# 3.6 线性变换

1、将状态空间表达式变换成对角线标准型

2、将状态空间表达式变换成约当标准型

3、将状态空间表达式变换成能控、能观标准型

[线性非奇异变换]:

含义:

如果P是一个非奇异阵，则将$x = P\bar{x}$ 变换称为线性非奇异变换。

满足:
$$\begin{cases} P(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = P\bar{x}_1 + P\bar{x}_2 = x_1 + x_2 & \text{叠加原理} \\ P(k\bar{x}) = kP\bar{x} = kx & \text{齐次性条件} \end{cases}$$

用途:

通过线性变换，可将状态方程变成对角线或约当标准型。

[系统状态空间表达式的非唯一性]:

含义：同一系统的不同状态变量可通过线性变换互相得到。

$$x = P\bar{x} \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftarrows}} \bar{x} = P^{-1}x$$

考虑系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$\bar{x} = P^{-1}x$$

取线性非奇异变换：

$x = P\bar{x}$， 矩阵$P$非奇异

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\bar{x} + Du \end{cases}.$$

整理得：

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

其中：

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \qquad \bar{D} = D$$
$$\bar{C} = CP, \qquad \bar{B} = P^{-1}B.$$

例2.5.1　考虑系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1）若选非奇异变换阵P为： $P=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\ \bar{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ \bar{C}=\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}$$

2）若选非奇异变换阵P为： $P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

对角线矩阵

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\ \bar{B}=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix},\ \bar{C}=\begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix}$$

**结论**：不同的非奇异变换阵，对应不同的状态方程，**非唯一性**

## [系统的特征值和特征向量]

对于系统矩阵A，若存在一非零向量 $v$ ，使得：$Av=\lambda v$

则：
- $\lambda$ →矩阵A的特征值（A特征方程的根）
- $v$ →矩阵A对应于特征值 $\lambda$ 的特征向量
- $\lambda I-A$ →矩阵A的特征矩阵
- $|\lambda I-A|=0$ →矩阵A的特征方程
- $|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ →矩阵A的特征多项式

**由定义知：**

设 $\lambda_i$ 为A的一个特征值，若存在某个n维非零向量 $v_i$

使 $Av_i=\lambda_i v_i$ ，则称 $v_i$ 为A的对应于 $\lambda_i$ 的特征向量。

$v_i=\begin{bmatrix}v_{1i} & v_{2i} & \cdots & v_{ni}\end{bmatrix}^T$， $(i=1,2,3,\cdots,n)$

## [特征值及传递函数阵的性质]:

1）一个n维系统的 $n\times n$ 方阵A，有且仅有 n 个独立的特征值。

2）A为实数方阵，则n个特征值或为实数，或为共轭复数对。

3）对系统作线性非奇异变换，其特征值和传递函数阵不变。

$$\begin{cases} \sum(A,B,C) \text{ 系统1：特征多项式 } |\lambda I-A|\text{，传递函数阵 } G(s) \\ \sum(\bar{A},\bar{B},\bar{C}) \text{ 系统2：特征多项式 } |\lambda I-\bar{A}|\text{，传递函数阵 } \bar{G}(s) \end{cases}$$

则：$|\lambda I-\bar{A}|=|\lambda I-A|$ 且 $\bar{G}(s)=G(s)$

其中：$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$

4）设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为系统矩阵A的特征值，$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是A属于特征值的特征向量。当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两相异时，$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 线性无关，因此由这些特征向量组成的矩阵P必是非奇异的。

$$P=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

5）若系统矩阵A具有形式：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

则其特征多项式为：$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$

特征方程为：$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

## [特征向量的计算]:

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量。

**[例]:**

求下列矩阵A的特征向量。 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$

**[解]:**

## [特征向量的计算]:

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量。

**[例]:**

求下列矩阵A的特征向量。 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$

**[解]:**

1）计算特征值

A的特征方程为: $|\lambda I-A|=0$

A的特征值: $\lambda_1=-1$， $\lambda_2=-2$ ， $\lambda_3=-3$

2）计算特征向量

$\lambda_1=-1$ 特征向量:

$(\lambda_1 I-A)v_1=0\Rightarrow v_1=(1\quad -1\quad 1)^T$

$\lambda_2 = -2$ 特征向量:

$$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = (1 \quad -2 \quad 4)^T$$

