Κεφάλαιο 11

Πραγματικές Τετραγωνικές Κορφές

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις τετραγωνικές μορφές, που είναι μια εφαρμογή της Γραμμικής Άλγεβρας στη μελέτη των μη γραμμικών εξισώσεων. Ιδιαίτερα ο μετασχηματισμός μιας εξίσωσης, δευτέρου βαθμού, των σημείων του επιπέδου ή του χώρου, σε σύστημα συντεταγμένων με άξονες τους άξονες συμμετρίας της γραμμής ή της επιφάνειας, είναι η σημαντικότερη εφαρμογή των τετραγωνικών μορφών στη Γεωμετρία.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ορισμός 1

Μια απεικόνιση $q(x):\mathbb{R}^{n\times 1}\to\mathbb{R}$ *με*

$$q(x)=\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j \ ,$$

όπου $a_{ij}\in\mathbb{R}$ *με* $i\le j=1,2,\ldots,n$ *και* $x=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ *ονομάζεται* ***τετραγωνική μορφή*** *του* $\mathbb{R}^n$.

Για παράδειγμα η απεικόνιση $q_1(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 4x_2^2 + 14x_2x_3$ είναι τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^3$, η $q_2(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2$ είναι τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$, ενώ η $q(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + 3x_1$ δεν είναι γιατί περιέχει τον όρο $3x_1$.

Αν θεωρήσουμε τον τετραγωνικό πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ παρατηρούμε ότι ο A είναι συμμετρικός πίνακας και αν θεωρήσουμε μία τετραγωνική μορφή $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$, εύκολα επαληθεύουμε ότι ισχύει $q(x) = x^t Ax$, όπου $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Ο A ονομάζεται ο ***αντίστοιχος πίνακας*** της $q(x)$.

Έτσι, για τα παραδείγματα των παραπάνω τετραγωνικών μορφών οι αντίστοιχοι πίνακες είναι $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας τότε ορίζεται μια τετραγωνική μορφή $q(x) = a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{12}x_1x_3 + ... + a_{nn}{x_n}^2$ της οποίας ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο A.

Ορισμός 2

*Μια τετραγωνική μορφή $q(x): \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ με $q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ με $i = 1, 2, \ldots, n$ και $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ονομάζεται **διαγώνια** τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^n$.*

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το διαγώνιο πραγματικό πίνακα $\Delta = diag(1,6)$, και υπολογίσουμε την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$ έχουμε $q(x) = x^t \Delta x = x_1^2 + 6x_2^2$, η οποία είναι διαγώνια.

<u>Υπενθυμίζουμε</u> ότι στο Κεφάλαιο 10, Προτάσεις 8 και 10, είχαμε αναφέρει ότι οι ιδιοτιμές συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι κάθετα. Επίσης είχαμε παρατηρήσει ότι για κάθε τετραγωνικό συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P για τον οποίο ισχύει $P^t AP = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$. Συνεπώς αν έχουμε την τετραγωνική μορφή $q(x) = x^t Ax$ ο αντίστοιχος πίνακάς της διαγωνοποιείται μέσω ορθογωνίου πίνακα $P \in M_n(\mathbb{R})$ και αν θέσουμε $x = Pz$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ και $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} x^t Ax &= (Pz)^t A(Pz) = z^t (P^t AP)z \\ &= z^t diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) z = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2. \end{aligned}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Πρόταση 1

Έστω ένας συμμετρικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε

i) υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$, για τον οποίο ισχύει $P^t AP = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A,

ii) η τετραγωνική μορφή που προκύπτει από την $q(x) = x^t Ax$ του $\mathbb{R}^n$ με την αλλαγή μεταβλητών $x = Pz$ είναι η διαγώνια τετραγωνική μορφή

$$q(z) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2.$$

Για την τετραγωνική μορφή $q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$ ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, ο οποίος έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 3$. Για $\lambda_1 = -2$, ο ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}$ και για την $\lambda_2 = 3$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας που μπορεί να κατασκευαστεί είναι αυτός που προκύπτει αν θέσουμε ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού έχουμε διαιρέσει το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό της Πρότασης 1ii) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, η τετραγωνική μορφή $q(x)$ μετά από πράξεις μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια που είναι

$$x^t Ax = z^t P^t APz = z^t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} z = -2z_1^2 + 3z_2^2 .$$

