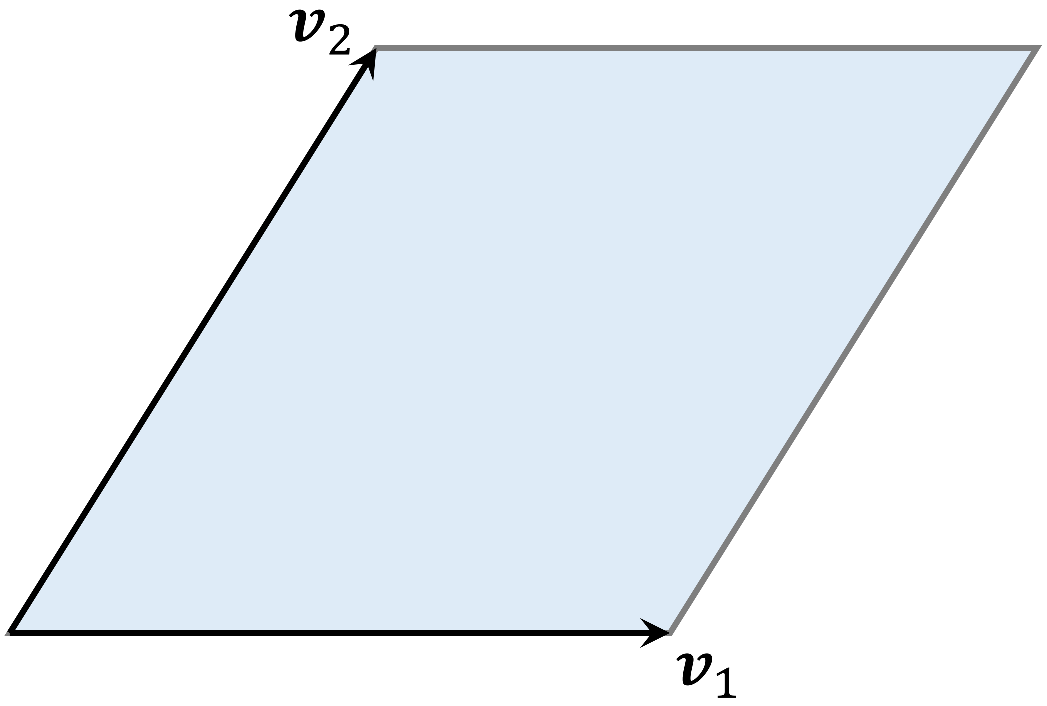
DPP：数学基础

王树森

超平行体

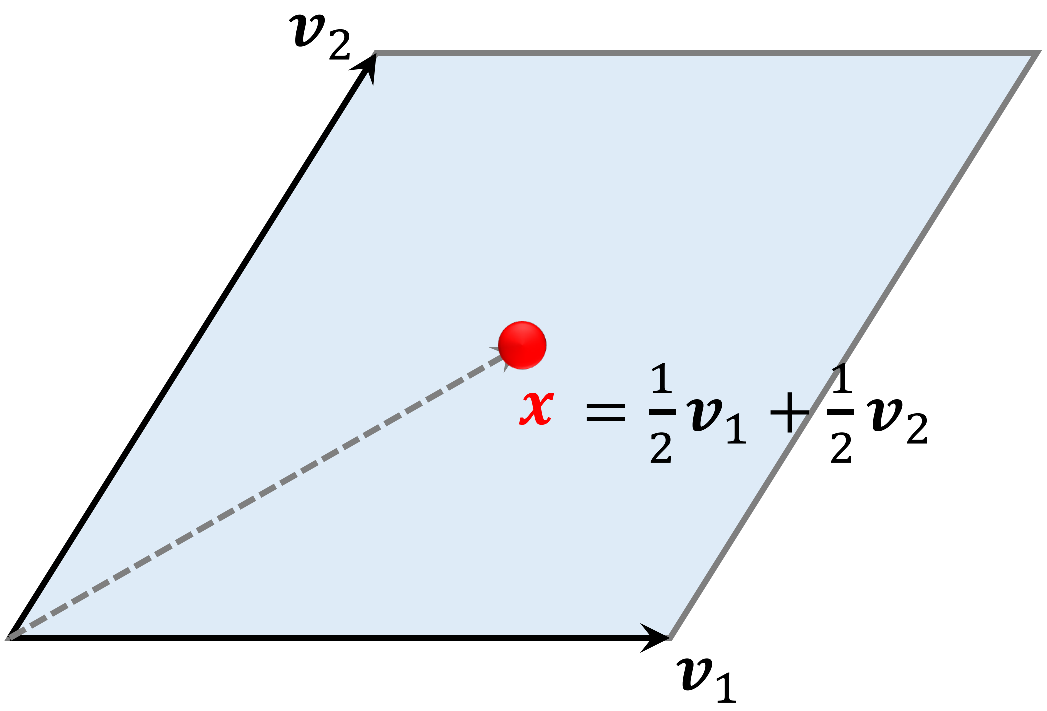


- 2 维空间的超平行体为平行四边形。
- 平行四边形中的点可以表示为：

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2.$$

- 系数 α_1 和 α_2 取值范围是 $[0, 1]$。

超平行体

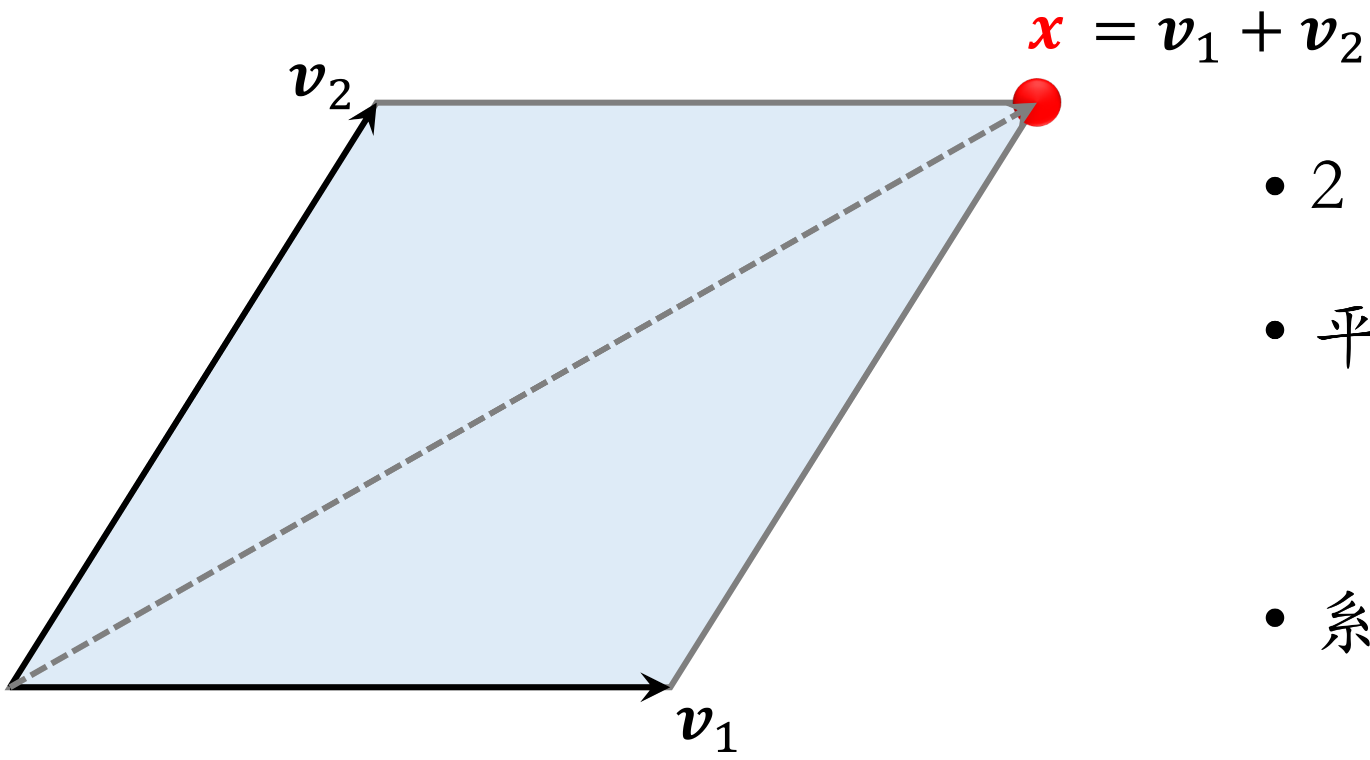


- 2 维空间的超平行体为平行四边形。
- 平行四边形中的点可以表示为：

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2.$$

