Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2017-2018

Συνοδευτικές Ασκήσεις 6ης Κύριας Εργασίας
Δένδρα: βασικές έννοιες, αλγόριθμοι, εφαρμογές

Άσκηση 1 (6η Εργασία 2012-13, Ερώτημα 1)

Α. Καλούμε ένα δέντρο τριαδικό αν όλες οι εσωτερικές του κορυφές έχουν βαθμό 3. (Σχόλιο: Ο παραπάνω ορισμός αφορά το Ερώτημα1.Α μόνο)

Δείξτε τις παρακάτω προτάσεις:

1). Κάθε τριαδικό δέντρο Τ με διάμετρο το πολύ δ>=2 όπου το δ άρτιος δεν έχει περισσότερα από 3 x 2^((δ-2)/2) φύλλα.

2). Κάθε τριαδικό δέντρο Τ με διάμετρο το πολύ δ>=1 όπου το δ περιττός δεν έχει περισσότερα από 2^((δ+1)/2) φύλλα.

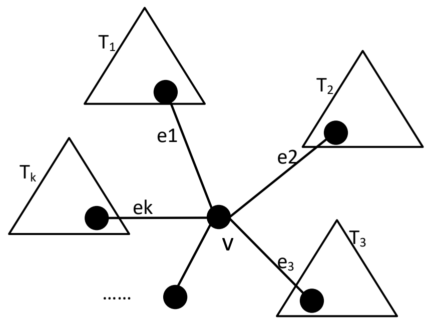
Απάντηση:
Α.1). Θα αποδείξουμε την πρόταση (1) χρησιμοποιώντας επαγωγή στο δ. Στην πρόταση (1), η βάση της επαγωγής είναι η περίπτωση όπου δ=2. Τότε το δέντρο Τ είναι το $K_{1,3}$ το οποίο έχει πράγματι 3 φύλλα.
Έστω τώρα η πρόταση (1) ισχύει για κάθε τριαδικό δέντρο με άρτια διάμετρο μικρότερη του δ.
Καλούμε ένα φύλλο v του Τ ακραίο αν υπάρχει άλλο φύλλο v' που να έχει τον ίδιο μοναδικό γείτονα με το v. Επίσης καλούμε το ζεύγος (v,v') ακραίο ζεύγος. Παρατηρούμε ότι αν αφαιρέσουμε από το Τ όλα τα ακραία φύλλα προκύπτει τριαδικό δέντρο Τ* διαμέτρου το πολύ δ-2>=2. Επειδή όλες οι εσωτερικές κορυφές του Τ έχουν βαθμό 3 προκύπτει ότι κάθε φύλλο του Τ* θα είναι είτε και φύλλο του Τ ή ο κοινός γείτονας κάποιου ακραίου ζεύγους του Τ. Άρα για κάθε φύλλο του Τ* αντιστοιχούν το πολύ 2 φύλλα του Τ. Από την επαγωγική υπόθεση, το Τ* έχει το πολύ 3x2^((δ-4)/2) φύλλα. Άρα το Τ έχει το πολύ 2x3x2^((δ-4)/2)=3x2^((δ-2)/2) φύλλα.

Α.2). Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με την διαφορά ότι η βάση της επαγωγής είναι η περίπτωση όπου δ=1 οπότε το δέντρο Τ αποτελείται από μια ακμή και έχει πράγματι 2 φύλλα. Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε την απόδειξη και για το Α2.
Θα αποδείξουμε την πρόταση (2) χρησιμοποιώντας επαγωγή στο δ.
Στην πρόταση (2), η βάση της επαγωγής είναι η περίπτωση όπου δ=1. Τότε το δέντρο Τ είναι το P_2 το οποίο έχει πράγματι 2 φύλλα.
Έστω τώρα η πρόταση (2) ισχύει για κάθε τριαδικό δέντρο με περιττή διάμετρο μικρότερη του δ.
Καλούμε ένα φύλλο v του Τ ακραίο αν υπάρχει άλλο φύλλο v' που να έχει τον ίδιο μοναδικό γείτονα με το v. Επίσης καλούμε το ζεύγος (v,v') ακραίο ζεύγος. Παρατηρούμε ότι αν αφαιρέσουμε από το Τ όλα τα ακραία φύλλα προκύπτει τριαδικό δέντρο Τ* διαμέτρου το πολύ δ-2>=1. Επειδή όλες οι εσωτερικές κορυφές του Τ έχουν βαθμό 3 προκύπτει ότι κάθε φύλλο του Τ* θα είναι είτε και φύλλο του Τ ή ο κοινός γείτονας κάποιου ακραίου ζεύγους του Τ. Άρα για κάθε φύλλο του Τ* αντιστοιχούν το πολύ 2 φύλλα του Τ. Από την επαγωγική υπόθεση, το Τ* έχει το πολύ 2^((δ-1)/2) φύλλα. Άρα το Τ έχει το πολύ 2x2^((δ-1)/2)=2^((δ+1)/2) φύλλα.

Β. Έστω δένδρο T(V,E), με |V|=n όπου n άρτιος. Ορίζουμε το σύνολο E' των ακμών e του δένδρου για τις οποίες το T-e αποτελείται από δυο συνιστώσες με περιττό πλήθος κορυφών η κάθε μία. Το T-e είναι ο γράφος που προκύπτει αν από το δένδρο T διαγραφεί η ακμή e. Δείξατε ότι κάθε κορυφή στο γράφο G(V,E') έχει περιττό βαθμό.

Απάντηση.

Θεωρούμε μία τυχαία κορυφή $v \in V$ του δένδρου T. Αν διαγράψουμε την v και τις προσκείμενες ακμές της τότε ο γράφος T-v θα αποτελείται από τις συνιστώσες (δένδρα) $T_i(V_i,E_i)$, i=1,2,..k όπου k ο βαθμός της v στο δένδρο T, και $|V_i|=n_i$. Έστω $e_1,e_2,e_3,\ldots,e_k$ οι ακμές που συνδέουν την v με τα αντίστοιχα δένδρα-συνιστώσες όπως στο παρακάτω σχήμα.



Αν αθροίσουμε τις τάξεις των συνιστωσών T_i τότε προφανώς το $\sum_{i=1}^{k} n_i = n-1$ είναι περιττό αφού είναι πλήθος n των κορυφών το δένδρου T είναι άρτιο. Επομένως πρέπει να υπάρχει ένα περιττό πλήθος συνιστωσών T_i οι οποίες να έχουν περιττή τάξη. Η ακμή e_i που αντιστοιχεί σε συνιστώσα T_i με περιττή τάξη θα συμπεριληφθεί στο σύνολο E' (αφού και οι δυο συνιστώσες του T-e_i θα έχουν περιττή τάξη) και επειδή υπάρχει περιττό πλήθος τέτοιων συνιστωσών T_i, η κορυφή v θα έχει περιττό βαθμό στο γράφο G(V,E').

Γ. Δείξατε ότι κάθε δένδρο T(V,E), με |V|=n, |E|=e μπορεί να προσανατολιστεί (δηλαδή να γίνει ένας κατευθυνόμενος γράφος με το να δώσουμε κατεύθυνση σε κάθε ακμή) έτσι ώστε για κάθε κορυφή v του κατευθυνόμενου γράφου να ισχύει $\left|\deg^{+}(v)-\deg^{-}(v)\right| \le 1$. Χρησιμοποιήσατε επαγωγή στο πλήθος των κορυφών.

