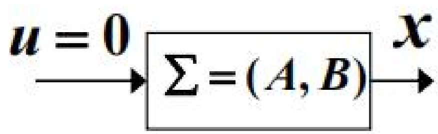
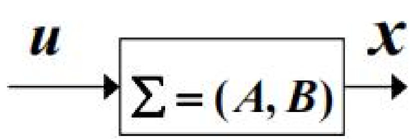
[预备知识]：线性定常系统的运动

1、自由运动：线性定常系统在没有控制作用，即$\boldsymbol{u}=0$时，由初始状态引起的运动称自由运动。



齐次状态方程的解： $\dot{x} = Ax,\ x(t)|_{t=0} = x(0)$

2、强迫运动：线性定常系统在控制$\boldsymbol{u}$作用下的运动，称为强迫运动。



非齐次状态方程的解： $\dot{x} = Ax + Bu,\ x(t)|_{t=t_0} = x(t_0)$

3.3 线性连续系统状态方程的解

非齐次状态方程，是同时考虑初始状态 $x(0)$ 和外输入 u 共同作用下状态运动的表达式，如下式

$A \in R^{n \times n}$　$X(t) \in R^n$　$B \in R^{n \times r}$　$U(t) \in R^r$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \qquad (2.1)$$

且初始条件为:　$X(t)\big|_{t=0} = X(0)$

方法一：解析法　比较一阶常微分方程求解：

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \Longrightarrow \dot{x}(t) - ax(t) = bu(t)$$

$$\dot{x}(t)e^{-at} - ax(t)e^{-at} = bu(t)e^{-at}$$

$$\frac{d}{dt}[x(t)e^{-at}] = bu(t)e^{-at}$$

$$x(t)e^{-at} - x(0) = \int_0^t bu(\tau)e^{-a\tau}d\tau$$

$$x(t)e^{-at} = x(0) + \int_0^t bu(\tau)e^{-a\tau}d\tau$$

$$x(t) = [x(0) + \int_0^t bu(\tau)e^{-a\tau}d\tau]e^{at}$$

$$= x(0)e^{at} + \int_0^t bu(\tau)e^{a(t-\tau)}d\tau$$

同样，将方程（2.1）写为 $\dot{X}(t) - AX(t) = BU(t)$

在上式两边左乘 e^{-At} ，可得：

$$e^{-At}[\dot{X}(t) - AX(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-At}X(t)] = e^{-At}BU(t)$$

$$e^{-At}x(t)-x(0)I=\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t)=\boxed{e^{At}x(0)}+\boxed{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,}\qquad t\geq 0$$

更一般的形式为：

$$x(t)=\boxed{e^{A(t-t_0)}x(t_0)}+\boxed{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,}\qquad t\geq t_0$$

系统的动态响应由两部分组成：
一部分是由初始状态引起的系统自由运动，叫做零输入响应；
另一部分是由控制输入所产生的受控运动，叫做零状态响应。

例 设定常系统的齐次状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathrm{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求单位阶跃输入作用下的状态响应。

解 用拉氏变换方法求解

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1))s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

反拉氏变换

$$L^{-1}(sI - A) = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

因此，系统对单位阶跃输入的状态响应为

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} +$$

$$\int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1(\tau) d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

若初始状态为零，$x(0)=0$，则单位阶跃输入下的状态响应，即系统的强迫运动为

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

二、拉氏变换求解法

对非齐次状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$ 两边进行拉氏变换得:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

整理得: $X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$

结论: $x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)]$

[例]: 已知状态方程为:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

其初始状态为:
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

求系统在单位阶跃输入作用下状态方程的解。

[解]:

1）拉氏变换法求解:

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$$

先求 $(sI-A)^{-1}$

由于: $$(sI-A)=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

所以: $$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

阶跃响应拉氏变换：

可以得到：

$$X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} (s+3)x_1(0)+x_2(0) \\ -2x_1(0)+sx_2(0) \end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} 1/s \\ 1 \end{bmatrix}$$

拉氏反变换得方程解为：

$$x(t)=L^{-1}X(s)$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+(2x_1(0)+x_2(0)-1)e^{-t} & -(x_1(0)+x_2(0)-\frac{1}{2})e^{-2t} \\ -(2x_1(0)+x_2(0)-1)e^{-t} & -(2x_1(0)+2x_2(0)-1)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

补充-系统输出方程的求解

求出状态解 $x(t)$后，代入输出方程

$$y(t) = cx(t)$$

由于c是已知的，只要做简单的向量乘法的运算，就容易求得系统输出$y(t)$的响应。

例 线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

试求系统在初始状态为零时，单位阶跃输入下系统的输出响应。

解 由例2-3的计算可知，系统在单位阶跃输入下的状态解为

$$x(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}$$

初始状态为零时，状态解为

$$x(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}$$

把状态解代入输出方程，输出响应为

$$y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

系统输出只与系统状态 x_1 有关，输出响应是稳定的。

补充. 典型输入信号作用下的系统响应

在阶跃、斜波、脉冲典型输入信号作用下，系统解的公式如下

1.阶跃响应

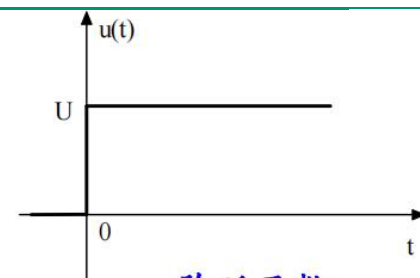
$u(t)=h\times 1(t)$　　h 为幅值，$h=1$为单位阶跃输入

$$x(t)=e^{At}x(0)+A^{-1}(e^{At}-I)bh$$

$$y(t)=c\{\ e^{At}x(0)+A^{-1}(e^{At}-I)bh)$$

阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases}U & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



