

Конспект занятия

25            2022 .

Часть 3

# 1 Простейшие квадратурные формулы

## 1.1 Формула прямоугольника

### Определение

Пусть вес  $\rho(x) \equiv 1$ , тогда  $(a, b)$  – конечен. ИКФ с одним узлом будем называть *КФ прямоугольника*.

Таким образом, общий вид *КФ прямоугольника*

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_1 \cdot f(x_1). \quad (1)$$

Так как мы имеем ИКФ с одним узлом, ее АСТ  $d \geq 0$ , и значит любая КФ прямоугольника будет точна для констант. Это даст возможность определить коэффициент  $A_1$ . Рассмотрим  $f(x) \equiv 1$  и запишем условие точности для нее

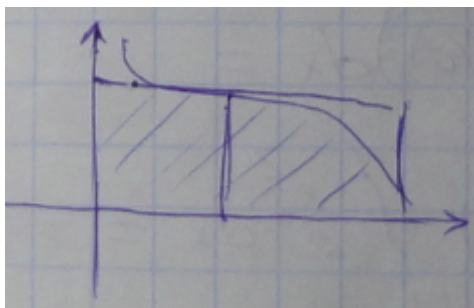
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dx = (b - a) = A_1 \cdot f(x_1) = A_1.$$

Имеем, при любом выборе узла  $x_1$  *КФ прямоугольника* всегда имеет коэффициент равный  $(b - a)$ . Значит, если определить *КФ прямоугольника* через описание, получим такую КФ

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \cdot f(x_1). \quad (2)$$

### Замечание

1) Формула получила свое название из-за очевидной геометрической интерпретации: интеграл, как площадь криволинейной трапеции, заменяется на площадь прямоугольника со сторонами  $(b - a)$  и  $f(x_1)$ .



2) Ясно, что *КФ прямоугольника* для фиксированного  $[a, b]$  (как любая ИКФ) однозначно определяется выбором узла  $x_1$ .

3) Вообще говоря, узел  $x_1$  не обязательно из  $[a, b]$ .

Получим три наиболее часто употребляемые *КФ прямоугольника*. При этом построение КФ и формулу для остатка мы будем получать для отрезка  $[0, 1]$ , а затем для произвольного  $[a, b]$  строить подобную КФ и рассчитывать остаток по свойству 6, которым завершилась предыдущая Лекция №15.

При получении представления остатка (погрешности КФ) нам будет полезна

### Теорема (о среднем значении)

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на конечном  $[a, b]$ , если при этом

1.  $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$  ( $f$  ограничена);
2.  $g(x)$  не меняет знак на  $[a, b]$ .

Тогда  $f(x)g(x)$  также интегрируемо на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) \, dx,$$

где  $m \leq \mu \leq M$ .

Если же  $f \in C[a, b]$ , то  $\exists \eta \in [a, b] : \mu = f(\eta)$ . Значит,

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\eta) \cdot \int_a^b g(x) \, dx.$$

### 1.1.1 Квадратурная формула левого прямоугольника

Рассмотрим вес  $\rho(x) \equiv 1$ ,  $[a, b] = [0, 1]$ . Пусть узел  $x_1 = 0$  – левый конец отрезка. Тогда имеем *КФ левого прямоугольника*

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx f(0) \quad (3)$$

Погрешность формулы (3)

$$R_\Lambda(f) = \int_0^1 f(x) \, dx - f(0) = \int_0^1 (f(x) - f(0)) \, dx$$

по теореме Лагранжа, в предположении что  $f \in C^1[0, 1]$

$$= \int_0^1 \underbrace{x}_{\text{знакопост.}} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\text{огранич.}} \, dx = f'(\eta) \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\int_0^1 x \, dx} = \frac{1}{2} \cdot f'(\eta).$$

Получили представление остатка в форме Лагранжа:  $m = 1, C_1 = 1/2$ :

$$R_\Lambda(f) = \frac{1}{2} \cdot f'(\eta), \quad \text{где } \eta \in [0, 1].$$

Тогда общем случае на отрезке  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx (b-a) f(a) \quad (4)$$

В нашем случае  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $[c, d] = [a, b]$ ,  $q = (b-a)$ . По упомянутому ранее свойству погрешностей подобных КФ, находим

$$C_2 = C_1 \left( \frac{d-c}{b-a} \right)^{m+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{b-a}{1-0} \right)^2$$

$$R_\Lambda(f) = C_2 f'(\chi) = \frac{1}{2} (b-a)^2 f'(\chi), \quad \chi \in [a, b].$$

