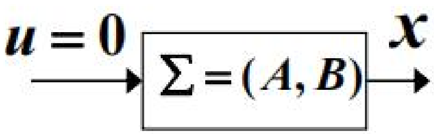
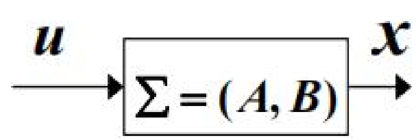
[预备知识]：线性定常系统的运动

1、自由运动：线性定常系统在没有控制作用，即u＝0时，由初始状态引起的运动称自由运动。



齐次状态方程的解： $\dot{x} = Ax, \ x(t)|_{t=0} = x(0)$

2、强迫运动：线性定常系统在控制u作用下的运动，称为强迫运动。



非齐次状态方程的解： $\dot{x} = Ax + Bu, \ x(t)|_{t=t_0} = x(t_0)$

3.3 线性连续系统状态方程的解

非齐次状态方程，是同时考虑初始状态 $x(0)$ 和外输入 u 共同作用下状态运动的表达式，如下式

$A\in R^{n\times n}$　$X(t)\in R^{n}$　$B\in R^{n\times r}$　$U(t)\in R^{r}$

$$\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t) \qquad (2.1)$$

且初始条件为： $X(t)\big|_{t=0}=X(0)$

方法一：解析法　比较一阶常微分方程求解：

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bu(t) \Longrightarrow \dot{x}(t)-ax(t)=bu(t)$$

$$\dot{x}(t)e^{-at}-ax(t)e^{-at}=bu(t)e^{-at}$$

$$\frac{d}{dt}[x(t)e^{-at}] = bu(t)e^{-at}$$

$$x(t)e^{-at} - x(0) = \int_0^t bu(\tau)e^{-a\tau}d\tau$$

$$x(t)e^{-at} = x(0) + \int_0^t bu(\tau)e^{-a\tau}d\tau$$

$$x(t) = [x(0) + \int_0^t bu(\tau)e^{-a\tau}d\tau]e^{at}$$

$$= x(0)e^{at} + \int_0^t bu(\tau)e^{a(t-\tau)}d\tau$$

同样，将方程（2.1）写为 $\dot{X}(t) - AX(t) = BU(t)$

在上式两边左乘 e^{-At} ，可得：

$$e^{-At}[\dot{X}(t) - AX(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-At}X(t)] = e^{-At}BU(t)$$

$$e^{-At}x(t)-x(0)I=\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t)=\boxed{e^{At}x(0)}+\boxed{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,}\qquad t\geq 0$$

更一般的形式为：

$$x(t)=\boxed{e^{A(t-t_0)}x(t_0)}+\boxed{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,}\qquad t\geq t_0$$

系统的动态响应由两部分组成：
一部分是由初始状态引起的系统自由运动，叫做零输入响应；
另一部分是由控制输入所产生的受控运动，叫做零状态响应。

例 设定常系统的齐次状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\mathrm{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

求单位阶跃输入作用下的状态响应。

解 用拉氏变换方法求解

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1))s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

反拉氏变换

$$L^{-1}(sI-A)=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

因此，系统对单位阶跃输入的状态响应为

$$x(t)=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+$$

$$\int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}1(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}$$

若初始状态为零，$x(0)=0$，则单位阶跃输入下的状态响应，即系统的强迫运动为

$$x(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}$$

二、拉氏变换求解法

对非齐次状态方程 $\dot{x}=Ax+Bu$ 两边进行拉氏变换得：

$$sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s)$$

整理得：$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$

结论：$x(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)]$

[例]：已知状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

其初始状态为：

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

求系统在单位阶跃输入作用下状态方程的解。

[解]:

1） 拉氏变换法求解:

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$$

<u>先求</u> $(sI-A)^{-1}$

由于: $(sI-A)=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$

所以: $(sI-A)^{-1}=\dfrac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$

阶跃响应拉氏变换：

可以得到：

$$X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} (s+3)x_1(0)+x_2(0) \\ -2x_1(0)+sx_2(0) \end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} 1/s \\ 1 \end{bmatrix}$$

拉氏反变换得方程解为：

$$x(t)=L^{-1}X(s)$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+(2x_1(0)+x_2(0)-1)e^{-t} & -(x_1(0)+x_2(0)-\frac{1}{2})e^{-2t} \\ -(2x_1(0)+x_2(0)-1)e^{-t} & -(2x_1(0)+2x_2(0)-1)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

