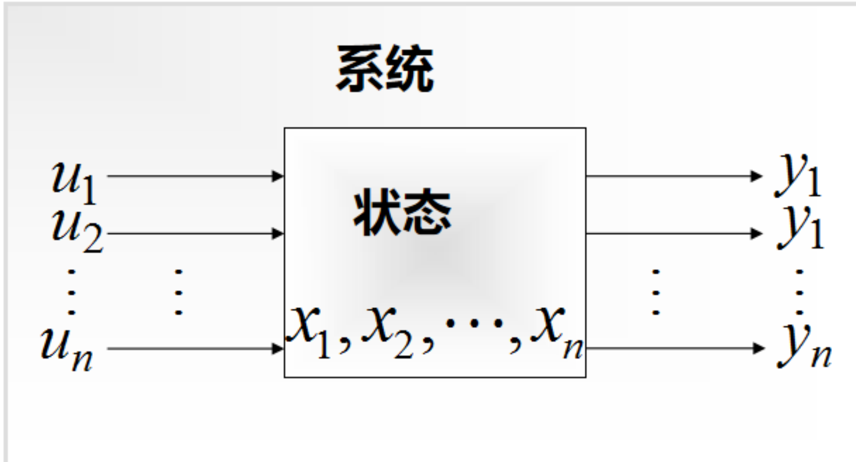
第 4 章 线性系统的能控性和能观测性



能控性和能观测性就是研究系统这个“黑箱”的内部的状态是否可由输入影响和是否可由输出反映。

能控性(Controllability)和能观测性(Observability)深刻地揭示了系统的内部结构关系，Kalman于60年代初首先提出并研究的这两个重要概念，在现代控制理论的研究与实践中，具有极其重要的意义，事实上，能控性与能观测性通常决定了最优控制问题解的存在性。例如，在极点配置问题中，状态反馈的的存在性将由系统的能控性决定；在观测器设计和最优估计中，将涉及到系统的能观测性条件。

1960 卡尔曼(Kalman)

两个基础性概念：能控性与能观性

两个基本问题：

- 在有限时间内，控制作用能否使系统从初始状态转移到要求的状态？

  指控制作用对状态变量的支配能力，称之为状态的能控性问题

- 在有限时间内，能否通过对系统输出的测定来估计系统的初始状态？

  系统的输出量（或观测量）能否反映状态变量，称之为状态的能观性问题。

注：能控性分为状态能控性、输出能控性（如不特别指明便泛指状态能控性）。

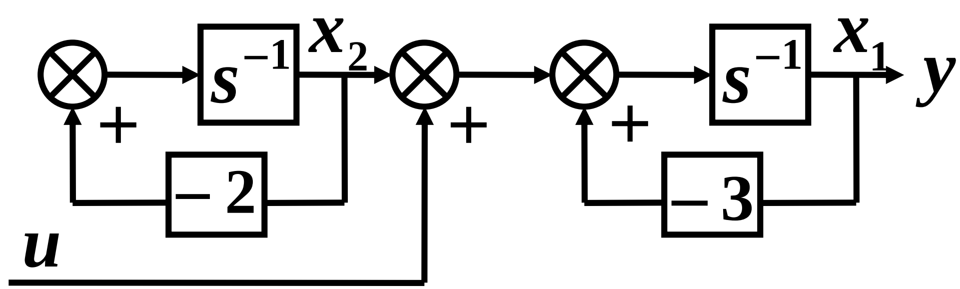
- 为什么在经典控制中没有提出能观性和能控性，而在现代控制中提出了这两个概念？
- 经典控制理论所讨论SISO系统的输入输出分析和综合问题，它的输入和输出之间的动态关系可以唯一地由传递函数所确定。给定输入则一定会存在唯一的输出与之对应。
- 反之，对期望输出信号总可找到相应的输入信号(即控制量)使系统输出按要求进行控制，不存在能否控制的问题。
- 系统输出一般是可直接测量，不然，则应能间接测量。否则，就无从对其进行反馈控制和考核系统所达到的性能指标。因此，也不存在输出能否测量(观测)的问题。

▪ 能控性:

