W1202 Taxation, Accounting & Fina
Produktions- und Kostentheorie

SoSe 19

Gliederung

1. Produktionssysteme als Input-Output-Systeme
2. Effizienz von Produktionspunkten
3. Bewertung von Inputs und Outputs eines Produktionssystems
4. Produktionsplanung auf Basis von Leontief-Technologien
5. Produktionsplanung auf Basis von Gutenberg-Technologien

Produktionsfaktoren → Produktion → Produkte

Beispiele:

- Holz
- Öl
- Reifen
- Arbeitskraft
- Maschine
- Gebäude

Beispiele:

- Fließbandfertigung
- Werkstattfertigung
- Serienfertigung

Beispiele:

- PKW
- Reifen
- Mehl
- Schrank
- Kleid
- Waschmaschine

Beispiel: Herstellung von 100 Tischen pro Tag

Faktoreinsatzmengenvektor

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} 100 \text{ Tischplatten pro Tag} \\ 200 \text{ Tischbeine, Höhe 70 cm, pro Tag} \\ 200 \text{ Tischbeine, Höhe 80 cm, pro Tag} \\ 1 \text{ Liter Leim pro Tag} \end{pmatrix}$$

Produktionsausbringungsmengenvektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 50 \text{ Tische, Höhe 70 cm, pro Tag} \\ 50 \text{ Tische, Höhe 80 cm, pro Tag} \end{pmatrix}$$

Produktionspunkt

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -100 \text{ Tischplatten pro Tag} \\ -200 \text{ Tischbeine, Höhe 70 cm, pro Tag} \\ -200 \text{ Tischbeine, Höhe 80 cm, pro Tag} \\ -1 \text{ Liter Leim pro Tag} \\ +50 \text{ Tische, Höhe 70 cm, pro Tag} \\ +50 \text{ Tische, Höhe 80 cm, pro Tag} \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung:

Inputmengenvektor

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix}$$

Outputmengenvektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Produktionspunkt

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ \vdots \\ -r_M \\ +x_1 \\ +x_2 \\ \vdots \\ +x_N \end{pmatrix}$$

(1) Input – Effizienz

(„effizienter Input bei gegebenem Output“)

Der Inputmengenvektor $\underline{r}$ ist variabel, der Outputmengenvektor $\underline{x}$ ist gegeben und unveränderlich. Zum Ausdruck seiner Konstanz wird er mit einem hoch gestellten Index 0 gekennzeichnet.

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -12 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -10 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -11 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie durch paarweisen Vergleich fest, welche Produktionspunkte input-effizient sind.

(2) Output – Effizienz
(„effizienter Output bei gegebenem Input“)

Der Outputmengenvektor $\underline{x}$ ist variabel, der Inputmengenvektor $\underline{r}$ ist gegeben und unveränderlich. Zum Ausdruck seiner Konstanz wird er mit einem hoch gestellten Index 0 gekennzeichnet.

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +40 \\ +20 \\ +30 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +50 \\ +30 \\ +20 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +40 \\ +10 \\ +30 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie durch paarweisen Vergleich fest, welche Produktions output-effizient sind.

(3) Effizienz
(„effizienter Output bei effizientem

Sowohl der Inputmengenvektor $\underline{r}$
variabel.

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ -20 \\ +5 \\ +7 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -20 \\ +6 \\ +6 \end{pmatrix},$$

Stellen Sie durch paarweisen Ver
effizient sind.

(1) Bewertung der Inputs

q_m : Beschaffungspreis von Prod
mit m = 1 (1) M

r_m : Einsatzmenge von Produkti
mit m = 1 (1) M

Die Summe der bewerteten Verb
entspricht den Gesamtkosten des

$$K = \sum_{m=1}^{M} q_m \cdot r_m$$

Ziel: Ermittlung desjenigen Produ
Output zu minimalen Kosten

(1) Bewertung der Inputs

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -12 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -10 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -11 \\ +\underline{x}^0 \end{pmatrix}.$$

Die Faktorpreise lauten: $q_1 = 20$, $q_2 = 10$ und $q_3 = 30$.

