Universidad Nacional Agraria La Molina
Departamento de Estadística e Informática
Curso: Inferencia Estadística
Profesor: Clodomiro Fernando Miranda Villagómez

CAPITULO I

DISTRIBUCIONES DE FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

CASO DISCRETO

Ejemplo 1: Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ encontrar la función de probabilidad de $Y = 10X^2 - 5X - 4$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$A = \{x / x = 0,1,2,...,\infty\} \qquad B = \{y / y = -4,1,26,71,...\}$$

Entonces $\exists$ Correspondencia 1 a 1

$$g(y) = P(10X^2 - 5X - 4 = y)$$

$$g(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{185+40y}}{20}}}{\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{185+40y}}{20}\right)!} \qquad y= -4$$

$$g(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{185+40y}}{20}}}{\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{185+40y}}{20}\right)!} \qquad y=1,\ 26,\ 71,..$$

Ejemplo 2: Quince ejemplares de una población animal, de 17 en total, considerados en vía de extinción en cierta región han sido atrapados, marcados y puestos en libertad para que se mezclen en la población. Después de que habían tenido oportunidad de mezclarse se seleccionó una muestra, sin reemplazo, de 15 de estos animales. Se define como X al número de animales marcados que hay en la segunda muestra. Halle la función de probabilidad de la variable $Y = \frac{(X-14)^2}{20}$.

N=17, n=15, A=15

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N,n,A) \quad \forall\ X \in \quad \max(0, n-N+A) \le x \le \min(n,A)$$

Remplazando

$X \sim Hiper(17,15,15) \quad \forall \ X \in \quad \max(0,15-17+15) \leq x \leq \min(15,15)$

$A = R_x = x / x = 13,14,15$

$X = 13 \quad \rightarrow \quad Y = \dfrac{(13-14)^2}{20} = 0.05$

$X = 14 \quad \rightarrow \quad Y = \dfrac{(14-14)^2}{20} = 0$

$X = 15 \quad \rightarrow \quad Y = \dfrac{(15-14)^2}{20} = 0.05$

$B = \{ y / y = 0 , 0.05 \} \rightarrow$ No existe correspondencia 1-1 entre *A* y *B.*

$P(Y = 0) = P(X = 14) = 0.2206$

$P(Y = 0.05) = P(X = 13) + P(X = 15) = 0.7721+0.0074 = 0.7795$

Y	0	0,05
P(Y=y)	0,2206	0,7795

Ejemplo 3: La variable aleatoria X se define como los adelantos o atrasos en minutos (redondeados al entero más cercano) para que un encuentro del fútbol peruano se reinicie después del primer tiempo. La función de probabilidad de X es la siguiente $f(x) = P(X = x) = \dfrac{1}{2n} I_{\{-n,\ldots,-1,1,\ldots,n\}}(x)$. Si el gasto extra por transmisión del encuentro de Radio Callao es $Y = X^2$, halle la función de probabilidad del gasto extra.

$A = \{ x / x = -n,\ldots,-1,1,\ldots,n \}$ y $B = \{ y / y = 1,4,9,\ldots,n^2 \}$

$\rightarrow$ No existe correspondencia 1-1 entre *A* y *B.*

$P(Y = y) = P(X^2 = y) = P\left(X = -\sqrt{y} \ \text{ o } \ X = \sqrt{y}\right) =$

$P(Y = y) = P\left(X = -\sqrt{y}\right) + P\left(X = \sqrt{y}\right) = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n} I_{\{1,4,\ldots,n^2\}}(y)$

Ejemplo 4: Un servicio de transito citadino recibe llamadas de autobuses descompuestos y la cuadrilla de carros grúa debe arrastrar los autobuses al taller de reparaciones. La función de probabilidad conjunta del número de llamadas recibidas de lunes (X_1) y martes (X_2) de varios meses se da a continuación:

		X1					
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	
X2	**0**	0.02	0.04	0.06	0.04	0.04	0.2
	1	0.02	0.04	0.06	0.04	0.04	0.2
	2	0.01	0.02	0.03	0.02	0.02	0.1
	3	0.04	0.08	0.12	0.08	0.08	0.4
	4	0.01	0.02	0.03	0.02	0.02	0.1
		0.1	0.2	0.3	0.2	0.2	1

a) Calcular la media del min (X_1 , X_2)

Función del min (X_1 , X_2)

$$A = \ (X_1, X_2) / x_1 = 0,1,2,3,4; x_2 = 0,1,2,3,4$$
$$B = \ Y_1 / y_1 = \min\ (X_1, X_2) = 0,1,2,3,4$$

$$f(0) = h(0,0) + h(0,1) + h\left(1,0\right) + h(0,2) + h(2,0) + h(0,3) + h(3,0) + h(0,4) + h(4,0)$$
$$f(0) = 0.28$$
$$f(1) = h(1,1) + h(1,2) + h(2,1) + h(1,3) + h(3,1) + h(1,4) + h(4,1)$$
$$f(1) = 0.30$$
$$f(2) = h(2,2) + h(2,3) + h(3,2) + h(2,4) + h(4,2)$$
$$f(2) = 0.22$$
$$f(3) = h(3,3) + h(3,4) + h(4,3) = 0.18$$
$$f(4) = h(4,4) = 0.02$$

$$Y_1 = \min(X_1, X_2)$$

Y1	0	1	2	3	4
P(Y1=y1)	0.28	0.3	0.22	0.18	0.02

$$E(Y_1) = 0 \times 0.28 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.22 + 3 \times 0.18 + 4 \times 0.02 = 1.36$$

b) Encuentre la función de probabilidad conjunta del min (X_1 , X_2) y max (X_1 , X_2)

$$A = \ (X_1, X_2) / x_1 = 0,1,2,3,4; x_2 = 0,1,2,3,4$$
$$B = \ (Y_1, Y_2) / y_1 = \min\ (X_1, X_2); y_2 = \max\ (X_1, X_2)$$

$f(0,0) = h(0,0) = 0.02$

$f(0,1) = h(0,1) + h(1,0) = 0.06$

$f(0,2) = h(0,2) + h(2,0) = 0.07$

$f(0,3) = h(0,3) + h(3,0) = 0.08$

$f(0,4) = h(0,4) + h(4,0) = 0.05$

$f(1,1) = h(1,1) = 0.04$

$f(1,2) = h(1,2) + h(2,1) = 0.08$

$f(1,3) = h(1,3) + h(3,1) = 0.12$

$f(1,4) = h(1,4) + h(4,1) = 0.06$

$f(2,2) = h(2,2) = 0.03$

$f(2,3) = h(2,3) + h(3,2) = 0.14$

$f(2,4) = h(2,4) + h(4,2) = 0.05$

$f(3,3) = h(3,3) = 0.08$

$f(3,4) = h(3,4) + h(4,3) = 0.1$

$f(4,4) = h(4,4) = 0.02$

		Y1					
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	
Y2	**0**	0.02	0	0	0	0	0.02
	1	0.06	0.04	0	0	0	0.1
	2	0.07	0.08	0.03	0	0	0.18
	3	0.08	0.12	0.14	0.08	0	0.42
	4	0.05	0.06	0.05	0.1	0.02	0.28
		0.28	0.3	0.22	0.18	0.02	1

Ejemplo 4: En el Perú, para un estudio, se consideran 20 ríos de la cuenca principal del Amazonas y 18 de la cuenca principal del Pacífico. De estos 38 ríos se seleccionan dos ríos, y se define la variable X como el número de ríos de la cuenca del Amazonas. Luego, de los ríos que quedan, se seleccionan dos en las mismas condiciones que en el paso anterior, y se define la variable Y como el número de ríos de la cuenca del Amazonas seleccionados. Halle la función de probabilidad conjunta de X+Y con XY.

a. Resuelva el problema asumiendo que las selecciones son al azar, con reemplazo y sin considerar el orden de extracción.
Solución

Como se tienen 38 ríos y la selección es con reemplazo y sin considerar el orden de extracción entonces $n(\Omega) = \binom{38+2-1}{2}$.

Si primero son seleccionados dos ríos de la cuenca del Amazonas (A) y cero de la cuenca del Pacífico (P) quedan 20 A y 18 P entonces pueden ocurrir alguno de los siguientes casos:

$$P\left(X=2,Y=0\right)=P\left(X=2\right)\times P\left(Y=0/X=2\right)=$$

$$=\frac{\binom{20+2-1}{2}\binom{18+0-1}{0}}{n\left(\Omega\right)}\times\frac{\binom{20+0-1}{0}\binom{18+2-1}{2}}{n\left(\Omega\right)}=\frac{210}{3211}$$

$$P\left(X=2,Y=1\right)=\frac{\binom{20+2-1}{2}\binom{18+0-1}{0}}{n\left(\Omega\right)}\times\frac{\binom{20+1-1}{1}\binom{18+1-1}{1}}{n\left(\Omega\right)}=\frac{8400}{61009}$$

$$P\left(X=2,Y=2\right)=\frac{\binom{20+2-1}{2}\binom{18+0-1}{0}}{n\left(\Omega\right)}\times\frac{\binom{20+2-1}{2}\binom{18+0-1}{0}}{n\left(\Omega\right)}=\frac{4900}{61009}$$

Si primero es seleccionado un río de la cuenca del Amazonas (A) y uno de la cuenca del Pacífico (P) quedan 20 A y 18 P entonces pueden ocurrir alguno de los siguientes casos:

$$P\left(X=1,Y=0\right)=\frac{\binom{20+1-1}{1}\binom{18+1-1}{1}}{n\left(\Omega\right)}\times\frac{\binom{20+0-1}{0}\binom{18+2-1}{2}}{n\left(\Omega\right)}=\frac{360}{3211}$$

$$P\left(X=1,Y=1\right)=\frac{\binom{20+1-1}{1}\binom{18+1-1}{1}}{n\left(\Omega\right)}\times\frac{\binom{20+1-1}{1}\binom{18+1-1}{1}}{n\left(\Omega\right)}=\frac{14400}{61009}$$

$$P\left(X=1,Y=2\right)=\frac{\binom{20+1-1}{1}\binom{18+1-1}{1}}{n\left(\Omega\right)}\times\frac{\binom{20+2-1}{2}\binom{18+0-1}{0}}{n\left(\Omega\right)}=\frac{8400}{61009}$$

Si primero no se seleccionan ríos de la cuenca del Amazonas (A) y son seleccionados dos de la cuenca del Pacífico (P) quedan 20 A y 18 P entonces pueden ocurrir alguno de los siguientes casos:

$$P\left(X=0,Y=0\right)=\frac{\binom{20+0-1}{0}\binom{18+2-1}{2}}{n\left(\Omega\right)}\times\frac{\binom{20+0-1}{0}\binom{18+2-1}{2}}{n\left(\Omega\right)}=\frac{9}{169}$$

$$P\left(X=0,Y=1\right)=\frac{\binom{20+0-1}{0}\binom{18+2-1}{2}}{n\left(\Omega\right)}\times\frac{\binom{20+1-1}{1}\binom{18+1-1}{1}}{n\left(\Omega\right)}=\frac{360}{3211}$$

$$P\left(X=0,Y=2\right)=\frac{\binom{20+0-1}{0}\binom{18+2-1}{2}}{n\left(\Omega\right)}\times\frac{\binom{20+2-1}{2}\binom{18+0-1}{0}}{n\left(\Omega\right)}=\frac{210}{3211}$$

La función de probabilidad conjunta de X e Y será:

		X		
		0	1	2
Y	0	$\frac{9}{169}$	$\frac{360}{3211}$	$\frac{210}{3211}$
	1	$\frac{360}{3211}$	$\frac{14400}{61009}$	$\frac{8400}{61009}$
	2	$\frac{210}{3211}$	$\frac{8400}{61009}$	$\frac{4900}{61009}$

(X,Y)	S = X+ Y	P = XY	Probabilidad
(0,0)	0	0	$\frac{9}{169}$
(0,1)	1	0	$\frac{360}{3211}$
(0,2)	2	0	$\frac{210}{3211}$
(1,0)	1	0	$\frac{360}{3211}$
(1,1)	2	1	$\frac{14400}{61009}$
(1,2)	3	2	$\frac{8400}{61009}$
(2,0)	2	0	$\frac{210}{3211}$
(2,1)	3	2	$\frac{8400}{61009}$
(2,2)	4	4	$\frac{4900}{61009}$

Respuesta

		S				
		0	1	2	3	4
P	0	$\frac{9}{169}$	$\frac{720}{3211}$	$\frac{420}{3211}$	0	0
	1	0	0	$\frac{14400}{61009}$	0	0
	2	0	0	0	$\frac{16800}{61009}$	0
	4	0	0	0	0	$\frac{4900}{61009}$

b. Resuelva el problema asumiendo que las selecciones son al azar, con reemplazo y considerando el orden de extracción. (Queda como ejercicio)

c. Resuelva el problema asumiendo que las selecciones son al azar y sin reemplazo. (Queda como ejercicio)

CASO CONTINUO

Hay tres métodos conocidos:

- Técnica de la función de distribución acumulativa.
- Técnica de la transformación de variables (Jacobiano)
- Técnica de la función generatriz de momentos (Válido para el caso discreto)

TECNICA DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULATIVA

Ejemplo 1: La temperatura a la que se mantiene una sustancia de uso médico en °C tiene la siguiente función densidad $f\left(x\right)=\left(1+x\right)I_{\left(-1,0\right)}\left(x\right)+\left(1-x\right)I_{\left(0,1\right)}\left(x\right)$.

a. Determine la densidad del tiempo de duración en meses del compuesto que es $T=-2X+2$.

$$A=\left\{x/\left(-1<x<0\right)\cup\left(0<x<1\right)\right\}$$

$$B=\left\{t/\underbrace{\left(2<t<4\right)}_{I_1}\cup\underbrace{\left(0<t<2\right)}_{I_2}\right\}$$

$\exists$ correspondencia 1-1 entre A y B

$$F_T\left(t\right)=P\left(T\le t\right)=P\left(-2X+2\le t\right)=P\left(X\ge-\frac{t}{2}+1\right)=1-P\left(X\le-\frac{t}{2}+1\right)=$$

$$F_T\left(t\right)=1-\left\{\int_{-1}^{-\frac{t}{2}+1}\left(1+x\right)dx\,I_1+\left[\frac{1}{2}+\int_{0}^{-\frac{t}{2}+1}\left(1-x\right)dx\right]I_2\right\}=\left[1-\frac{\left(t-4\right)^2}{8}\right]I_1+\left[1-\left(1-\frac{t^2}{8}\right)\right]I_2$$

$$f_T\left(t\right)=\frac{dF_T\left(t\right)}{dt}=\frac{\left(t-4\right)}{4}I_1+\frac{t}{4}I_2$$

b. Halle la densidad de la ganancia, en um, de la empresa productora del compuesto que es $G=X^2+1$.

$$A=\left\{x/\left(-1<x<0\right)\cup\left(0<x<1\right)\right\}$$

$$B=\left\{\mathrm{g}/1<g<2\right\}$$

No existe correspondencia 1-1 entre A y B

$$F_G(g) = P(G \le g) = P\left(X^2+1 \le g\right) = P\left(X^2 \le g-1\right) = P\left(-\sqrt{g-1} \le X \le \sqrt{g-1}\right) =$$

$$F_G(g) = \int_{-\sqrt{g-1}}^{0} (1+x)\,dx I_{(1,2)}(g) + \int_{0}^{\sqrt{g-1}} (1-x)\,dx I_{(1,2)}(g) =$$

$$F_G(g) = \left[2\sqrt{g-1} - (g-1)\right] I_{(1,2)}(g)$$

$$f_G(g) = \frac{dF_G(g)}{dg} = \left(\frac{1}{\sqrt{g-1}} - 1\right) I_{(1,2)}(g)$$

