Ενδεικτικές Ασκήσεις στη Θεωρία Γραφημάτων

Άσκηση 1 (2016-17, Εργασία 4, Ερώτημα 1)

Έστω A ένας πίνακας με θέσεις αριθμημένες από 1 έως n, ο οποίος περιέχει ακεραίους. Με `length(A)` αναφερόμαστε στο μήκος του πίνακα A, δηλαδή το n. Για δύο δείκτες i, j, συμβολίζουμε με A[$i..j$] τον πίνακα με $j - i + 1$ στοιχεία του οποίου τα στοιχεία είναι τα A[i], A[i+1],...,A[j]. Για παράδειγμα, εάν A=[3,5,1,2,8,9,4], τότε A[3..6] = [1,2,8,9].
Στον παρακάτω αλγόριθμο χρησιμοποιούμε τη διαδικασία `merge(A,B)`, η οποία παίρνει ως είσοδο δύο ταξινομημένους πίνακες (σε αύξουσα σειρά) και δίνει ως έξοδο ένα ταξινομημένο πίνακα ο οποίος περιέχει όλα τα στοιχεία των δύο πινάκων. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα της merge([1,4,6,6], [2,3,4,7]) είναι ο πίνακας [1,2,3,4,4,6,6,7].

```
      procedure mSort( A )
           n := length(A)
(*)        if (n = 1) then  return ( A )
           m := (n+1)/2  // ακέραια διαίρεση
           B := mSort(A[1..m])
           C := mSort(A[m+1..n])
           return ( merge(B,C) )
```

1) Διατυπώστε τις αναδρομικές κλήσεις που θα γίνουν κατά την εκτέλεση της `mSort([2,4,1,8,5])`.
2) Εξηγήστε ποιός είναι ο ρόλος της γραμμής (*). Εξηγήστε τι θα γίνει εάν αντικαταστήσουμε τη γραμμή (*) με τη γραμμή (**) λαμβάνοντας υπόψη ότι τώρα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο `mSort()` μόνο για πίνακες μήκους $n \geq 2$:

```
(**)       if (n = 2) then
                if (A[1] <= A[2]) then return ([A[1],A[2]])
                else return ([A[2],A[1]])
```

3) Δείξτε ότι ο αλγόριθμος `mSort(A)` πάντα τερματίζει.
4) Υποθέστε ότι η διαδικασία `merge(B,C)`, κατά την εκτέλεση της, κάνει το πολύ `max{length(B),length(C)}` συγκρίσεις στοιχείων. Για ένα πίνακα A με μήκος n, συμβολίζουμε με T(n) το πλήθος των συγκρίσεων που κάνει η `mSort(A)`. Ειδικότερα, τη σύγκριση `n = 1` δεν τη μετράμε καθώς τα `n` και `1` είναι δείκτες και όχι στοιχεία του πίνακα. Για πίνακες με μήκος 2^k, δείξτε με επαγωγή στο k ότι

$$T(2^k) \leq k\, 2^k.$$

Απαντήση:

1) Οι αναδρομικές κλήσεις είναι οι παρακάτω. Δίπλα σε κάθε αναδρομική κλήση αναγράφεται ο πίνακας που επιστρέφεται.

```
 mSort([2,4,1,8,5])  [1,2,4,5,8]
   |--  mSort([2,4,1])  [1,2,4]
   |      |--  mSort([2,4])  [2,4]
   |      |      |--  mSort([2])  [2]
   |      |      |--  mSort([4])  [4]
   |      |--  mSort([1])  [1]
   |--  mSort([8,5])  [5,8]
          |--  mSort([8])  [8]
          |--  mSort([5])  [5]
```

2) Η γραμμή (*) περιέχει τη συνθήκη η οποία θα τερματίσει ένα μονοπάτι αναδρομικών κλήσεων. Κανείς μπορεί να το δει ως τις αρχικές συνθήκες σε έναβ αναδρομικό ορισμό. Εάν αντικατασταθεί από τη γραμμή (**), τότε για να τερματιστεί ένα μονοπάτι αναδρομικών κλήσεων θα πρέπει (το μονοπάτι) να καταλήξει σε πίνακα με ένα στοιχείο. Παρατηρήστε ότι κάτι τέτοιο δε συμβαίνει πάντα. Για παράδειγμα, έαν εκτελέσουμε mSort([2,4,1]) θα υπάρξουν αναδρομικές κλήσεις mSort([2,4]) και mSort([1]). Η πρώτη θα τερματίσει λόγω της γραμμής (**). Όμως η δεύτερη θα προκαλέσει δύο νέες κλήσεις, τις mSort([1]) και mSort([]). Η mSort([]) θα καλεί δύο φορές τον εαυτό της και έτσι θα έχουμε αναδρομή χωρίς τέλος.

3) Για να βεβαιωθούμε ότι ο αλγόριθμος τερματίζει αρκεί να βεβαιωθούμε ότι κάθε αναδρομική κλήση γίνεται με είσοδο ένα “μικρότερο” πίνακα και ότι δε θα βρεθούμε με πίνακα μηδενικού μήκους. Αυτό ακριβώς θα δείξουμε με επαγωγή στο μήκος n του αρχικού πίνακα A.
<u>Βάση της επαγωγής</u>: Για $n=1$, η mSort(A) τερματίζει λόγω της γραμμής (*)
<u>Επαγωγική υπόθεση</u>: Για το τυχόν $n\geq 1$, υποθέτουμε ότι η mSort(A) τερματίζει για κάθε πίνακα A με μήκος $k\leq n$.
<u>Επαγωγικό βήμα</u>: Θα δείξουμε ότι αν A είναι ένας πίνακας μήκους $n+1$, τότε η mSort(A) τερματίζει. Πραγματικά, ο έλεγχος της γραμμής (*) αποτυγχάνει και έχουμε δύο αναδρομικές κλήσεις, τις mSort(B) και mSort(C). Παρατηρούμε ότι καθένας από τους πίνακες B και C έχει μήκος $1\leq length(B), length(C)\leq n$ και άρα από επαγωγική υπόθεση ξέρουμε ότι και οι δύο αναδρομικές κλήσεις τερματίζουν. Άρα και η mSort(A) τερματίζει.

4) Το πλήθος των συγκρίσεων που κάνει η mSort(A) (όπου ο πίνακας A έχει μήκος n) είναι $T(n)$ =
πλήθος συγκρίσεων της mSort(B) +
πλήθος συγκρίσεων της mSort(C) +
πλήθος συγκρίσεων της merge(B,C)
Ο πίνακας B έχει μήκος m, άρα η mSort(B) κάνει $T(m)$ συγκρίσεις. Ο πίνακας C έχει μήκος $n-m$ άρα η mSort(C) κάνει $T(n-m)$ συγκρίσεις. Η merge(B,C) μας δίνεται από την εκφώνηση ότι κάνει $max\{m, n-m\}=m$ συγκρίσεις. Άρα τελικά

$$T(n)=T(m)+T(n-m)+n-m.$$

Η αρχική συνθήκη είναι $T(1)=0$.
Για $n=2^k$ έχουμε $m=n-m=2^{k-1}$, άρα $T(2^k)=2T(2^{k-1})+2^{k-1}$.
Θα δείξουμε ότι $T(2^k)\leq k2^k, \forall k\geq 0$, με επαγωγή στο k.
<u>Βάση της επαγωγής</u>: Για $k=0, T(2^0)=0\leq 0 2^{0.}$
<u>Επαγωγική υπόθεση</u>: Υποθέτουμε ότι για το τυχόν $k\geq 0$ ισχύει $T(2^k)\leq k2^k$
<u>Επαγωγικό βήμα</u>: Τότε έχουμε $T(2^{k+1})=2T(2^k)+2^k\leq 2k2^k+2^k\leq (k+1)2^{k+1}$.

Άσκηση 2 (2015-16, Εργασία 4, Ερώτημα 1)

Α. Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$F_1 = 1, F_2 = 2$ και $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, για $n \geq 3$.

Ο ακόλουθος αναδρομικός αλγόριθμος υπολογίζει την ακολουθία:

```
      procedure Fib( n )
(*)        if (n = 1 OR n = 2) then  return ( n );
           return (Fib(n-1) + Fib(n-2));
```

1. Εξηγήστε τι συμβαίνει αν αντικαταστήσουμε τη γραμμή (*) με την εντολή: **if** (n = 1) **then return (** n **);**
2. Εξηγήστε τι συμβαίνει αν καλέσουμε τον αλγόριθμο `Fib` (στην αρχική του μορφή, χωρίς αλλαγή), με αρνητικό όρισμα (για παράδειγμα όταν καλούμε `Fib`(– 1));
3. Κάντε τις κατάλληλες τροποποιήσεις στον παραπάνω αλγόριθμο ώστε όταν κληθεί με αρνητικό όρισμα, `Fib(n)` (με $n < 0$), να επιστρέφει την τιμή F_{-n} (όπου φυσικά $-n > 0$).

Β. Έστω *A* ένας πίνακας με θέσεις αριθμημένες από 1 έως *n*, ο οποίος περιέχει *n* αριθμούς και ο οποίος είναι ταξινομημένος σε αύξουσα σειρά. Ο παρακάτω αλγόριθμος αναζητά το δεδομένο στοιχείο *x* εντός του *A* μεταξύ των θέσεων *i* και *j*. Εάν το βρεί (επιτυχημένη αναζήτηση) επιστρέφει τη θέση του στοιχειου μέσα στον πίνακα, διαφορετικά (αποτυχημένη αναζήτηση) επιστρέφει –1.

```
procedure Search(A, i, j, x)
   if (i > j) then  return ( -1 );
   m = (i + j)/2 // ακέραια διαίρεση
   if (A[m] = x) then  return ( m );
   if (A[m] > x) then  return (Search(A, i, m-1, x) );
   if (A[m] < x) then  return (Search(A, m+1, j, x) );
```

Έστω ότι ο πίνακας *A* περιέχει, ταξινομημένους σε αύξουσα σειρά, τους αριθμούς 1,2,...,*n*. Στα ακόλουθα ερωτήματα η αρχική κλήση του αλγορίθμου δεν υπολογίζεται ως αναδρομική κλήση.

1. Δείξτε ότι η εκτέλεση `Search(A, 1, n, x)` θα κάνει το πολύ $1+\log_2(n)$ αναδρομικές κλήσεις.
2. Υποθέστε ότι εκτελώντας `Search(A, 1, 100, x)` η αναζήτηση είναι επιτυχημένη. Τότε γνωρίζετε ότι η τιμή που επιστρέφει ο αλγόριθμος είναι ένας αριθμός μεταξύ του 1 και του 100. Εάν γνωρίζετε επιπλέον ότι κατά την εκτέλεση γίνονται ακριβώς 2 αναδρομικές κλήσεις, τι μπορείτε να πείτε για την τιμή που επιστρέφει ο αλγόριθμος;

Απάντηση:

Α.

