拉普拉斯变换

●重点

(1) 拉普拉斯变换的基本原理和性质

(2) 掌握用拉普拉斯变换分析线性电路的方法和步骤

(3) 电路的时域分析变换到频域分析的原理

1 拉普拉斯变换的定义

1. 拉氏变换法

拉氏变换法是一种数学积分变换，其核心是把时间函数$f(t)$与复变函数F(s)联系起来，把时域问题通过数学变换为复频域问题，把时间域的高阶微分方程变换为复频域的代数方程以便求解。

例 熟悉的变换

1 对数变换 把乘法运算变换为加法运算

$$
\begin{array}{ccccc}
A & \times & B & = & AB \\
\downarrow & & \downarrow & & \uparrow
\end{array}
$$

$$\lg A + \lg B = \lg AB$$

2　相量法　把时域的正弦运算变换为复数运算

正弦量　$i_1 + i_2 = i$

$\downarrow \quad \downarrow \quad = \uparrow$

相量　$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}$

拉氏变换:

对应

时域函数$f(t)$ (原函数) $\Longleftrightarrow$ 复频域函数$F(s)$ (象函数)

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$$

s为复频率　$s = \sigma + j\omega$

应用拉氏变换进行电路分析称为电路的复频域分析法，又称运算法。

2. 拉氏变换的定义

$t<0$ ，$f(t)=0$

$$\begin{cases} F(\mathrm{s})=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t & \text{正变换} \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\mathrm{s})e^{st}\mathrm{d}s & \text{反变换} \end{cases}$$

$$0\begin{cases} 0^- & \text{积分下限从}0^-\text{开始，称为}0^-\text{拉氏变换。} \\ 0^+ & \text{积分下限从}0^+\text{开始，称为}0^+\text{拉氏变换。} \end{cases}$$

今后讨论的拉氏变换均为 0^- 拉氏变换, 计及$t=0$时$f(t)$包含的冲击。

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$$ 正变换

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$ 反变换

注 ① $F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

在t＝0⁻ 至t＝0⁺

$f(t)=\delta(t)$时此项 $\neq 0$

② 象函数F(s) 用大写字母表示, 如I(s)，U(s)。

原函数f(t) 用小写字母表示， 如 i(t), u(t)。

③ 象函数F(s) 存在的条件:

$$\int_{0^-}^{\infty}\left|f(t)e^{-st}\right|dt<\infty$$ e^{-st}为收敛因子

如果存在有限常数M和c使函数$f(t)$满足:

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad t \in [0, \infty)$$

则 $$\int_{0^-}^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt \leq \int_{0^-}^{\infty} Me^{-(s-c)t} dt = \frac{M}{s-C}$$

总可以找到一个合适的s值使上式积分为有限值，即$f(t)$的拉氏变换式F(s)总存在。

3. 典型函数的拉氏变换

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

(1) 单位阶跃函数的象函数

$$f(t)=\varepsilon(t)$$

$$F(s)=\mathscr{L}[\varepsilon(t)]=\int_{0^-}^{\infty}\varepsilon(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_{0^+}^{\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty}=\frac{1}{s}$$

(2) 单位冲激函数的象函数 $f(t)=\delta(t)$

$$F(s)=\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_{0^-}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)e^{-st}dt=e^{-s0}=1$$

(3) 指数函数的象函数 $f(t)=e^{at}$

$$F(s)=\mathscr{L}\left[e^{at}\right]=\int_{0^-}^{\infty}e^{at}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s-a}$$

2 拉普拉斯变换的基本性质

1. 线性性质

若 $\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathscr{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

则 $\mathscr{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1\mathscr{L}[f_1(t)] + a_2\mathscr{L}[f_2(t)]$

$$= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

证：$\mathscr{L}\left[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)\right] = \int_0^\infty \left[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)\right] e^{-st} dt$

$$= \int_0^\infty A_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty A_2 f_2(t) e^{-st} dt$$

$$= A_1 F_1(S) + A_2 F_2(S)$$

根据拉氏变换的线性性质，求函数与常数相乘及几个函数相加减的象函数时，可以先求各函数的象函数再进行计算。

例1　求：$f(t)=U\varepsilon(t)$的象函数

解

$$F(s)=\mathscr{L}[U\varepsilon(t)]=U\mathscr{L}[\varepsilon(t)]=\frac{U}{S}$$

例2　求：$f(t)=\sin(\omega t)$的象函数

解

$$F(s)=\mathscr{L}[\sin(\omega t)]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{S-j\omega}-\frac{1}{S+j\omega}\right]=\frac{\omega}{S^2+\omega^2}$$

2. 微分性质

①时域导数性质

$$\int udv = uv - \int vdu$$

若：$\mathscr{L}[f(t)] = F(S)$

则 $\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0_-)$

证：$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} df(t)$

$$= e^{-st} f(t)\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)(-s)dt$$

$$= -f(0^-) + sF(s)$$

例1　求：$f(t)=\cos(\omega t)$的象函数

解
$$\frac{d\sin(\omega t)}{dt}=\omega\cos(\omega t)\Rightarrow\cos(\omega t)=\frac{1}{\omega}\frac{d\sin(\omega t)}{dt}$$

$$\mathscr{L}[\cos\omega t]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}(\sin(\omega t)\right]$$

$$=\frac{s}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}-0=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

例2

求：$f(t)=\delta(t)$的象函数

解

$$\delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \qquad \mathscr{L}[\varepsilon(t)]=\frac{1}{s}$$

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right]=S\frac{1}{S}=1$$

推广：

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=s[sF(s)-f(0^-)]-f'(0^-)$$

$$=S^2F(S)-Sf(0^-)-f'(0^-)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]=S^nF(S)-S^{n-1}f(0^-)-\cdots-f^{n-1}(0^-)$$

②频域导数性质

设：$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ 则：$\mathscr{L}[-tf(t)] = \dfrac{dF(s)}{ds}$

证：$\dfrac{d}{ds}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-t)e^{-st}dt$

$= \mathscr{L}[-tf(t)]$

例1 求：$f(t) = t\varepsilon(t)$的象函数

解 $\mathscr{L}[t\varepsilon(t)] = -\dfrac{d}{ds}(\dfrac{1}{S}) = (\dfrac{1}{S^2})$

例2　求：$f(t)=t^n\varepsilon(t)$的象函数

解　$\mathscr{L}[t^n\varepsilon(t)]=(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}(\dfrac{1}{s})=(\dfrac{n!}{s^{n+1}})$

例3　求：$f(t)=te^{-at}$的象函数

解　$\mathscr{L}[te^{-\alpha t}]=-\dfrac{d}{ds}(\dfrac{1}{s+\alpha})=\dfrac{1}{(s+\alpha)^2}$

3. 积分性质

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) \qquad \mathscr{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

证：令 $\mathscr{L}[\int_{0^-}^{t} f(t)dt] = \varphi(s)$

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right]$$

应用微分性质

$$\Rightarrow F(s) = s\varphi(s) - \int_{0^-}^{t} f(t)dt\Big|_{t=0^-} \qquad \therefore \quad \varphi(s) = \frac{F(s)}{s}$$

例 求：$f(t) = t\varepsilon(t)$和$f(t) = t^2\varepsilon(t)$的象函数

解 $\mathscr{L}[t\varepsilon(t)] = \mathscr{L}[\int_{0^-}^{\infty}\varepsilon(t)dt] = \frac{1}{s}\frac{1}{s}$

$\mathscr{L}[t^2\varepsilon(t)] = \frac{2}{s^3} \qquad \because [t^2\varepsilon(t)] = 2\int_0^t tdt$

4. 延迟性质

设： $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ 则： $\mathscr{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$

注 $f(t-t_0) = 0$ 当 $t < t_0$

证： $\mathscr{L}\left[f(t-t_0)\right] = \int_{0^-}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt$

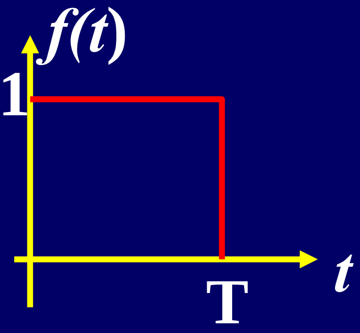
$$= \int_{t_0^-}^{\infty} f(t-t_0)e^{-s(t-t_0)}e^{-st_0}dt$$