Απάντηση.

Βάση: Για n=1 προφανώς ισχύει.

Υπόθεση: Έστω ότι η πρόταση ισχύει για δένδρα με τουλάχιστον 2 και το πολύ n κορυφές.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι ισχύει για δένδρο T με n+1 κορυφές. Επιλέγουμε ένα φύλλο v και το διαγράφουμε από το δένδρο. Έτσι παίρνουμε ένα νέο δένδρο T'=T-v. Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει προσανατολισμός με την ζητούμενη ιδιότητα για το δένδρο

T'. Έστω u η γειτονική κορυφή της v. Η ακμή του T' που προσπίπτει στην u έχει ήδη προσανατολιστεί. Μπορούμε τώρα να προσανατολίσουμε και την ακμή (u,v) ώστε να διατηρείται η ζητούμενη ιδιότητα για την u. Προφανώς η ιδιότητα θα ισχύει και για την v.

Άσκηση 2 (6η Εργασία 2008-09, Ερώτημα 1)

Α. Για κάθε δένδρο να αποδείξετε ότι

1). αν ο μέσος όρος του βαθμού κορυφών του δένδρου είναι a, τότε το δένδρο έχει $2/(2-a)$ κορυφές.

2). αν η ακολουθία βαθμών των κορυφών του είναι $k, k-1, k-2, \ldots, 3, 2, 1, 1, \ldots, 1$ τότε το δένδρο έχει $2+\binom{k}{2}$ κορυφές.

Β. Κάθε δένδρο T είναι ένας διμερής γράφος. Έστω S_1, S_2 τα δύο μέρη του. Δείξατε ότι κάθε δένδρο T με *n* κορυφές και *m* ακμές έχει ένα φύλλο στο μεγαλύτερο μέρος του (δηλαδή στο μέρος με τις περισσότερες κορυφές) ή και στα δύο μέρη αν είναι ίσου μεγέθους (δηλαδή αν τα δύο μέρη έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών).

Γ. Έστω δένδρο T με *n* κορυφές και βαθμούς κορυφών που είναι 1 ή *k*. Δείξατε ότι οι πιθανές τιμές του *n* είναι *n*=2+*p**(*k*-1), όπου *p* ένας μη αρνητικός ακέραιος.

Απάντηση.

Α1. Έστω ότι το δένδρο έχει n κορυφές και m=n-1 ακμές.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} d(v_i)}{n} = \frac{2m}{n} = \frac{2(n-1)}{n} \Rightarrow n = 2/(2-a)$$

Α2. Έστω ότι το δένδρο έχει n κορυφές και m=n-1 ακμές. Το δένδρο έχει k-1 εσωτερικές κορυφές και επομένως έχει n-k+1 φύλλα.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m = 2(n-1) \Rightarrow (\sum_{i=2}^{k} i) + n - k + 1 = 2(n-1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} i + n - k = 2n - 2 \Rightarrow$$

$$n = 2 + \frac{k(k+1)}{2} - k = 2 + \binom{k}{2}$$

Β. Έστω $|S_1| \geq |S_2|$. Έστω ότι δεν υπάρχει φύλλο στο μεγαλύτερο μέρος S_1 του δένδρου. Τότε ο βαθμός κάθε κορυφής στο S_1 είναι τουλάχιστο δύο. Επίσης είναι φανερό ότι το πλήθος των ακμών *m* του Τ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τις ακμές που είναι προσκείμενες στο S_1. Έχουμε ότι

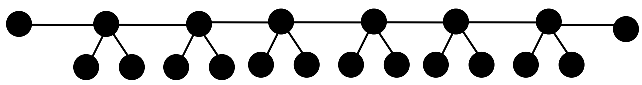
$$n-1 = m \geq \sum_{v \in S_1} d(v) \geq 2|S_1| = |S_1| + |S_1| \geq |S_1| + |S_2| = n,$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει.

Γ. Έστω p το πλήθος των κορυφών βαθμού k. Το δένδρο έχει m=n-1 ακμές. Έχουμε ότι

$$\sum_{v \in T} d(v) = p*k + (n-p)*1 = 2m = 2(n-1) \Rightarrow n = 2 + p*k - p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = 2 + p*(k-1)$$

Ένα παράδειγμα είναι το εξής για p=6, k=4



Άσκηση 3 (6η Εργασία 2009-10, Ερώτημα 4)

1. Έστω δένδρο *T(V,E)* με άρτιο αριθμό ακμών. Να δείξετε ότι τουλάχιστον μία κορυφή του δένδρου έχει άρτιο βαθμό.

2. Έστω δένδρο *T(V,E)*. Να αποδείξετε ότι όλες οι κορυφές του δένδρου έχουν περιττό βαθμό, αν και μόνο αν, για κάθε ακμή *e* του δένδρου *T* ισχύει ότι και οι δύο συνιστώσες του *T-e* έχουν περιττό πλήθος κορυφών.

Απάντηση.

1. Έστω $|E| = 2k, \kappa \geq 0$ και επειδή Τ είναι δένδρο έχουμε $|V| = |E| + 1 = 2k + 1$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι δεν υπάρχει κορυφή του δένδρου με άρτιο βαθμό, δηλαδή $\forall v_i \in V, \quad d(v_i) = 2k_i + 1, \; \kappa_\iota \geq 0$. Με βάση και το πρώτο θεώρημα της θεωρίας γράφων έχουμε ότι

$$2(2k) = 2|E| = \sum_i d(v_i) = \sum_i (2k_i + 1) = \sum_i 2k_i + \sum_i 1 = \sum_i 2k_i + |V| = (2k+1) + \sum_i 2k_i$$

Δηλαδή

$2(2k) = (2k+1) + \sum_i 2k_i \Rightarrow \sum_i 2k_i = 2k - 1$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα πρέπει τ τουλάχιστον μία κορυφή του δένδρου έχει άρτιο βαθμό.

2.

===> Έστω ότι όλες οι κορυφές του δένδρου έχουν περιττό βαθμό και έστω $T_1(V_1, E_1)$, $T_2(V_2, E_2)$ οι δυο συνιστώσες του *T-e*. Το δένδρο T_1 έχει μόνο μία κορυφή έστω *v*, με άρτιο βαθμό και όλες τις άλλες, έστω $V' = V_1 - v$, με περιττό βαθμό. Αλλά από το πρώτο θεώρημα της θεωρίας γράφων έχουμε $2|E_1| = \sum_{v_i \in V_1} d(v_i)$, δηλαδή το άθροισμα $\sum_i d(v_i)$ πρέπει να είναι άρτιο. Για να ισχύει αυτό πρέπει να έχουμε άρτιο πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό. Δηλαδή $|V'|$ είναι άρτιο οπότε το $|V_1|$ δηλαδή το πλήθος των κορυφών του T_1 είναι περιττό.

Ομοίως και για το T_2.

