

TP4: Reporte de Avances

Grupo 6 - ASSD

Abril 2020

1. Resumen

La cancelación activa de ruido es un método para reducir ruido indeseado adicionando un segundo sonido confeccionado para cancelar el primero. Mediante la inyección de una onda de igual amplitud pero fase invertida respecto de la onda de ruido, se aprovecha el fenómeno de interferencia destructiva para aumentar la relación señal a ruido.

Existen distintos tipos de sistemas de cancelación de ruido activa: los hay retroalimentados, en los que la señal se muestrea después de la inyección de la onda cancelante para corregir el error de cancelación y prealimentados, en los que la onda se muestrea antes y después, generando la onda a partir de la resta de las muestras.

La operación de cancelación de ruido se implementa mediante un filtro adaptativo. Un filtro adaptativo es un filtro que tiene la habilidad de adaptarse a un ambiente desconocido. En estos filtros se recibe una señal de entrada y se compara con una respuesta deseada, generando un error. Este error es utilizado para modificar los coeficientes del filtro, generalmente llamados "pesos", para minimizar el error entre la salida y la respuesta deseada.

Un filtro adaptativo está definido por cuatro componentes principales:

1. las señales a ser procesadas;
2. la estructura, que define cómo la señal de salida es computada a partir de la de entrada;
3. los parámetros dentro de esta estructura que pueden ser cambiados durante la operación, iterativamente, modificando el comportamiento del filtro;
4. el algoritmo adaptativo, que describe cómo son modificados estos parámetros.

Existen varios algoritmos adaptativos, que tienen diferentes ventajas y desventajas respecto de su convergencia, estabilidad, complejidad de implementación, etc. Algunos de ellos son:

1. el algoritmo recursivo de cuadrados mínimos, (RLS, por sus siglas en inglés);
2. el algoritmo de cuadrados mínimos promedio, (LMS);

3. el algoritmo de cuadrados mínimos promedio normalizado, (NLMS).

En el trabajo de investigación se investigarán los métodos, las estructuras y los algoritmos; también se diseñará e implementará físicamente un sistema de cancelación de ruido completo en audífonos, apuntando a maximizar su estabilidad, rango de frecuencias y amplitud de la atenuación.

2. Sistemas de Cancelación de Ruido

2.1. Sistemas Prealimentados o *Feedforward*

2.1.1. Sistema de Banda Angosta o *Narrowband*

En muchas aplicaciones de ANC las señales de ruido son periódicas. Estas señales pueden ser generadas por maquinas como motores, ventiladores, compresores etc. Este sistema utiliza la periodicidad de estas señales para cancelar el ruido. El sistema se basa en que una señal periódica puede ser anulada por otra señal periódica con la misma frecuencia pero con sentido opuesto. Utiliza el principio de las series de Fourier, que cualquier función periódica puede ser generada por una suma de sinodales.

En Figura 1 se muestra el sistema. Como se puede observar, el sistema cuenta con un sensor, un micrófono de error, el filtro ANC y un parlante de cancelación de ruido. A continuación se enumeran los pasos del diagrama:

1. El sensor, que es un dispositivo nanocaustico detecta la frecuencia fundamental de la señal de ruido generada por la fuente.
2. La información es enviada al generador de señal
3. El generador de señal sintetiza una señal periódica de signo opuesto

