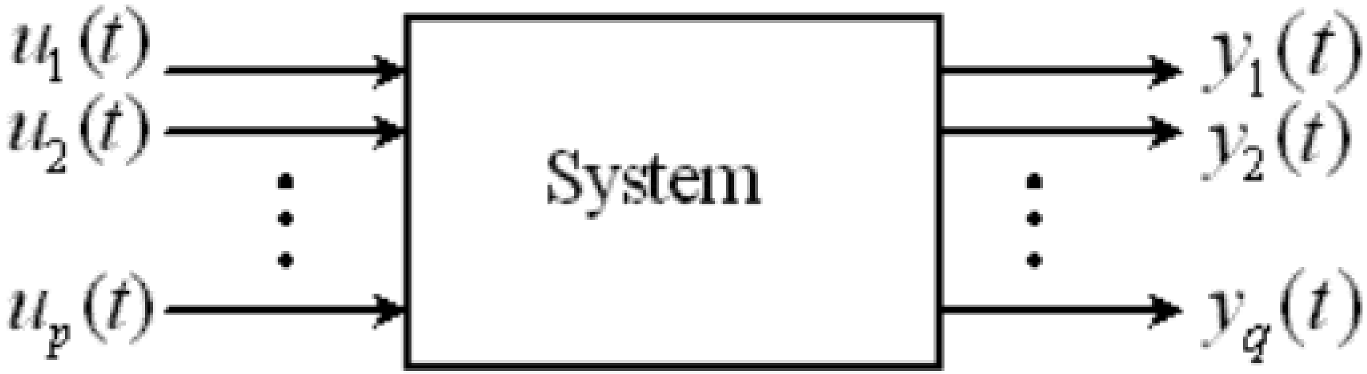
第一章

经典控制与现代控制介绍

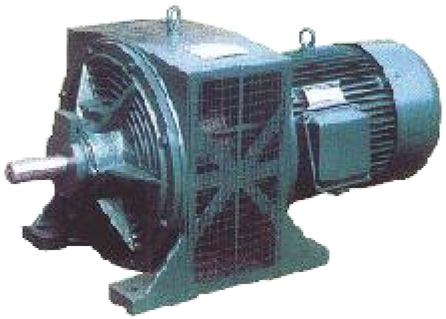


经典：输入输出模式 ——黑箱子

现代：状态变量模式 ——动力学特性

➢经典控制理论描述系统数学模型的方法：

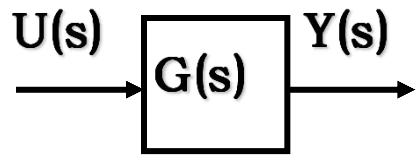
外部描述：时域内为高阶微分方程、复频域内为输入－输出关系的传递函数；



电机

经典控制理论五十年代末形成了完整的体系

1）把系统当作“黑箱”，不反映黑箱内系统内部结构和内部变量，只反映外部变量，即输入输出间的因果关系；



2）传递函数为基础，研究系统外部特性，属于外部描述，不完全描述；

3）主要采用频域法，建立在根轨迹和奈奎斯特判据等基础之上的；

经典控制理论的传递函数描述方法的不足之处：

- 系统模型为单输入单输出系统；
- 忽略初始条件的影响（传递函数的定义）；
- 不包含系统的所有信息；无法利用系统的内部信息来改变系统的性能。
- 复杂的时变、非线性、多输入一多输出系统的问题，需要用对系统内部进行描述的新方法一状态空间分析法

