Κεφάλαιο 3[1]

Πίνακες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα, αρκεί να εστιάσουμε την προσοχή μας στους συντελεστές των αγνώστων και στους σταθερούς όρους. Για παράδειγμα, μπορούμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2x + 5y + z &= 0 \\ 3x - 4y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας μόνο την ακόλουθη διάταξη αριθμών

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Μια τέτοια διάταξη ονομάζεται πίνακας.

Ο σκοπός του Κεφαλαίου 3 είναι:

- να μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες των πράξεων πινάκων
- να μάθουμε να λύνουμε γραμμικά συστήματα με τη χρήση πινάκων και
- να κατανοήσουμε την έννοια του αντίστροφου πίνακα και να μάθουμε έναν πρακτικό τρόπο υπολογισμού του.

Ο χαρακτήρας αυτού του κεφαλαίου είναι έντονα υπολογιστικός και θα δώσουμε έμφαση σε σχετικούς αλγορίθμους και παραδείγματα. Πέρα από τις εφαρμογές των αλγορίθμων, θα ασχοληθούμε και με τις αποδείξεις τους. Τονίζουμε ότι οι έννοιες που θα μελετήσουμε εδώ είναι θεμελιακές για τα επόμενα κεφάλαια.

[1] Συγγραφέας Μιχάλης Μαλιάκας

3.1 Ορισμοί

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με βασικούς ορισμούς που αφορούν στους πίνακες.

Πριν δώσουμε τον ορισμό του πίνακα ας θεωρήσουμε τη διάταξη

	2001	2002	2003
Αθήνα	42	41	42
Μυτιλήνη	39	37	37

όπου φαίνονται οι μέγιστες θερμοκρασίες τα έτη 2001, 2002, 2003 στις πόλεις Αθήνα και Μυτιλήνη. Βλέπουμε για παράδειγμα, ότι η τελευταία γραμμή μας πληροφορεί για τις θερμοκρασίες της Μυτιλήνης και η τελευταία στήλη για τις θερμοκρασίες το 2003. Η διάταξη

$$\begin{matrix} 42 & 41 & 42 \\ 39 & 37 & 37 \end{matrix}$$

είναι ένα παράδειγμα ενός 2×3 πίνακα.

Όπως και σε προηγούμενα κεφάλαια, με F συμβολίζουμε ένα από τα σύνολα $\mathbb{R},\mathbb{C}$. Ένας **πίνακας** A με στοιχεία από το F είναι μια διάταξη στοιχείων a_{ij} του F σε σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο της μορφής

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Λέμε ότι το **μέγεθος** (ή ο **τύπος**) του παραπάνω πίνακα είναι $m\times n$ ή ότι ο πίνακας είναι ένας $m\times n$ πίνακας. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ είναι ένας 1×3 πίνακας, ο $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι 2×1 και ο $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ είναι 3×2.

Ο πίνακας A που είδαμε πιο πάνω συμβολίζεται με $(a_{ij}), i=1,...,m,\ j=1,...,n.$ Πιο απλά χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό $A=(a_{ij})$ όταν είναι σαφές ποια είναι τα $m,n.$ Η **πρώτη γραμμή** του προηγούμενου πίνακα είναι η διατεταγμένη n άδα $\left(a_{11},a_{12},...,a_{1n}\right)$, η **δεύτερη γραμμή** είναι η διατεταγμένη n άδα $\left(a_{21},a_{22},...,a_{2n}\right)$ κοκ.

Η πρώτη στήλη του προηγούμενου πίνακα είναι η διατεταγμένη m άδα $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, την οποία γράφουμε σε κατακόρυφη διάταξη για να είναι άμεσος ο συσχετισμός με τον αρχικό πίνακα. Η **δεύτερη στήλη** είναι η διατεταγμένη m άδα $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, κοκ.

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο a_{ij} βρίσκεται πάνω στη i γραμμή και στη j στήλη. Λέμε ότι το στοιχείο a_{ij} βρίσκεται στη θέση (i, j) του πίνακα.

Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το F συμβολίζεται με $M_{m\times n}(F)$.

Παράδειγμα

Έστω $(a_{ij}) \in M_{2\times 3}(F)$, όπου $a_{ij} = 2i - j$. Τότε ο (a_{ij}) είναι ένας πίνακας με δυο γραμμές και τρεις στήλες. Στη θέση (1,1) υπάρχει το στοιχείο $a_{11} = 2\cdot 1 - 1 = 1$, στη θέση (1,2) το $a_{12} = 2\cdot 1 - 2 = 0$ κλπ. Επομένως ο πίνακας (a_{ij}) είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.1 Ορισμός

Έστω $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ δυο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το F. Θα λέμε ότι οι A, B είναι ίσοι και θα γράφουμε $A = B$ αν ισχύει $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i = 1, \dots, m$ και για κάθε $j = 1, \dots, n$.

Επισημαίνουμε ότι αν δυο πίνακες είναι ίσοι, τότε είναι του αυτού μεγέθους.

Παράδειγμα

Έχουμε $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 6 \end{pmatrix}$ αν και μόνο αν $x = -1$ και $y = 4$. Επίσης για κάθε z έχουμε $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & z & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & z & 3 \end{pmatrix}$, γιατί οι πίνακες αυτοί διαφέρουν στα στοιχεία που υπάρχουν στη θέση (1,2).

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε πίνακες ειδικής μορφής που θα εμφανιστούν συχνά στα παρακάτω.

- Ένας $m \times n$ πίνακας λέγεται **τετραγωνικός** αν $m = n$. Δηλαδή ένας πίνακας είναι τετραγωνικός αν το πλήθος των γραμμών του ισούται με το πλήθος των στηλών του. Για παράδειγμα, ο $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ είναι τετραγωνικός ενώ ο $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ δεν είναι. Το σύνολο $M_{m\times m}(F)$ των τετραγωνικών $m \times m$ πινάκων με στοιχεία από το F συμβολίζεται πιο απλά με $M_m(F)$.

- Τα **διαγώνια στοιχεία** ενός $m \times n$ πίνακα (a_{ij}) είναι τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, ..., a_{kk}$, όπου $k = \min\{m, n\}$. Λέμε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στη **διαγώνιο** του πίνακα.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = \left(a_{ij}\right)$ λέγεται **άνω τριγωνικός** αν για κάθε $i > j$ έχουμε $a_{ij} = 0$. Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται άνω τριγωνικός αν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την διαγώνιο είναι ίσα με 0. Για παράδειγμα οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ είναι άνω τριγωνικοί.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = \left(a_{ij}\right)$ λέγεται **κάτω τριγωνικός** αν για κάθε $i < j$ έχουμε $a_{ij} = 0$. Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται κάτω τριγωνικός αν τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την διαγώνιο είναι ίσα με 0. Για παράδειγμα οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ είναι κάτω τριγωνικοί.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) λέγεται **διαγώνιος** αν για κάθε $i \neq j$ έχουμε $a_{ij} = 0$. Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας είναι διαγώνιος αν κάθε στοιχείο που δεν βρίσκεται στη διαγώνιο είναι ίσο με 0. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι διαγώνιος αλλά ο $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ δεν είναι.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) λέγεται **συμμετρικός** αν για κάθε i, j ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$. Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικοί. Ο πίνακας $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{3} & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ δεν είναι συμμετρικός, γιατί τα στοιχεία που είναι στα κουτάκια δεν είναι ίσα, δηλαδή $a_{12} = 2 \neq 3 = a_{21}$. Βλέπουμε ότι σε ένα συμμετρικό πίνακα στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο είναι ίσα.

Έστω $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(F)$. Ο **ανάστροφος** πίνακας του A είναι ο $A^t=(a_{ji})\in M_{n\times m}(F).$ Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 2\\ y & 0 & 3\end{pmatrix}$, τότε $A^t=\begin{pmatrix} x & y\\ 1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$

Βλέπουμε ότι οι γραμμές (αντίστοιχα, οι στήλες) του A^t είναι οι στήλες (αντίστοιχα, γραμμές) του Α.

3.1.2 Παρατήρηση

Από τους ορισμούς έπεται άμεσα ότι

- ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A=A^t$
- για κάθε πίνακα A έχουμε $\left(A^t\right)^t=A.$

Στα επόμενα, όταν δεν διευκρινίζουμε αν τα στοιχεία ενός πίνακα ανήκουν στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$ θα εννοούμε ότι ανήκουν στο $\mathbb{C}$.

3.1.3 Επεξεργασμένα Παραδείγματα

1) Έστω $A=\begin{pmatrix} 2 & x\\ 3 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 9\\ 3 & y\end{pmatrix}$. Βλέπουμε ότι ισχύει $A=B$ αν και μόνο αν $x=9$, $y=-1.$
2) Έστω $A=\begin{pmatrix} 2 & 4x-6y\\ 2x+3y & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Έχουμε $A=B$ αν και μόνο αν το σύστημα $\begin{matrix} 4x-6y=4\\ 2x+3y=4.\end{matrix}$ έχει λύση. Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη ισότητα με 2 και αφαιρώντας από την πρώτη παίρνουμε $0=-4$, που είναι άτοπο. Άρα για κάθε x,y έχουμε $A\neq B.$
3) Έστω $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5x\\ -1 & 7 & 0\\ x^2+6 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Βλέπουμε ότι ο Α είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $x^2+6=5x\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2,3.$
4) Έστω $A=\left(2^{i+j}\right)\in M_{10}(F), B=\left(3i+j\right)\in M_{10}(F).$ Τότε ο Α είναι συμμετρικός αφού για κάθε i,j έχουμε $a_{ij}=2^{i+j}=2^{j+i}=a_{ji}$. Αντίθετα, ο Β δεν είναι συμμετρικός αφού για παράδειγμα $b_{12}=3\cdot1+2=5, b_{21}=3\cdot2+1=7.$
5) Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & x+1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & x^2-1 & 0\end{pmatrix}$ είναι διαγώνιος αν και μόνο αν έχουμε $x+1=0$ και $x^2-1=0$, δηλαδή αν και μόνο αν $x=-1.$

Ασκήσεις 3.1

1. Να βρεθούν οι x, y τέτοιοι ώστε $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 2 & -3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Να εξεταστεί αν υπάρχουν x, y τέτοιοι ώστε
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ 2 & y & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 6 \\ 2 & x-y & 5 \end{pmatrix}$.
3. Αληθεύει ότι ο πίνακας $A = (3i+5j) \in M_{10\times 10}(F)$ είναι συμμετρικός;
4. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & x^4 - 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι τιμές του x τέτοιες ώστε ο A είναι
    a. κάτω τριγωνικός
    b. άνω τριγωνικός
5. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές. Στην περίπτωση που μια πρόταση είναι σωστή δώστε μια απόδειξη. Διαφορετικά ένα αντιπαράδειγμα αρκεί.
    a. ο ανάστροφος κάθε άνω τριγωνικού πίνακα είναι κάτω τριγωνικός.
    b. κάθε διαγώνιος πίνακας είναι συμμετρικός
    c. κάθε πίνακας που είναι και άνω τριγωνικός και κάτω τριγωνικός είναι διαγώνιος.

