



**Université de Aïn Temouchent –Belhadj Bouchaib**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**

Département : Génie Mécanique

# **Polycopié pédagogique**

**BERREZOUG Hiba Imane**  
**et**  
**SARI HASSOUN Zakaria**

**Titre**

## **Mécanique Rationnelle Cours et Exercices Résolues**

Cours destiné aux étudiants de

Licence (spécialité et niveau) :

Deuxième Année (L2) LMD\_S3 Science des matière et science de la technologie.

Année :  
2021/2022



**Université de Aïn Temouchent –Belhadj Bouchaib**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**

Département : Génie Mécanique

# **Polycopié pédagogique**

.....

**Titre**

**... Mécanique Rationnelle Cours et Exercices  
Résolues**

Cours destiné aux étudiants de

Licence (spécialité et niveau) :

Deuxième Année (L2) LMD\_S3 Science des matière et science de la technologie

Année :  
2021/2022

## TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>8</b>
<b>Chapitre I : Rappel Mathématique .....</b>	<b>1</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>1</b>
<b>I. Caractéristiques d'un vecteur.....</b>	<b>1</b>
I.1. Vecteur unitaire :.....	1
I.2. Représentation d'un vecteur sur un axe : .....	1
I.3 Représentation d'un vecteur dans un plan : .....	2
I.4 Représentation d'un vecteur dans l'espace : .....	2
<b>II. Produit scalaire.....</b>	<b>3</b>
II.1. Propriétés du Produit scalaire : .....	5
<b>III. Produit vectoriel :.....</b>	<b>5</b>
III.1. Propriétés du Produit vectoriel : .....	6
<b>IV. Produit mixte :.....</b>	<b>6</b>
<b>V. La dérivée des vecteurs :.....</b>	<b>7</b>
<b>VI. Le moment d'un vecteur : .....</b>	<b>7</b>
VI.1. Par rapport à un point (O): .....	7
VI.2. Par rapport à un autre point (A) : .....	7
VI.3. Par rapport à un axe ( $\Delta$ ) : .....	8
<b>VII. Les Torseurs : .....</b>	<b>8</b>
<b>VII.1. Définition : .....</b>	<b>8</b>
VII.2. Propriétés des torseurs : .....	8
<b>EXERCICES RESOLUS.....</b>	<b>10</b>
<b>Chapitre II : STATIQUE DES SOLIDES .....</b>	<b>1</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>15</b>
<b>I. Description d'un solide :.....</b>	<b>15</b>
<b>II. Action mécanique :.....</b>	<b>15</b>
II.1. Force : .....	15
II.1.1 Résultante d'une force : .....	16
II.1.2 Composantes d'une force dans un plan: .....	16
II.1.3 Composantes d'une force dans l'espace: .....	17
II.2 Moments : .....	17
II.2.1 Moment d'une force par rapport à un point : .....	17

II.2.3. Moment d'une force par rapport à un axe :	17
II.2.4. Moment d'une force analytiquement :	18
<b>III. Classification des actions mécanique :</b>	<b>19</b>
III.1. Actions mécaniques à distance :	19
III.2. Actions mécaniques de contacte :	19
<b>IV. Liaison des solides :</b>	<b>20</b>
IV.1. Liaison sans frottement :	20
IV.2. Liaison avec frottement :	20
IV.2.1. Coefficient de frottement statique $\mu_0$ :	20
IV.2.2. Angle de frottement $\varphi$ :	20
<b>V. Equilibre statique :</b>	<b>21</b>
V.1. Le principe fondamental De La Statique (PFS):	21
V.2. Equilibre statique dans l'espace :	21
V.3. Equilibre statique dans un plan :	21
<b>VI. Réactions aux appuis et aux liaisons:</b>	<b>22</b>
VI.1. Appui simple (glissant ou rouleau) :	22
VI.2. Appui rotule (Double ou solide articulé) :	22
VI.3. Encastrement d'un solide :	23
VI.4. Symbole des appuis :	23
<b>EXERCICES RESOLUS</b>	<b>24</b>
<b>Chapitre III : GEOMETRIE DES MASSES</b>	<b>15</b>
<b>Introduction</b>	<b>34</b>
<b>I. La masse :</b>	<b>34</b>
I.1. Masse d'un Système discret :	34
I.2. Masse d'un Système continue:	34
I.2.1. Distribution volumique de la masse :	35
I.2.2. Distribution surfacique de la masse :	35
I.2.3. Distribution linéique de la masse :	36
<b>II. Centre de masse d'un Système Matériel:</b>	<b>37</b>
II.1. Composantes du barycentre G :	37
II.1.1. Système discret :	37
II.1.2. Système continue :	38
II.2. La symétrie :	39
II.2.1. Exemple d'application:	39
<b>III. Théorèmes de Guldin :</b>	<b>41</b>

III.1. Premier théorème de Guldin :	41
III.2. Deuxième théorème de Guldin :	42
Exemple d'application:	43
<b>IV. Moment d'inertie, Opérateur d'inertie, Matrice d'inertie :</b>	<b>44</b>
IV.1. Moment d'inertie d'un solide :	44
IV.1.1 Relation entre les moments d'inerties par rapport à un (point, axe ou plan) :	45
IV.2. Opérateur d'inertie par rapport à un point O:	46
IV.3 Matrice d'inertie d'un solide par rapport à un point :	47
IV.4. Matrice principale d'inertie :	49
IV.5. Symétrie Matricielle :	49
IV.5.1 Plan de symétrie :	49
IV.5.2 Axe de symétrie :	50
IV.6. Symétrie de révolution :	51
<b>V. Théorème de HUYGENS :</b>	<b>52</b>
<b>EXERCICES RESOLUS</b>	<b>53</b>
<b>Chapitre IV : CINEMATIQUE</b>	<b>34</b>
<b>Introduction</b>	<b>64</b>
<b>I. Systèmes de coordonnées :</b>	<b>64</b>
I.1. Coordonnées cartésienne :	64
I.2. Coordonnées cylindriques :	65
I.3. Coordonnées sphérique :	66
<b>II. Vitesse et accélération dans différents Systèmes de coordonnées :</b>	<b>67</b>
II.1 Vitesse et accélération par les coordonnées cartésiennes :	68
II.2 Vitesse et accélération par les coordonnées cylindriques :	68
II.3. Vitesse et accélération par les coordonnées sphériques :	69
<b>III. Coordonnées curviligne :</b>	<b>70</b>
<b>VI. Mouvement uniforme (uniformément varié) :</b>	<b>72</b>
VI.1. Mouvement uniformément accéléré :	72
VI.2. Mouvement uniformément retardé :	72
<b>V. Cinématique du Solide :</b>	<b>72</b>
V.1 Solide Indéformable (rigide) :	72
V.2 Champ des vitesses d'un solide :	73
V.2.1 Formule fondamentale de la cinématique du solide (Relation de Varignon):	73
V.2.2 Torseur cinématique :	74



V.3 Champ des accélérations d'un solide :.....	74
V.4. Mouvement d'un solide :.....	75
V.4.1. Mouvement de translation :.....	75
V.4.2 Mouvement de rotation autour d'un axe ( $\Delta$ ) fixe :.....	75
V.4.3 Mouvement hélicoïdal autour d'un axe ( $\Delta$ ) fixe :.....	77
V.4.4. Composition des mouvements :.....	78
<b>V.4.4.1. Formule de Boor :</b> .....	78
<b>V.4.4.2. Composition des vitesses :</b> .....	79
<b>V.4.4.3. Composition des accélérations :</b> .....	80
<b>V.4.4.4 Composition des vecteurs rotation :</b> .....	81
V.5 Repérage d'un solide :.....	82
V.5.1 Angles D'Euler :.....	83
V.6 Cinématique de contact :.....	85
V.6.1 Vitesse de glissement :.....	85
V.6.2 Roulement et pivotement au point I :.....	86
V.7 Mouvement Plan sur Plan :.....	88
<b>EXERCICES RESOLUS.....</b>	<b>89</b>
<b>Chapitre V : CINETIQUE DU SOLIDE.....</b>	<b>64</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>101</b>
<b>I. Torseur cinétique :.....</b>	<b>101</b>
I.1. Eléments d'un torseur cinétique :.....	101
I.1.1. Torseur cinétique d'un point matériel :.....	101
I.1.2. Torseur cinétique d'un solide:.....	101
I.2. Moments cinétique d'un solide en l'un de ces points :.....	103
<b>II. Energie cinétique d'un solide :.....</b>	<b>104</b>
II.1. Energie cinétique d'un point matériel :.....	104
II.2. Energie cinétique d'un solide :.....	104
II.3 Energie cinétique d'un solide en fonction des torseurs cinétique et Cinématique :.....	104
II.4 Energie cinétique d'un solide « Forme matricielle » :.....	105
<b>EXERCICES RESOLUS.....</b>	<b>106</b>
<b>Chapitre VI : DYNAMIQUE DU SOLIDE .....</b>	<b>101</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>120</b>
<b>I. Torseur dynamique : .....</b>	<b>120</b>
I.1. Torseur dynamique d'un point matériel :.....	120

I.1.2. Torseur dynamique d'un solide :.....	120
<b>II. Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique :.....</b>	<b>121</b>
II.1. Relation entre les résultantes $\mathbf{P}(S/R)$ et $\mathbf{\gamma}S/R$ : .....	121
II.2. Relation entre les moments $\boldsymbol{\sigma}A(S/R)$ et $\boldsymbol{\delta}A S/R$ :.....	121
<b>EXERCICES RESOLUS.....</b>	<b>123</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>143</b>



### INTRODUCTION

Le présent polycopié intitulé « Mécanique Rationnelle » (physique 04) est élaboré et présenté en conformité au canevas officiel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Il est destiné aux étudiants de la deuxième année LMD (L2), relatif à la formation Licence LMD-S3 dans le domaine ' Science de la matière (SM) et Science de la Technologie (ST)' des universités Algériennes.

Ce polycopié présente un cours détaillé, avec des exercices résolus. Grâce à un enchaînement logique aussi bien qu'une méthode simple entreprise dans ce polycopié, l'étudiant aura une meilleure assimilation et pourra aller plus loin et étudier des problèmes d'un caractère plus avancé.

La mécanique rationnelle est une science qui étudie le mouvement de la matière dans ces formes les plus simples.

Dans ce polycopié ce cours est structuré par six chapitres, où chaque chapitre est enchaîné par des exercices résolus:

Le premier chapitre porte sur des rappels mathématiques, les vecteurs et les opérateurs vectoriels.

Le deuxième chapitre traite la statique des points matériels ainsi que la statique des solides avec des lois et des méthodes de résolutions.

Le troisième chapitre est consacré à la géométrie des masses, il traite le calcul des centres d'inertie et des torseurs d'inertie des solides.

Le quatrième chapitre, traite la cinématique qui étudie le mouvement des corps matériels de point de vue géométrique (sans tenir compte des causes qui engendrent le mouvement).

Le cinquième chapitre décrit la cinétique du point matériel et la cinétique du solide indéformable (La quantité du mouvement, le moment cinétique, et l'énergie cinétique).

Le dernier chapitre, est consacré aux théorèmes généraux de la dynamique. Pour étudier le mouvement des corps matériels en liaison avec les forces qui s'exercent.

# **Chapitre I : Rappel Mathématique**

### Introduction

En mécanique les vecteurs sont fondamentaux, ils représentent les positions, vitesses et accélérations d'un point matériel en mouvement, les forces appliquées à un système matériel et leurs moments.

### I. Caractéristiques d'un vecteur

La représentation et les caractéristiques d'un vecteur sont obtenues à partir d'un repère convenable avec un système de coordonnées qui simplifie les calculs.

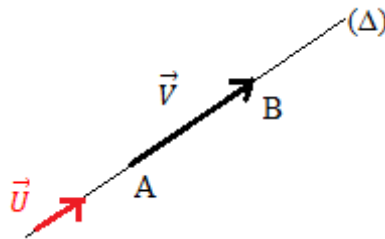
#### I.1. Vecteur unitaire :

Soit un vecteur  $\vec{u}$  appartenant à un espace vectoriel (E), Si son module  $|\vec{u}|=1$ , c'est-à-dire que  $\vec{u}$  est un vecteur **unitaire (normé)**.

#### I.2. Représentation d'un vecteur sur un axe :

Un vecteur est une droite ayant une origine A et une extrémité B, est défini par :

- Son point d'application (point d'origine).
- Son module.
- Son support qui est l'axe ( $\Delta$ ).
- Son sens.



**Figure I.1.** Représentation vectorielle sur un axe ( $\Delta$ ).

Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire de l'axe ( $\Delta$ ), et  $\alpha$  un nombre réel ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) :

➤ Si  $\vec{u}$  et  $\vec{V}$  sont parallèles et ont le même sens, donc :

$$\vec{V} = \alpha \cdot \vec{u} \text{ et } |\vec{V}| = \alpha \rightarrow \vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{u}$$

➤ Si  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont parallèle et n'ont pas le même sens, donc :

$$\vec{V} = -\alpha \cdot \vec{u} \text{ et } |\vec{V}| = \alpha \rightarrow \vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{u}$$

### I.3 Représentation d'un vecteur dans un plan :

Considérons quel que soit un vecteur  $\vec{V}$  appartenant au repère plan R (O,x,y) dans la base orthonormé (O,  $\vec{i}, \vec{j}$ ) posant  $\vec{V}_x, \vec{V}_y$  les vecteurs de projection de  $\vec{V}$  sur le plan R, et x,y les composantes du vecteur  $\vec{V}$  sur ce plan, par projection  $\vec{V}$  est défini comme suite :

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

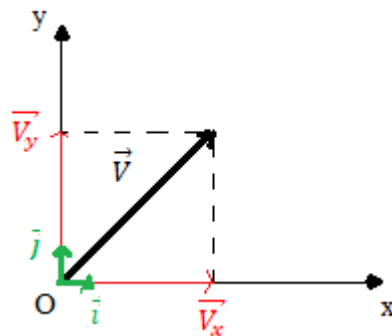


Figure I.2. Représentation vectorielle sur un plan.

### I.4 Représentation d'un vecteur dans l'espace :

Considérons quel que soit un vecteur  $\vec{V}$  appartenant à un repère d'espace R (O,x,y, z) dans la base orthonormé directe (O,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ), c'est-à-dire que :

- $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$
- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  doivent respecter la règle de tire-bouchon

#### Règle de tire-bouchon :

On place un tire-bouchon le long de l'axe  $\vec{OZ}$ , et on le fait tourner dans le sens trigonométrique (contraire d'aiguilles d'une montre), qui ramène l'axe  $\vec{Ox}$  vers l'axe  $\vec{Oy}$  ce qui donne le sens de l'axe  $\vec{OZ}$  qui se dirige vers le haut.

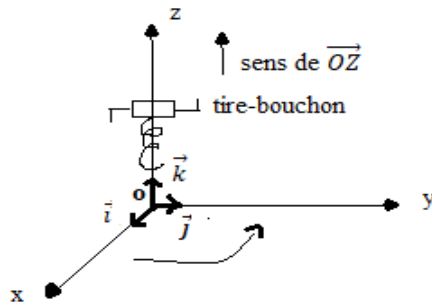


Figure I.3. Représentation de la règle tire-bouchon

posant  $\vec{V}_x, \vec{V}_y, \vec{V}_z$  les vecteur projections de  $\vec{V}$  sur le repère R et x,y,z les composantes du vecteur  $\vec{V}$  sur cet espace, par projection  $\vec{V}$  est définit comme suite :

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$$

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

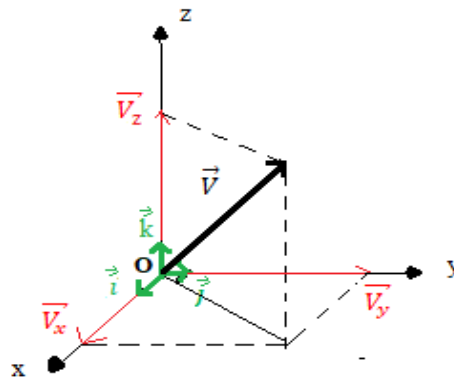


Figure I.4. Représentation vectorielle dans l'espace.

**Remarque :**

Soit  $\vec{V}$  un vecteur non unitaire dans l'espace (E), pour rendre  $\vec{V}$  un vecteur unitaire il suffit de divisé ce vecteur par sa norme (son module) :  $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$

## II. Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  de (E), faisant entre eux un angle  $\theta$  est le scalaire réel définit par :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \theta$$

Et définit aussi par la projection de  $\vec{U}$  sur  $\vec{V}$  fois la norme de  $\vec{V}$  :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = AH \cdot |\vec{V}|$$

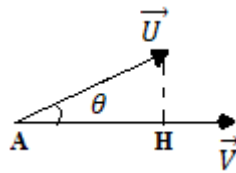


Figure I.4. Représentation  $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$

**Remarque**

On a :  $\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \theta$

-Si  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  alors :  $\cos \theta > 0$  et :  $\vec{U} \cdot \vec{V} > 0$

-Si  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  alors :  $\cos \theta < 0$  et :  $\vec{U} \cdot \vec{V} < 0$

-Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  alors  $\vec{U} \perp \vec{V}$  et :  $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

Soit  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  les composantes des vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{U}$  respectivement dans la base orthonormée directe  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , donc le produit scalaire de ces deux vecteurs est :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x'x + y'y + z'z$$

( Car :  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$  )

Le produit scalaire du même vecteur  $\vec{V}$  :

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{V}|^2 \text{ c'est-à-dire que la norme } |\vec{V}| \text{ est définie comme suite :}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### II.1. Propriétés du Produit scalaire :

- Le produit scalaire est commutatif :  $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
- Le produit scalaire n'est pas associatif :  $(\vec{U} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{W}$  n'existe pas
- Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition vectorielle

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{V}) + (\vec{U} \cdot \vec{W})$$

### III. Produit vectoriel :

Le produit vectoriel des deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  est le vecteur  $\vec{W}$  défini par :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} \text{ ou } -\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{U}$$

- La direction du vecteur  $\vec{W}$  est une droite ( $\Delta$ ) perpendiculaire au plan  $(\vec{U}, \vec{V})$  (figure I.5) D'où  $\vec{W} \perp \vec{U}$  et  $\vec{W} \perp \vec{V}$ .
- Le sens du vecteur  $\vec{W}$  suit la règle de tire-bouchon tel que  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$  soit directe.
- La norme du vecteur  $\vec{W}$  est :  $|\vec{W}| = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \sin \theta$  (ou  $\theta = (\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$ ).

Posant  $(x, y, z), (x', y', z')$  et  $(x'', y'', z'')$  les composantes des vecteurs  $\vec{V}, \vec{U}$  et  $\vec{W}$  respectivement dans la base orthonormée directe  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , donc le produit vectoriel de ces deux vecteurs est :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x & y & z \end{bmatrix} = (y'z - yz')\vec{i} - (x'z - xz')\vec{j} + (x'y - xy')\vec{k}$$

D'où :

$$x'' = (y'z - yz')$$

$$y'' = (x'z - xz')$$

$$z'' = (x'y - xy')$$

Le produit vectoriel représente la surface d'un parallélogramme :  $S = h \cdot |\vec{V}|$

avec  $h = |\vec{U}| \cdot \sin \theta$  (Figure I.5)

On a la relation :  $|\vec{U} \wedge \vec{V}| = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \cdot \sin \theta = h \cdot |\vec{V}|$

Donc :  $|\vec{U} \wedge \vec{V}| = S$

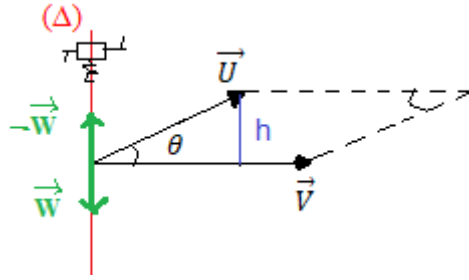


Figure I.5. Parallélogramme formé par les deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$

### III.1. Propriétés du Produit vectoriel :

- Le produit vectoriel est anticommutatif :  $\vec{U} \wedge \vec{V} = - \vec{V} \wedge \vec{U}$
- Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition vectorielle

$$(\vec{U} + \vec{V}) \wedge \vec{W} = (\vec{U} \wedge \vec{W}) + (\vec{V} \wedge \vec{W})$$

- Si  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont colinéaire  $\vec{U} // \vec{V}$  donc  $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$   
( $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ )
- Si  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont perpendiculaire  $\vec{U} \perp \vec{V}$  donc  $|\vec{U} \wedge \vec{V}| = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}|$
- Le produit vectoriel est linéaire :  $(\alpha \vec{U}) \wedge (\beta \vec{V}) = \alpha \beta (\vec{U} \wedge \vec{V})$  avec  $\alpha, \beta$  : des scalaire.

### IV. Produit mixte :

Le produit mixte des trois vecteurs  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  est le scalaire :

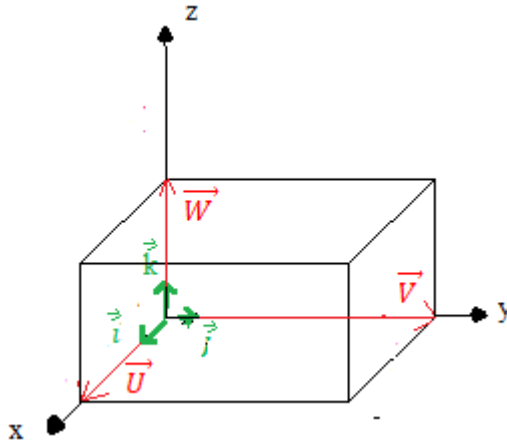
$$\vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \vec{W} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \cdot (\vec{W} \wedge \vec{U})$$

Le produit mixte représente le volume d'un parallélépipède formé par ces trois vecteurs  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$ , Soit :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{i}, \vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \vec{j}, \vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \vec{k}$$



$$\vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} yz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = xyz \equiv \text{Volume du parallélépipède}$$



**Figure I.6.** parallélépipède formé par les trois vecteurs  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$

#### V. La dérivée des vecteurs :

- $\frac{d(\vec{U} \cdot \vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$
- $\frac{d(\lambda(t) \cdot \vec{V})}{dt} = \frac{d\lambda(t)}{dt} \cdot \vec{V} + \lambda(t) \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$

avec  $\lambda(t)$ : est une fonction scalaire qui dépend de  $t$

- $\frac{d(\vec{U} \wedge \vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt}$

#### VI. Le moment d'un vecteur :

##### VI.1. Par rapport à un point (O):

Le moment d'un vecteur  $\vec{BC}$  par rapport à un point (O) est un vecteur défini comme suite :

$$\vec{M}_O(\vec{BC}) = \vec{OB} \wedge \vec{BC}$$

##### VI.2. Par rapport à un autre point (A) :

Le moment d'un vecteur  $\vec{BC}$  par rapport à un autre point (A), ou le moment de ce vecteur par rapport au point (O) est connu, donc :

$$\vec{M}_A(\vec{BC}) = \vec{AB} \wedge \vec{BC} = (\vec{AO} + \vec{OB}) \wedge \vec{BC}$$

$$= \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$$

$$\vec{M}_A(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{BC} + \vec{M}_O(\overrightarrow{BC})$$

### VI.3. Par rapport à un axe ( $\Delta$ ) :

Le moment d'un vecteur  $\overrightarrow{BC}$  par rapport à axe ( $\Delta$ ) ayant un origine O et vecteur unitaire  $\vec{u}$  est le produit mixte des vecteur ( $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC}$  et  $\vec{u}$ ) :

$$\vec{M}_\Delta(\overrightarrow{BC}) = \vec{M}_O(\overrightarrow{BC}) \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}) \cdot \vec{u}$$

## VII. Les Torseurs :

### VII.1. Définition :

Le torseur  $[\tau]$  est un outil mathématique privilégié de la mécanique, il présente un système de vecteurs défini par :

- Sa résultante :  $\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{V}_i$
- Son moment résultant en un point (O) donnée :  $\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{V}_i$   
( $P_i$  les points d'application de  $\vec{V}_i$ )

D'où :

$$[\tau]_O = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{V}_i \\ \vec{M}_O = \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{V}_i \end{cases}$$

La propriété la plus importante des torseurs est la règle de transport des moments (ou distribution des moments) qui caractérise un champ des vecteurs antisymétrique.

### VII.2. Propriétés des torseurs :

Considérant :  $[\tau]_A = \begin{cases} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_A \end{cases}$  et  $[\tau]_B = \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_B \end{cases}$

- **Addition :**

L'addition de deux ou plusieurs torseurs est juste la somme des résultantes et la somme des moments (exprimés en même point).

$$[\tau] = [\tau]_A + [\tau]_B = \begin{cases} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_A + \vec{M}_B \end{cases}$$

- **Egalité :**

Deux ou plusieurs torseurs sont dit équivalent s'ils ont la même résultante et le même moment.

$$[\tau]_A = [\tau]_B \Rightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \vec{M}_A = \vec{M}_B$$

- **Torseur nul :**

Un torseur est dit torseur nul si ses éléments son nul.

$$[\tau]_A = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = 0 \\ \vec{M}_A = 0 \end{cases}$$

- **Multiplication d'un torseur par un scalaire**

La multiplication d'un torseur par un scalaire  $\beta$  est définit comme suite :

$$\beta \cdot [\tau]_A = \begin{cases} \beta \cdot \vec{R}_1 \\ \beta \cdot \vec{M}_A \end{cases}$$

- **Produit scalaire de deux torseurs**

Le produit scalaire des torseurs  $[\tau]_A$  et  $[\tau]_B$  est :

$$[\tau]_A \cdot [\tau]_B = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_B \end{pmatrix} = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_B + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_A$$

- **L'équiprojectivité :**

Le produit scalaire des éléments d'un torseur en deux point différente est invariant.

$$\vec{M}_A \cdot \vec{R} = \vec{M}_B \cdot \vec{R}$$

EXERCICES RESOLUS

**Exercice 01.** Considérons deux vecteurs :

$$\vec{U} = -8\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{V} = 3\vec{i} + -9\vec{j} + -1\vec{k}$$

Calculer:

- 1) Les modules des deux vecteurs
- 2) Leur produit scalaire.
- 3) Leur produit vectoriel.
- 4) Les cosinus directeurs de leurs vecteurs unitaires.

**Solution:**

- 1) Les modules des deux vecteurs :

$$|\vec{U}| = \sqrt{(-8)^2 + (2)^2 + (5)^2} = 9.64$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(3)^2 + (-9)^2 + (-1)^2} = 9.53$$

- 2) Leur produit scalaire :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (-8) \times (3) + (2) \times (-9) + (5) \times (-1) = -47.$$

- 3) Leur produit vectoriel :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ -8 & 2 & 5 \\ 3 & -9 & -1 \end{vmatrix} = (43)\vec{i} + (7)\vec{j} + (66)\vec{k}$$

- 4) Les cosinus directeurs de leurs vecteurs unitaires :

$$\vec{u} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

$$\text{Le vecteur unitaire de } \vec{U} : \vec{u} = \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \frac{1}{9.64} (-8\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\text{Les cosinus directeurs : } \vec{u} = -0.82\vec{i} + 0.20\vec{j} + 0.51\vec{k}$$

$$\text{Le vecteur unitaire de } \vec{V} : \vec{v} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{9.53} (3\vec{i} - 9\vec{j} - 1\vec{k})$$

Les cosinus directeurs  $\vec{v} = 0.31 \vec{i} - 0.94 \vec{j} - 0.10 \vec{k}$

**Exercice 02.** Soient  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  deux vecteurs définis dans un repère orthonormé  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , comme suite :  $\vec{U} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  et  $\vec{V} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$

- 1) Déterminer les produits scalaires :  $(\vec{U} \cdot \vec{V})$ ,  $(\vec{U} \cdot \vec{U})$  et  $(\vec{V} \cdot \vec{V})$  ?

On donne :  $\vec{U}(3, -2, 6) \vec{V}(-4, 2.5, -7) \vec{W}(-6, 5, 2)$ .

- 2) Calculer :  $\vec{U} \cdot \vec{V}$  et  $\vec{U} \wedge \vec{V}$  ?  
3) Calculer les produits suivants  $\vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W})$  et  $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W})$  ?  
4) Déterminer la surface du triangle formé par les deux vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  ?

**Solution:**

- 1) Les résultats des produits scalaires sont :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = a.d + b.e + c.f$$

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = d^2 + e^2 + f^2$$

- 2) Le produit scalaire :  $\vec{U} \cdot \vec{V} = 3 \times (-4) + (-2) \times (2.5) + 6 \times (-7) = -59$ .

$$\text{Le produit vectoriel : } \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 6 \\ -4 & 2.5 & -7 \end{bmatrix} = (-1)\vec{i} - (3)\vec{j} + (-0.5)\vec{k}$$

- 3) les produits mixtes :

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2.5 & -7 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix} = -10$$

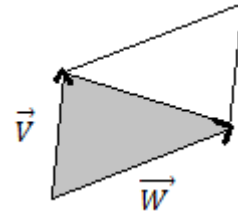
$$\begin{aligned} \vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2.5 & -7 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 6 \\ 40 & 50 & -5 \end{bmatrix} \\ &= (-290)\vec{i} + (225)\vec{j} + (-70)\vec{k} \end{aligned}$$

- 4) la surface du triangle formé par les deux vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  : est donner par la moitié de la surface d'un parallélogramme :

$$S = |\vec{V} \wedge \vec{W}| = \sqrt{(40)^2 + (50)^2 + (-5)^2} = 64.22$$

$$\text{la surface du triangle} = \frac{S}{2} = \frac{64.22}{2}$$

$$= 32.11 (\text{unité module d'un vecteur})^2$$



**Exercice 03.** On donne les deux vecteurs  $\vec{U}(3, -4, 6)$  et  $\vec{V}(4, y, -3)$  :

- Déterminer  $y$  pour que  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  soient perpendiculaire.

**Solution:**

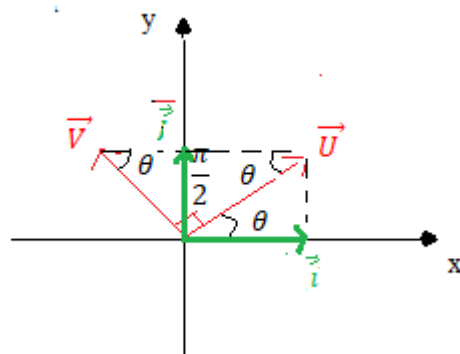
$$\text{Puisque } \vec{U} \perp \vec{V} \rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 3 \times 4 + (-4) \times y + 6 \times (-3) = 0 \rightarrow y = -1.5$$

**Exercice 04.** Considérons un repère orthonormé direct  $R(O, x, y) = (O, \vec{i}, \vec{j})$ , soit

$\vec{u}(x, y)$  un vecteur unitaire tel que  $(\widehat{Ox}, \vec{u}) = \theta$ , et  $\vec{v}$  un deuxième vecteur

unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}$  tel que  $(\widehat{\vec{u}}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ .



- 1) Calculer  $\frac{d\vec{u}}{dt}$ ,  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ .

Un point  $M$  est repéré par :  $\overrightarrow{OM} = r(t) \cdot \vec{u}$

- 2) Calculer  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$  puis  $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ .

**Solution:**

- 1)  $\frac{d\vec{u}}{dt}$ ,  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ;

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{|\vec{u}|} = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin \theta = \frac{y}{|\vec{u}|} = \frac{y}{1} = y$$

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

Par la même méthode :

$$\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \dot{\theta} = \dot{\theta} \vec{v} \quad \text{avec} \quad \frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \dot{\theta} = -\dot{\theta} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}$$

$$2) \frac{d\vec{OM}}{dt} :$$

$$\vec{OM} = r(t) \cdot \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r(t) \cdot \vec{u})}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \cdot \vec{u} + r(t) \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= \dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{v}$$

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} ( \dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{v} )$$

$$= \ddot{r} \vec{u} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{v} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{v} + r \ddot{\theta} \vec{v} + -r \dot{\theta}^2 \vec{u}$$

$$= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{v}$$

**Exercice 05.**

Soient les points A(3, 7, -2), B(0, 5, 1) et C (-2, 2, 4).

-Déterminer le point D(x, y, z) tel que  $\vec{CD}$  est le vecteur unitaire de  $\vec{AB}$  ?

**Solution:**

$$\text{On } \vec{CD} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \\ z-4 \end{pmatrix}, \vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\vec{CD}$  est le vecteur unitaire de  $\vec{AB}$  :

$$\vec{CD} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{22}} (-3 \vec{i} - 2 \vec{j} + 3 \vec{k})$$

$$\Rightarrow D \left( \frac{-3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}} \right)$$

### Exercice 06.

Considérant les vecteurs suivants  $\overrightarrow{OA} = 3a\vec{i}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 4a\vec{j}$  et  $\overrightarrow{OC} = 5a\vec{k}$

- Déterminer le torseur en O des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CB}$  ?

### Solution:

Calculons d'abord les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CB}$ :

$$\overrightarrow{AB} = a(4\vec{j} - 3\vec{i}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CB} = a(3\vec{i} - 5\vec{k})$$

$$\vec{M}_O(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \vec{M}_O(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{CB}$$

Donc :

$$\vec{M}_O = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{CB})$$

$$[\tau]_O = \begin{cases} \vec{R} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = a(4\vec{j} - 5\vec{k}) \\ \vec{M}_O = a^2(15\vec{j} + 12\vec{k}) \end{cases}$$



# **Chapitre II : STATIQUE DES SOLIDES**

### Introduction

La statique des solide est l'étude des actions mécanique d'un solide (ou un système des solides) indéformable ou au repos, c'est-à-dire c'est l'étude des conditions d'équilibre des systèmes matériels soumis à des forces.

#### I. Description d'un solide :

Un solide est un ensemble des points matériel, possédant une masse constante et un volume dont les limites peuvent varier lorsque ce dernier est soumis à des actions mécaniques. Le solide peut être déformable ou indéformable (rigide),

- **Le solide indéformable** est le plus simple des systèmes complexes, le nombre de particules (point matériel) sont situées à distances fixes ça veut dire que tous les points étant fixes par rapport au barycentre ou centre de masse (CDM).
- **Le solide déformable**, A l'opposé d'un solide indéformable, ou la position du CDM varie avec la déformation entraînant une variation relative par rapport aux autres points du solide. On appelle un ensemble de solides connectés entre eux par des liaisons, un mécanisme ou un système de solides.

#### II. Action mécanique :

Une action mécanique est toute cause physique susceptible de maintenir un solide au repos, de créer ou modifier un mouvement de ce dernier ou de le déformé. Il existe deux type d'action mécanique qui s'exerce sur un solide : les forces (mouvement de translation) et les moments des forces (mouvement de rotations).

##### II.1. Force :

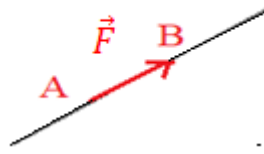
Les forces exercées sur un solide sont de deux types : les forces extérieures qui sont exercées par d'autres corps et appliquées aux points du solide donné, et les forces intérieures sont les forces d'interaction, qui se développent entre les points matériels du solide donné, dont leur résultante est nulle.