<===Έστω τώρα ότι για κάθε ακμή *e* του δένδρου T ισχύει ότι και οι δύο συνιστώσες του *T-e* έχουν περιττό πλήθος κορυφών, έστω m_1 και m_2 αντίστοιχα. Τότε το πλήθος *n* των κορυφών του δένδρου *T* είναι $n = m_1 + m_2$ το οποίο είναι άρτιο. Έστω τώρα μια τυχαία κορυφή v του δένδρου *T* με βαθμό $d(v)=k$. Αν διαγράψουμε την *v* από το δένδρο *T*, τότε δημιουργούνται *k* συνιστώσες $T_1, T_2, \ldots, T_\kappa$ του δένδρου *T-v* και έστω $n_1, n_2, \ldots, n_k$ το πλήθος των κορυφών τους αντίστοιχα. Η διαγραφή της κορυφής *v* συνεπάγεται την διαγραφή των προσκείμενων ακμών και επομένως από την υπόθεση μπορούμε να πούμε ότι όλα τα $n_1, n_2, \ldots, n_k$ είναι περιττά.

Αλλά $n = 1 + (n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$ και επειδή το n είναι άρτιο θα πρέπει το *k* να είναι περιττό. Δηλαδή για τυχαία κορυφή *v* του δένδρου *T* πρέπει ο βαθμός της $d(v)=k$ να είναι περιττός.

Άσκηση 4 (6η Εργασία 2006-07, Ερώτημα 3)

Δίνονται οι παρακάτω αλγόριθμοι για την εύρεση του ελάχιστου γεννητορικού δένδρου σε ένα συνδεδεμένο μη κατευθυνόμενο γράφο G με βάρη $w: E(G) \rightarrow R$ στις ακμές.

Kruskal

1. $T := 0$

2. Διάταξε τις ακμές του γράφου κατά αύξουσα σειρά βάρους $w(e_1) \le w(e_2) \le \Lambda \le w(e_n)$

3. for $i = 1, n$

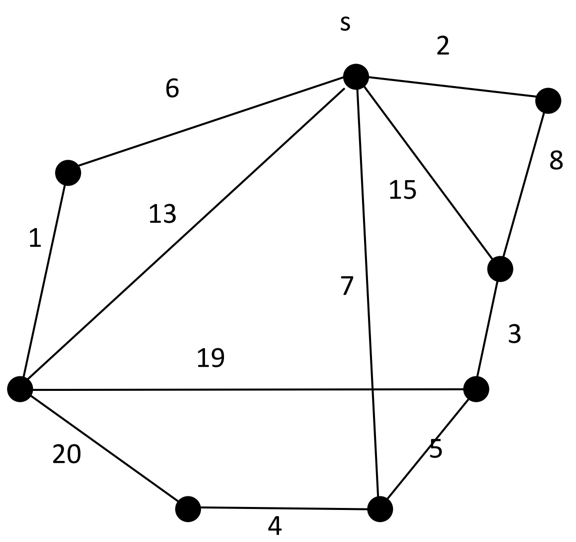
4. εάν το $T \cup \{e_i\}$ δεν περιέχει κύκλο θέσε $T := T \cup \{e_i\}$

5. end for

Prim

1. Για κάποια κορυφή $s \in V(G)$ θέσε $T := \{s\}$
2. while ($|E(G)| < n-1$)
3. έστω $e = (v_i, v_j)$ ακμή ελάχιστου βάρους για $v_i \in V(T), v_j \in V(G-T)$
4. $T := T \cup \{e\}$
5. end while

1. Εφαρμόστε τον αλγόριθμο του Prim στον γράφο του σχήματος 1, ξεκινώντας από την κορυφή s. Να δείξετε πως διαμορφώνεται το γεννητορικό δένδρο σε κάθε βήμα του αλγόριθμου.

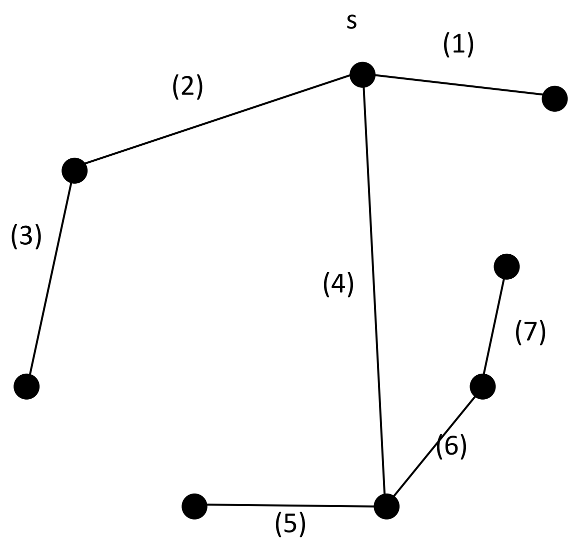


Σχήμα 1.

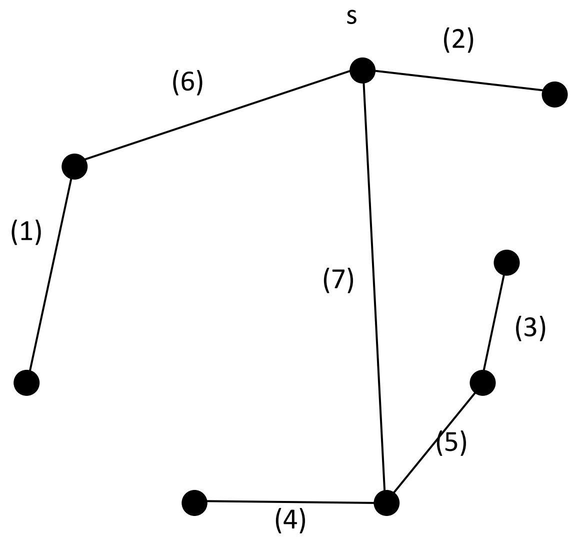
2. Εφαρμόστε τον αλγόριθμο του Kruskal στον γράφο του σχήματος 1. Να δείξετε πως διαμορφώνεται το γεννητορικό δένδρο σε κάθε βήμα του αλγόριθμου.
3. Έστω T_1 και T_2 δύο γεννητορικά δένδρα ενός γράφου $G(V,E)$ και e μία ακμή του T_1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία ακμή f του T_2 τέτοια ώστε $(T_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ είναι επίσης γεννητορικό δένδρο του $G(V,E)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Prim βλέπουμε ότι το γεννητορικό δένδρο ελάχιστου βάρους είναι το παρακάτω, όπου σε κάθε ακμή αναφέρουμε την σειρά με την οποία προστέθηκε στο δένδρο.



2. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Kruskal βλέπουμε ότι to γεννητορικό δένδρο ελάχιστου βάρους είναι το παρακάτω, όπου σε κάθε ακμή αναφέρουμε την σειρά με την οποία προστέθηκε στο δένδρο.



3. Η ακμή e του T_1 είναι γέφυρα, όπως και κάθε ακμή σε ένα δένδρο, οπότε η διαγραφή της από το T_1 θα δημιουργήσει δύο συνεκτικές συνιστώσες, έστω *A, B* τα οποία είναι επίσης δένδρα. Αρκεί να βρούμε μία ακμή f του T_2 τέτοια ώστε για $f=(v,w)$, $v\in V(A), w\in V(B)$ εφόσον τότε θα έχουμε ότι ο υπογράφος που σχηματίζεται από τα *A, B* και την ακμή f, δηλαδή το $(T_1-\{e\})\cup\{f\}$, θα είναι γεννητορικό δένδρο επειδή α) $V(G)=V(A)\cup V(B)$ άρα θα παράγει το G και β) για κάθε δύο κορυφές $v\in V(A), w\in V(B)$ υπάρχει ένα μονοπάτι που τις συνδέει που χρησιμοποιεί την ακμή f μόνο, άρα για κάθε δύο κορυφές υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που τις συνδέει. Το σύνολο $\{f=(v,w)\in E(T_2)\,|\,v\in V(A), w\in V(B)\}$ δεν είναι κενό, εφόσον εάν ήτανε τότε το T_2 δεν θα ήτανε γεννητορικό δένδρο επειδή $V(G)=V(A)\cup V(B)$ και δεν θα είχαμε μονοπάτι μεταξύ δύο κορυφών του G.

