信号与线性系统

总复习

总

1. 两大类　　连续信号与系统

离散信号与系统

因果信号/因果系统

线性时不变系统

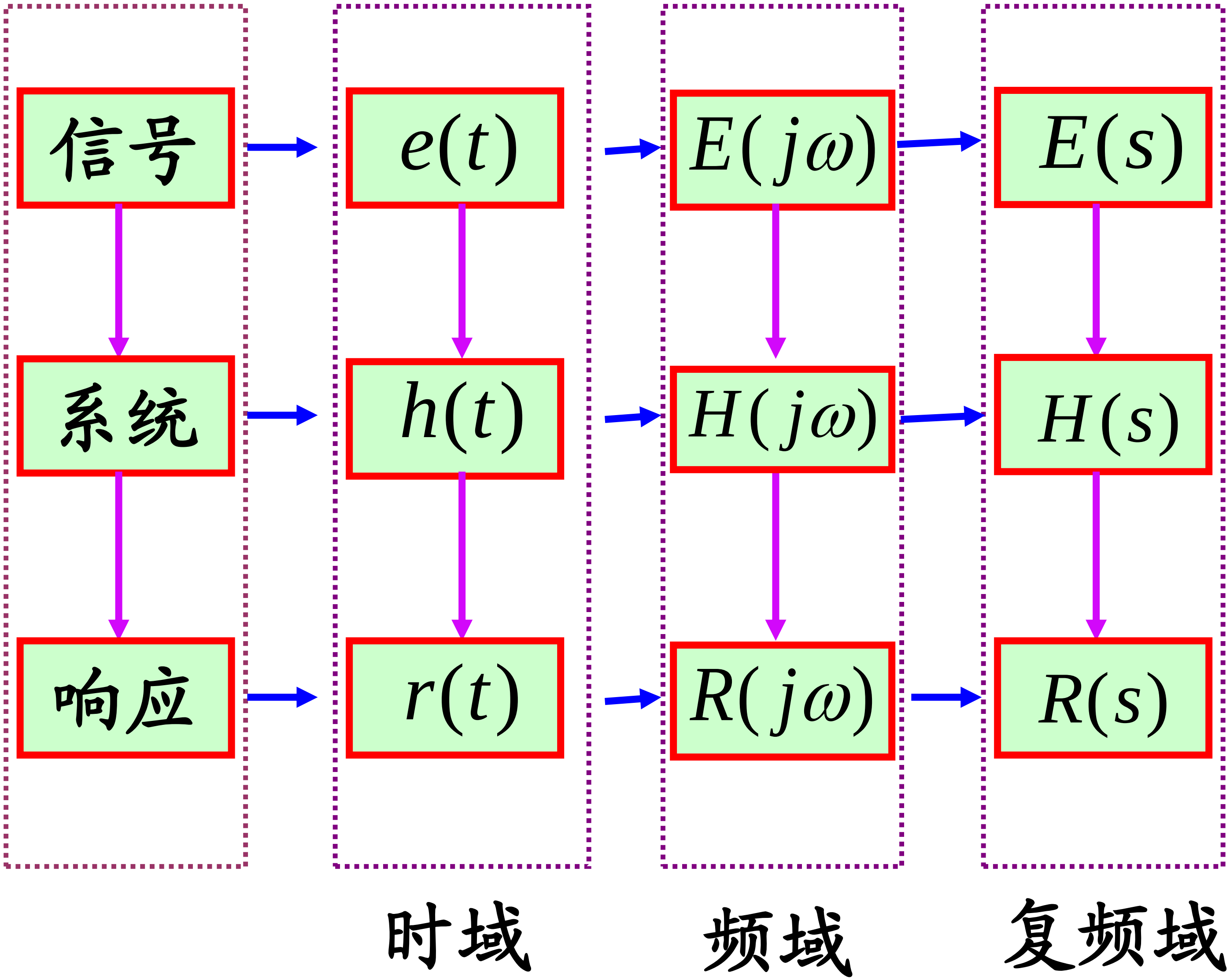
2. 分析手段　时域分析

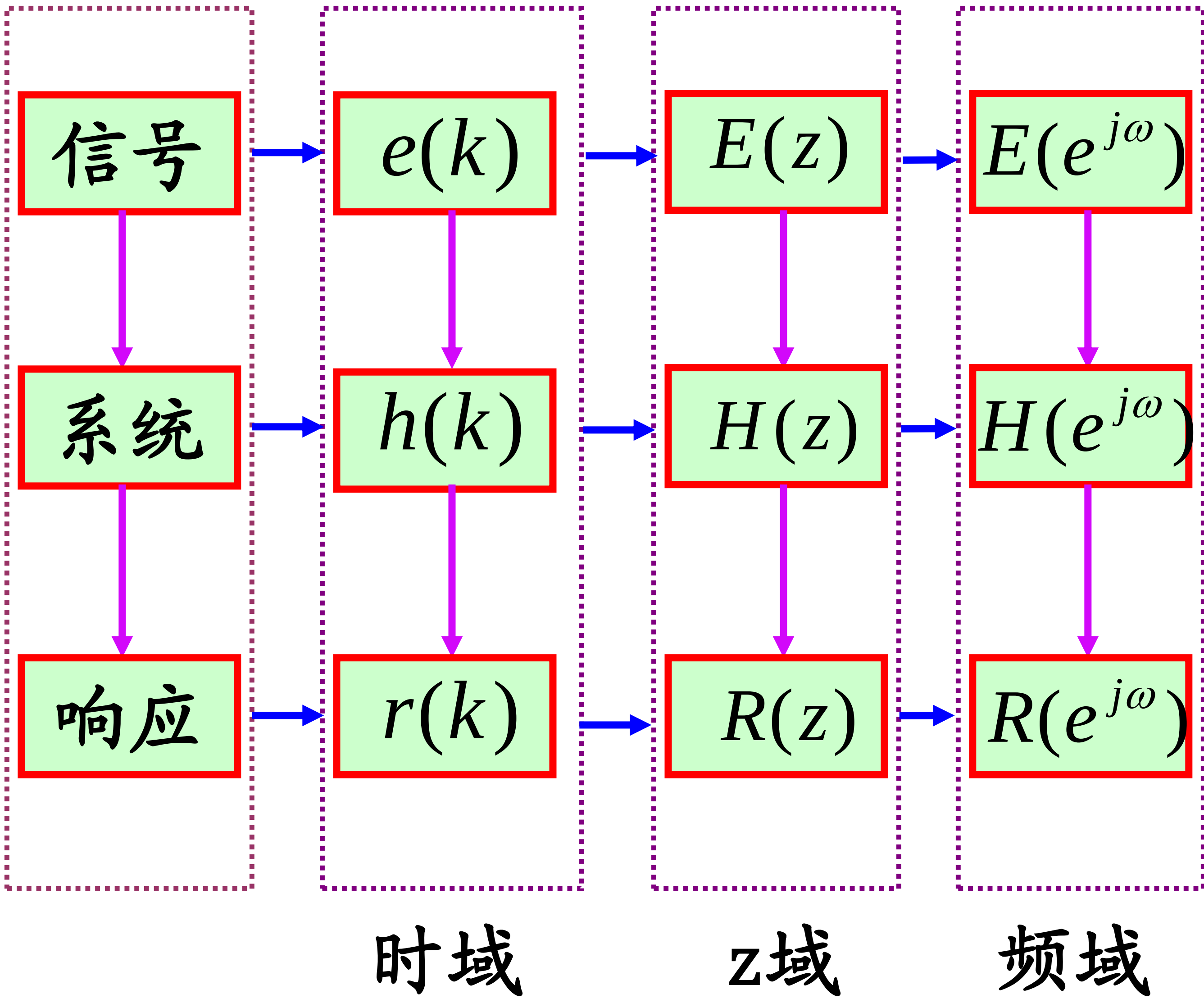
变换域分析

连续：频域，复频域

离散：频域，z域

分析主线




信号
系统
响应
$e(k)$
$h(k)$
$r(k)$
$E(z)$
$H(z)$
$R(z)$
$E(e^{j\omega})$
$H(e^{j\omega})$
$R(e^{j\omega})$
时域
z域
频域

信号的分类与常用信号

- 信号的分类
  - 连续时间信号，离散时间信号
  - 因果信号
  - 右边序列（因果序列），左边序列，双边序列
- 连续时间信号
  - 单位冲激信号，单位阶跃信号
  - 矩形脉冲
- 离散时间序列
  - 单位函数，单位阶跃函数
  - 矩形序列
  - 单位函数序列，矩形脉冲序列

信号的运算（时域）

- 基本运算
  - 信号间的相互表示
  - 平移、尺度变换、线性、微积分等
  - 波形的变化

- 卷积积分/卷积和
  - 定义
  - 求解
  - 性质
  - 应用

信号的变换（变换域）

- 傅里叶级数/傅里叶变换
  - 常用函数的傅里叶级数/变换，频谱特点
  - 线性、缩放、对称性、时移频移、微积分、卷积定理等
- 拉普拉斯变换
  - 常用函数的拉普拉斯变换，收敛区
  - 线性、缩放、时移频移、微积分、卷积定理、初值终值定理等
  - 反变换的求取－部分分式分解，利用性质
- z变换
  - 常用函数的z变换，收敛区
  - 线性、缩放、时移频移、卷积定理、初值终值定理等
  - 反变换的求取－部分分式分解法，注意与收敛区的关系
- DTFT
  - 定义
  - 周期性、线性、时移频移、频域微分、卷积定理等

系统

- 系统的性质
  - 线性，时不变性，因果性，稳定性

- 系统的表示
  - 电路或实际问题 需要通过建模的过程得到方程
  - 微分方程/差分方程
  - 方程、直接（I）型模拟框图（时域/变换域）之间的转换
  - 系统函数

- 系统的响应
  - 零输入响应和零状态响应
  - 单位冲激响应/单位函数响应
  - 系统响应的时域求解，变换域求解

系统（续）

- 系统函数
  - 系统函数H(s)/H(z)
  - 系统函数的极点分布对系统稳定性的影响
  - 系统函数零极点分布对频响特性的影响
- 频响函数
  - 频响函数$H(j\omega)/H(e^{j\omega})$
  - 频响特性曲线
  - 滤波特性
- 应用
  - 理想低通滤波器，信号通过系统不失真传输的条件，
  - 调制解调
  - 理想抽样，抽样定理

■ 分　　　冲激函数的性质

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\delta[-(t-t_0)] = \delta(t-t_0)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$$

卷积积分/卷积和

两个连续时间信号$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积积分定义如下:

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

两个序列$f_1(k)$和$f_2(k)$的卷积和定义如下:

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)f_2(k-i)$$

