UNIVERSITE IBN KHALDOUN DE TIARET

FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

DEPARTEMENT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

MECANIQUE RATIONNELLE

(exercices résolus)

Polycopié de Mécanique Rationnelle « exercices résolus » destiné aux étudiants de 2ème année de Licence LMD (Semestre 3) & Ingénieurs Sciences et Technologies (ST)

Préparé par :

Dr. BOUAMOUD Benameur
Département des Sciences et de la Technologie

Avec l'expertise de :

Pr. BELARBI El Habib, département de Physique
Pr. DRAICHE Kada, département de Génie civil

Année Universitaire 2024-2025

Avant-propos

Ce polycopié de mécanique rationnelle « exercices résolus » s'adresse plus particulièrement aux étudiants de $2^{ème}$ année de Licence (LMD) aussi bien qu'aux étudiants de $2^{ème}$ année Ingénieurs du domaine sciences et technologies (Génie civil, Génie mécanique, et travaux publics). Il leur propose de mettre en application les notions de base de cette matière fondamentale du socle commun.

Plus d'une vingtaine d'exercices, tous résolus, leur sont proposés. En plus de la géométrie de masse, ces exercices couvrent la statique, la cinématique, et la dynamique du corps solide rigide.

L'élaboration du contenu de ce polycopié a été réalisé sur la base du programme officiel établi par le ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. À travers ce polycopié, l'étudiant sera capable de non seulement identifier la nature du problème lui faisant face, mais aussi d'avoir les outils mathématiques ainsi que les notions fondamentales indispensables qui lui permettent de le résoudre, et par la suite posséder, les connaissances préalables aux disciplines dont les enseignements font appel aux concepts fondamentaux de la mécanique rationnelle.

Je ne saurais terminer sans remercier mes collègues, Monsieur El Habib BELARBI, Professeur à la faculté des sciences de la matière, et Monsieur Kada DRAICHE, Professeur au département de Génie civil, dont l'expertise a été précieuse pour l'élaboration de ce polycopié.

Dr. BOUAMOUD Benameur.

Sommaire

Chapitre 1 : Rappels mathématiques (éléments de calcul vectoriel)

Exercice 1.

Soient les vecteurs :

$\vec{V_1} = 2\,\vec{\imath} + 3\,\vec{k}$, $\vec{V_2} = 4\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, $\vec{V_3} = 3\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{V_4} = -12\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

- Trouver y et z pour que $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ soient colinéaires.
- Trouver y pour que $\vec{V_3}$ et $\vec{V_4}$ soient orthogonaux.

Solution

- $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ colinéaires, alors $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ y & z \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & z \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & y \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{0}$$

$\Rightarrow -3y\,\vec{\imath} - (2z - 12)\,\vec{\jmath} + 2y\,\vec{k} = \vec{0}$

d'où : $y = 0,\ z = 6$

- $\vec{V_3}$ et $\vec{V_4}$ orthogonaux, alors $\vec{V_3} \cdot \vec{V_4} = 0$

$$\Rightarrow -15 + y + 12 = 0$$

d'où : $y = 3$

Exercice 2.

Soient les vecteurs :

$\vec{V_1} = -4.5\,\vec{\imath} + 1.5\,\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\quad \vec{V_2} = -3\,\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} - 2\,\vec{k}$, $\quad \vec{V_3} = -5\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + \vec{k}$.

- Déterminer : $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ et $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$
- Déterminer le sens et la direction de $\vec{V_1}$ par rapport à $\vec{V_2}$ (sans faire la representation graphique).
- Trouver les produits : $\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$ et $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$.
- Calculer la surface du triangle formé par $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$.

Solution

- Calculons $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ et $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = (-4.5 \times 3) + (-1 \times 1.5) + (-3 \times 2) = -21$$

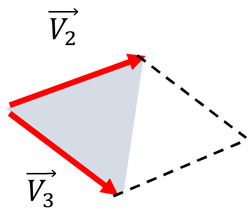
$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ -4.5 & 1.5 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

- Comme le produit vectoriel est nul, alors $\vec{V_1} \parallel \vec{V_2}$,

  Et comme le produit scalaire est négatif, alors ils sont de sens opposé.

- $\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \vec{V_1} \cdot \left(-9\,\vec{\imath} - 7\,\vec{\jmath} + 7\vec{k}\right) = 9.$
- $\vec{V_1} \wedge \left(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}\right) = \vec{V_1} \wedge \left(-9\,\vec{\imath} - 7\,\vec{\jmath} + 7\vec{k}\right)$

$$= -10.5\,\vec{\imath} + 58.5\,\vec{\jmath} + 45\vec{k}.$$



- La surface S du triangle formé par $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ est:

$S = \frac{\|\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\|}{2}$; $\|\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\| = \sqrt{-9^2 + (-7^2) + 7^2} = 13.38.$

D'où : $S = 6.69.$

Exercice 3.

- Trouver le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$, tels que :

$$\overrightarrow{V_1} = 2\,\vec{\imath} + 6\,\vec{\jmath}\,, \quad \overrightarrow{V_2} = 3\,\vec{\jmath} + 5\,\vec{k}\ , \quad \overrightarrow{V_3} = \vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} - 2\,\vec{k}.$$

Solution

Il suffit de calculer le produit mixte des trois vecteurs $\overrightarrow{V_1} \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right)$ qui représente le volume v du parallélépipède formé par ces vecteurs,

$$v = \left|\overrightarrow{V_1} \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right)\right| = |-22| = 22$$

Exercice 4.

Soient :

f(x, y, z) = $x^2 + 5xy + z$ (fonction scalaire)

$\vec{F}(x, y, z) = 2x^3\,\vec{\imath} + zy\,\vec{\jmath} + 5xy\vec{k}.$

x, y, z sont des variables indépendantes. Trouver :

- Le gradient de f (x, y, z) : $\nabla\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$
- $div\ (\vec{F})$
- $\overrightarrow{rot}\ (\vec{F})$

Solution

- $\overrightarrow{grad}(f) = \nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = (2x+5y)\,\vec{\imath} + 5x\,\vec{\jmath} + \,\vec{k}$

- $div\,(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\,2x^3\,\vec{\imath} + zy\,\vec{\jmath} + 5xy\vec{k}\right) = 6x^2 + z$

- $\overrightarrow{rot}\,(\vec{F}) = \nabla \wedge \vec{F}(x,y,z) =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^3 & zy & 5xy \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - y \\ -5y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

Soit le torseur $[T_1]_O$ défini par les vecteurs :

$$\overrightarrow{V_1} = -2\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} - 7\vec{k}\,, \qquad \overrightarrow{V_2} = 3\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}\,, \qquad \overrightarrow{V_3} = -\,\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} + 8\vec{k}$$

définis dans le repère orthonormé R(O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) aux points A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) respectivement; et

le torseur $[T_2]_O = \begin{cases} \vec{R}_2 = 4\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 1.5\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{2O} = -3\,\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 12\vec{k} \end{cases}$

Déterminer :

- Les éléments de réduction du torseur $[T_1]_O$.
- Le type des torseurs $[T_1]_O$ et $[T_2]_O$.
- La somme des deux torseurs.

Solution

- $[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = \vec{0} \\ \vec{M}_{1O} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{V_3} = \vec{\imath} + 6\vec{\jmath} \end{cases}$

- Le type des torseurs :

Comme $[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{0} \\ \vec{M}_{1O} \neq \vec{0} \end{cases}$; $[T_1]_O$ est un torseur couple.

Comme $\vec{R}_2 \neq \vec{0}$ et $\vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{2O} = 0$; $[T_2]_O$ est un torseur glisseur.