Απαντήσεις / Υποδείξεις 3.1

1. $x = 5, y = 6$
2. Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει βρίσκουμε $x = 5, y = \frac{5}{2}$.
3. όχι
4. a. $x = 1, -1, i, -i$. b. κάθε $x \in \mathbb{C}$.
5. α. σωστό, b. σωστό, c. σωστό.

3.2 Πράξεις με Πίνακες

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τον αλγεβρικό λογισμό πινάκων, δηλαδή με τις πράξεις πινάκων. Θα δούμε ότι οι πράξεις αυτές έχουν αρκετά κοινά στοιχεία με τις αντίστοιχες πράξεις πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Υπάρχουν, όμως, και σημαντικές διαφορές που θα τονίσουμε ιδιαίτερα

Πρόσθεση Πινάκων

3.2.1 Ορισμός

Έστω $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_{m\times n}(F)$. *Το άθροισμα, A+B, των A και B είναι ο πίνακας* $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}-4 & 3 & x\\ 1 & y & 0\end{pmatrix}$, τότε

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 3 & x\\ 1 & y & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+(-4) & 2+3 & 5+x\\ -1+1 & 3+y & 4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 5+x\\ 0 & 3+y & 4\end{pmatrix}.$$

Δηλαδή για να σχηματίσουμε το άθροισμα δυο πινάκων προσθέτουμε στοιχεία που βρίσκονται σε αντίστοιχες θέσεις.

3.2.2 Παρατήρηση

Επισημαίνουμε ότι το άθροισμα $A+B$ δυο πινάκων ορίζεται μόνο όταν οι *A*, *B* έχουν το ίδιο μέγεθος. Στην περίπτωση αυτή, ο πίνακας *A* + *B* έχει το ίδιο μέγεθος με τους *A*,*B*.

Πολλαπλασιασμός Πίνακα με Αριθμό

3.2.3 Ορισμός

Έστω $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(F)$ και $k\in F$. Το γινόμενο *kA* του *k* με τον *A* είναι ο πίνακας $kA=(ka_{ij})$.

Για παράδειγμα, αν $k=2$ και $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, τότε

$$2A=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 5\\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 & 2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 10\\ -2 & 6 & 8\end{pmatrix}.$$

Δηλαδή για να σχηματίσουμε το γινόμενο kA πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο του πίνακα *A* με τον αριθμό *k*. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας *kA* έχει το ίδιο μέγεθος με τον *A*.

Οι κυριότερες ιδιότητες του αθροίσματος πινάκων και του γινομένου αριθμού με πίνακα συνοψίζονται στην παρακάτω πρόταση. Πριν τη διατυπώσουμε ας καθιερώσουμε τους επόμενους συμβολισμούς. Έστω $A, B \in M_{m\times n}(F)$. Ορίζουμε

$$-A = (-1)A$$
$$A - B = A + (-B).$$

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & x \\ 1 & y & 0 \end{pmatrix}$, τότε

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & x \\ 1 & y & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1-(-4) & 2-3 & 5-x \\ -1-1 & 3-y & 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5-x \\ -2 & 3-y & 4 \end{pmatrix}.$$

Τον $m \times n$ πίνακα που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με 0 συμβολίζουμε με $0_{m\times n}$ (ή πιο απλά 0 αν το μέγεθός του είναι σαφές) δηλαδή

$$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.4 Πρόταση

Έστω $A, B, C \in M_{m\times n}(F)$ και $k_1, k_2 \in F$. Τότε ισχύουν τα εξής.

1. $\left(A+B\right)+C = A+\left(B+C\right)$
2. $A + 0_{m\times n} = A$
3. $A - A = 0_{m\times n}$
4. $A + B = B + A$
5. $k_1(A+B) = k_1A + k_1B$
6. $\left(k_1 + k_2\right)A = k_1A + k_2A$
7. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
8. $1A = A$ *και* $0A = 0_{m\times n}$.

Απόδειξη Η επαλήθευση των παραπάνω ιδιοτήτων είναι σε κάθε περίπτωση υπόθεση ρουτίνας. Ενδεικτικά, ας δούμε την ιδιότητα 5. Έστω $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Από τους ορισμούς έχουμε

$$k_1(A+B) = k_1\left(a_{ij} + b_{ij}\right) = \left(k_1\left(a_{ij} + b_{ij}\right)\right) =$$
$$= \left(k_1a_{ij} + k_1b_{ij}\right) = \left(k_1a_{ij}\right) + \left(k_1b_{ij}\right) =$$
$$= k_1(a_{ij}) + k_1(b_{ij}) = k_1A + k_2B.$$

■

Παρατήρηση

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 5 και 8 της προηγούμενης πρότασης βλέπουμε ότι $2A = A + A, 3A = A + A + A$ κοκ. Επίσης έχουμε $-2A = -A - A, -3A = -A - A - A$ κοκ.

3.2.5 Παραδείγματα

1. Έστω $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$. Τότε

$$3A-2B=\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 0\\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 3\\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot 0\\ 2\cdot(-1) & 2\cdot(-3)\\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}3 & 0\\ -6 & 9\\ 6 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & -6\\ 8 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-4 & 0-0\\ -6-(-2) & 9-(-6)\\ 6-8 & -3-10\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -4 & 15\\ -2 & -13\end{pmatrix}.$$

2. Να βρεθούν όλα τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda A+\mu B=0_{3\times 2}$, όπου οι πίνακες A,B είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.
Έχουμε

$$\lambda A+\mu B=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & 0\\ -2\lambda-\mu & 3\lambda-3\mu\\ 2\lambda+4\mu & -\lambda+5\mu\end{pmatrix}.$$

Συνεπώς

$$\lambda A+\mu B=0_{3\times 2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & 0\\ -2\lambda-\mu & 3\lambda-3\mu\\ 2\lambda+4\mu & -\lambda+5\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+2\mu=0\\ -2\lambda-\mu=0\\ 2\lambda+4\mu=0.\\ 3\lambda-3\mu=0\\ -\lambda+5\mu=0\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό, βλέπουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση $\lambda=0,\mu=0$.

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Ο ορισμός του πολλαπλασιασμού πινάκων, που θα δούμε σε λίγο, ίσως φαντάζει μη αναμενόμενος. Για να δώσουμε ένα κίνητρο του ορισμού αυτού, ας δούμε ένα παράδειγμα που σχετίζεται με γραμμικά συστήματα.

3.2.6 Παράδειγμα

Θεωρούμε το 2×3 σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= c_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Ο πίνακας των συντελεστών είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Ας υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές x, y, z εκφράζονται μέσω νέων μεταβλητών X, Y, Z ως εξής

$$\begin{aligned} x &= b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z \\ y &= b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z \\ z &= b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ο πίνακας των συντελεστών του τελευταίου συστήματος είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Αν επιθυμούμε να εκφράσουμε το αρχικό σύστημα χρησιμοποιώντας τις νέες μεταβλητές X,Y,Z, τότε αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (2) στις (1). Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\left(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}\right)X + \left(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}\right)Y + \left(a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}\right)Z = c_1 \\ &\left(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}\right)X + \left(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}\right)Y + \left(a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}\right)Z = c_2. \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος αυτού είναι ο

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας το συνήθη συμβολισμό για αθροίσματα, ο παραπάνω πίνακας γράφεται

$$\begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{3} a_{1r}b_{r1} & \sum_{r=1}^{3} a_{1r}b_{r2} & \sum_{r=1}^{3} a_{1r}b_{r3} \\ \sum_{r=1}^{3} a_{2r}b_{r1} & \sum_{r=1}^{3} a_{2r}b_{r2} & \sum_{r=1}^{3} a_{2r}b_{r3} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Δηλαδή στη θέση (i, j) υπάρχει το στοιχείο $\sum_{r=1}^{3} a_{ir}b_{rj}$. Ο πίνακας (3) ονομάζεται το γινόμενο των A,B.

3.2.7 Ορισμός

Έστω $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{l\times m}(F)$ *και* $B = \left(b_{st}\right) \in M_{m\times n}(F)$. *Τότε το* ***γινόμενο*** *των Α και Β, που συμβολίζεται με ΑΒ, είναι ο* $l\times n$ *πίνακας με στοιχεία από το F όπου στη θέση (i,j) υπάρχει το στοιχείο* $\sum_{r=1}^{m} a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&k\end{pmatrix}$, τότε το γινόμενο AB είναι ο 2×3 πίνακας

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c & d+2e+3f & g+2h+3k\\4a+5b+6c & 4d+5e+6f & 4g+5h+6k\end{pmatrix}.$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\4a+5b+6c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3z & 2y+3w\\4x+5z & 4y+5w\end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix}-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\left((-2)\cdot 4+3\cdot 5\right)=\left(7\right).$$

Σχηματικά, το στοιχείο του γινομένου AB στη θέση (i,j) προκύπτει από τη γραμμή i του A και τη στήλη j του B όπως δείχνει το σχήμα

$$\begin{pmatrix} & \dots & \\ & \boxed{a_{i1}\quad a_{i2}\quad \dots \quad a_{im}} & \\ & \dots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \dots\\ b_{mj}\end{matrix}} & \\ \dots & & \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots & \dots & \dots\\ \dots & \boxed{a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{im}b_{mj}} & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}.$$

3.2.8 Παρατήρηση

Τονίζουμε ότι το γινόμενο AB ορίζεται μόνο αν το πλήθος των στηλών του A ισούται με το πλήθος των γραμμών του B, δηλαδή αν ο A είναι $l\times m$ πίνακας και ο B $m\times n$. Στην περίπτωση αυτή, ο AB είναι ένας $l\times n$ πίνακας.

