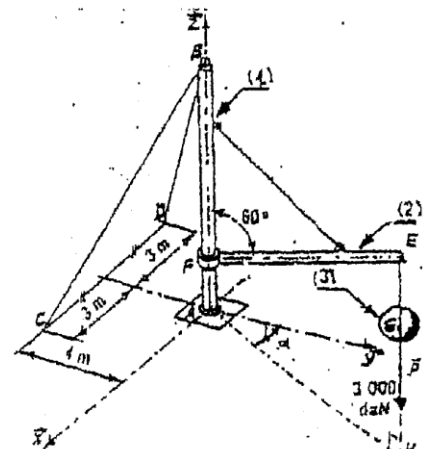
- Déterminer les réactions aux liaisons en A et B ainsi que la tension du câble HG.

On donne :  $AC = CD = DB = CE = DG = 2a$ .

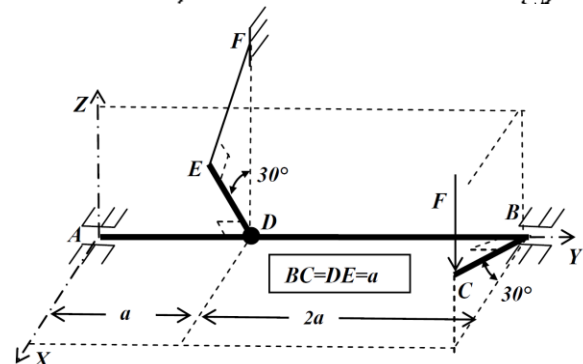
**Exercice 3**

Un mât de charge, utilisé pour décharger les navires, se compose d'un mât principal vertical AB (1), articulé en A (liaison sphérique) et maintenu en B par deux câbles inextensibles BC et BD (voir figure ci-contre). La charge à lever  $P = 3000 \text{ daN}$  est fixée en E sur un deuxième mât EF (2) articulé en F (liaison cylindrique). Un troisième câble inextensible relie le mât (1) au mât (2). Données :  $AB = 5 \text{ m}$ ,  $AF = 1 \text{ m}$ ,  $EF = 5 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

- Exprimer les projections des tensions des câbles BC et BD dans le repère (A, X, Y, Z).
- Calculer les tensions des câbles BC et BD ainsi que la réaction en A.

Exercices supplémentaires :**Exercice 4 (examen final – Janvier 2014)**

Soit le système mécanique ci-contre formé d'une barre coudée ABC reposant sur deux articulations cylindriques en A et B, et d'une barre DE soudée au point D à la barre ABC. La force F verticale est appliquée au point C. L'équilibre du système est maintenu par l'intermédiaire d'un fil inextensible EF (voir figure ci-contre).



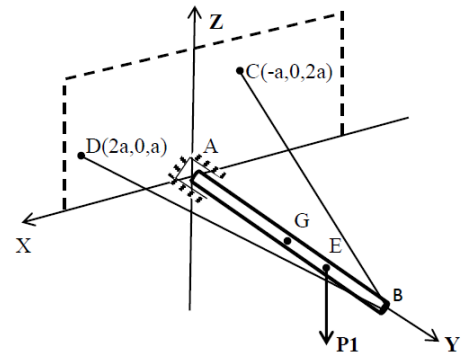
1. Établir les équations scalaires de l'équilibre du système.
  2. Déterminer les réactions aux articulations **A** et **B** ainsi que la tension du fil **EF**.
- N.B : Les poids des barres **ABC** et **DE** sont négligeables.*

### Exercice 5 (examen de rattrapage Jan. 2014)

Une barre homogène **AB** de longueur  $4a$ , de poids  $P$ , est articulée en **A** par une liaison sphérique. Cette barre supporte un panneau publicitaire de poids  $P_1$  centré au point **E**. La barre est maintenue en position horizontale par deux câbles **BC** et **BD** (voir figure ci-contre).

On donne  $AE=3a$ , les coordonnées des points  $C(-a,0,2a)$ ,  $D(2a,0,a)$ .

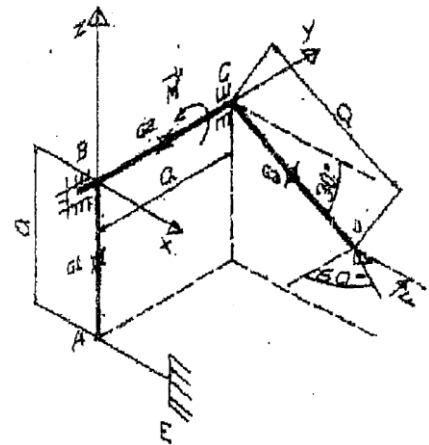
- Déterminer la réaction de la liaison sphérique en **A** et les tensions des câbles en fonction de  $P$  et  $P_1$ .



