2.3

控制系统的时域分析

什么是时域分析?

指控制系统在一定的输入下，根据输出量的时域表达式，分析系统的稳定性、瞬态和稳态性能。

由于时域分析是直接在时间域中对系统进行分析的方法，所以时域分析具有直观和准确的优点。

系统输出量的时域表示可由微分方程得到，也可由传递函数得到。

在初值为零时，一般都利用传递函数进行研究，用传递函数间接的评价系统的性能指标。具体是根据闭环系统传递函数的极点和零点来分析系统的性能。此时也称为复频域分析。

自动控制系统的时域指标

自动控制系统的典型输入信号

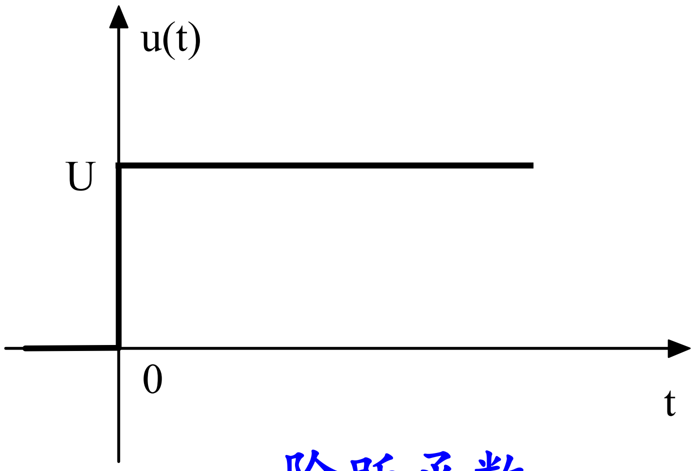
选取测试信号时必须考虑的原则：

- 选取的输入信号的典型形式应反映系统工作时的大部分实际情况。
- 选取外加输入信号的形式应尽可能简单，易于在实验室获得，以便于数学分析和实验研究。
- 应选取那些能使系统工作在最不利情况下的输入信号作为典型的测试信号。

典型输入函数

1、阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases} U & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



阶跃函数

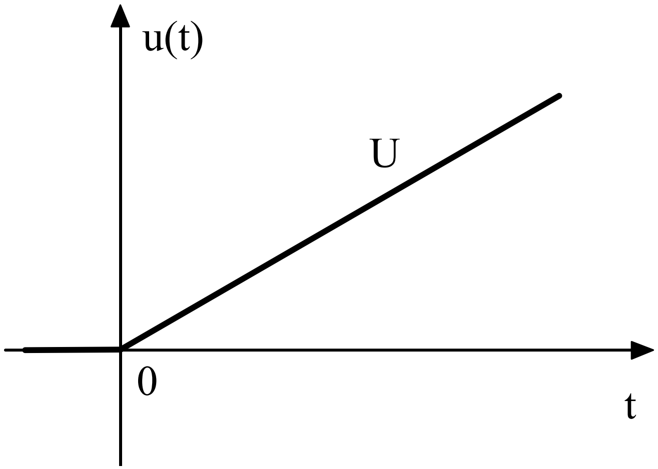
U=1的函数称为单位阶跃函数，记作1(t)。

$$u(t)=U\cdot 1(t)$$

零初始条件下的拉氏变换象函数为 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{U}{s}$

2、斜坡函数

$$u(t)=\begin{cases} Ut & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



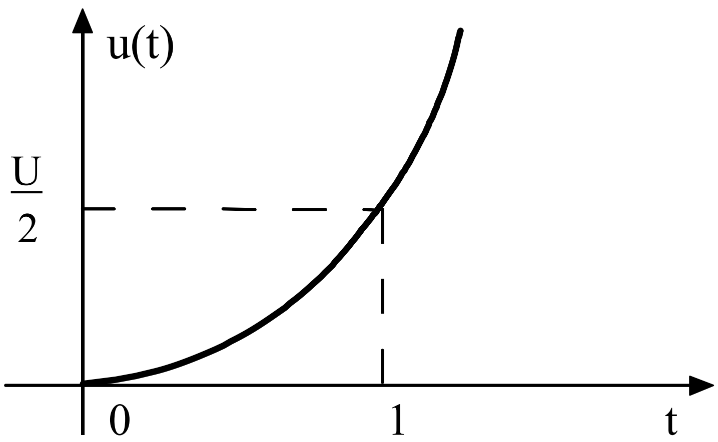
斜坡函数

$$u(t)=Ut\cdot 1(t)$$

零初始条件下的拉氏变换为 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{U}{s^2}$

3、抛物线函数

$$u(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}Ut^2 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



抛物线函数

$$u(t)=\tfrac{1}{2}Ut^2\cdot 1(t)$$

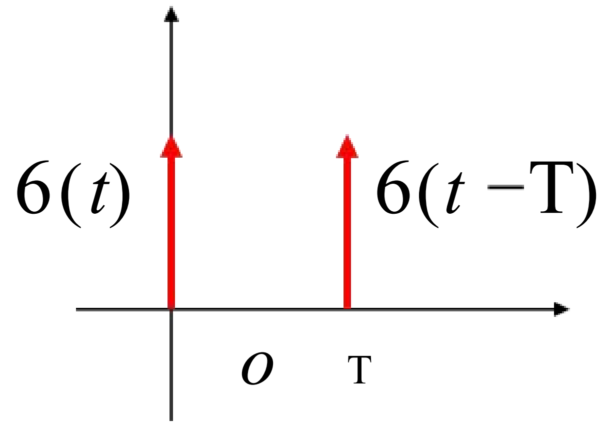
零初始条件下的拉氏变换为 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{U}{s^3}$

4. 脉冲函数

理想单位脉冲函数

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$



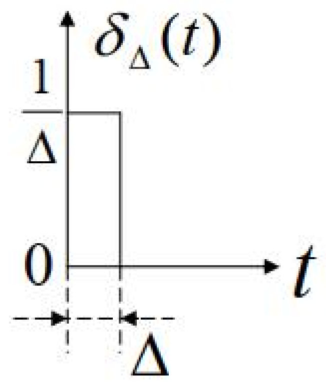
其拉氏变换后的像函数为： $L[\delta(t)]=1$

出现在 $t=\tau$ 时刻，积分面积为U的理想脉冲函数定义如下：

$$A\delta(t-\tau)=\begin{cases}0, t\neq\tau\\ \infty, t=\tau\end{cases} \quad 且 \quad \int_{-\infty}^{\infty}A\delta(t-\tau)dt=A$$

实际单位脉冲函数：

$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}0, & t<0 \text{ 和 } t>\Delta \\ \frac{1}{\Delta}, & 0<t<\Delta\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\Delta(t)dt=\Delta\times\frac{1}{\Delta}=1$$

当 $\Delta\to 0$ 时，$\delta_\Delta(t)=\delta(t)$

$$\begin{cases}u(t)=U\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0 \\ 0, & t\neq 0\end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}u(t)dt=U\end{cases}$$

冲激函数的拉氏变换象函数为U。

5、正弦函数 $u(t) = A\sin\omega t$

拉氏变换象函数为 $\dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

分析系统特性究竟采用何种典型输入信号，取决于实际系统在正常工作情况下最常见的输入信号形式。

当系统的输入具有突变性质时，如指令的突然转换、电源的突然接通、负荷的突变等均可选择阶跃函数为输入信号；

当系统的输入是随时间线性增长变化时，可选择斜坡函数为典型输入信号。

当考虑海浪对舰艇的扰动、电源及机械噪声等均可近似为正弦输入。

时域分析以线性定常微分方程的解来讨论系统的特性和性能指标。设微分方程如下：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \ldots + b_0 x(t)$$

