Module 3
Probabilité conditionnelle
Événements indépendants

Élaboré par Afef Ben Zine El Abidine

Mars 2021

Objectifs du module :

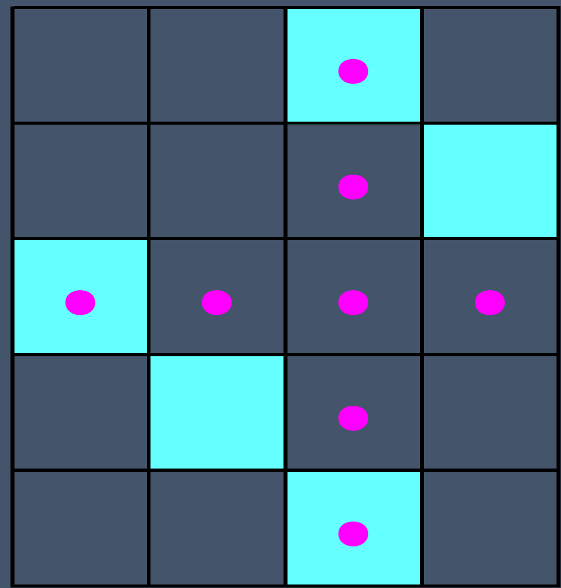
- Calculer des probabilités conditionnelles dans le cas théorique et empirique.
- Étudier l'indépendance entre deux évènements.
- Résoudre des problèmes faisant appel à un tableau de contingence ou un tableau de distribution conditionnelle.

Exemple simple pour illustrer la probabilité conditionnelle :

S = 20 cases

A: « obtenir une case bleue »

B: « obtenir une case comportant un point rose »



a) Quelle est la P(A) ? =5/20

b)Quelle est la P(B) ? =8/20

c) Quelle est la probabilité d'obtenir un point rose sachant qu'on a obtenu une case bleue ?

Notre espace échantillonnal c'est maintenant les cases bleues: il y a combien de cases bleues qui comportent un point rose? Il y en a trois: c'est l'intersection entre les cases bleues et les points roses. Donc, la probabilité est 3/5, on la note P (B|A)

d) Quelle est la probabilité d'obtenir une case bleue sachant qu'on a obtenu un point rose? C'est P(A|B)

P (A|B) = 3/8 (il y a 8 points roses)

Probabilité conditionnelle : Formule

On appelle **probabilité conditionnelle** la probabilité qu'un événement A se produise sachant que l'événement B s'est déjà produit.

On la note P(A|B) et on la lit «probabilité d'obtenir A sachant que (ou si) B s'est produit».

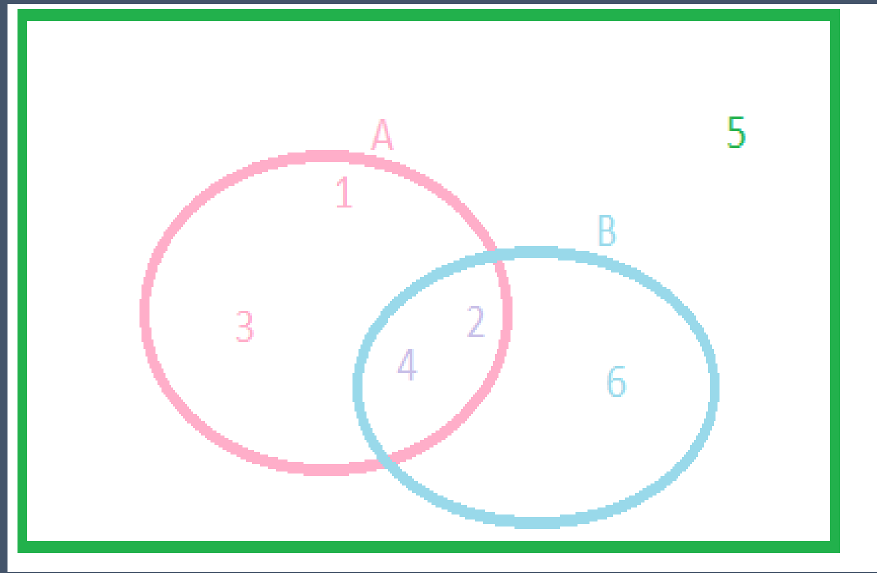
Probabilité conditionnelle

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \quad \text{ou} \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{où } B \neq \varnothing$$

Probabilité conditionnelle en utilisant le diagramme de Venn

Exemple:
On lance un dé à 6 faces. On considère les deux évènements suivants :

A: « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 »
B: « obtenir un nombre pair »



Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 sachant qu'il est pair?