指外输入u(t) 对系统状态变量x(t)和输出变量y(t)的支配能力，它回答了u(t)能否使x(t)和y(t)作任意转移的问题

有些状态分量能受输入u(t)的控制，有些则可能不受u(t)的控制。受u(t)控制的状态为能控状态，不受u(t)控制的状态为不能控状态

直观概念:系统的结构图如下



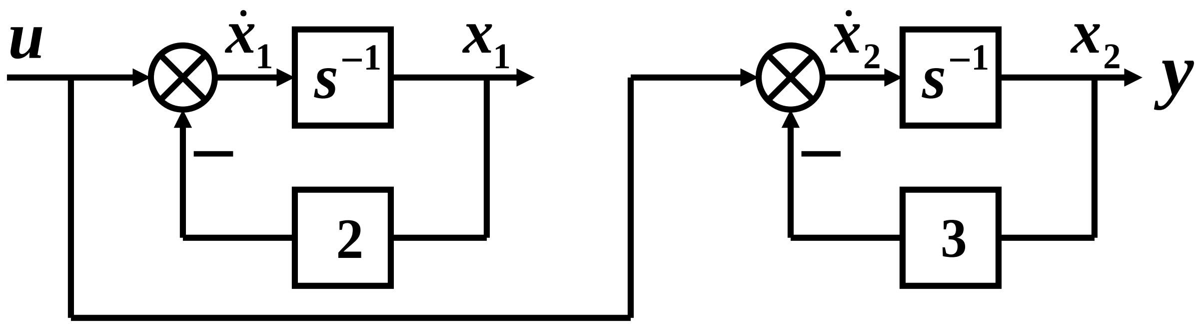
显然,u只能控制x_1而不能影响x_2，我们称状态变量x_1是可控的，而x_2是不可控的。只要系统中有一个状态变量是不可控的，则该系统是状态不可控的。

▪ 能观测性：

指由系统的输出y(t)识别状态变量x(t)的能力，它回答了状态变量能否由输出反映出来。

有些状态能通过输出y(t)确定下来，有些状态则不能。能通过y(t)反映的状态为能观状态，不能通过y(t)反映的状态为不能观状态

直观概念: 系统结构图如下

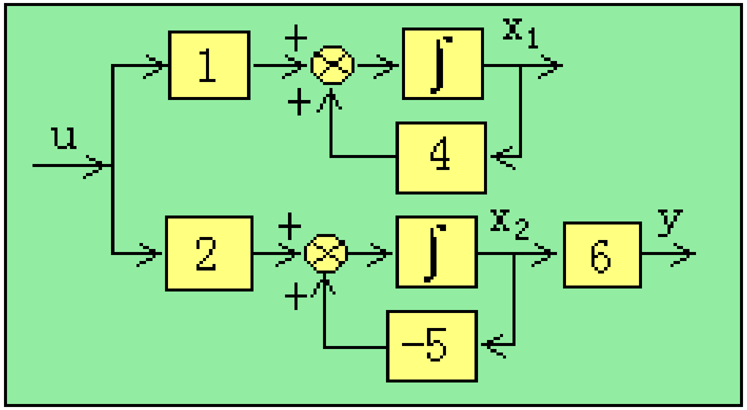


显然输出 y 中只有 x_2，而无 x_1，所以从 y 中不能确定 x_1，只能确定 x_2。我们称 x_2是可观测的，x_1是不可观测的。

[例] 给定系统的描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



将其表为标量方程组形式，有：

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -5x_2 + 2u$$

$$y = -6x_2$$

分析：X1、X2受控于U

Y与X1无关

Y与 X2有关

第 4 章 线性系统的能控性和能观测性

4.2 定常连续系统的能控性

4.2.1 线性定常连续系统的能控性定义

4.2.2 线性定常连续系统的能控性判据

4.2.3 线性定常连续系统的输出能控性

4.2.4 利用Matlab判定系统能控性

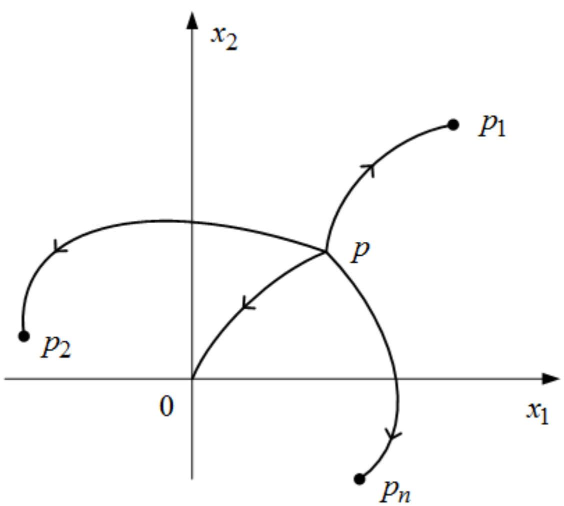
4.2.1 线性定常连续系统的能控性定义

线性定常连续系统的状态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

如果存在一个分段连续的输入u(t)，能在$[t_0, t_f]$的有限时间内使得系统的某一初始状态 $x(t_0)$ 转移到任一终端状态 $x(t_f)$，则称此状态是能控的。如果系统的所有状态都是能控的，即能控状态充满整个状态空间，则称系统是状态完全能控的。