式中， **$x(t)$**为输入信号， **$y(t)$**为输出信号。

我们知道，微分方程的解可以表示为$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

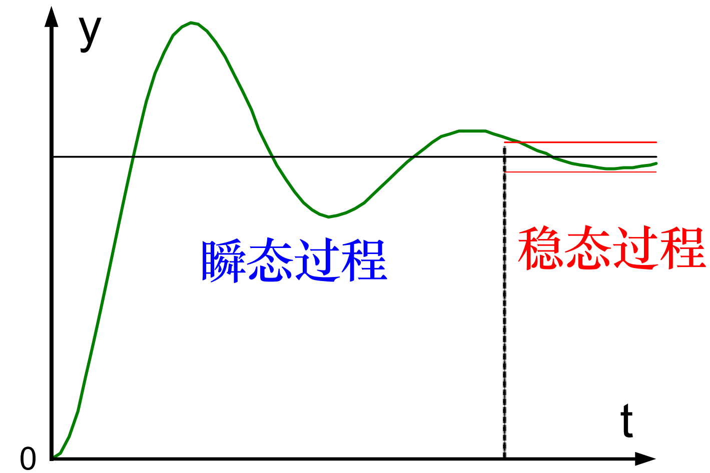
其中,$y_h(t)$ 为对应的齐次方程的通解，只与微分方程(系统本身的特性或系统的特征方程的根)有关。对于稳定的系统，当时间趋于无穷大时，通解趋于零。所以根据通解或特征方程的根可以分析系统的稳定性。

$y_p(t)$为特解，与微分方程和输入有关。一般来说，当时间趋于无穷大时特解趋于一个稳态的函数。

对于稳定的系统，对于一个有界的输入，当时间趋于无穷大时，微分方程的全解将趋于一个稳态的函数，使系统达到一个新的平衡状态。工程上称为进入稳态过程。

系统达到稳态过程之前的过程称为瞬态过程。瞬态分析是分析瞬态过程中输出响应的各种运动特性。理论上说，只有当时间趋于无穷大时，才进入稳态过程，但这在工程上显然是无法进行的。在工程上只讨论输入作用加入一段时间里的瞬态过程，在这段时间里，反映了主要的瞬态性能指标。

如某系统的单位阶跃响应曲线如图所示：

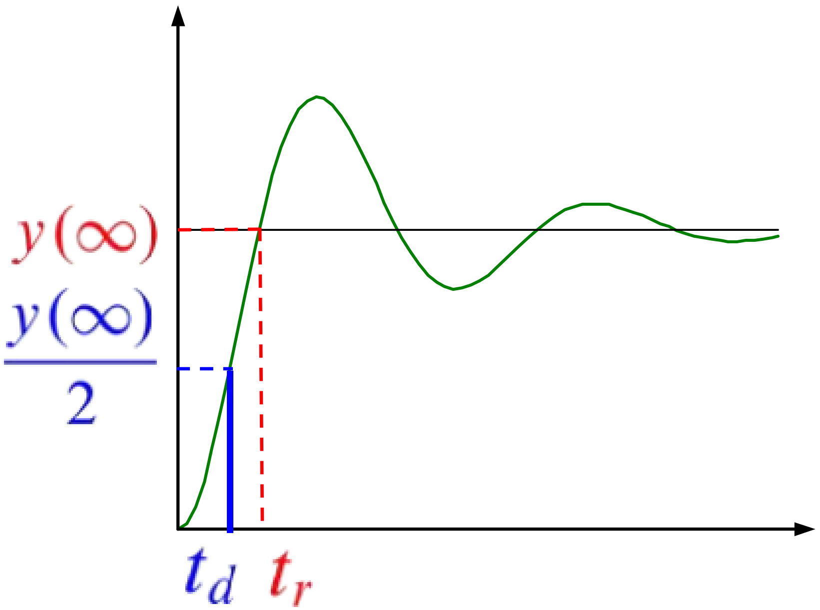


瞬态过程的性能指标

通常以阶跃响应来衡量系统控制性能的优劣和定义瞬态过程的时域性能指标。稳定的随动系统(不计扰动)的单位阶跃响应函数有衰减振荡和单调变化两种。

(一)衰减振荡：

具有衰减振荡的瞬态过程如图所示：



1. 延迟时间 t_d ：

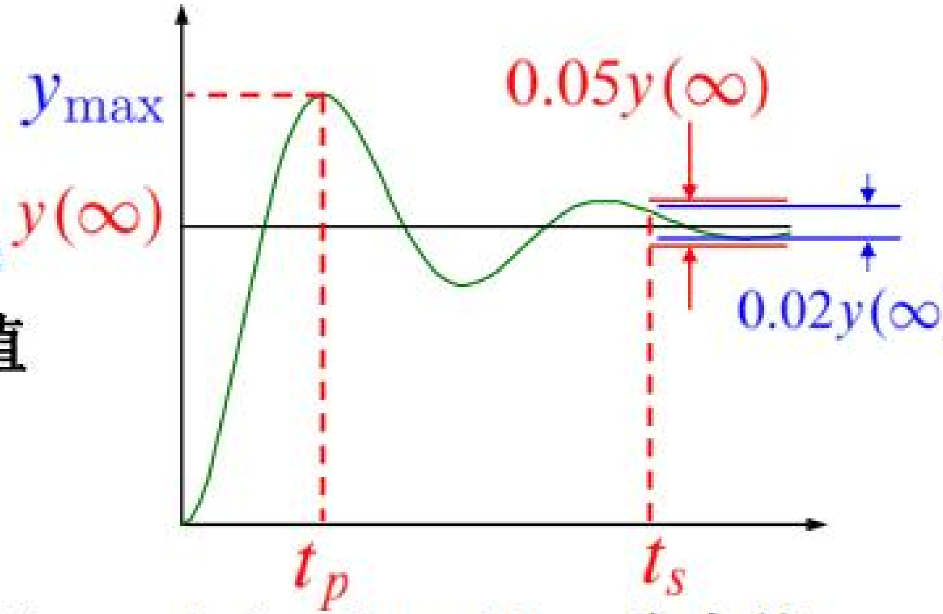
输出响应第一次达到稳态值的50%所需的时间。

2. 上升时间 t_r ：

输出响应第一次达到稳态值$y(\infty)$所需的时间。或指由稳态值的10%上升到稳态值的90%所需的时间。

3. 峰值时间 t_p ：

输出响应超过稳态值达到第一个峰值y_{max}所需要的时间。



4. 最大超调量(简称超调量) $\delta\%$:

瞬态过程中输出响应的最大值超过稳态值的百分数。

$$\delta\% = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

式中：y_{max} —输出响应的最大值； $y(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} y(t)$—稳态值；