- ✓ Traduire la question en écriture mathématique.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{3/6} = 66{,}6\%$$

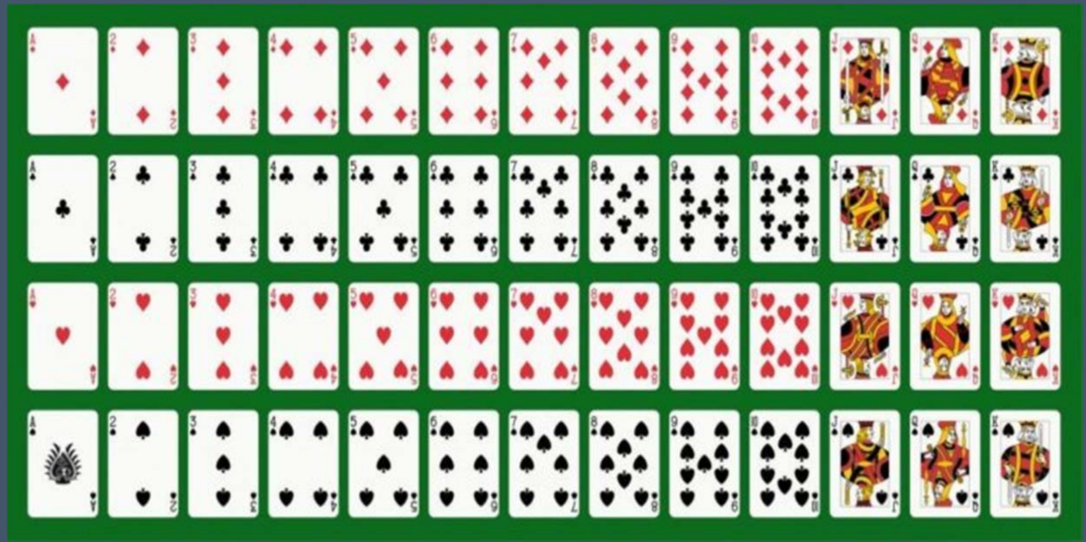
Exercice

Soit l'expérience qui consiste à piger une carte parmi un paquet de 52 cartes.

Soient les deux événements:

C: obtenir un carreau

R: obtenir un roi.



a) Quelle est la probabilité de piger un roi sachant que la carte est carreau?

$$P(R\,|\,C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{1/52}{13/52} = 1/13$$

b) Quelle est la probabilité de piger un carreau sachant que la carte est roi?

$$P(\ldots.\,|\,\ldots) = \frac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots..} = \cdots$$

1/4

Probabilité conditionnelle en utilisant un tableau de contingence, p. 102 (1/2)

Répartition des passagers des navires de croisières internationales dans les ports du Saint-Laurent selon le type et la provenance, Québec, 2012

	Type de passager		
Provenance	**Croisiériste (C)**	**Membre de l'équipage (E)**	**Total**
États-Unis (US)	55,2 %	1.3 %	56,5 %
Europe (Eu)	16,7 %	1,9 %	18,6 %
Canada (Ca)	15,3 %	0,4 %	15,7 %
Autre (A)	4,9 %	4,2 %	9,1 %
Total	92,1 %	7,8 %	99,9 %

Source: Tourisme Québec. *Étude auprès des croisiéristes et des membres d'équipage des navires de croisières dans les ports du Saint-Laurent*, juin 2013.

Quelle est la probabilité qu'un passager provienne des Etats-Unis s'il est membre de l'équipage?

P (US|E) = P(US∩E)/ P(E) = 1,3%/7,8% = 16,7%

Suite exemple (2/2)

Attention à la formulation de la question : la condition est ce qui vient après la préposition « si » ou « sachant que »

Si un passager est d'origine européenne, quelle est la probabilité qu'il soit un membre de l'équipage?

