Universidad Nacional Agraria La Molina
Departamento de Estadística e Informática
Curso: Inferencia Estadística
Profesor: Clodomiro Fernando Miranda Villagómez

MÉTODOS DE ESTIMACION PUNTUAL DE PARAMETROS

MÉTODOS DE MOMENTOS

Sea X una v.a. con función densidad $f(x;\theta)$, donde θ = (θ1,.... ,θk) y sea $\mu_r^{'}$ el r-ésimo momento poblacional en torno a cero, esto es: $\mu_r^{'}(\theta) = E_\theta\left[X^r\right] = \mu_r^{'}(\theta_1, \ldots \theta_k)$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de f (x, θ), y sea $M_j^{'}$ el j-ésimo momento muestral en torno a cero, esto es: $M_j^{'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j$

DEFINICIÓN

Se dice que $\hat{\theta} = \left(\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_k\right)$, (donde cada $\hat{\theta}_j$ es un estimador puntual de θ_j, $j = 1, 2, ...k$) es un estimador de $\theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ obtenido por el método de momentos, si cada $\hat{\theta}_j$ es solución de las k ecuaciones siguientes: $M_j^{'} = \mu_j^{'}(\theta_1, ..., \theta_k) = E_\theta\left(X^j\right)$, $j = 1, 2, ...k$.

Hay que recordar:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{c.s} E(X)$$

$$\bar{X}_{n(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{c.s} E\left(X^2\right)$$

En general: $\bar{X}_{n(k)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{c.s} E\left(X^k\right)$

Por la convergencia casi segura podemos hacer las igualdades de los promedios muestrales con las esperanzas matemáticas.

Observaciones

1. Para hallar un estimador de la función del vector de parámetros:

$$\tau(\theta) = \left(\tau_1(\theta_1, \cdots, \theta_k), \cdots, \tau_m(\theta_1, \cdots, \theta_k)\right)$$

por el método de momentos, se emplea el siguiente procedimiento:

a. Se encuentran los estimadores $\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_k$ por el método de momentos.

b. Se usa $\tau_i\left(\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_k\right)$ como estimador de $\tau_i(\theta_1, \cdots, \theta_k)$ para i = 1, 2, ... , m

2. Los estimadores por momentos no siempre son insesgados. Sin embargo, si no son insesgados lo son asintóticamente.
3. Son consistentes.
4. Tienen normalidad asintótica.

Ejemplo 1: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria extraída de una distribución $\text{Poisson}(\theta)$.

a. Obtenga, de dos maneras, el estimador de θ (primero como la media y luego como la varianza de la distribución), por el método de momentos.

Primera manera

$$M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} = E(X) = \theta$$

$$\therefore \hat{\theta} = \bar{x}$$

Segunda manera

$$M_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \theta + \bar{x}^2$$

$$\therefore \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{x}\right)^2$$

b. Obtenga, de dos maneras, el estimador de e^{θ}, por el método de momentos.

Primera manera

Por la observación 1: Como $\hat{\theta} = \bar{x} \rightarrow$ el estimador de e^{θ} será $e^{\bar{x}}$.

Segunda manera

Por la observación 1: Como $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{x}\right)^2 \rightarrow$ el estimador de e^{θ} será $e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{x}\right)^2}$.

Ejemplo 2: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria extraída de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Utilizando el método de momentos, halle un estimador de $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

$$M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} = E(X) = \mu$$

$$M_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Resolviendo estas dos ecuaciones:

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 - n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right] =$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\bar{x}\,x_i + \bar{x}^2\right)\right] =$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

El estimador de $\theta = \left(\mu, \sigma^2\right)$ es $T = \left(\bar{x}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right)$.

Otra conclusión que se obtiene de este problema es la siguiente:

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2 \to \hat{\sigma}^2$ es un estimador asintóticamente insesgado.

Ejercicio: Sea $X_1,\dots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2, entonces los estimadores de momentos son $\bar{X}$ y la varianza muestral sesgada S_n^2 respectivamente.

Ejemplo 3: En un ensayo clínico, n pacientes con cáncer pulmonar avanzado sobreviven con los tiempos $X_1,\dots,X_n$ en meses. Suponga que la distribución de la supervivencia es exponencial con media θ.

a. Con el método de momentos obtenga dos estimadores diferentes de θ.

1) $M_1^{|} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} = E\left(X\right) = \theta \to \hat{\theta}_1 = \bar{x}$

2) $M_2^{|} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E\left(X^2\right) = \sigma^2 + \mu^2$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \theta^2 + \bar{x}^2 \to \hat{\theta}_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{x}\right)^2}\ .$$

b. Usando el método de momentos, halle dos estimadores de la función de supervivencia: $S\left(x\right) = P\left(X > x\right) = \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)$.

Los estimadores son: $\exp\left(-\frac{x}{\widehat{\theta}}\right) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x}{\overline{x}}\right), \text{ usando } \widehat{\theta}_1 \\ \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{x}\right)^2}}\right), \text{ usando } \widehat{\theta}_2 \end{cases}$

c. Con 5 pacientes los tiempos de supervivencia en meses fueron: 9, 15, 8, 25, y 23. Estime el parámetro θ de supervivencia de pacientes con cáncer pulmonar terminal.

1) $\widehat{\theta}_1 = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 16$ meses

2) $\widehat{\theta}_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{x}\right)^2} = 6.9857$ meses

d. Con 5 pacientes los tiempos de supervivencia en meses fueron: 9, 15, 8, 25, y 23. Estime la probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar terminal sobreviva más de 20 meses.

$$P\left(X > 20\right) = \exp\left(-\frac{20}{\widehat{\theta}}\right) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{20}{16}\right) = 0.2865, \text{ usando } \widehat{\theta}_1 \\ \exp\left(-\frac{20}{6.9857}\right) = 0.0571, \text{ usando } \widehat{\theta}_2 \end{cases}$$

Ejemplo 4: Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de $f\left(x; r, \lambda\right) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma\left(r\right)} I_{(0,\infty)}\left(x\right)$, con el método de momentos estime a $\theta = \left(r, \lambda\right)$.

$$M_1^{|} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} = E\left(X\right) = \frac{r}{\lambda} \rightarrow r = \lambda \overline{X}$$

$$M_2^{|} = \overline{X}_{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E\left(X^2\right) = \frac{\left(r+1\right)r}{\lambda^2} \rightarrow \overline{X}_{(2)} = \frac{\left(\lambda \overline{X} + 1\right)\lambda \overline{X}}{\lambda^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda\left[\overline{X}_{(2)} - \overline{X}^2\right] = \overline{X}$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$\widehat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{S_1^2}, \quad \widehat{r} = \frac{\overline{X}^2}{S_1^2}, \text{ donde: } S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

El estimador de $\theta = (r, \lambda)$ es $\hat{\theta} = \left(\hat{r} = \frac{\bar{X}^2}{S_1^2}, \ \hat{\lambda} = \frac{\bar{X}}{S_1^2} \right)$

Nota: Si se quiere verificar una hipótesis con respecto a r y se tiene una muestra grande se puede utilizar la propiedad de normalidad asintótica del estimador $\hat{r} = \frac{\bar{X}^2}{S_1^2}$.

Ejemplo 5: Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}(0, \theta)$.

a. Halle el estimador de momentos de θ.

$$M_1^{|} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} = E(X) = \frac{\theta}{2} \rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{x}$$

b. Obtenga el estimador de momentos de θ utilizando el cuarto momento, halle primero $E(X^4)$, iguálelo a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^4$ y finalmente despeje $\hat{\theta}$.