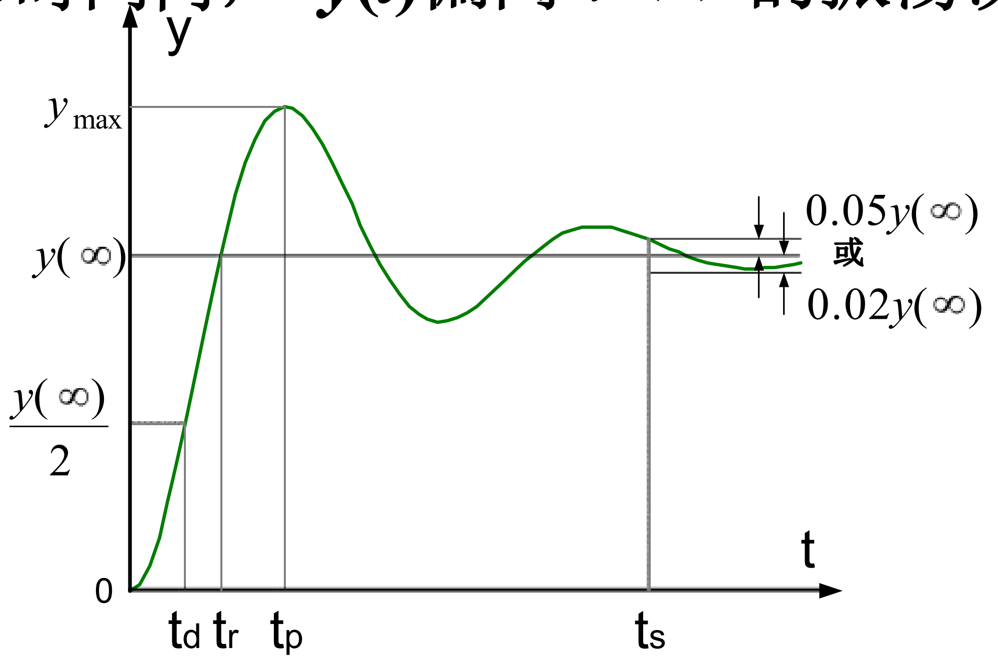
5. 调节时间或过渡过程时间 t_s ：

当$y(t)$和$y(\infty)$之间的误差达到规定的范围之内［一般取 $y(\infty)$ 的±5%或±2%，称允许误差范围，用Δ表示］且以后不再超出此范围的最小时间。即当 $t \geq t_s$,有：

$$|y(t) - y(\infty)| \leq y(\infty) \times \Delta\% \qquad (\Delta = 2或5)$$

6. 振荡次数N：

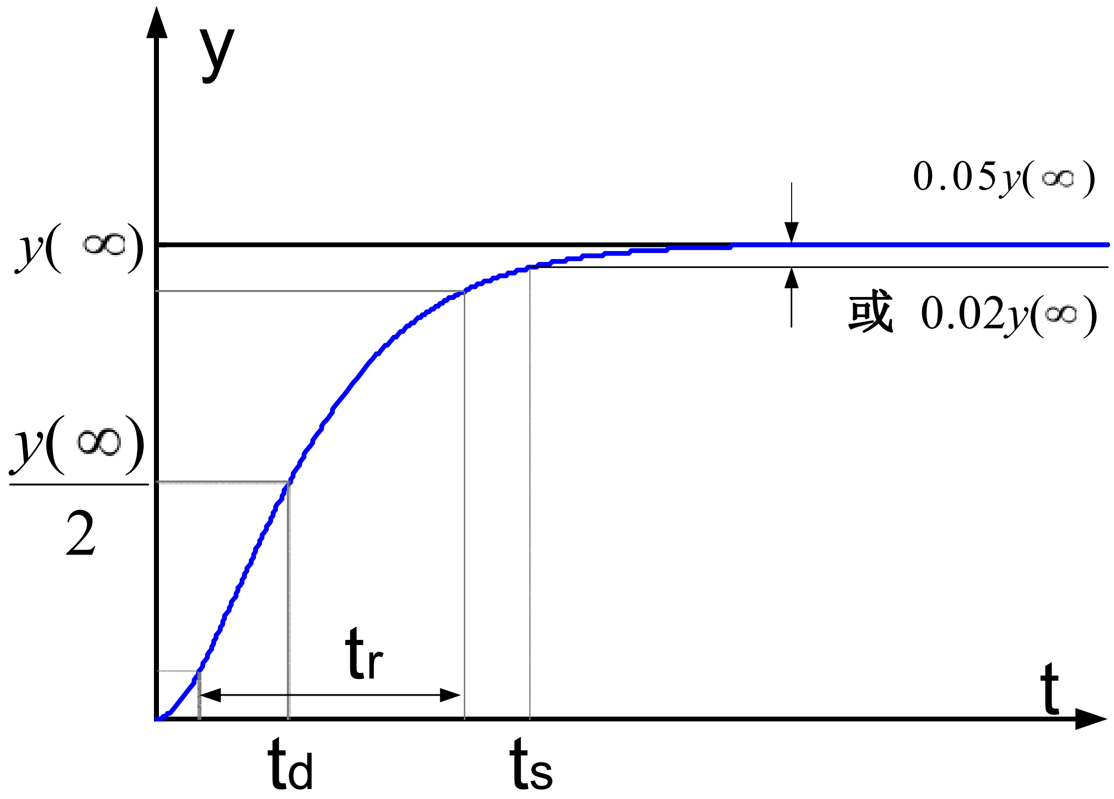
在调节时间内， $y(t)$偏离 $y(\infty)$ 的振荡次数。



在上述几种性能指标中，t_p, t_r, t_s表示瞬态过程进行的快慢，是快速性指标；而$\delta\%, N$ 反映瞬态过程的振荡程度，是振荡性指标。其中$\delta\%$和 t_s 是两种最常用的性能指标。

（二）单调变化

单调变化响应曲线如图所示：



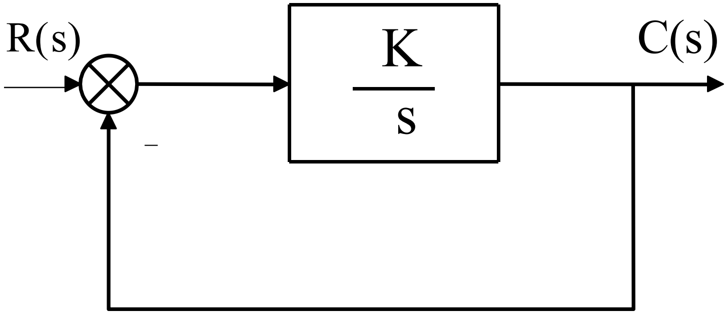
这种系统就无需采用峰值时间和最大超调量这两个指标。此时最常用的是**调节时间**这一指标来表示瞬态过程的快速性。有时也采用**上升时间**这一指标。

