Nástraha šestá
Když se sejde více částic
aneb Mechanika tuhého tělesa

Po odhalení nejtypičtějších ***Nástrah***, které se skrývají v oblasti mechaniky hmotného bodu, přichází čas položit si obecnější otázku: Co když je ve hře hmotných bodů, neboli částic, více? "Není problém," odpoví asi každý bez zaváhání, "pro každou z částic zformulujeme druhý Newtonův zákon, přidáme silové zákony a vazební podmínky a dále postupujeme obvyklým způsobem (viz ***Nástraha druhá***)." Přestože je navržený postup myšlenkově zcela jasný, ne vždy je možné dovést jej do zdárného konce (viz například ***Nástraha devátá***). Kromě toho — ne vždy také potřebujeme znát detailní informace o pohybu *každé* z částic: typickým příkladem je pohyb tuhého tělesa, jež plně popisují pouze dvě rovnice, tzv. *impulzové věty*, které jsou důsledkem platnosti Newtonových zákonů[1].

Důležité:

Zrychlení $\vec{a}$ středu hmotnosti (těžiště) tuhého tělesa[2] o hmotnosti m určuje *první impulzová věta*

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_\mathrm{v}\,,$$

kde $\vec{F}_\mathrm{v}$ je výslednice sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... , $\vec{F}_{n-1}$, $\vec{F}_n$, jimiž na těleso působí *okolní* (tj. *vnější*) objekty. Vidíme, že první impulzová věta formálně odpovídá druhému Newtonovu zákonu pro částici o hmotnosti m umístěnou ve středu hmotnosti (těžišti) tuhého tělesa. Otáčivý pohyb tuhého tělesa pak popisuje *druhá impulzová věta*. Vzhledem k tomu, že nástrahy nejraději číhají za těmi nejjednoduššími situacemi, a jen jimi se proto budeme zabývat, uvedeme zde pouze *speciální případ (důsledek) druhé impulzové věty* — rovnici popisující otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem osy jdoucí daným bodem. Platí

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\vec{F}_1} + \vec{M}_{\vec{F}_2} + \ldots + \vec{M}_{\vec{F}_{n-1}} + \vec{M}_{\vec{F}_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{\vec{F}_i} = \vec{M}_\mathrm{v}\,,$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k této ose (přirozeně předpokládáme, že poloha osy se vzhledem k tělesu nemění, ale nevylučujeme případ, kdy se spolu s tělesem v dané vztažné soustavě pohybuje), $\vec{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení tělesa vzhledem k ose a $\vec{M}_\mathrm{v}$ je vektorový součet momentů $\vec{M}_{\vec{F}_1}$, $\vec{M}_{\vec{F}_2}$, ... , $\vec{M}_{\vec{F}_{n-1}}$, $\vec{M}_{\vec{F}_n}$ jednotlivých sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... , $\vec{F}_{n-1}$, $\vec{F}_n$ vzhledem k ose.

Kontrolní otázky:

1. Jaká je definice *momentu síly vzhledem k bodu* (viz ***Hlavní text***, [3.], [4.], [10.]) a *momentu síly vzhledem k ose*? Existuje mezi těmito veličinami nějaká souvislost? Podrobně vysvětlete.

[1] Odvození impulzových vět lze najít v ***Hlavním textu*** nebo ve vybraných učebnicích či skriptech určených pro úvodní vysokoškolský kurz mechaniky (např. [3.], [4.], [10.]). Pro úplnost dodejme, že impulzové věty platí pro *jakoukoli* soustavu hmotných bodů i pro kontinuum, nejen tedy pouze pro tuhé těleso.

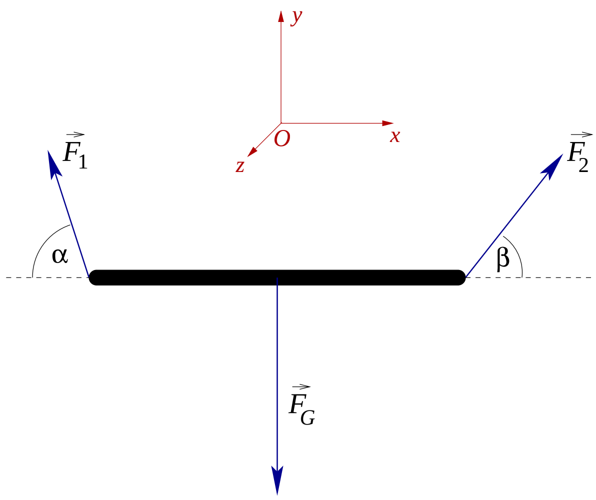
[2] V homogenním tíhovém poli Země je střed hmotnosti (viz ***Hlavní text***) totožný s těžištěm tělesa. (Pokuste se dokázat.)