不失一般性，常选择终止状态为状态空间原点。即：$x(t_f)=0$



$$x(t_0) = P$$

$[t_0, t_f]$ 时间段内存在控制输入u

$$x(t_f) = P_1, \cdots, P_n$$

4.2.2 线性定常连续系统的能控性判据

1. 从A与B判定能控性

定理4.2.1 系统(4.2.1)状态完全能控的充分必要条件是能控性矩阵

$$U_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

的秩为n，即

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

[证明]:

证明目标:

对系统的任意的初始状态 $x(t_0)$，能否找到输入u(t)，使之在 $[t_0, t_f]$ 的有限时间内转移到零 $x(t_f)=0$ 。则系统状态能控。

已知：线性定常非齐次状态方程的解为：

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

将 $t=t_f$ 代入上式：

$$x(t_f)=\Phi(t_f-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_f-\tau)Bu(\tau)d\tau=0 \qquad (1)$$

整理（1）式有：

$$x(t_0)=-\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_0-\tau)Bu(\tau)d\tau \qquad (2)$$

由凯莱－哈密顿定理 $e^{A(t)}=\sum_{j=0}^{n-1}a_j(t)A^j$ 有：

$$\Phi(t_0-\tau)=e^{A(t_0-\tau)}=\sum_{j=0}^{n-1}a_j(t_0-\tau)A^j \qquad (3)$$

将（3）式代入（2）式得：

$$
\begin{aligned}
x(t_0) &= -\int_{t_0}^{t_f}\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t_0-\tau)A^j Bu(\tau)d\tau \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} A^j B\boxed{\int_{t_0}^{t_f} a_j(t_0-\tau)u(\tau)d\tau} \\
&= -\left[B\boxed{\int_{t_0}^{t_f} a_0(t_0-\tau)u(\tau)d\tau}+AB\boxed{\int_{t_0}^{t_f} a_1(t_0-\tau)u(\tau)d\tau}+\cdots+A^{n-1}B\boxed{\int_{t_0}^{t_f} a_{n-1}(t_0-\tau)u(\tau)d\tau}\right]
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

因t_f是固定的，所以每一个积分都代表一个确定的量

令：
$$U_j=\int_{t_0}^{t_f} a_j(t_0-\tau)u(\tau)d\tau,\quad j=0,1,\cdots n-1 \qquad (5)$$

将（5）式代入（4）式得：

$$
\begin{aligned}
x(t_0) &= -(BU_0+ABU_1+\cdots+A^{n-1}BU_{n-1}) \\
&= -\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_0^T & U_1^T & \cdots & U_{n-1}^T\end{bmatrix}^T \\
&= -U_c U
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

由以上可以看出式(6)中各参数维数如下:

$x(t_0)$为$n\times 1$维向量

B为$n\times r$维, AB为$n\times r$维, $\Rightarrow U_c$为$n\times nr$维向量

U_j为$r\times 1$维, $\Rightarrow U$为$nr\times 1$维向量

式(6)是关于U的非齐次方程组。由线性代数知识知道，其有解的充要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相等，即:

$$rank(U_c)=rank\begin{bmatrix}U_c & x(t_0)\end{bmatrix}$$

由于$x(t_0)$任意，所以，必须有: $rank(U_c)=n$ [证毕]

[说明]：维数较大时，注意使用矩阵秩的性质 $rankU_c=rankU_cU_c^T$

例 设系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

判断其状态能控性。

例题 3.2-3 【解答】

$$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rank M = 1$$

所以该系统是状态不能控的。

[例] **判别如下线性连续定常系统的能控性**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

[解]:

$$\underline{rankU_c = rankU_cU_c^T} = rank[(B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B)(B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B)^T]$$

$$= rank\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}^T \right)$$

$$= rank\begin{bmatrix} 59 & 49 & 49 \\ 49 & 42 & 42 \\ -49 & -42 & -42 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 59 & 49 & 49 \\ 49 & 42 & 42 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

故系统状态不完全能控。

[例] **判别如下系统的能控性**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

故系统状态完全可控

[例] 判别如下系统的能控性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

[解]:

