Nástraha sedmá
Zákony zachování aneb "Není nutné vědět o všem..."

"Zákony zachování a Nástrahy?", podiví se možná nejeden čtenář. "Ve srovnání s Newtonovými zákony a s mechanikou tuhého tělesa jde přece o téměř oddechovou kapitolu! Co by nás tedy mohlo zaskočit?"

Je to právě onen "příznivý dojem z jednoduchosti" učebnicového zpracování ([1.]), který se tentokrát stává zrádným: studenti se sice seznámí se základními vztahy, do nichž si v rámci cvičení i zkusí dosadit zadané hodnoty, ale zpravidla jim zůstane utajena jak *podstata zákonů zachování*, tak *ukázky jejich četných aplikací*, často i z běžného života. K nápravě přitom stačí opravdu málo — poukázat na několik známých situací a detailně je rozebrat. Zde jich, opět formou řešených úloh, nabízíme hned několik a na další (vzhledem k omezenému rozsahu textu) odkazujeme. Se stručnější verzí některých z nich se lze setkat v učebnicích ([1.]) či v jiných pramenech ([4.], [11.]), zpravidla ovšem bez zdůraznění míst klíčových pro vlastní řešení úlohy, bez nezbytné diskuze výsledků a bez komentářů k případným souvislostem s každodenními zkušenostmi. Z takto rutinně zpracované úlohy čtenář zcela jistě nevytěží vše, co by *mohl* a *měl*: jeho znalosti jsou pak většinou jen povrchní a není proto divu, že fyziku považuje za nezáživnou vědu odtrženou od reality. Nástraha se tedy opět skrývá v učebnicích, které zatím nemají ambice vést studenty ke kritickému myšlení a rozvíjet schopnost zařazovat nové poznatky do souvislostí.

Úloha 1.:

Po vodorovné silnici jede automobil o hmotnosti m rychlostí o velikosti v_0. Jakou práci vykonají odporové síly během jeho brzdění? Potřebujeme pro výpočet učinit nějaké další předpoklady? Pokud ano, jaké a proč?

Řešení:

Pokud tuto úlohu zadáte skupině dobrovolníků, budete možná překvapeni tím, kolik z nich bude navrhovat řešit ji užitím kinematických vztahů pro *rovnoměrně zpomalený pohyb*. I kdybychom předpoklad, že se automobil pohybuje rovnoměrně zpomaleně, přijali, je každému jistě zřejmé, jaké úsilí by si vyžádalo vyjádření obecného výsledku *pouze* prostřednictvím zadaných veličin, tj. prostřednictvím hmotnosti automobilu m a jeho původní velikosti rychlosti v_0. Co kdyby se ale automobil rovnoměrně zpomaleně nepohyboval, tj. zpomalení automobilu by se s časem měnilo? Dokázali bychom úlohu vyřešit i potom? A dostali bychom stejný, nebo jiný výsledek?

Pohlédneme-li znovu na název tohoto textu, napadne nás pravděpodobně i jiná možnost: zkusit použít některého ze zákonů zachování — konkrétně *zákona zachování energie*. V našem případě platí, že součet mechanické (tj. kinetické a potenciální) a vnitřní energie soustavy "automobil+Země+okolní vzduch" je konstantní, přičemž změna vnitřní energie soustavy souvisí s hledanou prací brzdných sil (viz např. [4.]). Porovnáme-li tedy celkovou energii soustavy před sešlápnutí brzdového pedálu (velikost rychlosti automobilu je v_0) a po zastavení automobilu (velikost rychlosti automobilu je nulová), máme s využitím předpokladu, že automobil jede po vodorovné silnici, tj. jeho tíhová potenciální energie se nemění,

$$\frac{1}{2}\,mv_0^2 - \frac{1}{2}\,m0^2 = \Delta E_{\mathrm{vn}} = -W_{\mathrm{b}}\,,$$

kde $\Delta E_{\mathrm{vn}} > 0$ je změna vnitřní energie soustavy a $W_{\mathrm{b}} < 0$ je práce brzdných sil (tato veličina je záporná, neboť brzdné síly působí — stručně řečeno — vždy "*proti pohybu* tělesa"). Odtud vychází

$$W_{\mathrm{b}} = -\frac{1}{2}\,mv_0^2\,,$$

a to nezávisle na tom, *jak* se automobil během brzdění pohyboval (rovnoměrně zpomaleně/nerovnoměrně zpomaleně, přímočaře/křivočaře) a jaký charakter měla brzdná síla (třecí síla mezi pneumatikami a vozovkou, odporová síla vzduchu, atd.). ♢

Řešení ***Úlohy 1.*** napomohlo odhalit *podstatu zákonů zachování*:

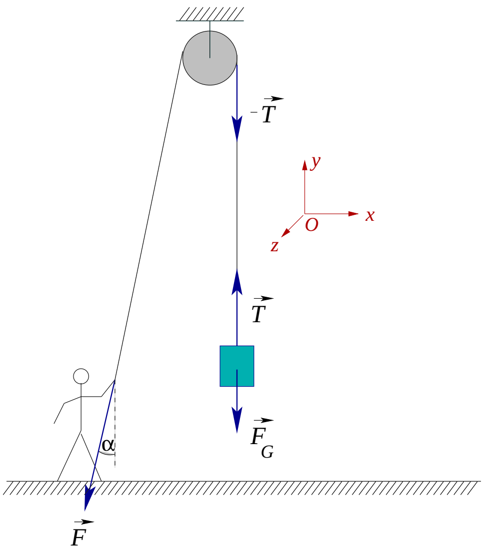
Důležité:

Zákony zachování dovolují porovnávat zachovávající se veličiny v různých okamžicích vývoje sledované soustavy, a to bez nutnosti uvažovat o tom, *co přesně se v soustavě mezi těmito okamžiky odehrává*. Kromě *zákona zachování energie* platného v uzavřených soustavách se v mechanice setkáváme také se *zákonem zachování hybnosti*, *zákonem zachování momentu hybnosti* a *zákonem zachování mechanické energie*. Zatímco první ze jmenovaných zákonů — zákon zachování energie — je postulován na základě zobecnění výsledků pozorování, zbývající tři "zákony" je možno odvodit [1]. Jejich současná platnost je přitom omezena pouze na soustavy těles, pro které jsou *vnější síly* nulové (mluvíme o tzv. *izolovaných soustavách těles*).

V tomto textu si kromě zákona zachování energie všimneme zákona zachování hybnosti a zákona zachování mechanické energie. Čtenář, který jim porozumí, již pak snadno zvládne i úlohy využívající zákona zachování momentu hybnosti (některé interpretační problémy tohoto zákona jsou popsány v [19.]). Nejprve ukážeme, jak si lze užitím zákona zachování energie poradit s úlohou, kterou jsme v ***Nástraze šesté*** řešili pomocí impulzových vět:

Úloha 2.:

Člověk zvedá pomocí válcové kladky o hmotnosti m_k a poloměru r břemeno o hmotnosti m. Na lano, o němž předpokládáme, že je nepružné a má zanedbatelnou hmotnost, při tom působí silou $\vec{F}$, která svírá se svislým směrem úhel α. S jakým zrychlením břemeno stoupá vzhůru? Jak velká tahová síla lana na břemeno působí? Tření v ose kladky zanedbejte.



Obrázek 1: Zvedání břemene pomocí kladky

Řešení:

Nechť je břemeno v okamžiku $t = 0$, kdy je člověk začíná zvedat (viz Obrázek 1), v klidu. Označme h vzdálenost, o niž se břemeno v intervalu $[0, t]$ posune, v velikost rychlosti, kterou získá a ω odpovídající velikost úhlové rychlosti kladky. Předpokládáme-li, stejně jako v ***Nástraze šesté***, že lano po kladce nepodkluzuje, je celková změna (mechanické) energie soustavy "břemeno+kladka" [2]

$$\Delta E = \frac{1}{2}\, mv^2 + mgh + \frac{1}{2}\, J\omega^2\,,$$

po dosazení $J = \frac{1}{2}\, m_\mathrm{k} r^2$ a $\omega = \frac{v}{r}$ (lano nepodkluzuje)

$$\Delta E = \frac{1}{4}\,(2m + m_\mathrm{k})\, v^2 + mgh\,.$$

Tuto energii získala soustava "břemeno+kladka" na úkor *práce síly, jíž působí člověk* (čili na úkor energie, kterou člověk čerpá z potravy). Protože je lano nepružné, působil na něj člověk silou $\vec{F}$ po

[1] Odvození lze najít ve vybraných učebnicích či skriptech určených pro úvodní vysokoškolský kurz mechaniky (např. [4.]).

[2] Vzhledem k tomu, že ve vyjádření mechanické energie soustavy vystupuje také tíhová potenciální energie, měli bychom přesněji mluvit o mechanické energii soustavy "břemeno+kladka+Země" (podrobněji viz ***Úloha 6.*** a úvod k ní).

téže dráze h, o niž se současně posunulo břemeno, tj.

$$\Delta E = W = Fh\,.$$

Poslední dvě rovnice dávají do souvislosti velikost rychlosti v břemene s dráhou h, na níž jí dosáhne:

$$\frac{1}{4}\,(2m + m_{\mathrm{k}})\,v^2 = (F - mg)\,h\,.$$

Břemeno však stoupá s konstantním zrychlením a (podrobně vysvětlete) a v okamžiku $t = 0$ je podle předpokladu v klidu, proto $v = at$ a $h = \frac{1}{2}\,(at)^2$, tedy

$$\frac{1}{4}\,(2m + m_{\mathrm{k}})\,(at)^2 = \frac{1}{2}\,(F - mg)\,at^2 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{2\,(F - mg)}{2m + m_{\mathrm{k}}}\,.$$

Aniž bychom tentokrát museli příliš detailně uvažovat o silovém působení na jednotlivé objekty soustavy, dospěli jsme ke stejnému výsledku jako v ***Nástraze šesté***. Chceme-li ovšem určit velikost síly, jíž působí lano na břemeno, už se bez výčtu sil neobejdeme (viz Obrázek 1). Platí

$$T = m\,(g + a) = m\left[g + \frac{2\,(F - mg)}{2m + m_{\mathrm{k}}}\right]\,. \qquad \diamondsuit$$

Nyní přistoupíme ke dvěma typickým úlohám na zákon zachování hybnosti. Uvidíme, že i za zadáním, které někomu může znít akademicky, lze objevit jak situace s významným praktickým dopadem, tak situace známé z každodenního života.