补充-系统输出方程的求解

求出状态解 $x(t)$后，代入输出方程

$$y(t)=cx(t)$$

由于c是已知的，只要做简单的向量乘法的运算，就容易求得系统输出$y(t)$的响应。

例 线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

试求系统在初始状态为零时，单位阶跃输入下系统的输出响应。

解 由例2-3的计算可知，系统在单位阶跃输入下的状态解为

$$x(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}$$

初始状态为零时，状态解为

$$x(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}$$

把状态解代入输出方程，输出响应为

$$y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

系统输出只与系统状态 x_1 有关，输出响应是稳定的。

补充. 典型输入信号作用下的系统响应

在阶跃、斜波、脉冲典型输入信号作用下，系统解的公式如下

1.阶跃响应

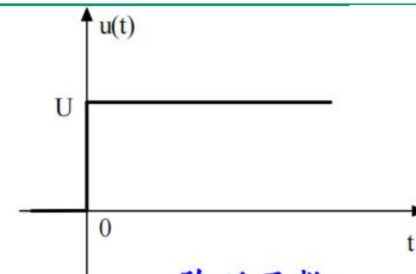
$u(t)=h\times 1(t)$　h 为幅值，$h=1$为单位阶跃输入

$$x(t)=e^{At}x(0)+A^{-1}(e^{At}-I)bh$$

$$y(t)=c\{\ e^{At}x(0)+A^{-1}(e^{At}-I)bh)$$

阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases} U & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



阶跃函数

U=1的函数称为单位阶跃函数，记作1(t)。

$$u(t)=U\cdot 1(t)$$

零初始条件下的拉氏变换象函数为$\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{U}{s}$

2.斜波响应

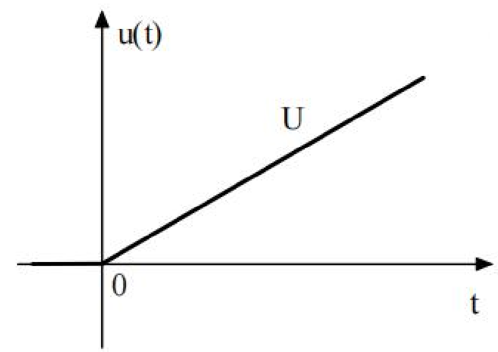
$u(t) = h \times t(t)$ h 为幅值， $h=1$ 为单位斜波输入

$$x(t) = e^{At}x(0) + [\ A^{-2}(e^{At} - I) - A^{-1}t)\ ]bh$$

$$y(t) = c\{\ e^{At}x(0) + [\ A^{-2}(e^{At} - I) - A^{-1}t)\ ]bh\ \}$$

2、斜坡函数

$$u(t) = \begin{cases} Ut & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



斜坡函数

$$u(t) = Ut \cdot 1(t)$$

零初始条件下的拉氏变换为 $\mathscr{L}[u(t)] = \dfrac{U}{s^2}$

3. 脉冲响应

$u(t)=\delta(t)$，单位脉计输入

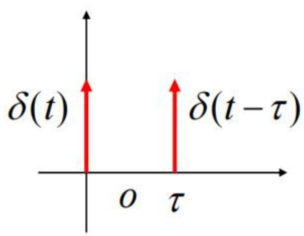
$$x(t)=e^{At}x(0)+e^{At}b$$

$$y(t)=c\{\ e^{At}x(0)+e^{At}b\ \}$$

脉冲函数

理想单位脉冲函数

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

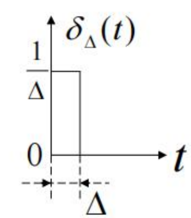
其拉氏变换后的像函数为：$L[\delta(t)]=1$

出现在 $t=\tau$ 时刻，积分面积为U的理想脉冲函数定义如下：

$$A\delta(t-\tau)=\begin{cases}0, t\neq\tau\\ \infty, t=\tau\end{cases} \quad 且 \quad \int_{-\infty}^{\infty}A\delta(t-\tau)dt=A$$

实际单位脉冲函数：

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}0, & t<0\ 和\ t>\Delta\\ \frac{1}{\Delta}, & 0<t<\Delta\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{\Delta}(t)dt=\Delta\times\frac{1}{\Delta}=1$$

当 $\Delta\to 0$ 时，$\delta_{\Delta}(t)=\delta(t)$

$$\begin{cases}u(t)=U\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}u(t)dt=U\end{cases}$$