- 系数 α_1 和 α_2 取值范围是 $[0,1]$。

超平行体

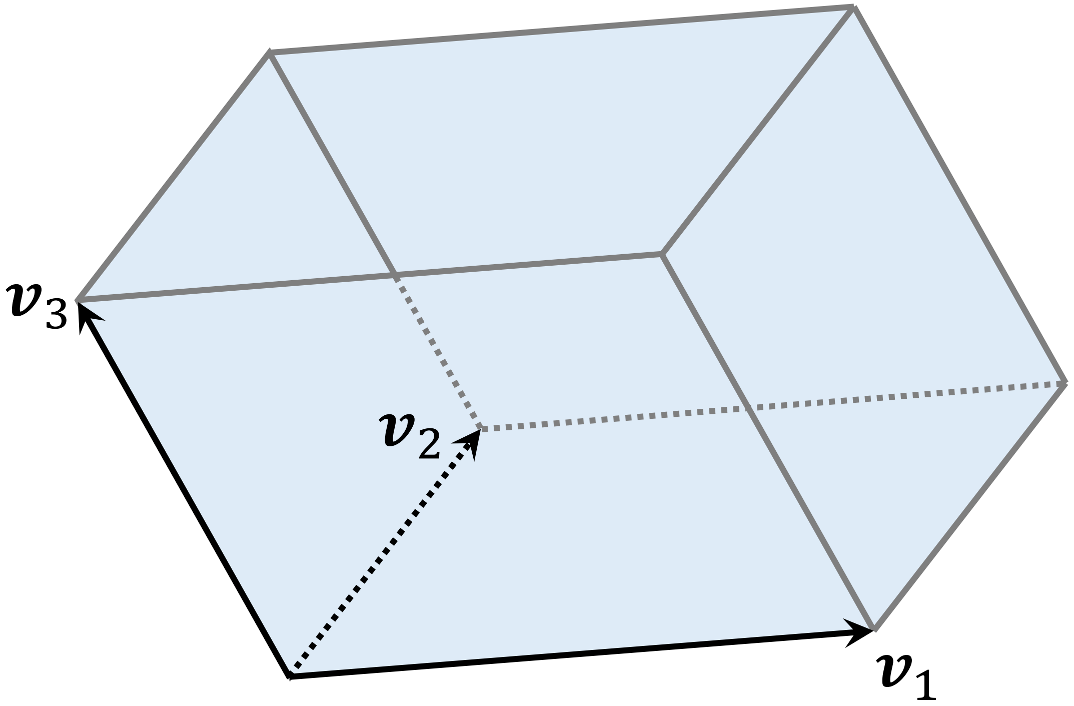


- 2 维空间的超平行体为平行四边形。
- 平行四边形中的点可以表示为：

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2.$$

- 系数 α_1 和 α_2 取值范围是 $[0, 1]$。

超平行体



- 3 维空间的超平行体为平行六面体。
- 平行六面体中的点可以表示为：

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{v}_3.$$

- 系数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 取值范围是 $[0, 1]$。

超平行体

