3.6 线性变换

1、将状态空间表达式变换成对角线标准型

2、将状态空间表达式变换成约当标准型

3、将状态空间表达式变换成能控、能观标准型

[线性非奇异变换]:

含义:

如果P是一个非奇异阵，则将$x = P\bar{x}$变换称为线性非奇异变换。

满足:

$$\begin{cases} P(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = P\bar{x}_1 + P\bar{x}_2 = x_1 + x_2 & \text{叠加原理} \\ P(k\bar{x}) = kP\bar{x} = kx & \text{齐次性条件} \end{cases}$$

用途:

通过线性变换，可将状态方程变成对角线或约当标准型。

[系统状态空间表达式的非唯一性]:

含义：同一系统的不同状态变量可通过线性变换互相得到。

$$x = P\bar{x} \quad \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftarrows}} \quad \bar{x} = P^{-1}x$$

考虑系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

取线性非奇异变换：

$$\bar{x} = P^{-1}x$$

$x = P\bar{x}$， 矩阵P非奇异

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\bar{x} + Du \end{cases} .$$

整理得：

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

其中：

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \qquad \bar{D} = D$$
$$\bar{C} = CP, \qquad \bar{B} = P^{-1}B.$$

例2.5.1　考虑系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1）若选非奇异变换阵P为： $P=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \bar{C}=\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}$$

2）若选非奇异变换阵P为： $P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

对角线矩阵

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix},\quad \bar{C}=\begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix}$$

结论：不同的非奇异变换阵，对应不同的状态方程，**非唯一性**

[系统的特征值和特征向量]

对于系统矩阵A，若存在一非零向量 v ，使得：$Av=\lambda v$

则：
- λ →矩阵A的特征值（A特征方程的根）
- v →矩阵A对应于特征值 λ 的特征向量
- $\lambda I-A$ →矩阵A的特征矩阵
- $|\lambda I-A|=0$ →矩阵A的特征方程
- $|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ →矩阵A的特征多项式

<u>由定义知</u>：

设 λ_i 为A的一个特征值，若存在某个n维非零向量 v_i

使 $Av_i=\lambda_i v_i$ ，则称 v_i 为A的对应于 λ_i 的特征向量。

$$v_i=\begin{bmatrix}v_{1i} & v_{2i} & \cdots & v_{ni}\end{bmatrix}^T,\quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

[特征值及传递函数阵的性质]:

1）一个n维系统的 $n \times n$ 方阵A，有且仅有 n 个独立的特征值。

2）A为实数方阵，则n个特征值或为实数，或为共轭复数对。

3）对系统作线性非奇异变换，其特征值和传递函数阵不变。

$$\begin{cases} \sum(A,B,C) \text{ 系统1：特征多项式 } |\lambda I - A|\text{，传递函数阵 } G(s) \\ \sum(\bar{A},\bar{B},\bar{C}) \text{ 系统2：特征多项式 } |\lambda I - \bar{A}|\text{，传递函数阵 } \bar{G}(s) \end{cases}$$

则：$|\lambda I - \bar{A}| = |\lambda I - A|$ 且 $\bar{G}(s) = G(s)$

其中：$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

4）设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为系统矩阵A的特征值，$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是A属于特征值的特征向量。当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$两两相异时，$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 线性无关，因此由这些特征向量组成的矩阵P必是非奇异的。

$$P=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

5）若系统矩阵A具有形式：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

则其特征多项式为：$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$

特征方程为：$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

[特征向量的计算]:

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量。

[例]:

求下列矩阵A的特征向量。 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$

[解]:

[特征向量的计算]:

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量。

[例]:

求下列矩阵A的特征向量。 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$

[解]:

1）计算特征值

A的特征方程为: $|\lambda I - A| = 0$

A的特征值: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$

2）计算特征向量

$\lambda_1 = -1$ 特征向量:

$(\lambda_1 I - A)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = (1 \quad -1 \quad 1)^T$

$\lambda_2 = -2$ 特征向量:

$$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = (1 \quad -2 \quad 4)^T$$

$\lambda_2 = -2$ 特征向量:

$$(\lambda_3 I - A)v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = (1 \quad -3 \quad 9)^T$$

