

Optimalidad – Comparación de estimadores

Una vez obtenido el estimador $\theta = t(X_1, \dots, X_n)$ de un parámetro θ , por cualquier método ¿Cómo se mide el desempeño o calidad de $\theta = t(X_1, \dots, X_n)$?

Estimador óptimo o estimador insesgado de varianza uniformemente mínima (EIVUM)

Un estimador $T = t(X_1, \dots, X_n)$ de $q(\theta)$ es óptimo (estimador insesgado de varianza uniformemente mínima (EIVUM)), si y sólo si:

1. $E(T) = q(\theta)$
2. $Var(T) \leq Var(T^*)$, donde T^* es cualquier otro estimador insesgado.

Condiciones de regularidad de una familia de densidades

Sea X_1, \dots, X_n una m.a de $f(\cdot, \theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Sea $T(\underline{x}) = t(X_1, \dots, X_n)$ un estimador insesgado de $q(\theta)$.

Las siguientes son condiciones de regularidad:

1. $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta)$ existe $\forall x$ y $\forall \theta$
2. $\frac{\partial}{\partial \theta} \int_A f(\underline{x}; \theta) d\underline{x} = \int_A \frac{\partial}{\partial \theta} f(\underline{x}; \theta) d\underline{x}$, Donde $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n / f(\underline{x}; \theta) > 0\}$
3. $\frac{\partial}{\partial \theta} \int_A T(\underline{x}) f(\underline{x}; \theta) d\underline{x} = \int_A T(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\underline{x}; \theta) d\underline{x}$
4. $0 < E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta) \right]^2 \right\} < \infty$
5. La población tiene un rango que no depende de θ .

Consecuencias de las condiciones de regularidad

- a. En la condición 3, si $T(\underline{x}) = 1$, se incluye la condición 2.

b. $E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right]=0$

Prueba

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right] &= \int\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right)f(x;\theta)dx = \int\left[\frac{1}{f(x;\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)\right]f(x;\theta)dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta}\int f(x;\theta)dx = \frac{\partial}{\partial\theta}(1) = 0 \end{aligned}$$

c. $E(T(\underline{x})) = \int_A T(\underline{x})f(\underline{x};\theta)d\underline{x} = q(\theta) \rightarrow q'(\theta) = Cov\left[T(\underline{x}), \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\underline{x};\theta)\right]$

Prueba

$$\begin{aligned} q'(\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta}q(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_A T(\underline{x})f(\underline{x};\theta)d\underline{x} = \int_A T(\underline{x})\frac{\partial}{\partial\theta}f(\underline{x};\theta)d\underline{x} = \\ q'(\theta) &= \int_A T(\underline{x})\left[\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(\underline{x};\theta)}{f(\underline{x};\theta)}\right]f(\underline{x};\theta)d\underline{x} = \int_A T(\underline{x})\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\underline{x};\theta)\right]f(\underline{x};\theta)d\underline{x} = \\ q'(\theta) &= E\left\{\left[T(\underline{x})\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\underline{x};\theta)\right]\right\} = Cov\left[T(\underline{x}), \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\underline{x};\theta)\right] \end{aligned}$$

Nota: $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

cero

Prueba adicional

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\underline{x};\theta)\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^n \ln f(x_i,\theta)\right] = \\ E(Y) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_i,\theta)\right]}_{CERO} = \sum_{i=1}^n 0 = 0 \end{aligned}$$

d. $Var\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right)^2\right] = I(\theta) > 0$, esto se cumple por la consecuencia b. Y se establece que:

$I(\theta)$ = Número de información de Fisher (cantidad de información sobre θ que tiene X).

$nI(\theta)$ = Número de información contenida en la muestra.

$$e. \quad \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{x};\theta)\right] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{x};\theta)\right)^2\right] = n I(\theta)$$

Prueba

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{x};\theta)\right] &= \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)\right] = \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta)\right] = \\ &= \text{Var}\left\{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_i, \theta)\right\}_{\text{Indep.}} = \sum_{i=1}^n \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_i, \theta)\right]_{\text{m.a.}} = \sum_{i=1}^n \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x, \theta)\right] = \\ &\text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\underline{x};\theta)\right] = n \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x, \theta)\right] = nI(\theta) \end{aligned}$$

Teorema: Cuando se cumplen las condiciones de regularidad, la distribución asintótica del estimador máximo verosímil $\hat{\theta}$ es aproximadamente $\text{Normal}(\mu = \theta, \sigma^2 = [I(\hat{\theta})]^{-1})$. Esta propiedad permite hallar intervalos de confianza y probar hipótesis con muestras grandes.

Ejemplo: Si X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria de $f(x; \lambda) = \lambda x^{\lambda-1} I_{(0,1)}(x)$, $\lambda > 0$. Notar que $X \sim \text{Beta}(\lambda, 1)$.

a. Halle la distribución del EMV de λ .

$$\text{Se demuestra que el EMV de } \lambda \text{ es } \hat{\lambda} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}$$

Utilizando el Jacobiano se demuestra que: $Y = -\ln(x) \sim \text{Exponencial}\left(\text{con media } \frac{1}{\lambda}\right)$

$$\begin{aligned} \ln f(x; \lambda) &= \ln(\lambda) + (\lambda - 1) \ln(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial\lambda} \ln f(x; \lambda) = \frac{1}{\lambda} + \ln(x) \\ I(\theta) &= E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln f(x; \lambda)\right)^2\right] = \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln f(x; \lambda)\right] = \text{Var}\left[\frac{1}{\lambda} + \ln(x)\right] = \text{Var}[\ln(x)] = \frac{1}{\lambda^2} \\ \therefore \hat{\lambda} &\underset{\text{Aprox}}{\sim} N\left(\lambda, \frac{1}{nI(\theta)}\right) = N\left(\lambda, \frac{\lambda^2}{n}\right). \end{aligned}$$

b. Con el R haga lo siguiente: seleccione una muestra seudo aleatoria de tamaño 120 de una distribución Beta($a = 8, b = 1$). Primero asuma que la muestra obtenida corresponde a una muestra de la distribución del enunciado y luego obtenga un intervalo de 95% de confianza para λ .

c. Con el R haga lo siguiente: seleccione una muestra seudo aleatoria de tamaño 120 de una distribución Beta($a = 8, b = 1$). Primero asuma que la muestra obtenida corresponde a una muestra de la distribución del enunciado y luego obtenga verifique $H_0: \lambda = 9$ vs $H_1: \lambda \neq 9$. Utilice un nivel de significación de 5%.

Desigualdad de Crámer-Rao

Sea $T(\underline{x}) = t(X_1, \dots, X_n)$ un estimador insesgado de $q(\theta)$, con variancia finita. Si las condiciones de regularidad son válidas y $0 < I(\theta) < \infty$, entonces:

$$Var[T(\underline{x})] \geq \underbrace{\frac{[q'(\theta)]^2}{nI(\theta)}}_{\substack{\text{Límite inferior} \\ \text{de Cramer-Rao} \\ (\text{LICR})}}, \forall \theta \in \Theta$$

Prueba

Como:

$$|\rho| = \frac{|Cov(X, Y)|}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \leq 1 \rightarrow |Cov(X, Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)} \rightarrow \text{Si } X = T(\underline{x}), Y = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta) \rightarrow$$

$$|q'(\theta)| \leq \sqrt{Var[T(\underline{x})]Var\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta)\right]} \rightarrow$$

$$\frac{[q'(\theta)]^2}{Var\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta)\right]} \leq Var[T(\underline{x})] \rightarrow \frac{[q'(\theta)]^2}{nE\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta)\right]^2\right\}} \leq Var[T(\underline{x})] \rightarrow$$

$$\rightarrow Var[T(\underline{x})] \geq \frac{[q'(\theta)]^2}{nI(\theta)} \quad \text{q.d}$$

Observaciones

- Si $q(\theta) = \theta \rightarrow Var[T(\underline{x})] \geq \frac{1}{nI(\theta)}$

- $T(\underline{x}) = t(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador óptimo de $q(\theta)$ (estimador insesgado de varianza uniformemente mínima (EIVUM)) si:

- $E[T(\underline{x})] = q(\theta)$

b. $Var[T(\underline{x})] = \frac{[q'(\theta)]^2}{nI(\theta)} = LICR$. **NOTA:** En algunos casos el EIVUM no tiene su

$$varianza exactamente igual al LICR, pero es el óptimo porque no hay otro estimador que tenga menor varianza.$$

Teorema

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con $f(x; \theta)$. Si la $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta)$ se puede escribir de la forma $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta) = A(\theta)[T - q(\theta)]$, entonces T es el EIVUM para $q(\theta)$ y tiene varianza $\frac{q'(\theta)}{A(\theta)}$.

