Universidad Nacional Agraria La Molina
Departamento de Estadística e Informática
Curso: Inferencia Estadística
Profesor: Clodomiro Fernando Miranda Villagómez

DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Muestra Aleatoria

Las v.as. $X_1,..., X_n$ constituyen una m.a. de tamaño n de una población con densidad $f(x)$, si tienen como función de densidad conjunta:

$$g(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) \dots f(x_n)$$

siendo $f(x_i)$ la función densidad común de cada X_i.

Las X_i tienen la misma distribución y son independientes.

Una muestra aleatoria (m.a) se presenta cuando se extrae una muestra con o sin reemplazo de una población infinita (Por ejemplo, una población normal) o con reemplazo de una población finita de tamaño N.

Muestra Aleatoria Simple

Una muestra es aleatoria simple si es extraída sin reemplazo de una población finita de tamaño N. En este caso las X_i son dependientes.

Ejemplo 1: Sea X~ N(μ,σ^2). Si de esta distribución se extrae una m.a. de tamaño n; determine la f.d. conjunta de la m.a.

$$X_i \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \quad \forall i = 1,2,3,\ldots,n \to f\left(x_i\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \to$$

$$g\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \quad \forall \left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \in R^n$$

Ejemplo 2: Si de X ~ BIN (1, p) se extrae una m.a. de tamaño n. Determine la f.d. conjunta de la m.a.

$$X_i \sim \text{Binomial}\left(1,p\right) \quad \forall i = 1,2,3,\ldots,n \to f\left(x_i\right) = p^{x_i}\left(1-p\right)^{1-x_i} \quad \forall x_i = 0,1 \to$$

$$g\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}\left(1-p\right)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(1-p\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \forall x_i = 0,1 \,;\, i = 1,2,3,\ldots,n$$

Ejercicio: Si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de una distribución $Pois\left(\lambda\right)$ obtenga la densidad conjunta de la m.a.

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}\ \forall x_i=0,1,\ldots;\ i=1,2,3,\ldots,n$$

Ejemplo 3: Suponga que las edades de los estudiantes de la UNALM están normalmente distribuidas con media 22 años y variancia 4 años^2. Si se selecciona una m.a. de 15 estudiantes $X_1,\ldots,X_{15}$ y se registra la edad de cada uno; calcular:

a) $P(X_2 - 3X_3 + 5X_8 - X_{11} \geq 43)$

Se conoce que:

$$Y = X_2 - 3X_3 + 5X_8 - X_{11} - 43 \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \text{ donde:}$$
$$\mu_Y = E(Y) = E(X_2) - 3E(X_3) + 5E(X_8) - E(X_{11}) - 43 = 22 - 3\times 22 + 5\times 22 - 22 - 43 = 1$$
$$\sigma_Y^2 = V(Y) = V(X_2) + 9V(X_3) + 25V(X_8) + V(X_{11}) = 4 + 9\times 4 + 25\times 4 + 4 = 144$$
$$Y \sim N(1,144)$$
$$P(Y \geq 0) = 0.5332067$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el total de edades de los 15 estudiantes de la muestra sea menor que 333 años?

$$P\left(\sum_{i=1}^{15} X_i < 333\right) = 0.6507323$$
$$\sum_{i=1}^{15} X_i \sim \text{Normal}(22\times 15, 4\times 15)$$

Ejemplo 4: Si $X_1,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria del tiempo de falla de un componente de lavadora que tiene distribución $\text{Exponencial}\left(\text{con media } \dfrac{1}{\beta}\right)$.

a. Halle la densidad de la muestra.

$$X_i \sim \text{Exponencial}\left(\text{con media } \frac{1}{\beta}\right)\quad \forall i = 1,2,3,\ldots,n \rightarrow f(x_i) = \beta\exp(-\beta x_i) I_{(0,\infty)}(x_i) \rightarrow$$
$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n}\beta\exp(-\beta x_i) = \beta^n \exp\left(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

b. Calcule la probabilidad de que cada uno de los tiempos sean mayores de 4 años.