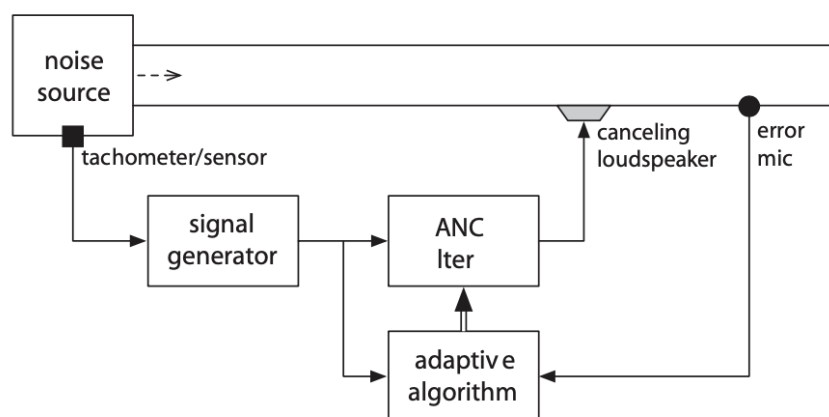


FIGURA 1: Diagrama del sistema *Narrowband*

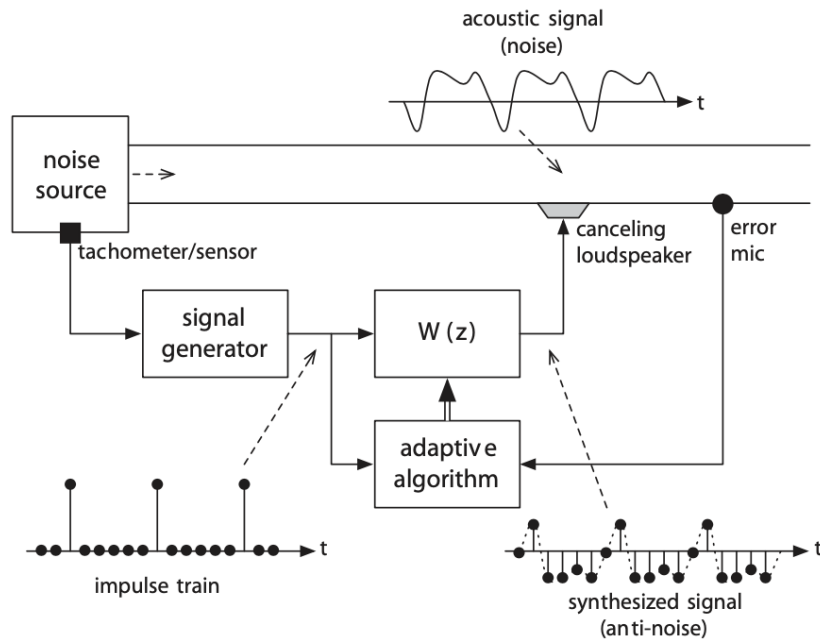


FIGURA 2: Diagrama de síntesis de la señal

4. La señal generada es procesada por un filtro adaptativo (el filtro ANC) que le da forma al espectro para que la señal coincida con la amplitud y fase de la señal de ruido
5. La señal es enviada al parlante de cancelación de ruido
6. El micrófono de error detecta el ruido residual e instruye al filtro ANC para hacer las modificaciones necesarias

2.1.2. Método de síntesis de señal

El método de síntesis genera una versión de señal de ruido con signo opuesto en el parlante de cancelación de ruido mediante el siguiente mecanismo. Se selecciona el filtro ANC para que sea un filtro FIR con una longitud igual a un periodo de la señal de ruido. El mismo es excitado por una secuencia de impulsos espaciados por un periodo de la señal sintetizada y sus coeficientes son ajustados de manera que convergen a los *Samples* de la señal sintetizada. La Figura 2 muestra un diagrama sobre estos conceptos.

Para continuar con la explicación del método de síntesis de señal se excluye el camino entre el parlante y el micrófono de error. De esta manera, el diagrama equivalente resulta el de la Figura 3. Donde $d(n)$ es la señal de ruido que llega al micrófono de error y el sumador representa al micrófono.

Se asume que el ruido periódico tiene un periodo de N *Samples*. Luego, para un instante de

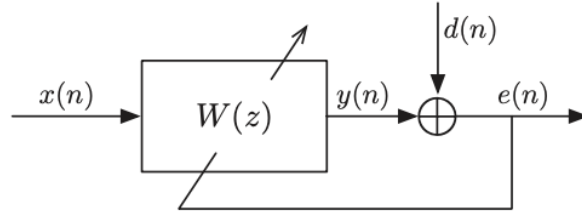
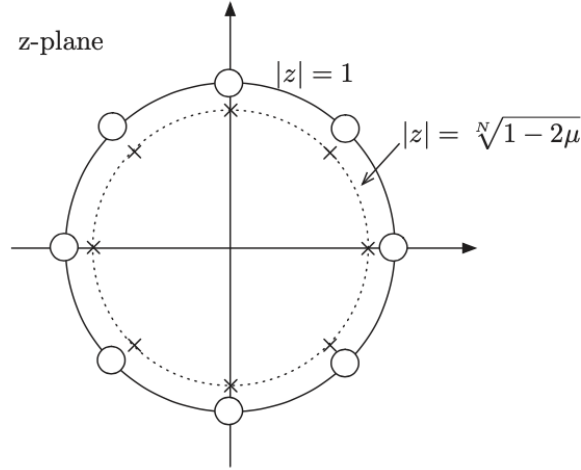


