Estadísticos Suficientes, Ancilarios y Completos

Suficiencia

La suficiencia de un estimador tiene relación con la reducción de datos. Una muestra aleatoria proporciona información respecto al parámetro que se va a estimar, pero esa información está contenida en un conjunto de variables aleatorias. Si se encuentra una función de esas variables aleatorias que contengan la misma cantidad de información para hacer la estimación se estaría logrando la reducción de datos. Un estimador suficiente es aquella variable que consigue reducir los datos y estima al parámetro. Formalizando, se diría que toda la información contenida en la muestra $X_1,\ldots,X_n$ está contenida en el estimador suficiente T, entonces si ya se conoce el valor de T, la muestra ya no proporciona ninguna información del parámetro.

Definición

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a extraída de una población con densidad $f(.,\theta)$ $\theta \in \Theta \subset \Re^k$. Se dice que $T = t(X_1,\ldots,X_n)$ es una estadística suficiente de θ si la distribución condicional de $\underline{X}$ = $\underline{x}$ dada la estadística suficiente T, no depende de θ.

$$P(\underline{X} = \underline{x} / T = t) \text{ no depende de } \theta.$$

Ejemplo 1: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una distribución Poisson (θ). ¿Es $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ una estadística suficiente para θ?

Se sabe que: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}(n\theta)$

$$P(\underline{X} = \underline{x} / T = t) = P(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n / T = t) = \frac{P\left(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n, T = t = \sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{P(T = t)}$$

Nota: $\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n \Rightarrow X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n-1} X_i = t - \sum_{i=1}^{n-1} X_i$

$$= \frac{P\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = t - \sum_{i=1}^{n-1} X_i = x_n\right)}{P(T=t)} = \frac{\dfrac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!} \cdots \dfrac{e^{-\theta}\theta^{x_n = t - \sum_{i=1}^{n-1} x_i}}{x!}}{\dfrac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!}} = \frac{t!}{n^t x_1! \ldots x_n!}$$

es independiente de θ $\therefore$ $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es una estadística suficiente para θ.

Ejemplo 2: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a de una distribución exponencial truncada donde:

$f(x_i) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x_i - \theta)} I_{(\theta;\infty)}(x_i)$. Demuestre que Y_1(el mínimo) es suficiente para estimar a θ.

Sea $T = t(X_1, \ldots, X_n) = Y_1$ el mínimo de la muestra.

$$\mathrm{F}(x_i) = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}(x_i - \theta)}$$

$$g_{Y_1}(y) = n\left[1 - F(y)\right]^{n-1} f(y) = n\left[1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{\lambda}(y-\theta)}\right)\right]^{n-1} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(y-\theta)} = \frac{n}{\lambda} e^{-\frac{n}{\lambda}(y-\theta)} I_{(\theta,\infty)}(y)$$

$$P(\underline{X} = \underline{x} / T = t) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n / T = y) = \frac{P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, T = y)}{P(T=t)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x_1-\theta)} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x_2-\theta)} \cdots \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x_n-\theta)}}{\frac{n}{\lambda} e^{-\frac{n}{\lambda}(y-\theta)}} = \frac{e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}}{n\lambda^{n-1} e^{-\frac{ny}{\lambda}}}, \quad x_i \geq y; i = 1, 2, \ldots, n$$

como no depende de $\theta \rightarrow T = Y_1$ es una estadística suficiente de θ.

Ejemplo 3: Si de la función de probabilidad de abajo se extrae una muestra aleatoria de tamaño 3 y se consideran las estadísticas: $T_1 = \sum_{i=1}^{3} X_i$ y $T_2 = \min(X_i, X_2, X_3) = Y_1$.

X	4	6
f(x)	θ	1-θ

a. ¿Es $T_1 = \sum_{i=1}^{3} X_i$ una estadística suficiente? Justifique su respuesta.

N° Muestra	Muestra	T_1	T_2
1	(4,4,4)	12	4
2	(4,4,6)	14	4
3	(4,6,4)	14	4
4	(6,4,4)	14	4
5	(4,6,6)	16	4
6	(6,4,6)	16	4
7	(6,6,4)	16	4
8	(6,6,6)	18	6

Debe cumplirse que la $P\left(\underline{X}=\underline{x}/T_1=t\right)=P\left[\left(X_1,X_2,X_3\right)/T_1=t\right]$ no dependa de θ.

$$P\left[\left(4,4,4\right)/T_1=12\right]=\frac{P\left[\left(4,4,4\right)\cap\left(T_1=12\right)\right]}{P\left(T_1=12\right)}=\frac{P\left(X_1=4,X_2=4,X_3=4\right)}{P\left(T_1=12\right)}\overset{Indep.}{=}\frac{\theta^3}{\theta^3}=1$$

Para cualquier $\left(X_1,X_2,X_n\right)\neq\left(4,4,4\right)$

$$P\left[\left(X_1,X_2,X_n\right)/T_1=12\right]=\frac{P\left[\left(X_1,X_2,X_n\right)\cap\left(T_1=12\right)\right]}{P\left(T_1=12\right)}=0$$

$$P\left[\left(4,4,6\right)/T_1=14\right]=\frac{P\left[\left(4,4,6\right)\cap\left(T_1=14\right)\right]}{P\left(T_1=14\right)}\overset{Indep.}{=}\frac{\theta^2\left(1-\theta\right)}{3\theta^2\left(1-\theta\right)}=\frac{1}{3}$$

$$P\left[\left(4,6,4\right)/T_1=14\right]=P\left[\left(6,4,4\right)/T_1=14\right]\overset{Indep.}{=}\frac{\theta^2\left(1-\theta\right)}{3\theta^2\left(1-\theta\right)}=\frac{1}{3}$$

Siendo nulas el resto de probabilidades condicionadas a $T_1=14$.

$$P\left[\left(4,6,6\right)/T_1=16\right]=\frac{P\left[\left(4,6,6\right)\cap\left(T_1=16\right)\right]}{P\left(T_1=16\right)}\overset{Indep.}{=}\frac{\theta\left(1-\theta\right)^2}{3\theta\left(1-\theta\right)^2}=\frac{1}{3}$$

$$P\left[\left(6,4,6\right)/T_1=16\right]=P\left[\left(6,6,4\right)/T_1=16\right]\overset{Indep.}{=}\frac{\theta\left(1-\theta\right)^2}{3\theta\left(1-\theta\right)^2}=\frac{1}{3}$$

Siendo cero el resto de probabilidades condicionadas a $T_1=16$.

$$P\left[\left(6,6,6\right)/T_1=18\right]=\frac{P\left[\left(6,6,6\right)\cap\left(T_1=18\right)\right]}{P\left(T_1=18\right)}\overset{Indep.}{=}\frac{\left(1-\theta\right)^3}{\left(1-\theta\right)^3}=1$$

Siendo cero el resto de probabilidades con otras muestras $\left(X_1,X_2,X_3\right)\neq\left(6,6,6\right)$.

Como se aprecia las probabilidades condicionales no dependen de θ, por lo tanto $T_1=\sum_{i=1}^{n}X_i$ es suficiente para hacer inferencias acerca del parámetro θ de esa población.

b. ¿Es $T_2 = \min(X_i, X_2, X_3) = Y_1$ una estadística suficiente para hacer inferencias acerca del parámetro θ? Justifique su respuesta.

De la tabla del ejercicio a:

$$P(T_2 = 6) = P\left[(X_1, X_2, X_3) = (6,6,6)\right] = (1-\theta)(1-\theta)(1-\theta) = (1-\theta)^3$$

$$P(T_2 = 4) = 1 - P(T_2 = 6) = 1 - (1-\theta)^3$$

$$P\left[(6,6,6)/T_2 = 6\right] = \frac{P\left[(6,6,6)\cap(T_2 = 6)\right]}{P(T_2 = 6)} = \frac{(1-\theta)^3}{(1-\theta)^3} = 1$$

Siendo cero las probabilidades para $(X_1, X_2, X_3) \neq (6,6,6)$ condicionadas a $T_2 = 6$.

$$P\left[(4,4,6)/T_2 = 4\right] = \frac{P\left[(4,4,6)\cap(T_2 = 4)\right]}{P(T_2 = 4)} = \frac{\theta^2(1-\theta)}{1-(1-\theta)^3}, \text{ depende de } \theta.$$

$$P\left[(4,6,4)/T_2 = 4\right] = P\left[(6,4,4)/T_2 = 4\right] = \frac{\theta^2(1-\theta)}{1-(1-\theta)^3}, \text{ depende de } \theta.$$

$$P\left[(6,6,4)/(T_2 = 4)\right] = \frac{P\left[(6,6,4)\cap(T_2 = 4)\right]}{P(T_2 = 4)} = \frac{(1-\theta)^2\theta}{1-(1-\theta)^3}, \text{ depende de } \theta.$$

$$P\left[(6,4,6)/(T_2 = 4)\right] = P\left[(4,6,6)/(T_2 = 4)\right] = \frac{(1-\theta)^2\theta}{1-(1-\theta)^3}, \text{ depende de } \theta.$$

$$P\left[(4,4,4)/(T_2 = 4)\right] = \frac{P\left[(4,4,4)\cap(T_2 = 4)\right]}{P(T_2 = 4)} = \frac{\theta^3}{1-(1-\theta)^3}, \text{ depende de } \theta.$$

$$P\left[(6,6,6)/(T_2 = 4)\right] = 0$$

Algunas probabilidades condicionales dependen de θ, entonces $T_2 = \min(X_i, X_2, X_3) = Y_1$ no incorpora toda la información existente en la muestra sobre el parámetro θ, lo que haría necesario completar la reducción proporcionada por T_2 con la información concreta de la muestra que produce cada valor particular de T_2. Por lo tanto, T_2 no es suficiente respecto al parámetro θ.

