Universidad Nacional Agraria La Molina
Departamento De Estadística E Informática
Curso: Inferencia Estadística
Profesor: Clodomiro Fernando Miranda Villagómez

Estadísticas De Orden

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. extraída de una población con función de distribución acumulada continua $F(x) = P(X \le x)$. Las v.a. denotadas por Y_j o $X(j)$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$; esto es:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X(1) = \min\{X_1, ..., X_n\} \\
Y_2 &= X(2) = \min\{\{X_1, ..., X_n\} - Y_1\} \\
&: \\
&: \\
Y_n &= X(n) = máx\{X_1, ..., X_n\}
\end{aligned}$$

Tal que $Y_1 \le Y_2 \le ... \le Y_n$; se denominan estadísticas de orden correspondientes a la m.a. $X_1, ..., X_n$.

Nota: Las estadísticas de orden no son independientes ya que si $Y_j \ge y \Rightarrow Y_{j+1} \ge y$

TEOREMA:

Sea $X_1, ..., X_n$ una m.a. extraída de una población con densidad $f(x)$ en $I_{(a,b)}(x)$, entonces la densidad conjunta de las estadísticas de orden $Y_1, ..., Y_n$ esta dada por:

$$g(y_1, ..., y_n) = \begin{cases} n!\, f(y_1) \ldots f(y_n); & si\ a < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < b \\ 0 & ;\ o.m. \end{cases}$$

Ejemplo 2: Asuma que en los países del mundo la proporción de la población que vive en zonas urbanas tiene densidad $f(x) = 9x^8 I_{(0,1)}(x)$. Sea X_1, X_2, X_3 una muestra aleatoria de tamaño 3 de esa población, determinar la densidad conjunta de sus correspondientes estadísticas de orden.

Solución:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (9x_1^8)(9x_2^8)(9x_3^8) \ , \ ; \forall 0 < x_i < 1 ; i = 1, 2, 3$$

Funciones de transformaciones (uno a uno)

$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 \quad si \quad x_1 < x_2 < x_3 \quad |$ A1 J1

$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_2 \quad si \quad x_1 < x_3 < x_2 \quad |$ A2 J2

$y_1 = x_2, \quad y_2 = x_1, \quad y_3 = x_3 \quad si \quad x_2 < x_1 < x_3 \quad |$ A3 J3

$y_1 = x_2, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_1 \quad si \quad x_2 < x_3 < x_1 \qquad |\ A_4 \quad J_4$

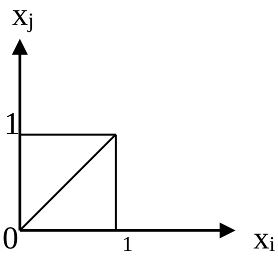
$y_1 = x_3, \quad y_2 = x_1, \quad y_3 = x_2 \quad si \quad x_3 < x_1 < x_2 \qquad |\ A_5 \quad J_5$

$y_1 = x_3, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_1 \quad si \quad x_3 < x_2 < x_1 \qquad |\ A_6 \quad J_6$

A = $\{(x_1, x_2, x_3) / 0 < x_i < 1; \forall i = 1,2,3\} = \{(x_1, x_2, x_3) / 0 < x_i \neq x_2 \neq x_3 < 1\}$

B = $\{(y_1, y_2, y_3) / \ 0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1\}$

El conjunto A puede ser dividido en seis regiones disjuntas y otros conjuntos con probabilidad cero.



$$P(X_i = x_j) = \iint_{x_i = x_j} f(x_i, x_j) dx_i dx_j ; i \neq j$$

$$= \int_{x_j=0}^{1} \int_{x_i = x_j}^{x_j} f(x_i) f(x_j) dx_i dx_j = 0$$

A1 = $\{(x_1, x_2, x_3) / 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1\}$
A2 = $\{(x_1, x_2, x_3) / 0 < x_1 < x_3 < x_2 < 1\}$
:
:
A6 = $\{(x_1, x_2, x_3) / 0 < x_3 < x_2 < x_1 < 1\}$

$w_{11}(y_1, y_2, y_3) = x_1 = y_1 \ ; \qquad w_{21}(y_1, y_2, y_3) = x_2 = y_2 ; \qquad w_{31}(y_1, y_2, y_3) = x_3 = y_3$

$w_{12}(y_1, y_2, y_3) = x_1 = y_1 ; \qquad w_{22}(y_1, y_2, y_3) = x_3 = y_2 \ ; \qquad w_{32}(y_1, y_2, y_3) = x_2 = y_3$

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \ldots \quad J_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$|J_1| = |J_2| = \ldots = |J_6| = 1$

$g(y_1,...,y_3) = \sum_{i=1}^{6} f(\ w_{1i}(y_1,y_2,y_3),\ w_{2i}(y_1,y_2,y_3),\ w_{3i}(y_1,y_2,y_3))\,|\ J_i|$;

$\forall\ (y_1,y_2,y_3) \in B$

$= f(y_1)\ f(y_2)\ f(y_3)\,|\ J_1| + f(y_1)\ f(y_3)\ f(y_2)\,|\ J_2| + ... +$
$f(y_3)\ f(y_2)\ f(y_1)\,|\ J_6|$

$= 3!\ f(y_1)\ f(y_2)\ f(y_3)\ ;\ \forall\ (y_1,y_2,y_3) \in B$

$= 3!\ \left(9y_1^8\right)\left(9y_2^8\right)\left(9y_3^8\right)\ ;\ \forall\ (y_1,y_2,y_3) \in B$

EJERCICIOS:

1. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. extraída de una población $N(\mu,\sigma^2)$.Determinar la densidad conjunta de $Y_1,\ldots,Y_n$.

$$f\left(y_1,\ldots,y_n\right) = n!\prod_{1}^{n} f\left(y_i\right) = n!\prod_{i=1}^{n}\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{n!}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}e^{\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$$

2. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. extraída de una población $UNIF(\alpha,\beta)$.Determinar la densidad conjunta de $Y_1,\ldots,Y_n$

$$f\left(y_1,\ldots,y_n\right) = n!\prod_{1}^{n} f\left(y_i\right) = n!\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta-\alpha} = n!\frac{1}{\left(\beta-\alpha\right)^n},\ \ \alpha<y_1<y_2<\ldots<y_n<\beta$$

Ejemplo 3: Sean $Y_1<Y_2<Y_3$ las estadísticas de orden de una m.a. de tamaño 3 de $f(x) = e^{-x}\ I_{(0,\infty)}(x)$. Si $Z_1=3Y_1$, $Z_2= 2(Y_2-Y_1)$ y $Z_3=Y_3-Y_2$ ¿Son independientes Z_1, Z_2 y Z_3?