Στην επόμενη πρόταση περιγράφονται μερικές ιδιότητες του γινομένου πινάκων. Με I_n συμβολίζουμε τον $n\times n$ πίνακα $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με 1 και τα υπόλοιπα με 0. Αυτός ονομάζεται ο $n\times n$ **ταυτοτικός** πίνακας. Όταν είναι σαφές πιο είναι το n συνήθως γράφουμε I στη θέση του I_n.

3.2.9 Πρόταση

Έστω $A\in M_{k\times l}(F), B\in M_{l\times m}(F), C\in M_{m\times n}(F)$. *Τότε* $(AB)C=A(BC)$.

Έστω $A\in M_{l\times m}(F), B,C\in M_{m\times n}(F)$. *Τότε* $A(B+C)=AB+AC$.

Έστω $A,B\in M_{l\times m}(F), C\in M_{m\times n}(F)$. *Τότε* $(A+B)C=AC+BC$.

Έστω $k\in F, A\in M_{l\times m}(F), B\in M_{m\times n}(F)$. *Τότε* $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

Έστω $A \in M_{m\times n}(F)$. *Τότε* $I_m A = AI_n = A$, $0_{l\times m} A = 0_{l\times n}$ *και* $A 0_{n\times l} = 0_{n\times l}$.

Απόδειξη Οι παραπάνω ιδιότητες αποδεικνύονται με απλούς υπολογισμούς. Ας δούμε ενδεικτικά την 3. Με A_{ij} συμβολίζουμε το στοιχείο του πίνακα Α στη θέση (i, j). Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του γινομένου και του αθροίσματος πινάκων παρατηρούμε ότι το στοιχείο του $(A+B)C$ στη θέση (i, j) είναι το

$$\left((A+B)C\right)_{ij} = \sum_{r=1}^{m} (A+B)_{ir} C_{rj} = \sum_{r=1}^{m} \left(A_{ir} + B_{ir}\right) C_{rj} =$$
$$= \sum_{r=1}^{m} A_{ir} C_{rj} + \sum_{r=1}^{m} B_{ir} C_{rj} = \left(AC\right)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC+BC)_{ij}.$$

Το δεξιό μέλος είναι το στοιχείο του $AC+BC$ στη θέση (i, j). Άρα $(A+B)C = AC+BC$.

■

Σημείωση

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε ορίζεται το γινόμενο AA. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με A^2. Με A^n συμβολίζουμε το γινόμενο $AA...A$, όπου το A εμφανίζεται n φορές, $n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση

Ας επανέλθουμε στο Παράδειγμα 3.2.6 που είδαμε πριν τον ορισμό του γινομένου πινάκων. Χρησιμοποιώντας γινόμενα πινάκων, το σύστημα (1) μπορεί να γραφεί ως

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

και το (2) ως

$$B\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$AB\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Οι Προτάσεις 3.2.4 και 3.2.9 μας πληροφορούν ότι οι πράξεις πινάκων, όταν αυτές ορίζονται, ικανοποιούν μερικές από τις ιδιότητες που ικανοποιούν οι αντίστοιχες πράξεις των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Όμως υπάρχουν σημαντικές διαφορές. Μερικές από αυτές είναι οι εξής.

Προσοχή

- Έστω $A, B \in M_{n\times n}(F)$ δυο $n\times n$ πίνακες. Τότε ορίζονται τα γινόμενα AB και BA. Τονίζουμε ότι είναι δυνατό να έχουμε $AB \neq BA$. Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, τότε $AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- Έστω $A \in M_{l\times m}(F), B \in M_{m\times n}(F)$. Δεν αληθεύει γενικά ότι $(AB)^2 = A^2B^2$. Πράγματι, με τους πίνακες του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, A^2B^2 = \begin{pmatrix} 11 & 36 \\ 8 & 27. \end{pmatrix}$. Το σωστό είναι $(AB)^2 = ABAB$.
- Έστω $A \in M_{l\times m}(F), B \in M_{m\times n}(F)$. Είναι δυνατό να έχουμε $AB = 0_{l\times n}$ ακόμα και αν $A \neq 0_{l\times m}, B \neq 0_{m\times n}$. Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Έστω $A \in M_{l\times m}(F), B, C \in M_{m\times n}(F)$. Αν ισχύει $AB = AC$, τότε γενικά δεν έπεται ότι $B = C$. Πράγματι, αν οι A, B είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, τότε $AB = A0_{2\times 2}$, αλλά $B \neq 0_{2\times 2}$.

Επειδή γενικά δεν ισχύει η ισότητα[2] $AB = BA$, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί σε υπολογισμούς παραστάσεων με πίνακες. Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε σωστά το ανάπτυγμα $(A+B)^2$ χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες 2 και 3 της Πρότασης 3.2.9. Έχουμε

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = \\ &= A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς είναι δυνατό να έχουμε $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. Μάλιστα, βλέπουμε ότι

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ αν και μόνο αν } AB = BA.$$

Διωνυμικό Ανάπτυγμα για Αντιμεταθετικούς Πίνακες

Δυο $n\times n$ πίνακες A, B λέγονται **αντιμεταθετικοί** αν ισχύει $AB = BA$. Παρατηρούμε ότι αν οι A, B είναι αντιμεταθετικοί τότε $(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2$, όπως επίσης $(AB)^n = A^nB^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $n, k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$, τότε ο διωνυμικός συντελεστής $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ είναι ο φυσικός αριθμός $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}$. Επίσης ορίζουμε $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ και

[2] Από τώρα και στο εξής όταν γράφουμε ένα γινόμενο πινάκων χωρίς να διευκρινίζουμε τα μεγέθη τους, θα εννοούμε ότι αυτά είναι τέτοια ώστε το γινόμενο να ορίζεται.

$\binom{n}{k}=0$ αν $k>n$ ή αν $k<0$. Έτσι το $\binom{n}{k}$ ορίζεται για κάθε φυσικό αριθμό n και κάθε ακέραιο k. Για παράδειγμα, $\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10$. Υπενθυμίζουμε ότι για τους διωνυμικούς συντελεστές ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

- $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$,
- $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$,
- (διωνυμικό ανάπτυγμα) $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$, για κάθε $x,y\in\mathbb{C}$.

Είδαμε πριν ότι για πίνακες δεν αληθεύει γενικά η σχέση $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. Όμως στην ειδική περίπτωση που οι πίνακες A,B αντιμετατίθενται, τότε η ισότητα αυτή ισχύει. Πιο γενικά έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

3.2.10 Πρόταση (Διωνυμικό ανάπτυγμα για αντιμεταθετικούς πίνακες)

Έστω $A,B\in M_n(F)$. Αν ισχύει $AB=BA$, τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k. \tag{4}$$

Απόδειξη Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$, η (4) ισχύει. Έστω ότι ισχύει η (4). Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2.9 έχουμε

$$(A+B)^{n+1}=(A+B)^n(A+B)=$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k\right)(A+B)=$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k\right)A+\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k\right)B.$$

Από την υπόθεση $AB=BA$ παίρνουμε $A^{n-k}B^kA=A^{n-k+1}B^k$. Συνεπώς

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k\right)A+\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k\right)B=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k+1}B^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k+1}B^k+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}A^{n-k+1}B^k=$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\right)A^{n-k+1}B^{k}=$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\right)A^{n-k+1}B^{k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)A^{n+1-k}B^{k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^{k}.$$

■

Ο ταυτοτικός $m\times m$ πίνακας I_m αντιμετατίθεται με κάθε $A\in M_m(F)$. Επειδή έχουμε $I_m^{\,k}=I_m$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$, από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε το εξής αποτέλεσμα.

3.2.11 Πόρισμα

Για κάθε $A\in M_m(F)$ *έχουμε*

$$(A+I)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}.$$

Για παράδειγμα, $(A+I)^4=A^4+4A^3+6A^2+4A+I$. Σημειώνουμε ότι η ισότητα στην προηγούμενη πρόταση γράφεται $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}A^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{k}$. Χρησιμοποιώντας το δεξιό μέλος θα γράφαμε $(A+I)^4=I+4A+6A^2+4A^3+A^4$.

3.2.12 Εφαρμογή

Να υπολογιστεί ο πίνακας B^{2006}, όπου $B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Λύση

Ένας τρόπος λύσης είναι να θέσουμε $A=\begin{pmatrix}0&3&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$. Τότε $B=A+I$ και από το Πόρισμα 3.2.11 έχουμε

$$B^{2006}=(A+I)^{2006}=I+\binom{2006}{1}A+\binom{2006}{2}A^2+\ldots+\binom{2006}{2005}A^{2005}+A^{2006.}$$

Με πράξεις βρίσκουμε διαδοχικά

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Άρα $A^n = 0$ για κάθε $n \geq 3$. Τελικά

$$B^{2006} = I + \binom{2006}{1} A + \binom{2006}{2} A^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \binom{2006}{1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \binom{2006}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3\cdot\binom{2006}{1} & -\binom{2006}{1} + 6\binom{2006}{2} \\ 0 & 1 & 2\cdot\binom{2006}{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Σημείωση. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $B^n = I + nA + \binom{n}{2} A^2$.

Στην Παράγραφο 3.1 ορίσαμε τον ανάστροφο πίνακα. Σχετικά με τις πράξεις πινάκων έχουμε την ακόλουθη πρόταση

3.2.13 Πρόταση

1. *Έστω* $A, B \in M_{m\times n}(F)$. *Τότε* $(A+B)^t = A^t + B^t$.
2. *Έστω* $A \in M_{l\times m}(F), B \in M_{m\times n}(F)$. *Τότε* $(AB)^t = B^t A^t$.

Απόδειξη Ας συμβολίσουμε με A_{ij} το στοιχείο του A στη θέση (i,j).

