ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΛΗ 12   2018-2019

Τηλεσυνεδρίαση 1/11/2018

1η εργασία ασκήσεις 4-5

- Διανυσματικοί Χώροι
- Βάση διάσταση

Σύνολο διανυσμάτων με 4 στοιχεία

$\mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{bmatrix} \qquad \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \\ \lambda d_1 \end{bmatrix}$$

Σύνολο πινάκων 2x2

$M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{bmatrix}$$

Σύνολο πολυωνύμων 3ου βαθμού

$P_3(\mathbb{R})$

$$(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1) + (a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2) =$$
$$(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2)x + (d_1 + d_2)$$

$$\lambda(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1) = (\lambda a_1)x^3 + (\lambda b_1)x^2 + (\lambda c_1)x + (\lambda d_1)$$

Διανυσματικός Χώρος (δ.χ.)

είναι ένα σύνολο V από **μαθηματικά αντικείμενα** (αριθμούς, διανύσματα, πίνακες, πολυώνυμα κ.λ.π.) τα οποία ονομάζουμε γενικά **«διανύσματα»** στο οποίο έχουμε ορίσει δύο πράξεις

$$(+): V \times V \to V$$

Πρόσθεση (εσωτερική πράξη)

$$(\cdot): \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός (εξωτερική πράξη)

Σε αυτό το σύνολο θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες δέκα ιδιότητες:

Ιδιότητες (δ.χ.)

$u+v\in V\quad \forall u,v\in V$	Κλειστότητα της πρόσθεσης
$u+v=v+u\quad \forall u,v\in V$	Αντιμεταθετικότητα
$\exists\, \mathbf{0}\in V:\quad u+\mathbf{0}=u\quad \forall u\in V$	Ύπαρξη ουδετέρου πρόσθεσης
$\forall u\in V\ \ \exists -u\in V:\quad u+(-u)=\mathbf{0}$	Ύπαρξη αντιθέτου πρόσθεσης
$(u+v)+w=u+(v+w)\ \forall u,v,w\in V$	Προσεταιριστικότητα πρόσθεσης
$au\in V\quad \forall u\in V$ και $\forall a\in\mathbb{R}$	Κλειστότητα του πολαπλασιασμού
$a(u+v)=au+av\quad \forall u,v\in V$ και $\forall a\in\mathbb{R}$	Πρώτος επιμεριστικός κανόνας
$(a+b)u=au+bu\quad \forall u\in V$ και $\forall a,b\in\mathbb{R}$	Δεύτερος επιμεριστικός κανόνας
$(ab)u=a(bu)\quad \forall u\in V$ και $\forall a,b\in\mathbb{R}$	Προσεταιριστικότητα πολαπλασιασμού
$1u=u\quad \forall u\in V$	

Όλες οι ιδιότητες ισχύουν => V είναι δχ

Μία ιδιότητα δεν ισχύει => V δεν είναι δχ

$\forall$ για κάθε, $\exists$ υπάρχει, : τέτοιο ώστε, $\mathbf{0}$ το μηδενικό διάνυσμα, 0 το μηδέν του πολ\μου.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου τα ονομάζουμε γενικά **«διανύσματα».**

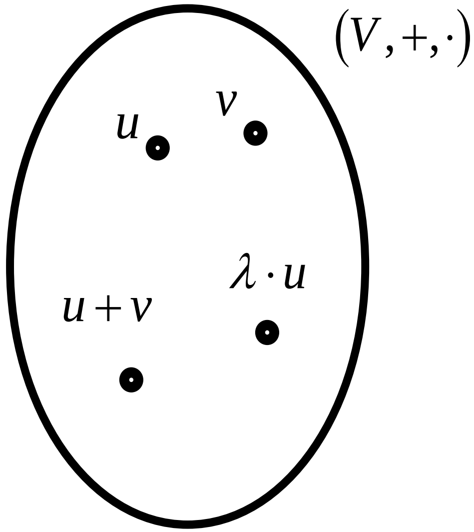
Είναι δυνατό ένα σύνολο **να είναι διανυσματικός** χώρος εάν εφοδιαστεί με κάποιες πράξεις (εσωτερική «πρόσθεση» και εξωτερική «βαθμωτό πολλαπλασιασμό» **και να μην είναι** εάν εφοδιαστεί με κάποιες άλλες.