1）构造能控性判别矩阵：

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

2）求能控性判别矩阵的秩

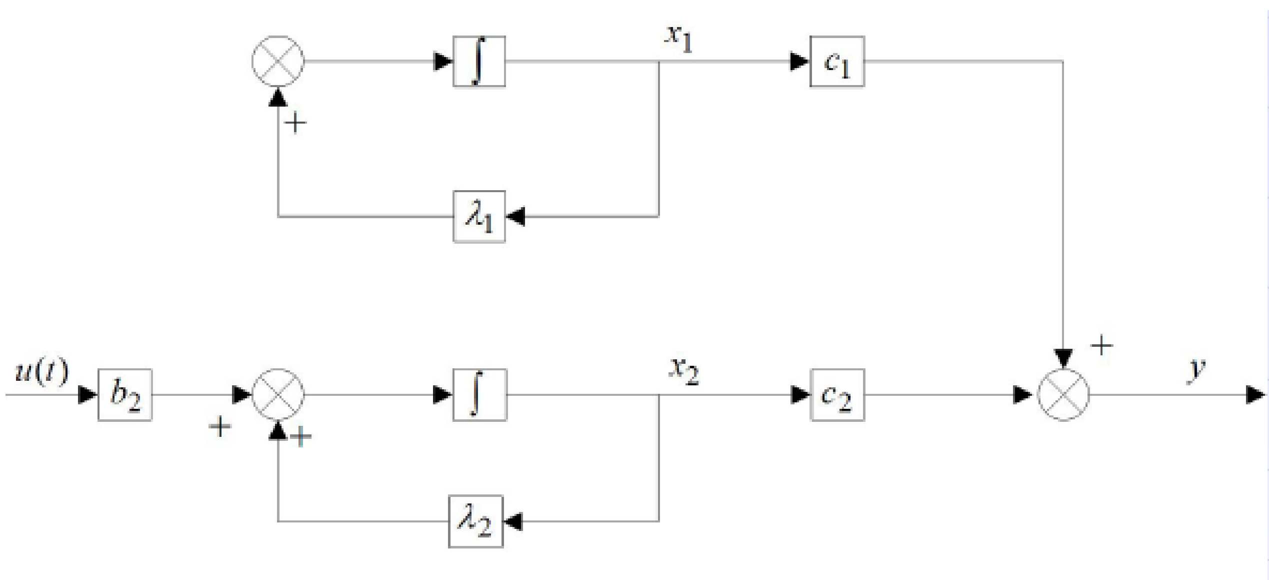
$$rankU_c = rank \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} = 3$$

故系统状态完全可控

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\,\boldsymbol{x} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u \end{aligned}}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\,\boldsymbol{x} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u \end{aligned}}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\,\boldsymbol{x} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}}$$



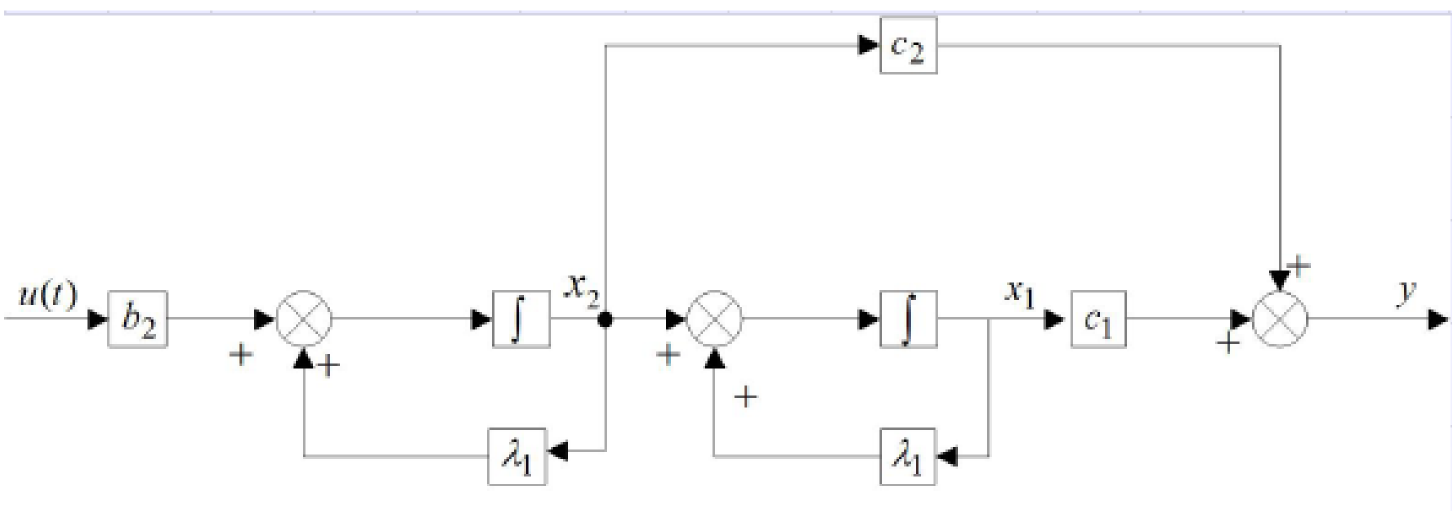
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0\\ b_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{y} = [c_1,\quad c_2]\,\boldsymbol{x} \;\rightarrow\; \boxed{\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1\\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u\end{aligned}}$$

