Κεφάλαιο 6

Διανυσματικοί Χώροι

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τους χώρους $\mathbb{R}^n$. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με πιο γενικούς χώρους που έχουν παρόμοιες ιδιότητες με τον $\mathbb{R}^n$ και ο σκοπό μας είναι να κατανοήσουμε τις ιδιότητες αυτές στο γενικό πλαίσιο. Θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια του συνόλου γεννητόρων ενός διανυσματικού χώρου.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στα επόμενα με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ μαζί με την πρόσθεση διανυσμάτων και το γινόμενο αριθμού με διάνυσμα αποτελεί ένα 'πρότυπο' για τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1 (διανυσματικός χώρος)

*Ένας $\mathbb{F}$ – **διανυσματικός χώρος** είναι ένα μη κενό σύνολο V εφοδιασμένο με δύο απεικονίσεις*

$$V \times V \ni (v, v') \mapsto v + v' \in V \quad (\text{'πρόσθεση'})$$
$$K \times V \ni (a, v) \mapsto av \in V \quad (\text{'αριθμητικός πολλαπλασιασμός'})$$

που ικανοποιούν τις ιδιότητες

1. $(v+v')+v'' = v+(v'+v'')$ για κάθε $v, v', v'' \in V$.
2. $v+v' = v'+v$ για κάθε $v, v' \in V$.
3. *Υπάρχει στοιχείο $0_V \in V$ που έχει την ιδιότητα $0_V + v = v + 0_V = v$ για κάθε $v \in V$. Το 0_V ονομάζεται 'μηδενικό στοιχείο' του V.*
4. *Για κάθε $v \in V$ υπάρχει στοιχείο $-v \in V$ με την ιδιότητα $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$.*
5. *$1v = v$ για κάθε $v \in V$.*
6. $a(v+v') = av + av'$ για κάθε $a \in \mathbb{F}, v \in V, v' \in V$.
7. $(a+b)v = av + bv$ *για κάθε* $a, b \in \mathbb{F}, v \in V$.
8. $(ab)v = (a(bv))$ *για κάθε* $a, b \in \mathbb{F}, v \in V$.

Σημείωση Αποδεικνύεται ότι το 0_V της ιδιότητας 3 είναι μοναδικό. Ονομάζεται δε το '**μηδενικό στοιχείο**' του V. Επίσης, για κάθε $v \in V$, το $-v$ της ιδιότητας 4 είναι μοναδικό και ονομάζεται το **αντίθετο** του v.

Παραδείγματα

1. Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ των διατεταγμένων n – άδων πραγματικών αριθμών με πρόσθεση που ορίζεται από $(u_1,...,u_n)+(v_1,...,v_n)=(u_1+v_1,...,u_n+v_n)$ και αριθμητικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από $a(u_1,...,u_n)=(au_1,...,au_n)$ είναι ένας $\mathbb{R}$ – διανυσματικός χώρος. Το μηδενικό στοιχείο είναι το $0_{\mathbb{R}^n}=(0,...,0)$ και το αντίθετο του $(u_1,...,u_n)$ είναι το $-(u_1,...,u_n)=(-u_1,...,-u_n)$.
2. Κατά παρόμοιο τρόπο το $\mathbb{C}^n$ καθίσταται $\mathbb{C}$ - διανυσματικός χώρος.
3. Το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ των $m\times n$ πραγματικών πινάκων είναι ένας $\mathbb{R}$ - διανυσματικός χώρος με πρόσθεση τη συνήθη πρόσθεση πινάκων και αριθμητικό πολλαπλασιασμό τον πολλαπλασιασμό πίνακα με αριθμό. Το μηδενικό στοιχείο είναι ο μηδενικός πίνακας και το αντίθετο του $A=(a_{ij})$ είναι το $-A=(-a_{ij})$.
4. Κατά ανάλογο τρόπο, το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ των $m\times n$ μιγαδικών πινάκων είναι ένας $\mathbb{C}$ - διανυσματικός χώρος.
5. Έστω $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX=0$ είναι ένας $\mathbb{R}$ - διανυσματικός χώρος ως προς την πρόσθεση και τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό του Παραδείγματος 3.
6. Το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές είναι ένας $\mathbb{R}$ - διανυσματικός χώρος ως προς τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης πολυωνύμων και του πολλαπλασιασμού πολυωνύμου με αριθμό.

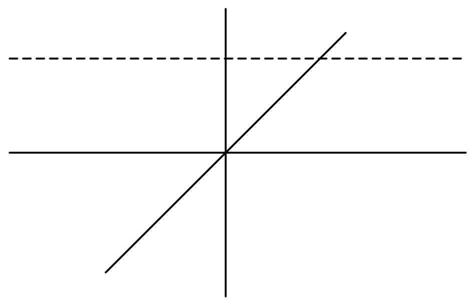
Ορισμός 2 (υπόχωρος)

*Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$. Θα λέμε ότι το U είναι ένας $\mathbb{F}-$**υπόχωρος** του V αν το U είναι ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος ως προς την ίδια πρόσθεση και τον ίδιο αριθμητικό πολλαπλασιασμό του V.*

Σημείωση Συχνά λέμε απλά υπόχωρος αντί $\mathbb{F}-$υπόχωρος, όπως και διανυσματικός χώρος (δ.χ.) αντί $\mathbb{F}-$ διανυσματικός χώρος, όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης σχετικά με το $\mathbb{F}$.