练习：计算下列卷积

(1) $\varepsilon(t) * \varepsilon(t)$

(2) 两个矩形脉冲函数做卷积

(3) $e^{-3t}\varepsilon(t) * \varepsilon(t)$

(4) $e^{-3t}\varepsilon(t) * e^{-2t}\varepsilon(t)$

(1) $\varepsilon(k) * \varepsilon(k)$

(2) $\varepsilon(k-1) * \varepsilon(k-2)$

(3) $0.3^k\varepsilon(k) * \delta(k)$

(4) $(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k) * \varepsilon(k)$

(5) $2^k\varepsilon(k) * 2^k\varepsilon(k)$

答案：(1) $t\varepsilon(t)$

(3) $\frac{1}{3}(1-e^{-3t})\varepsilon(t)$

(4) $(e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$

(1) $(k+1)\varepsilon(k)$

(4) $2\times(1-(\frac{1}{2})^{k+1})\varepsilon(k)$

(5) $(k+1)2^k\varepsilon(k)$

傅里叶级数/傅里叶变换/序列傅里叶变换

- 傅里叶级数公式
- 基波、谐波
- 周期信号频谱的特点
- 常用信号的傅里叶级数
- 画信号的频谱

- 傅里叶变换公式
- 非周期信号频谱的特点
- 性质
- 常用信号的傅里叶变换
- 画信号的频谱

- 序列傅里叶变换公式
- 离散信号频谱的特点
- 性质
- 常用序列的傅里叶变换
- 画信号的频谱

常用傅里叶变换对

编 号	$f(t)$	$F(j\omega)$
1	$g_\tau(t)$	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
2	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right)$	$2\pi g_\tau(\omega)$
3	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$, $\alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$
4	$te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$, $\alpha>0$	$\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$
5	$e^{-\alpha\|t\|}$, $\alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
6	$\delta(t)$	1
7	1	$2\pi\delta(\omega)$
8	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
9	$\cos\omega_0 t$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
10	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