$Z_1 = 3Y_1 \quad Z_2 = 2\left(Y_2 - Y_1\right) \quad Z_3 = Y_3 - Y_2$

$$Y_1 = \frac{Z_1}{3} \quad Y_2 = \frac{Z_2}{2}+\frac{Z_1}{3} \quad Y_3 = \frac{Z_1}{3}+\frac{Z_2}{2}+Z_3 \to J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1\left(\frac{1}{6}-0\right) = \frac{1}{6}$$

$$g\left(y_1,y_2,y_3\right) = 3!\,f\left(y_1\right)f\left(y_2\right)f\left(y_3\right) = 6e^{-y_1}e^{-y_2}e^{-y_3} = 6e^{-(y_1+y_2+y_3)},\ 0<y_1<y_2<y_3<\infty$$

$$h\left(z_1,z_2,z_3\right) = g\left(\frac{z_1}{3},\frac{z_2}{2}+\frac{z_1}{3},\frac{z_1}{3}+\frac{z_2}{2}+z_3\right)\left|J\right| = 6e^{-\left(\frac{z_1}{3}+\frac{z_2}{2}+\frac{z_1}{3}+\frac{z_1}{3}+\frac{z_2}{2}+z_3\right)}\left|\frac{1}{6}\right| = e^{-(z_1+z_2+z_3)} =$$

$h\left(z_1,z_2,z_3\right) = e^{-z_1}e^{-z_2}e^{-z_3} = h\left(z_1\right)h\left(z_2\right)h\left(z_3\right)$, para $0<z_i<\infty, i=1,2,3$

$\to Z_1, Z_2$ y Z_3 son variables aleatorias independientes.

Ejemplo 4: Sean $X_1,\ldots,X_4$ v.as i.i.d con densidad $f(x)=\dfrac{a\,x^{a-1}}{\theta^a}I_{(0,\theta)}(x)$ y $Y_1,\ldots,Y_4$ las estadísticas de orden.

Demuestre que $Z_1=\dfrac{Y_1}{Y_2}, Z_2=\dfrac{Y_2}{Y_3}, Z_3=\dfrac{Y_3}{Y_4}\ y\ Z_4=Y_4$ son mutuamente independientes. Halle la distribución de cada una de ellas.

Solución

$$g(y_1,y_2,y_3,y_4)=4!\prod_{i=1}^{4}f(y_i)=24\frac{a^4}{\theta^{4a}}\left(\prod_{i=1}^{4}y_i^{a-1}\right),\ 0<y_1<y_2<y_3<y_4<\theta$$

Transformaciones inversas:

$Y_4=Z_4,\ Y_3=Z_4Z_3,\ Y_2=Z_4Z_3Z_2,\ Y_1=Z_4Z_3Z_2Z_1$

$$J=\begin{vmatrix} Z_4Z_3Z_2 & Z_4Z_3Z_1 & Z_4Z_2Z_1 & Z_3Z_2Z_1 \\ 0 & Z_4Z_3 & Z_4Z_2 & Z_3Z_2 \\ 0 & 0 & Z_4 & Z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(Z_4Z_3Z_2)(Z_4Z_3)(Z_4)(1)=Z_4^3Z_3^2Z_2$$

$$h(Z_4,Z_3,Z_2,Z_1)=g(Z_4Z_3Z_2Z_1,Z_4Z_3Z_2,Z_4Z_3,Z_4)|J|$$

$$=\frac{24a^4}{\theta^{4a}}Z_4^{4a-1}Z_3^{3a-1}Z_2^{2a-1}Z_1^{a-1}$$

$$=\left(\frac{4aZ_4^{4a-1}}{\theta^{4a}}\right)\left(3aZ_3^{3a-1}\right)\left(2aZ_2^{2a-1}\right)\left(aZ_1^{a-1}\right)=h(Z_4)h(Z_3)h(Z_2)h(Z_1)$$

$$0<Z_i<1,\ i=1,2,3;\quad 0<Z_4<\theta$$

Ejercicio: Sean $Y_1<Y_2<Y_3$ las estadísticas de orden de una m.a. de tamaño 3 de $f(x)=e^{-x}\,I_{(0,\infty)}(x)$. Si $Z_1=4Y_1$, $Z_2=3(Y_2-Y_1)$ y $Z_3=2(Y_3-Y_2)$ ¿Son independientes Z_1, Z_2 y Z_3 ?

TEOREMA

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. de una variable discreta con función de probabilidad $f(x)$ y con función de distribución acumulada $F(x)$. Sean $Y_1\le Y_2\le\ldots\le Y_n$ las correspondientes estadísticas de orden entonces para hallar las probabilidades de la estadística de orden Y_α en primer lugar se necesitan los siguientes valores:

$$v_1=P(X<x)=F(x)-f(x)$$

$$v_2=P(X=x)=f(x)$$

$$v_3=P(X>x)=1-F(x)$$

Entonces se puede calcular lo que sigue:

$$P(Y_\alpha\le y)=P(\text{Hay al menos } \alpha \text{ observaciones menores o iguales a } y)$$

$$=P(\text{Hay como máximo } n-\alpha \text{ observaciones mayores que } y)$$

$$=\sum_{0}^{n-\alpha}\binom{n}{j}v_3^j(v_1+v_2)^{n-j}$$

$$P(Y_\alpha < y) = P(\text{Hay al menos } \alpha \text{ observaciones menores que } y)$$

$$= P(\text{Hay como máximo } n-\alpha \text{ observaciones mayores o iguales que } y)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-\alpha} \binom{n}{j} (v_2 + v_3)^j \, v_1^{n-j}$$

$$P(Y_\alpha = y) = P(Y_\alpha \le y) - P(Y_\alpha < y) = \sum_{j=0}^{n-\alpha} \binom{n}{j} \left[v_3^j (v_1 + v_2)^{n-j} - (v_2 + v_3)^j \, v_1^{n-j} \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-\alpha} \binom{n}{j} \left[(1 - F(x))^j (F(x))^{n-j} - (f(x) + 1 - F(x))^j (F(x) - f(x))^{n-j} \right]$$

Nota:

(1) $\displaystyle \sum_{j=n-\alpha+1}^{n} \binom{n}{j} (v_2 + v_3)^j (v_1)^{n-j} = \frac{1}{B(n-\alpha+1, \alpha)} \int_0^{v_2+v_3} y^{n-\alpha} (1-y)^{\alpha-1} dy = I_{v_2+v_3}(n-\alpha+1, \alpha)$

(2) $1 - I_{v_2+v_3}(n-\alpha+1, \alpha) = I_{1-(v_2+v_3)}(\alpha, n-\alpha+1)$

(3) $P(Y_\alpha < y) = I_{1-(v_2+v_3)}(\alpha, n-\alpha+1) = I_{v_1}(\alpha, n-\alpha+1)$

$P(Y_\alpha \le y) = I_{(v_1+v_2)}(\alpha, n-\alpha+1)$

Ejemplo

El índice de desarrollo humano (IDH) se mide de 0 hasta 1. Se sabe que el 24% de los distritos peruanos tiene un IDH menor de 0.3. Se van a seleccionar 20 distritos peruanos y se define la variable aleatoria X como el número de distritos, con un IDH menor a 0.3, que hay en la muestra de tamaño 20. Si de la distribución anterior se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 18 calcule la probabilidad de que haya al menos 4 valores menores o iguales que 5.

$$v_1 = P(X < 5) = F(5) - f(5) = \text{pbinom}(4, 20, 0.24) = 0.4560642$$

$$v_2 = P(X = 5) = f(5) = \text{dbinom}(5, 20, 0.24) = 0.2012352$$

$$v_3 = P(X > 5) = 1 - F(5) = \text{pbinom}(5, 20, 0.24, \text{lower.tail} = \text{F}) = 0.3427006$$

$$P(Y_4 \le 5) = \sum_{0}^{18-4} \binom{18}{j} v_3^j (v_1 + v_2)^{18-j} = 0.999973$$

Ver el script.