令 $t - t_0 = \tau$

$$= e^{-st_0}\int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-st_0}F(s)$$

e^{-st_0} 延迟因子

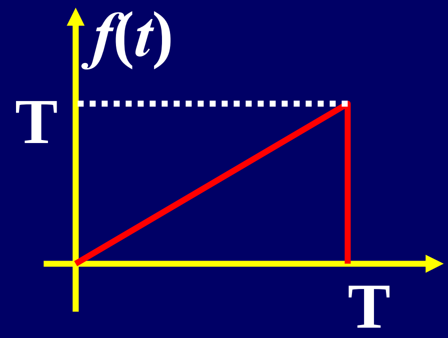
例1　求矩形脉冲的象函数



解　$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)$$

根据延迟性质　$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT}$$

例2　求三角波的象函数



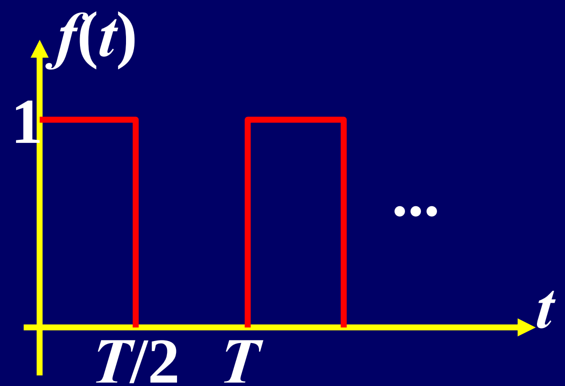
解　$$f(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-sT}}{s^2}$$

$$f(t)=t\varepsilon(t)-(t-T)\varepsilon(t-T)-T\varepsilon(t-T)$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-sT}-\frac{T}{s}e^{-sT}$$

例3　求周期函数的拉氏变换



解　设$f_1(t)$为第一周函数

$$\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s)$$

则：$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} F_1(s)$$

证：$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T)\varepsilon(t-T) + f_1(t-2T)\varepsilon(t-2T) + \cdots$$

$$\mathscr{L}[f(t)] = F_1(s) + e^{-sT}F_1(s) + e^{-2sT}F_1(s) + \cdots$$

$$= F_1(s)[e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \cdots] = \frac{1}{1-e^{-sT}} F_1(s)$$

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}F_1(s)$$

本例中： $$f_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\frac{T}{2})$$

$\therefore$ $$F_1(s)=(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT/2})$$

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT/2})=\frac{1}{S}(\frac{1}{1+e^{-ST/2}})$$

$$F(S+\alpha)=L[e^{-\alpha t}f(t)]$$

$$L[t\varepsilon(t)]=\frac{1}{S^2}$$

例1: $L[te^{-\alpha t}\varepsilon(t)] = \dfrac{1}{(S+\alpha)^2}$

例2: $L[e^{-\alpha t}\cos\omega t\varepsilon(t)]=\dfrac{S+\alpha}{(S+\alpha)^2+\omega^2}$

五.初值定理和终值定理

$$L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

初值定理: $f(t)$在$t=0$处无冲激则

$$f(0^+)=\lim_{t\to 0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}SF(S)$$

终值定理: $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$存在时

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}SF(S)$$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} SF(S)$$

证：利用导数性质

$$\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty}\frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt=\lim_{s\to 0}[SF(S)-f(0^-)]$$

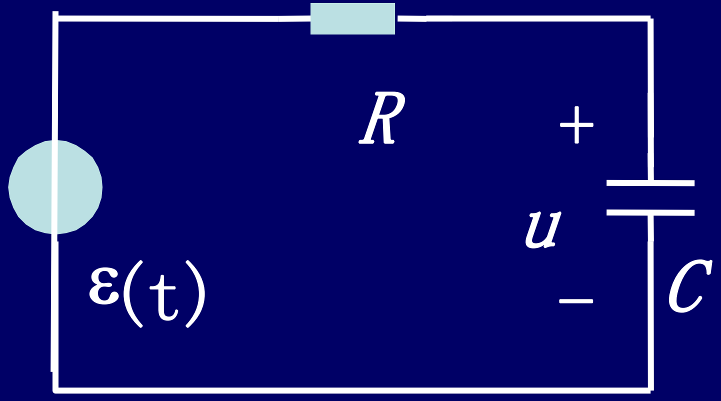
$$\int_{0^-}^{\infty}\frac{d}{dt}f(t)\lim_{s\to 0}e^{-st}dt=f(t)\Big|_{0^-}^{\infty}$$

$$=f(\infty)-\cancel{f(0^-)}=\lim_{s\to 0}SF(S)-\cancel{f(0^-)}$$

例1：已知$F(S)=\dfrac{3S^2+4S+5}{S(S^2+2S+3)}$求$f(0^+)$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{3S^2+4S+5}{(S^2+2S+3)}=3$$

例2：



$$u_c(0^-)=0$$

$$RC\frac{du}{dt}+u=\varepsilon(t)$$

$$SRCU(S)+U(S)=\frac{1}{S}$$

$$U(S)=\frac{1}{S(1+SRC)}$$

校验：

$$u(0^+)=\lim_{s\to\infty}\cancel{S}\frac{1}{\cancel{S}(1+SRC)}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{(1+SRC)}=0$$

$$u(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(1+SRC)}=1$$

小结：

$$\xrightarrow{\text{积分}}$$

$$\delta(t) \qquad \varepsilon(t) \qquad t\varepsilon(t) \quad \cdots \quad t^n\varepsilon(t)$$

$$1 \qquad \frac{1}{S} \qquad \frac{1}{S^2} \quad \cdots \quad \frac{n!}{S^{n+1}}$$

$$\xleftarrow{\text{微分}}$$

$$\sin\omega t\varepsilon(t) \qquad \cos\omega t\varepsilon(t) \qquad e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \qquad e^{-\alpha t}\sin\omega t\varepsilon(t)$$

$$\frac{\omega}{S^2+\omega^2} \qquad \frac{S}{S^2+\omega^2} \qquad \frac{1}{S+\alpha} \qquad \frac{\omega}{(S+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$e^{-\alpha t}t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{n!}{(S+\alpha)^{n+1}} \qquad L[f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)] = e^{-st_0}F(S)$$

3 拉普拉斯反变换的部分分式展开

用拉氏变换求解线性电路的时域响应时，需要把求得的响应的拉氏变换式反变换为时间函数。

由象函数求原函数的方法:

(1) 利用公式 $$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

(2) 对简单形式的F(S)可以查拉氏变换表得原函数

(3) 把F(S)分解为简单项的组合

部分分式展开法

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

$$\longrightarrow f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)$$

象函数的一般形式:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_n}\quad(n\ge m)$$

设$n>m$，$F(s)$为真分式

① 若$D(s)=0$有n个单根分别为$p_1\cdots p_n$

待定常数

利用部分分式可将$F(s)$分解为:

$$(s-p_1)F(s)=\cancel{\frac{(s-p_1)k_1}{s-p_1}}+\frac{(s-p_1)k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{(s-p_1)k_n}{s-p_n}$$

$$\longrightarrow\quad f(t)=k_1e^{p_1t}+k_2e^{p_2t}+\cdots k_ne^{p_nt}$$

待定常数的确定:

方法1

$$k_i = F(s)(s-p_i)\big|_{s=p_i} \qquad i = 1、2、3\cdots、n$$

方法2

求极限的方法

$$k_i = \lim_{s\to p_i}\frac{N(s)(s-p_i)}{D(s)}$$

$$= \lim_{s\to p_i}\frac{N^{'}(s)(s-p_i)+N(s)}{D^{'}(s)} = \frac{N(p_i)}{D^{'}(p_i)}$$

例 求$F(s)=\dfrac{4s+5}{s^2+5s+6}$的原函数

解法1 $$F(s)=\frac{4s+5}{s^2+5s+6}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}$$

$$K_1=\frac{4s+5}{s+3}\Big|_{s=-2}=-3 \qquad K_2=\frac{4s+5}{s+2}\Big|_{s=-3}=7$$

解法2 $$K_1=\frac{N(p_1)}{D'(p_1)}=\frac{4s+5}{2s+5}\Big|_{s=-2}=-3$$

$$K_2=\frac{N(p_2)}{D'(p_2)}=\frac{4s+5}{2s+5}\Big|_{s=-3}=7$$

$$f(t)=-3e^{-2t}\varepsilon(t)+7e^{-3t}\varepsilon(t)$$

原函数的一般形式:

$$f(t)=\frac{N(p_1)}{D'(p_1)}e^{p_1 t}+\frac{N(p_2)}{D'(p_2)}e^{p_2 t}+\cdots+\frac{N(p_n)}{D'(p_n)}e^{p_n t}$$