Παραδείγματα

1. Τα σύνολα $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\}$, $\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\}$, $\{(x,x)\in\mathbb{R}^2\}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. Το σύνολο $U=\{(x,1)\in\mathbb{R}^2\}$ *δεν* είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, αν προσθέσουμε δυο στοιχεία του $(x,1)+(x',1)=(x+x',2)$ βρίσκουμε ένα στοιχείο που *δεν* ανήκει στο *U*. Δηλαδή η πρόσθεση διανυσμάτων δεν μας δίνει μια απεικόνιση της μορφής $U\times U\to U$. Γεωμετρικά, οι προηγούμενοι υπόχωροι του επιπέδου παρίστανται από τον άξονα των *x*, στον άξονα των *y*, και την ευθεία *y* = *x* αντίστοιχα. Η διακεκομμένη ευθεία αντιστοιχεί στο σύνολο *U*.



2. Έστω *n* ένας θετικός ακέραιος. Το σύνολο $\mathbb{R}_n[x]$ των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων.
3. Το σύνολο $D_n(\mathbb{R})$ των $n\times n$ πραγματικών διαγωνίων πινάκων είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{R})$.

Ορισμός 3 (άθροισμα και τομή υποχώρων)

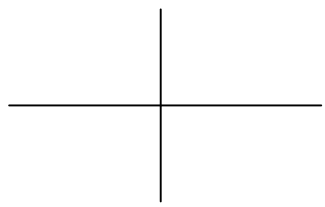
Έστω U,W δυό υπόχωροι ενός δ.χ. V. Τότε τα σύνολα

$$U + W = \{u + w \in V \mid u \in U, w \in W\}$$
$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ και } v \in W\}$$

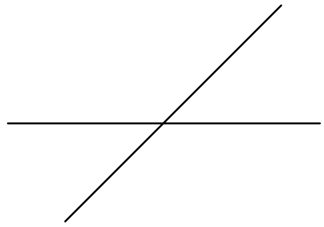
*είναι υπόχωροι του V, που ονομάζονται αντίστοιχα το **άθροισμα** και η **τομή** των U και W. Στην ειδική περίπτωση που έχουμε $U \cap W = \{0_V\}$, τότε το άθροισμα $U + W$ λέγεται **ευθύ άθροισμα** και συμβολίζεται με $U \oplus W$.*

Παράδειγμα

Έστω $V = \mathbb{R}^2$, και οι υπόχωροι $U = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}$, $W = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Τότε $U + W = \mathbb{R}^2$. Πράγματι, είναι σαφές ότι $U + W \subseteq \mathbb{R}^2$. Το τυχαίο στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ γράφεται $(x,y) = (x,0) + (0,y) \in U + W$. Άρα ισχύει και $\mathbb{R}^2 \subseteq U + W$. Συνεπώς έχουμε $U + W = \mathbb{R}^2$. Επειδή έχουμε τη σχέση $U \cap W = \{(0,0)\}$, το άθροισμα $U + W$ είναι ευθύ. Τελικά έχουμε $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$. Γεωμετρικά, το $\mathbb{R}^2$ είναι το ευθύ άθροισμα των δυο συνήθων αξόνων.



Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\mathbb{R}^2 = U \oplus W'$, όπου $W' = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$.



Γεωμετρικά, το $\mathbb{R}^2$ είναι το ευθύ άθροισμα των δύο εικονιζόμενων ευθειών.

Προσοχή Παρατηρούμε ότι έχουμε $U \oplus W = U \oplus W'$, αλλά $W \neq W'$.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Αν $v_1, \ldots, v_n$ είναι στοιχεία ενός $\mathbb{F}-$δ.χ. V, τότε όλα τα στοιχεία της μορφής $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, όπου $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, περιέχονται στο V. Δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 4 (γραμμικός συνδυασμός στοιχείων)

Έστω X ένα υποσύνολο ενός $\mathbb{F}-$*διανυσματικού χώρου V. Κάθε στοιχείο του V της μορφής* $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$, *όπου* $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}, x_1,\ldots,x_n\in X$ *λέγεται ένας* $\mathbb{F}-$***γραμμικός συνδυασμός*** *των στοιχείων του X. Το σύνολο των* $\mathbb{F}-$*γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του X ονομάζεται* $\mathbb{F}-$*γραμμική θήκη του X και συμβολίζεται με* $\langle X\rangle$ *ή* $L(X)$. *Στην ειδική περίπτωση που το X είναι κενό, δεχόμαστε ότι* $L(X)=\{0_V\}$.

