Κεφάλαιο 5[1]

Οι χώροι $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$

Το κεφάλαιο αυτό έχει προπαρασκευαστικό χαρακτήρα και εξυπηρετεί δυο σκοπούς.

- Θα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια θεμελιώδεις έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας, όπως είναι η έννοια της βάσης. Η πείρα μας στη διδασκαλία έχει δείξει ότι, επειδή οι έννοιες αυτές είναι αφαιρετικές, παρουσιάζονται συχνά δυσκολίες στην ουσιαστική κατανόησή τους. Για το λόγο αυτό, νομίζουμε ότι είναι σκόπιμο να προηγηθεί η εισαγωγή ορισμένων τέτοιων εννοιών μέσω ενός συγκεκριμένου αλλά σημαντικού παραδείγματος, δηλαδή του χώρου $\mathbb{R}^n$. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται άμεσα και η διασύνδεση των νέων εννοιών με τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων που μελετήσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια.
- Σε επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε εσωτερικά γινόμενα σε διανυσματικούς χώρους. Η κατανόηση του συνήθους εσωτερικού γινομένου στο χώρο $\mathbb{R}^n$ θα διευκολύνει τη μελέτη αυτή.

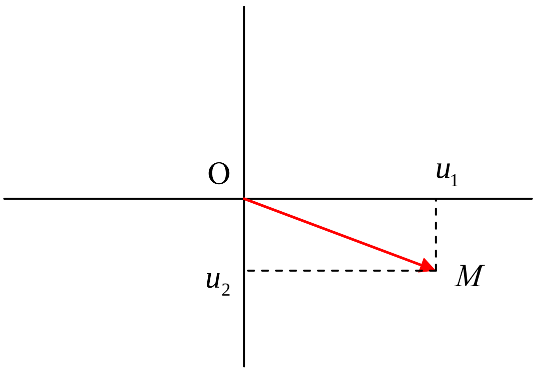
---
[1] Συγγραφέας Μιχάλης Μαλιάκας

5.1 Ο χώρος $\mathbb{R}^n$

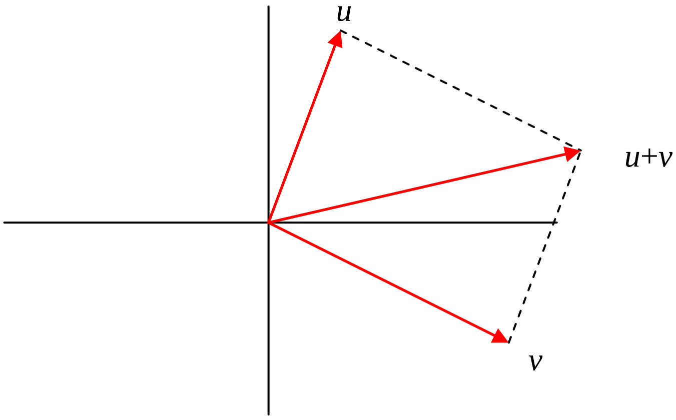
Πράξεις

Υπενθυμίζουμε ότι με $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε το σύνολο των διατεταγμένων n άδων $(u_1,...,u_n)$, όπου $u_i \in \mathbb{R}$. Τα στοιχεία του συνόλου αυτού μπορούν να θεωρηθούν σαν πίνακες μεγέθους $1\times n$, δηλαδή σαν πίνακες που έχουν μόνο μια γραμμή. Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε πως ορίζεται το άθροισμα δύο πινάκων του αυτού μεγέθους και πως ορίζεται το γινόμενο πίνακα με αριθμό. Συνεπώς στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ έχουμε την πρόσθεση που ορίζεται από $\left(u_1,...,u_n\right)+(v_1,...,v_n)=(u_1+v_1,...,u_n+v_n)$ και επίσης μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ με αριθμούς σύμφωνα με τον κανόνα $a(u_1,...,u_n)=(au_1,...,au_n),\ a\in\mathbb{R}$. Για παράδειγμα έχουμε $(1,2,-1)-2(3,0,1)=(1,2,-1)-(6,0,2)=(-5,2,-3)$.

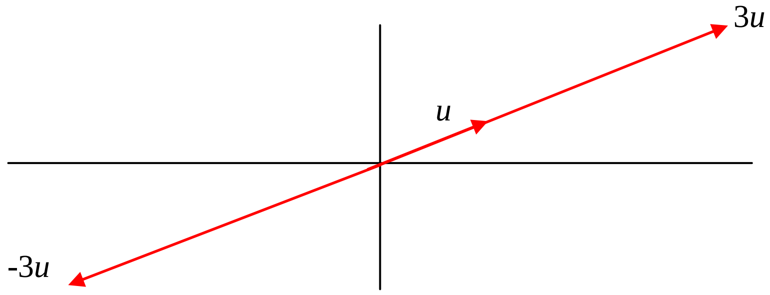
Για $n=2,3$, οι παραπάνω πράξεις έχουν μια απλή γεωμετρική ερμηνεία. Υπενθυμίζουμε ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο στοιχείο (u_1,u_2) του $\mathbb{R}^2$ το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του επιπέδου που έχει αρχή το σημείο O = (0,0) και πέρας το σημείο $M=(u_1,u_2)$, όπως φαίνεται στο σχήμα



Τότε για να προσθέσουμε τα στοιχεία $u=(u_1,u_2), v=(v_1,v_2)$ έχουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου που μας είναι γνωστός από την Παράγραφο 1.4



Για το γινόμενο au, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathbb{R}^2$, παρατηρούμε ότι το au αντιστοιχεί σε διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα του u. Η δε φορά του εξαρτάται από το πρόσημο του a όπως φαίνεται το σχήμα



Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ μαζί με τις προηγούμενες πράξεις θα χρησιμοποιούμε την έκφραση ο **χώρος** $\mathbb{R}^n$. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα λέμε και **διανύσματα**.

Σημείωση Ο όρος διανύσματα χρησιμοποιήθηκε και στο Κεφάλαιο 1 για τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα του επιπέδου ή του χώρου που έχουν αρχή το (0,0) ή το (0,0,0) αντίστοιχα. Επειδή η αντιστοιχία αυτών με τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ αντίστοιχα που περιγράψαμε πριν είναι 1-1 και επί , θα επιτρέπουμε τη χρήση του όρου διανύσματα τόσο για τα διανύσματα του επιπέδου και του χώρου, όσο για τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ γενικά.

Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε ότι οι παραπάνω πράξεις ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες. Υπενθυμίζουμε ότι με 0 συμβολίζουμε το στοιχείο $(0,\dots,0)$ του $\mathbb{R}^n$.

5.1.1 Πρόταση

Έστω $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες.

$(u+v)+w = u+(v+w)$	$a(u+v) = au+av$
$u+0 = u$	$(a+b)u = au+bu$
$u+(-u) = 0$	$(ab)u = a(bu)$
$u+v = v+u$	$1u = u$

Παράδειγμα

Έστω $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u = (0,1,-1), v = (2,0,1)$. Ας εξετάσουμε αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $au+bv = (-2,2,-3)$. Έχουμε

$$au+bv = (-2,2,-3) \Leftrightarrow (0,a,-a)+(2b,0,b) = (-2,2,-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2b, a, -a+b) = (-2,2,-3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -2 \\ a = 2 \\ -a+b = -3. \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $a = 2, b = -1$.

Βάσεις Στο Χώρο $\mathbb{R}^n$

Ας θεωρήσουμε τα στοιχεία $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ του $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο (u_1,u_2) του $\mathbb{R}^2$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

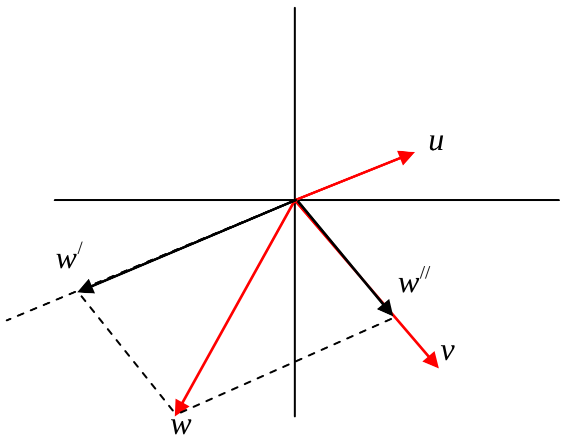
$$(u_1,u_2)=(u_1,0)+(0,u_2)=u_1(1,0)+u_2(0,1)=u_1e_1+u_2e_2.$$

Η προηγούμενη παρατήρηση οδηγεί στα εξής ερωτήματα.

1. Μήπως υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ να προκύπτει από αυτά με τη χρήση των δυο πράξεων που είδαμε πριν;
   Η απάντηση είναι ναι, γιατί αν θέσουμε
   $$e_1=(1,0,...,0), e_2=(0,1,0,...,0),...,e_n=(0,...,0,1)$$
   τότε για το τυχαίο στοιχείο $(u_1,...,u_n)\in\mathbb{R}^n$ έχουμε $(u_1,...,u_n)=u_1e_1+...+u_ne_n$.
2. Με ποιο τρόπο μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα πεπερασμένο πλήθος από διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ έχει την προηγούμενη ιδιότητα;
3. Μπορούμε να επιλέξουμε μια συλλογή από διανύσματα που έχουν την ιδιότητα του ερωτήματος 1 με οικονομικό τρόπο, δηλαδή το πλήθος της να είναι όσο το δυνατό πιο μικρό; Πόσα στοιχεία έχει μια τέτοια συλλογή;

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα ερωτήματα 2 και 3.

Ας θεωρήσουμε δυο μη συγγραμμικά διανύσματα $u,v\in\mathbb{R}^2$ και ένα τυχαίο διάνυσμα w.