- 一组向量 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^d$ 可以确定一个 k 维超平行体：

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k) = \{\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k \mid 0 \leq \alpha_1, \cdots, \alpha_k \leq 1\}.$$

超平行体

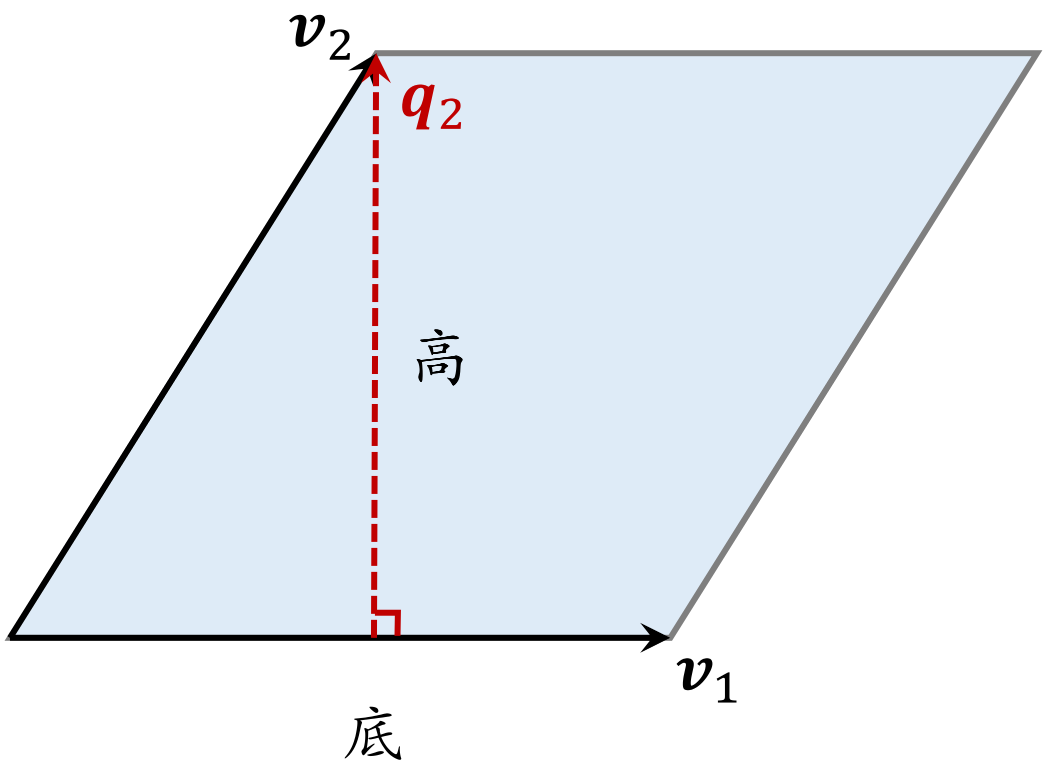
- 一组向量 $\boxed{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^d}$ 可以确定一个 k 维超平行体：