- 经典控制是分析方法而不是最佳的综合方法，试凑法为主，满足性能指标为目的，无法设计出最优的系统

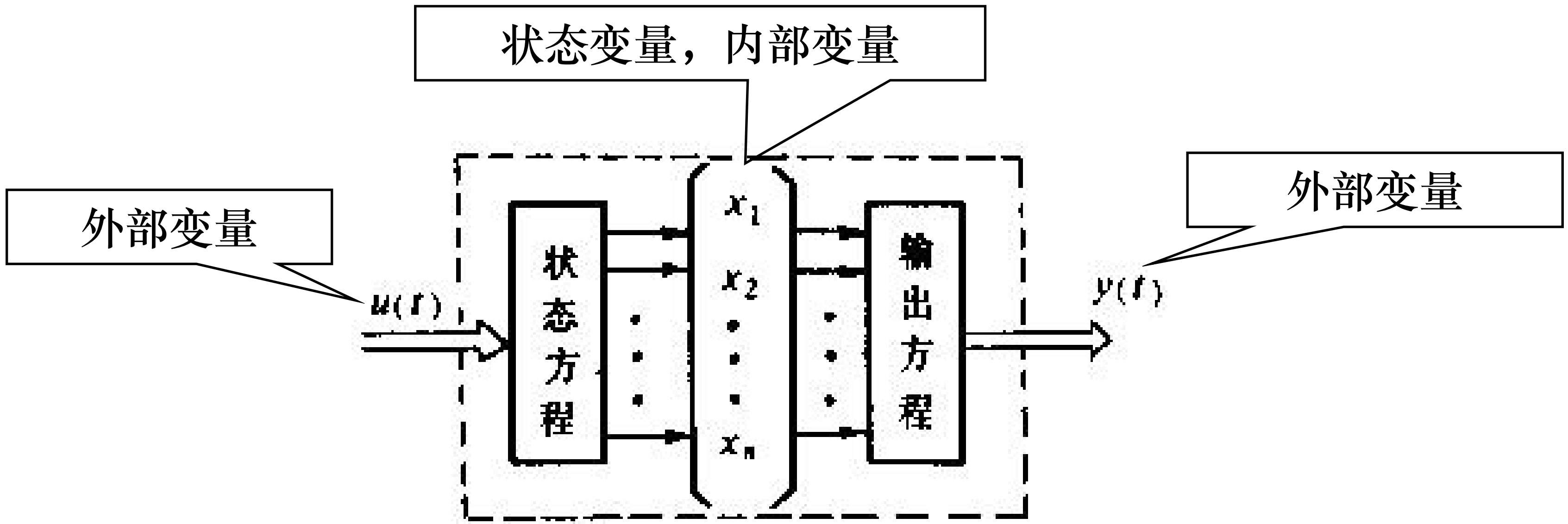
电机内部工作原理

现代控制理论

- 越来越复杂的系统，经典控制理论不能胜任，于50 年代末60年代初出现了现代控制理论。

- 现代控制理论描述系统数学模型的方法：

  内部描述：一阶微分方程（**时域法**），状态空间为基础，深入系统内部，是内部描述，完全描述；



现代控制理论的优点（相对于古典控制）：

- 既适合线性定常系统，也适合非线性及系统
- 既适合SISO系统，也适合MIMO系统
- 既适合确定性的系统，也适合随机系统
- 考虑了初始条件，系统状态可以由初始条件和输入来刻划
- 分析综合方法，可实现最优控制

第二章

经典控制

经典控制

经典控制系统组成、分析和设计的一般理论。

以传递函数为基础，研究单输入——单输出自动控制系统的分析和设计问题；采用的方法主要是微分方程分析法、根轨迹分析法和频率特性分析法。

学习和研究古典控制理论是为了探索自动控制系统中变量的运动规律和改变运动规律的可能性和途径，为建立高性能的自动控制系统提供必要的理论依据。

2.1 几种常见的传递函数

传递函数是控制理论基础中最基本也是最重要的数学模型，不仅可以表征系统的动态特性，还可用来研究系统的结构或参数对系统性能的影响。经典控制的根轨迹法和频域法就是以传递函数为基础建立起来的。

传递函数的定义

对于线性常微分方程系统，假设全部初始条件为零，则输出量(响应函数)的Laplace变换与输入量的Laplace变换之比，称为该系统的传递函数。

https://blog.csdn.net/ciscomonkey/article/details/85067036

[补充拉氏变换]

①定义： 如果有一个以时间t为自变量的函数f(t)，它的定义域t>0，那么下式即是拉氏变换式：$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ ，式中s为复数。记作 $\boldsymbol{F(s)=L[f(t)]}$

一个函数可以进行拉氏变换的充分条件是：

(1)t<0时，f(t)=0；

(2)t⩾0时，f(t)分段连续；

(3) $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt<\infty$。

F(s) —象函数，f(t) —原函数。

记 $f(t)=L^{-1}[F(s)]$ 为反拉氏变换。

②性质：

(1)线性性质：$L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$

(2)微分定理：

$$L[\dot{f}(t)]=sF(s)-f(0)$$

$$L[\ddot{f}(t)]=s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\dot{f}(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

(3)积分定理：（设初值为零） $L[\int f(t)dt]=\dfrac{F(s)}{s}$

(4)时滞定理：$L[f(t-T)]=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t-T)dt=e^{-sT}f(s)$

(5)初值定理：$\lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$

(6)终值定理：　$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

(7)卷积定理：　$$L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau] = F_1(s)F_2(s)$$

③常用函数的拉氏变换：

单位阶跃函数：　$f(t) = 1(t), F(s) = \dfrac{1}{s}$

单位脉冲函数：　$F(s) = L[\delta(t)] = 1$

单位斜坡函数：　$f(t) = t, F(s) = \dfrac{1}{s^2}$

单位抛物线函数：　$f(t) = \dfrac{1}{2}t^2, F(s) = \dfrac{1}{s^3}$

正弦函数：　$f(t) = \sin \omega t, F(s) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