$$P(X_1>4,\ldots,X_n>4) = P(X_1>4)\ldots P(X_n>4) = \left[P(X_1>4)\right]^n = \left[1-P(X_1\leq 4)\right]^n =$$
$$P(X_1>4,\ldots,X_n>4) = \left\{1-\left[1-\exp(-4\beta)\right]\right\}^n = \exp(-4n\beta)$$

Ejemplo 5: Se tiene una población de tarjetas enumeradas del 1 al 800. Se toma una muestra de tamaño 5. Halle la probabilidad de que cada una de las 5 tarjetas seleccionadas sean mayores de 620 si:

a. La muestra se obtiene con restitución y considerando el orden de extracción..

$$P\left(X_1 > 620,\ldots,X_5 > 620\right) = P\left(X_1 > 620\right)\ldots P\left(X_5 > 620\right) = \left(\frac{180}{800}\right)^5 = 0.00058\,.$$

b. La muestra es extraída sin reemplazo.

Sea la variable aleatoria Y definida como el número de tarjetas de la muestra mayores que 620.
$Y \sim \text{Hipergeométrica}\left(N = 800, n = 5, A = 180\right)$

$$P\left(X_1 > 620,\ldots,X_5 > 620\right) = P\left(Y = 5\right) = \frac{\binom{180}{5}\binom{620}{0}}{\binom{800}{5}} = 0.00055$$

Ejercicio: $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a del tiempo de vida en meses de pacientes con cierto tipo de cáncer. El tiempo de vida tiene distribución Raileigh: $f\left(x\right) = \frac{2x}{\beta}\exp\left\{-\frac{x^2}{\beta}\right\} I_{(0,\infty)}\left(x\right)$.

a. Encuentre la densidad de la muestra.

b. Con una m.a de 8 pacientes y $\beta = 100$ calcule la probabilidad de que exactamente 3 pacientes sobrevivan más de 6 meses.

<u>Estadística o Estadígrafo</u>

Una estadística es una función real o vectorial de los elementos de una muestra aleatoria $X_1,\ldots,X_n$ y no contiene parámetros desconocidos.

Ejemplo 6: Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a extraída de una población cuya f.d. es $f(\bullet,\theta)$ (θ parámetro de la población), entonces se pueden definir las siguientes estadísticas:

a) $T_1 = t_1(X_1,\ldots,X_n) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
b) $T_2 = t_2(X_1,\ldots,X_n) = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
c) $T_3 = t_3(X_1,\ldots,X_n) = X_{(1)} = Y_1 = \min(X_1,\ldots,X_n)$
d) $T_4 = t_4(X_1,\ldots,X_n) = X_{(n)} = Y_n = \max(X_1,\ldots,X_n)$
e) $T_5 = t_5(X_1,\ldots,X_n) = (\overline{X}, S^2)$
f) $T_8 = \overline{X} + \theta$; no es una estadística, pero si una variable aleatoria (depende de θ)

Momentos Muestrales

Sea $X_1,..., X_n$ una m.a. extraída de una población cuya f.d. es $f(x)$.

i) La estadística r-ésimo momento muestral en torno al origen denotado por $M_r^|$ es dada por:

$$M_r^| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \quad ;r=1,2,...$$

$$\text{si r =1 entonces } M_1^| = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ii) La estadística r-ésimo momento muestral en torno a $\overline{X}$, denotada por M_r es dada por:

$$\text{Mr} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^r \quad ;r=1,2,...$$

Ejemplo 7:

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\overline{X}}{n} = \frac{n\overline{X}-n\overline{X}}{n} = 0$$

$$M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

Recordemos que los momentos poblacionales se definen así:

$$\mu_r^| = E\left(X^r\right) \quad \text{y} \quad \mu_r = E\left[\left(X-\mu\right)^r\right] \ ; \qquad \mu = E(X)$$

