Tugas Membuat Dokumen Dengan LaTeX

Nama : Assyifa Cahya M
NIM : 22305141001

PRODI MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2022

Daftar Isi

1 Pengenalan Software Euler Math Toolbox

Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.
- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.
- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.
- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorias and Example", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.
Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.
Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].
Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan mengklik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

```
- * Judul
- ** Sub-Judul
- latex: F (x) = \int_a^x f (t) \, dt
- mathjax: \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1
- maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
- http://www.euler-math-toolbox.de
- See: http://www.google.de | Google
- image: hati.png
- ---
```

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Judul

Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
http://www.euler-math-toolbox.de
See: http://www.google.de | Google
image: hati.png

Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk "See:", tautan (URL)web lokal dapat digunakan.
Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

```
>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan /
```

Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.
EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.
- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).
Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

```
>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r
```

```
4.90873852123
7.85398163397
```

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

```
>2 + 2
```

```
4
```

```
>(3^4)+2
```

```
83
```

```
>a=2
```

```
2
```

```
>(a + 4) / 2
```

```
3
```

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.
- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!
- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).
- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.
- ^ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi * r ^ 2 merupakan rumus luas lingkaran.
- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ^ (2 ^ 3).

Perintah r = 1.25 adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis r: = 1.25 jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.

Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

```
>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan  := sebagai ganti =
```

```
1.25
```

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

```
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))
```

```
0.707106781187
-1
0.5
```

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.

EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika.Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

```
>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi x^2-x+1=0
```

```
1.61803398875
2
```

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.

```
>A = [1,4;6,7]
```

```
            1             4
            6             7
```

```
>sinh(90)
```

```
6.10201647159e+38
```

```
>sin(90°)
```

```
1
```

```
>S = [7,6] // column vector
```

```
[7,  6]
```

Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles  // 1 mil = 1609,344 m
```

```
1609.344
```

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar ($), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.
kilometer$:=1000;
km$:=kilometer$;
cm$:=0.01;
mm$:=0.001;
minute$:=60;
min$:=minute$;
minutes$:=minute$;
hour$:=60*minute$;
h$:=hour$;
hours$:=hour$;
day$:=24*hour$;
days$:=day$;
d$:=day$;
year$:=365.2425*day$;
years$:=year$;
y$:=year$;
inch$:=0.0254;
in$:=inch$;
feet$:=12*inch$;
foot$:=feet$;
ft$:=feet$;
yard$:=3*feet$;
yards$:=yard$;
yd$:=yard$;

mile$:=1760*yard$;
miles$:=mile$;
kg$:=1;
sec$:=1;
ha$:=10000;
Ar$:=100;
Tagwerk$:=3408;
Acre$:=4046.8564224;
pt$:=0.376mm;
Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

```
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

```
2.48548476895
101.6 mm
```

Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatrtamilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

```
>long pi
```

```
3.14159265359
```

```
>short pi
```

```
3.1416
```

```
>shortest pi
```

```
     3.1
```

```
>fraction pi
```

```
  312689/99532
```

```
>short 1200*1.03^10, long E, longest pi
```

```
  1612.7
  2.71828182846
        3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah "defformat" atau "reset".

```
>longestformat; pi, defformat; pi
```

```
  3.141592653589793
  3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

```
  0.392857142857
  11/28
```

Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan "..." di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan "..." di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^2/(a^2*4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

```
-0.138444501319
-3.61155549868
```

Menampilkan Daftar Variabe

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah "listvar".

```
>listvar
```

```
r                   1.25
a                   4
b                   15
c                   2
D                   1.73655549868123
```

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.

Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel "d" berbeda dengan variabel "D".

Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan "m" dengan mencari semua variabel yang berisi "m$".

```
>listvar m$
```

```
km$                 1000
cm$                 0.01
mm$                 0.001
nm$                 1853.24496
```

```
gram$                0.001
m$                   1
hquantum$            6.62606957e-34
atm$                 101325
```

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah "remvalue".

```
>remvalue a,b,c,D
>D
```

```
Variable D not found!
Error in:
D ...
 ^
```

Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.
Coba klik dua kali pada perintah "intrandom" berikut ini!

```
>intrandom(10,6)
```

```
[4,  2,  6,  2,  4,  2,  3,  2,  2,  6]
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi. Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

```
>random(10)
```

```
[0.270906,  0.704419,  0.217693,  0.445363,  0.308411,  0.914541,  0.1935
0.463387,  0.095153,  0.595017]
```

```
>normal(10)
```

```
[-0.495418,  1.6463,  -0.390056,  -1.98151,  3.44132,  0.308178,  -0.7334
-0.526167,  1.10018,  0.108453]
```

Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(,), antar baris dipisahkan oleh titik koma (;).
Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4,5,6,3,2,1]
```

```
[4,   5,   6,   3,   2,   1]
```

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
```

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.
Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:),seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1,   2,   3,   4,   5]
```

```
>w=0:0.1:1
```

```
[0,   0.1,   0.2,   0.3,   0.4,   0.5,   0.6,   0.7,   0.8,   0.9,   1]
```

```
>mean(w^2)
```

```
0.35
```

Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.
complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
```

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!
>sqrt(complex(-1))
```

```
>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
2+3i
2
3
2-3i
0.982793723247
56.309932474
56.309932474
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

```
90
```

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
        ^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.
Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi "complex".

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

```
-1+0i
0+1i
```

Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).
Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.
Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>&(a+b)^2
```

```
                                     2
                              (b + a)
```

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

```
                           2             2
                          b  + 2 a b + a

                          (x + 2) (x + 3)
```

```
>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

```
                    2                           2
         (- sqrt(b   - 4 a c)) - b      sqrt(b   - 4 a c) - b
    [x = ------------------------, x = --------------------]
                   2 a                          2 a
```

```
>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan
```

```
                                 2    2
                                a  - b
                                -------
                                 b + a


                                 a - b
```

```
>10! // nilai faktorial (modus EMT)
```

```
3628800
```

```
>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)
```

```
                                3628800
```

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda "::" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

```
>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)
```

```
[2,  2,  2,  5,  5,  5]
```

```
>:: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)
```

```
 3  3
2  5
```

```
>:: factor(20!)
```

```
 18  8  4  2
2   3  5  7  11 13 17 19
```

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

```
>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)
```

```
10
```

```
>::: binomial(m,4); // C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)
```

```
(m - 3) (m - 2) (m - 1) m
-------------------------
           24
```

```
>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x)sin(y)
```

```
cos(x) cos(y) - sin(x) sin(y)
```

```
>::: trigexpand(sin(x+y));
```

```
                    cos(x) sin(y) + sin(x) cos(y)
```

```
>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhan
```

```
                                   4
                         sin(x) + cos (x)
                         ----------------
                                3
                             cos (x)
```

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda "&=".

```
>p1 &= (x^3+1)/(x+1)
```

```
                               3
                              x  + 1
                              ------
                              x + 1
```

```
>&ratsimp(p1)
```

```
                             2
                            x  - x + 1
```

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah "with".

```
>&p1 with x=3 // (3^3+1)/(3+1)
```

```
                                7
```

```
>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru
```

```
                                 3
                          (b + a)   + 1
                          ------------
                           b + a + 1


                        2                  2
                       b  + (2 a - 1) b + a  - a + 1
```

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

```
                            2       3
                         3 x       x  + 1
                         ----- - --------
                         x + 1          2
                                 (x + 1)
```

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

```
                            3      2
                         2 x  - 3 x  + 6 x
                         -----------------
                                 6
```

Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitunagn simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar ($) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima.
Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$&(a+b)^2
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
>$&(a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.
Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.
- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
- Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
- Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT.
Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

Jawab

Diketahui sebuah lingkaran dengan jari-jari 14 cm. Tentukan keliling lingkaran tersebut !.

```
>r = 14
```

```
14
```

```
>d = r * 2
```

```
28
```

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>Keliling = pi * d
```

```
87.9645943005
```

Jadi keliling lingkaran adalah 87,9 cm

2 Penggunaan Software EMT untuk Aljabar

Tugas Aplikasi Komputer

Nama : Assyifa Cahya Marsellita
NIM : 22305141001
Kelas : Matematika B

EMT untuk Perhitungan Aljabar

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:
- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9}$$

```
>$&6*x^(-3)*y^5*-7*x^2*y^(-9)
```

$$-\frac{42}{x\,y^4}$$

Menjabarkan:

$$(6x^{-3}+y^5)(-7x^2-y^{-9})$$

```
>$&showev('expand((6*x^(-3)+y^5)*(-7*x^2-y^(-9))))
```

$$expand\left(\left(-\frac{1}{y^9}-7\,x^2\right)\,\left(y^5+\frac{6}{x^3}\right)\right)=-7\,x^2\,y^5-\frac{1}{y^4}-\frac{6}{x^3\,y^9}-\frac{42}{x}$$

Baris Perintah

Baris perintah Euler terdiri dari satu atau beberapa perintah Euler diikuti dengan titik koma ";" atau koma ",". Titik koma mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan.
Baris perintah berikut hanya akan mencetak hasil ekspresi, bukan tugas atau perintah format.

```
>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

```
16.7551608191
```

Perintah harus dipisahkan dengan tanda kosong. Baris perintah berikut mencetak dua hasilnya.

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhi
```

```
50.2654824574
100.530964915
```

Baris perintah dieksekusi dalam urutan yang ditekan pengguna kembali. Jadi, Anda mendapatkan nilai baru setiap kali menjalankan baris kedua.

```
>x := 1;
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

```
0.540302305868
```

```
>x := cos(x)
```

```
0.857553215846
```

Jika dua jalur dihubungkan dengan "..." kedua jalur akan selalu dijalankan secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...
>x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

```
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
```

Ini juga cara yang baik untuk menyebarkan perintah panjang ke dua baris atau lebih. Anda dapat menekan Ctrl + Return untuk membagi garis menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau Ctlr + Back untuk menggabungkan garis.
Untuk melipat semua multi-garis tekan Ctrl + L. Kemudian garis berikutnya hanya akan terlihat, jika salah satunya memiliki fokus. Untuk melipat satu garis banyak, mulailah baris pertama dengan "% +".

```
>%+ x=4+5; ...
```

Garis yang dimulai dengan %% akan benar-benar tidak terlihat.

```
81
```

Euler mendukung loop dalam baris perintah, asalkan sesuai dengan satu baris atau beberapa baris. Dalam program, batasan ini tidak berlaku, tentu saja. Untuk informasi lebih lanjut, lihat pengantar berikut.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
1.41421356237
```

Tidak apa-apa menggunakan multi-garis. Pastikan baris diakhiri dengan "...".

```
>x := 1.5; // comments go here before the ...
>repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~=x; ...
>x := xnew; ...
>end;...
>x,
```

```
1.41421356237
Variable ulang not found!
Error in:
x := 1.5; ulang xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~=x;     x := xnew;  ...
                ^
```

Struktur bersyarat juga berfungsi.

```
>if E^pi>pi^E; then "Thought so!", endif;
```

```
Thought so!
```

Saat Anda menjalankan perintah, kursor dapat berada di posisi mana pun di baris perintah. Anda dapat kembali ke perintah sebelumnya atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat mengklik bagian komentar di atas perintah untuk membuka perintah.
Saat Anda menggerakkan kursor di sepanjang garis, pasangan buka dan tutup tanda kurung atau tanda kurung akan disorot. Juga, perhatikan baris statusnya. Setelah kurung buka dari fungsi sqrt (), baris status akan menampilkan teks bantuan untuk fungsi tersebut. Jalankan perintah dengan tombol kembali.

```
>sqrt(sin(10°)/cos(20°))
```

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan untuk perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Di sana, Anda dapat memasukkan teks untuk dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela bantuan akan ditampilkan. Anda dapat menekan escape untuk menghapus garis, atau untuk menutup jendela bantuan.
Anda dapat mengklik dua kali pada perintah apa pun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Coba klik dua kali perintah exp di bawah ini di baris perintah.

```
>exp(log(2.5))
```

```
2.5
```

Anda juga dapat menyalin dan menempel di Euler. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift bersama dengan tombol kursor apa pun. Selain itu, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

Sintaks Dasar

Euler mengetahui fungsi matematika biasa. Seperti yang Anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi menjadi derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilainya, atau gunakan fungsi rad (x). Fungsi akar kuadrat disebut akar kuadrat di Euler. Tentu saja, x ^ (1/2) juga dimungkinkan.
Untuk menyetel variabel, gunakan "=" atau ": =". Demi kejelasan, pendahuluan ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak penting. Tapi ruang antar perintah diharapkan.
Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan "," atau ";". Titik koma menekan keluaran dari perintah. Di akhir baris perintah, "," diasumsikan, jika ";" hilang.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

```
30.65625
```

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Memasuki

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3+4\log(0.6)}+\frac{1}{7}\right)$$

Anda harus mengatur tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e dinamai E dalam EMT.

```
>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)
```

```
8.77908249441
```

Untuk menghitung ekspresi yang rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^2 \pi$$

Anda harus memasukkannya dalam bentuk baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

```
23.2671801626
```

Tempatkan tanda kurung dengan hati-hati di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu Anda dengan menyoroti ekspresi bahwa kurung tutup selesai. Anda juga harus memasukkan nama "pi" untuk huruf Yunani pi.
Hasil dari perhitungan ini adalah bilangan floating point. Ini secara default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Di baris perintah berikut, kita juga belajar bagaimana kita bisa merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

```
0.47619047619
10/21
```

Perintah Euler bisa berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi dibuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, itu harus berisi tanda kurung untuk memaksa urutan eksekusi yang benar. Jika ragu, menetapkan braket adalah ide yang bagus. Perhatikan bahwa EMT menampilkan tanda kurung buka dan tutup saat mengedit baris perintah.

```
>(cos(pi/4)+1)^3*(sin(pi/4)+1)^2
```

```
14.4978445072
```

Operator numerik Euler termasuk

```
+ unary atau operator plus
- unary atau operator minus
*, /
. produk matriks
a ^ b pangkat untuk positif a atau bilangan bulat b (a ** b bekerja
```

juga)

```
n! operator faktorial
```

dan masih banyak lagi.
Berikut beberapa fungsi yang mungkin Anda perlukan. Masih banyak lagi.

```
sin, cos, tan, atan, asin, acos, rad, deg
log, exp, log10, sqrt, logbase
bin, logbin, logfac, mod, floor, ceil, round, abs, sign
konj, re, im, arg, konj, nyata, kompleks
beta, betai, gamma, complexgamma, ellrf, ellf, ellrd, elle
bitand, bitor, bitxor, bitnot
```

Beberapa perintah memiliki alias, mis. ln untuk log.

```
>ln(E^2), arctan(tan(0.5))
```

```
2
0.5
```

```
>sin(30°)
```

```
0.5
```

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (tanda kurung bulat), setiap kali ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan (2 ^ 3) ^ 4, yang merupakan default untuk 2 ^ 3 ^ 4 di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

```
>2^3^4, (2^3)^4, 2^(3^4)
```

```
2.41785163923e+24
4096
2.41785163923e+24
```

Bilangan Nyata

Tipe data utama di Euler adalah bilangan real. Real direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

```
>longest 1/3
```

```
     0.3333333333333333
```

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
>printdual(1/3)
```

```
1.0101010101010101010101010101010101010101010101010101*2^-2
```

```
>printhex(1/3)
```

```
5.5555555555554*16^-1
```

String

Sebuah string di Euler didefinisikan dengan "...".

```
>"Sebuah string bisa berisi apa saja."
```

```
Sebuah string bisa berisi apa saja.
```

String bisa digabungkan dengan | atau dengan +. Ini juga berfungsi dengan angka, yang diubah menjadi string dalam kasus itu.

```
>"The area of the circle with radius " + 2 + " cm is " + pi*4 + " cm^2."
```

```
The area of the circle with radius 2 cm is 12.5663706144 cm^2.
```

Fungsi cetak juga mengubah angka menjadi string. Ini bisa mengambil sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk output padat), dan secara optimal satu unit.

```
>"Golden Ratio : " + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Tidak ada string khusus, yang tidak dicetak. Itu dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak penting. (Ini dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tidak memiliki pernyataan pengembalian.)

```
>none
```

Untuk mengonversi string menjadi angka, cukup evaluasi. Ini berfungsi untuk ekspresi juga (lihat di bawah).

```
>"1234.5"()
```

```
1234.5
```

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...].

```
>v:=["affe","charlie","bravo"]
```

```
affe
charlie
bravo
```

Vektor string kosong dilambangkan dengan [tidak ada]. Vektor string dapat digabungkan.

```
>w:=[none]; w|v|v
```

```
affe
charlie
bravo
affe
charlie
bravo
```

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk menghasilkan string seperti itu, gunakan u "..." dan salah satu entitas HTML.
String unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u"&alpha; = " + 45 + u"&deg;" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara
```

```
= 45°
```

I

Di komentar, entitas yang sama seperti & alpha ;, & beta; dll. dapat digunakan. Ini mungkin alternatif cepat untuk Latex. (Lebih detail tentang komentar di bawah).

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Fungsi strtochar () akan mengenali string Unicode, dan menerjemahkannya dengan benar.

```
>v=strtochar(u"&Auml; is a German letter")
```

```
[196,  32,  105,  115,  32,  97,  32,  71,  101,  114,  109,  97,  110,
32,  108,  101,  116,  116,  101,  114]
```

Hasilnya adalah vektor bilangan Unicode. Fungsi kebalikannya adalah chartoutf ().

```
>v[1]=strtochar(u"&Uuml;")[1]; chartoutf(v)
```

```
Ü is a German letter
```

Fungsi utf () dapat menerjemahkan string dengan entitas dalam variabel menjadi string Unicode.

```
>s="We have &alpha;=&beta;."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan
```

```
We have =.
```

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u"&#196;hnliches"
```

```
Ähnliches
```

Nilai Boolean

Nilai Boolean diwakili dengan 1 = true atau 0 = false di Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

```
0
1
```

"dan" adalah operator "&&" dan "atau" adalah operator "||", seperti dalam bahasa C. (Kata "dan" dan "atau" hanya dapat digunakan dalam kondisi untuk "jika".)

```
>2<E && E<3
```

```
1
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0,  0,  0,  0,  0,  1,  1,  1,  1,  1]
[6,  7,  8,  9,  10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi nonzeros () untuk mengekstrak elemen tertentu dari vektor. Dalam contoh, kami menggunakan isprime bersyarat (n).

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29,
31,  33,  35,  37,  39,  41,  43,  45,  47,  49,  51,  53,  55,  57,
59,  61,  63,  65,  67,  69,  71,  73,  75,  77,  79,  81,  83,  85,
87,  89,  91,  93,  95,  97,  99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47,
53,  59,  61,  67,  71,  73,  79,  83,  89,  97]
```

Format Keluaran

Format keluaran default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kami melihat default, kami mengatur ulang format.

```
>defformat; pi
```

```
3.14159265359
```

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk bilangan ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat jumlah digit secara lengkap, gunakan perintah "longestformat", atau gunakan operator "longest" untuk menampilkan hasil dalam format terpanjang.

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

Berikut adalah representasi heksadesimal internal dari bilangan ganda.

```
>printhex(pi)
```

```
3.243F6A8885A30*16^0
```

Format keluaran dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

```
>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)
```

```
    0.33333
    3.14159
    0.84147
```

Standarnya adalah format (12).

```
>format(12); 1/3
```

```
0.333333333333
```

Fungsi seperti "shortestformat", "shortformat", "longformat" bekerja untuk vektor dengan cara berikut.

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
  0.66     0.2    0.89    0.28    0.53    0.31    0.44     0.3
  0.28    0.88    0.27     0.7    0.22    0.45    0.31    0.91
  0.19    0.46   0.095     0.6    0.43    0.73    0.47    0.32
```

Format default untuk skalar adalah format (12). Tapi ini bisa diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

```
3.1416
```

Fungsi "format terpanjang" mengatur format skalar juga.

```
>longestformat; pi
```

```
3.141592653589793
```

Sebagai referensi, berikut adalah daftar format keluaran terpenting.

```
format terpendek format pendek format panjang, format terpanjang
format (panjang, digit) format yang baik (panjang)
fracformat (panjang)
defformat
```

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Angka disimpan dalam format internal ini.
Tetapi format keluaran EMT dapat diatur dengan cara yang fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

```
3.141592653589793
```

```
>format(10,5); pi
```

```
  3.14159
```

Standarnya adalah defformat ().

```
>defformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator "terpanjang" akan mencetak semua digit nomor yang valid.

```
>longest pi^2/2
```

```
      4.934802200544679
```

Ada juga operator singkat untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kami telah menggunakannya di atas.

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

```
25/12
```

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, nilai 0.1 tidak akan direpresentasikan dengan tepat. Kesalahan bertambah sedikit, seperti yang Anda lihat dalam perhitungan berikut.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
-1.110223024625157e-16
```

Tetapi dengan "longformat" default Anda tidak akan melihat ini. Untuk kenyamanan, keluaran angka yang sangat kecil adalah 0.

```
>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
0
```

Ekspresi

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung setelah ekspresi. Jika Anda bermaksud menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya "fx" atau "fxy" dll. Ekspresi lebih diutamakan daripada fungsi.
Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

```
>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()
```

```
12.56637061435917
```

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan itu. Parameter tambahan dapat ditambahkan menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)
```

```
-0.919535764538
```

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, meskipun ada variabel dalam fungsi dengan nama yang sama. (Jika tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memiliki hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang memanggil fungsi tersebut.)

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
>f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

```
36
```

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk "at" daripada nilai global, Anda perlu menambahkan "at = value".

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
>f("at*x^2",3,5)
```

```
45
```

Sebagai referensi, kami berkomentar bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi contoh diatas bisa kita buat sebagai berikut.

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
>f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

```
45
```

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti halnya fungsi.
Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global akan menghapus variabel ini untuk menghindari kebingungan antara ekspresi simbolik dan fungsi.

```
>f &= 5*x;
>function f(x) := 6*x;
>f(2)
```

```
12
```

Dengan cara konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy dll. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

Bentuk ekspresi khusus memungkinkan variabel apa pun sebagai parameter tanpa nama untuk mengevaluasi ekspresi, tidak hanya "x", "y", dll. Untuk ini, mulailah ekspresi dengan "@ (variabel) ...".

```
>"@(a,b) a^2+b^2", %(4,5)
```

```
@(a,b) a^2+b^2
41
```

Hal ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang membutuhkan ekspresi dalam "x".

Cara paling dasar untuk mendefinisikan fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolik atau numerik. Jika variabel utamanya adalah x, ekspresi tersebut dapat dievaluasi seperti fungsi.

Seperti yang Anda lihat pada contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

```
>fx &= x^3-a*x;  ...
>a=1.2; fx(0.5)
```

```
-0.475
```

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx(0.5,a=1.1)
```

```
-0.425
```

Ekspresi tidak perlu simbolis. Ini diperlukan, jika ekspresi berisi fungsi, yang hanya dikenal di kernel numerik, bukan di Maxima.

Matematika Simbolis

EMT melakukan matematika simbolis dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut, atau telusuri referensi untuk Maxima. Para ahli di Maxima harus memperhatikan bahwa ada perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli dari Maxima dan sintaks default dari ekspresi simbolik di EMT.

Matematika simbolik terintegrasi mulus ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apa pun yang dimulai dengan & adalah ekspresi simbolis. Itu dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika "tak terbatas" yang dapat menangani angka yang sangat besar.

```
>$&44!
```

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar dengan tepat. Mari kita hitung

$$C(44,10) = \frac{44!}{34! \cdot 10!}$$

```
>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)
```

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk ini (seperti halnya bagian numerik EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali di atasnya. Misalnya, coba klik dua kali pada "& binomial" di baris perintah sebelumnya. Ini membuka dokumentasi Maxima yang disediakan oleh penulis program itu.
Anda akan belajar bahwa yang berikut ini juga berfungsi.

$$C(x,3) = \frac{x!}{(x-3)!3!} = \frac{(x-2)(x-1)x}{6}$$

```
>$binomial(x,3) // C(x,3)
```

$$\frac{(x-2)\,(x-1)\,x}{6}$$

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu, gunakan "dengan".

```
>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)
```

$$120$$

Dengan begitu, Anda bisa menggunakan solusi persamaan di persamaan lain.
Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasannya adalah adanya bendera simbolis khusus dalam string tersebut.
Seperti yang akan Anda lihat pada contoh sebelumnya dan berikut, jika Anda menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi simbolik dengan Latex. Jika tidak, perintah berikut akan mengeluarkan pesan kesalahan.
Untuk mencetak ekspresi simbolik dengan LaTeX, gunakan $ infront dari & (atau Anda dapat menghilangkan &) sebelum perintah. Jangan menjalankan perintah Maxima dengan $, jika Anda belum menginstal LaTeX.

```
>$(3+x)/(x^2+1)
```

$$\frac{x+3}{x^2+1}$$

Ekspresi simbolik diurai oleh Euler. Jika Anda membutuhkan sintaks kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat mengapit ekspresi dalam "...". Menggunakan lebih dari sekedar ekspresi sederhana dimungkinkan, tetapi sangat tidak disarankan.

```
>&"v := 5; v^2"
```

```
25
```

Untuk kelengkapan, kami menyatakan bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, tetapi perlu diapit tanda kutip. Selain itu, jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada waktu kompilasi jika memungkinkan.

```
>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(%,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

$$x^4+4\,x^3+6\,x^2+4\,x+1$$

$$4\,\left(x+1\right)^3$$

Sekali lagi,% mengacu pada hasil sebelumnya.
Untuk mempermudah, kami menyimpan solusi ke variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan "& =".

```
>fx &= (x+1)/(x^4+1); $&fx
```

$$\frac{x+1}{x^4+1}$$

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&factor(diff(fx,x))
```

$$\frac{-3\,x^4-4\,x^3+1}{\left(x^4+1\right)^2}$$

Masukan langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan "::". Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "mode kompatibilitas").

```
>&factor(20!)
```

$$2432902008176640000$$

```
>::: factor(10!)
```

$$2^8\ 3^4\ 5^2\ 7$$

```
>:: factor(20!)
```

$$2^{18}\ 3^8\ 5^4\ 7^2\ 11\ 13\ 17\ 19$$

Jika Anda ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli Maxima. Anda dapat melakukan ini dengan ":::".

```
>::: av:g$ av^2;
```

$$g^2$$

```
>fx &= x^3*exp(x), $fx
```

$$x^3\ E^x$$

Variabel semacam itu dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa dalam perintah berikut, sisi kanan & = dievaluasi sebelum penugasan ke Fx.

```
>&(fx with x=5), $%, &float(%)
```

```
                         5
                    125 E


               18551.64488782208
```

```
>fx(5)
```

```
18551.6448878
```

Untuk evaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator "dengan".
Baris perintah berikut juga menunjukkan bahwa Maxima bisa mengevaluasi ekspresi secara numerik dengan float ().

```
>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)
```

```
                     10         5
               1000 E   - 125 E


              2.20079141499189e+7
```

```
>$factor(diff(fx,x,2))
```

$$\frac{4\,\left(x-1\right)\,x^2\,\left(3\,x^4+8\,x^3+8\,x^2+8\,x+3\right)}{\left(x^4+1\right)^3}$$

Untuk mendapatkan kode Latex untuk ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

```
>tex(fx)
```

```
x^3\,e^{x}
```

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti ekspresi numerik.

```
>fx(0.5)
```

```
0.206090158838
```

Dalam ekspresi simbolik, ini tidak berfungsi, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintaks "with" (bentuk yang lebih bagus dari perintah at (...) Maxima).

```
>$&fx with x=1/2
```

$$\frac{24}{17}$$

Penugasan juga bisa bersifat simbolis.

```
>$&fx with x=1+t
```

$$\frac{t+2}{(t+1)^4+1}$$

Perintah memecahkan memecahkan ekspresi simbolik untuk variabel di Maxima. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>$&solve(x^2+x=4,x)
```

Bandingkan dengan perintah "selesaikan" numerik di Euler, yang membutuhkan nilai awal, dan secara opsional nilai target.

```
>solve("x^2+x",1,y=4)
```

```
1.56155281281
```

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan evaluasi hasil simbolik. Euler akan membaca tugas x = dll. Jika Anda tidak memerlukan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga dapat membiarkan Maxima menemukan nilai numerik.

```
>sol &= solve(x^2+2*x=4,x); $&sol, sol(), $&float(sol)
```

```
[-3.23607,  1.23607]
```

Untuk mendapatkan solusi simbolik tertentu, seseorang dapat menggunakan "dengan" dan indeks.

```
>$&solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with %[2]; $&x2
```

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>sol &= solve([x+y=3,x^2+y^2=5],[x,y]); $&sol, $&x*y with sol[1]
```

Ekspresi simbolis dapat memiliki bendera, yang menunjukkan perlakuan khusus dalam Maxima. Beberapa flag juga dapat digunakan sebagai perintah, yang lainnya tidak. Bendera ditambahkan dengan "|" (bentuk yang lebih bagus dari "ev (..., flags)")

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan
>$&factor(%)
```

Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang ditentukan dengan perintah "fungsi". Ini bisa menjadi fungsi satu baris atau fungsi multiline.
Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik ditentukan oleh ": =".

```
>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Untuk gambaran umum, kami menunjukkan semua kemungkinan definisi untuk fungsi satu baris. Sebuah fungsi dapat dievaluasi sama seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

```
>f(2)
```

```
4.472135955
```

Fungsi ini akan bekerja untuk vektor juga, mengikuti bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi tersebut adalah vektorisasi.

```
>f(0:0.1:1)
```

```
[0, 0.100499, 0.203961, 0.313209, 0.430813, 0.559017, 0.699714,
0.854459, 1.0245, 1.21083, 1.41421]
```

Fungsi bisa diplot. Sebagai ganti ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsi.
Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus diberikan dalam sebuah string.

```
>solve("f",1,y=1)
```

```
0.786151377757
```

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi built-in, Anda harus menambahkan kata kunci "overwrite". Menimpa fungsi built-in berbahaya dan dapat menyebabkan masalah pada fungsi lain tergantung pada fungsinya.
Anda masih bisa memanggil fungsi built-in sebagai "_...", jika itu berfungsi di inti Euler.

```
>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redine sine in degrees
>sin(45)
```

```
0.707106781187
```

Lebih baik kita menghapus definisi ulang dosa ini.

```
>forget sin; sin(pi/4)
```

```
0.707106781187
```

Parameter Default

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

```
>function f(x,a=1) := a*x^2
```

Menghilangkan parameter ini menggunakan nilai default.

```
>f(4)
```

```
16
```

Menyetelnya menimpa nilai default.

```
>f(4,5)
```

```
80
```

Parameter yang ditetapkan juga menimpanya. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4,a=1)
```

```
16
```

Jika variabel bukan parameter, itu harus global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2
>a=6; f(2)
```

```
24
```

Tetapi parameter yang ditetapkan menggantikan nilai global.
Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang ditentukan sebelumnya, itu harus dideklarasikan dengan ": ="!

```
>f(2,a:=5)
```

```
20
```

Fungsi simbolik didefinisikan dengan "& =". Mereka didefinisikan di Euler dan Maxima, dan bekerja di kedua dunia. Ekspresi yang menentukan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

Fungsi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

Mereka juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menafsirkan semua yang ada di dalam fungsi tersebut.

```
>g(5+g(1))
```

```
178.635099908
```

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolik lainnya.

```
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: menginteg
>solve(&g(x),0.5)
```

```
0.703467422498
```

Cara berikut juga berlaku, karena Euler menggunakan ekspresi simbolik dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolis g, dan jika ada fungsi simbolik g.

```
>solve(&g,0.5)
```

```
0.703467422498
```

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
>$&P(x,4), $&expand(%)
>P(3,4)
```

```
625
```

```
>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)
>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
>$&P(x,4)*Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
>$&P(x,4)/Q(x,1), $&expand(%), $&factor(%)
>function f(x) &= x^3-x; $&f(x)
```

Dengan & = fungsinya adalah simbolik, dan dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&integrate(f(x),x)
```

Dengan: = fungsinya adalah numerik. Contoh yang baik adalah seperti integral pasti
lateks: f (x) = \ int_1 ^ x t ^ t \, dt,
yang tidak dapat dievaluasi secara simbolis.
Jika kita mendefinisikan ulang fungsi dengan kata kunci "map", ini dapat digunakan untuk vektor x. Secara internal, fungsi ini dipanggil untuk semua nilai x satu kali, dan hasilnya disimpan dalam vektor.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
>f(0:0.5:2)
```

```
[-0.783431,  -0.410816,  0,  0.676863,  2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang fungsi tersebut dapat dipanggil dengan atau tanpa parameter "base".

```
>mylog(100), mylog(2^6.7,2)
```

```
2
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>mylog(E^2,base=E)
```

```
2
```

Seringkali, kami ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk elemen individu di tempat lain. Ini dimungkinkan dengan parameter vektor.

```
>function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)
```

Fungsi simbolik seperti itu dapat digunakan untuk variabel simbolik.
Tetapi fungsinya juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

```
>v=[3,4]; f(v)
```

```
17
```

Ada juga fungsi simbolik murni, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

```
>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial
```

```
diff(expr, y, 2) + diff(expr, x, 2)
```

```
>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(%,x,y)
```

Tetapi tentu saja, mereka dapat digunakan dalam ekspresi simbolik atau dalam definisi fungsi simbolik.

```
>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); $&f(x,y)
```

Untuk meringkas
- &= mendefinisikan fungsi simbolik,
- := mendefinisikan fungsi numerik,
- &&= mendefinisikan fungsi simbolik murni.

Memecahkan Ekspresi

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolik.
Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi Solving (). Diperlukan nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, Solving () menggunakan metode garis potong.

```
>solve("x^2-2",1)
```

```
1.41421356237
```

Ini bekerja untuk ekspresi simbolik juga. Ambil fungsi berikut.

```
>$&solve(x^2=2,x)
>$&solve(x^2-2,x)
>$&solve(a*x^2+b*x+c=0,x)
>$&solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])
>px &= 4*x^8+x^7-x^4-x; $&px
```

Sekarang kita mencari titik, di mana polinomialnya adalah 2. Dalam Solving (), nilai target default y = 0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.
Kami menggunakan y = 2 dan memeriksa dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

```
0.966715594851
2
```

Memecahkan ekspresi simbolis dalam bentuk simbolik mengembalikan daftar solusi. Kami menggunakan penyelesaian pemecah simbolik () yang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
      -0.6180339887498949       1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah "dengan".

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

Sistem pemecahan persamaan secara simbolis dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan penyelesaian pemecah simbolik (). Jawabannya adalah daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])
```

Fungsi f () dapat melihat variabel global. Namun seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.
lateks: a ^ x-x ^ a = 0,1
dengan a = 3.

```
>function f(x,a) := x^a-a^x;
```

Salah satu cara untuk meneruskan parameter tambahan ke f () adalah dengan menggunakan daftar dengan nama fungsi dan parameternya (cara lainnya adalah parameter titik koma).

```
>solve({{"f",3}},2,y=0.1)
```

```
  2.54116291558
```

Ini juga bekerja dengan ekspresi. Tapi kemudian, elemen daftar bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar di tutorial tentang sintaks EMT).

```
>solve({{"x^a-a^x",a=3}},2,y=0.1)
```

```
  2.54116291558
```

Menyelesaikan Pertidaksamaan

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah "load(fourier_elim)" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
  ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1>0],[x]) // x^2-1 > 0
>$&fourier_elim([x^2 - 1<0],[x]) // x^2-1 < 0
>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^-1 <> 0
>$&fourier_elim([x # 6],[x])
>$&fourier_elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian
>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R
>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])
>$&fourier_elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaa
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y >8),[x,y])
>$&fourier_elim(((x + y < 5) and x < 1) or  (x - y >8),[x,y])
>&fourier_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])
```

```
        [6 < x, x < 8, y < - 11] or [8 < x, y < - 11]
   or [x < 8, 13 < y] or [x = y, 13 < y] or [8 < x, x < y, 13 < y]
   or [y < x, 13 < y]
```

```
>$&fourier_elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])
```

Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisi diskusi terperinci tentang bahasa matriks Euler.
Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

```
>A=[1,2;3,4]
```

```
              1              2
              3              4
```

Produk matriks dilambangkan dengan titik.

```
>b=[3;4]
```

```
              3
              4
```

```
>b' // transpose b
```

```
  [3,  4]
```

```
>inv(A) //inverse A
```

```
             -2             1
            1.5          -0.5
```

```
>A.b //perkalian matriks
```

```
             11
             25
```

```
>A.inv(A)
```

```
              1             0
              0             1
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah bahwa semua fungsi dan operator mengerjakan elemen untuk elemen.

```
>A.A
```

```
              7            10
             15            22
```

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

```
              1             4
              9            16
```

```
>A.A.A
```

```
            37            54
            81           118
```

```
>power(A,3) //perpangkatan matriks
```

```
            37            54
            81           118
```

```
>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak
```

```
             1             1
             1             1
```

```
>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor
```

```
      0.333333      0.666667
          0.75             1
```

```
>A\b // hasilkali invers A dan b, A^(-1)b
```

```
            -2
           2.5
```

```
>inv(A).b
```

```
            -2
           2.5
```

```
>A\A   //A^(-1)A
```

```
             1             0
             0             1
```

```
>inv(A).A
```

```
                 1                 0
                 0                 1
```

```
>A*A //perkalin elemen-elemen matriks seletak
```

```
                 1                 4
                 9                16
```

Ini bukan hasil perkalian matriks, tetapi perkalian elemen dengan elemen. Hal yang sama juga berlaku untuk vektor.

```
>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor
```

```
                 9
                16
```

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, itu diperluas dengan cara alami.

```
>2*A
```

```
                 2                 4
                 6                 8
```

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom, elemennya diterapkan ke semua baris A.

```
>[1,2]*A
```

```
                 1                 4
                 3                 8
```

Jika itu adalah vektor baris, itu diterapkan ke semua kolom A.

```
>A*[2,3]
```

```
                 2                 6
                 6                12
```

Dapat dibayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah diduplikasi untuk membentuk matriks dengan ukuran yang sama dengan A.

```
>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kal
```

```
              1               2
              1               2
```

```
>A*dup([1,2],2)
```

```
              1               4
              3               8
```

Ini juga berlaku untuk dua vektor di mana satu adalah vektor baris dan yang lainnya adalah vektor kolom. Kami menghitung i * j untuk i, j dari 1 sampai 5. Triknya adalah mengalikan 1: 5 dengan transposenya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan tabel nilai.

```
>(1:5)*(1:5)' // hasilkali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom
```

```
              1               2               3               4               5
              2               4               6               8              10
              3               6               9              12              15
              4               8              12              16              20
              5              10              15              20              25
```

Sekali lagi, ingatlah bahwa ini bukan hasil perkalian matriks!

```
>(1:5).(1:5)' // hasilkali vektor baris dan vektor kolom
```

```
  55
```

```
>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya
```

```
  55
```

Bahkan operator seperti <atau == bekerja dengan cara yang sama.

```
>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6
```

```
  [1,  1,  1,  1,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Misalnya, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi sum ().

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

```
5
```

Euler memiliki operator perbandingan, seperti "==", yang memeriksa kesetaraan.
Kami mendapatkan vektor 0 dan 1, di mana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

```
[0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Dari vektor seperti itu, "nonzeros" memilih elemen bukan nol.
Dalam hal ini, kami mendapatkan indeks dari semua elemen yang lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[8,  9,  10]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai t yang sesuai.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[64,  81,  100]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat dari angka 1 sampai 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4,  48,  95,  139,  147,  191,  238,  282,  290,  334,  381,  425,
433,  477,  524,  568,  576,  620,  667,  711,  719,  763,  810,  854,
862,  906,  953,  997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk perhitungan integer. Ini menggunakan titik mengambang presisi ganda secara internal. Namun, seringkali ini sangat berguna.
Kita bisa memeriksa keutamaan. Mari kita cari tahu, berapa banyak kuadrat ditambah 1 yang merupakan bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

```
112
```

Fungsi nonzeros () hanya berfungsi untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros ().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

```
    0.765761      0.401188      0.406347      0.267829
     0.13673      0.390567      0.495975      0.952814
    0.548138      0.006085      0.444255      0.539246
```

Ini mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

```
           1             4
           2             1
           2             2
           3             2
```

Indeks ini dapat digunakan untuk mengatur elemen ke nilai tertentu.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

```
    0.765761      0.401188      0.406347             0
           0             0      0.495975      0.952814
    0.548138             0      0.444255      0.539246
```

Fungsi mset () juga dapat menyetel elemen pada indeks ke entri beberapa matriks lainnya.

```
>mset(A,k,-random(size(A)))
```

```
    0.765761      0.401188      0.406347     -0.126917
   -0.122404     -0.691673      0.495975      0.952814
    0.548138     -0.483902      0.444255      0.539246
```

Dan dimungkinkan untuk mendapatkan elemen dalam vektor.

```
>mget(A,k)
```

```
 [0.267829,  0.13673,  0.390567,  0.006085]
```

Fungsi berguna lainnya adalah extrema, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

```
>ex=extrema(A)
```

```
    0.267829             4      0.765761             1
     0.13673             1      0.952814             4
    0.006085             2      0.548138             1
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal di setiap baris.

```
>ex[,3]'
```

```
  [0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Ini, tentu saja, sama dengan fungsi max ().

```
>max(A)'
```

```
  [0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Tetapi dengan mget (), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen pada posisi yang sama dari matriks lain.

```
>j=(1:rows(A))'|ex[,4], mget(-A,j)
```

```
              1             1
              2             4
              3             1
  [-0.765761,  -0.952814,  -0.548138]
```

Fungsi Matriks Lainnya (Building Matrix)

Untuk membangun matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, kolom yang lebih pendek diisi dengan 0.

```
>v=1:3; v_v
```

```
              1             2             3
              1             2             3
```

Demikian juga, kita dapat melampirkan matriks ke sisi lain secara berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

```
       0.032444     0.0534171      0.595713      0.564454             1
        0.83916      0.175552      0.396988       0.83514             2
      0.0257573      0.658585      0.629832      0.770895             3
```

Jika mereka tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0. Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan real yang melekat pada matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan real tersebut.

```
>A|1
```

```
      0.032444      0.0534171       0.595713       0.564454              1
       0.83916       0.175552       0.396988        0.83514              1
     0.0257573       0.658585       0.629832       0.770895              1
```

Dimungkinkan untuk membuat matriks vektor baris dan kolom.

```
>[v;v]
```

```
             1              2              3
             1              2              3
```

```
>[v',v']
```

```
             1              1
             2              2
             3              3
```

Tujuan utamanya adalah untuk menafsirkan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

```
>"[x,x^2]"(v')
```

```
             1              1
             2              4
             3              9
```

Untuk mendapatkan ukuran A, kita dapat menggunakan fungsi-fungsi berikut.

```
>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)
```

```
2
4
[2,  4]
4
```

Untuk vektor, ada panjang ().

```
>length(2:10)
```

```
9
```

Ada banyak fungsi lain yang menghasilkan matriks.

```
>ones(2,2)
```

```
              1              1
              1              1
```

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan angka selain 1, gunakan yang berikut ini.

```
>ones(5)*6
```

```
[6,  6,  6,  6,  6]
```

Juga matriks bilangan acak dapat dihasilkan dengan acak (distribusi seragam) atau normal (distribusi Gauß).

```
>random(2,2)
```

```
        0.66566       0.831835
          0.977       0.544258
```

Berikut adalah fungsi berguna lainnya, yang menyusun kembali elemen-elemen matriks menjadi matriks lain.

```
>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen2 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3
```

```
              1              2              3
              4              5              6
              7              8              9
```

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan this dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep (), yang mengulang vektor sebanyak n kali.

```
>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))
```

Mari kita uji.

```
>rep(1:3,5)
```

```
[1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3]
```

Fungsi multdup () menduplikasi elemen vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
[1,  1,  1,  1,  1,  2,  2,  2,  2,  2,  3,  3,  3,  3,  3]
[1,  1,  2,  2,  2,  3,  3]
```

Fungsi flipx () dan flipy () mengembalikan urutan baris atau kolom matriks. Yaitu, fungsi flipx () membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
[5,  4,  3,  2,  1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotleft () dan rotright ().

```
>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
[2,  3,  4,  5,  1]
```

Sebuah fungsi khusus adalah drop (v, i), yang menghilangkan elemen dengan indeks di i dari vektor v.

```
>drop(10:20,3)
```

```
[10,  11,  13,  14,  15,  16,  17,  18,  19,  20]
```

Perhatikan bahwa vektor i dalam drop (v, i) mengacu pada indeks elemen di v, bukan nilai elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda harus menemukan elemennya terlebih dahulu. Indeks fungsi (v, x) dapat digunakan untuk mencari elemen x dalam vektor yang diurutkan v.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
[0,  5,  0,  6,  0,  0,  0,  7,  0,  8,  0]
[2,  3,  5,  7,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya untuk menyertakan indeks di luar rentang (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak disortir.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1,  2,  3,  4,  6,  8,  9,  10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau untuk menghasilkan matriks diagonal.

Kami mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

Kemudian kami mengatur diagonal bawah (-1) menjadi 1: 4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	2	1	0	0
0	0	3	1	0
0	0	0	4	1

Perhatikan bahwa kami tidak mengubah matriks A. Kami mendapatkan matriks baru sebagai hasil dari setdiag ().

Berikut adalah fungsi yang mengembalikan matriks tri-diagonal.

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
>tridiag(5,1,2,3)
```

2	3	0	0	0
1	2	3	0	0
0	1	2	3	0
0	0	1	2	3
0	0	0	1	2

Diagonal matriks juga dapat diekstraksi dari matriks. Untuk mendemonstrasikan ini, kami merestrukturisasi vektor 1: 9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9,3,3)
```

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
```

Sekarang kita bisa mengekstrak diagonal.

```
>d=getdiag(A,0)
```

```
[1,  5,  9]
```

Misalnya. Kita dapat membagi matriks dengan diagonalnya. Bahasa matriks memperhatikan bahwa vektor kolom d diterapkan ke matriks baris demi baris.

```
>fraction A/d'
```

```
          1          2          3
        4/5          1        6/5
        7/9        8/9          1
```

Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler bekerja untuk matriks dan input vektor juga, jika memungkinkan. Misalnya, fungsi sqrt () menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

```
[1,  1.41421,  1.73205]
```

Jadi Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot fungsi (alternatifnya menggunakan ekspresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampikan
```

Dengan ini dan operator titik dua a: delta: b, vektor nilai fungsi dapat dibuat dengan mudah.
Dalam contoh berikut, kami menghasilkan vektor nilai t [i] dengan jarak 0,1 dari -1 hingga 1. Kemudian kami menghasilkan vektor nilai fungsi
lateks: s = t ^ 3-t

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

```
[0,  0.171,  0.288,  0.357,  0.384,  0.375,  0.336,  0.273,  0.192,
0.099,  0,  -0.099,  -0.192,  -0.273,  -0.336,  -0.375,  -0.384,
-0.357,  -0.288,  -0.171,  0]
```

EMT memperluas operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Misalnya, vektor kolom dikali vektor baris mengembang menjadi matriks, jika operator diterapkan. Berikut ini, v 'adalah vektor yang dialihkan (vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

```
        1         2         3         4         5
        2         4         6         8        10
        3         6         9        12        15
        4         8        12        16        20
        5        10        15        20        25
```

Perhatikan, ini sangat berbeda dari hasil perkalian matriks. Produk matriks dilambangkan dengan titik "." di EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

```
55
```

Secara default, vektor baris dicetak dalam format kompak.

```
>[1,2,3,4]
```

```
[1,  2,  3,  4]
```

Untuk matriks, operator khusus. menunjukkan perkalian matriks, dan A 'menunjukkan transposing. Matriks 1x1 dapat digunakan seperti bilangan real.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

```
5
25
```

Untuk mengubah urutan matriks, kami menggunakan apostrof.

```
>v=1:4; v'
```

```
            1
            2
            3
            4
```

Sehingga kita dapat menghitung matriks A dikali vektor b.

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

```
           30
           70
```

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi v'.v berbeda dari v.v '.

```
>v'.v
```

```
            1             2             3             4
            2             4             6             8
            3             6             9            12
            4             8            12            16
```

v.v 'menghitung norma v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah vektor 1x1, yang bekerja seperti bilangan real.

```
>v.v'
```

```
 30
```

Ada juga norma fungsi (bersama dengan banyak fungsi lain dari Aljabar Linear).

```
>norm(v)^2
```

```
 30
```

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.
Berikut adalah ringkasan aturannya.
- Fungsi yang diterapkan ke vektor atau matriks diterapkan ke setiap elemen.
- Seorang operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan berpasangan ke elemen matriks.
- Jika kedua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diperluas dengan cara yang masuk akal, sehingga memiliki ukuran yang sama.
Misalnya, nilai skalar dikalikan vektor mengalikan nilai dengan setiap elemen vektor. Atau matriks dikalikan dengan vektor (dengan *, bukan.) Memperluas vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.
Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator ^.

```
>[1,2,3]^2
```

```
[1,  4,  9]
```

Ini kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan kolom mengembang kelelahan dengan menduplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

```
          1          2          3
          2          4          6
          3          6          9
```

Perhatikan bahwa produk skalar menggunakan produk matriks, bukan *!

```
>v.v'
```

```
14
```

Ada banyak fungsi untuk matriks. Kami memberikan daftar singkat. Anda harus membaca dokumentasi untuk informasi lebih lanjut tentang perintah ini.

```
sum, prod menghitung jumlah dan produk dari baris
cumsum, cumprod melakukan hal yang sama secara kumulatif
menghitung nilai ekstrem dari setiap baris
extrema mengembalikan vektor dengan informasi ekstrem
diag (A, i) mengembalikan diagonal ke-i
setdiag (A, i, v) mengatur diagonal ke-i
id (n) matriks identitas
det (A) determinan
charpoly (A) polinomial karakteristik
eigenvalues ??(A) eigenvalues
```

```
>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)
```

```
[1,   4,   9]
14
[1,   5,   14]
```

Operator: menghasilkan vektor baris spasi yang sama, secara opsional dengan ukuran langkah.

```
>1:4, 1:2:10
```

```
[1,   2,   3,   4]
[1,   3,   5,   7,   9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor ada operator "|" dan "_".

```
>[1,2,3]|[4,5], [1,2,3]_1
```

```
[1,   2,   3,   4,   5]
            1             2              3
            1             1              1
```

Unsur-unsur matriks disebut dengan "A [i, j]".

```
>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]
```

```
6
```

Untuk vektor baris atau kolom, v [i] adalah elemen ke-i dari vektor. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i lengkap dari matriks tersebut.

```
>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]
```

```
6
[7,   8,   9]
```

Indeks juga dapat berupa vektor baris indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2,   4]
            2
            5
            8
```

Bentuk singkat dari: adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

```
              2             3
              5             6
              8             9
```

Untuk tujuan vektorisasi, elemen-elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

```
>A{4}
```

```
  4
```

Matriks juga bisa diratakan, menggunakan fungsi redim (). Ini diimplementasikan dalam fungsi flatten ().

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

```
  [1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
  [1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
```

Untuk menggunakan matriks untuk tabel, mari kita reset ke format default, dan menghitung tabel nilai sinus dan cosinus. Perhatikan bahwa sudut dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

```
              0
             45
             90
            135
            180
            225
            270
            315
            360
```

Sekarang kami menambahkan kolom ke matriks.

```
>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)
```

```
            0            0            1            0
           45     0.785398     0.707107     0.707107
           90       1.5708            0            1
          135      2.35619    -0.707107     0.707107
          180      3.14159           -1            0
          225      3.92699    -0.707107    -0.707107
          270      4.71239            0           -1
          315      5.49779     0.707107    -0.707107
          360      6.28319            1            0
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menghasilkan beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus.

Dalam contoh berikut, kami menghitung t [j] ^ i untuk i dari 1 ke n. Kami mendapatkan matriks, di mana setiap baris adalah tabel t ^ i untuk satu i. Yaitu, matriks memiliki elemen lateks: a_ {i, j} = t_j ^ i, \ quad 1 \ le j \ le 101, \ quad 1 \ le i \ le n

Fungsi yang tidak bekerja untuk input vektor harus di-vectorisasi. Hal ini dapat dicapai dengan kata kunci "peta" dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi tersebut akan dievaluasi untuk setiap elemen dari parameter vektor.

Integrasi numerik integ () hanya berfungsi untuk batas interval skalar. Jadi kita perlu melakukan vektorisasi.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
```

Kata kunci "map" memvektorisasi fungsi. Fungsi tersebut sekarang akan bekerja untuk vektor angka.

```
>f([1:5])
```

```
  [0,  2.05045,  13.7251,  113.336,  1241.03]
```

Sub-Matriks dan Elemen-Matriks

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi braket.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]
```

```
            1            2            3
            4            5            6
            7            8            9
  5
```

Kita dapat mengakses baris matriks yang lengkap.

```
>A[2]
```

```
[4,  5,  6]
```

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

```
>v=1:3; v[2]
```

```
2
```

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks 1xn dan mxn, tentukan semua kolom menggunakan indeks kedua yang kosong.

```
>A[2,]
```

```
[4,  5,  6]
```

Jika indeks adalah vektor indeks, Euler akan mengembalikan baris yang sesuai dari matriks.
Di sini kami ingin baris pertama dan kedua dari A.

```
>A[[1,2]]
```

```
             1             2             3
             4             5             6
```

Kami bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Tepatnya, kami tidak mengubah A di sini, tetapi menghitung versi A.

```
>A[[3,2,1]]
```

```
             7             8             9
             4             5             6
             1             2             3
```

Trik indeks juga bekerja dengan kolom.
Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

```
>A[1:3,2:3]
```

```
             2             3
             5             6
             8             9
```

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

```
>A[:,3]
```

```
                3
                6
                9
```

Cara lainnya, biarkan indeks pertama kosong.

```
>A[,2:3]
```

```
                2             3
                5             6
                8             9
```

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir A.

```
>A[-1]
```

```
  [7,   8,   9]
```

Sekarang mari kita ubah elemen A dengan menetapkan submatrix dari A ke beberapa nilai. Ini sebenarnya mengubah matriks A yang disimpan.

```
>A[1,1]=4
```

```
                4             2             3
                4             5             6
                7             8             9
```

Kami juga dapat menetapkan nilai ke baris A.

```
>A[1]=[-1,-1,-1]
```

```
               -1            -1            -1
                4             5             6
                7             8             9
```

Kami bahkan dapat menetapkan ke sub-matriks jika memiliki ukuran yang sesuai.

```
>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]
```

```
              5              6             -1
              7              8              6
              7              8              9
```

Selain itu, beberapa pintasan diperbolehkan.

```
>A[1:2,1:2]=0
```

```
              0              0             -1
              0              0              6
              7              8              9
```

Peringatan: Indeks di luar batas menampilkan matriks kosong, atau pesan kesalahan, tergantung pada pengaturan sistem. Standarnya adalah pesan kesalahan. Ingat, bagaimanapun, bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen matriks yang dihitung dari akhir.

```
>A[4]
```

```
 Row index 4 out of bounds!
 Error in:
 A[4] ...
     ^
```

Menyortir dan Mengocok

Fungsi sort () mengurutkan vektor baris.

```
>sort([5,6,4,8,1,9])
```

```
 [1,  4,  5,  6,  8,  9]
```

Seringkali perlu untuk mengetahui indeks dari vektor yang diurutkan dalam vektor asli. Ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain dengan cara yang sama.
Mari kita mengacak vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

```
 [4,  5,  10,  6,  8,  9,  1,  7,  2,  3]
```

Indeks tersebut berisi urutan v.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
 [1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Ini bekerja untuk vektor string juga.

```
>s=["a","d","e","a","aa","e"]
```

```
 a
 d
 e
 a
 aa
 e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
 a
 a
 aa
 d
 e
 e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
 [4,  1,  5,  2,  6,  3]
```

Fungsi unik mengembalikan daftar elemen unik vektor yang diurutkan.

```
>intrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
 [4,  4,  9,  2,  6,  5,  10,  6,  5,  1]
 [1,  2,  4,  5,  6,  9,  10]
```

Ini bekerja untuk vektor string juga.

```
>unique(s)
```

```
a
aa
d
e
```

Aljabar linier

EMT memiliki banyak fungsi untuk menyelesaikan masalah sistem linier, sistem jarang, atau regresi.

Untuk sistem linier Ax = b, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers atau fit linier. Operator A \ b menggunakan versi algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

```
             -4
            4.5
```

Untuk contoh lain, kami menghasilkan matriks 200x200 dan jumlah barisnya. Kemudian kita menyelesaikan Ax = b menggunakan matriks invers. Kami mengukur kesalahan sebagai deviasi maksimal semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang tepat.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
  8.790745908981989e-13
```

Jika sistem tidak memiliki solusi, kesesuaian linier meminimalkan norma kesalahan Ax-b.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
              1              2              3
              4              5              6
              7              8              9
```

Determinan dari matriks ini adalah 0.

```
>det(A)
```

```
0
```

Matriks Simbolik

Maxima memiliki matriks simbolis. Tentu saja, Maxima dapat digunakan untuk soal-soal aljabar linier sederhana. Kita dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan &: =, dan kemudian menggunakannya dalam ekspresi simbolik. Bentuk [...] biasa untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan di Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A
>$&det(A), $&factor(%)
>$&invert(A) with a=0
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

Seperti semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(%,x)
```

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan kelipatannya.

```
>$&eigenvalues([a,1;1,a])
```

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu, perlu pengindeksan yang cermat.

```
>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

```
                                   [1, - 1]
```

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik seperti ekspresi simbolik lainnya.

```
>A(a=4,b=5)
```

```
               1              4
               5              2
```

Dalam ekspresi simbolik, gunakan dengan.

```
>$&A with [a=4,b=5]
```

Akses ke baris matriks simbolik berfungsi seperti halnya dengan matriks numerik.

```
>$&A[1]
```

Ekspresi simbolis dapat berisi tugas. Dan itu mengubah matriks A.

```
>&A[1,1]:=t+1; $&A
```

Ada fungsi simbolik dalam Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk ini, lihat dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

```
>v &= makelist(1/(i+j),i,1,3); $v
```

```
>B &:= [1,2;3,4]; $B, $&invert(B)
```

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik di Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengantar Maxima.

```
>$&invert(B)()
```

```
             -2              1
            1.5           -0.5
```

Euler juga memiliki fungsi xinv () yang kuat, yang membuat upaya lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.
Perhatikan, bahwa dengan &: = matriks B telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita bisa menggunakannya di sini.

```
>longest B.xinv(B)
```

```
                        1                        0
                        0                        1
```

Misalnya. nilai eigen dari A dapat dihitung secara numerik.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

```
  [16.1168,  -1.11684,  0]
```

Atau secara simbolis. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

```
>$&eigenvalues(@A)
```

Nilai Numerik dalam Ekspresi simbolis

Ekspresi simbolik hanyalah string yang mengandung ekspresi. Jika kita ingin mendefinisikan nilai untuk ekspresi simbolik dan ekspresi numerik, kita harus menggunakan "&: =".

```
>A &:= [1,pi;4,5]
```

```
              1       3.14159
              4             5
```

Masih terdapat perbedaan antara bentuk numerik dan simbolik. Saat mentransfer matriks ke bentuk simbolis, pendekatan pecahan untuk real akan digunakan.

```
>$&A
```

Untuk menghindari hal ini, ada fungsi "mxmset (variabel)".

```
>mxmset(A); $&A
```

Maxima juga dapat menghitung dengan angka floating point, dan bahkan dengan angka mengambang besar dengan 32 digit. Namun, evaluasinya jauh lebih lambat.

```
>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

Ketepatan angka floating point besar dapat diubah.

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
        3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\
  4592307816406286208998628034825342117068b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik apa pun yang menggunakan "@var". Perhatikan bahwa ini hanya diperlukan, jika variabel telah ditentukan dengan ": =" atau "=" sebagai variabel numerik.

```
>B:=[1,pi;3,4]; $&det(@B)
```

Demo - Suku Bunga

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk menghitung suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.
Asumsikan Anda memiliki modal awal 5000 (katakanlah dalam dolar).

```
>K=5000
```

```
5000
```

Sekarang kami mengasumsikan tingkat bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu tingkat sederhana dan hitung hasilnya.

```
>K*1.03
```

```
5150
```

Euler akan memahami sintaks berikut juga.

```
>K+K*3%
```

```
5150
```

Tapi lebih mudah menggunakan faktornya

```
>q=1+3%, K*q
```

```
1.03
5150
```

Selama 10 tahun, kita cukup mengalikan faktor dan mendapatkan nilai akhir dengan suku bunga majemuk.

```
>K*q^10
```

```
6719.58189672
```

Untuk tujuan kami, kami dapat mengatur format menjadi 2 digit setelah titik desimal.

```
>format(12,2); K*q^10
```

```
6719.58
```

Mari kita cetak yang dibulatkan menjadi 2 digit itu dalam kalimat lengkap.

```
>"Mulai dari " + K + "$ Anda mendapatkan " + round(K*q^10,2) + "$."
```

```
Mulai dari 5000$ Anda mendapatkan 6719.58$.
```

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara tahun 1 sampai tahun 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak perlu menulis loop, tetapi cukup masukkan

```
>K*q^(0:10)
```

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00      5150.00      5304.50      5463.64      ...
```

Bagaimana keajaiban ini bekerja? Pertama, ekspresi 0:10 mengembalikan vektor bilangan bulat.

```
>short 0:10
```

```
[0,  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Kemudian semua operator dan fungsi di Euler dapat diterapkan ke elemen vektor untuk elemen. jadi

```
>short q^(0:10)
```

```
[1,  1.03,  1.0609,  1.0927,  1.1255,  1.1593,  1.1941,  1.2299,
1.2668,  1.3048,  1.3439]
```

adalah vektor faktor q ^ 0 hingga q ^ 10. Ini dikalikan dengan K, dan kita mendapatkan nilai vektor.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

Tentu saja, cara realistis untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkan ke sen terdekat setiap tahun. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

```
>function oneyear (K) := round(K*q,2)
```

Mari kita bandingkan kedua hasil tersebut, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
                1271.61
              1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n, dan kita harus mengulang selama bertahun-tahun. Euler memberikan banyak solusi untuk ini.
Cara termudah adalah fungsi iterasi, yang mengulang fungsi tertentu beberapa kali.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

```
 Real 1 x 11 matrix

     5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Kami dapat mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kami dengan tempat desimal tetap.

```
>VKr'
```

```
     5000.00
     5150.00
     5304.50
     5463.64
     5627.55
     5796.38
     5970.27
     6149.38
     6333.86
     6523.88
     6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen tertentu dari vektor, kami menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
     5150.00
     5000.00     5150.00     5304.50
```

Anehnya, kita juga bisa menggunakan indeks vektor. Ingat bahwa 1: 3 menghasilkan vektor [1,2,3].
Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
      6719.60
      6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil.

Memecahkan Persamaan

Sekarang kita ambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan jumlah uang tertentu setiap tahun.

```
>function onepay (K) := K*q+R
```

Kami tidak harus menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus menentukan nilai-nilai ini. Kami memilih R = 200.

```
>R=200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
  Real 1 x 11 matrix

      5000.00     5350.00     5710.50     6081.82     ...
```

Bagaimana jika kita menghapus jumlah yang sama setiap tahun?

```
>R=-200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
  Real 1 x 11 matrix

      5000.00     4950.00     4898.50     4845.45     ...
```

Kami melihat bahwa uang berkurang. Jelas, jika kita hanya mendapatkan 150 bunga di tahun pertama, tetapi menghapus 200, kita kehilangan uang setiap tahun.
Bagaimana kita bisa menentukan berapa tahun uang itu akan bertahan? Kami harus menulis loop untuk ini. Cara termudah adalah mengulanginya cukup lama.

```
>VKR=iterate("onepay",5000,50)
```

```
  Real 1 x 51 matrix

      5000.00     4950.00     4898.50     4845.45     ...
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

```
>min(nonzeros(VKR<0))
```

```
      48.00
```

Alasan untuk ini adalah bahwa nonzeros (VKR <0) mengembalikan vektor indeks i, di mana VKR [i] <0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate () memiliki satu trik lagi. Ini bisa mengambil kondisi akhir sebagai argumen. Maka itu akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x,n}=iterate("onepay",5000,till="x<0"); x, n,
```

```
     -19.83
      47.00
```

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Asumsikan kita tahu bahwa nilainya 0 setelah 50 tahun. Berapa tingkat bunganya?

Ini adalah pertanyaan yang hanya bisa dijawab secara numerik. Di bawah ini, kami akan mendapatkan rumus yang diperlukan. Maka Anda akan melihat bahwa tidak ada rumus mudah untuk suku bunga. Tetapi untuk saat ini, kami bertujuan untuk solusi numerik.

Langkah pertama adalah menentukan fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kami menambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n) := iterate("x*(1+P/100)+R",K,n;P,R)[-1]
```

Iterasinya sama seperti di atas

lateks: x_ {n + 1} = x_n \ cdot \ kiri (1+ \ frac {P} {100} \ kanan) + R

Tapi kami lebih lama menggunakan nilai global R dalam ekspresi kami. Fungsi seperti iterate () memiliki trik khusus di Euler. Anda dapat meneruskan nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam hal ini P dan R.

Apalagi kami hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi kami mengambil indeks [-1].

Mari kita coba tes.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

```
     -19.83
```

Sekarang kita bisa menyelesaikan masalah kita.

```
>solve("f(5000,-200,x,50)",3)
```

```
          3.15
```

Rutin menyelesaikan memecahkan ekspresi = 0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kami mengambil nilai awal 3% untuk algoritme. Fungsi Solving () selalu membutuhkan nilai awal.
Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menjawab pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita keluarkan per tahun sehingga modal awal habis setelah 20 tahun dengan asumsi tingkat bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

```
       -336.08
```

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat menyelesaikan jumlah tahun, karena fungsi kami mengasumsikan n sebagai nilai integer.

Solusi Simbolis untuk Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolik Euler untuk mempelajari masalahnya. Pertama kita mendefinisikan fungsi onepay () secara simbolis.

```
>function op(K) &= K*q+R; $&op(K)
```

Kami sekarang dapat mengulang ini.

```
>$&op(op(op(op(K)))), $&expand(%)
```

Kami melihat sebuah pola. Setelah n periode yang kita miliki
lateks: K_n = q ^ n K + R (1 + q + \ ldots + q ^ {n-1}) = q ^ n K + \ frac {q ^ n-1} {q-1} R
Rumusnya adalah rumus jumlah geometris, yang dikenal dengan Maxima.

```
>&sum(q^k,k,0,n-1); $& % = ev(%,simpsum)
```

Ini agak rumit. Jumlahnya dievaluasi dengan bendera "simpsum" untuk menguranginya menjadi hasil bagi.
Mari kita buat fungsi untuk ini.

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; $&fs(K,
```

Fungsinya sama dengan fungsi f kita sebelumnya. Tapi itu lebih efektif.

```
>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)
```

```
-19.82504734650985
-19.82504734652684
```

Sekarang kita dapat menggunakannya untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Tebakan awal kami adalah 30 tahun.

```
>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)
```

```
20.51
```

Jawaban ini mengatakan bahwa itu akan menjadi negatif setelah 21 tahun.
Kita juga dapat menggunakan sisi simbolik Euler untuk menghitung rumus pembayaran.
Asumsikan kita mendapat pinjaman sebesar K, dan membayar n pembayaran R (dimulai setelah tahun pertama) meninggalkan sisa utang Kn (pada saat pembayaran terakhir). Rumusnya jelas

```
>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; $&equ
```

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk
getah: i = \ frac {P} {100}

```
>equ &= (equ with P=100*i); $&equ
```

Kita bisa mencari nilai R secara simbolis.

```
>$&solve(equ,R)
```

Seperti yang Anda lihat dari rumusnya, fungsi ini mengembalikan kesalahan titik mengambang untuk i = 0. Euler tetap merencanakannya.
Tentu saja, kami memiliki batasan berikut.

```
>$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)
```

Jelas, tanpa bunga kita harus membayar kembali 10 bunga dari 500.

Persamaan ini juga bisa diselesaikan untuk n. Ini terlihat lebih bagus, jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan padanya.

```
>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; $&fn
```

3 Penggunaan Software EMT untuk Plot 2D

Informasi

Nama : Assyifa Cahya Marsellita
NIM : 22305141001
Kelas : Matematika B

Menggambar Grafik 2D dengan EMT

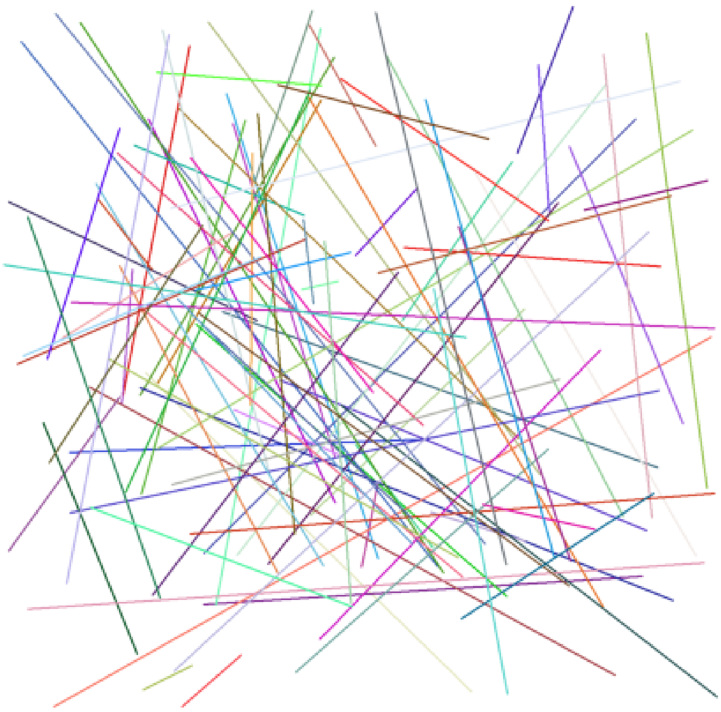
Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagaikurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

Basic Plots

Ada fungsi plot yang sangat mendasar. Terdapat koordinat layar yang selalu berkisar antara 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya berbentuk persegi atau tidak. Semut terdapat koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antar koordinat bergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, shrinkwindow() default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh ini, kita hanya menggambar beberapa garis acak dengan berbagai warna. Untuk rincian tentang fungsi-fungsi ini, pelajari fungsi inti EMT.

```
>clg; // clear screen
>window(0,0,1024,1024); // use all of the window
>setplot(0,1,0,1); // set plot coordinates
>hold on; // start overwrite mode
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2);  // get random points
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // get random colors
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot
>hold off; // end overwrite mode
>insimg; // insert to notebook
```



```
>reset;
```

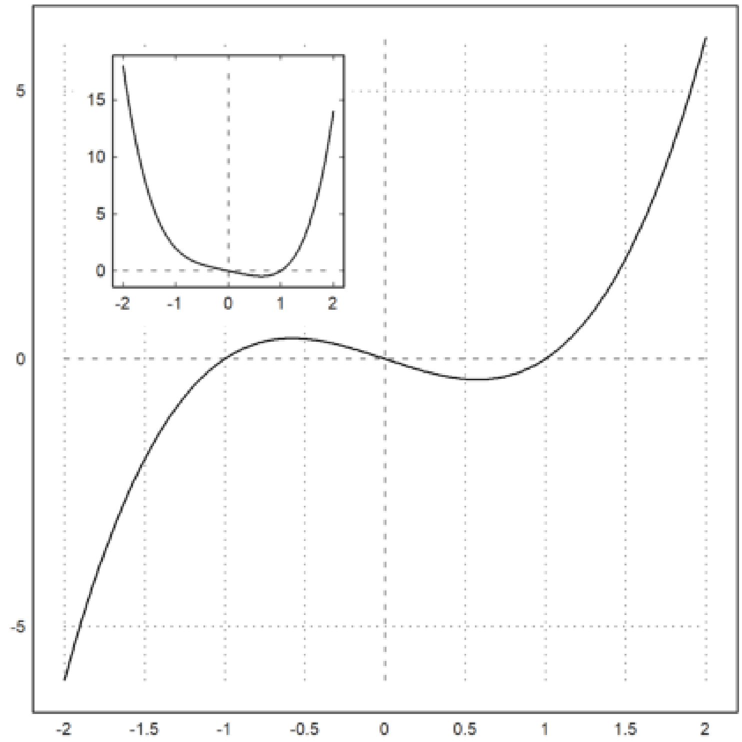
Grafik perlu ditahan, karena perintah plot() akan menghapus jendela plot.

Untuk menghapus semua yang kami lakukan, kami menggunakan reset().

Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lainnya adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.

Contoh lain, kita menggambar plot sebagai sisipan di plot lain. Hal ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak memberikan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kita menyimpan dan memulihkan jendela penuh, dan menahan plot saat ini sementara kita memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x");
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;
>ow=window();
>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);
>hold on;
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);
>plot2d("x^4-x",grid=6):
```




```
>hold off;
>window(ow);
```

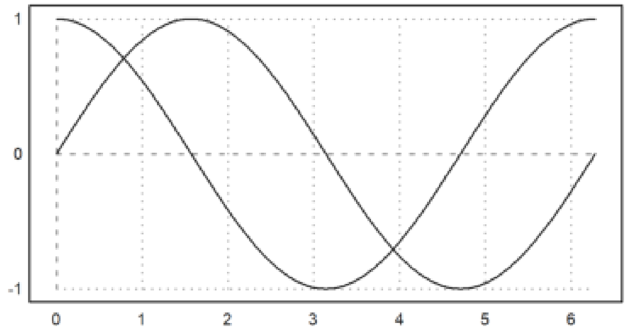
Plot dengan banyak angka dicapai dengan cara yang sama. Ada dungsi figure()utilitas untuk ini.

Plot Aspect

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspek(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspeknya nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan "Set Aspect" ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafik saat ini.

Tapi Anda juga bisa mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki cukup ruang.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi):
```




```
>aspect();
>reset;
```

Fungsi reset() mengembalikan default plot termasuk rasio aspek.

