

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΔΕΟ13 θα πρέπει να γραφεί: «*ioannou_ge2_deo13.doc*».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όνοματεπώνυμο φοιτητή	<Όνομα Φοιτητή> <Επώνυμο Φοιτητή>
-----------------------	-----------------------------------

Κωδικός ΘΕ	ΠΛΗ 20	Όνοματεπώνυμο Καθηγητή -Σύμβουλου	<Όνομα ΣΕΠ> <Επώνυμο ΣΕΠ>
Κωδικός Τμήματος	<ΤΜΗΜΑ>	Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (ημέρα Τρίτη)	Τετάρτη, 14/3/2018
Ακ. Έτος	2017-2018	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	4η	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικά, ολογράφως)	

Υπογραφή
Φοιτητή

Υπογραφή
Καθηγητή-Συμβούλου

Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2017-2018

Ε ρ γ α σ ί α 4η

Αλγόριθμοι, Θεωρία Γραφημάτων

*Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της Θεωρίας Γραφημάτων και μια επανάληψη των Αναδρομικών Αλγορίθμων. Η εργασία πρέπει να γραφεί ηλεκτρονικά και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας study.eap.gr το αργότερο μέχρι την **Τετάρτη 14/3/2018**.*

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα. Για να συμπληρώσετε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.
2. Στο αρχείο αυτό πρέπει να **προσθέσετε** τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:
<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>
την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. Η εργασία περιλαμβάνει **5** βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.
4. **Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις.** Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:

Προηγούμενες εργασίες: 4^η Εργασία των πέντε τελευταίων ακαδημαϊκών ετών 2012-2013, 2013-2014, 2014-2015, 2015-2016 και 2016-2017.

Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ενδεικτικά αναφέρονται τα θέματα Θεωρίας Γραφημάτων στις εξεταστικές περιόδους των ετών 2012-2017.

Συμπληρωματικό Υλικό στη Θεωρία Γραφημάτων: Στην ηλεκτρονική διεύθυνση <http://study.eap.gr/course/view.php?id=78> διατίθενται σημειώσεις για τη Θεωρία Γραφημάτων του κ. Σ. Κοντογιάννη, μια συλλογή ασκήσεων (με τις λύσεις τους) του κ. Χ. Σαρίμβεη, και ο πίνακας αντιστοίχισης των όρων που χρησιμοποιούνται στους Τόμους Α και Β, του κ. Χ. Σαρίμβεη. Για την αποδεικτική μέθοδο της επαγωγής είναι πολύ χρήσιμη η μελέτη του παράλληλου υλικού του κ. Δ. Φωτάκη, το οποίο διατίθεται μαζί με τον σχετικό οδηγό μελέτης, επίσης στην παραπάνω διεύθυνση.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτημα	Μέγιστος βαθμός	Βαθμός
1	20	
2	25	
3	20	
4	25	
5	10	
Συνολικός Βαθμός:	100	0

Γενικά Σχόλια:

<γενικά σχόλια για την εργασία από το Σύμβουλο-Καθηγητή>

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξοικείωση με τους αναδρομικούς αλγόριθμους και με τις επαγωγικές αποδείξεις.

ΣΥΝΟΛΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #1 και #2.

Στον παρακάτω αλγόριθμο, το a είναι θετικός και το n μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Το $n \div 2$ και το $n \bmod 2$ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του n με το 2.

```
procedure power (a,n)
  if n=0 then return (1)
  if n=1 then return (a)
  m:=n div 2           // πηλίκο της ακέραιας διαίρεσης
  r:=n mod 2           // υπόλοιπο της ακέραιας διαίρεσης
  b:=a*a
  c:=power(b,m)
  if r=0 then return (c)
  else return (a*c)
```

- 1) Υπολογίστε τις τιμές $\text{power}(a,2)$, $\text{power}(a,3)$, $\text{power}(a,4)$.
- 2) Εξηγήστε τί υπολογίζει ο αλγόριθμος και αποδείξτε το με επαγωγή στο n .
- 3) Εάν $T(n)$ είναι το πλήθος των πολλαπλασιασμών που εκτελεί ο αλγόριθμος σε είσοδο (a, n) , για $n \geq 1$, αποδείξτε ότι $T(n) \leq 2 \log_2(n)$.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $n \div 2 = \lfloor n/2 \rfloor$. Βρείτε μία αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η $T(n)$ και χρησιμοποιήστε επαγωγή στο n .