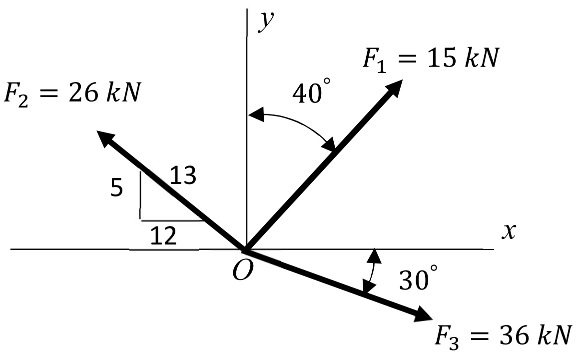
- Somme des torseurs :

$$[T]_O = [T_1]_O + [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 4\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 1.5\vec{k} \\ \vec{M}_O = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} = -2\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 12\vec{k} \end{cases}$$

Chapitre 2 : Généralités et définitions de base

Exercice 1.

- Trouver la résultante (module et direction) des forces $\vec{F_i}$ représentées sur la Figure suivante:



Solution

La résultante des forces : $\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$ – – – – – (01)

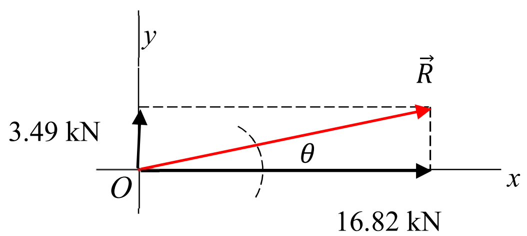
Projection de l'équation (01) :

Suivant l'axe Ox :

$\xrightarrow{+}$ $R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$

$$= 15 \sin 40° - \frac{12}{13}(26) + 36 \cos 30° = 16.82\ kN$$

Suivant l'axe Oy :



$+\uparrow$ $R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$

$$= 15 \cos 40° + \frac{5}{13}(26) - 36\, sin\, 30° = 3.49\ kN$$

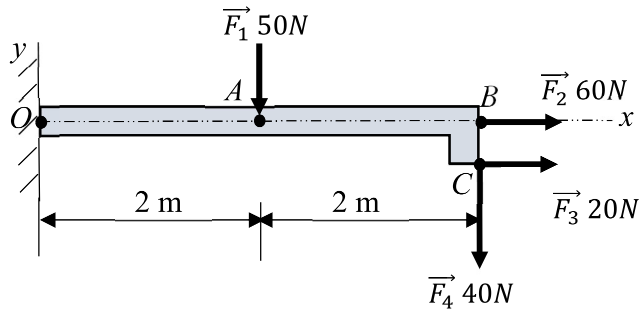
Module: $R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2} = 17.17\ kN$

Direction : $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = 0.2075$

D'où : $\theta = 11.72^{\circ}$

Exercice 2.

- Trouver la résultante et le moment résultant au point O des forces $\vec{F_i}$ exercées sur la poutre (figure ci-dessous) ;



On donne : $BC = 0.5m$.

Solution

- la résultante des forces $\vec{R}$ est :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} ------ (01)$$

Projection de l'équation (01) :

Suivant l'axe *Ox* :

$\xrightarrow{+}$

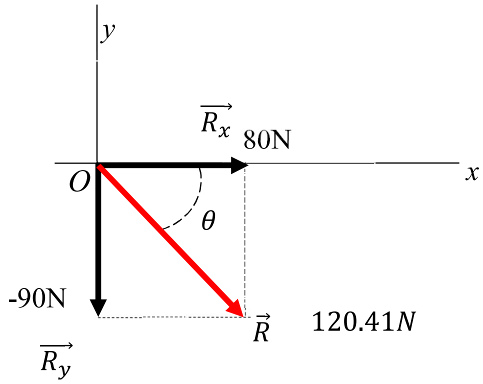
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

$$= 0 + 60 + 20 + 0 = 80\ N$$

Suivant l'axe *Oy* :

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$

$$= -50 + 0 + 0 - 40 = -90\ N$$



<u>Module:</u> $R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2} = 120.41N$

<u>Direction :</u> $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = -1.125.$

D'où : $\theta = -48.36^{\circ}.$

- Le moment résultant est :

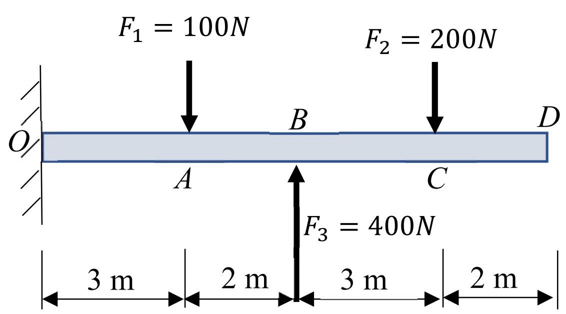
$$\vec{M}(\vec{F_i})/O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F_3} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F_4}$$

$$\vec{M}(\vec{F_i})/O = \binom{2}{0} \wedge \binom{0}{-50} + \binom{4}{0} \wedge \binom{60}{0} + \binom{4}{-0.5} \wedge \binom{20}{0} + \binom{4}{-0.5} \wedge \binom{0}{-40}$$

$$\vec{M}(\vec{F_i}) = -100 + 0 + 1 - 160 = -250\ N.m$$

Exercice 3.

- Déterminer les caractéristiques de la résultante $\vec{R}$ (module, direction, sens, et point d'application) des forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ agissant sur la poutre (figure ci-dessous).



Solution

- Module:

La résultante des forces : $\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} - - - - - - (01)$

La projection de l'équation (01) *sur les axes du repère donne :*

Ox : $R_x = 0N$ (toutes les forces sont verticales).

Oy : $R_y = -F_1 - F_2 + F_3 = 100N.$

Le module est donc : $R = R_y = 100N.$

- Direction: ∥ à la verticale,
- Sens : sens de la plus grande force (dans le sens des $y \succ 0$),
- Point d'application :

Le moment résultant au point O :

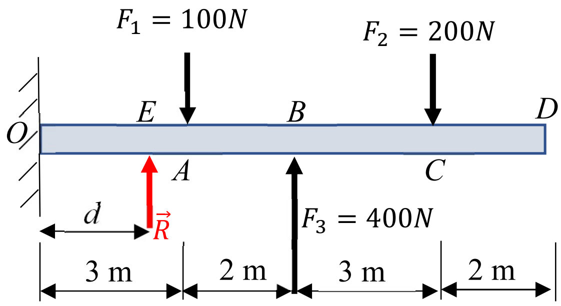
$$\vec{M}(\vec{R})/_{O} = \vec{M}_I(\vec{F_1}) + \vec{M}_I(\vec{F_2}) + \vec{M}_I(\vec{F_3})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OE} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F_2} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F_3}$$

$$\Rightarrow \binom{d}{0} \bigwedge \binom{0}{100} = \binom{2}{0} \bigwedge \binom{0}{-100} + \binom{5}{0} \bigwedge \binom{0}{400} + \binom{8}{0} \bigwedge \binom{0}{-200}$$

D'où : $d = 2m.$

La résultante $\vec{R}$ est donc appliquée au point E distant de ${}^{2m}/_{O}$ (figure ci-après).

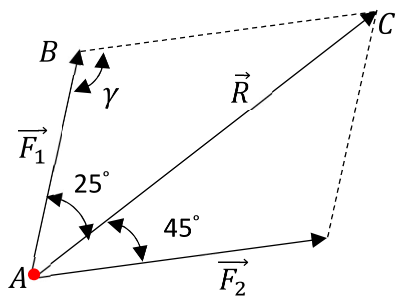


Exercice 4.

On considère deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, et $\vec{R}$ leur résultante représentée par la diagonale du parallélogramme formé par les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$. Si celles-ci font chacune respectivement un angle de 25° et 45° avec la résultante $\vec{R}$, et si $\overrightarrow{F_1}$ a une intensité de 225 N.

- Déterminer les modules des forces $\overrightarrow{F_2}$ et $\vec{R}$.

Solution



D'après la règle des sinus, on a :

Pour le triangle ABC: $\frac{F_1}{\sin 45^{\circ}} = \frac{F_2}{\sin 25^{\circ}} = \frac{R}{\sin\gamma}$

$(AB = F_1,\ BC = F_2,\ AC = R);\ \gamma = 180^{\circ} - (25^{\circ} + 45^{\circ}) = 110^{\circ}$

$\Longrightarrow\ F_2 = F_1 \frac{\sin 25^{\circ}}{\sin 45^{\circ}} = 134.47\ N,$

$R = F_1 \frac{\sin 110^{\circ}}{\sin 45^{\circ}} = 299\ N.$

Exercice 5.