Teorema: Criterio de Factorización de Fisher-Neyman.

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a extraída de una población con densidad $f(.,\theta)$ $\theta\in\Theta\subset\Re^k$. La estadística T = t($X_1,\ldots,X_n$) es suficiente para θ, si y solo si existen funciones g_θ y h tales que la f.d conjunta de la m.a se puede factorizar como sigue:

$$f(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=g_\theta\left[t(x_1,\ldots,x_n)\right]h(x_1,\ldots,x_n)=g_\theta(t)h(\underset{\sim}{x})$$

Donde:

h: es una función no negativa independiente de θ.
g_θ: es una función no negativa y depende de $x_1,\ldots,x_n$ sólo a través de t.

Ejemplo: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una distribución $\text{Normal}(\mu,\sigma^2)$, con σ^2 conocida. Halle una estadística suficiente para μ.

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right]I_{(-\infty,\infty)}(x_i)}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]\prod_{i=1}^{n}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)}{\left[\sqrt{2\pi}\sigma\right]^n}=$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu)=\underbrace{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\mu^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right]}_{g_\mu\left(T_1=\sum_{i=1}^{n}x_i\right)>0}\times\underbrace{\frac{\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\sigma^2}\right]\prod_{i=1}^{n}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)}{\left[\sqrt{2\pi}\sigma\right]^n}}_{h(x_1,\ldots,x_n)>0}$$

Entonces $T_1=\sum_{i=1}^{n}X_i$ es una estadística suficiente para μ.

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu)=\underbrace{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\mu^2-2\mu.n\bar{x}\right)\right]}_{g_\mu\left(T_1=\bar{x}\right)>0}\times\underbrace{\frac{\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\sigma^2}\right]\prod_{i=1}^{n}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)}{\left[\sqrt{2\pi}\sigma\right]^n}}_{h(x_1,\ldots,x_n)>0}$$

Entonces $T_1=\bar{X}$ es una estadística suficiente para μ.

Ejercicio: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una distribución $\text{Normal}(\mu,\sigma^2)$, con μ conocida. Halle una estadística suficiente para σ^2. Respuesta: $T=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

Ejemplo 4: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una población Binomial (1,θ). Halle una estadística suficiente para θ .

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} I_{\{0,1\}}(x_i)=\underbrace{\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}}_{g_\theta\left(T_1=\sum_{i=1}^{n}x_i\right)>0}\times\underbrace{\prod_{i=1}^{n}I_{\{0,1\}}(x_i)}_{h(x_1,\ldots,x_n)>0}$$

Entonces $T_1=\sum_{i=1}^{n}X_i$ es una estadística suficiente para θ.

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} I_{\{0,1\}}(x_i)=\underbrace{\theta^{n\bar{x}}(1-\theta)^{n-n\bar{x}}}_{g_\theta\left(T_1=\sum_{i=1}^{n}x_i\right)>0}\times\underbrace{\prod_{i=1}^{n}I_{\{0,1\}}(x_i)}_{h(x_1,\ldots,x_n)>0}$$

Entonces $T_1=\bar{X}$ es una estadística suficiente para θ.

Ejemplo 5: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una población N(θ, σ^2), donde σ^2 es conocida .¿Es T= $\bar{X}$ = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ una estadística suficiente para θ?

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}\prod_{i=1}^{n}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

Pero $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\theta)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\theta)^2$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\theta)^2\right]}\prod_{i=1}^{n}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)=$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\underbrace{e^{\frac{1}{\sigma^2}n\bar{x}\theta}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\bar{x}^2+\theta^2\right)\right]}}_{g_\theta(T=\bar{X})>0}\times\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]}\prod_{i=1}^{n}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)}_{h(x_1,\ldots,x_n)>0}$$

Entonces $T=\bar{X}$ es una estadística suficiente para θ.

Ejemplo 6: El tiempo en minutos que demora un especialista para hacer el análisis en porciones de 100 g de fresa hasta obtener la cantidad en mg de vitamina C tiene la siguiente densidad $f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}I_{(\theta,\infty)}(x)$, $\lambda>0$ con $\theta=10$.

a. Obtenga una estadística suficiente para estimar a λ .

$$f\left(x_1,\ldots,x_n;\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x_i-\theta)}I_{(\theta,\infty)}\left(x_i\right)=$$

$$f\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right)=\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}\times\prod_{i=1}^{n}I_{(\theta,\infty)}\left(x_i\right)=g_\lambda\left[t\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right]\times h\left(x_1,\ldots,x_n\right)=g_\lambda\left(t\right)h\left(\underset{\sim}{x}\right)$$

donde: $g_\lambda\left(t\right)=\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$ y $h\left(\underset{\sim}{x}\right)=\prod_{i=1}^{n}I_{(\theta,\infty)}\left(x_i\right)$

$\rightarrow$ un estimador suficiente de λ es $T=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-10)$

b. Se tiene la siguiente muestra de 8 tiempos de análisis hechos por 8 especialistas que realizan ese tipo de trabajo: 11.0, 12.4, 14.8, 11.4, 15.2, 14.0, 12.4 y 14.4. Calcule el valor estimado del estimador suficiente.

$$T=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-10)=\left(11.0-10\right)+\ldots+\left(14.4-10\right)=25.6\,.$$

c.

$$f\left(x_1,\ldots,x_n;\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x_i-\theta)}I_{(\theta,\infty)}\left(x_i\right)=$$

$$f\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right)=\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}\times\prod_{i=1}^{n}I_{(\theta,\infty)}\left(x_i\right)=\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\theta}{\lambda}}\times\prod_{i=1}^{n}I_{(\theta,\infty)}\left(x_i\right)=$$

$$=g_\lambda\left[t\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right]\times h\left(x_1,\ldots,x_n\right)=g_\lambda\left(t\right)h\left(\underset{\sim}{x}\right)$$

$\therefore$ La $\sum_{i=1}^{n}X_i$ es suficiente.

Ejemplo 7: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de $f\left(x\right)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}I_{(\theta,\infty)}\left(x\right)$, $-\infty<\theta<\infty$.¿Es $T=\min\left(X_1,\ldots,X_n\right)=Y_1$ una estadística suficiente para θ? Considere que $\lambda=0.1$.

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x_i-\theta)}I_{(\theta,\infty)}\left(x_i\right)=\frac{1}{\lambda^n}e^{n\frac{1}{\lambda}\theta}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}I_{(\theta,\infty)}\left(x_1\right)\ldots I_{(\theta,\infty)}\left(x_n\right)=$$

$$=\underbrace{e^{n\frac{1}{\lambda}\theta}I_{(\theta,\infty)}\left(Y_1\right)}_{g_\theta(Y_1)}\times\underbrace{\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}_{h(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

$\therefore$ $T=\min\left(X_1,\ldots,X_n\right)=Y_1$ es una estadística suficiente para θ.

Ejemplo: Halle una estadística suficiente para estimar a θ, si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de una distribución $\text{Uniforme}(0,\theta)$.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x_i)=\theta^{-n}I_{(0,\theta)}(x_1)\ldots I_{(0,\theta)}(x_n)=\theta^{-n}I_{(0,\theta)}(Y_n)$$

$\therefore\ T=Y_n$ es una estadística suficiente para θ.

Ejemplo 8: Use el teorema de la factorización para hallar una estadística suficiente basada en una muestra aleatoria de tamaño n en los siguientes casos:

a. $f(x)=I_{(\theta,\theta+1)}(x)$.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}I_{(\theta,\theta+1)}(x_i)=I_{(\theta,\theta+1)}(x_1)\ldots I_{(\theta,\theta+1)}(x_n)=I_{(\theta,\infty)}(Y_1)I_{(-\infty,\theta+1)}(Y_n)$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\underbrace{I_{(\theta,Y_n)}(Y_1)I_{(Y_1,\theta+1)}(Y_n)}_{g_\theta(Y_1,Y_n)}\times\underbrace{1}_{h(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

$\therefore\ T=(Y_1,Y_n)$ es una estadística suficiente para θ.

Con la muestra: 7.2, 5.4, 8.8, 7.4, 5.6 y empleando el mínimo, el rango de X estimado será $(5.4,6.4)$ y empleando el máximo se tendrá $(7.8,8.8)$

b. $f(x)=\frac{1}{\theta}I_{(\theta,2\theta)}(x)$.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}I_{(\theta,2\theta)}(x_i)=\frac{1}{\theta^n}I_{(\theta,2\theta)}(x_1)\ldots I_{(\theta,2\theta)}(x_n)=\frac{1}{\theta^n}I_{(\theta,\infty)}(Y_1)I_{(-\infty,2\theta)}(Y_n)=$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\underbrace{\frac{1}{\theta^n}I_{(\theta,Y_n)}(Y_1)I_{(Y_1,2\theta)}(Y_n)}_{g_\theta(Y_1,Y_n)}\times\underbrace{1}_{h(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

$\therefore\ T=(Y_1,Y_n)$ es una estadística suficiente para θ.

Con la muestra: 7.2, 5.4, 8.8, 7.4, 5.6 y empleando el mínimo, el rango de X estimado será $(5.4,10.8)$ y empleando el máximo se tendrá $\left(\frac{8.8}{2},2\times\frac{8.8}{2}\right)=(4.4,8.8)$.