2. Jaký je obecný tvar druhé impulzové věty? Odvoďte z něj zde uvedený vztah pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem osy. Uveďte rovněž, co platí pro průmět výsledného momentu sil do roviny kolmé k ose otáčení. Může být tato veličina i nenulová? Pokud ano, proč jsme ji do našich dosavadních úvah nezahrnuli? A jaký vliv by měla její nenulovost například na ložiska osy otáčení? ♢

Vše dosud vypadá jednoduše. V čem tedy avizované nástrahy spočívají? Jednoduše řečeno, v nutnosti uvážit nejen *všechny* síly působící na těleso, ale také správně určit jejich *působiště*: co totiž jiné působiště, to také jiný otáčivý účinek síly! Kromě toho jsou, stejně jako již dříve, zdrojem nástrah i středoškolské učebnice ([1.]), kterým se heslo "jasně — stručně — výstižně" stále nedaří naplnit. Opět to nejlépe ukážeme na řešených úlohách. Abychom nemuseli stále vypisovat totéž, podotýkáme, že je vesměs řešíme v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí a že odpor vzduchu zanedbáváme.

Úloha 1.:

Dva trpaslíci si nesou kládu na stavbu altánku. Vykračují si rovnoměrně přímočaře, kládu při tom drží na opačných koncích. Jakou silou na ni každý z nich působí, považujeme-li kládu za homogenní válec délky l a hmotnosti m a předpokládáme-li, že je kláda v průběhu celého manévru ve vodorovné poloze?



Obrázek 1: Síly působící na kládu

Řešení:

Ze zadání je zřejmé (proč?), že těžiště klády leží ve vzdálenosti $\frac{l}{2}$ od jejího konce, že se pohybuje rovnoměrně přímočaře a že se kláda neotáčí. Platí proto, že výslednice *všech* sil působících na kládu i výsledný moment těchto sil vzhledem k *libovolné* ose je nulovým vektorem.

Na kládu působí Země výslednou tíhovou silou $\vec{F}_G$ s působištěm v těžišti klády (přesněji, vektorová přímka tíhové síly je svislá a prochází těžištěm klády), první trpaslík silou $\vec{F}_1$ a druhý trpaslík silou $\vec{F}_2$ (viz Obrázek 1). Platí tedy

$$\vec{0} = \vec{F}_G + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

a vzhledem ke vhodně zvolené ose, například vzhledem k vodorovné ose kolmé na kládu procházející těžištěm (osa rovnoběžná s osou z)[3],

$$\vec{0} = \vec{M}_{\vec{F}_G} + \vec{M}_{\vec{F}_1} + \vec{M}_{\vec{F}_2}\,.$$

V soustavě souřadnic $Oxyz$ zvolené podle Obrázku 1 (kláda leží v rovině Oxy) mají tyto vektorové rovnice složkové zápisy

$$\begin{aligned} 0 &= F_2\cos\beta - F_1\cos\alpha\,,\\ 0 &= F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta - F_G\,,\\ 0 &= \frac{l}{2}\,F_2\sin\beta - \frac{l}{2}\,F_1\sin\alpha\,. \end{aligned}$$

[3] K otázce vhodnosti osy se později ještě vrátíme.

Získali jsme tak tři rovnice pro čtyři(!) neznámé F_1, F_2, α a β. Přepíšeme-li první a třetí rovnici do "opticky přehlednějšího" tvaru

$$F_1 \cos\alpha = F_2 \cos\beta\,,$$
$$F_1 \sin\alpha = F_2 \sin\beta$$

a následně podělíme, dostaneme důležitý dílčí závěr

$$\operatorname{cotan}\alpha = \operatorname{cotan}\beta \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \beta\,,$$

