第 3 章　状态方程的解

3.1 线性定常系统齐次状态方程的解

3.2 矩阵指数

3.3 线性定常连续系统非齐次状态方程的解

3.4 线性定常系统的状态转移矩阵

3.5 线性时变系统状态方程的解

状态空间模式的数学模型的建立　　　（前一章讨论的内容）

系统数学模型的分析　　　　　　　　（接下来三章的内容）

揭示系统状态的运动规律和基本特性

定量分析

确定系统由外部激励作用所引起的响应

状态方程的求解问题

运动规律的精确结果

状态空间模式的数学模型的建立　　　（前一章讨论的内容）

系统数学模型的分析　　　　　　　　（接下来三章的内容）

揭示系统状态的运动规律和基本特性

定量分析

确定系统由外部激励作用所引起的响应

状态方程的求解问题

运动规律的精确结果

定性分析

决定系统行为的关键性质

能控性、能观测性

稳定性

3.1 线性定常(时不变)(LTI)系统齐次状态方程的解

齐次状态方程： $\dot{x}(t)=Ax(t)$　　控制输入为零

(1) 若A为标量，有: $\dot{x}(t)=ax(t)$

设初始时刻 $t_0=0$, 则

$$x(t)=\mathrm{e}^{at}x(0)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(at)^n}{n!}x(0)$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

可有多种方法来得到这个状态(微分)方程的解：

- ✓积分法
- ✓逐次逼近法
- ✓幂级数法

积分法求解齐次状态方程：

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = a\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{x(\tau)} = \int_0^t a\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow \int_0^{x(t)} \frac{1}{x(\tau)}\mathrm{d}x(\tau) = \int_0^t a\,\mathrm{d}\tau$$

$$\ln x(t) - \ln x(0) = a(t-0) \Rightarrow \ln\frac{x(t)}{x(0)} = at$$

$$\frac{x(t)}{x(0)} = \mathrm{e}^{at}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{at}\, x(0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(at)^n}{n!} x(0) \end{aligned}}$$

逐次逼近法求解齐次状态方程：

$\dot{x}(t) = ax(t)$ 假设 $\boxed{x(t) = x(0)}$ 代入方程右端

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(0) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^t \mathrm{d}x(\tau) = \int_0^t ax(0)\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - x(0) = ax(0)(t-0)$$

$$\boxed{x(t) = (1+at)x(0)}$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$ 将 $\boxed{x(t) = (1 + at)x(0)}$ 代入方程右端

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a(1 + at)x(0) \Longrightarrow \int_0^t \mathrm{d}x(\tau) = \int_0^t a(1 + at)x(0)\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - x(0) = a(t + \frac{1}{2}at^2)x(0)$$

$$\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2)x(0)}$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$ 将 $\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2)x(0)}$ 代入方程右端

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a(1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2)x(0)$$

$$\int_0^t \mathrm{d}x(\tau) = \int_0^t a(1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2)x(0)\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) - x(0) = a(t + \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{3\times 2}a^2t^3)x(0)$$

$$\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3)x(0)}$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$ 如此逐步将所得解代入方程，在第k步将有

$$\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k)x(0)}$$

无穷次进行下去，有

$$\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots)x(0)}$$

此级数收敛，即

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}a^kt^kx(0) = \mathrm{e}^{at}x(0)}$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$ 将此方程的解$x(t)$在$t_0=0$展成幂级数，有

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \cdots + \alpha_k t^k + \cdots$$

代入方程中，有

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + \cdots + k\alpha_k t^{k-1} + \cdots$$

$$= a\alpha_0 + a\alpha_1 t + a\alpha_2 t^2 + a\alpha_3 t^3 + \cdots + a\alpha_k t^k + \cdots$$

对应项的系数相等

$$\alpha_1 = a\alpha_0,\quad \alpha_2 = \frac{a\alpha_1}{2} = \frac{a^2\alpha_0}{2!},\quad \alpha_3 = \frac{a\alpha_2}{3} = \frac{a^3\alpha_0}{3!},\quad \cdots,$$

$$\alpha_k = \frac{a\alpha_{k-1}}{k} = \cdots = \frac{a^k\alpha_0}{k!},\quad \cdots$$