Ejemplo 1: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Poisson(θ).

a. Halle el número de información de Fisher $I(\theta)$ y el número de información contenida en la muestra $nI(\theta)$.

$$f(x; \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} I_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$$

$$\ln f(x; \theta) = -\theta + x \ln \theta - \ln x!$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta) = -1 + \frac{x}{\theta}$$

$$I(\theta) = Var\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta)\right] = Var\left(-1 + \frac{x}{\theta}\right) = \frac{Var(X)}{\theta^2} = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$$

$$nI(\theta) = \frac{n}{\theta}$$

La cantidad de información contenida en la muestra es mayor si el tamaño de muestra aumenta y es menor si θ (la varianza) aumenta.

b. Halle el EIVUM para $q(\theta) = \theta$.

Aplicando el Teorema anterior:

$$f(\underline{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$\ln f(\underline{x}; \theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^n x_i \ln \theta - \ln \prod_{i=1}^n x_i !$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta) = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} = \frac{n}{\theta} \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \theta \right] = \frac{n}{\theta} [\bar{X} - \theta]$$

Donde $A(\theta) = \frac{n}{\theta}$, $T = \bar{X}$ es el EIVUM para $q(\theta) = \theta$ y tiene varianza $\frac{q'(\theta)}{A(\theta)} = \frac{\theta}{n}$

c. Verifique si media muestral, $T = \bar{X}$, un estimador óptimo de $q(\theta) = \theta$.

$T = \bar{X} \rightarrow E(T) = \theta \rightarrow T$ es insesgado de $q(\theta) = \theta$.

Cumple con la primera condición, veamos si cumple la segunda condición:

$$Var[T(\underline{x})] = \left\{ \frac{[q'(\theta)]^2}{n I(\theta)} = LICR \right\}$$

$$\frac{[q'(\theta)]^2}{n I(\theta)} = \frac{1}{n} \frac{1}{\theta} = \frac{\theta}{n} \text{ y la } Var[T(\underline{x})] = Var[\bar{X}] = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\theta}{n}$$

se cumplen las dos condiciones entonces $T = \bar{X}$ es un estimador óptimo.

Ejercicio: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Bernoulli(θ) . Halle

el EIVUM para θ . Respuesta: $p = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ es el estimador óptimo de θ . Verifique si es el óptimo.

Ejemplo 2: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución exponencial con media $\frac{1}{\theta}$.

a. Halle el número de información de Fisher $I(\theta)$ y el número de información contenida en la muestra $nI(\theta)$.

$$f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0, \infty)}(x)$$

$$\ln f(x; \theta) = -\theta x + \ln \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta) = -x + \frac{1}{\theta}$$

$$I(\theta) = \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta)\right] = \text{Var}\left(-x + \frac{1}{\theta}\right) = \text{Var}(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

$$nI(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$$

b. Halle el EIVUM para $q(\theta) = \frac{n}{\theta}$.

Aplicando el Teorema anterior:

$$f(\underline{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\ln f(\underline{x}; \theta) = n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i = -1 \left[\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{\theta} \right]$$

Donde

$$A(\theta) = -1, \quad T = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{es el EIVUM para } q(\theta) = \frac{n}{\theta} \text{ y tiene varianza } \frac{q'(\theta)}{A(\theta)} = \frac{-n\theta^{-2}}{-1} = \frac{n}{\theta^2}$$

c. Verifique que el total de la muestra, $T = \sum_{i=1}^n X_i$, es un estimador óptimo de $q(\theta) = \frac{n}{\theta}$.

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow E(T) = nE(X) = \frac{n}{\theta} \rightarrow T \text{ es insesgado de } q(\theta) = \frac{n}{\theta}$$

Cumple con la primera condición, veamos si cumple la segunda condición:

$$\text{Var}[T(\underline{x})] = \left\{ \frac{[q'(\theta)]^2}{n I(\theta)} = \text{LICR} \right\}$$

$$\frac{[q'(\theta)]^2}{n I(\theta)} = \frac{\left(-\frac{n}{\theta^2}\right)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{n}{\theta^2} \quad \text{y la } \text{Var}[T(\underline{x})] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = n\text{Var}(X) = \frac{n}{\theta^2}$$

se cumplen las dos condiciones entonces $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estimador óptimo.

d. Halle el LICR de cualquier estimador insesgado $\hat{\theta}$, de $q(\theta) = \theta$. Verifique que como

$\hat{\theta} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ es insesgado con $V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n-2}$ entonces no es el óptimo. Diga si $\hat{\theta} = \bar{X}$ es el

óptimo.

Ejemplo 3: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \theta)$ con μ conocida.

a. Halle el número de información de Fisher $I(\theta)$ y el número de información contenida en la muestra $nI(\theta)$.

$$\begin{aligned}
 f(x; \theta) &= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2\right]}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta}} I_{(-\infty, \infty)}(x) \\
 \ln f(x; \theta) &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \theta - \frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2 \\
 \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta) &= -\frac{1}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}(x-\mu)^2 \\
 I(\theta) &= \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta)\right] = \text{Var}\left(-\frac{1}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}(x-\mu)^2\right) = \frac{1}{4\theta^4} \text{Var}\left[(x-\mu)^2\right] = \\
 I(\theta) &= \frac{1}{4\theta^2} \text{Var}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^2\right] = \frac{1}{4\theta^2} \text{Var}\left[\chi^2(1 \text{ gl})\right] = \frac{1}{4\theta^2}(2 \times 1) = \frac{1}{2\theta^2} \\
 \rightarrow nI(\theta) &= \frac{n}{2\theta^2}
 \end{aligned}$$

b. Halle el EIVUM para $q(\theta) = \theta$.

Utilizando el Teorema

$$\begin{aligned}
 f(\underline{x}; \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\theta}(x_i-\mu)^2\right]}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta}} I_{(-\infty, \infty)}(x) = (2\pi\theta)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right] \\
 \ln f(\underline{x}; \theta) &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \theta - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \\
 \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\underline{x}; \theta) &= -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 = \frac{n}{2\theta^2} \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n} - \theta \right]
 \end{aligned}$$

Donde, $A(\theta) = \frac{n}{2\theta^2}$, $T = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}$ es el EIVUM para $q(\theta) = \theta$ y tiene varianza

$$\frac{q'(\theta)}{A(\theta)} = \frac{1}{\frac{n}{2\theta^2}} = \frac{2\theta^2}{n}.$$

Ejercicio: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\theta, \sigma^2)$ con σ^2 conocida. Halle el estimador óptimo de θ . Verifique si \bar{X} es el EIVUM.