续表

编　号	$f(t)$	$F(\mathrm{j}\omega)$
11	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$
12	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$, $F(0)=0$
13	$\dfrac{1}{\pi t}$	$-\mathrm{j}\ \mathrm{Sgn}(\omega)$
14	$\delta_T(t)$	$\Omega\delta_\Omega(\omega)$
15	$\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$	$2\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega-n\Omega)$
16	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$, $a>0$	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^n}$

性质名称	时　　域	频　　域
线性	$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\mathrm{j}\omega)+a_2 F_2(\mathrm{j}\omega)$
时移	$f(t-t_0)$	$F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
频移	$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))$
调制	$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))+F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
	$f(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))-F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
对称性	$F(\mathrm{j}t)$	$2\pi f(-\omega)$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$
相乘	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$
时域微分	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$	$\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$
频域微分	$(-\mathrm{j}t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\mathrm{j}\eta)\,\mathrm{d}\eta$
帕塞瓦尔等式	$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\mathrm{j}\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}\omega$

拉普拉斯变换

- 定义
- 性质
- 常用信号的拉普拉斯变换

$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$
$tu(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$
$te^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$\delta(t)$	1

z变换

$$\text{z变换}\begin{cases}\text{定义、收敛区}\\ \text{性质}\\ \text{常用信号的z变换}\end{cases}$$

(1) $f(k)=\delta(k)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=1$$

(2) $f(k)=\varepsilon(k)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varepsilon(k)z^{-k}=\frac{z}{z-1}\qquad |z|>1$$

(3) $f(k)=-\varepsilon(-k-1)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[-\varepsilon(-k-1)]z^{-k}=\frac{z}{z-1}\qquad |z|<1$$

(4) $f(k)=a^k\varepsilon(k)$(a为实数.虚数.复数).

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k\varepsilon(k)z^{-k}=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

(5) $f(k)=-a^k\varepsilon(-k-1)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[-a^k\varepsilon(-k-1)]z^{-k}=\frac{z}{z-a}\qquad |z|<|a|$$

(6) $f(k)=k\varepsilon(k)$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}k\varepsilon(k)z^{-k}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{z}{(z-1)^2}\qquad |z|>1$$

(7) $f(k)=a^{k-1}\varepsilon(k-1)$

$$F(z)=\frac{1}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

Z变换的基本性质

序号	性质	信号	Z 变换	收敛域
0	定义	$x(n)$	$X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$	R
1	线性	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	至少 $R_1\cap R_1$
2	移序	$x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	R，但在原点或无穷远点可能加上或删除
3	频移	$e^{j\omega n}x(n)$	$X(e^{j\omega}z)$	R
4	尺度变换	$z_0^n x(n)$	$X(z_0^{-1}z)$	$\|z_0\|R$
5	z 域微分	$nx(n)$	$-z\dfrac{d}{dz}X(z)$	R
6	卷积	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	至少 $R_1\cap R_1$
7	时间反转	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	R 的倒置
8	求和	$\sum\limits_{n=-\infty}^{n}x(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R\cap(\|z\|>1)$
9	初值定理	$x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$		
10	终值定理	$x(\infty)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$		

系统的因果性与稳定性

<table>
<tr><td rowspan="3">因果</td><td colspan="3">响应不先于激励</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$h(t)=0,\quad t<0$</td><td>$h(n)=0,\quad n<0$</td></tr>
<tr><td>激励最高序号不大于响应最高序号</td></tr>
<tr><td rowspan="3">稳定</td><td colspan="2">$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|<\infty$</td><td>$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">因果系统</td><td>$\int_{0}^{\infty}|h(t)|<\infty$</td><td>$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|<\infty$</td></tr>
<tr><td>系统函数H(s)的所有极点全部位于s平面的左半开平面</td><td>系统函数H(z)的所有极点全部位于z平面的单位圆内</td></tr>
</table>

