ΠΛΗ20: ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ, ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Θεματολόγιο και επιλεγμένες λύσεις

από Γραπτές Εργασίες και Εργασίες Κατανόησης, 2002-2017

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΟΡΘΟΤΗΤΑ & ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, Ερώτημα 3ο, 2014-2015

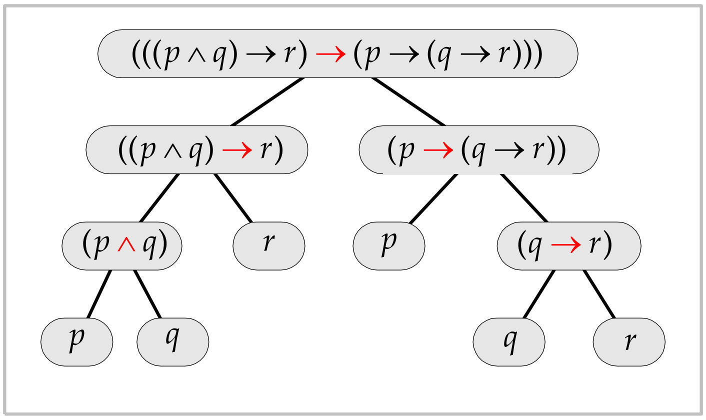
3. Να δοθούν τα δενδροδιαγράμματα των ακόλουθων προτασιακών τύπων, και να ελεγχθεί αν υπάρχει αποτίμηση που διαψεύδει ταυτόχρονα και τους δύο:

$\varphi = (p \wedge q \to r) \to [p \to (q \to r)]$

$\chi = p \wedge (q \wedge r) \to [(p \to q) \to (q \to r)]$

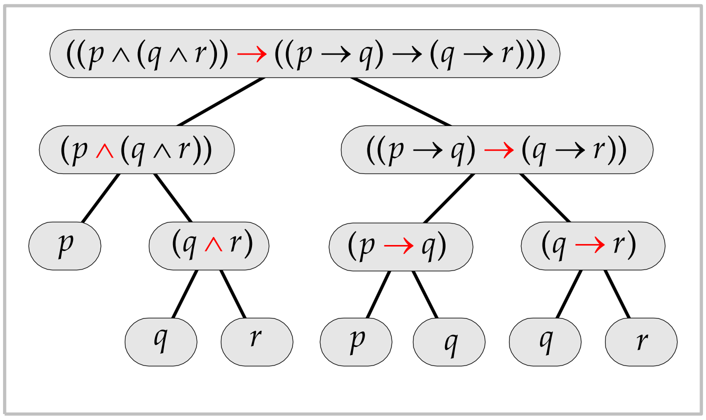
Οι παρενθέσεις και το δενδροδιάγραμμα της 1ης έκφρασης είναι τα εξής:

$$\overbrace{(\overbrace{(\overbrace{(p\wedge q)}^{\wedge}\to r)}^{\to}\to\overbrace{(p\to\overbrace{(q\to r)}^{\to})}^{\to})}^{\to}$$



Οι παρενθέσεις και το δενδροδιάγραμμα της 2ης έκφρασης είναι τα εξής:

$$\overbrace{(\overbrace{(p\wedge\overbrace{(q\wedge r)}^{\wedge})}^{\wedge}\to\overbrace{(\overbrace{(p\to q)}^{\to}\to\overbrace{(q\to r)}^{\to})}^{\to})}^{\to}$$



Δεν υπάρχει λογική αποτίμηση που να διαψεύδει και τους δύο τύπους, διότι δεν υπάρχει καν αποτίμηση που να διαψεύδει οιονδήποτε από τους δύο· είναι και οι δύο ταυτολογίες. Για να διαψευτεί λ.χ. ο δεύτερος, πρέπει να έχουμε τον 1ο όρο του ΑΛΗΘΗ, και τον 2ο ΨΕΥΔΗ. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνον εάν p = q = r = ΑΛΗΘΕΣ, αλλά τότε ο 2ος όρος του επίσης αληθεύει.

■

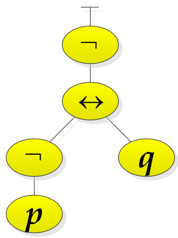
2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο, 2016-2017

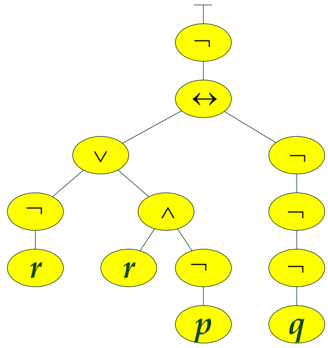
A.1. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω εκφράσεις είναι ορθά συντεταγμένοι προτασιακοί τύποι. Για όσες είναι, σχεδιάστε το δενδροδιάγραμμά τους.

i. $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$

ii. $(p \,\&\, q)$
iii. $(p \vee q \wedge r)$
iv. $\neg ((\neg r \vee (r \wedge \neg p)) \leftrightarrow \neg\neg\neg q)$
v. $(p \neg \vee q) \rightarrow (p \vee \neg q)$

i. ΣΩΣΤΟ: βλ. δενδροδιάγραμμα (αριστερά) ,
ii. ΛΑΘΟΣ: το σύμβολο «&» δεν ανήκει στο επιτρεπτό αλφάβητο.
iii. ΛΑΘΟΣ: δεν έχουμε κανόνες επίλυσης της «προτεραιότητας» ανάμεσα στους συνδέσμους $\wedge$ και $\vee$.
iv. ΣΩΣΤΟ: βλ. δενδροδιάγραμμα (δεξιά).
v. ΛΑΘΟΣ: πριν τον σύνδεσμο $\vee$ ουδέποτε εμφανίζεται σύνδεσμος $\neg$, (ή $\vee$, $\wedge$, κττ.)





■

ΓΡΑΦΗ & ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΩΝ ΤΥΠΩΝ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο, 2012-2013

3. Τέσσερις φοιτητές Α, Β, Γ, Δ καλούνται να λάβουν μέρος σε μια εκδήλωση. Αν p_A, p_B, p_Γ, p_Δ είναι προτασιακές μεταβλητές που αληθεύουν αν και μόνο αν ο αντίστοιχος φοιτητής θα συμμετέχει στην εκδήλωση, κατασκευάστε προτασιακούς τύπους που εκφράζουν τις παρακάτω δηλώσεις:

i) Στην εκδήλωση θα συμμετέχει τουλάχιστον ένας, αλλά όχι και οι τέσσερις φοιτητές.
ii) Στην εκδήλωση θα συμμετέχουν όλοι ή κανένας από τους τέσσερις φοιτητές.
iii) Αν συμμετέχει ο Α, τότε δεν θα συμμετέχει ο Δ και ο Β θα συμμετέχει αν και μόνο αν συμμετέχει ο Γ.
iv) Στην εκδήλωση θα συμμετέχουν τρεις ακριβώς φοιτητές εκ των οποίων ένας θα είναι ο Α.

Οι απαντήσεις έχουν ως εξής:

«τουλάχιστον ένας» και «όχι και οι τέσσερεις»: $(p_A \vee p_B \vee p_\Gamma \vee p_\Delta) \wedge \neg(p_A \wedge p_B \wedge p_\Gamma \wedge p_\Delta)$.

«όλοι» ή «κανένας»: $(p_A \wedge p_B \wedge p_\Gamma \wedge p_\Delta) \vee (\neg p_A \wedge \neg p_B \wedge \neg p_\Gamma \wedge \neg p_\Delta)$.

«αν Α τότε όχι Δ» και «ο Β εάν και μόνον ο Γ»: $(p_A \rightarrow \neg p_\Delta) \wedge (p_B \leftrightarrow p_\Gamma)$.

«ο Α μετέχει», και «ακριβώς 2 εκ των Β, Γ, Δ»: $p_A \wedge ((\neg p_B \wedge p_\Gamma \wedge p_\Delta) \vee (\neg p_\Gamma \wedge p_\Delta \wedge p_B) \vee (\neg p_\Delta \wedge p_B \wedge p_\Gamma))$.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο, 2015-2016

(1.β) Έστω γλώσσα Γ_0 της Προτασιακής Λογικής με τις εξής μεταβλητές:
a = «*ο Άγγελος πηγαίνει στο πάρτυ*».
b = «*η Βάσω πηγαίνει στο πάρτυ*».
c = «*η Γεωργία πηγαίνει στο πάρτυ*».
d = «*ο Δημήτρης πηγαίνει στο πάρτυ*».

(1.β.1) Να αποδοθούν στην Γ_0 οι ακόλουθες εκφράσεις σε φυσική γλώσσα:
1. «*Ο Δημήτρης δεν πάει στο πάρτυ χωρίς τη Βάσω*».
2. «*Η Γεωργία θα πάει στο πάρτυ μόνο αν δεν έρθουν (στο πάρτυ) ο Άγγελος και η Βάσω*».
3. «*Ο Δημήτρης θα πάει στο πάρτυ αποκλειστικά και μόνο αν η Γεωργία και ο Άγγελος δε θα έρθουν*».
4. «*Αν ο Δημήτρης πάει στο πάρτυ, τότε ο Άγγελος θα πάει εφόσον δεν έρθει η Γεωργία*».

1. $\neg b \to \neg d$ επίσης: $d \to b$
2. $c \to (\neg a \wedge \neg b)$
3. $d \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg c)$
4. $d \to (\neg c \to a)$

(1.β.2) Να αποδοθούν σε φυσική γλώσσα οι ακόλουθοι προτασιακοί τύποι:
1. $\mathbf{d} \to (\neg \mathbf{c} \to \mathbf{a})$
2. $(\mathbf{c} \to \neg \mathbf{d}) \wedge (\mathbf{d} \to \neg \mathbf{b})$
3. $(\neg \mathbf{b} \wedge \neg \mathbf{c} \to \mathbf{d}) \to \mathbf{a}$
4. $\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b} \to (\mathbf{c} \to \mathbf{d})$

1. *«Αν έλθει ο Δημήτρης, τότε αν δεν έλθει η Γεωργία, θα έλθει ο Άγγελος.»*
2. *«Αν έλθει η Γεωργία, ο Δημήτρης δεν θα έλθει, και αν έλθει ο Δημήτρης δεν θα έλθει η Βάσω στο πάρτυ.»*
3. *«Αν έλθει έστω ένας από τους Βάσω, Γεωργία, Δημήτρης, τότε θα έλθει και ο Άγγελος.»*
4. *«Αν δεν έλθουν οι Άγγελος και Βάσω, αλλά έλθει η Γεωργία, τότε θα έλθει ο Δημήτρης.»*

Το 3. εξηγείται ως εξής: η πρόταση $((\neg \mathbf{b} \wedge \neg \mathbf{c}) \to \mathbf{d}) \to \mathbf{a}$ είναι ισοδύναμη με την $(\neg \mathbf{b} \wedge \neg \mathbf{c} \wedge \neg \mathbf{d}) \vee \mathbf{a}$, με την $(\mathbf{b} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{d}) \to \mathbf{a}$, και με την $\neg \mathbf{a} \to \neg(\mathbf{b} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{d})$. (Προς τούτο χρησιμοποιούμε τους νόμους *De Morgan* και την μεταγραφή της συνεπαγωγής $\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi} \equiv \neg \boldsymbol{\varphi} \vee \boldsymbol{\psi}$.) Οι τρείς τελευταίες εκδοχές «διαβάζονται» με πιο απλό τρόπο.

Σημειώνουμε ότι μπορούν να διατυπωθούν εναλλακτικές ισοδύναμες ερμηνείες, συχνά πιο κοντά στην φυσική γλώσσα. Για παράδειγμα:

1. *«Αν έλθει ο Δημήτρης τότε ο Άγγελος θα έλθει εφόσον δεν έλθει η Γεωργία.»*
3. *«Χωρίς τον Άγγελο δεν θα έλθει κανένας από τους υπόλοιπους (Βάσω, Γεωργία, Δημήτρης).»*

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο, 2013-2014

3. Δίνονται οι παρακάτω δηλώσεις της φυσικής γλώσσας:
   p: Έχεις παρακολουθήσει όλες τις διαλέξεις του μαθήματος
   q: Μπορείς να λύσεις όλα τα παλαιότερα θέματα εξετάσεων
   r: Παίρνεις άριστα στις τελικές εξετάσεις

οι οποίες αντιστοιχούν στις **προτασιακές μεταβλητές** p, q, r. Χρησιμοποιώντας τις p, q, r, γράψτε **προτασιακούς τύπους** που εκφράζουν κάθε μια από τις παρακάτω δηλώσεις:

(i) Δεν αληθεύει ότι αν έχεις παρακολουθήσει όλες τις διαλέξεις του μαθήματος και μπορείς να λύσεις όλα τα παλαιότερα θέματα εξετάσεων, τότε παίρνεις άριστα στις εξετάσεις.

(ii) Αν δεν πήρες άριστα στις εξετάσεις, τότε, είτε έχεις παρακολουθήσει όλες τις διαλέξεις του μαθήματος, αλλά δεν μπορείς να λύσεις όλα τα παλαιότερα θέματα εξετάσεων, είτε δεν έχεις παρακολουθήσει όλες τις διαλέξεις του μαθήματος, αλλά μπορείς να λύσεις όλα τα παλαιότερα θέματα εξετάσεων.

(iii) Για να πάρεις άριστα στις εξετάσεις, πρέπει είτε να έχεις παρακολουθήσει όλες τις διαλέξεις του μαθήματος, είτε να μπορείς να λύσεις όλα τα παλαιότερα θέματα εξετάσεων.

(iv) Αν έχεις παρακολουθήσει όλες τις διαλέξεις του μαθήματος, τότε μπορείς να λύσεις όλα τα παλαιότερα θέματα εξετάσεων και παίρνεις άριστα στις εξετάσεις.

(v) Δεν είναι δυνατόν να έχεις παρακολουθήσει όλες τις διαλέξεις του μαθήματος, να πήρες άριστα στις εξετάσεις και να μην μπορείς να λύσεις όλα τα παλαιότερα θέματα εξετάσεων.

Ακολουθούμε τις φράσεις της καθημερινής γλώσσας, αναγνωρίζουμε τις δευτερεύουσες προτάσεις ως τις p, q, r, και τρέπουμε τα «δεν», «εάν-τότε», «και», «είτε-είτε» σε $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, αντιστοίχως. Το «αλλά» σημαίνει «αλλά-καί» και τρέπεται σε $\wedge$. Το «πρέπει» σημαίνει αναγκαία συνθήκη – και αποτελεί (προσοχή) *συμπέρασμα*: το «για α πρέπει β», μεταφράζεται σε «α → β», δηλαδή «άμα έγινε ‘α’ τότε πρέπει (να έχει γίνει) και ‘β’».

(i) $\neg\big((p\wedge q)\rightarrow r\big)$.

(ii) $(\neg r)\rightarrow\big((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\big)$.

(iii) $r\rightarrow(p\vee q)$.

(iv) $p\rightarrow(q\wedge r)$.

(v) $\neg(p\wedge r\wedge\neg q)$.

Προσοχή στην *συντακτική αντιστοιχία* ανάμεσα στις προτάσεις στα «ελληνικά» και σε εκείνες του προτασιακού λογισμού.

■

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΔΟΜΗ & ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο, 2012-2013

(α) Για κάθε προτασιακό φ τύπο ορίζουμε:

- $\upsilon(\varphi)$ = *πλήθος των υποτύπων του φ που εμφανίζονται στο δενδροδιάγραμμα του, συμπεριλαμβανομένου του ίδιου του φ (βλέπε παράδειγμα στο σχήμα 1).*
- $\sigma(\varphi)$ = *πλήθος των συνδέσμων του φ.*

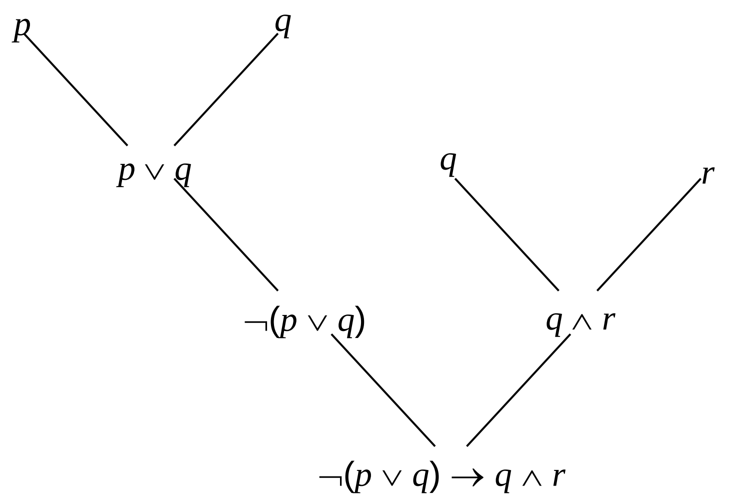
Χρησιμοποιώντας επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων να δειχθεί ότι

$$\upsilon(\varphi)\leq 2\sigma(\varphi)+1$$

(α) ***Βάση επαγωγής:*** Αν $\sigma(\varphi) = 0$, τότε ο τύπος φ δεν περιέχει συνδέσμους, δηλαδή αποτελείται από μία προτασιακή μεταβλητή και άρα $\upsilon(\varphi) = 1 \leq 0+1 = \sigma(\varphi)+1$.

Βήμα επαγωγής: Έστω ότι η σχέση $\upsilon(\varphi) = \sigma(\varphi)+1$ ισχύει για τύπους με $\sigma(\varphi) \leq \kappa$, $(\kappa \geq 0)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τύπους με $\sigma(\varphi) = (\kappa+1)$. Αφού σε αυτή τη περίπτωση $\sigma(\varphi) \geq 1$, ο φ περιέχει έναν τουλάχιστον σύνδεσμο $\underline{c} \in \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, και ο φ έχει είτε την μορφή «$\underline{c}$ χ» (για $\underline{c}$ = ‘$\neg$’) είτε την μορφή «χ $\underline{c}$ ψ» (για $\underline{c}$ = ‘$\vee$’, ‘$\wedge$’, κττ)— όπου οι τύποι χ και ψ έχουν τουλάχιστον έναν σύνδεσμο λιγότερο από ότι ο φ:

$$\sigma(\chi),\ \sigma(\psi) \leq (\sigma(\varphi)-1) = (\kappa+1)-1 = \kappa.$$



Σχήμα 1. Οι υποτύποι στο παραπάνω δενδροδιάγραμμα είναι $\neg(p \vee q) \rightarrow q \wedge r$, $\neg(p \vee q)$, $q \wedge r$, $p \vee q$, p, q και r.

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε: υ(χ) ≤ 2σ(χ)+1, και υ(ψ) ≤ 2σ(ψ)+1.

Για τα πλήθη των υποτύπων υ(-) έχουμε: υ(φ) ≤ υ(χ)+υ(ψ)+1 («+1» λόγω φ).

Για τα πλήθη των συνδέσμων σ(-)έχουμε: σ(φ) = σ(χ)+σ(ψ)+1 («+1» λόγω νέου συνδέσμου).

Όλα μαζί δίνουν:

Περίπτωση «¬ χ» – (απουσιάζει ο ψ, και υ(ψ) = σ(ψ) = 0):

υ(φ) ≤ υ(χ)+1 = (2σ(χ)+1)+1 = 2σ(χ)+2 = 2(σ(χ)+1) = 2σ(φ) ≤ 2σ(φ)+1

Περίπτωση «χ ∧ ψ» (ή ‘χ ∨ ψ’, κτт):

υ(φ) ≤ υ(χ)+υ(ψ)+1 = (2σ(χ)+1)+(2σ(ψ)+1)+1 = 2 **(**σ(χ)+σ(ψ)+1**)** + 1 = 2σ(φ)+1

■

$2^η$ ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ $1^ο$, 2016-2017

Α.2. Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n προτασιακοί τύποι. Η παρακάτω ταυτολογία, για $n = 2$, είναι ο γνωστός τύπος *De Morgan*:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_i\right) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\right)$$

Χρησιμοποιήσατε επαγωγή για να αποδείξετε την γενίκευσή του για κάθε $n \geq 3$.

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Για $n = 2$ έχουμε τον γνωστό τύπο *De Morgan*.

ΒΗΜΑ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $\left(\bigwedge_{i=1}^{k} \neg\varphi_i\right) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{k} \varphi_i\right)$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k+1$, δηλαδή ότι: $\left(\bigwedge_{i=1}^{k+1} \neg\varphi_i\right) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi_i\right)$.

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{k+1} \neg\varphi_i\right) \equiv \Big(\overbrace{\Big(\bigwedge_{i=1}^{k} \neg\varphi_i\Big)}^{\textit{επαγωγικό βήμα}} \wedge \neg\varphi_{k+1}\Big) \equiv \Big(\overbrace{\neg\underbrace{\Big(\bigvee_{i=1}^{k} \varphi_i\Big)}_{deM}}^{\textit{επαγωγικό βήμα}} \wedge \neg\varphi_{k+1}\Big) \underset{deM}{\equiv} \neg\Big(\underbrace{\Big(\bigvee_{i=1}^{k} \varphi_i\Big)}_{deM} \vee \varphi_{k+1}\Big) \underset{deM}{\equiv} \neg\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi_i\right)$$

Το $2^ο \equiv$ χρησιμοποιεί την επαγωγική υπόθεση, και το $3^ο \equiv$ τον *de Morgan* για $n = 2$ (!).

