

Конспект занятия

25 2022 .

Часть 1

1 Выделение особенности интегрируемой функции (пункт опережающий свое время)

Рассмотрим $\int_a^b \varphi(x)dx$. Пусть функция $\varphi(x)$ интегрируема, но имеет особенность на (a, b) . Как следует поступать в этом случае?

1) Если особая точка функции $\varphi(x)$ находится внутри промежутка (a, b) , нужно представить интеграл в виде суммы интегралов, сместив, таким образом, особенность на край.

Далее считаем, что у функции, стоящей под знаком интеграла, особенность находится на конце промежутка интегрирования.

2) Теперь можно выделить особенность одним из двух способов: аддитивным или мультипликативным.

1. Аддитивный способ

Представить исходный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx + \int_a^b \psi(x)dx,$$

где подынтегральная функция первого интеграла не имеет особенности на $[a, b]$, а второй интеграл легко считается.

Пример 1

Рассмотрим $\int_0^1 \ln(\sin(x))dx$. Подынтегральная функция имеет особенность в нуле. Если вспомнить, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1,$$

возможно такое аддитивное выделение особенности:

$$\int_0^1 \ln(\sin(x))dx = \int_0^1 (\ln(\sin(x)) - \ln(x))dx + \int_0^1 \ln(x)dx = \int_0^1 \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)dx + \int_0^1 \ln(x)dx.$$

Теперь подынтегральная функция первого интеграла $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ не имеет особенности на $[0, 1]$, и интеграл можно посчитать, например, используя квадратурную формулу Гаусса.

В то же время, второй интеграл считается:

$$\int_0^1 \ln(x)dx = (x \cdot \ln(x) - x) \Big|_0^1$$

Пример 2

В принципе, интеграл из примера 1 можно посчитать, воспользовавшись формулой интегрирования по частям:

$$\int_0^1 \ln(\sin(x))dx = x \cdot \ln(\sin(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sin(x)} \cdot \cos(x)dx.$$

Пример 3

Рассмотрим $\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\alpha f(x)dx$, где $\alpha > -1$, а $f(x)$ — гладкая функция (имеет непрерывные производные до порядка $n + 1$ включительно). Функция $x^\alpha f(x)$, $\alpha > -1$ имеет интегрируемую особенность в нуле, если $f(x)|_{x=0} \neq 0$, и не имеет производных (даже сама функция рвётся). А если

подынтегральная функция имеет малую гладкость, то приближенное вычисление такого интеграла, даже с использованием квадратурных формул высокой степени точности, будет плохим.

Введём в рассмотрение многочлен

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n .$$

Произведём аддитивное выделение особенности:

$$\int_0^1 x^\alpha f(x) dx = \int_0^1 x^\alpha P_n(x) dx + \int_0^1 x^\alpha (f(x) - P_n(x)) dx .$$

Первый интеграл легко берётся, а у функции $x^\alpha (f(x) - P_n(x))$, стоящей под знаком второго интеграла, уже есть производные высоких порядков, и для его приближённого вычисления можно воспользоваться, например, составной квадратурной формулой Симпсона.

Немного поясним, как произошло повышение гладкости: точка $x = 0$ стала для функции $(f - P_n)(x)$ корнем кратности $n + 1$, так как, очевидно

$$(f - P_n)^{(s)} \Big|_{x=0} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n .$$

То есть

$$f - P_n \sim \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) ,$$

следовательно,

$$x^\alpha (f - P_n) \sim \frac{x^{n+1+\alpha}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) .$$

2. Мультипликативный способ

Представить исходный интеграл в виде

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \rho(x) f(x) dx ,$$

здесь $f(x)$ — гладкая функция (или, хотя бы, непрерывная), а $\rho(x)$ имеет ту же особенность, что и $\varphi(x)$, но обладает свойствами веса. Тогда можно строить квадратурную формулу с весом.

Пример 4

Рассмотрим $\int_0^1 \ln(x) f(x) dx$. Функция $\rho(x) = \ln(x)$ обладает свойствами веса: знакопостоянство ($\rho(x) \leq 0$), не эквивалентность нулю, существование всех моментов. Тогда квадратурная формула гауссова типа с весом $\rho(x)$, будет иметь вещественные узлы, лежащие внутри $(0, 1)$, а все коэффициенты формулы будут < 0 , т.к. $\rho(x) \leq 0$.

Часть I

Приближенное вычисление определенных интегралов

В этой главе нас будет интересовать вычисление значения определенного интеграла.

Например, рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b \varphi(x) dx .$$

Если подынтегральная функция задана аналитически, такой определенный интеграл часто удается вычислить с помощью первообразной по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b \varphi(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Однако этот подход не работает, например, в следующих случаях:

- 1) первообразную нельзя выразить в элементарных функциях, как в случае для $\varphi(x) = \sin x/x$, $\varphi(x) = 1/\ln x$ или $\varphi(x) = e^{-x^2}$;
- 2) у нас нет аналитического представления подынтегральной функции, а есть только ее значения в отдельных точках (опять функция задана таблично).

Приближенное вычисление определенных интегралов осуществляют при помощи *квадратурных формул* (сокращенно — *квадратур*). Далее мы будем рассматривать интегралы более общего вида (смотри пункт про мультипликативное выделение особенности интегрируемой функции):

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx,$$

где функцию $\rho(x)$ будем называть *весовой функцией* или *весом*, если она не эквивалентна тождественному нулю на (a, b) и для которой существуют (сходятся) все интегралы следующего вида

$$\exists \mu_k = \int_a^b x^k \rho(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

Определение

Квадратурной формулой (далее сокращенно КФ) назовем формулу вида:

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N \underset{\text{коэфф-т}}{A_k} \cdot \underset{\text{узел}}{f(x_k)} \quad (1)$$

В правой части КФ стоит конечная *квадратурная* сумма, значение которой принимается в качестве приближенного значения интеграла. При вычислении значения квадратурной суммы основные трудозатраты состоят в нахождении значений $f(x_k)$.