Ejemplo 2: Si $X \sim N(0,1)$ determine la densidad de X^2

$A = \{x / x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad B = \{y / 0 < y < \infty\}$

$$G(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y})$$

$$G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,\infty)}(y) + f(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,\infty)}(y)$$

Pero $f(\sqrt{y}) = f(-\sqrt{y}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y}$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}y} \quad , \; y \in B \qquad \therefore y \sim X^2(1)$$

Ejemplo 3:

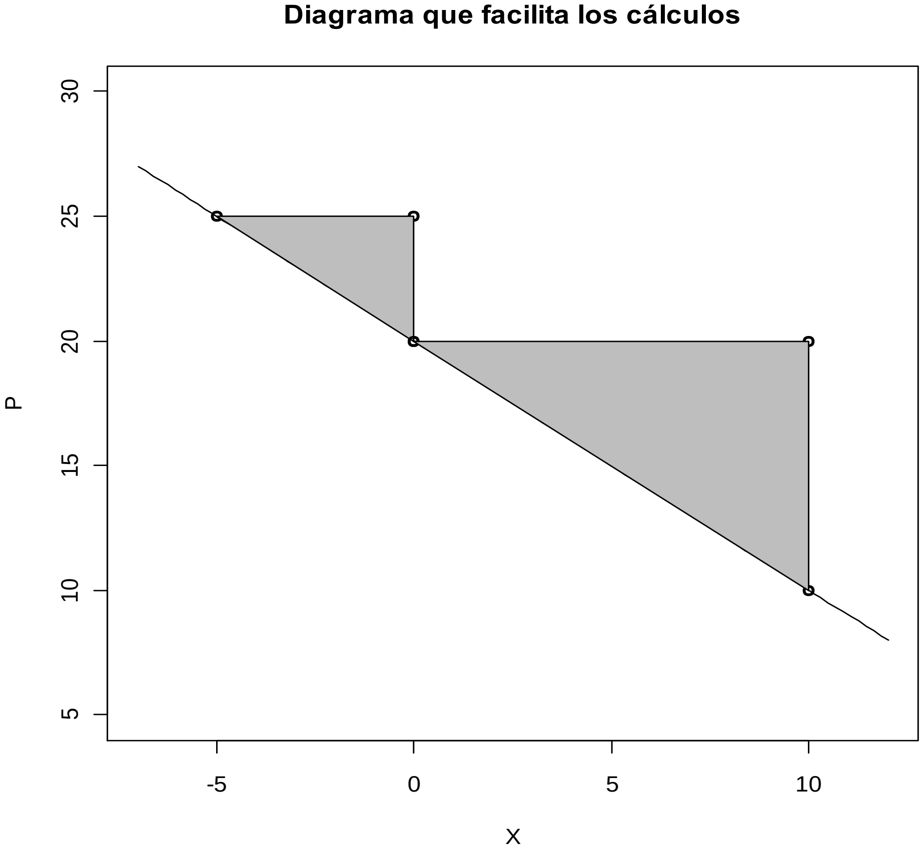
Una empresa vende comida en la modalidad de "delivery" y de acuerdo a la distancia de pedido la empresa ofrece llevarle la mercadería en determinado tiempo. Los adelantos o atrasos en minutos de la entrega tienen la siguiente función de densidad.

$$f_x(x) = \frac{2|x|}{125} I_{[-5,10]}(x)$$

a. Obtenga la densidad de la propina (en u.m) que recibirá la persona que hace la entrega que es $P = 20 - X$.

Solución

Gráfico 1



$A=\{x/-5\le x\le 10\}$

$B=\{p/10\le p\le 25\}$

$\exists$ Correspondencia 1-1 entre A y B

$$G_p(p)=P(P\le p)=P(20-x\le p)=P(x\ge 20-p)$$

$$G_p(p)=\int_{20-p}^{10}\frac{2|x|}{125}dx=\int_{20-p}^{10}\frac{2x}{125}dxI_{[10,20]}(p)+\left[k+\int_{20-p}^{0}\frac{-2x}{125}dxI_{[20,25]}(p)\right]$$

$$G_p(p)=\left(\frac{4}{5}-\frac{(20-p)^2}{125}\right)I_{[10,20]}(p)+\left[\frac{4}{5}+\frac{(20-p)^2}{125}I_{[20,25]}(p)\right]$$

$$g_p(p)=\frac{\partial G_p(p)}{\partial p}=-\frac{2(20-p)}{125}I_{[20,25]}(p)+\frac{2(20-p)}{125}I_{[10,20]}(p)$$

b. Obtenga el valor del monto de propina esperado por la persona que hace la entrega.

$$E[p]=-\int_{20}^{25}p\frac{2(20-p)}{125}dp+\int_{10}^{20}p\frac{2(20-p)}{125}dp=\frac{46}{3}=15.3u.m$$

Teorema

Si $Z = F_X(x)$ demuestre que $f_Z(z) = I_{[0,1]}(z)$.

Solución

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(F_X(x) \le z) = P\left\{F_X^{-1}\left[F_X(x)\right] \le F_X^{-1}(z)\right\} = P\left(X \le F_X^{-1}(z)\right) =$$

$$= F_X\left[F_X^{-1}(z)\right] = z$$

$$\rightarrow f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = 1 = I_{[0,1]}(z)$$

Simulación con variables aleatorias discretas

Sean $a_1 < a_2 < \dots$ los posibles valores de la v.a.d X, y sea la v.a.c $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$. Si $U < F(a_1) \rightarrow X = a_1$ para i>1, si $F(a_{i-1}) \le U < F(a_i), \rightarrow$ asignar $X = a_i$.

Ejemplo 6: Sea la siguiente función de probabilidad:

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2

Con los números aleatorios: 0.081, 0.100, 0.350, 0.820 y 0.990, halle una muestra de tamaño 5.

$$F(x) = \begin{cases} 0.0 & , \quad x < -2 \\ 0.1 & , \quad -2 \le x < -1 \\ 0.3 & , \quad -1 \le x < 0 \\ 0.5 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 0.8 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 1.0 & , \quad 2 \le x \end{cases}$$

x	f(x)	F(x)	U
-2	0.1	0.1	$[0.0;0.1)$
-1	0.2	0.3	$[0.1;0.3)$
0	0.2	0.5	$[0.3;0.5)$
1	0.3	0.8	$[0.5;0.8)$
2	0.2	1.0	$[0.8;1.0)$

$$0.081 < F(-2) = 0.1 \to X = -2$$
$$0.100 = F(-2) \le 0.1 < F(-1) = 0.3 \to X = -1$$
$$0.300 = F(-1) \le 0.35 < F(0) = 0.5 \to X = 0$$
$$0.800 = F(1) \le 0.82 < F(2) = 1 \to X = 2$$
$$0.800 = F(1) \le 0.99 < F(2) = 1 \to X = 2$$
$$\text{Muestra} = \{-2, -1, 0, 2, 2\}$$

Simulación con variables aleatorias de tipo continuo.

Sea X una v.a.c con distribución acumulada F y sea la v.a.c $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$. Hacer $U = F(x)$, resuelva para x, y asignar X=x.

Ejemplo 4: Suponga que los adelantos o atrasos, en minutos, de un Profesor para empezar su clase tiene como densidad $f(x) = \frac{2|x|}{41} I_{[-4,5]}(x)$. Halle las expresiones que permitan generar muestras del rango de X.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -4 & U \\ \int_{-4}^{x} -\frac{2t}{41} dt = \frac{16}{41} - \frac{x^2}{41}, & -4 \le x < 0 & \left[0, \frac{16}{41}\right) = [0, 0.390244) \\ \frac{16}{41} + \int_{0}^{x} \frac{2t}{41} dt = \frac{16}{41} + \frac{x^2}{41}, & 0 \le x < 5 & \left[\frac{16}{41}, 1\right) = [0.390244, 1) \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{16}{41} - \frac{x^2}{41} = U \to X = -\sqrt{16 - 41U} \quad , \quad 0 \le U < \frac{16}{41}$$
$$F(x) = \frac{16}{41} + \frac{x^2}{41} = U \to X = +\sqrt{41U - 16} \quad , \quad \frac{16}{41} \le U < 1$$

Ejemplo 5: Genere una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$, si 0.721, 0.023 y 0.684 es una muestra aleatoria de $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \to X = \mu + Z\sigma = 4 + 3Z$$

$F(z) = U \to Z = F^{-1}(U)$, pero F^{-1} no existe en forma cerrada, aunque se pueden hallar valores de Z con tablas, calculadoras o algún software.

$$Z_1 = F^{-1}(0.721) = 0.586 \to X_1 = 4 + 3(0.586) = 5.758$$
$$Z_2 = F^{-1}(0.023) = -1.995 \to X_2 = 4 + 3(-1.995) = -1.985$$
$$Z_3 = F^{-1}(0.684) = 0.479 \to X_3 = 4 + 3(0.479) = 5.437$$

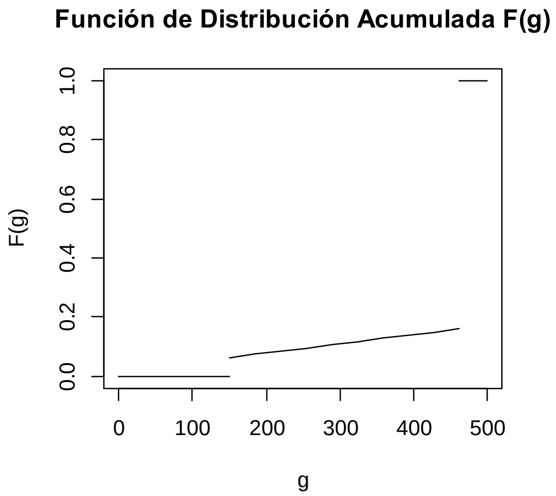
Ejemplo 7: La empresa "PanzaSexy" trabaja en el rubro que se dedica a bajar de peso a sus clientes. Esta empresa, con ayuda de un Ingeniero Estadístico Informático, ha establecido que el peso X en Kg que baja un cliente en determinado lapso tiene densidad $f(x) = \frac{x}{200} I_{(0,20)}(x)$. "PanzaSexy" cobra 462 soles por ese lapso y se compromete a lo siguiente. Si el cliente baja menos de 5 Kg le devuelve 312 soles, y si baja entre 5 y 8 Kg le devuelve $512 - 8x^2$ soles, y si baja más de 8 Kg no le devuelve nada. Con los números aleatorios 0.048, 0.062, 0.158, 0.162 genere una muestra aleatoria de la ganancia de la empresa por cliente.

$$f(x) = \frac{x}{200} I_{(0,20)}(x) \rightarrow F(x) = \frac{x^2}{400}$$

$$G = \begin{cases} 462 - 312 = 150 & , \quad x < 5 \\ 462 - \left(512 - 8x^2\right) = 8x^2 - 50 & , \quad 5 \le x \le 8 \\ 462 & , \quad x > 8 \end{cases}$$

$$F_G(g) = P(G \le g) = \begin{cases} 0 & , \quad g < 150 \\ P\left(8X^2 - 50 < g\right) = P\left(-\sqrt{\frac{g+50}{8}} < X < \sqrt{\frac{g+50}{8}}\right) = & \\ = P\left(0 < X < \sqrt{\frac{g+50}{8}}\right) = \int_0^{\sqrt{\frac{g+50}{8}}} \frac{x}{200} dx = \frac{g+50}{3200}, & 150 \le g < 462 \\ 1 & , \quad g \ge 462 \end{cases}$$

Gráfico 2



$$F_G(g) = \begin{cases} 0 & , \quad g < 150 \\ \frac{g+50}{3200}, & 150 \le g < 462 \\ 1 & , \quad g \ge 462 \end{cases}$$

Para la parte continua:

$$F_G(g) = \frac{g+50}{3200} = U \rightarrow g = 3200U - 50, \qquad \overset{U}{[0.0625, 0.16)}$$

Para la parte mixta

$$f_G(g) = \begin{cases} \dfrac{1}{16} & , \quad g = 150 \\ \dfrac{1}{3200} & , \quad 150 < g < 462 \\ \dfrac{21}{25} & , \quad g = 462 \\ 0 & , \quad \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$P(G=150) = \frac{200}{3200} - 0 = \frac{1}{16}$$

$$P(G=462) = 1 - \left[\frac{462+50}{3200}\right] = \frac{21}{25}$$

Para la parte discreta

$$F_G(g) = \begin{cases} & & \quad U \\ 0 & , \quad g < 150, & (-\infty, 0) \\ \dfrac{1}{16} = 0.0625 & , \quad 150 \le g < 462, & [0, 0.0625) \\ \underbrace{\dfrac{1}{16} + \int_{150}^{462} \dfrac{1}{3200}\, dg}_{0.16} + \dfrac{21}{25} = 1 & , \quad g \ge 462, & [0.16, 1) \\ 0 & , \quad \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\text{Muestra simulada} = \{150, 150, 455.6, 462\}$$

DISTRIBUCION DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Teorema

Sean X e Y variables aleatorias continuas, conjuntamente distribuidas con densidad $f_{X,Y}(x,y)$. Sean Z= X+Y y V= X-Y, entonces:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\, dy \quad \text{y}$$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, x-v)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(v+y, y)\, dy$$

Prueba de $f_V(v)$

Primera manera

$$F_V(v) = P(V \le v) = P(X - Y \le v) = \iint_{X - Y \le v} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{v+y} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

Hacemos: $x - y = t \Rightarrow x = t + y \Rightarrow dx = dt$

cuando: $\begin{cases} x \to -\infty \Rightarrow t \to -\infty \\ x = v + y \Rightarrow t = v \end{cases}$

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{v} f_{X,Y}(t+y,y)\,dtdy = \int_{-\infty}^{v}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t+y,y)\,dy\right]dt$$

$$f_V(v) = \frac{dF_V(v)}{dv} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(v+y,y)\,dy$$

Segunda manera

$$F_V(v) = P(V \le v) = P(X - Y \le v) = \iint_{X - Y \le v} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x-v}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dydx$$

Hacemos: $x - y = t \Rightarrow y = x - t \Rightarrow dy = -dt$

cuando: $\begin{cases} y = x - v \Rightarrow t \to v \\ y \to \infty \Rightarrow t = -\infty \end{cases}$

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{v}^{-\infty} -f_{X,Y}(x,x-t)\,dtdx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{v} f_{X,Y}(x,x-t)\,dtdx$$

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{v}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,x-t)\,dx\right]dt$$

$$f_V(v) = \frac{dF_V(v)}{dv} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,x-v)\,dx$$

DISTRIBUCION DEL PRODUCTO Y DEL COCIENTE

Teorema

Sean X e Y variables aleatorias continuas, conjuntamente distribuidas con densidad $f_{X,Y}(x,y)$. Sean Z= XY y U= X/Y, entonces:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_{X,Y}\left(x,\frac{z}{x}\right)\ dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|}f_{X,Y}\left(\frac{z}{y},y\right)\ dy \quad y$$