### 1.1.2 Квадратурная формула правого прямоугольника

Рассмотрим вес  $\rho(x) \equiv 1$ ,  $[a, b] = [0, 1]$ . Пусть узел  $x_1 = 1$  – правый конец отрезка. Тогда имеем *КФ правого прямоугольника*

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx f(1). \quad (5)$$

Получим погрешность формулы (5)

$$\begin{aligned}
 R_{\Pi}(f) &= \int_0^1 f(x) \, dx - f(1) = \int_0^1 (f(x) - f(1)) \, dx \\
 \text{по теореме Лагранжа, в предположении что } f &\in C^1[0, 1] \\
 &= \int_0^1 \underbrace{\left( \underbrace{x-1}_{\text{знакопост.}} \right)}_{\text{огранич.}} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\text{огранич.}} \, dx = f'(\eta) \cdot \underbrace{\left( -\frac{1}{2} \right)}_{\int_0^1 (x-1) \, dx} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot f'(\eta).
 \end{aligned}$$

Снова получили представление остатка в форме Лагранжа:  $m = 1, C_1 = -1/2$ :

$$R_{\Pi}(f) = -\frac{1}{2}f'(\eta), \quad \eta \in [0, 1].$$

Тогда общем случае на отрезке  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx (b-a) f(b). \quad (6)$$

Аналогично, получаем представление остатка в форме Лагранжа формулы (6)

$$R_{\Pi}(f) = -\frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\chi), \quad \chi \in [a, b].$$

*Замечание*

Из представления погрешностей  $R_{\Lambda}(f)$  и  $R_{\Pi}(f)$  очевидно, что АСТ КФ *левого прямоугольника* и АСТ КФ *правого прямоугольника* равны 0.

### 1.1.3 Квадратурная формула среднего прямоугольника

Рассмотрим вес  $\rho(x) \equiv 1$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ . Пусть узел  $x_1 = 0$  – середина отрезка. Тогда имеем КФ *среднего прямоугольника*

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx \approx 2f(0) \quad (7)$$

Получим погрешность формулы (7) в предположении, что  $f \in C^2[-1, 1]$

$$\begin{aligned}
 R_{\text{mid}}(f) &= \int_{-1}^1 f(x) \, dx - 2f(0) = \int_{-1}^1 (f(x) - f(0)) \, dx = \int_{-1}^1 \left( x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\xi(x)) \right) \, dx \\
 &= 0 + f''(\eta) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{f''(\eta)}{3}.
 \end{aligned}$$

Итак, имеем представление остатка в форме Лагранжа  $m = 2, C = 1/3$ :

$$R_{\text{mid}}(f) = \frac{1}{3}f''(\eta), \quad \eta \in [-1, 1].$$

Для произвольного  $[a, b]$  КФ *среднего прямоугольника*

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad (8)$$

а представление погрешности (так как коэффициент подобия  $q$  в этом случае равен  $\frac{b-a}{2}$ )

$$R_{\text{mid}}(f) = \frac{1}{3} \left( \frac{b-a}{2} \right)^3 f''(\chi) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\chi), \quad \chi \in [a, b].$$

*Замечание*

Из представления погрешности  $R_{\text{mid}}(f)$  ясно, что АСТ КФ *среднего прямоугольника* равна 1. Это значение  $d = 1$  является наивысшим значением АСТ для КФ с одним узлом.

*Замечание*

Для всех остальных вариантов выбора узла  $x_1$  нет представление остатка в форме Лагранжа.

**Пример**

$$\int_0^2 f(x) dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(1).$$

$$f = 1 \quad : \quad 2 = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1$$

$$f = x \quad : \quad 2 = A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1$$

поэтому

$$A_1 = 0, A_2 = 2.$$

## 2 Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Рассмотрим вес  $\rho(x) \equiv 1$ ,  $[a, b]$  конечный. Рассмотрим  $n \in \mathbb{N}$ , разобьем  $[a, b]$  на  $n$  частей с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$ . Точки деления обозначим  $x_k^{(n)} = a + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

**Определение**

КФ *Ньютона-Котеса* — это ИКФ для веса  $\rho(x) \equiv 1$  по конечному  $[a, b]$ , узлы которой — точки  $x_k^{(n)}$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \quad (9)$$

*Замечание*

Таким образом, рассматривая  $n = 1, 2, \dots$  мы, на самом деле, имеем последовательность КФ. Общее число узлов *КФ Ньютона-Котеса*, соответствующей параметру  $n$ , равно  $N = n + 1$ .

Определим АСТ *КФ Ньютона-Котеса*. Так как она — ИКФ с  $(n + 1)$  узлом,  $d \geq n$ , (с ростом  $n$   $d$  не убывает). Можно показать, что  $d$  — нечетно, и вот из каких соображений:

1) узлы  $x_k^{(n)}$  расположены симметрично относительно середины  $[a, b]$ ;

2)  $\rho(x) \equiv 1$ , очевидно, ведет себя четным образом относительно  $\frac{a+b}{2}$ .

