Κεφάλαιο 3

Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με πράξεις πινάκων και την εφαρμογή τους στα γραμμικά συστήματα. Θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss που οδηγεί φυσιολογικά στην έννοια του κλιμακωτού πίνακα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ **2**
ΠΙΝΑΚΕΣ 2
Ορισμός 1 (πίνακας) 2
Ορισμός 2 (ισότητα πινάκων) 3
Ορισμοί 3 (είδη πινάκων) 3
ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ 5
Ορισμός 4 (άθροισμα) 5
Ορισμός 5 (γινόμενο πίνακα με αριθμό) 5
Ορισμός 6 (γινόμενο πινάκων) 6
Ορισμός 7 (αντιμεταθετικοί πίνακες) 6
ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ 7
Ορισμός 8 (στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών) 7
Ορισμός 9 (γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες) 7
Ορισμός 10 (κλιμακωτοί πίνακες) 7
Παράδειγμα 8
Ορισμός 11 (πίνακες και γραμμικά συστήματα) 8
Ορισμός 12 (αντιστρέψιμος πίνακας) 9
Παράδειγμα 9
Ορισμός 13 9

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ **10**
ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ 10
Πρόταση 1 10
Πρόταση 2 (ιδιότητες του γινομένου πινάκων) 10
Πρόταση 3 (δυνάμεις διαγωνίων πινάκων) 11
ΠΡΟΣΟΧΗ 11
Πρόταση 4 (διωνυμικό ανάπτυγμα για αντιμεταθετικούς πίνακες) 12
Πρόταση 5 (ανάστροφοι πίνακες) 12
ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ 12
Θεώρημα 6 (μετασχηματισμός σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα) 12
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 13
Θεώρημα 7 13
Θεώρημα 8 13
Θεώρημα 9 (ομογενή συστήματα) 14
ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ 14
Πρόταση 10 14
Θεώρημα 11 15
Πόρισμα 12 15

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **15**
Άσκηση 1 15
Άσκηση 2 16
Άσκηση 3 16
Άσκηση 4 17
Άσκηση 5 19
Άσκηση 6 21
Άσκηση 7 21

Άσκηση 8 23
Άσκηση 9 24
Άσκηση 10 24
Άσκηση 11 27
Άσκηση 12 28
Άσκηση 13 29

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 30
Άσκηση 1 30
Άσκηση 2 31
Άσκηση 3 31
Άσκηση 4 31
Άσκηση 5 32
Άσκηση 6 32
Άσκηση 7 33
Άσκηση 8 33
Άσκηση 9 33
Άσκηση 10 33
Άσκηση 11 34
Άσκηση 12 34

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Υπενθυμίζουμε ορισμούς βασικών εννοιών που αναφέρονται στις πράξεις πινάκων και στα γραμμικά συστήματα.

ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός 1 (πίνακας)

*Με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε ένα από τα σύνολα $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ένας **πίνακας** Α με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ είναι μια διάταξη στοιχείων a_{ij} του $\mathbb{F}$ σε σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο της μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Λέμε ότι το **μέγεθος** (ή ο **τύπος**) του παραπάνω πίνακα είναι $m \times n$ ή ότι ο πίνακας είναι ένας $m \times n$ πίνακας.*

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ είναι ένας 1×3 πίνακας, ο $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι 2×1 και ο $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ είναι 3×2.

Ο πίνακας A που είδαμε πιο πάνω συμβολίζεται με $(a_{ij}), i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$ Πιο απλά χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό $A=(a_{ij})$ όταν είναι σαφές ποια είναι τα $m,n.$

Ορισμός 2 (ισότητα πινάκων)

Έστω $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ *δυο* $m\times n$ *πίνακες με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$. *Θα λέμε ότι οι A, B είναι* ***ίσοι*** *και θα γράφουμε* $A=B$ *αν ισχύει* $a_{ij}=b_{ij}$ *για κάθε* $i=1,\ldots,m$ *και για κάθε* $j=1,\ldots,n.$

Για παράδειγμα, έχουμε $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x=2,\ y=4.$

Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε διάφορα είδη πινάκων που θα χρειαστούμε αργότερα.

Ορισμοί 3 (είδη πινάκων)

- *Ένας* $m\times n$ *πίνακας λέγεται* ***τετραγωνικός*** *αν* $m=n$.

  Το σύνολο $M_{m\times m}(F)$ των τετραγωνικών $m\times m$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ συμβολίζεται πιο απλά με $M_m(F)$.

- *Τα* ***διαγώνια στοιχεία*** *ενός* $m\times n$ *πίνακα* (a_{ij}) *είναι τα στοιχεία* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}$, *όπου* $k=\min\{m,n\}$. *Λέμε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στη* ***διαγώνιο*** *του πίνακα.*

- *Ένας τετραγωνικός πίνακας* $A=\left(a_{ij}\right)$ *λέγεται* ***άνω τριγωνικός*** *αν για κάθε* $i>j$ *έχουμε* $a_{ij}=0$.

  Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται άνω τριγωνικός, αν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την διαγώνιο είναι ίσα με 0. Για παράδειγμα, άνω τριγωνικοί είναι οι πίνακες

  $$\begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- *Ένας τετραγωνικός πίνακας* $A=\left(a_{ij}\right)$ *λέγεται* ***κάτω τριγωνικός*** *αν για κάθε* $i<j$ *έχουμε* $a_{ij}=0$.

  Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται κάτω τριγωνικός, αν τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την διαγώνιο είναι ίσα με 0. Για παράδειγμα, κάτω τριγωνικοί είναι οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- *Ένας τετραγωνικός πίνακας* (a_{ij}) *λέγεται* ***διαγώνιος*** *αν για κάθε* $i \neq j$ *έχουμε* $a_{ij} = 0.$

  Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας είναι διαγώνιος αν κάθε στοιχείο που δεν βρίσκεται στη διαγώνιο είναι ίσο με 0. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι διαγώνιος αλλά ο $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ δεν είναι.