TEOREMA

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una variable continua con densidad $f(x)$ y con función de distribución acumulada $F(x)$. Sean $Y_1 \le Y_2 \le \ldots \le Y_n$ las correspondientes estadísticas de orden entonces:

1.- $\displaystyle g(y_\alpha) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!} [F(y_\alpha)]^{\alpha-1} [1 - F(y_\alpha)]^{n-\alpha} f(y_\alpha)$

2.-

$$g(y_\alpha, y_\beta) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(\beta-\alpha-1)!(n-\beta)!}\left[F(y_\alpha)\right]^{\alpha-1}\left[F(y_\beta)-F(y_\alpha)\right]^{\beta-\alpha-1}\left[1-F(y_\beta)\right]^{n-\beta} f(y_\alpha) f(y_\beta)$$

,

$y_\alpha < y_\beta$

PRUEBA DE 1.-

Como la población es continua $P\left(Y_\alpha = y_\alpha\right) = 0$. Considerando que en el intervalo $\left(y_\alpha, y_\alpha + \delta y_\alpha\right)$ aparece sólo un "valor".

$\alpha-1$ 1 $n-\alpha$

$-\infty$ y_α $y_\alpha + \delta y_\alpha$ ∞

$\alpha-1$ valores son menores que ese valor y_α y $n-\alpha$ mayores que $y_\alpha + \delta y_\alpha$, se verifica que ($\alpha-1$) + (1) + ($n-\alpha$) = n. Por lo tanto:

$$p\left(y_\alpha < Y_\alpha \le y_\alpha + \delta y_\alpha\right) =$$
$$= R\left[P\left(-\infty < X \le y_\alpha\right)\right]^{\alpha-1} P\left(y_\alpha < X \le y_\alpha + \delta y_\alpha\right)\left[P\left(y_\alpha + \delta y_\alpha < X < \infty\right)\right]^{n-\alpha} \qquad (1)$$

Donde R es igual al número de ordenaciones que pueden formarse con n elementos de los cuales ($\alpha-1$) son menores que y_α y ($n-\alpha$) mayores que ($y_\alpha + \delta y_\alpha$), o sea:

$$R = \frac{n!}{(\alpha-1)!1!(n-\alpha)!} = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}$$

Reemplazando en función de $F(.)$ en (1) se tiene:

$$P\left(y_\alpha < Y_\alpha \le y_\alpha + \delta y_\alpha\right) =$$
$$= R\left[F\left(y_\alpha\right)\right]^{\alpha-1}\left(F\left(y_\alpha + \delta y_\alpha\right) - F\left(y_\alpha\right)\right)\left[1 - F\left(y_\alpha + \delta y_\alpha\right)\right]^{n-\alpha}$$

Tomando límites en la probabilidad anterior dividida entre δy_α, cuando $\delta y_\alpha \to 0$ es:

$$\lim_{\delta y_\alpha \to 0} \frac{p\left(y_\alpha < Y_\alpha \le y_\alpha + \delta y_\alpha\right)}{\delta y_\alpha} =$$

$$= R \lim_{\delta y_\alpha \to 0} \frac{\left[F\left(y_\alpha\right)\right]^{\alpha-1}\left(F\left(y_\alpha + \delta y_\alpha\right) - F\left(y_\alpha\right)\right)\left[1 - F\left(y_\alpha + \delta y_\alpha\right)\right]^{n-\alpha}}{\delta y_\alpha} =$$

$$= R\left[F\left(y_\alpha\right)\right]^{\alpha-1} \lim_{\delta y_\alpha \to 0} \frac{\left(F\left(y_\alpha + \delta y_\alpha\right) - F\left(y_\alpha\right)\right)}{\delta y_\alpha} \left[1 - F\left(y_\alpha\right)\right]^{n-\alpha}$$

De donde resulta:

$$g(y_\alpha) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\left[F(y_\alpha)\right]^{\alpha-1}\left[1-F(y_\alpha)\right]^{n-\alpha} f(y_\alpha) \qquad \text{q.d}$$

Ejemplo 5: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. extraída de una población $\text{Uniforme}(a,b)$.

a. Obtenga la densidad del Máximo.

$$F\left(x\right) = \frac{x-a}{b-a} I_{(a,b)}\left(x\right) + I_{[b,\infty)}\left(x\right)$$

$$g_{Y_\alpha}(y) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\left[F(y)\right]^{\alpha-1}\left[1-F(y)\right]^{n-\alpha} f(y)$$

$$g_{Y_n}(y) = \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}\left[\frac{y-a}{b-a}\right]^{n-1}\left[1-\frac{y-a}{b-a}\right]^{n-n}\left(\frac{1}{b-a}\right) =$$

$$g_{Y_\alpha}(y) = \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!\left(b-a\right)^n}\left(y-a\right)^{n-1}\left(b-y\right)^{n-n}$$

$$\to g_{Y_n}(y) = \frac{n}{\left(b-a\right)^n}\left(y-a\right)^{n-1} I_{(a,b)}\left(y\right)$$

b. Halle la densidad del Mínimo.

$$g_{Y_1}(y) = \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!}\left[\frac{y-a}{b-a}\right]^{1-1}\left[1-\frac{y-a}{b-a}\right]^{n-1} f(y) =$$

$$g_{Y_1}(y) = \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!\left(b-a\right)^n}\left(y-a\right)^{1-1}\left(b-y\right)^{n-1}$$

$$\to g_{Y_1}(y) = \frac{n}{\left(b-a\right)^n}\left(b-y\right)^{n-1} I_{(a,b)}\left(y\right)$$

c. ¿Cuál es la densidad conjunta del Mínimo y el Máximo?

$$g(y_\alpha, y_\beta) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(\beta-\alpha-1)!(n-\beta)!}\left[F(y_\alpha)\right]^{\alpha-1}\left[F(y_\beta)-F(y_\alpha)\right]^{\beta-\alpha-1}\left[1-F(y_\beta)\right]^{n-\beta} f(y_\alpha) f(y_\beta)$$

$$g(y_1, y_n) = \frac{n!}{(1-1)!(n-1-1)!(n-n)!}\left[\frac{y_1-a}{b-a}\right]^{1-1}\left[\frac{y_n-a}{b-a}-\frac{y_1-a}{b-a}\right]^{n-1-1}\left[1-\frac{y_n-a}{b-a}\right]^{n-n}\left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{1}{b-a}\right)$$

$$g(y_1, y_n) = n\left(n-1\right)\left(\frac{y_n-y_1}{b-a}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^2 = n\left(n-1\right)\left(y_n-y_1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^n, \text{ para } a < y_1 < y_n < b$$

d. Haga la deducción de la densidad del Rango Muestral $R = Y_n - Y_1$.

