Nástraha první

Není pohyb jako pohyb
aneb Kinematika jako zahřívací předkolo

Stejně jako každý kurz klasické mechaniky začínáme i my kinematikou. Tato disciplína v sobě skrývá řadu nejrůznějších úskalí, a to nejen pro studenty, kteří se s ní teprve seznamují, ale také pro autory učebnic ([1.]), kteří se musejí vyrovnat s ne zcela jednoduchým úkolem: definicí základních kinematických veličin, jimiž jsou *poloha*, *rychlost* a *zrychlení*. Ponechme pro tentokrát stranou komentáře k učebnicovému zpracování (viz [18.]) i cvičné rutinní výpočty základních charakteristik pohybu, jako je polohový vektor, rychlost, zrychlení, tečné a normálové zrychlení, křivost a poloměr křivosti trajektorie, atd. (například [3.], [6.], [8.], [10.], částečně i [4.] a [9.]). Věnujme se raději několika úlohám, které, ač na první pohled velmi jednoduché, bývají zdrojem častých omylů. O tom se nakonec můžete i sami přesvědčit, předložíte-li nenápadně třeba jen některé části zadání vašim přátelům či známým: možná budete překvapeni, jak málo lidé vědí a přemýšlejí o pohybech, které je obklopují.

Pro povzbuzení před startem dodejme, že i když mají kinematické veličiny většinou vektorový charakter (viz ***Hlavní text***), zvládneme následující úlohy vyřešit, aniž bychom nad vektory příliš učeně přemýšleli a byli při tom nuceni vyjadřovat je ve složkách. Toho si nakonec užijeme v dalších ***Nástrahách*** víc než dost. Následující text je tedy, jak říká i podtitul názvu, skutečně "zahřívacím předkolem". Zahájíme jej úlohou, na níž uvidíme, jak je v kinematice nutno rozumět přívlastku "*průměrný*".

Úloha 1.:

Student kráčí na nádraží, které leží ve vzdálenosti l od jeho bydliště. První polovinu cesty jde vycházkovým krokem rychlostí o velikosti $v_1 = 4\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{hod}^{-1}$. Pak pohlédne na hodinky a zjistí, že má-li vlak stihnout, musí přidat. Zbytek cesty proto běží rychlostí o velikosti $v_2 = 16\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{hod}^{-1}$. Jaká byla průměrná velikost rychlosti studenta[1]?

Řešení:

Průměrnou velikost rychlosti studenta určíme z definičního vztahu (viz ***Hlavní text***)

$$\langle v\rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,.$$

Dráha Δs, kterou student urazí, odpovídá vzdálenosti nádraží od místa bydliště, tj. $\Delta s = l$, dobu pohybu studenta Δt musíme vypočítat. Označme t_1 dobu, po niž student kráčel rychlostí o velikosti v_1, a t_2 dobu, po niž student běžel rychlostí o velikosti v_2. Platí

$$v_1 = \frac{\frac{1}{2}l}{t_1}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad t_1 = \frac{l}{2v_1}\,,$$

$$v_2 = \frac{\frac{1}{2}l}{t_2} \qquad \Longrightarrow \qquad t_2 = \frac{l}{2v_2}\,,$$

[1]Pro ty, kteří vyžadují naprosto jednoznačné, avšak poněkud košaté formulace, přikládáme upřesnění:

(1) Veličinou l se nemyslí vzdušná vzdálenost nádraží od místa bydliště, ale dráha, kterou student musí urazit.