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f_{X,Y}(uy,y)\ dy$$

Prueba de $f_U(u)$

$$F_U(u)=P(U\le u)=P\left(\frac{X}{Y}\le u\right)=\iint_{\frac{X}{Y}\le u} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$\frac{x}{y}\le u\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } y<0\Rightarrow x\ge uy\ :\ R_1\\ \text{Si } y>0\Rightarrow x\le uy\ :\ R_2\end{cases}$$

$$R=R_1\cup R_2\Rightarrow\iint_R f_{X,Y}(x,y)dxdy=\iint_{R_1} f_{X,Y}(x,y)dxdy+\iint_{R_2} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$F_U(u)=\int_{-\infty}^{0}\int_{uy}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{uy} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

Haciendo: $\frac{x}{y}=t\Rightarrow x=ty\Rightarrow dx=ydt$

$$\text{Cuando}\begin{cases} y<0\Rightarrow\begin{cases}x=uy\Rightarrow t=u\\ x\to\infty\Rightarrow t\to-\infty\end{cases}\\ y>0\Rightarrow\begin{cases}x\to-\infty\Rightarrow t\to-\infty\\ x=uy\Rightarrow t=u\end{cases}\end{cases}$$

$$F_U(u)=\int_{-\infty}^{0}\int_{u}^{-\infty} f_{X,Y}(ty,y)(ydt)dy+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{u} f_{X,Y}(ty,y)(ydt)dy=$$

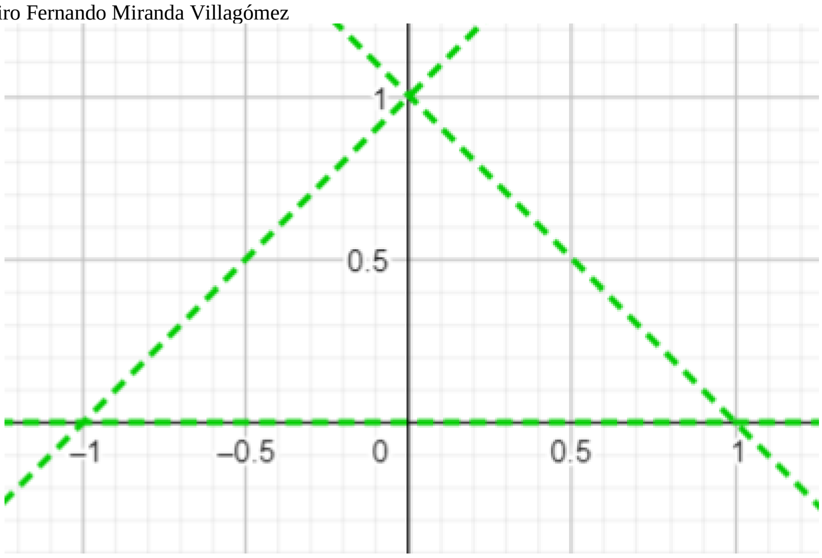
$$F_U(u)=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{u} -yf_{X,Y}(ty,y)dtdy+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{u} yf_{X,Y}(ty,y)dtdy=$$

$$F_U(u)=\int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{0} -yf_{X,Y}(ty,y)dy+\int_{0}^{\infty} yf_{X,Y}(ty,y)dy\right]dt$$

$$F_U(u)=\int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f_{X,Y}(ty,y)dy\right]dt$$

$$f_U(u)=\frac{dF_U(u)}{du}=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f_{X,Y}(uy,y)dy$$

Ejemplo 8: Bajo ciertas condiciones, al buscar aleatoriamente un punto (x, y) la densidad conjunta de X e Y es uniforme en el triángulo con vértices $(-1,0);(1,0)\ y\ (0,1)$. Esto puede modelar los adelantos o atrasos de una empresa de transporte X, y los atrasos de una empresa de transporte Y en decenas de minutos.

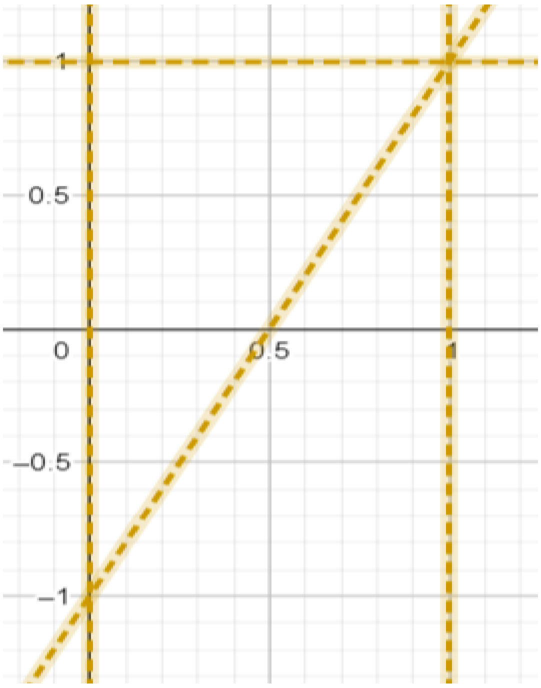


$$f(x,y)=k \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k\,dxdy=1$$

$$\int_{0}^{1}\int_{y-1}^{1-y} k\,dxdy=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1+x} k\,dydx+\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} k\,dydx=1 \qquad \Rightarrow k=1$$

$$f(x,y)=1 \qquad 0<y<1, y-1<x<1-y$$

Determine la densidad de X + Y



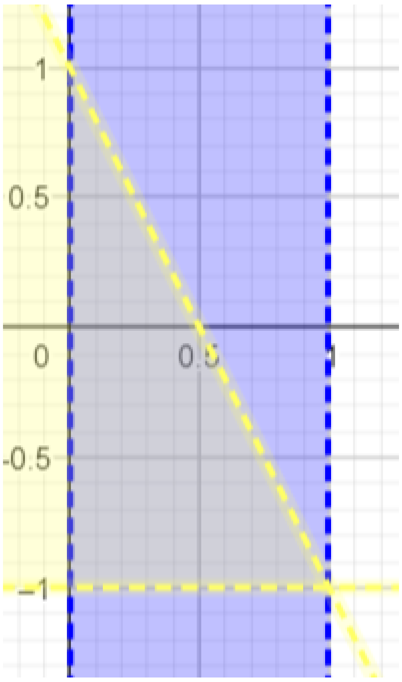
$$u=x+y \quad \Rightarrow x=u-y$$

$$y-1<x<1-y \qquad \Rightarrow 2y-1<u<1 \ , \ 0<y<1$$

$$f_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(u-y,y)\,dy$$

$$f_u(u) = \int_0^{\frac{u+1}{2}} 1dy = \frac{u+1}{2} I_{(-1,1)}(u)$$

Determine la densidad de X – Y



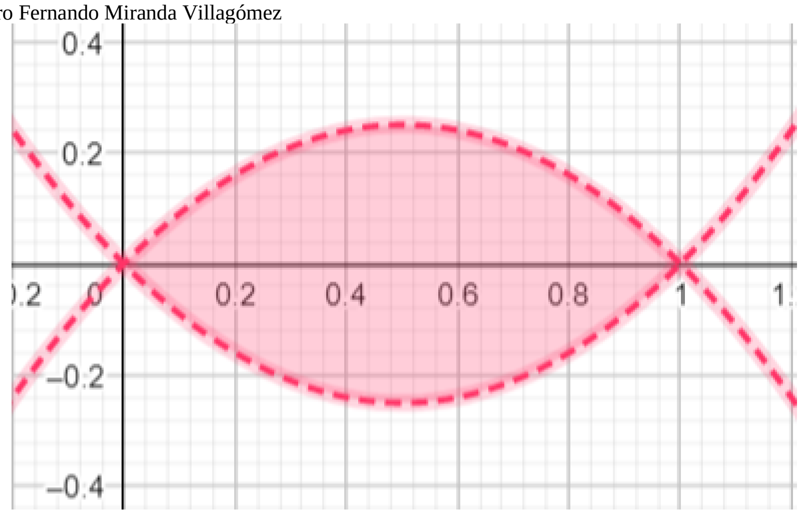
$$v = x - y \qquad \Rightarrow x = v + y$$

$$y - 1 < x < 1 - y \qquad \Rightarrow -1 < v < 1 - 2y\,, \qquad 0 < y < 1$$

$$f_v(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(v+y,y)\,dy$$

$$f_v(v) = \int_0^{\frac{1-v}{2}} 1dy = \frac{1-v}{2} I_{(-1,1)}(v)$$

Determine la densidad de X Y



$z = xy$

$y-1 < x < 1-y$

$(y-1)y < xy < (1-y)y$

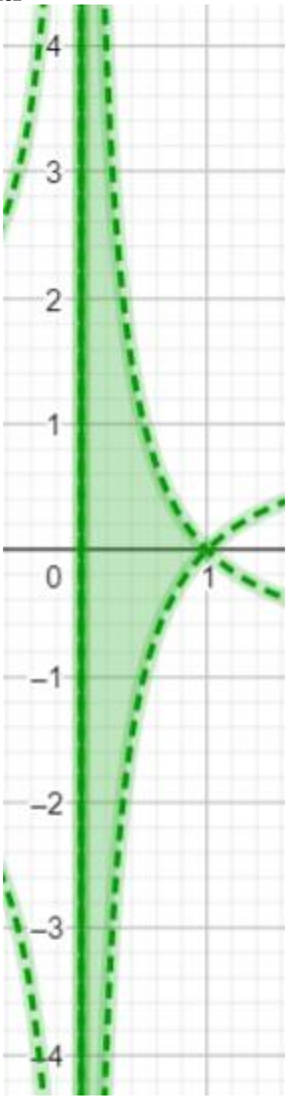
$y^2 - y < z < y - y^2 \quad , \quad 0 < y < 1$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_{X,Y}\left(\frac{z}{y}, y\right)\, dy$$

$$f_Z(z) = \int_{\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}} \frac{1}{y}.1dy I_{\left(-\frac{1}{4},0\right)}(z) + \int_{\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2}} \frac{1}{y}.1\ dy I_{\left(0,\frac{1}{4}\right)}(z)$$

$$f_Z(z) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{1-\sqrt{1+4z}}\right) I_{\left(-\frac{1}{4},0\right)}(z) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4z}}{1-\sqrt{1-4z}}\right) I_{\left(0,\frac{1}{4}\right)}(z)$$

Determine la densidad de X /Y



$U = X/Y \quad -\infty < U < \infty \quad y-1 < x < 1-y$

$$1-\frac{1}{y} < \frac{x}{y} < \frac{1}{y} - 1 \Rightarrow 1-\frac{1}{y} < U < \frac{1}{y} - 1 \quad , \quad 0 < y < 1 \Rightarrow$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \, f_{X,Y}(uy, y) \; dy$$

$$f_U(u) = \int_0^{\frac{1}{u+1}} y.1 \; dy I_{(0,\infty)}(u) + \int_0^{\frac{1}{1-u}} y.1 \; dy I_{(-\infty,0)}(u)$$

$$f_U(u) = \frac{1}{2(u+1)^2} I_{(0,\infty)}(u) + \frac{1}{2(1-u)^2} I_{(-\infty,0)}(u)$$

Ejemplo 9: Sea X la cantidad en mg de una vitamina 1 en 100 gr de tomate e Y la cantidad en mg de una vitamina 2 en 100 gr de tomate de cierta variedad. La densidad conjunta de X e Y es $f\left(x,y\right)=\frac{3xy}{81250},I_{(0,\infty)}\left(x\right)I_{(0,\infty)}\left(y\right)I_{(20,30)}\left(x+y\right)$. Determine la densidad del contenido total de estas dos vitaminas en 100 gr de esa variedad de tomate.

$$a=x+y$$
$$20<a<30$$
$$x=a-y$$
$$a-y>0\rightarrow a>y>0$$
$$g\left(a\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(a-y,y\right)dy=\int_{0}^{a}\frac{3\left(a-y\right)y}{81250}dy=\frac{a^3}{162500}I_{(20,30)}\left(a\right)$$

TECNICA DE LA TRANSFORMACION DE VARIABLES (JACOBIANO)

Con transformación uno a uno:
$g\left(y_1,\ldots,y_n\right)=f\left(w_1\left(y_1,\ldots,y_n\right),\ldots,w_n\left(y_1,\ldots,y_n\right)\right)\left|J\right| \quad \forall \quad \left(y_1,\ldots,y_n\right)\in B$ en donde:

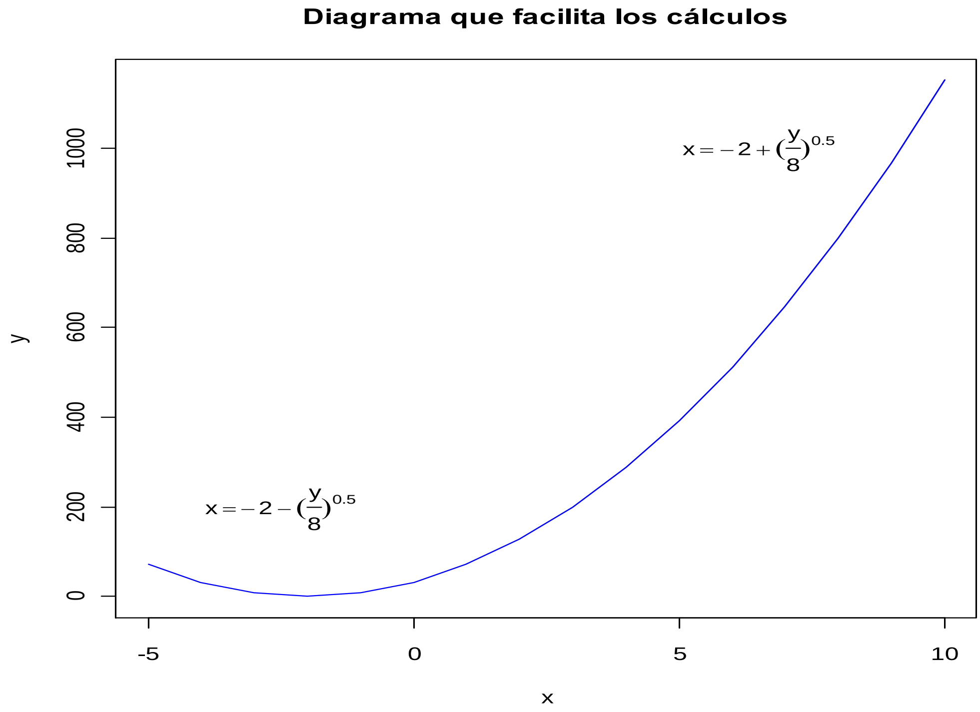
$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial y_2}\cdots & \frac{\partial X_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial y_2}\cdots & \frac{\partial X_2}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial X_n}{\partial y_1} & \frac{\partial X_n}{\partial y_2}\cdots & \frac{\partial X_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Nota: J se obtiene derivando las transformaciones inversas $\left(X_i\right)$ con respecto a las $\left(Y_i\right)$. Si se derivaran directamente las $\left(Y_i\right)$ con respecto a las $\left(X_i\right)$ se obtendría $J^*=\frac{1}{J}$

Ejemplo 1:
Una empresa vende comida en la modalidad de "delivery" y de acuerdo a la distancia de pedido la empresa ofrece llevarle la mercadería en determinado tiempo. Los adelantos o atrasos en minutos de la entrega tienen la siguiente función de densidad.

$$f_x\left(x\right)=\frac{2\left|x\right|}{125}I_{[-5,10]}\left(x\right)$$

Halle la densidad de $Y=8\left(X+2\right)^2$.
Solución



Gráf.21

$$J_1 = -\frac{1}{16}\left(\frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad J_2 = \frac{1}{16}\left(\frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g(y) = f\left(-2-\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left|-\frac{1}{16}\left(\frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}\right| I_{(0,72)}(y) + f\left(-2+\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left|\frac{1}{16}\left(\frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}\right| I_{(0,32)}(y) +$$

$$+ f\left(-2+\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left|\frac{1}{16}\left(\frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}\right| I_{(32,1152)}(y)$$

$$g(y) = \frac{2}{125}\left[2+\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{16}\left(\frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} I_{(0,72)}(y) + \frac{2}{125}\left[2-\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{16}\left(\frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} I_{(0,32)}(y) +$$

$$+ \frac{2}{125}\left[-2+\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{16}\left(\frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} I_{(32,1152)}(y)$$

$$g(y) = \frac{1}{1000}\left[1+2\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right] I_{(0,72)}(y) + \frac{1}{1000}\left[-1+2\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right] I_{(0,32)}(y) + \frac{1}{1000}\left[1-2\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right] I_{(32,1152)}(y)$$

$$g(y) = \frac{1}{250}\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}} I_{(0,32)}(y) + \frac{1}{500} I_{(32,72)}(y) + \frac{1}{1000}\left[1-2\left(\frac{y}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right] I_{(72,1152)}(y)$$

Ejemplo 2: Sea X la cantidad en mg de una vitamina 1 en 100 gr de tomate e Y la cantidad en mg de una vitamina 2 en 100 gr de tomate de cierta variedad. La densidad conjunta de X e Y es $f(x,y)=\dfrac{3xy}{81250},I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)I_{(20,30)}(x+y)$.

a. Determine la densidad del contenido total de estas dos vitaminas en 100 gr de esa variedad de tomate.