1. Από τον ορισμό του ανάστροφου και της πρόσθεσης πινάκων έχουμε

$$\left((A+B)^t\right)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij}.$$

2. Από τον ορισμό του ανάστροφου και του πολλαπλασιασμού πινάκων έχουμε

$$((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{r=1}^{m} A_{jr} B_{ri} = \sum_{r=1}^{m} \left(A^t\right)_{rj} \left(B^t\right)_{ir} = \sum_{r=1}^{m} \left(B^t\right)_{ir} \left(A^t\right)_{rj} = \left((BA)^t\right)_{ij}.$$

3.2.14 Επεξεργασμένα Παραδείγματα

1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Ποιες από τις παραστάσεις $A+B, A+C, AB, BA, AC$ ορίζονται;

   Λύση

   Σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 3.2.2 και 3.2.8 μόνο οι παραστάσεις $A+C, AB$ ορίζονται.
2. Να βρεθούν όλοι οι 2×2 πραγματικοί πίνακες X τέτοιοι ώστε $AX = 0$, όταν

i) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,

ii) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Λύση

Έστω $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$.

Για την περίπτωση i) έχουμε

$$AX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2z & y+2w\\ x+2z & y+2w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x+2z=0, y+2w=0.$$

Συνεπώς $X=\begin{pmatrix}-2z & -2w\\ z & w\end{pmatrix}$, όπου $z,w\in\mathbb{R}$.

Για την περίπτωση ii) έχουμε

$$AX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2z & y+2w\\ x+z & y+w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x+2z=0,\ y+2w=0,\ x+z=0,\ y+w=0.$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε τη μοναδική λύση $x=y=z=w=0$.
Συνεπώς $X=0$.

3. Έστω A ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^2=I$. Αποδείξτε ότι για τον πίνακα $B=\frac{1}{2}(A+I)$ ισχύει $B^2=B$.

Λύση

Αφού οι A και I αντιμετατίθενται, έχουμε $(A+I)^2=A^2+2A+I$. Άρα

$$B^2=\frac{1}{4}(A+I)^2=\frac{1}{4}(A^2+2A+I)=\frac{1}{4}(I+2A+I)=\frac{1}{2}(A+I)=B.$$

4. Έστω $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις A^n για n = 1,2,3,… .

Λύση

Διαπιστώνουμε ότι

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Θα αποδείξουμε επαγωγικά ως προς n ότι $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ για κάθε n = 1,2,3,…

Για $n = 1$ η αποδεικτέα σχέση προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και θα αποδείξουμε ότι $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Έχουμε $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Έστω $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις B^n για $n = 1,2,3,\ldots$.

Λύση

1ος τρόπος. Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και παρατηρούμε ότι $B = A + I$.

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.2.11 και το αποτέλεσμα του προηγουμένου παραδείγματος, παίρνουμε

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} & \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \end{pmatrix}.$$

2ος τρόπος. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο που είδαμε στην Εφαρμογή 3.2.12. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε $B = 2I + A$ και $A^2 = 0$. Άρα $A^k = 0,\ k = 2,3,\ldots$. Τότε

$$B^n = (2I + A)^n = (2I)^n + \binom{n}{1}(2I)^{n-1} A =$$

$$= 2^n I + n2^{n-1} A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

3ος τρόπος. Με πράξεις διαπιστώνουμε ότι

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2\cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 2^2 & 2\cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 3\cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}.$$

Εικάζουμε ότι

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},\ n = 1,2,\ldots.$$

Θα αποδείξουμε τη σχέση αυτή με επαγωγή.

Για $n = 1$, η αποδεικτέα σχέση είναι προφανής. Έστω $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Τότε

$$B^{n+1} = B^n B = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n 2 & 2^n + n2^{n-1}2 \\ 0 & 2^n 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Σημείωση: Βρήκαμε δύο διαφορετικές παραστάσεις

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} & \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

για το ίδιο αποτέλεσμα. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθούν οι ταυτότητες

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$
$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Πράγματι, για να αποδείξουμε την πρώτη ταυτότητα θέτουμε $x=1$ στο διωνυμικό ανάπτυγμα $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Τότε $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

Για τη δεύτερη ταυτότητα: Από τον ορισμό των διωνυμικών συντελεστών προκύπτει ότι $n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$ για $k \le n-1$. Άρα τα πολυώνυμα $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}x^k$ και $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$ είναι ίσα. Θέτοντας $x=1$ προκύπτει το ζητούμενο.

6. Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Αφού αποδείξτε ότι $A^2 - 2A + I = 0$, υπολογίστε την παράσταση $A^{10}(A-2I)^{11}$.

Λύση

Με απλές πράξεις διαπιστώνουμε ότι

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τη σχέση $A^2 - 2A + I = 0$ γράφουμε στη μορφή $A(A-2I) = -I$, οπότε υψώνοντας στη δύναμη 10 παίρνουμε

$$(A(A-2I))^{10} = (-1)^{10}I^{10} = I.$$

Επειδή οι πίνακες Α, Α – 2Ι αντιμετατίθενται, δηλαδή Α(Α – 2Ι) = (Α – 2Ι)Α, το αριστερό μέλος ισούται με $A^{10}(A-2I)^{10}$. Συνεπώς

$$A^{10}(A-2I)^{10} = I.$$

Τέλος έχουμε

$$A^{10}(A-2I)^{11} = A^{10}(A-2I)^{10}(A-2I)$$
$$= I(A-2I) = A-2I$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Έστω $A = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

i) Αποδείξτε ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1+6n & -9n \\ 4n & 1-6n \end{pmatrix}$, για κάθε $n = 1,2,3,\dots$

ii) Μια αυτοκινητοβιομηχανία παράγει δύο μοντέλα αυτοκινήτου, έστω x και y. Έστω x_n (αντίστοιχα y_n) το κόστος για την παραγωγή n στο πλήθος αυτοκίνητα μοντέλου x (αντίστοιχα, y). Γνωρίζουμε ότι

$$x_{n+1} = 7x_n - 9y_n$$
$$y_{n+1} = 4x_n - 5y_n.$$

Πόσο κοστίζει η παραγωγή 1000 αυτοκινήτων μοντέλου x και 1000 μοντέλου y αν $x_1 = 5$ και $y_1 = 3$;

Λύση

i) Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$ η αποδεικτέα σχέση προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι για συγκεκριμένο $n > 1$ $A^n = \begin{pmatrix} 1+6n & -9n \\ 4n & 1-6n \end{pmatrix}$.

Έχουμε

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1+6n & -9n \\ 4n & 1-6n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 7+42n-36n & -9-54n+45n \\ 28n+4-24n & -36n-5+30n \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1+6(n+1) & -9(n+1) \\ 4(n+1) & 1-6(n+1) \end{pmatrix}.$$

ii) Οι σχέσεις $\begin{matrix} x_{n+1} = 7x_n - 9y_n \\ y_{n+1} = 4x_n - 5y_n. \end{matrix}$ γράφονται με τη χρήση πινάκων ως

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = AA\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} =$$
$$A^2\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^3\begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = \dots$$
$$A^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $n = 999$ και χρησιμοποιώντας την i) παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} x_{1000} \\ y_{1000} \end{pmatrix} = A^{999} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6\cdot 999 & -9\cdot 999 \\ 4\cdot 999 & 1-6\cdot 999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5+3\cdot 999 \\ 3+2\cdot 999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3002 \\ 2001 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς $x_{1000} = 3002,\ y_{1000} = 2001.$

Ασκήσεις 3.2

1) Έστω $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι πίνακες $AB, A-2B, \left(A^t\right)^2$.

2) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n$, $n=1,2,\ldots$.

3) Έστω $A\in M_n(F),\ A=\begin{pmatrix}1 & ... & 1\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$, όπου $n\geq 2.$ Αποδείξτε ότι $(A-I)(\frac{1}{n-1}A-I)=I.$

4) Να βρεθούν όλοι οι πίνακες X τέτοιοι ώστε $X\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}X$.

5) Να βρεθούν οι πραγματικοί πίνακες που αντιμετατίθενται με κάθε 2×2 πραγματικό πίνακα.

6) Έστω $A,B\in M_{l\times m}(F)$ και $C\in M_{m\times n}(F)$.
   a. Αν η πρώτη γραμμή του A ταυτίζεται με την πρώτη γραμμή του B, εξηγείστε γιατί η πρώτη γραμμή του AC ταυτίζεται με την πρώτη γραμμή του BC.
   b. Αν ο C έχει δυο ίσες στήλες, τι συμπεραίνετε για τις στήλες του AC;

7) Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος. Αν μια πρόταση είναι σωστή, δώστε μια απόδειξη. Διαφορετικά, ένα αντιπαράδειγμα αρκεί.
   a. Το άθροισμα δυο $n\times n$ άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός.
   b. Το γινόμενο δυο $n\times n$ άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός.
   c. Το άθροισμα δυο $n\times n$ συμμετρικών πινάκων είναι συμμετρικός.
   d. Το γινόμενο δυο $n\times n$ συμμετρικών πινάκων είναι συμμετρικός.
   e. Για κάθε $m\times n$ πίνακα A, ο AA^t ορίζεται και είναι τετραγωνικός.

8) Να υπολογιστούν οι n στές δυνάμεις των πινάκων
   1. $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$
   2. $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
   3. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

9) Να βρεθούν όλοι οι πίνακες X τέτοιοι ώστε $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

10) Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Αφού αποδείξτε ότι $A^2 - 4A + I = 0,$ υπολογίστε την παράσταση $A^{2005}(A-4I)^{2006}$.

11) Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Επαληθεύσατε ότι $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0.$

12) Αποδείξτε ότι $A^n = \dfrac{3^n - 1}{2}A + \dfrac{3-3^n}{2}I,\ n = 1,2,3,\ldots,$ όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

13) Έστω πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}\ ,\ n = 3, 4, \ldots$$

Να εκφραστεί ο x_n συναρτήσει των x_1, x_2, n.

Απαντήσεις / Υποδείξεις 3.2

1) Οι απαντήσεις είναι αντίστοιχα $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) Υπολογίστε και αντικαταστήσετε το A^2.
4) Οι διαγώνιοι πίνακες.
5) Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση. Εξετάστε ποιοι πίνακες αντιμετατίθενται με τον $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Η απάντηση στο ερώτημα της άσκησης είναι οι διαγώνιοι πίνακες που τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα.
6) b) Υπάρχουν δυο ίσες στήλες
7) Οι απαντήσεις είναι αντίστοιχα a) σωστό, b) σωστό, c) σωστό, d) λάθος, e) σωστό. Ένα αντιπαράδειγμα για το d) είναι $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & -\binom{n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

10) Βλ. Επεξεργασμένο Παράδειγμα 3.2.14 6.