Άσκηση 5 (6η Εργασία 2008-09, Ερώτημα 2)

Α. Υπολογίσατε το πλήθος των διαφορετικών συνδετικών δένδρων του πλήρους διμερούς γράφου $K_{2,n}$ όπου κάθε κορυφή του $K_{2,n}$ έχει μια διαφορετική ετικέτα.

Β. Μία *ισομορφική κλάση* είναι μία κλάση ισοδυναμίας που ορίζεται από την σχέση ισοδυναμίας του ισομορφισμού γράφων. Να βρείτε το πλήθος των ισομορφικών κλάσεων στις οποίες χωρίζεται το σύνολο των συνδετικών δένδρων του $K_{2,n}$.

Γ. Για κάποιο απλό γράφο *G* έστω n_k το πλήθος των κορυφών με βαθμό $k\geq 0$. Έστω ότι τα n_k είναι τα εξής.

k	0	1	2	3	4	5	6

n_k	0	39	24	10	3	1	2

Ο γράφος *G* δεν έχει κορυφές με βαθμό μεγαλύτερο από 6 και επιπλέον δεν έχει κύκλους. Να βρεθεί το πλήθος των συνιστωσών του *G*.

Απάντηση.

Α. Οι κορυφές του $K_{2,n}$ χωρίζονται σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας $A=\{v_1,v_2\}$ και $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$. Για να κατασκευάσουμε ένα συνδετικό δένδρο του $K_{2,n}$ κάνουμε τα εξής. Ένα συνδετικό δένδρο του $K_{2,n}$ έχει $n+1$ ακμές.

Ενέργεια 1. Επιλέγουμε μία κορυφή από το *B* και ο ενώνουμε με τις δύο κορυφές του *A*.

Ενέργεια 2. Για να συμπληρώσουμε το συνδετικό δένδρο ενώνουμε κάθε μία από τις υπόλοιπες n-1 κορυφές του συνόλου Β με μια από τις δύο κορυφές του συνόλου *A*. Για κάθε μια από τις κορυφές του *B* έχουμε 2 δυνατότητες.

Υπάρχουν *n* τρόποι για την ενέργεια 1. Υπάρχουν 2^{n-1} τρόποι για την ενέργεια 2. Άρα συνολικά υπάρχουν $n*2^{n-1}$ συνδετικά δένδρα του $K_{2,n}$.

Β. Έστω $A=\{v_1,v_2\}$ και $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ τα δύο μέρη του $K_{2,n}$ με $|A|=2$ και $|B|=n$. Έστω V_1, V_2 τα σύνολα των κορυφών του *B* που είναι γειτονικές στις v_1, v_2 αντίστοιχα. Τα σύνολα V_1, V_2 έχουν μόνο μία κορυφή κοινή διαφορετικά, αν είχαν δυο κοινές, θα σχηματιζόταν κύκλος μήκους 4. Άρα υπάρχουν n-1 κορυφές από το Β που πρέπει να μοιραστούν στα V_1, V_2 και θα είναι τα φύλλα των v_1, v_2 στο συνδετικό δένδρο. Βάζουμε m στο V_1 και n-m-1 στο V_2. Το πλήθος των ισομορφικών κλάσεων στις οποίες χωρίζεται το σύνολο των συνδετικών δένδρων του $K_{2,n}$ είναι οι τιμές που παίρνει το *m* δηλαδή $0\le m\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$. Άρα υπάρχουν $\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$ ισομορφικές κλάσεις για το σύνολο των συνδετικών δένδρων του $K_{2,n}$.

Γ. Έστω m το πλήθος των ακμών και n το πλήθος των κορυφών του γράφου G. Από τον πίνακα έχουμε ότι $n=\sum_{k=0}^{6}n_k=79$ και χρησιμοποιώντας το πρώτο θεώρημα της θεωρίας γράφων έχουμε ότι $2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{k=0}^{6}k*n_k=146\Rightarrow m=73$.

Δεδομένου ότι ο G δεν έχει κύκλους μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε (συνδεδεμένη) συνιστώσα είναι δένδρο. Έστω λοιπόν συνιστώσες G_i, i=1,2,..,p με a_i κορυφές και e_i ακμές αντίστοιχα η κάθε μία. Προφανώς $a_i - e_i = 1$, i=1,2,..,p. Για τον γράφο G τώρα έχουμε ότι,

$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 79$

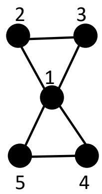
$m = e_1 + e_2 + \ldots + e_p = 73$

$79 - 73 = n - m = (a_1 - e_1) + (a_2 - e_2) + \ldots + (a_p - e_p) = 1 + 1 + \ldots + 1 = p$

Δηλαδή ο G είναι δάσος και έχει p=6 συνιστώσες που είναι δένδρα.

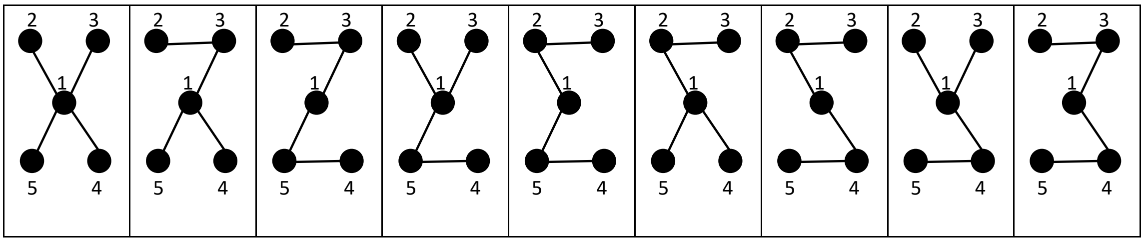
Άσκηση 6 (6η Εργασία 2012-13, Ερώτημα 3)

Α. Πόσα συνδετικά δένδρα έχει ο παρακάτω γράφος; Δώσατε μια ακολουθία των συνδετικών δένδρων έτσι ώστε δυο διαδοχικά δένδρα να διαφέρουν κατά μια ακμή αρχίζοντας από το συνδετικό δένδρο σε σχήμα Χ.



Απάντηση.

Υπάρχουν 2 κύκλοι που πρέπει να σπάσουν, άρα 3*3=9 συνδετικά δένδρα.



Β. Έστω συνδεδεμένος μη κατευθυνόμενος γράφος G(V,E) με |V|=n και SP={T_i| T_i συνδετικό δένδρο του G}. Ορίζουμε ένα νέο γράφο G'(V',E'), με τόσες κορυφές v_{Ti} όσα και τα συνδετικά δένδρα του G, και μία ακμή για κάθε ζεύγος συνδετικών δένδρων του G που έχουν ακριβώς n-2 κοινές ακμές (ή αλλιώς διαφέρουν κατά μία ακμή). Να δείξετε ότι ο γράφος G' είναι συνδεδεμένος, δηλαδή ότι εάν T_1, T_2 είναι δυο συνδετικά δένδρα του G τότε υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή v_{T1} στην κορυφή v_{T2} στον G'. (Σχόλιο. Χρησιμοποιήστε επαγωγή στο πλήθος των ακμών κατά τις οποίες διαφέρουν τα συνδετικά δένδρα. Επίσης δείτε την πρόταση 2.6 Τόμος Β).

