Конспект занятия
от 23 ноября 2021 г. Часть 1

лектор Лебедева А.В.

СПбГУ, мат-мех факультет, V семестр обучения

1 Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности

Рассмотрим КФ вида

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k) \tag{1}$$

где весовая функция $\rho(x)$:

1. $\rho(x) \geq 0\ \forall x \in (a,\, b)$ (знакопостоянна; не умаляя общности будем считать ее неотрицательной)
2. $\exists\, \mu_k = \int_a^b \rho(x) x^k\,\mathrm{d}x\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Определение
КФ с N узлами, имеющую АСТ $= 2N-1$ назовем *квадратурной формулой наивысшей алгебраической степени точности* (далее сокращенно будем писать КФНАСТ) или *КФ гауссова типа.*

Приведем критерий того, что КФ с N узлами будет КФНАСТ.

Теорема 1

Для того, чтобы АСТ КФ (1) $= 2N-1$, необходимо и достаточно:

1. $\omega_N(x) = \prod_{k=1}^{N}(x - x_k)$,
$$\int_a^b \rho(x)\omega_N(x) Q_{N-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0\ \forall Q_{N-1} \tag{2}$$
$(\omega_N \underset{\rho,\,(a,b)}{\perp} Q_{N-1} \iff \omega_N \underset{\rho,\,(a,b)}{\perp} 1, x, \ldots, x^{N-1})$
2. КФ (1) — интерполяционная

Доказательство:
ДОСТАТОЧНОСТЬ
Пусть выполнены условия 1 и 2. Покажем, что АСТ $= 2N-1$, то есть что есть точность для любого многочлена, степени не выше $2N-1$. Рассмотрим произвольный $P_{2N-1}(x)$. По теореме Безу $P_{2N-1}(x) = \omega_N(x)\cdot Q_{N-1}(x) + R_{N-1}(x)$. Причем, очевидно, что $P_{2N-1}(x_k) = 0 + R_{N-1}(x_k) = R_{N-1}(x_k)$. Преобразуем

$$\int_a^b \rho(x) P_{2N-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\omega_N(x)\cdot Q_{N-1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \rho(x) R_{N-1}(x)\,\mathrm{d}x,$$

но по условию 1 первый интеграл равен 0, а во втором интеграле $\int_a^b \rho(x) R_{N-1}(x)\,\mathrm{d}x$ стоит многочлен степени не выше $N-1$ и, в силу интерполяционности, этот интеграл точно равен квадратурной сумме:

$$\int_a^b \rho(x) R_{N-1}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} A_k R_{N-1}(x_k) = \sum_{k=1}^{N} A_k P_{2N-1}(x_k).$$

Таким образом, *достаточность доказана.*

НЕОБХОДИМОСТЬ
Пусть алгебраическая степень точности $d = 2N-1$. Очевидно, $2N-1 = (N-1)+N \geq N-1$, значит эта КФ точна для любого многочлена степени не выше $N-1$ и по критерию ИКФ, она

интерполяционная (доказали пункт 2).
Рассмотрим $\forall\, Q_{N-1}(x)$, имеем

$$\int_a^b \rho(x) \underbrace{\omega_N(x) Q_{N-1}(x)}_{\deg \leq 2N-1} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} A_k \underbrace{\omega_N(x_k)}_{=0\ \forall k} Q_{N-1}(x_k) = 0$$

Необходимость доказана.
Теорема 1 доказана.

Теорема 2
Квадратурная формула наивысшей степени точности существует и единственна.

Доказательство:

По условию 1, узлы КФНАСТ $x_1, \ldots, x_N$ — корни ортогонального относительно веса и (a, b) многочлена $\omega_N \underset{\rho,\,(a,b)}{\perp} Q_{N-1}$. Ортогональный многочлен степени N существует и определяется с точностью до ненулевого множителя, а нам нужен приведенный ортогональный многочлен: $\omega_N(x) = x^N + \cdots$). При этом из общей теории ортогональных мнрогочленов, все корни уравнения $\omega_N(x) = 0 \implies x_1, \ldots, x_N \in (a, b)$ и попарно различны. Следовательно, они могут быть узлами интерполяционной КФ с весом $\rho(x)$. При этом набором своих узлов любая ИКФ определяется однозначно. Следовательно, *Теорема 2 доказана.*

Теорема 3
Если вес $\rho(x) \geq 0$, то все коэффициенты КФНАСТ положительны: $\forall k\ A_k > 0$.