Ejemplo 4: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Uniforme $(0, \theta)$.

a. ¿Es $T = \frac{n+1}{n} Y_n$ un estimador óptimo de $q(\theta) = \theta$?

$$T = \frac{n+1}{n} Y_n \rightarrow E(T) = \theta \rightarrow T \text{ es insesgado de } q(\theta) = \theta.$$

Cumple con la primera condición, veamos si cumple la segunda condición:

$$\begin{aligned} Var[T(\underline{x})] &= \left\{ \frac{[q'(\theta)]^2}{n I(\theta)} = LICR \right\} \\ I(\theta) &= Var\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta)\right] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta)\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(-\ln \theta)\right)^2\right] = \\ I(\theta) &= E\left[\left(-\frac{1}{\theta}\right)^2\right] = \frac{1}{\theta^2} \\ \frac{[q'(\theta)]^2}{n I(\theta)} &= \frac{1^2}{n \frac{1}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{n} \text{ y la } Var[T(\underline{x})] = Var\left[\frac{n+1}{n} Y_n\right] = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \end{aligned}$$

No se cumple la segunda condición [en este caso $Var[T(\underline{x})] < LICR$] entonces no se puede emplear este criterio para verificar que $T = \frac{n+1}{n} Y_n$ sea un estimador óptimo.

b. ¿Es $T = 2\bar{X}$ un estimador óptimo de $q(\theta) = \theta$?

$$T = 2\bar{X} \rightarrow E(T) = \theta \rightarrow T \text{ es insesgado de } q(\theta) = \theta.$$

Cumple con la primera condición, veamos si cumple la segunda condición:

$$Var[T(\underline{x})] = \left\{ \frac{[q'(\theta)]^2}{n I(\theta)} = LICR \right\}$$

$$I(\theta) = \text{Var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x; \theta)\right] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x; \theta)\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(-\ln \theta)\right)^2\right] =$$

$$I(\theta) = E\left[\left(-\frac{1}{\theta}\right)^2\right] = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\frac{[q'(\theta)]^2}{n I(\theta)} = \frac{1^2}{n \frac{1}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{n} \quad \text{y la } \text{Var}[T(\underline{x})] = \text{Var}[2\bar{X}] = 4\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{3n}$$

No se cumple la segunda condición [en este caso $\text{Var}[T(\underline{x})] < \text{LICR}$] entonces no se puede emplear este criterio para verificar que $T = 2\bar{X}$ sea un estimador óptimo.

Teorema de Rao-Blackwell

Sea $T(\underline{x}) = t(X_1, \dots, X_n)$ un estimador insesgado de $q(\theta)$. Sea $S(\underline{x}) = s(X_1, \dots, X_n)$ una estadística suficiente de θ , entonces la variable aleatoria $T^* = E(T/S)$ es una estadística que es función de S y es insesgada para $q(\theta)$, además la $\text{Var}(T^*) \leq \text{Var}(T)$ cumpliéndose la igualdad sólo si $T^* = T$. Entonces T^* es en algún sentido un estimador óptimo de $q(\theta)$. En realidad T^* mejora al estimador insesgado $T(\underline{x}) = t(X_1, \dots, X_n)$.

La demostración de que T^* es insesgado se cumple por el teorema de la esperanza iterada y de que la $\text{Var}(T^*) \leq \text{Var}(T)$ se cumple por el teorema de la varianza total.

Ejemplo 1: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Binomial($n=1, \theta$). Halle el estimador óptimo de $q(\theta) = \theta$.

Con el criterio de factorización se demuestra que $S = \sum_{i=1}^n X_i$ es una estadística suficiente para $q(\theta) = \theta$ entonces se debe hallar un estimador simple insesgado de $q(\theta) = \theta$, tal como el siguiente:

$$T = \begin{cases} 0 & , X_1 = 0 \\ 1 & , X_1 = 1 \end{cases} \rightarrow T = I_{\{1\}}(x_1)$$

Veamos si T es insesgado:

$$X_1 \sim \text{Binomial}(1, \theta) \rightarrow$$

$$E(T) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1) = 0 + 1 \times \theta = \theta$$

$\rightarrow T$ es un estimador insesgado de θ .

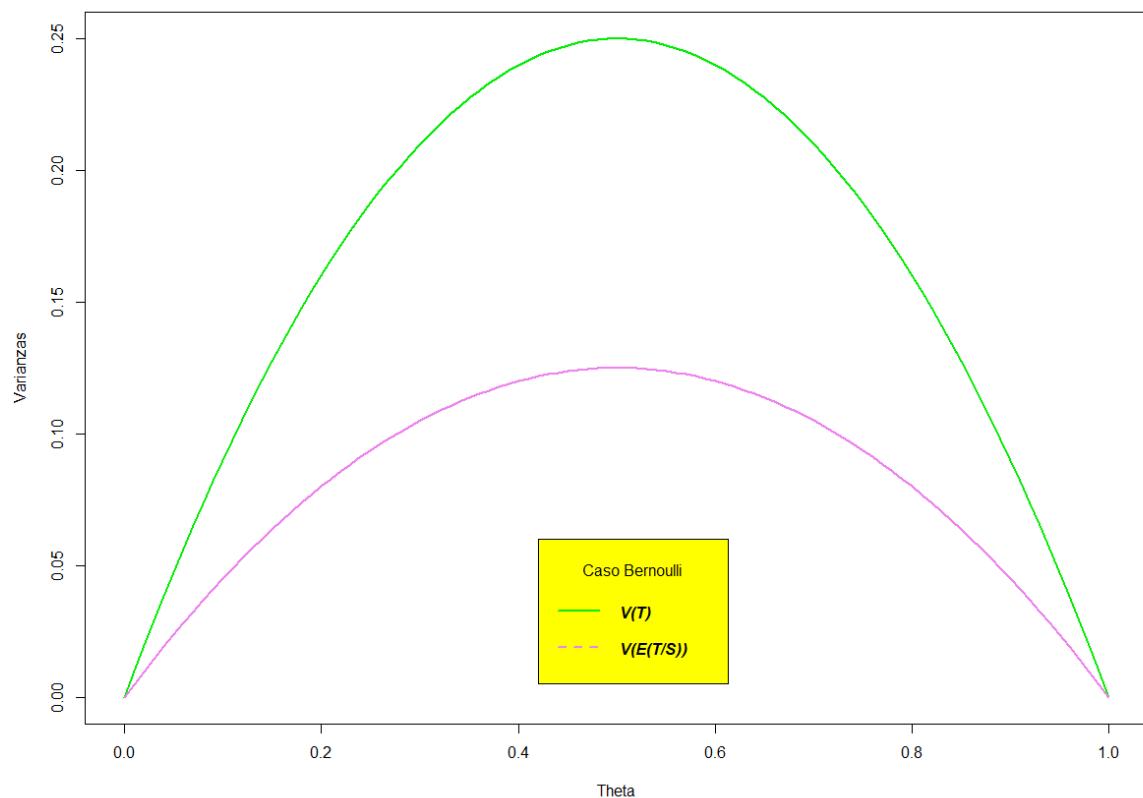
Usemos el teorema de Rao-Blackwell:

$$\begin{aligned}
 T^* &= E\left(T / \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = 0 \times P\left(X_1 = 0 / \sum_{i=1}^n X_i = s\right) + 1 \times P\left(X_1 = 1 / \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = \\
 T^* &= \frac{P\left(X_1 = 1, \sum_{i=1}^n X_i = s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \frac{P\left(X_1 = 1, \sum_{i=2}^n X_i = s - 1\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \frac{P(X_1 = 1)P\left(\sum_{i=2}^n X_i = s - 1\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \\
 T^* &= \frac{\left[\theta\right] \left[\binom{n-1}{s-1} \theta^{s-1} (1-\theta)^{n-1-(s-1)} \right]}{\binom{n}{s} \theta^s (1-\theta)^{n-s}} = \frac{s}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X} \text{ es el estimador óptimo de } \theta.
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} \rightarrow \theta \text{ c.s}$$

$$\text{Por lo tanto, } E(T / S) = \frac{S}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X}$$

$$\text{Se verifica que } V[E(T / S)] = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \leq \theta(1-\theta) = V(T)$$



La máxima variabilidad, de ambos estimadores, ocurre cuando $\theta = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2: El número de accidentes por año, X , en cierta planta industrial tiene distribución Poisson(λ). Si se considera una muestra aleatoria de n años estime la probabilidad de que en un año determinado no ocurran accidentes $[q(\lambda) = P(X = 0) = e^{-\lambda}]$.