P (E|EU) = P(…∩….)/ …. = …../…… = ……

10,2%

Quelle est la probabilité qu'un passager provienne du Canada s'il est croisiériste?

P (…|….) = P(…∩….)/ …. = …../…… = ……

16,6%

Exercice de compréhension 2.2, p. 102.

rcice 2.2, p. 102

1. Notation des événements

A: écrivain a moins de 45 ans
A': écrivain n'a pas moins de 45 ans

R: écrivain a un revenu de moins de 5000$
R': écrivain n'a pas un revenu de moins de 5000$

	A	A'	total
R	422	552	974
R'	288	238	526
total	710	790	1500

	A	A'	total
R	0,28	0,37	0,65
R'	0,19	0,16	0,35
total	0,47	0,53	1,00

0,30

a) la probabilité qu'un écrivain touche 5000$ et plus s'il a 45 ans et plus

P(R'|A') = P(R'∩A')/P(A')

= 0,16/0,53 = 30%

b) la probabilité qu'un écrivain soit agé de moins de 45 ans et touche moins de 5000$
P(R∩A) = 28%

c)
i) la probabilité qu'un écrivain touche moins de 5000$
P(R) = 65%

La règle de multiplication (1/3)

Expérience aléatoire : Tirer une carte au hasard du paquet de 52 cartes.

Calculez la probabilité des événements :

A : Obtenir un cœur.

B : Obtenir un roi.

C : Obtenir une carte qui est un roi et un cœur.

Pour A, “obtenir un cœur”, on voit d’après l’illustration qu’il y a 13 cœurs dans le paquet. La probabilité de A est donc P(A) = 13/52 ou 1/4.

Pour B, “obtenir un roi”, on voit d’après le même dessin qu’il y a 4 rois dans le paquet. La probabilité de B est donc P(B) = 4/52 ou 1/13.

La règle de multiplication (2/3)

Pour C, on cherche une carte qui est “un cœur et un roi”. Une seule carte répond à ce critère : le roi de cœur lui-même.

La probabilité est donc P(C) = 1/52.

Remarquez que C est équivalent à “A et B”.

- P(A) était 1/4.
- P(B) était 1/13.

Il semble qu’on peut obtenir P(C) en calculant le produit des deux autres :
$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(C) = 1/4 \times 1/13$

$= 1/52$

Règle de multiplication (3/3)

Il sera toujours vrai que :

Si les événements A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre. Autrement dit, si le fait de savoir que A est survenu ne change pas du tout les chances de B.

Ici, si je tire une carte et si je vous dis “c'est un roi”, vous n'avez aucune indication qui vous aide à savoir si c'est un cœur : la chance est toujours de 1 sur 4 ! (La probabilité de tirer un coeur parmi toutes les cartes est égale à la probabilité de tirer un coeur parmi les rois !)

Événements indépendants

Deux événements compatibles sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'est pas influencée par la réalisation de l'autre. L'indépendance de deux événements A et B se définit comme suit:

A et B sont indépendants si P(B|A)=P(B) ou P(A|B)= P(A)

P(B|A)=P(B) signifie que la probabilité de réalisation de l'événement B est la même, que A se soit ou non réalisé.

Remarque importante: il ne faut pas confondre événements incompatibles et événements indépendants.
Incompatibilité signifie que les deux événements ne peuvent pas se réaliser simultanément (P(A∩ B)=0).
Indépendance signifie que la probabilité de réalisation de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre (PA|B)=P(A)