### Exercice 6

Une barre coudée **ABCD** s'appuie sur une articulation sphérique en **B** et une articulation cylindrique en **C**. Chacune des trois parties a un poids  $P$  et une longueur  $a$  ( $AB = BC = CD = a$ ). La barre est soumise à une force  $F$  en **D**. Celle-ci est contenue dans un plan parallèle au plan **XY** et faisant un angle de  $60^\circ$  avec l'axe **Y**. Un moment  $M$  est appliqué en **C** autour de **BC**. L'équilibre de la barre est maintenu par un câble inextensible **AE**, parallèle à l'axe **X** (voir figure ci-contre).

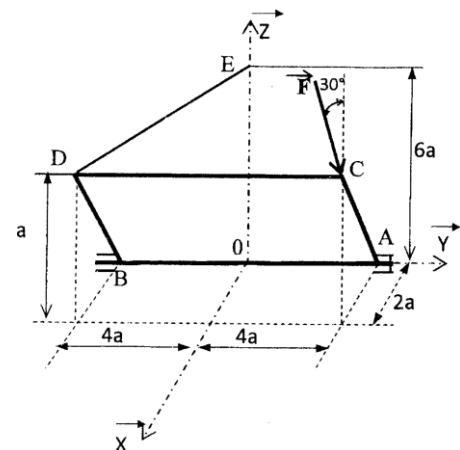
- Établir les équations scalaires de l'équilibre de la barre.
- Trouver les réactions aux appuis **B** et **C** ainsi que la tension de **AE**.



### Exercice 7 (examen final –Janvier 2013)

Un cadre rectangulaire **ABCD**, de poids négligeable, est fixé à un support par l'intermédiaire d'une articulation sphérique en **A** et d'une articulation cylindrique en **B**. Le câble **DE** maintient le cadre en position inclinée par rapport au plan horizontal. Ce cadre est également soumis à une force  $F$  appliquée en **C**, contenue dans un plan parallèle au plan **YOZ** et faisant un angle de  $30^\circ$  avec l'axe **Z**. On donne  $F = 1000 \text{ N}$  et  $a = 1 \text{ m}$ .

- Calculer les réactions en **A** et **B** ainsi que la tension du câble **DE**.

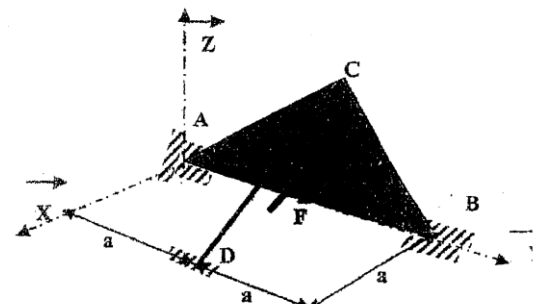


### Exercice 8

Soit une plaque triangulaire équilatérale **ABC** de côté  $2a$ , de poids  $P$ , s'appuie sur une articulation sphérique en **A** et une articulation cylindrique en **B**. Une force  $F$  perpendiculaire à la plaque est appliquée au point **G**. La plaque est maintenue en position verticale dans le plan **YAZ** à l'aide d'un câble inextensible **CD** (voir figure ci-contre).

- Écrire les équations scalaires de l'équilibre du système.
- En déduire les réactions aux appuis **A** et **B** ainsi que la tension du câble **CD**

Le point **G** est le centre d'inertie de la plaque ses coordonnées sont  $(0, Y_G, Z_G)$ .

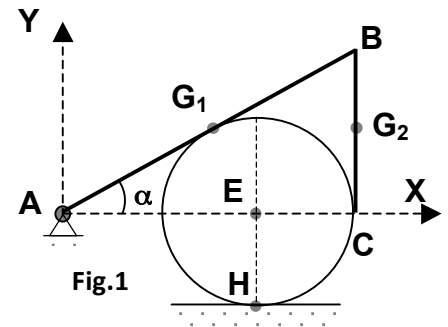


## Série d'exercices n° 2 : Statique (4h30 min)

Exercices à faire en TD :**Exercice 1 (examen final – Janvier 2017)**

Une barre homogène coudée **ABC** repose sans frottement sur un cylindre fixe de poids **P**, de rayon **R** et de centre **E**. La partie **AB** de la barre dont le centre d'inertie est **G<sub>1</sub>**, le poids est **P<sub>1</sub>** et la longueur **L**, est articulée en **A** et est inclinée d'un angle  $\alpha=30^\circ$  par rapport à l'horizontale. La partie **BC**, de centre d'inertie **G<sub>2</sub>**, de poids **P<sub>2</sub>**, est verticale. Le cylindre est en contact avec la barre coudée **ABC** aux points **G<sub>1</sub>** et **C** et avec le sol au point **H** (voir **Fig.1**).