一阶系统的暂态分析

$$T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$$

当$r(t)=1(t)$时，一阶系统的输出$c(t)$称为单位阶跃响应，记作$h(t)$。

T是惯性系统主要参数
K是系统的极点值



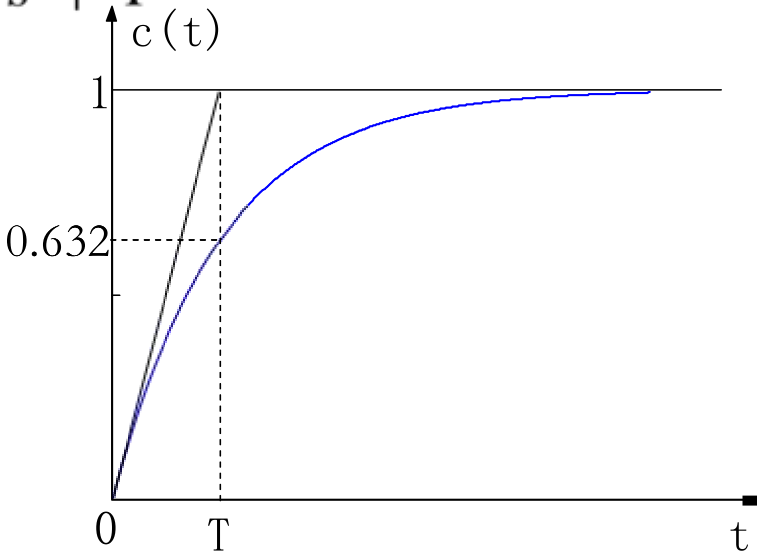
$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K}{s}}{1+\frac{K}{s}}=\frac{K}{s+K}=\frac{1}{Ts+1}$$

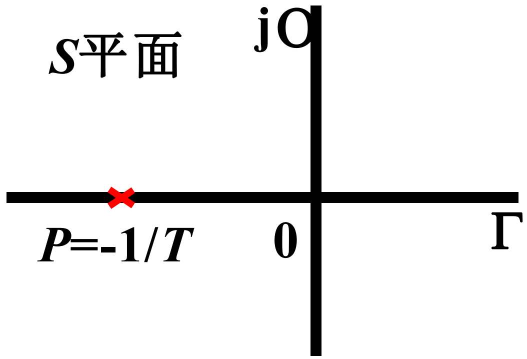
$$C(s)=T(s)R(s)=\frac{1}{s(Ts+1)}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}$$

$$h(t)=c(t)=\mathscr{L}^{-1}[C(s)]$$

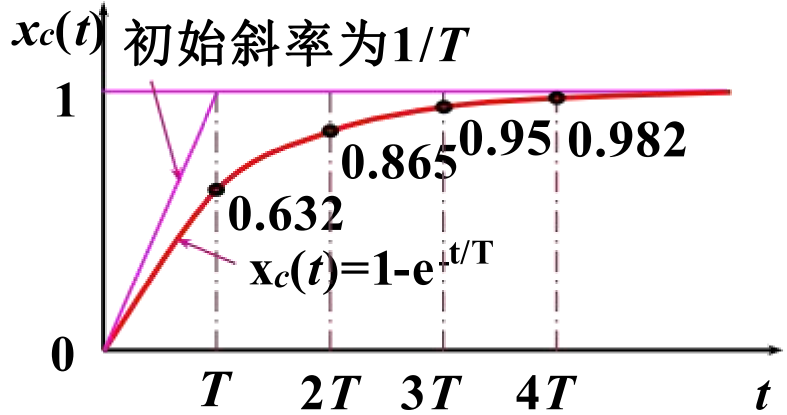
$$=1-e^{-\frac{t}{T}},\ t\geq 0$$

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0}=\frac{1}{T}$$





(*a*) 零极点分布



(*b*) 单位阶跃响应曲线

性能指标：　延迟时间：$t_d=0.69T$

上升时间：$t_r=2.20T$

调节时间：$t_s=3T$ (△=0.05) 或 $t_s=4T$ (△=0.02)

特点：

1）可以用时间常数去度量系统的输出量的数值；

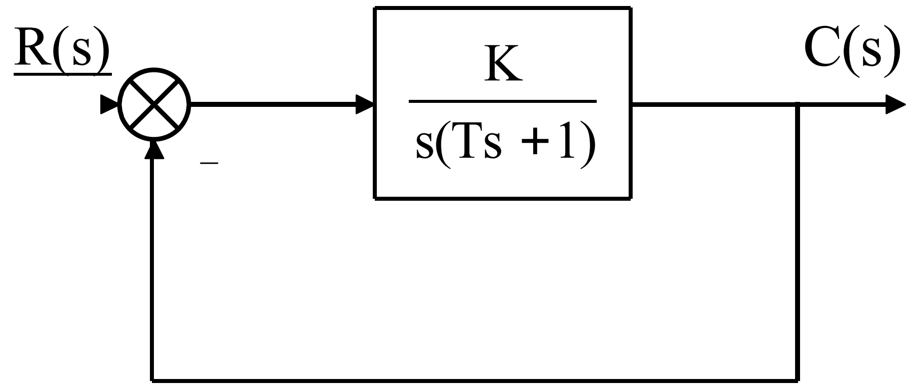
2）初始斜率为1/T；

3）无超调；稳态误差$e_{ss}=0$ 。

二阶系统的暂态分析

一、二阶系统的数学模型

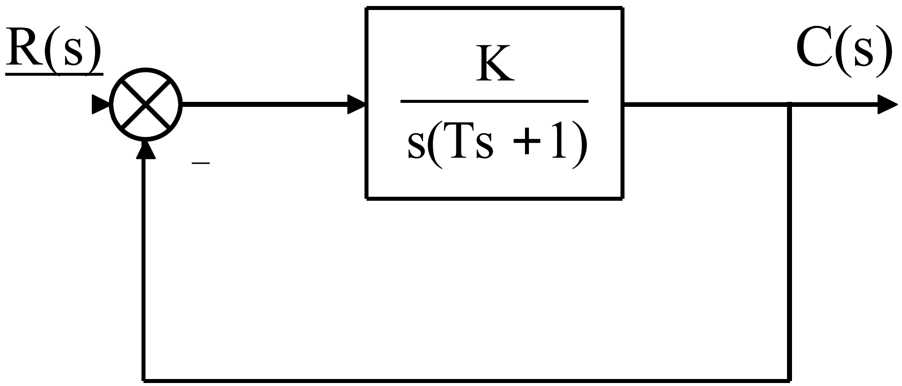
$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$



系统的运动方程

二阶系统的暂态分析

一、二阶系统的数学模型



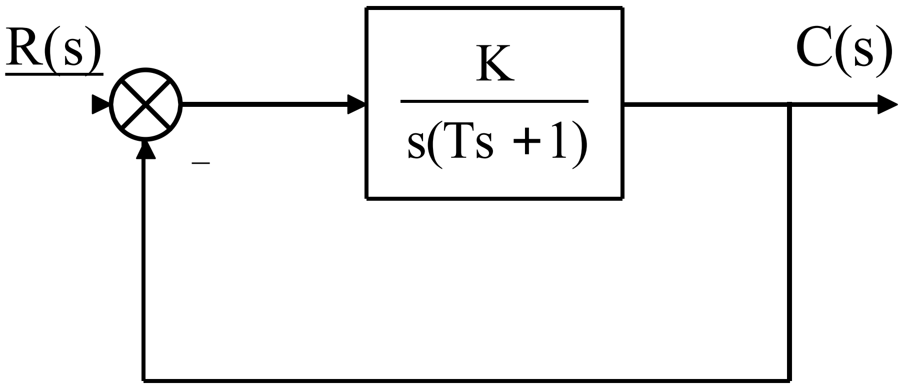
$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$$

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K}{Ts^2+s+K}$$

系统的运动方程

二阶系统的暂态分析

一、二阶系统的数学模型



$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$$

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K}{Ts^2+s+K}$$

系统的运动方程

设 n 阶微分方程为：

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\dot{f}(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

