Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 1

Aufgabe Ü.1.1.

Berechnen Sie die Länge von

$$\vec{\mathbf{x}} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

Lösung:

Die Ableitung von $\vec{\mathbf{x}}$ ist $\vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} 3\,t^2 \\ 2\,t \end{bmatrix}$, also

$$|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = \sqrt{(3\,t^2)^2 + (2\,t)^2} = \sqrt{9\,t^4 + 4\,t^2} = |t|\,\sqrt{4+9\,t^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} L(\vec{\mathbf{x}}) &= \int_{-1}^{1} |\vec{\mathbf{x}}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} |t|\,\sqrt{4+9\,t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} -t\,\sqrt{4+9\,t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} t\,\sqrt{4+9\,t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 t\,\sqrt{4+9\,t^2}\,\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \frac{1}{9}\int_4^{13}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{27}\,\Big[u^{3/2}\Big]_{u=4}^{u=13} = \frac{2}{27}\,\big(13^{3/2} - 8\big), \end{aligned}$$

wobei wir in (*) die Substitution $u = 4 + 9\,t^2$, $\mathrm{d}u = 18t\,\mathrm{d}t$ verwendet haben.

Aufgabe Ü.1.2.

Berechnen Sie die Länge von

$$\vec{\mathbf{x}} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2\,\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\,\sin(t) - \sin(2t) \end{bmatrix}.$$

Lösung:

Es gilt

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} -2\,\sin(t) + 2\,\sin(2t) \\ 2\,\cos(t) - 2\,\cos(2t) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -\sin(t) + \sin(2t) \\ \cos(t) - \cos(2t) \end{bmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{x}}'(t)| &= 2\,\sqrt{\big(-\sin(t) + \sin(2t)\big)^2 + \big(\cos(t) - \cos(2t)\big)^2} \\ &= 2\,\sqrt{\sin^2(t) + \sin^2(2t) - 2\,\sin(t)\,\sin(2t) + \cos^2(t) + \cos^2(2t) - 2\,\cos(t)\,\cos(2t)} \\ &= 2\,\sqrt{2 - 2\,\big[\sin(2t)\,\sin(t) + \cos(2t)\,\cos(t)\big]} \overset{(*)}{=} 2\,\sqrt{2 - 2\,\cos(2t - t)} \\ &= 2\,\sqrt{2\,\big(1 - \cos(t)\big)} \overset{(**)}{=} 2\,\sqrt{4\,\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)} = 4\,\left|\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right|, \end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ das Additionstheorem für den Cosinus und in $(**)$ die Formel

$$1 - \cos(t) = 2\,\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)$$

verwendet haben. Da für $t \in [0, 2\pi]$ gilt, dass $\sin(\frac{t}{2}) \geq 0$, erhalten wir die Weglänge

$$\begin{aligned} L(\vec{\mathbf{x}}) &= \int_0^{2\pi} |\vec{\mathbf{x}}'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 4 \sin\left(\tfrac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \Big[-8 \cos\left(\tfrac{t}{2}\right) \Big]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= -8 \cos(\pi) + 8 \cos(0) = 16. \end{aligned}$$

Aufgabe Ü.1.3.
In $\mathbb{R}^2$ sei die Kreislinie K um den Ursprung mit Radius $R > 0$ gegeben. Geben Sie jeweils einen regulären C^1-Weg in $\mathbb{R}^2$ an, der

(a) K einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

(b) K einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft und nach Bogenlänge parametrisiert ist.

(c) K dreimal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

(d) K einmal im Uhrzeigersinn durchläuft.

Lösung:

(a) $\vec{\mathbf{x}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{bmatrix}$

(b) $\vec{\mathbf{x}} : [0, 2\pi R] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} R \cos\left(\frac{t}{R}\right) \\ R \sin\left(\frac{t}{R}\right) \end{bmatrix}$

(c) $\vec{\mathbf{x}} : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{bmatrix}$

(d) $\vec{\mathbf{x}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} R \cos(-t) \\ R \sin(-t) \end{bmatrix}$

Aufgabe Ü.1.4.
Seien $r, h > 0$ und

$$\vec{\mathbf{x}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ ht \end{bmatrix}$$

eine Schraubenlinie.

Zeigen Sie, dass $\vec{\mathbf{x}}$ regulär ist. Bestimmen Sie eine orientierungserhaltende Parametertransformation φ so, dass $\vec{\mathbf{x}} \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Lösung:

Es gilt

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{bmatrix},$$

also

$$|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = \sqrt{r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t) + h^2} = \sqrt{r^2 + h^2} > 0.$$

Also ist $\vec{\mathbf{x}}$ regulär. Definieren wir

$$\varphi : \left[0, 2\pi\sqrt{r^2+h^2}\right] \to [0, 2\pi], \qquad \varphi(s) := \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}},$$

so ist φ eine orientierungserhaltende Parametertransformation, denn φ ist stetig differenzierbar und $\varphi'(s) > 0$ für alle s. Außerdem ist $\vec{\mathbf{x}} \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert.

Aufgabe Ü.1.5.

In $\mathbb{R}^2$ sei die Ellipse E durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(mit $a > 0$ und $b > 0$) gegeben.

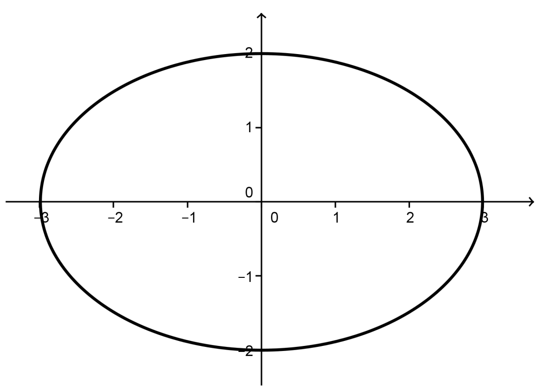
(a) Skizzieren Sie E für $a = 3$ und $b = 2$.