Παράδειγμα

Έστω $V=\mathbb{R}^3$ και $X=\{(2,1,1),(1,-1,1)\}$. Τότε το $\langle X\rangle$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής $a(2,1,1)+b(1,-1,1)$ με $a,b\in\mathbb{R}$. Ας εξετάσουμε αν το (3,3,1) ανήκει στο $\langle X\rangle$. Ερωτάμε, δηλαδή, αν υπάρχουν a,b τέτοια ώστε

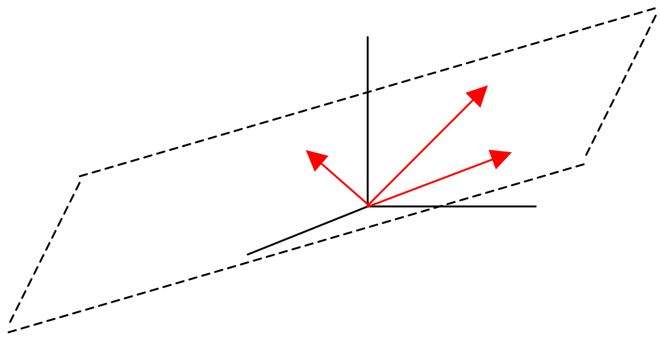
$$a(2,1,1)+b(1,-1,1)=(3,3,1)$$

Η εξίσωση αυτή ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\begin{aligned}2a+b&=3\\ a-b&=3\\ a+b&=1.\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση ($a=2,b=-1$) και κατά συνέπεια αληθεύει ότι το (3,3,1) ανήκει στο $\langle X\rangle$.

Γεωμετρικά, το παράδειγμα αυτό λέει ότι το διάνυσμα (3,3,1) ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα $(2,1,1),(1,-1,1)$.



Ορισμός 5 (διανυσματικός χώρος που παράγεται από ένα σύνολο)

*Έστω X ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Θα λέμε ότι το X **παράγει** το V πάνω από το $\mathbb{F}$ (ή ότι το V **παράγεται** από ο X πάνω από το $\mathbb{F}$ ή ότι το X είναι **σύνολο γεννητόρων** του V πάνω από το $\mathbb{F}$) αν ισχύει $V = \langle X \rangle$, δηλαδή αν κάθε στοιχείο του V είναι $\mathbb{F}-$γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του X.*

Συχνά παραλείπουμε την αναφορά στο $\mathbb{F}$ από τον παραπάνω ορισμό και μιλάμε, για παράδειγμα, για σύνολο γεννητόρων του V όταν είναι σαφές ποιο είναι το $\mathbb{F}$.

Παραδείγματα

- Από το Κεφάλαιο 5 θυμόμαστε ότι κάθε βάση του $\mathbb{R}^n$ παράγει το $\mathbb{R}^n$.
- Ο διανυσματικός χώρος $U = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$ παράγεται από το $X = \{(1,1)\}$. Επίσης το U παράγεται από κάθε σύνολο της μορφής $\{(a,a)\}$, όπου $a \neq 0$.
- Ο δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$ παράγεται από τα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ αφού το τυχαίο στοιχείο $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ του $M_2(\mathbb{R})$ γράφεται

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Επειδή κάθε πολυώνυμο βαθμού ≤ 2 γράφεται στη μορφή $ax^2 + bx + c$, συμπεραίνουμε ότι ο δ.χ. $\mathbb{R}_2[x]$ παράγεται από τα $1, x, x^2$.

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι στο $\mathbb{R}^n$ υπάρχει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο μέσω του οποίου εκφράζονται οι γεωμετρικές έννοιες του μήκους και της καθετότητας.

Ορισμός 6 (χώρος με εσωτερικό γινόμενο)

*Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\langle \ \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** στο V αν ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.*

1. $\langle au_1 + bu_2, v \rangle = a\langle u_1, v \rangle + b\langle u_2, v \rangle$
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

3. $\langle u,u\rangle \geq 0$

4. $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$

για κάθε $a,b \in \mathbb{F}, u, u_1, u_2, v \in V$.

Παραδείγματα

- Στο $\mathbb{R}^n$, το $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$, όπου $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)$, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.
- Στο $\mathbb{C}^n$, το $\langle x,y\rangle = x_1\overline{y_1} + ... + x_n\overline{y_n}$, όπου $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)$, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.
- Έστω V ο $\mathbb{R}-$δ.χ. των συνεχών απεικονίσεων $[0,1]\to\mathbb{R}$. Θέτοντας $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ παίρνουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στο *V*.

Ορισμός 7

Έστω V ένας δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ \rangle$.

