

1. 集合 A 上有封闭的运算 \circ , (G, \cdot) 是么半群, 映射 $f: A \rightarrow G$ 满足 $f(a \circ b) = f(a) \cdot f(b)$, 且 $\ker f$ 是么半群. 求证: A 不一定是么半群.

2. X 与 Y 是拓扑空间, 两个它们之间的连续映射 f_1, f_2 满足 $f_1(X) \cap f_2(X) \neq \emptyset$, 求证: $f_1(X) \cup f_2(X)$ 中的任何两点道路连通.

3. (H, \cdot) 是交换群, $j: H \rightarrow F$ 是满的群同态. 对 $a \in H$, 记 $H_a = \{an : n \in \ker j\}$, 有对运算 \cdot 封闭的集合 A 满足 $\bigcup_{a \in A} H_a = H$, 且 $\forall a_0 \in A$, $\bigcup_{a \in A \setminus \{a_0\}} H_a \subsetneq H$. 求证: $H \cong \ker j \times F$.