Από το πέρας του w φέρουμε παράλληλες ευθείες στις στις διευθύνσεις των u,v. Έτσι έχουμε $w=w^{/}+w^{//}$, όπου τα $w^{/},w^{//}$ είναι συγγραμμικά των u,v αντίστοιχα (βλ. σχήμα). Άρα υπάρχουν $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ με $w^{/}=a_1u, w^{//}=a_2v$ και επομένως έχουμε

$$w=a_1u+a_2v\,.$$

Βλέπουμε ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου γράφεται σαν ένα άθροισμα ενός διανύσματος που είναι πολλαπλάσιο του u και ενός που είναι πολλαπλάσιο του v.

5.1.2 Ορισμός

Έστω $v_1,...,v_m\in\mathbb{R}^n$.

1. *Ένας* ***γραμμικός συνδυασμός*** *των* $v_1,...,v_m$ *είναι ένα στοιχείο του* $\mathbb{R}^n$ *της μορφής* $a_1v_1+...+a_mv_m,\ a_i\in\mathbb{R}$.

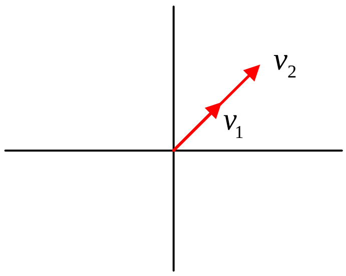
2. *Θα λέμε ότι τα στοιχεία* $v_1,\dots,v_m$ ***παράγουν*** *το χώρο* $\mathbb{R}^n$ *αν για κάθε* $v\in\mathbb{R}^n$ *υπάρχουν* $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $v=a_1v_1+\dots+a_mv_m$.

Δηλαδή τα στοιχεία $v_1,\dots,v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$ αν κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,\dots,v_m$.

5.1.3 Παραδείγματα

1) Είδαμε πριν ότι τα στοιχεία $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$ παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^2$. Όμοια και τα[2] $e_1=(1,0,\dots,0),e_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,\dots,0,1)$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$.
2) Πριν τον Ορισμό 5.1.2 είδαμε ότι κάθε δυο μη συγγραμικά διανύσματα[3] του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ παράγουν το $\mathbb{R}^2$.
3) Έστω $v_1=(1,1),v_2=(0,1)$. Τότε τα στοιχεία αυτά παράγουν το $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, αυτό έπεται άμεσα από το προηγούμενο παράδειγμα. Ας δώσουμε εδώ μια άλλη, αλγεβρική, λύση. Έστω $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $a_1v_1+a_2v_2=(a,b)$. Έχουμε
$$a_1v_1+a_2v_2=(a,b)\Leftrightarrow(a_1,a_1)+(0,a_2)=(a,b)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a_1,a_2+a_1)=(a,b)\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=a\\a_1+a_2=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=a\\a_2=b-a\end{cases}.$$

4) Τα στοιχεία $v_1=(1,1),v_2=(2,2)$ δεν παράγουν το $\mathbb{R}^2$. Πράγματι , τα διανύσματα $(1,1),(2,2)$ είναι συνευθειακά

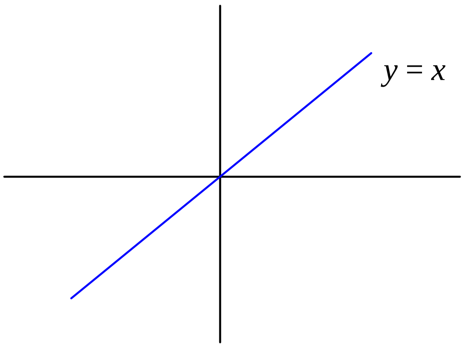


και άρα κάθε διάνυσμα της μορφής $a_1(1,1)+a_2(2,2)$ είναι συνευθειακό με τα αρχικά. Επομένως το σύνολο των σημείων της μορφής $a_1(1,1)+a_2(2,2)$, όπου $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, είναι μια ευθεία (αυτή με εξίσωση $y=x$)και όχι όλο το επίπεδο.

---

[2] Θα επιτρέπουμε στον εαυτό μας να χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο (πχ το e_1) για διαφορετικά πράγματα (πχ το (1,0) ή το (1,0,0) κλπ) γιατί θα είναι σαφές σε ποιο $\mathbb{R}^n$ αναφερόμαστε.

[3] Το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται συγγραμμικό με κάθε άλλο και συνεπώς μη συγγραμμικά διανύσματα είναι μη μηδενικά.



Με άλλα λόγια, οι γραμμικοί συνδυασμοί των (1,1), (2,2) δεν καλύπτουν όλο το επίπεδο.

Σημείωση Ο προηγούμενος τρόπος λύσης ήταν γεωμετρικός. Ένας αλγεβρικός τρόπος είναι ο εξής. Θα εξετάσουμε αν για κάθε $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ υπάρχουν $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $a_1(1,1)+a_2(2,2)=(a,b)$. Έχουμε

$$a_1(1,1)+a_2(2,2)=(a,b)\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+2a_2=a\\ a_1+2a_2=b\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν $a\neq b$, τότε το σύστημα (με αγνώστους τους a_1,a_2) δεν έχει λύση. Άρα τα $(1,1),(2,2)$ δεν παράγουν το $\mathbb{R}^2$.

5) Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε ότι τα διανύσματα $(1,2,-1),(2,1,0),(3,3,-1)$ δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι, έστω $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Τότε έχουμε

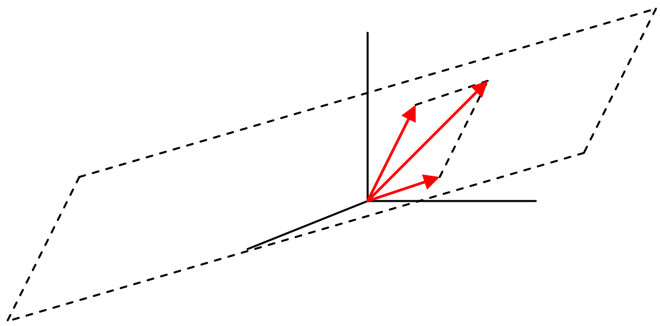
$$a_1(1,2,-1)+a_2(2,1,0)+a_3(3,3,-1)=(a,b,c)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(a_1+2a_2+3a_3,2a_1+a_2+3a_3,-a_1-a_3\right)=(a,b,c)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+2a_2+3a_3=a\\ 2a_1+a_2+3a_3=b\\ -a_1\qquad\;\, -a_3=c.\end{cases}$$

Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε ότι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix}1&2&3&a\\ 0&1&1&\dfrac{2a-b}{3}\\ 0&0&0&\dfrac{a+c}{2}-\dfrac{2a-b}{3}\end{pmatrix}$$

Επομένως αν $\dfrac{a+c}{2}-\dfrac{2a-b}{3}\neq 0$, δηλαδή αν $a-2b-3c\neq 0$, τότε το σύστημα είναι ασυμβίβαστο. Για παράδειγμα, αν $a=0,b=0,c=1$ το σύστημα είναι ασυμβίβαστο. Άρα τα δεδομένα διανύσματα δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

Σημείωση Η γεωμετρική ερμηνεία είναι η ακόλουθη. Επειδή έχουμε τη σχέση $(3,3,-1)=(1,2,-1)+(2,1,0)$, τα τρία αυτά διανύσματα είναι συνεπίπεδα, δηλαδή βρίσκονται στο επίπεδο που ορίζουν τα $(1,2,-1),(2,1,0)$, βλ σχήμα. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, συμπεραίνουμε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός τους παραμένει στο επίπεδο αυτό. Δηλαδή, οι γραμμικοί συνδυασμοί τους δεν καλύπτουν όλο το $\mathbb{R}^3$.



6) Έστω $v_1=(1,-1,0), v_2=(2,0,1), v_3=(3,1,-1)$. Θα δούμε ότι τα στοιχεία αυτά παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

Έστω $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Έχουμε

$$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=(a,b,c)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a_1,-a_1,0)+(2a_2,0,a_2)+(3a_3,a_3,-a_3)=(a,b,c)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1+2a_2+3a_3=a \\ -a_1 \qquad +a_3=b \\ \qquad a_2-a_3=c. \end{cases}$$

Για να αποφασίσουμε αν το σύστημα αυτό έχει λύση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα και να εξετάσουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του, όπως μάθαμε στο Κεφάλαιο 3. Επειδή όμως το σύστημα είναι τετραγωνικό, μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών. Αυτή είναι μη μηδενική,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=1(0-1)-(-1)(-2-3)=-6,$$

και άρα το σύστημα έχει λύση για κάθε a,b,c.

Σημείωση. Αν η ορίζουσα ήταν μηδέν, τότε δεν θα μπορούσαμε να βγάλουμε άμεσο συμπέρασμα και θα ήταν προτιμότερο να βρίσκαμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα.

7) Θα δείξουμε ότι τα $v_1=(1,0,1), v_2=(2,1,0), v_3=(1,1,0), v_4=(0,1,1)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ και θα παραστήσουμε το $v=(0,-1,1)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των v_i.

