Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2017-2018

Ενδεικτικές Απαντήσεις 1ης Κύριας Εργασίας Συνδυαστική

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1.

Στο ερώτημα αυτό έχει σημασία να προσδιορίσετε το είδος του κάθε προβλήματος (άθροισμα, γινόμενο, επιλογές μη διατεταγμένων ή διατεταγμένων πλειάδων, διατάξεις, μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων, ρίψη σφαιριδίων σε κουτιά, κ.λ.π.) και στη συνέχεια να εφαρμόσετε τους κατάλληλους συνδυαστικούς τύπους.

(1α) Έστω ότι 100 (διαφορετικοί) φοιτητές εισέρχονται σε δύο αίθουσες εξετάσεων, την αίθουσα Α με χωρητικότητα 80 (διαφορετικών) θέσεων και την αίθουσα Β με χωρητικότητα 40 (διαφορετικών) θέσεων. Στα ερωτήματα (1α1) και (1α2) μας ενδιαφέρει όχι μόνο ποιοι φοιτητές θα μπουν στην κάθε αίθουσα αλλά και σε ποιες θέσεις θα καθίσουν.

(1α1) Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες.

(1α2) Έστω ότι από τους 100 (διαφορετικούς) φοιτητές, 60 είναι κορίτσια και 40 είναι αγόρια. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες αν όλα τα αγόρια καθίσουν στην ίδια αίθουσα.

Απαντήσεις

(1α1) Έχουμε τοποθέτηση $k = 100$ διαφορετικών αντικειμένων (οι διαφορετικοί φοιτητές) σε $n = 80 + 40 = 120$ διαφορετικές υποδοχές (οι διαφορετικές θέσεις στις δύο αίθουσες), όπου κάθε υποδοχή λαμβάνει το πολύ ένα αντικείμενο. Άρα έχουμε $P(120,100) = \frac{120!}{20!}$ διαφορετικές τοποθετήσεις των φοιτητών.

(Πιο αναλυτικά, αριθμούμε τους φοιτητές από το 1 έως και το 100 με αυθαίρετο τρόπο και διατάσσουμε τις 120 διαφορετικές υποδοχές με $P(n,n) = 120!$ τρόπους. Στην πρώτη υποδοχή σε αυτή τη διάταξη θα καθίσει ο πρώτος φοιτητής, στη δεύτερη υποδοχή ο δεύτερος φοιτητής κοκ. Μετά την τοποθέτηση των φοιτητών μας μένουν 20 κενές υποδοχές, η σχετική διάταξη των οποίων δε μας ενδιαφέρει. Άρα έχουμε $\frac{P(120,120)}{20!} = \frac{120!}{20!}$ διαφορετικές τοποθετήσεις των φοιτητών.)

(1α2) Εξετάζουμε δύο αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις:

1) Όλα τα 40 αγόρια τοποθετούνται στην αίθουσα A. Όπως στο ερώτημα (1α1), αυτό γίνεται με $P(80,40)$ διαφορετικούς τρόπους. Τώρα μας μένουν 80 θέσεις (40 θέσεις στην αίθουσα A και 40 θέσεις στην αίθουσα B), στις οποίες τοποθετούμε τα 60 κορίτσια. Έχουμε $P(80,60)$ δυνατούς τρόπους τοποθέτησης των κοριτσιών σε αυτές τις θέσεις. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου, το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων στην περίπτωση (1) είναι $P(80,40) \times P(80,60)$.

2) Όλα τα 40 αγόρια τοποθετούνται στην αίθουσα B. Αυτό γίνεται με $P(40,40)$ τρόπους. Τώρα μας μένουν 80 θέσεις στην αίθουσα A στις οποίες τοποθετούμε τα

κορίτσια με $P(80,60)$ τρόπους. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου, το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων στην περίπτωση (2) είναι $P(40,40) \times P(80,60)$.

Αφού οι περιπτώσεις (1) και (2) είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων είναι $P(80,40) \times P(80,60) + P(40,40) \times P(80,60) = P(80,60) \times [P(80,40) + P(40,40)]$.