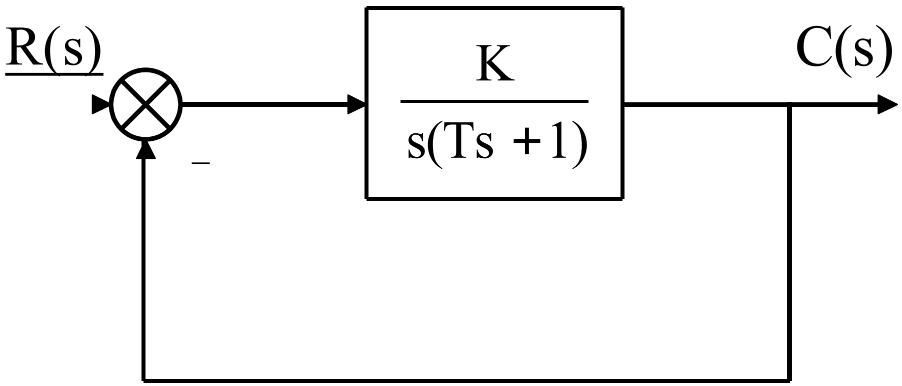
Laplace变换，求传递函数

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

注：可以看出，求出系统的微分方程以后，只要把方程式中的各阶导数用相应的阶次的变量S代替，就很容易求得系统的传递函数。

二阶系统的暂态分析

一、二阶系统的数学模型



$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{Ts^2+s+K}$$

$$= \frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}$$

系统的运动方程

$$T\frac{d^2c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = Kr(t)$$

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2},$$

自然震荡角频率

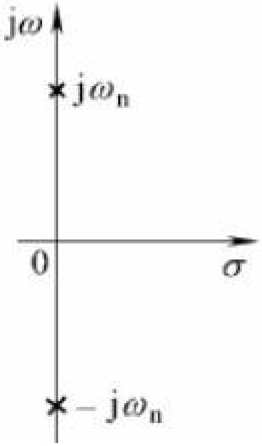
$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{K}{T} \\ 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \\ \zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} \end{cases}$$

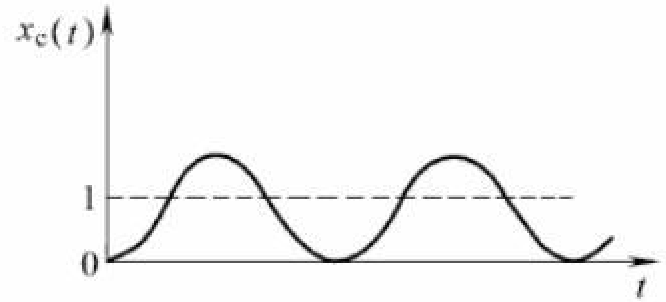
二、二阶系统的阶跃响应与时域性能指标

$$C(s) = T(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \qquad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

1、无阻尼的情形($\zeta = 0$)





$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t, \quad t \geq 0$$

2、欠阻尼情形$(0<\zeta<1)$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$A=\left.\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=0}=1$$

$$-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-\zeta\omega_n B+C+j\omega_n B\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$B=-1,C=-2\zeta\omega_n$$

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}$$

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t+\zeta\sin\omega_d t\right)$$

令 $\sin\theta=\sqrt{1-\zeta^2}$ $\left(\cos\theta=\zeta \quad \theta=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\left(\sin\theta\cos\omega_d t+\cos\theta\sin\omega_d t\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta)$$

(1) 上升时间 系统的输出第一次达到稳态值的时间。

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

令t=t_r 时, $c(t)$=1，得
$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$$

$$\sin(\omega_d t_r + \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_d t_r + \theta = \pi$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

结论：

当ω_n一定时，阻尼比ξ越大，则上升时间 t_r越长；

当ξ一定时，ω_n越大，则t_r越短，系统响应越快。

(2) 峰值时间t_p

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta)$$

☞单位阶跃响应超过稳态值达到第一个峰值所需要的时间。

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=t_p}=0$$

$$\frac{\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t_p+\theta)-\omega_d\frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t_p+\theta)=0$$

$$\sin(\omega_d t_p+\theta)=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\cos(\omega_d t_p+\theta)$$

$$\tan(\omega_d t_p+\theta)=\tan\theta,\quad \omega_d t_p=n\pi,\quad t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(3) 超调量 δ % $c_{\max} = c(t_p),\ c(\infty) = 1$

$$\delta\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin(\pi+\theta) \times 100\%$$

$$\delta\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

(4) 调节时间t_s

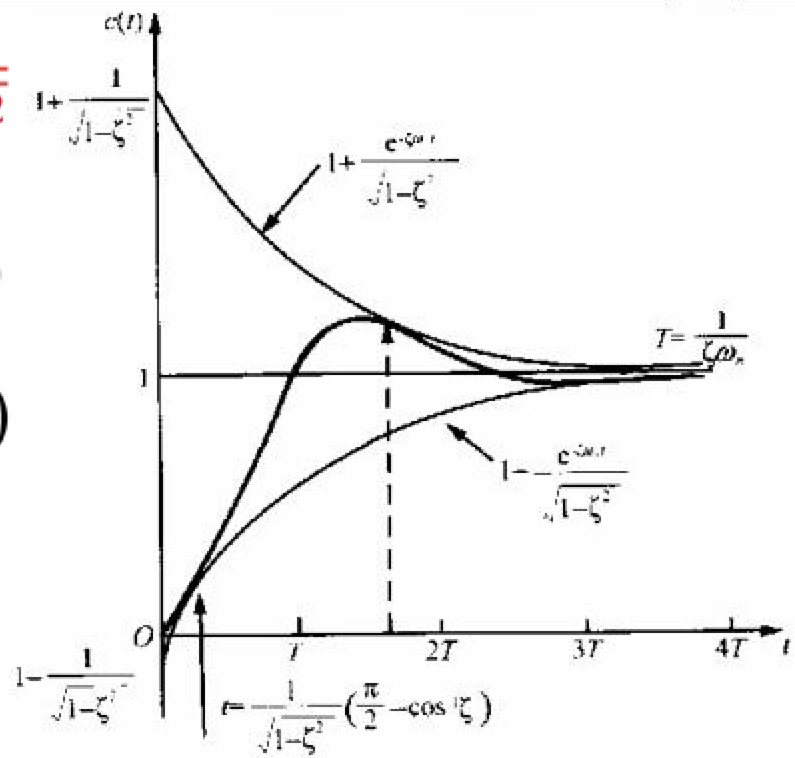
系统的输出与稳态值之间的偏差达到允许范围(一般取5%~2%）而不再超出的暂态过程时间。

$$|c(t) - c(\infty)| \le \Delta \times c(\infty) \quad (t \ge t_s)$$

$$|c(t) - c(\infty)| = \left| \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta) \right| \le \Delta$$