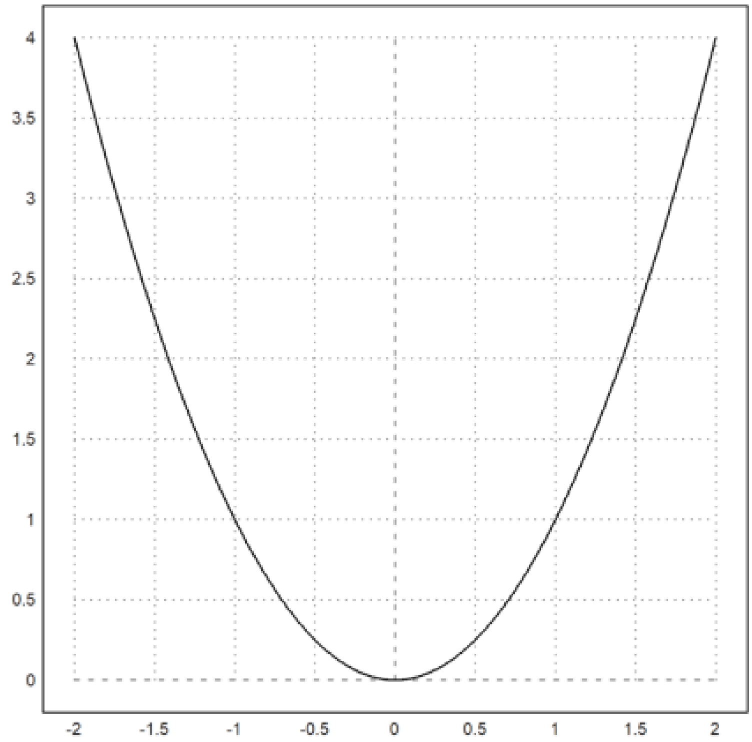
Plot 2D di Euler

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.
Dimungkinkan untuk membuat plot di Maxima menggunakan Gnuplot atau dengan Python menggunakan Math Plot Lib.
Euler dapat membuat plot 2D
- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva berparameter,
- vektor nilai x-y,
- awan titik di pesawat,
- kurva implisit dengan level atau wilayah level.
- Fungsi kompleks
Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang, dan plot berbayang.

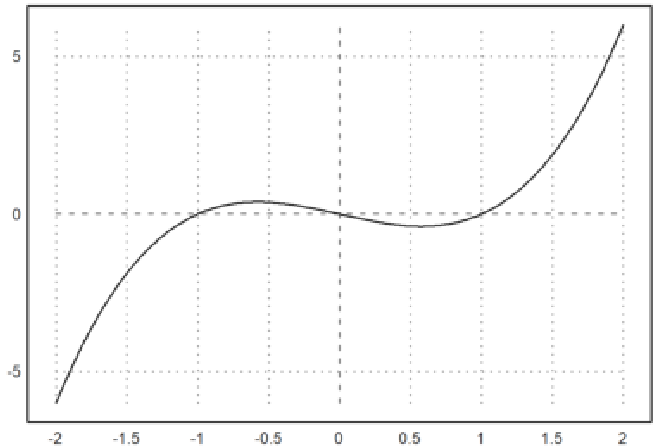
Plot Ekspresi atau Variabel

Ekspresi tunggal dalam "x" (misalnya "4*x^2") atau nama suatu fungsi (misalnya "f") menghasilkan grafik fungsi tersebut.
Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsinya.
Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua ":", plot akan dimasukkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

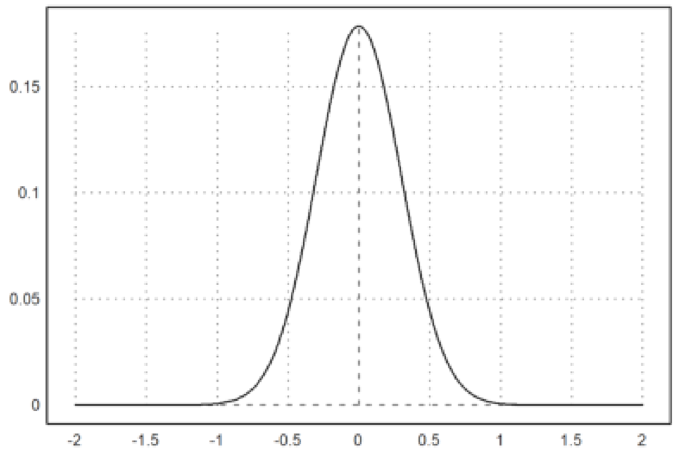
```
>plot2d("x^2"):
```




```
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):
```




```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil p
```

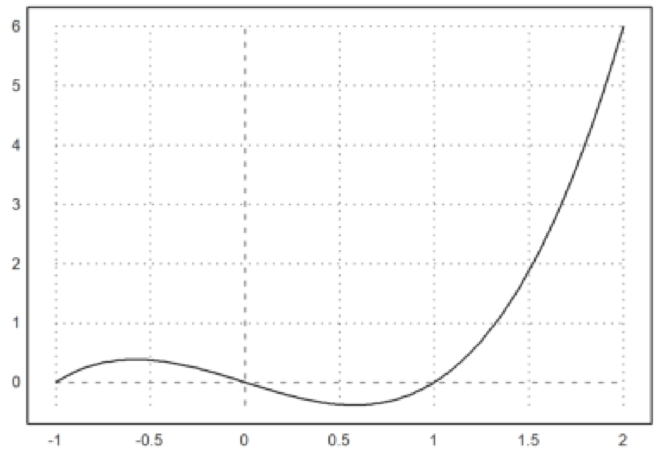


Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai-nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.

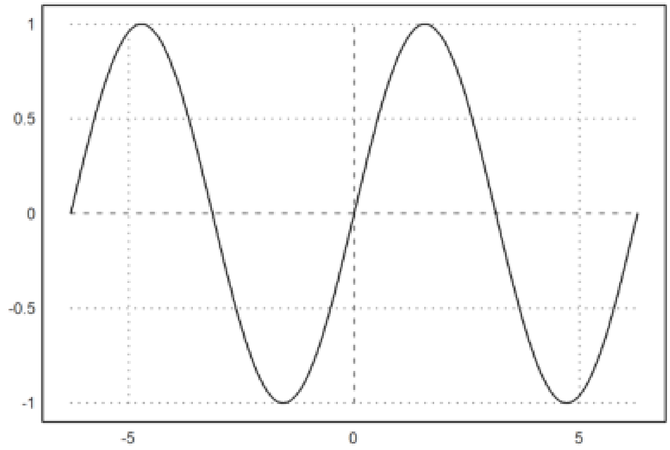
Rentang plot diatur dengan parameter yang ditetapkan sebagai berikut

- a,b: rentang x (default -2,2)
- c,d: rentang y (default: skala dengan nilai)
- r: alternatifnya radius di sekitar pusat plot
- cx,cy: koordinat pusat plot (default 0,0)

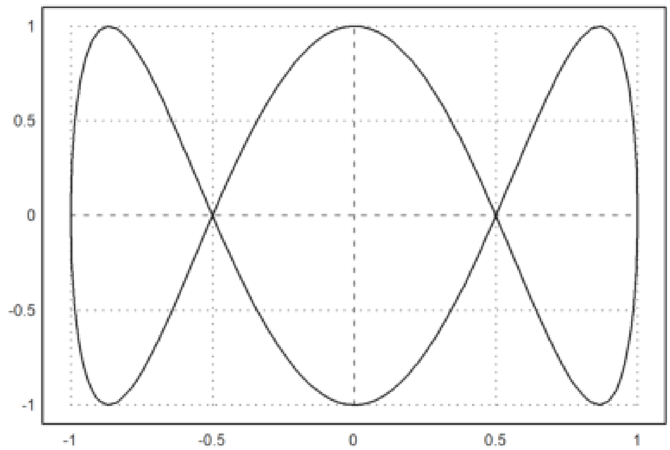
```
>plot2d("x^3-x",-1,2):
```




```
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```

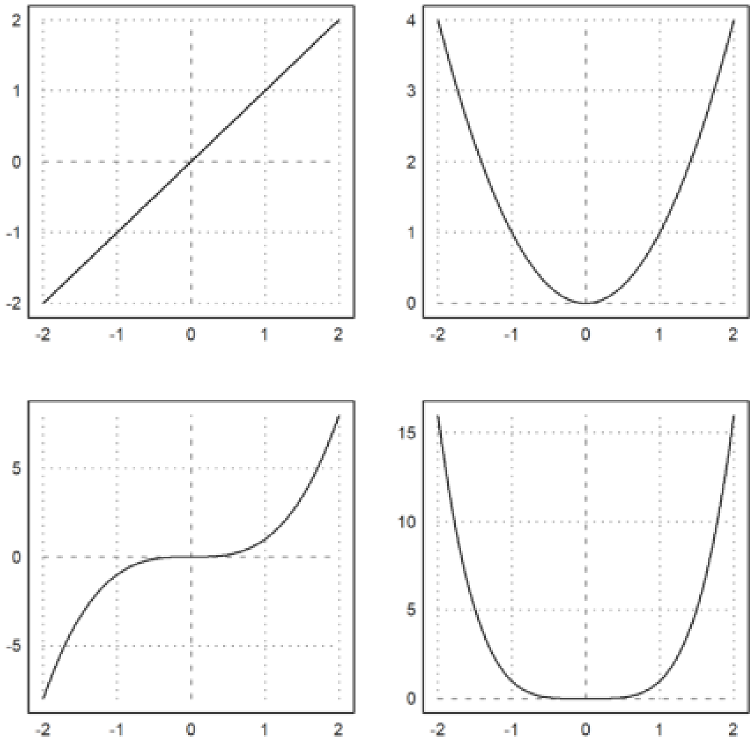



```
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):
```



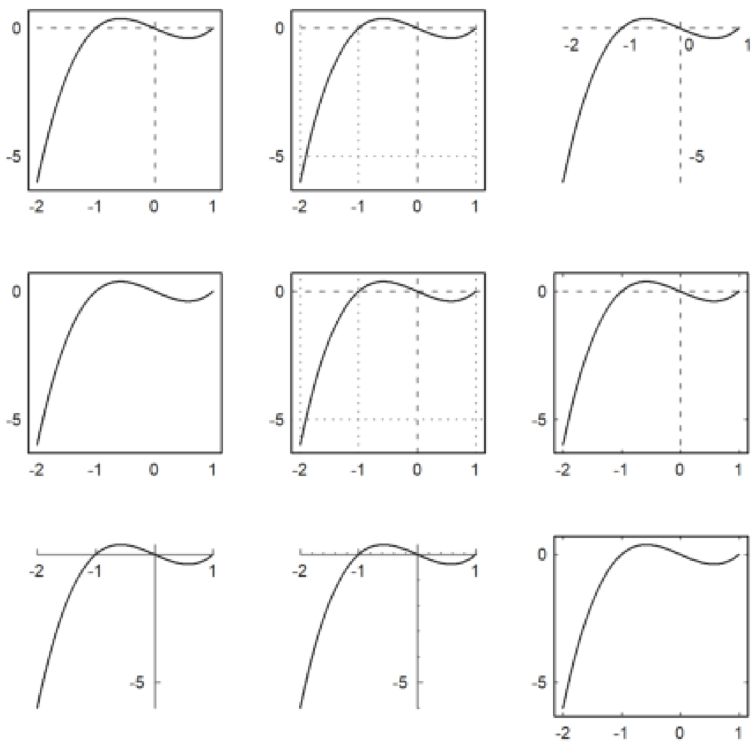
Alternatif untuk titik dua adalah perintah insimg(baris), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.
Dalam opsi, plot dapat diatur agar muncul
- di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela buku catatan.
Lebih banyak gaya dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.
Bagaimanapun, tekan tombol tabulator untuk melihat plotnya, jika tersembunyi.
Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Dalam contoh, kita memplot x^1 hingga x^4 menjadi 4 bagian jendela. gambar(0) mengatur ulang jendela default.

```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0):
```



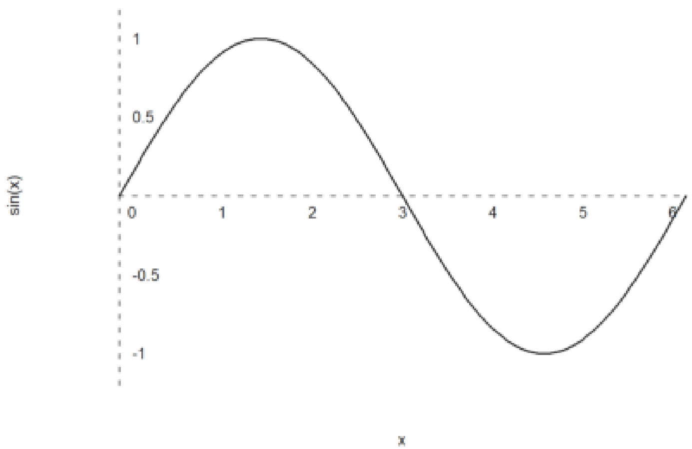
Di plot2d(), ada gaya alternatif yang tersedia dengan grid=x. Untuk gambaran umum, kami menampilkan berbagai gaya kisi dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah figure()). Gaya grid=0 tidak disertakan. Ini tidak menunjukkan kisi dan bingkai.

```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

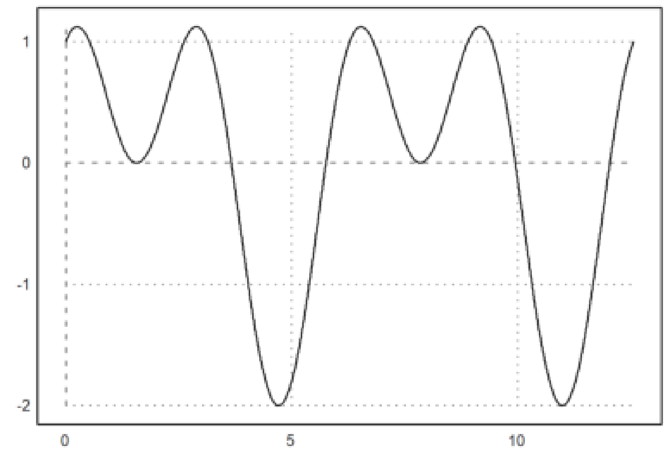


Jika argumen pada plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot tersebut.
Alternatifnya, a, b, c, d dapat ditentukan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dll.
Pada contoh berikut, kita mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)"):
```



```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):
```

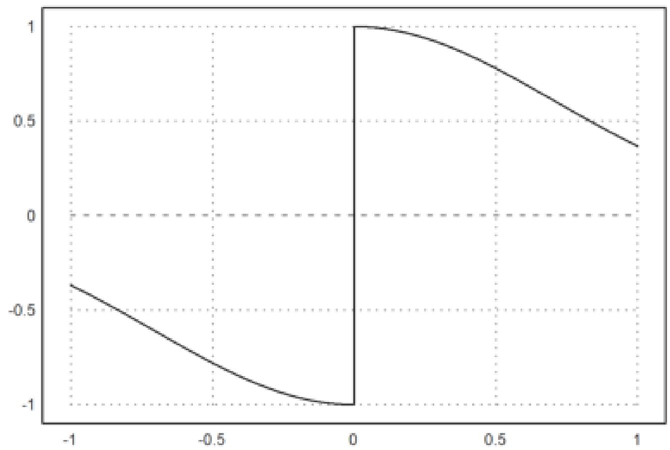


Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan di direktori yang sama dengan buku catatan, secara default di subdirektori bernama "gambar". Mereka juga digunakan oleh ekspor HTML.

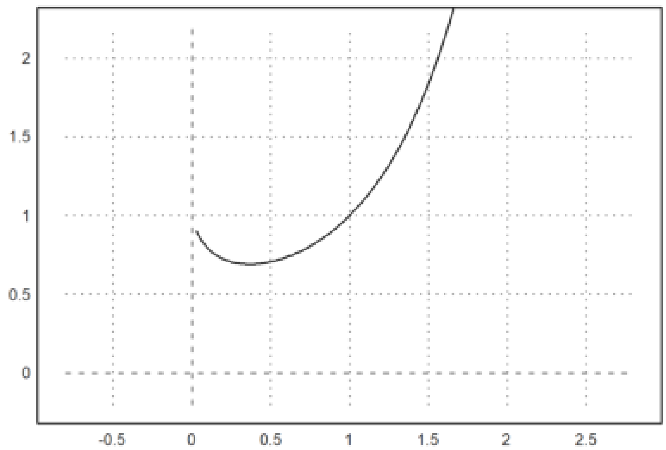
Anda cukup menandai gambar apa saja dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi di menu File.

Fungsi atau ekspresi di plot2d dievaluasi secara adaptif. Agar lebih cepat, nonaktifkan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=... Hal ini hanya diperlukan dalam kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```

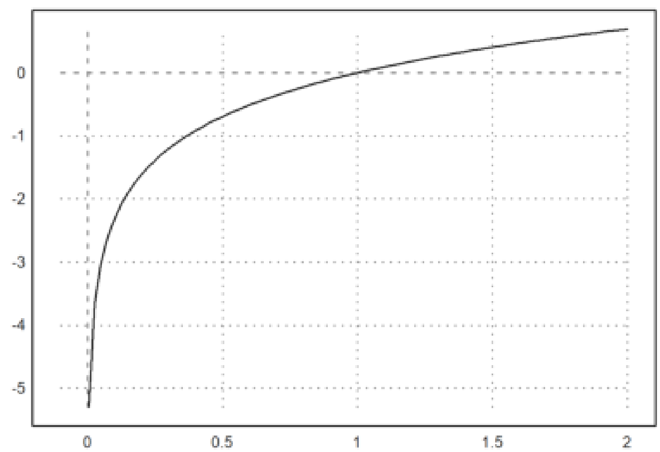


```
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```



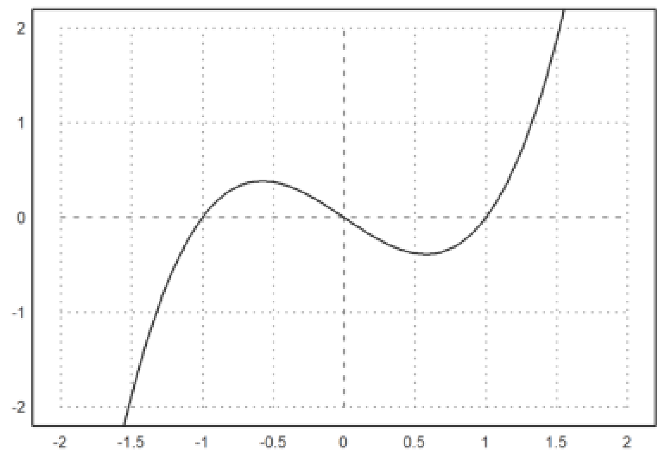
Perhatikan bahwa x^x tidak ditentukan untuk x<=0. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai membuat plot segera setelah fungsinya ditentukan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN di luar jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)",-0.1,2):
```

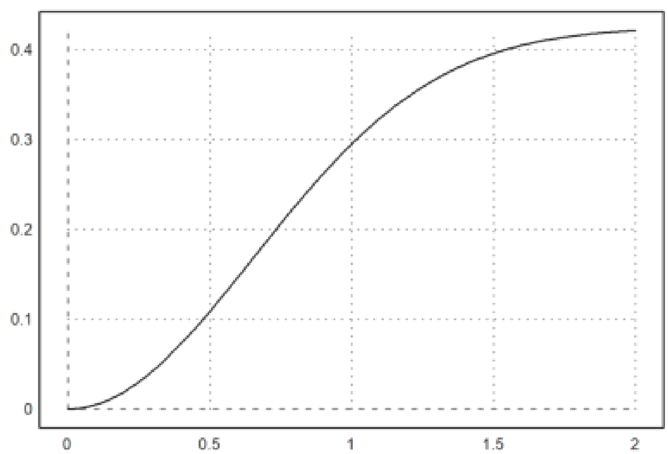


Parameter square=true (atau >square) memilih rentang y secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan spasi persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
```

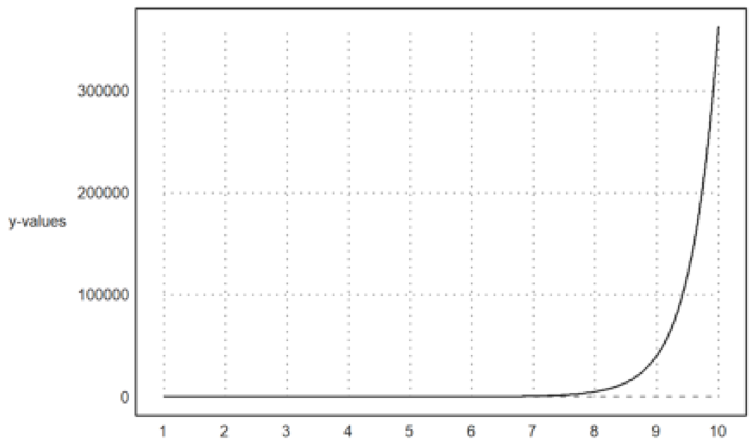



```
>plot2d(''integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)'',0,2): // plot integral
```



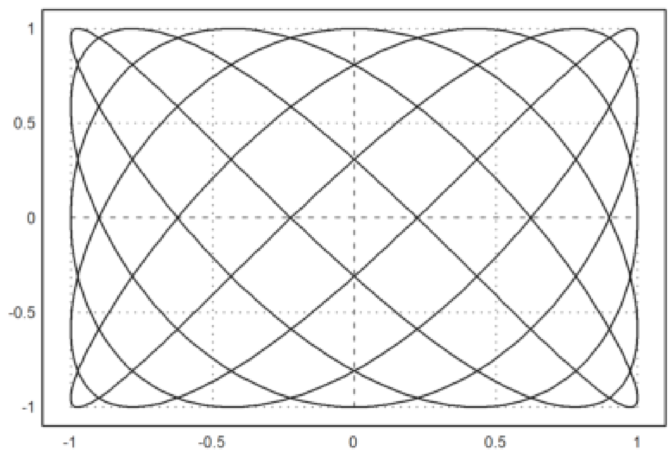
Jika Anda memerlukan lebih banyak ruang untuk label y, panggil shrinkwindow() dengan parameter lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

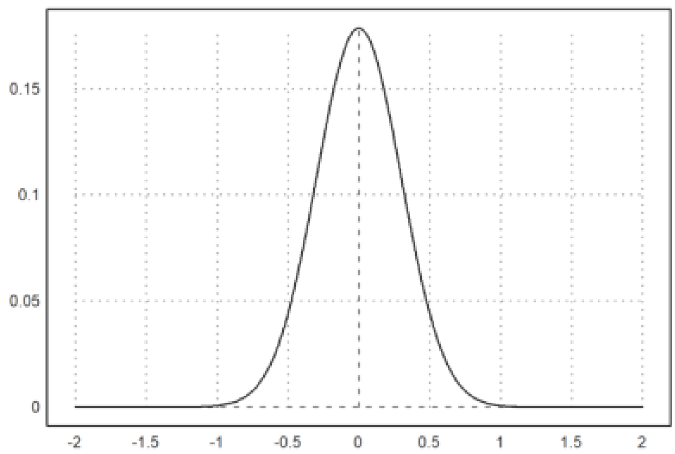


Ekspresi simbolik juga dapat digunakan karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

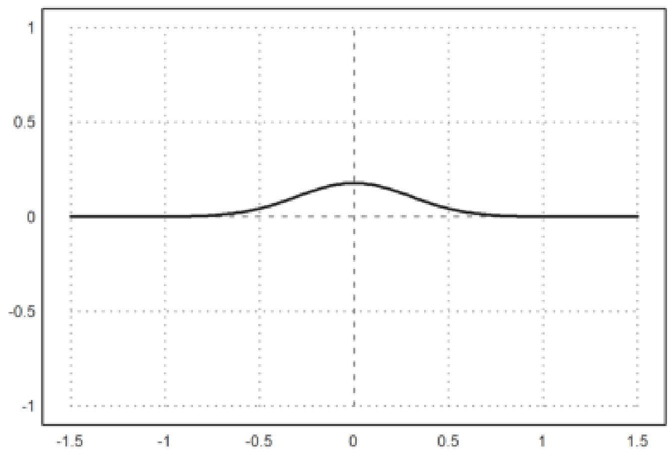
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```



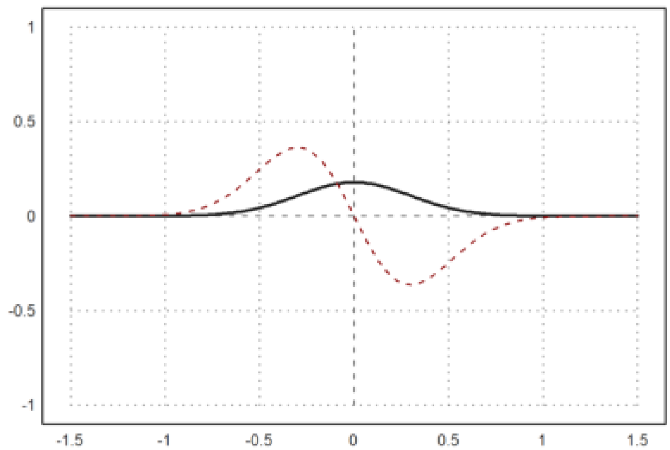

```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression
>plot2d(expr,-2,2): // plot from -2 to 2
```



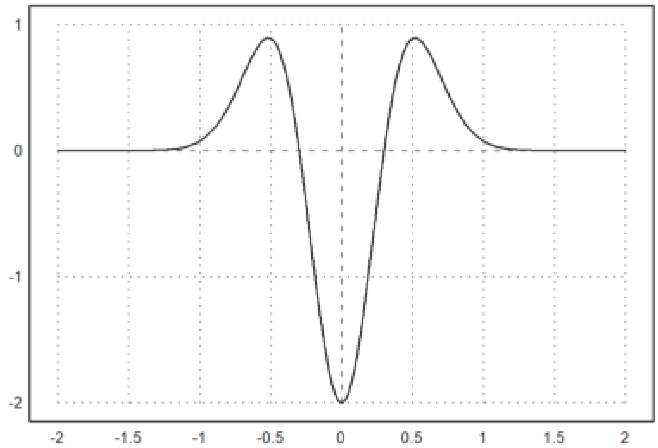

```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot in a square around (0,0)
```



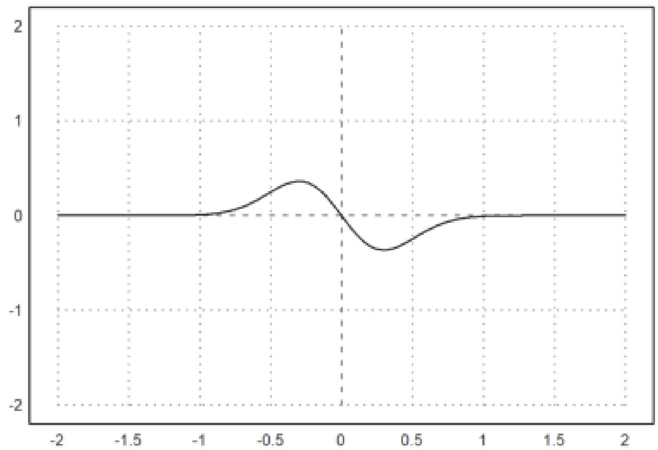

```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // add another plot
```



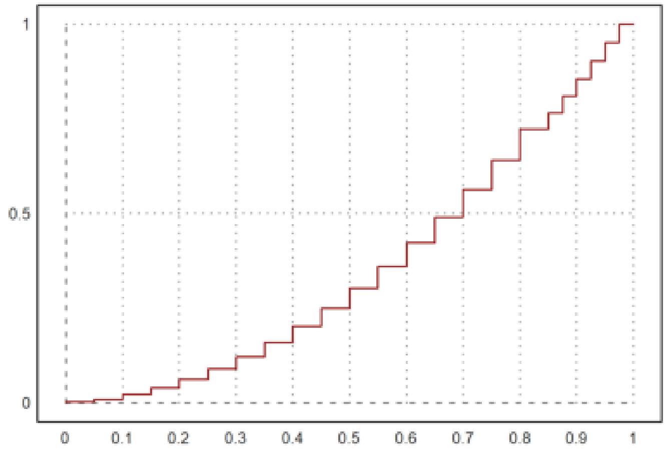
```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle
```



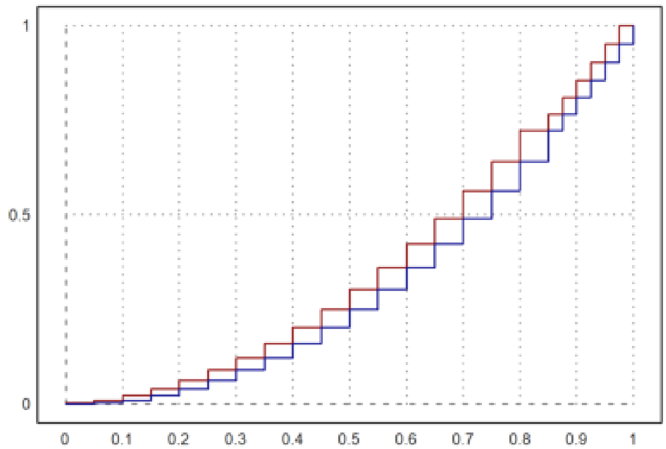

```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square
```




```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
```



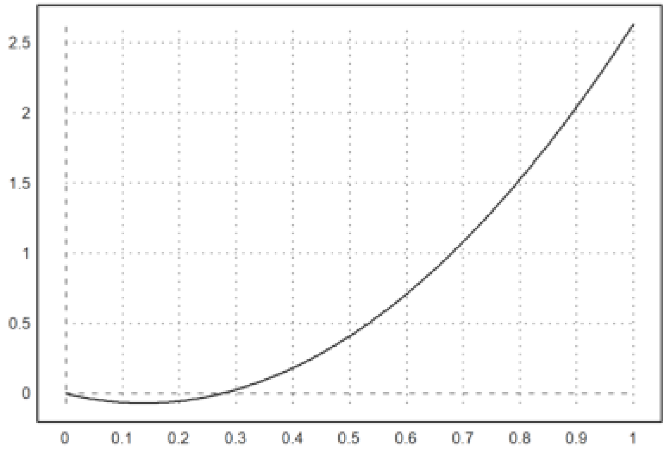

```
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10):
```



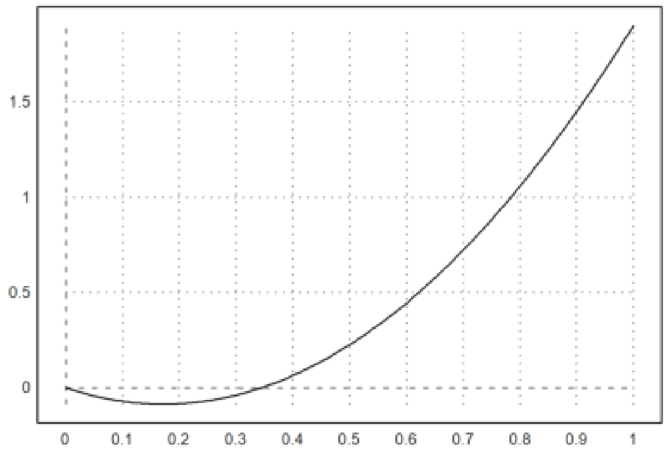
Fungsi dalam satu Parameter

Fungsi plot yang paling penting untuk plot planar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler di file "plot.e", yang dimuat di awal program.
Berikut beberapa contoh penggunaan suatu fungsi. Seperti biasa di EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda bisa meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan kumpulan panggilan.

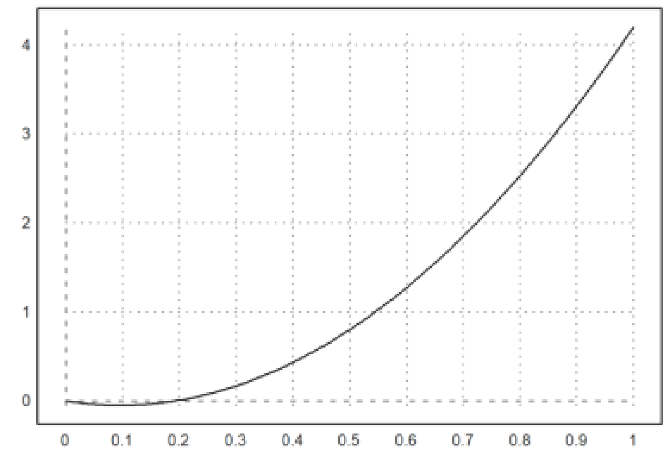
```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; // define a function
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a): // plot with a=0.3
```



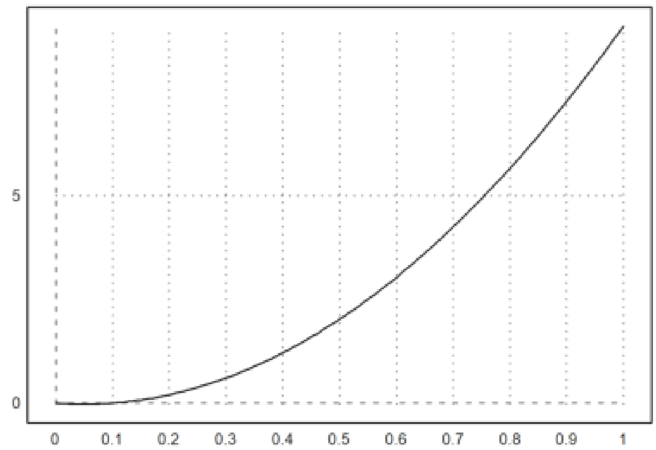

```
>plot2d("f",0,1;0.4): // plot with a=0.4
```



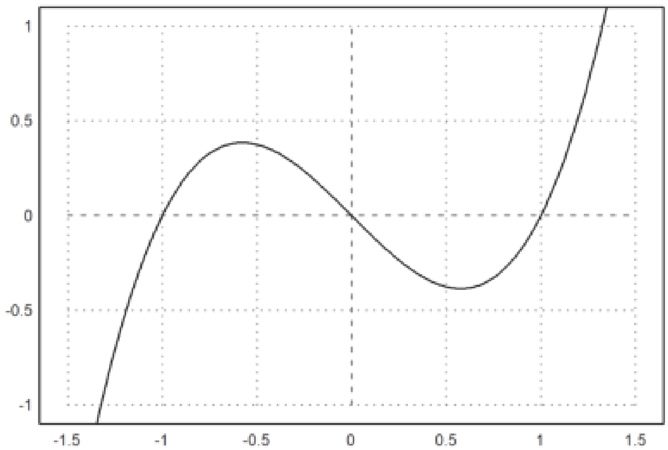

```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1): // plot with a=0.2
```



```
>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1): // plot with 0.1
```



```
>function f(x) := x^3-x; ...
>plot2d("f",r=1):
```

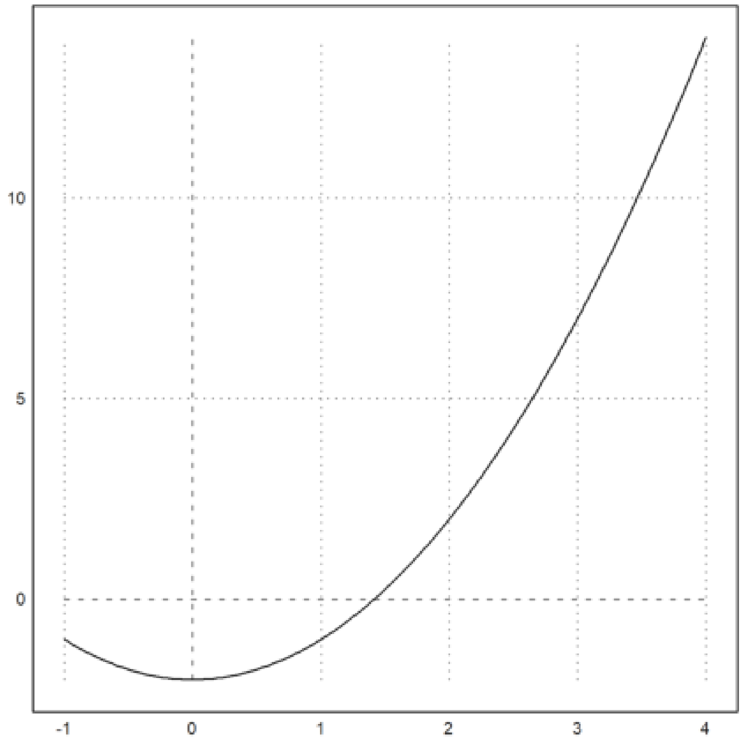


Berikut ini ringkasan fungsi yang diterima
- ekspresi atau ekspresi simbolik di x
- fungsi atau fungsi simbolik dengan nama "f"
- fungsi simbolik hanya dengan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolik. Untuk fungsi simbolik, namanya saja yang berfungsi.

Sisipan Soal

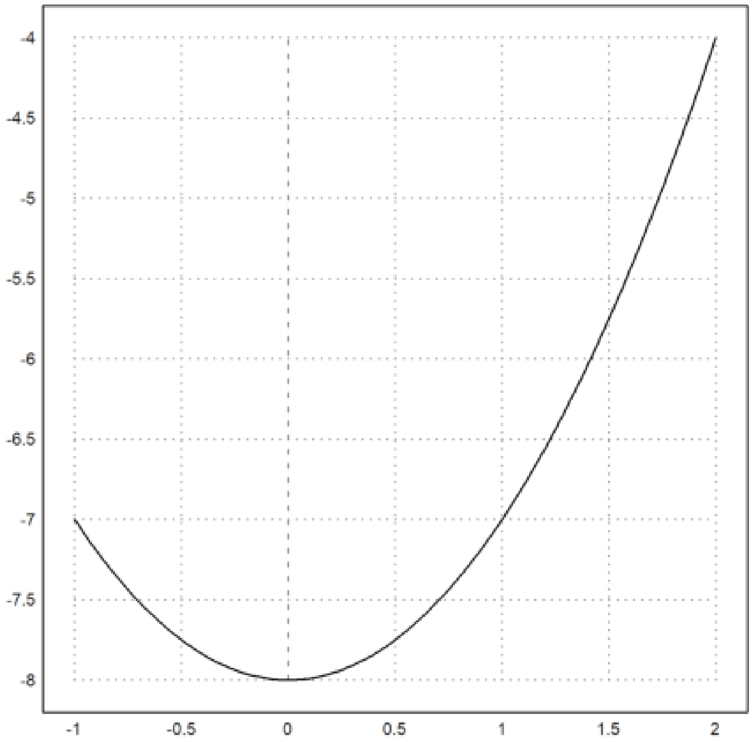
```
>function f(x,a) := (x^2 - a);// define a function
>a = 2 ; plot2d("f",-1,4;2): // plot with a = 2
```



Dari beberapa contoh yang diatas saya mencoba menyisipkan soal yang berbeda dan mencoba bagaimanya grafik dari

$$(x^2 - a)$$

```
>reset;
>function f(x,y) := (x^2 - 4y);
>y = 2 ; plot2d("f",-1,2;2):
```



Grafik tersebut merupakan solusi dari persamaan

$$(x^2 - 4y)$$

```
>$&factor(x^2-4), $&solve(x^2-4):
```

$$(x - 2)\ (x + 2)$$

```
>reset;
```

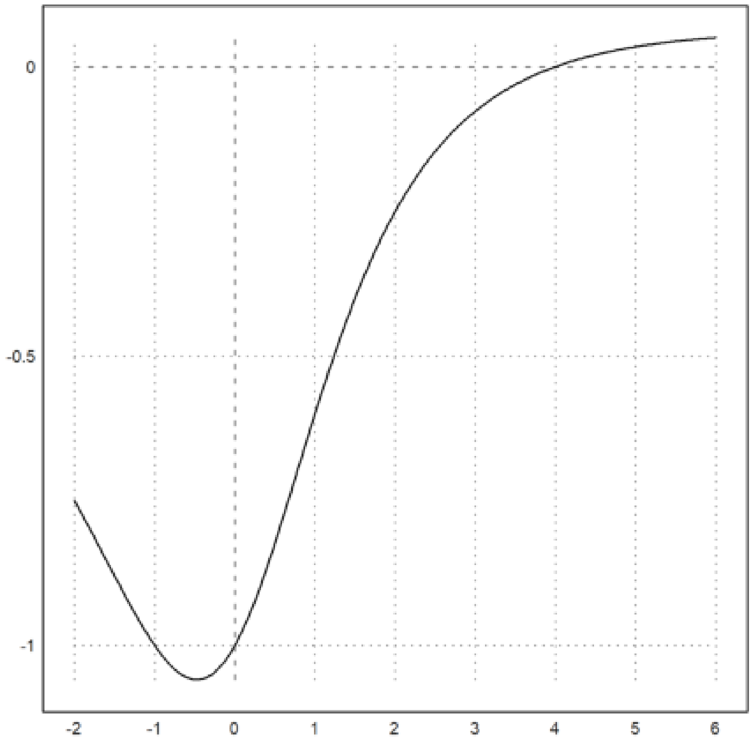
Carilah solusi dan grafik dari persamaan ini :

$$(x - 4)/(x^2 + 4)$$

```
>$&solve((x-4)/(x^(2)+4))
```

$$[x = 4]$$

```
>function f(x):= (x-4)/(x^(2)+4)
>plot2d("f",-2,6):
```



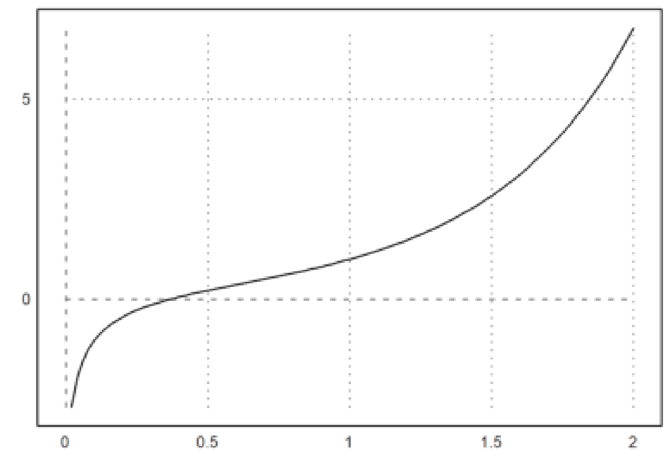
Grafik tersebut merupakan penyelesaian dari persamaan

$$(x-4)/(x^2+4)$$

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

```
                       x
                      x  (log(x) + 1)
```

```
>plot2d(f,0,2):
```

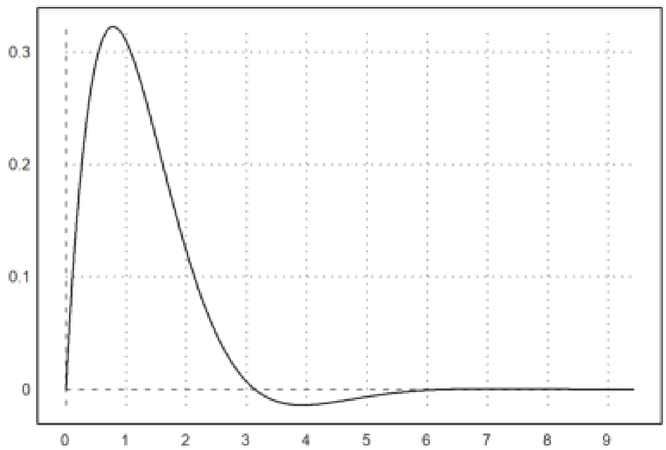


Tentu saja, untuk ekspresi atau ekspresi simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

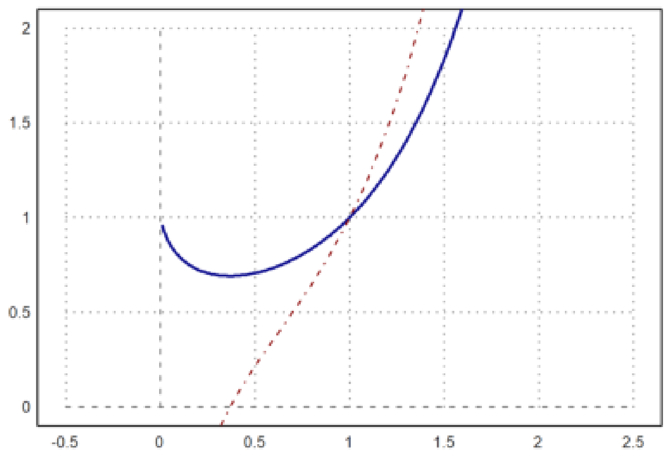
```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

```
                                 - x
                                E     sin(x)
```

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```



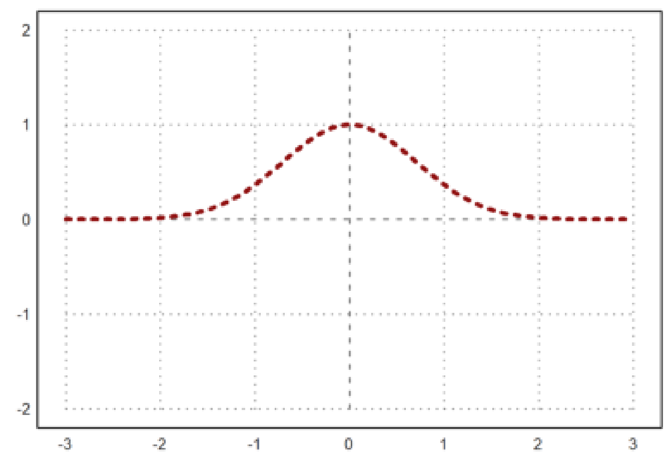
```
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```



Untuk gaya garis ada berbagai pilihan.
- gaya="...". Pilih dari "-", "–", "-.", ".", ".-.", "-.-".
- Warna: Lihat di bawah untuk warna.
- ketebalan: Defaultnya adalah 1.

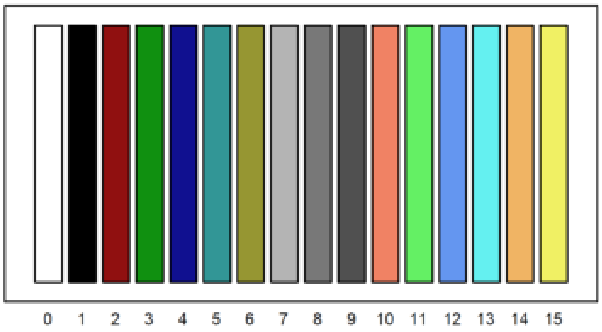
Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.
- 0..15: indeks warna default.
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru muda, oranye muda, kuning
- rgb(merah,hijau,biru): parameternya real di [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="--"):
```



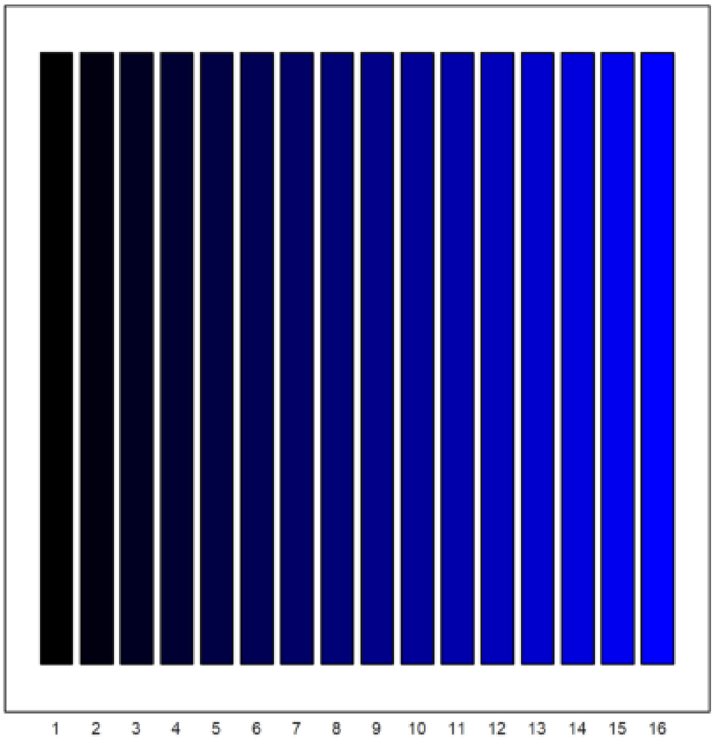
Berikut adalah tampilan warna EMT yang telah ditentukan sebelumnya.

```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):
```



Tapi anda tidak bisa menggunakan warna apa saja.

```
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):
```

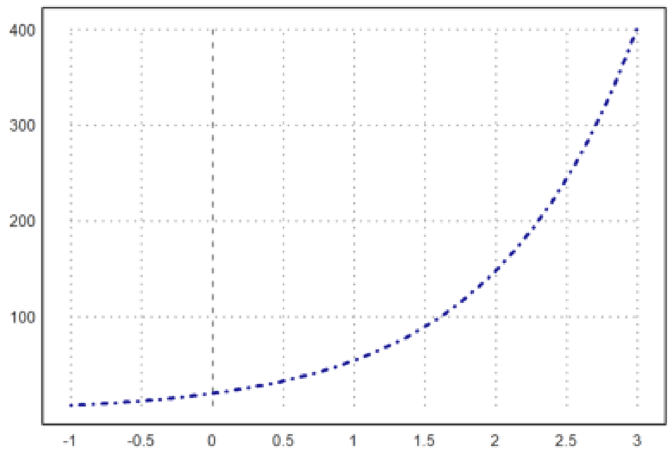


Sisipan soal

```
>$&exp(x+3)
```

$$e^{x+3}$$

```
>aspect(6,4); plot2d ("exp(x+3)",-1,3, color=blue, thickness=2.5, style="-.
```



Percobaan ini dilakukan dengan tambahan color, thickness dan style agar grafik tersebut lebih bervariasi dan berwarna.

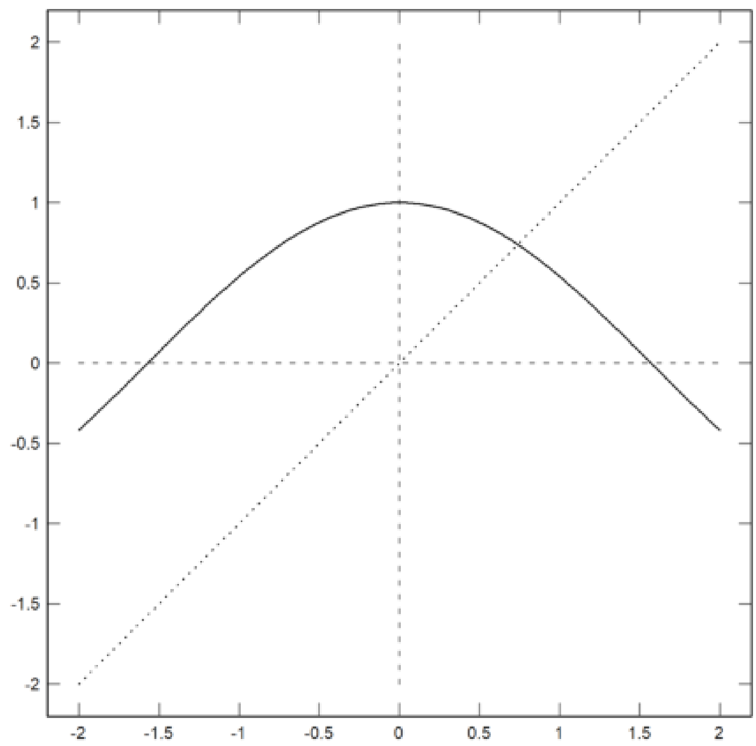
Kurva tersebut merupakan fungsi eksponensial e^(x+3). Kurva monoton naik, karena nilai x semakin besar, maka nilai y pun semakin besar dan sebaliknya ketika x semakin kecil maka nilai y semakin kecil.

```
>reset;
```

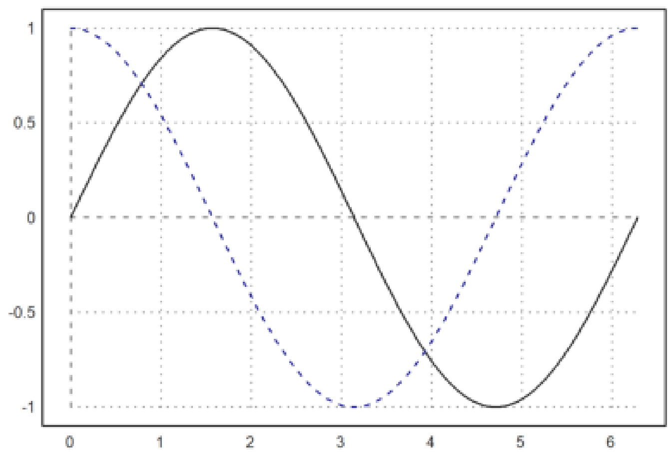
Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama

Plot lebih dari satu fungsi (multiple function) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metodenya adalah menggunakan >add untuk beberapa panggilan ke plot2d secara keseluruhan, kecuali panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini pada contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```

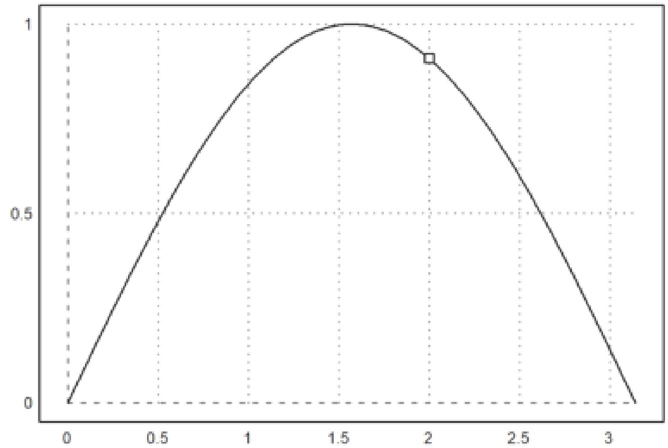



```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="--"
```



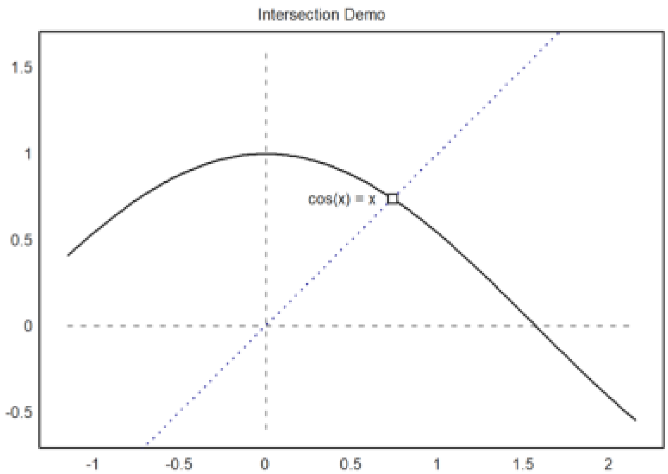
Salah satu kegunaan >add adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```



Kita tambahkan titik perpotongan dengan label (pada posisi "cl" untuk kiri tengah), dan masukkan hasilnya ke dalam buku catatan. Kami juga menambahkan judul pada plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
>  color=[black,blue],style=["-","."], ...
>  grid=1);
>x0=solve("cos(x)-x",1);  ...
>  plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo");  ...
>  label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```

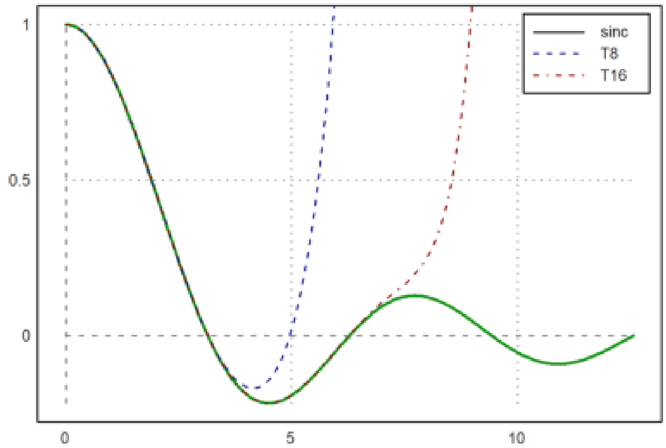


Dalam demo berikut, kita memplot fungsi sin(x)=sin(x)/x dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung perluasan ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolik.
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke plot2d(). Yang kedua dan ketiga memiliki kumpulan tanda >add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.
Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsinya.

```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

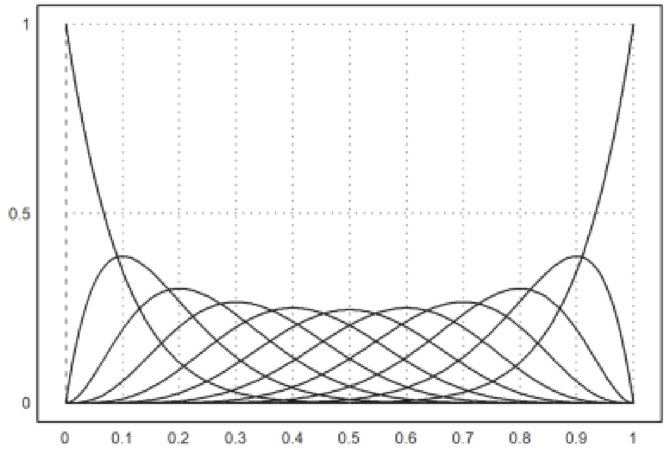
```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); ...
>  labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","--","-.-"], ...
>    colors=[black,blue,red]):
```



Dalam contoh berikut, kami menghasilkan Polinomial Bernstein.

$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

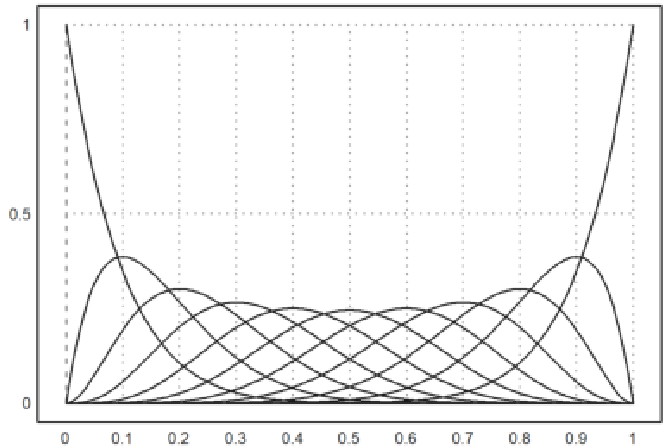
```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot first function
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;
>insimg;
```



Cara kedua adalah dengan menggunakan pasangan matriks bernilai x dan matriks bernilai y yang berukuran sama.

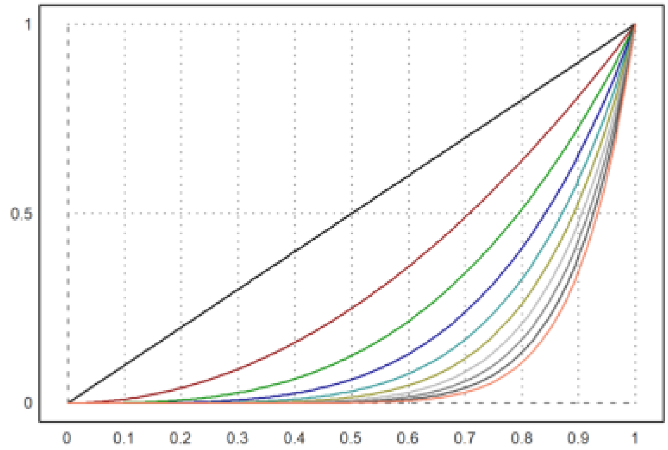
Kami menghasilkan matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pendahuluan tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y):
```



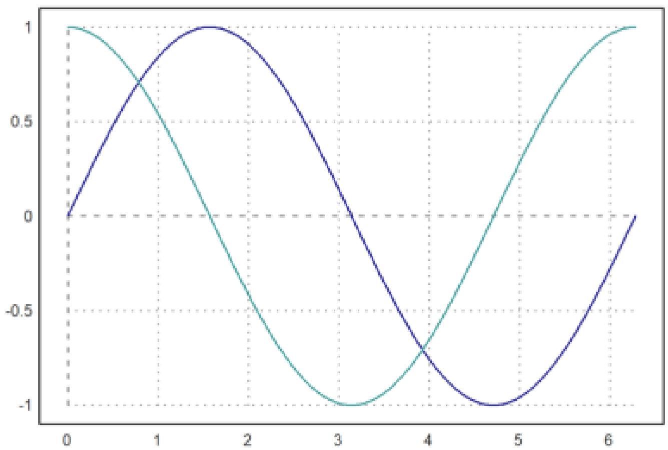
Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```

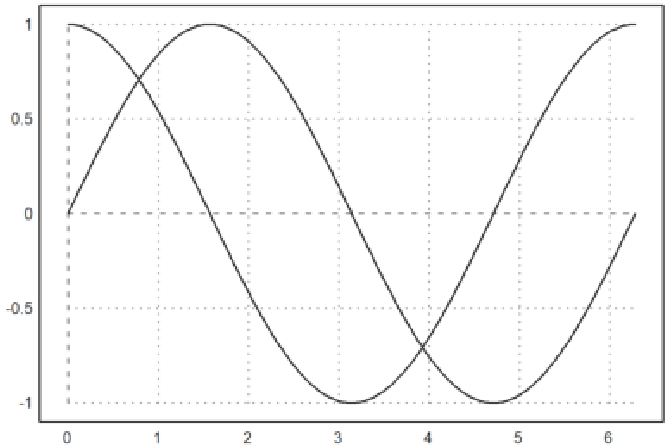


Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan susunan warna, susunan gaya, dan susunan ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5):
```




```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi): // plot vector of expressions
```



Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

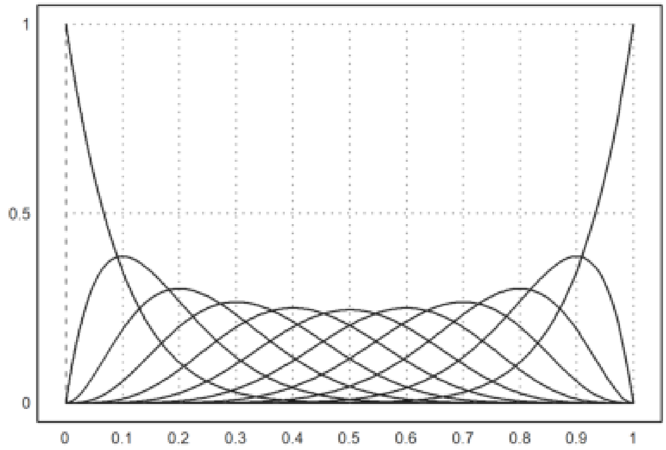
```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i),i,0,10) // make list
```

```
                 10              9                8  2                7  3
        [(1 - x)  , 10 (1 - x)  x, 45 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
              6  4              5  5              4  6              3  7
 210 (1 - x)  x , 252 (1 - x)  x , 210 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
             2  8             9  10
 45 (1 - x)  x , 10 (1 - x) x , x  ]
```

```
>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector
```

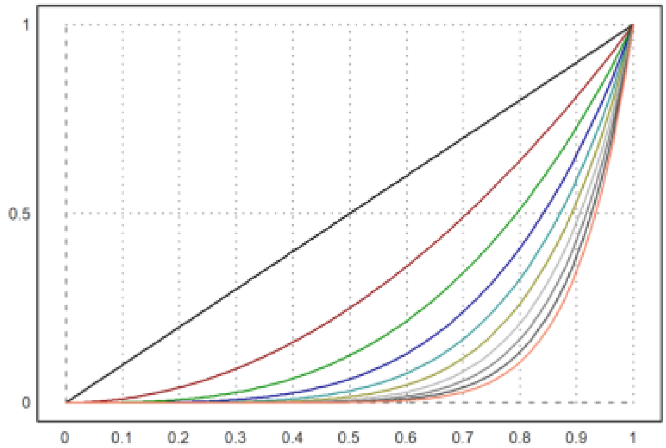
```
 (1-x)^10
 10*(1-x)^9*x
 45*(1-x)^8*x^2
 120*(1-x)^7*x^3
 210*(1-x)^6*x^4
 252*(1-x)^5*x^5
 210*(1-x)^4*x^6
 120*(1-x)^3*x^7
 45*(1-x)^2*x^8
 10*(1-x)*x^9
 x^10
```

```
>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions
```



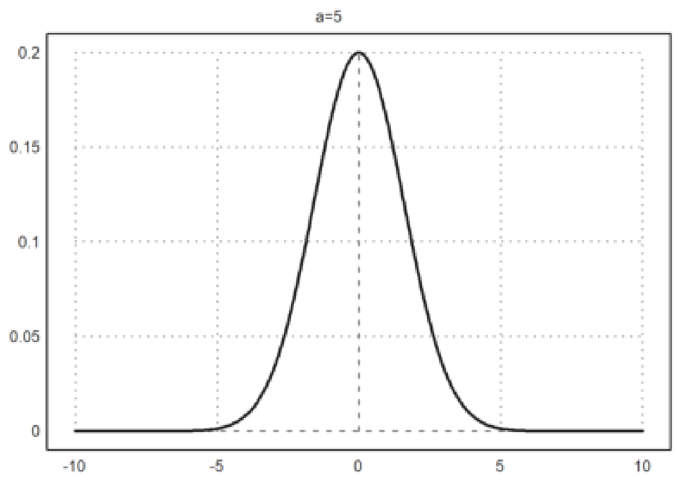
Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.
Jika suatu ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi tersebut akan diplot ke dalam satu plot.
Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika array warna ditambahkan maka akan digunakan untuk setiap baris plot.

```
>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):
```



Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.
Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.
Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d.
Dalam contoh ini kita meneruskan a=5 ke fungsi f, yang kita plot dari -10 hingga 10.

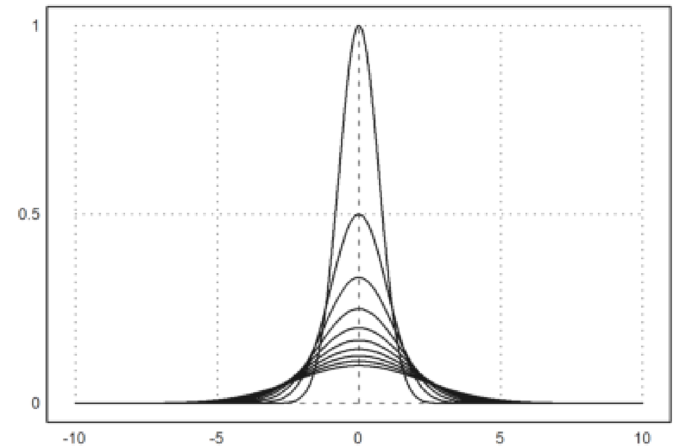
```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):
```



Alternatifnya, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut kumpulan panggilan, dan ini adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke suatu fungsi yang kemudian diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.

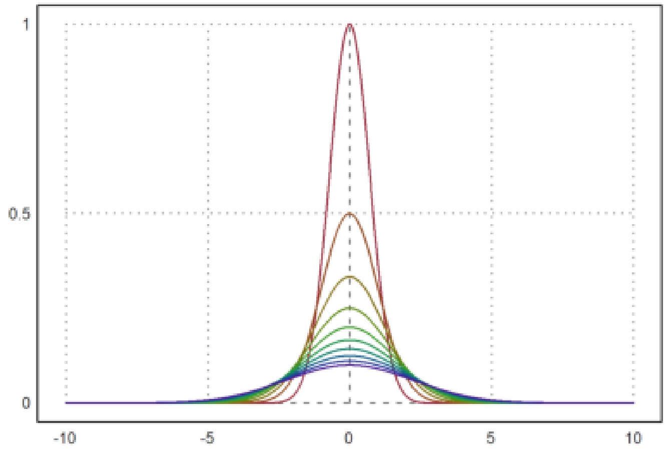
Pada contoh berikut, kita menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman loop).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```



Kita dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks f(x,a) merupakan satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):
```

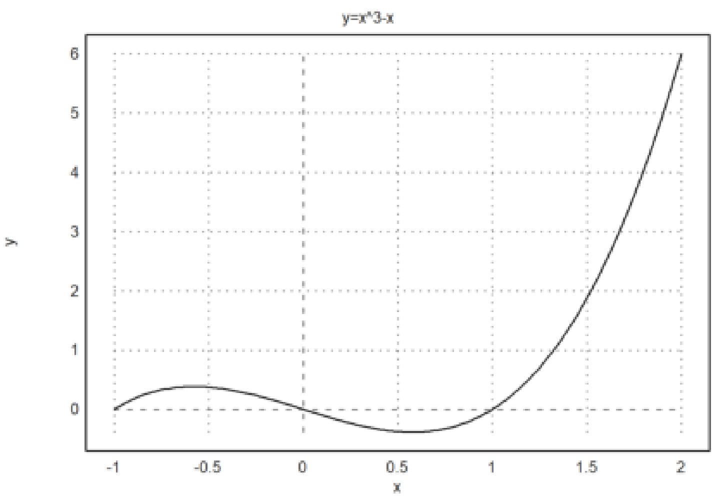


Label Teks

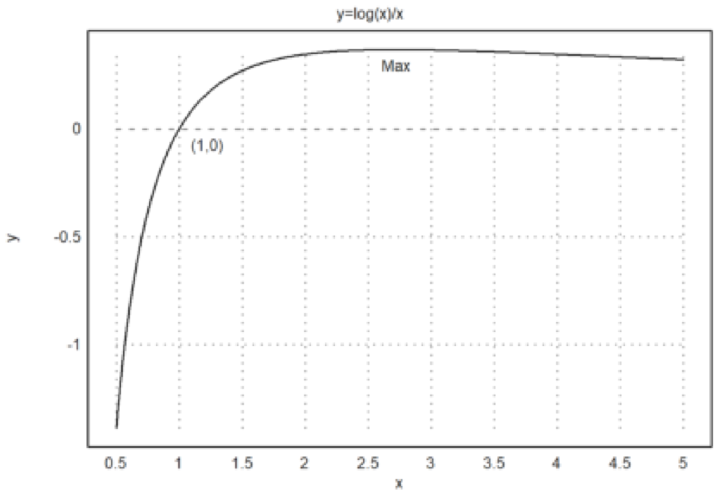
Dekorasi sederhana pun bisa
- judul dengan judul = "..."
- label x dan y dengan xl="...", yl="..."
- label teks lain dengan label("...",x,y)

Perintah label akan memplot ke plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Hal ini memerlukan argumen posisional.

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x"):
```

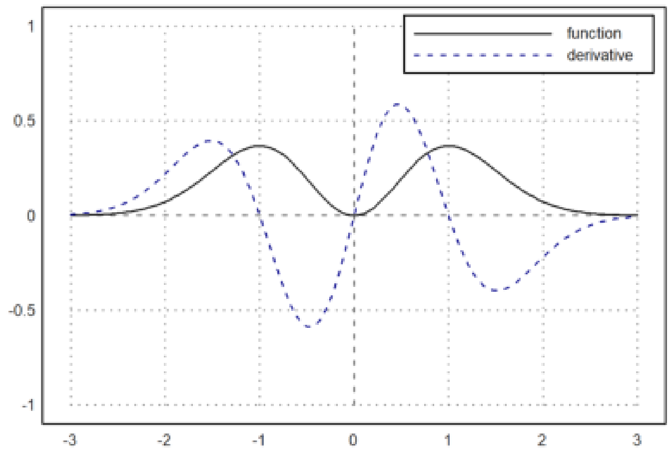



```
>expr := "log(x)/x"; ...
>  plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...
>  label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```



Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Dibutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2);  ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1);  ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="--"); ...
>labelbox(["function","derivative"],styles=["-","--"], ...
>   colors=[black,blue],w=0.4):
```

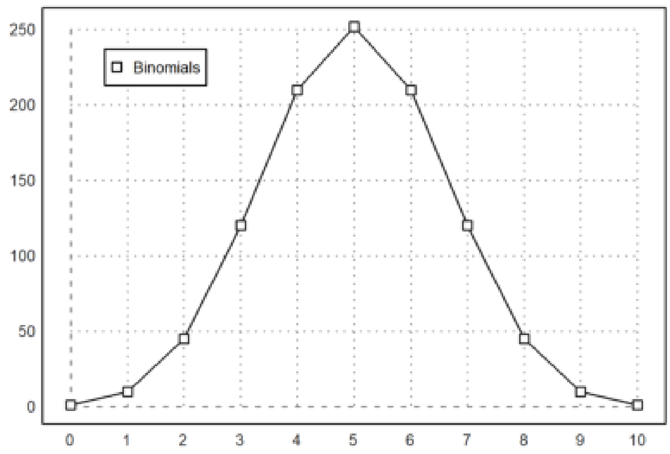


Kotak ini berlabuh di kanan atas secara default, tetapi >kiri berlabuh di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat mana pun yang Anda suka. Posisi jangkar berada di pojok kanan atas kotak, dan angkanya merupakan pecahan dari ukuran jendela grafis. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter >points, atau vektor bendera, satu untuk setiap label.