Έχουμε

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = (a,b,c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(a_1 + 2a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, a_1 + a_4\right) = (a,b,c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 \qquad = a \\ \qquad a_2 + a_3 + a_4 = b \\ a_1 + \qquad\qquad a_4 = c. \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε τη αναγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & -2 & a-b-c \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -a+2b+c \end{pmatrix}.$$

Από αυτή βλέπουμε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε a,b,c (και μάλιστα άπειρες). Άρα τα $v_1,...v_4$ παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

Για να παραστήσουμε το (0,-1,1) σαν γραμμικό συνδυασμό των $v_1,...,v_4$, θέτουμε $a=0, b=-1, c=1$, οπότε ο παραπάνω πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Από την τρίτη γραμμή βρίσκουμε $a_3 = -1-3a_4$, από τη δεύτερη $a_2 = 2a_4$ και από την πρώτη $a_1 = 1-a_4$. Άρα έχουμε

$$(0,-1,1) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 =$$
$$= (1-a_4)v_1 + (2a_4)v_2 + (-1-3a_4)v_3 + a_4v_4,$$

όπου το $a_4 \in \mathbb{R}$ παίρνει αυθαίρετες τιμές. Για παράδειγμα, αν $a_4 = 0$, τότε $(0,-1,1) = v_1 - v_3$, και αν $a_4 = 1$, τότε $(0,-1,1) = 2v_2 - 4v_3 + v_4$.

Σημείωση Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι είναι δυνατό ένα διάνυσμα να γράφεται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους σαν γραμμικός συνδυασμός δεδομένων διανυσμάτων.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα, και ιδιαίτερα από τα 5), 6), 7), πηγάζει αβίαστα μια απάντηση στο ερώτημα 2. Για να δούμε αν ένα διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^n$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1,...v_m \in \mathbb{R}^n$, σχηματίζουμε τον $n \times (m+1)$ πίνακα που οι στήλες του είναι οι $v_1,...,v_m,b$ και εξετάζουμε αν το αντίστοιχο σύστημα έχει λύση. Στην περίπτωση που το σύστημα έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$, τότε τα $v_1,...v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$.

Στη συνέχεια θα προσεγγίσουμε το ερώτημα 3. Δηλαδή θα εξετάσουμε αν μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε το πλήθος μιας συλλογής διανυσμάτων που παράγουν το $\mathbb{R}^n$ και θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο πλήθος.

5.1.4 Πρόταση

Έστω ότι τα διανύσματα $v_1,\dots,v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$. Αν το v_m είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,\dots,v_{m-1}$, τότε τα $v_1,\dots,v_{m-1}$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη Έστω $v\in\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν $a_i\in\mathbb{R}$ με

$$v=a_1v_1+\dots a_{m-1}v_{m-1}+a_mv_m.$$

Από την υπόθεση υπάρχουν $b_i\in\mathbb{R}$ με

$$v_m=b_1v_1+\dots+b_{m-1}v_{m-1}.$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}v&=a_1v_1+\dots a_{m-1}v_{m-1}+a_mv_m=a_1v_1+\dots a_{m-1}v_{m-1}+a_m(b_1v_1+\dots+b_{m-1}v_{m-1})=\\&=(a_1+a_mb_1)v_1+\dots+(a_{m-1}+a_mb_{m-1})v_{m-1}.\end{aligned}$$

Δηλαδή το v είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,\dots,v_{m-1}$.

■

5.1.5 Σημείωση

Από την προηγούμενη πρόταση, συμπεραίνουμε ότι από μια συλλογή διανυσμάτων που παράγουν το $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να παραλείψουμε διανύσματα που γράφονται σαν γραμμικοί συνδυασμοί των υπολοίπων. Η νέα συλλογή *παράγει* το $\mathbb{R}^n$ και έχει *λιγότερα* στοιχεία. Συνεπώς βλέπουμε ότι έχουμε μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να ελλατώσουμε το πλήθος μιας συλλογής διανυσμάτων που παράγουν το $\mathbb{R}^n$.

Πριν προχωρήσουμε στο προβληματισμό που θέτει η προηγούμενη σημείωση, επισημαίνουμε το εξής.

Παρατήρηση Από μια συλλογή διανυσμάτων που παράγουν το $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να παραλείψουμε τις πολλαπλές εμφανίσεις του αυτού στοιχείου. Για παράδειγμα αν γνωρίζουμε ότι τα $v_{1,}v_2,v_3,v_4$ παράγουν το $\mathbb{R}^3$ και ισχύει $v_4=v_3$, τότε τα v_1,v_2,v_3 παράγουν το $\mathbb{R}^3$. Επομένως θα μιλάμε από τώρα και στο εξής για *σύνολα* που παράγουν το $\mathbb{R}^n$.

Από τη Σημείωση 5.1.5 προκύπτει το ερώτημα: Πότε ένα από τα διανύσματα $v_1,\dots,v_m$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων; Βλέπουμε ότι η απάντηση είναι αν και μόνο αν υπάρχει μια παράσταση της μορφής $a_1v_1+\dots+a_mv_m=0,$ όπου τουλάχιστον ένας από τους $a_i\in\mathbb{R}$ είναι μη μηδενικός. Συνεπώς η διαδικασία που περιγράφεται στη Σημείωση 5.1.5 **δεν** μπορεί να συνεχιστεί αν φτάσουμε σε ένα σύνολο στοιχείων $\{v_1,\dots,v_m\}$ για το οποίο **δεν** υπάρχει παράσταση της μορφής $a_1v_1+\dots+a_mv_m=0$, όπου τουλάχιστον ένας από τους a_i είναι διάφορος του μηδενός. Έτσι φτάνουμε στον εξής ορισμό.

5.1.6 Ορισμός

Ένα σύνολο στοιχείων $\{v_1,\ldots,v_m\}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *ονομάζεται* ***βάση*** *του* $\mathbb{R}^n$ *αν έχει τις ιδιότητες*

a. *το* $\{v_1,\ldots,v_m\}$ *παράγει το* $\mathbb{R}^n$

b. *αν ισχύει η σχέση* $a_1v_1+\ldots+a_mv_m=0,$ *όπου* $a_i\in\mathbb{R}$, *τότε αναγκαστικά έχουμε* $a_1=a_2=\ldots=a_m=0.$

5.1.7 Παραδείγματα

1. Το σύνολο $\{e_1,e_2\}$, όπου $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$.
   Πράγματι,
   a. το $\{e_1,e_2\}$ παράγει το $\mathbb{R}^2$, αφού αν $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$, τότε
   $(a_1,a_2)=(a_1,0)+(0,a_2)=a_1(1,0)+a_2(0,1).$
   b. αν $a_1e_1+a_2e_2=0,$ τότε $(a_1,a_2)=(0,0)\Rightarrow a_1=a_2=0.$

   Με παρόμοιο τρόπο, βλέπουμε ότι το σύνολο $\{e_1,\ldots,e_n\}$, όπου $e_1=(1,0,\ldots,0), e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,\ldots,0,1)$, είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Αυτή λέγεται η **συνήθης βάση** του $\mathbb{R}^n$.
2. Το σύνολο $\{v_1,v_2\}$, όπου $v_1=(1,1), v_2=(0,1)$, είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$.
   Πράγματι,
   a. το $\{v_1,v_2\}$ παράγει το $\mathbb{R}^2$ όπως είδαμε στο Παράδειγμα 5.1.3. 3.
   b. αν $a_1v_1+a_2v_2=0,$ τότε
   $$(a_1,a_1+a_2)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\ a_1+a_2=0\end{cases}\Rightarrow a_1=a_2=0.$$
3. Το σύνολο $\{v_1,v_2\}$, όπου $v_1=(1,1), v_2=(2,2)$, δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^2$, γιατί όπως είδαμε στο Παράδειγμα 5.1.3 4, δεν ικανοποιεί την ιδιότητα *a* του Ορισμού 5.1.6. (Σημειώνουμε ότι δεν αληθεύει και η ιδιότητα *b* του Ορισμού 5.1.6 αφού $2v_1-v_2=0.$)
4. Το σύνολο $\{v_1,v_2,v_3\}$, όπου $v_1=(1,0), v_2=(0,1), v_3=(3,2)$ δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^2$, γιατί δεν ικανοποιεί την ιδιότητα *b* του Ορισμού 5.1.6. Πράγματι, έχουμε $3v_1+2v_2-v_3=0.$ (*Σημείωση*. Τους συντελεστές 3,2,-1 στον προηγούμενο γραμμικό συνδυασμό τους βρήκαμε άμεσα γιατί τα διανύσματα είναι ‘βολικά’. Θα μπορούσαμε να τους προσδιορίσουμε λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από τη σχέση $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0.$).
5. Το σύνολο $\{v_1,v_2,v_3\}$, όπου $v_1=(1,-1,0), v_2=(2,0,1), v_3=(3,1,-1)$, είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ αφού,
   a. αυτό παράγει το $\mathbb{R}^3$, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 5.1.3 5
   b. αν $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0$, τότε προκύπτει το σύστημα
   $$\begin{aligned}a_1+2a_2+3a_3&=0\\ -a_1\qquad+a_3&=0\\ a_2-a_3&=0.\end{aligned}$$
   Εύκολα επαληθεύουμε ότι αυτό έχει *μοναδική* λύση $a_1=a_2=a_3=0.$

6. Το σύνολο $\{v_1, v_2\}$, όπου τα v_1, v_2 είναι τυχαία στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$, γιατί δεν ικανοποιείται η ιδιότητα *a* του Ορισμού 5.1.6. Πράγματι, κάθε γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2 θα ανήκει στο επίπεδο που αυτά ορίζουν. Συνεπώς οι γραμμικοί συνδυασμοί τους δεν καλύπτουν όλο το $\mathbb{R}^3$.

Επειδή η ιδιότητα *b* του Ορισμού 5.1.6 είναι σημαντική, τη ξεχωρίζουμε.

5.1.8 Ορισμός

Έστω $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$. *Τα στοιχεία αυτά λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν από τη σχέση* $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, *έπεται αναγκαστικά ότι* $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$.