On considère un repère orthonormé R(O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) ; soit $\vec{F}$ une force qui a une intensité de 420 N.

Si la direction du vecteur force $\vec{F}$ passe par les points A (0,1,-2) et B (-1,-2,2),

Trouver les composantes de la force $\vec{F}$.

Solution

On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}$ peuvent s'écrire :

$$\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \vec{u}_{AB}$$

Où $\vec{u}_{AB}$, est le vecteur unitaire porté par la ligne d'action de $\vec{F}$, et qui peut être déterminé comme suit :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{-\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}}{5.1} = -0.196\vec{\imath} - 0.588\vec{\jmath} + 0.784\vec{k}$$

Les composantes de la force $\vec{F}$ suivant les axes du repère sont donc :

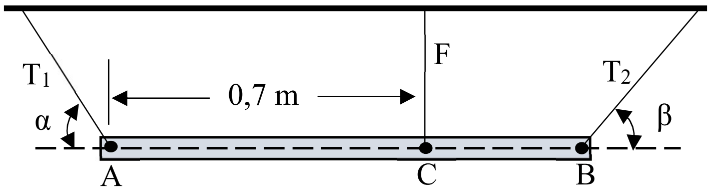
$$\vec{F} = 420(-0.196\vec{\imath} - 0.588\vec{\jmath} + 0.784\vec{k})$$

D'où : $\vec{F} = \begin{pmatrix} -82.32 \\ -246.96 \\ 329.41 \end{pmatrix}$.

Chapitre 3 : Statique

Exercice 1.

Une barre AB de 1 mètre de longueur et 10 kg de masse est suspendue par trois câbles (F, T_1 et T_2) (figure suivante).



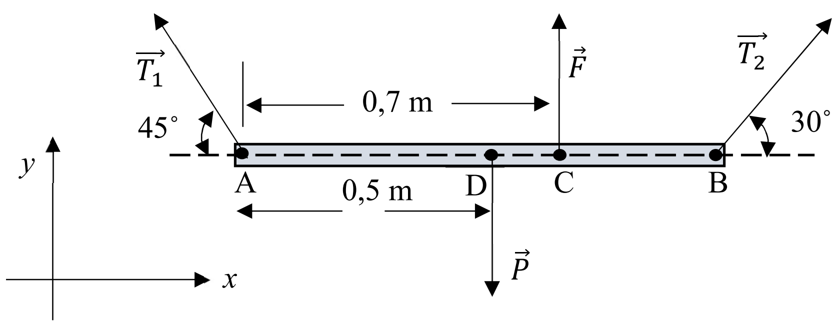
- Déterminer les tensions des câbles nécessaires à l'équilibre statique de la barre AB pour α 45° et β = 30°.

  On donne g = 9.81 m/s^2.

Solution

Pour que la barre AB soit en équilibre, il faut que :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F_i} = \vec{T_1} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{T_2} = \vec{0} \ldots..(\mathbf{1}) \\ \sum_i \overrightarrow{M_{i/A}} = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{T_1} + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T_2} = \vec{0} \ldots.(\mathbf{2}) \end{cases}$$



La projection de l'équation (1) sur les axes du repère donne :

Suivant ox :

$$-T_1 \cos 45° + T_2 \cdot cos\ 30° = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad T_2 = \frac{T_1 \cos 45°}{cos\ 30°} \quad \ldots.(\mathbf{3})$$

Suivant oy:

$$T_1 \sin 45° - P + F + T_2 \cdot sin\ 30° = 0 \ldots.(\mathbf{4})$$

L'équation (2) peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-T_1 \cos 45°\\ T_1 \sin 45°\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.5\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-100\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.7\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\F\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}T_2 \cdot cos\ 30°\\ T_2 \cdot sin\ 30°\end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow -50 + 0.7\,F + T_2 \cdot sin\ 30° = 0 \Longrightarrow T_2 \cdot sin\ 30° = 50 - 0.7\,F \quad \ldots.(\mathbf{5})$$

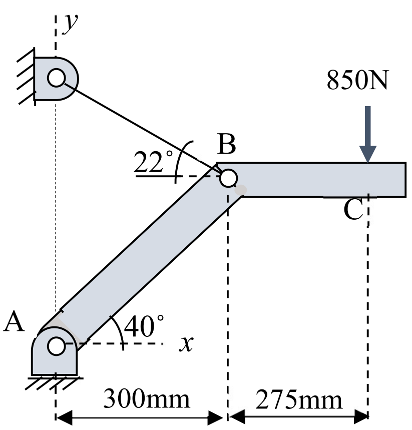
La résolution du système suivant :

$$\begin{vmatrix}0.707 & -0.866 & 0\\ 0.707 & 0.5 & 1\\ 0 & 0.5 & 0.7\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}T_1\\T_2\\F\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\98.1\\50\end{vmatrix}$$

aboutit aux résultats : $T_1 \simeq 50.13\,N$; $T_2 \simeq 40.92\,N$; $F \simeq 42.19\,N$

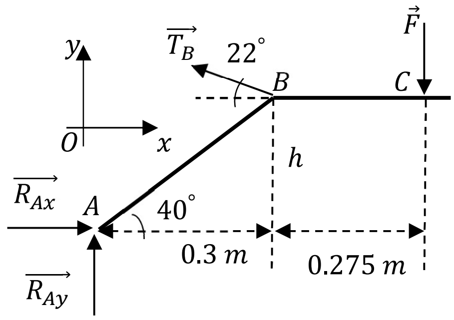
Exercice 2.

- Déterminer la tension du cable exercée en B ainsi que les reactions à l'appui double A (module et direction) nécessaires à l'équilibre du solide ABC (Figure ci-contre).



Solution

On a :



$\tan 40° = \frac{h}{0.3} = 0.839 \Rightarrow h = 0.2517m.$

Pour que le solide ABC soit en équilibre statique, il faut que :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i = \vec{R}_A + \overrightarrow{T_B} + \vec{F} = \vec{0} \quad ------------------- \; (1) \\ \sum_i M(\vec{F}_i)/A = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{T_B} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad ------------- \; (2) \end{cases},$$

<u>L'équation (2) peut s'écrire :</u>

$$\binom{0.3}{0.2517} \wedge \binom{-T_B \cdot \cos 22°}{T_B \cdot sin\ 22°} + \binom{0.575}{0.2517} \wedge \binom{0}{-F} = 0 \Rightarrow T_B = 1.414\ kN$$

La projection de l'équation (1) sur les axes du repère donne :

Ox: $R_{Ax} - T_B \cdot \cos 22° = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 1.311\ kN.$

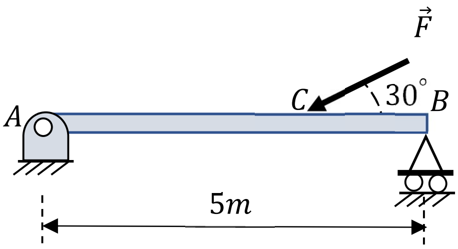
Oy: $R_{Ay} + T_B \cdot sin22° - F = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 320.3\ N.$

Module: $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 1.349$ kN,

Direction : $\tan\theta = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = 0.24 \Rightarrow \theta = 13.49°$ (par rapport à l'axe *Ox*).

Exercice 3.

La poutre $AB = L = 5m$ est considérée en équilibre sur deux appuis (un double et l'autre simple). Une force de 3 kN agit au point C ($AC = 3.5\ m$) sous un angle de 30° dans le plan vertical (Figure ci-après).

