

## 2.4

# 控制系统的频率分析

通过求解微分方程分析时域性能是十分有用的，  
但对于比较复杂的系统这种办法就比较麻烦。

## 时域分析的缺陷

- 高阶系统的分析难以进行；
- 难以研究系统参数和结构变化对系统性能的影响；
- 当系统某些元件的传递函数难以列写时，整个系统的分析工作将无法进行。

## 频域分析的目的

**频域分析：**以输入信号的频率为变量，在频率域，研究系统的结构参数与性能的关系。

**优点：**

- 无需求解微分方程，图解(频率特性图)法间接揭示系统性能并指明改进性能的方向；
- 易于实验分析；
- 可推广应用于某些非线性系统(如含有延迟环节的系统)；
- 可方便设计出能有效抑制噪声的系统。

# 一、频率特性的基本概念

频率响应与频率特性的概念

考虑线性定常系统：

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

当正弦输入  $u(t) = U_0 \sin \omega t$  时，相应的输出为：

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{M(s)}{N(s)}U(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

对于稳定的系统，其特征根  $-p_i$  具有负实部，  
此时其对正弦输入的稳态响应不因初始条件而  
改变，因此，可认为系统处于零初始状态。

假设系统只具有不同的极点，则：

$$Y(s) = \frac{A}{s + j\omega} + \frac{\bar{A}}{s - j\omega} + \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s + p_n}$$

其中  $A, \bar{A}$  为一对待定共轭复常数

$A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为待定常数。

从而:

$$y(t) =$$

$$Ae^{-j\omega t} + \bar{A}e^{j\omega t} + A_1e^{-p_1t} + A_2e^{-p_2t} + \cdots + A_ne^{-p_nt} \quad (t \geq 0)$$

如果系统包含有  $r_j$  个重极点  $-p_j$ , 则  $y(t)$  将包含有类似:

$$t^{k_j} e^{-p_j t} \quad (k_j = 0, 1, 2, \dots, r_j - 1)$$

的这样一些项。对稳定的系统而言, 这些项随  $t$  趋于无穷大都趋近于零。

因此，系统的稳态响应为：

$$y(t) = Ae^{-j\omega t} + \bar{A}e^{j\omega t}$$

其中：

$$A = G(s) \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{U_0 G(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{A} = G(s) \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{U_0 G(j\omega)}{2j}$$

由于：  $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$

$$\left( \phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \right)$$

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi(\omega)} = |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$$

因此：

$$y(t) = U_0 |G(j\omega)| \frac{e^{j[\omega t + \phi(\omega)]} - e^{-j[\omega t + \phi(\omega)]}}{2j}$$
$$= U_0 |G(j\omega)| \sin[\omega t + \phi(\omega)]$$

上式表明，稳定的线性定常系统在正弦激励下的稳态输出仍然为同频率的正弦信号，且输出与输入的幅值比为 $|G(j\omega)|$ ，相位差为 $\angle G(j\omega)$ 。

显然输出信号的幅值和相角是频率的函数，随频率而变化。

- **频率响应**: 系统对正弦输入信号的稳态响应。
- **频率特性**: 系统在不同频率的正弦信号输入时, 其稳态输出随频率而变化( $\omega$ 由0变到 $\infty$ )的特性。
- **幅频特性**: 当 $\omega$ 由0到 $\infty$ 变化时,  $|G(j\omega)|$ 的变化特性, 记为 $A(\omega)$ 。
- **相频特性**: 当 $\omega$ 由0到 $\infty$ 变化时,  $\angle G(j\omega)$ 的变化特性称为相频特性, 记为 $\varphi(\omega)$ 。

幅频特性与相频特性一起构成系统的频率特性。

频率特性一般可以通过如下三种方法得到：

- (1) 根据已知系统的微分方程，把输入以正弦函数代入，求其稳态解，取输出稳态分量和输入正弦的复数之比求得。
- (2) 根据系统的传递函数来求取。将代入传递函数中，可直接得到系统的频率特性

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

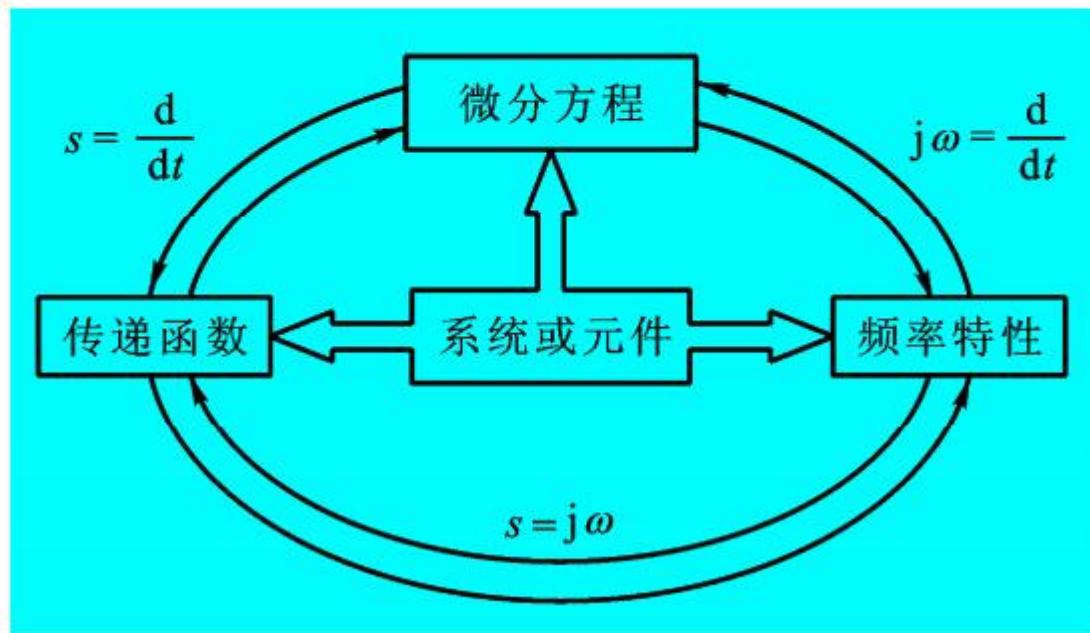
- (3) 通过实验测得。

一般经常采用的是后两种方法。这里主要讨论如何根据传递函数求取系统的频率特性。

## 几点说明

□ 频率特性是传递函数的特例，是定义在复平面虚轴上的传递函数，因此频率特性与系统的微分方程、传递函数一样反映了系统的固有特性。

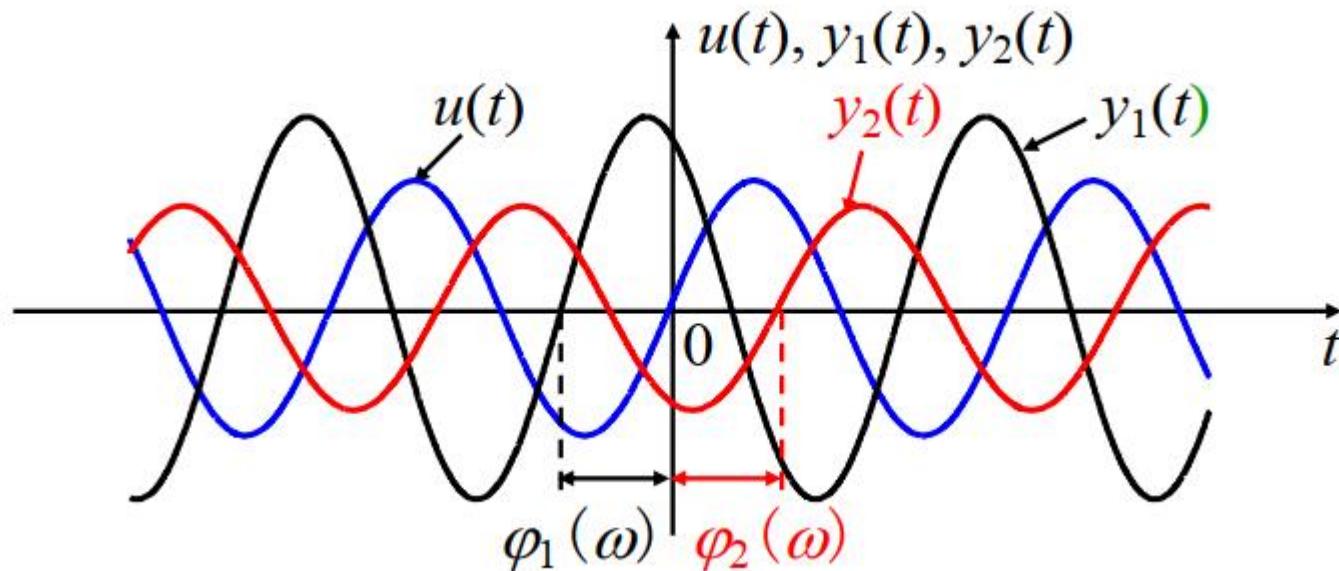
动态数学模型



频率特性和传递函数、微分方程的置换关系图

- 尽管频率特性是一种稳态响应，但系统的频率特性与传递函数一样包含了系统或元部件的全部动态结构参数，因此，系统动态过程的规律性也全寓于其中。
- 应用频率特性分析系统性能的基本思路：  
实际施加于控制系统的周期或非周期信号都可表示成由许多谐波分量组成的傅立叶级数或用傅立叶积分表示的连续频谱函数，因此根据控制系统对于正弦谐波函数这类典型信号的响应可以推算出它在任意周期信号或非周期信号作用下的运动情况。

- 频率特性的物理意义：频率特性表征了系统或元件对不同频率正弦输入的响应特性；
- $\varphi(\omega)$  大于零时称为相角超前，小于零时称为相角滞后。



## 二、频率特性图示法

系统的频率特性可分解为实部和虚部，即

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

也可以表示为幅值和相位关系，

$$G(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$A(\omega) = |G(j\omega)|$ ，它等于稳态输出量与输入量的振幅比，称为**幅频特性**；