Είδαμε στα Παραδείγματα 5.1.7 ότι

τα $(1,1), (0,1) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

τα $(1,2,-1), (2,1,0), (3,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

τα $(1,1), (2,2) \in \mathbb{R}^2$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα

τα $(1,0), (0,1), (3,2) \in \mathbb{R}^2$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Τώρα είμαστε σε θέση να απαντήσουμε το ερώτημα 3, δηλαδή να προσδιορίσουμε τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων που μπορεί να έχει ένα σύνολο διανυσμάτων που παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^n$. Η απάντηση είναι *n*. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το πιο σημαντικό αυτού του κεφαλαίου. Η δε απόδειξή του είναι μια κομψή εφαρμογή της θεωρίας των γραμμικών συστημάτων που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 3.

5.1.9 Θεώρημα

Έστω ότι $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$.

1. *Αν τα* $v_1, ..., v_m$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έχουμε* $m \le n$.
2. *Αν τα* $v_1, ..., v_m$ *παράγουν το* $\mathbb{R}^n$, *τότε έχουμε* $m \ge n$.
3. *Αν τα* $v_1, ..., v_m$ *αποτελούν βάση του* $\mathbb{R}^n$, *τότε έχουμε* $m = n$.

Απόδειξη 1. Υποθέτουμε ότι τα $v_1, ..., v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω ότι $m > n$. Θα φθάσουμε σε άτοπο. Θεωρούμε το σύστημα στους αγνώστους $a_1, ..., a_m$ που προκύπτει από τη σχέση $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = 0$. Αυτό είναι ομογενές, έχει *n* εξισώσεις και *m* αγνώστους. Από το Πόρισμα 3.3.12 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μη μηδενική λύση. Αυτό είναι άτοπο, γιατί τα v_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Υποθέτουμε ότι τα $v_1, ..., v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν $a_{ij} \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $e_i = a_{i1} v_1 + ... + a_{im} v_m, i = 1, ..., n,$ όπου $\{e_1, ..., e_n\}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ (βλ Παράδειγμα 5.1.7 1). Έστω $a_i \in \mathbb{R}$. Υπολογίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} & a_1 e_1 + ... + a_n e_n = \\ & a_1(a_{11} v_1 + ... + a_{1m} v_m) + ... + a_n(a_{n1} v_1 + ... + a_{nm} v_m) = \\ & (a_1 a_{11} + ... + a_n a_{n1}) v_1 + ... + (a_1 a_{1m} + ... + a_n a_{nm}) v_m. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $n>m$ και θα θφάσουμε σε άτοπο. Αφού ισχύει $n>m,$ από το Πόρισμα 3.3.12 μπορούμε να επιλέξουμε τα a_i, τέτοια ώστε

$$a_1a_{11}+\ldots+a_na_{n1}=\ldots=a_1a_{1m}+\ldots+a_na_{nm}=0,$$

και ένα τουλάχιστον από τα a_i είναι μη μηδενικό. Τότε θα έχουμε

$$a_1e_1+\ldots+a_ne_n=0,$$

όπου κάποιο a_i είναι μη μηδενικό. Αυτό είναι άτοπο γιατί τα $e_1,\ldots,e_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

3. Αυτό έπεται άμεσα από τα 1 και 2.

■

Τώρα ξέρουμε ότι κάθε βάση του $\mathbb{R}^n$ έχει n στοιχεία. Αν μας δοθεί ένα σύνολο με n στοιχεία, τότε για να εξετάσουμε αν αυτό είναι βάση θα πρέπει να ελέγξουμε αν ικανοποιεί τις δυο ιδιότητες του Ορισμού 5.1.6. Όμως, σύμφωνα με την επόμενη πρόταση, αρκεί να επαληθεύσουμε *μια* από τις ιδιότητες αυτές.

5.1.10 Πρόταση

Έστω $\{v_1,\ldots,v_n\}\subseteq\mathbb{R}^n$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

1. *Το* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^n$
2. *Το* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *παράγει το* $\mathbb{R}^n$
3. *Το* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη Από τους ορισμούς, αρκεί να αποδείξουμε την ισοδυναμία $2\Leftrightarrow 3$.

$2\Rightarrow 3$. Έστω ότι τα $v_1,\ldots,v_n$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε κάποιο από αυτά, έστω το v_n, γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Τότε όμως, από την υπόθεση και την Πρόταση 5.1.4, ο $\mathbb{R}^n$ παράγεται από τα $v_1,\ldots,v_{n-1}$. Αυτό είναι άτοπο από το Θεώρημα 5.1.9 2.

$3\Rightarrow 2$. Έστω A ο $n\times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i, i=1,\ldots,n.$ Το σύστημα που προκύπτει από τη σχέση $a_1v_1+\ldots+a_nv_n=0,$ είναι το $A\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. Από την υπόθεση, αυτό δεν έχει μη μηδενική λύση. Άρα $\det A\neq 0$ (βλ Κεφ 4). Τότε όμως το σύστημα $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ έχει λύση για κάθε $b_i\in\mathbb{R}$. Δηλαδή τα $v_1,\ldots,v_n$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$.

■

5.1.11 Πόρισμα

Έστω $v_1,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^n$ *και έστω* A *ο* $n\times n$ *πίνακας του οποίου η στήλη* i *είναι το* $v_i, i=1,\ldots,n.$ *Τότε τα* $v_1,\ldots,v_n$ *αποτελούν βάση του* $\mathbb{R}^n$ *αν και μόνο αν* $\det A\neq 0.$

Απόδειξη Η απόδειξη έχει ήδη γίνει στην προηγούμενη πρόταση.

■

5.1.12 Παράδειγμα

Έστω $v_1=(2,1,0), v_2=(3,0,1), v_3=(0,2,-1)$. Ο πίνακας που αναφέρεται στο προηγούμενο πόρισμα είναι ο $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Υπολογίζοντας την ορίζουσα βρίσκουμε $\det A=-1\neq 0$. Άρα τα δεδομένα διανύσματα αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έστω $\{v_1,...,v_n\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Επειδή το σύνολο αυτό παράγει το $\mathbb{R}^n$, για κάθε $v\in\mathbb{R}^n$ υπάρχουν $a_i\in\mathbb{R}$, που εξαρτώνται βέβαια από το $v,$ τέτοια ώστε $v=a_1v_1+...+a_nv_n$. Θα δούμε τώρα ότι τα a_i είναι *μοναδικά*. Πράγματι, έστω ότι έχουμε και $b_i\in\mathbb{R}$ με $v=b_1v_1+...+b_nv_n$. Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $(a_1-b_1)v_1+...+(a_1-b_1)v_n=0$. Επειδή τα v_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε $a_1-b_1=...=a_n-b_n=0$, δηλαδή $a_1=a_2,...,a_n=b_n$. Συνεπώς έχουμε αποδείξει την εξής πρόταση.

5.1.13 Πρόταση

Έστω $\{v_1,...,v_n\}$ *μια βάση του* $\mathbb{R}^n$. *Τότε για κάθε* $v\in\mathbb{R}^n$, *υπάρχουν μοναδικά* $a_i\in\mathbb{R}$ *με* $v=a_1v_1+...+a_nv_n$.

5.1.14 Επεξεργασμένα Παραδείγματα

1. Αφού αποδείξτε ότι τα στοιχεία $v_1=(1,1), v_2=(1,-1)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$ να εκφράσετε το (a,b) σαν γραμμικό συνδυασμό των v_1,v_2.

   Λύση

   Σύμφωνα με το Πόρισμα 5.1.11, τα δεδομένα στοιχεία είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$, αφού $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=-2\neq 0$. Αν $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ έχουμε

$$a_1(1,1)+a_2(1,-1)=(a,b)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1+a_2=a \\ a_1-a_2=b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a_1=\dfrac{a+b}{2} \\ a_2=\dfrac{a-b}{2}. \end{cases}$$

   Επομένως έχουμε $(a,b)=\dfrac{a+b}{2}(1,1)+\dfrac{a-b}{2}(1,-1)$.

2. Εξετάστε αν το $(3,9,-4,-2)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,-2,0,3),(2,3,0,-1),(2,-1,2,1)$.

   Λύση

   Έχουμε

$(3,9,-4,-2) = a_1(1,-2,0,3) + a_2(2,3,0,-1) + a_3(2,-1,2,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3,9,-4,-2) = (a_1 + 2a_2 + 2a_3, -2a_1 + 3a_2 - a_3, 2a_3, 3a_1 - a_2 + a_3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 3 \\ -2a_1 + 3a_2 - a_3 = 9 \\ 2a_3 = -4 \\ 3a_1 - a_2 + a_3 = -2. \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε ότι υπάρχει λύση (και μάλιστα μοναδική $(a_1, a_2, a_3) = (1,3,-2)$). Άρα το $(3,9,-4,-2)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,-2,0,3),(2,3,0,-1),(2,-1,2,1)$. Μάλιστα έχουμε $(3,9,-4,-2) = (1,-2,0,3) + 3(2,3,0,-1) - 2(2,-1,2,1)$.

3. Εξετάστε ποια από τα επόμενα σύνολα είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$

   $\{(1,-2,3),(3,0,1)\}$

   $\{(1,-2,3),(3,0,1),(3,1,4),(1,0,7)\}$

   $\{(1,2,-3),(1,-3,2),(2,-1,5)\}$

   $\{(1,2,-3),(1,-3,2),(2,-1,-1)\}$.

Λύση

Το πρώτο σύνολο δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ γιατί δεν έχει 3 στοιχεία (βλ. Θεώρημα 5.1.9)

Το δεύτερο σύνολο δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ γιατί δεν έχει 3 στοιχεία

Εξετάζουμε τώρα το τρίτο σύνολο. Με ένα σύντομο υπολογισμό βρίσκουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ είναι ίση με –30, δηλαδή είναι μη μηδενική. Σύμφωνα με το Πόρισμα 5.1.11, τα δεδομένα διανύσματα αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Για το τέταρτο σύνολο παρατηρούμε ότι $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0$. Άρα αυτό δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

4. Έστω ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

   a. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

   b. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{v_1, kv_2 + v_3, kv_1 + v_2 + kv_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν $k \neq \pm 1$.