Úloha 3.:

Plochý železniční vozík o hmotnosti M se pohybuje po přímých vodorovných kolejích rychlostí $\vec{V}$ vzhledem k Zemi (soustavu spojenou se Zemí považujeme za inerciální). Tření mezi koly a kolejnicemi je zanedbatelné [3], odpor vzduchu rovněž. Na vozíku stojí člověk o hmotnosti m. Popište pohyb vozíku v těchto případech:

(a) Člověk se proti směru pohybu vozíku rozběhne, dosáhne vzhledem k němu rychlosti $\vec{v}_{\mathrm{r}}$ a pak se opět zastaví.

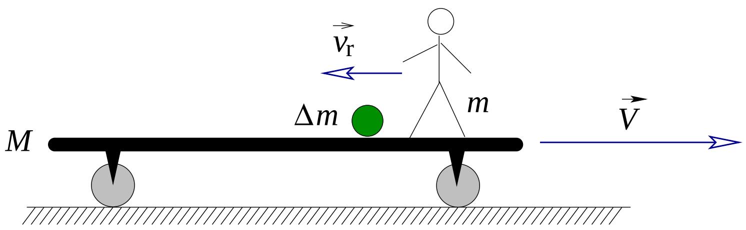
(b) Člověk se proti směru pohybu vozíku rozběhne, dosáhne vzhledem k němu rychlosti $\vec{v}_{\mathrm{r}}$ a na jeho konci z něj seskočí.

(c) Člověk vyhodí proti směru pohybu vozíku meloun o hmotnosti Δm rychlostí $\vec{v}_{\mathrm{r,m}}$ vzhledem k vozíku.

Řešení:

Protože je odpor prostředí zanedbatelný a vozík jede po vodorovných kolejích, zachovává se v soustavě "vozík+člověk (+meloun)" (viz Obrázek 2) vodorovný průmět celkové hybnosti, tedy součet hybnosti vozíku, člověka a melounu je konstantní (podrobně vysvětlete — uvažujte přitom o svislých a vodorovných průmětech působících sil).

[3] Tento předpoklad, který v podobných příkladech učebnice běžně přijímají (např. [4.]), kriticky posoudíme v *Poznámce 3* na str. 7.



Obrázek 2: Pokusy na železničním vozíku

(a) Stojící člověk se vzhledem k Zemi pohybuje stejnou rychlostí jako vozík, původní hybnost soustavy je tudíž určena vztahem

$$\vec{p}_1 = (M+m)\,\vec{V}\,.$$

Označme $\vec{V}'$ rychlost vozíku (vzhledem k Zemi) v okamžiku, kdy vůči němu člověk běží rychlostí $\vec{v}_\mathrm{r}$, tj. vzhledem k Zemi běží rychlostí $\left(\vec{v}_\mathrm{r} + \vec{V}'\right)$. Hybnost soustavy je potom

$$\vec{p}_2 = M\vec{V}' + m\left(\vec{v}_\mathrm{r} + \vec{V}'\right)\,.$$

Ze zákona zachování hybnosti

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2\,,$$

resp.

$$(M+m)\,\vec{V} = M\vec{V}' + m\left(\vec{v}_\mathrm{r} + \vec{V}'\right)$$

dostáváme

$$\vec{V}' = \frac{(M+m)\,\vec{V} - m\vec{v}_\mathrm{r}}{M+m} = \vec{V} - \frac{m}{M+m}\,\vec{v}_\mathrm{r}\,.$$

Jakmile se člověk vzhledem k vozíku zastaví, bude se vozík opět pohybovat původní rychlostí $\vec{V}$, neboť celková hybnost soustavy "vozík+člověk" zůstává konstantní (tentýž závěr lze získat i dosazením $\vec{v}_\mathrm{r} = \vec{0}$ do právě odvozeného vztahu).

Diskuze výsledku:
Uvážíme-li, že vektory $\vec{V}$ a $\vec{v}_\mathrm{r}$ jsou *nesouhlasně rovnoběžné*, potvrzuje právě odvozený vztah bezprostřední zkušenost: jakmile se člověk proti směru pohybu vozíku rozběhne, vozík se vzhledem k Zemi pohybuje rychleji.

(b) Rychlost, s níž se bude vozík pohybovat, když vzhledem k němu člověk poběží, jsme určili v části **(a)**:

$$\vec{V}' = \frac{(M+m)\,\vec{V} - m\vec{v}_\mathrm{r}}{M+m} = \vec{V} - \frac{m}{M+m}\,\vec{v}_\mathrm{r}\,.$$

Touto rychlostí pojede vozík i poté, co z něj člověk seskočí (samozřejmě za předpokladu, že se člověk při seskoku neodrazí, jinak bychom do odvozeného vztahu museli dosadit jinou rychlost $\vec{v}_\mathrm{r}$). Jak se ale dále pohybuje člověk a jak je to s celkovou hybností soustavy? Uvažme dvě krajní situace:

- Bude-li člověk i po seskoku z vozíku běžet rychlostí $\left(\vec{v}_\mathrm{r} + \vec{V}'\right)$ vzhledem k Zemi, hybnost soustavy "vozík+člověk" se nezmění.
- Člověk seskok z vozíku nezvládne a spadne (pokud je $v_\mathrm{r} < V'$, skončí "na zádech", v opačném případě "padá na kolena"). Při tom na něj působí brzdné síly podložky (rychlost člověka vzhledem k Zemi bude nakonec nulová), soustavu "vozík+člověk" již tedy nelze považovat za izolovanou a její hybnost se nezachovává. Zachovává se ovšem celková hybnost soustavy "vozík+člověk+Země".