<u>Σχόλιο:</u> Σε κάθε τετραγωνική μορφή $q(x)=x^t Ax$ του $\mathbb{R}^n$ δεν υπάρχει μόνο μια διαγώνια τετραγωνική μορφή, αυτή εξαρτάται από το πώς θα κατασκευάσει κάποιος τον πίνακα P. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε μια άλλη διαγώνια μορφή της προηγούμενης τετραγωνικής μορφής $q(x)=2x_1^2+4x_1x_2-x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$, αν χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $P=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι για $z=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ έχουμε

$$z^t P^t APz = z^t \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} z = -40z_1^2 + 240z_2^2 ,$$

δηλαδή η διαγώνια μορφή που προκύπτει δεν έχει ως συντελεστές τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

Ορισμός 3

Μια τετραγωνική μορφή $q(x)$ του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται

- ***θετικά ορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ισχύει $q(x)=x^t Ax>0$*
- ***θετικά ημιορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ισχύει $q(x)=x^t Ax \ge 0$*
- ***αρνητικά ορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ η $-q(x)>0$*
- ***αρνητικά ημιορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ η $-q(x)\ge 0$*
- ***αόριστη*** *αν δεν ισχύει καμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις.*

Παραδείγματα

- Η τετραγωνική μορφή $q_1(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$ είναι θετικά ορισμένη, αφού $q_1(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$ για κάθε μη μηδενικό $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Η $q_2(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$ είναι θετικά ημιορισμένη, γιατί $q_2(x) = (x_1 - 2x_2)^2 + x_3^2 \geq 0$ για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- Η τετραγωνική μορφή $q_3(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$ είναι αόριστη, γιατί αν θέσουμε $x_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ έχουμε $q_3(x_0) < 0$, ενώ αν θέσουμε $x_a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ έχουμε $q_3(x_a) \geq 0$.

Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας λέγεται ***θετικά ορισμένος*** αν η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη. Ανάλογα ορίζονται και οι έννοιες του θετικά ημιορισμένου πραγματικού συμμετρικού πίνακα κλπ.

Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ είναι αρνητικά ημιορισμένος, επειδή η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή του A, $q(x) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2 - 5x_3^2 = -(x_1 - 3x_2)^2 - 5x_3^2 \leq 0$ είναι αρνητικά ημιορισμένη.

Έστω A ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας και $q(x) = x^t Ax$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Αν το x είναι ένα ιδοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ, τότε έχουμε $q(x) = x^t Ax = x^t \lambda x = \lambda |x|^2$. Επειδή το μέτρο είναι πάντα θετικό, αναμένουμε το πρόσημο της τετραγωνικής μορφής να έχει σχέση με το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα A. Σχετικά ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε ο A είναι

i) θετικά ορισμένος, αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές

ii) θετικά ημιορισμένος, αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη αρνητικές

iii) αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι αρνητικές

iv) *αόριστος αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μία θετική και τουλάχιστον μία αρνητική ιδιοτιμή.*

Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αόριστος, γιατί οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1=-\sqrt{5}$, $\lambda_2=-2$ και $\lambda_3=\sqrt{5}$.

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Το γεγονός ότι κάθε τετραγωνική μορφή μπορεί να αναχθεί σε διαγώνια μορφή μέσω ενός ορθογώνιου πίνακα έχει μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική εφαρμογή, την ταξινόμηση στο $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ των καμπυλών και επιφανειών που ορίζονται από μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Ας δούμε την ταξινόμηση αυτή συνοπτικά στην περίπτωση του επιπέδου.