(b) Finden Sie einen regulären C^1-Weg $\vec{\mathbf{x}}$, der E einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

(c) Geben Sie das Integral für die Berechnung der Weglänge an, aber versuchen Sie nicht, das Integral zu berechnen.

Lösung:

(a) Ellipse mit $a = 3$ und $b = 2$:



(b) $\vec{\mathbf{x}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{bmatrix}.$

Der Weg ist ein glatter C^1-Weg, weil seine Komponentenfunktionen C^1-Funktionen sind und weil seine Ableitung nie der Nullvektor ist (siehe Teil (c)).

(c) Wir berechnen zunächst die Ableitung und deren Norm:

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} -a\,\sin(t) \\ b\,\cos(t) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{\mathbf{x}}'(t)| = \sqrt{a^2\,\sin^2(t) + b^2\,\cos^2(t)} > 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi],$$

wobei wir genutzt haben, dass für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt

$$a^2\,\sin^2(t) + b^2\,\cos^2(t) \geq \big(\min\{a,b\}\big)^2 \big[\sin^2(t) + \cos^2(t)\big] = \big(\min\{a,b\}\big)^2 > 0.$$

Also ist $\vec{\mathbf{x}}$ glatt (d.h. regulär) und

$$L(\vec{\mathbf{x}}) = \int_0^{2\pi} |\vec{\mathbf{x}}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\,\sin^2(t) + b^2\,\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe Ü.1.6.

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ihr Graph ist dann die Menge

$$G_f = \big\{(t, f(t)) \ : \ t \in [a,b]\big\} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir betrachten den Weg

$$\vec{\mathbf{x}} : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{\mathbf{x}}$ ein C^1-Weg ist und dass G_f die Spur von $\vec{\mathbf{x}}$ ist.

(b) Ist $\vec{\mathbf{x}}$ regulär?

(c) Geben Sie eine Formel für die Länge von $\vec{\mathbf{x}}$ an.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(t) \end{bmatrix}.$$

Nach den Voraussetzungen an f ist f' und damit auch $\vec{\mathbf{x}}'$ stetig. Also ist $\vec{\mathbf{x}}$ stetig differenzierbar und damit ein C^1-Weg.

Weiter gilt

$$\mathrm{Spur}(\vec{\mathbf{x}}) = \big\{\vec{\mathbf{x}}(t) \ : \ t \in [a,b]\big\} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} \ : \ t \in [a,b] \right\} = \big\{(t, f(t)) \ : \ t \in [a,b]\big\} = G_f.$$

(b) Es gilt

$$|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = \left| \begin{bmatrix} 1 \\ f'(t) \end{bmatrix} \right| = \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2} \geq 1 > 0 \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

Daraus folgt, dass $\vec{\mathbf{x}}'(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$ für alle $t \in [a,b]$ ist. Also ist $\vec{\mathbf{x}}$ regulär.

(c) Die Weglänge berechnet sich mit der Formel

$$L(\vec{\mathbf{x}}) = \int_a^b |\vec{\mathbf{x}}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe Ü.1.7.

Wir lassen in der (x, y)-Ebene eine Kreisscheibe vom Radius 1 auf der x-Achse abrollen. Eine zweite Kreisscheibe vom Radius $r > 0$ habe denselben Mittelpunkt und sei mit der ersten fest verbunden. Wir fixieren einen Punkt auf dem Rand der zweiten Kreisscheibe. Dann beschreibt dieser Punkt einen Weg $\vec{\mathbf{x}}$ in der (x, y)-Ebene.

(a) Skizzieren Sie die Spur von $\vec{\mathbf{x}}$ in den drei Fällen $r < 1$, $r = 1$ und $r > 1$.

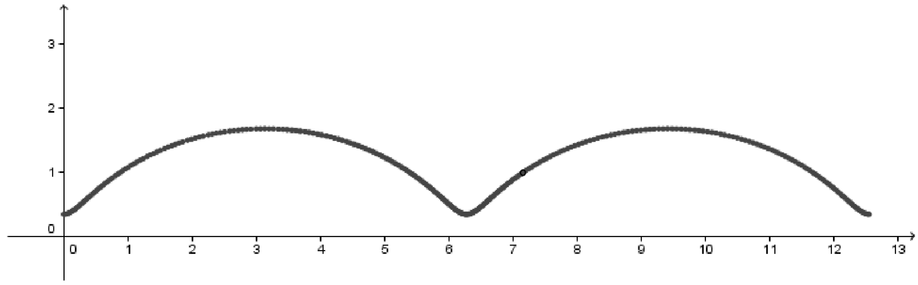
(b) Leiten Sie eine Formel für $\vec{\mathbf{x}}$ her.

(c) Ist $\vec{\mathbf{x}}$ regulär?

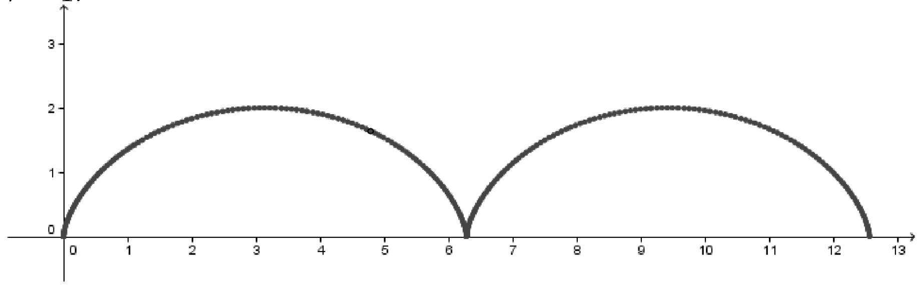
(d) Berechnen Sie die Länge von $\vec{\mathbf{x}}$ im Fall $r = 1$ für einen Umlauf der Kreisscheibe.

