

Obsah

1	Pojmy klasické mechaniky — pohyb a jeho popis	5
1.1	Tělesa a jejich modely	5
1.1.1	Hmotný bod	6
1.1.2	Těleso s diskrétním rozložením hmotnosti	7
1.1.3	Těleso se spojitým rozložením hmotnosti	11
1.2	Volné částice a vztažné soustavy	14
1.2.1	Časoprostor	14
1.2.2	Inerciální vztažné soustavy	17
1.3	Mechanický stav částice a jeho časový vývoj	19
1.3.1	Poloha a její změny	20
1.3.2	Rychlost a zrychlení	20
1.3.3	Geometrické charakteristiky trajektorie	23
1.3.4	Tečné a normálové zrychlení	31
1.3.5	Úhlové charakteristiky pohybu částice	32
1.3.6	Obrácená úloha: Od zrychlení k trajektorii I	33
1.4	Popis pohybu různými pozorovateli — každý to vidí jinak	38
1.4.1	Okamžité šíření interakce a absolutnost současnosti	39
1.4.2	Přechod mezi soustavami souřadnic jako geometrický problém	39
1.4.3	Pohyb v různých vztažných soustavách — vektorová formulace	42
1.4.4	Pohyb v různých vztažných soustavách — maticová formulace	48
1.4.5	Aplikace: Translační pohyb vztažných soustav, Galileiova transformace	51
1.4.6	Aplikace: Pohyb částice v laboratorní vztažné soustavě	53
2	Principy klasické mechaniky	59
2.1	První Newtonův zákon a jak mu rozumět	59
2.1.1	Newtonova formulace prvního zákona a související otázky	60
2.1.2	Odpovědi na otázky k prvnímu Newtonovu zákonu	61
2.2	Druhý Newtonův zákon a jeho dvojí čtení	62
2.2.1	Newtonova formulace druhého zákona a související otázky	63
2.2.2	Odpovědi na otázky k druhému Newtonovu zákonu	64

2.3	Třetí Newtonův zákon a jeho význam	68
2.3.1	Newtonova formulace třetího zákona a podstata interakce	68
2.3.2	Silové zákony a základní interakce	69
2.4	Newtonovy zákony a pohybové rovnice	75
2.4.1	Od interakcí ke zrychlení	76
2.4.2	Pohybové rovnice: Od zrychlení k trajektorii II	87
2.4.3	Newtonovy zákony v neinerciálních soustavách	113
3	Odvozená tvrzení klasické mechaniky	119
3.1	Práce a mechanická energie	119
3.1.1	Práce síly po křivce	119
3.1.2	Kinetická energie	119
3.1.3	Konzervativní síly a potenciální energie	119
3.2	Impulzové věty a zákony zachování	119
3.2.1	První impulsová věta	119
3.2.2	Druhá impulsová věta	119
3.2.3	Střed hmotnosti	119
3.2.4	Dvoučásticová izolovaná soustava	119
3.3	Pohyb tuhých těles	119
3.3.1	Rotace tuhého tělesa kolem pevné osy	119
3.3.2	Rotace tuhého tělesa kolem pevného bodu	119
4	Mechanika tekutin	121
4.1	Statická rovnováha tekutin	121
4.1.1	Podmínky rovnováhy	121
4.1.2	Tlak a jeho rozložení v tekutině	121
4.2	Pohyb tekutin	121
4.2.1	Popis pohybu kontinua	121
4.2.2	Pohyb ideálních tekutin	124
4.2.3	Pohyb reálných tekutin	124
5	Soustavy mnoha částic a zákonitosti jejich chování	125
5.1	Zákony termodynamiky	125
5.2	Makroskopické veličiny a střední hodnoty	125
5.3	xxxxx	125

Jak číst tento text

Text je koncipován takzvaně „pro dvojí čtení“. Základem jsou části psané normální velikostí písma a slouží pro první čtení. Části psané modrým *petitem* jsou určeny k hlubšímu přemýšlení a k rozšíření znalosti problematiky. Jsou také často věnovány podrobnějším matematickým výpočtům. Při prvním čtení je lze vynechat bez ztráty souvislosti.

Kapitola 1

Pojmy klasické mechaniky — pohyb a jeho popis

Cílem klasické mechaniky jsou předpovědi týkající se mechanického pohybu objektů a jejich soustav. Abychom uměli na základě mechanických zákonů pohyb „předpovídat“, musíme především umět jej popsat. Vstupním problémem klasické mechaniky je proto nalezení přiměřeného kvantitativního popisu pohybu. To je úkolem *kinematiky*, jedné z dílčích disciplín mechaniky.

1.1 Tělesa a jejich modely

Popis pohybu reálných objektů může být značně složitý — představte si například vířící masy vzduchu při větrné smršti. Základem pro popis takto složitého pohybu musí být popisu pohybu mnohem jednodušších modelů vystihujících vlastnosti reálných objektů. O takových modelech pojednává tento odstavec.

Jednou z charakteristik neodmyslitelně spjatých jak s předměty, které nás obklopují, tak s tělesy světa planet, hvězd a galaxií i s částicemi mikrosvěta, je jejich *hmotnost*. Rozsah hmotností prozatím známých objektů je obrovský, od řádových hodnot 10^{-30} kg odpovídajících mikročásticím až po hmotnosti galaktických kup, pohybující se v rozmezí od 10^{39} kg do 10^{45} kg. Jemnější škálu vystihuje následující tabulka.

TABULKA 1.1: HMOTNOSTI OBJEKTŮ

MIKROSVĚT	LOG M	MAKROSVĚT
elektron μ -mezon (mion) proton a neutron nejhmotnější atomy velké organické molekuly virus jednobuněčný organismus	−30 −28 −27 −25 −20 −18 −8 −5	mravenec
	2	člověk
	4 9 24 30 41 45 50	slon zaoceánská plavidla Země Slunce naše Galaxie galaktické kupy dosud známá hmotnost vesmíru

Vnitřní struktura makroskopických hmotných objektů, tzv. *těles*, tvořených množstvím částic, které interagují prostřednictvím různých typů vazeb, je velmi složitá. Pro popis makroskopického mechanického pohybu tělesa jako celku, tj. jeho posuvů a změn orientace vůči okolním objektům, ani pro popis vzájemného pohybu jeho jednotlivých makroskopických částí, tj. deformace, však není podstatná. Je tedy možné, samozřejmě s ohledem na to, jaký typ makroskopického pohybu je v dané konkrétní situaci dominantní, charakterizovat objekty a jejich soustavy zjednodušeně, pomocí vhodných modelů přiměřeně vystihujících *prostorové rozložení* jejich hmotnosti.

Nejsnazší popis umožňují dva extrémní modely: model tělesa s *diskrétním rozložením hmotnosti* a model tělesa se *spojitým rozložením hmotnosti*. Každý z nich umožňuje poměrně jednoduše definovat a prakticky vypočítat další charakteristiky, spjaté se studovanými objekty, které jsou důležité z hlediska jejich mechanického pohybu.

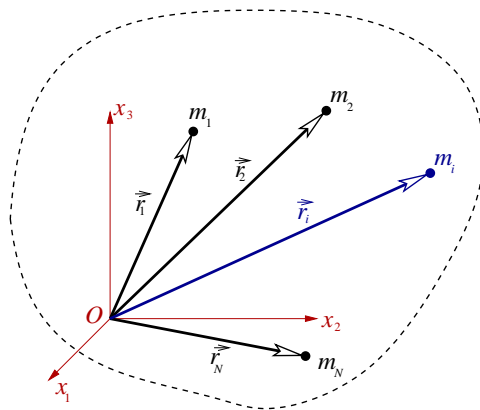
1.1.1 Hmotný bod

Nejjednodušším modelem tělesa, nesoucím jeho základní charakteristiku — hmotnost, pomíjejícím však její prostorové rozložení, je *hmotný bod*, ve zkrácené terminologii nazývaný také *částice*. Hmotným bodem rozumíme geometrický bod

v prostoru opatřený údajem o hmotnosti. Tímto modelem lze nahradit reálné těleso, jehož rozměry nehrají v dané konkrétní situaci roli. (Takovou situaci může představovat studium čistě posuvného pohybu třeba i velmi rozměrného objektu — například studium pohybu Země kolem Slunce, nezajímáme-li se o zemskou rotaci.) Hmotný bod, reprezentující těleso jako celek, pak umísťujeme do vhodně zvoleného místa objektu, jímž je například u stejnorodého kulového tělesa jeho geometrický střed. Prostor, v němž se reálná tělesa pohybují, modelujeme v klasické mechanice trojrozměrným euklidovským prostorem \mathbf{R}^3 . Polohu hmotného bodu pak charakterizujeme jeho *polohovým vektorem* \vec{r} vůči libovolně, avšak pevně, zvolenému *vztažnému bodu* O , resp. *složkami* tohoto vektoru $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vůči *kartézské soustavě souřadnic* $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, zadané *počátkem* O a jednotkovými navzájem kolmými vektory *ortonormální báze* $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, resp. $\langle O; x_1, x_2, x_3 \rangle$ (zadání počátkem a navzájem kolmými osami x_1, x_2 a x_3 opatřených stejnou délkovou jednotkou).

1.1.2 Těleso s diskrétním rozložením hmotnosti

O soustavě tvořené N reálnými objekty, z nichž každý může být nahrazen hmotným bodem, hovoříme jako o *tělese s diskrétním rozložením hmotnosti*, resp. *soustavě hmotných bodů či soustavě částic*. (Příkladem může být sluneční soustava, při jejímž popisu lze za jistých okolností nahradit Slunce i každou z planet hmotným bodem.) Z hlediska popisu soustavy jako celku jsou rozhodující nejen hmotnosti jednotlivých částic, ale i jejich polohy.



OBR. 1.1: POPIS TĚLESA S DISKRÉTNÍM ROZLOŽENÍM HMOTNOSTI

Úplná informace o prostorovém rozložení hmotnosti tělesa v daném okamžiku je obsažena v souboru dvojic

$$\{m_i, \vec{r}_i\}, i \in \{1, \dots, N\},$$

kde index i čísluje jednotlivé částice soustavy. *Celková hmotnost* tělesa je dána součtem

$$m = \sum_{i=1}^N m_i = m_1 + m_2 + \dots + m_N. \quad (1.1)$$

S rozložením hmotnosti bezprostředně souvisí další důležité charakteristiky tělesa, jejichž fyzikální význam pochopíme v dalších kapitolách: *Střed hmotnosti* tělesa je bod o polohovém vektoru \vec{r}_0 definovaném vztahem

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + \dots + m_N}. \quad (1.2)$$

Jedná se o vážený průměr polohových vektorů částic s vahami určenými jednotlivými hmotnostmi. Pro složky polohového vektoru středu hmotnosti platí

$$x_{0,1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_{i,1}, \quad x_{0,2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_{i,2}, \quad x_{0,3} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_{i,3}. \quad (1.3)$$

Tenzor momentu setrvačnosti tělesa \hat{J} je dán šesti veličinami, uspořádanými do symetrické matice J a nazývanými *složky* tenzoru momentu setrvačnosti:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix} = \quad (1.4)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) & \sum_{i=1}^N -m_i x_{i1} x_{i2} & \sum_{i=1}^N -m_i x_{i1} x_{i3} \\ \sum_{i=1}^N -m_i x_{i1} x_{i2} & \sum_{i=1}^N m_i (x_{i1}^2 + x_{i3}^2) & \sum_{i=1}^N -m_i x_{i2} x_{i3} \\ \sum_{i=1}^N -m_i x_{i1} x_{i3} & \sum_{i=1}^N -m_i x_{i2} x_{i3} & \sum_{i=1}^N m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \end{pmatrix}.$$

J_{11} , J_{22} , J_{33} představují tzv. *diagonální* složky, ostatní, *nediagonální*, složky se nazývají *deviační momenty*. Speciálním případem soustavy částic je tzv. *tuhé těleso*, v němž je vzdálenost každé dvojice částic neměnná, tj.

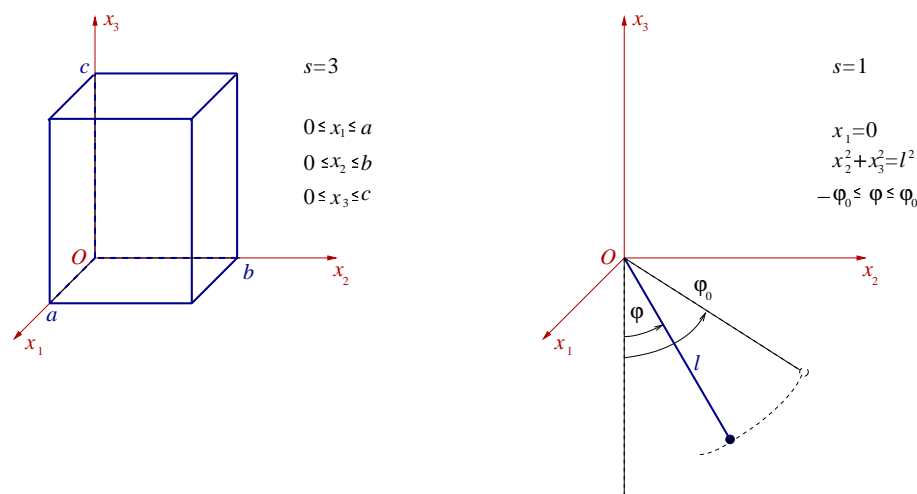
$$|\vec{r}_{kj}| = |\vec{r}_j - \vec{r}_k| = \overrightarrow{\text{konst.}}, \quad \text{kde } k, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Tuhé těleso tedy nelze deformovat. Znamená to, že existují souřadnicové soustavy, pevně spjaté s tělesem, vůči nimž jsou polohový vektor středu hmotnosti i tenzor momentu setrvačnosti konstantní. Jedná se o tzv. souřadnicové soustavy *pevné v tělese*. Často je užitečné vybírat z nich ty, jejichž počátek je umístěn ve středu hmotnosti tělesa. Je zřejmé, že složky polohového vektoru středu hmotnosti i složky tenzoru momentu setrvačnosti závisí na volbě soustavy souřadnic. Ke konkrétnímu řešení tohoto problému se vrátíme v dalších kapitolách.

Polohové vektory $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$ částic tvořících soustavu určují její *okamžitou konfiguraci*. Konfigurace soustavy je tedy zadána souborem $3N$ kartézských souřadnic $\{x_{ij}(t)\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ těchto polohových vektorů. Velmi užitečná, i když poněkud abstraktní, je představa těchto N skalárních veličin jako souřadnic bodu v $3N$ -rozměrném euklidovském prostoru \mathbf{R}^{3N} , nazývaném *konfiguračním*

prostorem. Nejsou-li na konfiguraci soustavy částic kladeny žádné omezující požadavky, představuje každý bod prostoru \mathbf{R}^{3N} právě jednu z možných konfigurací soustavy. Omezení množiny konfigurací, takzvané *vazební podmínky*, mohou mít tvar nerovností typu $a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, obecněji $A \leq f(x_{11}, \dots, x_{N3}) \leq B$, vymezujících v prostoru \mathbf{R}^{3N} $3N$ -rozměrnou oblast přípustných konfigurací, nebo tvar vztahů mezi souřadnicemi x_{ij} , redukujících množinu přípustných konfigurací na konfigurační podprostor dimenze menší než $3N$.

PŘÍKLAD 1.1. Situace představující možná omezení konfigurace soustavy ilustrujeme na příkladu jedné částice. Konfiguračním prostorem soustavy tvořené jedinou částicí, na jejíž polohu $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ nejsou kladeny žádné požadavky, je prostor \mathbf{R}^3 . Poloha částice je tedy bez omezení určena třemi souřadnicemi. Říkáme, že částice má tři stupně volnosti, $s = 3$. Požadavek uvěznění částice v nádobě tvaru kvádru o hranách a, b, c , resp. koule o poloměru R , vede k omezení přípustných konfigurací na oblast prostoru \mathbf{R}^3 určenou např. nerovnostmi $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$, $0 \leq x_3 \leq c$, resp. $0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq R$.



OBR. 1.2: KONFIGURAČNÍ PROSTOR JEDNÉ ČÁSTICE

Je-li částice zavěšena na vlákně neproměnné délky l a uvedena do pohybu tak, že kývá v rovině x_2Ox_3 s maximální úhlovou výchylkou φ_0 , je množina jejích konfigurací určena vztahy $x_1 = 0$, $x_2^2 + x_3^2 = l^2$ a nerovností $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Její pohyb je omezen na kruhový oblouk, tj. jednorozměrný útvar. Polohu částice lze v každém okamžiku popsat jediným údajem — úhlovou výchylkou $\varphi(t)$ (částice má jeden stupeň volnosti, $s = 1$). Výchylku lze chápat jako *zobecněnou souřadnici* (není to souřadnice kartézská), udávající polohu soustavy v jednorozměrném konfiguračním prostoru \mathbf{R} (prostor úhlů). Soustava tedy má jediný

stupeň volnosti, na který se vlivem dvou vazebních podmínek redukoval popis jejích konfigurací z původních tří stupňů volnosti určených kartézskými souřadnicemi x_1, x_2, x_3 . ♣

Soustava N částic, na jejíž konfiguraci nejsou kladeny žádné vazební podmínky, má $3N$ stupňů volnosti. Podléhá-li však k nezávislým vazebním podmínkám, redukuje se její *počet stupňů volnosti* na hodnotu

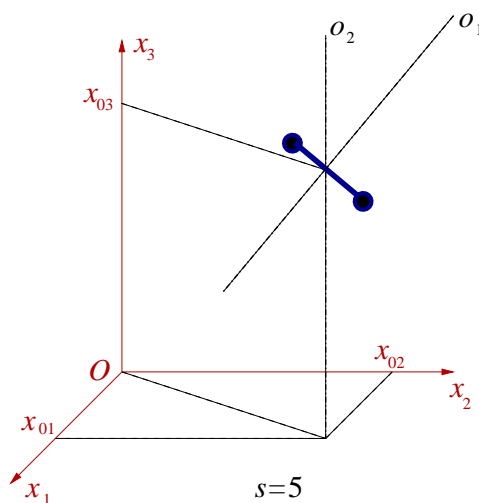
$$s = 3N - k.$$

Každá z konfigurací takové soustavy je reprezentována bodem v s -rozměrném konfiguračním prostoru \mathbf{R}^s prostřednictvím tzv. *zobecněných souřadnic*

$$(q_1(t), \dots, q_s(t)),$$

které obecně nemusí mít význam kartézských souřadnic částic soustavy.

PŘÍKLAD 1.2. Soustava dvou částic o hmotnostech m a M s vazební podmínkou $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = l = \text{konst.}$ (tuhá činka) má $s = 5$ stupňů volnosti. Zobecněnými souřadnicemi mohou být např. kartézské souřadnice jejího středu hmotnosti (x_{01}, x_{02}, x_{03}) a dvě úhlové souřadnice $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$, představující natočení činky kolem dvou navzájem kolmých os o_1, o_2 kolmých i ke spojnici částic.



OBR. 1.3: KONFIGURACE TUHÉ ČINKY

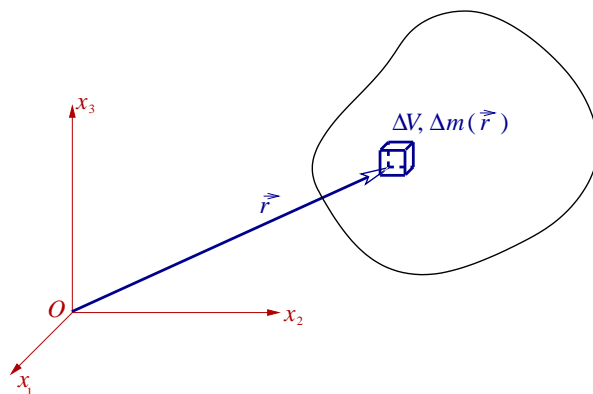
Konfigurační prostor soustavy je pětirozměrný (\mathbf{R}^5) a každá konfigurace je zadána souborem zobecněných souřadnic

$$(q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t), q_5(t)) = (x_{01}(t), x_{02}(t), x_{03}(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

♣

1.1.3 Těleso se spojitým rozložením hmotnosti

Modelem představujícím druhý extrém při popisu rozložení hmotnosti objektu, opět s odhlédnutím od jeho mikrostruktury, je model *tělesa se spojitým rozložením hmotnosti — kontinua*. Tento model nebere v úvahu složení objektu z jednotlivých hmotných bodů. Odpovídá naopak představě tělesa myšlenkově rozděleného na elementární útvary infinitezimálně malých rozměrů, tzv. *hmotné elementy*.



OBR. 1.4: POPIS TĚLESA SE SPOJITÝM ROZLOŽENÍM HMOTNOSTI

Úplnou informaci o rozložení hmotnosti v daném okamžiku představuje *hustota* tělesa, skalární funkce vektorové proměnné \vec{r} , definovaná vztahem

$$\varrho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V}. \quad (1.5)$$

$\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ je objem elementárního kvádru umístěného v bodě \vec{r} (vektor \vec{r} určuje např. polohu levého dolního zadního vrcholu kvádru), $\Delta m(\vec{r})$ je jeho hmotnost a podíl $\frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V}$ je *průměrná hustota* kvádru.

V realistických případech je funkce $\varrho(\vec{r})$ spojitá nebo po částech spojitá na definičním oboru V představovaném tělesem. (Spojitost funkce po částech znamená, že její definiční obor lze rozdělit na konečný počet částí, přičemž na každé z nich je funkce spojitá.)

V analogii se vztahy (1.1) a (1.2) definujeme celkovou hmotnost a střed hmotnosti.

$$m = \int_V \varrho(\vec{r}) dV, \quad (1.6)$$

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \varrho(\vec{r}) dV, \quad (1.7)$$

$$x_{0,j} = \frac{1}{m} \int_V x_j \varrho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Složky tenzoru momentu setrvačnosti tělesa se spojitým rozložením hmotnosti mají rovněž integrální vyjádření:

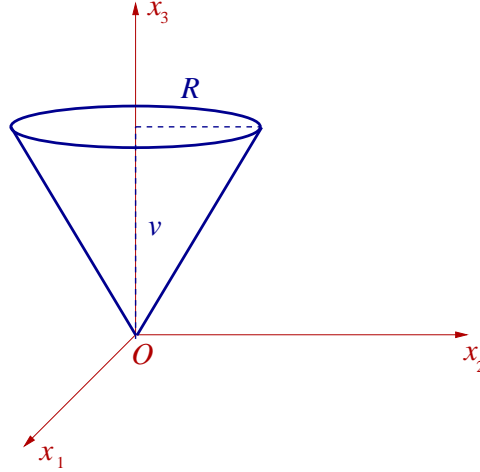
$$\begin{pmatrix} \int_V \varrho(x_j)(x_2^2 + x_3^2) dV & \int_V -\varrho(x_j)x_1x_2 dV & \int_V -\varrho(x_j)x_1x_3 dV \\ \int_V -\varrho(x_j)x_1x_2 dV & \int_V \varrho(x_j)(x_1^2 + x_3^2) dV & \int_V -\varrho(x_j)x_2x_3 dV \\ \int_V -\varrho(x_j)x_1x_3 dV & \int_V -\varrho(x_j)x_2x_3 dV & \int_V \varrho(x_j)(x_1^2 + x_2^2) dV \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Symbol $\varrho(x_j)$ je zkráceným vyjádřením závislosti hustoty na poloze, $\varrho(x_j) \equiv \varrho(x_1, x_2, x_3)$.

POZNÁMKA: Integračními proměnnými ve vztazích (1.6), (1.7) a (1.8), vyjadřujících celkovou hmotnost, polohu středu hmotnosti a složky tenzoru momentu setrvačnosti, jsou souřadnice x_1, x_2, x_3 . Hustota tělesa je však obecně závislá i na čase, stejně jako integrační obor V . Těleso se totiž může nejen pohybovat, ale i deformovat. V důsledku toho jsou složky vektoru \vec{r}_0 , složky tenzoru \hat{J} a v některých případech i celková hmotnost obecně funkcemi času.

Kontinuum, které nelze deformovat, nazýváme, obdobně jako v případě tělesa s diskrétním rozložením hmotnosti, tuhým tělesem. (Samozřejmě se jedná pouze o model aproximující realitu.) Opět existují souřadnicové soustavy pevně spojené s tělesem, vzhledem k nimž je hustota časově nezávislá a veličiny \vec{r}_0 a \hat{J} jsou tedy konstantami.

PŘÍKLAD 1.3. Určíme hmotnost, střed hmotnosti a tenzor momentu setrvačnosti stejnorodého rotačního kužele o hustotě ϱ_0 , poloměru podstavy R a výšce v vzhledem k soustavě souřadnic pevně s kuželem spojené podle OBR. 1.5.



OBR. 1.5: K PŘÍKLADU 1.3

Plášť kužele je popsán rovnicí

$$x_3 = \frac{v}{R} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Při výpočtu použijeme válcových souřadnic. Jejich převod na souřadnice kartézské a zpět, včetně vyjádření objemového elementu, najdeme v kterékoli příručce praktické matematiky.

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z, \quad dV = r \, dr \, d\varphi \, dz, \quad z \in \left[\frac{vr}{R}, v \right], \quad r \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

$$m = \varrho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{vr}{R}}^v r \, dz \, dr \, d\varphi = 2\pi \varrho_0 \int_0^R r \left(v - \frac{vr}{R} \right) dr = 2\pi v \varrho_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R} \right) = \frac{1}{3} \pi R^2 v \varrho_0.$$

$$x_{0,1} = \frac{\varrho_0}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{vr}{R}}^v r^2 \cos \varphi \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{\varrho_0}{m} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^R r^2 \left(v - \frac{vr}{R} \right) dr = 0,$$

$$x_{0,2} = \frac{\varrho_0}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{vr}{R}}^v r^2 \sin \varphi \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{\varrho_0}{m} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^R r^2 \left(v - \frac{vr}{R} \right) dr = 0,$$

$$x_{0,3} = \frac{\varrho_0}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{vr}{R}}^v r z \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{\pi \varrho_0}{m} \int_0^R r \left(v^2 - \frac{v^2 r^2}{R^2} \right) dr = \frac{\pi \varrho_0 v^2}{m} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} \right) = \frac{3v}{4}.$$

$$\begin{aligned} J_{11} &= \varrho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{vr}{R}}^v (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r \, dz \, dr \, d\varphi = \\ &= \varrho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[r^3 \sin^2 \varphi \left(v - \frac{vr}{R} \right) + \frac{r}{3} \left(v^3 - \frac{v^3 r^3}{R^3} \right) \right] dr \, d\varphi = \\ &= \pi \varrho_0 \left(\frac{R^4 v}{4} - \frac{R^5 v}{5R} \right) + \frac{2\pi \varrho_0}{3} \left(\frac{R^2 v^3}{2} - \frac{R^5 v^3}{5R^3} \right) = \frac{\pi \varrho_0 R^2 v}{20} (R^2 + 4v^2) = \frac{3}{20} m (R^2 + 4v^2), \end{aligned}$$

$$J_{22} = \varrho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{vr}{R}}^v (r^2 \cos^2 \varphi + z^2) r \, dz \, dr \, d\varphi = \dots = \frac{3}{20} m (R^2 + 4v^2),$$

$$\begin{aligned} J_{33} &= \varrho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{vr}{R}}^v (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) r \, dz \, dr \, d\varphi = \\ &= 2\pi \varrho_0 \int_0^R r^3 \left(v - \frac{vr}{R} \right) dr = 2\pi \varrho_0 v \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^5}{5R} \right) = \frac{\pi \varrho_0 R^4 v}{10} = \frac{3}{10} m R^2, \end{aligned}$$

$$J_{12} = \varrho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{vr}{R}}^v r^2 \sin \varphi \cos \varphi \, r \, dz \, dr \, d\varphi = 0, \quad J_{13} = 0, \quad J_{23} = 0.$$

Při výpočtu jsme použili vztahů $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \pi$ a $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \pi$, jejichž platnost snadno ověříte. Stačí použít vztahů $\sin^2 \varphi = (1 - \cos 2\varphi)/2$ a $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$. Nyní již shrneme výsledky předchozích výpočtů:

$$m = \frac{\pi R^2 v \varrho_0}{3}, \quad \vec{r}_0 = (0, 0, \frac{3v}{4}), \quad J = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} m (R^2 + 4v^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} m (R^2 + 4v^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} m R^2 \end{pmatrix}.$$

Vůči zvolené soustavě souřadnic je tenzor momentu setrvačnosti kužele popsán diagonální maticí. Deviační momenty jsou nulové. Tento výsledek souvisí se symetrií rozložení hmotnosti kužele vzhledem k souřadnicové ose x_3 . ♠

1.2 Volné částice a vztažné soustavy

V předchozím odstavci jsme pro identifikaci polohy hmotných bodů, popřípadě objemových elementů kontinua, používali polohový vektor \vec{r} , který představoval orientovanou spojnicí počátku soustavy souřadnic a daného hmotného bodu či objemového elementu. Je tedy vidět, že konkrétní matematické vyjádření rozložení hmotnosti tělesa je závislé na volbě soustavy souřadnic. Z fyzikálního hlediska je kromě toho důležité, s jakým konkrétním objektem, *vztažným tělesem*, je soustava souřadnic pevně spojena. Dvojici $\mathcal{S} = (\text{vztažné těleso, soustava souřadnic})$ nazýváme *vztažnou soustavou*. Často ji také značíme $\mathcal{S} = \langle O; x, y, z \rangle$ nebo $\mathcal{S} = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, kde O a x, y, z jsou počátek a osy kartézské soustavy souřadnic spojené pevně se vztažným tělesem, alternativní zadání představují vektory \vec{e}_1, \vec{e}_2 a \vec{e}_3 ortonormální báze, které určují směr souřadnicových os. Pochopení pojmu vztažné soustavy usnadníme, představíme-li si se vztažnou soustavou spojeného pozorovatele, který v ní provádí měření poloh hmotných bodů či elementů. Taková představa je samozřejmě pouze pomůckou, subjektivní pocity pozorovatele nehrají roli. V dalším však budeme alternativně používat jak pojmu „vztažná soustava“, tak pojmu „pozorovatel“.

1.2.1 Časoprostor

Časoprostorem, jak název napovídá, budeme mít na mysli „terén“ pro popis událostí. Každý děj lze totiž považovat za časový sled událostí, přičemž každá *událost* je charakterizována polohou místa, kde k ní došlo, a okamžikem, kdy nastala. Čas ani polohu místa v prostoru však nemůžeme určit absolutně. Dnes již víme, že Newtonův absolutní čas a absolutní prostor nemají reálný podklad. Polohu místa v prostoru (který v klasické newtonovské mechanice považujeme za trojrozměrný a euklidovský) určujeme vždy vůči konkrétně vymezeným okolním objektům, čas měříme vzhledem ke zvolenému počátečnímu okamžiku.

Jak jsme již konstatovali v úvodu k tomuto odstavci, je třeba pro popis polohy hmotného bodu zvolit *vztažnou soustavu*, vůči níž budou jednotlivé polohy určovány. Měření času je vztaženo k předem zvolenému počátku časové osy.

Událost U je vzhledem ke zvolené vztažné soustavě a zvolenému počátečnímu okamžiku popsána čtveřicí údajů

$$U = (t, \vec{r}) = (t, x_1, x_2, x_3). \quad (1.9)$$

Tuto čtveřici lze chápat jako soubor souřadnic bodu ve čtyřrozměrném prostoru $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, kde \mathbf{R} je časová osa, představovaná jednorozměrným euklidovským prostorem, a \mathbf{R}^3 je trojrozměrný euklidovský prostor pro popis údajů o poloze událostí. Prostor $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ nazýváme *časoprostorem*.

Ze zkušenosti vyplývá, že údaje o poloze a času jsou sice relativní, tj. závislé na volbě vztažné soustavy a počátku časové osy, měření prostorové a časové „odlehlosti“ dvou událostí v newtonovské mechanice však jsou absolutní. Jestliže tedy soubory

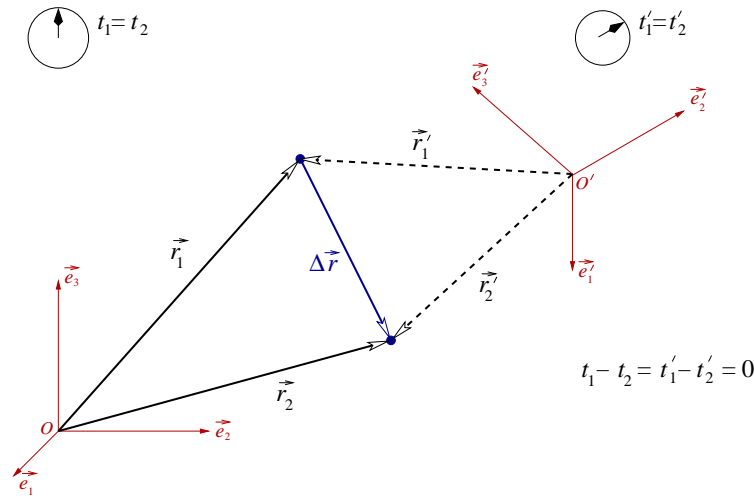
$$U_1 = (t_1, \vec{r}_1)_{\mathcal{S}}, \quad U'_1 = (t'_1, \vec{r}'_1)_{\mathcal{S}'}$$

$$U_2 = (t_2, \vec{r}_2)_S, \quad U'_2 = (t'_2, \vec{r}'_2)_{S'}$$

popisují události U_1 a U_2 ve vztažných soustavách $\mathcal{S} = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, $\mathcal{S}' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$, kde v údajích o bodech O a O' je obsažena i informace o volbě počátku časové osy, pak obecně $\vec{r}_1 \neq \vec{r}'_1$, $t_1 \neq t'_1$, $\vec{r}_2 \neq \vec{r}'_2$, $t_2 \neq t'_2$, avšak

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1. \quad (1.10)$$

Tyto vztahy charakterizují nejobecnější vlastnosti časoprostoru, tzv. *homogenitu a izotropnost prostoru a homogenitu času*. Homogenitu a izotropnost prostoru lze vyjádřit i konstatováním, že okolí všech bodů se jeví pozorovateli jako identická, homogenita času představuje identičnost okolí všech bodů na časové ose.



OBR. 1.6: POPIS UDÁLOSTÍ V ČASOPROSTORU

POZNÁMKA: Matematické vyjádření obecných vlastností časoprostoru pomocí rovnic (1.10) je omezeno na newtonovskou mechaniku. V mechanice relativistické, v jejímž rámci se uplatní existence mezní rychlosti, je vyjádření těchto vlastností odlišné.

Následující tabulky poskytují přehled o rozmezí vzdáleností D [m] a trvání dějů T [s] od mikrosvěta až po svět vesmírných objektů.

TABULKA 1.2: ROZMĚRY A VZDÁLENOSTI OBJEKTŮ

OBJEKT	LOG D	INTERAKCE
proton	−15	silná nebo slabá
jádro	−14	silná nebo slabá
vzdálenost atomů v krystalu	−10	elektromagnetická
velké organické molekuly	−9	elektromagnetická
vzdálenosti molekul ve vzduchu	−8	elektromagnetická
krvinka	−5	elektromagnetická
člověk	0	elektromagnetická
hora	4	gravitační
Země	7	gravitační
Slunce	9	gravitační
sluneční soustava	13	gravitační
k nejbližší hvězdě	16	gravitační
naše Galaxie	20	gravitační
mezigalaktická vzdálenost	22	gravitační
kupy galaktických kup	25	gravitační

TABULKA 1.3: ČASOVÉ INTERVALY

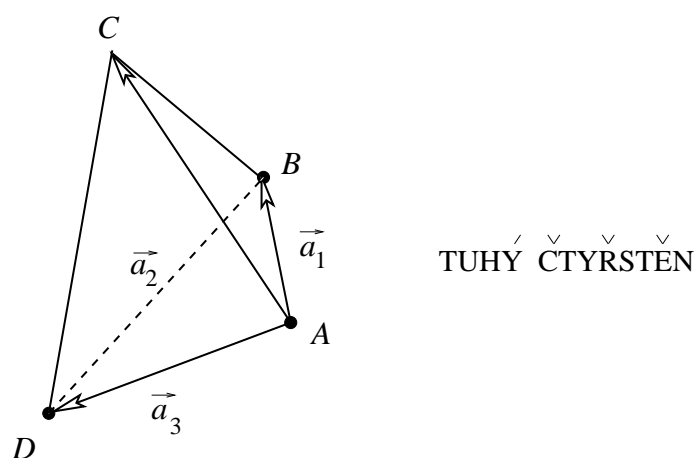
DĚJ – MIKRO	LOG T	DĚJ – MAKRO
γ -paprsky v kosmickém záření jaderné γ -záření rentgenové záření světlo kmity atomů v mřížce rotace molekul	-27 -21 -18 -15 -13 -12 -6 -3 -1	elektronické oscilace rádiové vlny zvukové vlny rotace pulzarů
	0	tep srdce
	5 7 9 12 15 16	den – rotace Země rok – oběh Země oběh Halleyovy komety precese zemské osy oběh Kohoutkovy komety rotace Galaxie

1.2.2 Inerciální vztažné soustavy

Úvahy o obecných vlastnostech časoprostoru navozují představu, že všechny vztažné soustavy jsou rovnocenné. Není tomu tak: Víme, že údaj o poloze hmotného bodu v daném okamžiku nejenže není postačující pro předpověď chování hmotného bodu v průběhu času, ale nepředstavuje ani úplný popis jeho mechanického stavu v tomto okamžiku. Z hlediska dalších důležitých kinematických veličin (rychlost, zrychlení) již volba vztažné soustavy nebude libovolná. Preferovány budou tzv. *inerciální vztažné soustavy*, spojené s *volnými hmotnými body*, ve zkrácené terminologii *volnými částicemi*. Název souvisí se zákonem setrvačnosti: inertia – setrvačnost.

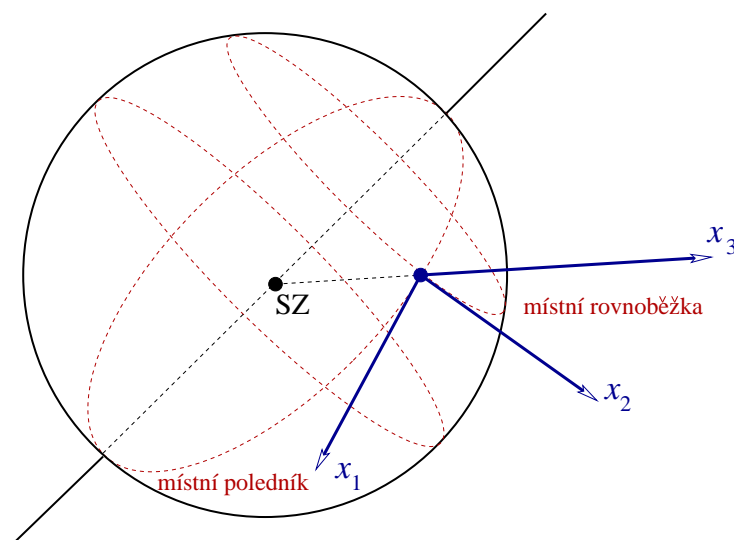
Každé těleso v prostoru je vystaveno vlivu okolních objektů. Tělesa na sebe navzájem působí, *interagují*. Tím vzájemně ovlivňují svůj pohyb. Těleso, nahrazené modelem hmotného bodu, které je od okolních objektů vzdáleno natolik, že jejich vliv je zanedbatelný, představuje tzv. *volnou (izolovanou) částici*. Model volné částice je samozřejmě idealizací, která se však v konkrétních případech může realitě velmi přiblížit. Například sluneční soustava, nahrazená hmotným bodem umístěným v jejím středu hmotnosti, je velmi dobrým představitelem volné částice, neboť je od nejbližšího vesmírného objektu (Proxima, α -Centauri) vzdálena zhruba čtyři světelné roky, tj. řádově 10^{16} metrů. Ztotožníme-li počá-

tek O vztažné soustavy s volnou částicí a souřadnicové osy volíme tak, aby libovolné tři volné částice tvořící s O tuhý čtyřstěn byly vůči nim v klidu (viz OBR. 1.7), získáme *inerciální vztažnou soustavu*. Její fyzikální význam pochopíme v další kapitole.



OBR. 1.7: INERCIÁLNÍ VZTAŽNÁ SOUSTAVA

Inerciální vztažná soustava spojená se sluneční soustavou (počátkem je Slunce, osy jsou namířeny ke stálicím, Slunce i stálice chápány jako hmotné body) se nazývá *Galileiova*. Ostatní vztažné soustavy se nazývají *neinerciální*. Často užívaná je tzv. soustava *laboratorní*, spojená s povrchem Země (viz OBR. 1.8).



OBR. 1.8: LABORATORNÍ VZTAŽNÁ SOUSTAVA

Její neinerciálnost lze zanedbat, neprovádíme-li příliš přesná či dlouhotrvající měření.

