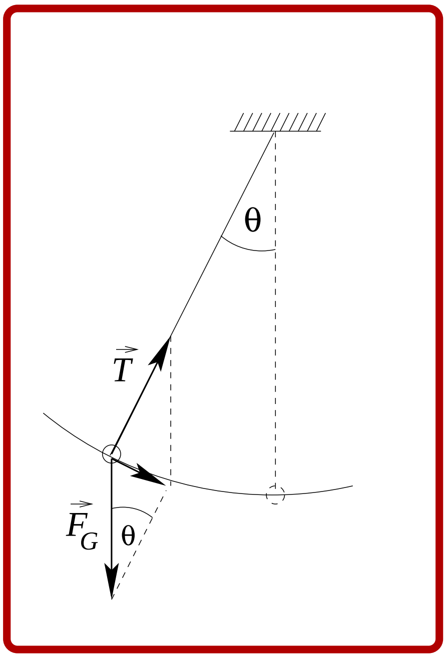
Nástraha čtvrtá
Dynamika křivočarého pohybu
aneb Jak se vyhnout tradičním omylům?

Pokud jsme se úspěšně vypořádali s první trojicí ***Nástrah***, může se zdát, že nás již nic nemůže zaskočit. K oblíbené a účinné kontrole, zda tomu tak skutečně je, slouží úlohy z *dynamiky křivočarého pohybu*. Co v sobě mají v porovnání s jiným typem úloh tak zvláštního?



Podívejme se na červeně zarámovaný obrázek, jehož různé varianty se již tradičně objevují na stránkách středoškolských učebnic ([1.]). Znázorňuje síly působící na kuličku zavěšenou na napnutém vlákně při pohybu ve svislé rovině. Kulička se — soudě podle zakreslené části trajektorie — nachází *v obecné* (nikoli tedy *v krajní* nebo *v rovnovážné*) poloze. Ponechme stranou skutečnost, že výslednice tíhové síly a tahové síly vlákna je zde nevhodně vyznačena stejným grafickým stylem jako jednotlivé síly[1]. Podstatnější je, že tato výslednice má na obrázku směr *tečný*(!) k trajektorii ([18.]). Potom by ovšem měla tahová síla vlákna v poloze popsané úhlem θ velikost $T = mg\cos\theta$, *při průchodu* rovnovážnou polohou ($\theta = 0$) pak $T = mg$, tedy stejnou, jako kdyby v ní kyvadlo *v klidu viselo*! To je ale v rozporu se zkušenostmi každého, kdo se někdy houpal na houpačce...!!! Tento typický a ne zcela ojedinělý omyl je jedním z mnoha vnějších projevů nástrahy, která se v dynamice křivočarého pohybu skrývá ([14.]). K jejímu odhalení nám opět pomohou řešené úlohy.

Úloha 1.:

Na nepružném vlákně délky l a zanedbatelné hmotnosti je zavěšena malá kulička o hmotnosti m. Napnuté vlákno vychýlíme o úhel $\theta_0 \leq 90°$ a uvolníme. Odpor vzduchu i tření v bodě závěsu zanedbáváme.

(a) Kvalitativně popište pohyb kuličky.

(b) V obecné poloze kyvadla popsané úhlem θ určete velikost tahové síly vlákna.

(c) V aproximaci malých kmitů (tj. $\sin\theta \approx \theta$, dosazováno v radiánech) určete periodu kyvadla.

(d) Schematicky zakreslete směr výslednice sil působících na kuličku při průchodu krajní, obecnou a rovnovážnou polohou.