z první (a stejně i z třetí) rovnice pak vychází

$$F_1 = F_2$$

a po dosazení výsledků do druhé rovnice nakonec

$$F_1 = F_2 = \frac{F_G}{2\sin\alpha} = \frac{mg}{2\sin\alpha}\,.$$

Diskuze výsledku:
Protože zadání úlohy nespecifikovalo, jak mají trpaslíci na kládu působit, vzali jsme v úvahu tu nejobecnější možnost, která je s ním v souladu (viz následující *Kontrolní otázka 1.*). Jistě nás tedy nepřekvapuje, že získané řešení není určeno jednoznačně — viz ony tři rovnice pro čtyři neznámé: víme pouze, že vektory sil obou trpaslíků musí s kládou svírat stejný úhel α a stejné jsou i velikosti sil ($F_1 = F_2 = \frac{mg}{2\sin\alpha}$). Vodorovné průměty sil o velikostech $F_1\cos\alpha$ kládu "natahují", svislé průměty sil o velikostech $F_1\sin\alpha$ kládu "nesou". Pro speciální volbu $\alpha = 90^\circ$ (obě síly směřují svisle vzhůru) dostáváme očekávaný výsledek $F_1 = F_2 = \frac{mg}{2}$.

Kontrolní otázky:

1. Vysvětlete, proč jsme neuvažovali o možnosti, že síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ trpaslíků leží v jiné než svislé rovině.
2. Změnily by se složky jednotlivých sil a jejich momentů, kdybychom umístili počátek soustavy souřadnic $Oxyz$ do jiného bodu, zatímco směr souřadnicových os bychom ponechali?
3. Proč jsme při výpočtu určovali momenty sil vzhledem k *vodorovné* ose? Mohli bychom místo ní vzít jakoukoli jinou osu? Vysvětlete. ♢

Poznámka 1:
Při řešení úlohy jsme určovali momenty působících sil vzhledem k vodorovné ose kolmé na kládu a procházející těžištěm. Jak uvidíme hned v následující ***Úloze 2.***, nebývá to vždy pravidlem: základním kritériem pro volbu osy je jednoduchost navazujícího početního postupu, proto zpravidla volíme osu tak, aby ji protínalo co nejvíce vektorových přímek působících sil (v naší úloze by se tedy stejně dobře hodila například vodorovná osa kolmá na kládu procházející jejím koncovým bodem — vyzkoušejte si to).

Poznámka 2:
Předpokládejme nyní, že s nesením klády chce pomoci třetí trpaslík, který ji uchopí ve vzdálenosti d od pravého konce, a že všichni tři trpaslíci působí na kládu *svislými* silami. Označme je $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ a $\vec{F}_3$. Dokážeme určit jejich velikosti? Pokusme se o to. Zapíšeme známou podmínku

$$\vec{0} = \vec{F}_G + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\,,$$

z níž tentokrát získáváme *jedinou* skalární rovnici

$$0 = F_1 + F_2 + F_3 - F_G \,.$$

K ní je třeba přidat podmínku pro momenty těchto sil, opět například vzhledem k vodorovné ose kolmé na kládu procházející těžištěm

$$\vec{0} = \vec{M}_{\vec{F}_G} + \vec{M}_{\vec{F}_1} + \vec{M}_{\vec{F}_2} + \vec{M}_{\vec{F}_3}$$

resp. skalárně

$$0 = \frac{l}{2}\,F_2 - \frac{l}{2}\,F_1 + \frac{l-d}{2}\,F_3 \,.$$

Získali jsme dvě rovnice pro tři neznámé F_1, F_2 a F_3. Že by opět existovalo více řešení? Ale úloha je přece tentokrát zadána naprosto jednoznačně! Co kdybychom tedy rozšířili arzenál dosavadních rovnic ještě o jednu? K tomu by stačilo zformulovat podmínku pro momenty sil vzhledem k jiné ose, například k vodorovné ose kolmé na kládu procházející jejím krajním bodem. Učiníme-li tak a pustíme se do řešení rovnic, brzy zjistíme, že jsou *závislé*, tj. jedna z nich je důsledkem zbývajících dvou. Je to náhoda, nebo pravidlo? ♢

Odpověď na otázku, která vyvstala v závěru ***Úlohy 1.***, středoškolské učebnice ([1.]) nenabízejí. Marná je také snaha vnímavých studentů z učebnic zjistit, zda výsledek současného splnění podmínky $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$ a podmínky $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{\vec{F}_i} = \vec{0}$ závisí na volbě osy, vzhledem k níž druhou z nich vyjadřujeme. Odpověď je kladná: *ano, obecně závisí* — stačí uvážit například dvojici sil: jejich výslednice je nulová, výsledný moment vzhledem k ose, která spojuje jejich působiště, je rovněž nulový, ale výsledný moment vzhledem k ose k ní kolmé již nulový není. Je tedy postup řešení úloh předkládaný v učebnicích a nakonec i zde v ***Úloze 1.*** v něčem pochybný? Ne tak docela, musí být ovšem dobře vysvětlen. Problém je totiž v tom, že jsme se zatím, stejně jako učebnice, zaměřili pouze na velmi speciální veličiny — *momenty sil vzhledem k dané ose*. Ve druhé impulzové větě i v podmínkách rovnováhy tělesa však vystupují momenty sil *vzhledem k danému bodu*, počátku zvolené soustavy souřadnic. K pochopení rozdílu opět potřebujeme jistou matematickou pokročilost — znalost vektorového součinu.