Απάντηση.

Έστω T_1, T_2 είναι δυο συνδετικά δένδρα του G. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο πλήθος k των ακμών που διαφέρουν τα συνδετικά δένδρα. Επειδή ο G έχει n κορυφές τα συνδετικά δένδρα έχουν n-1 ακμές άρα δυο συνδετικά δένδρα είναι δυνατόν να διαφέρουν κατά k=0,1,…,n-1 ακμές.

Βάση: Για k=0 έχουμε $T_1=T_2$ οπότε υπάρχει τετριμμένο μονοπάτι μεταξύ τους.

Υπόθεση: Έστω ότι για δύο συνδετικά δένδρα που διαφέρουν κατά το πολύ k=n-2 ακμές υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή v_{T1} στην κορυφή v_{T2} στον G'.

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε δυο διαφορετικά συνδετικά δένδρα T_1, T_2. Έστω μια ακμή $e \in T_1, e \notin T_2$. Τότε υπάρχει μια ακμή $e' \notin T_1, e' \in T_2$ έτσι ώστε $T_1' = (T_1 - e) + e'$ να είναι συνδετικό δένδρο του G (Πρόταση 2.6 Τόμος Β). Παρατηρούμε ότι T_1 και T_1' έχουν κοινές n-2 ακμές (διαφέρουν κατά μια ακμή) και άρα υπάρχει ακμή από την κορυφή v_{T1} στην κορυφή $v_{T'1}$ στον G' εξ ορισμού. Επίσης παρατηρούμε ότι T_1' και T_2 διαφέρουν κατά το πολύ n-2 ακμές (έχουν μία κοινή ακμή την e') και άρα από την υπόθεση υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή $v_{T'1}$ στην κορυφή v_{T2} στον G'. Άρα τελικά υπάρχει μονοπάτι ό την κορυφή v_{T1} στην κορυφή v_{T2} στον G' και ο οποίος έτσι είναι συνδεδεμένος.

Άσκηση 7 (6η Εργασία 2015-16, Ερώτημα 1)

Καλούμε μια κορυφή x ενός γραφήματος G με τουλάχιστον δύο κορυφές *σημείο κοπής* αν το γράφημα που προκύπτει μετά από την αφαίρεση της x από το G έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από ότι το G. Μια κορυφή ενός δέντρου καλείται *φύλλο* όταν έχει βαθμό το πολύ 1. Στις απαντήσεις σας στο καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο τον ορισμό του δέντρου, τους παραπάνω ορισμούς, τον ορισμό της συνεκτικότητας, και προτάσεις υποερωτημάτων του παρόντος ερωτήματος που έχετε ήδη αποδείξει.

1.Α. Δείξτε ότι ένα δέντρο T με τουλάχιστον μια ακμή έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

Υπόδειξη: Θεωρείστε μέγιστο μονοπάτι (δηλ. μονοπάτι που δεν περιέχεται *γνησίως* σε άλλο μονοπάτι) και δείξτε ότι τα άκρα του είναι φύλλα.

1.Β. Έστω μια κορυφή x ενός δέντρου T με τουλάχιστον μια ακμή. Δείξτε ότι αν η x δεν είναι φύλλο του T, τότε η x είναι σημείο κοπής.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το γράφημα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την x από το δέντρο T και δείξτε ότι δεν είναι συνεκτικό.

1.Γ. Δείξτε πρώτα ότι κάθε δέντρο T με τουλάχιστον 3 κορυφές έχει σημείο κοπής.

Υπόδειξη: από το **1.Α**, το T έχει τουλάχιστον δύο φύλλα, έστω τα x και y. Δείξτε πρώτα ότι δεν υπάρχει ακμή που να συνδέει τις x και y στο T. Στην συνέχεια θεωρήστε το μονοπάτι που συνδέει τις x και y στο T και χρησιμοποιήστε το **1.Β.**

1.Δ. Δείξτε ότι κάθε δέντρο χωρίς σημεία κοπής είναι ισόμορφο είτε με το γράφημα K_1 ή με το γράφημα K_2.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το **1.Γ.**

Απάντηση

1.Α. Έστω P μονοπάτι μέγιστου μήκους στο T και έστω x και y τα άκρα του. Θα δείξουμε ότι η x έχει βαθμό το πολύ 1. Έστω p το μήκος του μονοπατιού P. Αφού το T έχει τουλάχιστον μία ακμή, το P έχει μήκος τουλάχιστον 1 και άρα η x και η y είναι διαφορετικές κορυφές.

Υποθέτουμε με σκοπό το άτοπο ότι η x έχει τουλάχιστον δύο γειτονικές κορυφές a και b και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η a ανήκει στο μονοπάτι P. Έστω επίσης Q το συντομότερο μονοπάτι στο T μεταξύ της y και της b. Έστω επίσης q το μήκος του Q. Αφού το P είναι μονοπάτι μέγιστου μήκους, έχουμε ότι $q \leq p$. Επίσης, παρατηρούμε ότι η x δεν μπορεί να είναι κορυφή του Q γιατί σε αυτή την περίπτωση θα υπήρχε ένα μονοπάτι μεταξύ της x και της y με μήκος $q - 1 \leq p - 1 < p$. Άρα το μονοπάτι Q αρχίζει από μια κορυφή (την b) που δεν είναι κορυφή του P και το μονοπάτι P αρχίζει από μια κορυφή (την x) που δεν είναι κορυφή του Q. Παρατηρούμε ότι τα μονοπάτια P και Q έχουν τουλάχιστον μια κοινή κορυφή, την y. Άρα η ένωση του Q και του P είναι συνεκτικό γράφημα που δεν περιέχει την ακμή (x, b), συνεπώς στο T υπάρχει μονοπάτι που ενώνει την x με την b το οποίο να μην περιέχει την ακμή (x, b). Αν σε αυτό το μονοπάτι προσθέσουμε την (x, b) προκύπτει κύκλος στο T, άτοπο γιατί το T είναι δέντρο. Άρα η x είναι φύλλο. Χρησιμοποιώντας την ίδια επιχειρηματολογία για την κορυφή y αντί για την x, προκύπτει επίσης ότι η y είναι φύλο. Καταλήγουμε ότι το T έχει τουλάχιστον 2 διαφορετικά μεταξύ τους φύλλα, τις κορυφές x και y.

Λύση με εφαρμογή του Λήμματος της Χειραψίας

Έστω n το πλήθος των κορυφών του T. Αφού το T έχει τουλάχιστον μια ακμή, το πλήθος των ακμών του είναι $n - 1 \geq 1$. Αν το πολύ μια κορυφή του T έχει βαθμό 1 τότε το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του δένδρου είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $1 + 2(n - 1)$. Από το Λήμμα της Χειραψίας όμως έχουμε ότι άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του T είναι ίσο με $2(n - 1)$. Άρα το T θα πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

1.Β. Έστω x κορυφή του δέντρου T που δεν είναι φύλο. Θα δείξουμε ότι η x είναι σημείο κοπής. Αφού η x δεν είναι φύλλο θα έχει βαθμό τουλάχιστον δύο. Έστω a και b γειτονικές κορυφές της x. Έστω επίσης T' το γράφημα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την x από το δέντρο T.