一、将状态方程化为对角线标准型

1、状态方程化为对角线标准型的步骤:

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量。并由此组成非奇异变换阵P。

3）由变换矩阵P和矩阵A，B，C求出 $\bar{A}$， $\bar{B}$， $\bar{C}$ ，其中对角阵 $\bar{A}$ 可以由特征值直接写出，只需求出 $\bar{B}$， $\bar{C}$ 即可。

定理1：

对于线性定常系统$\sum(A,B,C)$，如果A特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异，则必存在非奇异变换矩阵P，通过变换 $x=P\bar{x}$ ，将原状态方程$\sum(A,B,C)$ 化为对角线规范形式 $\sum(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 。

其中：$\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，$\bar{B}=P^{-1}B$，$\bar{C}=CP$

证明：

1）找非奇异变换阵

由特征值性质4)知，由A特征向量构成的矩阵$P=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}$ 是非奇异的，故可选P为变换阵。

2）求 $\overline{A}=P^{-1}AP$

特征值定义 $Av_i=\lambda_i v_i$

$$AP=A[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]=[Av_1 \quad Av_2 \quad \cdots \quad Av_n]=[\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \cdots \quad \lambda_n v_n]$$

$$=[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

上式两端左乘 P^{-1} 得：$P^{-1}AP=P^{-1}P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1\end{bmatrix}$

证毕！

[例]

线性定常系统$\dot{x} = Ax + Bu$，其中：
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

将此状态方程化为对角线标准型.

[例]

线性定常系统$\dot{x}=Ax+Bu$，其中：$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}7\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$

将此状态方程化为对角线标准型.

[解]:

1)求其特征值: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=1$$

2)确定非奇异矩阵P

当 $\lambda_1=2$ 时， $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} v_{21}+v_{31}=0\\ 3v_{21}=0\\ -2v_{21}+v_{31}=0\end{cases}$

$$\therefore v_{21} = v_{31} = 0, \qquad v_{11}\text{为任意常数} \qquad \text{取:}\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda_2 = -1$时，$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} -3v_{12} + v_{22} + v_{32} = 0 \\ -2v_{22} - 2v_{32} = 0 \end{cases}$

$$v_{22} = -v_{32}, \qquad v_{12} = 0 \qquad \text{取:}\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

同理当 $\lambda_3 = 1$ 时，得: $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

所以有 $P=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，并求得 $P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3）求 $\overline{A},\overline{B}$

$$\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

对角线标准型为：$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}u$

定理2：

对线性定常系统，如果其特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互异，且系数矩阵A是以上的友矩阵，则将系统状态方程化为对角线标准型的非奇异矩阵P是一个范德蒙矩阵，具有如下形式：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

[例]:

线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

将状态方程化为对角线标准型.

[解]:

1）确定系统特征值.

由特征值性质5）有:

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

得: $\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -1$

2)确定非奇异变换阵P

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad \text{求得 } P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

说明: P^{-1} 的另一种求法:

求得特征值后，可以直接写出对角线标准型的 $\bar{A}$ ，所以 P^{-1} 可以用待定系数法求得。

由$\overline{A}=P^{-1}AP$可得: $\overline{A}P^{-1}=P^{-1}A$

所以A和$\overline{A}$ 已知，可以解出 P^{-1}

故在本例中：

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

由上式得：$$\begin{bmatrix} 2p_{11} & 2p_{12} & 2p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & -p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p_{13} & p_{11}+p_{13} & p_{12}+2p_{13} \\ -2p_{23} & p_{21}+p_{23} & p_{22}+2p_{23} \\ -2p_{33} & p_{31}+p_{33} & p_{32}+2p_{33} \end{bmatrix}$$

求得： $$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

3)求 $\overline{A},\overline{B}$

$$\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\overline{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\7\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}$$

系统状态方程对角线标准型为:

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}u$$

二、将状态方程化为约当标准型（系统具有重特征根）

注意：对于每个特征根，其独立特征向量的个数为 $n - rank(\lambda I - A)$

1、具有重特征根，但A独立的特征向量的个数仍然为n个：

由线性代数矩阵的对角化，此时仍能变换成**对角线标准型**。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad rank(\lambda_1 I - A) = 1$ 2个独立特征向量

