# Конспект занятия
# от 09 ноября 2021 г.

лектор Лебедева А.В.

СПбГУ, мат-мех факультет, V семестр обучения

# 1 Составные квадратурные формулы

Пусть для вычисления интеграла

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

хотим применить квадратурную формулу

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N} A_k\, g(x_k) + R_N(g), \tag{2}$$

(узлы которой $x_k \in [0,\,1]$), но формула, подобная (2), не дает нужной точности. Попробуем повысить точность вычисления (1), осуществив разбиение исходного $[A,\,B]$ на частичные отрезки, на каждом из которых применим КФ, подобную КФ (2).

Рассмотрим $m \in \mathbb{N},\ h = \frac{B-A}{m},\ y_j = A + jh,\ j = 0, 1, \ldots, m$, тогда

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x = y_j + ht,\ \ \mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}t\Big] \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} h \int_0^1 f(y_j + ht)\,\mathrm{d}t \\
&\approx h \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} A_k f(y_j + hx_k) \equiv Q_m(f). \qquad (3)
\end{aligned}$$

**Определение**
КФ вида (3)

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = Q_m(f) + R_m(f)$$

будем называть *составной КФ*, полученной на основе исходной КФ (2).
Её погрешность $R_m(f)$ складывается из ошибок при вычислении каждого интеграла по частичному отрезку $\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$. То есть

$$R_m(f) = \sum_{j=0}^{m-1} R_N^j(f), \tag{4}$$

где погрешности на частичных отрезках

$$R_N^j(f) = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{k=1}^{N} A_k f(y_j + hx_k),\ \ j = 0, 1, \ldots, (m-1).$$

*Замечание*

У составной КФ (3) количество узлов равно $m \cdot N$, если хотя бы один из концов отрезка $[0,\,1]$ не является узлом исходной КФ (2), и равно $m \cdot (N-1) + 1$ в противном случае.

ВОПРОС: Гарантирует ли увеличение числа разбиений сходимость квадратурных сумм к интегралу? И при каких условиях это верно?

$$Q_m(f) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Теорема 1**

$$Q_m(f) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f \in C\,[A,\,B] \iff (2)\ \text{точна для}\ g \equiv \mathrm{const}.$$

*Доказательство:*
Не умаляя общности, можно доказывать для $g \equiv 1$.

- Достаточность: Пусть (2) точна для $g \equiv 1$, тогда $1 = \int_0^1 \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^N A_k$. В представлении для $Q_m(f)$ обе суммы конечны, поменяем их местами:

$$Q_m(f) = \sum_{k=1}^N A_k \underbrace{\left( h \sum_{j=0}^{m-1} f(y_j + hx_k) \right)}_{\to \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \left( \sum_{k=1}^N A_k \right) \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Необходимость: Пусть $\forall f \in C[A,\, B] \quad Q_m(f) \to \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x$, проверим точность исходной КФ для 1:

$$\begin{aligned} Q_m(1) \quad &= \quad h \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m-1} A_k = \left( \sum_{k=1}^N A_k \right) \left( h \sum_{j=0}^{m-1} 1 \right) = \left( \sum_{k=1}^N A_k \right) (B - A) \\ Q_m(1) \quad &\xrightarrow[m \to +\infty]{} \quad \int_A^B \mathrm{d}x = B - A \text{ (по предположению)}, \end{aligned}$$

  значит $\sum_{k=1}^N A_k = 1$, что и означает точность КФ (2) для констант.

*Теорема 1 доказана.*

ВОПРОС: если у исходной КФ есть АСТ, что можно сказать про АСТ составной КФ, построенной на ее основе?

**Теорема 2**
АСТ исходной и составной КФ совпадают.

*Доказательство:*
Пусть $d$ — АСТ исходной КФ:

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=1}^N A_k g(x_k).$$

Тогда по определению АСТ $R_N(x^\ell) = 0 \quad \forall \ell = 0, 1, \ldots, d$ и $R_N(x^{d+1}) \neq 0$.