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο, 2014-2015

1. Να δειχθεί, με χρήση επαγωγής στην πολυπλοκότητα των τύπων, ότι δεν μπορούν να είναι ταυτολογίες οι τύποι που είτε είναι προτασιακές μεταβλητές, ή περιέχουν μόνο τον σύνδεσμο $\vee$. Επιπλέον εξηγήστε για ποιον λόγο δεν ισχύει το ίδιο για τύπους που περιέχουν μόνο τον σύνδεσμο $\rightarrow$.

Έστω ένας τύπος με πλοκή ν – δηλαδή περιέχει ν λογικούς συνδέσμους τύπου $\vee$. Θα δείξουμε ότι η αποτίμηση:

«P_κ = ΨΕΥΔΕΣ, για κάθε προτασιακή μεταβλητή P_κ»,

διαψεύδει τον Φ.

Βάση επαγωγής (ν = 0): Έστω Φ τύπος πλοκής 0. Οι τύποι χωρίς λογικούς συνδέσμους είναι απλές λογικές μεταβλητές, και αυτές φυσικά δεν είναι ταυτολογίες: επιδέχονται τόσο την τιμή ΑΛΗΘΕΣ όσο και την τιμή ΨΕΥΔΕΣ. Συγκεκριμένα, η αποτίμηση, «P_κ = ΨΕΥΔΕΣ, για κάθε προτασιακή μεταβλητή P_κ» διαψεύδει τον Φ, από όποια μεταβλητή και εάν αποτελείται.

Βήμα επαγωγής (από ν ≤ κ σε ν ≤ (κ+1)): Θα δείξουμε ότι αν η αποτίμηση «P_κ = ΨΕΥΔΕΣ, για κάθε προτασιακή μεταβλητή P_κ» διαψεύδει όλους τους τύπους με πλοκή έως και κ, τότε διαψεύδει και όλους τους τύπους (της μορφής που δίδεται) με πλοκή έως και (κ+1). Έστω ότι ο τύπος Φ είναι η διάζευξη των δύο τύπων Χ, Ψ: $\Phi \equiv X \vee \Psi$. Η πλοκή των Χ και Ψ είναι τουλάχιστον κατά 1 μικρότερη του Φ (αφού δεν περιέχουν την διάζευξη $\vee$ του Φ), και άρα από την επαγωγική υπόθεσή μας ισχύει ότι οι Χ και Ψ διαψεύδονται από την αποτίμηση, «P_κ = ΨΕΥΔΕΣ, για κάθε προτασιακή μεταβλητή P_κ». Άρα διαψεύδεται και η $\Phi \equiv X \vee \Psi$.

Δεν είναι δυνατόν να επαναλάβουμε το ίδιο επιχείρημα και όταν ο διαθέσιμος σύνδεσμος είναι η συνεπαγωγή $\rightarrow$, διότι σε αυτήν το «ΨΕΥΔΕΣ $\rightarrow$ ΨΕΥΔΕΣ» αποτιμάται ως ΑΛΗΘΕΣ και όχι ως ΨΕΥΔΕΣ (όπως συμβαίνει με το «ΨΕΥΔΕΣ $\vee$ ΨΕΥΔΕΣ»). Πιο συγκεκριμένα, ο τύπος $(\varphi \rightarrow \varphi)$ είναι – εμφανώς – ταυτολογία.

■

ΝΟΜΟΙ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 8ο, 2012-20113

Χρησιμοποιώντας τους **νόμους της ΠΛ** (βλέπε σελίδα 38, τόμος 3) και τους **νόμους απορρόφησης** (βλέπε άσκηση 2.5, σελίδα 85, τόμος 3) απλοποιήστε τους παρακάτω τύπους:

(i) $(p \wedge q) \vee p$ **(ii)** $(p \vee q) \wedge p$

(iii) $(p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)) \rightarrow p$ **(iv)** $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(i) $(p \wedge q) \vee p$. Επειδή $(p \wedge q) \models p$ έχουμε ότι $(p \wedge q) \vee p \equiv p$.

(ii) $(p \vee q) \wedge p$. Επειδή $p \models (p \vee q)$, έχουμε ότι $(p \vee q) \wedge p \equiv p$.

(iii) $(p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)) \rightarrow p$ // $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$

$\equiv \neg(p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)) \vee p$ // $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$

$\equiv \neg(\neg p \vee (q \rightarrow \neg p)) \vee p$ // $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$

$\equiv \neg(\neg p \vee (\neg q \vee \neg p)) \vee p$ // De Morgan

$\equiv \neg(\neg p \vee \neg(q \wedge p)) \vee p$ // De Morgan

$\equiv \neg\neg(p \wedge (q \wedge p)) \vee p$ // διπλή άρνηση

$\equiv (p \wedge (q \wedge p)) \vee p$ // μεταθετικότητα ∧, προσεταιρισμός ∧,

$\equiv (p \wedge p) \vee p$ // προφανής απορρόφηση, δις

$\equiv (p) \vee p \equiv p$

(iv) $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$. // αναδιατύπωση των συνεπαγωγών ... → ...

$\equiv \neg(p \vee q) \vee (\neg p \vee q)$ // De Morgan

$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)$ // απορρόφηση: $(\neg p \wedge \neg q) \models (\neg p \vee q)$

$\equiv (\neg p \vee q)$ // αναδιατύπωση συνεπαγωγής

$\equiv p \rightarrow q$

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο, 2015-2016

(3.α) Να δειχθεί με νόμους της Προτασιακής Λογικής ότι για αυθαίρετους τύπους φ, χ και ψ ισχύουν τα εξής:
(1) $\varphi \rightarrow (\chi \wedge \psi) \equiv (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$
(2) $(\varphi \wedge \chi) \rightarrow \psi \equiv \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$

ΕΝΔ. ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Οι «πράξεις» μπορούν να γίνουν με τον εξής τρόπο:

(1) $\varphi \rightarrow (\chi \wedge \psi)$

(από μεταγραφή της συνεπαγωγής $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$)	$\equiv \neg\varphi \vee (\chi \wedge \psi)$
(από επιμεριστική ιδιότητα)	$\equiv (\neg\varphi \vee \chi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi)$
(από μεταγραφή της συνεπαγωγής $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$)	$\equiv (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$

(2) $(\varphi \wedge \chi) \rightarrow \psi$

(από μεταγραφή της συνεπαγωγής $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$)	$\equiv \neg(\varphi \wedge \chi) \vee \psi$
(από de Morgan)	$\equiv (\neg\varphi \vee \neg\chi) \vee \psi$
(από προσεταιριστική ιδιότητα)	$\equiv \neg\varphi \vee (\neg\chi \vee \psi)$
(από μεταγραφή της συνεπαγωγής $\neg\alpha \vee \beta \equiv \alpha \rightarrow \beta$)	$\equiv \neg\varphi \vee (\chi \rightarrow \psi)$
(από μεταγραφή της συνεπαγωγής $\neg\alpha \vee \beta \equiv \alpha \rightarrow \beta$)	$\equiv \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο, 2010-2011

5. Χρησιμοποιώντας τους νόμους της ΠΛ βρείτε τύπους που χρησιμοποιούν μόνο τους **συνδέσμους** $\{\neg, \rightarrow\}$ και είναι **ταυτολογικά ισοδύναμοι** με τους:

i) $\neg p \wedge (q \leftrightarrow r)$ ii) $p \vee \neg(q \wedge r)$

(βλ. παράδειγμα 2.11, σελ. 48, άσκηση αυτοαξιολόγησης 2.10, σελ. 49).

i)

$\neg p \wedge (q \leftrightarrow r)$

$\equiv \neg(\neg\neg p \vee (\neg(q \leftrightarrow r)))$	νόμος De Morgan.**1**
$\equiv \neg(\neg p \rightarrow (\neg(q \leftrightarrow r)))$	νόμος Αντικατάστασης.**1**
$\equiv \neg(\neg p \rightarrow (\neg((q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q))))$	νόμος Αντικατάστασης.**2**
$\equiv \neg(\neg p \rightarrow (\neg(q \rightarrow r) \vee \neg(r \rightarrow q)))$	νόμος De Morgan.**1**
$\equiv \neg(\neg p \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow \neg(r \rightarrow q)))$	νόμος Αντικατάστασης.**1**

ii)

$p \vee (\neg(q\ r))$

$\equiv \neg p \to (\neg(q \wedge r))$ νόμος Αντικατάστασης.**1**

$\equiv \neg p \to (\neg q \vee \neg r)$ νόμος De Morgan.**1**

$\equiv \neg p \to (q \to \neg r)$ νόμος Αντικατάστασης.**1**

■

ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ & ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο, 2012-2013

(β) Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων *T*, να δειχθεί ότι:

(i) Αν $T \cup \{\varphi\} \models \psi$ και $T \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$, τότε $T \models \neg\varphi$.

(ii) Αν $T \cup \{\varphi\} \models \psi$ και $T \cup \{\chi\} \models \psi$, τότε $T \cup \{\varphi \vee \chi\} \models \psi$.

(β) (*i*) Έστω $\alpha(\cdot)$ μια οποιαδήποτε αποτίμηση αληθείας που ικανοποιεί όλους τους προτασιακούς τύπους του T. Αυτή η αποτίμηση δεν μπορεί να καθιστά ΑΛΗΘΕΣ το φ διότι τότε θα έπρεπε να καθιστά ΑΛΗΘΕΣ τόσο το ψ (αφού $T \cup \{\varphi\} \models \psi$), όσο και το ¬ψ (αφού $T \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$). Άρα η $\alpha(\cdot)$ καθιστά ΑΛΗΘΕΣ το ¬φ, και αφού κάθε αποτίμηση $\alpha(\cdot)$ που ικανοποιεί το T επαληθεύει το φ, έχουμε $T \models \neg\varphi$.

(*ii*) Έστω $\alpha(\cdot)$ μια οποιαδήποτε αποτίμηση αληθείας που ικανοποιεί όλους τους προτασιακούς τύπους του $T \cup \{\varphi \vee \chi\}$. Αφού η $\alpha(\cdot)$ ικανοποιεί την διάζευξη $\varphi \vee \chi$, είτε ικανοποιεί την φ, είτε ικανοποιεί (και) την χ. Στη 1η περίπτωση η $\alpha(\cdot)$ ικανοποιεί όλους τους τύπους του $T \cup \{\varphi\}$, και επομένως (αφού $T \cup \{\varphi\} \models \psi$), ικανοποιεί την ψ. Στη 2η περίπτωση η $\alpha(\cdot)$ ικανοποιεί όλους τους τύπους του $T \cup \{\chi\}$, και επομένως (αφού $T \cup \{\chi\} \models \psi$), ικανοποιεί την ψ. Και στις δύο περιπτώσεις. κάθε αποτίμηση $\alpha(\cdot)$ που ικανοποιεί το $T \cup \{\varphi \vee \chi\}$ ικανοποιεί και την ψ, άρα $T \cup \{\varphi \vee \chi\} \models \psi$.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 4ο, 2010-2011

4. Ποιοι από τους τύπους,

i) $p \to (q \to p)$ ii) $q \to (q \to p)$

iii) $(p \to \neg p) \leftrightarrow p$ iv) $(p \to q) \to p$

συνεπάγονται ταυτολογικά κάποιον από τους άλλους; Εντοπίστε το μέγιστο **ικανοποιήσιμο** υποσύνολο του συνόλου των τεσσάρων τύπων του προηγούμενο ερωτήματος.

(βλ., ορισμό 2.5, παράδειγμα 2.5, σελ. 35 και άσκηση αυτοαξιολόγησης 2.5, σελ. 37).

			i	**ii**	**iii**	**iv**
	p	q	$p \to (q \to p)$	$q \to (q \to p)$	$(q \to \neg p) \leftrightarrow p$	$(p \to q) \to p$
1	Α	Α	**Α**	**Α**	Ψ	**Α**
2	Α	Ψ	**Α**	**Α**	Ψ	**Α**
3	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
4	Ψ	Ψ	**Α**	**Α**	Ψ	Ψ

Γραμμή **1&2&4**: «*κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τον* **ii** *ικανοποιεί και τον* **i**», **ii |= i**, μέσω των αποτιμήσεων α(p) = α(q) = Α <u>ή</u> α(p) = Α, α(q) = Ψ <u>ή</u> α(p) = α(q) = Ψ

Γραμμή **1&2**: «*κάθε αποτίμηση που ικανοποεί τον* **iv** *ικανοποιεί την* **i** *και την* **ii**», **iv |= i** και **iv |= ii**, μέσω των αποτιμήσεων α(p) = α(q) = Α <u>ή</u> α(p) = Α, α(q) = Ψ <u>ή</u>

Γραμμή **1** ή **2:** *ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι* **i, ii** και **iv,** έτσι το **{i, ii, iv}** αποτελεί το μέγιστο ικανοποιήσιμο (υπο-)σύνολο των τύπων.

Ο **iii** επειδή είναι αντίφαση <u>συνεπάγεται ταυτολογικά τα πάντα</u>, δηλαδή και τα i, ii και iv αλλά και τις αρνήσεις τους.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο, 2009-2010

(1) (α) Δείξτε ότι για κάθε τύπο φ και για κάθε τύπο ψ, ισχύει $\varphi \equiv \psi$ αν και μόνο αν $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε τύπο φ και για κάθε τύπο ψ, ισχύει $\varphi \equiv \psi$ αν και μόνο αν $\neg\varphi \equiv \neg\psi$.

(1)(α) Η ισοδυναμία των δηλώσεων «$\varphi \equiv \psi$» και «$\models \varphi \leftrightarrow \psi$» μπορεί να αποδειχτεί άμεσα παρατηρώντας πως οι δύο αυτές δηλώσεις σημαίνουν ουσιαστικά το ίδιο πράγμα. Πράγματι

- η δήλωση $\varphi \equiv \psi$ σημαίνει το εξής: για κάθε αποτίμηση σ ισχύει ότι σ(φ)=Α αν και μόνο αν σ(ψ)=Α.
- η δήλωση $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ σημαίνει το εξής: για κάθε αποτίμηση σ ισχύει ότι σ($\varphi \leftrightarrow \psi$)=Α (δηλαδή ο τύπος $\varphi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία).

Η αρχική ισοδυναμία αποδεικνύεται δείχνοντας την ισοδυναμία των δηλώσεων «σ(φ)=Α αν και μόνο αν σ(ψ)=Α» και «σ($\varphi \leftrightarrow \psi$)=Α» η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι και οι δυο αυτές δηλώσεις σημαίνουν ότι «είτε σ(φ)=σ(ψ)=Α, είτε σ(φ)=σ(ψ)=Ψ».

Διαφορετικά, μπορούμε να ακολουθήσουμε τον συνηθισμένο τρόπο που συνίσταται στο να εξετάσουμε χωριστά την κάθε κατεύθυνση της ισοδυναμίας.
Έστω ότι $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ δηλαδή ότι ο $\varphi \leftrightarrow \psi$ αληθεύει για κάθε αποτίμηση. Άρα πρέπει οι δύο τύποι φ, ψ ή να είναι ταυτόχρονα αληθείς ή ταυτόχρονα ψευδείς. Άρα κάθε αποτίμηση που επαληθεύει τον φ, επαληθεύει ταυτόχρονα και τον ψ, αλλά και αντίστροφα. Αποδείξαμε δηλαδή ότι ισχύει $\varphi \models \psi$ και $\psi \models \varphi$. Δηλαδή ότι $\varphi \equiv \psi$.
Αντιστρόφως. Αν $\varphi \equiv \psi$, τότε ισχύει $\varphi \models \psi$ και $\psi \models \varphi$. Άρα:

- Από την $\varphi \models \psi$, έπεται ότι κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τον φ ικανοποιεί επίσης και τον ψ.
- Από την $\psi \models \varphi$, έπεται ότι κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τον ψ ικανοποιεί επίσης και τον φ.

Δηλαδή ο τύπος φ αληθεύει αν και μόνο αν αληθεύει ο τύπος ψ. Άρα ο τύπος $\varphi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία δηλαδή $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

(β) Σύμφωνα με το προηγούμενο υποερώτημα ισχύει ότι $\varphi \equiv \psi$ αν και μόνο αν $\models \varphi \leftrightarrow \psi$. Και άρα ισχύει επίσης ότι $\neg\varphi \equiv \neg\psi$ αν και μόνο αν $\models \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$. Εύκολα δείχνουμε ότι $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ αν και μόνο αν $\models \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$, παρατηρώντας πως η δήλωση «είτε σ(φ)=σ(ψ)=Α, είτε σ(φ)=σ(ψ)=Ψ» (που χρησιμοποιήσαμε στο (α) για να δείξουμε ότι $\models \varphi \leftrightarrow \psi$) είναι ταυτόσημη με την δήλωση «είτε σ(¬φ)=σ(¬ψ)=Ψ, είτε σ(¬φ)=σ(¬ψ)=Α» » (η οποία χρησιμοποιείται για να δειχτεί ότι $\models \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$).

Ετσι, από το υποερώτημα (α) και την ισοδυναμία «$\models \varphi \leftrightarrow \psi$ αν και μόνο αν $\models \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$» που μόλις δείξαμε, προκύπτει το ζητούμενο «$\varphi \equiv \psi$ αν και μόνο αν $\neg\varphi \equiv \neg\psi$».

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 5ο, 2008-2009

(Θέμα Εξετάσεων Ιουλίου 2006)

Προσπαθήστε να απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ).

1. Θεωρούμε το σύνολο προτασιακών τύπων $T = \{ p_1 \vee \neg p_2 ,\ p_1 \wedge p_2 ,\ p_1 \vee p_3 \}$. Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν και ποιες όχι;

Παρατήρηση: Πριν ξεκινήσουμε να εξετάζουμε την ισχύ ή μη των παρακάτω ταυτολογικών συνεπαγωγών, είναι σκόπιμο να εντοπίσουμε τις αποτιμήσεις που ικανοποιούν το σύνολο των υποθέσεων T. Για να ικανοποιείται το T, πρέπει ουσιαστικά να ικανοποιείται κάθε τύπος του, οπότε ξεκινώντας από τη σύζευξη $p_1 \wedge p_2$, συμπεραίνουμε ότι πρέπει οι p_1, p_2 να είναι αληθείς. Απαιτώντας η διάζευξη $p_1 \vee p_3$ να είναι επίσης αληθής, με δεδομένο ότι οι p_1, p_2 είναι αληθείς, δεν παίρνουμε κάποιο περιορισμό για τις αποτιμήσεις της p_3. Τέλος, εξετάζοντας τη διάζευξη $p_1 \vee \neg p_2$, με δεδομένο ότι οι p_1, p_2 είναι αληθείς, παρατηρούμε ότι αυτή αληθεύει. Άρα υπάρχουν συνολικά δύο αποτιμήσεις που ικανοποιούν το T. Αυτές είναι:

$$\alpha_1 (p_1) = \alpha_1 (p_2) = \text{Α και } \alpha_1 (p_3) = \text{Α}$$
$$\alpha_2 (p_1) = \alpha_2 (p_2) = \text{Α και } \alpha_2 (p_3) = \Psi$$

$T \models \neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$

(Σωστό) *Αιτιολόγηση:* Επειδή κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T, απαιτεί η p_1 να αληθεύει, η $\neg p_1$ που εμφανίζεται στην υπόθεση της συνεπαγωγής θα είναι ψευδής. Από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής, προκύπτει άμεσα ότι η συνεπαγωγή αληθεύει. Άρα η ταυτολογική συνεπαγωγή ισχύει.

$T \models (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$

(Λάθος) *Αιτιολόγηση:* Ο $p_1 \wedge p_2$ αληθεύει για κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T. Από την άλλη πλευρά η p_3 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή αληθείας. Αν λοιπόν η p_3 είναι ψευδής η συνεπαγωγή δεν ισχύει. Άρα η ταυτολογική συνεπαγωγή δεν ισχύει.

$T \models (p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$

(Λάθος) *Αιτιολόγηση:* Ο $p_2 \vee p_3$ αληθεύει (λόγω της p_2) για κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T. Η p_3 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή αληθείας. Αν λοιπόν η p_3 είναι ψευδής, τότε το συμπέρασμα $p_1 \wedge p_3$ είναι ψευδές. Άρα η ταυτολογική συνεπαγωγή δεν ισχύει.

$T \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_3)$

(Σωστό) *Αιτιολόγηση:* Ο $p_1 \vee p_2$ αληθεύει για κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T, ενώ η συνεπαγωγή $\neg p_1 \rightarrow \neg p_3$ αληθεύει επίσης για κάθε αποτίμηση της p_3, αφού η $\neg p_1$, είναι αναγκαστικά ψευδής. Από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής, προκύπτει άμεσα ότι η συνεπαγωγή αληθεύει. Άρα η ταυτολογική συνεπαγωγή ισχύει.