(1β) Έστω ότι επιλέγουμε 4 βιβλία από 8 διαφορετικά βιβλία Μαθηματικών και 5 βιβλία από 10 διαφορετικά βιβλία Πληροφορικής και τα τοποθετούμε στη σειρά σε ένα ράφι. Υπολογίστε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η παραπάνω επιλογή και τοποθέτηση των βιβλίων στο ράφι όταν:

(1β1) Τοποθετούμε τα βιβλία σε οποιαδήποτε σειρά.
(1β2) Τα βιβλία Μαθηματικών και Πληροφορικής εναλλάσσονται.
(1β3) Το πρώτο βιβλίο είναι Μαθηματικών και το πέμπτο βιβλίο είναι Πληροφορικής.

Απαντήσεις

(1β1) Επιλέγουμε τα 4 βιβλία Μαθηματικών με $C(8,4)$ τρόπους και τα 5 βιβλία Πληροφορικής με $C(10,5)$ τρόπους. Στη συνέχεια, τοποθετούμε στο ράφι σε σειρά τα 9 επιλεγμένα βιβλία με $P(9,9) = 9!$ τρόπους, άρα συνολικά έχουμε $C(8,4) \times C(10,5) \times 9!$ δυνατές τοποθετήσεις.

(1β2) Διατάσσουμε ξεχωριστά τα 4 από τα 8 βιβλία των Μαθηματικών με $P(8,4)$ τρόπους και τα 5 από τα 10 βιβλία Πληροφορικής με $P(10,5)$ τρόπους. Καθώς τα βιβλία Μαθηματικών και Πληροφορικής θα πρέπει να εναλλάσσονται, το πρώτο βιβλίο πρέπει να είναι Πληροφορικής, δηλαδή θα εμφανίζονται με τη σειρά $\Pi_1 M_1 \Pi_2 M_2 \Pi_3 M_3 \Pi_4 M_4 \Pi_5$. Άρα έχουμε $P(8,4) \times P(10,5)$ δυνατές διατάξεις.

(1β3) Επιλέγουμε με 8 τρόπους ένα βιβλίο Μαθηματικών το οποίο θα τοποθετηθεί στην πρώτη θέση, και με 10 τρόπους ένα βιβλίο Πληροφορικής το οποίο θα τοποθετηθεί στην πέμπτη θέση. Απομένει να επιλέξουμε 3 από τα υπόλοιπα 7 βιβλία Μαθηματικών, με $C(7,3)$ τρόπους, και 4 από τα υπόλοιπα 9 βιβλία Πληροφορικής με $C(9,4)$ τρόπους. Διατάσσουμε αυτά τα 7 βιβλία με $P(7,7) = 7!$ τρόπους, άρα συνολικά έχουμε $8 \times 10 \times C(7,3) \times C(9,4) \times 7!$ δυνατές τοποθετήσεις.

Ερώτημα 2.

Το ερώτημα αυτό θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε περισσότερο στην επιλογή των κατάλληλων τύπων σε προβλήματα συνδυαστικής. Θα χρειαστεί να μελετήσετε την παράγραφο 1.7 «Μέτρηση και διακριτή πιθανότητα» του τόμου Δ.

Μια εταιρία, στα πλαίσια διαφημιστικής εκστρατείας, διοργανώνει ένα διαγωνισμό στον οποίο μοιράζονται λαχνοί. Οι λαχνοί περιέχουν όλους τους δυνατούς αναγραμματισμούς του ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ (π.χ., ΑΛΛΑΩΠΔΡΟ, ΡΑΑΟΠΛΔΩΛ, κλπ). Κερδίζουν όσοι λαχνοί εμφανίζουν κάποια (τουλάχιστον μία) από τις λέξεις ΠΟΛΛΑ ή ΔΩΡΑ. Π.χ., οι λαχνοί **ΠΟΛΛΑ**ΑΔΡΩ, ΑΠΛΛΟ**ΔΩΡΑ** και **ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ** είναι νικηφόροι.