TEOREMA

Sea $X_1,..., X_n$ una m.a. de $f(.) \Rightarrow$

i) $E(M_r^|) = \mu_r^|$

$$E\left(M_r^|\right) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^r\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_r^| = \frac{1}{n}\left(n\mu_r^|\right) = \mu_r^| = E\left(X^r\right)$$

ii) $\text{Var}(M_r^|) = \frac{1}{n}\left[\mu_{2r}^| - \left(\mu_r^|\right)^2\right]$

$$Var\left(M_r^{|}\right)=Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var\left(X_i^r\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var\left(X^r\right)=\frac{1}{n^2}\left(nVar\left(X^r\right)\right)=$$

$$Var\left(M_r^{|}\right)=\frac{1}{n}\left(Var\left(X^r\right)\right)=\frac{1}{n}\left\{\underbrace{E\left[\left(X^r\right)^2\right]}_{E\left[X^{2r}\right]}-\left[E\left(X^r\right)\right]^2\right\}=\frac{1}{n}\left[\mu_{2r}^{|}-\left(\mu_r^{|}\right)^2\right]$$

$$r=1\rightarrow Var\left(M_1^{|}\right)=Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=Var\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{n}\left[E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2\right]=\frac{\sigma^2}{n}$$

TEOREMA

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. de $f(.)\Rightarrow$Si la distribución tiene media μ y variancia finita σ^2, luego

E($\bar{X}$) = μ y V($\bar{X}$) = $\frac{\sigma^2}{n}$

PRUEBA

E($\bar{X}$) =E($M_1^{|}$)= $\mu_1^{|}$ = E(X) = μ

V($\bar{X}$) = V ($M_1^{|}$) = $\frac{1}{n}\left[\mu_2^{|}-\left(\mu_1^{|}\right)^2\right]$ = $\frac{1}{n}$ [E(X^2)- (E(X))^2)] = $\frac{\sigma^2}{n}$

Ejemplo 8: El contenido en mg de cierta vitamina en porciones de 100 g de mango tiene distribución $\text{Uniforme}\left(0,6\right)$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 2 de esa distribución. Determine la densidad exacta de $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{2}X_i}{2}$.

Hacemos:

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2}{2}\ \ ,\ V=X_2\rightarrow X_1=2\bar{X}-V\ \ ,\ X_2=V\rightarrow J=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$$

$$A=\left\{\left(x_1,x_2\right)/\,0\le x_1\le 6, 0\le x_2\le 6\right\}$$

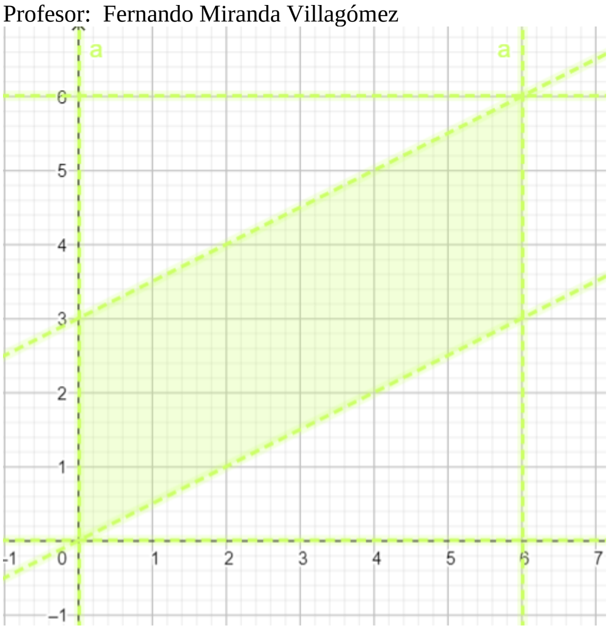
$0\le x_1\le 6$ y $0\le x_2\le 6$

$0\le 2\bar{x}-v\le 6$ y $0\le v\le 6$

$v\le 2\bar{x}\le 6+v$ y $0\le v\le 6$

$\frac{v}{2}\le\bar{x}\le\frac{6+v}{2}$ y $0\le v\le 6$

$$B=\left\{\left(\bar{x},v\right)/\,\frac{v}{2}\le\bar{x}\le\frac{6+v}{2}\ \ ,\ 0\le\bar{x}\le 6,\ 0\le v\le 6\right\}$$