系统的响应

系统建模：微分方程/差分方程

- 零输入响应
- 单位冲激响应/单位函数（样值）响应
- 零状态响应

系统响应的时域求解、变换域求解

- 自然响应/强迫响应
- 暂（瞬）态响应/稳态响应

系统函数

1. $H(s)/H(z)$ 与 $h(t)/h(k)$ 之间的关系。

2. $H(s)/H(z)$ 可由微分/差分方程直接得到。

3. 系统函数与转移算子之间的关系。

4. 系统函数的极点分布对系统稳定性的影响。

5. 由系统函数零极点分布粗略画出频响曲线。

6. 混合系统的单位冲激响应，系统函数。

频响函数

1. 定义及物理意义 $H(j\omega)/H(e^{j\omega})$

2. 几组关系

$$H(j\omega) \to h(t) \to H(s)$$

$$H(e^{j\omega}) \to h(k) \to H(z)$$

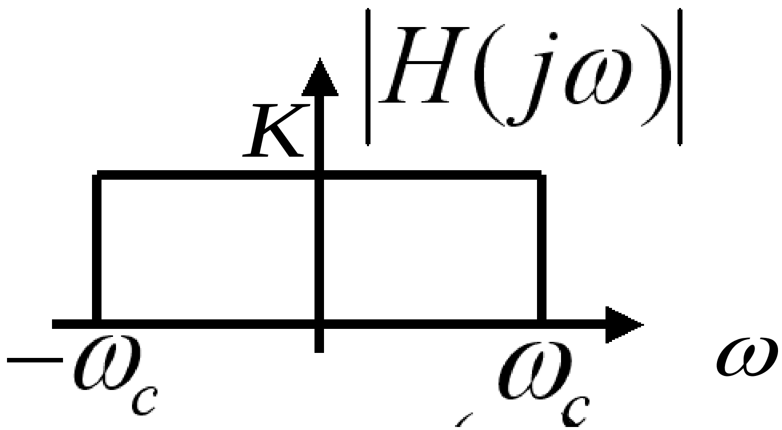
3. 画频响特性曲线

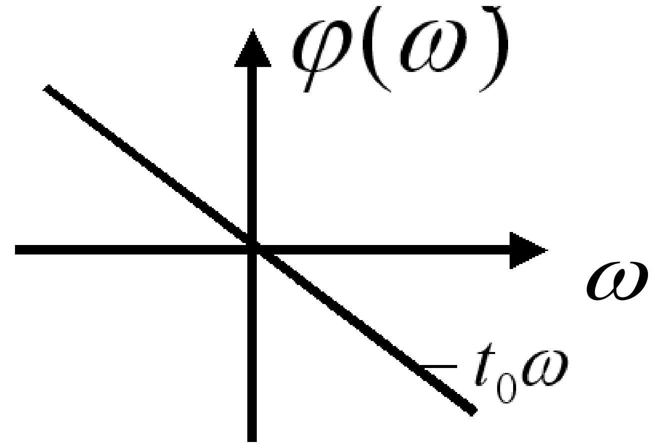
4. 滤波特性：低通，高通，带通，带阻，全通

5. 混合系统的频响函数

应用：理想低通滤波器

理想低通滤波器的频响

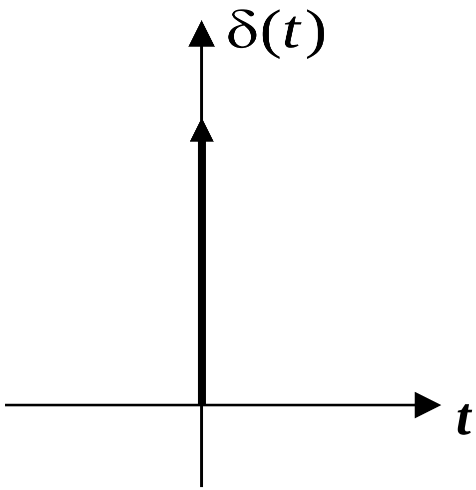


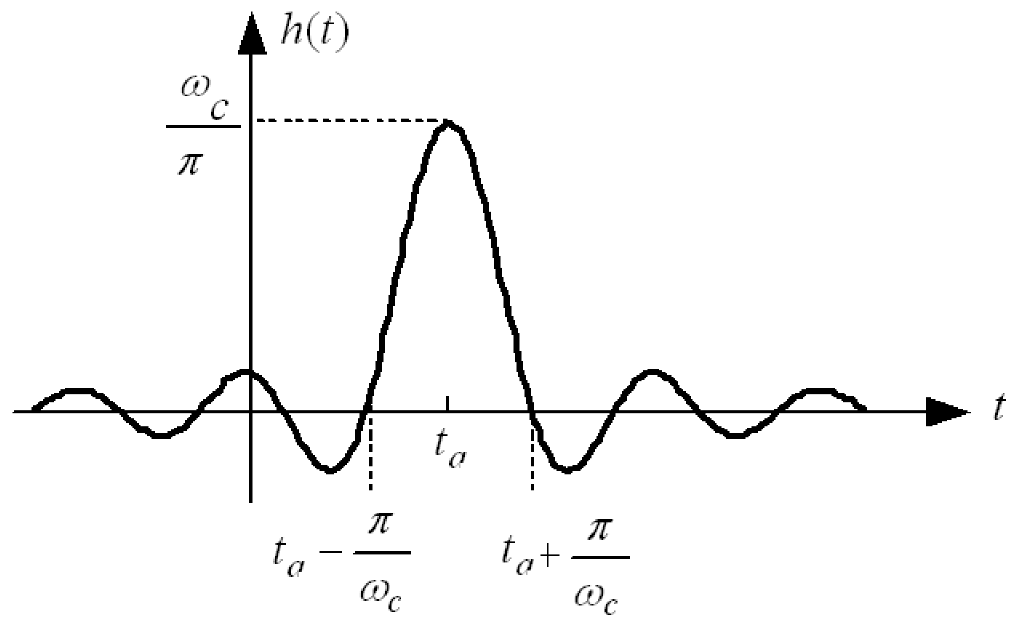