② 若$D(s)=0$有共轭复根

一对共轭复根为一分解单元设:

$$\begin{cases} p_1=\alpha+j\omega \\ p_2=\alpha-j\omega \end{cases}$$

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-\alpha-j\omega)(s-\alpha+j\omega)D_1(s)}$$

$$=\frac{K_1}{s-\alpha-j\omega}+\frac{K_2}{s-\alpha+j\omega}+\frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

K_1,K_2也是一对共轭复根

设$K_1=|K|e^{j\theta} \quad K_2=|K|e^{-j\theta}$

$$f(t)=(K_1e^{(\alpha+j\omega)t}+K_2e^{(\alpha-j\omega)t})+f_1(t)$$

$$=(|K|e^{j\theta}e^{(\alpha+j\omega)t}+|K|e^{-j\theta}e^{(\alpha-j\omega)t})+f_1(t)$$

$$=|K|e^{\alpha t}[e^{j(\omega t+\theta)}+e^{-j(\omega t+\theta)}]+f_1(t)$$

$$=2|K|e^{\alpha t}\cos(\omega t+\theta)+f_1(t)$$

例　求$F(s)=\dfrac{s}{s^2+2s+5}$的原函数$f(t)$

解　$s^2+2s+5=0$的根:　$p_{1,2}=-1\pm j2$

$$K_1=\left.\frac{s}{s-(-1-2j)}\right|_{s=-1+j2}=0.5-j0.5=0.559\angle 26.6^\circ$$

$$K_2=\left.\frac{s}{s-(-1+2j)}\right|_{s=-1-j2}=0.559\angle -26.6^\circ$$

或: $K_1=\dfrac{N(s)}{D'(s)}=\left.\dfrac{s}{2s+2}\right|_{s=-1+j2}=0.559\angle 26.6^\circ$

$$f(t)=2\times 0.559e^{-t}\cos(2t+26.6^\circ)\varepsilon(t)$$

方法二：配方法，根据 $\mathscr{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$\frac{S}{S^2+2S+5}=\frac{S+1-1}{(S+1)^2+2^2}=\frac{S+1}{(S+1)^2+2^2}-\frac{1}{(S+1)^2+2^2}$$

$$f(t)=e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \;=1.118e^{-t}\cos(2t+26.6^\circ)$$

③ 若$D(s)=0$具有重根

$$F(s)=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\cdots+a_m}{(s-p_1)^n}$$

$$F(s)=\frac{K_{11}}{s-p_1}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^2}+\cdots+\frac{K_{1n-1}}{(s-p_1)^{n-1}}+\frac{K_{1n}}{(s-p_1)^n}$$

$$F(s)=\frac{K_{11}}{s-p_1}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^2}+\cdots+\frac{K_{1n-1}}{(s-p_1)^{n-1}}+\frac{K_{1n}}{(s-p_1)^n}$$

$$K_{1n}=[(s-p_1)^n F(s)]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1n-1}=[\frac{d}{ds}(s-p_1)^n F(s)]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1n-2}=[\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}(s-p_1)^n F(s)]\Big|_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$K_{11}=\left[\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(s-p_1)^n F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

例 求：$F(s)=\dfrac{s+4}{s(s+1)^2}$的原函数$f(t)$

解 $$F(s)=\frac{s+4}{s(s+1)^2}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_{21}}{(s+1)}+\frac{K_{22}}{(s+1)^2}$$

$$K_1=\frac{s+4}{(s+1)^2}\Big|_{s=0}=4$$

$$K_{22}=\frac{s+4}{s}\Big|_{s=-1}=-3$$

$$K_{21}=\frac{d}{ds}[(s+1)^2F(s)]\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}[\frac{s+4}{s}]\Big|_{s=-1}=-4$$

$$f(t)=4-4e^{-t}-3te^{-t}$$

小结

由$F(s)$求$f(t)$ 的步骤:

1． $n=m$ 时将$F(s)$化成真分式和多项式之和

$$F(s)=A+\frac{N_0(s)}{D(s)}$$

2． 求真分式分母的根，确定分解单元

$$F(s)=A+\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

3． 将真分式展开成部分分式，求各部分分式的系数

4． 对每个部分分式和多项式逐项求拉氏反变换 。

例

求：$F(s)=\dfrac{s^2+9s+11}{s^2+5s+6}$的原函数

解

$$F(s)=\frac{s^2+9s+11}{s^2+5s+6}=1+\frac{4s+5}{s^2+5s+6}$$

$$=1+\frac{-3}{s+2}+\frac{7}{s+3}$$

$$f(t)=\delta(t)+(7e^{-3t}-3e^{-2t})$$

13.4 运算电路

1. 电路定律的运算形式

基尔霍夫定律的时域表示: $\sum i(t)=0 \quad \sum u(t)=0$

相量法:

基尔霍夫定律的相量表示: $i \rightarrow \dot{I} \quad u \rightarrow \dot{U}$

相量形式KCL、KVL $\sum \dot{I}=0 \quad \sum \dot{U}=0$

元件 $\rightarrow$ 复阻抗、复导纳 $\dot{U}=Z\dot{I}$

$\longrightarrow$ 相量形式电路模型

运算法与相量法的基本思想类似:

① 把时间函数变换为对应的象函数

电路定律的运算形式: $u(t) \rightarrow U(s)$ $\quad i(t) \rightarrow I(s)$

② 把微积分方程变换为以象函数为变量的线性代数方程

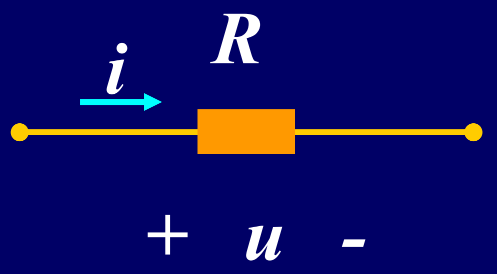
运算形式的KCL、KVL $\sum I(s) = 0$ $\quad \sum U(s) = 0$