$\lambda_3 = 2 \quad rank(\lambda_3 I - A) = 2$ 1个独立特征向量

2、具有重特征根，且A独立特征向量的个数小于n个：

这种情况，不能变换成对角线标准型。故引入**约当标准型。**

此时进行线性变换，需增加广义特征向量，构成P变换阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad rank(\lambda_1 I - A) = 2$ 1个独立特征向量

$\lambda_3 = 2 \quad rank(\lambda_3 I - A) = 2$ 1个独立特征向量

3、约当矩阵定义：

•**约当块**：
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

由此看出，对角阵是一种特殊形式的约当矩阵。

•**约当矩阵**：由约当块组成的准对角线矩阵。

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & & & \\ & \tilde{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{A}_l \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i} \quad (i=1,2,\cdots,l)$$

其中：$m_1+m_2+\cdots+m_l=n$

其中：l是约当块块数，等于$\tilde{A}$独立特征向量的个数。

即**每个约当块有且仅有一个线性独立的特征向量**。

条件：约当块阶数 m_i 等于特征值重数的条件是——对应该重特征值的独立特征向量的个数为1个。**每个独立特征向量对应一个约当块。**

例如：当某个重特征值的重数为3，而对应于该特征值的独立特征向量 数为2时，约当块块数为2。

此时： $l=2$， 且$m_1+m_2=3$

某个重特征值对应多个约当块

$$\left|\begin{array}{cc:c} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_i \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c:cc} \lambda_i & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{array}\right|$$

说明：

对角线标准型：各状态变量间是完全解耦的。

约当标准型：各状态变量间最简单的耦合形式，每个变量至多和下一个变量有关联。

广义特征向量:

称一个非零向量 v_i 是矩阵A的属于 λ_i 的 k 级广义特征向量，当且仅当:

$$\begin{cases}(A-\lambda_i I)^k v_i = 0 \\ (A-\lambda_i I)^{k-1} v_i \neq 0\end{cases}$$

可以看出，当 $k=1$ 时，广义特征向量等于通常所定义的特征向量. 矩阵 A 的属于不同特征值的广义特征向量之间必为线性无关.

4、变换矩阵Q的确定：

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \xrightarrow{x=Q\tilde{x}} \begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u\\ y=\tilde{C}\tilde{x}+\tilde{D}u\end{cases}$$

其中：$\tilde{A}=Q^{-1}AQ$，$\tilde{B}=Q^{-1}B$，$\tilde{C}=CQ$，$\tilde{D}=D$

讨论的前提：

每个重特征值只对应一个独立特征向量的情况，只有一个约当块。 假设系统有 l 个特征值。

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_1 & & & \\ & \tilde{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{A}_l\end{bmatrix} \quad (1) \qquad \tilde{A}_j=\begin{bmatrix}\lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_j\end{bmatrix}_{m_j\times m_j} \quad (j=1,2,\cdots,l) \quad (2)$$

则：$Q=[Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_l]$，其中$Q_j$为对应于$\tilde{A}_j$的变换阵

$$Q_j=[v_{1j} \quad v_{2j} \quad \cdots \quad v_{m_j j}],\quad j=1,2\cdots l \quad (3)$$

关键：要确定Q，必须推导出 Q_j，目的是确定 m_j-1 个广义特征向量

推导过程：

$$\left.\begin{aligned} &Q=[Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_l] \\ &Q\tilde{A}=AQ \end{aligned}\right\} [Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_l]\tilde{A}=A[Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_l] \qquad (4)$$

将式(1)代入(4)得： $[Q_1\tilde{A}_1 \quad Q_2\tilde{A}_2 \quad \cdots \quad Q_l\tilde{A}_l]=[AQ_1 \quad AQ_2 \quad \cdots \quad AQ_l] \qquad (5)$

即： $Q_j\tilde{A}_j=AQ_j \qquad (j=1,2,\cdots,l) \qquad (6)$

将(2)(3)代入上式(6)得：

$$[v_{1j} \quad v_{2j} \quad \cdots \quad v_{m_j j}]\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}=A[v_{1j} \quad v_{2j} \quad \cdots \quad v_{m_j j}] \qquad (j=1,2,\cdots,l) \qquad (7)$$