(c) Původní hybnost soustavy "vozík+člověk+meloun" je dána vztahem

$$\vec{p}_1 = (M + m + \Delta m)\,\vec{V}\,,$$

hybnost téže soustavy po odhození melounu je

$$\vec{p}_2 = (M + m)\,\vec{V}' + \Delta m\left(\vec{v}_{\mathrm{r,m}} + \vec{V}'\right)\,.$$

Ze zákona zachování hybnosti

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2\,,$$

resp.

$$(M + m + \Delta m)\,\vec{V} = (M + m)\,\vec{V}' + \Delta m\left(\vec{v}_{\mathrm{r,m}} + \vec{V}'\right)$$

dostaneme

$$\vec{V}' = \frac{(M + m + \Delta m)\,\vec{V} - \Delta m \vec{v}_{\mathrm{r,m}}}{M + m + \Delta m} = \vec{V} - \frac{\Delta m}{M + m + \Delta m}\,\vec{v}_{\mathrm{r,m}}\,.$$

Poznámka:
Podobně jako v části **(a)** se i zde, po odhození melounu, vozík pohybuje rychleji než původně. Právě na tomto principu — postupném zbavování se částí soustavy — je založen princip raketového motoru [4]. ♢

Připomeňme:
Pozorný čtenář jistě zaregistroval, že ani v předchozí úloze jsme nemuseli uvažovat o tom, *jak* se člověk vzhledem k vozíku rozbíhá či *jak* odhazuje meloun — zajímalo nás pouze srovnání "situace před" a "situace po" rozběhu či odhození melounu. Podobně je tomu i v jiných úlohách, například hned v té následující, kdy skutečně, jak nakonec říká i podtitul této ***Nástrahy***, *nepotřebujeme* vědět, co přesně mezi sebou jednotlivá tělesa izolované soustavy v průběhu interakce "mají": stačí podívat se na ně jen občas, například před interakcí, a příslušný zákon zachování nám předpoví, jak to s nimi bude po (zpravidla obtížně popsatelné) interakci.

Úloha 4.:
Dvě kulečníkové koule o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují po vodorovné podložce rychlostmi $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$, které mají stejný směr (rychlosti jsou určeny vzhledem ke vztažné soustavě spojené se Zemí, kterou považujeme za inerciální). Určete rychlosti koulí po jejich přímém dokonale pružném středovém rázu. Tření [5] a odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:
Označme hledané rychlosti koulí po rázu $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ (viz Obrázek 3). Stejně jako v předchozí úloze platí zákon zachování hybnosti (podrobně vysvětlete)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\,.$$

Protože mají rychlosti koulí před srážkou stejný směr a ráz je podle předpokladu přímý, musí mít stejný směr i rychlosti koulí po srážce. Zákon zachování hybnosti má pak skalární tvar

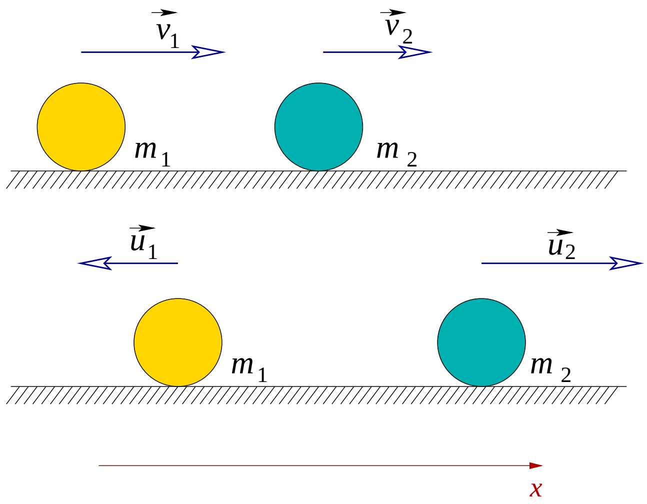
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2\,,$$

přičemž orientaci příslušné rychlosti $\vec{v}_i$, $\vec{u}_i$, $i \in \{1, 2\}$, vyjadřuje znaménko složky v_i, u_i (pokud například vyjde $u_1 < 0$, znamená to, že první koule se po rázu pohybuje proti směru osy x (viz Obrázek 3)).

---

[4] Odvození vztahu pro rychlost rakety, jejíž hmotnost se mění *spojitě* (tzv. Ciolkovského vzorec), lze najít ve vybraných učebnicích či skriptech určených pro úvodní vysokoškolský kurz mechaniky (např. [4.], [10.]).

[5] Viz opět *Poznámka 3* na str. 7.



Obrázek 3: Ráz koulí

Zatím máme jedinou rovnici pro dvě neznámé u_1 a u_2. Druhou rovnici získáme uvážením dalšího z předpokladů zadání — dokonalé pružnosti srážky. Platí tedy také zákon zachování mechanické energie, a protože se koule pohybují pouze ve vodorovné rovině, tj. jejich tíhová potenciální energie je konstantní, zachovává se kinetická energie soustavy:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\,.$$