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

由 $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \cdots + \alpha_k t^k + \cdots$

可知 $\alpha_0 = x(0)$ 于是

$$\alpha_1 = ax(0),\quad \alpha_2 = \frac{a^2}{2!}x(0),\quad \alpha_3 = \frac{a^3}{3!}x(0),\quad \cdots,\quad \alpha_k = \frac{a^k}{k!}x(0),\quad \cdots$$

$$\boxed{x(t) = (1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots)x(0)}$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^kt^kx(0) = \mathrm{e}^{at}x(0)}$$

考虑任意初始时刻 t_0

$$x(t) = (1 + a(t-t_0) + \frac{1}{2}a^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}a^3(t-t_0)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!}a^k(t-t_0)^k + \cdots)x(t_0)$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^k(t-t_0)^k x(0) = \mathrm{e}^{a(t-t_0)}x(t_0)}$$

接下来讨论n维系统的相关问题

齐次状态方程：$\dot{x}(t)=Ax(t)$

(2) 若A为方阵，

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k x(0) \\ &= e^{At}x(0) \end{aligned}}$$

验证

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!}x(0) \\ &= A\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k t^k}{k!}x(0) \\ &= Ax(t); \end{aligned}$$

级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(At)^k}{k!}x(t_0)$ 绝对一致收敛。

级数矩阵 $e^{At}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(At)^k}{k!}$ 称为矩阵指数。

结论3.1.1 方程$\dot{x}(t)=Ax(t)$满足初始条件$x(t)|_{t=t_0}=x(t_0)$的解为

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k x(t_0) \\ &= \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x(t_0) \end{aligned}}$$

当$t_0=0$时，有

$$x(t)=\mathrm{e}^{At}x(0)$$

此解是系统输入u=0时的解，故称为零输入解或零输入响应。

例3.1.1 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 求 e^{At}

解：

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\frac{1}{4!}A^4t^4+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-t^2 & 0\\ 0 & -t^2\end{bmatrix}+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0 & -t^3\\ t^3 & 0\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots & t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\\ -\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\right) & 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}.$$

$$e^{At}\overset{\Delta}{=}I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

e^{At} 为**矩阵指数函数**，和A一样也是n×n阶方阵，它包含n*n个级数，只有其中每个级数都收敛时，矩阵指数才收敛。

[总结]

1、标量齐次微分方程：$\dot{x} = ax$

满足初始状态 $x(t)|_{t=0} = x(0)$ 的解是：$x(t) = e^{at}x(0)$

2、齐次状态方程 $\dot{x} = Ax$

满足初始状态 $x(t)|_{t=0} = x(0)$ 的解是：$x(t) = e^{At}x(0)$， $t \geq 0$

满足初始状态 $x(t)|_{t=t_0} = x(t_0)$ 的解是：$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$， $t \geq t_0$

其中：$e^{At} \overset{\Delta}{=} I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$

3.2 矩阵指数

3.2.1 矩阵指数的性质

(1) $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{At}}{\mathrm{d}t} = A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A.$

(2) $\mathrm{e}^{A(t_1+t_2)} = \mathrm{e}^{At_1}\mathrm{e}^{At_2}.$

(3) $AB = BA \Leftrightarrow \mathrm{e}^{(A+B)t} = \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{Bt}.$

3.2 矩阵指数

3.2.1 矩阵指数的性质

(1) $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{At}}{\mathrm{d}t} = A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A.$

$$\mathrm{e}^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At} = A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^kt^{k-1} + \cdots$$

$$= A(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^kt^{k-1} + \cdots = A\mathrm{e}^{At}$$

$$\mathrm{e}^{At_1}\mathrm{e}^{At_2} = (I + At_1 + \frac{1}{2!}A^2t_1^2 + \cdots)(I + At_2 + \frac{1}{2!}A^2t_2^2 + \cdots)$$
$$= I + A(t_1 + t_2) + A^2(\frac{t_1^2}{2!} + t_1t_2 + \frac{t_2^2}{2!}) + \cdots$$
$$= I + A(t_1 + t_2) + \frac{1}{2!}A^2(t_1 + t_2)^2 + \cdots = \mathrm{e}^{A(t_1+t_2)}$$

(2) $\mathrm{e}^{A(t_1+t_2)} = \mathrm{e}^{At_1}\,\mathrm{e}^{At_2}$.