1. Με την αλλαγή αυτή έχουμε αφαιρέσει μία αρχική συνθήκη. Έτσι ο αλγόριθμος δεν μπορεί πλέον να υπολογίσει την τιμή Fib(2): θα καλέσει αναδρομικά την Fib(1) και την Fib(0). Η Fib(1) θα επιστρέψει την τιμή 1, όμως η Fib(0) θα καλέσει τις Fib(-1) και Fib(-2) οι οποίες με τη σειρά τους θα κάνουν δύο νέες αναδρομικές κλήσεις κάθε μία κλπ. Έτσι θα καταλήξουμε σε μία ακολουθία αναδρομικών κλήσεων δίχως τέλος. Το ίδιο φυσικά θα συμβεί εάν καλέσουμε την Fib με οποιοδήποτε όρισμα n μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

2. Θα συμβεί ό,τι ακριβώς περιγράψαμε στην προηγούμενη περίπτωση. Θα έχουμε αναδρομικές κλήσεις Fib(-2) και Fib(-3) που θα κάνουν δύο αναδρομικές κλήσεις κάθε μία κλπ.

3. Θα προσθέσουμε μία γραμμή πριν τον έλεγχο των αρχικών συνθηκών, για να ελέγξουμε εάν το όρισμα είναι αρνητικός αριθμός και, εάν είναι, να το μετατρέψουμε κατάλληλα.

```
procedure Fib( n )
        if (n < 0) then  return ( Fib(-n) );
(*)     if (n = 1 OR n = 2) then  return ( n );
        return (Fib(n-1) + Fib(n-2));
```

Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος εξακολουθεί να μη μπορεί να δώσει απάντηση για *n* = 0. Εάν θέλαμε να ορίσουμε τιμή και για *n* = 0 (ας πούμε Fib(0)=0) θα έπρεπε να το κάνουμε με κάποια αρχική συνθήκη (για παράδειγμα στη γραμμή (*))

Β.

1. Κάνουμε επαγωγή στο μέγεθος (εύρος δεικτών) του πίνακα στον οποίο γίνεται η αναζήτηση. Η βάση της επαγωγής είναι για αναζήτηση σε πίνακες με 1 στοιχείο (*n* = 1), οπότε i=j. Τότε ο αλγόριθμος υπολογίζει *m* = i.

- Εάν A[m]=x, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει με 0 αναδρομικές κλήσεις.
- Εάν A[m]>x, τότε έχουμε την κλήση Search(A,i,i-1,x) που τερματίζει
- Εάν A[m]<x, τότε έχουμε την κλήση Search(A,i+1,i,x) που τερματίζει.

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε το πολύ $1+\log_2(1)=1$ κλήσεις.

Υποθέτουμε ότι για κάθε αναζήτηση σε τμήμα πίνακα με k < *n* στοιχεία γίνονται το πολύ $1+\log_2(k)$ αναδρομικές κλήσεις.

Έστω τώρα ότι έχουμε πίνακα A με *n* στοιχεία. Ο αλγόριθμος υπολογίζει το m. Παρατηρήστε ότι το εύρος δεικτών 1...m-1 καθώς και m+1...*n* είναι το πολύ *n* / 2.

- Εάν A[m]=x τότε ο αλγόριθμος τερματίζει (0 αναδρομικές κλήσεις).
- Εάν A[m]>x, έχουμε μία αναδρομική κλήση Search(A,1,m-1,x).
- Εάν A[m]<x, έχουμε μία αναδρομική κλήση Search(A,m+1,*n*,x).

Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις έχουμε μία αναζήτηση σε πίνακα με το πολύ *n* / 2 στοιχεία, η οποία τερματίζει, σύμφωνα με την επαγωγική μας υπόθεση, μετά από $1+\log_2(n/2)=1+\log_2(n)-1=\log_2(n)$ αναδρομικές κλήσεις. Άρα έχουμε συνολικά το πολύ $1+\log_2(n)$ αναδρομικές κλήσεις.

2. Έστω ότι αναζητούμε το x στον πίνακα A. Στην αρχική κλήση του αλγορίθμου, την οποία δε μετράμε ως αναδρομική, ο αλγόριθμος υπολογίζει m=50 και εξετάζει εάν A[50]=x. Αυτό

φυσικά δεν ισχύει, αφού γνωρίζουμε ότι τελικά ο αλγόριθμος τερμάτισε με ακριβώς 2 αναδρομικές κλήσεις. Υπάρχουν λοιπόν δύο περιπτώσεις. Είτε A[50]>x ή A[50]<x. Άρα η 1η αναδρομική κλήση είναι είτε η Search(A,1,49,x) ή Search(A,51,100,x).

- Εάν η 1η αναδρομική κλήση είναι η Search(A,1,49,x), τότε υπολογίζεται το m=25 και γίνεται η 2η και τελευταία αναδρομική κλήση, η οποία είναι είτε η Search(A,1,24,x) ή Search(A,26,49,x). Όποια κι είναι πρέπει να “βρεί” το στοιχείο x και το βρίσκει στη θέση 12 ή στη θέση 37 αντίστοιχα.
- Εαν η 1η αναδρομική κλήση είναι η Search(A,51,100,x) εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα και βλέπουμε ότι το στοιχείο x βρίσκεται είτε στη θέση 62 ή στη θέση 88.

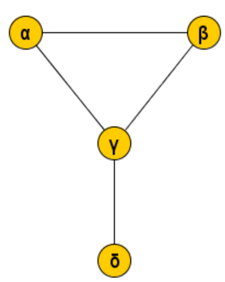
Άρα τελικά γνωρίζουμε ότι το x είναι ένα από τα 12, 37, 62, 88.

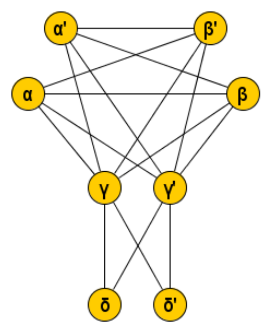
Άσκηση 3 (2016-17, Εργασία 4, Ερώτημα 2)

Σε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα *G διπλασιάζουμε* κάθε κορυφή του *G* ως εξής:

- για κάθε κορυφή *v* του *G* προσθέτουμε μια νέα κορυφή *w* τέτοια ώστε η *w* να έχει την ίδια γειτονιά με τη *v* στο νέο γράφημα. Προσέξτε ότι η νέα κορυφή *w* δεν ενώνεται με την αρχική κορυφή *v*.

Συμβολίζουμε με D(*G*) το γράφημα που προκύπτει από το *G* αν εκτελέσουμε τους διπλασιασμούς σε κάθε κορυφή του *G*. Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε ένα γράφημα *G* και το γράφημα D(*G*) που προκύπτει μετά τους διπλασιασμούς.





Στα ακόλουθα ερωτήματα θεωρούμε ένα οποιοδήποτε γράφημα *G* με *n* κορυφές και *m* ακμές.

1) Δείξτε ότι οι ακμές του D(*G*) είναι 4*m*. Επίσης δείξτε ότι το μέγιστο πλήθος ακμών του D(*G*) είναι $2n(n-1)$.
2) Δείξτε ότι το ίδιο το γράφημα *G* είναι επαγόμενο υπογράφημα του D(*G*).
3) Δείξτε ότι αν το *G* έχει Hamilton κύκλο τότε και το D(*G*) έχει Hamilton κύκλο. Επίσης δώστε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή ένα παράδειγμα όπου το D(*G*) έχει Hamilton κύκλο αλλά το *G* δεν έχει Hamilton κύκλο.
4) Συμβολίζουμε με ω(*G*) την τάξη της μέγιστης κλίκας στο *G* και με ω(D(*G*)) την τάξη της μέγιστης κλίκας στο D(*G*). Από το υποερώτημα 2) γνωρίζουμε ότι $\omega(G) \leq \omega(D(G))$. Δείξτε ότι $\omega(G) = \omega(D(G))$.
5) Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται στο βιβλίο Γ. Βούρου (σελίδα 107), για να έχει ένα γράφημα κύκλο Euler θα πρέπει να είναι συνεκτικό. Με βάση το σκεπτικό αυτό δείξτε ότι το *G* είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το D(*G*) έχει Euler κύκλο.

Απάντηση:

1) Κάθε ακμή {x,y} του G αντιστοιχίζεται με 4 ακμές στο D(G): {x,y},{x,y'},{x',y},{x',y'}, όπου οι κορυφές x', y' είναι τα αντίγραφα των x, y αντίστοιχα. Επομένως θα έχουμε συνολικά $4m$ ακμές στο D(G).
   Επίσης, οι κορυφές του D(G) είναι σε πλήθος $2n$. Μια κορυφή του D(G) δεν είναι γειτονική με την διπλάσιά της ενώ μπορεί να είναι γειτονική με όλες τις υπόλοιπες κορυφές. Δηλαδή ο μέγιστος βαθμός μιας κορυφής του D(G) είναι $2n - 2$. Αθροίζοντας τους μέγιστους βαθμούς των κορυφών θα έχουμε από το λήμμα της χειραψίας $(2n - 2)\ 2n = 2m_D$, όπου m_D είναι το μέγιστο πλήθος ακμών του D(G). Άρα $m_D = 2n\ (n - 1)$.
2) Για να δείξουμε ότι το G είναι επαγόμενο υπογράφημα του D(G) αρκεί να δείξουμε ότι μετά από κάποιες διαγραφές κορυφών του D(G) καταλήγουμε στο γράφημα G. Πράγματι λοιπόν αν διαγράψουμε όλα τα αντίγραφα των κορυφών του D(G) (δηλαδή διαγράφοντας μια μόνο κορυφή από τα δύο αντίγραφα), παίρνουμε ως αποτέλεσμα τις κορυφές του γραφήματος G και επειδή δεν αφαιρέσαμε κάποια ακμή που είναι προσκείμενη στις κορυφές του G, το γράφημα που απομένει είναι το ίδιο το G.
3) Έστω ότι υπάρχει ο Hamilton κύκλος $< v_1, v_2, ..., v_n, v_1>$ στο G που περνάει από όλες τις n κορυφές του G. Τότε υπάρχει ο κύκλος $< v'_1, v'_2, ..., v'_n, v'_1>$ στο D(G) που περνάει από τα αντίγραφα v'_i των πραγματικών κορυφών v_i. Σχηματίζουμε τον Hamilton κύκλο του D(G) «κόβοντας» την τελευταία ακμή του πραγματικού κύκλου και ενώνοντας το αντίγραφο v'_n με την κορυφή v_1 ως εξής:
   $< v_1, v_2, ..., v_n, v'_1, v'_2, ..., v'_n, v_1 >$.
   Για να δείξουμε το ζητούμενο αντιπαράδειγμα, θεωρούμε το άκυκλο γράφημα G που αποτελείται από δύο κορυφές που ενώνονται. Εφόσον το G είναι άκυκλο δεν περιέχει και Hamitlon κύκλο. Ωστόσο το D(G) που προκύπτει αποτελείται από τον Hamilton κύκλο 4 κορυφών.
4) Έστω ότι ω(G) < ω(D(G)). Για να αυξηθεί η μέγιστη κλίκα στο D(G) θα πρέπει μια νέα κορυφή v' να ενωθεί με όλες τις ω(G) κορυφές που συμμετέχουν στη μέγιστη κλίκα του G. Τότε θα πρέπει και η πραγματική κορυφή v του G να ενώνεται με όλες τις ω(G) κορυφές της μέγιστης κλίκας του G. Δηλαδή το γράφημα που επάγεται από την v μαζί με τις ω(G) κορυφές σχηματίζουν μια κλίκα από ω(G) + 1 κορυφές που σημαίνει ότι υπάρχει μια κλίκα με περισσότερες από ω(G) κορυφές, κάτι που είναι αδύνατο από τον ορισμό του ω(G).
5) (⇒) Αν το G είναι συνεκτικό τότε θα δείξουμε ότι το D(G) έχει κύκλο Euler. Για να έχει κύκλο Euler θα πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι το D(G) είναι συνεκτικό. Εφόσον το G είναι συνεκτικό, για οποιεσδήποτε δύο κορυφές x,y του G υπάρχει μονοπάτι $P_{x,y}$ στο G μεταξύ των x και y. Δείχνουμε για οποιεσδήποτε δύο κορυφές x' και y' του D(G) υπάρχει μονοπάτι $P'_{x',y'}$ στο D(G).
   - Αν οι κορυφές x' και y' είναι πραγματικές κορυφές του G τότε υπάρχει μονοπάτι στο G το οποίο παραμένει και μονοπάτι στο D(G).
   - Αν οι κορυφές x' και y' είναι αντίγραφα κάποιων κορυφών x και y τότε στο μονοπάτι $P_{x,y}$ του G αντικαθιστούμε τις εμφανίσεις των x και y με τα αντίγραφα x' και y'. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό και μας δίνει ένα μονοπάτι $P'_{x',y'}$ στο D(G) καθώς κάθε γείτονας του x ή του y είναι και γείτονας των αντίστοιχων x' και y'.

- Η τελευταία περίπτωση που εξετάζουμε είναι αν η x’ είναι μια πραγματική κορυφή x και η y’ είναι το αντίγραφο της x. Τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάποιος γείτονας w της x στο G καθώς το G είναι συνεκτικό. Εφόσον η w είναι γειτονική με τη x, θα είναι γειτονική και με τη y’ (= x) και έτσι υπάρχει μονοπάτι μεταξύ της x και της x’ στο D(*G*).

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει το μονοπάτι $P'_{x',y'}$ στο D(*G*) που σημαίνει ότι το D(*G*) είναι συνεκτικό.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ότι το D(G) έχει κύκλο Euler, θα πρέπει να δείξουμε ότι οι κορυφές του D(*G*) έχουν άρτιο βαθμό. Έστω ότι η κορυφή *x* του *G* ενώνεται με *k* κορυφές στο *G*. Στο D(*G*) η *x* θα ενώνεται με 2*k* κορυφές καθώς εκτός από τις πραγματικές κορυφές του *G* ενώνεται και με τα αντίγραφά τους. Έτσι λοιπόν κάθε πραγματική κορυφή του D(*G*) θα έχει άρτιο βαθμό. Για τις κορυφές του D(*G*) που δεν αντιστοιχούν στις πραγματικές κορυφές του *G* παρατηρούμε ότι έχουν ακριβώς την ίδια γειτονιά με κάποια πραγματική κορυφή, άρα έχουν και αυτές άρτιο βαθμό.

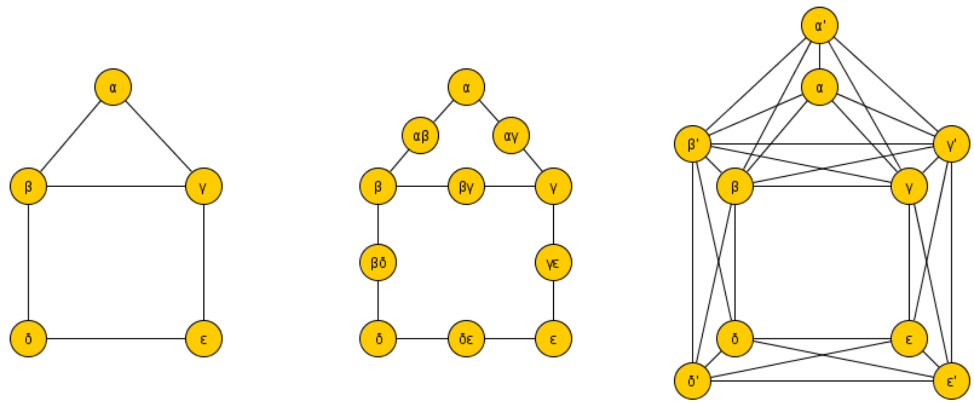
(⇐) Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θεωρούμε ότι το D(*G*) έχει κύκλο Euler, άρα είναι συνεκτικό, και πρέπει να δείξουμε ότι το *G* είναι συνεκτικό. Εφόσον το D(*G*) είναι συνεκτικό θα υπάρχει ένα μονοπάτι $P'_{x',y'}$ στο D(*G*) για τις κορυφές x’ και y’. Αν κάποια κορυφή του $P'_{x',y'}$ δεν είναι πραγματική κορυφή τότε αντικαθιστούμε την εμφάνισή της με τη πραγματική της κορυφή και παίρνουμε ένα μονοπάτι μεταξύ των πραγματικών κορυφών x και y στο G. Σημειώνουμε ότι μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση των κορυφών καθώς για κάθε ακμή {a’,b’} υπάρχει η ακμή {a,b} όπου οι κορυφές a και b είναι πραγματικές κορυφές του *G*. Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον μονοπάτι στο *G* μεταξύ των κορυφών x και y.

Άσκηση 4 (2015-16, Εργασία 4, Ερώτημα 2)

Σε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα *G*ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:

- υποδιαίρεση ακμής {*u*, *v*} του *G*: διαγράφουμε την ακμή {*u*, *v*} και προσθέτουμε μια νέα κορυφή που είναι γειτονική μόνο στις *u* και *v*.
- αληθής αντιγραφή κορυφής *v* του *G*: προσθέτουμε μια νέα κορυφή *w* στο *G* τέτοια ώστε η *w* να είναι γειτονική με την *v* και με όλες τις γειτονικές κορυφές της *v*. Δηλαδή, *αντιγράφουμε* την *v* και η αντιγραφή της *v* ενώνεται με τη *v*.

Συμβολίζουμε με *G*(*Y*) το γράφημα που προκύπτει από το *G* αν εκτελέσουμε υποδιαίρεση ακμής *σε κάθε ακμή* του *G*. Συμβολίζουμε με *G*(*A*) το γράφημα που προκύπτει από το *G* αν εκτελέσουμε διαδοχικές πράξεις αληθούς αντιγραφής *σε κάθε κορυφή* του *G*.
Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε ένα γράφημα *G* και τα γραφήματα, *G*(*Y*) και *G*(*A*).



G *G*(*Y*) *G*(*A*)

a) Για οποιοδήποτε γράφημα *G* με *n* κορυφές και *m* ακμές βρείτε μια σχέση μεταξύ των κορυφών και των ακμών των γραφημάτων *G*(*Y*) και *G*(*A*) ως προς τα *n* και *m* συμπληρώνοντας τον ακόλουθο πίνακα.

	G	*G*(*Y*)	*G*(*A*)
πλήθος κορυφών:	*n*		
πλήθος ακμών:	*m*		

b) Για οποιοδήποτε γράφημα *G* σκοπός μας είναι να συμπληρώσουμε τον ακόλουθο πίνακα χρησιμοποιώντας τα σύμβολα ο και ^ . Σε κάθε γραμμή του πίνακα θεωρούμε ότι το γράφημα *G* έχει την ιδιότητα που περιγράφεται στη συγκεκριμένη γραμμή και εξετάζουμε αν τα αντίστοιχα γραφήματα *G*(*Y*), και *G*(*A*) έχουν την ίδια ιδιότητα.
Στη περίπτωση που συμπληρώνετε το σύμβολο ο θα πρέπει να αιτιολογήσετε την απάντησή σας, ενώ στη περίπτωση που συμπληρώνετε το σύμβολο ^ θα πρέπει να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα που δείχνει ότι δεν ισχύει η ιδιότητα.

	G	*G*(*Y*)	*G*(*A*)
κύκλος Euler:	ο	ㄹ	ㄹ
κύκλος Hamilton:	ο	ㄹ	ㄹ
διμερές:	ο	ㄹ	ㄹ

Απάντηση

a) Το γράφημα *G*(*A*) έχει διπλάσιο αριθμό κορυφών από το αρχικό *G* ενώ το πλήθος των κορυφών του γράφημα *G*(*Y*) αυξάνεται κατά *m*. Ως προς τις ακμές, παρατηρούμε ότι για κάθε ακμή {*u*, *v*} του *G* υπάρχουν 4 ακμές μεταξύ των κορυφών (*u*, *u*’) και (*v*, *v*’) στο γράφημα *G*(*A*). Ειδικότερα για το γράφημα *G*(*A*) θα πρέπει να προσθέσουμε *n* επιπλέον ακμές καθώς κάθε κορυφή ενώνεται και με το αντίγραφό της. Για το πλήθος των ακμών του *G*(*Y*) παρατηρούμε ότι σε κάθε ακμή του *G* αντιστοιχούμε δύο ακμές του *G*(*Y*). Συνολικά θα έχουμε:

	G	*G*(*Y*)	*G*(*A*)
πλήθος κορυφών:	*n*	*n* + *m*	2*n*
πλήθος ακμών:	*m*	2*m*	4*m* + *n*

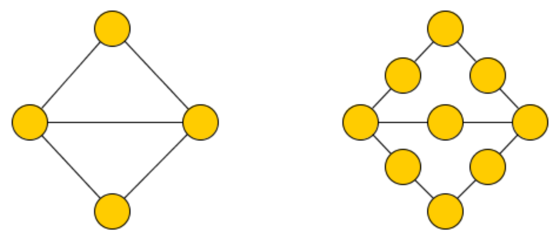
b) Εξετάζουμε τον κύκλο Euler. Για να έχει το γράφημα G κύκλο Euler θα πρέπει κάθε κορυφή του G να έχει άρτιο βαθμό στο G.