$$f(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{36},\quad (x_1,x_2)\in A$$

$$g(\bar{x},v)=f(2\bar{x}-v,v)|J|=\frac{1}{36}|2|=\frac{1}{18},\quad (\bar{x},v)\in B$$

$$g(\bar{x})=\int_0^{2\bar{x}}\frac{1}{18}dvI_{(0,3)}(\bar{x})+\int_{2\bar{x}-6}^{6}\frac{1}{18}dvI_{(3,6)}(\bar{x})$$

$$g(\bar{x})=\frac{\bar{x}}{9}I_{(0,3)}(\bar{x})+\frac{6-\bar{x}}{9}I_{(3,6)}(\bar{x})$$

<u>TEOREMA</u>

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. de una distribución normal con media μ y variancia σ^2 finita

$$\Rightarrow \bar{X}\sim \mathrm{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\ ;\ \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

<u>PRUEBA</u>

$$\Psi_{\bar{X}}(t)=E(e^{t\bar{X}})=E(e^{(X_1+\cdots+X_n)\frac{t}{n}})=E(e^{X_1\frac{t}{n}})\ldots E(e^{X_n\frac{t}{n}})=\left(e^{\mu\frac{t}{n}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{n^2}}\right)\ldots$$

$$\left(e^{\mu\frac{t}{n}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{n^2}}\right)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2}\qquad\therefore\ \bar{X}\sim \mathrm{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

Ejemplo 9: De dos distribuciones normales: $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ y $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ se extraen muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2, siendo ambas muestras independientes entre sí. Haga la deducción de la distribución de la diferencia de medias muestrales $\bar{X}_1-\bar{X}_2$.

Se usará la técnica de la función generatriz de momentos:

$$\Psi_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}(t)=E\left[e^{t\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)}\right]=E\left(e^{t\bar{X}_1}\right)E\left(e^{-t\bar{X}_2}\right)=\Psi_{\bar{X}_1}(t)\Psi_{\bar{X}_2}(-t)=$$

$$\Psi_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}(t)=\left(e^{\mu_1 t+\frac{1}{2}t^2\frac{\sigma_1^2}{n_1}}\right)\left(e^{-\mu_2 t+\frac{1}{2}t^2\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)=\left[e^{(\mu_1-\mu_2)t+\frac{1}{2}t^2\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}\right]$$

$$\therefore \bar{X}_1-\bar{X}_2\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Variancia Muestral

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a. de $f(.)\Rightarrow$ a $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ se le llama variancia muestral y se le utiliza como estimador de σ^2 en lugar de M_2 porque $E\left(S^2\right)=\sigma^2$.

Teorema

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una m.a de $f(.)$ que tiene cuarto momento finito respecto a μ finito $\Rightarrow$

$$E\left(S^2\right)=\sigma^2 \text{ y } V\left(S^2\right)=\frac{1}{n}\left[\mu_4-\frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right]=\frac{E\left[\left(X-\mu\right)^4\right]}{n}-\frac{n-3}{n(n-1)}\left(\sigma^2\right)^2.$$

Prueba

Se sabe que:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2=\sum\left[\left(X_i-\bar{X}\right)+\left(\bar{X}-\mu\right)\right]^2=\sum\left[\left(X_i-\bar{X}\right)^2+\left(\bar{X}-\mu\right)^2+2\left(\bar{X}-\mu\right)\left(X_i-\bar{X}\right)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+n\left(\bar{X}-\mu\right)^2+2\left(\bar{X}-\mu\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+n\left(\bar{X}-\mu\right)^2+$$

$$+2\left(\bar{X}-\mu\right)\left[\sum_{i=1}^{n}X_i-n\bar{X}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+n\left(\bar{X}-\mu\right)^2$$

$$\sum\left(X_i-\bar{x}\right)^2=\sum\left(X_i-\mu\right)^2-n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$E\left(S^2\right)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum\left(X_i-\bar{x}\right)^2\right]=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2-n\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i-\mu\right)^2-nE\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-\frac{n\sigma^2}{n}\right)=\sigma^2.$$