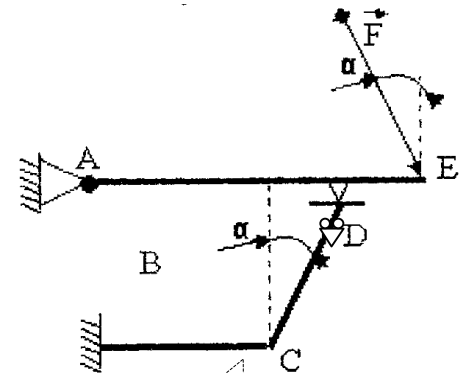
- Déterminer les réactions en **A**, **G<sub>1</sub>**, **C** et **H**.

**Exercice 2 (examen de rattrapage Fév. 2011)**

Soit le mécanisme formé de :

- Une barre AE de poids  $P_1 = 2P$ , articulée en A.
- Une barre BC de poids  $P_2 = P$ , encastrée en B.
- Une barre CD de poids  $P_3 = P$ , soudée en C et en contact sans frottements avec AE en D.

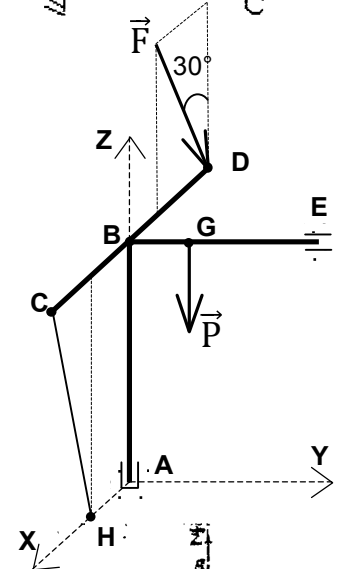
Une charge  $F = P$  est appliquée à ce système en E. Déterminer, en fonction de  $P$ , les réactions des liaisons en A, B et D. On donne  $AE = 2a$ ,  $BC = CD = a$  et  $\alpha = 30^\circ$ .

**Exercice 3 (examen final – Janvier 2015)**

Une structure de poids  $P$ , de centre d'inertie **G**, est constituée de 3 barres **AB**, **CD** et **BE**, soudées en **B**. Elle est maintenue en équilibre à la position indiquée sur la Fig.2 par une liaison sphérique en **A**, une liaison cylindrique en **B** ainsi qu'un câble fixé à la structure en **C** et au sol au point **H**. Une force  $F=2P$  contenue dans le plan **XZ**, est appliquée en **D** et fait un angle de  $30^\circ$  avec l'axe **Z**.

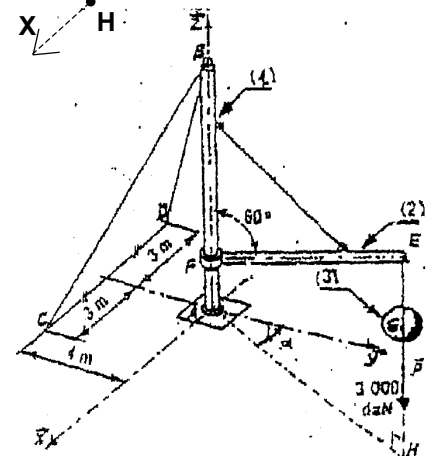
On donne  $AB = 5\text{ m}$ ,  $BC = BD = 3\text{ m}$ ,  $BE = 3\text{ m}$  et  $AH = BG = 1\text{ m}$ .

Déterminer les efforts des liaisons en A et E ainsi que la tension du câble en fonction du poids  $P$ .

Exercices supplémentaires**Exercice 4**

Un mât de charge, utilisé pour décharger les navires, se compose d'un mât principal vertical **AB** (1), articulé en **A** (liaison sphérique) et maintenu en **B** par deux câbles inextensibles **BC** et **BD** (voir figure ci-contre). La charge à lever  $P = 3000\text{ daN}$  est fixée en **E** sur un deuxième mât **EF** (2) articulé en **F** (liaison cylindrique). Un troisième câble inextensible relie le mât (1) au mât (2). Données :  $AB = 5\text{ m}$ ,  $AF = 1\text{ m}$ ,  $EF = 5\text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

- Exprimer les projections des tensions **BC** et **BD** dans le repère  $(A, X, Y, Z)$ .
- Calculer les tensions des câbles **BC** et **BD** ainsi que la réaction en **A**.