元件 → 运算阻抗、运算导纳 $U(s) = Z(s)I(s)$

→ 运算形式电路模型

2. 电路元件的运算形式

① 电阻R的运算形式



$$u=Ri$$

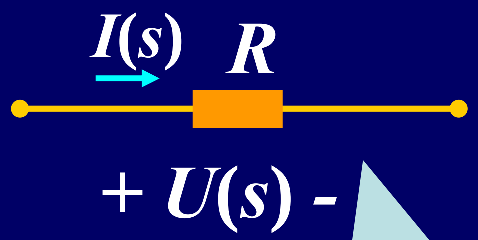
取拉氏变换

$$U(s)=RI(s)$$

$$I(s)=GU(s)$$

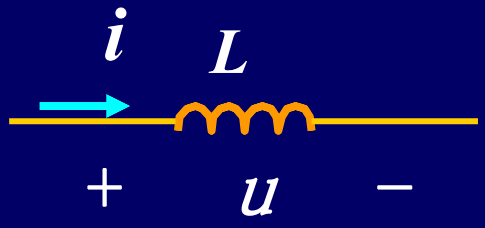
$$Z(s)=R$$

$$Y(s)=G$$



电阻的运算电路

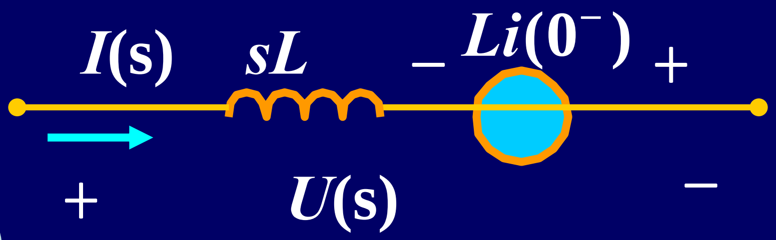
② 电感L的运算形式



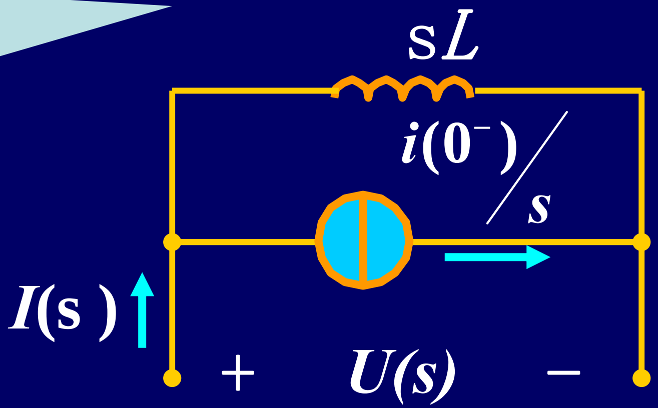
$$u = L\frac{di}{dt}$$

取拉氏变换

$$U(s) = L(sI(s) - i(0^-))$$
$$= sLI(s) - Li(0^-)$$



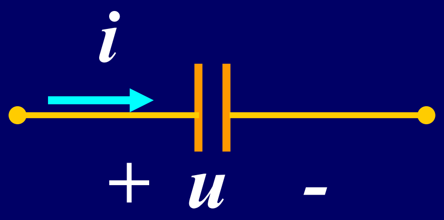
L的运算电路



$$I(s) = \frac{U(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$$

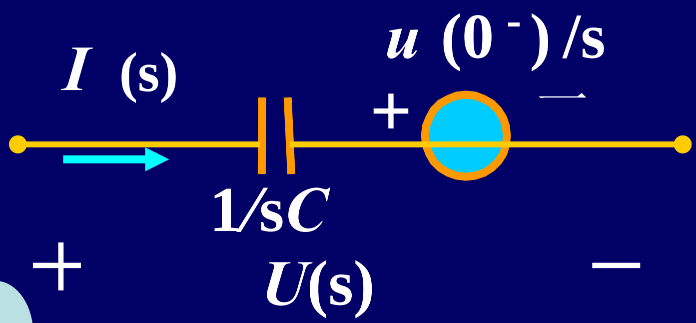
$$Z(s) = sL$$
$$Y(s) = 1/sL$$

③ 电容*C*的运算形式



$$u = u(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i\,dt$$

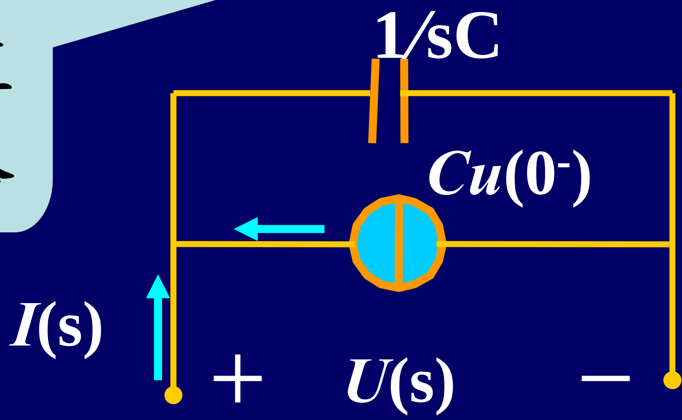
取拉氏变换



$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0^-)}{s}$$

$$I(s) = sCU(s) - Cu(0^-)$$

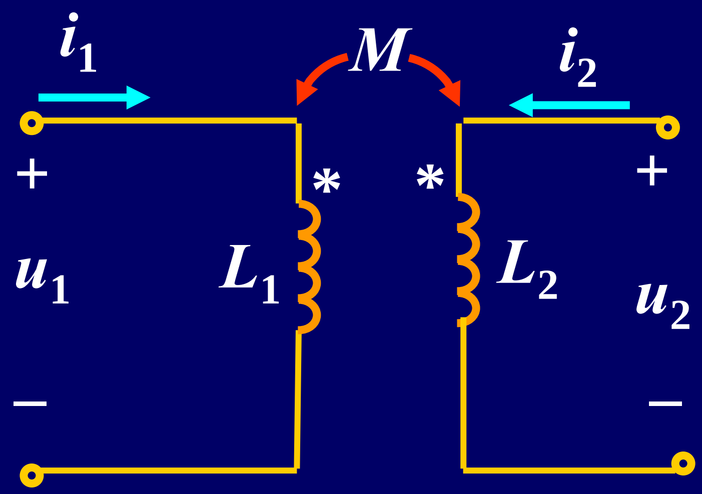
*C*的运算电路



$$Z(s) = 1/sC$$

$$Y(s) = sC$$

④ 耦合电感的运算形式

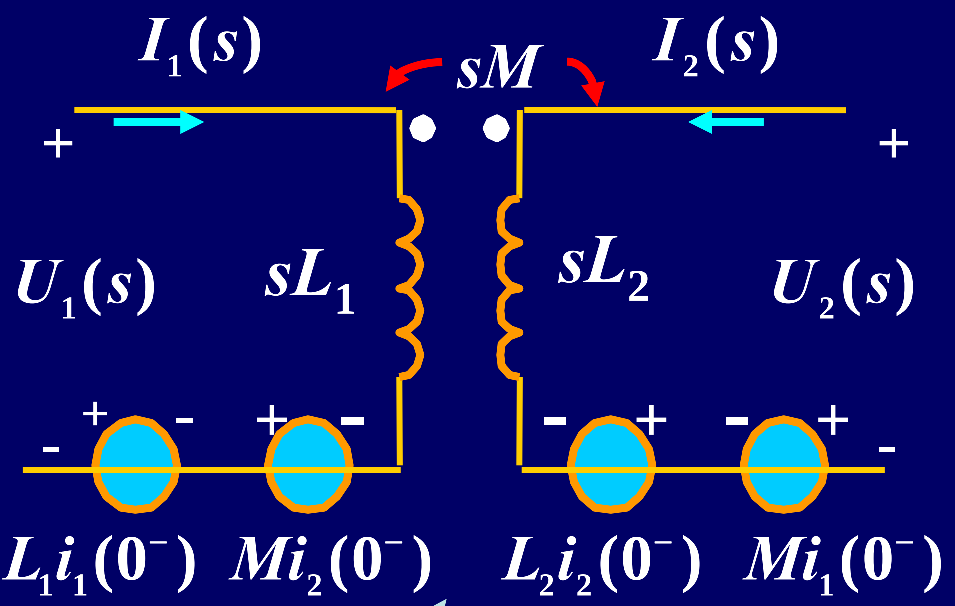


$$\begin{cases} u_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

取拉氏变换

$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1I_1(s) - L_1i_1(0^-) + sMI_2(s) - Mi_2(0^-) \\ U_2(s) = sL_2I_2(s) - L_2i_2(0^-) + sMI_1(s) - Mi_1(0^-) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0^-) + sMI_2(s) - Mi_2(0^-) \\
U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0^-) + sMI_1(s) - Mi_1(0^-)
\end{cases}
$$