(3) $AB = BA \Leftrightarrow \mathrm{e}^{(A+B)t} = \mathrm{e}^{At}\,\mathrm{e}^{Bt}$.

$$e^{(A+B)t}=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A+B)^2t^2+\frac{1}{3!}(A+B)^3+\cdots$$

$$=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A^2+AB+BA+B^2)t^2+\cdots$$

$$e^{At}e^{Bt}=(I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots)(I+Bt+\frac{1}{2!}B^2t^2+\cdots)$$

$$=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)t^2+\cdots$$

(3) $AB=BA\Leftrightarrow e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$.

对于n×n阶方阵A和B:

如果A和B可交换，即A×B= B×A，则 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$

如果A和B不可交换，即A×B ≠ B×A，则 $e^{(A+B)t}\neq e^{At}e^{Bt}$

(4) $\mathrm{e}^{A0} = I.$

(5) $\mathrm{e}^{At}\,\mathrm{e}^{-At} = I.$

(6) $\mathrm{e}^{P^{-1}APt} = P^{-1}\,\mathrm{e}^{At}\,P.$

(4) $e^{A0} = I.$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$$

$$e^{A0} = I + A0 + \frac{1}{2!}A^2 0^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k 0^k + \cdots = I$$

(5) e

(6) $e^{P^{-1}APt} = P^{-1} e^{At} P.$

(4) $e^{A0}=I.$

$$e^{At}e^{-At}=e^{At}e^{A(-t)}=e^{A(t+(-t))}=e^{A(t-t)}=e^{A0}=I.$$

(5) $e^{At}e^{-At}=I.$

$e^{P^{-1}APt}=P^{-1}e^{At}P$ 和 $e^{At}=Pe^{P^{-1}APt}P^{-1}$

[注意]: $\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{i个}=P^{-1}\underbrace{AA\cdots A}_{i个}P=P^{-1}A^{i}P$

[用途]: 此性质经常用于计算 e^{At}

(6) $e^{P^{-1}APt}=P^{-1}e^{At}P.$

$$
\begin{aligned}
e^{P^{-1}APt} &= I + P^{-1}APt + \frac{1}{2!}(P^{-1}AP)^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k t^k + \cdots \\
&= P^{-1}IP + P^{-1}APt + \frac{1}{2!}P^{-1}APP^{-1}APt^2 + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{k!}(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)t^k\right) + \cdots \\
&= P^{-1}IP + P^{-1}APt + \frac{1}{2!}P^{-1}A^2Pt^2 + \cdots + \frac{1}{k!}P^{-1}A^kPt^k + \cdots \\
&= P^{-1}(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots)P = P^{-1}e^{At}P
\end{aligned}
$$

(6) $e^{P^{-1}APt} = P^{-1}e^{At}P.$

3.2.2 几个特殊的矩阵指数

(1) 若A为对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

则有：

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$ 亦为对角矩阵

证：由e^{At}的定义可知

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots\cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} t$$

$$+ \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & 0 \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} t^2 + \cdots\cdots$$

$$
= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_1^n t^n & & & 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_2^n t^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_n^n t^n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}
$$

(2) 若A为mxm约当矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{bmatrix}_{m\times m}$$

则有：

$$\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2}t & \cdots & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \\ 0 & 1 & t & & \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & t \\ 0 & & & & 1\end{bmatrix}_{m\times m}$$ 为上三角矩阵

(3) 当A是约当矩阵时:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix}$$ 其中 A_i 是约当块

则有: $$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & & 0 \\ & e^{A_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{A_n t} \end{bmatrix}$$

其中 $e^{A_i t}$ 是对应约当块 A_i 的矩阵指数函数。

[例如]: $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(4) 若A为

$$A=\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}$$

则有：

$$\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{\sigma t}\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}$$