$\lambda_2 = -2$ 特征向量:

$$(\lambda_3 I - A)v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = (1 \quad -3 \quad 9)^T$$

## 一、将状态方程化为对角线标准型

### 1、状态方程化为对角线标准型的步骤:

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量。并由此组成非奇异变换阵P。

3）由变换矩阵P和矩阵A，B，C求出 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ ，其中对角阵 $\overline{A}$ 可以由特征值直接写出，只需求出 $\overline{B}$，$\overline{C}$ 即可。

**定理1：**

对于线性定常系统$\sum(A,B,C)$，如果A特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异，则必存在非奇异变换矩阵P，通过变换 $x=P\bar{x}$ ，将原状态方程$\sum(A,B,C)$化为对角线规范形式$\sum(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 。

其中：$\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$, $\bar{B}=P^{-1}B$，$\bar{C}=CP$

**证明：**

1）找非奇异变换阵

由特征值性质4)知，由A特征向量构成的矩阵$P=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}$ 是非奇异的，故可选P为变换阵。

## 2）求 $\overline{A} = P^{-1}AP$

特征值定义 $Av_i = \lambda_i v_i$

$$AP = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

上式两端左乘 $P^{-1}$ 得：$P^{-1}AP = P^{-1}P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$

证毕！

**[例]**

线性定常系统$\dot{x} = Ax + Bu$，其中： $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

将此状态方程化为对角线标准型.

[例]

线性定常系统$\dot{x}=Ax+Bu$，其中：$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}$

将此状态方程化为对角线标准型.

[解]:

1)求其特征值: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\0 & \lambda+1 & 0\\0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=1$$

2)确定非奇异矩阵P

当 $\lambda_1=2$ 时，$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 3 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \begin{cases}v_{21}+v_{31}=0\\3v_{21}=0\\-2v_{21}+v_{31}=0\end{cases}$

$$\therefore v_{21}=v_{31}=0, \qquad v_{11}\text{为任意常数} \qquad \text{取:} \quad v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_2=-1\text{时,} \begin{bmatrix}-3 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}=0 \qquad \Rightarrow \begin{cases}-3v_{12}+v_{22}+v_{32}=0\\-2v_{22}-2v_{32}=0\end{cases}$$

$$v_{22}=-v_{32}, \qquad v_{12}=0 \qquad \text{取:} \quad v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\text{同理当 } \lambda_3=1 \text{ 时,得:} \quad v_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

所以有 $P=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$，并求得 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

3）求 $\overline{A},\overline{B}$

$$\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$$

对角线标准型为：$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}u$

## 定理2:

对线性定常系统，如果其特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互异，且系数矩阵A是以上的友矩阵，则将系统状态方程化为对角线标准型的非奇异矩阵P是一个范德蒙矩阵，具有如下形式:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

[例]:

线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

将状态方程化为对角线标准型.

[解]:

1）确定系统特征值.

由特征值性质5）有:

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

得: $\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -1$

## 2)确定非奇异变换阵P

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad \text{求得}\ P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

说明： $P^{-1}$ 的另一种求法：

求得特征值后，可以直接写出对角线标准型的 $\bar{A}$ ，所以 $P^{-1}$ 可以用待定系数法求得。

由$\bar{A}=P^{-1}AP$可得： $\bar{A}P^{-1}=P^{-1}A$

所以A和$\bar{A}$ 已知，可以解出 $P^{-1}$

故在本例中：

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

由上式得：
$$\begin{bmatrix} 2p_{11} & 2p_{12} & 2p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & -p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p_{13} & p_{11}+p_{13} & p_{12}+2p_{13} \\ -2p_{23} & p_{21}+p_{23} & p_{22}+2p_{23} \\ -2p_{33} & p_{31}+p_{33} & p_{32}+2p_{33} \end{bmatrix}$$

求得： $$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

3)求 $\overline{A}, \overline{B}$

$$\overline{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**系统状态方程对角线标准型为:**

$$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

## 二、将状态方程化为约当标准型（系统具有重特征根）

**注意**：对于每个特征根，其独立特征向量的个数为 $n-rank(\lambda I-A)$

### 1、具有重特征根，但A独立的特征向量的个数仍然为n个：

由线性代数矩阵的对角化，此时仍能变换成**对角线标准型**。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$　$rank(\lambda_1 I-A)=1$　2个独立特征向量