1.3 Mechanický stav částice a jeho časový vývoj

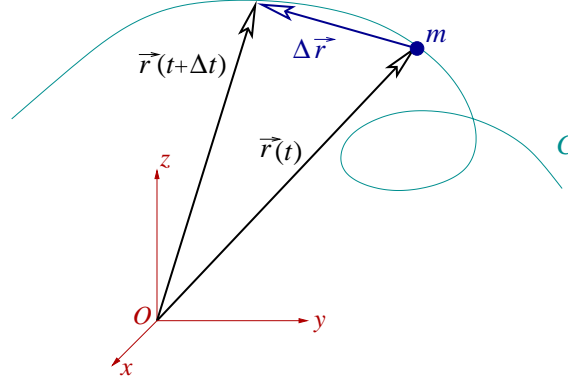
Pohyb částice (hmotného bodu) je plně popsán závislostí polohy na čase. Pokud bychom pro danou částici takovou závislost zadali, nemáme už vůbec nic na práci. Otázkou je, *jak zjistit* vektorovou funkci času $\vec{r}(t)$, která pohyb částice plně určuje. Experiment ukazuje, že zákony mechaniky fungují tak, že na základě znalosti interakcí částice s okolními objekty a znalosti její polohy ve dvou různých okamžicích lze *v principu* určit její polohu v libovolném okamžiku. Slovo „v principu“ zde znamená, že něco je sice možné, otázkou však je, nakolik je to prakticky schůdné, jak vypadá formulace fyzikálních zákonitostí a jaké jsou matematické postupy, které k takové předpovědi reálně povedou. Při praktickém řešení není například výhodné vycházet ze zadání polohy ve dvou okamžicích. Ukazuje se, že důležitými pojmy pro předpověď pohybu částice jsou *rychlost* a *zrychlení*. Poloha a rychlost částice v daném okamžiku zadávají *mechanický stav* částice v tomto okamžiku. Veličinou, která je bezprostředně určena interakcemi sledované částice s okolními objekty, je zrychlení. V dalším textu proto oba pojmy vybudujeme. Jak si můžeme být posledními dvěma tvrzeními jisti? No přece — vyplývají z experimentu!

1.3.1 Poloha a její změny

Sledujme pohyb částice vzhledem k vztažné soustavě \mathcal{S} v časovém intervalu $[\alpha, \beta]$. Informace o pohybu částice bude úplná, zadáme-li v každém okamžiku $t \in [\alpha, \beta]$ její polohový vektor $\vec{r}(t)$. *Vektorová funkce \vec{r} skalární proměnné t*

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (1.11)$$

zadaná třemi *skalárními funkcemi* $x(t), y(t), z(t)$, popisuje závislost polohového vektoru částice na čase. (Pro zjednodušení zápisů jsme místo x_1, x_2, x_3 použili pro označení kartézských složek vektoru \vec{r} neindexovaných symbolů x, y, z .) Koncový bod vektoru \vec{r} , umístěného v každém okamžiku v počátku soustavy souřadnic, opisuje křivku \mathcal{C} , nazvanou *trajektorie* hmotného bodu. Její *parametrické vyjádření* představuje vztah (1.11). Roli parametru hraje čas. Pohyb částice nazýváme *přímočarým*, je-li její trajektorií část přímky.



OBR. 1.9: TRAJEKTORIE HMOTNÉHO BODU

Změna polohy hmotného bodu v časovém intervalu $[t, t + \Delta t]$ je charakterizována *vektorem posunutí* (viz OBR. 1.9)

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (1.12)$$

1.3.2 Rychlost a zrychlení

Podíl

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} \rangle_{[t, t + \Delta t]} &= \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \\ &= \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

určuje *průměrnou rychlost částice v intervalu* $[t, t + \Delta t]$ a jeho limitní hodnota pro $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle_{[t, t + \Delta t]} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \quad (1.14)$$

matematicky představující derivaci vektorové funkce $\vec{r}(t)$ podle času, je *okamžitá rychlost* (zkráceně *rychlost*) částice v čase t . Značíme

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \quad (1.15)$$

nebo

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)).$$

POZNÁMKA: Všimněte si, že zatímco se průměrná rychlost vztahuje k časovému intervalu, je rychlost okamžitá závislá pouze na jediné hodnotě t .

Z definice okamžité rychlosti jako limity rychlosti průměrné je zřejmé, že okamžitá rychlost má vždy směr tečny k trajektorii. Velikost okamžité rychlosti je

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}. \quad (1.16)$$

Pohyb částice nazýváme *rovnoměrným*, je-li velikost její rychlosti nezávislá na čase, tj. $v(t) = \text{konst.}$

PŘÍKLAD 1.4. Parametrické vyjádření trajektorie částice je dáno vztahy

$$\vec{r}(t) = \left(2.00 \cos \frac{\pi t}{2}, 2.00 \sin \frac{\pi t}{2}, 0.00 \right) \text{ m},$$

kde $\pi/2$ je hodnota veličiny v jednotkách s^{-1} (kruhová frekvence). Okamžitá rychlost je

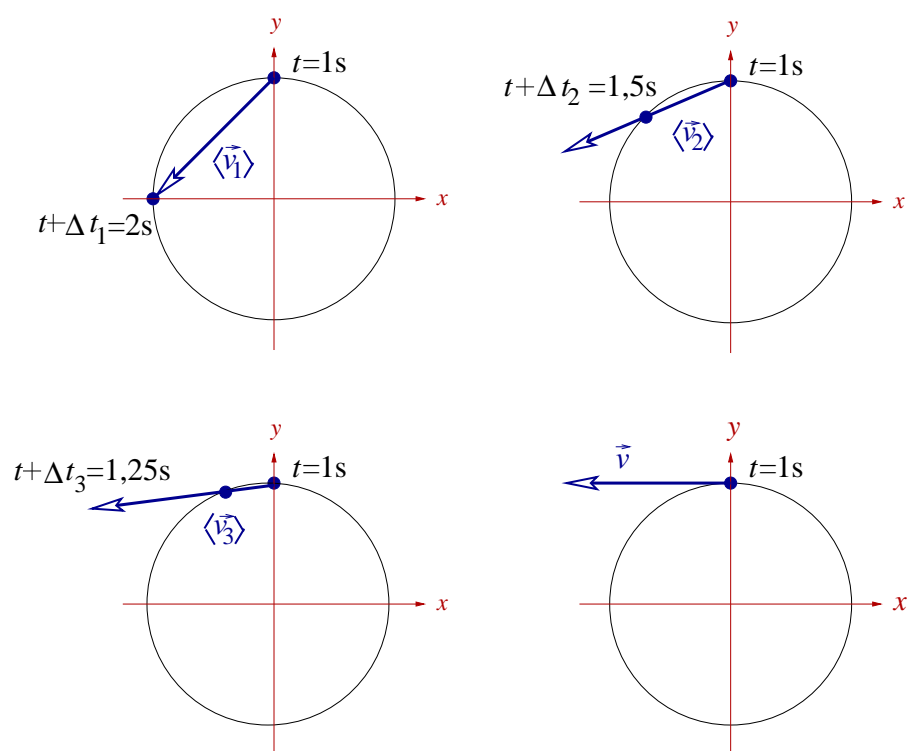
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \left(-2.00 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{2}, 2.00 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi t}{2}, 0.00 \right) \text{ m s}^{-1},$$

$$v(t) = \pi = 3.14 \text{ m s}^{-1} = \text{konst.}$$

Platí $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = 2.00 \text{ m}$ a $z = 0.00 \text{ m}$. Trajektorií částice je tedy kružnice o poloměru $R = 2.00 \text{ m}$ se středem v počátku soustavy souřadnic, ležící v rovině $z = 0.00 \text{ m}$. Částice se pohybuje rovnoměrně a vykoná jeden oběh za dobu $T = \frac{2\pi R}{v} = 4.00 \text{ s}$. Určíme průměrnou rychlost v časových intervalech $[t + \Delta t, t]$ pro $t = 1.00 \text{ s}$ a Δt postupně $1.00 \text{ s}, 0.50 \text{ s}, 0.25 \text{ s}, 0.12 \text{ s}, 0.06 \text{ s}, 0.03 \text{ s}$ a okamžitou rychlost v čase $t = 1.00 \text{ s}$. Budeme sledovat chování průměrné rychlosti se zmenšující se hodnotou Δt . Výsledky shrnuje následující tabulka (α je úhel, který svírá průměrná rychlost s osou x):

TABULKA 1.4: OKAMŽITÁ RYCHLOST JAKO LIMITA PRŮMĚRNÉ RYCHLOSTI

Δt [s]	1,00	0,50	0,25	0,12	0,06	0,03	$\Delta t \rightarrow 0$
$x(t + \Delta t)$ [m]	-2,00	-1,41	-0,77	-0,38	-0,19	-0,09	0,00
$y(t + \Delta t)$ [m]	0,00	1,41	1,85	1,96	1,99	2,00	2,00
$\langle v_x \rangle$ [ms^{-1}]	-2,00	-2,83	-3,06	-3,12	-3,14	-3,14	-3,14
$\langle v_y \rangle$ [ms^{-1}]	-2,00	-1,17	-0,61	-0,30	-0,15	-0,07	0,00
$ \langle \vec{v} \rangle $ [ms^{-1}]	2,83	3,06	3,12	3,14	3,14	3,14	3,14
α [$^\circ$]	225	202	191	185	183	181	180

OBR. 1.10: PRŮMĚRNÁ RYCHLOST PŘI $\Delta t \rightarrow 0$ 

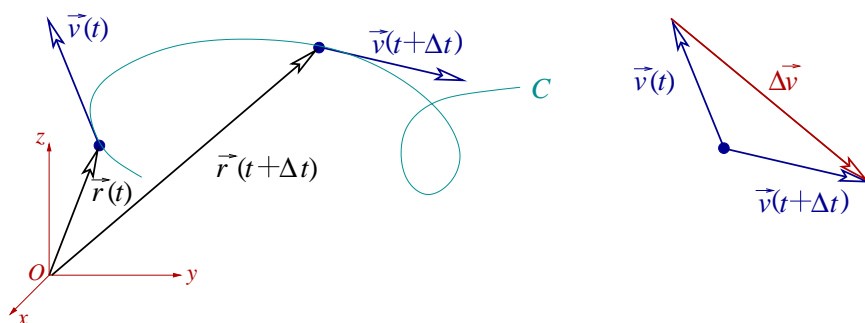
Analogickým postupem jako okamžitou rychlost definujeme *okamžité zrychlení*. Podíl

$$\langle \vec{a} \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (1.17)$$

je tzv. *průměrné zrychlení částice v intervalu* $[t, t + \Delta t]$ a jeho limitou pro $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle_{[t, t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (1.18)$$

je *okamžité zrychlení* (zkráceně *zrychlení*) částice v čase t .



OBR. 1.11: K DEFINICI ZRYCHLENÍ

Zrychlení je tedy derivací rychlosti a druhou derivací polohového vektoru. Píšeme

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{dx^2(t)}{dt^2}, \frac{dy^2(t)}{dt^2}, \frac{dz^2(t)}{dt^2} \right) \quad (1.19)$$

nebo

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)).$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)} = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}.$$

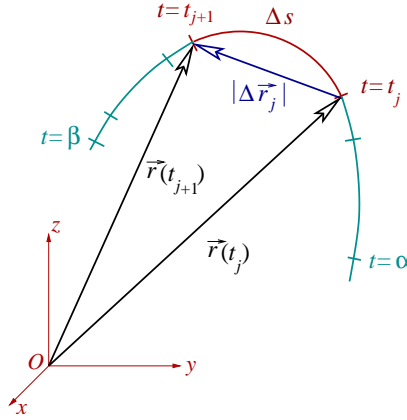
1.3.3 Geometrické charakteristiky trajektorie

Rychlost a zrychlení jsou nejdůležitější kinematické veličiny spjaté s trajektorií částice. Je však užitečné definovat ještě další charakteristiky, poskytující názornou geometrickou představu o tvaru trajektorie. Jsou jimi *délka oblouku*, *jednotkové vektory tečny*, *hlavní normály* a *binormály*, *křivost* a *torze*.

Délkou oblouku trajektorie, opsanou hmotným bodem v časovém intervalu $[\alpha, \beta]$, je dráha, kterou hmotný bod urazil mezi okamžiky α a β . Označíme-li $s(t)$ dráhu uraženou od okamžiku α do okamžiku t , je

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \quad \text{tj.} \quad s(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt. \quad (1.20)$$

Vztah (1.20) pro délku oblouku je sice velmi názorný, zaslouží však korektnější odvození.



OBR. 1.12: K VÝPOČTU DÉLKY OBLOUKU

Nazvěme *dělení* \mathcal{D} časového intervalu $[\alpha, \beta]$ soubor okamžiků $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, kde $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$. V okamžicích t_0, t_1, \dots, t_n se hmotný bod nachází na trajektorii v bodech B_0, B_1, \dots, B_n , které jsou koncovými body vektorů $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$. Tyto body rozdělí oblouk trajektorie $\widehat{B_0 B_n}$ na úseky o délkách $\Delta s_0, \Delta s_1, \dots, \Delta s_{n-1}$, přičemž platí

$$s(\beta) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta s_j.$$

Je-li dělení dostatečně jemné, lze každý z úseků Δs_j nahradit délkou úsečky $\widehat{B_j B_{j+1}}$, tj.

$$s(\beta) \doteq \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta \vec{r}_j| = \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right| (t_{j+1} - t_j) = \sum_{j=0}^{n-1} |\langle \vec{v} \rangle_{[t_j, t_{j+1}]}| \Delta t_j, \quad (1.21)$$

kde $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$. Zjemňováním dělení se vyjádření délky oblouku $s(\beta)$ pomocí vztahu (1.21) zpřesňuje. Kritériem jemnosti dělení \mathcal{D} je jeho *norma* (velikost největšího dílku)

$$\nu(\mathcal{D}) = \max\{\Delta t_j \mid j \in \{0, \dots, n-1\}\}.$$

Pro $\nu(\mathcal{D}) \rightarrow 0$ přechází diskrétní indexovaná proměnná t_j v proměnnou spojitou, průměrná rychlost $\langle \vec{v} \rangle_{[t_j, t_{j+1}]}$ v rychlost okamžitou a sumace v integraci:

$$s(\beta) = \lim_{\nu(\mathcal{D}) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |\langle \vec{v} \rangle_{[t_j, t_{j+1}]}| \Delta t_j = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{v}(t)| dt. \quad (1.22)$$

Vztahem (1.22) je současně definován, z matematického hlediska, *křivkový integrál prvního typu* z identicky jednotkové funkce po křivce C . Značíme

$$s(\beta) = \int_C ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt, \quad (1.23)$$

kde $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ představuje parametrické vyjádření integračního oboru C .

Zobecníme definici křivkového integrálu prvního typu na případ libovolné funkce předepsaných vlastností: Nechť $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ je křivka, pro niž jsou derivace $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ spojité na intervalu $[\alpha, \beta]$ a $v(t) \neq 0$, s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů, a pro niž má integrál (1.23) konečnou hodnotu (tzv. *po částech hladká rektifikovatelná křivka*). Nechť $f(x, y, z)$ je funkce spojitá na otevřené množině $A \subset \mathbf{R}^3$ obsahující křivku C . Pak existuje integrál

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \quad (1.24)$$

nazvaný *křivkovým integrálem prvního typu z funkce $f(x, y, z)$ po křivce C* .

Jednotkový vektor tečny $\vec{\tau}(t)$ k trajektorii v bodě, v němž se nachází částice v okamžiku t , má směr shodný se směrem její rychlosti, tj.

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}. \quad (1.25)$$

Skutečnost, že vektor $\vec{\tau}(t)$ je jednotkový, lze zapsat ve tvaru $\vec{\tau}^2 = 1$. Derivováním tohoto vztahu dostaneme $2\vec{\tau}(t)\dot{\vec{\tau}}(t) = 0$, odkud je zřejmé, že vektory $\vec{\tau}(t)$ a $\dot{\vec{\tau}}(t)$ jsou kolmé. Vektor

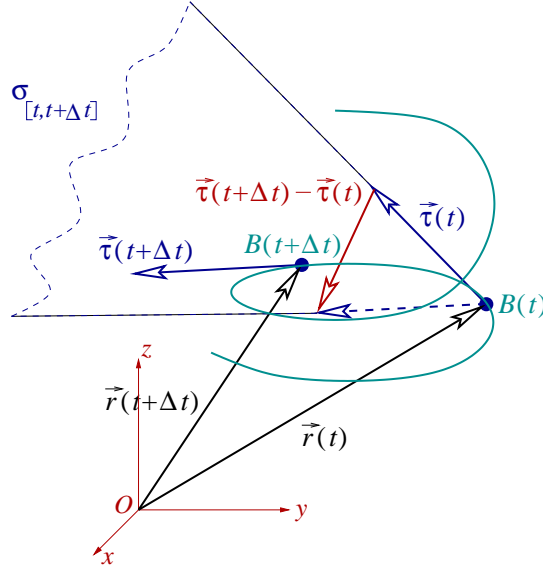
$$\vec{n}(t) = \frac{\dot{\vec{\tau}}(t)}{|\dot{\vec{\tau}}(t)|} \quad (1.26)$$

je rovněž jednotkový. Nazývá se *jednotkovým vektorem hlavní normály* k trajektorii. Pro přímočarý pohyb je $\dot{\vec{\tau}} = \vec{0}$ a vektor hlavní normály není definován. *Jednotkový vektor binormály* je definován vztahem

$$\vec{\nu}(t) = \vec{\tau}(t) \times \vec{n}(t). \quad (1.27)$$

Pro přímočarý pohyb rovněž není definován. Vektory $\langle \vec{\tau}(t), \vec{n}(t), \vec{\nu}(t) \rangle$ tvoří ortonormální pravotočivou bázi, spjatou s bodem trajektorie, v němž se částice nachází v okamžiku t . V geometrické terminologii se tato báze nazývá *pohyblivý reper*.

Jednotkový vektor $\vec{n}(t)$, určený vztahem (1.26), představuje jeden z nekonečně mnoha směrů kolmých k tečně trajektorie v daném bodě. Tyto směry vyplňují celou rovinu. Vzniká otázka, proč právě směr daný vektorem $\vec{n}(t)$ je mezi ostatními preferován. Tato preference souvisí s problémem náhrady obecné prostorové křivky C v okolí daného bodu křivkou rovinou.

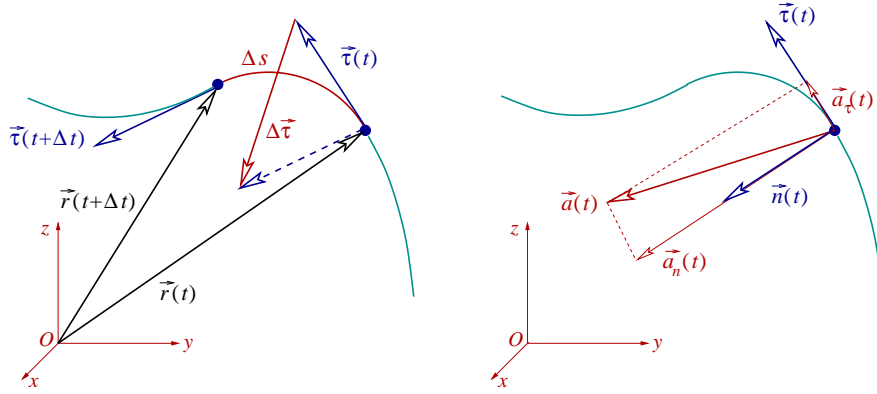


OBR. 1.13: K DEFINICI HLAVNÍ NORMÁLY

Označme podle OBR. 1.13 $\sigma_{[t, t+\Delta t]}$ rovinu určenou koncovým bodem $B(t)$ polohového vektoru $\vec{r}(t)$ a jednotkovými vektory $\vec{\tau}(t)$ a $\vec{\tau}(t+\Delta t)$. Tato rovina se „přimyká“ ke křivce \mathcal{C} v okolí bodu $B(t)$ tím lépe, čím je Δt menší. Limitním případem rovin $\sigma_{[t, t+\Delta t]}$ pro $\Delta t \rightarrow 0$ je tzv. *oskulační rovina* $\sigma(t)$. Vzhledem k tomu, že při $\Delta t \rightarrow 0$ vektory $\vec{\tau}(t)$ a $\vec{\tau}(t+\Delta t)$ splynou, je třeba najít jiný vhodný vektor, který spolu s bodem $B(t)$ a vektorem $\vec{\tau}(t)$ určuje rovinu $\sigma(t)$, avšak při $\Delta t \rightarrow 0$ zůstává s vektorem $\vec{\tau}(t)$ nekolineární. Tuto vlastnost má vektor $\frac{\vec{\tau}(t+\Delta t) - \vec{\tau}(t)}{\Delta t}$, jehož limitním případem je vektor $\dot{\vec{\tau}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\tau}(t+\Delta t) - \vec{\tau}(t)}{\Delta t}$. Oskulační rovina $\sigma(t)$ je tedy určena bodem $B(t)$ a vektory $\vec{\tau}(t)$ a $\dot{\vec{\tau}}(t)$. Na základě tohoto výsledku je preference vektoru $\vec{n}(t)$ mezi všemi směry kolmými k tečně pochopitelná.

Křivost trajektorie v daném bodě $B(t)$ je skalární veličina, která názorně charakterizuje změnu směru tečny vztahenou k jednotkové délce oblouku:

$$\kappa(s) = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{\tau}(s + \Delta s) - \vec{\tau}(s)}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|. \quad (1.28)$$



OBR. 1.14: K ROZKLADU ZRYCHLENÍ

POZNÁMKA: Předpokládejme, že funkce $s(t)$ je na intervalu $[\alpha, \beta]$ rostoucí. Existuje k ní tedy funkce inverzní, $t(s)$. Proto lze vyjádřit kinematické veličiny jako funkce délky oblouku, speciálně $\vec{\tau} = \vec{\tau}[t(s)]$.

Platí

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{\tau}[s(t)]}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} \right| = \kappa(t)v(t).$$

Odtud

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{\tau}}(t)|}{v(t)}. \quad (1.29)$$

Poloměr křivosti je převrácenou hodnotou křivosti:

$$R(t) = \kappa^{-1}(t) = \frac{v(t)}{|\dot{\vec{\tau}}(t)|}. \quad (1.30)$$

Analogickým způsobem je definována torze trajektorie v daném bodě, která charakterizuje odchylku křivky od rovinosti:

$$\gamma(s) = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\nu}}{\Delta s} \right| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{\nu}(s+\Delta s) - \vec{\nu}(s)}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{\nu}}{ds} \right|, \quad (1.31)$$

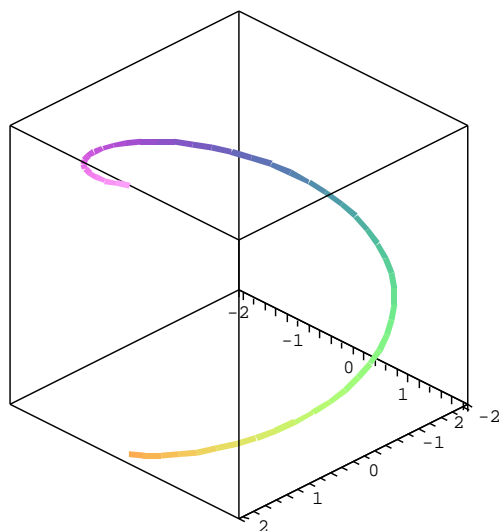
$$\gamma(t) = \frac{|\dot{\vec{\nu}}(t)|}{v(t)}. \quad (1.32)$$

Oskulační kružnicí nazveme kružnici, která v okolí daného bodu „nejlépe aproximuje“ křivku C . Leží v oskulační rovině, její poloměr je $R(t)$ a její střed $S(t)$ je koncovým bodem vektoru $\vec{r}(t) + R(t)\vec{n}(t)$.

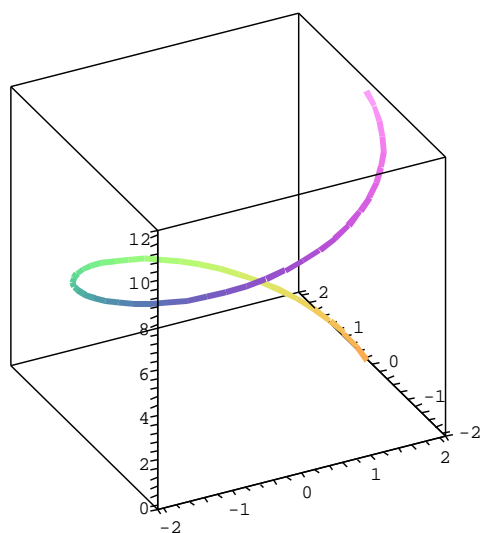
PŘÍKLAD 1.5. Trajektorie částice je na intervalu $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ parametricky zadána takto:

$$\vec{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, bt),$$

kde a, b, ω jsou kladné konstanty. (Trajektorií je jeden závit šroubovice — viz OBR. 1.15.) Určíme všechny doposud definované kinematické veličiny.



OBR. 1.15-A: K PŘÍKLADU 1.5



OBR. 1.15-B: K PŘÍKLADU 1.5 – JINÝ POHLED

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, b), v(t) = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2} = \text{konst.},$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0), a(t) = R\omega^2 = \text{konst.},$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{R^2\omega^2 + b^2} dt = t\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}, s\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{R^2\omega^2 + b^2},$$

$$\vec{\tau}(t) = \left(-\frac{R\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \sin \omega t, \frac{R\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \cos \omega t, \frac{b}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \right),$$

$$\dot{\vec{\tau}}(t) = \left(-\frac{R\omega^2}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \cos \omega t, -\frac{R\omega^2}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \sin \omega t, 0 \right),$$

$$\vec{n}(t) = (-\cos \omega t, -\sin \omega t, 0),$$

$$\vec{\nu}(t) = \left(\frac{b}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \sin \omega t, -\frac{b}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \cos \omega t, \frac{R\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \right),$$

$$\dot{\vec{\nu}}(t) = \left(\frac{b\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \cos \omega t, \frac{b\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + b^2}} \sin \omega t, 0 \right),$$

$$\kappa(t) = \frac{R\omega^2}{R^2\omega^2 + b^2}, \quad R(t) = R + \frac{b^2}{R\omega^2}, \quad \gamma(t) = \frac{b\omega}{R^2\omega^2 + b^2}.$$



POZNÁMKA: Přiměřenost definic křivosti a torze posoudíme tak, že prověříme, zda v případech zvláště názorných dávají očekávané výsledky. V případě rovinné křivky je očekávaná hodnota torze nulová. Současně je $\vec{\nu}(t) = \text{konst.}$, takže $\dot{\vec{\nu}}(t) \equiv 0$. Odtud skutečně $\gamma(t) \equiv 0$. U kružnice očekáváme, že její poloměr křivosti bude bez ohledu na konkrétní parametrizaci konstantní a roven poloměru kružnice, zatímco u přímky bude křivost trvale nulová.

Zvolme parametrické vyjádření kružnice o poloměru R ve tvaru

$$\vec{r}(t) = (R \cos \varphi(t), R \sin \varphi(t), 0),$$

kde $\varphi(t)$ je libovolná rostoucí funkce času, tj. $\dot{\varphi}(t) > 0$.

$$\vec{v}(t) = (-\dot{\varphi}(t)R \sin \varphi(t), \dot{\varphi}(t)R \cos \varphi(t), 0), v(t) = |\dot{\varphi}(t)| R = \dot{\varphi}(t)R,$$

$$\vec{\tau}(t) = (-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t), 0),$$

$$\dot{\vec{\tau}}(t) = (-\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t), -\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t), 0), \quad |\dot{\vec{\tau}}(t)| = |\dot{\varphi}(t)| = \dot{\varphi}(t).$$

Pak

$$R(t) = \frac{v(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = R,$$

což odpovídá představě.

Přímku vyjádříme parametricky takto: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\tau}f(t)$, kde $\vec{\tau}$ je jednotkový směrový vektor přímky a $f(t)$ je libovolná rostoucí funkce času. Pak

$$\vec{v}(t) = \dot{f}(t)\vec{\tau}, \quad v(t) = \dot{f}(t), \quad \vec{\tau}(t) = \vec{\tau}, \quad \dot{\vec{\tau}} \equiv 0, \quad \kappa(t) \equiv 0.$$

Poznamenejme, že pro přímkovou trajektorii nejsou výrazy (1.26) a (1.27) definovány. Vektory $\vec{n}(t)$ a $\vec{\nu}(t)$ nejsou určeny jednoznačně, stejně jako oskulační rovina.

PŘÍKLAD 1.6. Vyjádříme geometrické charakteristiky trajektorie $\mathcal{C} : \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$, pomocí vektorové funkce $\vec{r}(t)$ a jejích derivací s využitím operací skalárního a vektorového součinu. Pro zjednodušení zápisu upustíme od explicitního vypisování argumentu t u časově závislých funkcí.

- Délka oblouku trajektorie:

$$s(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\vec{r}}^2} dt.$$

- Pohyblivý reper:

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2}},$$

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2}} \right) = \frac{\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}^2 - \dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})}{(\dot{\vec{r}}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})}{(\dot{\vec{r}}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\dot{\vec{\tau}}^2 = \frac{[\ddot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}^2) - \dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})]^2}{(\dot{\vec{r}}^2)^3} = \frac{\dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}{(\dot{\vec{r}}^2)^2} \implies |\dot{\vec{\tau}}| = \frac{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}}{\dot{\vec{r}}^2},$$

$$\vec{n} = \frac{\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})}{\sqrt{[\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})]^2}} = \frac{\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}^2 - \dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2[\dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2]}},$$

$$\vec{\nu} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{\sqrt{\dot{\vec{\tau}}^2}} \times \frac{\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}^2 - \dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2[\dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2]}} = \frac{\dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}}}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}} = \frac{\dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}}|}.$$

- Křivost a torze:

$$\dot{\nu} = \frac{1}{|\dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \left[\left(\dot{\vec{\tau}} \times \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right) \cdot \dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}} - (\dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \frac{d}{dt} |\dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}}| \right],$$

$$|\dot{\nu}| = \frac{\sqrt{(\dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}})^2 (\dot{\vec{\tau}} \times (d^3\vec{r}/dt^3))^2 - [(\dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}})(\dot{\vec{\tau}} \times (d^3\vec{r}/dt^3))]^2}}{(\dot{\vec{\tau}} \times \ddot{\vec{r}})^2},$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\dot{\vec{r}}^2 \ddot{\vec{r}}^2 - (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}{(\dot{\vec{r}}^2)^3}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2 (\dot{\vec{r}} \times (\frac{d^3 \vec{r}}{dt^3}))^2 - [(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})(\dot{\vec{r}} \times (\frac{d^3 \vec{r}}{dt^3}))]^2}}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2 (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2}} = \frac{|[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3}]|}{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2}.$$

1.3.4 Tečné a normálové zrychlení

Velmi užitečné a názorné je vyjádření klíčových kinematických veličin, rychlosti a zrychlení, v pohyblivé bázi tvořené vektory $\vec{r}(t), \vec{n}(t), \vec{v}(t)$. Užijeme při tom vztahů (1.25), (1.26) a (1.30):

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{r}(t),$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(v(t)\vec{r}(t)) = \dot{v}(t)\vec{r}(t) + v(t)\dot{\vec{r}}(t) = \dot{v}(t)\vec{r}(t) + \frac{v^2(t)}{R(t)}\vec{n}(t).$$

Odtud

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau(t) + \vec{a}_n(t), \quad (1.33)$$

kde vektory

$$\vec{a}_\tau(t) = \dot{v}(t)\vec{r}(t), \quad \vec{a}_n(t) = \frac{v^2(t)}{R(t)}\vec{n}(t) \quad (1.34)$$

představují *tečné a normálové zrychlení*. Okamžité zrychlení je součtem zrychlení tečného a normálového a leží tedy v oskulační rovině. Ze vztahu (1.34) vidíme, že v případě rovnoměrného pohybu, kdy $v(t)$ je konstantní, je tečné zrychlení nulové. V případech, kdy vektor \vec{n} není definován (přímočarý pohyb), je celkové zrychlení shodné se zrychlením tečným. Normálové zrychlení $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_\tau$ je pak nulové. Průměty zrychlení do směru tečny a hlavní normály mají tedy velmi názornou interpretaci: Tečné zrychlení souvisí se změnou velikosti rychlosti a zrychlení normálové určuje změnu směru rychlosti.

POZNÁMKA: Při výpočtu normálového zrychlení často s výhodou používáme vztahu $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_\tau$.

PŘÍKLAD 1.7. Určíme tečné a normálové zrychlení částice, jejíž trajektorii jsme diskutovali v příkladu 1.5. S využitím výsledků tohoto příkladu dostáváme: $\vec{a}_\tau = \vec{0}$, $\vec{a}_n = \vec{a}$. ♠

PŘÍKLAD 1.8. Vyjádříme tečné a normálové zrychlení pomocí vektorové funkce $\vec{r}(t)$ a jejich derivací. Využijeme výsledků příkladu 1.6.

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{r} = \frac{\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}}{\dot{\vec{r}}^2} \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a}_n = \kappa v^2 \vec{n} = \frac{\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}^2 - \dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}})}{\dot{\vec{r}}^2}.$$

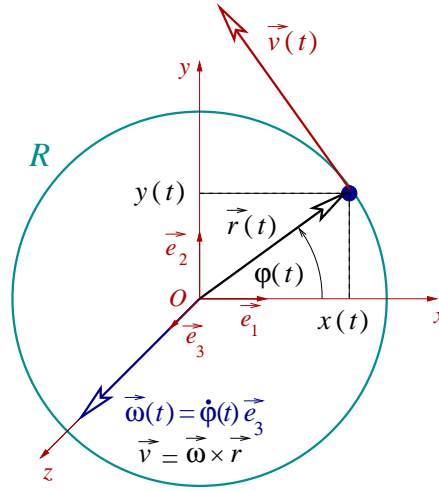
♠

1.3.5 Úhlové charakteristiky pohybu částice

Zvláště jednoduchým a pro aplikace velmi užitečným případem pohybu je pohyb po kružnici. Nejobecnější pohyb po kružnici je při vhodné volbě soustavy souřadnic popsána parametrickými rovnicemi tvaru

$$\vec{r}(t) = (R \cos \varphi(t), R \sin \varphi(t), 0), \quad (1.35)$$

kde $\varphi(t)$ je libovolná funkce času. Tato funkce vyjadřuje *úhlovou polohu* hmotného bodu na kružnici o poloměru R v okamžiku t .



OBR. 1.16: POHYB PO KRUŽNICI

Úhel $\varphi(t)$ je měřen jako kladný proti směru chodu hodinových ručiček. Vzhledem k vazebním podmínkám kladeným na pohyb částice ($x^2(t) + y^2(t) = R^2$, $z(t) = 0$) je popis její polohy pomocí funkce $\varphi(t)$ úplný. Úhlové poloze lze přisoudit vektorový charakter vztahem

$$\vec{\varphi}(t) = \varphi(t) \vec{e}_3. \quad (1.36)$$

Veličiny

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \vec{e}_3 = (0, 0, \dot{\varphi}(t)), \quad (1.37)$$

$$\vec{\varepsilon}(t) = \ddot{\varphi}(t) \vec{e}_3 = (0, 0, \ddot{\varphi}(t))$$

představují tzv. *úhlovou rychlost* a *úhlové zrychlení*. Vyjádříme rychlost a zrychlení pomocí úhlových veličin a naopak:

$$\vec{v}(t) = (-R\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t), R\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t), 0),$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= (-R\ddot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) - R\dot{\varphi}^2(t) \cos \varphi(t), R\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) - R\dot{\varphi}^2(t) \sin \varphi(t), 0) = \\ &= (-R\ddot{\varphi}(t) \sin \varphi(t), R\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t), 0) + (-R\dot{\varphi}^2(t) \cos \varphi(t), -R\dot{\varphi}^2(t) \sin \varphi(t), 0),\end{aligned}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) = -R\vec{\omega}(t) \times \vec{n}(t), \quad (1.38)$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}(t) = -R\vec{\varepsilon}(t) \times \vec{n}(t), \quad \vec{a}_n = R\omega^2(t)\vec{n}(t). \quad (1.39)$$

Vektorovým vynásobením rychlosti (1.38), resp. tečného zrychlení ze vztahu (1.39) vektorem $\vec{n}(t)$ zprava dostáváme

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) \times \vec{n}(t) &= -R(\vec{\omega}(t) \times \vec{n}(t)) \times \vec{n}(t) = R\vec{\omega}(t), \\ \vec{a}_\tau(t) \times \vec{n}(t) &= -R(\vec{\varepsilon}(t) \times \vec{n}(t)) \times \vec{n}(t) = R\vec{\varepsilon}(t).\end{aligned}$$

$$\vec{\omega}(t) = \frac{\vec{v}(t) \times \vec{n}(t)}{R}, \quad \vec{\varepsilon}(t) = \frac{\vec{a}_\tau(t) \times \vec{n}(t)}{R}. \quad (1.40)$$

Pomocí vztahů (1.40) zobecníme definice úhlové rychlosti a úhlového zrychlení na případ libovolného křivočarého pohybu:

$$\vec{\omega}(t) = \frac{\vec{v}(t) \times \vec{n}(t)}{R(t)}, \quad \vec{\varepsilon}(t) = \frac{\vec{a}_\tau(t) \times \vec{n}(t)}{R(t)}. \quad (1.41)$$

Toto zobecnění je dáno možností náhrady pohybu v infinitezimálně blízkém okolí každého bodu na obecné trajektorii pohybem po příslušné oskulační kružnici.

PŘÍKLAD 1.9. Vyjádření úhlových veličin $\vec{\omega}(t)$ a $\vec{\varepsilon}(t)$ pomocí vektorové funkce $\vec{r}(t)$ a jejich derivací je následující:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \kappa \vec{v} \times \vec{n} = \dot{\vec{r}} \times \frac{\ddot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2[\ddot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\ddot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2]}} \frac{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\ddot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}}{(\dot{\vec{r}}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\dot{\vec{r}}^2}, \\ \vec{\varepsilon} &= \kappa \vec{a}_\tau \times \vec{n} = \frac{\ddot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})}{\dot{\vec{r}}^2} \times \frac{\ddot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}^2) - \dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2[\ddot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\ddot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2]}} \frac{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\ddot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}}{(\dot{\vec{r}}^2)^{\frac{3}{2}}} = (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \frac{\ddot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}}{(\dot{\vec{r}}^2)^2}.\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili výsledků příkladů 1.6 a 1.8. 

1.3.6 Obrácená úloha: Od zrychlení k trajektorii I

V dosavadních úvahách jsme vycházeli ze znalosti trajektorie hmotného bodu zadané parametricky vektorovou funkcí času $\vec{r} = \vec{r}(t)$, z níž bylo možné určit všechny geometrické charakteristiky trajektorie i důležité kinematické veličiny. V konkrétních fyzikálních situacích však budeme postaveni před úlohu právě opačnou, jejímž cílem bude parametrické rovnice trajektorie teprve nalézt, a to na základě vyjádření zrychlení v závislosti na poloze částice, její rychlosti a na čase. K závislosti uvedeného typu vede matematická formulace klíčových

zákonů mechaniky, tzv. *pohybových zákonů*, které uvádějí do souvislosti kinematické veličiny charakterizující pohyb částice a její interakce s okolními objekty. Přesvědčíme se o tom ve třetí kapitole. Matematicky nejjednodušší řešení obrácené úlohy odpovídá situacím, kdy pohybové zákony vedou k vyjádření zrychlení jako pouhé funkce času. V takových případech lze parametrické vyjádření trajektorie získat *přímou integrací*. I fyzikálně jsou tyto situace reálné. Představují například pohyb částic v homogenních časově proměnných i neproměnných polích.