FIGURA 3: Diagrama equivalente

FIGURA 4: Diagrama polos y ceros para $N = 8$

tiempo n la función transferencia del filtro es:

$$W(z) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i(n) z^{-i} \quad (1)$$

La función transferencia que relaciona el ruido original, $d(n)$ y su versión suprimida, $e(n)$ es:

$$H(z) = \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - (1 - 2\mu)z^{-N}} \quad (2)$$

La función $H(z)$ tiene N ceros equidistantes en posiciones $0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots, \frac{2(N-1)\pi}{N}$ en el círculo unitario $|Z| = 1$. Tiene N polos en los mismos ángulos, pero en el círculo $|Z| = (1 - 2\mu)^{1/N}$. En la Figura 4 se ve un diagrama de los polos y ceros y en la Figura 5 la respuesta que generan.

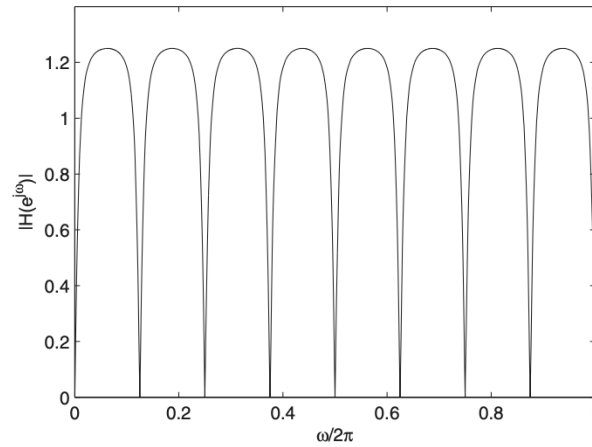


FIGURA 5: Respuesta en frecuencia para el filtro con $N = 8$ y $\mu = 0.2$

2.1.3. Sistema de Banda Ancha o *Broadband*

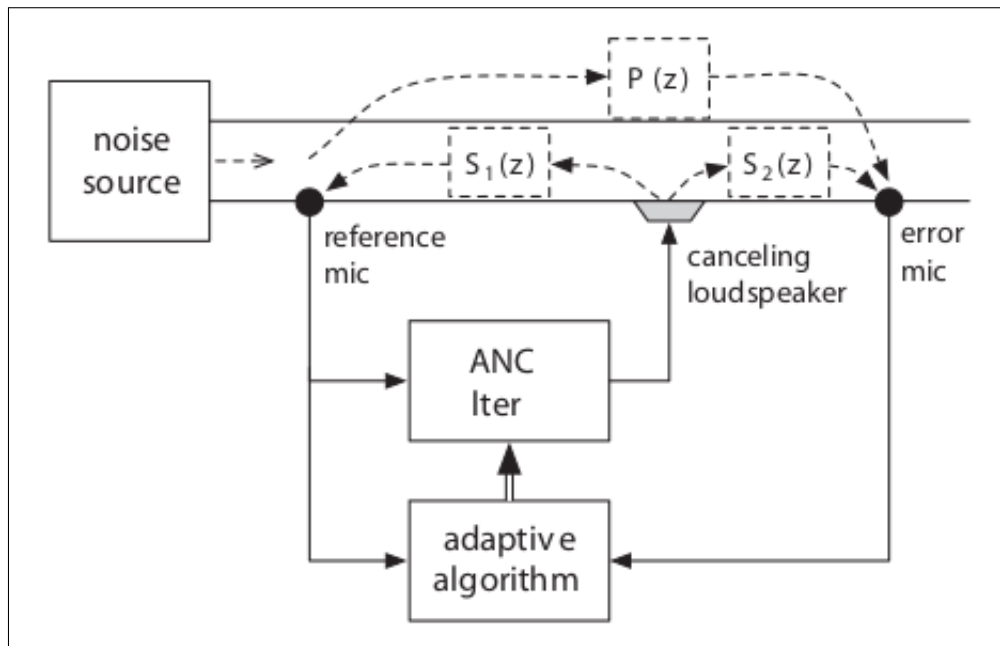


FIGURA 6: Broadband ANC en un ducto de aire

El camino primario ($P(z)$) se define como el camino acústico entre las coordenadas cercanas al micrófono de referencia y el micrófono de error. También existe dos caminos secundario que van desde el altavoz de cancelación hasta la señal de referencia $S_1(z)$ por un lado y, hasta el micrófono de error $S_2(z)$ por el otro. El filtro ANC debe estar adaptado para que la suma de las señales acústicas sobre el micrófono de error tienda a anularse.