(2α) Υπολογίστε το συνολικό πλήθος των λαχνών.
(2β) Υπολογίστε το πλήθος των νικηφόρων λαχνών.
(2γ) Έστω ότι λαμβάνουμε ένα τυχαίο λαχνό από ένα κιβώτιο το οποίο περιλαμβάνει μόνο τους λαχνούς που ξεκινούν με το γράμμα Δ. Ποια είναι η πιθανότητα ο λαχνός μας να είναι νικηφόρος;

Απαντήσεις

(2α) Εφαρμόζουμε τον τύπο διατάξεων ομάδων μη διακεκριμένων αντικειμένων. Έχουμε $N = 9$ αντικείμενα, όσα τα γράμματα του ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ, τα οποία χωρίζονται σε 2 ομάδες των 2, για τα γράμματα Λ και Α, και σε 5 ομάδες του ενός, για τα γράμματα Π, Ο, Δ, Ω και Ρ. Άρα έχουμε $\frac{9!}{2!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = \frac{9!}{4}$ λαχνούς.

(2β) Έστω Π το σύνολο των λαχνών που περιέχουν τη λέξη ΠΟΛΛΑ και Δ το σύνολο των λαχνών που περιέχουν τη λέξη ΔΩΡΑ. Τότε, το πλήθος των νικηφόρων λαχνών είναι $N = |\Pi \cup \Delta|$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε

$$N = |\Pi \cup \Delta| = |\Pi| + |\Delta| - |\Pi \cap \Delta|.$$

Για να υπολογίσουμε τον πληθάριθμο του συνόλου Π θεωρούμε τη λέξη ΠΟΛΛΑ ως ένα σύμβολο. Έτσι, μετράμε το πλήθος των δυνατών διατάξεων 5 διαφορετικών συμβόλων (ΠΟΛΛΑ, Δ, Ω, Ρ, Α) που είναι $P(5,5) = 5!$, δηλαδή $|\Pi| = 5!$. Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε $|\Delta| = \frac{6!}{2}$, αφού έχουμε τις δυνατές διατάξεις των 6 συμβόλων ΔΩΡΑ, Π, Ο, Λ, Λ, Α, όπου το ένα σύμβολο εμφανίζεται 2 φορές και τα υπόλοιπα από μία.

Το σύνολο $\Pi \cap \Delta$ αποτελείται από τους λαχνούς στους οποίους εμφανίζονται οι δύο λέξεις ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ μαζί, δηλαδή από 2 λαχνούς (ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ και ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ), άρα έχουμε $|\Pi \cap \Delta| = 2$. Συνεπώς, $N = |\Pi \cup \Delta| = 5! + \frac{6!}{2} - 2 = 478$.

(2γ) Αφού κάθε λαχνός στο κιβώτιο ξεκινά με το γράμμα Δ, το πλήθος των λαχνών δίνεται από τις διατάξεις των υπόλοιπων 8 γραμμάτων, όπου έχουμε από 2 φορές τα γράμματα Λ και Α, και από 1 φορά τα γράμματα Π, Ο, Ω και Ρ. Άρα έχουμε $K = \frac{8!}{2!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = \frac{8!}{4} = 10080$ λαχνούς στο κιβώτιο.

Έστω Π' το σύνολο των λαχνών του κιβωτίου που περιέχουν τη λέξη ΠΟΛΛΑ και Δ' το σύνολο των λαχνών του κιβωτίου που περιέχουν τη λέξη ΔΩΡΑ. Τότε, το πλήθος N' των νικηφόρων λαχνών είναι $|\Pi' \cup \Delta'|$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε

$$N' = |\Pi' \cup \Delta'| = |\Pi'| + |\Delta'| - |\Pi' \cap \Delta'|.$$

Για να υπολογίσουμε τον πληθάριθμο του συνόλου Π' θεωρούμε τη λέξη ΠΟΛΛΑ ως ένα σύμβολο. Έτσι, μετράμε το πλήθος των δυνατών διατάξεων 4 διαφορετικών συμβόλων (ΠΟΛΛΑ, Ω, Ρ, Α) που είναι $P(4,4) = 4!$, δηλαδή $|\Pi'| = 4!$.