Θα δείξουμε πρώτα ότι το T' δεν είναι συνεκτικό. Πράγματι, αν το T' είναι συνεκτικό, τότε θα υπάρχει μονοπάτι P με άκρα τις a και b στο T', άρα και στο T, που να αποφεύγει την κορυφή x. Τότε όμως θα μπορούσαμε να προσθέσουμε στο μονοπάτι P τις ακμές (a, x) και (x, b) και να φτιάξουμε κύκλο στο T, άτοπο γιατί το T, ως δέντρο, είναι άκυκλο.

Αφού το T' δεν είναι συνεκτικό, τότε έχει τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες. Το T ως δέντρο είναι συνεκτικό, άρα έχει μια συνεκτική συνιστώσα. Αφού η αφαίρεση της x από το T αυξάνει το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών, έχουμε ότι η x είναι σημείο κοπής του T.

1.Γ. Από το **1.Α**, το T έχει τουλάχιστον δύο φύλλα, τα x και y.

Παρατηρούμε πρώτα ότι η (x, y) δεν είναι ακμή του T. Έστω, με σκοπό το άτοπο, ότι η ακμή (x, y) είναι ακμή του T και έστω z μια κορυφή του T διαφορετική του x και του y. Αφού το T είναι συνεκτικό, θα υπάρχει μονοπάτι P στο T που να συνδέει την x και την z. Αν το P δεν περιέχει την y τότε η x έχει γειτονική κορυφή στο P διαφορετική της y άρα έχει βαθμό τουλάχιστον 2, άτοπο. Αν το P περιέχει την y τότε η y θα είναι εσωτερική κορυφή του P άρα θα έχει βαθμό τουλάχιστον 2 στο T, πάλι άτοπο. Καταλήγουμε ότι η ακμή(x, y) δεν είναι ακμή του T.

Έστω Q μονοπάτι που συνδέει την x και την y στο συνεκτικό γράφημα T. Από την προηγούμενη παρατήρηση το μονοπάτι αυτό έχει μήκος τουλάχιστον 2, άρα περιέχει μια τουλάχιστον εσωτερική κορυφή. Αυτή η κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 2 στο T άρα, σύμφωνα με την κατεύθυνση «αν» του **1.Β**., είναι σημείο κοπής του T. Άρα ο αρχικός μας ισχυρισμός είναι σωστός και το T έχει μια σημείο κοπής.

1.Δ. Από την **1.Β**, κάθε δέντρο T χωρίς σημεία κοπής θα έχει το πολύ 2 κορυφές. Αν το T έχει μια κορυφή θα είναι ισόμορφο με το K_1 και αν το T έχει 2 κορυφές τότε, λόγω της συνεκτικότητάς του, οι δύο κορυφές αυτές θα πρέπει να είναι συνδεδεμένες και άρα το T είναι ισόμορφο με το K_2. Σε κάθε περίπτωση αποδείξαμε ότι το T είναι ισόμορφο είτε με το γράφημα K_1 ή με το γράφημα K_2.

Άσκηση 8 (6η Εργασία 2010-11, Ερώτημα 5)

Α. Για τις ερωτήσεις 1-3 θεωρήστε τον γράφο $K_{n,m}$ με κρυφές των συνόλων ανεξαρτησίας $\{v_1,..,v_n\}$, $\{u_1,\ldots,u_m\}$ αντίστοιχα και $1 \leq n < m$. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

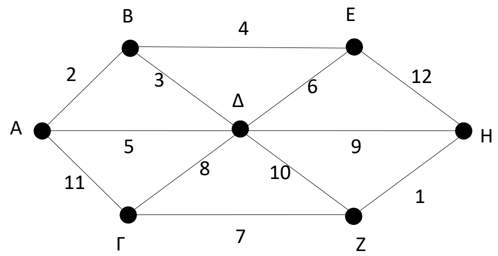
1. (Σ/Λ) Είναι δυνατόν να διαγράψουμε $(n\text{-}1)(m\text{-}1)$ ακμές έτσι ώστε ο γράφος που απομένει να είναι συνδετικό δένδρο του $K_{n,m}$.

2. (Σ/Λ) Η κατά-πλάτος διάσχιση του δέντρου ξεκινώντας από την v_1 κατασκευάζει ένα δένδρο με βάθος 3 (το βάθος της v_1 είναι 0).

3. (Σ/Λ) Η κατά-βάθος διάσχιση του δέντρου ξεκινώντας από την v_1 κατασκευάζει ένα δένδρο με βάθος $2n$-1 (το βάθος της v_1 είναι 0).

4. (Σ/Λ) Σε ένα συνδεδεμένο γράφο G μια ακμή που το ένα άκρο της είναι μια κορυφή βαθμού ένα, υπάρχει σε κάθε συνδετικό δένδρο του G.

Β. Για τις ερωτήσεις 1-4 θεωρήσατε τον ακόλουθο γράφο. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;



1. (Σ/Λ) Δυο από τα συνδετικά δένδρα του γράφου είναι ο $K_{1,6}$ και ο P_7.

2. (Σ/Λ) Έχει μόνο ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο.

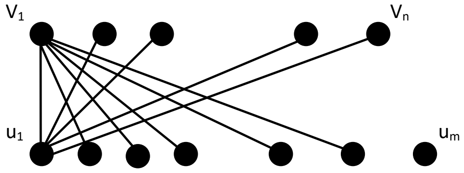
3. (Σ/Λ) Ο αλγόριθμος του Prim με αρχική κορυφή την *A* θα κατασκευάσει ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο μία από τις ακμές του οποίου θα είναι η (*Δ*, *Ε*).

4. (Σ/Λ) Ο αλγόριθμος του Dijkstra για την εύρεση των συντομότερων μονοπατιών από την κορυφή *A* προς όλες τις άλλες θα κατασκευάσει το ίδιο δένδρο με τον αλγόριθμο του Prim με αρχική κορυφή την *A*.

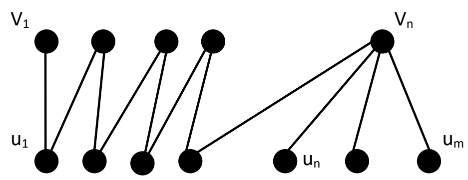
<u>Απάντηση:</u>

Α.(Σωστό) Ο $K_{n,m}$ έχει $n\times m$ ακμές και $n+m$ κορυφές. Ένα συνδετικό δένδρο του $K_{n,m}$ πρέπει να έχει $n+m$-1 ακμές άρα πρέπει να διαγραφούν $n\times m - (n+m-1) = (n-1)(m-1)$ ακμές έτσι ώστε ο γράφος που απομένει να είναι συνδετικό δένδρο του $K_{n,m}$.

1. **(Λάθος)** Η κατά-πλάτος διάσχιση ξεκινώντας από την v_1 κατασκευάζει ένα δένδρο με βάθος 2 όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.