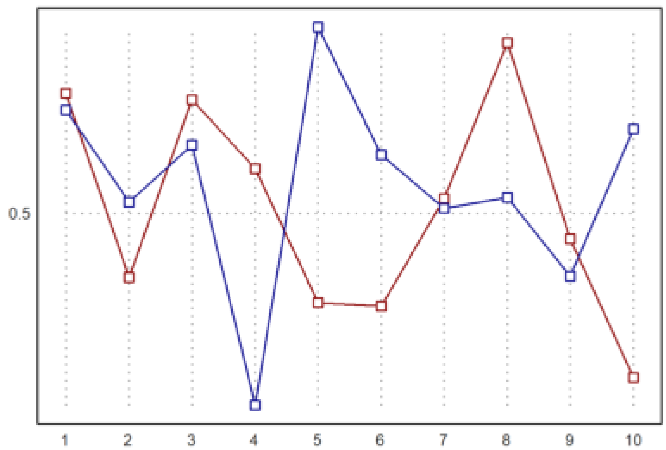
Pada contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita bisa menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kami mengatur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
>labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
>tcolor=black,>left):
```



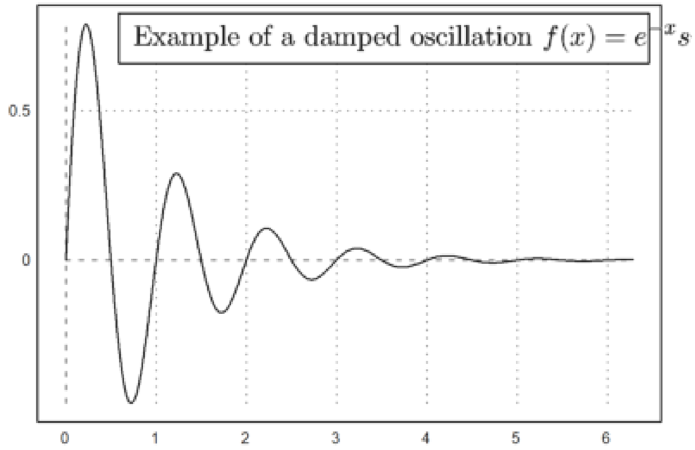
Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti di plot2d() warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Masih banyak lagi plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]):
```



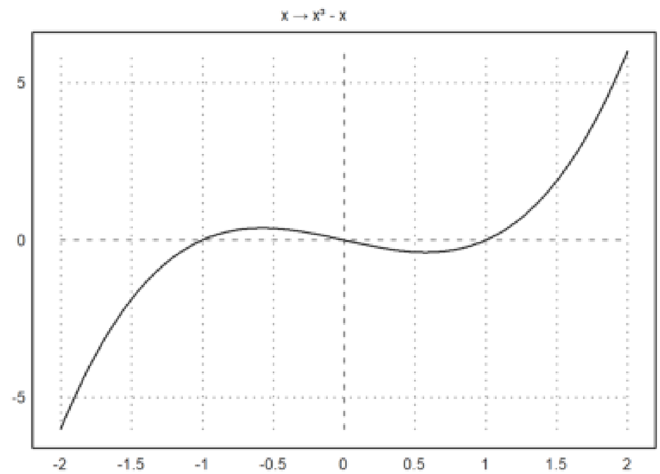
Fitur serupa adalah fungsi textbox().
Lebarnya secara default adalah lebar maksimal baris teks. Tapi itu bisa diatur oleh pengguna juga.

```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
>plot2d("f(x)",0,2pi); ...
>textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\ f(x)=e^{-x}sin(2\pi
```



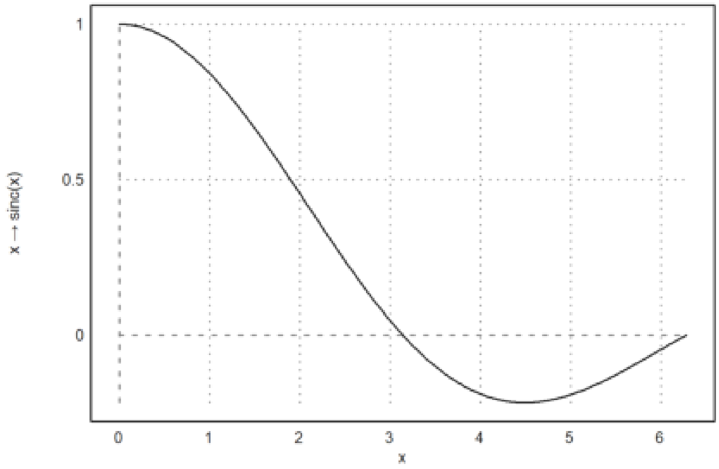
Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaks EMT untuk mengetahui lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x &rarr; x&sup3; - x"):
```



Label pada sumbu x dan y bisa vertikal, begitu juga dengan sumbunya.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x &rarr; sinc(x)",>vertical):
```



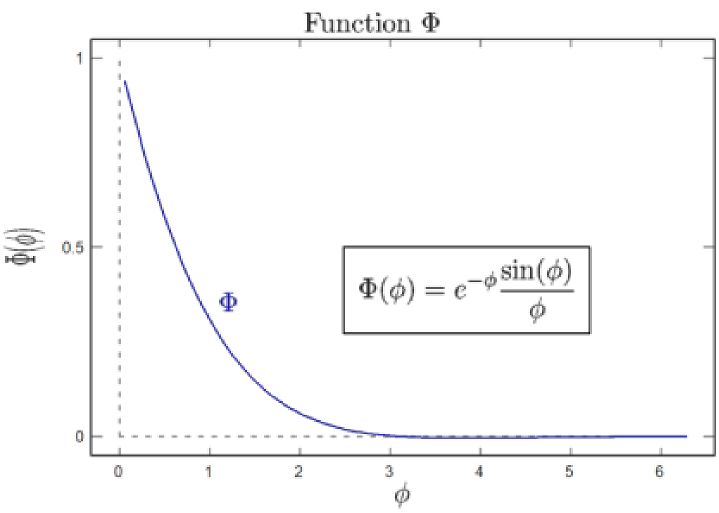
LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner "lateks" dan "dvipng" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Perhatikan, penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil latex() sebelum loop satu kali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

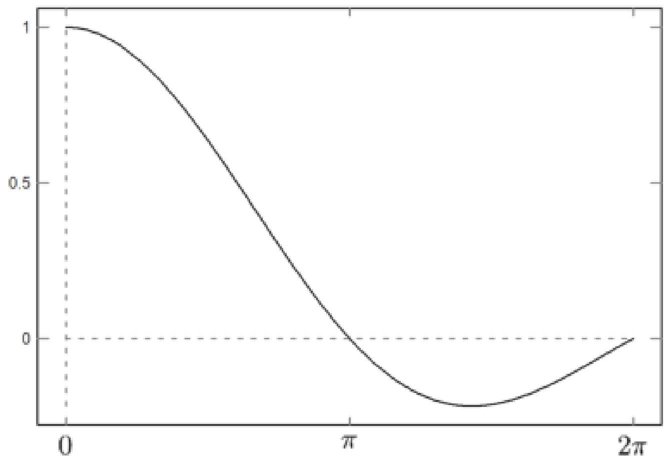
Pada plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label x dan y, label, kotak label, dan judul plot.

```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
>  title=latex("\text{Function $\Phi$}"), ...
>  xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
>textbox( ...
>  latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
>label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```



Seringkali, kita menginginkan spasi dan label teks yang tidak konformal pada sumbu x. Kita bisa menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.
Cara termudah adalah membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan grid=4, lalu menambahkan grid dengan ygrid() dan xgrid(). Pada contoh berikut, kami menggunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan xtick().

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
>ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
>xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6);  ...
>xtick([0,pi,2pi],["0","\pi","2\pi"],>latex):
```



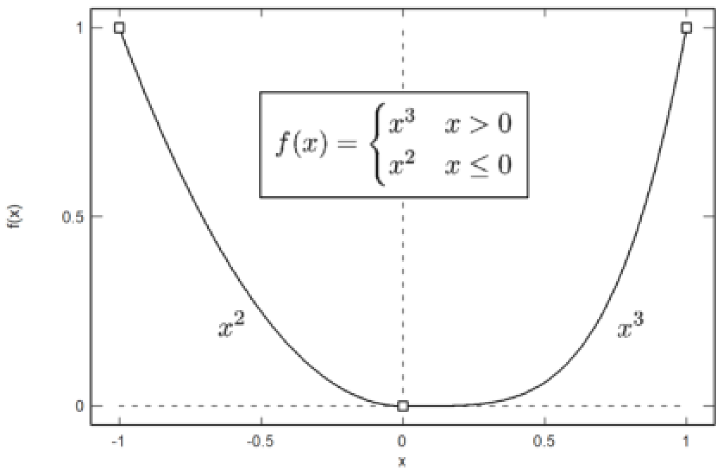
Tentu saja fungsinya juga bisa digunakan.

```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^4
  else return x^2
  endif
  endfunction
```

Parameter "peta" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk
plot, itu tidak perlu. Tapi untuk menunjukkan vektorisasi itu
berguna, kita menambahkan beberapa poin penting ke plot di x=-1, x=0 dan x=1.
Pada plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakannya untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya bisa menggunakannya
LaTeX jika Anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

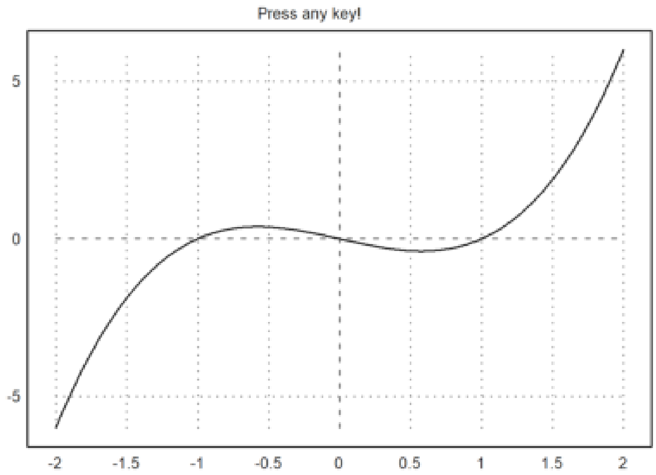
```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6);  ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
>  latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0\end{cases}"), ...
>  x=0.7,y=0.2):
```



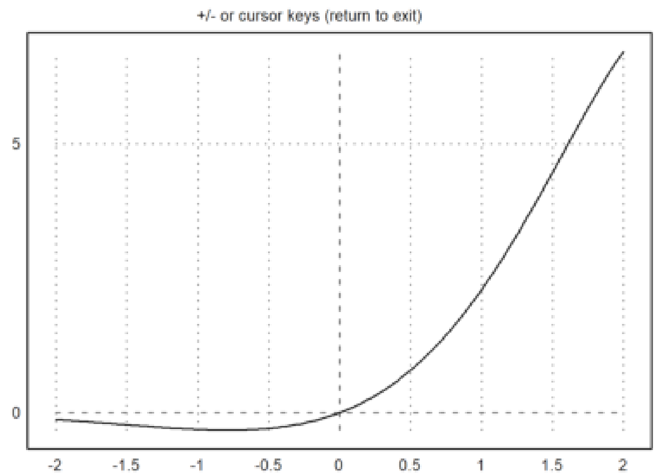
Interaksi pengguna

Saat memplot suatu fungsi atau ekspresi, parameter >pengguna memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau mouse. Pengguna bisa
- perbesar dengan + atau -
- pindahkan plot dengan tombol kursor
- pilih jendela plot dengan mouse
- atur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan kembali
Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot aslinya.
Saat memplot data, flag >user hanya akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x",a=1}},>user,title="Press any key!"):
```




```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...
>  title="+/- or cursor keys (return to exit)"):
```



Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan mousedrag() menunggu aktivitas mouse atau keyboard. Ini melaporkan mouse ke bawah, gerakan mouse atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Misalnya, kita melakukan interpolasi pada 5 titik dengan polinomial. Fungsi tersebut harus diplot ke dalam area plot yang tetap.

```
>function plotf(xp,yp,select) ...
```

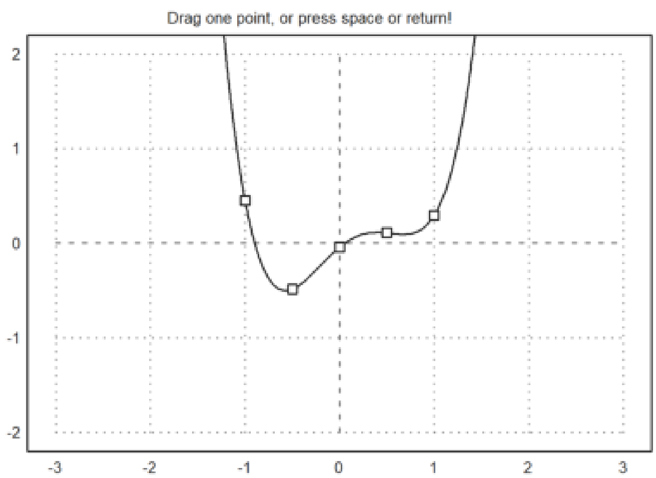
```
    d=interp(xp,yp);
    plot2d("interpval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
```

```
    plot2d(xp,yp,>points,>add);
    if select>0 then
      plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
    endif;
    title("Drag one point, or press space or return!");
  endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma di plot2d (d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis fungsi plotinterp() terlebih dahulu, mengakses nilainya secara global.

Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret titiknya.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5):
```



Ada juga fungsi yang memplot fungsi lain bergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.

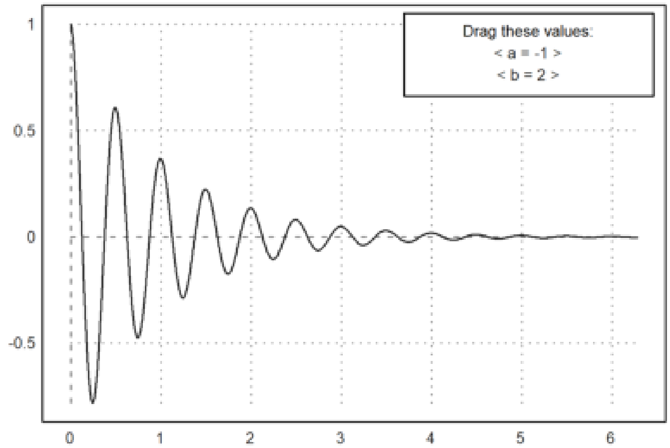
Pertama kita membutuhkan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Kemudian kita memerlukan nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang nx2, opsional garis judul.

Ada penggeser interaktif, yang dapat menetapkan nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
>  heading="Drag these values:",hcolor=black):
```



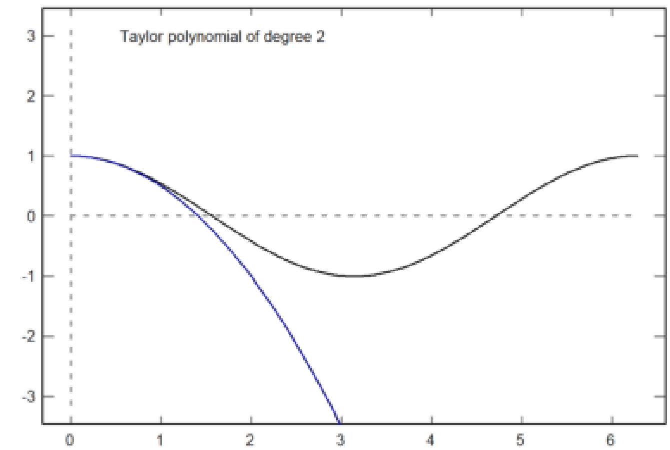
Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret menjadi bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor berderajat n ke fungsi kosinus.

```
>function plotf(n) ...
```

```
  plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
  plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
  textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
  endfunction
```

Sekarang kita izinkan derajat n bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 perhentian. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
>   heading="Drag the value:"); ...
>plotf(nd):
```



Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsinya. Pengguna dapat menggambar jendela plot, meninggalkan jejak titik.

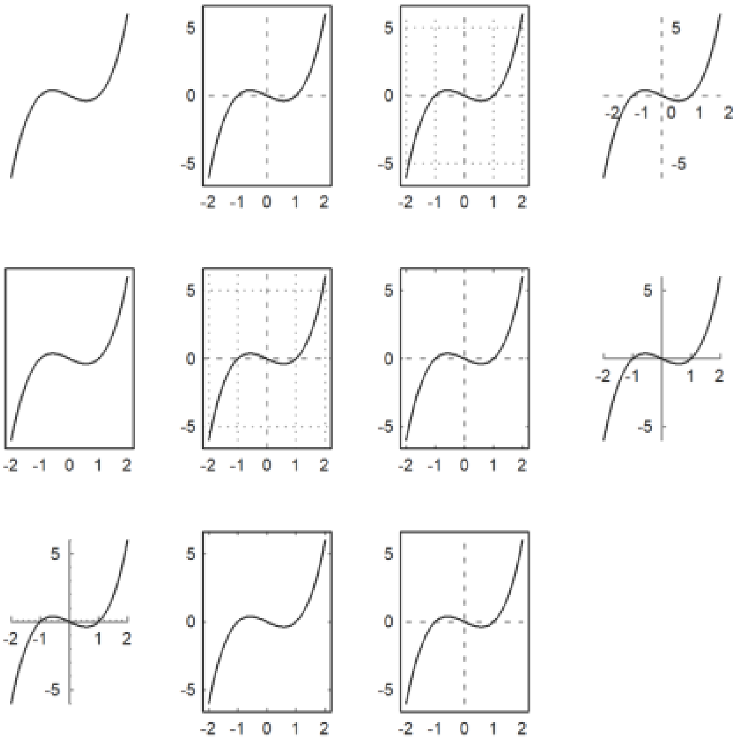
```
>function dragtest ...
```

```
    plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
    start=0;
    repeat
      {flag,m,time}=mousedrag();
      if flag==0 then return; endif;
      if flag==2 then
        hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
      endif;
    end
  endfunction
```

```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

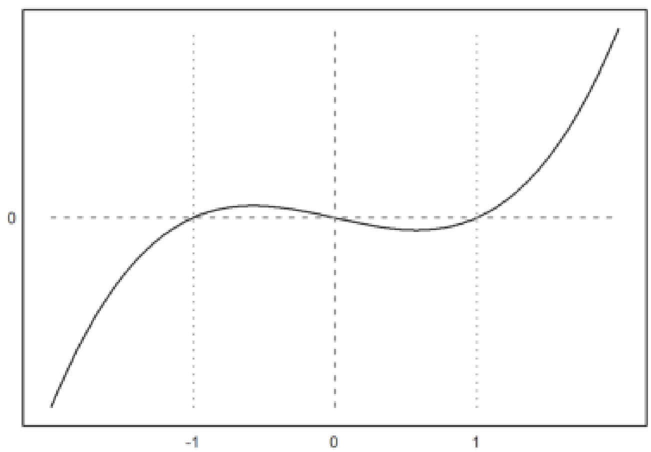
**Gaya Plot 2D
Secara default, EMT menghitung tick sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tick. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat diubah. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk menyetel ulang ke gaya default, gunakan reset().

```
>aspect();
>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // no grid, frame or axis
> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis
> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // default ticks
> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside
> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels
> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // axes only
> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis
> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis
> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside
> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only
> figure(0):
```



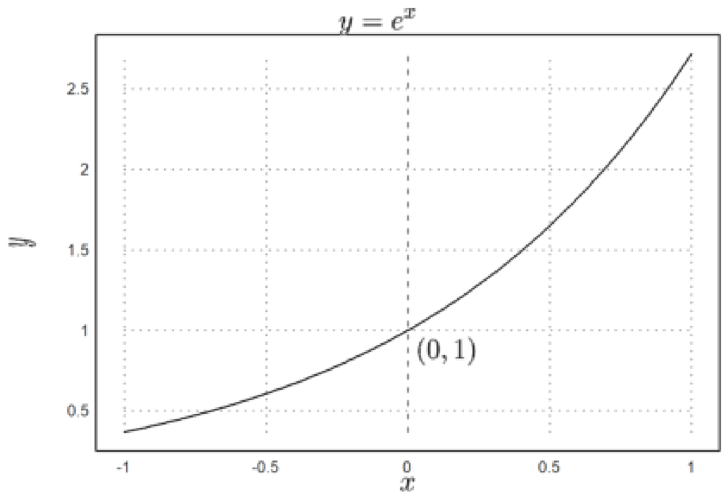
Parameter <frame mematikan frame, dan framecolor=blue mengatur frame menjadi warna biru. Jika Anda menginginkan tanda centang Anda sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0): // add frame and grid
```



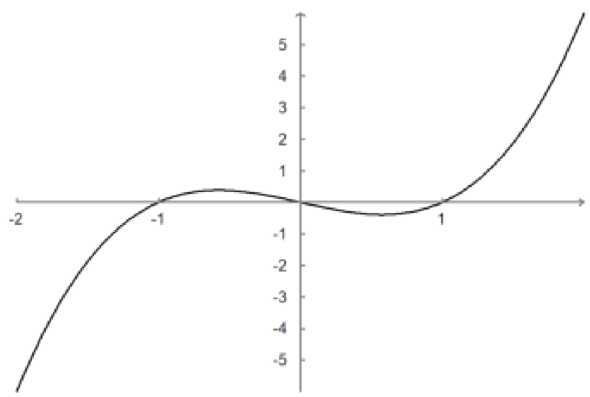
Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

```
>plot2d("exp(x)",-1,1);
>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")); // title above the plot
>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis
>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue): // label a point
```



Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan xaxis() dan yaxis().

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):
```

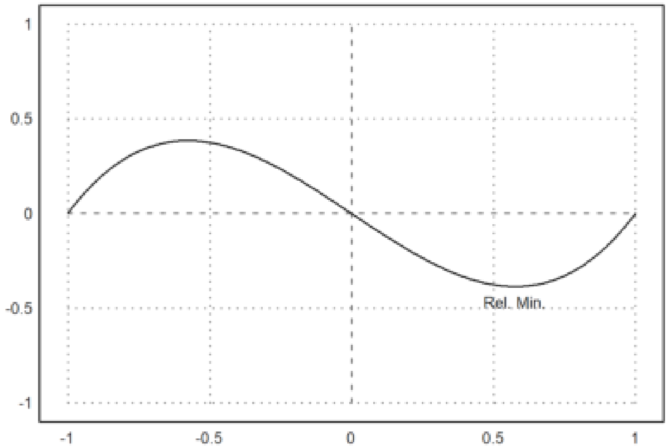


Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti bagian tengah bawah. Ini menetapkan posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

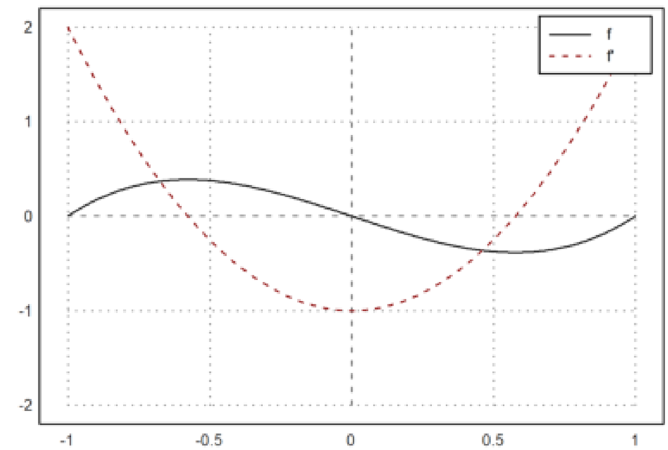
```
                                  3
                                 x  - x
```

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"): // add a label there
```

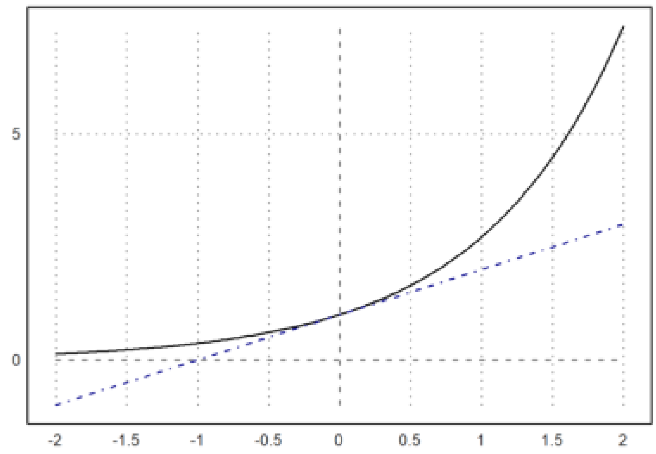


There are also text boxes.

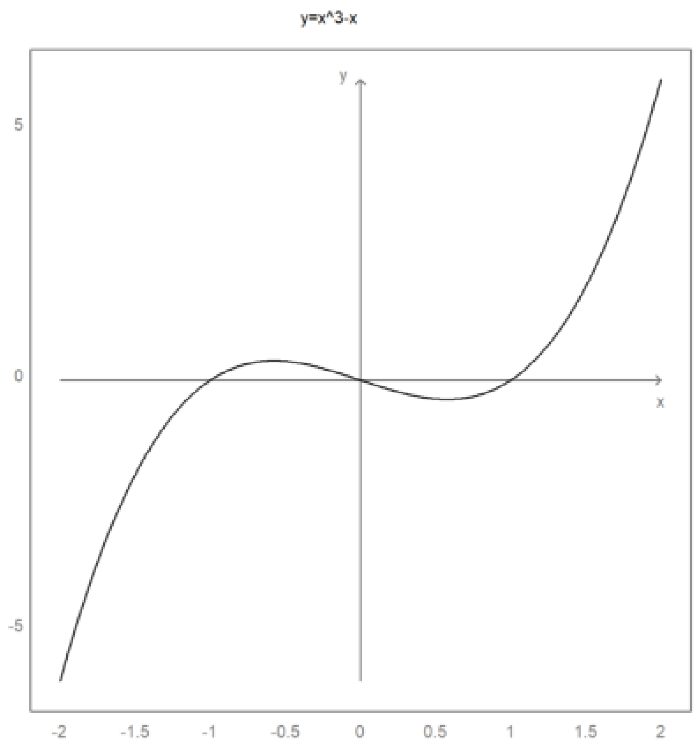
```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // derivative
>labelbox(["f","f'"],["-","--"],[black,red]): // label box
```



```
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-","-.-"]):
```

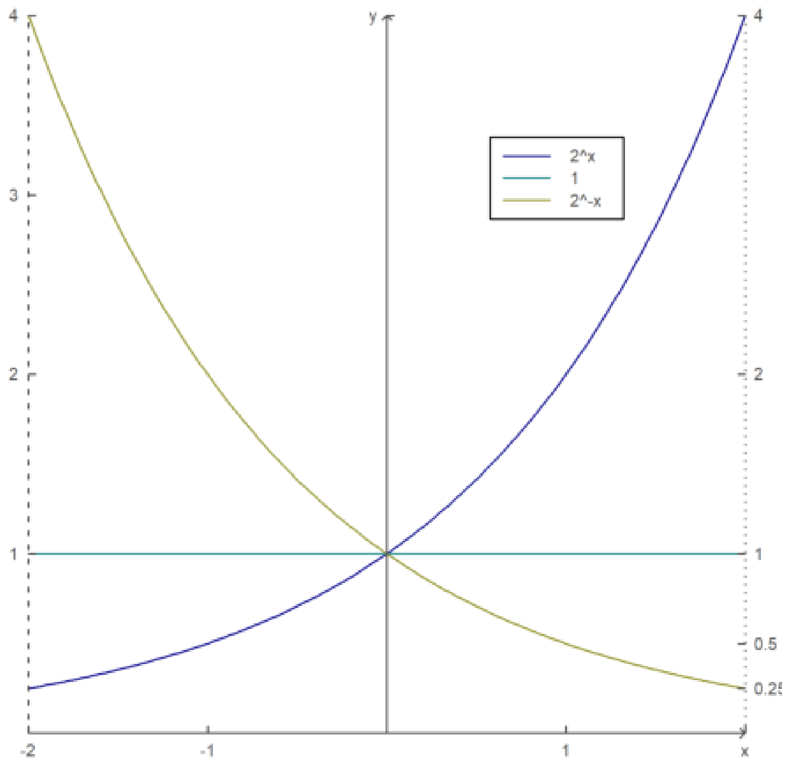



```
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray);  ...
> plot2d("x^3-x",grid=1);   ...
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray);  ...
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...
> reset():
```



Untuk kontrol lebih lanjut, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.
Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi memerlukan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk menyetel ulang ke default.

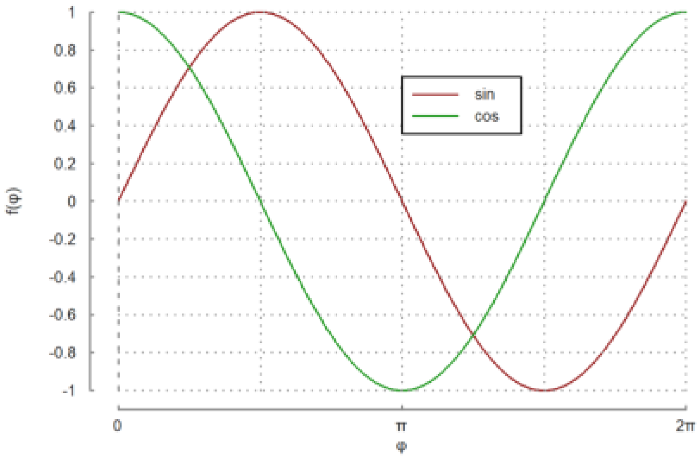
```
>fullwindow; ...
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
> plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
> yaxis(-2,1:4,>left); ...
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
> labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
> reset:
```



Berikut adalah contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbunya berada di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0",u"&pi;",u"2&pi;"],style="-",>ticks,>zero);   ...
> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
```

```
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
> xlabel(u"&phi;"); ylabel(u"f(&phi;)"):
```



Merencanakan Data 2D

Jika x dan y adalah vektor data, maka data tersebut akan digunakan sebagai koordinat x dan y pada suatu kurva. Dalam hal ini, a, b, c, dan d, atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Alternatifnya, >persegi dapat diatur untuk mempertahankan rasio aspek persegi.

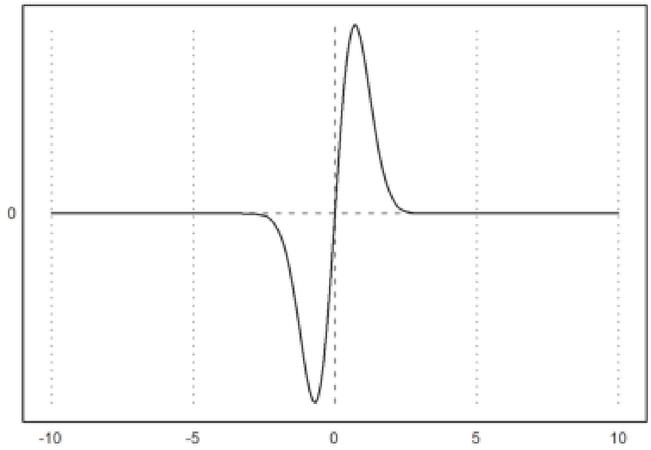
Merencanakan ekspresi hanyalah singkatan dari plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x, dan satu atau beberapa baris nilai y. Dari rentang dan nilai x, fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan ">titik", untuk garis dan titik campuran gunakan ">addpoints".

Tapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.

- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.

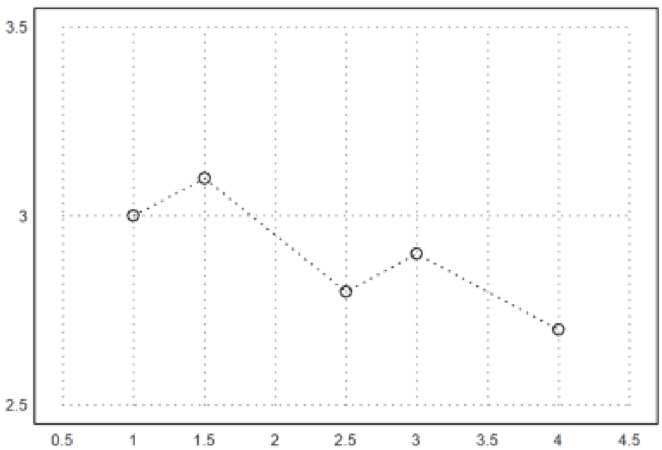
Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y.

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):
```

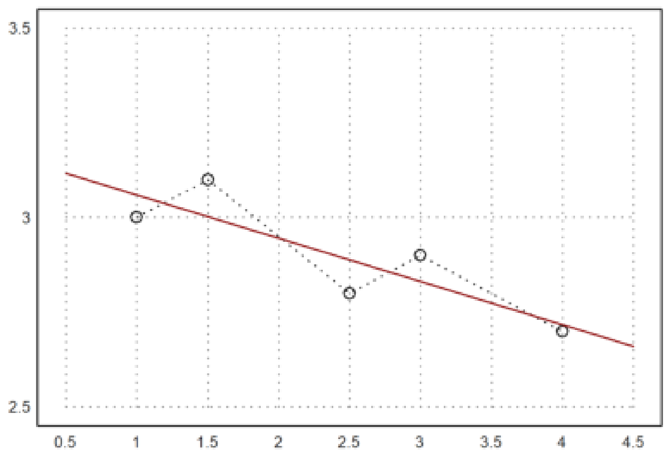


Data juga dapat diplot sebagai poin. Gunakan points=true untuk ini. Plotnya berfungsi seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudutnya saja.
- style="...": Pilih dari "[]", "<>", "o", ".", "..", "+", "*", "[]", "< >", "o", "..", "", "|".
Untuk memplot kumpulan titik, gunakan >titik. Jika warna merupakan vektor warna, masing-masing titik
mendapat warna berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna diterapkan pada baris matriks.
Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // add points
```



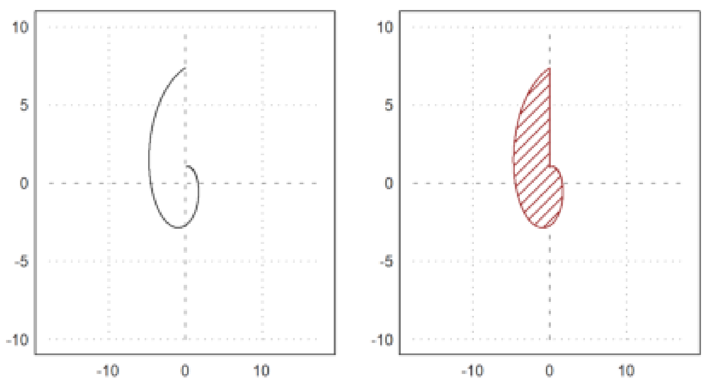

```
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // add plot of line
```



Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

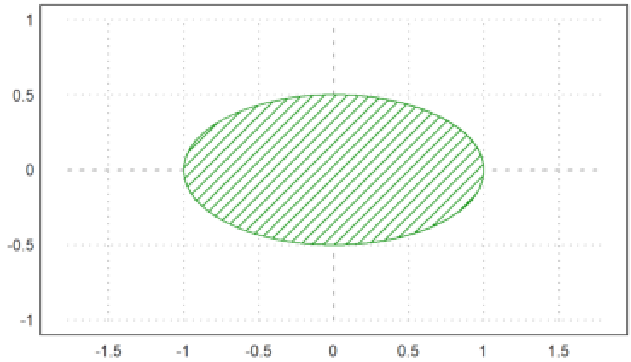
Plot data sebenarnya berbentuk poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.
- terisi=benar mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "", "/", "\", "\/".
- Fillcolor : Lihat di atas untuk mengetahui warna yang tersedia.
Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada <outline opsional, mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali gaya default.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```

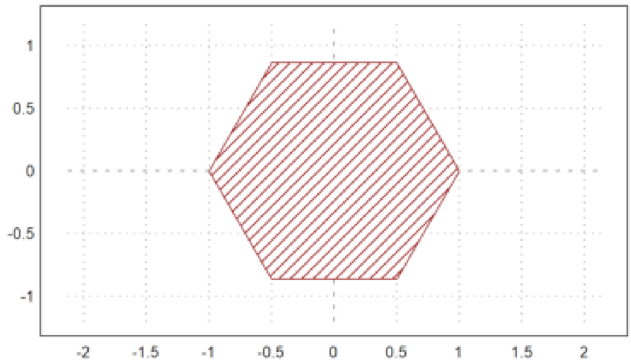


Dalam contoh berikut kita memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian berbeda.

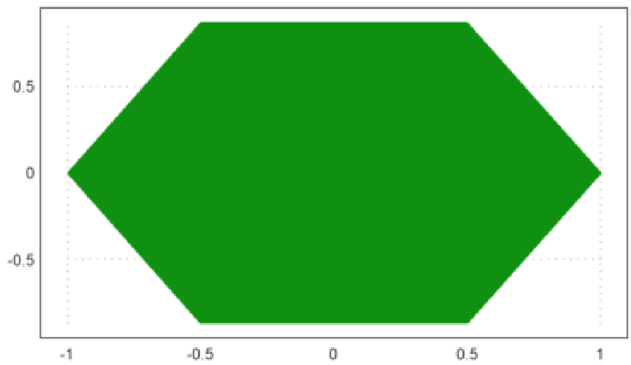
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```




```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
>plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
```

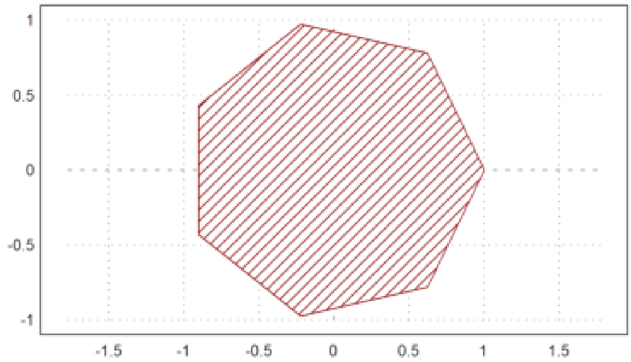



```
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```



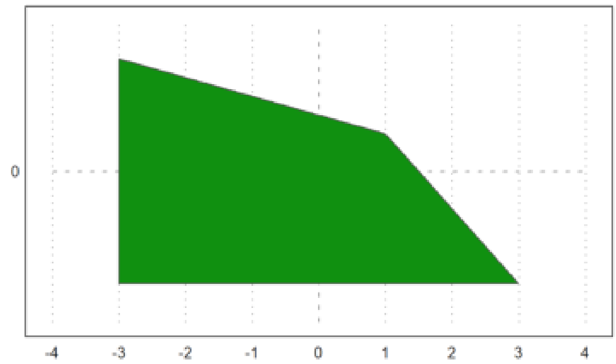
Contoh lainnya adalah septagon yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.

```
>t=linspace(0,2pi,7);  ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):
```



Berikut adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah A[k].v<=3 untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```

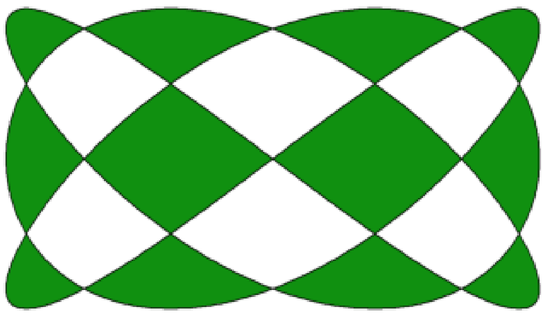


Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan pembuatan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

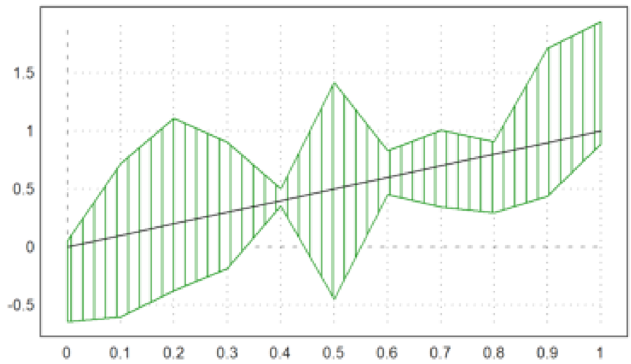
Kami sekarang memiliki nilai vektor x dan y. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik tersebut. Plotnya bisa diisi. Pada kasus ini ini memberikan hasil yang bagus karena aturan belitan, yang digunakan untuk isi.

```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```



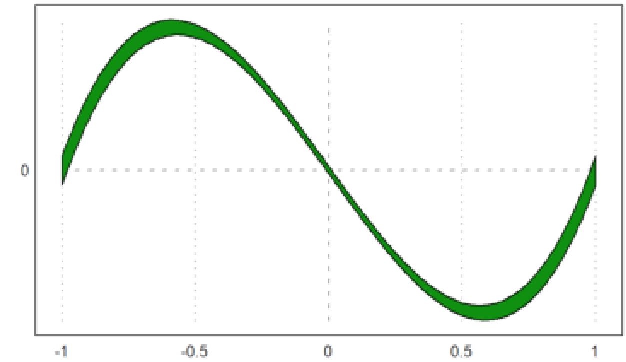
Vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai wilayah terisi antara nilai interval yang lebih rendah dan lebih tinggi.
Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu bisa juga dapat digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|");  ...
> plot2d(t,t,add=true):
```



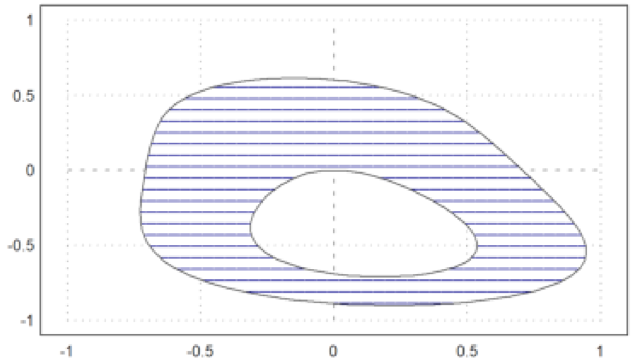
Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi pada bidang. Gaya isiannya sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=~t-0.01,t+0.01~; y=x^3-x;
>plot2d(t,y):
```



Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

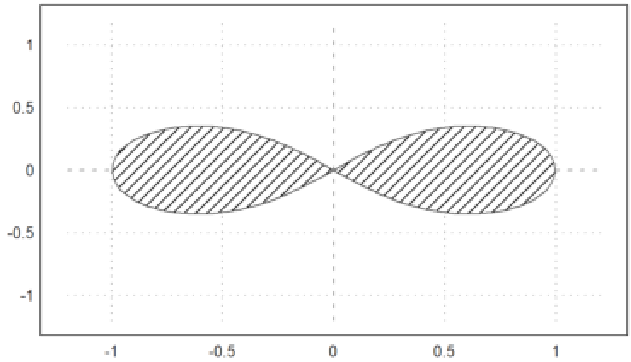
```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```



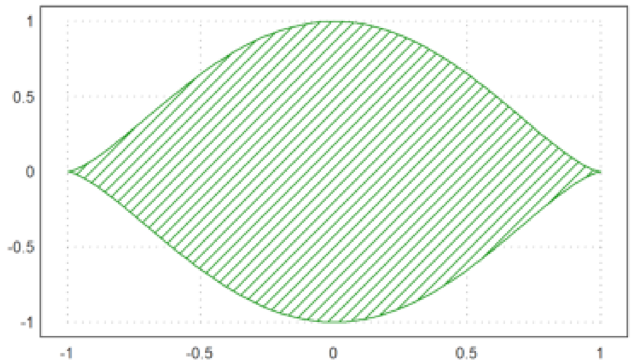
Kita juga dapat mengisi rentang nilai seperti

$$-1 \leq (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \leq 0.$$

```
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/"):
```



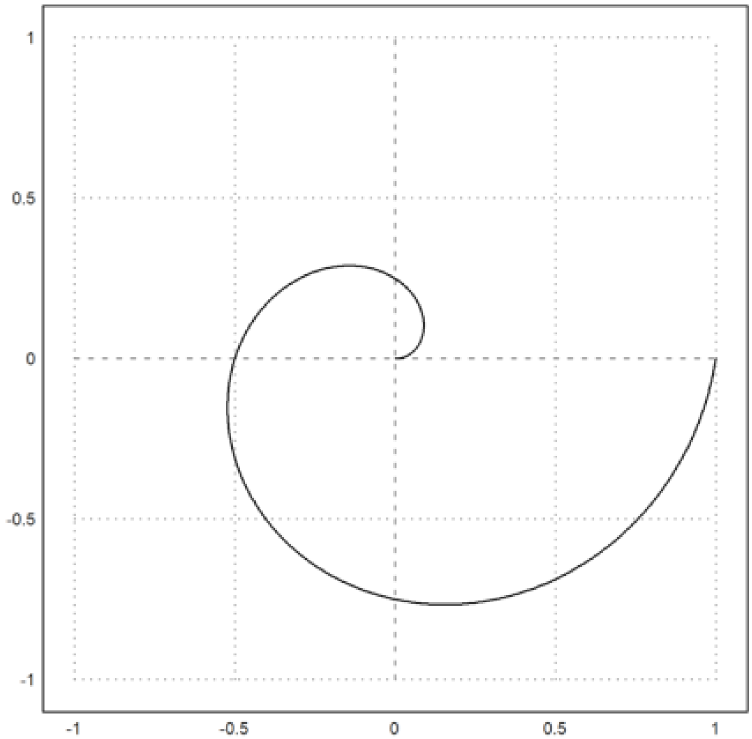

```
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/"):
```



Grafik Fungsi Parametrik

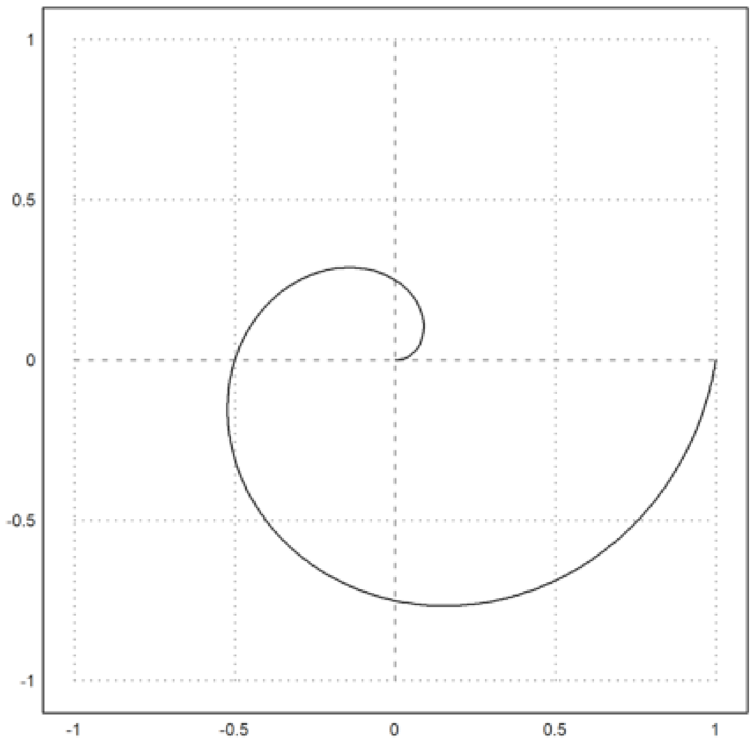
Nilai x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan sebuah kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut merupakan grafik suatu fungsi.
Dalam contoh berikut, kita memplot spiral
lateks: \gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))
Kita perlu menggunakan banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptif() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptif() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```

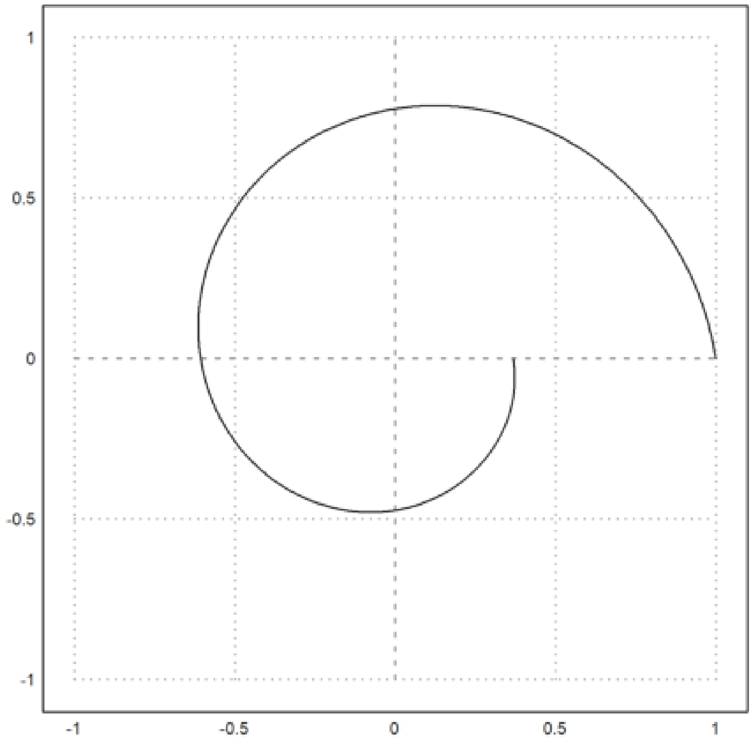


Sebagai alternatif, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):
```



```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);
>plot2d(x,y,r=1):
```



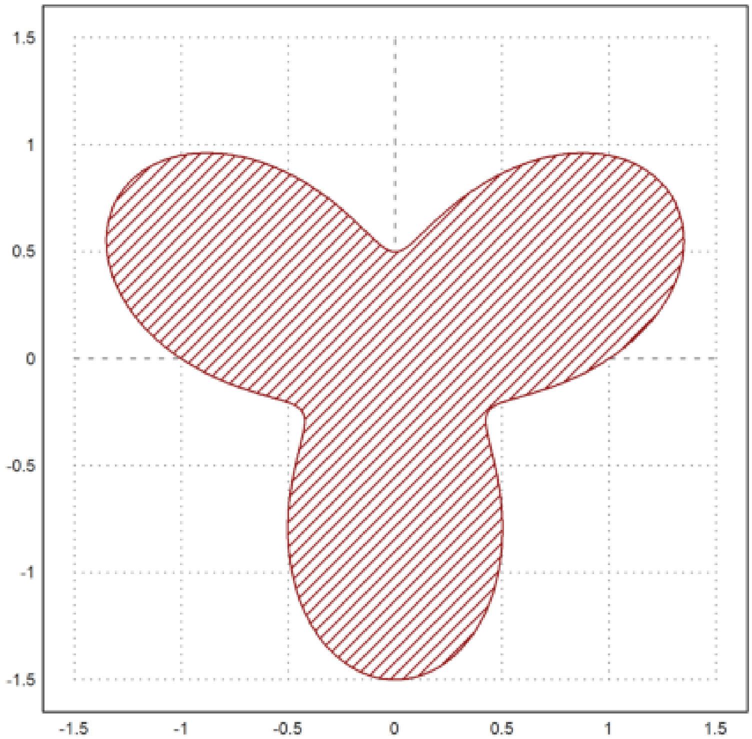
Pada contoh berikutnya, kita memplot kurvanya

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
```



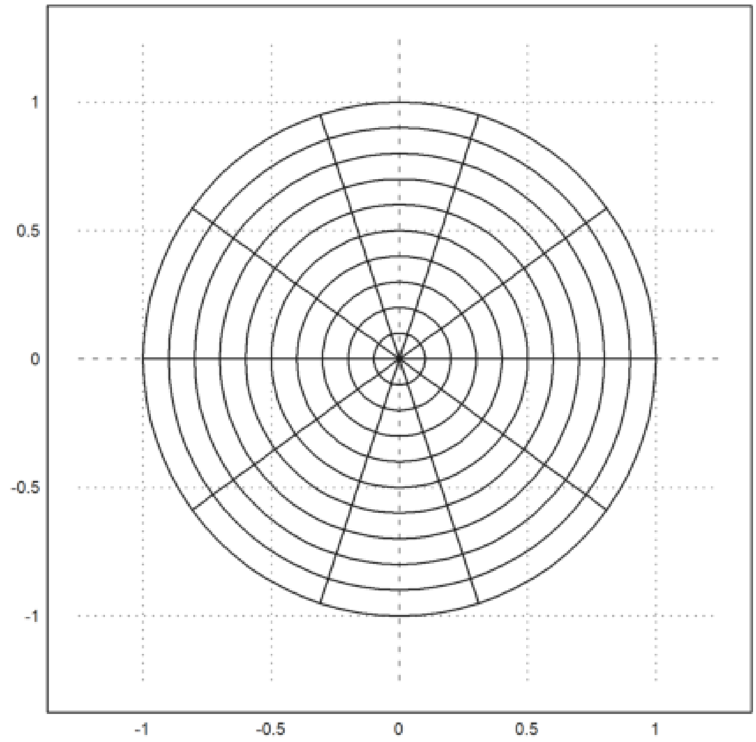
Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

Serangkaian bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan dihubungkan. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1x2) dalam argumen cgrid, hanya garis kisi tersebut yang terlihat.

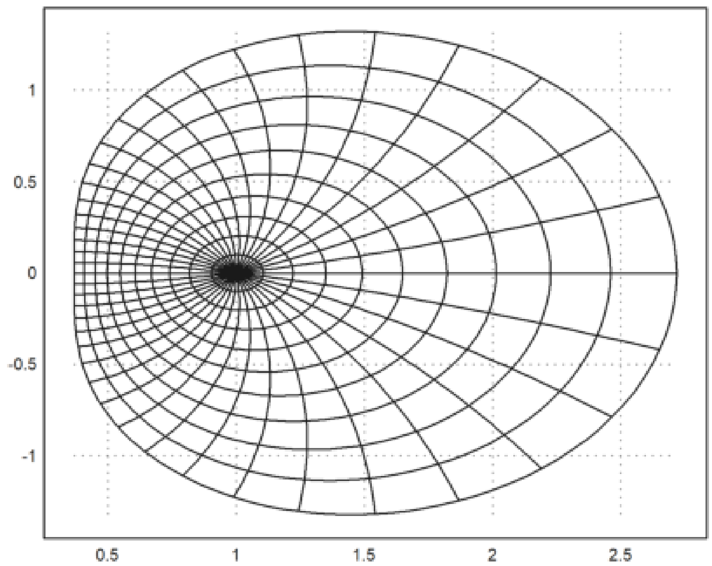
Matriks bilangan kompleks secara otomatis akan diplot sebagai kisi-kisi pada bidang kompleks.

Pada contoh berikut, kita memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

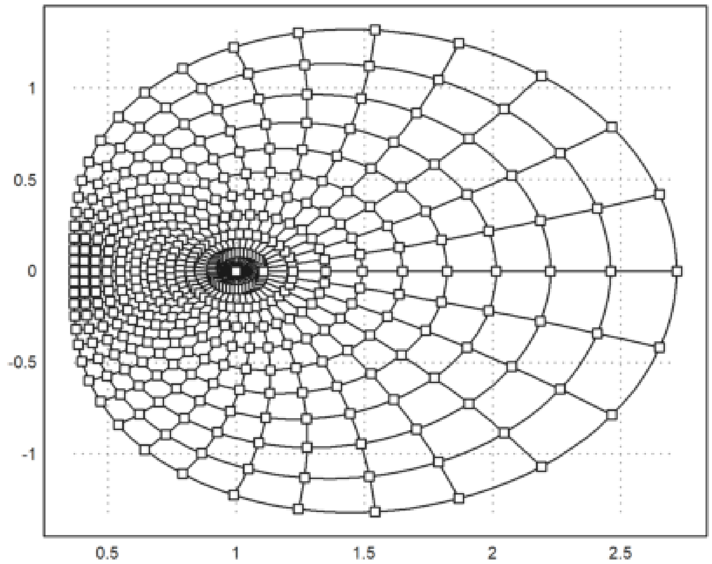
```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```



```
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```



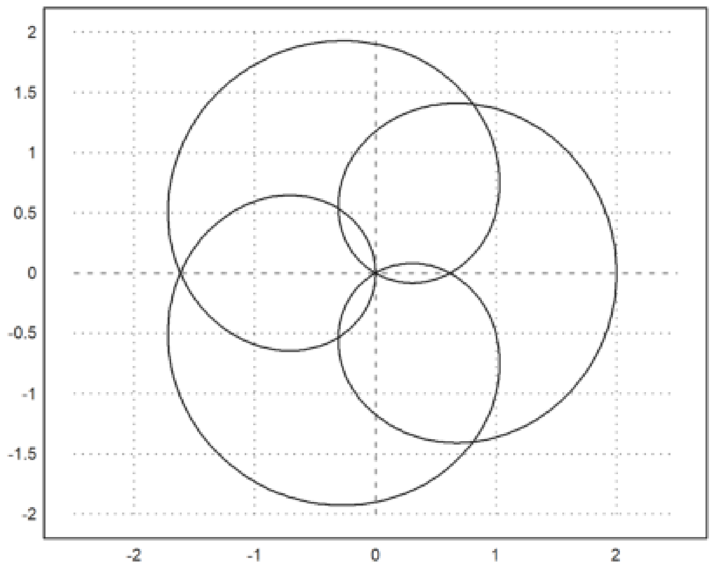
```
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add):
```



Vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian nyata dan bagian imajiner.
Dalam contoh, kita memplot lingkaran satuan dengan

$$\gamma(t) = e^{it}$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```



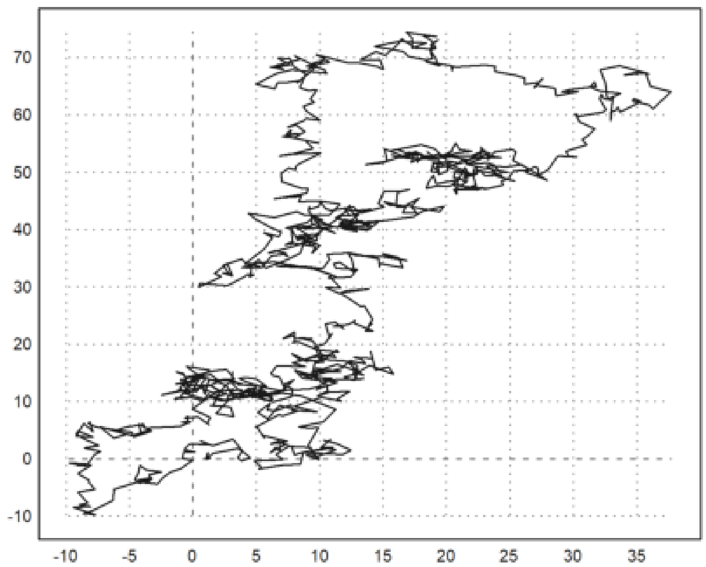
Plot Statistik

Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.
Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi normal 0-1 menghasilkan jalan acak.

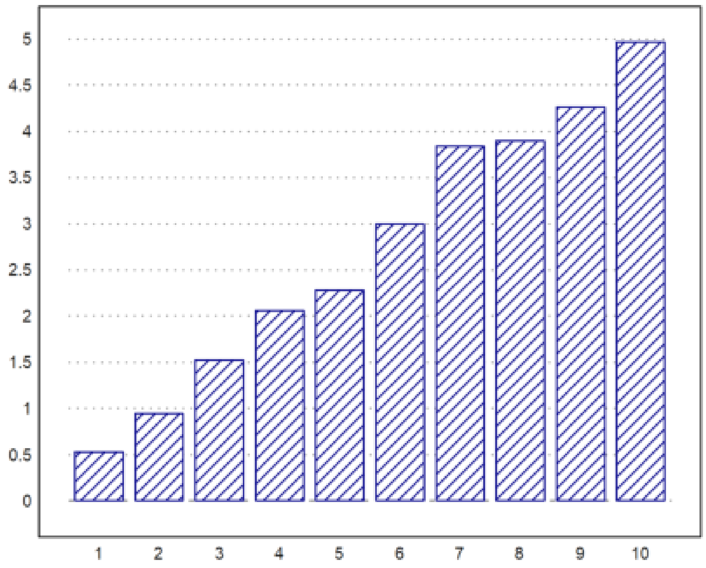
```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```

Penggunaan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```

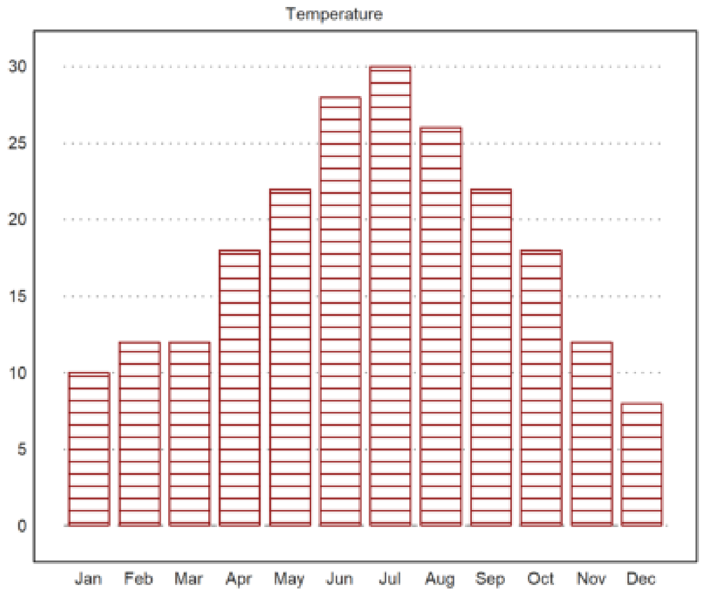


```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue):
```

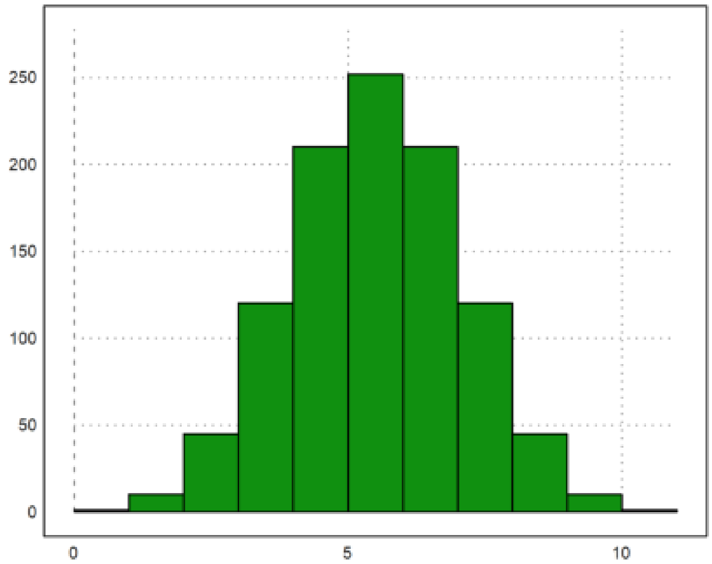


Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.

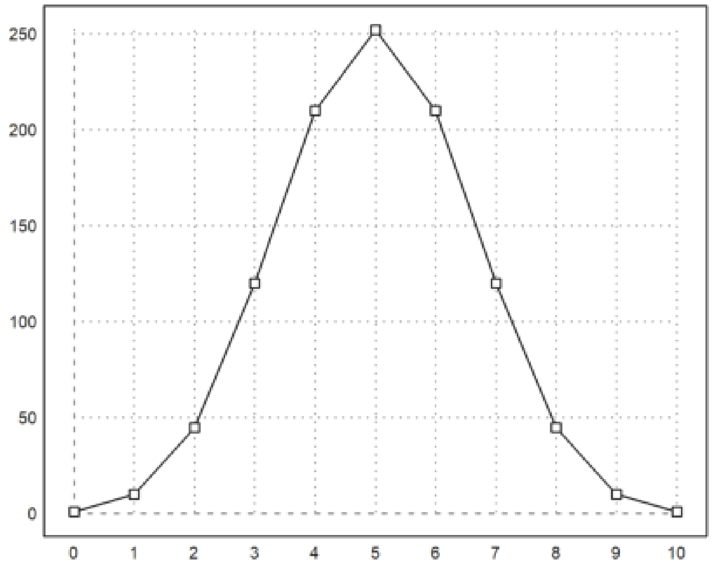
```
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...
>  "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");
>title("Temperature"):
```



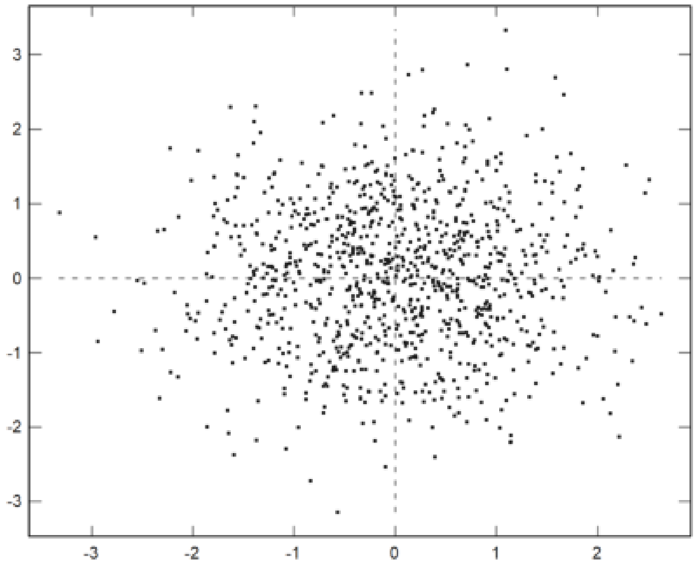
```
>k=0:10;
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```



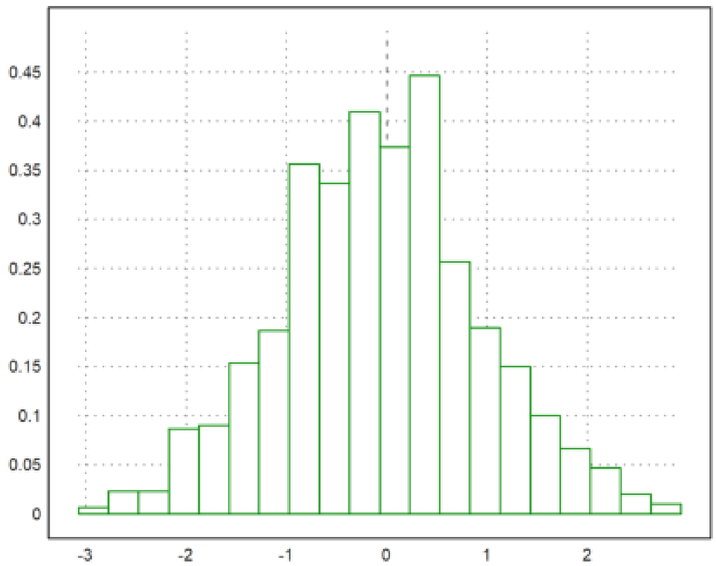

```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```



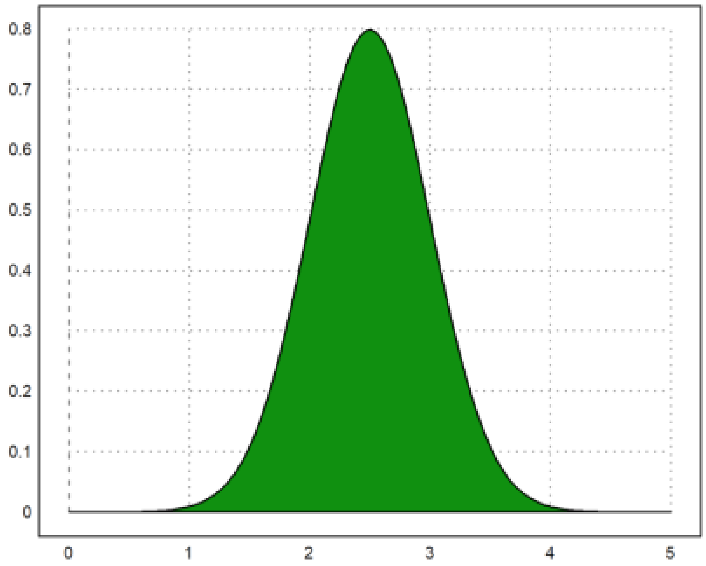

```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style=".."):
```




```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):
```

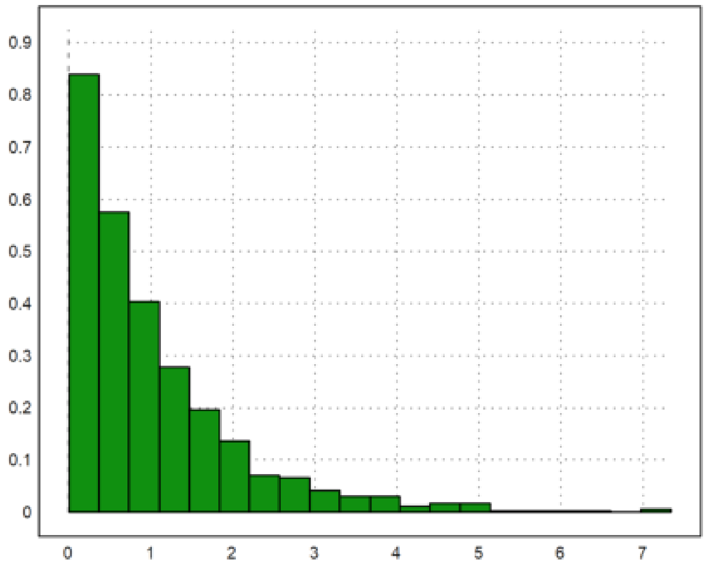



```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```



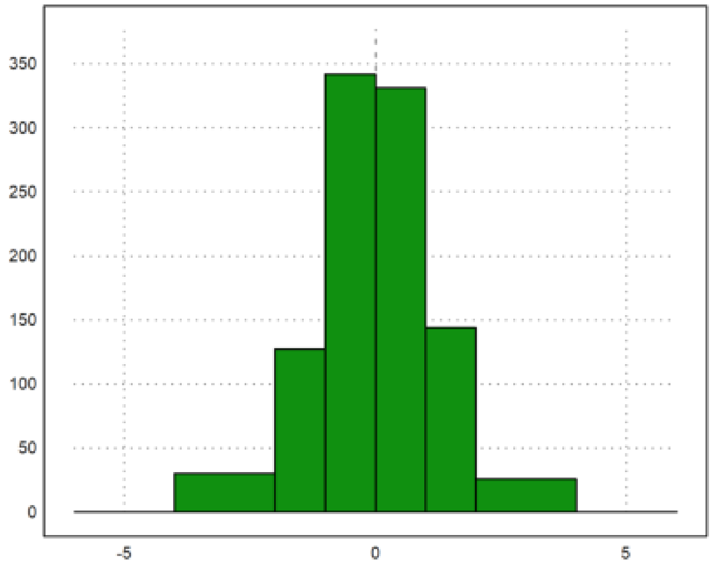
Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

```
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals
```



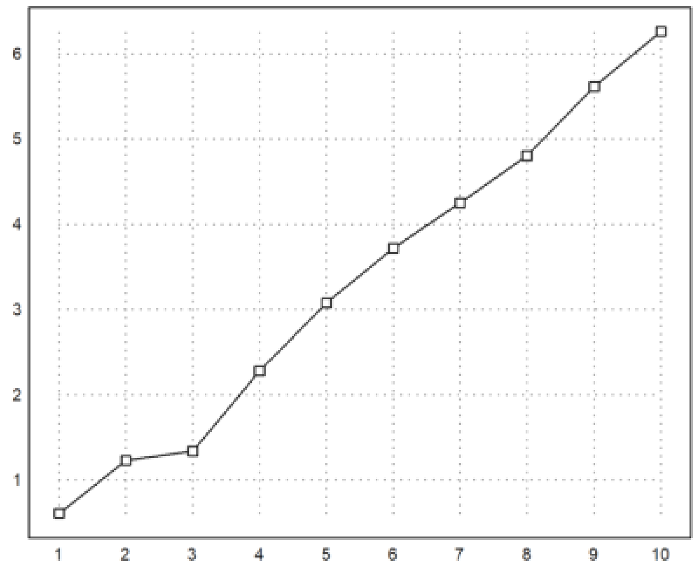
Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
>plot2d(x,y,>bar):
```

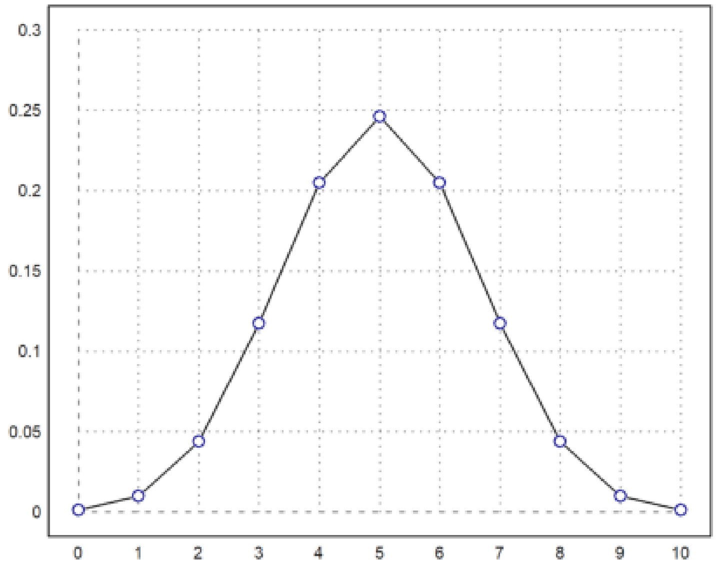


Fungsi statplot() mengatur gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),"b"):
```

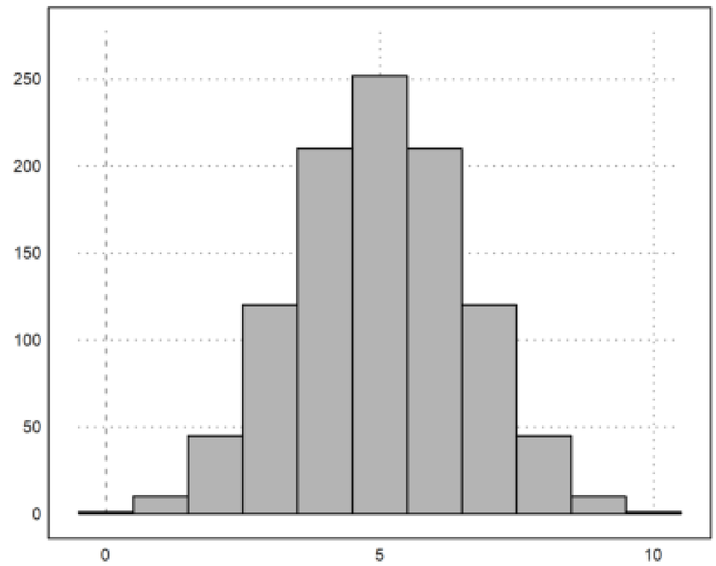



```
>n=10; i=0:n; ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```



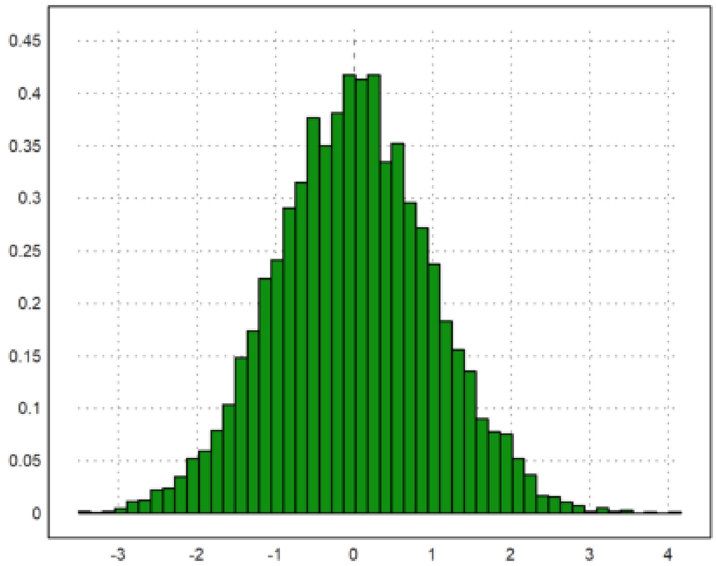
Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Batangnya akan memanjang dari x[i] hingga x[i+1] dengan nilai y[i]. Jika x berukuran sama dengan y, maka x akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir. Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
>plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```