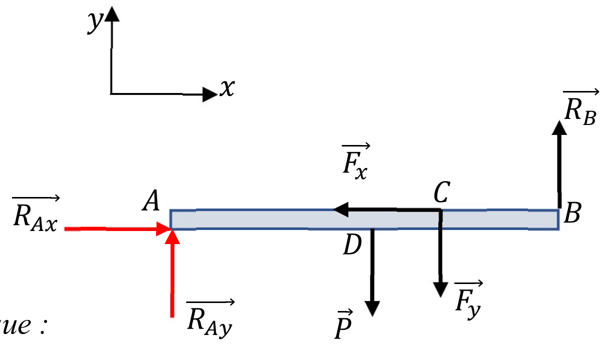


Sachant que la masse de la poutre est *750 kg* ;

– Déterminer les réactions aux extrémités de cette poutre.

On donne g = 9.81 m/s^2.

Solution



Pour que la poutre AB soit en équilibre, il faut que :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F_i} = \vec{R_A} + \vec{R_B} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0} & -------------------- (1) \\ \sum_i M(\vec{F_i})/A = \overrightarrow{AD} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_B} = \vec{0} & ------------ (2) \end{cases},$$

L'équation (2) peut s'écrire : $\binom{2.5}{0} \wedge \binom{0}{-P} + \binom{3.5}{0} \wedge \binom{-Fcos30°}{-Fsin30°} + \binom{5}{0} \wedge \binom{0}{R_B} = 0 \Rightarrow R_B = 4.73\ kN$

La projection de l'équation (1) sur les axes du repère donne :

Ox: $R_{Ax} - F \cdot \cos 30° = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 2.59\ kN.$

Oy: $R_{Ay} - F \cdot sin30° - P + R_B = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 4.13\ kN.$

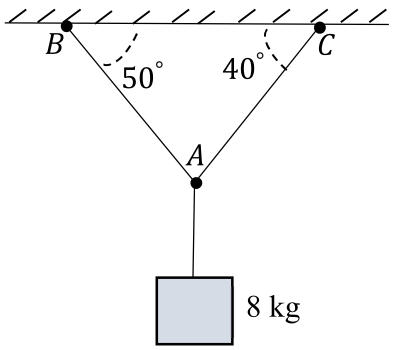
Module: $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 4.87$ kN,

Direction : $\tan\theta = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = 1.59 \Rightarrow \theta = 57.84^{\circ}$ (par rapport à l'axe *Ox*).

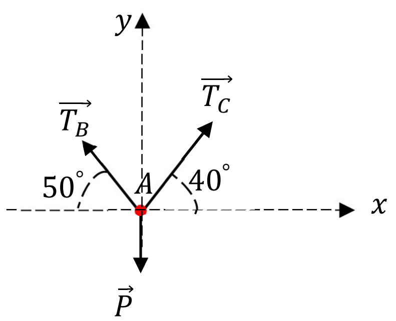
Exercice 4.

- Déterminer la tension de chacuns des cables pour que le système représenté sur la Figure suivante soit en équilibre.

On donne g = 9.81 m/s^2.



Solution



Au point A, on a à l'équilibre:

$\sum_i \vec{F}_i = \vec{T}_B + \vec{T}_C + \vec{P} = \vec{0}$ (forces concourantes),

La projection de cette équation sur les axes du repère donne :

Ox: $-T_B \cdot cos50^{\circ} + T_C \cdot cos40^{\circ} + 0 = 0.$

Oy: $T_B \cdot sin50^{\circ} + T_C \cdot sin40^{\circ} - P = 0 \Rightarrow T_B \cdot sin50^{\circ} + T_C \cdot sin40^{\circ} = mg.$

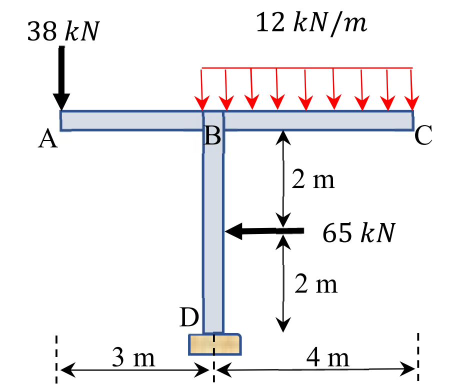
On résoud le système d'équations $\begin{cases} -T_B \cdot cos50^\circ + T_C \cdot cos40^\circ = 0 - - - - (1) \\ T_B \cdot sin50^\circ + T_C \cdot sin40^\circ = 78.48 - - - - (2) \end{cases}$;

On obtient : $T_B = 60.12\ N$ et $T_C = 50.44N$.

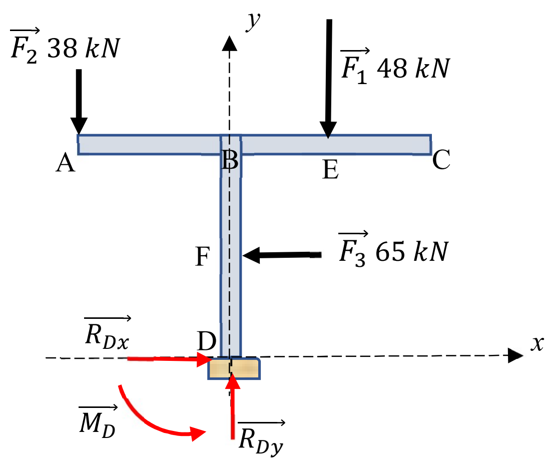
Exercice 5.

Le solide rigide montré sur la figure ci-après est soumis à une charge uniformément répartie et deux forces.

- Trouver les réactions à l'encastrement D, nécessaires à l'équilibre du solide.



Solution



On a: $F_1 = 12 * 4 = 48\ kN$.

A l'équilibre, on aura :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F_i} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{R_D} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0} ---------- (1) \\ \sum_i \overrightarrow{M_i}(\vec{F_i}) /_D = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{M_D} + \overrightarrow{DD} \wedge \overrightarrow{R_D} + \overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{F_3} = \vec{0} --------- (2) \end{cases}$$

L'équation (2) s'écrirait :

$$M_D + \binom{0}{0} \bigwedge \binom{R_{Dx}}{R_{Dy}} + \binom{2}{4} \bigwedge \binom{0}{-F_1} + \binom{-3}{4} \bigwedge \binom{0}{-F_2} + \binom{0}{2} \bigwedge \binom{-F_3}{0} = 0$$

$$\Longrightarrow M_D + 0 - 2F_1 + 3F_2 + 2F_3 = 0 \Longrightarrow M_D = -148kN.m$$

La projection de l'équation (1) sur les axes du repère donne :

Suivant Ox :

$$R_{Dx} - F3 = 0 \Longrightarrow R_{Dx} = F3 = 65\ kN$$

Suivant Oy :

$$R_{Dy} - F1 - F2 = 0 \Longrightarrow R_{Dy} = 86\ kN$$

D'où :

Le module : $R_D = \sqrt{{R_{Dx}}^2 + {R_{Dy}}^2} = 107.8\ kN$

La direction de $\overrightarrow{R_D}$:

$\tan\theta = \frac{R_{Dy}}{R_{Dx}}$

<u>A.N :</u>

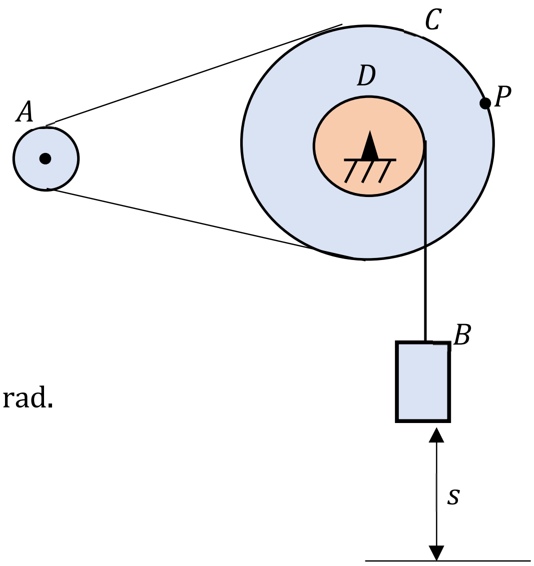
$$R_D = 107.8\ kN \quad et \quad tan\,\theta = \frac{86}{65} = 1.323 \Longrightarrow \theta = 52.92°/Ox$$

Chapitre 4 : Cinématique du solide rigide

Exercice 1.