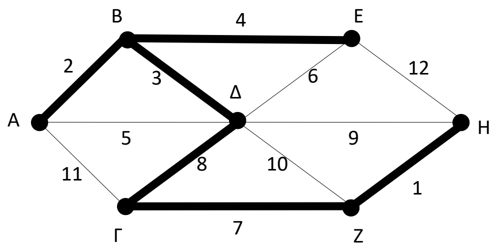
2. **(Σωστό)** Η κατά-βάθος διάσχιση ξεκινώντας από την v_1 κατασκευάζει ένα δένδρο με βάθος 2n-1 το οποίο φαίνεται στο παρακάνω σχήμα.



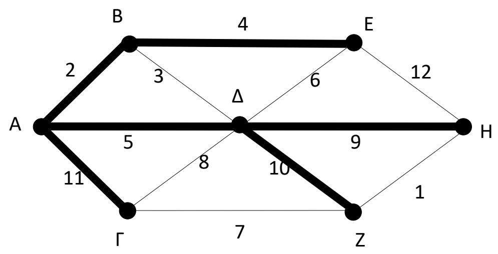
3. **(Σωστό)** Κάθε συνδετικό δένδρο του G συνδέει όλες τις κορυφές του γράφου. Ο μόνος τρόπος σύνδεσης μια κορυφής βαθμού ένα με το υπόλοιπο δένδρο είναι με την χρήση της μοναδικής ακμής στον G που προσπίπτει σε αυτή την κορυφή. Άρα αυτή η ακμή πρέπει να υπάρχει σε κάθε συνδετικό δένδρο του G.

Β.(Σωστό) Ένα συνδετικό δένδρο του γράφου είναι το αστέρι (το $K_{1,6}$) με κεντρική κορυφή την Δ και περιφερειακές τις υπόλοιπες. Ένα άλλο συνδετικό δένδρο του γράφου είναι το μονοπάτι ο P_7, π.χ (Α,Β,Ε,Η,Ζ,Γ,Δ).

1. **(Σωστό)** Έχει μόνο ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο διότι όλα τα βάρη στις ακμές είναι διαφορετικά.
2. **(Λάθος)** Ο αλγόριθμος του Prim με αρχική κορυφή την Α θα προσθέσει στο δένδρο με την σειρά τις ακμές ΑΒ, ΒΔ, ΒΕ, ΔΓ, ΓΖ, ΖΗ. Μετά την προσθήκη των ακμών ΒΔ, ΒΕ (και επομένως των κορυφών Δ,Ε) στο δένδρο, ο αλγόριθμος δεν λαμβάνει υπόψη την ΔΕ αφού συνδέει κορυφές που ήδη είναι στο δένδρο και επομένως θα δημιουργούσε κύκλο.



3. **(Λάθος)** Ο αλγόριθμος του Dijkstra για την εύρεση των συντομότερων μονοπατιών από την κορυφή Α προς όλες τις άλλες θα κατασκευάσει το παρακάτω δένδρο ελάχιστων μονοπατιών από την Α προς όλες τις άλλες κορυφές.

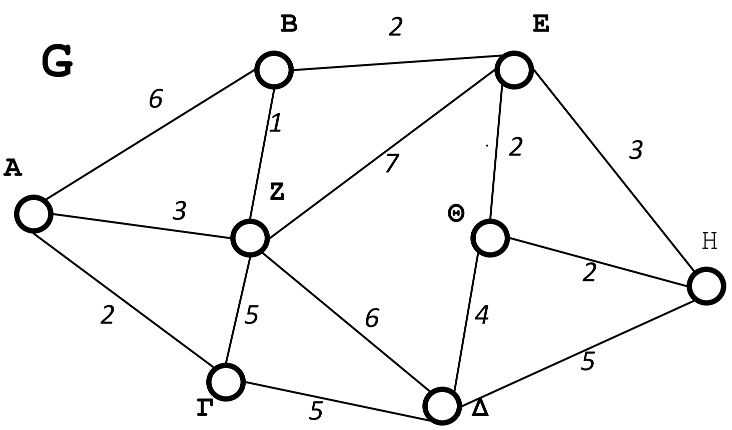


Άσκηση 9 (6η Εργασία 2013-14, Ερώτημα 5)

(α) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

1. (Σ/Λ) Η ακολουθία (4,4,3,3,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1) αντιστοιχεί σε δένδρο.
2. (Σ/Λ) Ένας συνδεδεμένος γράφος G(V,E) με |V|=|E| έχει τουλάχιστον τρία συνδετικά δένδρα.
3. (Σ/Λ) Δεν υπάρχει απλός επίπεδος γράφος με μία μόνο όψη.
4. (Σ/Λ) Ο K_5 με κορυφές {v1,v2,v3,v4,v5} έχει 125 συνδετικά δένδρα.

(β) Θεωρήσατε τον ακόλουθο γράφο. Όπου χρειάζεται, υποθέσατε λεξικογραφική διάταξη κορυφών. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;



1. (Σ/Λ) Το ελάχιστο συνδετικό δένδρο που κατασκευάζει ό αλγόριθμος του Prim είναι το ίδιο με το δένδρο ελάχιστων μονοπατιών που κατασκευάζει ο αλγόριθμος του Dijkstra με αρχική κορυφή Α.
2. (Σ/Λ) Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου του Dijkstra δεν επηρεάζεται αν τα βάρη των ακμών μειωθούν κατά 3.

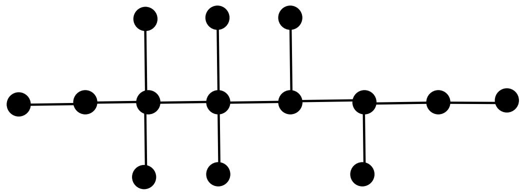
3. (Σ/Λ) Το συνδετικό δένδρο που κατασκευάζει η διάσχιση κατά βάθος από την κορυφή Ζ έχει μια ακριβώς κορυφή με βαθμό 3.
4. (Σ/Λ) Η διάσχιση κατά πλάτος από την κορυφή Θ θα επισκεφτεί την κορυφή Α πριν από την κορυφή Β.

Απάντηση:

(α) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

1. (**Σ**/Λ) Η ακολουθία (4,4,3,3,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1) αντιστοιχεί σε δένδρο.

   Σωστό. Εάν πρόκειται για συνδεδεμένο γράφο έχουμε το παρακάτω δένδρο.

   [Όμως υπάρχουν και μη συνδεδεμένοι γράφοι, με την ίδια ακολουθία, που δεν είναι δένδρα.]

2. (**Σ**/Λ) Ένας συνδεδεμένος γράφος G(V,E) με |V|=|E| έχει τουλάχιστον τρία συνδετικά δένδρα.

   Σωστό. Ο γράφος έχει ένα κύκλο με μήκος τουλάχιστον 3. Εδώ θεωρούμε ότι ο γράφος είναι απλός. [**Σχόλιο**: Εάν ο γράφος δεν είναι απλός τότε η παραπάνω πρόταση δεν είναι αληθής.]