■

ΣΥΝΟΛΑ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΔΕΣΜΩΝ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο, 2015-2016

(2.α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας αλήθειας του **τριαδικού** λογικού τελεστή TERNARY(p, q, r), που αποτυπώνει την αληθοτιμή της υπό-συνθήκη έκφρασης «**if** p **then** q **else** r» για αυθαίρετες προτασιακές μεταβλητές p, q και r. Να δοθεί τύπος φ με συνδέσμους από το $\Sigma = \{ \neg , \wedge , \vee, \rightarrow , \leftrightarrow \}$ ο οποίος να είναι ταυτολογικά ισοδύναμος του TERNARY(p, q, r). Τέλος να διευκρινιστεί ποια είναι η σχέση (είναι ικανή συνθήκη, αναγκαία συνθήκη, και τα δύο, ή τίποτε από τα δύο;) της p με καθεμιά από τις q και $\neg$r.

Ο ταυτολογικά ισοδύναμος τύπος γράφεται ακολουθώντας τον ορισμό του ‘ternary’ κατά γράμμα:

$$\text{TERNARY}(p, q, r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

Ο πίνακας αληθείας είναι:

p	q	r	(p→q)	(¬p→r)	TERNARY(p, q, r)
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Όταν TERNARY(p, q, r) = ΑΛΗΘΕΣ...

- το p = ΑΛΗΘΕΣ επιβάλλει το q = ΑΛΗΘΕΣ, άρα η p είναι *ικανή* συνθήκη για την q, και,
- το (¬p) = ΑΛΗΘΕΣ επιβάλλει το r = ΑΛΗΘΕΣ, δηλαδή από (¬r) = ΑΛΗΘΕΣ λαμβάνουμε ¬(¬p) ≡ p = ΑΛΗΘΕΣ, άρα η p είναι *αναγκαία* συνθήκη για την ¬r. (Προσέχουμε εδώ ότι χρησιμοποιούμε τον νόμο της αντιθετοαντιστροφής (φ → χ) ≡ (¬χ → ¬φ), και τον νόμο της διπλής άρνησης ¬¬φ ≡ φ.)

■

(2.β) Θεωρήστε το σύνολο συνδέσμων Σ_1 = { ¬ , TERNARY }. Να δειχθεί ότι το Σ_1 είναι πλήρες σύνολο συνδέσμων της Προτασιακής Λογικής. Συγκεκριμένα, να δείξετε ότι οποιοσδήποτε διμελής τελεστής από το Σ_2 = { ∧ , ∨ } μπορεί να εκφραστεί με έναν τύπο με συνδέσμους από το Σ_1. Εξηγήστε στη συνέχεια πώς ακριβώς θα κατασκευαστεί ισοδύναμος τύπος φ* με συνδέσμους αποκλειστικά από το Σ_1, για αυθαίρετο τύπο φ ο οποίος μπορεί να περιλαμβάνει συνδέσμους από το Σ = { ¬ , ∧ , ∨, → , ↔ }.

Ο τύπος TERNARY (α, β, ¬α) είναι εξ ορισμού ισοδύναμος με τον (α → β) ∧ (¬α → ¬α) ≡ (α → β) ∧ (**1**) ≡ (α → β). Αφού έχουμε στη διάθεσή μας τον (α → β), μπορούμε να εκφράσουμε κατά τα γνωστά και τους (α ∧ β), (α ∨ β). Συγκεκριμένα:

	(p → q)		≡ TERNARY (p, q, ¬p)	(εξηγήθηκε μόλις πριν.)
	(p ∨ q)	≡ (¬p → q)	≡ TERNARY (¬p, q, ¬¬p)	≡ TERNARY (¬p, q, p)
	(p ∧ q)	≡ ¬(¬p ∨ ¬q)	≡ ¬ TERNARY (¬¬p, ¬q, ¬p)	≡ ¬ TERNARY (p, ¬q, ¬p)
αλλά και,	(p ↔ q)	≡ (p → q) ∧ (¬p → ¬q)	≡ TERNARY (p, q, ¬q) ,	(εξ ορισμού, με r = ¬q)

Συμβολίζουμε με t(φ) το τύπο που εκφράζει τον φ μέσω των συνδέσμων ¬ και TERNARY. Λόγω της επαγωγικής κατασκευής των τύπων, είναι αναγκαίο, και αρκεί, να ορίσουμε τον t(-) επαγωγικά/αναδρομικά επί του πλήθους των συνδέσμων που περιέχει ο φ:

Αν	φ = μεταβλητή	τότε	t(φ) = φ
Αν	φ = ¬ψ	τότε	t(φ) = ¬t(ψ)
Αν	φ = (χ → ψ)	τότε	t(φ) = TERNARY(t(χ), t(ψ), ¬ t(χ))
Αν	φ = (χ ∨ ψ)	τότε	t(φ) = TERNARY(¬t(χ), t(ψ), t(χ))
Αν	φ = (χ ∧ ψ)	τότε	t(φ) = ¬TERNARY(t(χ), ¬ t(ψ), ¬ t(χ))
Αν	φ = (χ ↔ ψ)	τότε	t(φ) = TERNARY(t(χ), t(ψ), ¬ t(ψ))

(Προσέχουμε ότι στον ορισμό οι τύποι χ, ψ έχουν πάντοτε έναν σύνδεσμο λιγότερο από τον τύπο φ, επομένως ο ορισμός είναι όντως επαγωγικός/αναδρομικός.)

(2.γ) Να δειχθεί, με χρήση επαγωγής στην πολυπλοκότητα των τύπων ότι, στη γλώσσα Γ_0 της Προτασιακής Λογικής με ακριβώς δύο προτασιακές μεταβλητές, οποιοσδήποτε τύπος με συνδέσμους από το Σ_3 = { ¬ , ↔ } περιλαμβάνει στον πίνακα αληθείας του άρτιο πλήθος αποτιμήσεων **A**. Τι συμπέρασμα βγάζετε από την παραπάνω απόδειξη για την πληρότητα του συνόλου συνδέσμων Σ_3;

Σχηματίζουμε όλες τις στήλες που προέρχονται από 2 μεταβλητές (άρα έχουν 4 γραμμές) και έχουν άρτιο πλήθος από «Α», και ελέγχουμε τί θα λαμβάναμε εάν τις «συνδέαμε» με τον σύνδεσμο ↔, ή παίρναμε την άρνηση ¬ μίας εξ αυτών. Προσέχουμε ότι ακόμα και για την «άρνηση» έχουμε να εξετάσουμε 4 γραμμές, διότι αυτή θα εμφανίζεται εν γένει εντός τύπων με δύο μεταβλητές (= όσες διαθέτει η γλώσσα που εξετάζουμε).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας (αφού η σειρά των γραμμών δεν παίζει ρόλο), αρκεί να τοποθετούμε τα «Ψ» όσο γίνεται υψηλότερα. Επίσης, εδώ, δεν χρειάζεται εναλλαγή $1^{ης}/2^{ης}$ στήλης λόγω συμμετρίας του ↔, οπότε το σύνολο όλων των περιπτώσεων είναι διαχειρίσιμο: περιέχει τις περιπτώσεις με 0 ή 2 ή 4 πλήθος από Α στην υπό-άρνηση στήλη, και με (0, 0), ή (0, 2), ή (0, 4), ή (δύο υποπεριπτώσεις) (2, 2), ή (2, 4), ή (4, 4) πλήθη από Α στη 1η/2η στήλη.

1η	¬
Ψ	Α
Ψ	Α
Ψ	Α
Ψ	Α

1η	2η	↔
Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α

1η	2η	↔
Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ

1η	2η	↔
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ

1η	¬
Ψ	Α
Ψ	Α
Α	Ψ
Α	Ψ

1η	2η	↔
Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ
Α	Α	Α

1η	2η	↔
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ

1η	2η	↔
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Α	Α	Α
Α	Α	Α

1η	¬
Α	Ψ
Α	Ψ
Α	Ψ
Α	Ψ

1η	2η	↔
Α	Α	Α
Α	Α	Α
Α	Α	Α
Α	Α	Α

Σε όλες τις περιπτώσεις, από στήλες με άρτιο πλήθος Α (0 ή 2 ή 4) λαμβάνουμε στήλη επίσης με άρτιο πλήθος Α.

Έστω τώρα ότι έχουμε μια οποιαδήποτε πρόταση (τύπο) Φ της γλώσσας $\Gamma_0(p, q)$ με δύο μεταβλητές p, q, και $n \geq 0$ λογικούς συνδέσμους από τους { ¬, ↔ }. Η στήλη αποτίμησης της Φ έχει θα έχει 4 γραμμές .

p	q
Ψ	Ψ
Ψ	Α
Α	Ψ
Α	Α

Φ΄	Φ΄΄
?	?
?	?
?	?
?	?

¬Φ΄	Φ΄↔Φ΄΄
?	?
?	?
?	?
?	?

Θα δείξουμε το ζητούμενο με χρήση επαγωγής επί της πολυπλοκότητας της πρότασης Φ, (δηλαδή επί του πλήθους n των συνδέσμων που αυτός περιέχει). Συγκεκριμμένα θα δείξουμε ότι ο εξής ισχυρισμός αληθεύει για κάθε $k \geq 0$:

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Ι(k):
Μια οποιαδήποτε πρόταση Φ της $\Gamma_0(p, q)$ με $0 \leq n \leq k$ λογικούς συνδέσμους από τους { ¬ , ↔ } έχει στήλη αποτίμησης με *άρτιο* πλήθος από Α.

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: απόδειξη του ισχυρισμού Ι(k) για ($k = 0$):
Εάν $k = 0$ τότε (πλήθος λογικών συνδέσμων Φ) = n = 0, δηλαδή η Φ δεν έχει συνδέσμους, άρα είναι μία των μεταβλητών p ή q. Οι στήλες αποτίμησης αυτών περιέχουν δύο Α, (βλ. παραπάνω), άρα ισχύει ο Ι(0) για την Φ.

ΒΗΜΑ ΕΠΑΓΩΓΗΣ : απόδειξη ότι για κάθε k ≥ 0 ο Ι(k) (= Η ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ) συνεπάγεται τον Ι(k+1):
Έστω μια πρόταση Φ με $0 \leq n = (k+1)$ συνδέσμους από την γλώσσα $\Gamma_0(p, q)$. Αν $n \leq k$ τότε έχουμε ήδη από από την *επαγωγική υπόθεση* Ι(k) ότι η στήλη της Φ φέρει άρτιο πλήθος από Α. Αλλιώς, αν n = (k+1) ≥ 1, η πρόταση Φ θα περιέχει έναν τουλάχιστον σύνδεσμο, και θα έχει είτε την μορφή ¬Φ΄ είτε την μορφή Φ΄ ↔ Φ΄΄, οπότε...

- Εάν μεν η Φ έχει την μορφή ¬Φ΄, τότε η Φ΄ θα έχει ≤ k συνδέσμους και από την *επαγωγική υπόθεση*, η στήλη αληθείας της θα έχει άρτιο πλήθος από Α, οπότε το αυτό ισχύει και για την ¬Φ΄ = Φ – *όπως εξετάστηκε παραπάνω*.
- Εάν δε η Φ έχει την μορφή Φ΄ ↔ Φ΄΄, τότε οι Φ΄ και Φ΄΄ έχουν ≤ k συνδέσμους εκάστη, και από την *επαγωγική υπόθεση*, οι στήλες αληθείας τους έχουν άρτιο πλήθος από Α. Άρα (*όπως εξετάστηκε παραπάνω*) η στήλη αληθείας της Φ΄ ↔ Φ΄΄ θα έχει επίσης άρτιο πλήθος Α.

Το συμπέρασμα είναι ότι οι σύνδεσμοι { ¬, ↔ } δεν επαρκούν για να εκφράσουν όλους τους άλλους, λ.χ. δεν επαρκούν για την έκφραση του →, ο οποίος για δύο μεταβλητές δίδει πίνακα αληθείας με 3 = *περιττό* πλήθος Α.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο, 2014-2015

(β) Να δειχθεί ότι το σύνολο συνδέσμων Σ = { ¬ , + } δεν είναι πλήρες, όπου ο διμελής λογικός σύνδεσμος + ορίζεται ως εξής:

p	*q*	*p + q*
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

(β) Έστω Φ(α, β) μια πρόταση που περιέχει τις προτασιακές μεταβλητές α και β, και τους συνδέσμους { ¬, + }. Ο πίνακας αληθείας αυτής θα έχει 0 ή 2 ή 4 τιμές «Α» (ΑΛΗΘΕΣ) (και, φυσικά, 4 ή 2 ή 0 τιμές «Ψ» (ΨΕΥΔΕΣ)):

α ∨ *β* ?	*α*	*β*
Α	Α	Α
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ

<table>
<tr><th>α + β</th><th>Φ(α, β) = …</th></tr>
<tr><td>Ψ</td><td rowspan="4">0 ή 2 ή 4 «Α»
και
4 ή 2 ή 0 «Ψ»</td></tr>
<tr><td>Α</td></tr>
<tr><td>Α</td></tr>
<tr><td>Ψ</td></tr>
</table>

Αυτό ισχύει διότι,

- η άρνηση μιας στήλης με 0 ή 2 ή 4 «Α», δίδει εμφανώς στήλη με 4 ή 2 ή 0 «Α».
- η «άθροιση +» μιας στήλης με 0 ή 4 «Α», με στήλη με 0, 2, 4 «Α» δίδει εμφανώς στήλη με 0 ή 2 ή 4 «Α».
- η «άθροιση +» δύο στηλών με 2 «Α» έχει 3 απλές περιπτώσεις, που όλες δίνουν στήλη με 0 ή 2 ή 4 «Α», («Ψ/Α» με 2 «Α», ή 2 «Α» μαζί με 2 «Α», 2 «Ψ» μαζί με 2 «Α»):

p	q	p+q
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

p	q	p+q
Α	Α	Α
Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α

p	q	p+q
Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ

Κατά συνέπεια, με τύπους ακριβώς δύο μεταβλητών, και συνδέσμους από το { ¬, + }, δεν μπορούμε να φτιάξουμε τον πίνακα αληθείας του συνδέσμου Φ(α, β) = *α* ∨ *β*, διότι αυτός έχει 3 «Α», και 1 «Ψ». Η χρήση περισσοτέρων μεταβλητών δεν θα βοηθούσε, διότι αν λ.χ. (α ∨ β) = Φ(α, β, γ), τότε η λογική τιμή της γ δεν μπορεί να επηρεάζει το αποτέλεσμα (που εξαρτάται μόνον από τα α και β), άρα θα μπορούσε να εξειδικευτεί στην γ = ΑΛΗΘΕΣ ή ΨΕΥΔΕΣ, τιμές που αναπαρίστανται από στήλες με 4 ή 0 «Α», μορφή στηλών που έχουν ήδη ληφθεί υπόψιν.

■

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑΣ \ ΑΝΤΙΦΑΣΗΣ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 7ο, 2014-2015

Να εξεταστεί αν είναι ταυτολογία ο ακόλουθος προτασιακός τύπος, με χρήση της μεθόδου της διερεύνησης (βλ. Παραδείγματα 2.7 και 2.8 Τόμου Γ), αλλά αποφεύγοντας την κατασκευή του πίνακα αλήθειας του:

$$[(x \to y) \land (y \to z) \land (z \to x)] \to (x \leftrightarrow z)$$

Αναζητούμε μια αποτίμηση που θα διέψευδε τον δοθέντα προτασιακό τύπο: θα πρέπει το 1ο μέλος να καθίσταται ΑΛΗΘΕΣ και το 2ο ΨΕΥΔΕΣ.

Για να είναι το 1ο ΑΛΗΘΕΣ, θα πρέπει να αληθεύουν όλες οι προτάσεις $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$.

Αν το x είναι ΑΛΗΘΕΣ, τότε από την 1η $x \to y$ θα πρέπει να είναι και το y, και από την 2η $y \to z$ θα πρέπει να είναι και το z ΑΛΗΘΕΣ. Τότε όμως δεν διαψεύδεται η $x \leftrightarrow z \equiv$ (ΑΛΗΘΕΣ $\leftrightarrow$ ΑΛΗΘΕΣ) = ΑΛΗΘΕΣ.

Αν το x είναι ΨΕΥΔΕΣ, τότε από την 3η $z \to x$ θα πρέπει να είναι και το z. Τότε όμως δεν διαψεύδεται η $x \leftrightarrow z \equiv$ (ΨΕΥΔΕΣ $\leftrightarrow$ ΨΕΥΔΕΣ) = ΑΛΗΘΕΣ.

Άρα και στις δύο ενδεχόμενες περιπτώσεις είναι αδύνατον να επαληθεύσουμε το 1ο μέλος και να διαψεύσουμε το 2ο, άρα η δοθείσα συνεπαγωγή είναι αδύνατον να διαψευθεί, δηλαδή είναι ταυτολογία.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 6ο, 2014-2015

Εξετάστε ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι **ταυτολογίες**, **αντιφάσεις** ή **τίποτα από τα δύο**:

(i) $(p \to q) \to p$

(ii) $p \to (q \to p)$

(iii) $(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$

(iv) $(q \to \neg p) \land (p \to q) \land p$

Συντάσσουμε τους πίνακες αληθείας και ελέγχουμε αν η σχετική στήλη περιέχει μόνον «1» ή μόνον «0» ή τίποτε από τα δύο:

p	q	$(p \to q)$	$(p \to q) \to p$
0	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

(i) => τίποτε από τα δύο.

p	q	$(q \to p)$	$p \to (q \to p)$
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	1

(ii) => ταυτολογία.

p	q	r	$(p \to q)$	$(q \to r)$	$(p \to q) \land (q \to r)$	$(p \to r)$	$(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(iii) => ταυτολογία.

p	q	$(q \to \neg p)$	$(p \to q)$	$(q \to \neg p) \wedge (p \to q) \wedge p$
0	0	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	1	0	1	0

(iv) => αντίφαση:

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 8ο, 2004-2005

α) Οι τύποι που, είτε είναι προτασιακές μεταβλητές, είτε περιέχουν μόνο τον σύνδεσμο $\wedge$, δεν είναι ταυτολογίες. Αποδείξτε την παρακάτω πρόταση, χρησιμοποιώντας επαγωγή στην δομή των τύπων.

β) Πείτε αν ισχύει η παρακάτω πρόταση: οι τύποι που περιέχουν μόνο τον σύνδεσμο $\to$ δεν είναι ταυτολογίες. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

(α) Το σύνολο $T_\wedge$, των τύπων που περιέχουν μόνο τον σύνδεσμο $\wedge$, μπορεί να οριστεί ως το υποσύνολο του $T(\Gamma_0)$ που περιέχει:

- Προτασιακές μεταβλητές ή
- Τύπους της μορφής $(\phi \wedge \psi)$, όπου ϕ, ψ είναι ήδη κατασκευασμένοι τύποι που περιέχουν μόνο τον σύνδεσμο $\wedge$.

Η δομή του συνόλου αυτού είναι αντίστοιχη με αυτή του $T(\Gamma_0)$ (βλ. Ορισμός 2.2, σελ. 20, Τόμος Γ'), μόνο που δεν περιλαμβάνει τύπους της μορφής $\neg\phi, (\phi \vee \psi), (\phi \to \psi)$ και $(\phi \leftrightarrow \psi)$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στη δομή του $T_\wedge$ (που περιγράψαμε παραπάνω), για να αποδείξουμε τη ζητούμενη πρόταση.

Η πρόταση ισχύει για προτασιακές μεταβλητές, αφού για οποιαδήποτε προτασιακή μεταβλητή p, υπάρχει μια αποτίμηση α τέτοια ώστε $a(p) = \Psi$.

Έστω ότι για τυχούσες $\phi, \psi \in T_\wedge$ ισχύει η πρόταση, δηλ. οι ϕ, ψ δεν είναι ταυτολογίες.

Θα αποδείξουμε ότι ο τύπος $(\phi \wedge \psi)$ δεν είναι ταυτολογία. Πράγματι, αφού ο ϕ δεν είναι ταυτολογία, υπάρχει αποτίμηση α τέτοια ώστε $\bar{a}(\phi) = \Psi$. Τότε προφανώς

$$\bar{a}(\phi \wedge \psi) = F_\wedge(\bar{a}(\phi), \bar{a}(\psi)) = F_\wedge(\Psi, \bar{a}(\psi)) = \Psi$$

ανεξαρτήτως της τιμής του $\bar{a}(\psi)$. Αποδείξαμε ότι η αποτίμηση α, δεν ικανοποιεί τον τύπο $(\phi \wedge \psi)$, άρα ο τύπος $(\phi \wedge \psi)$ δεν είναι ταυτολογία.