Řešení:

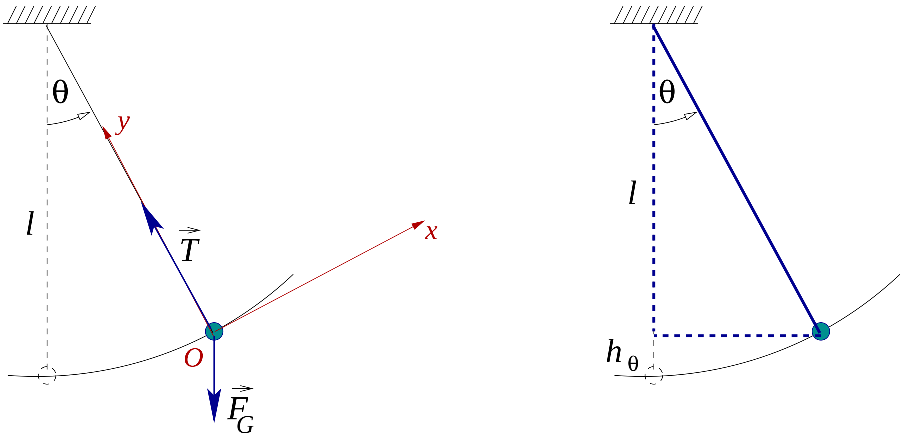
Úlohu budeme řešit v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí.

(a) Napnuté vlákno s kuličkou koná kmitavý pohyb ve svislé rovině s maximální úhlovou výchylkou θ_0 (tzv. *rovinné* nebo také *matematické kyvadlo*).

[1] Nebezpečí, k nimž tento "zvyk" může vést, jsou popsána v ***Nástraze druhé***.

(b), (c) Na kuličku působí dva objekty: Země tíhovou silou $\vec{F}_G$ a vlákno tahovou silou $\vec{T}$. Druhý Newtonův zákon pro kuličku má tedy tvar[2]

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{T}\,.$$



Obrázek 1: Matematické kyvadlo

Soustavu souřadnic Oxy zvolme s ohledem na další postup tak, že její počátek O je ztotožněn se středem kuličky, osa x má směr tečny k trajektorii a je orientovaná stejně jako okamžitá rychlost kuličky, osa y má směr normály k trajektorii a je orientovaná do bodu závěsu (viz první část Obrázku 1, v němž orientace osy x odpovídá situaci, kdy úhel θ roste). Jednotlivé vektory v ní mají složky

$$\vec{F}_G = (-F_G \sin\theta, -F_G \cos\theta)\ , \qquad \vec{T} = (0, T)\ , \qquad \vec{a} = (a_\tau, a_n)\ ,$$

kde a_τ označuje tečnou a a_n normálovou složku (okamžitého) zrychlení kuličky.

Poznámka:
I když se soustava souřadnic Oxy pohybuje spolu s kuličkou, popisujeme pohyb kuličky stále z hlediska *inerciální vztažné soustavy spojené se Zemí.* V pohyblivé soustavě souřadnic určujeme v každém okamžiku pouze průměty jednotlivých vektorů do dvou význačných navzájem kolmých směrů: do směru *tečny* a do směru *normály* k trajektorii kuličky.

Druhý Newtonův zákon pro kuličku zapsaný ve složkách

$$\begin{aligned} x: \qquad ma_\tau &= -F_G \sin\theta\,, \\ y: \qquad ma_n &= T - F_G \cos\theta \end{aligned}$$

doplníme silovým zákonem pro velikost tíhové síly $F_G = mg$ a známými vztahy $a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $a_n = \frac{v^2}{l}$, v nichž v je velikost (okamžité) rychlosti kuličky:

$$\begin{aligned} x: \qquad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -mg\sin\theta\,, \\ y: \qquad m\frac{v^2}{l} &= T - mg\cos\theta\,. \end{aligned}$$

Abychom mohli z druhé rovnice určit velikost tahové síly vlákna, potřebujeme odvodit vztah pro velikost rychlosti kuličky v dané úhlové poloze. K tomu poslouží zákon zachování mechanické

[2]Protože se lze často setkat s tendencí zařazovat do druhého Newtonova zákona pro kuličku i setrvačnou/odstředivou sílu ([14.]), připomínáme, že úlohu řešíme v *inerciální vztažné soustavě* spojené se Zemí, v níž setrvačné síly nemají místo (srv. též s ***Nástrahou pátou***).