阶跃函数

U=1的函数称为单位阶跃函数，记作1(t)。

$$u(t)=U\cdot 1(t)$$

零初始条件下的拉氏变换象函数为$\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{U}{s}$

2.斜波响应

$u(t)=h\times t(t)$ h 为幅值， $h=1$ 为单位斜波输入

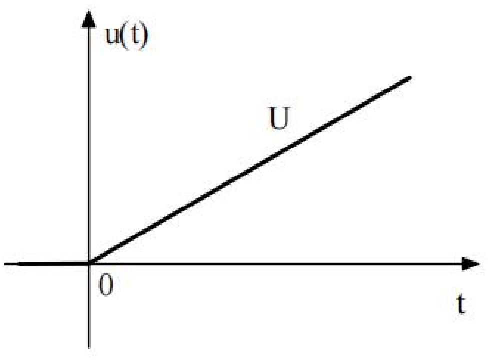
$$x(t)=e^{At}x(0)+[\ A^{-2}(e^{At}-I)-A^{-1}t)\ ]bh$$

$$y(t)=c\{\ e^{At}x(0)+[\ A^{-2}(e^{At}-I)-A^{-1}t)\ ]bh\ \}$$

2、斜坡函数

$$u(t)=\begin{cases}Ut & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$u(t)=Ut\cdot 1(t)$$



斜坡函数

零初始条件下的拉氏变换为 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{U}{s^2}$

3. 脉冲响应

$u(t)=\delta(t)$，单位脉计输入

$$x(t)=e^{At}x(0)+e^{At}b$$

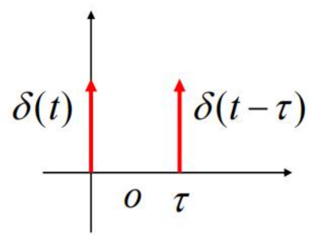
$$y(t)=c\{\ e^{At}x(0)+e^{At}b\ \}$$

脉冲函数

理想单位脉冲函数

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$



其拉氏变换后的像函数为：$L[\delta(t)]=1$

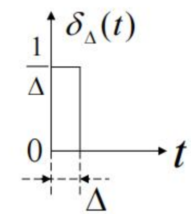
出现在 $t=\tau$ 时刻，积分面积为U的理想脉冲函数定义如下：

$$A\delta(t-\tau)=\begin{cases}0, t\neq\tau\\ \infty, t=\tau\end{cases} \quad 且 \quad \int_{-\infty}^{\infty}A\delta(t-\tau)dt=A$$

实际单位脉冲函数：

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}0, & t<0 \text{ 和 } t>\Delta\\ \frac{1}{\Delta}, & 0<t<\Delta\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{\Delta}(t)dt=\Delta\times\frac{1}{\Delta}=1$$



当 $\Delta\to 0$ 时，$\delta_{\Delta}(t)=\delta(t)$

$$\begin{cases}u(t)=U\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}u(t)dt=U\end{cases}$$

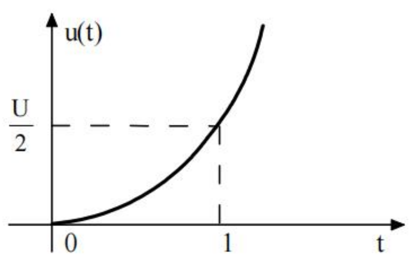
冲激函数的拉氏变换象函数为U。

分析系统特性究竟采用何种典型输入信号，取决于实际系统在正常工作情况下最常见的输入信号形式。

当系统的输入具有突变性质时，如指令的突然转换、电源的突然接通、负荷的突变等均可选择阶跃函数为输入信号；
当系统的输入是随时间线性增长变化时，可选择斜坡函数为典型输入信号。

抛物线函数

$$u(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}Ut^2 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



抛物线函数

$$u(t)=\tfrac{1}{2}Ut^2\cdot 1(t)$$

零初始条件下的拉氏变换为 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{U}{s^3}$

正弦函数 $u(t)=A\sin\omega t$

拉氏变换象函数为 $\dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

3.4、线性定常系统的状态转移矩阵

已知：线性定常系统的齐次状态方程：$\dot{x} = Ax$

满足初始状态 $x(t)|_{t=0} = x(0)$ 的解是：$x(t) = e^{At}x(0)$

满足初始状态 $x(t)|_{t=t_0} = x(t_0)$ 的解是：$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$

令：

$$\begin{cases} e^{At} = \Phi(t) \\ e^{A(t-t_0)} = \Phi(t-t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t)x(0) \\ x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) \end{cases}$$