(β) Η πρόταση δεν ισχύει αφού μπορούμε να αναφέρουμε παραδείγματα ταυτολογιών που χρησιμοποιούν μόνο τον σύνδεσμο $\to$. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι ταυτολογίες που παίζουν τον ρόλο των αξιωματικών σχημάτων ΑΣ1, ΑΣ2 στον ΠΛ, οι οποίες είναι

$$\phi \to (\psi \to \phi)$$

$$(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$$

■

ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑ: ΑΝΑΛΥΣΗ & ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο, 2014-2015

2. Να δείξετε ότι είναι <u>μη ικανοποιήσιμα</u> τα εξής σύνολα τύπων:
(*i*) $T_1 = \{ \neg x_1, \neg x_1 \to x_2, x_2 \to x_4, x_4 \to x_3, x_3 \to x_2, x_2 \to x_1 \}$
(*ii*) $T_2 = \{ x_1, \neg x_1 \vee x_4, \neg x_4 \vee x_3, \neg x_1 \vee \neg x_3 \}$.

(i) Για να επαληθευθεί το τύπος $\neg x_1$ θα πρέπει να θέσουμε x_1 = ΨΕΥΔΕΣ (ή: $\neg x_1$ = ΑΛΗΘΕΣ). Αυτό επιβάλλει διαδοχικά (για την επαλήθευση των επόμενων τύπων), να θέσουμε x_2 = ΑΛΗΘΕΣ, x_4 = ΑΛΗΘΕΣ, x_3 = ΑΛΗΘΕΣ, x_2 = ΑΛΗΘΕΣ, x_1 = ΑΛΗΘΕΣ, και το τελευταίο είναι αδύνατον αφού έχουμε ήδη θέσει x_1 = ΨΕΥΔΕΣ. Άρα συνολικά αληθοποιός αποτίμηση δεν υπάρχει.
(ii) Για να επαληθευθεί το τύπος x_1 θα πρέπει να θέσουμε x_1 = ΑΛΗΘΕΣ. Αυτό επιβάλλει (για την επαλήθευση του 2ου και 4ου τύπου), να θέσουμε x_4 = ΑΛΗΘΕΣ, x_3 = ΨΕΥΔΕΣ. Τότε όμως δεν επαληθεύεται ο 3ο τύπος $\neg x_4 \vee x_3$, άρα συνολικά αληθοποιός αποτίμηση δεν υπάρχει.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο, 2013-2014

3. Μια **φράση Horn** είναι η σύζευξη μιας σειράς **όρων Horn**, οι οποίοι με τη σειρά τους είναι διάζευξη προτασιακών μεταβλητών ή αρνήσεων τους, έτσι ώστε σε κάθε όρο Horn να εμφανίζεται το πολύ μια μεταβλητή χωρίς άρνηση. Δηλαδή, μια φράση Horn είναι ένας τύπος φ, της μορφής:

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$$

όπου καθένας ένας από τους όρους φ_i, $i = 1,2,\ldots, m$ μπορεί να έχει μια από τις παρακάτω μορφές:

(i) p,

(ii) $(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n)$, όπου $(n \geq 1)$,

(iii) $(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee p)$ όπου $(n \geq 1)$

όπου p και p_i , για $i = 1,2,3,\ldots,n$, είναι προτασιακές μεταβλητές.

(α) Δείξτε ότι αν μια φράση Horn είναι **αντίφαση** (δηλαδή **μη ικανοποιήσιμη**), τότε περιέχει τουλάχιστον ένα όρο της μορφής (i) και τουλάχιστον ένα όρο της μορφής (ii).

(β) Έστω ένας όρος φ_i της φράσης Horn φ, που είναι της μορφής p. Έστω φ_j κάποιος άλλος όρος της φ, που περιέχει την $\neg p$. Αντικαθιστούμε τον φ_j με τον όρο φ_j', ο οποίος προκύπτει διαγράφοντας την $\neg p$ από τον φ_j, εφόσον ο φ_j' δεν είναι κενός. Ονομάζουμε την πρόταση που προκύπτει φ'.

π.χ. Στην πρόταση $p \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$, αντικαθιστούμε τον όρο $(\neg q \vee \neg p \vee r)$ με τον όρο $(\neg q \vee r)$.

Δείξτε ότι η φράση φ, είναι **ικανοποιήσιμη** (δηλαδή μη αντιφατική) αν και μόνο αν η φ' είναι ικανοποιήσιμη και ο όρος φ_j' δεν είναι κενός.

(γ) Βάσει των παραπάνω, αιτιολογήστε την ορθότητα της παρακάτω διαδικασίας, μέσω της οποίας μπορούμε να αποφασίσουμε κατά πόσο μια φράση Horn είναι ικανοποιήσιμη ή όχι:

- Αν η πρόταση δεν περιέχει όρους της μορφής (i) ή (ii), τότε είναι **ικανοποιήσιμη**, ΤΕΛΟΣ.
- Όσο υπάρχει δυνατότητα απλοποίησης, της μορφής που προτείνεται στο υποερώτημα (β):
    - Εφαρμόζουμε όλες τις δυνατές απλοποιήσεις τύπου (β)

- και αν σε κάποια απλοποίηση προκύψει κενός όρος, τότε η πρόταση είναι **μη ικανοποιήσιμη**, ΤΕΛΟΣ.

- Η πρόταση είναι **ικανοποιήσιμη**, ΤΕΛΟΣ.

(α) Αν δεν εμφανίζονται όροι της μορφής (i), και δώσουμε τις εξής τιμές αληθείας:

(ii)	$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n)$,	$p_k =$ ΨΕΥΔΗΣ, $k = 1, \ldots, n$
(iii)	$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee p)$	$p_k =$ ΨΕΥΔΗΣ, $k = 1, \ldots, n$, $p =$ ΨΕΥΔΗΣ

τότε όλοι οι όροι επαληθεύονται – (προσοχή στο ότι $n \geq 1$).

Αν δεν εμφανίζονται όροι της μορφής (ii), και δώσουμε τις εξής τιμές αληθείας:

(i)	p	$p =$ ΑΛΗΘΗΣ
(iii)	$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee p)$	$p_k =$ ΑΛΗΘΗΣ, $k = 1, \ldots, n$, $p =$ ΑΛΗΘΗΣ

τότε και πάλι όλοι οι όροι είναι επαληθεύσιμοι. Άρα για να μην είναι ένας τύπος φ (μορφής Horn) επαληθεύσιμος πρέπει να εμφανίζονται όροι και της μορφής (i) και της μορφής (ii).

Παραθέτουμε εδώ και ένα πρόσθετο στοιχείο που ισχύει – [και είναι χρήσιμο για το θέμα **(γ)**]: για να μην είναι ο τύπος φ επαληθεύσιμος θα πρέπει μεν να εμφανίζονται όροι της μορφής τόσο (i) όσο και (ii), αλλά και θα πρέπει να υπάρχει έστω μία μεταβλητή p υπό μορφή (i), που να εμφανίζεται και ως $\neg p$ σε κάποιον όρο με την μορφή (ii) ή (iii). Διότι αν *δεν* συμβαίνει αυτό, και δώσουμε τις εξής τιμές αληθείας:

(i)	p	$p =$ ΑΛΗΘΗΣ
(ii)	$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n)$	$p_k =$ ΨΕΥΔΗΣ, $k = 1, \ldots, n$
(iii)	$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee p)$	$p_k =$ ΨΕΥΔΗΣ, $k = 1, \ldots, n$,
		$p =$ (Ο,ΤΙ ΠΡΟΚΥΨΕΙ, αλλιώς οτιδήποτε)

τότε και πάλι όλοι οι όροι είναι επαληθεύσιμοι. Ας προσέξουμε εδώ ότι η παραπάνω αποτίμηση είναι *καλώς ορισμένη* διότι δεν υπάρχει όρος p της μορφής (i) ο οποίος να λαμβάνει και την τιμή ΑΛΗΘΕΣ (από την εμφάνιση ως p) αλλά και την τιμή ΨΕΥΔΕΣ (από μια εμφάνιση ως $\neg p$) αφού –χάρη στην υπόθεσή μας– δεν υπάρχουν τέτοια ζεύγη εμφανίσεων για κανέναν όρο p της μορφής (i).

(β) Έστω ότι ο τύπος φ_j γράφεται $\varphi_j = (\neg p \vee \chi)$. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις '$\chi = \varnothing$' και '$\chi \neq \varnothing$'.

- '$\chi = \varnothing$': έστω $\varphi_i = p$, $\varphi_j = (\neg p)$· τότε ο τύπος φ περιέχει συζευκτικά τους όρους p και $\neg p$, και δεν είναι επαληθεύσιμος.
- '$\chi \neq \varnothing$': έστω $\varphi_i = p$, $\varphi_j = (\neg p \vee \chi)$· αντικαθιστούμε στον τύπο $\varphi = \ldots \wedge \varphi_i \wedge \varphi_j \wedge \ldots$, το τμήμα της μορφής $(\varphi_i \wedge \varphi_j) = p \wedge (\neg p \vee \chi)$, με το τμήμα $(\varphi_i \wedge \varphi_j') = p \wedge \chi$. Αν το 1ο είναι επαληθεύσιμο τότε $p, \chi =$ ΑΛΗΘΕΣ, άρα και για το 2ο έχουμε $p \wedge \chi =$ ΑΛΗΘΕΣ. Και αν το 2ο είναι επαληθεύσιμο, τότε $p \wedge \chi =$ ΑΛΗΘΕΣ, άρα p, $\chi =$ ΑΛΗΘΕΣ, δηλαδή και για το 1ο $p \wedge (\neg p \vee \chi) =$ ΑΛΗΘΕΣ. Οι δύο υπότυποι είναι λογικά ισοδύναμοι, ή $(\varphi_i \wedge \varphi_j) \equiv (\varphi_i \wedge \varphi_j')$, και άρα ο φ είναι επαληθεύσιμος μετά την αντικατάσταση του φ_j σε φ_j', εάν και μόνον εάν ήταν και πριν.

(γ) Η μέθοδος μας έχει την εξής (αλγοριθμική) μορφή:

- Εξετάζουμε τις μορφές (i), (ii), (iii) για τους όρους του τύπου φ.
- Σε εκάστη εκ των κάτω τριών περιπτώσεων έχουμε οριστική διάγνωση:
  - Δεν υπάρχουν όροι με την μορφή μεταβλητής p ***άρα φ επαληθεύσιμος.***
  - Για κανένα όρο p δεν έχουμε εμφάνιση του $\neg p$ ***άρα φ επαληθεύσιμος.***
  - Εμφανίζεται και ο όρος p αλλά και ο όρος $\neg p$ ***άρα φ μη-επαληθεύσιμος.***
- Αλλιώς εμφανίζεται όρος της μορφής $\varphi_i = p$, αλλά και κάποιος όρος φ_j της μορφής $\varphi_j = (\neg p \vee \chi)$, $\chi \neq \varnothing$ – *υπάρχει δηλαδή δυνατότητα απλοποίησης*:
  - Απλοποιούμε τον $\varphi_j = (\neg p \vee \chi)$ σε $\varphi_j' = \chi$ και λαμβάνουμε νέο τύπο φ'.
  - Επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο εξ αρχής θέτοντας στη θέση του φ τον φ'.

Η μέθοδος αυτή κρίνει ορθά την επαληθευσιμότητα τύπων φ –που είναι σε μορφή Horn– επειδή:

- *ο εκάστοτε τύπος φ είναι 'Horn'* – (αρχικά είναι Horn, και η απλοποίηση διατηρεί αυτή τη μορφή).
- *απαντά σωστά σε κάθε περίπτωση από τις παραπάνω τρείς* – (όπως εξηγείται στο βήμα **(α)**).

- *τερματίζει πάντοτε* – (αφού σε κάθε επανάληψη συνεχίζουμε με τύπο *μικρότερου* μεγέθους).
- *η τελική απάντηση ισχύει για τον αρχικό τύπο* – (διότι ο εκάστοτε εξεταζόμενος τύπος απλοποιεί τον προηγούμενο παραμένοντας λογικά ισοδύναμος με αυτόν –όπως εξηγείται στο βήμα **(β)**– και άρα, μεταβατικά, παραμένει λογικά ισοδύναμος με τον αρχικό φ).

■

ΤΥΠΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: $\vdash_{ΠΛ}$ ΜΕ ΧΡΗΣΗ *modus-ponens* & ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 8ο, 2014-2015

8. Έστω ένα μη συνεπές σύνολο τύπων Τ, και φ ένας αυθαίρετος προτασιακός τύπος. Να δειχθεί ότι $T \vdash_{ΠΛ} \varphi$.

Αφού το Τ είναι ασυνεπές, για κάποιο τύπο α υπάρχουν οι αποδείξεις Τ |- α, και Τ |- ¬α. Θα δείξουμε ότι για κάθε τύπο β έχουμε Τ |- β. Συνδέουμε τις δύο αποδείξεις, και τις επεκτείνουμε με τον εξής τρόπο:

1.	Τ |- $\neg\alpha$	εξ υποθέσεως
2.	Τ |- α	εξ υποθέσεως
3.	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to [(\neg\beta \to \alpha) \to \beta]$	από ΑΣ3 = $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to [(\neg\varphi \to \psi) \to \varphi]$, με $\varphi \leftarrow \beta, \psi \leftarrow \alpha$
4.	$\neg\alpha$	από την απόδειξη 1.
5.	$\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	από ΑΣ1 = $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, με αντικατάσταση $\varphi \leftarrow \neg\alpha, \psi \leftarrow \neg\beta$
6.	$(\neg\beta \to \neg\alpha)$	από τα προηγούμενα 4. και 5. με *modus ponens*.
7.	$(\neg\beta \to \alpha) \to \beta$	από τα προηγούμενα 3. και 6. με *modus ponens*.
8.	α	από την απόδειξη 2.
9.	$\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$	από ΑΣ1 = $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, με αντικατάσταση $\varphi \leftarrow \alpha, \psi \leftarrow \neg\beta$
10.	$(\neg\beta \to \alpha)$	από τα προηγούμενα 8. και 9. με *modus ponens*.
11.	β	από τα προηγούμενα 7. και 10. με *modus ponens*.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 4ο, 2014-2015

(α) Χρησιμοποιώντας τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-3, τις αρχικές υποθέσεις, τον αποδεικτικό κανόνα Modus Ponens, και τα εξής τυπικά θεωρήματα:

Τ.Θ. διπλής άρνησης: $\vdash_{ΠΛ} \neg\neg\varphi \to \varphi$

Τ.Θ. μεταβατικότητας: $\vdash_{ΠΛ} (\varphi \to \psi) \to [\,(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)\,]$

να αποδείξετε ότι ισχύει το εξής:

$$\{\, \varphi \to \chi \,,\, \neg\chi \,\} \vdash_{ΠΛ} \neg\varphi.$$

(β) Έστω ότι έχετε χάσει τα γυαλιά σας και κάνετε τους εξής συλλογισμούς:

- *«Αν τα γυαλιά είναι στο τραπέζι της κουζίνας, τότε τα είδα την ώρα του πρωινού».*
- *«Αν δεν διάβαζα την εφημερίδα στο καθιστικό,τότε θα πρέπει να τη διάβαζα στην κουζίνα».*
- *«Αν διάβαζα εφημερίδα στο καθιστικό, τότε τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ».*
- *«Δεν είδα τα γυαλιά μου κατά τη διάρκεια του πρωινού».*
- *«Αν διάβαζα το βιβλίο μου στο κρεβάτι, τότε άφησα τα γυαλιά μου στο κομοδίνο».*
- *«Αν διάβαζα εφημερίδα στην κουζίνα, τότε τα γυαλιά μου είναι στο τραπέζι της κουζίνας».*

Βρείτε τελικά πού είναι τα γυαλιά. Δώστε τυπική απόδειξη για την ορθότητα του επιχειρήματός σας. Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες προτασιακές μεταβλητές στους τύπους που θα προτείνετε:

ΓΚΖ : *«τα γυαλιά είναι στο τραπέζι της κουζίνας»*

ΓΠΡ : *«είδα τα γυαλιά την ώρα του πρωινού»*

ΕΚΘ : *«διάβαζα εφημερίδα στο καθιστικό»*
ΕΚΖ : *«διάβαζα εφημερίδα στην κουζίνα»*
ΓΚΦ : *«τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ»*
ΒΚΡ : *«διάβαζα το βιβλίο μου στο κρεβάτι»*
ΓΚΜ : *«τα γυαλιά είναι στο κομοδίνο»*

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και το προηγούμενο υποερώτημα, που είναι γνωστό και ως *αποδεικτικός κανόνας Modus Tollens*, καθώς και το Τυπικό Θεώρημα της Διπλής Άρνησης.

(α) Η ιδέα είναι ότι δεν μπορούμε να αρνηθούμε *την άρνηση του φ*, διότι οδηγεί σε άτοπο: η διπλή άρνηση του φ είναι το ίδιο το φ, και από το φ εξάγεται τόσο το συμπέρασμα χ (αφού $\varphi \to \chi$), όσο και το $\neg\chi$ (αφού αυτό ισχύει και μόνο του). Το καίριο αξίωμα εδώ είναι το ΑΣ3: $(\neg\upsilon \to \neg\sigma) \to [(\neg\upsilon \to \sigma) \to \upsilon]$. Χρησιμοποιώντας το $\vdash_{\text{ΠΛ}} \neg\neg\alpha \to \alpha$, και το $\vdash_{\text{ΠΛ}} (\alpha \to \beta) \to [\, (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\,]$, τα βήματα της απόδειξης $\{\varphi \to \chi, \neg\chi\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \neg\varphi$ θα μπορούσαν να είναι τα εξής:

1.	$(\neg\neg\varphi \to \varphi)$	τ.θ. διπλής άρνησης, με $\alpha \leftarrow \varphi$.
2.	$(\neg\neg\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\neg\neg\varphi \to \chi))$	τ.θ. μεταβατικότητας, με $\alpha \leftarrow \neg\neg\varphi$, $\beta \leftarrow \varphi$, $\gamma \leftarrow \chi$.
3.	$(\varphi \to \chi)$	μία εκ των υποθέσεων $\{\varphi \to \chi, \neg\chi\}$.
4.	$(\varphi \to \chi) \to (\neg\neg\varphi \to \chi)$	modus ponens από 1. και 2.
5.	$(\neg\neg\varphi \to \chi)$	modus ponens από 3. και 4.
6.	$\neg\chi$	μία εκ των υποθέσεων $\{\varphi \to \chi, \neg\chi\}$.
7.	$\neg\chi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\chi)$	**ΑΣ1** $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$, με $\alpha \leftarrow \neg\chi$, $\beta \leftarrow \neg\neg\varphi$.
8.	$(\neg\neg\varphi \to \neg\chi)$	modus ponens από 6. και 7.
9.	$(\neg\neg\varphi \to \neg\chi) \to [(\neg\neg\varphi \to \chi) \to \neg\varphi]$	**ΑΣ3** $(\neg\upsilon \to \neg\sigma) \to [(\neg\upsilon \to \sigma) \to \upsilon]$, με $\upsilon \leftarrow \neg\varphi$, $\sigma \leftarrow \chi$.
10.	$(\neg\neg\varphi \to \chi) \to \neg\varphi$	modus ponens από 8. και 9.
11.	$\neg\varphi$	modus ponens από 5. και 10.

Άρα έχουμε τον αποδεικτικό κανόνα, ***modus tollens*** : $\{\, \varphi \to \chi \,,\, \neg\chi \,\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \neg\varphi$

(β) Οι 6 προτάσεις που δίδονται γράφονται με βάση τις προτασιακές μεταβλητές μας ως εξής:

1. ΓΚΖ → ΓΠΡ
2. ¬ΕΚΘ → ΕΚΖ
3. ΕΚΘ → ΓΚΦ
4. ¬ΓΠΡ
5. ΒΚΡ → ΓΚΜ
6. ΕΚΖ → ΓΚΖ

Αντλούμε απαγωγικά τα συμπεράσματά μας από το αφετηριακό δεδομένο 4. ¬ΓΠΡ, όπου η αλυσίδα των σχετικών ισχυρισμών είναι η ακόλουθη:

7.	¬ΓΚΖ	modus tollens από 1. και 4. όπου (φ ← ΓΚΖ, χ ← ΓΠΡ).
8.	¬ΕΚΖ	modus tollens από 6. και 7. όπου (φ ← ΕΚΖ, χ ← ΓΚΖ)
9.	¬¬ΕΚΘ	modus tollens από 2. και 8. όπου (φ ← ¬ΕΚΘ, χ ← ΕΚΖ)
10.	¬¬ΕΚΘ → ΕΚΘ	τ.θ. διπλής άρνησης.
11.	ΕΚΘ	modus ponens από 9. και 10.
12.	ΓΚΦ	modus ponens από 11. και 3.