由式(7)可以解出：

$$(\lambda_j I - A)v_{1j} = 0$$

$$(\lambda_j I - A)v_{2j} = -v_{1j}$$

$$\vdots$$

$$(\lambda_j I - A)v_{m_j j} = -v_{(m_j-1)j}$$

其中：v_{1j} 对应于 λ_j 的特征向量，其余为广义特征向量。这些向量构成 Q_j。

即：$Q_j = [v_{1j} \quad v_{2j} \quad \cdots \quad v_{m_j j}]$

[结论]：Q的求解步骤

假设系统有m个重特征根λ_1，其余为n-m个互异特征根，则Q阵的求法分为两块，一块是互异部分；另一块是重根部分。

$$设：Q=\begin{bmatrix}Q_1^{(1)} & Q_1^{(2)} & \cdots & Q_1^{(m)} & Q_{m+1} & \cdots & Q_n\end{bmatrix}$$

上式中，$Q_1^{(i)},(i=1\sim m)$为重根对应的特征向量；

$Q_j,(j=m+1\sim n)$为互异特征根对应的特征向量。

则$Q_1^{(1)},\cdots,Q_1^{(m)}$的求法为：

$$\begin{cases}(\lambda_1-A)Q_1^{(1)}=0\\(\lambda_1-A)Q_1^{(2)}=-Q_1^{(1)}\\\cdots\cdots\\(\lambda_1-A)Q_1^{(m)}=-Q_1^{(m-1)}\end{cases}$$

由此求得：$Q_1^{(1)},\cdots,Q_1^{(m)}$

5、状态方程化为约当标准型的步骤：

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量，对于重特征值，还要计算其广义特征向量。并由此组成非奇异变换阵Q。

3）由变换矩阵Q和矩阵A，B，C求出$\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$，其中约当矩阵$\tilde{A}$可以由特征值直接写出，只需求出$\tilde{B}$，$\tilde{C}$即可。

[例]：

线性定常系统状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 8 & -12 & 6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5\\ 1\\ 5\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

将此化为约当标准型.

[解]:

1)确定系统特征值

$$|\lambda I - A| = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -8 & 12 & \lambda-6 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda-2)^3 = 0$$

$\lambda_1 = 2$，三重根，即$m_1 = 3$.

2)确定系统特征向量，得到Q

$$(\lambda_1 I - A)v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -8 & 12 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2v_{11} - v_{21} = 0 \\ 2v_{21} - v_{31} = 0 \\ -8v_{11} + 12v_{21} - 4v_{31} = 0 \end{cases} \xRightarrow{v_{11}=1\text{时}} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1 I - A)v_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -8 & 12 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = -v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2v_{12} - v_{22} = -1 \\ 2v_{22} - v_{32} = -2 \\ -8v_{12} + 12v_{22} - 4v_{32} = -4 \end{cases} \xRightarrow{v_{12}=0\text{时}} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1 I - A)v_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -8 & 12 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = -v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2v_{13} - v_{23} = 0 \\ 2v_{23} - v_{33} = -1 \\ -8v_{13} + 12v_{23} - 4v_{33} = -4 \end{cases} \xrightarrow{v_{13}=0\text{时}} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以：$Q = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$，并求得$Q^{-1} = \dfrac{Q^*}{|Q|} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

3）求 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 21 \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = CQ = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

约当标准型为：$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases}$，其中 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$ 如上。

[例]：试将下列状态方程化为约当标准型：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

[例]：试将下列状态方程化为约当标准型：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

[解]：求特征值：$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = -2,$

$\lambda_1 = -1$ （二重根）时的特征向量为：

$$(\lambda_1 I - A)Q_1^{(1)} = 0 \Rightarrow Q_1^{(1)} = (1 \quad -1 \quad 1)^T$$

另一广义特征向量：

$$(\lambda_1 I - A)Q_1^{(2)} = -Q_1^{(1)} \Rightarrow Q_1^{(2)} = (1 \quad 0 \quad -1)^T$$