L'action de la force sur le corps est déterminée par un vecteur-force ayant les propriétés générales des vecteurs :

- un point d'application (A),
- une direction ( $\Delta$ ),

- un sens (de A vers B),

- une norme  $|\vec{F}| = |\overline{AB}|$  en Newton (N)

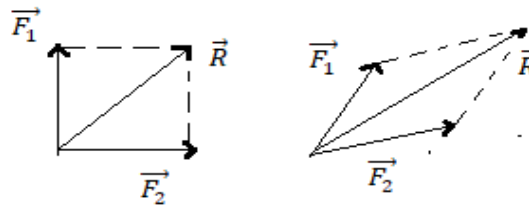


**Figure II.1.** Représentation vectorielle d'une force  $\vec{F}$

### II.1.1 Résultante d'une force :

La résultante est la somme de toutes les force qui appartiennent au solide, on la symbolise par  $\vec{R}$  (Figure II.2) :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$



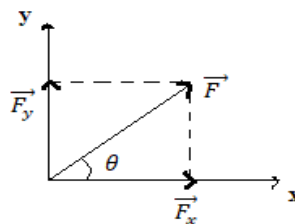
**Figure II.2.** Résultantes de deux forces

### II.1.2 Composantes d'une force dans un plan:

Soit une force appliquée à l'origine O d'un plan (O,x y). Les composantes de cette force sont définies par :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = |F| \cos \theta \vec{i} + |F| \sin \theta \vec{j}$$

$$\text{D'où } |F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



**Figure II.3.** Composantes plan d'une force

### II.1.3 Composantes d'une force dans l'espace:

Soit une force appliquée à l'origine O d'un repère orthonormé R (O, x, y, z). Les composantes de cette force sont définies par :

$$\vec{F} = \vec{F}_H + \vec{F}_z = \vec{F} \sin \theta + \vec{F} \cos \theta = \vec{F} \sin \theta \cos \varphi + \vec{F} \sin \theta \sin \varphi + \vec{F} \cos \theta$$

$$\vec{F} = |F| \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + |F| \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + |F| \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

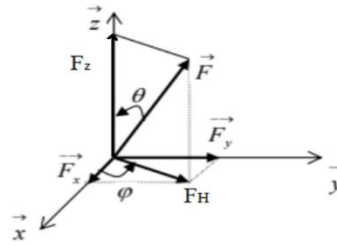


Figure II.3. Composantes d'une force dans l'espace

### II.2 Moments :

#### II.2.1 Moment d'une force par rapport à un point :

Le moment d'une force est la capacité de cette force qui fait tourner un corps. Soit B le point d'application de la force  $\vec{F}$ , A et un point quelconque (exemple Figure II.2), le moment vectoriel de la force  $\vec{F}$  par rapport au point A est noté par  $\vec{M}_A(\vec{F})$  qui se détermine par la relation suivante :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

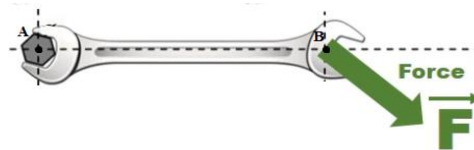


Figure II.2. Le moment pour une clef plate

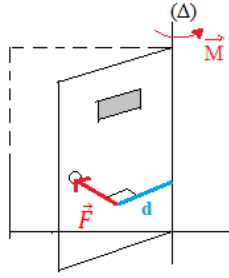
#### II.2.3. Moment d'une force par rapport à un axe :

Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un axe de rotation ( $\Delta$ ) (Figure II.3) est le produit entre la norme de la force et le bras de levier (d) comme suite:

$$\vec{M}_{(\Delta)}(\vec{F}) = |\vec{F}| \cdot d$$

Où

d est toujours perpendiculaire sur la droite de la force  $\vec{F}$



**Figure II.3.** Moment par rapport à une porte

Si la droite d'une force  $\vec{F}$  coupe (ou être parallèle) à l'axe de rotation  $(\Delta)$  donc l'effet de rotation est nul sur le solide.

Si l'axe  $(\Delta)$  est défini par un point A ou son moment  $\overrightarrow{M_A}(\vec{F})$  de force  $\vec{F}$  est connu et d'un vecteur unitaire  $\vec{u}$ , donc le moments  $\overrightarrow{M_{(\Delta)}}(\vec{F})$  est :

$$\overrightarrow{M_{(\Delta)}}(\vec{F}) = (\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) \cdot \vec{u}) \vec{u}$$

#### II.2.4. Moment d'une force analytiquement :

La force  $(\vec{F})$  a pour composantes  $(\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z)$  dans un repère orthonormé  $R(O, x, y, z)$ , soit  $(\vec{d})$  le vecteur de position du point d'application de cette force par rapport à l'origine O il a pour composantes  $\vec{d}(\vec{d}_x, \vec{d}_y, \vec{d}_z)$  :

$$\text{Ou : } \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{d} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}$$

Le moment par rapport au point O est :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \vec{d} \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d_x & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = (d_y F_z - d_z F_y) \vec{i} - (d_x F_z - d_z F_x) \vec{j} + (d_x F_y - d_y F_x) \vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_{(Ox)}}(\vec{F}) \vec{i} + \overrightarrow{M_{(Oy)}}(\vec{F}) \vec{j} + \overrightarrow{M_{(Oz)}}(\vec{F}) \vec{k}$$

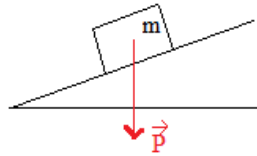
$\overrightarrow{M_{(Ox)}}, \overrightarrow{M_{(Oy)}}, \overrightarrow{M_{(Oz)}}$  sont les composantes du vecteur moment  $\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$ , et ils représentent les moments des axes  $\vec{Ox}, \vec{Oy}, \vec{Oz}$  respectivement.

### III. Classification des actions mécanique :

#### III.1. Actions mécaniques à distance :

Une action mécanique à distance est une action mécanique exercée par deux ou plusieurs systèmes mécanique sans qu'il y ait contact entre eux.

Par exemple, l'action de pesanteur( $\vec{P}$ ) est une action mécanique exercée par notre planète terre sur un solide de masse ( $m$ ), on l'appel action mécanique à distance car elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre la terre et le solide (Figure II.4).

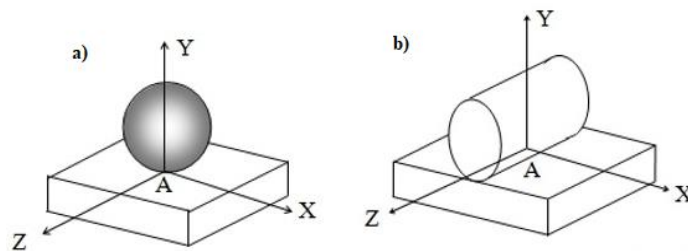


**Figure II.4.** Action de pesanteur

#### III.2. Actions mécaniques de contact :

Une action mécanique de contact est une action mécanique exercée par deux ou plusieurs systèmes mécanique ayant un intermédiaire de leur surface de contact. Le contact peut être ponctuel (la zone de contact est un point) ou réparti (la zone de contact est une ligne ou une surface). L'action mécanique de contact ponctuelle est localisée en un seul point, par exemple un ballon posé sur une surface (Figure II.6.a)

L'action mécanique de contact répartie est répartie sur un ensemble de points. par exemple un cylindre sur une surface(Figure II.6.b)



**Figure II.4.** Actions mécaniques de contact a) Ponctuel, b) Linéaire.

### IV. Liaison des solides :

#### IV.1. Liaison sans frottement :

Dans une liaison sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides (réaction  $\vec{R}$ ) ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact).

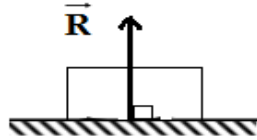


Figure II.4. Représentation des réactions sans frottement

#### IV.2. Liaison avec frottement :

Une action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides (réaction  $\vec{R}$ ) peut prendre une autre direction, il y a nécessité d'une composante normale ( $\vec{N}$ ) et d'une composante tangentielle ( $\vec{T}$ ) qui ne sera pas transmise par obstacle mais par frottement ou adhérence.

##### IV.2.1. Coefficient de frottement statique $\mu_0$ :

Le coefficient de frottement statique indique la valeur maximale d'une résistance au mouvement fournie par une surface (donc valeur à dépasser par la force appliquée pour réussir à bouger un solide), le symbole utilisé est  $\mu_0$ , cette grandeur n'a pas d'unité, elle représente un rapport entre la tangentielle ( $\vec{T}$ ) par la normale ( $\vec{N}$ ) :

$$\mu_0 = \frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|}$$

##### IV.2.2. Angle de frottement $\varphi$ :

L'angle de frottement statique est un angle qui existe entre le vecteur de la normale ( $\vec{N}$ ) et le vecteur de la réaction ( $\vec{R}$ ).

$$\text{tg } \varphi = \mu_0$$

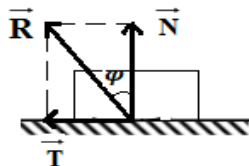


Figure II.4. Représentation de la réaction avec frottement

### V. Equilibre statique :

#### V.1. Le principe fondamental De La Statique (PFS):

Un solide est en équilibre statique si et seulement s'il vérifie le principe fondamental de la statique (PFS) c'est à dire il a une vitesse constante et ces deux conditions d'équilibre sont effectuées :

-Première condition (Théorème de force), la somme des forces extérieures appliquées à un solide en équilibre est nulle (résultante est nulle) :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0}$$

-Deuxième condition (Théorème des moment), la somme des moments des forces extérieures appliquées à un solide en équilibre est nulle :

$$\vec{M}_{/O} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(\vec{F}_i)/O} = \vec{0}$$

Donc, un solide est en équilibre statique, si et seulement si le torseur de toutes les forces extérieures qui lui sont appliqué est nul.

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \\ \vec{M}_{/O} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(\vec{F}_i)/O} = \vec{0} \end{cases}$$

#### V.2. Equilibre statique dans l'espace :

Soit un repère d'espace orthonormé R(O, x, y, z), la projection des éléments du torseur permet d'obtenir en général six équations scalaire, trois équations liées à la résultante des forces extérieures et trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases} \text{ et } \vec{M}_{(\vec{F}_i)/O} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_{Ox} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(\vec{F}_{ix})/O} = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oy} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(\vec{F}_{iy})/O} = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oz} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(\vec{F}_{iz})/O} = \vec{0} \end{cases}$$

#### V.3. Equilibre statique dans un plan :

Dans le cas d'un repère plan par exemple R(O, x, y), on aura un système réduit à trois équations d'équilibre seulement, deux équations liées à la résultante statique et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O :



$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{iy} = \vec{0} \end{cases} \text{ et } \overrightarrow{M_{(F_i)/O}} = \overrightarrow{M_{Oz}} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{M_{(F_{iz})/O}} = \vec{0}$$

### VI. Réactions aux appuis et aux liaisons:

Les appuis ou liaisons sont des obstacles, empêchant ou limitant la liberté de mouvement du solide en ces endroits.

#### VI.1. Appui simple (glissant ou rouleau) :

C'est un appui qui permis au système matériel de tourné librement autour d'un point de contact. La solide repose sans frottement sur un plan d'appui fixe, ou la réaction d'appui est normale à la direction de déplacement (Figure II.5)

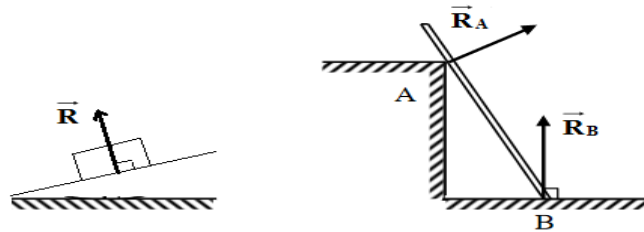


Figure II.5. Appui simple

#### VI.2. Appui rotule (Double ou solide articulé) :

Cet appui également offre la possibilité de rotation mais la translation est bloquée dans deux directions, ce qui a pour conséquence de crée deux réactions d'appuis (selon x et y). On rencontre très souvent ce type d'appui : assemblages de contreventement en acier, éléments de charpente en bois, poutres de pont en acier.

On trouve deux types d'articulations, une articulation cylindrique ou la réaction suivant l'axe de l'articulation est nulle (Figure II.6.a) et une articulation sphérique ou la réaction au point A de l'articulation à trois composantes (Figure II.6 b).

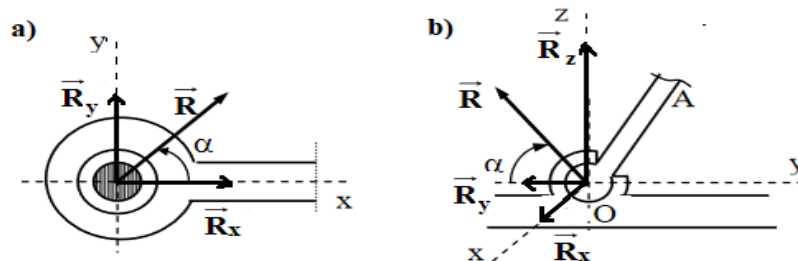


Figure II.6. Appui articulé a) cylindrique b) sphérique

### VI.3. Encastrement d'un solide :

Cet appui ne permet aucun mouvement entre les solides. Il y a donc l'apparition d'une réaction d'appui au point A de l'encastrement qui a deux composantes et d'un moment dit d'encastrement « M » bloquant la rotation (Figure II.7)

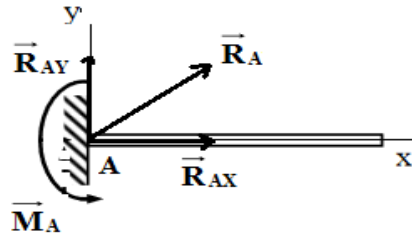
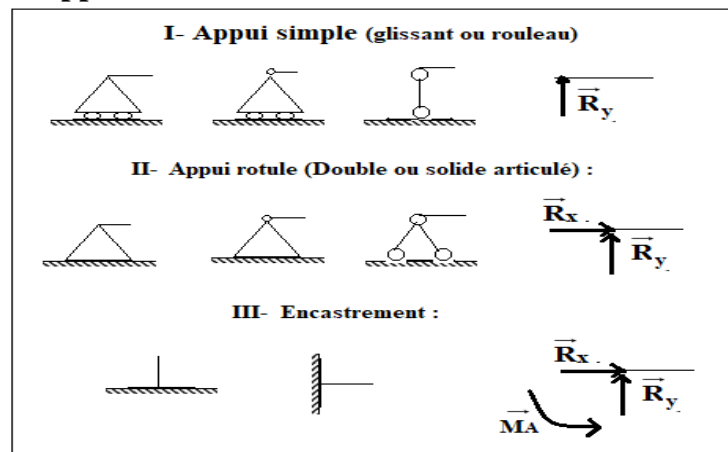


Figure II.6. Encastrement

Type de liaisons	Composantes de la réaction
Appui simple rouleau ou surface lisse sans frottement	$\vec{R}$ : La réaction est normale au point d'appui
Appui simple avec frottement (Sol rugueux)	$\vec{R}_x$ et $\vec{R}_y$ : deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique d'axe (oz)	$\vec{R}_x$ et $\vec{R}_y$ avec $\vec{R}_z = \vec{0}$ , la composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x$ , $\vec{R}_y$ et $\vec{R}_z$ : les trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x$ , $\vec{R}_y$ , $\vec{R}_z$ et $\vec{M}_A$ : Trois composantes plus un moment au point d'encastrement

### VI.4. Symbole des appuis :



### EXERCICES RESOLUS

**Exercice 01.** Soit le mécanisme formé de :

- une barre AE de poids  $P_1 = 2P$ , articulée en A
- une barre BC de poids  $P_2 = P$ , encastrée en B
- une barre CD de poids  $P_3 = P$ , soudée en C

et contacte sans frottement avec AE en D

Une charge  $F=P$  est appliquée à ce système en E.

- Déterminer en fonction de P les réactions de liaisons en A, B et D ?

On donne  $AE= 2a$ ,  $BC=CD=a$  et  $\alpha = 30^\circ$ .

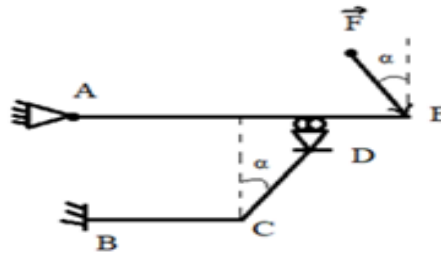


Figure II.7

**Solution :**

Dans ce système on a cinq inconnues, on décompose le système en deux :

-Premier système la barre AE (Figure II.7.a):

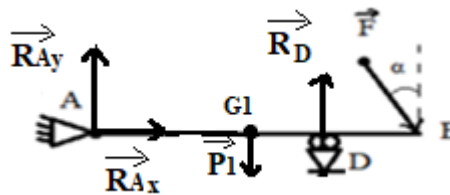


Figure II.7.a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^N \overrightarrow{M_{(F_i)/A}} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_A + \vec{P}_1 + \vec{R}_D + \vec{F} = \vec{0} \\ \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{R}_D + \overrightarrow{AE} \wedge \vec{F} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection sur les axes:

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -P_1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ R_D \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F \sin \alpha \\ -F \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -P_1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a + a \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R_D \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F \sin \alpha \\ -F \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ox/\Rightarrow R_{Ax} = -F \sin \alpha \Rightarrow R_{Ax} = -P \sin \alpha \\ Oy/\Rightarrow R_{Ay} - P_1 + R_D - F \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_{Ay} = P_1 + F \cos \alpha - R_D \\ -aP_1 + R_D a(1 + \sin \alpha) - 2aF \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_D = \frac{2P(1 + \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)} \quad \text{et} \quad R_{Ay} = 2P + P \cos \alpha - \frac{2P(1 + \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)}$$

-Deuxième système les barres BC et CD (Figure II.7.b) :

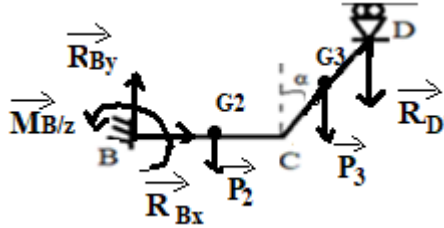


Figure II.7.b

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(\vec{F}_i)/B} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_B + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{R}_D = \vec{0} \\ \vec{BG}_2 \wedge \vec{P}_2 + \vec{BG}_3 \wedge \vec{P}_3 + \vec{BD} \wedge \vec{R}_D + \vec{M}_{Bz} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection sur les axes :

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -P_2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -P_3 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -R_D \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -P_2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a + \frac{a}{2} \sin \alpha \\ \frac{a}{2} \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -P_3 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a + a \sin \alpha \\ a \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -R_D \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Bz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ox/\Rightarrow R_{Bx} = 0 \\ Oy/\Rightarrow R_{By} - P_2 - P_3 - R_D = 0 \Rightarrow R_{By} = P_2 + P_3 + R_D \\ -\frac{a}{2}P_2 - aP_3 - P_3 \frac{a}{2} \sin \alpha - aR_D - aR_D \sin \alpha + M_{Bz} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{By} = 2P + \frac{2P(1 + \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)} \quad \text{et} \quad M_{Bz} = \frac{7}{2} aP + \frac{a}{2} P \sin \alpha + 2aP \cos \alpha$$

**Exercice 02.** La barre  $AB=L$  est liée en A par une articulation cylindrique et à son extrémité B elle repose sur un appui rouleau. Une force de 200 N agit en son milieu sous un angle de  $45^\circ$  dans le plan vertical. La barre a un poids de 50 N. (Figure II.8)

➤ Déterminer les réactions aux extrémités A et B.

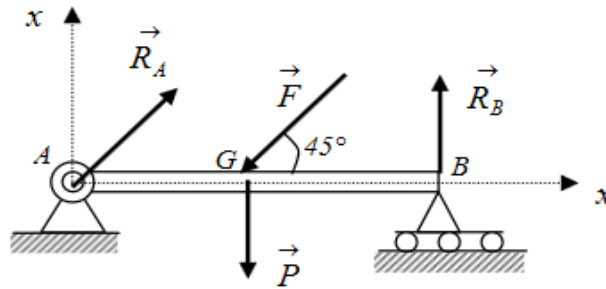


Figure II.8

**Solution :**

Toutes les forces agissant sur la poutre sont situées dans le plan (xoy). Le système est en équilibre statique (Figure II.8.a), nous avons alors :

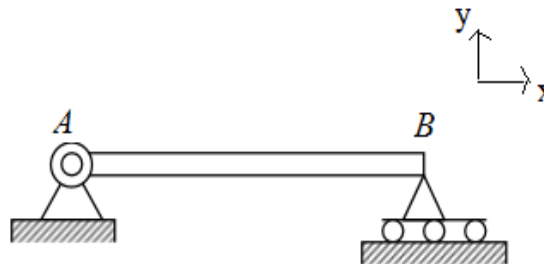


Figure II.8.a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(\vec{F}_i)/A} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \\ \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AG} \wedge \vec{F} + \vec{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \end{cases}$$

La projection sur les axes :

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ R_B \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F \cos 45^\circ \\ -F \sin 45^\circ \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R_B \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -F \cos 45^\circ \\ -F \sin 45^\circ \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ox/\Rightarrow R_{Ax} = F \cos 45^\circ \\ Oy/\Rightarrow R_{Ay} + R_{By} - F \sin 45^\circ - P = 0 \\ LR_B - \frac{L}{2} F \cos 45^\circ - \frac{L}{2} P = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F\sqrt{2}}{4} - \frac{P}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_B = 95.71 \text{ N}, \quad R_{Ax} = 141.42 \text{ N}, \quad \text{et} \quad R_{Ay} = 95.71 \text{ N}$$

$$D'où \quad R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 170.76 \text{ N}$$

**Exercice 03.** Soit le système composé d'un barre rigide AB, de poids  $P_1$ , articulée en A et reposant au point C (sans frottement) sur une sphère de poids Q.

La sphère repose sans frottement sur le sol au point D et sur le mur au point E.

Au point B est fixé un fil inextensible s'enroulant autour d'une poulie de masse négligeable et supportant un poids P, (Figure II.9).

On donne :  $P=500\text{N}$ ,  $P_1=400\text{ N}$ ,  $Q = 300\text{ N}$ .

- 1- Déterminer les réactions de l'articulation ainsi que la réaction au point de contact C ?
- 2- En déduire les réactions du sol sur la sphère au point D et du mur sur la sphère au point E ?

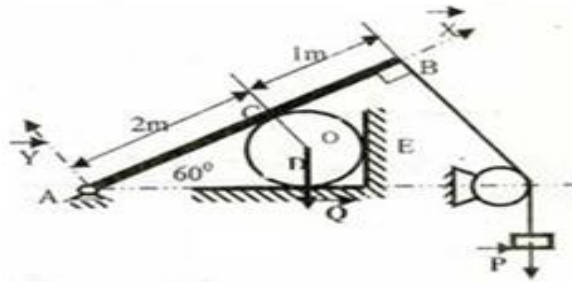


Figure II.9

**Solution :**

**1) Le système est en équilibre statique :**

- Premier système la barre AB (Figure II.9.a) :

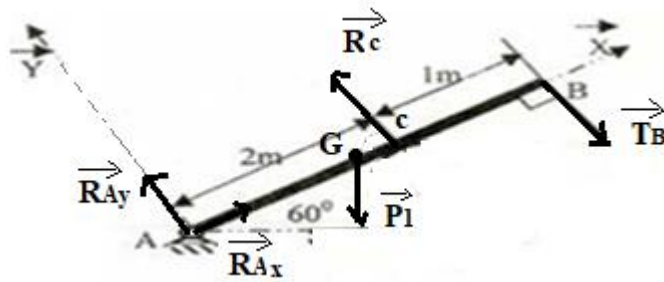


Figure II.9.a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(F_i)/A} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_A + \vec{P}_1 + \vec{R}_C + \vec{T}_B = \vec{0} \\ G \wedge \vec{P}_1 + AC \wedge \vec{R}_C + AB \wedge \vec{T}_B = \vec{0} \end{cases}$$

- Fil inextensible + polie de masse négligeable  $\Rightarrow T_B = P$

La projection sur les axes :

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ R_C \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -P_1 \cos 30^\circ \\ -P_1 \sin 30^\circ \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -T_B \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \left( \begin{vmatrix} \frac{AB}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -P_1 \cos 30^\circ \\ -P_1 \sin 30^\circ \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} AC \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R_C \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} AB \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ox \Rightarrow R_{Ax} = P_1 \cos 30^\circ \\ Oy \Rightarrow R_{Ay} = P_1 \sin 30^\circ + P - R_C = 0 \\ -\frac{AB}{2} P_1 \sin 30^\circ + AC R_C - AB P = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{Ax} = 346.41N, \quad R_{Ay} = -200N, \quad \text{et} \quad R_C = 900N$$

➤ Deuxième système réaction du sol sur la sphère (Figure II.9.b) :

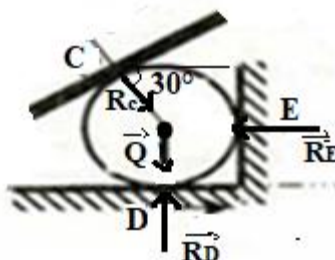


Figure II.9.b

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_C + \vec{R}_E + \vec{R}_D + \vec{Q} = \vec{0}$$

La projection sur les axes :

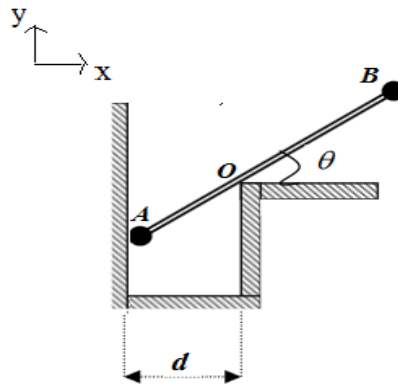
$$\begin{vmatrix} R_C \cos 30^\circ \\ -R_C \sin 30^\circ \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R_E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ R_D \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -Q \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$Ox / \Rightarrow R_E = R_C \cos 30^\circ$$

$$Oy / \Rightarrow R_D = R_C \sin 30^\circ + Q$$

**Exercice 04.** Soit le système, constitué de deux masses ponctuelles, liées entre elles par une tige homogène de longueur  $AB = L$  et de masse négligeable. Le système est soumis à deux liaisons sans frottement en A et O. on donne  $m_B = 3m_A = 3m$ , (Figure II.10).

1. Trouver l'angle  $\theta_0$  qui détermine la position d'équilibre en fonction de  $m$ ,  $d$ ,  $L$ .
2. En déduire les modules des réactions aux points A et O.
3. Calculer  $\theta_0$ , les réactions  $R_0$  et  $R_A$  pour  $L = 20$  cm,  $m = 0,1$  Kg et  $d = 5$  cm.

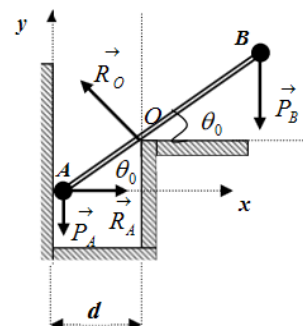


**Figure II.10**

**Solution :** Le système est en équilibre statique :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(\vec{F}_i)/A} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_A + \vec{R}_O + \vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{0} \\ \vec{AO} \wedge \vec{R}_O + \vec{AB} \wedge \vec{P}_B = \vec{0} \end{cases}$$





La projection sur les axes :

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} R_A \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R_o \sin \theta_0 \\ R_o \cos \theta_0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -P_A \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -P_B \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d \\ d \operatorname{tg} \theta_0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R_o \sin \theta_0 \\ R_o \cos \theta_0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L \cos \theta_0 \\ L \sin \theta_0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -P_B \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ox/ \Rightarrow R_A = R_o \sin \theta_0 \\ Oy/ \Rightarrow R_o \cos \theta_0 - P_A - P_B = 0 \\ d R_o \cos \theta_0 + d R_o \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} - P_B L \cos \theta_0 = 0 \Rightarrow d R_o (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) - P_B L \cos^2 \theta_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_o = \frac{P_B L}{d} \cos^2 \theta_0 = \frac{3mgL}{d} \cos^2 \theta_0, \quad \cos^3 \theta_0 = \frac{4d}{3L} \Rightarrow \theta_0 = \arccos \left( \frac{4d}{3L} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$2) R_o = \frac{P_A + P_B}{\cos \theta_0} = \frac{4mg}{\cos \theta_0}, \quad R_A = 4mg \operatorname{tg} \theta_0$$

3) Pour  $g = 10 \text{ m/s}^2$  :

$$\theta_0 = 46.1^\circ, \quad R_o = 5.8 \text{ N}, \quad R_A = 4.2 \text{ N}$$

**Exercice 05.** Deux cylindre (1) et (2) reposent sur deux plan inclinés comme le montre la Figure II.11. Le cylindre (1) pèse 100N et le cylindre (2) pèse 300N.

- 1) Calculer l'angle  $\theta$  à l'équilibre ?
- 2) Calculer les réactions en A et en B ?
- 3) Calculer les réactions entre les deux cylindres ?

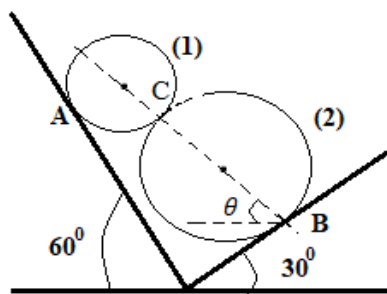


Figure II.11

**Solution :**

On décompose le système

- Premier système la sphère A (Figure II.11.a):

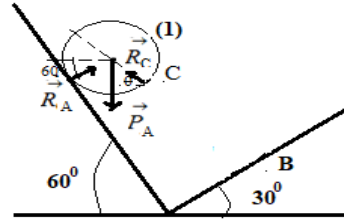


Figure II.11.a

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_C + \vec{P}_A = \vec{0}$$

La projection sur les axes :

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} R_A \sin 60 \\ R_A \cos 60 + \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -R_C \cos \theta \\ R_C \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -P_A \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow Ox / \Rightarrow R_A \sin 60 - R_C \cos \theta = 0$$

$$Oy / \Rightarrow R_A \cos 60 + R_C \sin \theta - P_A = 0$$

➤ Deuxième système la sphère B (Figure II.11.b):

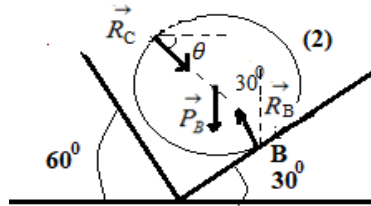


Figure II.11.b

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_B + \vec{R}_C + \vec{P}_B = \vec{0}$$

La projection sur les axes :

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -R_B \sin 30 \\ R_B \cos 30 + \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_C \cos \theta \\ -R_C \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -P_B \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow Ox / \Rightarrow -R_B \sin 30 + R_C \cos \theta = 0$$

$$Oy / \Rightarrow R_B \cos 30 - R_C \sin \theta - P_B = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \sqrt{3}R_A, \quad R_A = \frac{1}{2}(P_A + P_B) = 200N, \quad R_B = 346N$$

$$\tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$R_C = 173N$$

**Exercice 06.** Soit le système mécanique, composé d'une barre coudée ADE reposant sur deux appuis cylindrique A et B, et un disque de rayon R et de masse négligeable fixé à la barre en C. Le disque est relié à un câble inextensible qui forme avec la verticale un angle  $\alpha = 60^\circ$  suspendue au point G.

La force  $\vec{F}$  appliquée au point E est inclinée par rapport à la verticale d'un angle  $\beta=30^\circ$ , elle se trouve dans le plan parallèle au plan XAZ, (Figure II.12).

- 1- Ecrire les équations scalaire d'équilibre du système ?
- 2- Déduire les réactions au appuis A et B, ainsi que la valeur de la tension du câble ?

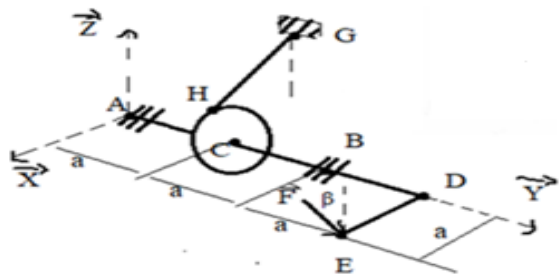


Figure II.1

**Solution :**

Système présenté en Figure II.12.a est en équilibre :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^N \vec{M}_{(\vec{F}_i)/A} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T}_H + \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AH} \wedge \vec{T}_H + \vec{AE} \wedge \vec{F} = \vec{0} \end{cases}$$

La projection sur les axes :

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} R_{Ax} \\ 0 \\ R_{Az} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -T_H \sin \alpha \\ 0 \\ T_H \cos \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_{Bx} \\ 0 \\ R_{Bz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F \sin \beta \\ 0 \\ -F \cos \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} R \cos \alpha \\ a \\ R \sin \alpha \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -T_H \sin \alpha \\ 0 \\ T_H \cos \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_{Bx} \\ 0 \\ R_{Bz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ 3a \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -F \sin \beta \\ 0 \\ -F \cos \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ox/ \Rightarrow R_{Ax} + R_{Bx} = T_H \sin \alpha + F \sin \beta \\ Oz/ \Rightarrow R_{Az} + R_{Bz} = F \cos \beta - T_H \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aT_H \cos \alpha + 2a R_{Bz} - 3a F \cos \beta = 0 \\ -RT_H + aF \cos \beta = 0 \\ aT_H \sin \alpha - 2a R_{Bx} + 3a F \sin \beta = 0 \end{cases}$$

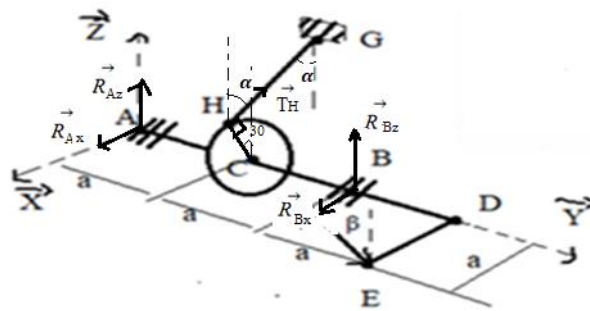
$$R_{Bz} = \frac{3aF \cos \beta - aT_H \cos \alpha}{2a}$$

$$T_H = \frac{aF \cos \beta}{R}$$

$$R_{Bx} = \frac{aT_H \sin \alpha + 3aF \sin \beta}{2a}$$

$$R_{Ax} = T_H \sin \alpha + F \sin \beta - R_{Bx}$$

$$R_{Az} = F \cos \beta - T_H \cos \alpha - R_{Bz}$$



**Figure II.12.a**

# **Chapitre III : GEOMETRIE DES MASSES**

### Introduction

La géométrie des masses permet de nous déterminer le centre d'inertie (ou de gravité), le moment d'inertie d'un solide et aussi la matrice d'inertie d'un solide.

#### I. La masse :

En mécanique classique qui considère la vitesse des solide très petites par rapport à la vitesse de la lumière( $v \ll c$ ), considère aussi que la masse est une grandeur positive, additive (extensive) et invariante par rapport à tous les références (R),et qui mesure la quantité de matière contenue dans un corps donné.

##### I.1. Masse d'un Système discret :

Considérant un système discret (ou discontinu) (S) de N points matériels (qui ont une distance entre eux) de masse ( $m_i$ ) Figure III.1. Donc la masse totale d'un système discret est la somme de toutes les masses des points matériels qui le constitue :

$$m_s = \sum_{i=1}^N m_i$$

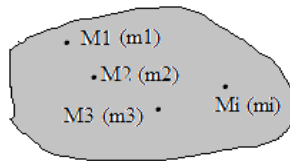


Figure III.1

##### I.2. Masse d'un Système continue:

Soit un système continue (S) de N points matériels qui n'ont pas de distance entre eux. On affecte une masse élémentaire (dm) pour le point M, Figure III.2. Donc la masse totale d'un système continue s'écrit sous la forme d'une intégrale continue :

$$m_s = \int_S dm$$



Figure III.2

### I.2.1. Distribution volumique de la masse :

Soit (S) un système continue volume de point M qui est entouré par un élément de masse (dm). Cet élément de masse existe dans un élément de volume (dV) Figure III.3.