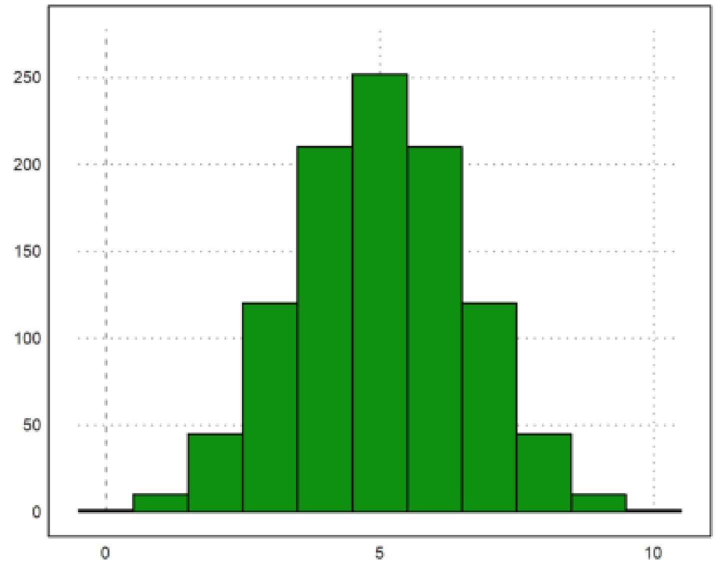


Data untuk plot batang (batang=1) dan histogram (histogram=1) dapat diberikan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribusi (atau distribusi=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >even ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

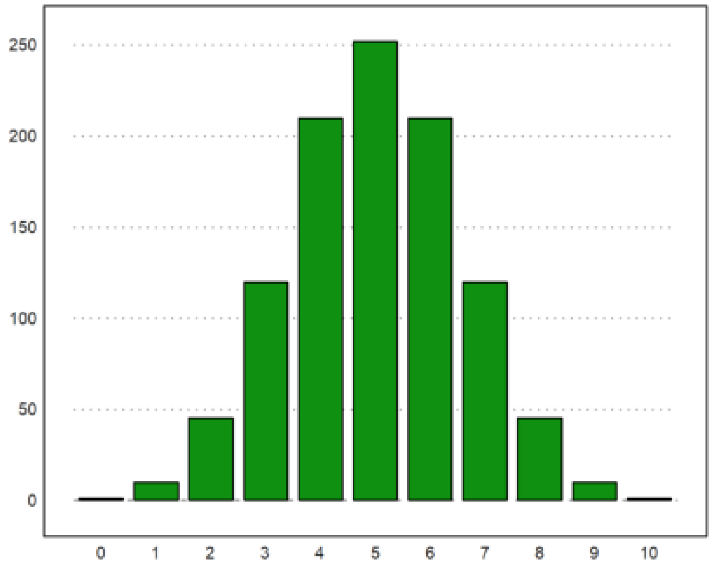
```
>plot2d(normal(10000),distribution=50):
```



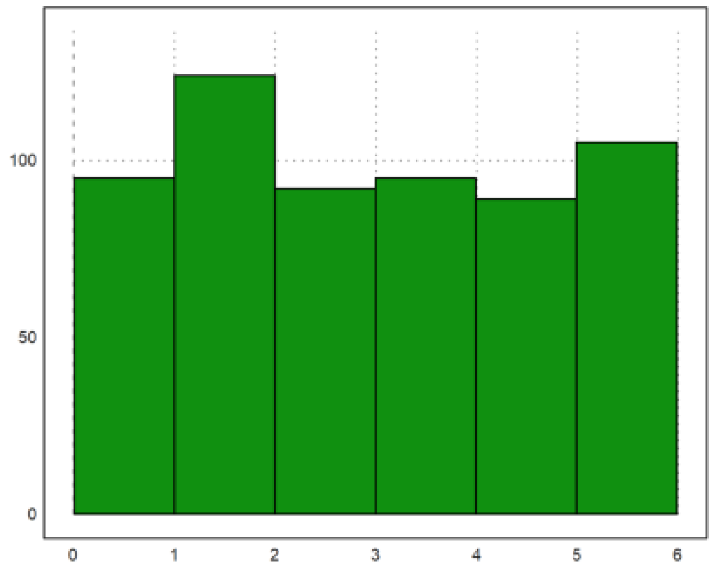

```
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```




```
>columnsplot(m,k):
```

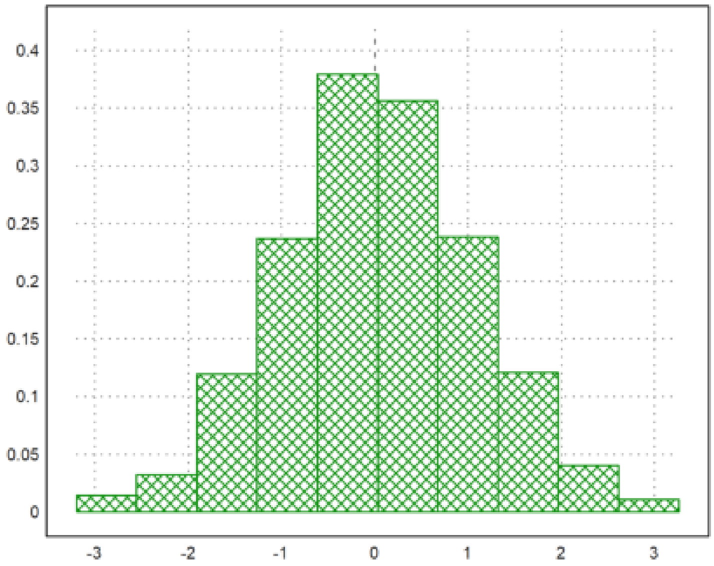



```
>plot2d(random(600)*6,histogram=6):
```



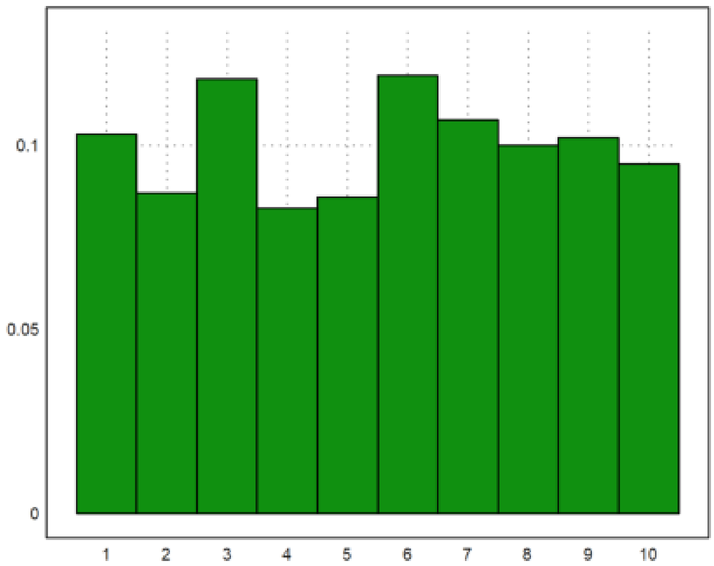
Untuk distribusi, terdapat parameter distribution=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\/"):
```



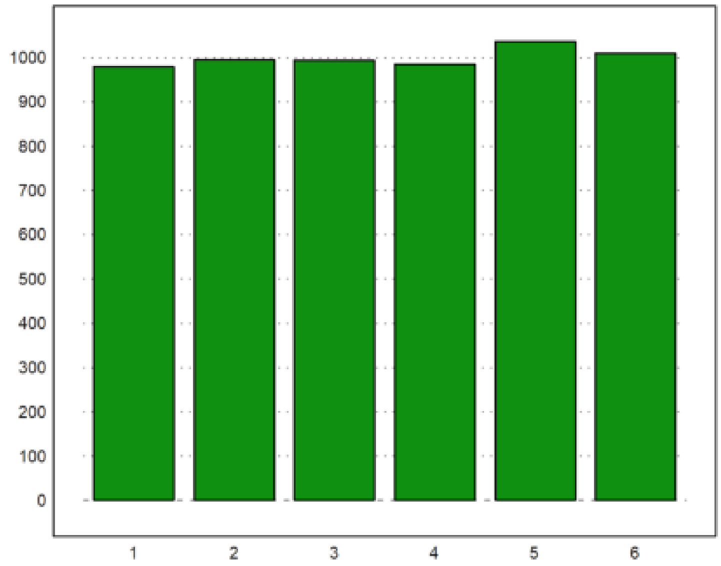
Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval bilangan bulat.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```

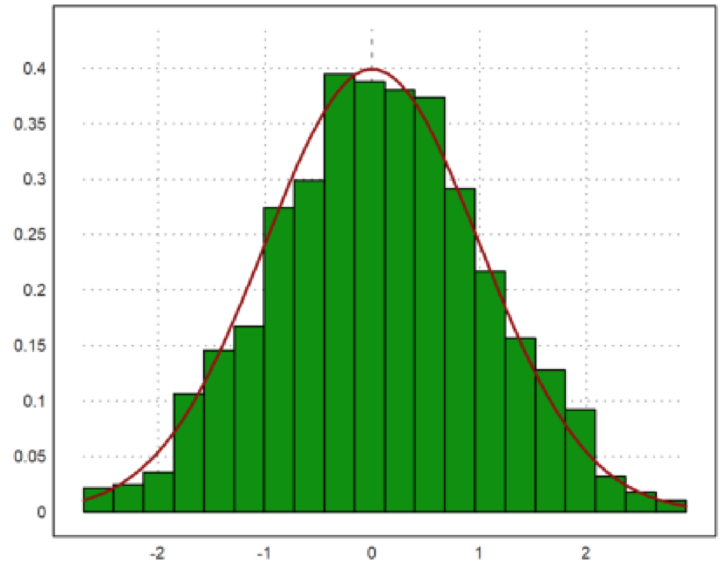


Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```

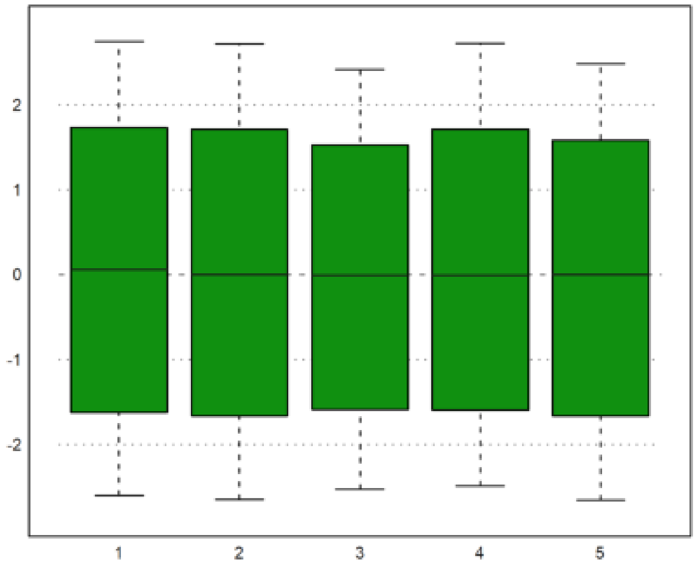



```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
>  plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```



Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Plot kotak menunjukkan kuartil distribusi ini dan banyak outlier. Menurut definisinya, outlier dalam plot kotak adalah data yang melebihi 1,5 kali rentang 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```



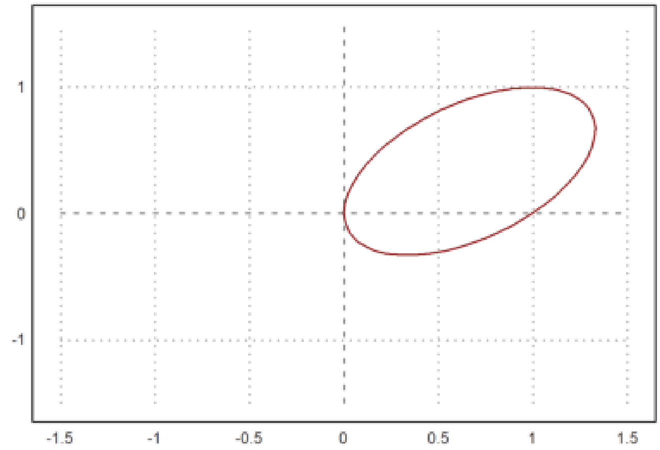
Fungsi Implisit

Plot implisit menunjukkan penyelesaian garis level f(x,y)=level, dengan "level" dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level = "auto", akan ada garis level nc, yang akan tersebar antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi parameter x dan y, atau alternatifnya, xv dapat berupa matriks nilai.
Euler dapat menandai garis level

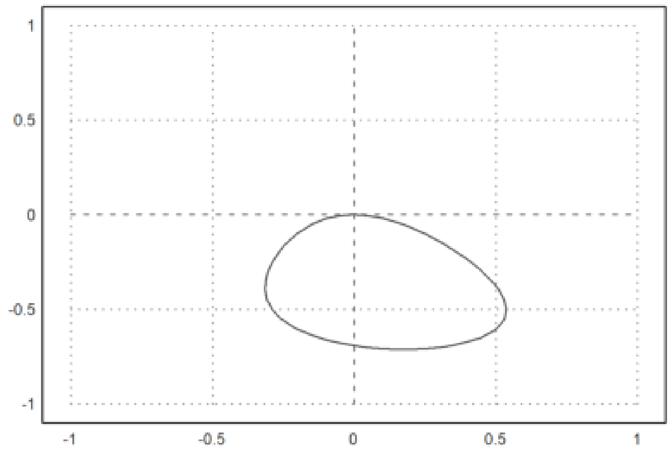
$$f(x, y) = c$$

dari fungsi apa pun.
Untuk menggambar himpunan f(x,y)=c untuk satu atau lebih konstanta c, Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya pada bidang. Parameter c adalah level=c, dimana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi setiap titik dalam plot. Parameter "n" menentukan kehalusan plot.

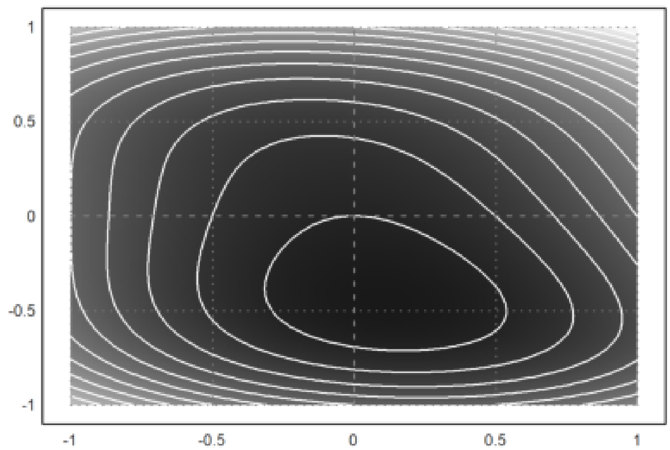
```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x*y-x",r=1.5,level=0,contourcolor=red):
```



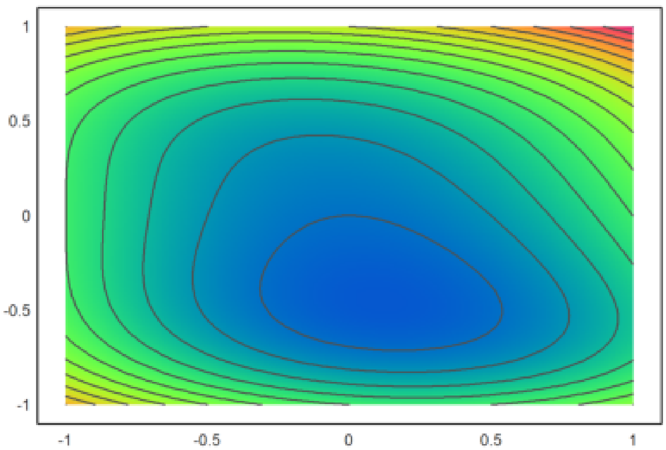

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=0): // Solutions of f(x,y)=0
```




```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice
```

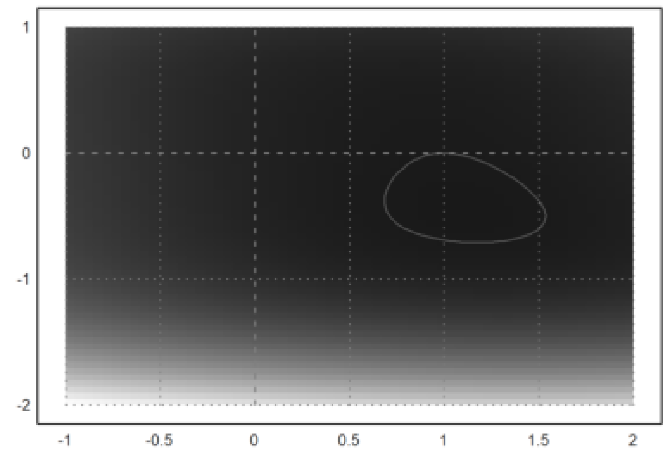


```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

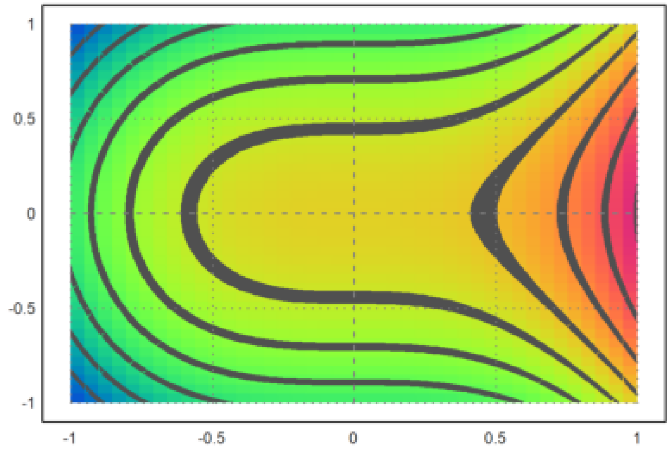


Ini juga berfungsi untuk plot data. Namun Anda harus menentukan rentangnya untuk label sumbu.

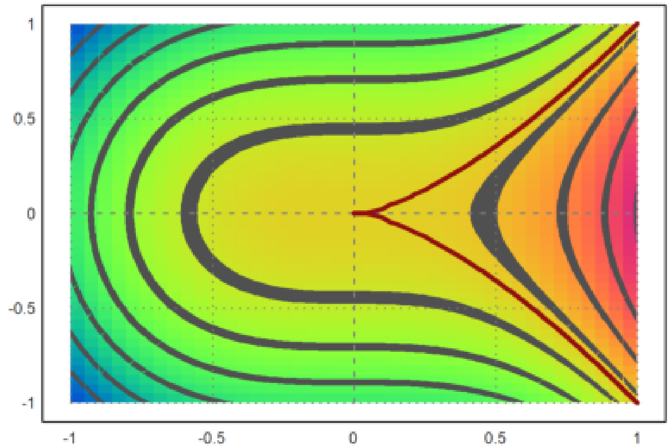
```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```



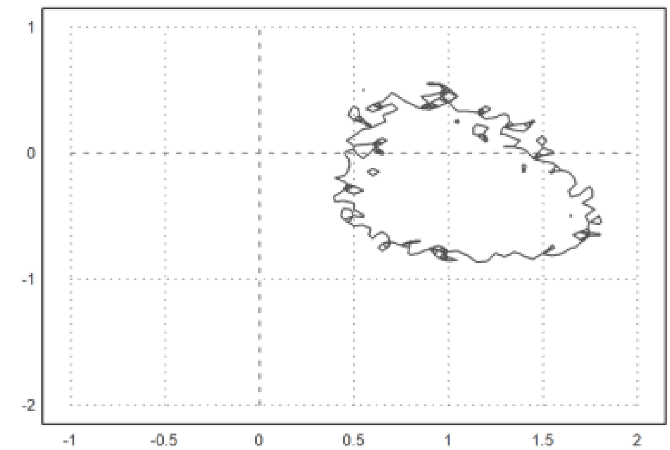

```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral):
```



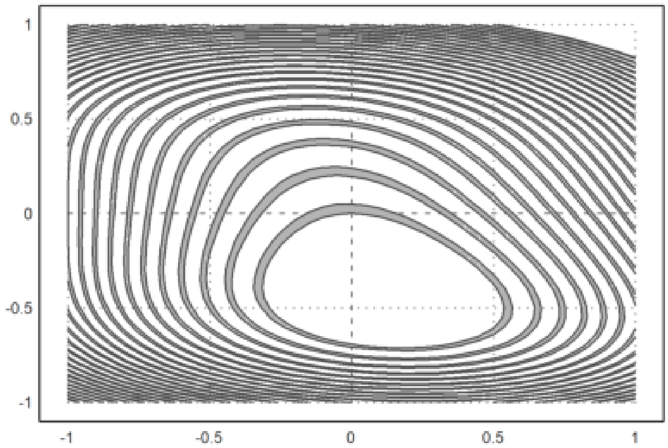

```
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):
```



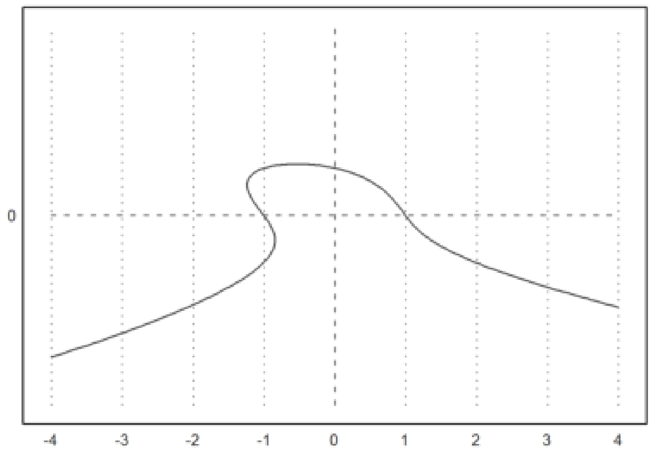

```
>z=z+normal(size(z))*0.2;
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):
```



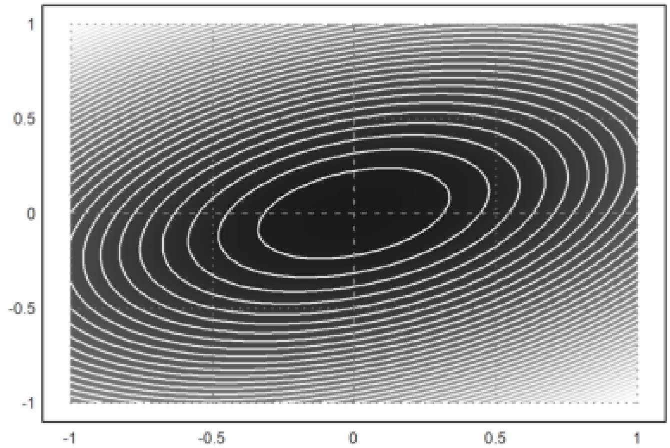
```
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100):
```

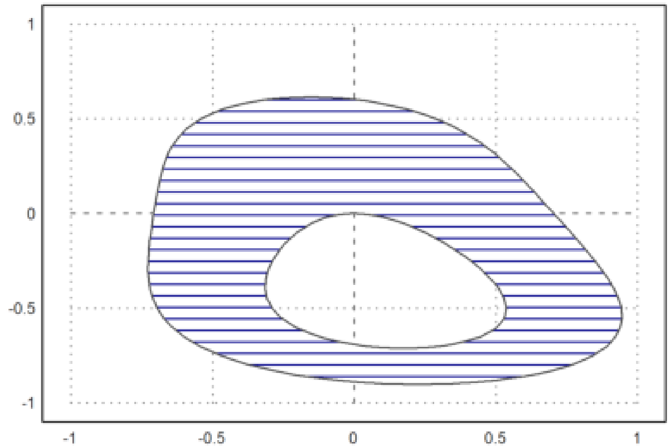



```
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```



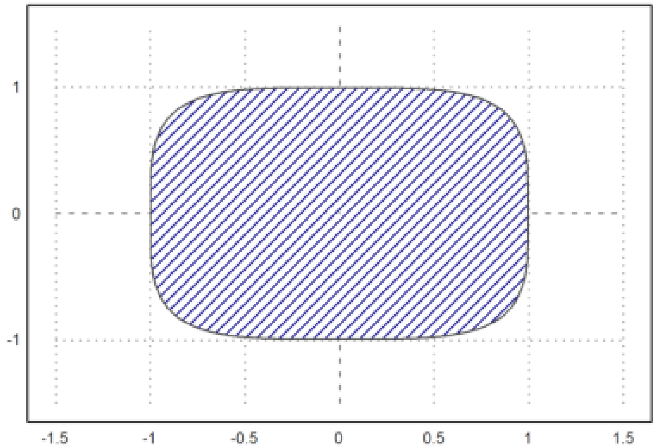
Dimungkinkan juga untuk mengisi set
lateks: a \le f(x,y) \le b
dengan rentang level.
Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

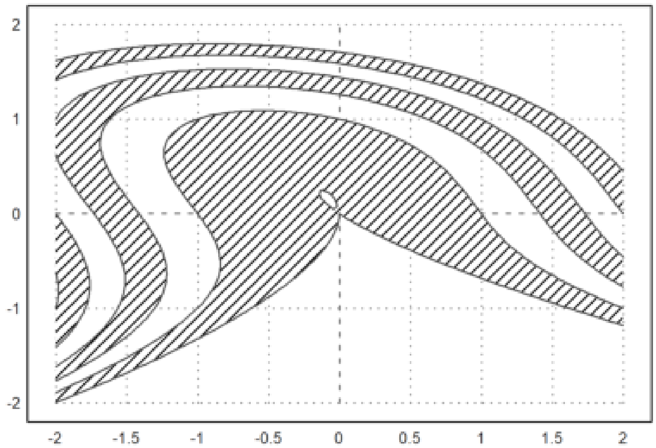


Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Maka level harus berupa matriks interval level 2xn, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua berisi akhir setiap interval. Alternatifnya, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

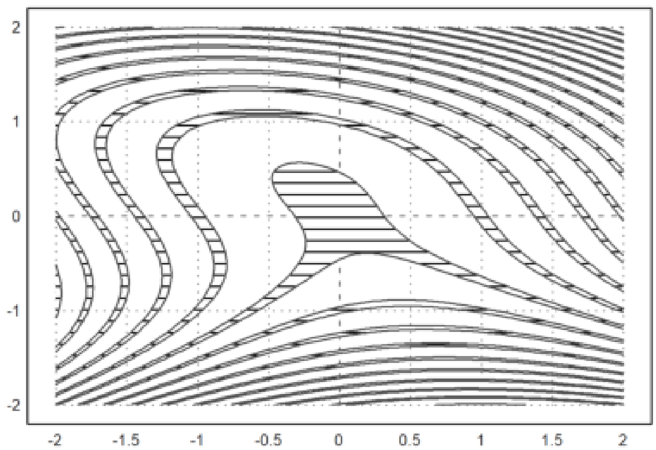
```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):
```



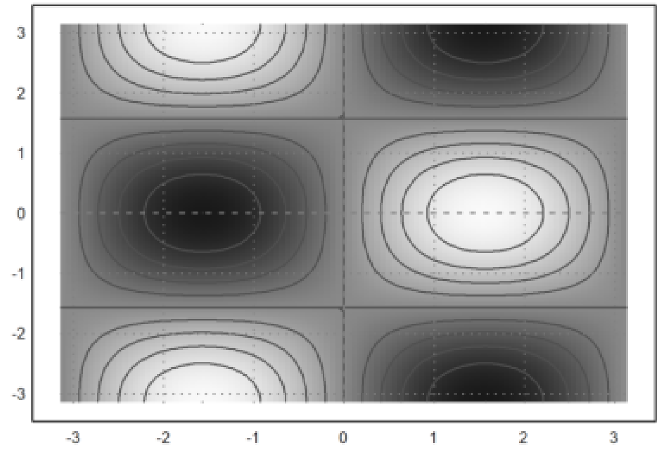

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):
```



```
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):
```

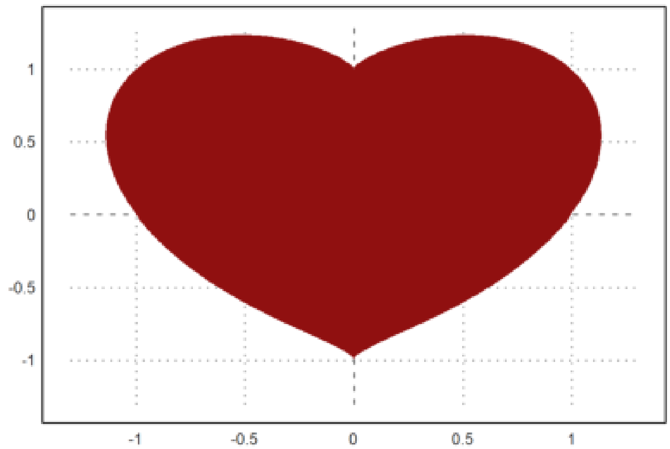


Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah

$$a \leq f(x, y) \leq b.$$

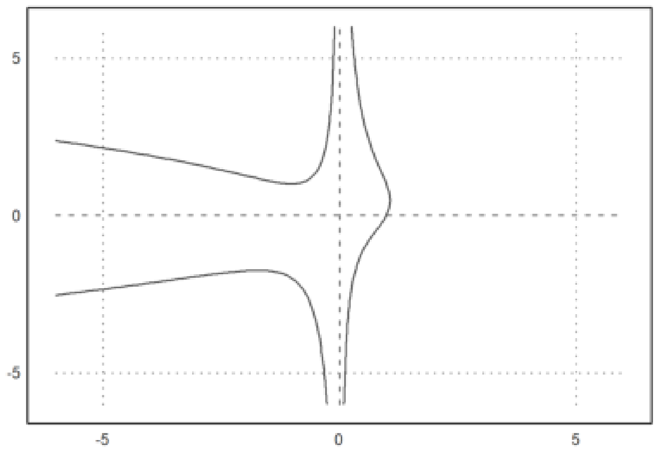
Hal ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>   style="#",color=red,<outline, ...
>   level=[-2;0],n=100):
```



Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti
lateks: x^3-xy+x^2y^2=6

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2",r=6,level=1,n=100):
```



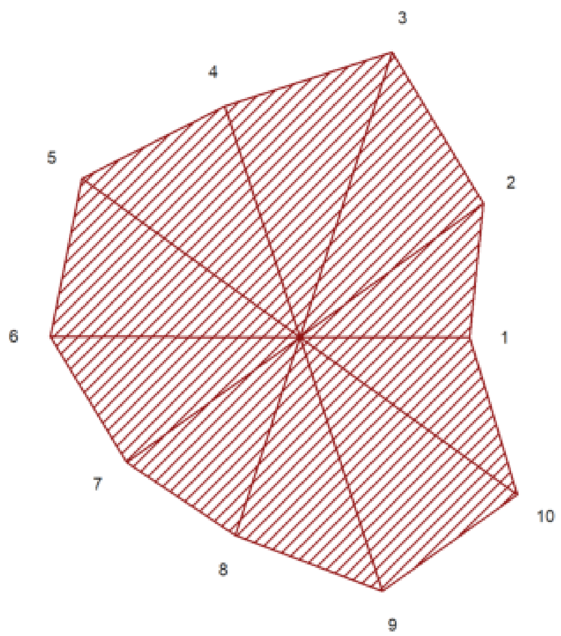

```
>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
```

```
    if !holding() then clg; endif;
    w=window(); window(0,0,1024,1024);
    h=holding(1);
    r=max(abs(v))*1.2;
    setplot(-r,r,-r,r);
    n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
    v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
    cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
    loop 1 to n
      polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
      if lab!=none then
        rlab=v[#]+r*0.1;
        {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
        ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
      endif;
    end;
    barcolor(cl); barstyle(st);
    holding(h);
    window(w);
  endfunction
```

Tidak ada tanda centang kotak atau sumbu di sini. Selain itu, kami menggunakan jendela penuh untuk plotnya.

Kami memanggil reset sebelum kami menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Ini tidak perlu dilakukan jika Anda yakin plot Anda berhasil.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```



Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang plot2d tidak bisa lakukan, tapi hampir.

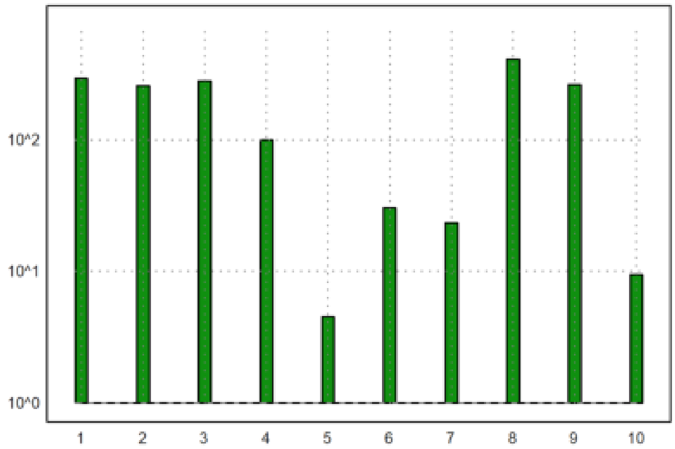
Dalam fungsi berikut, kita membuat plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
    {x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
    plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
    h=holding(1);
    frame();
    xgrid(ticks(x));
    p=plot();
    for i=-10 to 10;
      if i<=p[4] and i>=p[3] then
         ygrid(i,yt="10^"+i);
      endif;
    end;
    holding(h);
  endfunction
```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y):
```



Mari kita menganimasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke dalam jendela plot. setplot(a,b,c,d) menyetel jendela ini.
Fungsi wait(0) memaksa plot muncul di jendela grafis. Jika tidak, pengundian ulang akan dilakukan dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
  t=linspace(0,2pi,500);
  f=0;
  c=framecolor(0);
  l=linewidth(2);
  setplot(-1,1,-1,1);
  repeat
    clg;
    plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
    wait(0);
    if testkey() then break; endif;
    f=f+0.02;
  end;
  framecolor(c);
  linewidth(l);
  endfunction
```

Tekan tombol apa saja untuk menghentikan animasi ini.

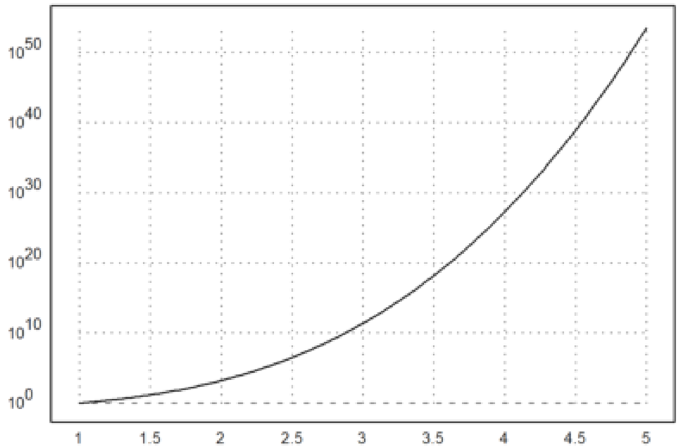
```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

Plot Logaritmik

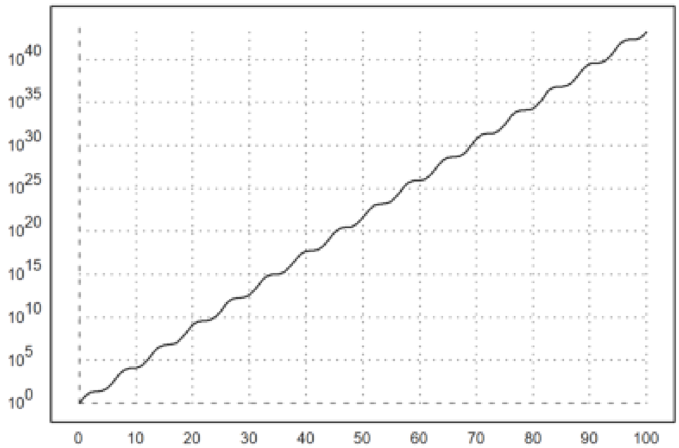
EMT menggunakan parameter "logplot" untuk skala logaritmik.
Plot logaritma dapat diplot menggunakan skala logaritma di y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritma di x dan y dengan logplot=2, atau di x dengan logplot=3.

```
- logplot=1: y-logaritma
- logplot=2: x-y-logaritma
- logplot=3: x-logaritma
```

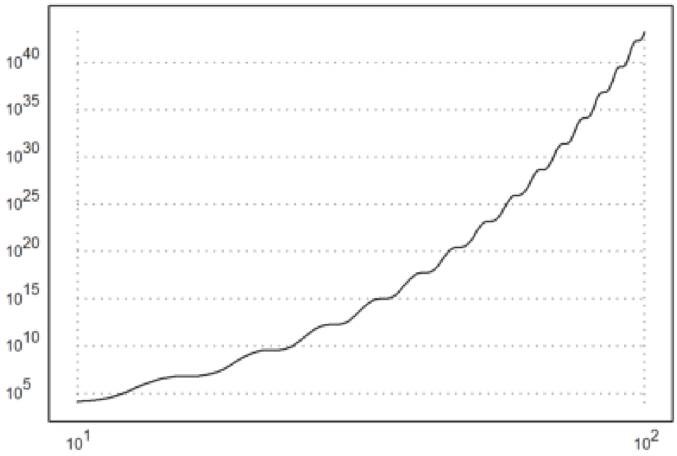
```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1):
```



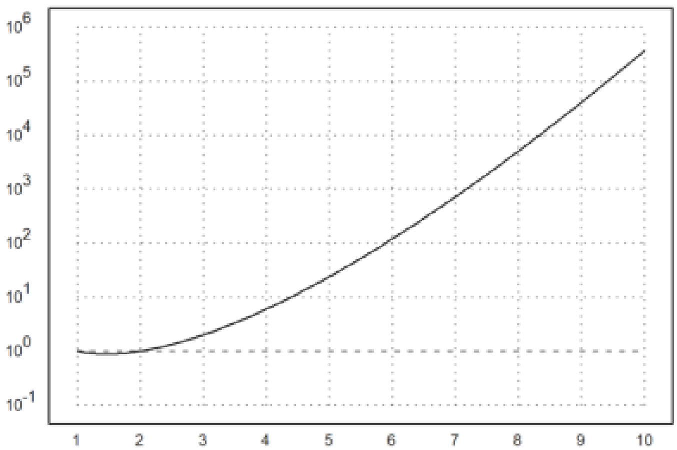

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1):
```



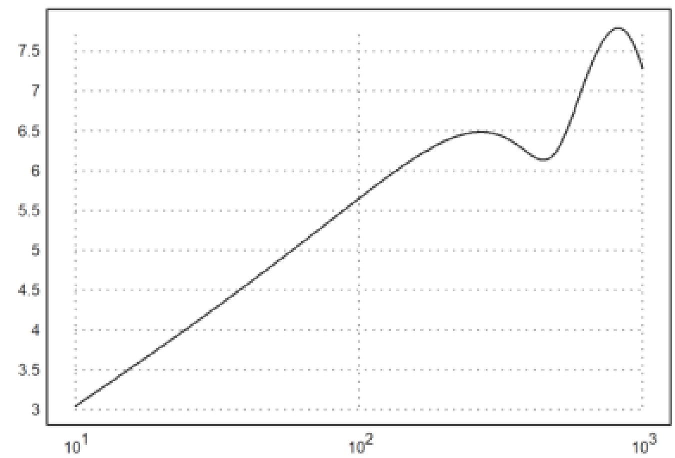
```
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2):
```




```
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1):
```

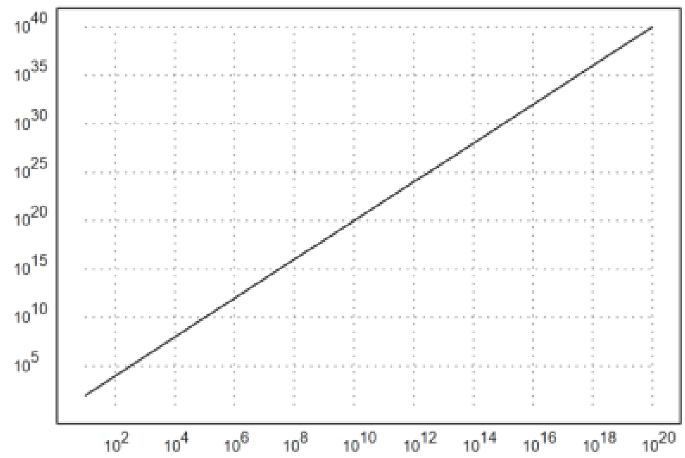



```
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):
```



Ini juga berfungsi dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
>plot2d(x,y,logplot=2):
```



Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

```
function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n,  ..
logplot, grid, frame, framecolor, square, color, thickness, style, ..
auto, add, user, delta, points, addpoints, pointstyle, bar, histogram,  ..
distribution, even, steps, own, adaptive, hue, level, contour,  ..
nc, filled, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral,  ..
cgrid, vertical, smaller, dl, niveau, levels)
```

Multipurpose plot function for plots in the plane (2D plots). This function can do plots of functions of one variables, data plots, curves in the plane, bar plots, grids of complex numbers, and implicit plots of functions of two variables.

Parameters

x,y : equations, functions or data vectors

a,b,c,d : Plot area (default a=-2,b=2)

r : if r is set, then a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

```
r can be a vector [rx,ry] or a vector [rx1,rx2,ry1,ry2].
```

xmin,xmax : range of the parameter for curves

auto : Determine y-range automatically (default)

square : if true, try to keep square x-y-ranges

n : number of intervals (default is adaptive)

grid : 0 = no grid and labels,

```
1 = axis only,
2 = normal grid (see below for the number of grid lines)
3 = inside axis
4 = no grid
5 = full grid including margin
6 = ticks at the frame
7 = axis only
8 = axis only, sub-ticks
```

frame : 0 = no frame

framecolor: color of the frame and the grid

margin : number between 0 and 0.4 for the margin around the plot

color : Color of curves. If this is a vector of colors,

```
it will be used for each row of a matrix of plots. In the case
point plots, it should be a column vector. If a row vector or a
full matrix of colors is used for point plots, it will be used
each data point.
```

thickness : line thickness for curves

```
This value can be smaller than 1 for very thin lines.
```

style : Plot style for lines, markers, and fills.

```
For points use
"[]", "<>", ".", "..", "...",
"*", "+", "|", "-", "o"
"[]#", "<>#", "o#" (filled shapes)
"[]w", "<>w", "ow" (non-transparent)
For lines use
"-", "--", "-.", ".", ".-.", "-.-", "->"
For filled polygons or bar plots use
"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",
"+", "|", "-", "t"
```

points : plot single points instead of line segments
addpoints : if true, plots line segments and points
add : add the plot to the existing plot
user : enable user interaction for functions
delta : step size for user interaction
bar : bar plot (x are the interval bounds, y the interval values)
histogram : plots the frequencies of x in n subintervals
distribution=n : plots the distribution of x with n subintervals
even : use inter values for automatic histograms.
steps : plots the function as a step function (steps=1,2)
adaptive : use adaptive plots (n is the minimal number of steps)
level : plot level lines of an implicit function of two variables
outline : draws boundary of level ranges.
If the level value is a 2xn matrix, ranges of levels will be drawn in the color using the given fill style. If outline is true, it will be drawn in the contour color. Using this feature, regions of f(x,y) between limits can be marked.
hue : add hue color to the level plot to indicate the function

```
value
```

contour : Use level plot with automatic levels
nc : number of automatic level lines
title : plot title (default "")
xl, yl : labels for the x- and y-axis
smaller : if >0, there will be more space to the left for labels.
vertical :

```
Turns vertical labels on or off. This changes the global variable
verticallabels locally for one plot. The value 1 sets only vertical
text, the value 2 uses vertical numerical labels on the y axis.
```

filled : fill the plot of a curve
fillcolor : fill color for bar and filled curves
outline : boundary for filled polygons
logplot : set logarithmic plots

```
1 = logplot in y,
2 = logplot in xy,
3 = logplot in x
```

own :

```
A string, which points to an own plot routine. With >user, you get
the same user interaction as in plot2d. The range will be set
before each call to your function.
```

maps : map expressions (0 is faster), functions are always mapped.
contourcolor : color of contour lines
contourwidth : width of contour lines
clipping : toggles the clipping (default is true)
title :

```
This can be used to describe the plot. The title will appear above
the plot. Moreover, a label for the x and y axis can be added with
xl="string" or yl="string". Other labels can be added with the
functions label() or labelbox(). The title can be a unicode
string or an image of a Latex formula.
```

cgrid :

```
Determines the number of grid lines for plots of complex grids.
Should be a divisor of the the matrix size minus 1 (number of
subintervals). cgrid can be a vector [cx,cy].
```

Overview
The function can plot
- expressions, call collections or functions of one variable,
- parametric curves,
- x data against y data,
- implicit functions,
- bar plots,
- complex grids,
- polygons.

If a function or expression for xv is given, plot2d() will compute values in the given range using the function or expression. The expression must be an expression in the variable x. The range must be defined in the parameters a and b unless the default range should be used. The y-range will be computed automatically, unless c and d are specified, or a radius r, which yields the range r,r
for x and y. For plots of functions, plot2d will use an adaptive evaluation of the function by default. To speed up the plot for complicated functions, switch this off with <adaptive, and optionally decrease the number of intervals n. Moreover, plot2d() will by default use mapping. I.e., it will compute the plot element for element. If your expression or your functions can handle a vector x, you can switch that off with <maps for faster evaluation.
Note that adaptive plots are always computed element for element.
If functions or expressions for both xv and for yv are specified, plot2d() will compute a curve with the xv values as x-coordinates and the yv values as y-coordinates. In this case, a range should be defined for the parameter using xmin, xmax. Expressions contained in strings must always be expressions in the parameter variable x.

4 Penggunaan Software EMT untuk Plot 3D

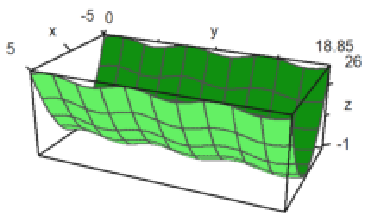
Menggambar Plot 3D dengan EMT

Nama : Assyifa Cahya M
NIM : 22305141001
Matematika B 2022

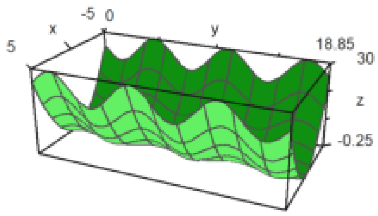
Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita memerlukan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dua variabel.
Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum Euler menggunakan proyeksi sentral. Defaultnya adalah dari kuadran x-y positif menuju titik asal x=y=z=0, tetapi sudut=0° dilihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan ketinggian dapat diubah.
Euler bisa merencanakan
- permukaan dengan garis penetasan dan level atau rentang level,
- awan titik,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur rentang plot sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```

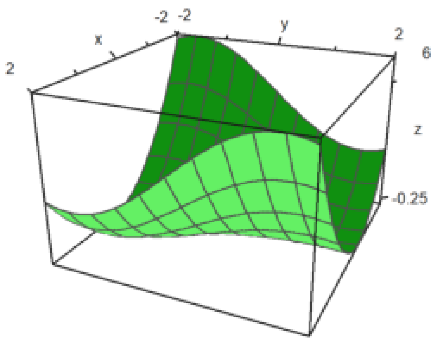



```
>plot3d("x^2+x*sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```

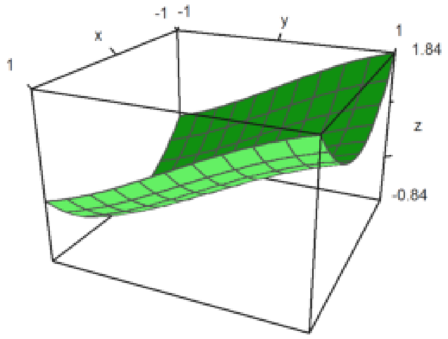


Silakan lakukan modifikasi agar gambar "talang bergelombang" tersebut tidak lurus melainkan melengkung/melingkar, baik melingkar secara mendatar maupun melingkar turun/naik (seperti papan peluncur pada kolam renang. Temukan rumusnya. **Tambahan**

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+x*sin(y)",r=2):
```




```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=1):
```



Semakin besar nilai r nya plot yang dihasilkan semakin kecil sehingga keliatannya semakin kecil. Pemilihan nilai r harus tepat agar plot yang dihasilkan lebih akurat dan memahamkan.

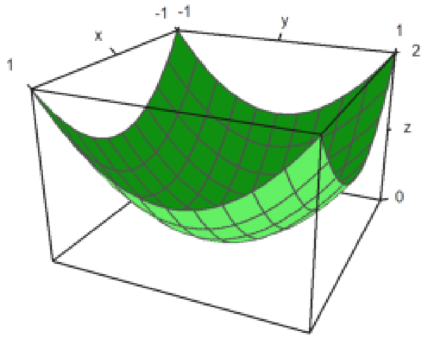
Fungsi dua Variabel

Untuk grafik suatu fungsi, gunakan
- ekspresi sederhana dalam x dan y,
- nama fungsi dari dua variabell
- atau matriks data.

Standarnya adalah kisi-kisi kawat berisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah interval kisi default adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default persegi panjang 40x40 untuk membuat permukaannya. Ini bisa diubah.
- n=40, n=[40,40]: jumlah garis kisi di setiap arah
- grid=10, grid=[10,10]: jumlah garis grid di setiap arah.

Kami menggunakan default n=40 dan grid=10.

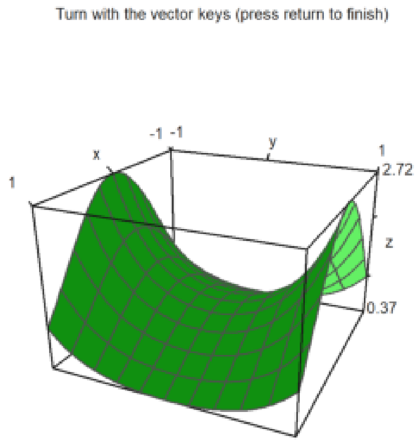
```
>plot3d("x^2+y^2"):
```



Interaksi pengguna dimungkinkan dengan parameter >pengguna. Pengguna dapat menekan tombol berikut.

- kiri, kanan, atas, bawah: memutar sudut pandang
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l : tombol nyalakan sumber cahaya (lihat dibawah)
- spasi: reset ke default
- kembali: akhiri interaksi

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
>  title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):
```

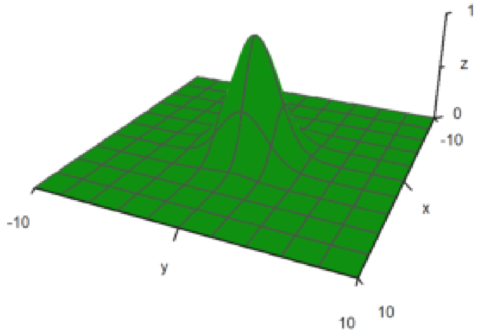


Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan

- a,b: rentang x
- c,d: rentang y
- r : persegi simetris di sekitar (0,0).
- n : jumlah subinterval untuk plot.

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.
fscale: menskalakan ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).
skala: angka atau vektor 1x2 untuk menskalakan ke arah x dan y.
bingkai: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3,>user):
```



Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.
- Jarak: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- sudut: sudut terhadap sumbu y negatif dalam radian.
- tinggi: ketinggian pandangan dalam radian.

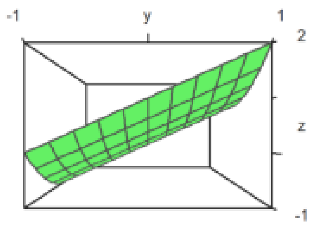
Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view(). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

```
>view
```

```
  [5,  2.6,  2,  0.4]
```

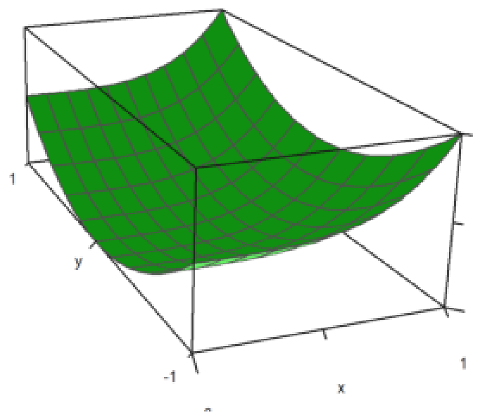
Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit zoom. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar. Pada contoh berikut, sudut=0 dan tinggi=0 dilihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=1,angle=pi/2,height=0):
```



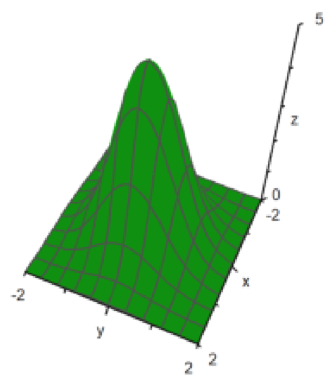
Plot selalu terlihat berada di tengah kubus plot. Anda dapat memindahkan bagian tengah dengan parameter tengah.

```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>  center=[0.4,0,0],zoom=5):
```



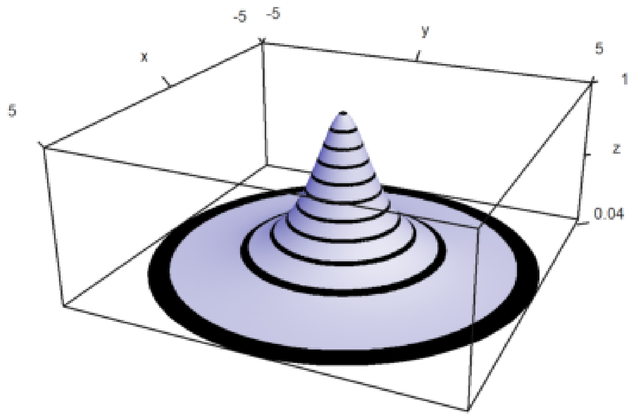
Plotnya diskalakan agar sesuai dengan unit kubus untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung ukuran plot. Namun labelnya mengacu pada ukuran sebenarnya.
Jika Anda mematikannya dengan scale=false, Anda harus berhati-hati agar plot tetap masuk ke dalam jendela plotting, dengan mengubah jarak pandang atau zoom, dan memindahkan bagian tengah.

```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
>  center=[0,0,-2],frame=3):
```

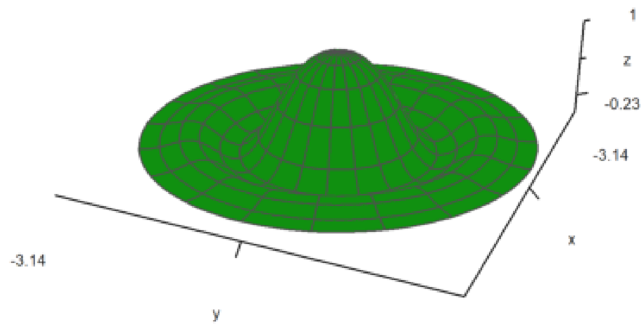


Plot kutub juga tersedia. Parameter polar=true menggambar plot kutub. Fungsi tersebut harus tetap merupakan fungsi dari x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skalanya sendiri. Kalau tidak, fungsinya akan diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=blue):
```

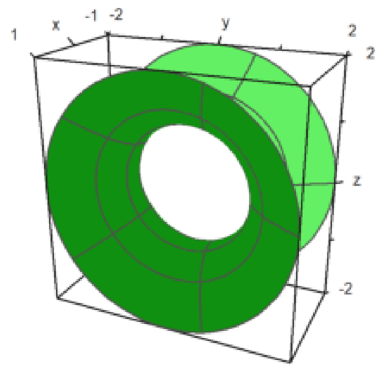



```
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...
>plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=pi,frame=3,zoom=4):
```

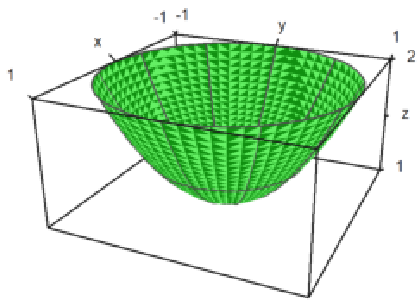


Parameter memutar memutar fungsi di x di sekitar sumbu x.
- putar=1: Menggunakan sumbu x
- putar=2: Menggunakan sumbu z

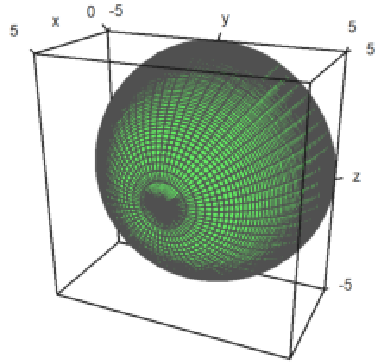
```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```



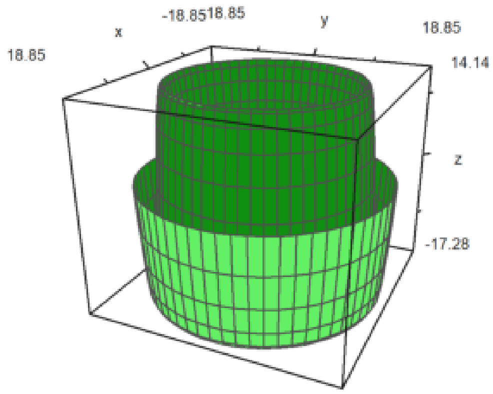

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=2,grid=5):
```




```
>plot3d("sqrt(25-x^2)",a=0,b=5,rotate=1):
```

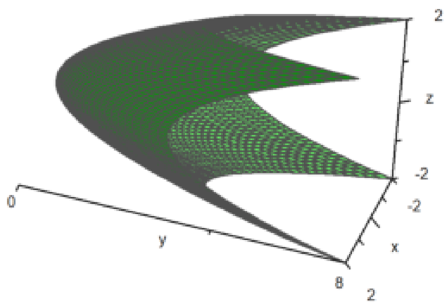



```
>plot3d("x*sin(x)",a=0,b=6pi,rotate=2):
```



Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x","x^2+y^2","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```



Plot Kontur

Untuk plotnya, Euler menambahkan garis grid. Sebaliknya dimungkinkan untuk menggunakan garis datar dan rona satu warna atau rona warna spektral. Euler dapat menggambar ketinggian fungsi pada plot dengan arsiran. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/cyan.

->hue: Mengaktifkan bayangan cahaya, bukan kabel.

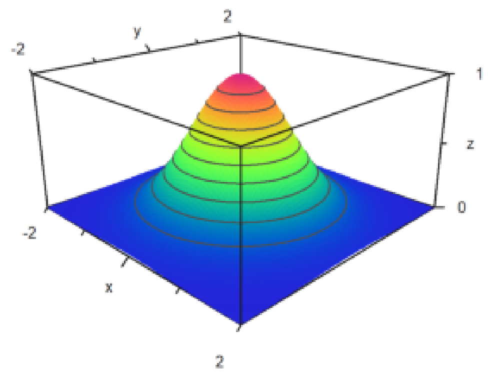
->kontur: Membuat plot garis kontur otomatis pada plot.

- level=... (atau level): Vektor nilai garis kontur.

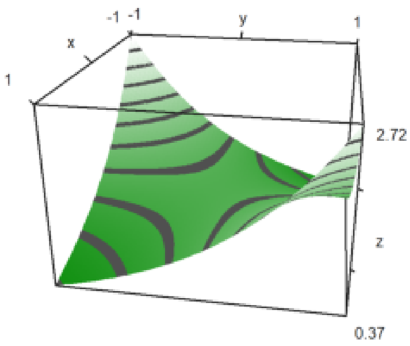
Standarnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan grid yang lebih halus berukuran 100x100 poin, menskalakan fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```

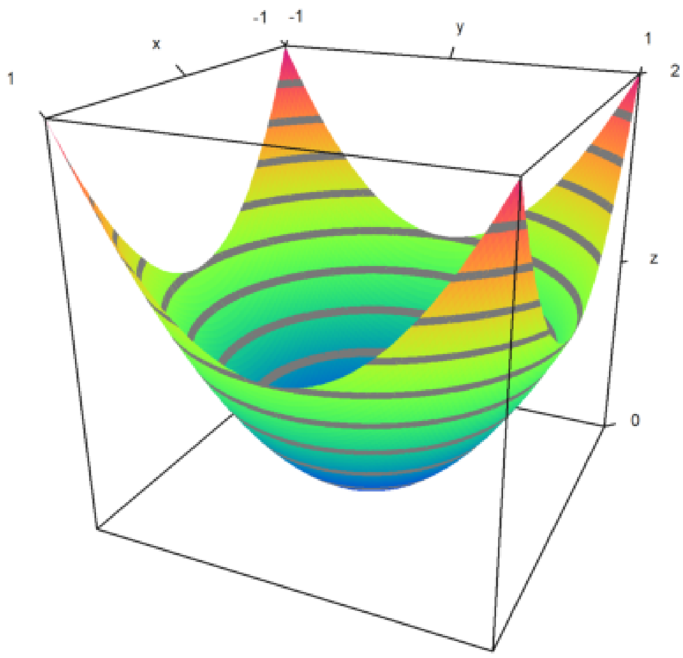



```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```



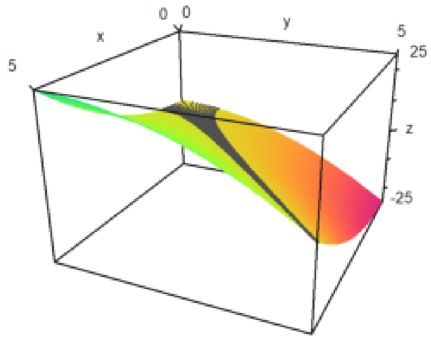
Bayangan defaultnya menggunakan warna abu-abu. Namun rentang warna spektral juga tersedia.
->spektral: Menggunakan skema spektral default
- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral
Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat mulus.

```
>aspect(1); plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100):
```



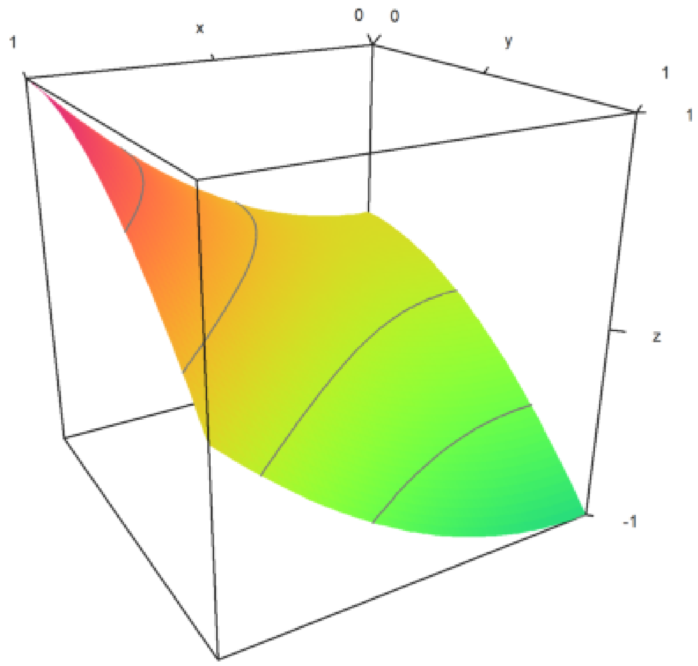
Penambahan aspect juga berpengaruh di besar kecilnya suatu gambar dan kurva. Selain garis level otomatis, kita juga dapat menetapkan nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level yang tipis, bukan rentang level.

```
>plot3d("x^2-y^2",0,5,0,5,level=-1:0.1:1,color=redgreen):
```

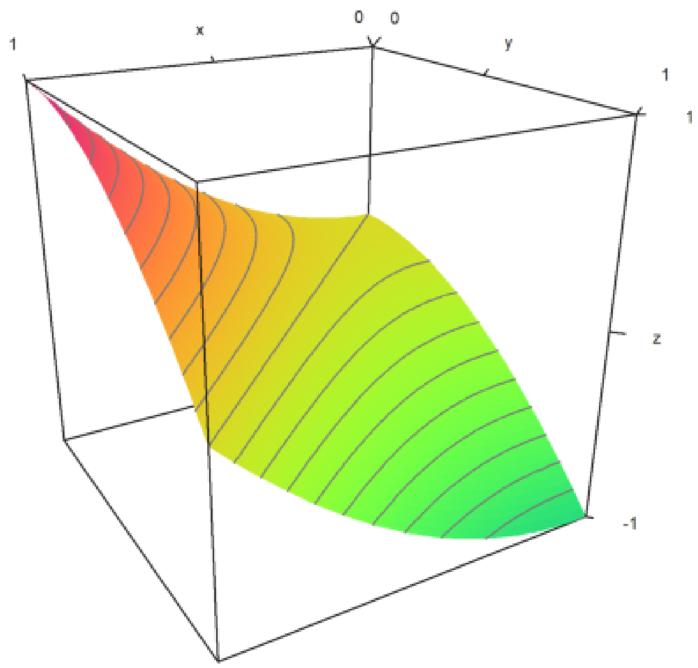


Dalam plot berikut, kita menggunakan dua pita tingkat yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas tingkat sebagai kolom.
Selain itu, kami melapisi grid dengan 10 interval di setiap arah. **Tambahan**

```
>plot3d("x^2-y^2",0,1,0,1,angle=150°,level=-1:0.4:1,color=greenred):
```

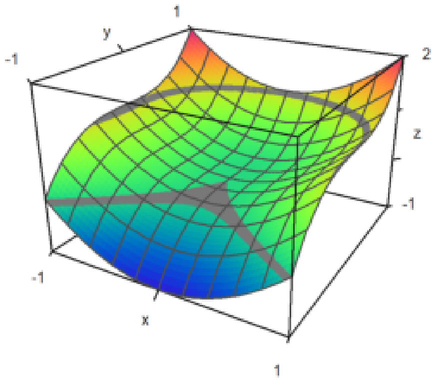



```
>plot3d("x^2-y^2",0,1,0,1,angle=150°,level=-1:0.1:1,color=greenred):
```



Dari perbandingan tersebut kita dapat mengatur nilai garis level dengan level yang ada pada rumus tersebut. Dalam pembuatan plot ini dapat ditambahkan dengan angle yang berguna untuk melihat plot tersebut dari arah mana.

```
>plot3d("x^2+y^3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
>  >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```

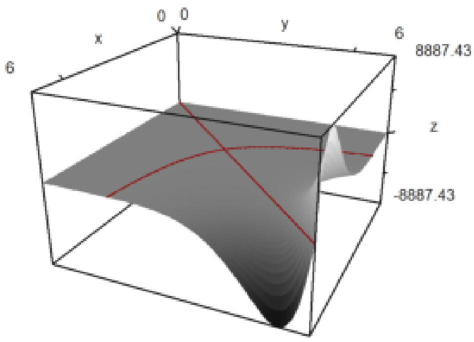


Pada contoh berikut, kita memplot himpunan, di mana

$$f(x,y) = x^y - y^x = 0$$

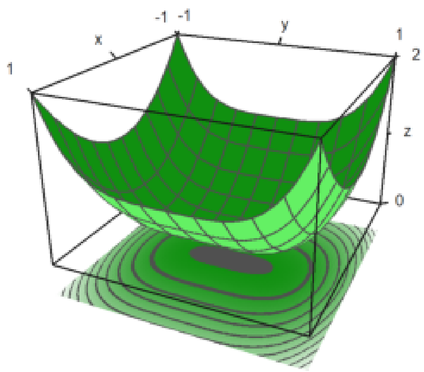
Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):
```



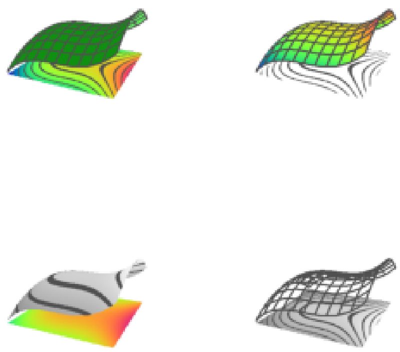
Dimungkinkan untuk menampilkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x^2+y^4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2):
```



Berikut beberapa gaya lainnya. Kami selalu mematikan bingkai, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan kisi.

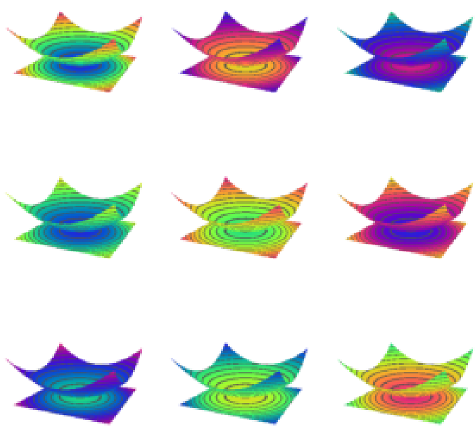
```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```



Ada beberapa skema spektral lainnya, yang diberi nomor dari 1 hingga 9. Namun Anda juga dapat menggunakan warna=nilai, di mana nilai

- spektral: untuk rentang dari biru hingga merah
- putih: untuk rentang yang lebih redup
- kuningbiru,unguhijau,birukuning,hijaumerah
- birukuning, hijauungu,kuningbiru,merahhijau

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9;  ...
>  figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4);  ...
>end; ...
>figure(0):
```

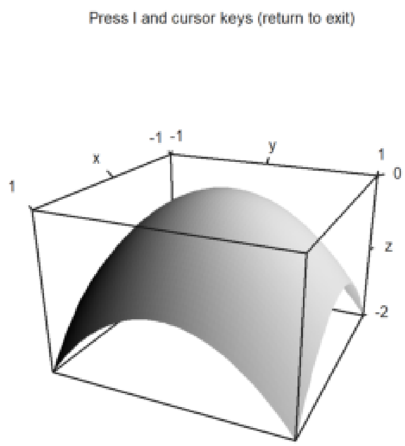


Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.

- cahaya : arah datangnya cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program ini tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda memerlukan Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>  hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
>  title="Press l and cursor keys (return to exit)"):
```

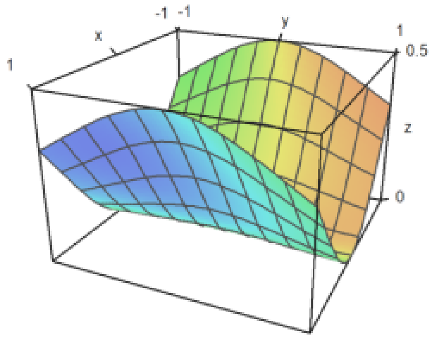


Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga bisa diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
>  zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```

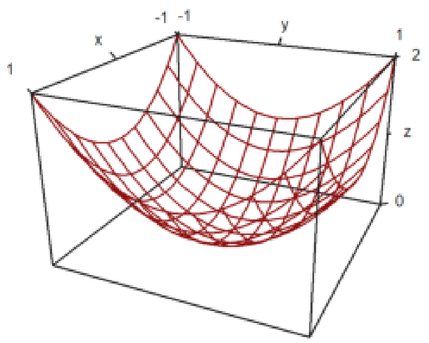
Warna 0 memberikan efek pelangi yang istimewa.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```



Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```



Plot Implisit

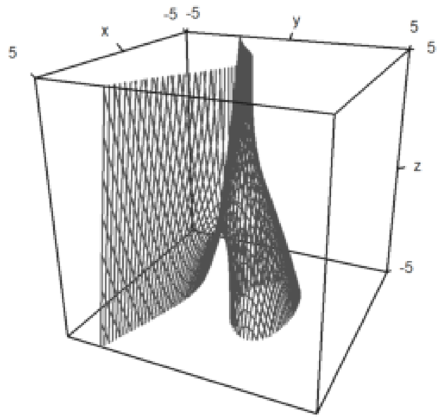
Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur plot3d mencakup plot implisit. Plot ini menunjukkan himpunan nol suatu fungsi dalam tiga variabel.
Solusi dari

$$f(x, y, z) = 0$$

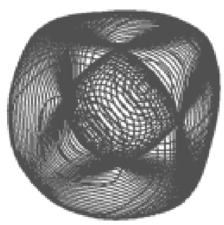
dapat divisualisasikan dalam potongan yang sejajar dengan bidang x-y-, x-z- dan y-z.
- implisit=1: dipotong sejajar bidang y-z
- implisit=2: dipotong sejajar dengan bidang x-z
- implisit=4: dipotong sejajar bidang x-y
Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda mau. Dalam contoh kita memplot

$$M = \{(x,y,z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

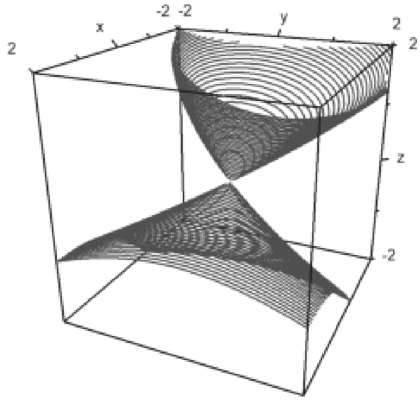
```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1",r=5,implicit=3):
```




```
>c=1; d=1;
>plot3d("((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-
```



```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```



Merencanakan Data 3D

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai x-, y- dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi fx(x,y), fy(x,y), fz(x,y).

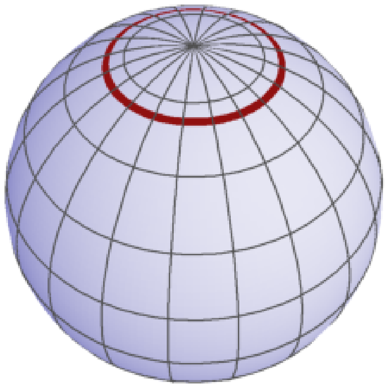
$$\gamma(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$$

Karena x,y,z adalah matriks, kita asumsikan bahwa (t,s) melewati grid persegi. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persegi panjang di ruang angkasa.

Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

Dalam contoh berikut, kita menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai wilayah, dalam kasus kita wilayah kutub.