La poulie A (rayon $r_A = 50mm$) initialement au repos, est actionnée par un moteur qui lui procure une accélération angulaire α = θ (rad/s^2). Une courroie permet de transmettre le mouvement vers la roue C ($r_C = 150mm$) ayant un moyen interne D ($r_D = 75mm$) qui tourne avec elle (Figure ci-après). On suppose que la courroie de transmission ne glisse pas sur la poulie et la roue C.

- Calculer la vitesse angulaire de la poulie *B*, la vitesse et l'accélération du point P quand la poulie *A* effectue 2 tours.
- Déterminer la distance parcourue par le solide B.



Solution

Données : $\alpha_A = \theta^{1/3}$ rad/s^2, $\theta = 2 * (2\pi) = 12.56$ rad.

A t_0=0s, θ_0=0 rad; ω_0=0 rad/s

1- *a- Calcul de la vitesse angulaire ω_A:*

On a:

$$\alpha_A d\theta = \omega d\omega \Longrightarrow \int_0^{\theta_A} \theta^{1/3}\, d\theta = \int_0^{\omega_A} \omega d\omega$$

$$\Longrightarrow \omega_A = 6.617\, rad/s.$$

b- Calcul de la vitesse ω_C de la roue C :

on a: $\omega_A.r_A = \omega_C.r_C \Longrightarrow \omega_c = 2.205\, rad/s$

c- Calcul de la vitesse du point P :

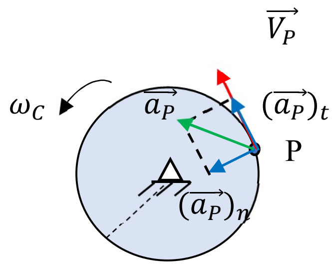
$V_P = \omega_C \cdot r_C = 0.33\, m/s$

d- Calcul de l'accélération α_C de la roue C :

on a: $\alpha_A.r_A = \alpha_C.r_C \Longrightarrow \alpha_c = \frac{0.05}{0.15}(12.56)^{1/3} = 0.775\, rad/s^2$

e- Calcul de l'accélération du point P :

- Composante tangentielle : $(a_P)_t = \alpha_C.r_C = 0.116\, m/s^2$
- Composante radiale : $(a_P)_n = \omega_C{}^2.r_C = 0.729\, m/s^2$



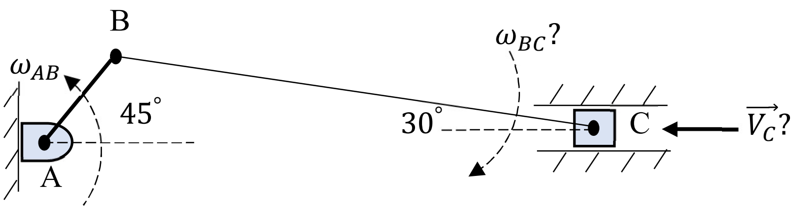
D'où : $a_P = \sqrt{(a_P)_t{}^2 + (a_P)_n{}^2} = 0.738\ m/s^2$

2- *Calcul de la distance parcourue par le solide B :*

On a : $\theta_D = \theta_c = \frac{\theta_A \cdot r_A}{r_C} = 4.187 \Longrightarrow s = \theta_D \cdot r_D = 0.314m.$

Exercice 2.

La tige AB tourne à la vitesse $\omega_{AB} = 6\, rad/s$ autour du point A dans le sens indiqué dans la figure ci-dessous.



En utilisant les relations entre les vitesses,

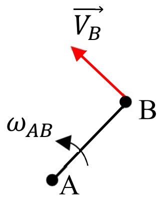
- Déterminer à cet instant les vitesses : $V_B, \omega_{BC}\ et\ V_C$.

On donne : AB = 200 mm, BC = 500 mm.

Solution

1- Calculons V_B :

Barre AB :

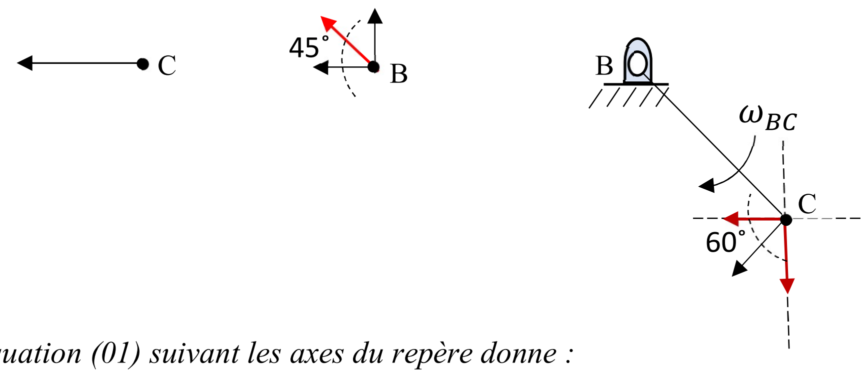


On a : $V_B = \omega_B . AB = 6 . 200 . 10^{-3} = 1.2\, m/s$

2- Relation entre les vitesses:

On a :

$$\vec{V}_C \quad = \quad \vec{V}_B \quad + \quad \vec{V}_{C/B} \quad (01)$$



Projection de l'équation (01) suivant les axes du repère donne :

Ox: $\xrightarrow{+}$ $-V_C = -V_B \cos 45^\circ - \omega_{BC} \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$

Oy: $\downarrow +$ $0 = -V_B \sin 45^\circ + \omega_{BC} \cdot BC \cdot \sin 60^\circ$

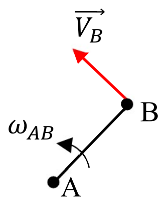
D'où : $\begin{cases} \omega_{BC} = 1.959\, rad/s \\ V_C = 1.338\, m/s \end{cases}$

Exercice 3.

- Refaire l'exercice 2 en utilisant le centre instantané de rotation (CIR).

Solution

Barre AB :



On a : $V_B = \omega_B . AB = 6 . 200 . 10^{-3} = 1.2\, m/s$

Barre BC :

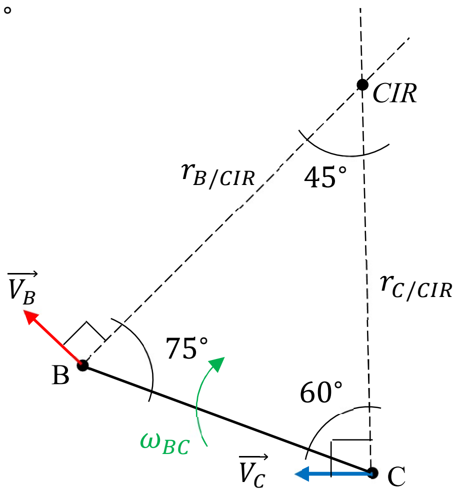
Construisons le centre instantané de rotation (CIR) qui est le point

d'intersection des droites ⊥ aux vecteurs vitesse $\overrightarrow{V_B}$ et $\overrightarrow{V_C}$ (Figure ci-après) :

D'après la règle des sinus, on aura :

$$\frac{r_{B/CIR}}{\sin 60°} = \frac{r_{C/CIR}}{\sin 75°} = \frac{BC}{\sin 45°}$$

D'où : $r_{B/CIR} = 0.612m$; $r_{C/CIR} = 0.683m$.



Déterminons la vitesse angulaire ω_{BC} :

$V_B = \omega_{BC} . r_{B/CIR} \Longrightarrow \omega_{BC} = 1.959\, rad/s$

La vitesse du point C :

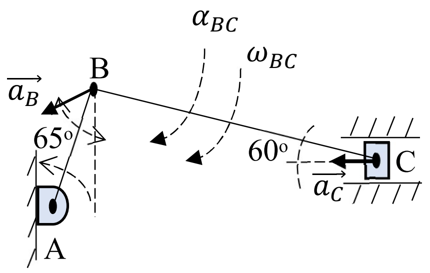
$V_C = \omega_{BC} . r_{C/CIR} \Longrightarrow V_C = 1.338\, m/s$

Exercice 4.