La densité de masse volumique ( $\rho$ ) au point M est déterminée comme suite :

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$$

En intégrant, on obtient la masse totale de notre système (S) qui est :

$$m_s = \iiint_V \rho dV$$

Si le système (S) est homogène, c'est-à-dire que  $\rho$  est constant alors :

$$m_s = \rho V$$

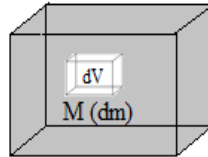


Figure III.3

### I.2.2. Distribution surfacique de la masse :

Considérant (S) une plaque (système continue de surface), soit M un point de cette surface entouré par un élément de masse (dm). Cet élément de masse existe dans un élément de surface (dS) Figure III.4. La densité de masse surfacique ( $\sigma$ ) au point M est déterminée comme suite :

$$\sigma = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma dS$$

En intégrant, on obtient la masse totale de notre système (S) qui est :

$$m_s = \iint_S \sigma dS$$

Si le système (S) est homogène, c'est-à-dire que  $\sigma$  est constant alors :

$$m_s = \sigma S$$

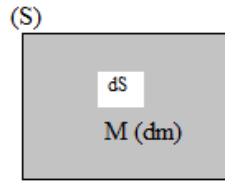


Figure III.4

### I.2.3. Distribution linéique de la masse :

Considérant (S) une ligne (AB), soit M un point de cette ligne entouré par un élément de masse (dm). Cet élément de masse existe dans un élément linéaire (dl) Figure III.5. La densité de masse linéique ( $\lambda$ ) au point M est déterminée comme suite :

$$\lambda = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \lambda dl$$

En intégrant, on obtient la masse totale de notre système (S) qui est :

$$m_s = \int_l \lambda dl$$

Si le système (S) est homogène, c'est-à-dire que  $\lambda$  est constant alors :

$$m_s = \lambda l$$

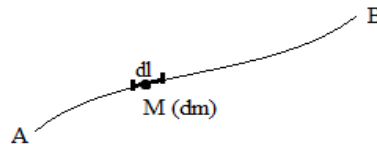


Figure III.5

#### Remarque :

Si le système (S) est composé de plusieurs systèmes, alors la masse totale de ce système est la somme des masses de chaque système.

**Exemple :** si on a un système qui se compose d'une sphère, d'une plaque et d'une barre (Figure III.6), donc :

$$m_s = m_{s1} + m_{s2} + m_{s3}$$

$$m_s = \iiint_V \rho dV + \iint_S \sigma dS + \int_l \lambda dl$$



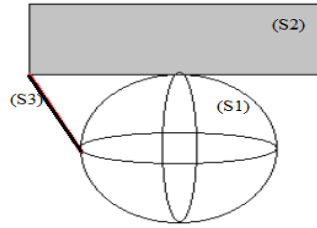


Figure III.6

## II. Centre de masse d'un Système Matériel:

Le centre de masse, le centre d'inertie ou le barycentre d'un système matériel (S) est un point unique noté (G) tel que :

$$\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad (\text{Pour un système discontinue})$$

$$\int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0} \quad (\text{Pour un système continue})$$

### II.1. Composantes du barycentre G :

Si on repère notre système (S) dans un repère galiléen R (O, x, y, z) :

#### II.1.1. Système discret :

soit un système (S) de N points matériels de ( $m_i$ ) (Figure III.7) ou :

$$\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OG} + \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OG} \sum_{i=1}^N m_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OG} m_s$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i}$$

Soit les composantes : de G ( $x_G, y_G, z_G$ ) et de  $\overrightarrow{OM_i}$  ( $x_i, y_i, z_i$ ) donc :

$$\Rightarrow x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k} = \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N m_i (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N m_i x_i \\ y_G = \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N m_i y_i \\ z_G = \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N m_i z_i \end{cases}$$

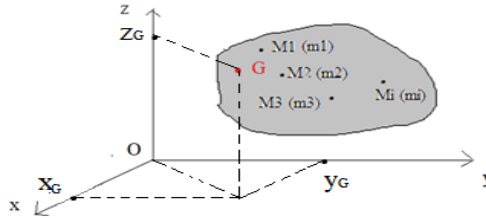


Figure III.7

### II.1.2. Système continue :

Soit un système continue (S) de N points matériels. On affecte une masse élémentaire (dm) pour le point M, (Figure III.8) ou :

$$\int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \int_S (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}) dm = \vec{0}$$

$$\Rightarrow - \int_S \overrightarrow{OG} dm + \int_S \overrightarrow{OM} dm = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \int_S \overrightarrow{OM} dm = \overrightarrow{OG} \int_S dm$$

$$\Rightarrow \int_S \overrightarrow{OM} dm = \overrightarrow{OG} m_s$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_s} \int_S \overrightarrow{OM} dm$$

Soit les composantes : de G  $(x_G, y_G, z_G)$  et de  $\overrightarrow{OM}_i(x, y, z)$  donc :

$$\Rightarrow x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k} = \frac{1}{m_s} \int_S (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) dm$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{m_s} \int_S x dm \\ y_G = \frac{1}{m_s} \int_S y dm \\ z_G = \frac{1}{m_s} \int_S z dm \end{cases}$$

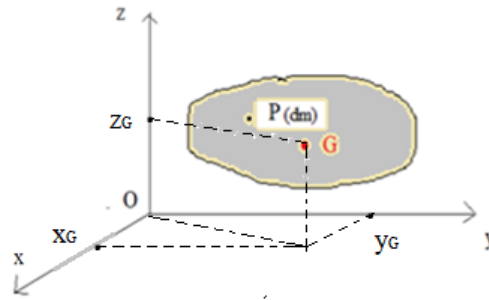


Figure III.8

## II.2. La symétrie :

La symétrie facilite le calcul de barycentre G. Soit un système (S) homogène possède un élément de symétrie (un point, un axe ou un plan), si la densité de masse ( $D : \rho, \sigma$  ou  $\lambda$ ) de point matériel (M) est égale à la densité de masse de point image (M') de (M) par rapport à l'élément de symétrie :

$$D(M)=D(M')$$

Dans ces cas le centre de masse G se trouve sur l'élément de symétrie (Figure III.9).

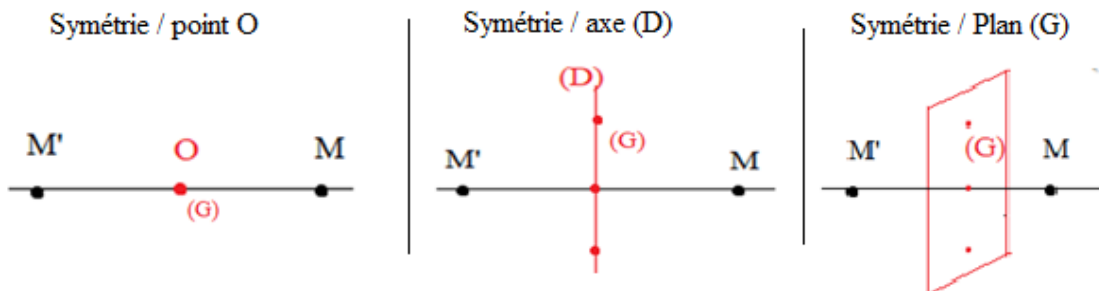


Figure III.9

### II.2.1. Exemple d'application:

Soit un demi-disque homogène de rayon (R) appartenant au plan (O, x, y) présent dans la Figure III.10, donc :

$$\sigma(M)=\sigma(M')$$

Alors l'axe (Oy) est un axe de symétrie ça veut dire que le point G est sur l'axe (Oy).

En calculant les composantes de G ( $x_G, y_G, z_G$ ) :

On peut dire que par symétrie :  $x_G = z_G = 0$

Donc il reste à calculer  $y_G$  :

$$y_G = \frac{1}{m_s} \int_S y dm \text{ ou } m_s = \sigma S = \sigma \frac{\pi}{2} R^2$$

Et  $dm = \sigma dS$  avec  $dS = r dr d\theta$

$$dm = \sigma r dr d\theta$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$0 < r < R$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{2\sigma}{\sigma \pi R^2} \iint_S r \sin \theta r dr d\theta \Rightarrow y_G = \frac{2\sigma}{\sigma \pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{2\sigma}{\sigma \pi R^2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos \theta]_0^\pi$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{4}{3\pi R^2} R^3 \Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

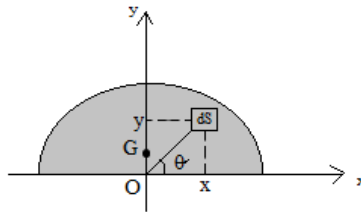


Figure III.10

**Remarque :**

Si le système (S) est composé de plusieurs systèmes ( $S_i$ ) de masses ( $m_i$ ) et de centre d'inertie ( $G_i$ ), alors le centre de masse du système (S) est donnée par:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OG_i}$$

Ou :  $m_s = \sum_{i=1}^N m_i$

$$\text{Et } \begin{cases} x_G = \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N m_i x_{Gi} \\ y_G = \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N m_i y_{Gi} \\ z_G = \frac{1}{m_s} \sum_{i=1}^N m_i z_{Gi} \end{cases}$$

### III. Théorèmes de Guldin :

Une seconde méthode pour la détermination des centres d'inertie des solides linéaires ou surfaciques homogènes fut trouvée par Guldin

#### III.1. Premier théorème de Guldin :

Soit (AB) une courbe homogène de longueur (l) et de masse  $m_s$ , est située dans un plan (O, x, y) et ne coupe pas les axes (Ox, Oy) Figure III.11. La rotation de (AB) autour de l'axe (Oy) engendre une surface ( $S_y$ ) et la rotation de (AB) autour de l'axe (Ox) engendre une surface ( $S_x$ ).

$$\text{D'où : } dS_y = x d\theta dl$$

$$\Rightarrow S_y = \int_0^{2\pi} d\theta \int_A^B x dl = 2\pi \int_A^B x dl \quad \text{On a : } dm = \lambda dl \Rightarrow dl = \frac{dm}{\lambda}$$

$$\Rightarrow S_y = \frac{2\pi}{\lambda} \int_A^B x dm \quad \text{On a : } x_G = \frac{1}{m_s} \int_S x dm \Rightarrow \int_A^B x dm = x_G m_s$$

$$\Rightarrow S_y = \frac{2\pi}{\lambda} x_G m_s \quad \text{avec } m_s = \lambda l \Rightarrow \frac{m_s}{\lambda} = l$$

$$\Rightarrow S_y = 2\pi x_G l$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{S_y}{2\pi l}$$

$$\text{De même : } dS_x = y d\theta dl$$

$$\Rightarrow S_x = \int_0^{2\pi} d\theta \int_A^B y dl = 2\pi \int_A^B y dl \quad \text{On a : } dm = \lambda dl \Rightarrow dl = \frac{dm}{\lambda}$$

$$\Rightarrow S_x = \frac{2\pi}{\lambda} \int_A^B y dm \quad \text{On a : } y_G = \frac{1}{m_s} \int_S y dm \Rightarrow \int_A^B y dm = y_G m_s$$

$$\Rightarrow S_x = \frac{2\pi}{\lambda} y_G m_s \quad \text{avec } m_s = \lambda l \Rightarrow \frac{m_s}{\lambda} = l$$

$$\Rightarrow S_x = 2\pi y_G l$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{S_x}{2\pi l}$$

Donc les coordonnées de centre d'inertie G ( $x_G, y_G$ ) sont:

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{2\pi l} \\ y_G = \frac{S_x}{2\pi l} \end{cases}$$

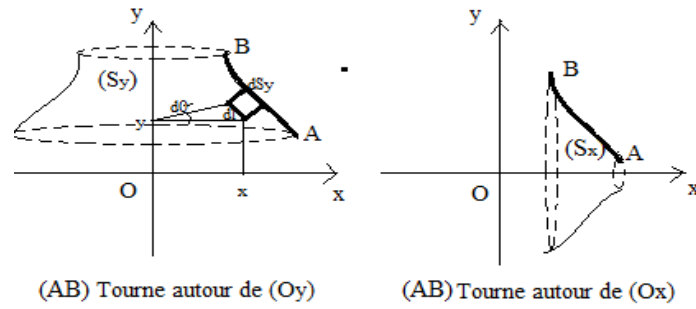


Figure III.11

### III.2. Deuxième théorème de Guldin :

Soit (S) une surface homogène de masse  $m_s$  située dans un plan (O, x, y) et ne coupe pas les axes (Ox, Oy) Figure III.12. La rotation de (s) autour de l'axe (Oy) engendre un volume ( $V_y$ ) et la rotation de (S) autour de l'axe (Ox) engendre un volume ( $V_x$ ).

D'où :  $dV_y = x d\theta dS$

$$\Rightarrow V_y = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_S x dS = 2\pi \iint_S x dS \quad \text{On a: } dm = \sigma dS \Rightarrow dS = \frac{dm}{\sigma}$$

$$\Rightarrow V_y = \frac{2\pi}{\sigma} \iint_S x dm \quad \text{On a: } x_G = \frac{1}{m_s} \iint_S x dm \Rightarrow \iint_S x dm = x_G m_s$$

$$\Rightarrow V_y = \frac{2\pi}{\sigma} x_G m_s \quad \text{avec } m_s = \sigma S \Rightarrow \frac{m_s}{\sigma} = S$$

$$\Rightarrow V_y = 2\pi x_G S$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{V_y}{2\pi S}$$

De même :  $dV_x = y d\theta dS$

$$\Rightarrow V_x = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_S y dS = 2\pi \iint_S y dS \quad \text{On a: } dm = \sigma dS \Rightarrow dS = \frac{dm}{\sigma}$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{2\pi}{\sigma} \iint_S y dm \quad \text{On a: } y_G = \frac{1}{m_s} \iint_S y dm \Rightarrow \iint_S y dm = y_G m_s$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{2\pi}{\sigma} y_G m_s \quad \text{avec } m_s = \sigma S \Rightarrow \frac{m_s}{\sigma} = S$$

$$\Rightarrow V_x = 2\pi y_G S$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{V_x}{2\pi S}$$

Donc les coordonnées de centre d'inertie G ( $x_G, y_G$ ) sont:

$$\begin{cases} x_G = \frac{V_y}{2\pi S} \\ y_G = \frac{V_x}{2\pi S} \end{cases}$$

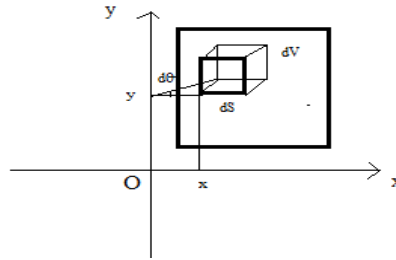


Figure III.12

**Exemple d'application:**

a) - Déterminer le centre d'inertie d'un demi-cercle (Figure III.13 a).

b) - Déterminer le centre d'inertie d'un demi-cercle (Figure III.13 b).

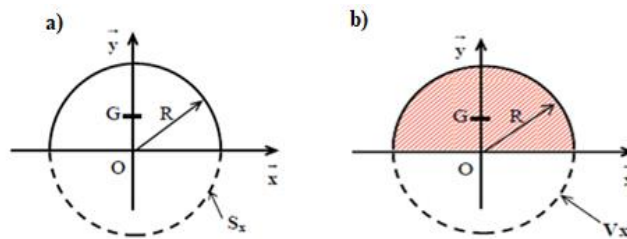


Figure III.13

a) Le centre d'inertie d'un demi-cercle :

Par raison de symétrie G se trouve sur l'axe (Oy)  $\Rightarrow x_G = 0$

D'après le premier théorème de Guldin, la rotation d'un demi-cercle autour de l'axe (Ox) engendre une sphère vide (surface  $S_x$ ) de rayon  $R$ :

$$y_G = \frac{S_x}{2\pi l} \text{ avec } S_x = 4\pi R^2$$

Et  $l = \pi R$

$$\Rightarrow y_G = \frac{2R}{\pi}$$

b) Le centre d'inertie d'un demi-disque :

Par raison de symétrie G se trouve sur l'axe (Oy)  $\Rightarrow x_G = 0$

D'après le deuxième théorème de Guldin, la rotation d'un demi-disque autour de l'axe (Ox) engendre une sphère pleine (volume  $V_x$ ) de là:

$$y_G = \frac{V_x}{2\pi S} \text{ avec } V_x = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Et } S = \frac{\pi}{2} R^2$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

#### IV. Moment d'inertie, Opérateur d'inertie, Matrice d'inertie :

##### IV.1. Moment d'inertie d'un solide :

Soit (S) un solide continu, M est un point de ce solide d'une masse élémentaire (dm).

a) Le moment d'inertie de (S) par rapport à un point O quelconque est le scalaire positif :

$$I_{S/O} = \int_S r^2 dm$$

Où

r : représente la distance entre O et M,  $r = |\overrightarrow{OM}|$ , (Figure III.14.a).

b) Le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe ( $\Delta$ ) est le scalaire positif :

$$I_{S/\Delta} = \int_S r^2 dm$$

Où

r : représente la perpendiculaire depuis le point M sur l'axe ( $\Delta$ ),  $r = |\overrightarrow{HM}|$  (H : est la projection orthogonale de M sur ( $\Delta$ )), (Figure III.14.b).

c) Le moment d'inertie de (S) par rapport à un plan (P) est le scalaire positif :

$$I_{S/P} = \int_S r^2 dm$$

Où

r : représente la perpendiculaire depuis le point M sur le plan (P),  $r = |\overrightarrow{HM}|$  (H : est la projection orthogonale de M sur (P)), (Figure III.14.c).



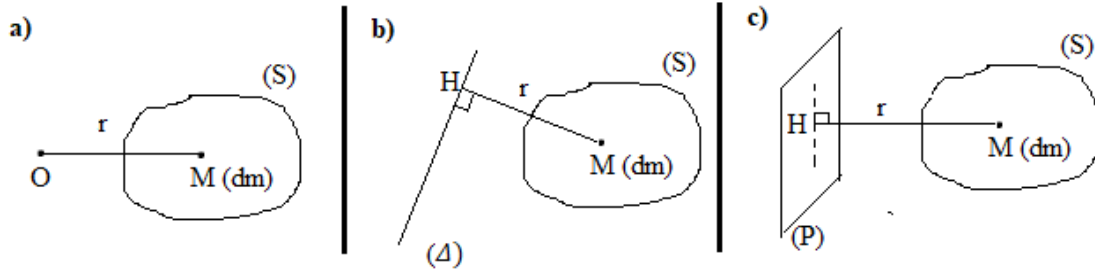


Figure III.14

**Remarque :** Le moment d'inertie d'un système continue par rapport à un point, un axe

ou un plan est :  $I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$

- Si  $r=0$ , le moment d'inertie par rapport à un point, un axe ou un plan est nul ( $I=0$ ).

- Si  $r=cst$ , le moment d'inertie par rapport à un point, un axe ou un plan est :

$$I = r^2 \int_S dm = r^2 m_S$$

#### IV.1.1 Relation entre les moments d'inerties par rapport à un (point, axe ou plan) :

Soit un repère fixe orthonormé direct  $R(O, x, y, z)$ ,  $(S)$  est un système continue,  $M$  est un point de ce solide  $(S)$  qui a comme composante  $M(x, y, z)$  voir Figure III.15 :

Le moment d'inertie par rapport aux plans  $(O, x, y)$ ,  $(O, x, z)$  et  $(O, y, z)$  est :

$$I_{S/(Oxy)} = \int_S z^2 dm,$$

$$I_{S/(Oxz)} = \int_S y^2 dm ,$$

$$I_{S/(Oyz)} = \int_S x^2 dm$$

Le moment d'inertie par rapport aux axes  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$  :

$$I_{S/(Ox)} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{S/(Oy)} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{S/(Oz)} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

Le moment d'inertie par rapport au point  $O$  :

$$I_{S/(o)} = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

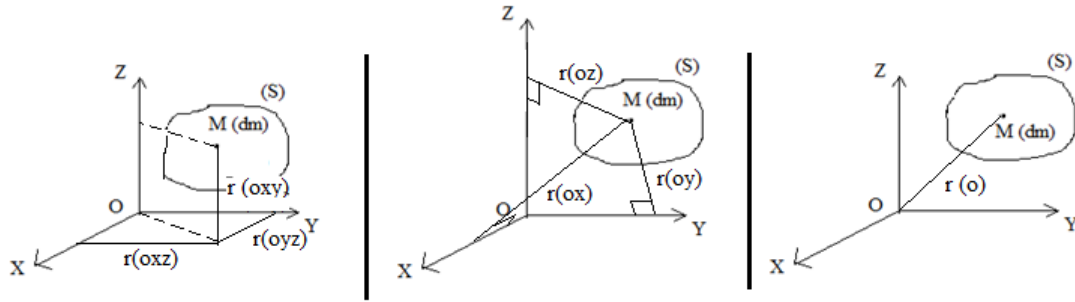


Figure III.15

En résulte que :

- 1) le moment d'inertie par rapport à un point O est la somme des moments d'inerties par rapport aux plans qui se croisent en ce point (O) :

$$I_{S/(o)} = I_{S/(Oxy)} + I_{S/(Oxz)} + I_{S/(Oyz)}$$

- 2) Deux fois le moment d'inertie par rapport à un point O est la somme des moments d'inerties par rapport aux axes qui se croisent en ce point (O) :

$$2 I_{S/(o)} = I_{S/(Ox)} + I_{S/(Oy)} + I_{S/(Oz)}$$

- 3)  $I_{S/(Ox)} = I_{S/(Oxy)} + I_{S/(Oxz)}$   
 $I_{S/(Oy)} = I_{S/(Oxy)} + I_{S/(Oyz)}$   
 $I_{S/(Oz)} = I_{S/(Oxz)} + I_{S/(Oyz)}$
- 4)  $I_{S/(o)} = I_{S/(Ox)} + I_{S/(Oyz)}$   
 $I_{S/(o)} = I_{S/(Oy)} + I_{S/(Oxz)}$   
 $I_{S/(o)} = I_{S/(Oz)} + I_{S/(Oxy)}$

#### IV.2. Opérateur d'inertie par rapport à un point O:

Considérant une droite ( $\Delta$ ) appartenant à un repère  $R(O, x, y, z)$ , passant par le point O et a un vecteur unitaire  $\vec{u}$  ( $\Delta(O, \vec{u})$ ). (S) un solide continue appartenant au même repère R ou M un point de ce solide d'une masse élémentaire (dm) (figure III.16)

Le moment d'inertie de (S) par rapport à ( $\Delta$ ) :

$$I_{S/\Delta} = \int_S r^2 dm \quad \text{avec } |\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM}| \cdot \sin \theta = r$$

$$|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}|^2 = r^2 \Rightarrow |\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}| \cdot |\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}| = r^2$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})) = r^2$$

$$\Rightarrow I_{S/\Delta} = \int_S \vec{u} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})) dm$$

$$\Rightarrow I_{S/\Delta} = \vec{u} \int_S (\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})) dm$$

On pose ;

$$\vec{J}_O(s, \vec{u}) = \int_S (\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})) dm$$

$$\Rightarrow I_{S/\Delta} = \vec{u} \cdot \vec{J}_O(s, \vec{u})$$

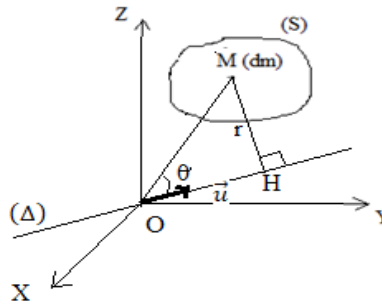


Figure III.16

L'opérateur d'inertie d'un solide (S) en un point O est une application notée  $J_O(s)$ , qui a tout vecteur  $\vec{u}$  fait associé un vecteur  $\vec{J}_O(s, \vec{u})$ .

D'où  $\vec{J}_O(s, \vec{u})$  est linéaire et symétrique donc on peut l'écrire sous forme d'une matrice .

#### IV.3 Matrice d'inertie d'un solide par rapport à un point :

La matrice d'inertie ou le tenseur d'inertie du solide (S) au point O est représenté dans la base  $R(O, x, y, z)$  par une matrice notée  $M_O^S$ .

On pose  $\vec{u} (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k})$  le vecteur unitaire de  $(\Delta)$  déjà vue en IV.2 :

Donc

$$\vec{J}_O(s, \vec{u}) = \vec{J}_O(s, (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k})) = \alpha \vec{J}_O(s, \vec{i}) + \beta \vec{J}_O(s, \vec{j}) + \gamma \vec{J}_O(s, \vec{k})$$

Où :

$$\vec{J}_O(s, \vec{i}) = \int_S (\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OM})) dm$$

$$= \int_S \left( \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \right) dm$$

$$= \int_S (y^2 + z^2) dm \vec{i} - (xy) dm \vec{j} - (xz) dm \vec{k}$$

$$\vec{J}_O(s, \vec{i}) = I_{(Ox)} \vec{i} - I_{(xy)} \vec{j} - I_{(xz)} \vec{k}$$

De même :

$$\vec{J}_O(s, \vec{j}) = -I_{(xy)} \vec{i} + I_{(Oy)} \vec{j} - I_{(yz)} \vec{k}$$

$$\vec{J}_O(s, \vec{k}) = -I_{(xz)} \vec{i} - I_{(yz)} \vec{j} + I_{(Oz)} \vec{k}$$

Alors :

$$\vec{J}_O(s, \vec{u}) = (\alpha I_{(Ox)} - \beta I_{(xy)} - \gamma I_{(xz)}) \vec{i} + (-\alpha I_{(xy)} + \beta I_{(Oy)} - \gamma I_{(yz)}) \vec{j} + (-\alpha I_{(xz)} - \beta I_{(yz)} + \gamma I_{(Oz)}) \vec{k}$$

On l'écrit sous forme d'une matrice :

$$\vec{J}_O(s, \vec{u}) = \begin{pmatrix} I_{(Ox)} & -I_{(xy)} & -I_{(xz)} \\ -I_{(yx)} & I_{(Oy)} & -I_{(yz)} \\ -I_{(zx)} & -I_{(zy)} & I_{(Oz)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = M_O^S \cdot \vec{u}$$

$$M_O^S = \begin{pmatrix} I_{(Ox)} & -I_{(xy)} & -I_{(xz)} \\ -I_{(yx)} & I_{(Oy)} & -I_{(yz)} \\ -I_{(zx)} & -I_{(zy)} & I_{(Oz)} \end{pmatrix}$$

$M_O^S$  est une matrice symétrique.

Posant :

$$\begin{cases} A = I_{(Ox)} = \int_S (y^2 + z^2) dm \\ B = I_{(Oy)} = \int_S (x^2 + z^2) dm \\ C = I_{(Oz)} = \int_S (x^2 + y^2) dm \end{cases}$$

A, B, C : représentent les moments d'inertie de (S) par rapport aux axes (Ox), (Oy) et (Oz) ; sont toujours positifs ou égal à 0.

Posant :

$$\begin{cases} D = I_{(xy)} = I_{(yx)} = \int_S (xy) dm \\ E = I_{(xz)} = I_{(zx)} = \int_S (xz) dm \\ F = I_{(yz)} = I_{(zy)} = \int_S (yz) dm \end{cases}$$

D, E, F : représentent produits d'inertie de (S); peuvent être positifs, négatifs ou égal à 0.

$$M_O^S = \begin{pmatrix} I_{(ox)} & -I_{(xy)} & -I_{(xz)} \\ -I_{(yx)} & I_{(oy)} & -I_{(yz)} \\ -I_{(zx)} & -I_{(zy)} & I_{(oz)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -D & -E \\ -D & B & -F \\ -E & -F & C \end{pmatrix}$$

#### IV.4. Matrice principale d'inertie :

Si les produits d'inertie sont nuls ( $I_{(xy)}, I_{(xz)}, I_{(yz)}=0$ ), On dit que la matrice d'inertie est diagonalisable est sous forme :

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Où :

A, B, C : sont les moments principaux d'inertie de (S).

#### IV.5. Symétrie Matricielle :

##### IV.5.1 Plan de symétrie :

➤ **(O, x, y) un plan de symétrie :** Soit un solide (S) appartenant au repère R (O, x, y, z), ou la répartition de masse de (S) en haut(S1) par rapport au plan (O, x, y) est la même répartition en bas de ce plan (S2) voir Figure III.17.a

M (x, y, z) est un point du solide (S) dont son image est M'(x, y, -z).

Où :

$$I_{(yz)} = \int_{S1} (yz)dm - \int_{S2} (yz)dm = 0 \Rightarrow I_{(yz)} = 0$$

$$I_{(xz)} = \int_{S1} (xz)dm - \int_{S2} (xz)dm = 0 \Rightarrow I_{(xz)} = 0$$

Donc la matrice d'inertie s'écrit :

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

De même :

➤ **(O, x, z) un plan de symétrie :**  $I_{(xy)} = I_{(yz)} = 0$

Donc la matrice d'inertie s'écrit :

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & 0 & -F \\ 0 & B & 0 \\ -F & 0 & C \end{pmatrix}$$

➤ **(O, y, z) un plan de symétrie :  $I_{(xy)} = I_{(xz)}\mathbf{0}$**

Donc la matrice d'inertie s'écrit :

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B & -F \\ \mathbf{0} & -F & C \end{pmatrix}$$

#### IV.5.2 Axe de symétrie :

➤ **(Oz) un axe de symétrie :** Soit un solide (S) appartenant au repère R (O, x, y, z),  
M (x, y, z) est un point de ce solide (S) dont son image par rapport à l'axe (Oz) est  
M'(-x, -y, z), voir Figure III.17.b

Où :

$$I_{(yz)} = \int_{S1} (yz)dm - \int_{S2} (yz)dm = 0 \Rightarrow I_{(yz)} = \mathbf{0}$$

$$I_{(xz)} = \int_{S1} (xz)dm - \int_{S2} (xz)dm = 0 \Rightarrow I_{(xz)} = \mathbf{0}$$

Donc la matrice d'inertie s'écrit :

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & -F & \mathbf{0} \\ -F & B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$$

De même :

➤ **(O, x) un axe de symétrie :  $I_{(xy)} = I_{(xz)}\mathbf{0}$**

Donc la matrice d'inertie s'écrit :

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B & -F \\ \mathbf{0} & -F & C \end{pmatrix}$$

➤ **(O, y) un axe de symétrie :  $I_{(xy)} = I_{(yz)}\mathbf{0}$**

Donc la matrice d'inertie s'écrit :

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} & -F \\ \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \\ -F & \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$$

**Remarque :**

Si un système contient au moins deux plans de symétries, ou contient au moins deux axes de symétrie, dans ces deux cas le système aura un repère  $R(O, x, y, z)$  principale d'inertie et une matrice principale d'inertie (diagonale).

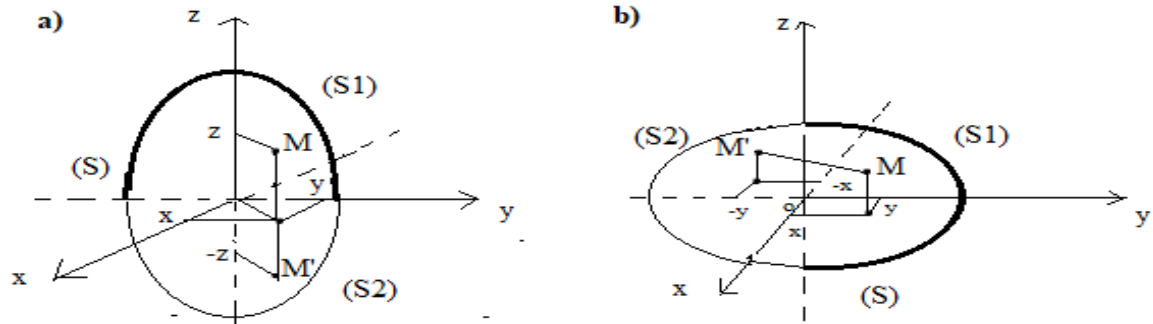


Figure III.17

**IV.6. Symétrie de révolution :**

Soit (S) un solide invariant par rotation autour d'un axe (Oz) (exemple : cylindre, cercle, disque, corne...), donc (Oz) est un axe de symétrie de révolution. Tout plan contenant cet axe ((Oxz) et (Oyz)) est un plan de symétrie, delà on aura une matrice principale d'inertie. Donc pour que  $R(O, x, y, z)$  sera un repère principal d'inertie et avoir une matrice principal d'inertie, il suffit d'avoir un seul axe de révolution dans le système. Dans ce cas ou (Oz) est un axe de révolution, si le repère  $R(O, x, y, z)$  fait une rotation d' un angle  $\frac{\pi}{2}$ , il devient  $R'(O, y, -x, z)$  :

$$\begin{cases} A = I_{(ox)} = \int_S (y^2 + z^2) dm \\ B = I_{(oy)} = \int_S (x^2 + z^2) dm \end{cases} \Rightarrow A = B$$

Si (Oz) est un axe de révolution  $\Rightarrow$

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

De même :

Si (Ox) est un axe de révolution  $\Rightarrow$

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

Si (Oy) est un axe de révolution  $\Rightarrow$

$$M_O^S = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

**Remarque :**

Si notre système est une sphère, donc les trois axes (Ox, Oy et Oz) sont des axes de symétrie, dans ce cas On a une matrice principale d'inertie avec  $A=B=C$  ce qu'on appelle

**symétrie Sphérique.G**  $M_O^S = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$

**V. Théorème de HUYGENS :**

Le passage d'une matrice d'inertie défini au centre de gravité G d'un solide (S) à la matrice d'inertie en P un autre point de solide est définit par :

$$M_P^S = M_G^S + m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Où :

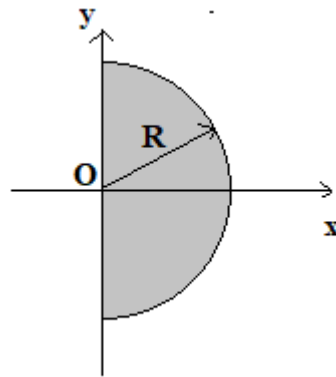
$$\overrightarrow{PG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$



**EXERCICES RESOLUS**

**Exercice 01.** Soit une plaque demi-circulaire de rayon R (Figure III.18), l'axe Ox coupe la plaque en deux morceaux identiques.

- 1)- Déterminer la position de son centre d'inertie G ?
- 2)- Déterminer sa matrice d'inertie au point O ?
- 3)- En déduire sa matrice d'inertie au point G ?



**Figure III.18**

**Solution :**

- 1) Centre d'inertie G :

Par raison de symétrie  $\Rightarrow y_G = 0$

$$x_G = \frac{1}{m_s} \int_S x \, dm \quad \text{avec} \quad m = \sigma \cdot S \quad (S = \frac{\pi}{2} R^2 \text{ et } dS = r \, dr \, d\theta)$$

$$m = \sigma \cdot \frac{\pi}{2} R^2$$

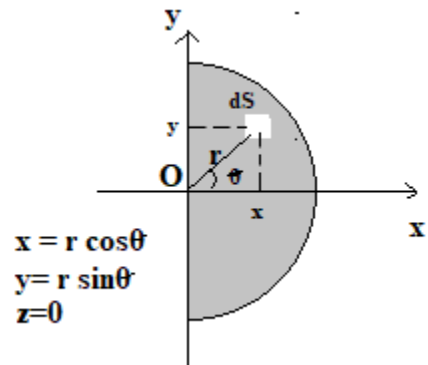
$$dm = \sigma \, r \, dr \, d\theta$$

$$0 < r < R$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x_G = \frac{1}{\sigma \cdot \frac{\pi}{2} R^2} \int_0^R r^2 \, dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta$$

$$x_G = \frac{4R}{3\pi}$$



$$G\left(\frac{4R}{3\pi}, 0\right)$$

2) Matrice d'inertie au point O :

On a :

- $y_G = z_G = 0 \Rightarrow I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = 0$
- Une symétrie de plan (zox)  $\Rightarrow I_{ox} = I_{oy}$

Z=0 :

$$\begin{aligned} I_{(ox)} &= \int_S y^2 dm = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \sigma \int_0^R r^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \end{aligned}$$

$$I_{(ox)} = m \frac{R^2}{4} = I_{oy}$$

$$\begin{aligned} I_{(oz)} &= \int_S (x^2 + y^2) dm = \sigma \int_S r^3 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dr d\theta \\ &= \sigma \int_0^R r^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \end{aligned}$$

$$I_{(oz)} = m \frac{R^2}{2}$$

$$M_O^S = \begin{pmatrix} m \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

3) Matrice d'inertie au point G :

Théorème de Huygens :

$$M_O^S = M_G^S + m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$M_G^S = M_O^S - m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Où :

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \begin{pmatrix} x_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

$$\Rightarrow M_G^S = \begin{pmatrix} m \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16R^2}{9\pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16R^2}{9\pi^2} \end{pmatrix}$$

$$M_G^S = m \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} - \frac{16R^2}{9\pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} - \frac{16R^2}{9\pi^2} \end{pmatrix}$$

**Exercice 02.** Soit une barre (AB) homogène de longueur L, de milieu O, portée par l'axe Ox. (Figure III.19).

- Déterminer le tenseurs d'inertie en O relativement au repère orthonormé R (O, x, y, z) de cette barre.