线性定常系统的状态转移矩阵

状态转移矩阵是现代控制理论最重要的概念之一，由此可将齐次状态方程的解表达为统一的形式，即：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

式(2.12)的物理意义是：自由运动的解仅是初始状态的转移，状态转移矩阵包含系统自由运动的全部信息，它唯一决定了系统中各状态变量的自由运动。利用状态转移矩阵，可以从任意指定的初始时刻状态矢量$x(t_0)$求得任意时刻t 的状态矢量 $x(t)$。因此，在解矩阵微分方程时，只要知道任意时刻的初始条件，就可以在这段时间段内求解，这是利用状态空间表示动态系统的又一个优点。因为在经典控制理论中，高阶微分方程描述的系统在求解时对初始条件的处理是很麻烦的，一般都假定初始时刻 $t=0$ 时，初始条件也为零。即从零初始条件出发，去计算系统的输出响应。

3.4.1 基本概念

线性定常系统状态方程的解

$$x(t)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad t\geq t_0$$

(1) $x(t)$是由初值引起的零输入解和控制所产生的零状态解的叠加和。

(2) 解的结构显示了从 $x(t_0)$ 到 $x(t)$ 的一种变换关系。

其中，$\mathrm{e}^{A(t-t_0)}=\Phi(t,t_0)=\Phi(t-t_0)$ 称为状态转移矩阵。

状态转移方程

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

说明：状态方程解的物理上含义是，第一项是初始状态的转移项，第二项是控制输入作用下的受控项。表明了只要有受控项的存在，就有可能通过选取合适的控制使系统状态的运动轨线满足期望的要求，从而为改善系统的动态性能提供了可能性。

3.4.2 线性定常系统的状态转移矩阵

定义：线性定常连续系统的状态方程为：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad A \in R^{n\times n},$$

称满足如下矩阵方程

$$\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0), \quad \Phi(0) = I, \quad t \geq t_0$$

的解阵 $\Phi(t-t_0)$ 称为系统的状态转移矩阵。

说明1：状态转移矩阵须满足以下条件, 否则不是状态转移矩阵

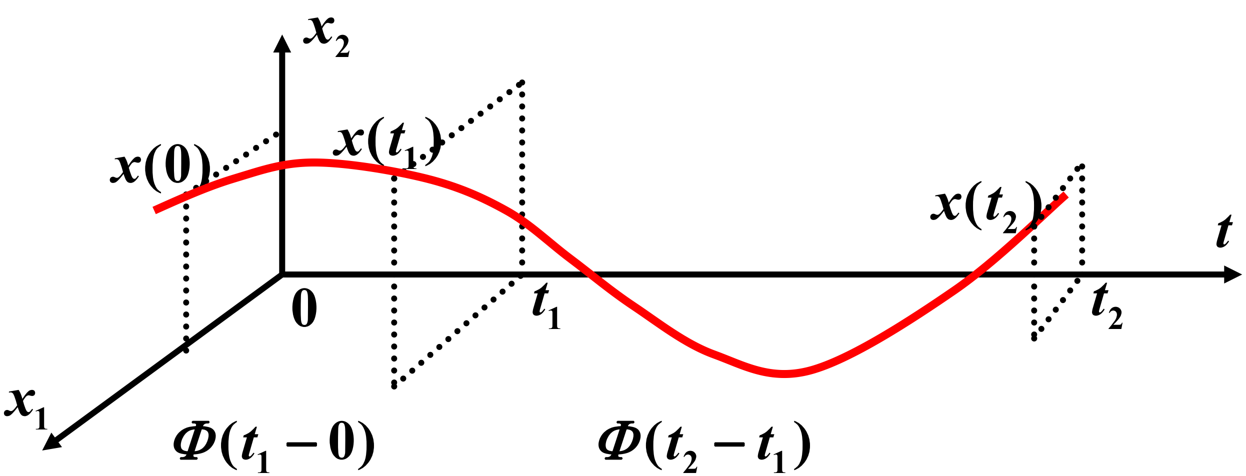
1）状态转移矩阵初始条件： $\boldsymbol{\Phi}(t_0 - t_0) = \boldsymbol{I}$

2）状态转移矩阵满足状态方程本身： $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t - t_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t - t_0)$

说明2：线性定常系统的状态转移矩阵就是矩阵指数函数本身

说明3：状态转移矩阵的物理意义：

从时间角度看，状态转移矩阵使状态向量随着时间的推移不断地作坐标变换，不断地在状态空间中作转移，故称为状态转移矩阵



由于系统为 n 维，所以自由方程 $\dot{x}=Ax$ 有且仅有 n 个线性无关的解。任意选取 n 个线性无关的解，并以它们为列构成 $n\times n$ 矩阵函数 $\boldsymbol{\Psi}(t)$，则称 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为 $\dot{x}=Ax$ 的一个**基本解阵**。显然 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 满足如下的矩阵方程

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)=A\boldsymbol{\Psi}(t),\quad \boldsymbol{\Psi}(t_0)=\boldsymbol{H},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.6}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 为非奇异实常值矩阵。

状态转移矩阵与基本解阵的关系

$$\Phi(t-t_0)=\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0),\quad t\geq t_0$$