×

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0\\ b_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{y} = [c_1,\quad c_2]\,\boldsymbol{x} \;\rightarrow\; \boxed{\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u\end{aligned}}$$

√

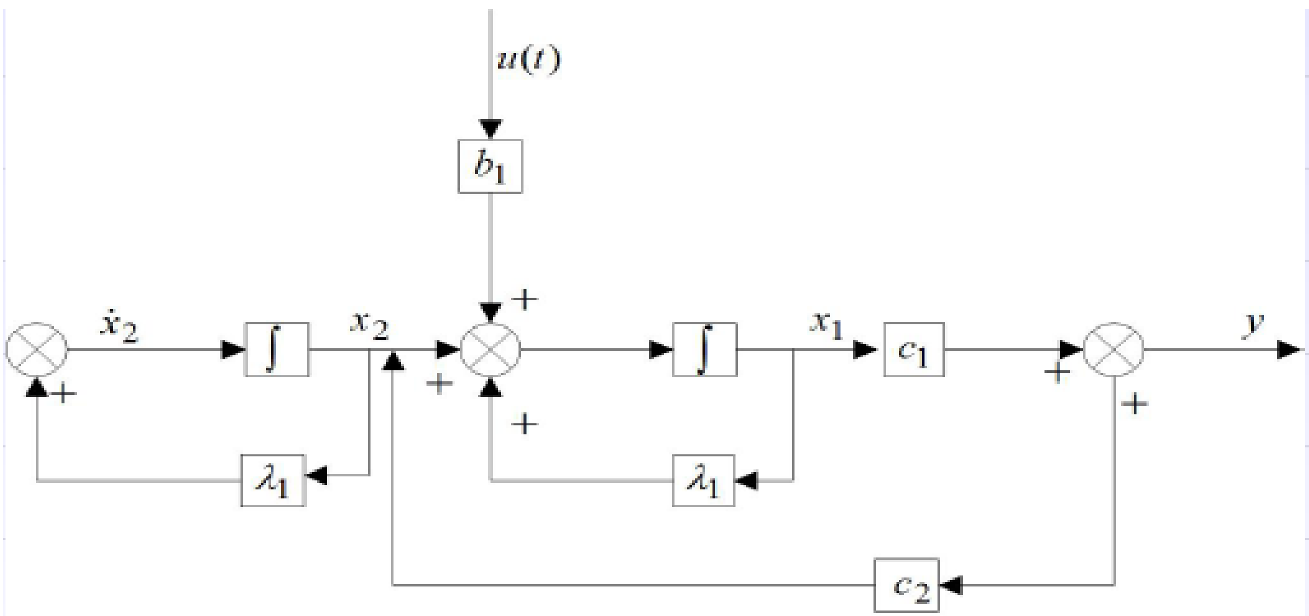
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}b_1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{y} = [c_1,\quad c_2]\,\boldsymbol{x} \;\rightarrow\; \boxed{\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 + b_1 u\\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2\end{aligned}}$$



$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\, \boldsymbol{x} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u \end{aligned}} \quad \times$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\, \boldsymbol{x} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u \end{aligned}} \quad \surd$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = [c_1, \quad c_2]\, \boldsymbol{x} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}}$$



2、判据二（标准型法）

[前提条件]：线性变换不改变系统的能控性。

$$\Sigma_1:\ \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}\ \xrightarrow{x=P\bar{x}}\ \Sigma_2:\ \begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u\\ y=\bar{C}\bar{x}+\bar{D}u\end{cases}$$

其中：$\bar{A}=P^{-1}AP$，$\bar{B}=P^{-1}B$，$\bar{C}=CP$，$\bar{D}=D$

则有：$rank(\bar{U}_c)=rank(U_c)$

[证明]：

对于变换后的方程 Σ_2，其能控性判别阵为：

$$\begin{aligned}\bar{U}_c&=\begin{bmatrix}\bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \bar{A}^2\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}(P^{-1}B) & (P^{-1}A\underline{P)P^{-1}}B & (P^{-1}A\underline{P)(P^{-1}}A\underline{P)(P^{-1}}B) & \cdots & (P^{-1}AP)^{n-1}(P^{-1}B)\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}P^{-1}B & P^{-1}AB & P^{-1}A^2B & \cdots & P^{-1}A^{n-1}B\end{bmatrix}\\
&=P^{-1}\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由于P为非奇异满秩阵，则 P^{-1} 也为满秩阵。
根据矩阵和一个满秩的乘积其秩不变的性质有：

$$
\begin{aligned}
rank(\overline{U}_c) &= rank P^{-1}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\
&= rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\
&= rank U_c
\end{aligned}
$$