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k) = \{\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k \mid 0 \leq \alpha_1, \cdots, \alpha_k \leq 1\}.$$

- 要求 $k \leq d$，比如 $d = 3$ 维空间中有 $k = 2$ 维平行四边形。

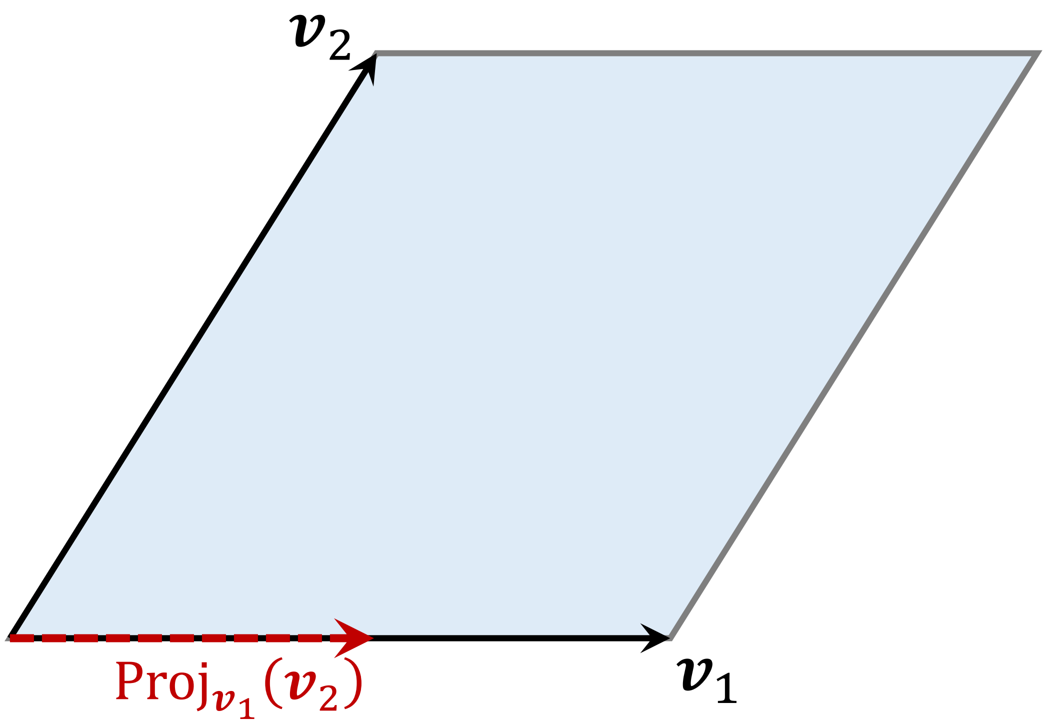
- 如果 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性相关，则体积 $\mathrm{vol}(\mathcal{P}) = 0$。（例：有 $k = 3$ 个向量，落在一个平面上，则平行六面体的体积为 0。）

平行四边形的面积



- 面积 $= \|底\|_2 \times \|高\|_2$。
- 以 $\boldsymbol{v}_1$ 为底，计算高 $\boldsymbol{q}_2$，两个向量必须正交。