Ejemplo 10: En una bolsa hay 100 bolas, de igual tamaño, enumeradas con uno de los tres números: 5, 8 y 10, con las siguientes frecuencias: 40 cincos, 10 ochos y 50 dieces. Se toman muestras de tamaño 2.

a. Si la selección es con reemplazo y considerando el orden de extracción halle:

$\mu,\sigma^2,\mu_{\bar{X}}$ y $\sigma_{\bar{X}}^2$ luego σ^2, $\frac{1}{\text{n}}\left[\mu_4-\frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right]$, μ_{S^2} y $\sigma_{S^2}^2$

Muestra	$\bar{X}$	S^2	Probabilidad
(5,5)	5	0	$0.4\times 0.4\times P^{2}_{2,0} = 0.16$
(5,8)	6.5	4.5	$0.4\times 0.1\times P^{2}_{1,1} = 0.08$
(5,10)	7.5	12.5	$0.4\times 0.5\times P^{2}_{1,1} = 0.40$
(8,8)	8	0	$0.1\times 0.1\times P^{2}_{2,0} = 0.01$
(8,10)	9	2	$0.1\times 0.5\times P^{2}_{1,1} = 0.10$
(10,10)	10	0	$0.5\times 0.5\times P^{2}_{2,0} = 0.25$

Del enunciado:

$$f(x) = 0.4I_{\{5\}}(x) + 0.1I_{\{8\}}(x) + 0.5I_{\{10\}}(x)$$

$$\mu = E(X) = 5\times 0.4 + 8\times 0.1 + 10\times 0.5 = 7.8$$

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2 = 5^2\times 0.4 + 8^2\times 0.1 + 10^2\times 0.5 - 7.8^2 = 5.56$$

De la tabla:

$$\mu_{\bar{X}} = 7.8 = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = 2.78 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma^2 = 5.56$$

$$\mu_4 = E\left[(X-\mu)^4\right] = E\left[(X-7.8)^4\right] = (5-7.8)^4\times 0.4 + (8-7.8)^4\times 0.1 + (10-7.8)^4\times 0.5 =$$

$$\mu_4 = 36.2992$$

De la tabla:

$$E\left(S^2\right) = \mu_{S^2} = 5.56 = \sigma^2$$

$$E\left(S^4\right) = 64.52$$

$$Var\left(S^2\right) = 64.52 - 5.56^2 = 33.6064$$

DE otro lado:

$$\frac{1}{\mathrm{n}}\left[\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right] = \frac{1}{2}\left[36.2992 - \left(\frac{2-3}{2-1}\right)5.56^2\right] = 33.6064 = Var\left(S^2\right) = \sigma^2_{S^2}$$

b. Si la selección es sin reemplazo calcule: $\mu, \sigma^2, \mu_{\bar{X}}\ \ y\ \ \sigma^2_{\bar{X}}$ después $\sigma^2,\ \ \frac{1}{\mathrm{n}}\left[\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right], \mu_{S^2}\ \ y\ \ \sigma^2_{S^2}$

Muestra	$\bar{X}$	S^2	Probabilidad
(5,5)	5	0	$\left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{39}{99}\right)=\frac{26}{155}$
(5,8)	6.5	4.5	$\left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{10}{99}\right)\times 2=\frac{8}{99}$
(5,10)	7.5	12.5	$\left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{50}{99}\right)\times 2=\frac{40}{99}$
(8,8)	8	0	$\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{9}{99}\right)=\frac{1}{110}$
(8,10)	9	2	$\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{50}{99}\right)\times 2=\frac{10}{99}$
(10,10)	10	0	$\left(\frac{50}{100}\right)\left(\frac{49}{99}\right)=\frac{49}{198}$