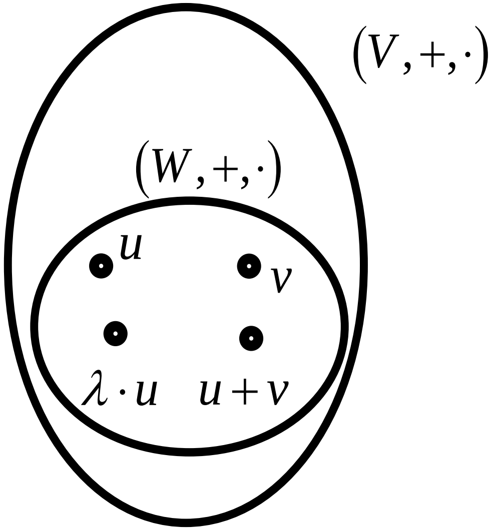
Ακόμη ένα σύνολο μπορεί να είναι δ.χ. εφόσον εφοδιαστεί **και με κάποιο άλλο ζεύγος** πράξεων δηλαδή να ισχύουν οι παραπάνω δέκα ιδιότητες και για τις πράξεις αυτές και να είναι δ.χ. όταν εφοδιάζεται και με αυτές.

Σε ένα διανυσματικό χώρο ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $a\mathbf{0} = \mathbf{0} \ \forall a \in \mathbb{R}$
2. $0v = \mathbf{0} \ \forall v \in V$
3. Αν $av = \mathbf{0} \Rightarrow a = 0$ ή $v=\mathbf{0}$
4. $(-1)v = -v \ \forall v \in V$

Διανυσματικός Υπόχωρος (δ.χ.)





ένα σύνολο W υποσύνολο ενός δ.χ. V που είναι και αυτό δ.χ. με τις ίδιες πράξεις

$$\forall u, v \in W \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
$$u + v \in W$$
$$\lambda \cdot u \in W$$

ή ισοδύναμα

$$\forall u, v \in W \;\; \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\kappa u + \lambda v \in W$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη

Άσκηση 4α

Διανυσματικοί χώροι με τους οποίους συνήθως εργαζόμαστε:

$\mathbb{R}^n$

Σύνολο διανυσμάτων με *n* στοιχεία

$M_{\mathrm{n,m}}(\mathbb{R})$

Σύνολο πινάκων *nxm*

$P_n(\mathbb{R})$

Σύνολο πολυωνύμων *n*ου βαθμού

Παραδείγματα δ. υπόχωρων:

Τα σύνολα λύσεων ομογενών συστημάτων

$$U_1 = \left\{ (x, y, z, w) \in R^4 \mid \begin{cases} x - 2y + z - w = 0 \\ 2x - y + 5z - 2w = 0 \\ x - y + 2z - w = 0 \end{cases} \right\}$$

$$U_2 = \left\{ X \in M_{22}(R) \mid AX = XA \right\}. \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Διανυσματικοί υπόχωροι, πως ελέγχουμε ότι είναι: α) με τον ορισμό

Το σύνολο των διαγώνιων πινάκων 2x2 είναι διανυσματικός υπόχωρος του δ.χ. των πινάκων 2x2

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{R})$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη

$$\forall u, v \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$u + v \in W$$

$$\lambda \cdot u \in W$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix} \in A \qquad k \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{bmatrix} \in A$$

Άσκηση 4α

Διανυσματικοί υπόχωροι, πως ελέγχουμε ότι δεν είναι: Με το να δείξουμε ότι δεν ισχύει μία από τις ιδιότητες της ικανής και αναγκαίας συνθήκης

Ενώ το

$$V = \{(x, y) : y \geq 0\}$$

1. δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος εφόσον όταν το (x, y) ανήκει στο σύνολο το $(-x, -y)$ δεν ανήκει στο σύνολο V αφού $y \geq 0 \Rightarrow -y \leq 0$.