Sea $R = Y_n - Y_1$ y $Z = Y_1 \rightarrow \begin{cases} y_1 = z \\ y_n = r + z \end{cases} \rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\overset{y_n}{a < r + z < b} \rightarrow \underset{a}{a - r} < z < b - r$$

$$h_{R,Z}(r,z) = g_{Y_1,Y_n}(z, r+z)|J| = n(n-1)(r+z-z)^{n-2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^n |1| =$$

$$h_{R,Z}(r,z) = n(n-1)(r)^{n-2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^n, \text{ para } \underset{Y_n - Y_1 \text{ iguales}}{0} < r < \underset{Y_n - Y_1 \text{ en los extremos}}{b-a}, \ a < z < b - r$$

$$h(r) = \int_a^{b-r} h_{R,Z}(r,z)\,dz = n(n-1)(r)^{n-2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^n \int_a^{b-r} dz =$$

$$h(r) = n(n-1)(r)^{n-2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^n (b-r-a)\, I_{(0,b-a)}(r)$$

Ejemplo: Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución continua con densidad $f(x)$ y distribución acumulada $F(x)$, halle la densidad del rango muestral $R = Y_n - Y_1$.

$$f_{Y_1,Y_n}(x,y) = n(n-1)\left[F(y) - F(x)\right]^{n-2} f(x)\, f(y)$$

$$R = Y_n - Y_1 \quad S = Y_1 \Rightarrow Y_n = R + S \quad Y_1 = S \Rightarrow J = 1$$

$$f_{R,S}(R,S) = f_{Y_1,Y_n}(S, R+S)|J| = n(n-1)\left[F(R+S) - F(S)\right]^{n-2} f(S)\, f(R+S)$$

$$-\infty < S < \infty, \quad R > 0$$

$$f_R(R) = \int_{-\infty}^{\infty} n(n-1)\left[F(R+S) - F(S)\right]^{n-2} f(S)\, f(R+S)\,dS$$

Ejemplo: Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución $\text{Uniforme}(0,1)$. Halle $F_R(r)$ y $f_R(r)$.

$$F_X(x) = x I_{(0,1)}(x) + I_{(1,\infty)}(x)$$

$$f_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(R)\,dS = \int_0^{1-R} n(n-1)\left[F(R+S) - F(S)\right]^{n-2} f(S)\, f(R+S)\,dS =$$

$$f_R(r) = \int_0^{1-R} n(n-1)\left[R + S - S\right]^{n-2}(1)(1)\,dS = n(n-1)\left[R\right]^{n-2}\int_0^{1-R} 1.dS =$$

$$f_R(r) = n(n-1)\left[R\right]^{n-2}(1-R)\, I_{(0,1)}(R)$$

Ejercicio: Si X_1, X_2 es una muestra aleatoria de tamaño 2 de $f(x) = 2x I_{(0,1)}(x)$, demuestre que $F_R(r) = \left[\frac{r^4}{3} - 2r^2 + \frac{8r}{3}\right] I_{(0,1)}(r) + I_{[1,\infty)}(r)$

Ejemplo 6: Tres muestras independientes, cada una de tamaño n, son tomadas de una distribución $\text{Uniforme}(0,1)$. Sean Z_1, Z_2 y Z_3 los Máximos de cada muestra y sea $U = Z_1 Z_2 Z_3$.

a. Halle la densidad de U.

$$F(x) = xI_{(0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x)$$

$$g_{Y_\alpha}(y) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\left[F(y)\right]^{\alpha-1}\left[1-F(y)\right]^{n-\alpha} f(y)$$

$$g_{Y_n}(y) = \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}\left[y\right]^{n-1}\left[1-y\right]^{n-n} f(y) =$$

$$g_{Y_n}(y) = \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}\left(y\right)^{n-1}\left(1-y\right)^{n-n}$$

$$\rightarrow g_{Y_n}(y) = ny^{n-1}I_{(0,1)}(y)$$

Por independencia:

$$g(z_1, z_2, z_3) = (nz_1^{n-1})(nz_2^{n-1})(nz_3^{n-1}) = n^3 z_1^{n-1} z_2^{n-1} z_3^{n-1},\ 0 < z_i < 1,\ i = 1,2,3$$

Haciendo: $U = Z_1 Z_2 Z_3, V = Z_2, W = Z_3$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{u}{vw} \\ z_2 = v \\ z_3 = w \end{array}\right\} \rightarrow J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{vw} & -\dfrac{u}{v^2 w} & -\dfrac{u}{vw^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\left(\frac{1}{vw} - 0\right) = \frac{1}{vw}$$

$$h(u,v,w) = g\left(\frac{u}{vw}, v, w\right)|J| = n^3\left(\frac{u}{vw}\times v\times w\right)^{n-1}\left|\frac{1}{vw}\right| = \frac{n^3 u^{n-1}}{vw},\ \text{para}\ :$$

$$0 < u < 1,\ u < v < 1,\ \frac{u}{v} < w < 1$$

$$0 < \frac{u}{vw} < 1, \quad 0 < v < 1$$

$$0 < u < vw$$

$$\frac{u}{v} < w, \quad u < v$$

$$A = \left\{(z_1, z_2, z_3) / 0 < z_i < 1,\ i = 1,2,3\right\}$$

$$B = \left\{(u,v,w) / \frac{u}{v} < w < 1, \quad u < v < 1, 0 < u < 1\right\}$$

$$h(u) = \int_{v=u}^{1}\int_{w=\frac{u}{v}}^{1} \frac{n^3 u^{n-1}}{vw}\,dwdv = n^3 u^{n-1}\frac{\left[\ln(u)\right]^2}{2} I_{[0,1]}(u)$$

b. Generalice este resultado para m muestras independientes.

Ejemplo 7: Sean $Y_1 < Y_2 < ... < Y_n$ las estadísticas de orden de una muestra aleatoria de la densidad $f(x)$, la cual es positiva para $a < X < b$.

a. Halle el esperado del área a la izquierda de Y_2.

