

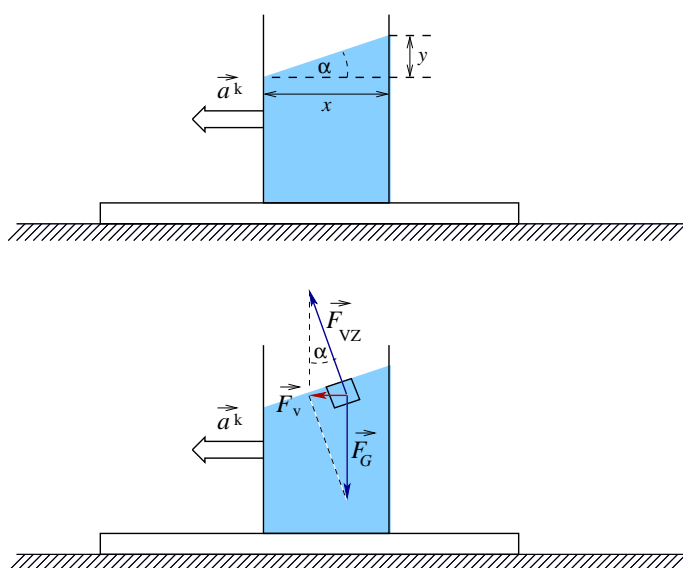
# Vysunutí papíru zpod kádinky s vodou

## Řešení

Na Videoukázkách 1–3 máte možnost shlédnout vysunutí listu papíru zpod kádinky s vodou, a to jak při reálné rychlosti experimentu, tak i zpomaleně.

### Úkol 1.:

Je ze záznamů možné stanovit velikost zrychlení kádinky vzhledem k nehybnému stolu? Pokud ne, vysvětlete, pokud ano, určete je.



Obrázek 1: Pohyb kádinky se zrychlením

### Řešení:

Zrychlení kádinky lze stanovit z úhlu, který svírá vodní hladina s vodorovnou rovinou (viz Obrázek 1, horní část). Vezmeme-li totiž v úvahu, že například na kapalinovou částici o hmotnosti  $m$  u hladiny působí Země tíhovou silou  $\vec{F}_G$ , okolní kapalina hydrostatickou vztlačovou silou  $\vec{F}_{vz}$  a jejich výslednice  $\vec{F}_v$  udělí této částici zrychlení  $\vec{a}^k$  odpovídající zrychlení kádinky, platí (viz Obrázek 1, dolní i horní část)

$$\tan \alpha = \frac{F_v}{F_G} = \frac{ma^k}{mg} = \frac{a^k}{g} = \frac{y}{x}$$

a odtud  $a^k = g \frac{y}{x}$ . Dosadíme-li za tíhové zrychlení  $g \doteq 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  a za  $x, y$  hodnoty naměřené například při pozastavení Videoukázky 2, tj.  $x \doteq 20 \text{ mm}$ ,  $y \doteq 5 \text{ mm}$ , vychází  $a^k \doteq 2,5 \text{ m.s}^{-2}$ .

### Úkol 2.:

Bylo by možné provést experiment tak, aby se kádinka vzhledem ke stolu pohybovala spolu s papírem, tj. aby byla vůči papíru v klidu? Jaké veličiny je nutno zadat, aby bylo možné pohyb papíru vzhledem ke stolu kvantitativně popsat a výsledky popisu porovnat s experimentem? Proveďte příslušný výpočet.

