Module 2

Calculs de probabilités

Élaboré par Afef Ben Zine El Abidine

Février 2021

Les objectifs du module :

- ✓Résoudre un problème de probabilité faisant appel à la probabilité théorique ou empirique en modélisant la situation par un tableau de contingence ou un diagramme en arbre ou un diagramme de Venn.

- ✓Calculer des probabilités théoriques et empiriques en utilisant les opérations sur les évènements: ET / OU

La terminologie de la probabilité

Une expérience aléatoire est décrite par un résultat incertain : épreuve dont les issues ne sont pas connues avec certitude avant la réalisation de l'épreuve.

Exemple:

- Lancer un dé à six faces (on ne peut pas connaitre avec certitude le résultat du lancement d'un dé).

L'espace échantillonnal est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire, il est noté S. Exemple: Lorsqu'on lance un dé S = {1,2,3,4,5,6}

Un événement est un sous ensemble de S (une partie de S)

Exemple: l'événement A « obtenir un nombre inférieur à 3 ».

On peut décrire l'évènement avec des mots : la description en compréhension.

On peut énumérer les éléments de l'événement : la description en extension.

A= {1,2,3}

On énumère les éléments entre accolades

Exemples pour illustrer la terminologie de probabilité (manuel, p. 89)

Expérience aléatoire	Espace échantillonnal	Événement
a) Lancer un dé.	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Chaque fois qu'on réalise l'expérience, on obtient un seul des six nombres de S.	Description en compréhension : I : « obtenir un nombre impair » Description en extension : I = {1, 3, 5}
b) Piger un échantillon de deux personnes parmi Léa, Emma, Mathis et Olivier.	S = {{Léa, Emma}, {Léa, Mathis}, {Léa, Olivier}, {Emma, Mathis}, {Emma, Olivier}, {Mathis, Olivier}}	G : « piger deux garçons » G = {Mathis, Olivier}
c) Demander à un électeur, choisi au hasard, pour lequel des partis A, B ou C il a l'intention de voter.	S = {parti A, parti B, parti C, indécis, refuse de répondre}	V : « l'électeur exprime son choix de parti » V = {parti A, parti B, parti C}
d) Vérifier le taux de compactage d'un échantillon aléatoire de sol.	S = [0 % ; 100 %]	T : « un taux de compactage d'au moins 90 % »

Probabilité théorique et probabilité empirique (1/2)

Il y a deux types de probabilités: la probabilité classique ou (théorique) et la probabilité empirique.

La probabilité classique repose sur l'analyse de l'objet utilisé en se basant sur le raisonnement mathématique. Exemples: Lancer un dé, tirer une carte, lancer une pièce de monnaie.

Exemple :
Il y a une seule face du dé parmi 6 faces où c'est inscrit 1, donc P(1) = 1/6

Probabilité théorique et probabilité empirique (2/2)

La probabilité empirique repose sur l'analyse des résultats obtenus de l'expérience: on se sert des fréquences observées pour calculer les probabilités

Exemple simpliste: On lance un dé 20 fois et on note les résultats obtenus: 2, 1, 5, 6, 2, 4, 2, 1, 2, 3, 5 , 6, 3, 4, 3, 1, 2, 4, 2, 6.

Donc, on calcule la probabilité d'un évènement en se basant sur sa fréquence de réalisation. P(1) = 3/20 P(2) = 6/20

Calcul de la probabilité classique

Probabilité classique

Si l'on considère *a priori* que les éléments de l'espace échantillonnal associé à un événement A sont **équiprobables** (c'est-à-dire que les éléments de S ont tous la même chance de se produire), alors la probabilité de A, notée P(A), se calcule comme suit.