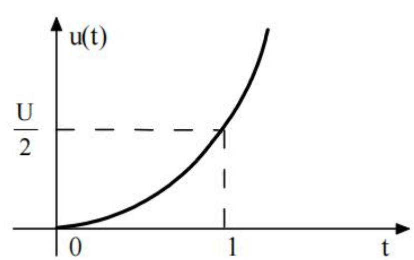
冲激函数的拉氏变换象函数为U。

分析系统特性究竟采用何种典型输入信号，取决于实际系统在正常工作情况下最常见的输入信号形式。

当系统的输入具有突变性质时，如指令的突然转换、电源的突然接通、负荷的突变等均可选择阶跃函数为输入信号；
当系统的输入是随时间线性增长变化时，可选择斜坡函数为典型输入信号。

抛物线函数

$$u(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}Ut^2 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



抛物线函数

$$u(t)=\tfrac{1}{2}Ut^2\cdot 1(t)$$

零初始条件下的拉氏变换为 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{U}{s^3}$

正弦函数 $u(t)=A\sin\omega t$

拉氏变换象函数为 $\dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

3.4、线性定常系统的状态转移矩阵

已知:线性定常系统的齐次状态方程: $\dot{x} = Ax$

满足初始状态 $x(t)|_{t=0} = x(0)$ 的解是: $x(t) = e^{At}x(0)$

满足初始状态 $x(t)|_{t=t_0} = x(t_0)$的解是: $x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$

令: $\begin{cases} e^{At} = \Phi(t) \\ e^{A(t-t_0)} = \Phi(t-t_0) \end{cases}$ 则有: $\begin{cases} x(t) = \Phi(t)x(0) \\ x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) \end{cases}$

线性定常系统的状态转移矩阵

状态转移矩阵是现代控制理论最重要的概念之一，由此可将齐次状态方程的解表达为统一的形式，即：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

式(2.12)的物理意义是：自由运动的解仅是初始状态的转移，状态转移矩阵包含系统自由运动的全部信息，它唯一决定了系统中各状态变量的自由运动。利用状态转移矩阵，可以从任意指定的初始时刻状态矢量$x(t_0)$求得任意时刻t 的状态矢量 $x(t)$。因此，在解矩阵微分方程时，只要知道任意时刻的初始条件，就可以在这段时间段内求解，这是利用状态空间表示动态系统的又一个优点。因为在经典控制理论中，高阶微分方程描述的系统在求解时对初始条件的处理是很麻烦的，一般都假定初始时刻 $t=0$ 时，初始条件也为零。即从零初始条件出发，去计算系统的输出响应。

3.4.1 基本概念

线性定常系统状态方程的解

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t \geq t_0$$

(1) $x(t)$是由初值引起的零输入解和控制所产生的零状态解的叠加和。

(2) 解的结构显示了从 $x(t_0)$ 到 $x(t)$ 的一种变换关系。

其中，$e^{A(t-t_0)} = \Phi(t,t_0) = \Phi(t-t_0)$ 称为状态转移矩阵。

状态转移方程 $\quad \boldsymbol{x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau}$

说明：状态方程解的物理上含义是，第一项是初始状态的转移项，第二项是控制输入作用下的受控项。表明了只要有受控项的存在，就有可能通过选取合适的控制使系统状态的运动轨线满足期望的要求，从而为改善系统的动态性能提供了可能性。

3.4.2 线性定常系统的状态转移矩阵

定义：线性定常连续系统的状态方程为：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad A \in R^{n\times n},$$

称满足如下矩阵方程

$$\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0), \quad \Phi(0) = I, \quad t \geq t_0$$