- *Έστω* $A = \left(a_{ij}\right)$ *ένας* $m \times n$ *πίνακας. Ο* $n \times m$ *πίνακας* $\left(a_{ji}\right)$ *ονομάζεται ο* ***ανάστροφος*** *του A και συμβολίζεται με* A^t.

  Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \end{pmatrix}$, τότε $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

- *Ένας τετραγωνικός πίνακας* (a_{ij}) *λέγεται* ***συμμετρικός*** *αν για κάθε* i, j *ισχύει* $a_{ij} = a_{ji}$.

  Ισοδύναμα, ένας πίνακας *A* είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A = A^t$.

  Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικοί. Βλέπουμε ότι σε ένα συμμετρικό πίνακα, στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο είναι ίσα.

- *Ένας τετραγωνικός πίνακας* (a_{ij}) *λέγεται* ***αντισυμμετρικός*** *αν για κάθε* i, j *ισχύει* $a_{ij} = -a_{ji}$.

  Ισοδύναμα, ένας πίνακας *A* είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A = -A^t$.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικοί. Βλέπουμε ότι σε έναν αντισυμμετρικό πίνακα, στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο διαφέρουν ως προς τα πρόσημα ενώ αυτά που βρίσκονται πάνω στη διαγώνιο είναι ίσα με μηδέν.

Υπενθυμίζουμε τώρα τις τρεις βασικές πράξεις των πινάκων.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός 4 (άθροισμα)

Έστω $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Το **άθροισμα**, A+B, των A και B είναι ο πίνακας* $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} -4 & 3 & x \\ 1 & y & 0 \end{pmatrix}$, τότε

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 3 & x \\ 1 & y & 0 \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} 1+(-4) & 2+3 & 5+x \\ -1+1 & 3+y & 4+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 5+x \\ 0 & 3+y & 4 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 5 (γινόμενο πίνακα με αριθμό)

Έστω $A=(a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *και* $k \in \mathbb{F}$. *Το γινόμενο kA του k με τον A είναι ο πίνακας* $kA=(ka_{ij})$.

Για παράδειγμα, αν $k=2$ και $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, τότε

$$2A=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Συμβολισμός: Τον πίνακα $(-1)A$ συμβολίζουμε με $-A$. Όταν γράφουμε $A-B$ εννοούμε $A+(-B)$. Για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & x \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-3 & 5-x \\ 1-(-4) & -3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5-x \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 6 (γινόμενο πινάκων)

Έστω $A=\left(a_{ij}\right)\in M_{l\times m}(\mathbb{F})$ *και* $B=\left(b_{st}\right)\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε το **γινόμενο** των Α και Β, που συμβολίζεται με ΑΒ, είναι ο* $l\times n$ *πίνακας με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$ *όπου στη θέση (i,j) υπάρχει το στοιχείο* $\sum_{r=1}^{m} a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}$.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&k\end{pmatrix}$, τότε το γινόμενο AB είναι ο 2×3 πίνακας

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c & d+2e+3f & g+2h+3k\\4a+5b+6c & 4d+5e+6f & 4g+5h+6k\end{pmatrix}.$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\4a+5b+6c\end{pmatrix}.$$

Σχηματικά, το στοιχείο του γινομένου AB στη θέση (i,j) προκύπτει από τη γραμμή i του A και τη στήλη j του B όπως δείχνει το σχήμα

$$\begin{pmatrix} & \ldots & \\ \boxed{a_{i1}\quad a_{i2}\quad \ldots\quad a_{im}} \\ & \ldots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\ldots\\b_{mj}\end{matrix}} & \\ \ldots & & \ldots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \boxed{a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}} & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{pmatrix}.$$

Για το γινόμενο πινάκων ξέρουμε ότι δεν αληθεύει πάντα η σχέση $AB=BA$. Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$, τότε $AB=\begin{pmatrix}7&4\\10&8\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}1&2\\-1&14\end{pmatrix}$

Ορισμός 7 (αντιμεταθετικοί πίνακες)

Δυο $n\times n$ *πίνακες* A, B *λέγονται **αντιμεταθετικοί** αν ισχύει* $AB=BA$.

Παρατηρούμε ότι αν οι A, B είναι αντιμεταθετικοί τότε έχουμε

$(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2$, όπως επίσης $(AB)^n = A^nB^n$, $n = 1, 2, \ldots$

ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός 8 (στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών)

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Καθεμιά από τις παρακάτω διαδικασίες ονομάζεται ένας ***στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών*** *του πίνακα Α*

- *πολλαπλασιάζουμε μια γραμμή του Α με ένα μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{F}$*
- *προσθέτουμε σε μια γραμμή πολλαπλάσιο άλλης γραμμής*
- *εναλλάσσουμε δυο γραμμές.*

Έστω r_i η i γραμμή του A. Οι αντίστοιχοι συμβολισμοί των παραπάνω διαδικασιών είναι

- $r_i \to ar_i$ (πολλαπλασιάζουμε την r_i με το $a \neq 0$)
- $r_i \to r_i + ar_j$ (στη γραμμή r_i προσθέτουμε a φορές την r_j)
- $r_i \to r_j$ (εναλλάσσουμε τις r_i, r_j).

Ορισμός 9 (γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες)

Έστω $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Θα λέμε ότι ο Β είναι ***γραμμοϊσοδύναμος*** *με τον Α αν ο Β προκύπτει από τον Α μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.*

Για παράδειγμα ο $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 17 \end{pmatrix}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ αφού

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 10 (κλιμακωτοί πίνακες)

α. *Ένας πίνακας Α ονομάζεται* ***κλιμακωτός*** *αν*

1. *το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το 1*
2. *το πρώτο 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή βρίσκεται στα δεξιά του πρώτου 1 της προηγούμενης γραμμής*

3. *οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές γραμμές.*

b. *Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται* ***ανηγμένος κλιμακωτός*** *αν το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει .*

Παράδειγμα

Από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο πρώτος και τρίτος είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί, ενώ ο δεύτερος είναι κλιμακωτός αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός.