平行四边形的面积

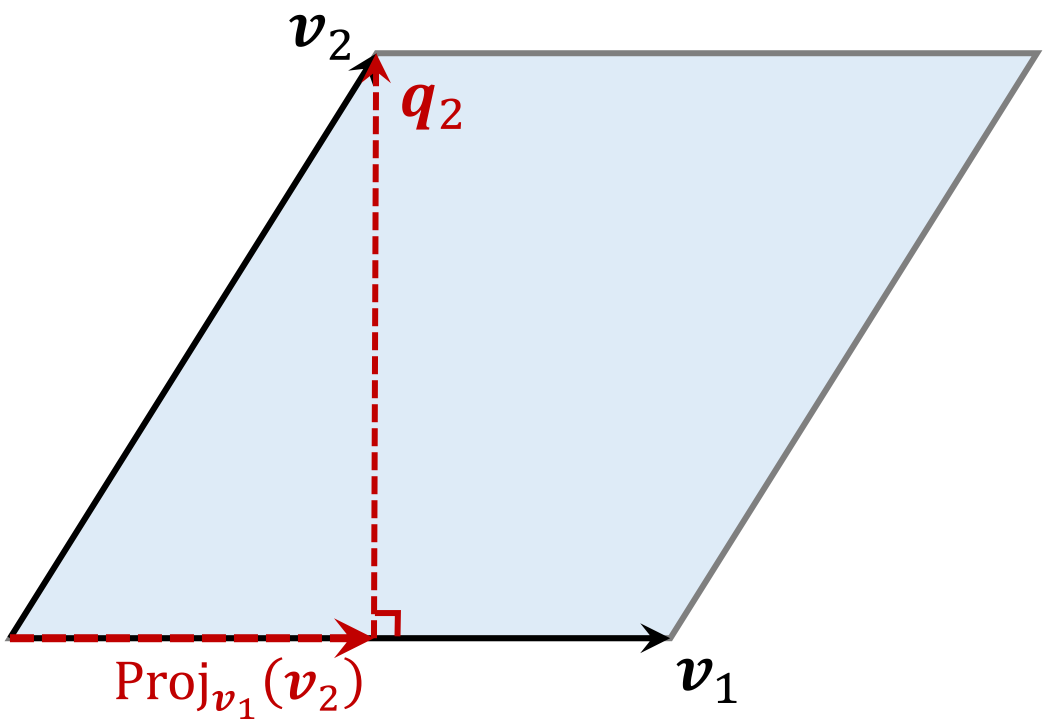


以 $\boldsymbol{v}_1$ 为底，如何计算高 $\boldsymbol{q}_2$?

- 计算 $\boldsymbol{v}_2$ 在 $\boldsymbol{v}_1$ 上的投影：

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}_1}(\boldsymbol{v}_2) = \frac{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} \cdot \boldsymbol{v}_1.$$

平行四边形的面积



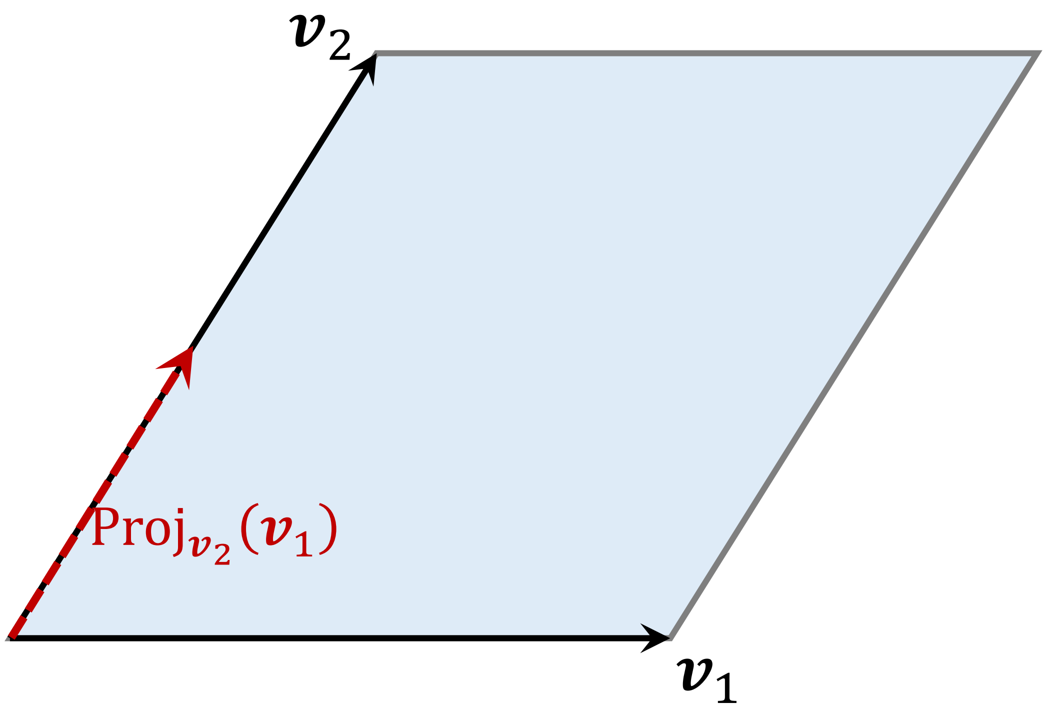
以 $\boldsymbol{v}_1$ 为底，如何计算高 $\boldsymbol{q}_2$ ？

- 计算 $\boldsymbol{v}_2$ 在 $\boldsymbol{v}_1$ 上的投影：

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}_1}(\boldsymbol{v}_2) = \frac{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} \cdot \boldsymbol{v}_1.$$