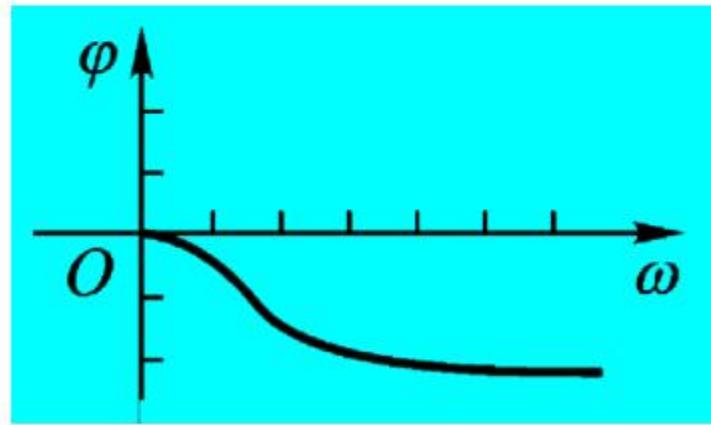
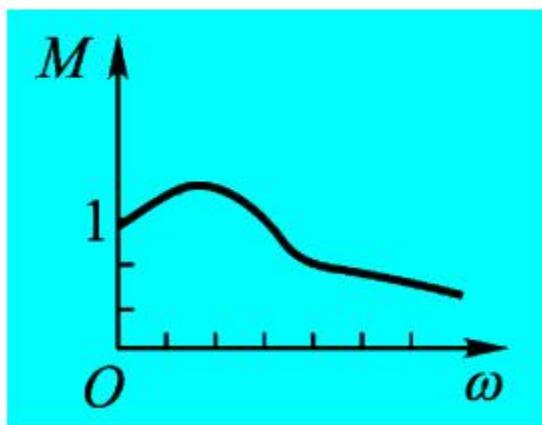
$\phi(\omega)$ ： $G(j\omega)$  的幅角，它等于稳态输出量与输入量的相位差，称为**相频特性**。

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

## 1. 直角坐标图

**幅频特性：**纵坐标为 $M$ , 线性分度; 横坐标为 $\omega$ , 线性分度。

**相频特性：**纵坐标为 $\varphi$ , 线性分度; 横坐标为 $\omega$ , 线性分度。



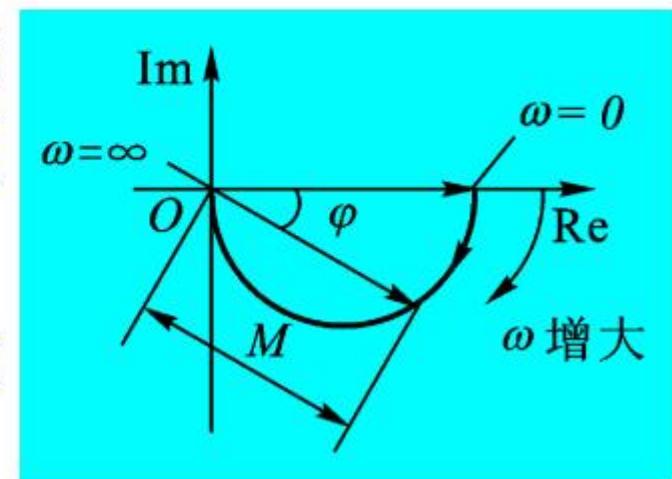
## 2. 极坐标图(奈氏(Nyquist)图)

### 频率特性

$$\Phi(j\omega) = |\Phi(j\omega)| \angle \Phi(j\omega) = M(\omega) \angle \varphi(\omega)$$

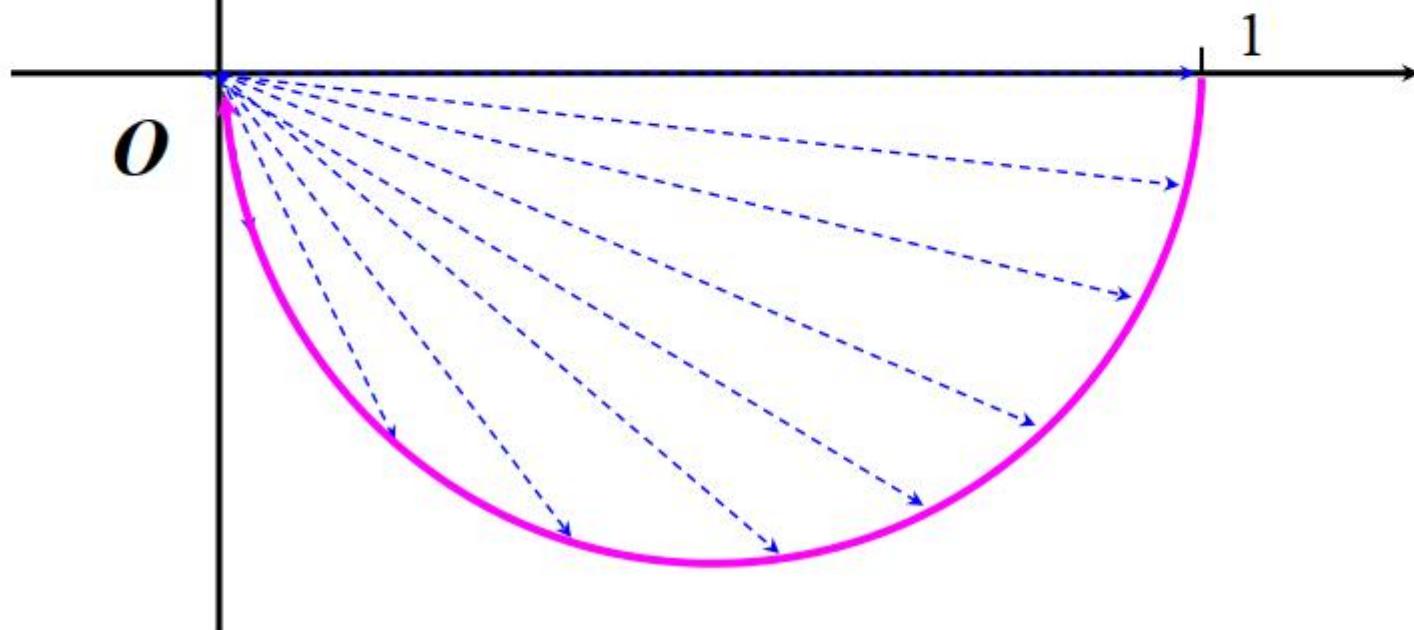
**幅相特性：**以频率 $\omega$ 作为参变量，将幅频与相频特性同时表示在复平面上。

当频率 $\omega$ 从零到无穷变化时，矢量 $\Phi(j\omega)$ 的端点在复平面上描绘出一条曲线，即为**幅相特性曲线**，又称**奈奎斯特曲线**。



## 惯性环节的幅相特性曲线

$\omega$	0	...	...	...	...	...	$\infty$
$M(\omega)$	1	...	...	...	...	...	0
$\varphi(\omega)$	0	...	...	...	...	...	-90°



### 3.对数坐标图—伯德图(H.W.Bode)

对数频率特性曲线又称伯德图，包括对数幅频和对数相频两条曲线。

$$\ln G(j\omega) = \ln |G(j\omega)| + j\phi(\omega)$$

对数频率特性曲线的横坐标表示频率 $\omega$ ，并按对数分度，单位是1/s。

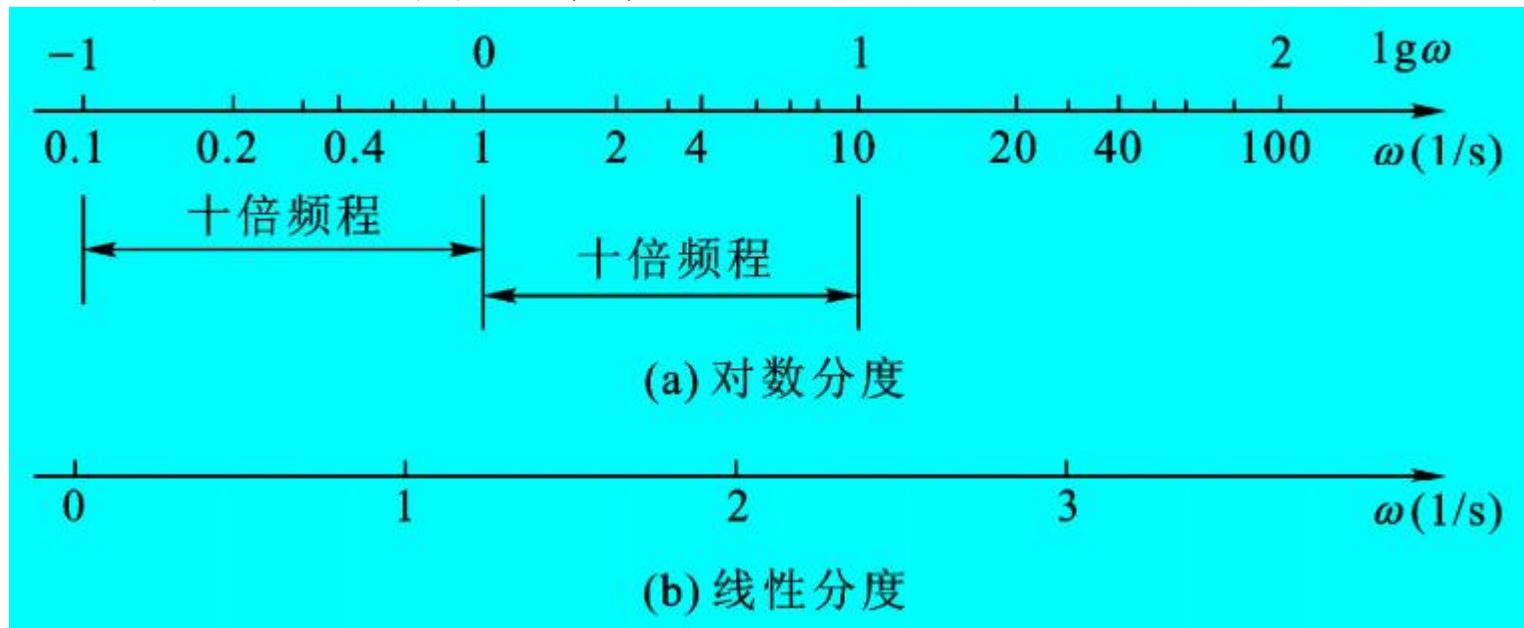
对数幅频曲线的纵坐标表示对数幅频特性的函数值，线性均匀分度，单位是分贝，记作dB。