Předpokládejme, že zrychlení je zadáno spojitou vektorovou funkcí času $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Rychlost částice je pak dána vektorovou funkcí $\vec{v} = \vec{v}(t)$ vyhovující vztahu (1.19), tj. $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(t)$. Tato funkce není určena jednoznačně. Vztah (1.19) chápaný jako rovnice pro neznámou vektorovou funkci $\vec{v}(t)$ má nekonečně mnoho řešení navzájem se lišících o konstantní vektor. Nechť $\vec{v}_p(t)$ je libovolné z těchto řešení, tzv. *partikulární řešení* rovnice (1.19). Pak vztah

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_p(t) + \vec{C} , \quad (1.42)$$

kde \vec{C} je libovolný konstantní vektor, popisuje všechny vektorové funkce, které rovnici vyhovují a představuje její *obecné řešení*. Konkrétní fyzikální situaci, tj. pohybu částice po její trajektorii, však musí odpovídat jednoznačně určitý vektor \vec{C} . Zjistit jej lze jen tehdy, je-li známa rychlost částice v některém okamžiku, například pro $t = 0$:

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 . \quad (1.43)$$

Uvedený vztah představuje tzv. *počáteční podmínku* pro řešení rovnice $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(t)$. (Tato podmínka je vektorová a je ekvivalentní třem podmínkám skalárním: $v_x(0) = v_{0x}$, $v_y(0) = v_{0y}$, $v_z(0) = v_{0z}$.) Dosazením počáteční podmínky do obecného řešení (1.42) dostaneme $\vec{C} = \vec{v}_0 - \vec{v}_p(0)$. Dané konkrétní situaci pak odpovídá partikulární řešení

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_p(t) - \vec{v}_p(0) + \vec{v}_0 . \quad (1.44)$$

Postup vedoucí k nalezení parametrického vyjádření trajektorie je zcela analogický a vede k výsledku

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_p(t) - \vec{r}_p(0) + \vec{r}_0 , \quad (1.45)$$

kde $\vec{r}_p(t)$ je libovolná z vektorových funkcí vyhovujících rovnici $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$ a $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ představuje počáteční polohu částice. Výsledky (1.44) a (1.45) řešení obrácené úlohy lze zapsat také ve tvaru

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(\tau) d\tau, \quad (1.46)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \int_0^t \left[\int_0^\tau \vec{a}(\tau') d\tau' \right] d\tau, \quad (1.47)$$

nebo obecněji

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(\tau) d\tau, \quad (1.48)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(\tau) d\tau = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^\tau \vec{a}(\tau') d\tau' \right] d\tau. \quad (1.49)$$

Je vidět, že pro nalezení parametrického vyjádření trajektorie ze známé časové závislosti zrychlení je třeba zadat ještě *počáteční rychlost* a *počáteční polohu* částice. Soubor údajů

$$(\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0), v_x(t_0), v_y(t_0), v_z(t_0))$$

určuje *počáteční stav* částice, soubor

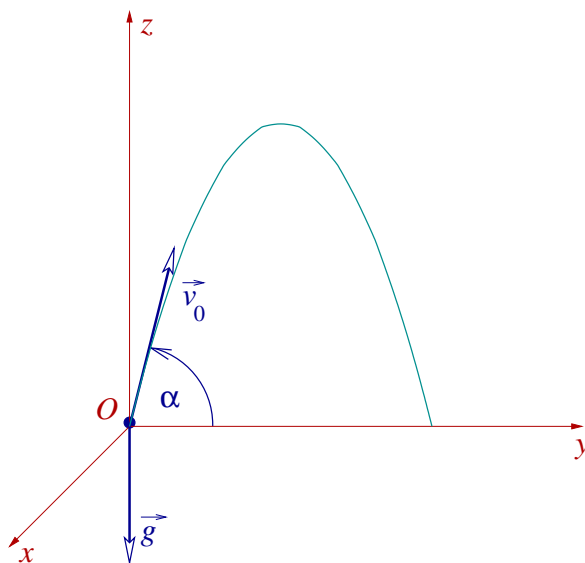
$$(\vec{r}(t), \vec{v}(t)) = (x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t))$$

charakterizuje *mechanický stav částice* v obecném okamžiku. Znalost vektorové funkce $\vec{a}(t)$ a počátečního stavu umožňuje určit stav částice v libovolném okamžiku.

PŘÍKLAD 1.10. Všechny objekty nacházející se v homogenním tíhovém poli Země se pohybují s konstantním zrychlením \vec{g} o velikosti $g \doteq 9,81 \text{ ms}^{-2}$, samozřejmě za předpokladu, že pohybu nejsou kladeny žádné překážky a že zanedbáme i jeho brzdění okolním vzduchem. (Velikost tíhového zrychlení se v různých místech na zemském povrchu poněkud liší. Definitivně, tj. přesně, je zavedeno tzv. *normální tíhové zrychlení* $g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$.) Je tedy $\vec{a}(t) = \vec{g}$. Pak podle (1.47) dostáváme

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2.$$

Představu o konkrétním tvaru trajektorie získáme snadněji, jestliže zapíšeme složky vektoru $\vec{r}(t)$ ve vhodně zvolené soustavě souřadnic, spjaté pro jednoduchost s fyzikálně či geometricky význačnými směry. Fyzikálně význačným směrem je nepochybně směr tíhového zrychlení v daném místě na povrchu Země, *svislý směr*. S ním spojíme osu z , zatímco souřadnicovou rovinu yOz zvolíme tak, aby v ní ležel vektor počáteční rychlosti (tato volba není jednoznačná, pokud je $\vec{v}(0) \parallel \vec{g}$). Počátek soustavy souřadnic lze bez újmy na obecnosti interpretace výsledků volit tak, aby $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Situaci ilustruje OBR. 1.17.



OBR. 1.17: VOLBA SOUSTAVY SOUŘADNIC PŘI POHYBU OBJEKTU
V HOMOGENNÍM TÍHOVÉM POLI ZEMĚ

Pak

$$x(t) = 0, \quad y(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad z(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Uvedené vztahy představují pro $\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ parametrické rovnice paraboly ležící v souřadnicové rovině yOz s vrcholem

$$V = \left[0, \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha, \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha \right],$$

pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ resp. $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ je trajektorie přímková a pohybem je tzv. *vrh svislý vzhůru*, resp. *vrh svislý dolů*. Pro $\alpha = 0$ a pro $\alpha = \pi$ jde o *vrh vodorovný*, v ostatních případech o *vrh šikmý*. Pro $\vec{v}_0 = \vec{0}$ hovoříme o *volném pádu*. Označíme-li v_0 velikost počáteční rychlosti, pak

$$\alpha = 0, \pi : \quad \vec{r}(t) = \left(0, \pm v_0 t, -\frac{1}{2} g t^2 \right),$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} : \quad \vec{r}(t) = \left(0, 0, \pm v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right),$$

$$\vec{v}_0 = \vec{0} : \quad \vec{r}(t) = \left(0, 0, -\frac{1}{2} g t^2 \right).$$



PŘÍKLAD 1.11. Hmotný bod se pohybuje se zrychlením

$$\vec{a}(t) = (-a_0 \cos \omega t, -a_0 \sin \omega t, 0),$$

kde $\omega [\text{s}^{-1}]$ a $a_0 [\text{m s}^{-2}]$ jsou kladné konstanty. V okamžiku $t = 0 \text{ s}$ je jeho rychlost $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (0, v_0, 0) [\text{m s}^{-1}]$, $v_0 > 0$ a poloha $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (R, 0, 0) [\text{m}]$, $R > 0$. Najdeme parametrické vyjádření trajektorie hmotného bodu, určíme, o jakou křivku se jedná a zjistíme, za jakých předpokladů se stane kružnicí. Využijeme vztahů (1.47):

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \left(\int_0^t -a_0 \cos \omega \tau \, d\tau, v_0 + \int_0^t -a_0 \sin \omega \tau \, d\tau, 0 \right) = \\ &= \left(-\frac{a_0}{\omega} \sin \omega t, \frac{a_0}{\omega} (\cos \omega t - 1) + v_0, 0 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \left(R + \int_0^t -\frac{a_0}{\omega} \sin \omega \tau \, d\tau, \int_0^t \frac{a_0}{\omega} [(\cos \omega \tau - 1) + v_0] \, d\tau, 0 \right) = \\ &= \left(R - \frac{a_0}{\omega^2} + \frac{a_0}{\omega^2} \cos \omega t, \left(v_0 - \frac{a_0}{\omega} \right) t + \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega t, 0 \right). \end{aligned}$$

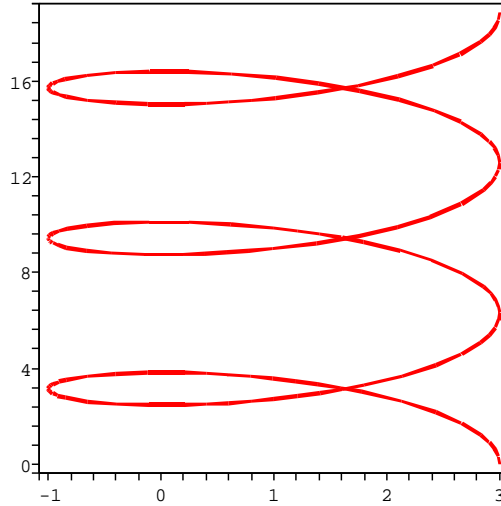
Trajektorii hmotného bodu je tedy křivka ležící v souřadnicové rovině xOy . Úpravou jejího parametrického vyjádření

$$x = R - \frac{a_0}{\omega^2} + \frac{a_0}{\omega^2} \cos \omega t, \quad y = \left(v_0 - \frac{a_0}{\omega} \right) t + \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega t$$

na tvar

$$\left[x - \left(R - \frac{a_0}{\omega^2} \right) \right]^2 + \left[y - \left(v_0 - \frac{a_0}{\omega} \right) t \right]^2 = \frac{a_0^2}{\omega^4}$$

získáme geometrickou představu o této křivce: Hmotný bod se v každém okamžiku nachází na kružnici o poloměru $\frac{a_0}{\omega^2}$, jejíž střed však není pevný. Pohybuje se rovnoměrně rychlostí o velikosti $v_0 - \frac{a_0}{\omega}$ po přímce o rovnici $x = R - \frac{a_0}{\omega^2}$. Situaci znázorňuje následující obrázek, kde je trajektorie zakreslena pro hodnoty $R = 3 \text{ cm}$, $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$, $a_0 = \frac{\pi^2}{2} \text{ cm s}^{-2} \doteq 4,9 \text{ cm s}^{-2}$, $v_0 = \frac{3}{2}\pi \text{ cm s}^{-1} \doteq 4,7 \text{ cm s}^{-1}$, v časovém intervalu $t \in [0, 3T]$, kde $T = 4 \text{ s}$ je perioda funkcí $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$. Pro $t \geq T$ se znázorněný základní motiv opakuje.



OBR. 1.18: POHYB HMOTNÉHO BODU PO CYKLOIDĚ

Křivkou je *cykloida*. Podle konkrétní hodnoty $v_0 - \frac{a_0}{\omega}$ jde o *cykloidu prostou*, *prodlouženou* nebo *zkrácenou*. V případě cykloidy prosté je $v_0 = \frac{2a_0}{\omega}$ a velikost rychlosti pohybu středu kružnice $v_s = v_0 - \frac{a_0}{\omega} = \frac{a_0}{\omega}$ je shodná s obvodovou rychlostí bodu $v_{obv} = \omega \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{a_0}{\omega}$, jako by se kružnice valila po přímce p_1 . V případě prodloužené cykloidy je $v_{obv} > v_s$, jako by kružnice při valení podkluzovala, pro zkrácenou cykloidu pak platí $v_{obv} < v_s$. Křivka na OBR. 1.18 je cykloidou prodlouženou. Trajektorie degeneruje v kružnici, je-li $v_0 - \frac{a_0}{\omega} = 0$. Hmotný bod se pak po ní pohybuje obvodovou rychlostí v_0 , poloměr kružnice je $r = \frac{a_0}{\omega^2}$, velikost dostředivého zrychlení je $a_0 = \omega v_0$, tj. $a_0 = \omega^2 r$, $v_0 = \omega r$. V posledních vztazích poznáváme známé vzorce pro rovnoměrný pohyb po kružnici. V případě volby $R = \frac{a_0}{\omega^2}$ jde o kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic.



1.4 Popis pohybu různými pozorovateli — každý to vidí jinak

Konkrétní číselné údaje, jimiž jsou reprezentovány události v časoprostoru, jsou závislé na volbě vztahné soustavy. Vychází tak problém nalezení *transformačních vztahů* mezi dvěma soubory údajů

$$U = (x_1, x_2, x_3, t)_S, \quad U = (x'_1, x'_2, x'_3, t')_{S'},$$

jimiž popisují jednu a tutéž událost U dva pozorovatelé ve vztažných soustavách \mathcal{S} a \mathcal{S}' . Transformačními vztahy rozumíme vyjádření kterékoli z obou čtveřic číselných údajů pomocí druhé, v závislosti na veličinách charakterizujících vzájemný pohyb vztažných soustav. Sledujeme-li v soustavách \mathcal{S} a \mathcal{S}' posloupnost událostí v čase, například pohyb částice, je důležité znát i převodní vztahy mezi rychlostmi a zrychleními. *Nerelativistický přístup* k problematice transformačních vztahů vychází z představy, že vzájemná rychlost objektů není nijak omezena. Je proto dobře použitelný v případech, kdy jsou všechny posuzované rychlosti o několik řádů menší než rychlost světla ve vakuu, která v přírodě představuje „rychlostní mez“.

1.4.1 Okamžité šíření interakce a absolutnost současnosti

Jedním z pilířů newtonovské mechaniky je předpoklad o neomezeně rychlém šíření vzájemného působení objektů, tzv. *okamžitým šířením interakce*. Názorně jej lze vyložit například pomocí představy dvou těles (popisovaných v téže vztažné soustavě spojené s kterýmkoli z nich, nebo s libovolným třetím tělesem), která na sebe působí na dálku prostřednictvím gravitační či elektromagnetické interakce. Informace o jakékoliv změně odehrávající se na jednom z těles dostihne druhé z nich okamžitě, tj. bez časového zpoždění, a to bez ohledu na vzdálenost těles a charakter jejich vzájemného pohybu. Jestliže tedy dvě události U_1 a U_2 nastanou ve vztažné soustavě \mathcal{S} spojené s prvním z obou těles současně, tj. $t_1 = t_2$, budou i pozorovatelem v soustavě \mathcal{S}' zaznamenány jako současně, tj. $t'_1 = t'_2$. Současnost událostí je proto v newtonovské mechanice absolutním pojmem. Měření času v různých vztažných soustavách se může lišit jedině rozdílností volby počátku časové osy, kterou lze odstranit vhodným seřazením hodin. Získáváme tak důležitý transformační vztah pro popis událostí různými pozorovateli: Nechť $U = (x, y, z, t)_\mathcal{S}$ a $U = (x', y', z', t')_{\mathcal{S}'}$. Pak při vhodném seřazení hodin je

$$t = t'. \quad (1.50)$$

Tento výsledek je matematickým zápisem skutečnosti, že čas plyne ve všech vztažných soustavách stejně. Lze mu přisoudit roli parametru, společného popisu dějů ve všech vztažných soustavách. V dalších úvahách již budeme užívat při označení času (jako nezávisle proměnné, jejímiž funkcemi jsou všechny kinematické veličiny) společného symbolu t bez ohledu na volbu vztažné soustavy.

1.4.2 Přechod mezi soustavami souřadnic jako geometrický problém

Výhradně geometrickou či algebraickou úlohou je nalezení transformačních vztahů pro přechod mezi dvěma kartézskými soustavami souřadnic, které jsou vůči sobě natočeny tak, že jejich vzájemná orientace je nezávislá na čase. Předpokládáme, že tyto soustavy mají společný počátek, tj. $\mathcal{S} = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, $\mathcal{S}' = \langle O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$. Každý z vektorů $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a naopak, každý z vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ je lineárně závislý na vektorech $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$. Existují tedy soubory reálných čísel $\{\tau_{ij}\}_{i,j \in \{1,2,3\}}$

a $\{\sigma_{ij}\}_{i,j \in \{1,2,3\}}$ tak, že platí

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \vec{e}_j, \quad \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \vec{e}'_j, \quad i \in \{1,2,3\}. \quad (1.51)$$

$T = (\tau_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}}$, resp. $S = (\sigma_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}}$ jsou *matice přechodu* od báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ k bázi $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ v \mathbf{R}^3 , resp. matice opačného přechodu. Protože báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ i $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$, definující spolu s počátkem O dvě kartézské soustavy souřadnic, jsou ortonormální, platí pro prvky matic T a S tzv. *relace ortogonalit*, vyplývající ze vztahů $\vec{e}_i \vec{e}_k = \delta_{ik}$, $\vec{e}'_i \vec{e}'_k = \delta_{ik}$:

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \tau_{kj} = \delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \sigma_{kj} = \delta_{ik}. \quad (1.52)$$

Symbol δ_{ik} představuje *Kroneckerovo delta*, nabývající hodnoty 1 pro $i = k$ a hodnoty 0 pro $i \neq j$. Prvky matic T a S mají názorný geometrický význam: Platí $\vec{e}'_i \vec{e}_k = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \vec{e}_j \vec{e}_k = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \delta_{jk} = \tau_{ik}$. Současně však je

$$\vec{e}'_i \vec{e}_k = |\vec{e}'_i| |\vec{e}_k| \cos \varphi_{ik} = \cos \varphi_{ik},$$

kde $\varphi_{ik} = \angle(\vec{e}'_i, \vec{e}_k)$ je úhel mezi vektory \vec{e}'_i a \vec{e}_k . Pak $\tau_{ik} = \cos \varphi_{ik}$ a analogicky $\sigma_{ik} = \cos \varphi_{ki}$. Je vidět, že matice T a S jsou navzájem transponované. (V obecném případě, kdy na báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ a $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ není kladen požadavek ortonormálnosti, jsou matice T a S navzájem inverzní.)

Uvažujme o hmotném bodu, jehož pohyb je sledován pozorovateli ve vztažných soustavách \mathcal{S} a \mathcal{S}' . Jeho okamžitá poloha je určena polohovým vektorem $\vec{r} = \vec{r}(t)$ o složkách $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))_{\mathcal{S}}$ a $(x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))_{\mathcal{S}'}$ vzhledem k soustavám \mathcal{S} a \mathcal{S}' . Je tedy

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \vec{e}_i, \quad \vec{r}(t) = \sum_{j=1}^3 x'_j(t) \vec{e}'_j.$$

Úpravou například prvního z obou vyjádření vektoru $\vec{r}(t)$ s využitím vztahů (1.51) dostáváme:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \vec{e}'_j = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 x_i(t) \sigma_{ij} \right) \vec{e}'_j.$$

Odtud je zřejmé, že

$$x'_j(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \sigma_{ij}, \quad x_j(t) = \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \tau_{ij}. \quad (1.53)$$

Při interpretaci trojic složek $(x) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))_{\mathcal{S}}$ a $(x') = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))_{\mathcal{S}'}$ jako řádkových matic můžeme užít maticového zápisu vztahů (1.53), tj.

$$(x') = (x)S, \quad (x) = (x')T. \quad (1.54)$$

Označme analogicky

$$\vec{v}(t) = \sum_{i=1}^3 v_i(t) \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 v'_j(t) \vec{e}'_j, \quad \vec{a}(t) = \sum_{i=1}^3 a_i(t) \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 a'_j(t) \vec{e}'_j$$

rychlost a zrychlení, vyjádřené jako lineární kombinace vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ resp. $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$. Necht' $(v) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))_{\mathcal{S}}$, $(v') = (v'_1(t), v'_2(t), v'_3(t))_{\mathcal{S}'}$, $(a) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))_{\mathcal{S}}$, $(a') = (a'_1(t), a'_2(t), a'_3(t))_{\mathcal{S}'}$ jsou řádkové matice tvořené složkami vektorů rychlosti a zrychlení vzhledem k soustavám \mathcal{S} a \mathcal{S}' . Pak vzhledem k nezávislosti matic T a S na čase získáváme pro složky rychlosti a zrychlení transformační vztahy stejného tvaru jako pro polohový vektor:

$$(v') = (v)S, \quad (v) = (v')T, \quad (a') = (a)S, \quad (a) = (a')T. \quad (1.55)$$

1.4. POPIS POHYBU RŮZNÝMI POZOROVATELI — KAŽDÝ TO VIDÍ JINAK 41

Vztahy tohoto typu platí pro složky libovolného vektoru vzhledem k soustavám \mathcal{S} a \mathcal{S}' . Na základě získaných výsledků lze konstatovat, že časově neproměnné natočení souřadnicových soustav je fyzikálně nepodstatné.

Příklad 1.12. Přechod mezi kartézskými soustavami souřadnic

$$\mathcal{S} = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle, \quad \mathcal{S}' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$$

se společným počátkem a pravotočivými ortonormálními bázemi je zadán těmito údaji: $\varphi_{11} = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_{12} = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_{33} = \frac{\pi}{4}$. Najdeme matici přechodu T a konkrétní tvar transformačních vztahů (1.53). Především platí $\tau_{ij} = \cos \varphi_{ij}$, tj. $\tau_{11} = \frac{1}{2}$, $\tau_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tau_{33} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. V důsledku relací ortogonality (1.52) je $\tau_{11}^2 + \tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 = 1 \implies \tau_{13} = (1 - (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{\frac{1}{2}} = 0$, $\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{33}^2 = 1 \implies \tau_{23} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pak

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Relace ortogonality umožní nalézt i zbývající prvky matice přechodu:

$$\frac{1}{2}\tau_{21} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tau_{22} = 0, \quad \tau_{21}^2 + \tau_{22}^2 + \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{1}{2}\tau_{31} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tau_{32} = 0, \quad \tau_{31}^2 + \tau_{32}^2 + \frac{1}{2} = 1.$$

Řešením této soustavy rovnic a uvážením zbývajících relací ortogonality při rozhodování o znaménkách odmocnin dostáváme pro matici T tyto možnosti:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Z nich pouze prvé dvě vyhovují požadavku, aby i báze $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ byla pravotočivá. Vyplývá to ze skutečnosti, že u těchto možností je $\det T = 1$, zatímco u zbývajících platí $\det T = -1$. Úloha má tedy dvě řešení. Všimneme si podrobněji prvního z nich:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad S = T^{\text{transp}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

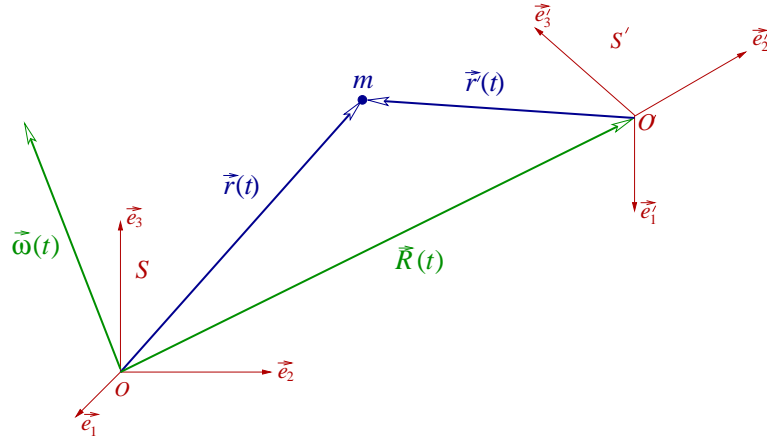
Odpovídající transformační vztahy mají tvar:

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= \frac{1}{2} x_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2(t), & x_1(t) &= \frac{1}{2} x'_1(t) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} x'_2(t) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} x'_3(t), \\x'_2(t) &= -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} x_1(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} x_2(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} x_3(t), & x_2(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} x'_1(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} x'_2(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} x'_3(t), \\x'_3(t) &= -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} x_1(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} x_2(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} x_3(t), & x_3(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} x'_2(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} x'_3(t).\end{aligned}$$

Transformační vztahy vyplývající z druhého řešení lze získat analogicky. ♠

1.4.3 Pohyb v různých vztažných soustavách — vektorová formulace

Nechť pohyb hmotného bodu sledují dva pozorovatelé ve vztažných soustavách $\mathcal{S} = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, $\mathcal{S}' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$. Jakkoli je pohyb soustavy \mathcal{S}' vůči soustavě \mathcal{S} obecný, vždy je složen z translace, tj. pohybu počátku O' vůči soustavě \mathcal{S} , charakterizované vektorem $\vec{R}(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))_{\mathcal{S}}$, a z rotace soustavy \mathcal{S}' kolem bodu O' , popsané úhlovou rychlostí $\vec{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))_{\mathcal{S}}$. Vektorové funkce $\vec{R}(t)$ a $\vec{\omega}(t)$, zadané jejich složkami vzhledem k soustavě \mathcal{S} , považujeme za známé.



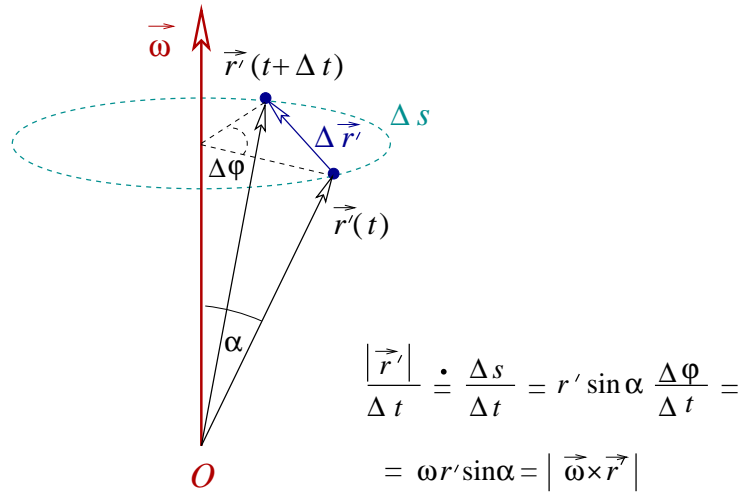
OBR. 1.19: POPIS VZÁJEMNÉHO POHYBU VZTAŽNÝCH SOUSTAV

Z OBR. 1.19 plyne vztah mezi polohovými vektory $\vec{r}(t)$ a $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t). \quad (1.56)$$

Abychom našli vztah mezi rychlostmi hmotného bodu $\vec{v}(t) = (d\vec{r}(t)/dt)_{\mathcal{S}}$ a $\vec{v}'(t) = (d\vec{r}'(t)/dt)_{\mathcal{S}'}$, předpokládejme nejprve, že pohyb soustavy \mathcal{S}' vzhledem

k \mathcal{S} je čistě rotační, tj. $\vec{R}(t) = \overrightarrow{\text{konst.}}$, a zjednodušíme situaci ještě požadavkem $\vec{R}(t) = \vec{0}$. Uvažujme o částici, která je vzhledem k soustavě \mathcal{S}' v klidu, tj. $\vec{v}'(t) = \vec{0}$. Vzhledem k pozorovateli v soustavě \mathcal{S} tedy vektor $\vec{r}'(t)$ rotuje spolu se soustavou \mathcal{S}' kolem bodu $O \equiv O'$ úhlovou rychlostí $\vec{\omega}(t)$. Částice, sledovaná v soustavě \mathcal{S} , se tedy v každém okamžiku nachází na oskulační kružnici se středem na souřadnicové ose x'_3 a rovina oskulační kružnice je k této ose kolmá (viz OBR. 1.20).



OBR. 1.20: K ODVOZENÍ TRANSFORMAČNÍHO VZTAHU MEZI RYCHLOSTMI

Rychlost pohybu částice v soustavě \mathcal{S} , $(d\vec{r}'(t)/dt)_{\mathcal{S}}$, je pak podle (1.38) dána vztahem

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \right)_{\mathcal{S}} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t). \quad (1.57)$$

Pokud bude rychlost částice $\vec{v}'(t) = (d\vec{r}'(t)/dt)_{\mathcal{S}'}$ vzhledem k soustavě \mathcal{S}' obecně nenulová, pak

$$\left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \right)_{\mathcal{S}} = \left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \right)_{\mathcal{S}'} + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t), \text{ tj.} \quad (1.58)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t). \quad (1.59)$$

POZNÁMKA: Rovnost (1.59) není jen transformačním vztahem mezi rychlostmi částice $\vec{v}(t)$ a $\vec{v}'(t)$, měřenými v navzájem rotujících vztažných soustavách \mathcal{S} a \mathcal{S}' . Uvádí do souvislosti časové derivace libovolného vektoru $\vec{L}(t)$ umístěného ve společném počátku $O \equiv O'$ obou soustav, vztažené ke každé z nich:

$$\left(\frac{d\vec{L}(t)}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{L}(t)}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t). \quad (1.60)$$

Vezmeme-li v úvahu i translační pohyb soustavy S' vzhledem k S , popsaný vektorovou funkcí $\vec{R}(t)$, a označíme-li $\vec{V}(t) = \left(d\vec{R}(t)/dt \right)_S$, dostáváme nejobecnější případ transformačního vztahu mezi rychlostmi $\vec{v}(t)$ a $\vec{v}'(t)$ hmotného bodu vzhledem k soustavám S a S' :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t). \quad (1.61)$$

Výraz, o který se liší rychlosti částice v obou soustavách,

$$\vec{v}_u(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t), \quad (1.62)$$

souvisí se vzájemným pohybem soustav a nazývá se *unášivá rychlost*. Je součtem unášivých rychlostí translačního a rotačního pohybu, $\vec{V}(t)$ a $\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)$.

Užitím obecného vztahu (1.60) odvodíme nyní transformační vztah pro zrychlení:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \left(\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right)_S = \left(\frac{d}{dt} \left[\vec{v}'(t) + \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t) \right] \right)_S = \\ &= \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_S + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_S + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_S \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_S = \\ &= \vec{A} + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \\ &= \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{A} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'. \end{aligned}$$

Při úpravě jsme označili $\vec{A}(t) = \left(d\vec{V}(t)/dt \right)_S$ zrychlení translačního pohybu soustavy S' vzhledem k S a $\vec{\varepsilon}(t) = (d\vec{\omega}(t)/dt)_S$ úhlové zrychlení rotačního pohybu. Uvědomíme-li si, že

$$\vec{a}'(t) = (d\vec{v}'(t)/dt)_{S'}$$

je zrychlení sledované částice vzhledem k soustavě S' , dostáváme:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{a}_u(t), \quad (1.63)$$

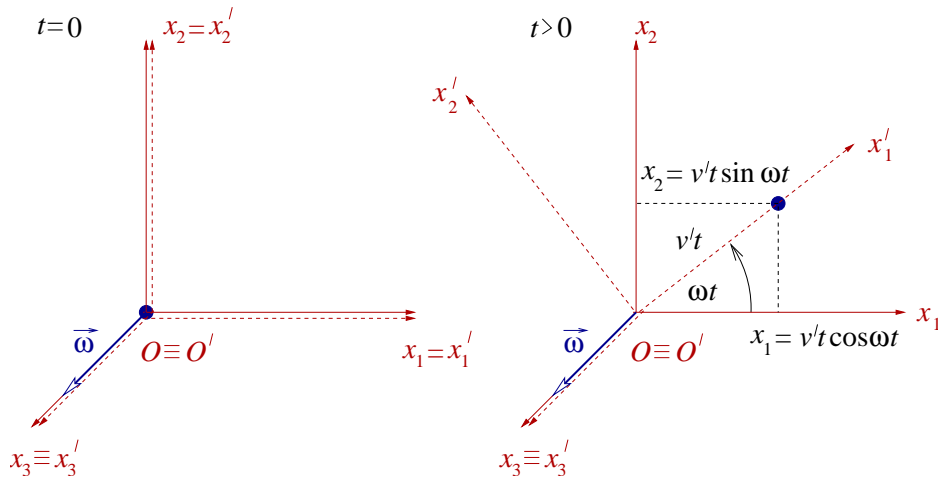
$$\vec{a}_u = \vec{A}(t) + 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) + \vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}'(t). \quad (1.64)$$

Unášivé zrychlení $\vec{a}_u(t)$ je součtem zrychlení $\vec{A}(t)$ translačního pohybu soustavy \mathcal{S}' vzhledem k \mathcal{S} a zrychlení pohybu rotačního, složeného z příspěvků $-\vec{a}_C = 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)$, $-\vec{a}_{OD} = \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'(t))$ a $\vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}'(t)$. Výrazy

$$\vec{a}_C = -2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t), \quad \vec{a}_{OD} = -\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) \quad \text{a} \quad \vec{a}_E = \vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}'(t) \quad (1.65)$$

se nazývají *Coriolisovo*, *odstředivé* a *Eulerovo zrychlení*.

PŘÍKLAD 1.13. Předpokládejme, že soustava \mathcal{S}' rotuje vzhledem k soustavě \mathcal{S} stálou úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem souřadnicové osy x_3 . Počátky obou soustav a souřadnicové osy x_3 a x'_3 trvale splývají, dvojice os x_1, x'_1 a x_2, x'_2 splývaly v počátečním okamžiku $t = 0$. Hmotný bod se pohybuje podél osy x'_1 stálou rychlostí v' vzhledem k soustavě \mathcal{S}' , přičemž v okamžiku $t = 0$ prochází společným počátkem vztažných soustav.



OBR. 1.21: K PŘÍKLADU 1.13

Polohový vektor, rychlost a zrychlení hmotného bodu jsou ve vztažné soustavě \mathcal{S}' vyjádřeny takto:

$$\vec{r}'(t) = (v't, 0, 0)_{\mathcal{S}'}, \quad \vec{v}'(t) = (v', 0, 0)_{\mathcal{S}'}, \quad \vec{a}'(t) = (0, 0, 0)_{\mathcal{S}'}.$$

Složky vektoru úhlové rychlosti jsou

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)_{\mathcal{S}} = (0, 0, \omega)_{\mathcal{S}'}.$$

Složky vektorů rychlosti $\vec{v}'(t)$ a zrychlení $\vec{a}'(t)$, charakterizujících pohyb částice v soustavě \mathcal{S}' , vztažené k soustavě \mathcal{S} jsou

$$\vec{v}'(t) = (v' \cos \omega t, v' \sin \omega t, 0)_{\mathcal{S}} \quad , \quad \vec{a}'(t) = (0, 0, 0)_{\mathcal{S}} \quad .$$

Poloha částice vzhledem k soustavě \mathcal{S} je určena vektorem

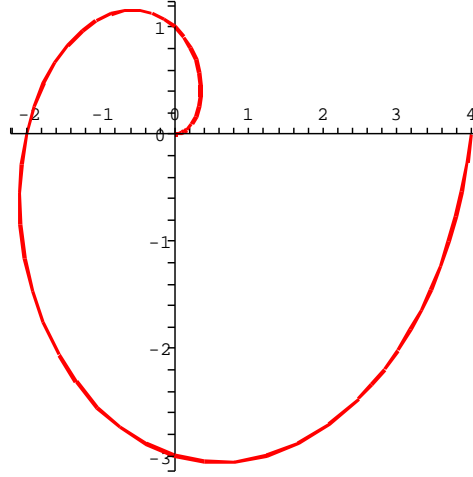
$$\vec{r}(t) = \vec{r}' = (v' t \cos \omega t, v' t \sin \omega t, 0)_{\mathcal{S}} \quad .$$

Zatímco trajektorií částice v soustavě \mathcal{S}' je přímka, v soustavě \mathcal{S} je jí Archimédova spirála. Polohu částice v některých okamžicích intervalu $[0, T]$ pro $T = 4,0 \text{ s}$, $v' = 2,0 \text{ ms}^{-1}$, $\omega = 2\pi T$, v obou soustavách uvádí následující tabulka.

TABULKA 1.5: POHYB ČÁSTICE V NAVZÁJEM ROTUJÍCÍCH VZTAŽNÝCH SOUSTAVÁCH

t	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
ωt	0,0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x'	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
y'	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x	0,0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-4,0	$-\frac{5\sqrt{2}}{2}$	0,0	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$	8,0
y	0,0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2,0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0,0	$-\frac{5\sqrt{2}}{2}$	-6,0	$-\frac{7\sqrt{2}}{2}$	0,0

Trajektorie částice v soustavě \mathcal{S} je znázorněna na OBR. 1.22. (Osa x je vodorovná a směřuje doprava, osa y je svislá a směřuje vzhůru.)



OBR. 1.22: POHYB ČÁSTICE V NAVZÁJEM ROTUJÍCÍCH VZTAŽNÝCH SOUSTAVÁCH

Vyjádříme rychlost a zrychlení částice vzhledem k pozorovateli v soustavě \mathcal{S} užitím transformačních vztahů (1.59), (1.63) a (1.64). Při výpočtu musíme samozřejmě pracovat u všech vektorů s jejich složkami vztaženými k jedné a téže soustavě souřadnic, a to soustavě \mathcal{S} , vzhledem k níž rychlost $\vec{v}(t)$ a zrychlení $\vec{a}(t)$ částice měříme.

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}'(t) = (v' \cos \omega t, v' \sin \omega t, 0)_{\mathcal{S}} + (0, 0, \omega)_{\mathcal{S}} \times (v' t \cos \omega t, v' t \sin \omega t, 0)_{\mathcal{S}},$$

$$\vec{v}(t) = (v' \cos \omega t - \omega v' t \sin \omega t, v' \sin \omega t + \omega v' t \cos \omega t, 0)_{\mathcal{S}},$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'(t)) =$$

$$= 2(0, 0, \omega)_{\mathcal{S}} \times (v' \cos \omega t, v' \sin \omega t, 0)_{\mathcal{S}} + (0, 0, \omega)_{\mathcal{S}} \times ((0, 0, \omega)_{\mathcal{S}} \times$$

$$\times (v' t \cos \omega t, v' t \sin \omega t, 0)_{\mathcal{S}}) = (-2\omega v' \sin \omega t, 2\omega v' \cos \omega t, 0)_{\mathcal{S}} +$$

$$+ (0, 0, \omega)_{\mathcal{S}} \times (-\omega v' t \sin \omega t, \omega v' t \cos \omega t, 0)_{\mathcal{S}} =$$

$$= (-2\omega v' \sin \omega t - \omega^2 v' t \cos \omega t, 2\omega v' \cos \omega t - \omega^2 v' t \sin \omega t, 0)_{\mathcal{S}}.$$

Derivováním vektorové funkce $\vec{r}'(t) = (v' t \cos \omega t, v' t \sin \omega t, 0)_{\mathcal{S}}$ podle času získáme pro $\vec{v}(t)$ a $\vec{a}(t)$ stejné výsledky jako užitím transformačních vztahů. ♠

1.4.4 Pohyb v různých vztažných soustavách — maticová formulace

Transformační vztahy ve vektorovém tvaru pro polohu, rychlost a zrychlení částice vzhledem k různým vztažným soustavám jsou velmi názorné. Pro praktické použití při přepočtech číselných údajů zadávaných v různých vztažných soustavách je však třeba je vyjádřit ve složkách. K tomu je velmi vhodné použít maticové formulace.

Uvažme znovu vztažné soustavy $\mathcal{S} = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, $\mathcal{S}' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$. Translační pohyb soustavy \mathcal{S}' vzhledem k \mathcal{S} je opět popsán vektorem $\vec{R}(t)$, jehož vyjádření pomocí složek vzhledem k soustavě \mathcal{S} budeme interpretovat jako řádkovou matici

$$(X) = (X_1(t) \ X_2(t) \ X_3(t))_{\mathcal{S}}.$$

Pohyb rotační budeme namísto úhlovou rychlostí $\vec{\omega}(t)$ charakterizovat pomocí matice přechodu $T(t)$ od báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ k bázi $\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$. Poněvadž vektory $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ rotují vůči soustavě \mathcal{S} úhlovou rychlostí $\vec{\omega}(t)$, jsou vzhledem k ní závislé na čase. Tedy i prvky matic T a S jsou funkcemi času.