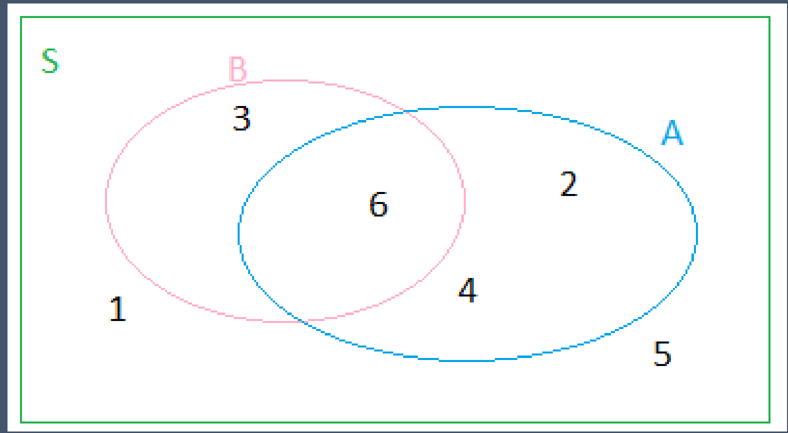
Comment vérifier l'indépendance de deux événements?

Exemple 1 : On lance un dé à 6 faces et on note A l'événement "Obtenir un nombre pair", et B l'événement "Obtenir un multiple de 3".

On a :

P(A) = 3/6 ou 1/2

P(B) = 2/6 ou 1/3



a) Quelle est la probabilité de P (A∩B) ?

P(A∩B) = 1/6

b) Quelle est la valeur de P(A) × P(B) ?

P(A) × P(B) = 1/2× 1/3 = 1/6

Quand P(A∩B) = P(A) × P(B), les événements A et B sont indépendants.

Les événements A et B sont-ils indépendants?

Exemple 2:

	A	A’	Total
B	28%	20%	48%
B’	35%	17%	52%
Total	63%	37%	100%

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ =28%/48% = 58,3%

P(A) = 63%

Quand P(A|B) ≠ P(A), les événements A et B ne sont pas indépendants.

Les événements A et B ne sont pas indépendants, car P(A|B) ≠ P(A). Globalement la probabilité que A se réalise est de 63%, celle-ci diminue de 4,7 points de pourcentage si B se réalise.

Tableau de contingence à ne pas confondre avec le tableau de distribution conditionnelle !

TABLEAU DE CONTINGENCE :

Répartition des médecins selon le groupe d'âge et le sexe, Québec, 2013

Âge (en ans)	Femmes (F)	Hommes	Total
Moins de 40 (A)	3238 $P(F\cap A)$	1748 (1748/19818)	4986
40 à 49 (B)	2534 $P(F\cap B)$	2029	4563
50 à 59 (C)	2311 $P(F\cap C)$	3161	5472
60 et plus (D)	923 $P(F\cap D)$	3874	4797
Total	9006 $P(F)$	10812	19818

8,8% est le pourcentage des médecins hommes ayant moins de 40 ans dans tout l'échantillon.

TABLEAU DE DISTRIBUTION CONDITIONNELLE :

Répartition des médecins selon le sexe par rapport au groupe d'âge, Québec 2013

Âge (en ans)	Femmes (F)	Hommes (H)	Total
Moins de 40 (A)	3238/4986 = 64,9% $P(F\|A)$	1748/4986 = 35,1%	100%
40 à 49 (B)	2534/4563 = 55,5% $P(F\|B)$	2029/4563 =44,5%	100%
50 à 59 (C)	2311/5472 =42,2% $P(F\|C)$	3161/5472 =57,8%	100%
60 et plus (D)	923/4797 = 19,2% $P(F\|D)$	3874/4797 =80,8%	100%
Total	9006/19818 = 45,4% $P(F)$	10812/19818 = 54,6%	100%

35,1% des médecins de <u>moins de 40 ans</u> sont des Hommes.