Ejercicio: En cierto laboratorio la proporción de unidades experimentales, de lima dulce, analizadas mensualmente que tienen un rendimiento de jugo mayor a 46% tiene distribución $\text{Beta Estándar}(a, b)$. De esa distribución se tomó una muestra aleatoria con valores 0.59, 0.15, 0.40, 0.18 y 0.46. Primero estime con el método de momentos los valores de a y b (redondee a y b al entero más cercano) luego calcule la probabilidad de que en un mes la proporción de unidades experimentales, de lima dulce, analizadas que tienen un rendimiento de jugo mayor a 46% sea mayor de 0.2.

MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

<u>Función de Verosimilitud</u>

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a de f(x ; θ), $\theta \in \Theta$. La función de verosimilitud de la muestra y de θ es:

$$L(\theta) = L(\theta, \underline{x}) = f(\underline{x}, \theta) = f(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

donde los x_i son fijos para poder derivar con respecto a θ.

Aparentemente la función de verosimilitud y la función densidad conjunta de una muestra aleatoria son lo mismo, pero no es así, porque en la función de verosimilitud las x_i son valores constantes y θ es variable, en cambio en una densidad conjunta las x_i son variables y θ es constante.

Estimador de Máxima Verosimilitud (E.M.V.)

Se dice que $\hat{\theta} = t(X_1,\dots,X_n)$ es un E.M.V, si maximiza a $L(\theta)$.

$$L(\theta) = \max_{\theta\in\Theta}\{L(\theta)\} = \underset{\theta\in\Theta}{Sup}\{L(\theta)\}$$

Observaciones

1) El E.M.V. de θ no es necesariamente único.

2) Como la función Y= Ln X , X>0 es estrictamente creciente entonces ln (L(θ)) obtendrá su valor máximo para el mismo valor que lo obtendrá L(θ).
Para obtener el E.M.V. de θ se puede resolver la ecuación de verosimilitud:

$$\frac{d\left[\ln\left(L(\theta)\right)\right]}{d\theta} = 0$$

3) Si la función de verosimilitud contiene k parámetros $\theta_1,\dots.\ \theta_k$, esto es:

$L(\theta) = L(\theta_1,\dots,\theta_k) = f(x_1,\dots.x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$

Para obtener los E.M.V. de $\theta_1,\dots.\ \theta_k$ bastará resolver las ecuaciones:

$$\frac{d\left[\ln\left(L(\theta)\right)\right]}{d\theta_1} = 0,\ \dots\ ,\frac{d\left[\ln\left(L(\theta)\right)\right]}{d\theta_k} = 0$$

TEOREMA (PROPIEDAD DE INVARIANZA DE LOS E.M.V.)

Sea $X_1,\dots,X_n$ una m.a. de f (x;θ) donde $\theta = (\theta_1,\dots\dots\ \theta_k) \in \Theta \subset \Re^k$ y sea :

$$T : \Theta \subset \Re^k \to \Theta^* \subset \Re^m \ (m\leq k)$$

Una transformación uno a uno (inyectiva)

Sea $\hat{\theta} = t(X_1,\dots,X_n) = \left(t_1(X_1,\dots,X_n),\ \dots\dots,t_m(X_1,\dots,X_n)\right)$ un E.M.V de $\theta = (\theta_1,\dots.,\theta_m)$, entonces $\tau\left(\hat{\theta}\right)$ es un E.M.V de $\tau(\theta) = \left(\tau_1(\theta),\cdots,\tau_m(\theta)\right)$. Así un E.M.V es invariante bajo transformaciones uno a uno.

Propiedades de los EMV

Si $X_1,\dots,X_n$ es una muestra aleatoria de $f(x;\theta_0)$ y sea $\hat{\theta}_n$ un EMV de θ_0 entonces bajo ciertas "condiciones de regularidad", que se estudiarán en la parte de Optimalidad, se tienen las siguientes propiedades:

1. $\hat{\theta}_n$ existe y es único.

2. $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente de θ_0. Es decir, $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$.
3. $\hat{\theta}_n$ es un estimador insesgado asintóticamente para θ_0. Es decir, $\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_n\right) = \theta_0$.
4. $\hat{\theta}_n$ es un estimador asintóticamente eficiente para θ_0. Es decir $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\text{LICR}}{Var\left(\hat{\theta}_n\right)} = 1$,

   donde LICR se conoce como el límite inferior de Cramer Rao y se estudiará en la parte de optimalidad donde se presentarán los conceptos teóricos que consideran a una función $q(\theta)$ y se define como el valor mínimo de la varianza de todos los estimadores insesgados de la función $q(\theta)$ y que se halla con la siguiente fórmula:

   $$\text{LICR} = \frac{\left[q^{'}(\theta)\right]^2}{n\,I(\theta)} = \frac{\left[q^{'}(\theta)\right]^2}{nVar\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right\}}.$$
5. $\hat{\theta}_n$ tiene distribución normal asintótica con media θ_0 y varianza LICR. Es decir

   $$\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{\text{LICR}}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$
6. Si T es una estadística suficiente entonces el EMV $\hat{\theta}_n$ es una función de T.

Ejemplo 6: Se tiene un grupo de cuyes (hembras y machos) y se conoce que la razón entre los sexos es 4/1 pero no se sabe que sexo es el más numeroso. Se toma, con reemplazo, una muestra aleatoria de tamaño 4. Con el método de máxima verosimilitud estime p= la proporción de cuyes machos en la muestra.

Sea X= el número de cuyes machos en la muestra de tamaño 4 $\rightarrow X \sim \text{Binomial}(4, p)$,pero de acuerdo con las condiciones del problema, p puede tomar el valor 1/5 o 4/5. Haciendo los cálculos se tiene:

X	0	1	2	3	4
$f\left(x;\frac{1}{5}\right)$	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016
$f\left(x;\frac{4}{5}\right)$	0.0016	0.0256	0.1536	0.4096	0.4096

Como el método de máxima verosimilitud se basa en valores máximos, la estimación de p será la siguiente:

$$\widehat{p}=\begin{cases}\dfrac{1}{5} & \text{para } x=0,1\\ \dfrac{1}{5} & \text{para } x=2\\ \dfrac{4}{5} & \text{para } x=2\\ \dfrac{4}{5} & \text{para } x=3,4\end{cases}$$

Ejemplo 7: Si $X_1,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución $\text{Binomial}(1,p)$.

a. Halle el estimador máximo verosímil de p derivando el logaritmo de la función de verosimilitud.

La función de verosimilitud es la siguiente:

$$L(p)=f(x_1,\ldots,x_n;p)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

Como $L(p)$ y $\ln\left[L(p)\right]$ tienen el mismo máximo, trabajaremos con $\ln\left[L(p)\right]$.

$$\ln\left[L(p)\right]=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)$$

Ahora se hallará el máximo de $\ln\left[L(p)\right]$:

$$\frac{d\ln\left[L(p)\right]}{dp}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{p}-\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\frac{1}{1-p}\right)=0$$

$\rightarrow \widehat{p}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x},$ es el estimador máximo verosímil de *p*.

$\dfrac{d^2\ln\left[L(p)\right]}{dp^2}=-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\dfrac{1}{p^2}-\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\dfrac{1}{(1-p)^2}\right)<0\rightarrow$ tenemos un máximo.

b. Halle el estimador máximo verosímil de p derivando la función de verosimilitud.

$$L(p)=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

Como $L(p)$ y $\ln\left[L(p)\right]$ tienen el mismo máximo, trabajaremos ahora con $L(p)$.