Οι λαχνοί του συνόλου Δ' ξεκινούν όλοι με τη λέξη ΔΩΡΑ, άρα μετράμε τις διατάξεις των γραμμάτων Π, Ο, Λ, Λ, Α, οι οποίοι είναι $|\Delta'| = \frac{5!}{2!\times 1!\times 1!\times 1!} = \frac{5!}{2}$.

Το σύνολο $\Pi' \cap \Delta'$ αποτελείται από τους λαχνούς στους οποίους εμφανίζονται οι δύο λέξεις ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ μαζί, δηλαδή από 1 λαχνό (ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ), άρα έχουμε $|\Pi' \cap \Delta'| = 1$. Επομένως, $N' = |\Pi' \cup \Delta'| = 4! + \frac{5!}{2} - 1 = 83$.

Άρα η πιθανότητα ένας τυχαίος λαχνός να είναι νικηφόρος είναι $\frac{N}{K} \approx 0.0082$.

Ερώτημα 3.

Το ερώτημα θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε στην ανάπτυξη γεννητριών συναρτήσεων. Θα πρέπει να εξετάσετε αν αναφέρεται σε πρόβλημα συνδυασμών ή διατάξεων αντικειμένων και ανάλογα να κάνετε χρήση απλής ή εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης. Μπορείτε να συμβουλευτείτε το ερώτημα 3 της 1ης εργασίας 2013-2016.

(3α) Έστω για δυο πειράματα Π_1 (π.χ., αγορά βιβλίων πληροφορικής) και Π_2 (π.χ., αγορά βιβλίων μαθηματικών), τα οποία δε μοιράζονται κοινό ενδεχόμενο (π.χ., η αγορά γίνεται σε ένα βιβλιοπωλείο που έχει βιβλία αμιγώς για μαθηματικά, ή αμιγώς για πληροφορική), γνωρίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $F_1(x)$ του Π_1, όπως επίσης και τη γεννήτρια συνάρτηση $F_2(x)$ του Π_2.

> **(3α1)** Να δείξετε ότι η γεννήτρια συνάρτηση του πειράματος Π που εκτελεί είτε το Π_1 ή το Π_2 (όχι όμως και τα δυο) είναι $F_1(x) + F_2(x)$.
>
> **(3α2)** Πώς διαφοροποιείται η απάντηση για τη γεννήτρια του Π, εάν τα Π_1 και Π_2 μοιράζονται κάποια ενδεχόμενα (πχ, στο βιβλιοπωλείο υπάρχουν και ορισμένα διεπιστημονικά βιβλία μαθηματικών στην πληροφορική), και είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τη γεννήτρια $F_3(x)$ που αφορά το πλήθος των αποτελεσμάτων όταν εκτελούμε και τα δυο πειράματα (πχ, αγορά βιβλίων και μαθηματικών και πληροφορικής);

Απαντήσεις

(3α1) Παρατηρούμε ότι ο κανόνας του αθροίσματος μεταφέρεται και στις γεννήτριες συναρτήσεις. Στην περίπτωση μας, λοιπόν, έχουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση του πειράματος Π είναι η $F_1(x) + F_2(x)$.

Πιο αναλυτικά, ας θεωρήσουμε την ακολουθία $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa, \dots \rangle$ με όλες τις δυνατές κ-άδες βιβλίων πληροφορικής (τα ενδεχόμενα του Π_1, όταν αγοράζονται κ βιβλία). Αντίστοιχα, έστω η ακολουθία $\boldsymbol{\beta} = \langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\kappa, \dots \rangle$ με όλες τις δυνατές κ-άδες βιβλίων μαθηματικών (τα ενδεχόμενα του Π_2, όταν αγοράζονται κ βιβλία).