Ejemplo: Halle una estadística suficiente para estimar a θ, si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de una distribución $\text{Uniforme}(-\theta,\theta)$.

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta}I_{(-\theta,\theta)}\left(x_i\right)=\left(2\theta\right)^{-n}I_{(-\theta,\theta)}\left(x_1\right)\ldots I_{(-\theta,\theta)}\left(x_n\right)=\left(2\theta\right)^{-n}\prod_{i=1}^{n}I_{\{|x_i|\le\theta\}}=$$

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta\right)=\left(2\theta\right)^{-n}I_{\{\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\le\theta\}\}}$$

$\therefore\ T=\max\left\{\left|X_1\right|,\ldots,\left|X_n\right|\right\}$ es una estadística suficiente para θ.

Ejercicios:

1) Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una población Uniforme $(0,\theta)$. Halle una estadística suficiente para θ.

2) Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una distribución $\text{Poisson}(\lambda)$. Obtenga una estadística suficiente de λ.

$$\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}I_{\{0,1,2,\ldots\}}\left(x_i\right)=\underbrace{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}_{g_\lambda\left(T_1=\sum_{i=1}^{n}x_i\right)>0}\times\underbrace{\left[\prod_{i=1}^{n}x_i!\right]^{-1}}_{h(x_1,\ldots,x_n)>0}$$

Entonces $T_1=\sum_{i=1}^{n}X_i$ es una estadística suficiente para λ.

2) Si $X_1\sim$ BIN (n,θ) y $X_2\sim$ BIN (m,θ) son v.as independientes, demuestre que $T=\dfrac{X_1+X_2}{n+m}$ es un estimador suficiente para θ.

3) Sea X_1, X_2 una m.a de N(u,16). Demuestre que $T_1=\dfrac{X1+X2}{2}$ es una estadística suficiente paran u.

Teorema: Estadística Conjuntamente Suficientes.

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a extraída de una población con f.d $f(.,\theta),\forall\theta\in\Theta\subset\Re^k$, donde θ es un vector. La estadística T = (t_1 $(X_1,\ldots,X_n)$,..., t_m $(X_1,\ldots,X_n)$) es conjuntamente suficiente para θ sii:

$f\left(\underline{x},\theta\right)$ = g_θ (t_1 (x_1,..., x_n),..., t_m (x_1,..., x_n)) h (x_1,..., x_n)

Teorema:

Si T = (t_1 $(X_1,\ldots,X_n)$,..., t_m $(X_1,\ldots,X_n)$) es una estadística conjuntamente suficiente para θ entonces cualquier conjunto de funciones uno a uno o transformaciones de t1($X_1,\ldots,X_n$) ,..., t m ($X_1,\ldots,X_n$) es también conjuntamente suficiente para transformaciones de θ.

Ejemplo 9: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de $f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}I_{(\mu,\infty)}(x)$, σ>0. Halle la estadística suficiente bidimensional de $\theta=(\mu,\sigma)$.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x_i}{\sigma}+\frac{\mu}{\sigma}}I_{(\mu,\infty)}(x_i)=\left(\frac{e^{\frac{\mu}{\sigma}}}{\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}x_i}I_{(\mu,\infty)}(x_1)\ldots I_{(\mu,\infty)}(x_n)=\underbrace{\frac{e^{\frac{n\mu}{\sigma}}}{\sigma^n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}x_i}I_{(\mu,\infty)}(Y_1)}_{g_\theta\left(Y_1,\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}\times\underbrace{1}_{h(x_1,\ldots,x_n)}$$

$\rightarrow T=(T_1,T_2)=\left(Y_1,\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$ es la estadística suficiente bidimensional de $\theta=(\mu,\sigma)$.

De acuerdo con el teorema anterior:

Por ejemplo $T^*=(T_1^*,T_2^*)=\left(4Y_1,\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)$ es la estadística suficiente bidimensional de $\theta^*=\left(4\mu,\sqrt{\sigma}\right)$

Ejemplo 10: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una población $\text{Normal}(\mu,\sigma^2)$. Halle estimadores suficientes para μ y σ^2.

$$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\prod_{i=1}^{n}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i+n\mu^2\right]}\prod_{i=1}^{n}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\left[\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right]}\prod_{i=1}^{n}I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

La cual es de la forma $g_\theta(T).h(\underline{x})$

Entonces $T=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ es una estadística suficiente bidimensional para $\theta=(\mu,\sigma^2)$.

Observando el resultado del teorema de factorización, se concluye que $\sum_{i=1}^{n}X_i$ es suficiente para μ y $\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ es suficiente para σ^2.

Ejemplo 11: Si $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de $f(x;r,\lambda)=\dfrac{\lambda^r x^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}I_{(0,\infty)}(x)$, obtenga la estadística suficiente bidimensional de $\theta=(r,\lambda)$.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^r x_i^{r-1}e^{-\lambda x_i}}{\Gamma(r)}=\underbrace{\left(\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^r e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}}_{g_\theta\left(\prod_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}\times\underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-1}}_{h(x_1,\ldots,x_n)}$$

$\rightarrow T=(T_1,T_2)=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$ es la estadística suficiente bidimensional de $\theta=(r,\lambda)$.

Ejercicios:

1. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una población N(μ,σ^2). Halle una estadística conjuntamente suficiente para $\theta=(\mu,\sigma^2)$.

2. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una población UNIF(θ_1,θ_2). Halle una estadística conjuntamente suficiente para $\theta=(\theta_1,\theta_2)$.

3. Sean $X_1,\ldots,X_n$ v.as i.i.d con N(μ,σ^2), $Y_1,\ldots,Y_m$ v.as i.i.d con N(ν,σ^2) independiente de $X_1,\ldots,X_n$. Demuestre que T = ($\bar{x},\bar{y},s_*^2$), donde: $s_*^2=\sum_{i=1}^{n}(Xi-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{m}(Yj-\bar{y})^2$, es una estadística suficiente para ⍰ = (μ,ν,σ^2).

Propiedad de Suficiencia.

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de f(x;θ), la estadística T_1= t_1($X_1,\ldots,X_n$) es suficiente para θ sii para otras estadísticas T_j = t_j($X_1,\ldots,X_n$) j = 2,3,...,n; la f.d condicional de $T_2,T_3,\ldots,T_n$ dado T_1= t_1 no depende del parámetro θ, cualquiera sea el valor fijado para T_1. Es decir si X ~ f (x;θ) entonces se extrae una m.a $X_1,\ldots,X_n$ $\rightarrow$ la f.d conjunta:

$f(x_1,...,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

$T_j = t_j(X_1,\ldots,X_n)$; j = 2,3,...,n ; $x_i = w_i(T_1,...,T_n) \rightarrow$

$$g(T_1,...,T_n) = \prod_{i=1}^{n} f(w_i(T_1,\cdots,T_n);\theta)\,|J|$$

$$g_{T_2\ldots T_n/T_1}(T_2,\ldots,T_n;\theta) = \frac{g(T_1,T_2,...,T_n;\theta)}{g(T_1;\theta)}$$

Si no depende de $\theta \rightarrow T_1$ es suficiente para θ

Ejemplo 12: Considere una muestra aleatoria de tamaño n de $f(x)=\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x)$. Halle una estadística suficiente para θ.

El máximo de la muestra, Y_n, es un candidato para estimar a θ. Veamos si es suficiente:

$$g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=n!\,f(y_1)\,f(y_2)\ldots f(y_n)=\frac{n!}{\theta^n},\quad 0<y_1<y_2<\ldots<y_n<\theta.$$

Anteriormente se encontró que:

$$g_{Y_n}(y_n)=\frac{ny_n^{n-1}}{\theta^n},\quad 0<y<\theta$$

Aplicando la propiedad de suficiencia:

$$g(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}/y_n)=\frac{g(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{g_{Y_n}(y_n)}=\frac{\frac{n!}{\theta^n}}{\frac{ny_n^{n-1}}{\theta^n}}=\frac{(n-1)!}{y_n^{n-1}}$$

que no depende de $\theta \rightarrow Y_n$ es una estadística suficiente para θ.

<u>Estadísticas Conjuntamente Suficientes.</u>

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de f(x; θ), donde $\forall\theta\in\Theta\subset\Re^k$. Si se definen n estadísticas tales como $T_j = t_j(X_1,\ldots,X_n)$ $\forall$ j = 1,2,...,n de manera que el jacobiano asociado a la transformación no es cero, es decir, la f.d conjunta de $T_1,...,T_n$ está dada por:

$$g(T_1,...,T_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(w_i(T_1,\cdots,T_n);\theta)\,|J|$$

entonces las estadísticas $T_1,\ldots,T_m$ son conjuntamente suficientes para $\theta_1,\ldots,\theta_m$ sii la función condicional de:

$$g(T_{m+1},T_{m+2},\ldots,T_n/T_1,T_2,\ldots T_m)=\frac{g(T_1,T_2,\ldots,T_n;\theta)}{g_{1,2,\cdots,m}(T_1,T_2,\ldots,T_m;\theta)}$$

no depende de θ para cualquier valor fijado de $T_1,\ldots,T_m$.

Ejemplo 13: Sean Y_1, Y_2, Y_3 las estadísticas de orden de una muestra aleatoria de tamaño 3 de $f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)I_{(\mu,\infty)}(x)$, donde $\mu\in\Re$ y $\sigma>0$.