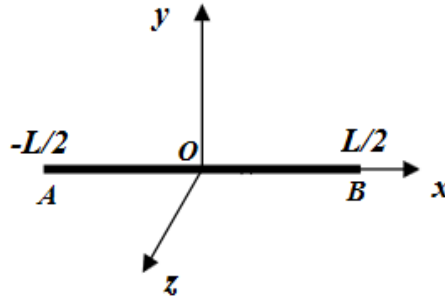


Figure III.19

**Solution :**

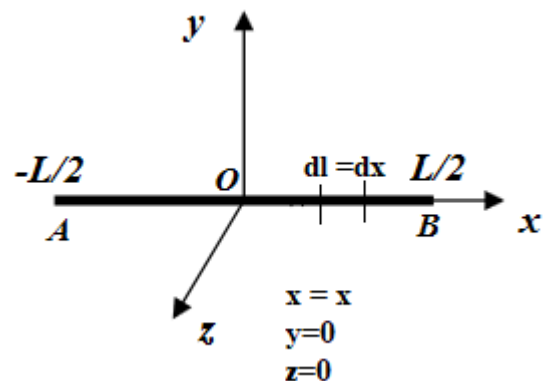
Les axes (Oy) (Oz) sont des axes de symétrie

$$\Rightarrow I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

$$I_{(Ox)} = \int_S (y^2 + z^2) dm = 0$$

Avec :

$$m = \lambda \cdot l$$



$$dm = \lambda \cdot dl = \lambda \cdot dx$$

$$\frac{-l}{2} < x < \frac{l}{2}$$

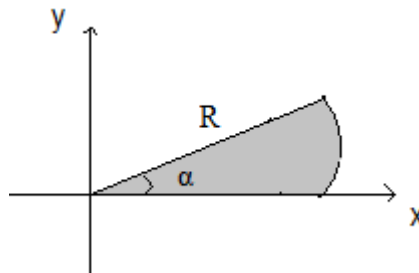
$$I_{(oy)} = \int_S (x^2 + z^2) dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \lambda \cdot dx$$

$$I_{(oy)} = \frac{m}{3} l^2 = I_{(oz)}$$

$$M_O^S = \frac{m}{3} l^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 03.** Soit une plaque circulaire d'angle  $\alpha$  et de rayon R (Figure III.20).

- 1)- Calculer la surface de la plaque ?
- 2)- Déterminer les coordonnées de centre de masse G ?
- 3)- Dédurre le centre de masse d'un :
  - Quart de disque.
  - Demi disque.
  - Un disque.



**Figure III.2**

**Solution :**

1) La surface de la plaque :

$$dS = r \, dr \, d\theta \quad \text{avec : } 0 < r < R$$

$$0 < \theta < \alpha$$

$$S = \int_0^R \int_0^\alpha r \, dr \, d\theta = \int_0^R r \, dr \int_0^\alpha d\theta$$

$$S = \frac{R^2 \alpha}{2}$$

2) Les coordonnées de centre de masse G ( $x_G, y_G, z_G$ ):

$$z_G = 0$$

$$x_G = \frac{1}{m_s} \int_S x \, dm \quad \text{avec} \quad m = \sigma \cdot S = \sigma \cdot \frac{R^2 \alpha}{2}$$

$$dm = \sigma r \, dr \, d\theta$$

$$x_G = \frac{1}{\sigma \cdot \frac{R^2 \alpha}{2}} \int_S r \cos \theta \, \sigma r \, dr \, d\theta = \frac{2}{R^2 \alpha} \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\alpha \cos \theta \, d\theta$$

$$x_G = \frac{2R}{3\alpha} \sin \alpha$$

$$y_G = \frac{1}{m_s} \int_S y \, dm = \frac{1}{\sigma \cdot \frac{R^2 \alpha}{2}} \int_S r \sin \theta \, \sigma r \, dr \, d\theta = \frac{2}{R^2 \alpha} \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\alpha \sin \theta \, d\theta$$

$$y_G = \frac{2R}{3\alpha} (1 - \cos \alpha)$$

3) Le centre de masse d'un :

- Quart de disque : ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ )

$$x_G = \frac{2R}{3\alpha} \sin \alpha = \frac{2R}{3\alpha} \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_G = \frac{4R}{3\pi}$$

$$y_G = \frac{2R}{3\alpha} (1 - \cos \alpha) = \frac{2R}{3\alpha} (1 - \cos \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

- Demi disque : ( $\alpha = \pi$ )

$$x_G = \frac{2R}{3\alpha} \sin \alpha = \frac{2R}{3\alpha} \sin \pi \Rightarrow x_G = 0$$

$$y_G = \frac{2R}{3\alpha} (1 - \cos \alpha) = \frac{2R}{3\alpha} (1 - \cos \pi) \Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

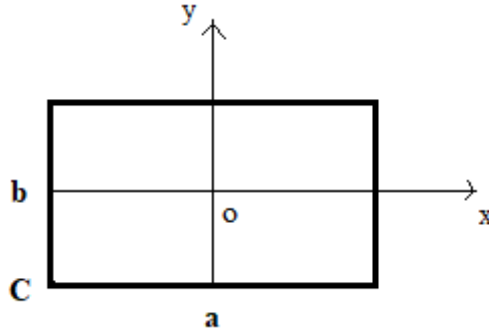
- Un disque : ( $\alpha = 2\pi$ )

$$x_G = \frac{2R}{3\alpha} \sin \alpha = \frac{2R}{3\alpha} \sin 2\pi \Rightarrow x_G = 0$$

$$y_G = \frac{2R}{3\alpha} (1 - \cos \alpha) = \frac{2R}{3\alpha} (1 - \cos 2\pi) \Rightarrow y_G = 0$$

**Exercice 04.** On considère une plaque rectangulaire sans épaisseur et de cotés (a) et (b) présente dans la Figure III.21.

- 1) Déterminer la matrice d'inertie au centre O de la plaque ?
- 2) Déterminer la matrice d'inertie au coin C de la plaque ?



**Figure III.21**

**Solution :**

- 1) Matrice d'inertie au centre O :

Par raison de symétrie  $\Rightarrow I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = 0$

Z=0 :

$$I_{(ox)} = \int_S y^2 dm = \sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy$$

avec :  $m = \sigma \cdot S$  ( $S = a \cdot b$ )

$$m = \sigma \cdot a \cdot b$$

$$dm = \sigma dx dy$$

$$-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$$

$$-\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}$$

$$I_{(ox)} = \frac{m}{12} b^2$$

$$I_{(oy)} = \int_S x^2 dm = \sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy$$

$$I_{(oy)} = \frac{m}{12} a^2$$

$$I_{(oz)} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy + \sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy$$

$$I_{(oz)} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

$$M_O^S = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

2) Matrice d'inertie au coin C de la plaque :

Théorème de Huygens : ( $G \equiv O$ )

$$M_C^S = M_O^S + m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Où :

$$\overrightarrow{CO} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

$$\Rightarrow M_C^S = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} + \frac{m}{4} \begin{pmatrix} b^2 & -ab & 0 \\ -ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$M_C^S = \frac{m}{4} \begin{pmatrix} \frac{4}{3}b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

**Exercice 05.** Soit un cylindre plein homogène, de rayon (R), de hauteur (h) et de masse (m). (Figure III.22).

1)- Calculer la matrice d'inertie au centre O de cylindre ?

2)- Déduire la matrice d'inertie au centre O du disque ?

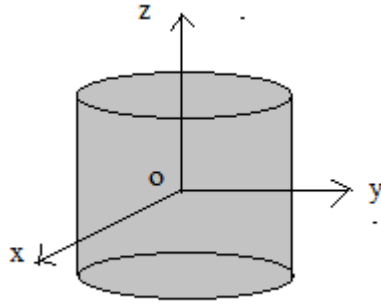


Figure III.22

**Solution :**

- 1) Matrice d'inertie au centre O de cylindre :

Par raison de symétrie  $\Rightarrow I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = 0$

(Oz) est un axe de révolution  $\Rightarrow I_{ox} = I_{oy} \neq I_{oz}$

Où :

$$m = \rho \cdot V \quad (V = h\pi R^2)$$

$$dm = \rho \cdot dV \quad (dV = r dr dz d\theta)$$

$$dm = \rho \cdot r dr dz d\theta$$

$$0 < r < R$$

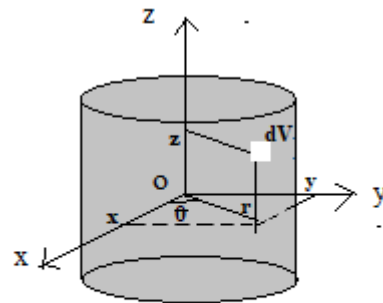
$$0 < \theta < 2\pi$$

$$-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$$

$$I_{(ox)} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$= \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

$$I_{(ox)} = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) = I_{(oy)}$$



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$



$$I_{(oz)} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dm$$

$$= \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz$$

$$I_{(oz)} = \frac{mR^2}{2}$$

$$M_O^S = m \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

2) Matrice d'inertie au centre O du disque :

Le disque n'a pas de hauteur h (h=0) delà :

$$M_O^S = m \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

**Exercice 06.** Considérant un cône plein de densité volumique  $\rho$ , de masse (m), de hauteur (h) et de rayon de base par rapport à son sommet (R) voir Figure III.23.

- 1)- Déterminer le centre d'inertie de ce cône ?
- 2)- Déterminer le tenseur d'inertie en O relativement au repère orthonormé R (O, x, y, z).

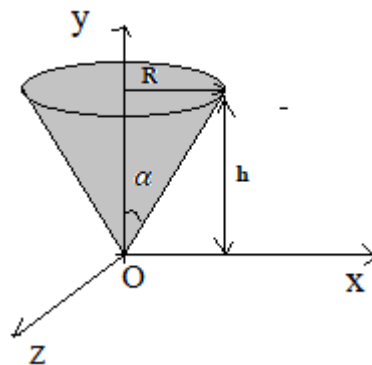


Figure III.23

## Solution :

1) Le centre d'inertie :

Par raison de symétrie  $\Rightarrow x_G = z_G = 0$

$$y_G = \frac{1}{m_s} \int_S y dm \quad \text{avec} \quad m = \rho \cdot V \quad (V = \frac{3\pi}{2} R^2 h \text{ et } dV = r dr d\theta dy)$$

$$m = \rho \frac{3\pi}{2} R^2 h$$

$$dm = \rho r dr d\theta dy$$

$$0 < r < r_y$$

$$0 < r_y < R$$

$$0 < \theta < 2\pi$$

$$0 < y < h$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{3}{\pi R^2 h} \int_S y r dr d\theta dy = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h \left[ \int_0^R y r dr \right] dy \\ &= \frac{3}{R^2 h} \int_0^h y r^2 dy = \frac{3}{R^2 h} \int_0^h y^3 (tg \alpha)^2 dy \end{aligned}$$

$$y_G = \frac{3h}{4}$$

2) Le tenseur d'inertie en O :

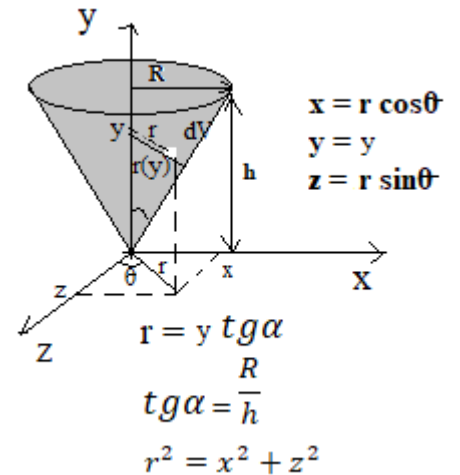
Par raison de symétrie de révolution (Oy)  $\Rightarrow I_{ox} = I_{oz} \neq I_{oy}$

$$A = I_{(ox)} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$B = I_{(oy)} = \int_S (x^2 + z^2) dm = \int_S r^2 dm$$

$$C = I_{(oz)} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

$$B = \rho \int_S r^3 dr d\theta dy = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \left[ \int_0^{r_y} r^3 dr \right] dy$$



$$= \frac{\pi\rho}{2} \int_0^h r_y^4 dy = \frac{\pi\rho}{2} \int_0^h (y \tan \alpha)^4 dy = \frac{\pi\rho}{2} \frac{R^4}{h^4} \int_0^h y^4 dy =$$

$$B = I_{(oy)} = \frac{3}{10} m R^2$$

$$A + C = B + 2 \int_S y^2 dm \Rightarrow 2A = B + 2 \int_S y^2 dm \Rightarrow A = \frac{B}{2} + \int_S y^2 dm$$

$$\int_S y^2 dm = \rho \int_S y^2 r dr d\theta dy = 2\pi\rho \int_0^h \left[ \int_0^{r_y} r y^2 dr \right] dy$$

$$= \pi\rho \int_0^h y^2 r_y^2 dy = \pi\rho \frac{R^2}{h^2} \int_0^h y^4 dy = \frac{3}{5} m h^2$$

$$A = I_{(ox)} = \frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2$$

$$M_O^S = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2 \end{pmatrix}$$

# **Chapitre IV : CINEMATIQUE**

### Introduction

La Cinématique du point matériel est l'étude du mouvement du point matériel (vitesse, accélération, équations périodique) indépendamment des causes (forces, énergies) qui produit ce mouvement.

Un point matériel en mouvement est toujours référé un référentiel ou un repère d'espace qui est aussi un repère de temps.

### I. Systèmes de coordonnées :

#### I.1. Coordonnées cartésienne :

Soit un point M en mouvement par rapport à un repère  $R(O, x, y, z)$  fixe qui a une base orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  $(\Gamma)$  S'appelle trajectoire du mobile par rapport au référentiel(Figure IV.1).

Où :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

$(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes du point M dans la base cartésienne fixe  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

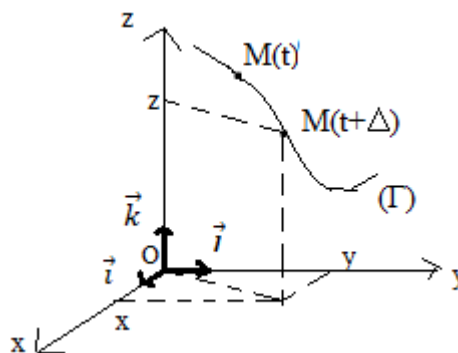


Figure IV.1

### I.2. Coordonnées cylindriques :

Considérant un point M en mouvement circulaire par rapport à un repère cartésien R(O, x, y, z) fixe qui a une base orthonormé direct (O,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ). Le point de projection de M sur le plan (O, x, y) est noté m, Figure IV.2.a.

Les coordonnées cylindrique ( $\rho, \varphi, z$ ), ou :

- ✓  $\rho$  le rayon de la base circulaire ou  $\rho = |\overrightarrow{Om}|$ , ( $0 < \rho < +\infty$ ).
- ✓  $\varphi$  l'angle entre  $\overrightarrow{Oi}$  et  $\overrightarrow{Om}$ , ( $0 < \varphi < 2\pi$ ).
- ✓ z la projection de M sur l'axe (Oz), ( $-\infty < z < +\infty$ ).

( $\rho, \varphi, z$ ) sont les coordonnées cylindriques du point M dans la base cylindrique mobile (O,  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ )

$R_c(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$  est une base mobile orthonormé direct  $\Rightarrow \vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_z$

$$|\vec{e}_\rho| = |\vec{e}_\varphi| = |\vec{e}_z| = 1$$

$$\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_\rho$$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi$$

La relation entre les coordonnées cartésiennes(x, y, z) et les coordonnées cylindriques ( $\rho, \varphi, z$ )Figure IV.2.b est :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \text{Arctg} \left( \frac{y}{x} \right) \\ z = z \end{cases}$$

La relation entre la base cartésienne fixe( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) et la base cylindriques mobile( $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ )Figure IV.2.b est :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{e}_z = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{j} = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = \vec{e}_z \end{cases}$$

Le vecteur position des coordonnées cylindrique  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$

$$= \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

$$= \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + z \vec{k}$$

$$= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

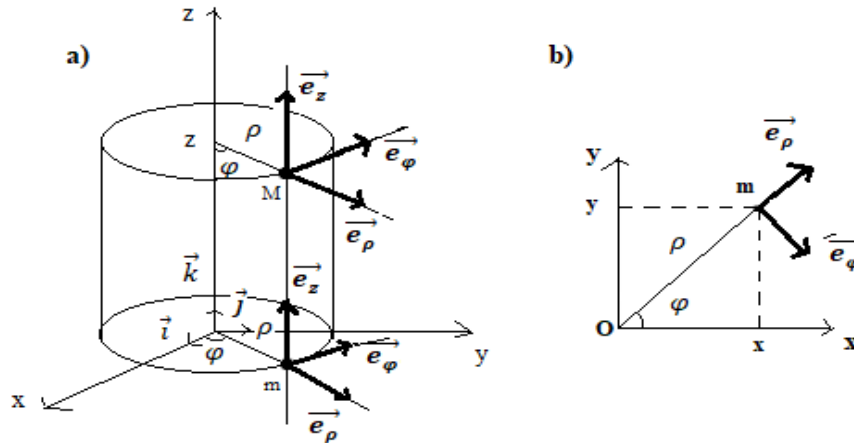


Figure IV.2

### I.3. Coordonnées sphérique :

Soit un point M en mouvement sphérique par rapport à un repère  $R(O, x, y, z)$  fixe qui a une base orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le point de projection de M sur le plan  $(O, x, y)$  est noté m, Figure IV.3.a.

Les coordonnées sphériques sont  $(r, \theta, \varphi)$ , ou :

- ✓  $r$  est la norme du vecteur  $\vec{OM}$ ,  $r = |\vec{OM}|, (0 < r < +\infty)$ .
- ✓  $\theta$  est l'angle entre l'axe  $(Oz)$  et le vecteur  $\vec{OM}$ ,  $(0 < \theta < \pi)$ .
- ✓  $\varphi$  l'angle entre  $\vec{Ox}$  et  $\vec{Om}$ ,  $(0 < \varphi < 2\pi)$ .

$(r, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques du point M dans la base sphérique mobile  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ .

$R_s(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  est une base mobile orthonormé direct  $\Rightarrow \vec{e}_r \perp \vec{e}_\theta \perp \vec{e}_\varphi$

$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\theta| = |\vec{e}_\varphi| = 1$$

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$

La relation entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et les coordonnées sphériques (r,  $\theta$ ,  $\varphi$ ) Figure IV.3.b, est :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{Avec: } \rho = r \cos \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

La relation entre la base cartésienne fixe ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) et la base sphérique mobile ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ ) Figure IV.3.b, est :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases} \quad \text{Avec: } \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

Le vecteur position des coordonnées sphériques  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$

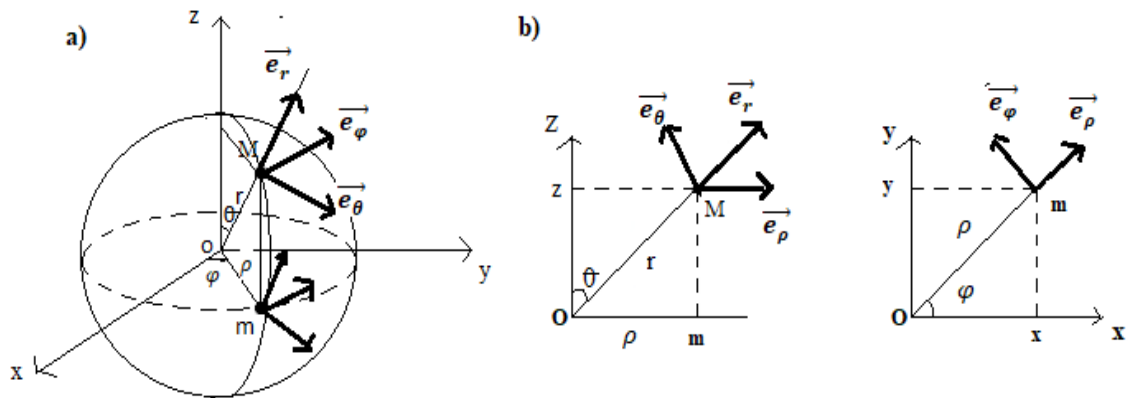


Figure IV.3

## II. Vitesse et accélération dans différents Systèmes de coordonnées :

Une vitesse d'un point matériel en mouvement par rapport à un repère est une dérivée position de ce point par une dérivée de temps.



Une accélération d'un point matériel en mouvement par rapport à un repère est une dérivée de sa vitesse par une dérivée de temps.

Soit M un point matériel en mouvement par rapport au repère fixe R (O, x, y, z) :

-Sa vitesse est noté  $\vec{v}$  ou :  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} /R$

- Son accélération est noté  $\vec{a}$  ou :  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} /R$

### II.1 Vitesse et accélération par les coordonnées cartésiennes :

Soit un point M en mouvement par rapport à un repère R(O, x, y, z) fixe (ne dépend pas de temps) qui a une base orthonormée directe (O,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ).

Ou :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

La vitesse :

$$\begin{aligned}\vec{v}(M/R) &= \frac{d\vec{OM}}{dt} /R = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/R) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

L'accélération :

$$\vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt} /R = \frac{d}{dt} (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

### II.2 Vitesse et accélération par les coordonnées cylindriques :

M est un point matériel en mouvement par rapport à un repère R(O, x, y, z) fixe (ne dépend pas de temps) qui a une base orthonormée directe (O,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ). Et  $R_c(M, \rho, \varphi, z)$  qui a une base orthonormée directe ( $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ ).

Ou :

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM}$$

$$= \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

$$= \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$$

La vitesse :

$$\vec{v}(M/R_c) = \frac{d\vec{OM}}{dt}_{/R_c} = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{k} + z \frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{v}(M/R_c) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{z} \vec{k}$$

Avec :

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi} (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

De même :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho$$

Delà :

$$\vec{v}(M/R) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k}$$

L'accélération :

$$\vec{a}(M/R_c) = \frac{d\vec{v}(M/R_c)}{dt}_{/R} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k})$$

$$= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R_c) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{k}$$

### II.3. Vitesse et accélération par les coordonnées sphériques :

M est un point matériel en mouvement par rapport à un repère R(O, x, y, z) fixe (ne dépend pas de temps) qui a une base orthonormé direct (O,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ). Et  $R_s(M, r, \theta, \varphi)$  qui a une base orthonormé direct (  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  ).

Ou :

$$\overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{e_r}$$

La vitesse :

$$\vec{v}(M/R_s) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} /R = \frac{dr}{dt} \overrightarrow{e_r} + r \frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}$$

Avec :

$$\overrightarrow{e_r} = \cos \theta \vec{k} + \sin \theta \overrightarrow{e_\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{k} + \dot{\theta} \cos \theta \overrightarrow{e_\rho} + \sin \theta \dot{\phi} \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \overrightarrow{e_\varphi}$$

De même :

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta} \overrightarrow{e_r} + \dot{\phi} \cos \theta \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = -\dot{\phi} (\cos \theta \overrightarrow{e_\theta} + \sin \theta \overrightarrow{e_r})$$

Donc :

$$\vec{v}(M/R_s) = \dot{r} \overrightarrow{e_r} + r \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \overrightarrow{e_\varphi}$$

L'accélération :

$$\vec{a}(M/R_s) = \frac{d\vec{v}(M/R_s)}{dt} /R_s = \frac{d}{dt} (\dot{r} \overrightarrow{e_r} + r \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \overrightarrow{e_\varphi})$$

$$= \ddot{r} \overrightarrow{e_r} + \dot{r} (\dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \overrightarrow{e_\varphi}) + \dot{r} \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta} + r \ddot{\theta} \overrightarrow{e_\theta} + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \overrightarrow{e_r} + \dot{\phi} \cos \theta \overrightarrow{e_\varphi}) + \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta \overrightarrow{e_\varphi} + r \ddot{\phi} \sin \theta \overrightarrow{e_\varphi} + r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \overrightarrow{e_\varphi} + r \dot{\phi} \sin \theta (-\dot{\phi} (\cos \theta \overrightarrow{e_\theta} + \sin \theta \overrightarrow{e_r}))$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/R_s) = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \overrightarrow{e_r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \overrightarrow{e_\theta} \\ & + (2r\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta) \overrightarrow{e_\varphi} \end{aligned}$$

### III. Coordonnées curviligne :

Soit un repère fixe R(O, x, y, z) et une trajectoire quelconque curviligne (E), M est un point appartenant à cette trajectoire à un instant (t) et M' est un point appartenant à cette même trajectoire à un instant (t + Δt) voir Figure IV.4.

D'où :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \Delta \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dS \cdot \vec{\tau} \quad \text{avec } S = R \, d\theta$$

La vitesse :

$$\vec{v}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/R} = \frac{dS}{dt} \vec{\tau} = |v| \vec{\tau}$$

L'accélération :

$$\vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt}_{/R} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dS}{dt} \vec{\tau} \right)$$

$$= \frac{d^2 S}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{dS}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Avec :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \vec{n} \quad (\vec{n}: \text{vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur } \vec{\tau})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{R} \vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\Rightarrow |\vec{a}(M/R)| = \sqrt{(\vec{a}_T)^2 + (\vec{a}_N)^2}$$

Avec :

$$\vec{a}_T : \text{accélération tangentielle}, \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \quad \text{et} \quad |\vec{a}_T| = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{a}_N : \text{accélération normale}, \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad \text{et} \quad |\vec{a}_N| = \frac{v^2}{R}$$

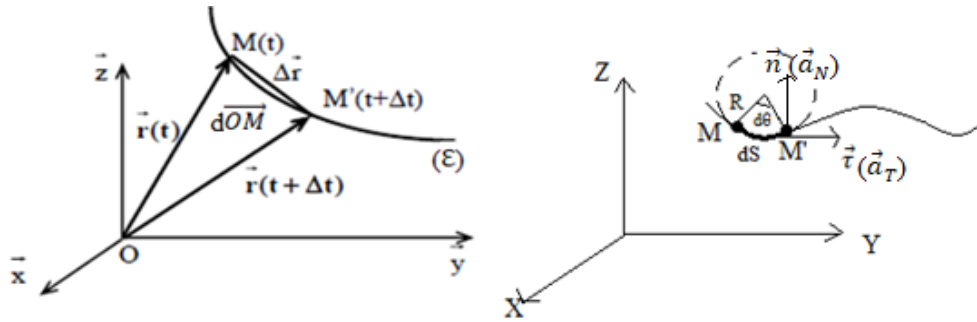


Figure IV.4

## VI. Mouvement uniforme (uniformément varié) :

Le mouvement uniforme est un mouvement qui a une vitesse constante ( $\vec{v} = cst$ ) :

$$\Rightarrow \vec{v}^2 = cst \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}^2 = 0 \Rightarrow 2\vec{v} \frac{d}{dt} \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{a}$$

Donc un mouvement uniforme indique que la vitesse et l'accélération sont perpendiculaire.

### VI.1. Mouvement uniformément accéléré :

Le mouvement uniformément accéléré a une vitesse qui augmente au cours du temps.

$$\vec{v}^2 > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}^2 > 0 \Rightarrow 2\vec{v} \frac{d}{dt} \vec{v} > 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} > 0$$

### VI.2. Mouvement uniformément retardé :

Le mouvement uniformément retardé a une vitesse qui diminue au cours du temps.

$$\vec{v}^2 < 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}^2 < 0 \Rightarrow 2\vec{v} \frac{d}{dt} \vec{v} < 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} < 0$$

## V. Cinématique du Solide :

La Cinématique est l'étude du mouvement des corps solides indépendamment des causes (forces, énergies) qui produisent ce mouvement. Les grandeurs les plus étudiées sont : Le déplacement, la vitesse et l'accélération.

### V.1 Solide Indéformable (rigide) :

Soit un solide (S) en mouvement par rapport au repère fixe R(O, x, y, z), tel que A, B sont deux points quelconque du solide (S) voir Figure IV.5.

Si la distance entre les deux points reste constante ( $|\overrightarrow{AB}| = cst$ ) au cours du temps alors on a un solide indéformable.

$$|\overrightarrow{AB}| = cst \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = cst$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \overline{AB}^2 = 2 \overline{AB} \frac{d}{dt} \overline{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \cdot \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$$

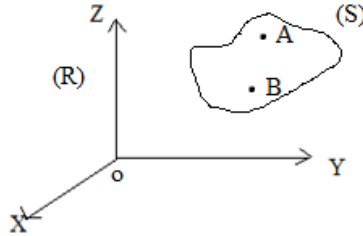


Figure IV.5

## V.2 Champ des vitesses d'un solide :

### V.2.1 Formule fondamentale de la cinématique du solide (Relation de Varignon):

Considérant un repère fixe  $R_0(O, x, y, z)$  et un repère mobile  $R_S(s, x_s, y_s, z_s)$  relié au solide indéformable (S) qui est en mouvement par rapport à  $R_0$ . Soit A et B deux points de ce solide (Figure IV.6) :

$$\overline{AB} \cdot \frac{d\overline{AB}}{dt} /_{R_0} = 0 \Rightarrow \overline{AB} \cdot \left( \frac{d\overline{OB}}{dt} /_{R_0} - \frac{d\overline{OA}}{dt} /_{R_0} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \cdot (\vec{v}_{B/R_0} - \vec{v}_{A/R_0}) = 0$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \cdot \vec{v}_{B/R_0} = \overline{AB} \cdot \vec{v}_{A/R_0}$$

Donc le champ des vitesses d'un solide par rapport à  $R_0$  ( $S/R_0$ ) est un champ équiprojectif et antisymétrique.

De là, il existe un vecteur de rotation du solide (S) par rapport au repère fixe  $R_0$  noté  $\vec{\Omega}_{(S/R_0)}$  tel que :

$$\vec{v}_{A/R_0} = \vec{v}_{B/R_0} + \vec{\Omega}_{(S/R_0)} \wedge \overline{BA} \quad (\text{Relation de Varignon})$$

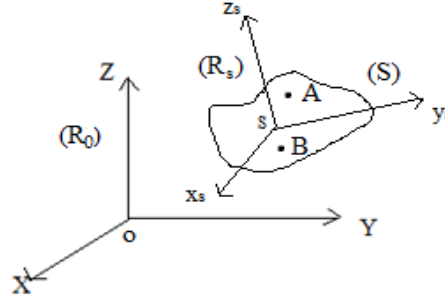


Figure IV.6

### V.2.2 Torseur cinématique :

le champ des vitesses d'un solide par rapport à  $R_0$  ( $S/R_0$ ) est un champ antisymétrique, donc c'est un torseur appelé torseur cinématique de ce solide et dont la résultante est un vecteur de rotation instantanée  $\overrightarrow{\Omega_{(S)/R_0}}$ , ce torseur est noté  $[V_{(S)/R_0}]$  tel que :

$$[V_{S/R_0}] = \left[ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S)/R_0}} \\ \overrightarrow{v_{A \in (S)/R_0}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S)/R_0}} \\ \overrightarrow{v_{B \in (S)/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_S/R_0}} \wedge \overrightarrow{BA} \end{array} \right]$$

Où

$\overrightarrow{v_{A \in (S)/R_0}}$  : Vitesse du point A qui appartient à (S) par rapport au repère fixe  $R_0$ .

Le torseur cinématique ou le torseur des vitesses définit le mouvement du solide à chaque instant.

### V.3 Champ des accélérations d'un solide :

Le champ des accélérations d'un solide n'est pas un torseur, il permet d'écrire l'accélération d'un point A du solide en fonction de celle d'un autre point B du même solide :

$$\vec{v}_{A/R_0} = \vec{v}_{B/R_0} + \vec{\Omega}_{(S)/R_0} \wedge \overrightarrow{BA} \Rightarrow \vec{a}_{A/R_0} = \vec{a}_{B/R_0} + \frac{d\vec{\Omega}_{(S)/R_0}}{dt} \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{\Omega}_{(S)/R_0} \wedge \frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{A/R_0} = \vec{a}_{B/R_0} + \frac{d\vec{\Omega}_{(S)/R_0}}{dt} \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{\Omega}_{(S)/R_0} \wedge (\vec{v}_{A/R_0} - \vec{v}_{B/R_0})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{A/R_0} = \vec{a}_{B/R_0} + \frac{d\vec{\Omega}_{(S)/R_0}}{dt} \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{\Omega}_{(S)/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{(S)/R_0} \wedge \overrightarrow{BA}) \quad \text{(Formule de Rivals)}$$

#### V.4. Mouvement d'un solide :

##### V.4.1. Mouvement de translation :

Si A, B deux point du solide (S), ou le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  garde le même sens, la même direction et la même norme donc il est constant ( $\overrightarrow{AB} = \text{cst}$ ) au coure du temps, c.à.d que solide (S) est en mouvement de translation par rapport au repère fixe  $R_0$ .

$$\overrightarrow{AB} = \text{cst} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \text{cst}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{A/R_0} = \vec{v}_{B/R_0}$$

Delà On obtient que

$$\text{La relation de Varignon : } \vec{v}_{A/R_0} = \vec{v}_{B/R_0} + \vec{\Omega}_{(S/R_0)} \wedge \overrightarrow{BA}$$

$$\text{donne : } \vec{\Omega}_{(S/R_0)} \wedge \overrightarrow{BA} = 0 \Rightarrow \vec{\Omega}_{(S/R_0)} = \mathbf{0}$$

$$\text{La relation de Rivals : } \vec{a}_{A/R_0} = \vec{a}_{B/R_0}$$

$$\vec{a}_{A/R_0} = \vec{a}_{B/R_0} + \frac{d\vec{\Omega}_{(S/R_0)}}{dt} \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{\Omega}_{(S/R_0)} \wedge (\vec{\Omega}_{(S/R_0)} \wedge \overrightarrow{BA})$$

Donc un solide est en mouvement de translation si et seulement si tous les points de ce solide ont la même vitesse et même accélération, et que le vecteur de rotation instantanée  $\vec{\Omega}_{(S)/R_0}$  est nul.

Alors dans le cas du mouvement en translation le torseur cinématique est un **Couple**:

$$[V_{S/R_0}] = \left[ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{v}_{A \in (S)/R_0} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{v}_{B \in (S)/R_0} \end{array} \right]$$

##### V.4.2 Mouvement de rotation autour d'un axe ( $\Delta$ ) fixe :

Soit un repère fixe R (O, x, y, z), le solide (S) est en rotation par rapport à l'axe (Oz) confondue avec l'axe ( $\Delta$ ).  $\omega$  est la vitesse angulaire de rotation de (S)/R qui est la même vitesse en tous point de (S). Figure IV.7. Le vecteur de rotation instantanée  $\vec{\Omega}_{(S)/R} = \omega \cdot \vec{k}$ .