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

Αξιολόγηση Ερωτήματος

Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:

<σχόλια>

Αξιολόγηση Ερωτήματος :

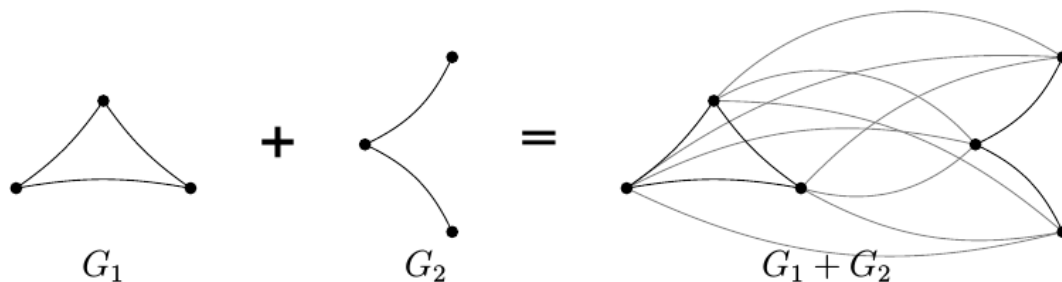
/ 20

Ερώτημα 2.

Στόχος του ερωτήματος αυτού είναι η κατανόηση των εννοιών του χρωματικού αριθμού και της μέγιστης κλίκας καθώς και η εφαρμογή τους σε επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

ΣΥΝΟΛΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #3 και #4.

A) Δεδομένων δύο γραφημάτων G_1, G_2 κατασκευάζουμε ένα νέο γράφημα $G_1 + G_2$ το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές και ακμές των G_1, G_2 και επιπλέον, κάθε κορυφή του G_1 συνδέεται με μία νέα ακμή με κάθε κορυφή του G_2 .



- 1) Δείξτε ότι $\omega(G_1 + G_2) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$, όπου $\omega(G_i)$ είναι ο αριθμός κλίκας του γραφήματος.
 - 2) Υπολογίστε το $\omega(K_{n_1, \dots, n_k})$, όπου K_{n_1, \dots, n_k} είναι ένα πλήρες k -μερές γράφημα.
- B) Σε ένα Τμήμα Πληροφορικής προσφέρονται n μαθήματα, τα οποία αριθμούμε $1, 2, \dots, n$. Συμβολίζουμε με M_i το σύνολο των φοιτητών που είναι εγγεγραμμένοι στο μάθημα i , για $1 \leq i \leq n$. Για την εξεταστική περίοδο υπάρχουν n διαθέσιμες αίθουσες, αλλά μόνο ένα τρίωρο ανά ημέρα (ας πούμε 9 - 12 το πρωί). Για τον προγραμματισμό της εξεταστικής υπάρχει μόνο ο εξής κανόνας: "δύο μαθήματα τα οποία έχουν εγγεγραμμένο ένα τουλάχιστον κοινό φοιτητή δεν εξετάζονται την ίδια ημέρα". Εάν, για παράδειγμα, δεν υπάρχει φοιτητής ο οποίος να είναι εγγεγραμμένος σε δύο μαθήματα, τότε ένας δυνατός προγραμματισμός είναι να εξεταστούν όλα τα μαθήματα, παράλληλα, την 1η ημέρα. Φυσικά, υπάρχουν πολλοί ακόμη προγραμματισμοί που σέβονται τον κανόνα. Για παράδειγμα, το μάθημα i να εξεταστεί την ημέρα i . Ο πρώτος προγραμματισμός είναι βέλτιστος

ως προς το πλήθος των ημερών που απαιτούνται για τη εξέταση όλων των μαθημάτων. Ένας προγραμματισμός εξετάσεων που ικανοποιεί τον κανόνα θα ονομάζεται "επιτρεπτός". Ένας επιτρεπτός προγραμματισμός ο οποίος απαιτεί τον ελάχιστο δυνατό αριθμό ημερών ονομάζεται "βέλτιστος".