- $G(Y)$: Αν μια κορυφή έχει βαθμό k στο G τότε στο $G(Y)$ θα έχει βαθμό πάλι k καθώς δεν αλλάξαμε το πλήθος των γειτονικών κορυφών της στο $G(Y)$. Επομένως οι πραγματικές κορυφές του G έχουν άρτιο βαθμό στο $G(Y)$ διότι το k είναι άρτιο. Οι υπόλοιπες κορυφές του $G(Y)$ είναι κορυφές που έχουν προέλθει από υποδιαιρέσεις. Αυτές οι κορυφές έχουν βαθμό 2 από τον ορισμό της υποδιαίρεσης. Συνολικά κάθε κορυφή του $G(Y)$ έχει άρτιο βαθμό.
- $G(A)$: Όλες οι κορυφές του $G(A)$ θα έχουν περιττό βαθμό καθώς θα ενώνονται με 2*(άρτιο σε πλήθος κορυφές) + 1 κορυφή του αρχικού G. Για παράδειγμα όταν το G είναι το K_3 που έχει κύκλο Euler τότε το $G(A)$ είναι το K_6 που δεν έχει κύκλο Euler.

Εξετάζουμε τον κύκλο Hamilton. Έστω C ένας κύκλος Hamilton στο G που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$C = < v_1, v_2, ..., v_n >$$

- $G(Y)$: Μπορούμε να προσθέσουμε προσεκτικά τις νέες κορυφές στον αρχικό κύκλο C και να σχηματίσουμε έναν αντίστοιχο κύκλο στο $G(Y)$. Ωστόσο ορισμένες νέες κορυφές που αντιστοιχούν σε εσωτερικές ακμές του κύκλου ενδέχεται να μην τις έχουμε επισκεφτεί. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι το $G(Y)$ δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.



- $G(A)$: Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο κύκλο Hamilton C' από το C:

$$C' = < v_1, w_1, v_2, w_2, ..., v_n, w_n >,$$

όπου w_i είναι η αντιγραφή της πραγματικής κορυφής v_i στο $G(A)$. Σημειώστε ότι για να ορίζει το C' έναν κύκλο Hamilton θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχουν οι ακόλουθες ακμές:
  - $\{ v_i , w_i \}$: κάθε αντιγραφή ενώνεται με τον εαυτό της.
  - $\{ w_i , v_{i+1} \}$: υπάρχει στον κύκλο C η ακμή $\{v_i , v_{i+1} \}$ και επομένως υπάρχει και μεταξύ του αντίγραφου w_i και της πραγματικής κορυφής v_{i+1}.
  - $\{ w_n , v_1 \}$: εξαιτίας της ακμής $\{v_n , v_1 \}$

Εξετάζουμε τη διμερότητα. Έστω (A, B) μια διαμέριση των κορυφών του G έτσι ώστε καμία ακμή του G να μην βρίσκεται μέσα στο A ή μέσα στο B.

- $G(Y)$: Παρατηρούμε ότι δύο γειτονικές πραγματικές κορυφές του G δεν ενώνονται στο $G(Y)$ καθώς παρεμβάλλεται μια νέα κορυφή στο $G(Y)$. Επίσης οι νέες κορυφές δεν ενώνονται μεταξύ τους $G(Y)$ καθώς είναι γειτονικές μόνο με πραγματικές κορυφές του G. Επομένως αν συμβολίσουμε με N το σύνολο των νέων κορυφών του $G(Y)$ τότε η διαμέριση $(A \cup B, N)$ ορίζει ένα διμερές γράφημα του $G(Y)$.

- $G(A)$: Εύκολα βλέπουμε ότι με την προσθήκη αληθών αντιγραφών δημιουργείται τρίγωνο στο $G(A)$, δηλαδή περιττός κύκλος και έτσι το $G(A)$ δεν είναι διμερές. Για παράδειγμα από ένα K_2 (μια ακμή) παίρνουμε ως $G(A)$ ένα K_4 (πλήρες γράφημα 4 κορυφών).

Συνολικά λοιπόν θα έχουμε:

	G	$G(Y)$	$G(A)$
κύκλος Euler:	o	o	^
κύκλος Hamilton:	o	^	o
διμερές:	o	o	^

Άσκηση 5 (2016-17, Εργασία 4, Ερώτημα 3)

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει δύο κατηγορηματικά σύμβολα E και P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων, το σύμβολο E ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία συνδέονται με ακμή (ειδικότερα, το (a,a) δεν ανήκει ποτέ στη σχέση E) και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a,b) για τα οποία υπάρχει μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές a και b (ειδικότερα, το ζευγάρι (a,a) ανήκει πάντα στη σχέση καθώς η κορυφή a συνδέεται με τον εαυτό της με το κενό μονοπάτι).

Α. Γράψτε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής, οι οποίες στη συγκεκριμένη ερμηνεία να εκφράζουν ότι:

1. Το γράφημα είναι συνεκτικό.
2. Το γράφημα είναι πλήρες.
3. Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλίκα.

Β. Γράψτε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής, οι οποίες στη συγκεκριμένη ερμηνεία να εκφράζουν ότι:

1. Το γράφημα έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες.
2. Κάθε ζευγάρι κορυφών συνδέεται με μονοπάτι μήκους το πολύ 2.
3. Εκφράστε σε φυσική γλώσσα τον παρακάτω τύπο και δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος με τουλάχιστον 5 κορυφές το οποίο να τον ικανοποιεί.

$$P(x,y) \to \left((x=y) \vee E(x,y) \vee \exists z \left(E(x,z) \wedge E(y,z)\right)\right)$$
$$\exists x \exists y \left(\neg P(x,y)\right) \wedge \forall x \forall y$$

Απαντήσεις:

Α.

1. $\forall x \forall y P(x,y)$
2. $\forall x \forall y \left((x \neq y) \to E(x,y)\right)$
3. Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Για κάθε ζεύγος κορυφών οι οποίες συνδέονται (και άρα βρίσκονται στην ίδια συνιστώσα), είτε πρόκειται για την ίδια κορυφή (παρατηρήστε ότι εξ’

ορισμού το κατηγόρημα P(x,x) είναι πάντα αληθές) ή συνδέονται με ακμή. Η τελευταία πρόταση γράφεται στη γλώσσα μας ως
$\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow (x=y) \lor E(x,y))$

Β.

1. Η πρόταση που θα γράψουμε θα εκφράζει ότι το γράφημα έχει δύο κορυφές οι οποίες δε συνδέονται με μονοπάτι (άρα υπάρχουν τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες) και κάθε κορυφή συνδέεται με μία από αυτές τις δύο (άρα δεν υπάρχουν περισσότερες από δύο συνιστώσες).
$\exists x \exists y (\neg P(x,y) \land \forall z (P(z,x) \lor P(z,y)))$
2. $\forall x \forall y ((x=y) \lor E(x,y) \lor \exists z (E(x,z) \land E(z,y)))$
3. Η πρόταση που μας δίνεται είναι η σύζευξη δύο προτάσεων. Η πρώτη, $\exists x \exists y (\neg P(x,y))$ εκφράζει ότι το γράφημα δεν είναι συνεκτικό. Η δεύτερη, $\forall x \forall y$ εκφράζει ότι κάθε δύο κορυφές εντός μίας συνεκτικής συνιστώσας έχουν απόσταση το πολύ 2. Τελικά μπορούμε να εκφράσουμε τη δοσμένη πρόταση ως: “Το γράφημα δεν είναι συνεκτικό και κάθε συνεκτική του συνιστώσα έχει διάμετρο το πολύ 2”. Ένα παράδειγμα τέτοιου γραφήματος με 5 κορυφές είναι αυτό που έχει δύο συνιστώσες: το $G=(V,E)$ με $V=\{1,2,3,4,5\}$ και $E=\{(1,2),(3,4),(4,5)\}$.

Άσκηση 6 (2015-16, Εργασία 4, Ερώτημα 3)

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία συνδέονται με ακμή (ειδικότερα, το (a,a) δεν ανήκει ποτέ στη σχέση P).

Α. Να γράψετε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής που (στη συγκεκριμένη ερμηνεία) εκφράζουν ότι:

4. Το γράφημα περιέχει μεμονωμένη κορυφή.
5. Κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 1.
6. Το γράφημα είναι πλήρες.
7. Κάθε κορυφή που συμμετέχει σε κύκλο μήκους 3 έχει βαθμό τουλάχιστον 3.

Β.

1. Αναφορικά με τη συγκεκριμένη ερμηνεία, εξηγήστε (σε φυσική γλώσσα) τι σημαίνει κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.
Επίσης, δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος με 5 κορυφές για το οποίο η πρόταση (i) είναι αληθής (ανεξάρτητα από την πρόταση (ii)) και ένα παράδειγμα γραφήματος με 5 κορυφές για το οποίο η πρόταση (ii) είναι αληθής και η πρόταση (i) είναι ψευδής.
(i) $\exists x \forall y ((x \neq y) \rightarrow (P(x,y) \land \forall z ((z \neq x) \rightarrow \neg P(z,y))))$
(ii) $\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow (P(x,y) \lor \exists z (P(x,z) \land P(z,y))))$

2. Γράψτε μία πρόταση στη συγκεκριμένη πρωτοβάθμια γλώσσα που να εκφράζει την πρόταση: “Κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος είναι κλίκα”.
   Υπόδειξη: Σκεφτείτε έναν ισοδύναμο τρόπο να περιγράψετε την ζητούμενη ιδιότητα. Ειδικότερα, παρατηρήστε ότι μία συνεκτική συνιστώσα με 1 ή 2 κορυφές είναι αναγκαστικά κλίκα. Σκεφτείτε αρχικά πώς μπορείτε να διατυπώσετε την ιδιότητα “η συνιστώσα είναι κλίκα” για συνιστώσες με 3 κορυφές και στη συνέχεια δείτε πώς μπορείτε να γενικεύσετε.

Απάντηση

A.