Získané dvě rovnice pro dvě neznámé u_1 a u_2 je jistě možné řešit tak, že z první rovnice vyjádříme jednu z neznámých, například u_1, a dosadíme do druhé. Budeme ovšem muset umocnit trojčlen a poté řešit kvadratickou rovnici pro u_2, což je sice rutinní, ale zdlouhavé. Mnohem lepší bude zapamatovat si následující "trik", který řešení podobných úloh značně usnadní. Upravme obě rovnice tak, že na levé straně budou vystupovat pouze veličiny vztahující se k první kouli a na pravé straně pouze veličiny vztahující se ke druhé kouli:

$$\begin{aligned} m_1\left(v_1 - u_1\right) &= m_2\left(u_2 - v_2\right)\,, \\ m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) &= m_2\left(u_2^2 - v_2^2\right)\,. \end{aligned}$$

Podělíme-li druhou rovnici první, vyjde s uvážením známého vztahu $(a^2 - b^2) = (a - b)\cdot(a + b)$

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2\,.$$

Tato rovnice již tvoří spolu se zákonem zachování hybnosti ve skalárním tvaru jednoduchou soustavu dvou lineárních rovnic, jejímž řešením jsou hledané rychlosti koulí po rázu:

$$u_1 = \frac{m_1v_1 + m_2\left(2v_2 - v_1\right)}{m_1 + m_2}\,, \qquad u_2 = \frac{m_1\left(2v_1 - v_2\right) + m_2v_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Poznámka 1:
V průběhu řešení jsme převedli soustavu lineární a kvadratické rovnice na soustavu dvou lineárních rovnic tím, že jsme původní rovnice vhodně upravili a podělili. Je však tato úprava korektní? Pokud je $v_1 \neq u_1$ a tím současně $v_2 \neq u_2$, dělíme nenulovým výrazem, což vždy můžeme. Co ale podezřelý případ $v_1 = u_1$ a současně $v_2 = u_2$? Čtenář již jistě tuší, že jej jako nezajímavý můžeme ihned vyloučit — *ke středovému rázu koulí v tomto případě totiž nedojde*(!) (koule se sice pohybují ve stejné vodorovné rovině rychlostmi stejného směru, ale ve vzdálenosti větší, než je součet jejich poloměrů).

Diskuze výsledků:
Diskuze výsledků se odvíjí od toho, jaké jsou původní rychlosti koulí v_1 a v_2 před rázem. Zde ji provedeme pouze pro nejjednodušší situaci, kdy se první koule původně pohybuje ve směru osy x, tj. $v_1 > 0$, a druhá koule stojí, tj. $v_2 = 0$ (všechny ostatní možnosti si čtenář jistě zvládne rozmyslet sám). Potom

$$u_1 = \frac{\left(m_1 - m_2\right)v_1}{m_1 + m_2}\,, \qquad u_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}\,.$$

Vidíme, že druhá koule se po rázu v souladu s očekáváním *vždy* pohybuje ve směru osy x, kdežto směr pohybu první koule závisí na poměru hmotností m_1 a m_2:

- Pro $\frac{m_1}{m_2} < 1$, tj. $m_1 < m_2$, je $u_1 < 0$. První koule se tedy po rázu pohybuje nazpět, přičemž není těžké ověřit, že $\mid u_1 \mid < v_1$. Dodejme, že pokud $\frac{m_1}{m_2} \to 0$, tj. $m_1 \ll m_2$ (například náraz koule do zdi), platí $u_1 \to -v_1$ a $u_2 \to 0$.
- Pro $\frac{m_1}{m_2} = 1$, tj. $m_1 = m_2$, je $u_1 = 0$. První koule tedy předává veškerou svoji hybnost druhé kouli.
- Pro $\frac{m_1}{m_2} > 1$, tj. $m_1 > m_2$, je $u_1 > 0$. První koule se tedy po rázu pohybuje stejným směrem jako před rázem. Při tom platí $u_1 < v_1 < u_2$.

Předchozí závěry jistě nejsou vzhledem k četným praktickým zkušenostem se srážkami těles pro čtenáře překvapivé.

Poznámka 2:
Teď by již pro čtenáře nemělo být obtížné popsat také šikmou středovou srážku koulí — nejde totiž o nic jiného než o *vektorový zápis* zákona zachování hybnosti a ve vhodné soustavě souřadnic o jeho *rozpis do složek* (viz ***Nástraha druhá***). Úloh na šikmý ráz těles lze v literatuře (např. [4.], [11.], [23.]) najít víc než dost.

Poznámka 3 — pro pokročilé:
V předchozích dvou úlohách jsme předpokládali, že tření mezi kolejnicemi a vozíkem, resp. mezi koulemi a podložkou je zanedbatelné, což nám umožnilo použít zákona zachování hybnosti. Tento předpoklad je v literatuře často přijímán (např. [4.]). Není ale příliš omezující? Při změně rychlosti vozíku či koulí v průběhu interakce by totiž znamenal, že otáčející se části soustavy začínají *podkluzovat*(!) (srv. s ***Nástrahou šestou***). Nestačil by tedy slabší předpoklad, že zanedbáváme pouze odpor vzduchu a valivý odpor, ale připouštíme takovou velikost statických třecích sil, aby odvalující se části soustavy nepodkluzovaly? Ukážeme, že stačil. Vzhledem k tomu, že bod kontaktu valící se části soustavy s podložkou má nulovou rychlost, nekoná statická třecí síla mezi podložkou a valícím se tělesem práci (srv. s ***Úlohou 4.***) — platí tedy zákon zachování (kinetické) energie. Současně je nulový také impulz statické třecí síly — platí tedy zákon zachování hybnosti. Podrobně si oba tyto závěry rozmyslete [6]. ♢

V následující — předposlední — úloze ukážeme nejen další možnost použití zákonů zachování, ale i některá významná *omezení jejich platnosti.*

Úloha 5.:

K měření rychlosti střel lze použít tzv. *balistického kyvadla.* Jde o těleso naplněné vhodným materiálem (písek, piliny, molitan, hadry, ...) o celkové hmotnosti M zavěšené na vlákně délky l. Do něj vnikne střela o hmotnosti m a uvízne v něm. Měříme úhel θ_0, o nějž se poté těleso vychýlí (viz Obrázek 4). Jakým vztahem je pomocí měřitelných veličin M, m, l, θ_0 a g vyjádřena původní velikost rychlosti střely v?