Exercice de compréhension 2.3, p. 107

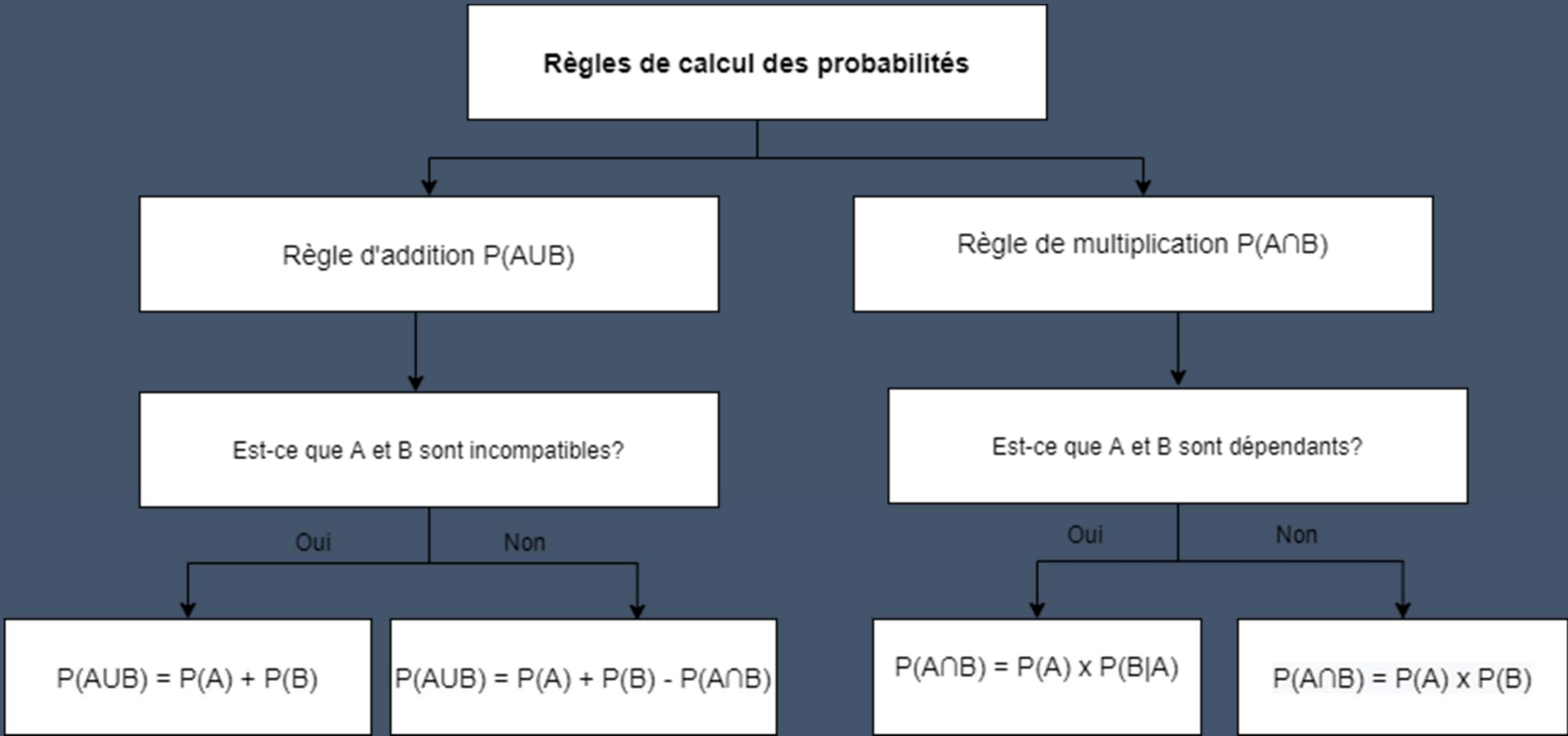
Plus le revenu augmente, plus la probabilité……

Répartition des ménages, par tranches de revenu, selon la consommation d'eau embouteillée à la maison, Canada, 2006