energie[3]: zvolíme-li hladinou nulové potenciální energie tíhové vodorovnou rovinu procházející rovnovážnou polohou a označíme-li h vzdálenost kuličky od této roviny v poloze určené úhlem θ, dostáváme porovnáním celkové mechanické energie kuličky v obecné poloze (θ, h, v) a v krajní poloze ($\theta = \theta_0$, $h = h_0$, $v = v_0 = 0$)

$$mgh + \frac{1}{2} mv^2 = mgh_0 + 0\,.$$

Pro pravoúhlý trojúhelník vyznačený ve druhé části Obrázku 1 modře platí

$$\cos\theta = \frac{l-h}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad h = l\,(1-\cos\theta)\ ,$$

podobně $h_0 = l\,(1-\cos\theta_0)$, tedy

$$v = \sqrt{2gl\,(\cos\theta - \cos\theta_0)}\,,$$

po dosazení a úpravě potom

$$T = mg\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\ .$$

Diskuze výsledku:
V krajní poloze ($\theta = \theta_0$) platí $T = mg\cos\theta_0$, při průchodu rovnovážnou polohou ($\theta = 0$) pak $T = mg\,(3 - 2\cos\theta_0) > mg$. V souladu se zkušenostmi z houpaček je tedy tahová síla vlákna (resp. tlaková síla sedačky) při průchodu rovnovážnou polohou *větší* než tíhová síla. Vždy je proto nutné důsledně rozlišovat mezi situací, kdy kyvadlo v rovnovážné poloze *v klidu visí* ($T = mg$) a situací, kdy jí *prochází* ($T > mg$).

Vraťme se nyní k první rovnici složkového zápisu druhého Newtonova zákona a dosaďme do ní vztah $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = l\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ vyjadřující souvislost mezi obvodovými a úhlovými veličinami. Po úpravě dostaneme diferenciální rovnici pro závislost úhlové výchylky $\theta(t)$ kyvadla na čase[4]

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0\,.$$

Tuto rovnici lze explicitně vyřešit (tj. zapsat řešení formou konečného součtu elementárních funkcí) pouze pro malé úhlové výchylky, takové, že v rámci požadované přesnosti platí $\sin\theta \approx \theta$ (v obecném případě je nutno přistoupit k řešení numerickému). Potom

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\,\theta = 0\,.$$

Řešení získané diferenciální rovnice lze zapsat například ve tvaru (viz [20.], [21.] a [22.])

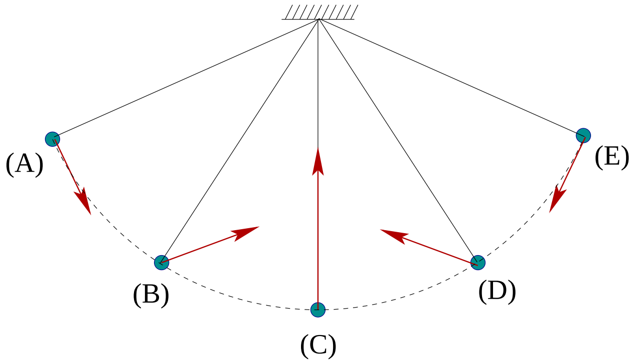
$$\theta(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\ , \qquad \text{kde} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

konstanty A a B určíme z počátečních podmínek (proveďte, vyjde $A = 0, B = \theta_0$). Z něj získáváme vztah pro periodu malých kmitů kyvadla

$$\frac{2\pi}{\mathcal{T}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

[3]Dodejme, že zákon zachování mechanické energie zde platí proto, že jednak zanedbáváme ztráty (odpor vzduchu a tření v bodě závěsu), jednak je tahová síla vlákna v každém okamžiku kolmá k trajektorii kuličky, a proto nekoná práci.

[4]Jako užitečné cvičení můžete tuto diferenciální rovnici odvodit i pro zbývající případy, tj. $\theta \geq 0$ a kyvadlo klesá, $\theta \leq 0$ a kyvadlo stoupá, nebo $\theta \leq 0$ a kyvadlo klesá.