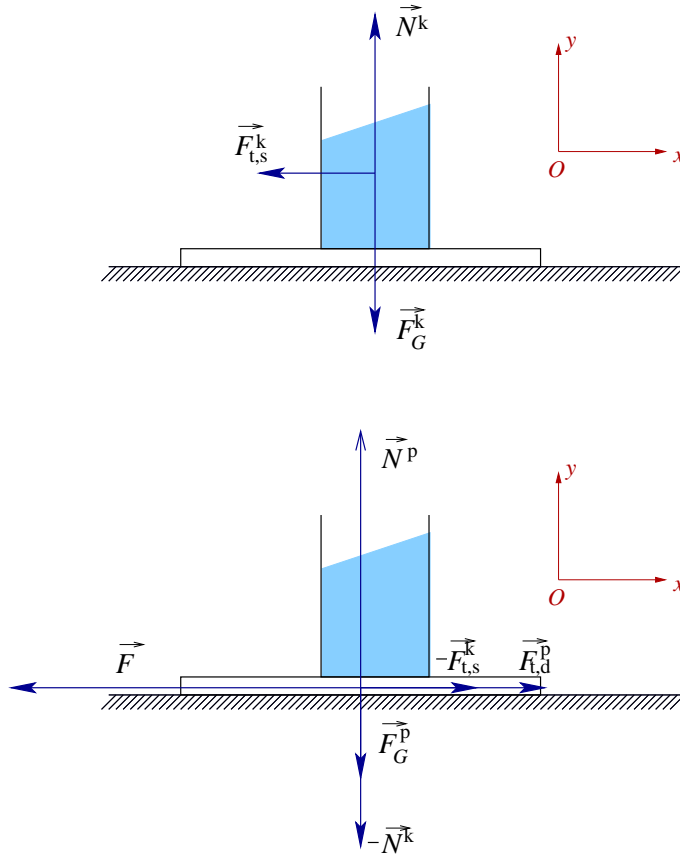
### Řešení:

Intuice nám napovídá, že při vhodném silovém působení na papír se kádinka bude vzhledem ke stolu pohybovat spolu s papírem. Protože ale intuice může být někdy zrádná, prověříme ji výpočtem. Začneme, jako vždy, výčtem a nákresem všech sil, které vstupují do hry:

- na kádinku působí Země tíhovou silou  $\vec{F}_G^k$  a papír tlakovou silou  $\vec{N}^k$  a statickou třecí silou  $\vec{F}_{t,s}^k$ , statickou proto, že kádinka je vzhledem k papíru v klidu (viz Obrázek 2, horní část; působíště jednotlivých sil jsou pro jednoduchost zakreslena do jednoho bodu — dopouštíme se tím chyby?);

- na papír působí ruka experimentátora silou  $\vec{F}$  (pro jednoduchost předpokládejme, že tato síla má vodorovný směr), Země tíhovou silou  $\vec{F}_G^p$ , stůl tlakovou silou  $\vec{N}^p$  a dynamickou třecí silou  $\vec{F}_{t,d}^p$  a kádinka statickou třecí silou  $-\vec{F}_{t,s}^k$  a tlakovou silou  $-\vec{N}^k$  (viz Obrázek 2, dolní část).

(Vzpomínáte si, že s podobnou situací jsme se setkali v **Úloze 2. Nástrahy třetí?**)



Obrázek 2: Silové diagramy pro kádinku a pro papír

Druhý Newtonův zákon pro kádinku o hmotnosti  $m^k$  má tvar

$$m^k \vec{a}^k = \vec{F}_G^k + \vec{N}^k + \vec{F}_{t,s}^k,$$

pro papír o hmotnosti  $m^p$  pak

$$m^p \vec{a}^p = \vec{F} + \vec{F}_G^p + \vec{N}^p + \vec{F}_{t,d}^p - \vec{N}^k - \vec{F}_{t,s}^k.$$

Protože se kádinka vzhledem ke stolu pohybuje spolu s papírem, platí, s uvažováním vazební podmínky (kádinka se pohybuje pouze ve vodorovném směru) ve zvolené soustavě souřadnic  $Oxy$

$$\vec{a}^k = \vec{a}^p = \vec{a} = (-a, 0).$$

(Všimněme si znaménka minus v první složce zrychlení: toto znaménko vyjadřuje skutečnost, že  $a > 0$  a společné zrychlení kádinky a papíru je nesouhlasně rovnoběžné s osou  $x$ .) Vyjádříme-li v soustavě souřadnic  $Oxy$  také složky ostatních vektorů

$$\begin{aligned} \vec{F}_G^k &= (0, -F_G^k), & \vec{N}^k &= (0, N^k), & \vec{F}_{t,s}^k &= (-F_{t,s}^k, 0), \\ \vec{F} &= (-F, 0), & \vec{F}_G^p &= (0, -F_G^p), & \vec{N}^p &= (0, N^p), \\ \vec{F}_{t,d}^p &= (F_{t,d}^p, 0), & -\vec{N}^k &= (0, -N^k), & -\vec{F}_{t,s}^k &= (F_{t,s}^k, 0), \end{aligned}$$