Řešení:

Nejprve přijmeme předpoklady, za nichž budeme úlohu řešit, prodiskutujeme jejich oprávněnost a všimneme si, čím jejich přijetí řešení úlohy zjednoduší:

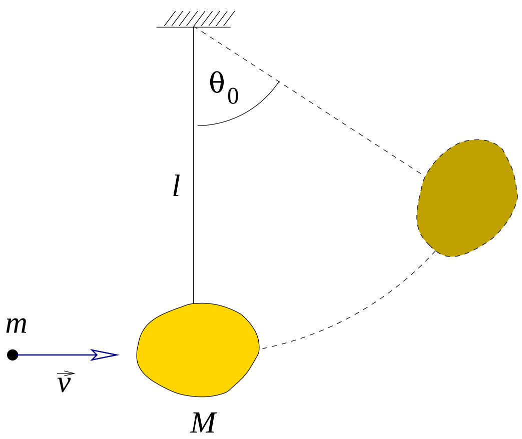
- Rychlost střely bezprostředně před rázem má vodorovný směr.
- Doba trvání rázu střely a tělesa je zanedbatelně krátká.
- Odpor vzduchu a tření v bodě závěsu kyvadla lze zanedbat.

[6]Návod: uvědomte si, že — stručně řečeno — "statická třecí síla nepůsobí podél trajektorie žádné z částic valícího se tělesa".

S komentáři k těmto předpokladům začneme od konce:

- Přijetí třetího předpokladu je pro nás již zcela standardní (komu by se chtělo uvažovat o silách odporu prostředí a stát tak před nutností řešit diferenciální rovnici pro pohyb kyvadla?) a pro malé rychlosti a doby pohybu těles s dobrou přesností splněn (odpor prostředí se "nestačí" příliš projevit).
- Druhý z předpokladů umožňuje rozdělit sledovaný proces ve dva oddělené děje, které na sebe bezprostředně navazují:
  (1) ráz střely a tělesa,
  (2) pohyb soustavy "střela+těleso" — *balistického kyvadla* — v homogenním tíhovém poli Země.

  I tento předpoklad řešení úlohy významně zjednoduší. Každý si jistě dovede představit, co by znamenalo pokoušet se popisovat pohyb kyvadla, v jehož vnitřních částech se ještě pohybuje střela(!). Navíc, zanedbatelnost doby trvání srážky nás opravňuje k použití zákona zachování hybnosti — vliv vnějších sil (tíhové a tahové) se totiž během velmi rychlého rázu nestačí příliš projevit a pro soustavu "střela+těleso" tak s dobrou přesností platí zákon zachování (vodorovných průmětů) hybnosti [7].
- Přijetím předpokladu, že rychlost střely před rázem má vodorovný směr, odpadá nutnost počítat vodorovnou složku její hybnosti, která se při rázu (samozřejmě za předpokladu zanedbatelně krátké doby trvání srážky — viz předchozí bod) zachovává.



Obrázek 4: Balistické kyvadlo

Nyní již přistupme k vlastnímu řešení úlohy, při němž, v souladu s předpoklady, odděleně popíšeme dva děje: ráz střely a tělesa a kmitavý pohyb soustavy "střela+těleso" — kyvadla.

(1) Pro *ráz střely a tělesa* platí zákon zachování hybnosti

$$m\vec{v} = (M+m)\,\vec{V}\,,$$

kde $\vec{V}$ je rychlost kyvadla bezprostředně po rázu. Protože obě vektorové veličiny mají stejný směr i orientaci, můžeme psát

$$mv = (M+m)\,V\,.$$

Zdůrazněme, že zákon zachování *mechanické* energie nyní *neplatí*, neboť střela se v tělese zastaví a část její původní mechanické energie se tak přemění v energii vnitřní (ráz je *nepružný*).

(2) Naopak, pro *pohyb soustavy "střela+těleso" po rázu* zákon zachování mechanické energie platí, ale neplatí již zákon zachování hybnosti, neboť soustava *není izolovaná* (podrobně vysvětlete). Ztotožníme-li hladinu nulové potenciální energie tíhové s vodorovnou rovinu procházející rovnovážnou polohou kyvadla a označíme-li h_0 výšku kyvadla nad touto rovinou v poloze popsané úhlem θ_0, v níž má kyvadlo nulovou rychlost, platí

$$\frac{1}{2}\,(M+m)\,V^2 = (M+m)\,gh_0 + 0\,.$$

[7]Podobný zjednodušující předpoklad se přijímá také například při vyšetřování dopravních nehod, kdy se užitím zákona zachování hybnosti počítají rychlosti aut bezprostředně před srážkou, jsou-li známy (například z měření délek brzdných stop) jejich rychlosti bezprostředně po srážce ([23.]).