Con el criterio de factorización se demuestra que $S = \sum_{i=1}^n X_i$ es una estadística suficiente para $q(\lambda) = e^{-\lambda}$ entonces se debe hallar un estimador simple insesgado de $q(\lambda) = e^{-\lambda}$, tal como el siguiente:

$$T = \begin{cases} 1 & , X_1 = 0 \\ 0 & , \text{de otro modo} \end{cases} \rightarrow T = I_{\{0\}}(x_1)$$

Veamos si T es insesgado:

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \text{Poisson}(\lambda) \rightarrow \\ E(T) &= 1 \times P(X_1 = 0) + 0 \times P(X_1 = \text{otros valores}) = e^{-\lambda} \\ \rightarrow T &\text{ es un estimador insesgado de } q(\lambda) = e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Usemos el teorema de Rao-Blackwell:

$$\begin{aligned} T^* &= E\left(T / \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = 1 \times P\left(X_1 = 0 / \sum_{i=1}^n X_i = s\right) + 0 \times P\left(X_1 = \text{otros} / \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = \\ T^* &= \frac{P\left(X_1 = 0, \sum_{i=1}^n X_i = s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \frac{P\left(X_1 = 0, \sum_{i=2}^n X_i = s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \frac{P(X_1 = 0) P\left(\sum_{i=2}^n X_i = s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \\ T^* &= \frac{\left[e^{-\lambda}\right] \left[e^{-(n-1)\lambda} [(n-1)\lambda]^s / s!\right]}{e^{-n\lambda} [n\lambda]^s / s!} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^s = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \text{ es el estimador óptimo de} \\ q(\lambda) &= e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

$$T^* = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\bar{X}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\bar{X}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\bar{X}} = e^{-\bar{X}} \rightarrow \text{c.s a } e^{-\lambda}$$

Verificación de que T^* es el estimador óptimo (EIVUM)

$$T^* = E(T / S) \rightarrow E(T^*) = E[E(T / S)] = E(T) = q(\lambda) = e^{-\lambda}, \text{ entonces } T^* \text{ es insesgado.}$$

Para hallar la $V(T^*) = V[E(T/S)]$ se necesita la función generadora de momentos factoriales de la distribución Poisson que es igual a: $E(t^X) = e^{\lambda(t-1)}$ y recordar que

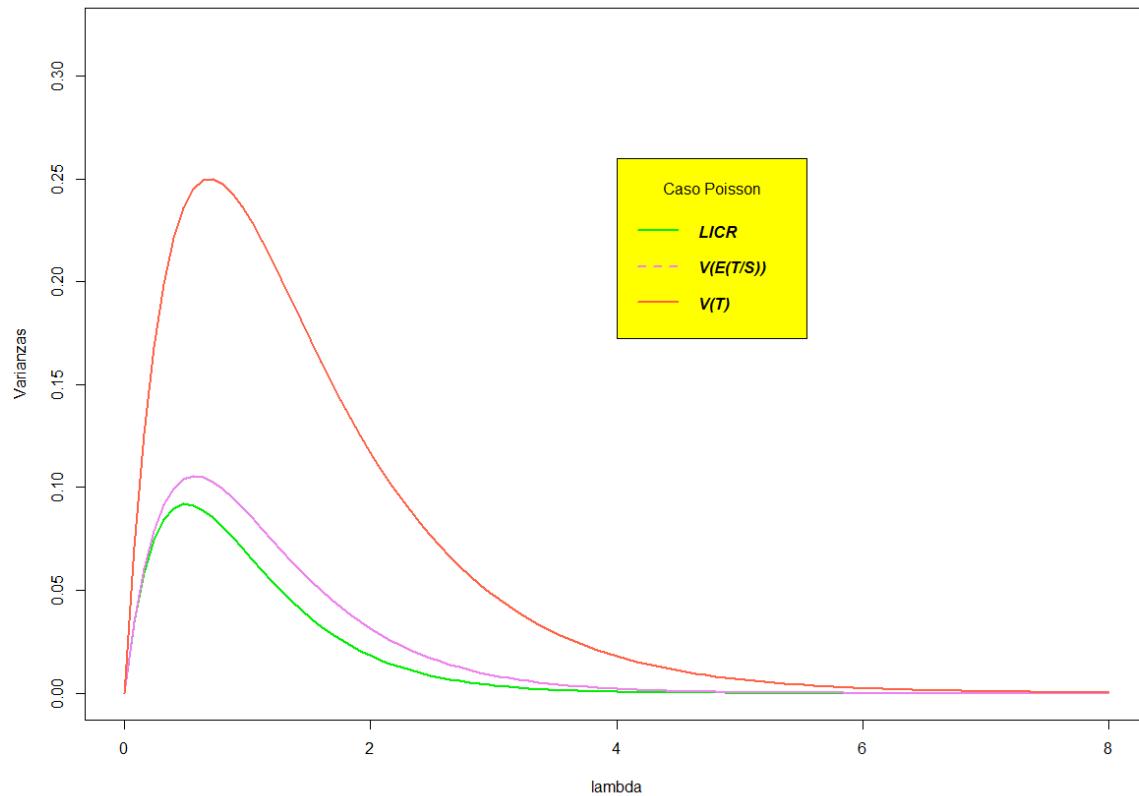
$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda). \text{ Entonces:}$$

$$\begin{aligned} V(T^*) &= V[E(T/S)] = V\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^S\right] = E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2S}\right] - \left\{E\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^S\right]\right\}^2 = \\ V(T^*) &= \exp\left\{n\lambda\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - 1\right]\right\} - \exp\left\{2n\lambda\left[\left(\frac{n-1}{n}\right) - 1\right]\right\} = e^{-2\lambda}e^{\frac{\lambda}{n}} - e^{-2\lambda} = e^{-2\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right) \end{aligned}$$

Se puede comprobar que:

$$LICR(e^{-\lambda}) < V(T^*) \leq V(T) \quad \left[\frac{\lambda}{n}e^{-2\lambda} < e^{-2\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right) \leq e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda}) \right]. \text{ Según el teorema de}$$

Rao Blackwell (Lehmann Scheffé) T^* es el EIVUM de $q(\lambda) = e^{-\lambda}$ a pesar de que no alcanza el $LICR(e^{-\lambda})$.



Ejemplo 3: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Binomial($n = 1, \theta$).

a. Halle el estimador óptimo de $q(\theta) = \theta^3$.

Con el criterio de factorización se demuestra que $S = \sum_{i=1}^n X_i$ es una estadística suficiente para $q(\theta) = \theta^3$ entonces se debe hallar un estimador simple insesgado de $q(\theta) = \theta^3$, tal como el siguiente:

$$T = \begin{cases} 1 & , X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1 \\ 0 & , \text{ de otro modo} \end{cases} \rightarrow T = I_{\{1\}}(x_1)I_{\{1\}}(x_2)I_{\{1\}}(x_3)$$

Veamos si T es insesgado:

$$\begin{aligned} X_i, i=1,2,3 &\sim \text{Binomial}(1, \theta) \rightarrow \\ E(T) &= 1 \times P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) + 0 \times P(X_i = \text{al menos un cero}) = \\ E(T) &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) = \theta \times \theta \times \theta = \theta^3 \\ \rightarrow T &\text{ es un estimador insesgado de } \theta^3. \end{aligned}$$