- 1) Περιγράψτε πώς μπορεί να διατυπωθεί το παραπάνω πρόβλημα εύρεσης επιτρεπτών προγραμματισμών ως πρόβλημα γραφημάτων. Ειδικότερα, δεδομένων των συνόλων M_1, \dots, M_n περιγράψτε κάποιο γράφημα G (περιγράφοντας σε ποιά δεδομένα αντιστοιχούν οι κορυφές και σε ποιά οι ακμές) και κάποια έννοια (σχετιζόμενη με το γράφημα G), η οποία να αντιστοιχεί σε ένα επιτρεπτό προγραμματισμό. Σε τι αντιστοιχεί τότε ένας βέλτιστος προγραμματισμός;

- 2) Με δεδομένα έξι μαθήματα με εγγεγραμμένους φοιτητές

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{a, e, f\}, M_3 = \{b, e, g\}, M_4 = \{e, g, h\}, M_5 = \{a, f, h\}, M_6 = \{d, h, g\}$$

εφαρμόστε τη μέθοδο που περιγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα για να δώσετε ένα βέλτιστο προγραμματισμό.

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

Ερώτημα 3.

Αποτελεί εξάσκηση στον τυπικό ορισμό απλών γραφοθεωρητικών ιδιοτήτων με χρήση της πρωτοβάθμιας γλώσσας και στην ερμηνεία προτάσεων της πρωτοβάθμιας γλώσσας σε γραφήματα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #5 και #6.

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει δύο κατηγορηματικά σύμβολα E και P . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων, το σύμβολο E ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία συνδέονται με ακμή (ειδικότερα, το (a, a) δεν ανήκει ποτέ στη σχέση E) και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b)

για τα οποία υπάρχει μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές a και b (ειδικότερα, το ζευγάρι (a, a) ανήκει πάντα στη σχέση καθώς η κορυφή a συνδέεται με τον εαυτό της με το κενό μονοπάτι).

A) Διατυπώστε σε φυσική γλώσσα τι σημαίνει κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις και δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος με 5 τουλάχιστον κορυφές, για το οποίο είναι αληθής.

1) $\forall x \exists y (E(x, y) \wedge \forall w (E(x, w) \rightarrow (w = y)))$

2) $\exists x (\forall y P(x, y) \wedge \forall y \forall z ((z \neq x) \wedge (y \neq x) \rightarrow \neg E(y, z)))$

B) Δώστε τύπους της κατηγορηματικής λογικής οι οποίες να εκφράζουν τα παρακάτω:

1) Η κορυφή x έχει βαθμό ίσο με 2.

2) Το γράφημα έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες.

3) Το γράφημα είναι ένας απλός κύκλος (δηλαδή είναι το C_n για $n \geq 3$).

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

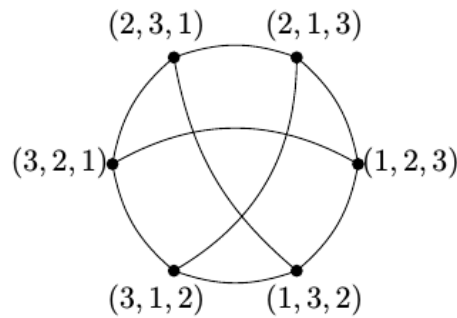
Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 4.

Το ακόλουθο ερώτημα αποτελεί εξάσκηση στις έννοιες των μονοπατιών Euler και Hamilton και στην εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής σε γραφήματα.

ΣΥΝΟΛΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #7 και #8.

Θεωρήστε το γράφημα G_n του οποίου οι κορυφές είναι όλες οι μεταθέσεις του συνόλου $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ με την ιδιότητα ότι δύο κορυφές $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ συνδέονται με ακμή αν και μόνον αν η μία προκύπτει από την άλλη εναλλάσσοντας τις θέσεις δύο ακεραίων. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το γράφημα G_3 .