Solución

$$g(y_\alpha) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\left[F(y_\alpha)\right]^{\alpha-1}\left[1-F(y_\alpha)\right]^{n-\alpha} f(y_\alpha)$$

$$g(y_2) = \frac{n!}{(2-1)!(n-2)!}\left[F(y_2)\right]^{2-1}\left[1-F(y_2)\right]^{n-2} f(y_2) = n(n-1)\left[F(y_2)\right]\left[1-F(y_2)\right]^{n-2} f(y_2)$$

$$E\left[F(y_2)\right] = \int_a^b F(y_2)\,g(y_2)dy_2 = \int_a^b F(y_2)\left\{n(n-1)\left[F(y_2)\right]\left[1-F(y_2)\right]^{n-2} f(y_2)\right\}dy_2$$

$$E\left[F(y_2)\right] = n(n-1)\int_a^b F^2(y_2)\left[1-F(y_2)\right]^{n-2} f(y_2)dy_2$$

$$u = F^2(y_2) \qquad\qquad dv = \left[1-F(y_2)\right]^{n-2} f(y_2)dy_2$$

$$du = 2F(y_2)\,f(y_2)dy_2 \qquad\qquad v = -\frac{\left[1-F(y_2)\right]^{n-1}}{n-1}$$

$$E\left[F(y_2)\right] = n(n-1)\left\{-\underbrace{\left[F^2(y_2)\frac{\left[1-F(y_2)\right]^{n-1}}{n-1}\right]\Big|_a^b}_{\text{CERO}} + \int_a^b \frac{\left[1-F(y_2)\right]^{n-1}}{n-1}2F(y_2)\,f(y_2)dy_2\right\}$$

$$E\left[F(y_2)\right] = 2n\int_a^b F(y_2)\left[1-F(y_2)\right]^{n-1} f(y_2)dy_2$$

$$u = F(y_2) \qquad\qquad dv = \left[1-F(y_2)\right]^{n-1} f(y_2)dy_2$$

$$du = f(y_2)dy_2 \qquad\qquad v = -\frac{\left[1-F(y_2)\right]^{n}}{n}$$

$$E\left[F(y_2)\right] = 2n\left\{-\underbrace{\left[F(y_2)\frac{\left[1-F(y_2)\right]^{n}}{n}\right]\Big|_a^b}_{\text{CERO}} + \int_a^b \frac{\left[1-F(y_2)\right]^{n}}{n} f(y_2)dy_2\right\} =$$

$$E\left[F(y_2)\right] = \frac{2}{n+1}\left[-\left[1-F(y_2)\right]^{n+1}\right]\Big|_a^b = \frac{2}{n+1}\left\{-\underbrace{\left[1-F(b)\right]^{n+1}}_{\text{CERO}} + \underbrace{\left[1-F(a)\right]^{n+1}}_{\text{UNO}}\right\}$$

$$E\left[F(y_2)\right] = \frac{2}{n+1}$$

b. Demuestre que el esperado del área a la izquierda de Y_{n-1} es $\frac{n-1}{n+1}$.

c. Demuestre que el esperado del área a la derecha de Y_n es $\frac{1}{n+1}$.

d. Demuestre que el esperado del área a la izquierda de Y_1 es $\dfrac{1}{n+1}$.

Ejemplo 8: Asuma que $f(x) = 8x^7 I_{(0,1)}(x)$ es la distribución de la proporción de población gestante atendida por personal capacitado en los países de las Américas. Si se elige una muestra aleatoria de tamaño 5 de esa distribución y se sabe que el cuarto de la muestra es menor de 0.85, calcule la probabilidad de que el segundo de la muestra sea mayor de 0.7.

Solución

$$F(x) = x^8 I_{(0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x).$$

$$f_{Y_4}(y) = \frac{5!}{3!1!}\left(y^8\right)^3\left(1-y^8\right)\left(8y^7\right) = 160\left(y^{31}-y^{39}\right)I_{(0,1)}(y)$$

$$f_{Y_2,Y_4}(y,z) = \frac{5!}{1!1!1!}\left(y^8\right)\left(z^8-y^8\right)\left(1-z^8\right)\left(8y^7\right)\left(8z^7\right) =$$

$$f_{Y_2,Y_4}(y,z) = 7680y^{15}\left(z^7-z^{15}\right)\left(z^8-y^8\right)I_{(0,1)}(y)I_{(y,1)}(z)$$

$$P\left(Y_2 > 0.7 / Y_4 < 0.85\right) = \frac{P\left(Y_2 > 0.7, Y_4 < 0.85\right)}{P\left(Y_4 < 0.85\right)} = \frac{\int_{0.7}^{0.85}\int_{y}^{0.85} f_{Y_2,Y_4}(y,z)\,dzdy}{\int_{0}^{0.85} f_{Y_4}(y)\,dy} =$$

$$P\left(Y_2 > 0.7 / Y_4 < 0.85\right) = \frac{0.017139}{0.021557} = 0.7951$$

Ejemplo 9: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. extraída de una población $f(x) = 2x\theta^2 I_{\left(0,\frac{1}{\theta}\right)}(x)$.

Encuentre un intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\%$ para $\dfrac{1}{\theta}$.

De acuerdo con el rango de X, el Máximo es un estimador de $\dfrac{1}{\theta}$.

$$F(x) = x^2\theta^2 I_{\left(0,\frac{1}{\theta}\right)}(x) + I_{\left(\frac{1}{\theta},\infty\right)}(x)$$

$$g_{Y_\alpha}(y) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\left[F(y)\right]^{\alpha-1}\left[1-F(y)\right]^{n-\alpha} f(y)$$

$$g_{Y_n}(y) = n\left[F(y)\right]^{n-1} f(y)$$

$$g_{Y_n}(y) = n\left[y^2\theta^2\right]^{n-1} 2y\theta^2 = 2n\theta^{2n}y^{2n-1}I_{\left(0,\frac{1}{\theta}\right)}(y)$$

Para hallar el intervalo pedido se busca c tal que:

$$P\left[c\left(\frac{1}{\theta}\right) < Y_n < \frac{1}{\theta}\right] = 1-\alpha =$$

$$= \int_{\frac{c}{\theta}}^{\frac{1}{\theta}} g_{Y_n}(y)dy = \int_{\frac{c}{\theta}}^{\frac{1}{\theta}} 2n\theta^{2n} y^{2n-1} dy = 1-c^{2n} = 1-\alpha \rightarrow c = \alpha^{\frac{1}{2n}}$$

$$P\left[\alpha^{\frac{1}{2n}}\left(\frac{1}{\theta}\right) < Y_n < \frac{1}{\theta}\right] = P\left[\alpha^{\frac{1}{2n}}\left(\frac{1}{Y_n}\right) < \theta < \frac{1}{Y_n}\right] = P\left[Y_n < \frac{1}{\theta} < \frac{Y_n}{\alpha^{\frac{1}{2n}}}\right] = 1-\alpha$$

El intervalo de confianza será: I.C$\left(\frac{1}{\theta}\right) = \left[Y_n ; \frac{Y_n}{\alpha^{\frac{1}{2n}}}\right]$

Ejemplo 10: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. extraída de una población $f(x) = e^{\theta - x} I_{(\theta,\infty)}(x)$, con $-\infty < \theta < \infty$. Encuentre un intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\%$ para θ.