对数幅频特性定义为

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega)$$

对数相频曲线的纵坐标表示相频特性的函数值，线性均匀分度，单位是度(°)或弧度。

在对数频率特性图中，由于横坐标采用了对数分度，因此 $O=0$  不可能在横坐标上表示出来，横坐标上表示的最低频率由所感兴趣的频率范围确定；此外，横坐标一般只标注 $O$ 的自然数值；



$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg O$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1

在对数频率特性图中, 角频率 $\Omega$ 变化的倍数往往比其变化的数值更有意义. 为此通常采用频率比的概念, 频率变化十倍的区间称为一个**十倍频程**, 记为*decade*或简写为***dec***; 频率变化两倍的区间称为一个**二倍频程**, 记为*octave*或简写为***oct***。它们也用作频率变化的单位。

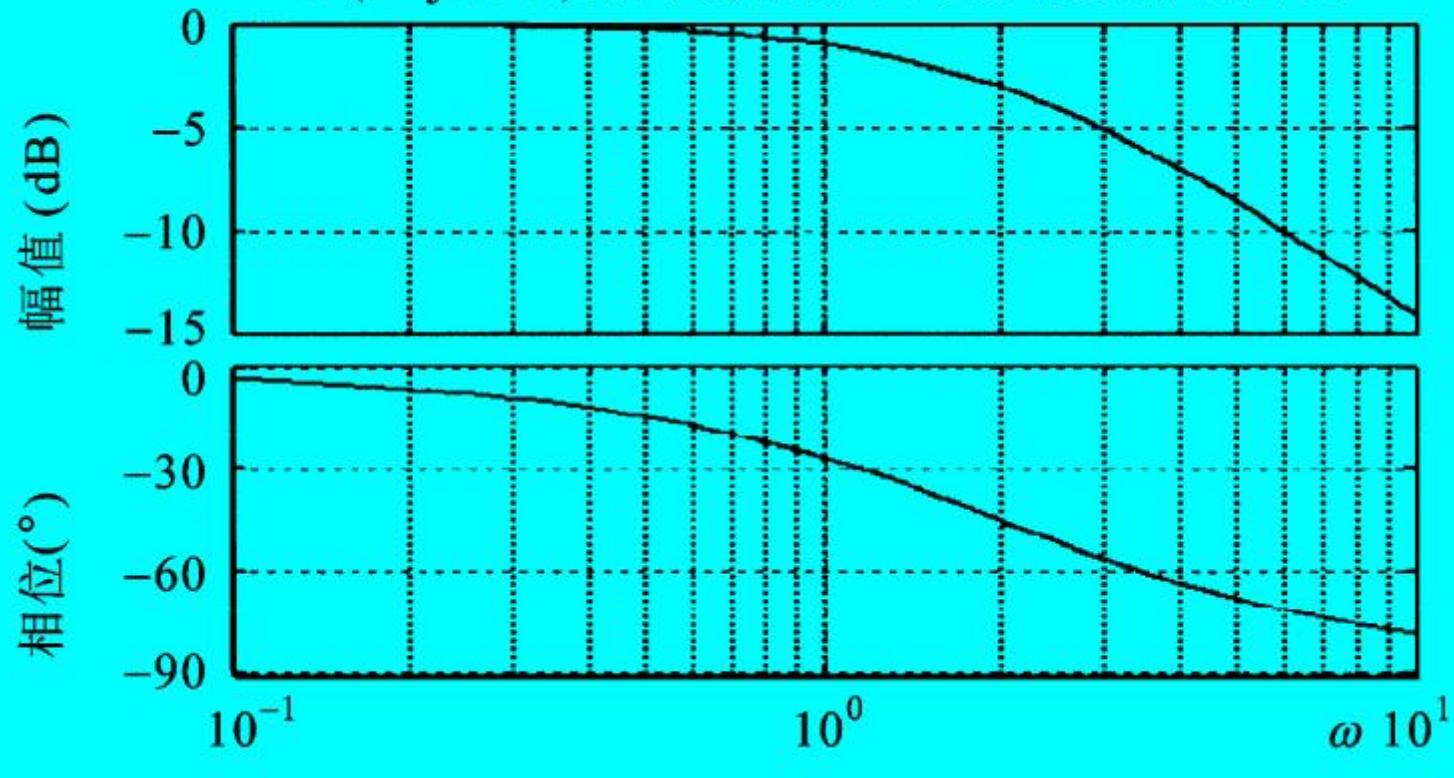
可以注意到, 频率变化10倍, 在对数坐标上是等距的, 等于一个单位。

通常用 $L(\Omega)$ 简记对数幅频特性, 也称 $L(\Omega)$ 为增益; 用 $\Theta(\Omega)$ 简记对数相频特性。

## 采用对数坐标图的优点是：

- (1) 可以将幅值的乘除转化为加减。
- (2) 可以采用简便方法绘制近似的对数幅频曲线。
- (3) 扩大了研究问题的视野。在一张图上，既画出频率特性的中、高频段特性，又能画出其低频特性，而低频特性对分析、设计控制系统来说是极其重要的。
- (4) 两个系统或环节的频率特性互为倒数时，其对数幅频特性曲线关于零分贝线对称，相频特性曲线关于零度线对称