- *Το* ***μήκος*** *ενός* $v \in V$ *είναι ο πραγματικός αριθμός* $\sqrt{\langle v,v\rangle}$ *και συμβολίζεται με* $|v|$. *Ένα* $v \in V$ *λέγεται* ***μοναδιαίο*** *αν* $|v|=1$.
- *Δυο στοιχεία* $u,v \in V$ *λέγονται* ***κάθετα*** *αν* $\langle u,v\rangle = 0$.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Πρόταση 1

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$*δ.χ. και* $v \in V, a \in \mathbb{F}$. *Τότε ισχύουν τα εξής*

1. $a0_V = 0_V$
2. $0v = 0_V$
3. *αν* $av = 0_V$, *τότε* $a=0$ *ή* $v=0_V$
4. $(-a)v = a(-v) = -(av)$.

Πρόταση 2 (κριτήριο υποχώρου)

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και U ένα υποσύνολο του V. Τότε το U είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν ισχύουν τα κάτωθι.

1. $U \neq \varnothing$
2. $u, u' \in U \Rightarrow u + u' \in U$ *(το U είναι 'κλειστό ως προς την πρόσθεση')*
3. $a \in \mathbb{F}, u \in U \Rightarrow au \in U$ *(το U είναι 'κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό')*

Επισήμανση

Τονίζουμε ότι κάθε υπόχωρος του *V* περιέχει το μηδενικό στοιχείο 0_V του *V*.

Παράδειγμα

Το $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι,

1. το *U* είναι μη κενό
2. αν $(x, y, z), (x', y', z') \in U$, τότε

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ 2x' - y' + 3z' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(x + x') - (y + y') + 3(z + z') = 0 \Rightarrow$$
$$(x + x', y + y', z + z') \in U$$

3. αν $(x, y, z) \in U$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$2x - y + 3z = 0 \Rightarrow 2(ax) - (ay) + 3(az) = 0 \Rightarrow$$
$$(ax, ay, az) \in U.$$

Αντίθετα, το $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 1\}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί δεν περιέχει το (0,0,0).

Γεωμετρικά, οι υπόχωροι του

- $\mathbb{R}$ είναι το $\mathbb{R}$ και το $\{0\}$
- $\mathbb{R}^2$ είναι το $\mathbb{R}^2$, το $\{(0,0)\}$ και κάθε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων
- $\mathbb{R}^3$ είναι το $\mathbb{R}^3$, το $\{(0,0,0)\}$, κάθε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και κάθε επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων.

Πρόταση 3 (τομή και άθροισμα υποχώρων)

Έστω U, W δυο υπόχωροι του V. Τότε τα σύνολα

$$U+W=\{u+w\in V \mid u\in U, w\in W\}$$
$$U\cap W=\{v\in V \mid v\in U \text{ και } v\in W\}$$

είναι υπόχωροι του V.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Πρόταση 4 (γραμμική θήκη συνόλου)

Έστω X ένα υποσύνολο ενός δ.χ. V. Τότε η γραμμική θήκη $\langle X\rangle$ είναι ένας υπόχωρος του V.

Πρόταση 5

Έστω V ένας δ.χ., U ένας υπόχωρος του V και X ένα υποσύνολο του V. Τότε έχουμε $\langle X\rangle \subseteq U \Leftrightarrow X\subseteq U$.

Πρόταση 6

Έστω U, W δυο υπόχωροι του δ.χ. V. Τότε το άθροισμα $U+W$ είναι ευθύ αν και μόνο αν κάθε $v\in U+W$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $v=u+w$, όπου $u\in U, w\in W$.

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Θεώρημα 7

Έστω V ένας δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ \rangle$ και $u, v\in V, a\in\mathbb{F}$. Τότε

1. $|av|=|a||v|$
2. $|v|>0$ *αν* $v\neq 0$.
3. $|\langle u,v\rangle|\leq |u||v|$ *(ανισότητα Cauchy-Schwarz)*
4. $|u+v|\leq |u|+|v|$ *(τριγωνική ανισότητα).*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

1) $\{(x,y,z) \mid 2x+3y+z=1\}$

2) $\{(x,y,z) \mid x \geq 0\}$

3) $\{(x,y,z) \mid 2x+3y+z=0\}$

4) $\{(x,y,z) \mid 2x+5y+z=-3x+2y+z=0\}$

Λύση

1) Το $\{(x,y,z) \mid 2x+3y+z=1\}$ δεν περιέχει το (0,0,0) και συνεπώς δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ σύμφωνα με την επισήμανση.

2) Ενώ $(1,0,0) \in \{(x,y,z) \mid x \geq 0\}$, έχουμε $-(1,0,0) = (-1,0,0) \notin \{(x,y,z) \mid x \geq 0\}$. Δηλαδή το $\{(x,y,z) \mid x \geq 0\}$ δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό και άρα δεν είναι υπόχωρος σύμφωνα με την Πρόταση 2.