Lösung:

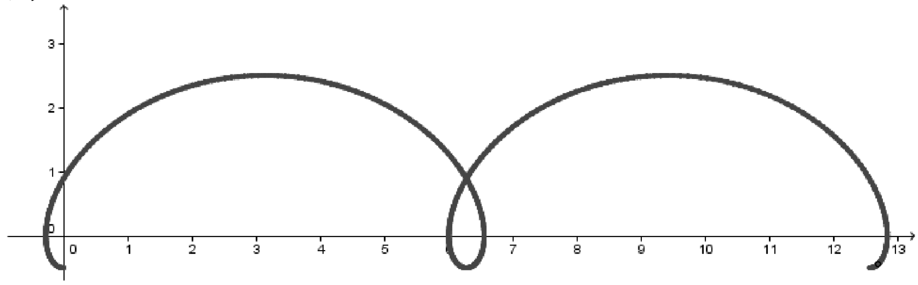
(a) $r < 1$:



$r = 1$:



$r > 1$:



(b) Um eine Formel für den gesuchten Weg zu finden, zerlegen wir die Bewegung in die Rotation der Kreisscheibe und die horizontale Bewegung durch das Abrollen. Er gesuchte Weg lässt sich als Überlagerung dieser beiden Bewegungen darstellen.

Wir betrachten also eine Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt in $(0, 1)$, die im Uhrzeigersinn um ihren Mittelpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Wir betrachten die Bewegung des Punktes in $(0, 1-r)$ auf dem Rand dieser Kreisscheibe. (Dieser Punkt ist der Randpunkt senkrecht unterhalb des Mittelpunkts $(0, 1)$ der Kreisscheibe.)

Diese Bewegung wird durch
$$\begin{bmatrix} -r\,\sin(t) \\ 1 - r\,\cos(t) \end{bmatrix}$$
beschrieben.

Wenn die Kreisscheibe mit Radius 1 sich beim Abrollen auf der x-Achse einmal ganz gedreht hat (also wenn der beobachtete Punkt zum ersten mal wieder die gleiche y-Koordinate wie zu Beginn der Bewegung hat), dann wird auf der x-Achse die Strecke 2π (= Umfang der Kreisscheibe mit Radius 1) zurückgelegt. Also ist die horizontale Bewegung durch den Abrollvorgang
$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Überlagerung der beiden Bewegungen liefert die Formel für den gesuchten Weg:
$$\vec{\mathbf{x}}(t) := \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r\,\sin(t) \\ 1 - r\,\cos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - r\,\sin(t) \\ 1 - r\,\cos(t) \end{bmatrix}$$

(Beachten Sie, dass dies nicht die einzige richtige Lösung ist!)

(c) Es gilt
$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} 1 - r\,\cos(t) \\ r\,\sin(t) \end{bmatrix},$$
also
$$|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = \sqrt{\big(1 - r\,\cos(t)\big)^2 + \big(r\,\sin(t)\big)^2}$$
Hieraus folgt:
$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{x}}'(t)| = 0 \quad &\iff \quad 1 - r\cos(t) = 0 \;\text{ und }\; r\sin(t) = 0 \\ &\iff \quad r\cos(t) = 1 \;\text{ und }\; t = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad r = 1 \;\text{ und }\; t = 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
Also ist $\vec{\mathbf{x}}$ regulär genau dann, wenn $r \neq 1$ ist.

(d) Wir vereinfachen zunächst die in (c) berechnete Länge von $\vec{\mathbf{x}}'$ für den Fall $r = 1$:
$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{x}}'(t)| &= \sqrt{\big(1 - \cos(t)\big)^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{1 - 2\,\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{2 - 2\,\cos(t)}. \end{aligned}$$
Für einen Umlauf müssen wir über das Intervall $[0, 2\pi]$ integrieren:
$$\begin{aligned} L(\vec{\mathbf{x}}) &= \int_0^{2\pi} |\vec{\mathbf{x}}'(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\,\cos(t)} \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} 2\,\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \Big[-4\,\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) \Big]_{t=0}^{t=2\pi} = -4\,\cos(\pi) + 4\,\cos(0) = 8, \end{aligned}$$
wobei wir in $(*)$ die Formel
$$1 - \cos(t) = 2\,\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)$$
genutzt haben (vgl. Aufgabe Ü.1.2.).

Aufgabe Ü.1.8.

Wir betrachten den Weg

$$\vec{\mathbf{x}} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} t\,\cos(t) \\ t\,\sin(t) \end{bmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Spur des Weges $\vec{\mathbf{x}}$ an und skizzieren Sie diese.

(b) Berechnen Sie die Länge von $\vec{\mathbf{x}}$.

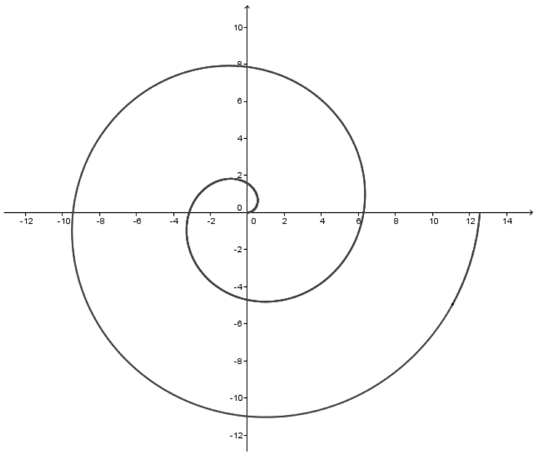
(e) Ist $\vec{\mathbf{x}}$ ein regulärer C^1-Weg?