经典控制

[补充传递函数]

设 n 阶微分方程为：

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\dot{f}(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

Laplace变换，求传递函数

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

注：可以看出，求出系统的微分方程以后，只要把方程式中的各阶导数用相应的阶次的变量S代替，就很容易求得系统的传递函数。

[补充传递函数]

$$g(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Cadj\ (sI-A)B+D\left|sI-A\right|}{\left|sI-A\right|}$$

$$g(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

N(s)传递函数的分子多项式，*D*(s)是分母多项式也是系统矩阵A的特征多项式，因此传递函数的极点就是矩阵A的特征值。

由微分方程描述的线性定常系统

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + \cdots + b_{m-1}\dot{u} + b_m u$$

两端取Laplace变换，可得传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

以s为变量的代数方程来表示系统的动态特性。

一个n次多项式可以唯一地分解为n个一次因式乘积

$$G(s) = K_g \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

传递函数的说明

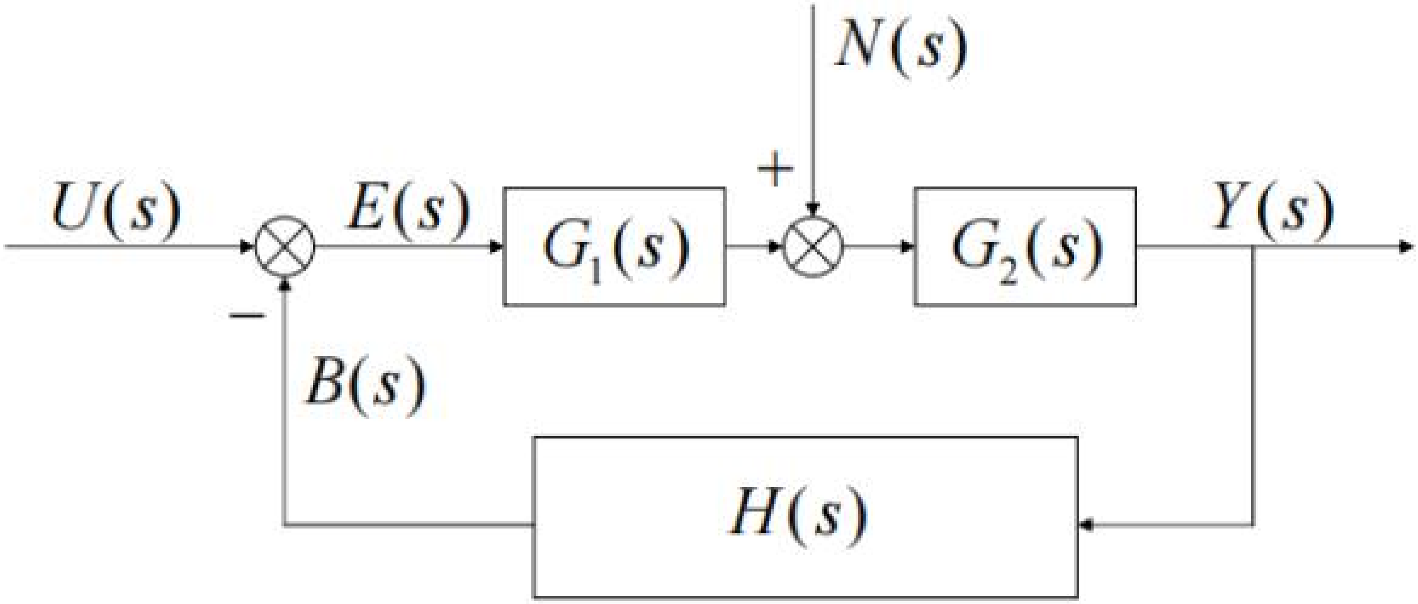
1. 传递函数的概念只适用于范围有限的线性常微分系统。
2. 系统的传递函数是一种数学模型，它表示联系输出变量与输入变量的微分方程的一种运算。
3. 传递函数是系统本身的一种属性，它与输入变量和输出变量的大小、性质无关。
4. 传递函数不提供有关系统物理结构的任何信息。
5. 如果传递函数已知，则可通过对不同形式的输入变量研究系统的输出变量或响应，以便掌握系统的性质。