$a=x+y \qquad\qquad c=y$

Verificación de si es uno a uno la correspondencia

$¿h(k,l)=h(m,n)\Rightarrow k=m \quad , \quad l=n?$

$$(k+l,l)=(m+n,n)\Rightarrow \left\{\begin{matrix} k+l=m+n \\ l=n \end{matrix}\right\}\Rightarrow k+l=m+l\Rightarrow k=m \quad \text{y} \quad l=n$$

$\therefore$ La correspondencia es $1-1$

$a=x+y \qquad\qquad c=y$

$$x=a-c \qquad\qquad y=c\rightarrow J=\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{da} & \dfrac{dx}{dc} \\ \dfrac{dy}{da} & \dfrac{dy}{dc} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$A^*=\{(x,y)/\,x>0,\, y>0,\, 20<x+y<30\}$

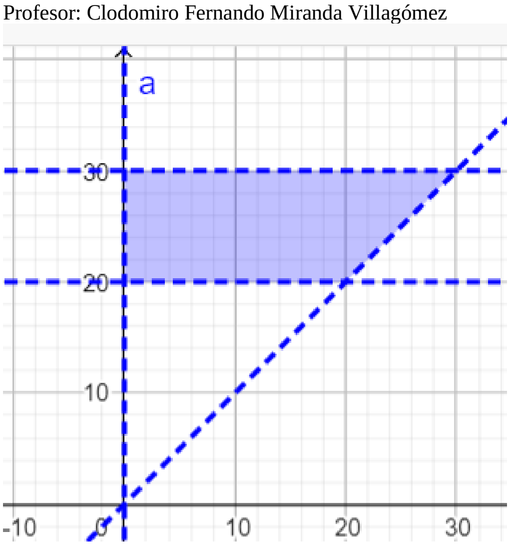
$20<a<30 \qquad\qquad 0<a-c \qquad\qquad c>0$

$a>c>0$

$B=\{(a,c)/\,20<a<30, a>c>0\}$

$$g(a,c)=f(a-c,c)|J|=\frac{3(a-c)c}{81250}|1|=\frac{3(a-c)c}{81250},(a,c)\in B$$

$$g(a)=\int_0^a \frac{3(a-c)c}{81250}dc=\frac{a^3}{162500}I_{(20,30)}(a)$$



b. Halle la densidad de $A = X - Y$.

$$a = x - y \qquad c = y$$

$$x = a + c \qquad y = c \to J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^* = \{(x, y) / x > 0,\ y > 0,\ 20 < x + y < 30\}$$

$$y > 0 \qquad x > 0 \qquad c > 0$$

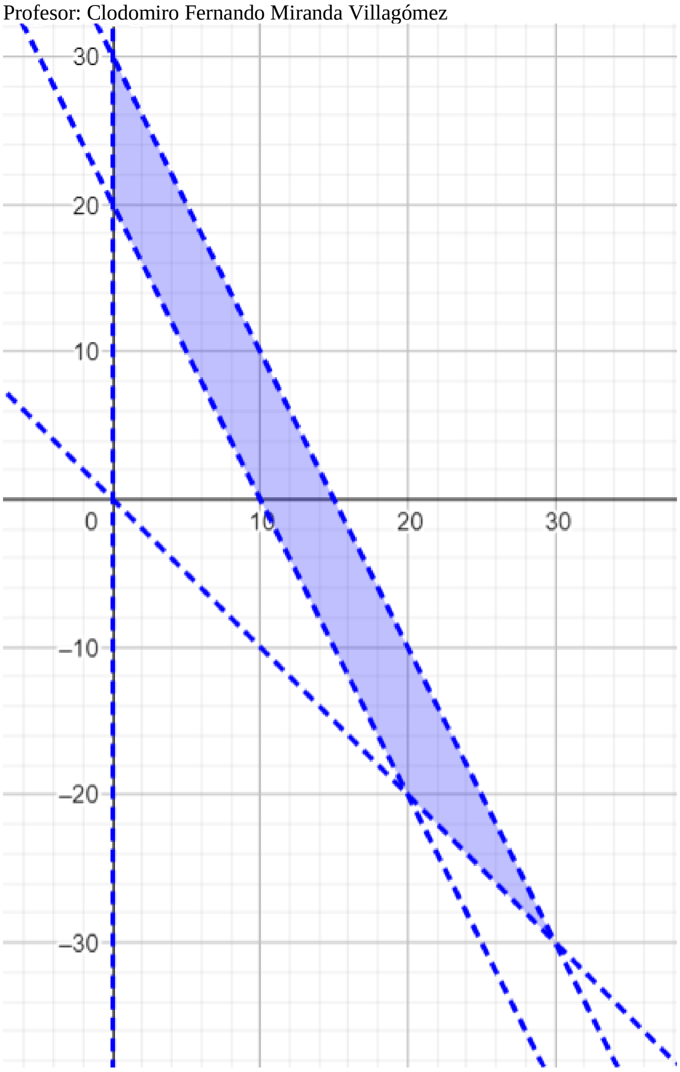
$$c > 0 \qquad 0 < a + c$$

$$a > -c$$

$$20 < x + y < 30 \to 20 < a + c + c < 30 \to 20 < a + 2c < 30,$$

$$B = \{(a, c) / 20 < a + 2c < 30, a > -c, c > 0\}$$

$$g(a, c) = f(a + c, c)|J| = \frac{3(a + c)c}{81250}|1| = \frac{3(a + c)c}{81250}, (a, c) \in B$$



$$g(a)=\int_{-a}^{\frac{30-a}{2}}\frac{3(a+c)c}{81250}dc\,I_{(-30,-20)}(a)+\int_{\frac{20-a}{2}}^{\frac{30-a}{2}}\frac{3(a+c)c}{81250}dc\,I_{(-20,20)}(a)+\int_{0}^{\frac{30-a}{2}}\frac{3(a+c)c}{81250}dc\,I_{(20,30)}(a)=$$

$$g(a)=\frac{(15-a)(a+30)^2}{325000}I_{(-30,-20)}(a)+\frac{(1900-3a^2)}{65000}I_{(-20,20)}(a)+\frac{(a-30)^2(a+15)}{325000}I_{(20,30)}(a)$$

c. Obtenga la densidad de $A=\frac{X}{Y}$

$$a = \frac{x}{y} \qquad c = y$$

$$x = ac \qquad y = c \rightarrow J = \begin{vmatrix} c & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = c$$

$$A^* = \{(x, y) / x > 0,\ y > 0,\ 20 < x + y < 30\}$$

$$x > 0 \qquad y > 0$$

$$ac > 0 \qquad c > 0$$

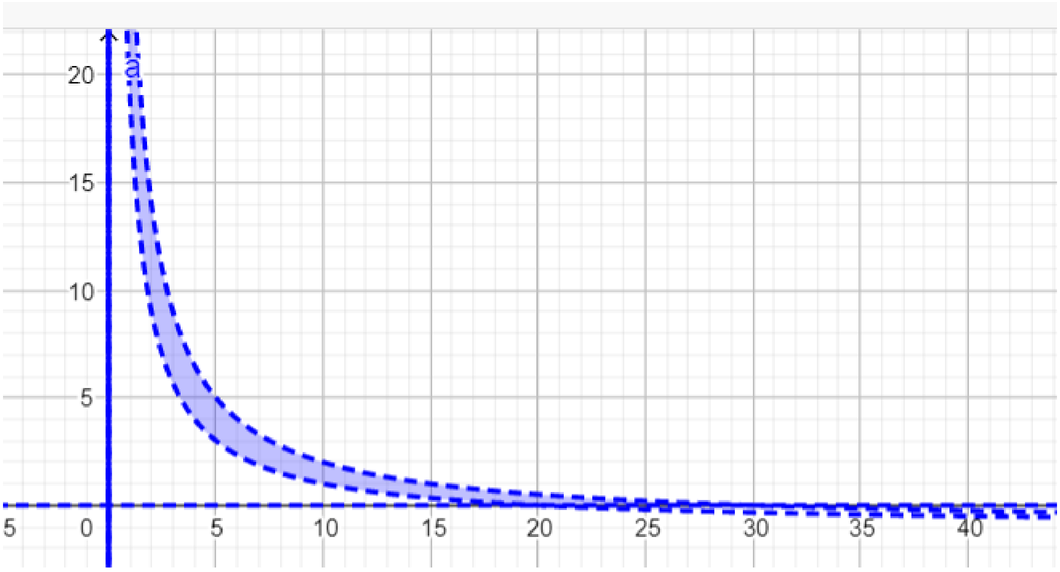
$$a > 0$$

$$20 < x + y < 30$$

$$20 < ac + c < 30$$

$$\frac{20}{c} < a + 1 < \frac{30}{c} \rightarrow \frac{20}{c} - 1 < a < \frac{30}{c} - 1$$

$$B = \left\{(a, c) / \frac{20}{c} - 1 < a < \frac{30}{c} - 1, a > 0, c > 0\right\}$$



$$g(a, c) = f(ac, c)|J| = \frac{3(ac)c}{81250}|c| = \frac{3ac^3}{81250}, (a, c) \in B$$

$$g(a) = \int_{\frac{20}{a+1}}^{\frac{30}{a+1}} \frac{3ac^3}{81250} dc = \frac{6a}{(a+1)^4} I_{(0,\infty)}(a)$$

Ejemplo 3: El tiempo de vida en meses de un paciente con una enfermedad terminal 1 tiene distribución $\text{Exponencial}\left(\text{con media } \frac{1}{\lambda_1}\right)$, el tiempo de vida en meses de un paciente con una enfermedad terminal 2 tiene distribución

$\text{Exponencial}\left(\text{con media } \dfrac{1}{\lambda_2}\right)$, el tiempo de vida en meses de un paciente con una enfermedad terminal 3 tiene distribución $\text{Exponencial}\left(\text{con media } \dfrac{1}{\lambda_3}\right)$, y el tiempo de vida en meses de un paciente con una enfermedad terminal 4 tiene distribución $\text{Exponencial}\left(\text{con media } \dfrac{1}{\lambda_4}\right)$.

a. Si se elige al azar e independientemente a un paciente con la enfermedad 1 y a un paciente con la enfermedad 2, halle la densidad del tiempo de vida total de los dos pacientes.

$$\left.\begin{array}{l} U = X_1 + X_2 \\ Z = X_2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} X_1 = U - Z \\ X_2 = Z \end{array}\right\} \rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A = \left\{\left(x_1, x_2\right) / \, 0 < x_1, x_2 < \infty\right\}$$

$$\begin{array}{lcl} 0 < u - z < \infty & \text{y} & 0 < z < \infty \\ -u < -z < \infty & \text{y} & 0 < z < \infty \\ -\infty < z < u & \text{y} & 0 < z < \infty \\ 0 < z < u & \text{y} & 0 < z < \infty \end{array}$$

$$B = \left\{\left(u, \text{z}\right) / \, 0 < z < u, 0 < z, 0 < u\right\}$$

$$f\left(x_1, x_2\right) = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2}, \left(x_1, x_2\right) \in A$$

$$g\left(u, z\right) = f\left(u - z, z\right)\left|J\right| = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1(u-z)} e^{-\lambda_2 z} \left|1\right| = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 u - (\lambda_2 - \lambda_1)z}, \left(u, \text{z}\right) \in B$$

$$g\left(u\right) = \int_0^u \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 u - (\lambda_2 - \lambda_1)z} dz = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 u} \int_0^u \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)z} dz = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 u}\left[-\frac{e^{-(\lambda_2-\lambda_1)z}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right]_0^u =$$

$$g\left(u\right) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[e^{-\lambda_1 u} - e^{-\lambda_1 u}\right] I_{(0,\infty)}\left(u\right)$$

Nota: Se dice que $X \sim \text{Hipoexponencial}\left(\lambda_i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ si se cumple que $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, donde $Y_i \sim \text{Exponencial}\left(\text{con media } \dfrac{1}{\lambda_i}\right)$.

b. Si se elige al azar e independientemente un paciente con la enfermedad 1, un paciente con la enfermedad 2, y un paciente con la enfermedad 3, halle la densidad del tiempo de vida total de los tres pacientes.

$$\left.\begin{array}{l} V = X_1 + X_2 + X_3 = U + X_3 \\ Z = X_3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} U = V - Z \\ X_3 = Z \end{array}\right\} \to J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A = \left\{ \left(u, x_3\right) / 0 < u, x_3 < \infty \right\}$$

$0 < v - z < \infty$ y $0 < z < \infty$

$-v < -z < \infty$ y $0 < z < \infty$

$-\infty < z < v$ y $0 < z < \infty$

$0 < z < v$ y $0 < z < \infty$

$$B = \left\{ \left(v, \text{z}\right) / 0 < z < v, 0 < z, 0 < v \right\}$$

$$f_1\left(u, x_3\right) = \left[\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 u} - e^{-\lambda_2 u} \right) \right] \times \left[\lambda_3 e^{-\lambda_3 x_3} \right], \left(u, x_3\right) \in A$$

$$g\left(v, z\right) = f_1\left(v - z, z\right)\left|J\right| = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{-\lambda_1 (v-z)} - e^{-\lambda_2 (v-z)} \right] e^{-\lambda_1 z} \left|1\right| =$$

$$g\left(v, z\right) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{-\lambda_1 v - (\lambda_3 - \lambda_1) z} - e^{-\lambda_2 v - (\lambda_3 - \lambda_2) z} \right], \left(v, z\right) \in B$$

$$g\left(v\right) = \int_0^v g\left(v, z\right) dz = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 u} \int_0^u \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_2 - \lambda_1) z} dz = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 u} \left[-\frac{e^{-(\lambda_2 - \lambda_1) z}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_0^u =$$

$$g\left(v\right) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{e^{-\lambda_1 v} - e^{-\lambda_3 v}}{\lambda_3 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 v} - e^{-\lambda_3 v}}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) I_{(0,\infty)}\left(v\right)$$

c. Si se selecciona independientemente a un paciente de cada una de las cuatro enfermedades, halle la densidad del tiempo de vida total de los cuatro pacientes. (Queda como ejercicio)

Respuesta $f_X\left(x\right) = \dfrac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \left(\dfrac{e^{-\lambda_3 x} - e^{-\lambda_4 x}}{\lambda_4 - \lambda_3} - \dfrac{e^{-\lambda_2 x} - e^{-\lambda_4 x}}{\lambda_4 - \lambda_2} \right) \\ -\dfrac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \left(\dfrac{e^{-\lambda_3 x} - e^{-\lambda_4 x}}{\lambda_4 - \lambda_3} - \dfrac{e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_4 x}}{\lambda_4 - \lambda_1} \right) \end{array} \right] I_{(0,\infty)}\left(x\right)$.