的解阵 $\Phi(t-t_0)$ 称为系统的状态转移矩阵。

说明1：状态转移矩阵须满足以下条件,否则不是状态转移矩阵

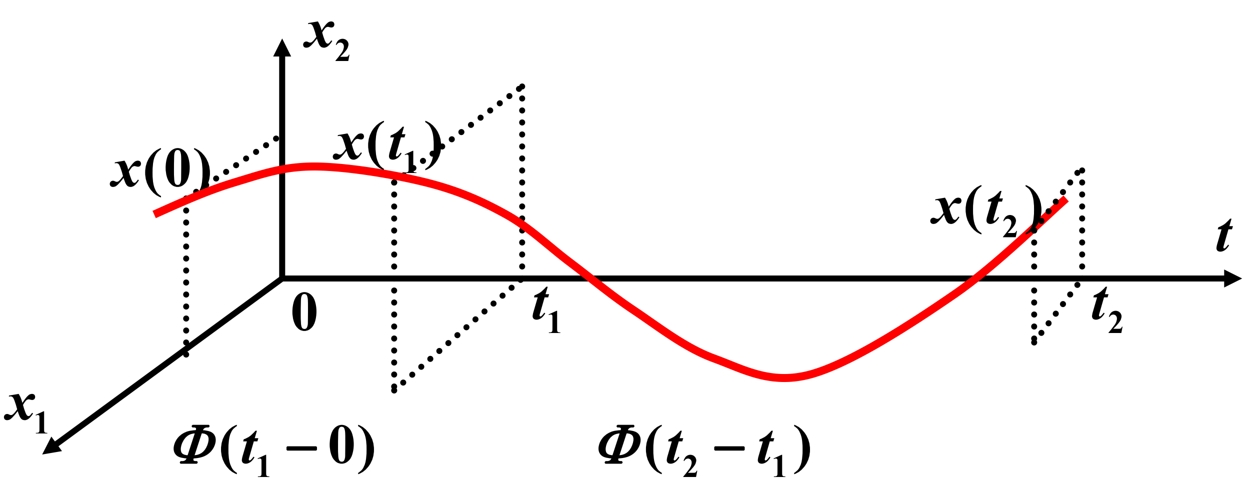
1）状态转移矩阵初始条件： $\Phi(t_0 - t_0) = I$

2）状态转移矩阵满足状态方程本身： $\dot{\Phi}(t - t_0) = A\Phi(t - t_0)$

说明2：线性定常系统的状态转移矩阵就是矩阵指数函数本身

说明3：状态转移矩阵的物理意义：

从时间角度看，状态转移矩阵使状态向量随着时间的推移不断地作坐标变换，不断地在状态空间中作转移，故称为状态转移矩阵



由于系统为 n 维，所以自由方程 $\dot{x}=Ax$ 有且仅有 n 个线性无关的解。任意选取 n 个线性无关的解，并以它们为列构成 $n\times n$ 矩阵函数 $\boldsymbol{\Psi}(t)$，则称 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为 $\dot{x}=Ax$ 的一个**基本解阵**。显然 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 满足如下的矩阵方程

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)=\boldsymbol{A\Psi}(t),\quad \boldsymbol{\Psi}(t_0)=\boldsymbol{H},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.6}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 为非奇异实常值矩阵。

状态转移矩阵与基本解阵的关系

$$\Phi(t-t_0)=\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0),\quad t\ge t_0$$

状态转移矩阵的形式

$$\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)},\quad t\ge t_0$$

状态转移矩阵可由基本解阵获得

状态转移矩阵的惟一性

矩阵指数和状态转移矩阵是从两个不同的角度所提出来的概念，矩阵指数是一个数学函数的概念，而状态转移矩阵是表征从初始状态到 t 时刻状态之间的转移关系。

利用由式(3.4.11)和式(3.4.12)给出的关系式，可把上节中导出的线性定常系统的零输入响应的表达式(3.1.5)和式(3.1.4)进一步表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t;t_0;\boldsymbol{x}_0,0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.13}$$

和

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t;0;\boldsymbol{x}_0,0)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant 0 \tag{3.4.14}$$

上述关系式为状态转移矩阵提供了清晰的物理意义，$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$就是将时刻 t_0 的状态 $\boldsymbol{x}_0$ 映射到时刻 t 的状态 $\boldsymbol{x}$ 的一个线性变换，它在定义区间内决定了状态向量的自由运动。

根据式(3.4.11)和式(3.4.12)，可以把 3.3 节中推证得到的线性定常系统运动规律的表达式(3.3.4)和式(3.3.3)改写成以状态转移矩阵表示的形式：

$$\boldsymbol{\phi}(t;t_0;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.15}$$

和

$$\boldsymbol{\phi}(t;0;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_{0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\quad t\geqslant 0 \tag{3.4.16}$$

求初始状态 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 时，下述系统在单位脉冲函数、单位阶跃函数、单位斜坡函数作用下的解。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

求初始状态 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 时，下述系统在单位脉冲函数、单位阶跃函数、单位斜坡函数作用下的解。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

解：

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s+3 & -1\\ -1 & s+3\end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$$

$$=\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ 1 & s+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{(s+3)}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+4)}\\ \dfrac{1}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{(s+3)}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{s+4} & \dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+4}\\ \dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+4} & \dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{s+4}\end{bmatrix}$$