- Отметим, что если $f(x)$ — алгебраический многочлен, степени $\leq d$, то $f(y_j + ht)$ – тоже многочлен степени $\leq d$ от $t$. Значит, все погрешности на частичных отрезках $[y_j,\, y_{j+1}]$ $R_N^j(f) = 0$, как погрешности формул, подобных исходной. Тогда из (4) $R_m(f) = 0\ \forall$ многочлена, степени $\leq d$ и можно утверждать, что АСТ составной КФ существует и $\geq d$. Осталось показать, что больше чем $d$ быть не может.

- Итак, имеем

$$R_N(x^{d+1}) = \int_0^1 x^{d+1}\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^N A_k x_k^{d+1} = r \neq 0.$$

  Тогда $\forall\, c$:

$$R_N\left((x+c)^{d+1}\right) = \int_0^1 (x+c)^{d+1}\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^N A_k (x_k + c)^{d+1} = r \neq 0.$$

Покажем, что $x^{d+1}$ при помощи составной КФ не интегрируется точно:

$$R_m\left(x^{d+1}\right) = \int_A^B x^{d+1}\,\mathrm{d}x - h\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{N} A_k(y_j+hx_k)^{d+1} = \sum_{j=0}^{m-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} x^{d+1}\,\mathrm{d}x - h\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{N} A_k(y_j+hx_k)^{d+1}$$

$$= h\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_0^1 (y_j+ht)^{d+1}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{N} A_k(y_j+hx_k)^{d+1}\right)$$

$$= h^{d+2}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_0^1 \left(t+\frac{y_j}{h}\right)^{d+1}\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{N} A_k\left(x_k+\frac{y_j}{h}\right)^{d+1}\right)$$

$$= h^{d+2}\sum_{j=0}^{m-1} R_N\left((t+c)^{d+1}\right) = h^{d+2}\sum_{j=0}^{m-1}(r) = h^{d+2}\cdot m\cdot r = h^{d+1}(b-a)r \neq 0.$$

*Теорема 2 доказана.*

# 2 Простейшие составные квадратурные формулы

1. Составная КФ прямоугольников

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x &\approx g(x_1)\\
\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \quad y_j = A+jh\\
&= h\sum_{j=0}^{m-1}\int_0^1 f(y_j+th)\,\mathrm{d}t \quad h=\frac{B-A}{m}\\
&\approx h\sum_{j=0}^{m-1} f(A+jh+x_1h).
\end{aligned}$$

2. Составная КФ левых прямоугольников

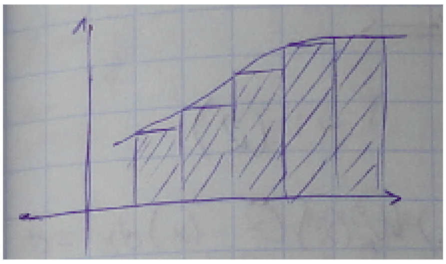
Рассмотрим $x_1 = 0$, фиксируем натуральное $m$, разбиваем $[A,\, B]$ на $m$ частей с шагом $h = \frac{B-A}{m}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{m-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}(y_{j+1}-y_j)f(y_j) + R_m^{left}(f)\\
&= \sum_{j=0}^{m-1} hf(y_j) + R_m^{left}(f)\\
&= h\sum_{j=0}^{m-1} f(A+jh) + R_m^{left}(f),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\left|R_m^{left}(f)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{m-1} R_\Lambda^j(f)\right| = \left|\sum_{j=0}^{m-1} \frac{h^2}{2} f'(\chi_j)\right|, \quad \chi_j \in [y_j,\, y_{j+1}] \\ &\le \max_{x\in[A,\,B]} \left|f'(x)\right| \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h^2}{2} = \frac{mh^2}{2} \cdot \max_{x\in[A,\,B]} \left|f'(x)\right| \\ &= \frac{(B-A)^2}{2m} \cdot \max_{x\in[A,\,B]} \left|f'(x)\right|.\end{aligned}$$

АСТ, как известно, равна 0.