Ejemplo 4: Sea $U_1 \sim Unif\left(0,1\right)$ y $U_2 \sim Unif\left(0,1\right)$ dos variables aleatorias independientes. Si $X = \sqrt{-2\ln U_1}\, Cos\left(2\pi U_2\right)$ y $Y = \sqrt{-2\ln U_1}\, Sen\left(2\pi U_2\right)$, determine la densidad de X y la densidad de Y.

$$w_1 = -2\ln u_1 \quad u_1 = e^{-\frac{w_1}{2}} \quad J = \frac{-1}{2} e^{-\frac{W_1}{2}}$$

$$g(w_1) = f_{U_1}(e^{-\frac{w_1}{2}})\left|J\right| = \frac{1}{2} e^{-\frac{w_1}{2}} \qquad g(w_1) \sim \exp(\frac{1}{2})$$

$w_2 = 2\pi u_2 \qquad u_2 = \frac{w_2}{2\pi} \qquad J = \frac{1}{2\pi}$

$g(w_2) = f_{U_2}(\frac{w_2}{2\pi})\left|J\right| = \frac{1}{2\pi} \qquad g(w_2) \sim Unif(0, 2\pi)$

$g(w_1, w_2) = g(w_1)g(w_2) \qquad w_1 > 0 \;,\; 0 \le w_2 \le 2\pi$

$g(w_1, w_2) = \frac{1}{2}e^{-\frac{w_1}{2}}\frac{1}{2\pi}$

$x = \sqrt{w_1}\,Cos\left(w_2\right)$ y $Y = \sqrt{w_1}Sen\left(w_2\right)$

$$J^* = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w_1} & \frac{\partial x}{\partial w_2} \\ \frac{\partial y}{\partial w_1} & \frac{\partial y}{\partial w_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{w_1}}Cos\left(w_2\right) & -\sqrt{w_1}Sen\left(w_2\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{w_1}}Sen\left(w_2\right) & \sqrt{w_1}\,Cos\left(w_2\right) \end{vmatrix}$$

$$J^* = \left|\frac{1}{2}Cos^2\left(w_2\right) - (-\frac{1}{2}Sen^2\left(w_2\right))\right| = \frac{1}{2} \qquad J = \frac{1}{J^*} = 2$$

$x^2 + y^2 = w_1 \qquad \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = w_2$

$f(x, y) = g\left(x^2 + y^2, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\left|J\right|$

$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$

$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

$f(x, y) = f(x)f(y) \qquad \rightarrow \qquad X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(0,1)$

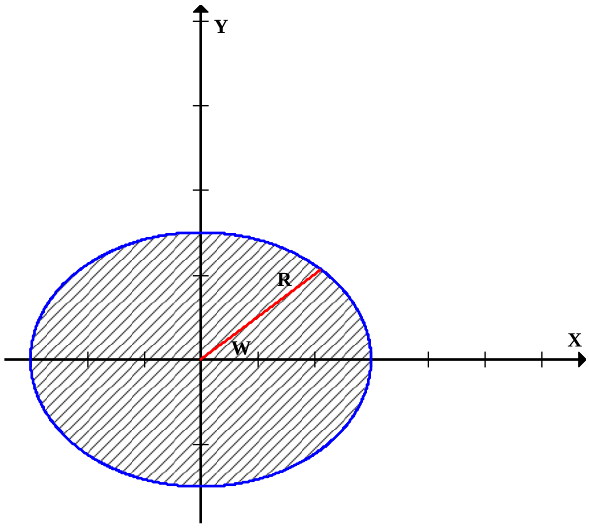
Ejemplo 5: $f\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = 24e^{-\sum_{i=1}^{4} z_i}$ $, 0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < \infty$ es la densidad conjunta de $Z_1, \ldots, Z_4$ y $D_1 = Z_1,\; D_2 = Z_2 - Z_1,\; D_3 = Z_3 - Z_2,\; D_4 = Z_4 - Z_3$. Halle la densidad de D_4.

$Z_1 = D_1$
$Z_2 = D_2 + D_1$
$Z_3 = D_2 + D_1 + D_3$
$Z_4 = D_2 + D_1 + D_3 + D_4$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial D_1} & \frac{\partial Z_1}{\partial D_2} \cdots \frac{\partial Z_1}{\partial D_4} \\ \frac{\partial Z_2}{\partial D_1} & \frac{\partial Z_2}{\partial D_2} \cdots \frac{\partial Z_2}{\partial D_4} \\ \vdots & \\ \frac{\partial Z_4}{\partial D_1} & \frac{\partial Z_4}{\partial D_2} \cdots \frac{\partial Z_4}{\partial D_n} \end{vmatrix} = 1$$

$$g(d_1,d_2,d_3,d_4) = f(d_1, d_2+d_1, d_2+d_1+d_3, d_2+d_1+d_3+d_4)|J|$$
$$g(d_1,d_2,d_3,d_4) = 24e^{-(4d_1+3d_2+2d_3+1d_4)}|1|$$
$$g(d_1,d_2,d_3,d_4) = (4e^{-4d_1})(3e^{-3d_2})(2e^{-2d_3})(1e^{-1d_4}) \qquad ,d_i>0, i=1,2,3,4$$
$$g(d_1,d_2,d_3,d_4) = g(d_1)g(d_2)g(d_3)g(d_4) \qquad \therefore D_4 \sim \exp(1)$$

Ejemplo 6: Si X e Y se distribuyen uniformemente en $A=\{(x,y)/x^2+y^2\leq 20\}$ halle la densidad de $R^2 = X^2+Y^2$.



$$f(x,y) = \frac{1}{Area} = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{20\pi}$$

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$
$$X = R\cos(W)$$
$$Y = Rsen(W)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial R} & \frac{\partial X}{\partial W} \\ \frac{\partial Y}{\partial R} & \frac{\partial Y}{\partial W} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(W) & -Rsen(W) \\ sen(W) & R\cos(W) \end{vmatrix} = R$$

$$g(r,w) = f(r\cos(w), rsen(w))|J| = \frac{R}{20\pi} \qquad ,0\leq r\leq \sqrt{20}, 0\leq w\leq 2\pi$$

$$g(r) = \int_0^{2\pi} \frac{R}{20\pi}dw = \frac{R}{10}$$

$$Z=R^2 \qquad J=\frac{1}{2\sqrt{Z}}$$

$$g_z(z) = g_r\left(\sqrt{z}\right)|J| = \frac{\sqrt{Z}}{10}\frac{1}{2\sqrt{Z}} = \frac{1}{20} \quad ,0\leq z\leq 20 \qquad \therefore Z=R^2 \sim Unif(0,20)$$

Ejemplo 7: Si T es tal que $f(t)=\frac{2t}{15}I_{(1,4)}(t)$ y W es independiente de T tal que $P(W=200)=0.8$ y $P(W=-5)=0.2$.

a. Halle la densidad de $X=WT$

$$X=WT\rightarrow x=200t, w=200\rightarrow 200<x<800\rightarrow t=\frac{x}{200}\rightarrow J_1=\frac{1}{200}$$

$$X=WT\rightarrow x=-5t, w=-5\rightarrow -20<x<-5\rightarrow t=-\frac{x}{5}\rightarrow J_2=-\frac{1}{5}$$

Por independencia:

$$g(w,t)=0.8\left(\frac{2t}{15}\right)I_{(1,4)}(t)I_{\{200\}}(w)+0.2\left(\frac{2t}{15}\right)I_{(1,4)}(t)I_{\{-5\}}(w)$$

$$f(x)=0.8\left[\frac{2}{15}\left(\frac{x}{200}\right)\right]\left|\frac{1}{200}\right|I_{(200,800)}(x)+0.2\left[\frac{2}{15}\left(-\frac{x}{5}\right)\right]\left|-\frac{1}{5}\right|I_{(-20,-5)}(x)$$

$$f(x)=\frac{x}{375000}I_{(200,800)}(x)-\frac{2x}{1875}I_{(-20,-5)}(x)$$

b. Obtenga la densidad de $X=W+T$

$$X=W+T\rightarrow x=200+t, w=200\rightarrow t=x-200\rightarrow J_1=1$$

$$X=W+T\rightarrow x=-5+t, w=-5\rightarrow t=x+5\rightarrow J_2=1$$

Por independencia:

$$g(w,t)=0.8\left(\frac{2t}{15}\right)I_{(1,4)}(t)I_{\{200\}}(w)+0.2\left(\frac{2t}{15}\right)I_{(1,4)}(t)I_{\{-5\}}(w)$$

$$f(x)=0.8\left[\frac{2}{15}(x-200)\right]|1|I_{(201,204)}(x)+0.2\left[\frac{2}{15}(x+5)\right]|1|I_{(-4,-1)}(x)$$

$$f(x)=\frac{8(x-200)}{75}I_{(201,204)}(x)+\frac{2(x+5)}{75}I_{(-4,-1)}(x)$$

Ejemplo 8: Suponga que el número de ríos X de la cuenca del Pacífico que se desbordan en el mes de marzo tiene la siguiente distribución $f_X(x)=0.1I_{\{5\}}(x)+0.3I_{\{8\}}(x)+0.6I_{\{10\}}(x)$.

Además, se sabe que la pérdida total Y en marzo, por huaicos, en um es tal que $f_Y(y)=\frac{(y-80)}{700}I_{[80,100]}(y)+\left[\frac{(150-y)}{1750}\right]I_{[100,150]}(y)$. Si se considera X independiente de Y. Halle la densidad de la pérdida, por río, en marzo.

Solución

$$Z=\frac{Y}{X}\rightarrow$$

$$z=\frac{Y}{5}, x=5\rightarrow[16<z<20]\cup[20<z<30]\rightarrow y=5z\rightarrow J_1=5$$

$$z=\frac{Y}{8}, x=8\rightarrow[10<z<12.5]\cup[12.5<z<18.75]\rightarrow y=8z\rightarrow J_2=8$$

$$z=\frac{Y}{10}, x=10\rightarrow[8<z<10]\cup[10<z<15]\rightarrow y=10z\rightarrow J_3=10$$

Por independencia:

$$f(x,y) = f(x)\,f(y) = 0.1 f_Y(y) + 0.3 f_Y(y) + 0.6 f_Y(y)$$

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0.1&\left[\frac{y-80}{700} I_{(80,100)}(y) + \frac{150-y}{1750} I_{(100,150)}(y)\right] I_{\{5\}}(x) + \\ 0.3&\left[\frac{y-80}{700} I_{(80,100)}(y) + \frac{150-y}{1750} I_{(100,150)}(y)\right] I_{\{8\}}(x) + \\ 0.6&\left[\frac{y-80}{700} I_{(80,100)}(y) + \frac{150-y}{1750} I_{(100,150)}(y)\right] I_{\{10\}}(x) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f_Z(z) = 0.1&\left[\frac{5z-80}{700} I_{(16,20)}(z) + \frac{150-5z}{1750} I_{(20,30)}(z)\right] |5| + \\ 0.3&\left[\frac{8z-80}{700} I_{(10,12.5)}(z) + \frac{150-8z}{1750} I_{(12.5,18.75)}(z)\right] |8| + \\ 0.6&\left[\frac{10z-80}{700} I_{(8,10)}(z) + \frac{150-10z}{1750} I_{(10,15)}(z)\right] |10| \end{aligned}$$

Ejemplo 9: $X_1,\ldots,X_n$ y $Y_1,\ldots,Y_m$ son dos muestras aleatorias independientes de distribuciones exponenciales con medias μ_X y μ_Y respectivamente. Si $\rho = \dfrac{\mu_X}{\mu_Y}$ demuestre que $U = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i + \rho \sum_{i=1}^{m} Y_i} \sim \text{Beta}(n,m)$ y por lo tanto es un Pivote (Se llama Pivote a la variable aleatoria que depende de un parámetro, en este caso ρ, y cuya distribución no depende del parámetro).

$$A = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{1}{\mu_X}\right)$$

$$B = \sum_{i=1}^{m} Y_i \sim \text{Gamma}\left(m, \frac{1}{\mu_Y}\right)$$

$$f_A(a) = \left(\frac{1}{\mu_X}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} a^{n-1} \exp\left(-\frac{1}{\mu_X} a\right) \text{ y } f_B(b) = \left(\frac{1}{\mu_Y}\right)^m \frac{1}{\Gamma(m)} b^{m-1} \exp\left(-\frac{1}{\mu_Y} b\right)$$

$$f_{A,B}(a,b) = \frac{a^{n-1} b^{m-1} \exp\left(-\frac{1}{\mu_X} a - \frac{1}{\mu_Y} b\right)}{\mu_X^n \mu_Y^m \Gamma(n)\Gamma(m)} I_{(0,\infty)}(a) I_{(0,\infty)}(b)$$

Sean: $u = \dfrac{a}{a+\rho b}$ y $v = a + \rho b$

Verificación de si es uno a uno la correspondencia

$$¿h(k,l)=h(m,n)\Rightarrow k=m \quad , \quad l=n?$$

$$\left(\frac{k}{k+\rho l},k+\rho l\right)=\left(\frac{m}{m+\rho n},m+\rho n\right)\Rightarrow\begin{cases}k+\rho l=m+\rho n\Rightarrow\dfrac{k}{k+\rho l}=\dfrac{m}{k+\rho l}\Rightarrow k=m\Rightarrow\\ k+\rho l=k+\rho n\Rightarrow \rho l=\rho n\Rightarrow l=n\end{cases}$$

$\therefore$ La correspondencia es $1-1$

$$a=uv \quad , \quad b=\frac{v-uv}{\rho}\Rightarrow J=\begin{vmatrix} v & u \\ -\dfrac{v}{\rho} & \dfrac{1-u}{\rho}\end{vmatrix}=\frac{v}{\rho}$$

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{(uv)^{n-1}\left(\dfrac{v-uv}{\rho}\right)^{m-1}\exp\left(-\dfrac{1}{\mu_X}uv-\dfrac{1}{\mu_Y}\left(\dfrac{v-uv}{\rho}\right)\right)}{\mu_X^n\mu_Y^m\Gamma(n)\Gamma(m)}\left|\frac{v}{\rho}\right|$$

Como $\rho=\dfrac{\mu_X}{\mu_Y}$

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{u^{n-1}(1-u)^{m-1}}{\mu_X^{n+m}\Gamma(n)\Gamma(m)}v^{n+m-1}\exp\left(-\frac{v}{\mu_X}\right)I_{(0,1)}(u)I_{(0,\infty)}(v)$$

Explicación del rango de la variable (U,V)