3) Το $U = \{(x,y,z) \mid 2x+3y+z=0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ σύμφωνα με την Πρόταση 2. Πράγματι, είναι σαφές ότι $U \neq \varnothing$ και επιπλέον αν $(x,y,z),(x',y',z') \in U$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

   - $(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \in U$

   αφού

   $2(x+x')+3(y+y')+(z+z') = (2x+3y+z)+(2x'+3y'+z') = 0+0=0,$

   και

   - $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in U$

   αφού

   $2(\lambda x)+3(\lambda y)+\lambda z = \lambda(2x+3y+z) = 0.$

4) Το $\{(x,y,z) \mid 2x+5y+z=-3x+2y+z=0\}$ είναι υπόχωρος και η απόδειξη είναι όπως στο 3).

Άσκηση 2

Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $M_2(\mathbb{R})$ είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$;

1) $U = \{A \mid \det A = 1\}$

2) $V = \{A \mid \det A = 0\}$

3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+d=0 \right\}$

Λύση

1) Το U δεν είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ γιατί δεν περιέχει το μηδενικό πίνακα.

2) Το V δεν είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$. Πράγματι, ενώ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$,

παρατηρούμε ότι $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin V$, γιατί $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

Δηλαδή το V δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση .

3) Το W είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ γιατί είναι βέβαια μη κενό και

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{pmatrix} \in W$,

αφού $(a+x)+(d+w)=(a+d)+(x+w)=0+0=0$, και

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \in W$,

αφού $\lambda a + \lambda d = \lambda(a+d) = 0$.

Άσκηση 3

Θεωρούμε τον υπόχωρο $U = \langle (1,1,2),(2,1,1) \rangle$ *του* $\mathbb{R}^3$. *Να βρεθούν τα a ώστε* $(1,-1,a) \in U$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον Ορισμό 5. Έχουμε

$$(1,-1,a) \in \langle (1,1,2),(2,1,1) \rangle \Leftrightarrow$$

$$\text{υπάρχουν } \lambda,\mu \text{ με } (1,-1,a) = \lambda(1,1,2)+\mu(2,1,1) \Leftrightarrow$$

$$(1,-1,a) = (\lambda+2\mu, \lambda+\mu, 2\lambda+\mu) \Leftrightarrow$$

$$\text{το σύστημα } \begin{array}{l} \lambda+2\mu=1 \\ \lambda+\mu=-1 \\ 2\lambda+\mu=a \end{array} \text{ έχει λύση .}$$

Μετά από τρεις στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος αυτού παίρνει τη μορφή $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+4 \end{array}\right)$. Συμπεραίνουμε ότι για $a \neq -4$ δεν υπάρχει λύση, ενώ για $a=-4$ υπάρχει λύση. Συνεπώς το ζητούμενο είναι $a=-4$.

Άσκηση 4

1) *Εξετάστε αν το* $(3,9,-4,-2)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $(1,-2,0,3),(2,3,0,-1),(2,-1,2,1)$.
2) *Εξετάστε αν ισχύει* $\langle(1,2,-1),(2,4,1)\rangle = \langle(3,6,0),(-1,-2,2)\rangle$.

Λύση

1) Εξετάζουμε αν υπάρχουν $x,y,z\in\mathbb{R}$ με

$$(3,9,-4,-2) = \lambda(1,-2,0,3)+\mu(2,3,0,-1)+\nu(2,-1,2,1).$$

Το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει είναι

$$\begin{aligned}&\lambda+2\mu+2\nu=3\\&-2\lambda+3\mu-\nu=9\\&2\nu=-4\\&3\lambda-\mu+\nu=-2.\end{aligned}$$

Λύνοντάς το κατά τα γνωστά βλέπουμε ότι έχει λύση (και μάλιστα μοναδική $\lambda=1,\mu=3,\nu=-2$).

2) Για συντομία έστω $U=\langle(1,2,-1),(2,4,1)\rangle$, $V=\langle(3,6,0),(-1,-2,2)\rangle$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$U\subseteq V \quad \text{και} \quad V\subseteq U.$$

Εφαρμόζοντας δυο φορές την Πρόταση 5, αρκεί να δείξουμε ότι

$$(1,2,-1),(2,4,1)\in V$$
και
$$(3,6,0),(-1,-2,2)\in U$$

Θα πρέπει να εξετάσουμε αν καθένα από τα $(1,2,-1),(2,4,1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(3,6,0),(-1,-2,-2)$ και αν καθένα από τα $(3,6,0),(-1,-2,2)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,2,-1),(2,4,1)$. Με τη διαδικασία του προηγούμενου υποερωτήματος βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}&(1,2,-1)=\frac{1}{6}(3,6,0)-\frac{1}{2}(-1,-2,2)\\&(2,4,1)=\frac{5}{6}(3,6,0)+\frac{1}{2}(-1,-2,2)\\&(3,6,0)=(1,2,-1)+(2,4,1)\\&(-1,-2,2)=-\frac{5}{3}(1,2,-1)+\frac{1}{3}(2,4,1).\end{aligned}$$

Άρα $\langle (1,2,-1),(2,4,1)\rangle = \langle (3,6,0),(-1,-2,2)\rangle$.