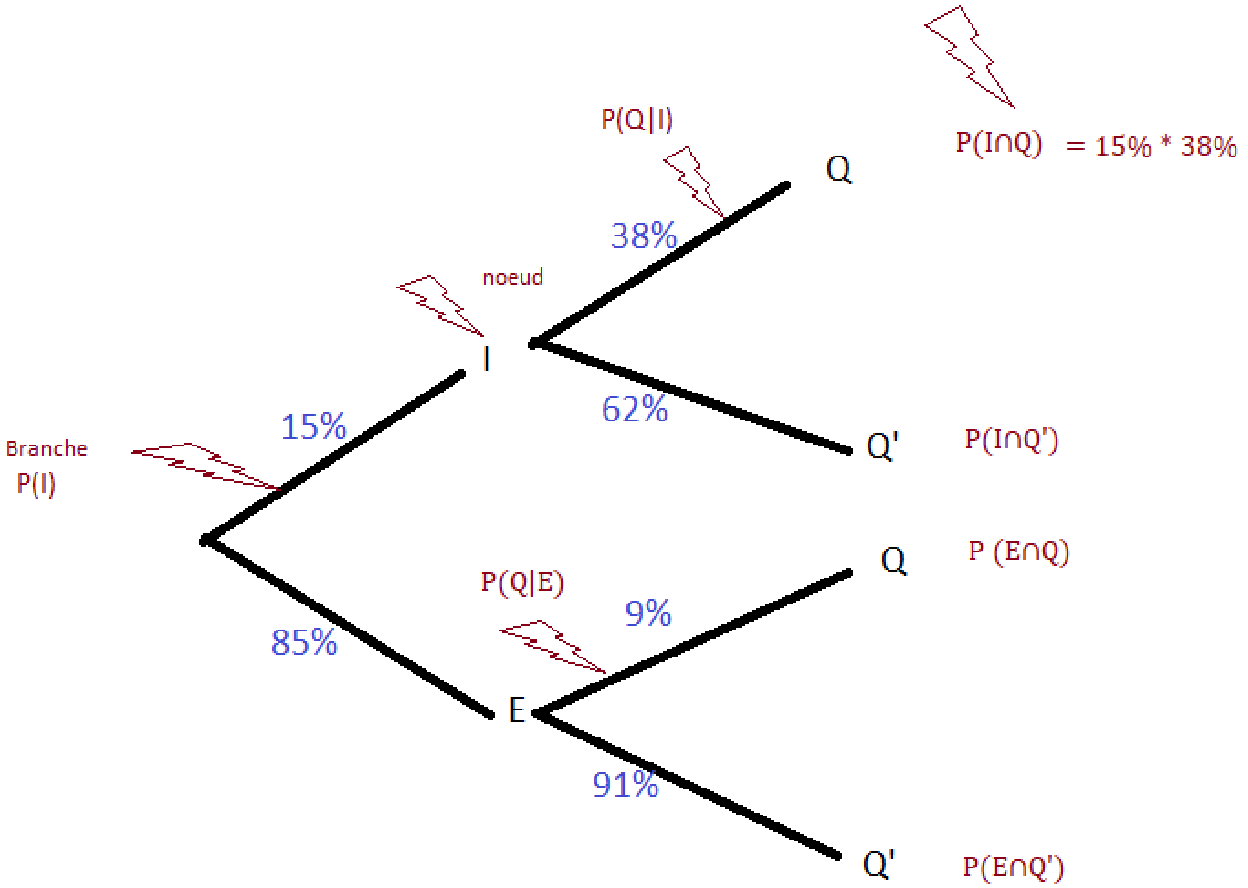
	Consommation eau		
Revenu du ménage ($)	**Oui (O)**	**Non (N)**	**Total**
Moins de 40 000 (A)	25%	75%	100%
40 000 à 64 000 (B)	29%	71%	100%
64 000 à 91 000 (C)	32%	68%	100%
91 000 et plus	33%	67%	100%
Total	29%	71%	100%

1. Est-ce que les évènements O et A sont indépendants?
2. Est-ce que les évènements O et B sont indépendants?
3. Quelle tendance se dégage de la colonne Oui? De la colonne Non?

Résumé


Règles de calcul des probabilités
Règle d'addition P(AUB)
Règle de multiplication P(A∩B)
Est-ce que A et B sont incompatibles?
Oui
Non
Est-ce que A et B sont dépendants?
Oui
Non
P(AUB) = P(A) + P(B)
P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A∩B)
P(A∩B) = P(A) x P(B|A)
P(A∩B) = P(A) x P(B)

Exercice de compréhension 2.4, p. 114.



La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est toujours égale à 1.

Travail obligatoire

Exercices 1,2,4,5,6,8 et 9 p.115-117.

Remarque importante :

- ✓ Lisez bien la question pour la traduire en langage mathématique.
- ✓ Illustrer votre démarche de calcul en présentant un diagramme de Venn, un arbre de probabilité ou un tableau de contingence selon l'énoncé du problème.