$a=uv$	$b=\dfrac{v-uv}{\rho}$
$0<a<\infty$	$0<b<\infty$
$0<uv<\infty$	$0<\dfrac{v-uv}{\rho}<\infty$
$0<v<\infty$	$0<v-uv<\infty$
	$-v<-uv<\infty$
	$-1<-u<\infty\Rightarrow-\infty<u<1\Rightarrow 0<u<1$

$$f_U(u)=\int_0^\infty\frac{u^{n-1}(1-u)^{m-1}}{\mu_X^{n+m}\Gamma(n)\Gamma(m)}v^{n+m-1}\exp\left(-\frac{v}{\mu_X}\right)dv=\frac{u^{n-1}(1-u)^{m-1}}{\mu_X^{n+m}\Gamma(n)\Gamma(m)}\int_0^\infty v^{n+m-1}\exp\left(-\frac{v}{\mu_X}\right)dv=$$

$$f_U(u)=\frac{u^{n-1}(1-u)^{m-1}}{\mu_X^{n+m}\Gamma(n)\Gamma(m)}\left\{\frac{\Gamma\left[(m+n-1)+1\right]}{\left(\dfrac{1}{\mu_X}\right)^{(m+n-1)+1}}\right\}$$

$$f_U(u)=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(n)\Gamma(m)}u^{n-1}(1-u)^{m-1}I_{(0,1)}(u)\Rightarrow U\sim\text{Beta}(n,m)$$

1. CUANDO NO EXISTE CORRESPONDENCIA UNO A UNO

$$g(y_1,\dots,y_n)=\sum_{i=1}^{k} f\big(w_{1i}(y_1,\dots,y_n),w_{2i}(y_1,\dots,y_n),\dots,w_{ni}(y_1,\dots,y_n)\,|J_i|\big)$$

Siendo $X_j = w_{ji}(y_1,\dots,y_n)$ las funciones de transformación inversa en el conjunto $A_i, \forall i=1,\dots,k$ y $j=1,\dots,n$ y:

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial w_{1i}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial w_{1i}}{\partial y_2} \cdots \dfrac{\partial w_{1i}}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial w_{2i}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial w_{2i}}{\partial y_2} \cdots \dfrac{\partial w_{2i}}{\partial y_n} \\ \vdots & \\ \dfrac{\partial w_{ni}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial w_{ni}}{\partial y_2} \cdots \dfrac{\partial w_{ni}}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

y para el resto de los puntos de A en donde la transformación es uno a uno sobre B se sigue el procedimiento dado para el caso de transformación uno a uno resultando en el caso menos complejo una expresión para $g(y_1,\dots,y_n)>0$.

Ejemplo 9: Si $f(x)=\dfrac{2(x+2)}{25}I_{(-2,3)}(x)$, determine la densidad de $Y=X^2$.

$A=\{x / -2<x<3\}$

$A^{\wedge}=\{x / -2<x<2\}$ No uno a uno

$A_1=\{x / -2<x<0\}$ $B_1=\{y / 0<y<4\}$ Uno a uno

$A_2=\{x / 0<x<2\}$ $B_2=\{y / 0<y<4\}$ Uno a uno

$A^{*}=A_1\cup A_2=\{x / -2<x<2, x\neq 0\}$

$$g(y)=\sum_{i=1}^{2} f\left[w_i(y)\right]|J_i| = f\left(-\sqrt{y}\right)\left|-\frac{y^{-1/2}}{2}\right| I_{(0,4)}(y)+f\left(\sqrt{y}\right)\left|\frac{y^{-1/2}}{2}\right| I_{(0,4)}(y)$$

$$g(y)=\frac{2\left(-\sqrt{y}+2\right)}{25}\left[\frac{y^{-1/2}}{2}\right]I_{(0,4)}(y)+\frac{2\left(\sqrt{y}+2\right)}{25}\left[\frac{y^{-1/2}}{2}\right]I_{(0,4)}(y)$$

$$g(y)=\frac{4y^{-1/2}}{25}I_{(0,4)}(y)$$

De otro lado:

$A_3=\{x / 2<x<3\}$ $B_3=\{y / 4<y<9\}$ Uno a uno. $\left[x=w_3(y)=\sqrt{y}\rightarrow J_3=\dfrac{y^{-1/2}}{2}\right]$

$$g(y)=\sum_{i=3}^{3} f\left[w_i(y)\right]\left|J_i\right|= f\left(\sqrt{y}\right)\left|\frac{y^{-1/2}}{2}\right| I_{(4,9)}(y)=\frac{2\left(\sqrt{y}+2\right)}{25}\left[\frac{y^{-1/2}}{2}\right] I_{(4,9)}(y)$$

$$g(y)=\frac{2y^{-1/2}+1}{25} I_{(4,9)}(y)$$

En conclusión:

$$g(y)=\frac{4y^{-1/2}}{25} I_{(0,4)}(y)+\frac{2y^{-1/2}+1}{25} I_{(4,9)}(y)$$

Ejemplo 10: $f(x,y)=\frac{x}{4} I_{(0,2)}(x) I_{(0,2)}(y)$ y sean $V=|X-Y|$ y $U=X+Y$.

a. Halle la densidad conjunta de U y V.

Verificación de si es uno a uno la correspondencia

$¿h(a,b)=h(c,d)\rightarrow a=c \quad , \quad b=d$?

$$\left(|a-b|,a+b\right)=\left(|c-d|,c+d\right)\rightarrow\begin{cases}|a-b|=|c-d|\\ a+b=c+d\end{cases}$$

Probando con: $a=0.4, b=0.2, c=0.2$ y $d=0.4$ se tiene:

$\left(|0.4-0.2|,0.4+0.2\right)=\left(|0.2-0.4|,0.2+0.4\right)\rightarrow(0.2,0.6)=(0.2,0.6)$ pero $a\neq c$ y $b\neq d$

Por lo tanto, la correspondencia no es uno a uno.

Hallemos la densidad conjunta de V y U

$V=|X-Y| \qquad U=X+Y$

$0<v<2 \qquad 0<u<4$

$A=\left\{(x,y)/\,0<x<2, 0<y<2\right\}$

Si $X-Y<0$

$$\left.\begin{matrix}v=-x+y\\ u=x+y\end{matrix}\right\}\rightarrow y=\frac{u+v}{2}\;,\; x=\frac{u-v}{2}\rightarrow J_1=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

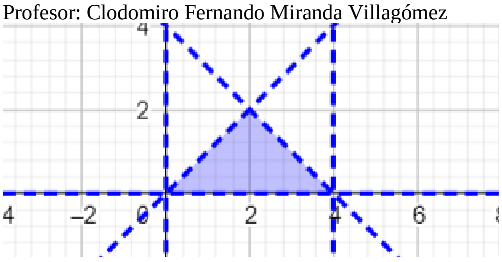
$A_1=\left\{(x,y)/\,x-y<0\,,\,0<x<2, 0<y<2\right\}$

$0<\frac{u-v}{2}<2 \qquad$ y $\qquad 0<\frac{u+v}{2}<2$

$0<u-v<4 \qquad$ y $\qquad 0<u+v<4$

$v<u<4+v \qquad$ y $\qquad -v<u<4-v$

$$B_1=\left\{(u,v)/\,v<u<\underset{4}{4+v}, \underset{0}{-v}<u<4-v, 0<v<2\right\}$$



Si $X - Y > 0$

$$\left.\begin{array}{l} v = x - y \\ u = x + y \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{u-v}{2},\ x = \frac{u+v}{2} \rightarrow J_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \{(x, y) / x - y > 0,\ 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$$

$$0 < \frac{u+v}{2} < 2 \qquad \text{y} \qquad 0 < \frac{u-v}{2} < 2$$

$$0 < u + v < 4 \qquad \text{y} \qquad 0 < u - v < 4$$

$$-v < u < 4 - v \qquad \text{y} \qquad v < u < 4 + v$$

$$B_2 = \left\{(u, v) / \underset{0}{-v} < u < 4 - v, v < u < \underset{4}{4 + v}, 0 < v < 2\right\}$$

Pero $B_1 = B_2 = B$

$$g(u, v) = \begin{cases} \dfrac{\frac{u-v}{2}}{4}\left|\frac{1}{2}\right| = \dfrac{u-v}{16},\ (u, v) \in B_1 \\ \dfrac{\frac{u+v}{2}}{4}\left|-\frac{1}{2}\right| = \dfrac{u+v}{16},\ (u, v) \in B_2 \end{cases}$$

Como $B_1 = B_2 = B \rightarrow g(u, v) = \dfrac{u}{8},\ (u, v) \in B$

b. Obtenga la densidad de $V = |X - Y|$.

$$g(v) = \int_{v}^{4-v} \frac{u}{8} du = \left(1 - \frac{v}{2}\right) I_{(0,2)}(v)$$

Ejemplo 11:

Pastizales o herbazales: Son aquellos ecosistemas donde predomina la vegetación herbácea. Estos ecosistemas pueden ser de origen natural constituyendo extensos biomas, o ser producto de la intervención humana con fines de la crianza de ganado o recreación. En cierta zona A altoandina de la sierra central peruana se consideró la variable temperatura que puede explicar la degradación de los pastizales altoandinos de la sierra central.

Sea X la temperatura en °C, a las 6 am, de un pastizal 1, e Y la temperatura en °C, a las 6 am, de un pastizal 2. Considere $f(x,y)=\frac{y}{64}I_{(-4,4)}(x)I_{(0,4)}(y)$. Obtenga la densidad de $Z=5Y-X^2$.

Solución

Sean $Z=5Y-X^2$ y $V=Y$

Hallemos la densidad conjunta de Z y V

$-16<z<20 \qquad\qquad 0<v<4$

$A=\{(x,y)/-4<x<4, 0<y<4\}$

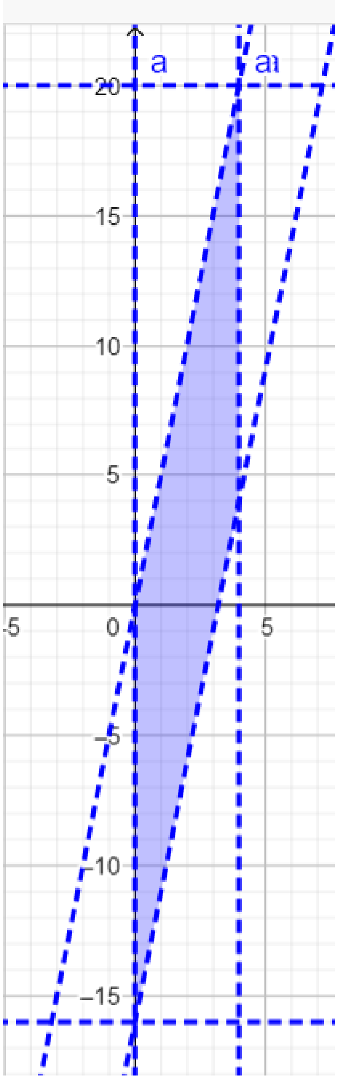
Si $x<0$

$$x=-\sqrt{5v-z} \;\;,\;\; y=v \rightarrow J_1=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}(5v-z)^{-\frac{1}{2}} & -\frac{5}{2}(5v-z)^{-\frac{1}{2}}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{5v-z}}$$

$$-4<-\sqrt{5v-z}<0 \rightarrow 0<5v-z<16 \rightarrow \frac{z}{5}<v<\frac{16+z}{5} \;\text{ y }\; 0<v<4$$

$A_1=\{(x,y)/-4<x<0 \;\;,\;\; 0<y<4\}$

$$B_1=\left\{(z,v)/-16<z<20 \;\;,\;\; \frac{z}{5}<v<\frac{16+z}{5} \;\;,\;\; 0<v<4\right\}$$



$$g(z,v) = f\left(-\sqrt{5v-z}, v\right)|J_1| = \frac{v}{128\sqrt{5v-z}}, (z,v) \in B_1$$

Si $x > 0$

$$x = \sqrt{5v-z} \ \ , \ y = v \to J_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(5v-z)^{-\frac{1}{2}} & \frac{5}{2}(5v-z)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{5v-z}}$$

$$0 < \sqrt{5v-z} < 4 \to 0 < 5v - z < 16 \to \frac{z}{5} < v < \frac{16+z}{5} \ \text{ y } \ 0 < v < 4$$

$$A_2 = \{(x,y) / 0 < x < 4 \ \ , \ \ 0 < y < 4\}$$

$$B_2 = \left\{(z,v) / -16 < z < 20 \ \ , \ \ \frac{z}{5} < v < \frac{16+z}{5} \ \ , \ \ 0 < v < 4\right\}$$

$$g(z,v) = f\left(\sqrt{5v-z}, v\right)|J_2| = \frac{v}{128\sqrt{5v-z}}, (z,v) \in B_2$$

Pero $B_1 = B_2 = B$

$$g(z,v)=\frac{v}{64\sqrt{5v-z}},(z,v)\in B\rightarrow$$

$$g(z)=\int_{0}^{\frac{16+z}{5}}\frac{v}{64\sqrt{5v-z}}\,dvI_{(-16,0)}(z)+\int_{\frac{z}{5}}^{\frac{16+z}{5}}\frac{v}{64\sqrt{5v-z}}\,dvI_{(0,4)}(z)+$$

$$+\int_{\frac{z}{5}}^{4}\frac{v}{64\sqrt{5v-z}}\,dvI_{(4,20)}(z)=$$

$$g(z)=\frac{32-6z-z\sqrt{-z}}{1200}I_{(-16,0)}(z)+\left(\frac{z}{200}+\frac{2}{75}\right)I_{(0,4)}(z)+\frac{(z+10)\sqrt{-z+20}}{1200}I_{(4,20)}(z)$$

TECNICA DE LA FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS (APLICABLE TAMBIEN AL CASO DISCRETO)

Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias continuas que se distribuyen conjuntamente mediante la siguiente función densidad $f(x_1,\ldots,x_n)$ sean las funciones de transformación $Y_j=h_j(X_1,\ldots,X_n),\forall j=1,\ldots,k$ luego si la función generatriz de momentos de $Y_1,\ldots,Y_k$ existe, es única, y está expresada por:

$$\varphi_{Y_1,\ldots,Y_k}(t_1,\ldots,t_k)=E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{k}y_it_i\right)\right]=R$$

Si R es igual a una determinada función generatriz de momentos de una distribución conocida, entonces se establece que $Y_1,\ldots,Y_k$ se distribuye según la distribución antes mencionada.