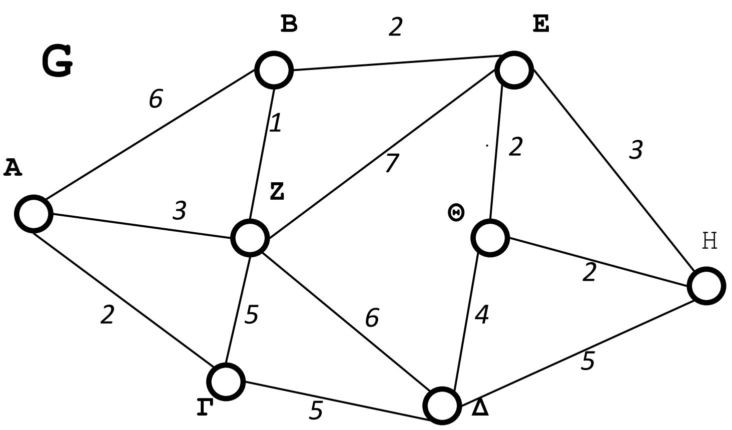
3. (Σ/**Λ**) Δεν υπάρχει απλός επίπεδος γράφος με μία μόνο όψη.

   Λάθος. Τα δένδρα είναι επίπεδοι γράφοι με μία όψη.

4. (**Σ**/Λ) Ο K_5 με κορυφές {v1,v2,v3,v4,v5} έχει 125 συνδετικά δένδρα.

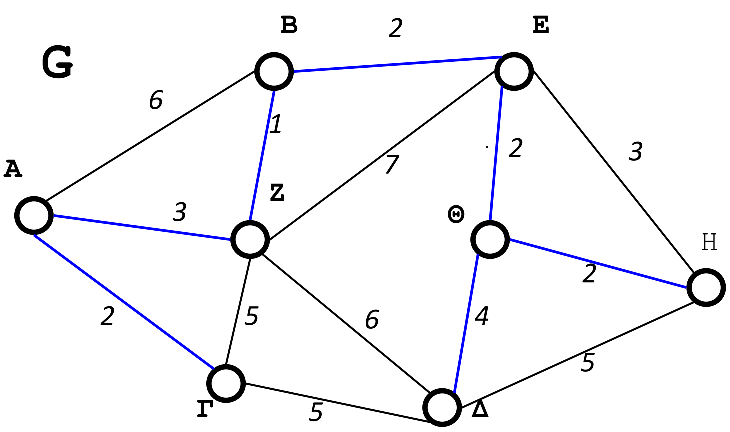
   Σωστό. Υπάρχουν 5^3 συνδετικά δένδρα του K_5 (Θεώρημα του Cayley)

(β) Θεωρήσατε τον ακόλουθο γράφο. Όπου χρειάζεται, υποθέσατε λεξικογραφική διάταξη κορυφών. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

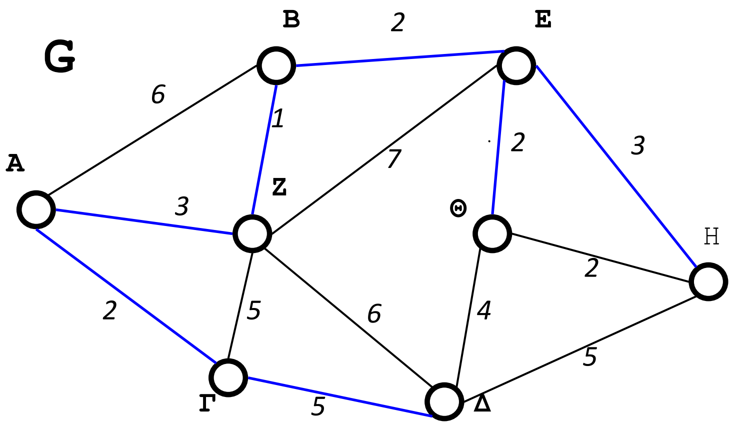


1. (Σ/**Λ**) Το ελάχιστο συνδετικό δένδρο που κατασκευάζει ό αλγόριθμος του Prim είναι το ίδιο με το δένδρο ελάχιστων μονοπατιών που κατασκευάζει ο αλγόριθμος του Dijkstra με αρχική κορυφή Α.

   Λάθος. Ο αλγόριθμος του Prim με αρχική κορυφή Α δίνει το ακόλουθο ΕΣΔ με βάρος 16.



   Ο αλγόριθμος του Dijkstra με αρχική κορυφή Α δίνει το ακόλουθο δένδρο ελάχιστων μονοπατιών.

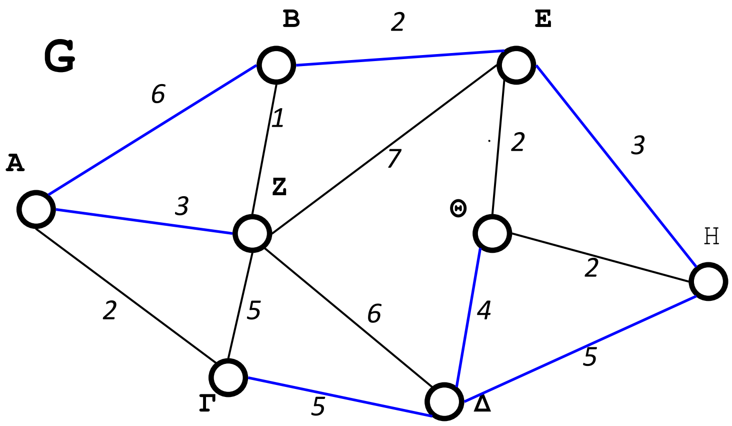


2. (Σ/**Λ**) Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου του Dijkstra δεν επηρεάζεται αν τα βάρη των ακμών μειωθούν κατά 3.

   Λάθος. Ο γράφος θα έχει έτσι αρνητικές ακμές (θα έχει και αρνητικό κύκλο)

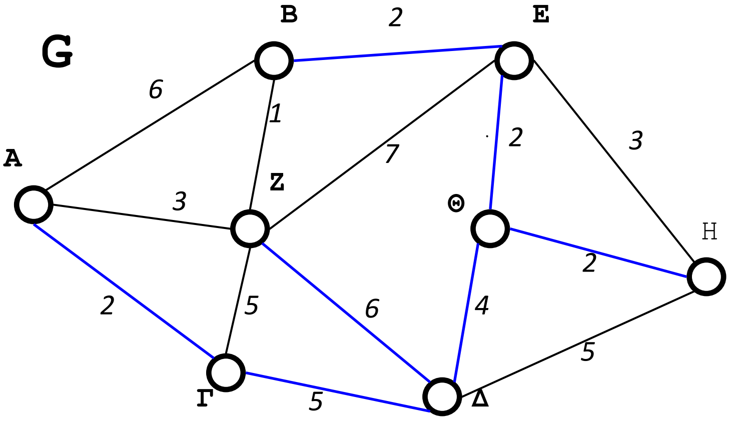
3. (**Σ**/Λ) Το συνδετικό δένδρο που κατασκευάζει η διάσχιση κατά βάθος από την κορυφή Ζ έχει μια ακριβώς κορυφή με βαθμό 3.

   Σωστό. Η διάσχιση δίνει το παρακάτω δένδρο με σειρά επίσκεψης κορυφών ΖΑΒΕΗΔΓΘ



4. (Σ/**Λ**) Η διάσχιση κατά πλάτος από την κορυφή Θ θα επισκεφτεί την κορυφή Α πριν από την κορυφή Β.

   Λάθος. Η διάσχιση δίνει το παρακάτω δένδρο με σειρά επίσκεψης κορυφών ΘΔΕΗΓΖΒΑ


G
Α
Β
Γ
Δ
Ε
Ζ
Η
Θ
6
2
1
3
7
2
3
2
2
5
6
4
5
5