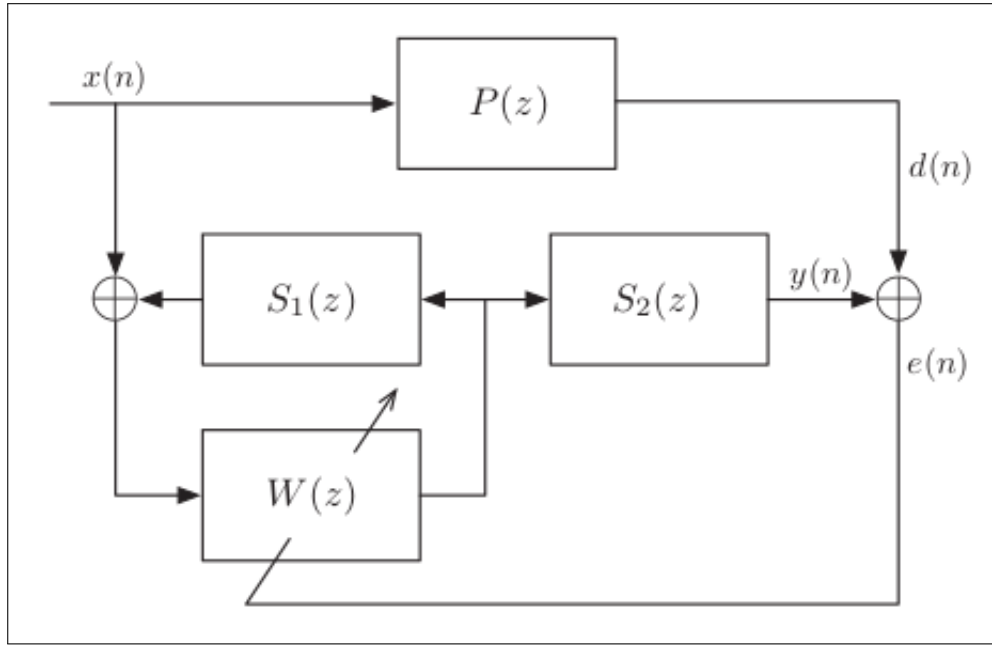


FIGURA 7: Diagrama en bloques simplificado del sistema con $S_1(n)$ removido.

En el diagrama de bloques podemos observar los elementos que caracterizan al circuito. El filtro adaptativo ($w(z)$) representado por la función de transferencia del ANC. El micrófono de error es el módulo sumador cuya señales de entrada son $d(n)$ e $y(n)$. Los coeficientes del filtro adaptativo convergen hacia el negativo de los respectivos valores de la transferencia que modela el camino primario. Si evaluamos el diagrama en bloques equivalente del sistema obtenemos la transferencia de la señal de entrada entre $x(n)$ y la señal de error $e(n)$.

$$\frac{E(z)}{X(z)} = P(z) + \frac{W(z)}{1 - S_1(z) \cdot W(z)} \cdot S_2(z) \quad (3)$$

En la condición de convergencia, el error se anula y obtenemos la transferencia que anula el sistema equivalente del camino primario $P(z)$.

$$W(z) = \frac{P(z)}{P(z) \cdot S_1(z) - S_2(z)} \quad (4)$$

Una de las posibles soluciones es utilizar un filtro IIR pero su adaptación puede ser problemática porque en el proceso de adaptación los polos cercanos al círculo unitario pueden desplazarse fuera del mismo generando la condición de inestabilidad al sistema. La utilización de un filtro FIR como alternativa también tiene dificultades en la práctica, debido a la localización del micrófono de error y el altavoz de cancelación a distancia del micrófono de referencia en comparación con la cercanía de los dos primeros. En función de los modelos presentados, este arreglo en los componentes resulta en funciones de transferencia de alto orden para el camino primario $P(z)$ y la primera sección del camino secundario $S_1(z)$, mientras que la segunda sección del camino secundario $S_2(z)$ posee una transferencia de bajo orden.