典型反馈系统的几种传递函数

自动控制系统会受到两类输入信号的作用：

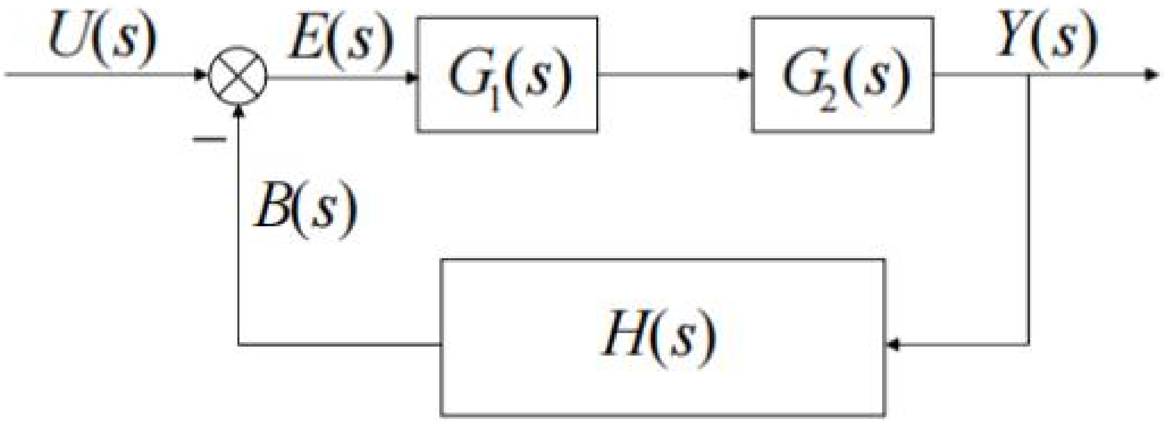
1、有用的信号，即输入信号；

2、干扰信号，可作用于系统的任何地方，于被控对



闭环系统的传递函数

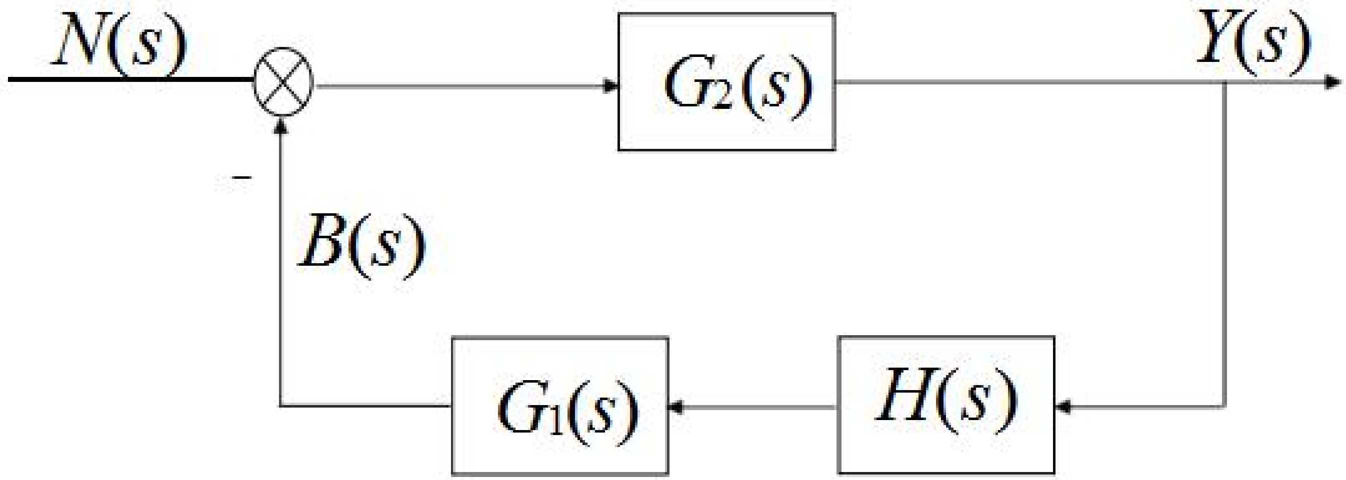
1、输入信号$U(s)$作用下的闭环系统的传递函数



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}U(s)$$

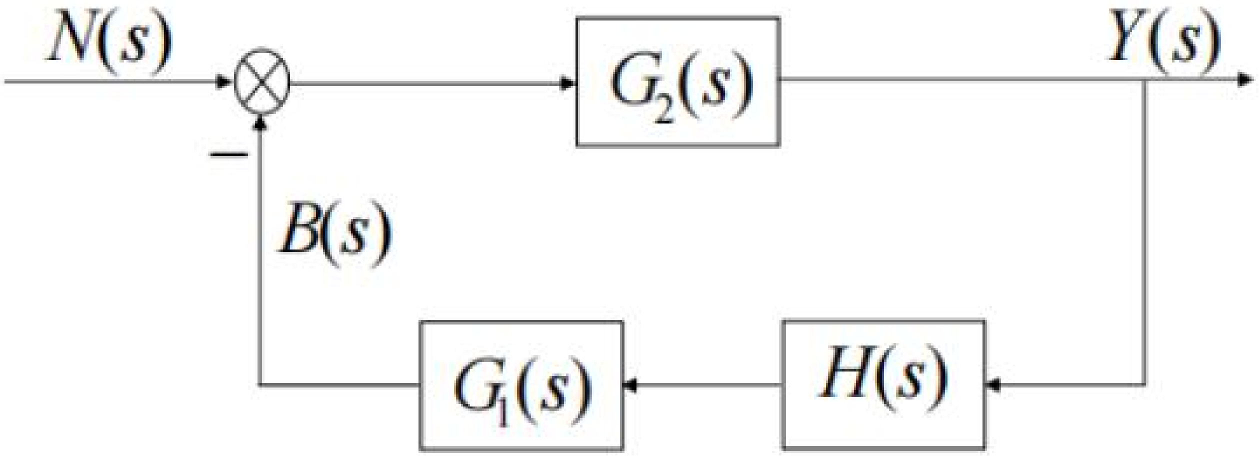
2、干扰信号$N(s)$作用下的闭环系统的传递函数



$$G_N(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} =$$

$$Y(s) = G_N(s)N(s) =$$

2、干扰信号$N(s)$作用下的闭环系统的传递函数



$$G_N(s)=\frac{Y(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$Y(s)=G_N(s)N(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

3、输入信号与干扰信号同时作用下的系统输出

根据线性系统的叠加原理，系统在$U(s)$和$N(s)$同时作用下的总输出为