Důležité:

Připomeňme, že moment síly $\vec{F}$, jejíž působiště leží v místě určeném v dané soustavě souřadnic $Oxyz$ polohovým vektorem $\vec{r}$, je vzhledem k počátku O této soustavy souřadnic definován vztahem

$$\vec{M}^O = \vec{r} \times \vec{F} \,.$$

Důležitým pojmem je *rovnováha tuhého tělesa*. Říkáme, že tuhé těleso je v dané soustavě souřadnic *v rovnováze*, je-li současně splněna *podmínka silové rovnováhy*

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

a *podmínka momentové rovnováhy*

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}^O_{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \vec{0} \,,$$

přičemž, jak napovídá zápis, momenty jednotlivých sil určujeme *vzhledem k počátku O soustavy souřadnic*. Skutečnost, že je těleso v rovnováze, však vůbec neznamená, že je v dané soustavě souřadnic v klidu(!): oběma podmínkám totiž vyhovuje i rovnoměrný přímočarý pohyb těžiště tělesa a otáčivý pohyb tělesa konstantní úhlovou rychlostí.

Pro stanovení podmínek rovnováhy tělesa, a tím i pro zodpovězení otázky nastolené v závěru ***Úlohy 1.***, má zásadní význam následující tvrzení:

Platí-li podmínka silové rovnováhy $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$, pak vektorový součet momentů všech těchto sil $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}^{O}_{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)$ nezávisí na volbě počátku soustavy souřadnic O, vzhledem k němuž jej určujeme[4].

Jeho ověření je jednoduchým cvičením na počítání s vektory a na vlastnosti vektorového součinu:

Uvažme dvě různé soustavy souřadnic $Oxyz$, $O'x'y'z'$ a označme $\vec{d}$ polohový vektor bodu O' v soustavě $Oxyz$. Potom platí

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}^{O'}_{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i^{\,\prime} \times \vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\vec{r}_i - \vec{d}\right) \times \vec{F}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)}_{\vec{M}^{O}_{\vec{F}_i}} - \vec{d}\times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}_{\vec{0}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}^{O}_{\vec{F}_i}\,.$$

Nyní již je zřejmé, že při formulaci podmínek rovnováhy tělesa musíme momenty působících sil, jejichž výslednice má být nulová, určovat *vzhledem k bodu* — lhostejno jakému — čímž získáme jednu vektorovou rovnici. Existují ale situace, kdy je moment působících sil vzhledem k danému bodu totožný s momentem sil vzhledem ke vhodně zvolené ose procházející tímto bodem. Tak je tomu nejen v ***Úloze 1.***, ale i v již zmíněných učebnicových příkladech[5]. Podmínky momentové rovnováhy formulované pro další a další body (eventuálně osy) pak opravdu nepřinášejí nic nového, proto je v ***Úloze 1.*** silové působení trojice trpaslíků do značné míry (diktované pouze podmínkou silové a momentové rovnováhy) věcí jejich vzájemné dohody.

Zařaďme ještě jednu úlohu na rovnováhu tuhého tělesa. S její jednodušší variantu se můžeme setkat na stránkách učebnic ([1.]), ovšem opět s tradičními nedostatky — opomenutím některých z působících sil.

Úloha 2.:

Homogenní žebřík o délce l a hmotnosti m je horním koncem opřen o svislou stěnu tak, že s ní svírá úhel α. Jak vysoko může vystoupit opravář o hmotnosti m_{o}, aby s ním žebřík nesklouzl? Koeficient statického tření mezi vodorovnou podlahou a žebříkem je f_0^{p}, mezi stěnou a žebříkem je f_0^{s}.