Ορισμός 11 (πίνακες και γραμμικά συστήματα)

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m1}x_n = b_m \end{matrix}$$

m εξισώσεων και n αγνώστων. Ο $m \times n$ *πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

λέγεται ο ***πίνακας των συντελεστών*** *του συστήματος. Ο πίνακας – στήλη* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *λέγεται ο* ***πίνακας των σταθερών όρων*** *του συστήματος. Ο* $m \times (n+1)$ *πίνακας*

$$(A,b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

που προκύπτει αν επισυνάψουμε στον πίνακα A *τη στήλη* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *λέγεται ο* ***επαυξημένος πίνακας*** *του συστήματος.*

Για παράδειγμα, αν το γραμμικό σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

τότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 12 (αντιστρέψιμος πίνακας)

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(F)$ *λέγεται* ***αντιστρέψιμος*** *αν υπάρχει πίνακας* $B \in M_n(F)$ *τέτοιος ώστε* $AB = BA = I$.

Παράδειγμα

- Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος γιατί αν $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, τότε εύκολα επαληθεύεται ότι $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος γιατί αν υπήρχε πίνακας $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ με $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $\begin{pmatrix} x+z & y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, οπότε το $x+z$ είναι ίσο με 1 και 0, άτοπο.

Ορισμός 13

Ένας $n \times n$ *πίνακας λέγεται* ***στοιχειώδης*** *πίνακας αν προκύπτει από τον ταυτοτικό* $n \times n$ *πίνακα* I *με την εφαρμογή ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών.*

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{F}$, είναι στοιχειώδης αφού προκύπτει από τον $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ αν προσθέσουμε στην πρώτη γραμμή, a φορές τη δεύτερη.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Θα αναφέρουμε τώρα κάποιες βασικές ιδιότητες των πράξεων που ορίσαμε πριν. Επίσης θα ασχοληθούμε με ορισμένα θεμελιώδη αποτελέσματα σχετικά με τις λύσεις γραμμικών συστημάτων.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πρόταση 1

Έστω $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *και* $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$. *Τότε ισχύουν τα εξής.*

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A+0_{m\times n} = A$
3. $A-A=0_{m\times n}$
4. $A+B=B+A$
5. $k_1(A+B)=k_1A+k_1B$
6. $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$
7. $(k_1k_2)A=k_1(k_2A)$
8. $1A=A$ *και* $0A=0_{m\times n}$.

Πρόταση 2 (ιδιότητες του γινομένου πινάκων)

Έστω $A\in M_{k\times l}(\mathbb{F}), B\in M_{l\times m}(\mathbb{F}), C\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $(AB)C = A(BC)$.

Έστω $A\in M_{l\times m}(\mathbb{F}), B, C\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $A(B+C)=AB+AC$.

Έστω $A, B\in M_{l\times m}(\mathbb{F}), C\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $(A+B)C = AC+BC$.

Έστω $k\in\mathbb{F}, A\in M_{l\times m}(\mathbb{F}), B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

Έστω $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $I_mA=AI_n=A$, $0_{l\times m}A=0_{l\times n}$ *και* $A0_{n\times l}=0_{m\times l}$.

Οι προηγούμενες δυο προτάσεις μας πληροφορούν ότι στις πράξεις πινάκων ισχύουν μερικοί νόμοι που είναι ανάλογοι των νόμων που ξέρουμε από τους πραγματικούς αριθμούς. Όμως υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ πράξεων πινάκων και πραγματικών αριθμών, τις οποίες επισημαίνουμε παρακάτω.

Πρόταση 3 (δυνάμεις διαγωνίων πινάκων)

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. Τότε για κάθε θετικό ακέραιο k έχουμε

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^{\,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{\,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{\,k} \end{pmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων διαφέρει ουσιαστικά από τον πολλαπλασιασμό πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Οι κύριες διαφορές είναι οι παρακάτω.

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ δυο $n \times n$ πίνακες. Τότε ορίζονται τα γινόμενα AB και BA. Τονίζουμε ότι είναι δυνατό να έχουμε $AB \neq BA$. Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, τότε $AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Δεν αληθεύει γενικά ότι $(AB)^2 = A^2B^2$. Πράγματι, με τους πίνακες του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 11 & 36 \\ 8 & 27. \end{pmatrix}$. Το σωστό είναι $(AB)^2 = ABAB$.
- Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Είναι δυνατό να έχουμε $AB = 0_{l \times n}$ ακόμα και αν $A \neq 0_{l \times m}$, $B \neq 0_{m \times n}$. Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F}), B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Αν ισχύει $AB = AC$, τότε γενικά δεν έπεται ότι $B = C$. Πράγματι, αν οι A, B είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, τότε $AB = A0_{2 \times 2}$, αλλά $B \neq 0_{2 \times 2}$.

Πρόταση 4 (διωνυμικό ανάπτυγμα για αντιμεταθετικούς πίνακες)

Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. *Αν αυτοί αντιμετατίθενται, δηλαδή αν ισχύει* $AB = BA$, *τότε για κάθε* $m \in \mathbb{N}$ *έχουμε* $(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k$.

Για παράδειγμα, αν $B = I$ τότε $AB = BA$ για κάθε $A \in M_n(\mathbb{F})$, οπότε από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε $\left(A+I\right)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$. Για συγκεκριμένες εφαρμογές της Πρότασης 4 παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 4,5.

Πρόταση 5 (ανάστροφοι πίνακες)

1. *Για κάθε πίνακα A έχουμε* $\left(A^t\right)^t$.
2. *Έστω* $A, B \in M_{m\times n}(F)$. *Τότε* $(A+B)^t = A^t + B^t$.
3. *Έστω* $A \in M_{l\times m}(F), B \in M_{m\times n}(F)$. *Τότε* $(AB)^t = B^t A^t$.

ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι σημαντικό γιατί έχει χρήσιμες εφαρμογές.

Θεώρημα 6 (μετασχηματισμός σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα)

Κάθε $m \times n$ *πίνακας με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$ *είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν* $m \times n$ *ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$.