La función transferencia solo puede ser optimizada con un filtro FIR de alto orden pero como veremos a continuación, si cancelamos el efecto de $S_1(z)$ digitalmente, podemos lograr bajar el orden para que sea manejable.

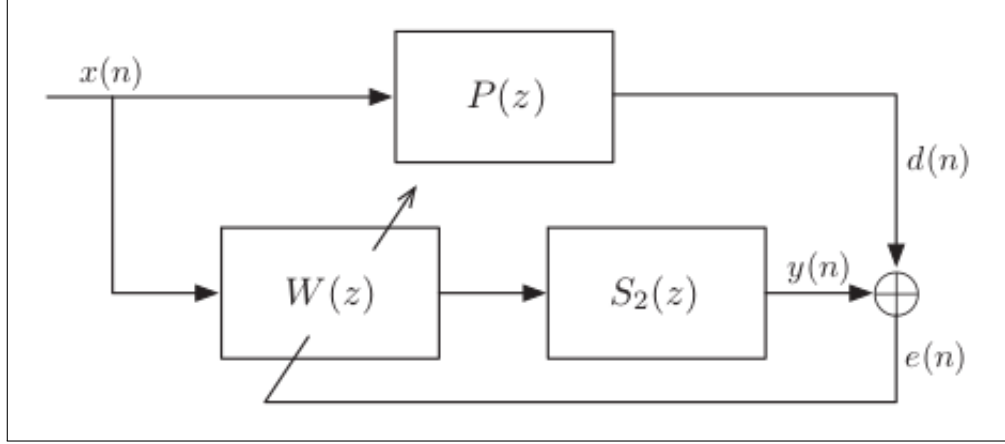


FIGURA 8: Diagrama en bloques simplificado del sistema con $S_1(n)$ removido.

El objetivo del sistema es reducir la señal del micrófono de error ($e(n)$) a 0, lo cual se satisface con la ecuación (5).

$$W(z) \cdot S_2(z) + P(z) = 0 \rightarrow W(z) = -\frac{P(z)}{S_2(z)} \quad (5)$$

La solución puede ser aproximada por un filtro FIR que puede ser adaptado usando una variedad de algoritmos que explicaremos en posteriores secciones.

2.2. Sistemas Retroalimentados o *Feedback*

La principal característica o restricción que presenta este tipo de configuración es que la señal que se desea reconstruir $d(n)$ está disponible en el sistema, y por lo tanto, el desafío principal es obtener una buena estimación $\hat{d}(n)$. La Figura 9 muestra el diagrama de bloques que componen un sistema de Retroalimentación o Feedback.

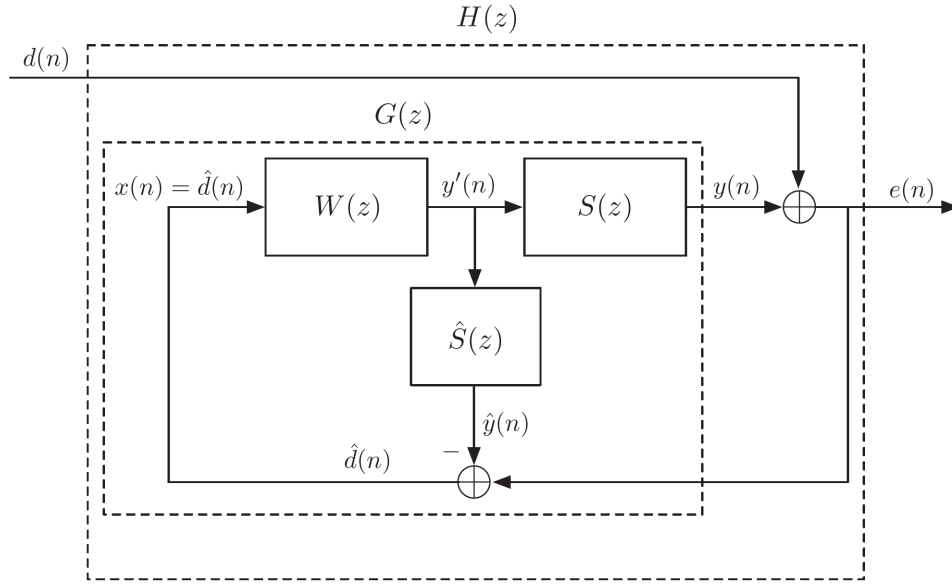


FIGURA 9: Diagrama en bloques de sistema Feedback de canal simple

Se observa que cuando $\hat{d}(n)$ es una buena estimación de $d(n)$, para reducir el error residual $e(n)$, $W(z)$ tiene que ser tal que