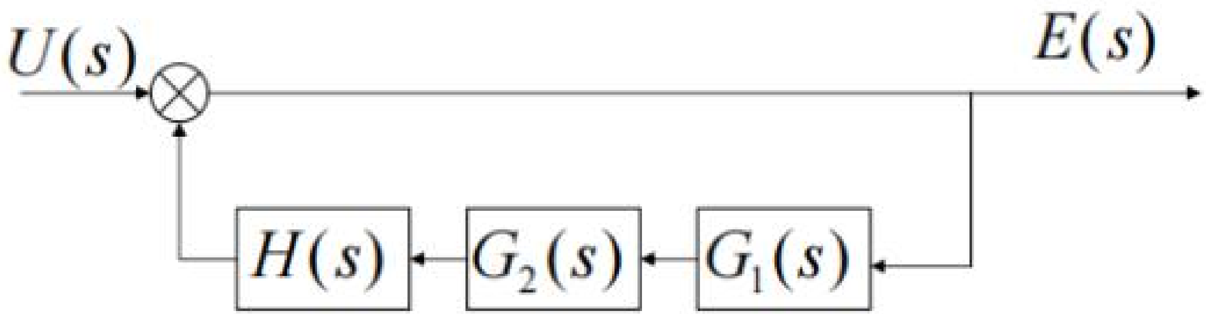
$$Y_{X}(s) = G(s)U(s) + G_{N}(s)N(s)$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}U(s) + \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

闭环系统的误差传递函数

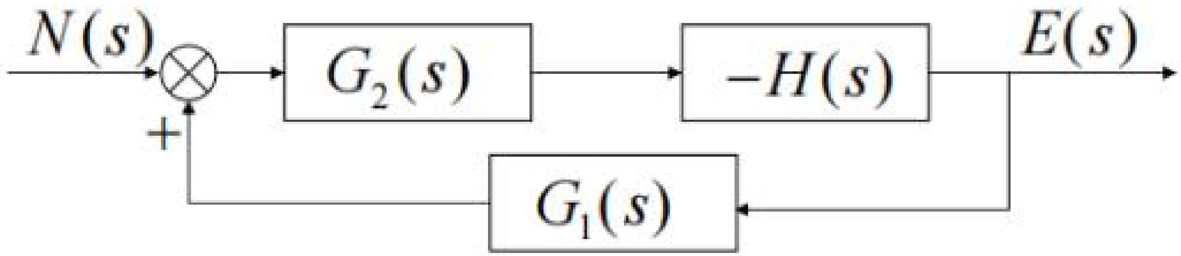
偏差是指给定输入信号$u(t)$与主反馈信号$b(t)$之间的差值，用$e(t)=u(t)-b(t)$表示，其拉氏变换为$E(s)=U(s)-B(s)$

1、输入信号$U(s)$作用下的系统的误差传递函数



$$G_{eu}(s)=\frac{E(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

2、干扰信号$N(s)$作用下的系统的误差传递函数



$$G_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

3、总误差

$$E_\Sigma(s)=G_{eu}(s)U(s)+G_{en}(s)N(s)$$

$$=\frac{U(s)}{1+G(s)_1G_2(s)H(s)}+\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