Αφού οι υποθέσεις μας είναι ΑΛΗΘΕΙΣ, και από αυτές αποδείξαμε το ΓΚΦ, *η εγκυρότητα του ΠΛ* δίδει ότι ΓΚΦ = ΑΛΗΘΕΣ, δηλαδή: *«τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ»*.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 8ο, 2013-2014

8. Συμπληρώστε τις επεξηγήσεις των βημάτων στην παρακάτω **τυπική απόδειξη** του,

$\{\, \varphi \to \chi \,,\, \chi \to \neg\psi \,\} \vdash \varphi \to \neg\psi$:

1.	$\varphi \to \chi$	……………………
2.	$\chi \to \neg\psi$	……………………
3.	$(\chi \to \neg\psi) \to (\varphi \to (\chi \to \neg\psi))$	……………………
4.	$\varphi \to (\chi \to \neg\psi)$	……………………
5.	$(\varphi \to (\chi \to \neg\psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \neg\psi))$	……………………
6.	$(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	……………………
7.	$\varphi \to \neg\psi$	……………………

ΑΣ-1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

ΑΣ-2: $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

ΑΣ-3: $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

		ΑΠΑΝΤΗΣΗ
1.	$\varphi \to \chi$	ΥΠΟΘΕΣΗ
2.	$\chi \to \neg\psi$	ΥΠΟΘΕΣΗ
3.	$(\chi \to \neg\psi) \to (\varphi \to (\chi \to \neg\psi))$	ΑΣ-1, όπου:
		«φ» $\leftarrow (\chi \to \neg\psi)$
		«ψ» $\leftarrow$ φ
4.	$\varphi \to (\chi \to \neg\psi)$	ΜΡ (2, 3)
5.	$(\varphi \to (\chi \to \neg\psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \neg\psi))$	ΑΣ-2, όπου:
		«φ» $\leftarrow$ φ
		«ψ» $\leftarrow \chi$
		«χ» $\leftarrow \neg\psi$
6.	$(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	ΜΡ (4, 5)
7.	$\varphi \to \neg\psi$	ΜΡ (1, 6)

■

ΤΥΠΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: $\vdash_{\text{ΠΛ}}$ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, Ερώτημα 10ο, 2012-13

Δεδομένου ότι το σύνολο τύπων $T = \{\varphi, \chi, \psi\}$ είναι αντιφατικό, κατασκευάστε όλα τα τυπικά θεωρήματα που εμπλέκουν τους τύπους φ, χ και ψ, χρησιμοποιώντας (ίσως και περισσότερες από μια φορές) τα θεωρήματα **Απαγωγής** (θεώρημα 2.8, σελίδα 58, τόμος 3), **Αντιθετοαναστροφής** (θεώρημα 2.9, σελίδα 61, τόμος 3) και **Απαγωγής σε Άτοπο** (θεώρημα 2.10, σελίδα 62, τόμος 3).

(1)	θεώρημα ΑΠΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΑΤΟΠΟ	αν $\mathbf{T} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\}$ **αντιφατικό** τότε $\mathbf{T} \vdash \neg\boldsymbol{\alpha}$
(2)	θεώρημα ΑΠΑΓΩΓΗΣ	αν $\mathbf{T} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\} \vdash \boldsymbol{\beta}$ τότε και $\mathbf{T} \cup \vdash (\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta})$
(3)	θεώρημα ΑΝΤΙΘΕΤΟΑΝΑΣΤΡΟΦΗΣ	αν $\mathbf{T} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\} \vdash \neg\boldsymbol{\beta}$ τότε και $\mathbf{T} \cup \{\boldsymbol{\beta}\} \vdash \neg\boldsymbol{\alpha}$

Έστω ότι το σύνολο τύπων S = {φ, χ, ψ} είναι αντιφατικό.

Γράφοντας το S ως {φ, χ} ∪ {ψ}, από το (1) (με T = {φ, χ}), λαμβάνουμε: **$\{\varphi, \chi\} \vdash \neg\psi$**

Γράφοντας το {φ, χ} ως {φ} ∪ {χ}, από το (2) (με T = {φ}), λαμβάνουμε: **$\{\varphi\} \vdash (\chi \to \neg\psi)$**

Και γράφοντας το {φ} ως { } ∪ {φ}, από το (2) (με T = ∅), λαμβάνουμε: **$\varnothing \vdash (\varphi \to (\chi \to \neg\psi))$**

και έχουμε ένα θεώρημα, το **$(\varphi \to (\chi \to \neg\psi))$**.

Εάν είχαμε διαλέξει τους τύπους φ και χ με την άλλη σειρά θα λαμβάναμε το θεώρημα **$(\chi \to (\varphi \to \neg\psi))$**.

Εάν αντί του ψ είχαμε διαλέξει την 1η φορά είτε τον φ, είτε τον χ θα λαμβάναμε και τα θεωρήματα,

$(\chi \to (\psi \to \neg\varphi))$ και **$(\psi \to (\chi \to \neg\varphi))$**,

$(\varphi \to (\psi \to \neg\chi))$ και **$(\psi \to (\varphi \to \neg\chi))$**.

Το θ. αντιθετοαναστροφής δεν προσφέρει καμία νέα μορφή.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, Ερώτημα 4ο, 2012-13

(α) Χρησιμοποιώντας μόνο τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-3, τις υποθέσεις και τον αποδεικτικό κανόνα Modus Ponens, να δείξετε ότι:

$$\{ \neg\varphi \to \chi, \neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi) \} \vdash (\neg\varphi \to \psi) \to \varphi$$

(*Σε αυτό το υποερώτημα <u>δεν επιτρέπεται</u> η χρήση των θ. Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής και Απαγωγής σε Άτοπο*)

(β) Να αποδειχθεί ότι:

$$\vdash \varphi \to (\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$$

(*Σε αυτό το υποερώτημα <u>επιτρέπεται</u> η χρήση των θ. Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής και Απαγωγής σε Άτοπο*)

(γ) Έστω μια ακολουθία τύπων $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ και ένα σύνολο τύπων T, τέτοιο ώστε $T \vdash \varphi_i$, για κάθε $i = 0,1,2,\ldots$. Ορίζουμε την ακολουθία τύπων $\psi_0 = \varphi_0$ και $\psi_i = \neg(\varphi_i \to \neg\psi_{i-1})$ για $i = 1,2,3,\ldots$. Να δειχθεί ότι $T \vdash \psi_i$ για κάθε $i = 0,1,2,\ldots$.

(α) Χρησιμοποιούμε τα αξιωματικά σχήματα,

ΑΣ1: $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$, ΑΣ2: $(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$, και ΑΣ3: $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$,

και επιδιώκουμε την εξής απόδειξη:

$$\{ \text{Υ1}, \text{Υ2} \} = \{ \neg\alpha \to \beta, \ \neg\alpha \to (\beta \to \neg\gamma) \} \vdash (\neg\alpha \to \gamma) \to \alpha$$

όπου για αποφυγή συγχύσεων έχουμε μετονομάσει τις προτασιακές μεταβλητές. Καθοδηγούμενοι από τη μορφή των υποθέσεων Υ1 (γκρί), Υ2 (κίτρινο), και του συμπεράσματος (πράσινο), βρίσκουμε την εξής απόδειξη:

1ο	$(\neg\alpha \to (\beta \to \neg\gamma)) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\gamma))$	Από ΑΣ2 = $(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$ όπου: $\varphi \leftarrow \neg\alpha$, $\chi \leftarrow \beta$, $\psi \leftarrow \neg\gamma$.
2ο	$\neg\alpha \to (\beta \to \neg\gamma)$	Η Υ2
3ο	$((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\gamma))$	MP από 1ο και 2ο.

4^o	$(\neg\alpha \rightarrow \beta)$	Η Υ1
5^o	$(\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma)$	MP από 3^o και 4^o.
6^o	$(\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha)$	Από ΑΣ3 = $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$ όπου: $\varphi \leftarrow \alpha,\ \psi \leftarrow \gamma$.
7^o	$(\neg\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha}$	MP από 6^o και 7^o.

(β) Για να ισχύει το ζητούμενο: $\{\ \} \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi))$,

αρκεί (θ. απαγωγής!) να ισχύει το: $\{\varphi\} \vdash (\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi))$,

και πάλι *αρκεί* (θ. απαγωγή) να ισχύει το: $\{\varphi, \psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$,

και προς τούτο *αρκεί* (θ. «απαγωγής εις άτοπο»!)

να υπάρχει τύπος $\boldsymbol{\alpha}$ ώστε να ισχύουν τα εξής δύο: $\{\varphi, \psi, (\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \boldsymbol{\alpha}$, $\{\varphi, \psi, (\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\boldsymbol{\alpha}$.

Αλλά αυτό το τελευταίο πράγματι ισχύει, διότι για $\boldsymbol{\alpha} \leftarrow \boldsymbol{\psi}$,

έχουμε $\{\varphi, \psi, (\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \psi$ (το ψ συμπεριλαμβάνεται στις υποθέσεις),

και $\{\varphi, \psi, (\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\psi$, (από φ και $\varphi \rightarrow \psi$ μέσω *modus ponens*).

(γ) ***Βάση επαγωγής***: Το ότι $T \vdash \psi_i$ για $i = 0$, μας δίδεται ως υπόθεση, αφού $\psi_0 = \varphi_0$, και $T \vdash \varphi_i$ $(\forall i)$.

Βήμα επαγωγής: «Αν $T \vdash \psi_i$ για $i \le \kappa$» τότε και «$T \vdash \psi_{\kappa+1}$, $(i = (\kappa+1))$», όπου $\psi_i = \neg(\varphi_i \rightarrow \neg\psi_{i-1})$, $i \ge 1$»:

Θέλουμε να δείξουμε ότι $T \vdash \boldsymbol{\psi_{\kappa+1}}$, ότι δηλαδή $T \vdash \neg(\boldsymbol{\varphi_{\kappa+1}} \rightarrow \neg\boldsymbol{\psi_\kappa})$. Από το θεώρημα «απαγωγής εις άτοπον» *αρκεί* να δείξουμε ότι $T \cup (\boldsymbol{\varphi_{\kappa+1}} \rightarrow \neg\boldsymbol{\psi_\kappa}) \vdash \boldsymbol{\alpha}$, αλλά και $T \cup (\boldsymbol{\varphi_{\kappa+1}} \rightarrow \neg\boldsymbol{\psi_\kappa}) \vdash \neg\boldsymbol{\alpha}$.

Και αυτό πράγματι ισχύει για $\boldsymbol{\alpha} \leftarrow \boldsymbol{\psi_\kappa}$:

- Από την επαγωγική υπόθεση ισχύει $T \vdash \psi_\kappa$, και *a fortiori* $T \cup (\boldsymbol{\varphi_{\kappa+1}} \rightarrow \neg\boldsymbol{\psi_\kappa}) \vdash \boldsymbol{\psi_\kappa}$.
- Μας δίδεται ότι $T \vdash \boldsymbol{\varphi_{\kappa+1}}$, και από *modus ponens*, υπάρχει απόδειξη $T \cup (\boldsymbol{\varphi_{\kappa+1}} \rightarrow \neg\boldsymbol{\psi_\kappa}) \vdash \neg\boldsymbol{\psi_\kappa}$.

■

$2^η$ ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ $4^ο$, 2011-2012

(β) Χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε από τα θεωρήματα Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής, Απαγωγής σε Άτοπο ή συνδυασμό τους, να αποδειχθεί το παρακάτω:

$$\{\chi \rightarrow \neg\psi, \varphi\} \vdash \chi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

Βλέπε Θεώρημα 2.8, σελ. 58, Θεώρημα 2.9, σελ. 61, Θεώρημα 2.10, σελ. 62

Θ.ΑΠαγωγής (Θ 2.8) $\quad \mathbf{T} \cup \{\mathbf{\Phi}\} \vdash \mathbf{\Psi} \Rightarrow \mathbf{T} \vdash \mathbf{\Phi} \rightarrow \mathbf{\Psi}$

Θ.ΑΝτιθετοαντιστροφής (Θ 2.9) $\quad \mathbf{T} \cup \{\mathbf{\Phi}\} \vdash \neg\mathbf{\Psi} \Leftrightarrow_{\alpha\nu\nu} \mathbf{T} \cup \{\mathbf{\Psi}\} \vdash \neg\mathbf{\Phi}$

Θ.Ατοπο Απαγωγής (Θ 2.10) $\quad \mathbf{T} \cup \{\mathbf{\Phi}\}$ **αντιφατικό** $\Rightarrow \mathbf{T} \vdash \neg\mathbf{\Phi}$

Για να αποδείξουμε ότι: $\{\chi \rightarrow \neg\psi, \varphi\} \vdash \chi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$

<=αρκεί από **Θ.ΑΠ** $\{\chi \rightarrow \neg\psi, \varphi, \chi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$

⇔ αρκεί από **Θ.ΑΝ** $\{\boldsymbol{\varphi \rightarrow \psi, \chi \rightarrow \neg\psi, \chi}\} \vdash \neg\boldsymbol{\varphi}$

Όμως $T \cup \{\varphi\} = \{\varphi \to \psi, \chi \to \neg\psi, \chi\} \cup \{\varphi\}$ αντιφατικό **
<=από **Θ.ΑΑ.**2.10 $T = \{\varphi \to \psi, \chi \to \neg\psi, \chi\} \vdash \neg\varphi$

**Απόδειξη ότι $T \cup \{\varphi\} = \{\varphi \to \psi, \chi \to \neg\psi, \chi\} \cup \{\varphi\}$ αντιφατικό

1.	$\varphi \to \psi$	Υπόθεση
2.	$\chi \to \neg\psi$	Υπόθεση
3.	χ	Υπόθεση
4.	φ	Υπόθεση
5.	$\neg\psi$	2,3 **MP**
6.	ψ	1,4 **MP**

(γ)

1η Απόδειξη.

Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί ακολουθώντας τη **λογική της απόδειξης της αρχικής μορφής του θεωρήματος 2.10 (Θ.ΑΑ)** που δίνεται στο βιβλίο, σελ. 62.

Επειδή $T\cup\{\neg\varphi\}$ αντιφατικό υπάρχει τύπος ψ, τέτοιος ώστε:

$$T\cup\{\neg\varphi\} \vdash \psi \quad \text{και} \quad T\cup\{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Απαγωγής έχουμε:

$$T \vdash \neg\varphi \to \psi \quad \text{και} \quad T \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$$

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη των $\neg\varphi \to \psi$ **και** $\neg\varphi \to \neg\psi$ της μορφής:

1.	…..	
2.	…..	
...	…...	
n.	…..	
n+1.	$\neg\varphi \to \psi$	
n+2.	$\neg\varphi \to \neg\psi$	
n+3.	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to [(\neg\varphi \to \psi) \to \varphi]$	... **ΑΣ3**
n+4.	$(\neg\varphi \to \psi) \to \varphi$	... **(n+2)**, (n+3) **MP**
n+5.	φ	... **(n+1)**, (n+4) **MP**

Άρα $T \vdash \varphi$.

2η Απόδειξη τρόπος

$T\cup\{\neg\varphi\}$ αντιφατικό $=>_{\text{από Θ.ΑΑ}}$ $T \vdash \neg\neg\varphi$

Όμως από Παράδειγμα 2.15, σελ. 60 [το παράδειγμα 2.15 θα πρέπει να αποδειχθεί.]: $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

Άρα $T \vdash \varphi$.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 5ο, 2010-2011

β) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις προκύπτουν άμεσα από την εφαρμογή του θεωρήματος Αντιθετοαναστροφής:

1. (**Σ**/**Λ**) Αν $T\cup\{\varphi\} \vdash \psi$ *τότε* $T\cup\{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$
2. (**Σ**/**Λ**) Αν $T\cup\{\varphi\} \vdash \neg(\neg\psi)$ *τότε* $T\cup\{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$
3. (**Σ**/**Λ**) Αν $\neg\varphi \vdash \neg\psi$ *τότε* $\psi \vdash \varphi$

4. (**Σ**/**Λ**) Αν $\neg\varphi \vdash \neg\psi$ *τότε* $\psi \vdash \neg(\neg\varphi)$

Δοκιμάζοντας <u>όλες</u> τις δυνατές συντακτικές αντικαταστάσεις:

Θ. Αντιθετοαντιστροφής $T\cup\{\Phi\}\rightarrow\neg\Psi \Leftrightarrow T\cup\{\Psi\}\rightarrow\neg\Phi$				αντικατάσταση **Τ** με $\varnothing$	
		1	**2**	**3**	**4**
συντακτικές αντικαταστάσεις	**Φ** με **φ** **Ψ** με **ψ**	$T\cup\{\varphi\}\vdash\neg\psi \Leftrightarrow T\cup\{\psi\}\vdash\neg\varphi$	$T\cup\{\varphi\}\vdash\neg\psi \Leftrightarrow T\cup\{\psi\}\vdash\neg\varphi$	$\varphi\vdash\neg\psi \Leftrightarrow \psi\vdash\neg\varphi$	$\varphi\vdash\neg\psi \Leftrightarrow \psi\vdash\neg\varphi$
	Φ με **φ** **Ψ** με **¬ψ**	$T\cup\{\varphi\}\vdash\neg(\neg\psi) \Leftrightarrow T\cup\{\neg\psi\}\vdash\neg\varphi$	$T\cup\{\varphi\}\vdash\neg(\neg\psi) \Leftrightarrow T\cup\{\neg\psi\}\vdash\neg\varphi$	$\varphi\vdash\neg(\neg\psi) \Leftrightarrow \neg\psi\vdash\neg\varphi$	$\varphi\vdash\neg(\neg\psi) \Leftrightarrow \neg\psi\vdash\neg\varphi$
	Φ με **¬φ** **Ψ** με **ψ**	$T\cup\{\neg\varphi\}\vdash\neg\psi \Leftrightarrow T\cup\{\psi\}\vdash\neg(\neg\varphi)$	$T\cup\{\neg\varphi\}\vdash\neg\psi \Leftrightarrow T\cup\{\psi\}\vdash\neg(\neg\varphi)$	$\neg\varphi\rightarrow\neg\psi \Leftrightarrow \psi\vdash\neg(\neg\varphi)$	$\neg\varphi\vdash\neg\psi \Leftrightarrow \psi\vdash\neg(\neg\varphi)$
	Φ με **¬φ** **Ψ** με **¬ψ**	$T\cup\{\neg\varphi\}\vdash\neg(\neg\psi) \Leftrightarrow T\cup\{\neg\psi\}\vdash\neg\neg\varphi$	$T\cup\{\neg\varphi\}\vdash\neg(\neg\psi) \Leftrightarrow T\cup\{\neg\psi\}\vdash\neg()$	$\neg\varphi\vdash\neg(\neg\psi) \Leftrightarrow \neg\psi\vdash\neg(\neg\varphi)$	$\neg\varphi\vdash\neg(\neg\psi) \Leftrightarrow \neg\psi\vdash\neg(\neg\varphi)$
		Λ	**Σ**	**Λ**	**Σ**

■

ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑ & ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ: Η ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ $\models$ ΚΑΙ $\vdash_{ΠΛ}$.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ, ΕΡΩΤΗΜΑ 9ο, 2010-2011

Χρησιμοποιώντας τα **θεωρήματα Πληρότητας** και **Εγκυρότητας**, δείξτε ότι $\varphi \equiv \psi$ αν και μόνο αν $\varphi \vdash \psi$ και $\psi \vdash \varphi$.

(βλ. Θ. Πληρότητας 2.12, σελ. 67 & Θ. Εγκυρότητας 2.14, σελ. 88)

1. **φ |- ψ** == Θ. **Εγκυρότητας** => φ |= ψ
και
2. **ψ |- φ** == Θ. **Εγκυρότητας** => ψ |= φ

1,2 => **φ ≡ ψ** (ορισμός ισοδυναμίας: φ ≡ ψ ανν φ|=ψ και ψ |= φ)

φ ≡ ψ =>
3. φ |= ψ ==Θ. **Πληρότητας** => **φ |- ψ**
και
4. ψ |= φ ==Θ. **Πληρότητας** => **ψ |- φ**

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 4ο, 2015-2016

(4.α) Αν για αυθαίρετους τύπους φ, χ και ψ ισχύει ότι $\{\varphi\} \models \psi$ και $\{\neg\varphi\} \models \chi$, τότε ισχύει επίσης ότι $\models \chi \vee \psi$.

Με $\{\varphi\} \models \psi$ και $\{\neg\varphi\} \models \chi$ θα δείξουμε ότι $\{\varphi \vee \neg\varphi\} \models \chi \vee \psi$. Και πράγματι αν μια αποτίμηση *α* επαληθεύει την $\varphi \vee \neg\varphi$ τότε καθιστά είτε την φ είτε την ¬φ ΑΛΗΘΗ. Στη 1η περίπτωση αφού $\{\varphi\} \models \psi$, η *α* καθιστά την ψ = ΑΛΗΘΗ, δηλαδή και την διάζευξη $\chi \vee \psi$. Στη 2η, αφού $\{ \neg\varphi \} \models \chi$, η *α* καθιστά την χ = ΑΛΗΘΗ, δηλαδή και την $\chi \vee \psi$. Άρα κάθε αποτίμηση που επσληθεύει την $\{\varphi \vee \neg\varphi\}$επαληθεύι και την $\chi \vee \psi$, δηλαδή: $\{\varphi \vee \neg\varphi\} \models \chi \vee \psi$.