3. Составная КФ правых прямоугольников

Рассмотрим $x_1 = 1$, фиксируем натуральное $m$, разбиваем $[A,\, B]$ на $m$ частей с шагом $h = \frac{B-A}{m}$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (y_{j+1} - y_j) f(y_{j+1}) + R_m^{right}(f) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} h f(y_{j+1}) + R_m^{right}(f) \\ &= h \sum_{j=0}^{m-1} f(A + (j+1)h) + R_m^{right}(f),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\left|R_m^{right}(f)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{m-1} R_\Pi^j(f)\right| = \left|\sum_{j=0}^{m-1} \frac{-h^2}{2} f'(\chi_j)\right|, \quad \chi_j \in [y_j,\, y_{j+1}] \\ &\le \max_{x\in[A,\,B]} \left|f'(x)\right| \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h^2}{2} = \frac{mh^2}{2} \cdot \max_{x\in[A,\,B]} \left|f'(x)\right| \\ &= \frac{(B-A)^2}{2m} \cdot \max_{x\in[A,\,B]} \left|f'(x)\right|.\end{aligned}$$

АСТ равна 0.

4. Составная КФ средних прямоугольников

Рассмотрим $x_1 = 1/2$, фиксируем натуральное $m$, разбиваем $[A,\, B]$ на $m$ частей с шагом $h = \frac{B-A}{m}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (y_{j+1} - y_j) f(y_{j+1/2}) + R_m^{middle}(f) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} h f(y_{j+1/2}) + R_m^{middle}(f) \\
&= h \sum_{j=0}^{m-1} f(A + (j+1/2)h) + R_m^{middle}(f),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\left| R_m^{middle}(f) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{m-1} R_{mid}^{j}(f) \right| = \left| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h^3}{24} f''(\chi_j) \right|, \quad \chi_j \in [y_j,\, y_{j+1}] \\
&\leq \max_{x \in [A,\, B]} \left| f''(x) \right| \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h^3}{24} = \frac{mh^3}{24} \cdot \max_{x \in [A,\, B]} \left| f''(x) \right| \\
&= \frac{(B-A)^3}{24 m^2} \cdot \max_{x \in [A,\, B]} \left| f''(x) \right|.
\end{aligned}$$

АСТ этой составной КФ равна 1.

5. Составная квадратурная формула трапеций

   Исходная КФ имеет вид

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2} \left( f(0) + f(1) \right).$$

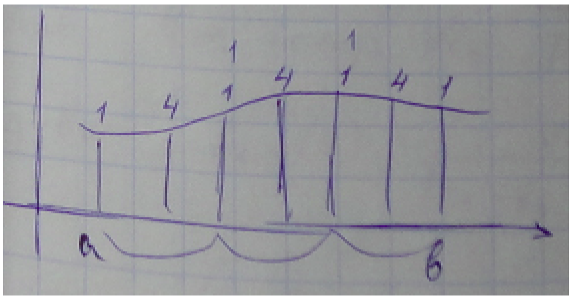
   Фиксируем натуральное $m$, разбиваем $[A,\, B]$ на $m$ частей с шагом $h = \frac{B-A}{m}$. По аналогии с составными КФ прямоугольников можно получить формулу:

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{2} \left( f(A) + 2f(A+h) + \ldots + 2f(B-h) + f(B) \right) \\
\left| R_m^{tr}(f) \right| &\leq \frac{(B-A)^3}{12 m^2} \max_{x \in [A,\, B]} |f''(x)|.
\end{aligned}$$

   АСТ этой составной КФ равна 1.

6. Составная квадратурная формула Симпсона (парабол): Фиксируем натуральное $m$, разбиваем $[A,\, B]$ на $m$ частей с шагом $h = \frac{B-A}{m}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h}{6} \big( f(y_j) + 4f(y_{j+1/2}) + f(y_{j+1}) \big) \\
&= \frac{h}{6} \left( f(A) + 2(f(A+h) + \ldots + f(B-h)) + 4(f(A + \frac{h}{2}) + \ldots + f(B - \frac{h}{2})) + f(B) \right) \\
\left| R_m^{Simpson}(f) \right| &\leq \frac{(B-A)^5}{2880 m^4} \max_{x \in [A,\, B]} \left| f^{(IV)}(x) \right|
\end{aligned}$$




АСТ этой составной КФ равна 3. Значит, любой алгебраический многочлен, степени не выше 3 она интегрирует "точно"(в теории, с точностью до ошибок округления "в машине").