Ejemplo 1: Si $X\sim N(0,1)$ halle la densidad de $Y=X^2$.

$$\Psi_Y(t)=E\left(e^{tY}\right)=E\left(e^{tX^2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx^2}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)}dx=$$

$$\Psi_Y(t)=\left[\sqrt{\frac{1}{1-2t}}\right]\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-2t}}}\right]e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{\sqrt{\frac{1}{1-2t}}}\right)^2}dx}_{N\left(0,\frac{1}{1-2t}\right)}=\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}}\rightarrow Y\sim\chi^2(1)$$

Ejemplo 2: El número de accidentes de tránsito por día que ocurren en los distritos peruanos tiene distribución Poisson con media μ_i. Si se seleccionan independientemente n distritos peruanos, halle la función de probabilidad de $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$\Psi_Y(t)=E\left(e^{tY}\right)=E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)=E\left[e^{tX_1}\ldots e^{tX_n}\right]=E\left[e^{tX_1}\right]\ldots E\left[e^{tX_n}\right]$$

$$\Psi_Y(t)=\left\{\exp\left[\mu_1\left(e^t-1\right)\right]\right\}\ldots\left\{\exp\left[\mu_n\left(e^t-1\right)\right]\right\}=\exp\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right]\left(e^t-1\right)\right\}$$

$$\therefore \quad Y=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)$$

Ejemplo 3: Sean $X_1,\ldots,X_{11}$ variables aleatorias independientes tales que X_j tiene distribución acumulada F_j continua y estrictamente creciente. Si $Y_j=F_j\left(X_j\right)$ calcule $P\left[-18.83<\sum_{j=1}^{11}\ln\left(1-Y_j\right)<-5.30\right]$**.**

$$W=-\ln(1-Y) \quad Y=1-e^{-W} \quad J=e^{-W}$$

$$g(w)=f_Y(1-e^{-w})\left|J\right|=e^{-w} \quad W\sim\exp(1)$$

$$Z=\sum_{i=1}^{11} W_i \qquad Z\sim\text{Gamma}(11,1)$$

$$S=2(1)Z$$

$$\psi_S(t)=E(e^{2(1)Z})=\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{22}{2}} \qquad S\sim X^2{}_{22}$$

$$P\left[2(1)5.30<\chi^2_{(22)}<2(1)18.83\right]$$

$$P\left[10.6<\chi^2{}_{22}<37.66\right]$$

$$P\left[\chi^2{}_{22}<37.66\right]-P\left[\chi^2{}_{22}<10.6\right]=0.98-0.02=0.96$$

Ejemplo 4: Suponga que X_1, X_2 y X_3 es una muestra aleatoria de una distribución exponencial con media $\frac{1}{2}$ y que 0.168, 0.457 y 0.878 es una muestra de una distribución Uniforme$(0,1)$. Halle una muestra aleatoria de tamaño 1 de la distribución de $Y=\sum_{i=1}^{3} X_i$.

$$F\left(x_i\right)=1-e^{-2x_i} \rightarrow 1-e^{-2x_i}=U_i \rightarrow x_i=F^{-1}\left(U_i\right)=-\frac{\ln\left(1-U_i\right)}{2} \quad i=1,2,3$$

$$\rightarrow Y=\sum_{i=1}^{3} X_i=\sum_{i=1}^{3}-\frac{\ln\left(1-U_i\right)}{2}=-\frac{1}{2}\ln\prod_{i=1}^{3}\left(1-U_i\right)$$

$$Y=-\frac{1}{2}\ln\left(1-0.168\right)\left(1-0.457\right)\left(1-0.878\right)=1.4492$$

Ejercicios

1. Si X = Nº de clientes que ingresan a una librería hasta que se haga la quinta compra y se sabe que el 80% de los clientes compran. Halle la densidad de $Y=9X^2-5X-6$.
2. Con base a datos anteriores se conoce que el 80% de los casos de rescate en las playas, durante el verano, se debe al consumo de bebidas alcohólicas. Si se define la v.a X como el número de rescates que tendrán como causa las bebidas alcohólicas en los próximos cuatro rescates:
   a. Halle la función de probabilidad de $W=16\left(X-2\right)^2$.
   b. Con los números aleatorios 0.0016, 0.0200, 0.1000, 0.8822 determine la muestra aleatoria de tamaño 4 para X.
3. Una compañía de seguros proporciona servicios a varios clientes quienes le han comprado tanto seguro para sus casas como para sus automóviles. Por cada tipo de póliza debe especificarse una cantidad deducible. Para el caso de una póliza de automóvil, las opciones son \$100 y \$200, mientras que para una póliza de casas las opciones son \$0, \$100 y \$200. Suponga que una persona con ambos tipos de póliza se selecciona al azar y se define como X a la cantidad deducible sobre la póliza del automóvil y como Y a la cantidad deducible sobre la póliza de la casa. La función de probabilidad conjunta de X e Y es:

f(x,y)		y		
		0	**100**	**200**
x	**100**	0.08	0.24	0.34
	200	0.09	0.21	0.04

Calcule la covariancia de $\left|X-Y\right|$ y $X-Y$.

4. En la Reserva Nacional Pacaya Samiria con una muestra de 100 lobos de río madres se contabilizó el número de crías que han tenido en dos partos, obteniéndose la variable X definida como el número de crías que han tenido en el primer parto, e Y el número de crías que tuvieron en el segundo parto:

		X		
		1	**2**	**3**
Y	**1**	0	1	2
	2	2	20	22
	3	3	38	12

a. Halle la función de probabilidad conjunta del número de crías promedio de los dos partos y el número de crías máximo de los dos partos.
b. Con los números aleatorios 0.0158, 0.4897 y 0.9878 obtenga una muestra aleatoria del promedio de crías en dos partos.

5. La Ingeniera Chabuca Granda ha determinado que para el abastecimiento de lechuga americana de Lima Metropolitana y el Callao, el 19% proviene de Canta, y el 81% de otras ciudades. Si se consideran los tres próximos camiones que llegarán independientemente con lechuga americana para abastecer a Lima Metropolitana y el Callao, y se define la variable aleatoria X como el número de camiones que llegan de Canta y como Y el número de camiones que llegan de Canta considerando sólo el primer y el tercer camión.
   a. Obtenga la densidad conjunta del $\min(X,Y)$ y el $\max(X,Y)$.
   b. Con los números aleatorios 0.531440, 0.905417 y 0.993141 halle una muestra aleatoria de tamaño 3 para el $\max(X,Y)$.

6. El gran mercado mayorista de Lima se abastece de papa, principalmente de las ciudades de Huánuco, Lima y Junín con el 44%, 35% y 21% respectivamente. Para los próximos dos camiones que van a llegar aleatoriamente de esas tres ciudades, con papa, al gran mercado mayorista de Lima se define la variable aleatoria X como el número de camiones provenientes de Huánuco, e Y el número de camiones provenientes de Lima.
   a. Obtenga la densidad conjunta del $\min(X,Y)$ y el $\max(X,Y)$.
   b. Con los números aleatorios 0.531440, 0.905417 y 0.993141 halle una muestra aleatoria de tamaño 3 para el $\min(X,Y)$.
   c. Halle la función de probabilidad conjunta del máximo entre hijos varones e hijas y el total de hijos que tiene una familia.
   d. Si 0.002 y 0.897 son valores aleatorios de una distribución $\text{Uniforme}(0,1)$ obtenga una muestra de tamaño dos del máximo entre hijos varones e hijas.

7. En los días de Navidad y Año Nuevo se hizo un estudio de los accidentes automovilísticos en los que un niño, de menos de 5 años de edad, estaba en un auto accidentado. El estudio se concentró en si el niño no sobrevivió (variable X que toma el valor 1 si no sobrevivió y 0 si sobrevivió) y el número de acompañantes ebrios con los que iba el niño (variable Y con valores 0, 1, 2, 3 y 4). Se consideraron autos con capacidad para 5 personas. Se sabe que la probabilidad de que un niño sobreviva a un accidente es 0.2, y que la probabilidad de que ocurra un accidente con las características descritas es directamente proporcional al número de personas ebrias que acompañan al niño.

   a. Halle la función de probabilidad conjunta $Z_1 = \dfrac{X+Y}{2}$ y $Z_2 = \min(X,Y)$.

   b. Con los números aleatorios 0.0016, 0.0200, 0.7884, 0.8822 determine la muestra aleatoria de tamaño 4 para Z_1 .

8. Si el adelanto o retraso, en minutos, de un avión que viaja de Lima a Tarapoto tiene como densidad $f(x)=\dfrac{x+10}{160}I_{(-8,8)}(x)$ obtenga la igualdad que permite generar muestras al azar de esa distribución.

9. Si los adelantos o atrasos en minutos del primer bus del día de la UNALM tiene la siguiente función densidad $f(x)=\dfrac{2|x|}{45}I_{[-3,6]}(x)$.

   a. Halle la densidad del costo (en u.m) en combustible que es $C=5(x-1)^2$.

   b. Si 0.008, 0.174 y 0.914 es una muestra aleatoria de una distribución $\text{Uniforme}(0,1)$, obtenga una muestra aleatoria de tamaño 3 de X.

10. El tiempo de vida en años de un componente de una calculadora CASIO de última generación tiene densidad $f(x)=\dfrac{1}{4}I_{(0;0.5)}(x)+\dfrac{x}{5}I_{(0.5;2)}(x)+2e^{8-4x}I_{(2;\infty)}(x)$. Obtenga las igualdades que permitan hallar muestras aleatorias de esa distribución.

11. Para determinar el grado de inteligencia se mide el tiempo que tarda un ratón en recorrer un laberinto para encontrar la comida (estímulo). El tiempo (en segundos) que emplea un ratón es una v.a X con densidad $f(x)=\dfrac{4}{x^2}I_{(4,\infty)}(x)$, en donde el tiempo mínimo para recorrer el laberinto es 4 segundos. Obtenga una muestra aleatoria de 5 observaciones de esa distribución.

12. Bajo ciertas condiciones, al buscar aleatoriamente un punto (x,y) la densidad conjunta de X e Y es uniforme en el triángulo con vértices $(-2,5);(2,5)\ y\ (0,0)$. Determine la densidad de X – Y y halle la densidad de XY.

13. En los centros de acopio de Lima Metropolitana el precio por día P en soles, y la cantidad vendida por día Q en miles de kg de pollo en pie tienen la siguiente densidad conjunta $f(p,q)=\dfrac{p}{275},I_{(5,6)}(p)I_{(120,170)}(q)$. Halle la densidad del ingreso bruto diario A en los centros de acopio de Lima Metropolitana. Respuesta:
$$f_A(a)=\left[\frac{a}{33000}-\frac{1}{55}\right]I_{(600,720)}(a)+\frac{1}{275}I_{(720,850)}(a)+\left[\frac{6}{275}-\frac{a}{46750}\right]I_{(850.1020)}(a)$$

14. Sea P el precio de un producto (en dólares), y Q, las ventas totales (en unidades de 10000), con densidad conjunta $f(p,q)=\begin{cases}5pe^{-pq}, & 0.2<p<0.4,\quad q>0\\ 0 & ,\quad o.m\end{cases}$. Obtenga la densidad de la cantidad total de dinero que se gasta en ese producto (en unidades de 10000).

15. Sea X la cantidad de dinero (en nuevos soles) que un agente de ventas gasta en gasolina durante un día de trabajo e Y la cantidad de dinero (en nuevos soles) que la empresa le reembolsa al final de cada día de trabajo. La densidad conjunta de estas dos variables aleatorias es $f(x,y)=\dfrac{4(30-x)}{225x}, \quad 15<x<30, \quad \dfrac{x}{2}<y<x$. Halle la densidad de la cantidad de dinero (en nuevos soles) que el agente de ventas posee al final de cada día de trabajo.

16. Una tienda de comida sana provee dos marcas diferentes de cierto tipo de grano. Sea X la cantidad en kilos de la marca A disponible y la variable Y la cantidad en kilos de la marca B disponible. Suponga que la densidad conjunta de X e Y es:

$$f(x,y)=\begin{cases} k\,x\,y, 0\le x, 0\le y, 40\le x+y\le 50 \\ 0 \quad , o.m \end{cases}$$

Halle el valor de k y luego la densidad de X-Y.

17. El Ingeniero Fernando de Szyszlo halló que la demanda X, que proviene de Huánuco, de papa en cientos de toneladas por día, e Y la demanda de papa procedente de Lima en cientos de toneladas por día tiene la siguiente densidad conjunta $f(x,y)=kx, I_{(0,\infty)}(x)\,I_{(0,\infty)}(y)\,I_{(5,20)}(x+y)$. Primero calcule el valor de k y luego determine:

    a. La densidad de la demanda total procedente de ambas ciudades.

    b. Con el número aleatorio 0.8221 halle una muestra aleatoria de tamaño uno para la demanda total proveniente de ambas ciudades.

    c. La densidad del exceso de demanda de papa de la ciudad de Huánuco respecto a Lima.

18. Se estudiaron las variables X definida como los atrasos en minutos para obtener la cantidad de vitamina 1 en 100 gr de melón, e Y definida como los adelantos o atrasos en minutos para obtener la cantidad de vitamina 2 en 100 gr de melón. La densidad conjunta de (X,Y) es $f(x,y)=\dfrac{5x}{128}, \; I_{[y^2,4]}(x)$.

    a. Con la técnica de la distribución acumulada obtenga la densidad de $Z=X+Y$.

    b. Con la técnica del Jacobiano obtenga la densidad de $Z=X-Y$.

    c. Halle la densidad conjunta de las variables de las preguntas a y b.

19. Suponga que la densidad conjunta de X_1 y X_2 es $f(x_1,x_2)=\dfrac{3}{2}$, $x_1^2 \le x_2 \le 1$, $0 \le x_1 \le 1$. Primero determine la densidad de: $Y = X_1 + X_2$ y luego deduzca la densidad de : $Y=\dfrac{X_2}{X_1}$.

20. Los bancos suelen invertir en dos negocios (I que tiene poco riesgo y II con mucho riesgo). Si X es la ganancia de un banco, en decenas de miles de dólares, en el negocio I e Y es la ganancia de un banco, en decenas de miles de dólares, en el negocio II. La densidad conjunta de X e Y es $f(x,y)=\dfrac{24x^2y}{40625},\ I_{\left(-\frac{y}{2},2y\right)}(x)I_{(0,5)}(y)$.
    a. Si el banco "DameTuPlata" invierte en ambos negocios halle la densidad de la ganancia total de ese banco.
    b. Si el banco "AhVienesPorLana" invierte en ambos negocios halle la densidad del exceso de ganancia en el negocio I con respecto al II.
    c. Halle la densidad conjunta de las variables de las preguntas a y b.

21. Suponga que R y U son v.as independientes tales que $U \sim Unif(0,1)$ y $f_R(x)=x\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)I_{[0,\infty)}(x)$. Si se define como $X = R\cos(2\pi U)$ e $Y = R\,sen(2\pi U)$, determine las densidades marginales de X e Y.

22. Sean X e Y variables aleatorias independientes, con distribución común $\text{Uniforme}(0,1)$, y sean $R=\sqrt{2\ln\left(\dfrac{1}{1-X}\right)}$ y $\Theta=\pi(2Y-1)$.

    a. Demuestre que $\Theta \sim \text{Uniforme}(-\pi,\pi)$ y que R tiene distribución Rayleigh con densidad $f_R(r)=re^{-\frac{r^2}{2}},I_{(0,\infty)}(r)$.

    b. Si se define $W_1 = R\cos\Theta$ y $W_2 = R\text{sen}\Theta$, demuestre que W_1 y W_2 son independientes con distribución común $\text{Normal}(0,1)$. **Nota**: Esto se utiliza en simulación de variables aleatorias independientes y normales, transformando números "pseudo aleatorios" que son variables aleatorias independientes y $\text{Uniforme}(0,1)$ que se generan por computadora.

    c. Si en 100 g de lima dulce el rendimiento de jugo tiene distribución $N(\mu=44,\sigma^2=1)$ y el pH es $N(\mu=5.5,\sigma^2=0.02)$. Si $X=0.258$ e $Y=0.784$ halle una muestra unitaria bidimensional de las variables rendimiento y pH.

23. Uno de los métodos para generar variables normales de variables uniformes se basa en el siguiente algoritmo:

    Paso 1: Generar U_1 y U_2 independientes y uniformes en (0,1)

Paso 2: Defina $V_1 = 2U_1 - 1$, $V_2 = 2U_2 - 1$

Paso 3: Si $V_1^2 + V_2^2 > 1$, volver al paso 1 y empezar de nuevo. Si $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$. Defina:

$$X_i = V_i \sqrt{-\frac{2\ln\left(V_1^2 + V_2^2\right)}{V_1^2 + V_2^2}} \quad , \quad i = 1, 2$$

Halle las densidades marginales de X_i , $i = 1, 2$

24. Suponga que X e Y son v.as normales estándar independientes. Si $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ y $\theta = Arctag\left(\frac{Y}{X}\right)$, determine la densidad de r y la densidad de θ y diga si son independientes.