状态转移矩阵可由基本解阵获得

状态转移矩阵的形式

$$\Phi(t-t_0)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)},\quad t\geq t_0$$

状态转移矩阵的惟一性

矩阵指数和状态转移矩阵是从两个不同的角度所提出来的概念，矩阵指数是一个数学函数的概念，而状态转移矩阵是表征从初始状态到t时刻状态之间的转移关系。

利用由式(3.4.11)和式(3.4.12)给出的关系式，可把上节中导出的线性定常系统的零输入响应的表达式(3.1.5)和式(3.1.4)进一步表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t;\ t_0;\ \boldsymbol{x}_0,0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.13}$$

和

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t;\ 0;\ \boldsymbol{x}_0,0)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant 0 \tag{3.4.14}$$

上述关系式为状态转移矩阵提供了清晰的物理意义，$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$就是将时刻 t_0 的状态 $\boldsymbol{x}_0$ 映射到时刻 t 的状态 $\boldsymbol{x}$ 的一个线性变换，它在定义区间内决定了状态向量的自由运动。

根据式(3.4.11)和式(3.4.12)，可以把 3.3 节中推证得到的线性定常系统运动规律的表达式(3.3.4)和式(3.3.3)改写成以状态转移矩阵表示的形式：

$$\boldsymbol{\phi}(t;\ t_0;\ \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.15}$$

和

$$\boldsymbol{\phi}(t;\ 0;\ \boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_{0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\quad t\geqslant 0 \tag{3.4.16}$$

求初始状态 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 时，下述系统在单位脉冲函数、单位阶跃函数、单位斜坡函数作用下的解。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

求初始状态 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 时，下述系统在单位脉冲函数、单位阶跃函数、单位斜坡函数作用下的解。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

解：

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s+3 & -1\\ -1 & s+3\end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$$

$$=\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ 1 & s+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(s+3)}{(s+2)(s+4)} & \frac{1}{(s+2)(s+4)}\\ \frac{1}{(s+2)(s+4)} & \frac{(s+3)}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+4} & \frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+4} & \frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+4}\end{bmatrix}$$

(2) 应用直接法求不同激励信号下系统的解

l 单位脉冲函数

单位脉冲函数$\delta(t)$可表示为
$$\begin{cases}\delta(\mathrm{t}) = \begin{cases}0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0\end{cases} \\ \int_{0^-}^{0^+} \delta(\mathrm{t}) dt = 1\end{cases}$$

则系统状态方程的解为：
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_{0^-}^{0^+} \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

故有：
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} & e^{-2t}-e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} & e^{-2t}+e^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} & e^{-2t}-e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} & e^{-2t}+e^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

II 单位阶跃函数

单位阶跃函数 $u(t)$ 可表示为：

$$\begin{cases} u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} u(t) dt = 0 \\ \int_{0}^{t} u(t) dt = \int_{0}^{t} 1 dt = t \end{cases} \end{cases}$$

则系统状态方程的解为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_{0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_{0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{A}^{-1}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}(t)\right]\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

故有：

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)x(0) - \boldsymbol{A}^{-1}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}(t)\right]\boldsymbol{B} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} & e^{-2t}-e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} & e^{-2t}+e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}(t)\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}(e^{-2t}+e^{-4t}) & -\frac{1}{2}(e^{-2t}-e^{-4t}) \\ -\frac{1}{2}(e^{-2t}-e^{-4t}) & 1-\frac{1}{2}(e^{-2t}+e^{-4t}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2e^{-2t}-e^{-4t}-1 \\ 2e^{-2t}+e^{-4t}-3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2e^{-2t}+5e^{-4t}+1 \\ 2e^{-2t}-5e^{-4t}+3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

III 单位斜坡函数

单位斜坡函数$u(t)$可表示为：

$$\begin{cases} u(t)=\begin{cases} t, t\ge 0 \\ 0, t<0 \end{cases} \\ \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} u(t)dt = 0 \\ \int_{0}^{t} u(t)dt = \int_{0}^{t} tdt = \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \end{cases}$$

则系统状态方程的解为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\tau d\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \left[\boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{\Phi}(t) - \boldsymbol{A}^{-2} - \boldsymbol{A}^{-1}t\right]\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

故有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \left[\boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{\Phi}(t) - \boldsymbol{A}^{-2} - \boldsymbol{A}^{-1}t\right]\boldsymbol{B} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} \end{bmatrix} + \left\{\frac{1}{64}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} & e^{-2t}-e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} & e^{-2t}+e^{-4t} \end{bmatrix} - \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} t\right\}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-4t} \\ e^{-2t}-e^{-4t} \end{bmatrix} + \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 16e^{-2t}-4e^{-4t}+4t-3 \\ 16e^{-2t}+e^{-4t}+12t-5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 32e^{-2t}+12e^{-4t}+4t-3 \\ 32e^{-2t}-12e^{-4t}+12t-5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

应用式拉氏变换法求不同激励信号下系统的解

I 单位脉冲函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)] \\ &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}] \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