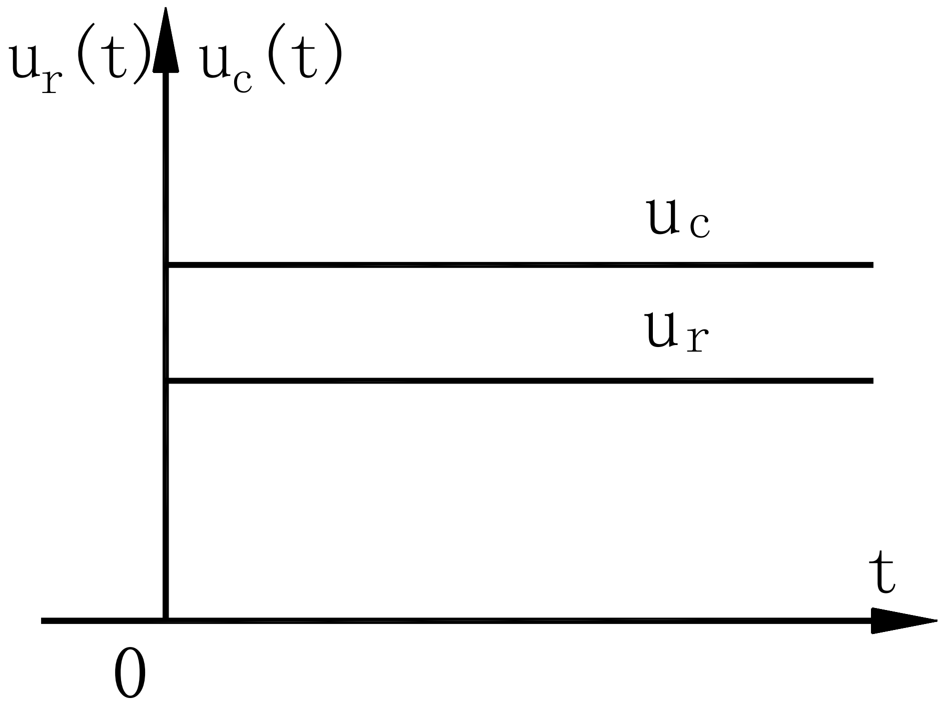
典型环节的传递函数

1. 比例环节

$$c(t) = Kr(t)$$

$$C(s) = KR(s)$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K$$

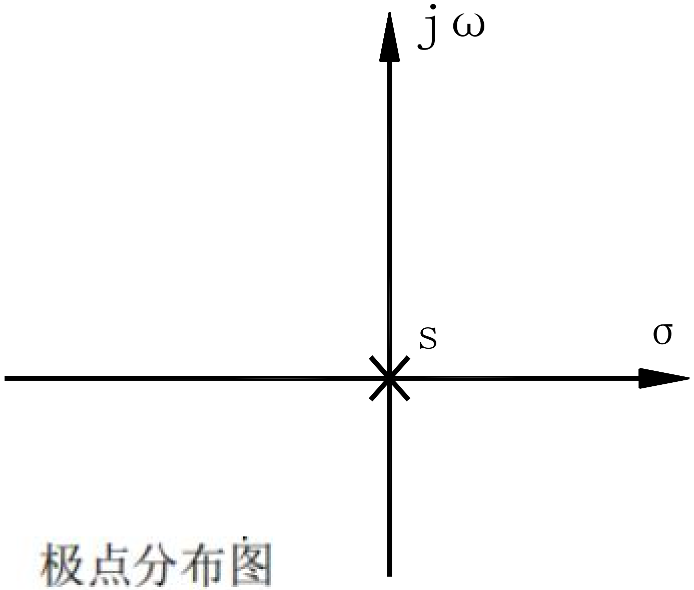


比例环节的输入输出特性

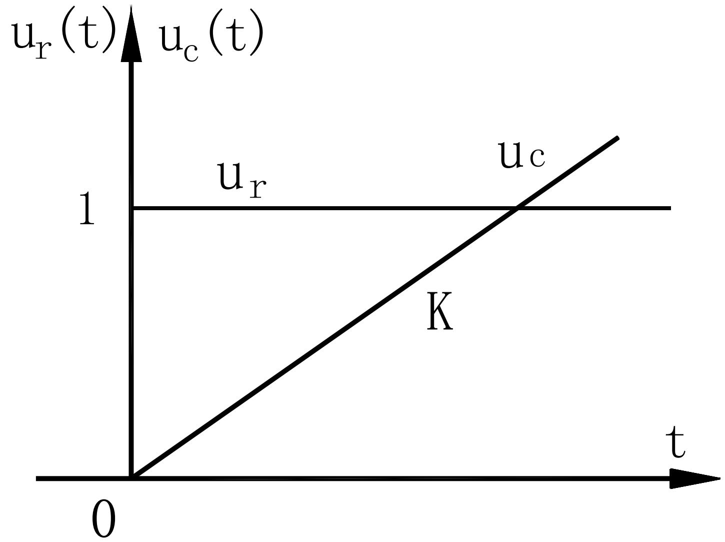
2. 积分环节

$$c(t) = K\int r(t)dt \quad 或 \quad \frac{dc(t)}{dt} = Kr(t)$$

$$sC(s) = KR(s) \qquad T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s}$$