Θεωρούμε το πείραμα Π που εκτελεί είτε το Π_1 ή το Π_2 (αλλά όχι και τα δύο). Δηλαδή, και τα κ βιβλία που θα αγοραστούν θα είναι είτε πληροφορικής (α_κ τρόποι), ή μαθηματικών (β_κ τρόποι). Από τον κανόνα του αθροίσματος, γνωρίζουμε για την ακολουθία $\boldsymbol{\gamma} = \langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\kappa, \dots \rangle$που μετρά τα ενδεχόμενα του Π όπου αγοράζουμε κ βιβλία πληροφορικής ή κ βιβλία μαθηματικών, ότι $\gamma_\kappa = \alpha_\kappa + \beta_\kappa$.

Από τον ορισμό της ΣΓΣ, έχουμε $F_1(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa x^\kappa$, $F_2(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa x^\kappa$ και $F(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_\kappa x^\kappa$.

Έτσι,

$$F(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_\kappa x^\kappa = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\alpha_\kappa + \beta_\kappa) x^\kappa = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\alpha_\kappa x^\kappa + \beta_\kappa x^\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa x^\kappa + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa x^\kappa =$$

$$= F_1(x) + F_2(x).$$

(Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε σε αυτό το αποτέλεσμα αν είχαμε ΕΓΣ.)

<u>Σημείωση:</u> Προσέξτε ότι δεν ισχύει το ίδιο για τον κανόνα του γινομένου, δηλαδή η $F_1(x) \cdot F_2(x)$ δεν είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\gamma_\kappa = \alpha_\kappa \cdot \beta_\kappa$.

(3α2) Με την ίδια λογική, μεταφέρεται και η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, άρα σε αυτήν την περίπτωση έχουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $F_1(x) + F_2(x) - F_3(x)$. Πράγματι, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο συντελεστής του όρου x^n στις $F_1(x)$ και $F_2(x)$, αντίστοιχα, απαριθμεί τα δυνατά αποτελέσματα των πειραμάτων Π_1 και Π_2, ενώ στην $F_3(x)$ απαριθμεί τα κοινά αποτελέσματα των πειραμάτων Π_1 και Π_2.

Πιο αναλυτικά, ας θεωρήσουμε και το πείραμα Π_3, και την αντίστοιχη ακολουθία $\boldsymbol{\delta} = \langle \delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\kappa, \dots \rangle$, που αφορά τους τρόπους επιλογής κ-άδας βιβλίων που ανήκουν (όλα) και στις δυο κατηγορίες (Πληροφορική και Μαθηματικά). Προφανώς, ισχύει ότι τα ενδεχόμενα του Π_3 είναι $\Omega(\Pi_3) = \Omega(\Pi_1) \cap \Omega(\Pi_2)$. Αφού θέλουμε να αγοράσουμε μια κ-άδα βιβλίων μαθηματικών, ή μια κ-άδα βιβλίων πληροφορικής, ισχύει επίσης ότι $\Omega(\Pi) = \Omega(\Pi_1) \cup \Omega(\Pi_2)$. Από την αρχή **εγκλεισμού – αποκλεισμού** (γενίκευση του κανόνα του αθροίσματος, όταν τα Π_1 και Π_2 μοιράζονται κοινά ενδεχόμενα, αυτά του Π_3), ισχύει ότι:

$$\gamma_\kappa = |\Omega(\Pi)| = |\Omega(\Pi_1) \cup \Omega(\Pi_2)| = |\Omega(\Pi_1)| + |\Omega(\Pi_2)| - |\Omega(\Pi_1) \cap \Omega(\Pi_2)|$$

$$= \alpha_\kappa + \beta_\kappa - \delta_\kappa.$$

Όσο για τις γεννήτριες, έχουμε $F_3(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \delta_\kappa x^\kappa$ και

$$F(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_\kappa x^\kappa = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\alpha_\kappa + \beta_\kappa - \delta_\kappa) x^\kappa = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\alpha_\kappa x^\kappa + \beta_\kappa x^\kappa - \delta_\kappa x^\kappa)$$
$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa x^\kappa + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa x^\kappa - \sum_{\kappa=0}^{\infty} \delta_\kappa x^\kappa =$$

$$= F_1(x) + F_2(x) - F_3(x).$$

(3β) Έστω ότι επιθυμούμε να απαριθμήσουμε n-ψήφιες συμβολοσειρές στο τριαδικό αλφάβητο $\{0,1,2\}$. Να βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον κατάλληλο όρο της, ο συντελεστής του οποίου δίνει τις διαφορετικές συμβολοσειρές, σε κάθε μια από τις εξής περιπτώσεις:

(3β1) Υπάρχουν τουλάχιστον δυο εμφανίσεις του 0.