M est un point quelconque de (S) ou :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad |\overrightarrow{OM}| = r = \text{cst}$$

P est un point appartenant à l'axe ( $\Delta$ ) et au solide (S)  $\Rightarrow \vec{v}_{P/R} = 0$



On a :

$$1) \vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{P/R} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{PM} = \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{PM} = \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{M/R} = \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$2) \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}_{M/R} = r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = r \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{M/R} = \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega_{(S)/R}} = \omega \cdot \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \dot{\varphi} \\ \vec{k} = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$|\overrightarrow{\Omega_{(S)/R}}| = \omega = \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{M/R}| = |\overrightarrow{\Omega_{(S)/R}}| \cdot r = r \cdot \omega = r \cdot \dot{\varphi}$$

Alors dans le cas du mouvement en rotation par rapport à  $(\Delta)$ , le torseur cinématique est un

**Glisseur:**

$$[V_{S/R}] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{(S)/R}} \\ \vec{v}_{P \in (S)/R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{(S)/R_0}} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \text{ (par rapport à un point appartenant à (S) et à } (\Delta))$$

$$[V_{S/R}] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{(S)/R}} \\ \vec{v}_{M \in (S)/R} \end{bmatrix} \text{ (par rapport à un point appartenant à (S) et pas à } (\Delta))$$

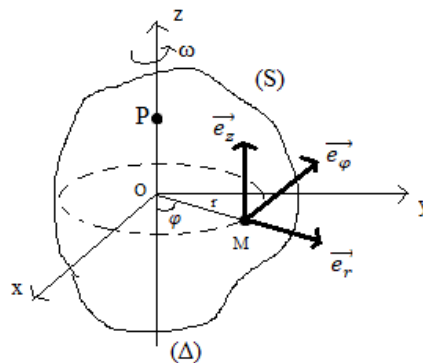


Figure IV.7

### V.4.3 Mouvement hélicoïdal autour d'un axe ( $\Delta$ ) fixe :

Un mouvement hélicoïdal est une combinaison d'un mouvement en translation le long de l'axe ( $\Delta$ ) et d'un mouvement de rotation toujours autour de cet axe ( $\Delta$ ).

Exemple d'un cylindre (S) de base circulaire de rayon r, ou l'axe (Oz) est confondue avec( $\Delta$ ). Un point M  $\in$  au cylindre qui a une trajectoire hélice sur ce dernier, Figure IV.8.

Soit  $M_1$  la projection de M sur le plan (O, x, y).

Et  $M_2$  la projection de M sur l'axe ( $\Delta$ ).

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} \Rightarrow \vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M_1/R} + \vec{v}_{M_2/R}$$

Où

$M_1$  est en mouvement de rotation autour de l'axe ( $\Delta$ ).

$M_2$  est en mouvement de translation autour de l'axe ( $\Delta$ ).

$$\begin{aligned}\vec{v}_{M/R} &= \vec{v}_{M_2/R} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{M_2M} \\ &= \vec{v}_{M_2/R} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{OM_1}\end{aligned}$$

$$\vec{v}_{M_1/R} = \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{OM_1} \text{ (vitesse de rotation)}$$

Soit A un point appartenant à l'axe ( $\Delta$ ) et au solide (S) :

$$\vec{v}_{A/R} = \vec{v}_{M_2/R} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{M_2A}$$

Ou :

$$\vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{M_2A} = 0$$

Donc :

$$\vec{v}_{A/R} = \vec{v}_{M_2/R} \quad \text{(Vitesse de translation)}$$

Alors dans le cas du mouvement hélicoïdal par rapport à ( $\Delta$ ), le torseur cinématique est :

$$[V_{S/R}] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} \\ \vec{v}_{M \in (S)/R} \end{bmatrix}$$

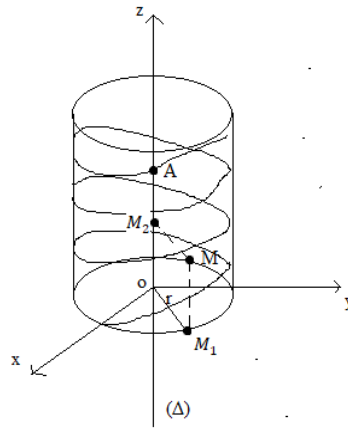


Figure IV.8

#### V.4.4. Composition des mouvements :

##### V.4.4.1. Formule de Boor :

Un solide (S) est en mouvement par rapport à un repère fixe R (O, x, y, z).

Le repère  $R_1(s, x_1, y_1, z_1)$  relié au solide (S).

A, B deux point appartenant à (S) :

$$\frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} = 0$$

$$\frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} /_R = \vec{v}_{B/R} - \vec{v}_{A/R} = \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Par conséquence :

$$\frac{d \vec{u}_1}{dt} /_R = \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \vec{u}_1$$

$$\frac{d \vec{j}_1}{dt} /_R = \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \vec{j}_1$$

$$\frac{d \vec{k}_1}{dt} /_R = \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \vec{k}_1$$

A, B deux point qui n'appartiennent pas au solide (S) et sont en mouvement par rapport à  $R_1$  et à R avec:

$$\overrightarrow{AB} = x_1 \vec{u}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1$$

$$\frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} = \dot{x}_1 \vec{u}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} /_R &= \frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} + x_1 \frac{d \overrightarrow{i_1}}{dt} /_R + y_1 \frac{d \overrightarrow{j_1}}{dt} /_R + z_1 \frac{d \overrightarrow{k_1}}{dt} /_R \\
 &= \frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge x_1 \overrightarrow{i_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge y_1 \overrightarrow{j_1} + z_1 \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge z_1 \overrightarrow{k_1} \\
 &= \frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge (x_1 \overrightarrow{i_1} + y_1 \overrightarrow{j_1} + z_1 \overrightarrow{k_1}) \\
 \frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} /_R &= \frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{AB} \text{ (Formule de Boor)}
 \end{aligned}$$

#### V.4.4.2. Composition des vitesses :

Soit un repère fixe R (O, x, y, z) appelé aussi repère absolue, et un repère mobile  $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$  ou repère relatif. Figure IV.9.

(S) est un solide en mouvement par rapport au deux repères R et  $R_1$ .

M est un point appartenant au solide (S).

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} \\
 \frac{d \overrightarrow{OM}}{dt} /_R &= \frac{d \overrightarrow{OO_1}}{dt} /_R + \frac{d \overrightarrow{O_1M}}{dt} /_{R_1} \\
 \vec{v}_{M/R} &= \vec{v}_{O_1/R} + \frac{d \overrightarrow{O_1M}}{dt} /_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M} \\
 \vec{v}_{M/R} &= \vec{v}_{O_1/R} + \vec{v}_{M/R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M}
 \end{aligned}$$

La vitesse Absolue de M ( $\vec{v}_a(M)$ ) est la somme d'une vitesse Relative de M ( $\vec{v}_r(M)$ ) et d'une vitesse d'Entrainement de M ( $\vec{v}_e(M)$ ).

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_a(M) &= \vec{v}_{M/R} = \frac{d \overrightarrow{OM}}{dt} /_R \\
 \vec{v}_r(M) &= \vec{v}_{M/R_1} = \frac{d \overrightarrow{O_1M}}{dt} /_{R_1} \\
 \vec{v}_e(M) &= \vec{v}_{O_1/R} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M}
 \end{aligned}$$

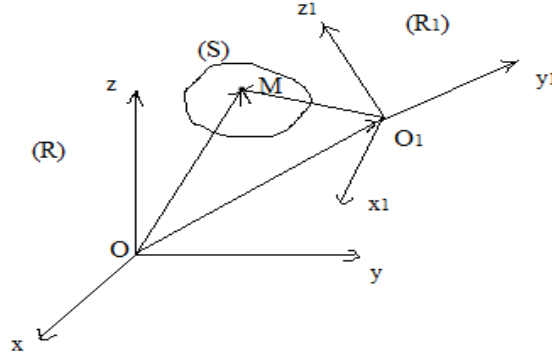


Figure IV.9

#### V.4.4.3. Composition des accélérations :

Concluant l'accélération absolue, on a :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{O_1/R} + \vec{v}_{M/R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} /_R = \frac{d\vec{v}_{O_1/R}}{dt} /_R + \frac{d\vec{v}_{M/R_1}}{dt} /_{R_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{(R_1/R)}}{dt} /_R \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} /_R$$

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{O_1/R} + \left( \frac{d\vec{v}_{M/R_1}}{dt} /_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \vec{v}_{M/R_1} \right) + \frac{d\vec{\Omega}_{(R_1/R)}}{dt} /_R \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \left( \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} /_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M} \right)$$

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R_1} + \vec{a}_{O_1/R} + 2 \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \vec{v}_{M/R_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{(R_1/R)}}{dt} /_R \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge (\vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

L'accélération Absolue de M ( $\vec{a}_a(M)$ ) est la somme d'une accélération Relative de M ( $\vec{a}_r(M)$ ), d'une accélération Coriolis de M ( $\vec{a}_c(M)$ ) et d'une accélération d'Entrainement de M ( $\vec{a}_e(M)$ ).

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M)$$

Avec :

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_{M/R} = \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} /_R = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} /_R$$

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d\vec{v}_{M/R_1}}{dt} /_{R_1} = \frac{d^2\overrightarrow{O_1M}}{dt^2} /_{R_1}$$

$$\vec{a}_c(M) = 2 \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \vec{v}_{M/R_1}$$

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{O_1/R} + \frac{d\vec{\Omega}_{(R_1/R)}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge (\vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

#### V.4.4.4 Composition des vecteurs rotation :

(S) est un solide en mouvement par rapport au deux repères R (O, x, y, z) fixe et  $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$  mobile.

A, B deux points du solide (S).

Soit le repère R'(O', x', y', z') lié à (S), Figure .IV.10

On a :

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_R = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_{R'} + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \overrightarrow{AB} \text{ Avec : } \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_{R'} = 0$$

Donc

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_R = \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \overrightarrow{AB} \dots\dots(1)$$

Et

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_{R'} + \vec{\Omega}_{(R'/R_1)} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\Omega}_{(R'/R_1)} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_R = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_R &= \vec{\Omega}_{(R'/R_1)} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= (\vec{\Omega}_{(R'/R_1)} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)}) \wedge \overrightarrow{AB} \dots\dots(2) \end{aligned}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \vec{\Omega}_{(R'/R)} = \vec{\Omega}_{(R'/R_1)} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)}$$

On a aussi :

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_R = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_R + \vec{\Omega}_{(R/R_1)} \wedge \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_R - \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} = \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_R - \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} /_{R_1} = -\vec{\Omega}_{(R/R_1)} \wedge \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}_{(R_1/R)} = -\vec{\Omega}_{(R/R_1)}$$

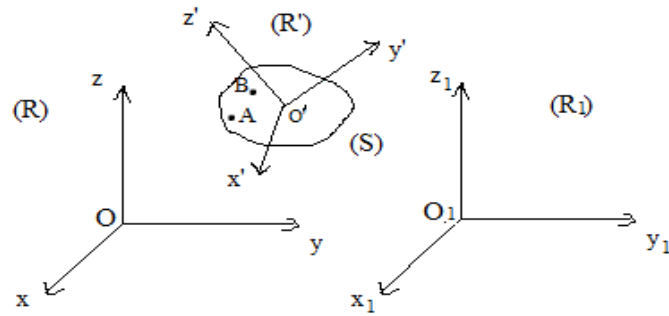


Figure IV.10

### V.5 Repérage d'un solide :

Un solide (libre) peut se déplacer librement par des translations suivant les axes (Ox, Oy, Oz) et par des rotations autour des axes (Ox, Oy, Oz). Donc ce solide possède six mouvements possibles (six degrés de liberté) :

- Trois translations :  $T_x, T_y, T_z$

- Trois rotations :  $R_x, R_y, R_z$

Ces degrés de liberté permettent de définir la position et l'orientation de ce solide par rapport à un repère fixe.

Sa vitesse aussi a six degrés de libertés :

- Trois vitesses de translation :  $v_x, v_y, v_z$

- Trois vitesses angulaires :  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

Le nombre de degrés de liberté change (diminue) par des liaisons mécaniques :

#### a) Liaison plan sur plan (Appui plan) :

Cette liaison contient trois degrés de libertés :

- Deux vitesses de translation :  $v_x, v_y, 0$

- Une vitesse angulaire :  $0, 0, \omega_z$

- 

#### b) Liaison glissière :

Cette liaison contient un degré de liberté :

- une vitesses de translation :  $v_x, 0, 0$
- pas de vitesse angulaire :  $0, 0, 0$

### c) Liaison pivot-glissière :

Cette liaison contient deux degrés de libertés :

- Deux vitesses de translation :  $0, 0, v_z$
- Une vitesse angulaire :  $0, 0, \omega_z$

### V.5.1 Angles D'Euler :

Le mouvement de rotation d'un solide (exemple : une toupie), par rapport à un repère fixe  $R(O, x, y, z)$  est repéré par les trois angles d'Euler ( $\Psi, \theta$  et  $\varphi$ ) Figure IV. 11.

$R'(O', x', y', z')$  est un repère mobile lié au solide, ou  $O'$  est confondue avec  $O$  ( $O' \equiv O$ ).

Notre solide fait trois rotations :

- La première rotation se fait autour de  $(Oz)$  avec un angle de précession  $\Psi$  ou nous donne le premier repère intermédiaire  $R_1(O, x_1, y_1, z)$ .
- La deuxième rotation se fait autour de  $(Ox_1)$  avec un angle de nutation  $\theta$  ou nous donne le deuxième repère intermédiaire  $R_2(O, x_1, y_2, z')$ .
- La troisième et la dernière rotation se fait autour de  $(Oz')$  avec un angle de rotation propre  $\varphi$  ou nous donne le repère lié au solide qui est  $R'(O', x', y', z')$ .

Delà le vecteur rotation du solide par rapport au repère fixe  $R$  est définit comme suite :

$$\vec{\Omega}_{(R_1/R)} = \dot{\Psi} \vec{z}$$

$$\vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} = \dot{\theta} \vec{x}_1$$

$$\vec{\Omega}_{(R'/R_2)} = \dot{\varphi} \vec{z}'$$

$$\vec{\Omega}_{(R'/R)} = \vec{\Omega}_{(R'/R_2)} + \vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} = \dot{\varphi} \vec{z}' + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\Psi} \vec{z}$$



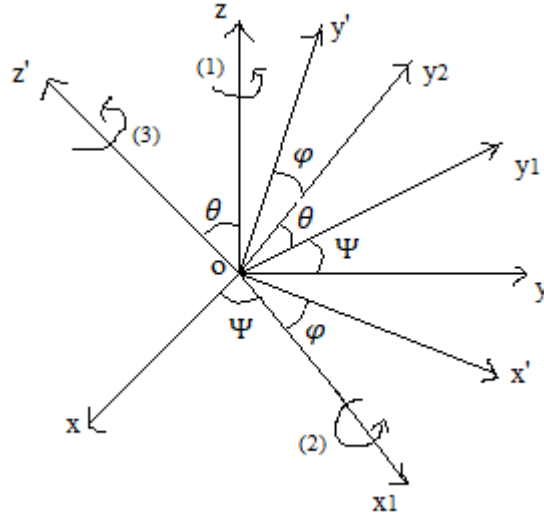


Figure IV.11

Le vecteur de rotation du solide par rapport au repère R défini par les coordonnées  $R_1(O, x_1, y_1, z)$  :

$$\vec{\Omega}_{(R'/R)} = \dot{\phi} \vec{z}' + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\Psi} \vec{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{(R'/R)} &= \dot{\phi} (\cos \theta \vec{z} - \sin \theta \vec{y}_1) + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\Psi} \vec{z} = \dot{\phi} \cos \theta \vec{z} - \dot{\phi} \sin \theta \vec{y}_1 + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\Psi} \vec{z} \\ &= \dot{\theta} \vec{x}_1 - \dot{\phi} \sin \theta \vec{y}_1 + (\dot{\Psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{z} \end{aligned}$$

Le vecteur de rotation du solide par rapport au repère R, défini par les coordonnées R (O, x, y, z):

$$\vec{\Omega}_{(R'/R)} = \dot{\phi} \vec{z}' + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\Psi} \vec{z}$$

$$\vec{\Omega}_{(R'/R)} = \dot{\phi} (\cos \theta \vec{z} - \sin \theta (\cos \Psi \vec{y} - \sin \Psi \vec{x})) + \dot{\theta} (\cos \Psi \vec{x} + \sin \Psi \vec{y}) + \dot{\Psi} \vec{z}$$

$$\vec{\Omega}_{(R'/R)} = (\dot{\theta} \cos \Psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi) \vec{x} + (\dot{\theta} \sin \Psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi) \vec{y} + (\dot{\Psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{z}$$

Le vecteur de rotation du solide par rapport au repère R, défini par les coordonnées

$R'(O', x', y', z')$  :

$$\vec{\Omega}_{(R'/R)} = \dot{\phi} \vec{z}' + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\Psi} \vec{z}$$

$$= \dot{\phi} \vec{z}' + \dot{\theta} (\cos \phi \vec{x}' - \sin \phi \vec{y}') + \dot{\Psi} (\cos \theta \vec{z}' + \sin \theta (\cos \phi \vec{y}' + \sin \phi \vec{x}'))$$

$$\vec{\Omega}_{(R'/R)} = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi) \vec{x}' + (\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{y}' + (\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \vec{z}'$$

## V.6 Cinématique de contact :

### V.6.1 Vitesse de glissement :

Soit deux solides (S1) et (S2) en contact ponctuel (Figure IV.12) et sont en mouvement par rapport au repère R (O, x, y, z) fixe. Le plan ( $\pi$ ) est tangent à (S1) et (S2).

$I_1$  : un point matériel appartenant à (S1).

$I_2$  : un point matériel appartenant à (S2).

$I$  : point géométrique localise le contact, non lié.

$I_1, I_2, I$  : sont confondues à un instant (t).

$I_1, I_2, I$  : ne sont pas confondues à un instant (t + dt).

Le repère  $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$  est lié à (S1).

Le repère  $R_2(O_2, x_2, y_2, z_2)$  est lié à (S2).

La vitesse des trois points n'est pas la même  $\Rightarrow \vec{v}_{I/R} \neq \vec{v}_{I_1/R}$

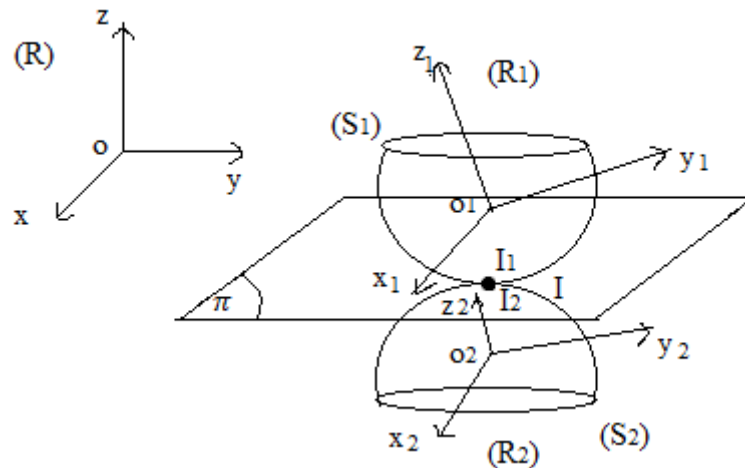


Figure IV.12

La vitesse de glissement d'un solide (S1) sur (S2) au point  $I$  est la vitesse du point  $I_1$  par rapport au repère ( $R_2$ ) noté :

$$\vec{v}_g(s_1/s_2) = \vec{v}_{I_1/R_2}$$

Considérant :

R (O, x, y, z) Repère Absolue

$R_2(O_2, x_2, y_2, z_2)$  Repère Relatif

Où :

$$\vec{v}_a(I_1) = \vec{v}_r(I_1) + \vec{v}_e(I_1) \Rightarrow \vec{v}_{I_1/R} = \vec{v}_{I_1/R_2} + \vec{v}_{e(I_1)}$$

$$\text{Avec : } \vec{v}_{e(I_1)} = \vec{v}_{O_2/R} + \vec{\Omega}_{(R_2/R)} \wedge \overrightarrow{O_2 I_1}$$

D'après la relation de Vrignon :

$$\vec{v}_{O_2/R} = \vec{v}_{I_2/R} + \vec{\Omega}_{(R_2/R)} \wedge \overrightarrow{I_2 O_2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \vec{v}_{e(I_1)} &= \vec{v}_{I_2/R} + \vec{\Omega}_{(R_2/R)} \wedge (\overrightarrow{I_2 O_2} + \overrightarrow{O_2 I_1}) \\ &= \vec{v}_{I_2/R} + \vec{\Omega}_{(R_2/R)} \wedge \overrightarrow{I_2 I_1} \end{aligned}$$

$$\text{A l'instant (t) : } I_1 = I_2 = I \Rightarrow \overrightarrow{I_2 I_1} = \vec{0}$$

$$\text{Delà : } \vec{v}_{e(I_1)} = \vec{v}_{I_2/R}$$

$$\text{Et : } \vec{v}_{I_1/R} = \vec{v}_{I_1/R_2} + \vec{v}_{I_2/R}$$

Alors :

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}_{I_1/R} - \vec{v}_{I_2/R}$$

$$\text{Si } \vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{0} \Rightarrow \text{mouvement sans glissement}$$

### V.6.2 Roulement et pivotement au point I :

Soit (N) la normale et (T) la tangente au plan ( $\pi$ ) en (I), présentent dans la Figure IV.13.

Le vecteur de rotation  $\vec{\Omega}_{(R_1/R_2)}$  peut-être décomposé en deux composantes :

- composante normale  $\vec{\Omega}_N$  : caractérise le pivotement (S1) sur (S2) autour de la normale (N)
- composante tangentielle  $\vec{\Omega}_T$  : caractérise le roulement (S1) sur (S2) autour de la tangente (T).

Ou :

$$\vec{\Omega}_{(R_1/R_2)} = \vec{\Omega}_N + \vec{\Omega}_T$$

On a :

$$\vec{\Omega}_{(R_1/R_2)} = \vec{\Omega}_{(R_1/R)} + \vec{\Omega}_{(R/R_2)}$$

Donc :

$$\vec{\Omega}_{(R_1/R_2)} = \vec{\Omega}_{(R_1/R)} - \vec{\Omega}_{(R_2/R)}$$

Soit un point M appartenant à (S1) Figure IV.13 :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M/R_2} &= \vec{v}_{I_1/R_2} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_2)} \wedge \overrightarrow{I_1 M} \\ &= \vec{v}_g(s_1/s_2) + \vec{\Omega}_N \wedge \overrightarrow{I_1 M} + \vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{I_1 M} \end{aligned}$$

Avec :

$\vec{v}_g(s_1/s_2)$  : Vitesse de glissement de (S1)/(S2) au point  $I_1$

$\vec{\Omega}_N \wedge \overrightarrow{I_1 M}$  : Vitesse de pivotement de M/(R<sub>2</sub>)

$\vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{I_1 M}$  : Vitesse de roulement de M/(R<sub>2</sub>)

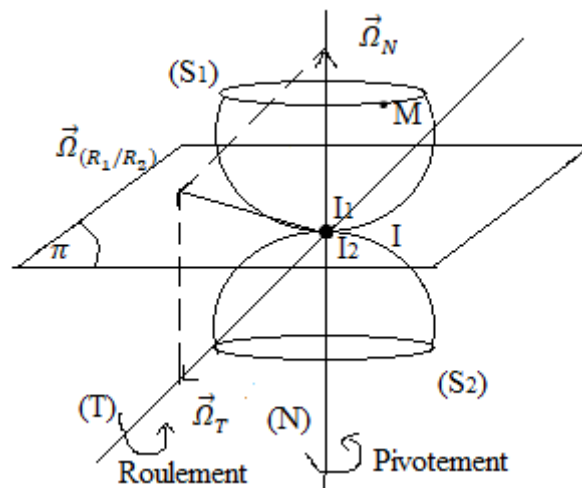


Figure IV.13

	$\vec{\Omega}_N = \vec{0}$ $\vec{\Omega}_T = \vec{0}$	$\vec{\Omega}_N \neq \vec{0}$ $\vec{\Omega}_T \neq \vec{0}$	$\vec{\Omega}_N = \vec{0}$ $\vec{\Omega}_T \neq \vec{0}$	$\vec{\Omega}_N \neq \vec{0}$ $\vec{\Omega}_T = \vec{0}$
$\vec{v}_g(s_1/s_2) = \vec{0}$		Pivotement avec roulement	roulement	Pivote
$\vec{v}_g(s_1/s_2) \neq \vec{0}$	Glissement	Pivotement roulement Glissement	Roulement avec Glissement	Pivotement avec Glissement

### V.7 Mouvement Plan sur Plan :

Le mouvement d'un solide (S) par rapport à R (O, x, y, z) repère fixe est un mouvement plan sur plan si le plan mobile de ce solide ( $\pi(O_1, x_1, y_1)$ ) reste en coïncidence avec le plan fixe ( $\pi_0(O, x, y)$ ) du référentiel R. Figure IV.14.

Delà tous les points se déplacent dans les plans parallèles au plan( $\pi_0$ ) et les vecteurs vitesses des points du solide sont tous parallèles à ce plan.

$R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$  mobile lié au solide (S).

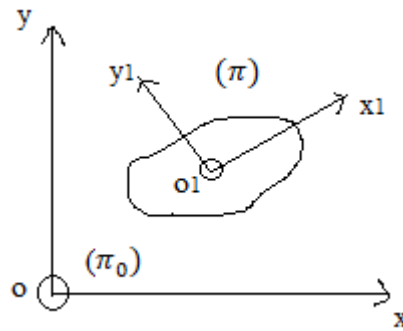


Figure IV.14

Pour l'étude on définit :

- Le centre instantané de rotation (CIR) : c'est l'intersection de l'axe de rotation ( $\Delta$ ) et du plan fixe ( $\pi_0$ ), ( $\Delta \perp \pi_0$ ).
- La base et l'ensemble des points occupés par le CIR dans le plan fixe( $\pi_0$ ).
- La roulante est l'ensemble des points occupés par le CIR dans le plan mobile ( $\pi$ ).

**EXERCICES RESOLUS**

**Exercice 01.** Un point M est repéré, par rapport au repère R (O, x, y), à l'instant (t) par les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^2 - t + 2 \\ y(t) = 3t \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire du point M.
- 2) Calculer les normes des vecteurs position et vitesse à l'instant t=1.5s
- 3) Donnez l'expression de l'accélération du point M et en déduire la nature du mouvement du point M.
- 4) Déterminer les composantes tangentielles et normale de  $\vec{a}$ . En déduire l'expression du rayon de la courbure R de la trajectoire en fonction du temps (t). Calculer R à l'instant t = 1.5s.

**Solution**

- 1) L'équation de la trajectoire du point M :

$$\text{On a : } \begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^2 - t + 2 \\ y(t) = 3t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{y}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{27}y^2 + \frac{y}{3} + 2$$

- 2) Les normes des vecteurs position et vitesse à l'instant t=1.5s :

- Norme de vecteur position :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \left(\frac{1}{3}t^2 - t + 2\right)\vec{i} + (3t)\vec{j} = 1.25\vec{i} + 4.5\vec{j}$$

$$|\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 4.67 \text{ m}$$

- Norme de vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}t - 1 \\ \vec{v}_y = \frac{dy}{dt} = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = \left(\frac{2}{3}t - 1\right)\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\text{A } t=1.5\text{s} : \vec{v} = 0\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3\text{m/s}$$

- 3) L'expression de l'accélération du point M :

$$\vec{a} = \begin{cases} \vec{a}_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{2}{3} \\ \vec{a}_y = \frac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = 0.67 \vec{i} \Rightarrow a = 0.67 \text{ m/s}^2$$

Nature du mouvement :  $a \cdot v > 0 \Rightarrow$  Mouvement uniformément accéléré.

4) Les composantes tangentielle et normale de  $\vec{a}$  :

$$a_T = \frac{dv}{dt} \text{ avec } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t - 1\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10}$$

$$= \left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_T = \frac{2}{3} \times \frac{\left(\frac{2}{3}t - 1\right)}{\sqrt{\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10}}$$

$$\vec{a} = a_T \vec{t} + a_N \vec{n} \Rightarrow a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

$$\Rightarrow a_N = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{\left(\frac{2}{3}t - 1\right)}{\sqrt{\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10}}$$

Rayon de la courbure R de la trajectoire

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10}{\frac{2}{\sqrt{\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10}}}$$

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)^{\frac{3}{2}}$$

Pour  $t=1.5\text{s} \Rightarrow R=13.5 \text{ m}$

**Exercice 02.** Les coordonnées cartésiennes d'un point matériel à l'instant (t) est données dans le repère R (O, x, y) par :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \sqrt{4(1 - t^2)} \end{cases}$$

- 1) Trouver l'équation de la trajectoire du point M et préciser sa nature.
- 2) Donnez l'expression du des vecteur vitesse et son module
- 3) Calculer l'accélération tangentielle  $\vec{a}_T$  et normale  $\vec{a}_N$  de la trajectoire
- 4) En déduire les composantes cartésiennes du vecteur d'accélération
- 5) En déduire que le module de l'accélération est indépendant du repère étudié.

### Solution :

1) L'équation de la trajectoire :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \sqrt{4(1-t^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(t) = 4t^2 \\ y^2(t) = 4(1-t^2) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Nature : la trajectoire est un cercle de centre O(0, 0) et de rayon R=2m

2) Vitesse et son module :

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_x = \frac{dx}{dt} = 2 \\ \vec{v}_y = \frac{dy}{dt} = -2t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = 2\vec{i} - (2t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}) \vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

3) L'accélération tangentielle  $\vec{a}_T$  :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 2t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}$$

L'accélération normale  $\vec{a}_N$  :

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{2}{1-t^2}$$

4) Les composantes cartésiennes du vecteur d'accélération :

$$\vec{a} = \begin{cases} \vec{a}_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \vec{a}_y = \frac{dv_y}{dt} = -2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

5) Dédurre que le module de l'accélération est indépendant du repère étudié :

$$\text{Dans la base cartésienne on a : } a^2 = a_x^2 + a_y^2 = \frac{4}{(1-t^2)^3}$$

$$\text{Dans la base de Freinet on a : } a^2 = a_T^2 + a_N^2 = \frac{4}{(1-t^2)^3}$$

$$\text{Pour les deux cas nous avons obtenues le même } a^2 \Rightarrow a = 2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}$$

D'où le module de  $\vec{a}$  est indépendant du repère étudié.



**Exercice 03.** Soit une tige (T) homogène de longueur (R), d'extrémité O et A. Cette tige est en rotation autour d'un axe fixe (O,  $\vec{z}_1$ ), par un angle de rotation  $\theta$ , dans le repère fixe  $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$ . Le repère  $R_T(A, u, v, z_1)$  est lié à la tige, tel que  $\vec{OA} = R \vec{u}$ .

- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point A, en utilisant la méthode de dérivation directe et la méthode de distribution des vitesses.

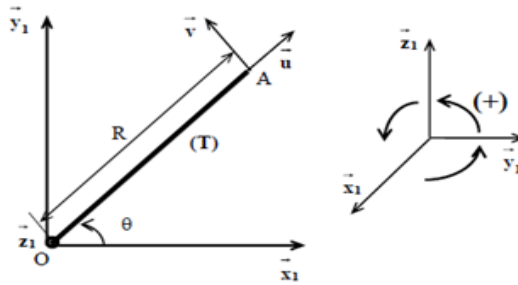


Figure IV.15

**Solution :**

$$\vec{OA} = R \vec{u}$$

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{v} = -\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1$$

1. Méthode de dérivation direct :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A/R_1} &= \frac{d\vec{OA}}{dt} = R \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= R \frac{d(\cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1)}{dt} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{x}_1 + \frac{d \sin \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{y}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{A/R_1} = R \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1) = R \dot{\theta} \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{A/R_1} &= \frac{d\vec{v}_{A/R_1}}{dt} = R \frac{d\dot{\theta} \vec{v}}{dt} \\ &= R \ddot{\theta} \vec{v} + R \dot{\theta} \left( -\frac{d \sin \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{x}_1 + \frac{d \cos \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{y}_1 \right) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{A/R_1} = R \ddot{\theta} \vec{v} - R \dot{\theta}^2 (\cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1) = R \ddot{\theta} \vec{v} - R \dot{\theta}^2 \vec{u}$$

2. Méthode de distribution de vitesse :

$$\vec{v}_{A/R_1} = \vec{v}_{O/R_1} + \vec{\Omega}_{(R_T/R_1)} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Avec :

$$\vec{v}_{O/R_1} = 0 \text{ (O est un point fixe)}$$

Donc :

$$\vec{v}_{A/R_1} = \vec{\Omega}_{(R_T/R_1)} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} \wedge$$

$$\vec{v}_{A/R_1} = R\dot{\theta} \vec{v}$$

On peut déduire le torseur cinématique au point A :

$$[V_{S/R_1}] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R_T/R_1}} \\ \overrightarrow{v_{A/R_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ R\dot{\theta} \vec{v} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_{A/R_1}} = \frac{d\overrightarrow{v_{O/R_1}}}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_{A/R_1}} = R\ddot{\theta} \vec{v} - R\dot{\theta}^2 \vec{u}$$

**Exercice 04.** On considère le roulement d'un disque de centre C et de rayon r sur un axe (O,  $\vec{x}_1$ ). Le repère R(C,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ) est lié au disque. Figure IV.16.

1-Ecrire le torseur cinématique au centre C du disque.

2- Déterminer les vecteurs vitesse, accélération du point M sur le périphérique du disque.

3. Ecrire la condition de roulement sans glissement au point de contact I avec l'axe (O,  $\vec{x}_1$ ).

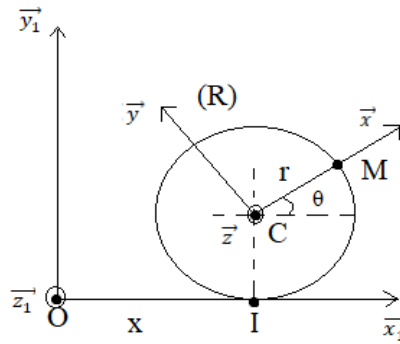


Figure IV.16

### Solution

1) Le torseur cinématique au centre C

$$[V_{S/R_0}] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{(s)/R_1}} \\ \overrightarrow{v_{C/R_1}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} = x \overrightarrow{x_1} + r \overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{x} = \cos \theta \overrightarrow{x_1} + \sin \theta \overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{y} = -\sin \theta \overrightarrow{x_1} + \cos \theta \overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{CM} = r \overrightarrow{x} = r \cos \theta \overrightarrow{x_1} + r \sin \theta \overrightarrow{y_1}$$

On a :

$$\overrightarrow{v_{C/R_1}} = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = \dot{x} \overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{(s)/R_1}} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_1}$$

$$[V_{S/R_0}] = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \overrightarrow{z_1} \\ \dot{x} \overrightarrow{x_1} \end{bmatrix}$$

2) Les vecteurs vitesse, accélération du point M :

Lois composition des vitesses :

$$\overrightarrow{v_{M/R_1}} = \overrightarrow{v_{C/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \overrightarrow{CM}$$

$$= \begin{vmatrix} \dot{x}\vec{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & r \cos \theta \vec{x}_1 \\ 0 & r \sin \theta \vec{y}_1 \\ \dot{\theta}\vec{z}_1 & 0 \end{vmatrix} \wedge \vec{CM} = (\dot{x} - r\dot{\theta} \sin \theta) \vec{x}_1 + r\dot{\theta} \cos \theta \vec{y}_1$$

Lois composition des accélérations :

$$\overrightarrow{a_{M/R_1}} = \overrightarrow{a_{C/R_1}} + \frac{d\overrightarrow{\Omega_{R/R_1}}}{dt} \wedge \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \frac{d\overrightarrow{CM}}{dt}$$

$$= \begin{vmatrix} \ddot{x}\vec{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & r \cos \theta \vec{x}_1 \\ 0 & r \sin \theta \vec{y}_1 \\ \ddot{\theta}\vec{z}_1 & 0 \end{vmatrix} \wedge \overrightarrow{CM} + \begin{vmatrix} 0 & -r\dot{\theta} \sin \theta \vec{x}_1 \\ 0 & r\dot{\theta} \cos \theta \vec{y}_1 \\ \dot{\theta}\vec{z}_1 & 0 \end{vmatrix} \wedge \overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{a_{M/R_1}} = (\ddot{x} - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta) \vec{x}_1 + (r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \vec{y}_1$$

3) La condition de roulement sans glissement au point de contact I :

$$\text{Pour que } (M \equiv I) \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{v_{I/R_1}} = \overrightarrow{v_{M/R_1}(\theta = \frac{3\pi}{2})} = (\dot{x} + r\dot{\theta}) \vec{x}_1$$

Sans glissement  $\Rightarrow \overrightarrow{v_g} = 0$  donc  $\overrightarrow{v_{I/R_1}} = 0 \Rightarrow \dot{x} + r\dot{\theta} = 0$  ( condition de roulement

Sans glissement).