$\lambda_3 = -2$ 特征向量：

$$(\lambda_2 I - A)Q_3 = 0 \Rightarrow Q_3 = (1 \quad 2 \quad 4)^T$$

$$\therefore Q = \begin{bmatrix} Q_1^{(1)} & Q_1^{(2)} & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

有:

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

定理：如果系数矩阵A是友矩阵

如果其特征值 λ_1 是m重根，$\lambda_2, \lambda_3 \cdots \lambda_l$ 是两两相异的，则将系统状态方程化为Jordan约当标准型的非奇异矩阵Q，其形式为：

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & & \lambda_l \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & \lambda_2^2 & & \lambda_l^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & \cdots & 0 & \lambda_2^3 & & \lambda_l^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_1^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda_1^{n-3} & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!}\lambda_1^{n-m} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_l^{n-1} \end{bmatrix}$$

4. 线性变换（重点）

1）特征值的求法：$|\lambda I - A| = 0$

2）特征向量的求法：$Av_i = \lambda_i v_i$ 特征向量$P = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$

3）线性变换：

a、对角线标准型：

——具有n个互异特征根：

——具有重特征根，但A独立的特征向量的个数仍然为n个：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{x = P\bar{x}} \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

其中：$\bar{A} = P^{-1}AP$， $\bar{B} = P^{-1}B$， $\bar{C} = CP$， $\bar{D} = D$

b、约当标准型：

——具有重特征根，且A独立的特征向量的个数小于n个

此时需要广义特征向量：

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_j I - A)v_{1j} = 0 \\
&(\lambda_j I - A)v_{2j} = -v_{1j} \\
&\vdots \\
&(\lambda_j I - A)v_{m_j j} = -v_{(m_j-1)j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{x = Q\tilde{x}} \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u \end{cases}
$$

其中：$\tilde{A} = Q^{-1}AQ$，$\tilde{B} = Q^{-1}B$，$\tilde{C} = CQ$，$\tilde{D} = D$

$$Q=\begin{bmatrix}Q_1^{(1)} & Q_1^{(2)} & \cdots & Q_1^{(m)} & Q_{m+1} & \cdots & Q_n\end{bmatrix}$$

上式中，$Q_1^{(i)},(i=1\sim m)$ 为重根对应的特征向量；

$Q_j,(j=m+1\sim n)$ 为互异特征根对应的特征向量。

$Q_1^{(1)},\cdots,Q_1^{(m)}$ 的求法如下：

$$\begin{cases}(\lambda_1-A)Q_1^{(1)}=0\\(\lambda_1-A)Q_1^{(2)}=-Q_1^{(1)}\\\cdots\cdots\\(\lambda_1-A)Q_1^{(m)}=-Q_1^{(m-1)}\end{cases}$$

由此求得：$Q_1^{(1)},\cdots,Q_1^{(m)}$

$Q_{m+1},\cdots,Q_n$ 互异特征根对应的特征向量求法见对角线标准型

4）线性变换性质： 特征值和传递函数阵的不变性

3.6 线性变换

1、将状态空间表达式变换成对角线标准型

2、将状态空间表达式变换成约当标准型

3、将状态空间表达式变换成能控、能观标准型

[线性非奇异变换]:

含义:

如果P是一个非奇异阵，则将$x = P\bar{x}$变换称为线性非奇异变换。

满足:

$$\begin{cases} P(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = P\bar{x}_1 + P\bar{x}_2 = x_1 + x_2 & \text{叠加原理} \\ P(k\bar{x}) = kP\bar{x} = kx & \text{齐次性条件} \end{cases}$$

用途:

通过线性变换，可将状态方程变成对角线或约当标准型。

[系统状态空间表达式的非唯一性]:

含义：同一系统的不同状态变量可通过线性变换互相得到。

$$x = P\bar{x} \quad \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftarrows}} \quad \bar{x} = P^{-1}x$$

考虑系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

取线性非奇异变换：

$$\bar{x} = P^{-1}x$$

$$x = P\bar{x}，\quad 矩阵P非奇异$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\bar{x} + Du \end{cases}.$$

整理得：

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

其中：

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \qquad \bar{D} = D$$
$$\bar{C} = CP, \qquad \bar{B} = P^{-1}B.$$