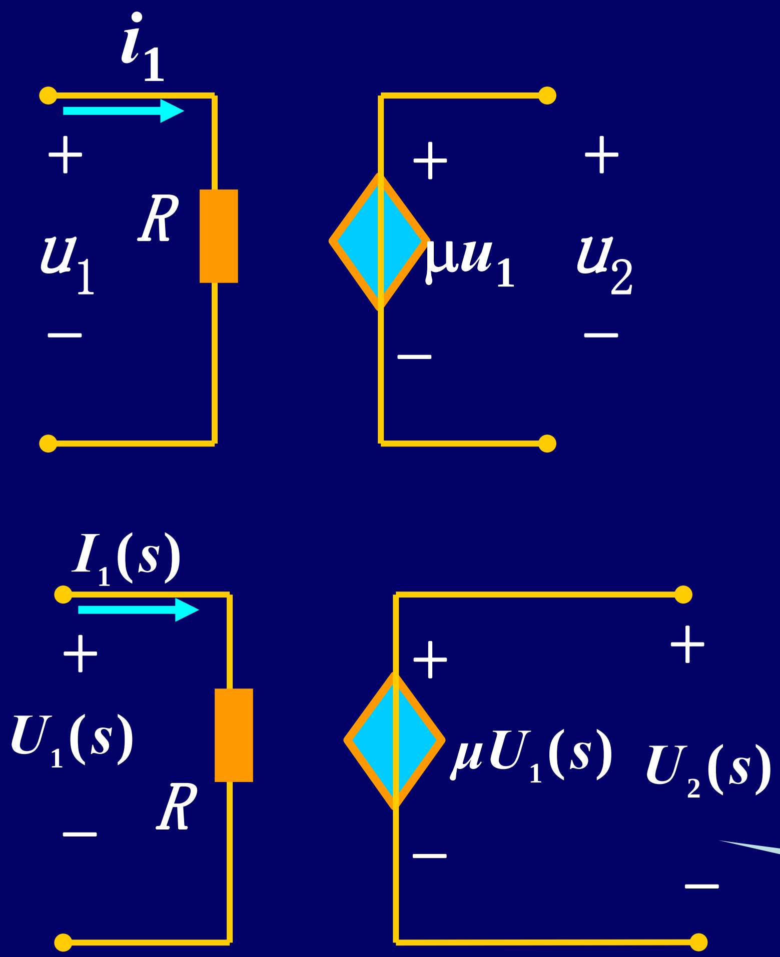


$$Z_M(s) = sM$$

$$Y_M(s) = 1/sM$$

耦合电感的运算电路

⑤ 受控源的运算形式



$$u_1 = i_1 R$$
$$u_2 = \mu u_1$$

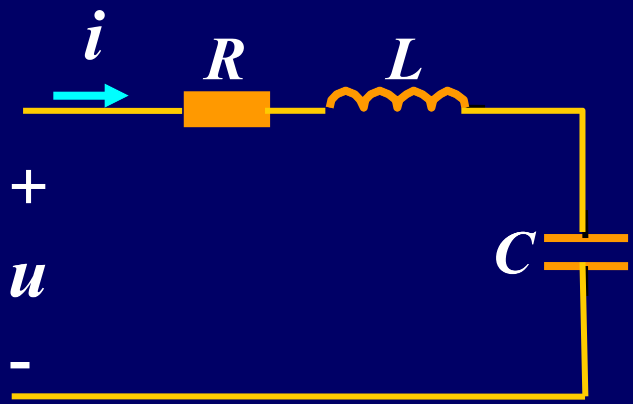
↓ 取拉氏变换

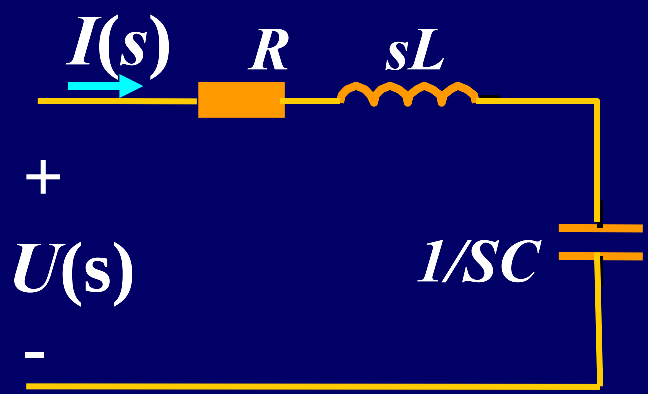
$$U_1(s) = I_1(s) R$$
$$U_2(s) = \mu U_1(s)$$

受控源的运算电路

3. 运算电路模型

*RLC*串联电路的运算形式





时域电路　　拉氏变换 → 　　运算电路

$$u_c(0^-)=0 \quad i_L(0^-)=0$$

$$u = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_c dt$$

$$U(s)=I(s)R+sLI(s)+\frac{1}{SC}I(s)$$

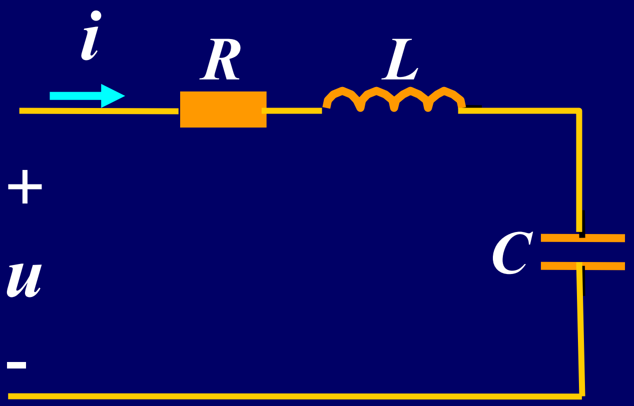
$$=I(s)(R+sL+\frac{1}{sC})=I(s)Z(s)$$

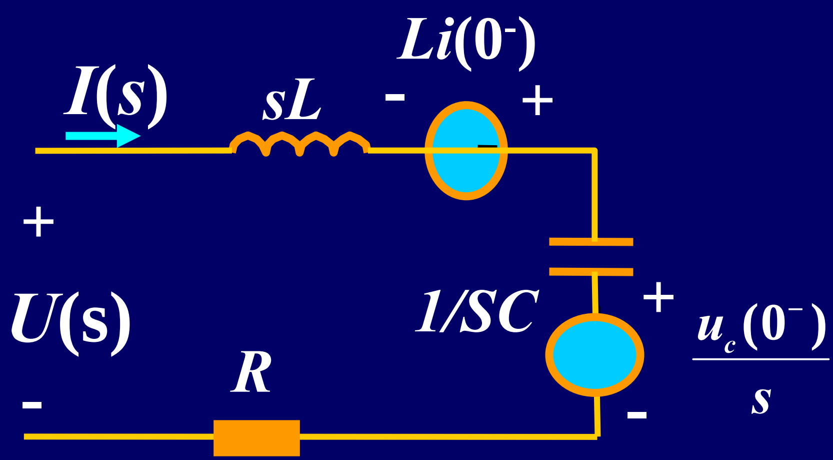
$$Z(s)=\frac{1}{Y(s)}=R+sL+\frac{1}{sC}$$

运算阻抗

$$\begin{cases} U(s) = Z(s)I(s) \\ I(s) = Y(s)U(s) \end{cases}$$

运算形式
欧姆定律





$u_c(0^-) \neq 0 \quad i_L(0^-) \neq 0$

$$U(s) = I(s)R + sLI(s) - Li(0^-) + \frac{1}{SC}I(s) + \frac{u_C(0^-)}{s}$$

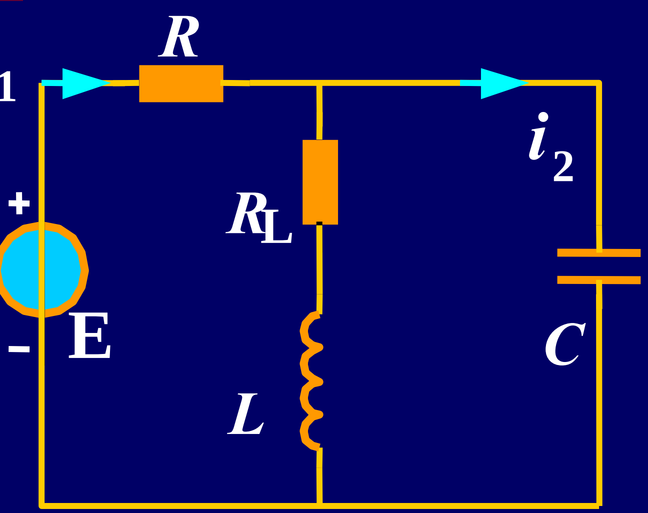
$$(R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = Z(s)I(s) = U(s) + Li(0^-) - \frac{u_C(0^-)}{s}$$