1. $\exists x \forall y \neg P(x,y)$
2. $\forall x \exists y P(x,y)$ (πρόκειται για την άρνηση της πρότασης 1).
3. $\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow P(x,y))$
4. $\exists y \exists z ((x \neq y) \wedge P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x)) \rightarrow$
   $\forall x$
   $\exists y \exists z \exists w ((y \neq z) \wedge (y \neq w) \wedge (z \neq w) \wedge P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge P(x,w))$

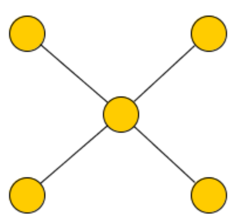
B.

1. Σχετικά με τις δύο προτάσεις:

   1. Η πρόταση αυτή εκφράζει το εξής: “Υπάρχει κάποια κορυφή x τέτοια ώστε κάθε άλλη κορυφή y συνδέεται με την x και δε συνδέεται με καμία άλλη κορυφή.” Πρόκειται δηλαδή για γράφημα “αστέρι”.

   2. Η πρόταση αυτή εκφράζει το εξής: “Κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών είτε συνδέεται με ακμή (είναι γειτονικές) ή έχουν κοινό γείτονα.” Πρόκειται δηλαδή για γράφημα στο οποίο η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών είναι το πολύ 2. Τη μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών ενός γραφήματος την ονομάζουμε και διάμετρο του γραφήματος. Πρόκειται δηλαδή για γράφημα με διάμετρο 2.

   Κατ' αρχάς παρατηρήστε ότι ένα γράφημα για το οποίο η πρόταση 1 είναι αληθής, η απόσταση δύο οποιονδήποτε κορυφών είναι το πολύ 2, συνεπώς και η πρόταση 2 είναι αληθής. Ένα τέτοιο γράφημα με 5 κορυφές είναι το ακόλουθο:



   Ένα γράφημα για το οποίο η πρόταση 2 είναι αληθής αλλά η πρόταση 1 είναι ψευδής πρέπει να έχει διάμετρο 2 αλλά να μην είναι το αστέρι. Για παράδειγμα το πλήρες γράφημα με 5 κορυφές.

2. Θέλουμε έναν ισοδύναμο τρόπο για να εκφράσουμε την ιδιότητα “κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος είναι κλίκα”. Παρατηρήστε ότι εάν μία συνιστώσα περιέχει μόνο

μία ή δύο κορυφές, τότε είναι απαραίτητα κλίκα. Εάν περιέχει τρεις ή περισσότερες κορυφές, τότε ένας ισοδύναμος τρόπος για να εκφράσουμε τη δεδομένη ιδιότητα είναι ο εξής: για κάθε τρεις κορυφές x,y,z εάν ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα τότε υπάρχουν οι ακμές {x,y}, {y,z}, {z,x}. Μένει να εκφράσουμε την ιδιότητα "ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Παρατηρήστε ότι οι κορυφές x,y,z ανήκουν στην ίδια συνιστώσα αν και μόνο αν ανά δύο συνδέονται, δηλαδή εάν υπάρχουν, για παράδειγμα, οι ακμές {x,y} και {y,z}. Άρα τελικά έχουμε την πρόταση:

$$\forall x \forall y \forall z \left((x \neq z) \wedge P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z) \right)$$

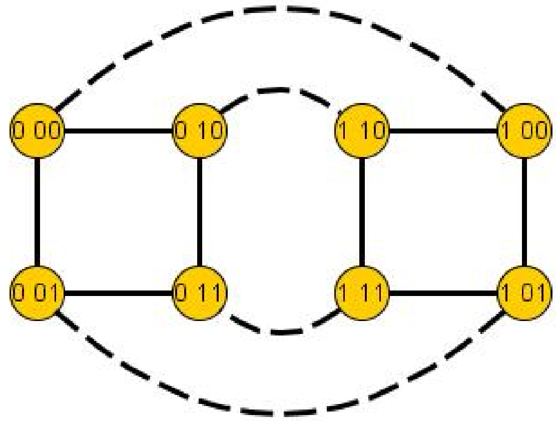
Άσκηση 7 (2012-13, Εργασία 4, Ερώτημα 4)

Ο ορισμός του υπερκύβου *n*-διαστάσεων δίνεται στη σελ. 116 (Παράδειγμα 4.13) του Τόμου Α΄ της ενότητας ΠΛΗ-20 (Διακριτά Μαθηματικά, Γ. Βούρος) καθώς και στη σελ. 74 (Παράδειγμα 1.9) του Τόμου Β΄ της ενότητας ΠΛΗ-20 (Θεωρία Γράφων, Μ. Μαυρονικόλας).

- Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο υπερκύβος *n*-διαστάσεων Q_n έχει $n2^{n-1}$ ακμές.
- Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο υπερκύβος *n*-διαστάσεων Q_n έχει κύκλο Hamilton (Η απόδειξή σας να **μην** κάνει χρήση κώδικα Gray όπως στη σελ. 116 (Παράδειγμα 4.13) του Τόμου Α΄ της ενότητας ΠΛΗ-20 (Διακριτά Μαθηματικά, Γ. Βούρος)).
- Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο υπερκύβος *n*-διαστάσεων Q_n περιέχει ακριβώς $\binom{n}{k}2^{n-k}$ διαφορετικούς υποκύβους διάστασης k, $k=1,\dots,n$.
- Να δειχθεί ότι ο υπερκύβος *n*-διαστάσεων Q_n μπορεί να παραχθεί ως το γινόμενο γραφημάτων των υπερκύβων *m* και *n-m* διαστάσεων, δηλαδή $Q_n = Q_m \times Q_{n-m}$, για $1<m<n$.

Απάντηση

1. Ακολουθούμε τον ορισμό των υπερκύβων, όπως δίνεται στη σελίδα 116 (Παράδειγμα 4.13) του Τόμου Α' (Διακριτά Μαθηματικά, Γ. Βούρος). Συγκεκριμένα για τον υπερκύβο διάστασης (*n*+1) θεωρούμε δύο υπερκύβους διάστασης *n*, έστω Q_n^1, Q_n^2, όπου στις κορυφές αντιστοιχούν δυαδικές λέξεις (η δυαδική αναπαράσταση της αρίθμησης κάθε κορυφής), και ενώνουμε κορυφές που αντιστοιχούν στην ίδια λέξη. Στη συνέχεια προσθέτουμε το ψηφίο 0 στην αρχή των δυαδικών λέξεων του Q_n^1 και το ψηφίο 1 στην αρχή των δυαδικών λέξεων τουQ_n^2. Παρατηρούμε ότι το γράφημα που προκύπτει είναι ο υπερκύβος Q_{n+1} εφόσον θα έχει $2^n+2^n=2^{n+1}$ κορυφές, και δύο κορυφές θα ενώνονται με ακμή άνν οι αντίστοιχες δυαδικές λέξεις διαφέρουν κατά ένα ψηφίο. Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα φαίνετε η κατασκευή του Q_3 από δύο αντίγραφα των Q_2.

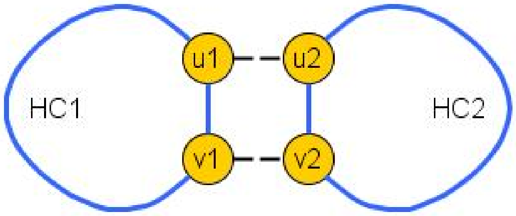


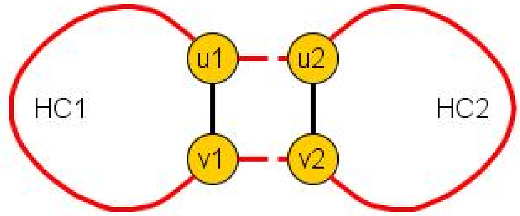
Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στην διάσταση n.
Βάση της επαγωγής: $|E(Q_1)|=1$, αφού ο υπερκύβος διαστασης 1 αποτελείται από δύο κορυφές και μία ακμή.
Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ο υπερκύβος διάστασης n έχει $|E(Q_n)|=n2^{n-1}$ ακμές.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι ο υπερκύβος διάστασης n+1 έχει $|E(Q_{n+1})|=(n+1)2^n$ ακμές Από τον παραπάνω δομικό ορισμό των υπερκύβων προκύπτει ότι οι ακμές του Q_{n+1} θα είναι οι ακμές που περιείχαν οι δύο υποκύβοι διάστασης n και οι επιπλέον ακμές που ενώνουν κορυφές του Q_n^1 με κορυφές του Q_n^2. Συγκεκριμένα:

- Ο υποκύβος Q_n^1 έχει $n2^{n-1}$ ακμές.
- Ο υποκύβος Q_n^2 έχει $n2^{n-1}$ ακμές.
- Κάθε κορυφή του Q_n^1 ενώνεται με ακριβώς μία κορυφή του Q_n^2, οπότε υπάρχουν 2^n ακμές μεταξύ κορυφών του Q_n^1 και κορυφών του Q_n^2.

Συνολικά έχουμε $2\times(n2^{n-1})+2^n=(n+1)2^{(n+1)-1}$ ακμές.

2. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο ορισμό των υπερκύβων όπως στο υποερώτημα 1.
Βάση της επαγωγής: Ο Q_2 έχει κύκλο Hamilton, εφόσον είναι ένας κύκλος μήκους 4.
Επαγωγική υπόθεση: 'Εστω ότι ο Q_n έχει κύκλο Hamilton.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι ο Q_{n+1}έχει επίσης κύκλο Hamilton. Έστω (u_1,v_1) μια ακμή του κύκλου Hamilton HC_1 που περιέχει ο υποκύβος Q_n^1. Ο αντίστοιχος κύκλος Hamilton που περιέχεται στον υποκύβο Q_n^2, έστω HC_2, θα περιέχει την ακμή (u_2,v_2) όπου οι κορυφές u_2,v_2 διαφέρουν από τις κορυφές u_1,v_1 αντίστοιχα μόνο στο πρώτο ψηφίο. Τότε μπορούμε να πάρουμε ένα κύκλο Hamilton στον Q_{n+1} ως εξής: ξεκινώντας από την κορυφή u_1 διατρέχουμε τον HC_1 έως την τελευταία κορυφή v_1. Στη συνέχεια προσθέτουμε την ακμή (v_1,v_2) και διατρέχουμε τον HC_2 έως την πρώτη κορυφή u_2. Τέλος προσθέτουμε την ακμή (u_2,u_1) κλείνοντας τον κύκλο. Ο κύκλος που δημιουργήσαμε περνάει από όλες τις κορυφές του Q_{n+1} ακριβώς μία φορά, δηλαδή αποτελεί κύκλο Hamilton στον Q_{n+1}.
Σχηματικά έχουμε αριστερά τους δύο κύκλους Hamilton και δεξιά με κόκκινο χρώμα τον κύκλο Hamilton του Q_{n+1}:





3. Για την καλύτερη κατανόηση του υποερωτήματος θα δώσουμε αρχικά μία συνδυαστική απόδειξη του αποτελέσματος.