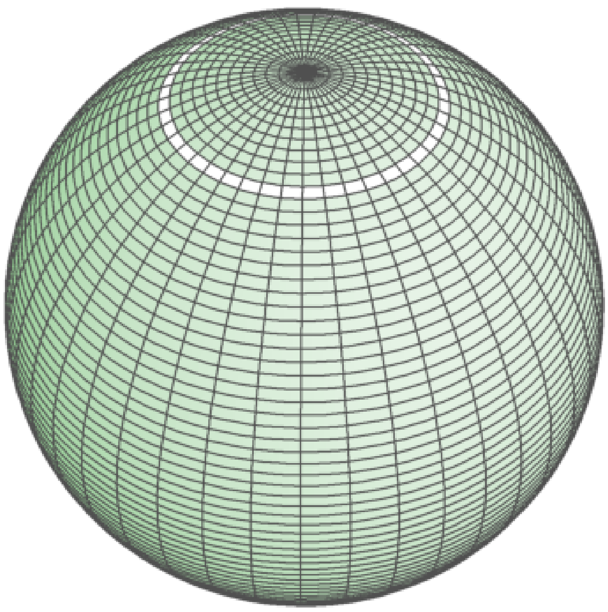
```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```



Berikut ini contohnya yaitu grafik suatu fungsi.

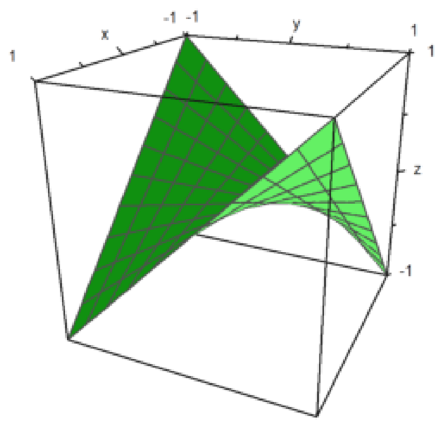
Tambahan

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=green,<frame,grid=[100,50], ...
>values=s,contourcolor=white,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```



Dari grafik ini saya mencoba mengubah grid dari [10,20] menjadi [100,50]

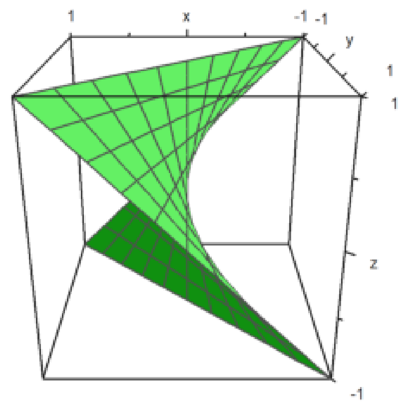
```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```



Namun, kita bisa membuat berbagai macam permukaan. Berikut adalah permukaan yang sama sebagai suatu fungsi

$$x = y\,z$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```



Dengan lebih banyak usaha, kita dapat menghasilkan banyak permukaan.
Dalam contoh berikut kita membuat tampilan bayangan dari bola yang terdistorsi. Koordinat bola yang biasa adalah

$$\gamma(t,s) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s), \cos(s))$$

dengan

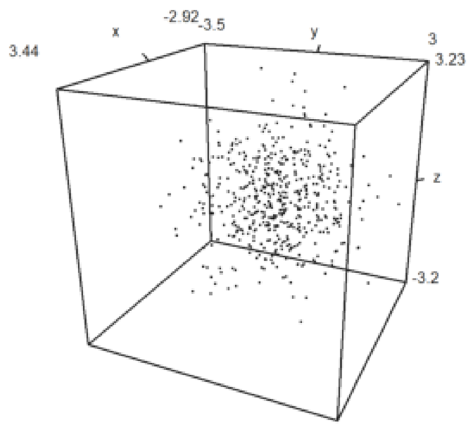
$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kami mendistorsi ini dengan sebuah faktor
lateks: d(t,s) = \frac{\cos(4t)+\cos(8s)}{4}.

```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
>  light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```

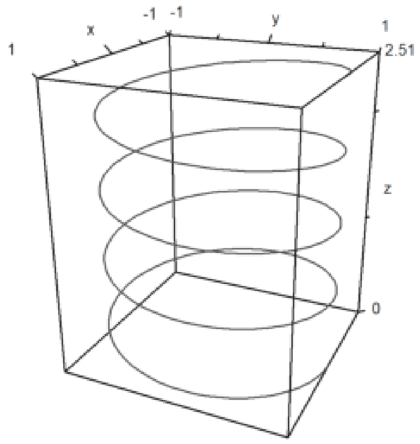
Tentu saja, point cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita memerlukan tiga vektor untuk koordinat titik-titik tersebut.
Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500;  ...
>  plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

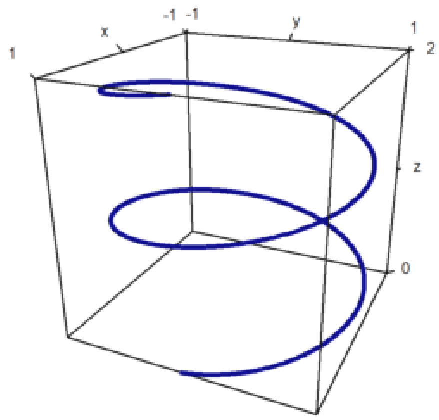


Dimungkinkan juga untuk memplot kurva dalam 3D. Dalam hal ini, lebih mudah untuk menghitung terlebih dahulu titik-titik kurva. Untuk kurva pada bidang kita menggunakan barisan koordinat dan parameter wire=true.

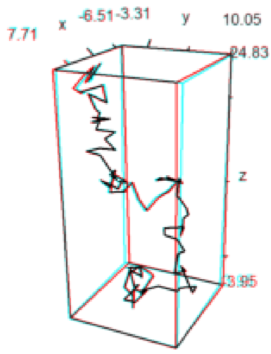
```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
>plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3):
```




```
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
>linewidth=3,wirecolor=blue):
```

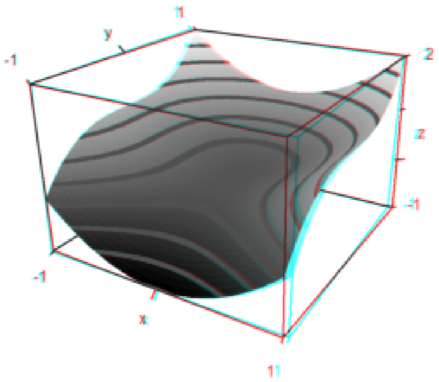



```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```



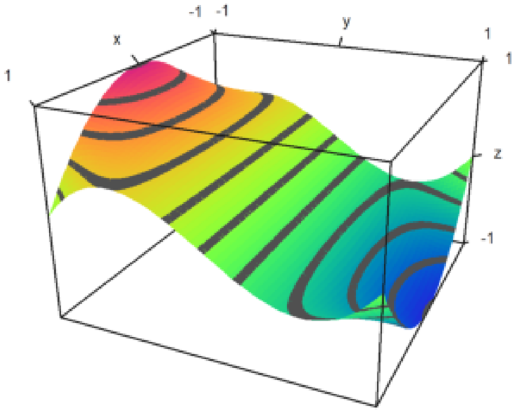
EMT juga dapat membuat plot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot seperti itu, Anda memerlukan kacamata berwarna merah/sian.

```
> plot3d("x^2+y^3",>anaglyph,>contour,angle=30°):
```



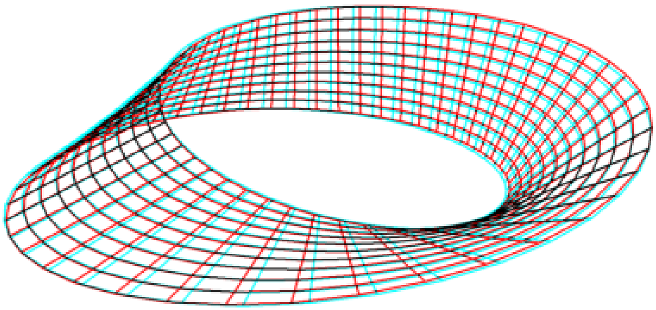
Seringkali skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan ketinggian fungsinya.

```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```



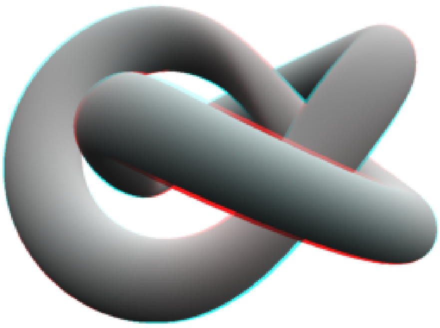
Euler juga dapat memplot permukaan yang diparameterisasi, jika parameternya adalah nilai x, y, dan z dari gambar kotak persegi panjang di ruang tersebut.
Untuk demo berikut, kami menyiapkan parameter u- dan v-, dan menghasilkan koordinat ruang dari parameter tersebut.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
>X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
>plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang megah dengan kacamata merah/cyan.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)';  ...
>x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
> z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```

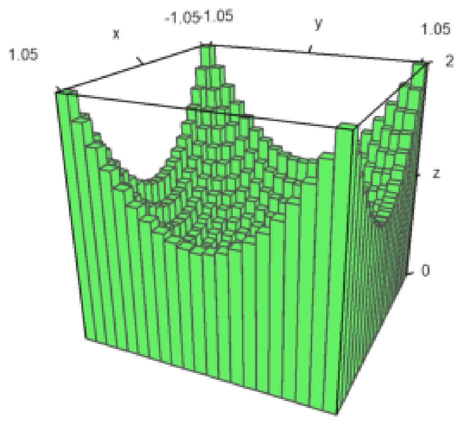


Plot Statistik

Plot batang juga dimungkinkan. Untuk itu, kita harus menyediakannya
- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai nxn.

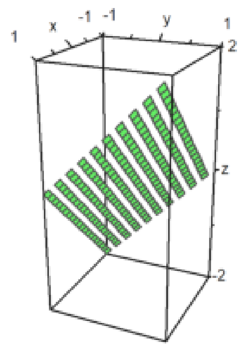
z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.
Dalam contoh ini, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor-vektornya berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



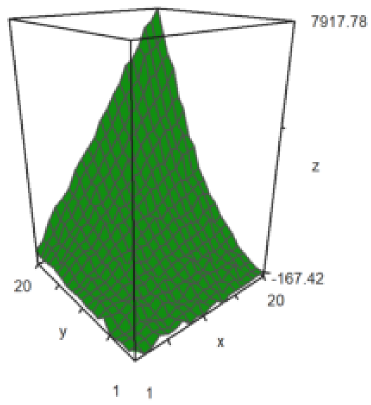
Dimungkinkan untuk membagi plot suatu permukaan menjadi dua bagian atau lebih.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

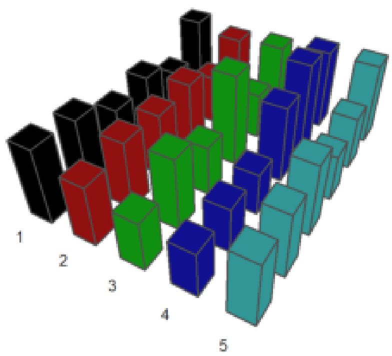


Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan skala(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Hal ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individual yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8
```

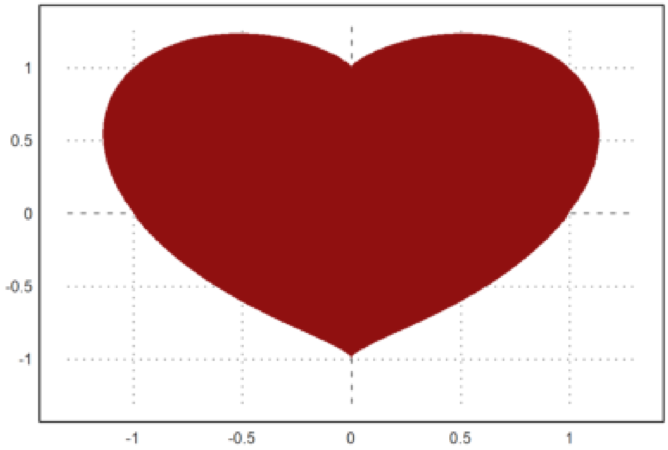



```
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```



Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=red,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
```




```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$\left(y^2+x^2-1\right)^3-x^2\,y^3$$

Kami ingin memutar kurva hati di sekitar sumbu y. Inilah ungkapan yang mendefinisikan hati:

$$f(x,y)=(x^2+y^2-1)^3-x^2.y^3.$$

Selanjutnya kita atur

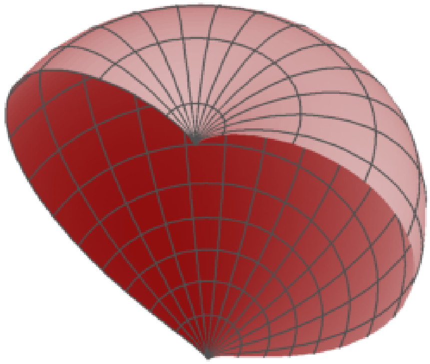
$$x=r.cos(a),\quad y=r.sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $f
```

$$\left(r^2-1\right)^3+\frac{\left(\sin\left(5\,a\right)-\sin\left(3\,a\right)-2\,\sin a\right)\,r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang menyelesaikan r, jika a diberikan. Dengan fungsi tersebut kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t);  ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```

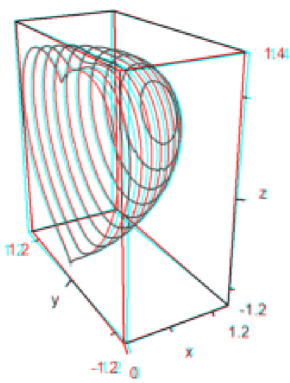


Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar mengelilingi sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi yang mendeskripsikan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
```

```
  r=x^2+y^2;
  return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
   endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,100,60],>anaglyph):
```



Plot 3D Khusus

Fungsi plot3d bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, dimungkinkan untuk mendapatkan plot berbingkai dari objek apa pun yang Anda suka.

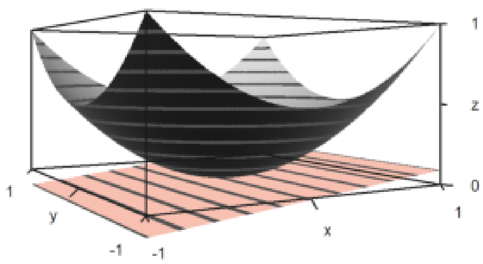
Meskipun Euler bukan program 3D, ia dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kami mencoba memvisualisasikan paraboloid dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
```

```
    y=-1:0.01:1; x=(-1:0.01:1)';
    plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ..
      hues=0.5,>contour,color=orange);
    h=holding(1);
    plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);
    holding(h);
  endfunction
```

Sekarang framedplot() menyediakan bingkai, dan mengatur tampilan.

```
>framedplot("myplot",[-1,1,-1,1,0,1],height=0,angle=-30°, ...
>  center=[0,0,-0.7],zoom=3):
```

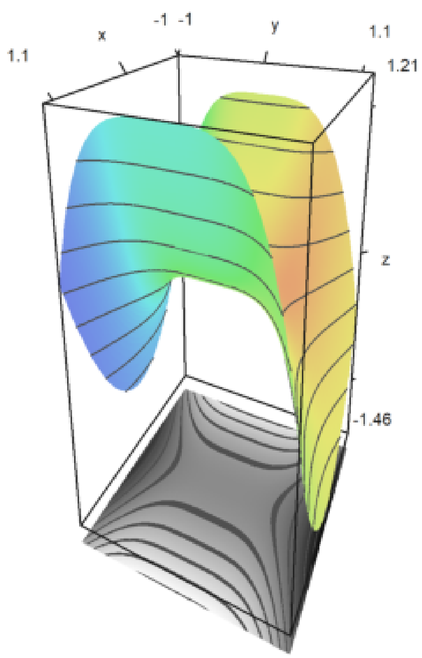


Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d() menyetel jendela ke fullwindow() secara default, tetapi plotcontourplane() berasumsi demikian.

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
>function myplot (x,y,z) ...
```

```
    zoom(2);
    wi=fullwindow();
    plotcontourplane(x,y,z,level="auto",<scale);
    plot3d(x,y,z,>hue,<scale,>add,color=white,level="thin");
    window(wi);
    reset();
  endfunction
```

```
>myplot(x,y,z):
```



Animasi

Euler dapat menggunakan frame untuk melakukan pra-komputasi animasi.
Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah memutar. Itu dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi ini memanggil addpage() untuk setiap plot baru. Akhirnya ia menganimasikan plotnya.
Silakan pelajari sumber rotasi untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3"); ...
>rotate("testplot"); testplot():
```

images/22305141001 Assyifa Cahya M_Plot3D-069.png

Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari http://www.povray.org/, dan meletakkan subdirektori "bin" Povray ke jalur lingkungan, atau mengatur variabel "defaultpovray" dengan jalur lengkap yang mengarah ke "pvengine.exe".

Antarmuka Povray Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk menguraikan file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:\Users\Username\Euler. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam notebook. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear().

Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi f(x,y), atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.

Selain pov3d(), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan writeln(...) untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "tampilan", yang memerlukan string dengan kode Povray untuk tekstur dan penyelesaian objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.

Perhatikan bahwa alam semesta Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, dan sumbu x,y,z di tangan kanan.

Anda perlu memuat file povray.

```
>load povray;
```

Pastikan, direktori Povray bin ada di jalurnya. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi jalur ke povray yang dapat dieksekusi.

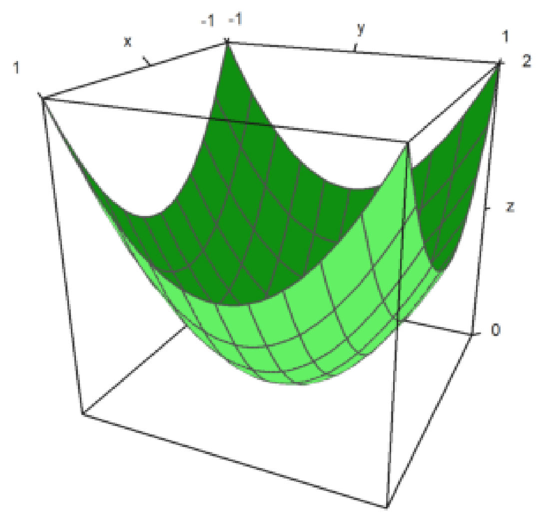
```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

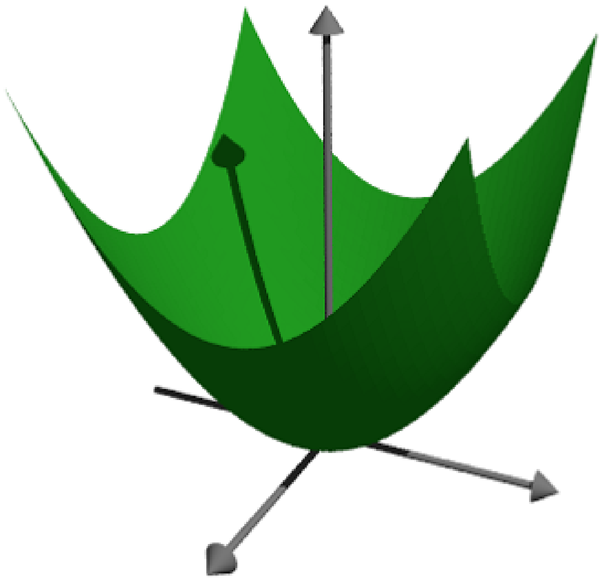
Untuk kesan pertama, kami memplot fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk penelusuran sinar file ini.

Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya apakah Anda ingin mengizinkan file exe dijalankan. Anda dapat menekan batal untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengonfirmasi dialog pengaktifan Povray.

```
>plot3d("x^2+y^2",zoom=2):
```

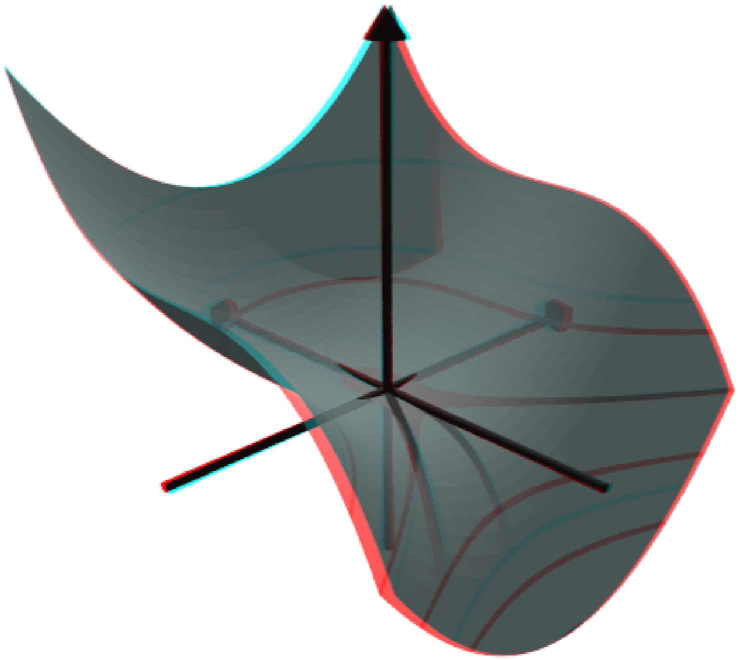


```
>pov3d("x^2+y^2",zoom=3);
```



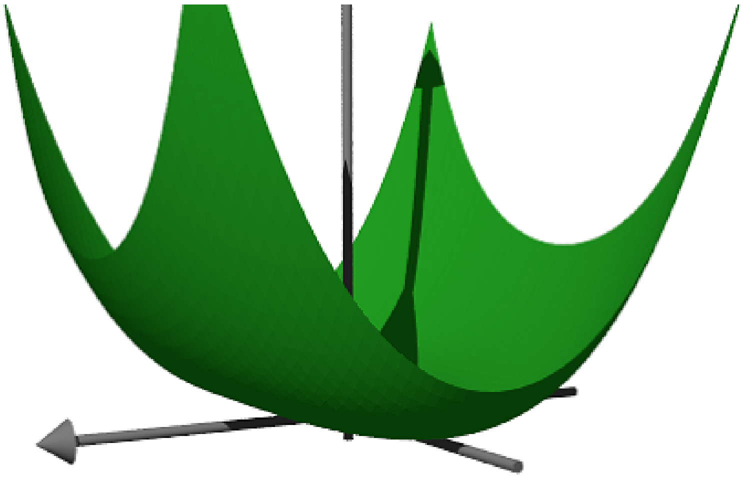
Kita dapat membuat fungsinya transparan dan menambahkan penyelesaian lainnya. Kita juga dapat menambahkan garis level ke plot fungsi.

```
>pov3d("x^2+y^3",axiscolor=red,angle=-45°,>anaglyph, ...
>  look=povlook(cyan,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```



Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi secara manual.
Kita memplot himpunan titik pada bidang kompleks, dimana hasil kali jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

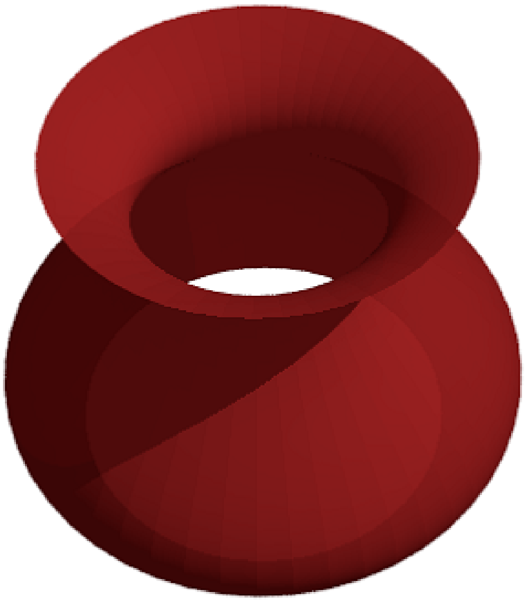
```
>pov3d("((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=2, ...
>  angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=10°,n=50, ...
>  <fscale,zoom=3.8);
```



Merencanakan dengan Koordinat

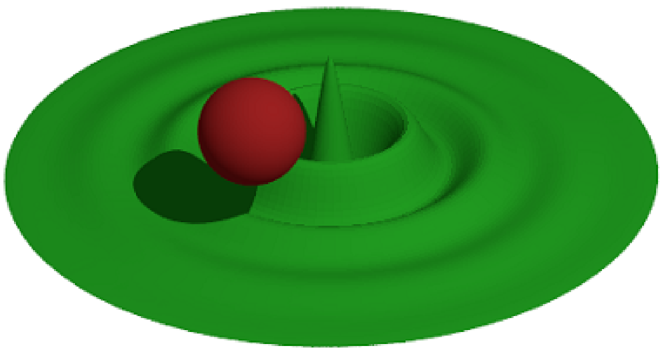
Daripada menggunakan fungsi, kita bisa memplotnya dengan koordinat. Seperti di plot3d, kita memerlukan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.
Dalam contoh ini kita memutar suatu fungsi di sekitar sumbu z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,50)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,look=povlook(red,0.1),height=50°,axis=0,zoom=4,light
```



Pada contoh berikut, kita memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.
Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga cocok dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3;  ...
>pov3d(x,y,z,zoom=5,axis=0,height=30°,add=povsphere([0.5,0,0.25],0.15,povlo
>  w=500,h=300);
```



Dengan metode peneduh canggih Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya pada batas-batas dan dalam bayangan, triknya mungkin terlihat jelas.
Untuk ini, kita perlu menjumlahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

```
                                    2  3
                                   x  y
```

Persamaan permukaannya adalah [x,y,Z]. Kami menghitung dua turunan dari x dan y dan mengambil perkalian silangnya sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

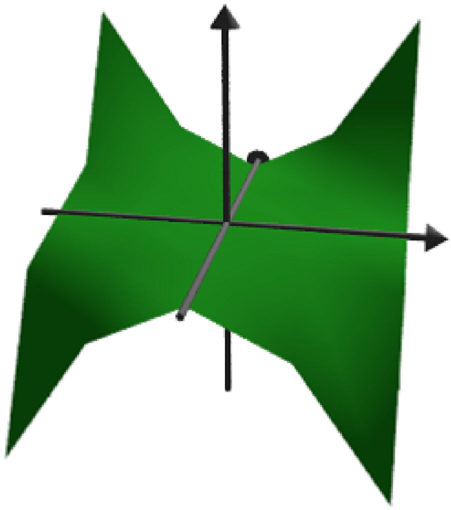
Kami mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

```
                               3       2  2
                       [- 2 x y , - 3 x  y , 1]
```

We use only 25 points.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
>  xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);
```



Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang lebih baik dalam contoh ini.

Lihat: Contoh\Trefoil Knot | Simpul Trefoil

Untuk tampilan yang bagus dengan poin yang tidak terlalu banyak, kami menambahkan vektor normal di sini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normalnya bagi kami. Pertama, tiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian kedua vektor turunan ke x dan y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normalnya, yaitu perkalian silang kedua turunannya.

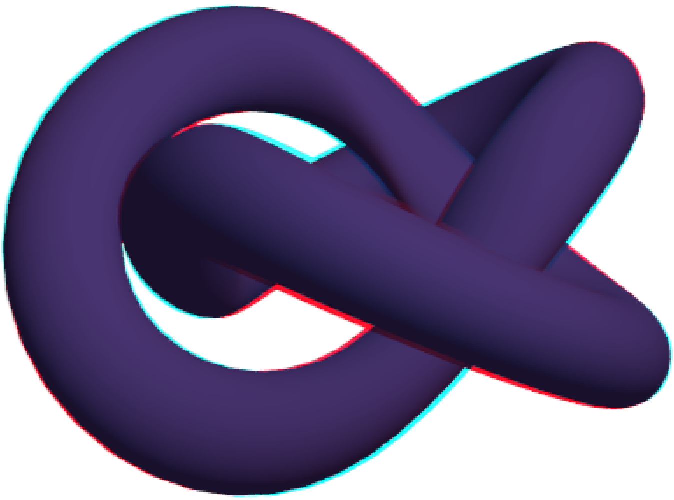
```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

We now evaluate all this numerically.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

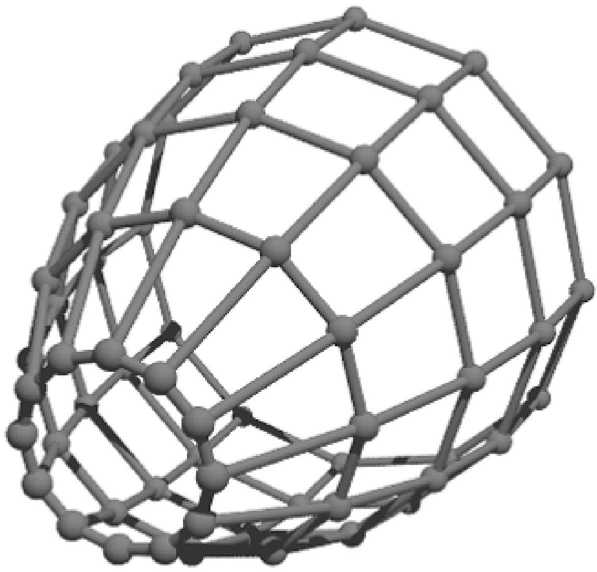
Vektor normal adalah evaluasi ekspresi simbolik dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaksnya adalah &"ekspresi"(parameter). Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),>anaglyph,axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
>  <shadow,look=povlook(blue), ...
>  xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```



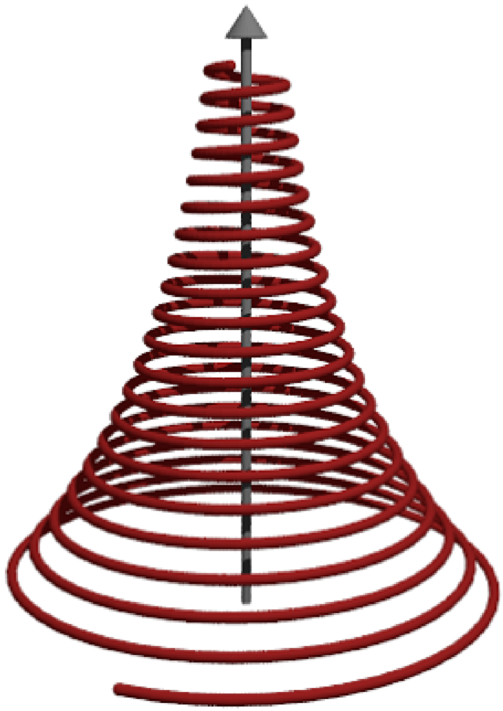
Kami juga dapat menghasilkan grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```



Dengan povgrid(), kurva dimungkinkan.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```



Objek Povray

Di atas, kami menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray.
Kami memulai output dengan povstart().

```
>povstart(zoom=4);
```

Pertama kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam string di Euler.
Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(yellow)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

String tersebut berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.

```
>c2
```

```
cylinder { <0,0,-1>, <0,0,1>, 1
 texture { pigment { color rgb <0.941176,0.941176,0.392157> }  }
 finish { ambient 0.2 }
 }
```

Seperti yang Anda lihat, kami menambahkan tekstur pada objek dalam tiga warna berbeda. Hal ini dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna default Euler, atau menentukan warna kita sendiri. Kita juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

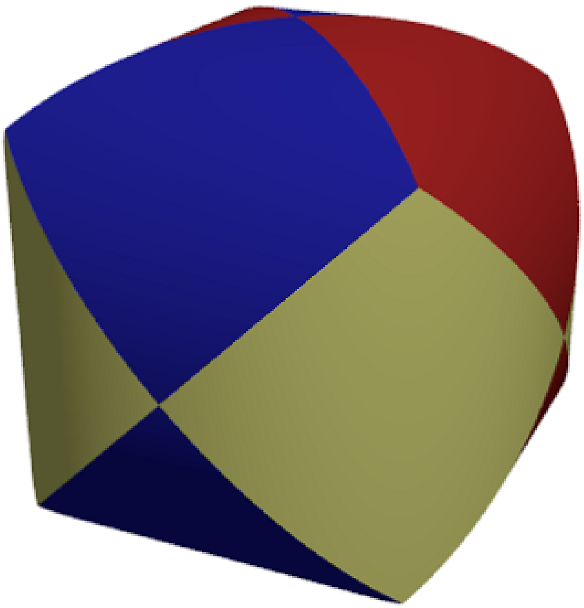
```
 texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> }  }
 finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek persimpangan, dan menulis hasilnya ke file.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Persimpangan tiga silinder sulit untuk divisualisasikan jika Anda belum pernah melihatnya sebelumnya.

```
>povend;
```



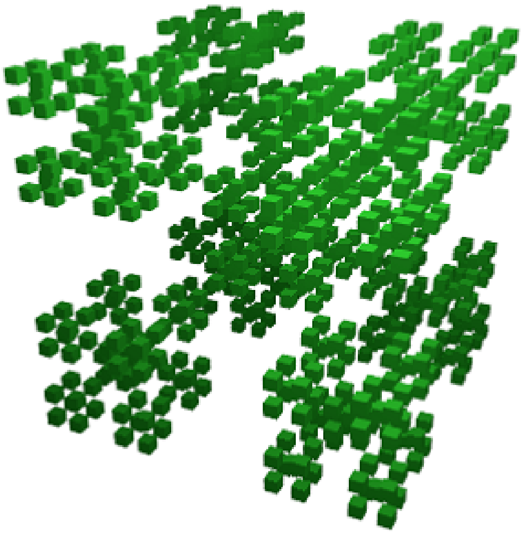
Fungsi berikut menghasilkan fraktal secara rekursif.

Fungsi pertama menunjukkan bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan string, yang berisi koordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```
   if n==1 then writeln(onebox(x,y,z,h));
   else
     h=h/3;
     fractal(x,y,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+h,y+h,z+h,h,n-1);
   endif;
  endfunction
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
>povend();
```



Perbedaan memungkinkan pemisahan satu objek dari objek lainnya. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG di Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kami mendefinisikan objek di Povray, alih-alih menggunakan string di Euler. Definisi segera ditulis ke file.
Koordinat kotak -1 berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

Kita bisa menggunakan objek ini di povobject(), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject("mycube",povlook(red));
```

Kami membuat kubus kedua, dan memutar serta menskalakannya sedikit.

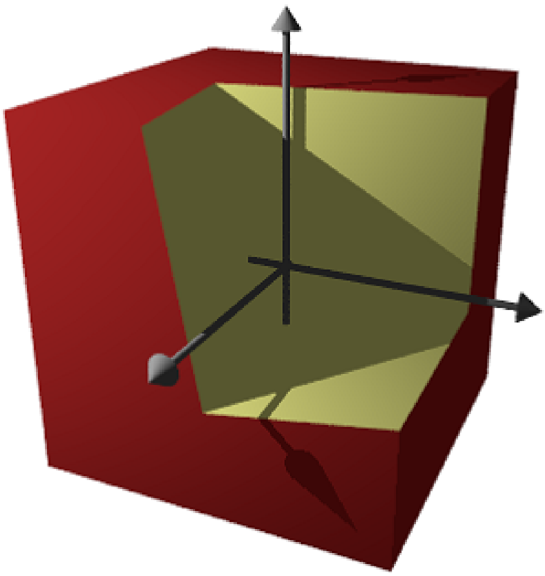
```
>c2=povobject("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...
>  rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Lalu kita ambil selisih kedua benda tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.

```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
>povend();
```



Fungsi Implisit

Povray dapat memplot himpunan di mana f(x,y,z)=0, seperti parameter implisit di plot3d. Namun hasilnya terlihat jauh lebih baik.
Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan keluaran ekspresi Maxima atau Euler.

$$((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-c^2)^2+(y^2-1)^2)=d$$

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
>c=0.1; d=0.1; ...
>writeln(povsurface("(pow(pow(x,2)+pow(y,2)-pow(c,2))",povlook(red))); ...
>povend();
```

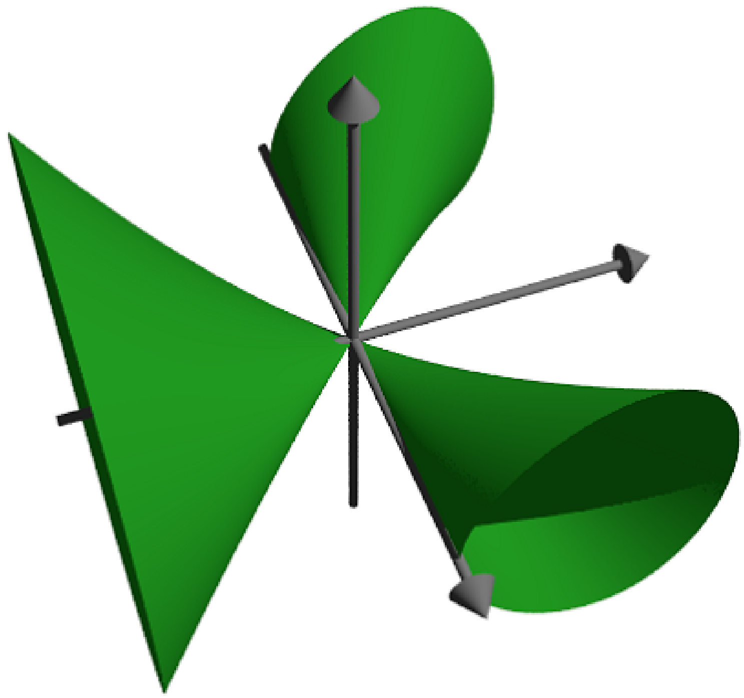
```
object {
isosurface {
function { (pow(pow(x,2)+pow(y,2)-pow(c,2)) }
max_gradient 5
open
contained_by { box { <-1,-1,-1>, <1,1,1>
 } }
 texture { pigment { color rgb <0.564706,0.0627451,0.0627451> }  }
 finish { ambient 0.2 }
}}
Error : Povray error!

Error generated by error() command

povray:
    error("Povray error!");
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

```
>povstart(angle=25°,height=10°);
>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,2)*pow(z,2)-1",povlook(blue),povbox(-2,
>povend();
```

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
```

Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaksis yang berbeda dalam ekspresi.

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
```



Objek Jaring

Dalam contoh ini, kami menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.
Kita ingin memaksimalkan xy pada kondisi x+y=1 dan mendemonstrasikan sentuhan tangensial garis datar.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

Kita tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan declare. Fungsi povtriangle() melakukan ini secara otomatis. Ia dapat menerima vektor normal seperti pov3d().
Berikut ini definisi objek mesh, dan segera menuliskannya ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kita mendefinisikan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
>ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tulis permukaannya dikurangi kedua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Write the two intersections.

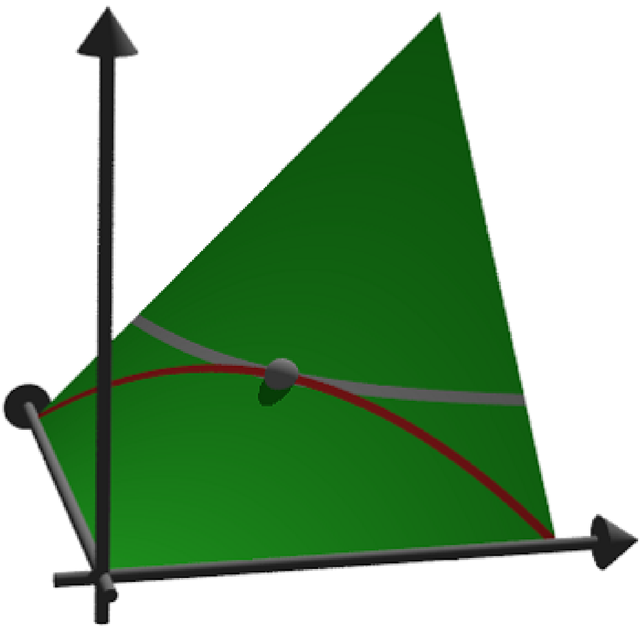
```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
>writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Write a point at the maximum.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsize));
```

Add axes and finish.

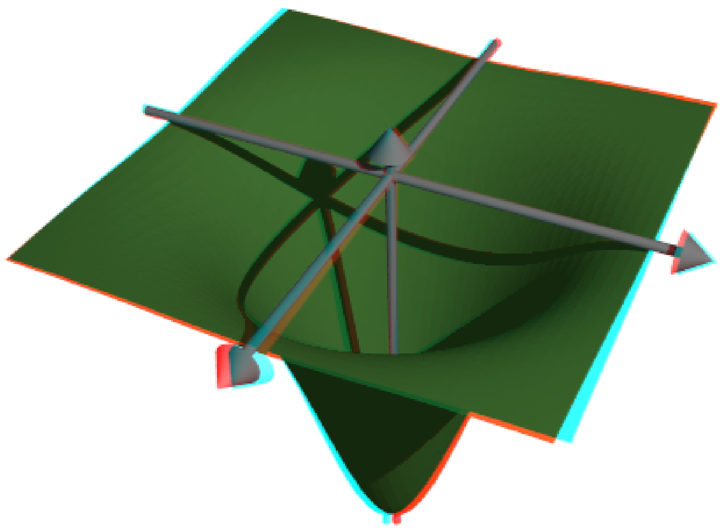
```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
>povend();
```



Anaglyph di Povray

Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/cyan, Povray harus dijalankan dua kali dari posisi kamera berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().
Tentu saja, Anda memerlukan kacamata berwarna merah/cyan untuk melihat contoh berikut dengan benar.
Fungsi pov3d() memiliki saklar sederhana untuk menghasilkan anaglyph.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```



Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu memasukkan pembuatan adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai berbeda untuk parameter anaglyph.

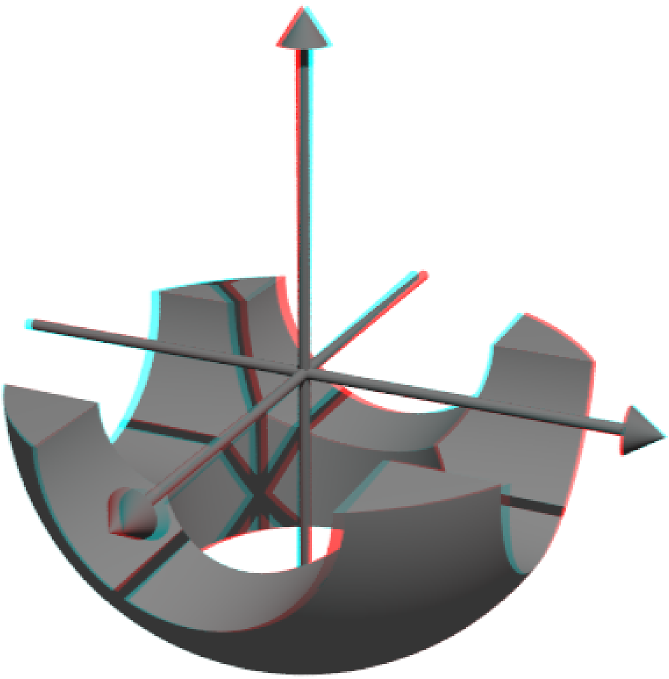
```
>function myscene ...
```

```
    s=povsphere(povc,1);
    cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
    clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
    cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));
    c=povbox([-1,-1,0],1);
    un=povunion([cl,clx,cly,c]);
    obj=povdifference(s,un,povlook(red));
```

```
    writeln(obj);
    writeAxes();
  endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti gabungan povstart() dan povend().

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```



Mendefinisikan Objek sendiri

Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Namun Anda tidak dibatasi pada hal ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau merupakan objek yang benar-benar baru.
Kami mendemonstrasikan torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi kami mengembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat pada titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look="") ...
```

```
    return "torus {"+r1+","+r2+look+"}";
  endfunction
```

Ini torus pertama kami.

```
>t1=povdonat(0.8,0.2)
```

```
 torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.

```
>t2=povobject(t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```
 object { torus {0.8,0.2}
  rotate 90 *x
  translate <0.8,0,0>
  }
```

Sekarang kita tempatkan objek-objek tersebut ke dalam sebuah adegan. Untuk tampilannya kami menggunakan Phong Shading.

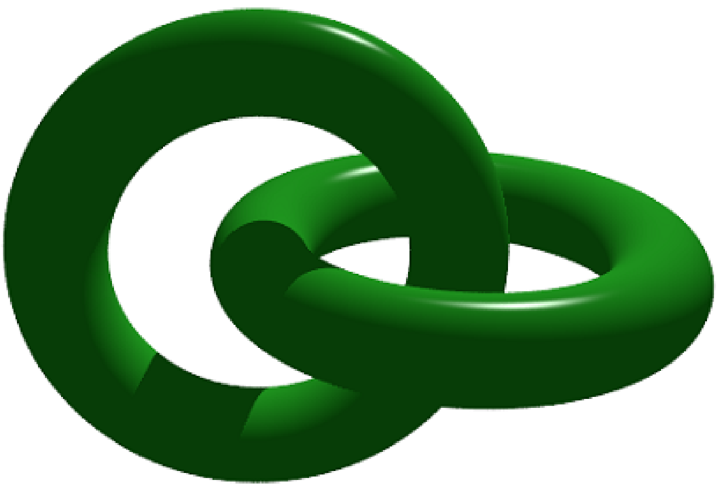
```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
>writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
>writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
```

>povend();
memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, kesalahan tersebut tidak ditampilkan. Oleh karena itu Anda harus menggunakan

```
>povend(<keluar);
```

jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membiarkan jendela Povray terbuka.

```
>povend(h=320,w=480);
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit. Kami memecahkannya
lateks: Ax \le b, \quad x \ge 0, \quad c.x \to \text{Maks.}
dan menunjukkan titik-titik yang layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini punya solusinya.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
 [0,   1,   0.5]
```

Ya, sudah.
Selanjutnya kita mendefinisikan dua objek. Yang pertama adalah pesawat
lateks: a \cdot x \le b

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
    return povplane(a,b,look)
  endfunction
```

Kemudian kita mendefinisikan perpotongan semua setengah ruang dan sebuah kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="") ...
```

```
    ol=[];
    loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#],b[#]); end;
    ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
    return povintersection(ol,look);
  endfunction
```

Sekarang kita dapat merencanakan adegannya.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
>writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
>writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar optimal.

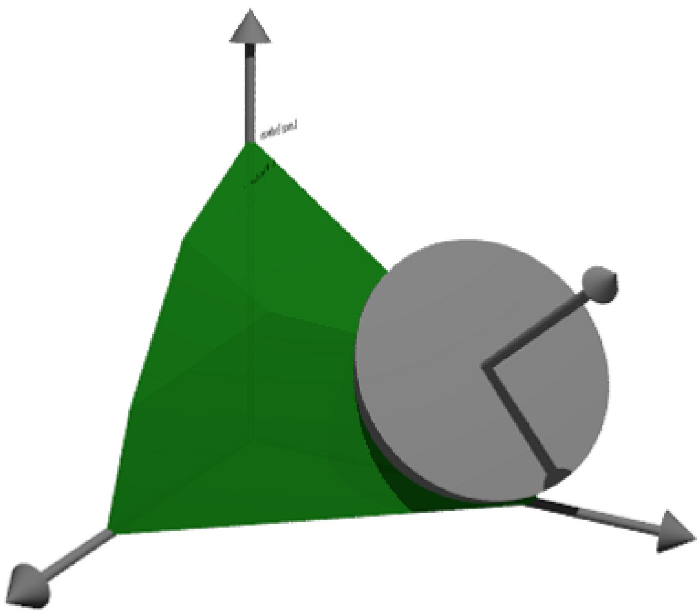
```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
>  povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan ke arah optimal.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

Kami menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya sesuai dengan pandangan kita.

```
>writeln(povtext("Linear Problem",[0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=5°)); ...
>povend();
```



More Examples

You can find some more examples for Povray in Euler in the following files.
See: Examples/Dandelin Spheres
See: Examples/Donat Math
See: Examples/Trefoil Knot
See: Examples/Optimization by Affine Scaling

5 Menggunakan EMT untuk Kalkulus

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:
- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:
- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).
Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.
Error in:
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
   ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x+1}.$$

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

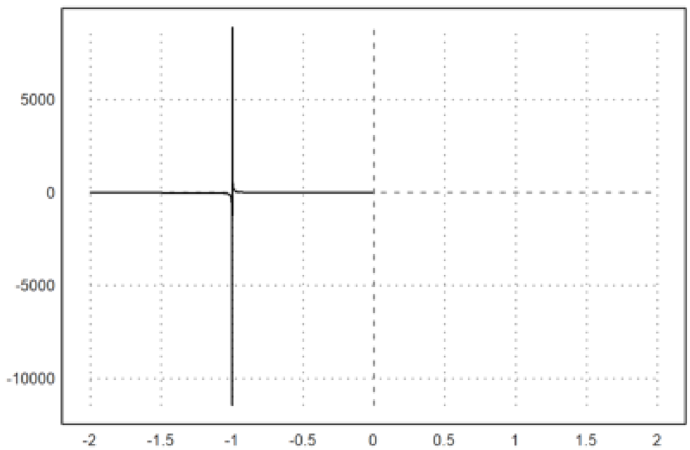
```
0
```

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
    useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
Error in:
g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...
    ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1);
>aspect(1.5); plot2d("g"):
```



```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
2.20920171961
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>aspect(1.5);plot2d("h(x),u(x)":
```

```
Space between commands expected!
Found: plot2d("h(x),u(x)": (character 112)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
aspect(1.5);plot2d("h(x),u(x)": ...
            ^
```

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
[0.987534,  0.987596,  0.987657,  0.987718,  0.987778,  0.987837,
0.987896,  0.987954,  0.988012,  0.988069,  0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^3
  else return x^2
  endif;
endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

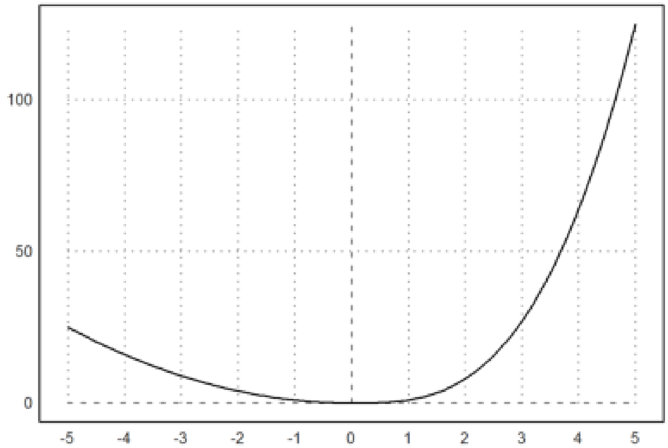
```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```




```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

```
                        x
                     2 E
```

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2\,e^{a}$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

```
30.308524483
```

```
>$f(E), $float(%)
```

$$30.30852448295852$$

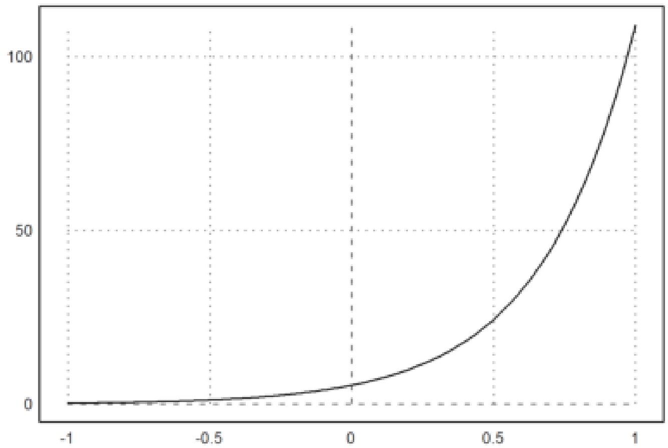
```
>function g(x) &= 3*x+1
```

```
3 x + 1
```

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

```
   3 x + 1
2 E
```

```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-fungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi-komposisi 2 fungsi.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

Soal 1

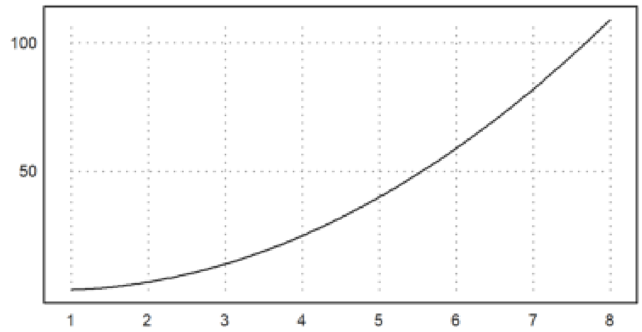
```
>function f(x) := 2*x^2 - 3*x + 5
>f(4)
```

```
25
```

```
>f(1:8)
```

```
[4,  7,  14,  25,  40,  59,  82,  109]
```

```
>aspect(2); plot2d("f(x)",1,8):
```



Soal 2

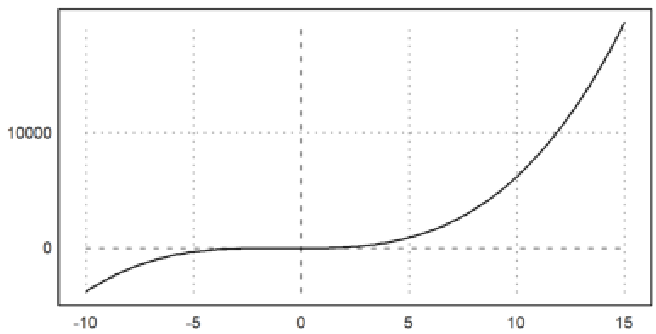
```
>function f(y) := 12*y^2 + 5*y^3 - 2
>f(2)
```

```
86
```

```
>f(1:6)
```

```
[15,  86,  241,  510,  923,  1510]
```

```
>aspect(2); plot2d("f(x)",-10,15):
```



Soal 3

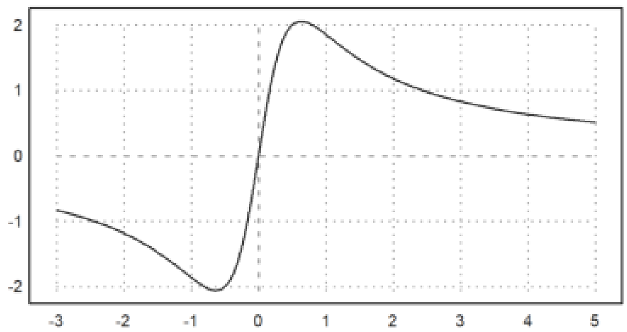
```
>function g(x):= (13*x)/(5*x^2+2)
>g(2)
```

```
1.18181818182
```

```
>g(-3:5)
```

```
[-0.829787,  -1.18182,  -1.85714,  0,  1.85714,  1.18182,  0.829787,
0.634146,  0.511811]
```

```
>aspect(2); plot2d("g(x)",-3,5):
```



Soal 4

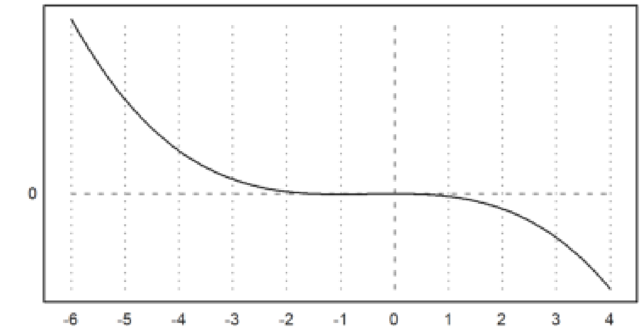
```
>function s(x):= -2*x^3 - 3*x^2
>s(2)
```

```
-28
```

```
>s(-6:4)
```

```
[324,  175,  80,  27,  4,  -1,  0,  -5,  -28,  -81,  -176]
```

```
>aspect(2); plot2d("s(x)",-6,4):
```



Soal 5

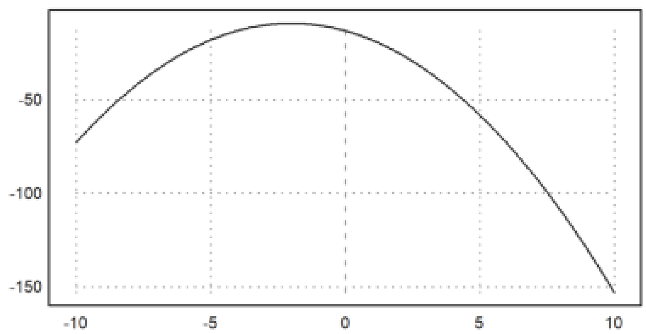
```
>function f(x,y) := -x^2 - 4y -13
>f(1,5)
```

```
-34
```

```
>f(0:10,0:10)
```

```
[-13,  -18,  -25,  -34,  -45,  -58,  -73,  -90,  -109,  -130,  -153]
```

```
>aspect(2); plot2d("f(x,x)",-10,10):
```



Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).
Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

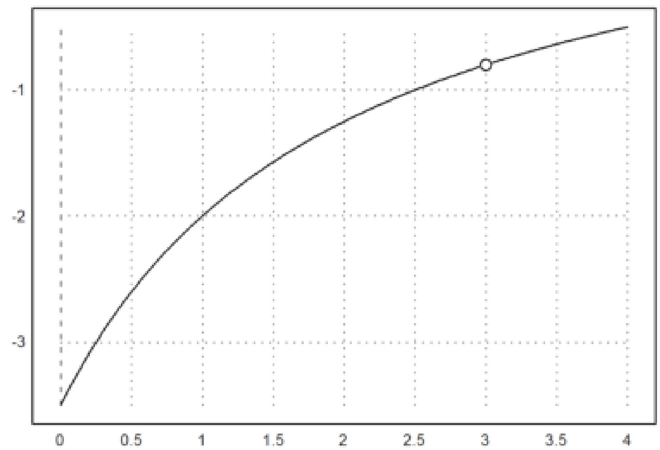
$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\sqrt{x^2-3\,x}}{x+1}=1$$

```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$

maxima: 'limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)=limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d
```

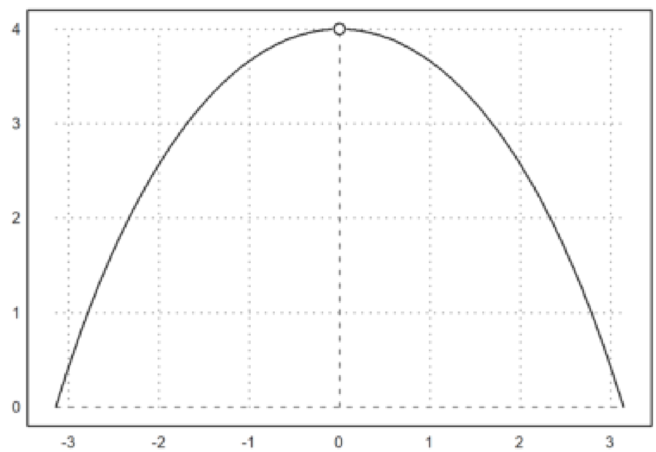


```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$4$$

maxima: 'limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)=limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add
```

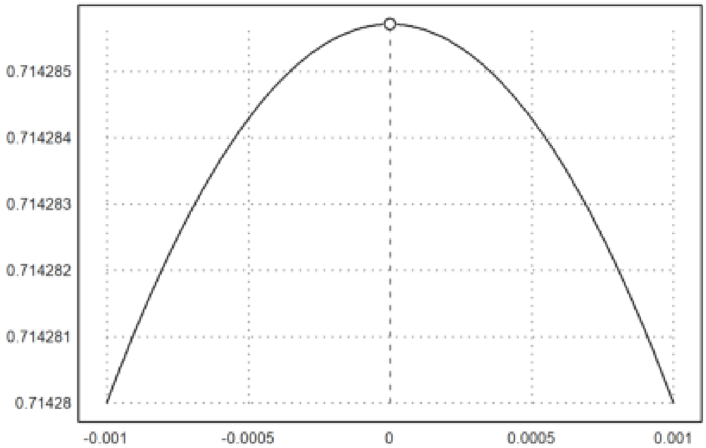



```
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\frac{5}{7}$$

maxima: showev('limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0))
Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",
```




```
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

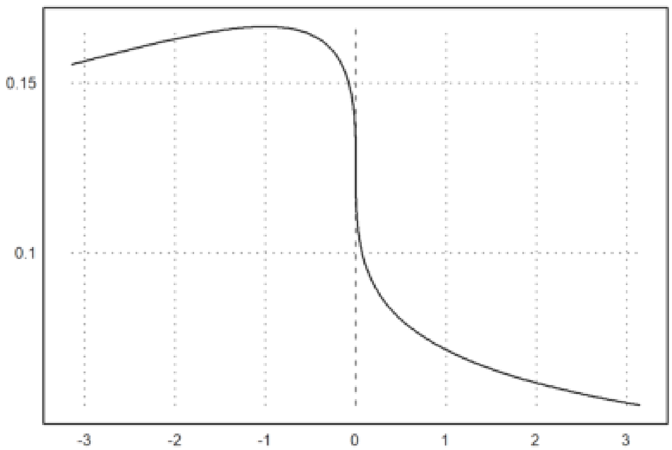
$$\lim_{x\to 8} \frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2} - 1}{x - 8} = \frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8)
```

$$\frac{1}{24}$$

```
>plot2d("((x/8)^(1/3)-1)/(x-8)",-pi,pi); plot2d(8,1/24,>points,style="ow",>
```



```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

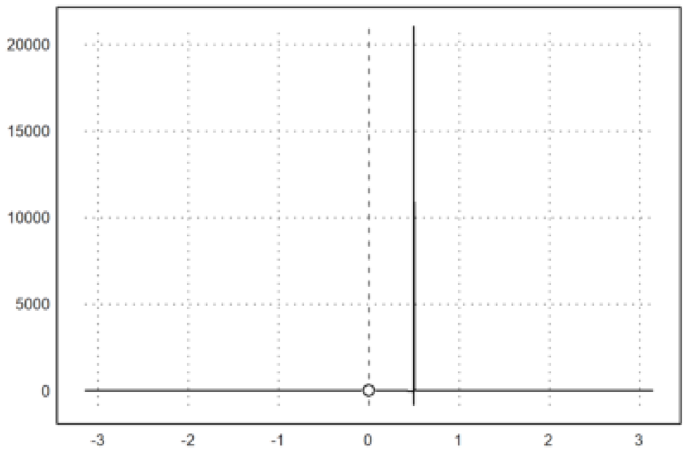
$$\lim_{x\rightarrow 0}{\frac{1}{2\,x-1}}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>&limit(1/(2*x-1),x,0)
```

```
- 1
```

```
>plot2d("(1/(2*x-1))",-pi,pi); plot2d(0,-1,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

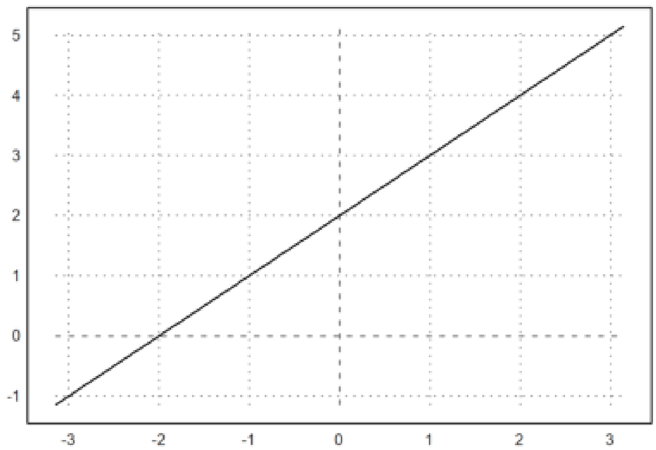
$$\lim_{x\rightarrow 5}{\frac{x^2-3\,x-10}{x-5}}=7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>&limit(((x^2-3*x-10)/(x-5)),x,5)
```

```
7
```

```
>plot2d("((x^2-3*x-10)/(x-5))",-pi,pi); plot2d(5,7,>points,style="ow",>add)
```



```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

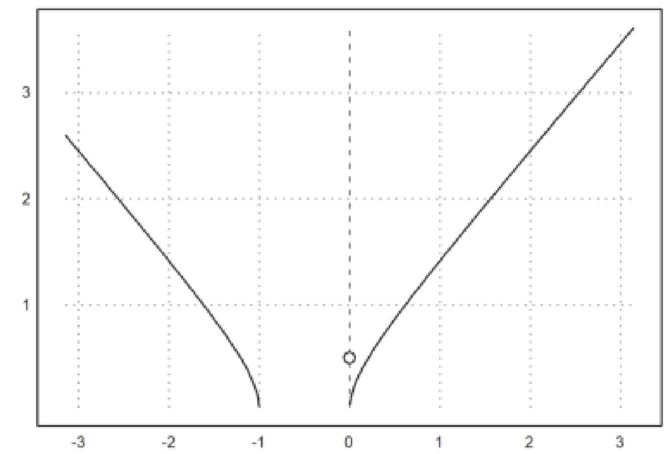
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>&limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf)
```

```
                                  1
                                  -
                                  2
```

```
>plot2d("(sqrt(x^2+x))",-pi,pi); plot2d(0,1/2,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

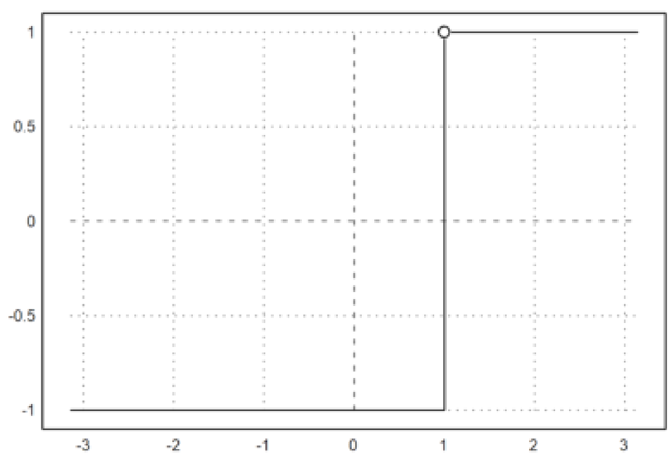
$$\lim_{x\uparrow 1}\frac{|x-1|}{x-1}=-1$$

Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.
Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>&limit((abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

minus

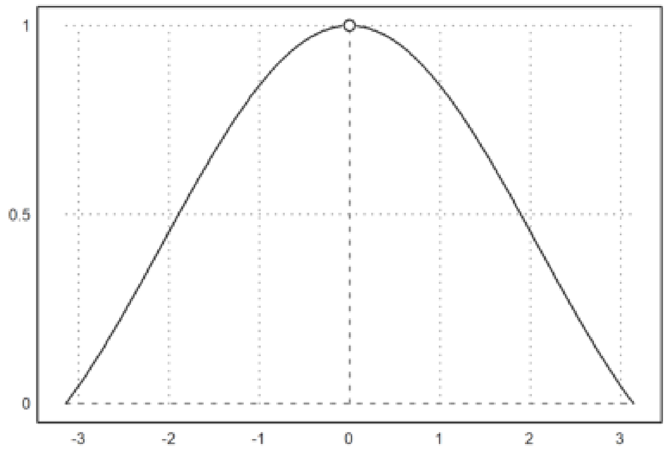
```
>plot2d("(abs(x-1)/(x-1))",-pi,pi); plot2d(1,1,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

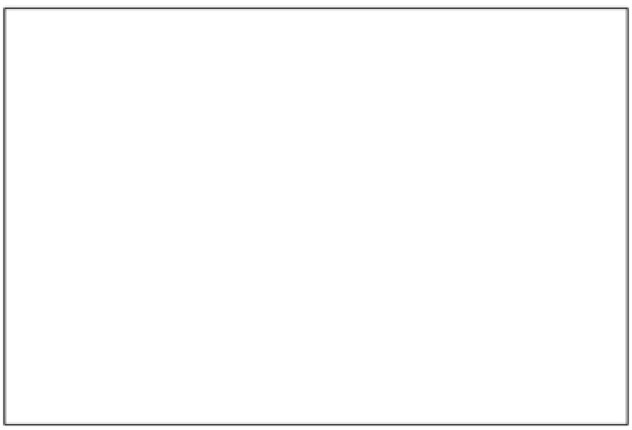



```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(sin(x^3)/x)",0,0):
```



```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x \to -\infty} \log x = infinity$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x \to \infty} (-2)^x = infinity$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t \uparrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

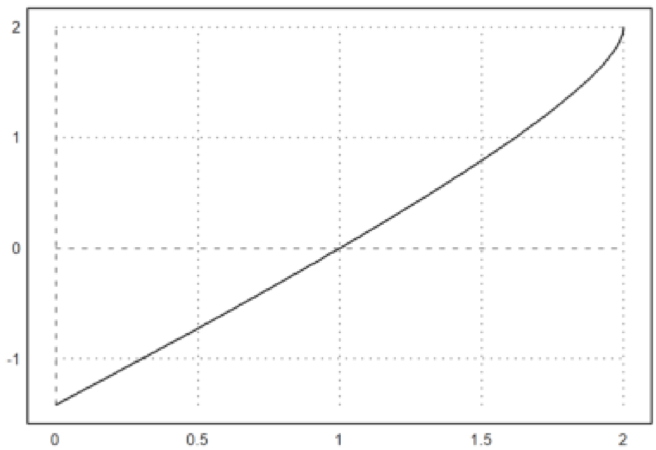
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus))
```

$$\lim_{t \downarrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t \downarrow 5} t - \sqrt{2-t} = 5 - \sqrt{3}\, i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):
```



```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

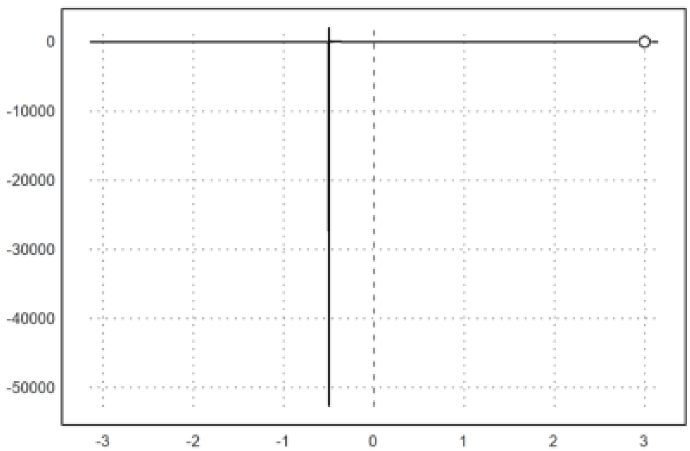
$$\lim_{x\to 3}{\frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3}}=\frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>&limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3)
```

```
                                   6
                                   -
                                   7
```

```
>plot2d("(x^2-9)/(2*x^2-5*x-3)",-pi,pi); plot2d(3,6/7,>points,style="ow",>a
```

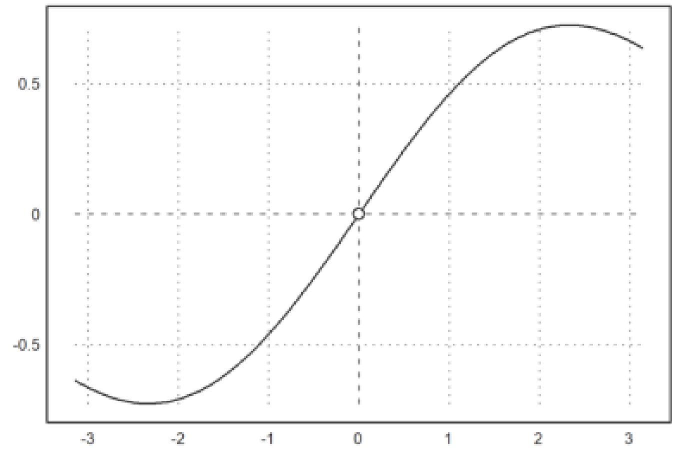



```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{1-\cos x}{x}}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(1-cos(x))/x",-pi,pi); plot2d(0,0,>points,style="ow",>add):
```

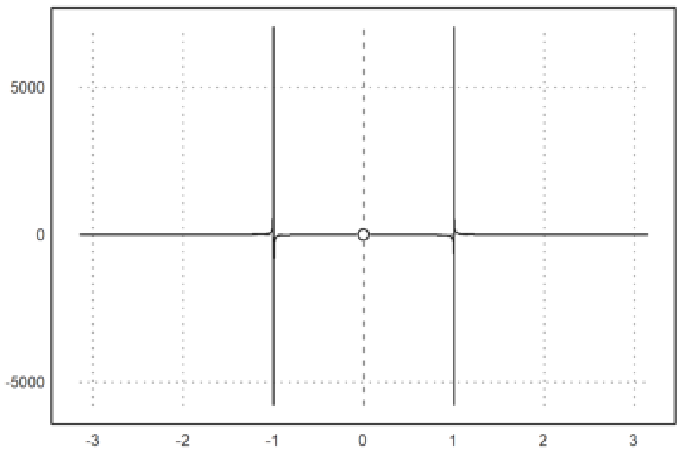



```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|} = -1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

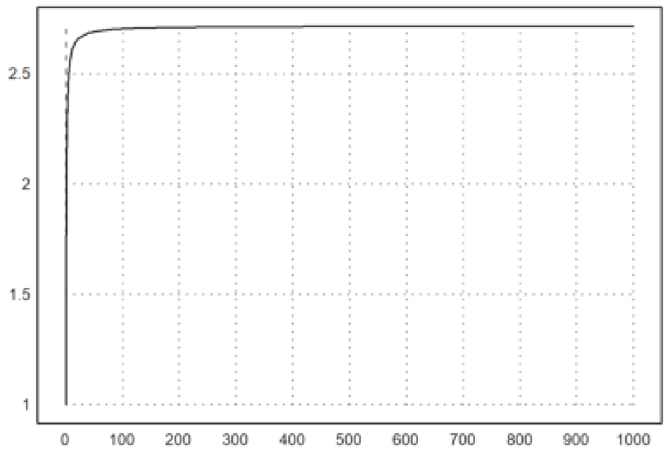
```
>plot2d("(x^2+abs(x))/(x^2-abs(x))",-pi,pi); plot2d(0,-1,>points,style="ow"
```



```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}=e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```




```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x}+1\right)^{x}=e^{k}$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}=e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("((1+x)^(1/x))",-pi,pi); plot2d(0,e,>points,style="ow",>add):
```

```
Variable or function e not found.
Error in:
plot2d("((1+x)^(1/x))",-pi,pi); plot2d(0,e,>points,style="ow", ...
                                           ^
```

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2} = e^2$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

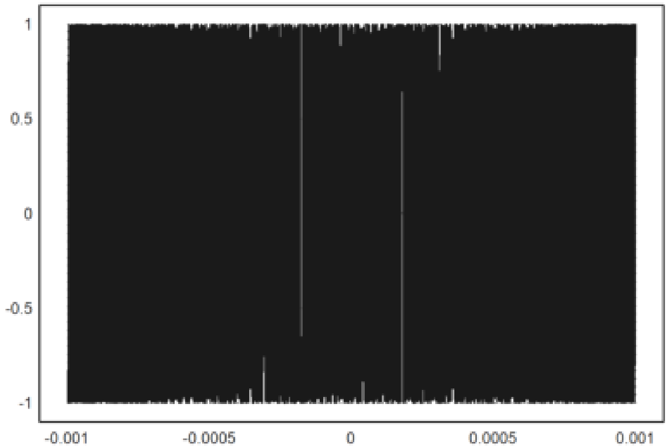
```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-0.001,0.001):
```



Latihan

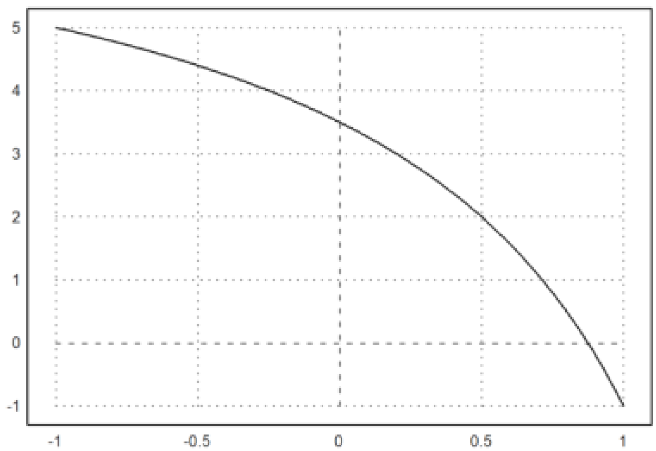
Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

soal 1

```
>$showev('limit((8*x-7)/(x-2),x,1))
```

$$\lim_{x\rightarrow 1}{\frac{8\,x-7}{x-2}}=-1$$

```
>plot2d("(8*x-7)/(x-2)",-1,1):
```

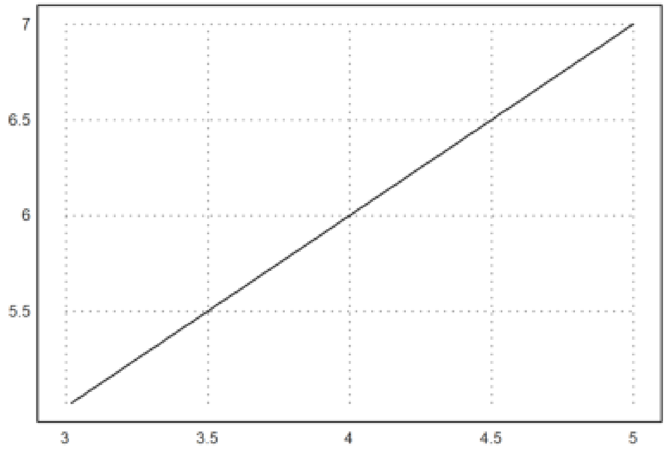


Soal 2

```
>$showev('limit((x^2-x-6)/(x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\rightarrow 3}{\frac{x^2-x-6}{x-3}}=5$$

```
>plot2d("(x^2-x-6)/(x-3)",3,5):
```

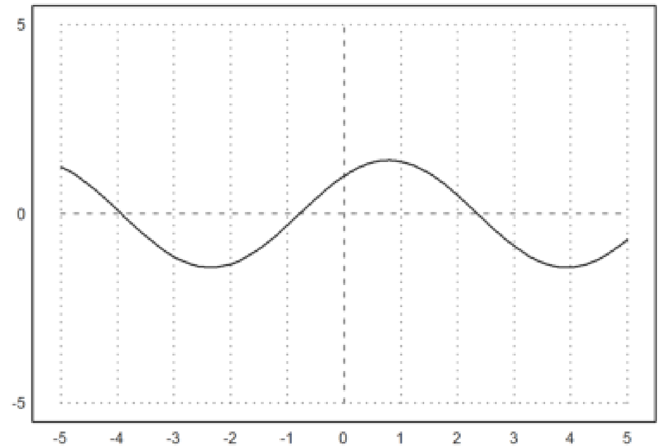


Soal 3

```
>&showev('limit((sin(x))+ (cos(x)),x,2))
```

```
limit   (sin(x) + cos(x)) = sin(2) + cos(2)
x -> 2
```

```
>plot2d("(sin(x)+cos(x))",-5,5,-5,5):
```

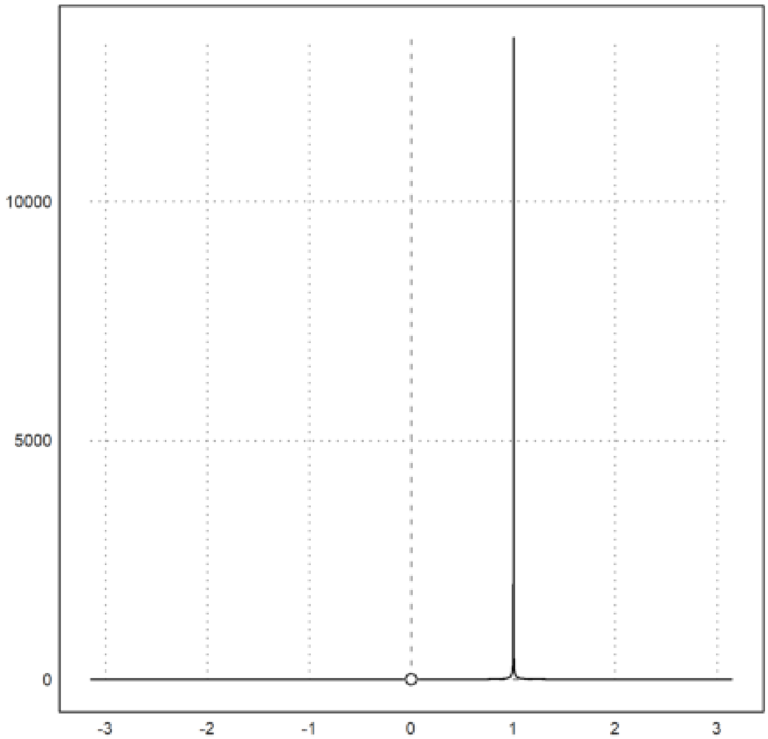


Soal 4

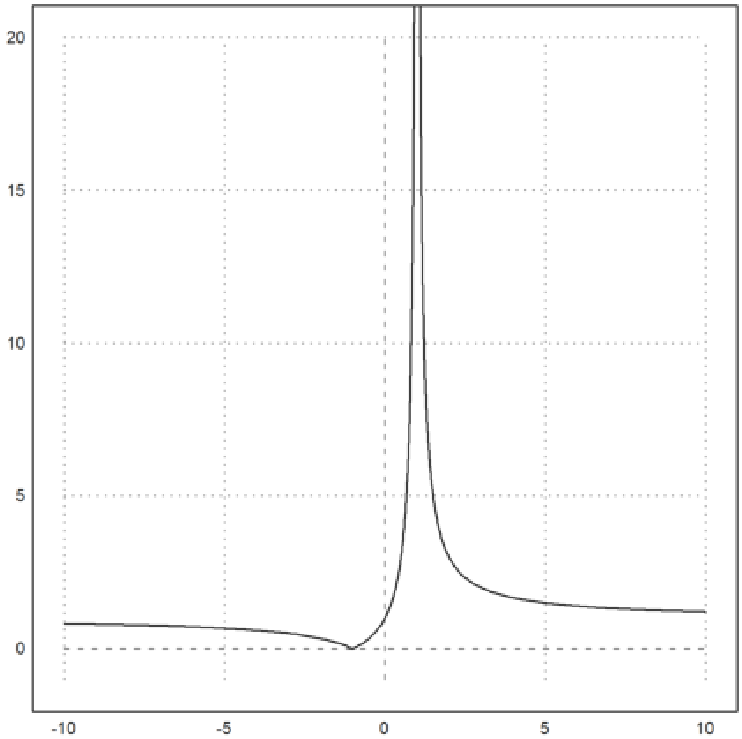
```
>$showev('limit((abs(x+x^2))/(abs(x-x^2)),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x^2 + x|}{|x^2 - x|} = 1$$

```
>plot2d("(abs(x+x^2))/(abs(x-x^2))",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",
```




```
>plot2d("((abs(x+x^2))/(abs(x-x^2)))",-10,10,-1,20):
```

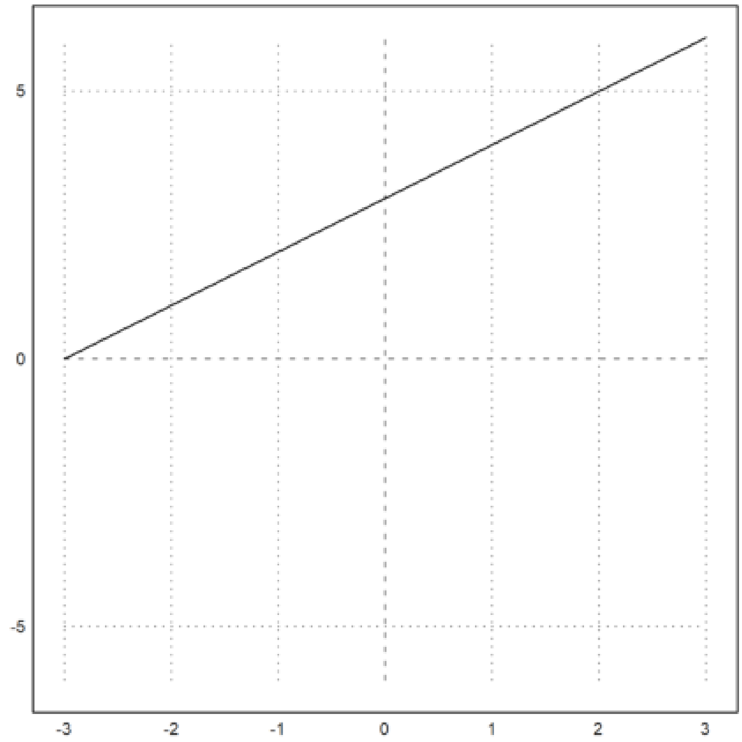


Soal 5

```
>$showev('limit((x^2-9)/(x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

```
>plot2d("((x^2-9)/(x-3))",-3,3,-6,6):
```



Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2\,x$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederha
```

$$2\,h\,x + h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanaka
```

$$2\,x+h$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2\,x$$

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^{n}-x^{n}}{h}}=n\,x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.
Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.
Pembuktian:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+\frac{n}{1!}x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3+...)-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3+...}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^2+...$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot 0+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\cdot 0+...$$

$$=nx^{n-1}+0+0+...+0$$

$$=nx^{n-1}$$

Terbukti.