Lösung:

(a) Die Spur dieses Weges ist

$$\mathrm{Spur}(\vec{\mathbf{x}}) = \left\{ \begin{bmatrix} t\,\cos(t) \\ t\,\sin(t) \end{bmatrix} \;:\; t \in [0, 4\,\pi] \right\};$$

Es handelt sich um eine Spirale, die im Punkt $(0, 0)$ beginnt:



(b) Es gilt

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) - t\,\sin(t) \\ \sin(t) + t\,\cos(t) \end{bmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{x}}'(t)| &= \sqrt{\big[\cos(t) - t\,\sin(t)\big]^2 + \big[\sin(t) + t\,\cos(t)\big]^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(t) - 2t\,\sin(t)\cos(t) + t^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + 2t\,\sin(t)\cos(t) + t^2\cos^2(t)} \\ &= \sqrt{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} L(\vec{\mathbf{x}}) &= \int_0^{4\pi} |\vec{\mathbf{x}}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \Big[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arsinh}(t) + \tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}\Big]_{t=0}^{t=4\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arsinh}(4\pi) + 2\pi\sqrt{1+16\pi^2}, \end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ folgende Nebenrechnung genutzt haben:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= t\sqrt{1+t^2} - \int t\,\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= t\sqrt{1+t^2} - \int \left(\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \operatorname{arsinh}(t) \\
\implies 2\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh}(t) + c.
\end{aligned}$$

(c) Da $|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = \sqrt{1+t^2} \neq 0$ für alle $t \in [0, 4\pi]$, handelt es sich um einen regulären C^1-Weg.

Aufgabe Ü.1.9.
Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei der C^1-Weg

$$\vec{\mathbf{x}} : [0, 2k\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}(t) = e^{ct}\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix},$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Spur von $\vec{\mathbf{x}}$ für $c = \frac{1}{4}$ und $k = 1$.

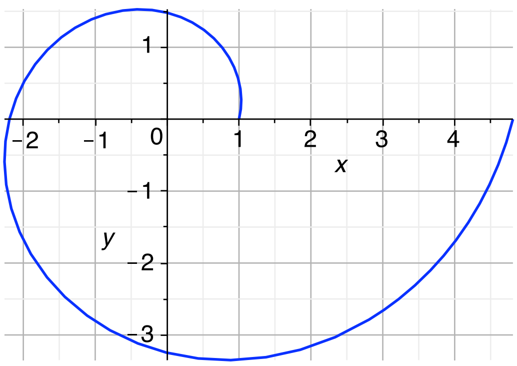
(b) Zeigen Sie, dass $\vec{\mathbf{x}}$ regulär ist.

(c) Berechnen Sie die Länge von $\vec{\mathbf{x}}$.

(c) Bestimmen Sie eine orientierungserhaltende Parametertransformation φ so, dass $\vec{\mathbf{x}} \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Lösung:

(a) Spur von $\vec{\mathbf{x}}$ für $c = \frac{1}{4}$ und $k = 1$:



(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}'(t)| &= \begin{bmatrix} c\,e^{ct}\,\cos(t) - e^{ct}\,\sin(t) \\ c\,e^{ct}\,\sin(t) + e^{ct}\,\cos(t) \end{bmatrix} = e^{ct} \begin{bmatrix} c\,\cos(t) - \sin(t) \\ c\,\sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix} \\
\Longrightarrow \qquad |\vec{\mathbf{x}}'(t)| &= \sqrt{e^{2ct}\left[\big(c\,\cos(t) - \sin(t)\big)^2 + \big(c\,\sin(t) + \cos(t)\big)^2\right]} \\
&= \sqrt{e^{2ct}\left[c^2\,\cos^2(t) + \sin^2(t) + c\,\sin^2(t) + \cos^2(t)\right]} \\
&= e^{ct}\,\sqrt{1+c^2} > 0 \qquad \text{für alle } t \in [0, 2k\pi]
\end{aligned}$$

Also ist $\vec{\mathbf{x}}$ regulär.

(c) Wir berechnen die Länge von $\vec{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned}
L(\vec{\mathbf{x}}) &= \int_0^{2k\pi} |\vec{\mathbf{x}}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2k\pi} e^{ct}\,\sqrt{1+c^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+c^2}\left[\frac{1}{c}\,e^{ct}\right]_{t=0}^{t=2k\pi} \\
&= \frac{1}{c}\,e^{2k\pi c}\,\sqrt{1+c^2} - \frac{1}{c}\,e^0\,\sqrt{1+c^2} = \frac{1}{c}\,\sqrt{1+c^2}\,\big(e^{2k\pi c} - 1\big).
\end{aligned}$$

(d) Wir berechnen zunächst

$$\psi(u) = \int_0^u |\vec{\mathbf{x}}'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+c^2}\int_0^u e^{ct}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(e^{cu} - 1), \qquad u \in [0, 2k\pi].$$

Nun bestimmen wir die Umkehrfunktion von ψ:

$$\varphi(s) = \psi^{-1}(s) = \frac{1}{c}\ln\left(1 + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}s\right)$$

mit Definitionsintervall

$$J = \varphi([0, 2k\pi]) = \left[0, \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(e^{2k\pi c} - 1)\right].$$

Aufgabe Ü.1.10.

Sei $\vec{\mathbf{x}} : I \to \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig differenzierbarer Weg, der nach Bogenlänge parametrisiert ist. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\vec{\mathbf{x}}''(t) \perp \vec{\mathbf{x}}'(t)$.