Αλγόριθμος

μετασχηματισμού της πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

Βήμα 1	Εντοπίζουμε την πρώτη μη μηδενική στήλη και μεταφέρουμε στην πρώτη γραμμή τη γραμμή εκείνη που περιέχει το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.
Βήμα 2	Μετατρέπουμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της πρώτης γραμμής σε 1.
Βήμα 3	Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στη στήλη του πρώτου 1 της πρώτης γραμμής και κάτω από αυτό.

Βήμα 4	Στην συνέχεια αγνοούμε την πρώτη στήλη και την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 – 3 για τις επόμενες γραμμές. (Αν οι επόμενες γραμμές είναι μηδενικές, τότε παραλείπουμε το βήμα 4 και πάμε στο επόμενο βήμα.)
Βήμα 5	Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται σε κάθε στήλη που περιέχει το πρώτο 1 μιας γραμμής

Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.

Για παραδείγματα εφαρμογής του αλγορίθμου αυτού παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 7,8,9,10.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θεώρημα 7

Κάθε γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Το προηγούμενο θεώρημα είναι σημαντικό γιατί η επίλυση γραμμικού συστήματος που είναι σε κλιμακωτή μορφή είναι εύκολη. Παραδείγματα υπάρχουν στις Λυμένες Ασκήσεις 7,8,9.

Θεώρημα 8

Έστω (A,b) *ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος και Κ ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος*[1] *με τον* (A,b). *Τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ο Κ δεν περιέχει γραμμή της μορφής 0 0 … 0 1.*

Για παραδείγματα παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 8 και 9.

[1] Αποδεικνύεται ότι ο *Κ* είναι μοναδικός και άρα μπορούμε να λέμε *η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή* πίνακα

Θεώρημα 9 (ομογενή συστήματα)

Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα m εξισώσεων και n μεταβλητών με $m<n$ έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση.

ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Πρόταση 10

1. *Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$*
2. *Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Αν A,B είναι αντιστρέψιμοι τότε ο AB είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Με τον επόμενο αλγόριθμο μπορούμε να αποφανθούμε αν ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα (εφόσον υπάρχει). *Συμβολισμός*: Αν A, B είναι δυο πίνακες με το αυτό πλήθος γραμμών, τότε με (A, B) παριστάνουμε τον πίνακα που προκύπτει αν γράψουμε τις στήλες του B στα δεξιά των στηλών του A. Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & a & 0 \\ y & b & -1 \end{pmatrix}$, τότε $(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x & a & 0 \\ 4 & 5 & y & b & -1 \end{pmatrix}$. Για το A αυτό και το 2×2 ταυτοτικό πίνακα I έχουμε $(A, I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Αλγόριθμος Υπολογισμού Αντίστροφου Πίνακα

Στον πίνακα (A, I) εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που μετατρέπουν τον A σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα K. Τότε ο (A, I) έχει μετατραπεί σε έναν πίνακα της μορφής (K, B).

- Αν $K = I$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$.
- Αν $K \neq I$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παραδείγματα εφαρμογής του προηγούμενου αλγόριθμου υπάρχουν στη Λυμένη Άσκηση 10.

Θεώρημα 11

Ένας πίνακας B είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν πίνακα A, αν και μόνο αν υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1,\ldots,E_k$ *(βλ. Ορισμό 13) τέτοιοι ώστε* $B = E_1 \ldots E_k A$.

Πόρισμα 12

Ένας $n \times n$ *πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο* $n \times n$ *πίνακα.*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να υπολογιστούν όσες από τις παραστάσεις $A+B, AB, BA, AA^t$ *έχουν νόημα, όπου*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Το *A*+*B* δεν ορίζεται γιατί οι *A*,*B* δεν είναι του αυτού μεγέθους. Το *AB* δεν ορίζεται γιατί το πλήθος των στηλών του *A* (τρία) δεν είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του *B* (δύο). Το *BA* ορίζεται γιατί το πλήθος των στηλών του *B* είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του *A*. Έχουμε

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 0+1\cdot 3 & 3\cdot 2+1\cdot(-1) & 3\cdot 1+1\cdot 4 \\ (-1)\cdot 0+0\cdot 3 & (-1)\cdot 2+0\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Το AA^t ορίζεται για κάθε *A*, γιατί αν ο *A* έχει *n* στήλες, τότε ο ανάστροφος A^t έχει *n* γραμμές. Έχουμε

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 3+2\cdot(-1)+1\cdot 4 \\ 3\cdot 0+(-1)\cdot 2+4\cdot 1 & 3\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 26 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2

Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί πίνακες X *τέτοιοι ώστε* $AX = XA$, *όπου* $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Λύση

Πρώτα παρατηρούμε ότι για να ορίζονται τα γινόμενα AX, XA πρέπει ο X να είναι 2×2. Έστω $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Τότε

$$
\begin{aligned}
&AX = XA \Leftrightarrow AX - XA = 0 \Leftrightarrow \\
&\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
&\begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+z & 3y+w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+3y & 2x+y \\ z+3w & 2z+w \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
&\begin{pmatrix} 2z-3y & 2w-2x \\ 3x-3w & 3y-2z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} 2z-3y=0 \\ 2w-2x=0 \\ 3x-3w=0 \\ 3y-2z=0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x=w, y=\frac{2}{3}z$ με $w,z\in\mathbb{R}$. Άρα οι ζητούμενοι πίνακες είναι οι $X=\begin{pmatrix} w & \frac{2}{3}z \\ z & w \end{pmatrix}$, $w,z\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 3

Αποδείξτε ότι $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n-2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ *για κάθε θετικό ακέραιο* n.