11) Απλές πράξεις

12) Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήστε επαγωγή μαζί με το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης.

Η δοσμένη σχέση περιέχεται στη $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$. Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης. Βλ. Επεξεργασμένο Παράδειγμα 3.2.14 7.

3.3 Κλιμακωτή Μορφή Πίνακα και Γραμμικά Συστήματα

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι μπορούμε να λύσουμε γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Η μέθοδος αυτή αποτελείται από διαδοχικές εφαρμογές των ακόλουθων διαδικασιών:

- πολλαπλασιάζουμε μια εξίσωση του συστήματος με ένα μη μηδενικό αριθμό
- προσθέτουμε σε μια εξίσωση πολλαπλάσιο άλλης
- εναλλάσσουμε τη θέση δυο εξισώσεων.

Ο σκοπός μας στην παράγραφο αυτή είναι να συστηματικοποιήσουμε τη μέθοδο του Gauss χρησιμοποιώντας πίνακες. Για το λόγο αυτό, στο πρώτο τμήμα της παραγράφου θα ασχοληθούμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών πίνακα. Στο δεύτερο τμήμα θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα μας στα γραμμικά συστήματα.

Κλιμακωτή Μορφή Πίνακα

Από τα παραπάνω οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

3.3.1 Ορισμός

Έστω $A \in M_{m\times n}(F)$. *Καθεμιά από τις παρακάτω διαδικασίες ονομάζεται ένας* ***στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών*** *του πίνακα A*

- *πολλαπλασιάζουμε μια γραμμή του A με ένα μη μηδενικό στοιχείο του F*
- *προσθέτουμε σε μια γραμμή πολλαπλάσιο άλλης γραμμής*
- *εναλλάσσουμε δυο γραμμές.*

Έστω r_i η i γραμμή του A. Οι αντίστοιχοι συμβολισμοί των παραπάνω διαδικασιών είναι

- $r_i \to a r_i$ (πολλαπλασιάζουμε την r_i με το $a \neq 0$)
- $r_i \to r_i + a r_j$ (στη γραμμή r_i προσθέτουμε a φορές την r_j)
- $r_i \to r_j$ (εναλλάσσουμε τις r_i, r_j).

3.3.2 Παράδειγμα

Στο παράδειγμα αυτό εφαρμόζουμε τους ακόλουθους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς: πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με το 3, στη συνέχεια αφαιρούμε από τη δεύτερη γραμμή το διπλάσιο της πρώτης, εναλλάσσουμε τις δυο τελευταίες γραμμές και τέλος προσθέτουμε στη δεύτερη γραμμή την πρώτη.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_1 + r_2}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Ορισμός

*Έστω $A, B \in M_{m\times n}(F)$. Θα λέμε ότι ο B είναι **γραμμοϊσοδύναμος** με τον A αν ο B προκύπτει από τον A μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.*

3.3.4 Παραδείγματα

1. Είδαμε πριν ότι ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Επίσης ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με καθέναν από τους πίνακες που εμφανίζονται στο Παράδειγμα 3.3.2.
2. Επειδή κάθε στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών του μηδενικού πίνακα οδηγεί στο μηδενικό πίνακα, συμπεραίνουμε ότι ο μόνος πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με το μηδενικό είναι ο μηδενικός.

3.3.5 Ορισμός

a. *Ένας πίνακας Α ονομάζεται **κλιμακωτός** αν*
   1. *το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το 1*
   2. *το πρώτο 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή βρίσκεται στα δεξιά του πρώτου 1 της προηγούμενης γραμμής*
   3. *οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές γραμμές.*

b. *Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται **αναγμένος κλιμακωτός** αν το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει .*

Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτοί. Ο A_i δεν ικανοποιεί τη συνθήκη i του Ορισμού 3.3.5, $i=1,2,3$.

Ο πίνακας $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός. Αυτός δεν είναι αναγμένος κλιμακωτός, γιατί το στοιχείο που βρίσκεται πάνω από το 1 της δεύτερης γραμμής δεν είναι 0. Ο $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ είναι αναγμένος κλιμακωτός. Από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ο πρώτος και τρίτος είναι αναγμένοι κλιμακωτοί, ενώ ο δεύτερος είναι κλιμακωτός αλλά όχι αναγμένος κλιμακωτός.

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το εξής.

3.3.6 Θεώρημα

Κάθε $m\times n$ πίνακας με στοιχεία από το F είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν $m\times n$ κλιμακωτό πίνακα με στοιχεία από το F.

Η απόδειξη του Θεωρήματος αυτού είναι μια συστηματική εφαρμογή της απαλοιφής του Gauss που είδαμε στο Κεφάλαιο 2, δηλαδή μια συστηματική εφαρμογή των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών. Κρίνουμε σκόπιμο, αντί να διατυπώσουμε αυστηρά την απόδειξη, να εκθέσουμε την κεντρική ιδέα της μέσω παραδειγμάτων. Άλλωστε η απόδειξη δεν είναι παρά μια προσεκτική διατύπωση της διαδικασίας που θα δούμε στη συνέχεια (βλ. για παράδειγμα, A.O Morris, *An Introduction to Linear Algebra*, Theorem 1.5).

3.3.7 Παραδείγματα

1) Έστω $A=\begin{pmatrix}1&2&-5\\-4&1&-6\\6&3&-4\end{pmatrix}$. Εφαρμόζουμε τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 4r_1}$$

Μηδενίζουμε το δεύτερο στοιχείο της πρώτης στήλης

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 6r_1}$$

Μηδενίζουμε το τρίτο στοιχείο της πρώτης στήλης

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & -9 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2}$$

Μηδενίζουμε το τρίτο στοιχείο της δεύτερης στήλης.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{9} r_2}$$

Μετατρέπουμε το 9 σε 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{-26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας είναι κλιμακωτός.

Μέχρι στιγμής έχουμε μετασχηματίσει τον αρχικό πίνακα σε έναν κλιμακωτό. Επιλέξαμε τους συγκεκριμένους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς με γνώμονα την εμφάνιση μηδενικών κάτω από τη διαγώνιο. Τώρα θα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς με σκοπό την εμφάνιση μηδενικών πάνω από το πρώτο 1 κάθε γραμμής. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, θέλουμε να μηδενίσουμε το στοιχείο 2. Επομένως

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{-26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$

Μηδενίζουμε το 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας είναι αναγμένος κλιμακωτός.

2) Έστω $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&8\\2&1&4\end{pmatrix}$. Εφαρμόζουμε την ακόλουθη διαδικασία.

$\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&8\\2&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_2}$ Μεταφέρουμε στην πρώτη γραμμή τη γραμμή εκείνη που περιέχει το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης..

$\begin{pmatrix}1&2&8\\0&2&1\\2&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-2r_1}$ Μηδενίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που βρίσκονται κάτω από το 1.

$\begin{pmatrix}1&2&8\\0&2&1\\0&-3&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to \frac{1}{2}r_2}$ Μετατρέπουμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της δεύτερης γραμμής σε 1

$\begin{pmatrix}1&2&8\\0&1&\frac{1}{2}\\0&-3&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3+3r_2}$ Μηδενίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης που βρίσκονται κάτω από το 1.

$\begin{pmatrix}1&2&8\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{21}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to -\frac{2}{21}r_3}$ Μετατρέπουμε το μη μηδενικό στοιχείο της τρίτης γραμμής σε 1.

$\begin{pmatrix}1&2&8\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_1-2r_2}$ Μηδενίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης που βρίσκονται πάνω από το 1

$\begin{pmatrix}1&0&7\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-2r_3}$ Μηδενίζουμε τα στοιχεία της τρίτης στήλης που βρίσκονται πάνω από το 1

$\begin{pmatrix}1&0&7\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_1-7r_3}$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Ο πίνακας αυτός είναι αναγμένος κλιμακωτός.

Από τα παραπάνω παραδείγματα είναι φανερό ότι έχουμε τον παρακάτω αλγόριθμο που μετασχηματίζει έναν πίνακα σε αναγμένο κλιμακωτό μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Αλγόριθμος
μετασχηματισμού ενός πίνακα σε αναγμένο κλιμακωτό πίνακα

Βήμα 1	Εντοπίζουμε την πρώτη μη μηδενική στήλη και μεταφέρουμε στην πρώτη γραμμή τη γραμμή εκείνη που περιέχει το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.
Βήμα 2	Μετατρέπουμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της πρώτης γραμμής σε 1.
Βήμα 3	Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στη στήλη του πρώτου 1 της πρώτης γραμμής και κάτω από αυτό.
Βήμα 4	Στην συνέχεια αγνοούμε την πρώτη στήλη και την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 – 3 για τις επόμενες γραμμές. (Αν οι επόμενες γραμμές είναι όλες μηδενικές, τότε παραλείπουμε το βήμα 4 και πάμε στο επόμενο βήμα.)
Βήμα 5	Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται σε κάθε στήλη που περιέχει το πρώτο 1 μιας γραμμής

Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει (βλ. Ορισμός 3.3.5 b) .

Ας δούμε ακόμα ένα παράδειγμα όπου εφαρμόζουμε τον παραπάνω αλγόριθμο.

3.3.8 Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

Τα Βήματα 1 και 2 δεν χρειάζονται. Εφαρμόζουμε το Βήμα 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{4} r_2}$$

Βήμα 4 για τη δεύτερη και τρίτη γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 5r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to 2r_3}$$

Βήμα 4 για την τέταρτη γραμμή. Ο πίνακας που προκύπτει είναι κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_3}$$

Βήμα 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + 3r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας είναι αναγμένος κλιμακωτός.