Άσκηση 4α

Άλλο παράδειγμα

$$A = \{(x, y) \in R^2, y \geq x\}, \text{ υποσύνολο του χώρου } R^2$$

Θεωρούμε $(x, y) \in A$ οπότε $y \geq x$. Αν λ είναι πραγματικός αριθμός τότε $\lambda(x, y)$ δεν ανήκει πάντοτε στο A, για παράδειγμα όταν $\lambda = -1$, $(-1)(x, y) = (-x, -y)$. Ομως $y \geq x \Rightarrow -y \leq -x$ οπότε $(-x, -y)$ δεν ανήκει στο A εκτός αν $y = x$. Π.χ. to (1, 2) ανήκει στο Α αλλά το $(-1)(1,2) = (-1, -2)$ δεν ανήκει. Αρα το A δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό και συνεπώς

Άσκηση 4α

Το μηδενικό διάνυσμα θα πρέπει να ανήκει σε κάθε διανυσματικό υπόχωρο ενός χώρου.

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in R \right\}, \text{ υποσύνολο του χώρου } M_{22}(R)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin C$$

$$\boxed{\text{το σύνολο } C \text{ δεν είναι υπόχωρος του χώρου } M_{22}(R)}$$

Άσκηση 4α

Γραμμικοί Συνδυασμοί

Έστω $v_1,...,v_m \in V$ διανυσματικό χώρο

1. Ένας **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1,...,v_m$ είναι ένα στοιχείο του V της μορφής $a_1v_1+...+a_mv_m,\ a_i \in \mathbb{R}$.
2. Θα λέμε ότι τα στοιχεία $v_1,...,v_m$ **παράγουν** το χώρο V αν για κάθε $v \in V$ υπάρχουν $a_1,...,a_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $v = a_1v_1+...+a_mv_m$. Συμβολίζουμε τότε ότι $V = span\{v_1,v_2,...,v_m\}$

Χώροι γραμμική θήκη (span)

Έστω $v_1,...,v_m \in V$ διανυσματικός χώρο τότε το $span\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{22}(\mathbb{R}) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Άσκηση 4^{α} ii

Διανυσματικοί υπόχωροι, πως ελέγχουμε ότι είναι:
α) Εναλλακτικά του ορισμού

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}, x, y, z \in R \right\}, \text{ υποσύνολο του χώρου } M_{22}(R)$$

Επειδή για κάθε $x, y, z \in R$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έχουμε οτι $U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ άρα

$\boxed{\text{το } U \text{ είναι υπόχωρος του } M_{22}(R)}.$

Άσκηση 4α ii

Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα

$$\{v_1,\dots,v_m\}\in V \qquad a_i\in\mathbb{R}$$

$$a_1v_1+\dots+a_mv_m=0\Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_m=0$$

Γραμμικά εξαρτημένα

$$a_1v_1+\dots+a_mv_m=0\Rightarrow\exists\ \text{τουλάχιστο ένα}\ a_k\neq 0$$

$$\text{οπότε}\ v_\kappa=-\frac{a_1}{a_\kappa}v_1-\dots-\frac{a_{\kappa-1}}{a_\kappa}v_{\kappa-1}-\frac{a_{\kappa+1}}{a_\kappa}v_{\kappa+1}-\dots-\frac{a_m}{a_k}v_m$$

Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

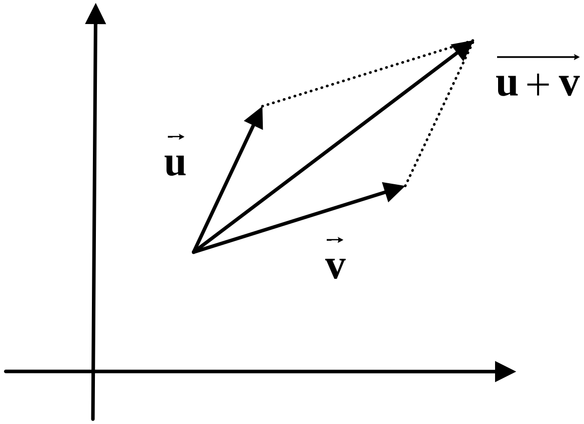
Με τη χρήση του ορισμού:

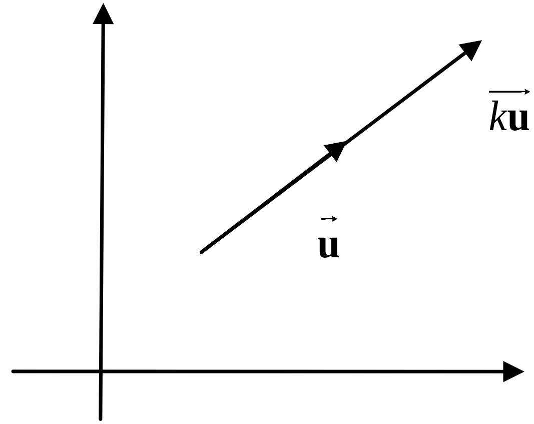
$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$$

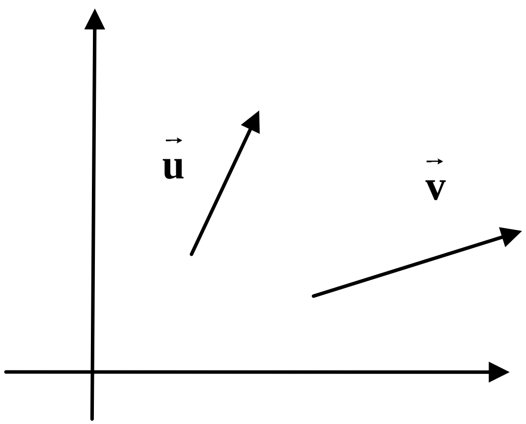
- Δύο διανύσματα του δ.χ. V είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.
- Κάθε υποσύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι επίσης σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων.
- Κάθε υπερσύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων.
- Το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, γιατί $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$ για κάθε λ πραγματικό.
- Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα v είναι γραμμικά ανεξάρτητο, γιατί $\lambda v=\mathbf{0}$ ισχύει εάν και μόνο αν $\lambda=0$.

Σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου

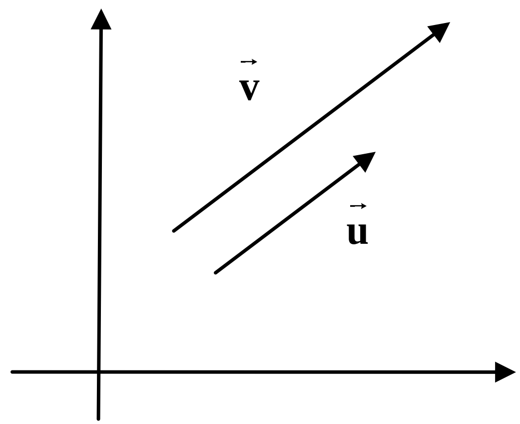




Δύο διανύσματα του επιπέδου είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες.



γραμμικά ανεξάρτητα



γραμμικά εξαρτημένα

Ανάλογα μπορούμε να δούμε ότι δύο διανύσματα του χώρου είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

Βάση και διάσταση

Ένα σύνολο στοιχείων $\{v_1,...,v_m\}$ του V ονομάζεται **βάση** του V αν έχει τις ιδιότητες

a. το $\{v_1,...,v_m\}$ **παράγει** το V , δηλαδή κάθε στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,...,v_m$.
b. αν ισχύει η σχέση $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m = \mathbf{0}$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$, τότε αναγκαστικά έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$. Δηλαδή είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

Βάση και διάσταση

Διάσταση ενός χώρου (συμβολίζεται $\dim V$) είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων της βάσης. Η διάσταση του τετριμμένου μηδενικού χώρου $V=\{\mathbf{0}\}$ είναι 0.

- Έστω $\{v_1,\ldots,v_n\}$ μια βάση του V. Τότε για κάθε $v\in V$, υπάρχουν μοναδικά $\lambda_i\in\mathbb{R}$ με $v=\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_n v_n$.
- Έστω $\dim V=n$. Εάν $v_1,\ldots,v_m\in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε $m\le n$.
- Εάν W διανυσματικός υπόχωρος του δ.χ. V τότε $\dim W\le\dim V$

Ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να έχει παραπάνω από μία βάσεις.