II 单位阶跃函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)] \\ &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[\frac{1}{s}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}] \\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2e^{-2t}+5e^{-4t}+1 \\ 2e^{-2t}-5e^{-4t}+3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

III 单位斜坡函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)] \\ &= L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[\frac{1}{s^2}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}] \\ &= \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 32e^{-2t}+12e^{-4t}+4t-3 \\ 32e^{-2t}-12e^{-4t}+12t-5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3.4.3 状态转移矩阵的性质

(1) $$\frac{\mathrm{d}\Phi(t-t_0)}{\mathrm{d}t} = A(t)\Phi(t-t_0),\ \ \Phi(t_0-t_0)=I.$$

不变性

可微性

(2) $$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0).$$

传递性

(3) $$\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t).$$

可逆性

状态转移矩阵与系统矩阵具有交换律。

注，当 $t=0$ 时，结合以上性质，有

$$\dot{\Phi}(t)=\dot{\Phi}(0)=A\Phi(0)=A$$

可用来判断某一矩阵是否是状态转移矩阵。

3.4.3 状态转移矩阵的性质

(1) $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)=\Phi(t)A$ ， $\Phi(t_0-t_0)=I.$

已从定义中可知

(2) $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0).$

(3) $\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t).$

3.4.3 状态转移矩阵的性质

(1) d

$$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Psi(t_2)\Psi^{-1}(t_1)\Psi(t_1)\Psi^{-1}(t_0)$$
$$=\Psi(t_2)\Psi^{-1}(t_0)=\Phi(t_2-t_0).$$

(2) $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0).$

状态转移具有传递性，$t_0\sim t_2$的状态转移，可分段为由$t_0\sim t_1$段的转移与 $t_1\sim t_2$ 段的转移。

(3) $\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t).$

3.4.3 状态转移矩阵的性质

$$(1)\quad \frac{\mathrm{d}\Phi(t-t_0)}{\mathrm{d}t}=A(t)\Phi(t-t_0),\ \ \Phi(t_0-t_0)=I.$$

(2

$$\Phi^{-1}(t-t_0)=\left(\Phi(t-t_0)\right)^{-1}=\left(\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\right)^{-1}$$
$$=\Psi(t_0)\Psi^{-1}(t)=\Phi(t_0-t).$$

$$(3)\quad \Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t).$$

状态转移矩阵是可逆的，
表示状态的逆向转移

表示状态转移矩阵是非奇异性的矩阵，且其逆意味着时间的逆转，也就是说，在已知

$x(t)$ 的情况下可求出小于 t 时刻的 $x(t_0)$ $t_0 \prec 0$

(4) $\Phi(t_2+t_1)=\Phi(t_2)\Phi(t_1)$.

分解性

(5) $\Phi(mt)=(\Phi(t))^2$.

(6) $\Phi(t-t_0)$ 由A惟一决定，与所选择的基本解阵无关

意指状态矢量从$-t_1$ 转移到0，又从0转移到 t_2 的组合。

(4) $\Phi(t_2+t_1)=\Phi(t_2)\Phi(t_1).$

$$
\begin{aligned}
\Phi(t_2+t_1)&=\Phi(t_2-(-t_1))\\
&=\Phi(t_2-0)\Phi(0-(-t_1))=\Phi(t_2)\Phi(t_1).
\end{aligned}
$$

(5) $\Phi(mt)=(\Phi(t))^2.$

(6) $\Phi(t-t_0)$ 由A惟一决定，与所选择的基本解阵无关

(4) $\Phi(t_2+t_1)=\Phi(t_2)\Phi(t_1).$

(5) $\Phi(mt)=(\Phi(t))^2.$ 状态转移矩阵的 m 次方，等于其时间扩大m倍。

$$\Phi(mt)=\Phi(t+t+\cdots+t)$$
$$=\Phi(t)\Phi(t)\cdots\Phi(t)=\Phi((t))^m.$$

(6) $\Phi(t-t_0)$ 由A惟一决定，与所选择的基本解阵无关

例 已知状态转移矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$，试求

$\Phi^{-1}(t), A$

解：根据状态转移矩阵的运算性质有

$$\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)=\begin{bmatrix} 2e^{t}-e^{2t} & e^{t}-e^{2t} \\ -2e^{t}+2e^{2t} & -e^{t}+2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$A=\dot{\Phi}(0)=\begin{bmatrix} -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \\ 2e^{-t}-4e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

例3.6 设系统状态方程为 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$ 且 $x(0)=[x_1(0)x_2(0)]^T$

试求在 $u(t)=1(t)$ 作用下状态方程的解。

解 由于 $u(t)=1(t)$ $u(t-\tau)=1$

$$\Rightarrow \quad x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(\tau)Bd\tau$$

前面已求得 $\Phi(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$

$$\int_0^t\Phi(\tau)d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-\tau}-e^{-2\tau}\\ -e^{-\tau}+2e^{-2\tau}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}-e^{-\tau}+\frac{1}{2}e^{-2\tau}\\ e^{-\tau}-e^{-2\tau}\end{bmatrix}\Bigg|_0^t=\begin{bmatrix}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t\Phi(\tau)d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-\tau}-e^{-2\tau}\\ -e^{-\tau}+2e^{-2\tau}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}e^{-\tau}-e^{-2\tau}\\ -e^{-\tau}+2e^{-2\tau}\end{bmatrix}\Bigg|_0^t=\begin{bmatrix}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