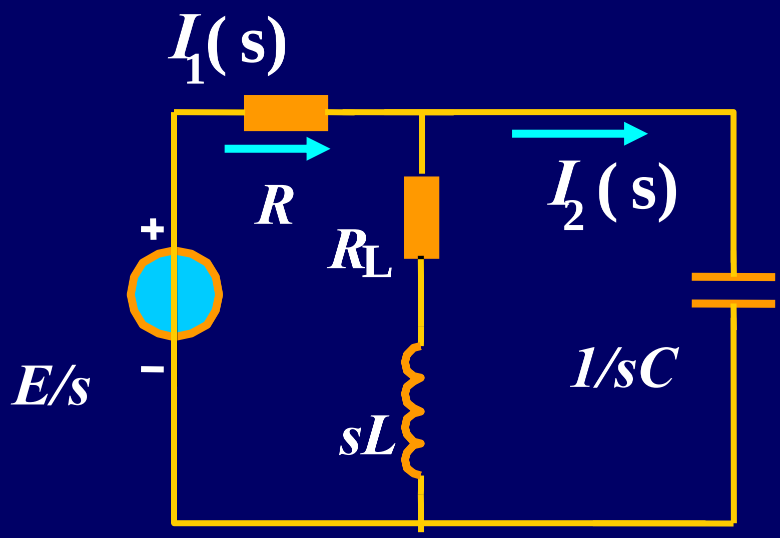
电压、电流用象函数形式

元件用运算阻抗或运算导纳

电容电压和电感电流初始值用附加电源表示

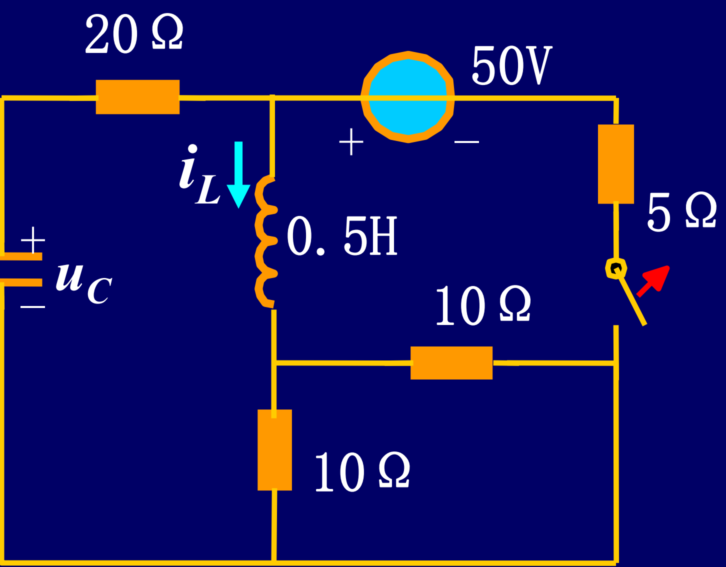
给出图示电路的运算电路模型





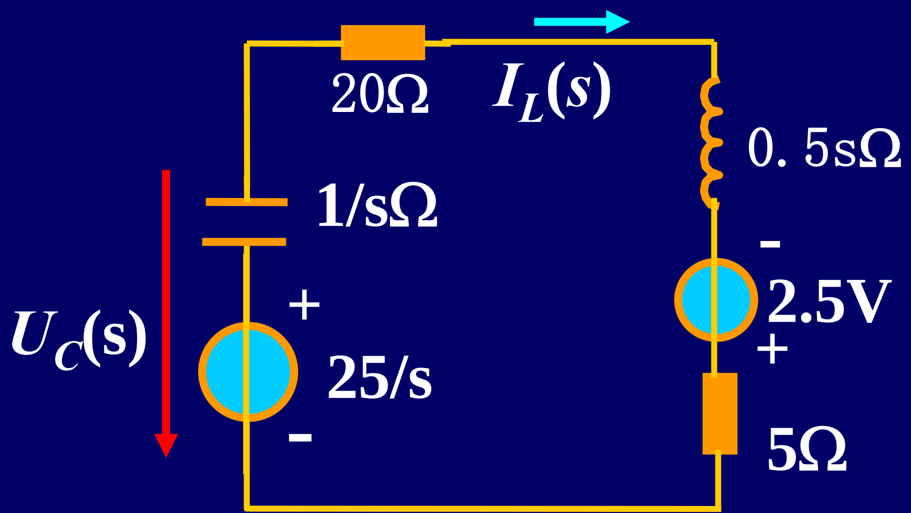
$u_C(0^-) = 0 \quad i_L(0^-) = 0$

给出图示电路的运算电路模型



t=0时打开开关

时域电路



$t>0$ 运算电路

$u_c(0^-)=25V$ $i_L(0^-)=5A$

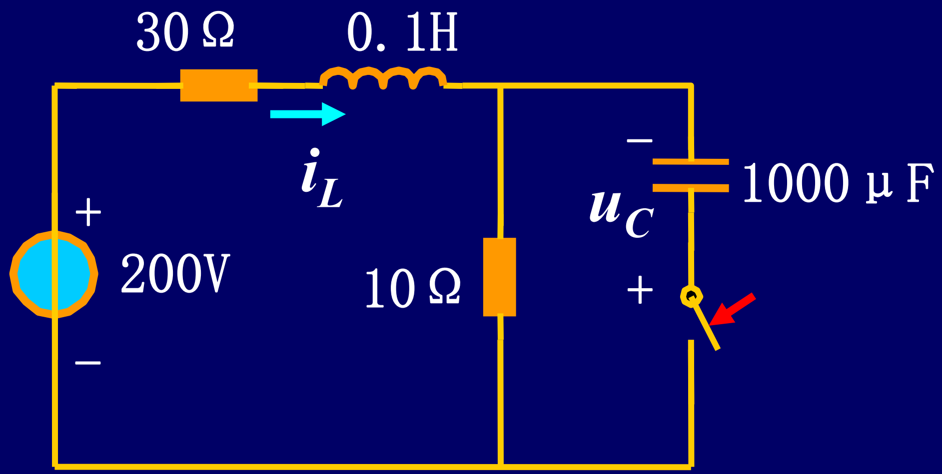
.5 应用拉普拉斯变换法分析线性电路

算步骤：

1. 由换路前的电路计算$u_c(0^-)$, $i_L(0^-)$ 。
2. 画运算电路模型，注意运算阻抗的表示和附加电源的作用。
3. 应用电路分析方法求象函数。
4. 反变换求原函数。

电路原处于稳态，$t=0$时开关闭合，用运算法 求i_L, u_L,

已知：$u_C(0^-)=100V$



(1) 计算初值

$$u_c(0^-)=100V$$

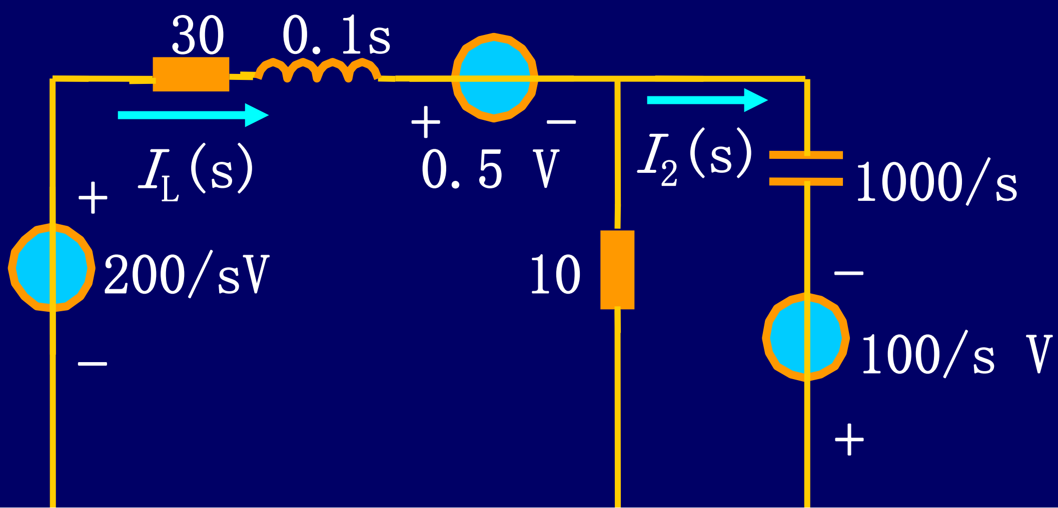
$$i_L(0^-)=5A$$

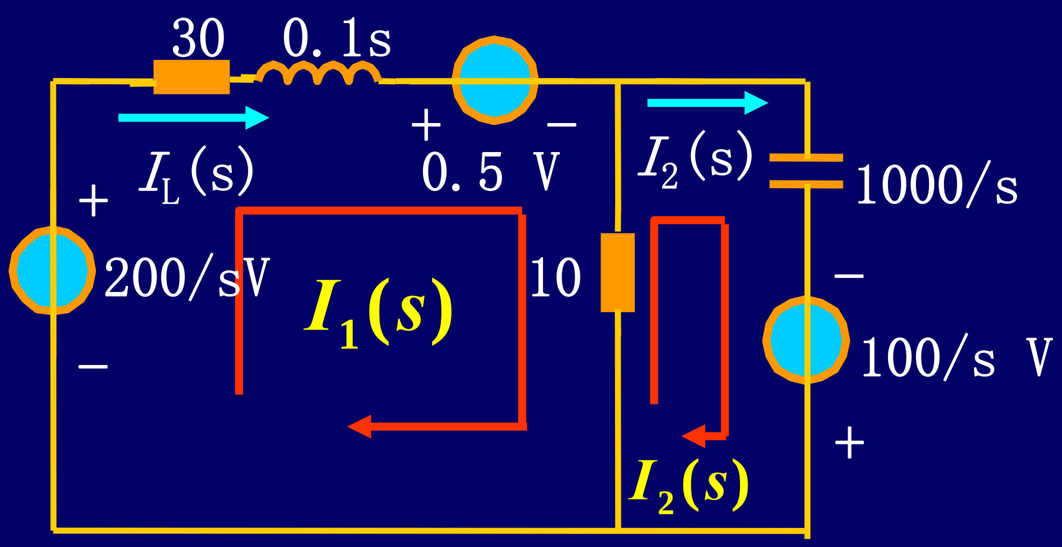
2) 画运算电路

$$sL=0.1s$$

$$= \frac{1}{s\times 1000\times 10^{-6}}$$

1000





回路法

$$\begin{cases} I_1(s)(40+0.1s)-10I_2(s)=\dfrac{200}{s}+0.5 \\ -10I_1(s)+(10+\dfrac{1000}{s})I_2(s)=\dfrac{100}{s} \end{cases}$$

$$I_1(s)=\frac{5(s^2+700s+40000)}{s(s+200)^2}$$

$$I_1(s) = \frac{5(s^2 + 700s + 40000)}{s(s+200)^2}$$

(4) 反变换求原函数

$D(s) = 0$有3个根： $p_1 = 0,\ \ p_2 = p_3 = -200$

$$I_1(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{s+200} + \frac{K_{22}}{(s+200)^2}$$