Usemos el teorema de Rao-Blackwell:

$$\begin{aligned} T^* &= E\left(T / \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = 1 \times P\left(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1 / \sum_{i=1}^n X_i = s\right) \\ &+ 0 \times P\left(X_i = \text{al menos un cero} / \sum_{i=1}^n X_i = s\right) = \\ T^* &= \frac{P\left(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, \sum_{i=1}^n X_i = s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \frac{P\left(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, \sum_{i=4}^n X_i = s - \frac{3}{X_1+X_2+X_3}\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \\ T^* &= \frac{P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1)P\left(\sum_{i=4}^n X_i = s - \frac{3}{X_1+X_2+X_3}\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = s\right)} = \\ T^* &= \frac{\left[\theta \times \theta \times \theta\right] \left[\binom{n-3}{s-3} \theta^{s-3} (1-\theta)^{n-3-(s-3)} \right]}{\binom{n}{s} \theta^s (1-\theta)^{n-s}} = \frac{s(s-1)(s-2)}{n(n-1)(n-2)} = \\ T^* &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{i=1}^n X_i - 1 \right) \left(\sum_{i=1}^n X_i - 2 \right)}{n(n-1)(n-2)} \text{ es el estimador óptimo de } \theta^3. \end{aligned}$$

b. Demuestre que el estimador óptimo de $q(\theta) = \theta^4$ es:

$$T^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{i=1}^n X_i - 1 \right) \left(\sum_{i=1}^n X_i - 2 \right) \left(\sum_{i=1}^n X_i - 3 \right)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

c. Demuestre que el estimador óptimo de $q(\theta) = \theta^k$ es:

$$T^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{i=1}^n X_i - 1 \right) \left(\sum_{i=1}^n X_i - 2 \right) \dots \left(\sum_{i=1}^n X_i - k + 1 \right)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}$$

Ejemplo 4: Determinación del estimador óptimo de $q(u) = P(X > t)$ para la distribución del valor mínimo tipo I de Gumbel

Ser utilizará el teorema de Rao-Blackwell

La función densidad es $f(x) = \alpha e^{\alpha(x-\mu)} \exp\{-e^{\alpha(x-\mu)}\} I_{(-\infty, \infty)}(x)$.

La función de distribución acumulada es $P(X \leq t) = F(t) = 1 - \exp\{-e^{\alpha(t-\mu)}\}$.

Entonces $q(u) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t) = \exp\{-e^{\alpha(t-\mu)}\}$.

Se demuestra que $f(x)$ pertenece a la familia exponencial y que la estadística suficiente es

$S = \sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}$ y tiene distribución Gamma($n, e^{-\alpha\mu}$), porque $e^{\alpha x} \sim \exp(e^{-\alpha\mu})$.

Un estimador insesgado simple de $q(u) = P(X > t)$ es $T = \begin{cases} 1, & X_1 > t \\ 0, & o.m \end{cases}$, ya que

$E(T) = 1 \times P(X_1 > t) + 0 = 1 - P(X_1 \leq t) = q(u) = \exp\{-e^{\alpha(t-\mu)}\}$.

Determinación del estimador óptimo:

$T^* = E(T/S) = 1 \times P(X_1 > t/S) + 0 = \int f_{X_1/S}(x_1) dx_1$, entonces hay que hallar $f_{X_1/S}(x_1)$:

$$f_{X_1/S}(x_1) = \frac{f(x_1, S)}{f(S)} = \frac{f\left(x_1, \sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}\right)}{f\left(\sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}\right)} = \frac{f\left(x_1, \sum_{i=2}^n e^{\alpha x_i}\right)}{f\left(\sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}\right)}$$

Pero:

$$S = \sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i} \sim \text{Gamma}\left(n, e^{-\alpha\mu}\right)$$

$$S_1 = \sum_{i=2}^n e^{\alpha x_i} \sim \text{Gamma}\left(n-1, e^{-\alpha\mu}\right)$$

Por lo tanto, aplicando independencia de variables aleatorias se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_{X_1/S}(x_1) &= \frac{f(x_1) f\left(\sum_{i=2}^n e^{\alpha x_i}\right)}{f\left(\sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}\right)} = \frac{\left[\alpha e^{\alpha(x_1-\mu)} \exp\{-e^{\alpha(x_1-\mu)}\}\right] \left[\frac{S_1^{(n-1)-1} e^{-\alpha(n-1)\mu} e^{-S_1 e^{-\alpha\mu}}}{\Gamma(n-1)} \right]}{\frac{S^{n-1} e^{-\alpha n \mu} e^{-S e^{-\alpha\mu}}}{\Gamma(n)}} = \\ f_{X_1/S}(x_1) &= \frac{\alpha e^{\alpha x_1} \exp\left\{-e^{-\alpha\mu} \left[\underbrace{e^{\alpha x_1} + S_1}_S \right]\right\} S_1^{n-2} \Gamma(n)}{e^{-S e^{-\alpha\mu}} S^{n-1} \Gamma(n-1)} = \frac{\alpha(n-1) e^{\alpha x_1} S_1^{n-2}}{S^{n-1}} = \end{aligned}$$

Notar que: $S = S_1 + e^{\alpha x_1} \rightarrow S_1 = S - e^{\alpha x_1}$

$$f_{X_1/S}(x_1) = \frac{\alpha(n-1) e^{\alpha x_1} (S - e^{\alpha x_1})^{n-2}}{S^{n-1}}, \quad S > e^{\alpha x_1} \rightarrow x_1 < \frac{\ln S}{\alpha}, \quad n > 1$$

Por lo tanto, el estimador óptimo se determina así:

$$\begin{aligned} T^* &= E(T/S) = \int f_{X_1/S}(x_1) dx_1 = \int_t^{\frac{\ln S}{\alpha}} \frac{\alpha(n-1) e^{\alpha x_1} (S - e^{\alpha x_1})^{n-2}}{S^{n-1}} dx_1 = \\ T^* &= \left(\frac{S - e^{\alpha t}}{S} \right)^{n-1} I_{(e^{\alpha t}, \infty)}(S), \text{ es el estimador óptimo de } q(u) = \exp\{-e^{\alpha(t-\mu)}\}. \end{aligned}$$

Teorema de Lehman-Scheffé

Un estimador insesgado que sea función de una estadística suficiente y completa es un EIVUM:

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de la función de probabilidad $f(x; \theta)$. Si:

1. $S = s(X_1, \dots, X_n)$ es una estadística suficiente y completa para $q(\theta)$.
2. $T(\underline{x}) = t(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$.
3. $T^* = E(T/S)$ es una función de S .

Entonces T^* es un estimador óptimo (EIVUM) de $q(\theta)$. Si $Var(T^*) < \infty$ (finito), $\forall \theta \in \Theta \rightarrow T^*$ es único.

Prueba

1. $T^* = E(T/S)$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$:

$$E(T^*) = E[E(T/S)] = E(T) = q(\theta)$$

2. $T^* = E(T/S)$ tiene variancia mínima.

Recuerde que $Var(T) = Var[E(T/S)] + E[Var(T/S)]$, entonces:

$$Var(T^*) = Var[E(T/S)] \leq Var(T) \quad \forall \theta \in \Theta$$

3. $T^* = E(T/S)$ es único (unicidad)

Sean $T_1(\underline{x}) = t_1(X_1, \dots, X_n)$ y $T_2(\underline{x}) = t_2(X_1, \dots, X_n)$ dos estimadores insesgados de $q(\theta)$, tales que:

$$\begin{aligned} T_1^* &= E(T_1/S) = g_1(S) \quad y \quad T_2^* = E(T_2/S) = g_2(S) \rightarrow \\ E[g_1(S) - g_2(S)] &= E(T_1^* - T_2^*) = E(T_1^*) - E(T_2^*) = E[E(T_1/S)] - E[E(T_2/S)] = \\ &= E(T_1) - E(T_2) = q(\theta) - q(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Por ser S una estadística completa, se tiene:

$$\begin{aligned} E[g(S)] &= 0 \Rightarrow g(S) = 0 \\ g(S) &= g_1(S) - g_2(S) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad y \quad \forall g \rightarrow \\ \rightarrow T_1^* &= g_1(S) = g_2(S) = T_2^* \quad (\text{Unicidad}) \end{aligned}$$

Corolario 1

Sea S una estadística suficiente y completa para θ . Si $g(S)$ es insesgado para $q(\theta)$, entonces $g(S)$ es el EIVUM para $q(\theta)$.