(2) První polovinou cesty rozumíme dráhu $\frac{l}{2}$, nikoli první "poločas" $\frac{\Delta t}{2}$.

tedy

$$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{l}{2}\,\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\,.$$

Pro průměrnou velikost rychlosti studenta vychází

$$\langle v \rangle = \frac{l}{\frac{l}{2}\,\frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2 v_1 v_2}{(v_1 + v_2)} = 6,4\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}\,.$$

Poznámka:
Výsledek ukazuje, že průměrná velikost rychlosti *není* obecně dána aritmetickým průměrem jednotlivých velikostí rychlostí. Tato skutečnost by neměla překvapit, vezmeme-li v úvahu definici průměrné velikosti rychlosti: v naší úloze vyjadřuje průměrná velikost rychlosti velikost rychlosti, kterou by se musel student *rovnoměrně* pohybovat, aby překonal úsek z domova na nádraží za stejný časový interval. $\diamondsuit$

Ve následující úloze ukážeme, jak na základě znalosti zrychlení hmotného bodu určujeme jeho rychlost a polohu.

Úloha 2.:
Hmotný bod se pohybuje po přímce tak, že se jeho zrychlení mění podle vztahu $a(t) = \alpha t - \beta t^3$, kde α, β jsou konstanty s nezápornou číselnou hodnotou, tj. $\{\alpha\} > 0$, $\{\beta\} > 0$. V okamžiku $t = 0$ je rychlost hmotného bodu v_0, přičemž platí $\{v_0\} > 0$, a poloha je x_0.

(a) Určete fyzikální rozměr konstant α a β.

(b) Nalezněte závislost rychlosti a polohy hmotného bodu na čase.

(c) Ve kterém okamžiku bude rychlost hmotného bodu nulová? Jakou dráhu do tohoto okamžiku hmotný bod urazí?

Řešení:

(a) Aby měl výraz na pravé straně vztahu $a(t) = \alpha t - \beta t^3$ rozměr zrychlení, musí platit

$$[\alpha] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-3}\,, \qquad\qquad [\beta] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-5}\,.$$

(b) Závislost rychlosti hmotného bodu na čase určíme integrací zadaného vztahu pro zrychlení (viz ***Hlavní text***)

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(\alpha t - \beta t^3\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\alpha t^2 - \frac{1}{4}\,\beta t^4 + C\,,$$

kde integrační konstantu C určíme ze zadané počáteční podmínky $v\,(0) = 0$. Platí

$$v(0) = \frac{1}{2}\,\alpha\cdot 0 - \frac{1}{4}\,\beta\cdot 0 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = v_0\,,$$

celkem tedy

$$v(t) = \frac{1}{2}\,\alpha t^2 - \frac{1}{4}\,\beta t^4 + v_0\,.$$

Závislost polohy hmotného bodu na čase stanovíme integrací právě odvozeného vztahu pro rychlost,

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2}\,\alpha t^2 - \frac{1}{4}\,\beta t^4 + v_0\right) = \frac{1}{6}\,\alpha t^3 - \frac{1}{20}\,\beta t^5 + v_0 t + D\,,$$

kde integrační konstantu D opět určíme ze zadané počáteční podmínky $x\,(0) = x_0$. Platí

$$x(0) = \frac{1}{6}\,\alpha \cdot 0 - \frac{1}{20}\,\beta \cdot 0 + v_0 \cdot 0 + D \qquad \Longrightarrow \qquad D = x_0\,,$$

celkem tedy

$$x(t) = \frac{1}{6}\,\alpha t^3 - \frac{1}{20}\,\beta t^5 + v_0 t + x_0\,.$$

(c) Okamžik τ, v němž má hmotný bod nulovou rychlost, určíme ze vztahu, který jsme odvodili pro rychlost:

$$v(\tau) = \frac{1}{2}\,\alpha\tau^2 - \frac{1}{4}\,\beta\tau^4 + v_0 = 0\,.$$

Zavedením substituce $u = \tau^2$ dostáváme po malé úpravě kvadratickou rovnici

$$\beta u^2 - 2\alpha u - 4v_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta v_0}}{\beta} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \tau_{1,2,3,4} = \pm\,\sqrt{u_{1,2}} = \pm\,\sqrt{\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta v_0}}{\beta}}\,.$$