通常由响应曲线的一对包络线近似计算。 $c(t)$在整个瞬态响应过程中总包络在这对曲线内，同时包络线对称于稳态分量。

包络线方程为: $h(t) = 1 \pm \dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$



代入 $|c(t) - c(\infty)| \le \Delta \cdot c(\infty)$

$$|h(t) - c(\infty)| \le \Delta \cdot c(\infty)$$

有

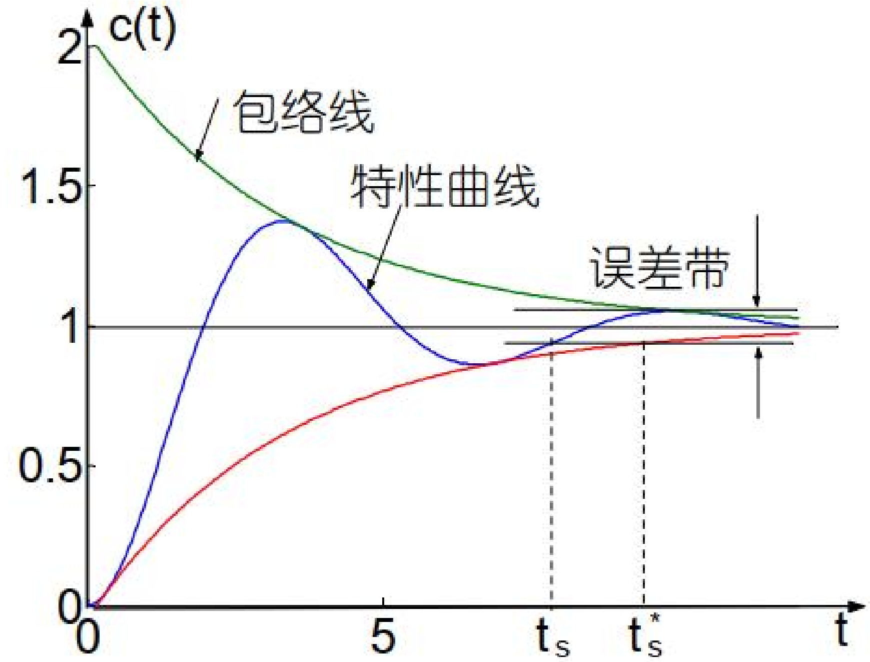
$$\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s'}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right| = \Delta \quad (\Delta = 0.05, 0.02)$$

$$t_s \approx t_s' = \frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

当ξ较小时，可取$\sqrt{1-\zeta^2}=1$

$$\Delta = 0.05 \quad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\Delta = 0.02 \quad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$



(5) 振荡次数N 在调节时间内，输出量波动的次数。

$$N = \frac{t_s}{t_f}$$

$$t_f = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$ 为阻尼振荡的周期时间。

(6) 延迟时间t_d

指输出响应第一次达到稳态值的50%所需时间。

$$c(t_d) = 0.5 \qquad 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_d}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_d + \theta) = 0.5$$

$$t_d = \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n} \quad (0 < \zeta < 1)$$

3、临界阻尼情形($\zeta = 1$)

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), \quad t \geq 0$$

4、过阻尼情形($\zeta > 1$)

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s[s+(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n][s+(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n]}$$

$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}+\frac{C}{s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$A=\left.\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=0}=1$$

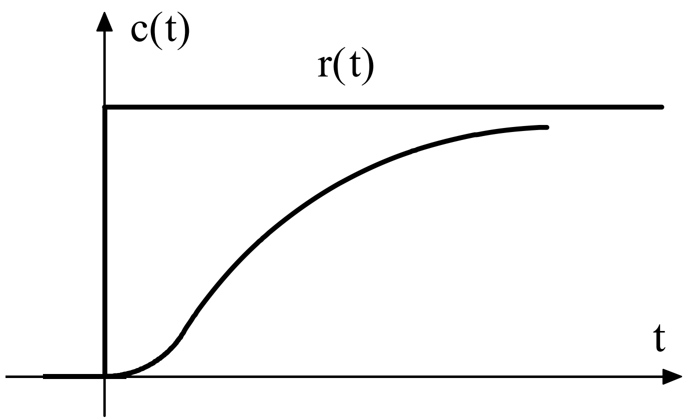
$$B=\left.\frac{\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\right|_{s=-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}=-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$$

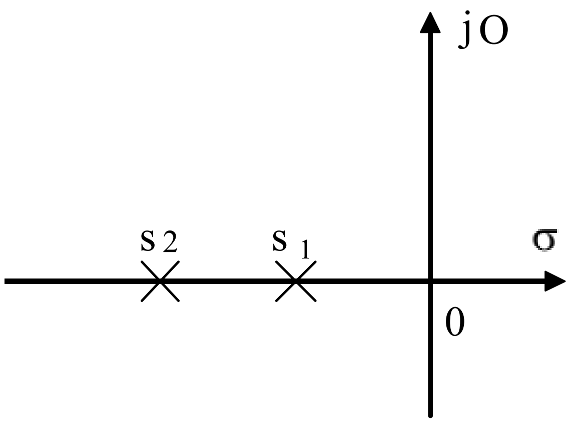
$$C=\left.\frac{\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\right|_{s=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}$$

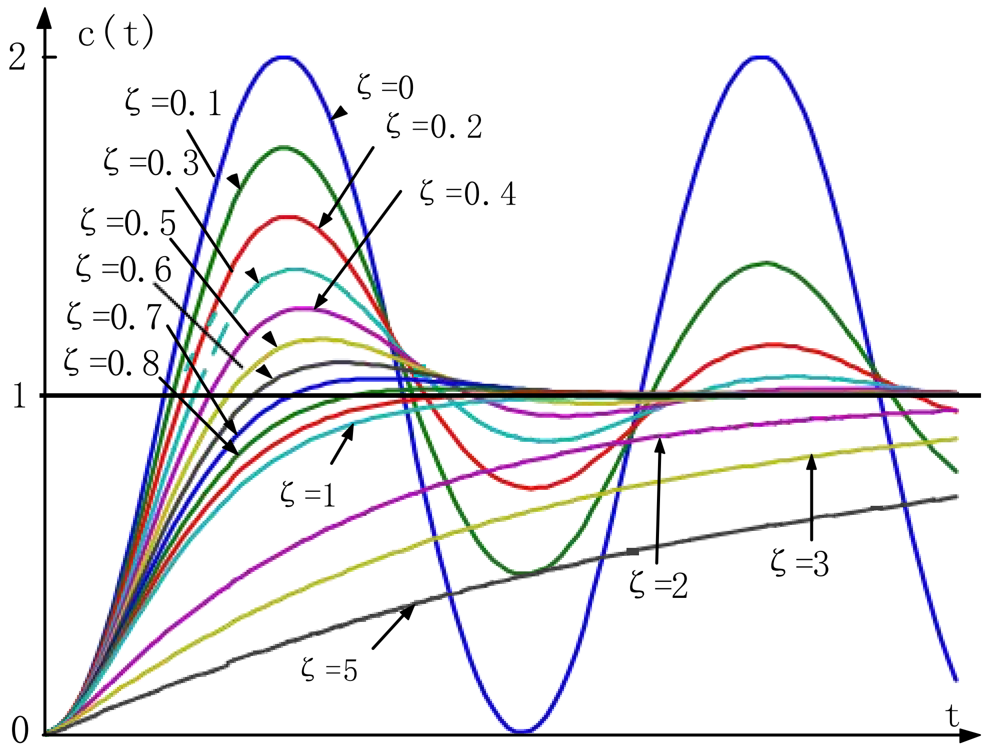
$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{1}{(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}-\frac{1}{(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\right)$$

$$c(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}-\frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}\right](t\geq 0)$$