Haciendo: $k=\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$\frac{dL(p)}{dp}=\frac{d\left[p^k(1-p)^{n-k}\right]}{dp}=kp^{k-1}(1-p)^{n-k}+p^k(n-k)(1-p)^{n-k-1}(-1)=0$$

$$kp^{k-1}(1-p)^{n-k}=p^k(n-k)(1-p)^{n-k-1}\rightarrow \widehat{p}=\frac{k}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x}\ .$$

c. Verifique la propiedad de invarianza de un EMV hallando el EMV de p^2 .

$$L(p)=f(x_1,\ldots,x_n;p)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

Como $L(p)$ y $\ln\left[L(p)\right]$ tienen el mismo máximo, trabajaremos con $\ln\left[L(p)\right]$.

$$l\left(p^2\right)=\ln\left[L\left(p^2\right)\right]=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{\ln p^2}{2}+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\left(1-\left(p^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{dl\left(p^2\right)}{dp^2}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{2p^2}-\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\times\frac{1}{1-\left(p^2\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{\left(p^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{2}=0$$

$$\rightarrow \hat{p}^2=\left(\overline{X}\right)^2$$

Ejemplo 8: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

a. Obtenga el estimador máximo verosímil de $\theta=\left(\mu,\sigma^2\right)$ derivando el logaritmo de la función de verosimilitud.

$$L(\theta)=f\left(x_1,\ldots,x_n;\mu,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i;\mu,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right]=$$

$$L(\theta)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

Como $L(\theta)$ y $\ln\left[L(\theta)\right]$ tienen el mismo máximo, trabajaremos con $\ln\left[L(\theta)\right]$.

$$\ln\left[L(\theta)\right]=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Ahora se hallarán los máximos de $\ln\left[L(\theta)\right]$:

$$\frac{d\ln\left[L(\theta)\right]}{d\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

$$\frac{d\ln\left[L(\theta)\right]}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se tiene:

$\widehat{\mu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$, es el estimador máximo verosímil (EMV) de μ.

$\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$, es el estimador máximo verosímil (EMV) de σ^2.

b. Obtenga el estimador máximo verosímil de $\theta = \left(\mu, \sigma^2\right)$ derivando la función de verosimilitud.

$$L(\theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right]$$

$$\frac{dL(\theta)}{d\mu} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right]\right\}\left\{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)\right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right) = 0 \rightarrow \widehat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

$$\frac{dL(\theta)}{d\sigma^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(-\frac{n}{2}\right)\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right] +$$

$$+(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right]\right\}\left\{\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right\} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\widehat{\mu}\right)^2}{\sigma^2} = n \rightarrow \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n}$$

Ejemplo: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}[0,\theta]$. Halle el estimador máximo verosímil de θ.

$$L(\theta) = f\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}I_{[0,\theta]}\left(x_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}I\left(0 \le x_i \le \theta\right) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}I\left(0 \le x_i \le \theta\right)$$

$$\ln\left[L(\theta)\right] = n\left[\ln(1) - \ln(\theta)\right] \rightarrow$$

$$\frac{d\ln\left[L(\theta)\right]}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} = 0 \rightarrow \text{ Por este camino no es posible hallar el EMV}$$

Recordar que: $I(\mathrm{A}) = \begin{cases} 1, & \text{si A es verdadero} \\ 0, & \text{si A es falso} \end{cases}$

considerando dos conjuntos A y B:

$$I(\mathrm{A})\times I(B)=\begin{cases}1\times 1, & \text{si A es verdadero y B verdadero}\\ 1\times 0, & \text{si A es verdadero y B es falso}\\ 0\times 1, & \text{si A es falso y B es verdadero}\\ 0\times 0, & \text{si A es falso y B es falso}\end{cases}=\begin{cases}1, & \text{si A es verdadero y B verdadero}\\ 0, & \text{de otro modo}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I(\mathrm{A})\times I(B)=I(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}I(0\le x_i\le\theta)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n I\left(\{0\le x_1\le\theta\}\cap\{0\le x_2\le\theta\}\cap\ldots\cap\{0\le x_n\le\theta\}\right)=$$

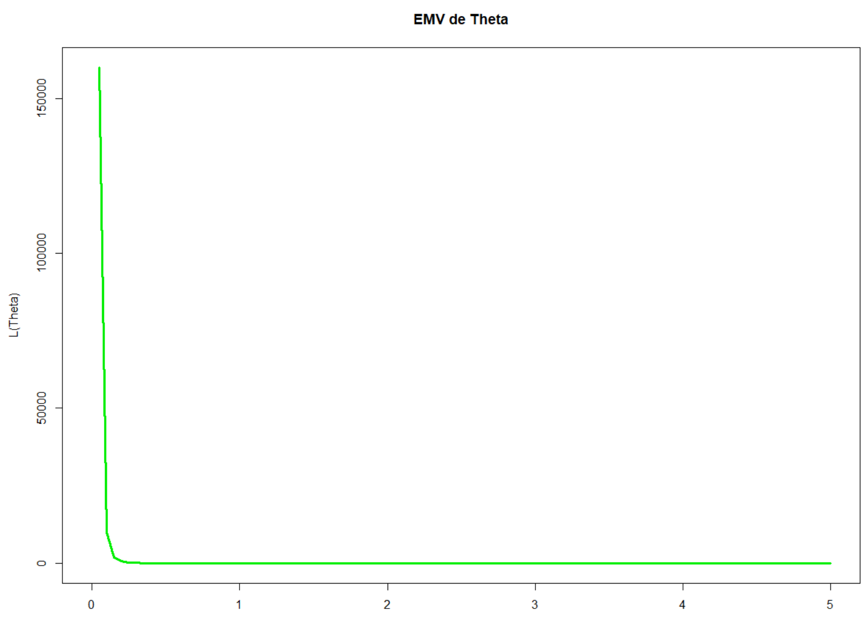
$$L(\theta)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n I\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{0\le x_i\le\theta\}\right)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n I(0\le x_1,\ldots,x_n\le\theta)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n I(0\le Y_n\le\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. Maximizar } \dfrac{1}{\theta^n}\Rightarrow \text{Minimizar } (\theta-0)\\ \text{2. Se cumple que } I(0\le Y_n\le\theta)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{\theta}=Y_n$$

Recurrimos a las estadísticas de orden:

$0\le Y_1\le Y_2\le\ldots\le Y_n\le\theta$

Se aprecia que $L(\theta)$ es máximo cuando θ es mínimo, por lo tanto, como $\theta\ge Y_n\rightarrow$ $\widehat{\theta}=Y_n$ es el EMV. Notar que esto se cumple siempre que $f(x)=\frac{1}{\theta}I_{[0,\theta]}(x)$, porque si el rango fuese abierto $L(\theta)$ no sería máximo cuando θ es mínimo, $\theta>Y_n\rightarrow$ el Y_n no será el EMV.



Ejemplo: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de la distribución $f(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}(x-\theta)}I_{[\theta,\infty)}(x)$,. Halle el estimador máximo verosímil de θ.