Λύση

a. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.10, αρκεί να δείξουμε ότι τα $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω ότι $a_1(v_1 - v_2) + a_2(v_2 - v_3) + a_3(v_3 - v_1) = 0$. Έχουμε

$$a_1(v_1 - v_2) + a_2(v_2 - v_3) + a_3(v_3 - v_1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(a_1 - a_3)v_1 + (a_2 - a_1)v_2 + (a_3 - a_2)v_3 = 0.$$

Επειδή τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, παίρνουμε $a_1 - a_3 = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 0.$ Δηλαδή $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$ Συνεπώς τα $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

b. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{v_1, kv_2 + v_3, kv_1 + v_2 + kv_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν $k \neq \pm 1$. Έχουμε

$$a_1 v_1 + a_2(kv_2 + v_3) + a_3(kv_1 + v_2 + kv_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_1 v_1 + \left(a_2 k + a_3\right) v_2 + \left(a_2 + a_3 k\right) v_3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ ka_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + ka_3 = 0. \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα είναι ομογενές και τετραγωνικό. Άρα η μηδενική λύση είναι μοναδική αν και μόνο αν $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} \neq 0$, δηλαδή $k^2 - 1 \neq 0.$

Ασκήσεις 5.1

1. Εξετάστε ποια από τα επόμενα διανύσματα είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $(3,1,2),(5,3,1)$.
   1. $(-1,1,-3)$
   2. $(-1,1,-4)$.

   Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία.
2. Εξετάστε ποια από τα επόμενα σύνολα είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$
   $a.\{(3,1,2),(5,3,1)\}$

   $b.\{(3,1,2),(5,3,1),(-1,1,-3)\}$

   $c.\{(3,1,2),(5,3,1),(-1,1,-4)\}$

   $d.\{(3,1,2),(5,3,1),(-1,1,-4),(1,0,0)\}$
3. Για ποια $a \in \mathbb{R}$, τα διανύσματα $(1,2,1),(2,a,0),(3,1,1)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$;
4. Αποδείξτε ότι κάθε διάνυσμα της μορφής $(a,b,0),\ a,b \in \mathbb{R}$, είναι γραμμικός συνδυασμός των $(2,-1,0),(1,3,0)$.
5. Για ποια $k \in \mathbb{R}$, το διάνυσμα $(1,-2,k)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(3,0,-2),(2,-1,-5)$;
6. Έστω ότι $\{v_1,v_2,v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.
   a. Αποδείξτε ότι το $\{2v_1, v_1+v_2, v_1+v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.
   b. Αποδείξτε ότι το $\{kv_1, v_2+kv_3, kv_2+2v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν $k \neq 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.
   c. Αποδείξτε ότι το $\{v_1+kv_2, v_2+kv_3, v_3+kv_1\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$.
7. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές. Στην περίπτωση που μια πρόταση είναι σωστή δώστε μια απόδειξη. Διαφορετικά ένα αντιπαράδειγμα αρκεί.
   a. κάθε δυο μη συγγραμμικά διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$.
   b. κάθε τρία συνεπίπεδα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ δεν αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.
   c. κάθε τρια διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

Απαντήσεις / Υποδείξεις 5.1

1. Έχουμε $(-1,1,-3)=(-2)(3,1,2)+(5,3,1)$. Το $(-1,1,-4)$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός. Το $(-1,1,-3)$ ανήκει στο επίπεδο των $(3,1,2),(5,3,1)$, ενώ το $(-1,1,-4)$ δεν ανήκει.
2. Μόνο το τρίτο σύνολο είναι βάση
3. Η ορίζουσα του πίνακα που αναφέρεται στο Πόρισμα 5.1.11 έχει ορίζουσα $-2a-2$. Η απάντηση είναι $a \neq -1$.
4. Πρέπει να δείξετε ότι το σύστημα που προκύπτει από τη σχέση $a_1(2,-1,0)+a_2(1,3,0)=(a,b,0)$ είναι συμβιβαστό για κάθε $a,b \in \mathbb{R}$.

5. Μόνο για $k = -8$.
6. a,b,c. Βλ. Επεξεργασμένο Παράδειγμα 5.1.14 4. Για τα b. και c. εξετάστε για ποια k τα δεδομένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θα οδηγηθείτε σε 3×3 ομογενή συστήματα με παράμετρο το k. Η μηδενική λύση είναι μοναδική αν και μόνο αν η ορίζουσα των συντελεστών είναι ίση με 0.
7. a. σωστό, b. σωστό, c.λάθος

5.2 Το Σύνηθες Εσωτερικό Γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$

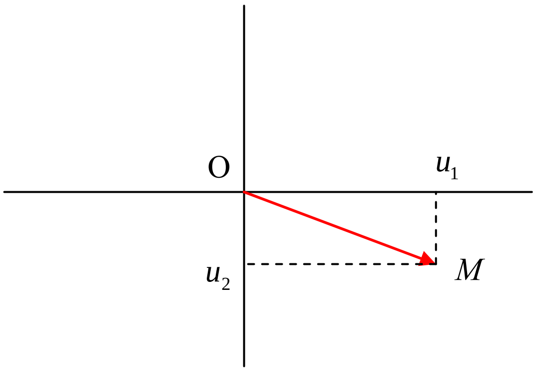
Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι οι γεωμετρικές έννοιες του μήκους και της γωνίας γενικεύονται με φυσιολογικό τρόπο στους χώρους $\mathbb{R}^n$.

Ορισμοί

Για να εξηγήσουμε το κίνητρο του ορισμού του συνήθους εσωτερικού γινομένου στο $\mathbb{R}^n$, ας θυμηθούμε τις έννοιες του μήκους και της γωνίας στο επίπεδο και στο χώρο.

- *Στο Επίπεδο*

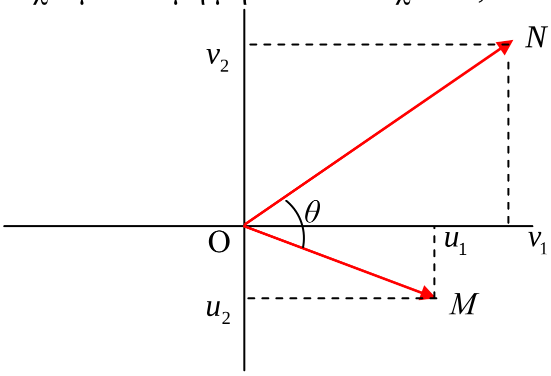
  Έστω $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$. Το **μήκος** $|u|$ του u ορίζεται να είναι το μήκος $|OM|$ του ευθυγράμμου τμήματος OM όπως φαίνεται στο σχήμα



Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$|u|=|OM|=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}}.$$

Έστω ότι έχουμε δυο μη μηδενικά στοιχεία $u,v\in\mathbb{R}^2, u=(u_1,u_2), v=(v_1,v_2)$.



Τότε σχηματίζονται δυο γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$. Μια από αυτές παίρνει τιμές στο διάστημα [0,π], βλ. σχήμα όπου η εν λόγω γωνία συμβολίζεται με θ. Τη γωνία αυτή ονομάζουμε **γωνία** των u,v.

Υπενθυμίζουμε ότι μια διασύνδεση μεταξύ των εννοιών του μήκους και της γωνίας δίνεται από το νόμο των συνημιτόνων. Στο τρίγωνο OMN έχουμε

$$|MN|^2=|OM|^2+|ON|^2-2|OM||OM|\cos\theta .$$

Επειδή $|MN|^2=(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2, |OM|^2=u_1^{\,2}+u_2^{\,2}, |ON|^2=v_1^{\,2}+v_2^{\,2}$, παίρνουμε

$$\left(u_1-v_1\right)^2+\left(u_2-v_2\right)^2=u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}+v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}-2|OM||ON|\cos\theta\ .$$

Αναπτύσσοντας τα τετράγωνα στο αριστερό μέλος και απλοποιώντας βρίσκουμε

$$u_1v_1+u_2v_2=|u||v|\cos\theta. \tag{1}$$

Αυτή η σχέση είναι σημαντική γιατί μας πληροφορεί ότι το $\cos\theta$ καθορίζεται από τα μήκη $|u|,|v|$ και την ποσότητα $u_1v_1+u_2v_2$.

Αν στην ποσότητα $u_1v_1+u_2v_2$ θέσουμε $u_1=v_1, u_2=v_2$ τότε προκύπτει το $u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}=|u|^2$. Άρα βλέπουμε ότι το μήκος είναι μια ποσότητα της μορφής $u_1v_1+u_2v_2$.

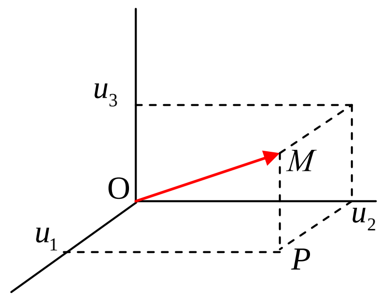
Συμπέρασμα Ορίζοντας την απεικόνιση

$$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\left(u,v\right)\mapsto u_1v_1+u_2v_2,$$

βλέπουμε ότι μέσω αυτής εκφράζεται και η έννοια του μήκους και η έννοια της γωνίας στο επίπεδο.