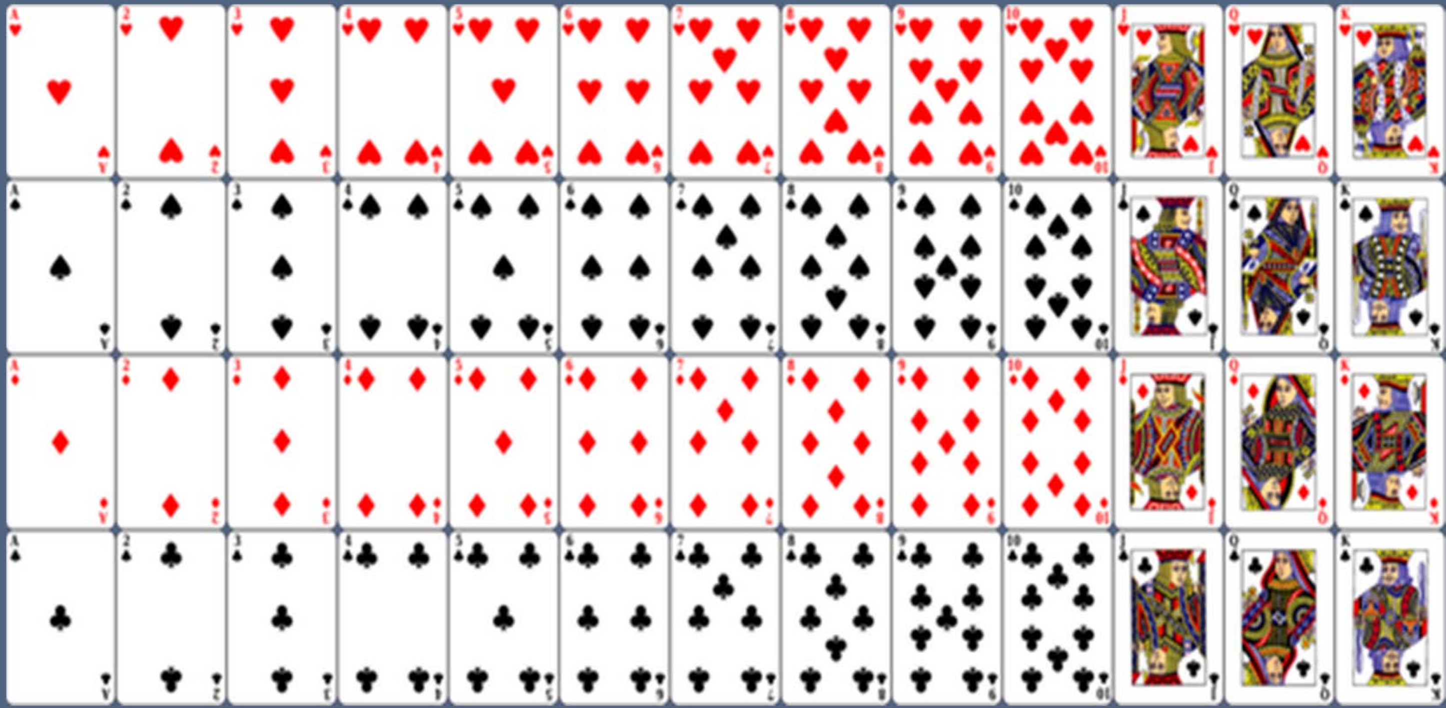
Probabilité classique

$$P(A) = \frac{\text{nombre de résultats favorables à A}}{\text{nombre de résultats possibles}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Cardinal de A : c'est le nombre d'éléments de A

Exemple de calcul de probabilité théorique:

Expérience aléatoire consiste à piger une carte dans un jeu de 52 cartes.
Soit l'événement R: « piger une carte rouge »
Quelle est la probabilité de R?



$$P(R) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

P(R) = 26/52 = 0,5

<u>Interprétation</u>:
On a 50% de chances de tirer une carte rouge

Calcul de la probabilité empirique

La **probabilité empirique** d'un événement, contrairement à la probabilité classique, est fondée sur l'observation des résultats obtenus après plusieurs répétitions de l'expérience aléatoire. On considère que la fréquence relative de réalisation d'un événement A après n répétitions de l'expérience aléatoire est une bonne approximation de la probabilité de A. La probabilité empirique d'un événement A se calcule ainsi :

Probabilité empirique

$$P(A) = \frac{\text{nombre de fois que l'événement A se produit}}{\text{nombre de répétitions de l'expérience aléatoire}} = \frac{n_A}{n} = \boxed{\text{fréquence relative de A}}$$

Exemple 1, p. 91.

EXEMPLE 1

Répartition des détenteurs d'un DEC en formation technique entrés sur le marché du travail en 2011-2012 selon la situation de l'emploi en juin 2013

Situation de l'emploi	Programme d'études de la formation technique	
	Ensemble des programmes	Administration, commerce et informatique
Ont un emploi	11 332	1 382
N'ont pas d'emploi	441	71
Total	**11 773**	**1 453**

Source: Ministère de l'Enseignement supérieur. *La relance au collégial en formation technique – 2013. La situation d'emploi de personnes diplômées. Enquêtes de 2011/2012/2013*, 2014.