Όλες οι βάσεις ενός δ.χ. έχουν την ίδια διάσταση δηλαδή

τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Βάση και διάσταση (παραδείγματα)

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \qquad e_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0]^T, \ldots, e_n = [0, \ldots, 0, 1]^T$$

η **συνήθης βάση ή κανονική βάση του** $\mathbb{R}^n$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Βάση του $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

Βάση του $P_n(\mathbb{R})$

Τι ισχύει στον $\mathbb{R}^n$

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- Έστω ότι $v_1,...,v_m \in \mathbb{R}^n$, τότε οι ακόλουθες τρεις προτάσεις ισχύουν:

1. Αν τα $v_1,...,v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έχουμε $m \le n$.
2. Αν τα $v_1,...,v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε $m \ge n$.
3. Αν τα $v_1,...,v_m$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε $m = n$.

- Έστω $\{v_1,...,v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε οι ακόλουθες τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το σύνολο $\{v_1,...,v_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$
2. Τα $\{v_1,...,v_n\}$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$
3. Τα $\{v_1,...,v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- Έστω $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^n$ και έστω Α ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i, i=1,...,n.$ Τότε τα $v_1,...,v_n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $Ax=0$ έχει λύση μόνο τη μηδενική.

- Έστω Α $n \times n$ πίνακας στον οποίο θεωρούμε την i στήλη του ως ένα διάνυσμα v_i του $\mathbb{R}^n$, όπου $i=1,...,n$. Τότε τα $v_1,...,v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν και μόνο εάν $\det A \neq 0.$

- Έστω $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^m$ και έστω Α ο $m \times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i, i=1,...,n.$ Τότε τα $v_1,...,v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν και μόνο εάν η ορίζουσα κάθε $n \times n$ υποπίνακα του Α είναι ίση με 0.

Έστω $v_1,...,v_k \in \mathbb{R}^n$ και έστω Α ο $n\times k$ πίνακας του οποίου **η στήλη i** είναι το $v_i,\ i=1,...,k.$ Μετασχηματίζω με κατάλληλες γραμμοπράξεις τον πίνακα Α σε πίνακα Β κλιμακωτής μορφής. Βρίσκω ποιες στήλες του Β περιέχουν μη μηδενικό οδηγό στοιχείο. **Οι αντίστοιχες στήλες του Α αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.**

$$[1,1,0,0]^T,[1,0,1,0]^T,[3,1,2,0]^T,[0,0,1,1]^T.$$

$$\begin{bmatrix}1&1&3&0\\1&0&1&0\\0&1&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma2->\Gamma2-\Gamma1}\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&-1&-2&0\\0&1&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma3->\Gamma3+\Gamma2}\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&-1&-2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma4->\Gamma4-\Gamma3}\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&-1&-2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Η πρώτη, η δεύτερη και η τέταρτη **στήλες του τελικού πίνακα** περιέχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία άρα η πρώτη η δεύτερη και η τέταρτη στήλη του **αρχικού πίνακα** είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα

$$U = \mathbf{span}\{(1,0,2),(3,-2,5),(1,-2,1)\}$$

ο U παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,2)$, $(3,-2,5)$, $(1,-2,1)$,

(τα διανύσματα σε στήλες)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_1]{\gamma_2 = \gamma_2/(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 + \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

1η και 2η στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και παράγουν το χώρο (είναι στοιχεία βάσης του) και η διάσταση είναι 2

Εάν συνεχίσουμε τις γραμμοπράξεις και βρούμε την Ανηγμένη Κλιμακωτή μορφή ισχύουν ότι είπατε παραπάνω και επιπλέον η τελευταία στήλη μας δίνει τους συντελεστές με τους οποίους το γραμμικά εξαρτημένο διάνυσμα γράφεται ως συνδυασμός των γραμμικά ανεξάρτητων.

$$[1,1,0,0]^T, [1,0,1,0]^T, [3,1,2,0]^T, [0,0,1,1]^T.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 2->\Gamma 2-\Gamma 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 3->\Gamma 3+\Gamma 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 4->\Gamma 4-\Gamma 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{KM}}$$

$$\xrightarrow{\Gamma 1->\Gamma 1+\Gamma 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\Gamma 2->\Gamma 2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{AKM}}$$

$$[3,1,2,0]^T = 1\cdot[1,1,0,0]^T + 2\cdot[1,0,1,0]^T + 0\cdot[0,0,1,1]^T,$$

$$(1,0,2),(3,-2,5),(1,-2,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{\gamma_2=\gamma_2/(-2) \\ \gamma_3\to\gamma_3-2\gamma_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_3\to\gamma_3+\gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\gamma_1\to\gamma_1-3\gamma_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{АКМ}}$$