Σημείωση: Δεν ήταν απαραίτητο να βρούμε τους συγκεκριμένους γραμμικούς συνδυασμούς, αλλά μόνο ότι υπάρχουν, ή ισοδύναμα ότι καθένα από τα 4 συστήματα έχει λύση.

Άσκηση 5

Για ποια a το $(a,2,-1)$ ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $u=(1,3,1), v=(2,1,1)$;

Λύση

Είναι σαφές ότι τα u και v είναι γραμμικά ανεξάρτητα . Συνεπώς το $(a,2,-1)$ ανήκει στον εν λόγω υπόχωρο αν και μόνο αν τα διανύσματα $(a,2,-1)$, u, v είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\det\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

απ' όπου βρίσκουμε $a=-\frac{7}{2}$.

Άσκηση 6

Αποδείξτε την Πρόταση 3.

Λύση

Ας δείξουμε πρώτα ότι το $U+W$ είναι υπόχωρος του V.

- Από τον ορισμό έχουμε $U+W \neq \varnothing$ (αφού $0_V = 0_V + 0_V \in U+W$).
- Έστω $u_1+w_1, u_2+w_2 \in U+W$ με $u_i \in U, w_i \in W$. Τότε $(u_1+w_1)+(u_2+w_2)=(u_1+u_2)+(w_1+w_2)\in U+W$. Δηλαδή το $U+W$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
- Έστω $a \in \mathbb{F}$. Τότε $a(u_1+w_1)=(au_1)+(aw_1)\in U+W$. Δηλαδή το $U+W$ είναι κλειστό ως προς τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό. Άρα το $U+W$ είναι υπόχωρος του V.

Ας δούμε τώρα την τομή.

- Έχουμε $0_V \in U, 0_V \in W$ και άρα $0_V \in U\cap W$, δηλαδή το $U\cap W$ είναι μη κενό.

- Έστω $x, y \in U \cap W$. Τότε $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$ γιατί το U είναι υπόχωρος. Όμοια $x + y \in W$. Άρα $x + y \in U \cap W$.
- Έστω $a \in \mathbb{F}$. Επειδή το U είναι υπόχωρος και $x \in U$, έχουμε $ax \in U$. Όμοια $ax \in W$. Άρα τελικά $ax \in U \cap W$. Άρα το $U \cap W$ είναι υπόχωρος του V.

Άσκηση 7

Θεωρούμε το σύνολο των $n \times n$ συμμετρικών πινάκων $S = \left\{ A \in M_n(\mathbb{F}) \middle| A^t = A \right\}$ και το σύνολο των $n \times n$ αντισυμμετρικών πινάκων $T = \left\{ A \in M_n(\mathbb{F}) \middle| A^t = -A \right\}$. Αποδείξτε ότι τα S,T είναι υπόχωροι του $M_n(\mathbb{F})$ και ότι $S \oplus T = M_n(\mathbb{F})$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $0 \in S$ και άρα το S είναι μη κενό. Έστω $A, B \in S$. Τότε $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B,$ δηλαδή $A + B \in S$. Έστω $a \in \mathbb{F}$. Τότε $(aA)^t = aA^t = aA,$ δηλαδή $aA \in S$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2, το S είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{F})$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και το T είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{F})$.

Για να δείξουμε ότι $S \oplus T = M_n(\mathbb{F})$, αρκεί να δείξουμε (βλ. Ορισμό 3) ότι

1. $S + T = M_n(\mathbb{F})$ και
2. $S \cap T = \{0\}$.

1. Επειδή $S + T \subseteq M_n(\mathbb{F})$, αρκεί να δείξουμε ότι $M_n(\mathbb{F}) \subseteq S + T$. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πίνακας είναι άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Έχουμε $A = \dfrac{A + A^t}{2} + \dfrac{A - A^t}{2}$.

   Παρατηρούμε ότι $\dfrac{A + A^t}{2} \in S,$ αφού $\left(\dfrac{A + A^t}{2}\right)^t = \dfrac{A^t + (A^t)^t}{2} = \dfrac{A + A^t}{2}$. Με παρόμοιο τρόπο έχουμε $\dfrac{A - A^t}{2} \in T$. Άρα $A \in S + T$ οπότε $M_n(\mathbb{F}) \subseteq S + T$.

2. Έστω $A \in S \cap T$. Τότε $A \in S, A \in T \Rightarrow A^t = A, A^t = -A \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow A = 0.$ Άρα $S \cap T = \{0\}$.