Εφαρμογή στα Γραμμικά Συστήματα

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{5}$$

m εξισώσεων και n αγνώστων. Ας καθιερώσουμε την εξής ορολογία. Ο $m \times n$ πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

λέγεται ο **πίνακας των συντελεστών** του συστήματος (5). Ο πίνακας – στήλη $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ λέγεται ο **πίνακας των σταθερών όρων** του συστήματος. Ο $m\times(n+1)$ πίνακας

$$(A,b)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

που προκύπτει αν επισυνάψουμε στον πίνακα A τη στήλη $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ λέγεται ο **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος. Για παράδειγμα, αν το γραμμικό σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=6 \\ -2x_1+x_2-3x_3&=5 \end{aligned}$$

τότε

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix},\quad (A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι οι λύσεις ενός γραμμικού συστήματος δεν αλλάζουν αν εναλλάξουμε τη θέση δυο εξισώσεων του συστήματος, ή αν πολλαπλασιάσουμε μια εξίσωση με μη μηδενική σταθερά ή αν προσθέσουμε σε μια εξίσωση πολλαπλάσιο άλλης. Δυο γραμμικά συστήματα θα λέγονται **ισοδύναμα** αν έχουν τις ίδιες λύσεις. Επομένως από το Θεώρημα 3.3.6 συμπεραίνουμε το εξής αποτέλεσμα.

3.3.9 Θεώρημα

Κάθε γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι αναγμένος κλιμακωτός.

Το θεώρημα αυτό έχει σημαντική πρακτική αξία γιατί η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι αναγμένος κλιμακωτός είναι τετριμμένη. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

3.3.10 Παραδείγματα

1. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3&=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3&=2 \\ 3x_1+6x_2-4x_3&=3. \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & -2 & 2\\ 3 & 6 & -4 & 3\end{pmatrix}.$$

Είδαμε πριν (Παράδειγμα 3.3.8) ότι αυτός είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Συνεπώς το δοθέν σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+0x_3&=0\\ 0x_1+0x_2+x_3&=0\\ 0x_1+0x_2+0x_3&=1.\end{aligned}$$

Από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε άμεσα ότι το σύστημα αυτό δεν έχει λύση. Άρα και το αρχικό σύστημα δεν έχει λύση.

2. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5&=2\\ 2x_1+4x_2-2x_3+6x_4+3x_5&=6\\ -x_1-2x_2+x_3-x_4+3x_5&=4.\end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6\\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε τον αναγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Συνεπώς το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=3\\ x_4&=-1\\ x_5&=2.\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό λύνεται άμεσα. Οι λύσεις είναι

$$\begin{cases} x_1=3-2x_2+x_3\\ x_4=-1\\ x_5=2.\end{cases}$$

Εδώ, οι μεταβλητές x_2,x_3 παίρνουν αυθαίρετες τιμές, ενώ η x_1 είναι συνάρτηση των x_2,x_3. Συνεπώς έχουμε άπειρες λύσεις, τις $(3-2x_2+x_3,x_2,x_3,-1,2)$ όπου $x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

3. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=4\\ x+3y+z&=11\\ 2x+5y-4z&=13\\ 2x+6y+2z&=22. \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα. Αναλυτικά έχουμε

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\1&3&1&11\\2&5&-4&13\\2&6&2&22\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\2&5&-4&13\\2&6&2&22\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\to r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\0&1&2&5\\2&6&2&22\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4\to r_4-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\0&1&2&5\\0&2&8&14\end{pmatrix}.$$

Αφού μηδενίσαμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, συνεχίζουμε με τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\0&1&2&5\\0&2&8&14\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\0&0&-2&-2\\0&2&8&14\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4\to r_4-2r_2}\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\0&0&-2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to -\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας είναι κλιμακωτός. Συνεχίζοντας φτάνουμε στον αναγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x&=1\\ y&=3\\ z&=1 \end{aligned}$$

που είναι ήδη λυμένο. Άρα το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,y,z)=(1,3,1)$.

Στα παραπάνω παραδείγματα είδαμε γραμμικά συστήματα που είτε δεν είχαν λύση, είτε είχαν ακριβώς μια λύση, είτε είχαν άπειρες λύσεις. Ένα σύστημα που έχει τουλάχιστον μια λύση θα λέγεται **συμβιβαστό**. Ένα σύστημα που δεν έχει λύση θα λέγεται **ασυμβίβαστο**. Γενικά ισχύει το εξής συμπέρασμα.

3.3.11 Θεώρημα

Έστω (A,b) ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος και K ένας αναγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος[3] *με τον (A,b). Τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ο K δεν περιέχει γραμμή της μορφής 0 0 ... 0 1.*

Απόδειξη Έστω ότι $K=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & c_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & c_m \end{pmatrix}$. Θεωρούμε τα πρώτα 1 των γραμμών που βρίσκονται στις στήλες 1,2,...,n. Υποθέτουμε ότι αυτά βρίσκονται στις στήλες $j_1,,,j_l$. Έστω ότι οι υπόλοιπες στήλες είναι οι $j_{l+1},...,j_n$. Τότε έχουμε το ακόλουθο σύστημα που είναι ισοδύναμο με το αρχικό

$$\begin{aligned} x_{j_1} &+ \sum_{k=l+1}^{n} c_{1k} x_{j_k} = c_1 \\ &\vdots \\ x_{j_l} &+ \sum_{k=l+1}^{n} c_{lk} x_{j_k} = c_l \\ 0 &= c_{l+1} \\ 0 &= c_{l+2} \\ &\vdots \\ 0 &= c_m \end{aligned}$$

όπου $l \le m.$ Σημειώνουμε ότι $c_{l+2}=...=c_m=0,$ αφού οι αντίστοιχες γραμμές είναι μηδενικές. Ισχύει $c_{l+1}=1$ ή $c_{l+1}=0,$ γιατί κάθε άλλο στοιχείο της γραμμής $l+1$ είναι 0 και ο πίνακας K είναι αναγμένος κλιμακωτός.
Αν $c_{l+1}=1$, βλέπουμε ότι το σύστημα είναι ασυμβίβαστο. Αν $c_{l+1}=0$, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό (και μπορούμε να δώσουμε στις μεταβλητές $x_{j_{l+1}},...,x_{j_n}$ αυθαίρετες τιμές).

■

Ένα γραμμικό σύστημα όπου όλοι οι σταθεροί όροι είναι ίσοι με 0 λέγεται **ομογενές**. Για παράδειγμα το

[3] Αποδεικνύεται ότι ο *K* είναι μοναδικός. Επειδή δεν θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα, δεν θα το αποδείξουμε. Όμως θα μπορούμε να λέμε *η αναγμένη κλιμακωτή μορφή* πίνακα

$$2x - y = 0$$
$$3x + 2y = 0$$

είναι ομογενές, αλλά το

$$2x - y = 1$$
$$3x + 2y = 0$$

δεν είναι. Παρατηρούμε ότι ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα μια τουλάχιστον λύση, τη (0,...,0) που τη λέμε **μηδενική λύση** ή **τετριμμένη λύση**. Συνεπώς τίθεται το ερώτημα αν ένα ομογενές σύστημα έχει μη μηδενική λύση.

3.3.12 Πόρισμα

Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα m εξισώσεων και n μεταβλητών με $m < n$ έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση.

Απόδειξη Το σύστημα είναι βέβαια συμβιβαστό. Με το συμβολισμό της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος, έχουμε $l \le m < n$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον μια από τις μεταβλητές $x_{j_{l+1}}, \dots, x_{j_n}$ στην οποία μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετες τιμές.

■

3.3.13 Επεξεργασμένα Παραδείγματα

1) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α το παρακάτω σύστημα
   - έχει άπειρες λύσεις
   - έχει ακριβώς μία λύση
   - δεν έχει λύση;

$$\alpha x + y + z = 1$$
$$x + \alpha y + z = 1$$
$$x + y + \alpha z = 1$$

Να βρεθούν οι λύσεις στις περιπτώσεις που αυτές υπάρχουν.

Λύση

Μετά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$$r_1 \to r_2,\ r_2 \to r_2 - ar_1,\ r_3 \to r_3 - r_1,\ r_2 \to r_3,\ r_3 \to r_3 - (1+a)r_2$$

ο επαυξημένος πίνακας γίνεται

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(2+\alpha) & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

- Αν $\alpha = 1$, ο πίνακας αυτός είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Το αντίστοιχο σύστημα είναι απλά η εξίσωση $x + y + z = 1$, οπότε υπάρχουν άπειρες λύσεις $(x, y, z) = (1 - y - z, y, z)$ με $y,z \in \mathbb{R}$.

- Έστω τώρα $\alpha \neq 1$. Διαιρώντας με το $1 - \alpha$ τη δεύτερη και τρίτη γραμμή παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Εδώ διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις.

- Αν α = - 2, τότε από την τελευταία γραμμή, τη 0 0 0 1, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις.
- Έστω α ≠ - 2. Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} &x+y+az=1 \\ &0+y-z=0 \\ &0+0+(2+\alpha)z=1. \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $z=\dfrac{1}{2+a}$. Συνεπώς η δεύτερη δίνει $y=z=\dfrac{1}{2+a}$. Τότε η πρώτη δίνει $x=\dfrac{1}{2+a}$.

Τελικά βλέπουμε ότι

- για $\alpha=1$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις
- για $\alpha=-2$ το σύστημα είναι ασυμβίβαστο
- για $\alpha\neq 1,-2$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.

2) Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+\alpha y+2z&=1 \\ x+(2\alpha-1)y+3z&=1 \\ x+\alpha y+(a+3)z&=2\alpha-1. \end{aligned}$$

Λύση

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 2\alpha-1 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha+3 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών αυτός μετατρέπεται στον

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 2(\alpha-1) \end{pmatrix}.$$

- *Περίπτωση 1.* Έστω $\alpha=-1$. Από την τελευταία γραμμή, που είναι η 0 0 0 -4, βλέπουμε ότι το σύστημα δεν έχει λύση.
- *Περίπτωση 2.* Έστω $\alpha\neq-1$. Συνεχίζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha+1} \end{pmatrix}.$$

- *Υποπερίπτωση 2α.* Έστω $\alpha=1$. Τότε ο πίνακας

  είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ που είναι γραμμοϊσοδύναμος

  με τον $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Το αντίστοιχο σύστημα είναι

  το $\begin{matrix} x+y=1 \\ z=0 \end{matrix}$, οπότε οι λύσεις είναι

  $(x,y,z)=(x,1-x,0),\ x\in\mathbb{R}$.

- *Υποπερίπτωση 2β.* Έστω τώρα $\alpha\neq\pm1$.

  Συνεχίζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha+1} \end{pmatrix}.$$

  Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση $(x,y,z)=(\dfrac{-\alpha+5}{\alpha+1},\dfrac{-2}{\alpha+1},\dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha+1})$.