(3β2) Υπάρχουν το πολύ δυο εμφανίσεις του 1.

(3β3) Υπάρχουν τουλάχιστον δυο εμφανίσεις του 0 και το πολύ δυο εμφανίσεις του 1.

(3β4) Υπάρχουν τουλάχιστον δυο εμφανίσεις του 0, ή το πολύ δυο εμφανίσεις του 1.

Απαντήσεις

Για το σχηματισμό των ζητούμενων γεννητριών συναρτήσεων, μπορούμε να ορίσουμε έναν απαριθμητή για κάθε σύμβολο του τριαδικού αλφάβητου. Σκεφτόμαστε, δηλαδή, το κάθε σύμβολο (0, 1 ή 2) ως υποδοχή, στην οποία τοποθετούμε διακριτά αντικείμενα. Τα αντικείμενα αυτά υποδηλώνουν τις θέσεις της συμβολοσειράς στις οποίες εμφανίζεται το αντίστοιχο σύμβολο. Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, έτσι ώστε ο κάθε όρος $\frac{x^k}{k!}$ στον απαριθμητή του σύμβολο $j \in \{0,1,2\}$ να αντιστοιχεί στην περίπτωση που έχουμε k εμφανίσεις του συμβόλου j στη συμβολοσειρά.

(3β1) Έχουμε του παρακάτω απαριθμητές:

- Για το σύμβολο 0: $\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$
- Για το σύμβολο 1: $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$
- Για το σύμβολο 2: $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$

Έτσι, λαμβάνουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $A(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 = (e^x - x - 1)e^{2x}$

(3β2) Εδώ έχουμε τους παρακάτω απαριθμητές:

- Για το σύμβολο 0: $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$
- Για το σύμβολο 1: $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)$
- Για το σύμβολο 2: $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$

Έτσι, έχουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $B(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 = (1 + x + x^2/2)e^{2x}$

(3β3) Τώρα έχουμε τους απαριθμητές:

- Για το σύμβολο 0: $\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$
- Για το σύμβολο 1: $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)$
- Για το σύμβολο 2: $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι $C(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) = (e^x - x - 1)(1 + x + x^2/2)e^x$

(3β4) Από το ερώτημα (3α2) έχουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $D(x) = A(x) + B(x) - C(x)$.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, ο ζητούμενος συντελεστής είναι του όρου $\frac{x^n}{n!}$.

(3γ) Έστω ότι μας ενδιαφέρει το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $X + 2Y + 3Z + 4W = n$, όταν οι μεταβλητές X, Y, Z, W παίρνουν μη αρνητικές ακέραιες τιμές και επιπλέον $X + Y = 1$. Να υπολογίσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο ο συντελεστής του οποίου δίνει το αποτέλεσμα της συγκεκριμένης μέτρησης.

Απάντηση

Κάθε μη αρνητική ακέραια λύση της εξίσωσης $X + 2Y + 3Z + 4W = n$ αντιστοιχεί στην τοποθέτηση n όμοιων αντικειμένων σε 4 διαφορετικές υποδοχές, A, B, Γ και Δ, όπου οι υποδοχές B, Γ και Δ λαμβάνουν πλήθος αντικειμένων που είναι πολλαπλάσια του 2, 3 και 4 αντίστοιχα. Επιπλέον, ο περιορισμός $X + Y = 1$ σημαίνει ότι είτε $X =$

1, $\Upsilon = 0$ είτε $X = 0$, $\Upsilon = 1$. Έτσι έχουμε τις ακόλουθες αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις:

1) $X = 1$ και $\Upsilon = 0$. Η υποδοχή A λαμβάνει ακριβώς ένα αντικείμενο και η υποδοχή B δε λαμβάνει κανένα αντικείμενο.