Obrázek 2: Schematické znázornění výslednice sil působících na kuličku

(d) Pro výslednici sil působících na kuličku platí

$$\vec{F}_{\mathrm{v}} = \vec{F}_G + \vec{T} = m\vec{a}\,.$$

S ohledem na dříve uvedený složkový zápis pravé části tohoto vztahu (str. 2) již snadno schematicky zakreslíme směr výslednice (viz Obrázek 2):

- v krajní poloze (A, E) je okamžitá rychlost kuličky nulová, normálové zrychlení kuličky je proto nulové, zatímco tečné zrychlení je nenulové, výsledná síla má tedy směr tečny k trajektorii ;
- při průchodu rovnovážnou polohou (C) je tečné zrychlení nulové, ale kulička má nenulovou rychlost, proto je její normálové zrychlení nenulové a směřuje vzhůru, výsledná síla tedy směřuje také vzhůru;
- v obecné poloze (B, D) má zrychlení kuličky nenulovou jak tečnou, tak normálovou složku, nenulovou tečnou i normálovou složku má proto také výsledná síla. ♢

Situaci na houpačce máme zvládnutou, přejděme tedy k jinému speciálnímu typu pohybu tělíska zavěšeného na vlákně — k modelu řetízkového kolotoče.

Úloha 2.:
Na nepružném vlákně délky l a zanedbatelné hmotnosti je zavěšena malá kulička o hmotnosti m. Napnuté vlákno vychýlíme o úhel θ_0 a uvedeme do pohybu tak, že kulička se pohybuje stále v téže vodorovné rovině. Odpor vzduchu i tření v bodě závěsu zanedbáváme.

(a) Kvalitativně popište pohyb kuličky.
(b) Určete rychlost kuličky a periodu jejího pohybu.
(c) Určete zrychlení kuličky.
(d) Určete velikost všech sil, které na kuličku působí.

Řešení:
Úlohu budeme opět řešit v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí.

(a) Vlákno se pohybuje po povrchu rotačního kužele, v každém okamžiku leží v některé jeho povrchové přímce (tzv. *kónické kyvadlo*). Trajektorií kuličky je kružnice ve vodorovné rovině. Vzhledem k tomu, že se potenciální energie tíhová kuličky během pohybu nemění, nemění se podle zákona zachování mechanické energie ani velikost její rychlosti. Kulička se tedy po kružnici pohybuje rovnoměrně.

(b) Na kuličku působí dva objekty: Země tíhovou silou $\vec{F}_G$ a vlákno tahovou silou $\vec{T}$, druhý Newtonův zákon má tedy tvar

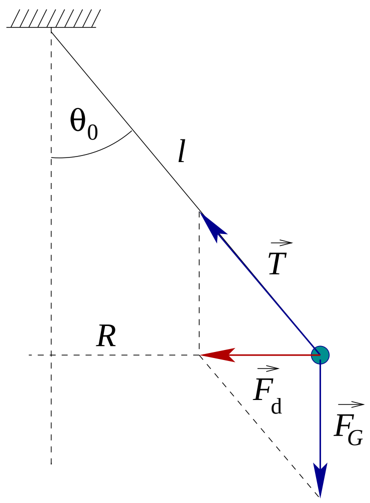
$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{T}\,.$$

Protože se kulička pohybuje rovnoměrně po kružnici, tj. její tečné zrychlení je nulové, je výslednice tíhové síly a tahové síly *silou dostředivou* (viz Obrázek 3, v němž je tato výslednice vyznačena červeně). Hledanou velikost rychlosti kuličky můžeme určit, aniž bychom museli volit soustavu souřadnic a zapisovat jednotlivé vektory ve složkách. Stačí si všimnout pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky odpovídající velikosti výsledné (dostředivé) síly a tíhové síly a přepona má délku odpovídající velikosti tahové síly (viz Obrázek 3). Platí:

$$\tan\theta_0 = \frac{F_\mathrm{d}}{F_G} = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{lg\sin\theta_0} \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{lg\sin\theta_0\tan\theta_0}\,.$$

Velikost rychlosti kuličky je určena právě odvozeným vztahem, její vektor je v každém okamžiku tečný ke kružnicové trajektorii o poloměru $R = l\sin\theta_0$. (Rychlost kuličky tedy *není* konstantní, neboť její vektor se neustále mění.) Periodu pohybu vypočteme ze vztahu známého z kinematiky