Καμπύλες δευτέρου βαθμού στο επίπεδο

Η γενική μορφή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού σε 2 μεταβλητές είναι $a_{11}x_1{}^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2{}^2+b_1x_1+b_2x_2+c=0$. Αυτή γράφεται στη μορφή

$$x^tAx+b^tx+c=0,$$

όπου $A\in M_2(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, $b=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{2\times1}$ και $x=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{2\times1}$. Από την Πρόταση 1 υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^tAP=diag(\lambda_1,\lambda_2)$, λ_1,λ_2 ιδιοτιμές του A. Αν κάνουμε την αντικατάσταση στην παραπάνω παράσταση $x=Pz$, $z=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{2\times1}$, βρίσκουμε μετά από πράξεις ότι

$$\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\beta_1z_1+\beta_2z_2+c=0 \tag{1}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

- Αν $\lambda_1,\lambda_2\neq0$, ο μετασχηματισμός $w_i=z_i+\dfrac{\beta_i}{2\lambda_i}$, $i=1,2$ μετατρέπει τη σχέση $x^tAx+b^tx+c=0$ σε

$$\lambda_1w_1^2+\lambda_2w_2^2=k \tag{2}$$

όπου $k=\frac{\beta_1^2}{4\lambda_1}+\frac{\beta_2^2}{4\lambda_2}-c$. Αν ο k είναι μη μηδενικός και ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών λ_1,λ_2, η (2) έχει μία από τις εξής μορφές.

Έστω $k\neq 0$.

$$\frac{w_1^2}{a_1^2}+\frac{w_2^2}{a_2^2}=1 \quad \text{αν } \lambda_1>0,\lambda_2>0 \quad \text{(έλλειψη)}$$

$$\frac{w_1^2}{a_1^2}-\frac{w_2^2}{a_2^2}=1 \quad \text{αν } \lambda_1>0,\lambda_2<0 \quad \text{(υπερβολή)}$$

$$-\frac{w_1^2}{a_1^2}-\frac{w_2^2}{a_2^2}=1 \quad \text{αν } \lambda_1<0,\lambda_2<0 \quad \text{(κενό σύνολο)}$$

Έστω $k=0$.

$$\frac{w_1^2}{a_1^2}+\frac{w_2^2}{a_2^2}=0 \quad \text{αν } \lambda_1>0,\lambda_2>0 \text{ ή αν } \lambda_1<0,\lambda_2<0 \quad \text{(το σημείο (0,0))}$$

$$\frac{w_1^2}{a_1^2}-\frac{w_2^2}{a_2^2}=0 \quad \text{αν } \lambda_1>0,\lambda_2<0 \quad \text{(ζευγάρι τεμνόμενων ευθειών)}$$

- Αν μία ιδιοτιμή είναι μηδέν, έστω $\lambda_2=0$ και $\lambda_1\neq 0$ ο μετασχηματισμός $w_1=z_1+\frac{\beta_1}{2\lambda_1}$ και $w_2=\frac{\beta_1^2}{4\lambda_1}-c-\beta_2 z_2$ δίνουν $\lambda_1 w_1^2=w_2$, η οποία είναι η εξίσωση παραβολής.
- Αν $\lambda_1=\lambda_2=0$, η (1) παριστάνει ευθεία.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Σε κάθε μία από τις επόμενες τετραγωνικές μορφές να βρείτε μια αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή.

1. $q_1(x)=2x_1^2-2\sqrt{2}x_1x_2+3x_2^2$ *του* $\mathbb{R}^2$
2. $q_2(x)=4x_1^2-8x_1x_3+4x_2^2+6x_2x_3+4x_3^2$ *του* $\mathbb{R}^3$

Λύση

1. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι $A=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1, πρέπει να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-4)$, άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=4$.