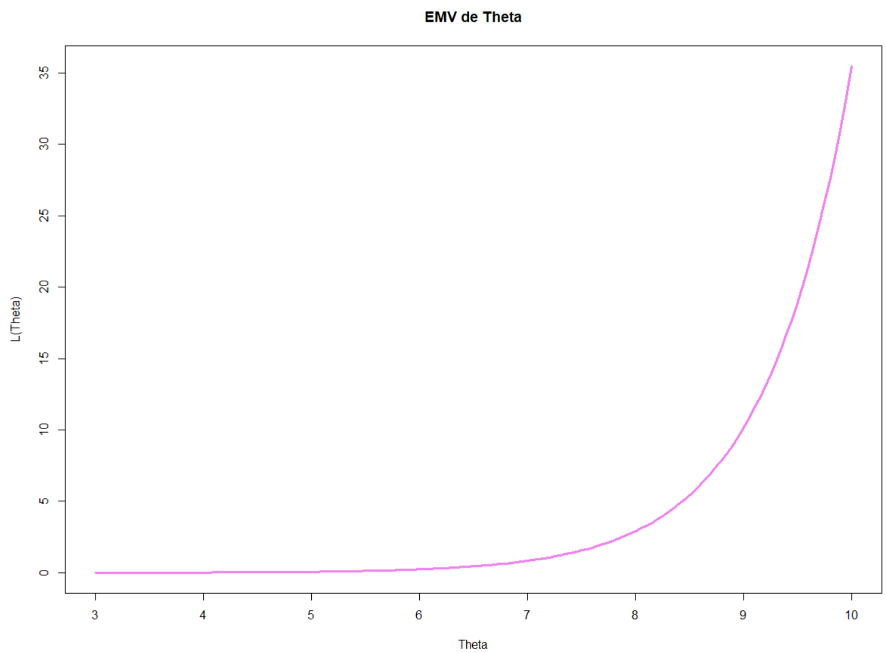
$$L(\theta)=f(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}(x_i-\theta)}I_{(\theta,\infty)}(x_i)=\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\theta}{4}}$$

$\ln\left[L(\theta)\right]=-n\ln 4-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\theta}{4}$, por este camino no es posible encontrar el estimador máximo verosímil, pero notar que $L(\theta)$ es máximo cuando θ es máximo.

Recurrimos a las estadísticas de orden:

$\theta\le Y_1\le Y_2\le\ldots\le Y_n\le\infty$

Como $Y_1\ge\theta\rightarrow\widehat{\theta}=Y_1$ es el EMV.



Ejemplo 9: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}(0,2\theta+1)$. Determine el estimador máximo verosímil de θ.

$$f(x)=\frac{1}{2\theta+1}I_{[0,2\theta+1]}(x)$$

$$L(\theta)=f(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta+1}I_{[0,2\theta+1]}(x_i)=\left(\frac{1}{2\theta+1}\right)^n I_{[0,2\theta+1]}(Y_n)$$

Recurrimos a las estadísticas de orden:

$0\le Y_1\le Y_2\le\ldots\le Y_n\le 2\theta+1$

Notar que $L(\theta)$ es máxima cuando θ es mínima.

$L(\theta)$ es una función monótona decreciente $\rightarrow$ el valor de $2\theta+1$ que maximiza a $L(\theta)$ es el máximo de la muestra: Y_n.

$\rightarrow 2\theta+1=Y_n\rightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{2}(Y_n-1)$, es el EMV de θ.

Ejemplo 10: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Uniforme$\left(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}\right)$. Determine el estimador máximo verosímil (EMV) de θ.

$f(x)=I_{\left[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}\right]}(x)$

$$L(\theta)=f(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}1I_{\left[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}\right]}(x_i)=1^n,\ \theta-\frac{1}{2}\le Y_1\le Y_n\le\theta+\frac{1}{2}$$

$\frac{dL(\theta)}{d\theta}=0\rightarrow$ No es posible hallar el EMV de θ.

Recurrimos a las estadísticasde orden:

$\theta-\frac{1}{2}\le Y_1\le Y_2\le\ldots\le Y_n\le\theta+\frac{1}{2}$

Del rango de $L(\theta)$ se establece que:

$$\left.\begin{array}{lll}\theta-\frac{1}{2}\le Y_1 & \text{y} & Y_n\le\theta+\frac{1}{2}\\ \theta\le Y_1+\frac{1}{2} & \text{y} & \theta\ge Y_n-\frac{1}{2}\end{array}\right\}\rightarrow Y_n-\frac{1}{2}\le\hat{\theta}\le Y_1+\frac{1}{2},\ \text{son los EMV de }\theta.$$

En este caso el EMV no es único, cualquier estadística $\hat{\theta}$ cuyos valores estén comprendidos en el intervalo hallado es un EMV de θ.

Ejercicio: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de la distribución $f(x)=\frac{2x}{\theta^2}I_{[0,\theta]}(x)$.

a. Halle el estimador máximo verosímil T de θ. Respuesta: Y_n,

b. ¿Cuál es el valor de la constante c que hace $E(cT)=\theta$? Respuesta: $c=\frac{2n+1}{2n}$

c. Obtenga el estimador máximo verosímil de la mediana de la distribución. Respuesta: $\frac{Y_n}{\sqrt{2}}$

Ejercicio: Halle el estimador máximo verosímil de θ, si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de una distribución $\text{Uniforme}\left[-\theta,\theta\right]$. Respuesta: $\max\left(-Y_1,Y_n\right)$.

$$L(\theta)= f\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right)=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\theta\right)=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n$$

$$\ln\left[L(\theta)\right]=n\left[\ln(1)-\ln(2\theta)\right]\rightarrow$$

$$\frac{d\ln\left[L(\theta)\right]}{d\theta}=-\frac{n}{2\theta}=0\rightarrow \text{ No es posible hallar el EMV}$$

Recurrimos a las estadísticas de orden:

$-\theta\leq Y_1\leq Y_2\leq\ldots\leq Y_n\leq\theta$

Se aprecia que $L(\theta)$ es máximo cuando $\theta\geq Y_n$ y $-\theta\leq Y_1\rightarrow\theta\geq Y_n$ o $\theta\geq -Y_1\rightarrow\hat{\theta}=\max\left(-Y_1,Y_n\right)$ es el EMV.

Ejemplo 11: En el distrito de San Luis el número de asaltos por mes tiene una distribución de $\text{Poisson}(\theta)$. Si se estudia el número de asaltos que ocurren en cada uno de n meses y se define la variable aleatoria X como el número de meses en los que no se producen asaltos.

a. Halle, en función de X, el EMV de θ derivando el logaritmo de la función de verosimilitud.

Sea $Y=$ el número de asaltos que se producen en un mes $\rightarrow$

$Y\sim\text{Poisson}(\theta)$.

$p=P(Y=0)=e^{-\theta}$

Sea X = el número de meses donde no hay asaltos de un total de n meses $\rightarrow$

$X\sim\text{Binomial}\left(n;p=e^{-\theta}\right)$

La función de verosimilitud se X es:

$$L(\theta)= f\left(x;\theta\right)=\binom{n}{x}\left(e^{-\theta}\right)^x\left(1-e^{-\theta}\right)^{n-x}$$

$$\ln\left[L(\theta)\right]=\ln\binom{n}{x}-\theta x+\left(n-x\right)\ln\left(1-e^{-\theta}\right)$$

$$\frac{d\ln\left[L(\theta)\right]}{d\theta} = -x + \frac{(n-x)e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}} = 0$$

$\rightarrow \hat{\theta} = -\ln\left(\frac{x}{n}\right)$ es el EMV de θ.

$$\frac{d^2\ln\left[L(\theta)\right]}{d\theta^2} = \frac{d(n-x)e^{-\theta}\left(1-e^{-\theta}\right)^{-1}}{d\theta} = (n-x)\left[(-1)e^{-\theta}\left(1-e^{-\theta}\right)^{-1} + e^{-\theta}\left(-e^{-\theta}\right)\left(1-e^{-\theta}\right)^{-2}\right] =$$

$$= (n-x)e^{-\theta}\left(1-e^{-\theta}\right)^{-1}\left[-1-e^{-\theta}\left(1-e^{-\theta}\right)^{-1}\right] < 0$$

b. Halle, en función de X, el EMV de θ derivando la función de verosimilitud (queda como ejercicio).