$1/(1+j0.5\omega)$ 的对数幅频和对数相频特性曲线



## 对数幅频和对数相频特性曲线

## 4、对数幅相频率特性(尼柯尔斯图)

在所需要的频率范围内，以频率 $\omega$ 作为参数来表示的对数幅值和相角关系的图。对数幅相频率特性也称为尼柯尔斯(Nichols)图。

### 三、典型环节的频率特性

#### 1、比例环节(放大环节)

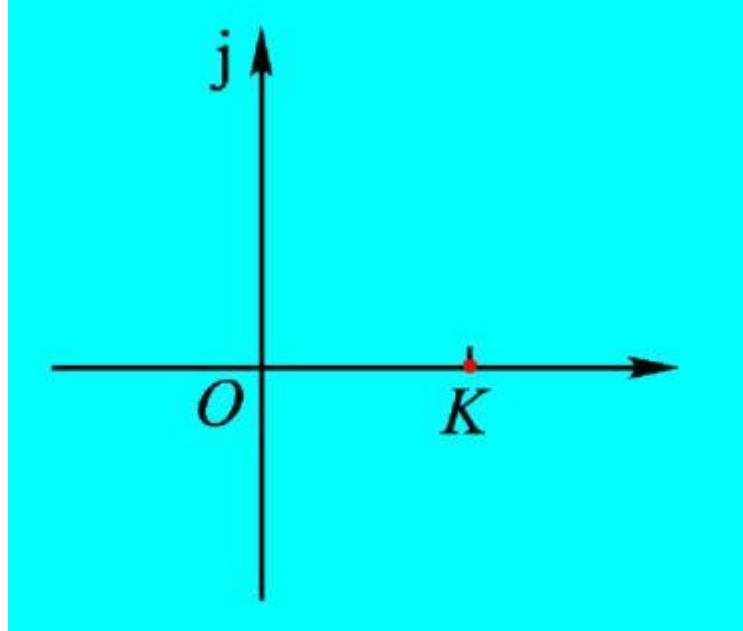
传递函数:  $G(s)=K$

频率特性:  $G(j\omega)=K$

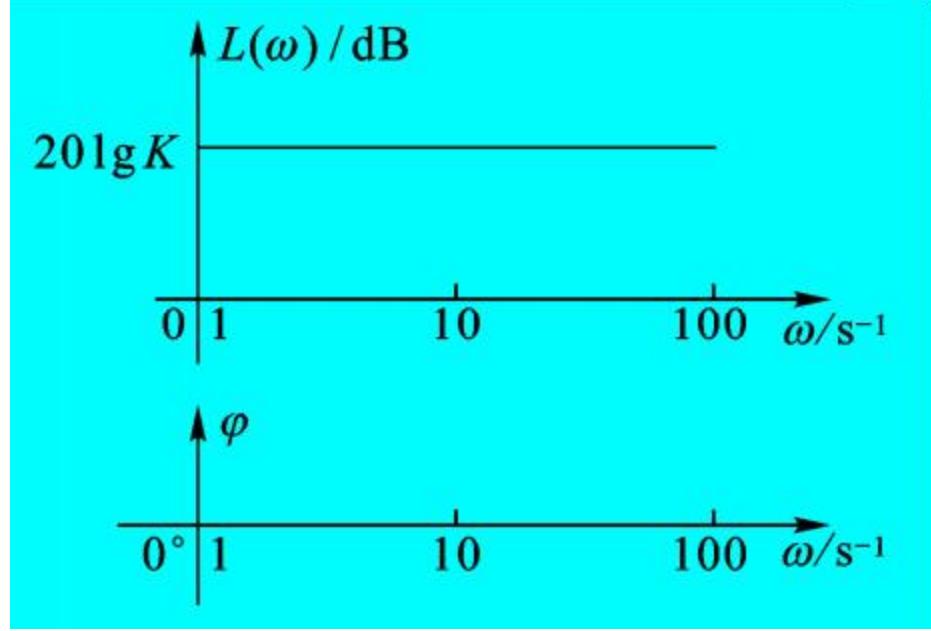
幅频特性:  $M(\omega) = |G(j\omega)| = K$

相频特性:  $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = 0^\circ$

对数幅频特性:  $L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg K$



幅相曲线



伯德图

## 2、积分环节

传递函数:  $G(s) = \frac{1}{s}$

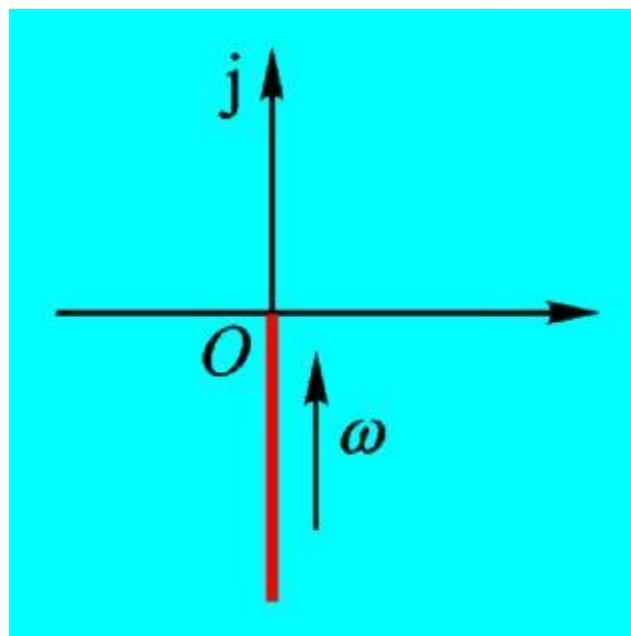
频率特性:  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

幅频特性:  $M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$

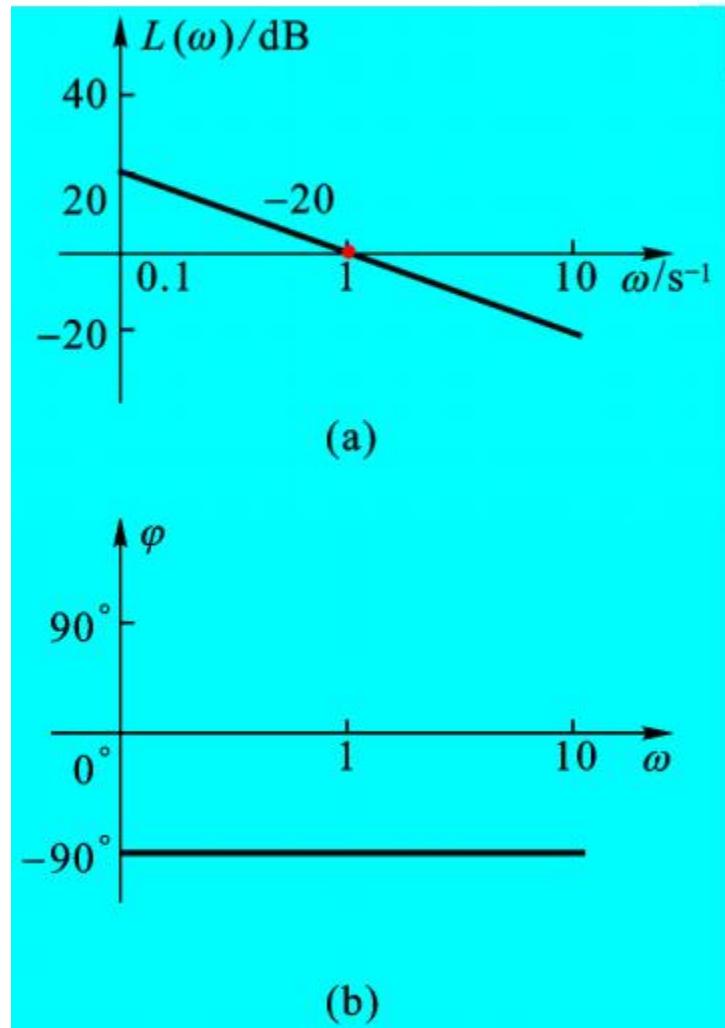
相频特性:  $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -90^\circ$

对数幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\omega} = -20 \lg \omega$$



幅相曲线



伯德图

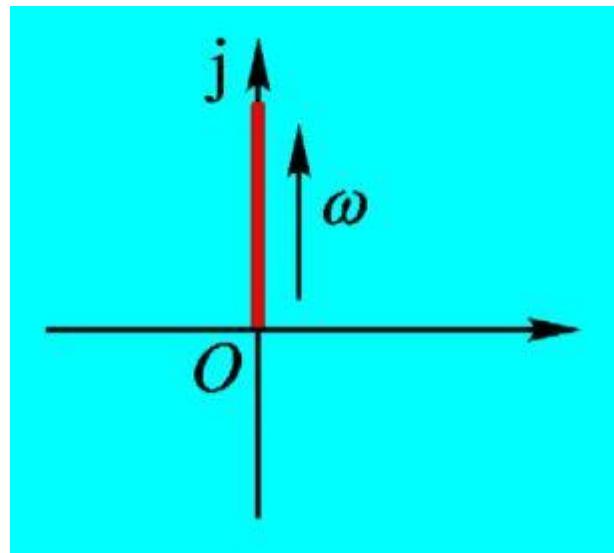
### 3、微分环节

传递函数:  $G(s) = s$

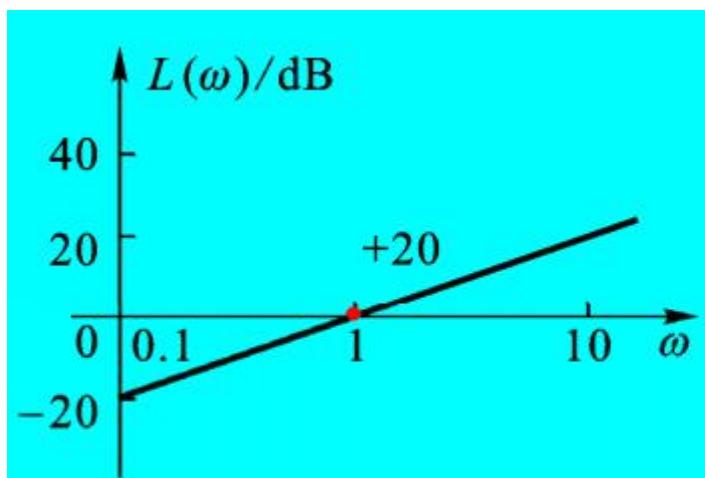
频率特性:  $G(j\omega) = j\omega$

对数幅频特性:  $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \omega$

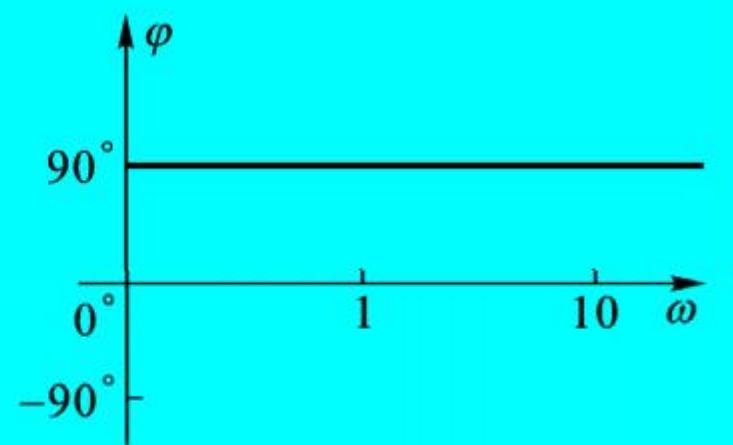
对数相频特性:  $\varphi(\omega) = 90^\circ$



幅相曲线



(a)



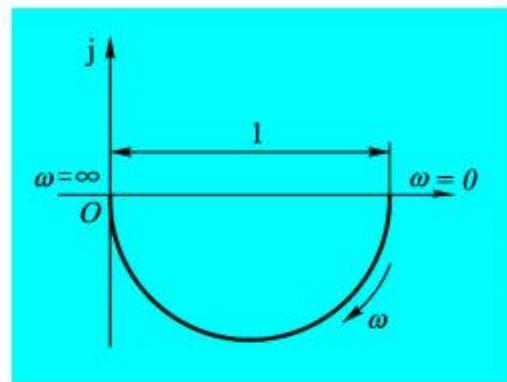
(b)

## 伯德图

## 4、惯性环节

传递函数:  $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$

频率特性:  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$



幅相曲线

对数幅频特性:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \\ &= 20 \lg 1 - 20 \lg \sqrt{(\omega T)^2 + 1} = -20 \lg \sqrt{(\omega T)^2 + 1} \end{aligned}$$

对数相频特性:

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctan \omega T$$

近似对数幅频特性：

当  $\omega \ll \frac{1}{T}$  时,  $\omega T \ll 1$ , 略去  $(\omega T)^2$  则得

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(\omega T)^2 + 1} = -20 \lg 1 = 0$$

扩展为只要  $\omega < \frac{1}{T}$ , 则  $L(\omega)=0$ 。

当  $\omega \gg \frac{1}{T}$  时,  $\omega T \gg 1$ ,  $(\omega T)^2 \gg 1$ , 略去 1, 得

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(\omega T)^2 + 1} = -20 \lg \sqrt{(\omega T)^2} = -20 \lg \omega T$$