$$W(z)S(z) = -1 \quad (6)$$

Este escenario conlleva que $y(n) = -\hat{d}(n)$ y, por lo tanto $e(n) = d(n) - \hat{d}(n)$ será una señal de error pequeña cuando $\hat{d}(n)$ sea una buena estimación. La ecuación 6 implica que $W(z) = -1/\hat{S}(z)$, y esta configuración de $W(z)$ puede no ser implementable en la práctica debido a la posibilidad de que $1/\hat{S}(z)$ sea una transferencia no causal. Es debido a esto que en la práctica uno tiene que recurrir a una aproximación $W(z) \approx -1/\hat{S}(z)$.

A partir de la obtención de la transferencia $H(z)$ entre $d(n)$ y $e(n)$ se pueden obtener mayores detalles sobre las características del sistema

$$\frac{Y'(z)}{E(z)} = \frac{W(z)}{1 + W(z)\hat{S}(z)} \quad (7)$$

Y además,

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{E(z)} \\ &= \frac{Y'(z)}{E(z)} S(z) \\ &= \frac{W(z)S(z)}{1 + W(z)\hat{S}(z)} \end{aligned} \quad (8)$$

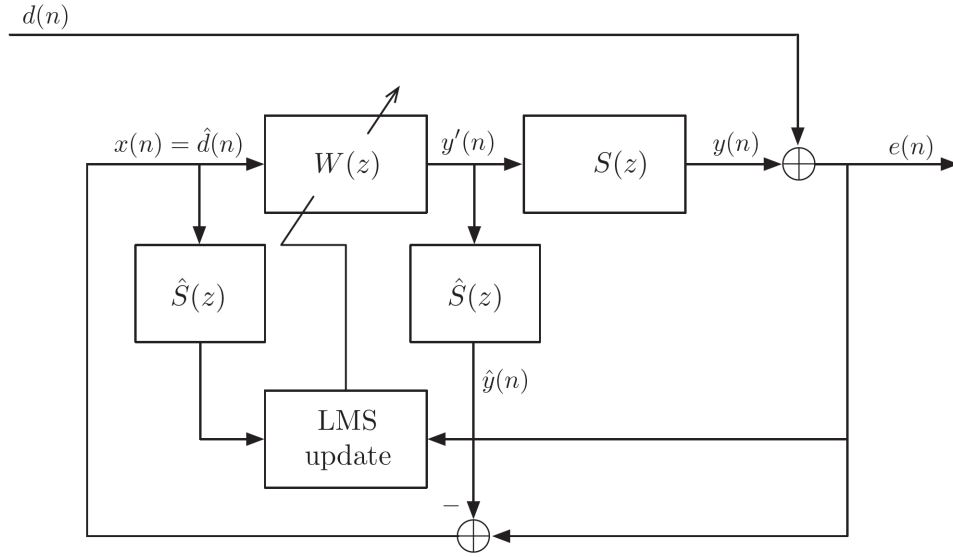


FIGURA 10: Sistema ANC con algoritmo Fx-LMS

Finalmente se obtiene,

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1}{1 - G(z)} \\
 &= \frac{1 + W(z)\hat{S}(z)}{1 + W(z)(\hat{S}(z) - S(z))}
 \end{aligned} \tag{9}$$

La transferencia $S(z)$ representa el modelo equivalente del circuito por el cual se transfiere la señal $y(n)$ al ser convertida al dominio analógico y el modelo físico del medio por el cual se transporta la señal hasta ser capturada por un sensor. El bloque $\hat{S}(z)$ implementa una estimación de la transferencia $S(z)$.

Se observa que si se implementa una buena estimación $\hat{S}(z)$ tal que $\hat{S}(z) = S(z)$, entonces la ecuación 9 se reduce a

$$H(z) = 1 + W(z)S(z) \tag{10}$$

Además, si $\frac{1}{S(z)}$ es estable y causal, y $W(z)$ se configura en $-1/S(z)$, ocurrirá una supresión perfecta de $d(n)$. Dado que la estabilidad y la causalidad de $1/S(z)$ no puede ser garantizada en la practica, debe tomarse una decisión de compromiso en la determinación de la transferencia $W(z)$ para minimizar el error $e(n)$, es aquí donde entra en juego el algoritmo de FX-LMS desarrollado en la sección 3.2.