Ejemplo: Una variable aleatoria X tiene distribución Burr si su densidad es $f(x/k,c) = \frac{ckx^{c-1}}{\left(1+x^c\right)^{k+1}} I_{[0,\infty)}(x),\ \ c,\ k>0$. Si de esa distribución se obtiene una muestra aleatoria de tamaño n, obtenga el estimador máximo verosímil de $\theta=(k,c)$.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{ckx_i^{c-1}}{\left(1+x_i^c\right)^{k+1}} = \frac{c^n k^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{c-1}}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+x_i^c\right)^{k+1}}$$

$$l(\theta) = \log\left[L(\theta)\right] = n\ln(c) + n\ln(k) + (c-1)\underbrace{\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)}_{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)} - (k+1)\underbrace{\ln\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1+x_i^c\right)\right]}_{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^c\right)}$$

$$\frac{dl(\theta)}{dk} = \frac{n}{k} - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^c\right) = 0 \Rightarrow \hat{k} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^c\right)},$$

primero esto se reemplaza abajo y se resuelve para *c*.

$$\frac{dl(\theta)}{dc} = \frac{n}{c} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - (k+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^c.\ln(x_i)}{1+x_i^c} = 0$$

Se usará el R para resolver este sistema de ecuaciones.
Ver el script R.

Ejemplo

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Weibull(r,θ,μ), con r y μ conocidos.

a. Halle el EMV de θ.

$$L(\theta)=\frac{\mu^n}{\theta^{n\mu}}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i-r)\right]^{\mu-1}\exp\left[-\frac{1}{\theta^\mu}\sum_{i=1}^{n}(X_i-r)^\mu\right]$$

Se encuentra que $\hat{\theta}=\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-r)^\mu}{n}\right]^{\frac{1}{\mu}}$

b. Halle la distribución asintótica del EMV $\hat{\theta}$.

$$\hat{\theta}\overset{\text{Asint}}{\sim}\text{Normal}\left(\mu=\theta,\sigma^2=\text{LICR}=\frac{1}{nI(\theta)}\right)$$

$$I(\theta)=Var\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right\}$$

$$\ln f(x;\theta)=\ln\mu-\mu\ln\theta+(\mu-1)\ln(x-r)-\frac{1}{\theta^\mu}(x-r)^\mu$$

$$\frac{d\ln f(x;\theta)}{d\theta}=-\frac{\mu}{\theta}+\frac{\mu}{\theta^{\mu+1}}(x-r)^\mu$$

$$I(\theta)=Var\left[-\frac{\mu}{\theta}+\frac{\mu}{\theta^{\mu+1}}(x-r)^\mu\right]=\frac{\mu^2}{\theta^{2\mu+2}}Var\left[(x-r)^\mu\right]$$

si $Y=(X-r)^\mu\rightarrow Y\sim\text{Exponencial}\left(\text{Tasa }=\dfrac{1}{\theta^\mu}\right)\rightarrow$

$$I(\theta)=\frac{\mu^2}{\theta^{2\mu+2}}\times\theta^{2\mu}=\frac{\mu^2}{\theta^2}$$

$$\therefore\ \hat{\theta}\overset{\text{Asint}}{\sim}\text{Normal}\left(\theta,\frac{\theta^2}{n\mu^2}\right)$$

c. Con el resultado anterior haga uso del R para hallar intervalos de confianza y hacer pruebas de hipótesis. Ver el Script R.

Ejemplo 12: Se estudia el número de clientes que ingresaron a una librería hasta que se haga la compra r. Si se sabe el $p\times100\%$ de los clientes compran $\left(p\text{ conocido}\right)$. Halle el EMV de r si $X_1,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de la distribución en estudio.

$X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de una $\text{Pascal}(r,p)$, $\quad x_i=r,r+1,r+2,\ldots$

$L(r)=\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{r-1}p^r(1-p)^{x_i-r}$, pero como r es un EMV se cumple que:

$$\frac{L(r)}{L(r-1)}>1\quad,\quad\frac{L(r+1)}{L(r)}<1$$

$$\frac{L(r)}{L(r-1)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{r-1}p^r(1-p)^{x_i-r}}{\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{r-2}p^{r-1}(1-p)^{x_i-r+1}}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{r-1}p(1-p)^{-1}}{\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{r-2}}=$$

$$\frac{L(r)}{L(r-1)}=\left[p(1-p)^{-1}\right]^n\prod_{i=1}^{n}\frac{\frac{(x_i-1)!}{(r-1)!(x_i-r)!}}{\frac{(x_i-1)!}{(r-2)!(x_i-r+1)!}}=\left[p(1-p)^{-1}\right]^n\prod_{i=1}^{n}\frac{(x_i-r+1)}{r-1}$$

$$\frac{L(r)}{L(r-1)}=\left[p(1-p)^{-1}\right]^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{r-1}-1\right)>1$$

El EMV de r se hallará por métodos numéricos en:

$$\left[p(1-p)^{-1}\right]^n=\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{r-1}-1\right)\right]^{-1}$$

Ejemplo 13: La v.a X tiene distribución exponencial con media $\frac{1}{\theta}$. El parámetro θ puede adoptar tres valores: 2, 3 y 4. Se toma una m.a de tamaño 6 con los siguientes resultados: cuatro valores comprendidos entre 0.004 y 0.07 y dos mayores que 0.4. Determine el EMV de θ.

La probabilidad de una secuencia es:

$$P_1=P\begin{pmatrix}0.004\le X_1\le 0.07, 0.004\le X_2\le 0.07, 0.004\le X_3\le 0.07, 0.004\le X_4\le 0.07,\\ X_5>0.4, X_6>0.4\end{pmatrix}$$

La probabilidad buscada es:

$$P=\frac{6!}{4!2!}P_1=15P_1=15\left[P(0.004\le X\le 0.07)\right]^4\left[P(X_6>0.4)\right]^2$$

$$P=15\left[\int_{0.004}^{0.07}\theta e^{-\theta x}dx\right]^4\left[\int_{0.4}^{\infty}\theta e^{-\theta x}dx\right]^2$$

Con θ=2 $\rightarrow$ P=15$(0.1227)^4(0.4493)^2=0.00069$

Con θ=3 $\rightarrow$ P=15$(0.1775)^4(0.3012)^2=0.0014$

Con θ=4 $\rightarrow$ P=15$(0.2283)^4(0.2019)^2=0.0017$

La probabilidad mayor es 0.0017 $\rightarrow$ el EMV es $\hat{\theta}=4$

Ejemplo 14: Se tiene la siguiente función de probabilidad:

$P(X=-1)=p;\quad P(X=0)=1-2p,\ \ 0<p<\dfrac{1}{2};\quad P(X=1)=p$. De esta distribución se extrae una muestra aleatoria de tamaño n , con el siguiente resultado:

X	-1	0	1	
n_i	n_1	n_2	n_3	n

a. Con el método de momentos estime a p.

$$M_1^{|}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}n_iX_i=\bar{X}=E(X)=0\rightarrow \text{se usa el segundo momento}$$
$$M_2^{|}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}n_iX_i^2=E\left(X^2\right)=2p$$
$$\rightarrow \hat{p}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{3}n_iX_i^2=\frac{n_1+n_3}{2n}$$

b. Halle el EMV de p derivando el logaritmo de la función de verosimilitud.

$$L(p)=\prod_{i=1}^{3}\left[P(X=x_i)\right]^{n_i}=\left[P(X=-1)\right]^{n_1}\times\left[P(X=0)\right]^{n_2}\times\left[P(X=1)\right]^{n_3}=$$
$$L(p)=p^{n_1}\times(1-2p)^{n_2}\times p^{n_3}=p^{n_1+n_3}(1-2p)^{n_2}$$
$$\ln L(p)=(n_1+n_3)\ln p+n_2\ln(1-2p)$$
$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n_1+n_3}{p}-\frac{2n_2}{1-2p}=0\rightarrow \text{el EMV de p es } \hat{p}=\frac{n_1+n_3}{2(n_1+n_2+n_3)}$$
$$\frac{d^2\ln L(p)}{dp^2}=\frac{-(n_1+n_3)}{p^2}-\frac{4n_2}{(1-2p)^2}<0$$

c. Halle el EMV de p derivando la función de verosimilitud (queda como ejercicio).