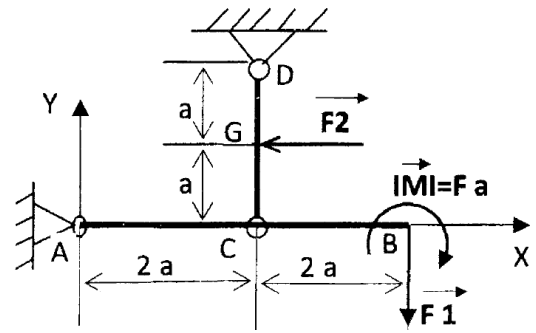


**Exercice 5 (examen final – Janvier 2013)**

Deux barres AB et CD de poids négligeables, articulées entre elles en C, reposent sur deux appuis doubles en A et D. L'ensemble est sollicité par deux forces  $F_1$  et  $F_2$ , appliquées respectivement en B et G ainsi que par un moment  $M$  autour du point B (voir figure ci-contre).

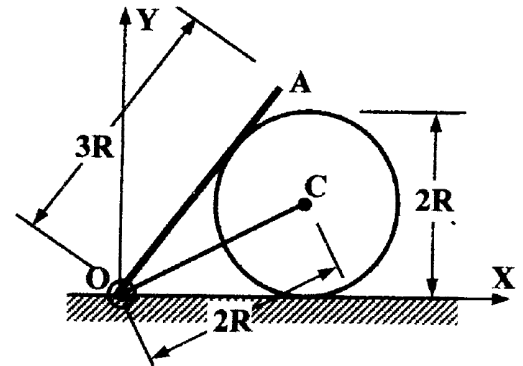
On donne  $F_1 = F_2 = 1000 \text{ N}$ ,  $a = 0,2 \text{ m}$  et  $M = F \cdot a = 200 \text{ Nm}$ .

- Calculer les réactions aux articulations A, C et D.

**Exercice 6 (examen final – Janvier 2012)**

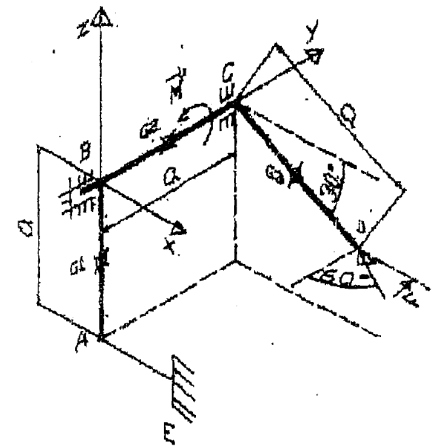
Une barre homogène OA, de poids  $P = 100 \text{ N}$  et de longueur  $3R$ , est articulée en O. Elle s'appuie sur un cylindre lisse de rayon  $R = 20 \text{ cm}$  et de poids  $Q = 200 \text{ N}$ . Ce dernier, s'appuie sur un plan horizontal lisse. Le cylindre est maintenu en équilibre grâce à un fil inextensible OC de longueur  $2R$  (voir figure ci-contre).

- Déterminer la tension du fil ainsi que la réaction de la liaison en O.

**Exercice 7**

Une barre coudée ABCD s'appuie sur une articulation sphérique en B et une articulation cylindrique en C. Chacune des trois parties a un poids  $P$  et une longueur  $a$  ( $AB = BC = CD = a$ ). La barre est soumise à une force  $F$  en D. Celle-ci est contenue dans un plan parallèle au plan XY et faisant un angle de  $60^\circ$  avec l'axe Y. Un moment  $M$  est appliqué en C autour de BC. L'équilibre de la barre est maintenu par un câble inextensible AE, parallèle à l'axe X (voir figure ci-contre).

- Établir les équations scalaires de l'équilibre de la barre.
- Trouver les réactions aux appuis B et C ainsi que la tension de AE.

**Exercice 8 (examen final – Janvier 2009)**

Soit un corps constitué de deux barres CE et DG de poids  $P$ , soudées à la barre AB de poids  $2P$  (voir la figure ci-contre). Le corps est situé dans le plan YZ et est maintenu en équilibre en position verticale par l'intermédiaire de l'articulation sphérique en A, l'articulation cylindrique en B et le câble inextensible GH. Ce système est soumis à un moment  $M = aP$  autour l'axe Z et une force  $F = P$  appliquée en E. Cette force est contenue dans un plan parallèle au plan XY et faisant un angle de  $30^\circ$  avec l'axe X.

- Déterminer, en fonction de  $P$ ,  $M$  et  $a$ , les réactions aux liaisons en A et B ainsi que la tension du câble HG.

On donne :  $AC = CD = DB = CE = DG = 2a$ .