对照

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathrm{e}^{At}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

3.2.3 矩阵指数的计算

- 直接求解法：根据定义
- 拉氏变换求解：
- 标准型法求解：对角线标准型和约当标准型－非奇异变换
- 待定系数法： 凯莱－哈密顿（简称C-H）定理

1、根据矩阵指数函数的定义求解：

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{A^k}{k!}t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k$$

对所有有限的t值来说，这个无穷级数都是收敛的

求出的解不是解析形式，适合于计算机求解。

2、用拉氏变换法求解：

$$e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

关键是必须首先求出（sI-A）的逆，再进行拉氏反变换。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \xrightarrow{L} sx(s) - x(0) = Ax(s)$$

$$x(s) = (sI-A)^{-1}x(0) \xrightarrow{L^{-1}} x(t) = L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]x(0)$$

而

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

有：

$$e^{At} = L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

例3.2.1 用Laplace 变换法计算矩阵指数：

解：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \qquad sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

对此式采用部分分式法分解

则有：

$$e^{At}=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{L^{-1}\left(\frac{a}{s+b}\right)=ae^{-bt}}$$

3、标准型法求解：

思路：根据矩阵指数函数性质：$e^{At}=Pe^{P^{-1}APt}P^{-1}$

对A进行非奇异线性变换，得到：$\bar{A}=P^{-1}AP$

联立上两式，得到：$e^{At}=Pe^{\bar{A}t}P^{-1}$

$\bar{A}$ 有二种标准形式： 对角线矩阵、约当矩阵

（1）当A的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为两两相异时：对角线标准型

$$e^{At}=Pe^{\bar{A}t}P^{-1}=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

其中：P为使A化为对角线标准型的非奇异变换矩阵。

对角线标准型法求矩阵指数函数的步骤：

1） 先求得A阵的特征值 λ_i 。

2） 求对应于λ_i的特征向量 v_i，并得到P阵及P的逆阵。

3） 代入上式即可得到矩阵指数函数的值。

即：$A\rightarrow\det(\lambda I-A)=0\rightarrow\lambda_i\rightarrow(\lambda_i I-A)v_i=0\rightarrow v_i\rightarrow P$

（2）当A具有n重特征根λ_i：约当标准型

约当矩阵$\bar{A}$的矩阵指数函数

$$e^{At}=Pe^{\bar{A}t}P^{-1}=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_i t} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

其中： P为使A化为约当标准型的非奇异变换矩阵。

约当标准型法求矩阵指数函数的步骤：

此时的步骤和对角线标准型情况相同：求特征值、特征向量和变换阵p。

说明：对于所有重特征值λ_i，构造约当块并和非重特征值一起构成约当矩阵。根据几类特殊矩阵指数函数性质，求得$e^{\bar{A}t}$。

式中P为使A化为约旦标准形的变换矩阵。通常，A的特征值既有重根，又有单根，如 λ_1 为三重跟，λ_2为二重跟，λ_3 为单根，矩阵A 化为约旦标准形为：

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & 0 \\ & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & \lambda_1 & 0 & & \\ & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & & & & \lambda_3 \end{bmatrix}P^{-1}$$

则指数矩阵e^{At} 的形式为：

$$e^{At} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

例3.2.3 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -6 & -11 & 6\\ -6 & -11 & 5\end{bmatrix}$

试计算矩阵指数 e^{At}

解：1) 特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ -6 & -11 & 6\\ -6 & -11 & 5\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0$$

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-3$$

2) 计算特征向量：

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3) 构造变换阵 P：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

则有：

$$e^{At}=P\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & -2e^{-t}+3e^{-2t}-e^{-3t} \\ -6e^{-t}+6e^{-3t} & -8e^{-2t}+9e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t} \\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-16e^{-2t}+\frac{27}{2}e^{-3t} & -2e^{-t}+12e^{-2t}-9e^{-3t} \end{bmatrix}$$

例3.2.4 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

试计算矩阵指数 e^{At}

解：1) 计算特征向量和广义特征向量。

$$p_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{7} \\ -\dfrac{5}{7} \end{bmatrix},\quad p_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{22}{49} \\ -\dfrac{46}{49} \end{bmatrix},\quad p_3=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