(a) Ermitteln Sie den Produktionspunkt mit den geringsten Ges

(b) Einkäufer Hitzig ist der Meinung, dass harte Preisverhand
dem Lieferanten des Rohstoffs m=3 zu einer deutlichen S
q_3 führen könnten. Inwiefern beeinflusst Hitzigs Me
Entscheidung unter (a)?

(2) Bewertung der Outputs

p_n : Absatzpreis von Produktart
mit n = 1 (1) N

x_n : Ausbringungsmenge von P
mit n = 1 (1) N

Die Summe der bewerteten Aus
entspricht den Gesamterlösen de

$$E = \sum_{n=1}^{N} p_n \cdot x_n$$

Ziel: Ermittlung desjenigen Proc
Inputs die maximalen Erlös

(2) Bewertung der Outputs

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +40 \\ +20 \\ +30 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +50 \\ +30 \\ +20 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -\underline{r}^0 \\ +40 \\ +10 \\ +30 \end{pmatrix}.$$

Die Absatzpreise lauten: $p_1 = 2$, $p_2 = 5$ und $p_3 = 10$.

(a) Ermitteln Sie den erlösmaximalen Produktionspunkt.

(b) Verkäufer Mutig plant, den Absatzpreis der Produktart n=3
Um wieviel % darf p_3 reduziert werden, wenn der gemäß (
Produktionspunkt weiterhin erlösmaximal bleiben soll?

(3) Bewertung der Inputs und Out

Die Differenz aus den Gesamterl
zeitraums entspricht dem Gesam

$$G = E - K = \sum_{n=1}^{N} p_n \cdot x_n - \sum$$

Ziel: Ermittlung desjenigen Prod
im Planungszeitraum maxi

(3) Bewertung der Inputs und Outputs

Beispiel:

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ -20 \\ +5 \\ +7 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -20 \\ +6 \\ +6 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -20 \\ +5 \\ +8 \end{pmatrix}.$$

Die Faktorpreise belaufen sich auf: $q_1 = 4$, $q_2 = 2$ und $q_3 = 5$.

Die Absatzpreise betragen: $p_1 = 30$ und $p_2 = 20$.

(a) Ermitteln Sie den gewinnmaximalen Produktionspunkt.

(b) Produktart n=1 hat sich als Renner erwiesen, weshalb
Schrabbig einen höheren Stückerlös durchsetzen zu kön
Welchen Preis darf p_1 nicht überschreiten, wenn der in (a) i
optimale Produktionspunkt weiterhin gewinnmaximal sein s

4.1. Grundlagen

Leontief-Technologie:

(a) Zwischen Inputs und Outputs besteht ein konstantes Mengenverhältnis.

(b) Mindestens eine Inputgüterart ist im Planungszeitraum mengenmäßig nur beschränkt verfügbar.

Linearer Prozess:

Menge von Produktionspunkten, die sich mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors λ aus einem sog. Basisproduktionspunkt $\underline{y}^0$ ableiten lassen.

$$Y = \left\{ \underline{y} \,\middle|\, \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^0 \,;\, \lambda \geq 0 \right\}$$

4.1. Grundlagen

Beispiel für einen linearen Prozess:

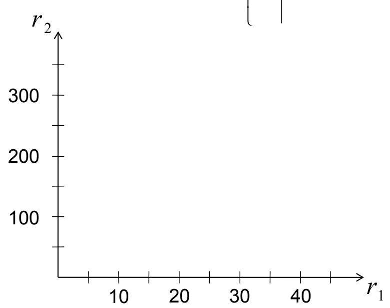
$$Y = \left\{ \underline{y} \,\middle|\, \underline{y} = \lambda \right.$$

Gehen Sie von unbegrenzten Faktor
Produktionspunkte, die zu diesem lin
hierzu $\lambda_1 = 0{,}50$, $\lambda_2 = 1{,}10$ und λ_3
ergeben?