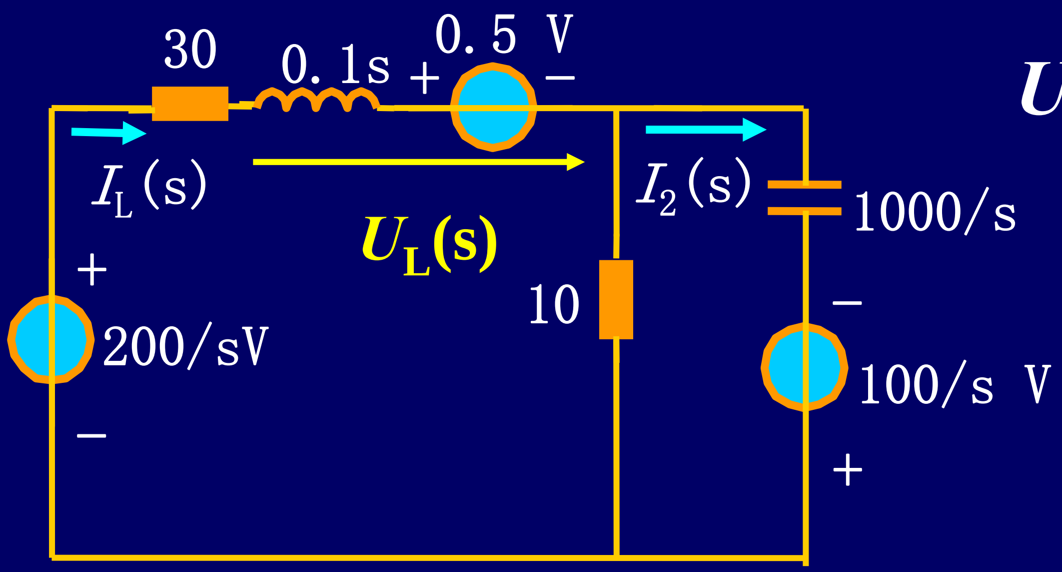
$$K_1 = F(s)s\Big|_{s=0} = \frac{5(S^2 + 700S + 40000)}{S^2 + 400S + 200^2}\Big|_{S=0} = 5$$

$$K_{22} = F(s)(s+200)^2\Big|_{s=-200} = 1500$$

$$I_1(s)=\frac{5}{s}+\frac{0}{(s+200)}+\frac{1500}{(s+200)^2}$$

$$i_1(t)=i_L(t)=(5+1500te^{-200t})A$$

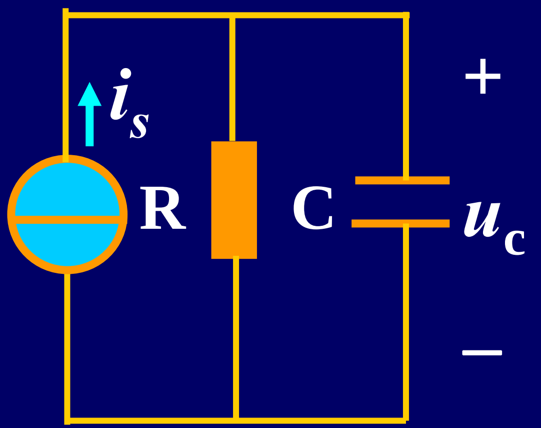
注意

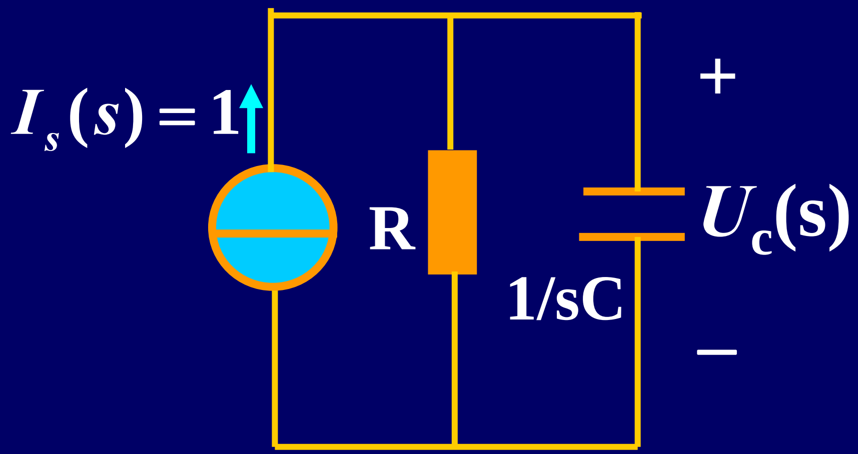


$$U_L(s)\neq I_1(s)sL$$

$$U_L(s)=I_1(s)sL-0.5\;=\frac{150}{s+200}+\frac{-30000}{(s+200)^2}$$

已知图示电路 $i_s = \delta(t),\ u_c(0^-) = 0$ 求冲激响应

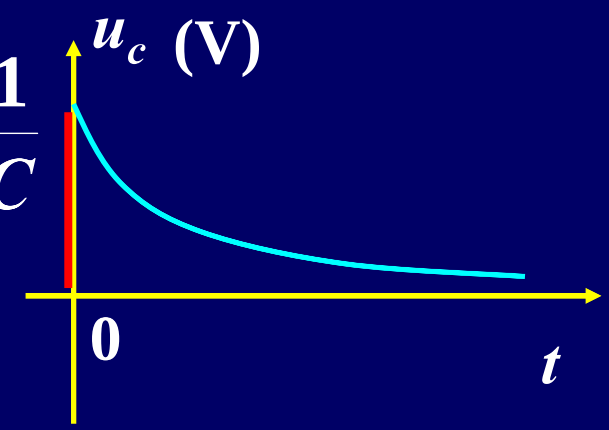


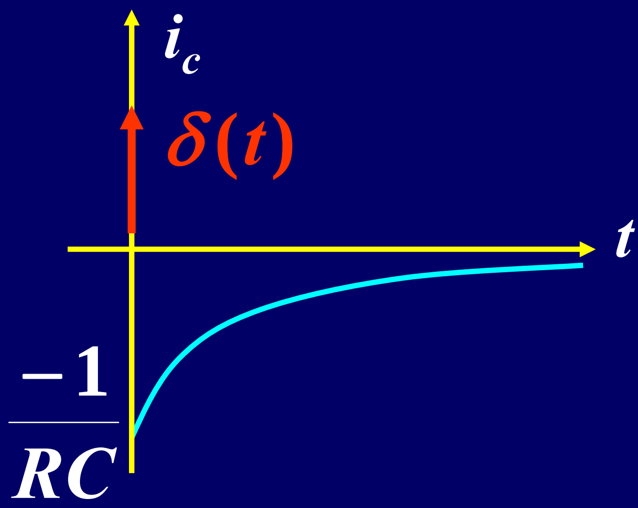


$$U_C(s) = \frac{R}{R + 1/sC} I_s(s) \frac{1}{sC} = \frac{R}{RC(s + 1/RC)}$$

$$I_c(s) = U_C(s) \frac{1}{sC} = \frac{RsC}{RsC + 1} = \frac{RsC + 1}{RsC + 1} - \frac{1}{RsC + 1}$$