$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| < \omega_c$$（截止频率）

理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]$$





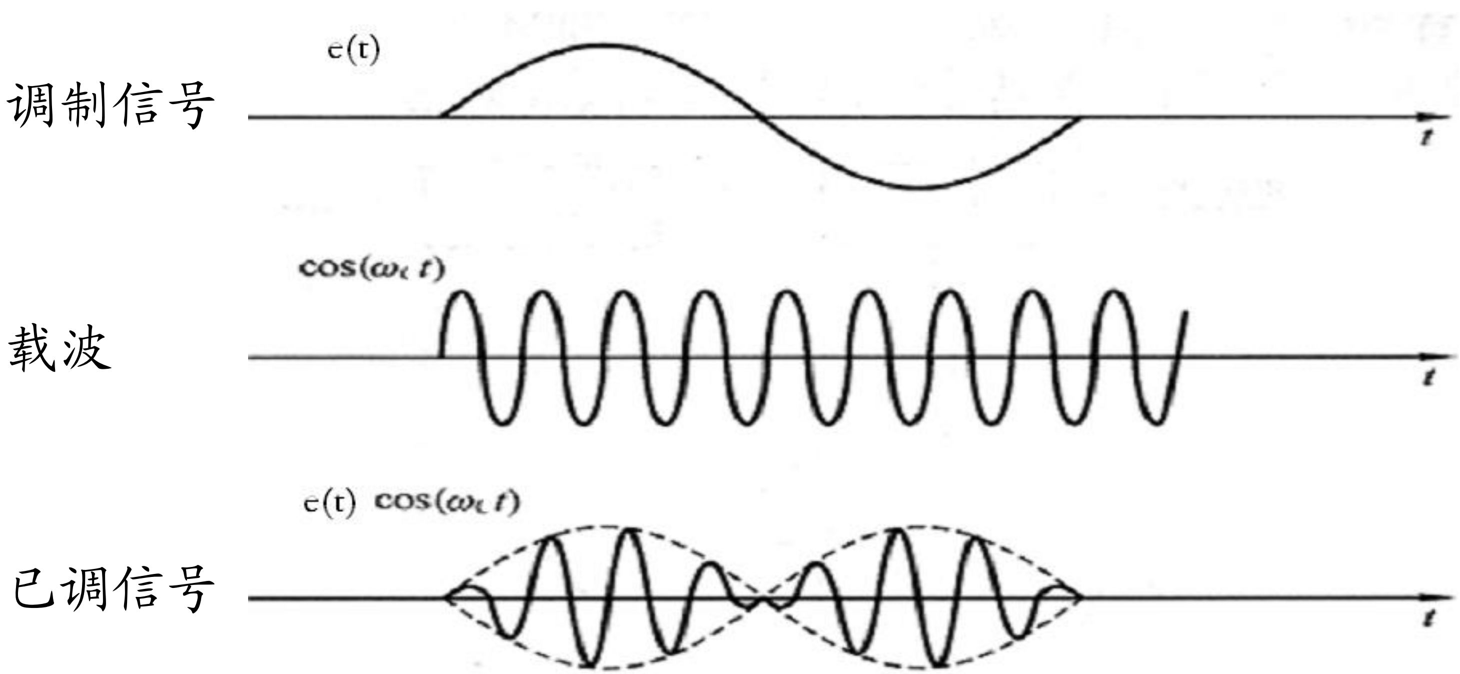
信号通过系统产生失真。

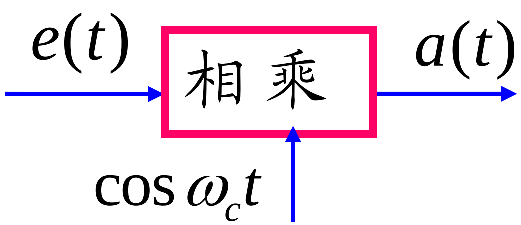
系统物理上不可实现。

可自行推导出信号通过系统不产生失真的条件。

应用：调制解调

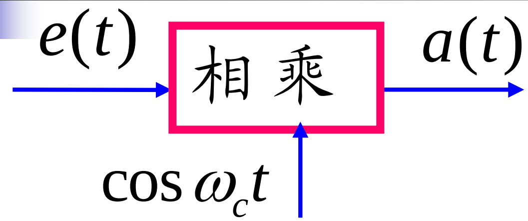
抑制载波的调制：时域



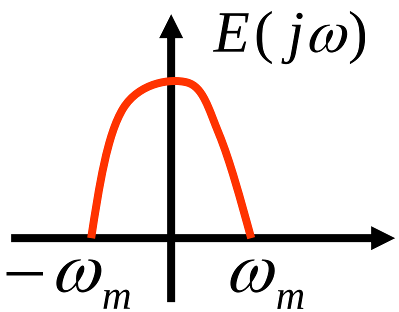


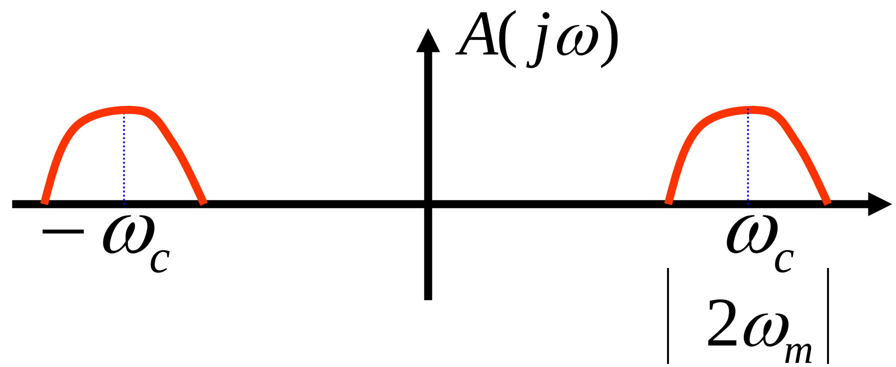
$$\boxed{a(t) = e(t)\cos\omega_c t}$$

抑制载波的调制：频域



$$\boxed{a(t)=e(t)\cos\omega_c t}$$





$$A(j\omega)=\frac{1}{2\pi}E(j\omega)*[\pi\delta(\omega+\omega_c)+\pi\delta(\omega-\omega_c)]$$