¿Son $Z_1 = Y_1$ y $Z_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ estimadores suficientes conjuntos para (μ,σ)?.

Hacemos: $Z_2=Y_2$

$$\left.\begin{array}{l} Y_1=Z_1\\ Y_2=Z_2\\ Y_3=Z_3-Z_2-Z_1\end{array}\right\}\rightarrow J=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&1\end{vmatrix}=1$$

$$g(y_1,y_2,y_3)=3!\,f(y_1)\,f(y_2)\,f(y_3)=$$

$$g(y_1,y_2,y_3)=6\left[\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{(y_1-\mu)}{\sigma}\right)\right]\left[\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{(y_2-\mu)}{\sigma}\right)\right]\left[\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{(y_3-\mu)}{\sigma}\right)\right]=$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = 6\frac{1}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{(y_1 + y_2 + y_3 - 3\mu)}{\sigma}\right)$$

$$h(z_1, z_2, z_3) = g(z_1, z_2, z_3 - z_2 - z_1)|J| = 6\frac{1}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{(z_1 + z_2 + z_3 - z_2 - z_1 - 3\mu)}{\sigma}\right)|1| =$$

$$h(z_1, z_2, z_3) = 6\frac{1}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{(z_3 - 3\mu)}{\sigma}\right), \ \mu < z_1 < z_2 < z_3 < \infty$$

$$h(z_1, z_3) = \int_{z_1}^{z_3} 6\frac{1}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{(z_3 - 3\mu)}{\sigma}\right)dz_2 = (z_3 - z_1)6\frac{1}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{(z_3 - 3\mu)}{\sigma}\right)$$

$$h(z_2 / z_1, z_3) = \frac{h(z_1, z_2, z_3)}{h(z_1, z_3)} = \frac{6\frac{1}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{(z_3 - 3\mu)}{\sigma}\right)}{(z_3 - z_1)6\frac{1}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{(z_3 - 3\mu)}{\sigma}\right)} = \frac{1}{(z_3 - z_1)} I_{(z_1, z_3)}(z_2)$$

Esta densidad condicional no depende de $\theta = (\mu, \sigma) \rightarrow T = (Z_1, Z_3)$ es una estadística conjuntamente suficiente para $\theta = (\mu, \sigma)$

Ejercicio: Sean $Y_1 \le Y_2 \le Y_3 \le \ldots \le Y_n$ las estadísticas de orden de una muestra aleatoria de tamaño n de $f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{(x - \mu)}{\sigma}\right) I_{(\mu, \infty)}(x)$, donde $\mu \in \Re$ y σ >0. ¿Son $Z_1 = Y_1$ y $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ estimadores suficientes conjuntos para (μ, σ)? Justifique su respuesta.

La Familia Exponencial Uniparamétrica de distribuciones.

Se dice que la familia de densidades $\Im = \{ f(., \theta) / \theta \in \Theta \}$, donde θ es unidimensional, es una familia exponencial uniparamétrica, si $f(., \theta)$ puede ser expresada como:
$f(x; \theta) = a(\theta) b(x) \exp[c(\theta) d(x)]$, x$\in \Re$, $\forall\ \theta \in \Theta$, donde a(.), b(.), c(.) y d(.) son elegidos apropiadamente.
En algunos textos se utiliza la siguiente forma $f(x; \theta) = \exp[c(\theta) d(x) - a(\theta) b(x)]$ que equivale a la anterior.

Teorema

Si $f(x;\theta)=a(\theta)b(x)\exp\left[c(\theta)d(x)\right]$, entonces si tomamos una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución que pertenece a la familia exponencial se obtendrá lo siguiente:

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = a^n(\theta)\left[\prod_{i=1}^{n} b(x_i)\right]\exp\left\{c(\theta)\sum_{i=1}^{n} d(x_i)\right\}$$

En primer lugar se aprecia que la densidad conjunta de n variables aleatorias igualmente distribuidas e independientes pertenece a la familia exponencial uniparamétrica.

Agrupando convenientemente la igualdad anterior se halla la siguiente igualdad:

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\underbrace{a^n(\theta)\exp\left\{c(\theta)\sum_{i=1}^{n} d(x_i)\right\}}_{g_\theta\left(T=\sum_{i=1}^{n} d(x_i)\right)}\times\underbrace{\left[\prod_{i=1}^{n} b(x_i)\right]}_{h(\underset{\sim}{x})}$$

se concluye que $\sum_{i=1}^{n} d(x_i)$ es una estadística suficiente (usando el criterio de factorización).

Teorema

Si X tiene una densidad que pertenece a la familia exponencial entonces:

1. $E\left[\dfrac{\partial c(\theta)}{\partial\theta}d(x)\right]=-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln c(\theta)$
2. $Var\left[\dfrac{\partial c(\theta)}{\partial\theta}d(x)\right]=-\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln c(\theta)-E\left[\dfrac{\partial^2 c(\theta)}{\partial\theta^2}d(x)\right]$

Ejemplo 14: La densidad que se presenta abajo pertenece a la familia exponencial $\Im$ uniparamétrica:

a. $f(x;\theta)=\theta\exp(-\theta x)I_{(0,\infty)}(x)$

$f(x)=\theta\times I_{(0,\infty)}(x)\times\exp(-\theta x)$

donde: $a(\theta)=\theta, b(x)=I_{(0,\infty)}(x), c(\theta)=-\theta$ y $d(x)=x$

como $d(x)=x$ se dice que está en su forma canónica.

Se cumplen con las condiciones $\rightarrow f(x)$ pertenece a la familia exponencial.

Otra conclusión que se deriva de este problema es que si se toma una muestra aleatoria de tamaño n de esa densidad $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} d\left(x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ es una estadística suficiente.

La representación de la familia exponencial no es única, porque también se puede poner $c\left(\theta\right) = \theta$ y $d\left(x\right) = -x$

b. $f\left(x;\theta\right) = \binom{n}{x}\theta^{x}\left(1-\theta\right)^{n-x} I_{\{0,1,2,\ldots,n\}}\left(x\right)$

$$f\left(x;\theta\right) = \binom{n}{x}\left(1-\theta\right)^{n}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{x} = \left(1-\theta\right)^{n}\binom{n}{x} I_{\{0,1,2,\ldots,n\}}\left(x\right)\exp\left\{\left[\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right]x\right\}$$

donde: $a\left(\theta\right) = \left(1-\theta\right)^{n}$, $b\left(x\right) = \binom{n}{x} I_{\{0,1,2,\ldots,n\}}\left(x\right)$, $c\left(\theta\right) = \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$ y $d\left(x\right) = x$

como $d\left(x\right) = x$ se dice que está en su forma canónica.

Se cumplen con las condiciones $\rightarrow f\left(x\right)$ pertenece a la familia exponencial.

Otra conclusión que se deriva de este problema es que si se toma una muestra aleatoria de tamaño n de esa densidad $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} d\left(x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ es una estadística suficiente.

c. $f\left(x;\theta\right) = \dfrac{\exp\left[-\dfrac{\left(x-5\right)^2}{2\theta}\right]}{\sqrt{2\pi\theta}} I_{\left(-\infty,\infty\right)}\left(x\right)$

$$f\left(x;\theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \times I_{\left(-\infty,\infty\right)}\left(x\right) \times \exp\left[-\frac{1}{2\theta}\left(x-5\right)^2\right]$$

donde: $a\left(\theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}$, $b\left(x\right) = I_{\left(-\infty,\infty\right)}\left(x\right)$, $c\left(\theta\right) = -\frac{1}{2\theta}$ y $d\left(x\right) = \left(x-5\right)^2$

como $d\left(x\right) = \left(x-5\right)^2$ se dice que no está en su forma canónica.

Se cumplen con las condiciones $\rightarrow f\left(x\right)$ pertenece a la familia exponencial.

Otra conclusión que se deriva de este problema es que si se toma una muestra aleatoria de tamaño n de esa densidad $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 5)^2$ es una estadística suficiente.

Con una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ cuando se considera fijo conocido a μ o σ^2 la respectiva distribución pertenece a la familia exponencial uniparamétrica.

d. $f(x,\lambda) = \dfrac{\exp\left[-\dfrac{|x-\mu|}{\lambda}\right]}{2\lambda} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, con $\mu = 833$.

$$f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{2} I_{(-\infty,\infty)}(x) \times \exp\left[-\frac{1}{\lambda} \times |x-\mu|\right]$$

Donde $a(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda},\ b(x) = \dfrac{1}{2} I_{(-\infty,\infty)}(x),\ c(\lambda) = -\dfrac{1}{\lambda},\ d(x) = |x-\mu|$

Como $d(x) = |x-\mu| \neq x$ entonces no es una forma canónica. También se concluye que $\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu|$ es una estadística suficiente.

e. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de $f(x,\lambda)$, demuestre que $d(x) = |x-\mu| \sim \text{Exponencial}(\text{con media } \lambda)$.

f. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de $f(x,\lambda)$, demuestre que $\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| \sim \text{Gamma}\left(n, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

g. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de $f(x,\lambda)$, demuestre que $Q = 2 \times \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| \times \dfrac{1}{\lambda} \sim \chi^2_{(2n)}$

Nota: Si $X \sim \text{Uniforme}(0,\theta)$ entonces su densidad no pertenece a la familia exponencial uniparamétrica. Se dice que la densidad de esa distribución uniforme no pertenece a la familia exponencial uniparamétrica porque no se puede representar de la forma que se ha visto, desde el punto de vista de la matemática pura, no es una razón válida (aunque desde un punto de vista práctico da una idea del no cumplimiento). La justificación matemática se basa en la teoría de la medida.