Odvodíme nejprve souvislost mezi vektorem $\vec{\omega}(t)$ a maticí přechodu $T(t)$. Podle vztahu (1.60) platí

$$\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt} \right)_{\mathcal{S}} = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}'_i(t), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.66)$$

neboť $(d\vec{e}'_i(t)/dt)_{\mathcal{S}} = \vec{0}$. Podle (1.51) s uvažováním časové závislosti prvků matice T platí $\vec{e}'_i(t) = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij}(t) \vec{e}_j$ pro $i \in \{1, 2, 3\}$. Vzhledem k tomu, že $\tau_{ij}(t)$ představuje j -tou složku vektoru $\vec{e}'_i(t)$ v soustavě \mathcal{S} , můžeme vztah (1.66) rozepsat do složek vůči soustavě \mathcal{S} takto:

$$\dot{\tau}_{ij}(t) = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} \omega_k(t) \tau_{il}(t), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Pro každou hodnotu $i \in \{1, 2, 3\}$ dostáváme postupně, již bez vypisování proměnné t :

$$\dot{\tau}_{i1} = \omega_2 \tau_{i3} - \omega_3 \tau_{i2}, \quad \dot{\tau}_{i2} = \omega_3 \tau_{i1} - \omega_1 \tau_{i3}, \quad \dot{\tau}_{i3} = \omega_1 \tau_{i2} - \omega_2 \tau_{i1}.$$

Tyto vztahy lze zapsat pomocí maticového násobení:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tau}_{11} & \dot{\tau}_{12} & \dot{\tau}_{13} \\ \dot{\tau}_{21} & \dot{\tau}_{22} & \dot{\tau}_{23} \\ \dot{\tau}_{31} & \dot{\tau}_{32} & \dot{\tau}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud po označení

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3(t) & -\omega_2(t) \\ -\omega_3(t) & 0 & \omega_1(t) \\ \omega_2(t) & -\omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

dostáváme

$$\dot{T}(t) = T(t) \Omega(t). \quad (1.68)$$

V případě, že je známa matice přechodu $T(t)$, která je nutně regulární, lze ze vztahu (1.68) určit matici $\Omega(t)$ a vektorovou funkci $\vec{\omega}(t)$:

$$\Omega(t) = T^{-1}(t) \dot{T}(t).$$

Je-li naopak známa úhlová rychlost $\vec{\omega}(t)$, je nutno chápat vztah (1.68) jako tři soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu pro trojice neznámých prvků matice $T(t)$, tj.

$$\tau_{i1}(t), \quad \tau_{i2}(t), \quad \tau_{i3}(t), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Příklad 1.14. Uvažujme o situaci popsané v příkladu 1.13, kde $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)_{\mathcal{S}}$. Pak

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud

$$\dot{\tau}_{i1} = -\omega\tau_{i2}, \quad \dot{\tau}_{i2} = \omega\tau_{i1}, \quad \dot{\tau}_{i3} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Obecné řešení této soustavy diferenciálních rovnic má tvar (ověřte zpětným dosazením):

$$\tau_{i1} = a_i \cos \omega t - b_i \sin \omega t, \quad \tau_{i2} = b_i \cos \omega t + a_i \sin \omega t, \quad \tau_{i3} = c_i, \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

kde $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2, 3\}$, jsou libovolné reálné konstanty. Soustavě tedy vyhovuje každá matice $T(t)$ tvaru

$$T(t) = \begin{pmatrix} a_1 \cos \omega t - b_1 \sin \omega t & b_1 \cos \omega t + a_1 \sin \omega t & c_1 \\ a_2 \cos \omega t - b_2 \sin \omega t & b_2 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t & c_2 \\ a_3 \cos \omega t - b_3 \sin \omega t & b_3 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t & c_3 \end{pmatrix}.$$

Počáteční podmínka, vyplývající se zadání příkladu 1.13 určuje prvky matice $T(t)$ v okamžiku $t = 0$: $T(0) = E$ (jednotková matice). Souřadnicové osy soustav $\mathcal{S} = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, $\mathcal{S}' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ totiž v okamžiku $t = 0$ splývají. Této počáteční podmínce odpovídá následující tvar matice $T(t)$ (partikulární řešení soustavy rovnic (1.68)):

$$T(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že toto řešení souhlasí s výsledky příkladu 1.13, získanými na základě geometrické představy. ♠

Na základě vztahů (1.53), v nichž vezmeme v úvahu časovou závislost matic přechodu a zobecníme je i na případ translačního pohybu soustavy \mathcal{S}' vzhledem k \mathcal{S} , můžeme s využitím (1.68) získat transformační vzorce pro složky rychlosti a zrychlení hmotného bodu v maticovém vyjádření:

$$(x) = (x')T + (X) \implies (\dot{x}) = (\dot{x}')T + (x')\dot{T} + (\dot{X}) = (\dot{x}')T + (x')T\Omega + (\dot{X}),$$

odkud

$$(v) = (v')T + (x')T\Omega + (V), \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} (\ddot{x}) &= (\ddot{x}')T + (\dot{x}')\dot{T} + (\dot{x}')T\Omega + (x')\dot{T}\Omega + (x')T\dot{\Omega} + (\ddot{X}) = \\ &= (\ddot{x}')T + 2(\dot{x}')T\Omega + (x')T\Omega^2 + (x')T\dot{\Omega} + (\ddot{X}), \\ (a) &= (a')T + 2(v')T\Omega + (x')T\Omega^2 + (x')T\dot{\Omega} + (A). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Unášivá rychlost a zrychlení mají tedy v maticovém vyjádření vzhledem k soustavě \mathcal{S} tvar

$$(v_u) = (x')T\Omega + (V), \quad (a_u) = 2(v')T\Omega + (x')T\Omega^2 + (x')T\dot{\Omega} + (A).$$

PŘÍKLAD 1.15. Rychlost a zrychlení částice z příkladu 1.13 vzhledem k soustavě \mathcal{S} vyjádříme v maticovém formalismu. Využijeme matic $T(t)$ a Ω z předchozího příkladu 1.14. Podle vztahu (1.69) je rychlost \vec{v} v soustavě \mathcal{S} reprezentována řádkovou maticí (v) :

$$(v' \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (v' t \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(v) = (v' \cos \omega t - \omega v' t \sin \omega t \quad v' \sin \omega t + \omega v' t \cos \omega t \quad 0)_{\mathcal{S}}.$$

Tento výsledek je v souladu s vyjádřením rychlostí $\vec{v}(t)$ hmotného bodu vzhledem k vztažné soustavě \mathcal{S} získaným v příkladu 1.13. Pro výpočet zrychlení potřebujeme matice Ω^2 a $\dot{\Omega}$. Dostaneme pro ně

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro zrychlení platí

$$(a) = 2(v' \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ (v' t \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(a) = (-2\omega v' \sin \omega t - \omega^2 v' t \cos \omega t \quad 2\omega v' \cos \omega t - \omega^2 v' t \sin \omega t \quad 0)_{\mathcal{S}}.$$

Výsledek opět souhlasí se závěrem příkladu 1.13. 

V příkladu 1.13 byl formulován problém nalezení trajektorie částice v soustavě \mathcal{S} , bylo-li známo zrychlení v soustavě \mathcal{S}' . Jednou z možností, jak tento problém řešit, je nalézt složky rychlostí (v') a polohového vektoru (x') v soustavě \mathcal{S}' integrací známého zrychlení (a') a poté použít transformačních vztahů (1.69). Tento postup byl zvolen při řešení příkladu 1.14. Jiný, ekvivalentní způsob vychází ze vztahu (1.70) pro složky zrychlení v soustavě \mathcal{S} , v němž je však třeba řádkové matice (v') a (x') vyjádřit užitím transformačních vztahů pomocí (x) a (v) , konkrétně $(x')T = (x) - (X)$, $(v')T = (v) - (V) - (x')T\Omega = (v) - (V) - ((x) - (X))\Omega$. Získáme tak soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$:

$$(a) = (a')T + 2((v) - (V))\Omega + ((x) - (X))(\dot{\Omega} - \Omega^2) + (A). \quad (1.71)$$

PŘÍKLAD 1.16. Odvodíme parametrické vyjádření trajektorie částice z příkladu 1.13 ve vztažné soustavě \mathcal{S} přímo, na základě rovnic (1.71): Ze zadání úkolu v příkladu 1.13 vyplývají tyto údaje: $\vec{R}(t) = \vec{0} \implies \vec{V}(t) = \vec{0}, \vec{A}(t) = \vec{0}; \vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega)_{\mathcal{S}} = \overrightarrow{\text{konst.}} \implies \dot{\Omega} = 0$ (nulová matice); $\vec{a}' = \vec{0}$. Vztah (1.71) má pro tento případ tvar:

$$(a) = 2(v)\Omega - (x)\Omega^2 \implies$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Získáváme soustavu rovnic

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Po doplnění této soustavy počátečními podmínkami $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v'$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$ podle zadání příkladu 1.13 dostáváme její řešení:

$$\vec{r}'(t) = (v' t \cos \omega t, v' t \sin \omega t, 0)_S.$$



Při praktických výpočtech, zejména při řešení úloh z mechaniky v neinerciálních vztažných soustavách, je třeba vyjádřit explicitně složky zrychlení $\vec{a}'(t)$ vzhledem k soustavě S' . Řádkovou matici (a') můžeme získat vynásobením vztahu (1.70) maticí S zprava:

$$(a') = (a)S - (A)S - 2(v')T\Omega S - (x')T\Omega^2 S - (x')T\dot{\Omega}S. \quad (1.72)$$

Tento výsledek lze ještě zjednodušit užitím vztahů pro matice T, S, Ω : Označme jako Ω' matici utvořenou ze složek úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ vzhledem k soustavě S' stejným způsobem, jakým byla definována matice Ω , tj. pro $\vec{\omega} = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)_{S'}$ je

$$\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & \omega'_3 & -\omega'_2 \\ -\omega'_3 & 0 & \omega'_1 \\ \omega'_2 & -\omega'_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ze vztahu $\left(\frac{d\vec{e}_i(t)}{dt}\right)_{S'} = -\vec{\omega} \times \vec{e}_i(t)$ (soustava S rotuje vůči soustavě S' úhlovou rychlostí $-\vec{\omega}$) snadno odvodíme analogii vztahu (1.68):

$$\dot{S}(t) = -S(t)\Omega'(t). \quad (1.73)$$

Odtud transponováním $\dot{T} = \dot{S}^{\text{transp}} = -(\Omega')^{\text{transp}} S^{\text{transp}} = \Omega' T$, neboť matice Ω' , stejně jako Ω , je antisymetrická. Užitím vztahů (1.68) a (1.73) nakonec dostáváme

$$T\Omega S = \dot{T}S = \Omega' T S = \Omega', \quad T\Omega^2 S = \dot{T}\Omega S = \Omega' T\Omega S = \Omega'^2,$$

$$\dot{\Omega}' = \frac{d}{dt}(T\Omega S) = \dot{T}\Omega S + T\dot{\Omega}S + T\Omega\dot{S} = T\dot{\Omega}S + \Omega'^2 - T\Omega S\Omega' \Rightarrow T\dot{\Omega}S = \dot{\Omega}'.$$

Dosazením za $T\Omega S$, $T\Omega^2 S$ a $T\dot{\Omega}S$ do vztahu (1.72) pro (a') pak dostaneme

$$(a') = ((a) - (A))S - 2(v')\Omega' - (x')(\Omega'^2 + \dot{\Omega}'). \quad (1.74)$$

POZNÁMKA: Tento výsledek můžeme získat také tak, že ve vztahu z (1.70) formálně zaměníme $(a) \rightarrow (a')$, $(a')T \rightarrow (a)S$, $(A) \rightarrow -(A)S$, $\Omega \rightarrow -\Omega'$, $(v) - (V) \rightarrow (v')$, $(x) - (X) \rightarrow (x')$.

1.4.5 Aplikace: Translační pohyb vztažných soustav, Galileiova transformace

Omezení vzájemného pohybu vztažných soustav na pohyb čistě translační představuje velice jednoduchou, avšak z hlediska dalších úvah v oblasti newtonovské mechaniky významnou, situaci, jejíž studium přivedlo již v přednewtonovském

období Galilea Galileiho k pochopení klíčové úlohy pojmu zrychlení v mechanice a k vyslovení myšlenky invariance zákonů mechaniky vůči určitým typům přechodů mezi vztažnými soustavami. Transformační vztahy pro polohový vektor, rychlost a zrychlení hmotného bodu, odpovídající této situaci, získáme okamžitě z obecných vztahů (1.56), (1.61), (1.63) a (1.64), položíme-li v (1.61) a (1.64) $\vec{\omega} = \vec{0}$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t), \quad \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}(t), \quad \vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{A}(t). \quad (1.75)$$

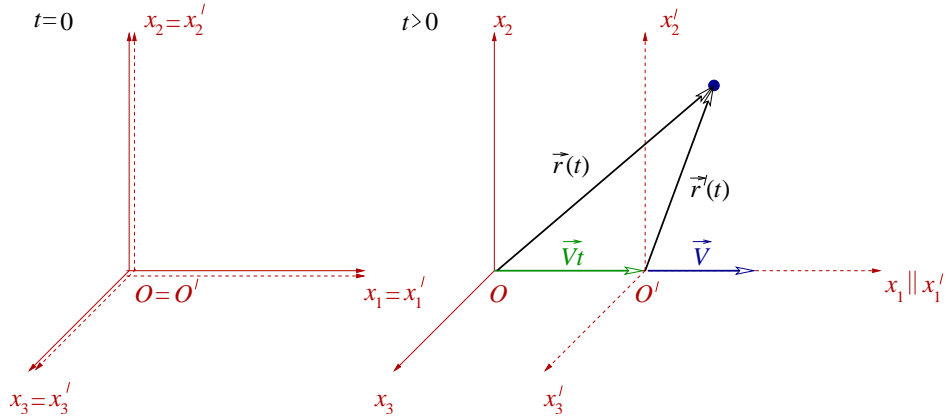
Pro $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$ je vzájemné natočení souřadnicových soustav spjatých s \mathcal{S} a \mathcal{S}' časově neproměnné a tedy fyzikálně nepodstatné. Bez ztráty obecnosti úvah můžeme proto předpokládat, že dvojice souřadnicových os x_i, x'_i jsou trvale rovnoběžné. Pak z (1.75) plynou následující transformační vztahy pro složky vektorů:

$$x_i = x'_i + X_i, \quad v_i = v'_i + V_i, \quad a_i = a'_i + A_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Velmi významným speciálním případem translačního pohybu soustavy \mathcal{S}' vzhledem k \mathcal{S} je pohyb rovnoměrný přímočarý. Při něm je $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}t$, kde \vec{R}_0 a \vec{V} jsou konstantní vektory. Pak je $\vec{V}(t) = \vec{V}$, $\vec{A}(t) = \vec{0}$ a vztahy (2.78) nabudou tvaru

$$\vec{r}(t) = \vec{r}' + \vec{R}_0 + \vec{V}t, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}, \quad \vec{a}(t) = \vec{a}'(t). \quad (1.76)$$

Důležitým poznatkem, patrným z těchto vztahů, je skutečnost, že zrychlení částice, jejíž pohyb je posuzován dvěma pozorovateli pohybujícími se navzájem rovnoměrně přímočaře, je vzhledem k oběma stejné. Při zápisu transformačních vztahů (1.76) ve složkách bývá obvyklé užití dalšího fyzikálně nepodstatného zjednodušení, jímž je splnutí souřadnicových soustav $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ a $\langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ v počátečním okamžiku $t = 0$ a volba společného směru souřadnicových os x_1, x'_1 podél fyzikálně význačného směru, který je určen rychlostí \vec{V} .



OBR. 1.23: K ILUSTRACI GALILEIOVY TRANSFORMACE

Pak je $\vec{V} = (V, 0, 0)_S$ a vztahy (1.76) pro polohové vektory, doplněné transformační rovnicí $t = t'$ pro časovou proměnnou, vedou k nejznámějšímu tvaru tzv. *Galileiovy transformace*:

$$t = t' , \quad x_1 = x'_1 + Vt' , \quad x_2 = x'_2 , \quad x_3 = x'_3 . \quad (1.77)$$

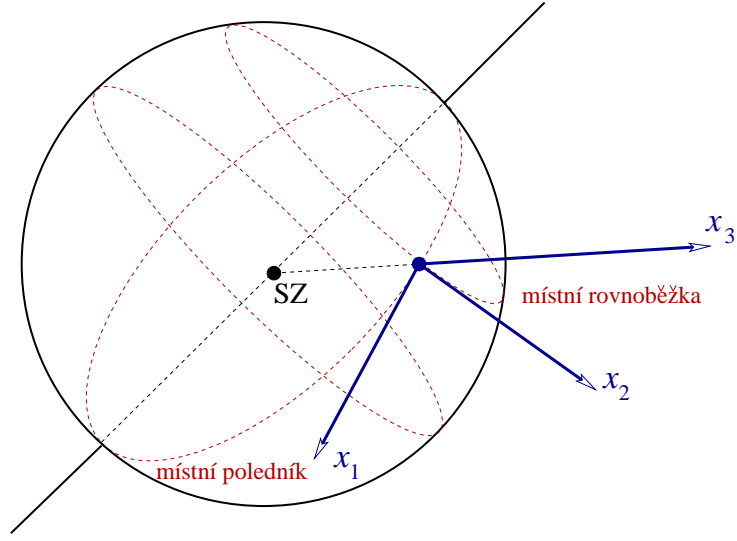
Příslušné vztahy pro rychlosti pak dávají tzv. *klasické pravidlo pro skládání rychlostí*:

$$v_1 = v'_1 + V , \quad v_2 = v'_2 , \quad v_3 = v'_3 . \quad (1.78)$$

1.4.6 Aplikace: Pohyb částice v laboratorní vztažné soustavě

V předchozích odstavcích jsme zavedli laboratorní vztažnou soustavu pevně spojenou s povrchem Země. Tato soustava je neinerciální. Vzhledem k inerciální Galileiově soustavě, jejíž počátek je umístěn ve středu hmotnosti sluneční soustavy a osy namířeny ke stálícím, se spolu se Zemí pohybuje jednak po přibližně eliptické trajektorii kolem Slunce, jednak rotuje kolem zemské osy. Za dobu $T = 24\text{h } 56\text{min}$, která představuje periodu této rotace, urazí Země jen velmi malý úsek své dráhy kolem Slunce, podél něž se její rychlost mění pouze zanedbatelně. (Velikosti rychlosti v přísluní a odsluní se liší asi o 3 procenta, změna směru rychlosti za dobu T činí asi 10° .) Rotace Země kolem její osy je tedy zcela rozhodující příčinou neinerciálnosti laboratorní vztažné soustavy.

Zvolme inerciální vztažnou soustavu \mathcal{S} podle OBR. 1.24 a jako \mathcal{S}' označme laboratorní soustavu (viz také OBR. 1.8).



OBR. 1.24: LABORATORNÍ VZTAŽNÁ SOUSTAVA SPJATÁ S GEOMETRICKY VÝZNAČNÝMI SMĚRY NA POVRCHU ZEMĚ

Označme $O'(0)$ polohu počátku soustavy S' v čase $t = 0$, Φ nechť je zeměpisná šířka místa, v němž je tato soustava umístěna. Poloměr Země je R_0 . Vektory $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ tvoří pravotočivou ortonormální bázi spjatou se sférickými souřadnicemi v bodě O' , jsou tedy tečné k příslušným souřadnicovým křivkám procházejícím bodem O' – poledníku, rovnoběžce a paprsku OO' . Platí tedy (při označení $\omega = 2\pi/T$)

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1(t) &= (\cos \omega t \sin \Phi, \sin \omega t \sin \Phi, -\cos \Phi)_S, \\ \vec{e}'_2(t) &= (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0)_S, \\ \vec{e}'_3(t) &= (\cos \omega t \cos \Phi, \sin \omega t \cos \Phi, \sin \Phi)_S,\end{aligned}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \sin \Phi & \sin \omega t \sin \Phi & -\cos \Phi \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ \cos \omega t \cos \Phi & \sin \omega t \cos \Phi & \sin \Phi \end{pmatrix}, \quad S(t) = T(t)^{\text{transp}}, \quad (1.79)$$

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)_S = (-\omega \cos \Phi, 0, \omega \sin \Phi)_{S'},$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega' = \begin{pmatrix} 0 & \omega \sin \Phi & 0 \\ -\omega \sin \Phi & 0 & -\omega \cos \Phi \\ 0 & \omega \cos \Phi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{R}(t) = (R_0 \cos \omega t \cos \Phi, R_0 \sin \omega t \cos \Phi, R_0 \sin \Phi)_S,$$

$$\vec{V}(t) = (-\omega R_0 \sin \omega t \cos \Phi, \omega R_0 \cos \omega t \cos \Phi, 0)_S,$$

$$\vec{A}(t) = (-\omega^2 R_0 \cos \omega t \cos \Phi, -\omega^2 R_0 \sin \omega t \cos \Phi, 0)_S.$$

1.4. POPIS POHYBU RŮZNÝMI POZOROVATELI — KAŽDÝ TO VIDÍ JINAK 55

Užitím (1.74) a s uvážením skutečnosti, že $(v') = (\dot{x}')$ a $(a') = (\ddot{x}')$ pak dostáváme pro neznámou vektorovou funkci $\vec{r}'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))_{S'}$ soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_1 - 2\dot{x}'_2\omega \sin \Phi - x'_1\omega^2 \sin^2 \Phi - x'_3\omega^2 \cos \Phi \sin \Phi &= \\ &= (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \sin \Phi - a_3 \cos \Phi + \omega^2 R_0 \sin \Phi \cos \Phi, \\ \ddot{x}'_2 + 2\dot{x}'_1\omega \sin \Phi + 2\dot{x}'_3\omega \cos \Phi - x'_2\omega^2 &= -a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t, \\ \ddot{x}'_3 - 2\dot{x}'_2\omega \cos \Phi - x'_1\omega^2 \cos \Phi \sin \Phi - x'_3\omega^2 \cos^2 \Phi &= \\ &= (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \cos \Phi + a_3 \sin \Phi + \omega^2 R_0 \cos^2 \Phi. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Zrychlení částice $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))_{\mathcal{S}}$ lze považovat buď za známou vektorovou funkci času, nebo je lze vyjádřit prostřednictvím polohy a rychlosti částice v soustavě \mathcal{S} a užitím transformačních vztahů převést do \mathcal{S}' . Řešit problém nalezení trajektorie částice v soustavě \mathcal{S}' je obtížné, či dokonce neschůdné, již pro tak jednoduchý systém, jakým je matematické kyvadlo. Tímto problémem se budeme zabývat později. Nyní si všimneme pouze nejjednodušších případů, jimiž jsou klid a volný pád.

Příklad 1.17. Volným pádem jsme nazvali pohyb hmotného bodu volně vypuštěného v okamžiku $t = 0$ z výšky h nad zemským povrchem za předpokladu, že odpor okolního vzduchu proti pohybu objektu je zanedbatelný. Vzhledem k inerciální soustavě \mathcal{S} se takový hmotný bod pohybuje se zrychlením \vec{g}_0 , *gravitačním*, které lze v blízkosti zemského povrchu a v rozmezí malých vzdáleností od bodu O' pokládat za konstantní vektor kolmý k povrchu Země, tj.

$$\vec{g}_0 = (0, 0, -g_0)_{S'} = (-g_0 \cos \omega t \cos \Phi, -g_0 \sin \omega t \cos \Phi, -g_0 \sin \Phi)_{\mathcal{S}}.$$

POZNÁMKA: Směr gravitačního zrychlení při povrchu Země se na vzdálenosti 5km, měřené podél kterékoli z hlavních kružnic na zemské sféře, např. poledníků či rovníku, změní méně než o $0,05^\circ$. Velikost gravitačního zrychlení klesne o 1 procento své hodnoty na vzdálenosti 30km od povrchu Země. Rovnice (1.80) mají tvar:

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_1 - 2\dot{x}'_2\omega \sin \Phi - x'_1\omega^2 \sin^2 \Phi - x'_3\omega^2 \cos \Phi \sin \Phi &= \omega^2 R_0 \sin \Phi \cos \Phi, \\ \ddot{x}'_2 + 2\dot{x}'_1\omega \sin \Phi + 2\dot{x}'_3\omega \cos \Phi - x'_2\omega^2 &= 0, \\ \ddot{x}'_3 - 2\dot{x}'_2\omega \cos \Phi - x'_1\omega^2 \cos \Phi \sin \Phi - x'_3\omega^2 \cos^2 \Phi &= -g_0 + \omega^2 R_0 \cos^2 \Phi. \end{aligned}$$

Interpretace jejich pravých stran je velmi názorná. Vektor

$$\vec{g} = (\omega^2 R_0 \sin \Phi \cos \Phi, 0, -g_0 + \omega^2 R_0 \cos^2 \Phi)_{S'}$$

je totiž součtem gravitačního zrychlení \vec{g}_0 a odstředivého zrychlení $\vec{a}_{OD} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_0)$ při povrchu Země. Vektor \vec{g} nazýváme obvykle *tíhovým zrychlením* a spojujeme s ním *svislý směr* při zemském povrchu. (Je třeba si uvědomit, že takto definovaný „svislý směr“ se mění, vzdalujeme-li se od povrchu Země.) ♠

Souřadnicové osy laboratorní vztažné soustavy jsme v předchozích odstavcích spojili s geometricky význačnými směry: poledníkem, rovnoběžkou a paprskem, procházejícími daným místem na povrchu Země. Tato volba soustavy souřadnic je jistě geometricky velmi názorná. Fyzikálně přirozenější je však sepletí souřadnicových os s fyzikálně význačnými směry, v našem případě právě se svislým směrem při zemském povrchu. Tato volba odpovídá otočení soustavy souřadnic o úhel δ , který svírají vektory \vec{g}_0 a \vec{g} , kolem osy x'_2 , popsánému maticí přechodu

$$T' = \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix}$$

ze soustavy $\mathcal{S}' = \langle O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle$ do soustavy $\mathcal{S}'' = \langle O''; \vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3 \rangle$, kde $\vec{e}''_1 = \vec{e}'_1 \cos \delta + \vec{e}'_3 \sin \delta$, $\vec{e}''_2 = \vec{e}'_2$, $\vec{e}''_3 = -\vec{e}'_1 \sin \delta + \vec{e}'_3 \cos \delta$. Matice přechodu T'' ze soustavy \mathcal{S} do \mathcal{S}'' je

dána součinem $T'' = TT' \implies S'' = S'S$, kde matice T , S jsou dány vztahy (1.79). Názorně je zřejmé, že rovnice (1.80) lze snadno převést do soustavy S'' záměnou čárkovaných veličin za dvoučárkované a nahrazením úhlu Φ součtem $\Phi + \delta$. Dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1'' - 2\dot{x}_2''\omega \sin(\Phi + \delta) - x_1''\omega^2 \sin^2(\Phi + \delta) - x_3''\omega^2 \cos(\Phi + \delta) \sin(\Phi + \delta) &= 0, \\ \ddot{x}_2'' + 2\dot{x}_1''\omega \sin(\Phi + \delta) + 2\dot{x}_3''\omega \cos(\Phi + \delta) - x_2''\omega^2 \cos^2(\Phi + \delta) &= 0, \\ \ddot{x}_3'' - 2\dot{x}_2''\omega \cos(\Phi + \delta) - x_1''\omega^2 \cos(\Phi + \delta) \sin(\Phi + \delta) - x_3''\omega^2 &= -g,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}g &= |\vec{g}_0 + \vec{a}_0| = g_0 \sqrt{1 - \frac{2\omega^2 R_0}{g_0} \cos^2 \Phi + \frac{\omega^4 R_0^2}{g_0^2} \cos^2 \Phi}, \\ \cos \delta &= \frac{\vec{g}\vec{g}_0}{gg_0} = \frac{1 - \frac{\omega^2 R_0}{g_0} \cos^2 \Phi}{\sqrt{1 - \frac{2\omega^2 R_0}{g_0} \cos^2 \Phi + \frac{\omega^4 R_0^2}{g_0^2} \cos^2 \Phi}}.\end{aligned}$$

POZNÁMKA: Vzhledem k hodnotám $\omega = 2\pi T^{-1}$, $T = 8.616 \times 10^4$ s, $R_0 = 6.371 \times 10^6$ m, $g_0 = 9.833$ ms⁻² je příspěvek odstředivého zrychlení k výslednému zrychlení tíhovému velmi malý. Při náhradě $g \approx g_0$ se dopustíme chyby asi 0.03 procenta. Také úhel δ je velmi malý. Odhad jeho nejvyšší hodnoty činí asi 0.1° .

Při počátečních podmínkách $\vec{r}'' = (0, 0, h)_{S''}$, $\vec{v}'' = (0, 0, 0)_{S''}$, odpovídajících volnému vypuštění tělesa z výšky h nad zemským povrchem, má soustava diferenciálních rovnic pro x_1' , x_2' , x_3' následující řešení:

$$\begin{aligned}x_1''(t) &= \left[\frac{1}{2}gt^2 + \left(h - \frac{g}{\omega^2} \right) (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t - 1) \right] \sin(\Phi + \delta) \cos(\Phi + \delta), \\ x_2'' &= \left(h - \frac{g}{\omega^2} \right) (\omega t \cos \omega t - \sin \omega t) \cos(\Phi + \delta), \\ x_3'' &= h - \frac{1}{2}gt^2 \sin^2(\Phi + \delta) + \left(h - \frac{g}{\omega^2} \right) (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t - 1) \cos^2(\Phi + \delta).\end{aligned}$$

Správnost poměrně komplikovaného výsledku můžeme ověřit například pro limitní případ $\omega \rightarrow 0$ nebo pro volný pád na pólu, odpovídající hodnotám $\Phi = \pi/2$, $\delta = 0$, kdy očekáváme zjednodušení na tvar obvyklý pro parametrické vyjádření trajektorie volného pádu v inerciální vztažné soustavě, tj. $\vec{r}'' = (0, 0, h - \frac{1}{2}g_0 t^2)_{S''}$. Při dosazení $\Phi = \pi/2$, $\delta = 0$ dostáváme tento výsledek okamžitě. Pro $\omega \rightarrow 0$ využijeme l'Hospitalova pravidla při výpočtu limit

$$\begin{aligned}L_1 &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\cos \omega t + \omega t \sin \omega t - 1}{\omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-t \sin \omega t + t \sin \omega t + \omega t^2 \cos \omega t}{2\omega} = \frac{1}{2}t^2, \\ L_2 &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega t \cos \omega t - \sin \omega t}{\omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{t \cos \omega t - \omega t^2 \sin \omega t - t \cos \omega t}{2\omega} = 0\end{aligned}$$

a opět dospějeme k zjednodušenému výsledku pro volný pád.

Zajímavá situace nastává pro $\Phi = 0$. Pak je i $\delta = 0$ a $g = g_0(1 - \frac{\omega^2 R_0}{g_0})$ (volný pád na rovníku). Pak

$$x_1'' = 0, \quad x_2'' = \left(h - \frac{g}{\omega^2} \right) (\omega t \cos \omega t - \sin \omega t), \quad x_3'' = h + \left(h - \frac{g}{\omega^2} \right) (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t - 1).$$

Odhadneme nyní, jak se odchýlí místo dopadu předmětu od počátku O' , nebude-li předmět padat z příliš velké výšky. Zvolme $h = 500$ m. Doba volného pádu v inerciální vztažné soustavě by byla $\tau_0 = \sqrt{2h/g_0} \doteq 10$ s. Vzhledem k tomu, že $\omega \doteq 7.3 \times 10^{-5}$ s⁻¹, je $\omega\tau_0 \doteq 7 \times 10^{-4}$ a místo funkcí $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ lze užít prvních členů jejich Taylorova rozvoje: $\cos \omega t \approx 1 - \frac{1}{2}\omega^2 t^2$, $\sin \omega t \approx \omega t - \frac{1}{6}\omega^3 t^3$. Pak

$$x_3'' \approx h - \frac{1}{2}gt^2 \left(1 - \frac{h\omega^2}{g} \right).$$

1.4. POPIS POHYBU RŮZNÝMI POZOROVATELI — KAŽDÝ TO VIDÍ JINAK⁵⁷

Označíme-li τ dobu pádu, určenou podmínkou $x_3'' = 0$, je

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{h\omega^2}{g})}} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} = \tau_0 \implies x_2'' \approx \frac{1}{3}g\omega\tau^3 \left(1 - \frac{h\omega^2}{g}\right) \approx \frac{1}{3}g\omega\tau^3 \doteq 0,25 \text{ m.}$$

Vidíme, že při pádu i z nepříliš velké výšky způsobí neinerciálnost vztažné soustavy měřitelnou odchylku od očekávaného místa dopadu. Je třeba si však uvědomit, že předchozí výpočet byl prováděn bez uvážení skutečnosti, že předmět padá v odporujícím prostředí (vzduchu). Skutečná odchylka místa dopadu od očekávané polohy bude menší.

Kapitola 2

Principy klasické mechaniky

V předchozí kapitole jsme definovali veškeré pojmy, které jsou potřebné pro *popis pohybu* hmotných bodů (klasických částic), ve čtvrté kapitole jich použijeme pro popis pohybu kontinua. Způsob, jakým jsme pojmy zaváděli, již samozřejmě předjímá postupy, které povedou v *předpovědím* pohybu na základě znalosti interakcí částice nebo soustavy částic s okolními objekty a znalosti stavu částice nebo soustavy v daném okamžiku. Základem zjištění, že je skutečně možné získat parametrické vyjádření trajektorie dané částice, tj. vektorovou funkci $\vec{r}(t)$ určující její polohu v daném okamžiku, jsou experimentální zkušenosti. Ty umožnily formulovat *základní principy* neboli *postuláty* (matematik by je nazval třeba *axiomy*) klasické mechaniky, z nichž (a samozřejmě z jejich matematické formulace) vyplývají všechny zákonitosti, vztahy, rovnice, atd., jimiž se řídí pohyb částic, jejich soustav, těles — prostě objektů makrosvěta. Těmito principy jsou *Newtonovy zákony*. Jestliže k nim přidáme vztahy pro kvantitativní vyjádření interakce mezi makroskopickými objekty, máme v ruce skutečně kompletní soubor stavebních kamenů klasické newtonovské mechaniky. Další je záležitostí umění vytvořit z nich stavbu, tj. základní principy matematicky formulovat a použít pro odvození dalších zákonitostí umožňujících řešení obecných situací i konkrétních příkladů.

2.1 První Newtonův zákon a jak mu rozumět

Newtonovy zákony, a zejména první z nich, by Newton v dnešních učebnicích možná ani nepoznal. Každý autor má svou interpretaci a formulaci, či zjednodušující předpoklady. Sám Newton, jak ukazují historikové fyziky, dospíval k formulacím svých zákonů postupně a dlouho. Jen pokud jde o první zákon, byl spokojen až s jeho v pořadí devátou formulací.

2.1.1 Newtonova formulace prvního zákona a související otázky

Využijeme výsledků kvalifikovaných historiků fyziky (u nás M. Černohorský) a vyložíme si první Newtonův zákon přímo doslovným překladem originálního latinského znění Newtonových „Principií“ (I. Newton: Principia Mathematica Philosophiae Naturalis. Editio ultima. Sumptibus Societatis, Amstaelodami 1723.).

POZNÁMKA: [1] M. Černohorský: Problém interpretace Newtonovy formulace prvního pohybového zákona. Folia facultatis scientiarum naturalium Universitatis Purkynianae brunensis 20 (1979), Physica 28, opus 3, Univerzita J. E. Purkyně, Brno 1979, 5-32. [2] M. Černohorský: Devět Newtonových formulací prvního pohybového zákona: V: Pocta Newtonovi (Ed.: M. Černohorský, M. Fojtíková). Odborná skupina Pedagogická fyzika FVS JČSMF, Brno 1986, 36-52. [3] M. Černohorský: Newtonova translačně-rotační formulace prvního zákona pohybu: V: Ernst Mach: Fyzika – filosofie – vzdělávání (Ed.: J. Musilová, P. Dub). Masarykova univerzita, Brno 2009.

LEX I — PRVNÍ NEWTONŮV ZÁKON

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu, nebo rovnoměrného pohybu v daném směru, ledaže je nuceno vtištěnými silami svůj stav změnit.

Čteme-li pozorně, napadne nás hned několik otázek:

- Vůči jaké vztažné soustavě posuzujeme klid, nebo rovnoměrný pohyb v daném směru?
- Čím se Newtonova zdánlivě „archaická“ formulace liší od standardní, nejčastěji používané učebnicové — „Těleso setrvává v klidu, nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není vnějšími silami nuceno tento stav změnit“?
- Může těleso bez zásahu vnějších vlivů (v Newtonově pojetí vtištěných sil) setrvávat také v rovnoměrném rotačním pohybu?
- Co jsou to vtištěné (vnější) síly a co jsou to síly vůbec?
- Z kapitoly o kinematice víme, že rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného bodu je totéž, co pohyb s nulovým zrychlením, v případě tělesa s nezanedbatelnými rozměry bychom mohli mít na mysli pohyb jeho středu hmotnosti. Je tedy první zákon skutečně nezávislým postulátem, nebo je pouhým důsledkem zákona druhého? (Vzpomeňte na své znalosti ze střední školy, nebo se podívejte na další odstavec.)

2.1.2 Odpovědi na otázky k prvnímu Newtonovu zákonu

Zde jsou odpovědi na otázky z předchozího odstavce:

- Newton pracoval s pojmy *absolutní čas*, a co je pro jeho definici klidu a rovnoměrného pohybu v daném směru důležité, *absolutní prostor*. Tyto „objekty“ ovšem neexistují. Současným „absolutním“ vztažným objektem je kterákoli inerciální vztažná soustava. Invariantní v každé vztažné soustavě, nejen inerciální, je z hlediska klasické nerelativistické mechaniky časový interval

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1$$

a prostorový interval

$$\begin{aligned} |\Delta \vec{r}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}. \end{aligned}$$

- Odlišnost spočívá ve slovních spojeních, která jsou v Newtonově formulaci napsána kurzívou. Zejména rovnoměrný pohyb *v daném směru* zahrnuje i rovnoměrnou rotaci, nikoli jen rovnoměrný pohyb po přímce. Tato skutečnost je historickými studiemi prokázána mimo jakoukoli pochybnost. Další důležitou „drobností“ je předpoklad, že těleso ve *svém stavu* klidu nebo rovnoměrného pohybu v daném směru *je*, aby v něm mohlo setrvávat. O tělesech, která v takovém stavu nejsou, první Newtonův zákon nepojednává.
- Odpověď na třetí otázku je obsažena nejen v přesné Newtonově formulaci, jejíž důležitost jsme zdůvodnili již druhou odpovědí, ale také ve výsledcích experimentů. Budeme-li pohybuující se těleso více a více oprošťovat od vnějších vlivů (pohyb vozíku s výbornými ložisky po speciálně upravené lavici, pohyb vozíku po vzduchové lavici, kdy vzduchový polštář eliminuje tření, otáčení lépe a lépe vyváženého kola s co nejlépe namazanými ložisky, apod.), bude v pohybu, do kterého jsme je uvedli, setrvávat déle a déle. Je samozřejmé, že reálná situace nikdy nebude dokonale odpovídat požadavkům absence vtištěných sil, popřípadě eliminaci jejich vlivu — v tomto smyslu je první Newtonův zákon abstrakcí.
- V kontextu prvního Newtonova zákona můžeme pojem *vtištěné síly* chápat kvalitativně, jako vliv okolních těles, interakce studovaného tělesa s okolními objekty, apod. Okolní objekty jednoduše mohou způsobit, že těleso, které třeba bylo vzhledem ke zvolené inerciální vztažné soustavě ve stavu klidu, nebo rovnoměrného pohybu v daném směru (rovnoměrná translace, rovnoměrná rotace, jejich složení), *nebude* v tomto stavu setrvávat. Pokud jde o sílu jako fyzikální veličinu, která popisuje interakci objektů kvantitativně, je její definice záležitostí až druhého Newtonova zákona.

- Pokud jsme se ztotožnili s tvrzením, že první Newtonův zákon zahrnuje i rovnoměrnou rotaci tělesa, je zřejmé, že není důsledkem druhého zákona, který o rotačním pohybu tělesa jako celku nepojednává (uvidíme za chvíli).

POZNÁMKA: Ve prospěch argumentace, že Newton měl ve svém prvním zákonu skutečně na mysli i rovnoměrný rotační pohyb tělesa, svědčí mj. jeho komentář v rukopise Xa De Motu Corporum, časově předcházejícím Principia. Latinské znění i překlad jsou převzaty z výše citované práce [3] M. Černohorského.

Vi insita corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in linea recta nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum suum mutare. Motus autem uniformis hic est duplex, progressivus secundum lineam rectam quam corpus centro suo aequabiliter lato describet et circularis circa axem suum quemvis qui vel quiescit vel motu uniformis latus semper manet positionibus suis prioribus parallelus.

Inherentní silou setrvává každé těleso ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu po přímce, pokud není interakčními silami přinuceno onen stav měnit. Tento rovnoměrný pohyb je však dvojitý, postupný po přímce, kterou těleso opisuje svým rovnoměrně se pohybujícím středem, a rotační kolem určité osy tělesa, která je buď v klidu nebo pohybující se rovnoměrně zůstává stále rovnoběžná se svými předchozími polohami.

Pojmu *inherentní síla* lze rovněž dát interpretaci odpovídající dnešnímu pohledu na klasickou mechaniku. V tuto chvíli k ní však nemáme potřebné zázemí a vrátíme se k ní později.

Později uvidíme, že setrvání tělesa v rovnoměrném translačním, nebo rovnoměrném rotačním pohybu, včetně možnosti superpozice, lze interpretovat jako důsledek spojení druhého a třetího Newtonova zákona. Obnovuje se tedy otázka, zda první Newtonův zákon je nezávislým axiomem. Při neexistenci absolutního prostoru ano. Lze jej totiž chápat jako existenční tvrzení představující současně definici inerciální vztažné soustavy, například takto:

PRVNÍ NEWTONŮV ZÁKON

Existují vztažné soustavy, zvané *inerciální*, v nichž těleso uvedené do stavu klidu, nebo rovnoměrného pohybu v daném směru setrvává v tomto stavu, dokud není interakcí s okolními objekty nuceno tento svůj stav změnit. Rovnoměrným pohybem v daném směru se přitom rozumí rovnoměrný pohyb translační, nebo rotační, nebo superpozice obou.

Jiná interpretace prvního Newtonova zákona, která se však týká pouze hmotných bodů, může být následující: „Každé dva volné hmotné body jsou navzájem v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Vztažné soustavy, jejichž počátek a osy jsou spojeny s volnými hmotnými body, nazýváme *inerciální*.” Tímto způsobem jsme také inerciální soustavy zavedli v kapitole 1. Bez empiricky podloženého axiomu deklarujícího jejich existenci, jímž právě první Newtonův zákon může být, by však tento pojem byl prázdný.