1. Δείξτε ότι το πλήθος των κορυφών και των ακμών του γραφήματος είναι αντίστοιχα $n!$ και $n! \frac{n(n-1)}{4}$.
2. Με δεδομένο ότι το γράφημα είναι συνεκτικό, δείξτε ότι το G_n έχει κύκλο Euler όταν $n = 4k$ ή $n = 4k + 1$, όπου k φυσικός αριθμός.
3. Αποδείξτε ότι το G_n περιέχει ανεξάρτητο σύνολο με n κορυφές.
4. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, δείξτε ότι το G_n έχει κύκλο Hamilton για κάθε $n \geq 3$.

(Υπόδειξη για το 4: Από το σχήμα είναι προφανές ότι το G_3 έχει κύκλο Hamilton, π.χ. τον $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3) \rightarrow (2, 3, 1) \rightarrow (3, 2, 1) \rightarrow (3, 1, 2) \rightarrow (1, 3, 2) \rightarrow (1, 2, 3)$).

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω κύκλο του G_3 , ένας κύκλος Hamilton του G_4 είναι ο εξής:

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(2, 3, 1, 4)	(3, 2, 1, 4)	(3, 1, 2, 4)	(1, 3, 2, 4)	(1, 2, 3, 4)
↓	↑	↓	↑	↓	↑	
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	(2, 3, 4, 1)	(3, 2, 4, 1)	(3, 1, 4, 2)	(1, 3, 4, 2)	
↓	↑	↓	↑	↓	↑	
(1, 4, 2, 3)	(2, 4, 1, 3)	(2, 4, 3, 1)	(3, 4, 2, 1)	(3, 4, 1, 2)	(1, 4, 3, 2)	
↓	↑	↓	↑	↓	↑	
(4, 1, 2, 3)	(4, 2, 1, 3)	(4, 2, 3, 1)	(4, 3, 2, 1)	(4, 3, 1, 2)	(4, 1, 3, 2)	

Γενικεύστε το παραπάνω για το επαγωγικό βήμα.)

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

Αξιολόγηση Ερωτήματος**Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:**

<σχόλια>

Αξιολόγηση Ερωτήματος :**/ 25****Ερώτημα 5.**

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα, από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι Σωστή (υπάρχει τέτοιο γράφημα) ή Λάθος (δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα). Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό ή λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

ΣΥΝΟΛΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #9 και #10.

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπο-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. Θεωρούμε ότι τα γραφήματα του ερωτήματος είναι απλά και μη κατευθυνόμενα.

- A. Στα παρακάτω υποερωτήματα καλείστε να εξετάσετε αν το γράφημα που περιγράφεται υπάρχει ή αν έχει κάποια ιδιότητα.
1. (Σ/Λ) Ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και λιγότερες από n ακμές πρέπει οπωσδήποτε να έχει μία κορυφή βαθμού 1.
 2. (Σ/Λ) Υπάρχει γράφημα με επτά κορυφές, βαθμών 2,3,4,5,6,6,6 αντίστοιχα.
 3. (Σ/Λ) Υπάρχει 3-κανονικό γράφημα με 8 κορυφές.
 4. (Σ/Λ) Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{33,44}$ έχει κύκλο Euler.
- B. Στα παρακάτω ερωτήματα, το γράφημα $G + G$ είναι το γράφημα που προκύπτει από την κατασκευή που περιγράφεται στο 2ο ερώτημα.
1. (Σ/Λ) Το γράφημα $G + G$ είναι πάντα συνεκτικό.
 2. (Σ/Λ) Το γράφημα $\overline{G + G}$ (δηλαδή το συμπλήρωμα του $G + G$), είναι πάντα συνεκτικό.
 3. (Σ/Λ) Εάν το γράφημα G έχει κύκλο Euler, τότε και το $G + G$ έχει κύκλο Euler.
 4. (Σ/Λ) Εάν το γράφημα G έχει κύκλο Hamilton, τότε και το $G + G$ έχει κύκλο Hamilton.

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 10