$$(1,-2,1) = -2\cdot(1,0,2)+1\cdot(3,-2,5)$$

Έστω $v_1,\dots,v_k \in \mathbb{R}^n$ και έστω Α ο $k\times n$ πίνακας του οποίου **η γραμμή** i είναι το $v_i,\ i=1,\dots,k.$ Μετασχηματίζω με κατάλληλες γραμμοπράξεις τον πίνακα Α σε πίνακα Β κλιμακωτής μορφής. Βρίσκω τις μη μηδενικές γραμμές του Β, **αυτές αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.**

$$[1,1,0,0]^T,[1,0,1,0]^T,[3,1,2,0]^T,[0,0,1,1]^T.$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\3&1&2&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\Gamma3\to\Gamma3-3\Gamma1]{\Gamma2\to\Gamma2-\Gamma1}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&-2&2&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma3\to\Gamma3-2\Gamma2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma4\leftrightarrow\Gamma3}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Η πρώτη η δεύτερη και η τρίτη γραμμή είναι μη μηδενικές οπότε σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω **οι γραμμές αυτές του τελικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.**

$$U=\mathbf{span}\{(1,0,2),(3,-2,5),(1,-2,1)\}$$

ο U παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,2)$, $(3,-2,5)$, $(1,-2,1)$,

(τα διανύσματα σε γραμμές)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-2&5\\1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\gamma_3\to\gamma_3-\gamma_1]{\gamma_2\to\gamma_2-3\gamma_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-2&-1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\gamma_3\to\gamma_3-\gamma_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\gamma_2\to-\gamma_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}=A'$$

μία βάση του U είναι το σύνολο $\{(1,0,2),(0,2,1)\}$ και η διάσταση του U είναι 2.

Έστω ένας *mxn* πίνακας A τότε το σύνολο

$$N_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n :\ Ax = 0 \right\}$$

ονομάζεται **μηδενοχώρος ή πυρήνας** του πίνακα A.

Είναι εύκολο να δούμε ότι N_A είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $u, v \in N_A$ τότε έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} Au = 0 \\ Av = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Au + Av = 0 \Rightarrow A(u+v) = 0 \Rightarrow u + v \in N_A$$

$$\left.\begin{array}{l} Au = 0 \\ k \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow kAu = 0 \Rightarrow A\left(ku\right) = 0 \Rightarrow ku \in N_A$$

Η διάσταση του χώρου αυτού ονομάζεται **μηδενικότητα** του πίνακα και συμβολίζουμε

$$\nu\left(A\right) = \dim N_A$$

Εάν η μοναδική λύση του ομογενούς συστήματος είναι η μηδενική τότε $N_A = \{\mathbf{0}\}$ και $\nu\left(A\right) = 0.$

Ένας nxn πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν $N_A = \{\mathbf{0}\}$

Άσκηση 2δ

$$R_A = \; b \in \mathbb{R}^m : \; Ax = b \text{ για κάποιο } x \in \mathbb{R}^n, \; A \text{ πίνακας } m \times n$$

R_A είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$

εικόνα του πίνακα A
ή χώρος στηλών
του

$$rank(A) = \dim R_A$$

Τάξη ή βαθμός πίνακα

$\mathbb{R}^n$

Έστω $u, v \in R_A$ τότε για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\left.\begin{matrix} Ax = u \\ Ay = v \end{matrix}\right\} \Rightarrow Ax + Ay = u + v \Rightarrow A(x+y) = u + v \Rightarrow u + v \in R_A$$

$\mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} Ax = u \\ k \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow kAx = ku \Rightarrow A(kx) = ku \Rightarrow ku \in R_A$$

Άσκηση 2δ

Τι ισχύει με την εικόνα και την τάξη (ή βαθμό) πίνακα

Η τάξη ενός πίνακα είναι ίση με τον αριθμό των οδηγών στοιχείων που υπάρχουν στην κλιμακωτή μορφή που μπορούμε να φέρουμε τον πίνακα.