得：

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -\frac{3}{7} & -\frac{22}{49} & -1 \\ -\frac{5}{7} & -\frac{46}{49} & -2 \end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 7 & 28 & -7 \\ -4 & -11 & 1 \end{bmatrix}$$

2) 计算矩阵指数：

$$\mathrm{e}^{At}=P\mathrm{e}^{P^{-1}APt}P^{-1}$$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -\dfrac{3}{7} & -\dfrac{22}{49} & -1 \\ -\dfrac{5}{7} & -\dfrac{46}{49} & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t} & t\mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 7 & 28 & -1 \\ -4 & -11 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 9\mathrm{e}^{t}+7t\mathrm{e}^{t}-3\mathrm{e}^{2t} & 22\mathrm{e}^{t}+28t\mathrm{e}^{t}-22\mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{t}-7t\mathrm{e}^{t}+2\mathrm{e}^{2t} \\ -4\mathrm{e}^{t}-3t\mathrm{e}^{t}+4\mathrm{e}^{2t} & -10\mathrm{e}^{t}-12t\mathrm{e}^{t}+11\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{t}+3t\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{2t} \\ -8\mathrm{e}^{t}-5t\mathrm{e}^{t}+8\mathrm{e}^{2t} & -22\mathrm{e}^{t}-20t\mathrm{e}^{t}+22\mathrm{e}^{2t} & 3\mathrm{e}^{t}+5t\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}
$$

4、待定系数法：将 e^{At} 化为A的有限项多项式来求解：

（1）凯莱－哈密顿（以下简称C-H）定理：

设n×n维矩阵A的特征方程为：

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^{n}+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{1}\lambda+a_{0}=0$$

则矩阵A满足其自身的特征方程，即：

$$f(A)=A^{n}+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_{1}A+a_{0}I=0$$

说明：在证明有关矩阵方程的定理或解决有关矩阵方程的问题时，凯莱-哈密尔顿定理是非常有用的。

则

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{3.2.28}$$

定理的证明从略。从凯莱-哈密顿定理出发，可以导出

$$\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+a_2\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$$

这表明 $\boldsymbol{A}^n$ 可表为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的线性组合，即

$$\boldsymbol{A}^n=-a_1\boldsymbol{A}^{n-1}-a_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_{n-1}\boldsymbol{A}-a_n\boldsymbol{I}$$

又因

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{n+1}&=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}(-a_1\boldsymbol{A}^{n-1}-a_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_{n-1}\boldsymbol{A}-a_n\boldsymbol{I})\\&=-a_1\boldsymbol{A}^n-a_2\boldsymbol{A}^{n-1}-\cdots-a_{n-1}\boldsymbol{A}^2-a_n\boldsymbol{A}\\&=-a_1(-a_1\boldsymbol{A}^{n-1}-a_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_{n-1}\boldsymbol{A}-a_n\boldsymbol{I})-a_2\boldsymbol{A}^{n-1}-a_3\boldsymbol{A}^{n-2}\cdots\\&\quad-a_{n-2}\boldsymbol{A}^2-a_n\boldsymbol{A}\\&=(a_1^2-a_2)\boldsymbol{A}^{n-1}+(a_1a_2-a_3)\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+(a_1a_n-a_n)\boldsymbol{A}+a_1a_n\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{A}^{n+1}$ 也可表示为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的线性组合。依此类推，$\boldsymbol{A}^{n+2},\boldsymbol{A}^{n+3},\cdots$ 均可表示为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的线性组合。即

$$\boldsymbol{A}^k=\sum_{i=0}^{n-1}C_i\boldsymbol{A}^i,\quad k\geqslant n \tag{3.2.29}$$

所以，对于矩阵指数

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots$$

的无穷多项表达式可表示为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的有限项表达式，但其系数为时间 t 的函数，也即式(3.2.24)。