例 已知系统状态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x$$

试求系统的状态转移矩阵和状态解，初始条件为$x(0)$ 。

解 因为系统矩阵为对角线形，由式（2-26），系统的状态转移矩阵

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}$$

状态解

$$x(t)=\Phi(t)x(0)=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}x(0)$$

3.5 线性时变系统状态方程的解

- 线性时变系统客观存在，研究具有重要意义。

  电路系统电阻R随温度 t 发生变化；

  火箭控制系统燃料消耗使其质量m随时间 t 发生变化等。

- 线性时变系统状态空间描述：

$A(t) \in R^{n\times n}$　$X(t) \in R^{n}$　$B(t) \in R^{n\times r}$　$U(t) \in R^{r}$

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$
$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t)$$

$Y(t) \in R^{m}$　$C(t) \in R^{m\times n}$　$D(t) \in R^{m\times r}$

3.5.1 线性时变系统齐次状态方程的解

系统描述：

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t),$$

t_0为初始时刻，$a_{ij}(t)$为分段连续函数。

利用逐次逼近法

解的一般形式：

$$x(t)=\left[I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}A(\tau_1)\int_{t_0}^{t}A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1+\int_{t_0}^{t}A(\tau_1)\int_{t_0}^{t}A(\tau_2)\int_{t_0}^{t}A(\tau_3)\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1+\cdots\right]x(t_0).$$

3.5.1 线性时变系统齐次状态方程的求解

时变系统齐次状态方程 $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$

齐次一阶微分方程 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(t)\mathbf{x}(t)$

分离变量法求解一阶微分方程 $\dfrac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\mathbf{x}(t)} = \mathbf{a}(t)$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{\mathbf{x}(\tau)} dt = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(\tau) d\tau \qquad \ln \frac{\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}(t_0)} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(\tau) d\tau} \mathbf{x}(t_0) \Rightarrow X(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau} X(t_0)$$

当A(t)与 $\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau$ 满足矩阵乘法可交换条件，上式成立

A(t)与 $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ 满足矩阵乘法可交换条件：

$$A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = [\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau]A(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} [A(t)A(\tau) - A(\tau)A(t)]d\tau = 0$$

矩阵乘法可交换条件为对任意的时间t_1和t_2满足：

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$$

时变系统齐次状态方程的解

$$X(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} X(t_0)$$

状态转移矩阵为

$$\Phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}$$

证明：设 $e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}$ 是时变齐次状态方程的 解,则

$$\dot{X} = \frac{d}{dt}[e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} X(t_0)] = A(t)[e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} X(t_0)]$$

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]^k + \cdots$$

展成幂级数

对上式求导数，得：

$$\frac{d}{dt}[e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}] = A(\tau) + \frac{1}{2!}\left[\boxed{A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} + \boxed{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau A(t)}\right] + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!}\left[\boxed{A(t)[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau]^{k-1}} + \cdots + \boxed{[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau]^{k-1} A(t)}\right] + \cdots$$

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

$$A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = [\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau]A(t)$$

$$\Phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} \Rightarrow \text{状态转移矩阵}$$

$$= I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]^k + \cdots$$

注意：一般时变系统的状态转移矩阵难以得到封闭形式。

3.5、线性时变系统的状态转移矩阵

<u>已知</u>:线性时变系统的齐次状态方程：$\dot{x}(t)=A(t)x(t)$

选下列基向量作为初始条件：

$$e_1=x_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad e_2=x_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots\quad e_n=x_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

仍可以得到满足初始状态 $x(t)|_{t=t_0}=x(t_0)$ 的解是：

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)$$

线性时变系统的状态转移矩阵

<u>说明</u>：对于线性时变系统来说：状态转移矩阵不仅是时间t的函数，同时也是时间t_0的函数。

三、状态转移矩阵的性质

1、对于线性定常系统：$\Phi(t_0-t_0)=\Phi(0)=e^{A0}=I$

对于线性时变系统$\Phi(t_0,t_0)=I$

不变性

说明：此性质的含义是，从t0到t0的转移，相当于不转移，转移后的状态转移矩阵仍是它自己。

2、对于线性定常系统：$\dot{\Phi}(t-t_0)=A\Phi(t-t_0)$

对于线性时变系统$\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)$

3、对于线性定常系统：$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)$

对于线性时变系统$\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)=\Phi(t_2,t_0)$

传递性

说明：此性质表明，从t0到t2的转移可以分为两步：先从t0转移到t1，再从t1转移到t2。

$$\left.\begin{aligned}&\text{4、对于线性定常系统：}\quad \Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t)\\&\text{对于线性时变系统}\quad \Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)\end{aligned}\right\}\boxed{\text{可逆性}}$$

<u>**说明**</u>：此性质表明，状态转移过程在时间上可以逆转。

<u>**说明**</u>：由性质1、3证明

$$x(t_0)\ \underset{\Phi(t_0-t)}{\overset{\Phi(t-t_0)}{\rightleftarrows}}\ x(t)$$