Με $\lambda_1=1$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda_1 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

οπότε βρίσκουμε τον ιδιόχωρο της λ_1 ιδιοτιμής, ο οποίος είναι $\left\{x_2\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R}\right\}$.

Με $\lambda_2=4$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda_2 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

βρίσκουμε τον ιδιόχωρο της λ_2 ιδιοτιμής, ο οποίος είναι $\left\{x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R}\right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συγκεκριμένου συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση $P^t AP = diag(1, \quad 4)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό της Πρότασης 1 ii) $x=Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, η τετραγωνική μορφή $q(x)=x^t Ax$ μετά από πράξεις μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$x^t Ax = z^t P^t APz = z^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}z = z_1^2+4z_2^2.$$

2. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1 πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-9)$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=4$ και $\lambda_3=9$.

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ είναι $\left\{x_3\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R}\right\}$, αυτός που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι $\left\{ x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, τέλος ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 9$ είναι $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού έχουμε διαιρέσει το καθένα από αυτά με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{50} & 3/5 & -4/\sqrt{50} \\ -3/\sqrt{50} & 4/5 & 3/\sqrt{50} \\ 5/\sqrt{50} & 0 & 5/\sqrt{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5\sqrt{2} & 3/5 & -4/5\sqrt{2} \\ -3/5\sqrt{2} & 4/5 & 3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση $P^t AP = diag\left(-1, 4, 9\right)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό της [Πρότασης 1 ii)](#) $x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5\sqrt{2} & 3/5 & -4/5\sqrt{2} \\ -3/5\sqrt{2} & 4/5 & 3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, η τετραγωνική μορφή $q(x) = x^t Ax$ μετά από πράξεις μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$x^t Ax = z^t P^t APz = z^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} z = -z_1^2 + 4z_2^2 + 9z_3^2 .$$

Άσκηση 2

Για το συμμετρικό πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, *να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα* P *τέτοιο ώστε ο* $P^t AP$ *να είναι διαγώνιος και να γράψετε την αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή.*

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 1 για να υπολογίσουμε τον P χρειάζεται να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-7)$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ και $\lambda_3=7$.

Με $\lambda_1=1$ λύνουμε το ομογενές σύστημα

$(\lambda_1 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&-5&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, βρίσκουμε τον ιδιόχωρο της λ_1 ιδιοτιμής, ο οποίος είναι $\left\{x_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ x_2\in\mathbb{R}\right\}$

Με $\lambda_2=2$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda_2 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0&2&0\\2&-4&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, βρίσκουμε τον ιδιόχωρο της λ_2 ιδιοτιμής, ο οποίος είναι $\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$ και για την ιδιοτιμή $\lambda_3=7$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{x_3\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R}\right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού έχουμε διαιρέσει το καθένα από αυτά με το μέτρο του, δηλαδή $P=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}&1/\sqrt{5}&2/\sqrt{30}\\1/\sqrt{6}&0&-5/\sqrt{30}\\1/\sqrt{6}&-2/\sqrt{5}&1/\sqrt{30}\end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση $P^tAP=diag(1,2,7)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό της Πρότασης 1 ii)

$$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$, η τετραγωνική μορφή $q(x) = x^t Ax$ μετά από πράξεις μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$x^t Ax = z^t P^t APz = z^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} z = z_1^2 + 2z_2^2 + 7z_3^2 .$$

Άσκηση 3

Να εξετασθούν αν οι επόμενες τετραγωνικές μορφές είναι θετικά ορισμένες, ημιθετικά ορισμένες κλπ.

