Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΔΕΟ13 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge2_deo13.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο φοιτητή	<Όνομα Φοιτητή> <Επώνυμο Φοιτητή>

Κωδικός ΘΕ	ΠΛΗ 20
Κωδικός Τμήματος	<ΤΜΗΜΑ>
Ακ. Έτος	2016–2017
α/α ΓΕ	**5η**

Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Σύμβουλου	<Όνομα ΣΕΠ> <Επώνυμο ΣΕΠ>
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (*ημέρα Παρασκευή*)	***Τετάρτη 26/04/2017***
Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

***Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	**0**

Υπογραφή Φοιτητή

Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου

Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2016-2017

Ε ρ γ α σ ί α 5η

Θεωρία Γραφημάτων

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της Θεωρίας Γραφημάτων.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί στο σύστημα Moodle το αργότερο μέχρι τις* ***26 Απριλίου 2017.***

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο (ΕΝΤΥΠΟ Α) στην τελευταία σελίδα. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο μέρος <Όνομα> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο μέρος. Τα άλλα πεδία στην σελίδα 2 ενημερώνονται αυτόματα (αν μαρκάρετε όλο πλαίσιο της σελίδας 2 και πατήσετε F9)*
2. *Στο αρχείο αυτό πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* ***5*** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εργασίες και εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Προηγούμενες εργασίες: Εργασία 5 των ακαδημαικών ετών από 2006 έως και 2013.

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Δείτε το ερώτημα 3 στις εξετάσεις του Ιουλίου 2007 και 2011, Ιουνίου 2012 και Ιουνίου 2013.

   Συμπληρωματικό Υλικό: Στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://class.eap.gr/pli20 *ακολουθώντας τους συνδέσμους Εκπαίδευση > Χρήσιμο Υλικό > Υπερκείμενα – Σημειώσεις*

– Ασκήσεις, διατίθενται σημειώσεις για τη Θεωρία Γραφημάτων του κ. Σ. Κοντογιάννη, μια συλλογή ασκήσεων (με τις λύσεις τους) του κ. Χ. Σαρίμβεη, και ο πίνακας αντιστοίχησης των όρων που χρησιμοποιούνται στους Τόμους Α και Β, του κ. Χ. Σαρίμβεη. Για την αποδεικτική μέθοδο της επαγωγής είναι πολύ χρήσιμη η μελέτη του παράλληλου υλικού του κ. Δ. Φωτάκη, το οποίο διατίθεται μαζί με τον σχετικό οδηγό μελέτης, επίσης στην παραπάνω διεύθυνση.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτημα	**Μέγιστος βαθμός**	**Βαθμός**
1	20	
2	25	
3	25	
4	20	
5	10	
Συνολικός Βαθμός:	**100**	**0**

Γενικά Σχόλια:
<γενικά σχόλια για την εργασία από το Σύμβουλο-Καθηγητή>

Ερώτημα 1.

Το ερώτημα αυτό έχει να κάνει με τις έννοιες του χρωματικού αριθμού, την επιπεδότητα ενός γραφήματος όπως και ισομορφισμού γραφημάτων.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #2, #7, #5, #6

Έστω H_n για $n \geq 2$ το γράφημα με σύνολο κορυφών το $V_n = \{0,1,\dots,2n-1\}$ και σύνολο ακμών το

$$E_n = \{(i, i+n) : i \in \{0,1,\dots,n-1\}\} \cup$$

$$\{(i, i+1) : i \in \{0,1,\dots,2n-2\}\} \cup$$

$$\{(2n-1,0)\}.$$

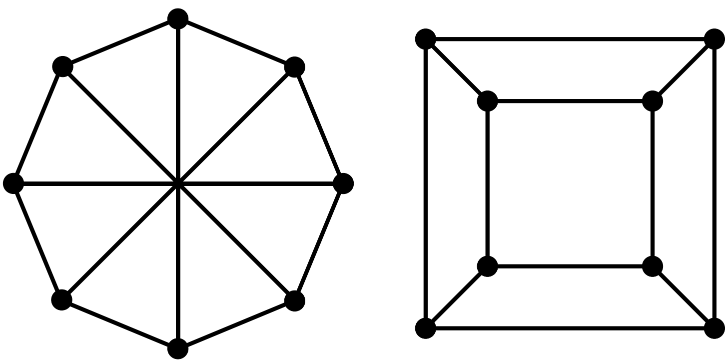
Έστω Z_n το γράφημα με σύνολο κορυφών το $W_n = \{0,1,\dots,2n-1\}$ και σύνολο ακμών το

$$F_n = \{(i, i+n) : i \in \{0,1,\dots,n-1\}\} \cup$$

$$\{(i, i+1) : i \in \{0,1,\dots,n-2\}\} \cup \{(n-1,0)\} \cup$$

$$\{(n+i, n+i+1) : i \in \{0,1,\dots,n-2\}\} \cup \{(2n-1,n)\}.$$

Για παράδειγμα το H_nκαι το Z_n για $n = 4$ είναι τα παρακάτω γραφήματα.