Corolario 2

Sea T un estimador insesgado para $q(\theta)$ y que además es suficiente y completo para θ . Entonces T es el EIVUM para $q(\theta)$.

Otros métodos para encontrar estimadores óptimos

Sea X_1, \dots, X_n una m.a extraída de una población con función de probabilidad $f(x; \theta)$, y sea $S = s(X_1, \dots, X_n)$ una estadística suficiente y completa para θ :

1. **Método 1:** Utilizando el teorema de Lehmann-Scheffé, se toma un estimador arbitrario que sea función de la estadística suficiente y completa S y mostrar que este estimador $[g(S)]$ es insesgado para $q(\theta)$. En consecuencia $g(S)$ es el EIVUM de $q(\theta)$.
2. **Método 2:** Se resuelve la ecuación $E[h(S)] = q(\theta)$ en $h(S)$, entonces $h(S)$ será el estimador óptimo de $q(\theta)$.

Ejemplo 7: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria extraída de una distribución Uniforme($0, \theta$).

- a. Obtenga el estimador óptimo o estimador insesgado de varianza uniformemente mínima (EIVUM) de $q(\theta) = \theta$.

Ya se demostró que $T = Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ es una estadística suficiente y completa.

Para usar el método 1 se halla:

$$E(T) = E(Y_n) = \int_0^\theta t \left[nt^{n-1} \left(\frac{1}{\theta} \right)^n \right] dt = \frac{n}{n+1} \theta. \text{ Entonces según el teorema de Lehmann-Scheffé (método 1) el estimador óptimo de } q(\theta) = \theta \text{ es}$$

$$T^* = \left(\frac{n+1}{n} \right) Y_n , \text{porque se cumple: } E(T^*) = E\left[\left(\frac{n+1}{n} \right) Y_n \right] = \left(\frac{n+1}{n} \right) E(Y_n) =$$

$$E(T^*) = \left(\frac{n+1}{n} \right) \left[\left(\frac{n}{n+1} \right) \theta \right] = \theta.$$

b. Demostrar que el EIVUM de $q(\theta) = \theta^2$ es $T^* = \left(\frac{n+2}{n} \right) Y_n^2$.

Ejemplo 8: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria extraída de una distribución Uniforme($1-\theta, 1+\theta$). Obtenga el estimador óptimo o estimador insesgado de varianza uniformemente mínima (EIVUM) de $q(\theta) = \theta$.

Primero demuestre que $X - 1 \sim \text{Uniforme}(-\theta, \theta)$ luego verifique que $Z = |X - 1| \sim \text{Uniforme}(0, \theta)$. Por lo tanto, de acuerdo con el Ejemplo 7, el EIVUM de $q(\theta) = \theta$ es $T^* = \left(\frac{n+1}{n} \right) \max_i |X_i - 1|$.

Ejercicio: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Poisson(λ). Halle el estimador óptimo o estimador insesgado de varianza uniformemente mínima (EIVUM) de $q(\lambda) = \lambda$. Sugerencia: utilice la estadística suficiente y completa $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

Ejercicio: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Exponencial (con media β). Halle el estimador óptimo o estimador insesgado de varianza uniformemente mínima (EIVUM) de $q(\beta) = \beta$. Sugerencia: utilice la estadística suficiente

y completa $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Respuesta: Verifique que el estimador óptimo es $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

Ejercicio: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Exponencial (con media β). Halle el estimador óptimo o estimador insesgado de varianza uniformemente mínima (EIVUM) de $q(\beta) = \beta^2$. Sugerencia: utilice la estadística suficiente y completa $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Respuesta: Verifique que el estimador óptimo es $\left(\frac{n}{n+1} \right) \bar{X}^2$.

Ejercicio: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Bernoulli(π). Halle el estimador óptimo o estimador insesgado de varianza uniformemente mínima (EIVUM) de

$q(\pi) = \pi$. Sugerencia: utilice la estadística suficiente y completa $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Respuesta:

Verifique que el estimador óptimo es $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

Ejemplo: Si X_1, \dots, X_n es una m.a de una distribución $\text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, entonces: Si μ y σ^2 son desconocidas y considerando que $\theta = (\mu, \sigma^2)$, lo que implica que se debe trabajar con una familia exponencial biparamétrica, se demuestra que $\hat{\theta} = (d_1(\underline{x}), d_2(\underline{x})) = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i \right)$ es una estadística biparamétrica suficiente y completa para estimar a $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Según el Lema de Lehman-Scheffé los EIVUM para estimar a μ y a σ^2 son funciones insesgadas de $\left(\sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i \right)$. Por lo tanto, $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$ y

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}{n-1} = S^2.$$

Ejemplo 8: Con una muestra aleatoria de tamaño 1 de la distribución $f(x) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x! (1-e^{-\theta} - \theta e^{-\theta})} I_{\{2,3,4,\dots\}}(x)$, halle el estimador óptimo de $q(\theta) = \frac{4e^{-\theta} (e^\theta - 2)^2}{e^\theta - \theta - 1}$.

Hallemos la estadística suficiente y completa S.

$$f(x) = \underbrace{\frac{e^{-\theta} e^{(\ln \theta)x}}{(1-e^{-\theta} - \theta e^{-\theta})}}_{g_\theta(x)} \underbrace{\frac{1}{x!}}_{h(x)} \rightarrow S = X \text{ es la estadística suficiente y completa de } q(\theta).$$

Haremos uso del método 2.

$$\begin{aligned} E[h_1(X)] &= \sum_{x=2}^{\infty} h_1(x) \left[\frac{e^{-\theta} \theta^x}{x! (1-e^{-\theta} - \theta e^{-\theta})} \right] = q(\theta) = \frac{4e^{-\theta} (e^\theta - 2)^2}{e^\theta - \theta - 1} \\ &\rightarrow \sum_{x=2}^{\infty} h_1(x) \frac{\theta^x}{x!} = 4e^{-\theta} (e^{2\theta} + 1 - 2e^\theta) = 4(e^\theta + e^{-\theta} - 2) \end{aligned}$$

Utilizando la serie de McLaurin

$$e^\theta = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \dots + \frac{\theta^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-\theta} = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{\theta^n}{n!} + \dots$$

$$e^\theta + e^{-\theta} - 2 = 2 \frac{\theta^2}{2!} + 2 \frac{\theta^4}{4!} + 2 \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\therefore \sum_{x=2}^{\infty} h_1(x) \frac{\theta^x}{x!} = 4 \left[2 \frac{\theta^2}{2!} + 2 \frac{\theta^4}{4!} + 2 \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right] = 8 \frac{\theta^2}{2!} + 8 \frac{\theta^4}{4!} + 8 \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\rightarrow T^* = h_1(x) = \begin{cases} 8, & \text{si } x \text{ es par} \\ 0, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo 9: Si X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria de la distribución del valor mínimo tipo I de Gumbel cuya densidad es $f(x) = \alpha e^{\alpha(x-\mu)} \exp\{-e^{\alpha(x-\mu)}\} I_{(-\infty, \infty)}(x)$ donde $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ y α es conocida.

a. Halle la estadística suficiente y completa de μ .

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha\mu} \times e^{\alpha x} \times \exp \begin{Bmatrix} -e^{-\alpha\mu} \times e^{\alpha x} \\ a(\mu) & b(x) \\ c(\mu) & d(x) \end{Bmatrix}$$

$f(x) \in$ a la familia exponencial $\rightarrow \sum_{i=1}^n d(x_i) = \sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}$ es una estadística suficiente y completa.

b. Diga cuál es la densidad de $T = \sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}$.