1. $q_1(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$
2. $q_2(x) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$
3. $q_3(x) = -4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$
4. $q_4(x) = 4x_1^2 + 4x_1x_4 + 2x_2^2 - 4x_2x_4 + 3x_3^2 + 3x_4^2$ του $\mathbb{R}^4$

Λύση

1. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_1(x) = x^t Ax$ είναι $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Το κριτήριο που υπολογίζει το πρόσημο της τετραγωνικής μορφής, το οποίο είναι το ίδιο με το πρόσημο του αντίστοιχου πίνακα, συνδέεται με το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2. Έτσι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 4)$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4 - 2\sqrt{3} > 0$ και $\lambda_3 = 4 + 2\sqrt{3}$. Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικοί αριθμοί, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος, άρα και η τετραγωνική μορφή $q_1(x)$ είναι θετικά ορισμένη.

2. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(x) = x^t Ax$ είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Όπως και προηγούμενα υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα που είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda - 8)$. Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{17} < 0$ και $\lambda_3 = 3 + \sqrt{17}$. Επειδή υπάρχει τουλάχιστον μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, ο πίνακας είναι αόριστος, άρα και η τετραγωνική μορφή $q_2(x)$ είναι αόριστη.

3. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(x) = x^t Ax$ είναι $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 5)^2$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -5$ (διπλή ρίζα). Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικοί αριθμοί, σύμφωνα με το Θεώρημα 2iii) ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, άρα και η τετραγωνική μορφή $q_3(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη.

4. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2 πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)^2(\lambda - 6)$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_3 = 6$. Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικοί αριθμοί, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, ο πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος, άρα και η τετραγωνική μορφή είναι $q_4(x) \geq 0$.

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, ώστε ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ να είναι θετικά ορισμένος.

Λύση

Η ορίζουσα του πίνακα είναι $\det A = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2 \leq 0$, η οποία όπως είναι γνωστό ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα *A*. Είναι φανερό ότι οι ιδιοτιμές δεν μπορεί να είναι όλες θετικές για να είναι ο συμμετρικός πίνακας *A* θετικά ορισμένος, κατά συνέπεια δεν υπάρχουν τιμές του *α*, ώστε να ισχύει το Θεώρημα 2i).

Άσκηση 5

Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικά ορισμένος, δείξτε ότι το ίχνος και η ορίζουσα του πίνακα είναι θετικοί αριθμοί.

Λύση

Επειδή ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος έχει όλες τις ιδιοτιμές $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, (δες Θεώρημα 2). Επιπλέον είναι γνωστό από το Κεφάλαιο 9 ότι το ίχνος ενός πίνακα ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του, άρα $TrA = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n > 0$. Επίσης ξέρουμε ότι $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n > 0$.

Άσκηση 6

Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικά ημιορισμένος, δείξτε ότι ο πίνακας A^k, για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Λύση

Έστω ότι ο πίνακας *A* έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, οι οποίες σύμφωνα με το Θεώρημα 2ii) είναι όλες μη αρνητικοί αριθμοί. Επειδή $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^k ισχύει και γι΄αυτές $\lambda_i^k \geq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε ο πίνακας A^k είναι επίσης θετικά ημιορισμένος.

Άσκηση 7

Να βρείτε το είδος των επόμενων καμπύλων

1. $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 14x_1 + 2x_2 + 5 = 0$

2. $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 14x_2 + 19 = 0$

3. $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 = 10$

Λύση

1. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x^t Ax + b^t x + 5 = 0$ (*), όπου $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_1(x) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$, για κάθε $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $b = \begin{pmatrix} -14 & 2 \end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 8$. Της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 2$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ δε της $\lambda_2 = 8$ ο ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, οπότε ισχύει $x^t Ax = z^t P^t APz = z^t diag(2,8)z$ και

$b^t P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -14 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{\sqrt{2}} & \frac{-16}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, άρα η (*) καταλήγει στην

$$z^t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}z + \begin{pmatrix} \frac{-12}{\sqrt{2}} & \frac{-16}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}z + 5 = 0 \Rightarrow 2z_1^2 + 8z_2^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}z_1 - \frac{16}{\sqrt{2}}z_2 + 5 = 0 \quad (**).$$

Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - \frac{-12/\sqrt{2}}{4} \\ w_2 - \frac{-16/\sqrt{2}}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ w_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και αντικαταστήσουμε στην (**) καταλήγουμε στην εξίσωση της έλλειψης

$$2w_1^2 + 8w_2^2 = 8 \Rightarrow \frac{w_1^2}{4} + \frac{w_2^2}{1} = 1.$$

2. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x^t Ax + b^t x + 19 = 0$ (*), όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, για κάθε $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $b = \begin{pmatrix} -6 & -14 \end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 2$. Της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 0$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ δε της $\lambda_2 = 2$ ο ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, οπότε ισχύει $x^t Ax = z^t P^t APz = z^t diag(0,2) z$ και

$b^t P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -6 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-20}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, άρα η (*) καταλήγει στην

$$z^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \frac{-20}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} z + 19 = 0 \Rightarrow 2z_2^2 - \frac{20}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{8}{\sqrt{2}} z_2 + 19 = 0 \quad (**).$$

Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς $z_2 = w_2 - \frac{8/\sqrt{2}}{4} = w_2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$ και $w_1 = \frac{20}{\sqrt{2}} z_1 - 15$ και αντικαταστήσουμε στην (**) καταλήγουμε στην εξίσωση της παραβολής $2w_2^2 = w_1 \Rightarrow \frac{w_2^2}{(1/2)} = w_1$.

3. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x^t Ax + b^t x - 10 = 0$ (*), όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$, για κάθε $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $b = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να

υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 4$.

Της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -2$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ και της $\lambda_2 = 4$ ο ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, οπότε ισχύει $x^t Ax = z^t P^t APz = z^t diag(-2,4)z$ και

$b^t P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, άρα η (*) καταλήγει στην

$$z^t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} z - 10 = 0 \Rightarrow -2z_1^2 + 4z_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}} z_2 - 10 = 0 \quad (**).$$

Στη συνέχεια, επειδή οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - \frac{0}{-4} \\ w_2 - \frac{8/\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και αντικαταστήσουμε στην (**)

καταλήγουμε στην εξίσωση της υπερβολής $-2w_1^2 + 4w_2^2 = 12 \Rightarrow \frac{w_2^2}{3} - \frac{w_1^2}{6} = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Σε κάθε μία από τις επόμενες τετραγωνικές μορφές να βρείτε την αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή της.

1. $q_1(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$

2. $q_2(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

3. $q_3(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

Υπόδειξη
Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση έναν ορθογώνιο πίνακα P και κατόπιν να γίνει η διαγώνια τετραγωνική μορφή. Βλ. Λυμένες Ασκήσεις 1,2

Απάντηση 1. $-z_1^2 + 3z_2^2$, 2. $-4z_1^2 + z_2^2 + 6z_3^2$ 3. $6z_3^2$

Άσκηση 2

Να εξετασθούν αν οι επόμενες τετραγωνικές μορφές είναι θετικά ορισμένες, ημιθετικά ορισμένες κλπ.

1. $q_1(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

2. $q_2(x) = 6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2 + 5x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

3. $q_3(x) = 8x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

4. $q_4(x) = -x_1^2 + 8x_1x_2 - 16x_2^2 - 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

Στη συνέχεια να βρείτε μια διαγώνια τετραγωνική μορφή για καθεμιά.

Υπόδειξη
Βλ. Λυμένη Άσκηση 3.

Απάντηση 1. θετικά ημιορισμένη 2.αόριστη 3. θετικά ημιορισμένη 4. αρνητικά ημιορισμένη

Άσκηση 3

Να βρείτε το είδος των επόμενων καμπύλων.

1. $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = 18$

2. $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 = 4$

Υπόδειξη
Βλ. Λυμένη Άσκηση 7

Απάντηση 1. $\frac{w_1^2}{20} + \frac{w_2^2}{4} = 1$ 2. $\frac{w_2^2}{\left(9/10\right)} - \frac{w_1^2}{\left(9/2\right)} = 1$.