$$=\frac{1}{2}[E(j(\omega+\omega_c))+E(j(\omega-\omega_c))]$$

上边带：

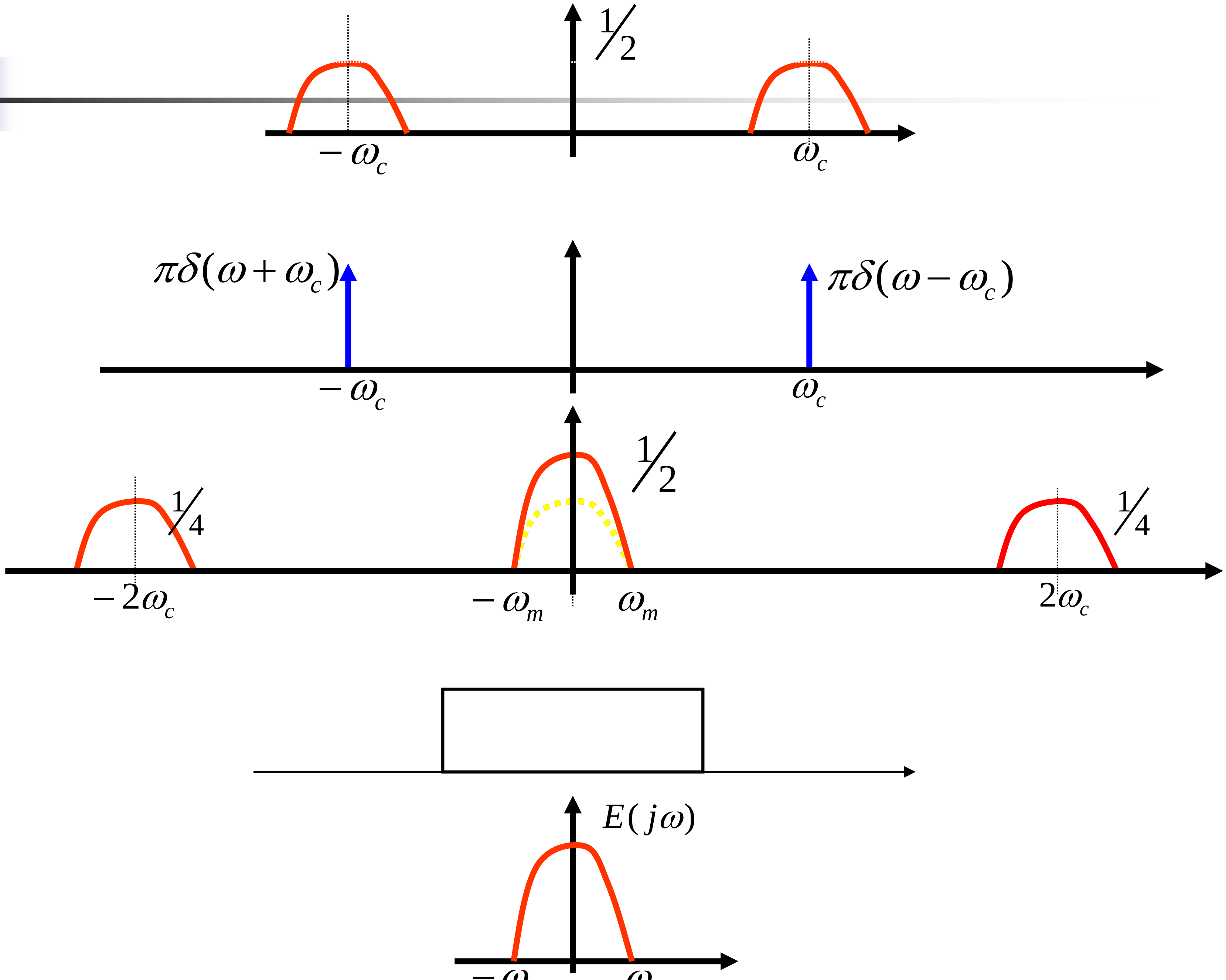
$(\omega_c,\omega_c+\omega_m)$

下边带：

$(\omega_c-\omega_m,\omega_c)$

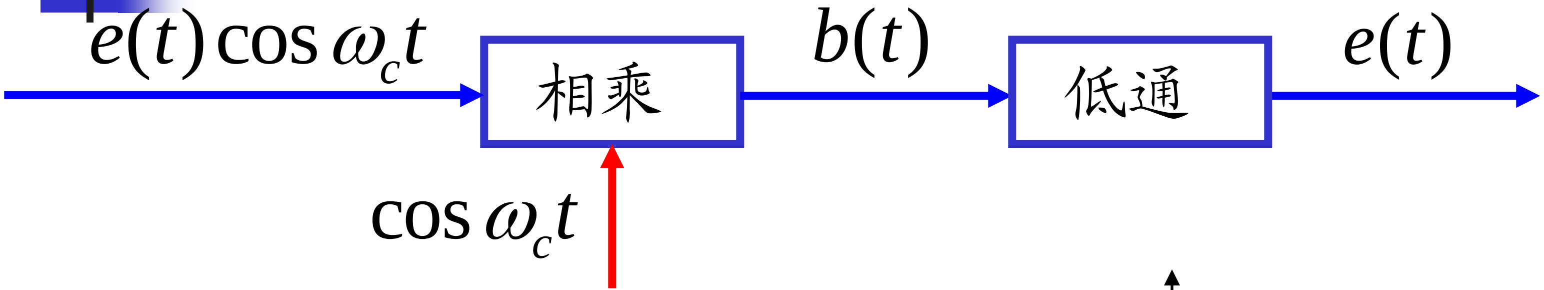
解调过程

频域

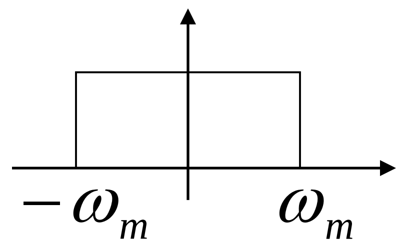


½
$-\omega_c$
ω_c
$\pi\delta(\omega+\omega_c)$
$\pi\delta(\omega-\omega_c)$
$-\omega_c$
ω_c
¼
½
¼
$-2\omega_c$
$-\omega_m$
ω_m
$2\omega_c$
$E(j\omega)$
$-\omega_m$
ω_m

