Конспект занятия от 23 ноября 2021 г. Часть 2

лектор Лебедева А.В.

СПбГУ, мат-мех факультет, V семестр обучения

1 Квадратурная формула Гаусса и многочлены Лежандра

Определение
Квадратурная формула наивысшей алгебраической степени точности (далее КФНАСТ) для промежутка $[-1,\,1]$ с весом $\rho(x) \equiv 1$ называется *КФ Гаусса.*

Замечание
Обычно КФ, подобные *КФ Гаусса* для произвольного $[a,\,b] \neq [-1,\,1]$ с весом $\rho(x) \equiv 1$ также называют *КФ Гаусса.*

Итак, *КФ Гаусса*:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \quad d = 2n-1, \quad n \geq 1. \qquad (1)$$

Как мы знаем, узлы КФНАСТ – суть корни ортогонального относительно веса и $(a,\,b)$ многочлена:

$$\omega_n(x) \underset{\rho(x),\,(-1,1)}{\perp} Q_{n-1}(x) \iff \int_{-1}^{1} \omega_n(x) Q_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, Q_{n-1}$$

Очевидно, что $\rho(x) \equiv 1$ – частный случай веса Якоби $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha,\ \beta > -1,\ \alpha = \beta = 0.$

С этим весом ортогональны многочлены Якоби: $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.
Для всех классических ортогональных многочленов справедлива *формула Родрига*; для многочленов Якоби в случае веса $\equiv 1$ формула приобретает вид:

$$J_n^{(0,\,0)}(x) = C_n \cdot \Big((1-x)^n\, (1+x)^n \Big)^{(n)},\ n = 0, 1, \ldots,$$

здесь C_n — "нормирующий"множитель, отличный от нуля.

Если $\alpha = \beta = 0$, многочлены Якоби $J_n^{(0,0)}(x)$ называются *многочленами Лежандра*, то есть $J_n^{(0,0)}(x) = P_n(x)$.
Как правило, в литературе наиболее часто можно встретить определение многочлена Лежандра степени n через формулу Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \Big(\big(x^2 - 1\big)^n \Big)^{(n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система ортогональных многочленов с весом $\rho(x) \equiv 1$ относительно $[-1,\,1]$. То есть

$$(P_i,\,P_j) = \int_{-1}^{1} P_i(x) P_j(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad i \neq j. \qquad (2)$$

Можно доказать, что

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \quad n = 0, 1, \ldots$$

а значит

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

При этом нормированный многочлен Лежандра (его норма равна 1), очевидно равен

$$\hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Узлы КФ Гаусса, как корни ортогонального многочлена, являются попарно различными внутренними точками $(-1,\,1)$. Если занумеровать их таким образом $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$, то из общей теории ортогональных многочленов, (так как вес – четная функция, следовательно ортогональные многочлены $P_n(x)$ имеют ту же четность, что и n), а значит их корни расположены симметрично относительно 0 (то есть $x_k = -x_{n+1-k}$). А если n – нечетно, то 0 является корнем.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\left((x-1)^n (x+1)^n\right)^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left((x-1)^n\right)^{(k)} \left((x+1)^n\right)^{(n-k)} \\
&= \frac{1}{2^n n!}\Big((x-1)^n n! + C_n^1 n(x-1)^{n-1}(x+1) + \ldots + C_n^{n-1} n(x-1)(x+1)^{n-1} + (x+1)^n n!\Big)
\end{aligned}$$

Откуда легко получается, что $P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n$ (этим и обусловлен выбор множителя в формуле (2).

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\left(x^{2n} - \ldots\right)^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(n+1)\underbrace{(x^n - \ldots)}_{\omega_n(x)} \\
&= \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n(n!)}\omega_n(x)\frac{n!}{n!} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\omega_n(x), \text{следовательно} \\
\omega_n(x) &= \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x), \qquad (3)
\end{aligned}$$

где $\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ — приведенный ортогональный многочлен.

Формула (3) далее понадобится нам, чтобы получить представление остатка КФ Гаусса.

Замечание:
Иногда при построении многочлена Лежандра удобнее пользоваться трехчленным рекуррентным соотношением:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}P_{n-1}(x)\cdot x - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots$$

$P_0(x) = 1, \ P_1(x) = x.$

1.1 Представление остатка КФ Гаусса

Теорема 1

Для КФ Гаусса при $f \in C^{(2n)}[-1, 1]$ справедливо представление остатка:

$$R_n(f) = C_n \cdot f^{(2n)}(\eta), \ \text{где } \eta \in [-1, 1], \quad C_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3}. \qquad (4)$$

Доказательство:
Из Теоремы о представлении остатка КФНАСТ и учитывая (3) получим

$$\begin{aligned}
R_n(f) &= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}\omega_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\frac{2^{2n}(n!)^4}{((2n)!)^2}\frac{2}{2n+1} \\
&= \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{(n!)^4}{((2n)!)^3}f^{(2n)}(\eta)
\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Замечание
Постоянные C_n очень быстро убывают с ростом n. Вот несколько первых значений этих констант: $C_1 = \frac{1}{3},\ C_2 = \frac{1}{135},\ C_3 = \frac{1}{15750},\ C_4 = \frac{1}{3472875}, \dots$