dostáváme druhý Newtonův zákon pro kádinku zapsaný ve složkách

$$\begin{aligned} x : & \quad -m^k a = -F_{t,s}^k, \\ y : & \quad 0 = -F_G^k + N^k \end{aligned}$$

a pro papír pak

$$\begin{aligned} x : & \quad -m^p a = -F + F_{t,d}^p + F_{t,s}^k, \\ y : & \quad 0 = -F_G^p + N^p - N^k, \end{aligned}$$

s přihlédnutím k silovým zákonům pro velikosti tíhových sil  $F_G^k = m^k g$ ,  $F_G^p = m^p g$  a pro velikost dynamické třecí síly  $F_{t,d}^p = f^p N^p$ , kde  $f^p$  je koeficient dynamického tření mezi papírem a stolem, pak nakonec pro kádinku

$$x : \quad -m^k a = -F_{t,s}^k, \quad (1)$$

$$y : \quad 0 = -m^k g + N^k \quad (2)$$

a pro papír pak

$$x : \quad -m^p a = -F + f^p N^p + F_{t,s}^k, \quad (3)$$

$$y : \quad 0 = -m^p g + N^p - N^k. \quad (4)$$

Z rovnic (2) a (4) dostáváme

$$N^k = m^k g, \quad N^p = m^p g + N^k = (m^p + m^k) g,$$

z rovnic (1) a (3) pak

$$F = \left( \frac{m^p}{m^k} + 1 \right) F_{t,s}^k + f^p N^p = \left( \frac{m^p}{m^k} + 1 \right) F_{t,s}^k + f^p (m^p + m^k) g.$$

Maximální velikost síly  $\vec{F}$ , jíž působí experimentátor na papír, je určena maximální přípustnou velikostí statické třecí síly mezi papírem a kádinkou  $F_{t,s}^{k,\max} = f_0^k N^k = f_0^k m^k g$ , kde  $f_0^k$  je koeficient statického tření mezi kádinkou a papírem. Aby se tedy kádinka vzhledem ke stolu pohybovala spolu s papírem, musí experimentátor působit na papír silou o velikosti

$$F \leq \left( \frac{m^p}{m^k} + 1 \right) F_{t,s}^{k,\max} + f^p (m^p + m^k) g = (f_0^k + f^p) (m^k + m^p) g. \quad (5)$$

Společné zrychlení papíru a kádinky vzhledem ke stolu pak určíme z rovnic (1) a (3):

$$a = \frac{F - f^p N^p}{m^p + m^k} = \frac{F - f^p (m^p + m^k) g}{m^p + m^k}. \quad (6)$$

K určení okamžitého zrychlení papíru je tedy třeba znát okamžitou velikost síly, jíž na papír působí experimentátor (její maximální přípustná velikost je určena vztahem (5)), hmotnost kádinky, hmotnost papíru a koeficient dynamického tření mezi papírem a stolem (a samozřejmě také tíhové zrychlení). Napadne vás, jak lze jednotlivé veličiny změřit?

### Úkol 3.:

Bylo by možné provést experiment tak, aby se kádinka při vysouvání papíru vzhledem ke stolu nepohybovala? Vysvětlete.

### **Řešení:**

Řešení tohoto úkolu již bude jednoduché. Z předchozích úvah je totiž zřejmé, že kádinka se vzhledem k papíru pohne poté, co statická třecí síla dosáhne své maximální přípustné velikosti  $F_{t,s}^{k,\max} = f_0^k N^k = f_0^k m^k g$ . Poté bude kádince vzhledem ke stolu udílet zrychlení dynamická třecí síla o velikosti  $F_{t,d}^k = f^k N^k = f^k m^k g$ , tj.  $a^k = f^k g$ , kde  $f^k$  je koeficient dynamického tření mezi kádinkou a papírem. Pokud se tedy kádinka vzhledem ke stolu při vysouvání papíru nemá pohybovat, musí být koeficienty statického i dynamického tření mezi kádinkou a papírem nulové. Tento požadavek však v praxi nebývá splněn.