Řešení:

Na žebřík působí v jeho těžišti tíhová síla Země $\vec{F}_G$, opravář na něj v místě, kde stojí, působí tlakovou silou $\vec{N}$, podlaha působí na žebřík výslednou tlakovou silou $\vec{N}^{\text{p}}$ a výslednou statickou třecí silou $\vec{F}^{\text{p}}_{\text{t,s}}$ a podobně na něj působí stěna výslednou tlakovou silou $\vec{N}^{\text{s}}$ a výslednou statickou třecí silou $\vec{F}^{\text{s}}_{\text{t,s}}$ (viz Obrázek 2). Podmínka silové rovnováhy má tedy tvar

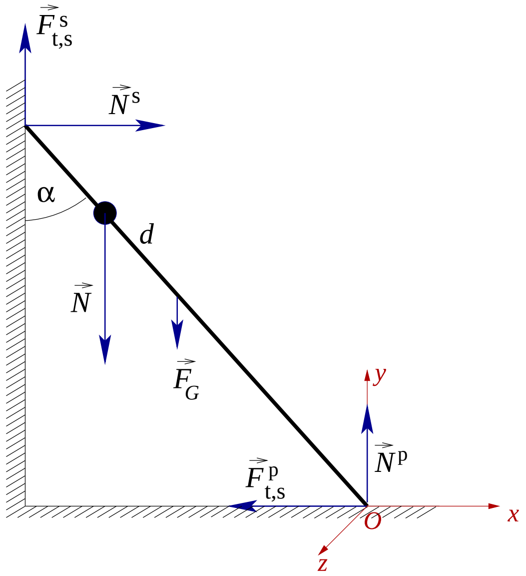
$$\vec{F}_G + \vec{N} + \vec{N}^{\text{p}} + \vec{F}^{\text{p}}_{\text{t,s}} + \vec{N}^{\text{s}} + \vec{F}^{\text{s}}_{\text{t,s}} = \vec{0}\,.$$

Podmínka momentové rovnováhy vzhledem k *libovolnému bodu O* zní

$$\vec{M}^{O}_{\vec{F}_G} + \vec{M}^{O}_{\vec{N}} + \vec{M}^{O}_{\vec{N}^{\text{p}}} + \vec{M}^{O}_{\vec{F}^{\text{p}}_{\text{t,s}}} + \vec{M}^{O}_{\vec{N}^{\text{s}}} + \vec{M}^{O}_{\vec{F}^{\text{s}}_{\text{t,s}}} = \vec{0}\,.$$

[4]Máme zde pochopitelně na mysli jen ty soustavy souřadnic, které se vzhledem k sobě pohybují nanejvýš rovnoměrně přímočaře a neotáčejí se. (Vysvětlete, srv. též s ***Nástrahou pátou***. Musí být tyto soustavy nutně inerciální?)

[5]Jinou otázkou je, proč autoři učebnic nenazývají věci pravými jmény, tedy proč místo o úlohách na stanovení podmínek rovnováhy tělesa "uměle" mluví o úlohách na rozklad sil — například na rozklad síly tíhové ve dvě síly působící na koncích břemene.



Obrázek 2: Síly působící na žebřík

Bod O se s ohledem na jednoduchost početního postupu volí tak, aby v něm působilo co nejvíce sil — zde se tedy stejně dobře hodí bod kontaktu žebříku s podlahou a bod kontaktu žebříku se stěnou[6]. Vyberme například první z nich. V soustavě souřadnic podle Obrázku 2 pak platí:

$$
\begin{aligned}
&N^{\mathrm{s}} - F^{\mathrm{p}}_{\mathrm{t,s}} = 0\,,\\
&N^{\mathrm{p}} + F^{\mathrm{s}}_{\mathrm{t,s}} - F_G - N = 0\,,\\
&\left(\frac{l}{2}\sin\alpha\right) F_G + (d\sin\alpha)\, N - (l\cos\alpha)\, N^{\mathrm{s}} -\\
&\quad - (l\sin\alpha)\, F^{\mathrm{s}}_{\mathrm{t,s}} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Všimněme si, že stejně jako v ***Úloze 1.*** je i tentokrát podmínka momentové rovnováhy vzhledem k bodu O totožná s podmínkou nulovosti výsledného momentu sil vzhledem k ose z. Dosadíme-li do předchozích rovnic vztahy $F_G = mg$ (silový zákon pro velikost tíhové síly), $N = m_{\mathrm{o}}g$ (důsledek vazební podmínky pro opraváře — objasněte) a uvážíme-li navíc, že v okamžiku před sklouznutím žebříku platí $F^{\mathrm{p,max}}_{\mathrm{t,s}} = f^{\mathrm{p}}_0 N^{\mathrm{p}}$ a $F^{\mathrm{s,max}}_{\mathrm{t,s}} = f^{\mathrm{s}}_0 N^{\mathrm{s}}$ (viz ***Nástraha třetí***), získáme soustavu tří rovnic pro tři neznámé d, N^{p} a N^{s}:

$$
\begin{aligned}
&N^{\mathrm{s}} - f^{\mathrm{p}}_0 N^{\mathrm{p}} = 0\,,\\
&N^{\mathrm{p}} + f^{\mathrm{s}}_0 N^{\mathrm{s}} - mg - m_{\mathrm{o}}g = 0\,,\\
&\left(\tfrac{l}{2}\sin\alpha\right) mg + (d\sin\alpha)\, m_{\mathrm{o}}g - (l\cos\alpha)\, N^{\mathrm{s}} - (l\sin\alpha)\, f^{\mathrm{s}}_0 N^{\mathrm{s}} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Zajímá nás vzdálenost, do níž může opravář vystoupit. Pro ni vychází

$$
d = \frac{l}{m_{\mathrm{o}}}\left[\frac{f^{\mathrm{p}}_0\,(m_{\mathrm{o}}+m)}{1+f^{\mathrm{p}}_0 f^{\mathrm{s}}_0}\,(\mathrm{cotan}\alpha + f^{\mathrm{s}}_0) - \frac{m}{2}\right]. \qquad \diamondsuit
$$

První dvě úlohy popisovaly rovnováhu tuhého tělesa. V druhých dvou úlohách budeme aplikovat impulzové věty na případy, kdy těleso v rovnováze není, tj. pohybuje se se zrychlením nebo se otáčí se zrychlením.

Úloha 3.:

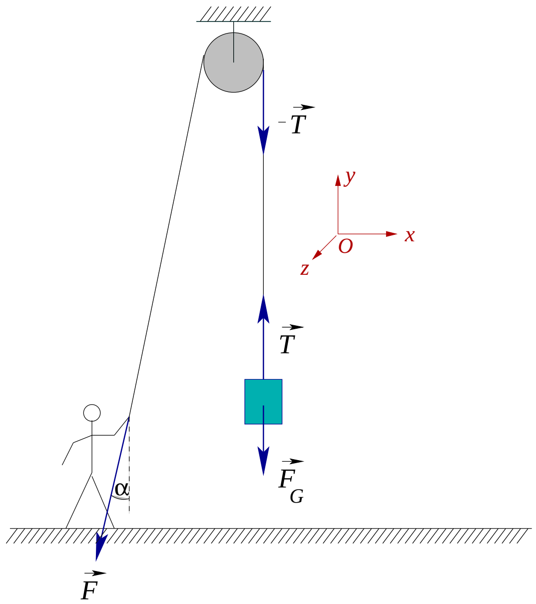
Člověk zvedá pomocí válcové kladky o hmotnosti m_{k} a poloměru r břemeno o hmotnosti m. Na lano, o němž předpokládáme, že je nepružné a má zanedbatelnou hmotnost, při tom působí silou $\vec{F}$, která svírá se svislým směrem úhel α. S jakým zrychlením břemeno stoupá vzhůru? Jak velká tahová síla lana na břemeno působí? Tření v ose kladky zanedbejte.

Řešení:

Na břemeno působí tíhová síla Země $\vec{F}_G$ a tahová síla lana $\vec{T}$. Podle třetího Newtonova zákona působí břemeno na lano silou $-\vec{T}$, dále působí na lano také člověk silou $\vec{F}$ (viz Obrázek 3). Předpokládáme-li natolik velké tření, že lano nepodkluzuje, jsou síly $-\vec{T}$ a $\vec{F}$ ekvivalentní třecím

[6] Přesněji jde o body, v nichž působí výsledné tlakové resp. třecí síly.

silám, jimiž lano působí v bodech kontaktu na kladku[7]. Právě tyto ze sil působících na kladku mají vzhledem k její ose nenulový otáčivý účinek (proč? (viz také zadání ***Úlohy 3.***, str. 9)).



Obrázek 3: Zvedání břemene pomocí kladky

První impulzová věta pro pohyb (těžiště) břemene má tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{T}\,,$$

s uvážením směru jednotlivých vektorů pak

$$ma = T - F_G\,.$$

Řekli jsme již, že ze všech sil, které na kladku působí, na ni mají otáčivý účinek pouze síly $\vec{F}$ a $-\vec{T}$. Pohybová rovnice otáčivého pohybu kladky vzhledem k její ose je tedy