Les points B et C d'un mécanisme rigide se trouvent à l'instant (t) aux positions montrées dans la figure ci-contre. Sachant que l'élément BC tourne à la vitesse $\omega_{BC} = 2.828\ rad/s$ dans le sens indiqué,

- Calculer à cet instant, les accélérations α_{BC} et a_C.

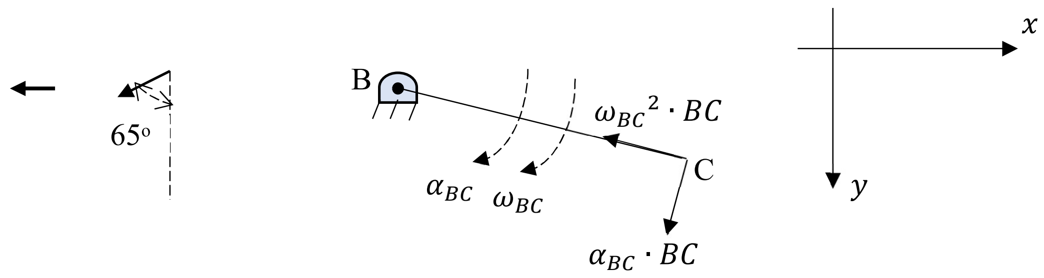
On donne: $a_B = 8.54\ m/s^2$, AB = 0.5 m, BC = 1 m.



Solution

Relation entre les accélérations :

$$\overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_B} + (\overrightarrow{a_{C/B}})_{t+n} \text{--------} (01)$$



Projection de l'équation. (01) sur les axes du repère donne :

Ox: $-a_C = -a_B sin65^\circ - \omega_{BC}{}^2 \cdot BCcos\ 60^\circ - \alpha_{BC} \cdot BCcos30^\circ$

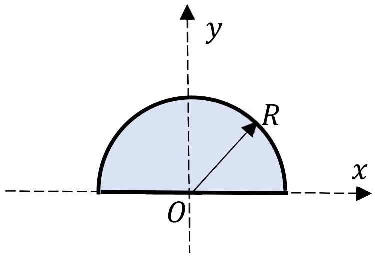
Oy: $0 = a_B cos65^\circ - \omega_{BC}{}^2 \cdot BCsin\ 60^\circ + \alpha_{BC} \cdot BCsin30^\circ$

D'où : $\alpha_{BC} = 6.63 rad/s^2$, $a_C = 17.48\ m/s^2$.

Chapitre 5 : Géométrie de masse

Exercice 1.

- Déterminer par intégration les coordonnées du centre d'inertie d'un demi-disque homogène de rayon R (figure ci-contre).



Solution

Méthode par intégration :

Par définition : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm$ ---------- (01)

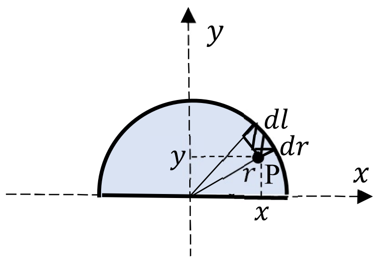
Par raison de symétrie, G se trouve sur Oy : $X_G = 0$;

y_G?

Sachant que : $m = \sigma S \Rightarrow dm = \sigma dS$

L'équation (01) s'écrit : $y_G = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} y\, dm$

$\Rightarrow y_G = \frac{1}{S}\iint_S ydS$------------ (02)



Pour un élément de surface dS (figure ci-contre) ;

On a : $dS = dl.dr = rdrd\theta$; $0 \leq r = \|\overrightarrow{OP}\| \leq R; 0 \leq \theta \leq \pi;$

On sait que: $S = \frac{\pi R^2}{2}$ pour un demi-disque,

$x = rcos\theta$; $y = rsin\theta$ sont les coordonnées du point P,

$\Longrightarrow y_G = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{\pi} sin\theta d\theta \cdot \int_0^{R} r^2 dr$;

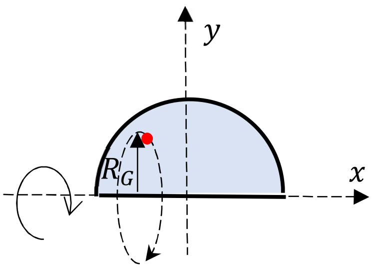
D'où : $y_G = \frac{4R}{3\pi}$;

$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

- Refaire l'exercice 01, en utilisant le théorème de Guldin.

Solution



Méthode de Guldin :

Par raison de symétrie : $x_G = 0$;

D'après le 2[er] théorème de Guldin :

On a : $V_L = (2.\pi.R_G).S$ avec $S = \frac{\pi R^2}{2}$

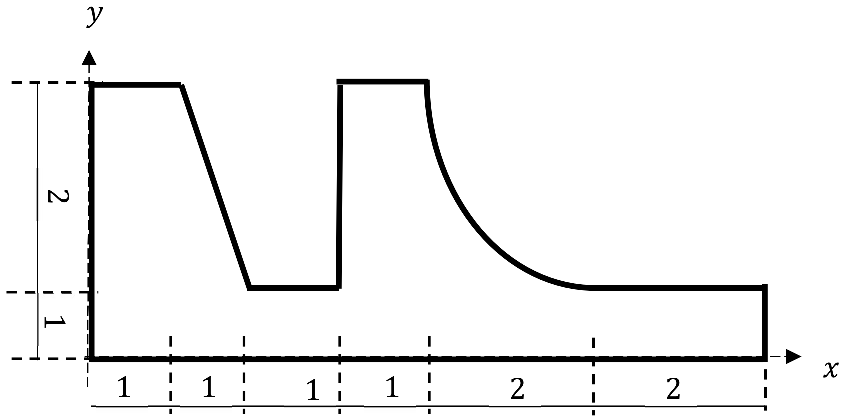
Or, la rotation du demi-disque autour de l'axe *Ox* engendre une sphère de volume : $V_L = \frac{4\pi.R^3}{3}$

$$\Longrightarrow V_L = 2.\pi.R_G.\frac{\pi\cdot R^2}{2} = \frac{4\pi.R^3}{3} \qquad \text{D'où :} \quad y_G = R_G = \frac{4R}{3\pi} ;$$

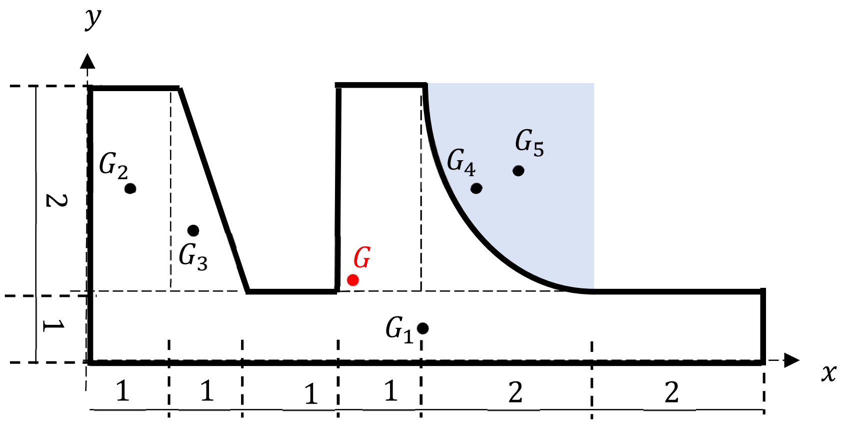
$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

- Trouver la position du centre d'inertie de la section homogène représentée dans la Figure suivante.