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi l\sin\theta_0}{\sqrt{lg\sin\theta_0\tan\theta_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\theta_0}}\,.$$



Obrázek 3: Kónické kyvadlo (rovina, v níž se kulička pohybuje, je kolmá k nákresně)

(c) Přestože se kulička pohybuje rovnoměrně (velikost rychlosti se nemění), má v důsledku zakřivení trajektorie *nenulové zrychlení* směřující do středu kružnicové trajektorie — zrychlení kuličky je zrychlením *dostředivým*. Ke zjištění jeho velikosti poslouží již zmíněný pravoúhlý trojúhelník:

$$\tan\theta_0 = \frac{F_\mathrm{d}}{F_G} = \frac{ma_\mathrm{d}}{mg} \qquad \Longrightarrow \qquad a = a_\mathrm{d} = g\tan\theta_0\,.$$

(d) Jak již je uvedeno v části **(b)**, na kuličku působí pouze dvě síly: svislá tíhová síla Země $\vec{F}_G$, jejíž velikost je dána silovým zákonem $F_G = mg$, a tahová síla $\vec{T}$, která má v každém okamžiku směr napnutého vlákna (tato síla tedy *není* konstantní). Její velikost stanovíme opět ze známého pravoúhlého trojúhelníka:

$$\cos\theta_0 = \frac{F_G}{T} \qquad \Longrightarrow \qquad T = \frac{F_G}{\cos\theta_0} = \frac{mg}{\cos\theta_0}\,.$$

Zdůrazněme, že dostředivá síla zde *není* jednou z působících sil — je *výslednicí* tíhové síly Země a tahové síly vlákna. ♢

Podstatu nástrahy, kterou jsme objevili při řešení předchozích dvou úloh, zbývá již jen jasně pojmenovat.

Důležité:

Výslednice sil $\vec{F}_\mathrm{v} = m\vec{a}$ působících na hmotný bod, který se pohybuje po zakřivené trajektorii, má v každém okamžiku obecně nenulový průmět jak do směru *tečny*, tak do směru *normály* k trajektorii, ve složkovém zápisu tedy

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{v},\tau} &= ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \not\equiv 0\,, \\ F_{\mathrm{v},n} &= ma_n = m\frac{v^2}{R} \not\equiv 0\,, \end{aligned}$$

kde R je poloměr oskulační kružnice, jíž nahrazujeme trajektorii v okolí dané polohy hmotného bodu. Tečná složka přitom zodpovídá za změnu velikosti rychlosti hmotného bodu, normálová složka souvisí se změnou směru vektoru jeho rychlosti, tj. se zakřivením trajektorie. Klasifikaci jednotlivých typů pohybu shrnuje následující tabulka.

TYP POHYBU	ROVNOMĚRNÝ	NEROVNOMĚRNÝ
PŘÍMOČARÝ	$a_\tau(t) \equiv 0$ $a_n(t) \equiv 0$	$a_\tau(t) \not\equiv 0$ $a_n(t) \equiv 0$
KŘIVOČARÝ	$a_\tau(t) \equiv 0$ $a_n(t) \not\equiv 0$	$a_\tau(t) \not\equiv 0$ $a_n(t) \not\equiv 0$

Na úplný závěr neuškodí ještě jedna úloha na *zcela obecný*, tj. nerovnoměrný křivočarý, pohyb.

Úloha 3.:
V zatáčce o poloměru R ležící ve vodorovné rovině se rovnoměrně zrychleně rozjíždí automobil o hmotnosti m tak, že za dobu t dosáhne rychlosti o velikosti v. Jakou velikost má v tomto okamžiku výslednice sil, které na něj působí?

