

## I. ACTIONS SISMIQUES & PERIODES DE RETOUR

*Cette annexe, informative servant d'appui scientifique, permet d'éclairer les choix faits concernant les valeurs caractéristiques, ou fractiles, des actions sismiques, leurs dites périodes de retour et le risque accepté de dépassement de ces fractiles pendant la durée de vie des ouvrages.*

Explications et démonstrations

### Formule $T_{ret}$

$$T_{ret}(s_0) = \frac{-T_{Ref}}{\ln(1 - Prob(S \geq s_0) | T_{Ref})}$$

ou

$$T_{ret}(s_0) = \frac{-T_L}{\ln(1 - Prob(S \geq s_0) | T_L)}$$

Simplifiée comme

$$T_r(s_0) = \frac{-T_L}{\ln(1 - P_r)}$$

### I.1 Accélération de zone: valeurs caractéristiques

Cette partie, en annexe d'appui scientifique, apporte les démonstrations et explications faisant le lien entre la théorie et les choix pour l'ingénierie :

- Période d'observation ou d'enregistrement des fluctuations des charges variables  $S$ ,  $T_{Ref}$ , dite aussi "Période de référence". Elle est aussi notée,  $T_0$  dans l'illustration en Figure I.2.
- Valeur de calcul arbitrairement choisie:  $s_0$
- Fractiles:  $S_k$ , usuellement  $S_{90\%}$
- Durée de vie:  $T_L$ , prise égale à 50 ans pour les bâtiments.
- Probabilité et seuil de dépassement "accepté" pour l'ingénierie, pour la valeur considérée  $s_0$ :  
 $P_r = Prob((S \geq s_0) | T_{Ref})$
- Période de retour:  $T_{ret} = T_r$

**Objectifs:**

Pour toute action variable sismique ou autre, notée  $S$ , considérée comme variable aléatoire, on suppose que l'on dispose des enregistrements dans le temps, menant à la représentation schématique illustrée en Figure (I.2).

**Hypothèses simplificatrices**

Les actions sismiques,  $S$ , étant des processus stochastiques (variation dans l'espace et dans le temps), il convient, pour les besoins de l'ingénierie, d'en faire une transformation simplifiée, permettant de la considérer comme une valeur aléatoire (considérée comme étant indépendante du temps) et en identifier la distribution probabiliste,  $f_S(\cdot)$ .

A cet effet, on adopte plusieurs hypothèses, en subdivisant la durée d'observation total  $T_0$ :

1. en  $n$  intervalles élémentaires  $\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_i, \dots, \Delta T_n$ ,
2. en admettant que, dans chacun des intervalles élémentaires, la distribution probabiliste reste la même  $\forall \Delta T_i$  avec  $i \in [1..n]$
3. d'un intervalle à un autre, en admettant que les valeurs dans chacun des intervalles élémentaires  $\Delta T_i$  et  $\Delta T_j$ ,  $\forall i \neq j$ , sont statistiquement indépendantes d'un intervalle à l'autre.

**Démonstration:**

Soit l'évènement:

$$E = \text{Event}(S \geq s_0 | T_0) \quad (\text{I.1})$$

Cet évènement s'écrit mathématiquement comme:

$$E_i = \bigcup_{i=1}^n [\text{Event}(S \geq s_0 | \Delta T_i)] \quad (\text{I.2})$$

Cela se traduit par:

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i \quad (\text{I.3})$$

Pour en simplifier le dénombrement et du fait de l'hypothèse d'indépendance statistique entre intervalles élémentaires, il est préférable d'en considérer l'évènement complémentaire:

$$\bar{E} = \bigcap_{i=1}^n \bar{E}_i \quad (\text{I.4})$$

Il devient alors possible d'écrire:

$$\text{Prob}(\bar{E}) = \prod_{i=1}^n \text{Prob}(\bar{E}_i) \implies (1 - \text{Prob}(E)) = \prod_{i=1}^n (1 - \text{Prob}(E_i)) \quad (\text{I.5})$$

Soit:

$$1 - \text{Prob}(S \geq s_0 | T_0) = \left( \prod_{i=1}^n (1 - \text{Prob}(S \geq |_{\Delta T_i})) \right) \implies 1 - \text{Prob}(S \geq s_0 | T_0) = (1 - \text{Prob}(S \geq |_{\Delta T}))^n \quad (\text{I.6})$$

Qui peut aussi s'écrire:

$$\frac{n}{1 - \text{Prob}(S \geq s_0 | [T_0 = n \cdot \Delta T])} = \frac{1}{1 - \text{Prob}(S \geq s_0 | [\Delta T = 1 \cdot \Delta T])} \quad (\text{I.7})$$

Soit donc:

$$\frac{n \cdot \Delta T}{1 - \text{Prob}(S \geq s_0 | [T_0 = n \cdot \Delta T])} = \frac{1 \cdot \Delta T}{1 - \text{Prob}(S \geq s_0 | [\Delta T = 1 \cdot \Delta T])} \quad (\text{I.8})$$