Η τελική παρατήρηση είναι ότι αν $\{ \varphi \vee \neg\varphi \} \models \sigma$ τότε ο τύπος σ είναι *ταυτολογία*. Και πράγματι *κάθε αποτίμηση* α των μεταβλητών επαληθεύει τον σ, (*δηλαδή* $\models \sigma$), διότι κάθε αποτίμηση επαληθεύει την ταυτολογία $\varphi \vee \neg\varphi$ και αφού $\{ \varphi \vee \neg\varphi \} \models \sigma$ επαληθεύει και τον σ. Και αυτό εφαρμόζεται εδώ, με $\sigma = \chi \vee \psi$.

(4.β) Έστω άπειρο σύνολο τύπων Τ και αυθαίρετος τύπος φ, για τα οποία ισχύει ότι $T \models \varphi$. Να δειχθεί ότι υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο τύπων $F \subseteq T$ για το οποίο ισχύει ότι $F \models \varphi$.

Το *θ. πληρότητας* εξασφαλίζει ότι αν $T \models \varphi$ τότε και $T \vdash_{\text{ΠΛ}} \varphi$. Εδώ έχουμε ότι $T \models \varphi$, άρα υπάρχει τυπική απόδειξη της φ από το σύνολο Τ. Κάθε απόδειξη όμως είναι *πεπερασμένη* ακολουθία προτάσεων, επομένως –πλην των αξιωμάτων– περιέχει *πεπερασμένου* πλήθους υποθέσεις F από το σύνολο Τ, δηλαδή αν υπάρχει απόδειξη $T \vdash_{\text{ΠΛ}} \varphi$, υπάρχει και απόδειξη $F \vdash_{\text{ΠΛ}} \varphi$. Τέλος, αφού $F \vdash_{\text{ΠΛ}} \varphi$, το *θ. εγκυρότητας* εξασφαλίζει ότι και $F \models \varphi$.

(4.γ) Έστω αυθαίρετο σύνολο τύπων Τ στη γλώσσα Γ_0 της Προτασιακής Λογικής με $k \geq 1$ μεταβλητές, που πληροί την ακόλουθη ιδιότητα: Για οποιοδήποτε μη κενό σύνολο Μ προτασιακών τύπων στη Γ_0, υπάρχει τύπος $\varphi \in T$ τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $M \models \varphi$. Να δειχθεί ότι υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\{ \chi_1, \ldots , \chi_n \} \subseteq T$, τέτοιο ώστε να ισχύει ότι ο $\psi = \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_n$ είναι ταυτολογία, για φυσικό αριθμό $n \in \{1, 2, \ldots , 2^k\}$.

Για P μεταβλητή της Γ_0, και $M = \{ P \vee \neg P \}$ υπάρχει τύπος $\chi \in T$ ώστε $M \models \chi$. Από το (4.α), με $\varphi \leftarrow P$ και $\sigma \leftarrow \chi$, (δηλαδή: P, χ στις θέσεις των φ, σ), λαμβάνουμε $\models \chi$, δηλαδή το ζητούμενο για $n = 1$.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο, 2013-2014

(α) Δείξτε ότι ένα σύνολο προτασιακών τύπων *T* είναι **συνεπές** αν και μόνο αν είναι **ικανοποιήσιμο**.

(β) Δείξτε ότι για κάθε **συνεπές** σύνολο τύπων *T*, υπάρχει **μεγιστοτικά συνεπές** υπερσύνολο του, T^*. Δηλαδή, το T^* είναι τέτοιο ώστε, αν υπάρχει συνεπές σύνολο T' με την ιδιότητα $T^* \subseteq T'$, τότε $T^* = T'$ (ισοδύναμα μπορείτε να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνεπές, γνήσιο υπερσύνολο του T^*).

Υπόδειξη: Εφόσον υπάρχει αποτίμηση *α* που ικανοποιεί το *T*, θεωρείστε το σύνολο T^*, που περιέχει όλους τους προτασιακούς τύπους που αληθεύουν για την αποτίμηση *α*.

(α) Εξετάζουμε τις δύο κατευθύνσεις της ισοδυναμίας:

Συνεπές ⇒ *Ικανοποιήσιμο*: Θα πάμε «εκ του αντιστρόφου» δηλαδή ότι (*όχι Ικανοποιήσιμο* ⇒ *όχι Συνεπές*). Και πράγματι εάν το Τ δεν είναι ικανοποιήσιμο τότε για μια οποιαδήποτε μεταβλητή (ή και τύπο) φ ισχύει ότι $T \models \varphi$, (αφού τετριμμένα: «*ότι επαληθεύει το 1ο επαληθεύει και το 2ο*»). Παρόμοια όμως ισχύει και ότι $T \models \neg\varphi$. Από το *θ. πληρότητας* το $T \models \varphi$ δίδει $T \vdash \varphi$, και το $T \models \neg\varphi$ δίδει $T \vdash \neg\varphi$. Αυτά από κοινού καθιστούν το Τ ασυνεπές και έχουμε το ζητούμενο.

Ικανοποιήσιμο ⇒ *Συνεπές*: Πράγματι εάν το Τ επαληθεύεται από κάποια αποτίμηση α, τότε δεν είναι δυνατόν να υπάρξει τύπος φ και αποδείξεις $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg\varphi$, διότι κατά την αληθοποιό του Τ αποτίμηση α τόσο ο φ όσο και ο $\neg\varphi$ θα έπρεπε (*θ. εγκυρότητας*) να αποτιμηθούν επίσης ως ΑΛΗΘΕΙΣ, πράγμα άτοπο. Άρα το Τ είναι συνεπές.

(β) Αφού το Τ είναι συνεπές τότε είναι και επαληθεύσιμο από κάποια αποτίμηση α, (βλ. προηγούμενη παράγραφο). Έστω T^* το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων που επαληθεύονται από την α. Προφανώς $T \subseteq T^*$, και το T^* είναι συνεπές, αφού είναι επαληθεύσιμο και αφού αυτά τα δύο κατά την προηγούμενη παράγραφο συμπίπτουν. Το T^* είναι μεγιστοτικό διότι δεν μπορεί να αυξηθεί κατά ούτε έναν τύπο φ:

(i) Εάν ο φ επαληθεύεται από την α τότε έχει ήδη συμπεριληφθεί στο T^* και δεν αυξάνει το T^*.

(ii) Εάν ο φ διαψεύδεται από την α τότε η $\neg\varphi$ επαληθεύεται και *αυτή* έχει ήδη συμπεριληφθεί στο T^*. Με την προσθήκη και του φ στο T^*, το T^* θα περιείχε τόσο τον φ όσο και τον $\neg\varphi$, και θα έπαυε να είναι επαληθεύσιμο, άρα θα έπαυε να είναι και συνεπές (όπως απαιτείται).

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 6ο, 2009-2010

α) (i) Έστω $\psi_i, i=1,\ldots,n$, $\chi_j, j=1,\ldots,m$ και φ τύποι του προτασιακού λογισμού. Δείξτε ότι αν $\{\psi_1,\ldots,\psi_n,\varphi\} \models \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m$ και $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\} \models \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m \vee \varphi$, τότε $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\} \models \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m$

(ii) Δείξτε χρησιμοποιώντας προαιρετικά το (i) ότι αν $\{\psi,\phi\} \vdash \chi$ και $\{\psi\} \vdash \chi \vee \varphi$, τότε $\{\psi\} \vdash \chi$.

α).(i) Πρέπει να δείξουμε ότι ***αν*** (Υπ1) κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τα $\{\psi_1,\ldots,\psi_n,\varphi\}$, ικανοποιεί και το $\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m$, και (Υπ2) κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τα $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$, ικανοποιεί και το $\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m \vee \varphi$, ***τότε*** κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τα $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$, ικανοποιεί και το $\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m$.

Θεωρούμε λοιπόν μία οποιαδήποτε αποτίμηση που ικανοποιεί τα $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$. Από την (Υπ2), η συγκεκριμένη αποτίμηση πρέπει να ικανοποιεί και το $\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m \vee \varphi$. Αν η αποτίμηση δεν ικανοποιεί το φ, πρέπει να ικανοποιεί το $\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m$. Αν η αποτίμηση ικανοποιεί το φ, τότε ικανοποιεί όλα τα στοιχεία του $\{\psi_1,\ldots,\psi_n,\varphi\}$. Συνεπώς, από την (Υπ1), η συγκεκριμένη αποτίμηση ικανοποιεί και το $\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m$.

α).(ii) Δεχόμαστε ότι ισχύει το $\{\psi, \varphi\} \vdash \chi$ και το $\{\psi\} \vdash \chi \vee \varphi$, και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το $\{\psi\} \vdash \chi$. Από το Θεώρημα Εγκυρότητας του Προτασιακού Λογισμού (Θεώρημα 2.14, Δημητρακόπουλος), συνάγουμε ότι

– $\{\psi, \varphi\} \models \chi$, γιατί ισχύει το $\{\psi, \varphi\} \vdash \chi$, και

– $\{\psi\} \models \chi \vee \varphi$, γιατί ισχύει το $\{\psi\} \vdash \chi \vee \varphi$.

Από το (α) γνωρίζουμε ότι όταν ισχύουν τα $\{\psi, \varphi\} \models \chi$ και $\{\psi\} \models \chi \vee \varphi$, τότε ισχύει και το $\{\psi\} \models \chi$. Τέλος, από το Θεώρημα Πληρότητας του Προτασιακού Λογισμού (Θεώρημα 2.12, Δημητρακόπουλος), συνάγουμε το ζητούμενο $\{\psi\} \vdash \chi$, γιατί ισχύει το $\{\psi\} \models \chi$.

■

ΓΡΙΦΟΙ ΛΟΓΙΚΗΣ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο, 2008-2009

(3) Υπάρχει ένα νησί όπου κατοικούν ευγενείς και ψευτο-ευγενείς. Οι ευγενείς λένε πάντα την αλήθεια και οι ψευτο-ευγενείς λένε πάντα ψέματα. Ένας ελεγκτής επισκέπτεται τα σπίτια όπου κατοικούν αντρόγυνα και ρωτάει να μάθει την καταγωγή του κάθε μέλους του ανδρόγυνου, δηλαδή ρωτάει να μάθει για τον καθένα αν είναι ευγενής ή ψευτο-ευγενής.

(α) Βρείτε την καταγωγή του άνδρα στην περίπτωση που αυτός δηλώνει: «*Αν είμαι ευγενής τότε ισχύει η ιδιότητα p*». Τι μπορείτε να πείτε για την ιδιότητα p;
(β) Βρείτε την καταγωγή του άνδρα και την καταγωγή της γυναίκας, όταν ο άνδρας δηλώνει: «*Αν είμαι ευγενής τότε και η γυναίκα μου είναι ευγενής*».

Έστω q η προτασιακή μεταβλητή που εκφράζει το γεγονός ότι ο άνδρας είναι ευγενής και p η προτασιακή μεταβλητή που εκφράζει την ισχύ της ιδιότητας p. Τότε η δήλωση:

«*Αν είμαι ευγενής τότε ισχύει η ιδιότητα p*»

κωδικοποιείται ως

$$q \to p$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα αληθείας του παραπάνω τύπου:

q	p	$q \to p$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Επειδή οι ευγενείς λένε πάντα αλήθεια, ενώ οι ψευτο-ευγενείς λένε πάντα ψέματα, αναζητούμε εκείνες τις γραμμές στον πίνακα αληθείας όπου οι τιμές αληθείας στις στήλες q και $q \to p$ είναι ίσες. Αυτό συμβαίνει μόνο στην πρώτη γραμμή, όπου η τιμή αληθείας της p είναι Α. Άρα η ιδιότητα p ισχύει.

(β) Προφανώς η δήλωση «*Αν είμαι ευγενής τότε και η γυναίκα μου είναι ευγενής*» είναι ειδική περίπτωση της δήλωσης «*Αν είμαι ευγενής τότε ισχύει η ιδιότητα p*», αρκεί να ταυτίσουμε την ιδιότητα p με την ιδιότητα «*η γυναίκα μου είναι ευγενής*». Όπως αποδείξαμε στο προηγούμενο υποερώτημα η ιδιότητα αυτή αναγκαστικά ισχύει.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο, 2010-2011

α) Στη σύγκλητο της αρχαίας Ρώμης, οι τρεις ύποπτοι για το φόνο του Ιούλιου Καίσαρα δηλώνουν:

- Μάρκος Αντώνιος: «*Το έκανε ο Κάσσιος ή ο Βρούτος (ή και οι δύο)*»
- Κάσσιος: «*Δεν το έκανα εγώ. Ο Μάρκος Αντώνιος λέει ψέματα*»
- Βρούτος: «*Αν το έκανα εγώ, τότε οι άλλοι δύο είναι συνένοχοι μου*».

Υποθέτοντας ότι οι αθώοι λένε πάντα αλήθεια, ενώ οι ένοχοι πάντα ψέματα και ότι μόνο ένας από τους τρεις λέει αλήθεια, ποιος (ή ποιοί) σκότωσε τον Ιούλιο Καίσαρα;

α) Θεωρούμε τις παρακάτω προτασιακές μεταβλητές:

p: «*Ο Μάρκος Αντώνιος είναι αθώος*»

q: «*Ο Κάσσιος είναι αθώος*»

r: «*Ο Βρούτος είναι αθώος*»

Με χρήση των παραπάνω προτασιακών μεταβλητών μπορούμε να εκφράσουμε τς δηλώσεις των τριών υπόπτων με τύπους της Προτασιακής Λογικής:

- Μάρκος Αντώνιος: «*Το έκανε ο Κάσσιος ή ο Βρούτος (ή και οι δύο)*»
- Κάσσιος: «*Δεν το έκανα εγώ. Ο Μάρκος Αντώνιος λέει ψέματα*»
- Βρούτος: «*Αν το έκανα εγώ, τότε οι άλλοι δύο είναι συνένοχοι μου*».

Μάρκος Αντώνιος: $\boldsymbol{\varphi} = \neg\mathbf{q} \vee \neg\mathbf{r}$

Κάσσιος: $\boldsymbol{\chi} = q \wedge \neg\boldsymbol{\varphi} = q \wedge \neg(\neg\mathbf{q} \vee \neg\mathbf{r}) \equiv \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}$

Βρούτος: $\boldsymbol{\psi} = \neg\mathbf{r} \rightarrow \neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q} \wedge \neg\mathbf{r}$

Σχηματίζουμε το σχετικό πίνακα αλήθειας:

							φ	χ	ψ
p	q	r	¬p	¬q	¬r	¬p ∧ ¬q ∧ ¬r	¬q ∨ ¬r	q ∧ r	¬r → ¬p ∧ ¬q ∧ ¬r
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	**Α**	Ψ	Ψ
Α	**Ψ**	**Α**	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	**Ψ**	**Ψ**	Ψ	Α	Α	Ψ	**Α**	Ψ	Ψ
Ψ	**Α**	**Α**	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	**Α**	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α

(i) Επειδή <u>μόνο ένας</u> λέει την αλήθεια, ελέγχουμε το πίνακα αλήθειας για να εντοπίσουμε εκείνες τις γραμμές στις οποίες <u>μόνο μία</u> από φ, χ και ψ είναι **Α**. Αυτό ισχύει στις γραμμές 2, 4, 6 και μόνο για τον φ (τη δήλωση του Μάρκου Αντώνιου).

(ii) Επιπλέον, επειδή «οι αθώοι λένε πάντα αλήθεια» και «οι ένοχοι λένε πάντα ψέματα» θα πρέπει να αναζητήσουμε τις γραμμές όπου η αλήθεια των p,q και r συμπίπτει με την αλήθεια των αντίστοιχων δηλώσεων. Αυτό ισχύει για τις γραμμές 3 (**Α**,**Ψ**,**Α**), 4 (**Α**,**Ψ**,**Ψ**) και 5 (**Ψ**,**Α**,**Α**).

Τα (i) και (ii) ισχύουν ταυτόχρονα μόνο στη γραμμή 4 όπου οι αντίστοιχη αποτίμηση είανι: ο p είναι **Α** (ο Μάρκος Αντώνιος είναι αθώος) και ο q και ο r είναι **Ψ**, δηλαδή και ο Κάσσιος και ο Βρούτος <u>δεν</u> είναι αθώοι.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο, 2016-2017

Μας παρουσιάζουν τρία σκεπασμένα καλάθια (1ο, 2ο, 3ο), τριών τύπων: είτε *A* (= περιέχει μόνον *Αχλάδια*), είτε *B* (= περιέχει μόνον *Βερύκοκα*), είτε *AB* (= *ανάμεικτο* απο *A* και *B*). Κάθε καλάθι φέρει μία πινακίδα που γράφει είτε *A*, είτε *B*, είτε *AB*. Για να περιγράψουμε την κατάσταση με γλώσσα του Π.Λ. χρησιμοποιούμε 9+9 προτασιακές μεταβλητές με δείκτες $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ και $\varphi \in \{A, B, AB\}$. Οι μεταβλητές και ο τρόπος αποτίμησής τους είναι οι εξής:

$\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ αποτιμάται ΑΛΗΘΗΣ αν-και-μόνον-αν «το καλάθι $\boldsymbol{\kappa}$ είναι τύπου $\boldsymbol{\varphi}$».

$\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ αποτιμάται ΑΛΗΘΗΣ αν-και-μόνον-αν «η πινακίδα στο καλάθι $\boldsymbol{\kappa}$ γράφει $\boldsymbol{\varphi}$».

(Οι δείκτες *κ*, *φ* παίζουν απλώς μνημονικό ρόλο, και διευκολύνουν την περιγραφή των προτασιακών τύπων. Θα μπορούσαμε λ.χ. να ονομάσουμε τις «ΕΧΕΙ» ως $p_1, \ldots, p_9$, και τις «ΓΡΑΦΕΙ» ως $q_1, \ldots, q_9$.)

1. Αναφερόμενοι στα παραπάνω, «μεταφράστε» σε απλά Ελληνικά τις εξής υποθέσεις **Υ1**:

i. $\bigwedge_{\kappa \in \{1,2,3\}} \left(\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,AB]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,A]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,B]} \right)$

ii. $\bigwedge_{\substack{\kappa,\lambda\in\{1,2,3\}\\ \kappa\neq\lambda}} \bigwedge_{\varphi\in\{A,B,AB\}} \left(\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,\varphi]} \to \neg\text{ΕΧΕΙ}_{[\lambda,\varphi]}\right)$

iii. $\bigwedge_{\kappa\in\{1,2,3\}} \bigwedge_{\varphi\in\{A,B,AB\}} \left(\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]} \to \neg\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}\right)$

2. Οι πινακίδες στα καλάθια 1, 2, 3 γράφουν αντιστοίχως *A*, *B*, *AB*. Από τις 9+9 απλές προτάσεις $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ και $\neg\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$, κάποιο υποσύνολο **Υ**₂ περιέχει ακριβώς όσες επαληθεύονται με τα δεδομένα αυτού του υποερωτήματος. Ποιό είναι αυτό το $\mathbf{Y}_2$;

3. Έχοντας ως σύνολο υποθέσεων **Υ** τις προτάσεις $\mathbf{Y}_1 \cup \mathbf{Y}_2$, δώσατε τυπικές αποδείξεις που εξασφαλίζουν ότι: $\mathbf{Y}\cup\{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \text{ΕΧΕΙ}_{[1,B]}$, $\mathbf{Y}\cup\{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \text{ΕΧΕΙ}_{[2,AB]}$. (Συμμετρικά θα ισχύει και: $\mathbf{Y}\cup\{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \text{ΕΧΕΙ}_{[1,AB]}$, $\mathbf{Y}\cup\{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \text{ΕΧΕΙ}_{[2,A]}$.)

4. Έστω ότι τα καλάθια και οι πινακίδες *επαληθεύουν*, υπό τον τρόπο της αποτίμησής μας, το παραπάνω σύνολο υποθέσεων **Υ**. Επιλέγετε όποιο καλάθι θέλετε, και σας δείχνουν ένα τυχαίο φρούτο από το καλάθι που επιλέξατε. Υπάρχει επιλογή καλαθιού που να επιτρέπει να *αποδείξουμε* ποιό είναι *το ακριβές περιεχόμενο όλων των καλαθιών*;

5. Έστω ότι από τις *επαληθευμένες* υποθέσεις **Υ** και $\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}$ έχουμε όντως μια τυπική *απόδειξη* της $\text{ΕΧΕΙ}_{[2,A]}$. Βάσει ποίου θεωρήματος του Π.Λ. είμαστε βέβαιοι ότι το 2ο καλάθι περιέχει *πράγματι* Αχλάδια; (Λ.χ., βάσει του θ. απαγωγής; του θ. εγκυρότητας; του θ. πληρότητας; κάποιου άλλου;).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Προς χρήση των συνδέσμων $\neg$ $\to$, αντί μιας υπόθεσης $X\wedge Y$ χρησιμοποιήστε τις $\{X,Y\}$, και αντί μιας υπόθεσης $X\vee Y\vee Z$ χρησιμοποιήστε την $\neg X\to(\neg Y\to Z)$.