- *Στο Χώρο*

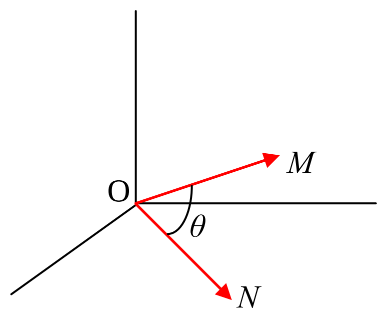
Έστω $u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$. Ορίζουμε το **μήκος** του u να είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OM, όπου M είναι το σημείο (u_1,u_2,u_3), βλ σχήμα.



Αν P είναι η προβολή του M στο xy επίπεδο, τότε εφαρμόζοντας δυο φορές το Πυθαγόρειο Θεώρημα, παίρνουμε $|OM|^2=|OP|^2+|PM|^2=(u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2})+u_3^{\ 2}$. Άρα

$$|u|=|OM|=\sqrt{u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}+u_3^{\ 2}}.$$

Η **γωνία** μεταξύ δυο μη μηδενικών στοιχείων $u,v\in\mathbb{R}^3$ ορίζεται με τρόπο εντελώς ανάλογο με την περίπτωση του επιπέδου



Από το νόμο των συνημιτόνων συμπεραίνουμε, με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που είδαμε πριν, ότι

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |u||v|\cos\theta.$$

Εδώ βλέπουμε ότι το $\cos\theta$ καθορίζεται από τα (μη μηδενικά) μήκη $|u|,|v|$ και την ποσότητα $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Αν στην ποσότητα $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ θέσουμε $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$ τότε προκύπτει το $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = |u|^2$.

Συμπέρασμα Ορίζοντας την απεικόνιση

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

βλέπουμε ότι μέσω αυτής εκφράζεται και η έννοια του μήκους και η έννοια της γωνίας στο χώρο.

Έχοντας υπόψη τα προηγούμενα δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

5.2.1 Ορισμός

Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n, u = (u_1, ..., u_n), v = (v_1, ..., v_n)$.

- *Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των u,v είναι ο πραγματικός αριθμός* $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + ... + u_nv_n$.
- *Το μήκος (ή μέτρο) του u είναι ο πραγματικός αριθμός* $|u| = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$.

Παρατηρούμε ότι

$$|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Για παράδειγμα, αν $u = (4,5,-1), v = (2,1,3)$, τότε

$$\langle u, v\rangle = 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + (-1)\cdot 3 = 10,\ |u| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{42}.$$

Ιδιότητες

Μερικές απλές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου περιγράφονται στην επόμενη πρόταση.

5.2.2 Πρόταση

Έστω $u, v, w \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$. *Τότε έχουμε*

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
2. $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$
3. $\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle = \langle u, av\rangle$
4. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
5. $\langle u, u\rangle \geq 0$
6. $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Απόδειξη Καθεμιά από τις προηγούμενες σχέσεις αποδεικνύεται άμεσα με ένα σύντομο υπολογισμό. Ας δούμε ενδεικτικά την πρώτη ισότητα της 3. Αν

$$u = (u_1, ..., u_n), v = (v_1, ..., v_n),$$

τότε

$$\langle au, v\rangle = (au_1)v_1 + ... + (au_n)v_n = a\left(u_1v_1 + ... + u_nv_n\right) = a\langle u, v\rangle.$$

■

5.2.3 Παράδειγμα

Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$ με $|u| = 1, |v| = 2, \langle u, v\rangle = -1$. Να βρεθεί το μήκος του $u + 3v$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\langle u+3v, u+3v\rangle = \langle u, u+3v\rangle + \langle 3v, u+3v\rangle = \\
&\langle u,u\rangle + \langle u,3v\rangle + \langle 3v,u\rangle + \langle 3v,3v\rangle = \\
&\langle u,u\rangle + 3\langle u,v\rangle + 3\langle v,u\rangle + 9\langle v,v\rangle = \\
&\langle u,u\rangle + 6\langle u,v\rangle + 9\langle v,v\rangle = \\
&|u|^2 + 6\langle u,v\rangle + 9|v|^2 = 1^2 - 6 + 9\cdot 2^2 = 31.
\end{aligned}$$

Άρα $|u+3v| = \sqrt{\langle u+3v, u+3v\rangle} = \sqrt{31}.$

Στο επόμενο θεώρημα έχουμε δυο σημαντικές ανισότητες που αφορούν εσωτερικά γινόμενα και μήκη.

5.2.4 Θεώρημα

Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$. Τότε

1. *(ανισότητα Cauchy - Schwarz)* $|\langle u, v\rangle| \le |u||v|$
2. *(τριγωνική ανισότητα)* $|u+v| \le |u| + |v|$.

Απόδειξη 1. Αν το v είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε η αποδεικτέα σχέση παίρνει τη μορφή $0 \le 0$, που ισχύει. Υποθέτουμε τώρα ότι $v \ne 0$. Θεωρούμε το διάνυσμα $w = u - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2}v$. Από την Πρόταση 5.2.2 5 έχουμε $\langle w, w\rangle \ge 0$. Παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
&\langle w,w\rangle = \left\langle u - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2}v, u - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2}v \right\rangle = \\
&\langle u,u\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2}\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2}\langle v,u\rangle + \frac{\langle u,v\rangle^2}{|v|^2|v|^2}\langle v,v\rangle = \\
&\langle u,u\rangle - 2\frac{\langle u,v\rangle^2}{|v|^2} + \frac{\langle u,v\rangle^2}{|v|^2|v|^2}\langle v,v\rangle = \\
&|u|^2 - 2\frac{\langle u,v\rangle^2}{|v|^2} + \frac{\langle u,v\rangle^2}{|v|^2} = \\
&\frac{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2}{|v|^2}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{|u|^2|v|^2-\langle u,v\rangle^2}{|v|^2}\geq 0\Rightarrow$$
$$|u|^2|v|^2-\langle u,v\rangle^2\geq 0\Rightarrow$$
$$|\langle u,v\rangle|\leq |u||v|.$$

2. Έχουμε διαδοχικά

$$|u+v|\leq |u|+|v|\Leftrightarrow$$
$$|u+v|^2\leq (|u|+|v|)^2\Leftrightarrow$$
$$\langle u+v,u+v\rangle\leq (|u|+|v|)^2\Leftrightarrow$$
$$\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle\leq |u|^2+|v|^2+2|u||v|\Leftrightarrow$$
$$|u|^2+2\langle u,v\rangle+|v|^2\leq |u|^2+|v|^2+2|u||v|\Leftrightarrow$$
$$\langle u,v\rangle\leq |u||v|,$$

και η τελευταία σχέση ισχύει από το 1 του Θεωρήματος.

■

Από την ανισότητα των Cauchy – Schwarz, συμπεραίνουμε ότι αν $u,v\in\mathbb{R}^n$ είναι μη μηδενικά τότε

$$-1\leq\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}\leq 1.$$

Συνεπώς υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός θ με $0\leq\theta\leq\pi$ τέτοιος ώστε

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}.$$

5.2.5 Ορισμός

Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n$. *Έστω θ ο μοναδικός πραγματικός αριθμός με* $0\leq\theta\leq\pi$ τέτοιος ώστε

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}.$$

Θα λέμε ότι η ***γωνία*** *μεταξύ των* u,v *είναι θ. Στην ειδική περίπτωση που* $\theta=\frac{\pi}{2}$, *θα λέμε ότι τα* u,v *είναι* ***κάθετα*** *μεταξύ τους.*

Κάνουμε την παραδοχή ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι κάθετο με κάθε διάνυσμα. Συνεπώς βλέπουμε ότι ισχύει το εξής.

5.2.6 Πρόταση

Δυο διανύσματα $u,v\in\mathbb{R}^n$ *είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνο αν* $\langle u,v\rangle=0.$

Σημείωση Έχουμε ορίσει την έννοια της γωνίας μεταξύ δυο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ για τυχαίο n. Στην ειδική περίπτωση $n=2,$ η έννοια αυτή συμπίπτει με τη συνήθη έννοια της γωνίας στο επίπεδο που γνωρίζουμε από τα μαθητικά χρόνια μας και που υπενθυμίσαμε στην αρχή της παραγράφου. Αυτό έπεται από το νόμο των συνημιτόνων που αναφέραμε πριν. Πράγματι, αν $u, v \in \mathbb{R}^2$ είναι μη μηδενικά, και φ είναι η γωνία τους σύμφωνα με τον ορισμό που γνωρίζουμε από το Λύκειο, τότε

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = |u||v|\cos\phi,$$

όπως είδαμε στην ισότητα (1) στην αρχή της παραγράφου, και άρα

$$\cos\phi = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}.$$

Επειδή έχουμε $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$, το φ αυτό συμπίπτει με το θ του Ορισμού 5.2.5.