1.2 Коэффициенты КФ Гаусса

Вспомним свойство коэффициентов КФ, вес которой чётен, интегрирование происходит по симметричному отрезку, а узлы симметричны относительно 0. Мы доказывали, что в этом случае коэффициенты, отвечающие симметричным узлам равны. Получим формулу для коэффициентов КФ Гаусса. Рассмотрим

$$S_k = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{x - x_k} \cdot P_n'(x)\, \mathrm{d}x$$

интегрируя по частям имеем

$$S_k = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{x - x_k}\, \mathrm{d}P_n(x) = \frac{P_n^2(x)}{x - x_k}\Bigg|_{-1}^{1} - \underbrace{\int_{-1}^{1} P_n(x) \underbrace{\left(\frac{P_n(x)}{x - x_k}\right)'}_{deg \le n-1} \mathrm{d}x}_{=0}$$

значит, продолжая преобразования,

$$S_k = \frac{1}{1 - x_k} + \frac{1}{1 + x_k} - 0 = \frac{2}{1 - (x_k)^2}.$$

С другой стороны,

$$S_k = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{P_n(x)}{x - x_k} \cdot P_n'(x)}_{deg = 2n-2 \le 2n-1}\, \mathrm{d}x$$

следовательно, интеграл точно равен квадратурной сумме

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{x - x_k} \cdot P_n'(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} A_j \left(\frac{P_n(x)}{x - x_k} \cdot P_n'(x)\right)\Bigg|_{x = x_j}.$$

В этой сумме только одно ненулевое слагаемое (при $j = k$). В итоге имеем:

$$\frac{2}{1 - (x_k)^2} = S_k = A_k \cdot \left(P_n'(x_k)\right)^2,$$

откуда получается искомая формула для коэффициентов:

$$A_k = \frac{2}{(1 - (x_k)^2)\left(P_n'(x_k)\right)^2} = \frac{2(1 - (x_k)^2)}{n^2 P_{n-1}^2(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \qquad (5)$$

Получим, например, КФ Гаусса с тремя узлами.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{2^3 3!}\left((x^2-1)^3\right)''' = \frac{1}{8 \cdot 6}\left(6x^2 - 12x^3 + 6x\right)'' = \frac{1}{48}\left(30x^4 - 36x^2 + 6\right)' \\ &= \frac{1}{48}\left(120x^3 - 72x\right) = \frac{24x\left(5x^2 - 3\right)}{48} = \frac{1}{2}x\left(5x^2 - 3\right) \end{aligned}$$

Корни $x_1 = -\sqrt{3/5},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{3/5}$. Коэффициенты одинаковые в силу симметричности узлов, следовательно формула имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx Af\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + Bf(0) + Af\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$2A + B = 2$ (при $f \equiv 1$).

$$B = \frac{2}{(1-0)\cdot \underbrace{9/4}_{P_3'^2(0)}} = \frac{8}{9} \implies A = \frac{5}{9}.$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

точна для многочленов степени не выше $2n - 1 = 2\cdot 3 - 1 = 5$.

$$R_3(f) = \frac{2^7}{7}\cdot\frac{6^4}{(720)^3}f^{(\mathrm{VI})}(\eta)$$

2 Квадратурная формула Мелера

Рассмотрим частный случай веса Якоби при $\alpha = \beta = -1/2$ на $[-1, 1]$. Имеем весовую функцию $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Определение
Квадратурная формула наивысшей алгебраической степени точности (далее КФНАСТ) для промежутка $[-1,\ 1]$ с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ называется *КФ Мелера*.

Замечание
Относительно этого веса и $[-1,\ 1]$ ортогональны известные нам многочлены Чебышева первого рода. Тогда $J_n^{(-1/2,-1/2)}(x) = C_n T_n(x)$. Можно это аккуратно доказать:

$$\begin{aligned}
(T_n, T_m) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos\left(n \arccos x\right)\cos\left(m\arccos x\right)\,\mathrm{d}x \\
(x := \cos t) &= \pm\int_{0}^{\pi} \frac{1}{\sin t}\cos nt\cdot\cos mt\cdot\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} \pi & n = m = 0 \\ \pi/2 & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}.
\end{aligned}$$

Итак, *КФ Мелера* имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{1}^{n} A_k f(x_k), \quad d = 2n-1. \qquad (6)$$

Определим x_k и A_k.

- Узлы x_k — корни многочлена Чебышева $T_n(x)$. Откуда $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n$.

- Осталось определить коэффициенты A_k.