25. 1. Un punto es generado en un disco unitario de la siguiente forma: El radio $R \sim Unif\left(0,1\right)$ y el ángulo $\theta \sim Unif\left(0, 2\pi\right)$ y es independiente de R. Si X e Y son las coordenadas rectangulares determine la densidad marginal de X.

26. Si $X \sim \text{Exponencial}\left(\text{con media } \frac{1}{\lambda_X}\right)$ e $Y \sim \text{Exponencial}\left(\text{con media } \frac{1}{\lambda_Y}\right)$ son independientes, halle la densidad de $Z = \frac{\lambda_X X}{\lambda_Y Y}$. Respuesta: $f_Z\left(z\right) = \frac{1}{\left(z+1\right)^2}$.

27. El error de medida (X = la diferencia entre la longitud registrada y la longitud verdadera) al aproximar al par más cercano hecho con una regla de precisión tiene distribución $\text{Unif}\left(-1,1\right)$. Determine la densidad del error total en la longitud combinada de tres piezas seleccionadas independientemente.

28. Suponga que entre las 3.00 am y las 3.30 am el número de camiones C procedentes de Huánuco para abastecer de papa al gran mercado mayorista de Lima puede ser 2, 3 y 4 con probabilidades 0.7, 0.2 y 0.1 respectivamente. En ese tiempo el abastecimiento por camión, A, en cientos de toneladas es tal que $f\left(a\right) = \frac{40a}{3} I_{(0.1,0.4)}\left(a\right)$. Considere que C es independiente de A.

    a. Halle la densidad del abastecimiento total entre las 3.00 y las 3.30 de un día.

    b. Obtenga el abastecimiento total promedio entre las 3.00 y las 3.30 de un día.

29. Demuestre que si $X \sim \text{Exponencial}\left(\text{Con media } \frac{1}{\lambda}\right)$ y $Y \sim \text{Bernoulli}\left(0.5\right)$ son independientes entonces $X\left(2Y-1\right) \sim \text{Laplace}\left(\mu = 0, \lambda^{-1}\right)$.

30. El tiempo en minutos que demora hacer el análisis de 100 gr de melón para obtener la cantidad de vitamina 3 es $X \sim \text{Exponencial}\left(\text{Con media } 10\right)$ y la variable Y se define como el número de porciones de 100 gr de melón donde la cantidad de vitamina 3 es mayor que 30 mg considerándose sólo una porción de 100 gr, y que el 50% de estas porciones tienen un contenido de vitamina 3 mayor que 30 mg. Estas variables son independientes.

    a. Determine la densidad de los adelantos o atrasos para evaluar la cantidad de vitamina 3 en 100 gr de melón que es $Z = X\left(2Y-1\right)$.

    b. Halle las expresiones que permiten obtener muestras de Z.

31. Con los asegurados a la Clínica San Felipe se estudió lo que ocurre con ciertas enfermedades que son causa de que un asegurado se interne. Se consideró la variable Y definida como el número de días que un asegurado estuvo internado y la variable X definida como el gasto diario, en miles de soles, que tiene que hacer el asegurado por su internamiento. Con el asesoramiento de un Ingeniero Estadístico e Informático se determinó que $f\left(y\right) = 0.6I_{\{3\}}\left(y\right) + 0.3I_{\{4\}}\left(y\right) + 0.1I_{\{5\}}\left(y\right)$ y $f\left(x\right) = \frac{x}{20}I_{[1.5\,,\,6.5]}\left(x\right)$. Calcule el gasto total esperado de un asegurado que se internará con alguna de las enfermedades consideradas.

32. Demuestre que si las variables aleatorias $X_1 \sim \text{Exponencial}\left(\text{Con media } \frac{1}{\lambda_1}\right)$ y $X_2 \sim \text{Exponencial}\left(\text{Con media } \frac{1}{\lambda_2}\right)$ son independientes entonces $\lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2 \sim \text{Laplace}\left(\mu = 0, \lambda = 1\right)$.

33. En Navidad y Año Nuevo los pirotécnicos y la basura incrementan la contaminación ambiental. La variable X_1 representa el incremento de una sustancia nociva 1 en el aire en Navidad y Año Nuevo, y la variable X_2 representa el incremento de una sustancia nociva 2 en el aire en Navidad y Año Nuevo. Si estas variables aleatorias son tales que $X_1 \sim \text{Exponencial}\left(\text{Con media } \frac{1}{\lambda}\right)$ y $X_2 \sim \text{Exponencial}\left(\text{Con media } \frac{1}{\lambda}\right)$ son independientes.

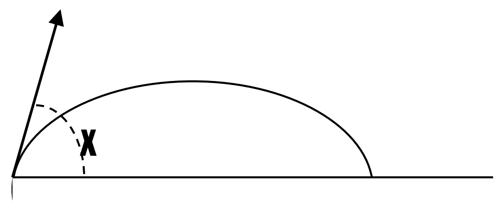
    a. Demuestre que la variable aleatoria $X_1 - X_2 \sim \text{Laplace}\left(\mu = 0, \lambda^{-1}\right)$.
    NOTA: Se dice que una va X tiene distribución Laplace si $f_X\left(x\right) = \dfrac{\exp\left[-\frac{\left|x-\mu\right|}{\lambda}\right]}{2\lambda}$.

    b. Halle las expresiones que permiten hallar las muestras aleatorias de $X_1 - X_2$.

34. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Demostrar que $\dfrac{X}{X+Y}$ tiene distribución Cauchy. ¿Cuáles son sus parámetros?
35. Demuestre que si $V \sim \text{Exponencial}(1)$ y $Z \sim N(0,1)$ son independientes entonces $X = \mu + \lambda Z\sqrt{2V} \sim \text{Laplace}(\mu,\lambda)$

36. Sea X una variable aleatoria con la siguiente función densidad $f(x) = (1+x)\, I_{(-1,0)}(x) + (1-x)\, I_{(0,1)}(x)$. Determine la densidad de $W = X^2 + 1$.

37. Un proyectil es lanzado con velocidad inicial μ y un ángulo X, donde $X \sim Unif\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Sea Y el rango del proyectil, esto es, la distancia entre el punto donde fue lanzado y el punto donde cae a tierra (Ver la figura). Asuma que el proyectil está sólo bajo el efecto de la fuerza gravitacional. Se conoce que $Y = \dfrac{1}{g}\mu^2\, sen(2X)$, donde g es la constante gravitacional. Asuma, sin pérdida de generalidad, que el proyectil fue lanzado del origen. Determine la densidad de Y.



38. Se envían dos centinelas a patrullar una carretera de 1 Km de longitud. Se les asigna a dos puntos escogidos al azar e independientemente a lo largo de la carretera. Calcule la probabilidad de que los centinelas estén alejados más de 0.8 Km cuando lleguen a los puestos señalados.

39. Cuando una pareja se separa o se divorcia y tienen hijos menores, por lo general el hombre hace un pago por alimentos mensual. X representa los adelantos o atrasos en meses de los pagos de alimentos en Comas, e Y representa los atrasos en meses de dicho pago en Breña. Si X e Y se distribuyen de acuerdo a la siguiente densidad conjunta $f(x,y) = \dfrac{y}{8} I_{(-2,2)}(x) I_{(0,2)}(y)$. Halle la densidad de $Z = |X| + Y$.

40. Sea X los adelantos o atrasos, en días, para tener su primer parto una ardilla grande, e Y los atrasos en días para tener su segundo parto. Considere $f(x,y) = \dfrac{y}{512} I_{(-8,8)}(x) I_{(0,8)}(y)$. Obtenga la densidad de $Z = X^2 - Y$.

41. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias i.i.d con densidad $N(0,1)$. Si $U = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$ y $V = \dfrac{(X_1 - X_2)^2}{2}$; primero obtenga la densidad conjunta de U y V y luego las densidades marginales de U y V.
42. Sea la v.a X definida como el tiempo de vida en años de una impresora y la v.a Y definida como el tiempo de vida de un escáner. Si $f(x,y) = \dfrac{x}{256} I_{(0,8)}(x) I_{(0,8)}(y)$.
    a. Obtenga la densidad conjunta de $|X - Y|$ y $(X + Y)$.
    b. Halle las densidades marginales de $|X - Y|$ y de $(X + Y)$.
43. Los jefes de los Departamentos de Estadística de dos empresas A y B suelen citarse los lunes entre las 10.00 y 10.20 horas. El tiempo de espera X del Jefe de la empresa A y el tiempo de espera Y del Jefe de la empresa B tienen como densidad conjunta a $f(x,y) = \dfrac{y}{4000} I_{[0,20]}(x) I_{[0,20]}(y)$.
    a. Halle la densidad de la diferencia de los tiempos de espera.
    b. Si los jefes acuerdan no esperarse más de 10 minutos, calcule la probabilidad de que el siguiente lunes no se encuentren.
44. Los proyectiles son lanzados al origen de un sistema de coordenadas xy. Suponga que el punto en el cual cae, digamos (X,Y), consiste de un par de v. as. independientes $N(0,\sigma^2)$. Para dos proyectiles lanzados independientemente uno del otro, (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) representan los puntos en los cuales caen y Z la distancia entre ellos. Encuentre la densidad de Z^2.
45. El ingeniero John Graunt estudió que la variable X que es el nivel de pH en el suelo para el crecimiento óptimo de zanahoria, e Y que es el nivel de pH para el crecimiento óptimo de cebolla. John halló que $X \sim \text{Normal}(\mu = 6.3, \sigma^2 = 0.24^2)$ e $Y \sim \text{Normal}(\mu = 6.4, \sigma^2 = 0.22^2)$ son independientes. Si Z_1 y Z_2 son las variables aleatorias anteriores estandarizadas. Haga la deducción de la densidad de $\dfrac{Z_1}{Z_2}$.
46. Si X e Y son los adelantos o atrasos de aviones, que siguen dos rutas, y son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad $N(0,\sigma^2)$. Obtenga la densidad conjunta de $R = X^2 + Y^2$, $S = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$.
47. Si X tiene como función densidad $f(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|} I_{(-\infty,\infty)}(x)$. Demuestre que $Y = X^2$ tiene como densidad $g(x) = \left(2\sqrt{y}\right)^{-1} e^{-\sqrt{y}} I_{(0,\infty)}(y)$.
48. Si la densidad de X es $f(x) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} I_{(0,\infty)}(x)$.

a. Determine la densidad de $Y_i = \ln\left(1+X_i\right)$, siendo $X_1,\ldots,X_n$ v.as independientes e idénticamente distribuidas.

b. Halle la densidad de $T = 2\theta\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

$Y = \ln\left(1+X\right) \quad X = e^Y - 1 \quad J = e^Y$

$g(y) = f(e^Y - 1)\left|J\right| = \theta e^{-\theta Y} \qquad Y \sim \exp(\theta)$

$Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad Z \sim Gamma(\theta, n)$

$T = 2(\theta)Z$

$$\psi_T\left(t\right) = E(e^{2(\theta)Z}) = \left(\frac{\theta}{\theta - 2\theta t}\right)^{\frac{2n}{2}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{2n}{2}} \qquad T \sim X^2{}_{2n}$$

49. En cada uno de 43 distritos de Lima $\left(D_1,\ldots,\mathrm{D}_{43}\right)$ se ha encontrado que el 58% de las parejas que se casaron se han separado. Si se seleccionan en forma independiente n_i , $i = 1, 2, \ldots, 43$ parejas que se van a casar de cada distrito, obtenga la función de probabilidad de la variable aleatoria X definida como el número de parejas total que se divorciarán en los 43 distritos.

50. Suponga que el número de billetes falsos que llegan a cierta agencia bancaria, durante un periodo de un día, tiene una distribución Poisson con media 4.5. Se toma una muestra aleatoria de cuatro días. Halle la probabilidad de que la media muestral tenga un valor de por lo menos 4.25 si se sabe que es menor de 4.75.

51. Si $X_1,\ldots,X_n$ son v.as. independientes tales que $X_i \sim Poisson\,(\mu_i), i = 1,...,n$ Obtenga la densidad de $X_1 + X_2 + ... + X_n$.

52. Si $X_1,\ldots,X_9$ es una m.a del tiempo de vida (en meses), de pacientes con cáncer avanzado de cuello uterino, que tiene distribución exponencial con media 5 meses. Halle el valor de k tal que $P\left(\bar{X} \le k\right) = 0.95$.

53. Se estudia el número de componentes electrónicos seleccionados hasta encontrar el tercer defectuoso. Se sabe que el porcentaje de componentes defectuosos en la población es 10%. Si $X_1,\ldots,X_5$ es una muestra aleatoria de la distribución en estudio calcule la $P\left(25 \le \bar{X} \le 25.4\right)$.

54. Suponga que en 100 g de lima naranja el contenido de sólidos solubles X tiene distribución $\text{Cauchy}\left(\mu_1 = 7.7, \lambda_1 = 0.04\right)$, y en 100 g de lima el contenido de sólidos solubles Y tiene distribución $\text{Cauchy}\left(\mu_2 = 9.8, \lambda_2 = 0.06\right)$. Si se va a realizar el análisis a una porción de 100 g de cada fruta, calcule la probabilidad

de que el contenido de sólidos solubles en lima exceda al de lima naranja en más de 1.8. Haga las demostraciones que se necesitan.

55. Sea $f(x)=\left(\frac{k}{\beta-\varepsilon}\right)\left(\frac{x-\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\right)^{k-1}\exp\left\{-\left(\frac{x-\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\right)^{k}\right\}I_{[\varepsilon,\infty)}(x)$ la densidad del tiempo mínimo que toma hacer un trabajo de manufactura. Si $X_1,\ldots,X_{18}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad $f(x)$ calcule $P\left(\sum_{i=1}^{18}(X_i-\varepsilon)^k \geq 0.159688\right)$, con $\beta=0.8$ $\varepsilon=0.6$ y $k=3$. Haga las demostraciones necesarias.

56. La densidad de X es $f_X(x)=\theta(1+x)^{-(1+\theta)}\ I_{(0,\infty)}(x)$. Si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a de esa distribución encuentre la densidad de $T=2\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i)\right)\theta$.

57. Sea $f(x)=\alpha e^{\alpha(x-\mu)}\exp\left\{-e^{\alpha(x-\mu)}\right\}I_{(-\infty,\infty)}(x)$ la densidad del costo mínimo, en miles de soles, por incendio en Navidad y Año Nuevo. Si $X_1,\ldots,X_{20}$ es una muestra aleatoria de $f(x)$, calcule $P\left(\sum_{i=1}^{20}e^{\alpha x_i}\geq 190162765.1\right)$, con $\alpha=0.8$ y $\mu=20$. Haga las demostraciones necesarias.

58. Si $X_1,\ldots,X_6$ es un m.a. de $f(x)=\frac{k}{\mu}\left(\frac{\mu}{x}\right)^{k+1}e^{-\left(\frac{\mu}{x}\right)^{k}}\ I_{[0,\infty[}(x)$ .Si $\mu=4$ y k=2 , halle $P\left(\sum_{i=1}^{6}X_i^{-k}<0.197\right)$. Justifique su respuesta.