Protože v zadání předpokládáme $\{\alpha\} > 0\,, \{\beta\} > 0$ a $\{v_0\} > 0\,$, platí $\{\alpha\} < \sqrt{\{\alpha\}^2 + 4\,\{\beta\}\{v_0\}}\,.$ Aby byl výraz pod vnější odmocninou nezáporný, vyloučíme v něm matematicky přípustnou možnost záporného znaménka. Z fyzikálních důvodů vyloučíme také záporný číselný výsledek, tedy záporné znaménko před vnější odmocninou, proto

$$\tau = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta v_0}}{\beta}}\,.$$

Snadno se ověří, že pro $0 \le t < \tau$ platí $\{v(t)\} > 0\,$, a proto je v tomto intervalu $\{x(t)\}$ rostoucí funkcí času. (Rozmyslete si, jak je tomu pro $t \ge \tau$.) Dráha, kterou do okamžiku τ hmotný bod urazil, je tedy dána vztahem (vysvětlete)

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x(\tau) - x_0 = \frac{1}{6}\,\alpha\tau^3 - \frac{1}{20}\,\beta\tau^5 + v_0\tau = \\
&= \frac{1}{6}\,\alpha\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta v_0}}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}\,\beta\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta v_0}}{\beta}\right)^{\frac{5}{2}} + v_0\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta v_0}}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Poznámka:
Zdůrazněme, že vztahy mezi kinematickými veličinami

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_0 \pm at\,, \\
s(t) &= s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2}\,at^2
\end{aligned}$$

známé ze střední školy *platí pouze za předpokladu, že (tečné) zrychlení hmotného bodu je konstantní.* Není-li tomu tak, tj. pokud je (tečné) zrychlení hmotného bodu obecně funkcí času, nezbude nám než časovou závislost velikosti rychlosti a dráhy hmotného bodu určit integrací s využitím počátečních podmínek. Je zřejmé, že co *jiné počáteční podmínky*, to při tomtéž zrychlení *jiný pohyb*. Tato skutečnost je dobře známá i z každodenního života — víme například, že typ pohybu míče je určen tím, jakou rychlost mu v té které poloze udělíme. ♢

Řekli jsme, že pro *daného pozorovatele* určují typ pohybu *počáteční podmínky*. V následující úloze naopak ukážeme, jak *tentýž pohyb* vyhodnotí *různí pozorovatelé*.

Úloha 3.:

Horkovzdušný balón se pohybuje svisle vzhůru konstantní rychlostí o velikosti v_0. V okamžiku, kdy je balón ve výšce h_0 nad Zemí, vyhodí neposedný pasažér jablko vodorovnou rychlostí o velikosti v_{rel} vzhledem k balónu. Popište trajektorii jablka

(a) vzhledem k pozorovateli v balónu,

(b) vzhledem k pozorovateli stojícímu na Zemi přímo pod balónem.

Odpor vzduchu pro jednoduchost zanedbejte.

Řešení:

Jablko se vzhledem k oběma pozorovatelům pohybuje s týmtéž zrychlením $\vec{a} = \vec{g}$ (vysvětlete). Každý z pozorovatelů však připíše jablku jiné počáteční podmínky, a proto také jinak popíše jeho pohyb.

(a) Pro pozorovatele v balónu má počáteční rychlost jablka vodorovný směr a velikost v_{rel}. Zavedeme-li soustavu souřadnic $\langle O^{\text{b}}; x^{\text{b}}, y^{\text{b}} \rangle$ tak, že její počátek O^{b} je ztotožněn s balónem, osa x^{b} je vodorovná a má stejnou orientaci jako rychlost $\vec{v}_{\text{rel}}$ a osa y^{b} směřuje svisle dolů, platí

$$\begin{aligned} x^{\text{p}}(t) &= v_{\text{rel}}\, t\,, \\ y^{\text{p}}(t) &= \frac{1}{2}\, g t^2\,. \end{aligned}$$