- 计算 $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}_1}(\boldsymbol{v}_2)$。
- 性质：底 $\boldsymbol{v}_1$ 与高 $\boldsymbol{q}_2$ 正交。

平行四边形的面积

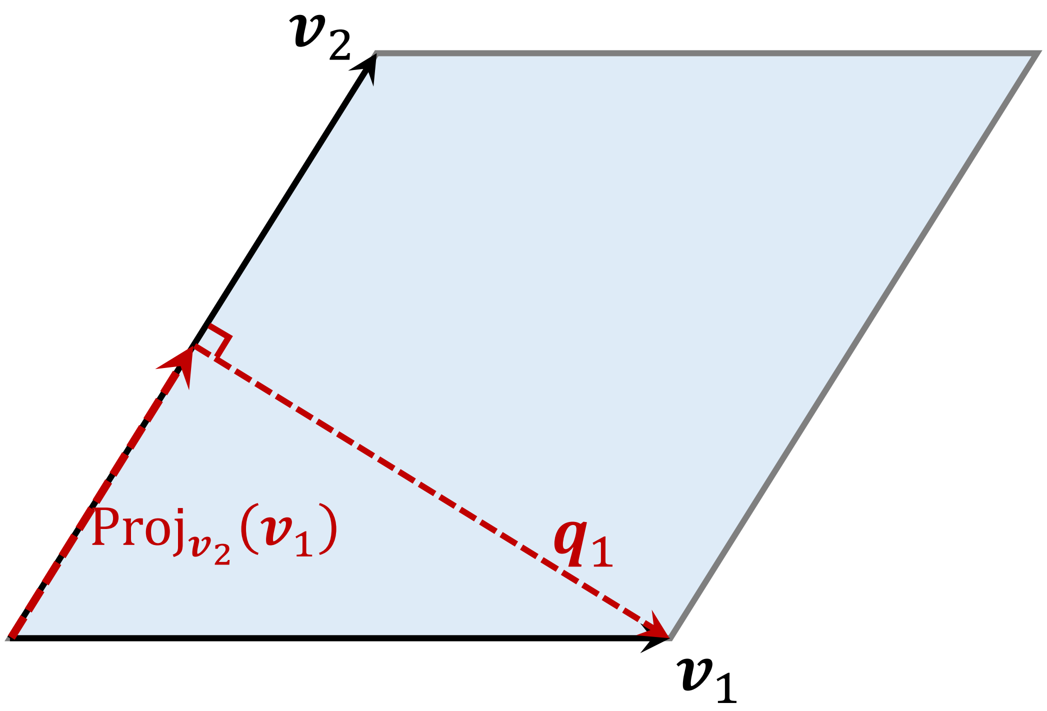


以 $\boldsymbol{v}_2$ 为底，如何计算高 $\boldsymbol{q}_1$？

- 计算 $\boldsymbol{v}_1$ 在 $\boldsymbol{v}_2$ 上的投影：

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}_2}(\boldsymbol{v}_1) = \frac{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_2}{\left\|\boldsymbol{v}_2\right\|_2^2} \cdot \boldsymbol{v}_2.$$

平行四边形的面积



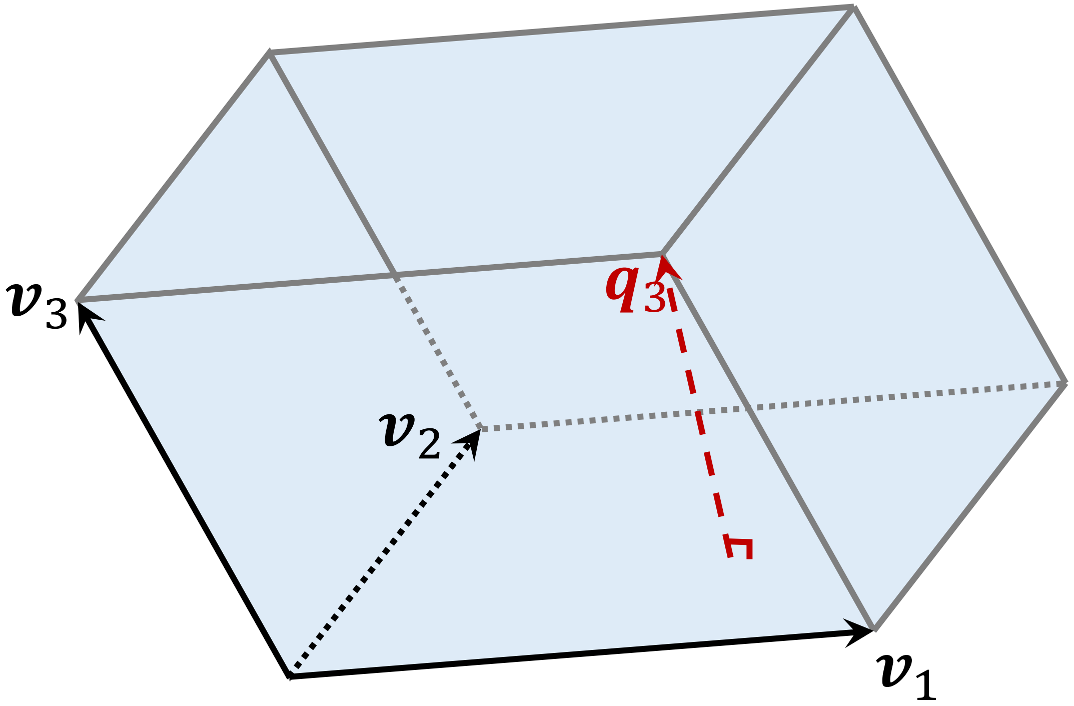
以 $\boldsymbol{v}_2$ 为底，如何计算高 $\boldsymbol{q}_1$？