2.2 Druhý Newtonův zákon a jeho dvojitý čtení

První Newtonův zákon se týkal těles, která jsou od okolních vlivů oproštěna. Vyplývá z něj, že tělesa, která budou okolním vlivům naopak vystavena, nebudou

obecně setrvávat vůči inerciálním vztažným soustavám v klidu, nebo rovnoměrném pohybu v daném směru. Pro případ translace to znamená, že hmotný bod, resp. hmotný střed tělesa, nebude obecně v klidu, nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, rotace tělesa rovněž nebude obecně rovnoměrná. Rychlost bodu tedy nebude konstantní, a tedy jeho zrychlení nebude trvale nulové. Úhlová rychlost rotujícího tělesa nebude konstantní, a tedy jeho úhlové zrychlení nebude trvale nulové. Na otázku, *jak* se tedy bude měnit rychlost hmotného bodu, rychlost středu hmotnosti tělesa, resp. úhlová rychlost tělesa, tj. *jaké bude zrychlení, resp. úhlové zrychlení*, však první zákon neodpovídá. Takovou odpověď dává *druhý Newtonův zákon*.

2.2.1 Newtonova formulace druhého zákona a související otázky

Také druhý Newtonův zákon uvedeme nejprve v originálním latinském znění s doslovným překladem.

LEX II — DRUHÝ NEWTONŮV ZÁKON

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae & sieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

DEF: Vis impressa est action in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Změna hybnosti je úměrná vtištěné hybné síle a sleduje přímku, podél níž je tato síla vtištěna.

DEF: Vtištěná síla je působení vykonávané na těleso za účelem změny jeho stavu klidu, nebo rovnoměrného pohybu v daném směru.

Motus — *hybnost* přitom Newton definuje jako součin hmotnosti a rychlosti tělesa. Hybnost je tedy vektorová veličina. Její derivace je obecně určena jak změnou hmotnosti objektu, tak změnou jeho rychlosti. Při výpočtech se zatím omezíme na situace, kdy studovaným tělesem je hmotný bod. Odpadne tak (ale jen prozatím) problém, co je třeba rozumět pod pojmem *motus* v případě rotujícího tělesa.

$$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t), \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{m}\vec{v} + m\vec{a}. \quad (2.1)$$

V případě konstantní hmotnosti je derivace hybnosti částice rovna součinu její hmotnosti a jejího zrychlení.

Také při promýšlení této formulace, stejně jako tomu bylo v případě prvního zákona, se nabízí několik komentářů a otázek.

- Zatímco v prvním zákonu jsme mohli pojem vtištěné síly chápat kvalitativně jako působení či vliv okolních objektů na udržení či neudržení jistého

pohybového stavu tělesa (rovnoměrného pohybu v daném směru), formulace druhého zákona jasně směřuje ke kvantitativnímu vyjádření. Pojmu *hybná síla* je přinejmenším přisouzen směr.

- Jak určíme hybnou sílu, je-li studovaná částice či těleso pod vlivem více okolních objektů?
- Samotné originální znění druhého zákona naznačuje, že by zákon mohl sloužit k určování změn hybnosti částice (v případě její neměnné hmotnosti dokonce přímo k určování zrychlení). To znamená možnost předpovědět pohyb částice, vypočteme-li její polohu $\vec{r}(t)$ v závislosti na čase. Aby takový přístup byl možný, je třeba znát *hybnou sílu*. Jak ji určíme?
- Newtonova definice hybné síly charakterizuje tuto sílu jako působení na částici s cílem změnit její hybnost. Je tedy hybná síla veličina, která je *definitoricky* určena jako derivace hybnosti, tj. je druhý Newtonův zákon definicí síly?
- Otázka, která se v souvislosti s předchozími dvěma vnucuje, zní: Není druhý Newtonův zákon definicí či tvrzením „v kruhu”? Nepotřebujeme k určení derivace hybnosti hybnou sílu a k zápisu hybné síly jako fyzikální veličiny časový průběh změn hybnosti?

Na tyto otázky postupně odpovíme.

2.2.2 Odpovědi na otázky k druhému Newtonovu zákonu

Zásadní otázkou z předchozího odstavce je, zda druhý Newtonův zákon definuje sílu, nebo naopak, zda slouží k určení derivace hybnosti s tím, že hybnou sílu musíme zjistit jinak. Může se zdát, že odpovědi si musí protřečít. Přesto je možné, či dokonce nutné, dívat se na druhý Newtonův zákon oběma způsoby. Pokusme se tedy na položené otázky odpovědět.

- Hybná síla vystupující v druhém zákonu, ať již je konkrétně definována jakkoli, musí být fyzikální veličinou, která kvantitativně popisuje *souhrnný* vliv okolních objektů na studovanou částici. Je to jistá vektorová veličina \vec{F} , jejíž směr je shodný se směrem derivace hybnosti a jejíž velikost je úměrná velikosti derivace hybnosti, tj.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = k\vec{F}.$$

Otázku, co je konstantou úměrnosti, vyřešíme vhodnou volbou jednotek tak, aby konstanta byla rovna jedné a bezrozměrná. Jednotkou hybnosti je kg m s^{-1} , její derivace má jednotku kg m s^{-2} , která je současně jednotkou síly nazývanou newton. Tedy $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$.

- Souhrnný vliv okolních objektů na pohyb studované částice by měl být nějak „poskládán” z vlivů každého z okolních objektů, kdyby tento objekt

působil na částici samostatně. Pro tuto chvíli přepokládejme, že působení jednotlivého objektu na částici je stejné, jako kdyby tam další okolní objekty nebyly. Pro tento předpoklad zatím nemáme argumenty, získáme je však v podobě třetího Newtonova zákona. Označme tedy hybné síly odpovídající objektům O_1, O_2 až O_K jako \vec{F}_1, \vec{F}_2 až \vec{F}_K . Aniž známe jejich jednotlivá vyjádření, zdá se nejpřirozenější vypočítat souhrnný vliv všech okolních objektů jako vektorový součet hybných sil \vec{F}_1 až \vec{F}_K . Tento způsob stanovení souhrnného vlivu je rovněž potvrzován experimenty a často bývá nazýván *princip superpozice sil*. Je tedy

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_K = \sum_{k=1}^K \vec{F}_k. \quad (2.2)$$

Sílu \vec{F} pak nazýváme *výsledná síla*, nebo *výslednice sil*. Stále ještě však nevíme, jakým způsobem vektor \vec{F}_k kvantitativně vyjadřuje vliv k -tého objektu na derivaci hybnosti studované částice.

- Abychom doplnili chybějící článek úvahy o principu superpozice sil a zároveň odpověděli na třetí a čtvrtou otázku předchozího odstavce, musíme v myšlenkovém experimentu (ideálně), nebo skutečném experimentu (aproximativně) oprostit studovanou („testovací“) částici od vlivu všech okolních objektů, kromě jediného, k -tého. Pak budeme číst druhý Newtonův zákon zprava doleva, tj.

$$\vec{F}_k = \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_k, \quad \text{popřípadě jen} \quad \vec{F}_k = m\vec{a}_k.$$

Na základě pozorování pohybu testovací částice určíme její zrychlení. To nám umožní zjistit závislost \vec{F}_k například na poloze testovací částice, na její rychlosti, popřípadě explicitní závislost na čase,

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Takovou závislost obvykle nazýváme *silový zákon*.

- Pokud uvedeným postupem, popřípadě jinými postupy, získáme potřebné silové zákony, můžeme pak již číst druhý Newtonův zákon zleva doprava, tj.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_K,$$

kde každý ze symbolů \vec{F}_k již nyní představuje konkrétní zápis daného silového zákona, který je kvantitativním vyjádřením vlivu k -tého objektu na studovanou částici. Tento zápis samozřejmě umožňuje vyjádření síly, jíž bude jiný okolní objekt působit v obdobné situaci na jinou testovací částici.

- Druhý Newtonův zákon tedy rozhodně není definicí či tvrzením „v kruhu“, nýbrž skutečně zásadním fyzikálním principem, který má, dalo by se říci, „dvě tváře tvořící celkový obraz jednoho obličeje“.

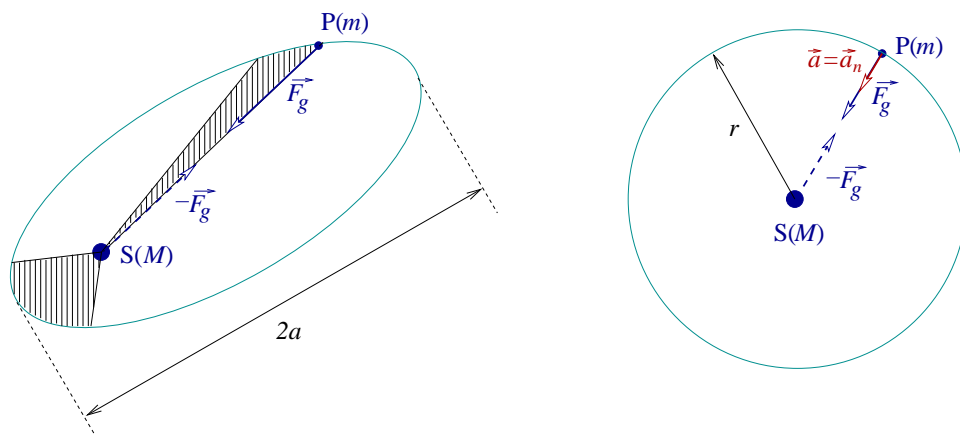
PŘÍKLAD 2.1. Známým příkladem nalezení silového zákona je *Newtonův gravitační zákon*. Východiskem pro jeho určení byly zákony o oběhu planet kolem Slunce formulované Johannem Keplerem na základě astronomických pozorování Tychona de Brahe a částečně jeho vlastních. Šlo tedy o skutečný experiment interpretovaný v aproximaci modelu soustavy částic tvořené Sluncem a jednou (kteroukoli) planetou. Zopakujme nejprve stručně Keplerovy zákony, jak je známe ze střední školy. (Jejich podrobného teoretického odvození vycházejícího již ze znalosti gravitačního zákona a z Newtonových zákonů si všimneme později.)

PRVNÍ KEPLERŮV ZÁKON: Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách blízkých kružnicím, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

DRUHÝ KEPLERŮV ZÁKON: Plochy opsané průvodičem planety za stejné časové úseky jsou shodné.

TŘETÍ KEPLERŮV ZÁKON: Poměr třetí mocniny velké poloosy eliptické dráhy planety a druhé mocniny její oběžné doby je pro všechny planet stejný.

Aniž bychom se pouštěli do studia skutečné historie tohoto problému, pokusme se o vlastní jednoduchou úvahu. Zjednodušíme model oproti Keplerovým výsledkům ještě více a uvažujme o případě, kdy planeta obíhá kolem Slunce po kružnici. Žádná z planet sluneční soustavy tomuto předpokladu sice přesně nevyhovuje, kružnice je však v Keplerových zákonech jednou z přípustných trajektorií.



OBR. 2.1: POHYB PLANETY KOLEM SLUNCE A GRAVITAČNÍ ZÁKON

Označme poloměr kružnice, po níž se planeta v našem přibližném modelu pohybuje, jako r , periodu oběhu T a kruhovou frekvenci $\omega = 2\pi/T$. Vzhledem k platnosti druhého Keplerova zákona je jasné, že pohyb planety po kružnici

musí být rovnoměrný (velikost úhlové rychlosti je tak rovna kruhové frekvenci ω). Tečné zrychlení planety je tedy nulové, normálové je určeno jedinou silou \vec{F}_g , kterou na planetu působí Slunce. Tato síla má směr normály k trajektorii planety. (Indexem g předjímáme, že jde o sílu gravitační.) Platí

$$m\vec{a}_n = \vec{F}_g \implies F_g = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 m}{T^2} r.$$

Současně je

$$\frac{r^3}{T^2} = K = \text{konst.} \implies \frac{r}{T^2} = \frac{K}{r^2} \implies F_g = 4\pi^2 K \frac{m}{r^2}.$$

Konstanta K již podle třetího Keplerova zákona nezávisí na charakteristikách planety. Může však záviset na centrálním tělese, Slunci. Jak tato závislost vypadá, uvidíme, až se k problému vrátíme po výkladu třetího Newtonova zákona.



PŘÍKLAD 2.2. S druhým Newtonovým zákonem přímo souvisí jednoduchý pojem *impulsu síly*. Předpokládejme, že na částici působí pouze jediný objekt silou obecně závislou na čase, tj. $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Otázkou je, jakou změnu hybnosti částice způsobí tato síla v časovém intervalu $[\alpha, \beta]$. Z druhého Newtonova zákona přímo plyne

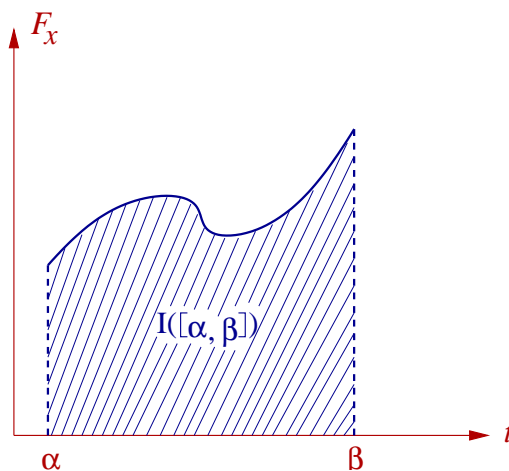
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \implies \Delta\vec{p}([\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(t) dt.$$

Veličinu

$$I([\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(t) dt \quad (2.3)$$

nazýváme *impuls síly* \vec{F} v intervalu $[\alpha, \beta]$. Představme si, že síla působí podél

přímky, například osy x .



OBR. 2.2: K POJMU IMPULS SÍLY

Znázorníme-li její závislost na čase graficky (viz OBR. 2.2), vidíme, že impuls v časovém intervalu $[\alpha, \beta]$ odpovídá ploše pod grafem. ♠

2.3 Třetí Newtonův zákon a jeho význam

První dva Newtonovy zákony vypovídaly o vlivu působení (či nepůsobení) okolních objektů na daný „testovací“ objekt (částici či těleso) prostřednictvím vtíštěných sil. Ale kterýkoli z objektů se může stát studovaným objektem a naopak, těleso, které jsme doposud chápali jako studované či testovací, se v jiné úloze může stát objektem okolním. Je tedy logické očekávat, že vliv objektů bude vzájemný. Jak to se vzájemným působením je, říká třetí Newtonův zákon.

2.3.1 Newtonova formulace třetího zákona a podstata interakce

Třetí Newtonův zákon je z celé trojice pravděpodobně nejjednodušší a nejpochopitelnější. I tak však má hluboký fyzikální význam. Vyložíme si jej opět na originální latinské formulaci a jejím doslovném překladu.

LEX III — TŘETÍ NEWTONŮV ZÁKON

Actioni contrariam semper & equalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse equales in partes contrarias dirigi.

Akce je stále opačná a rovna reakci: neboli vzájemné působení dvou těles jsou stále stejná a míří opačnými směry.

Informace vyplývající z třetího Newtonova zákona jsou velmi obsažné a zdaleka nezahrnují jen fakt, že

- Působí-li objekt A na objekt B silou \vec{F}_{AB} , působí objekt B na objekt A silou \vec{F}_{BA} , přičemž $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

Zamyslíme-li se hlouběji, můžeme učinit také následující závěry.

- Interakce, tj. vzájemné působení objektů, je *dvoučásticová*. Znamená to, že síly akce a reakce, jimiž na sebe navzájem působí objekty A a B, nejsou ovlivněny charakteristikami dalších objektů, které mohou působit jak na A, tak na B. Závisí tedy pouze na charakteristikách objektů A a B samotných, a to jak na těch, které si objekty „nesou s sebou“ (hmotnosti, náboje), tak obecně i na charakteristikách jejich mechanického stavu (polohy, rychlosti), popřípadě explicitně na čase.
- Interakce je *okamžitá*, šíří se tedy neomezeně rychle. Jestliže se například změní některá charakteristika objektu A, která vystupuje v silovém zákonu, „poznají“ oba objekty tuto změnu vzájemného silového působení okamžitě. Z tohoto hlediska může být terminologie *akce a reakce* pro laiky poněkud zavádějící, neboť při běžné interpretaci může vyvolávat dojem časové následnosti — napřed akce, potom reakce.

Předchozí závěry o dvoučásticové a okamžité interakci jsou omezeny na oblast klasické (nerelativistické a nekvantové) mechaniky. V relativistické mechanice je nutné počítat s mezní rychlostí šíření veškerých signálů (rychlost světla ve vakuu je definována přesně hodnotou $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$ a je univerzální konstantou). V kvantové mechanice se zase naopak setkáme s mnohačásticovou, tzv. *výměnnou* interakcí, jejíž existence vyplývá z principu nerozlišitelnosti mikročástic, který způsobí, že se jakákoli výměna částic mezi sebou nepozná.

2.3.2 Silové zákony a základní interakce

V tomto odstavci si všimneme některých silových zákonů, které budeme v dalším výkladu již běžně používat. Pozornost budeme věnovat také čtyřem základním interakcím v přírodě a jejich souvislosti s „makroskopickými“ silovými zákony.

PŘÍKLAD 2.3. Vraťme se k příkladu 2.1, v němž jsme zjistili, že Slunce působí na planetu silou, která směřuje od planety ke Slunci a její velikost je přímo úměrná hmotnosti planety a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti mezi planetou a Sluncem, $F_g = 4\pi^2 K \frac{m}{r^2}$. Konstanta K nezávisí na planetě, ale na Slunci. Zapišme tuto sílu vektorově.

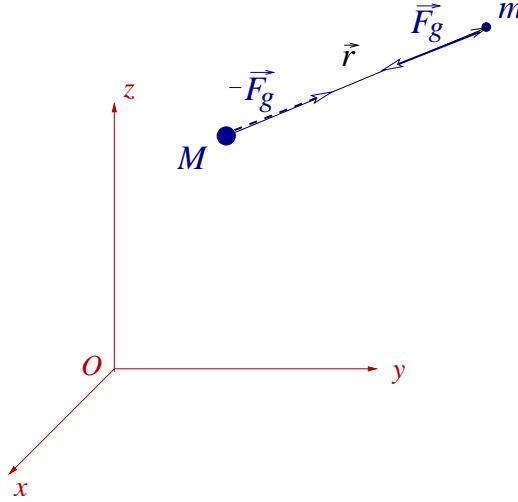
$$\vec{F}_g = 4\pi^2 K \frac{m}{r^2} \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right) = -4\pi^2 K \frac{m}{r^3} \vec{r},$$

kde \vec{r} je polohový vektor planety vůči Slunci, $\vec{r}^0 = \vec{r}/r$ je jednotkový vektor směřující od Slunce k planetě. Podle třetího Newtonova zákona však planeta působí na Slunce silou $-\vec{F}_g$, kterou však můžeme vyjádřit také ve tvaru

$$-\vec{F}_g = 4\pi^2 k \frac{M}{r^3} \vec{r},$$

kde M je hmotnost Slunce a k je naopak konstanta, která závisí pouze na planetě. Vidíme, že platí $Km = kM$, tj. $\frac{k}{m} = \frac{K}{M} = p$. Tento poměr už nemůže záviset ani na Slunci, ani na planetě. Označme $\kappa = 4\pi^2 p$. κ je rovněž univerzální konstanta. Platí

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{mM}{r^3} \vec{r}, \quad \kappa = (6,67428 \pm 0,00067) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}. \quad (2.4)$$



OBR. 2.3: INTERAKCE HMOTNÝCH ČÁSTIC

Vztah (2.4), zvaný *Newtonův gravitační zákon*, vyjadřuje silový zákon popisující jednu ze základních interakcí v přírodě, *gravitační*.

V blízkosti povrchu Země (hmotnost $M_Z \doteq 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, střední poloměr $R_Z \doteq 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$) působí na částici gravitační síla

$$\vec{F}_g = \kappa \frac{mM_Z}{(R_Z + h)^2} \vec{g}^0,$$

kde \vec{g}^0 je jednotkový vektor směřující z místa o výšce h nad povrchem ke středu Země. Pro výšky zanedbatelné vůči poloměru Země a pro oblasti, jejichž vodorovné rozměry jsou tak malé, že není třeba změnu směru spojnice daného místa se středem Země započítávat, můžeme veličinu

$$\vec{g} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} \vec{g}^0$$

považovat za konstantní vektor a gravitační sílu přibližně nahradit rovněž (odpovídajícím) konstantním vektorem

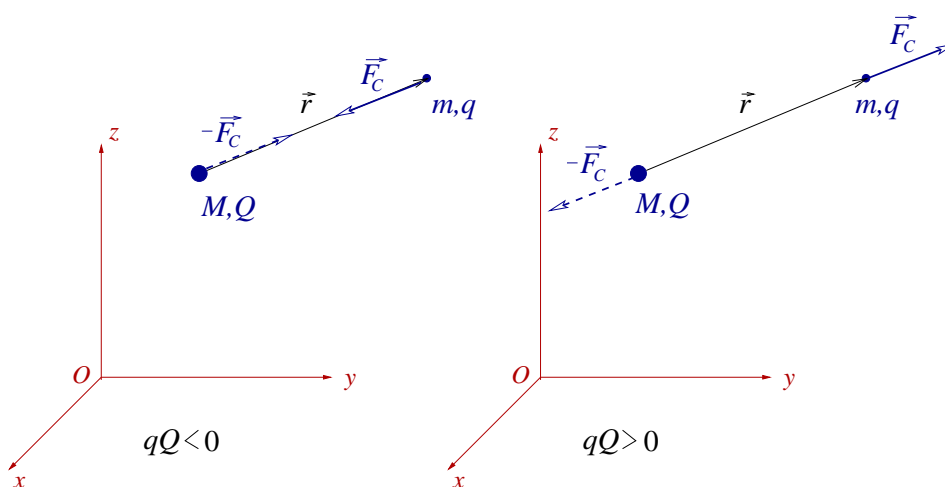
$$\vec{F}_g = m\vec{g}, \quad g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} \doteq 9,81 \text{ ms}^{-2}. \quad (2.5)$$

Pole v malých plošných oblastech v blízkosti povrchu Země je přibližně *homogenní*, jeho intenzita je \vec{g} . Zahrneme-li ještě opravu, která bere v úvahu neinerciálnost laboratorní soustavy, tj. se započte odstředivé zrychlení, hovoříme o *tíhovém zrychlení*. Vztah (2.5) představuje silový zákon, který je aproximací gravitačního zákona, vyhovující pro popis gravitačního pole za výše uvedených omezujících podmínek. Pro zajímavost provedte třeba odhad lineárního rozměru oblasti v blízkosti povrchu Země na rovníku, v jehož rámci se směr gravitačního zrychlení nezmění o více než jeden stupeň. ♣

PŘÍKLAD 2.4. Hmotné částice mohou být nositeli elektrického náboje. Kromě gravitační interakce dané hmotnostmi m a M na sebe tedy ještě působí silou související s jejich náboji q a Q . Tato síla se řídí *Coulombovým zákonem*

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r^3} \vec{r}, \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 8,854187818) \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}. \quad (2.6)$$

ϵ_0 je *permitivita vakua*, jedná se o přesnou (dohodnutou) hodnotu, ϵ_r je *relativní permitivita prostředí*. Coulombův zákon je klíčovým silovým zákonem popisujícím další základní interakci v přírodě, *elektromagnetickou*.



OBR. 2.4: INTERAKCE NABITÝCH ČÁSTIC

Vzhledem k tomu, že nositeli náboje mohou být pouze hmotné částice, nelze coulombovskou interakci „osamostatnit“, vždy se superponuje s interakcí gravitační. Jaký je vliv gravitační interakce v případě, že bychom chtěli měřit coulombovskou sílu, můžeme odhadnout pomocí vzájemného gravitačního a elektrostatického působení třeba elektronu a protonu. Předpokládejme, že uvažujeme

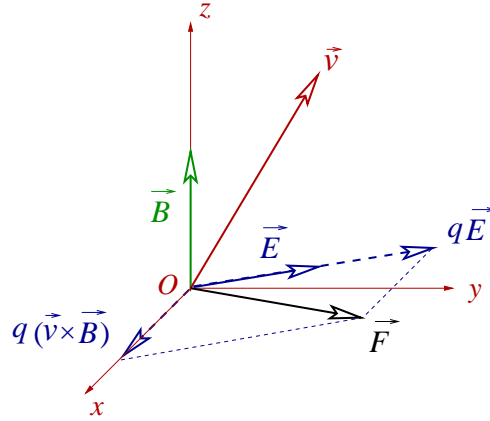
o těchto dvou elementárních částicích v atomu vodíku. Jejich střední vzdálenost je tak rovna *Bohrovu poloměru* $a_0 = (5,2917720859 \pm 0,0000000036) \cdot 10^{-11}$ m. Náboj elektronu i protonu, tzv. *elementární náboj*, je co do velikosti stejný, $e = (1,60217733 \pm 0,00000049) \cdot 10^{-19}$ C. Hmotnost elektronu je $m_e = (9,1093897 \pm 0,0000054) \cdot 10^{-31}$ kg, protonu $m_p = (1,6726231 \pm 0,000001) \cdot 10^{-27}$ kg. Poměr velikostí gravitační a coulombovské síly vzájemného působení je tedy (nezávisle na vzdálenosti)

$$\frac{F_C}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\kappa} \cdot \frac{e^2}{m_e m_p} \doteq 2,3 \cdot 10^{39}.$$

Velikost gravitační interakce těchto částic je tedy vůči interakci elektrostatické zcela zanedbatelná. ♠

PŘÍKLAD 2.5: Magnetické pole je popsáno vektorem magnetické indukce $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$. Silové působení magnetického pole na nabitou částici pohybující se rychlostí \vec{v} je dáno magnetickou *Lorentzovou silou*

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.7)$$



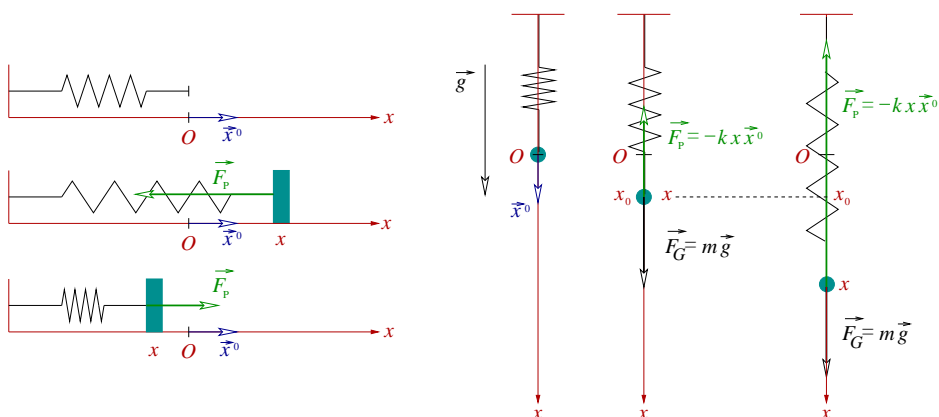
OBR. 2.5: ČÁSTICE V ELEKTRICKÉM A MAGNETICKÉM POLI

Nabitá částice pohybující se v elektromagnetickém poli o intenzitě \vec{E} a indukci \vec{B} je urychlována silou

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Konkrétní pohyb takové částice budeme studovat v dalším odstavci. ♠

PŘÍKLAD 2.6. Malé tělísko (hmotný bod) na vodorovné, resp. svislé pružině je znázorněno na OBR. 2.6.



OBR. 2.6: TĚLÍSKO NA PRUŽINĚ

S koncem nenapjaté pružiny spojíme počátek O osy x směřující podél pružiny. Předpokládáme-li že deformace pružiny je elastická, tj. protažená nebo stlačená pružina zaujme po uvolnění opět původní délku, můžeme předpokládat, že platí *Hookeův zákon*. Podle něj působí natažená či stlačená pružina na tělísko silou, jejíž velikost je úměrná změně délky pružiny a síla směřuje proti této změně. Platí tedy

$$\vec{F}_p = -kx \vec{x}^0, \quad (2.8)$$

kde \vec{x}^0 je jednotkový vektor ve směru kladné osy x . Konstanta k se nazývá *tuhost pružiny* a určuje, jak velkou sílu potřebujeme k protažení nebo stlačení pružiny o jednotku délky. V grafu (lineární) závislosti velikosti pružné síly na změně délky pružiny tedy představuje směrnici. Podobně jako pružiny se v určitém rozsahu silového působení chovají i různé závěsy (dráty, provázky, apod.) ♠

PŘÍKLAD 2.7. Proti pohybu těles v reálných experimentech působí třecí a odporové síly. I když většinou závisí na rozměrech tělesa, lze je započítat způsobem, který stále umožňuje pracovat s tělesem jako s hmotným bodem, pohybuje-li se pouze translačním pohybem. Nejjednodušší silový zákon pro třecí sílu, již působí na těleso podložka, po které je vlečeno, má tvar

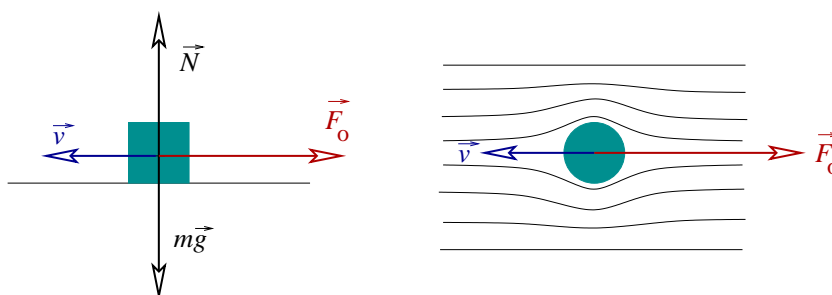
$$\vec{T}_d = -fN \vec{v}^0, \quad \vec{v}^0 = \frac{\vec{v}}{v}, \quad (2.9)$$

kde \vec{v}^0 je jednotkový vektor ve směru rychlosti tělesa, \vec{N} je tlaková síla podložky na těleso a f je tzv. koeficient *dynamického tření*. Třecí síly jsou typickými silami závislými na rychlosti tělesa. Z vyjádření velikosti třecí síly by tato závislost samozřejmě nebyla vidět, neboť velikost $T_d = fN$ na rychlosti nezávisí. Závislost na rychlosti je dána tím, že třecí síla směřuje vždy proti rychlosti. Ať se těleso hne kamkoli, směr síly \vec{T}_d se vždy „upraví“ do protisměru rychlosti. Obdobná situace je s odporovou silou, kterou působí hmotné prostředí, v němž

se těleso pohybuje (odpor vzduchu proti pohybu automobilu, fotbalového míče či letící střely, odpor vody proti plující lodi nebo ponorce). Konkrétní situace aproximativně vcelku dobře vystihuje některý z následujících silových zákonů představujících *Stokesův* resp *Newtonův* model odporové síly.

$$\vec{F}_S = -6\pi\eta r\vec{v}, \quad \vec{F}_N = \frac{1}{2}CS\varrho v^2\vec{v}^0, \quad (2.10)$$

kde η je charakteristika prostředí, nazývaná *dynamická viskozita*, r je poloměr kulového tělesa, S je *účinný průřez tělesa* — největší plocha jeho příčného řezu, tj. řezu kolmého na směr rychlosti pohybu, ϱ je hustota prostředí, konstanta C zahrnuje vliv tvaru tělesa a určuje se empiricky, pro kouli je $C = 0,5$.



OBR. 2.7: TŘENÍ A ODPOR PROSTŘEDÍ

Stokesův vztah platí pro těleso kulového tvaru a velmi malé rychlosti, Newtonův vztah vyhovuje i pro tělesa obecného tvaru. Použitelnost obou modelů se také liší pro různé velikosti rychlosti, jakou se těleso pohybuje v odporující prostředí. (Stokesův vztah platí pro velmi malé rychlosti, Newtonův lépe odpovídá realistickým situacím. Konkrétněji se těmto problémům budeme věnovat až v kapitole o proudění tekutin.)

Pouze zdánlivě by k tomuto příkladu mohla patřit otázka *statického tření*. Vyjádření statické třecí síly však není silovým zákonem — přesvědčíme se o tom v příkladu 2.13. ♠

Silové zákony, jimž jsme se věnovali v předchozích příkladech, i další, na které můžeme při řešení konkrétních situací narazit, představují většinou aproximativní popis vzájemného působení objektů makrosvěta. Podstatou řady z nich jsou však interakce v oblasti mikrosvěta. V přírodě se uplatňují čtyři základní typy interakcí: gravitační, elektromagnetická, slabá a silná. Aniž bychom se jim nyní podrobně věnovali jednotlivě či v rámci úvah o snahách o jejich sjednocení, můžeme je velmi stručně charakterizovat.

- *Gravitační interakce* představuje vzájemné působení jakýchkoli hmotných objektů. Podléhají jí univerzálně všechny objekty nesoucí hmotnost.

- *Elektromagnetická interakce* je vzájemné působení objektů nesoucích náboj, a to jak objektů v klidu, tak pohyblivých.
- *Slabá interakce* se uplatňuje především při jaderných reakcích (některé typy jaderného rozpadu).
- *Silná interakce* působí na jaderné úrovni. Představuje jednak vzájemné působení kvarků tvořících protony a neutrony, jednak interakci protonů a neutronů, která drží pohromadě atomové jádro.

Přímou smyslovou zkušenost máme pouze s interakcí gravitační a elektromagnetickou. V newtonovské mechanice se s dalšími dvěma typy interakce při řešení problémů přímo nesetkáme, i když samozřejmě přítomny jsou — bez nich by neexistovaly objekty, které v mechanice studujeme. Je tedy zřejmé, že všechny silové zákony uvedené v předchozích příkladech musíme umět přiřadit buď gravitační nebo elektromagnetické interakci. Gravitační interakci okamžitě rozpoznáme, týká se jí příklad 2.3. Ostatní silové zákony mají původ v interakci elektromagnetické. Skutečně je existence pružné síly i její vyjádření lineárním silovým zákonem projevem elektromagnetické interakce? Vysvětlení hledejme na mikroskopické úrovni. Atomy, jimiž je pružina tvořena, interagují prostřednictvím svých elektronových obalů. Při natažení nebo stlačení pružiny se mění střední vzdálenosti atomů, a to v souvislosti s celkovou (makroskopickou) změnou délky pružiny. Změna středních vzdáleností atomů znamená změnu překryvu elektronových obalů, přičemž „míra překryvu” elektronových obalů souvisí s velikostí jejich vzájemného působení. Lineární závislost makroskopické síly na změně délky pružiny dostaneme, zhruba řečeno, v aproximaci malých výchylek jako první člen rozvoje obecnější funkční závislosti v mocninnou řadu. Stejnou, elektromagnetickou povahu mají třecí síly, odpor zdiva při zatloukání hřebíku, tlaková síla podložky působící na těleso, které na ní spočívá, tlaková síla v kapalině vyjadřující interakci jednotlivých částí, resp. objemových elementů kapaliny, apod. V rámci mechaniky tedy můžeme věc zjednodušit: Gravitační interakci hned poznáme, všechno ostatní je intrakce elektromagnetická.

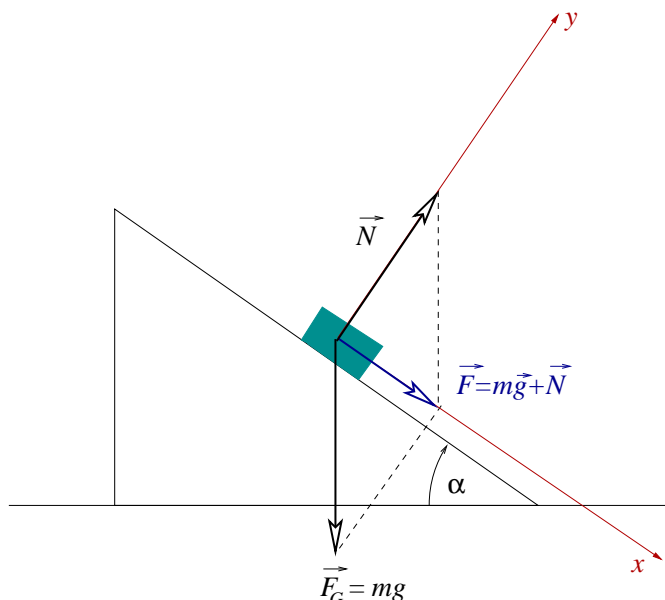
2.4 Newtonovy zákony a pohybové rovnice

V situaci, kdy máme k dispozici základní silové zákony, z nichž můžeme pomocí principu superpozice vytvořit výslednici, tj. Newtonovu „hybnou sílu”, můžeme řešit základní úlohu dynamiky. Na základě interakcí testovací částice s okolními objekty a se znalostí jejího mechanického stavu v počátečním okamžiku vypočteme její trajektorii. Pak budeme vědět, kde se částice nacházela v okamžicích minulých a kde se bude nacházet v okamžicích budoucích (samozřejmě, pokud se v časovém intervalu, v němž ji sledujeme, nezmění její interakce s okolím tak, že by výpočet již neodpovídal).

2.4.1 Od interakcí ke zrychlení

Určit zrychlení částice v případě, že na ni působí jediná síla, není problém. Jednoduché je i řešení situace, kdy je vyjádření všech sil v závislosti na poloze a rychlosti částice, popřípadě v explicitní závislosti na čase známo — další postup je pak otázkou metod řešení tzv. pohybových rovnic, které jsou matematickým zápisem druhého Newtonova zákona. Jsou však případy, kdy některé ze sil, jimiž působí okolní objekty na částici, jsou neznámé (často je znám jejich směr, nikoli však velikost). Nemusí tedy být zcela jednoduché pohybovou rovnici sestavit. Zaměříme se nyní na řešení takových situací, od nejjednodušších po komplikovanější.

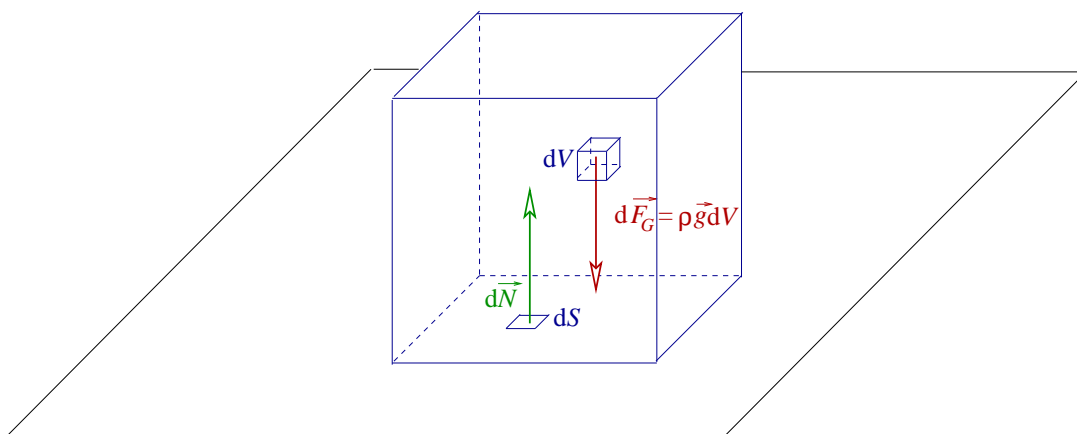
PŘÍKLAD 2.8. Velice jednoduchým příkladem je pohyb malé kostky (hmotného bodu) o hmotnosti m po nakloněné rovině o úhlu sklonu α umístěné v homogenním tíhovém poli Země (tíhové zrychlení g) a připevněné k vodorovné podložce (OBR. 2.8).



OBR. 2.8: KOSTKA NA NAKLONĚNÉ ROVINĚ

Uvážíme dvě situace: tření mezi kostkou a nakloněnou rovinou je, resp. není zanedbatelné. V každém případě zanedbáme odpor vzduchu proti pohybu kostky. V první situaci, bez tření, působí na kostku Země tíhovou silou $\vec{F}_G = m\vec{g}$, nakloněná rovina (podložka) tlakovou silou \vec{N} . Zatímco pro tíhovou sílu máme k dispozici silový zákon $\vec{F}_G = m\vec{g}$, u tlakové síly podložky pouze víme, že je k podložce kolmá. Její velikost předem neznáme.