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin x}{h}=\cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\log\left(x+h\right)-\log x}{h}=\frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
 $showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                      ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$factor\left(e^{x+h} - e^x\right) = \left(e^h - 1\right)\, e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) e^x = e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

```
 x
x
```

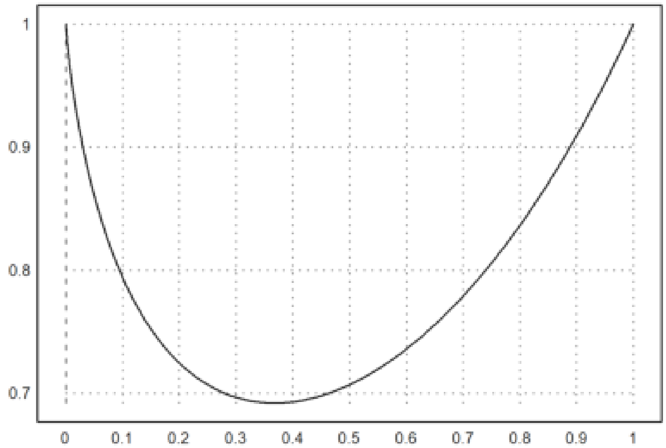
```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x \to 0} x^x = 1$$

Silakan Anda gambar kurva

$$y = x^x.$$

```
>plot2d("f(x)",0,1):
```




```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h}=infinity$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h}=x^x\,(\log x+1)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
[x > 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

```
[x < 0]
```

```
>&facts()
```

```
[]
```

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin\left(x+h\right)-\arcsin x}{h}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(x+h\right)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

```
sinh(x)
```

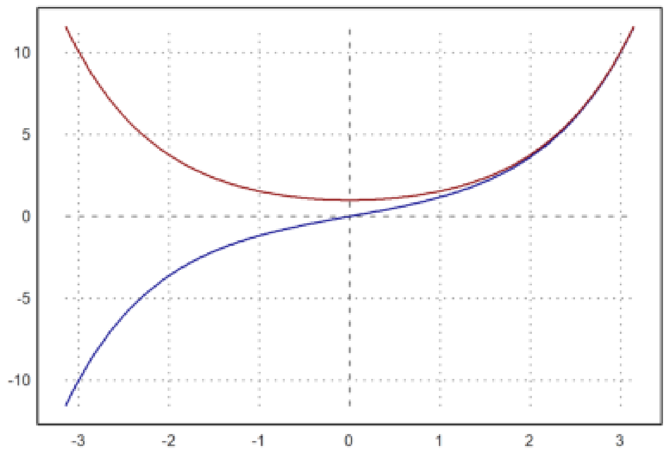
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x}\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```




```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                            2     5
                         sin  (3 x  + 7)
```

```
>diff(f,3), diffc(f,3)
```

```
  1198.32948904
  1198.72863721
```

Apakah perbedaan diff dan diffc?
Diff : Tidak akurat fungsi umum.
Diffc : Dalam bentuk imajiner dengan fungsi analitik yang nyata

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right)=30\,x^4\,\cos\left(3\,x^5+7\right)\,\sin\left(3\,x^5+7\right)$$

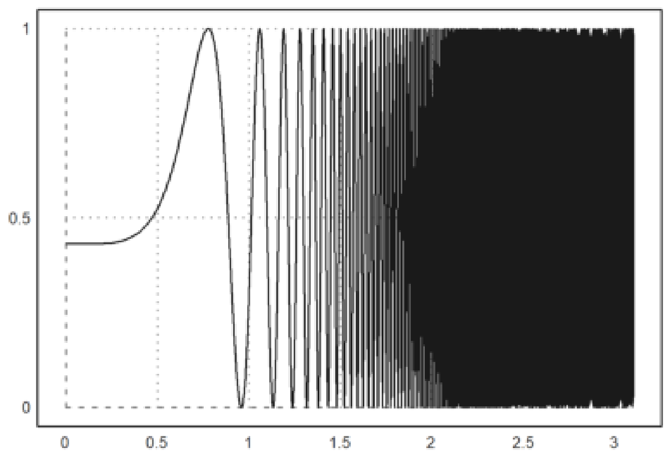
```
>$% with x=3
```

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right),x=3\right)=2430\,\cos 736\,\sin 736$$

```
>$float(%)
```

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right),x=3.0\right)=1198.728637211748$$

```
>plot2d(f,0,3.1):
```




```
>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi f
```

```
                         5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

```
>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)
```

```
                       - 12 sin(2 x) - 4 x cos(2 x)
```

```
>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2
```

$$-0.2410081230863468$$

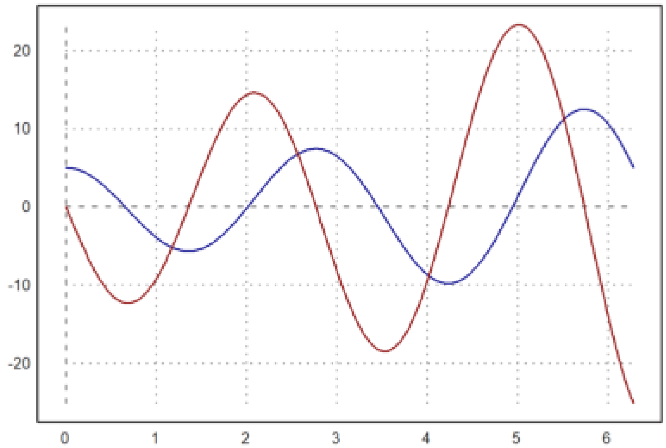
```
>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]
```

```
1.35822987384
```

```
>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut
```

```
0
-5.67530133759
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turu
```



Perhatikan titik-titik "puncak" grafik y=f(x) dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik "puncak" tersebut.

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), menggunakan perintah diff, dan secara manual (langkah demi langkah yang dihitung dengan Maxima) seperti contoh-contoh di atas. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

Soal 1

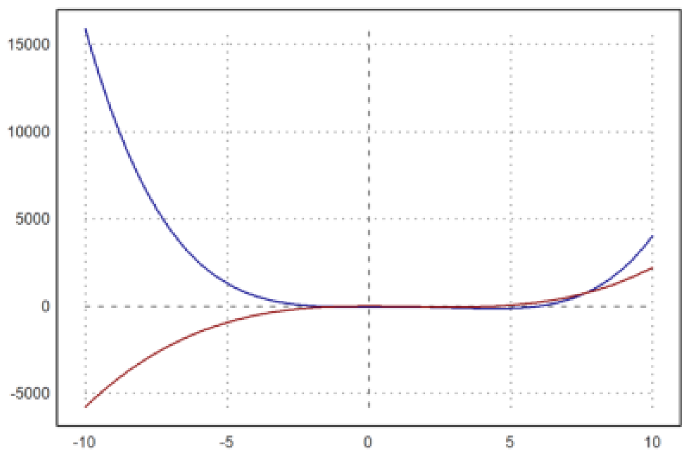
```
>function f(x) &= (x^3+6)*(x-6); $f(x)
```

$$(x-6)\left(x^3+6\right)$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$4\,x^3-18\,x^2+6$$

```
>aspect(1.5); plot2d(["f(x)","df(x)"],-10,10,color=[blue,red]):
```



Soal 2

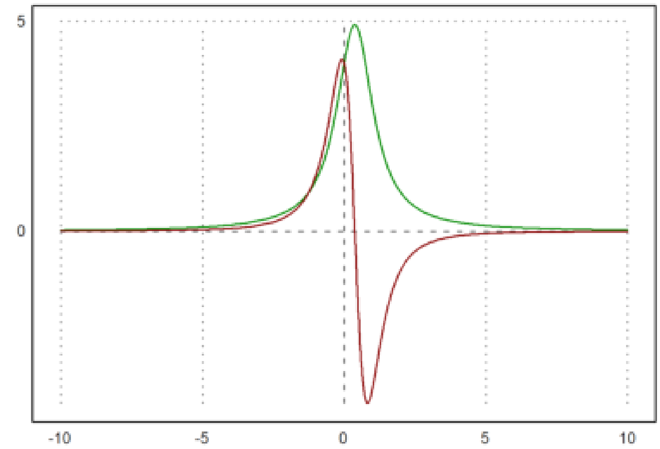
```
>function f(x) &= (12)/(4*x^2-3*x+3); $f(x)
```

$$\frac{12}{4\,x^2-3\,x+3}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$\frac{36-96\,x}{16\,x^4-24\,x^3+33\,x^2-18\,x+9}$$

```
>aspect(1.5); plot2d(["f(x)","df(x)"],-10,10,color=[green,red]):
```



Soal 3

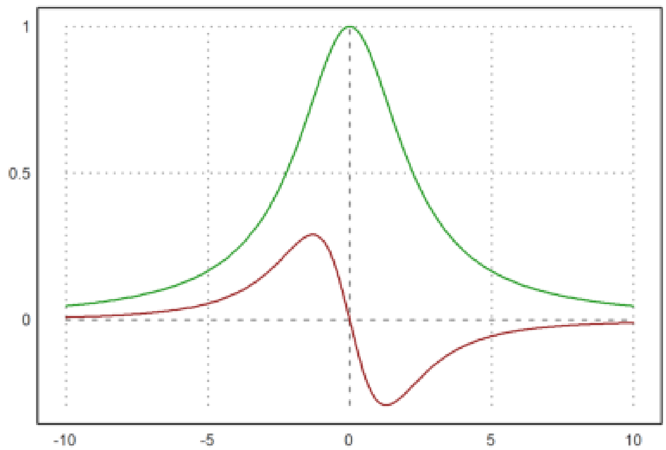
```
>function f(x) &= (5)/(x^2+5);$f(x)
```

$$\frac{5}{x^2+5}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$-\frac{10\,x}{x^4+10\,x^2+25}$$

```
>aspect(1.5); plot2d(["f(x)","df(x)"],-10,10,color=[green,red]):
```



Soal 3

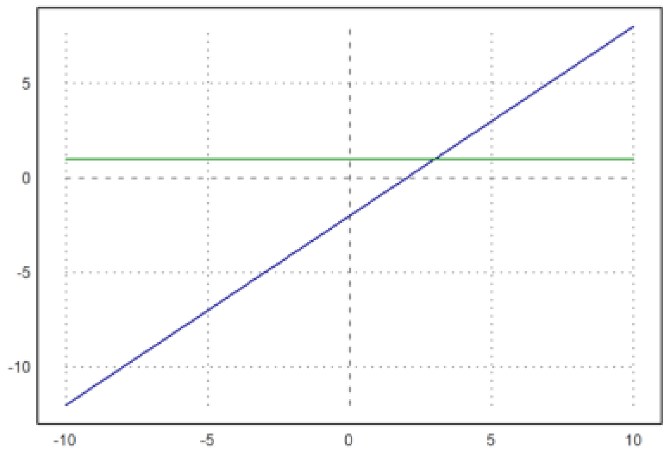
```
>function f(x) &= (x^2-3*x+2)/(x-1);$f(x)
```

$$\frac{x^2-3\,x+2}{x-1}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$1$$

```
>aspect(1.5); plot2d(["f(x)","df(x)"],-10,10,color=[blue,green]):
```



Soal 4

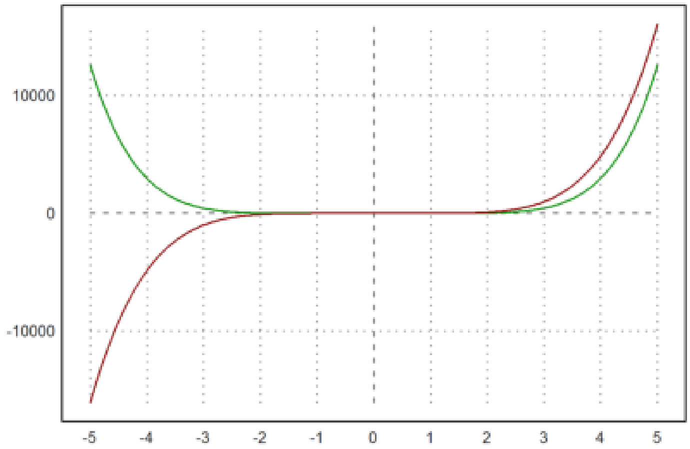
```
>function f(x)&=(x^8-x+1)/(x^2+6); $f(x)
```

$$\frac{x^8-x+1}{x^2+6}$$

```
>function df(x)&=limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$\frac{6\,x^9+48\,x^7+x^2-2\,x-6}{x^4+12\,x^2+36}$$

```
>aspect(1.5); plot2d(["f(x)","df(x)"],-5,5,color=[green,red]):
```



Soal 5

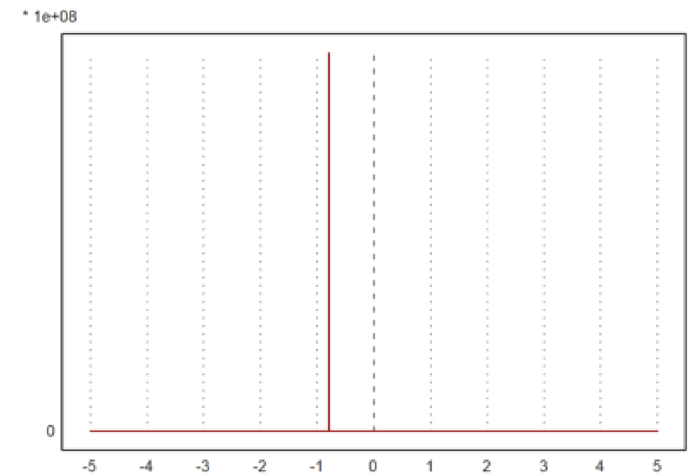
```
>function f(x)&=(6*x^5-4*x)/(2*x^4+x); $f(x)
```

$$\frac{6\,x^5-4\,x}{2\,x^4+x}$$

```
>function df(x)&=limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$\frac{12\,x^6+24\,x^3+24\,x^2}{4\,x^6+4\,x^3+1}$$

```
>aspect(1.5); plot2d(["f(x)","df(x)"],-5,5,color=[blue,red]):
```



Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\, dx = \log\left(x+1\right)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x$$

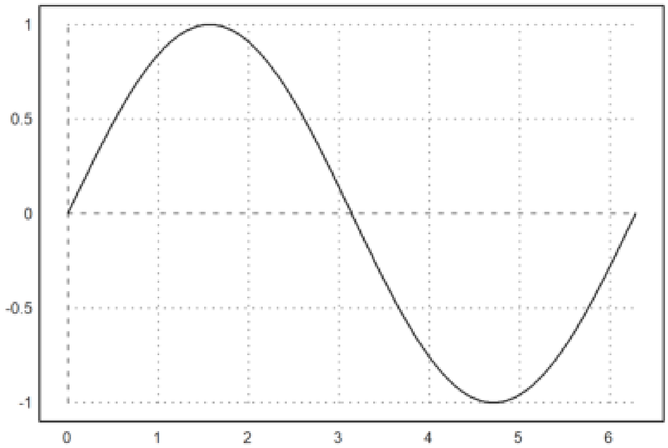
```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_{0}^{\pi}{\sin x\;dx}=2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,2*pi):
```




```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_{a}^{b}{\sin x\;dx}=\cos a-\cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_{a}^{b}{x^{n}\;dx}=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int {x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{7}{2}}}{28}-\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{5}{2}}}{10}+\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_{0}^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_{0}^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_{0}^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

```
                                     2
                                  - x
                                 E
```

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

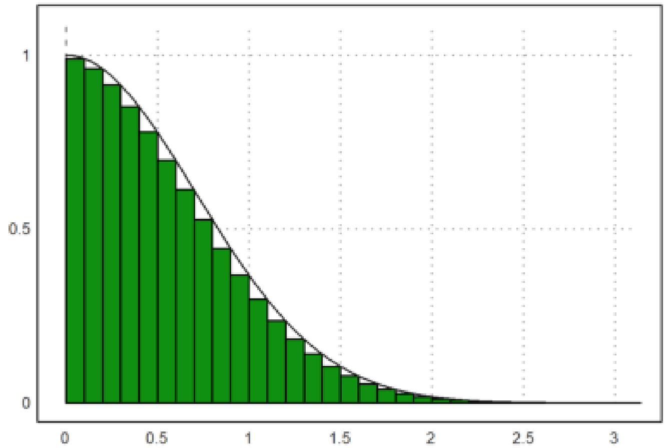
$$\int e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$erf(x)=\int\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).
Misalkan kita akan menghitung:
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)
dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-n
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi) = 0.1*sum(fx[i],i,1,length(fx))
Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)
Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_{0}^{\infty }{e^ {- x^2 }\;dx}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukkan kebenaran hasil di atas!
Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

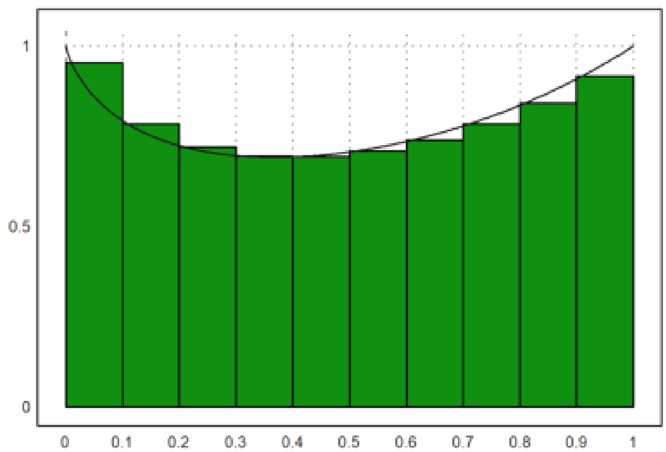
```
>function f(x) &= x^x
```

```
                                    x
                                   x
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}=\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

maxima: 'integrate(f(x),x,0,1) = 0.01*sum(fx[i],i,1,length(fx))
Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                                2     5
                             sin (3 x  + 7)
```

```
>integrate(f,0,1)
```

```
 0.542581176074
```

```
>&showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

```
           1                            1              pi
          /                       gamma(-) sin(14) sin(--)
          [      2     5                5              10
          I   sin (3 x  + 7) dx = ------------------------
          ]                                  1/5
          /                                10  6
           0
        4/5                  1           4/5                   1
   - (((6    gamma_incomplete(-, 6 I) + 6    gamma_incomplete(-, - 6 I))
                             5                                 5
              4/5                    1
   sin(14) + (6    I gamma_incomplete(-, 6 I)
                                     5
      4/5                   1                       pi
   - 6    I gamma_incomplete(-, - 6 I)) cos(14)) sin(--) - 60)/120
                            5                       10
```

```
>&float(%)
```

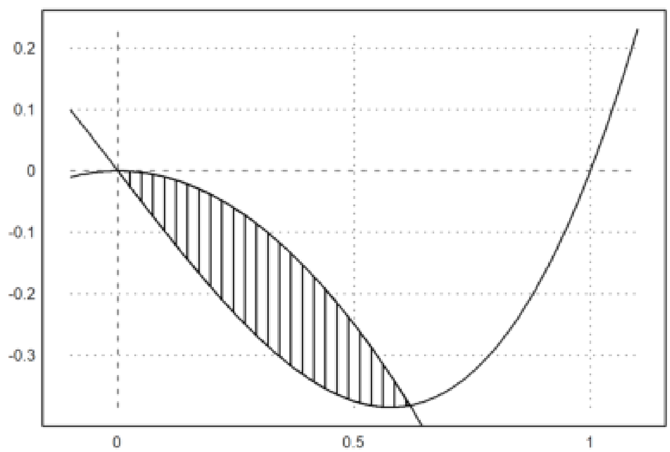
```
          1.0
         /
         [       2      5
         I     sin (3.0 x   + 7.0) dx =
         ]
         /
          0.0
 0.09820784258795788 - 0.008333333333333333
  (0.3090169943749474 (0.1367372182078336
  (4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
  - 4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))
  + 0.9906073556948704 (4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
  + 4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))) - 60.0)
```

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

$$\int_{0}^{1}{x\,e^ {- x }\;dx}=1-2\,e^ {- 1 }$$

Aplikasi Integral Tentu

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add);  ...
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daera
```



```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua ku
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2},x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},x=0\right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara
```

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{-x^3-x^2+x\;dx}=\frac{13-5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949}{-1.0\,x^3-1.0\,x^2+x\;dx}=0.07581917135421037$$

Panjang Kurva

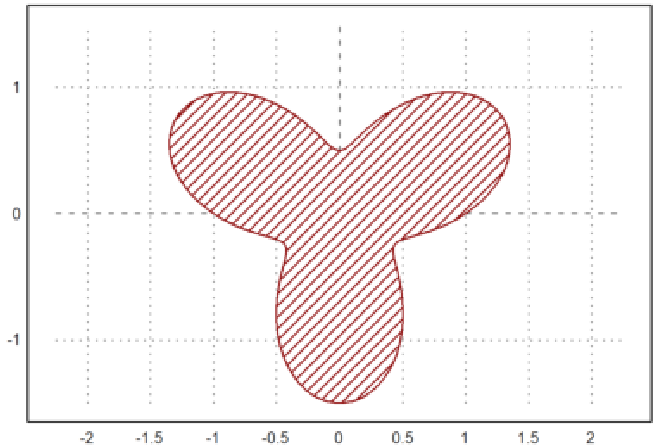
Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t)=(r(t)\cos(t),r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t)=1+\frac{\sin(3t)}{2},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya
```



```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
```

$r\left([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2,\right.$

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$fx\left([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2,\right.$

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$fy\left([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2,\right.$

```
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t ...
                                                     ^
```

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

$$\int_{0}^{2\,\pi}{ds\left(x\right)\;dx}$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.
Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

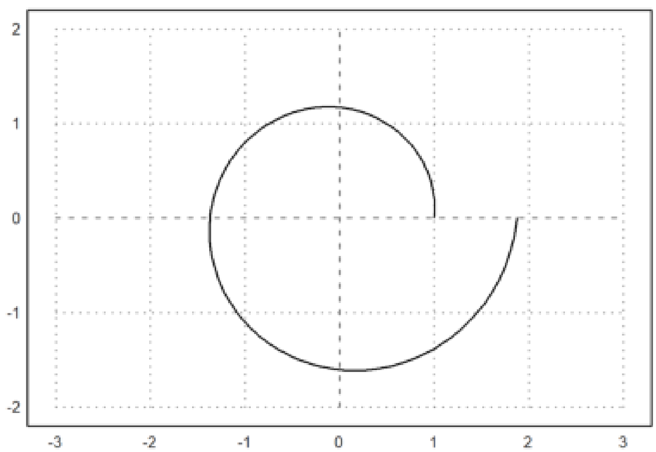
```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
Function ds not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: ds(x)
 %mapexpression1:
    return expr(x,args());
Error in map.
 %evalexpression:
    if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
    if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
    t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
    return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

Spiral Logaritmik

$$x = e^{ax}\cos x,\; y = e^{ax}\sin x.$$

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```



```
>&kill(a) // hapus expresi a
```

done

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$fx\left([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2,$

```
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$fy\left([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2,$

```
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t ...
                                                     ^
```

```
>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration cannot be a constant; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral) ...
                               ^
```

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

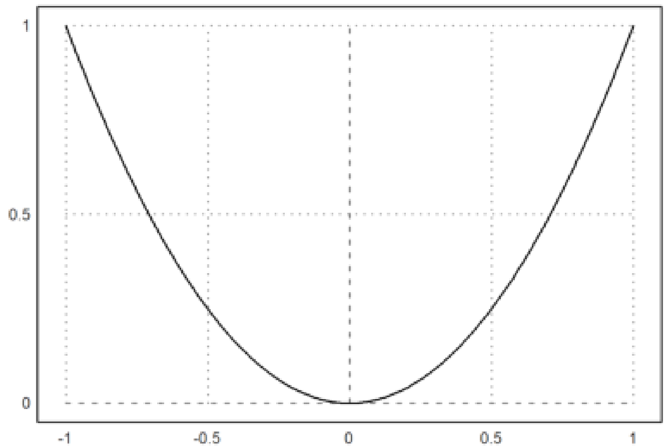
```
Function S not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1 ...
        ^
```

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```



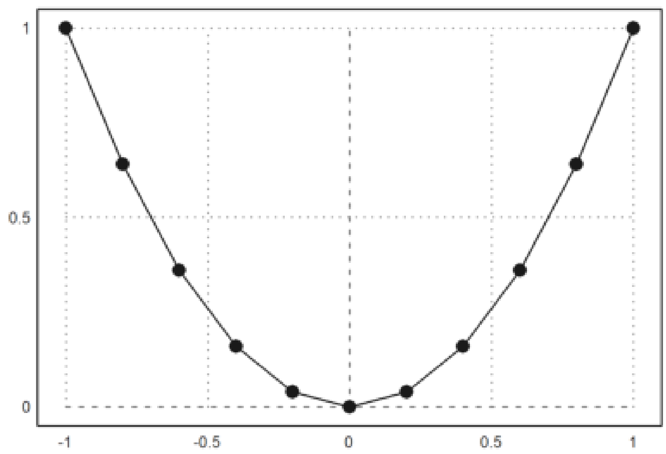

```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{4\,x^2+1}\;dx=\frac{\operatorname{asinh}2+2\,\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0}\sqrt{4.0\,x^2+1.0}\;dx=2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y);  ...
>  plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```



Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

Koordinat Kartesius

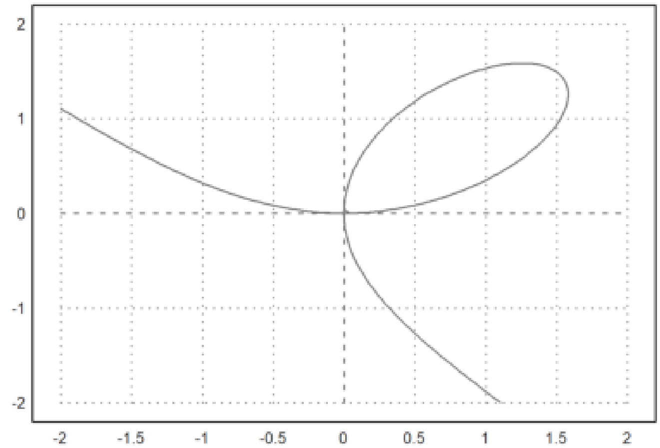
Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
```

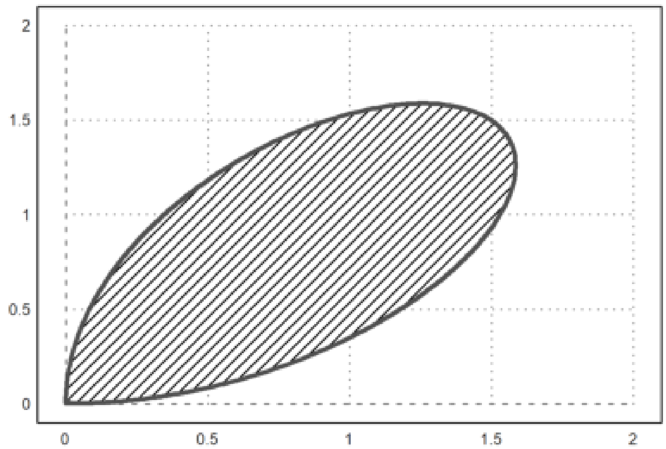
$$y^3 - 3\,x\,y + x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```



Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```



Kita selesaikan persamaannya untuk x.

```
>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1},x=0\right]$$

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1},x=0\right]$$

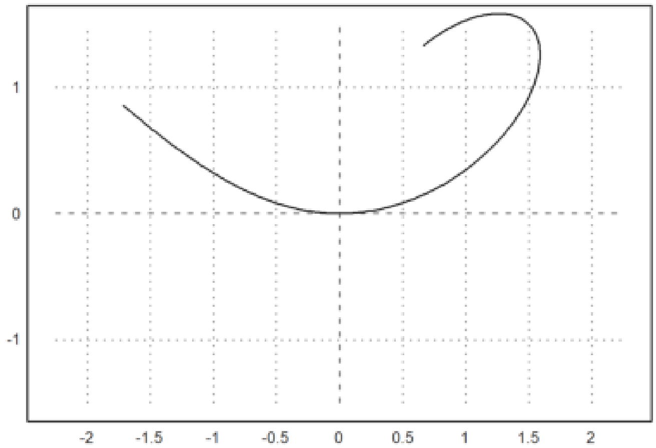
Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f\left(l\right)=\frac{3\,l}{l^3+1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```



Elemen panjang kurva adalah:

$$ds=\sqrt{f'(l)^2+(lf'(l)+f(l))^2}.$$

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=
```

$$ds\left(l\right)=\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}$$

```
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

$$\int_{0}^{1}{\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\;dl}$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampira
```

```
4.91748872168
```

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
```

```
ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
return romberg(ds,a,b);
endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabol
```

```
2.95788571509
```

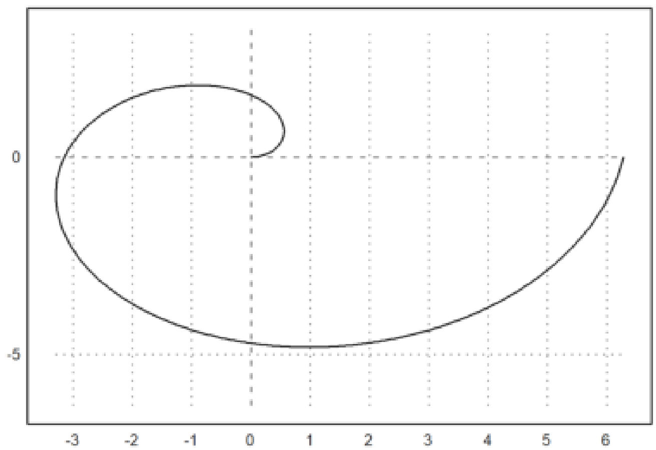
Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, band
```

```
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
```



```
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

```
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

```
done
```

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

```
                 2                2
sqrt(diff  (fy, x) + diff  (fx, x))
```

```
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjan
```

$$\sqrt{\left(\cos x-x\,\sin x\right)^2+\left(\sin x+x\,\cos x\right)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

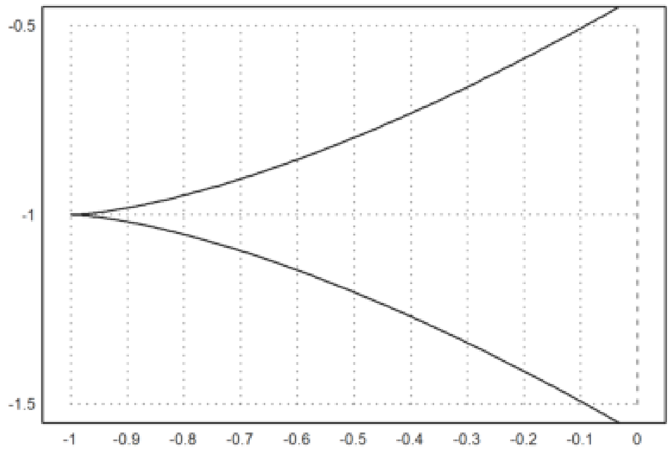
$$\frac{\operatorname{asinh}\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

$$\frac{\operatorname{asinh}\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.
Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```




```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di at
```

$$6.0\int_{0.0}^{0.5773502691896258}x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\,dx=2.337835372767141$$

$$6.0\int_{0.0}^{0.5773502691896258}x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\,dx=2.337835372767141$$

Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t-\sin(t)), r(1-\cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

```
          [0, 1.666658333335744e-7 r, 1.33330666692022e-6 r,
  4.499797504338432e-6 r, 1.066581336583994e-5 r,
  2.083072932167196e-5 r, 3.599352055540239e-5 r,
  5.71526624672386e-5 r, 8.530603082730626e-5 r,
  1.214508019889565e-4 r, 1.665833531718508e-4 r,
  2.216991628251896e-4 r, 2.877927110806339e-4 r,
  3.658573803051457e-4 r, 4.568853557635201e-4 r,
  5.618675264007778e-4 r, 6.817933857540259e-4 r,
  8.176509330039827e-4 r, 9.704265741758145e-4 r,
  0.001141105023499428 r, 0.001330669204938795 r,
  0.001540100153900437 r, 0.001770376919130678 r,
  0.002022476464811601 r, 0.002297373572865413 r,
  0.002596040745477063 r, 0.002919448107844891 r,
  0.003268563311168871 r, 0.003644351435886262 r,
  0.004047774895164447 r, 0.004479793338660443 r, 0.004941363556565 r,
  0.005433439383882244 r, 0.005956971605131645 r,
  0.006512907859185624 r, 0.007102192544548636 r,
  0.007725766724910044 r, 0.008384568035038 01 r,
  0.009079530587017326 r, 0.009811584876838586 r, 0.0105816576913495 r,
  0.01139067201557714 r, 0.01223954694042984 r, 0.01312919757078923 r,
  0.01406053493400045 r, 0.01503446588876983 r, 0.01605189303448024 r,
  0.01711371462093175 r, 0.01822082445851714 r, 0.01937411182884202 r,
  0.02057446139579705 r, 0.02182275311709253 r, 0.02311986215626333 r,
  0.02446665879515308 r, 0.02586400834688696 r, 0.02731277106934082 r,
  0.02881380207911666 r, 0.03036795126603076 r, 0.03197606320812652 r,
  0.0336389770872163 r, 0.03535752660496472 r, 0.03713253989951881 r,
  0.03896483946269502 r, 0.0408552420577305 r, 0.04280455863760801 r,
  0.04481359426396048 r, 0.04688314802656623 r, 0.04901401296344043 r,
  0.05120697598153157 r, 0.05346281777803219 r, 0.05578231276230905 r,
  0.05816622897846346 r, 0.06061532802852698 r, 0.06313036499630 22 r,
  0.06571208837185505 r, 0.06836123997666599 r, 0.07107855488944881 r,
  0.07386476137264342 r, 0.07672058079958999 r, 0.07964672758239233 r,
  0.08264390910047736 r, 0.0857128256298576 r, 0.08885417027310427 r,
  0.09206862889003742 r, 0.09535688002914089 r, 0.0987195948597075 r,
  0.1021574371047232 r, 0.1056710629744951 r, 0.1092611211010309 r,
  0.1129282524731764 r, 0.1166730903725168 r, 0.1204962603100498 r,
  0.1243983799636342 r, 0.1283800591162231 r, 0.1324418995948859 r,
  0.1365844952106265 r, 0.1408084316990 02 r, 0.1451142866615502 r,
  0.1495026295080298 r, 0.1539740213994798 r]
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
          [0, 4.999958333473664e-5 r, 1.999933334222437e-4 r,
  4.499662510124569e-4 r, 7.998933390220841e-4 r,
  0.001249739605033717 r, 0.001799460006479581 r,
  0.002448999746720415 r, 0.003198293697380561 r,
  0.004047266988005727 r, 0.004995834721974179 r,
  0.006043902043303184 r, 0.00719136414613375 r, 0.008438106285211191 r,
  0.009784003787362772 r, 0.01122892206395776 r, 0.01277271662437307 r,
  0.01441523309043924 r, 0.01615630721187855 r, 0.01799576488272969 r,
  0.01993342215875837 r, 0.02196908527585173 r, 0.02410255066939448 r,
  0.02633360499462523 r, 0.02866202514797045 r, 0.03108757828935527 r,
  0.03361002186548678 r, 0.03622910363410947 r, 0.03894456168922911 r,
  0.04175612448730281 r, 0.04466351087439402 r, 0.04766643011428662 r,
  0.05076458191755917 r, 0.0539576564716131 r, 0.05724533447165381 r,
  0.06062728715262111 r, 0.06410317632206519 r, 0.06767265439396564 r,
  0.07133536442348987 r, 0.07509094014268702 r, 0.07893900599711501 r,
  0.08287917718339499 r, 0.08691105968769186 r, 0.09103425032511492 r,
  0.09524833678003664 r, 0.09955289764732322 r, 0.1039475024744748 r,
  0.1084317118046711 r, 0.113005077220716 r, 0.1176671413898787 r,
  0.1224174381096274 r, 0.1272554923542488 r, 0.132180820322350 2 r,
  0.1371929294852391 r, 0.1422913186361759 r, 0.1474754779404944 r,
  0.152744888986584 r, 0.1580990248377314 r, 0.1635373500848132 r,
  0.1690593208998367 r, 0.1746643850903219 r, 0.1803519821545206 r,
  0.1861215433374662 r, 0.1919724916878484 r, 0.1979042421157076 r,
  0.2039162014509444 r, 0.2100077685026351 r, 0.216178334119151 r,
  0.2224272812490723 r, 0.2287539850028937 r, 0.2351578127155118 r,
  0.2416381240094921 r, 0.2481942708591053 r, 0.2548255976551299 r,
  0.2615314412704124 r, 0.2683111311261794 r, 0.2751639892590951 r,
  0.2820893303890569 r, 0.2890864619877229 r, 0.2961546843477643 r,
  0.3032932906528349 r, 0.3105015670482534 r, 0.3177787927123868 r,
  0.3251242399287333 r, 0.3325371741586922 r, 0.3400168541150183 r,
  0.3475625318359485 r, 0.3551734527599992 r, 0.3628488558014202 r,
  0.3705879734263036 r, 0.3783900317293359 r, 0.3862542505111889 r,
  0.3941798433565377 r, 0.4021660177127022 r, 0.4102119749689023 r,
  0.418316910536117 r, 0.4264800139275439 r, 0.4347004688396462 r,
  0.4429774532337832 r, 0.451310139418413 r]
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

```
>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
>  plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
```

```
> plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
> plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
> plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
> plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add);  ...
> plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```

```
Error : [0,1.666658333335744e-7*r-sin(1.666658333335744e-7*r),1.33330666692
```

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds ...
                                               ^
```

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran pe
```

```
Maxima said:
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found errexp1
#0: showev(f='integrate(ds,[0,1.666658333335744e-7*r,1.33330666692022e-6*r
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid sat ...
                                 ^
```

```
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

```
Illegal function result in map.
 %evalexpression:
    if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
    if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
    t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
    return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

```
>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik
```

```
Wrong argument!

Cannot combine a symbolic expression here.
Did you want to create a symbolic expression?
Then start with &.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
romberg:
    if cols(y)==1 then return y*(b-a); endif;
Error in:
romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik ...
                         ^
```

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

---

image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)
Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

$$\gamma(s) = (x(s),\ y(s)),$$

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Ini berarti bahwa vektor singgung

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s),\ y'(s))$$

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.
Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka T'(s) ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) &= \gamma'(s),\\ \mathbf{T}^2(s) &= 1 \text{ (konstanta)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s)\cdot\mathbf{T}(s) = 0\\ \kappa(s) &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}.\end{aligned}$$

Nilai

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.
Bilangan riil

$$k(s) = \pm\kappa(s)$$

disebut nilai kelengkungan bertanda.
Contoh:
Akan ditentukan kurvatur lingkaran

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

```
>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... =integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen ...
                                                     ^
```

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan p
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur l
```

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad (\phi \text{ adalah sudut kemiringan garis singgung dan } s \text{ adalah panjang kurva}) \\ &= \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

$$\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\sec^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.\end{aligned}$$

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta,$$

maka rumus kurvaturnya adalah

$$\kappa(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r'(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)

Contoh:

Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.

Kurva

$$y = f(x)$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

$$x = t,\ y = f(t),\ \text{ dengan } x'(t) = 1,\ x''(t) = 0,$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur parabola

$$y = ax^2 + bx + c.$$

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
```

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) //
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
... (x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x)  ...
                                                     ^
```

```
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola
```

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) //
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... (x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x)  ...
                                                     ^
```

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

$$(-1/2, 3/4),\ 1/k(2) = 1/2,$$

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,co
>plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)","5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add
```

```
Error : f(x) does not produce a real or column vector

Error generated by error() command

 %ploteval:
    error(f$|" does not produce a real or column vector");
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

$$F(x,y)=0$$

dengan turunan-turunan parsial

$$F_x=\frac{\partial F}{\partial x},\ F_y=\frac{\partial F}{\partial y},\ F_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

berlaku

$$F_x dx+F_y dy=0 \text{ atau } \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y},$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa=\frac{F_y^2F_{xx}-2F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}}{\left(F_x^2+F_y^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan sendiri!)

Contoh 1:

Parabola

$$y=ax^2+bx+c$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

$$ax^2+bx+c-y=0.$$

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
```

```
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=d
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y) ...
                    ^
```

```
>function k(x) &= (Fy^2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx^2*Fyy)/(Fx^2+Fy^2)^(3/2); $'k(x)
```

$k\left(\left[0, 1.66665833335744\times 10^{-7}\,r, 1.33330666692022\times 10^{-6}\,r, 4.499797504338432\times 10^{-6}\,r, 1.066581336583\right.\right.$

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V = \int_a^b \pi (f(x)^2\, dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)
- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk:

```
a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x))
b. koordinat kutub ( r=r(theta))
c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t)
d. persamaan implit F(x,y)=0
```

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

Jawab

1. Hitung Integral

```
>function f(x) &= 2*x^2-2*x+3;$f(x)
```

$$2\,x^2-2\,x+3$$

```
>$showev('integrate(2*x^2-2*x+3,x)) // integral tak tentu
```

$$\int {2\,x^2-2\,x+3}{\;dx}=\frac{2\,x^3}{3}-x^2+3\,x$$

```
>$showev('integrate(2*x^2-2*x+3,x,-1,2)) // integral tak tentu
```

$$\int_{-1}^{2}{2\,x^2-2\,x+3\;dx}=12$$

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

Iterasi dan Barisan

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

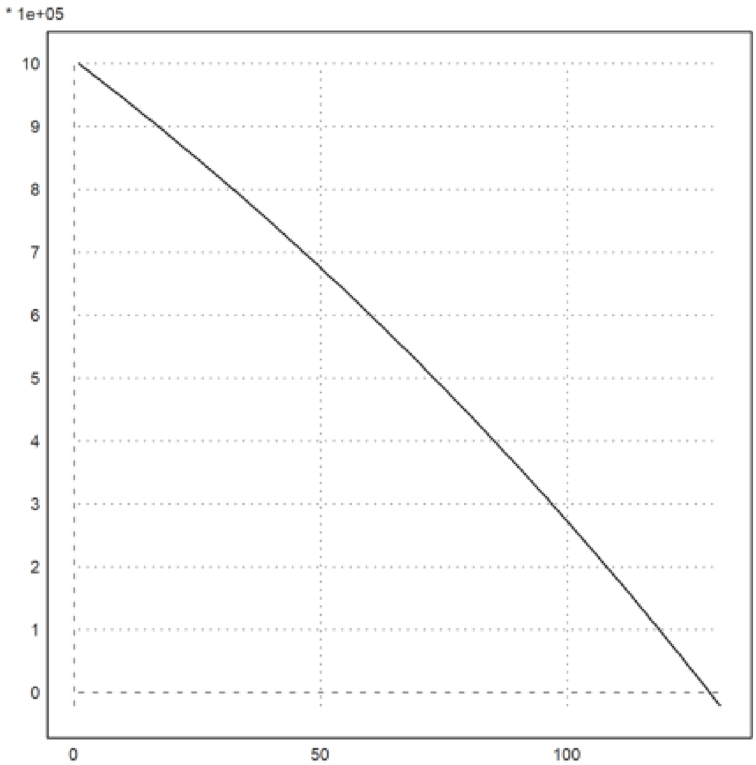
Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'
```

```
           1000
           1050
         1102.5
        1157.63
        1215.51
        1276.28
         1340.1
         1407.1
        1477.46
        1551.33
        1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):
```



Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.
Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

$$[A = 2500.0]$$

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);
>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=6)
```

```
[1000,   994,   987.98,   981.93,   975.86,   969.76,   963.64]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=6)
```

```
[2000,   1998,   1995.99,   1993.97,   1991.95,   1989.92,   1987.88]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2500,n=6)
```

```
[2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500]
```

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},3000,n=6)
```

```
[3000,  3002,  3004.01,  3006.03,  3008.05,  3010.08,  3012.12]
```

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.

Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)
```

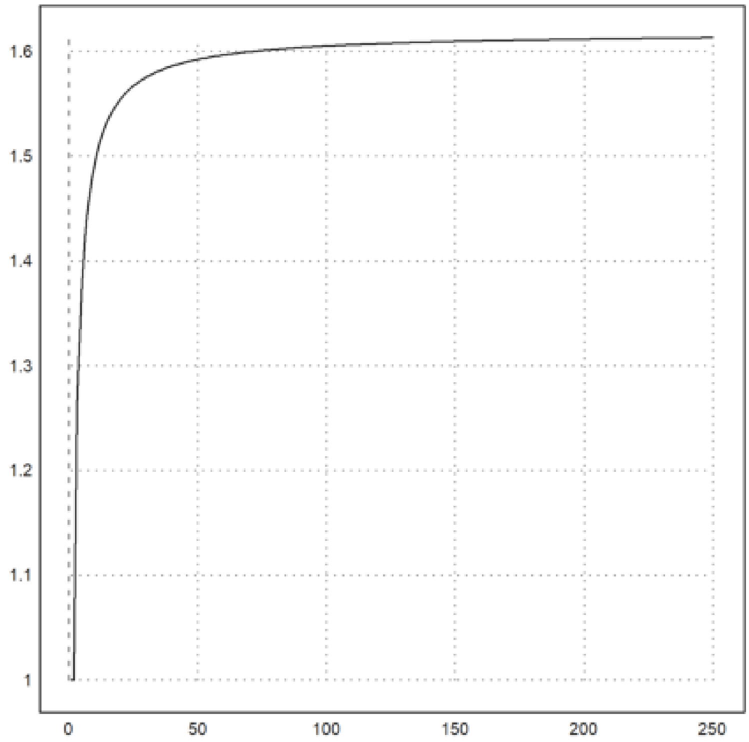
```
[1,  1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55,  89,  144,  233,  377,  610]
```

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

```
>$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)
```

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749895$$

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):
```



Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

```
>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;
```

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah 2^(n-2), untuk n=2, 4, 5, ...

```
>sequence("sum(x)",1,10)
```

```
[1,   1,   2,   4,   8,   16,   32,   64,   128,   256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.
Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]
>sequence("suku",[1;1],6)
```

```
Real 2 x 6 matrix

            1             2             5            13      ...
            1             3             8            21      ...
```

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak log_2(n).

$$x_n = A.x_{n-1} = A^2.x_{n-2} = A^3.x_{n-3} = ... = A^{n-1}.x_1.$$

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)
```

```
Real 2 x 6 matrix

            1            5            13            34       ...
            1            8            21            55       ...
```

Spiral Theodorus

image: Spiral_of_Theodorus.png

Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

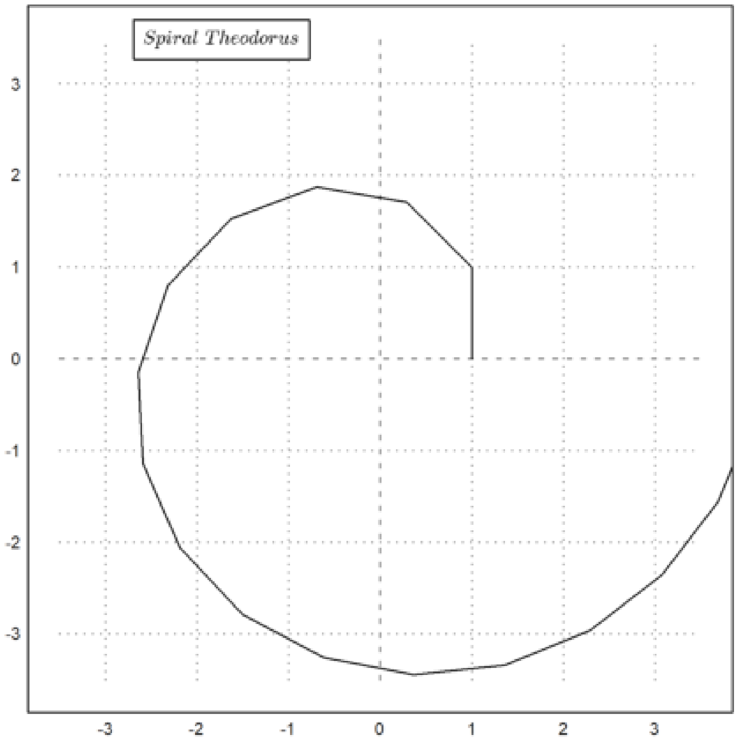
$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

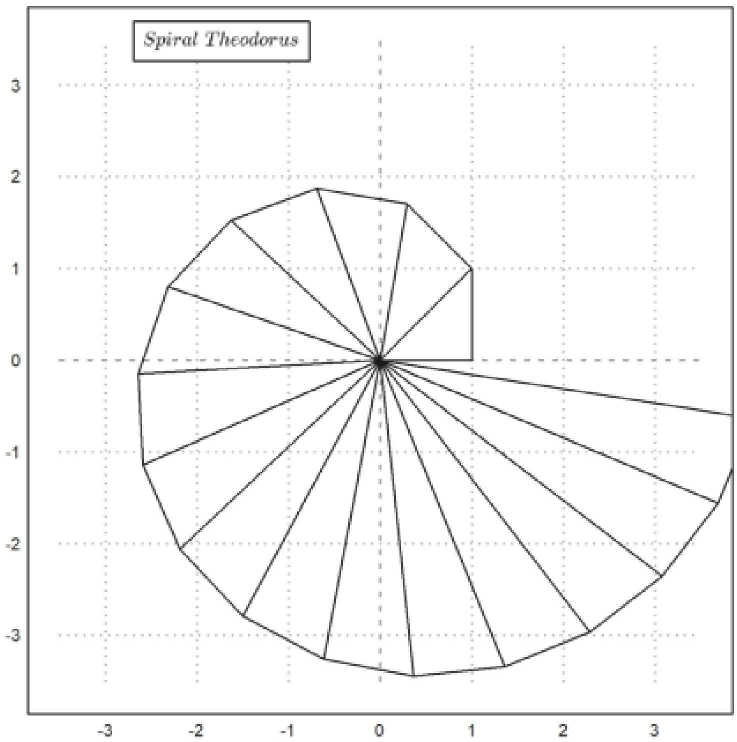
Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\
```



Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```



```
>
```

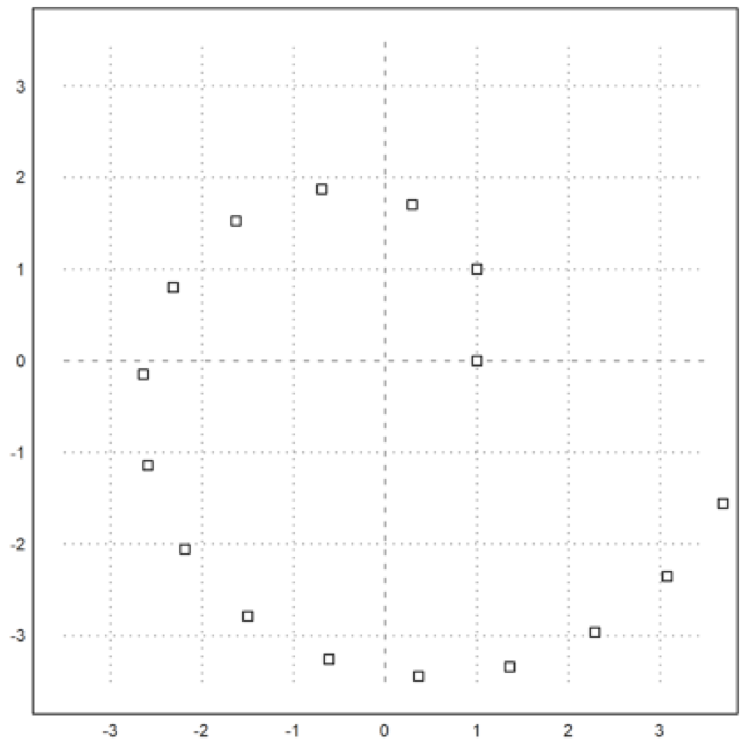
Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memmerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini diigunakan vektor kolom pada bidang.

```
>function gstep (v) ...
```

```
  w=[-v[2];v[1]];
  return v+w/norm(w);
  endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

```
>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```



Kekonvergenan

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

```
>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.
```

```
0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

```
>hasil := iterate("cos(x)",~1,2~) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interv
```

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
~0.73908513309,0.73908513333~
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
1.41421356237
1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
[2,  1.5,  1.41667,  1.41422,  1.41421,  1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",~1,2~,5)
```

```
[ ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Satu-satunya solusi adalah

$$x = \sqrt{2}.$$

```
>iterate("s",~1,2~)
```

```
~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
        2.60401
        2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

```
              1            3      2.61803      2.60403      2.60401
              5      2.23607      2.59002      2.60399      2.60401
```

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[~1~;~5~],4)
```

```
Interval 2 x 5 matrix

~0.99999999999999778,1.0000000000000022~     ...
~4.99999999999999911,5.0000000000000089~     ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
[2,  1.41421,  1.18921,  1.09051,  1.04427,  1.0219,  1.01089,
1.00543,  1.00271,  1.00135,  1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepatdengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
[1.04888,  1.00028,  1,  1]
```

Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
1.41421356237
```

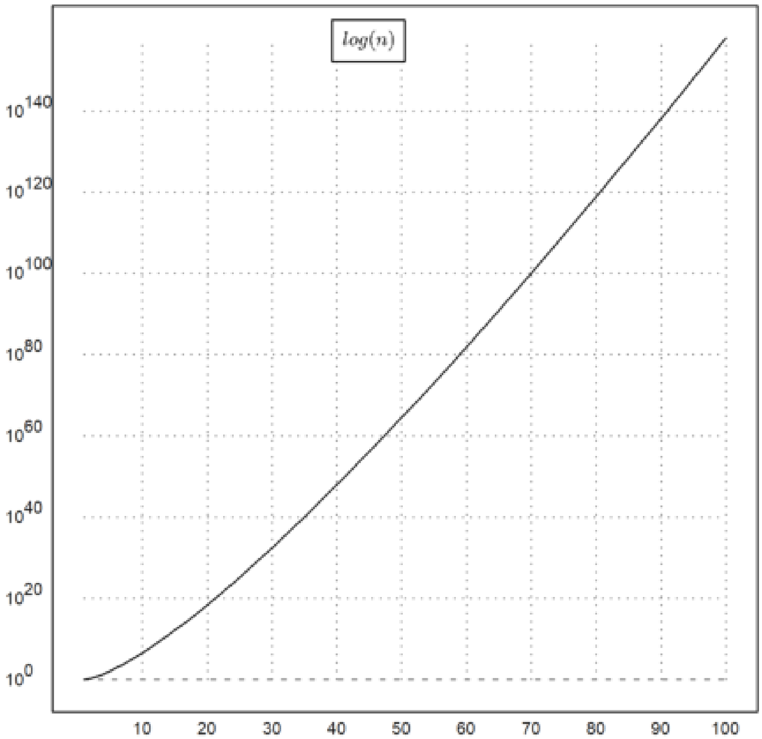
Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
  [1,   2,   6,   24,   120,   720,   5040,   40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
>plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```




```
>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
>x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...
>x,
```

```
        -7.09677
        -7.74194
```

Iterasi di dalam Fungsi

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.
Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
```

```
x=x0;
maxiter=0;
repeat
  xnew=f$(x);
  maxiter=maxiter+1;
  until xnew~=x;
  x=xnew;
end;
return maxiter;
endfunction
```

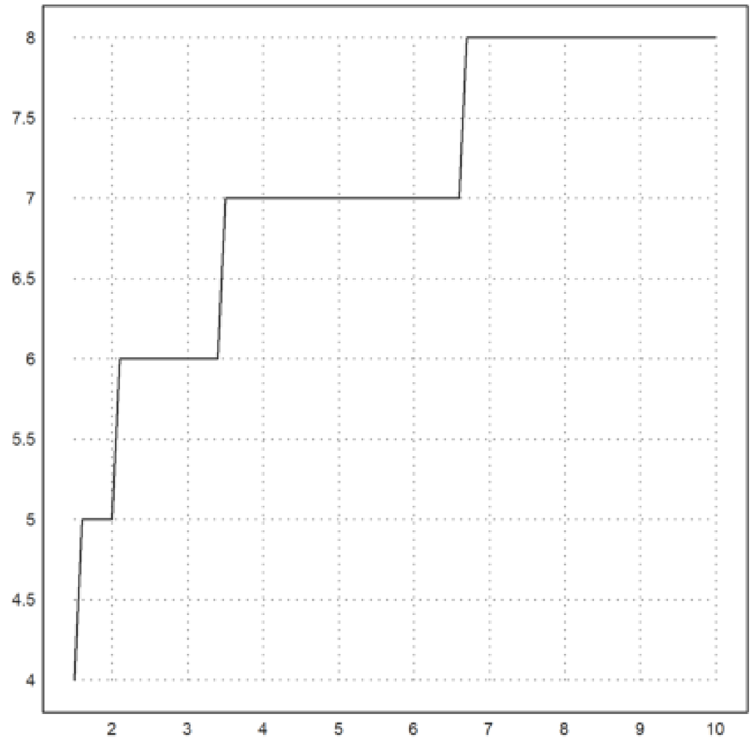
Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>hiter("(x+2/x)/2",2)
```

```
5
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...
>  plot2d(x,hasil):
```



Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahnnya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
[4,   5,   5,   5,   5,   5,   6,   6,   6,   6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
[1.5,   2,   3.4,   6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.
Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton ...
                                    ^
```

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
```

```
loop 1 to n; x=f$(x); end;
return x;
endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

```
Function newton needs at least 3 arguments!
Use: newton (f$: call, df$: call, x: scalar complex {, y: number, eps: no
Error in:
...  x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z); ...
                                                       ^
```

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

```
>z=&solve(p)()
```

```
Maxima said:
solve: more equations than unknowns.
Unknowns given :
[r]
Equations given:
errexp1
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
z=&solve(p)() ...
           ^
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.
Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

```
>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
>  plot2d(none,-r,r,-r,r); plotrgb(C):
```

```
Variable W not found!
Error in:
C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1) ...
                    ^
```

Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpang
```

```
true
```

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Tay
```

```
Maxima said:
taylor: 0.1539740213994798*r cannot be a variable.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // baris ...
                                                ^
```

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor eskpresi pada EMT.