4.1. Grundlagen

Graphische Darstellung eines linearen Prozesses

Zu zeichnen sei der lineare Prozess: $Y = \left\{ \underline{y} \;\middle|\; \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -100 \\ +40 \end{pmatrix} ;\; \lambda \geq 0 \right\}$



4.1. Grundlagen

Gemischte lineare Prozesse

$Y^g = \left\{ \underline{y} \;\middle|\; \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}^g ;\; \lambda \geq 0 \right\}$

mit $\underline{y}^g = c_i \cdot \underline{y}_i^0 + c_j \cdot \underline{y}_j^0$

und $c_i + c_j = 1, c_i > 0, c_j$

Beispiel:

$\underline{y}_i^0 = \begin{pmatrix} -40 \\ -100 \\ +50 \\ +20 \end{pmatrix}$ und

Die beiden linearen Prozesse Y_i und

Welche Inputs sind für welche Outpu

4.2. Mengenorientierte Planung

4.2.1. Vernachlässigung von Faktormengenbeschränkungen (Lineare Technologien)

Zu lösendes Problem:

Welche Kombination von welchen Faktorarten muss in welchen Mengen eingesetzt werden, um welche Kombination von welchen Produktarten in welchen Mengen herstellen zu können?

4.2.1. Vernachlässigung von Fakt (Lineare Technologien)

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \;\middle|\; \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_1^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix} \right.$$

$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \;\middle|\; \underline{y} = \lambda \cdot \underline{y}_2^0 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix} \right.$$

Welcher Output ist mit welcher Einsa
arten durch welchen reinen bzw. gen

Unterstellen Sie im Rahmen Ihrer An

(a) $c_1 = \frac{1}{3}$ und $c_2 = \frac{2}{3}$

(b) $c_1 = \frac{2}{3}$ und $c_2 = \frac{1}{3}$

4.2. Mengenorientierte Planung

4.2.2. Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen (Leontief-Technologien)

Zu lösendes Problem:

Welche Kombination von welchen Produktarten in welchen Ausbringungsmengen ist mit welcher Kombination von welchen Faktorarten in welchen Einsatzmengen maximal herstellbar, wenn der Vorrat von mindestens einer Faktorart mengenmäßig beschränkt ist?

4.2.2. Berücksichtigung von Fakto (Leontief-Technologien)

Beispiel:

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \;\middle|\; \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ +1 \end{pmatrix}\right.$$

$$Y_2 = \left\{ \underline{y} \;\middle|\; \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ -20 \\ +10 \end{pmatrix}\right.$$

Welcher Output ist mit welchem linea mengenkombination maximal herstel alternativ lauten:

(a) $\overline{r_1} = 60,$

(b) $\overline{r_2} = 40,$

(c) $\overline{r_1} = 75$ und $\overline{r_2} = 50?$

4.3. Kostenorientierte Planung

4.3.1. Vernachlässigung von Faktormengenbeschränkungen (Lineare Technologien)

Zielsetzungen:

(a) Kostenminimierung bei gegebenem Output

Zu lösendes Problem:

Welche Kombination von welchen Faktorarten muss in welchen Mengen innerhalb welches linearen Prozesses eingesetzt werden, wenn ein jeweils vorgegebener Output kostenminimal hergestellt werden soll? Welche Inputs sind erforderlich, um gegebenen Output kostenminimal zu erstellen?

4.3.1. Vernachlässigung von Fa (Lineare Technologien)

(a) Kostenminimierung bei gegebene

Beispiel:

Gegeben sind zwei lineare Proze

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \;\middle|\; \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -120 \\ -180 \\ +30 \end{pmatrix};\ \lambda \geq 0 \right\}$$

Die Faktorpreise betragen:

$q_1 = 5$ [GE] / [FE] und $q_2 = 10$ [

Welche Faktormengenkombinati kostenminimal?

4.3.1. Vernachlässigung von Faktormengenbeschränkungen (Lineare Technologien)

(b) Outputmaximierung bei gegebenem Kostenbudget

Zu lösendes Problem:

Welcher Output ist mit welcher Kombination von welchen Faktorarten in welchen Einsatzmengen durch welchen linearen Prozess maximal herstellbar, wenn das Kostenbudget fest vorgegeben ist?