解调过程：时域

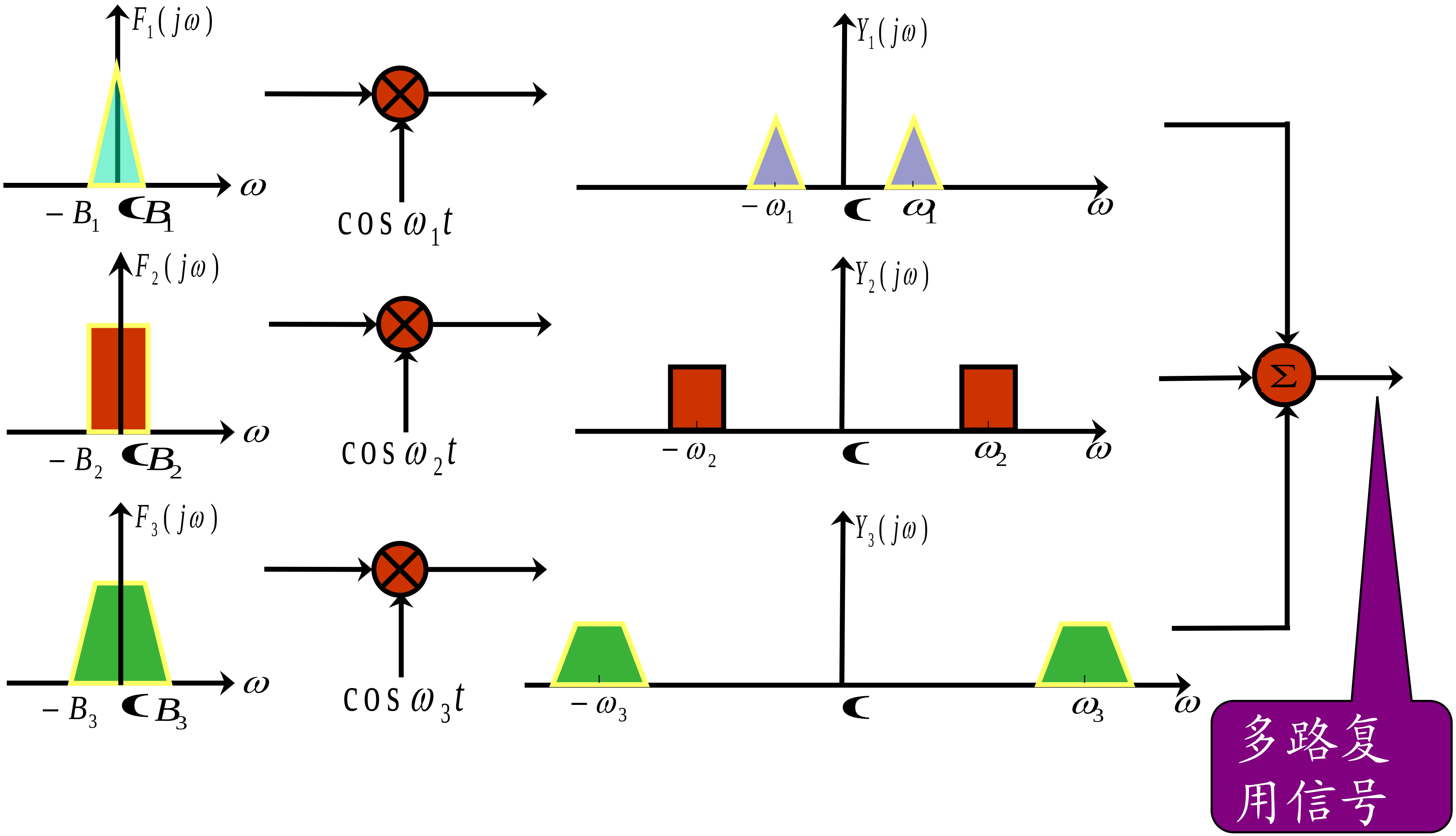


$$
\begin{aligned}
b(t) &= [e(t)\cos\omega_c t]\cos\omega_c t \\
&= \frac{1}{2}e(t)(1+\cos 2\omega_c t) \\
&= \frac{1}{2}e(t) + \frac{1}{2}e(t)\cos 2\omega_c t
\end{aligned}
$$



$$
B(j\omega) = \frac{1}{2}E(j\omega) + \frac{1}{4}[E(j(\omega+2\omega_c)) + E(j(\omega-2\omega_c))]
$$

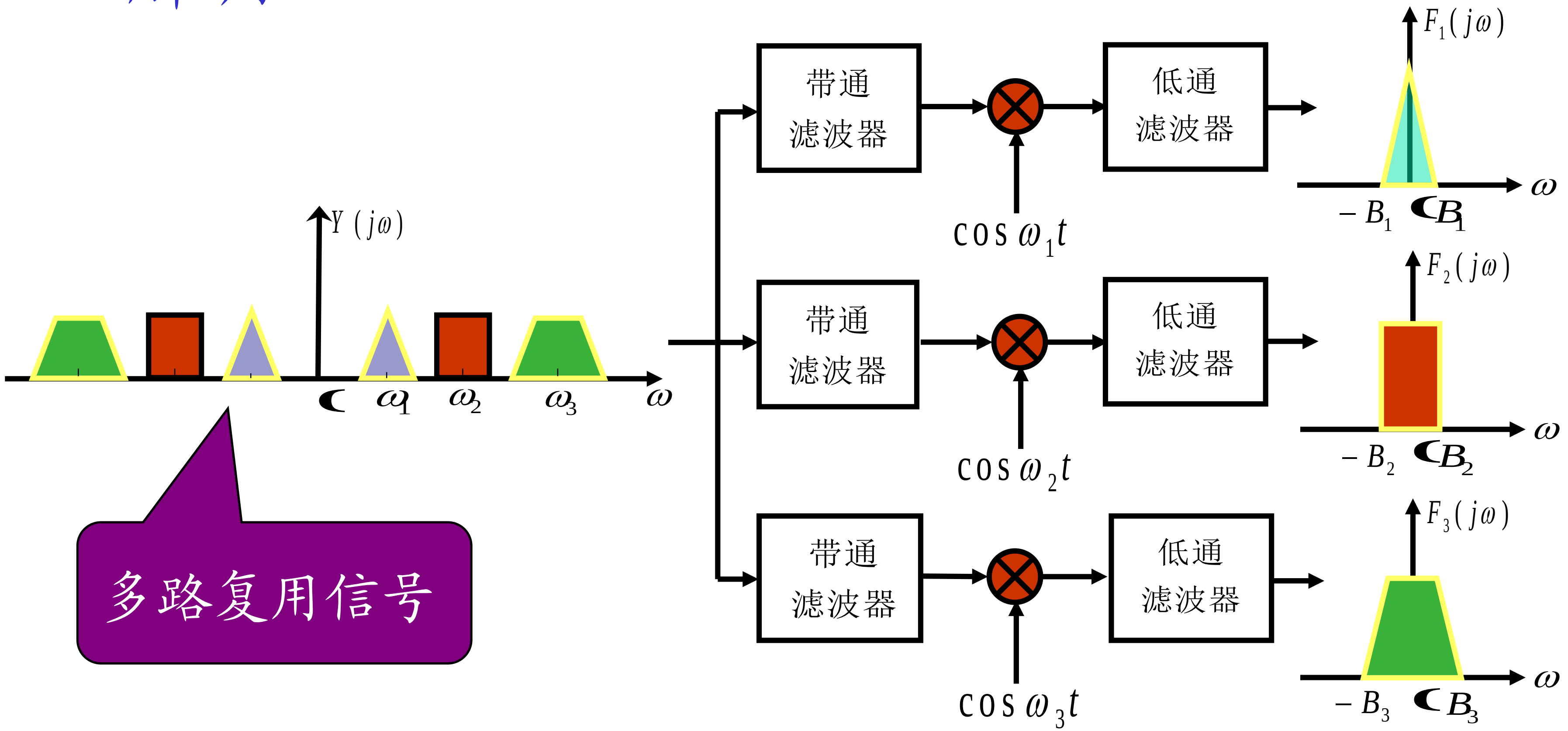
复用技术-频分复用（§4.6）



$F_1(j\omega)$
ω
$-B_1$
B_1
$\cos\omega_1 t$
$Y_1(j\omega)$
$-\omega_1$
ω_1
ω
$F_2(j\omega)$
ω
$-B_2$
B_2
$\cos\omega_2 t$
$Y_2(j\omega)$
$-\omega_2$
ω_2
ω
$F_3(j\omega)$
ω
$-B_3$
B_3
$\cos\omega_3 t$
$Y_3(j\omega)$
$-\omega_3$
ω_3
ω
Σ
多路复用信号