```
>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampi
```

```
Maxima said:
length: argument cannot be a symbol; found deret
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxm2str:
    n=mxmeval("length(VVV)");
```

Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

```
>$deret[3]
```

$$deret_3$$

```
>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):
```

```
deret is not a variable!
Error in expression: deret[1]
 %ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    u=u_(%ploteval(xx[#],t;args()));
```

```
>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)
```

$$\ldots 214\, r), \sin\left(0.0920681628869583733235744 \times 10^{-7}\, r\right) + \frac{\sin\left(0.18413725773800734866667 \ldots\right)}{2} + \frac{\ldots}{2} + \frac{\ldots}{3} + \frac{\ldots}{3} + \frac{\ldots}{4} \ldots$$

Berikut adalah cara menggambar kurva

$$y = \sin(x) + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots.$$

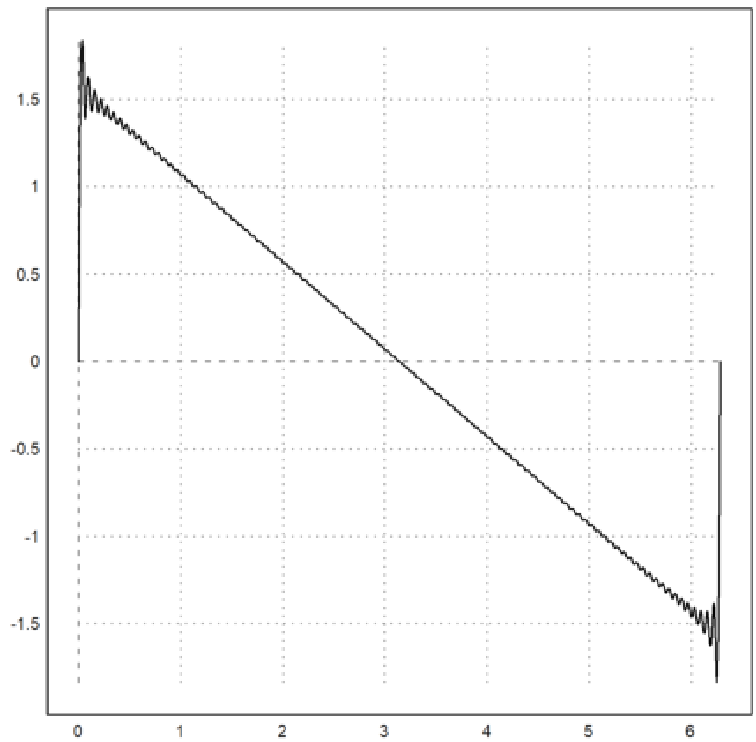
```
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):
```

```
Maxima output too long!
Error in:
plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi): ...
                                                  ^
```

Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

$$y = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):
```



Tabel Fungsi

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.
Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di x=1.

```
>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found errexp1
#0: diffat(expr=[0,1.666658333335744e-7*r,1.333306666692022e-6*r,4.49979750
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

 %mxmevtable:
    return mxm("@expr,@var=@value")();
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmtable:
    y[#,1]=%mxmevtable(expr,var,x[#]);
```

```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:me
```

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(1+n)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3^k}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: men
```

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),si
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-1+k}}{k} = -\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^x}{x}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{-1+2\,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{-1+2\,k}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsu
```

```
Answering "Is -94914474571+15819*r positive, negative or zero?" with "pos
Maxima said:
sum: sum is divergent.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget(abs ...
                                                      ^
```

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

```
>$'sum(x^k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x^k/k!,k,0,inf),simpsum=true)
```

$$\left[0, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1.66665833335744 \times 10^{-7}\right)^k r^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1.33330666692022 \times 10^{-6}\right)^k r^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(4.499797504338432 \times 10\right.}{k!}\right.$$

```
>$limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)
```

$$\left[0, \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1.66665833335744 \times 10^{-7}\right)^k r^k}{k!}, \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1.33330666692022 \times 10^{-6}\right)^k r^k}{k!}, \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left(4.4997975\right.\right.$$

```
>function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)
```

$$d\left(n\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{-k+k^2}$$

```
>$d(10)=ev(d(10),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{-k+k^2} = \frac{9}{10}$$

```
>$d(100)=ev(d(100),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{-k+k^2} = \frac{99}{100}$$

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai su
```

```
Maxima said:
taylor: 0.1539740213994798*r cannot be a variable.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x= ...
                               ^
```

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

```
Maxima said:
log: encountered log(0).
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1 ...
                                ^
```

6 Menggunakan EMT untuk Geometri

Identitas

Nama : Assyifa Cahya M
NIM : 22305141001
Matematika B 22

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang koordin
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" s
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh. ax+by=c.
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
```

```
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan c2
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan y den
sisi positif (kanan/atas) garis
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni sin(
alpha sudut yang menghadap sisi a.
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan p
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk suatu
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan sa=sin(phi)^2
```

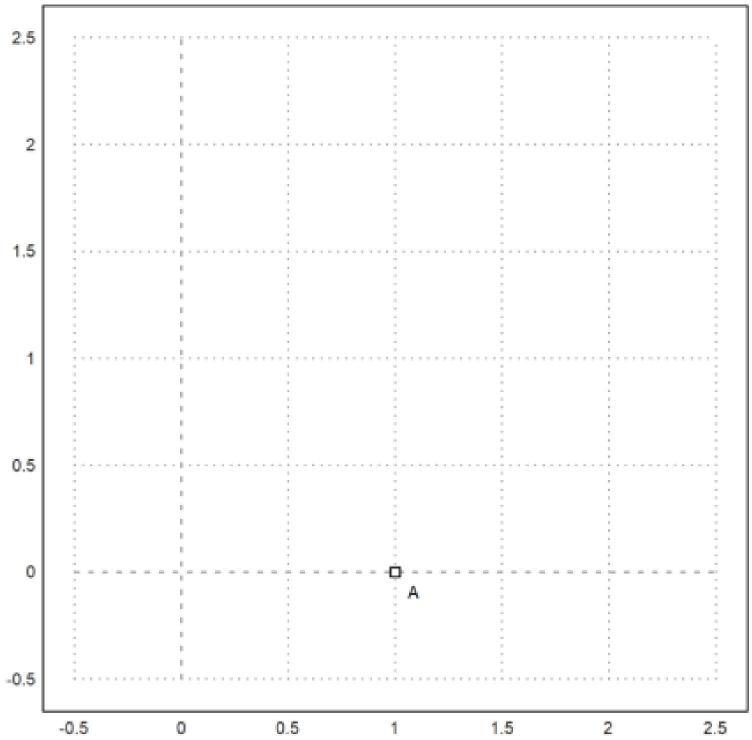
Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

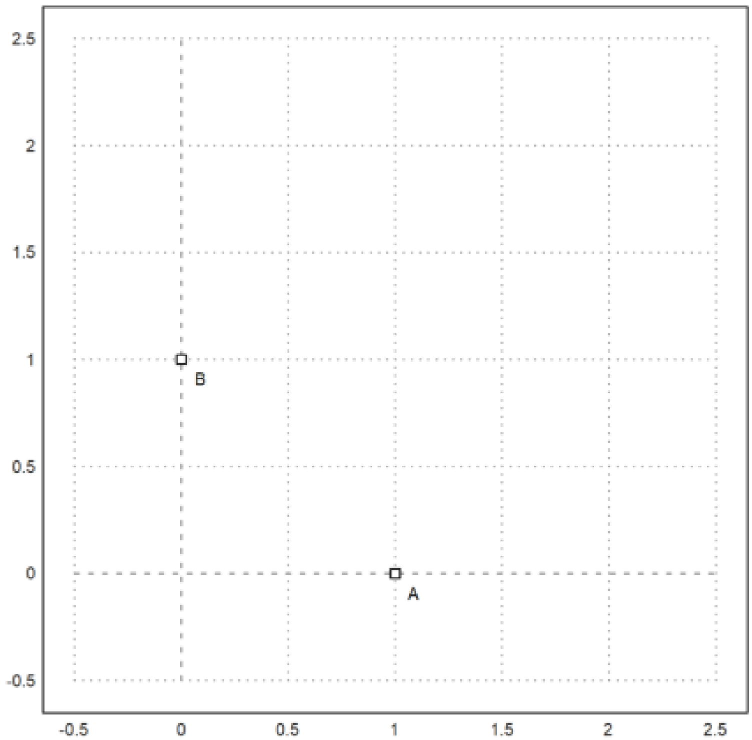
```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Now set three points and plot them.

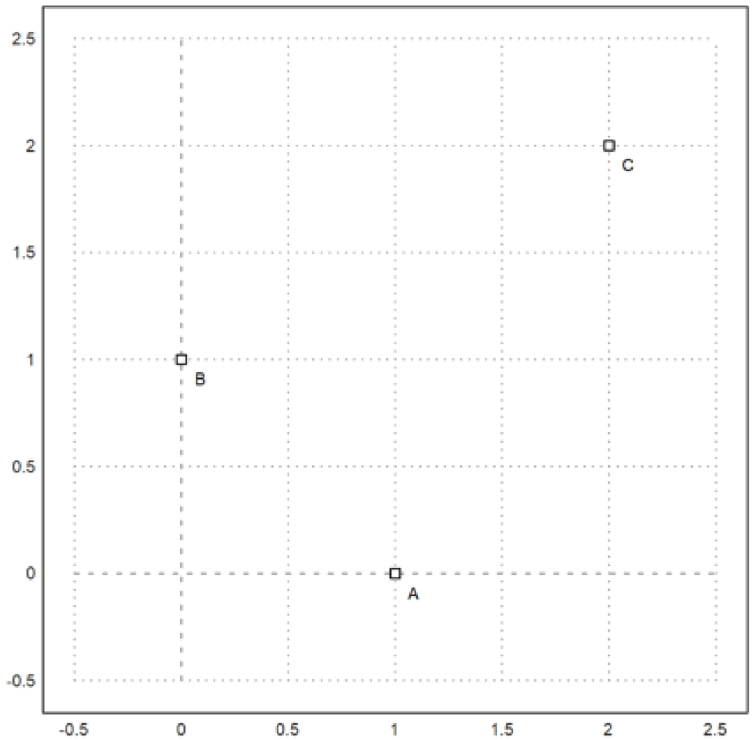
```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"): // definisi dan gambar tiga titik
```




```
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B"):
```

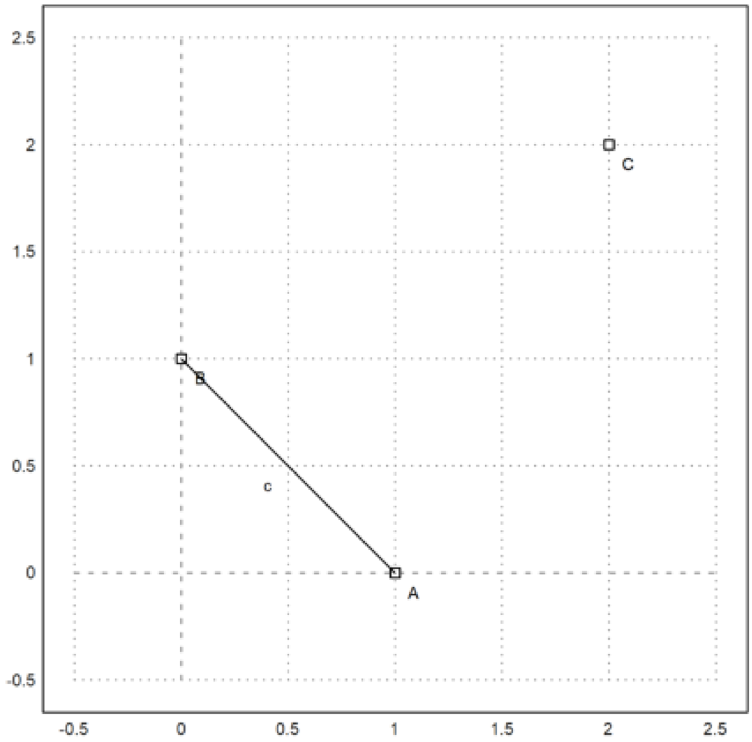


```
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C"):
```

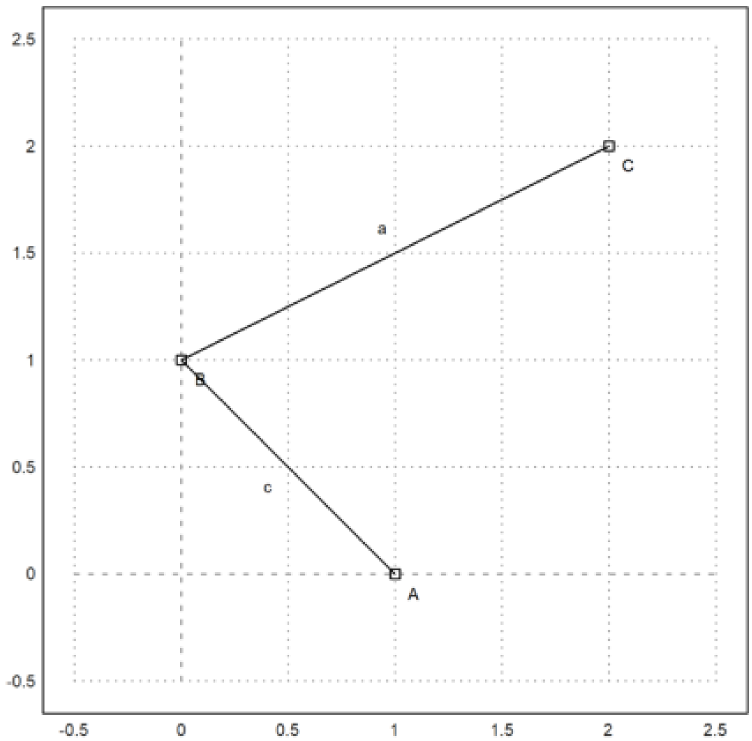


Then three segments.

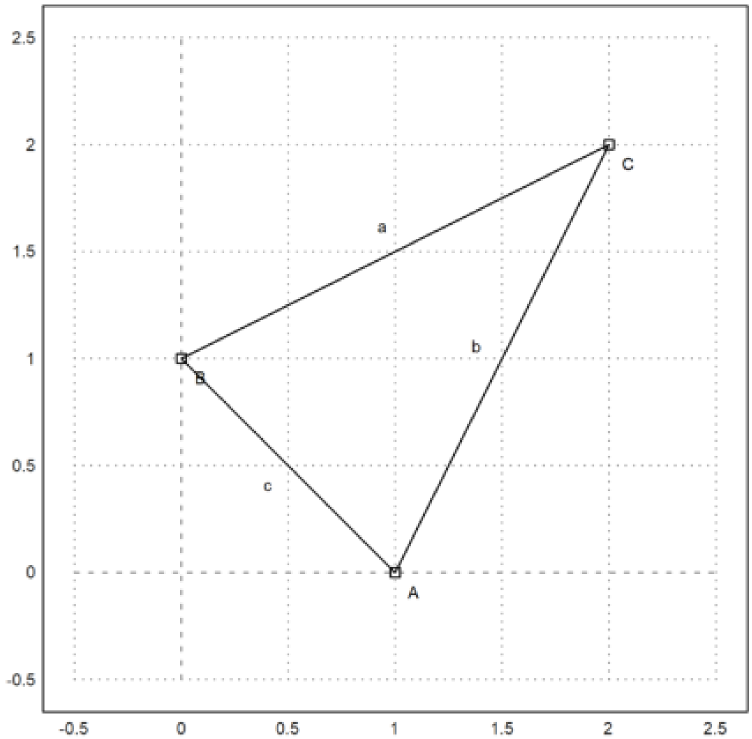
```
>plotSegment(A,B,"c"): // c=AB
```




```
>plotSegment(B,C,"a"): // a=BC
```



```
>plotSegment(A,C,"b"): // b=AC
```



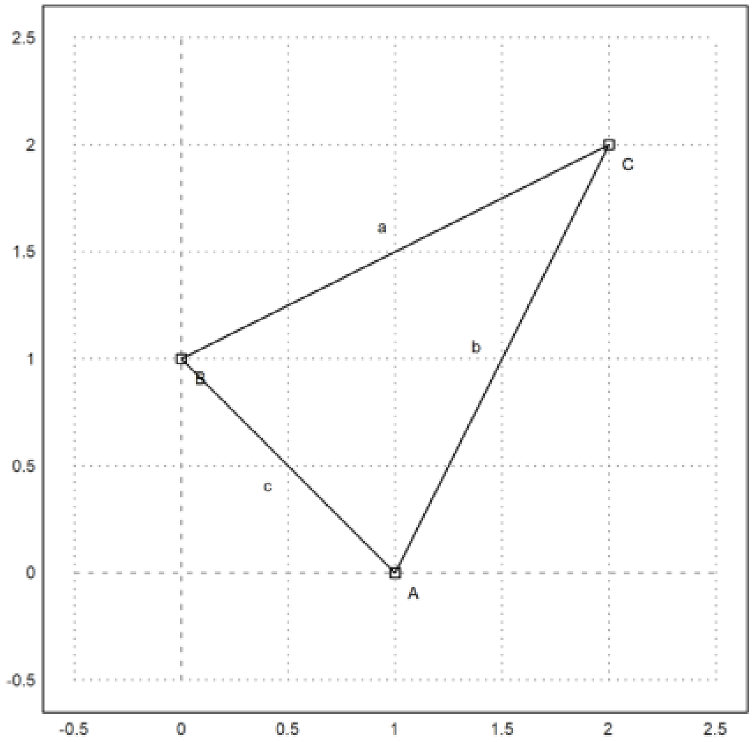
Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format garisnya adalah [a,b,c] yang mewakili garis dengan persamaan ax+by=c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

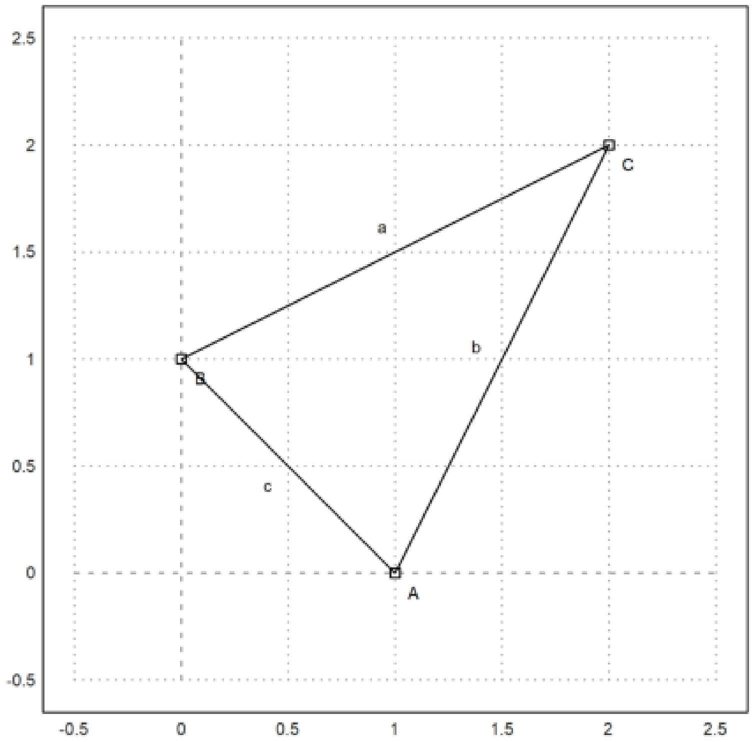
Hitung garis tegak lurus yang melalui A di BC.

```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)): // garis h tegak lurus BC melalui A
```



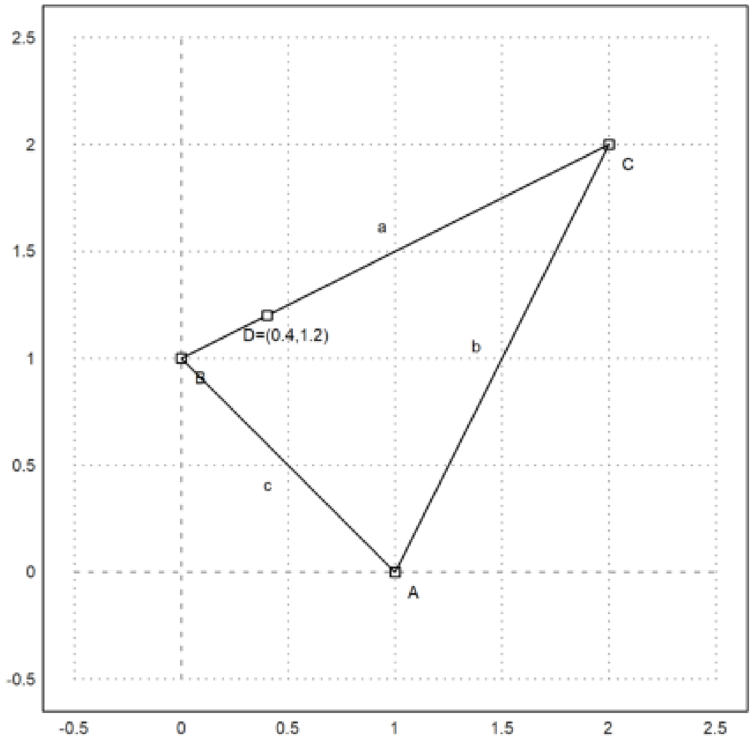
Dan persimpangannya dengan SM.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)): // D adalah titik potong h dan BC
```

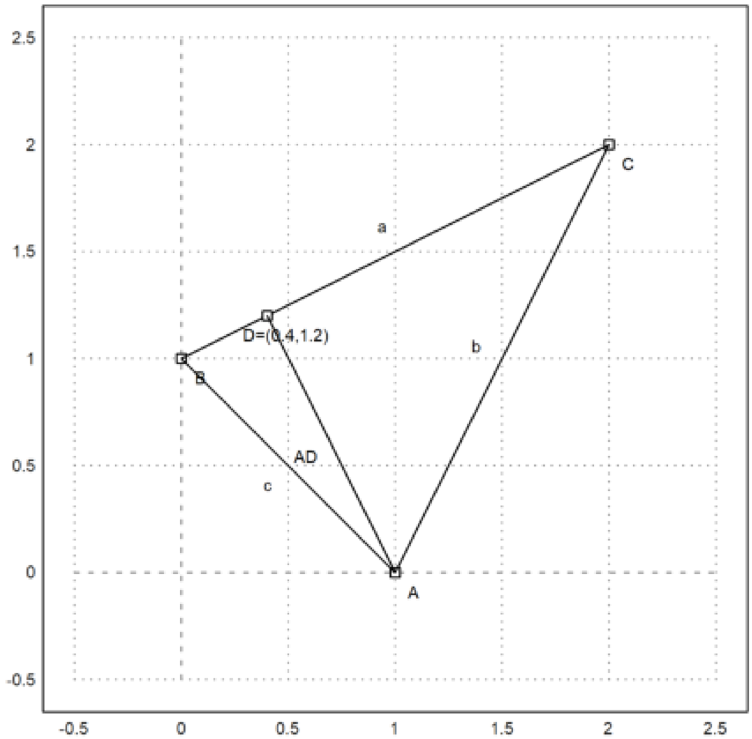


Plot itu

```
>plotPoint(D,value=1): // koordinat D ditampilkan
```




```
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

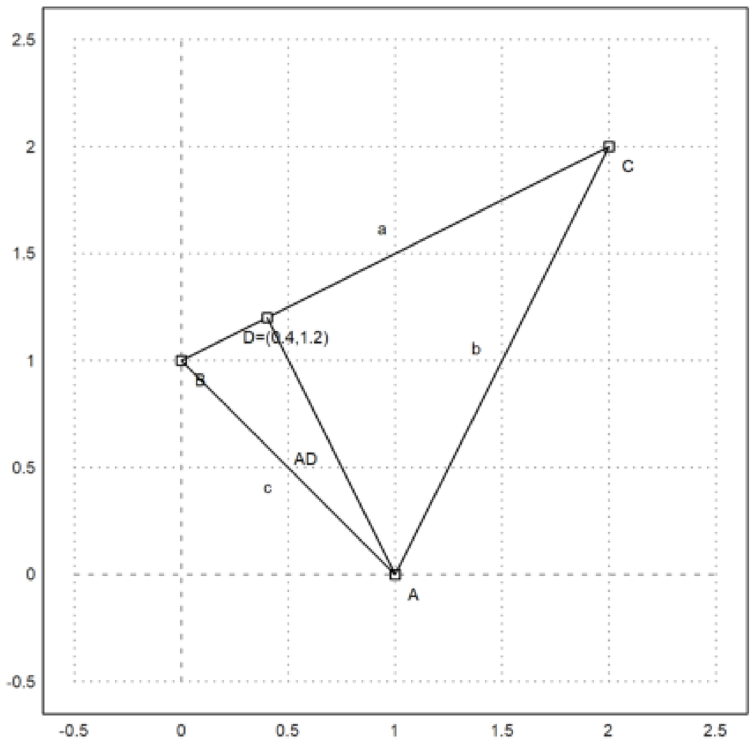
Sudut di C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

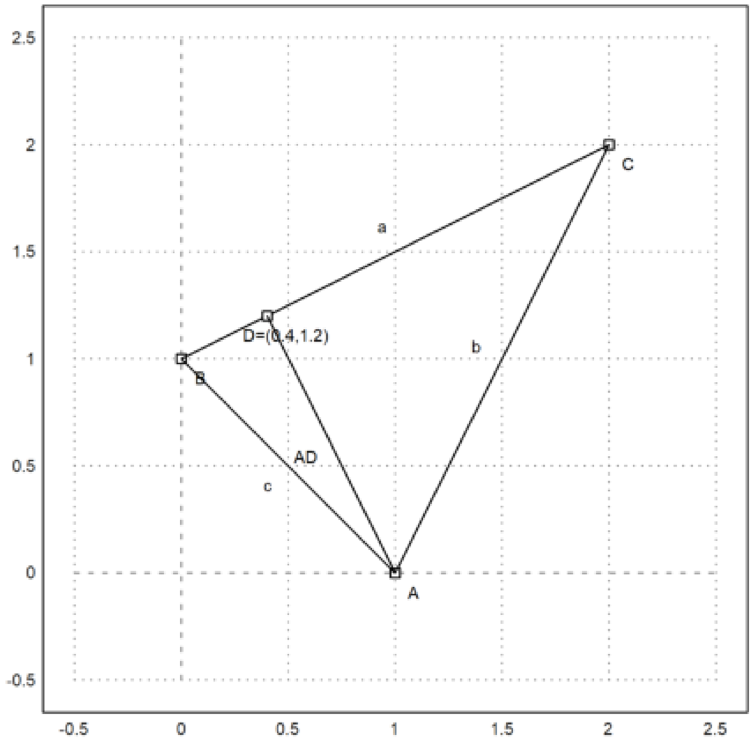
```
36°52'11.63''
```

Sekarang lingkaran luar segitiga.

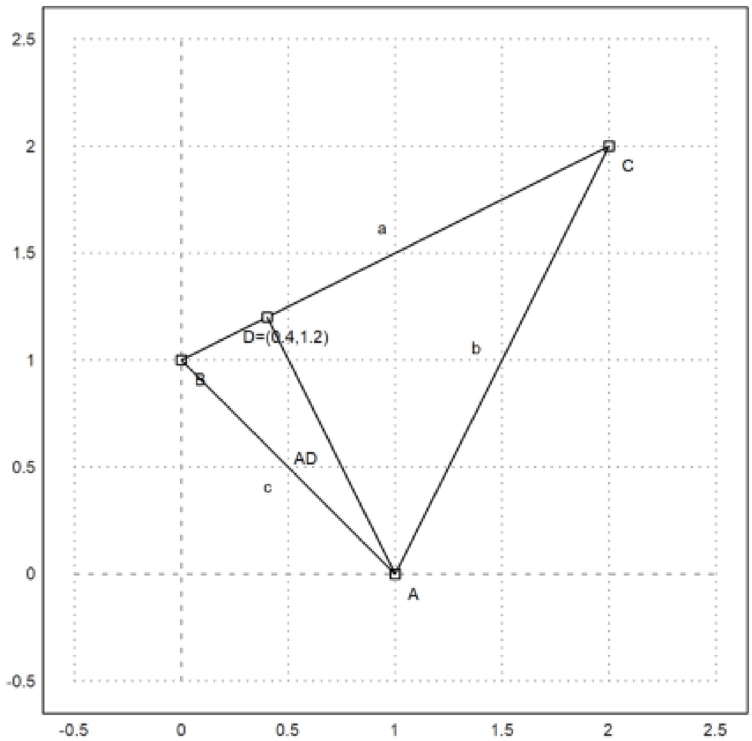
```
>c=circleThrough(A,B,C): // lingkaran luar segitiga ABC
```



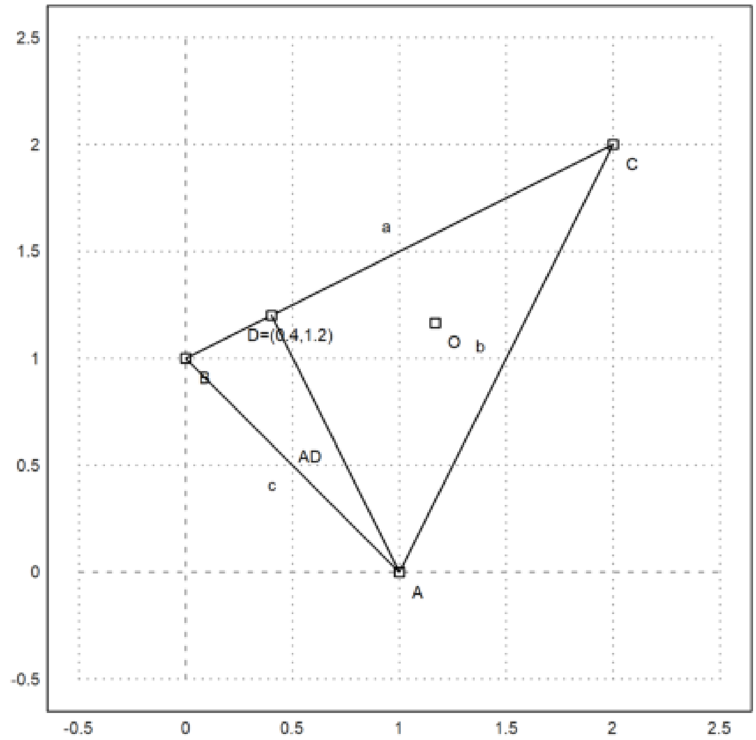

```
>R=getCircleRadius(c): // jari2 lingkaran luar
```



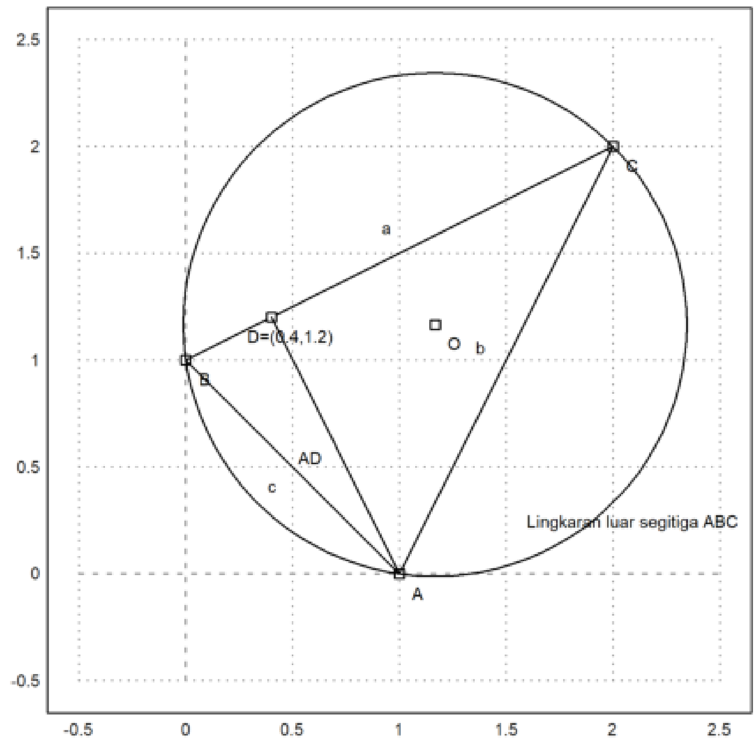

```
>O=getCircleCenter(c): // titik pusat lingkaran c
```



```
>plotPoint(O,"O"): // gambar titik "O"
```




```
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O
```

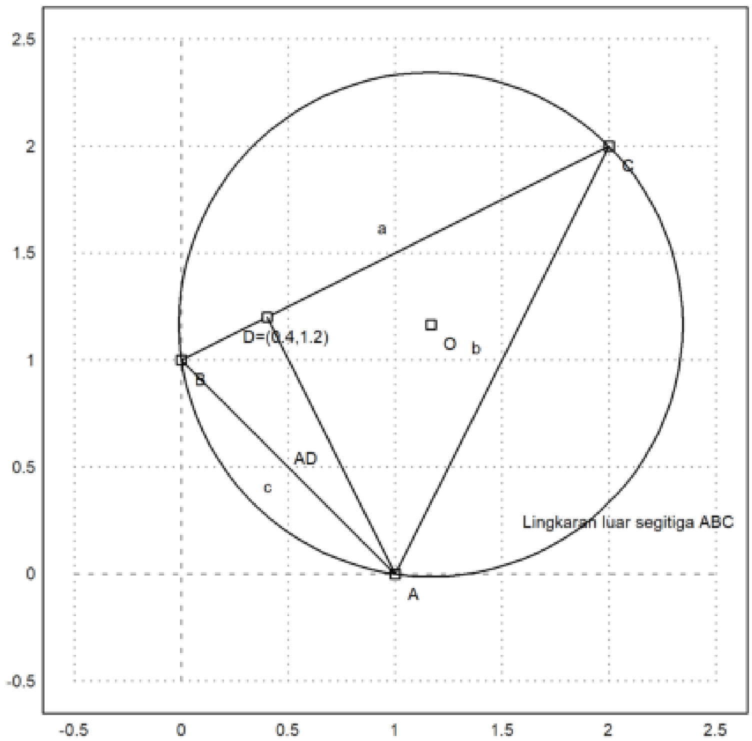
```
[1.16667,  1.16667]
```

```
>O, R
```

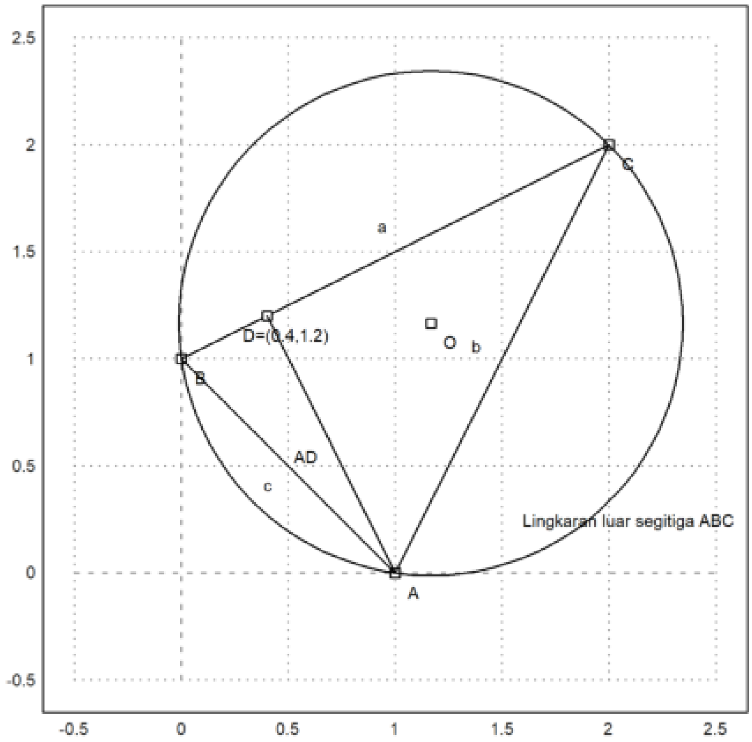
```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B): // garis bagi <ACB
```




```
>g=angleBisector(C,A,B): // garis bagi <CAB
```

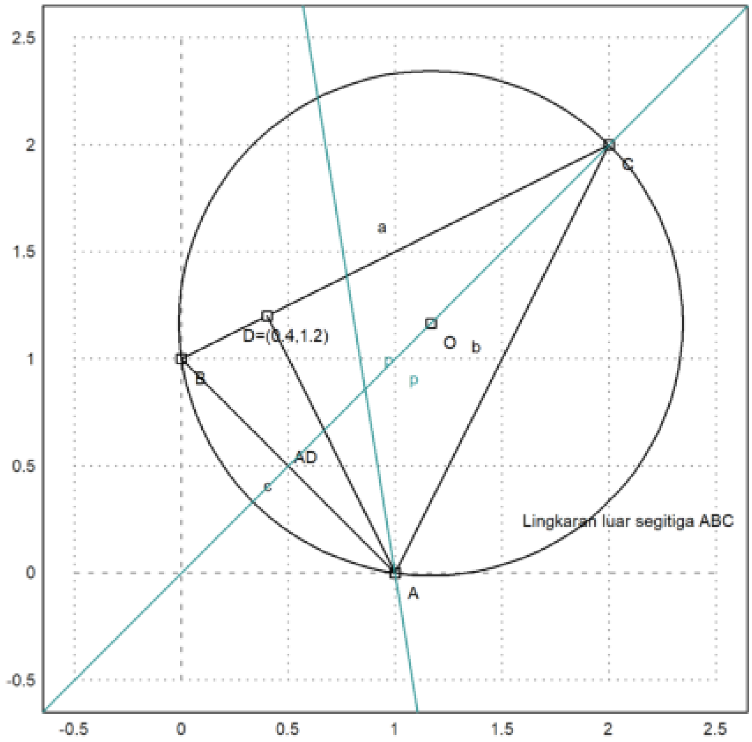



```
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

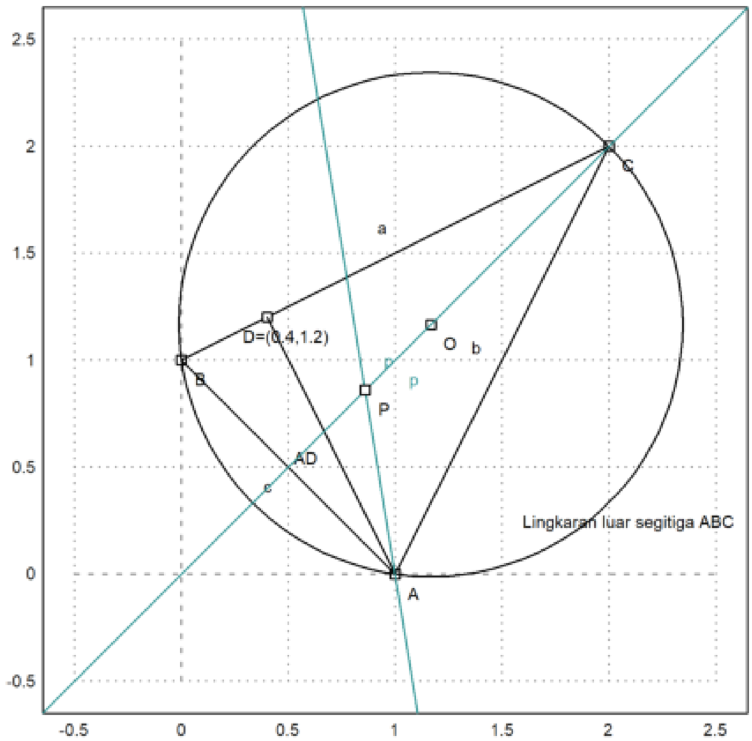
```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1): // gambar kedua garis bagi s
```



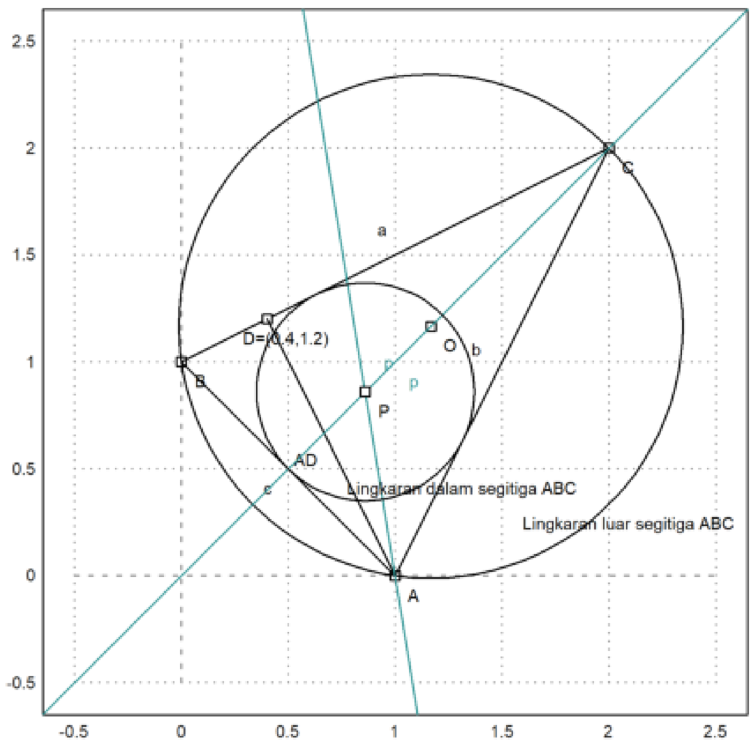

```
>plotPoint(P,"P"): // gambar titik potongnya
```



```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gamba
```



Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?
3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>s=lineThrough(B,C)
```

```
[-1,  2,  2]
```

```
>circleThrough(A,B,C)
```

```
[1.16667,  1.16667,  1.17851]
```

```
>m=circleWithCenter(P,r)
```

```
[0.86038,  0.86038,  0.509654]
```

```
>S=lineCircleIntersections(s,m)
```

```
[0.632456,  1.31623]
```

'lineCircleIntersections' digunakan untuk menghitung titik-titik perpotongan antara sebuah garis yang dinyatakan dengan parameter 's' dan lingkaran yang dinyatan dengan parameter 'm'
Jadi titik singgung garis BC dengan lingkaran dalam adalah titik[0.632456,1.31623]

```
>f=lineThrough(A,C)
```

```
[-2,  1,  -2]
```

```
>w=lineCircleIntersections(f,m)
```

```
[1.31623,  0.632456]
```

Jadi titik singgung garis AC dengan lingkaran dalam adalah titik [1.31623,0.632456]

```
>p=lineThrough(A,B)
```

```
[-1,  -1,  -1]
```

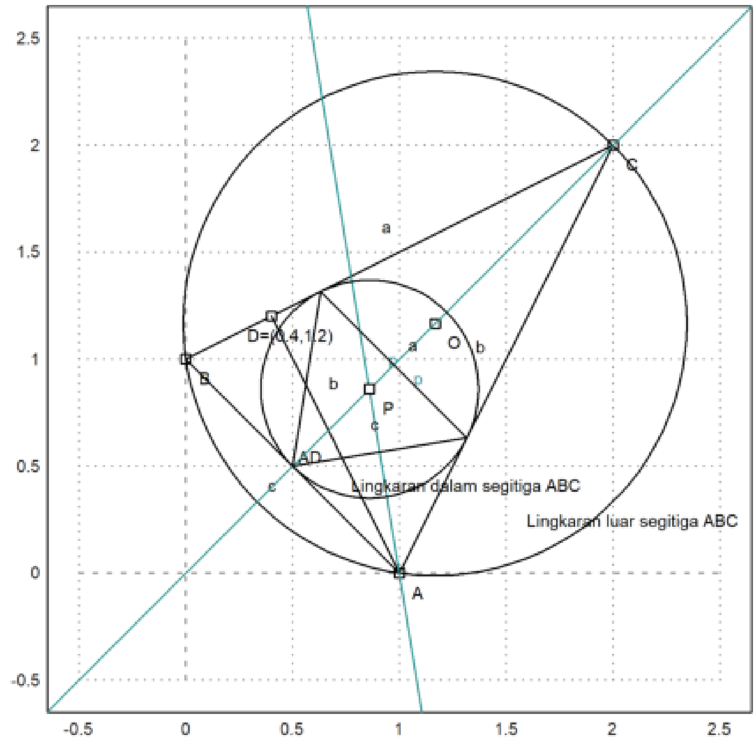
```
>j=lineCircleIntersections(p,m)
```

```
[0.5,  0.5]
```

Jadi titik singgung garis AB dengan lingkaran dalam adalah titik [0.5,0.5]
Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik singgung tersebut adalah(0.632456,1.31623)(1.31623,0.632456)(0.5

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Segitiga apakah itu?

```
>plotSegment(S,w,"a");
>plotSegment(S,j,"b");
>plotSegment(j,w,"c"):
```



Merupakan segitiga sama kaki. Karena terdapat titik yang sama antara beebrapa titik tersebut sehingga dapat disimpulkan segitiga sama kaki.

3. Hitung luas segitiga tersebut.

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} alas.tinggi$$

```
Variable or function o not found.
Error in:
getCircleRadius(o) ...
                 ^
```

4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

```
>P,r
```

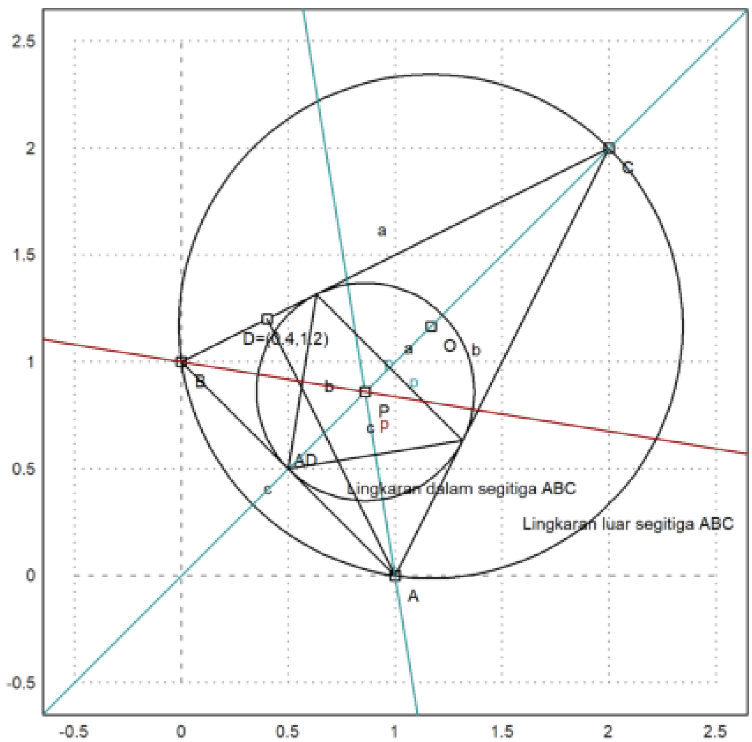
```
[0.86038,  0.86038]
Space between commands expected!
Found: r (character 114)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
```

```
P,r ...
  ^
```

```
>d=angleBisector(A,B,C)
```

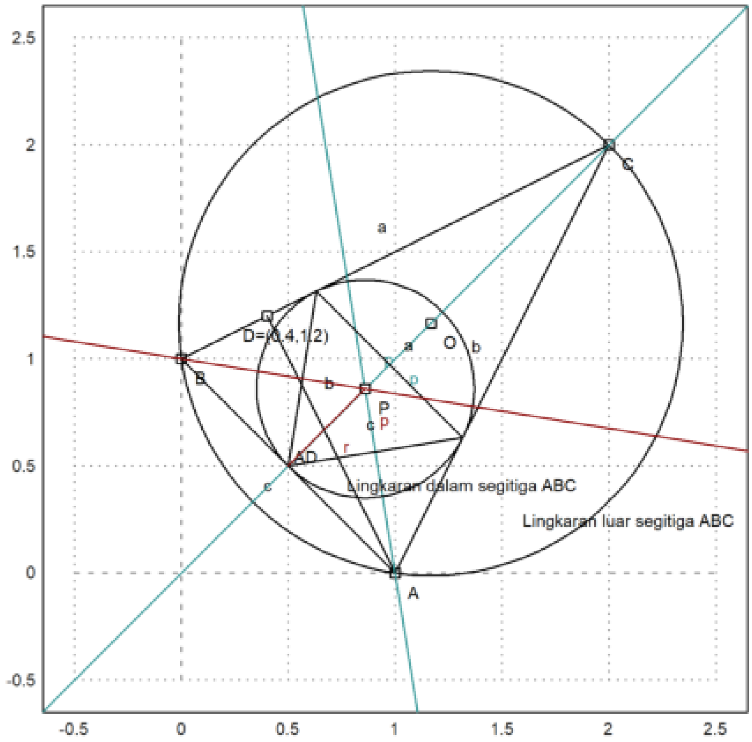
```
[-0.264911,  -1.63246,  -1.63246]
```

```
>color(2); plotLine(d):
```



5. Gambar jari-jari lingkaran dalam

```
>plotSegment(P,j,"r"):
```



Menggunakan titik j karena titik tersebut merupakan titik tengah yang diambil dari sebuah segitiga tersebut jika ditarik dari garis sumbu.

6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

```
>g=distance(j,P)
```

```
0.509653732104
```

```
>h=distance(C,O)
```

```
1.17851130198
```

```
>Lcil= pi*g^2
```

```
0.81601903655
```

```
>Lsar = pi*h^2
```

```
4.36332312999
```

Contoh 2 : Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, sekarang kita dapat menggunakan perhitungan simbolik.

1

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi garis dan lingkaran berfungsi sama seperti fungsi Euler, namun menyediakan komputasi simbolik.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persama
```

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A
```

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
  2   6
[-, -]
  5   5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran m
```

$$\left[\frac{7}{6},\frac{7}{6},\frac{5}{3\,\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // ti
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6},\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

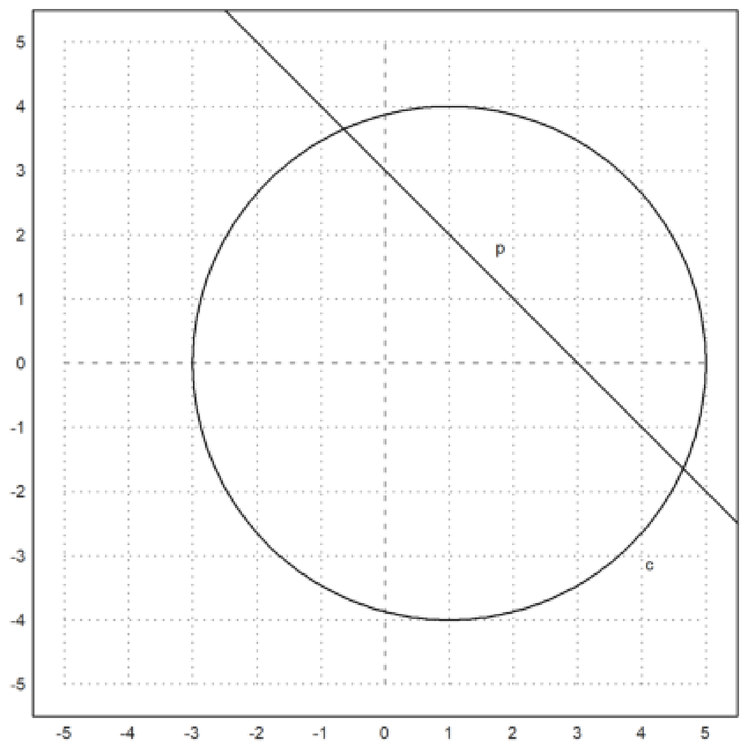
```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Perpotongan Garis dan Lingkaran

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l):
```

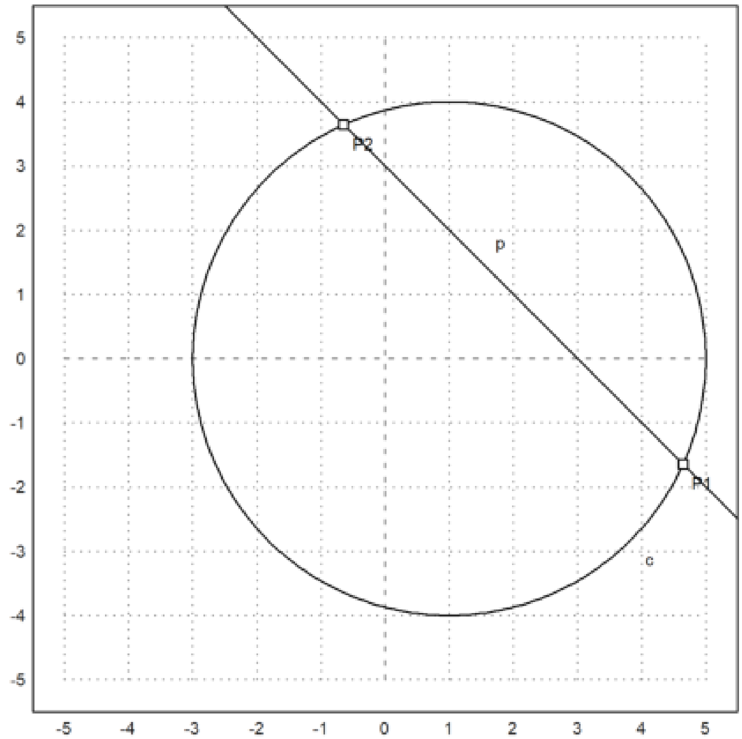


Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2, f
```

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Hal yang sama di Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan ga
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2,1-\sqrt{7}\right],\left[2-\sqrt{7},\sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan menunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

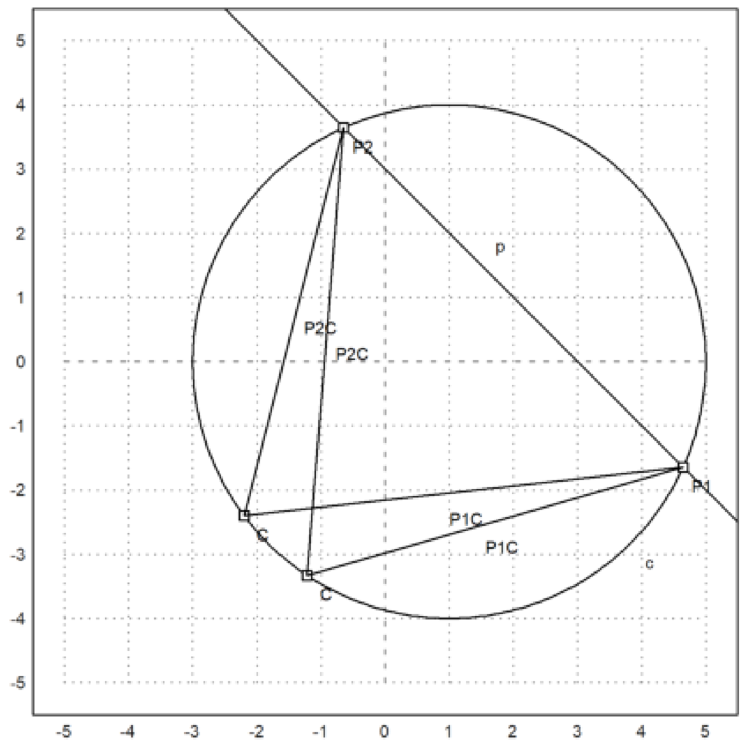
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

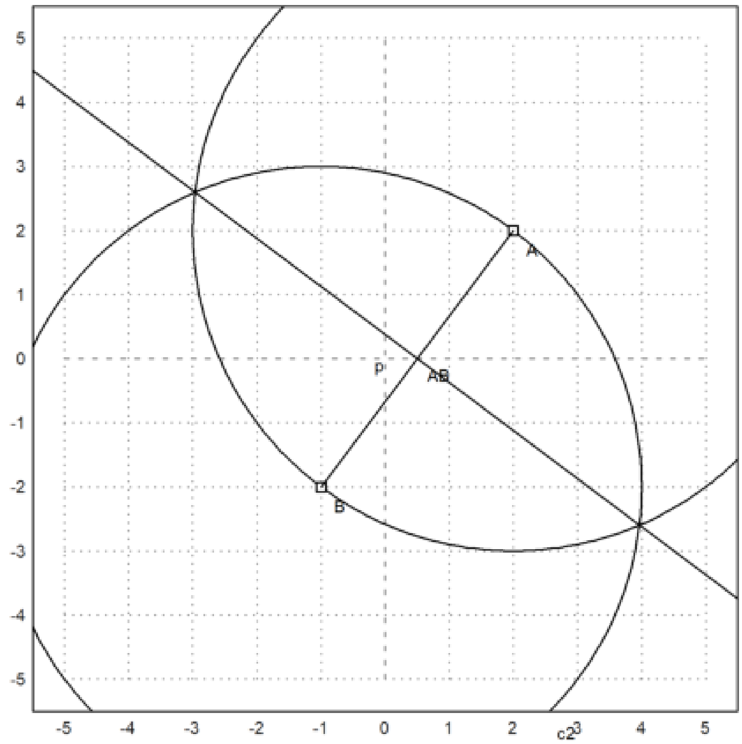
```
>insimg;
```



Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:
1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Selanjutnya kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tapi kita bisa menyederhanakannya jika kita mencari y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + {b_2}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {a_1}^2}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan garis tengah tegak lurus, yang dihitung dengan cara yang sangat berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}\times\frac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}=-1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{dengan } s=(a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

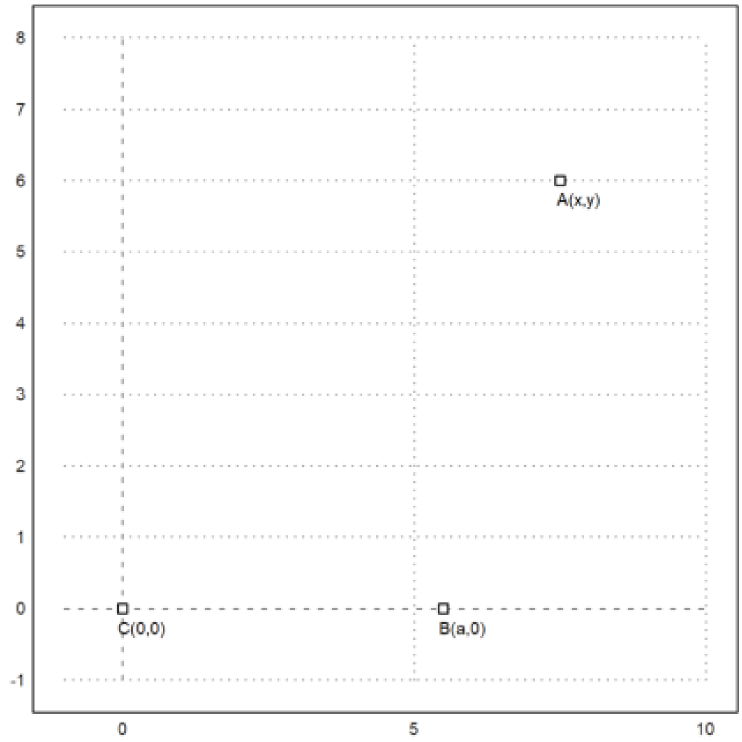
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\times y.$$

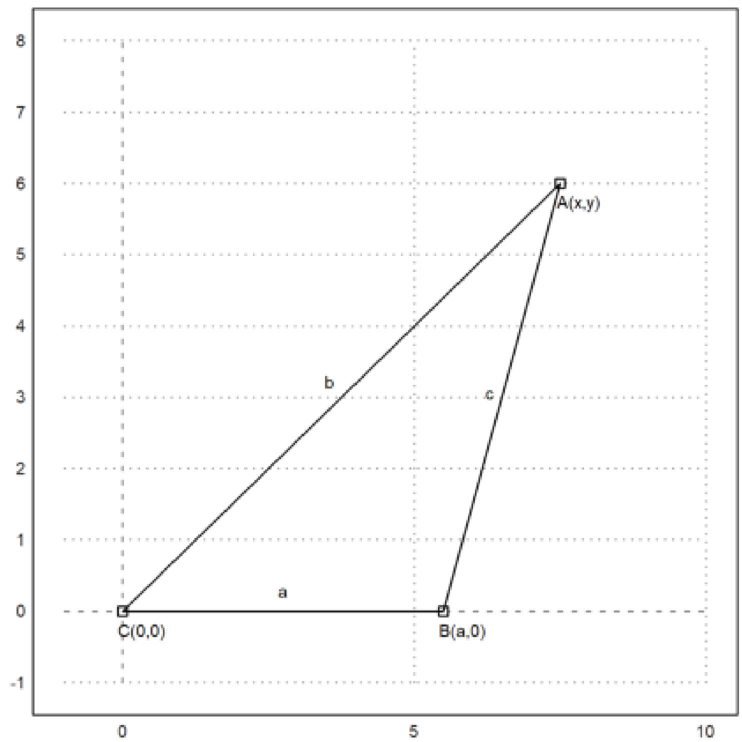
Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2+y^2=b^2,\quad (x-a)^2+y^2=c^2.$$

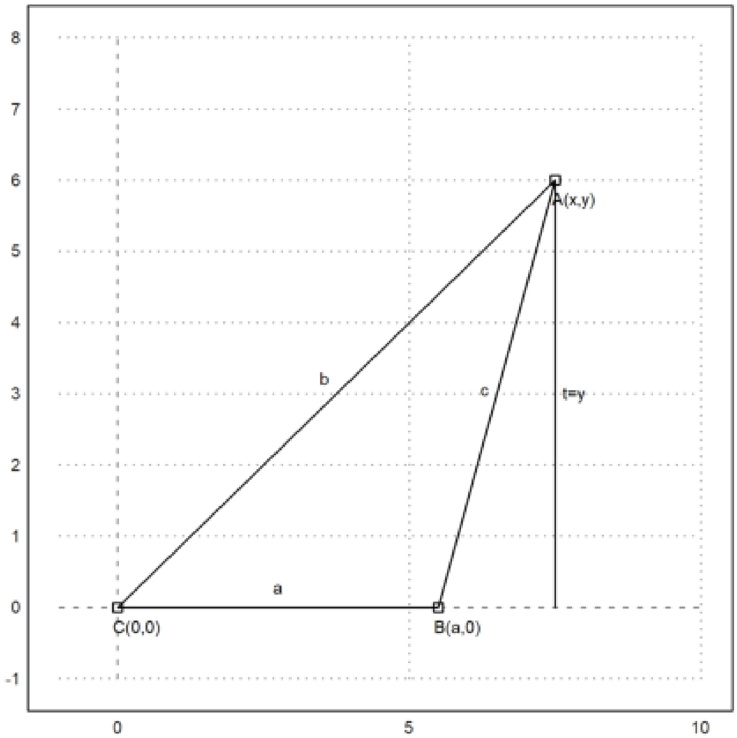
```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)"):
```




```
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25):
```



```
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

[]

Ekstrak solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2)) ...
                        ^
```

Kami mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a,b,[1,0,4]\right)=\frac{a\left|ysol\right|}{2}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

$$Luas=\left|ysol\right|$$

Tentu saja, setiap segitiga siku-siku adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
    useglobal; return a*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
        ^
```

Dan jelas juga bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang
```

```
Variable or function ysol not found.
Error in expression: 3*abs(ysol)/2
%ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Kasus umum juga berhasil.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
                              ^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...
                         ^
```

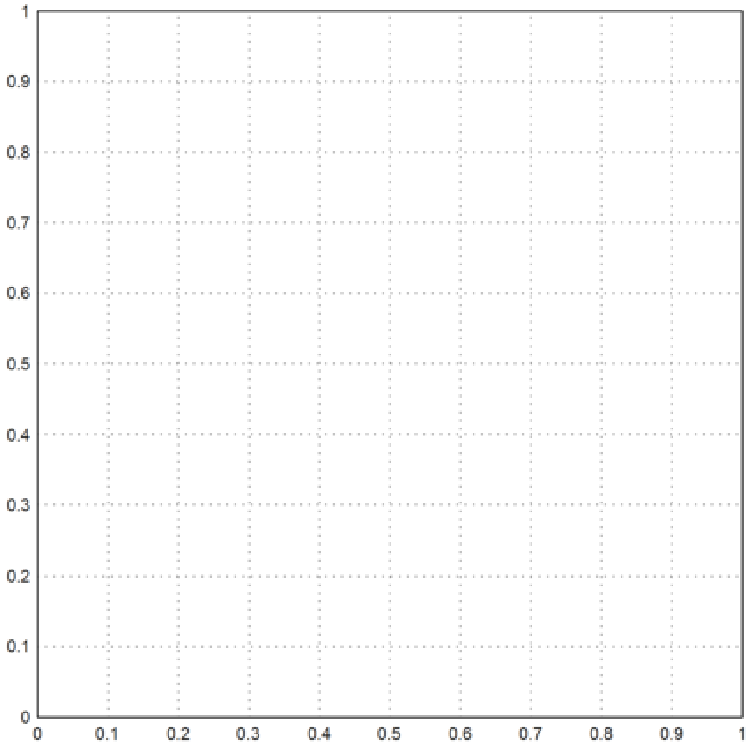
Dan buatlah fungsinya.

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1
```

$$0$$

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 sampai 4. Diketahui bahwa kita memperoleh elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum elips ini, yaitu.

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

dimana (xm,ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)
```

$$\frac{a^2}{d^2}$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Jadi luas segitiga dengan a+b+c=d adalah maksimal jika segitiga tersebut sama sisi. Kami ingin memperolehnya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{a\,ysol^2}{2}=0,0=0\right]$$

Kita mendapatkan nilai minimum yang dimiliki oleh segitiga dengan salah satu sisinya 0, dan solusinya a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$[[a = 0, b = \%r_1]]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... la,    diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la]) ...
                                                     ^
```

Kita bisa membuat plot situasinya

Pertama atur poin di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...
                     ^
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[a, 0]$$

Kemudian atur rentang plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```

```
Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
... otPoint(mxmeval("C"),"C"); plotPoint(mxmeval("A"),"A"): ...
                                                   ^
```

Plot segmennya.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```

```
Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B ...
                        ^
```

Hitung garis tengah tegak lurus di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat lingkarannya.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kita mendapatkan rumus jari-jari lingkaran luar.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{\sqrt{a_2^2+a_1^2}\,\sqrt{a_2^2+a_1^2-2\,a\,a_1+a^2}}{2\,|a_2|}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```

```
Variable a2 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in ^
Error in expression: [a/2,(a2^2+a1^2-a*a1)/(2*a2)]
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmev ...
             ^
```

Dengan menggunakan geometri, kita memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=2r$$

untuk radius. Kita bisa cek, apakah ini benar adanya pada Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$\left[\frac{a_2^2+a_1^2}{a_2^2},0,\frac{16\,(a_2^2+a_1^2)}{a_2^2}\right]$$

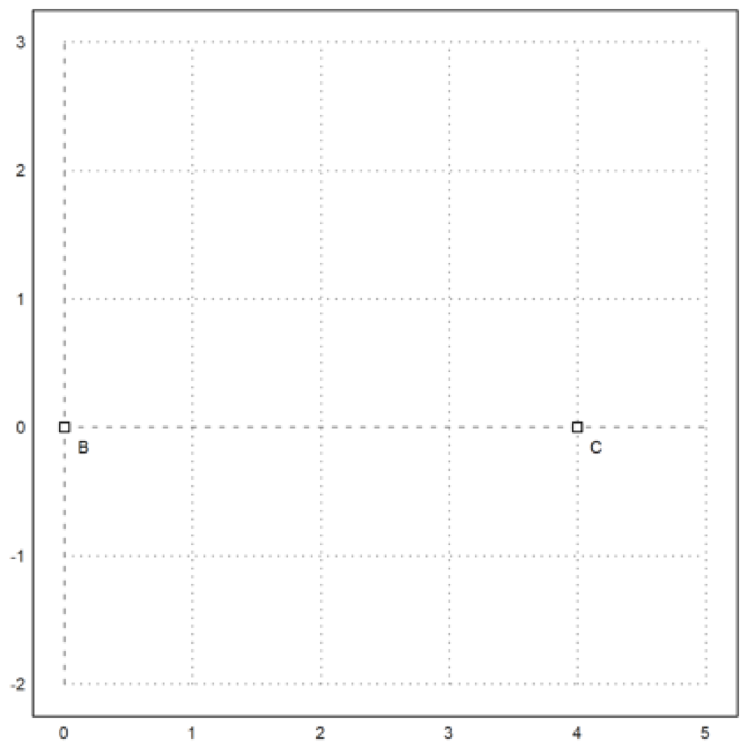
Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, antara lain ortocenter, sirkumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasinya, kita menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2]:
```

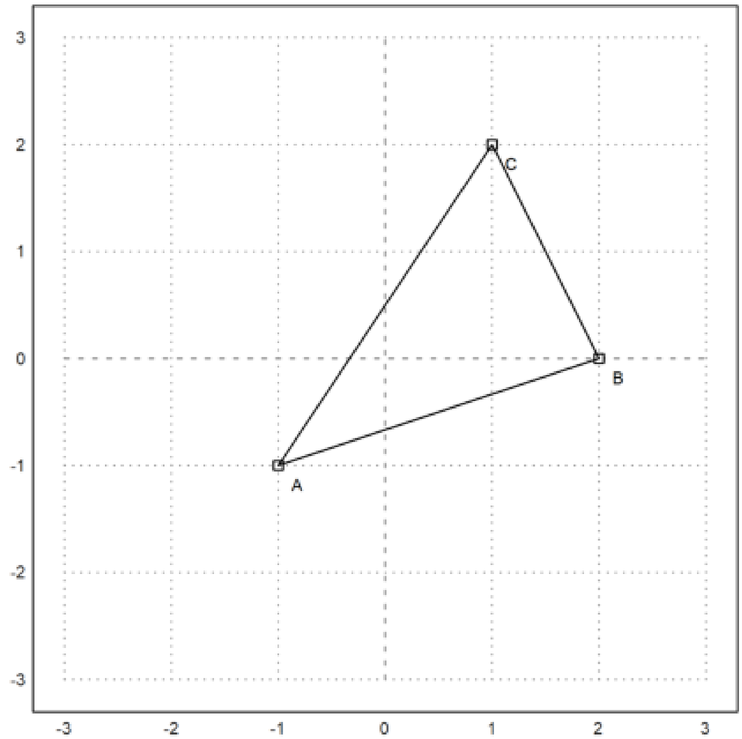


Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menjumlahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut luas segitiga menggunakan rumus determinan. Tentu saja kami harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan dapatkan juga rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari Hesseform. Memasukkan titik akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung lingkaran luar ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

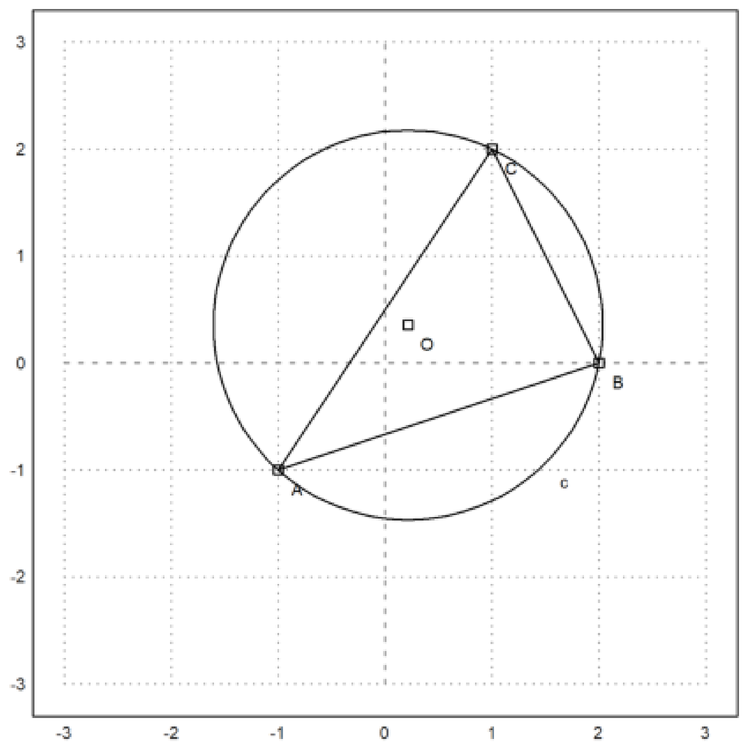
$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U bersifat simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (ortocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7}\right]$$

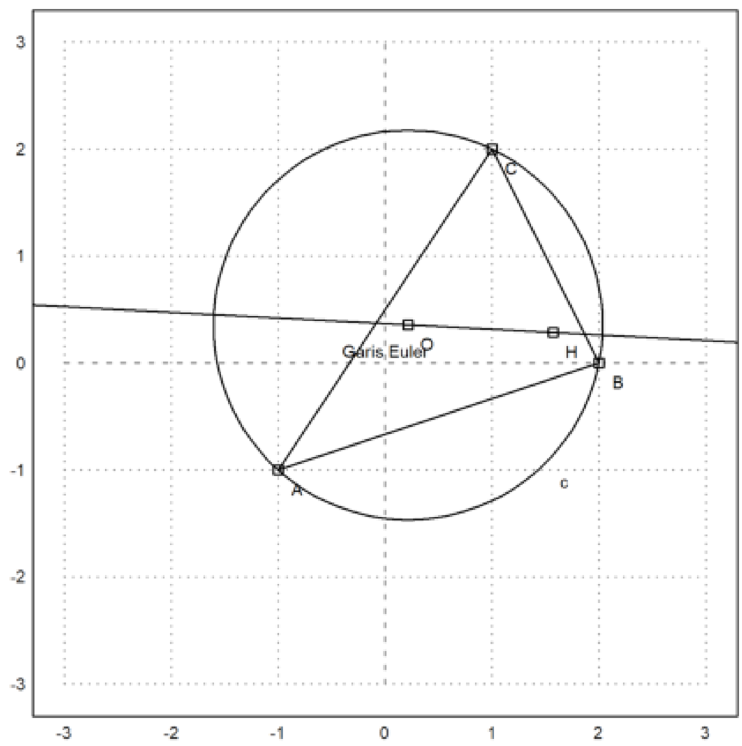
Sekarang kita dapat menghitung garis segitiga Euler.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

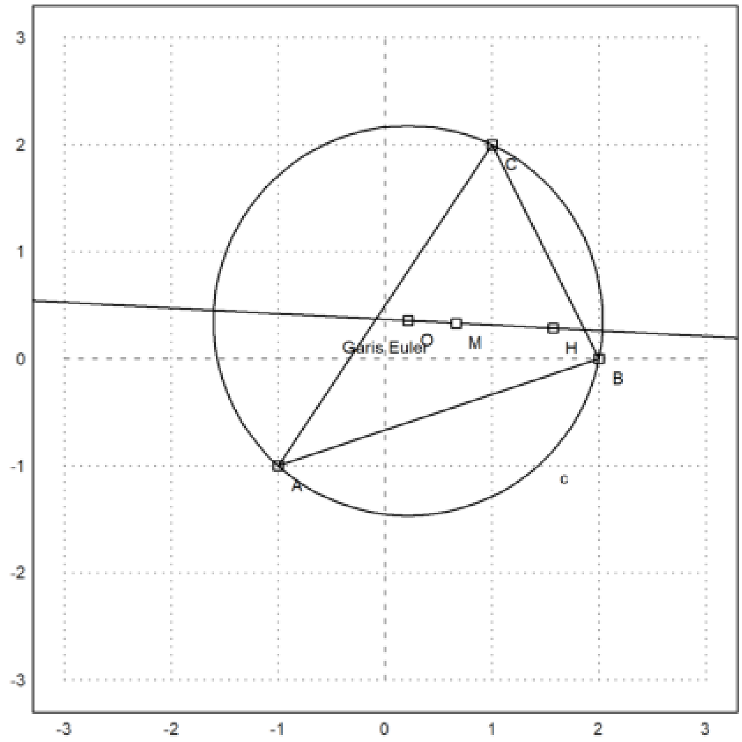


Pusat gravitasi seharusnya berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teorinya memberitahu kita MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsinya mencakup fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

The equation for the center of the incircle is not very nice.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14}, \frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

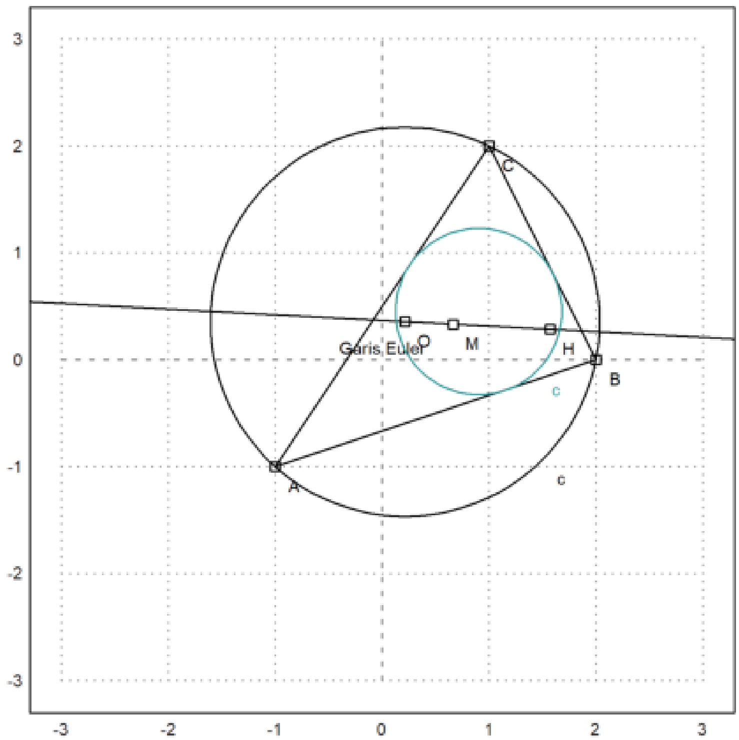
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

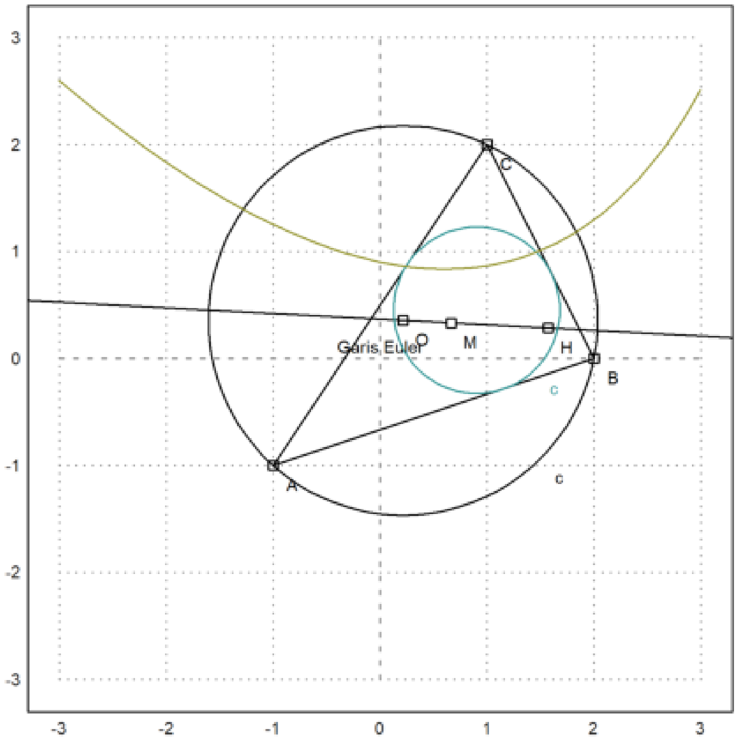
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



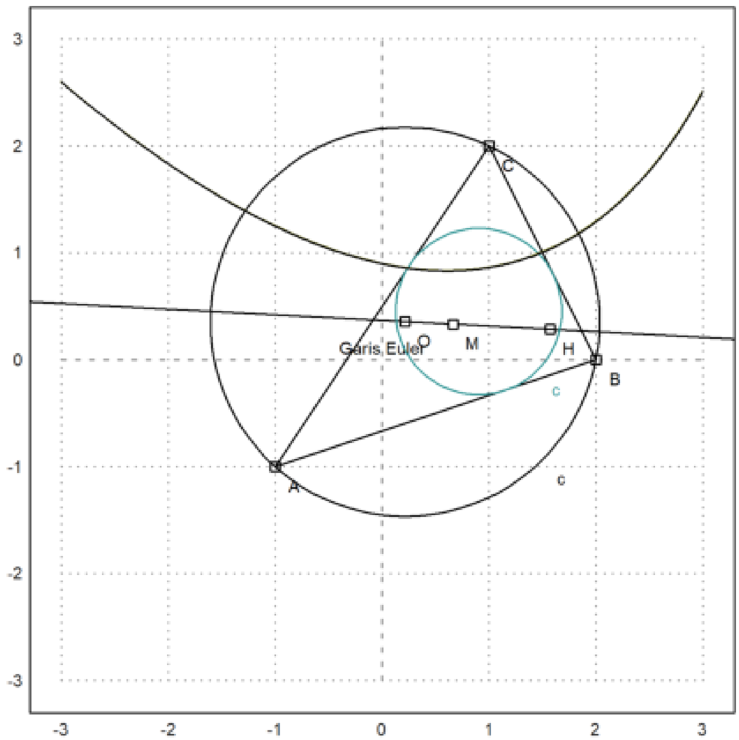
Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y
```

```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                      y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah
maksimal: akar[1]
Menambahkan solusi pertama pada plot menunjukkan, bahwa itu memang jalan yang kita cari.
Teorinya memberitahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan k
```

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10},\frac{20-\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Divine Proportions", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadran dan penyebaran. Dengan menggunakan hal ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