Utiliser les statistiques du tableau pour estimer la probabilité qu'un détenteur d'un DEC en formation technique décroche un emploi dans l'année suivant la fin de ses études. Cette probabilité est-elle la même pour les diplômés du secteur administration, commerce et informatique ?

Solution

Ensemble des programmes : $P(E) = \frac{11\,332}{11\,773} = 96,3\ \%$

Administration, commerce et informatique : $P(E) = \frac{1\,382}{1\,453} = 95,1\ \%$

Les événements particuliers

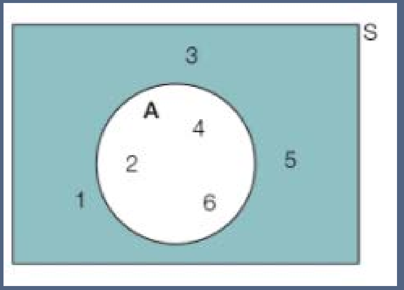
Considérons l’expérience aléatoire lancer un dé.

Événement certain:
Tout événement égal à l’espace échantillonnal S.
Exemple: l’événement C : « obtenir un nombre inférieur à 7» (car C = S)

Événement impossible
Exemple: l ’événement I : « obtenir un nombre supérieur à 7 » (I=Ø)

Événement contraire
Le contraire de A est noté A’. A’ est composé des résultats de S qui n’appartiennent pas à A.
Exemple: Si A: « obtenir un nombre pair » alors A’*:* « obtenir un nombre impair ».

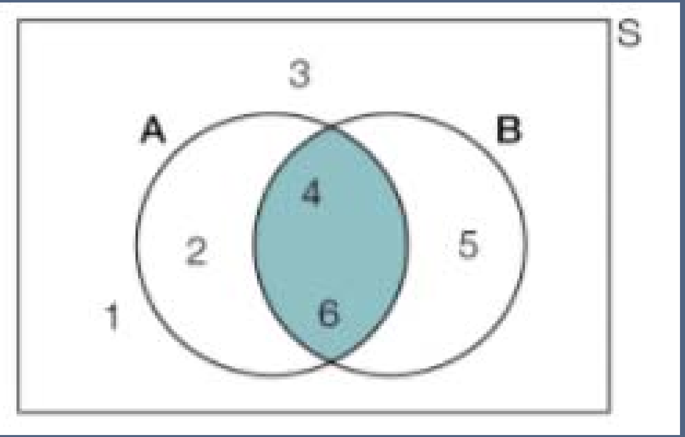
Donc, A’={1,3,5}
n(A) + n(A’) = n(S)



Opération intersection de deux événements

Intersection: A∩B se lit A **et** B.

Exemple:
L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé.
A: « obtenir un nombre pair »
B: « obtenir un nombre supérieur à 3 »



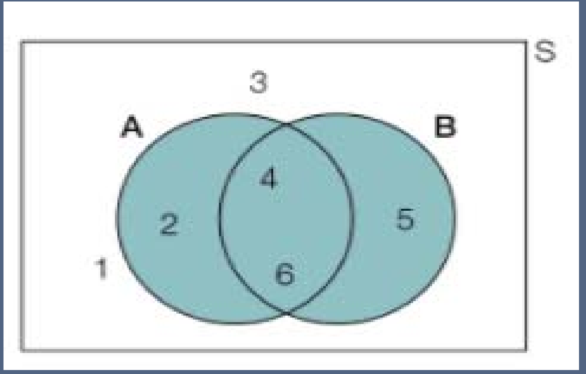
A∩B est: « obtenir un nombre pair supérieur à 3 »,
Ce qui inclut les éléments communs entre A et B.

A∩B={4,6}

Opérations Union de deux événements

Union: A U B se lit A ou B. (ou inclusif)

Exemple:
L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé.
A: « obtenir un nombre pair » A= {2,4,6}
B: « obtenir un nombre supérieur à 3 » B={4,5,6}



AUB est : « obtenir un nombre pair ou un nombre supérieur à 3 »
<u>Ce qui inclut tous les éléments de A et B</u>.

AUB= {2,4,5,6}

Question: est-ce que n(AUB)= n(A) + n(B)?

Événements incompatibles ou mutuellement exclusifs

- Deux événements incompatibles ne peuvent pas se produire en même temps.