Ejercicios:

La familia $\Im$ ¿Es exponencial uniparamétrica? Si.

1) X ~ Poisson (θ). 2) X ~ Uniforme (0, θ) 3) X ~ N(θ, 9)

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x)$$

$$a(\theta)=\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x),\ b(x)=1,\ c(\theta)=\text{No de puede representar}$$

4) X ~ BIN-NEG(k, θ)

5) f(x; θ) = $\dfrac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!\,(1-e^{-\theta})}I_{\{1,2,\ldots\}}(x)$; (Poisson Truncada)

<u>La Familia Exponencial k- Paramétrica de Distribuciones</u>.

Por ejemplo, las distribuciones Normal, Beta y Gamma están en función de dos parámetros, entonces se puede generalizar la definición de familia exponencial uniparamétrica al caso k paramétrico.
Se dice que una familia de densidades $\Im$ es una familia exponencial k-paramétrica, si $f(./\theta_1,\cdots,\theta_k)$ puede ser expresada como:

$$f(x/\theta_1,\cdots,\theta_k)=a(\theta_1,\cdots,\theta_k)b(x)\exp\left[\sum_{j=1}^{k}c_j(\theta_1,\cdots,\theta_k)\times d_j(x)\right]$$

Teorema
Si $f(x/\theta_1,\cdots,\theta_k)$ pertenece a una familia exponencial k- parametrica, entonces si se toma una muestra de tamaño n: $f(\underline{x}/\theta_1,\cdots,\theta_k)=a^n(\theta_1,\cdots,\theta_k)\prod_{i=1}^{n}b(x_i)\exp\left[\sum_{j=1}^{k}c_j(\theta_1,\cdots,\theta_k)\times\sum_{i=1}^{n}d_j(x_i)\right]$. Donde $\sum_{i=1}^{n}d_j(x_i),\ j=1,2,\ldots,k$ son estadísticas suficientes conjuntamente.

Ejemplo 15: La familia $\Im$ a la cual pertenece la densidad de abajo ¿es una familia exponencial biparamétrica?

a. $f(x;\theta_1,\theta_2)=\dfrac{1}{B(\theta_1,\theta_2)}x^{\theta_1-1}(1-x)^{\theta_2-1}I_{(0,1)}(x)$.

$$f\left(x;\theta_1,\theta_2\right)=\frac{1}{B\left(\theta_1,\theta_2\right)}\times I_{(0,1)}\left(x\right)\times\exp\left[\left(\theta_1-1\right)\ln x+\left(\theta_2-1\right)\ln\left(1-x\right)\right]$$

$$a\left(\theta_1,\theta_2\right)=\frac{1}{B\left(\theta_1,\theta_2\right)},\ b\left(x\right)=I_{(0,1)}\left(x\right),\ c_1\left(\theta_1,\theta_2\right)=\left(\theta_1-1\right)\rightarrow d_1\left(x\right)=\ln x$$

$$c_2\left(\theta_1,\theta_2\right)=\left(\theta_2-1\right)\rightarrow d_2\left(x\right)=\ln\left(1-x\right)$$

Por lo tanto $\Im$ si es familia exponencial biparamétrica.

Otra conclusión es la siguiente: si se toma una muestra de tamaño n:

$$T_1=\sum_{i=1}^{n}d_1\left(x_i\right)=\sum_{i=}^{n}\ln x_i \text{ y } T_2=\sum_{i=1}^{n}d_2\left(x_i\right)=\sum_{i=}^{n}\ln\left(1-x_i\right)\rightarrow$$

$T=\left(T_1,T_2\right)$ es una estadística conjuntamente suficiente de $\theta=\left(\theta_1,\theta_2\right)$.

b. $f\left(x;\theta_1,\theta_2\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\theta_2}\left(x-\theta_1\right)^2\right]I_{(-\infty,\infty)}\left(x\right)$.

$$f\left(x;\theta_1,\theta_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\exp\left[-\frac{\theta_1^2}{2\theta_2}\right]\times I_{(-\infty,\infty)}\left(x\right)\times\exp\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}x-\frac{1}{2\theta_2}x^2\right)$$

$$a\left(\theta_1,\theta_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\exp\left[-\frac{\theta_1^2}{2\theta_2}\right],b\left(x\right)=I_{(-\infty,\infty)}\left(x\right),\ c_1\left(\theta_1,\theta_2\right)=\frac{\theta_1}{\theta_2}\rightarrow d_1\left(x\right)=x$$

$$c_2\left(\theta_1,\theta_2\right)=-\frac{1}{2\theta_2}\rightarrow d_2\left(x\right)=x^2$$

Por lo tanto $\Im$ si es familia exponencial biparamétrica.

Otra conclusión es la siguiente: si se toma una muestra de tamaño n:

$$T_1=\sum_{i=1}^{n}d_1\left(x_i\right)=\sum_{i=}^{n}x_i \text{ y } T_2=\sum_{i=1}^{n}d_2\left(x_i\right)=\sum_{i=}^{n}x_i^2\rightarrow$$

$T=\left(T_1,T_2\right)$ es una estadística conjuntamente suficiente de $\theta=\left(\theta_1,\theta_2\right)$.

Ejercicio

1. Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución común $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ y $Y_1,\ldots,Y_m$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución común $N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$, además las X_i son independientes de

las Y_j, demuestre que la densidad conjunta de $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m$ pertenece a la familia exponencial.

2. Demuestre lo anterior suponiendo que $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$.

Tenga en cuenta que las distribuciones Normal, Gamma, Exponencial, Ji Cuadrado, Beta, Bernoulli, Binomial, Geométrica, Pascal, Poisson y Multinomial pertenecen a la familia exponencial. La distribución Weibull pertenece a la familia exponencial cuando el parámetro de forma se conoce.

La Familia Pitman de Distribuciones

La familia exponencial cumple con las condiciones de regularidad porque el rango no depende del parámetro θ. Cuando el rango de una densidad depende de un parámetro θ se dice que es no regular por lo tanto esa densidad pertenece a la familia Pitman de distribuciones. El argumento matemático es el siguiente: Sea $a(x)$ una función positiva de x, y $P_1(\theta)<P_2(\theta)$. Con estas condiciones se define:

$f(x/\theta)=c(\theta)a(x),\quad P_1(\theta)<P_2(\theta)$, donde:

$$\frac{1}{c(\theta)}=\int_{P_1(\theta)}^{P_2(\theta)}a(x)\,dx<\infty.$$

Ejemplo

Las siguientes densidades pertenecen a la familia Pitman:

$$f(x/\theta)=\frac{1}{\theta}I_{[0,\theta]}(x),\quad f(x/\theta)=e^{-(x-\theta)}I_{[\theta,\infty]}(x),\quad f(x/\theta)=(1-p)\,p^{x-\theta}I_{\{\theta,\theta+1,\ldots\}}(x)$$

Estadístico Minimal Suficiente

Un estadístico T es minimal suficiente si su partición asociada es suficiente y es la menos fina entre todos los estadísticos suficientes S.

Cuando se dice que la partición asociada a un estadígrafo T es menos fina que la asociada a otro estadígrafo S, se quiere decir que la partición asociada a T es la unión de clases de la partición asociada a S.

En otras palabras, la estadística minimal suficiente simplifica más la información que todas las estadísticas suficientes.

Caracterización de Estadígrafos Minimal Suficientes

Dos puntos muestrales $(x_1,\ldots,x_n)$ y $(y_1,\ldots,y_n)$ son colocados en la misma clase de acuerdo con cierta relación de equivalencia, si y sólo si la razón $\dfrac{f(x_1,\ldots,x_n/\theta)}{f(y_1,\ldots,y_n/\theta)}$ no depende de θ, y esto determina una partición minimal suficiente y por consiguiente permite hallar un estadístico minimal suficiente.

Ejemplo 16: Para muestras aleatorias de tamaño n de una distribución $\text{Poisson}(\lambda)$, la $\sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadígrafo minimal suficiente, porque el cociente:

$$\frac{f(x_1,\ldots,x_n/\lambda)}{f(y_1,\ldots,y_n/\lambda)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}}{\prod_{i=1}^{n}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{y_i}}{y_i!}}=\frac{y_i!\,\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i}}{x_i!}$$ es independiente de λ cuando

$\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} y_i$ entonces el estadístico $\sum_{i=1}^{n} x_i$ es minimal suficiente.

Ejemplo 17: El peso molecular promedio en 100 g de pectina de cáscara de uva tiene densidad $f(x)=\dfrac{\lambda^r x^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}I_{[0,\infty)}(x)$. $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de esa densidad:

a. Asumiendo que λ es conocido halle el estadístico minimal suficiente de r.

$$\frac{f(x_1,\ldots,x_n;r)}{f(y_1,\ldots,y_n;r)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^r x_i^{r-1}e^{-\lambda x_i}}{\Gamma(r)}}{\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^r y_i^{r-1}e^{-\lambda y_i}}{\Gamma(r)}}=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{r-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\left(\prod_{i=1}^{n}y_i\right)^{r-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i}}$$

La razón anterior es independiente de r cuando $\prod_{i=1}^{n}x_i=\prod_{i=1}^{n}y_i$ entonces el estadístico $\prod_{i=1}^{n}x_i$ es minimal suficiente.

b. Ahora asuma que r y λ son parámetros desconocidos, y obtenga el estadístico minimal suficiente de $\theta=(r,\lambda)$. Justifique.

$$\frac{f\left(x_1,\ldots,x_n;r\right)}{f\left(y_1,\ldots,y_n;r\right)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^r x_i^{r-1}e^{-\lambda x_i}}{\Gamma(r)}}{\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^r y_i^{r-1}e^{-\lambda y_i}}{\Gamma(r)}}=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{r-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\left(\prod_{i=1}^{n}y_i\right)^{r-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i}}$$

La razón anterior es independiente de $\theta=(r,\lambda)$ cuando $\prod_{i=1}^{n}x_i=\prod_{i=1}^{n}y_i$,y $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$ entonces el estadístico $T=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$ es minimal suficiente de $\theta=(r,\lambda)$.