- 计算 $\boldsymbol{v}_1$ 在 $\boldsymbol{v}_2$ 上的投影：

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}_2}(\boldsymbol{v}_1) = \frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2}{\left|\left|\boldsymbol{v}_2\right|\right|_2^2} \cdot \boldsymbol{v}_2.$$

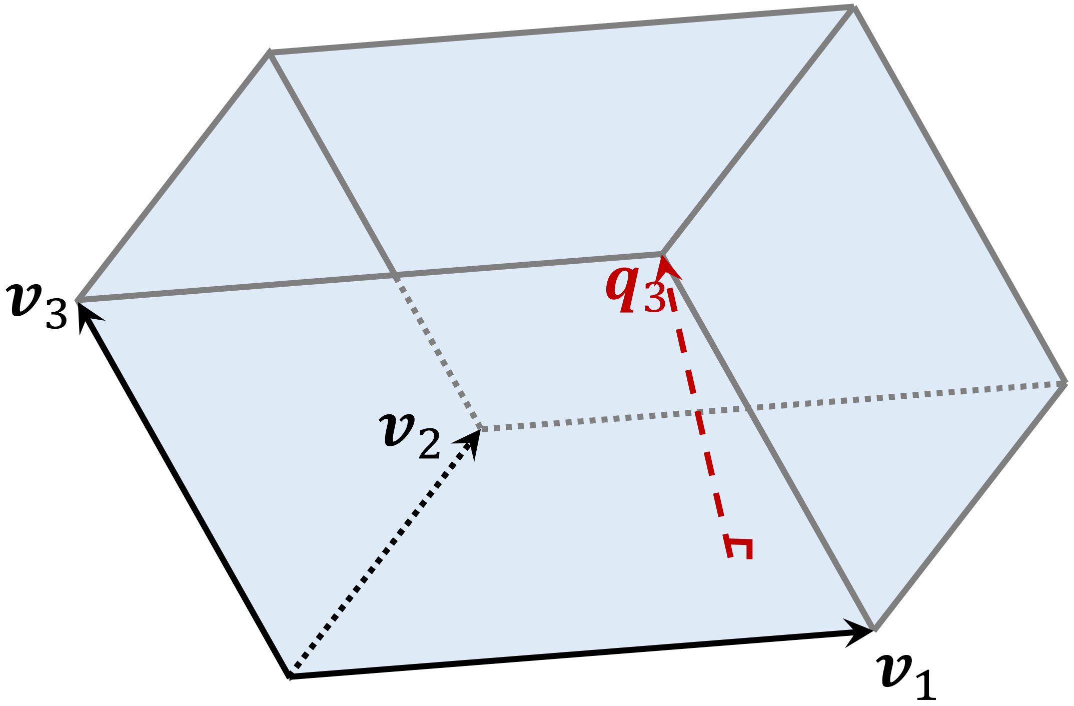
- 计算 $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}_2}(\boldsymbol{v}_1)$。
- 性质：底 $\boldsymbol{v}_2$ 与高 $\boldsymbol{q}_1$ 正交。

平行六面体的体积



- 体积 = 底面积 × $\|$高$\|_2$ 。
- 平行四边形 $\mathcal{P}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ 是平行六面体 $\mathcal{P}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ 的底。
- 高 $\boldsymbol{q}_3$ 垂直于底 $\mathcal{P}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ 。