Μία βάση του χώρου εικόνα (χώρου στηλών) είναι η βάση του διανυσματικού χώρου που προκύπτει εάν θεωρήσουμε τις στήλες του πίνακα (χώρος στηλών) ως διανύσματα.
Οπότε, ως βάση παίρνουμε τα διανύσματα (στήλες του αρχικού πίνακα) που αντιστοιχούν σε στήλες με μη μηδενικά οδηγά στοιχεία στην τελική κλιμακωτή μορφή του πίνακα.

$$rank\ A + \nu(A) = n,\ \ A \in M_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$$

$$A \in M_{n,\mathrm{n}}(\mathbb{R}),\ \ \exists\, A^{-1} \Leftrightarrow rank\ A = n$$

Ένα σύστημα nxn $Ax = b$ έχει τουλάχιστον μία λύση εάν και μόνο εάν ο επαυξημένος πίνακας $\left[A \,|\, b\right]$ και ο πίνακας *A* έχουν την ίδια τάξη.

Άσκηση 2δ

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

χώρος στηλών πίνακα

έχω 2 μη μηδενικά οδηγά στοιχεία

$$\dim(R_A) = rank \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Βάση της $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Μηδενοχώρος

Λύνω το αντίστοιχο ομογενές

$$y = z, x = -4z$$

$$N_A = span\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(N_A) = \nu(A) = 1$$

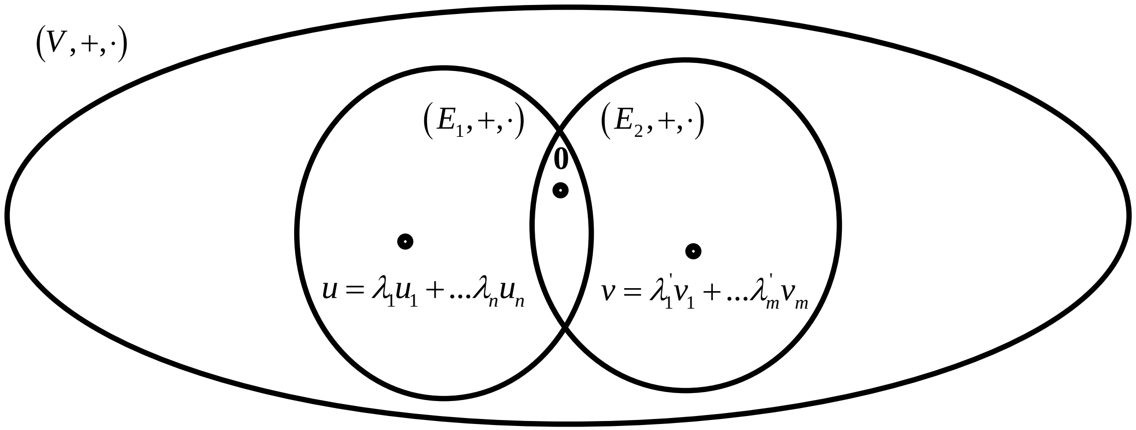
$$rank\ \ A + \nu(A) = n \Leftrightarrow 2 + 1 = 3$$

Άσκηση 2δ

Χώρος Άθροισμα

Έστω E_1 , E_2 διανυσματικοί υπόχωροι του ενός δχ. V.

Το σύνολο άθροισμα $E = E_1 + E_2$ αποτελείται από στοιχεία τα οποία μπορούν να γραφούν ως άθροισμα ενός στοιχείου του E_1 και ενός στοιχείου E_2.



Το συγκεκριμένο σύνολο εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι είναι διανυσματικός υπόχωρος του V ο οποίος παράγεται από το σύνολο των γεννητόρων των δ.χ. E_1 , E_2 .

$$h = u + v = \lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_n u_n + \lambda_1' v_1 + \ldots \lambda_m' v_m$$

Άσκηση4β

Χώρος Άθροισμα

$$\dim(E) = \dim\left(E_1 + E_2\right) = \dim\left(E_1\right) + \dim\left(E_2\right) - \dim\left(E_1 \cap E_2\right)$$

Αν ισχύει $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$ έχουμε **ευθύ άθροισμα** και συμβολίζουμε

$$E = E_1 \oplus E_2$$

$$\dim(E) = \dim\left(E_1 \oplus E_2\right) = \dim\left(E_1\right) + \dim\left(E_2\right)$$