5.2.7 Επεξεργασμένα Παραδείγματα

1. Για ποια $a \in \mathbb{R}$, τα διανύσματα $v = (1, a, 2), u = (3, 1, -1)$ είναι κάθετα;

   Λύση

   Έχουμε $\langle u, v\rangle = 1\cdot 3 + a\cdot 1 + 2\cdot(-1) = 1 + a.$ Από την Πρόταση 5.2.5 έχουμε ότι τα u, v είναι κάθετα αν και μόνο αν $\langle u, v\rangle = 0$, δηλαδή $a = -1.$

2. Να βρεθεί η γωνία των $u = (0, 5, 0), v = (3, 3, 0)$

   Λύση

   Έχουμε $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} = \dfrac{0+15+0}{\sqrt{0^2+5^2+0^2}\sqrt{3^2+3^2+0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ Άρα $\theta = \dfrac{\pi}{4}.$

3. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n, u \neq 0.$ Δείξτε ότι το διάνυσμα $v - \dfrac{\langle u, v\rangle}{|u|^2}u$ είναι κάθετο στο $u.$

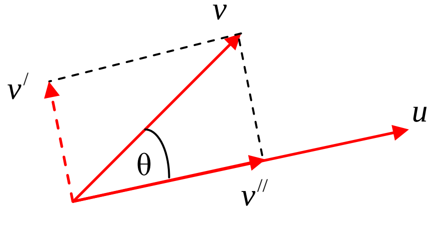
   Λύση

   Έχουμε

$$\left\langle v - \frac{\langle u, v\rangle}{|u|^2}u, u\right\rangle = \langle v, u\rangle - \left\langle \frac{\langle u, v\rangle}{|u|^2}u, u\right\rangle =$$

$$\langle v, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{|u|^2}\langle u, u\rangle = \langle v, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{|u|^2}|u|^2 = 0.$$

   Σημείωση Θα είναι χρήσιμο σε επόμενα κεφάλαια να δούμε τη γεωμετρική σημασία αυτού του παραδείγματος για $n = 2.$ Από το σχήμα φαίνεται ότι το διάνυσμα $v - \dfrac{\langle u, v\rangle}{|u|^2}u$ είναι η συνιστώσα $v^{/}$ του v που είναι κάθετη στο $u.$



Πράγματι, το διάνυσμα $\frac{u}{|u|}$ έχει μέτρο 1 και είναι παράλληλο με το u. Αν $v^{/}$ είναι η κάθετη συνιστώσα του v στο u και $v^{//}$ είναι η προβολή του v στο u, τότε $v^{/} = v - v^{//} = v - (|v|\cos\theta)\frac{u}{|u|} = v - (|v|\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|})\frac{u}{|u|} = v - \frac{\langle u,v\rangle}{|u|^2}u$.

4. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε $|u| = |v| = 1$ και η γωνία τους είναι $\frac{\pi}{4}$. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των $u+2v,\ u-v$.

Λύση

Αν θ είναι η ζητούμενη γωνία, τότε

$$\cos\theta = \frac{\langle u+2v, u-v\rangle}{|u+2v||u-v|}.$$

Για τον αριθμητή έχουμε τις σχέσεις

$$\langle u+2v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + 2\langle v,u\rangle - 2\langle v,v\rangle =$$
$$|u|^2 + \langle u,v\rangle - 2|v|^2 = \langle u,v\rangle - 1$$

και

$$\langle u,v\rangle = |u||v|\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Για τον παρονομαστή έχουμε

$$|u+2v| = \sqrt{\langle u+2v, u+2v\rangle} =$$
$$\sqrt{\langle u,u\rangle + 4\langle u,v\rangle + 4\langle v,v\rangle} =$$
$$\sqrt{|u|^2 + 4\langle u,v\rangle + 4|v|^2} =$$
$$\sqrt{1 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 4} =$$
$$\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

και

$$|u-v| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} =$$
$$\sqrt{\langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle} =$$
$$\sqrt{|u|^2 - 2\langle u,v\rangle + |v|^2} =$$
$$\sqrt{1 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} =$$
$$\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση βρίσκουμε $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{6-\sqrt{2}}}$. Με χρήση αριθμομηχανής βρίσκουμε ότι $\theta = 97.861$ μοίρες περίπου.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Στην παράγραφο αυτή μελετήσαμε την έννοια της βάσης στο $\mathbb{R}^n$, όπως επίσης και τις έννοιες του μήκος και της γωνίας. Θα δούμε τώρα μια διασύνδεση αυτών.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνήθης βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ έχει τις εξής ιδιότητες. α) Κάθε e_i έχει μήκος 1, δηλαδή $|e_i|=1$. β) Κάθε δυο διακεκριμένα e_i, e_j είναι κάθετα, δηλαδή $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. Μια τέτοια βάση θα λέγεται ορθοκανονική.

5.2.8 Ορισμός

Μια βάση $\{v_1,\dots,v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ λέγεται ορθοκανονική αν έχει τις ιδιότητες

- *για κάθε i, $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ για κάθε $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.*

5.2.9 Παράδειγμα

Όπως είδαμε πριν, η συνήθης βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθοκανονική. Επίσης η βάση $\{v_1, v_2\}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι ορθοκανονική, όπου $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Πράγματι, $|v_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ και όμοια $|v_2| = 1$. Επίσης $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

Περισσότερα για ορθοκανονικές βάσεις θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια. Για τώρα θα αρκεστούμε σε μια παρατήρηση.

5.2.10 Παρατήρηση

Έστω ότι $\{v_1,\dots,v_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$ και $v \in \mathbb{R}^n$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μοναδικά $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.13. Αν η βάση αυτή είναι ορθοκανονική, τότε για κάθε i έχουμε $a_i = \langle v, v_i \rangle$. Πράγματι,

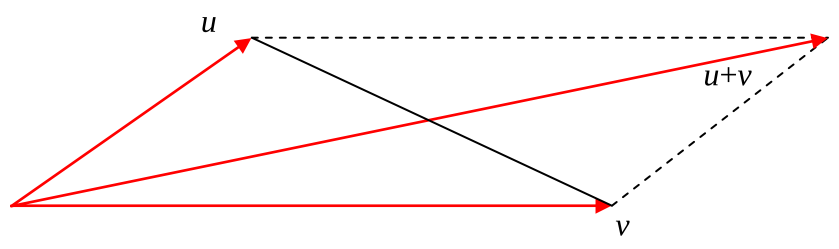
$$
\begin{aligned}
& v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow \\
& \langle v, v_i \rangle = \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, v_i \rangle = \\
& a_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + a_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + a_n \langle v_n, v_i \rangle = \\
& a_i \langle v_i, v_i \rangle = \\
& a_i .
\end{aligned}
$$

Ασκήσεις 5.2

1) Έστω $u,v\in\mathbb{R}^3, u=(1,0,-2), v=(2,1,1).$ Να υπολογιστούν τα $|u|,|v|,\langle u,v\rangle,\langle 2u-v,u+3v\rangle$ και να βρεθεί η γωνία των $u,v.$
2) Με τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης να βρεθεί το $\cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των $2u-v,u+3u.$
3) Να βρεθεί ένα διάνυσμα κάθετο στο $u=(1,2,-1)$. Στη συνέχεια να βρεθούν όλα τα διανύσματα κάθετα στο επίπεδο που περιέχει τα $u=(1,2,-1), v=(2,3,3).$
4) Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$. Η ισότητα αυτή ονομάζεται ο νόμος του παραλληλογράμμου. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία για $n=2.$
5) Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n$. Αν έχουμε $\langle u,v\rangle=0$, δείξτε ότι $|u|^2+|v|^2=|u+v|^2$. Για $n=2,$ η ισότητα αυτή εκφράζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Εξηγήστε γιατί.
6) Έστω $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι
$$\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n}\right)^2\le\left(a_1{}^2+\ldots+a_n{}^2\right)\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right).$$
7) Έστω $\{u_1,\ldots,u_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $v,w\in\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε την ταυτότητα του Parseval $\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle v,u_i\rangle\langle w,u_i\rangle.$

Απαντήσεις / Υποδείξεις 5.2

1) Οι απαντήσεις είναι
$$|u|=\sqrt{5},|v|=\sqrt{6},\langle u,v\rangle=0,\langle 2u-v,u+3v\rangle=-8,\theta=\frac{\pi}{2}.$$
2) Βλ Επεξεργασμένο Παράδειγμα 5.2.6 4.
3) Για το δεύτερο ερώτημα, αρκεί να βρεθούν όλα τα διανύσματα w που είναι κάθετα στα $u,v.$ Λύστε το σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις $\langle w,u\rangle=\langle w,v\rangle=0.$ Απάντηση: $w=(-9z,5z,z), z\in\mathbb{R}$.
4) Σημειώνουμε ότι η διαγώνιος που ενώνει τα πέρατα των u,v έχει μήκος $|u-v|$.



5) Χρησιμοποιήστε εσωτερικά γινόμενα και πράξεις στο αριστερό μέλος.
6) Εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy – Schwarz για κατάλληλα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
7) Από την Παρατήρηση 5.2.10 έχουμε τις σχέσεις $v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \ldots + \langle v, u_n \rangle u_n, w = \langle w, u_1 \rangle u_1 + \ldots + \langle w, u_n \rangle u_n$. Υπολογίστε το $\langle v, w \rangle$.

5.3 Ο Χώρος $\mathbb{C}^n$

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε το χώρο $\mathbb{R}^n$. Ειδικά, είδαμε τις έννοιες της βάσης και του εσωτερικού γινομένου. Εδώ θα ασχοληθούμε συνοπτικά με τις αντίστοιχες έννοιες στο $\mathbb{C}^n$.

Κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}^n$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα $(u_1,...,u_n)$, όπου $u_i \in \mathbb{C}$. Μπορούμε να προσθέσουμε δυο τέτοια στοιχεία σύμφωνα με τον κανόνα $(u_1,...,u_n)+(v_1,...,v_n)=(u_1+v_1,...,u_n+v_n)$, και να πολλαπλασιάσουμε ένα τέτοιο στοιχείο με ένα μιγαδικό αριθμό σύμφωνα με τον κανόνα $a(u_1,...,u_n)=(au_1,...,au_n)$, όπου $a \in \mathbb{C}$. Τότε ισχύουν οι ιδιότητες της Πρότασης 5.1.1.

Βάσεις Στο $\mathbb{C}^n$

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε έννοιες, όπως γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, γραμμικός συνδυασμός κλπ και ιδιότητες αυτών. Υπάρχουν και εδώ αντίστοιχες έννοιες που ικανοποιούν ανάλογες ιδιότητες. Για λόγους σαφήνειας ας διατυπώσουμε τους σχετικούς ορισμούς.