(2) 应用直接法求不同激励信号下系统的解

Ⅰ 单位脉冲函数

单位脉冲函数$\delta(t)$可表示为

$$\begin{cases} \delta(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{cases} \\ \int_{0^-}^{0^+} \delta(\mathrm{t}) dt = 1 \end{cases}$$

则系统状态方程的解为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_{0^-}^{0^+} \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

故有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} & e^{-2t}-e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} & e^{-2t}+e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} & e^{-2t}-e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} & e^{-2t}+e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

II 单位阶跃函数

单位阶跃函数$u(t)$可表示为：

$$\begin{cases} u(t)=\begin{cases}1, t\ge 0\\ 0, t<0\end{cases} \\ \begin{cases}\int_{-\infty}^{0}u(t)dt=0\\ \int_{0}^{t}u(t)dt=\int_{0}^{t}1dt=t\end{cases}\end{cases}$$

则系统状态方程的解为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\\ &=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}d\tau\\ &=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{A}^{-1}\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}(t)\right]\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

故有：

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)x(0) - \boldsymbol{A}^{-1}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}(t)\right]\boldsymbol{B} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} & e^{-2t}-e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} & e^{-2t}+e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1}\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}(t)\right]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}(e^{-2t}+e^{-4t}) & -\frac{1}{2}(e^{-2t}-e^{-4t}) \\ -\frac{1}{2}(e^{-2t}-e^{-4t}) & 1-\frac{1}{2}(e^{-2t}+e^{-4t}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2e^{-2t}-e^{-4t}-1 \\ 2e^{-2t}+e^{-4t}-3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2e^{-2t}+5e^{-4t}+1 \\ 2e^{-2t}-5e^{-4t}+3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

III 单位斜坡函数

单位斜坡函数$u(t)$可表示为：

$$\begin{cases} u(t)=\begin{cases} t, t\ge 0 \\ 0, t<0 \end{cases} \\ \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} u(t)dt = 0 \\ \int_{0}^{t} u(t)dt = \int_{0}^{t} tdt = \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \end{cases}$$

则系统状态方程的解为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\tau d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \left[\boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{\Phi}(t) - \boldsymbol{A}^{-2} - \boldsymbol{A}^{-1}t\right]\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

故有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \left[\boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{\Phi}(t) - \boldsymbol{A}^{-2} - \boldsymbol{A}^{-1}t \right]\boldsymbol{B} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t} + e^{-4t} \\ e^{-2t} - e^{-4t} \end{bmatrix} + \left\{ \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t} + e^{-4t} & e^{-2t} - e^{-4t} \\ e^{-2t} - e^{-4t} & e^{-2t} + e^{-4t} \end{bmatrix} - \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} t \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t} + e^{-4t} \\ e^{-2t} - e^{-4t} \end{bmatrix} + \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 16e^{-2t} - 4e^{-4t} + 4t - 3 \\ 16e^{-2t} + e^{-4t} + 12t - 5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 32e^{-2t} + 12e^{-4t} + 4t - 3 \\ 32e^{-2t} - 12e^{-4t} + 12t - 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

应用式拉氏变换法求不同激励信号下系统的解

I 单位脉冲函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)]\\ &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]\\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}\\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

II 单位阶跃函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)]\\ &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[\frac{1}{s}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]\\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2e^{-2t}+5e^{-4t}+1 \\ 2e^{-2t}-5e^{-4t}+3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

III 单位斜坡函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)]\\ &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[\frac{1}{s^2}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]\\ &= \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 32e^{-2t}+12e^{-4t}+4t-3 \\ 32e^{-2t}-12e^{-4t}+12t-5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3.4.3 状态转移矩阵的性质

(1) $$\frac{\mathrm{d}\Phi(t-t_0)}{\mathrm{d}t}=A(t)\Phi(t-t_0),\quad \Phi(t_0-t_0)=I.$$

不变性

可微性

(2) $$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0).$$

传递性

(3) $$\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t).$$

可逆性

状态转移矩阵与系统矩阵具有交换律。

注，当 $t=0$ 时，结合以上性质，有

$$\dot{\Phi}(t)=\dot{\Phi}(0)=A\Phi(0)=A$$

可用来判断某一矩阵是否是状态转移矩阵。

3.4.3 状态转移矩阵的性质

(1) $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)=\Phi(t)A$ ，$\Phi(t_0-t_0)=I.$