Del enunciado:

$$f(x)=0.4I_{\{5\}}(x)+0.1I_{\{8\}}(x)+0.5I_{\{10\}}(x)$$

$$\mu=E(X)=5\times 0.4+8\times 0.1+10\times 0.5=7.8$$

$$\sigma^2=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=5^2\times 0.4+8^2\times 0.1+10^2\times 0.5-7.8^2=5.56$$

De la tabla:

$$\mu_{\bar{X}}=7.8=\mu,\quad N=100$$

$$\sigma^2_{\bar{X}}=\frac{6811}{2475}=2.75192=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$\sigma^2=5.56$$

$$\mu_4=E\left[(X-\mu)^4\right]=E\left[(X-7.8)^4\right]=(5-7.8)^4\times 0.4+(8-7.8)^4\times 0.1+(10-7.8)^4\times 0.5=$$

$$\mu_4=36.2992$$

De la tabla:

$$E(S^2)=\mu_{S^2}=\frac{556}{99}=5.61616\neq\sigma^2$$

$$Var(S^2)=\frac{329612}{9801}=33.63045\neq\frac{1}{\text{n}}\left[\mu_4-\frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right]=33.6064$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre una muestra aleatoria y una muestra aleatoria simple?

2. La ganancia de la inversión en cierto negocio, en decenas de miles de dólares, es tal que $f(x)=\frac{x^2}{3}I_{(-1,2)}(x)$. Se toma una muestra aleatoria de n inversiones de esa distribución.

a. Con n = 5 halle la distribución de la muestra.

b. Con n = 5 calcule la probabilidad de que en cada una de 4 inversiones se obtenga una ganancia mayor de – 2,000 dólares.

c. Con n = 2 halle la distribución exacta de $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{2} X_i}{2}$ y verifique que $E\left(\bar{X}\right) = \mu$ y $Var\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{2}$.

3. El ingeniero John Graunt estudió que la variable X que es el nivel de pH en el suelo para el crecimiento óptimo de zanahoria, e Y que es el nivel de pH para el crecimiento óptimo de cebolla. John halló que $X \sim \text{Normal}\left(\mu = 6.3, \sigma^2 = 0.24^2\right)$ e $Y \sim \text{Normal}\left(\mu = 6.4, \sigma^2 = 0.22^2\right)$ son independientes. Si se toma una muestra aleatoria de cuatro porciones de suelo para sembrar zanahoria primero halle la densidad de la muestra y úsela para calcular la probabilidad de que en cada una de las cuatro porciones el pH sea mayor que 6.1.
4. En un grupo de 20 personas adultas que se casaron hay 17 separados. Se va a seleccionar con reemplazo y sin considerar el orden de extracción a 4 personas. Se define la variable aleatoria X como el número de personas separadas en la muestra. Del rango de X se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 3.
   a. Halle la función de probabilidad de la muestra aleatoria.
   b. Calcule la probabilidad de que en la muestra de tamaño 3 aparezcan dos veces 4 personas separadas.
5. El peso de los estudiantes varones de la UNALM tiene distribución normal con media 60.2 kg. y desviación estándar 6.1 kg. Si se selecciona una muestra aleatoria de 20 estudiantes varones de la UNALM y se registran sus pesos:

   a. Calcule $P\left(3X_1 - 4X_5 + 2X_9 + 3X_{20} + 4.2 < 208\right)$.

   b. Si un puente colgante puede resistir hasta 1290 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que no resista a los 20 estudiantes juntos?

6. En Jesús María se encuestó a 100 hombres separados y entre otras cosas se encontró que 10 tienen 3 hijos, 20 tienen 4 hijos, y 70 tienen 6 hijos. Del rango de la variable aleatoria X definida como el número de hijos que tienen los hombres separados se toma una muestra aleatoria de tamaño 3. Obtenga la distribución de $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \bar{X})^2$ después calcule σ^2, $\frac{1}{\text{n}}\left[\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right]$, μ_{S^2} y $\sigma^2_{S^2}$. Compare y comente.