Lösung:

Beweis: Da $\vec{\mathbf{x}}$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = 1$ für alle $t \in I$. Also erhalten wir

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) \cdot \vec{\mathbf{x}}'(t) = |\vec{\mathbf{x}}'(t)|^2 = 1$$

Ableiten dieser Gleichung nach t ergibt (Produktregel):

$$\vec{\mathbf{x}}''(t) \cdot \vec{\mathbf{x}}(t) + \vec{\mathbf{x}}'(t) \cdot \vec{\mathbf{x}}''(t) = 0$$

Hieraus folgt

$$2\,\vec{\mathbf{x}}''(t) \cdot \vec{\mathbf{x}}(t) = 0,$$

also $\vec{\mathbf{x}}''(t) \perp \vec{\mathbf{x}}'(t)$. □

Aufgabe Ü.1.11.
Sei $\vec{\mathbf{x}} : I \to \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig differenzierbarer Weg, der nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist die *Krümmung* von $\vec{\mathbf{x}}$ definiert durch $\kappa(t) := |\vec{\mathbf{x}}''(t)|$.

Berechnen Sie $\kappa(t)$ für

(a) einen nach Bogenlänge parametrisierten Weg, der die Kreislinie K um den Ursprung mit Radius R durchläuft (vgl. Aufgabe Ü.1.3).

(b) die nach Bogenlänge umparametrisierte Schraubenlinie aus Aufgabe Ü.1.4.

Lösung:

(a) Wir betrachten den Weg aus Aufgabe Ü.8.3 (b) und berechnen die erste und zweite Ableitung:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} R\cos(\frac{t}{R}) \\ R\sin(\frac{t}{R}) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(\frac{t}{R}) \\ \cos(\frac{t}{R}) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{x}}''(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R}\cos(\frac{t}{R}) \\ -\frac{1}{R}\sin(\frac{t}{R}) \end{bmatrix}.$$

Da $|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = 1$ für alle t, ist $\vec{\mathbf{x}}$ nach Bogenlänge parametrisiert, und die Krümmung ist

$$\kappa(t) = |\vec{\mathbf{x}}''(t)| = \frac{1}{R}.$$

(b) Wir betrachten den nach Bogenlänge umparametrisierten Weg aus Aufgabe Ü.8.2 und berechnen die erste und zweite Ableitung:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} r\ \cos(\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}) \\ r\ \sin(\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}) \\ \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} -\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\ \sin(\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}) \\ \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\ \cos(\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}) \\ \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{x}}''(t) = \begin{bmatrix} -\frac{r}{r^2+h^2}\ \cos(\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}) \\ -\frac{r}{r^2+h^2}\ \sin(\frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da $|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = 1$ für alle t, ist $\vec{\mathbf{x}}$ nach Bogenlänge parametrisiert, und die Krümmung ist

$$\kappa(t) = |\vec{\mathbf{x}}''(t)| = \frac{r}{r^2+h^2}.$$

Aufgabe Ü.1.12.

Geben Sie einen stückweise glatten Weg $\vec{\mathbf{x}}$ an, der den Rand des Dreiecks mit den Ecken $(1,1)$, $(1,3)$ und $(0,1)$ einmal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

Lösung:

Weg von $(1,1)$ nach $(1,3)$:

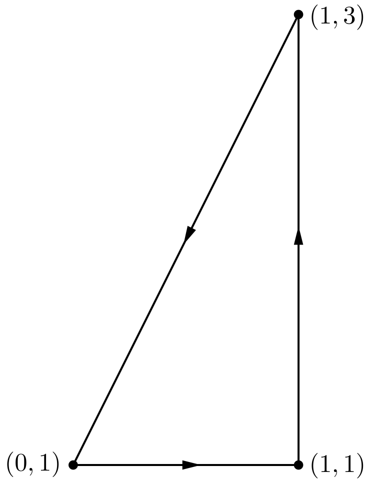
$\vec{\mathbf{x}}_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1-1 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t+1 \end{bmatrix}$

Weg von $(1,3)$ nach $(0,1)$:

$\vec{\mathbf{x}}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0-1 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 3-2t \end{bmatrix}$

Weg von $(0,1)$ nach $(1,1)$:

$\vec{\mathbf{x}}_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1-0 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$



Der gesuchte stückweise C^1-Weg ist dann $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_1 \oplus \vec{\mathbf{x}}_2 \oplus \vec{\mathbf{x}}_3$.

(Beachten Sie, dass dies nur eine mögliche Lösung ist. Es gibt viele andere richtige Lösungen.)

Aufgabe Ü.1.13.

Gegeben sei das Skalarfeld $f(x,y,z) := x^2\,y^2 + z^2$ und die Schraubenlinie

$$\vec{\mathbf{x}} : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\displaystyle\int_{\vec{\mathbf{x}}} f \, \mathrm{d}s$.

Hinweis: $\cos^2(t)\,\sin^2(t) = \frac{1}{8}\,(1-\cos(4t))$

Lösung:

Es gilt

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 1 \end{bmatrix},$$

also

$$|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \big(-\cos(t)\big)^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Damit erhalten wir unter Verwendung des Hinweises:

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\mathbf{x}}} f\,\mathrm{d}s &= \int_0^{4\pi} f\big(\cos(t),\sin(t),t\big)\,|\vec{\mathbf{x}}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi}\big[\cos^2(t)\,\sin^2(t)+t^2\big]\sqrt{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{2}\int_0^{4\pi}\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4t)+t^2\right]\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left[\frac{1}{8}\,t-\frac{1}{32}\sin(4t)+\frac{1}{3}\,t^3\right]_{t=0}^{t=4\pi}\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{64}{3}\,\pi^3\right) = \sqrt{2}\,\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{64\,\pi^2}{3}\right).\end{aligned}$$

Bemerkung: Den Hinweis kann man in einer geeigneten Formelsammlung nachschlagen oder mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen:

$$\cos^2(t)\,\sin^2(t) = \big(\cos(t)\,\sin(t)\big)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2(2t) = \frac{1}{8}\big(1-\cos(4t)\big).$$

Aufgabe Ü.1.14.