Con el método del jacobiano se demuestra que $Z = e^{\alpha X} \sim \text{Exponencial}(\text{Con media } e^{\alpha\mu})$

$$X = \frac{\ln Z}{\alpha} \rightarrow J = \frac{dX}{dZ} = \frac{1}{\alpha Z}$$

$$f_Z(z) = f_X\left(\frac{\ln z}{\alpha}\right) |J| = e^{-\alpha\mu} e^{e^{-\alpha\mu} z} I_{(0, \infty)}(z)$$

$$\rightarrow T = \sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i} \sim \text{Gamma}(n; e^{-\alpha\mu}) \therefore E(T) = n e^{\alpha\mu} \text{ y } Var(T) = n e^{2\alpha\mu}$$

c. Encuentre el estimador óptimo de $q(\mu) = e^{\alpha\mu}$.

Se sabe que $T = \sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i} \sim \text{Gamma}(n; e^{-\alpha\mu})$ y T es suficiente y completa entonces, según el teorema de Lehman Scheffé, una transformación 1-1 insesgada de T será el estimador óptimo de $q(\mu) = e^{\alpha\mu}$.

Sea $T^* = \frac{T}{n} \rightarrow E(T^*) = E\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n}E(T) = \frac{1}{n}(ne^{\alpha\mu}) = e^{\alpha\mu} \rightarrow T^* = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}}{n}$ es el estimador óptimo de $q(\mu) = e^{\alpha\mu}$.

d. Verifique que $T^* = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}}{n}$ es el estimador óptimo de $q(\mu) = e^{\alpha\mu}$.

Ya se demostró que $T^* = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}}{n}$ es insesgado.

Hallemos el Límite inferior de Crámer-Rao (LICR)

$$\ln f(x) = \ln \alpha + \alpha(x - \mu) - e^{\alpha(x - \mu)}$$

$$\frac{d \ln f(x)}{d\mu} = -\alpha + \alpha e^{\alpha x} e^{-\alpha\mu}$$

$$I(\mu) = \text{Var}\left(\frac{d \ln f(x)}{d\mu}\right) = \text{Var}(-\alpha + \alpha e^{\alpha x} e^{-\alpha\mu}) = (\alpha e^{-\alpha\mu})^2 \text{Var}(e^{\alpha x}) =$$

$$I(\mu) = (\alpha^2 e^{-2\alpha\mu}) \left(\frac{1}{e^{-2\alpha\mu}}\right) = \alpha^2$$

$$nI(\mu) = n\alpha^2$$

$$q(\mu) = e^{\alpha\mu} \rightarrow q'(\mu) = \alpha e^{\alpha\mu}$$

$$\therefore LICR = \frac{[q'(\mu)]^2}{nI(\mu)} = \frac{(\alpha e^{\alpha\mu})^2}{n\alpha^2} = \frac{e^{2\alpha\mu}}{n}$$

Obtengamos la $\text{Var}(T^*)$.

$$\text{Var}(T^*) = \text{Var}\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(T) = \frac{1}{n^2} (ne^{2\alpha\mu}) = \frac{e^{2\alpha\mu}}{n}$$

$\therefore LICR = \text{Var}(T^*) \rightarrow T^*$ es el estimador óptimo.

e. Encuentre el estimador óptimo de $q(\mu) = e^{-\alpha\mu} = \mu_1$.

Se sabe que $T = \sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i} \sim \text{Gamma}(n; e^{-\alpha\mu})$ y T es suficiente y completa entonces, según el teorema de Lehman Scheffé, una transformación 1-1 insesgada de T será el estimador

óptimo de $q(\mu) = e^{-\alpha\mu}$. Un estimador candidato a ser insesgado de $q(\mu) = e^{-\alpha\mu}$ es $\frac{1}{T}$.

Veamos si es insesgado:

$$E\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f(t) dt = \frac{\mu_1^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\mu_1 t} dt = \frac{\mu_1^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-\mu_1 t} dt = \frac{\mu_1^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{\Gamma(n-1)}{\mu_1^{n-1}} \right) = \frac{\mu_1}{n-1} = \frac{e^{-\alpha\mu}}{n-1}$$

$\rightarrow \frac{1}{T}$ es sesgado. En conclusión el estimador óptimo de $e^{-\alpha\mu}$ será: $T^* = \frac{n-1}{T} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n e^{\alpha x_i}}$

$$E\left[\frac{n-1}{T}\right] = (n-1) E\left[\frac{1}{T}\right] = (n-1) \frac{e^{-\alpha\mu}}{n-1} = e^{-\alpha\mu}$$

Ejercicios

1. Si X_1, \dots, X_n es una m.a de una distribución $Poisson(\lambda)$. Si se proponen las reglas de decisión: $T_1 = \bar{X}$ y $T_2 = X_4$. Siendo la función pérdida cuadrática $l(\lambda, T) = (T - \lambda)^2$. ¿Con el criterio Mínimax que regla de decisión adoptaría ud.?

2. En cada uno de tres países se considera que la variable Y definida como el número de “destapes” de casos de corrupción, en una semana, tiene distribución $Poisson(\alpha)$. La variable X es el número de “destapes” de casos de corrupción, por semana, en los tres países. Para estimar la media de X, utilice la función pérdida cuadrática, determine la función riesgo de las siguientes reglas de decisión: $T_1 = \frac{X}{3}$ y $T_2 = \frac{X}{5}$. Diga cuál de estas reglas de decisión elegiría Ud. Justifique su respuesta.

3. Se estudia el número de veces que un egresado de Biología presenta su CV hasta que es aceptado por vez primera en un trabajo. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de esa distribución Geométrica(θ). Evalúe si se cumplen las dos condiciones para considerar a

$T = \sum_{i=1}^n X_i$, un estimador óptimo de $q(\theta) = \frac{n}{\theta}$.

4. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \theta)$ ¿Es

$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ un estimador óptimo de $q(\theta) = \theta$? Justifique.

4. Una m.a de tamaño n es tomada de una $N(0, \theta^2)$. ¿Es $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ un estimador óptimo de θ^2 ?

5. Sea X_1, \dots, X_n es una m.a de $\text{Bin}(r, p)$. ¿Es $T = \frac{\bar{X}}{r}$ el estimador óptimo de p ? Justifique.

6. X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria de una distribución $N(\theta, 16)$. Diga si $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i X_i$ es un estimador óptimo de $q(\theta) = \left(\frac{n+1}{2}\right)\theta$.

7. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución Binomial(1,p).

a. Sea $T = \begin{cases} 1, & \text{si } X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ 0, & \text{si } X_1 + X_2 + X_3 \neq 0 \end{cases}$, halle la cota inferior de Crámer-Rao para la variancia de T.

b. Obtenga el estimador óptimo para $q(p) = E(T)$.

c. Si se toma la muestra: 0, 0, 0, 1, 0, 1 hallar el valor estimado del estimador óptimo de $E(T)$.

8. La probabilidad de observar un tollo infectado por parásitos(solitarias), en su sistema digestivo, es p . Sea X el número de peces(tollos) muestreados, que no tienen parásitos, hasta encontrar una infección por parásitos. Si X_1, \dots, X_n es una m.a de $f(x)$ halle el estimador óptimo de p , si existe.

9. El número de accidentes por semana X en determinado cruce peligroso tiene distribución $\text{Poisson}(\lambda)$. Asuma que los accidentes en semanas sucesivas son variables aleatorias independientes y suponga que ud. tiene n observaciones. Determine el estimador óptimo de $q(\lambda) = \lambda e^{-2\lambda}$, lo que es equivalente a que en dos semanas en la primera no haya accidentes y en la segunda ocurra un accidente.

10. Sean X_1, \dots, X_n v.as i.i.d con $\text{Binomial}(k, p)$.

a. Encuentre el estimador óptimo de $q(p) = P(X = 1) = k p (1 - p)^{k-1}$.

b. Determine el estimador óptimo de $q(p) = p^k$.

c. ¿Hay un estimador óptimo para $q(p) = p$? Si es así hállelo.