Řešení:
Pro výslednici sil, které působí na automobil, platí

$$\vec{F}_{\mathrm{v}} = m\vec{a}\,,$$

její velikost je $F_{\mathrm{v}} = ma$. Zbývá určit velikost zrychlení automobilu v čase t: toto zrychlení má nenulovou tečnou i normálovou složku, tj.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{v}{t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad F_{\mathrm{v}} = ma = m\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = m\sqrt{\left(\frac{v}{t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}\,.$$

Dodejme, že tlakové síly podložky a tíhová síla se kompenzují (proč?), výslednice sil je tedy určena vektorovým součtem statických třecích sil mezi pneumatikami kol a vozovkou (srv. s ***Úlohou 3. Nástrahy třetí***). ♢

Otázky, cvičení a náměty k přemýšlení:

1. Na nepružném vlákně délky l a zanedbatelné hmotnosti je zavěšena malá kulička o hmotnosti m. Víme, že k přetržení vlákna je zapotřebí síly o velikosti F. Napnuté vlákno vychýlíme o úhel $\theta_0 \leq 90°$ a uvolníme. Odpor vzduchu i tření v bodě závěsu zanedbáváme. Jakou podmínku musí splňovat veličiny $l\,, m\,, \theta_0$ a F, aby se vlákno v průběhu pohybu nepřetrhlo?

2. Zjistěte, jaké chyby se dopustíme, provedeme-li pro $\theta = 3°$, $\theta = 5°$ a $\theta = 10°$ náhradu $\sin\theta = \theta$. Pozor — nutno dosazovat v radiánech! (Srv. s [21.].)

3. Jakou minimální rychlost musíme udělit kuličce

(a) zavěšené na niti délky l a zanedbatelné hmotnosti,

(b) upevněné na tyči délky l a zanedbatelné hmotnosti

v rovnovážné poloze, aby vystoupila do nejvyššího bodu kružnicové trajektorie ležící ve svislé rovině? Vysvětlete případnou rozdílnost výsledků (uvědomte si, že vlákno musí být stále napnuté — nesmí se "pokrčit"). Odpor vzduchu a tření v bodě závěsu zanedbejte.

4. Kyvadlo je tvořeno malou kuličkou zavěšenou na niti délky $l = 1,0$ m a zanedbatelné hmotnosti. Kuličce udělíme v rovnovážné poloze rychlost o velikosti $v_0 = 5,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ kolmou k napnuté niti. Určete místo, v němž se kulička oddělí od kružnicové trajektorie. Do jaké výšky nad vodorovnou rovinou procházející rovnovážnou polohou kulička vystoupí? Odpor vzduchu a tření v bodě závěsu zanedbejte.

5. Hmotný bod se nachází v nejvyšším bodě nehybné kulové plochy o poloměru R a po nepatrném impulzu se dá do pohybu. Určete místo, v němž se hmotný bod od kulové plochy oddělí. Tření i odpor vzduchu zanedbejte.

6. Jakých hodnot může pro kónické kyvadlo (viz ***Úloha 2.***) nabývat úhel θ_0? Zdůvodněte.

7. Jaké síly působí na cestujícího o hmotnosti m pohodlně usazeného v tramvaji, která projíždí rychlostí o velikosti v zatáčkou o poloměru R ležící ve vodorovné rovině? Jaká je výslednice těchto sil?

8. Vysvětlete, proč je například za deště nebezpečné přidávat při průjezdu zatáčkou plyn/brzdit.

****

Příbuzné texty:

- ***Hlavní text***
- ***Nástraha první***
  Není pohyb jako pohyb aneb Kinematika jako zahřívací předkolo
- ***Nástraha druhá***
  Vektory, průměty, složky, velikosti, ... aneb Jak se vypořádat s řešením úloh?
- ***Nástraha třetí***
  Rozumíme silám tření? aneb K čemu slouží vazební podmínky?
- ***Nástraha pátá***
  Výtahy, vlaky, kolotoče, ... aneb Co náš čeká v neinerciálních soustavách?
- ***Nástraha šestá***
  Když se sejde více částic aneb Mechanika tuhého tělesa
- ***Nástraha sedmá***
  Zákony zachování aneb "Není nutné vědět o všem..."
- ***Nástraha osmá***
  Vody stojaté i tekoucí aneb Mechanika kapalin
- ***Nástraha devátá***
  Když Newtonovy zákony nestačí aneb Termodynamika a statistická fyzika v kostce
- ***Nástraha desátá — bonusová***
  Příliš těžké ??? aneb Několik úloh "s hvězdičkou"