Seien $a, b > 0$. Gegeben sei das Skalarfeld $f(x,y) := x\,y$ und der C^1-Weg

$$\vec{\mathbf{x}} : \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} a\,\cos(t)\\ b\,\sin(t)\end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\displaystyle\int_{\vec{\mathbf{x}}} f\,\mathrm{d}s$ in Abhängigkeit von a, b.

Lösung:

Es gilt

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} a\,\cos(t)\\ b\,\sin(t)\end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} -a\,\sin(t)\\ b\,\cos(t)\end{bmatrix},$$

also

$$|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = \sqrt{\big(-a\,\sin(t)\big)^2+\big(b\,\cos(t)\big)^2} = \sqrt{a^2\,\sin^2(t)+b^2\,\cos^2(t)}.$$

Wir unterscheiden die Fälle $a = b$ und $a \neq b$.

Fall $a = b$: Es ist $|\vec{\mathbf{x}}'(t)| = \sqrt{a^2} = a$, also

$$\int_{\vec{\mathbf{x}}} f\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\big(\vec{\mathbf{x}}(t)\big)\,|\vec{\mathbf{x}}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\,\cos(t)\,\sin(t)\,a\,\mathrm{d}t = \left[\frac{a^3}{2}\,\sin^2(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{2}.$$

Fall $a \neq b$: Es gilt

$$\int_{\vec{\mathbf{x}}} f\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\big(\vec{\mathbf{x}}(t)\big)\,|\vec{\mathbf{x}}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\,b\,\cos(t)\,\sin(t)\,\sqrt{a^2\,\sin^2(t)+b^2\,\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} u &= a^2 \, \sin^2(t) + b^2 \, \cos^2(t) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= 2\,a^2 \, \sin(t)\, \cos(t) + 2\,b^2 \, \cos(t)\, \big(-\sin(t)\big) = 2\,(a^2-b^2)\,\cos(t)\,\sin(t) \\ \Longrightarrow \cos(t)\,\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2(a^2-b^2)}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\mathbf{x}}} f\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\,b\,\cos(t)\,\sin(t)\,\sqrt{a^2\,\sin^2(t) + b^2\,\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{b^2}^{a^2} \frac{a\,b}{2\,(a^2-b^2)}\,\sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{a\,b}{2\,(a^2-b^2)}\,\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=b^2}^{u=a^2} = \frac{a\,b}{3\,(a^2-b^2)}\,\big(a^3-b^3\big) \\ &= \frac{a\,b\,(a-b)\,(a^2+a\,b+b^2)}{3\,(a-b)\,(a+b)} = \frac{a\,b\,(a^2+a\,b+b^2)}{3\,(a+b)}\,. \end{aligned}$$

Setzt man in diesem Ergebnis $a=b$, so erhält man $\frac{a^3}{2}$. Also können wir das Ergebnis für beide Fälle zusammen aufschreiben:

$$\int_{\vec{\mathbf{x}}} f\mathrm{d}s = \frac{a\,b\,(a^2+a\,b+b^2)}{3\,(a+b)}.$$

(Die Fallunterscheidung war trotzdem nötig, da wir während der Rechnung einmal durch (a^2-b^2) dividiert haben, was für $a=b$ nicht erlaubt ist.)

Aufgabe Ü.1.15.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $D \neq \emptyset$. Sei $\vec{\mathbf{x}} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Weg mit $\mathrm{Spur}(\vec{\mathbf{x}}) \subseteq D$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Zeigen Sie: Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine (orientierungserhaltende oder orientierungsumkehrende) Parametertransformation, dann gilt für $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}} \circ \varphi$, dass

$$\int_{\vec{\mathbf{y}}} f\,\mathrm{d}s = \int_{\vec{\mathbf{x}}} f\,\mathrm{d}s.$$

Lösung:

Beweis: Seien $I=[a,b]$ und $J=[c,d]$. Wir betrachten die beiden Fälle, dass φ orientierungserhaltend bzw. -umkehrend ist, getrennt.

(i) Sei φ orientierungserhaltend, d.h. $\varphi'(u) > 0$ für alle $u \in J$ und $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$.
Aus $\vec{\mathbf{y}}'(u) = \vec{\mathbf{x}}'(\varphi(u))\,\varphi'(u)$ für alle $u \in J$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\mathbf{y}}} f\,\mathrm{d}s &= \int_c^d f(\vec{\mathbf{y}}(u))\,|\vec{\mathbf{y}}'(u)|\,\mathrm{d}u = \int_c^d f(\vec{\mathbf{x}}(\varphi(u)))\,\big|\vec{\mathbf{x}}'\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\big|\,\mathrm{d}u \\ &= \int_c^d f(\vec{\mathbf{x}}(\varphi(u)))\,\big|\vec{\mathbf{x}}'\big(\varphi(u)\big)\big|\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

wobei wir $\varphi'(u) > 0$ für alle $u \in J$ genutzt haben. Mit der Substitution $t = \varphi(u)$, d.h. $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, erhalten wir

$$\int_{\vec{\mathbf{y}}} f\,\mathrm{d}s = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\vec{\mathbf{x}}(t))\left|\vec{\mathbf{x}}'(t)\right|\mathrm{d}t = \int_a^b f(\vec{\mathbf{x}}(t))\left|\vec{\mathbf{x}}'(t)\right|\mathrm{d}t = \int_{\vec{\mathbf{x}}} f\,\mathrm{d}s.$$

(ii) Sei φ orientierungsumkehrend, d.h. $\varphi'(u) < 0$ für alle $u \in J$ und $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$.