[证毕]

定理2：设线性系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 具有*两两相异的特征值* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 则其状态完全能控的充分必要条件是：系统经线性非奇异变换后的对角线标准型：

$$
\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \overline{x} + \overline{B}u
$$

中，$\overline{B}$ *不包含元素全为0的行*。

说明：定理2说明

设2阶系统的对角线标准型为： $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$

则根据定理1有： $U_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & b_1\lambda_1\\ b_2 & b_2\lambda_2\end{bmatrix}$

要使系统能控，则必有： $|U_c|=\begin{vmatrix}b_1 & b_1\lambda_1\\ b_2 & b_2\lambda_2\end{vmatrix}=b_1b_2(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$

由于λ_1,λ_2 互异，故： $b_1\neq 0$,且$b_2\neq 0$

推广到n阶系统就有定理2（注：系统有重根，但仍能变成对角线标准型，则定理2不成立。例如，当上面说明中 $\lambda_2=\lambda_1$ 时，此时Uc的行列式为0，Uc为奇异阵。）

说明：对角线标准型形式下，各变量间没有耦合关系，从而影响每一个状态的唯一途径是通过输入。B中的某一行元素全为0，就意味着此输入对状态没有影响。

[例]

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ b_2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}_1=\lambda_1 x_1$$

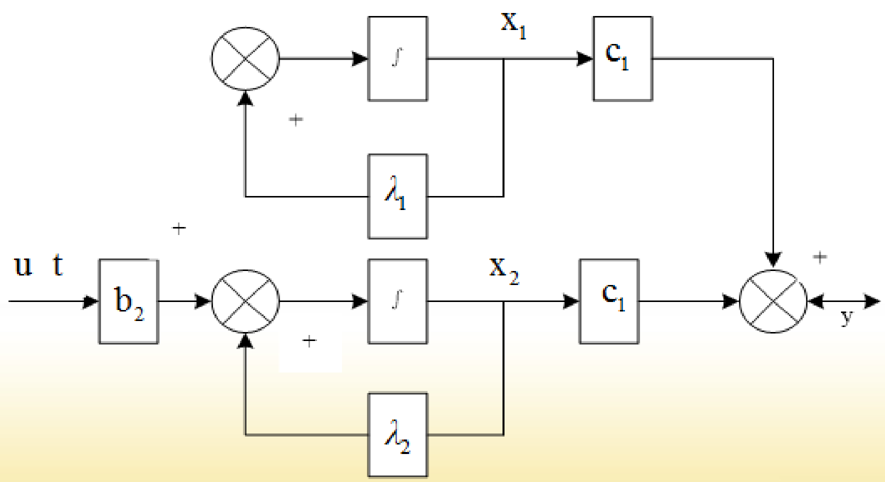
$$\dot{x}_2=\lambda_2 x_2+b_2 u$$

$$y=c_1 x_1+c_2 x_2$$

$x_1 \rightarrow$ 不能控

$x_2 \rightarrow$ 能控

模拟结构图：



[例]：考察如下系统的能控性：

1）$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\5\\7\end{bmatrix}u$$

状态完全能控

2）$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\\9\end{bmatrix}u$$

状态不完全能控

X2 状态不能控

3）$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\4&0\\7&5\end{bmatrix}u$$

状态完全能控

定理3：设线性系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 具有***重特征值***，且***每个重特征值只对应一个独立的特征向量***，则其状态完全能控的充分必要条件是系统经线性非奇异变换后的约当标准型：

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix} \tilde{x} + \tilde{B}u$$

中，$\tilde{B}$ 阵中与每个约当小块$J_i (i = 1,2,\ldots,k)$ ***最后一行所对应的元素不全为零***。

说明：定理3说明

设2阶系统的约当标准型为： $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$

根据定理1： $Q_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & b_1\lambda_1+b_2\\ b_2 & b_2\lambda_1\end{bmatrix}$

要使系统能控，则必有： $|Q_c|=\begin{vmatrix}b_1 & b_1\lambda_1+b_2\\ b_2 & b_2\lambda_1\end{vmatrix}=-b_2^2\neq 0$

即： $b_2\neq 0$

推广到n阶系统就有定理3。

[例]