__**Συνδυαστική απόδειξη:**__

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο ορισμό των υπερκύβων όπως στο υποερώτημα 1, δηλαδή κάθε κορυφή του υπερκύβου *n*-διαστάσεων Q_n αντιστοιχεί σε μια δυαδική λέξη μήκους *n*. Κάθε υποκύβος *k*-διάστασης Q_k, βάση του ορισμού, θα αποτελείται από κορυφές οι οποίες ταυτίζονται σε *n-k* ακριβώς ψηφία, ενώ διαφοροποιούνται σε *k* ψηφία. Μπορούμε να επιλέξουμε τα *k* ψηφία διαφοροποίησης με $\binom{n}{k}$ τρόπους, εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των ψηφίων. Επιπλέον κάθε ένα από τα υπόλοιπα *n-k* κοινά ψηφία μπορεί να πάρει την τιμή 0 ή 1, δηλαδή για κάθε ψηφίο υπάρχουν δύο επιλογές και τα ψηφία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Άρα υπάρχουν $2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2=2^{n-k}$ διαφορετικές επιλογές για τα *n-k* κοινά ψηφία.

Συνολικά υπάρχουν $\binom{n}{k}2^{n-k}$ διαφορετικά σύνολα κορυφών για έναν υποκύβο *k*-διάστασης.

__**Λύση με επαγωγή:**__

Βάση της επαγωγής: Ο Q_1 έχει ένα υποκύβο διάστασης 1, επομένως το ζητούμενο ισχύει για *n*=1.

Επαγωγική υπόθεση: 'Εστω ότι ο Q_n έχει $\binom{n}{k}2^{n-k}$υποκύβους διάστασης $k=1,\ldots,n$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι ο υπερκύβος (*n*+1)-διαστάσεων Q_{n+1} θα έχει $\binom{n+1}{k}2^{n+1-k}$ υποκύβους διάστασης $k=1,\ldots,n,n+1$.

Για *k*=1, ο υπερκύβος Q_1 έχει δύο κορυφές και μία μόνο ακμή. Άρα το πλήθος των διαφορετικών υποκύβων διάστασης 1 θα ισούται με το πλήθος των ακμών του Q_{n+1}. Από το υποερώτημα 1, έχουμε ότι ο υπερκύβος (*n*+1)-διαστάσεων Q_{n+1} έχει $(n+1)2^{(n+1)-1}$ ακμές. Επειδή για *k*=1 ισχύει ότι $\binom{n+1}{k}2^{n+1-k}=(n+1)2^{n+1-1}$, **το επαγωγικό βήμα ισχύει για *k*=1**.

Έστω τώρα ότι *k*>1. Για την κατασκευή του υπερκύβου (*n*+1)-διαστάσεων Q_{n+1} χρησιμοποιήθηκαν δύο αντίγραφα του υπερκύβου *n*-διαστάσεων Q_n, έστω οι υπερκύβοι Q_n^1 και Q_n^2. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, σχετικά με το αν ένας υποκύβος *k*-διαστάσεων Q_k περιέχεται σε κάποιον από τους Q_n^1, Q_n^2 ή όχι.

1η περίπτωση: ο υποκύβος *k*-διαστάσεων Q_k περιέχεται στον υπερκύβο Q_n^1.

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι ο υπερκύβος *n*-διαστάσεων Q_n^1 περιέχει $\binom{n}{k}2^{n-k}$ διαφορετικούς υποκύβους διάστασης *k*.

2η περίπτωση: ο υποκύβος *k*-διαστάσεων Q_k περιέχεται στον υπερκύβο Q_n^2.

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι ο υπερκύβος n-διαστάσεων Q_n^2 περιέχει $\binom{n}{k}2^{n-k}$ διαφορετικούς υποκύβους διάστασης k.

3η περίπτωση: ο υποκύβος k-διαστάσεων Q_k έχει τουλάχιστον μία κοινή κορυφή με τον υπερκύβο Q_n^1 και τουλάχιστον μία κοινή κορυφή με τον Q_n^2.

Έστω λοιπόν ότι ο υποκύβος Q_k έχει $k_1>0$ κοινές κορυφές με τον Q_n^1 και $k_2>0$ κοινές κορυφές με τον Q_n^2, όπου $k_1 + k_2 = 2^k$. **Θα δείξουμε ότι $k_1 = k_2$.**

Από την συνδυαστική λύση, είναι εμφανές ότι <u>όλες</u> οι κορυφές του Q_k έχουν ίδια n-k ψηφία, ενώ διαφοροποιούνται σε k ψηφία. Εφόσον υπάρχουν κορυφές που ανήκουν στον Q_n^1, τότε θα έχουν ως αρχικό ψηφίο το 0, ενώ οι κορυφές που ανήκουν στον Q_n^2 θα έχουν ως αρχικό ψηφίο το 1. Δηλαδή δύο κορυφές του Q_k που διαφέρουν στο πρώτο ψηφίο θα είναι γειτονικές.

Έστω μια κορυφή v_1 του υποκύβου k-διαστάσεων Q_k που ανήκει στον Q_n^1, δηλαδή $v_1 \in V\left(Q_n^1\right)$, και έστω ότι αντιστοιχεί στη λέξη $0a$, όπου το πρώτο ψηφίο είναι 0. Η v_1 ενώνεται με k άλλες κορυφές ως κορυφή του Q_k, και μία από τις γειτονικές κορυφές της, έστω η v_2 αντιστοιχεί στη λέξη $1a$. Τότε όμως αυτή η κορυφή θα ανήκει στον Q_n^2 αφού έχει ως αρχικό ψηφίο το 1, δηλαδή $v_2 \in V\left(Q_n^2\right)$. Είναι προφανές ότι η v_1 δεν μπορεί να ενώνεται με άλλες κορυφές του Q_n^2, αφού τότε θα διέφεραν σε τουλάχιστον δύο ψηφία. **Επομένως υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των κοινών κορυφών του υποκύβου Q_k με τον Q_n^1 και των κοινών του κορυφών με τον Q_n^2. Οπότε $k_1 = k_2$.**

Τότε ο υποκύβος Q_k θα έχει 2^{k-1} κοινές κορυφές με τον Q_n^1 και 2^{k-1} κοινές κορυφές με τον Q_n^2. Οι κορυφές που περιέχονται στον Q_n^1, βάση του ορισμού θα αποτελούν κορυφές ενός υποκύβου (k-1) διαστάσεων. Το ίδιο ισχύει για τις κορυφές που περιέχονται στον Q_n^2. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι ο Q_n^1 περιέχει $\binom{n}{k-1}2^{n-(k-1)}$ διαφορετικούς υποκύβους διάστασης (k-1). Σε κάθε έναν από αυτούς τους υποκύβους διάστασης (k-1) του Q_n^1, αντιστοιχεί ακριβώς ένας υποκύβος διάστασης (k-1) που περιέχεται στον Q_n^2, τέτοιος ώστε κάθε ζεύγος υποκύβων διάστασης (k-1) να δίνει έναν διαφορετικό υποκύβο διάστασης k στον υπερκύβο Q_{n+1}.

Αθροίζοντας τους διαφορετικούς υποκύβους διάστασης k που προκύπτουν από τις τρεις περιπτώσεις έχουμε:

$$2\binom{n}{k}2^{n-k}+\binom{n}{k-1}2^{n-(k-1)}=\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)2^{n-k+1}=\binom{n+1}{k}2^{(n+1)-k}$$

Επομένως, δείξαμε ότι ο ο υπερκύβος (n+1)-διαστάσεων Q_{n+1} θα έχει $\binom{n+1}{k}2^{n+1-k}$ υποκύβους διάστασης $k=1,\ldots,n,n+1$.

<u>Σημείωση</u>: Στην αρχή του επαγωγικού βήματος θεωρήσαμε ξεχωριστά την περίπτωση για k=1. Επειδή στο επαγωγικό βήμα μετράμε υποκύβους διάστασης (k-1) , θα πρέπει να είναι k-1>0, δηλαδή k>1.

4. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο γράφημα G_1 x G_2 των γραφημάτων G_1 και G_2, ορίζεται ώς:

I. Το σύνολο κορυφών $V(G_1$ x $G_2)$ είναι τα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $V\left(G_1\right)\times V\left(G_2\right)=\left\{\left(u,v\right): v\in V\left(G_1\right), u\in V\left(G_2\right)\right\}$.

II. Οι κορυφές (v,u) και (v',u') του $V(G_1$ x $G_2)$ είναι γειτονικές αν
   a. ($v=v'$ και οι u, u' είναι γειτονικές στο G_2) ή
   b. ($u=u'$ και οι v, v' είναι γειτονικές στο G_1).

Οπότε το γινόμενο δύο υπερκύβων Q_n, Q_m θα έχει $2^n 2^m = 2^{n+m}$ κορυφές οι οποίες θα αντιστοιχούνε σε όλες τις δυαδικές λέξεις με $n+m$ ψηφία. **Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι δύο κορυφές θα εννονται με ακμή αν και μόνο άν διαφέρουνε κατά ένα ψηφίο μόνο.** Έστω δύο κορυφές του Q_n υπερκύβου $a_1, a_2 \in \{0,1\}^n$, και δύο κορυφές του Q_mυπερκύβου $b_1, b_2 \in \{0,1\}^m$. Σύμφωνα με τον ορισμό του γινομένου γραφημάτων, στο γινόμενο των Q_n, Q_m η κορυφή $(a_1 b_1)$ θα είναι γειτονική της κορυφής $(a_2 b_2)$άν :

I. $a_1 = a_2$και οι λέξεις b_1, b_2 διαφέρουν κατά ένα ψηφίο μόνο, ή

II. $b_1 = b_2$ και οι λέξεις a_1, a_2 διαφέρουν κατά ένα ψηφίο μόνο.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις οι λέξεις $a_1 b_1, a_2 b_2$ διαφέρουν κατά ένα ψηφίο μόνο.