$\lambda_3=2$　$rank(\lambda_3 I-A)=2$　1个独立特征向量

### 2、具有重特征根，且A独立特征向量的个数小于n个：

这种情况，不能变换成对角线标准型。故引入**约当标准型。**

此时进行线性变换，需增加广义特征向量，构成P变换阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$　$rank(\lambda_1 I-A)=2$　1个独立特征向量

$\lambda_3=2$　$rank(\lambda_3 I-A)=2$　1个独立特征向量

## 3、约当矩阵定义：

•**约当块**：
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

由此看出，对角阵是一种特殊形式的约当矩阵。

•**约当矩阵**：由约当块组成的准对角线矩阵。

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & & & \\ & \tilde{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{A}_l \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i} \quad (i=1,2,\cdots,l)$$

其中：$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n$

**其中**：$l$ 是约当块块数，等于 $\tilde{A}$ 独立特征向量的个数。

即每个约当块有且仅有一个线性独立的特征向量。

**条件**：约当块阶数 $m_i$ 等于特征值重数的条件是——对应该重特征值的独立特征向量的个数为1个。每个独立特征向量对应一个约当块。

**例如**：当某个重特征值的重数为3，而对应于该特征值的独立特征向量 数为2时，约当块块数为2。

此时： $l=2$， 且$m_1+m_2=3$

某个重特征值对应多个约当块

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

**说明**：

对角线标准型：各状态变量间是完全解耦的。

约当标准型：各状态变量间最简单的耦合形式，每个变量至多和下一个变量有关联。

## 广义特征向量:

称一个非零向量 $v_i$ 是矩阵A的属于 $\lambda_i$ 的 $k$ 级广义特征向量，当且仅当:

$$\begin{cases}(A-\lambda_i I)^k v_i = 0 \\ (A-\lambda_i I)^{k-1} v_i \neq 0\end{cases}$$

可以看出，当 $k=1$ 时，广义特征向量等于通常所定义的特征向量. 矩阵 $A$ 的属于不同特征值的广义特征向量之间必为线性无关.

## 4、变换矩阵Q的确定：

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \xrightarrow{x=Q\tilde{x}} \begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u\\ y=\tilde{C}\tilde{x}+\tilde{D}u\end{cases}$$

其中：$\tilde{A}=Q^{-1}AQ$，$\tilde{B}=Q^{-1}B$，$\tilde{C}=CQ$，$\tilde{D}=D$

**讨论的前提**：

每个重特征值只对应一个独立特征向量的情况，只有一个约当块。 假设系统有 $l$ 个特征值。

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_1 & & & \\ & \tilde{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{A}_l\end{bmatrix} \quad (1) \qquad \tilde{A}_j=\begin{bmatrix}\lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_j\end{bmatrix}_{m_j\times m_j} \quad (j=1,2,\cdots,l) \quad (2)$$

则：$Q=[Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_l]$，其中$Q_j$为对应于$\tilde{A}_j$的变换阵

$$Q_j=[v_{1j} \quad v_{2j} \quad \cdots \quad v_{m_j j}],\quad j=1,2\cdots l \quad (3)$$

**关键**：要确定Q，必须推导出 $Q_j$，目的是确定 $m_j-1$ 个广义特征向量

**推导过程:**

$$\left.\begin{array}{l} Q=[Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_l] \\ Q\tilde{A}=AQ \end{array}\right\} \Rightarrow [Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_l]\tilde{A}=A[Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_l] \qquad (4)$$

将式(1)代入(4)得： $[Q_1\tilde{A}_1 \quad Q_2\tilde{A}_2 \quad \cdots \quad Q_l\tilde{A}_l]=[AQ_1 \quad AQ_2 \quad \cdots \quad AQ_l] \qquad (5)$

即：$Q_j\tilde{A}_j=AQ_j \qquad (j=1,2,\cdots,l) \qquad (6)$

将(2)(3)代入上式(6)得:

$$[v_{1j} \quad v_{2j} \quad \cdots \quad v_{m_jj}]\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}=A[v_{1j} \quad v_{2j} \quad \cdots \quad v_{m_jj}] \qquad (j=1,2,\cdots,l) \qquad (7)$$