Определение

Погрешностью КФ (1) назовем разность между точным и приближенным значением интеграла:

$$R_N(f) = \int_a^b \rho(x)f(x) dx - \sum_{k=1}^N A_k f(x_k).$$

Определение

Будем говорить, что КФ (1) *точна* для функции $f(x)$, если $R_N(f) = 0$, и *не точна* в противном случае.

Замечание

- 1) (a, b) не обязательно конечен, это может быть и вся вещественная ось, или полуось (главное, чтобы отыскиваемый интеграл имел конечное значение на (a, b));
- 2) узлы КФ x_k попарно различны, не обязательно принадлежат (a, b) и даже не обязательно вещественны;
- 3) КФ строится для фиксированных $\rho(x)$ и (a, b) ;
- 4) если у подынтегральной функции нет особенностей, считают вес $\rho(x) \equiv 1$;
- 5) задать КФ — это указать узлы и коэффициенты при фиксированном N .

2 Интерполяционные квадратурные формулы

Все квадратурные формулы, которые мы будем рассматривать в этой главе основаны на идее замены функции $f(x)$ ее интерполяционным полиномом, построенным по попарно различным узлам x_1, x_2, \dots, x_N , значения в которых известны или легко вычислимы $f(x_1), \dots, f(x_N)$.

Теперь по этой таблице строится единственный многочлен степени не выше $(N - 1)$, обозначим его $P_{N-1}(f; x) = P_{N-1}(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{N-1}(x) + r_{N-1}(x) \\ &= \text{погрешность, как известно, имеет представление} \\ r_{N-1}(x) &= \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} \omega_N(x), \quad \xi \in \min \max \{x; x_1, \dots, x_N\}, \quad \omega_N(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_N). \end{aligned}$$

Заменим $f(x)$ под знаком интеграла этой суммой, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) f(x) dx &= \int_a^b \rho(x) \sum_{k=1}^N \ell_{kN}(x) f(x_k) dx + \int_a^b \rho(x) r_{N-1}(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^N f(x_k) \underbrace{\int_a^b \rho(x) \ell_{kN}(x) dx}_{A_k} + \underbrace{\int_a^b \rho(x) \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} \omega_N(x) dx}_{R_N(f)} \end{aligned}$$

и окончательно

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^N A_k f(x_k) + \underbrace{R_N(f)}_{\text{погрешность}} \quad (2)$$

мы получили *интерполяционную квадратурную формулу*.

Определение

Интерполяционной КФ назовем формулу вида (2), узлы которой попарно различны, а коэффициенты закреплены выражениями

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \ell_{kN}(x) dx,$$

где

$$\ell_{kN}(x) = \frac{\omega_N(x)}{(x - x_k) \omega'_N(x_k)}.$$

При этом погрешность такой КФ автоматически задается формулой

$$R_N(f) = \int_a^b \rho(x) \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} \omega_N(x) dx.$$

Замечание

При фиксированных $\rho(x)$ и (a, b) набором своих узлов x_1, x_2, \dots, x_N интерполяционная КФ определяется однозначно.

Теорема (критерий ИКФ)

Чтобы формула вида (1) была интерполяционной КФ, необходимо и достаточно чтобы она была точна для любого многочлена степени не выше $(N - 1)$. То есть $\forall Q_{N-1}(x)$ верно

$$\int_a^b \rho(x) Q_{N-1}(x) dx = \sum_{k=1}^N A_k Q_{N-1}(x_k).$$

Доказательство:

НЕОБХОДИМОСТЬ: Пусть КФ (1) интерполяционная, рассмотрим $f(x) = Q_{N-1}(x)$. Очевидно интерполяционный многочлен степени не выше $(N - 1)$ совпадет при этом с самой функцией, то есть

$P_{N-1}(Q_{N-1}, x) \equiv Q_{N-1}(x)$. Тогда погрешность интерполяции $r_{N-1}(x) \equiv 0$, и, следовательно, погрешность КФ $R_N(Q_{N-1}) = \int_a^b \rho(x) \cdot 0 \, dx = 0$.

Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ: Пусть КФ (1) точна для любого $Q_{N-1}(x)$. Возьмем $Q_{N-1}(x) = \ell_{kN}(x)$. Помним, что

$$\ell_{kN}(x_j) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}.$$

Посчитаем

$$\int_a^b \rho(x) Q_{N-1}(x) \, dx = \int_a^b \rho(x) \ell_{kN}(x) \, dx = \sum_{j=1}^N A_j \ell_{kN}(x_j) = A_k.$$

То есть все коэффициенты A_k удовлетворяют формулам для коэффициентов ИКФ из определения. *Достаточность доказана.*

Теорема доказана.

Определение

Алгебраической степенью точности (далее АСТ) КФ вида (1) назовем целое неотрицательное число d , такое, что $R_N(x^j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, d$ и $R_N(x^{d+1}) \neq 0$. Другими словами, это максимальная степень алгебраического многочлена, для которого формула точна.

Пример

Существуют КФ, у которых нет АСТ. Рассмотрим КФ вида

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx 2f(3).$$

Очевидно, что подстановка в нее $f(x) \equiv 1$ приводит к неверному равенству.

Следствие 1:

АСТ ИКФ с N узлами (обозначим ее d_N) удовлетворяет неравенству $d_N \geq (N - 1)$.

Следствие 2:

У любой ИКФ всегда есть АСТ, так как она будет точна для констант.

Можно ли получить оценку сверху для d_N ?

Можно, но при дополнительном ограничении на вес.