1. (*i*) «Κάθε καλάθι είναι ενός (τουλάχιστον...) εκ των τριών τύπων *A*, *B*, *AB*.»
(*ii*) «Δεν υπάρχουν δύο καλάθια του ιδίου τύπου.»
(*iii*) «Καμμία πινακίδα δεν γράφει το ακριβές (= όλες λένε ψέμματα).»

(Οι συνθήκες (*i*) δεν αποκλείουν λ.χ. το $\text{ΕΧΕΙ}_{[1,A]}\wedge\text{ΕΧΕΙ}_{[1,B]}$, που δηλώνει ότι ένα καλάθι 'είναι' δύο τύπων...· αυτό αποκλείεται τελικά από συνδυασμό των (*i*) & (*ii*).)

2. Το Y_2 έχει τις $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[1,A]}$, $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[2,B]}$, $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[3,AB]}$, και τις $\neg\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ για τους υπόλοιπους συνδυασμούς των $\kappa = 1, 2, 3$ και $\varphi = A, B, AB$.

3. Ακολουθεί μια απόδειξη για τα $Y\cup\{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\}\vdash\text{ΕΧΕΙ}_{[2,AB]}$, $Y\cup\{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\}\vdash\text{ΕΧΕΙ}_{[1,B]}$.

(Στην απόδειξη συντομογραφούμε το «ΕΧΕΙ» ως «Ε», και το «ΓΡΑΦΕΙ» ως «Γ».)

ΣΤΑΔΙΟ	ΤΥΠΟΙ	ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	
1	$\text{Ε}_{[3,A]}$	η υπόθεση πέραν των Υ.	
2	$\text{Ε}_{[3,A]} \to \neg\text{Ε}_{[2,A]}$	από υποθέσεις Y_1.(*ii*) .	
3	$\neg\text{Ε}_{[2,A]}$	***m.p.*** (2, 3).	
4	$\Gamma_{[2,B]}$	από υποθέσεις Y_2.	
5	$\Gamma_{[2,B]} \to \neg\text{Ε}_{[2,B]}$	από υποθέσεις Y_1.(*iii*) .	
6	$\neg\text{Ε}_{[2,B]}$	***m.p.*** (4, 5).	
7	$\neg\text{Ε}_{[2,A]} \to (\neg\text{Ε}_{[2,B]} \to \text{Ε}_{[2,AB]})$	από υποθέσεις Y_1.(*i*) .	
8	$\neg\text{Ε}_{[2,B]} \to \text{Ε}_{[2,AB]}$	***m.p.*** (3, 7).	
9	$\text{Ε}_{[2,AB]}$	***m.p.*** (6, 8).	$\text{ΕΧΕΙ}_{[2,AB]}$ ✓
10	$\text{Ε}_{[2,AB]} \to \neg\text{Ε}_{[1,AB]}$	από υποθέσεις Y_1.(*ii*) .	
11	$\neg\text{Ε}_{[1,AB]}$	***m.p.*** (9, 10).	
12	$\Gamma_{[1,A]}$	από υποθέσεις Y_2 .	

13	$\Gamma_{[1,A]} \to \neg E_{[1,A]}$	από υποθέσεις Υ1.(*iii*) .	
14	$\neg E_{[1,A]}$	***m.p.*** (12, 13).	
15	$\neg E_{[1,A]} \to (\neg E_{[1,AB]} \to E_{[1,B]})$	από υποθέσεις Υ1.(*i*) .	
16	$\neg E_{[1,AB]} \to E_{[1,B]}$	***m.p.*** από 14, 15.	
17	$E_{[1,B]}$	***m.p.*** από 11, 16.	$\text{ΕΧΕΙ}_{[1,B]}$ ✓

4. Από το $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[3,AB]}$ (Ερ. 2) και το $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[3,AB]} \to \neg\text{ΕΧΕΙ}_{[3,AB]}$ (1.(*iii*)) έχουμε (***m.p.***) το $\neg\text{ΕΧΕΙ}_{[3,AB]}$. Από αυτό και την υπόθεση $\neg\text{ΕΧΕΙ}_{[3,AB]} \to (\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]})$, εξάγουμε ότι $\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}$. Αν λοιπόν επιλέξουμε το καλάθι «3», αφού θα μας δείξουν **Α**χλάδι ή **Β**ερύκοκο, θα διαπιστώσουμε, σημασιολογικά, ως ΑΛΗΘΗ είτε την υπόθεση $\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}$ είτε την $\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}$ (αντιστοίχως). Μέσω του Ερ. 3 θα είμαστε λοιπόν σε θέση να «αποδείξουμε» τις αντίστοιχες $\text{ΕΧΕΙ}_{[1,\dots]}$ και $\text{ΕΧΕΙ}_{[2,\dots]}$ για τα υπόλοιπα καλάθια 1 και 2.

5. Αυτό που χρησιμοποιούμε είναι το θεώρημα Εγκυρότητας:

«αν από κάποιες υποθέσεις *Υ* έχουμε αποδείξει το συμπέρασμα σ : $Y \vdash \sigma$,
και οι υποθέσεις *Υ αληθεύουν* υπό την αποτίμηση $\alpha(\cdot)$,
τότε και το συμπέρασμα *σ επίσης* αληθεύει *υπό την ίδια αποτίμηση.*»

Σε αυτό το ερώτημα, ως συμπέρασμα *σ* θεωρείται το $\text{ΕΧΕΙ}_{[2,A]}$, και η αποτίμηση είναι: [«ΑΛΗΘΕΣ» εάν-και-μόνον-εάν «το καλάθι **2** είναι τύπου **Α**»]. Άρα η αποτίμηση, από το θ. Εγκυρότητας, ότι $\text{ΕΧΕΙ}_{[2,A]}$ = ΑΛΗΘΕΣ, *σημαίνει:* «το καλάθι **2** είναι τύπου **Α**».

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο, 2012-2013

Σε ένα νησί κατοικούν ευγενείς και απατεώνες. Οι ευγενείς λένε πάντα αλήθεια, ενώ οι απατεώνες πάντα ψέματα.

(α) Ένας επισκέπτης συναντάει δύο κατοίκους του νησιού, τον Α και τον Β. Οι δύο κάτοικοι δηλώνουν:

Α: «*Αν είμαι ευγενής τότε ο Β είναι απατεώνας*»

Β: «*Είμαι ευγενής και ο Α είναι απατεώνας*».

Τι συμπέρασμα προκύπτει ως προς την ιδιότητα των δύο κατοίκων;

(β) Είναι γνωστό ότι στο νησί υπάρχουν και κατάσκοποι, ο οποίοι λένε είτε αλήθεια, είτε ψέματα. Ο επισκέπτης του νησιού συναντάει τρεις κατοίκους τους Α, Β, Γ, για τους οποίους γνωρίζει ότι ένας είναι ευγενής, ένας απατεώνας και ένας κατάσκοπος. Οι τρεις κάτοικοι δηλώνουν:

Α: «*Ο Β είναι κατάσκοπος*»

Β: «*Ο Γ είναι κατάσκοπος*»

Γ: «*Ο Β είναι κατάσκοπος*»

Τι συμπέρασμα προκύπτει ως προς την ιδιότητα των τριών κατοίκων;

Υπόδειξη: Δημιουργήστε ένα πίνακα με τους έξι πιθανούς τρόπους κατανομής των τριών ιδιοτήτων στους τρεις κατοίκους και αντιπαραθέστε κάθε κατανομή ιδιοτήτων με τις τιμές αληθείας των αντίστοιχων δηλώσεων.

Ανάμεσα σε διάφορους τρόπους επίλυσης δίνουμε στη συνέχεια μια προσέγγιση η οποία αν και όχι η συντομότερη ακολουθεί μια «μεθοδολογία»:

- επιλέγουμε προτασιακές μεταβλητές οι συνδυασμοί αληθείας των οποίων επαρκούν για την περιγραφή του πεδίου στο οποίο αναφερόμαστε.

- διαμορφώνουμε τις συνθήκες (που θέλουμε να ισχύουν) ως προτάσεις του προτασιακού λογισμού.
- αναζητούμε ποιές αποτιμήσεις αληθείας ικανοποιούν όλες τις συνθήκες.

Εδώ – και στις δύο περιπτώσεις (α) και (β) – θα περιγράψουμε τον πεδίο αναφοράς μας με τις εξής μεταβλητές:

- $\mathbf{P_{A,1}}$: το πρόσωπο Α είναι «ευγενής», και $\mathbf{P_{A,0}}$: το πρόσωπο Α είναι «απατεώνας», και τα ανάλογα για τα πρόσωπα Β, Γ: $\mathbf{P_{B,1}, P_{B,0}, P_{\Gamma,1}, P_{\Gamma,0}}$.

Οι εξής συνθήκες ισχύουν (επίσης και στις δύο περιπτώσεις):

- οι δηλώσεις Δ_X των ευγενών είναι πάντοτε ΑΛΗΘΕΙΣ: $P_{X,1} \rightarrow \Delta_X$, $X = A, B, \Gamma, \ldots$
- οι δηλώσεις Δ_X των απατεώνων είναι πάντοτε ΨΕΥΔΕΙΣ: $P_{X,0} \rightarrow \neg\Delta_X$, $X = A, B, \Gamma, \ldots$

Περίπτωση (α): ειδικά στη περίπτωση (α), οι πρόσθετες συνθήκες είναι οι εξής:

«*κάθε κάτοικος είναι είτε ευγενής είτε απατεώνας*», δηλαδή: $(P_{A,0} \leftrightarrow \neg P_{A,1}) \wedge (P_{B,0} \leftrightarrow \neg P_{B,1})$.

οι *δηλώσεις* των δύο κατοίκων είναι οι εξής: $\Delta_A = (P_{A,1} \rightarrow P_{B,0})$, $\Delta_B = (P_{B,1} \wedge P_{A,0})$.

και η *συνέπεια των δηλώσεών* τους κρίνεται από το: $\Sigma_X = (P_{X,1} \rightarrow \Delta_X) \wedge (P_{X,0} \rightarrow \neg\Delta_X)$, για X = A, B.

Για την αναζήτηση μιας αποτίμησης χρησιμοποιούμε εδώ πίνακες αληθείας:

		1ος	2ος	3ος	4ος
Περ. (α)	$P_{A,0}$ (= ¬ $P_{A,1}$)	0	1	0	1
	$P_{B,0}$ (= ¬$P_{B,1}$)	0	0	1	1
A	$P_{A,1}$	1	0	**1**	0
B	$P_{B,1}$	1	1	**0**	0
Δ_A	$(P_{A,1} \rightarrow P_{B,0})$	0	1	1	1
Δ_B	$(P_{B,1} \wedge P_{A,0})$	0	1	0	0
α_1	$(P_{A,1} \rightarrow \Delta_A)$	0	1	1	1
α_0	$(P_{A,0} \rightarrow \neg\Delta_A)$	1	0	1	0
Σ_A	$\alpha_1 \wedge \alpha_0$	0	0	1	0
β_1	$(P_{B,1} \rightarrow \Delta_B)$	0	1	1	1
β_0	$(P_{B,0} \rightarrow \neg\Delta_B)$	1	1	1	1
Σ_B	$\beta_1 \wedge \beta_0$	0	1	1	1
Σ	$\Sigma_A \wedge \Sigma_B$	0	0	1	0

Οι γκρί-σκιασμένες περιπτώσεις είναι αδύνατον να συμβούν, διότι λ.χ. στον 2ο κόσμο το 1ο πρόσωπο είναι απατεώνας ($P_{A,0}$ = ΑΛΗΘΕΣ) και άρα δεν μπορεί να έχει κάνει την ΑΛΗΘΗ (Δ_A=1) δήλωση Δ_A, άρα η συνθήκη ως προς τον Α δεν ισχυει: $\Sigma_A = 0$.

Μόνο στον 3ο ισχύουν οι συνθήκες μας Σ, άρα ο Α είναι «ευγενής» και ο Β είναι «απατεώνας».

Περίπτωση (β): στη περίπτωση (β), οι πρόσθετες συνθήκες είναι οι εξής:

Ο κόσμος αποτελείται από ευγενείς ή απατεώνες ή κατασκόπους, δηλαδή:

- $\neg(P_{A,1} \wedge P_{A,0})$: ο Α δεν είναι και ευγενής και απατεώνας, (ίσως όμως τίποτε από τα δύο).
- $\neg(P_{B,1} \wedge P_{B,0})$: το ίδιο για τον Β.
- $\neg(P_{\Gamma,1} \wedge P_{\Gamma,0})$: το ίδιο για τον Γ, και,

- W = «στους 3 κατοίκους κάθε ιδιότητα εμφανίζεται μία φορά το πολύ» [1]

Στον πίνακα αληθείας φτιάχνουμε για οικονομία μόνον όσες στήλες (= 6) τηρούν τα παραπάνω.

Οι δηλώσεις των τριών κατοίκων είναι οι εξής:

- $\Delta_A = \neg P_{B,1} \wedge \neg P_{B,0}$ = «ο Β δεν είναι ούτε ευγενής ούτε απατεώνας»
- $\Delta_B = \neg P_{\Gamma,1} \wedge \neg P_{\Gamma,0}$ = «ο Γ δεν είναι ούτε ευγενής ούτε απατεώνας»
- $\Delta_\Gamma = \neg P_{B,1} \wedge \neg P_{B,0}$ = «ο Β δεν είναι ούτε ευγενής ούτε απατεώνας»

Και η συνέπεια των δηλώσεών τους κρίνεται όπως πριν από τους τύπους:

- $\Sigma_X = (P_{X,1} \rightarrow \Delta_X) \wedge (P_{X,0} \rightarrow \neg\Delta_X)$, για X = A, B, Γ, και συνολικά, από την συνθήκη $\Sigma = \Sigma_A \wedge \Sigma_B \wedge \Sigma_B$.

		1ος	2ος	3ος	4ος	5ος	6ος	…	64η
Περ. (β)	$\neg(P_{A,1} \wedge P_{A,0})$	1	1	1	1	1	1		
	$\neg(P_{B,1} \wedge P_{B,0})$	1	1	1	1	1	1		
	$\neg(P_{\Gamma,1} \wedge P_{\Gamma,0})$	1	1	1	1	1	1		
	W	1	1	1	1	1	1		
A	$P_{A,1}$	1	1	0	0	0	0		
	$P_{A,0}$	0	0	1	1	0	0		
B	$P_{B,1}$	0	0	1	0	1	0		
	$P_{B,0}$	1	0	0	0	0	1		
Γ	$P_{\Gamma,1}$	0	0	0	1	0	1		
	$P_{\Gamma,0}$	0	1	0	0	1	0		
Δ_A	$\neg P_{B,1} \wedge \neg P_{B,0}$	0	1	0	1	0	0		
Δ_B	$\neg P_{\Gamma,1} \wedge \neg P_{\Gamma,0}$	1	0	1	0	0	0		
Δ_Γ	$\neg P_{B,1} \wedge \neg P_{B,0}$	0	1	0	1	0	0		
Σ_A	$(P_{A,1} \rightarrow \Delta_A) \wedge (P_{A,0} \rightarrow \neg\Delta_A)$	0	1	1	0	1	1		
Σ_B	$(P_{B,1} \rightarrow \Delta_B) \wedge (P_{B,0} \rightarrow \neg\Delta_B)$	0	1	1	1	0	1		
Σ_B	$(P_{\Gamma,1} \rightarrow \Delta_\Gamma) \wedge (P_{\Gamma,0} \rightarrow \neg\Delta_\Gamma)$	1	0	1	1	1	0		
Σ	$\Sigma_A \wedge \Sigma_B \wedge \Sigma_\Gamma$	0	0	1	0	0	0		

Και όπως φαίνεται, μόνον στο «κόσμο» της 3ης στήλης είναι όλα συνεπή – δηλαδή, έχουμε:

1ος = «απατεώνας», 2ος = «ευγενής» και 3ος = (τίποτε από τα δύο) = «κατάσκοπος».

■

---

[1] Οι συνθήκες θα ήσαν: $Q_{X,\varepsilon} = P_{X,1}$, $Q_{X,\alpha} = P_{X,0}$, $Q_{X,\kappa} = \neg(Q_{X,\varepsilon} \vee Q_{X,\alpha})$, για X=A, B, Γ, και $\bigwedge_{I=\varepsilon,\alpha,\kappa} (Q_{X,I} \rightarrow \neg(Q_{Y,I} \vee Q_{Z,I})$, για {X, Y, Z} = {A, B, Γ}, αλλά δεν τις χρησιμοποιούμε εδώ, (όπως εξηγείται στη συνέχεια).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΣΥΜΠΑΓΕΙΑΣ.

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο, 2014-2015

Έστω άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων $T = \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots \}$, ορισμένο σε ένα άπειρο σύνολο προτασιακών μεταβλητών $X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$. Αν ισχύει ότι για κάθε αποτίμηση (ανάθεση αληθοτιμών) $\mathbf{v} : X \to \{ \mathbf{A}, \mathbf{\Psi} \}$ για τις προτασιακές μεταβλητές του X, υπάρχει τύπος $\varphi \in T$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\varphi[\mathbf{v}] = \mathbf{A}$, τότε να δειχθεί ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $m \geq 1$ τέτοιος ώστε να ισχύει το εξής:

$$\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_m$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο τύπων $\neg\varphi_1, \neg\varphi_2, \neg\varphi_3, \ldots$ και εφαρμόστε το Θεώρημα της Συμπάγειας.

Αφού κάθε λογική αποτίμηση επαληθεύει μία τουλάχιστον πρόταση εκ των φ_κ, τότε διαψεύδει μία τουλάχιστον πρόταση από τις $\neg\varphi_\kappa$, άρα δεν υπάρχει αποτίμηση που να επαληθεύει όλο το σύνολο των προτάσεων $S = \{ \neg\varphi_\kappa : \kappa \geq 1 \}$. Από το Θ. συμπάγειας λαμβάνουμε πως υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο A του S, που είναι μη-επαληθεύσιμο. Έστω $\neg\varphi_m$ η πρόταση του A με τον μεγαλύτερο δείκτη «m». Τότε ούτε το σύνολο $\{ \neg\varphi_1, \neg\varphi_2, \ldots, \neg\varphi_m, \}$ είναι επαληθεύσιμο, αφού περιλαμβάνει το A, άρα κάθε αποτίμηση διαψεύδει μία τουλάχιστον εκ των $\neg\varphi_\kappa : 1 \leq \kappa \leq m$, άρα επαληθεύει την $\Phi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_m$. Αφού κάθε αποτίμηση επαληθεύει την Φ, δηλαδή η Φ είναι ταυτολογία, τότε, από το Θ. πληρότητας, η Φ είναι αποδείξιμη, δηλαδή:

$$\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_m.$$

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 8ο, 2005-2006

(1) Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας της ΠΛ, δείξτε ότι αν $T \models \varphi$ (όπου φ τύπος και T άπειρο σύνολο από τύπους) τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο T_0 του T τέτοιο που $T_0 \models \varphi$.

(2) Αποδείξτε το θεώρημα Συμπάγειας της Προτασιακής Λογικής.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα 2.5 για να δείξετε την ακόλουθη πρόταση: αν $T \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο T_0 του T έτσι ώστε $T_0 \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

(1) Έστω $T \models \phi$. Σύμφωνα με το Θεώρημα της Πληρότητας του ΠΛ (σελ. 67, Τόμος 3), συνεπάγεται ότι $T \vdash \phi$.

Αφού $T \vdash \phi$, υπάρχει τυπική απόδειξη $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n = \phi$, που προφανώς είναι πεπερασμένη. Θεωρώντας το υποσύνολο T_0 του T, που περιέχει όλους τους τύπους του T που εμφανίζονται στην ακολουθία $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, είναι προφανές ότι το T_0 θα είναι πεπερασμένο και $T_0 \vdash \phi$ (βλ. επίσης Παρατήρηση 3, σελ. 55, Τόμος 3).

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Εγκυρότητας του ΠΛ (σελ. 68, Τόμος 3), συμπεραίνουμε ότι $T_0 \models \phi$

(2) Η διατύπωση του θεωρήματος της Συμπάγειας της ΠΛ (σελ. 35, Τόμος 3) είναι η εξής:

> «Εστω T άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποιήσιμο, τότε το T είναι ικανοποιήσιμο»

Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα, υποθέτουμε αρχικά ότι κάθε πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ είναι ικανοποιήσιμο. Έστω ότι το T δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε αντίφαση ϕ και την άρνηση της, $\neg\phi$, η οποία προφανώς είναι ταυτολογία. Αφού το T δεν είναι ικανοποιήσιμο, το ίδιο ισχύει προφανώς και για το $T \cup \{\neg\phi\}$. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.5 (σελ. 34, Τόμος 3) το

$T \cup \{\neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν $T \models \phi$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του υποερωτήματος (1), αν $T \models \phi$ τότε υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$, τέτοιο ώστε $T_0 \models \phi$. Κάνοντας ξανά χρήση του θεωρήματος 2.5, έπεται ότι $T_0 \models \phi$ αν και μόνο αν $T_0 \cup \{\neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Εύκολα μπορούμε να δούμε τώρα ότι T_0 δεν είναι ικανοποιήσιμο. Πράγματι αν υπήρχε αποτίμηση που ικανοποιεί το T_0, επειδή η $\neg\phi$ είναι ταυτολογία, τότε η αποτίμηση θα ικανοποιούσε και το $T_0 \cup \{\neg\phi\}$.