La Figura 10 muestra el sistema que incluye el módulo que implementa el algoritmo de optimización

3. Algoritmos

Para la implementación de filtros adaptativos de señales, se distingue entre dos categorías de algoritmos utilizados para minimizar el error cuadrático entre la salida y el resultado buscado: aquellos que estiman los parámetros del filtro de forma determinista y aquellos que lo hacen mediante métodos estadísticos.

Los primeros se caracterizan por presentar altas velocidades de convergencia, pero a su vez implican grandes necesidades en capacidad de cómputo: el método de cuadrados mínimos recursivo (en adelante RLS, por sus siglas en inglés) es un ejemplo prominente de esta categoría. Los segundos se basan en métodos estocásticos relacionados con la gradiente de la muestra, por lo que requieren menos recursos: el método de cuadrados promedio mínimos (LMS, por sus siglas en inglés) y sus variantes (NMLS, FxLMS, etc.) son ejemplos de esta categoría.

En esta sección se ofrece una breve descripción de los distintos algoritmos relevantes, haciendo énfasis en los estocásticos, ya que se los encontró particularmente relevantes para la aplicación investigada por su complejidad computacional relativamente baja.

3.1. Algoritmo de cuadrados mínimos recursivos: RLS

El algoritmo RLS encuentra recursivamente los coeficientes del filtro para minimizar la función de costo de una regresión lineal ponderada de las señales de entrada: utiliza información de las señales de entrada desde el principio de su operación, es decir, *tiene memoria*. Debido a esto, opera con grandes matrices de información, lo cual implica una gran complejidad matemática. Si bien existen métodos de este tipo diseñados para ser más eficientes computacionalmente, no logran compararse con los filtros estocásticos, que solo tratan con la entrada actual: por esto, se opta por este último tipo de filtro.

3.2. Algoritmo de cuadrados medios mínimos: LMS

Partiendo de la base de la teoría de filtros de Wiener, esto es equivalente a pensar en filtros con una estructura no recursiva. Por lo tanto, la expresión temporal de la salida del filtro quedará determinada por la ecuación 11.

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(n)x(n-i) = a_n^T x_n \quad (11)$$

Siendo,

$$x_n = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T \quad (12)$$

$$a_n = [a_0(n), a_1(n), \dots, a_{N-1}(n)]^T \quad (13)$$

Si se define una función de costo como

$$\Psi(a_n) = E[e^2(n)] \quad (14)$$

$$e(n) = y(n) + d(n) \quad (15)$$

Donde $e(n)$ es el error medido a la salida del sistema. Desarrollando se llega a la expresión,

$$\Psi(a_n) = E[d^2(n)] - 2a_n^T p_n + a_n^T R_n a_n \quad (16)$$

Donde,

$$p_n = E[d(n)x_n] \quad (17)$$

y

$$R_n = E[x_n x_n^T] \quad (18)$$

Siendo p_n la correlación cruzada y R_n la auto-correlación. Teniendo definida la función de costo como se observa en la ecuación 16, ahora se procede a minimizarla. Para ello, es necesario calcular el gradiente de la función de costo, ya que será útil para saber la dirección de movimiento para minimizar la función. Con un poco de desarrollo¹, se llega a la siguiente expresión:

$$\nabla \Psi(a_n) = -2p_n + 2R_n a_n \quad (19)$$

A partir de este momento, podría asumirse que bastaría con utilizar la ecuación obtenida del gradiente para aplicar el algoritmo de descenso de gradiente y llegar a un mínimo de la función de costo. Sin embargo, la dependencia del gradiente con p_n y R_n genera problemas, ya que en general esos valores no están disponibles. Es por esta misma razón que se utilizan los estimadores que se observan a continuación:

$$\hat{p}_n = d(n)x_n \quad (20)$$

$$\hat{R}_n = x_n x_n^T \quad (21)$$

Por lo tanto, usando estos estimadores y reemplazando en la ecuación 19, se obtiene:

$$\nabla \Psi(a_n) = -2e(n)x_n \quad (22)$$

¹En la pagina 866 del libro *Digital Signal Processing* de Andreas Antoniou, se puede encontrar el desarrollo completo.