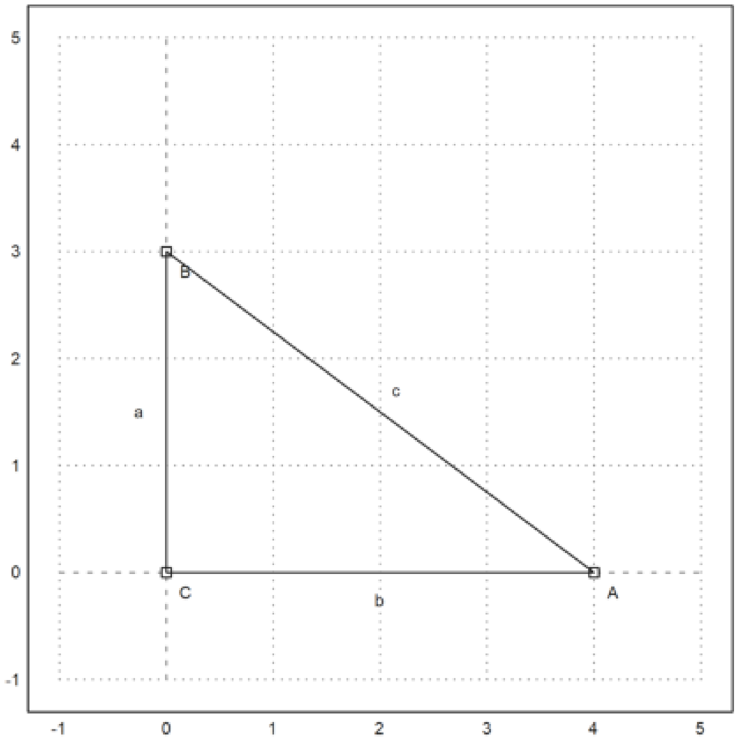
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keunggulan utama trigonometri rasional yaitu perhitungan hanya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah perhitungan rasional simbolik seringkali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga siku-siku dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

dimana wa adalah sudut di A. Cara umum untuk menghitung sudut ini adalah dengan mengambil invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara kasar.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.
Gagasan pertama tentang trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanyalah jarak yang dikuadratkan. Di bawah ini, a, b, dan c menyatakan kuadran sisi-sisinya.
Teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

Pengertian trigonometri rasional yang kedua adalah penyebaran. Penyebaran mengukur pembukaan antar garis. Nilainya 0 jika garisnya sejajar, dan 1 jika garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat sinus sudut antara dua garis.
Luas garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

dimana a dan c adalah kuadran suatu segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya berada di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja ini lebih mudah dihitung daripada sudutnya. Namun Anda kehilangan properti bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.
Tentu saja, kita dapat mengonversi nilai perkiraan sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c + b - a)^2 = 4bc\,(1 - s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran sisi-sisi segitiga, dan sa adalah jarak di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berhadapan dengan sudut A.
Hukum-hukum ini diterapkan dalam file geometri.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[\left(bb - aa + \frac{7}{6}\right)^2, \left(bb - aa + \frac{7}{6}\right)^2, \left(bb - aa + \frac{5}{3\sqrt{2}}\right)^2\right] = \left[\frac{14\,bb\,(1 - saa)}{3}, \frac{14\,bb\,(1 - saa)}{3}, \frac{5\,2^{\frac{3}{2}}\,bb\,(1}{3}\right.$$

In our case we get

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan hukum silang ini untuk mencari penyebaran di A. Untuk melakukannya, kita membuat hukum silang untuk kuadran a, b, dan c, dan menyelesaikannya untuk penyebaran sa yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukannya dengan tangan dengan mudah, tapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah mendapatkannya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

Kami sudah mengetahui hal ini. Pengertian penyebaran merupakan kasus khusus dari hukum silang.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk persamaan umum a,b,c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung penyebaran sudut suatu segitiga dengan mengetahui kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[\left[\frac{168\, bb\, x + 36\, bb^2 + (-72\, aa - 84)\ bb + 36\, aa^2 - 84\, aa + 49}{36}, \frac{168\, bb\, x + 36\, bb^2 + (-72\, aa - 84)\ bb + 36}{36}\right.\right.$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometri.e Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi-sisinya

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

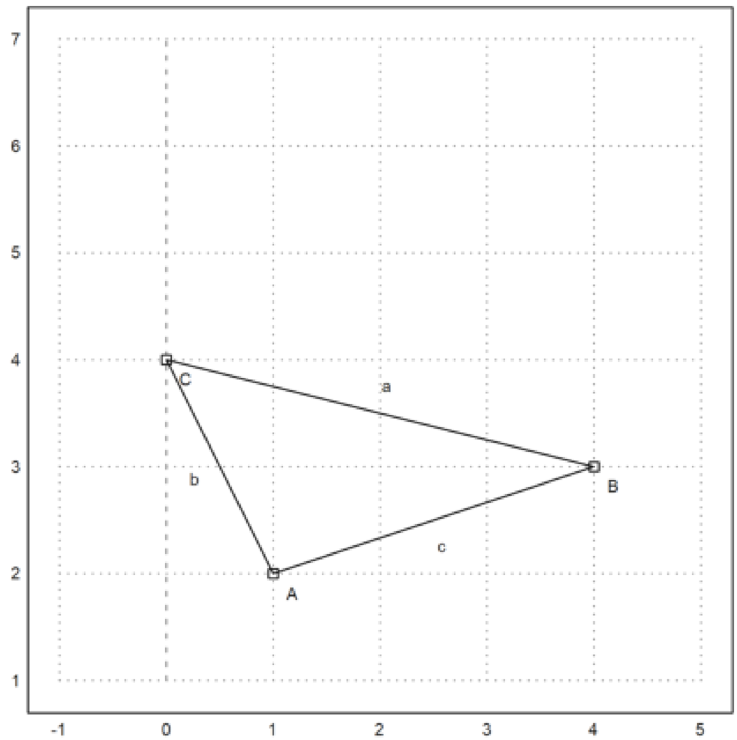
```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

```
67°47'32.44''
```

Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh lebih lanjut.
Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Dengan menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan fungsi jarak file Euler untuk geometri. Fungsi jarak menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memuat fungsi kuadran antara dua titik.
Pada contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga tersebut bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan perkalian titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan floating point.

$$A =< 1,2 > \quad B =< 4,3 >, \quad C =< 0,4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4,1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3,-1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos\beta$$

$$\cos\angle ABC = \cos\beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Yaitu, fungsi penyebaran yang didefinisikan dalam "geometri.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Itu menyelesaikan suku sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Kebanyakan siswa tidak dapat melakukan hal ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita mendapatkan sebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha pada sisi a. Ingat itu

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

Menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan sebaran.
image: (20) Rational_Geometry_CaR.png
Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga tersebut. Jangan lupa, bahwa kita sedang berhadapan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan biasa memberikan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

The Heron Formula

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung penyebaran di B untuk sebuah segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang benar, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}{16}$$

$$\frac{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}{16}$$

Aturan Penyebaran Tiga Kali Lipat

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut yang sama. Namun, tiga spread segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc+sb+sa)^2 = 2\ \left(sc^2+sb^2+sa^2\right) + 4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut mana pun yang besarnya 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Sejak menyebarnya

$$\alpha, \pi-\alpha$$

sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga benar, jika

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Karena penyebaran sudut negatifnya sama, maka aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Misalnya, kita dapat menghitung penyebaran sudut 60°. Ini 3/4. Namun persamaan tersebut memiliki solusi kedua, dimana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x = \frac{3}{4}, x = 0\right]$$

Penyebaran 90° jelas sama dengan 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, penyebarannya menyelesaikan persamaan penyebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$[x = 1 - y]$$

Karena penyebaran 180°-t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika salah satu sudut adalah jumlah atau selisih dua sudut lainnya.
Sehingga kita dapat mencari penyebaran sudut dua kali lipat tersebut. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami menjadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]
```

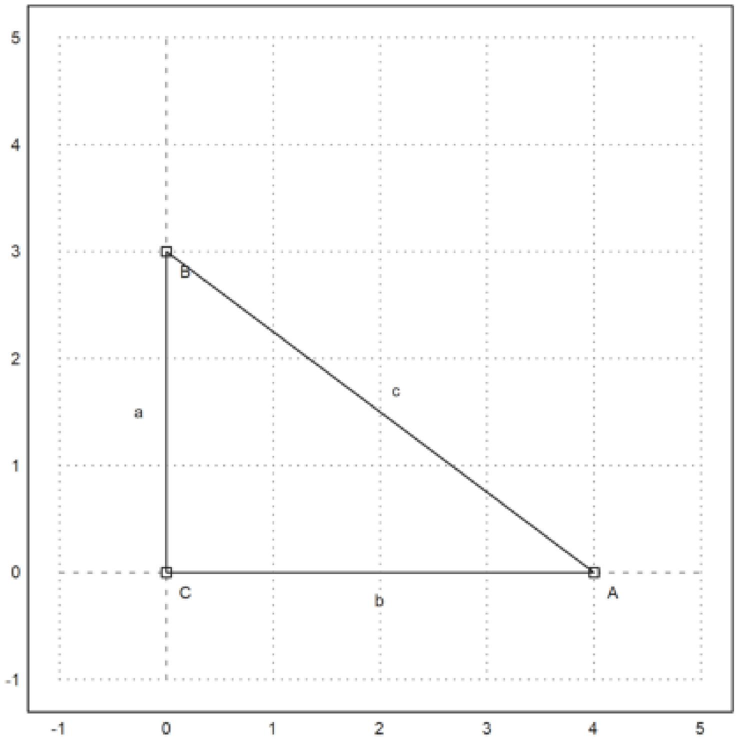
$$\left[x = 4\,a - 4\,a^2, x = 0\right]$$

```
- 4 (a - 1) a
```

Pembagi Sudut

Inilah situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Namun kita ingin menyelesaikannya secara umum a,b,c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibagi dua di A, menggunakan rumus penyebaran tiga kali lipat.
Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut membagi dua 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a},x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kita dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebarannya ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

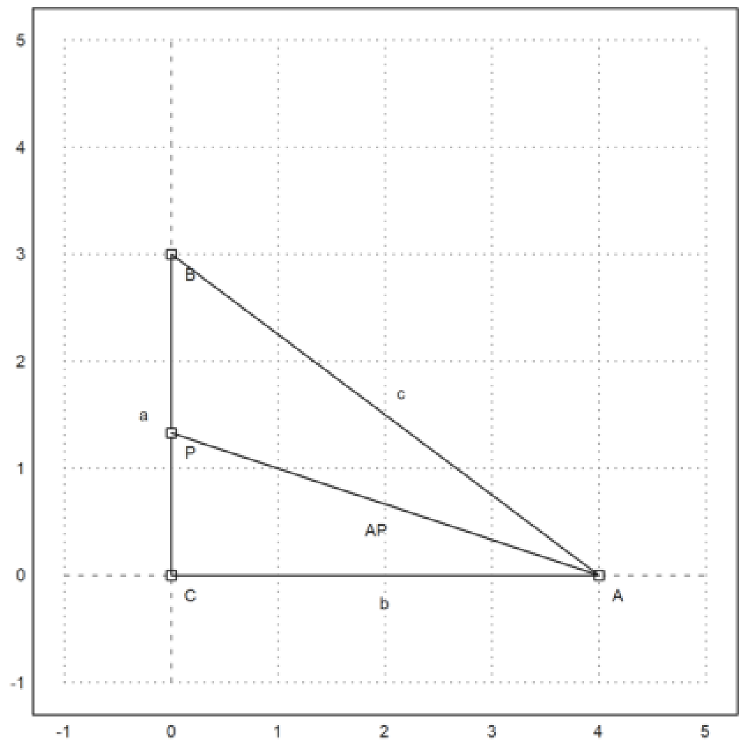
```
18°26'5.82''
```

Titik P merupakan perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita menghitung panjang garis bagi AP.
Kita menggunakan teorema sinus pada segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku di segitiga mana pun. Jika digabungkan, maka hal ini akan diterjemahkan ke dalam apa yang disebut dengan “hukum penyebaran”

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

dimana a,b,c menunjukkan qudrance.
Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita memperolehnya bisa/1=b/(1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran dari garis bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga bisa menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\,\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita peroleh dengan rumus trigonometri.

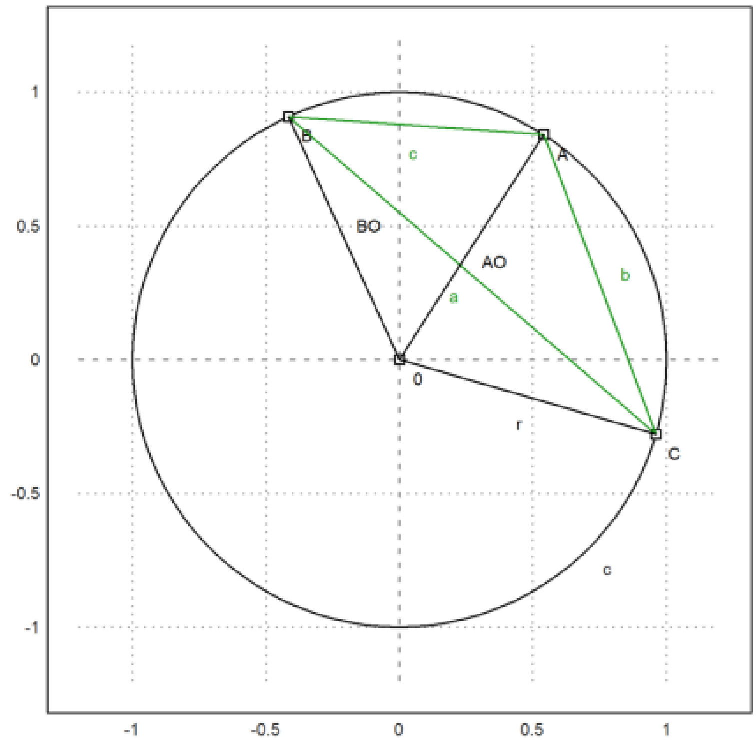
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akord

Lihatlah situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a")
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus jari-jari kuadrat dari perilingkaran dalam kuadran sisi-sisinya.
Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasil untuk poin kita A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jarinya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

```
1
```

Faktanya, penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut tali busur.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Faktanya, penyebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut tali busur b adalah setengah sudut pusatnya.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

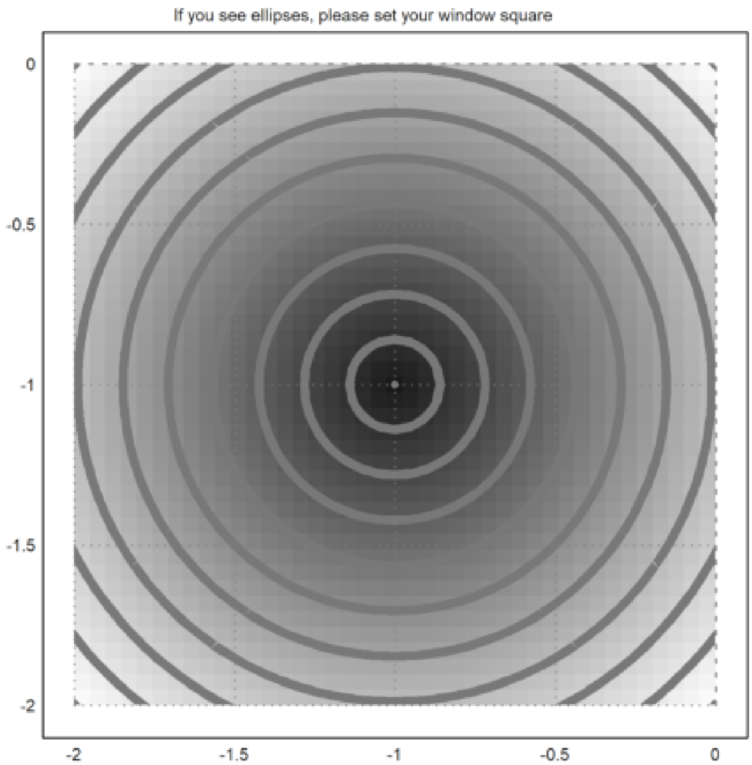
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan pendahuluan

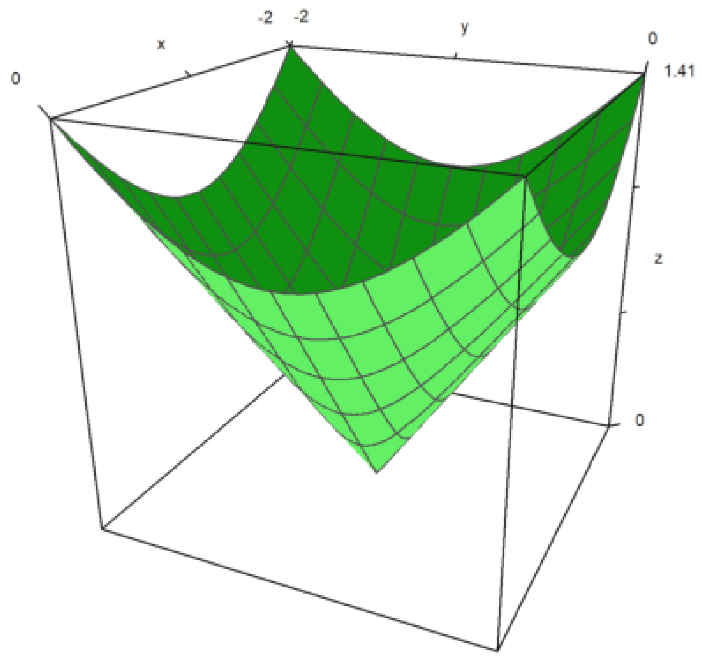
Fungsi yang, ke titik M pada bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, mempunyai garis datar yang cukup sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

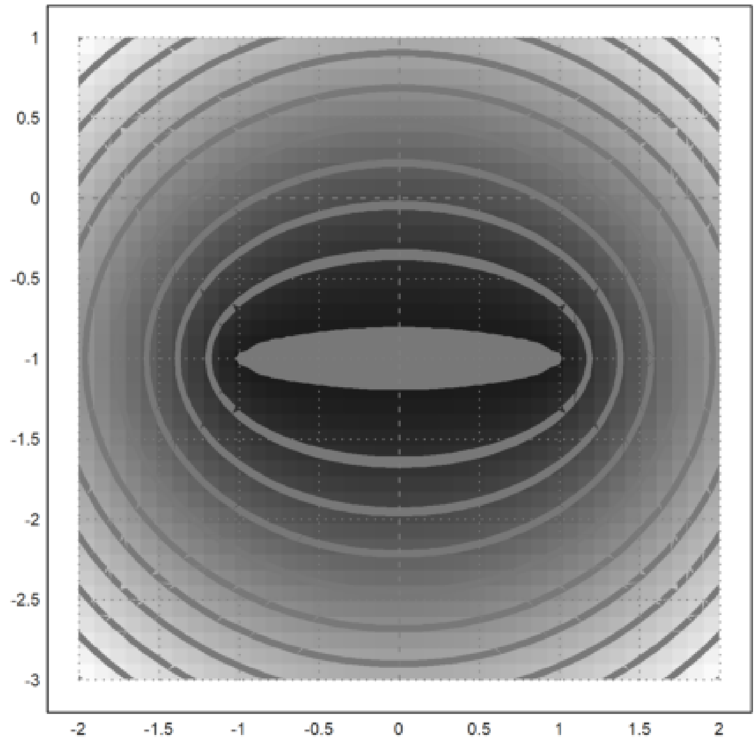


Tentu saja minimum 0 dicapai di A.

Dua poin

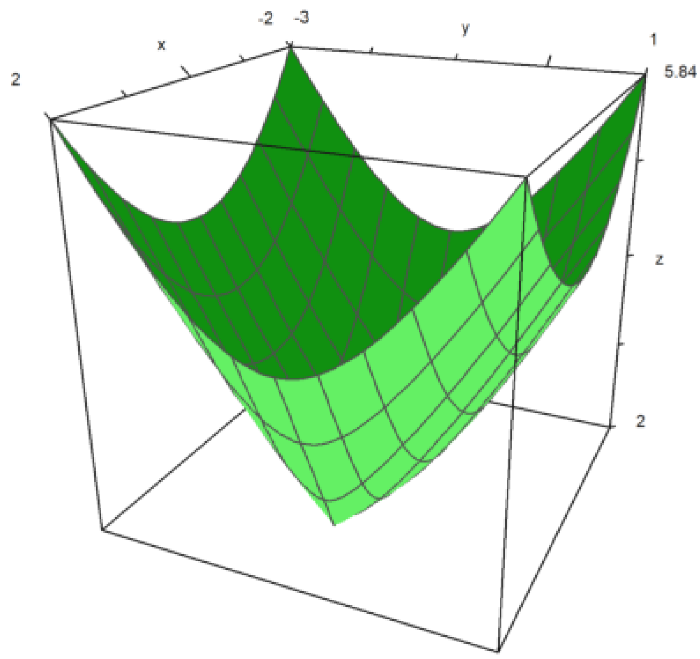
Sekarang kita lihat fungsi MA+MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Merupakan "fakta yang diketahui" bahwa kurva tingkat berbentuk elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali AB minimum yang konstan pada ruas [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



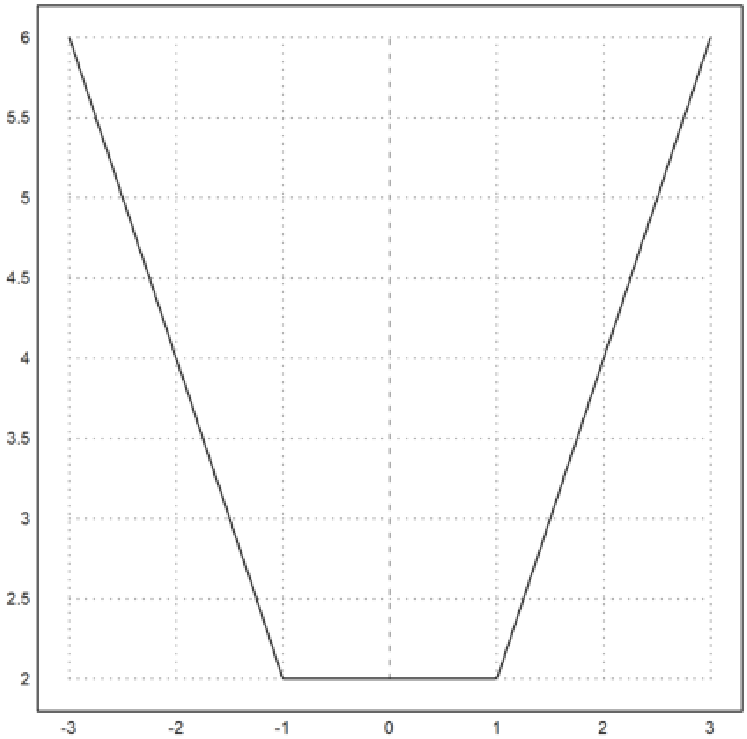
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

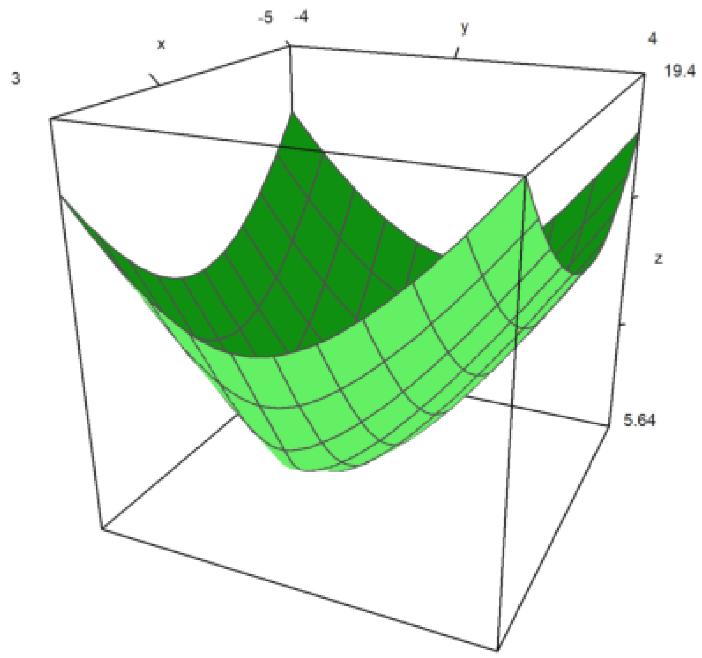
```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



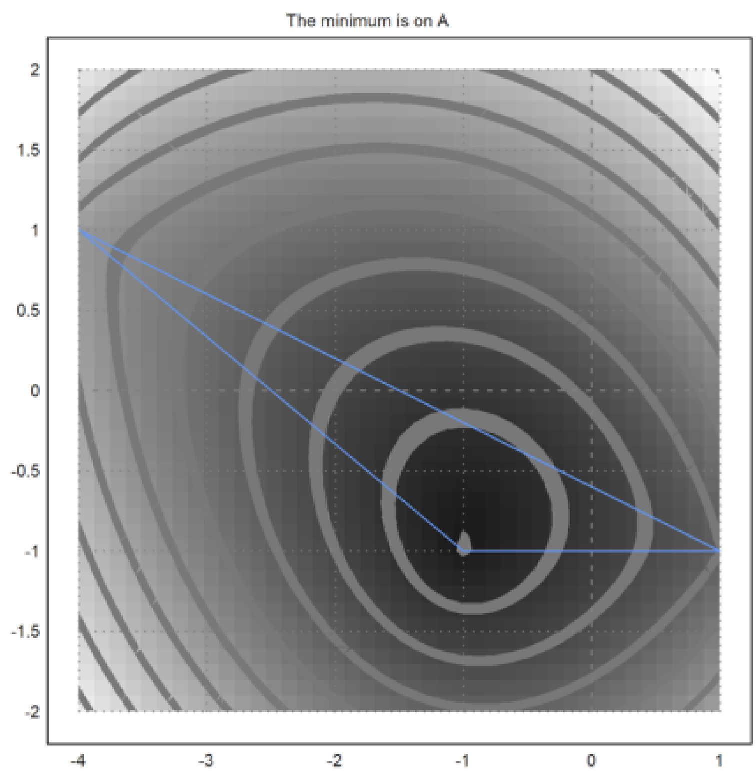
Tiga poin

Kini segalanya menjadi lebih sederhana: Tidak diketahui secara luas bahwa MA+MB+MC mencapai nilai minimumnya pada satu titik pada bidang tersebut, namun untuk menentukannya tidaklah mudah:
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka sudut minimum dicapai pada titik tersebut (katakanlah AB+AC).
Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

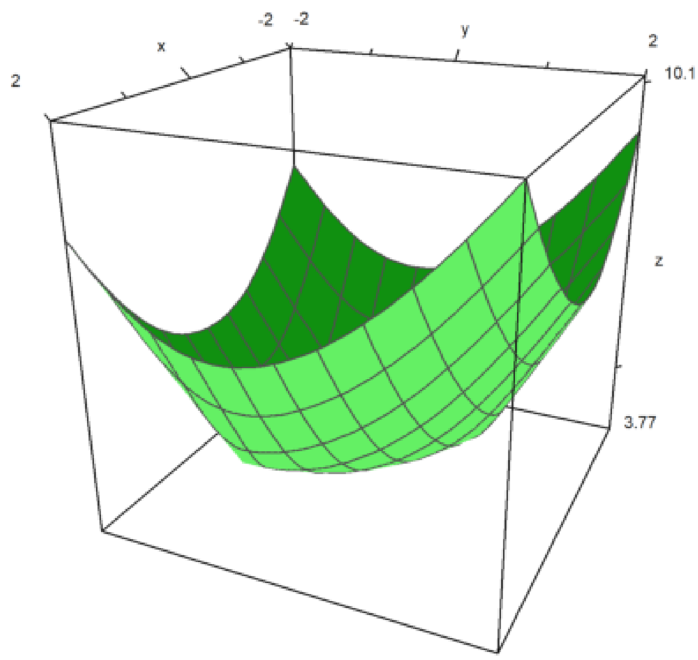



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

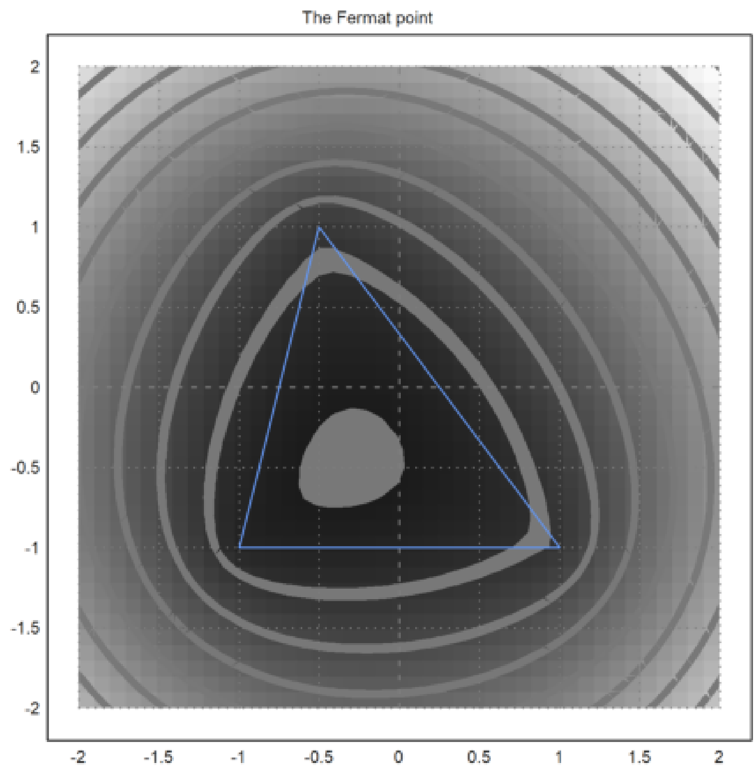


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, maka sudut minimum ada pada titik F di bagian dalam segitiga, yaitu satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing sudutnya 120°):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```




```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point"
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

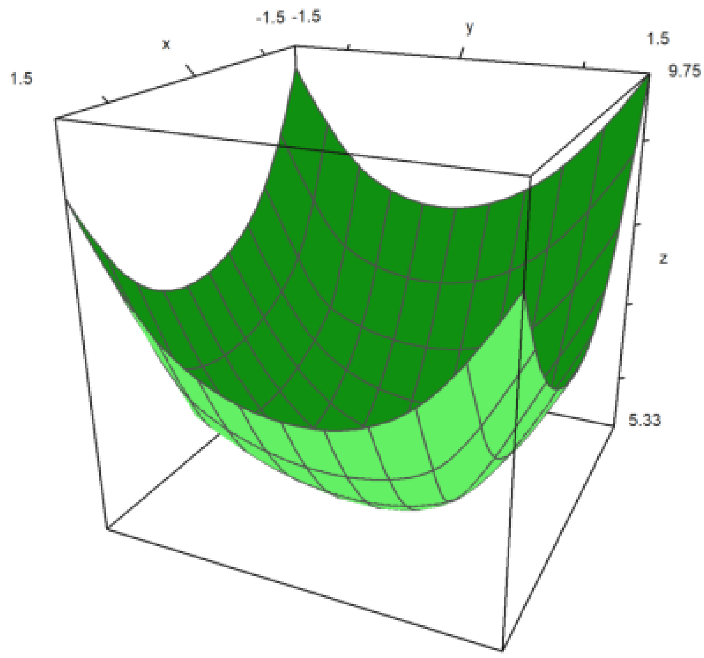


Merupakan kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu soft tertulis di Java yang memiliki instruksi "garis kontur"...
Semua hal di atas ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para penggila lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sehingga FA+FB+FC minimal disebut titik Fermat segitiga. Namun nampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Pokoknya tradisinya adalah memperhatikan hal ini F...

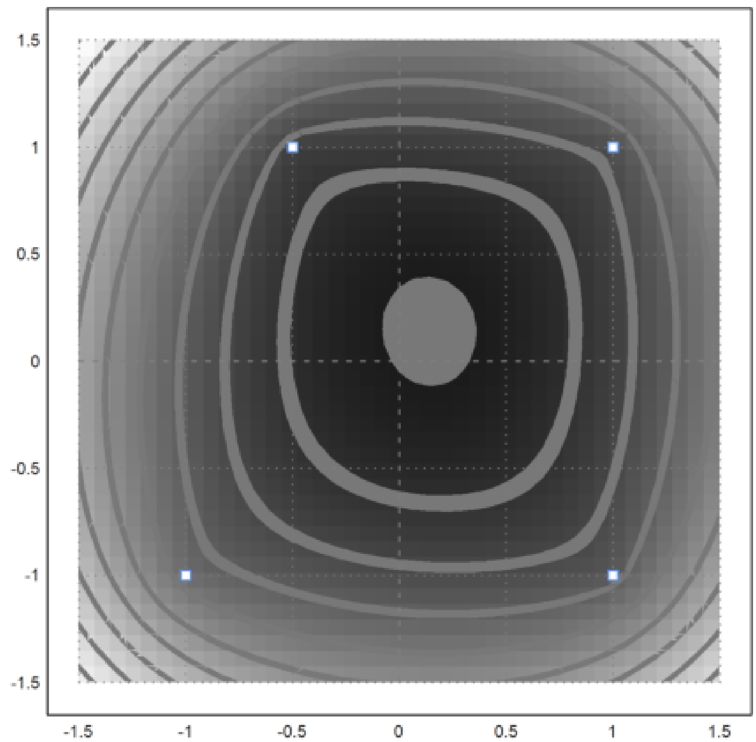
Empat poin

Langkah selanjutnya adalah menambahkan poin ke-4 D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakanlah Anda seorang operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus memasang antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



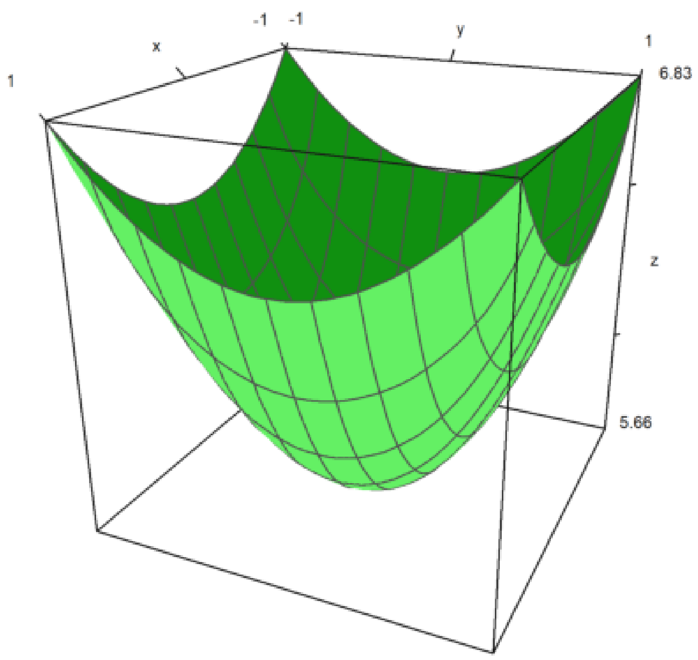
Masih ada nilai minimum dan tidak tercapai di simpul A, B, C, atau D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

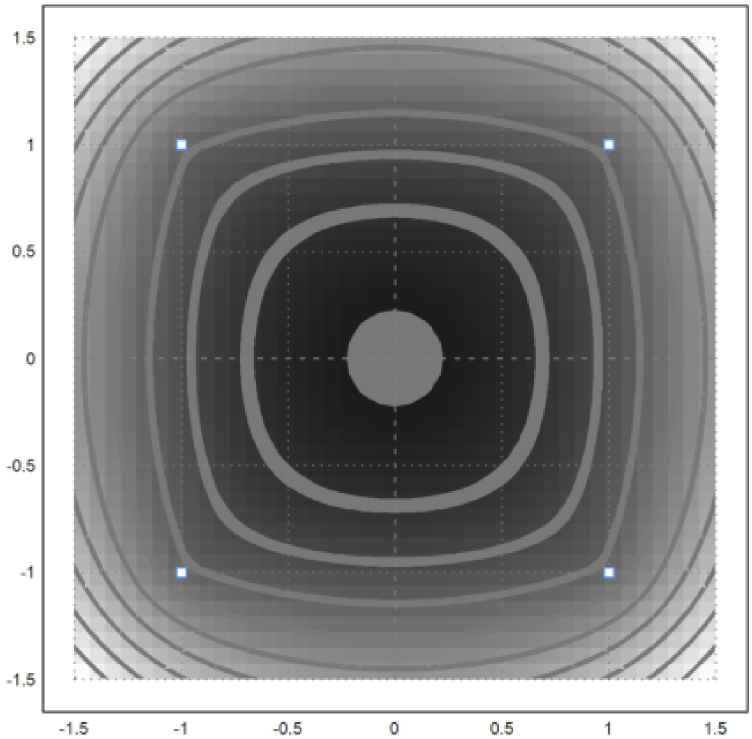
```
[0.142858,  0.142857]
```

Nampaknya dalam hal ini koordinat titik optimal bersifat rasional atau mendekati rasional...
Sekarang ABCD adalah persegi, kita berharap titik optimalnya adalah pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama kita hitung jari-jari bola.

Jika diperhatikan gambar di bawah, terlihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometri.e Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

[- a, - 1, 0]

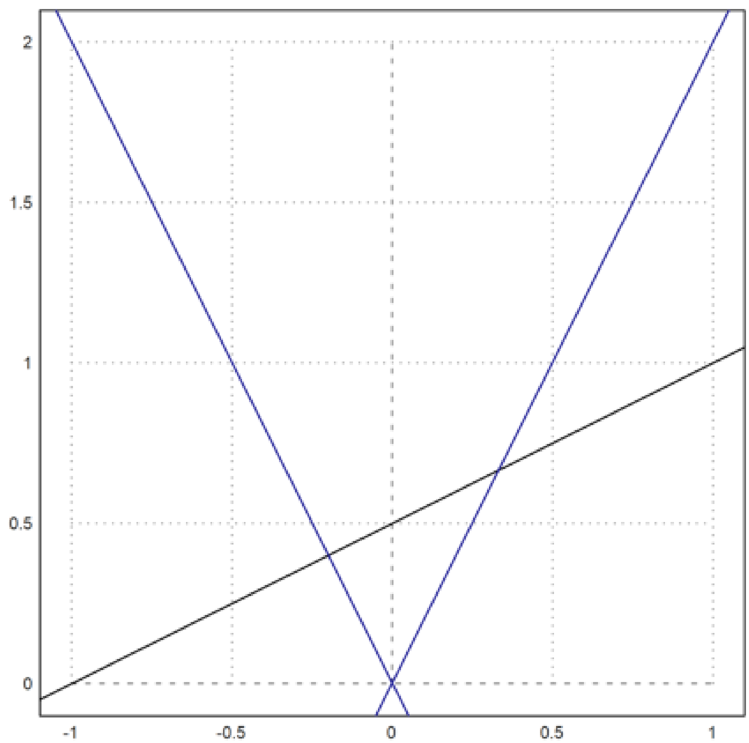
Kemudian saya baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

[- 1, 2, 1]

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

[0, u]

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan tentukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.
Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

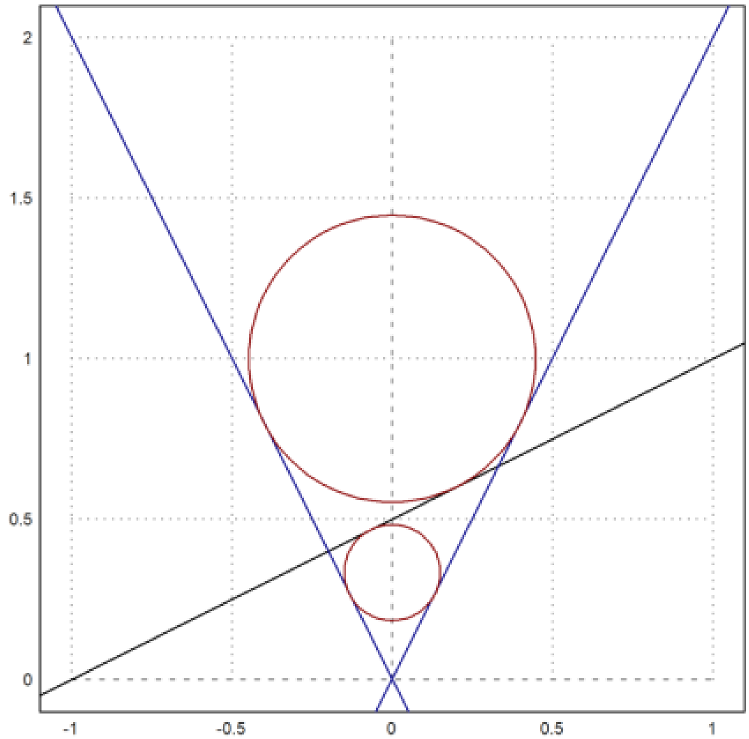
```
[0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.
Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
  C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis kedua bola tersebut ke file Povray.

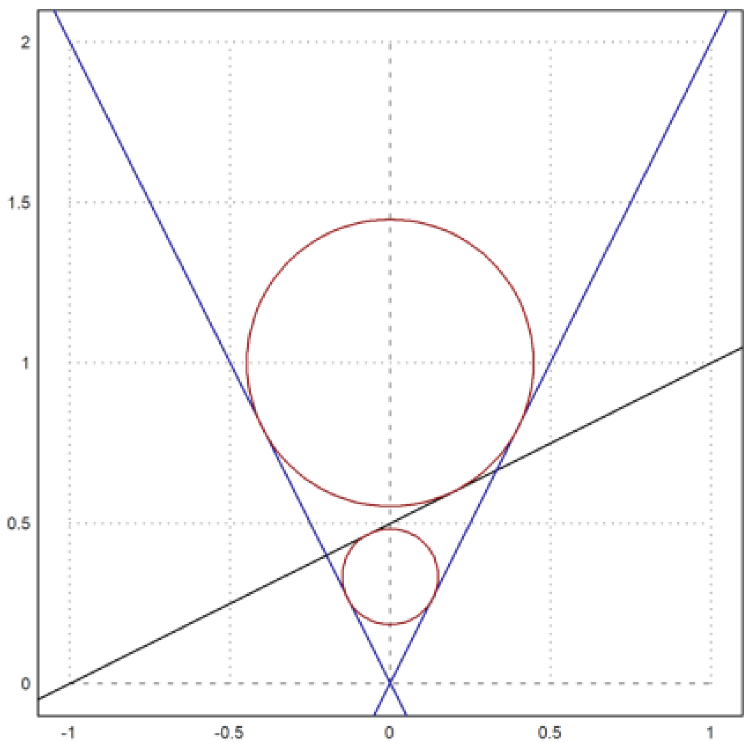
```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang yang dibatasi pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc)):
```



Sekarang kita buat dua titik pada lingkaran, dimana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Lalu kita buat dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

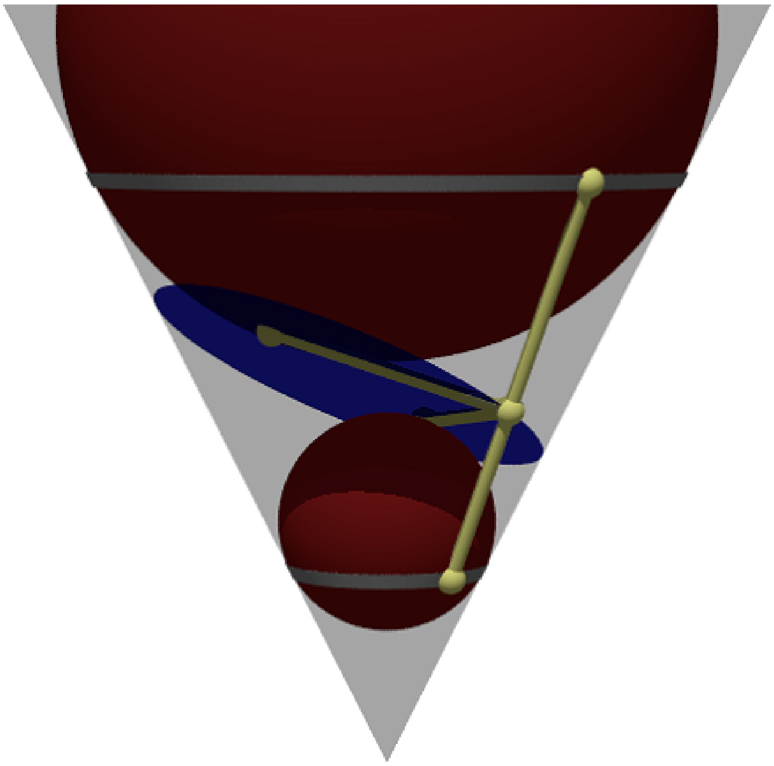
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, dimana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



Untuk mendapatkan Anaglyph ini kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

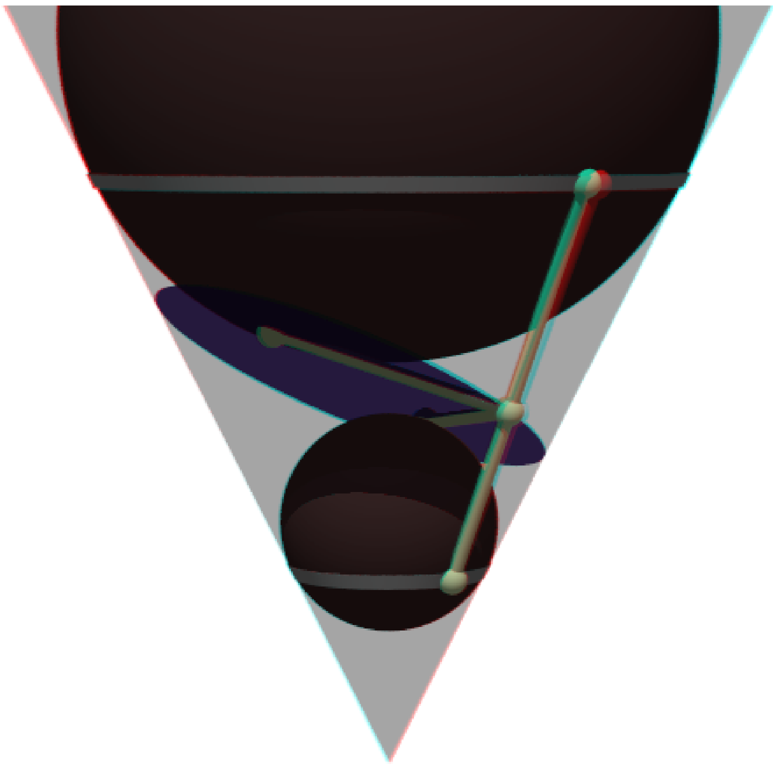
```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
```

```
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsiz
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsiz
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/cyan untuk melihat efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



Contoh 8 : Geometri Bumi

Di buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bulat).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,2
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu bola ke bola ideal lainnya. Vektor ini adalah [pos, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak sedekat itu, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semaran ...
                              ^
```

Judulnya ada fungsinya, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
      65.34°
```

Sudut suatu segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,
```

```
 180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan pada asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Sem
```

```
 Commands must be separated by semicolon or comma!
 Found:  // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)
 You can disable this in the Options menu.
 Error in:
 (asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...
                                 ^
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata dari segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi
```

```
 2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke suatu posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
 S 7°34.333' E 110°49.683'
 S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola ideal. Hal yang sama terjadi di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(So
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita lihat contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya 429,66km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...
                             ^
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun kita tidak lagi mendapatkan posisi sasaran yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, namun melakukan perkiraan jari-jari bumi di sepanjang lintasan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
 S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana saja di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!
Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kita jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan tujuan yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambah 10 kali sepersepuluh jarak, pakai jurusan Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh sekali.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
 S 6°11.250' E 106°48.372'
      1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi yang mempunyai garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran dengan garis lintang 30°, melainkan jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
      79.69°
```

Namun, jika mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah perjalanan kita. Untuk tujuan kasarnya, kita sesuaikan pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); e
```

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kita mendapatkan perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
```

```
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

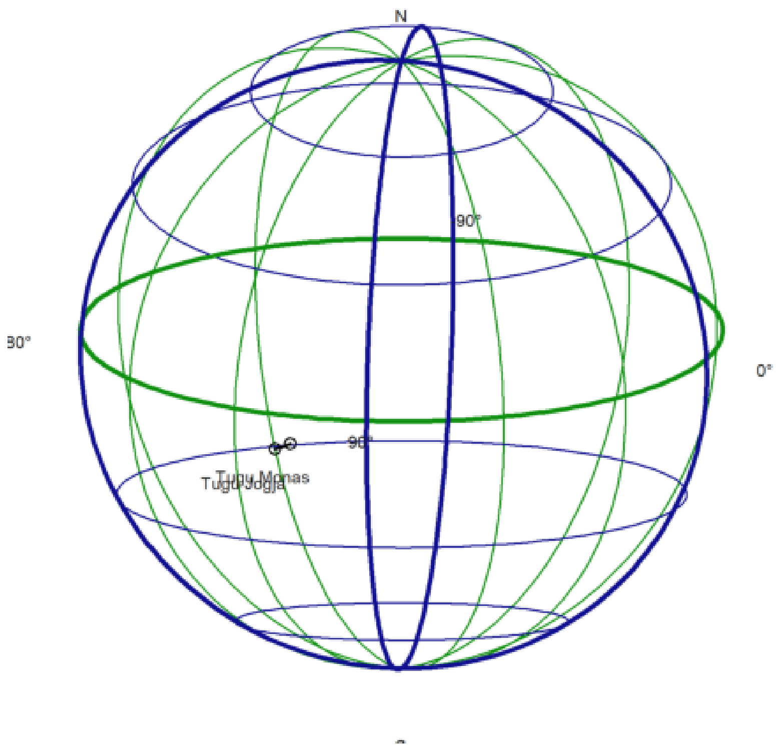
Kita menulis sebuah fungsi yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

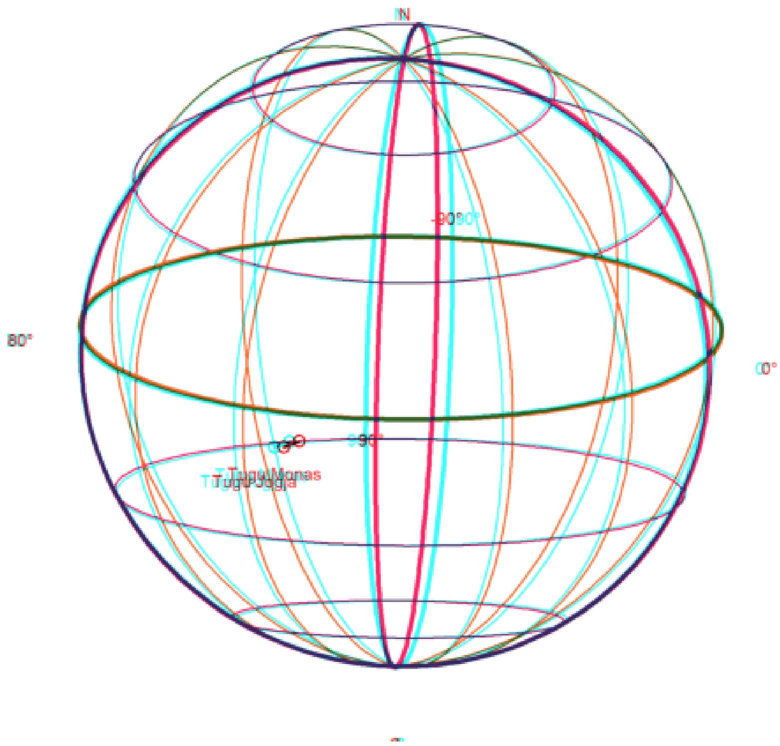
Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
   - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisin
```

merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bag
```

bertemu di satu titik.

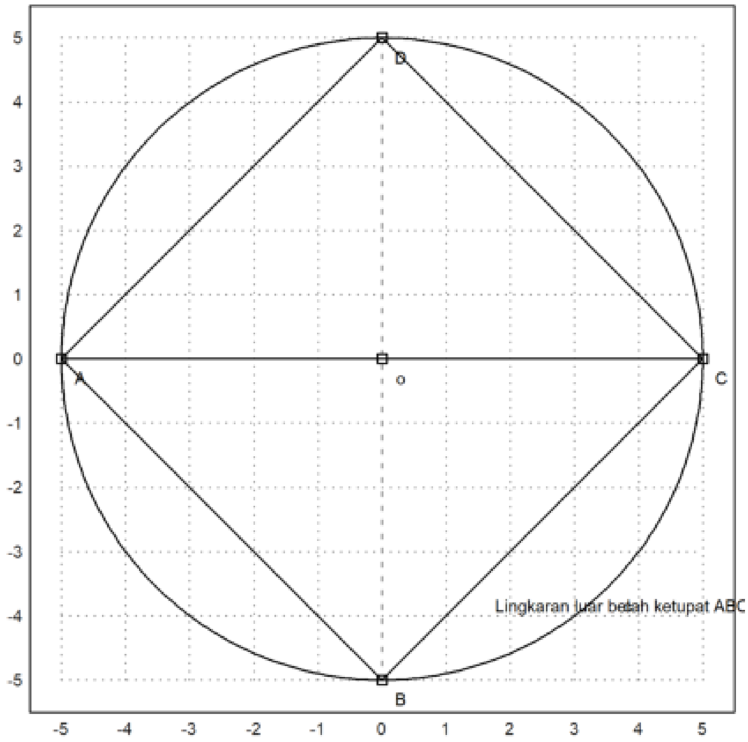
```
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung ap
```

panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.
4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).
5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan). **Penyelesaian :**

---

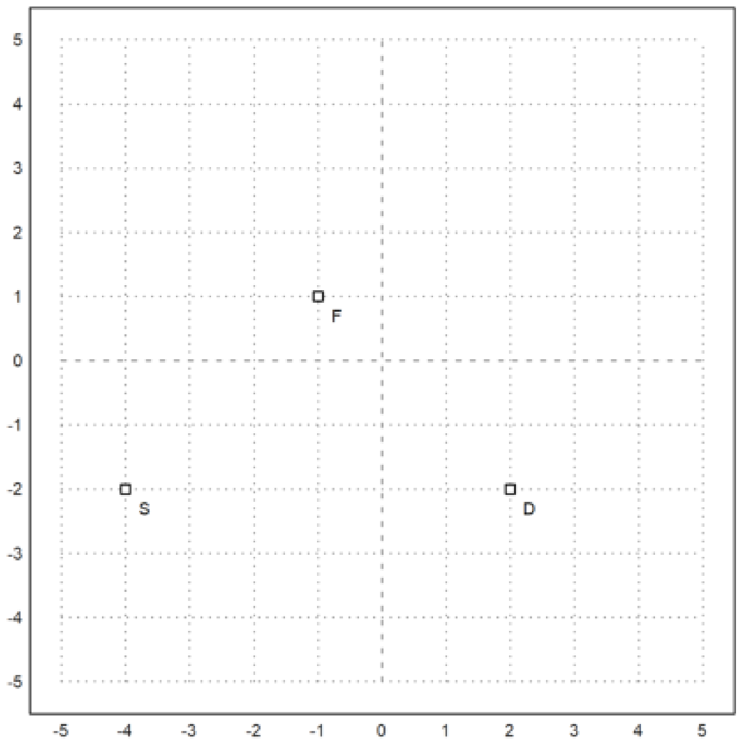
1. Gambar segi-n bersturan jika diketahui titik pusat O,n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran segi-n),r.

```
>o&:= [0,0]; c=circleWithCenter(o,5);
>color(1); setPlotRange(5); plotPoint(o); plotCircle(c);
>A=[-5,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[0,-5]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,0]; plotPoint(C,"C");
>D=[0,5]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B," ");
>plotSegment(A,C," ");
>plotSegment(B,C," ");
>plotSegment(C,D," ");
>plotSegment(D,A," ");
>plotCircle(c,"Lingkaran luar belah ketupat ABCD"):
```



2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

```
>setPlotRange(5);
>S=[-4,-2]; D=[2,-2]; F=[-1,1];
>plotPoint(S,"S"); plotPoint(D,"D"); plotPoint(F,"F"):
```



3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
  - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
  - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

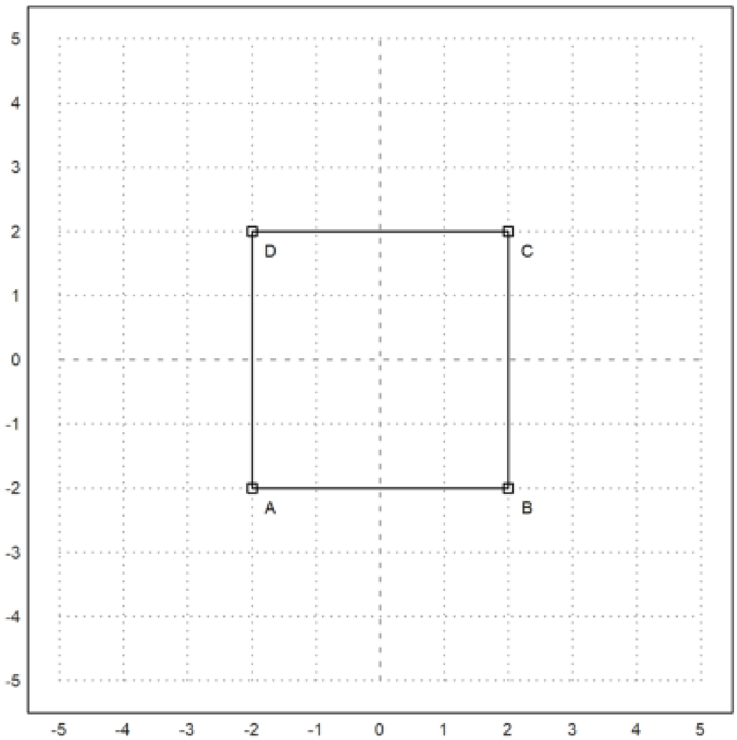
```
  - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar
```

lingkaran dalamnya.

```
  - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis
```

singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

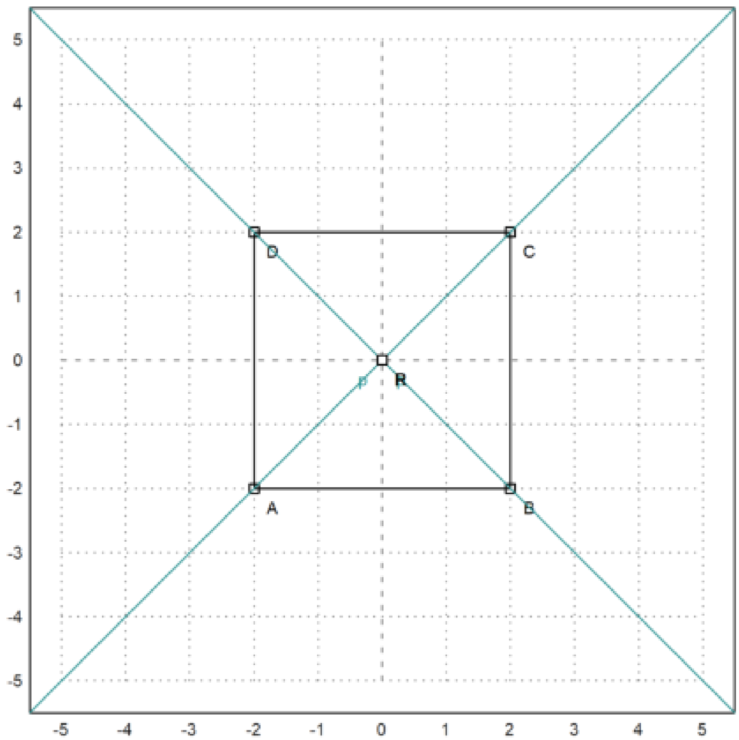
```
>setPlotRange(5);
>A=[-2,-2];  B=[2,-2] ; C=[2,2]; D=[-2,2];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,D,""); plotSegment
```



```
>l=angleBisector(A,B,C);
>g=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,g)
```

```
[0,  0]
```

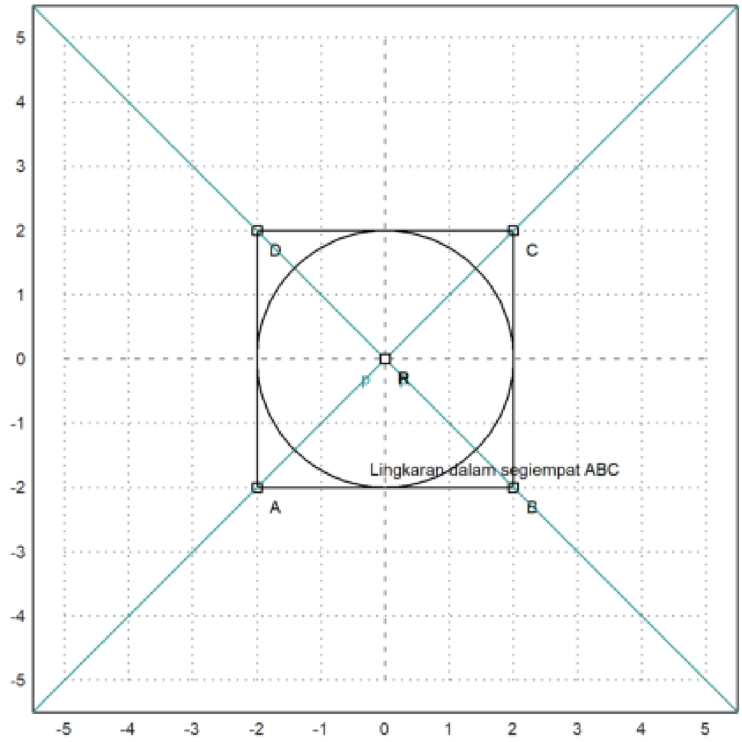
```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P"):
```




```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
2
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABC"):
```



D
C
P
R
Lingkaran dalam segiempat ABC
A
B

7 Menggunakan EMT untuk Statistika

Identitas Diri

Nama : Assyifa Cahya Marsellita
NIM : 22305141001
Matematika B 22

Analisis Data Statistika Deskriptif

```
Menurut Sudjana (2000) statistika adalah pengetahuan yang
```

berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan atau penganalisaannya dan penarikan kesimpulan berdasarkan kumpulan data dan penganalisaan yang dilakukan. Tujuan dari statistika adalah untuk menyajikan data secara ringkas dan mudah dimengerti, sehingga dapat membuat kesimpulan dari suatu populasi dari data yang diambil. Statistika dibagi menjadi statistika deskriptif dan inferensial.

```
Statistika deskriptif merupakan cabang statistika yang fokus pada
```

pengumpulan, penyajian, dan menganalisa yang berwujud angka-angka agar data tersebut dapat ditampilkan secara ringkas dan informatif. Dalam statistika terdapat empat jenis statistika deskriptif yaitu, distribusi frekuensi, ukuran pemusatan, ukuran letak, dan ukuran penyebaran.

```
Distribusi frekuensi adalah merangkum data dalam bentuk tabel atau
```

grafik, yang menunjukkan seberapa sering setiap nilai muncul dalam suatu himpunan data. Ukuran pemusatan terdiri dari mean (rata-rata), median (nilai tengah), dan modus (nilai yang sering muncul). Ukuran letak terdiri dari kuartil (membagi data menjadi empat bagian yang sama besar), desil (membagi data menjadi 10 bagian sama besar), dan persentil (membagi data menjadi 100 bagian sama besar). Ukuran penyebaran terdiri dari jangkauan (nilai maksimum dan minimum dalam suatu set data), varians (mengukur sejauh mana nilai tersebut menyebar dari rata-ratanya), simpangan baku (akar kuadrat dari varians, yang memberikan gambaran tentang seberapa dekat nilai-nilai dalam suatu set data terhadap rata-ratanya.)

```
Dari penjelasan singkat tentang data statistika deskriptif maka
```

pada sub bab ini, saya akan membahas analisis data statistika deskriptif dengan jenis ukuran letak dan ukuran penyebaran.

Ukuran Letak

Kita singgung kembali. Ukuran letak disini terdiri dari kuartil (membagi data menjadi empat bagian yang sama besar), desil (membagi data menjadi 10 bagian sama besar), dan persentil (membagi data menjadi 100 bagian sama besar).

Kuartil

Kuartil merupakan penggambaran pembagian data menjadi empat bagian yang sama besar. Kuartil membagi data menjadi tiga titik tertentu, yang dikenal sebagai kuartil pertama (Q1), kuartil kedua (Q2), dan kuartil ketiga (Q3). Rumus yang digunakan dalam menentukan posisi Q1,Q2,dan Q3 dengan

$$Qi = (i(n + 1))/4$$

dimana i adalah indeks kuartil dan n adalah jumlah total data
Dalam EMT fungsi yang dapat digunakan untuk menentukan kuartil adalah 'quartiles()'.

```
>data=[93,80,52,41,60,77,55,71,79,81,64,83,32,95,75,54,90,80,95];
```

Diketahui sebuah data dari hasil nilai ujian akhir dari siswa

```
>urut=sort(data)
```

```
[32,  41,  52,  54,  55,  60,  64,  71,  75,  77,  79,  80,  80,  81,
83,  90,  93,  95,  95]
```

Dalam menentukan kuartil langkah pertama yang dapat dilakukan dengan mengurutkan data tersebut dengan fungsi sort(data). Fungsi sort(data) dalam Euler Math Toolbox digunakan untuk mengurutkan elemen-elemen dalam suatu vektor atau matriks (dari nilai terkecil ke nilai terbesar).

```
>quartiles(data)
```

```
[32,  55,  77,  83,  95]
```

Dalam output hitung yang dihasilkan dari 'quartiles(data)' dapat diketahui bahwa nilai Q1(kuartil bawah) = 55 , Q2(kuartil tengah(median)) = 77, dan Q3(kuartil atas)= 83. Lalu untuk nilai paling kanan dan paling kiri merupakan minimum dan maximum dari suatu data yang diketahui.
Dengan cara rumus kuartil yang diketahui dapat dihitung nilai kuartil atas, tengah, dan bawah. Dengan cara...

```
>data=[93,80,52,41,60,77,55,71,79,81,64,83,32,95,75,54,90,80,95];
>urut=sort(data)
```

```
[32,  41,  52,  54,  55,  60,  64,  71,  75,  77,  79,  80,  80,  81,
83,  90,  93,  95,  95]
```

```
>a=length(data)
```

```
19
```

Setelah mengurutkan data tersebut, selanjutnya hitung banyaknya data tersebut dengan menggunakan fungsi 'length()'. Fungsi tersebut berfungsi untuk mengetahui banyaknya elemen dalam suatu vektor atau matriks.

```
>Q1=((a+1)/4)
```

```
5
```

Hasil Q1 menunjukkan 5 yang berarti letak kuartil ke-1 ada di data nomer 5 yaitu 55.

```
>Q2=((a+1)/2)
```

```
10
```

Hasil Q2 menunjukkan 10 yang berarti letak kuartil ke-2 ada di data nomer 10 yaitu 77.

```
>Q3=60/4
```

```
15
```

Hasil Q3 menunjukkan 15 yang berarti letak kuartil ke-3 ada di data nomer 15 yaitu 83. Mengapa fungsi ini saya hitung langsung? karena saat percobaan EMT tidak biasa membaca perintah maka dari itu saya menggunakan EMT secara langsung.

Dari beberapa percobaan tersebut dapat diketahui bahwa dengan cara rumus kuartil ataupun menggunakan fungsi 'quartiles()' tersebut akan sama. **Desil dan Persentil**

Desil merupakan pembagian data ke dalam sepuluh kelompok sebanding yang disusun berdasarkan urutan nilainya. Desil ke-1 (D1) adalah nilai terendah, desil ke-2 (D2) adalah nilai yang membagi data menjadi 10% terendah, desil ke-3 (D3) membagi data menjadi 20% terendah, dan seterusnya. Dalam EMT fungsi yang digunakan yaitu 'quantile()'

Sedangkan persentil suatu nilai atau titik data yang membagi distribusi data menjadi persentase tertentu atau menjadi 100 bagian yang sama besar. Dalam EMT fungsi yang digunakan sama seperti desil yaitu 'quantile()'. Perbedaan penggunaannya terletak pada nilai yang akan dibaginya.

```
>data=[93,80,52,41,60,77,55,71,79,81,64,83,32,95,75,54,90,80,95,55];
>urut=sort(data)
```

```
[32,   41,   52,   54,   55,   55,   60,   64,   71,   75,   77,   79,   80,   80,
81,   83,   90,   93,   95,   95]
```

```
>quantile(urut,0.1)
```

```
50.9
```

Dari hasil tersebut dapat diketahui bawha nilai desil ke-1 dan persentil ke-10 adalah 50,9

```
>quantile(urut,0.2)
```

```
54.8
```

```
>quantile(urut,0.5)
```

```
76
```

```
>quantile(urut,0.7)
```

```
80.3
```

Dari dua percobaan tersebut diketahui nilai persentil ke-20 dan persentil ke-50 adalah 54,8 dan 76. Hasil tersebut sama dengan hasil desil ke-2 dan desil ke-5.
Karena desil ke-8 (D8) adalah nilai yang membagi data menjadi 80% di bawahnya dan 20% di atasnya. Sedangkan persentil 80% (P80) juga merujuk pada nilai yang membagi data menjadi 80% di bawahnya dan 20% di atasnya.

Ukuran Penyebaran

Kita singgung kembali. Ukuran penyebaran disini terdiri dari jangkauan yang terdiri dari nilai maksimum dan minimum, varians (mengukur sejauh mana nilai tersebut menyebar dari rata-ratanya), simpangan baku(akar kuadrat dari varians yang memberikan gambaran tentang seberapa dekat nilai-nilai dalam suatu set data terhadap rata-ratanya).

Jangkauan

Jangkauan (range) adalah salah satu ukuran penyebaran yang paling sederhana dalam statistika. Jangkauan dapat dihitung dengan mengambil selisih antara nilai maksimum dan minimum dalam suatu set data.
Untuk menemukan jangkauan data tunggal di EMT dapat menggunakan perintah berikut:
> x=[data]; max(x)-min(x)

```
>data=[65,55,70,85,90,75,80,75];
>a=max(data)
```

```
90
```

```
>b=min(data)
```

```
55
```

Permisalan dengan a = max(data) dan b = min(data) memudahkan untuk menghitung nilai jangkauan.

```
>jangkauan = a-b
```

```
35
```

Dalam menentukan nilai jangkauan antara nilai maximum dan minimum dapat dilakukan dengan cara menentukan nilai maximum dan minimum dari data tersebut, lalu kurangi antara hasil dari nilai maximum dan minimum tersebut.
Untuk data berkelompok dapat menggunakan rumus;
> max(transpose(T[,2]))-min(transpose(T[,1]))
Dimisalkan diketahui sebuah table distribusi frekuensi

```
>r=39.5:5:69.5; v=[5,18,42,20,9,6];
>T:=r[1:6]' |r[2:7]'| v'; writetable(T,labc=["TB","TA","Frek"])
```

```
        TB          TA        Frek
      39.5        44.5           5
      44.5        49.5          18
      49.5        54.5          42
      54.5        59.5          20
      59.5        64.5           9
      64.5        69.5           6
```

```
>max(transpose(T[,2]))-min(transpose(T[,1]))
```

```
30
```

Jadi dapat diketahui bahwa jangkauan dari nilai tersebut adalah 30 orang.

Varians

Varians adalah nilai statistik yang sering kali dipakai dalam menentukan kedekatan sebaran data yang ada di dalam sampel dan seberapa dekat titik data individu dengan mean atau rata-rata nilai dari sampel itu sendiri.
Pada EMT, dalam menentukan suatu varians dapat menggunakan fungsi 'dev()^2'. Fungsi dev disini merupakan kepanjangan dari deviations yang berarti suatu verktor atau array yang berisi deviasi dari setiap nilai dalam data.

$$dev = x_i - \bar{x}$$

```
>data=[65,55,70,85,90,75,80,75];
>urut=sort(data)
```

```
[55,  65,  70,  75,  75,  80,  85,  90]
```

```
>a = mean(urut)
```

```
74.375
```

```
>dev = urut-a
>varians = mean(dev^2)
```

```
108.984375
```

Jadi nilai varians dari data tersebut adalah 108,984375. Lali bagaimana jika suatu data tersebut berkelompok?

```
>r=499.5:100:1099.5; v=[4,6,12,15,10,3];
>T:=r[1:6]' | r[2:7]' | v'; writetable(T,labc=["tepi bawah","tepi atas","fr
```

```
 tepi bawah tepi atas frekuensi
      499.5     599.5         4
      599.5     699.5         6
      699.5     799.5        12
      799.5     899.5        15
      899.5     999.5        10
      999.5    1099.5         3
```

```
>(T[,1]+T[,2])/2; t=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
[549.5,   649.5,   749.5,   849.5,   949.5,   1049.5]
```

```
>m = mean(t,v)
```

```
809.5
```

```
>sum(v*(t-m)^2)/(sum(v)-1)
```

```
17551.0204082
```

Simpangan Baku

Simpangan baku atau deviasi standar adalah ukuran seberapa jauh nilai-nilai dalam satu set data tersebar dari nilai rata-ratanya. Ini memberikan gambaran tentang sejauh mana nilai-nilai dalam data "berkumpul" atau "menyebar" di sekitar rata-ratanya.

$$\sigma = \sqrt{varians}$$

Pada sub bab sebelumnya telah dijelaskan bagaiaman cara mencari nilai suatu varians. Mengulang kembali varians menggunakan fungsi

$$mean * dev()^2$$

sedangkan simpangan baku menggunakan

$$\sigma = \sqrt{mean * dev()^2}$$

```
>data=[65,55,70,85,90,75,80,75];
>urut=sort(data)
```

```
[55,   65,   70,   75,   75,   80,   85,   90]
```

```
>a = mean(urut)
```

```
74.375
```

Menentukan sebuah rata-rata dari data tersebut.

```
>dev = urut-a
```

```
[-19.375,  -9.375,  -4.375,  0.625,  0.625,  5.625,  10.625,  15.625]
```

```
>varians = mean(dev^2)
```

```
108.984375
```

```
>simpanganBaku = sqrt(var)
```

```
10.4395581803
```

Nilai simpangan baku dari data tersebut adalah 10.4395581803

```
>r=499.5:100:1099.5; v=[4,6,12,15,10,3];
>T:=r[1:6]' | r[2:7]' | v'; writetable(T,labc=["tepi bawah","tepi atas","fr
```

```
 tepi bawah tepi atas frekuensi
      499.5     599.5         4
      599.5     699.5         6
      699.5     799.5        12
      799.5     899.5        15
      899.5     999.5        10
      999.5    1099.5         3
```

```
>(T[,1]+T[,2])/2; t=fold(r,[0.5,0.5]); m=mean(t,v);
>sqrt(sum(v*(t-m)^2)/(sum(v)-1))
```

```
132.480264221
```