ГРУППЫ 19.Б07-мм – 19.Б10-мм
V семестр, 2021/2022 уч. год

Лабораторная работа 4.2

Приближённое вычисление интеграла по составным квадратурным формулам

Написать программу для вычисления определенного интеграла при помощи составных квадратурных формул (СКФ).

1) Параметры задачи: пределы интегрирования A, B, весовая функция $\rho(x)$ и функция $f(x)$, m – число промежутков деления $[A, B]$.
2) **Для случая $\rho(x)\equiv 1$ и легко интегрируемой функции $f(x)$** вычислить точно и вывести на печать значение интеграла от $\rho(x)\cdot f(x)$ по конечному $[A, B]$. (Обозначим это значение за J).
3) Вычислить приближённо и вывести на печать значение интеграла от $\rho(x)\cdot f(x)$ по $[A, B]$ при помощи СКФ
   - *Левых прямоугольников;*
   - *Правых прямоугольников;*
   - *средних прямоугольников;*
   - *трапеций;*
   - *Симпсона*

   с параметром m. Обозначим эти значения $J(h)$, здесь $h = (B–A)/m$).
4) Посчитать и вывести на печать $|J - J(h)|$ — абсолютную фактическую погрешность для каждой составной КФ.
5) Для каждой составной КФ оценить погрешность вычислений для фиксированного набора параметров (теоретически, смотри сводную оценку погрешности для СКФ).
6) Вывести на печать теоретическую оценку, сравнить ее с фактической погрешностью (устно).

При отладке программы обязательно протестировать все квадратурные формулы на многочленах степеней, соответствующих их (формул) алгебраической степени точности.

7) Знать/найти ответы на следующие вопросы:

- Сколько (в терминах m) значений функции $f(x)$ участвует (в теории, а не при Вашей реализации программы) в вычислении интеграла по каждой СКФ?
- Почему, несмотря на то, что АСТ КФ средних прямоугольников равна 1, а АСТ Симпсона равна 3, они обе точны для $f(x)= 1{,}27\cdot x^5+2{,}04\cdot x$ при интегрировании по $[a, b]= [-5, 5]$ и для $[a, b]= [-90, 90]$?
- *Если ответ на предыдущий вопрос не находится, подумайте, почему для той же функции не будет точности, например, для $[a, b]= [-1, 5]$?

Лабораторная работа № 4.3

1) Увеличить m в l раз (здесь l – параметр, натуральное число; запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры).
2) Вычислить приближённо и вывести на печать значения интеграла от $\rho(x)\cdot f(x)$ по $[A, B]$, посчитанные при помощи составных формул *левых, правых, средних прямоугольников, трапеций* и *Симпсона* с новым числом делений $[A, B]$ – $m\cdot l$. (Обозначим это новое значение за $J(h/l)$).
3) Посчитать и вывести на печать абсолютную фактическую погрешность каждой формулы для случая нового числа промежутков разбиения $m\cdot l$.
4) Уточнить значения $J(h)$ и $J(h/l)$ по принципу Рунге для каждой СКФ.
5) Посчитать и вывести на печать абсолютные фактические погрешности для уточнённых значений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ к ЛР 4.2

ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:

1) пределы интегрирования A, B (запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры);
2) весовая функция $\rho(x)$ и функция $f(x)$ (описать в коде вес $\rho(x)$ положить $\equiv 1$ и несколько вариантов для функции $f(x)$, в частности, обязательно рассмотреть функции-многочлены: нулевой, первой и третьей степени);
3) m – число промежутков деления $[A, B]$ (запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры).

НА ЭКРАНЕ (в блоке по тестовой задаче) должна быть отражена следующая информация:

1) название задачи;
2) $A=$, $B=$, $m=$, значение $h=(B–A)/m$;
3) J – точное значение интеграла (находить вручную, через первообразную или с помощью матпакета);
4) далее, для каждой составной квадратурной формулы (далее СКФ) выводить:
   - значение $J(h)$;
   - абсолютную фактическую погрешность $|J - J(h)|$;
   - теоретическую погрешность = $Const\cdot M_{d+1}\cdot(b-a)\cdot h^{d+1}$.

Здесь d – АСТ СКФ, $M_{d+1}=\max_{[a,b]}|f^{(d+1)}(x)|$, *Const=1/2 для СКФ левых и правых, 1/12 для трапеций, 1/24 для средних и 1/2880 для СКФ Симпсона.*

ФОРМЫ КОНТРОЛЯ:

1) Все составные КФ должны быть точны (погрешность *0* или машинный *0*) для $f(x)=const$, однако, наиболее важно проверить точность СКФ левых и правых прямоугольников при тестировании программы;

2) Оставшиеся составные КФ должны быть также точны для f(x)– многочленов первой степени, а КФ Симпсона точна для произвольного многочлена второй и третьей степени.

«ПРОВЕРКА НА ПРОЧНОСТЬ»:

Протестировать программу для случая, когда искомое значение интеграла довольно велико (подобрать такие *f(x)* и [*A*, *B*]). «Поиграть» числом разбиений *m* (от 10 000 до 1 000 000).

- Убедиться, что программа «не ломается».
- Убедиться, что СКФ Симпсона при умеренном числе разбиений (1000, 10000) дает результат, более точный чем при миллионе.
- Подумать, с чем может быть связана потеря точности «у Симпсона».