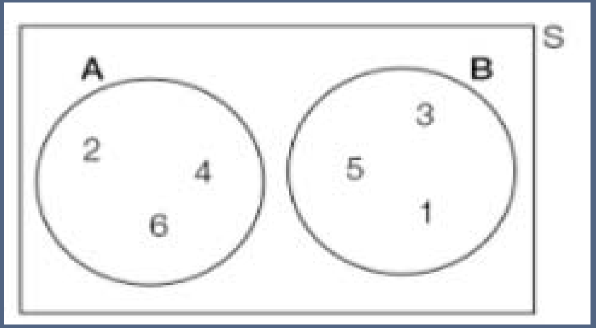
Exemple:

L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé.

A: « obtenir un nombre pair » A= {2,4,6}

B: « obtenir un nombre impair » B = {1,3,5}

Lorsque deux événements sont incompatibles alors $A \cap B = \emptyset$



Question: est-ce que $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$?

Propriétés de la probabilité (4 propriétés)

Propriété 1 La probabilité d'un événement A est toujours comprise entre 0 et 1 (ou 0 % et 100 %) :

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad \text{ou} \qquad 0\,\% \leq P(A) \leq 100\,\%$$

Propriété 2 La probabilité d'un événement certain est 1 (ou 100 %) et celle d'un événement impossible est 0 (ou 0 %) :

$$P(S) = 1 \text{ (ou } 100\,\%) \qquad \text{et} \qquad P(\varnothing) = 0 \text{ (ou } 0\,\%)$$

Propriété 3 La probabilité de l'événement contraire, A′, d'un événement A est égale à 1 (ou 100 %) moins la probabilité de A :

Probabilité de l'événement contraire
$P(A') = 1 - P(A) \qquad \text{ou} \qquad P(A') = 100\,\% - P(A)$

Propriétés de la probabilité - Suite

Propriété 4 La probabilité que l'événement (A ou B) se produise, notée $P(A \cup B)$, est égale à la somme des probabilités des événements A et B moins la probabilité que A et B se produisent simultanément, celle-ci étant notée $P(A \cap B)$. Cette propriété est appelée règle d'addition :

Règle d'addition
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On prouve cette règle ainsi :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Exemple pour illustrer la Règle d’Addition (1/3)

Expérience aléatoire : Tirer une carte au hasard du paquet de 52 cartes. Calculez la probabilité des événements :

A : Obtenir un cœur.

B : Obtenir un roi.

C : Obtenir une carte qui est un roi ou un cœur.

Pour A, “obtenir un cœur”, on voit d’après l’illustration qu’il y a 13 cœurs dans le paquet. La probabilité de A est donc P(A) = 13/52 ou 1/4.

Pour B, “obtenir un roi”, on voit d’après le même dessin qu’il y a 4 rois dans le paquet. La probabilité de B est donc P(B) = 4/52 ou 1/13.

Exemple pour illustrer la Règle d'Addition (2/3)

Pour C , on cherche une carte qui est "un cœur ou un roi".
Comptez ces cartes dans le paquet (en vous assurant de ne pas compter le roi de cœur deux fois) et vous verrez que P(C) = 16/52.

Remarquez que C est équivalent à "A ou B".
Il semble qu'on peut obtenir P(C) en additionnant les deux, mais pour éviter de compter le roi de cœur en double, il faut soustraire 1/52.

$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 13/52 + 4/52 - 1/52$
$= 16/52$

Exemple pour illustrer la Règle d'Addition (3/3)

Maintenant, soient :

A: « piger un cœur»

B: « piger une carte noire»

Question :

Décrire en compréhension puis déterminer la probabilité:

A'

B'

AUB

A∩B

P(A') = 1-13/52   P(B') = 1-26/52   P(AUB) = 13/52+26/52   P(A∩B) = 0

Démarche de résolution de problème de probabilité empirique

Démarche de résolution de problèmes de probabilité

1. On assigne une lettre majuscule à chacun des événements en cause.
2. Si la donnée du problème donne de l'information sur l'intersection de deux événements, $n(A \cap B)$ ou $P(A \cap B)$, on construit l'un ou l'autre des tableaux suivants.