De acuerdo al rango de X, el Mínimo es un estimador de θ.

$$F(x) = \left[1-e^{\theta - x}\right] I_{(\theta,\infty)}(x)$$

$$g_{Y_\alpha}(y) = \frac{n!}{(\alpha-1)!(n-\alpha)!}\left[F(y)\right]^{\alpha-1}\left[1-F(y)\right]^{n-\alpha} f(y)$$

$$g_{Y_1}(y) = n\left[1-F(y)\right]^{n-1} f(y) = n\left[1-\left(1-e^{\theta-y}\right)\right]^{n-1} e^{\theta-y} = ne^{n(\theta-y)} I_{(\theta,\infty)}(y)$$

Para hallar el intervalo pedido se busca c tal que:

$$P\left[\theta < Y_1 < c\theta\right] = 1-\alpha =$$

$$= \int_{\theta}^{c\theta} g_{Y_1}(y)dy = \int_{\theta}^{c\theta} ne^{n(\theta-y)} dy = 1-e^{n\theta}e^{-nc\theta} = 1-\alpha \rightarrow c = 1-\frac{\ln\alpha}{n\theta}$$

$$P\left[\theta < Y_1 < \left(1-\frac{\ln\alpha}{n\theta}\right)\theta\right] = P\left[Y_1 + \frac{\ln\alpha}{n} < \theta < Y_1\right] = 1-\alpha$$

El intervalo de confianza será: I.C$(\theta) = \left[Y_1 + \frac{\ln\alpha}{n} ; Y_1\right]$

RECUBRIMIENTOS $\left(p_{\alpha,\beta}\right)$ Recubrimiento es la probabilidad de que la v.a poblacional X esté en el intervalo $\left[y_\alpha, y_\beta\right]$, es decir:

$$p_{\alpha,\beta} = P\left(y_\alpha \le X \le y_\beta\right) = F\left(y_\beta\right) - F\left(y_\alpha\right)$$

Ejemplo 11: En aplicaciones industriales interesa la proporción de una población que está entre ciertos límites. Estos límites son llamados límites de tolerancia. Sea p la proporción de una población (Con densidad continua) que está entre el mínimo (Y_1) y el máximo (Y_n) de una m.a de tamaño n. Halle la densidad de p.

Solución

$$p = p_{1,n} = P\left(y_1 \le X \le y_n\right) = F\left(y_n\right) - F\left(y_1\right)$$

$$g\left(y_1, y_n\right) = n\left(n-1\right) f\left(y_1\right) f\left(y_n\right)\left[F\left(y_n\right) - F\left(y_1\right)\right]^{n-2}, -\infty < y_1 < y_n < \infty$$

Haciendo:

$$p = F\left(y_n\right) - F\left(y_1\right) \text{ y } w = \int_{-\infty}^{y_1} f\left(x\right) = F\left(y_1\right)$$

Hallando el jacobiano:

$$J^* = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial y_1} & \dfrac{\partial p}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y_1} & \dfrac{\partial w}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -f\left(y_1\right) & f\left(y_n\right) \\ f\left(y_1\right) & 0 \end{vmatrix} = -f\left(y_1\right) f\left(y_n\right)$$

$$\left|J^*\right| = f\left(y_1\right) f\left(y_n\right) \quad \to \quad \left|J\right| = \frac{1}{f\left(y_1\right) f\left(y_n\right)}$$

Como: $p > 0$, $w > 0 \quad y \quad p + w \le 1$

$$h\left(p, w\right) = n\left(n-1\right) f\left(y_1\right) f\left(y_n\right)\left[p\right]^{n-2} \left|\frac{1}{f\left(y_1\right) f\left(y_n\right)}\right|$$

$$h\left(p, w\right) = n\left(n-1\right) p^{n-2}, \; p > 0, \; w > 0 \quad y \quad p + w \le 1$$

$$0 < w + p < 1 \to -p < w < 1 - p \to 0 < w < 1 - p$$

$$h\left(p\right) = \int_0^{1-p} n\left(n-1\right) p^{n-2} dw = n\left(n-1\right)\left(1-p\right) p^{n-2}, 0 < p < 1$$

Se puede demostrar que p converge en probabilidades a 1. La distribución de p es BETA(n-1,2). Es fácil determinar que:
$$E\left(p\right) = \frac{n-1}{n+1} \quad y \quad Var\left(p\right) = \frac{2\left(n-1\right)}{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)}$$

Ejemplo 12: Suponga que de la distribución del pH de la variedad pera naranja se toma una muestra aleatoria (una unidad experimental la forman 10 frutos) de tamaño n. Si $Y_1, \ldots, Y_n$ son las correspondientes estadísticas de orden ¿Cómo se distribuye la proporción p de unidades experimentales cuyo pH se encuentra entre (Y_5) y (Y_{10})?

Solución

$$p = p_{5,10} = P\left(y_5 \le X \le y_{10}\right) = F\left(y_{10}\right) - F\left(y_5\right)$$

$$g\left(y_5, y_{10}\right) = \frac{n!}{4!4!(n-10)!} f\left(y_5\right) f\left(y_{10}\right)\left[F\left(Y_5\right)\right]^4 \left[F\left(y_{10}\right) - F\left(y_5\right)\right]^4 \left[1 - F\left(y_{10}\right)\right]^{n-10},$$

$$-\infty < y_5 < y_{10} < \infty$$

Haciendo:

$$p = F\left(y_{10}\right) - F\left(y_5\right) \text{ y } w = \int_{-\infty}^{y_5} f\left(x\right) = F\left(y_5\right)$$

Hallando el jacobiano:

$$J^* = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial y_5} & \dfrac{\partial p}{\partial y_{10}} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y_5} & \dfrac{\partial w}{\partial y_{10}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -f\left(y_5\right) & f\left(y_{10}\right) \\ f\left(y_5\right) & 0 \end{vmatrix} = f\left(y_5\right) f\left(y_{10}\right)$$

$$\left|J^*\right| = f\left(y_5\right) f\left(y_{10}\right) \quad \to \quad \left|J\right| = \frac{1}{f\left(y_5\right) f\left(y_{10}\right)}$$

Como: $p > 0$, $w > 0$ y $p + w \le 1$

$$h(p, w) = \frac{n!}{4!4!(n-10)!}\left[w\right]^4 \left[p\right]^4 \left[1 - p - w\right]^{n-10} \quad , p > 0\,, w > 0 \quad y \quad p + w \le 1$$

$$0 < w + p < 1 \to -p < w < 1 - p \to 0 < w < 1 - p$$

$$h(p) = \frac{n!\,p^4}{4!4!(n-10)!} \int_0^{1-p} w^4 \left[1 - p - w\right]^{n-10} dw$$

Nota: $\displaystyle\int_0^a x^m \left(a^n - x^n\right)^p dx = \frac{a^{m+1+np}\Gamma\left[\dfrac{m+1}{n}\right]\Gamma\left(p+1\right)}{n\Gamma\left[\dfrac{m+1}{n} + p + 1\right]}$

$$h(p) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} p^4 \left(1 - p\right)^{n-5} I_{(0,1)}\left(p\right)$$

Ejemplo 13: Sea la variable X definida como el contenido de triglicéridos en la sangre de los futbolistas profesionales de cierto país. Del rango de X se toma una muestra aleatoria de tamaño n, y sean $Y_1, \ldots, Y_n$ las correspondientes estadísticas de orden. Considerando los recubrimientos $R_i = F\left(Y_i\right) - F\left(Y_{i-1}\right)$, y haciendo $R_i = Z_i - Z_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ es lógico asumir que $Z_0 = 0$ y $Z_{n+1} = 1$.

a. Halle la densidad de R_i.