Puisque  $T_{ref} = n.\Delta T$ , on aboutit ainsi à une grandeur constante et indépendante du nombre d'intervalles considérés, (i.e.  $\frac{i.\Delta T}{1-Prob(S \geq s_0 | [T_0=i.\Delta T])}$ ,  $\forall i$  avec  $i=1$  à  $n$ ). Cette grandeur indépendante du nombre d'années d'observation est appelée, par convention, la période de retour [de même unité que  $T_{ref}$ ] du niveau  $S_0$  de la charge variable S:

$$T_{Ret}(S_0) = -\frac{T_{ref}}{1 - Prob(S \geq s_0 | T_{ref})} \quad (I.9)$$

**A retenir: Formule  $T_{ret}$**

$$T_{ret}(s_0) = \frac{-T_{ref}}{\ln(1 - Prob(S \geq s_0) | T_{Ref})}$$

### Applications numériques: Formule $T_{ret}$

$$T_{ref} = 50 \text{ ans}$$
$$s_0 = S_{90\%} : \text{fractile } 90\% \text{ soit } Prob(S \geq s_{90\%} | T_{ref}) = 0.1$$

$$T_{ret}(s_0) = \frac{-T_{ref}}{\ln(1-Prob(S \geq s_0)|T_{Ref})} \Rightarrow T_{ret}(S_{90\%}|T_{ref}) = 475ans$$

Nota: il est important de noter que  $P(S \geq S_{90\%}|T_{ret}) = 0.63$  et non pas 1 si le niveau  $S_{90\%}$  s'il devait être systématiquement atteint à chaque intervalle  $T_{ret}$

Figure I.1: Demonstration : Discrétisation en intervalles élémentaires statistiquement indépendants

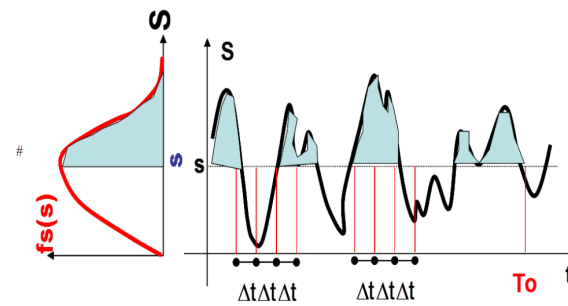


Figure I.2: Exemples :  $T_L = 50ans$ ,  $T_{L,LD} = 10ans$ ,  $A_k$  et  $A_{k,LD}$

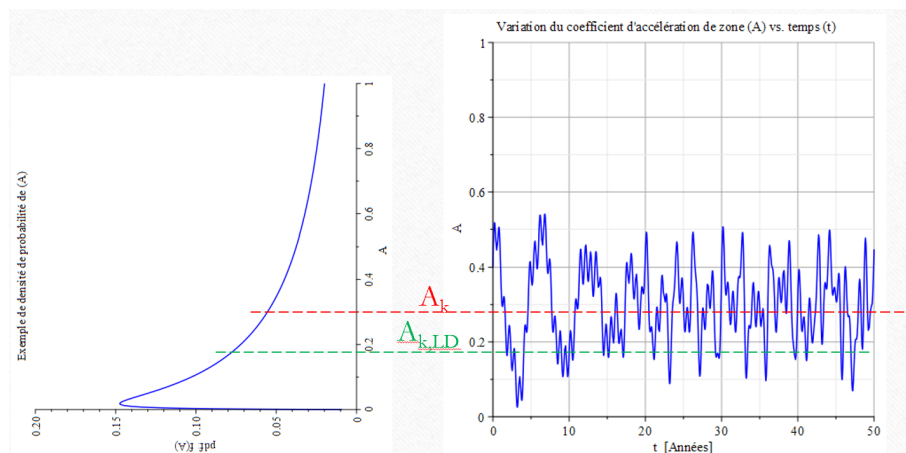
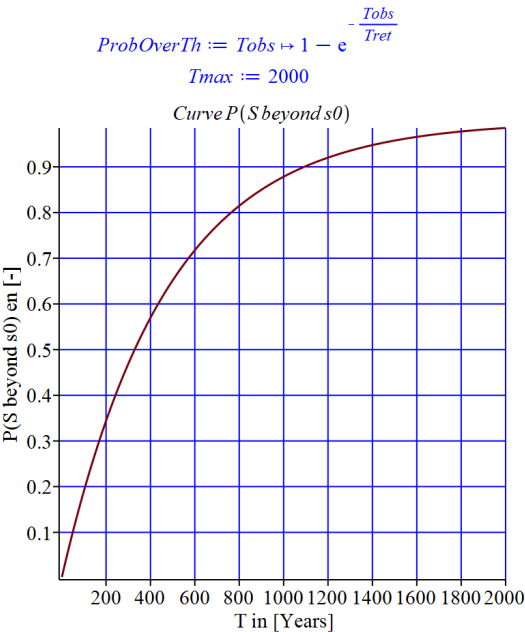


Figure I.3: Demonstration : Evolution de la probabilité d'occurrence du niveau de charge ( $S_0$ ) vs. temps (t)



**I.2 Coefficient d'importance vs. périodes de retour**

Avec le paramètre de sismicité locale,  $k = 2.7$ , et les coefficients d'importance, I, donnés dans le Tableau (3.10), les périodes de retour correspondantes et les valeurs des coefficients réducteurs  $v_A$  sont fournis par le Tableau (I.1).

Paramètres	Groupe d'importance			
	1A	1B	2	3
Coefficient d'importance, I	1.4	1.2	1	0.8
Période de retour, $T_r^*$ (ans)	1178	777	475	260
Coefficient réducteur, $v_A$	0.39	0.46	0.55	0.69

Table I.1: Coefficients d'importance et coefficient réducteurs selon les groupes d'importance