Solution



- Les coordonnées du centre d'inertie de la section sont données par :

$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{5} S_i}$;

$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{5} S_i}$

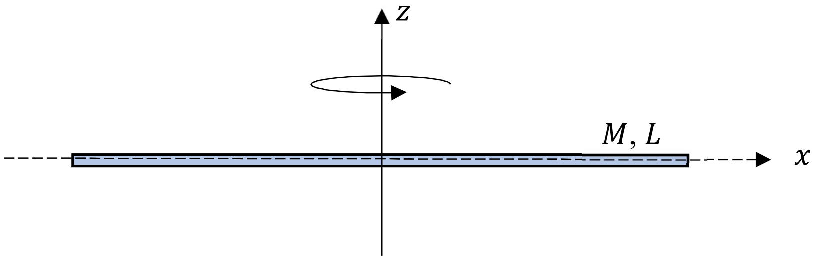
	$Aire\ S_i$	X_{Gi}	Y_{Gi}	$X_{Gi}.S_i$	$Y_{Gi}.S_i$
Rectangle 1	8 ×1 = 8	4	0.5	4 × 8 = 32	0.5 × 8 = 4
Rectangle 2	2×1 = 2	1/2 = 0.5	1+(2/2) = 2	0.5 × 2 = 1	2×2 = 4
Triangle 3	(2×1)/2 = 1	1+(1/3) = 1.33	1+(2/3) = 1.67	1.33×1 = 1.33	1.67×1= 1.67
Rectangle 4	3 × 2 = 6	3 + (3/2) = 4.5	1+ (2/2) = 2	6×4.5= 27	6×2 = 12
Quart de disque 5	-(3.14 × 2^2)/4 = - 3.14	6-(4x2/3×3.14) = 5.15	3-(4x2/3×3.14) = 2.15	-5.15×3.14 =-16.17	- 2.15×3.14=-6.751
somme	13.86			45.16	14.919

D'où : $x_G = 3.258$ et $y_G = 1.076$.

Exercice 4.

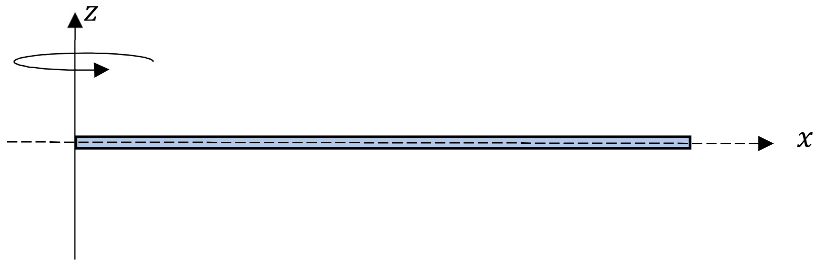
On considère une tige mince homogène de masse M et de longueur L (figure ci-après).

1- Déterminer le moment d'inertie de la tige autour de l'axe z.

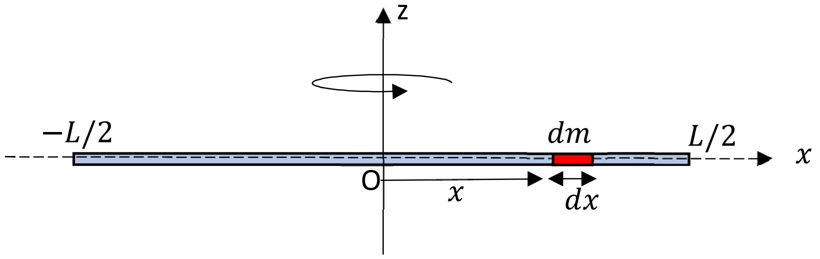


Déplaçons l'axe de rotation z vers l'extrémité de la tige comme l'illustre la figure suivante.

2- En déduire le moment d'inertie de la tige autour de l'axe z.



Solution



1- Par définition, le moment d'inertie est :

$I = \int r^2 \, dm = \int x^2 \, (\lambda \, dl)$ ------------ (1)

Pour un solide linéaire : $M = \lambda \, L$, où M est la masse du solide, L sa longueur, et λ sa densité linéique.

$\lambda = C^{te}$ (solide homogène) ;

On aura donc :

$dm = \lambda \, dl$, où $dl = dx$,

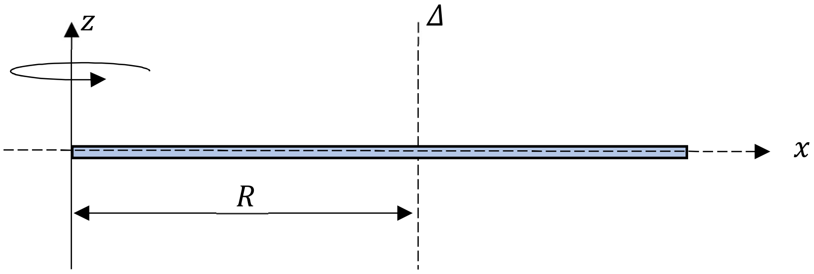
L'équation (1) devient :

$$I = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \, dx = \lambda \frac{L^3}{12}$$

D'où :

$$I_\Delta = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

2- D'après le théorème d'Huygens,



$I_z = I_\Delta + MR^2$

$\Rightarrow I_z = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$

Exercice 5.

1- Déterminer la matrice d'inertie $I_O(S)_{/R}$ d'une section rectangulaire homogène.

2- En déduire la matrice d'inertie $I_G(S)_{/R}$ de la section.

Solution

1- La matrice d'inertie en O dans la base $R\ (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du solide (S) est :

$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Où :

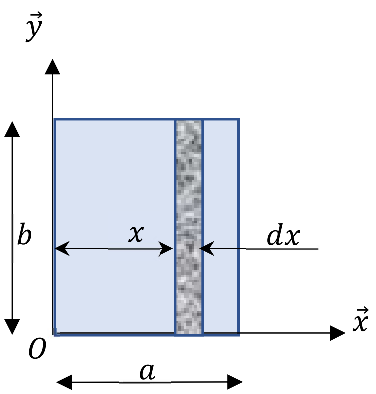
$I_{xx} = \int_{P\in(S)}(y^2 + z^2)dm$; $I_{yy} = \int_{P\in(S)}(x^2 + z^2)dm$; $I_{zz} = \int_{P\in(S)}(x^2 + y^2)dm$;

$I_{xy} = \int_{P\in(S)} xydm$; $I_{xz} = \int_{P\in(S)} xzdm$; $I_{yz} = \int_{P\in(S)} yzdm$

Pour un solide surfacique : $M = \sigma S$, où M est la masse du solide, S sa surface, et σ sa densité surfacique.

$\sigma = C^{te}$ (section homogène) ;

Comme $z = 0$ (solide plan), alors :



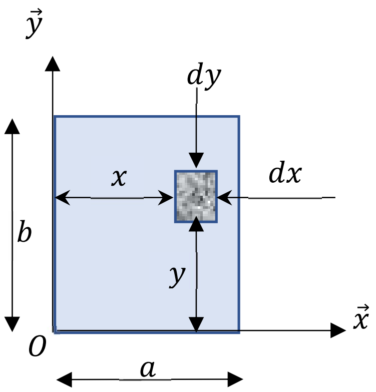
$$I_{xx} = \int_{P\in(S)} y^2 dm$$

$$\Rightarrow I_{xx} = \int_0^b y^2 \sigma a dy = \sigma a \left[\frac{b^3}{3}\right] = \frac{1}{3}Mb^2$$

Il en est de même pour I_{yy} :

$I_{yy} = \int_0^a x^2 \sigma b dx = b\left[\frac{a^3}{3}\right] = \frac{1}{3}Ma^2$;

$I_{zz} = \int_{P\in(S)}(x^2+y^2)dm = \iint_S (x^2+y^2)\sigma dxdy = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$;



$I_{xz} = I_{yz} = 0$;

$$I_{xy} = \int_{P\in(S)} xydm = \sigma\int_0^a xdx\int_0^b ydy = \frac{Mab}{4}$$

La matrice d'inertie en O dans la base $R\ (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de la section rectangulaire est donc :