$$R_i = F(y_i) - F(y_{i-1}) \text{ , } T = F(y_{i-1})$$

$$J^* = \begin{vmatrix} f(y_i) & -f(y_{i-1}) \\ 0 & f(y_{i-1}) \end{vmatrix} = f(y_{i-1})f(y_i) \quad , \; J = \frac{1}{J^*} = \frac{1}{f(y_{i-1})f(y_i)}$$

$$g(y_{i-1}, y_i) = \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!} f(y_{i-1})f(y_i)\left[F(y_{i-1})\right]^{i-2}\left[1-F(y_i)\right]^{n-i}$$

$$R_i = F(y_i) - F(y_{i-1}) \text{ , } F(y_i) = R_i + T$$

$$T = F(y_{i-1})$$

$$R_i > 0, \; T > 0, \; R_i + T \leq 1$$

$$h(r_i, t) = \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!} f(y_{i-1})f(y_i)\left[t\right]^{i-2}\left[1-r_i-t\right]^{n-i}|J|$$

$$h(r_i, t) = \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!} f(y_{i-1})f(y_i)\left[t\right]^{i-2}\left[1-r_i-t\right]^{n-i}\left|\frac{1}{f(y_{i-1})f(y_i)}\right|$$

$$h(r_i, t) = \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!}\left[t\right]^{i-2}\left[1-r_i-t\right]^{n-i}$$

$$h(r_i) = \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!}\int_0^{1-r_i} t^{i-2}\left[1-r_i-t\right]^{n-i} dt \; I_{(0,1)}(r_i)$$

Nota: $$\int_0^a x^m\left(a^n - x^n\right)^p dx = \frac{a^{m+1+np}\Gamma\left[\frac{m+1}{n}\right]\Gamma\left(p+1\right)}{n\Gamma\left[\frac{m+1}{n}+p+1\right]}$$

$$h(r_i) = \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!}(1-r_i)^{n-1}\left[\frac{\Gamma(i-1)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n)}\right] I_{(0,1)}(r_i)$$

$$h(r_i) = n(1-r_i)^{n-1} I_{(0,1)}(r_i)$$

b. Determine la densidad conjunta de n recubrimientos de este tipo.

$Z_i = F(y_i) \sim \text{Uniforme}(0,1)$, $i = 1,2,\ldots,n$

$g_{Z_1,Z_2,\ldots,Z_n}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = n!$, $0 < Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_n < 1$

Haciendo:

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 = Z_1 \\ R_2 = Z_2 - Z_1 \\ R_3 = Z_3 - Z_2 \\ \vdots \\ R_n = Z_n - Z_{n-1} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} Z_1 = R_1 \\ Z_2 = R_1 + R_2 \\ Z_3 = R_1 + R_2 + R_3 \\ \vdots \\ Z_n = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2} + R_{n-1} + R_n \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow J = \begin{vmatrix} 1\ 0\ 0\ldots 0 \\ 1\ 1\ 0\ldots 0 \\ 1\ 1\ 1\ldots 0 \\ \vdots \\ 1\ 1\ 1\ldots 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g_{R_1,R_2,\ldots,R_n}(R_1, R_2, \ldots, R_n) = g_{Z_1,Z_2,\ldots,Z_n}(R_1, R_1 + R_2, \ldots, R_1 + R_2 + \ldots + R_n)|J| =$$

$$g_{R_1,R_2,\ldots,R_n}(R_1, R_2, \ldots, R_n) = n! \ , \ R_i > 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,n \ , \ \sum_{i=1}^{n} R_i < 1$$

c. ¿A qué es igual $E\left[Y_p - Y_r\right]$, $r < p$?

$$g_{Y_r}(z) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} z^{r-1}(1-z)^{n-r} I_{(0,1)}(z)$$

$$Y_r \sim \text{Beta}(r, n-r+1) \rightarrow E(Y_r) = \frac{r}{n+1}$$

$$\rightarrow E\left[Y_p - Y_r\right] = E(Y_p) - E(Y_r) = \frac{p}{n+1} - \frac{r}{n+1} = \frac{p-r}{n+1}$$

EJERCICIOS

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución $f(x) = \frac{4x^3}{\theta^4} I_{(0,\theta)}(x)$ y $Y_1, \ldots, Y_n$ las respectivas estadísticas de orden. Determine si son independientes Y_n y $\frac{Y_1}{Y_n}$.
2. La temperatura en °C del suelo en cierta región B es $X \sim \text{Pareto}(\alpha = 18, \beta = 10)$.
   a. Sea $X_1, \ldots, X_4$ una muestra aleatoria de tamaño 4 de esa distribución y $Y_1, \ldots, Y_4$ las correspondientes estadísticas de orden. Si se tienen las siguientes variables $Z_1 = \frac{Y_1}{Y_2}, Z_2 = \frac{Y_2}{Y_3}, Z_3 = \frac{Y_3}{Y_4}$ y $Z_4 = Y_4$, halle las densidades de las Z_i , $i = 1,2,3,4$.

b. Si $X_1,\ldots,X_{14}$ es una muestra aleatoria de tamaño catorce de esa distribución y $Y_1,\ldots,Y_{14}$ las correspondientes estadísticas de orden calculen $P\left(Y_1<18.2;Y_2<18.5\right)$.

3. Sean $Y_1,\ldots,Y_4$ las estadísticas de orden de una muestra aleatoria de tamaño 4 de $f\left(x\right)=\frac{1}{18}e^{-\frac{1}{18}x}I_{(0,\infty)}\left(x\right)$. Si $Z_1=Y_1,Z_2=Y_2-Y_1,Z_3=Y_3-Y_2\ y\ Z_4=Y_4-Y_3$ determine si son independientes las $Z_i,\ i=1,2,3,4$.

4. El ingeniero Karl Pearson estableció que el tiempo en meses desde que se planta zanahoria hasta que se cosecha tiene distribución $\text{Exponencial}\left(\text{con media } 2.4\right)$. Si $Y_1\le Y_2\le Y_3$ son las estadísticas de orden de una muestra aleatoria de tamaño 3 y se establecen las siguientes variables $Z_1=10Y_1$, $Z_2=9\left(Y_2-Y_1\right)$ y $Z_3=8\left(Y_3-Y_2\right)$ halle la densidad de las Z_i , $i=1,2,3$.

5. Sean $X_1,X_2,...,X_n$ v.as i.i.d con función de densidad $f(x)=\frac{\alpha}{\theta^\alpha}x^{\alpha-1},\ \ 0<x<\theta$. Asimismo, sean $Y_1<Y_2<...<Y_n$ las estadísticas de orden. Demuestre que Y_1/Y_2, Y_2/Y_3 , ... , Y_{n-1}/Y_n y Y_n son variables aleatorias mutuamente independientes.

6. El tiempo de falla en años de una computadora de marca A tiene distribución $\text{Weibull}\left(r=3,\theta=2,\mu=1\right)$ años. Si $X_1,\ldots,X_4$ es una muestra aleatoria de esa distribución. Sean $Y_1,\ldots,Y_4$ las estadísticas de orden de la muestra aleatoria de tamaño 4 de la distribución en estudio. Si $Z_1=Y_1,Z_2=Y_2-Y_1,Z_3=Y_3-Y_2\ y\ Z_4=Y_4-Y_3$ determine si son independientes las $Z_i,\ i=1,2,3,4$.