**Exercice 05.** Un cône de rayon R, de hauteur h et demi angle au sommet  $\alpha$ , en contact avec le plan horizontal  $(O, x_0, y_0)$  suivant l'une de ses génératrices, Figure IV.17, le cône roule sans glisser sur ce plan ou  $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$  est un repère fixe.

- 1) Déterminer la vitesse de rotation du cône  $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}}$  dans le repère  $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$ .
- 2) Ecrire la condition de roulement sans glissement ;
- 3) En déduire la relation liant  $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}}$ ,  $\dot{\psi}$  et  $\alpha$  ;
- 4) En déduire  $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}}$  en fonction de  $\dot{\psi}$  . R et h.

On donne :  $\vec{u}$  vecteur unitaire  $\in \overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OA} \in \text{plan}(O, x_0, y_0)$ ,  $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ ,  $\psi = (\vec{x}_0, \vec{u})$ ,

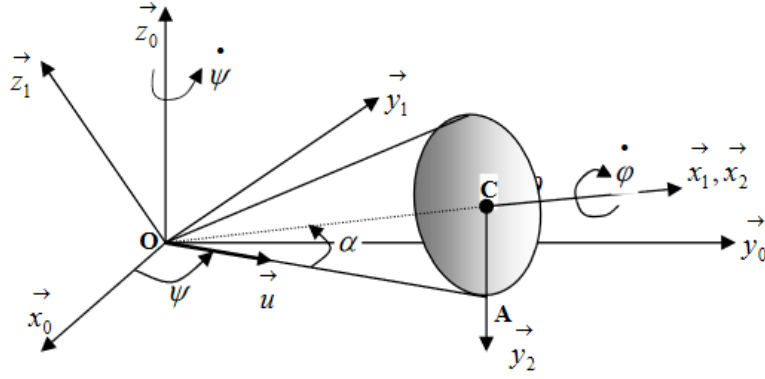


Figure IV.17

**Solution :**

$$OC = h, \quad CA = R,$$

$$R_1(O, x_1, y_1, z_1) \text{ en rotation tel que : } \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \dot{\Psi} \vec{z}_0$$

$$R_2(C, x_2, y_2, z_2) \text{ Lié au cône tel que : } x_1 \equiv x_2; \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} = \dot{\phi} \vec{x}_1$$

1) La vitesse de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \dot{\phi} \vec{x}_1 + \dot{\Psi} \vec{z}_0$$

Avec :

$$\vec{z}_0 = \sin \alpha \vec{x}_1 + \cos \alpha \vec{z}_1$$

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} = (\dot{\phi} + \dot{\Psi} \sin \alpha) \vec{x}_1 + \dot{\Psi} \cos \alpha \vec{z}_1$$

2) Condition de roulement sans glissement :

$$\vec{v}_{A/R_0} = \vec{v}_{O/R_0} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} \wedge \vec{OA} = \vec{0} \text{ or } \vec{v}_{O/R_0} = \vec{0}$$

Donc :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} \wedge \vec{OA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} // \vec{OA}$$

$$\text{Et } \vec{OA} \perp \vec{z}_0 \Rightarrow \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\Rightarrow (\dot{\phi} + \dot{\Psi} \sin \alpha) \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_0 + \dot{\Psi} \cos \alpha \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_0 = 0$$

Avec :

$$\overrightarrow{x_1 z_0} = |\overrightarrow{x_1}| |\overrightarrow{z_0}| \cos(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_0}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\overrightarrow{z_1 z_0} = |\overrightarrow{z_1}| |\overrightarrow{z_0}| \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow (\dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \alpha) \sin \alpha + \dot{\psi} \cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{\dot{\psi}}{\sin \alpha}$$

3) Relation liant  $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}}$ ,  $\dot{\psi}$  et  $\alpha$  :

Remplaçant  $\dot{\phi}$  par l'expression de  $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}}$  :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} = \left(-\frac{\dot{\psi}}{\sin \alpha} + \dot{\psi} \sin \alpha\right) \overrightarrow{x_1} + \dot{\psi} \cos \alpha \overrightarrow{z_1} = \dot{\psi} \cos \alpha \left(-\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{z_1}\right)$$

4)  $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}}$  en fonction de  $\dot{\psi}$ , R et h :

$$\text{On a } \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \text{ et } \cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

Donc :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \dot{\psi} \left(-\frac{h}{R} \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{z_1}\right)$$

**Exercice 06.** Un système de ventilation automatisé et composé de deux barres identiques et homogènes, soudées entre elles au point A et d'une hélice de rayon R.

On donne OA = AB = L, hélice : BM = BN = R.

Le système est en mouvement comme le montre la Figure IV.18,  $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$  est en rotation par rapport à  $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$  autour de l'axe  $\overrightarrow{z_0} \equiv \overrightarrow{z_1} \equiv \overrightarrow{z_2}$  dans le sens positif.  $R_2(A, x_2, y_2, z_2)$  de centre A,  $R_3(B, x_3, y_3, z_3)$  est en rotation par rapport à  $R_2$  autour de l'axe  $\overrightarrow{y_2} \equiv \overrightarrow{y_3}$  dans le sens négatif.

$R_2$  est le repère de projection. On donne :  $\dot{\psi} = \text{cst}$  et  $\dot{\phi} = \text{cste}$ .

Déterminer :

- 1) La vitesse de rotation instantanée du repère  $R_3$  par rapport à  $R_0$ .
- 2) La vitesse et l'accélération absolues du point B par dérivation.
- 3) La vitesse et l'accélération absolues du point M par la cinématique du solide.

- 4) La vitesse et l'accélération absolues du point N par la composition de mouvement,  $R_2$  étant le repère relatif.

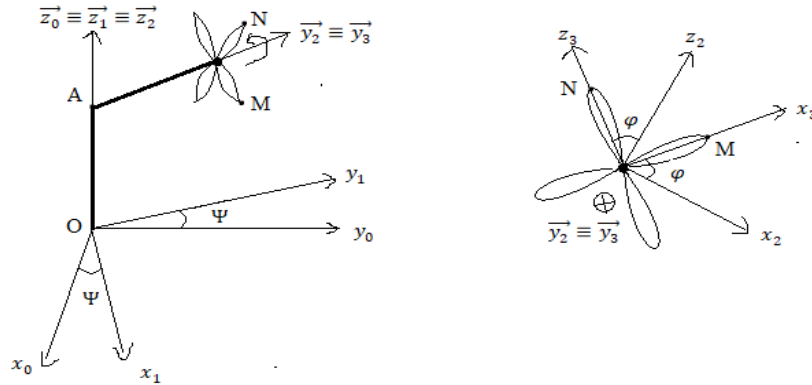


Figure IV.18

**Solution :**

- 1) La vitesse de rotation instantanée  $\overrightarrow{\Omega}_{R_3/R_0}$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega}_{R_3/R_0} &= \overrightarrow{\Omega}_{R_3/R_2} + \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0} \\ &= \begin{vmatrix} 0 \\ -\dot{\phi} \vec{y}_2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \vec{z}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ -\dot{\phi} \vec{y}_2 \\ \dot{\psi} \vec{z}_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

- 2) La vitesse et l'accélération absolues du point B par dérivation :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L \vec{z}_2 \end{vmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 0 \\ L \vec{y}_2 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 0 \\ L \vec{y}_2 \\ L \vec{z}_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \cos \Psi \vec{x}_0 + \sin \Psi \vec{y}_0$$

$$\vec{y}_2 = -\sin \Psi \vec{x}_0 + \cos \Psi \vec{y}_0$$

$$\vec{z}_2 = \vec{z}_0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}_{B/R_2} &= \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} /_{R_2} = L \frac{d(\vec{y}_2 + \vec{z}_2)}{dt} /_{R_2} \\ &= L \frac{d(-\sin \Psi \vec{x}_0 + \cos \Psi \vec{y}_0 + \vec{z}_0)}{dt} /_{R_2} = -L \dot{\Psi} (\cos \Psi \vec{x}_0 + \sin \Psi \vec{y}_0)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{v_{B/R_2}} = \begin{vmatrix} -L\dot{\Psi}\overrightarrow{x_2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{B/R_2}} &= \frac{d\overrightarrow{v_{B/R_2}}}{dt} = -L\dot{\Psi} \frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \quad (\dot{\Psi} = \text{cst}) \\ &= -L\dot{\Psi} \left( \frac{d \cos \Psi}{d\Psi} \frac{d\Psi}{dt} \overrightarrow{x_0} + \frac{d \sin \Psi}{d\Psi} \frac{d\Psi}{dt} \overrightarrow{y_0} \right) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{a_{B/R_2}} = -L\dot{\Psi}^2 (-\sin \Psi \overrightarrow{x_0} + \cos \Psi \overrightarrow{y_0}) = -L\dot{\Psi}^2 \overrightarrow{y_2}$$

3) La vitesse et l'accélération absolues du point M par la cinématique du solide :

$$\overrightarrow{v_{M/R_0}} = \overrightarrow{v_{B/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}} \wedge \overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{BM} = R\overrightarrow{x_3} = R(\cos \varphi \overrightarrow{x_2} + \sin \varphi \overrightarrow{y_2})$$

$$\overrightarrow{v_{M/R_0}} = \begin{vmatrix} -L\dot{\Psi}\overrightarrow{x_2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & R \cos \varphi \\ -\dot{\varphi}\overrightarrow{y_2} & R \sin \varphi \\ \dot{\Psi}\overrightarrow{z_2} & 0 \end{vmatrix} \wedge R \sin \varphi$$

$$\overrightarrow{v_{M/R_0}} = -L\dot{\Psi} \overrightarrow{x_2} + R\dot{\Psi} \sin \varphi \overrightarrow{x_2} + R\dot{\Psi} \cos \varphi \overrightarrow{y_2} + R\dot{\varphi} \cos \varphi \overrightarrow{z_2}$$

$$\overrightarrow{a_{M/R_0}} = \overrightarrow{a_{B/R_0}} + \frac{d\overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}}}{dt} \wedge \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}} \wedge \overrightarrow{BM})$$

$$\frac{d\overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}}}{dt} \wedge \overrightarrow{BM} = \frac{d\overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}}}{dt} \wedge \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}} \wedge \overrightarrow{BM} = \dot{\Psi} \dot{\varphi} \overrightarrow{x_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}} \wedge \overrightarrow{BM} = \begin{vmatrix} \dot{\Psi} \dot{\varphi} \overrightarrow{x_2} & R \cos \varphi \overrightarrow{x_2} \\ 0 & R \sin \varphi \overrightarrow{y_2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge R \sin \varphi \overrightarrow{y_2} = -R\dot{\Psi} \dot{\varphi} \sin \varphi \overrightarrow{y_2}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{R_3/R_0}} \wedge \overrightarrow{BM}) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & R \cos \varphi \overrightarrow{x_2} \\ -\dot{\varphi}\overrightarrow{y_2} & -\dot{\varphi}\overrightarrow{y_2} & R \sin \varphi \overrightarrow{y_2} \\ \dot{\Psi}\overrightarrow{z_2} & \dot{\Psi}\overrightarrow{z_2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - R\dot{\Psi}^2 \cos \varphi \overrightarrow{x_2} \\ -R\dot{\Psi} \dot{\varphi} \sin \varphi \overrightarrow{y_2} \\ -R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \overrightarrow{z_2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{a_{M/R_0}} = -R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - R\dot{\Psi}^2 \cos \varphi \overrightarrow{x_2} - L\dot{\Psi}^2 - 2R\dot{\Psi} \dot{\varphi} \sin \varphi \overrightarrow{y_2} - R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \overrightarrow{z_2}$$

4) La vitesse et l'accélération absolues du point N par la composition de mouvement :



$$\overrightarrow{v_{N/R_0}} = \overrightarrow{v_{N/R_2}} + \overrightarrow{v_{A/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} \wedge \overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = L\overrightarrow{y_2} + R\overrightarrow{z_3} = L\overrightarrow{y_2} + R(-\sin \varphi \overrightarrow{x_2} + \cos \varphi \overrightarrow{z_2})$$

$$= -R \sin \varphi \overrightarrow{x_2} + L\overrightarrow{y_2} + R \cos \varphi \overrightarrow{z_2}$$

$$\overrightarrow{v_{N/R_0}} = \begin{vmatrix} -R\dot{\varphi} \cos \varphi \overrightarrow{x_2} \\ 0 \\ -R\dot{\varphi} \sin \varphi \overrightarrow{z_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \overrightarrow{z_2} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \overrightarrow{x_2} \\ L\overrightarrow{y_2} \\ R \cos \varphi \overrightarrow{z_2} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_{N/R_0}} = (-L\dot{\Psi} - R\dot{\varphi} \cos \varphi) \overrightarrow{x_2} - R\dot{\Psi} \cos \varphi \overrightarrow{y_2} - R\dot{\varphi} \sin \varphi \overrightarrow{z_2}$$

$$\overrightarrow{a_{N/R_0}} = \overrightarrow{a_{N/R_2}} + \overrightarrow{a_{A/R_2}} + \frac{d\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}}}{dt} \wedge \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_0)}} + 2\overrightarrow{\Omega_{((R_2/R_0))}} \wedge \overrightarrow{v_{N/R_2}}$$

$$\overrightarrow{a_{N/R_2}} = \begin{vmatrix} -R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \overrightarrow{x_2} \\ 0 \overrightarrow{y_2} \\ -R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \overrightarrow{z_2} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_{A/R_2}} + \frac{d\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}}}{dt} \wedge \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_0)}} = \begin{vmatrix} -R\dot{\Psi}^2 \sin \varphi \overrightarrow{x_2} \\ -L\dot{\Psi}^2 \overrightarrow{y_2} \\ 0 \overrightarrow{z_2} \end{vmatrix}$$

$$2\overrightarrow{\Omega_{((R_2/R_0))}} \wedge \overrightarrow{v_{N/R_2}} = \begin{vmatrix} 0 \overrightarrow{x_2} \\ -2R\dot{\Psi}\dot{\varphi} \cos \varphi \overrightarrow{y_2} \\ 0 \overrightarrow{z_2} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_{N/R_0}} =$$

$$(-R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - R\dot{\Psi}^2 \sin \varphi) \overrightarrow{x_2} - (L\dot{\Psi}^2 + 2R\dot{\Psi}\dot{\varphi} \cos \varphi) \overrightarrow{y_2} - R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \overrightarrow{z_2}$$

# **Chapitre V : CINETIQUE DU SOLIDE**

### Introduction

La Cinétique est l'étude du mouvement des masses indépendamment des causes qui le produisent. Donc la cinétique est une étude qui réunit les chapitre précédents (cinématique et géométrie des masses). La cinétique traite en général :

- La quantité de mouvement
- Le moment cinétique
- La quantité d'accélération
- L'énergie cinétique et le moment dynamique

Principe de conservation de la masse :

Soit un solide (S) de masse (m) constante au cours du temps par conservation de masse, la fonction vectorielle  $\vec{f} = (M, t)$  est une fonction affectée à un point M appartenant au solide (S) avec une masse (dm).

$$\int \frac{d\vec{f}(M,t)}{dt} \cdot dm = \frac{d}{dt} \int \vec{f}(M,t) \cdot dm$$
 (Puisque la masse ne dépend pas du temps, on peut permuter entre la dérivée et l'intégrale)

### I. Torseur cinétique :

#### I.1. Eléments d'un torseur cinétique :

##### I.1.1. Torseur cinétique d'un point matériel :

Soit un point matériel M de masse (m) en mouvement par rapport à un repère R (O, x, y, z) avec une vitesse  $\vec{v}_{(M/R)}$ . Le torseur cinétique d'un point matériel est défini par :

- Quantité de mouvement noté  $\vec{P}_{(M/R)}$  s'écrit :

$$\vec{P}_{(M/R)} = m \vec{v}_{(M/R)}$$

- Moment cinétique en « O » noté  $\vec{\sigma}_O$  s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{O(M/R)} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}_{(M/R)} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}_{(M/R)}$$

##### I.1.2. Torseur cinétique d'un solide :

Soit le point M de masse (dm), de vitesse  $\vec{v}_{(M/R)}$  un point du solide (S) de masse ( $m_S$ ) est en mouvement par rapport à un repère R (O, x, y, z) Figure V.1. Le torseur cinétique d'un solide est défini par :

- Quantité de mouvement : la quantité de mouvement noté  $\vec{P}_{(S/R)}$  est défini comme suite :

$$\begin{aligned}\vec{P}_{(S/R)} &= \int_S \vec{v}_{(M/R)} dm = \int_S \frac{d\vec{OM}}{dt} /R dm \\ &= \frac{d}{dt} /R \int_S \vec{OM} dm\end{aligned}$$

$$\text{Avec : } \vec{OG} = \frac{1}{m_s} \int_S \vec{OM} dm$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{(S/R)} = m_s \frac{d\vec{OG}}{dt} /R$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{(S/R)} = \mathbf{m}_s \cdot \vec{v}_{(G/R)}$$

- Moment cinétique en « O » noté  $\vec{\sigma}_o$  s'écrit:

$$\vec{\sigma}_{o(S/R)} = \int_S \vec{OM} \wedge \vec{v}_{(M/R)} dm$$

Quel que soit un point A quelconque (appartient au solide ou non) :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{o(S/R)} &= \int_S \vec{OA} \wedge \vec{v}_{(M/R)} dm + \int_S \vec{AM} \wedge \vec{v}_{(M/R)} dm \\ &= \vec{OA} \wedge \int_S \vec{v}_{(M/R)} dm + \vec{\sigma}_{A(S/R)} \\ &= \vec{OA} \wedge \vec{P}_{(S/R)} + \vec{\sigma}_{A(S/R)} \\ &\Rightarrow \vec{\sigma}_{o(S/R)} = \vec{\sigma}_{A(S/R)} + \mathbf{m}_s \cdot \vec{v}_{(G/R)} \wedge \vec{AO}\end{aligned}$$

Le champ des moments cinétique par rapport à R est un torseur cinétique noté  $[C_{S/R}]$  tel que  $\vec{P}_{(S/R)}$  représente la résultante cinétique et  $\vec{\sigma}_{o(S/R)}$  représente le moment cinétique:

$$\begin{aligned}[C_{S/R}] &= \begin{bmatrix} \vec{P}_{(S/R)} \\ \vec{\sigma}_{A(S/R)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_S \vec{v}_{(M/R)} dm = \mathbf{m}_s \cdot \vec{v}_{(G/R)} \\ \int_S \vec{AM} \wedge \vec{v}_{(M/R)} dm = \vec{\sigma}_{B(S/R)} + \mathbf{m}_s \cdot \vec{v}_{(G/R)} \wedge \vec{BA} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

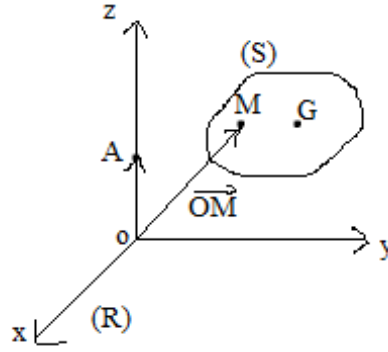


Figure V.1

### I.2. Moments cinétique d'un solide en l'un de ces points :

Soit un solide (S) de masse ( $m_s$ ) est en mouvement par rapport à un repère R (O, x, y, z), M (dm) et A sont deux points qui appartiennent au solide (S) :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A(S/R)} &= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}_{(M/R)} dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{v_{A/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}) dm \\ &= \int_S \overrightarrow{AM} dm \wedge \overrightarrow{v_{A/R}} + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}) dm\end{aligned}$$

Dans les chapitres précédents, on a obtenu :

$$\begin{aligned}- \quad \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{m_s} \int_S \overrightarrow{OM} dm \Rightarrow m_s \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM} dm \\ - \quad \vec{J}_O(s, \vec{u}) &= \int_S (\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM})) dm = M_O^S \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A(S/R)} &= m_s \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{v_{A/R}} + \vec{J}_A(s, \overrightarrow{\Omega_{S/R}}) \\ \vec{\sigma}_{A(S/R)} &= m_s \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{v_{A/R}} + M_A^S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\end{aligned}$$

**Remarque :**

$$\begin{aligned}\text{Si } A \equiv G \Rightarrow \vec{\sigma}_{G(S/R)} &= M_G^S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \int_S (\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{v_{M/R}}) dm \\ &\Rightarrow \sum \overrightarrow{M_G}(\vec{F}) = \frac{d\vec{\sigma}_{G(S/R)}}{dt}\end{aligned}$$

$$\text{Si A est fixe dans R} \Rightarrow \vec{\sigma}_{A(S/R)} = M_A^S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

### II. Energie cinétique d'un solide :

#### II.1. Energie cinétique d'un point matériel :

M est un point matériel en mouvement par rapport à un repère R (O, x, y, z), de masse (m) et de vitesse  $\vec{v}_{(M/R)}$ , son énergie cinétique est définie par un scalaire comme suite :

$$E_{c(M/R)} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{(M/R)}^2$$

$$\text{Avec : } \vec{v}_{(M/R)}^2 = \|\vec{v}_{(M/R)}\|^2$$

#### II.2. Energie cinétique d'un solide :

(S) est un solide en mouvement par rapport à un repère R (O, x, y, z), M est un point de ce solide de masse (dm), l'énergie cinétique de ce solide est un scalaire définie comme suite :

$$E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} \int_S \vec{v}_{(M/R)}^2 dm$$

#### II.3 Energie cinétique d'un solide en fonction des torseurs cinétique et Cinématique :

M (dm) et A sont deux points qui appartiennent au solide (S), On a :

$$E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} \int_S \vec{v}_{(M/R)}^2 dm = \frac{1}{2} \int_S \vec{v}_{(M/R)} \cdot \vec{v}_{(M/R)} dm$$

$$\Rightarrow 2 E_{c(S/R)} = \int_S \vec{v}_{(M/R)} \cdot (\vec{v}_{A/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AM}) dm$$

$$= \int_S \vec{v}_{(M/R)} \cdot \vec{v}_{A/R} dm + \int_S \vec{v}_{(M/R)} \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AM}) dm$$

$$= \vec{v}_{A/R} \cdot \int_S \vec{v}_{(M/R)} dm + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \int_S (\vec{AM} \wedge \vec{v}_{(M/R)}) dm$$

$$= \vec{v}_{A/R} \cdot \vec{P}_{(S/R)} + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_{A(S/R)}$$

$$\Rightarrow 2 E_{c(S/R)} = \begin{bmatrix} \vec{P}_{(S/R)} \\ \vec{\sigma}_{A(S/R)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{v}_{A/R} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 E_{c(S/R)} = [C_{S/R}]_A \times [V_{S/R}]_A$$

Donc le double de l'énergie cinétique est le comoment des torseurs cinétique et cinématique.

### II.4 Energie cinétique d'un solide « Forme matricielle » :

(S) est un solide en mouvement par rapport à un repère R (O, x, y, z), M est un point de ce solide de masse (dm), de vitesse  $\vec{v}_{(M/R)}$ , le point A est aussi un point qui appartient au solide (S), On a :

$$2 E_{c(S/R)} = \vec{P}_{(S/R)} \cdot \vec{v}_{A/R} + \vec{\sigma}_{A(S/R)} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Avec :

$$\vec{P}_{(S/R)} = m_s \cdot \vec{v}_{(G/R)}$$

$$\vec{\sigma}_{A(S/R)} = m_s \cdot \vec{AG} \wedge \vec{v}_{A/R} + M_A^S \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2 E_{c(S/R)} &= m_s \cdot \vec{v}_{(G/R)} \cdot \vec{v}_{A/R} + (m_s \cdot \vec{AG} \wedge \vec{v}_{A/R} + M_A^S \cdot \vec{\Omega}_{S/R}) \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \\ &= m_s \cdot (\vec{v}_{A/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AG}) \cdot \vec{v}_{A/R} + m_s \vec{\Omega}_{S/R} (\vec{AG} \wedge \vec{v}_{A/R}) + \vec{\Omega}_{S/R}^T M_A^S \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \\ &= m_s \cdot \vec{v}_{(A/R)}^2 + m_s \cdot \vec{v}_{A/R} \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AG}) + m_s \vec{\Omega}_{S/R} (\vec{AG} \wedge \vec{v}_{A/R}) + \vec{\Omega}_{S/R}^T M_A^S \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \\ &= m_s \cdot \vec{v}_{(A/R)}^2 + \vec{\Omega}_{S/R}^T M_A^S \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + 2 m_s \vec{\Omega}_{S/R} (\vec{AG} \wedge \vec{v}_{A/R}) \\ E_{c(S/R)} &= \frac{1}{2} m_s \cdot \vec{v}_{(A/R)}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R}^T M_A^S \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + m_s \vec{\Omega}_{S/R} (\vec{AG} \wedge \vec{v}_{A/R}) \end{aligned}$$

Où :

$$\vec{\Omega}_{S/R}^T : \text{est le transposé de } \vec{\Omega}_{S/R}$$

#### Remarque :

$$\text{-Si A est fixe dans R} \Rightarrow E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R}^T M_A^S \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

$$\text{-Si A} \equiv G \Rightarrow E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} m_s \cdot \vec{v}_{(G/R)}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R}^T M_G^S \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

EXERCICES RESOLUS

**Exercice 01.** Soit une plaque homogène (S) rectangulaire de largeur  $2a$ , de longueur  $2b$  et de centre de masse G. Elle est en rotation à une vitesse angulaire fixe autour de point A dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , Figure V.2. tel que  $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1 \equiv \vec{z}_2 \equiv \vec{z}_3$  et  $(\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = \Psi$ . Le point A se déplace sur l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  tel que :  $\vec{OA} = x\vec{x}_0$  et  $\vec{GA} = \frac{b}{3}\vec{y}_3$ . On prendra  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  comme repère de projection. Déterminer :

- 1- La vitesse de rotation instantanée de la plaque par rapport au repère :  $R_0: \vec{\Omega}_3^0$
- 2- Les vecteurs vitesse et accélération absolues du point G :  $\vec{v}_0(G)$  et  $\vec{a}_0(G)$
- 3- Le moment cinétique de la plaque au point A ;
- 4- L'énergie cinétique de la plaque.
- 5- On donne :  $M_G^S = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{/R_3}$  Avec :  $A = \frac{mb^2}{12}$ ,  $C = \frac{m^2}{12}(a + b^2)$

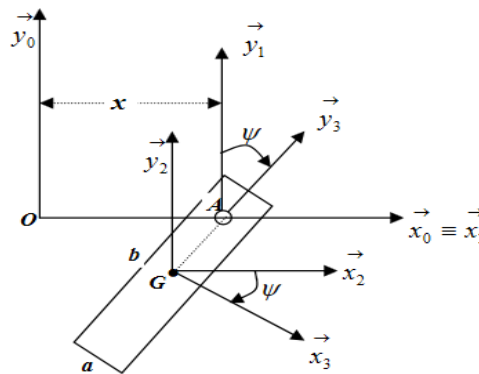


Figure V.2

**Solution :**

- 1- La vitesse de rotation instantanée de la plaque par rapport au repère :  $R_0: \vec{\Omega}_3^0$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\Psi} \vec{z}_1 \quad \text{Avec } \dot{\Psi} = \text{cste}$$

- 2 - Les vecteurs vitesse et accélération absolues du point G :  $\vec{v}_0(G)$  et  $\vec{a}_0(G)$

- Le vecteur vitesse:



Par la cinématique du solide nous pouvons écrire :  $\vec{v}(G)_{/R_0} = \vec{v}(A)_{/R_0} + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{AG}$

Nous avons :  $\vec{OA} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}$ ,

$$\vec{AG} = -\frac{b}{3}\vec{y}_3 = -\frac{b}{3}(\sin \Psi \vec{x}_1 + \cos \Psi \vec{y}_1) = \begin{pmatrix} -\frac{b}{3}\sin \Psi \\ -\frac{b}{3}\cos \Psi \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$\vec{v}(G)_{/R_0} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\Psi} \end{pmatrix}_{/R_1} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{b}{3}\sin \Psi \\ -\frac{b}{3}\cos \Psi \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \frac{b}{3}\dot{\Psi} \cos \Psi \\ \frac{b}{3}\dot{\Psi} \sin \Psi \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}$$

- Le vecteur accélération:

Par dérivation :  $\vec{a}(G)_{/R_0} = \frac{d\vec{v}(G)_{/R_0}}{dt}_{/R_0} = \frac{d\vec{v}(G)_{/R_0}}{dt}_{/R_1} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{v}(G)_{/R_0}$

$$\vec{a}(G)_{/R_0} = \frac{d\vec{v}(G)_{/R_0}}{dt}_{/R_1} = \begin{pmatrix} \ddot{x} - \frac{b}{3}(\ddot{\Psi} \cos \Psi - \dot{\Psi}^2 \sin \Psi) \\ \frac{b}{3}(\ddot{\Psi} \sin \Psi - \dot{\Psi}^2 \cos \Psi) \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}$$

4. Le moment cinétique de la plaque au point A :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A(S/R)} &= m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{v}(G)_{/R_0} + M_G^S \cdot \vec{\Omega}_3^0 \\ &= m \cdot \begin{pmatrix} -\frac{b}{3}\sin \Psi \\ -\frac{b}{3}\cos \Psi \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} - \frac{b}{3}\dot{\Psi} \cos \Psi \\ \frac{b}{3}\dot{\Psi} \sin \Psi \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} + \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{/R_3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\Psi} \end{pmatrix}_{/R_1} \\ &= [-C\dot{\Psi} - m \frac{b^2}{9}\dot{\Psi} \sin^2 \Psi + m \frac{b}{3} \cos \Psi (\dot{x} - \frac{b}{3}\dot{\Psi} \cos \Psi)] \vec{z}_1 \\ &= [-C\dot{\Psi} - m \frac{b^2}{9}\dot{\Psi} + m \frac{b}{3} \dot{x} \cos \Psi] \vec{z}_1 \end{aligned}$$

5. L'énergie cinétique de la plaque :

$$E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} m \cdot (\vec{v}(G)_{/R_0})^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_3^0{}^T M_G^S \cdot \vec{\Omega}_3^0$$

$$= \frac{1}{2} m \left( \dot{x} - \frac{b}{3} \dot{\Psi} \cos \Psi \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{b}{3} \dot{\Psi} \sin \Psi \right)^2 + \frac{1}{2} (0, 0, -\dot{\Psi}) \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{/R_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\Psi} \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \frac{b^2}{9} \dot{\Psi}^2 - \frac{2b}{3} \dot{x} \dot{\Psi} \cos \Psi \right) + \frac{1}{2} C \dot{\Psi}^2$$

**Exercice 02.** Soit une barre mince homogène (S), de masse (m), de longueur (L), astreinte à glisser dans le plan (xOy) tout en étant en contact permanent avec un point O d'un bâti fixe. Le centre d'inertie G de ce solide (S) est :  $\overrightarrow{OG} = x(t)\overrightarrow{x_1}$ .

$R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$  est le repère fixe lié au bâti et  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$  est un repère lié à (S) ou  $\overrightarrow{z_0} \equiv \overrightarrow{z_1}$  (axes confondus) ( Figure V.3).

On considère  $R_1$  le repère de projection.

- 1- Donnez le vecteur de rotation du repère  $R_1$  par rapport à  $R_0$ .
- 2- Déterminez la vitesse du point G par rapport à  $R_0$ .
- 3- En déduire la vitesse du point O par rapport à  $R_0$ .
- 4- Déterminez la matrice d'inertie de (S) au point G dans le repère  $R_1$ .
- 5- Calculez le moment cinétique  $\vec{\sigma}_{O(S/R_0)}$ .
- 6- Déterminez l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .

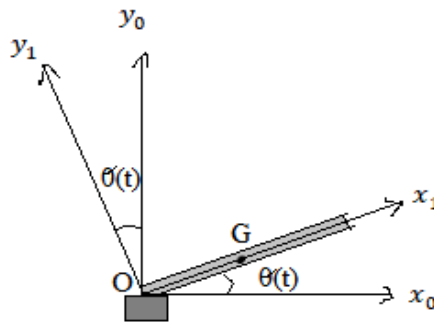


Figure V.3

**Solution :**

- 1- Le vecteur de rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{R1/R0}$  :

$$\overrightarrow{\Omega}_{R1/R0} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_1}$$

2- La vitesse  $\overrightarrow{v_{G/R_0}}$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{G/R_0}} &= \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}_{/R_0} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}_{/R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R1/R_0}} \wedge \overrightarrow{OG} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{/R_1} \wedge \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}x(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}\end{aligned}$$

3- La vitesse  $\overrightarrow{v_{O/R_0}}$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{O/R_0}} &= \overrightarrow{v_{G/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{R1/R_0}} \wedge \overrightarrow{GO} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}x(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{/R_1} \wedge \begin{pmatrix} -x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}\end{aligned}$$

4- La matrice d'inertie  $\mathbf{M}_G^S$  :

$$\mathbf{M}_G^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix}_{/R_1}$$

5- Le moment cinétique  $\vec{\sigma}_{O(S/R_0)}$  :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{O(S/R_0)} &= m \cdot \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{v_{G/R_0}} + M_G^S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \\ &= m \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}x(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix}_{/R_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{/R_1}\end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}_{O(S/R_0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m(\frac{l^2}{12} + x^2)\dot{\theta} \end{pmatrix}_{/R_1}$$

1- L'énergie cinétique de (S),  $E_c(S/R_0)$  :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} m \cdot (\vec{v}(G)_{/R_0})^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{R1/R_0}}^T M_G^S \cdot \overrightarrow{\Omega_{R1/R_0}}$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} x(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} x(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} + \frac{1}{2} (0, 0, \dot{\theta}) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix}_{/R_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$E_{c(S/R_0)} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 x(t)^2) + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\theta}^2$$

**Exercice 03.** Une tige mince AB, de longueur ( $l$ ) et de masse ( $m$ ) est fixé sur un disque (1) en rotation à la vitesse  $\vec{\omega}_{1/0}$  par rapport à un bâti fixe (0). (Voir Figure V.4).

- 1- Déterminer le moment cinétique de la tige par rapport à A.
- 2- Calculer son énergie cinétique.
- 3- Calculer les actions d'encastrement en A (Forces de réaction).