11. Suponga que X_1, \dots, X_n es una m.a de mediciones de la densidad (número de individuos por unidad espacial: superficie. El cálculo de la densidad se puede hacer con alguna de varias fórmulas, por lo que la densidad es una variable continua) de venados colorados. Asuma que la distribución de la densidad es exponencial con media θ .

Suele ser importante estimar $S(t) = 1 - F(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$, la confiabilidad de este tipo en la densidad t. Halle el estimador óptimo de $S(t)$.

12. Si X_1, \dots, X_n es una m.a de una distribución $N(\theta, 4)$.

- Halle el LICR para la variancia de los estimadores insesgados de $P(X > 0)$.
- ¿Hay un estimador insesgado para $P(X > 0)$?
- ¿Hay un estimador óptimo para $P(X > 0)$?

13. La velocidad máxima anual del viento (*millas/h*) en la ciudad de Chiclayo tiene como densidad: $f(x) = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\mu}{x}\right)^{k+1} \exp\left[-\left(\frac{\mu}{x}\right)^k\right] I_{[0, \infty)}(x)$ con k conocida.

a. Obtenga el estimador óptimo de μ^k .

b. Si X_1, \dots, X_n es una m.a de $f(x)$ encuentre el estimador óptimo de la probabilidad de que la velocidad máxima del viento en Chiclayo, en un año dado, exceda a t *millas/h* o sea $P(X > t)$.

14. Suponga que los datos de la Tabla corresponden al caudal mínimo anual (*en pies³*) de un río grande, que tiene distribución de valor extremo mínimo tipo III Weibull y su función

densidad está dada por: $f(x) = \left(\frac{k}{\mu - \varepsilon}\right) \left(\frac{x - \varepsilon}{\mu - \varepsilon}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x - \varepsilon}{\mu - \varepsilon}\right)^k\right\} I_{[\varepsilon, \infty)}(x)$, donde

$$\varepsilon = 90 \text{ y } k = 2.$$

Tabla 1

Caudal anual (*en pies³*)

98	105	100	99	104	101	102	99	98	105
103	102	101	99	103	104	106	99	101	102

Obtenga el valor estimado óptimo de la probabilidad de que en un año determinado el caudal mínimo exceda a 104 *pies³*, o sea valor estimado óptimo de $P(X > 104)$.

15. La Sicóloga Leonor Respeto hizo un estudio de las barras del fútbol. Entre otras variables estudió el tiempo, en minutos, que demoran las barras en proferir el primer insulto racista después de empezado un encuentro. Con la asesoría de un Ingeniero Estadístico

encontró que la densidad de ese tiempo es $f(x) = \frac{1}{\theta x^{\frac{1}{\theta}+1}} I_{(1,\infty)}(x)$ con $0 < \theta < 1$. Si 1.08,

1.14, 1.18 y 1.08 son las observaciones de una muestra aleatoria de 4 partidos.

a. Halle el estimador óptimo de la probabilidad de que las barras se demoren más de 1.12 minutos en proferir el primer insulto racista.

b. Obtenga el estimador óptimo de $\frac{1}{\theta}$.

16. Sea X_1, \dots, X_n una m.a de la densidad geométrica $f(x; p) = p(1-p)^x I_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$.

- a. Encuentre el estimador óptimo de p , si existe.
- b. Encuentre el estimador óptimo de p^2 , si existe.

17. Si X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria de una distribución $N(\theta, 16)$.

a. Determine el LICR y el estimador óptimo para $q(\theta) = \theta^2$.

b. Deduzca el LICR y el estimador óptimo para $P(X > 0)$.

18. Se sabe que el $\pi \times 100\%$ de las porciones de 100 g de cierta variedad de tomate tienen más de 0.95 mg de vitamina B6. Se analizarán porciones de 100 g de esa variedad de tomate hasta encontrar la cuarta porción con más de 0.95 mg de vitamina B6. Obtenga el estimador óptimo de π^4 .

18. Sea X_1, \dots, X_n una m.a de una $\exp(\theta)$.

- a. Determine el estimador óptimo de $Var(X_1)$, si existe.
- b. Encuentre un estimador insesgado de $\frac{1}{\theta}$ basado sólo en Y_1 . ¿Es su secuencia de estimadores, consistente en error cuadrático medio?

c. Halle el estimador óptimo de la mediana.

19. En los países de las Américas el gasto nacional en salud, por año, per cápita en dólares corrientes tiene distribución Pareto(α, β). **Nota:** Una densidad Pareto es

$$f(x) = \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} I_{[\alpha, \infty)}(x) \text{ donde } \alpha > 0, \beta > 1.$$

a. El investigador A considera que el gasto nacional en salud, por año, per cápita en dólares corrientes tiene distribución Pareto($\alpha = 24, \beta$). Según este investigador cuál es el estimador óptimo de β . (5 puntos)

b. El investigador B considera que el gasto nacional en salud, por año, per cápita en dólares corrientes tiene distribución Pareto($\alpha, \beta = 1.0054$). Según este investigador cuál es el estimador óptimo de α .

20. El investigador Francis Galton afirma que la demanda diaria, en toneladas, para Lima Metropolitana y el Callao de camote amarillo procedente de Cañete tiene una distribución que se ha obtenido truncando en (θ, ∞) a una distribución exponencial con media 63 toneladas. Si 100.2, 84.6, 48.4 y 36.8 es una muestra aleatoria de la distribución exponencial truncada halle el estimador óptimo de θ .

21. Sea X_1, \dots, X_n una m.a de $f(x; \theta) = e^{-x+\theta} I_{(\theta, \infty)}(x), \theta \in \mathbb{R}$. Determine el estimador óptimo de θ , si existe.

22. Sea X_1, \dots, X_n una m.a de $f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0, \theta)}(x), \theta > 0$. Hay un estimador óptimo de θ ?

23. Sea X_1, \dots, X_n una m.a de la densidad geométrica $f(x; p) = p(1-p)^x I_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$. Encuentre el estimador óptimo de $\frac{1-p}{p}$.

24. Si X_1, \dots, X_n es una m.a de $f(x) = \frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^x I_{(0,1,2,3,\dots)}(x)$ con $\theta > 0$. Halle el estimador de momentos de θ y diga si es óptimo?

25. Ciertas galletas se venden en bolsas de seis unidades. El número de galletas defectuosas (rotas) por bolsa tiene distribución Binomial($6, \pi$). Si se extraen al azar 10 bolsas de galletas y se registra el número de galletas defectuosas por cada bolsa.

a. Encuentre el LICR y el estimador óptimo de $q(\pi) = \pi^6$.

b. Halle el LICR y el estimador óptimo de $q(\pi) = \pi$.

26. Sea X_1, \dots, X_n una m.a de $f(x; \theta) = e^{-x+\theta} I_{(\theta, \infty)}(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Determine el estimador óptimo de θ , si existe.

27. Según la investigadora Florence Nightingale, para el abastecimiento de Lima Metropolitana y el Callao la v.a X definida como el número de embarques de camote amarillo por día, procedente de Huaura, es tal que su distribución es una Poisson truncada en $(0, \infty)$. Con una muestra unitaria halle el estimador óptimo de $q(\theta) = 1 - e^{-\theta}$.

28. Sea $f(x) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x! (1 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta} - 0.5 \theta^2 e^{-\theta})} I_{\{3,4,5,6,\dots\}}(x)$.

a. Demuestre que $f(x)$ es una función de probabilidad.

b. Si se toma una muestra unitaria ¿Cuál es el estimador óptimo de

$$q(\theta) = \frac{15e^{-\theta} (e^\theta - 1)^2 - 15\theta^2}{e^\theta - 1 - \theta - \frac{\theta^2}{2}}$$