极点分布图



3. 一阶惯性环节

$$T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=Kr(t) \quad T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{Ts+1}$$

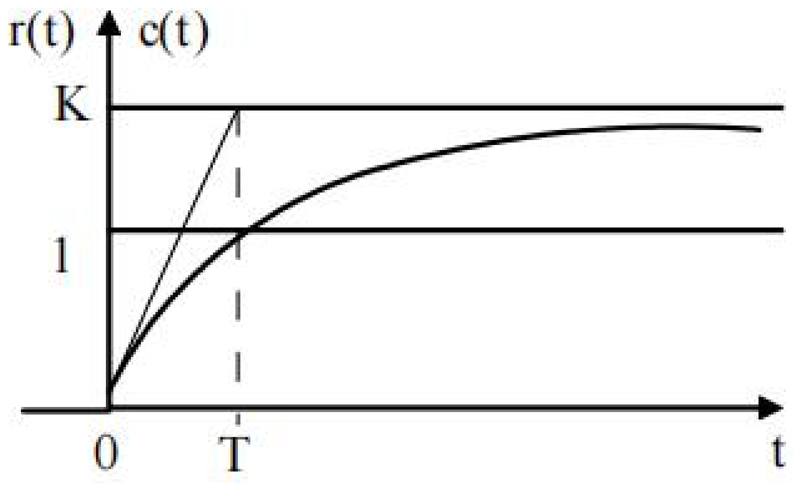
$$C(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{Ts+1}$$

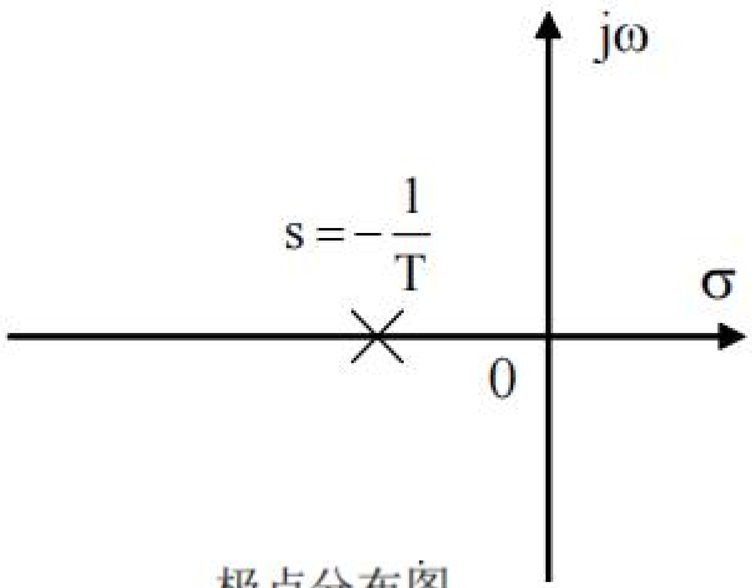
$$\left.\frac{K}{Ts+1}\right|_{s=0}=A \qquad A=K$$

$$\left.\frac{K}{s}\right|_{s=-\frac{1}{T}}=B \qquad B=-KT$$

$$C(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}=\frac{K}{s}-\frac{KT}{Ts+1}=K\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right)$$

$$c(t)=K(1-e^{-\frac{t}{T}})$$





极点分布图

4. 二阶惯性环节

$$T^2\frac{d^2c(t)}{dt^2}+2\zeta T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t) \qquad \zeta\geqslant 1$$

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad \zeta\geqslant 1$$

由于$\zeta\geqslant 1$，极点为 $s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}$$

$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}+\frac{C}{s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

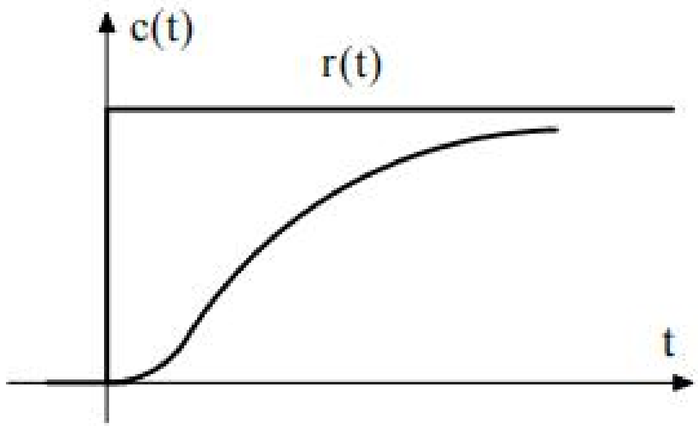
$$A=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\Big|_{s=0}=1$$

