莫比乌斯函数 $\mu(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ (-1)^r & n\text{是}r\text{个不同素数的乘积}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}$ 满足莫比乌斯反演公式 $f(n)=\sum\limits_{d|n}\mu(d)F(\frac{n}{d})$.

那么，都有哪些函数满足这个公式？下面就来证明这个函数是唯一的，即 $\mu(n)$.

由于必须要出现 $f(n)$, 易得 $\mu(1)=1$. 设 p 是素数，$f(p^2)=F(p^2)+\mu(p)F(p)+\mu(p^2)F(1)=f(p^2)+(\mu(p)+1)f(p)+(\mu(p)+\mu(p^2)+1)f(1)$, 解得 $\mu(p)=-1,\mu(p^2)=0$.

下证 p_i 彼此不同的时候，$\mu(p_1p_2...p_r)=(-1)^r$. $r=1$ 的情况已经证明过，假设结论对于任意 $r_0<r$ 都成立，记$p_1p_2...p_r=n$, 考虑$f(n)=F(n)+(-1)\sum\limits_{i=1}^{r}F(\frac{n}{p_i})+(-1)^2\sum\limits_{1\le i<j\le n}F(\frac{n}{p_ip_j})+...+(-1)^{r-1}\sum\limits_{i=1}^{r}F(p_i)+\mu(n)F(1)=(f(n)+\sum\limits_{i=1}^{r}f(\frac{n}{p_i})+\sum\limits_{1\le i<j\le n}f(\frac{n}{p_ip_j})+...+f(1))+(-1)\sum\limits_{i=1}^{r}(f(\frac{n}{p_i})+\sum\limits_{j\ne i}f(\frac{n}{p_ip_j})+...+f(1))+...+(-1)^{r-1}\sum\limits_{i=1}^{r}(f(p_i)+f(1))+\mu(n)f(1)$

$f(1)$ 的系数应为0, 把上式所有 $f(1)$ 的系数相加，得

$1+(-1)\binom{r}{1}+(-1)^2\binom{r}{2}+...+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}+\mu(n)=0=(1-1)^r=1+(-1)\binom{r}{1}+(-1)^2\binom{r}{2}+...+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}+(-1)^r$ 由此知 $\mu(n)=(-1)^r$, 归纳完毕.

此时我们已经确定了 $\mu(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ (-1)^r & n\text{是}r\text{个不同素数的乘积}\end{cases}$, 暂设$\mu(n)$在其它情况下都取值为0. 设$n=\prod\limits_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$ 是 n 的质因数分解，考虑

$\sum\limits_{d|n}\mu(d)F(\frac{n}{d})=F(n)+(-1)\sum\limits_{i=1}^{r}F(\frac{n}{p_i})+(-1)^2\sum\limits_{1\le i<j\le r}F(\frac{n}{p_ip_j})+...+(-1)^rF(\frac{n}{p_1p_2...p_r})=\sum\limits_{d|n}f(d)+(-1)\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{d|\frac{n}{p_i}}f(d)+(-1)^2\sum\limits_{1\le i<j\le r}\sum\limits_{d|\frac{n}{p_ip_j}}f(d)+...+(-1)^r\sum\limits_{d|\frac{n}{p_1p_2\cdots p_r}}f(d)$

记 m_d为 d 中那些幂次与 n 相等的素数个数，如 $m_n=r$. 则有

$\sum\limits_{d|n}\mu(d)F(\frac{n}{d})=\sum\limits_{d|n}f(d)+(-1)\sum\limits_{d|n}\binom{r-m_d}{1}f(d)+(-1)^2\sum\limits_{d|n}\binom{r-m_d}{2}f(d)+$

$... + (-1)^r \sum_{d|n} \begin{pmatrix} r - m_d \\ r \end{pmatrix} f(d)$

注意这里特殊定义当 $n < m$ 时，$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = 0$. 化简可得

$\sum_{d|n} \mu(d) F(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} (1 + (-1) \begin{pmatrix} r - m_d \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)^2 \begin{pmatrix} r - m_d \\ 2 \end{pmatrix} + ... + (-1)^r \begin{pmatrix} r - m_d \\ r \end{pmatrix}) f(d) = \sum_{d|n} (1-1)^{r-m_d} f(d) = \sum_{d|n, m_d = r} f(d) = f(n)$

其实这也是对莫比乌斯定理的证明.

倒数第二个等号成立，是因为只可能 $m_d = r$ 时 $f(d)$ 的系数可能不为零，那再特殊考虑这个情况即可，发现系数为1. 有了这个结果后，$\mu(n)$ 就要满足 $\sum \mu(d) F(\frac{n}{d}) = 0$, 其中 d 既不等于1, 也不是若干素数的乘积. 将其它 $\mu(d)F(d)$ 与 $f(n)$ 相消，以下证明只考虑这些 d.

先证 $\forall k > 1, \mu(p^k) = 0$. 假设 $\mu(p^{k_0}) = 0$ 对任何 $k_0 < k$ 都成立，$k = 1$ 的情况在最开始已经证明过。考虑 $\mu(p^{k+1}) = F(p^{k+1}) - F(p^k) + \mu(p^{k+1}) F(1)$, 通过 $f(1)$ 系数知 $\mu(p^{k+1}) = 0$.

再归纳证明 $\forall n > 1, \mu(p_i^n p_j) = 0 (i \neq j)$. $n = 2$ 时，由于 $\mu(p_i^2) = 0$, $\mu(p_i p_j)$ 又已经不考虑，若 $\mu(p_i^2 p_j) \neq 0$, 消不掉 $F(\frac{n}{p_i^2 p_j})$ 产生的 $f(\frac{n}{p_i^2 p_j})$ 项，故 $\mu(p_i^2 p_j) = 0$. 进而无法消掉 $F(p_i^3 p_j)$ 产生的 $f(\frac{n}{p_i^2 p_j})$ 项，故 $\mu(p_i^3 p_j) = 0$. 归纳可知结论成立.

考虑 $\mu(p_i^2 p_j^2)$. 由于 $\mu(p_i^2 p_j) = \mu(p_i p_j^2) = 0$, $f(p_i^2 p_j^2)$ 消不掉，故 $\mu(p_i^2 p_j^2) = 0$. 假设 $\forall a \leq \alpha, b \leq \beta$ 满足 $a + b < \alpha + \beta$ 且 a 或 b 大于1, 都有 $\mu(p_i^a p_j^b) = 0$, 则同理可知 $\mu(p_i^\alpha p_j^\beta) = 0$.

类似地归纳，得 $\forall r, \mu(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}) = 0$ 若 $\exists \alpha_i > 1$. 这就证明了我们的结论.