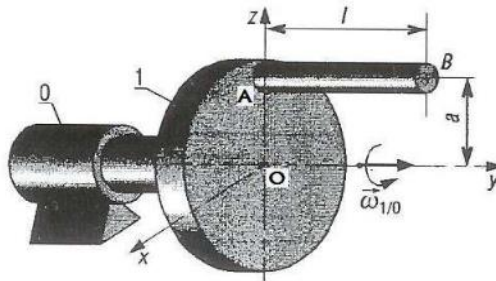


Figure V.4

**Solution :**

- 1- le moment cinétique de la tige par rapport à A,  $\vec{\sigma}_{A(S/R_0)}$

$$\text{On a : } \vec{\omega}_{1/0} = \vec{\Omega}_{S/R_0}, \vec{OG} = \frac{l}{2} \vec{y} + a \vec{z}, \vec{AG} = \frac{l}{2} \vec{y}$$

$$\vec{\sigma}_{A(S/R_0)} = m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{v}_{G/R_0} + M_G^S \cdot \vec{\omega}_{1/0}$$

$$M_G^S \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0} = \begin{bmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix}_{/R_0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{1/0} \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_0} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{G/R_0} = \frac{d\vec{OG}}{dt}_{/R_0} = \frac{d\vec{OG}}{dt}_{/R_1} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{OG}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{1/0} \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{l}{2} \\ a \end{pmatrix}_{/R_1} = \begin{pmatrix} a \omega_{1/0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A(S/R_0)} &= m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{v_{G/R_0}} \\ &= m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{l}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} \wedge \begin{pmatrix} a \omega_{1/0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} \\ \vec{\sigma}_{A(S/R_0)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l}{2} m a \omega_{1/0} \end{pmatrix}_{/R_1}\end{aligned}$$

2- Energie cinétique  $E_c (S/R_0)$  :

$$\begin{aligned}E_c (S/R_0) &= \frac{1}{2} m \cdot (\vec{v}(G)_{/R_0})^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega_{1/0}}^T M_G^S \cdot \overrightarrow{\omega_{1/0}} \\ E_c (S/R_0) &= \frac{1}{2} m \cdot \begin{pmatrix} a \omega_{1/0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} \cdot \begin{pmatrix} a \omega_{1/0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} + \vec{0} \\ E_c (S/R_0) &= \frac{1}{2} m \cdot a^2 \omega_{1/0}^2\end{aligned}$$

3- Les actions d'encastrement en A :

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{R} &= m \vec{a}_G \\ \vec{a}_G &= \frac{d\overrightarrow{v_{G/R_0}}}{dt}_{/R_0} = \frac{d\overrightarrow{v_{G/R_0}}}{dt}_{/R_1} + \overrightarrow{\omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{v_{G/R_0}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{1/0} \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} \wedge \begin{pmatrix} a \omega_{1/0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \omega_{1/0}^2 \end{pmatrix}_{/R_1} \\ \vec{R} &= -m \begin{pmatrix} -a \omega_{1/0}^2 + g \end{pmatrix} \vec{z}\end{aligned}$$

**Exercice 04.** Une sphère de masse  $m$ , de centre  $G$ , de rayon  $R$ , est mobile autour d'un point fixe  $O$  de sa surface. Elle roule sans glisser sur un plan horizontal  $P$ ,  $P$  est situé à la distance  $R$  du point  $O$ , et  $I$  le point de contact de la sphère avec le plan ( $P$ ) (Figure V.5).

- 1- Déterminer l'axe instantané de rotation de la sphère.
- 2- Le taux de rotation autour de cet axe étant  $\Omega$ , déterminer la quantité de mouvement  $\vec{P}_{(S/R)}$ .

3- Déterminer le moment cinétique en O. Calculer son module et l'angle qu'il fait avec

$$\overrightarrow{OG}. \text{ Sachant } M_G^S = \frac{2}{5} m R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{/R}$$

4- Calculer l'énergie cinétique de la sphère.

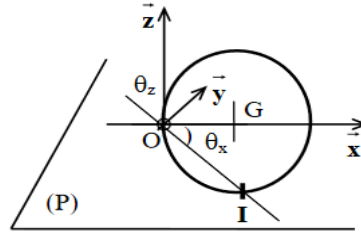


Figure V.5

**Solution :**

1- L'axe instantané de rotation de la sphère :

On a :  $\overrightarrow{v_{O/R}} = 0$  (O est un point fixe)

$\overrightarrow{v_{I/R}} = 0$  (I point de contact de la sphère et le plan, et on a un roulement sans glissement).

Donc le vecteur  $\overrightarrow{OI}$  formé des points O et I de vitesses nulles est l'axe instantané de rotation de la sphère, les cosinus directeurs de ce vecteur :

$$\overrightarrow{OI} = \cos \theta_x \vec{x} + \cos \theta_y \vec{y} + \cos \theta_z \vec{z}$$

$$\cos \theta_x = \frac{|\overrightarrow{OG}|}{|\overrightarrow{OI}|} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta_y = 0$$

$$\cos \theta_z = -\frac{|\overrightarrow{OG}|}{|\overrightarrow{OI}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{z}$$

2- La quantité de mouvement  $\vec{P}_{(S/R)}$  :

$$\vec{P}_{(S/R)} = m \cdot \vec{v}_{(G/R)}$$

$$\overrightarrow{v_{G/R}} = \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{OG} \quad (\text{La sphère est rotation})$$

$$\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \Omega \frac{\overrightarrow{OI}}{|\overrightarrow{OI}|} = \begin{pmatrix} \Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_{/R}$$

$$\overrightarrow{V_{G/R}} = \begin{pmatrix} \Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_{/R} \wedge \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R}$$

$$\overrightarrow{V_{G/R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{/R}$$

$$\vec{P}_{(S/R)} = m. \begin{pmatrix} 0 \\ -R\Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{/R}$$

$$\vec{P}_{(S/R)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mR\Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{/R}$$

3- Le moment cinétique en O :

$$\vec{\sigma}_{O(S/R)} = m. \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V_{G/R_0}} + M_G^S. \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$$

$$= m. \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -R\Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{/R} + \frac{2}{5} mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{/R} . \begin{pmatrix} \Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\Omega \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_{/R}$$

$$\vec{\sigma}_{O(S/R)} = \frac{\sqrt{2}}{10} m\Omega R^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}_{/R}$$

$$|\vec{\sigma}_{O(S/R)}| = \frac{\sqrt{106}}{10} m\Omega R^2$$

4- L'énergie cinétique de la sphère :

$$E_{c(S/R_0)} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{O(S/R)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

$$E_{c(S/R_0)} = \frac{9}{20} mR^2 \Omega^2$$

**Exercice 05.** Considérant le système matériel  $(\Sigma)$  composé des solides suivants: (S1) est un coulisseau de masse  $(m_1)$ , de centre de masse  $(G_1)$  lié au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  en mouvement de translation rectiligne par rapport à un repère fixe  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  suivant l'axe  $\vec{z}_0$ . (S2) est une barre uniforme de longueur  $2b$ , de masse  $(m_2)$ , de centre de masse  $(G_2)$  lié à  $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ . (S3) est un disque homogène de rayon  $R$ , de masse  $(m_3)$ , de centre de masse  $(G_3)$  lié à  $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .

On donne les tenseurs d'inertie :  $M_{G_2}^{S_2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{/R_2}$ ,  $M_{G_3}^{S_3} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{/R_3}$

- 1- Déterminer les vitesses et les accélérations des points  $G_i$  avec  $i = 1, 2, 3$
- 2- Calculer les moments cinétiques  $\vec{\sigma}_{G_i(S_i/R_0)}$  des  $(S_i)$  en  $G_i$  avec  $i = 1, 2, 3$
- 3- Calculer l'énergie cinétique  $E_c(\Sigma/R_0)$  du système par rapport à  $R_0$ .

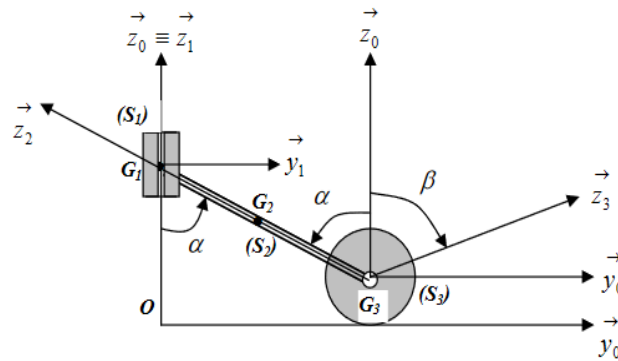


Figure V.6

**Solution :**

On a :

$$\overrightarrow{\Omega}_{S_1/R_0} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{S_2/R_0} = \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{S_3/R_0} = -\dot{\beta} \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R + 2b \cos \alpha \end{pmatrix}_{/R_0}$$



$$\overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \sin \alpha \\ R + b \cos \alpha \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \sin \alpha \\ R \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_0}$$

1- Les vitesses et les accélérations des points  $G_i$  :

$$\overrightarrow{v_{G_1/R_0}} = \frac{d\overrightarrow{OG_1}}{dt}_{/R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2b\dot{\alpha} \sin \alpha \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\overrightarrow{v_{G_2/R_0}} = \frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}_{/R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\dot{\alpha} \cos \alpha \\ -b\dot{\alpha} \sin \alpha \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\overrightarrow{v_{G_3/R_0}} = \frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt}_{/R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\overrightarrow{a_{G_1/R_0}} = \frac{d\overrightarrow{v_{G_1/R_0}}}{dt}_{/R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2b\ddot{\alpha} \sin \alpha - 2b\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\overrightarrow{a_{G_2/R_0}} = \frac{d\overrightarrow{v_{G_2/R_0}}}{dt}_{/R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\ddot{\alpha} \cos \alpha - b\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ -b\ddot{\alpha} \sin \alpha - b\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\overrightarrow{a_{G_3/R_0}} = \frac{d\overrightarrow{v_{G_3/R_0}}}{dt}_{/R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\ddot{\alpha} \cos \alpha - 2b\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_0}$$

2- Les moments cinétiques  $\vec{\sigma}_{G_i(S_i/R_0)}$  :

$$\vec{\sigma}_{G_1(S_1/R)} = m_1 \cdot \overrightarrow{G_1 G_1} \wedge \overrightarrow{v_{G_1/R_0}} + M_{G_1}^{S_1} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} = \vec{0}$$

$$\vec{\sigma}_{G_2(S_2/R)} = m_2 \cdot \overrightarrow{G_2 G_2} \wedge \overrightarrow{v_{G_2/R_0}} + M_{G_2}^{S_2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{/R_2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\vec{\sigma}_{G_2(S_2/R)} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\vec{\sigma}_{G_3(S_3/R)} = m_3 \cdot \overrightarrow{G_3 G_3} \wedge \overrightarrow{v_{G_3/R_0}} + M_{G_3}^{S_3} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_3/R_0}} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{/R_3} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_0}$$

$$\vec{\sigma}_{G_3(S_3/R)} = \begin{pmatrix} -A_3 \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_0}$$

3- L'énergie cinétique  $E_c(\Sigma/R_0)$  :

$$E_c(\Sigma/R_0) = E_c(S_1/R_0) + E_c(S_2/R_0) + E_c(S_3/R_0)$$

$$\begin{aligned} E_c(S_1/R_0) &= \frac{1}{2} m_1 \cdot (\vec{v}_{G_1/R_0})^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}}^T M_{G_1}^{S_1} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} \\ &= \frac{1}{2} m_1 4b^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_c(S_2/R_0) &= \frac{1}{2} m_2 \cdot (\vec{v}_{G_2/R_0})^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}}^T M_{G_2}^{S_2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} \\ &= \frac{1}{2} m_2 b^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} A_2 \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_c(S_3/R_0) &= \frac{1}{2} m_3 \cdot (\vec{v}_{G_3/R_0})^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S_3/R_0}}^T M_{G_3}^{S_3} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_3/R_0}} \\ &= \frac{1}{2} m_3 4b^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} A_3 \dot{\beta}^2 \end{aligned}$$

$$E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} (b^2 (m_1 4\dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + m_2 \dot{\alpha}^2 + m_3 4\dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha) + A_2 \dot{\alpha}^2 + A_3 \dot{\beta}^2)$$

**Exercice 06.** Soit le roulement sans glissement d'un disque mince de masse M, de rayon r sur un anneau fixe de rayon R. (Figure V.7).

- 1- Trouver la relation entre  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\phi}$  ( $\dot{\phi}$  est la vitesse angulaire du disque).
- 2- Trouver le moment cinétique en C.
- 3- Trouver  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  les composantes de la réaction de contact en I.
- 4- Montrer qu'à partir d'une certaine valeur  $\theta_1$  de  $\theta$ , le disque quitte l'anneau.

On prend:  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

$$\text{On donne : } M_G^{disque} = \begin{bmatrix} \frac{Mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Mr^2}{2} \end{bmatrix} / R_1$$

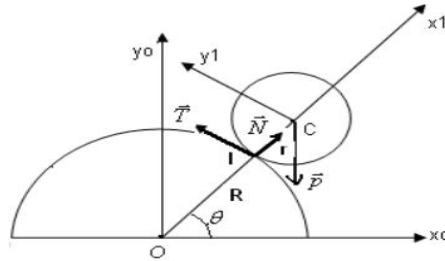


Figure V.7

**Solution :**

On a :

$$\overrightarrow{OC} = (R + r)\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{IC} = r\overrightarrow{x_1}$$

$\theta$  est l'angle de rotation du disque autour de l'axe (Oz) : avec un vecteur de rotation  $\dot{\theta}\vec{z}$

$\varphi$  est l'angle de rotation du disque autour de l'axe (Iz) : avec un vecteur de rotation  $\dot{\varphi}\vec{z}$

La vitesse angulaire totale du disque est égale à:  $\overrightarrow{\Omega}_{\text{disque}} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{z}$

Roulement sans glissement:  $\overrightarrow{v}_{I/R_0} = 0$

1- La relation entre  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  :

$$\overrightarrow{v}_{C/R_1} = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} / R_1 = (R + r) \frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} / R_1 = (R + r) \dot{\theta} \overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{v}_{I/R_0} = \overrightarrow{v}_{C/R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\text{disque}} \wedge \overrightarrow{CI} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ (R + r)\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} / R_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} \end{pmatrix} / R_1 \wedge \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / R_1 = 0$$

$$\Rightarrow R \dot{\theta} = r \dot{\varphi}$$

2- Le moment cinétique en C :

$$\begin{aligned}
 \text{On a } C \equiv G \Rightarrow \vec{\sigma}_{G(S/R)} &= M_G^{disque} \cdot \overrightarrow{\Omega_{disque}} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{Mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Mr^2}{2} \end{bmatrix}_{/R_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\phi} \end{pmatrix}_{/R_1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Mr^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \end{pmatrix}_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Mr^2}{2}\left(\dot{\theta} + \frac{R}{r}\dot{\theta}\right) \end{pmatrix}_{/R_1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Mr}{2}\dot{\theta}(r + R) \end{pmatrix}_{/R_1}
 \end{aligned}$$

3-  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  les composantes de la réaction :

$$\begin{aligned}
 \vec{T} + \vec{N} + \vec{P} &= M \overrightarrow{a_{C/R_1}} \\
 \overrightarrow{a_{C/R_1}} &= \frac{d\overrightarrow{v_{C/R_1}}}{dt}_{/R_1} = \begin{pmatrix} -(R+r)\dot{\theta}^2 \\ (R+r)\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}
 \end{aligned}$$

En projetant :

$$\begin{cases} N - Mg \sin \theta = -M(R+r)\dot{\theta}^2 \\ T - Mg \cos \theta = M(R+r)\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = Mg \sin \theta - M(R+r)\dot{\theta}^2 \\ T = Mg \cos \theta + M(R+r)\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \sum \overrightarrow{M_G(\vec{F})} &= \frac{d\vec{\sigma}_{G(S/R)}}{dt} \\
 \Rightarrow CI \wedge \vec{T} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Mr}{2}\ddot{\theta}(r + R) \end{pmatrix}_{/R_1} \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ T \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Mr}{2}\ddot{\theta}(r + R) \end{pmatrix}_{R_1}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -rT \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Mr}{2} \ddot{\theta}(r+R) \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{M}{2} \ddot{\theta}(r+R)$$

$$\text{Donc on a : } \begin{cases} T = -\frac{M}{2} \ddot{\theta}(r+R) \\ T = Mg \cos \theta + M(R+r) \ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(r+R)} \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} d\theta + \frac{2g}{3(r+R)} \cos \theta d\theta = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{2g}{3(r+R)} \sin \theta = \text{cst}$$

En utilisant :  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$  :

$$\text{On obtient : } \frac{2g}{3(r+R)} \sin \theta_0 = \text{cst}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{2g}{3(r+R)} (\sin \theta - \sin \theta_0) = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{3} Mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{3} Mg(7 \sin \theta - 4 \sin \theta_0)$$

4- Le disque quitte l'anneau quand  $N=0$ , d'où  $\sin \theta = \frac{4}{7} \sin \theta_0$

# **Chapitre VI : DYNAMIQUE DU SOLIDE**

### Introduction

La dynamique du solide permet d'étudier le lien entre le mouvement d'un solide et les causes qui le provoque.

### I. Torseur dynamique :

Le torseur dynamique d'un point matériel ou d'un solide est défini par deux vecteurs :

- La résultante de forces extérieures appliquées à ce système.
- Le moment de cette résultante des forces par rapport à un point quelconque de l'espace, est appelé moment dynamique du solide en ce point.

#### I.1. Torseur dynamique d'un point matériel :

Soit un point matériel M de masse (m) en mouvement par rapport à un repère R (O, x, y, z) avec une vitesse  $\vec{v}_{(M/R)}$ . Le torseur dynamique d'un point matériel est défini par :

- Quantité d'accélération noté  $\vec{\gamma}_{(M/R)}$  s'écrit:

$$\vec{\gamma}_{(M/R)} = m \cdot \vec{a}_{(M/R)}$$

- Moment dynamique au point O, noté  $\vec{\delta}_{O(M/R)}$  s'écrit:

$$\vec{\delta}_{O(M/R)} = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{a}_{(M/R)}$$

#### I.1.2. Torseur dynamique d'un solide :

Soit M de masse (dm), de vitesse  $\vec{v}_{(M/R)}$  un point du solide (S) de masse ( $m_s$ ) est en mouvement par rapport à un repère R (O, x, y, z). Le torseur dynamique d'un solide est défini par :

- Quantité d'accélération noté  $\vec{\gamma}_{(S/R)}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_{(S/R)} &= \int_S \vec{a}_{(M/R)} dm = \int_S \frac{d\vec{v}_{(M/R)}}{dt} /R dm \\ &= \frac{d}{dt} \int_S \vec{v}_{(M/R)} dm \\ &= \frac{d\vec{P}_{(S/R)}}{dt} /R \\ &= \frac{d}{dt} (m \vec{v}_{(G/R)}) /R\end{aligned}$$

$$\vec{\gamma}_{(S/R)} = m \vec{a}_{(G/R)}$$

- Moment dynamique au point O, noté  $\vec{\delta}_{(S/R)}$  s'écrit:

$$\vec{\delta}_{O(S/R)} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}_{(M/R)} dm$$

Quel que soit un point A quelconque dans l'espace (appartient au solide ou non) :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{O(S/R)} &= \int_S \overrightarrow{OA} \wedge \vec{a}_{(M/R)} dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_{(M/R)} dm \\ &= \vec{\delta}_{A(S/R)} + \overrightarrow{OA} \wedge \int_S \vec{a}_{(M/R)} dm \\ &= \vec{\delta}_{A(S/R)} + \overrightarrow{OA} \wedge m \vec{a}_{(G/R)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{O(S/R)} &= \vec{\delta}_{A(S/R)} + m \vec{a}_{(G/R)} \wedge \overrightarrow{AO} \\ \vec{\delta}_{O(S/R)} &= \vec{\delta}_{A(S/R)} + \vec{v}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{AO} \end{aligned}$$

Donc le champ des moments dynamique d'un solide par rapport à un repère (R) est un torseur appelé torseur dynamique noté  $[D_{S/R}]$  tel que  $\vec{v}_{(S/R)}$  représente la résultante dynamique et  $\vec{\delta}_{O(S/R)}$  représente le moment dynamique :

$$\begin{aligned} [D_{S/R}] &= \begin{bmatrix} \vec{v}_{(S/R)} \\ \vec{\delta}_{A(S/R)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_S \vec{a}_{(M/R)} dm = m \vec{a}_{(G/R)} \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_{(M/R)} dm = \vec{\delta}_{B(S/R)} + m \vec{a}_{(G/R)} \wedge \overrightarrow{BA} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## II. Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique :

### II.1. Relation entre les résultantes $\vec{P}_{(S/R)}$ et $\vec{v}_{(S/R)}$ :

$$\vec{P}_{(S/R)} = m \cdot \vec{v}_{(G/R)} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{(S/R)}}{dt} \Big|_R = m \frac{d\vec{v}_{(S/R)}}{dt} \Big|_R$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{(S/R)} = \frac{d\vec{P}_{(S/R)}}{dt} \Big|_R$$

### II.2. Relation entre les moments $\vec{\sigma}_{A(S/R)}$ et $\vec{\delta}_{A(S/R)}$ :

$$\vec{\sigma}_{A(S/R)} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}_{(M/R)} dm$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_{A(S/R)}}{dt} \Big|_R &= \int_S \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \Big|_R \wedge \vec{v}_{(M/R)} dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{v}_{(M/R)}}{dt} \Big|_R dm \\ &= \int_S (\vec{v}_{(M/R)} - \vec{v}_{(A/R)}) \wedge \vec{v}_{(M/R)} dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_{(M/R)} dm \\ &= -\vec{v}_{(A/R)} \wedge \int_S \vec{v}_{(M/R)} dm + \vec{\delta}_{A(S/R)} \end{aligned}$$



$$= -\vec{v}_{(A/R)} \wedge \vec{P}_{(S/R)} + \vec{\delta}_{A(S/R)}$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_{A(S/R)} = \frac{d\vec{\sigma}_{A(S/R)}}{dt}_{/R} + \vec{v}_{(A/R)} \wedge m \cdot \vec{v}_{(G/R)}$$

**Remarque :** Quel que soit un point A quelconque dans l'espace :

- Si A est fixe dans R  $\Rightarrow \vec{\delta}_{A(S/R)} = \frac{d\vec{\sigma}_{A(S/R)}}{dt}_{/R}$

- Si  $A \equiv G \Rightarrow \vec{\delta}_{G(S/R)} = \frac{d\vec{\sigma}_{G(S/R)}}{dt}_{/R}$

EXERCICES RESOLUS

**Exercice 01.** On considère un cône (S) d'axe de système de révolution (OZ) dont le point O reste immobile sur le plan ( $\pi$ ), Figure V.3. tel que  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au plan ( $\pi$ ), et  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au solide (S).

La position de la base de (R) par rapport à ( $R_0$ ) est définie par les angles d'Euler ( $\Psi, \theta, \varphi$ ). Comme le montre la Figure V.3.

- 1- Montrer que la matrice d'inertie du solide (S) au point O est sous la forme :

$$M_O^S = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{/R}$$

- 2- Déterminer le moment cinétique  $\vec{\sigma}_{O(S/R_0)}$ .
- 3- Déterminer le moment dynamique  $\vec{\delta}_{O(S/R_0)}$
- 4- Trouver l'énergie cinétique  $E_{c(S/R_0)}$ .

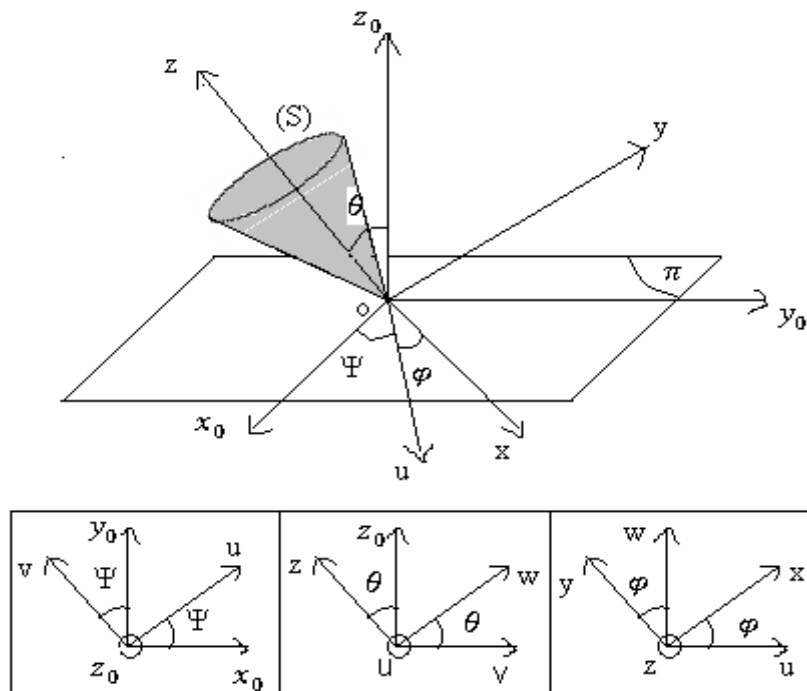


Figure V.3

**Solution**

1- La matrice d'inertie du solide (S) :

$$\text{On a: } R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\psi} R'(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \xrightarrow{\theta} R_1(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) \xrightarrow{\varphi} R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

(Oz) est un axe de symétrie de révolution (système cylindrique), alors  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $R_1(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$  sont des repères principales d'inertie  $\Rightarrow A=B \neq C$

$$M_O^S = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{/R} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{/R_1}$$

2- Déterminer le moment cinétique  $\vec{\sigma}_{O(S/R_0)}$  :

$$\vec{\sigma}_{O(S/R_0)} = m \cdot \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(O)_{/R_0} + M_O^S \cdot \overrightarrow{\Omega_R^{R_0}}$$

$$\text{Avec : } \vec{v}(O)_{/R_0} = 0$$

Donc :

$$\vec{\sigma}_{O(S/R_0)} = M_O^S \cdot \overrightarrow{\Omega_R^{R_0}}$$

$$\overrightarrow{\Omega_R^{R_0}} = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{z} = \dot{\psi} (\cos \theta \vec{z} + \sin \theta \vec{w}) + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{z}$$

$$\vec{\sigma}_{O(S/R_0)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{/R_1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$\vec{\sigma}_{O(S/R_0)} = A \dot{\theta} \vec{u} + A \dot{\psi} \sin \theta \vec{w} + C (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z}$$

3- Le moment dynamique  $\vec{\delta}_{O(S/R)}$  : (O est fixe)

$$\vec{\delta}_{O(S/R_0)} = \frac{d\vec{\sigma}_{O(S/R_0)}}{dt}_{/R_0}$$

$$\vec{\delta}_{O(S/R_0)} = \frac{d\vec{\sigma}_{O(S/R_0)}}{dt}_{/R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1}^{R_0}} \wedge \vec{\sigma}_{O(S/R_0)}$$

Avec :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_1}^{R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{R_1}^{R'}} + \overrightarrow{\Omega_{R'}^{R_0}}$$

$$= \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \vec{z}_0$$

$$= \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \cos \theta \vec{z} + \dot{\psi} \sin \theta \vec{w}$$

$$\vec{\delta}_{O(S/R_0)} = \begin{pmatrix} A\ddot{\theta} \\ A(\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \\ C(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{pmatrix}_{/R_1} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{/R_1} \wedge \begin{pmatrix} A\dot{\theta} \\ A\dot{\psi} \sin \theta \\ C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$\vec{\delta}_{O(S/R_0)} = \begin{pmatrix} A\ddot{\theta} + C\dot{\psi} \sin \theta (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) - A\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \\ A(\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) - \dot{\theta} C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) - A\dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta \\ C(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{pmatrix}$$

4- L'énergie cinétique  $E_c(S/R_0)$  :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} m. (\vec{v}(O)_{/R_0})^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_R^{R_0}}^T M_G^S \cdot \overrightarrow{\Omega_R^{R_0}}$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_R^{R_0}}^T M_G^S \cdot \overrightarrow{\Omega_R^{R_0}}$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\theta}, \dot{\psi} \sin \theta, \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{/R_1} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} [A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2]$$

Ou :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{p}_{(S/R_0)} \\ \vec{\sigma}_{O(S/R_0)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{(S/R_0)} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{O(S/R_0)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R_0)}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A\dot{\theta} \\ A\dot{\psi} \sin \theta \\ C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{pmatrix}_{/R_1} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} [A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2]$$

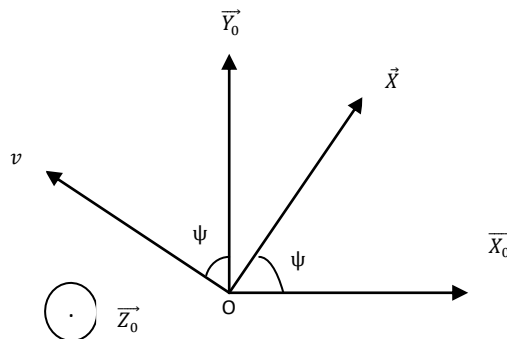
**Exercice 02.** Par rapport à un repère fixe orthonormé direct  $R_0(O; \vec{X}_0; \vec{Y}_0; \vec{Z}_0)$ , une sphère pleine (S) homogène, de rayon  $a$ , de centre d'inertie G et de masse  $m$  est mobile de façon à ce que :

- Un point de sa frontière soit fixe en O,
  - (S) roule sans glisser sur le plan  $(\pi)$  fixe par rapport à  $(R_0)$ , parallèle au plan  $(\vec{OX}_0, \vec{OY}_0)$  et de cote  $(-a)$ . On définit trois repères orthonormés direct  $R_1(O; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$  tel que  $\psi = (\vec{OX}_0, \vec{OX})$  où  $\vec{OX}$  est un axe de (S),  $R_2(O; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  tel que  $\varphi = (\vec{Ov}, \vec{OY})$  et  $R_s(G; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  lié à (S) obtenu à par...du repère  $R_2$  par translation de vecteur  $\vec{OG} = a\vec{X}$ . Tout les résultats sont exprimés dans la base associée au repère  $R_s$ .
- 1) Déterminer le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_s/R_0)$ , de (S) par rapport à  $R_0$ .
  - 2) Traduire la condition de roulement sans glissement de (S) par rapport au plan  $(\pi)$ .
  - 3) Déterminer les éléments de réduction du torseur cinétique  $\vec{\Omega}[\vec{R}_v, \vec{\sigma}_O(S/R_0)]$ , en O, de la sphère (S).
  - 4) Donner les éléments de réduction du torseur dynamique,  $\mathcal{A}[\vec{R}_a, \vec{\delta}_O(S/R_0)]$  en O, de la sphère (S).
  - 5) Donner l'expression de l'énergie cinétique,  $T(S/R_0)$ , de (S) par rapport au repère  $R_0$ .

### Solution

- 1) Le mouvement de (S) par rapport au repère  $R_0$  se décompose en deux rotations et une translation :

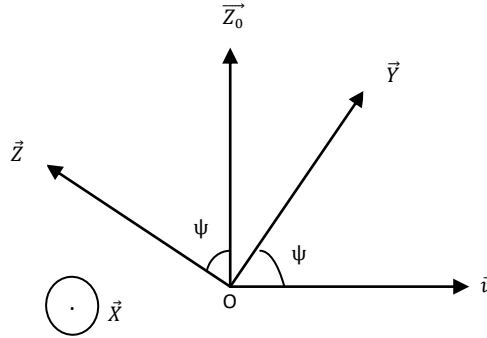
$$1^\circ R_0(O; \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0) \rightarrow R_1(O; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$$



Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$ , du repère  $R_1$  par rapport au repère  $R_0$ , est :

$$\vec{\Omega}(R_1/R_2) = \psi \vec{Z}_0.$$

$$2) \quad R_1(O; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0) \rightarrow \overline{R}_2(O; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$



Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$ , du repère  $R_2$  par rapport au repère  $R_1$ , est :

$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \psi \vec{X}.$$

$$3) \quad R_2(O; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0) \rightarrow \overline{R}_s(G; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_s/R_2)$ , du repère  $R_s$  par rapport au repère  $R_2$ , est :

$$\vec{\Omega}(R_s/R_2) = \vec{O}.$$

Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_s/R_0)$ , du repère  $R_s$  par rapport au repère  $R_0$ , est :

$$\vec{\Omega}(R_s/R_0) = \psi \vec{Z}_0 + \psi \vec{X}.$$

$$\text{Or } \vec{Z}_0 = \sin \varphi \vec{Y} + \cos \varphi \vec{Z}$$

$$\text{Donc : } \vec{\Omega}(R_s/R_0) = \varphi \vec{X} + \psi \sin \varphi \vec{Y} + \psi \cos \varphi \vec{Z}.$$

Remarque

Il ne peut y avoir de nutation car la sphère (S) quitterait le plan fixe ( $\pi$ ).

4) Le point de contact de (S) avec le plan tangent commun de contact ( $\pi$ ) est tel que :

$$\vec{OI} = \vec{OG} + \vec{GI} = a\vec{X} - a\vec{Z}_0 = a[\vec{X} - \sin \varphi \vec{Y} - \cos \varphi \vec{Z}].$$

Le vecteur vitesse de glissement de (S) par rapport au plan ( $\pi$ ) est tel que :

$$\vec{v}(I \in S/R_0) = \vec{v}(O \in S/R_0) + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{OI}.$$

Comme O est un point fixe, alors  $\vec{v}(O \in S/R_0) = \vec{0}$  et donc :

$$\begin{aligned} \vec{v}(I \in S/R_0) &= \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{OI} \\ &= [\dot{\phi} \vec{X} + \psi \sin \varphi \vec{Y} + \dot{\psi} \cos \varphi \vec{Z}] \wedge a[\vec{X} - \sin \varphi \vec{Y} - \cos \varphi \vec{Z}] \\ &= a[\cos \varphi (\dot{\phi} + \dot{\psi}) \vec{Y} - \sin \varphi (\dot{\phi} + \dot{\psi}) \vec{Z}] \\ &= a(\varphi + \psi)(\cos \varphi \vec{Y} - \sin \varphi \vec{Z}) \end{aligned}$$

La condition de roulement sans glissement de (S) par rapport au plan ( $\pi$ ) est obtenue en annulant la vitesse de glissement :  $\vec{v}(I \in S/R_0) = \vec{0}$ , ce qui se traduit par :  $\dot{\phi} + \dot{\psi} = 0$ .