Έστω $v_1,...,v_m \in \mathbb{C}^n$.

- Θα λέμε ότι τα στοιχεία αυτά είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν από τη σχέση $a_1v_1+...+a_mv_m=0,\ a_i \in \mathbb{C},$ έπεται ότι $a_1=...=a_m=0.$
- Κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}^n$ της μορφής $a_1v_1+...+a_mv_m,\ a_i \in \mathbb{C},$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1,...,v_m$.
- Θα λέμε ότι τα $v_1,...,v_m$ **παράγουν** το $\mathbb{C}^n$, αν κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,...,v_m$.
- Θα λέμε ότι τα $v_1,...,v_m$ αποτελούν μια **βάση** του $\mathbb{C}^n$, αν τα στοιχεία αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το $\mathbb{C}^n$.

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν αποτελέσματα πανομοιότυπα με αυτά που είδαμε στην Παράγραφο 5.1. Τα σημαντικότερα από αυτά είναι τα επόμενα. Οι δε αποδείξεις είναι ακριβώς οι ίδιες και για αυτό παραλείπονται.

5.3.1 Θεώρημα

Έστω ότι $v_1,...,v_m \in \mathbb{C}^n$.

1. *Αν τα* $v_1,...,v_m$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έχουμε* $m \le n$.
2. *Αν τα* $v_1,...,v_m$ *παράγουν το* $\mathbb{C}^n$*, τότε έχουμε* $m \ge n$.
3. *Αν τα* $v_1,...,v_m$ *αποτελούν βάση του* $\mathbb{C}^n$*, τότε έχουμε* $m = n$.

5.3.2 Πρόταση

Έστω $\{v_1,...,v_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

1. *Το* $\{v_1,...,v_n\}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{C}^n$

2. *Το* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *παράγει το* $\mathbb{C}^n$
3. *Το* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

5.3.3 Πόρισμα

Έστω $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{C}^n$ *και έστω* A *ο* $n\times n$ *πίνακας του οποίου η στήλη* i *είναι το* v_i, $i=1,\ldots,n$. *Τότε τα* $v_1,\ldots,v_n$ *αποτελούν μια βάση του* $\mathbb{C}^n$ *αν και μόνο αν* $\det A \neq 0$.

5.3.4 Παραδείγματα

1. Εξετάστε αν τα $\left(1+2i,3,4-i,3i\right),(2i,4+5i,3,5-i),(2+2i,1-i,6,7)\in\mathbb{C}^4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   Λύση

   Έστω $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{C}$. Έχουμε

   $a_1\left(1+2i,3,4-i,3i\right)+a_2(2i,4+5i,3,5-i)+a_3(2+2i,1-i,6,7)=(0,0,0,0)\Rightarrow$

   $$\begin{cases}(1+2i)a_1+2ia_2+(2+2i)a_3=0\\ 3a_1+(4+5i)a_2+(1-i)a_3=0\\ (4-i)a_1+3a_2+6a_3=0\\ 3ia_1+(5-i)a_2+7a_3=0.\end{cases}$$

   Για να λύσουμε το σύστημα αυτό μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Ένας ενδεχομένως πιο οικονομικός τρόπος για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι να υπολογίσουμε την 3×3 ορίζουσα των συντελεστών των πρώτων τριών εξισώσεων δηλαδή τη

   $$\det\begin{pmatrix}1+2i & 2i & 2+2i\\ 3 & 4+5i & 1-i\\ 4-i & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

   Μετά από μερικές πράξεις , που μπορούν να γίνουν με ένα πρόγραμμα όπως είναι το MAPLE, βρίσκουμε ότι η ορίζουσα είναι ίση με $-27-11i$, δηλαδή είναι μη μηδενική. Άρα για τις πρώτες τρεις εξισώσεις η μηδενική λύση είναι η μοναδική λύση. Τελικά όλο το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση. Άρα τα δεδομένα στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Αφού αποδείξετε ότι τα στοιχεία $\left(2-i,3+5i\right),\left(1+3i,7\right)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{C}^2$, να παραστήσετε το $(1-i,1+3i)$ σαν γραμμικό συνδυασμό αυτών.

   Λύση

   Υπολογίζοντας βρίσκουμε $\det\begin{pmatrix}2-i & 1+3i\\ 3+5i & 7\end{pmatrix}=26-21i\neq 0$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 5.3.3, τα δεδομένα στοιχεία συγκροτούν μια βάση του $\mathbb{C}^2$. Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από το $a(2-i,3+5i)+b(1+3i,7)=(1-i,1+3i)$, δηλαδή το σύστημα

   $$(2-i)a+(1+3i)b=1-i$$
   $$(3+5i)a+7b=1+3i$$

   βρίσκουμε $a=\dfrac{663}{1117}+\dfrac{-23}{1117}i,\ b=\dfrac{-141}{1117}+\dfrac{15}{1117}i$.

Το Σύνηθες Εσωτερικό Γινόμενο Στο $\mathbb{C}^n$

Υπενθυμίζουμε (βλ.Κεφάλαιο 1) ότι αν $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$, τότε ο συζυγής του z είναι ο $\bar{z} = a - bi$ και έχουμε $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

5.3.5 Ορισμός

Έστω $u, v \in \mathbb{C}^n$, $u = (u_1, ..., u_n), v = (v_1, ..., v_n)$..

- *Το εσωτερικό γινόμενο των* u, v *είναι ο μιγαδικός αριθμός* $\langle u, v \rangle = u_1\overline{v_1} + ... + u_n\overline{v_n}$.
- *Το μήκος (ή μέτρο) του* u *είναι ο πραγματικός αριθμός* $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\langle u, u \rangle$ είναι πραγματικός γιατί είναι της μορφής $\langle u, u \rangle = u_1\overline{u_1} + ... + u_n\overline{u_n}$ και κάθε προσθετέος $u_i\overline{u_i}$ είναι πραγματικός. Μάλιστα είναι μη αρνητικός.

Για παράδειγμα, αν $u = (1 - i, 5), v = (2 + 3i, -6i)$, τότε

$$\langle u, u \rangle = (1-i)\overline{(1-i)} + 5 \cdot \bar{5} = 27,$$
$$\langle v, v \rangle = (2+3i)\overline{(2+3i)} + (-6i) \cdot \overline{(-6i)} = 49$$
$$\langle u, v \rangle = (1-i)\overline{(2+3i)} + 5 \cdot \overline{(-6i)} = -1 + 25i$$
$$\langle v, u \rangle = (2+3i)\overline{(1-i)} + (-6i) \cdot \bar{5} = -1 - 25i.$$

Μερικές απλές ιδιότητες αυτού του εσωτερικού γινομένου είναι οι εξής. (Καλό είναι να συγκριθεί η επόμενη πρόταση με την Πρόταση 5.2.2).

5.3.6 Πρόταση

Έστω $u, v, w \in \mathbb{C}^n, a \in \mathbb{C}$. *Τότε έχουμε*

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
2. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
3. $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$
4. $\langle u, av \rangle = \bar{a}\langle u, v \rangle$
5. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
6. $\langle u, u \rangle \geq 0$
7. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Τονίζουμε στην ιδιότητα 4 την ύπαρξη του συζυγούς του a στο δεξιό μέλος.

Όπως στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε και εδώ δυο σημαντικές ανισότητες. Οι δε αποδείξεις είναι ανάλογες με αυτές του Θεωρήματος 5.2.4 και για αυτό παραλείπονται.

5.3.7 Θεώρημα

Έστω $u, v \in \mathbb{C}^n$. *Τότε*

1. *(ανισότητα Cauchy - Schwarz)* $|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|$

2. *(τριγωνική ανισότητα)* $|u+v| \le |u| + |v|$.

Επειδή στο $\mathbb{C}^n$ το $\langle u, v \rangle$ ενδέχεται να μην είναι πραγματικός, δεν ορίζεται η έννοια της γωνίας μέσω του συνήθους εσωτερικού γινομένου. Όμως μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της καθετότητας.

Δυο στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ λέγονται **κάθετα** αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν. Παρατηρούμε ότι ενώ δεν ισχύει γενικά η ισότητα $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, ισχύει το εξής

$$\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, u \rangle = 0.$$

Πράγματι, αυτό έπεται άμεσα από τη σχέση 5 της Πρότασης 5.3.6 .

Μια βάση $\{v_1, ..., v_n\}$ του $\mathbb{C}^n$ λέγεται **ορθοκανονική** αν $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, \alpha\nu\ i \ne j \\ 1, \alpha\nu\ i = j. \end{cases}$

Ασκήσεις 5.3

1. Να υπολογιστούν τα $|u|,|v|,\langle u,v\rangle$, όπου
$$u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}},0\right), v=\left(\frac{1+2i}{\sqrt{18}},\frac{2-i}{\sqrt{18}},\frac{2-2i}{\sqrt{18}}\right).$$
2. Να αποδείξετε ότι
   - για κάθε $u,v\in\mathbb{C}^n$ έχουμε
   $$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}|u+v|^2-\frac{1}{4}|u-v|^2+\frac{i}{4}|u+iv|^2-\frac{i}{4}|u-iv|^2$$
   - για κάθε $u,v\in\mathbb{R}^n$ έχουμε
   $$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}|u+v|^2-\frac{1}{4}|u-v|^2.$$
3. Εξετάστε αν το σύνολο $\left\{(i,0,0),\left(0,\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}}\right),\left(0,\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^3$.

Απαντήσεις / Υποδείξεις 5.3

1. $|u|=|v|=1,\langle u,v\rangle=0.$
2. Πραγματοποιήστε τις πράξεις στο δεξιό μέλος με βάση τη σχέση $|u|^2=\langle u,u\rangle.$
3. Είναι ορθοκανονική βάση