POZNÁMKA: Uvědomme si hned u tohoto jednoduchého příkladu, jak je to s působišti jednotlivých sil v reálné situaci. Do kterého bodu v tělese máme umístit tíhovou sílu? Do kterého bodu tlakovou sílu podložky? Pokud těleso aproximujeme hmotným bodem, jsou působíště všech sil od okolních objektů umístěna přímo v tomto bodě. Ve skutečnosti však působí elementární tíhová síla $d\vec{F}_G = \vec{g} dm = \rho \vec{g} dV$ na každý objemový element tělesa o hustotě ρ , celková tíhová síla je výslednicí (vektorovým součtem) elementárních sil. Výsledná tíhová síla má na těleso stejný pohybový účinek, translační i rotační, jako všechny elementární síly dohromady, je-li umístěna ve středu hmotnosti (nebo v bodech ležících na svislé přímce procházející středem hmotnosti — touto otázkou se budeme zabývat v dalších kapitolách). Elementární tlaková síla $d\vec{N}$ působí na kostku v každém plošném elementu dS její styčné plochy s podložkou, celková tlaková síla je opět výslednicí elementárních tlakových sil. Existuje rovněž „správný bod“, do kterého je třeba umístit výslednou tlakovou sílu, aby její pohybový účinek na těleso byl stejný jako účinek všech elementárních tlakových sil dohromady. Situace je znázorněna na OBR. 2.9. Umístění působíště výsledné tíhové a výsledné tlakové síly má své fyzikální zdůvodnění, pro jehož pochopení je však potřebná znalost důležitých důsledků druhého a třetího Newtonova zákona — impulsových vět. Proto se k tomuto problému vrátíme až po jejich odvození.



OBR. 2.9: PŮSOBIŠTĚ TÍHOVÝCH A TLAKOVÝCH SIL

$$\vec{F}_G = \int_V \rho \vec{g} dV, \quad \vec{N} = \int_S d\vec{N}.$$

Kostku považujeme za hmotný bod, do kterého umístíme působíště všech sil od okolních objektů. Jako vztahnou soustavu volíme soustavu laboratorní a považujeme ji za inerciální. Druhý Newtonův zákon má tvar

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

K tomu, abychom tuto vektorovou rovnici mohli rozepsat do složek, potřebujeme ještě specifikovat soustavu souřadnic. Její volba je libovolná, a proto ji lze vybrat tak, aby byl výpočet co nejjednodušší. Výhodné je volit některé osy soustavy rovnoběžné s fyzikálně nebo geometricky významnými směry, pokud

takové úloha obsahuje. V našem případě je fyzikálně významný směr určen tíhovým zrychlením, geometricky významný směr pak nakloněnou rovinou. S oběma těmito směry nemůžeme souřadnicové osy spojit, neboť nejsou kolmé. Je třeba si pro výpočet vybrat jeden z nich. Zkusme postupně obojí volbu, výsledky samozřejmě musí vyjít shodně.

Nejprve zvolme osu x podél nakloněné roviny (geometricky význačného směru). Osu y zvolme tak, aby vektor \vec{g} ležel v rovině xy . Osa z pak je kolmá na rovinu xy a orientována tak, aby osy x , y a z , právě v uvedeném pořadí, tvořily pravotočivou soustavu. Zápis druhého Newtonova zákona ve složkách má tvar

$$\begin{aligned} ma_x &= mg \sin \alpha, \\ ma_y &= -mg \cos \alpha + N, \\ ma_z &= 0. \end{aligned}$$

Třetí rovnici je přímo určena z -ová složka zrychlení, ve zbývajících dvou nezávislých rovnicích však jsou tři neznámé, a_x , a_y a N . Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení (jednu z neznámých lze volit libovolně a další dvě dopočítat). Experiment však ukazuje, že položíme-li takovou kostku na hladkou nakloněnou rovinu, je její zrychlení určeno jednoznačně. Znamená to, že existuje ještě další rovnice pro neznámé a_x , a_y a N , kterou jsme zatím nepoužili a ani jsme si ji neuvědomili. Tato rovnice již nesouvisí s druhým Newtonovým zákonem — ten jsme využili zcela. Je však určena požadavkem, že kostka stále spočívá na nakloněné rovině. Tento požadavek je matematicky vyjádřen v podobě *vazební podmínky* kladené na y -ovou složku polohového vektoru kostky, $y(t) = 0$. Odtud $a_y = 0$. Řešení soustavy má pak tvar

$$a_x = g \sin \alpha, \quad a_y = 0, \quad a_z = 0, \quad N = mg \cos \alpha, \quad a = g \sin \alpha.$$

Provedme výpočet ještě pro druhou možnost volby soustavy souřadnic. Osu y' ztotožňme s opačným směrem ke směru tíhového zrychlení, osu x' zvolme vodorovně a osu z' opět tak, aby soustava souřadnic byla pravotočivá. Vektorový tvar druhého Newtonova zákona je na volbě soustavy souřadnic nezávislý, jeho rozklad do složek je následující.

$$\begin{aligned} ma'_x &= N \sin \alpha, \\ ma'_y &= -mg + N \cos \alpha, \\ ma'_z &= 0. \end{aligned}$$

Vazební podmínka má nyní tvar $y' = -x' \operatorname{tg} \alpha$, tj. $a'_y = -a'_x \operatorname{tg} \alpha$. Řešení soustavy je

$$a'_x = g \sin \alpha \cos \alpha, \quad a'_y = g \sin^2 \alpha, \quad a'_z = 0, \quad N = mg \cos \alpha, \quad a = g \sin \alpha.$$

Výsledky při obojí volbě soustavy souřadnic jsou v souladu, jak jsme očekávali.

Přidejme nyní třetí sílu. Ta působí proti pohybu kostky. Známe tedy její směr, nikoli však zatím její velikost.

Třecí síla je podobně jako tlaková vektorovým součtem elementárních sil, tj. $\vec{T} = \int_S d\vec{T}$. Jejich působíště jsou rozložena ve styčné ploše kostky s podložkou.

Předpokládejme, že kostka již je v pohybu, takže ve hře je dynamická třecí síla. Použijme pro ni nejjednodušší silový zákon (2.9). Pro výpočet zvolíme souřadnicovou soustavu, v níž je osa x namířena podél nakloněné roviny (první alternativa volby v předchozím výpočtu). Druhý Newtonův zákon ve vektorovém tvaru

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_d$$

rozložíme do složek:

$$\begin{aligned} ma_x &= mg \sin \alpha - Nf, \\ ma_y &= -mg \cos \alpha + N, \\ ma_z &= 0. \end{aligned}$$

Vazební podmínka je stejná, jako při pohybu bez tření, vyplývá z ní tedy $a_y = 0$. Řešení soustavy je

$$a_x = g \sin \alpha - gf \cos \alpha, \quad a_y = 0, \quad a_z = 0, \quad N = mg \cos \alpha.$$

Zamysleme se nad tímto řešením. Třecí sílu jsme „namířili“ proti směru osy x , což odpovídá pohybu kostky směrem dolů. (Kdybychom změnou počátečních podmínek uvedli kostku do pohybu směrem vzhůru, směřovala by třecí síla podél kladné osy x .) Co když x -ová složka zrychlení bude záporná? V situaci, kdy jsme uvedli kostku do pohybu podél nakloněné roviny směrem dolů rychlostí $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, to znamená, že se kostka brzdí. Její rychlost závisí na čase vztahem $v_x = v_0 + (g \sin \alpha - gf \cos \alpha)t$, $v_y = 0$, $v_z = 0$. Kostka se zastaví v okamžiku, kdy $v_y = 0$, tj.

$$t_0 = \frac{v_0}{gf \cos \alpha - g \sin \alpha}.$$

V případě, že $v_0 = 0$, se kostka vůbec nerozjede. Bude na nakloněné rovině v klidu ležet. Zajímavou otázkou pak je, jak to je se silami, které na kostku působí. Působícími silami jsou opět síla tíhová, síla tlaková a síla třecí, tentokrát však *statická*. Pro tu ale nemáme silový zákon. Pomůže nám však skutečnost, že výslednice sil, které působí na kostku v klidu, musí být nulová.

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_s = \vec{0} &\implies mg \sin \alpha - T_s = 0, \quad -mg \cos \alpha + N = 0 \implies \\ &\implies N = mg \cos \alpha, \quad T_s = mg \sin \alpha. \end{aligned}$$

Statická třecí síla se tedy „přizpůsobila situaci“. Její hodnota se „nastavila“ tak, aby právě vykompenzovala x -ovou složku součtu zbylých sil $m\vec{g} + \vec{N}$. Uspořádejme nyní pokus tak, že budeme nakloněnou rovinu, na níž kostka v klidu leží, zvedat. Experiment říká, že při určitém úhlu sklonu α_0 se kostka dá do pohybu. Znamená to, že povrchové drsnosti, díky kterým se vzájemné působení podložky a kostky projevuje statickou třecí silou, již kostku „neudržely“, velikost statické

třecí síly překročila určitou mez $T_{s,max}$. Touto mezí, která závisí mj. na kvalitě styčných ploch, je definován *koefficient statického tření* f_0 :

$$T_{s,max} = N f_0 \implies f_0 = \frac{T_{s,max}}{N}.$$

Koefficient statického tření je veličina, která se určuje empiricky. Je větší než koefficient dynamického tření, tj. $f_0 > f$. Úhel sklonu nakloněné roviny α_0 , při kterém se kostka dá do pohybu, je určen maximální přípustnou statickou třecí silou:

$$mg \sin \alpha_0 = N f_0 \implies mg \sin \alpha_0 = mg f_0 \cos \alpha_0 \implies \tan \alpha_0 = f_0.$$

Řešme ještě pohyb kostky pro případ, že jí udělíme rychlost $\vec{v}_0 = (-v_0, 0, 0)$ směrem vzhůru po nakloněné rovině. Dynamická třecí síla má nyní opačný směr než při pohybu kostky dolů. Druhý Newtonův zákon ve složkách má tvar

$$ma_x = mg \sin \alpha + N f, \quad (2.11)$$

$$ma_y = -mg \cos \alpha + N, \quad (2.12)$$

$$ma_z = 0. \quad (2.13)$$

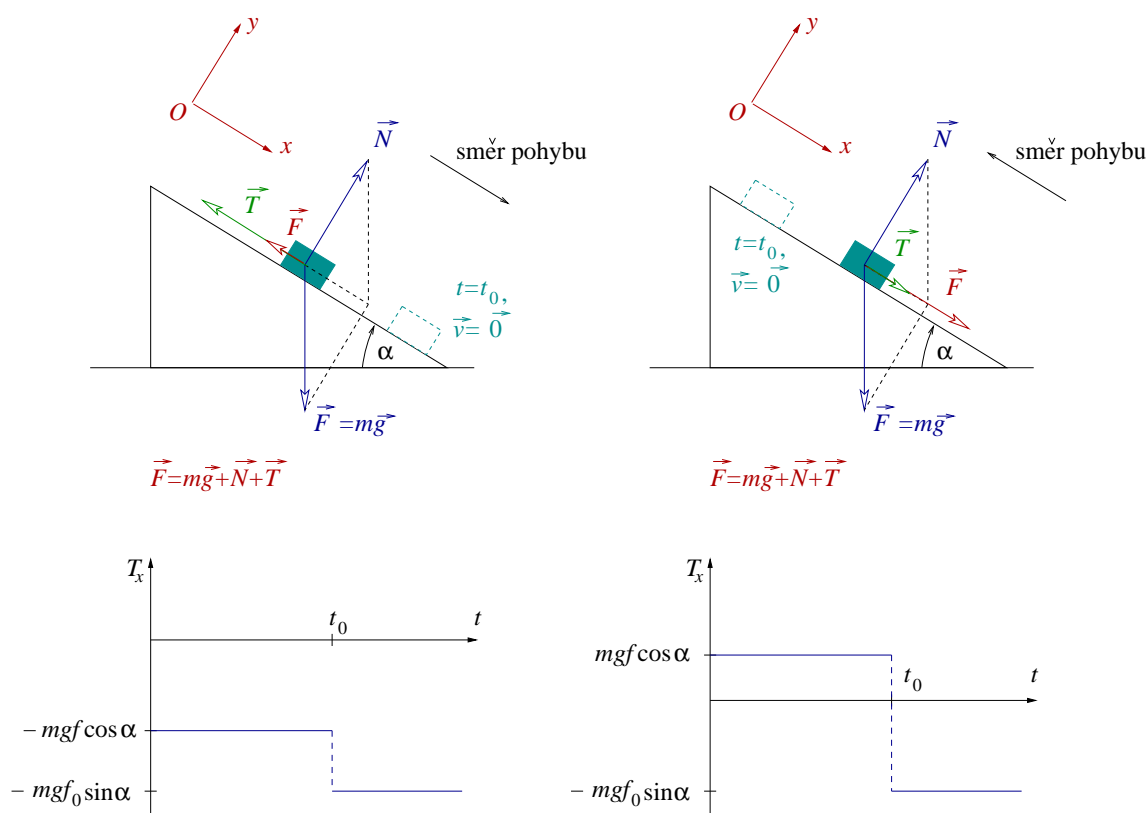
S uvážením vazební podmínky $y(t) = 0 \implies a_y = 0$ dostáváme řešení

$$a_x = g(\sin \alpha + f \cos \alpha), \quad a_y = 0, \quad a_z = 0, \quad N = mg \cos \alpha.$$

Závislost rychlosti na čase je $\vec{v}(t) = (-v_0 + a_x t, 0, 0)$. Rychlost kostky nabude nulové hodnoty v okamžiku

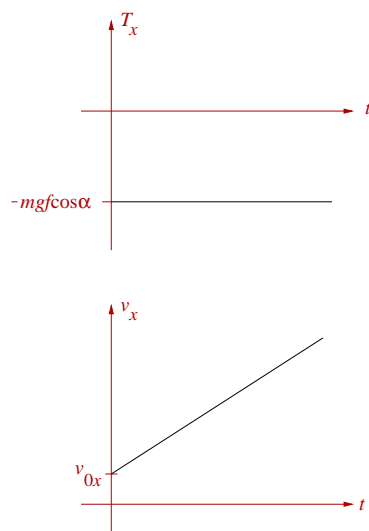
$$t'_0 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

Pokud je $\alpha > \alpha_0$, rozjede se kostka sama opět dolů. V opačném případě se zastaví a bude v klidu. Uvědomte si, co nastane v takovém případě: Zatímco dynamická třecí síla směřovala při brzdění kostky dolů, bude statická třecí síla směřovat vzhůru. Musí totiž kompenzovat průmět tíhové síly do směru nakloněné roviny. Jinak by se kostka v klidu na nakloněné rovině neudržela. OBR. 2.10 znázorňuje časový průběh x -ové složky třecí síly (ostatní její složky jsou nulové) pro různé situace popsané výše.

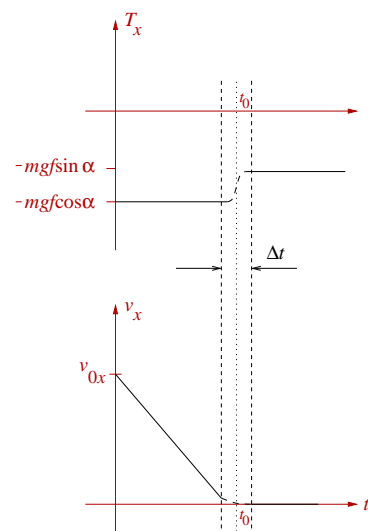


OBR. 2.10-A: KOSTKA NA NAKLONĚNÉ ROVINĚ SE TŘENÍM

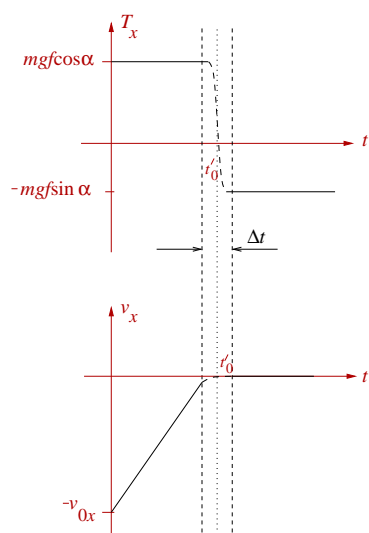
a) $v_{0x} = v_0 > 0, f_0 < \tan \alpha$



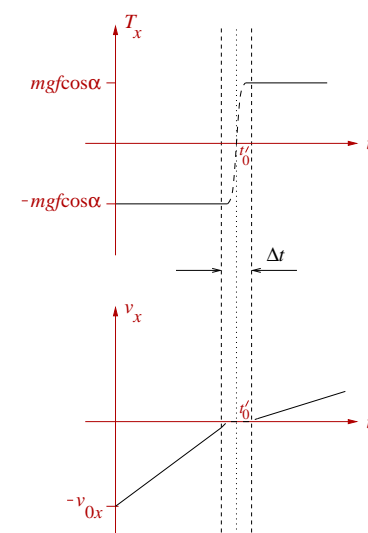
b) $v_{0x} = v_0 > 0, f_0 > \tan \alpha$



c) $v_{0x} = -v_0 < 0, \alpha < \alpha_0$



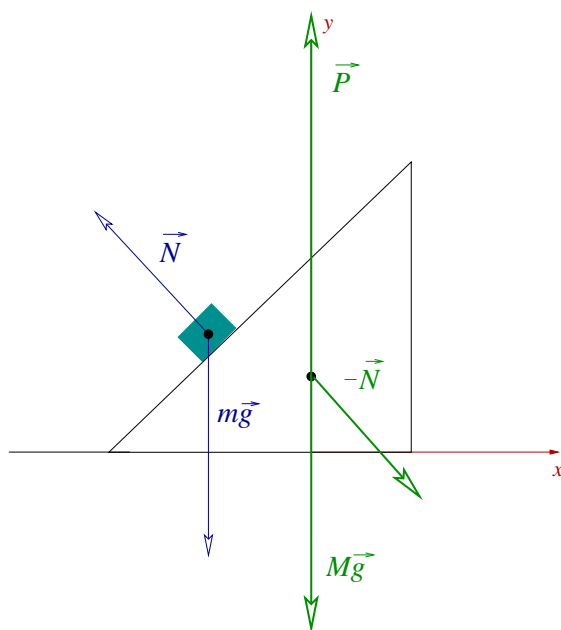
d) $v_{0x} = -v_0 < 0, \alpha > \alpha_0$



OBR. 2.10-B: K PŘÍKLADU 2.8 — RŮZNÉ SITUACE



PŘÍKLAD 2.9. Upravme nyní zadání předchozí úlohy tak, že nakloněná rovina o hmotnosti M nebude připevněna k vodorovné podložce, naopak po ní bude moci klouzat bez tření. Také kostka se po nakloněné rovině může pohybovat bez tření, a jako předtím zanedbáme odpor prostředí. Úkolem je určit zrychlení kostky \vec{a} i zrychlení nakloněné roviny \vec{A} . Řešíme tedy pohyb soustavy tvořené dvěma tělesy. Druhý Newtonův zákon proto musíme formulovat pro každé z nich. V OBR. 2.11 jsou zakresleny síly působící na kostku i síly působící na nakloněnou rovinu. Na kostku působí Země tíhovou silou $m\vec{g}$ a nakloněná rovina tlakovou silou \vec{N} .



OBR. 2.11: KOSTKA A NAKLONĚNÁ ROVINA

Na nakloněnou rovinu působí Země tíhovou silou $M\vec{g}$, kostka tlakovou silou $-\vec{N}$ (síly \vec{N} a $-\vec{N}$ jsou akce a reakce) a vodorovná podložka tlakovou silou \vec{P} . Druhý Newtonův zákon pro jednotlivé částice má tvar

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}, \quad M\vec{A} = M\vec{g} - \vec{N} + \vec{P}.$$

Soustavu souřadnic zvolíme tentokrát tak, že osa x je vodorovná podle obrázku, osa y směřuje proti tíhovému zrychlení a soustava tvořená osami x , y a z je pravotočivá. Předchozí vektorové rovnice mají následující vyjádření ve složkách:

$$ma_x = -N \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} ma_y &= -mg + N \cos \alpha, \\ ma_z &= 0 \implies a_z = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MA_x &= N \sin \alpha, \\ MA_y &= -Mg - N \cos \alpha + P, \\ MA_z &= 0 \implies A_z = 0. \end{aligned}$$

Soustava čtyř rovnic tvořená prvními dvojicemi rovnic uvedených soustav obsahuje 6 neznámých a_x , a_y , A_x , A_y , N a P . Potřebujeme dvě vazební podmínky. První z nich je jednoduchá — nakloněná rovina stále spočívá na vodorovné podložce, tj. $Y(t) = 0 \implies A_y = 0$. Druhá podmínka vychází ze skutečnosti, že kostka stále spočívá na nakloněné rovině. Znamená to, že *relativní zrychlení* $\vec{a}_{rel} = \vec{a} - \vec{A}$ kostky vůči nakloněné rovině je s nakloněnou rovinou trvale rovnoběžné (zrychlení kostky vzhledem k pozorovateli spojenému s nakloněnou rovinou míří podél nakloněné roviny). Vazební podmínka je tedy $(a_y - A_y)/(a_x - A_x) = \tan \alpha$. Získáváme tedy soustavu šesti rovnic pro šest neznámých

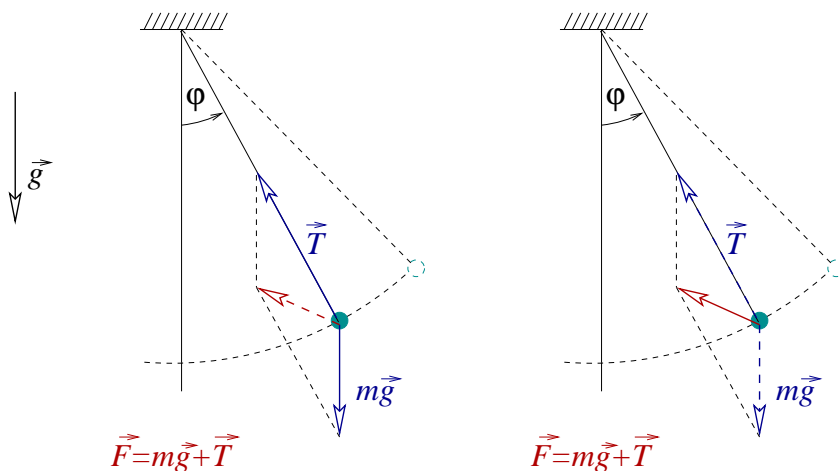
$$\begin{aligned} ma_x &= -N \sin \alpha, \\ ma_y &= -mg + N \cos \alpha, \\ MA_x &= N \sin \alpha, \\ MA_y &= -Mg - N \cos \alpha + P, \\ A_y &= 0, \\ \frac{a_y - A_y}{a_x - A_x} &= \tan \alpha. \end{aligned}$$

Její řešení (proved'te sami) je

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{Mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad a_y = -\frac{(m + M)g \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad a_z = 0, \\ A_x &= \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0, \\ N &= \frac{mMg \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad P = \frac{M(m + M)g}{M + m \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$



PŘÍKLAD 2.10. Jednoduchým mechanickým modelem je *matematické kyvadlo*. Popsali jsme je již v příkladu 1.1 na OBR. 1.2. (Osy soustavy souřadnic byly v příkladu 1.1. značeny x_1 , x_2 a x_3 , zde pro jednoduchost x , y a z). Kulicka o hmotnosti m se pohybuje na vlákně stálé délky l v rovině xz , soustava má tedy jeden stupeň volnosti a její okamžitá poloha je jednoznačně popsána časovou závislostí úhlové výchylky $\varphi = \varphi(t)$. Pomocí druhého Newtonova zákona sestavíme rovnice, z nichž lze závislost $\varphi = \varphi(t)$ v principu získat. Do obrázku zakreslíme síly, jimiž za kuličku působí její okolí.



OBR. 2.12: MATEMATICKÉ KYVADLO

Zanedbáme-li odpor prostředí proti pohybu kuličky, zbývá tíhová síla $\vec{F}_G = m\vec{g}$, jíž na kuličku působí Země, a tahová síla vlákna \vec{T} . Výslednici těchto dvou sil, Newtonovu „hybnou sílu“, označme $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$. V levé části OBR. 2.12 jsou zakresleny síly $m\vec{g}$ a \vec{T} , v pravé jejich výslednice \vec{F} . Druhý Newtonův zákon má tvar

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Otázkou je nyní volba soustavy souřadnic. Jednou z možností je použít pro rozklad vektorů pevné soustavy $\langle O; x, y, z \rangle$. Pak

$$ma_x = -T \sin \varphi, \quad ma_y = -mg + T \cos \varphi, \quad ma_z = 0. \quad (2.14)$$

Vazební podmínku $x^2 + y^2 = l^2$ lze alternativně vyjádřit takto:

$$x = l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi,$$

pro rychlost a zrychlení pak dostaneme

$$v_x = \dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (2.15)$$

$$v_y = \dot{y} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (2.16)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = l|\dot{\varphi}| = l|\omega|. \quad (2.17)$$

$$a_x = \ddot{x} = -l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + l\ddot{\varphi} \cos \varphi, \quad (2.18)$$

$$a_y = \ddot{y} = -l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - l\ddot{\varphi} \sin \varphi, \quad (2.19)$$

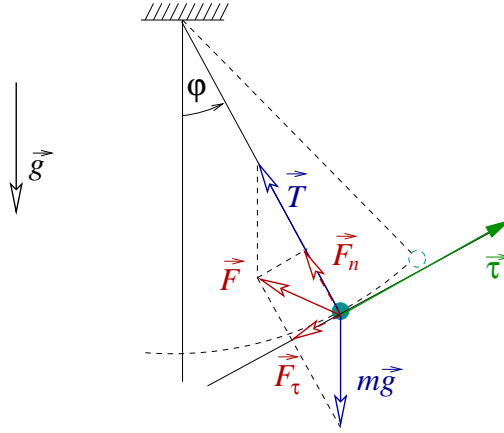
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = l\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} = l\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (2.20)$$

Vyjádření složek zrychlení pomocí úhlové výchylky a jejích derivací dosadíme do (2.14). Vynásobíme-li první rovnici soustavy (2.14) $\cos \varphi$, druhou $\sin \varphi$ a sečteme, vyloučíme tím T a dostaneme

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi \implies \ddot{\varphi} + \sqrt{\frac{g}{l}} \varphi = 0. \quad (2.21)$$

Získali jsme rovnici pro neznámou funkci $\varphi(t)$. Kromě této funkce obsahuje rovnice i její druhou derivaci. Rovnice pro neznámé funkce popisující trajektorii částice, resp. obecněji mechanické soustavy, nazýváme *pohybové rovnice*. Nalezení neznámé funkce je otázkou matematických postupů řešení tzv. *obyčejných diferenciálních rovnic*, které si ukážeme v dalším odstavci. Pokud v naší úloze o kyvadle dokážeme později určit funkci $\varphi(t)$, pak s její znalostí můžeme zjistit i časovou závislost velikosti tahové síly $T(t)$.

Pokusme se ještě vyjádřit druhý Newtonův zákon způsobem, který umožní značné zjednodušení výpočtu oproti předchozímu postupu. Použijme pro rozklad vektorového tvaru druhého Newtonova zákona souřadnic, která je přirozeným způsobem spojena s trajektorií kuličky, pohyblivého reperu. Vektor binormály bude v tomto případě vždy souběžný s osou z , ať již souhlasně nebo nesouhlasně, a průměty sil do binormály jsou tedy nulové. Pro zjednodušení tedy budeme pracovat pouze v rovině určené jednotkovým vektorem tečny $\vec{\tau}$ a jednotkovým vektorem hlavní normály \vec{n} (viz OBR. 2.13).



OBR. 2.13: MATEMATICKÉ KYVADLO JEŠTĚ JEDNOU

Rozkladem vektorové rovnice představující druhý Newtonův zákon do směru tečny a hlavní normály dostaneme

$$ma_\tau = -mg \sin \varphi, \quad ma_n = T - mg \cos \varphi. \quad (2.22)$$

Tečné a normálové zrychlení a_τ a a_n jsou dána vztahy (1.34) a (1.39), tj.

$$\ddot{\varphi} + g \sin \varphi, \quad T = mg \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2.$$

Výsledná síla $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$ má tečnou a normálovou složku určenou vztahy (2.22),

$$\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau = -mg \sin \varphi \vec{\tau}, \quad \vec{F}_n = m\vec{a}_n = (T - mg \cos \varphi) \vec{n}.$$

Síla \vec{F} tedy míří do poloroviny určené tečnou k trajektorii a bodem závěsu kyvadla. Normálová složka zrychlení musí být totiž nenulová, neboť pohyb je křivočarý. V případě, že kulička kmitá, tj. $-\varphi_0 \leq \varphi(t) \leq \varphi_0$, $\varphi_0 < 90^\circ$, jsou výjimkou krajní body (body obratu) trajektorie. V nich má kulička nulovou rychlost a tedy i nulové normálové zrychlení. Výsledná síla je v bodech obratu tečná k trajektorii. ♠

PŘÍKLAD 2.11. Ve všech příkladech jsme dosud uvažovali pouze o částicích s konstantní hmotností. Druhý Newtonův zákon je však formulován obecněji, připouští i možnost proměnné hmotnosti objektu. Jako typický příklad se uvádí pohyb rakety, jejíž hmotnost klesá tím, že ji opouštějí spálené plyny paliva. Pro jiné příklady nemusíme chodit daleko — stačí sledovat pohyb nafouknutého nezavázaného poutového balónku. Jako příklad by mohl posloužit třeba i nákladní automobil, jemuž se z korby sype písek. Uvažme tedy možnost, že hmotnost objektu se mění tak, že je známa rychlost hmotných elementů Δm , které se od základního objektu proměnné hmotnosti m odpojují, resp. se k němu připojují, vzhledem k tomuto základnímu objektu. Označme ji \vec{u} a předpokládejme, že je konstantní (plyny opouštějí raketu se stálou relativní rychlostí). Je-li rychlost základního objektu vzhledem k dané inerciální vztažné soustavě \vec{v} , je rychlost elementu Δm vůči téže vztažné soustavě $\vec{v} + \vec{u}$. Hmotný element Δm a objekt m na sebe navzájem působí interakčními silami \vec{f} a $-\vec{f}$. Předpokládejme, že další síly na žádnou část tělesa nepůsobí. Změna hybnosti základního objektu za dobu Δt je rovna odpovídajícímu impulsu síly \vec{f} , změna hybnosti elementu Δm impulsu síly $-\vec{f}$.

$$(m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) - m\vec{v} = \vec{f} \Delta t, \quad -\Delta m(\vec{v} + \vec{u}) = -\vec{f} \Delta t.$$

Zanedbáme-li součin $\Delta m \Delta \vec{v}$ a sečteme-li obě rovnice, dostaneme

$$m\Delta \vec{v} - \Delta m\vec{u} = \vec{0} \implies \Delta \vec{v} \parallel \vec{u}.$$

Rychlost \vec{u} elementu Δm vzhledem k původnímu tělesu míří na opačnou stranu než se pohybuje původní těleso vzhledem k inerciální vztažné soustavě, je tedy $\vec{v} = (v)$, $\vec{u} = (-u)$. Pak

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u} \implies \ln m = -\frac{v}{u} + C, \quad C = \text{konst.}$$

K určení integrační konstanty C potřebujeme opět jednu podmínku navíc. Předpokládáme-li, že pro $v = v_0$ je $m = m_0$, vyjde $C = \ln m_0 + \frac{v_0}{u}$. Řešení je tedy

$$\ln m = -\frac{v}{u} + \ln m_0 + \frac{v_0}{u} \implies m(v) = m_0 \exp\left(-\frac{v - v_0}{u}\right).$$
 ♠

2.4.2 Pohybové rovnice: Od zrychlení k trajektorii II

V předchozím odstavci jsme poprvé hovořili o pohybových rovnicích v souvislosti s matematickým kyvadlem (příklad 2.10, vztah (2.21)). *Pohybové rovnice* jsou klíčovým pojmem dynamiky. Jsou v podstatě matematickým zápisem druhého Newtonova zákona a představují obecně soustavu rovnic pro neznámé funkce popisující trajektorii studované částice nebo soustavy částic. Uvažujme o částici,

na kterou působí okolní objekty 1, 2, ..., K silami $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_K$. Jednotlivé síly jsou dány silovými zákony a obecně závisí, jak jsme již zjistili v odstavci 2.3.2, na poloze a rychlosti částice a také explicitně na čase. (Příkladem explicitní závislosti silového působení na čase může být střídavé elektrické pole mezi deskami kondenzátoru, kde se testovací nabitá částice pohybuje.) Označíme-li $\vec{F} = \sum_{k=1}^K \vec{F}_k$ výslednici výše uvedených sil, zapíšeme druhý Newtonův zákon takto

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad \text{při konstantní hmotnosti} \quad m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Rychlost a zrychlení jsou však derivacemi funkce $\vec{r}(t)$, která představuje parametrické vyjádření trajektorie částice a kterou je třeba řešením problému zjistit. Omezíme-li se na případ konstantní hmotnosti částice, dostaneme vektorově a ve složkách

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t),$$

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ ma_y &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ ma_z &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Vztahy (2.23) představují soustavu tří *diferenciálních rovnic* pro neznámé funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$. Neznámé funkce závisí na jediné proměnné t , nazývají se proto *obyčejné*. Název „diferenciální“ je dán skutečností, že kromě neznámých funkcí obsahuje soustava i jejich derivace. Rovnice jsou *druhého řádu*, neboť nejvyšší derivace neznámých funkcí jsou druhého řádu. Další terminologie týkající se diferenciálních rovnic souvisí již s jejich konkrétním tvarem. Řešení konkrétních situací ukážeme na příkladech, aniž bychom se zabývali samotnou matematickou metodikou řešení diferenciálních rovnic. (Zájemcům o tuto problematiku poslouží jakákoli učebnice matematické analýzy.)

PŘÍKLAD 2.12. Kapka ve tvaru malé kuličky o poloměru r padá ve vzduchu, který klade jejímu pohybu odpor. Předpokládejme, že kulička–kapka je volně, tj. s nulovou rychlostí, vypuštěna ve výšce h nad povrchem Země. Vyšetříme její pohyb jak pro případ, kdy je silovým zákonem pro odporovou sílu Stokesův vzorec, tak pro případ Newtonova modelu (příklad 2.7, vztah (2.10)). Druhý Newtonův zákon má tvar

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_o.$$

V laboratorní vztahné soustavě zvolíme počátek kartézské soustavy souřadnic na povrchu Země pod bodem, ze kterého je kapka vypuštěna, osu x orientujeme souhlasně s tíhovým zrychlením, osy y a z pak již zvolíme ve vodorovné rovině jakkoli. Počáteční podmínky jsou tedy

$$\vec{r}(0) = (-h, 0, 0), \quad \vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}(0) = (0, 0, 0).$$

V případě Stokesova modelu jsou pohybové rovnice kapky následující

$$m\ddot{x} = mg - 6\pi\eta r\dot{x}, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Integrací druhé a třetí rovnice dostaneme

$$y(t) = P_y t + Q_y, \quad z(t) = P_z t + Q_z,$$

kde P_y , Q_y , P_z a Q_z jsou integrační konstanty. Vzhledem k zadaným počátečním podmínkám jsou nulové. Proto $y(t) = 0$, $z(t) = 0$. První rovnici upravíme

$$m\ddot{x} + 6\pi\eta r \left(\dot{x} - \frac{mg}{6\pi\eta r} \right) = 0$$

a označíme $\xi = \frac{mg}{6\pi\eta r} - \dot{x}$, tj. $\dot{\xi} = -\ddot{x}$. Pak

$$\begin{aligned} m\dot{\xi} + 6\pi\eta r\xi &= 0 \implies \frac{\dot{\xi}}{\xi} = -\frac{6\pi\eta r}{m} \implies \\ \implies \int \frac{d\xi}{\xi} &= -\int \frac{6\pi\eta r}{m} dt \implies \ln \xi = -\frac{6\pi\eta r}{m}t + C. \end{aligned}$$

Počáteční podmínka pro rychlost $\dot{x} = 0$ vede k počáteční podmínce pro ξ . Platí $\xi(0) = \frac{mg}{6\pi\eta r}$. Odtud dostaneme hodnotu integrační konstanty $C = \ln \frac{mg}{6\pi\eta r}$.

$$\frac{6\pi\eta r}{mg}\xi = \exp\left(-\frac{6\pi\eta r}{m}t\right) \implies \dot{x} = \frac{mg}{6\pi\eta r} \left[1 - \exp\left(-\frac{6\pi\eta r}{m}t\right) \right].$$

Další integrací získáme závislost $x(t)$:

$$x = \int \frac{mg}{6\pi\eta r} \left[1 - \exp\left(-\frac{6\pi\eta r}{m}t\right) \right] dt = \frac{mg}{6\pi\eta r} \left[t + \frac{m}{6\pi\eta r} \exp\left(-\frac{6\pi\eta r}{m}t\right) \right] + D.$$

Integrační konstantu D určíme opět z počáteční podmínky, která má tvar $x(0) = -h$. Řešení soustavy pohybových rovnic je tedy

$$x(t) = \frac{mg}{6\pi\eta r} \left[t + \frac{m}{6\pi\eta r} \exp\left(-\frac{6\pi\eta r}{m}t\right) \right] - \left[h + g \left(\frac{m}{6\pi\eta r} \right)^2 \right], \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 0.$$

Grafy závislostí polohy kapky $x(t)$ a její rychlosti $v_x(t) = \dot{x}(t)$ na čase jsou na OBR. 2.14-A a OBR. 2.14-B. (Vodorovná osa grafu, označená jako x , je časová, na svislé ose s popisem y je poloha $x(t)$, resp. rychlost $v_x(t)$ kapky). Poloměr kapky je 1 mm, hustota vody je $\varrho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, dynamická viskozita vzduchu při teplotě 0°C je $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$. Graf je sestaven v takovém rozsahu, aby bylo vidět, že se rychlost kapky pro $t \rightarrow \infty$ blíží jisté limitní hodnotě. Ta vyplývá ze vztahu pro $\dot{x}(t)$ a je rovna

$$v_m = \frac{mg}{6\pi\eta r}. \quad (2.24)$$

Nazývá se *mezní rychlost*. Na druhé straně je vidět, že Stokesův model odporové síly není příliš realistický. Z grafu je vidět, že měla-li by se rychlost kapky blížit mezní hodnotě, museli bychom ji nechat padat z několikakilometrové výšky. Kapka by padala desítky sekund. Mezní rychlost pro zadané hodnoty činí asi $v_m \doteq 1,3 \cdot 10^2 \text{ m s}^{-1}$. Tato hodnota není v praxi realistická, je příliš vysoká.