4.3.1. Vernachlässigung von Fa (Lineare Technologien)

(b) Outputmaximierung bei gegeben

Beispiel:

Gegeben sind drei lineare Prozes

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \;\middle|\; \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ +4 \end{pmatrix};\ \lambda \geq 0 \right\},\ Y_2 = \left\{ \underline{y} \right.$$

Die Faktorpreise und das Kosten

$q_1 = 20$ [GE] / [FE] , $q_2 = 30$ [G

Welcher Output ist mit welch welchen linearen Prozess maxim

4.3.2. Berücksichtigung von Faktormengenbeschränkungen (Leontief-Technologien)

Zu lösendes Problem:

Welche Kombination von welchen Faktorarten muss in welchen Mengen innerhalb welches linearen Prozesses eingesetzt werden, wenn ein jeweils vorgegebener Output kostenminimal hergestellt werden soll und der Vorrat von mindestens einer Faktorart mengenmäßig beschränkt ist?

4.3.2. Berücksichtigung von Fa (Leontief-Technologien)

Beispiel:

Gegeben sind die folgenden beiden

$$Y_1 = \left\{ \underline{y} \;\middle|\; \underline{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ +5 \end{pmatrix} ;\ \lambda \geq 0 \right\}$$

Welcher Output ist mit welchem linea
wenn gilt:

(a) $\overline{r_1} = 12$, $q_1 = 0,50$ und $q_2 = 1$

(b) $\overline{r_2} = 16$, $q_1 = 1$ und $q_2 = 0,50$

(c) $\overline{r_1} = 16$, $\overline{r_2} = 26$, $q_1 = 0,50$ und

5.1. Grundlagen: Begriff

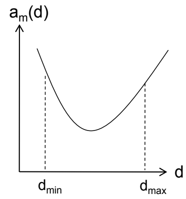
Unter einer Gutenberg-Technologie(
aller technisch realisierbaren Produ
sich der Verbrauch r_m einer Faktorar
sog. Gutenberg-Verbrauchsfunktion

$$r_m = a_m \cdot x$$

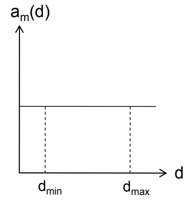
$$\frac{[FE]}{[PZE]} = \frac{[FE]}{[PE]} \cdot \frac{[PE]}{[PZE]}$$

5.1. Grundlagen: Gutenberg-Verbr

a)



c)



5.2. Mengenorientierte Planung

Zu lösendes Problem:

Welche von unterschiedlich möglich
Definitionsbereichs können als effizi

5.2. Mengenorientierte Planung

Beispiel:

In einem Produktionssystem werden
gesetzt, deren Gutenberg-Verbrauch

$$a_1(d) = \frac{1}{8} \cdot d^2 - 25 \cdot d + 1800$$

$$a_2(d) = \frac{1}{4} \cdot d^2 - 30 \cdot d + 1300$$

$$a_3(d) = 200$$

Für alle Produktionsgeschwindigkeit

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Graph

5.3. Kostenorientierte Planung

Zu lösendes Problem:

Welche von unterschiedlich möglichen Produktionsgeschwindigkeiten des Definitionsbereichs gewährleisten, dass ein jeweils vorgegebener Output zu minimalen Kosten erzeugt wird?

5.3. Kostenorientierte Planung

Beispiel:

Zur Herstellung einer Produktart werden zwei Produktionsfaktoren deren Gutenberg-Verbrauchsfunktionen (in [FE] / [PE]) lauten:

$$a_1(d) = \frac{1}{10} \cdot d^2 - 4 \cdot d + 45$$

$$a_2(d) = \frac{1}{2} \cdot d^2 - 14 \cdot d + 100$$

Der Definitionsbereich lässt nur Intensitäten zu, für die gilt: $d \in [10$
Die Faktorpreise (in [GE] / [FE]) betragen: $q_1 = 10$ und $q_2 = 8$.
Das betrachtete Produktionssystem ist maximal 5 [ZE] / [PZE] eins

Ermitteln Sie die Funktion der minimalen Gesamtkosten.

Grundlegende Literatur

– Dinkelbach, Werner/ Rosenberg, Otto: Erfolgs- und umweltorientierte Produktionstheorie, 5. Auflage, Berlin/ Heidelberg 2004.

Weiterführende Literatur

– Adam, Dietrich: Produktionsmanage

– Dyckhoff, Harald / Spengler, Thoma
Berlin/ Heidelberg 2010.

– Günther, Hans-Otto / Tempelmeier,
10. Auflage, Berlin/ Heidelberg 2013

– Hansmann, Karl-Werner: Industrielle
Wien 2006.