Άσκηση 8

Αποδείξτε ότι κάθε μη μηδενικός πίνακας του υπόχωρου $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ *του* $M_2(\mathbb{R})$ *είναι αντιστρέψιμος.*

Λύση

Κάθε στοιχείο του U είναι της μορφής $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $\det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$ και $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Άσκηση 9

Αποδείξτε ότι ο δ.χ. $\mathbb{R}_3[x]$ *των πολυωνύμων βαθμού* ≤ 3 *παράγεται από το σύνολο* $\left\{1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3\right\}$.

Λύση

Έχουμε $\mathbb{R}_3[x] = \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle = \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$$

και για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε τις δυο σχέσεις

$$1)\ 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$$

$$2)\ 1, x, x^2, x^3 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle$$

Έχουμε

$1 \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$

$1 + x \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$

και άρα ισχύει η σχέση 1). Επίσης ισχύει και η σχέση 2) γιατί

$$1 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle$$

$$x = (1+x) - 1 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle$$

$$x^2 = (1+x)^2 - 2x - 1 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle$$

$$x^3 = (1+x)^3 - 3x^2 - 3x - 1 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle.$$

Άσκηση 10

Να βρεθεί ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του δ.χ. των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= 0 \\ 2x - 3y + 4z &= 0 \\ 4x + y - 6z &= 0. \end{aligned}$$

Λύση

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$r_2 \to r_2 - 2r_1, r_3 \to r_3 - 4r_1, r_3 \to r_3 - r_2, r_2 \to \dfrac{-1}{7} r_2$, ο επαυξημένος πίνακας του

συστήματος παίρνει τη μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι

$(z, 2z, z),\ z \in \mathbb{R}$. Συνεπώς κάθε λύση είναι της μορφής $z(1,2,1),\ z \in \mathbb{R}$ και ένα

πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του δ.χ. των λύσεων είναι το $\{(1,2,1)\}$.

Άσκηση 11

Έστω $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), v_1 = (2,1,1), v_2 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ *και*

$U = \langle u_1, u_2 \rangle, V = \langle v_1, v_2 \rangle$. *Εξετάστε αν ισχύει* $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Λύση

Θα δείξουμε ότι $U \cap V \neq \{0\}$, οπότε το άθροισμα $U + V$ *δεν* είναι ευθύ σύμφωνα με

τον Ορισμό 3 και άρα δεν έχουμε $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Εύκολα επαληθεύουμε ότι τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (βλ. Κεφάλαιο5):

$$\lambda u_1 + \mu u_2 = (0,0,0) \Rightarrow (\lambda,\lambda,0) + (0,\mu,\mu) = (0,0,0) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \\ \mu = 0 \end{cases}$$
$$\lambda = \mu = 0.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του $U \cap V$ είναι γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2 και γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2$, όπου ένας τουλάχιστον από τους a,b είναι μη μηδενικός. Τότε το $w = au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2$ είναι ένα στοιχείο του $U \cap V$ και επιπλέον είναι μη μηδενικό γιατί τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έχουμε

$$\begin{aligned} &au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2 \Leftrightarrow \\ &a(1,1,0) + b(0,1,1) = c(2,1,1) + d(1,1,1) \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} a - 2c - d = 0 \\ a + b - c - d = 0 \\ b - c - d = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, βρίσκουμε ότι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς οι λύσεις είναι $(a,b,c,d) = (0, \frac{1}{2}d, -\frac{1}{2}d, d), d \in \mathbb{R}.$ Επιλέγοντας $d = 2$, έχουμε $a = 0, b = 1, c = -1, d = 2.$

Σημείωση Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι με τη χρήση της έννοιας της βάσης, απλουστεύονται αρκετές από τις λύσεις των προηγούμενων ασκήσεων.

Άσκηση 12

Για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση

$$\langle\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle x, y \rangle = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + k x_2 y_2,$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο; Για τις τιμές αυτές να βρεθούν τα μήκη των διανυσμάτων $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ *και να εξεταστεί αν αυτά είναι κάθετα.*

Λύση

Εύκολα επαληθεύεται ότι οι ιδιότητες 1 και 2 στον Ορισμό 6 αληθεύουν για κάθε k.

Για την ιδιότητα 3 έχουμε

$$\begin{aligned}
&\langle x,x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow\\
&x_1^2-2x_1x_2-2x_2x_1+kx_2^2=x_1^2-4x_1x_2+kx_2^2\geq 0 \Leftrightarrow\\
&\left(x_1^2-4x_1x_2+(2x_2)^2\right)+kx_2^2-(2x_2)^2\geq 0 \Leftrightarrow\\
&\left(x_1-2x_2\right)^2+kx_2^2-(2x_2)^2\geq 0 \Leftrightarrow\\
&kx_2^2-(2x_2)^2\geq 0 \Leftrightarrow\\
&k\geq 4.
\end{aligned}$$