Δηλαδή, υπάρχει πεπερασμένο μη ικανοποιήσιμο υποσύνολο T_0 του *T*, συμπέρασμα που αντίκειται στην υπόθεση (η οποία είναι ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο T_0 του *T* είναι ικανοποιήσιμο).

■

SUI GENERIS

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο, 2016-2017

B. Έστω A ένα σύνολο με περιττό πλήθος λογικών αποτιμήσεων. Έστω D το σύνολο των προτασιακών τύπων που επαληθεύονται από *μια πλειοψηφία αποτιμήσεων* στο A (τις μισές συν μία, τουλάχιστον). Εξετάστε και εξηγήστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν:

1. Αν φ τύπος, τότε ακριβώς ένας από τους φ και $\neg\varphi$ ανήκει στο D.

2. Αν ο φ ανήκει στο D και ο $(\varphi \to \psi)$ είναι ταυτολογία, τότε ο ψ ανήκει στο D.

3. Αν φ και $(\varphi \to \psi)$ ανήκουν στο D, τότε ο ψ ανήκει στο D.

Έστω ότι έχουμε $2\rho+1$ λογικές αποτιμήσεις στο A. Ένας τύπος ανήκει στο D, (ή *επαληθεύεται πλειοψηφικά*) αν και μόνον επαληθεύεται από τουλάχιστον $\rho+1$ αποτιμήσεις στο A.

1. ΣΩΣΤΟ: Κάθε αποτίμηση επαληθεύει είτε τον φ είτε τον $\neg\varphi$, και φυσικά όχι και τους δύο. Άρα οι αποτιμήσεις A διαμερίζονται σε δύο σύνολα μεγέθους κ και λ, ένα των οποίων επαληθεύει το φ και το άλλο το $\neg\varphi$. Αφού $(\kappa+\lambda) = 2\rho+1$, δεν μπορεί να έχουμε $\kappa, \lambda \leq \rho$, ούτε $\kappa, \lambda \geq \rho+1$. Δηλαδή ένα εκ των δύο θα είναι το πολύ $\leq \rho$, και το άλλο τουλάχιστον $\geq (\rho+1)$, δηλαδή ένας και μόνον ένας εκ των $\{\ \varphi,\ \neg\varphi\ \}$ θα επαληθεύεται πλειοψηφικά.

2. ΣΩΣΤΟ: Αφού $\geq (\rho+1)$ αποτιμήσεις επαληθεύουν το φ, και το $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογία, το ψ επαληθεύεται για αυτές τουλάχιστον τις $\geq (\rho+1)$ αποτιμήσεις, δηλαδή επίσης πλειοψηφικά.

3. ΛΑΘΟΣ: Το ερώτημα προτρέπει σε μια πιο «βαθειά» ματιά στο πίνακα αληθείας του $\to$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι φ, ψ είναι *απλές προτασιακές μεταβλητές*:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

φ	$\varphi \to \psi$	ψ
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
✓	✓	?
Ψ	Α	Ψ

Αν διαγράψουμε την 3η γραμμή, (βλ. πίνακα δεξιά), απομένει σύνολο A τριών αποτιμήσεων. Παρατηρούμε ότι σε αυτές η φ αληθεύει με πλειοψηφία $^2/_3$ (✓), και ο $\varphi \to \psi$ επίσης (✓). Δεν ισχύει όμως το ίδιο για την ψ: αυτή *διαψεύδεται* με πλειοψηφία $^2/_3$ (**?**).

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο, 2012-2013

Ένα σύνολο προτασιακών τύπων T, λέγεται **εξαρτημένο** αν υπάρχει $\varphi \in T$, τέτοιο ώστε: $T \setminus \{\varphi\} \models \varphi$.

Αν το T δεν είναι εξαρτημένο, τότε λέγεται **ανεξάρτητο**. Σημειώστε ότι με βάση τον παραπάνω ορισμό το κενό σύνολο δεν μπορεί να θεωρηθεί εξαρτημένο, άρα είναι ανεξάρτητο.

(α) Εξετάστε κατά πόσο τα παρακάτω σύνολα τύπων είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα.

$T_1 = \{\ p \to (q \to p)\ \}$ $T_2 = \{\ p \vee q,\ p \to q\ \}$

$T_3 = \{\ p \wedge q,\ \ p \vee q\ \}$ $T_4 = \{\ p,\ \ p \wedge q \to p\ \}$

(β) Αποδείξτε ότι ένα σύνολο τύπων είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν, για κάθε $\varphi \in T$, το σύνολο $T \setminus \{\varphi\} \cup \{\neg\, \varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι αν ένα σύνολο τύπων είναι ανεξάρτητο, τότε κάθε υποσύνολο του είναι επίσης ανεξάρτητο.

(γ) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, αποδείξτε ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο τύπων T, υπάρχει ένα ανεξάρτητο υποσύνολο του, T', τέτοιο ώστε για κάθε $\varphi \in T$, να ισχύει $T' \models \varphi$.

(α) (T1) ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΟ – διότι $\{\ \} \models (p \to (q \to p))$.

(T2) ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ – διότι για κάθε μία από τις δύο προτάσεις υπάρχει αποτίμηση αληθείας των προτασιακών μεταβλητών, όπου αυτή μεν αληθεύει, αλλά η άλλη όχι:

για $(p, q) = (1, 0)$ ισχύει μεν $(p \vee q) = 1$, αλλά $(p \to q) = 0$, άρα δεν ισχύει $(p \vee q) \models (p \to q)$.

για $(p, q) = (0, 0)$ ισχύει μεν, $(p \to q) = 1$ αλλά $(p \vee q) = 0$, άρα δεν ισχύει $(p \to q) \models (p \vee q)$.

(T3) ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΟ – διότι $\{p \wedge q\} \models (p \vee q)$.

(T4) ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΟ – διότι $\{p\} \models (p \wedge q \to p)$.

(β) **«T ανεξάρτητο» ⇒ «για κάθε φ, (T\{φ})∪{¬φ} ικανοποιήσιμο»**: Κατά τον ορισμό μας, εάν το T είναι ανεξάρτητο τότε *δεν* είναι εξαρτημένο, δηλαδή δεν ισχύει ότι υπάρχει $\varphi \in T$ για το οποίο $(T\setminus\{\varphi\}) \models \varphi$, δηλαδή για κάθε $\varphi \in T$ υπάρχει αποτίμηση για την οποία το $(T\setminus\{\varphi\})$ ικανοποιείται, αλλά το φ είναι ΨΕΥΔΕΣ (ισοδυνάμως: το ¬φ ΑΛΗΘΕΣ), δηλαδή για κάθε $\varphi \in T$ υπάρχει αποτίμηση για την οποία όπου το $(T\setminus\{\varphi\})\cup\{\neg\varphi\}$ ικανοποιείται.

όχι «T ανεξάρτητο» ⇒ όχι «για κάθε φ, (T\{φ})∪{¬φ} ικανοποιήσιμο»: αν υπάρχει $\alpha \in T$, ώστε $T\setminus\{\alpha\} \models \alpha$, τότε το $(T\setminus\{\varphi\})\cup\{\neg\varphi\}$ δεν θα ήταν ικανοποιήσιμο για κάθε φ: επιλέγοντας το α στη θέση του φ, θα είχαμε αποτίμηση που ικανοποιεί το $T\setminus\{\alpha\}$ και το ¬α, αλλά και το ίδιο το α (αφού $T\setminus\{\alpha\} \models \alpha$) – πράγμα άτοπο.

Ισχύει λοιπόν ότι: «*T = ανεξάρτητο*» ⇔ «$\forall \varphi \in T$, $(T\setminus\{\varphi\})\cup\{\neg\varphi\}$ *ικανοποιείται*».

Ελέγχουμε με $S \subseteq T$ στη θέση του T: **(?)** «$\forall \varphi \in S$, $(S\setminus\{\varphi\})\cup\{\neg\varphi\}$ *ικανοποιείται*».

Έστω $\varphi \in S$. Είναι το $(S\setminus\{\varphi\})\cup\{\neg\varphi\}$ ικανοποιήσιμο; Επειδή $\varphi \in S$ και $S \subseteq T$, τότε και $S\setminus\{\varphi\} \subseteq T\setminus\{\varphi\}$, και επομένως $(S\setminus\{\varphi\})\cup\{\neg\varphi\} \subseteq (T\setminus\{\varphi\})\cup\{\neg\varphi\}$. Αλλά το T έχει υποτεθεί ανεξάρτητο, επομένως το 2ο σύνολο είναι ικανοποιήσιμο, επομένως (κατά τον ίδιο τρόπο) και το 1ο. Αφού ισχύει η συνθήκη **(?)** το S είναι ανεξάρτητο.

(γ) ***Βάση επαγωγής:*** Έστω ότι η πρότασή μας ισχύει για σύνολα τύπων T με μέγεθος $|T| = 0$. Αν $T = \varnothing$ τότε θέτουμε $T' = T = \varnothing$ (ποιό άλλο;). Το T΄ ως κενό είναι ανεξάρτητο, και επάγει ταυτολογικά κάθε $\varphi \in T$. (Βρείτε ένα $\varphi \in \varnothing$, για το οποίο αυτό δεν ισχύει...! Αν δεν εμπιστεύεστε αυτό το επιχείρημα αρχίστε από κ=1, δηλαδή $T=\{\varphi\}$: αν η φ είναι ταυτολογία ΠΛ, δηλαδή $\varnothing \models \varphi$, τότε αρκεί $T' = \varnothing$. Αλλιώς αρκεί να θέσουμε $T' = \{\varphi\} \subseteq T$, αφού για κάθε φ, τετριμμένα $\varphi \models \varphi$.)

Βήμα επαγωγής: Έστω ότι η πρότασή μας ισχύει για σύνολα τύπων S με μέγεθος $|S| \leq \kappa$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για σύνολο τύπων με μέγεθος = (κ+1). Έστω T ένα σύνολο τύπων ώστε $|T| = (\kappa+1)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- *T ανεξάρτητο*: τότε το $T' = T \subseteq T$ είναι ανεξάρτητο, και για κάθε $\varphi \in T$, ισχύει ότι $T' \models \varphi$, διότι $\varphi \in T'$ (που είναι το ίδιο το T, όπως το διαλέξαμε).
- *T εξαρτημένο*: τότε υπάρχει ένα $\varphi \in T$ ώστε για $S = T\setminus\{\varphi\}$ να ισχύει $S \models \varphi$. Αλλά αφού $\varphi \in T$, και $|T| = (\kappa+1)$ το $S= T\setminus\{\varphi\}$ έχει μέγεθος κ, και από την επαγωγική υπόθεση διαθέτει ένα υποσύνολο $T' \subseteq T\setminus\{\varphi\} \subseteq T$, τέτοιο ώστε για κάθε $\chi \in S$, $T' \models \chi$. Κάθε αποτίμηση των μεταβλητών, λοιπόν, εάν αυτή ικανοποιεί το T΄ τότε επαληθεύει και *κάθε τύπο* του S, και εάν αυτό συμβαίνει, επαληθεύει και το $\chi = \varphi$ (επειδή $S \models \varphi$). Δηλαδή συνολικά επαληθεύει κάθε τύπο $\chi \in S\cup\{\varphi\} = T$. Άρα $T' \models \chi$ για κάθε $\chi \in T$, και το βήμα της επαγωγής μας έχει πραγματοποιηθεί.

■

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ, ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο, 2016-2017

B. Έστω *Γ* προτασιακή γλώσσα με *n* μεταβλητές, $P_1, ..., P_n$. Ένας *πίνακας αληθείας* $\pi(\cdot)$, είναι τυπικά μια συνάρτηση που σε κάθε μία από τις 2^n δυνατές λογικές αποτιμήσεις $a(\cdot)$ αντιστοιχίζει κάποια τιμή αληθείας (Α ή Ψ). (Οι γνωστοί «πίνακες αληθείας» δεν είναι παρά η *σχεδίαση* μιας τέτοιας συνάρτησης όπου βάζουμε κάθε αποτίμηση των $P_1, ..., P_n$ συν την αντίστοιχη τιμή αληθείας ανά μία «γραμμή»).

Κάθε τύπος $\varphi \in T(\Gamma)$ ορίζει έναν πίνακα αληθείας ΠΑ(φ) κατά φυσικό τρόπο: η ΠΑ(φ) αντιστοιχίζει σε κάθε αποτίμηση $a(\cdot)$ την αληθοτιμή $\overline{a}(\varphi)$ του φ υπό την $a(\cdot)$. Το θεώρημα 2.7 του βιβλίου εξηγεί γιατί αυτό ισχύει και αντιστρόφως: για κάθε πίνακα αληθείας $\pi(\cdot)$ υπάρχει τύπος ψ (*και μάλιστα σε κανονική διαζευκτική μορφή*), ώστε ΠΑ(ψ) = $\pi(\cdot)$.

1. Έστω $T^*(\Gamma) \subseteq T(\Gamma)$ οι τύποι που δεν περιέχουν καμμία άρνηση ($\neg$). Δείξατε ότι κάθε τύπος $\varphi \in T^*(\Gamma)$ επαληθεύεται από την αποτίμηση που καθιστά ΑΛΗΘΗ κάθε μεταβλητή.

Εδώ χρειάζεται μια επαγωγή στη πολυπλοκότητα των τύπων:
ΒΑΣΗ: Έστω ότι ο φ έχει $\kappa = 0$ συνδέσμους (από τους $\vee$, $\wedge$, $\to$). Αφού δεν έχει ούτε άρνηση $\neg$, τότε είναι απλώς μια μεταβλητή, και το ζητούμενο ισχύει κατά προφανή τρόπο.
ΒΗΜΑ: Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για τύπους με $\leq \kappa$ συνδέσμους. Θα δείξουμε ότι ισχύει για τύπο φ με κ+1 συνδέσμους. Χωρίς $\neg$ ο φ είναι της μορφής $(\chi \vee \psi)$, $(\chi \wedge \psi)$, $(\chi \to \psi)$, όπου οι χ, ψ έχουν $\leq \kappa$ συνδέσμους.
Από την επαγωγική υπόθεση οι χ, ψ επαληθεύονται από την αποτίμηση «όλα ΑΛΗΘΕΣ», το οποίο συνεχίζει να ισχύει για τους παραπάνω τύπους, άρα και για τον τύπο φ.

2. Δείξτε το αντίστροφο, ότι δηλαδή εάν ο φ επαληθεύεται από την αποτίμηση που καθιστά ΑΛΗΘΗ κάθε μεταβλητή τότε υπάρχει $\psi \in T^*(\Gamma)$ με τον ίδιο πίνακα αληθείας: ΠΑ(ψ) = ΠΑ(φ).

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: *Σκεφτείτε τον τύπο ψ για τον πίνακα αληθείας του φ όπως στο θ.* 2.7. *Κάποιος συζευκτικός όρος του ψ θα περιέχει και τις* n *μεταβλητές, όλες χωρίς άρνηση. Χρησιμοποιήστε μια γενίκευση του 3.Α.1 για να αφαιρέσετε τις αρνήσεις από όλους τους άλλους όρους.*

Από την κατασκευή του θ. 2.7 υπάρχει τύπος ψ που είναι διάζευξη τύπων της μορφής $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)$ όπου κάθε x_k είναι είτε μια μεταβλητή, είτε η άρνηση μιας μεταβλητής. Όσοι τύποι από αυτούς περιέχουν έστω μια άρνηση μεταβλητής *διαψεύδονται* από την αποτίμηση «όλα ΑΛΗΘΕΣ», ενώ ο ψ υποτίθεται ότι επαληθεύεται. Άρα πρέπει να υπάρχει και ο συζευκτικός όρος Φ που περιέχει όλες τις μεταβλητές υπό θετική μορφή – χωρίς άρνηση. Έστω τώρα ένας συζευκτικός όρος Ψ που περιέχει $k \geq 1$ μεταβλητές q_1, ..., q_k με άρνηση, και n–k μεταβλητές p_1, ..., p_{n-k} χωρίς άρνηση. Γράφουμε τις 'p' στην αρχή του τύπου, και τις 'q' στο τέλος. Κάνουμε το ίδιο και για τον Φ, και παίρνουμε την διάζευξη:

$$\underbrace{\left(\left(p_1 \wedge \ldots \wedge p_{(n-k)}\right) \wedge \left(\neg q_1 \wedge \ldots \wedge \neg q_{(k)}\right)\right)}_{\Psi} \vee \underbrace{\left(\left(p_1 \wedge \ldots \wedge p_{(n-k)}\right) \wedge \left(q_1 \wedge \ldots \wedge q_{(k)}\right)\right)}_{\Phi}.$$

Κατ' αναλογία των 3.Α.1 (όπου n = 3 και k = 2), και 1.Α.2 (*De Morgan*), αυτή γράφεται ως:

$$(\,P \;\wedge\; (\neg q_1 \wedge \ldots \wedge \neg q_k)\,) \;\vee\; (\,P \;\wedge\; (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k)\,) \qquad \text{όπου } P = (p_1 \wedge \ldots \wedge p_{(n-k)}).$$

$$P \;\wedge\; ((\neg q_1 \wedge \ldots \wedge \neg q_k) \;\vee\; (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k)) \qquad \text{κοινός παράγων ο '}P \wedge\text{'}.$$

$$P \;\wedge\; (\; \neg(q_1 \vee \ldots \vee q_k) \;\; \vee \; (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k)) \qquad \textit{De Morgan} \text{ στις 'αρνήσεις'}.$$

$$(p_1 \wedge \ldots \wedge p_{(n-k)}) \wedge ((q_1 \vee \ldots \vee q_k) \to (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k)) \qquad \text{μετατροπή συνεπαγωγής}.$$

Για να απαλείψουμε τις υπόλοιπες αρνήσεις επαναλαμβάνουμε το αυτό για τους υπόλοιπους συζευκτικούς όρους Ψ΄, Ψ΄΄, κοκ. Χρειάζονται πρόσθετα 'αντίτυπα' του Φ, για να λάβουμε τα (Ψ΄ $\vee$ Φ), (Ψ΄΄ $\vee$ Φ), κοκ, αλλά τέτοια έχουμε όσα θέλουμε αφού $\Phi \equiv \Phi \vee \Phi \vee \ldots \vee \Phi$.

3. Με γνωστά τα παραπάνω (είτε τα αποδείξατε είτε όχι), δείξατε ότι οι διαφορετικοί πίνακες αληθείας των τύπων του $T(\Gamma)$ είναι 2^{2^n} στο πλήθος, ενώ οι διαφορετικοί πίνακες του $T^*(\Gamma)$ είναι 2^{2^n-1} στο πλήθος.

Αφού κάθε πίνακας αληθείας προέρχεται από έστω έναν τύπο στο $T(\Gamma)$ αρκεί να μετρήσουμε όλους τους δυνατούς πίνακες αληθείας. Κάθε αποτίμηση είναι μια (οποιαδήποτε) συνάρτηση από n παραμέτρους/μεταβλητές σε 2 παραμέτρους {Α, Ψ}. Από την συνδυαστική γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 2^n τέτοιες συναρτήσεις. Κάθε πίνακας αληθείας είναι μια συνάρτηση από $m = 2^n$ παραμέτρους (*όλες τις αποτιμήσεις*), προς 2 παραμέτρους {Α, Ψ}. Έχουμε λοιπόν 2^m τέτοιες συναρτήσεις, δηλαδή έχουμε 2^{2^n} πίνακες αληθείας εκ των τύπων $T(\Gamma)$.

Από το Β.1 κάθε τύπος $\varphi \in T^*(\Gamma)$ δίδει πίνακα αληθείας όπου η αποτίμηση «όλα ΑΛΗΘΗ» δίδει ΑΛΗΘΕΣ. Αλλά και, (από Β.2), *κάθε* τέτοιος πίνακας προέρχεται από κάποιο τύπο $\psi \in T^*(\Gamma)$. Άρα αρκεί να μετρήσουμε όλους τους πίνακες αληθείας στους οποίους η αποτίμηση «όλα ΑΛΗΘΗ» αντιστοιχίζεται στο Α. Κάθε τέτοιος πίνακας αληθείας ορίζεται από μια συνάρτηση *από τις* *υπόλοιπες* $m=(2^n-1)$ αποτιμήσεις προς 2 παραμέτρους {Α, Ψ}, οπότε έχουμε 2^m τέτοιες συναρτήσεις, δηλαδή 2^{2^n-1} πίνακες αληθείας εκ των τύπων $T^*(\Gamma)$.

■