频分复用

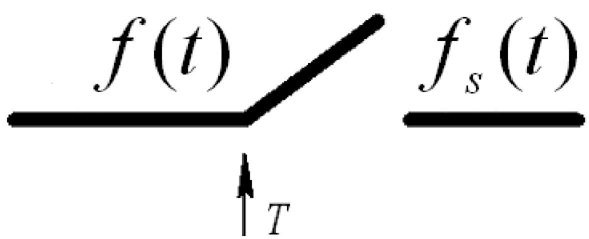
解调



$Y(j\omega)$
ω_1
ω_2
ω_3
ω
多路复用信号
带通
滤波器
带通
滤波器
带通
滤波器
$\cos\omega_1 t$
$\cos\omega_2 t$
$\cos\omega_3 t$
低通
滤波器
低通
滤波器
低通
滤波器
$F_1(j\omega)$
$-B_1$
B_1
ω
$F_2(j\omega)$
$-B_2$
B_2
ω
$F_3(j\omega)$
$-B_3$
B_3
ω

取样定理

信号的时域取样



$$\boxed{f_s(t) = f(t)p(t)}$$

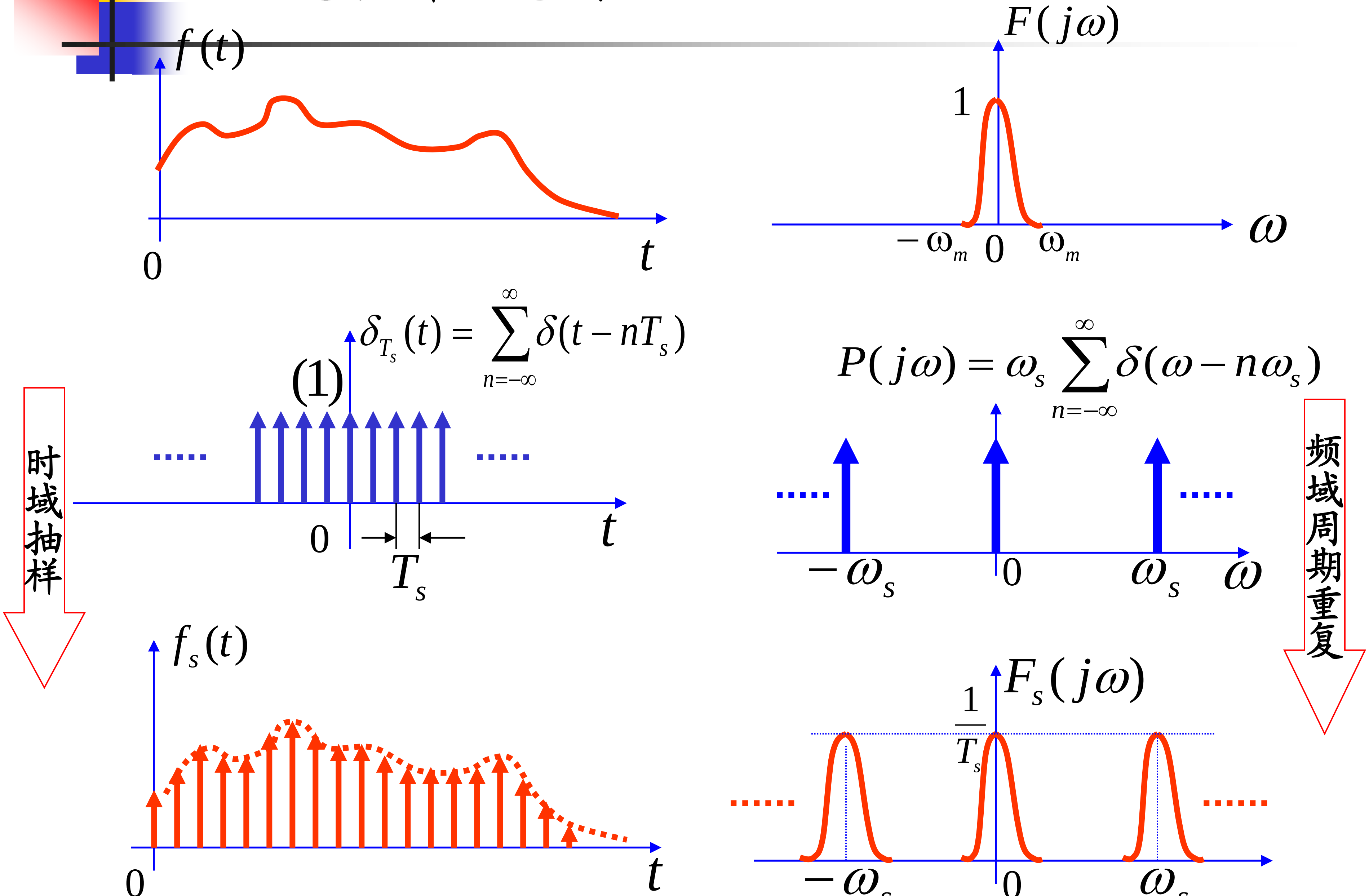
理想取样：抽样脉冲p(t)是冲激函数序列，即

$$p(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$f_s(t) = f(t)p(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

理想抽样示意图



$f(t)$
0
t
$F(j\omega)$
1
$-\omega_m$ 0 ω_m
ω
$\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$
(1)
0
T_s
t
时域抽样
$P(j\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$
$-\omega_s$ 0 ω_s ω
频域周期重复
$f_s(t)$
0
t
$F_s(j\omega)$
$\frac{1}{T_s}$
$-\omega_s$ 0 ω_s

Shannon 取样定理：一个在频谱中不包含有大于频率 f_m 的分量的有限频带的信号，由对该信号以不大于 $\frac{1}{2f_m}$ 的时间间隔进行取样的取样值唯一地确定。当这样地取样信号通过截止频率 ω_c 满足 $\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$ 的理想低通滤波器后，可以完全重建原信号。

考试

- 闭卷考试，带铅笔、直尺等
- 计算需有计算过程，作图需标注关键坐标
- 遵守考试纪律，诚实作答
- 简单计算题，综合分析题
- 主要考查基础知识的理解和应用

- 考试时间：以学院通知为准

及早准备，横纵对比，全面复习

该背的要背熟

该练手的要练手：计算，画图

信号、系统要分清

连续、离散忌混淆

时域 $\longleftrightarrow$ 变换域

变换域 $\longleftrightarrow$ 变换域