5) Les éléments de réduction du torseur cinétique,  $\Omega$ , en G de la sphère (S), sont :

1°  $\vec{R}_v = m\vec{v}(G/R_0) = m[\vec{v}(O/R_0) + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{OG}]$ . Comme O est un point fixe,  $\vec{v}(O/R_0) = \vec{0}$  et donc :

$$\begin{aligned} \vec{R}_v &= m\vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{OG} = m[\dot{\phi} \vec{X} + \dot{\psi} \sin \varphi \vec{Y} + \dot{\psi} \cos \varphi \vec{Z}] \wedge a\vec{X} \\ &= ma\dot{\psi}[\cos \varphi \vec{Y} - \sin \varphi \vec{Z}] \end{aligned}$$

2° Comme  $\overrightarrow{GX}$  est axe de symétrie de révolution de (S), le repère  $R_s$  est central principal d'inertie ; la matrice d'inertie en G de (S), dans la base associée au repère  $R_s$ , s'écrit donc :

$$\Pi_G(S) = \frac{2}{5} ma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = \Pi_G(S) \vec{\Omega}(R_s/R_0)$$

D'où :

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{5} ma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\dot{\phi} \vec{X} + \dot{\psi} \sin \varphi \vec{Y} + \dot{\psi} \cos \varphi \vec{Z}] \\ &= \frac{2}{5} ma^2 [\dot{\phi} \vec{X} + \dot{\psi} \sin \varphi \vec{Y} + \dot{\psi} \cos \varphi \vec{Z}]. \end{aligned}$$

2° Le moment cinétique de (S) en O par rapport au repère  $R_0$  est :

$$\vec{\sigma}_O(S/R_0) = \vec{\sigma}_G(S/R_0) + m\vec{v}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GO}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{5}ma^2[\dot{\phi}\vec{X} + \dot{\psi}\sin\varphi\vec{Y} + \dot{\psi}\cos\varphi\vec{Z}] - ma\dot{\psi}[\cos\varphi\vec{Y} - \sin\varphi\vec{Z}]\wedge a\vec{X} \\
 &= \frac{2}{5}ma^2\dot{\phi}\vec{X} + \frac{7}{5}ma^2\dot{\psi}\sin\varphi\vec{Y} + \frac{7}{5}ma^2\dot{\psi}\cos\varphi\vec{Z}
 \end{aligned}$$

6) Les éléments de réduction du torseur dynamique,  $\mathcal{A}$ , de la sphère (S) sont :

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad \vec{R}_a &= m\vec{a}(G/R_0) = m\left[\left[\frac{d}{dt}\vec{v}(G/R_0)\right]_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0)\wedge\vec{v}(G/R_0)\right] \\
 &= m[a\ddot{\psi}(\cos\varphi\vec{Y} - \sin\varphi\vec{Z}) + a\dot{\phi}\dot{\psi}(-\sin\varphi\vec{Y} - \cos\varphi\vec{Z}) + (\dot{\phi}\vec{X} + \dot{\psi}\sin\varphi\vec{Y} + \dot{\psi}\cos\varphi\vec{Z})\wedge a\dot{\psi}(\cos\varphi\vec{Y} - \sin\varphi\vec{Z})] \\
 &= ma[-\dot{\psi}^2\vec{X} + \ddot{\psi}\cos\varphi\vec{Y} - \ddot{\psi}\sin\varphi\vec{Z}].
 \end{aligned}$$

2° comme G est le centre d'inertie de (S), alors :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_G(S/R_0)\right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_G(S/R_0)\right]_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0)\wedge\vec{\sigma}_G(S/R_0).$$

Comme :

$$\begin{aligned}
 \left[\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_G(S/R_0)\right]_{R_s}\right] &= \left[\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{5}ma^2(\dot{\phi}\vec{X} + \dot{\psi}\sin\varphi\vec{Y} + \dot{\psi}\cos\varphi\vec{Z})\right]\right]_{R_s} \\
 &= \left[\frac{2}{5}ma^2\ddot{\phi}\vec{X} + (\ddot{\psi}\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\phi}\cos\varphi)\vec{Y} + (\ddot{\psi}\cos\varphi - \dot{\psi}\dot{\phi}\sin\varphi)\vec{Z}\right]
 \end{aligned}$$

Et

$$\vec{\Omega}(R_s/R_0)\wedge\vec{\sigma}_G(S/R_0) = [\dot{\phi}\vec{X} + \dot{\psi}\sin\varphi\vec{Y} + \dot{\psi}\cos\varphi\vec{Z}]\wedge\frac{2}{5}ma^2[\dot{\phi}\vec{X} + \dot{\psi}\sin\varphi\vec{Y} + \dot{\psi}\cos\varphi\vec{Z}] = \vec{0}$$

Alors :

$$\vec{\delta}_O(S/R_0) = \frac{2}{5}ma^2\ddot{\phi}\vec{X} + [\ddot{\psi}\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\phi}\cos\varphi]\vec{Y} + [\ddot{\psi}\cos\varphi - \dot{\psi}\dot{\phi}\sin\varphi]\vec{Z}$$

1° Le moment dynamique de (S) en O par rapport au repère  $R_0$  est :

$$\vec{\delta}_O(S/R_0) = \vec{\delta}_G(S/R_0) + m\vec{a}(S/R_0)\wedge\vec{GO}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{5} ma^2 [\ddot{\phi} \vec{X} + (\ddot{\psi} \sin \varphi + \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \varphi) \vec{Y} + (\ddot{\psi} \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \varphi) \vec{Z}] \\
 &\quad - ma(-\dot{\psi}^2 \vec{X} + \ddot{\psi} \cos \varphi \vec{Y} - \ddot{\psi} \sin \varphi \vec{Z}) \wedge a \vec{X} \\
 &= \frac{2}{5} ma^2 \ddot{\phi} \vec{X} + \left[ \frac{7}{5} ma^2 \ddot{\psi} \sin \varphi + \frac{2}{5} ma^2 \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \varphi \right] \vec{Y} + \left[ \frac{7}{5} ma^2 \ddot{\psi} \cos \varphi + \right. \\
 &\quad \left. \frac{2}{5} ma^2 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \varphi \right] \vec{Z}
 \end{aligned}$$

Remarque

Comme O est un point fixe, on vérifie que :

$$\vec{\sigma}_O(S/R_0) = \Pi_O(S) \vec{\Omega}(R_S/R_0) \text{ et } \vec{\sigma}_O(S/R_0) = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G \left( \frac{S}{R_0} \right) \right]_{R_0}$$

7) Déterminons l'expression de l'énergie cinétique,  $T(S/R_0)$ , de la sphère (S) au repère  $R_0$ .

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} m v^2(O/R_0) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \Psi \vec{\sigma}_G(S/R_0).$$

Comme O est un point fixe,  $\vec{v}(O/R_0) = \vec{0}$  et donc  $T(S/R_0) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \vec{\sigma}_O(S/R_0)$

$$\begin{aligned}
 T(S/R_0) &= \frac{1}{2} [\dot{\phi} \vec{X} + \dot{\psi} \sin \varphi \vec{Y} + \dot{\psi} \cos \varphi \vec{Z}] \cdot \left[ \frac{2}{5} ma^2 \ddot{\phi} \vec{X} + \frac{7}{5} ma^2 \ddot{\psi} \sin \varphi \vec{Y} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{7}{5} ma^2 \ddot{\psi} \cos \varphi \vec{Z} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{5} ma^2 (\dot{\phi} + \dot{\psi}) + ma^2 \dot{\psi}^2 \right].
 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique compatible avec la condition de roulement sans glissement ( $\dot{\psi} = -\dot{\phi}$ )

$$\text{est : } T(S/R_0) = \frac{9}{10} ma^2 \dot{\phi}^2.$$

### Exercice 3.

1) Rappeler la formule suivante :  $\forall A \in \text{solide (S), de masse } m \text{ et de centre d'inertie } G$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = m \vec{AG} \wedge \vec{v}(A/R_0) + \Pi_A(S) \vec{\Omega}(S/R_0)$$

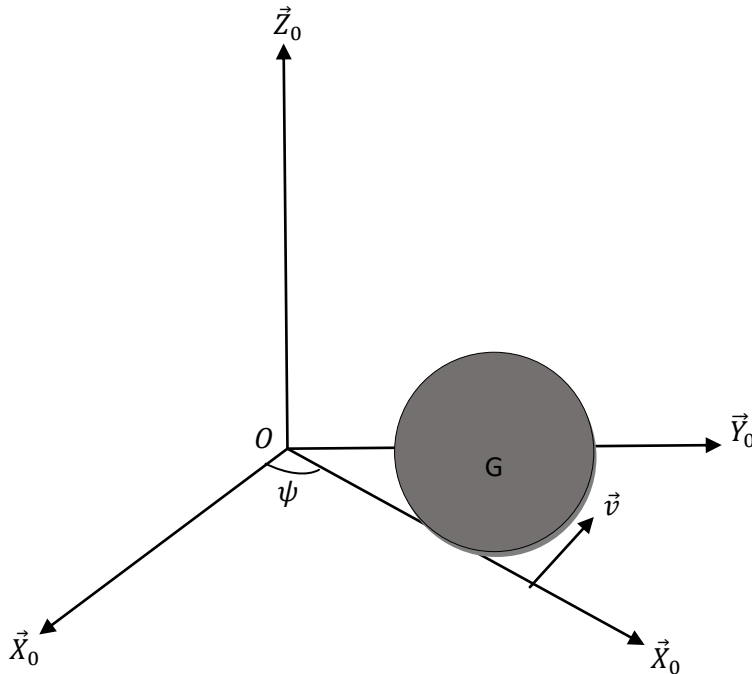
Où  $R_0(O; \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  est un repère fixe orthonormé direct.

2) Une sphère pleine (S) de centre G et de rayon a, roule sans glisser sur le plan  $(\vec{OX}_0, \vec{OY}_0)$  du sphère fixe orthonormé direct  $R_0(O; \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ . Soit  $I^*$  la particule de (S) qui se trouve en I, point géométrique de contact. On définit quatre repères orthonormés directs,  $R_1(O; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$  tel que  $\psi = (\vec{OX}_0, \vec{OX})$ ,  $R_2(I; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0)$  obtenu à partir du repère  $R_1$  par translation de vecteur  $\vec{OI} = x \vec{X}_0 + y \vec{Y}_0$ ,  $R_3(G; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$  obtenu à partir du

repère  $R_2$  par translation de vecteur  $\overrightarrow{GI} = a\vec{Z}_0$  et  $R_3(G; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  lié à (S) tel que  $\varphi = (\overrightarrow{Ov}, \overrightarrow{OY})$ .

Tous les résultats seront exprimés dans la base associée au repère  $R_3$ .

- Déterminer le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_S/R_0)$ , de (S) par rapport à  $R_0$ .
- Déterminer les vecteurs moments cinétique et dynamique,  $\vec{\sigma}_G(S/R_0)$  et  $\vec{\delta}_G(S/R_0)$ , en G de la sphère (S) par rapport au repère  $R_0$ .
- Déterminer les vecteurs moments cinétique et dynamique,  $\vec{\sigma}_{I^*}(S/R_0)$  et  $\vec{\delta}_{I^*}(S/R_0)$ , en  $I^*$ , de la sphère (S) par rapport au repère  $R_0$  en utilisant la question b.



**Solution.**

1) Par définition,  $\forall P, \vec{\sigma}_A(S/R_0) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}(P/R_0) dm(P)$

$\forall A \in \text{solide (S)}, \vec{v}(P/R_0) = \vec{v}(P/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AP}$  où  $\vec{\Omega}(S/R_0)$  est le vecteur rotation instantanée du solide (S) par rapport au repère  $R_0$ .

Il vient alors :  $\vec{\sigma}_A(S/R_0) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge [\vec{v}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AP}] dm(P)$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}(A/R_0) dm(P) + \int_S \overrightarrow{AP} [\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AP}] dm(P)$$

$$= \left[ \int_S \overrightarrow{AP} dm(P) \right] \wedge \vec{v}(A/R_0) + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge [\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AP}] dm(P)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_A(S/R_0) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}(A/R_0) + \Pi_A(S)\vec{\Omega}(S/R_0).$$

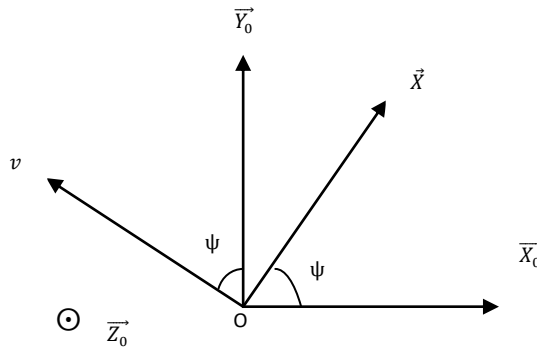
Remarque

- Si A est fixe par rapport au repère  $R_0$ , alors  $\vec{v}(A/R_0) = \vec{0}$  et donc :  
 $\vec{\sigma}_A(S/R_0) = \Pi_A(S)\vec{\Omega}(S/R_0).$
- Si A est confondu avec le centre d'inertie G du solide, alors  $\overrightarrow{AG} = \vec{0}$  et donc :  
 $\vec{\sigma}_G(S/R_0) = \Pi_G(S)\vec{\Omega}(S/R_0).$

2)

a) Le mouvement de (S) par rapport au repère  $R_0$  se décompose en deux rotations et deux translations :

$$R_0(O; \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0) \rightarrow R_1(O; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$$



Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$ , du repère  $R_1$  par rapport au repère  $R_0$ , est :  
 $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi} \vec{Z}_0.$

$$R_1(O; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0) \rightarrow R_2(I; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$$

Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$ , du repère  $R_2$  par rapport au repère  $R_1$ , est :  
 $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \vec{0}.$

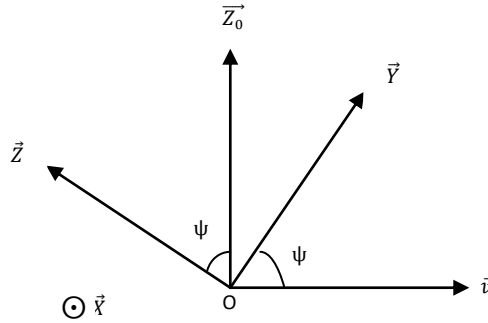
$$R_2(I; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0) \rightarrow R_3(G; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$$

Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_3/R_2)$ , du repère  $R_3$  par rapport au repère  $R_2$ , est :  
 $\vec{\Omega}(R_3/R_2) = \vec{0}.$

$$R_3(G; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0) \rightarrow R_s(G; \vec{X}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$$

Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_s/R_3)$ , du repère  $R_s$  par rapport au repère  $R_3$ , est :

$$\vec{\Omega}(R_s/R_3) = \phi \vec{X}.$$



Le vecteur rotation instantanée,  $\vec{\Omega}(R_s/R_0)$ , du repère  $R_s$  par rapport au repère  $R_0$ , est :

$$\vec{\Omega}(R_s/R_0) = \psi \vec{Z}_0 + \phi \vec{X}.$$

Remarque

Il ne peut y avoir de nutation car la sphère (S) quitterait le plan fixe (S).

- b) Déterminons les vecteurs moment cinétique et dynamique,  $\vec{\sigma}_G(S/R_0)$  et  $\vec{\delta}_G(S/R_0)$ , en G, de la sphère (S) par rapport au repère  $R_0$ .

Calcul de  $\vec{\sigma}_G(S/R_0)$  :

Le repère  $R_3$  est central principal d'inertie car ses trois axes sont des axes de symétrie de révolution. La matrice d'inertie en G de la sphère (S) s'écrit alors :

$$\Pi_G(S) = \frac{2}{5} ma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comme G est le centre d'inertie de (S), alors :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_G(S/R_0) &= \Pi_G(S) \vec{\Omega}(R_s/R_0) \\ &= \Pi_G(S) \vec{\Omega}(R_s/R_0) = \frac{2}{5} ma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\psi \vec{Z}_0 + \phi \vec{X}] \\ &= \frac{2}{5} ma^2 [\phi \vec{X} + \psi \vec{Z}_0]. \end{aligned}$$

Calcul de  $\vec{\delta}_G(S/R_0)$  :

Comme G est le centre d'inertie de (S), alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{\delta}_G(S/R_0) &= \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(S/R_0) \right]_{R_0} \\
 &= \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(S/R_0) \right]_{R_3} + \vec{\Omega}(R_3/R_0) \wedge \vec{\sigma}_G(S/R_0) \\
 &= \frac{2}{5} ma^2 [\ddot{\phi} \vec{X} + \ddot{\psi} \vec{Z}_0] + \psi \vec{Z}_0 \wedge \frac{2}{5} ma^2 [\dot{\phi} \vec{X} + \dot{\psi} \vec{Z}_0] \\
 &= \frac{2}{5} ma^2 [\ddot{\phi} \vec{X} + \dot{\phi} \dot{\psi} \vec{v} + \ddot{\psi} \vec{Z}_0]
 \end{aligned}$$

b) Déterminons les vecteurs moments cinétique et dynamique,  $\vec{\sigma}_{I^*}(S/R_0)$  et  $\vec{\delta}_{I^*}(S/R_0)$ , en  $I^*$ , de la sphère  $R_0$ . On utilise le fait que ces champs de vecteurs sont des champs de moments de torseurs.

1° Calcul de  $\vec{\sigma}_{I^*}(S/R_0)$  :

$$\vec{\sigma}_{I^*}(S/R_0) = \vec{\sigma}_G(S/R_0) + m \vec{v}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GI^*}$$

Où  $m \vec{v}(G/R_0)$  est la résultante du torseur cinétique de (S) par rapport à  $R_0$ .

Comme  $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} = x \vec{X}_0 + y \vec{Y}_0 + a \vec{Z}_0$  on a  $\vec{v}(G/R_0) = \dot{x} \vec{X}_0 + \dot{y} \vec{Y}_0$ . Or  $\vec{X}_0 = \cos \psi \vec{X} - \sin \psi \vec{v}$  et  $\vec{Y}_0 = \sin \psi \vec{X} + \cos \psi \vec{v}$

$$D'où \vec{v}(G/R_0) = [\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi] \vec{X} + [\dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi] \vec{v}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_{I^*}(S/R_0) &= \frac{2}{5} ma^2 [\dot{\phi} \vec{X} + \dot{\psi} \vec{Z}_0] + m [(\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi) \vec{X} + (\dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi) \vec{v}] \wedge (-a) \vec{Z}_0 \\
 &= \left[ \frac{2}{5} ma^2 \dot{\phi} - ma [\dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi] \right] \vec{X} + ma [\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi] \vec{v} + \frac{2}{5} ma^2 \dot{\psi} \vec{Z}_0
 \end{aligned}$$

2° Calcul de  $\vec{\delta}_{I^*}(S/R_0)$  :

$$\vec{\delta}_{I^*}(S/R_0) = \vec{\delta}_G(S/R_0) + m \vec{a}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GI^*}$$

Où  $m \vec{a}(G/R_0)$  est la résultante du torseur dynamique de (S) par rapport à  $R_0$ .

Comme  $\vec{v}(G/R_0) = \dot{x} \vec{X}_0 + \dot{y} \vec{Y}_0$  il vient :

$$\vec{a}(S/R_0) = \ddot{x} \vec{X}_0 + \ddot{y} \vec{Y}_0 = [\ddot{x} \cos \psi + \ddot{y} \sin \psi] \vec{X} + [\ddot{y} \cos \psi - \ddot{x} \sin \psi] \vec{v} \text{ et donc :}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\delta}_{I^*}(S/R_0) &= \\
 \frac{2}{5}ma^2[\ddot{\phi}\vec{X} + \dot{\phi}\dot{\psi}\vec{v} + \ddot{\psi}\vec{Z}_0] + m[(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi)\vec{X} + & (\ddot{y}\cos\psi - \\
 \ddot{x}\sin\psi)]\vec{v} \wedge (-a)\vec{Z}_0 \\
 &= \left[\frac{2}{5}ma^2\ddot{\phi} - ma(\ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi)\right]\vec{X} + \left[\frac{2}{5}ma^2\dot{\phi}\dot{\psi} + \right. \\
 & \left. ma(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi)\right]\vec{v} + \frac{2}{5}ma^2\ddot{\psi}\vec{Z}_0
 \end{aligned}$$

Remarque

Il faut maintenant tenir compte du fait qu'il n'y a pas de glissement en I. Le point de contact I de (S) avec le plan tangent commun de contact  $(\pi) = (\overrightarrow{OX_0}, \overrightarrow{OY_0})$  est tel que  $\overrightarrow{GI} = -a\vec{Z}_0$ .

Le vecteur vitesse de glissement de (S) par rapport au plan  $(\pi)$  est :

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(I \in S/R_0) &= \vec{v}(G \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{GI} \\
 &= [(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi)\vec{X} + (\ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi)\vec{v}] + [\dot{\phi}\vec{X} + \dot{\psi}\vec{Z}_0] \wedge (-a)\vec{Z}_0 \\
 &= [\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi]\vec{X} + [\ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi]\vec{v}.
 \end{aligned}$$

La condition de roulement sans glissement de (S) par rapport au plan  $(\pi)$  est obtenue en annulant la vitesse de glissement :  $\vec{v}(I \in S/R_0) = \vec{0}$ , ce qui se traduit par :

$$\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi = 0 \text{ et } \ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi = 0$$

$$\text{D'où } \ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi = a\dot{\phi}\dot{\psi} \text{ et } \ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi = -a\ddot{\phi}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } \vec{\delta}_{I^*}(S/R_0) &= \left[\frac{2}{5}ma^2\ddot{\phi} + ma^2\dot{\phi}\dot{\psi}\right]\vec{X} + \frac{2}{5}ma^2\ddot{\psi}\vec{Z}_0 \\
 &= \frac{7}{5}ma^2\ddot{\phi}\vec{X} + \frac{2}{5}ma^2\dot{\phi}\dot{\psi}\vec{v} + \frac{2}{5}ma^2\ddot{\psi}\vec{Z}_0
 \end{aligned}$$

Et

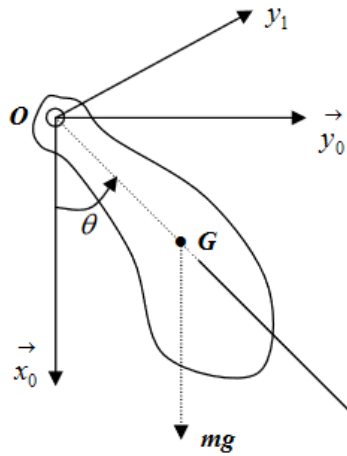
$$\begin{aligned}
 \vec{\delta}_{I^*}(S/R_0) &= \left[\frac{2}{5}ma^2\ddot{\phi} + ma^2\dot{\phi}\dot{\psi}\right]\vec{X} + \left[\frac{2}{5}ma^2\dot{\phi}\dot{\psi} + ma^2\dot{\phi}\dot{\psi}\right]\vec{v} + \frac{2}{5}ma^2\ddot{\psi}\vec{Z}_0 \\
 &= \frac{7}{5}ma^2\ddot{\phi}\vec{X} + \frac{7}{5}ma^2\dot{\phi}\dot{\psi}\vec{v} + \frac{2}{5}ma^2\ddot{\psi}\vec{Z}_0
 \end{aligned}$$

**Exercice 04.** Un pendule pesant constitué d'un solide homogène de forme quelconque, de masse  $m$  tourne autour d'un point fixe  $O$  lui appartenant. La liaison entre le solide et le bâti est de type cylindrique. Le pendule est lié au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  en mouvement de rotation par rapport à un repère fixe  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti tel que :  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta$ .

Le tenseur d'inertie du pendule en son centre d'inertie  $G$  dans le repère  $R_1$  est égale à :  $I_G$ .

On donne  $\overrightarrow{OG} = L\vec{x}_1$  avec  $L = Cte$  ;  $R_1$  est le repère de projection.

1. En utilisant les théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Retrouver l'expression de cette équation en utilisant le théorème de conservation de l'énergie mécanique totale.
3. En déduire l'équation différentielle du pendule simple ainsi que sa période.



**Solution.**

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  repère fixe.

La projection de cette équation vectorielle sur les axes donne :

$$R_{Ox} + mg \cos \theta = -m\ddot{\theta} \quad (2)$$

$$R_{Oy} - mg \sin \theta = mL\ddot{\theta} \quad (3)$$

### 1. Théorème du moment dynamique au point G :

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique de la barre.

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{\delta}_G(S/R_0) \quad (4)$$

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{GO} \wedge \vec{R}_0 = \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \wedge \begin{pmatrix} R_{0x} \\ R_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -LR_{0y} \end{pmatrix}_{R_0} = -LR_{0y} \vec{Z}_1$$

Le moment dynamique est égal au dérivé du moment cinétique au point G :

### Vitesse et accélération du point G :

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0 \vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \begin{pmatrix} 0 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

### 1. Théorème de la résultante dynamique et du moment dynamique au point G :

#### 1.a Théorème de la résultante dynamique au point G :

La résultante des forces extérieures appliquées au solide est égale à la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie. L'articulateur au point O est cylindrique, la réaction a deux composantes dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$

$$\vec{R}_O + \vec{P} = m\vec{\gamma}^0(G)$$

$$\vec{\delta}_G(G/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}$$

$$\text{Or nous avons : } \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G \cdot \vec{\Omega}_1^0 \Rightarrow \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G \dot{\theta} \vec{Z}_1$$

$$\vec{\delta}_G(G/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} = I_G \ddot{\theta} \vec{Z}_0$$

$$\text{Nous avons ainsi : } -LR_{0y} = I_G \ddot{\theta} \Leftrightarrow R_{0y} = -\frac{I_G \ddot{\theta}}{L} \quad (4)$$

#### 1.c Equation différentielle du mouvement :



On remplace l'équation (4) dans l'équation (3), on obtient :  $-\frac{I_G \ddot{\theta}}{L} - mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta}(mL^2 + I_G) + mgL \sin \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + I_G} \sin \theta = 0$$

2. Equation différentielle en utilisant le théorème de conservation de l'énergie totale :

L'énergie totale dans la position 1 est égale à l'énergie totale dans la position 2 :  $E_1 = E_2$

$$E_1 = \frac{1}{2} m [\vec{V}^0(G)]^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_1^0 I_G \cdot \vec{\Omega}_1^0 = \frac{1}{2} m [L \dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} I_G \cdot \dot{\theta}^2$$

$$E_2 = mg(L - L \cos \theta) = mgL(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_G \cdot \dot{\theta}^2 = mgL(1 - \cos \theta) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta}^2 (mL^2 + I_G) = 2mgL(1 - \cos \theta)$$

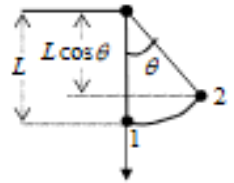
En dérivant les deux termes on obtient :  $2\dot{\theta}\ddot{\theta}(mL^2 + I_G) = 2mgL\dot{\theta} \sin \theta$

$$\ddot{\theta}(mL^2 + I_G) - mgL \sin \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + I_G} \sin \theta = 0$$

3. Equation différentielle du pendule simple ainsi que sa période :

Dans le cas d'un pendule simple  $I_G = 0$ , et s'il a de faibles oscillations alors :  $\sin \theta \approx \theta$

$$\text{L'équation devient : } \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{L} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

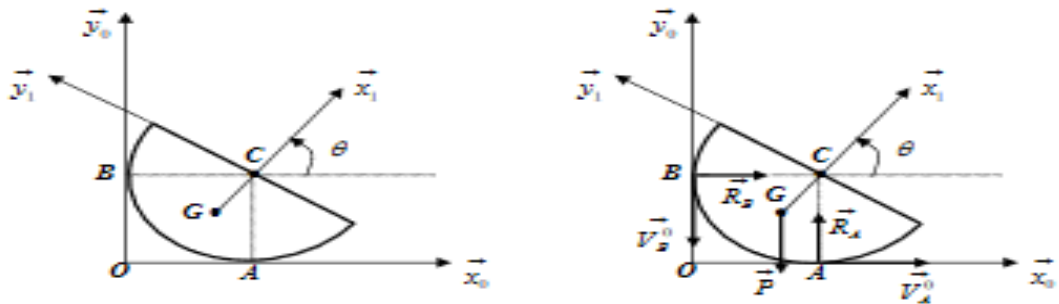


**Exercice 05.** Une demi sphère pleine de centre C, de rayon R, de masse M, de centre d'inertie G est animée d'un mouvement plan par rapport au repère fixe  $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ . Elle est en contact avec le sol lisse en A et le mur lisse au point B. Elle glisse sans frottement sur les deux points. Le tenseur d'inertie de la demi sphère pleine en son centre C dans le repère  $R_1(C, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  est donnée par :  $I_{C/R} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$  avec  $A = \frac{2}{5} MR^2$  et

$$CG = a$$

1. Déterminer la vitesse et l'accélération absolue du points G dans  $R_0$  et  $R_1$ .
2. Déterminer les coordonnées du centre instantané de rotation (CIR) de la demi sphère.
3. Calculer les réactions  $N_A$  et  $N_B$  en fonction de  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  en utilisant le théorème de la résultante dynamique.

4. En utilisant le théorème du moment dynamique trouver l'équation différentielle de mouvement de la demi sphère.
5. En intégrant l'équation de mouvement et en prenant les conditions :  $\theta(0) = 0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$  . montrer que l'on a :  $\dot{\theta}^2 = \frac{2Mga}{A} \sin \theta$ .
6. Retrouver l'expression de  $\dot{\theta}^2$  en utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale ;
7. En déduire les expressions des réactions  $R_A$ ,  $R_B$  et de l'angle limite  $\theta$ , pour lequel la demi sphère pleine quitte le mûr.



### Solution.

1. Vitesse et accélération absolue du point G dans  $R_0$  et  $R_1$  ; A partir du vecteur position du point G nous déduisons la vitesse et l'accélération.

$$\text{Nous avons : } \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} R \\ R \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} + \begin{pmatrix} -a \cos \theta \\ -a \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} R - a \cos \theta \\ R - a \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta} \vec{Z}_0 = \dot{\theta} \vec{Z}_1$$

Dans le repère  $R_0$  :

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0 \overrightarrow{OG}}{dt} \begin{pmatrix} a \dot{\theta} \sin \theta \\ -\dot{\theta} a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \Rightarrow \vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0 \vec{V}^0(G)}{dt} = \begin{pmatrix} a(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ -a(\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

Dans le repère  $R_1$  :

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0 \vec{CG}}{dt} = \frac{d^1 \vec{CG}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0 \vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} a\ddot{\theta} \\ -a\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

2. Coordonnées du centre instantané de rotation (CIR) de la demi sphère :

Nous pouvons le déterminer de deux façon : l'une graphique et l'autre analytique.

**Méthode graphique :** Les directions des vitesses des deux points A et B du solide sont connue, on trace les perpendiculaires à celles-ci au même point, leur intersection est le centre instantané de rotation. Les deux normales se recentrent au point C, alors celui-ci est confondu avec le centre instantané de rotation ( $I \equiv C$ ).

**Méthode analytique :** La vitesse du centre instantané de rotation est nulle : soit  $(x_t, y_t)$  les coordonnées du C.I.R dans le repère  $R_0$ , nous pouvons aussi écrire :

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{GI} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a\dot{\theta} \sin \theta \\ -\dot{\theta} a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_0} \wedge \begin{pmatrix} x_t - R + a \cos \theta \\ y_t - R + a \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$a \dot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta} (y_t - R + a \sin \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta} (y_t - R) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_t = R$$

$$-a \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} (x_t - R + a \cos \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta} (x_t - R) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_t = R$$

On voit bien que le C.I.R est confondu avec le centre C de la demi sphère.

3. Réaction  $R_A$  et  $R_B$  en fonction de  $\theta, \dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  par le théorème de la résultante dynamique

La résultante des forces extérieures appliquées au solide est égale à la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie :

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{\gamma}^0(G) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + m \vec{g} = m \vec{\gamma}^0(G) \quad (1)$$

Projetons l'équation (1) sur les axes du repère  $R_0$

$$R_B = ma(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (2)$$

$$R_A - mg = -ma(\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad \Leftrightarrow \quad R_A = mg = -ma(\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

4. Equation différentielle de mouvement de la demi-sphère en utilisant le théorème du moment dynamique

Le moment résultant des forces extérieures est égale au moment dynamique du solide au même point C.

$$\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_{ext})/C = \vec{\delta}_C \left( \frac{S}{R_0} \right) \Leftrightarrow \vec{CA} \wedge \vec{R}_A + \vec{CB} \wedge \vec{R}_B + \vec{CG} \wedge m\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0)$$

Le moment dynamique est égale à la dérivée du moment cinétique :

$\vec{\delta}_C(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_C(S/R_0)}{dt}$ , le moment cinétique au point C est donné par :

$$\vec{\delta}_C(S/R_0) = I_{C/R_1} \cdot \vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = A\dot{\theta} \vec{Z}_0 = A\dot{\theta} \vec{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A\dot{\theta} \end{bmatrix}_{R_0, R_1}$$

$$\vec{\delta}_C(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\delta}_C(S/R_0)}{dt} = A\ddot{\theta} \vec{Z}_0$$

$\vec{CA} \wedge \vec{R}_A + \vec{CB} \wedge \vec{R}_B + \vec{CB} \wedge m\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0)$  comme :  $\vec{CA} // \vec{R}_A$  et  $\vec{CB} // \vec{R}_B$  alors :

$$\vec{CA} \wedge m\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -a \cos \theta \\ -a \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A\ddot{\theta} \end{bmatrix}_{R_0}$$

d'où :  $mg a \cos \theta = A\ddot{\theta}$

ce qui donne :  $\ddot{\theta} = \frac{mga}{A} \cos \theta$  (4)

5. Equation de mouvement avec les conditions :  $\theta(0) = 0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$  :

On multiplie l'équation (4) par :  $\dot{\theta}$ , puis on intègre

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{mga}{A} \dot{\theta} \cos \theta \Rightarrow d\left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2\right) = \frac{mga}{A} d(\sin \theta)$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} d\left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2\right) = \frac{mga}{A} \int_0^{\theta} d(\sin \theta) \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{mga}{A} \sin \theta \text{ on déduit alors :}$$

$$\dot{\theta}^2 = 2 \frac{mga}{A} \sin \theta \quad (5)$$

6. Expressions de  $\dot{\theta}^2$  en utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale :

$$E_C + E_F = E_{C^0} + E_{F^0} = Cte \Rightarrow E_C - E_{C^0} = -(E_F - E_{F^0})$$

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_1^0 \cdot I_{C/R_1} \cdot \vec{\Omega}_1^0 = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 ; E_{C^0} = 0$$

$$-(E_F - E_{F_0}) = \int_0^\theta m \vec{g} \cdot d(\overrightarrow{OG}) = m \int_0^\theta \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \sin \theta \, d\theta \\ -a \cos \theta \, d\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^\theta m g a \cos \theta \, d\theta$$

$$= m g a \sin \theta$$

$$E_C - E_{C_0} = -(E_F - E_{F_0}) \Rightarrow \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 = m g a \sin \theta \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = 2 \frac{m g a}{A} \sin \theta$$

On retrouve ainsi l'expression de  $\dot{\theta}^2$ .

7. Expressions des réactions  $N_A, N_B$  et de l'angle limite  $\theta_i$  pour lequel la demi sphère pleine quitte le mûr.

Il suffit de remplacer les expressions de  $\dot{\theta}$  et de  $\ddot{\theta}$  dans celles de  $R_A$  et  $R_B$  :

$$R_B = m a \left( \frac{m g a}{A} \cos \theta \sin \theta + 2 \frac{m g a}{A} \sin \theta \cos \theta \right) = 3 \frac{m^2 g a^2}{A} \sin \theta \cos \theta$$

$$R_A = m g - m a \left( \frac{m g a}{A} \cos \theta \cos \theta + 2 \frac{m g a}{A} \sin \theta \sin \theta \right)$$

$$= m g - \frac{m^2 g a^2}{A} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$R_A = m g - \frac{m^2 g a^2}{A} \cos 2\theta$$

La demi sphère quitte le mûr si :  $R_B = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

**BIBLIOGRAPHIE**

1. **A. KADI** Mécanique rationnelle cours et exercices résolue (2008) Université M'HAMMED BOUGARA – BOUMERDES.
2. **W. YAGOUBI** Mécanique rationnelle cours et exercices corrigés (2015) ECOLE NORMALE SUPERIEUR- KOUBA.
3. **M.COMBARNOUS, D. DESJARDINS, C. BACON**, Mécanique des solides cours et exercices corrigés, 2ème édition, Dunod, 199p.
4. **M. NACER BEY** Mécanique rationnelle cours, exercices et examens corrigés (2020) Université- BLIDA.
5. **A. KASSOUL** Polycopié Physique 4 : Mécanique Rationnelle COURS et EXERCICES (2009) Université Hassiba Benbouali- Chlef.
6. **N. HAMZAOUI**, Mécanique Rationnelle (Module TEC005), polycopie, USTHB, 1986, 90p.
7. **M.BOURICHE**, Polycopié d'exercices et examen résolus : Mécanique des systèmes de solide indéformable deuxième édition (2014).
8. **K. MEFTAH**, Polycopié Physique 4 : Mécanique Rationnelle Notes de Cours et Exercices Corrigés, Université Abou Bekr Belkaïd –Tlemcen Laboratoire IS2M.