5、对于线性定常系统：$\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)=\Phi(t_2)\Phi(t_1)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{分解性}}$

<u>**说明**</u>：由 $\Phi(t_1+t_2)=e^{A(t_1+t_2)}$ 去证明。

6、对于线性定常系统：$[\Phi(t)]^n=\Phi(nt)$

四、线性定常系统状态转移矩阵的计算方法

说明：线性时变系统的状态转移矩阵的求法，见后。

1、已知齐次状态方程的解，求状态转移矩阵：

方法是利用 $\Phi(t)=x(t)x^{-1}(0)$ 直接求解。

2、利用矩阵指数函数的求解方法求状态转移矩阵。

3、已知状态转移矩阵，求系统矩阵A阵

说明：利用状态转移矩阵性质2求

由 $\dot{\Phi}(t-t_0)=A\Phi(t-t_0)$ 可得 $A=\dot{\Phi}(t)\big|_{t=t_0}$

4、已知某时刻系统状态，求其它时刻的状态。$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)$

[例]已知某二阶系统齐次状态方程为：$\dot{x}(t)=Ax(t)$，其解为：

$$x(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\text{时，}\quad x(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}\\e^{-t}\end{bmatrix},\quad x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\text{时，}\quad x(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}+2te^{-t}\\e^{-t}+te^{-t}\end{bmatrix}$$

试求矩阵指数 $\Phi(t)$ 。

[解]：设 $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}$，则：$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}$

$$\text{即}\begin{bmatrix}2e^{-t}\\e^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\text{及}\begin{bmatrix}e^{-t}+2te^{-t}\\e^{-t}+te^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

则有：
$$\begin{bmatrix}2e^{-t} & e^{-t}+2te^{-t}\\ e^{-t} & e^{-t}+te^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

所以：
$$\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t} & e^{-t}+2te^{-t}\\ e^{-t} & e^{-t}+te^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

[例1]：

已知线性时变系统的齐次状态方程和初始条件分别为

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t & 0\\ 0 & t^2\end{bmatrix}x(t) \qquad x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} \quad \text{和}$$

试求状态转移矩阵和状态方程的解。

[解]：1）求状态转移矩阵$\Phi(t,0)$

首先验证系数矩阵A(t)的可交换性。

$$A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}t_1t_2 & 0\\ 0 & (t_1t_2)^2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \Phi(t,t_0)=\Phi(t,0)$$

$$=I+\int_0^t A(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\left[\int_0^t A(\tau)d\tau\right]^2+\frac{1}{3!}\left[\int_0^t A(\tau)d\tau\right]^3+\cdots$$

求得：

$$\int_0^t A(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tau & 0 \\ 0 & \tau^2 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}t^3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2!}\left[\int_0^t A(\tau)d\tau\right]^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}t^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{32}t^4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18}t^6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3!}\left[\int_0^t A(\tau)d\tau\right]^3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \frac{1}{32}t^4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18}t^6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{768}t^6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{324}t^9 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t,0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{4}t^2&0\\0&\frac{1}{3}t^3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{32}t^4&0\\0&\frac{1}{18}t^6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{768}t^6&0\\0&\frac{1}{324}t^9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{32}t^4+\frac{1}{768}t^6+\cdots&0\\0&1+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{18}t^6+\frac{1}{324}t^9+\cdots\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\Phi(t,0)x(0)=\begin{bmatrix}1+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{32}t^4+\cdots&0\\0&1+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{18}t^6+\cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+\dfrac{1}{4}t^3+\dfrac{1}{32}t^4+\cdots\\3+t^3+\dfrac{1}{6}t^6+\cdots\end{bmatrix}$$

二、线性时变系统非齐次状态方程的解

线性时变系统非齐次状态方程为：$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$

且A(t)和B(t)的元素在时间段$[t_0,t_2]$内分段连续。

则在初始状态为$x(t_0)$时方程的解为：

$$x(t)=\underbrace{\Phi(t,t_0)x(t_0)}_{\text{初始状态引起的响应}}+\underbrace{\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau}_{\text{输入引起的响应}}$$

<u>比较</u>：线性定常系统非齐次状态方程的解

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

证明：

设线性时变系统 $\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$ 的解为：

$$x(t)=\Phi(t,t_0)z(t),\qquad (1)$$

将（1）代入状态方程左边得：

$$\dot{x}(t)=\dot{\Phi}(t,t_0)z(t)+\Phi(t,t_0)\dot{z}(t)=A(t)\Phi(t,t_0)z(t)+\Phi(t,t_0)\dot{z}(t)\qquad (2)$$

将（1）代入状态方程右边得：

$$A(t)x(t)+B(t)u(t)=A(t)\Phi(t,t_0)z(t)+B(t)u(t)\qquad (3)$$

由（2）和（3）式相等，得：$\Phi(t,t_0)\dot{z}(t)=B(t)u(t)$

即：$\dot{z}(t)=\Phi^{-1}(t,t_0)B(t)u(t)\qquad (4)$

（4）式两端积分得：

$$z(t)=z(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau,t_0)B(\tau)u(\tau)d\tau\qquad (5)$$

