

ДИСЦИПЛИНА	Прикладная математика
ИНСТИТУТ	ИПТИП
КАФЕДРА	Индустриального программирования
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	Методические указания по дисциплине
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	Астафьев Рустам Уралович
СЕМЕСТР	1 семестр, 2025/2026 уч. год

Ссылка на материал:
<https://github.com/astafiev-rustam/applied-mathematics/tree/master>

Лекция №1: Теория графов и иерархий

Введение в теорию графов

Теория графов является фундаментальным разделом дискретной математики. Она изучает свойства абстрактных структур, используемых для моделирования парных отношений между объектами. Эти структуры находят применение в компьютерных науках, биологии, социологии, логистике и многих других областях. Простота базовых определений сочетается в ней с глубиной решаемых задач.

Определение графа

Граф — это математическая структура, состоящая из двух множеств: множества вершин и множества рёбер. Каждое ребро соединяет две вершины. Вершины также часто называют узлами, а ребра — связями. Формально, граф обозначается как $G = (V, E)$, где V — это непустое множество вершин, а E — множество пар элементов из V , которые и являются рёбрами.

Например, рассмотрим социальную сеть. В этом случае вершинами будут люди, зарегистрированные в сети. Ребром между двумя вершинами будет факт дружбы между двумя соответствующими людьми. Другой пример — схема метро, где станции являются вершинами, а перегоны между станциями — рёбрами.

Ориентированные и неориентированные графы

Существует два основных типа графов: неориентированные и ориентированные. Это различие определяется природой связи между объектами.

В неориентированном графе ребро не имеет направления. Оно просто определяет факт связи между двумя вершинами. На рисунке такое ребро изображается простой линией. В примере с социальной сетью дружба обычно является взаимной, поэтому её логично моделировать неориентированным ребром.

В ориентированном графе, часто называемом орграфом, каждое ребро имеет направление и обозначается стрелкой. Такое ребро называется дугой. Оно идет от одной вершины, называемой началом, к другой вершине, называемой концом. В жизни ориентированные графы моделируют

асимметричные отношения. Например, граф ссылок между веб-страницами в интернете является ориентированным. Страница А может ссылаться на страницу В, но страница В может не ссылаться на страницу А. Другой пример — граф финансовых транзакций, где дуга показывает направление перевода денег.

Задачи теории графов

Теория графов предлагает решения для множества практических задач. Одной из самых известных является задача поиска кратчайшего пути. Курьерским службам необходимо найти самый короткий маршрут между пунктами, чтобы сэкономить время и топливо. Алгоритмы, решающие эту задачу, такие как алгоритм Дейкстры, активно используются в навигационных системах.

Другая важная задача — определение связности графа. Граф называется связным, если между любыми двумя его вершинами существует путь по рёбрам. Эта задача актуальна при проектировании компьютерных и телекоммуникационных сетей. Инженерам необходимо убедиться, что отказ одного кабеля не приведет к разрыву связи между критически важными узлами сети.

Задача о раскраске графа требует назначить цвет каждой вершине так, чтобы любые две смежные вершины имели разный цвет, используя при этом минимальное количество цветов. Эта задача возникает при составлении расписаний. Например, вершины — это университетские курсы, а ребро между двумя курсами означает, что их ведет один и тот же студент, поэтому они не должны проводиться в одно и то же время. "Цвета" в этом случае — это временные слоты.

Графы и иерархии

Иерархия представляет собой частный случай ориентированного графа, обладающий специфическими свойствами. Чаще всего иерархии представляют в виде дерева. Дерево — это связный ориентированный граф, в котором существует одна особая вершина, называемая корнем, и пути от корня до любой другой вершины являются уникальными. Важное свойство дерева — отсутствие в нем циклов.

Типичным примером иерархии является организационная структура компании. Корнем дерева является генеральный директор. От него направлены дуги к вершинам, представляющим заместителей. От заместителей, в свою очередь, дуги ведут к начальникам отделов, и так далее, вплоть до рядовых сотрудников. Такая структура позволяет эффективно моделировать подчиненность, зоны ответственности и пути коммуникации в организации. Файловая система на компьютере — это тоже иерархия, где корневой каталог содержит папки, которые, в свою очередь, содержат другие папки и файлы.

Примеры и реализация

Рассмотрим примеры по теме лекционного занятия:

[Пример №1](#)

[Пример №2](#)

[Пример №3](#)