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ b_2\end{bmatrix}u$$

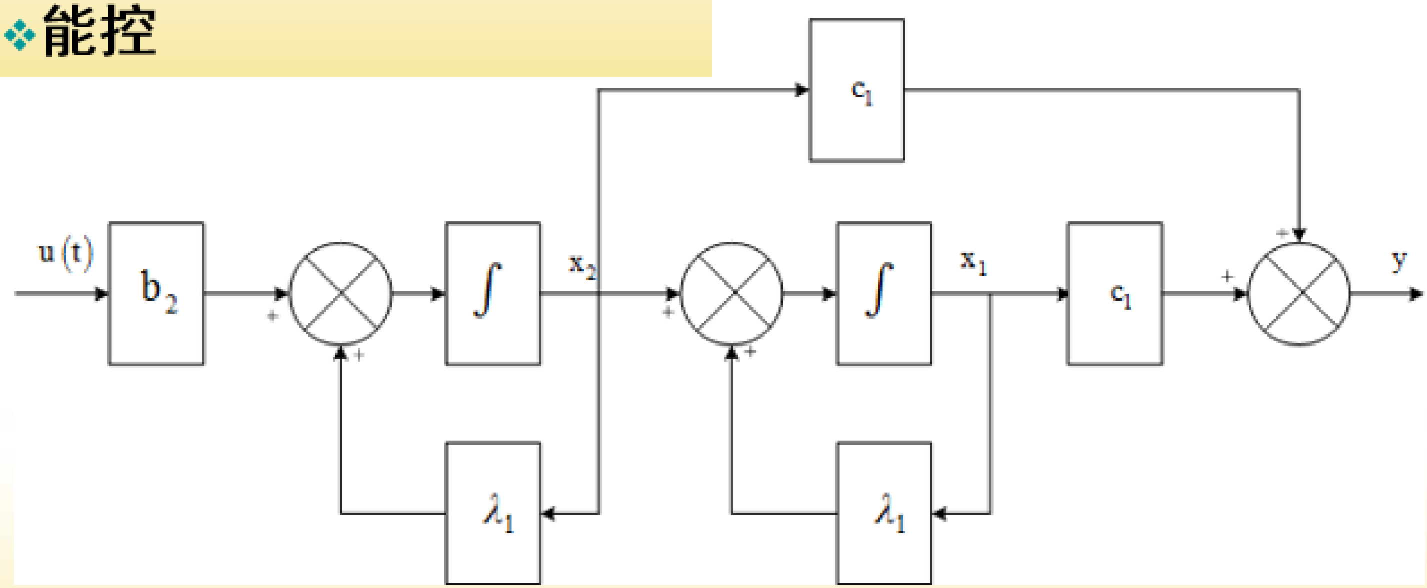
$$y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}_1=\lambda_1 x_1+x_2$$

$$\dot{x}_2=\lambda_1 x_2+b_2 u$$

x_1 → **能控**（虽与***u***无直接联系，但与$\mathbf{x_2}$有联系）

x_2 → **能控**



补充 推论1：如果某个特征值对应几个约当块，则对于MI系统，其能控性判据为同一个特征值对应的每个约当块的最后一行所对应的B中的行向量是否是行线性无关，是则状态能控，否则状态不能控。

含义：

对于：$$\dot{x}=\left[\begin{array}{cc|cc}\lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \hline & 0 & \lambda_1 & 1 \\ & & 0 & \lambda_1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4\end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc}b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \hline b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42}\end{array}\right]u$$

如果 $\begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$ 行线性无关，则状态能控

补充 推论2：**如果某个特征值对应几个约当块，则对于SI系统，系统状态必不能控。**如果某个特征值对应的约当块最后一行所对应的B中的行，有一行为0，则此行对应状态必不能控，如果这些行都不为0，则此时这些行必线性相关，所以状态不能控。

[例]：考察如下系统的状态能控性：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 4\\ 3\end{bmatrix}u$$

状态完全能控

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}u$$

状态完全能控

对于单输入系统，此时A不变，B变成如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}-4 & 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}}\\0 & -4 & & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{0}} & -4 & 1\\ & & 0 & -4\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}u$$

此时系统的能控性判别阵为：

$$Q_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & A^3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 32\\2 & -8 & 32 & -128\\3 & -8 & 16 & 0\\4 & -16 & 64 & -256\end{bmatrix}$$

此时，Q_c的1、3行线性相关，故状态不完全能控

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1&0\\0&-4&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&2\\0&0\\3&0\end{bmatrix}u$$

状态不完全能控

X_2 状态不能控

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-4&1\\0&0&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&3\\0&0&0\\1&3&2\end{bmatrix}u$$

状态完全能控

B中1、3行线性无关

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-4&1\\0&0&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&3\\0&0&0\\3&6&9\end{bmatrix}u$$

状态不完全能控

B中1、3行线性相关

[例]　考察以下系统的能控性：

1.
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}u$$

2.
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 3 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}u$$