Proto v další úvaze použijeme Newtonův model, který slibuje účinnější brzdění kapky díky závislosti odporové síly na kvadrátu rychlosti. Pohybové rovnice mají pro tento případ tvar

$$m\ddot{x} = mg - \frac{1}{2}\pi r^2 C_\varrho \dot{x}^2, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0,$$

kde $S = \pi r^2$. Všimněme si první rovnice podrobněji. Tíhová síla je stále stejně velká, zatímco síla odporová roste se vzrůstající rychlostí, tentokrát kvadraticky na rozdíl od lineárního nárůstu v případě Stokesova modelu. V okamžiku, kdy se odporová síla vyrovná se silou tíhovou, je zrychlení nulové a těleso dosahuje mezní rychlosti

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{\pi r^2 C_\varrho}}. \quad (2.25)$$

Pro počáteční podmínky $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $z(0) = 0$ a $\dot{z}(0) = 0$ dostaneme z druhé a třetí pohybové rovnice $y(t) = 0$, $z(t) = 0$. Můžeme se tedy zabývat již jen první rovnicí. Označme v ní $\xi = \dot{x}$. Počáteční podmínka pro ξ je pak $\xi(0) = \dot{x}(0) = 0$. Úpravou rovnice, rozkladem na parciální zlomky a integrací postupně dostaneme

$$\frac{2m\ddot{x}}{\pi r^2 C_\varrho \left(\frac{2mg}{\pi r^2 C_\varrho} - \xi^2 \right)} = 1 \implies \frac{v_m^2}{g} \dot{\xi} \cdot \frac{1}{2v_m} \left(\frac{1}{v_m + \xi} + \frac{1}{v_m - \xi} \right) = 1,$$

$$\frac{v_m}{2g} \int \left(\frac{1}{v_m + \xi} + \frac{1}{v_m - \xi} \right) d\xi = t + C$$

$$\frac{v_m}{2g} \ln \left| \frac{v_m + \xi}{v_m - \xi} \right| = t + C$$

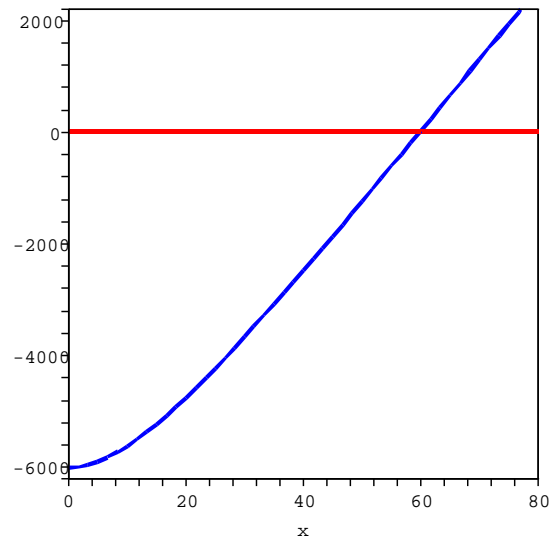
Vzhledem k počáteční podmínce $\xi(0) = 0$ je integrační C konstanta nulová. Další úpravou dostaneme

$$\frac{v_m + \xi}{v_m - \xi} = \exp \left(\frac{2gt}{v_m} \right) \implies \xi(t) = v_m \frac{\exp \left(\frac{2gt}{v_m} \right) - 1}{\exp \left(\frac{2gt}{v_m} \right) + 1} = v_m \operatorname{tgh} \left(\frac{gt}{v_m} \right).$$

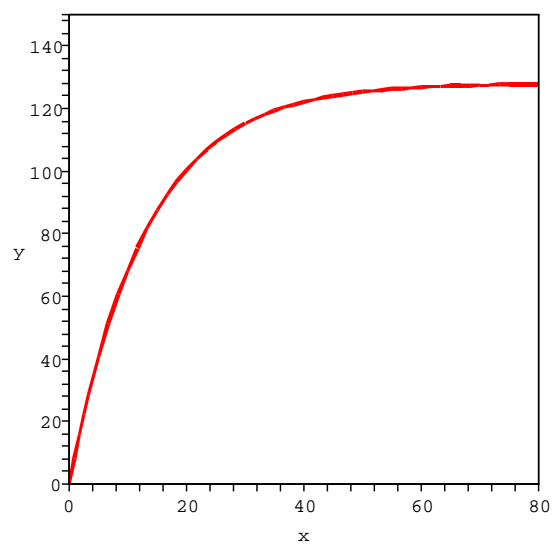
Především vidíme, že konstanta v_m skutečně představuje mezní rychlost, které však kapka reálně nikdy nedosáhne. Jde totiž o limitní hodnotu rychlosti pro $t \rightarrow \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = v_m$. Další integrací výrazu pro $\xi = \dot{x}$ a s uvážením počáteční podmínky $x(0) = -h$ získáme závislost polohy kapky na čase.

$$x = \int v_m \operatorname{tgh} \left(\frac{gt}{v_m} \right) dt = v_m \int \frac{\sinh \left(\frac{gt}{v_m} \right)}{\cosh \left(\frac{gt}{v_m} \right)} dt = \frac{v_m^2}{g} \ln \left[\cosh \left(\frac{gt}{v_m} \right) \right] - h.$$

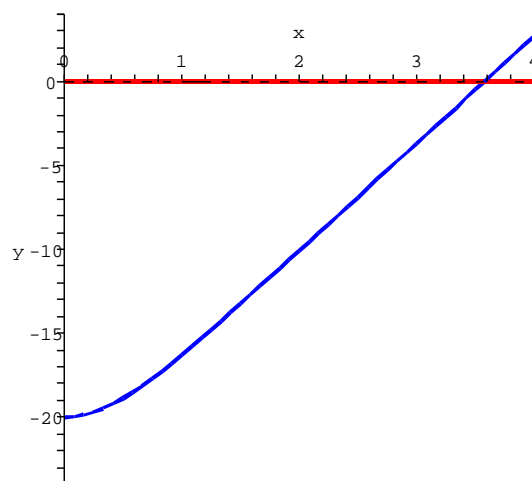
Grafy polohy a rychlosti kapky v závislosti na čase jsou na OBR. 2.14-C a OBR. 2.14-D. (Význam popisu os je stejný jako na Obr. 2.14-a a Obr. 2.14-b.)



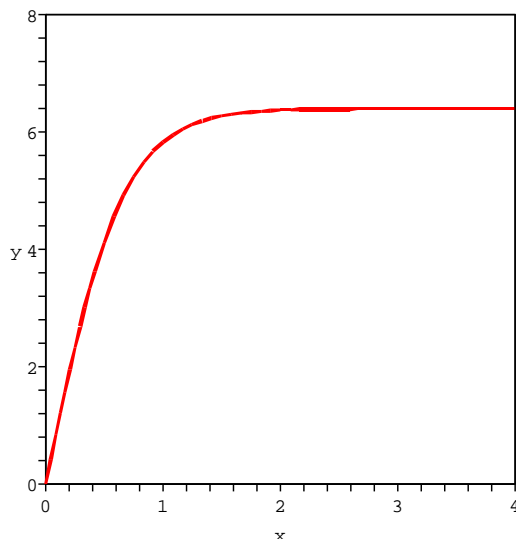
OBR. 2.14-A: K PŘÍKLADU 2.12 — STOKESŮV MODEL — POLOHA



OBR. 2.14-B: K PŘÍKLADU 2.12 — STOKESŮV MODEL — RYCHLOST



OBR. 2.14-C: K PŘÍKLADU 2.12 — NEWTONŮV MODEL — POLOHA



OBR. 2.14-D: K PŘÍKLADU 2.12 — NEWTONŮV MODEL — RYCHLOST

Pro pád kulové kapky o poloměru $r = 1 \text{ mm}$ ve vzduchu ($C = 0,5$, $\rho = 1,3 \text{ kgm}^{-3}$ při teplotě 0° C a bez uvážení závislosti na výšce) je $v_m = 6,3 \text{ ms}^{-1}$. Graf odpovídá pádu kapky z výšky $h = 20 \text{ m}$. Rovněž tato situace není zcela realistická, kapka si totiž při pádu neuchová kulový tvar. Pokud bychom předpokládali, že zaujme tvar spíše aerodynamický, bude hodnota konstanty C rovna asi $3,7 \cdot 10^{-2}$. Pro tento případ je $v_m = 23,3 \text{ ms}^{-1}$. Aproximaci také představuje konstantní hustota vzduchu. Ve skutečnosti je závislá nejen na teplotě, ale i na výšce nad povrchem Země. ♣

PŘÍKLAD 2.13. Vraťme se k pohybové rovnici matematického kyvadla (2.21). Označme v ní $\Omega_0 = \sqrt{g/l}$. Rovnice

$$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \sin \varphi = 0$$

má sice analytické řešení, jeho vyjádření však není jednoduché. Rychlou představu o průběhu závislosti úhlové výchylky na čase můžeme snadno získat pro případ malých výchylek, při nichž lze $\sin \varphi$ nahradit přímo úhlem φ v obloukové míře.

Funkci sinus lze totiž vyjádřit mocninnou řadou

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\varphi^{2k+1} + \dots$$

a nahradit ji pro malé hodnoty φ pouze prvním členem. Relativní chyba tohoto odhadu je pak určena podílem prvního členu zanedbaného „zbytku“ řady a hodnoty φ . Požadujeme-li

například, aby relativní chyba odhadu byla menší než 0,01, dostaneme pro přípustný rozsah úhlových výchylek v obloukové míře vztah

$$\frac{\varphi^3}{6\varphi} < 0,01 \implies \varphi < \sqrt{0,06} \doteq 0,25.$$

To odpovídá hodnotě asi 14° .

Řešíme tedy rovnici v aproximativním tvaru

$$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = 0.$$

Jedná se o rovnici druhého řádu, *lineární* (neznámá funkce a její derivace vystupují v rovnici lineárně), *s konstantními koeficienty* (u neznámé funkce a jejích derivací nestojí funkce, ale konstanty) a *homogenní* (na pravé straně rovnice je nula). Všechna její reálná řešení (úhlová výchylka je reálnou funkcí času) jsou obsažena v zápisu

$$\varphi(t) = a \cos \Omega_0 t + b \sin \Omega_0 t, \quad (2.26)$$

a a b jsou libovolné reálné konstanty. Jejich hodnoty je třeba určit pomocí počátečních podmínek, $\varphi(0) = -\varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$. Dosazením těchto hodnot do řešení rovnice pro $t = 0$ dostáváme

$$\varphi_0 = a, \quad \omega_0 = b\Omega_0 \implies b = \frac{\omega_0}{\Omega_0}.$$

Pro dané počáteční podmínky je řešením funkce

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega_0 t + \frac{\omega_0}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t.$$

Řešení je lineární kombinací funkcí kosinus a sinus proměnné $\Omega_0 t$. Je tedy periodickou funkcí s periodou $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Dvě mezní situace nastanou pro $\omega_0 = 0$ a $\varphi_0 = 0$. Platí pro ně

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega_0 t, \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{\omega_0}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t.$$

Pohyb kyvadla je popsán „čistou“ funkcí kosinus, resp. sinus.

Zaměříme se na řešení rovnice podrobněji. Úprava na tvar $\ddot{\varphi} = -\Omega_0^2 \varphi$ ukazuje, že řešením je funkce, jejíž druhá derivace je až na vynásobení konstantou rovna původní funkci. Tuto vlastnost mají goniometrické funkce sinus a kosinus a funkce exponenciální. Předpokládáme řešení v exponenciálním tvaru $\varphi = \exp \lambda t$, koeficient λ hledejme jeho dosazením do rovnice:

$$\lambda^2 \exp \lambda t + \Omega_0^2 \exp \lambda t = 0 \implies \lambda^2 + \Omega_0^2 = 0.$$

Získali jsme algebraickou rovnici pro λ , tzv. *charakteristickou rovnici*. Hodnoty

$$\lambda = \pm i\Omega_0.$$

jsou *charakteristické kořeny* diferenciální rovnice $\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = 0$. Základem řešení jsou funkce

$$\varphi_1(t) = \exp(i\Omega_0 t), \quad \varphi_2(t) = \exp(-i\Omega_0 t),$$

kteří tvoří *fundamentální systém řešení* dané diferenciální rovnice. Rovnici vyhovuje také každá jejich lineární kombinace

$$\varphi(t) = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) = C_1 \exp(i\Omega_0 t) + C_2 \exp(-i\Omega_0 t), \quad (2.27)$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné obecně komplexní konstanty. Podobně jako v předchozích úlohách mají význam integračních konstant. Vztah (2.27) obsahuje *všechna* řešení rovnice. Fyzikální smysl však mají v naší úloze pouze reálné funkce $\varphi(t)$, tj. takové, které splňují požadavek $\varphi(t) = \varphi^*(t)$. Hvězdička značí operaci komplexního sdružení. Dostáváme omezení pro volbu konstant

$$\begin{aligned} C_1 \exp(i\Omega_0 t) + C_2 \exp(-i\Omega_0 t) &= C_1^* \exp(-i\Omega_0 t) + C_2^* \exp(i\Omega_0 t) \implies \\ \implies (C_1 - C_2^*) \exp(2i\Omega_0 t) &= (C_1^* - C_2). \end{aligned}$$

Podotkněme, že dělení výrazů exponenciální funkcí je „povoleno“ pro všechna t , neboť exponenciální funkce je vždy nenulová. Předchozí rovnost musí platit pro libovolné t . Vzhledem k tomu, že na její levé straně je nekonstantní funkce a na pravé konstanta, je možné jí vyhovět pouze pro $C_2 = C_1^*$. Zapišeme-li C_1 ve tvaru $A + iB$, kde $A, B \in \mathbf{R}$, je $C_2 = A - iB$. Použijeme Eulerova vztahu $\exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Pro $\varphi(t)$ dostaneme

$$\varphi(t) = 2A \cos \Omega_0 t - 2B \sin \Omega_0 t \implies \varphi(t) = a \cos \Omega_0 t + b \sin \Omega_0 t, \quad a = 2A, \quad b = -2B.$$

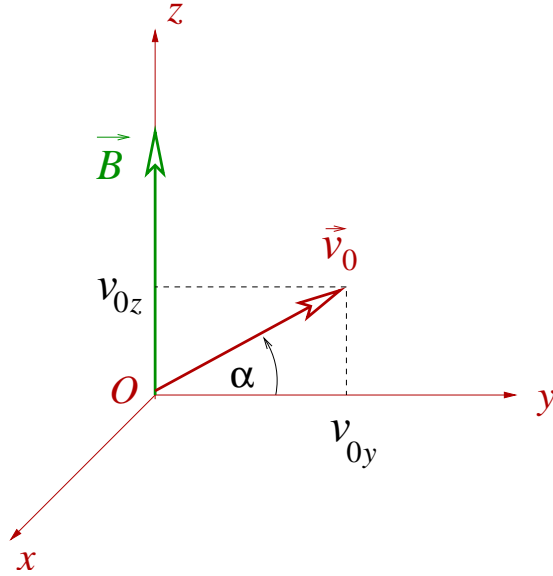
Výsledek se shoduje s (2.26).

Podrobnější návody k matematickým metodám řešení diferenciálních rovnic lze nalézt v běžné matematické literatuře.

PŘÍKLAD 2.14. Částice o hmotnosti m nese náboj q a pohybuje se v homogenním časově neproměnném magnetickém poli o indukci $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B} = \overrightarrow{\text{konst.}}$. V čase $t = 0$ prochází počátkem soustavy souřadnic rychlostí \vec{v}_0 . Řešením pohybové rovnice zjistíme její trajektorii. Uvážíme-li pouze vliv magnetického pole a všechny ostatní vlivy zanedbáme, má druhý Newtonův zákon s použitím silového zákona (2.7) tvar

$$m\vec{a} = q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Zvolíme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic tak, aby osa z směřovala souhlasně s vektorem \vec{B} a osy x a y tak, aby vektor \vec{v}_0 ležel v souřadnicové rovině xy (OBR. 2.15). Pak $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\vec{B} = (0, 0, B)$, $\vec{v}_0 = (0, v_{0y}, v_{0z}) = (0, v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$.



OBR. 2.15: NABITÁ ČÁSTICE V MAGNETICKÉM POLI

Ve složkách rozepíšeme druhý Newtonův zákon takto:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q(v_y B_z - v_z B_y) = q\dot{y}B, \\ m\ddot{y} &= q(v_z B_x - v_x B_z) = -q\dot{x}B, \\ m\ddot{z} &= q(v_x B_y - v_y B_x) = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Řešením třetí rovnice je funkce $z(t) = A_z t + B_z$, z počátečních podmínek $z(0) = 0$ a $v_z(0) = \dot{z}(0) = v_{0z} = v_0 \sin \alpha$ zjistíme integrační konstanty $A_z = v_0 \sin \alpha$, $B_z = 0$. Řešení zbývajících rovnic je možné provést různými způsoby. Než se do některého z nich pustíme, všimněme si jedné zajímavosti: Vynásobíme-li první rovnici soustavy (2.28) \dot{x} , druhou \dot{y} a sečteme, dostaneme

$$(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 0 \implies \frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2) = 0.$$

Průmět rychlosti do roviny xy je tedy konstantní. Protože i $v_z = A_z = v_0 \sin \alpha$ je konstantní, je $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v_0 = \text{konst.}$ Pohyb částice v magnetickém poli je tedy rovnoměrný. Všimněte si, že tento výsledek by byl stejný, i kdyby magnetické pole bylo časově proměnné a nehomogenní, tj. indukce magnetického pole závisela na poloze a na čase.

Pro řešení rovnice zvolíme poněkud formální, ale nejrychlejší postup. Druhou rovnici soustavy (2.28) vynásobíme imaginární jednotkou (i) a přičteme k první rovnici. Dále označíme $\xi = \dot{x} + i\dot{y}$. Pak

$$\dot{\xi} = -i\omega\xi, \quad \omega = \frac{qB}{m}.$$

Dosazením se snadno přesvědčíte, že této rovnici vyhovují všechny funkce tvaru

$$\xi = K \exp(-i\omega t).$$

K je libovolná komplexní konstanta.

POZNÁMKA: Pro derivování komplexních funkcí platí stejná pravidla jako u funkcí reálných, takže $\dot{\xi} = -i\omega \exp(-i\omega t)$. Z teorie diferenciálních rovnic plyne, že jiná řešení už rovnice nemá.

Konstantu K určíme z počáteční podmínky pro rychlost: $\xi(0) = K = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = iv_0 \cos \alpha$. Pak, po rozdělení ξ na reálnou a imaginární část $\dot{x} = v_x$ a $\dot{y} = v_y$,

$$\xi(t) = iv_0 \cos \alpha \exp(-i\omega t) \implies v_x(t) = v_0 \cos \alpha \sin \omega t, \quad v_y(t) = v_0 \cos \alpha \cos \omega t.$$

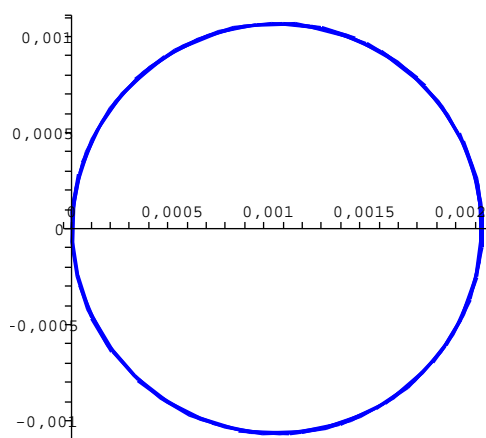
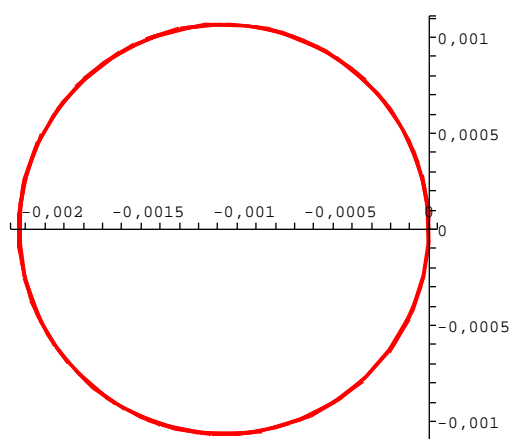
Další integrací a využitím počátečních podmínek $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, již získáme funkce $x(t)$ a $y(t)$, které spolu se $z(t)$ tvoří parametrické vyjádření trajektorie.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v_0 \cos \alpha \sin \omega t \, dt = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega} (1 - \cos \omega t), \\ y(t) &= \int v_0 \cos \alpha \cos \omega t \, dt = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega} \sin \omega t, \\ z(t) &= v_0 t \sin \alpha. \end{aligned}$$

Uvažme dva speciální případy, kdy je počáteční rychlost kolmá k magnetické indukci ($\alpha = 0$), resp. je s ní rovnoběžná ($\alpha = \pi/2$). Řešení úlohy má pak tvar

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t), \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad z(t) = 0, \quad \text{resp.}$$

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = v_0 t.$$

OBR. 2.16-A: POZITRON V MAGNETICKÉM POLI, $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ OBR. 2.16-B: ELEKTRON V MAGNETICKÉM POLI, $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$

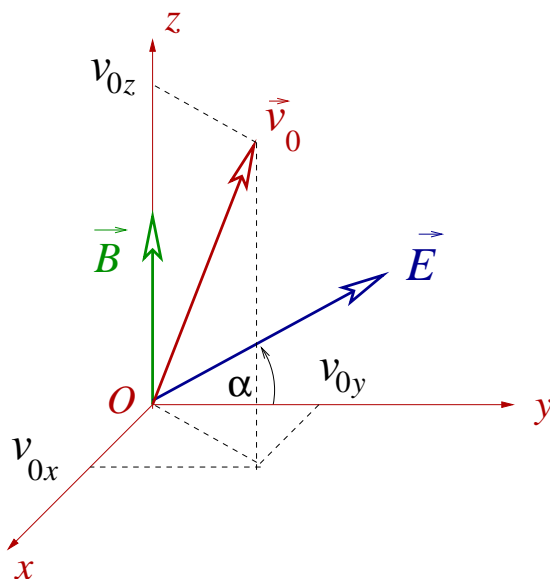
V případě, že částice vletí do magnetického pole kolmo k indukci (OBR. 2.16), je její trajektorie kružnice

$$\left(x - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

v rovině xy , se středem v bodě $S = (v_0/\omega, 0, 0)$, a poloměrem $R = v_0/\omega$. Částice po ní obíhá rovnoměrně s kruhovou frekvencí $\omega = qB/m$, zvanou *cyklotronová frekvence*. Pro elektron v magnetickém poli o indukci 0,1 T je tato frekvence zhruba $1,8 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$, pro proton $9,6 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$.

Grafy na OBR. 2.16-A a OBR. 2.16-B jsou nakresleny pro částice s kladným, resp. záporným elementárním nábojem $\pm e \doteq \pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a hmotností $m \doteq 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ (pozitron, resp. elektron) s počáteční rychlostí $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$, $v_0 \doteq 1,9 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$ v magnetickém poli $\vec{B} = (0, 0, B)$, $B = 0,1 \text{ T}$. Počáteční rychlost odpovídá urychlení napětím 1 kV. Pozitron obíhá v záporném smyslu (po směru hodinových ručiček), elektron v kladném smyslu. ♠

PŘÍKLAD 2.15. Vyřešíme ještě poněkud složitější úlohu, pohyb nabitě částice v časově neměnném a homogenním elektrickém i magnetickém poli. Intenzitu elektrického pole označme \vec{E} , indukci magnetického pole \vec{B} . Oba tyto vektory jsou konstantní. Soustavu souřadnic zvolme tak, aby vektor \vec{B} směřoval opět podél osy z a vektor \vec{E} ležel v souřadnicové rovině yz . Jejich složky jsou pak $\vec{B} = (0, 0, B)$ a $\vec{E} = (0, E \cos \alpha, E \sin \alpha)$.



OBR. 2.17: NABITÁ ČÁSTICE V ELEKTRICKÉM A MAGNETICKÉM POLI

Počáteční podmínky jsou $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$, $\vec{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ (viz OBR. 2.17). Druhý Newtonův zákon

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

přepíšeme do složek:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q\dot{y}B, \\ m\ddot{y} &= qE\cos\alpha - q\dot{x}B, \\ m\ddot{z} &= qE\sin\alpha. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Integrací třetí rovnice a uvážením počátečních podmínek $z(0) = 0$ a $\dot{z}(0) = v_{0z}$ dostaneme $z(t) = \frac{qE}{2m}t^2\sin\alpha + v_{0z}t$. Pro řešení soustavy prvních dvou rovnic použijeme tentokrát jiný přístup, abychom poznali i jiné matematické postupy. Vyjádříme z první rovnice \dot{y} , zderivujeme a dosadíme do druhé rovnice. Přitom stejně jako v příkladu 2.14 označíme $\omega = qB/m$. Tato úprava vede k rovnici

$$x^{(3)} + \omega^2 \left(\dot{x} - \frac{E}{B} \cos\alpha \right) = 0 \implies \ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0,$$

kde jsme označili $\xi = \dot{x} - \frac{E}{B} \cos\alpha$. Obecné řešení této rovnice však již známe. Je totiž formálně shodná s pohybovou rovnicí matematického kyvadla s malými výchylkami. Je tedy

$$\begin{aligned} \xi(t) &= a \cos \omega t + b \sin \omega t \implies \\ \implies \dot{x}(t) &= \frac{E}{B} \cos\alpha + a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t + b \cos \omega t, \end{aligned}$$

kde a a b jsou libovolné reálné konstanty (integrační konstanty). Pro vyjádření \dot{y} jsme přitom použili druhé rovnice ze soustavy (2.29). Uplatněním počátečních podmínek pro rychlost, $\dot{x}(0) = v_{0x}$, $\dot{y}(0) = v_{0y}$, dostaneme $a = v_{0x} - \frac{E}{B} \cos\alpha$ a $b = v_{0y}$, tj. celkově pro rychlost

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{E}{B} \cos\alpha + \left(v_{0x} - \frac{E}{B} \cos\alpha \right) \cos \omega t + v_{0y} \sin \omega t, \\ \dot{y} &= -\left(v_{0x} - \frac{E}{B} \cos\alpha \right) \sin \omega t + v_{0y} \cos \omega t, \\ \dot{z} &= \frac{qEt}{m} \sin\alpha + v_{0z}. \end{aligned}$$

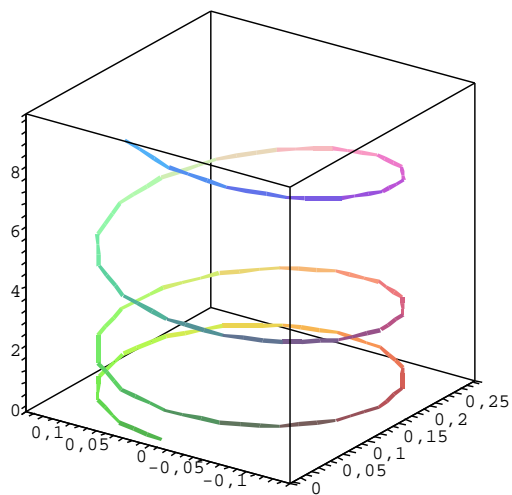
Další integrací a uplatněním počáteční podmínky pro polohu získáme parametrické rovnice trajektorie částice. Jejich výsledný tvar je

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{Et}{B} \cos\alpha + \frac{1}{\omega} \left(v_{0x} - \frac{E}{B} \cos\alpha \right) \sin \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} (1 - \cos \omega t), \\ y(t) &= -\frac{1}{\omega} \left(v_{0x} - \frac{E}{B} \cos\alpha \right) (1 - \cos \omega t) + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t, \\ z(t) &= \frac{qEt^2}{2m} \sin\alpha + v_{0z}t. \end{aligned} \quad (2.30)$$

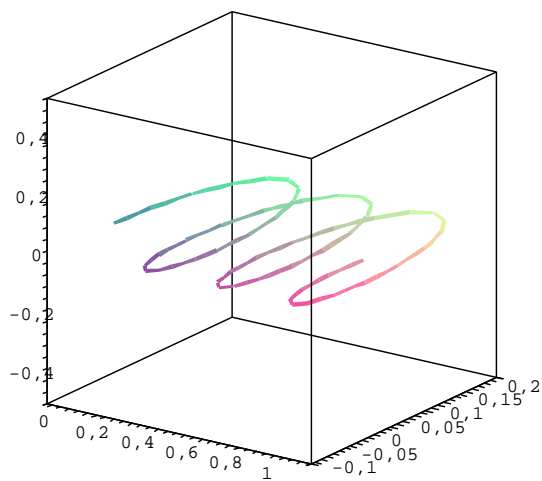
Parametrické rovnice trajektorie se zjednoduší za speciálních podmínek. Pro případ, kdy jsou elektrické a magnetické pole rovnoběžná, je $\alpha = \pi/2$. Dalším zjednodušením je volba počáteční rychlosti. Zvolíme-li ji kolmo k oběma polím, například $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$, mají parametrické rovnice trajektorie tvar

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t), \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad z(t) = \frac{qE}{2m} t^2.$$

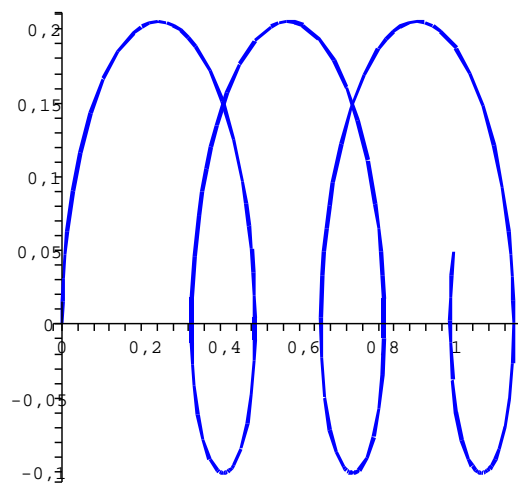
Tato trajektorie je znázorněna v prvním grafu v OBR. 2.18 pro proton ($m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = +1,60 \cdot 10^{-19}$ C), jehož počáteční rychlost odpovídá urychlení napětím 10 kV a její velikost tedy rovna $v_0 = 1,38 \cdot 10^6$ m s⁻¹. Indukce magnetického pole je $B = 0,1$ T, intenzita pole elektrického je $E = 5 \cdot 10^4$ V m⁻¹. Cyklotronová frekvence je $9,58 \cdot 10^6$ s⁻¹.



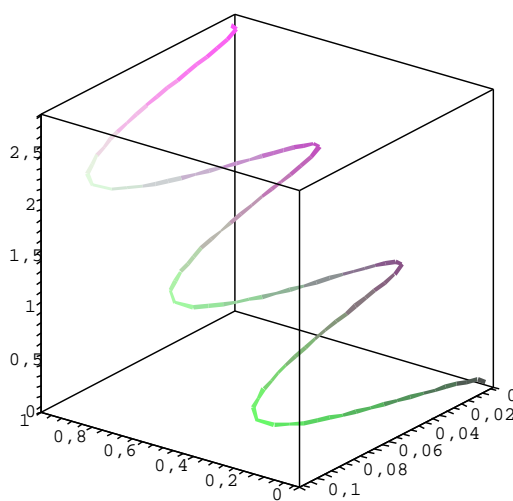
OBR. 2.18-A: TRAJEKTORIE NABITÉ ČÁSTICE V MAGNETICKÉM POLI



OBR. 2.18-B: TRAJEKTORIE NABITÉ ČÁSTICE V ELEKTRICKÉM A MAGNETICKÉM POLI



OBR. 2.18-C: TRAJEKTORIE NABITÉ ČÁSTICE V ELEKTRICKÉM A MAGNETICKÉM POLI



OBR. 2.18-D: TRAJEKTORIE NABITÉ ČÁSTICE V ELEKTRICKÉM A MAGNETICKÉM POLI

Další grafy na OBR. 2.18 odpovídají stejným hodnotám jako první graf, avšak postupně situacím

- $\vec{E} \perp \vec{B}$, tj. $\alpha = 0$, (tzv. *zkřížené* elektrické a magnetické pole), $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$, prostoro-
rově znázorněná rovinná trajektorie,
- týž případ jako předchozí, trajektorie je však znázorněna v rovině xy , v níž leží,
- $\vec{E} \perp \vec{B}$, tj. $\alpha = 0$, $\vec{v}_0 = (0, 0, v_0)$.



PŘÍKLAD 2.16 Předposledním příkladem tohoto odstavce je řešení problému *tlumených kmitů* a *vynucených kmitů*. Základním modelem je harmonický oscilátor (tělísko na pružině z příkladu 2.6), jehož pohyb je tlumen odporovou silou závislou lineárně na rychlosti $\vec{F}_o = -2\gamma\vec{v}$, γ je kladná konstanta, popřípadě „podporován“ periodicky proměnnou vynucující silou. Konstanta γ/m se nazývá *koefficient útlumu*. Pohybové rovnice pro tyto případy jsou

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + kx = 0, \quad (2.31)$$

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t. \quad (2.32)$$

Nejprve řešme rovnici (2.31). Její charakteristická rovnice má tvar

$$m\lambda^2 + 2\gamma\lambda + k = 0$$

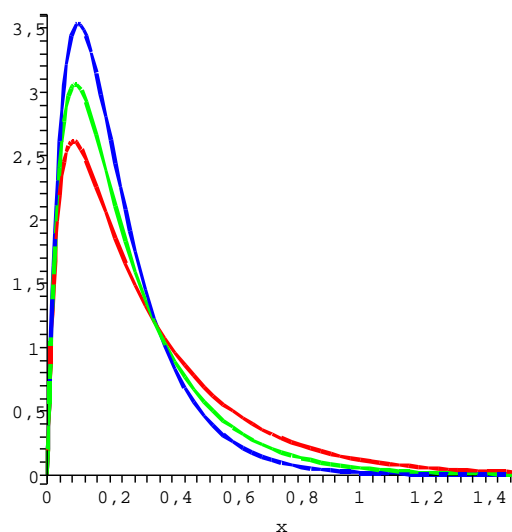
a její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{m} \left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - km} \right).$$

Nyní rozlišíme tři případy. První z nich nastává, jestliže $\gamma^2 > km$. Kořeny charakteristické rovnice jsou reálné a obecné řešení je popsáno vztahem

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{m}t} \left[C e^{t\sqrt{(\frac{\gamma}{m})^2 - \frac{k}{m}}} + D e^{-t\sqrt{(\frac{\gamma}{m})^2 - \frac{k}{m}}} \right].$$

Dochází k tzv. *nadkritickému útlumu*, výchylka tělesa se zmenšuje k nule, těleso se bez kmitání vrací do rovnovážné polohy. (Na základě rozboru průběhu funkce $x(t)$ sami sestrojte její graf a zejména prošetřete jeho chování pro $t \rightarrow \infty$). Situaci znázorňuje OBR. 2.19. Je sestrojen pro počáteční podmínky $x(0) = 0,00 \text{ m}$, $\dot{x}(0) = 1,00 \text{ m s}^{-1}$, *vlastní kruhovou frekvenci* $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10,0 \text{ s}^{-1}$ a tři různé hodnoty koeficientu útlumu, pro které podíl $\frac{\gamma}{m}$ nabývá hodnot $16,0 \text{ s}^{-1}$, $13,0 \text{ s}^{-1}$, $10,7 \text{ s}^{-1}$. Taková situace by mohla odpovídat třeba mechanickému oscilátoru o hmotnosti $m = 1 \text{ kg}$ na pružině o tuhosti $k = 100 \text{ N m}^{-1}$, který by kmital v nějaké vhodné kapalině.

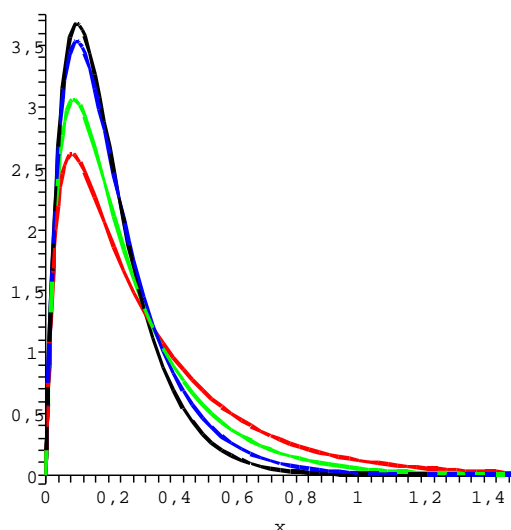


OBR. 2.19: NADKRITICKÝ ÚTLUM

V případě, že $\gamma^2 = km$, má charakteristická rovnice jeden dvojnásobný reálný kořen a možné časové závislosti výchylky jsou popsány obecným řešením

$$x(t) = (Ct + D)e^{-\frac{\gamma t}{m}}.$$

Tělísko se opět vrací do rovnovážné polohy, jak je vidět na OBR. 2.20. V tomto případě hovoříme o tzv. *kritickém útlumu*, který představuje jakési „rozhraní“ mezi útlumem nadkritickým, o kterém jsme již mluvili, a podkritickým, o kterém bude řeč za chvíli.



OBR. 2.18-A: KRITICKÝ ÚTLUM — ČERNÁ KŘIVKA

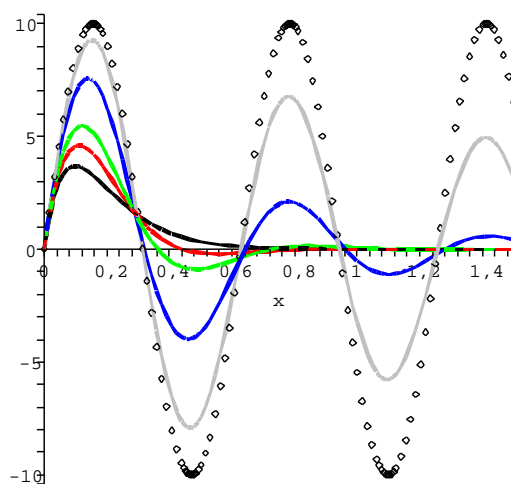
Do OBR. 2.20 jsou také znovu zakresleny křivky nadkritického útlumu z OBR. 2.19. Je vidět, že kritický útlum skutečně představuje mezní případ. Uvědomme si ještě jednu důležitou skutečnost, kterou ukazují grafy. Poloha tělíska se bude sice k rovnovážné poloze velmi rychle blížit, ke skutečnému „návratu“ tělíska do rovnovážné polohy však fakticky nedojde nikdy (resp. dojde k němu „v nekonečném čase“). Z praxe však víme, že jakkoli málo tlumené kmity nakonec ustanou. Jak je tedy možné, že nám to nevychází ani při silnějším a silnějším tlumení? Příčina je v příliš zjednodušeném modelu tlumení. Ve skutečnosti závisí odporová síla na rychlosti tělíska složitěji než lineárně. Kdybychom však použili nelineární model, nebyla by pohybová rovnice oscilátoru rovnicí lineární a zase bychom měli problém s řešením. Opět se tedy přesvědčujeme, že vhodná volba fyzikálního modelu je vždy jistým kompromisem.

Poslední případ nastává, jestliže jsou kořeny charakteristické rovnice komplexní, tj. $\gamma^2 < km$. Obecné řešení je tvaru

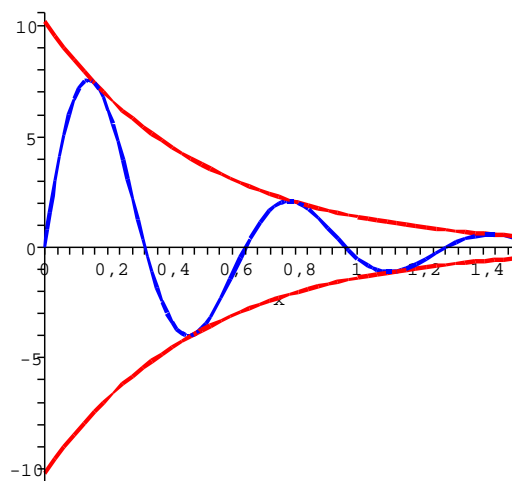
$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{m}} [P \cos(\omega t) + Q \sin(\omega t)],$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{\gamma}{m})^2}$. Jedná se o *podkritický útlum*, tělísko kmitá s kruhovou frekvencí ω a amplituda výchylky klesá exponenciálně s časem. Ukazuje to OBR. 2.21. V první části obrázku je řešení pohybové rovnice pro stejné počáteční podmínky, jaké jsme použili pro nadkritický a kritický útlum. Také vlastní kruhovou frekvenci jsme zvolili stejnou. Jednotlivé grafy jsou zakresleny pro různé hodnoty podílu $\frac{\gamma}{m}$, konkrétně $0,5 \text{ s}^{-1}$, $2,0 \text{ s}^{-1}$, $5,0 \text{ s}^{-1}$ a $7,0 \text{ s}^{-1}$. Pro názornost je

zakreslena i křivka odpovídající kritickému útlumu, stejná jako na OBR. 2.19. Je dobře vidět, jak se kmity se vzrůstající hodnotou $\frac{\gamma}{m}$ blíží kritickému útlumu, naopak při poklesu $\frac{\gamma}{m}$ se blíží netlumeným kmitům (přerušovaná křivka).



OBR. 2.21-A: PODKRITICKÝ ÚTLUM — TEČKOVANĚ NETLUMENÉ KMITY



OBR. 2.21-B: TLUMENÉ KMITY S OBÁLKOU

Tyto kmity představují pohyb *netlumeného harmonického oscilátoru*, jehož koeficient útlumu je nulový. Oscilátor kmitá s vlastní kruhovou frekvencí $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a jeho amplituda se s časem nemění. V druhé části OBR. 2.21 je graf kmitů při podkritickém útlumu s hodnotou $\frac{\gamma}{m} = 2,0 \text{ s}^{-1}$. Jsou znázorněny i „exponenciální obálky“ $\pm \exp(-2t)$. Zkuste spočítat souřadnice bodů dotyku obálek s křivkou popisující kmity.