（1）式中，令t=t0得：

$$z(t_0)=x(t_0) \qquad (6)$$

将（6）式代入（5）式得：

$$z(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau,t_0)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (7)$$

将（7）式代入（1）式得：

$$\begin{aligned}
\underline{x(t)}&=\Phi(t,t_0)\left(x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau,t_0)B(\tau)u(\tau)d\tau\right)\\
&=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (8)\\
&=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\\
&=\underline{\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau}
\end{aligned}$$

证毕

[例3]:

已知线性时变系统状态方程为 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t+1)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}1(t)$

求初始条件为 $\begin{bmatrix}x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ 时系统的解。

[解]:

先求系统的状态转移矩阵

$A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1)=0$ 所以A(t)可交换

所以：$\Phi(t,t_0)=I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]^2+\cdots$

$$\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(\tau+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 0 & \frac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 2,3,\ldots$$

所以有：

$$\Phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \frac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}1 & \frac{t-\tau}{(t+1)(\tau+1)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}1(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(t+1)(t_0+1)+2(t-t_0)}{(t+1)(t_0+1)}\\ 2\end{bmatrix}+\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}\frac{t}{t+1}+\frac{1}{\tau+1}\\ 1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(t+1)(t_0+1)+2(t-t_0)}{(t+1)(t_0+1)}\\ 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{t(t-t_0)}{t+1}+\ln\frac{t+1}{t_0+1}\\ t-t_0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(t+1)(t_0+1)+2(t-t_0)+t(t-t_0)(t_0+1)}{(t+1)(t_0+1)}+\ln\frac{t+1}{t_0+1}\\ 2+t-t_0\end{bmatrix}$$

说明：线性时变系统的状态转移矩阵难于求得，一般先离散化。

[本节小结]：

1、状态转换矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 求解方法

注意使用关系式：
$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A\Phi(t,t_0)$$
$$\Phi(t_0,t_0) = I$$

A(t)可交换时，即：

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$$

$$A(t)\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] = \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]A(t)$$

状态转移矩阵形式如下：

$$\Phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}$$
$$= I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]^3 + \cdots$$

A(t)不可交换时，即：

$$A(t_1)A(t_2) \neq A(t_2)A(t_1)$$

$$A(t)\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] \neq \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]A(t)$$

状态转移矩阵形式如下：

$$\Phi(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_0)d\tau_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_0)[\int_{t_0}^{\tau_0} A(\tau_1)d\tau_1]d\tau_0$$

$$+\int_{t_0}^{t} A(\tau_0)[\int_{t_0}^{\tau_0} A(\tau_1)[\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2]d\tau_1]d\tau_0 + \cdots$$

$$t \in [t_0, t_a]$$

2、非齐次状态方程的解

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

[第三章总结]

1. 线性定常齐次状态方程的解
2. 矩阵指数函数 e^{At}
3. 状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$ $\Phi(t,t_0)$
4. 线性定常非齐次状态方程的解
5. 线性时变系统状态方程的解

1、线性定常系统运动分析（重点）

1）齐次状态方程的解： $x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)$

2）非齐次状态方程的解：

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

3）矩阵指数函数 e^{At} 的性质和求解方法

- 根据矩阵指数的定义求解：

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k$$

- 用拉氏变换法求解：

$$e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

- 标准型法求解：

对角线标准型法：当A的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 两两相异时

$$e^{At} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

约当标准型法：当A的特征值为 λ_1 （n重根）

$$e^{At}=Q\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}Q^{-1}$$

- 待定系数法求解：

$$e^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1}$$

——对于特征值互异，对于每个特征值，写出以下方程：

——对于特征值m重根，则还需对以下方程求m-1次导数，

补充缺少的m-1个方程。联立方程可以求出系数。

$$a_0(t)+a_1(t)\lambda_i+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_i^{\,n-1}=e^{\lambda_i t}$$

4）状态转换矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 的性质及求解方法

满足关系式 $\dot{\Phi}(t-t_0)=A\Phi(t-t_0)$

$\Phi(0)=I$

对线性定常系统：$\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$

状态转移矩阵的性质

2、线性时变系统运动分析

1）状态转换矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 的性质

2）状态转换矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 的求解方法

注意使用关系式： $\dot{\Phi}(t,t_0)=A\Phi(t,t_0)$

$\Phi(t_0,t_0)=I$

A(t)可交换时，即：

$$A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1)$$

$$A(t)\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]=\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]A(t)$$

此时，状态转移矩阵形式如下：

$$\Phi(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}$$

$$=I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]^2+\frac{1}{3!}\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]^3+\cdots$$

A(t)不可交换时，即：

$$A(t_1)A(t_2) \neq A(t_2)A(t_1)$$

$$A(t)\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] \neq \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]A(t)$$

此时，状态转移矩阵形式如下：

$$\Phi(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_0)d\tau_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_0)[\int_{t_0}^{\tau_0} A(\tau_1)d\tau_1]d\tau_0$$

$$+\int_{t_0}^{t} A(\tau_0)[\int_{t_0}^{\tau_0} A(\tau_1)[\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2]d\tau_1]d\tau_0 + \cdots$$

$$t \in [t_0, t_a]$$

3）非齐次状态方程的解

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$