Aus $\vec{\mathbf{y}}'(u) = \vec{\mathbf{x}}'(\varphi(u))\,\varphi'(u)$ für alle $u \in J$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\mathbf{y}}} f\,\mathrm{d}s &= \int_c^d f(\vec{\mathbf{y}}(u))\,|\vec{\mathbf{y}}'(u)|\,\mathrm{d}u = \int_c^d f(\vec{\mathbf{x}}(\varphi(u)))\left|\vec{\mathbf{x}}'\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\right|\mathrm{d}u\\ &= -\int_c^d f(\vec{\mathbf{x}}(\varphi(u)))\left|\vec{\mathbf{x}}'\big(\varphi(u)\big)\right|\varphi'(u)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

wobei wir $\varphi'(u) < 0$ für alle $u \in J$ genutzt haben. Mit der Substitution $t = \varphi(u)$, d.h. $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\mathbf{y}}} f\,\mathrm{d}s &= -\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\vec{\mathbf{x}}(t))\left|\vec{\mathbf{x}}'(t)\right|\mathrm{d}t = -\int_b^a f(\vec{\mathbf{x}}(t))\left|\vec{\mathbf{x}}'(t)\right|\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b f(\vec{\mathbf{x}}(t))\left|\vec{\mathbf{x}}'(t)\right|\mathrm{d}t = \int_{\vec{\mathbf{x}}} f\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung in beiden Fällen bewiesen. □

Aufgabe Ü.1.16.

Wir betrachten das durch $\vec{\mathbf{F}}(x,y) := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ definierte Vektorfeld in $\mathbb{R}^2$.

(a) Stellen Sie das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}$ durch ein Pfeilbild dar.

(b) Berechnen Sie nun das Wegintegral

$$\oint_{\vec{\mathbf{x}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$$

für das gegebene Vektorfeld und die folgenden geschlossenen Wege $\vec{\mathbf{x}}$:

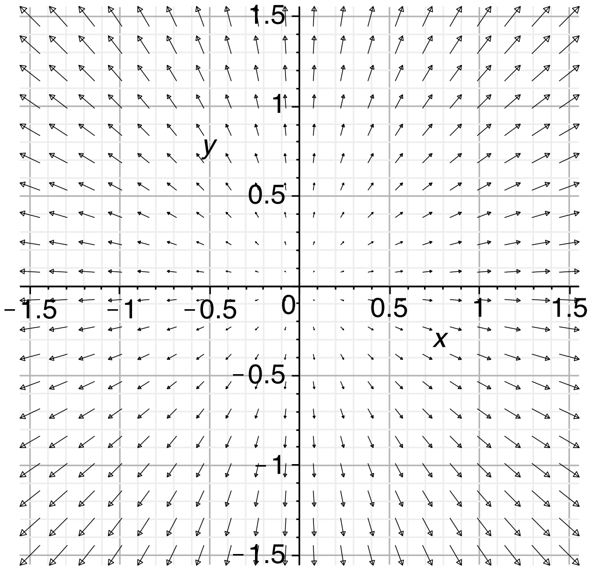
(i) einen geschlossenen Weg, der die Kreislinie mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r > 0$ einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft,

(ii) einen geschlossenen Weg, der die Kreislinie mit Mittelpunkt $(1,1)$ und Radius 1 einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

Sind die Ergebnisse anschaulich plausibel? Wenn ja, erklären Sie warum.

Lösung:

(a) Das Pfeilbild ist unten dargestellt:



(b) Die beiden gesuchten Weg sind:

$$\text{(i)}\quad \vec{\mathbf{y}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} r\,\cos(t) \\ r\,\sin(t) \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\mathbf{y}}'(t) = \begin{bmatrix} -r\,\sin(t) \\ r\,\cos(t) \end{bmatrix},$$

$$\text{(ii)}\quad \vec{\mathbf{z}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 1 + \cos(t) \\ 1 + \sin(t) \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\mathbf{z}}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst

$$\vec{\mathbf{F}}\big(\vec{\mathbf{y}}(t)\big) \cdot \vec{\mathbf{y}}'(t) = \begin{bmatrix} r\,\cos(t) \\ r\,\sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r\,\sin(t) \\ r\,\cos(t) \end{bmatrix} = -r^2 \cos(t)\sin(t) + r^2 \sin(t)\cos(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}\big(\vec{\mathbf{z}}(t)\big) \cdot \vec{\mathbf{z}}'(t) &= \begin{bmatrix} 1 + \cos(t) \\ 1 + \sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} = -\big(1 + \cos(t)\big)\sin(t) + \big(1 + \sin(t)\big)\,\cos(t) \\ &= \cos(t) - \sin(t). \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\text{(i)}\quad \oint_{\vec{\mathbf{y}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{s}} = \int_0^{2\pi} \vec{\mathbf{F}}\big(\vec{\mathbf{y}}(t)\big) \cdot \vec{\mathbf{y}}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}t = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)}\quad \oint_{\vec{\mathbf{z}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{s}} &= \int_0^{2\pi} \vec{\mathbf{F}}\big(\vec{\mathbf{z}}(t)\big) \cdot \vec{\mathbf{z}}'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \big[\cos(t) - \sin(t)\big]\mathrm{d}t \\ &= \Big[\sin(t) + \cos(t)\Big]_{t=0}^{t=2\pi} = 0. \end{aligned}$$

In (i) stehen die Tangentialvektoren $\vec{\mathbf{y}}'(t)$ des Weges $\vec{\mathbf{y}}$ senkrecht auf den Vektoren des Vektorfeldes $\vec{\mathbf{F}}\big(\vec{\mathbf{y}}(t)\big)$. Dieses sehen Sie an dem Pfeilbild des Vektorfeldes, wenn Sie sich den Weg $\vec{\mathbf{y}}$ einzeichnen. Also muss das Kurvenintegral den Wert Null haben.