Рассмотрим следующую КФ:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right). \qquad (7)$$

Если мы покажем, что КФ (7) — ИКФ, то так как ее вес, отрезок интегрирования и узлы такие же как у КФ (6), то мы докажем, что она и есть *КФ Мелера.*
Согласно критерия ИКФ, КФ (7) будет ИКФ, если она точна для $f(x) = 1,\ x, \ldots,\ x^{n-1}$. А так как ортогональные многочлены образуют базис (любой многочлен однозначно разлагается по ортогональным), то равносильным будет условие точности КФ (7) для

$$f(x) = T_0(x),\ T_1(x),\ \ldots,\ T_{n-1}(x).$$

- Точность для $f(x) = T_0(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi = \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

ВЕРНО.

- Рассмотрим $1 \le \ell \le n-1$, докажем точность для $f(x) = T_\ell(x)$.

  1) Докажем для всех многочленов нечетной степени. Пусть $f(x) = T_{2j-1}(x),\ j = 1, 2, \ldots, \le \frac{n}{2}$. Для них

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_{2j-1}(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_{2j-1}(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x = 0 = \sum_{k=1}^{n} A_k T_{2j-1}\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right) = 0.$$

  Первое равенство нулю следует из ортогональности T_{2j-1} тождественной 1. А квадратурная сумма равна 0, так как T_{2j-1} – нечетная функция и складываются значения в симметричных относительно нуля точках. ВЕРНО.

  2) Докажем теперь точность для всех многочленов четной степени. Пусть $f(x) = T_{2j}(x),\ j = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Для них аналогично, из ортогональности

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_{2j}(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

  Осталось проверить, что квадратурная сумма тоже = 0. Преобразуем ее

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} T_{2j}\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right) &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(2j\arccos\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(2j\frac{2k-1}{2n}\pi\right) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{n}\pi j\right). \end{aligned}$$

  Представим

$$\cos\left(\frac{2k-1}{n}\pi j\right) = \cos\left(\frac{2k}{n}\pi j - \underbrace{\frac{\pi j}{n}}_{\alpha_j}\right) = \cos\left(\frac{2k}{n}\pi j\right)\cos\alpha_j + \sin\left(\frac{2k}{n}\pi j\right)\sin\alpha_j,$$

здесь $0 < \alpha_j = \frac{\pi j}{n} < \frac{\pi}{2}$ $\forall j = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$.
По формулам Эйлера

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k}{n}\pi j\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{\mathrm{i}\frac{2k}{n}\pi j} + e^{-\mathrm{i}\frac{2k}{n}\pi j}}{2}\right).$$

Рассмотрим отдельно первую сумму экспонент

$$\sum_{k=1}^{n} \left(e^{\mathrm{i}\frac{2k}{n}\pi j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{e^{\mathrm{i}\frac{2}{n}\pi j}}_{q\neq 1}\right)^k = \frac{q(q^n-1)}{q-1} = \frac{q(1-1)}{q-1} = 0,$$

так как $q^n = e^{n\mathrm{i}\frac{2}{n}\pi j} = e^{\mathrm{i}2\pi j} = 1$. Аналогично

$$\sum_{k=1}^{n} \left(e^{-\mathrm{i}\frac{2k}{n}\pi j}\right) = 0.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k}{n}\pi j\right) = 0.$$

Также будет равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k}{n}\pi j\right).$$

ВЕРНО.

Таким образом, КФ (7) – это *КФ Мелера.*

2.1 Представление погрешности КФ Мелера

$$\begin{aligned}
R_n(f) &= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{2^{2n-2}(2n)!}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!}f^{(2n)}(\eta) \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

3 Другие частные случаи КФ типа Гаусса

3.1 $\alpha = \beta = 1/2, \quad \rho(x) = \sqrt{1-x^2}$

Хотим формулу для вычисления

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

Можно проверить, что многочлены Чебышёва второго рода ортогональны

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}U_n(x)U_m(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Следовательно, они отличаются от многочленов Якоби на константу, т.е. $P_n^{(1/2,1/2)} = C_n \cdot U_n(x)$. Вычислим коэффициенты КФ

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos\frac{\pi k}{n+1}\right)$$

Замечание

Многочлен $\tilde{T}_n(x) = x^n + \ldots$ наименее отклоняется от 0: $\left\|\tilde{T}_n(x)\right\|_{C([-1,1])} = \min$, а $\tilde{U}_n(x)$ в L_1 норме

$$\int_{-1}^{1} \left\|\tilde{U}_n(x)\right\| \,\mathrm{d}x = \min$$

3.2 Еще один частный случай

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{4\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos\frac{2k\pi}{n+1}\right)$$

3.3 Вес Эрмита

$$\rho(x) = e^{-x^2} \quad (-\infty, +\infty)$$

Нужны формула наивысшей степени точности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

Многочлены ортогональны на всей оси, поэтому с ростом n они расползаются в обе стороны и уходят в бесконечность: $x_n^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. $A_k > 0, \sum_{k=1}^{n} A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ поэтому

$$A_n^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$