Ejemplo 15: En tres zonas se hizo un estudio del número tollos muestreados por repetición hasta encontrar un tollo con parásitos en su sistema digestivo. Se tomaron muestras de 205, 208 y 203 repeticiones (en cada repetición se registra el número de tollos hasta encontrar uno con parásitos) de cada zona y se registraron 259, 265 y 248 tollos hasta encontrar uno con parásitos en su sistema digestivo en las repeticiones hechas en cada zona.

a. Halle el estimador máximo verosímil de la proporción de tollos con parásitos de cada zona.

$X_i \sim \text{Geométrica}\left(\pi_1\right)\ , i=1,2,\ldots,205, Y_i \sim \text{Geométrica}\left(\pi_2\right)\ , i=1,2,\ldots,208,$

$Z_i \sim \text{Geométrica}\left(\pi_3\right)\ , i=1,2,\ldots,203$

$$n_1 = 205, \quad \sum_{i=1}^{205} X_i = 259;\ n_2 = 208, \quad \sum_{i=1}^{208} Y_i = 265;\ n_3 = 203, \quad \sum_{i=1}^{203} Z_i = 248$$

$$L\left(\pi_1,\pi_2,\pi_3\right) = \prod_{i=1}^{n_1} f\left(x_i\right) \prod_{i=1}^{n_2} f\left(y_i\right) \prod_{i=1}^{n_3} f\left(z_i\right) =$$

$$L\left(\pi_1,\pi_2,\pi_3\right) = \prod_{i=1}^{n_1} \pi_1 \left(1-\pi_1\right)^{x_i-1} \prod_{i=1}^{n_2} \pi_2 \left(1-\pi_2\right)^{y_i-1} \prod_{i=1}^{n_3} \pi_3 \left(1-\pi_3\right)^{z_i-1}$$

$$L\left(\pi_1,\pi_2,\pi_3\right) = \pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}\pi_3^{n_3} \left(1-\pi_1\right)^{\sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1} \left(1-\pi_2\right)^{\sum_{i=1}^{n_2} y_i - n_2} \left(1-\pi_3\right)^{\sum_{i=1}^{n_3} z_i - n_3}$$

$$\ln L = n_1 \ln \pi_1 + n_2 \ln \pi_2 + n_3 \ln \pi_3 + \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1\right) \ln\left(1-\pi_1\right)$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n_2} x_i - n_2\right) \ln\left(1-\pi_2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n_3} x_i - n_3\right) \ln\left(1-\pi_3\right)$$

$$\frac{d \ln L}{d\pi_1} = \frac{n_1}{\pi_1} - \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1}{1-\pi_1} = 0$$

$$\frac{d^2 \ln L}{d\pi_1^2} = -\frac{n_1}{\pi_1^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1\right)}{\left(1-\pi_1\right)^2} < 0$$

De donde los estimadores máximo verosímiles son:

$$\pi_1 = \frac{n_1}{\sum_{i=1}^{n_1} x_i} = \frac{205}{259} = 0.79151 \ , \ \pi_2 = \frac{n_2}{\sum_{i=1}^{n_2} y_i} = \frac{208}{265} = 0.78491 \ , \ \pi_3 = \frac{n_3}{\sum_{i=1}^{n_3} z_i} = \frac{203}{248} = 0.81855$$

b. Se quiere verificar si la proporción de tollos con parásitos es igual en las tres zonas. Halle el estimador máximo verosímil de la proporción común.

En este caso se considera: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi$

$$L(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}\pi_3^{n_3}(1-\pi_1)^{\sum_{i=1}^{n_1}x_i-n_1}(1-\pi_2)^{\sum_{i=1}^{n_2}y_i-n_2}(1-\pi_3)^{\sum_{i=1}^{n_3}z_i-n_3}\rightarrow$$

$$L(\pi)=\pi^{n_1+n_2+n_3}(1-\pi)^{\sum_{i=1}^{n_1}x_i+\sum_{i=1}^{n_2}y_i+\sum_{i=1}^{n_3}z_i-n_1-n_2-n_3}$$

De donde el estimador máximo verosímil es:

$$\pi=\frac{n_1+n_2+n_3}{\sum_{i=1}^{n_1}x_i+\sum_{i=1}^{n_2}y_i+\sum_{i=1}^{n_3}z_i}=\frac{205+208+203}{259+265+248}=0.79793$$

Ejemplo 16: En una distribución multinomial se tienen n pruebas independientes donde cada prueba tiene (k + 1) resultados posibles $(a_1,\ldots,a_{k+1})$ y se cumple que $P(a_i)=p_i\ \forall i=1,\ldots,k+1;$ y $\sum_{i=1}^{k+1}p_i=1$. Se definen las siguientes variables aleatorias:

$X_i=$ El número de veces que se obtiene a_i en las n pruebas $\forall i=1,\ldots,k+1$. Entonces la densidad discreta de la variable aleatoria k dimensional $(X_1,\ldots,X_k)$ es:

$$f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k)=\frac{n!}{x_1!\ldots x_k!x_{k+1}!}p_1^{x_1}\ldots p_k^{x_k}p_{k+1}^{x_{k+1}}\qquad \text{Donde}\qquad X_i=0,1,\ldots,n;\quad \sum_{i=1}^{k+1}x_i=n$$

$$\rightarrow x_{k+1}=n-\sum_{i=1}^{k}x_i\ .$$

a. Determine el estimador máximo verosímil de $\theta=(p_1,\ldots,p_{k+1})$.

Solución

$$L(\theta)=\frac{n!}{x_1!\ldots x_k!x_{k+1}!}p_1^{x_1}\ldots p_k^{x_k}(1-p_1-\cdots-p_k)^{x_{k+1}}$$

$$\ln\left[L(\theta)\right]=\ln\left(\frac{n!}{x_1!\ldots x_k!x_{k+1}!}\right)+x_1\ln(p_1)+\cdots+x_{k+1}\ln(1-p_1-\ldots-p_k)$$

$$\frac{d\left\{\ln\left[L(\theta)\right]\right\}}{dp_1}=\frac{x_1}{p_1}-\frac{x_{k+1}}{1-p_1-\ldots-p_k}=\frac{x_1}{p_1}-\frac{x_{k+1}}{p_{k+1}}=0$$

Derivando respecto a cualquier $p_j\rightarrow\frac{x_j}{p_j}-\frac{x_{k+1}}{p_{k+1}}=0\rightarrow\frac{x_j}{p_j}=\frac{x_{k+1}}{p_{k+1}}\ ,j=1,2,\ldots,k+1$

$$\frac{x_1}{p_1}=\frac{x_2}{p_2}=\cdots=\frac{x_j}{p_j}=\frac{x_{k+1}}{p_{k+1}}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{k+1}}=\frac{n}{1}=n$$

$$\therefore \quad \frac{x_j}{p_j}=n\rightarrow \hat{p}_j=\frac{x_j}{n} \ , j=1,2,\ldots,k+1$$

$$\hat{\theta}=\left(\frac{x_1}{n},\frac{x_2}{n},\cdots,\frac{x_j}{n},\frac{x_{k+1}}{n}\right)$$

De otra forma: Como se tiene un problema de maximización con restricciones se recurre a la técnica del multiplicador de Lagrange:

$$\ln\left[L(\theta)\right]=\ln\left(\frac{n!}{x_1!\ldots x_k!x_{k+1}!}\right)+x_1\ln(p_1)+\cdots+x_{k+1}\ln(1-p_1-\cdots-p_k)$$

$$\Lambda=\ln(n!)-\ln(x_1!)-\cdots-\ln(x_{k+1}!)+x_1\ln(p_1)+\cdots+x_{k+1}\ln(p_{k+1})+\lambda(p_1+\cdots+p_{k+1}-1)$$

$$\frac{d\Lambda}{dp_i}=\frac{x_i}{p_i}+\lambda=0\rightarrow p_i=-\frac{x_i}{\lambda}$$