扩展为只要  $\omega > \frac{1}{T}$ , 就以  $L(\omega) = -20 \lg \omega T$  近似地代替之。

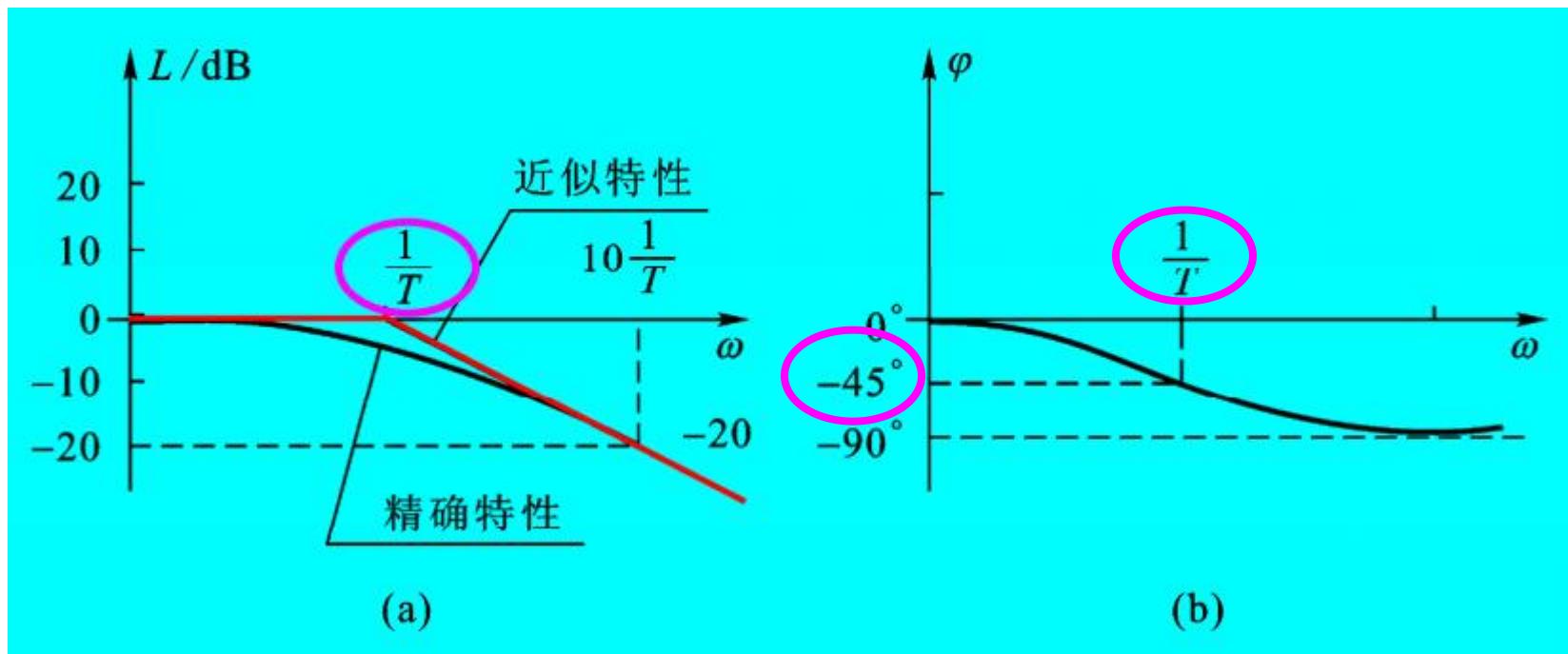
显然在转折频率  $\omega = \frac{1}{T}$  处，近似精度最低。  
其最大误差为

$$-20 \lg \sqrt{(\omega T)^2 + 1} \Big|_{\omega=\frac{1}{T}} = -20 \lg \sqrt{2} = -3 \text{ dB}$$

定义  $\omega = \frac{1}{T}$  为转折频率，也是特征点。

其幅频特征值为  $M\left(\frac{1}{T}\right) = 0.707$

对数幅频特征值为  $L\left(\frac{1}{T}\right) = -3 \text{ dB}$



## 惯性环节的伯德图

特征点:  $\omega = \frac{1}{T}$ ,  $L(\omega) = -3 \text{ dB}$ ,  $\varphi = -45^\circ$

## 5、一阶微分环节

传递函数:  $G(s) = \tau s + 1$

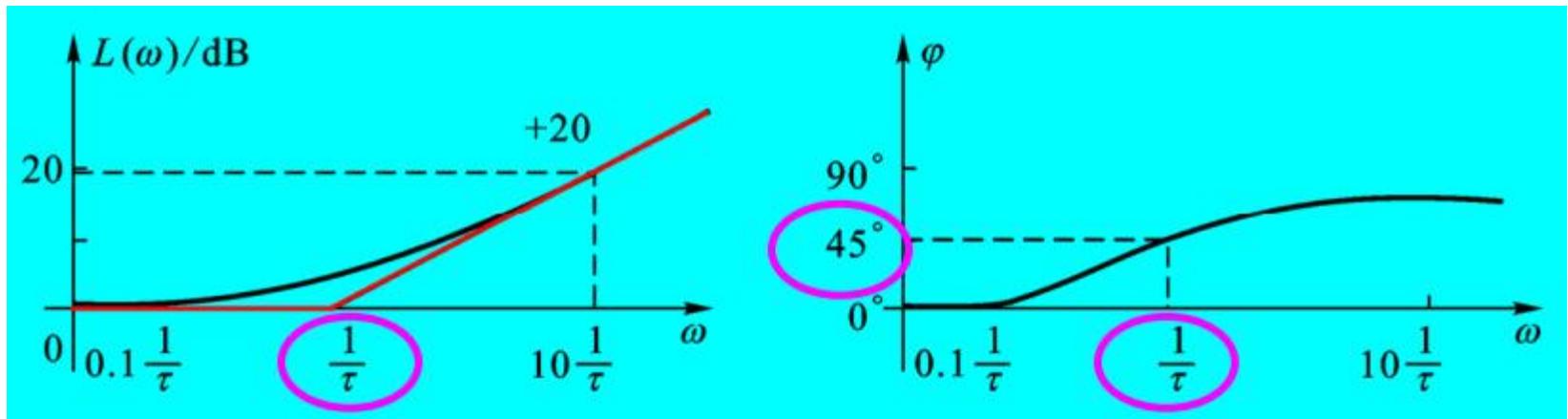
频率特性:  $G(j\omega) = j\omega\tau + 1$

对数幅频特性:

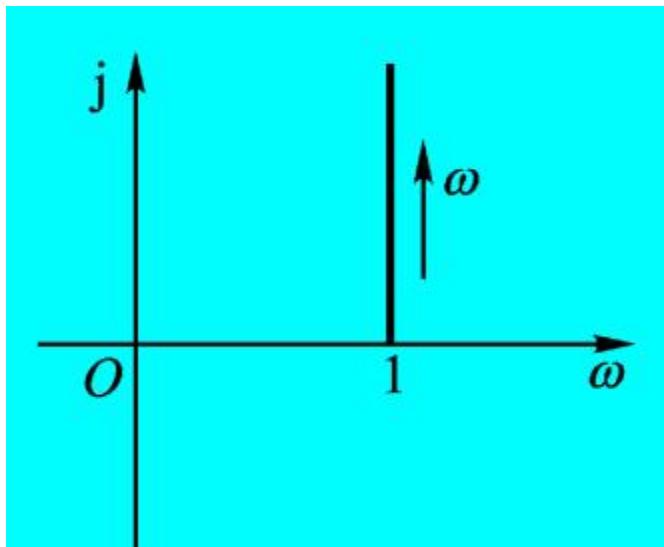
$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}$$

对数相频特性:  $\varphi(\omega) = \arctan \omega\tau$

特征点:  $\omega = \frac{1}{\tau}$ ,  $L(\omega) = 3dB$ ,  $\varphi = 45^\circ$



## 一阶微分环节的伯德图



## 幅相曲线

## 6、振荡环节

传递函数:  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$

频率特性:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}(j\omega) + 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}$$

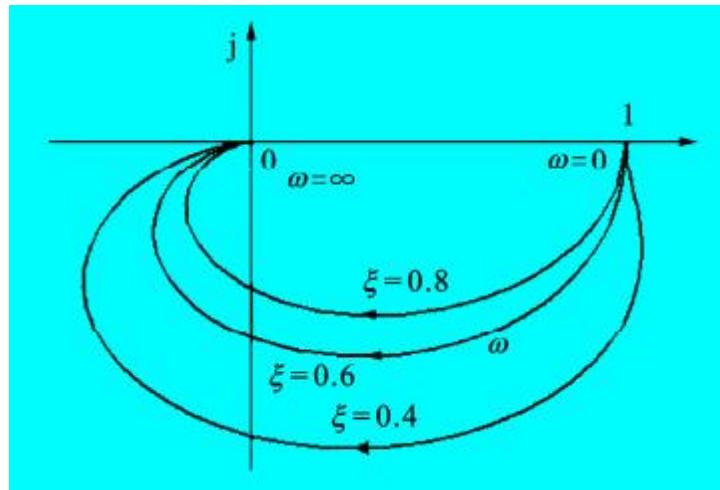
对数幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