Ejemplo 18: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Normal}\left(\mu,\sigma^2\right)$, con μ y σ^2 desconocidos. Sean $\left(\bar{x},s_X^2\right)$ y $\left(\bar{y},s_Y^2\right)$ las medias y las variancias muestrales correspondientes a dos puntos muestrales, respectivamente. Entonces para hallar el estadístico minimal suficiente para $\theta=\left(\mu,\sigma^2\right)$ se hace lo siguiente:

$$\frac{f\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right)}{f\left(y_1,\ldots,y_n;\theta\right)}=\frac{\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right]}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\mu\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}\mu+n\mu^2\right)\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2n\bar{y}\mu+n\mu^2\right)\right]}=$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(n\bar{x}^2-2n\bar{x}\mu+n\mu^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)\right]\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(n\bar{y}^2-2n\bar{y}\mu+n\mu^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2\right)\right]\right\}}=$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\bar{x}-\mu\right)^2+(n-1)s_X^2\right]\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\bar{y}-\mu\right)^2+(n-1)s_Y^2\right]\right\}}$$

La razón anterior será independiente de μ y σ^2 si $\bar{x}=\bar{y}$ y $s_X^2=s_Y^2$. Entonces $\left(\bar{X},S^2\right)$ es un estadístico minimal suficiente de $\left(\mu,\sigma^2\right)$.

Un estadístico minimal suficiente no es único. Una función uno a uno del estadístico minimal suficiente es también minimal suficiente. En el ejemplo $T_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)$ es estadístico minimal suficiente de $\theta = \left(\mu, \sigma^2 \right)$.

Ejemplo: Halle la estadística minimal suficiente para estimar a θ, si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de una distribución $\text{Uniforme}(-\theta,\theta)$.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta} I_{(-\theta,\theta)}(x_i) = (2\theta)^{-n} I_{(-\theta,\theta)}(x_1)\ldots I_{(-\theta,\theta)}(x_n) = (2\theta)^{-n} \prod_{i=1}^{n} I_{\{|x_i|\le\theta\}} =$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta) = (2\theta)^{-n} I_{\{\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\le\theta\}\}}$$

$\therefore \quad T = \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$ es una estadística suficiente para θ.

$$\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)}{f(y_1,y_2,\ldots,y_n;\theta)} = \frac{(2\theta)^{-n} I_{\{\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\le\theta\}\}}}{(2\theta)^{-n} I_{\{\max\{|y_1|,\ldots,|y_n|\le\theta\}\}}}$$

El cociente no depende de $\theta \leftrightarrow \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\} = \max\{|y_1|,\ldots,|y_n|\}$

$\therefore \quad T = \max\{|X_1|,\ldots,|X_n|\}$ es la estadística minimal suficiente para θ.

Ejemplo: Sustente por qué la estadística $T_1 = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$ no es minimal suficiente para estimar a θ, si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de una distribución $\text{Uniforme}(-\theta,\theta)$.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta} I_{(-\theta,\theta)}(x_i) = (2\theta)^{-n} I_{(-\theta,\theta)}(x_1)\ldots I_{(-\theta,\theta)}(x_n) = (2\theta)^{-n} \prod_{i=1}^{n} I_{\{x_i\le\theta\}} =$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta) = (2\theta)^{-n} I_{\{\max\{x_1,\ldots,x_n\le\theta\}\}}$$

$\therefore \quad T_1 = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$ no es una estadística suficiente para θ, porque solo considera los valores positivos de la distribución. T_1 desperdicia la información de la parte negativa.
Considere dos muestras observables, tales como:

$$x_1 = -\frac{\theta}{2} \text{ ; } x_k = 0 \text{ para } 1 < k < n \text{ ; } x_n = \frac{\theta}{3}$$

$$y_1 = \frac{\theta}{3} \text{ ; } y_k = 0 \text{ para } 2 \le k \le n$$

$$\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\} = \frac{\theta}{2} \ne \frac{\theta}{3} = \max\{|y_1|,\ldots,|y_n|\}$$

T simplifica más la información que todos los suficientes, entonces es el minimal suficiente. T_1 simplifica más la información que T, esto ocurre porque T_1 no es suficiente.

Teorema

Si la distribución de la muestra es de la familia exponencial k-paramétrica es decir $f\left(\underline{x}/\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=a^n\left(\theta_1,\cdots,\theta_k\right)\prod_{i=1}^{n}b\left(x_i\right)\exp\left[\sum_{j=1}^{k}c_j\left(\theta_1,\cdots,\theta_k\right)\times\sum_{i=1}^{n}d_j\left(x_i\right)\right]$, y existen valores $\vec{\theta}^1=\left(\theta_1,\cdots,\theta_k\right)^1,\ldots,\vec{\theta}^k=\left(\theta_1,\cdots,\theta_k\right)^k$ tales que los vectores $\vec{c}_i=\left(c_1\left(\vec{\theta}^i\right),\ldots,c_k\left(\vec{\theta}^i\right)\right), i=1,2,\ldots,k$ son linealmente independientes, entonces el estadístico $\left[\sum_{i=1}^{n}d_1\left(x_i\right),\ldots,\sum_{i=1}^{n}d_k\left(x_i\right)\right]$ es minimal suficiente.

Ejemplo 19: Con una muestra de tamaño n de una distribución $\text{Normal}\left(\mu,\sigma^2\right)$ con $\theta=\left(\mu,\sigma^2\right)$, se tiene $f\left(x_1,\ldots,x_n/\theta\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n e^{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$, entonces el estadígrafo $T=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ es minimal suficiente, porque en $\left(\frac{\mu}{\sigma^2},-\frac{1}{2\sigma^2}\right)$ existen $\vec{\theta}^1=\left(\mu=1,\sigma^2=4\right)$ y $\vec{\theta}^2=\left(\mu=2,\sigma^2=4\right)$ tales que los vectores $\vec{c}_1=\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{8}\right)$ y $\vec{c}_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{8}\right)$ son linealmente independientes.(Recordar que los dos vectores son linealmente independientes si $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\neq\frac{-\frac{1}{8}}{-\frac{1}{8}}\rightarrow\frac{1}{2}\neq 1$)

Estadístico Ancilario

El estadístico $T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ es ancilario para el parámetro θ, si su distribución no depende del parámetro θ.

Ejemplo 20: De una distribución $\text{Normal}\left(\mu,\sigma^2\right)$, con σ^2 conocida se extrae una muestra de tamaño n.

a. Verifique que el estadístico $T=X_8-X_{10}$ es ancilario para μ.

$$\Psi_T\left(t\right)=E\left[e^{t\left(X_8-X_{10}\right)}\right]=E\left(e^{tX_8}\right)E\left(e^{-tX_{10}}\right)=\left[e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right]\left[e^{-\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right]=e^{0t+\frac{t^2\left(2\sigma^2\right)}{2}}$$

$$\therefore T=X_8-X_{10}\sim\text{Normal}\left(0,2\sigma^2\right)$$

Como la distribución del estadístico $T = X_8 - X_{10}$ no depende de μ entonces es ancilario para μ.

b. La estadística $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$. Por lo tanto, es una estadística ancilaria ya que su distribución no depende de μ.

Definición: La estadística $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ es una estadística de escala invariante si $t(cX_1, \ldots, cX_n) = t(X_1, \ldots, X_n)$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Sea $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de alguna distribución. Si $Y_i = cX_i \rightarrow Y(n) = cX(n)$, $Y(1) = cX(1)$ y $\bar{Y} = c\bar{X}$. La estadística $T = \frac{X(n) - X(1)}{\bar{X}}$ no cambia cuando se multiplica cada variable $Y_i = cX_i$ por una constante.

Teorema: $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de $f(x;\theta)$. Si θ es un parámetro de escala y $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ es una estadística de escala invariante, entonces $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ es ancilar.

Definición: La estadística $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ es una estadística de localización invariante si $t(X_1 + c, \ldots, X_n + c) = t(X_1, \ldots, X_n)$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ es una estadística de localización invariante porque si $Y_i = X_i + c \rightarrow \bar{Y} = \bar{X} + c$.

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i + c) - (\bar{X} + c)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Teorema: $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de $f(x;\theta)$. Si θ es un parámetro de localización y $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ es una estadística de localización invariante, entonces $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ es ancilar.

Familia de distribuciones completa

La familia de distribuciones $\Im = \{f(x) / \theta \in \Theta\}$ es completa si para cualquier función real $g(x)$ tal que $E_\theta\left[g(X)\right] = 0$ para todo $\theta \in \Theta$ se sigue que $g(X)$ es nula casi seguro respecto de θ, es decir, $g(x)$ es cero salvo en un conjunto de probabilidad cero, calculada a partir de $f(x/\theta)$ para todo θ.