由定理知：A所有高于(n-1)次幂都可由A的0～(n-1)次幂线性表出。

$$A^k = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}, k \geq n.$$

可以有

$$\mathrm{e}^{At} = a_0(t) I + a_1(t) A + \cdots + a_{n-1}(t) A^{n-1}.$$

进一步

$$\mathrm{e}^{\lambda t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1}.$$

由定理知：A所有高于(n-1)次幂都可由A的0～(n-1)次幂线性表出。

即：$$A^m=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{mj}A^j$$

将此式代入 e^{At} 的定义中：

$$e^{At}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}A^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{mj}A^j=\sum_{j=0}^{n-1}A^j\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\alpha_{mj}$$

并令 $\alpha_j(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\alpha_{mj}$ 即可得到如下的结论：

（2）将 e^{At} 化为A的有限项多项式来求解

根据C-H定理，可将 e^{At} 化为A的有限项表达式，即封闭形式：

$$e^{At}=\sum_{j=0}^{n-1}a_j(t)A^j=a_0(t)I+a_1(t)A+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1}$$

其中：$a_0(t),a_1(t),\cdots,a_{n-1}(t)$ 为t的标量函数，可按A的特征值确定。

1）A的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 两两相异时，

注意求逆

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

推导：利用了A可化为对角阵的矩阵指数函数求法。

$$e^{\overline{A}t} = P^{-1}e^{At}P = P^{-1}(a_0(t)I + a_1(t)A + \cdots + a_{n-1}(t)A^{n-1})P$$

注意：$P^{-1}A^iP = P^{-1}\underbrace{AA\cdots A}_{i\text{个}}P = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{i\text{个}} = \overline{A}^i$

推导时可看到：$a_0(t) + a_1(t)\lambda_i + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1} = e^{\lambda_i t}$

$$a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_{n-1}\lambda_1^{\,n-1} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$$

$$a_0 + a_1\lambda_2 + \cdots + a_{n-1}\lambda_2^{\,n-1} = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1\lambda_n + \cdots + a_{n-1}\lambda_n^{\,n-1} = \mathrm{e}^{\lambda_n t}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ & & \\ 1 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

2）A的特征值为λ_1（n重根）

注意求逆

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-2}(t) \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots & \frac{n-1}{1!}\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{1!}te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

推导：此时只有一个方程：

$$a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}=e^{\lambda_1 t} \qquad (3)$$

缺少n-1个独立方程，对上式求导n-1次，得到其余n-1个方程

说明：不管特征值互异、还是具有重根，只需要记住式(3)。

特征值互异时，对于每个特征值，直接得到方程(3)；特征值为n重根时，则式(3)针对λ_1求导n-1次，补充缺少的n-1个方程。联立求出系数。

有n个重特征值 $\lambda_1 = \cdots \lambda_n = \lambda$

$$e^{\lambda t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1}$$

两端对λ求1至$n-1$阶导数得：

$$te^{\lambda t} = a_1(t) + 2a_2(t)\lambda + \cdots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2}$$

$$t^2 e^{\lambda t} = 2a_2(t) + 6a_3(t)\lambda + \cdots + (n-1)(n-2)a_{n-1}\lambda^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$t^{n-1}e^{\lambda t} = (n-1)!a_{n-1}(t)$$

解方程组可求得

$$a_i(t),\ \ i = 0,1,2,\cdots,n-1.$$

例3.2.7 已知系统 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&3&0\end{bmatrix}$

试用化有限项的方法求矩阵A的矩阵指数 e^{At}

解：矩阵A的特征方程为 $(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0$

特征值为 $-1,\ -1,\ +2$

$$\lambda_3=2 \qquad e^{2t}=a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-1 \qquad e^{-t}=a_0(t)-a_1(t)+a_2(t)$$