例2.5.1　考虑系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

1）若选非奇异变换阵P为： $P=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \bar{C}=\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}$$

2）若选非奇异变换阵P为： $P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

对角线矩阵

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix},\quad \bar{C}=\begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix}$$

结论：不同的非奇异变换阵，对应不同的状态方程，**非唯一性**

[系统的特征值和特征向量]

对于系统矩阵A，若存在一非零向量v，使得：$Av=\lambda v$

则：
- λ →矩阵A的特征值（A特征方程的根）
- v →矩阵A对应于特征值 λ 的特征向量
- $\lambda I-A$ →矩阵A的特征矩阵
- $|\lambda I-A|=0$ →矩阵A的特征方程
- $|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ →矩阵A的特征多项式

<u>由定义知</u>：

设 λ_i 为A的一个特征值，若存在某个n维非零向量 v_i

使 $Av_i=\lambda_i v_i$ ，则称 v_i 为A的对应于 λ_i 的特征向量。

$$v_i=\begin{bmatrix}v_{1i} & v_{2i} & \cdots & v_{ni}\end{bmatrix}^T,\quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

[特征值及传递函数阵的性质]:

1）一个n维系统的 $n \times n$ 方阵A，有且仅有 n 个独立的特征值。

2）A为实数方阵，则n个特征值或为实数，或为共轭复数对。

3）对系统作线性非奇异变换，其特征值和传递函数阵不变。

$$\begin{cases} \sum(A,B,C) \text{ 系统1：特征多项式 } |\lambda I - A|\text{，传递函数阵 } G(s) \\ \sum(\bar{A},\bar{B},\bar{C}) \text{ 系统2：特征多项式 } |\lambda I - \bar{A}|\text{，传递函数阵 } \bar{G}(s) \end{cases}$$

则：$|\lambda I - \bar{A}| = |\lambda I - A|$ 　且 $\bar{G}(s) = G(s)$

其中：$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

4）设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为系统矩阵A的特征值，$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是A属于特征值的特征向量。当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两相异时，$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 线性无关，因此由这些特征向量组成的矩阵P必是非奇异的。

$$P=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

5）若系统矩阵A具有形式：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

则其特征多项式为：$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$

特征方程为：$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

[特征向量的计算]:

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量。

[例]:

求下列矩阵A的特征向量。 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$

[解]:

[特征向量的计算]:

1） 先求出系统矩阵A的所有特征值。

2） 对于每个特征值，计算其特征向量。

[例]:

求下列矩阵A的特征向量。 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$

[解]:

1） 计算特征值

A的特征方程为： $|\lambda I-A|=0$

A的特征值： $\lambda_1=-1$， $\lambda_2=-2$ ， $\lambda_3=-3$

2） 计算特征向量

$\lambda_1=-1$ 特征向量:

$(\lambda_1 I-A)v_1=0 \Rightarrow v_1=(1 \quad -1 \quad 1)^T$

$\lambda_2 = -2$ 特征向量：

$$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = (1 \quad -2 \quad 4)^T$$

$\lambda_2 = -2$ 特征向量：

$$(\lambda_3 I - A)v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = (1 \quad -3 \quad 9)^T$$

一、将状态方程化为对角线标准型

1、状态方程化为对角线标准型的步骤：

1）先求出系统矩阵A的所有特征值。

2）对于每个特征值，计算其特征向量。并由此组成非奇异变换阵P。

3）由变换矩阵P和矩阵A，B，C求出 $\overline{A}$， $\overline{B}$， $\overline{C}$ ，其中对角阵 $\overline{A}$ 可以由特征值直接写出，只需求出 $\overline{B}$， $\overline{C}$ 即可。

定理1：

对于线性定常系统$\sum(A,B,C)$，如果A特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异，则必存在非奇异变换矩阵P，通过变换 $x=P\bar{x}$ ，将原状态方程$\sum(A,B,C)$化为对角线规范形式$\sum(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ 。

其中：$\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，$\bar{B}=P^{-1}B$，$\bar{C}=CP$

证明：

1）找非奇异变换阵

由特征值性质4)知，由A特征向量构成的矩阵$P=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}$ 是非奇异的，故可选P为变换阵。

2）求 $\overline{A} = P^{-1}AP$

特征值定义 $Av_i = \lambda_i v_i$

$$AP = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

上式两端左乘 P^{-1} 得：$P^{-1}AP = P^{-1}P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$

证毕！

[例]

线性定常系统$\dot{x} = Ax + Bu$，其中：$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

将此状态方程化为对角线标准型.