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{-\vec{T}}\,,$$

skalárně potom

$$J\varepsilon = rF - rT\,.$$

Dosadíme-li do předchozích skalárních rovnic známé vztahy $F_G = mg$, $J = \frac{1}{2}m_{\mathrm{k}}r^2$ a $\varepsilon = \frac{a}{r}$ (důsledek skutečnosti, že lano nepodkluzuje — — vysvětlete), dostáváme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} ma &= T - mg\,,\\ \frac{1}{2}m_{\mathrm{k}}a &= F - T \end{aligned}$$

pro dvě neznámé a a T. Jejich sečtením máme

$$F - mg = \left(m + \frac{1}{2}m_{\mathrm{k}}\right)a \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{2\,(F - mg)}{2m + m_{\mathrm{k}}}$$

a z první rovnice pak

$$T = m\,(g + a) = m\left[g + \frac{2\,(F - mg)}{2m + m_{\mathrm{k}}}\right].$$

Diskuze výsledků:
Zadání požaduje, aby člověk břemeno zvedal, tj.

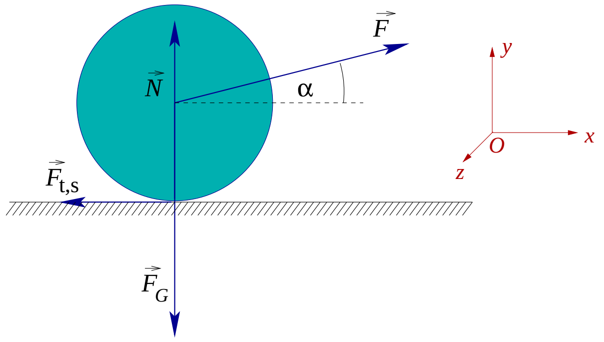
$$a = \frac{2\,(F - mg)}{2m + m_{\mathrm{k}}} \geq 0\,,$$

musí proto na lano v souladu s očekáváním působit silou o velikosti $F \geq mg$. Umíte vysvětlit, proč výsledky nezávisí na hodnotě úhlu α? ◊

V závěrečné úloze opět připomeneme roli statického tření — tentokrát bude bránit prokluzu otáčejícího se tělesa.

Úloha 4.:
Po vodorovné podložce se pohybuje válec o hmotnosti m a poloměru r. V těžišti na něj působíme silou $\vec{F}$, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α a jejíž vektor je rovnoběžný s rovinou podstavy válce. Jakou podmínku musí splňovat velikost této síly, aby válec při pohybu nepodkluzoval, je-li koeficient statického tření mezi válcem a podložkou f_0?

[7]Soustavy sil nazýváme ekvivalentními, právě když vedou ke stejné změně pohybového stavu tělesa, tj. vektorový součet sil a vektorový součet momentů sil vzhledem k libovolnému bodu je pro obě soustavy tentýž.



Obrázek 4: Síly působící na válec

Řešení:

Na válec působí v těžišti tíhová síla Země $\vec{F}_G$ a síla $\vec{F}$, v bodech kontaktu válce s podložkou pak tlakové síly, jejichž výslednici označíme $\vec{N}$, a statické třecí síly (*statické* proto, že podle zadání válec nepodkluzuje), jejichž výslednici označíme $\vec{F}_{\mathrm{t,s}}$ (viz Obrázek 4)[8]. Rovnice pro pohyb těžiště válce je

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{t,s}}\,,$$

rovnice popisující otáčivý pohyb válce kolem jeho osy symetrie má tvar

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\vec{F}_{\mathrm{t,s}}}\,,$$

neboť momenty ostatních působících sil vzhledem k této ose jsou nulové. V soustavě souřadnic podle Obrázku 4 tedy (s uvážením vazební podmínky, že těžiště válce se pohybuje podél osy x) platí

$$\begin{aligned} ma &= F\cos\alpha - F_{\mathrm{t,s}}\,,\\ 0 &= F\sin\alpha + N - F_G\,,\\ J\varepsilon &= rF_{\mathrm{t,s}}\,. \end{aligned}$$

Po dosazení $F_G = mg$, $J = \frac{1}{2}mr^2$ a $\varepsilon = \frac{a}{r}$ (válec nepodkluzuje) získáváme tři rovnice pro tři neznámé a, N a $F_{\mathrm{t,s}}$

$$\begin{aligned} ma &= F\cos\alpha - F_{\mathrm{t,s}}\,,\\ 0 &= F\sin\alpha + N - mg\,,\\ \frac{1}{2}ma &= F_{\mathrm{t,s}}\,. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vychází

$$N = mg - F\sin\alpha\,,$$

sečtením první a třetí

$$F\cos\alpha = \left(m + \frac{1}{2}m\right)a \qquad\Longrightarrow\qquad a = \frac{2F\cos\alpha}{3m}$$

a dosazením do třetí rovnice potom

$$F_{\mathrm{t,s}} = \frac{F\cos\alpha}{3}\,.$$

Pro velikost statické třecí síly platí

$$\frac{F\cos\alpha}{3} = F_{\mathrm{t,s}} \le F_{\mathrm{t,s}}^{\max} = f_0 N = f_0\,(mg - F\sin\alpha) \quad\Longrightarrow\quad F \le \frac{3f_0 mg}{\cos\alpha + 3f_0\sin\alpha}\,. \qquad \diamondsuit$$