Ejemplo 21: La familia $\Im=\left\{\theta^x(1-\theta)^{1-x}; x\in\{0,1\} / \theta\in(0,1)\right\}$ es completa. Porque si $E_\theta\left[g(X)\right]=0$ para todo $\theta\in(0,1)$ entonces:

$$E_\theta\left[g(X)\right]=\sum_{x=0}^{1} g(x)\theta^x(1-\theta)^{1-x}=g(0)\theta^0(1-\theta)^{1-0}+g(1)\theta^1(1-\theta)^{1-1}=$$

$$E_\theta\left[g(X)\right]=g(0)(1-\theta)+g(1)\theta=0$$

Luego $g(0)=g(1)=0$

Ejemplo 22: La familia $\Im=\left\{\text{Normal}(0,\theta); x\in\mathbb{R} / \theta\in\mathbb{R}^+\right\}$ no es completa. Porque si hacemos que $g(X)=X$ esto es tal que $E_\theta\left[g(X)\right]=E_\theta[X]=\mu=0$ para todo $\theta\in\mathbb{R}^+$, pero no sigue que $g(X)=0$ porque $g(X)=X$.

Estadística completa

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de $f(x;\theta)$ y sea $T(\underline{x})=t(X_1,\ldots,X_n)$ una estadística. Se dice que T es una estadística completa si y sólo si: $E\left[g(t)\right]=0$ implica que $g(t)=0\ \forall\theta\in\Theta$ y para toda función g definida en el rango de T.

Ejemplo 23: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Binomial}(1,\theta)$. Demuestre que $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ es una estadística completa.

$$S=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Binomial}(n,\theta)$$

Suponga que existe una función g tal que $E\left[g(s)\right]=0$.

$$E\left[g(s)\right]=\sum_{s=0}^{n} g(s)\left[\binom{n}{s}\theta^{s}(1-\theta)^{n-s}\right]=(1-\theta)^{n}\sum_{s=0}^{n} g(s)\binom{n}{s}\underbrace{\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^{s}}_{\beta^{s}}=$$

$$E\left[g(s)\right]=(1-\theta)^{n}\left[g(0)\binom{n}{0}\beta^{0}+g(1)\binom{n}{1}\beta^{1}+\ldots+g(n)\binom{n}{n}\beta^{n}\right]=0$$

sólo si: $g(0)=g(1))=\ldots=g(n)=0 \quad \therefore \quad g(s)=0 \to S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ es una estadística completa.

Ejercicio: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria extraída de una distribución $\text{Poisson}(\theta)$. Pruebe que la estadística $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ es completa.

Ejemplo 24: El análisis de 100 g de pectina de cáscara de uva demora en promedio 30 minutos. Los adelantos o atrasos (redondeados al entero más cercano) para hacer dicho análisis tiene la siguiente función de probabilidad: $f(x;\theta)=[4\theta-1]I_{\{-1\}}(x)+[2-4\theta]^{2}[4\theta-1]^{x} I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)$ donde $0.25<\theta<0.5$. Con una muestra unitaria verifique que el estadístico $T=X$ no es completo. Analice las dos propiedades que debería cumplir el estadístico $T=X$.

Si hacemos $g(T)=g(X)=X\neq 0$, no se cumpliría la implicancia de lo siguiente.

$$E(T)=E(X)=1-4\theta+(2-4\theta)^{2}(4\theta-1)\underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} x(4\theta-1)^{x-1}}_{A'(\theta)}$$

$$A(\theta)=\frac{1}{4}\sum_{x=1}^{\infty}(4\theta-1)^{x}=\frac{1}{4}\left[\frac{4\theta-1}{1-(4\theta-1)}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{4\theta-1}{2-4\theta}\right]$$

$$\to A'(\theta)=\frac{1}{4}\left[\frac{4}{(2-4\theta)^{2}}\right]=\left[\frac{1}{(2-4\theta)^{2}}\right]$$

$$\therefore E(X)=1-4\theta+(2-4\theta)^{2}(4\theta-1)\left[\frac{1}{(2-4\theta)^{2}}\right]=0$$

Se cumple la condición, pero la implicancia no se cumple.

Ejemplo 25: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}(0,\theta)$. Demuestre que $T=Y_n=\max(X_1,\ldots,X_n)$ es una estadística completa.

Se sabe que $f_{Y_n}(t) = nt^{n-1}\left(\frac{1}{\theta}\right)^n I_{(0,\theta)}(t)$.

Suponga que existe una función g tal que $E\left[g(t)\right] = 0$.

$$E\left[g(T)\right] = \int_0^\theta g(t)\left[nt^{n-1}\left(\frac{1}{\theta}\right)^n\right]dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta g(t)t^{n-1}dt = 0$$

Por lo tanto: $\int_0^\theta g(t)t^{n-1}dt = 0$

Derivando ambos lados con respecto a θ, se tiene:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\int_0^\theta g(t)t^{n-1}dt\right) = g(\theta)\theta^{n-1} = 0 \ \ \forall\theta>0 \rightarrow g(\theta) = 0 \rightarrow g(t) = 0$$

$\therefore T = Y_n$ es una estadística completa.

Ejemplo 26: Para muestras unitarias de una población normal con media cero y desviación estándar σ, el estadístico $T(X) = X^2$ es completo, porque su familia de distribuciones es

$$\Im = \left\{\frac{e^{-\frac{t}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}}; t \in (0,\infty) / \sigma \in \mathbb{R}^+\right\}$$

y si $E\left[g(T)\right] = \int_0^\infty g(t)\left[\frac{e^{-\frac{t}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}}\right]dt = \frac{e^{-\frac{t}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^\infty g(t)\frac{1}{\sqrt{t}}dt = 0$

$$\rightarrow \int_0^\infty g(t)\frac{1}{\sqrt{t}}dt = 0 \ \forall\sigma \in \mathbb{R}^+$$

Intuitivamente concluimos que $g(t) = 0$ al variar σ. Un planteamiento riguroso sería empleando la unicidad de la transformada de Laplace.

Ejemplo 27: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Normal}(\theta, \theta^2)$. El estadístico $T = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ no es completo porque $g(T) = 2\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - (n+1)\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ es tal que $E\left[g(T)\right] = 0$.

Comprobación

$$A=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\theta\right)^2}{n\theta^2}\sim\chi^2_{(1)}\rightarrow E(A)=E\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2+n^2\theta^2-2n\theta\sum_{i=1}^{n}X_i}{n\theta^2}\right]=$$

$$E(A)=\frac{E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}{n\theta^2}+n-2n=1$$

$$\rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=(n+1)n\theta^2$$

$$B=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\theta)^2}{\theta^2}\sim\chi^2_{(n)}\rightarrow E(B)=\frac{1}{\theta^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+n\theta^2-2\theta\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=n$$

$$\rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=2n\theta^2$$

$$\rightarrow E\left[g(T)\right]=E\left[2\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2-(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\right]=2(n+1)n\theta^2-2(n+1)n\theta^2=0$$

No implica que $g(T)=0$, por lo tanto T no es completa.

Estadística suficiente mínima completa

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de $f(x;\theta)=a(\theta)b(x)\exp\{c(\theta)d(x)\},\theta\in\Theta$, es decir, $f(x;\theta)$ pertenece a la familia exponencial uniparamétrica, entonces $\sum_{i=1}^{n}d(x_i)$ es una estadística suficiente mínima completa. Recuerde que con el criterio de factorización se cumple que: $f(\underset{\sim}{x};\theta)=\underbrace{a^n(\theta)\exp\left\{c(\theta)\sum_{i=1}^{n}d(x_i)\right\}}_{g_\theta\left(T=\sum_{i=1}^{n}d(x_i)\right)}\times\underbrace{\left[\prod_{i=1}^{n}b(x_i)\right]}_{h(\underset{\sim}{x})}$

Nota: Esta observación también se cumple con familias exponenciales k-paramétricas.

Teorema de Bahadur

Si S es suficiente y completa, entonces S es minimal suficiente.

Ejemplo: Si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de una distribución $\text{Poisson}(\lambda)$, halle la estadística suficiente mínima y completa para estimar a λ.

$$f(x/\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}I_{[0,\infty)}(x)=e^{-\lambda}\times\frac{I_{[0,\infty)}(x)}{x!}\times\exp\left[\ln(\lambda).x\right]$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ es suficiente mínima completa.}$$

De otra manera:

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x_i)=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}\prod_{i=1}^{n}I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x_i)=$$

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\frac{e^{-n\lambda}\exp\left[\ln(\lambda).\sum_{i=1}^{n}x_i\right]}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}\prod_{i=1}^{n}I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x_i)=e^{-n\lambda}\times\exp\left[\ln(\lambda).\sum_{i=1}^{n}x_i\right]\times\frac{\prod_{i=1}^{n}I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x_i)}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}=$$

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\underbrace{a^{n}(\lambda)\exp\left\{c(\lambda).\sum_{i=1}^{n}d(x_i)\right\}}_{g_{\lambda}\left(T=\sum_{i=1}^{n}d(x_i)\right)}\times\underbrace{\left[\prod_{i=1}^{n}b(x_i)\right]}_{h(\underset{\sim}{x})}$$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n}x_i$ es la estadística suficiente mínima y completa para estimar a λ.

Ejemplo: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}(0,\theta)$. Ya se demostró que $T=Y_n=\max(X_1,\ldots,X_n)$ es una estadística suficiente y completa, entonces por el teorema de Bahadur Y_n es minimal suficiente.