Να απαντήσετε τα παρακάτω τεκμηριώνοντας σε κάθε περίπτωση πλήρως τις απαντήσεις σας με αποδείξεις:

1. Διερευνήστε για ποιες τιμές του $n \geq 2$, το H_n είναι επίπεδο.

2. Δείξτε ότι ο χρωματικός αριθμός του H_n είναι πάντα το πολύ 3 όταν $n \geq 3$.

3. Δείξτε ότι ο χρωματικός αριθμός του Z_n είναι 3 όταν το n είναι περιττός και 2 όταν είναι άρτιος.

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $n \geq 2$ υπάρχει γράφημα που να έχει την ίδια ακολουθία βαθμών με το H_n και δεν είναι ισόμορφο με το H_n.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 2.

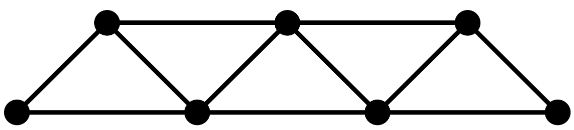
Το ερώτημα αφορά ακολουθίες βαθμών γραφημάτων και k-συνεκτικά γραφήματα. Συγκεκριμένα πρέπει να αποδείξετε ιδιότητες γραφημάτων για τα οποία γνωρίζουμε ότι κάθε υπογράφημα που έχουνε πληρεί μία δεδομένη ιδιότητα.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #10, #5, #6, #9

Έστω απλό γράφημα G με $n \geq 2$ κορυφές το οποίο να ικανοποιεί την εξής ιδιότητα:

«κάθε υπογράφημα H του G περιέχει κορυφή η οποία έχει βαθμό το πολύ 2 στο H.»

1. Θεωρήστε το γράφημα γράφημα F που προκύπτει αν σε ένα μονοπάτι μήκους 7 ενώσουμε με ακμές κάθε ζεύγος κορυφών του μονοπατιού που βρίσκεται σε απόσταση 2. Δείξτε ότι το γράφημα F έχει την παραπάνω ιδιότητα και είναι ισόμορφο με το παρακάτω γράφημα.



2. Δείξτε ότι για κάθε γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές το οποίο επίσης ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα, υπάρχει αρίθμηση $v_1, v_2, \dots, v_n$ των κορυφών του τέτοια ώστε κάθε κορυφή να συνδέεται με το πολύ δύο κορυφές με μικρότερο δείκτη (δηλ. για κάθε $i \in \{2,3,\dots,n\}$, το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ περιέχει το πολύ 2 γειτονικές κορυφές της v_i. Επαγωγή στο πλήθος των κορυφών

3. Δώστε δύο γραφήματα 6 κορυφών τα οποία να ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα και να είναι τέτοια ώστε το πρώτο να έχει ως ακολουθία βαθμών την (2,2,2,2,5,5) και το δεύτερο να έχει ως ακολουθία βαθμών την (2,2,3,3,4,4).

4. Δείξτε ότι κάθε γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές που ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα περιέχει το πολύ $2n - 3$ ακμές (*Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το 2.2.*).

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

Ερώτημα 3.

Το ερώτημα έχει να κάνει με k-κανονικά γραφήματα όπως αυτά συσχετίζονται με τις έννοιες συνδεσιμότητας, επιπεδότητας, διμερών γραφημάτων και ομοιομορφικών γραφημάτων. Για τον ορισμό του k-κανονικού γραφήματος δείτε σελ. 69 στο βιβλίο του Μαυρονικόλα. Βρείτε ένα απλό 4-κανονικό γράφημα που να μην έχει σημεία κοπής.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #8, #10

a. Δείξτε ότι δεν υπάρχει επίπεδο 4-κανονικό γράφημα με n *κορυφές* που να είναι διμερές (*υπόδειξη: λάβετε υπόψιν ότι εάν ένα επίπεδο γράφημα δεν έχει τρίγωνα, τότε έχει το πολύ* $2n - 4$ *ακμές*)

b. Δείξτε ότι εάν ένα διμερές γράφημα με n *κορυφές* είναι κανονικό τότε το συμπληρωματικό του περιέχει κλίκα με ακριβώς $n/2$ κορυφές.

c. Δείξτε ότι ένα 3-κανονικό γράφημα δεν μπορεί να περιέχει υπογράφημα που να είναι ομοιομορφικό με το K_5.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