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda}=p_1+\cdots+p_{k+1}-1=0\rightarrow \sum_{i=1}^{k+1}p_i=1$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{k+1}p_i=-\sum_{i=1}^{k+1}\frac{x_i}{\lambda}\rightarrow 1=-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{k+1}x_i\rightarrow \lambda=-n\rightarrow p_i=-\frac{x_i}{\lambda}=-\frac{x_i}{(-n)}=\frac{x_i}{n}=\bar{X}_i$$

Los estimadores máximos verosímiles son las proporciones muestrales.
Propiedades del estimador máximo verosímil que se ha hallado:

1. $E\left[\bar{X}_1,\bar{X}_2,\cdots,\bar{X}_{k+1}\right]=\frac{1}{n}E\left[X_1,\cdots,X_{k+1}\right]=\frac{1}{n}\left[E(X_1),\cdots,E(X_{k+1})\right]=\frac{1}{n}\left[np_1,\cdots,np_{k+1}\right]$

$$E\left[\bar{X}_1,\bar{X}_2,\cdots,\bar{X}_{k+1}\right]=\left[p_1,\cdots,p_{k+1}\right]$$

2. $Var\left[\bar{X}_1,\bar{X}_2,\cdots,\bar{X}_{k+1}\right]=\frac{1}{n^2}Var\left[X_1,\cdots,X_{k+1}\right]=\frac{1}{n^2}\left[Var(X_1),\cdots,Var(X_{k+1})\right]=$

$$Var\left[\bar{X}_1,\bar{X}_2,\cdots,\bar{X}_{k+1}\right]=\frac{1}{n^2}\left[np_1(1-p_1),\cdots,np_{k+1}(1-p_{k+1})\right]=\left[\frac{p_1(1-p_1)}{n},\cdots,\frac{p_{k+1}(1-p_{k+1})}{n}\right]$$

b. Estime por momentos a $\theta=(p_1,\ldots,p_{k+1})$.

Solución

$X_j \sim \text{Binomial}\left(n, p_j\right)$, $j = 1, 2, \ldots, k+1$

$M_1^{'} = \frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} X_i = X_1$ en general $M_j^{'} = X_j$, $j = 1, 2, \ldots, k+1$

$M_1^{'} = X_j = E\left(X_j\right) = np_j \rightarrow \hat{p}_j = \frac{x_j}{n}$, $j = 1, 2, \ldots, k+1$

$\hat{\theta} = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \cdots, \frac{x_j}{n}, \frac{x_{k+1}}{n}\right)$

EJERCICIOS DE LOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

1. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución BETA(θ,θ). Obtenga, con el método de momentos, el estimador de θ.
2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}\left(-\theta, 0\right)$. Halle el estimador máximo verosímil de θ. NOTA: Tenga en cuenta que los valores son negativos, entonces la respuesta es $\max\left(-X_1, \ldots, -X_n\right) = -\min\left(X_1, \ldots, X_n\right)$. Se cumple que $\min\left(-X_1, \ldots, -X_n\right) \neq -\min\left(X_1, \ldots, X_n\right)$
3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}\left(\theta, \theta+1\right)$. Halle el estimador máximo verosímil de θ. Respuesta: $\widehat{\theta}$ es algún valor del intervalo $\left[Y_n - 1, Y_1\right]$.
4. En su trabajo de tesis la Bióloga María Callas halló que el contenido de prolalina, en mg/L, en sandías de cierta variedad, que han recibido un déficit de irrigación severo, tiene densidad $f\left(x\right) = \frac{11x^{10}}{\rho^{11}} I_{(0,\rho)}$. Con el método de momentos estime de dos formas al parámetro ρ. Con la muestra 2300, 2150, 2240 y 2220 calcule los dos valores estimados.
5. En la reserva nacional B la longitud máxima X en cm (incluida la cola) de las ardillas grandes, en 20 mediciones, tiene distribución del valor máximo tipo II de Fréchet. Si de $X \sim \left[\text{FréchetII}\left(\mu, k = 10\right)\right]$ se extrae la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$, primero halle de dos maneras el estimador de momentos de μ, y luego los valores estimados de estos estimadores con la muestra 42, 44, 41, 43 y 40.
$$f(x) = \frac{k}{\mu}\left(\frac{\mu}{x}\right)^{k+1} e^{-\left(\frac{\mu}{x}\right)^k} I_{[0,\infty[}(x).$$
6. Sean $X_1, ..., X_n$ observaciones independientes e idénticamente distribuidas con distribución $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 < \theta < \infty$.
   a. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de θ.

b. Encuentre el estimador de θ por el método de momentos.

7. Una v.a. X ~ N (u,1)). Se toman 50 observaciones de X, pero en vez de anotar su valor observado, sólo se anota si X era positivo o no. Suponiendo que el suceso (X>0) ocurrió exactamente 25 veces; utilice esta información para hallar un E.M.V. de u.
8. En cierto país el número de muertes que son causados por sicarios, en lapso de 5 años, tiene distribución $\text{Poisson}(\alpha)$. Si se estudia el número de óbitos, debido a sicarios, que ocurren en cada intervalo de 5 años y se define la variable aleatoria X como el número de intervalos de 5 años en los que produce una muerte a manos de sicarios. Primero halle, en función de X y n la ecuación que permite obtener el EMV de α, luego con $n = 4$ y $X = 1$ estime a α.

9. Suponga que los clientes llegan a un supermercado de acuerdo a una distribución Poisson con parámetro θ durante una hora. Si se observa la llegada de clientes en n horas; y sea X la v.a. que denota el número de veces que no llegan clientes en las n horas. Halle el E.M.V. de θ en Términos de X.

10. En un experimento genético, una muestra de n individuos fue obtenida para incluir a,b,c de 3 posibles genotipos GG, Gg, gg respectivamente. La frecuencia poblacional de un gene de tipo G es $\dfrac{\theta}{\theta+1}$ donde θ no se conoce y se asume que los individuos no están relacionados y que 2 genes en un individuo son independientes. Encuentre el E.M.V. de θ.

11. Se tiene un grupo de 50 departamentos en venta (algunos de ellos cuestan por lo menos 300 mil dólares), y se conoce que el número de departamentos que cuestan por lo menos 300 mil dólares puede ser 10 o 40. Se toma al azar, con reemplazo y sin considerar el orden de extracción cuatro departamentos y se define la variable aleatoria X como el número de departamentos que cuestan por lo menos 300 mil dólares que hay en la muestra. Estime con el método de máxima verosimilitud al número de departamentos que cuestan por lo menos 300 mil dólares.

12. En cuatro universidades el número de veces que el asesor de una Tesis de Ingeniería revisa el avance de la Tesis hasta que se sustenta, tiene distribución $\text{Poisson}(i\theta)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

    a. Si $X_1, \ldots, X_4$ son v.as independientes con distribución $\text{Poisson}(i\theta)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Halle el E.M.V. de θ.
    b. Si $X_1, \ldots, X_4$ son v.as independientes con distribución $\text{Poisson}(i\theta)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Halle el estimador de momentos de θ.

13. La longitud total del lagarto juvenil blanco en cm de n de ellos seleccionados al azar son $X_1,\ldots,X_n$. Suponga que la distribución de la longitud total es $\text{Weibull}\left(r=50,\theta,\mu=2\right)$.

   a. Con el método de momentos halle el estimador de θ. Con la muestra 75, 90, 85, 82 y 78 halle el valor estimado del parámetro.

   b. Estime θ con el método de máxima verosimilitud. Con la muestra 75, 90, 85, 82 y 78 halle el valor estimado del parámetro.