结论：后一项的衰减指数远比前一项大得多。这时，二阶系统的暂态响应就类似于一阶系统的响应。



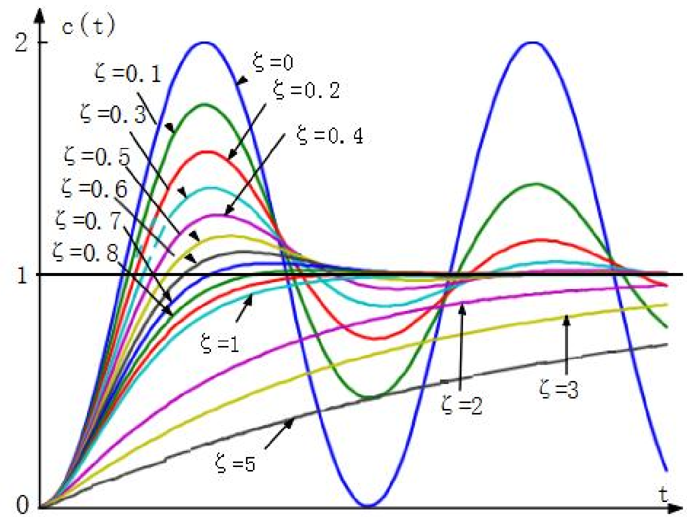



c(t)
2
1
0
t
ζ=0
ζ=0.1
ζ=0.2
ζ=0.3
ζ=0.4
ζ=0.5
ζ=0.6
ζ=0.7
ζ=0.8
ζ=1
ζ=2
ζ=3
ζ=5

二阶系统特征参数与暂态性能指标的关系

1.阻尼比ζ是二阶系统的一个重要参量，由ζ值的大小可以间接判断一个二阶系统的暂态品质。在过阻尼(ζ>1)情况下，暂态特性为单调变化曲线，没有超调和振荡，但调节时间较长，系统反应迟缓。当ζ≤0，输出量作等幅振荡或发散振荡，系统不能稳定工作。

2.一般情况下，系统在欠阻尼(
工作。但是ζ过小，则超调量大
节时间长，暂态特性品质差。应
量只与阻尼比这一特征参数有关
根据允许的超调量来选择阻尼比



二阶系统特征参数与暂

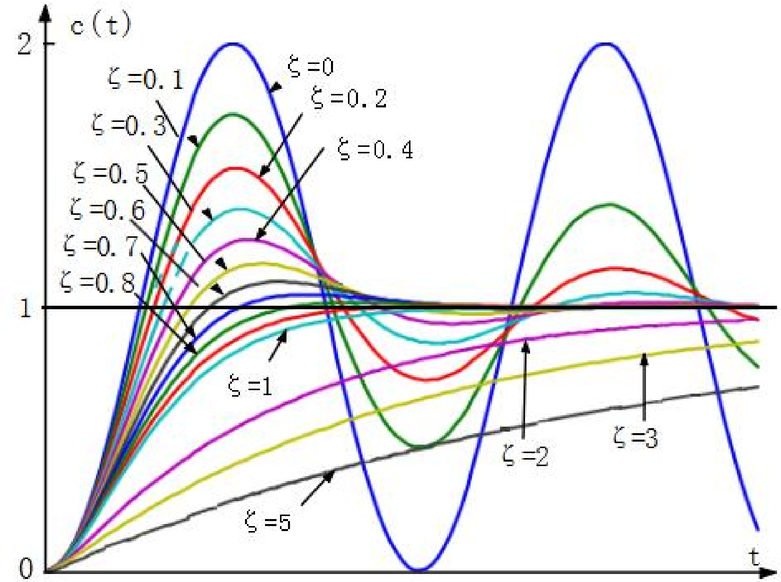
1.阻尼比ξ是二阶系统的一

可以间接判断一个二阶系统

(ξ>1)情况下，暂态特性为

和振荡，但调节时间较长，

输出量作等幅振荡或发散振



、

2.一般情况下，系统在欠阻尼(0≤ξ ≤1)情况下工作。但是ξ过小，则超调量大，振荡次数多，调节时间长，暂态特性品质差。应注意到，最大超调量只与阻尼比这一特征参数有关。因此，通常可以根据允许的超调量来选择阻尼比ξ。

3.调节时间与系统阻尼比和自然振荡角频率这两个特征参数的乘积成反比。在阻尼比ξ一定时，可以通过改变自然振荡角频率 ω_n 来改变暂态响应的持续时间。ω_n越大，系统的调节时间越短。

4.为了限制超调量，并使调节时间较短，阻尼比一般应在0.4~0.8之间，这时阶跃响应的超调量将在1.5%~25%之间。ξ=0.707，调节时间最短，快速性最好，而超调量 δ%<5%，平稳性也好，故称 ξ=0.707为最佳阻尼比。

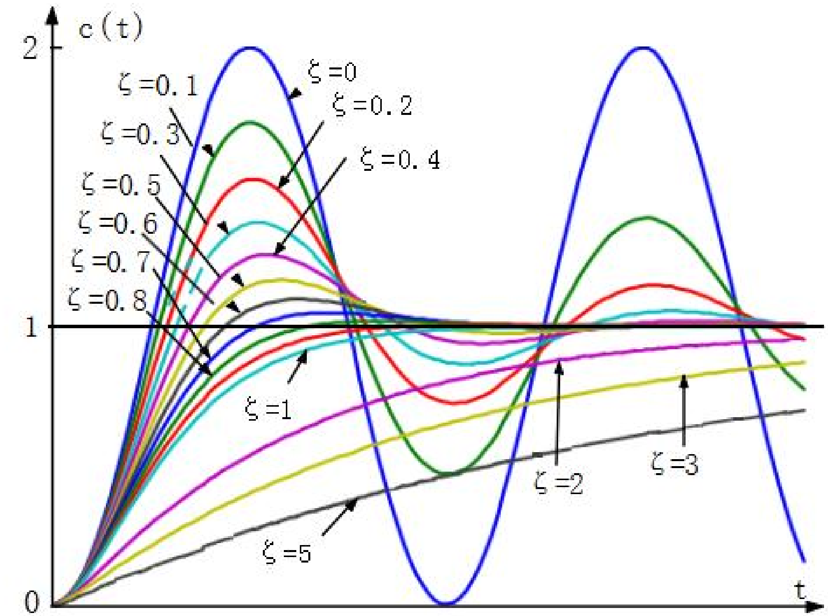
3.调节时间与系统阻尼

特征参数的乘积成反比

通过改变自然振荡角频率

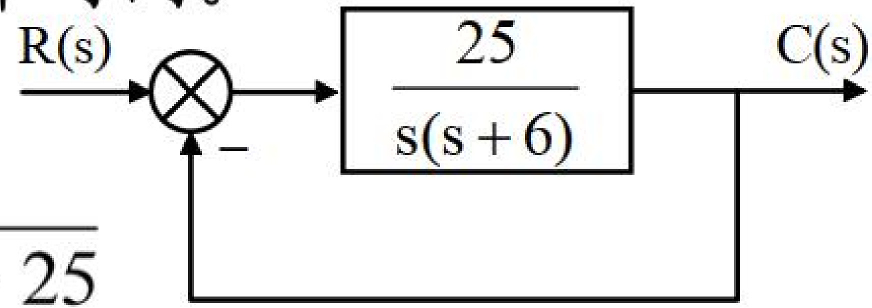
时间。 ω_n越大，系统的

4.为了限制超调量，并使



般应在0.4~0.8之间，这时阶跃响应的超调量将在1.5%~25%之间。$\zeta=0.707$，调节时间最短，快速性最好，而超调量$\delta\%<5\%$，平稳性也好，故称 $\zeta=0.707$为最佳阻尼比。