Доказательство:

Пусть узлы КФНАСТ – $x_1, \ldots, x_N$ – корни $\omega_N(x) = \prod_{k=1}^{N} (x - x_k)$. Тогда лагранжевы коэффициенты

$$\ell_{kN}(x) = \frac{\omega_N(x)}{(x - x_k)\omega_N'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

это многочлены степени ровно $N - 1$. Следовательно, $\deg \ell_{kN}^2 = 2N - 2 \leq 2N - 1$, и для каждого многочлена влияния КФ будет точна. Кроме того,

$$\ell_{kN}(x_j) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j, \end{cases}$$

а значит

$$\ell_{kN}^2(x_j) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим

$$\int_a^b \rho(x) \ell_{kN}^2(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{N} A_j \ell_{kN}^2(x_j) = A_k.$$

При этом, так как под знаком интеграла стоит произведение двух, не эквивалентных тождественному нулю и неотрицательных функций, то интеграл > 0. Следовательно,

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \ell_{kN}^2(x) \,\mathrm{d}x > 0 \quad \forall k.$$

Теорема 3 доказана.

Вспомним оценку для погрешности КФ с N узлами по конечному $[a,b]$, АСТ которой $= d$:

$$|R_N(f)| \le \left(\int_a^b |\rho(x)|\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^N |A_k|\right) E_d(f)$$

и, в случае если КФ — КФНАСТ с неотрицательным весом, то

$$\int_a^b |\rho(x)|\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^N |A_k| = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^N A_k = \mu_0 + \mu_0 = 2\mu_0,$$

откуда непосредственно следует такая оценка для погрешности КФНАСТ на $[a,b]$:

$$|R_N(f)| \le 2\mu_0 E_{2N-1}(f).$$

Теперь очевидна сходимость КФНАСТ на конечных отрезках:

$$R_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \quad \forall f \in C[a,\, b].$$

2 Представление погрешности КФНАСТ

Теорема 4

Пусть (1) — квадратурная формула гауссова типа с весом $\rho(x)$ и пусть $f \in C^{2N}[a,b];$ тогда $\exists \eta \in [a,b]$, такая что погрешность КФНАСТ (1) допускает представление:

$$R_N(f) = \int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^N A_k f(x_k) = \frac{f^{(2N)}(\eta)}{(2N)!} \int_a^b \rho(x)\,\omega_N^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

где

$$\omega_N(x) = \prod_{k=1}^N (x - x_k)$$

— ортогональный относительно веса и $[a,\, b]$ многочлен.

Доказательство:

Рассмотрим следующую задачу интерполирования Эрмита:

x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$
x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_N	$f(x_N)$	$f'(x_N)$

как мы видим, каждый узел КФНСТ имеет кратность 2. Сумма кратностей равна $2N$, столько же условий однозначно определяют интерполяционный многочлен Эрмита $H_{2N-1}(x)$. Вспомним теорему о погрешности эрмитова интерполирования: $\exists\ \xi = \xi(x) \in (a,\, b)\ :$

$$f(x) - H_{2N-1}(x) = \frac{f^{(2N)}(\xi(x))}{(2N)!} \cdot \Omega(x), \quad \Omega(x) = \prod_{k=1}^N (x - x_k)^2 = \omega_N^2(x).$$

Имеем (принимая во внимание, что для $H_{2N-1}(x)$ наша КФНАСТ точна)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x)\,(f(x) - H_{2N-1}(x))\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \rho(x) H_{2N-1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{N} A_k \underbrace{H_{2N-1}(x_k)}_{f(x_k)} \\
&= R_N(f) = \int_a^b \frac{f^{(2N)}(\xi(x))}{(2N)!} \rho(x) \Omega_(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f^{(2N)}(\eta)}{(2N)!} \int_a^b \rho(x)\,\omega_N^2(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.