Si l'on a $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ et $n(S)$

	B	B′	Total
A	$n(A \cap B)$	$n(A \cap B')$	$n(A)$
A′	$n(A' \cap B)$	$n(A' \cap B')$	$n(A')$
Total	$n(B)$	$n(B')$	$n(S)$

Si l'on a $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$

	B	B′	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B')$	$P(A)$
A′	$P(A' \cap B)$	$P(A' \cap B')$	$P(A')$
Total	$P(B)$	$P(B')$	$P(S)$

3. On exprime la question en employant le symbolisme suivant :

P : « La probabilité de… » ou « les chances d'avoir… »

$\cap$: et

$\cup$: ou (inclusif)

Règle d'addition est souvent utilisée dans la démarche de résolution:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple de résolution basé sur le tableau de contingence des effectifs (1/3)

On considère une classe de 30 élèves, 15 élèves étudient le français (F), 10 élèves étudient l’anglais (A) et 5 élèves étudient l’anglais et le français. On tire au hasard un élève de la classe.

a) Quelle est la probabilité que l’élève étudie le français?

b) Quelle est la probabilité que l’élève étudie le français et l’anglais?

c) Quelle est la probabilité que l’élève étudie le français ou l’anglais?

Exemple de résolution basé sur le tableau de contingence des effectifs (2/3)

1^e étape: la notation

F : « étudier le français »
F' : « ne pas étudier le français »

A : « étudier l'anglais »
A': « ne pas étudier l'anglais »

2^e étape: placer les valeurs de l'énoncé dans un tableau de contingence

	F	F'	Total
A	5	5	10 n(A)
A'	10	10	20
Total	15 n(F)	15	30 n(S)

3^e étape : déterminer les valeurs manquantes dans le tableau de contingence.

Les valeurs indiquées en bleu sont déduites

Exemple de résolution basé sur le tableau de contingence des effectifs (3/3)

4e étape : traduire l'énoncé de la question en langage mathématique.

a) Quelle est la probabilité que l'élève étudie le français?

$P(F) = n(F)/n(S) = 15/30$

b) Quelle est la probabilité que l'élève étudie le français et l'anglais?

$P(F \cap A) = n(F \cap A)/n(S) = 5/30$

c) Quelle est la probabilité que l'élève étudie le français ou l'anglais?

$P(F \cup A) = P(F) + P(A) - P(F \cap A)$

$P(F \cup A) = 15/30 + 10/30 - 5/30 = 20/30$

Rappel de la règle d'addition, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple de résolution basé sur le tableau de contingence des pourcentages (p.98) (1/3)

EXERCICE DE COMPRÉHENSION | 2.1

Un sondage effectué auprès d'un échantillon d'adultes québécois révèle les statistiques suivantes : 55 % ont fait du vélo durant l'année, 48 % ont accès à une auto et ont fait du vélo durant l'année et 12 % n'ont pas accès à une auto.

Source : Vélo Québec. *État de la pratique du vélo au Québec en 2010*, mai 2011.

En se basant sur ces statistiques, calculer la probabilité qu'un adulte québécois choisi au hasard :

a) n'ait pas accès à une auto et n'ait pas fait de vélo durant l'année.

b) n'ait pas accès à une auto ou n'ait pas fait de vélo durant l'année.

Exemple de résolution basé sur le tableau de contingence des pourcentages (p.98) (2/3)

1e étape: assignation des lettres aux événements
Exemple : V: « faire du vélo » A: « avoir accès à une auto »

2e étape: placer les valeurs fournies par l'énoncé dans un tableau de contingence

3e étape : déterminer les valeurs manquantes dans le tableau de contingence.

4e étape : traduire l'énoncé de la question en langage mathématique.

Exemple de résolution basé sur le tableau de contingence des pourcentages (p.98) (3/3)

Exercice de compréhension, p. 98

Notation :

V: "faire du vélo"
A: "accéder à une auto"

	A	A'	Total
V	P(V∩A)	P(V∩A')	P(V)
V'	P(V'∩A)	P(V'∩A')	P(V')
Total	P(A)	P(A')	P(S)

	A	A'	Total
V	48%	7%	55%
V'	40%	5%	45%
Total	88%	12%	100%

Question a)

a) N'ait pas accès à une auto (A') et (∩) n'ait pas fait de vélo (V')

P(A'∩V') = 5%

Question b)

b) N'ait pas accès à une auto (A') ou (U) n'ait pas fait de vélo (V')

P(A'UV') = P(A') + P(V') - P (A'∩V')
= 12% + 45% - 5%
= 52%

Travail obligatoire

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 8, p. 98-99.

Les exercices se font sur un fichier Excel.

Illustrer votre démarche par un diagramme de Venn, un tableau de contingence ou un arbre de probabilité.