Vyjádřením veličiny h_0 pomocí odpovídajícího úhlu θ_0 jako

$$\cos\theta_0 = \frac{l-h_0}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad h_0 = l\,(1-\cos\theta_0)$$

(viz ***Nástraha čtvrtá***, str. 3) dostáváme z předchozích rovnic výsledek

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gl\,(1-\cos\theta_0)}\,. \qquad \diamondsuit$$

Nejen zde, ale také v předchozích ***Nástrahách*** jsme se několikrát setkali s pojmem *tíhová potenciální energie tělesa o hmotnosti m*. Naznačili jsme také, že přesněji bychom měli mluvit o *tíhové potenciální energii soustavy "těleso+Země"*. Čtenář možná namítne: "Ano, při odvození zákona zachování mechanické energie je skutečně nutné uvažovat o (izolované) soustavě "těleso+Země". Protože Země působí na těleso v její blízkosti tíhovou silou, působí podle třetího Newtonova zákona také těleso na Zemi silou stejně velkou a opačně orientovanou, ale vzhledem k obrovské hmotnosti Země je rychlost, kterou díky tomu Země získá, zanedbatelná. Stačí tedy formulovat zákon zachování mechanické energie skutečně jen pro těleso." Druhý čtenář ale může soudit: "Rychlost, s níž se pohybuje Země vstříc tělesu, je sice velmi malá, ale hmotnost Země je obrovská, proto musíme kinetickou energii Země v celkové energiové bilanci rovněž zohlednit." Konečně třetí čtenář se může domnívat: "Rychlost tělesa přece *vždy* určujeme vzhledem k Zemi. Proč tedy vůbec uvažovat o tom, jakou získá Země v důsledku silového působení tělesa rychlost?" Posviťme si tedy v následující úloze na celý problém pořádně:

Úloha 6.:

Odvoďte zákon zachování mechanické energie pro soustavu "těleso+Země" a proveďte diskuzi pro obvyklý případ, kdy je hmotnost tělesa vzhledem k hmotnosti Země zanedbatelná a těleso se pohybuje v blízkosti Země.

Řešení:

Zanedbáme-li vliv okolních nebeských těles, lze považovat soustavu "těleso+Země" za izolovanou, platí pro ni tedy mj. zákon zachování mechanické energie. Země působí na těleso tíhovou silou $\vec{F}_G$ a podle třetího Newtonova zákona působí těleso na Zemi silou stejně velkou opačně orientovanou, tj. $-\vec{F}_G$. Země i těleso se tedy pohybují kolem *společného středu hmotnosti*, přičemž vztažnou soustavu s ním spojenou lze s dobrou přesností považovat za soustavu inerciální (srv. s ***Nástrahou pátou***). Pohyb tělesa o hmotnosti m však zpravidla skutečně popisujeme ve vztažné soustavě spojené se Zemí, proto je nutné zahrnout do druhého Newtonova zákona pro těleso i sílu setrvačnou:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_G + \vec{F}^*\,,$$

přičemž $\vec{F}^* = -m\vec{A}$, kde $\vec{A}$ je zrychlení Země vzhledem k inerciální vztažné soustavě spojené se středem hmotnosti soustavy "těleso+ +Země" (resp. vzhledem k jakékoli inerciální vztažné soustavě — proč?), tj. $\vec{A} = \frac{-\vec{F}_G}{M_Z}$, kde $-\vec{F}_G$ je, jak již bylo řečeno, síla, kterou působí těleso na Zemi, a M_Z je hmotnost Země. Celkem tedy máme

$$m\vec{a}' = \vec{F}_G + m\,\frac{\vec{F}_G}{M_Z} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{mM_Z}{m+M_Z}\,\vec{a}' = \vec{F}_G\,.$$

Získaný zápis formálně odpovídá druhému Newtonovu zákonu pro částici o tzv. *redukované hmotnosti* $\mu = \frac{mM_Z}{M_Z+m} = \frac{m}{1+\frac{m}{M_Z}}$. Zákon zachování mechanické energie pro pohyb tělesa v blízkosti Země bychom tedy správně měli psát ve tvaru

$$\frac{1}{2}\,\mu v^2 + mgh = konst\,,$$

kde v je velikost relativní rychlosti tělesa vzhledem k Zemi. V obvyklém případě je splněno $m \ll M_\mathrm{Z}$, tj. $\frac{m}{M_\mathrm{Z}} \ll 1$, s dobrou přesností tedy platí $\mu \doteq m$, proto

$$m\vec{a}' = \vec{F}_G$$

a tím také

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + mgh = konst\,.$$

Poznámka:
Pokud bychom uvažovali o pohybu tělesa i ve větších oblastech prostoru, museli bychom místo tíhové potenciální energie mgh uvažovat o gravitační potenciální energii $\left(-\kappa\frac{mM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+h}\right)$, kde κ je gravitační konstanta, R_Z je poloměr Země a h je vzdálenost tělesa od povrchu Země. Dodejme, že hladinu nulové tíhové potenciální energie jsme volili — tak, jak bývá zvykem — na povrchu Země, kdežto pro gravitační potenciální energii jsme — tak, jak bývá zvykem — volili hladinu nulové potenciální energie v nekonečnu.