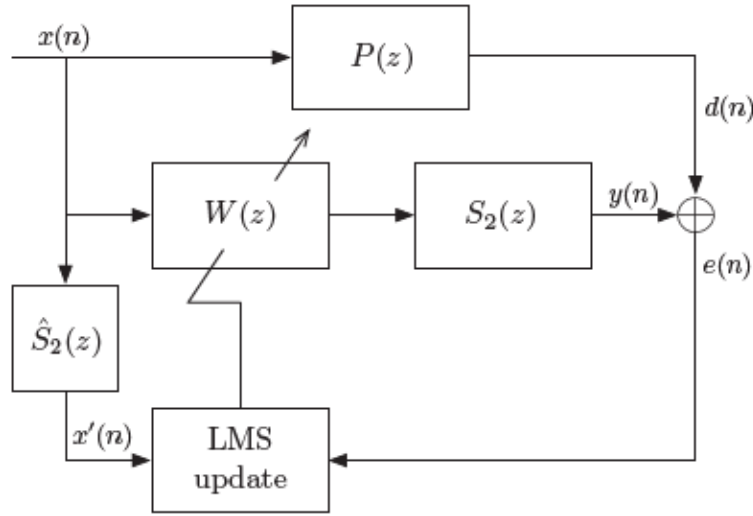


FIGURA 11: Implementación de un algoritmo FXLMS

Finalmente, después de este desarrollo matemático, y utilizando la misma lógica en la deducción del algoritmo de descenso de gradiente, se obtiene la ecuación 23, que es la llamada ecuación del algoritmo LMS.

$$a_{n+1} = a_n + 2\alpha e(n)x(n) \quad (23)$$

3.2.1. Algoritmo F-X LMS

Como se explicó en la sección 2.1.3, la transferencia del filtro queda dada por $W(z) = -\frac{P(z)}{S_2(z)}$ y luego esta se aproxima a un filtro FIR usando distintos algoritmos. El *Filtered-X Least-Mean-Square*, mas conocido como F-X LMS, es simplemente la versión del algoritmo LMS aplicada a transferencias del tipo FIR.

Por lo tanto, si definimos a $x'(n)$ como la versión *filtrada* de $x(n)$ obtenemos la ecuación 24 que es la ecuación del algoritmo F-X LMS².

$$a_{n+1} = a_n + 2\alpha e(n)x'(n) \quad (24)$$

Resulta importante aclarar que $x'(n)$ es la anti-transformada de $X'(z) = X(z)\hat{S}_2(z)$. Esto se puede ver claramente en la Figura 11.

3.2.2. Convergencia

Si bien no se hará un análisis muy detallado sobre como evaluar y definir los parámetros para que el algoritmo del LMS converja, la condición que se debe cumplir para poder decir

²Mas detalles pueden encontrarse en la página 555 del libro *Adaptive Filters: Theory and Applications - Behrouz Farhang-Boroujeny Wiley 2nd Edition*

a priori que el algoritmo converge está dada por la ecuación 25.

$$0 < \alpha < \frac{1}{NE[x^2(n)]} \quad (25)$$

Sin embargo, según el libro *Adaptive Filters*, el limite superior $\frac{1}{NE[x^2(n)]}$ puede no llegar a ser lo suficientemente restrictivo. Esto puede deberse al *delay* que genera el filtro ANC a la señal de entrada antes de llegar al micrófono de error, que puede generar inestabilidad. Por ende, si el filtro $S_2(z)$ genera un delay significativo a la señal se debe reducir el limite superior de α . Otra alternativa es colocar el micrófono de error más cercano al parlante de cancelación, y así reducir el retraso por el bucle de adaptación.

4. Puntos a desarrollar en el futuro

A continuación, se detallan las áreas que se consideran críticas en este punto y a las que se orientará la investigación a partir de este punto.

- Técnicas de simulación para el sistema
- Implementación del sistema de muestreo de señal de entrada y señal de error
- Diseño del filtro y del algoritmo en software
- Selección del hardware adecuado para el procesamiento digital de esta aplicación
- Diseño físico del dispositivo, selección y ubicación del parlante y los micrófonos

5. Referencias

- <https://www.irjet.net/archives/V3/i11/IRJET-V3I1104.pdf>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Active_noise_control
- Digital Signal Processing: Signals, Systems and Filters - Andreas Antoniou
- Adaptive Filters: Theory and Applications - Behrouz Farhang-Boroujeny Wiley 2nd Edition
- Recent Applications and Challenges on Active Noise Control - Yoshinobu Kajikawa 2013