7. El tiempo de vida de cuatro componentes tiene distribución exponencial con medias 3, 3.5, 4.2 y 4.3 años. Si estos componentes son independientes y están eslabonados en serie, halle la densidad del tiempo de vida del sistema (es decir del tiempo de vida mínimo de los componentes).

8. El tiempo de falla en años de una computadora de marca B tiene distribución exponencial con media 5 años. Sean $Y_1,\ldots,Y_4$ las estadísticas de orden de una muestra aleatoria de tamaño 4 de esa distribución. Calcule la $P\left(Y_2<4;Y_3<3\right)$.

9. De $f\left(x\right)=4x^3I_{[0,1]}\left(x\right)$ se toma una m.a de tamaño 3. Calcule la probabilidad de que la mediana muestral esté comprendida en el intervalo $\left[0.38,0.62\right]$.

10. El tiempo de vida (en años) de cierto USB tiene una distribución de tipo Exponencial (con media 8). Si se extrae una m.a de tamaño 9 y se encuentra que la mediana es menor que 11 años determine la probabilidad de que el mínimo sea menor que 9 años.

11. Los componentes electrónicos de cierto tipo tienen una duración X, con función densidad Exp (1/150) (para la duración se mide en horas).
   a) Suponga que dos de tales componentes, trabajan independientemente y en serie para cierto sistema (es decir el sistema falla cuando cualquiera de los componentes falla). Halle la probabilidad de que duración operativa del sistema esté entre 140 y 160 horas.

b) Suponga que los componentes funcionan en paralelo (es decir el sistema sólo falla si ambos componentes fallan). Halle la probabilidad de que la duración del sistema este entre 140 y 160 horas.

12. Si X se define como el tiempo en años de una calculadora desde la compra hasta que necesita reparación. Sea 4.3, 4.1, 4.5, 4.2 y 4.3 una m.a de X que tiene densidad $f(x)=\frac{11x^{10}}{\rho^{11}}I_{(0,\rho)}$. Con el método empírico estime con un 95% de confianza a ρ.

13. El tiempo de falla en años de una computadora de marca C tiene distribución $\text{Weibull}(r,\theta=2,\mu=2)$. Sea 5.8, 6.2, 6.4, 5.4, 5.2 una m.a de esa distribución. Estime e interprete con un 90% de confianza a r. **NOTA :** Si $X\sim\text{Weibull}(r,\theta,\mu)\rightarrow\ f(x)=\frac{\mu}{\theta}\left(\frac{x-r}{\theta}\right)^{\mu-1}\exp\left[-\left(\frac{x-r}{\theta}\right)^{\mu}\right]I_{[r,\infty)}(x)$.

14. De $f(x)=\frac{2\delta}{(\delta+x)^2}I_{(\delta,\infty)}(x)$, $\delta>0$ se extrae la muestra aleatoria 2.3, 2.1, 2.6, 2.1 y 2.4. Con el método empírico halle un intervalo de confianza de 97% para δ.

15. La longitud total en cm del lagarto blanco juvenil en hábitat óptimo tiene densidad $f(x)$. Sean $Y_1<Y_2<...<Y_n$ las estadísticas de orden de una muestra aleatoria de tamaño n de esa densidad, la cual es positiva para $50<X<120$. Determine la expresión del esperado del área a la izquierda del estadístico de orden 3.

16. Tres muestras independientes, cada una de tamaño 3, son tomadas de la distribución $\text{Uniforme}(0,1)$. Sean Z_1,Z_2 y Z_3 los Mínimos de cada muestra y sea $U=Z_1Z_2Z_3$. Halle la densidad de U.

17. La temperatura en °C del suelo en cierta región C es $X\sim\text{Uniforme}(15,25)$ Sea $X_1,\ldots,X_{20}$ una m.a. extraída de esa población. Haga la deducción de la densidad del Rango Muestral $R=Y_{20}-Y_1$.

18. El ingreso mensual de un padre de familia que vive en cierto distrito tiene densidad $f(x)=\frac{4x^3}{\theta^4}I_{(0,\theta)}(x)$. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de esa distribución y $Y_1,\ldots,Y_n$ las respectivas estadísticas de orden. Para esta subpregunta asuma que n = 3 y $\theta=1$. Primero obtenga la densidad conjunta del rango$(R=Y_n-Y_1)$ y el semirrango$\left(S=\frac{Y_1+Y_n}{2}\right)$ y luego encuentre la media del rango.

19. Suponga que las llamadas telefónicas que llegan a un conmutador asumen una distribución de Poisson con una media de 10 llamadas por minuto. En un período tranquilo de 2 minutos solamente llegaron 4 llamadas.
    a) Calcule la probabilidad de que las 4 llamadas lleguen durante el 1er. Minuto
    b) Halle el valor esperado del tiempo de espera, desde el inicio del período de 2 minutos hasta la cuarta llamada.

20. Suponga que 5 componentes electrónicos, cada uno con una duración distribuida exponencialmente con media 50, se ponen a funcionar al mismo tiempo. Los

componentes funcionan independientemente y se les observa hasta que r la fallen $(r \le 5)$. Sea Y_j el tiempo transcurrido hasta la falla j con $Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_r$. Sea $T_3 = Y_3 - Y_2$, el tiempo transcurrido entre la falla 2 y la falla 3 ¿Cómo se distribuye T_3?

21. Sea X_1, X_2, X_3, X_4 una m.a de exp(1).

    a) Halle la función densidad de la mediana.
    b) Halle la mediana esperada.

22. El encargado del Departamento de Control de Calidad de cierta fábrica desea obtener la probabilidad de que la proporción de la población, que está comprendida entre el mínimo y el máximo, sea menor que 0.89, basándose en una muestra aleatoria de tamaño 25. ¿Cuál es ese valor de probabilidad?. Justifique su respuesta.
23. La prolina o prolalina es uno de los aminoácidos que, entre otras funciones, forman las proteínas de los seres vivos. El Biólogo Charles Aznavour desea saber cómo se distribuye la proporción p de plantas de mandarina de variedad Fortuna injertado con mandarina Cleopatra, que han recibido irrigación completa, cuyo contenido de prolina en mg/L se encuentra entre el cuarto y el último de una muestra aleatoria de tamaño n. Con este fin lo contrata a Ud. ¿cuál sería su respuesta?
24. En la fábrica de conservas "LaRiquísima" el gerente desea saber cómo se distribuye la proporción p de conservas cuyo peso en gramos se encuentra entre el mínimo (Y_1) y el penúltimo (Y_{n-1}) de una muestra aleatoria de tamaño n.
    a. Con este objetivo busca a un Especialista en Estadística Informática y lo contrata a Ud. ¿Cuál sería su respuesta?
    b. Considerando $n = 3$ y la muestra de una distribución $\text{Uniforme}(0,1)$: 0.054, 0.698 y 0.988; obtenga la muestra de tamaño 3 de la densidad de la pregunta a.