Αντίστροφα, έστω ότι οι λέξεις $a_1 b_1, a_2 b_2$ διαφέρουν κατά ένα ψηφίο μόνο. Τότε αυτό το ψηφίο θα βρίσκεται είτε στις πρώτες n θέσεις, είτε στις υπόλοιπες m θέσεις. Στην περίπτωση που το διαφορετικό ψηφίο βρίσκεται στις πρώτες n θέσεις, προκύπτει ότι οι λέξεις a_1, a_2 διαφέρουν κατά ένα ψηφίο μόνο και επιπλέον $b_1 = b_2$. Στην περίπτωση που το διαφορετικό ψηφίο βρίσκεται στις στις υπόλοιπες m θέσεις, προκύπτει ότι οι λέξεις b_1, b_2 διαφέρουν κατά ένα ψηφίο μόνο και επιπλέον $a_1 = a_2$. Άρα το γράφημα $Q_n \times Q_m$θα είναι υπερκύβος Q_{n+m}.

Άσκηση 8 (2012-13, Εργασία 4, Ερώτημα 2)

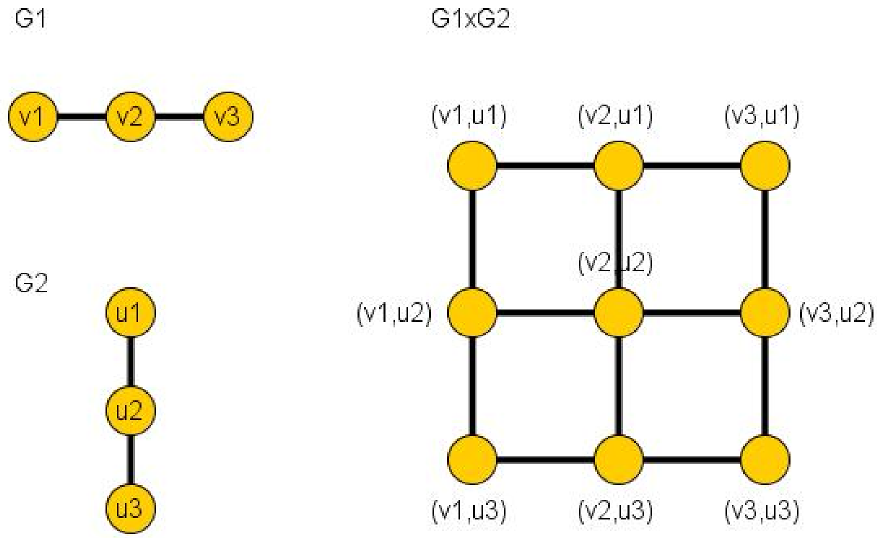
1) Έστω ότι τα G_1, G_2 είναι μονοπάτια με 3 κορυφές, δηλαδή $V(G_1)=\{v_1, v_2, v_3\}$, $E(G_1)=\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$, και $V(G_2)=\{u_1, u_2, u_3\}$, $E(G_2)=\{(u_1, u_2), (u_2, u_3)\}$.
   a. Σχεδιάστε το G_1 x G_2.
   b. Υπάρχει κύκλος Euler στο G_1 x G_2;
   c. Υπάρχει κύκλος Hamilton στο G_1 x G_2;

2)
   a. Δείξτε μέσω αντιπαραδείγματος ότι δεν ισχύει η παρακάτω πρόταση: «Αν το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Hamilton τότε τουλάχιστον ένα από τα γραφήματα G_1, G_2 έχει κύκλο Hamilton.»
   b. Έστω ότι το γράφημα G_1 έχει περιττό πλήθος κορυφών. Δείξτε ότι το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Euler <u>αν και μόνο αν</u> τα G_1, G_2 έχουν και <u>τα δύο</u> κύκλο Euler.

<u>Απάντηση</u>

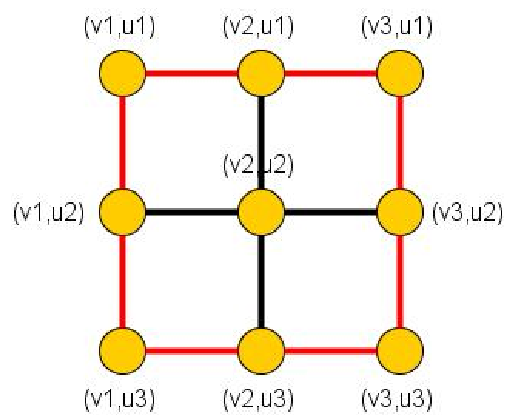
1)

a. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα γραφήματα G_1, G_2 και G_1 x G_2.



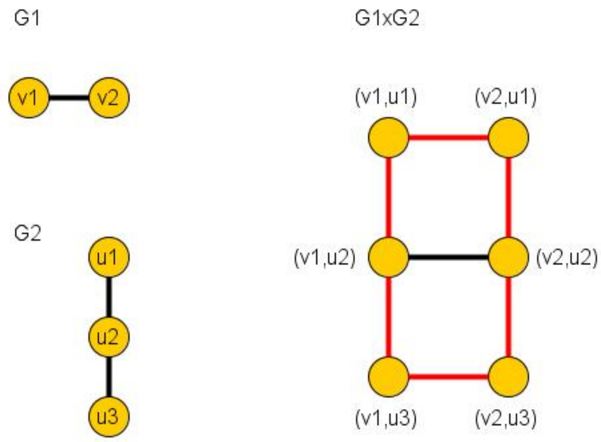
b. Γνωρίζουμε ότι για να υπάρχει κύκλος Euler σε ένα γράφημα πρέπει κάθε κορυφή να έχει άρτιο βαθμό. Στο γράφημα G_1 x G_2 υπάρχουν τέσσερις κορυφές με βαθμό 3: οι κορυφές (v_1,u_2), (v_2,u_1)¸ (v_2,u_3) και (v_3,u_2). Επομένως δεν υπάρχει κύκλος Euler.

c. Ας υποθέσουμε ότι στο γράφημα G_1 x G_2 υπάρχει κύκλος Hamilton. Εξ' ορισμού ο κύκλος Hamilton περνάει από όλες τις κορυφές του γραφήματος ακριβώς μία φορά. Για την κορυφή (v_1,u_1) που έχει βαθμό 2, ο κύκλος Hamilton θα περιέχει τις δύο ακμές που προσπίπτουν στην (v_1,u_1), δηλαδή τις ακμές $((v_1,u_1), (v_1,u_2))$ και $((v_1,u_1), (v_2,u_1))$. Το ίδιο ισχύει για όλες τις κορυφές βαθμού 2. Στο διπλανό σχήμα οι ακμές που ανήκουν υποχρεωτικά στον Hamilton κύκλο φαίνονται με κόκκινο χρώμα. Προκύπτει επομένως ότι αν υπάρχει κύκλος Hamilton στο γράφημα G_1 x G_2, τότε δεν μπορεί να διέρχεται από την κορυφή (v_2,u_2). Επομένως στο γράφημα G_1 x G_2 δεν υπάρχει κύκλος Hamilton.



2)

a. Παίρνουμε τα γραφήματα G_1, G_2 να είναι μονοπάτια με 2 και 3 κορυφές αντίστοιχα, δηλαδή $V(G_1)=\{v_1, v_2\}$, $E(G_1)=\{(v_1, v_2)\}$, και $V(G_2)=\{u_1, u_2, u_3\}$, $E(G_2)=\{(u_1, u_2), (u_2, u_3)\}$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα γραφήματα G_1, G_2 και G_1 x G_2. Παρατηρούμε ότι το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Hamilton (ο κόκκινος κύκλος στο σχήμα), ενώ κανένα από τα γραφήματα G_1 και G_2 δεν έχει κύκλο Hamilton. Επομένως ο ισχυρισμός «Αν το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Hamilton τότε τουλάχιστον ένα από τα γραφήματα G_1, G_2 έχει κύκλο Hamilton.» δεν είναι αληθής.



b.

⇒Καταρχήν θα δείξουμε ότι αν το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Euler τότε τα G_1, G_2 έχουν και τα δύο κύκλο Euler, με την υπόθεση ότι το γράφημα G_1 έχει περιττό πλήθος κορυφών. Έστω λοιπόν ότι το γράφημα G_1 έχει περιττό πλήθος κορυφών και ότι το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Euler. Γνωρίζουμε ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι στα γραφήματα G_1 και G_2 όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.

Έστω $v \in V(G_1)$ μία κορυφή του G_1 και $u \in V(G_2)$ μια κορυφή του G_2. Τότε η κορυφή (v,u) του G_1 x G_2 έχει βαθμό

$$\mathbf{d((\mathit{v},\mathit{u}))=d_1(\mathit{v})+d_2(\mathit{u})},$$

όπου $d_1(v)$ ο βαθμός της κορυφής v στο G_1 και $d_2(u)$ ο βαθμός της κορυφής u στο G_2. **Άρα οι βαθμοί $d((v,u))$ είναι όλοι άρτιοι αριθμοί για κάθε ζεύγος κορυφών** $v \in V(G_1)$ και $u \in V(G_2)$.

Θα δείξουμε ότι οι κορυφές του G_1 έχουν είτε όλες άρτιο βαθμό είτε όλες περιττό βαθμό. Πράγματι, έστω $v_1, v_2 \in V(G_1)$ δύο κορυφές του G_1 και $u \in V(G_2)$ μια κορυφή του G_2. Τότε οι $d((v_1,u))=d_1(v_1)+d_2(u)$ και $d((v_2,u))=d_1(v_2)+d_2(u)$ είναι άρτιοι αριθμοί. Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$d((v_1,u)) - d((v_2,u)) = d_1(v_1) - d_1(v_2).$$

Επειδή $d((v_1,u)) - d((v_2,u))$ είναι άρτιος αριθμός ως διαφορά δύο άρτιων αριθμών, τότε και $d_1(v_1) - d_1(v_2)$ είναι άρτιος αριθμός. **Συνεπώς $d_1(v_1)$, $d_1(v_2)$ είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί**, οπότε **οι κορυφές του G_1 έχουν είτε όλες άρτιο βαθμό είτε όλες περιττό βαθμό**.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: οι κορυφές του G_1 έχουν όλες περιττό βαθμό.

Από τη σχέση

$$\sum_{v \in V(G_1)} d_1(v) = 2|E(G_1)|$$

προκύπτει ότι αν όλες οι κορυφές του G_1 έχουν περιττό βαθμό, τότε το πλήθος τους θα πρέπει να είναι άρτιο, δηλαδή το G_1 θα είχε άρτιο πλήθος κορυφών. Όμως από την υπόθεση του ερωτήματος έχουμε ότι το γράφημα G_1 έχει περιττό πλήθος κορυφών, άρα η 1η περίπτωση δεν μπορεί να ισχύει.