In (ii) ist es nicht so offensichtlich, warum das Kurvenintegral den Wert Null haben sollte.

Aufgabe Ü.1.17.

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}(x,y) := \begin{bmatrix} x^2\,y \\ -y^2 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie das Wegintegral

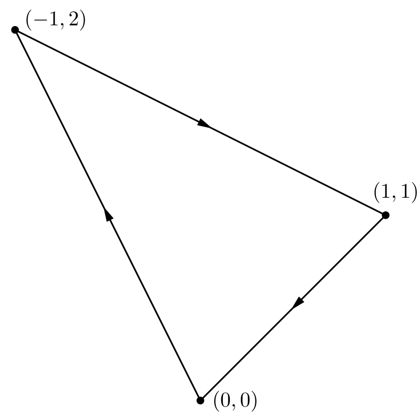
$$\int_{\vec{\mathbf{x}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{s}},$$

wobei $\vec{\mathbf{x}}$ den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$ und $(-1,2)$ im Uhrzeigersinn durchläuft.

Lösung:

Wir haben

$$\oint_{\vec{\mathbf{x}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{s}} = \sum_{k=1}^{3} \int_{\vec{\mathbf{x}}_k} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{s}},$$



wobei $\vec{\mathbf{x}} := \vec{\mathbf{x}}_1 \oplus \vec{\mathbf{x}}_2 \oplus \vec{\mathbf{x}}_3$ der stückweise C^1-Weg mit den Teilwegen

$$\vec{\mathbf{x}}_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{x}}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1-0 \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 2\,t \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{x}}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{x}}_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1-(-1) \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,t-1 \\ 2-t \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{x}}_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{x}}_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0-1 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 1-t \end{bmatrix}$$

sei.

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\oint_{\vec{\mathbf{x}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{s}} = \sum_{k=1}^{3} \int_{\vec{\mathbf{x}}_k} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{s}} &= \int_0^1 \begin{bmatrix} (-t)^2\,2\,t \\ -(2\,t)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^1 \begin{bmatrix} (2\,t-1)^2\,(2-t) \\ -(2-t)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-t)^2\,(1-t) \\ -(1-t)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \big(-2\,t^3 - 8\,t^2\big)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \big[-8t^3 + 24t^2 - 18t + 4 + (2-t)^2\big]\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^1 \big[-(1-t)^3 + (1-t)^2\big]\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{2}\,t^4 - \frac{8}{3}\,t^3\right]_{t=0}^{t=1} + \left[-2\,t^4 + 8\,t^3 - 9\,t^2 + 4t - \frac{1}{3}(2-t)^3\right]_0^1
\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{1}{4}(1-t)^4 - \frac{1}{3}(1-t)^3\right]_{t=0}^{t=1}$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\,.$$

Aufgabe Ü.1.18.

Durch $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ sei ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Stellen Sie $\vec{\mathbf{F}}$ durch ein Pfeilbild dar.

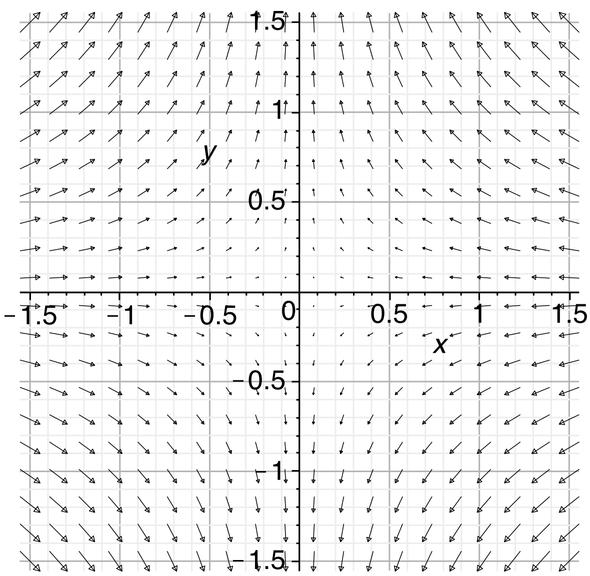
(b) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\vec{\mathbf{x}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{s}},$$

wobei $\vec{\mathbf{x}}$ der Rand des Quadrats mit den Eckpunkten $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ und $(1,-1)$ ist, welcher im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

Lösung:

(a) Pfeilbild:



(b) *Ergebnis:* $\oint_{\vec{\mathbf{x}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{s}} = 0$

Aufgabe Ü.1.19.

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{\mathbf{F}}(x,y) := \begin{bmatrix} e^x \\ x\,y \end{bmatrix}$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\vec{\mathbf{x}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}},$$

wobei $\vec{\mathbf{x}}$ den Einheitskreis um den Ursprung einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

Lösung:

Wir wählen die Parametrisierung

$$\vec{\mathbf{x}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\mathbf{x}}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_{\vec{\mathbf{x}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} &= \int_0^{2\pi} \vec{\mathbf{F}}\big(\vec{\mathbf{x}}(t)\big) \cdot \vec{\mathbf{x}}'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} e^{\cos(t)} \\ \cos(t)\,\sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[-\sin(t)\, e^{\cos(t)} + \cos^2(t)\,\sin(t) \Big] \mathrm{d}t = \Big[e^{\cos(t)} - \frac{1}{3}\cos^3(t) \Big]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$