由式(7)可以解出：

$$(\lambda_j I - A)v_{1j} = 0$$
$$(\lambda_j I - A)v_{2j} = -v_{1j}$$
$$\vdots$$
$$(\lambda_j I - A)v_{m_j j} = -v_{(m_j-1)j}$$

其中：$v_{1j}$ 对应于 $\lambda_j$ 的特征向量，其余为广义特征向量。这些向量构成 $Q_j$。

即：$Q_j = [v_{1j} \quad v_{2j} \quad \cdots \quad v_{m_j j}]$

## [结论]：Q的求解步骤

假设系统有m个重特征根$\lambda_1$，其余为n-m个互异特征根，则$Q$阵的求法分为两块，一块是互异部分；另一块是重根部分。

$$\text{设：}\ Q=\begin{bmatrix}Q_1^{(1)} & Q_1^{(2)} & \cdots & Q_1^{(m)} & Q_{m+1} & \cdots & Q_n\end{bmatrix}$$

上式中，$Q_1^{(i)},(i=1\sim m)$为重根对应的特征向量；

$Q_j,(j=m+1\sim n)$为互异特征根对应的特征向量。

则$Q_1^{(1)},\cdots,Q_1^{(m)}$的求法为：

$$\begin{cases}(\lambda_1-A)Q_1^{(1)}=0\\ (\lambda_1-A)Q_1^{(2)}=-Q_1^{(1)}\\ \cdots\cdots\\ (\lambda_1-A)Q_1^{(m)}=-Q_1^{(m-1)}\end{cases}$$

由此求得：$Q_1^{(1)},\cdots,Q_1^{(m)}$

## 5、状态方程化为约当标准型的步骤:

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量，对于重特征值，还要计算其广义特征向量。并由此组成非奇异变换阵Q。

3）由变换矩阵Q和矩阵A，B，C求出$\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$，其中约当矩阵$\tilde{A}$可以由特征值直接写出，只需求出$\tilde{B}$，$\tilde{C}$即可。

**[例]:**

线性定常系统状态空间表达式为:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 8 & -12 & 6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5\\ 1\\ 5\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

将此化为约当标准型.

[解]:

1)确定系统特征值

$$|\lambda I-A|=\det\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -8 & 12 & \lambda-6\end{bmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3=0$$

$\lambda_1=2$， 三重根， 即$m_1=3$.

2)确定系统特征向量，得到Q

$$(\lambda_1 I-A)v_1=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -8 & 12 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}2v_{11}-v_{21}=0\\ 2v_{21}-v_{31}=0\\ -8v_{11}+12v_{21}-4v_{31}=0\end{cases} \xRightarrow{v_{11}=1\text{时}} v_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1 I-A)v_2=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -8 & 12 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix}=-v_1=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ -4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2v_{12}-v_{22}=-1\\ 2v_{22}-v_{32}=-2\\ -8v_{12}+12v_{22}-4v_{32}=-4\end{cases} \xRightarrow{v_{12}=0\text{时}} v_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 4\end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1 I-A)v_3=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\-8&12&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}=-v_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\-4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2v_{13}-v_{23}=0\\2v_{23}-v_{33}=-1\\-8v_{13}+12v_{23}-4v_{33}=-4\end{cases}\xRightarrow{v_{13}=0\text{时}}v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

所以：$Q=[v_1\quad v_2\quad v_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&4&1\end{bmatrix}$，并求得$Q^{-1}=\dfrac{Q^*}{|Q|}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\4&-4&1\end{bmatrix}$

3）求 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$

$$\tilde{A}=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\4&-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\8&-12&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}=Q^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\4&-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-9\\21\end{bmatrix}\qquad \tilde{C}=CQ=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&4&1\end{bmatrix}=[1\quad 0\quad 0]$$

约当标准型为：$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u\\y=\tilde{C}\tilde{x}\end{cases}$，其中 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$ 如上。

**[例]：** 试将下列状态方程化为约当标准型：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\2 & 3 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

**[例]：** 试将下列状态方程化为约当标准型：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

**[解]：** 求特征值：$|\lambda I-A|=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-1, \lambda_3=-2,$

$\lambda_1=-1$ （二重根）时的特征向量为：

$$(\lambda_1 I-A)Q_1^{(1)}=0 \Rightarrow Q_1^{(1)}=(1 \quad -1 \quad 1)^T$$

另一广义特征向量：

$$(\lambda_1 I-A)Q_1^{(2)}=-Q_1^{(1)} \Rightarrow Q_1^{(2)}=(1 \quad 0 \quad -1)^T$$

