3.4传递函数矩阵

传递函数——系统初始松弛（即：初始条件为零）时，输出量的拉氏变换式与输入量的拉氏变换式之比。

代控制

状态空间表达式为

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = Cx + du$$

SISO

进行拉普拉斯变换

$$s\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)$$

$$[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) + \boldsymbol{x}(0)$$

如果$[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}$存在，则 $\boldsymbol{x}(s) = [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) + [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0)$

如果 $\boldsymbol{x}(0) = 0$，则 $\boldsymbol{x}(s) = [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)$

而
$$\begin{aligned} y(s) &= Cx(s) + Du(s) \\ &= C[sI - A]^{-1}Bu(s) + Du(s) \end{aligned}$$

输出对输入向量(输入到输出)的传递函数矩阵:

$$G_{yu}(s) = C[sI - A]^{-1}B + D = C\frac{\mathrm{adj}[sI - A]}{\det[sI - A]}B + D$$

例1 系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

求系统传递函数。

输出对输入向量(输入到输出)的传递函数矩阵:

$$G_{yu}(s)=C[sI-A]^{-1}B+D=C\frac{\mathrm{adj}[sI-A]}{\det[sI-A]}B+D$$

例1 系统状态方程式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

求系统传递函数。

解: $g(s)=C[sI-A]^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{\mathrm{adj}\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix}}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

传递函数矩阵

状态空间表达式为
$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}\right\}$$

进行拉普拉斯变换

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$[sI - A]x(s) = Bu(s) + x(0)$$

如果$[sI - A]^{-1}$存在，则 $x(s) = [sI - A]^{-1}Bu(s) + [sI - A]^{-1}x(0)$

如果 $x(0) = 0$，则 $x(s) = [sI - A]^{-1}Bu(s) = G_{xu}(s)u(s)$

状态变量对输入向量(输入到状态)的传递函数矩阵:

$$G_{xu}(s) = [sI - A]^{-1}B = \frac{\operatorname{adj}[sI - A]}{\det[sI - A]}B$$

而 $$y(s)=Cx(s)+Du(s)$$
$$=C[sI-A]^{-1}Bu(s)+Du(s)$$
$$=\left\{C[sI-A]^{-1}B+D\right\}u(s)=G_{yu}(s)u(s)$$

输出对输入向量(输入到输出)的传递函数矩阵:

$$\boldsymbol{G}_{yu}(s)=\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}\frac{\operatorname{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

其结构为

$$G_{yu}(s)=\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

式中，$g_{ij}(s)$表示只有第 j 个输入作用时，第i 个输出量 $y_i(s)$ 对第j 个输入量 $u_j(s)$ 的传递函数。

例2 线性定常系统状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

求系统的传递函数矩阵。

例2 线性定常系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

求系统的传递函数矩阵。

解

$$\boldsymbol{G}_{yu}(s)=\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s+4 & -3\\ 1 & 1 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3+6s^2+11s+3}\begin{bmatrix}s+2 & 3\\ -(s+1) & s(s+4)\end{bmatrix}$$

正则（严格正则）有理传递函数（矩阵）

如果当$s \to \infty$时，$g_{ij}(\infty)$是有限常量，则称有理函数$g_{ij}(s)$是正则的。若$g_{ij}(\infty)=0$，则称 $g_{ij}(s)$ 是严格正则的。

非正则传递函数描述的系统在实际的控制工程中是不能应用的，因为这时系统对高频噪声将会大幅度放大。例如微分器 $g(s)=s$

为非正则系统，假如输入信号带有高频污染 $u(t)=\cos t+0.01\cos 1000t$

经过微分器输出 $y(t)=\dfrac{d}{dt}u(t)=-\sin t-10\sin 1000t$

可见，在微分器输入端，噪声的幅值只是有效信号幅值的百分之一，输出端噪声的幅值却是有效信号幅值的**10**倍，信噪比变得很小。

传递函数（矩阵）描述和状态空间描述的比较

1）传递函数是系统在初始松弛的假定下输入—输出间的关系描述，非初始松弛系统，不能应用这种描述；状态空间表达式既可以描述初始松弛系统，也可以描述非初始松弛系统。

2）传递函数仅适用于线性定常系统；而状态空间表达式可以在定常系统中应用，也可以在时变系统中应用。

3）对于数学模型不明的线性定常系统，难以建立状态空间表达式；用实验法获得频率特性，进而可以获得传递函数。

4）传递函数仅适用于单入单出系统；状态空间表达式可用于多入多出系统的描述。

5）传递函数只能给出系统的输出信息；而状态空间表达式不仅给出输出信息，还能够提供系统内部状态信息。

综上所示，传递函数（矩阵）和状态空间表达式这两种描述各有所长，在系统分析和设计中都得到广泛应用。