14. Según los estudios de un Psicólogo el porcentaje de estudiantes montubios por universidad tiene densidad $f\left(x\right)=\dfrac{5\beta^5}{x^6}I_{[\beta,\infty)}\left(x\right)$.

   a. Halle el estimador de momentos de β.
   b. Obtenga el estimador máximo verosímil de β.
   c. Diga que estimador hallado es mejor y por qué.

15. Si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{\theta^2}I_{(0,\theta)}\left(x\right)$.

   a. Halle el estimador máximo verosímil de θ.
   b. Determine el estimador por momentos de θ.
   c. ¿Cuál de los estimadores es mejor? Justifique.

16. Sea $X_1,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución $Unif\left(\theta_1,\theta_2\right)$. Primero con el método de momentos halle el estimador de $\theta=\left(\theta_1,\theta_2\right)$, y luego utilice el método de máxima verosimilitud para hacer la estimación.

17. Suponga que la variable aleatoria definida como el número de asaltos a transeúntes, por día, en el distrito de San Martín de Porras tiene distribución $\text{Poisson}\left(\lambda\right)$. Se sabe que el promedio de asaltos a transeúntes en ese distrito puede ser 2 o 5. Con una muestra unitaria de esa distribución estime con el método de máxima verosimilitud a λ.

18. Si X es la variable aleatoria definida como el número de jugadores del fútbol peruano, de un total de 18 que concentran para un partido, que no se cuida antes de los encuentros. Se quiere estimar la proporción p de jugadores de un equipo del fútbol peruano, de un total de 18 que concentra, que no se cuida antes de los partidos con la muestra: 16, 17, 15, 14, 18.

   a. Utilice el método de momentos. Halle el valor calculado.
   b. Utilice el método de máxima verosimilitud. Halle el valor calculado.

19. Sea $X \sim \text{Binomial}(n, 0.25)$. Con la muestra unitaria x = 8.

    a. Determine el EMV de n y su valor.
    b. Estime por el método de momentos a n y calcule su valor.

20. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes distribuidas en forma $\text{Normal}(\theta, \sigma_i^2), i = 1, 2, \ldots n$, con σ_i^2 conocidas. Determine el estimador máximo verosímil de θ.

21. Si $f(x;\theta_1,\theta_2) = \left(\dfrac{\theta_2}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left\{-\dfrac{\theta_2 (x-\theta_1)^2}{2\theta_1^2 x}\right\} I_{(0,\infty)}(x)$. Obtenga el estimador máximo verosímil de (θ_1, θ_2)

22. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a de $f(x) = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^x I_{(0,1,2,3,\ldots)}(x)$ con $\theta > 0$. Halle el estimador de momentos de θ?

23. X es la variable aleatoria definida como la nota promedio máxima que se obtiene por ciclo en el curso de Análisis Multivariado y tiene densidad $f(x) = \alpha e^{-\alpha(x-\mu)} \exp\left\{-e^{-\alpha(x-\mu)}\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$ donde $\alpha > 0$ además se conoce que $E(X) = \mu + \dfrac{\gamma}{\alpha} \approx \mu + \dfrac{0.577}{\alpha}$, donde γ es la constante de Euler y $\sigma_X^2 = \dfrac{\pi^2}{6\alpha^2} \approx \dfrac{1.645}{\alpha^2}$.
    a. Estime con el método de momentos a $\theta = (\alpha, \mu)$.
    b. Con la muestra 15, 17, 13, 14 y 16 halle los valores estimados de $\theta = (\alpha, \mu)$.

24. La proporción de llantas defectuosas manufacturadas por cierta compañía tiene distribución $\text{BetaEstándar}(\alpha, \beta)$. Con el método de momentos estime α y β basándose en una muestra de n proporciones.

25. En Bolivia, Perú y Colombia la tasa de crecimiento anual, en %, de las empresas que venden departamentos tienen distribución $\text{Laplace}(\mu = 0, \lambda_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Se tomaron muestras de 205, 218 y 225 empresas de cada país y se encontró $\sum_{i=1}^{205} |X_{i1}| = 307.5$, $\sum_{i=1}^{218} |X_{i2}| = 414.2$ y $\sum_{i=1}^{225} |X_{i3}| = 442.8$. Halle los estimadores máximo verosímiles de λ_1, λ_2 y λ_3.

26. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ una m.a de una distribución $\text{Binomial}(k, p)$ donde p es conocido y k desconocido. Obtenga el estimador máximo verosímil de k.

27. Un método que con frecuencia se utiliza para estimar el tamaño de una población silvestre requiere efectuar un experimento de captura recaptura. En este experimento,

se captura una muestra inicial de A animales, cada uno de los cuales se marca, y luego se devuelven a la población. Después de que transcurre un tiempo suficiente para que los animales marcados se mezclen en la población, se captura, sin reemplazo, otra muestra de tamaño n. Si se define como X = el número de animales marcados en la segunda muestra.

a. Use una x observada para estimar con el método de máxima verosimilitud al tamaño N de la población.
b. Si A = 80 peces que se sacan de un lago y se marcan, luego n = 100 peces se recapturan y entre los 100 hay x = 3 marcados, estime N.

28. En un conjunto de egresados de la UNALM, que tienen una opinión particular respecto a determinada ley, donde no se conoce el total N, hay A magister. Se define la variable aleatoria X como el número de magíster que hay en una muestra de tamaño n extraída con reemplazo y sin considerar el orden. Primero con una muestra unitaria x y empleando el método de máxima verosimilitud estime al tamaño N de la población, y luego halle el valor estimado de N si se extraen 8 egresados de esa población donde hay 5 magíster y x=4.
29. Un pediatra desea reclutar r parejas, cada una de las cuales espera a su primer hijo, para que participen en un nuevo régimen de nacimiento natural. Se estudia el número de parejas que participan antes de encontrar r que acceden, y p es la probabilidad de que una pareja seleccionada al azar accede a participar (p es conocida). Obtenga el estimador máximo verosímil de r si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de la distribución en estudio.
30. En cierto laboratorio se ha determinado que el $p_1 \times 100\%$ de las unidades experimentales (10 frutos) de la variedad lima naranja tiene un rendimiento de jugo menor de 44%, el $p_2 \times 100\%$ de las unidades experimentales tiene un rendimiento mayor o igual de 44% pero menor a 46%, en el $p_3 \times 100\%$ de las unidades experimentales el rendimiento es mayor o igual de 46% pero menor de 48%, y en el $p_4 \times 100\%$ de las unidades experimentales el rendimiento es de por lo menos el 48%. Si se seleccionan al azar n unidades experimentales y se definen las variables $X_i\ , i = 1, 2, 3, 4$ como el número de unidades experimentales con un rendimiento que pertenece al intervalo i primero estime con el método de máxima verosimilitud a las $p_i, i = 1, 2, 3, 4$ y luego con $n = 40, x_1 = 7, x_2 = 10$ y $x_3 = 14$ halle los valores estimados de las $p_i, i = 1, 2, 3, 4$.

31. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de PARETO (α,β) que tiene densidad :

$$f(x; \alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-(\beta+1)} I_{(0,\infty)}(x)$$

a. Halle el estimador de momentos de α y β
b. Encuentre el E.M.V. de α y β. Plantee las ecuaciones, no resolverlas

32. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. de f (x ;α, β) = $\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} I_{[\beta,\infty\rangle}(x)$ donde α >2 y β>0.

a. Halle los estimadores de momentos de α y β

b. Encuentre los E.M.V. de α y β