3.
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\\ 0\end{bmatrix}u$$

[例]　考察以下系统的能控性：

1.
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\b_2\\b_3\end{bmatrix}u$$

能控

2.
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&0&0\\0&\lambda_1&1&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0\\0&0&0&\lambda_4&1\\0&0&0&0&\lambda_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\3&0\\0&0\\1&2\end{bmatrix}u$$

能控

3.
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&0&0\\0&\lambda_1&1&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0\\0&0&0&\lambda_4&1\\0&0&0&0&\lambda_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\0\end{bmatrix}u$$

不能控
（不完全能控）

3、补充判据三（S平面分析法）

定理4：SISO线性系统$\dot{x}=Ax+Bu$，$y=Cx$则其状态完全能控且能观测的充分必要条件是其传递函数的分子分母间没有零、极点对消。

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

说明：在传递函数和能控性、能观测性的关系中讲

➢结论：

◆系统能控性取决于系统矩阵A和控制矩阵b。

◆在A为对角线型矩阵的情况下，若b的元素有为0的，则与之对应的一阶标量状态方程必为齐次微分方程，与u(t)无关，此时是不完全能控的。

◆在A为约旦标准矩阵的情况下，由于前一个状态总受到下一个状态的控制，故只有b中相应于约旦块的最后一行元素为零时，才成为不完全能控的（不能控的状态，在结构图中表现为存在于u(t)无关的孤立方块）。

线性变换不改变系统的能控性

- 对线性系统做非奇异线性变换（就是坐标变换），状态空间的原点不变，状态空间某一点在变换前后分别是x和$\hat{x}$；
- 如果存在 u(t)在有限时间内把x转移到原点，那么使用相同的u(t)也可以在有限时间内把$\hat{x}$转移到原点；
- **所以，非奇异线性变换不改变系统的能控性。**

两点说明：

对于初始状态，定义中指的是状态空间中的任意坐标点。若初始状态特指是坐标原点，控制的目标是状态空间中的任一终端状态，常称系统是状态能达的。

要注意的是，对于连续定常系统，系统的能控性和能达性是等价的，就是说，能控的系统一定是能达的，能达的系统一定是能控的，因为，连续系统的状态转移矩阵是非奇异的。

三、输出能控性

前提：在实际的控制系统设计中，需要控制的是输出，而不是系统的状态。因此，就需要研究输出的能控性。

定义：考虑下列状态空间表达式所描述的线性定常系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

如果能找到一个无约束的控制向量u(t)，在有限的时间间隔$t_o \leqslant t \leqslant t_f$内，把任一初始输出$y(t_o)$转移到任意最终输出$y(t_f)$，那么称系统为输出能控的。

不失一般性，一般选终端输出为0

输出能控性判据：系统输出能控的充要条件是输出能控性判别矩阵：

$$S=[\,CB \vdots CAB \vdots CA^2B \vdots \cdots \vdots CA^{n-1}B \vdots D\,]$$

的秩为m。其中m为输出维数。

证明：略（课后练习。）

提示：按照状态能控性判据一定理1的思路，**用C－H定理**

已知：线性定常非齐次状态方程的解为：

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

所以：$$y(t_f)=Cx(t_f)=C\Phi(t_f-t_0)x(t_0)+C\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_f-\tau)Bu(\tau)d\tau=0$$

证明关键：如何由上式得出u(t)关于$x(t_0)$的非齐次方程组。

例4.2.9 判断下列系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

是否具有状态能控性和输出能控性。

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

秩为1，小于状态维数，所以此系统不是状态能控的。

$$\begin{bmatrix} CB & CAB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

秩为1，等于输出变量的个数，因此系统是输出能控的。

说明：**状态能控性和输出能控性是两个完全不同的概念，没有必然联系。某系统状态不完全能控，输出有可能完全能控。**

[例]：判断下列系统的状态能控性与输出能控性

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u,\qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

说明：状态能控性和输出能控性是两个完全不同的概念，没有必然联系。某系统状态不完全能控，输出有可能完全能控。

[例]：判断下列系统的状态能控性与输出能控性

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

[解]： 1、状态能控性判断：

$$rank Q_c = rank \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

秩小于2，所以状态不完全能控。

2、输出能控性判断：

$$rank S = rank \begin{bmatrix} CB & CAB & D \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

秩等于输出维数1，所以输出能控。

[本节小结]:

1、线性定常系统状态能控性的概念

2、线性定常系统的状态能控性判据

判据1：能控性判别矩阵法，能控性判别阵满秩

判据2：标准型法（对角线标准型、约当标准型）

判据3：S平面分析法，传递函数无零极点相约

3、输出能控性定义及判据