[例]

线性定常系统$\dot{x}=Ax+Bu$，其中：$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}$

将此状态方程化为对角线标准型.

[解]:

1)求其特征值:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\0 & \lambda+1 & 0\\0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=1$$

2)确定非奇异矩阵P

当 $\lambda_1=2$ 时，

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 3 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}v_{21}+v_{31}=0\\3v_{21}=0\\-2v_{21}+v_{31}=0\end{cases}$$

$$\therefore v_{21}=v_{31}=0, \qquad v_{11}\text{为任意常数} \qquad \text{取:} \quad v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_2=-1\text{时,} \begin{bmatrix}-3 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow\begin{cases}-3v_{12}+v_{22}+v_{32}=0\\-2v_{22}-2v_{32}=0\end{cases}$$

$$v_{22}=-v_{32}, \qquad v_{12}=0 \qquad \text{取:} \quad v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\text{同理当 } \lambda_3=1\text{ 时,得:} \quad v_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

所以有 $P=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，并求得$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3）求 $\overline{A},\overline{B}$

$$\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

对角线标准型为： $\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}u$

定理2：

对线性定常系统，如果其特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互异，且系数矩阵A是以上的友矩阵，则将系统状态方程化为对角线标准型的非奇异矩阵P是一个范德蒙矩阵，具有如下形式：

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

[例]:

线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

将状态方程化为对角线标准型.

[解]:

1）确定系统特征值.

由特征值性质5）有:

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

得: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$

2)确定非奇异变换阵P

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad 求得\,P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

说明： P^{-1} 的另一种求法：

求得特征值后，可以直接写出对角线标准型的 $\bar{A}$ ，所以 P^{-1} 可以用待定系数法求得。

由$\overline{A}=P^{-1}AP$可得： $\overline{A}P^{-1}=P^{-1}A$

所以A和$\overline{A}$ 已知，可以解出 P^{-1}

故在本例中：

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

由上式得：
$$\begin{bmatrix} 2p_{11} & 2p_{12} & 2p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & -p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p_{13} & p_{11}+p_{13} & p_{12}+2p_{13} \\ -2p_{23} & p_{21}+p_{23} & p_{22}+2p_{23} \\ -2p_{33} & p_{31}+p_{33} & p_{32}+2p_{33} \end{bmatrix}$$

求得：
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

3)求 $\overline{A},\overline{B}$

$$\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\overline{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\7\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}$$

系统状态方程对角线标准型为:

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}u$$

二、将状态方程化为约当标准型（系统具有重特征根）

注意：对于每个特征根，其独立特征向量的个数为 $n-rank(\lambda I-A)$

1、具有重特征根，但A独立的特征向量的个数仍然为n个：

由线性代数矩阵的对角化，此时仍能变换成**对角线标准型**。

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$　$rank(\lambda_1 I-A)=1$　2个独立特征向量

$\lambda_3=2$　$rank(\lambda_3 I-A)=2$　1个独立特征向量

2、具有重特征根，且A独立特征向量的个数小于n个：

这种情况，不能变换成对角线标准型。故引入**约当标准型**。

<u>此时进行线性变换，需增加广义特征向量，构成P变换阵</u>

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$　$rank(\lambda_1 I-A)=2$　1个独立特征向量

$\lambda_3=2$　$rank(\lambda_3 I-A)=2$　1个独立特征向量

3、约当矩阵定义：

•约当块：
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

由此看出，对角阵是一种特殊形式的约当矩阵。

•约当矩阵：由约当块组成的准对角线矩阵。

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & & & \\ & \tilde{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{A}_l \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i} \quad (i=1,2,\cdots,l)$$

其中：$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n$

其中：l是约当块块数，等于$\tilde{A}$独立特征向量的个数。

即**每个约当块有且仅有一个线性独立的特征向量。**