Άσκηση4β

Βάση και διάσταση χώρου.

$$V=\{(x,y,z)\in R^3,\ x-y+z=0\ \kappa\alpha\iota\ x+y-z=0\}$$

Λύνω το σύστημα: $x-y+z=0\ \kappa\alpha\iota\ x+y-z=0\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\gamma_2\to\gamma_2-\gamma_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\gamma_2\to\gamma_2/2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\gamma_1\to\gamma_1+\gamma_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)$$

$$x=0$$
$$y=z$$

$$(x,y,z)=z(0,1,1)\in V$$

Ο χώρος έχει διάσταση 1 μιας και παράγεται από το (0,1,1) που είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Άσκηση4β

Βάση και διάσταση χώρου.

$$U = \mathbf{span}\{(1,0,2),(3,-2,5),(1,-2,1)\}$$

ο U παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,2)$, $(3,-2,5)$, $(1,-2,1)$,

(τα διανύσματα σε γραμμές)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-2&5\\1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\gamma_3\to\gamma_3-\gamma_1]{\gamma_2\to\gamma_2-3\gamma_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-2&-1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\gamma_3\to\gamma_3-\gamma_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\gamma_2\to-\gamma_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}=A'$$

<u>μία βάση του U είναι το σύνολο $\{(1,0,2),(0,2,1)\}$ και η διάσταση του U είναι 2</u>.

Βάση και διάσταση χώρου.

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$$

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$$

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$$

$$\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$$

είναι σύνολο γεννητόρων του (παράγει τον) *W*

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

$$y(-1,1,0) + z(-1,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow (-y - z, y, z) = (0,0,0) \Leftrightarrow y = 0 \;\kappa\alpha\iota\; z = 0.$$

Αρα μία <u>βάση του *W* είναι το σύνολο $\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$ και dim*W*=2</u>

Άσκηση4β

Βάση και διάσταση χώρου αθροίσματος U+W

Ο U+W παράγεται από την ένωση των βάσεων των U και W

$$\{ (1,0,2), (0,2,1), (-1,1,0), (-1,0,1) \}$$

σε πίνακα με στήλες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma 3 -> \gamma 3 - 2\gamma 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma 2 <-> \gamma 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma 3 -> \gamma 3 - 2\gamma 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

1η , 2η και 3η στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και παράγουν το χώρο (είναι στοιχεία βάσης του) και η διάσταση είναι 3 (οπότε πάλι συμπεράνουμε ότι ταυτίζεται με τον R^3.

Άσκηση 4β

Εναλλακτικά

Ο U+W παράγεται από την ένωση των βάσεων των U και W

$$\{ (1,0,2), (0,2,1), (-1,1,0), (-1,0,1) \}$$

σε πίνακα με γραμμές

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αρα μία βάση του $W+U$ είναι το σύνολο $\{ (1,0,2), (0,1,0), (0,0,1) \}$ με $\dim(W+U)$ =3.
Ειδικά επειδή ο $W+U$ είναι υπόχωρος του τριδιάστατου πραγματικού χώρου έχουμε οτι $W+U=R^3$.
προφανώς μία βάση του είναι και η συνήθης βάση του R^3.

Άσκηση4β

Βάση και διάσταση τομής $W \cap V$

$$v \in W \cap V$$

Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα

$$\left[x - y + z = 0 \;\kappa\alpha\iota\; x + y - z = 0\right] \Leftrightarrow x = 0 \;\kappa\alpha\iota\; y = z$$

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$$

Ισχύει μόνο εάν $x = y = z = 0$

$$W \cap V = \{0\}$$

$$\dim(W \cap V) = 0$$

Άσκηση4β

$$\dim(W \cap V) = 0$$

$$\dim\left(V+W\right) = \dim\left(V\right) + \dim\left(W\right) - \dim\left(V \cap W\right) = 1 + 2 - 0 = 3$$

$V + W$ **ευθύ άθροισμα** με διάσταση 3 υπόχωρος οπότε ταυτίζεται με το χώρο.

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus W$$

$$\{(-1,1,0),(-1,0,1),(0,1,1)\}$$

Βάση του χώρου R^3

Άσκηση4β