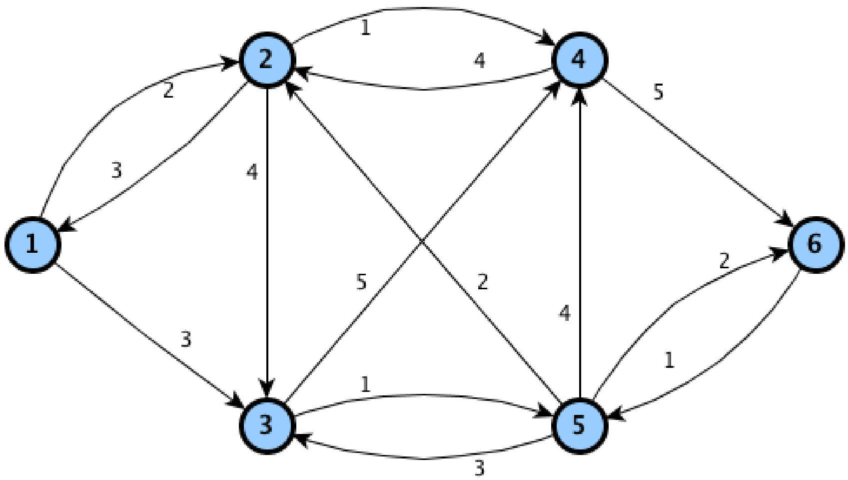
Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

Ερώτημα 4.

Σε αυτό το ερώτημα καλείστε να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του Dijkstra για την εύρεση τον συντομότερων μονοπατιών σε ένα γράφημα.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #3, #4

Θεωρήστε το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ όπου τα βάρη στις ακμές αντιστοιχούνε σε αποστάσεις μεταξύ τους. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο του Dijkstra για τα παρακάτω ερωτήματα.



a. Βρείτε όλα τα συντομότερα μονοπάτια από την κορυφή 1 ως προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές. Η απάντηση σας να αναφέρει τόσο την σύσταση των μονοπατιών σχετικά με τις κορυφές που τα ορίζουν όσο και τη συνολική απόσταση.

b. Βρείτε σε κάθε περίπτωση εκείνη την κορυφή $v \in V(G)$ για την οποία ισχύει ότι:
   1. το άθροισμα των αποστάσεων όλων των συντομότερων $v - t$-μονοπατιών για κάθε $t \in V(G)$ είναι το ελάχιστο.
   2. το μέγιστο συντομότερο $v - t$-μονοπάτι για κάθε $t \in V(G)$ είναι το ελάχιστο.

c. Περιγράψτε ένα αλγόριθμο ο οποίος για κάθε διατεταγμένο σύνολο κορυφών $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ του $V(G)$ όπου τα v_i είναι διακριτά, θα επιστρέφει την απόσταση του συντομότερου $v_1 - v_k$ μονοπατιού το οποίο περνάει από όλες τις κορυφές στο σύνολο $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ (όχι κατά ανάγκη με αυτή την σειρά).

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα, από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι Σωστή (υπάρχει τέτοιο γράφημα) ή Λάθος (δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα). Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπο-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. Θεωρούμε ότι τα γραφήματα του ερωτήματος είναι απλά και μη κατευθυνόμενα.

Α. Στα παρακάτω υποερωτήματα καλείστε να εξετάσετε αν υπάρχει το γράφημα που περιγράφεται.

1) **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα με ακολουθία βαθμών (1,2,3,4,5,6).
2) **(Σ/Λ)** Υπάρχει διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών (3,3,3,3,4,4,4).
3) **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα που να μην είναι κλίκα και όπου κάθε υπογράφημά του με 3 κορυφές να μην είναι μονοπάτι με 3 κορυφές;
4) **(Σ/Λ)** Υπάρχει επίπεδο γράφημα με 2017 κορυφές που είναι ισόμορφο με το δυικό του.

Β. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

1) **(Σ/Λ)** Το συμπληρωματικό γράφημα ενός διμερούς γραφήματος με 2017 κορυφές δεν μπορεί να είναι κλίκα.
2) **(Σ/Λ)** Αν ένα γράφημα είναι Χαμιλτονιανό και έχει περιττό πλήθος κορυφών τότε χρειάζεται τουλάχιστον 3 χρώματα για να χρωματιστεί.
3) **(Σ/Λ)** Κάθε 2 κανονικό γράφημα είναι κύκλος.
4) **(Σ/Λ)** Υπάρχει επίπεδο γράφημα που να περιέχει τουλάχιστον μια όψη που να είναι πεντάγωνο, τουλάχιστον μια όψη που να είναι τρίγωνο και καμμιά όψη που να είναι τετράγωνο.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 10