Λύση

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n. Για $n=1$, η σχέση αληθεύει. Έστω ότι η σχέση αληθεύει για ένα συγκεκριμένο n. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n + \left(3^n - 2^n\right)3 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2 \cdot 2^n + 3^n \cdot 3 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^{n+1} + 3^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο πίνακας A^{2005}*, όπου*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

1. Έχουμε $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Άρα

$$A^{2005} = A^{2004}A = \left(A^2\right)^{1002} A = I^{1002}A = IA = A.$$

Σημείωση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$A^2 = I$$
$$A^3 = A^2 A = IA = A$$
$$A^4 = A^3 A = AA = A^2 = I$$
$$A^5 = A^4 A = IA = A.$$

Με βάση αυτά εικάζουμε ότι $A^n = \begin{cases} I, \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ A, \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$ Αυτό αποδεικνύεται

εύκολα με επαγωγή ή ως εξής. Αν n είναι άρτιος, $n=2k$, τότε

$A^n = A^{2k} = \left(A^2\right)^k = I^k = I.$ Αν n είναι περιττός, n=2k+1, τότε

$A^n = A^{2k+1} = \left(A^2\right)^k A = I^k A = IA = A.$

2. Με μερικούς υπολογισμούς βρίσκουμε

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Συνεπώς έχουμε $A^4 = A^5 = A^6 = \ldots = 0.$ Ειδικά $A^{2005} = 0.$

Σημείωση. Αν A είναι ένας $n \times n$ άνω τριγωνικός πίνακας που όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με 0, τότε αποδεικνύεται ότι $A^n = A^{n+1} = \ldots = 0.$

3. Γράφουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + B.$ Επειδή ο I αντιμετατίθεται με τον B εφαρμόζεται το διωνυμικό ανάπτυγμα. Χρησιμοποιώντας ότι $B^4 = B^5 = B^6 = \ldots = 0$, που αποδείξαμε στο 2, έχουμε

$$A^n = I^n + \binom{n}{1} I^{n-1} B + \binom{n}{2} I^{n-2} B^2 + \ldots + B^n =$$

$$I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + \binom{n}{3} B^3 =$$

$$I + \binom{n}{1}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \binom{n}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \binom{n}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1}a & \binom{n}{1}b + \binom{n}{2}ad & \binom{n}{1}c + \binom{n}{2}(ae+bf) + \binom{n}{3}adf \\ 0 & 1 & \binom{n}{1}d & \binom{n}{1}e + \binom{n}{2}df \\ 0 & 0 & 1 & \binom{n}{1}f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 5

Μια εταιρία παρασκευάζει δυο προϊόντα x,y. Έστω ότι το κόστος κατασκευής n τεμαχίων από το καθένα είναι x_n, y_n αντίστοιχα και γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a y_n \\ y_{n+1} &= a x_n + y_n \end{aligned},$$

$n = 1, 2, \ldots$, *όπου a είναι μια πραγματική σταθερά.*

1. *Να υπολογιστεί το x_{n+1} συναρτήσει του n και των x_1, y_1.*
2. *Έστω ότι $x_1 = y_1$ και $a = 0.2$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή πώλησης των πρώτων 10 τεμαχίων του προϊόντος x ώστε να μην προκύψει ζημία.*

Λύση

1. Θέτοντας $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ βλέπουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a y_n \\ y_{n+1} &= a x_n + y_n \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την τελευταία σχέση έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = AA \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \ldots = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι για να βρούμε τη ζητούμενη παράσταση του x_{n+1}, αρκεί να υπολογίσουμε τη δύναμη A^n και για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα.

Γράφοντας $A = I + \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = I + B$, παρατηρούμε ότι $B^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 I$ και

επομένως για κάθε θετικό ακέραιο k έχουμε

$$B^{2k} = a^{2k} I = \begin{pmatrix} a^{2k} & 0 \\ 0 & a^{2k} \end{pmatrix}, B^{2k+1} = a^{2k} B = \begin{pmatrix} 0 & a^{2k+1} \\ a^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω ότι ο n είναι άρτιος $n = 2k$. Εφαρμόζοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε

$$\begin{aligned}
&A^n = (I+B)^n = \\
&I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} B^{n-1} + B^n = \\
&I + \binom{n}{1}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \binom{n}{2}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} + \binom{n}{3}\begin{pmatrix} 0 & a^3 \\ a^3 & 0 \end{pmatrix} + \ldots \\
&+ \binom{n}{n-1}\begin{pmatrix} 0 & a^{2k-1} \\ a^{2k-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^{2k} & 0 \\ 0 & a^{2k} \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} \sum\limits_{j\ge 0} \binom{n}{2j} a^{2j} & \sum\limits_{j\ge 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} \\ \sum\limits_{j\ge 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} & \sum\limits_{j\ge 0} \binom{n}{2j} a^{2j} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Σημείωση. Στην παραπάνω παράσταση εννοείται ότι $\binom{n}{j} = 0$ αν $j > n$.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο βρίσκουμε την ίδια σχέση για n περιττό.

Άρα για κάθε n

$$A^n = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j\ge 0} \binom{n}{2j} a^{2j} & \sum\limits_{j\ge 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} \\ \sum\limits_{j\ge 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} & \sum\limits_{j\ge 0} \binom{n}{2j} a^{2j} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς από τη σχέση (1) παίρνουμε

$$x_{n+1} = \left(\sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j} a^{2j} \right) x_1 + \left(\sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} \right) y_1.$$

2. Για $x_1 = y_1$, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$x_{n+1} = \left(\sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j} a^{2j} + \sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} \right) x_1 = \left(1+a\right)^n x_1.$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχουμε $x_{10} = \left(1+0.2\right)^9 x_1 \approx 5.16 x_1$. Άρα καθένα από τα 10 πρώτα τεμάχια του *x* πρέπει να πωληθεί σε τιμή τουλάχιστον $0.516 x_1$.

Άσκηση 6

Έστω ότι ο A είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^2 - A - I = 0$. *Απλοποιήστε τις παραστάσεις* $A^4 - 3A^3 - A^2 + 7A - I$ *και* $A^4\left(A-I\right)^5 - I$.

Λύση

Από τον Αλγόριθμο Διαίρεσης πολυωνύμων (βλ. Κεφάλαιο 1) βρίσκουμε

$x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 1 = (x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 2) + 3x - 3$ και άρα

$$A^4 - 3A^3 - A^2 + 7A - I = \underbrace{(A^2 - A - 1)}_{0}(A^2 - 2A - 2) + 3A - 3I = 3A - 3I.$$

Από την υπόθεση έχουμε τη σχέση $A(A-I) = I$. Άρα

$$A^4\left(A-I\right)^5 - I = A^4\left(A-I\right)^4 (A-I) - I = \underbrace{\left(A\left(A-I\right)\right)^4}_{I} (A-I) - I = A - I - I = A - 2I.$$

Σημείωση. Έχουμε $A^4 (A-I)^4 = \left(A(A-I)\right)^4$ γιατί οι πίνακες *A* και $A - I$ αντιμετατίθενται.