Тогда, по доказанному ранее свойству, симметричным узлам отвечают одинаковые коэффициенты, то есть  $A_k^{(n)} = A_{n+1-k}^{(n)}$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots, n$ . Подставим в формулу (9) нечетную функцию

$$f(x) = \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^{2j+1}, \quad \forall j = 0, 1, \dots$$

Значит, *КФ Ньютона-Котеса*  $\forall n$  точно интегрирует все нечетные степени.

**Утверждение**(без доказательства)

АСТ *КФ Ньютона-Котеса* (9) задается равенствами:

$$d_n = n, \quad n = 2\ell + 1; \quad d_n = (n + 1), \quad n = 2\ell.$$

Рассмотрим первые три КФ в последовательности.

## 2.1 Квадратурная формула трапеции

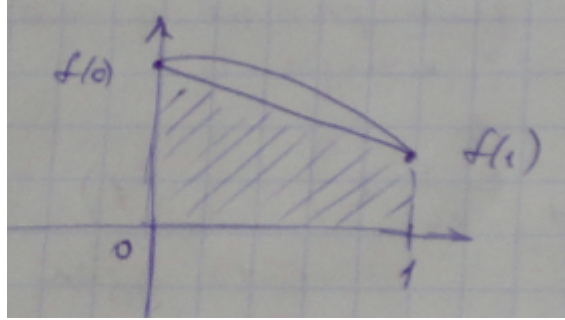
Пусть  $n = 1$ ,  $N = n + 1 = 2$ . Имеем два узла  $x_0^{(1)} = a$ ,  $x_1^{(1)} = b$ . Искомые коэффициенты равны между собой:  $A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = A$ .

$$\int_a^b f(x) dx \approx Af(a) + Af(b),$$

АСТ формулы  $\geq (2 - 1) = 1$ , т.е. для  $f(x) \equiv 1$  формула должна быть точна. Откуда получаем  $(b - a) = \int_a^b f(x) dx = A \cdot 1 + A \cdot 1 = 2A \implies A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = \frac{b-a}{2}$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b)). \quad (10)$$

Из-за четкой геометрической интерпретации КФ (10) получила название *КФ трапеции*.



Снова сначала получим представление погрешности для  $[0, 1]$ , а затем применим известное свойство для остатков подобных формул. Наша КФ — ИКФ по узлам 0 и 1 (если интегрируем по  $[0, 1]$ ), то  $f(x) = P_1(x) + r(x)$ . Причем погрешность интерполирования

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \omega(x) = \frac{f''(\xi)}{2} x(x-1), \quad \text{значит погрешность КФ} \\ R_{\text{tr}}(f) &= \int_0^1 \rho(x) r(x) dx = \int_0^1 \frac{f''(\xi(x))}{2} x(x-1) dx \\ &= \frac{1}{2} f''(\eta) \int_0^1 x(x-1) dx = \frac{1}{2} f''(\eta) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{12} f''(\eta), \quad \eta \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Это представление остатка в форме Лагранжа,  $m = 2$ ,  $C_1 = -\frac{1}{12}$ .

Теперь получим представление остатка для произвольного  $[a, b] \neq [0, 1]$ .

$$R_{\text{tr}}(f) = -\frac{1}{12} \left( \frac{b-a}{1} \right)^3 f''(\chi) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\chi), \quad \chi \in [a, b].$$

*Замечание*

Из представления погрешности *КФ трапеции* ясно, что ее АСТ = 1.

## 2.2 Квадратурная формула Симпсона (параболы)

Пусть  $n = 2$ , общее число узлов  $N = n + 1 = 3$ . Построим ИКФ для  $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f(0) + A_3 f(1).$$

Определим коэффициенты. Точность для констант приводит к равенству  $A_1 + A_2 + A_3 = 2$ . Кроме того, узлы расположены симметрично, значит отвечающие им коэффициенты равны:  $A_1 = A_3$ . Возьмем

$$f(x) = x^2$$

для нее формула должна быть точна, так как АСТ ИКФ с тремя узлами  $\geq 2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^2 dx &= \frac{2}{3} = A_1 + A_3 \implies A_1 = A_3 = \frac{1}{3} \\ A_2 &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Получили формулу для  $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} (f(-1) + 4f(0) + f(1)).$$

Получим представление погрешности этой КФ.