已从定义中可知

(2) $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0).$

(3) $\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t).$

3.4.3 状态转移矩阵的性质

(1) $\frac{\mathrm{d}}{}$

$$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Psi(t_2)\Psi^{-1}(t_1)\Psi(t_1)\Psi^{-1}(t_0)$$
$$=\Psi(t_2)\Psi^{-1}(t_0)=\Phi(t_2-t_0).$$

(2) $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0).$

状态转移具有传递性，$t_0\sim t_2$的状态转移，可分段为由$t_0\sim t_1$段的转移与$t_1\sim t_2$ 段的转移。

(3) $\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t).$

3.4.3 状态转移矩阵的性质

(1) $\dfrac{\mathrm{d}\Phi(t-t_0)}{\mathrm{d}t} = A(t)\Phi(t-t_0),\ \ \Phi(t_0-t_0) = I.$

(2

$$\Phi^{-1}(t-t_0) = \left(\Phi(t-t_0)\right)^{-1} = \left(\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\right)^{-1}$$

$$= \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t) = \Phi(t_0-t).$$

(3) $\Phi^{-1}(t-t_0) = \Phi(t_0-t).$

状态转移矩阵是可逆的，
表示状态的逆向转移

表示状态转移矩阵是非奇异性的矩阵，且其逆意味着时间的逆转，也就是说，在已知 $x(t)$ 的情况下可求出小于 t 时刻的 $x(t_0)$ $t_0 \prec 0$

$$(4)\quad \Phi(t_2+t_1)=\Phi(t_2)\Phi(t_1).$$

分解性

$$(5)\quad \Phi(mt)=(\Phi(t))^2.$$

$(6)\quad \Phi(t-t_0)$ 由A惟一决定，与所选择的基本解阵无关

意指状态矢量从$-t_1$转移到0，又从0转移到t_2的组合。

(4) $\Phi(t_2+t_1)=\Phi(t_2)\Phi(t_1).$

$$\Phi(t_2+t_1)=\Phi(t_2-(-t_1))$$
$$=\Phi(t_2-0)\Phi(0-(-t_1))=\Phi(t_2)\Phi(t_1).$$

(5) $\Phi(mt)=(\Phi(t))^2.$

(6) $\Phi(t-t_0)$由A惟一决定，与所选择的基本解阵无关

(4) $\Phi(t_2+t_1)=\Phi(t_2)\Phi(t_1).$

(5) $\Phi(mt)=(\Phi(t))^2.$ 状态转移矩阵的 m 次方，等于其时间扩大m倍。

$$\Phi(mt)=\Phi(t+t+\cdots+t)$$
$$=\Phi(t)\Phi(t)\cdots\Phi(t)=\Phi((t))^m.$$

(6) $\Phi(t-t_0)$ 由A惟一决定，与所选择的基本解阵无关

例 已知状态转移矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$，试求

$\Phi^{-1}(t), A$

解：根据状态转移矩阵的运算性质有

$$\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)=\begin{bmatrix} 2e^{t}-e^{2t} & e^{t}-e^{2t} \\ -2e^{t}+2e^{2t} & -e^{t}+2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$A=\dot{\Phi}(0)=\begin{bmatrix} -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \\ 2e^{-t}-4e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

例3.6 设系统状态方程为 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$ 且 $x(0)=[x_1(0)x_2(0)]^T$

试求在 $u(t)=1(t)$ 作用下状态方程的解。

解 由于 $u(t)=1(t)$ $u(t-\tau)=1$

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(\tau)Bd\tau$$

前面已求得 $\Phi(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$

$$\int_0^t\Phi(\tau)d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-\tau}-e^{-2\tau}\\ -e^{-\tau}+2e^{-2\tau}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}-e^{-\tau}+\frac{1}{2}e^{-2\tau}\\ e^{-\tau}-e^{-2\tau}\end{bmatrix}\Bigg|_0^t=\begin{bmatrix}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\int_0^t\Phi(\tau)d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-\tau}-e^{-2\tau}\\ -e^{-\tau}+2e^{-2\tau}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}e^{-\tau}-e^{-2\tau}\\ -e^{-\tau}+2e^{-2\tau}\end{bmatrix}\Bigg|_0^t=\begin{bmatrix}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

例 已知系统状态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x$$

试求系统的状态转移矩阵和状态解，初始条件为$x(0)$ 。

解 因为系统矩阵为对角线形，由式（2-26），系统的状态转移矩阵

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}$$

状态解

$$x(t)=\Phi(t)x(0)=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}x(0)$$