对数相频特性：

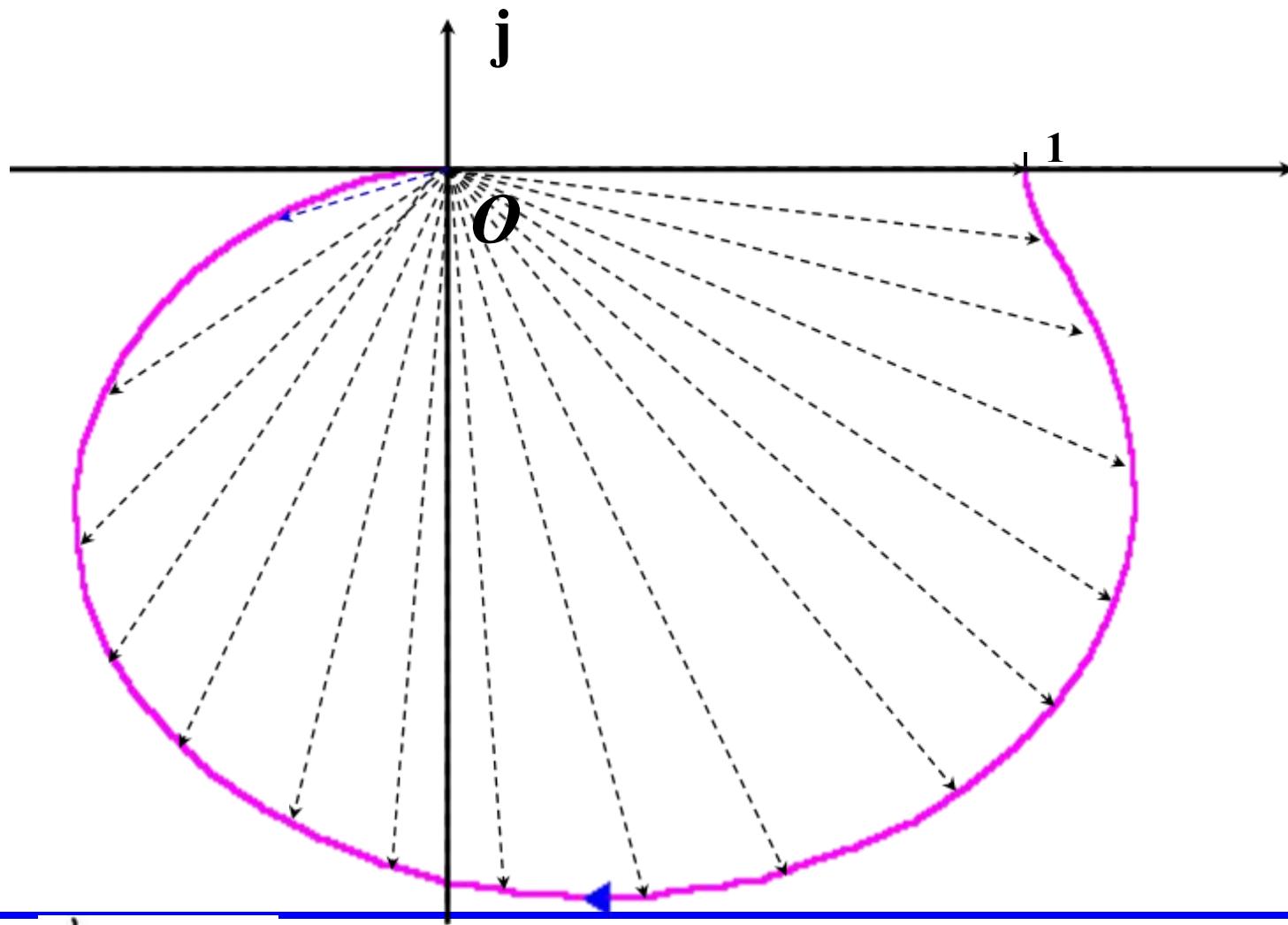
$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

特征点： $\omega = \omega_n$ ,  $L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{2\xi}$ ,  $\varphi = -90^\circ$



幅相曲线

根据幅频特性和相频特性公式计算出频率特性



渐近对数幅频特性：

当  $\omega \ll \omega_n$  时，即  $\omega/\omega_n < 1$  时，则略去  $\omega/\omega_n$ ，  
近似取

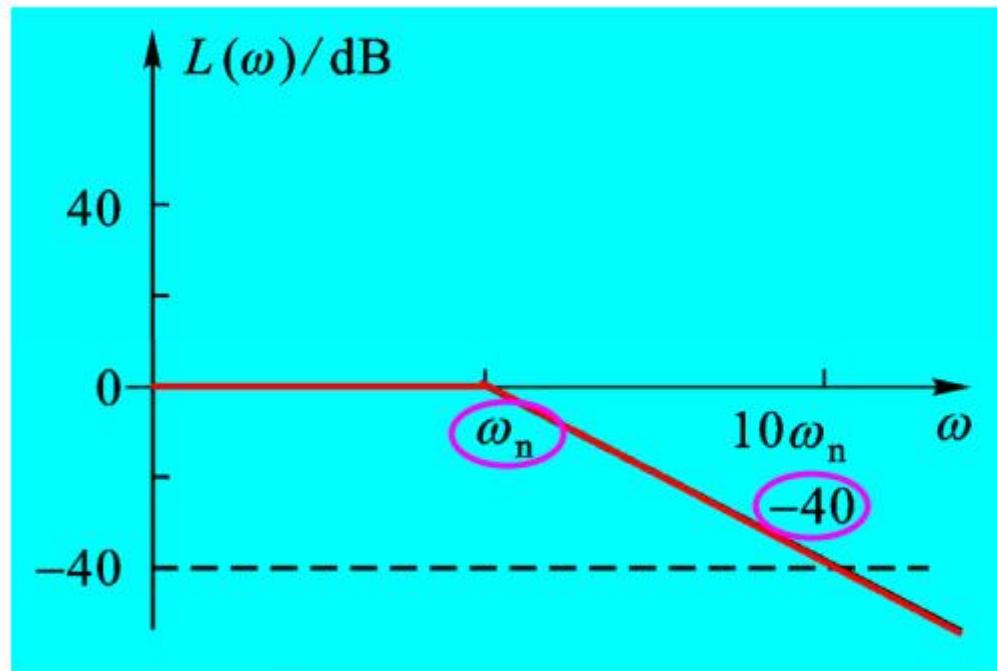
$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| \approx -20 \lg 1 = 0 \text{ dB}$$

在低频段的渐近特性是一条与横轴相重合的直线。

当  $\omega \gg \omega_n$  时，即  $\omega/\omega_n > 1$  时，则略去 1 和  $2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$   
近似取

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| \approx -20 \lg \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = -40 \lg \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