因为−1是重根，故需补充方程

$$te^{-t}=a_1(t)-2a_2(t)$$

从而可联立求得：

$$a_0(t)=\frac{1}{9}(e^{2t}+8e^{-t}+6te^{-t})$$

$$a_1(t)=\frac{1}{9}(2e^{2t}-2e^{-t}+3te^{-t})$$

$$a_2(t)=\frac{1}{9}(e^{2t}-e^{-t}-3te^{-t})$$

由此可得：

$$
\mathrm{e}^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A+a_2(t)A^2
$$

$$
=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t}+(8+6t)\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t}-(2-3t)\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t}-(1+3t)\mathrm{e}^{-t} \\ 2\mathrm{e}^{2t}-(2+6t)\mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{2t}+(5-3t)\mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{2t}-(2-3t)\mathrm{e}^{-t} \\ 4\mathrm{e}^{2t}+(6t-4)\mathrm{e}^{-t} & 8\mathrm{e}^{2t}+(3t-8)\mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{2t}+(5-3t)\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}
$$

例：已知$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$，求$e^{At}$

解：$|\lambda I-A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1\\ -2 & \lambda+2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^2+5\lambda+4=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-4$

将其代入：$e^{\lambda_i t}=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j(t)\lambda_i^j$

$$\begin{cases}e^{-t}=\alpha_0+\alpha_1(-1)\\ e^{-4t}=\alpha_0+\alpha_1(-4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_0=\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}\\ \alpha_1=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}\end{cases}$$

$$\therefore e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A=(\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t})\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}\\ \frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t} & \frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t}\end{bmatrix}$$

例:已知$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，求$e^{At}$。

例:已知$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，求$e^{At}$。

解:$\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2+4\lambda+4=0\Rightarrow \lambda_{1,2}=-2$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^{-2t}=\alpha_0+\alpha_1(-2)\\ te^{-2t}=\alpha_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_0=e^{-2t}(1+2t)\\ \alpha_1=te^{-2t}\end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A=e^{-2t}(1+2t)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+te^{-2t}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$=e^{-2t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{bmatrix}$$

[例]：求以下矩阵A的矩阵指数函数 $e^{A_i t}$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

[解]:

1）用第一种方法－定义求解：(略)

2）用第二种方法－拉氏变换法求解：

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

$$\left[sI-A\right]^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}}{(s^2+3s+2)}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

3）用第三种方法－标准型法求解：

先求特征值：

$$|\lambda I-A|=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{bmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

得： $\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$ **，具有互异特征根，用对角线标准型法。且A为友矩阵形式。**

$$e^{At} = e^{\overline{A}t} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = -\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4）用第四种方法－待定系数法求解.

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

在第3种方法中已经求得特征根，所以得：

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

求得矩阵指数函数如下：

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A$$

$$= (2e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

或者: 由 $a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 = e^{\lambda_1 t}$ 和 $a_0(t) + a_1(t)\lambda_2 = e^{\lambda_2 t}$

得到: $\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$ 从而求出系数 $a_i(t)$

[例]：求以下矩阵A的矩阵指数函数 $e^{A_i t}$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

分析：用C－H定理求解

先求特征值： $|\lambda I - A| = 0$

求得： $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

当 $\lambda_1 = 2$ 时，有 $a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 + a_2(t)\lambda_1^2 = e^{\lambda_1 t}$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ （二重根）时，有

$$a_0(t) + a_1(t)\lambda_2 + a_2(t)\lambda_2^2 = e^{\lambda_2 t}$$

上式对 λ_2 求导1次，得到另一个方程：

$$a_1(t) + 2a_2(t)\lambda_2 = te^{\lambda_2 t}$$

得到方程组：
$$\begin{cases} a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+a_2(t)\lambda_1^2=e^{\lambda_1 t} \\ a_0(t)+a_1(t)\lambda_2+a_2(t)\lambda_2^2=e^{\lambda_2 t} \\ a_1(t)+2a_2(t)\lambda_2=te^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

写成矩阵形式为：
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ te^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

整理得：
$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ te^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

可以求出：

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ te^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}(e^{2t}+8e^{-t}+6te^{-t}) \\ \frac{1}{9}(2e^{2t}-2e^{-t}+3te^{-t}) \\ \frac{1}{9}(e^{2t}-e^{-t}-3te^{-t}) \end{bmatrix}$$

所以： $e^{At}=a_0(t)+a_1(t)A+a_2(t)A^2$

可以求出矩阵指数函数。

[本节小结]：矩阵指数函数的9个性质，4种计算方法