Diferenciální rovnice pro vynucené kmity (2.32) se od rovnic, které jsme zatím řešili, liší nenulovou pravou stranou. Jedná se o rovnici *nehomogenní*, zatímco rovnice s nulovou pravou stranou je *homogenní*. Obecné řešení $x(t)$ nehomogenní rovnice získáme tak, že k obecnému řešení $x_h(t)$ odpovídající homogenní rovnice, tj. té, kterou získáme anulováním pravé strany, přičteme libovolné (partikulární) řešení $x_p(t)$ nehomogenní rovnice. Odpovídající homogenní rovnice je ovšem pohybovou rovnicí tlumeného oscilátoru bez buzení a její řešení již známe. Předpokládejme, že jde o případ podkritického útlumu. Řešení naší úlohy má tedy tvar

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) (a \cos \omega t + b \sin \omega t) + x_p(t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{m}\right)^2}.$$

Zbývá tedy ještě určit jakékoli řešení nehomogenní rovnice. Hledejme $x_p(t)$ v zobecněném tvaru pravé strany, tj. $x_p(t) = P \cos \Omega t + Q \sin \Omega t$. Neznámé konstanty P a Q je třeba určit tak, aby funkce $x_p(t)$ vyhovovala rovnici (2.32). Dosazením a úpravou dostaneme

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{4\gamma\Omega}{m}\right)^2}} \sin(\Omega t + \phi), \quad \text{tg } \phi = -\frac{2\Omega(\gamma/m)}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

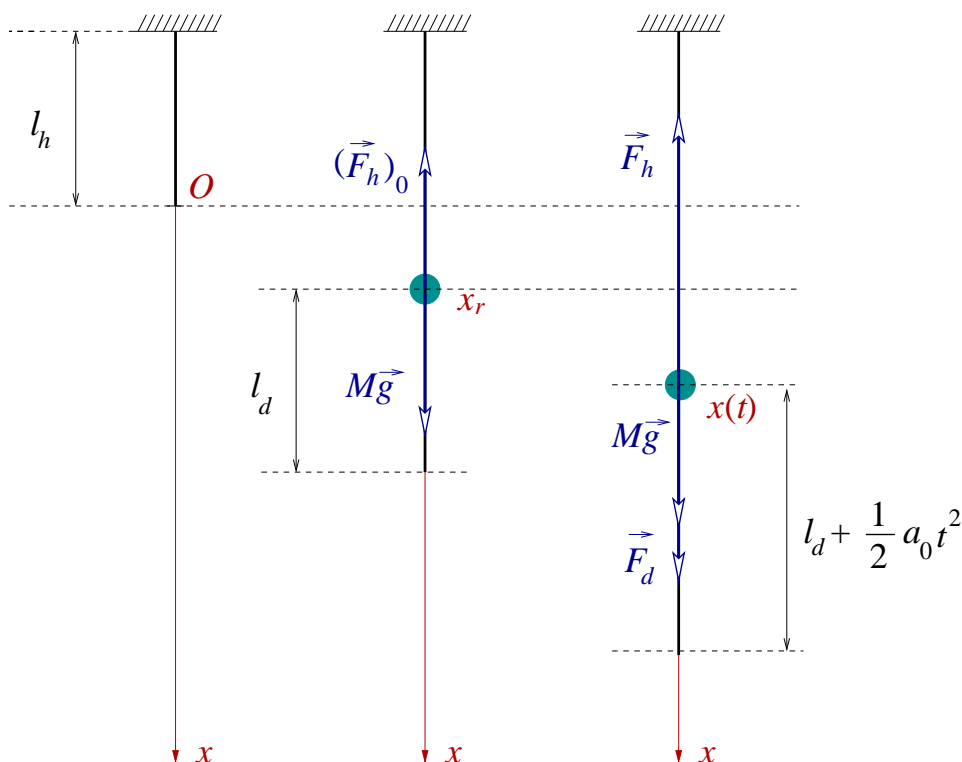
Pro velká t dochází k utlumení vlastních kmitů oscilátoru, který pak kmitá již s vynucující frekvencí Ω .

PŘÍKLAD 2.17 V základních přednáškách z mechaniky se s oblibou ukazuje demonstrační experiment, který se většinou interpretuje jako pokus dokumentující setrvačnost těles. Je uspořádán podle OBR. 2.22 takto: V tíhovém poli Země (tíhové zrychlení \vec{g}) je na provázku zavěšeno poměrně těžké těleso o hmotnosti M . Na jeho spodku visí další provázek, který je volný. Oba provázky jsou stejné kvality (ze stejného klubka) a mají zanedbatelnou hmotnost. Pokud za dolní provázek táhneme zvětšující se silou „pomalu“, pak při určitém tahu praskne horní provázek. Pokud dostatečně velkou silou dolním provázkem „trhneme“, praskne dolní provázek. Kvalitativně se výsledky tohoto pokusu vysvětlují tak, že jsou způsobeny setrvačností tělesa — „těleso se brání tomu, aby se dalo do pohybu, resp. snaží se zůstat v klidu“. Toto vysvětlení je ovšem velice hrubé, resp. nedostatečné, či dokonce nicneříkající až zavádějící. Pokud by totiž těleso při silovém působení na dolní provázek zůstávalo v klidu, musela by tahová síla \vec{F}_h horního provázku kompenzovat společný účinek tíhové síly $M\vec{g}$ a tahové síly \vec{F}_d dolního provázku, tj. $F_h = Mg + F_d$. Platilo by tedy $F_h > F_d$ a praskl by vždy horní provázek. Známe-li Newtonovy zákony, můžeme chování soustavy přesně popsat.

Všimněme si nejprve, co se děje s provázkem. Ve skutečnosti není tuhý, ale chová se jako pružina. Zavěšením tělesa nebo působením jiné síly se jeho délka mění. Označme tedy délky horního a dolního provázku v nenapjatém stavu jako l_h a l_d . Pružné vlastnosti provázku popíšeme pomocí tahové síly, která vznikne v provázku při jeho prodloužení (nebo zkrácení) o Δl . Budeme předpokládat, že tato síla se řídí Hookeovým zákonem. Její velikost je tedy přímo úměrná relativní změně délky provázku a síla míří vždy proti změně délky. Platí tedy

$$\vec{F} = -k \frac{\Delta l}{l} \vec{x}^0,$$

kde k je konstanta (v newtonech) a \vec{x}^0 je jednotkový vektor ve směru, v němž se provázek prodlužuje. V případě, že se provázek prodlouží, je $\Delta l > 0$ a pružná síla je souhlasně rovnoběžná s vektorem \vec{x}^0 , při zkrácení provázku, kdy je $\Delta l < 0$, je síla s vektorem \vec{x}^0 rovnoběžná nesouhlasně. Zvolíme osu x tak, že vektor \vec{x}^0 bude určovat její kladnou orientaci. Počátek osy x umístíme nakonec volně visícího horního provázku, tj. v situaci, kdy jsme na něj ještě nezavěsili těleso. Volba je zřejmá z OBR. 2.22.



OBR. 2.22: TRHÁNÍ PROVÁZKU — USPOŘÁDÁNÍ EXPERIMENTU

V první části obrázku je zakreslen pouze volně visící horní provázek a volba osy x včetně volby jejího počátku. Druhá část znázorňuje těleso zavěšené na horním provázku v klidu, dolní provázek je nezatížen. V této situaci je působení tíhové síly $M\vec{g}$ kompenzováno působením tahové síly horního provázku $(\vec{F}_h)_0 = -k \frac{x_r}{l_h} \vec{x}^0$. Těleso je ve statické rovnovážné poloze x_r . Platí

$$M\vec{g} + (\vec{F}_h)_0 = \vec{0} \implies x_r = \frac{Mgl_h}{k}.$$

Ve třetí části obrázku je zachycena obecná poloha tělesa $x(t)$ za předpokladu, že na konec dolního provázku působíme další silou \vec{F}_d . Pro její časový průběh musíme zvolit vhodný model, který jednak bude dost jednoduchý, abychom mohli snadno vyřešit pohybovou rovnici tělesa, jednak bude umožňovat vystihnout „pomalý tah“, nebo „trhnoutí“. Zvolme představu, že dolní konec dolního provázku se pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením $\vec{a}_0 = a_0 \vec{x}_0$. Ještě než sestavíme pohybovou rovnici tělesa, uvědomme si, jaké jsou okamžité délky provázků, je-li těleso v obecné poloze x . Budeme to potřebovat při vyjádření tahových sil provázků. Délka horního provázku je jednoduše $(x + l_h)$, jeho prodloužení je tedy přímo rovno souřadnici x , $\Delta l_h = x$. Souřadnice dolního konce

dolního provázku v situaci, kdy je právě ještě nezatížený, tj. v okamžiku $t = 0$, je $(x_r + l_d)$. V okamžiku t je již dolní konec dolního provázku posunut o $\frac{1}{2}a_0t^2$, má tedy souřadnici $(x_r + l_d + \frac{1}{2}a_0t^2)$. Horní konec dolního provázku má však v tomto okamžiku souřadnici x . Délka dolního provázku v okamžiku t je rovna rozdílu souřadnic jeho dolního a horního konce, tj. $x_r + l_d + \frac{1}{2}a_0t^2 - x$. Prodloužení dolního provázku je tedy $\Delta l_d = x_r - x + \frac{1}{2}a_0t^2$. A nyní již sestavme pohybovou rovnici tělesa. Kromě tíhové síly $M\vec{g}$ na ně působí tahové síly horního a dolního provázku, \vec{F}_h a \vec{F}_d . Označíme-li zrychlení tělesa jako \vec{a} , můžeme zapsat druhý Newtonův zákon ve tvaru

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_h + \vec{F}_d.$$

Pro tahové síly provázků máme

$$\vec{F}_h = -\frac{k}{l_h} x \vec{x}^0, \quad \vec{F}_d = \frac{k}{l_d} \left(x_r - x + \frac{1}{2}a_0t^2 \right) \vec{x}^0.$$

Pohyb se podle předpokladu odehrává pouze ve směru osy x , takže můžeme psát

$$M\ddot{x} = Mg - \frac{k}{l_h} x + \frac{k}{l_d} \left(x_r - x + \frac{1}{2}a_0t^2 \right).$$

Další úpravou dostaneme diferenciální rovnici druhého řádu

$$\ddot{x} + \frac{k}{M} \left(\frac{1}{l_h} + \frac{1}{l_d} \right) x = g \left(1 + \frac{l_h}{l_d} \right) + \frac{ka_0}{2Ml_d} t^2.$$

Tato rovnice je nehomogenní, s pravou stranou tvaru polynomu druhého stupně

$$f(t) = g \left(1 + \frac{l_h}{l_d} \right) + \frac{ka_0}{2Ml_d} t^2.$$

Pro kompletní zadání počáteční úlohy a získání konkrétní časové závislosti polohy tělesa musíme ještě připojit počáteční podmínky. V okamžiku $t = 0$ je podle našeho dřívějšího předpokladu těleso v rovnovážné poloze a má nulovou rychlost. Počáteční podmínky tedy jsou $x(0) = x_r = \frac{Mgl_h}{k}$ a $\dot{x}(0) = 0$. Obecné řešení homogenní rovnice (s levou stranou shodnou s naší rovnicí a s nulou na pravé straně) je

$$x_h(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad \omega^2 = \frac{k}{M} \left(\frac{1}{l_h} + \frac{1}{l_d} \right), \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme v zobecněném tvaru pravé strany, tj. jako polynom druhého stupně $x_p(t) = A + Bt + Ct^2$. Dosazením do rovnice, v níž koeficienty polynomu $f(t)$ označíme zkráceně P, Q , tj. $f(t) = P + Qt^2$, dostaneme pro A, B, C postupně

$$2C + \omega^2(A + Bt + Ct^2) = P + Qt^2 \implies (2C - P + \omega^2 A) + \omega^2 Bt + (\omega^2 C - Q)t^2 = 0,$$

$$C = \frac{Q}{\omega^2}, \quad B = 0, \quad A = \frac{P}{\omega^2} - \frac{2Q}{\omega^4}.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + \left(\frac{P}{\omega^2} - \frac{2Q}{\omega^4} + \frac{Qt^2}{\omega^2} \right).$$

Uplatněním počátečních podmínek dostaneme hodnoty konstant $a = \frac{2Q}{\omega^4}$ a $b = 0$. Řešením úlohy je tedy funkce

$$x(t) = \frac{2Q}{\omega^4} \cos \omega t + \left(\frac{Mgl_h}{k} + \frac{Qt^2}{\omega^2} - \frac{2Q}{\omega^4} \right).$$

Vyjádříme ještě tahové síly horního a dolního provázku.

$$F_h(t) = -Mg - \frac{ka_0}{2(l_h + l_d)} t^2 - \frac{2Qk}{l_h \omega^4} (\cos \omega t - 1),$$

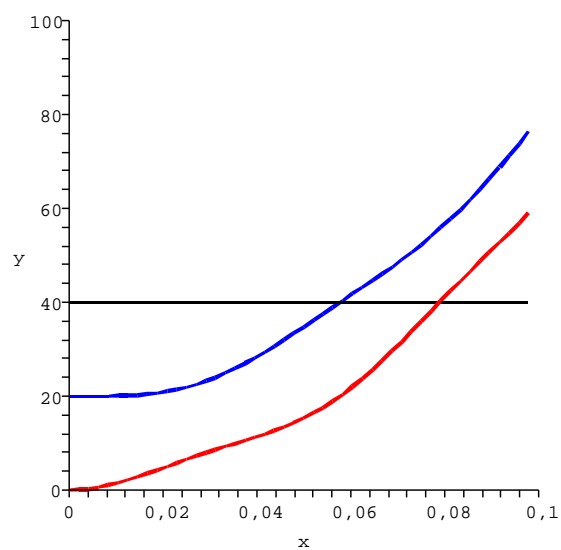
$$F_d(t) = \frac{ka_0}{2(l_h + l_d)} t^2 - \frac{2Qk}{l_d \omega^4} (\cos \omega t - 1).$$

Po zpětném dosazení za Q a trpělivě úpravě vyjádříme nakonec tyto síly pomocí původně zadaných charakteristik soustavy.

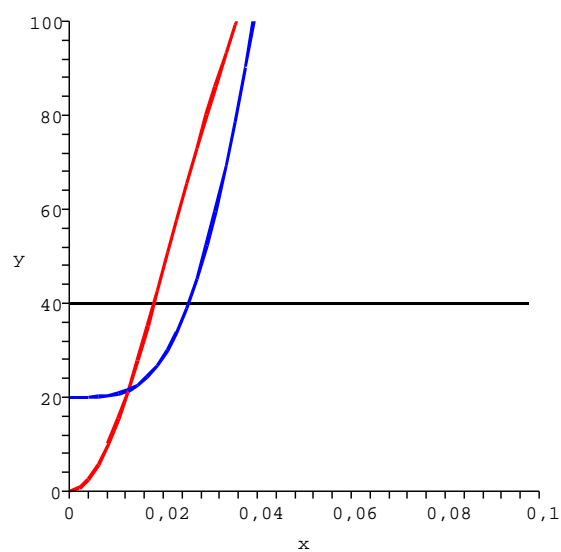
$$F_h = -Mg - \frac{ka_0}{2(l_h + l_d)} t^2 - Ma_0 \frac{l_h l_d}{(l_h + l_d)^2} (\cos \omega t - 1)$$

$$F_d = \frac{ka_0}{2(l_h + l_d)} t^2 - Ma_0 \left(\frac{l_h}{l_h + l_d} \right)^2 (\cos \omega t - 1)$$

Tyto vztahy jsou docela komplikované, ale rychlou orientační kontrolu, že by mohly být správně, snadno provedeme. Z experimentu plyne, že v čase $t = 0$, kdy je těleso v rovnovážné poloze $x(0) = x_r$ a má nulovou rychlost, musí být velikost tahové síly horního provázku rovna $F_h(0) = Mg$ a tahová síla dolního provázku nulová, $F_d(0) = 0$. Dosazením $t = 0$ do časových závislostí těchto sil zjistíme, že tomu tak opravdu je. Průběh tahových sil je znázorněn na OBR. 2.23 pro hodnoty $M = 2 \text{ kg}$, $l_h = 0,3 \text{ m}$, $l_d = 0,2 \text{ m}$, $k = 3 \text{ kN}$, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ a pro dvě hodnoty zrychlení a_0 , konkrétně $a_0 = 2 \text{ ms}^{-2}$ (obrázek vlevo — „pomalý“ tah) a $a_0 = 20 \text{ ms}^{-2}$ (obrázek vpravo — „trhnutí“).



OBR. 2.23-A: K PŘÍKLADU 2.17 — TAHOVÉ SÍLY PROVÁZKŮ, POZVOLNÝ TAH



OBR. 2.18-A: K PŘÍKLADU 2.17 — TRHNUTÍ

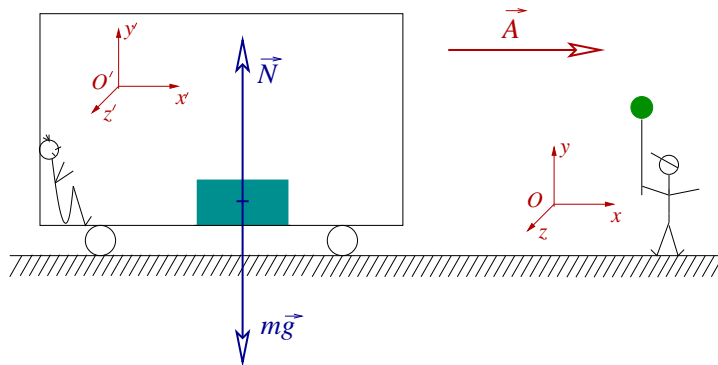
Vztahy pro tahové síly platí samozřejmě pouze do okamžiku, než některý z provázků praskne, tj. než velikost tahové síly v něm překročí mez pevnosti. Pro náš

příklad jsme zvolili mez pevnosti $F_p = 40 \text{ N}$. Jak pokus dopadne, z grafů přímo vidíme. Při pomalém tahu praskne nejprve horní provázek, při trhnutí dolní. (V grafu je znázorněn průběh velikostí tahových sil, tj. $|F_h|$ a $|F_d|$.) ♠

2.4.3 Newtonovy zákony v neinerciálních soustavách

Podle výsledků příkladu 1.13 se může zdát, že popis pohybu částice, resp. soustavy částic či tělesa v neinerciální vztažné soustavě je podstatně složitější. V konkrétních situacích tomu tak však může být právě naopak. Takovou situaci je třeba rotační pohyb tuhého tělesa (setrvačníku) kolem pevného bodu. V inerciální vztažné soustavě může být takový pohyb poměrně složitý, zejména u nesymetrického a nevyváženého tělesa, vůči pozorovateli pevně spojenému s rotujícím tělesem je však těleso dokonce v klidu. Abychom tyto situace dokázali účinně řešit, musíme umět upravit Newtonovy zákony (pokud to bude možné) pro případ neinerciálních vztažných soustav a také umět vztažnou soustavu vhodně vybrat. Nejjednodušší případ neinerciální vztažné soustavy je taková, která se vůči inerciální soustavě pohybuje pouze translačně s unášivým zrychlením \vec{A} . Jak to vypadá s druhým Newtonovým zákonem v této vztažné soustavě ukážeme na jednoduchém příkladu.

PŘÍKLAD 2.18. Po vodorovných kolejích se rozjíždí nákladní vlak se zrychlením \vec{A} . Uprostřed vagónu leží na počátku pohybu těžká bedna o hmotnosti m , která může po podlaze klouzat bez tření. Pohyb bedny pozoruje pozorovatel (výpravčí) na kolejích (laboratorní = inerciální vztažná soustava $\mathcal{S} = \langle O; x, y, z \rangle$) a pasažér ve vagónu (neinerciální vztažná soustava $\mathcal{S}' = \langle O'; x', y', z' \rangle$), přičemž stejnojmenné osy obou soustav jsou trvale rovnoběžné. Určíme zrychlení bedny v obou vztažných soustavách pouze na základě dosavadní interpretace druhého Newtonova zákona (viz OBR. 2.24).



OBR. 2.24: DRUHÝ NEWTONŮV ZÁKON V NEINERCIÁLNÍ SOUSTAVĚ

Úvaha výpravčího = IVS: Zrychlení bedny v soustavě \mathcal{S} označme \vec{a} . Na bednu působí okolní tělesa takto: Země tíhovou silou $m\vec{g}$, podlaha tlakovou


silou \vec{N} . Druhý Newtonův zákon pro zrychlení \vec{a} má tvar

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}, \quad ma_x = 0, \quad ma_y = -Mg + N, \quad ma_z = 0.$$

Tyto rovnice spolu s vazební podmínkou $y = 0 \implies a_y = 0$ vedou k teoretickému výsledku $\vec{a}_{\text{teor}} = \vec{0}$. Ze zkušenosti můžeme usoudit, že výsledek měření zrychlení \vec{a} bude ve shodě s výpočtem, tj. $\vec{a}_{\text{exp}} = \vec{0}$, aniž bychom experiment sami prováděli.

Úvaha pasažéra = NVS: Zrychlení bedny v soustavě \mathcal{S}' označme \vec{a}' . Podle toho, co o Newtonových zákonech víme, je jasné, že na bednu působí Země tíhovou silou $m\vec{g}$ a podlaha kolmou tlakovou silou \vec{N} . Žádná další tělesa, která by na bednu silově působila, v jejím v okolí nejsou (tření a odpor prostředí jsme zanedbali). Pro zrychlení \vec{a}' platí

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N}, \quad ma'_x = 0, \quad ma'_y = -mg + N, \quad ma'_z = 0.$$

Vazební podmínka je $y' = 0 \implies a'_y = 0$. Odtud $\vec{a}'_{\text{teor}} = \vec{0}$, zatímco experiment ukáže $\vec{a}'_{\text{exp}} = -\vec{A}$. Experiment je tedy v rozporu s výsledkem teoretické úvahy. 

Otázkou je kde je chyba v úvaze pozorovatele spojeného s vagónem. (Předpokládáme, že experiment je v pořádku.) Z hlediska newtonovské mechaniky je věc jasná — druhý Newtonův zákon platí v *inerciálních* vztažných soustavách. Abychom se používání druhého Newtonova zákona nemuseli pro neinerciální soustavy vzdát, pokusíme se jej opravit například tím, že k silám, jimiž působí na testovací částici reálné okolní objekty, které můžeme jasně specifikovat a popřípadě i přiřadit jejich působení jednotlivé konkrétní silové zákony, přidáme *formálně* další „pomyslnou“ sílu \vec{F}^* , která kompenzuje vliv neinerciálnosti soustavy. Opravený druhý Newtonův zákon pro bednu formulovaný pasažérem z příkladu 2.18 tedy bude vypadat takto:

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}^*, \quad ma_x = F_x^*, \quad ma_y = -mg + N + F_y^*, \quad ma_z = F_z^*. \quad (2.33)$$

Aby, při vazební podmínce $a_y = 0$, vyšlo výpočtem $\vec{a}'_{\text{teor}} = \vec{A}$ a bylo tak dosaženo shody s experimentem, je třeba položit $\vec{F}^* = -\vec{A}$. Síla \vec{F}^* zajišťující opravu druhého Newtonova zákona pro neinerciální soustavy, je tedy záporně vzatým součinem hmotnosti studované částice a unášivého zrychlení, které s částicí ovšem nijak nesouvisí. V interpretaci, která sílu \vec{F}^* považuje za formální konstrukci, se tato síla nazývá *fiktivní*, někdy také, nepřilíš vhodně, *setrvačná*.

POZNÁMKA: Poznamenejme, že interpretace síly \vec{F}^* jako fiktivní není jediná možná. Podle principu ekvivalence vysloveného A. Einsteinem nelze objektivně zjistit, zda se pozorovatel nachází v neinerciální vztažné soustavě, nebo v doadečném gravitačním poli. V našem textu budeme používat interpretace bližší newtonovskému pojetí — fiktivní síly. Obě pojetí však dávají stejné výsledky.

Získaný výsledek můžeme snadno zobecnit a vyjádřit fiktivní sílu pro případ obecné neinerciální vztažné soustavy takto:

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_u = -m \left(\vec{A} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' \right). \quad (2.34)$$

Vektor \vec{a}_u je unášivé zrychlení dané vztahem (1.64). Vektory

$$\vec{F}_t^* = -m\vec{A}, \quad \vec{F}_C^* = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}', \quad \vec{F}_{OD}^* = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \quad \vec{F}_E^* = -m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'$$

představují postupně fiktivní sílu *translační*, *Coriolisovu*, *odstředivou* a *Eulerovu*, v souladu s terminologií vztahu (1.65).

PŘÍKLAD 2.19. Modifikujme poněkud zadání příkladu 1.13. Vztažná soustava $\mathcal{S} = \langle O; x, y, z \rangle$ je inerciální, soustava $\mathcal{S}' = \langle O; x', y', z' \rangle$, která vůči ní rotuje stálou úhlovou rychlostí $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, je neinerciální. Jde o nejjednodušší případ rotačního pohybu neinerciální soustavy — rovnoměrnou rotaci. Počátky soustav trvale splývají, z -ové osy rovněž. V okamžiku $t = 0$ splývaly i osy x -ové a y -ové. Předpokládejme dále, že na částici, pro kterou platí počáteční podmínky $\vec{r}'(0) = \vec{0}$, $\vec{v}'(0) = \vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ (v soustavě \mathcal{S}) nepůsobí žádné okolní objekty. Určíme její trajektorii v soustavě \mathcal{S}' přímo aplikací „opraveného“ druhého Newtonova zákona. Podle něj je výslednice sil působících na částici z hlediska soustavy \mathcal{S}' dána pouze fiktivními silami, pro něž v tomto konkrétním případě platí, vektorově a poté ve složkách

$$\begin{aligned} \vec{F}_t^* &= \vec{0}, \quad \vec{F}_C^* = -2m\omega \vec{x}' \times \vec{v}', \quad \vec{F}_{OD}^* = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \quad \vec{F}_E^* = \vec{0}, \\ \vec{F}^* &= m(2\omega\dot{y}' + \omega^2 x', -2\omega\dot{x}' + \omega^2 y', 0). \end{aligned}$$

Pohybové rovnice částice jsou

$$\begin{aligned} \ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x' &= 0, \\ \ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y' &= 0, \\ \ddot{z}' &= 0. \end{aligned}$$

Druhou rovnici vynásobenou imaginární jednotkou (i) přičteme k první rovnici a po substituci $\xi = x' + iy'$ dostaneme soustavu

$$\ddot{\xi} + 2i\omega\dot{\xi} - \omega^2\xi = 0, \quad \ddot{z}' = 0.$$


Jejím řešením a s uvážením počátečních podmínek (v obou soustavách jsou počáteční podmínky stejné) dostaneme postupně:

- Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + 2i\omega - \omega^2 = 0$.
- Charakteristické kořeny: $\lambda_1 = \lambda_2 = -i\omega$.

- Fundamentální systém řešení: $\xi_1(t) = \exp(-i\omega t)$, $\xi_2(t) = t \exp(-i\omega t)$.
- Obecné řešení: $\xi(t) = (A + Bt) \exp(-i\omega t)$.
- Počáteční podmínky: $\xi(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = v_0$.
- Integrační konstanty: $A = 0$, $B = v_0$.
- Partikulární řešení: $\xi(t) = v_0 t \exp(-i\omega t)$, tj. $x'(t) = \operatorname{Re} \xi(t) = v_0 t \cos \omega t$, $y'(t) = \operatorname{Im} \xi(t) = -v_0 t \sin \omega t$.
- $z'(t) = 0$.

Parametrické vyjádření trajektorie částice je

$$\begin{aligned} x'(t) &= v_0 t \cos \omega t, \\ y'(t) &= -v_0 t \sin \omega t, \\ z'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Výsledek můžeme snadno porovnat s výsledkem příkladu 1.13, zaměníme-li ω za $-\omega$ (vysvětlete). 

PŘÍKLAD 2.20. Ukážeme ještě podstatu řešení pohybu matematického kyvadla ve vztažné soustavě spojené s rotující Zemí. Se Zemí spojujeme laboratorní vztažnou soustavu, kterou většinou považujeme za inerciální. Tento přístup je však pouze aproximativní a v reálných experimentech jsou odchylky od inerciálnosti měřitelné. Například velikost odstředivého zrychlení na rovníku je

$$a_{OD} = \omega^2 R_Z = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_Z \doteq 0,034 \text{ ms}^{-2},$$

což je dnešními prostředky zcela jistě hodnota měřitelná, přestože činí pouze 3 promile tíhového zrychlení.

Kyvadlo kmitající v tíhovém poli rotující Země se nazývá *Foucaultovo*. Zvolme soustavu souřadnic na zemském povrchu stejně jako na OBR. 1.8, tj. tak, že počátek spojíme s místem dané zeměpisné šířky (na zeměpisné délce výpočet nezávisí — zdůvodněte), osu x namíříme podél místního poledníku (zeměpisná délka Λ), osu y podél místní rovnoběžky (zeměpisná šířka Φ) a osu z radiálně, tj. volíme ji jako spojnicí středu Země s daným místem na povrchu směřující od středu k povrchu. Úhlová rychlost rotující Země v této soustavě souřadnic má složky $\vec{\omega} = (\omega \cos \Phi, 0, \omega \sin \Phi)$. Na kuličku kyvadla působí síly dané okolními objekty, tj. gravitační síla a tahová síla vlákna. Označíme-li φ okamžitou úhlovou výchylku kyvadla vzhledem k ose z a β úhel, který svírá průmět síly \vec{T} do vodorovné roviny s místním poledníkem, získáme složky těchto sil:

$$m\vec{g} = (0, 0, -mg), \quad \vec{T} = (T \sin \varphi \cos \beta, T \sin \varphi \sin \beta, T \cos \varphi),$$

Dále je třeba započíst síly fiktivní. Z nich s uplatní síla odstředivá a Coriolisova. Sílu související s translací — oběhem Země kolem Slunce — můžeme proti nim zanedbat, Eulerova síla je nulová, neboť rotace Země je rovnoměrná.

$$F_{OD}^* = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \quad F_C^* = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Zápis druhého Newtonova zákona má tedy tvar

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Rozepsáním do složek dostaneme pohybové rovnice Foucaultova kyvadla.



Nabízí se ještě otázka, jak je to s platností ostatních Newtonových zákonů v neinerciálních soustavách, když druhý zákon v nich v podstatě neplatí. Jde o zákon třetí, neboť z pohledu prvního zákona není taková otázka na místě. Při interpretaci síly \vec{F}^* jako fiktivní, resp. formální z hlediska opravy druhého Newtonova zákona, je zřejmé, že se síla \vec{F}^* neuplatňuje při interakci objektů, neexistuje k ní tedy reakce. Fiktivní síla „působí“ na každé těleso, které sledujeme v neinerciální vztažné soustavě, avšak nesouvisí se vzájemným působením těles. Pro fiktivní síly tedy nelze formulovat žádnou obdobu třetího Newtonova zákona.

Kapitola 3

Odvozená tvrzení klasické mechaniky

3.1 Práce a mechanická energie

3.1.1 Práce síly po křivce

3.1.2 Kinetická energie

3.1.3 Konzervativní síly a potenciální energie

3.2 Impulzové věty a zákony zachování

3.2.1 První impulsová věta

3.2.2 Druhá impulsová věta

3.2.3 Střed hmotnosti

3.2.4 Dvoučástečková izolovaná soustava

3.3 Pohyb tuhých těles

3.3.1 Rotace tuhého tělesa kolem pevné osy

3.3.2 Rotace tuhého tělesa kolem pevného bodu

Kapitola 4

Mechanika tekutin

4.1 Statická rovnováha tekutin

4.1.1 Podmínky rovnováhy

4.1.2 Tlak a jeho rozložení v tekutině

4.2 Pohyb tekutin

4.2.1 Popis pohybu kontinua

Jednoduchost popisu pohybu tělesa s diskretním rozložením hmotnosti (soustavy částic) spočívala v možnosti opatřit každou částici tělesa jejím identifikačním znakem — celočíselnou hodnotou indexové proměnné i . Všechny veličiny související s i -tou částicí byly příslušným indexem rovněž označeny: $m_i, \vec{r}_i(t), \vec{v}_i(t), \dots$. V případě kontinua, tělesa se spojitým rozložením hmotnosti, kdy neuvažujeme o hmotných bodech, ale „spojitě navazujících“ hmotných elementech, nelze diskretního indexového značení použít. Vzniká problém volby „identifikačního znaku“ hmotného elementu. Tato volba souvisí se dvěma základními metodami popisu pohybu kontinua.

První z nich, v praktických případech méně využívaná, je *metoda popisu pomocí trajektorií-Lagrangeova*. Identifikačním znakem konkrétního elementu, pohybujícího se po určité trajektorii C_ξ , je jeho polohový vektor $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ v okamžiku $t = 0$. Parametrické vyjádření trajektorie C_ξ pak představuje vektorová funkce čtyř proměnných

$$C_\xi : \vec{r}_\xi = \vec{r}(\vec{\xi}, t) = (x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)), \quad (4.1)$$

kde $\vec{r}(\vec{\xi}, 0) = \vec{\xi}$. Rychlost hmotného elementu je dána vztahem

$$\begin{aligned} \vec{v}_\xi &= \vec{v}(\vec{\xi}, t) = \frac{\partial \vec{r}(\vec{\xi}, t)}{\partial t} = \\ &= \left(\frac{\partial x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}, \frac{\partial x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}, \frac{\partial x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

OBRÁZEK 4.2-1: POPIS POHYBU KONTINUA—LAGRANGEOVA METODA

Druhá z metod, *Eulerova*, je při řešení problémů mechaniky kontinua běžnější. Využívá *popisu pohybu* hmotných elementů *pomocí proudnic*. Identifikačním znakem hmotného elementu je polohový vektor \vec{r} místa v prostoru, v němž se hmotný element nachází právě v okamžiku t , pohybový stav elementu je zadán jeho rychlostí jako vektorovou funkcí čtyř proměnných

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = (v_1(x_1, x_2, x_3, t), v_2(x_1, x_2, x_3, t), v_3(x_1, x_2, x_3, t)) . \quad (4.3)$$

Funkce (4.3) představuje z matematického hlediska *časově proměnné vektorové pole* v \mathbf{R}^3 . (Pro pevně zvolený okamžik t_0 odpovídá každému bodu \vec{r} v prostoru právě jeden vázaný vektor $\vec{v}(\vec{r}, t_0)$.) *Integrální křivky* tohoto vektorového pole, jejichž parametrické vyjádření $\vec{r} = \vec{r}(s, t_0)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{d\vec{r}(s, t_0)}{ds} = \vec{v}[\vec{r}(s), t_0] , \quad (4.4)$$

vytvářejí *obraz proudnic* rychlostního pole $\vec{v}(\vec{r}, t_0)$ v pevně zvoleném okamžiku t_0 . (Parametr s zde nemá význam času.) Každým bodem prostoru prochází v okamžiku t_0 právě jedna proudnice. Jednotlivé proudnice jsou odlišeny svými počátečními body, odpovídajícími hodnotě $s = 0$, tj. $\vec{r}(0, t_0) = \vec{\zeta}$. Koncové body vektorů $\vec{\zeta}$ vytvářejí plochu \mathcal{S} . Tu lze, jakožto dvojrozměrný útvar, popsat dvěma proměnnými. Proto hovoříme o obrazu proudnic v prostoru jako o *dvojparametrické* soustavě křivek. Vektor $\vec{v}(\vec{r}, t_0)$ je tečným vektorem k proudnici procházející bodem \vec{r} .

OBRÁZEK 4.2-2: POPIS POHYBU KONTINUA—EULEROVA METODA

Obecně je obraz proudnic v každém okamžiku jiný. Pro každý okamžik t jsou proudnice řešením rovnice (4.3), v níž zaměníme t_0 za t .

PŘÍKLAD 4.2-1. V pevně zvoleném okamžiku t je vektorové pole rychlostí v rovině \mathbf{R}^2 zadáno vztahem $\vec{v}(\vec{r}) = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)) = (2, 3x_1)$. Najdeme obraz proudnic v tomto okamžiku:

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{v}(\vec{r}) \implies \frac{dx_1(s)}{ds} = 2, \quad \frac{dx_2(s)}{ds} = 3x_1.$$

Řešením předchozí soustavy rovnic dostáváme parametrické vyjádření proudnic v okamžiku t :

$$x_1(s) = 2s + A, \quad x_2(s) = 3s^2 + 3As + B,$$

kde A, B jsou libovolné konstanty. Vyloučením parametru s obdržíme kartézské rovnice všech proudnic:

$$x_2 = \frac{3}{4}x_1^2 + Q,$$

kde $Q = B - \frac{3}{4}A^2$ je libovolná konstanta. Proudnice v rovině tedy vytvářejí *jednoparametrickou* soustavu křivek, v našem případě parabol. Parametrem křivek je veličina Q .

OBRÁZEK 4.2-3: JEDNOPARAMETRICKÁ SOUSTAVA PROUDNIC V ROVINĚ

Popis pohybu kontinua v okolí daného bodu prostoru lze vždy rozložit na tři nezávislé příspěvky: pohyb *translační*, *rotační* a *deformační*.

Jednotlivé případy nyní popíšeme odděleně.

Při čistě translačním pohybu je $\vec{r} = \vec{r}(\vec{\xi}, t) = \vec{\xi} + \vec{u}(t)$, kde vektor posunutí $\vec{u}(t)$ je nezávislý na původní poloze hmotného elementu. Pak

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{\xi}, t) = \frac{\partial \vec{r}(\vec{\xi}, t)}{\partial t} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt},$$

nezávisle na $\vec{\xi}$. Obrazem proudnic v daném okamžiku t je soustava rovnoběžných čar, jejichž hustota (počet čar protínajících jednotkovou plochu na ně kolmo) je úměrná velikosti vektoru \vec{v} . Platí

$$\vec{v}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - \vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \vec{0} \implies \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = 0, \quad j, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.5)$$

OBRÁZEK 4.2-4: SOUSTAVA PROUDNIC V OKAMŽIKU t PŘI TRANSLAČNÍM A ROTAČNÍM POHYBU KONTINUA

Představme si nyní kontinuum jako tuhé těleso vykonávající čistě rotační pohyb úhlovou rychlostí $\vec{\omega}(t)$. Pak

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r} = (\omega_2(t)x_3 - \omega_3(t)x_2, \omega_3(t)x_1 - \omega_1(t)x_3, \omega_1(t)x_2 - \omega_2(t)x_1).$$

Obecně platí

$$v_j(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t) - v_j(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx_k, \quad j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Vzhledem ke konkrétnímu tvaru vektorové funkce $\vec{v}(\vec{r}, t)$ v případě rotačního pohybu je

$$\begin{aligned} v_1(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t) - v_1(x_1, x_2, x_3, t) &= -\omega_3(t)dx_2 + \omega_2(t)dx_3, \\ v_2(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t) - v_2(x_1, x_2, x_3, t) &= -\omega_1(t)dx_3 + \omega_3(t)dx_1, \\ v_3(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t) - v_3(x_1, x_2, x_3, t) &= -\omega_2(t)dx_1 + \omega_1(t)dx_2. \end{aligned}$$

Z předchozích vztahů je vidět, že pro čistě rotační pohyb kontinua platí

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = 0, \quad j, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.6)$$

Vyjádříme nyní rozdíl $\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}, t)$ obecně:

$$\begin{aligned} v_j(\vec{r} + d\vec{r}, t) &= v_j(\vec{r}, t) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_j(\vec{r}, t)}{\partial x_k} dx_k = \\ &= v_j(\vec{r}, t) + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j(\vec{r}, t)}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \right) dx_k + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j(\vec{r}, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \right) dx_k, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

(Při úpravě výrazu $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx_k$ jsme využili formálního zápisu veličiny $C_{jk} = \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$ ve tvaru $C_{jk} = \frac{1}{2}(C_{jk} + C_{kj}) + \frac{1}{2}(C_{jk} - C_{kj})$. Interpretace výrazů na pravé straně přechází rovnice je následující (viz vztahy (4.5) a (4.6)). Člen $v_j(\vec{r}, t)$ odpovídá translačnímu pohybu, člen $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j(\vec{r}, t)}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \right) dx_k$ rotačnímu pohybu a člen $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j(\vec{r}, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \right) dx_k$ zbývá na pohyb deformační. Soubory veličin

$$A_{jk}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j(\vec{r}, t)}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \right), \quad B_{jk}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j(\vec{r}, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \right)$$

jsou složkami kartézských tenzorů druhého řádu. Tenzor \hat{A} je antisymetrický, neboť $A_{jk} = -A_{kj}$, tenzor \hat{B} je symetrický, protože $B_{jk} = B_{kj}$. \hat{B} se nazývá *tenzor rychlosti deformace*.

$$v_j(\vec{r} + d\vec{r}, t) = v_j(\vec{r}, t) + \sum_{k=1}^3 A_{jk} dx_k + \sum_{k=1}^3 B_{jk} dx_k.$$

Pohyb kontinua se nazývá *ustáleným (stacionárním) prouděním*, jestliže je vektorové pole \vec{v} časově neproměnné, tj. $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$. V takovém případě je obraz proudnic v každém okamžiku stejný. Znamená to, že každý element kontinua, který se ocitne v místě o polohovém vektoru \vec{r} , musí nabýt rychlosti \vec{v} , která je tomuto místu přiřazena vektorovou funkcí $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$, a to bez ohledu na okamžik, v němž se element v uvažovaném místě nachází. Ze skutečnosti, že vektor rychlosti elementu je v každém okamžiku tečný k jeho trajektorii a současně k proudnici, která v daném okamžiku prochází bodem trajektorie, v němž element právě je, vyplývá, že ve stacionárním případě splývají trajektorie s proudnicemi. Jejich parametrické vyjádření je řešením vektorové rovnice (4.4), v níž parametr s získává význam času, tj. $s = t$, a závislost na t_0 mizí. Vektorové počáteční podmínky mají tvar $\vec{r}_\xi(0) = \vec{\xi}$ a partikulární řešení rovnice (4.4), tj. jednotlivé trajektorie, lze zapsat jako vektorové funkce čtyř proměnných: $\vec{r}_\xi(t) = \vec{r}(\vec{\xi}, t)$.

4.2.2 Pohyb ideálních tekutin

4.2.3 Pohyb reálných tekutin

Kapitola 5

Soustavy mnoha částic a zákonitosti jejich chování

5.1 Zákony termodynamiky

5.2 Makroskopické veličiny a střední hodnoty

5.3 xxxxx