$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

2- D'après le théorème d'Huygens, on a :

$$I_{xx} = I_{Gx} + M({y_G}^2 + {z_G}^2);\ I_{yy} = I_{Gy} + M({x_G}^2 + {z_G}^2)\ ;\ I_{zz} = I_{Gz} + M({x_G}^2 + {y_G}^2)$$

$$I_{xy} = I_{Gxy} + Mx_Gy_G;\ I_{xz} = I_{Gxz} + Mx_Gz_G\ ;\ I_{yz} = I_{Gyz} + My_Gz_G$$

$\Rightarrow I_{Gx} = I_{xx} - M({y_G}^2) = \frac{Mb^2}{3} - M\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Mb^2$;

$I_{Gy} = I_{yy} - M(x^2) = \frac{Ma^2}{3} - M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ma^2$;

$I_{Gz} = I_{zz} - M({x_G}^2 + {y_G}^2) = \frac{M(a^2+b^2)}{3} - M\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$;

$I_{Gxy} = I_{xy} - Mx_G y_G = \frac{1}{4}Mab - \frac{1}{4}Mab = 0$;

$I_{Gxz} = I_{xz} - Mx_G z_G = \frac{1}{4}Mab - \frac{1}{4}Mab = 0$;

$I_{Gyz} = I_{yz} - My_G z_G = \frac{1}{4}Mab - \frac{1}{4}Mab = 0$;

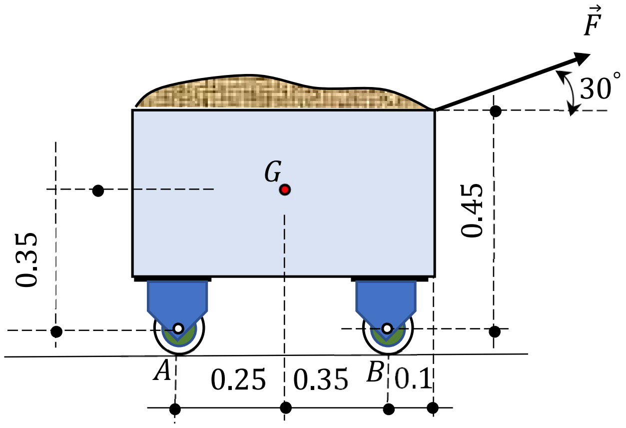
La matrice d'inertie en G dans la même base de la section rectangulaire est donc :

$$I_G(S)_{/R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

Chapitre 6 : Dynamique du solide rigide

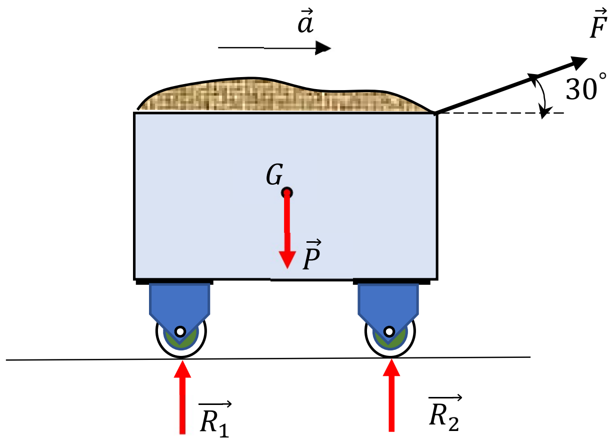
Exercice 1.

Une force $\vec{F}$ de 200N est appliquée à un chariot de 50kg. Si le centre de masse se trouve à G (figure suivante), calculer l'accélération du chariot ainsi que les réactions au niveau des roues en A et B.



N.B. Les longueurs sont exprimées en mètre (m).

Solution



On a : $\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a_G} \rightarrow \vec{R_1} + \vec{P} + \vec{R_2} + \vec{F} = m\vec{a_G}$ ---------- (1)

Projection de l'équation (1) suivant les axes du repère :

Ox : $\xrightarrow{+}$ $\quad F\cos 30^\circ = ma_{Gx}$

$$\Rightarrow a = 3.46 m/s^2$$

Oy: $\uparrow +$ $\quad F\sin 30^\circ - P + R_1 + R_2 = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 = 390.5N$

D’autre part, on a :

$$\sum M/_G = 0$$

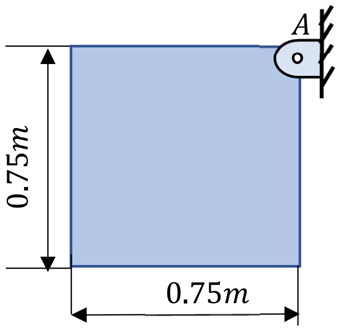
$$\Longrightarrow -0.25R_1 + 0.35R_2 + 0.45F sin30^{\circ} - 0.1F cos30^{\circ} = 0$$

La résolution du système $\begin{cases} R_1 + R_2 = 390.5N \\ -R_1 + 1.4R_2 = -110.72 \end{cases}$ aboutira aux résultats suivants :

$R_1 = 273.925N$; $R_2 = 116.575N$.

<u>Exercice 2.</u>

Une plaque de 20 kg est libérée à partir du repos de la position montrée. Déterminer son accélération angulaire initiale et les composantes de la réaction à l’articulation A.



<u>Solution</u>

On a : $(a_G)_n = \omega^2.AG$

$\omega = 0rad/s$ (À partir du repos) $(a_G)_n = 0m/s^2$

$$(a_G)_t = \alpha.AG$$

$$AG = \sqrt{0.375^2 + 0.375^2} = 0.53m$$

$$I = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2) = \frac{1}{12}(20)(0.75^2 + 0.75^2) = 1.785kg.m^2$$

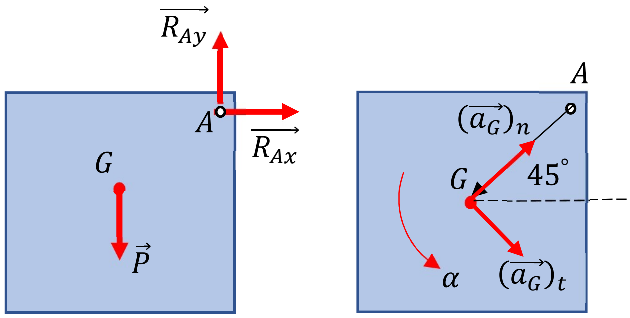
D’autre part, pour un solide en rotation autour d’un axe fixe (passant par A dans notre cas), on a l’équation des moments suivante :

$$\sum {}^{M}/_{A} = (M_C)/A$$

$$\Longrightarrow mg.AG_x = m(a_G)_t AG + I\alpha$$

$$\Longrightarrow 20 * 9.81 * 0.375 = 20.(0.53\alpha).0.53 + 1.785\alpha$$

D'où : $\alpha = 9.94\, rad/s^2$, et $(a_G)_t = 5.27 m/s^2$



Forces Accélérations

Rappelons que : $\sum_i \vec{F_i} = m\overrightarrow{a_G} \rightarrow \overrightarrow{R_A} + \vec{P} = m\overrightarrow{a_G}$ ---------- (1)

Projection de l'équation (1) suivant les axes du repère :

Ox : $R_{Ax} = m(a_G)_t cos45^\circ$

$$\Longrightarrow R_{Ax} = 74.53N$$

Oy: $R_{Ay} - P = -m(a_G)_t sin45^\circ \Longrightarrow R_{Ay} = 121.68N.$

Références :

1. Mécanique générale. Cours et exercices corrigés, Dunod, Sylvie POMMIER, Yves BERTHAUD, 2010, 270p.

2. Mécanique éléments de mécanique rationnelle : cours et exercices corrigés, Hermes, Roger BOUDET, Alain CHAUVIN, 1997, 248p.

3. Mécanique générale – Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours, OPU, Tahar HANI 1996, 388p.

4. Mécanique du solide indéformable : Cours et exercices résolus, Ellipses, Yves BREMONT, Paul REOCREUX, 1995, 314p.

5. Théorie et applications de la mécanique générale : 720 exercices résolus, Série Schaum, MURRAY R. SPIEGEL, 1986, 367p.

6. Mécanique à l'usage des ingénieurs. Statique, McGraw-Hill, Ferdinand P. BEER, E. Russell JOHNSTON, JR., 1981, 518p.