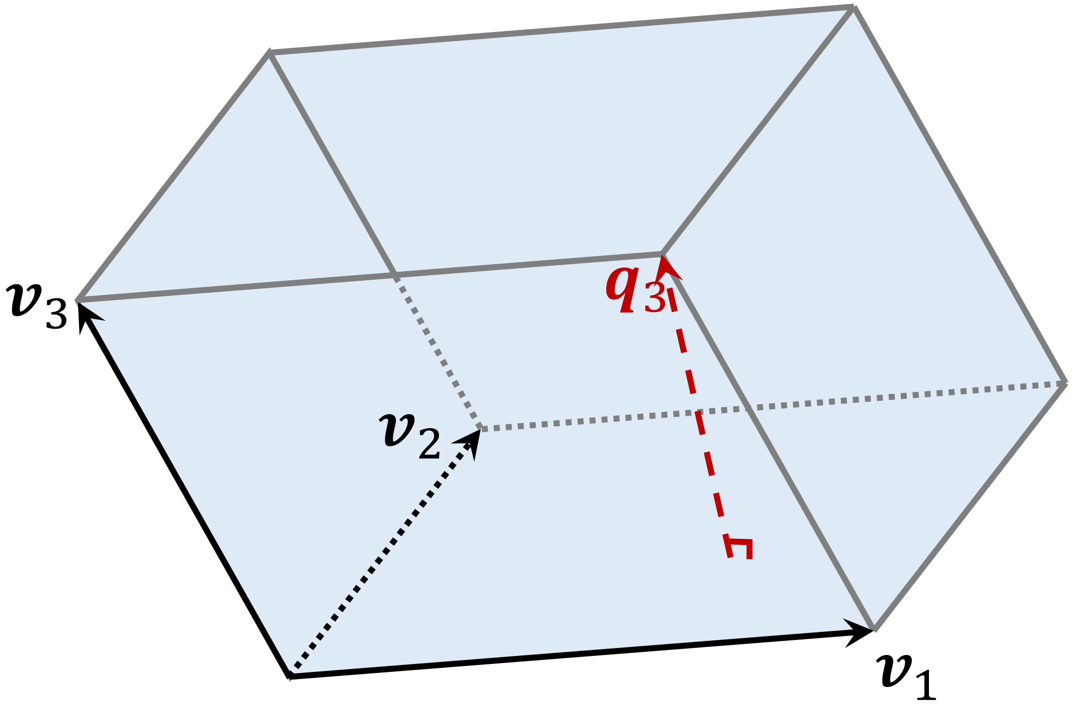
平行六面体的体积



体积何时最大化、最小化？

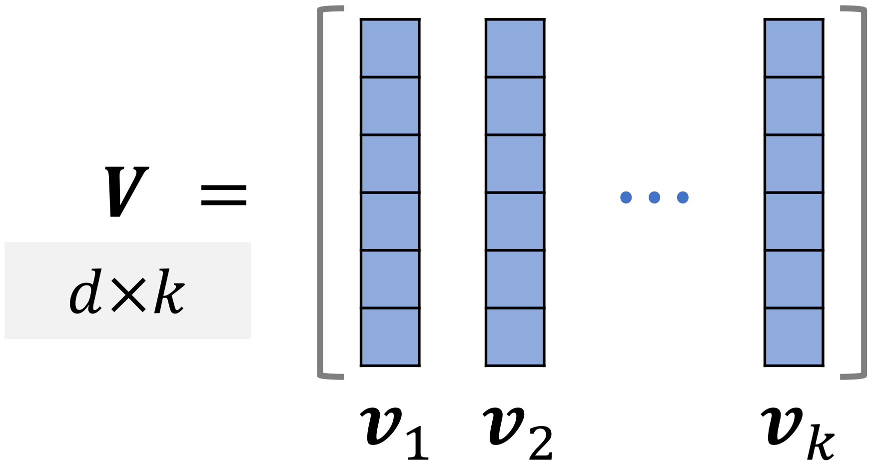
- 设 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$、$\boldsymbol{v}_3$ 都是单位向量。
- 当三个向量正交时，平行六面体为正方体，体积最大化， $\mathrm{vol} = 1$。
- 当三个向量线性相关时，体积最小化，$\mathrm{vol} = 0$。

衡量物品多样性



- 给定 k 个物品，把它们表征为单位向量 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^d$。（$d \geq k$）
- 用超平行体的体积衡量物品的多样性，体积介于 0 和 1 之间。
- 如果 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 两两正交（多样性好），则体积最大化，$\mathrm{vol} = 1$。
- 如果 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性相关（多样性差），则体积最小化，$\mathrm{vol} = 0$。

衡量物品多样性



- 给定 k 个物品，把它们表征为单位向量 $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^d$。（$d \geq k$）
- 把它们作为矩阵 $V \in \mathbb{R}^{d \times k}$ 的列。
- 设 $d \geq k$，行列式与体积满足：

$$\det(V^T V) = \mathrm{vol}\big(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_k)\big)^2.$$

- 因此，可以用行列式 $\det(V^T V)$ 衡量向量 $v_1, \cdots, v_k$ 的多样性。

Thank You!