Τελικά βλέπουμε ότι

- για $\alpha=-1$ το σύστημα είναι ασυμβίβαστο
- για $\alpha=1$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις
- για $\alpha\neq\pm1$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.

3. Έστω $a,b,c\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη στα a,b,c τέτοια ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{aligned} x-y+2z&=a \\ 2x-3y+z&=b \\ 3x-y+cz&=1. \end{aligned}$$

Λύση

Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ο επαυξημένος πίνακας παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3a-b \\ 0 & 1 & 3 & 2a-b \\ 0 & 0 & c-12 & -7a+2b+1 \end{pmatrix}$$

- Αν $c-12 \neq 0$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι το αντίστοιχο σύστημα έχει μοναδική λύση.
- Το σύστημα αυτό είναι ασυμβίβαστο αν $c-12=0$ και $-7a+2b+1 \neq 0$.
- Αν $c-12=0$ και $-7a+2b+1=0$ τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Άρα η ζητούμενη συνθήκη είναι $c-12=-7a+2b+1=0$.

3.3.14 Παρατήρηση

Καταγράφουμε μια παρατήρηση που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. *Ένας τετραγωνικός αναγμένος κλιμακωτός πίνακας είτε είναι ίσος με τον ταυτοτικό πίνακα είτε περιέχει μια μηδενική γραμμή.*

Πράγματι, έστω K ένας $n \times n$ αναγμένος κλιμακωτός πίνακας έτσι ώστε κάθε γραμμή είναι μη μηδενική. Τότε κάθε γραμμή περιέχει ένα πρώτο 1 και άρα υπάρχουν n τέτοια 1. Αυτά βρίσκονται σε διαφορετικές στήλες. Άρα όλα τα άλλα στοιχεία του πίνακα είναι 0. Από τη συνθήκη α2) του Ορισμού 3.3.5 συμπεραίνουμε ότι η μόνη δυνατή διάταξη των 1 είναι να βρίσκονται πάνω στη διαγώνιο.

Ασκήσεις 3.3

1. Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες είναι κλιμακωτοί ή αναγμένοι κλιμακωτοί;
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
2. Να βρεθεί η αναγμένη κλιμακωτή μορφή των πινάκων
$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$
3. Να λυθούν τα συστήματα
$$\begin{aligned}x+y-2z&=1\\2x+3y-z&=1\\4x+5y-5z&=4\end{aligned}\qquad\begin{aligned}x+y-2z&=1\\2x+3y-z&=1\\4x+5y-5z&=3\end{aligned}\qquad\begin{aligned}x+2y-2z+3w&=1\\x+3y-2z+3w&=0\\2x+4y-3z+6w&=4\\x+y-z+4w&=6.\end{aligned}$$
4. Να βρεθούν τα $k\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε το
$$\begin{aligned}x+2y-z&=4\\2x+4y+3z&=5\\-x-2y+6z&=k\end{aligned}$$
να έχει τουλάχιστον μια λύση.
5. Να βρεθούν τα $k\in\mathbb{R}$ για τα οποία το σύστημα
$$\begin{aligned}x-2y&=1\\x-y+kz&=-2\\ky+4z&=6\end{aligned}$$
1) έχει μοναδική λύση, 2) έχει άπειρες λύσεις, 3) είναι ασυμβίβαστο.
6. Αποδείξτε ότι αν ένα γραμμικό σύστημα έχει τουλάχιστον δυο λύσεις, τότε έχει άπειρες λύσεις.

Απαντήσεις/Υποδείξεις 3.3

1. Οι πίνακες είναι αντίστοιχα, αναγμένος κλιμακωτός, κλιμακωτός, κλιμακωτός, αναγμένος κλιμακωτός.
2. Η αναγμένη κλιμακωτή μορφή του πρώτου είναι ο I.
3. Το πρώτο είναι ασυμβίβαστο, το δεύτερο έχει άπειρες λύσεις και το τρίτο έχει μοναδική λύση.
4. $k=-7$.
5. Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν $k\neq\pm2$, άπειρες λύσεις αν $k=-2$, ενώ για $k=2$ είναι ασυμβίβαστο. Επεξεργασμένο Παράδειγμα 3.3.13 2.
6. Από δυο λύσεις κατασκευάστε άπειρες λύσεις. Αν X_1, X_2 είναι δυο διακεκριμένες λύσεις του $AX=b$, τότε $A\big(X_1+k(X_1-X_2)\big)=b.$

3.4 Αντιστρέψιμοι Πίνακες

Ξέρουμε ότι για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό a υπάρχει ένας πραγματικός b έτσι ώστε $ab = ba = 1$. Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την αντίστοιχη έννοια στους πίνακες. Ιδιαίτερα θα αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο που αποφαίνεται αν ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

3.4.1 Ορισμός

*Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(F)$ λέγεται **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει πίνακας $B \in M_n(F)$ τέτοιος ώστε $AB = BA = I$.*

3.4.2 Παραδείγματα

1. Ας εξετάσουμε αν ο $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν υπάρχει $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ τέτοιος ώστε $AB = BA = I$. Παρατηρούμε ότι

   $$AB = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2w \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

   $$\begin{cases} 3x+2z=1 \\ 3y+2w=0 \\ x+z=0 \\ y+w=1. \end{cases}$$

   Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x=1, y=-2, z=-1, w=3$. Μέχρι στιγμής δεν έχουμε δείξει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, αλλά έχουμε εντοπίσει έναν υποψήφιο πίνακα για το B. Θέτοντας $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ εύκολα επαληθεύεται ότι $AB = BA = I$. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

2. Ας εξετάσουμε αν ο $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Έστω $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

   Παρατηρούμε ότι

$$AB = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+2z & 2y+2w \\ x+z & z+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2z=1 \\ 2y+2w=0 \\ x+z=0 \\ z+w=1. \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό δεν έχει λύση, γιατί από την πρώτη και τρίτη εξίσωση παίρνουμε 1 = 0. Άρα δεν υπάρχει πίνακας B με $AB = I$. Συνεπώς ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Στην περίπτωση που ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε υπάρχει μοναδικός B με τις ιδιότητες $AB = BA = I$. Πράγματι αν υπήρχε και άλλος πίνακας C με $AC = CA = I$, τότε θα είχαμε

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Ο B ονομάζεται ο **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1}.

3.4.3 Πρόταση

1. *Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$
2. *Αν οι πίνακες A,B είναι αντιστρέψιμοι τότε ο AB είναι αντιστρέψιμος και ισχύει* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

Απόδειξη 1. Αυτό έπεται άμεσα από τον ορισμό.
2. Παρατηρούμε ότι $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ και όμοια $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Άρα ο AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

■

3.4.4 Σημειώσεις

Θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα τις εξής επισημάνσεις.

1. Αν οι $A_1,...,A_r \in M_n(F)$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο $A_1...A_r$ είναι αντιστρέψιμος και $\left(A_1...A_r\right)^{-1} = A_r^{-1}...A_1^{-1}$. Η απόδειξη είναι μια άμεση επαγωγή.
2. Έστω ότι ο $A \in M_n(F)$ είναι αντιστρέψιμος και ο $B \in M_n(F)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε και ο AB δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί διαφορετικά από τη σχέση $B = A^{-1}(AB)$ θα συμπεράναμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος, πράγμα άτοπο. Με παρόμοιο τρόπο βλέπουμε ότι και ο BA δεν είναι αντιστρέψιμος.
3. Έστω ότι ο $A \in M_n(F)$ περιέχει μια μηδενική γραμμή . Τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι για κάθε $B \in M_n(F)$ ο AB περιέχει μηδενική γραμμή. Άρα δεν υπάρχει B με $AB=I$.
4. Έστω $A \in M_n(F)$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Αν ισχύει $BA=I$ για κάποιον $B \in M_n(F)$, τότε $B = A^{-1}$. Πράγματι, έχουμε

$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$. Επομένως αν γνωρίζουμε a priori ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε για να δείξουμε ότι $B = A^{-1}$ αρκεί να επαληθεύσουμε *μια* από τις σχέσεις $AB = I, BA = I$. (Θα δούμε αργότερα, Άσκηση 3.4.6, ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και χωρίς την υπόθεση ότι ο A είναι αντιστρέψιμος).

Μέχρι τώρα δεν έχουμε έναν εύχρηστο τρόπο να αποφασίσουμε αν κάποιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσουμε τον αντίστροφο. Η μέθοδος του Παραδείγματος 3.4.2 δεν είναι ιδιαίτερα πρακτική για μεγάλους πίνακες. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πως λύνουμε συστήματα με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών. Θα δούμε τώρα ότι υπάρχει ένας ανάλογος αλγόριθμος που υπολογίζει τον αντίστροφο πίνακα, εφόσον υπάρχει. Πρώτα θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο με μερικά παραδείγματα και στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι πράγματι υπολογίζει τον αντίστροφο.

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Με (A, I) συμβολίζουμε τον $n \times (2n)$ πίνακα που προκύπτει αν στα δεξιά του A τοποθετήσουμε τον $n \times n$ μοναδιαίο πίνακα I. Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε $(A, I) = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Αλγόριθμος Υπολογισμού Αντίστροφου Πίνακα

Θεωρούμε τον πίνακα (A, I) και εφαρμόζουμε σε αυτόν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που μετατρέπουν τον A σε αναγμένο κλιμακωτό πίνακα K. Τότε ο (A, I) έχει μετατραπεί σε έναν πίνακα της μορφής (K, B).

- Αν $K = I$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$.
- Αν $K \neq I$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

3.4.5 Παραδείγματα

1. Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στον $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

   Έχουμε διαδοχικά

$$(A,I)=\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-4r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&-4&0&1\\0&-1&-1&-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3+r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&-1&-6&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to -r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_1-2r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Επειδή στο αριστερό μισό του τελευταίου πίνακα εμφανίστηκε ο I, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$.