Έστω $k\geq 4$. Εξετάζουμε την ιδιότητα 4. Είδαμε πριν ότι

$$\langle x,x\rangle=\left(x_1-2x_2\right)^2+kx_2^2-(2x_2)^2.$$

Το δεξιό μέλος είναι μη μηδενικό για κάθε $x\neq(0,0)$ αν και μόνο αν $k>4.$ Τελικά οι ζητούμενες τιμές του k είναι $k>4.$

Για τα ζητούμενα μήκη έχουμε σύμφωνα με τον Ορισμό 7

$$\begin{aligned}
|e_1|&=\sqrt{\langle e_1,e_1\rangle}=\sqrt{1^2-2\cdot1\cdot0-2\cdot0\cdot1+k\cdot0\cdot0}=1,\\
|e_2|&=\sqrt{\langle e_2,e_2\rangle}=\sqrt{0^2-2\cdot0\cdot1-2\cdot1\cdot0+k\cdot1\cdot1}=\sqrt{k}.
\end{aligned}$$

Επειδή $\langle e_1,e_2\rangle=1\cdot0-2\cdot1\cdot1-2\cdot0\cdot0+k\cdot0\cdot1=-2\neq0$ τα e_1,e_2 δεν είναι κάθετα ως προς το δοσμένο εσωτερικό γινόμενο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ποια από τα επόμενα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$;

1. $\{(x,y,z)|z=1\}$
2. $\{(x,y,z)|z=0\}$
3. $\{(x,y,z)|xy=0\}$

Υπόδειξη Το πρώτο δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο. Το τρίτο δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση (πχ εξετάστε το $(1,0,0)+(0,1,0)$). Για το δεύτερο εφαρμόστε την Πρόταση 2.

Άσκηση 2

Εξετάστε ποια από τα επόμενα υποσύνολα του $M_2(\mathbb{R})$ είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$.

1. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a = 1 \right\}$
2. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a \geq 0 \right\}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| 2a + b - c = 0 \right\}$

Υπόδειξη Το πρώτο δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο, το δεύτερο δεν είναι κλειστό ως προς τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό και το τρίτο είναι υπόχωρος.

Άσκηση 3

Αποδείξτε ότι

1. το $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$
2. το $V = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, f(0) = 0 \}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}[x]$
3. το $W = \{ A \in M_n(\mathbb{F}) \,|\, AC = CA \}$, όπου $C \in M_n(\mathbb{F})$, είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{F})$.

Υπόδειξη Εφαρμόστε το κριτήριο υποχώρου και στις τρεις περιπτώσεις. Βλ. Λυμένη Άσκηση 1 3) και Λυμένη Άσκηση 2 3).

Άσκηση 4

Έστω $u = (1,1,2), v = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $(4,a,5) \in \langle u, v \rangle$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 3. **Απάντηση** $a = 3$.

Άσκηση 5

Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}^3$ έχουμε $\langle (1,0,-1),(2,1,1) \rangle = \langle (1,0,-1),(4,1,-1),(5,2,1) \rangle$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 4.

Άσκηση 6

Έστω $u, v, w \in V$, όπου V είναι ένας δ.χ. Αποδείξτε ότι $\langle u, v\rangle = \langle u, v, w\rangle \Leftrightarrow w \in \langle u, v\rangle$.

Υπόδειξη Βλ. Ορισμό 4 και Πρόταση 5 .

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του δ.χ. των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \\ 3x - 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 10. **Απάντηση** $\{(1,2,1)\}$. Επίσης και κάθε $\{(a, 2a, a)\}, a \neq 0,$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων των λύσεων του συστήματος.

Άσκηση 8

Έστω $U = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-x) = f(x)\}, \quad W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-x) = -f(x)\}$.

Αποδείξτε ότι τα σύνολα αυτά είναι υπόχωροι του $V = \mathbb{R}[x]$ και ότι $V = U \oplus W$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 7. Για να αποδείξετε ότι $V = U + W$, μπορείτε να χρησιμοποιήστε τη σχέση $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Άσκηση 9

Έστω V ένας δ.χ. και $X, Y \subseteq V$.

1. Αποδείξτε ότι $\langle X \cup Y\rangle = \langle X\rangle + \langle Y\rangle$.
2. Δείξτε με παράδειγμα ότι είναι δυνατό να έχουμε $\langle X \cap Y\rangle \neq \langle X\rangle \cap \langle Y\rangle$.

Υπόδειξη Για το 2. έστω $X = \{(1,1)\}, Y = \{(2,2\}$. Τότε $\langle X \cap Y\rangle = \{(0,0)\}$.

Άσκηση 10

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε το άθροισμα $U + V$ να είναι ευθύ όπου

$U = \langle (1,1,1), (1,0,-1)\rangle, V = \langle (5,3,a)\rangle$

Υπόδειξη Ισοδύναμα, θέλουμε το $(5,3,a)$ να μην είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,1,1),(1,0,-1)$. Συνεχίστε τώρα όπως στη Λυμένη Άσκηση 5. Απάντηση $a \neq 1$.