(b) Pro pozorovatele na Zemi má jablko rovněž nenulovou počáteční rychlost: její průmět do vodorovné roviny je $\vec{v}_{\text{rel}}$, průmět do svislé roviny odpovídá rychlosti balónu $\vec{v}_0$. (Rozmyslete si, jak by tomu bylo, kdyby rychlost balónu $\vec{v}_0$ neměla svislý směr.) Zavedeme-li soustavu souřadnic $\langle O^{\text{Z}}; x^{\text{Z}}, y^{\text{Z}} \rangle$ tak, že její počátek O^{Z} je ztotožněn s pozemským pozorovatelem, osa x^{Z} je vodorovná a má stejnou orientaci jako rychlost $\vec{v}_{\text{rel}}$ a osa y^{Z} směřuje svisle vzhůru, platí

$$\begin{aligned} x^{\text{Z}}(t) &= v_{\text{rel}}\, t\,, \\ y^{\text{Z}}(t) &= h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\, g t^2\,. \end{aligned} \qquad \diamondsuit$$

Na *relativnost pohybu* zařadíme ještě jednu, závěrečnou úlohu, jejíž výsledky jistě nebudou neznámé třeba sportovcům.

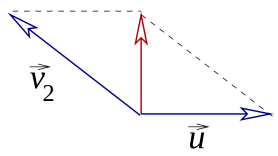
Úloha 4.:

Dva plavci startují z téhož bodu na břehu řeky o šířce s. První plave po proudu do vzdálenosti s a potom se vrací zpět. Druhý přeplouvá řeku v kolmém směru na protější břeh a zpět. První plavec je v klidné vodě schopen vyvinout rychlost o velikosti v_1, druhý plavec rychlost o velikosti v_2. Velikost rychlosti toku řeky vzhledem ke břehu je u. Vypočtěte dobu pohybu každého z plavců. (Převzato z [11.].)

Řešení:

Pro plavce, který plave podél břehu, máme výsledek hned: při pohybu po proudu řeky je velikost jeho rychlosti vzhledem ke břehu $v_1 + u$, při pohybu proti proudu pak $v_1 - u$. Celková doba pohybu je dána součtem doby plavby po proudu a proti proudu, tj.

$$t_1 = \frac{s}{v_1 + u} + \frac{s}{v_1 - u} = \frac{2 s v_1}{(v_1 + u)\,(v_1 - u)} = \frac{2 s v_1}{v_1^2 - u^2}\,.$$



Obrázek 1: K určení rychlosti druhého plavce

Plavec, který má plavat kolmo ke břehům, bude muset chvilku přemýšlet. Svoje síly totiž musí nasměrovat tak, aby vektor jeho rychlosti $\vec{v}_2$ složený s vektorem rychlosti proudu $\vec{u}$ byl kolmý na břeh (viz Obrázek 1). Jeho rychlost vzhledem ke břehu má pak velikost $\sqrt{v_2^2 - u^2}$, pro dobu pohybu tohoto plavce tedy platí

$$t_2 = \frac{s}{\sqrt{v_2^2 - u^2}} + \frac{s}{\sqrt{v_2^2 - u^2}} = \frac{2s}{\sqrt{v_2^2 - u^2}}\,.$$

Diskuze výsledků:
Má-li mít zadání úlohy smysl, musí pro velikost rychlosti, kterou je schopen vyvinout první plavec, platit

$$v_1 > u\,.$$

Jakou podmínku musí splňovat velikost rychlosti, kterou je schopen vyvinout druhý plavec? ♢

Otázky, cvičení a náměty k přemýšlení:

1. Je možné z údajů zadaných v ***Úloze 1.*** určit velikost průměrné rychlosti (viz ***Hlavní text***) studenta? Pokud ano, určete ji, pokud ne, uveďte veličiny, které by k tomu bylo nutné ještě zadat.
2. Automobil se dvacet minut proplétá složitým brněnským provozem tak, že při vjezdu na dálnici Brno–Praha ukazuje rychloměr průměrnou velikost rychlosti $\langle v_1 \rangle = 30\ \mathrm{km \cdot hod^{-1}}$. Jaká musí být průměrná velikost rychlosti automobilu po dálnici, aby při vjezdu do hlavního města ukazoval rychloměr údaj $\langle v_2 \rangle = 100\ \mathrm{km \cdot hod^{-1}}$? Případné chybějící údaje sami vyhledejte. Předpokládejte, že rychloměr automobilu je před odjezdem do Prahy vynulován (vysvětlete, proč tento předpoklad přijímáme).
3. Cyklista projíždí obtížným lesním terénem tak, že pětikilometrový úsek mu zabere čtyřicet minut. Pak najede na dobře udržovanou cyklotrasu, po níž patnáct minut sprintuje rychlostí o velikosti $30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Určete
   - **(a)** průměrnou velikost rychlosti cyklisty,
   - **(b)** celkovou vzdálenost, kterou urazil.
4. Hmotný bod se pohybuje po přímce tak, že jeho zrychlení se mění podle vztahu $a(t) = \alpha + \beta t^2$. V okamžiku $t = 0$ je rychlost hmotného bodu v_0 a poloha x_0.
   - **(a)** Určete fyzikální rozměr konstant α a β.
   - **(b)** Nalezněte závislost rychlosti a polohy hmotného bodu na čase.
   - **(c)** Určete průměrnou rychlost a průměrné zrychlení hmotného bodu v intervalu $[t_1, t_2]$.
5. Dítě si během jízdy v autě hraje s míčkem. Najednou jej vyhodí svisle vzhůru. V následujících případech rozhodněte, zda míček spadne před dítě, za ně, nebo se mu vrátí do rukou (odpovědi zdůvodněte):
   - **(a)** auto jede konstantní rychlostí,
   - **(b)** auto zrychluje,

(c) auto brzdí.

(Převzato z [11.].)

6. Vlak jede po přímé vodorovné trati rychlostí o velikosti $130\ \mathrm{km \cdot hod^{-1}}$. K železničnímu přejezdu se po silnici kolmé k trati blíží auto rychlostí o velikosti $60\ \mathrm{km \cdot hod^{-1}}$. Popište pohyb

   (a) auta vzhledem k vlaku,

   (b) dítěte, které se prochází po chodbě vagónu rychlostí o velikosti $4\ \mathrm{km \cdot hod^{-1}}$, vzhledem k okolní krajině i vzhledem k autu (uvažte obě možné situace).

7. Vrtulník letí ve výšce 9,5 m nad plochým terénem stálou rychlostí o velikosti $6{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pilot vyhodí balík ve vodorovném směru proti směru letu. Rychlost balíku vzhledem k vrtulníku má velikost $12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

   (a) Jaká je počáteční rychlost balíku vzhledem k Zemi?

   (b) Určete vodorovnou vzdálenost balíku a vrtulníku v okamžiku, kdy balík dopadne na Zemi.

   (c) Pod jakým úhlem dopadne balík na povrch Země vzhledem k pozorovateli na Zemi a vzhledem k pozorovateli ve vrtulníku?

   Odpor vzduchu zanedbejte. (Převzato z [4.].)

****

Příbuzné texty:

- ***Hlavní text***
- ***Nástraha druhá***
  Vektory, průměty, složky, velikosti, ...aneb Jak se vypořádat s řešením úloh?
- ***Nástraha třetí***
  Rozumíme silám tření? aneb K čemu slouží vazební podmínky?
- ***Nástraha čtvrtá***
  Dynamika křivočarého pohybu aneb Jak se vyhnout tradičním omylům?
- ***Nástraha pátá***
  Výtahy, vlaky, kolotoče, ... aneb Co náš čeká v neinerciálních soustavách?
- ***Nástraha šestá***
  Když se sejde více částic aneb Mechanika tuhého tělesa
- ***Nástraha sedmá***
  Zákony zachování aneb "Není nutné vědět o všem..."
- ***Nástraha osmá***
  Vody stojaté i tekoucí aneb Mechanika kapalin
- ***Nástraha devátá***
  Když Newtonovy zákony nestačí aneb Termodynamika a statistická fyzika v kostce
- ***Nástraha desátá — bonusová***
  Příliš těžké ??? aneb Několik úloh "s hvězdičkou"