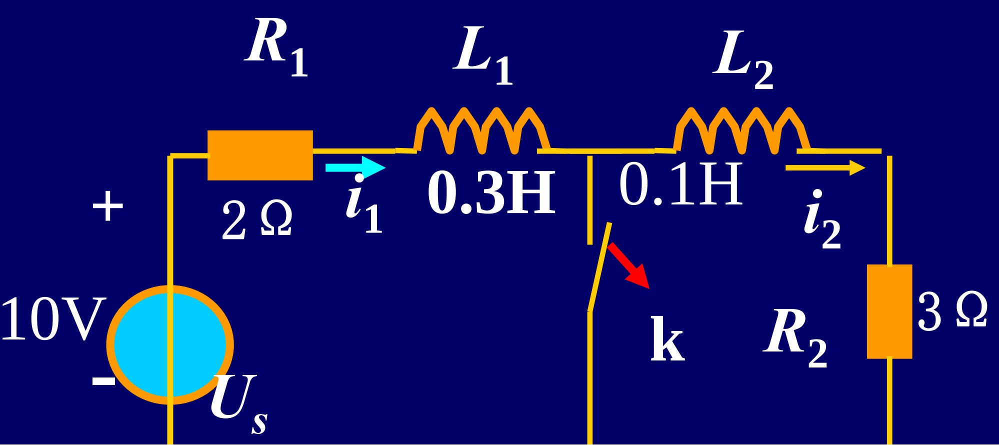
$$= \frac{1}{\ } e^{-t/RC} (t \geq 0) \quad i \quad \delta(t) \quad \frac{1}{\ } e^{-t/RC} (t \geq 0)$$





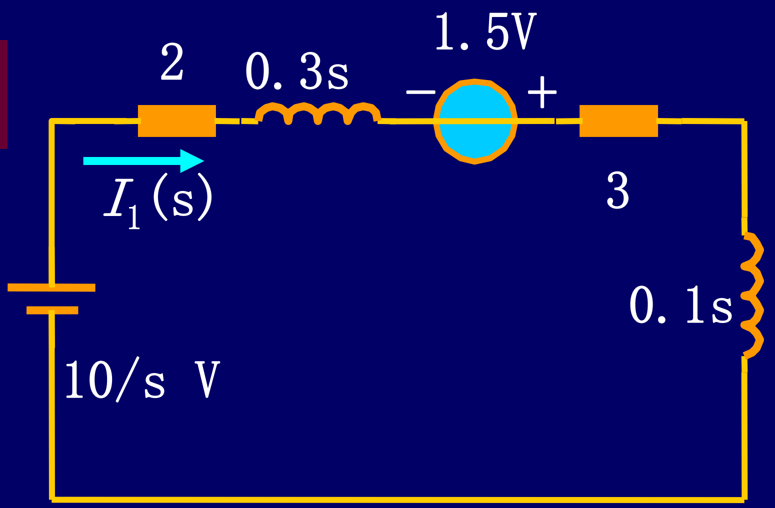
3

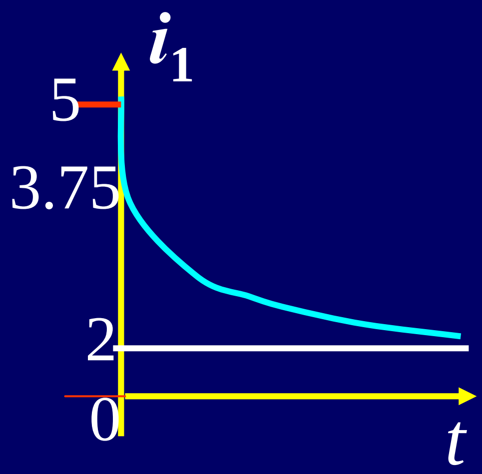
$t=0$时打开开关k，求电流 i_1, i_2。已知:



$$i_1(0^-) = 5A$$

$$i_2(0^-) = 0$$

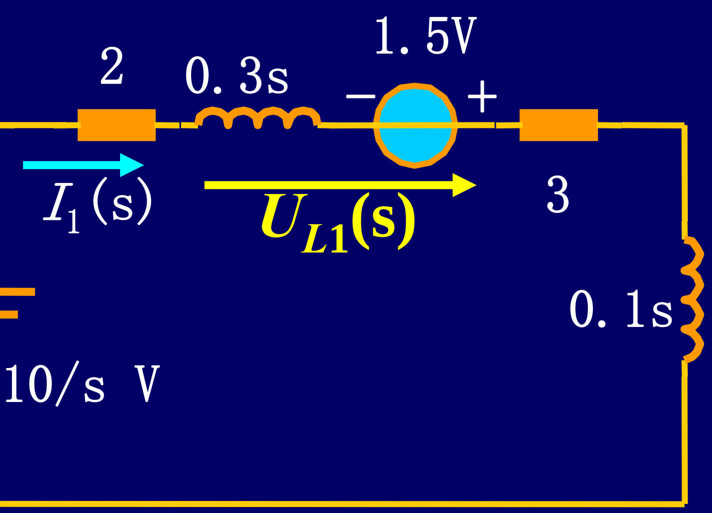




$$s) = \frac{\frac{10}{s} + 1.5}{5 + 0.4s} = \frac{10 + 1.5s}{(5 + 0.4s)s} = \frac{25 + 3.75s}{(s + 12.5)s} = \frac{2}{s} + \frac{1.75}{s + 12.5}$$

$$i_1 = 2 + 1.75e^{-12.5t} = i_2$$

注意 $\quad i_1(0^+) \neq i_1(0^-) \qquad i_2(0^+) \neq i_2(0^-)$



$$U_{L1}(s) = 0.3sI_1(s) - 1.5$$

$$= -\frac{6.56}{s+12.5} - 0.375$$

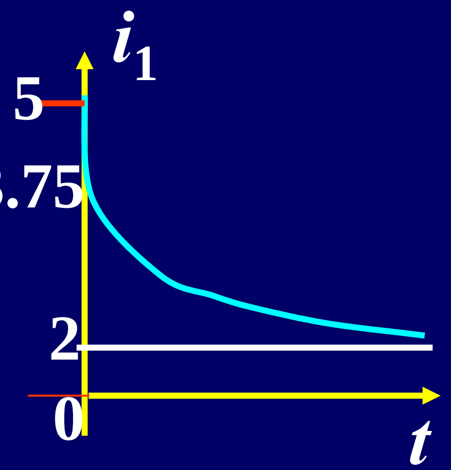
$$u_{L1}(t) = -0.375\delta(t) - 6.56e^{-12.5t}$$

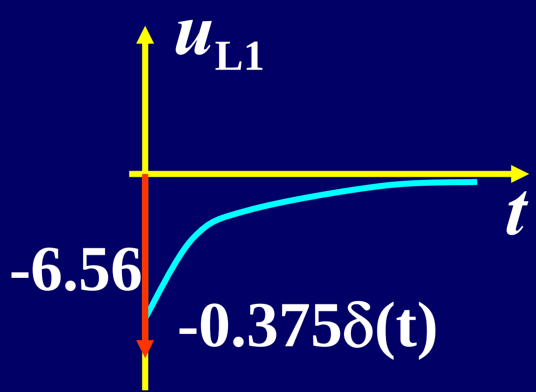
$$U_{L2}(s) = 0.1sI(s) = 0.375 - \frac{2.19}{s+12.5}$$

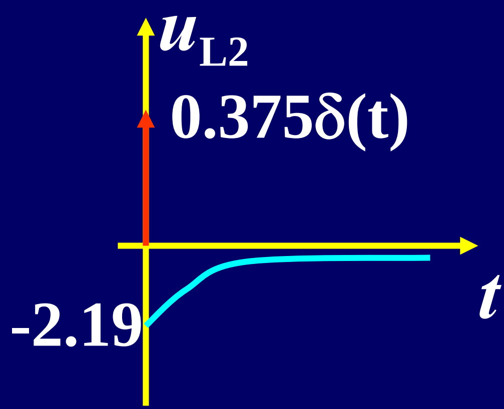
$$u_{L2}(t) = +0.375\delta(t) - 2.19e^{-12.5t}$$

$$u_{L1}(t) = -0.375\delta(t) - 6.56e^{-12.5t}$$

$$u_{L2}(t) = +0.375\delta(t) - 2.19e^{-12.5t}$$







$$i_2(0^+) = i_2(0^-) + \frac{0.375}{0.1} = 3.75A \qquad L = \frac{\psi}{i}$$

$$0.3\times 5 - 0.375$$

守恒：

$$L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-) = (L_1 + L_2) i(0^+)$$

$$0.3 \times 5 + 0 = 0.4 \times 3.75$$

结：

1、运算法直接求得全响应

2、用0^-初始条件，跃变情况自动包含在响应中

3、运算法分析动态电路的步骤:

1). 由. 换路前电路计算$u_c(0^-)$, $i_L(0^-)$ 。

2). 画运算电路图

3). 应用电路分析方法求象函数。

4). 反变换求原函数。