[8] Přesněji, síly $\vec{N}$ a $\vec{F}_{\mathrm{t,s}}$ jsou ekvivalentní působícím tlakovým resp. třecím silám.

Otázky, cvičení a náměty k přemýšlení:

1. Vyřešte znovu ***Úlohu 1.*** za předpokladu, že kláda není homogenní a její těžiště leží ve vzdálenosti d od vlevo kráčejícího trpaslíka.
2. Nebezpečí sklouznutí žebříku s opravářem (viz ***Úloha 2.***) může odvrátit pomocník, který stojí na zemi a žebřík přidržuje. Předpokládejte, že pomocník na žebřík působí v určitém bodě silou $\vec{F}$. Jak vysoko může opravář vystoupit tentokrát? Proveďte diskuzi výsledku v závislosti na volbě velikosti, směru, orientace a působiště síly $\vec{F}$.
3. Určete velikosti všech sil, které v ***Úloze 3.*** působí na kladku a velikost jejich výslednice. Které objekty na kladku těmito silami působí? Odpovídá Obrázek 3 situaci, kdy je osa kladky zavěšena na vlákně, nebo situaci, kdy je se stropem pevně spojena tyčí? (Vysvětlete.)
4. Určete velikosti všech sil, které v ***Úloze 3.*** působí na člověka.
5. S jakým zrychlením se bude pohybovat břemeno z ***Úlohy 3.***, bude-li člověk šplhat po laně s konstantním zrychlením $\vec{A}$?
6. Hračku jojo lze považovat za cívku o vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R. S jakým zrychlením se pohybuje těžiště hračky o hmotnosti m a jakou silou je při tom namáháno vlákno, víme-li, že směr vlákna je v průběhu pohybu hračky svislý? Předpokládejte, že vlákno má zanedbatelnou hmotnost.
7. Na dvojité nakloněné rovině s úhly sklonu α a β jsou nepružným vláknem zanedbatelné hmotnosti přes kladku spojena tělesa o hmotnostech m_1 a m_2. Kladku lze považovat za homogenní válec o hmotnosti m_k a poloměru r. S jakým zrychlením se pohybují jednotlivá tělesa, jsou-li koeficienty dynamického tření mezi nimi a podložkou po řadě f_1 a f_2? Tření v ose kladky zanedbejte.
8. Na vrcholu nehybného půlválce o poloměru R spočívá váleček o hmotnosti m a poloměru r, který nepatrným impulzem uvedeme do pohybu. Určete místo, v němž se váleček od válce oddělí. Předpokládejte, že tření je natolik velké, že váleček během pohybu nepodkluzuje (srv. s **Úlohou 5.** na str. 7 ***Nástrahy čtvrté***).

****

Příbuzné texty:

- ***Hlavní text***
- ***Nástraha první***
  Není pohyb jako pohyb aneb Kinematika jako zahřívací předkolo
- ***Nástraha druhá***
  Vektory, průměty, složky, velikosti, … aneb Jak se vypořádat s řešením úloh?
- ***Nástraha třetí***
  Rozumíme silám tření? aneb K čemu slouží vazební podmínky?
- ***Nástraha čtvrtá***
  Dynamika křivočarého pohybu aneb Jak se vyhnout tradičním omylům?

- ▷ *Nástraha pátá*
  Výtahy, vlaky, kolotoče, ... aneb Co náš čeká v neinerciálních soustavách?
- ▷ *Nástraha sedmá*
  Zákony zachování aneb "Není nutné vědět o všem..."
- ▷ *Nástraha osmá*
  Vody stojaté i tekoucí aneb Mechanika kapalin
- ▷ *Nástraha devátá*
  Když Newtonovy zákony nestačí aneb Termodynamika a statistická fyzika v kostce
- ▷ *Nástraha desátá — bonusová*
  Příliš těžké ??? aneb Několik úloh "s hvězdičkou"