Άσκηση 7

1. *Να βρεθεί ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Εξετάστε αν το παρακάτω σύστημα έχει μη μηδενικές λύσεις*

$$\begin{aligned} x+z&=0\\ 3x+y+z&=0\\ 2x+z&=0\\ -2x+y&=0 \end{aligned}$$

Λύση

1. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο μετασχηματισμού ενός πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\to r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4\to r_4+2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4\to r_4-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4\to \frac{1}{3}r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\to r_3+r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_2+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\to r_1-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\to r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας και είναι βέβαια γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό.

2. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος που είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς που εφαρμόσαμε πριν (γιατί ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι αυτός στο υποερώτημα 1) φθάνουμε στον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Τα αντίστοιχο σύστημα είναι το $\begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=0 \end{cases}$ και

άρα η μηδενική λύση είναι η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος.

Άσκηση 8

Να λυθεί το επόμενο σύστημα για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

$2x - ay + z = 1$

$x - y + z = a$

$3x - y - z = 2.$

Λύση

Χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα.

$$\begin{pmatrix} 2 & -a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \\ 0 & 2 & -4 & 2-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -4 & 2-3a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & \dfrac{2-3a}{2} \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + (a-2) r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & \dfrac{2-3a}{2} \\ 0 & 0 & -2a+3 & -\dfrac{3}{2}a^2 + 2a - 1 \end{pmatrix}.$$

1η περίπτωση. Έστω $-2a+3 \neq 0$.

Λύνουμε με διαδοχικές αντικαταστάσεις το σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα. Από την τελευταία γραμμή έχουμε $z = \dfrac{-\frac{3}{2}a^2 + 2a - 1}{-2a+3} = \dfrac{3a^2 - 4a + 2}{4a-6}$.

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη γραμμή έχουμε

$y - 2z = \dfrac{2-3a}{2} \Rightarrow y - 2\dfrac{3a^2 - 4a + 2}{4a-6} = \dfrac{2-3a}{2} \Rightarrow y = \dfrac{5a-2}{4a-6}$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση $x - y + z = a$ βρίσκουμε μετά από μερικές πράξεις $x = \dfrac{a^2 + 3a - 4}{4a-6}$.

Συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση $(x, y, z) = \left(\dfrac{a^2 + 3a - 4}{4a-6}, \dfrac{5a-2}{4a-6}, \dfrac{3a^2 - 4a + 2}{4a-6} \right)$.

$2^{η}$ *περίπτωση*. Έστω $-2a+3=0$.

Τότε $-\frac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$ (μάλιστα για κάθε πραγματικό a έχουμε $-\frac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$ αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική). Από την τρίτη γραμμή, που είναι της μορφής $0 \quad 0 \quad 0 \quad c$, όπου $c\neq 0$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση 9

Να εξεταστεί για ποιες τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+az&=1\\ -2x-y+z&=b\\ x-y+2y&=a \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις, καμιά λύση.

Λύση

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$r_2\to r_2+2r_1, r_3\to r_3-r_1, r_3\to r_3+2r_2$, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & 2a+1 & b+2\\ 0 & 0 & 3a+4 & a+2b+3 \end{pmatrix}.$$

$1^{η}$ *περίπτωση*. Έστω $3a+4\neq 0$.

Τότε βλέπουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση.

$2^{η}$ *περίπτωση*. Έστω $3a+4=0$.

- Υποπερίπτωση α. Αν $a+2b+3\neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Υποπερίπτωση β. Αν $a+2b+3=0$, τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Συνοψίζοντας, το σύστημα

- έχει μοναδική λύση αν $a\neq -\frac{4}{3}$,
- έχει άπειρες λύσεις αν $a=-\frac{4}{3}, b=-\frac{5}{6}$
- είναι αδύνατο αν $a=-\frac{4}{3}, b\neq -\frac{5}{6}$.

Άσκηση 10

Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

όπου $a\in\mathbb{R}$. *Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι όταν αυτοί υπάρχουν. Στη συνέχεια να λυθεί το σύστημα* $C\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$.

Λύση

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα.

Για τον *A* έχουμε: $\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 3 & 12 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$. Ο *A* δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί το αριστερό μισό, $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, του τελευταίου πίνακα είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας διάφορος του μοναδιαίου.

Για το *B* έχουμε: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & a & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & a-6 & -3 & 1\end{pmatrix}$. Αν $a=6$, ο *B* δεν είναι αντιστρέψιμος. Έστω ότι $a\neq 6$. Τότε συνεχίζουμε και έχουμε

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & a-6 & -3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to\frac{1}{a-6}r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \dfrac{-3}{a-6} & \dfrac{1}{a-6}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_1-2r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{a}{a-6} & \dfrac{-2}{a-6}\\ 0 & 1 & \dfrac{-3}{a-6} & \dfrac{1}{a-6}\end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή Β είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο

$$\begin{pmatrix}\dfrac{a}{a-6} & \dfrac{-2}{a-6}\\ \dfrac{-3}{a-6} & \dfrac{1}{a-6}\end{pmatrix}.$$

Για τον *C* έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{-6} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 9r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}.$$

Άρα ο C είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο $\begin{pmatrix} 2 & -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Για να λύσουμε το σύστημα $C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ μπορούμε φυσικά να εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο C είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε

$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow C^{-1}C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&\frac{3}{2}\\-1&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Άσκηση 11

Έστω ότι ο Α είναι ένας πραγματικός πίνακας τέτοιος ώστε $A^2-A-I=0$.