例3—1　已知二阶系统的动态结构图如图所示。当输入量为单位阶跃函数时，试计算系统响应的上升时间、峰值时间、 超调量和调节时间。



解：　系统的闭环传递函数为

$$T(s)=\frac{\frac{25}{s(s+6)}}{1+\frac{25}{s(s+6)}}=\frac{25}{s^2+6s+25}$$

$$\omega_n^2=25,2\zeta\omega_n=6 \quad \text{解得} \quad \omega_n=5,\zeta=0.6$$

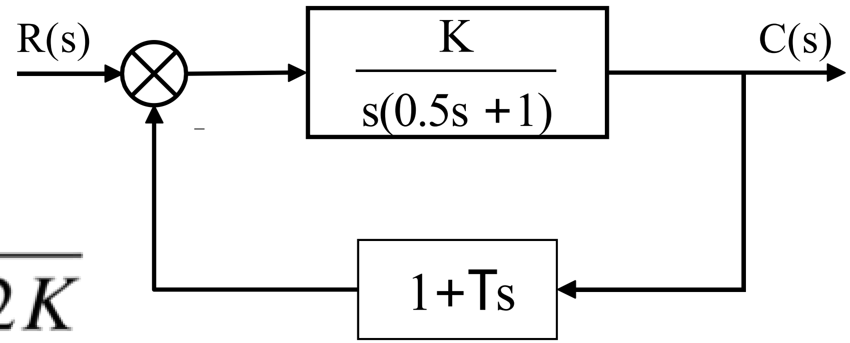
$$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}=\frac{\pi-\arccos\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}=\frac{\pi-0.927}{4}=0.55(s)$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}=\frac{\pi}{4}=0.79(s)$$

$$\sigma\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=e^{-\frac{0.6\pi}{\sqrt{1-0.6^2}}}\times100\%=9.49\%$$

$$t_s\approx\frac{3}{\zeta\omega_n}=\frac{3}{0.6\times5}=1(s)\quad(\Delta=0.05)$$

例3—2　图示系统单位阶跃函数输入时，① 若要求 $\sigma\% = 10\%, t_p = 0.7(s)$ 试确定系统参数K和τ，并计算上升时间和调节时间；② 由①条件所确定的K值不变，τ取 0 时，系统的超调量又是多少？自然振荡角频率是否改变？



解：$$G(s)H(s) = \frac{K(1+\tau s)}{s(0.5s+1)}$$

$$T(s) = \frac{2K}{s^2 + 2(1+K\tau)s + 2K}$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.1 \qquad \zeta = \sqrt{\frac{(\ln 0.1)^2}{\pi^2 + (\ln 0.1)^2}} = 0.59$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} = 0.7(s)$$

$$\omega_d = \frac{\pi}{t_p} = \frac{\pi}{0.7} = 4.49(rad/s)$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{0.7\sqrt{1-0.59^2}} = 5.59(rad/s)$$

$$K = \frac{\omega_n^2}{2} = \frac{5.59^2}{2} = 15.6$$

$$\tau = \frac{\zeta\omega_n - 1}{K} = \frac{0.59\times 5.59-1}{15.6} = 0.15$$

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d} = \frac{\pi-\arccos 0.59}{4.49} = 0.49(s)$$

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{0.59\times 5.59} = 1.10(s) \quad (\Delta = 0.05)$$

② K值不变τ为0时 $T(s) = \frac{2K}{s^2+2s+2K}$

$$\omega_n = \sqrt{2K} = \sqrt{2\times 15.6} = 5.59$$

$$\zeta = \frac{2}{2\omega_n} = 0.18 \qquad \sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\% = 17.6\%$$

可见， K值不变τ为0时，ω_n 不变，但ξ小了，超调量增大了7.6%。引入微分负反馈可以增大阻尼比，降低超调量，不改变自然振荡角频率。

例3—3　图3.1是具有反馈系数为α的负反馈二阶控制系统。单位阶跃响应特性如图3.2所示，试确定系统参数K,T和α。

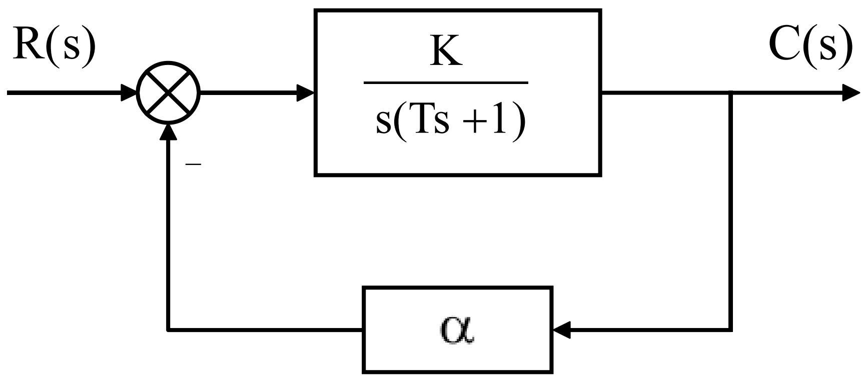


图3.1 反馈系数为α 的二阶系统

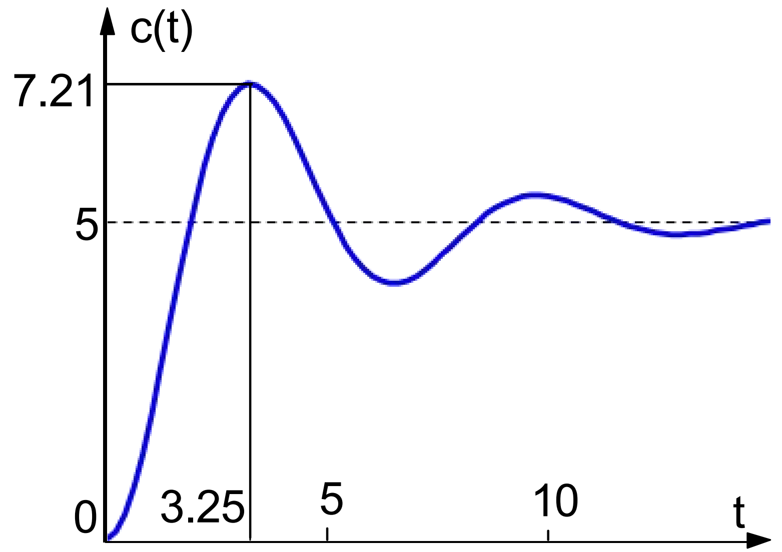


图3.2 单位阶跃响应曲线

解：系统闭环传递函数 $T(s)=\dfrac{K}{(Ts^2+s+\alpha K)}$

$$\lim_{t\to\infty} c(t)=\lim_{s\to 0} sC(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{K}{s(Ts^2+s+\alpha K)}=\frac{1}{\alpha}=5$$

得 $\alpha=0.2$

$$\sigma\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%=\frac{7.21-5}{5}=44.2\%\Rightarrow\zeta=0.252$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}=3.25(s)\Rightarrow\omega_n=1(rad/s)$$

$$2\zeta\omega_n=\frac{1}{T},\omega_n^2=\frac{\alpha K}{T}\Rightarrow T=1.98,K=9.9$$