这是一条在  $\omega = \omega_n$  处过横轴且斜率为 -40dB/十倍频程的直线。



$\omega = \omega_n$  为转折频率

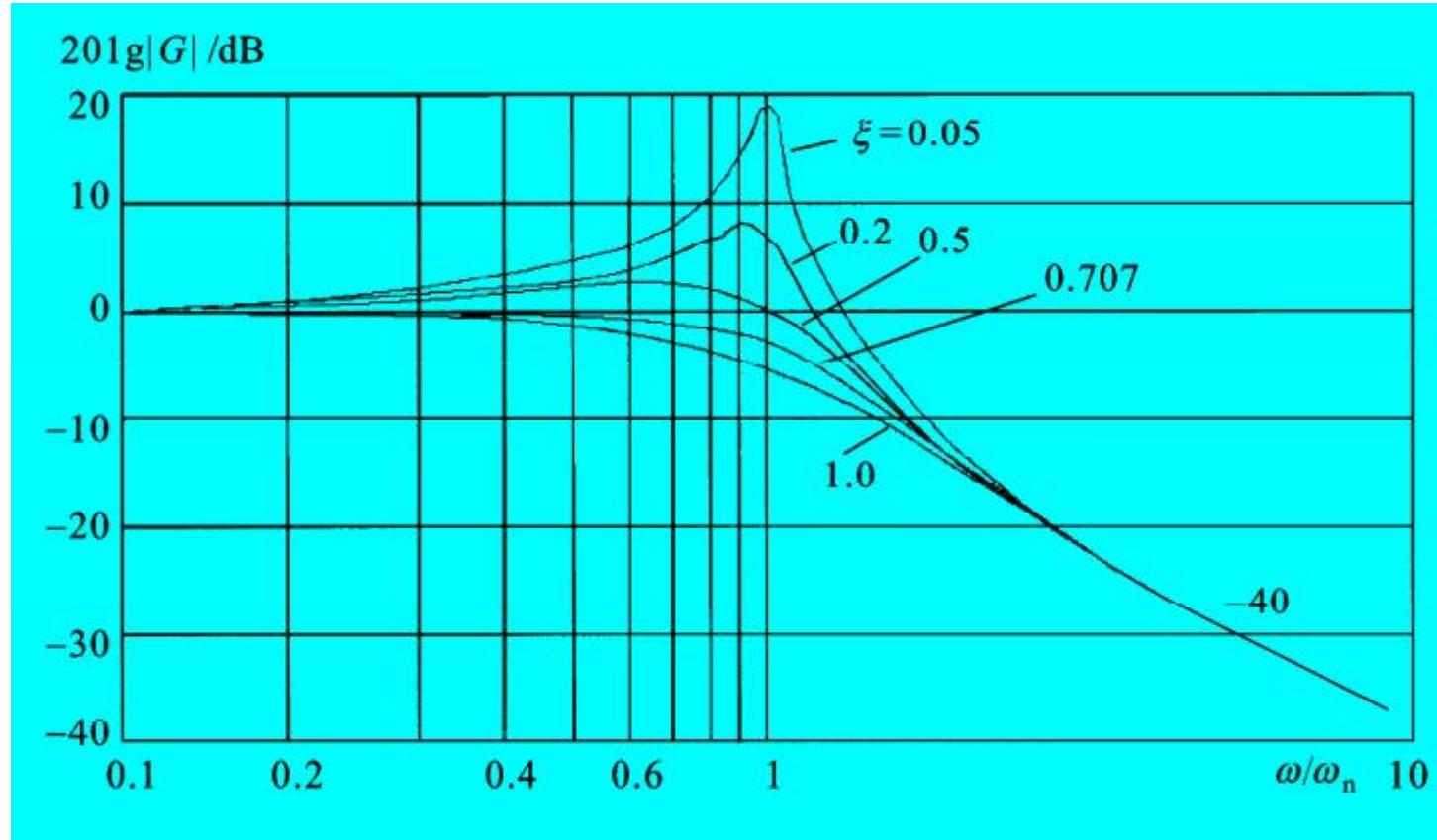
没有考虑阻尼比  $\xi$  的影响。

在转折频率处渐近特性与精确特性线误差为

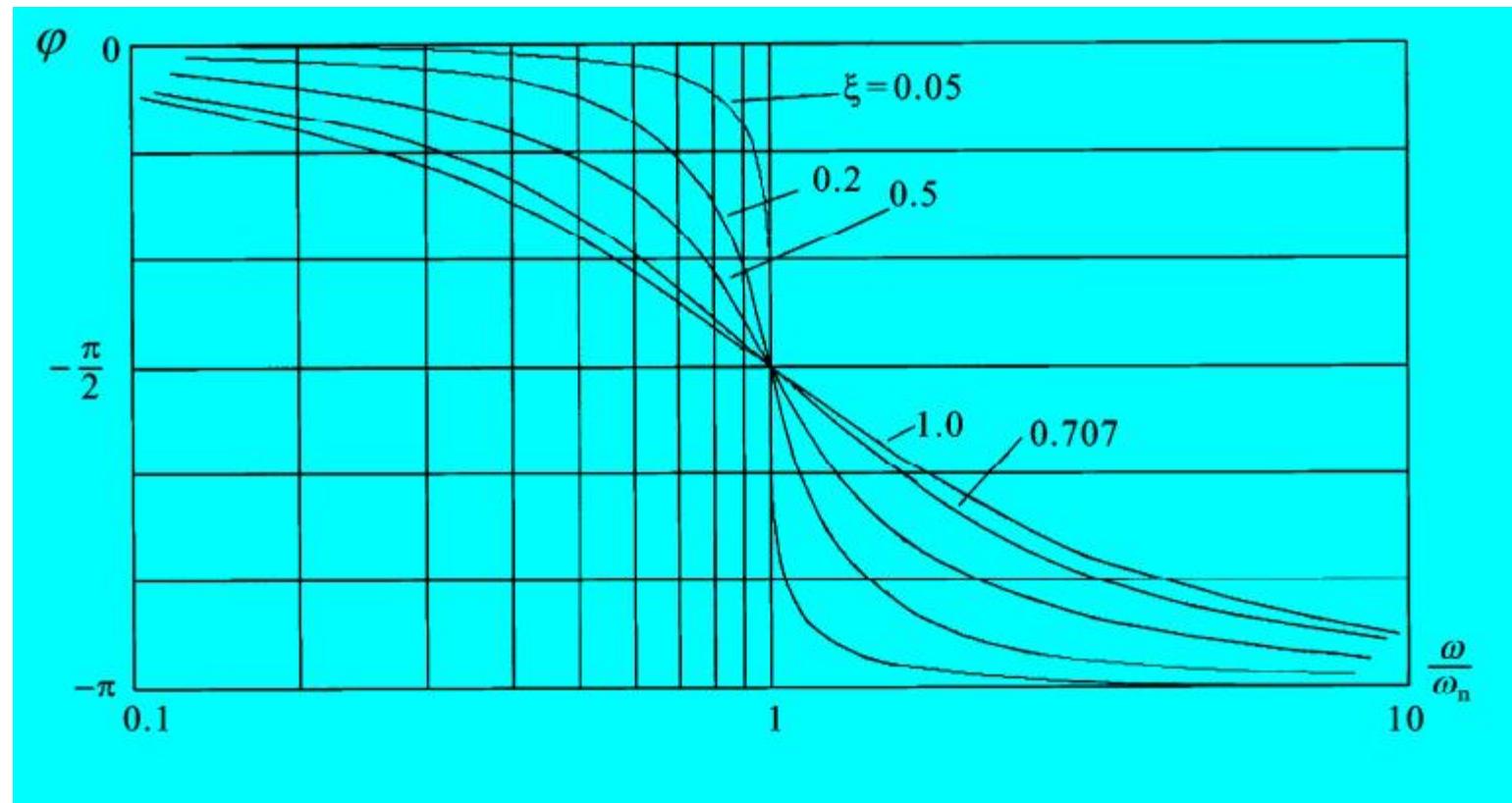
$$-20 \lg \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2} \Big|_{\omega=\omega_n}$$

$$-0 = -20 \lg (2\xi)$$

对于不同的阻尼比 $\xi$ , 振荡环节的精确对数幅频特性



## 对数相频特性：



## 7、二阶微分环节

传递函数:  $G(s) = \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1$

频率特性:  $G(j\omega) = \tau^2 (j\omega)^2 + 2\xi\tau (j\omega) + 1$

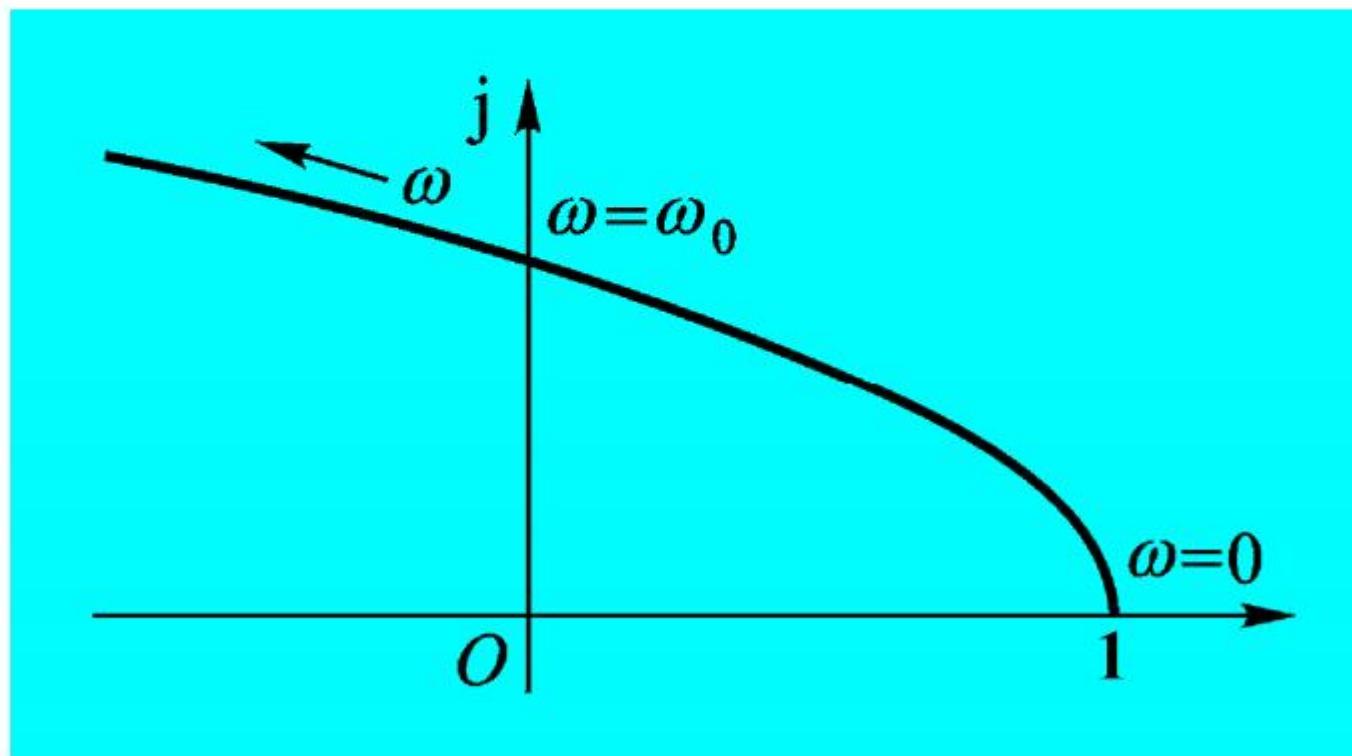
对数幅频特性:

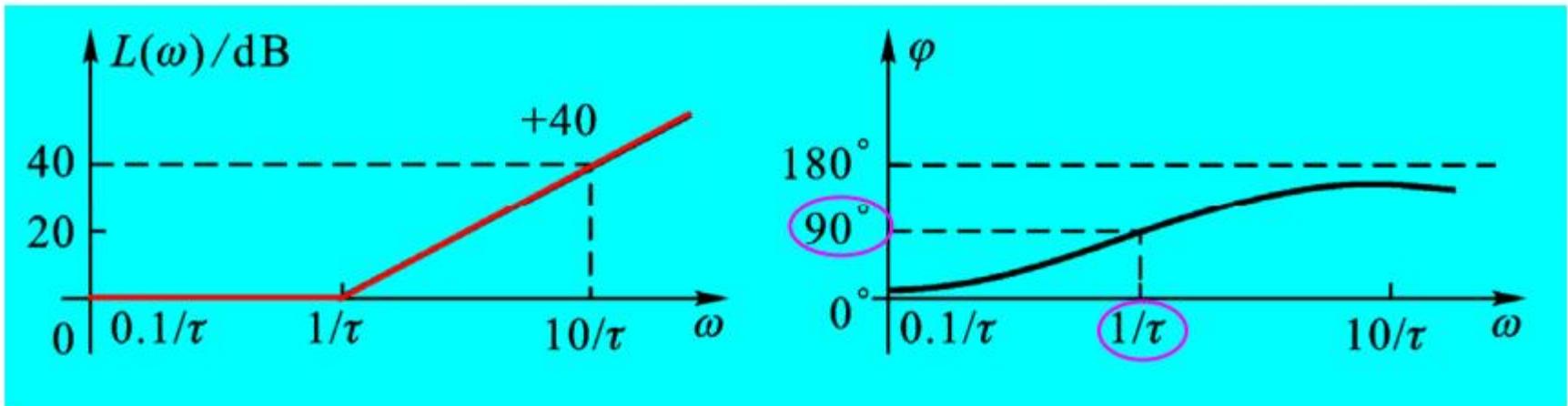
$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2}$$

对数相频特性:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{2\xi\tau\omega}{1 - \tau^2 \omega^2} \right)$$

幅相曲线：  $\omega = 0$  时，  $M = 1, \varphi = 0^\circ$ ；  
 $\omega = \infty$  时，  $M = \infty, \varphi = 180^\circ$