$\lambda_3=-2$ 特征向量：

$$(\lambda_2 I-A)Q_3=0 \Rightarrow Q_3=(1 \quad 2 \quad 4)^T$$

$$\therefore Q = \begin{bmatrix} Q_1^{(1)} & Q_1^{(2)} & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

有:

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

**定理**：如果系数矩阵A是友矩阵

如果其特征值 $\lambda_1$ 是m重根，$\lambda_2, \lambda_3 \cdots \lambda_l$ 是两两相异的，则将系统状态方程化为Jordan约当标准型的非奇异矩阵Q，其形式为：

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & & \lambda_l \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & \lambda_2^2 & & \lambda_l^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & \cdots & 0 & \lambda_2^3 & & \lambda_l^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_1^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda_1^{n-3} & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!}\lambda_1^{n-m} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_l^{n-1} \end{bmatrix}$$

## 4．线性变换（重点）

1）特征值的求法：$|\lambda I - A| = 0$

2）特征向量的求法：$Av_i = \lambda_i v_i$　特征向量$P = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$

3）线性变换：

### a、对角线标准型：

——具有n个互异特征根：

——具有重特征根，但A独立的特征向量的个数仍然为n个：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{x = P\bar{x}} \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

其中：$\bar{A} = P^{-1}AP$，$\bar{B} = P^{-1}B$，$\bar{C} = CP$，$\bar{D} = D$

## b、约当标准型：

——具有重特征根，且A独立的特征向量的个数小于n个

此时需要广义特征向量：

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_j I - A)v_{1j} = 0 \\
&(\lambda_j I - A)v_{2j} = -v_{1j} \\
&\vdots \\
&(\lambda_j I - A)v_{m_j j} = -v_{(m_j-1)j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xRightarrow{x = Q\tilde{x}} \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u \end{cases}
$$

其中：$\tilde{A} = Q^{-1}AQ$，$\tilde{B} = Q^{-1}B$，$\tilde{C} = CQ$，$\tilde{D} = D$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1^{(1)} & Q_1^{(2)} & \cdots & Q_1^{(m)} & Q_{m+1} & \cdots & Q_n \end{bmatrix}$$

上式中，$Q_1^{(i)}, (i = 1 \sim m)$ 为重根对应的特征向量；

$Q_j, (j = m+1 \sim n)$ 为互异特征根对应的特征向量。

$Q_1^{(1)}, \cdots, Q_1^{(m)}$ 的求法如下：

$$\begin{cases} (\lambda_1 - A) Q_1^{(1)} = 0 \\ (\lambda_1 - A) Q_1^{(2)} = -Q_1^{(1)} \\ \cdots\cdots \\ (\lambda_1 - A) Q_1^{(m)} = -Q_1^{(m-1)} \end{cases}$$

由此求得：$Q_1^{(1)}, \cdots, Q_1^{(m)}$

$Q_{m+1}, \cdots, Q_n$ 互异特征根对应的特征向量求法见对角线标准型

4）线性变换性质：特征值和传递函数阵的不变性

# 特征值及传递函数矩阵的不变性

## 特征值（特征多项式、特征方程）

$|\lambda I - A| \quad (=0)$ 经变换 $|\lambda I - P^{-1}AP| \quad (=0)$

$$\begin{aligned}
|\lambda I - P^{-1}AP| &= |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(\lambda I - A)P| \\
&= |P^{-1}||\lambda I - A||P| \\
&= |P^{-1}||P||\lambda I - A| \\
&= |P^{-1}P||\lambda I - A| = |\lambda I - A|
\end{aligned}$$

## 传递函数矩阵

$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ 经变换 $\bar{G}(s)=\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\bar{D}$

$$
\begin{aligned}
\bar{G}(s) &= \bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\bar{D} \\
&= CP(sI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B+D \\
&= CP(P^{-1}(sI-A)P)^{-1}P^{-1}B+D \\
&= CP(P^{-1}(sI-A)P)P^{-1}B+D \\
&= CPP^{-1}(sI-A)PP^{-1}B+D \\
&= C(sI-A)B+D \\
&= G(s)
\end{aligned}
$$