2η περίπτωση: οι κορυφές του G_1 έχουν όλες άρτιο βαθμό και επομένως **το γράφημα G_1 έχει κύκλο Euler**.

Θα δείξουμε τώρα ότι και στο γράφημα G_2 όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Πράγματι, από τη σχέση

$$d((v,u))=d_1(v)+d_2(u)$$

με $d((v,u))$ και $d_1(v)$ άρτιους αριθμούς, προκύπτει ότι και $d_2(u)$ είναι άρτιος αριθμός, για κάθε κορυφή $u \in V(G_2)$. Συνεπώς όλες οι κορυφές του G_2 έχουν άρτιο βαθμό και επομένως **το γράφημα G_2 έχει κύκλο Euler**.
Καταλήξαμε ότι τα γραφήματα G_1 και G_2 έχουν και τα δύο κύκλο Euler.

$\Leftarrow$Αντίστροφα, έστω ότι τα γραφήματα G_1, G_2 έχουν και τα δύο κύκλο Euler. Θα δείξουμε ότι και το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Euler.

Εφόσον το γράφημα G_1 έχει κύκλο Euler, κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό, δηλαδή **$d_1(v)$ είναι άρτιος** για κάθε κορυφή $v \in V(G_1)$. Ομοίως, στο γράφημα G_2, κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό, δηλαδή **$d_2(u)$ είναι άρτιος** για κάθε κορυφή $u \in V(G_2)$. Τότε για την κορυφή (v,u) του G_1 x G_2 με βαθμό $d((v,u))=d_1(v)+d_2(u)$ προκύπτει ότι και **$d((v,u))$ είναι άρτιος**. Δηλαδή κάθε κορυφή του G_1 x G_2 έχει άρτιο βαθμό και επομένως **το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Euler**.

Άσκηση 9 (2016-17, Εργασία 4, Ερώτημα 5)

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπο-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. Θεωρούμε ότι τα γραφήματα του ερωτήματος είναι απλά και μη κατευθυνόμενα.

Α. Στα παρακάτω υποερωτήματα καλείστε να εξετάσετε αν υπάρχει το γράφημα που περιγράφεται.

1. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα με ακολουθία βαθμών (5, 5, 5, 5, 3, 3).
2. **(Σ/Λ)** Υπάρχει διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών (3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1).
3. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα όπου κάθε επαγόμενο υπογράφημά του είναι συνεκτικό και το ίδιο το γράφημα δεν είναι κλίκα.
4. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα με 5 κορυφές που είναι ίδιο με το συμπλήρωμά του.

Β. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

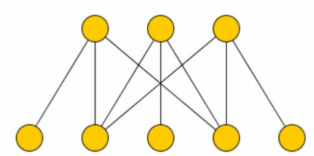
1. **(Σ/Λ)** Σε κάθε συνεκτικό γράφημα υπάρχει ένα υπογράφημα που έχει Hamilton μονοπάτι.
2. **(Σ/Λ)** Το συμπλήρωμα από ένα διμερές γράφημα έχει μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο με μέγεθος το πολύ 2.
3. **(Σ/Λ)** Αν P είναι ένα μονοπάτι ενός γραφήματος G τέτοιο ώστε κάθε κορυφή εκτός του P να έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο P τότε το G είναι συνεκτικό.
4. **(Σ/Λ)** Αν P είναι ένα μονοπάτι ενός γραφήματος G τέτοιο ώστε κάθε κορυφή εκτός του P να έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο P τότε το G έχει Hamilton μονοπάτι.

Απαντήσεις:

Α

1. **Λάθος.** Υπάρχουν έξι συνολικά κορυφές και τέσσερις από αυτές έχουν βαθμό 5 δηλαδή ενώνονται με όλες τις κορυφές. Άρα οι υπόλοιπες δύο κορυφές θα έπρεπε να είχαν βαθμό τουλάχιστον 4.

2. **Σωστό.** Το ακόλουθο διμερές γράφημα πραγματοποιείται από την ακολουθία (3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1).



όμενο υπογράφημα είναι συνεκτικό τότε για οποιεσδήποτε δύο κορυφές x, y το τους πρέπει να είναι συνεκτικό που σημαίνει ότι θα πρέπει να ενώνονται μεταξύ τους. Δηλαδή τότε το γράφημα πρέπει να είναι κλίκα.

4. **Σωστό.** Ο απλός κύκλος με πέντε κορυφές C_5 είναι ένα τέτοιο γράφημα.

Β.

1. **Σωστό.** Σε κάθε συνεκτικό γράφημα μπορούμε να βρούμε δύο κορυφές x, y που ενώνονται μεταξύ τους. Το επαγόμενο υπογράφημά τους είναι δύο κορυφές που ενώνονται και είναι προφανές ένα Hamilton μονοπάτι.

2. **Σωστό.** Έστω ότι υπάρχουν τουλάχιστον 3 κορυφές που δεν ενώνονται μεταξύ τους στο συμπλήρωμα από ένα διμερές γράφημα. Τότε οι κορυφές αυτές επάγουν μια κλίκα με τουλάχιστον 3 κορυφές στο ίδιο το διμερές γράφημα. Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο καθώς τότε θα είχαμε ένα τρίγωνο στο διμερές γράφημα, δηλαδή έναν κύκλο με περιττό μήκος.

3. **Σωστό.** Για δύο οποιεσδήποτε κορυφές x, y πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μονοπάτι.

- Αν οι x, y ανήκουν στο μονοπάτι P τότε προφανώς υπάρχει μονοπάτι μεταξύ τους.
- Αν η x ανήκει στο P και η y ανήκει στο *G* – P τότε η y έχει έναν γείτονα στο P, έστω z, και από τον z γνωρίζουμε ότι υπάρχει μονοπάτι P’ στον x. Επομένως υπάρχει το μονοπάτι <x, P’, z, y>.
- Αν οι x,y ανήκουν στο *G* – P τότε υπάρχει ένας γείτονας x’ του x στο P και αντίστοιχα υπάρχει ένας γείτονας y’ του y στο P. Επειδή οι x’, y’ ανήκουν στο P θα υπάρχει ένα μονοπάτι P’ μεταξύ τους. Άρα το <x, x’, P’, y’,y> είναι το ζητούμενο μονοπάτι.

*4. **Λάθος.** Στο γράφημα $K_{1,3}$ (πλήρες διμερές) υπάρχει ένα τέτοιο μονοπάτι αλλά το ίδιο το γράφημα δεν έχει Hamilton μονοπάτι.*

Άσκηση 10 (2015-16, Εργασία 4, Ερώτημα 5)

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπο-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. Θεωρούμε ότι τα γραφήματα του ερωτήματος είναι απλά και μη κατευθυνόμενα.

1) Στα παρακάτω υποερωτήματα καλείστε να εξετάσετε αν υπάρχει το γράφημα που περιγράφεται.
   a) Υπάρχει γράφημα με ακολουθία βαθμών (4, 2, 2, 2, 1, 1).
   b) Υπάρχει διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών (4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1).

c) Υπάρχει γράφημα με n κορυφές και $n - 1$ ακμές το οποίο περιέχει κύκλο.

d) Υπάρχει γράφημα που έχει κύκλο Euler και κύκλους περιττού μήκους.

2) Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

a) Αν ένα γράφημα δεν χρωματίζεται με k χρώματα τότε έχει μια κλίκα με $k + 1$ κορυφές.

b) Αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό τότε δεν υπάρχει *γέφυρα* (ακμή που η διαγραφή της να αυξάνει το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών) στο γράφημα.

c) Αν όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2 τότε το γράφημα έχει κύκλο.

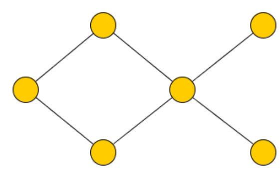
d) Κάθε πλήρες διμερές γράφημα με άρτιο πλήθος κορυφών έχει κύκλο Euler ή κύκλο Hamilton.

Απάντηση

1)

a) **Σωστό.**

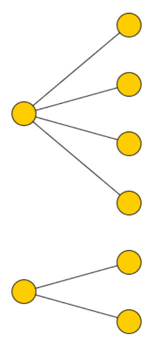
Το ακόλουθο γράφημα πραγματοποιείται από την ακολουθία βαθμών (4, 2, 2, 2, 1, 1).



b) **Σωστό.**

Το ακόλουθο διμερές γράφημα πραγματοποιείται

από την ακολουθία βαθμών (4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1).



c) **Σωστό.** Ένα τέτοιο γράφημα είναι ένα τρίγωνο με μια απομονωμένη κορυφή (δηλαδή μια κορυφή με βαθμό 0).

d) **Σωστό.** Ένα τρίγωνο είναι ένα γράφημα που έχει κύκλο μήκους 3 και έχει κύκλο Euler.

2.

a) **Λάθος.** Ο κύκλος πέντε κορυφών C_5 δεν χρωματίζεται με 2 χρώματα και η μεγαλύτερη κλίκα στο C_5 έχει μέγεθος 2.

b) **Σωστό.** Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει γέφυρα τότε μετά την διαγραφή της γέφυρας τα δύο άκρα της μειώνουν τον βαθμό τους κατά 1 και θα υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού. Η κάθε συνεκτική συνιστώσα που περιέχει κάθε ένα από αυτά τα άκρα θα αποτελεί και γράφημα από μόνη της αλλά τότε θα υπάρχει ακριβώς 1 κορυφή περιττού βαθμού μέσα στη συνεκτική συνιστώσα κάτι που είναι αδύνατο.

c) **Σωστό.** Θεωρούμε ένα μέγιστο μονοπάτι στο γράφημα. Το ένα άκρο (η τελευταία κορυφή) του μέγιστου μονοπατιού θα έχει βαθμό 2. Ο ένας γείτονας από τους 2 θα βρίσκεται πάνω στο μονοπάτι (θα είναι η προτελευταία κορυφή). Ο άλλος γείτονας δεν μπορεί να βρίσκεται εκτός του μονοπατιού γιατί τότε το μονοπάτι θα μπορούσε να επεκταθεί και δεν θα ήταν μέγιστο. Επομένως και οι δύο γείτονες του άκρου βρίσκονται πάνω στο μέγιστο μονοπάτι και τότε θα δημιουργείται κύκλος.

d) **Λάθος.** Στο πλήρες διμερές γράφημα $K_{1,3}$ υπάρχει κορυφή με περιττό βαθμό (άρα δεν έχει κύκλο Euler) ενώ δεν υπάρχει κύκλος (άρα ούτε κύκλος Hamilton).