状态空间模式的数学模型的建立　　（前一章讨论的内容）

系统数学模型的分析　　（接下来三章的内容）

揭示系统状态的运动规律和基本特性

定量分析

确定系统由外部激励作用所引起的响应

状态方程的求解问题

运动规律的精确结果

状态空间模式的数学模型的建立　　（前一章讨论的内容）

系统数学模型的分析　　（接下来三章的内容）

揭示系统状态的运动规律和基本特性

定量分析

确定系统由外部激励作用所引起的响应

状态方程的求解问题

运动规律的精确结果

定性分析

决定系统行为的关键性质

能控性、能观测性

稳定性

3.1 线性定常(时不变)(LTI)系统齐次状态方程的解

齐次状态方程：$\dot{x}(t) = Ax(t)$　　　　控制输入为零

(1) 若A为标量，有：$\dot{x}(t) = ax(t)$

设初始时刻 $t_0=0$, 则

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}\, x(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(at)^n}{n!} x(0)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

可有多种方法来得到这个状态(微分)方程的解：

- ✓积分法
- ✓逐次逼近法
- ✓幂级数法

积分法求解齐次状态方程：

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = a\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{x(\tau)} = \int_0^t a\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow \int_0^{x(t)} \frac{1}{x(\tau)}\mathrm{d}x(\tau) = \int_0^t a\,\mathrm{d}\tau$$

$$\ln x(t) - \ln x(0) = a(t-0) \Rightarrow \ln\frac{x(t)}{x(0)} = at$$

$$\frac{x(t)}{x(0)} = \mathrm{e}^{at}$$

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{at}\,x(0) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(at)^n}{n!}x(0)}$$

逐次逼近法求解齐次状态方程：

$\dot{x}(t) = ax(t)$　　假设 $\boxed{x(t) = x(0)}$ 代入方程右端

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(0) \Longrightarrow \int_0^t \mathrm{d}x(\tau) = \int_0^t ax(0)\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - x(0) = ax(0)(t-0)$$

$$\boxed{x(t) = (1+at)x(0)}$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$ 将 $\boxed{x(t) = (1 + at)x(0)}$ 代入方程右端

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a(1 + at)x(0) \Longrightarrow \int_0^t \mathrm{d}x(\tau) = \int_0^t a(1 + at)x(0)\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - x(0) = a(t + \frac{1}{2}at^2)x(0)$$

$$\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2)x(0)}$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$ 将 $\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2)x(0)}$ 代入方程右端

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a(1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2)x(0)$$

$$\int_0^t \mathrm{d}x(\tau) = \int_0^t a(1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2)x(0)\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - x(0) = a(t + \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{3\times 2}a^2t^3)x(0)$$

$$\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3)x(0)}$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$　如此逐步将所得解代入方程，在第k步将有

$$\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k)x(0)}$$

无穷次进行下去，有

$$\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots)x(0)}$$

此级数收敛，即

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}a^kt^kx(0) = \mathrm{e}^{at}x(0)}$$