Pokud upravíme jmenovatele výrazu pro gravitační potenciální energii do tvaru $R_\mathrm{Z}\left(1+\frac{h}{R_\mathrm{Z}}\right)$, lze pro $\frac{h}{R_Z} \ll 1$, tj. pro oblasti v blízkosti povrchu Země, užitím Taylorova rozvoje získat vztah pro tíhovou potenciální energii. Pokusíte se o to? ♢

Otázky, cvičení a náměty k přemýšlení:

1. Vyřešte ***Úlohu 1.*** pro případ, že

- **(a)** automobil brzdí při jízdě do kopce s úhlem sklonu α ,
- **(b)** automobil brzdí při jízdě z kopce s úhlem sklonu α .

Které veličiny je případně ještě nutné zadat a proč?

2. Jakou práci vykoná člověk, který

- **(a)** přemístí knihu o hmotnosti m rychlostí o konstantní velikosti v po dráze d, přičemž pohyb knihy se děje ve stále stejné vodorovné rovině,
- **(b)** rovnoměrně zrychleně (zrychlení má velikost a) přemístí tutéž knihu po téže trajektorii v téže vodorovné rovině,
- **(c)** rovnoměrně přemístí tutéž knihu z povrchu Země do výšky h,
- **(d)** rovnoměrně zrychleně (zrychlení má velikost a) přemístí tutéž knihu z povrchu Země do výšky h?

Ve kterých částech úlohy je třeba učinit dodatečné předpoklady o tvaru trajektorie knihy a proč?

3. V řešení ***Úlohy 2.*** nalezněte místo, kde jsme (mlčky) využili předpokladu, že lano má zanedbatelnou hmotnost. Jak by se změnil výsledek, kdyby lano zanedbatelnou hmotnost nemělo?

4. Na nakloněnou rovinu s úhlem sklonu α položíme válec o hmotnosti m a poloměru r.

- **(a)** Jakou rychlost získá válec na dráze l za předpokladu, že nepodkluzuje?
- **(b)** Jakou rychlost získá válec na dráze l za předpokladu, že podkluzuje? Koeficient dynamického tření mezi válcem a nakloněnou rovinou je f.

Úlohu řešte užitím impulzových vět i užitím zákona zachování energie. Odpor vzduchu zanedbejte.

5. Cyklista odpočívá za úplného bezvětří na vrcholku kopce v nadmořské výšce h a plánuje si taktiku sjezdu. Vzhledem k tomu, že je unaven po stoupání, rozhodne se dále nešlapat. Protože má ihned po sjezdu, který není nijak zvlášť nebezpečný, následovat stoupání, nehodlá ani brzdit. Jakou práci vykonaly odporové síly, zastavilo-li se v protisvahu kolo v nadmořské výšce $\bar{h}$? Je třeba učinit nějaké předpoklady o tvaru trajektorie cyklisty? Zdůvodněte.

6. Určete rychlost, jíž dosáhne vozík z ***Úlohy 3.***, jestliže člověk postupně odhodí jeden, dva, tři, $\ldots$, $(n-1)$, n stejných melounů.

7. Jaké síly (směr, orientace, velikost) působí na vozík i na člověka z ***Úlohy 3.*** v následujících situacích?

(a) Člověk se vzhledem k vozíku rozbíhá s konstantním zrychlením $\vec{a}$.

(b) Člověk odhazuje meloun tak, že na něj v jistém časovém intervalu působí konstantní silou $\vec{F}$.

8. Do stojícího železničního vagónu o hmotnosti m_1 narazí železniční vagón o hmotnosti m_2 jedoucí rychlostí o velikosti v_2 a pevně se s ním spojí.

(a) Určete rychlost obou vagónů po rázu.

(b) Jaká část původní mechanické energie soustavy se přeměnila v energii vnitřní?

9. Na hladké vodorovné podložce leží těleso o hmotnosti M, které je vodorovnou ideální pružinou připevněno ke svislé stěně. Směrem k tělesu je vystřelena střela o hmotnosti m počáteční rychlostí $\vec{v}$, která má vodorovný směr. Po rázu vzniknou kmity o amplitudě A. Určete periodu kmitů v případě, že

(a) střela v tělese uvízne,

(b) střela se pružně odrazí.

Jaká část původní mechanické energie střely se v jednotlivých případech přeměnila ve vnitřní energii? (Převzato z [11.])

10. Dokažte, že práce tíhové síly mezi danými body A a B nezávisí na tvaru trajektorie, která tyto body spojuje (tj. pole tíhové síly je *konzervativní*).

****

Příbuzné texty:

- ▷ ***Hlavní text***
- ▷ ***Nástraha první***
  Není pohyb jako pohyb aneb Kinematika jako zahřívací předkolo
- ▷ ***Nástraha druhá***
  Vektory, průměty, složky, velikosti, … aneb Jak se vypořádat s řešením úloh?
- ▷ ***Nástraha třetí***
  Rozumíme silám tření? aneb K čemu slouží vazební podmínky?

▷ *Nástraha čtvrtá*
Dynamika křivočarého pohybu aneb Jak se vyhnout tradičním omylům?

▷ *Nástraha šestá*
Když se sejde více částic aneb Mechanika tuhého tělesa

▷ *Nástraha šestá*
Když se sejde více částic aneb Mechanika tuhého tělesa

▷ *Nástraha osmá*
Vody stojaté i tekoucí aneb Mechanika kapalin

▷ *Nástraha devátá*
Když Newtonovy zákony nestačí aneb Termodynamika a statistická fyzika v kostce

▷ *Nástraha desátá — bonusová*
Příliš těžké ??? aneb Několik úloh "s hvězdičkou"