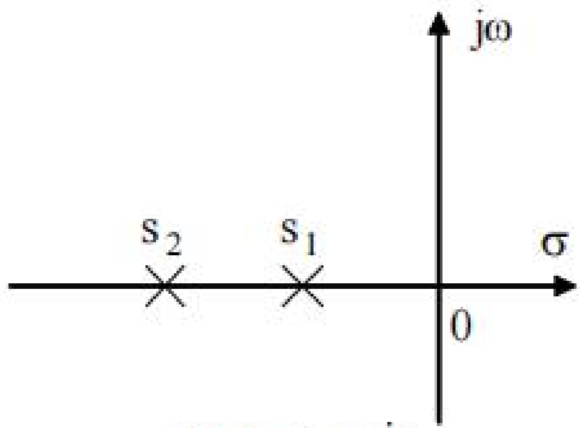
$$B=\frac{\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\Big|_{s=-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}=-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$$

$$C=\frac{\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\Bigg|_{s=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}$$

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{1}{(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}-\frac{1}{(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}\right)$$

$$c(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}-\frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}\right]\quad t\geqslant 0$$





极点分布图

5. 二阶振荡环节

二阶振荡环节与二阶惯性环节有相同的微分方程和传递函数，不同的是 $0<\zeta<1$

两个极点为 $s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad A=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\Big|_{s=0}=1$$

$$-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-\zeta\omega_n B+C+j\omega_n B\sqrt{1-\zeta^2} \qquad B=-1 \qquad C=-2\zeta\omega_n$$

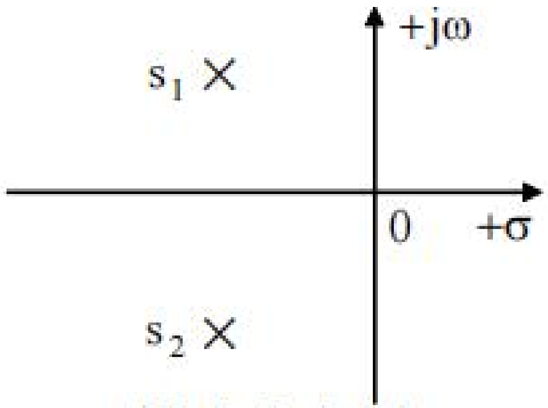
$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)$$

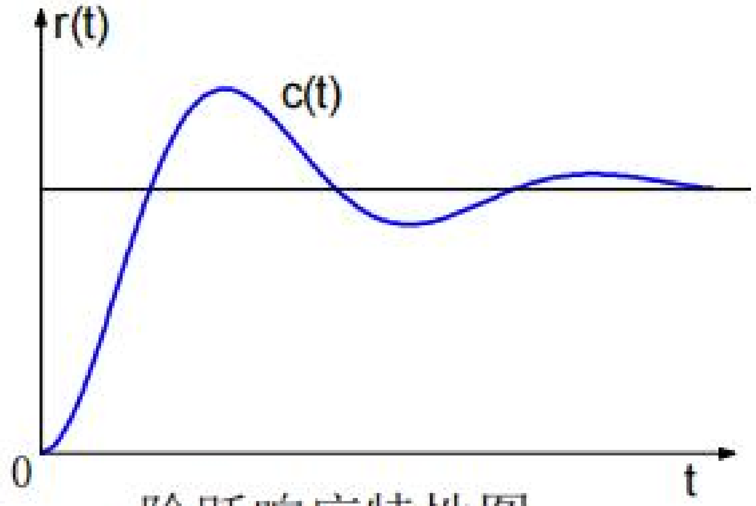
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t + \zeta\sin\omega_d t\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\left(\sin\theta\cos\omega_d t + \cos\theta\sin\omega_d t\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \theta) \qquad t \geqslant 0$$



极点分布图



阶跃响应特性图

6. 微分环节

$$c(t) = \tau \frac{dr(t)}{dt} \qquad T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau s$$

7. 一阶微分环节

$$c(t) = \tau \frac{dr(t)}{dt} + r(t) \qquad T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau s + 1$$

8. 二阶微分环节

$$c(t) = \tau^2 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dr(t)}{dt} + r(t)$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$$

9. 延迟环节

$$c(t) = r(t-\tau) \quad t \geqslant 0$$

$$C(s) = e^{-\tau s}R(s)$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$