Узлы КФ (и, что то же самое, узлы интерполяции) это  $-1, 0, 1$ , значит многочлен

$$\omega(x) = (x+1)x(x-1).$$

Очевидно,  $\omega(x)$  меняет знак на  $[-1, 1]$ , значит действовать как в случае КФ прямоугольников или КФ трапеции нельзя. Поэтому простой интерполяцией здесь не обойтись.

По табличке

$x$	$f$	$f'$
-1	$f(-1)$	
0	$f(0)$	$f'(0)$
1	$f(1)$	

построим  $H_3(x)$  — многочлен Эрмита. Посмотрим на погрешность интерполирования Эрмита

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \cdot \Omega(x), \quad \Omega(x) = (x+1)x^2(x-1) = x^2(x^2-1).$$

Имеем:

$$\begin{aligned}R_{\text{Simpson}}(f) &= \int_{-1}^1 f(x) dx - \frac{1}{3} (f(-1) + 4f(0) + f(1)) \\ &= \int_{-1}^1 (f(x) - H_3(x)) dx \\ &= \frac{1}{24} \int_{-1}^1 f^{(4)}(\xi(x)) \Omega(x) dx \\ &= \frac{1}{24} \int_{-1}^1 f^{(4)}(\xi(x)) x^2(x^2-1) dx \\ &= \frac{1}{24} f^{(4)}(\eta) \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \cdot 2 \\ &= -\frac{1}{90} f^{(4)}(\eta).\end{aligned}$$

Таким образом, есть представление остатка в форме Лагранжа ( $m=4$ ,  $C_1 = -1/90$ ):

$$R_{\text{Simpson}}(f) = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (-1, 1).$$

Для интегрирования по произвольному конечному  $[a, b]$  формула выглядит так

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right), \quad (11)$$

ее остаток также имеет представление в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} R_{\text{Simpson}}(f) &= -\frac{1}{90} f^{(4)}(\chi) \left( \frac{b-a}{2} \right)^5 \\ &= -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\chi), \quad \chi \in (a, b). \end{aligned}$$

### 2.3 Формула 3/8

Пусть  $n = 3$ , общее число узлов  $N = n + 1 = 4$ . Справочно приведем *формулу трех восьмых* для  $[-1, 1]$  и произвольного  $[a, b]$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx 2 \cdot \left( \frac{1}{8} \cdot f(-1) + \frac{3}{8} \cdot f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8} \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8} \cdot f(1) \right) \\ \int_a^b f(x) dx &\approx (b-a) \cdot \left( \frac{1}{8} \cdot f(a) + \frac{3}{8} \cdot f(a+h) + \frac{3}{8} \cdot f(a+2h) + \frac{1}{8} \cdot f(b) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $h = (b-a)/3$ .

### 2.4 Поведение коэффициентов КФ Ньютона–Котеса

Вспомним оценку (3) из Лекции №15:

$$|R_N(f)| \leq \left( \int_a^b |\rho(x)| dx + \sum_1^N |A_k| \right) E_d(f).$$

Из нее легко получалось *Утверждение 1* о сходимости квадратурных сумм к точному значению интеграла (или, что то же самое, о сходимости к нулю  $R_N(f)$ ). Однако это было верно в предположении, что  $d \rightarrow +\infty$  и ограниченности сумм модулей коэффициентов КФ.

Для последовательности КФ Ньютона–Котеса имеет место неограниченный рост АСТ, что хорошо, но сумма модулей коэффициентов неограниченно растет с ростом  $N = n + 1$ , это было показано Р.О.Кузьминым, который установил асимптотические формулы для коэффициентов, откуда вытекает, что

$$\sum_{k=0}^n |A_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ при том, что } \sum_{k=0}^n A_k = b-a. \quad (13)$$

*Замечание:*

- 1) Первую таблицу коэффициентов для  $n = 1, 2, \dots, 10$  получил Котес. Оказалось, что при  $n = 8$  и  $n = 10$  среди коэффициентов встречаются отрицательные. При том, что вес неотрицателен.
- 2) В последующем были вычислены коэффициенты для  $n > 10$ . Оказалось, что среди них есть как положительные, так и отрицательные числа.
- 3) Из (13) можно сделать заключение, что при больших  $n$  среди коэффициентов есть как положительные, так и отрицательные. Более того, есть доказательство того, что это утверждение верно  $\forall n \geq 10$ .
- 4) Применять КФ Ньютона–Котеса при больших  $n$  нецелесообразно. Лучше добиваться повышения точности вычисления интеграла путем разбиения отрезка интегрирования на множество частичных отрезков, на каждом из которых применять КФ Ньютона–Котеса с небольшим  $n$ .

Такой путь приводит к составным КФ, которые мы рассмотрим на следующей лекции.