二阶微分环节的伯德图

## 8、一阶不稳定环节

传递函数:  $G(s) = \frac{1}{Ts - 1}$

频率特性:  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T - 1}$

对数幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}}$$

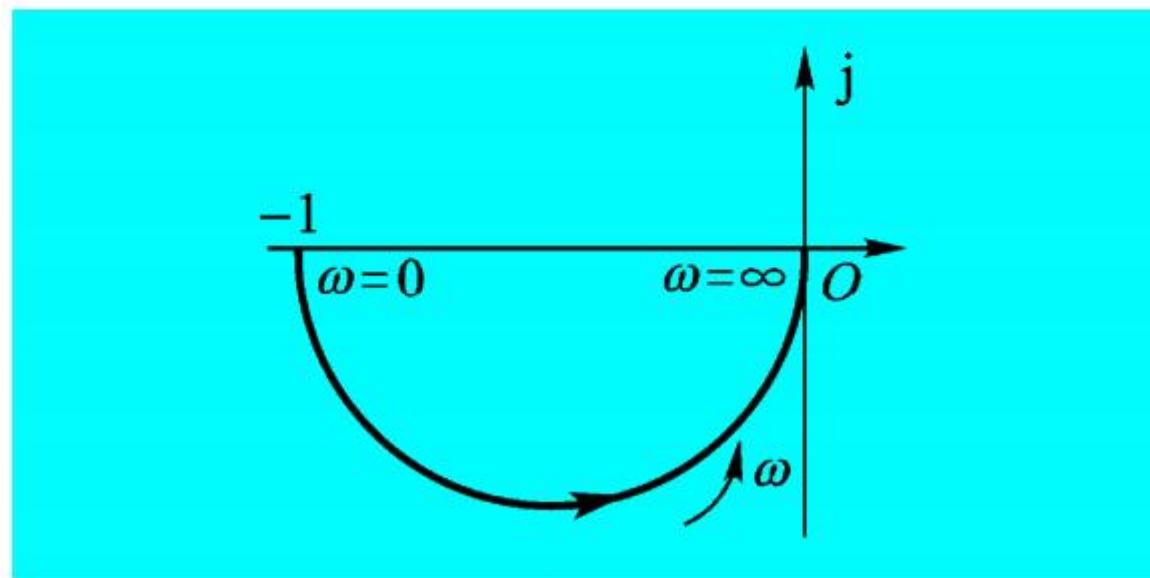
对数相频特性:

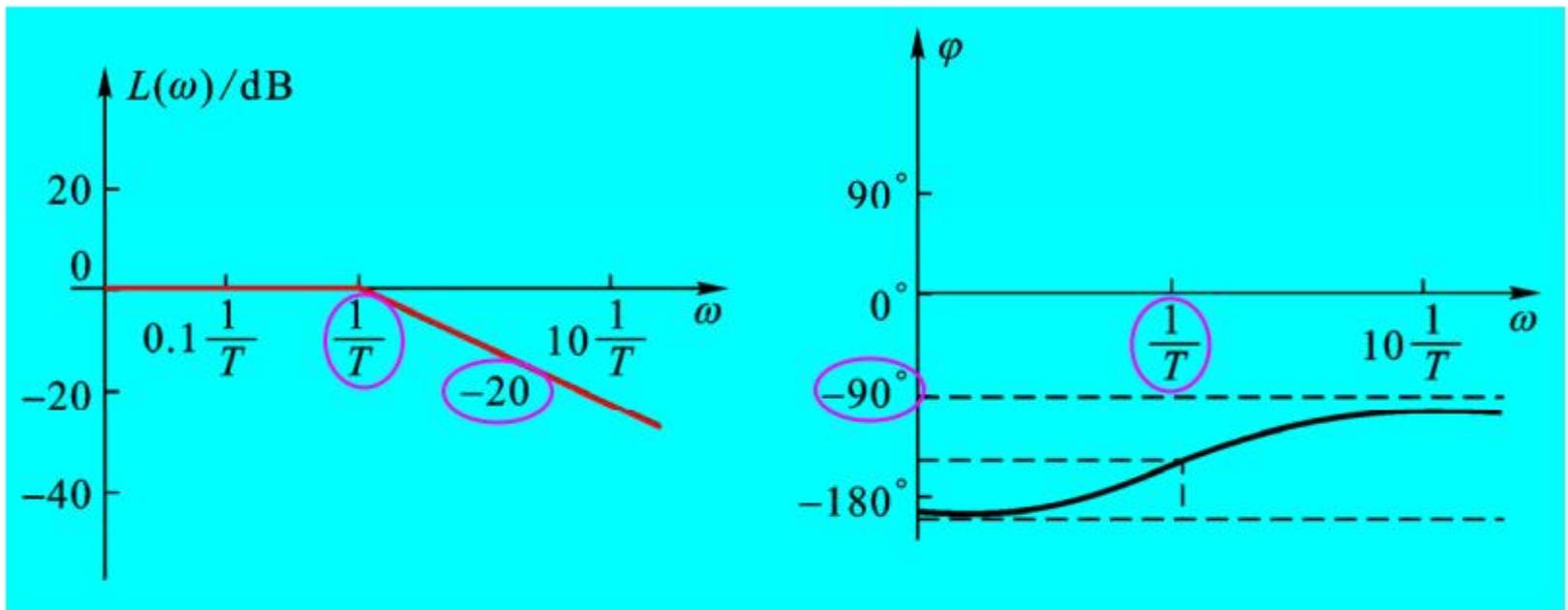
$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega T}{-1}\right)$$

幅相特性：  $\omega = 0$  时，  $M = 1$ ,  $\varphi = -180^\circ$ ;

$\omega = \frac{1}{T}$  时，  $M = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\varphi = -135^\circ$ ;

$\omega = \infty$  时，  $M = 0$ ,  $\varphi = -90^\circ$





一阶不稳定环节的伯德图

最小相位环节：

非最小相位环节：

最小相位系统：

非最小相位系统：

## 9、延迟环节

数学表达式:  $c(t) = r(t - \tau)$

传递函数:  $G(s) = e^{-\tau s}$

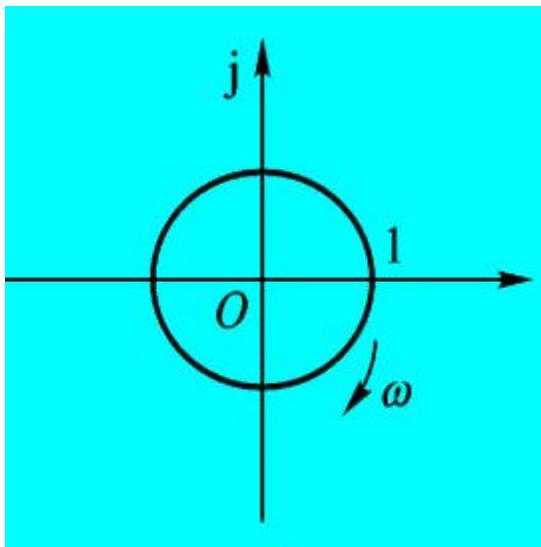
频率特性:  $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$

幅频特性:  $M(\omega) = |G(j\omega)| = 1$

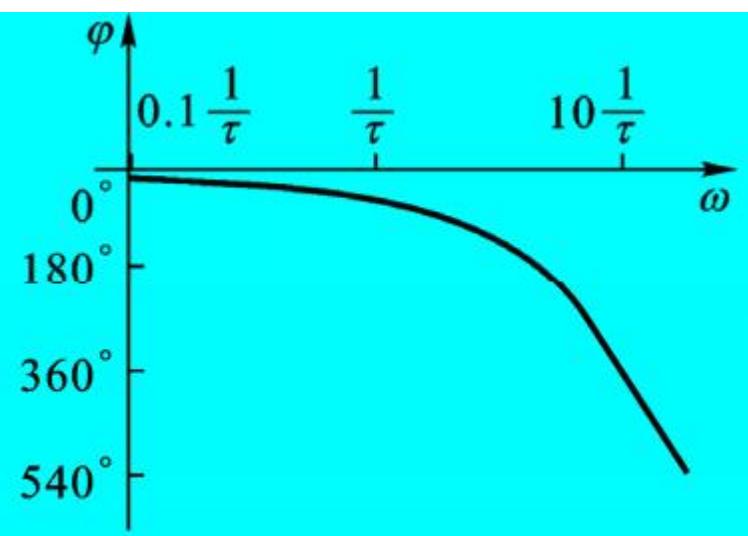
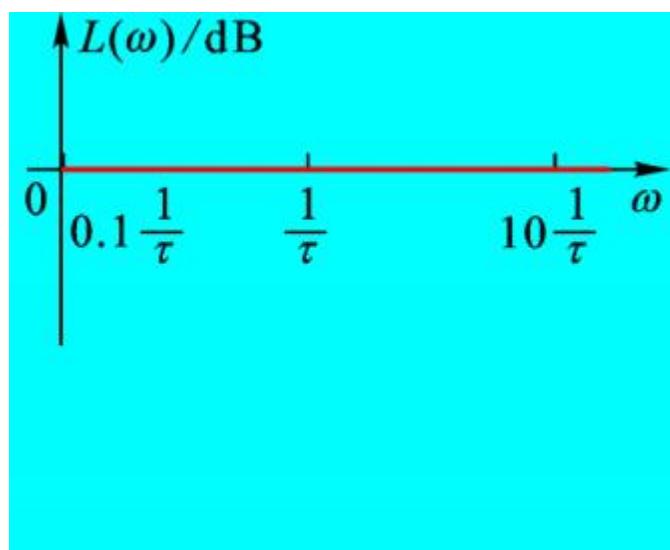
相频特性:  $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\tau\omega$

对数幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg 1 = 0$$



幅相特性曲线



伯德图