2. Εξετάζουμε αν ο $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

Έχουμε

$$(A,I)=\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0\\2&4&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&0&0&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&-2&1&0\end{pmatrix}.$$

Στο αριστερό μισό του τελευταίου πίνακα υπάρχει ο αναγμένος κλιμακωτός πίνακας $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ που δεν είναι ίσος με τον I. Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Στοιχειώδεις Πίνακες

Ο σκοπός μας εδώ είναι να αποδείξουμε ότι ο προηγούμενος αλγόριθμος πράγματι υπολογίζει τον αντίστροφο πίνακα. Η κεντρική ιδέα της απόδειξης είναι να εκμεταλλευτούμε τη διασύνδεση που υπάρχει μεταξύ των εννοιών γινόμενο πινάκων και στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών

3.4.6 Ορισμός

Ένας $n\times n$ πίνακας λέγεται στοιχειώδης πίνακας αν προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα με την εφαρμογή ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών.

Επειδή έχουμε τρία είδη στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, θα έχουμε και τρία είδη στοιχειωδών πινάκων:

$$M_i(a)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&a&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix},\ i=1,\dots,n$$

Ο πίνακας προκύπτει από τον ταυτοτικό με το στοιχειώδη μετασχηματισμό $r_i\to ar_i$

$$A_{ij}(a)=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & a & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}, i\neq j=1,\dots,n$$

Ο πίνακας προκύπτει από τον ταυτοτικό με το στοιχειώδη μετασχηματισμό $r_i \to r_i + ar_j$

$$H_{ij}=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1\end{pmatrix}, i\neq j=1,\dots,n .$$

Ο πίνακας προκύπτει από τον ταυτοτικό με το στοιχειώδη μετασχηματισμό $r_i \to r_j$

Από τον ορισμό του γινομένου πινάκων έχουμε άμεσα το εξής αποτέλεσμα

3.4.7 Πρόταση

- *Έστω* $A=(a_{ij})\in M_n(F)$. *Τότε*

$$M_i(a)A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ aa_{i1} & \cdots & aa_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$A_{ij}(a)A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1}+aa_{j1} & \cdots & a_{in}+aa_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$H_{ij}A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

- *Οι πίνακες* $M_i(a)$ $\left(\text{όπου } a \neq 0\right)$, $A_{ij}(a)$, H_{ij} *είναι αντιστρέψιμοι και έχουμε* $\left(M_i(a)\right)^{-1} = M_i(a^{-1}), \left(A_{ij}(a)\right)^{-1} = A_{ij}(-a), \left(H_{ij}\right)^{-1} = H_{ij}.$

Από το πρώτο μέρος της προηγούμενης πρότασης έπεται άμεσα το εξής.

3.4.8 Θεώρημα

Ένας πίνακας Β είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν πίνακα Α αν και μόνο αν υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1,\ldots,E_k$ *τέτοιοι ώστε* $B = E_1 \ldots E_k A.$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος πράγματι δίνει τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Έστω *A* ένας τετραγωνικός πίνακας και έστω *K* ο αναγμένος κλιμακωτός πίνακας γραμμοϊσοδύναμος με τον *A*. Τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1,\ldots,E_t$ με $K = E_1 \ldots E_t A.$ Συνεπώς πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με $E_1^{-1},\ldots,E_t^{-1}$ παίρνουμε $A = E_t^{-1} \ldots E_1^{-1} K.$

- Αν $K = I$, τότε ο *A* ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος.
- Αν $K \neq I$, τότε ο *K* περιέχει μια μηδενική γραμμή (βλ Παρατήρηση 3.3.14). Άρα ο *K* δεν είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς ούτε ο $E_t^{-1} \ldots E_1^{-1} K$ είναι αντιστρέψιμος (βλ Σημείωση 3.4.4 2) και 3)). Δηλαδή ο *A* δεν είναι αντιστρέψιμος.

Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό πινάκων παρατηρούμε ότι

$$K = E_1 \ldots E_t A \Rightarrow E_1 \ldots E_t (A, I) = \left(E_1 \ldots E_t A, E_1 \ldots E_t\right) = \left(K, E_1 \ldots E_t\right).$$

Αν $K = I$ (οπότε ο *A* είναι αντιστρέψιμος όπως είδαμε πριν), τότε $A^{-1} = E_1 \ldots E_t$ σύμφωνα με τη Σημείωση 3.4.4 4), δηλαδή το εξαγόμενο του αλγορίθμου είναι ο αντίστροφος του *A*.

3.4.9 Εφαρμογή

Αν $AX = b$ είναι ένα τετραγωνικό γραμμικό σύστημα και ο *A* είναι αντιστρέψιμος, τότε παίρνουμε $A^{-1}AX = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b.$ Δηλαδή για να λύσουμε ένα τέτοιο σύστημα δεν έχουμε παρά να πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά με τον A^{-1}. Για παράδειγμα, έστω

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 4x + y + 8z &= 3. \end{aligned}$$

Τότε $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{pmatrix}$ και στο Παράδειγμα 3.4.5_1 είδαμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Επομένως η λύση του συστήματος είναι $X=A^{-1}b=\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

3.4.10 Επεξεργασμένα Παραδείγματα

1. Να εξεταστεί αν ο $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & a\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος για τις διάφορες τιμές του a και στην περίπτωση που είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο που είδαμε πριν έχουμε

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & a & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & a-6 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & a-6 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-2r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & a-8 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Εδώ θα πρέπει να διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

- Έστω $a\neq 8$. Τότε συνεχίζουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-8 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{a-8} r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{a-8} & \frac{1}{a-8} & \frac{-2}{a-8} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a-8} & \frac{-1}{a-8} & \frac{a-6}{a-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{a-8} & \frac{1}{a-8} & \frac{-2}{a-8} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a-2}{a-8} & \frac{-2}{a-8} & \frac{4}{a-8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a-8} & \frac{-1}{a-8} & \frac{a-6}{a-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{a-8} & \frac{1}{a-8} & \frac{-2}{a-8} \end{pmatrix}.$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και έχουμε

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a-2}{a-8} & \frac{-2}{a-8} & \frac{4}{a-8} \\ \frac{3}{a-8} & \frac{-1}{a-8} & \frac{a-6}{a-8} \\ \frac{-3}{a-8} & \frac{1}{a-8} & \frac{-2}{a-8} \end{pmatrix}.$$

- Έστω ότι $a = 8$. Τότε έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-8 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Στο αριστερό μισό του τελευταίου πίνακα προέκυψε αναγμένος κλιμακωτός πίνακας διάφορος του I. Άρα στην περίπτωση αυτή ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

2. Να βρεθεί αν υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Λύση

Έχουμε

$$\left(A,I\right)=\begin{pmatrix}1 & 1+i & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1+i & 1 & 0\\ 0 & -1-2i & -2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to \frac{1}{-1-2i}r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1+i & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{-2}{-1-2i} & \frac{1}{-1-2i}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_1-(1+i)r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{-1-2i} & \frac{-1-i}{-1-2i}\\ 0 & 1 & \frac{-2}{-1-2i} & \frac{1}{-1-2i}\end{pmatrix}.$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{-1-2i} & \frac{-1-i}{-1-2i}\\ \frac{-2}{-1-2i} & \frac{1}{-1-2i}\end{pmatrix}=\frac{1}{-1-2i}\begin{pmatrix}1 & -1-i\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Έστω $A\in M_n(F)$ τέτοιος ώστε $A^m=0$ για κάποιο φυσικό m. Αποδείξτε ότι ο πίνακας $I-A$ είναι αντιστρέψιμος. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Λύση

Θεωρούμε τον πίνακα $B=I+A+...+A^{m-1}$ και παρατηρούμε ότι

$$(I-A)B=(I-A)(I+A+...+A^{m-1})=$$
$$I+A+...+A^{m-1}-A-A^2-...-A^m=$$
$$I-A^m=I-0=I.$$

Όμοια $B(I-A)=I$.

Άρα ο $I-A$ είναι αντιστρέψιμος και $(I-A)^{-1}=I+A+...+A^{m-1}$.

Σχόλιο. Θα θέλαμε εδώ να επισημάνουμε δυο πράγματα. 1) Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι οι αλγοριθμικές μέθοδοι, αν και έχουν μεγάλη πρακτική σημασία σε συγκεκριμένους υπολογισμούς, ενδέχεται να μην αποτελούν ουσιαστικά βοηθήματα σε άλλου είδους ερωτήματα. 2) Πως σκεφτήκαμε τον πίνακα B; Μια απάντηση είναι η θεώρηση της γεωμετρικής σειράς $1+x+x^2+...=\frac{1}{1-x}$.

Επιστρέφουμε στη λύση. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε εύκολα επαληθεύουμε ότι $A^2 = 0.$ Άρα ο $C = I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο $I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ασκήσεις 3.4

1. Εξετάστε ποιοι από τους πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθούν οι αντίστροφοι αυτών αν υπάρχουν.
2. Για ποιες τιμές του a ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}$ αντιστρέφεται; Για τις τιμές αυτές να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας.
3. Υπολογίστε με δυο διαφορετικούς τρόπους τον αντίστροφο του πίνακα
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Εξετάστε αν οι επόμενες προτάσεις είναι σωστές ή λάθος. Σε περίπτωση που μια πρόταση είναι σωστή, δώστε μια δικαιολόγηση. Διαφορετικά, ένα αντιπαράδειγμα αρκεί.
    a. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο A^2 είναι αντιστρέψιμος.
    b. Για κάθε ακέραιο n, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.
    c. Για κάθε πραγματικό αριθμό a, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.
    d. Αν ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B, τότε ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A.
5. Έστω $A \in M_n(F)$. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες
    a. Ο A είναι αντιστρέψιμος.
    b. Ο πίνακας I είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A.
    c. Ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.
6. Έστω $A, B \in M_n(F)$, τέτοιοι ώστε $AB = I$. Αποδείξτε ότι $BA = I$.
7. Αποδείξτε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο ανάστροφός του είναι αντιστρέψιμος. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

Απαντήσεις / Υποδείξεις 3.4

1. Ο δεύτερος δεν είναι αντιστρέψιμος.
2. $a \neq 13$. Βλ. Επεξεργασμένο Παράδειγμα 3.4.10_1.
3. Με τον αλγόριθμο εύρεσης αντιστρόφου και τη μέθοδο του Επεξεργασμένου Παραδείγματος 3.4.10_3.
4. a. σωστό, b. σωστό, c. λάθος, d. σωστό.
5. Εφαρμόστε το Θεώρημα 3.4.8.

6. Αρκεί να αποδειχτεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Θεωρείστε την αναγμένη κλιμακωτή μορφή του σε συνδυασμό με το Θεώρημα 3.4.8.