1. *Αποδείξτε ότι ο* $A-I$ *είναι αντιστρέψιμος.*
2. *Αποδείξτε ότι ο* $A-kI$ *είναι αντιστρέψιμος για κάθε πραγματικό* $k\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
3. *Αποδείξτε ότι ο* $A-kI$ *δεν είναι αντιστρέψιμος, αν* $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Λύση

1. Από τη δοσμένη σχέση έχουμε

$$A^2-A=I\Leftrightarrow A(A-I)=I\Leftrightarrow A(A-I)=(A-I)A=I.$$

Άρα ο $A-I$ είναι αντιστρέψιμος σύμφωνα με τον Ορισμό 12.

2. Έστω $B=A-kI$. Η ιδέα εδώ είναι να μετασχηματίσουμε τη δοσμένη πολυωνυμική παράσταση του A, δηλαδή την $A^2-A-I=0$, σε μια πολυωνυμική παράσταση του B και να χρησιμοποιήσουμε μια παραγοντοποίηση όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Έχουμε $A=B+kI$ και άρα

$$\begin{aligned}&A^2-A-I=0\Leftrightarrow (B+kI)^2-(B+kI)-I=0\Leftrightarrow\\&B^2+2kB+k^2I-B-kI-I=0\Leftrightarrow\\&B^2+(2k-1)B+(k^2-k-1)I=0\Leftrightarrow\\&B\left(B+(2k-1)I\right)=\left(-k^2+k+1\right)I.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε πραγματικό $k\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ έχουμε $-k^2+k+1\neq 0$, αφού οι ρίζες του τριωνύμου είναι $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Άρα παίρνουμε

$$B\left(B+(2k-1)I\right)=\left(-k^2+k+1\right)I \Leftrightarrow$$
$$B\left(\frac{1}{-k^2+k+1}\left(B+(2k-1)I\right)\right)=I \Leftrightarrow$$
$$B\left(\frac{1}{-k^2+k+1}\left(B+(2k-1)I\right)\right)=\left(\frac{1}{-k^2+k+1}\left(B+(2k-1)I\right)\right)B=I$$

Άρα ο B είναι αντιστρέψιμος.

3. Έστω $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Θα δείξουμε ότι ο $B=A-kI$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Έστω ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Θα φθάσουμε σε άτοπο. Αποδείξαμε πριν τη σχέση $B\left(B+(2k-1)I\right)=\left(-k^2+k+1\right)I$. Άρα $B\left(B+(2k-1)I\right)=0$. Πολλαπλασιάζοντας με B^{-1} παίρνουμε $B+(2k-1)I=0.$ Άρα $B=-(2k-1)I$ και συνεπώς $A=B+kI=-(k-1)I$. Από τη σχέση $A^2-A-I=0$ παίρνουμε

$$\left(-(k-1)I\right)^2-\left(-(k-1)I\right)-I=0 \Rightarrow \left(k^2-2k+1\right)I+kI-I-I=0 \Rightarrow$$
$$\left(k^2-k-1\right)I=0 \Rightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

και αυτό είναι άτοπο.

Άσκηση 12

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+az&=a^2\\ x+ay+z&=a\\ ax+y+z&=1 \end{aligned}$$

όπου $a\in\mathbb{R}$. Να λυθεί το σύστημα αυτό για τις διάφορες τιμές του a.

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2\\ 1 & a & 1 & a\\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $r_2\to r_2-r_1, r_3\to r_3-ar_1, r_3\to r_3+r_2$, ο πίνακας παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & (1-a)(1+a)^2 \end{pmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x+ \quad y+ \quad az = a^2 \\ \quad (a-1)y+ \quad (1-a)z = a-a^2 \\ \quad\quad (1-a)(2+a)z = (1-a)(1+a)^2. \end{cases}$$

- *Περίπτωση 1.* Έστω $(a-1)(a+2) \neq 0.$

  Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Λύνοντας την τρίτη εξίσωση βρίσκουμε $z = \dfrac{(a+1)^2}{a+2}$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε μετά από μερικές πράξεις $y = \dfrac{1}{a+2}$, οπότε από την πρώτη βρίσκουμε τελικά $x = \dfrac{-(a+1)}{a+2}$.

- *Περίπτωση 2.* Έστω $a = -2$.

  Τότε από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

- *Περίπτωση 3.* Έστω $a = 1.$

  Τότε το σύστημα είναι το

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0=0 \\ 0=0. \end{cases}$$

  Υπάρχουν άπειρες λύσεις $(x,y,z) = (1-y-z, y, z),\ y,z \in \mathbb{R}.$

Άσκηση 13

Εξετάστε για ποιες τιμές των $a,b \in \mathbb{R}$ το επόμενο σύστημα έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + ax_3 &= b \\ x_1 + a^2x_2 + 2ax_3 &= ab. \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $r_2 \to r_2 - r_1$, $r_3 \to r_3 - r_1$ και $r_3 \to r_3 - (-a-1)r_2$, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & b-1 \\ 0 & 0 & a(2-a) & a-b \end{pmatrix}$$

οπότε το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 1 \\ (a-1)x_2 + (a-1)x_3 &= b-1 \\ a(2-a)x_3 &= a-b. \end{aligned}$$

Περίπτωση 1. Έστω $a(2-a)(1-a) \neq 0.$

Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Περίπτωση 2. Έστω $a = 0.$

- Αν $b \neq 0$, από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $b = 0,$ υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Περίπτωση 3. Έστω $a = 2.$

- Αν $b \neq 2$, από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $b = 2$, υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Περίπτωση 4. Έστω $a = 1.$

- Αν $b \neq 1$, από τη δεύτερη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $b = 1$, υπάρχουν άπειρες λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

1. Να υπολογιστεί η παράσταση $A^2 - 3A + 2I$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$
2. Εξετάστε αν ισχύει $AB = BA.$
3. Εξετάστε αν ισχύει $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB.$

Απάντηση 1. $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $AB=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 3. Έχουμε

$(A+B)^2 = A^2+B^2+2AB \Leftrightarrow AB=BA$ και η τελευταία ισότητα δεν ισχύει.

Άσκηση 2

Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε

   $$A^n = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 5^n & 2\cdot(5^n-3^n) \\ 3^n-5^n & -3^n+2\cdot 5^n \end{pmatrix}.$$

2. Αποδείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον A^{-1}.
3. Στη συνέχεια αποδείξτε τη σχέση του υποερωτήματος 1 για κάθε ακέραιο n.

