Здесь и ниже M — гладкая поверхность, заданная радиус-вектором $r\colon U \to \mathbb{R}^3$.

- n — вектор нормали,
- K и H — гауссова и средняя кривизны,
- $N_V = \int_M n dA$ — вектор площади,
- $dA = |r_u \times r_v| \cdot du \wedge dv$ — элемент площади,

где вектора из дифференциальных форм перемножаются с помощью векторного произведения.

ГКП6⋄2. Докажите формулу $dr \wedge dn = Hn\,dA$.

ГКП6⋄3. Докажите формулу $\frac{1}{2}dn \wedge dn = Kn\,dA$.

ГКП6⋄4. Докажите, что $2N_V = \int_{\partial M} r \wedge dr$.

ГКП6⋄5. Докажите, что $\Delta r = Hn$.

Лапласиан. Метод конечных элементов.
09.04.2018

$\mathcal{L}^2(\Omega, d\mu)$ — пространство функций на измеримом пространстве Ω с мерой μ, наделённое скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle_\Omega = \int_\Omega fg\,d\mu.$$

Оно является *гильбертовым пространством*.

ГКП7⋄1. Выпишите явную формулу Лапласиана на сфере $\mathbb{S}^2$ в сферических координатах.

ГКП7⋄2. С помощью метода Грама–Шмидта найдите ортонормированный базис подпространства $V = \mathrm{Span}(1, x, x^2, x^3)$ в $\mathcal{L}^2([0,1], dx)$ и найдите проекцию $\sqrt{x}$ на V. [1]

ГКП7⋄3. Докажите *тождество Грина* для дифференцируемых функций f, g:

$$\langle \Delta f, g\rangle_X = -\langle \nabla f, \nabla g\rangle_X + \langle n \cdot \nabla f, g\rangle_{\partial X}.$$

Указание: используйте форму $g \star df$.

ГКП7⋄4. Пусть M — ориентируемая симплициальная поверхность без края. Рассмотрите подпространство таких функций $\{\phi_i\}$, линейных на гранях триангуляции, что $\phi_i(v_j) = \delta_{ij}$ для любой вершины триангуляции v_j. С помощью тождества Грина преобразуйте уравнение $\Delta u = f$ к системе линейных уравнений $Ax = b$, где $A = (\langle \nabla \phi_i, \nabla \phi_j\rangle_M)$, x, b — векторы коэффициентов u, f соответственно при проекции на $\mathrm{Span}(\{\phi_i\})$.

ГКП7⋄5. Рассмотрим симплициальную поверхность M, пусть координаты i-й вершины — r_i, а звезда i-й вершины — $\mathrm{St}(i)$. Докажите формулы

1. $n\,dA = \frac{1}{6} \sum\limits_{(ijk)\in \mathrm{St}(i)} r_j \times r_k$,

[1] Элементы полученного базиса называются *многочленами Чебышёва* на отрезке $[0,1]$; полученная проекция — частный случай разложения в *ряд Фурье* по ортонормированному базису.

2. $Hn\,dA = \frac{1}{2}\sum\limits_{(ij)\in \mathrm{St}(i)} (\operatorname{ctg}\alpha_{ij} + \operatorname{ctg}\beta_{ij})(r_i - r_j)$,

3. $Kn\,dA = \frac{1}{2}\sum\limits_{(ij)\in \mathrm{St}(i)} \frac{\varphi_{ij}}{\ell_{ij}}(r_j - r_i)$,

где φ_{ij} — двугранный угол при ребре $(i, j) \in E$, ℓ_{ij} — длина ребра (i, j)

Лапласиан. Продолжение.

16.04.2018

ГКП8⋄1. В треугольнике ABC проведена высота AH. Выразите отношение $\frac{BC}{AH}$ через котангенсы углов при BC.

ГКП8⋄2. Покажите, что $\nabla\phi_i = \frac{1}{2\mathrm{Area}(v_i, v_j, v_k)} \cdot \overrightarrow{v_j v_k}^{\perp}$ внутри ориентированного треугольника (v_i, v_j, v_k).

ГКП8⋄3. Покажите, что $\langle\nabla\phi_i, \nabla\phi_i\rangle = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$.

ГКП8⋄4. Покажите, что $\langle\nabla\phi_i, \nabla\phi_j\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta_{ij}$, где θ_{ij} — угол при вершине v_k треугольника (v_i, v_j, v_k).

ГКП8⋄5. Пусть $u = \sum u_i\phi_i$. Покажите, что

$$(\Delta u)_i = \frac{1}{2} \cdot \sum_j (\operatorname{ctg}\alpha_{ij} + \operatorname{ctg}\beta_{ij})(u_j - u_i)$$