Ejemplo: Si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de una distribución $\text{Normal}(\mu,\sigma^2)$, entonces:

a. Si μ es desconocida y σ^2 conocida, por el teorema anterior $\bar{X}$ es un estimador completo y suficiente de μ.
b. Si μ es conocida y σ^2 desconocida, por el teorema anterior $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ es un estimador completo y suficiente de σ^2.
c. Si μ y σ^2 son desconocidas y considerando que $\theta=(\mu,\sigma^2)$, lo que implica que se debe trabajar con una familia exponencial

biparamétrica, se demuestra que $\hat{\theta} = \left(d_1\left(\underline{x}\right), d_2\left(\underline{x}\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ es una estadística biparamétrica suficiente y completa para estimar a $\theta = \left(\mu, \sigma^2\right)$.

Teorema de Basu

Si $T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ es un estadístico suficiente y completo y $V\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ es un estadístico ancilario entonces T y V son independientes.

Ejemplo 28: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}\left(0,\theta\right)$. Ya se concluyó que Y_n es suficiente y completo, y se verificará después que $\frac{Y_1}{Y_n}$ es ancilario, por lo tanto, son independientes.

Verificación de que $\frac{Y_1}{Y_n}$ es ancilario:

$$Z_1 = \frac{Y_1}{Y_n} \quad Z_2 = Y_n$$

$$g(y_1, y_n) = \frac{n\left(n-1\right)\left(y_n - y_1\right)^{n-2}}{\theta^n}, \text{ para } 0 < y_1 < y_n < \theta$$

$$Y_n = Z_2 \ , \ Y_1 = Z_1 Z_2 \rightarrow J = \begin{vmatrix} Z_2 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = Z_2$$

$$f\left(z_1, z_2\right) = \frac{n\left(n-1\right) z_2^{n-1}\left(1-z_1\right)^{n-2}}{\theta^n}, \quad 0 < z_1 < 1, \ 0 < z_2 < \theta$$

$$f\left(z_1\right) = \frac{n\left(n-1\right)\left(1-z_1\right)^{n-2}}{\theta^n} \int_0^\theta z_2^{n-1} dz_2 = \left(n-1\right)\left(1-z_1\right)^{n-2} I_{(0,1)}\left(z_1\right)$$

Como la densidad de $\frac{Y_1}{Y_n}$ no depende de θ entonces es un estadístico ancilario.

Ejemplo 29: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Normal}\left(\theta,\sigma^2\right)$ con σ^2 conocida. Como la $\bar{X}$ es una estadística suficiente y completa, y la estadística $\frac{\left(n-1\right)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ es ancilaria porque su distribución no depende del parámetro θ, por lo tanto, según el teorema de Basu $\bar{X}$ y $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ son independientes.

Ejercicios

1. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de una distribución Binomial (1,θ). ¿Es T = $\sum_{i=1}^{n} X_i$ una estadística suficiente para θ?
2. Sea X_1, X_2 una m.a de una distribución N(θ, 4). ¿Es T = $2X_2$ una es estadística suficiente para θ ?
3. Si $P(X=10)=3\delta$ y $P(X=20)=1-3\delta$ para $0<\delta<\frac{1}{3}$. De esta distribución se extrae una m.a de tamaño 3.

   a. ¿Es la media geométrica una estadística suficiente de δ?

   b. ¿Es la media armónica una estadística suficiente de δ?

   c. Diga si $Y_3=\max(X_1,X_2,X_3)$ es una estadística suficiente para δ. Justifique.
4. Según los Psicólogos de la escuela B el tiempo en segundos entre una expresión grotesca y otra en cierto programa "cómico" tiene densidad $f(x)=\frac{1}{2}I_{(\delta+5,\delta+7)}(x)$. Primero halle las estadísticas suficientes de δ y luego considerando la muestra 19.6, 30.4, 20.8, 25.2, 18.4 y 14.2 halle los valores estimados correspondientes.

5. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con $P(X_1=1)=p=1-P(X_1=0)$, $P(X_2=1)=4p=1-P(X_2=0)$, $0\le p\le\frac{1}{4}$. ¿Es $T=X_1+X_2$ suficiente para p?

6. En los siguientes casos encuentre una estadística suficiente si $X_1,\ldots,X_n$ son v.as independientes.

   a. $f(x_i;\theta)=\exp\{i\theta-x_i\}I_{(i\theta,\infty)}(x_i)$

   b. $f(x_i;\theta)=\frac{1}{2i\theta}I_{[-i(\theta-1),i(\theta+1)]}(x_i)$

7. Se estudia la variable Y definida como el tiempo hasta que se produce la primera falla de una Laptop. Según un investigador $f(y)=\frac{1}{5}I_{[\theta-2,\theta+3]}(x)$. Halle el estimador suficiente de θ de dos maneras, y con la muestra 5.2, 6.8, 4.6, 7.8 y 7.2 estime de dos maneras el rango de Y.

8. En la reserva nacional A el peso X en kg de las ardillas grandes tiene distribución $\text{Uniforme}(4\theta, 8\theta+2)$. Primero halle de dos maneras la estadística suficiente de θ y luego calcule los valores estimados de los límites del rango de X con la muestra 1.5, 1.2, 1.4, 1.8 y 1.3.

9. En su trabajo de tesis la Bióloga María Callas halló que el contenido de prolalina, en mg/L, en sandías de cierta variedad, que han recibido un déficit de irrigación severo, tiene densidad $f(x)=\frac{11x^{10}}{\rho^{11}}I_{(0,\rho)}$. Basándose en los estudios de María halle un estimador suficiente de ρ. Hágalo sin utilizar el criterio de factorización Fisher-Neyman (Utilice el criterio que involucra densidades condicionales de estimadores).

10. El tiempo que dura un componente de TV marca A tiene densidad $f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)I_{(\mu,\infty)}(x)$, donde $\mu \quad \Re$ y $\sigma \quad 0$. Sean $Y_1 \le Y_2 \le Y_3 \le Y_4$ las estadísticas de orden de una muestra aleatoria de tamaño 4 de esa distribución ¿Son $Z_1 = Y_1$ y $Z_4 = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ estimadores suficientes conjuntos para (μ,σ)? Justifique su respuesta.

11. Si Y_1, Y_2, Y_3 son las estadísticas de orden de una m.a de tamaño 3 de la siguiente densidad $f(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta}\exp\left\{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right\}I_{(\alpha,\infty)}(x)$, donde $\alpha \in R$ y $\beta > 0$. ¿ $f(x;\alpha,\beta)$ pertenece a la familia exponencial biparamétrica? Justifique.

12. Un supuesto del análisis PERT (Program Evaluation and Review Technique) es que el tiempo necesario para completar cualquier actividad particular, una vez que se haya iniciado, tiene distribución Beta con parámetros A = tiempo optimista (si todo va bien) y B = tiempo pesimista (si todo sale mal). Suponga que para enseñarle a un perro Cocker

determinadas actividades, el tiempo X que se necesita hasta que aprenda, en semanas, tiene distribución $\text{Beta General}(a,b,A=1.2,B=5.4)$, y su densidad es $f(x)=\frac{1}{(B-A)B(a,b)}\left(\frac{x-A}{B-A}\right)^{a-1}\left(\frac{B-x}{B-A}\right)^{b-1} I_{[\mathrm{A,B}]}(x)$. Halle la estadística suficiente bidimensional de $\theta=(a,b)$.

13. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de la distribución $\text{Gamma}(\alpha,\beta)$, usando el Criterio de factorización de Fisher-Neyman halle una estadística conjuntamente suficiente para $\theta=(\alpha,\beta)$.

14. Si $f(x;\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{\theta_2}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{\theta_2(x-\theta_1)^2}{2\theta_1^2 x}\right\} I_{(0,\infty)}(x)$.

   a. f pertenece a la familia exponencial biparamétrica.
   b. Halle la estadística suficiente conjunta de (θ_1,θ_2)

15. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}(\theta,4\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$, verifique que (Y_1,Y_n) es una estadística suficiente pero no completa.

16. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $f(x/\theta)=\frac{2x}{\theta^2}I_{(0,\theta)}(x)$, $\theta>0$, verifique que $\left(\prod_{i=1}^{n}X_i, Y_n\right)$ es una estadística suficiente (aunque $\prod_{i=1}^{n}X_i$ es redundante), y que Y_n es una estadística minimal suficiente.

17. Suponiendo que $X_1,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de cada distribución que se da abajo halle la estadística minimal suficiente de ρ.

   a. $f(x;\theta)=\frac{\exp\left[-\frac{1}{18}(x-\rho)^2\right]}{3\sqrt{2\pi}} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\rho\in\mathbb{R}$.
   b. $f(x;\theta)=\frac{1}{5}\exp\left[-\frac{1}{5}(x-\rho)\right] I_{(\rho,\infty)}(x)$, $\rho\in\mathbb{R}$
   c. $f(x;\rho)=\frac{8}{\pi\left[64+(x-\rho)^2\right]} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\rho\in\mathbb{R}$

18. Sea $X_1,...,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}(\theta,\theta+1)$ para $-\infty<\theta<\infty$. Demuestre que el rango muestral $R=Y_n-Y_1$ es una estadística ancilar.
19. Se tiene la siguiente distribución:
    $P[X=-1/\theta]=\theta \quad P[X=x/\theta]=(1-\theta)^2\theta^x I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x),$ con $\theta\in(0,1)$.

    Con una muestra de tamaño 1 verifique que el estadístico X no es completo.