Υπόδειξη 1. Για n θετικό χρησιμοποιήστε επαγωγή. 2. Βλ. Λυμένη Άσκηση 10. 3. Ένας τρόπος να αποδειχτεί η σχέση $A^{-n} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{-n} - 5^{-n} & 2\cdot(5^{-n}-3^{-n}) \\ 3^{-n}-5^{-n} & -3^{-n}+2\cdot 5^{-n} \end{pmatrix}$ είναι να χρησιμοποιήστε επαγωγή στο n. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήστε τη σχέση $A^{-n} = \left(A^n\right)^{-1}$.

Άσκηση 3

Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί πίνακες X τέτοιοι ώστε $XA=AX$, όπου $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 2. **Απάντηση**: $X=\begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix}$, $z, w \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4

Να υπολογιστούν οι πίνακες

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}^{2003}$ 2. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2004}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2005}$ 4. $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{1003} & \sin\frac{2\pi}{1003} \\ -\sin\frac{2\pi}{1003} & \cos\frac{2\pi}{1003} \end{pmatrix}^{2006}$

Υπόδειξη Για τα 1,2 και 3 βλ. Λυμένη Άσκηση 4. Για το 4 αποδείξτε τη σχέση

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{1003} & \sin\frac{2\pi}{1003} \\ -\sin\frac{2\pi}{1003} & \cos\frac{2\pi}{1003} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{1003} & \sin\frac{2k\pi}{1003} \\ -\sin\frac{2k\pi}{1003} & \cos\frac{2k\pi}{1003} \end{pmatrix}$$ για κάθε θετικό ακέραιο k με

επαγωγή χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες. Σημείωση: Οι ... παρατηρητικοί αναγνώστες ήδη έχουν επισημάνει την ομοιότητα της προηγούμενης σχέσης με το θεώρημα του De Moivre.

Άσκηση 5

Ένα αεροσκάφος ίπταται έτσι ώστε οι συντεταγμένες (x_n, y_n, z_n) του σημείου όπου βρίσκεται μετά από n λεπτά πτήσης ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2y_n - z_n \\ y_{n+1} &= y_n + z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$, όπου $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c.$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του αεροσκάφους μετά από 5 ώρες πτήσης.

Υπόδειξη Έχουμε $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Άρα αρκεί να υπολογιστεί η δύναμη A^{300}. Βλ. Λυμένη Άσκηση 5. Αποδεικνύεται ότι

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & (n-1)^2 - 1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Απάντηση**: $(x_{300}, y_{300}, z_{300})$

$= \left(a + 600b + \left(299^2 - 1\right)c, b + 300c, c\right)$

Άσκηση 6

Έστω A ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^2 + 2A - 3I = 0$.

1. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A^4 + 2A^3 - 4A^2 - A + I$.
2. Αποδείξτε ότι οι πίνακες $A, A + 2I$ είναι αντιστρέψιμοι.
3. Αποδείξτε ότι ο $B = A - kI$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $k \neq 1, -3$.

Υπόδειξη Για το 1 βλ. Λυμένη Άσκηση 6. Για τα 2 και 3 βλ. Λυμένη Άσκηση 11.

Άσκηση 7

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 3x-y-z&=2\\ 5x-3y+z&=4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-y+z&=1\\ 3x-y-z&=2\\ 5x-3y+z&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-y+z&=1\\ 3x-y-z&=2\\ 5x-3y+2z&=4 \end{aligned}$$

Απάντηση Το πρώτο σύστημα έχει άπειρες λύσεις (τις $(\frac{1}{2}+z,-\frac{1}{2}+2z,z)$, $z\in\mathbb{R}$), το δεύτερο είναι αδύνατο και το τρίτο έχει μοναδική λύση (τη $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$).

Άσκηση 8

Εξετάστε για ποια a το σύστημα $\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 3x-y-z&=2\\ 5x-3y+z&=a \end{aligned}$ είναι συμβιβαστό.

Απάντηση a = 4. Βλ. Λυμένη Άσκηση 8.

Άσκηση 9

Για ποιες τιμές των a,b το σύστημα

$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 3x-y-z&=a\\ 5x-3y+bz&=4 \end{aligned}$$

έχει άπειρες λύσεις, έχει μοναδική λύση, είναι αδύνατο.

Απάντηση Για $b=1, a=2$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, για $b=1, a\neq 2$ το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ για $b\neq 1$ (και κάθε a) το σύστημα έχει μοναδική λύση. Βλ. Λυμένη Άσκηση 9.

Άσκηση 10

Για ποιες τιμές των a,b το παρακάτω σύστημα είναι αδύνατο;

$$\begin{aligned} x+2y+z&=2\\ 2x-y+az&=1\\ 3x+y+bz&=1\\ 2x-y+z&=4 \end{aligned}$$

Απάντηση Το σύστημα είναι αδύνατο αν και μόνο αν $a=1$(με b αυθαίρετο) ή $5a-3b+1=0$.

Άσκηση 11

Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, ο αντίστροφοι των πινάκων

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&a&2\\1&3&a\\1&0&1\end{pmatrix}$$

όπου $a\in\mathbb{R}$.

Απάντηση $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{-3}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&\frac{-2}{5}\\\frac{-2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$. O B είναι αντιστρέψιμος αν $a\neq\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ και στην περίπτωση αυτή έχουμε $B^{-1}=\frac{1}{a^2-a-3}\begin{pmatrix}3&-a&a^2-6\\a-1&-1&-a+2\\-3&a&3-a\end{pmatrix}$.

Άσκηση 12

Να βρεθεί ένα πολυώνυμο $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε $f(1)=2,\ f(2)=9,\ f(3)=20.$

Υπόδειξη Αν $f(x)=ax^2+bx+c$, τότε οι υποθέσεις οδηγούν σε ένα 3×3 σύστημα με αγνώστους τους $a,b,c.$ **Απάντηση** $f(x)=2x^2+x-1.$