Έχουμε τους εξής απαριθμητές:

- Για την υποδοχή A: x
- Για την υποδοχή B: 1
- Για την υποδοχή Γ: $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$
- Για την υποδοχή Δ: $(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)$

Άρα, λαμβάνουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $x(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)$.

2) $X = 0$ και $\Upsilon = 1$. Η υποδοχή A δε λαμβάνει κανένα αντικείμενο και η υποδοχή B λαμβάνει ακριβώς δύο αντικείμενα.

Τώρα, έχουμε τους εξής απαριθμητές:

- Για την υποδοχή A: 1
- Για την υποδοχή B: x^2
- Για την υποδοχή Γ: $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$
- Για την υποδοχή Δ: $(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)$

Άρα, λαμβάνουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $x^2(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)$.

Τελικά, καθώς οι δύο περιπτώσεις είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, από το ερώτημα (3α1) έχουμε τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\begin{aligned} x(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots) \\ &+ x^2(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots) \\ &= (x + x^2)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots) \\ &= \frac{x + x^2}{(1 - x^3)(1 - x^4)}. \end{aligned}$$

Η απάντηση βρίσκεται στον συντελεστή του x^n.

Ερώτημα 4.

Το πρώτο υποερώτημα εξετάζει τις σχέσεις αναδρομής. Μπορείτε να συμβουλευτείτε ερωτήματα προηγούμενων εργασιών όπως το ερώτημα 4Β της 1ης εργασίας 2011-2016.

Στο δεύτερο υποερώτημα θα εφαρμόσετε την πολύ χρήσιμη επαγωγική αποδεικτική μέθοδο, την οποία θα χρησιμοποιήσετε σε όλη τη διάρκεια της θεματικής ενότητας. Όπως αναφέρεται στις οδηγίες θα φανεί χρήσιμη η μελέτη των σημειώσεων στη «Μαθηματική Επαγωγή». Μπορείτε να ανατρέξετε σε ερωτήματα προηγούμενων ετών όπως τα ερωτήματα 4Α 1ης εργασίας 2010-2016.

(4α) Θεωρούμε την ακολουθία Fibonacci που ορίζεται ως εξής: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ και $\forall n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

(4α1) Να εκφράσετε το F_n ως συνάρτηση των F_{n-4} και F_{n-5}.

(4α2) Να δειχθεί με χρήση μαθηματικής επαγωγής η εξής αριθμητική ιδιότητα: $\forall k \in \mathbb{N}$, ο αριθμός F_{5k} είναι πολλαπλάσιο του 5.

Απάντηση

(4α1) Θα χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο της ακολουθίας Fibonacci για τις ακολουθίες F_n, F_{n-1}, F_{n-2}, F_{n-3}:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3} \qquad F_{n-2} = F_{n-3} + F_{n-4} \qquad F_{n-3} = F_{n-4} + F_{n-5}$$

Με αντικατάσταση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} F_n &= (F_{n-2} + F_{n-3}) + (F_{n-3} + F_{n-4}) \\ &= \big((F_{n-3} + F_{n-4}) + (F_{n-4} + F_{n-5})\big) + \ ((F_{n-4} + F_{n-5}) + F_{n-4}) \\ &= \big(((F_{n-4} + F_{n-5}) + F_{n-4}) + (F_{n-4} + F_{n-5})\big) \\ &\quad + \ ((F_{n-4} + F_{n-5}) + F_{n-4}) \end{aligned}$$

Οπότε:

$$F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}$$

(4α2) Σημειώνουμε ότι η φράση «ο αριθμός F_{5k} είναι πολλαπλάσιο του 5» σημαίνει:

$$F_{5k} = 5\lambda \,,$$

όπου λ κάποιος φυσικός αριθμός. Επίσης το άθροισμα δύο φυσικών είναι πάλι ένας φυσικός αριθμός. Κατά συνέπεια, κάθε αριθμός $F_n \in \mathbb{N}$.

Βάση επαγωγής: Το ζητούμενο ισχύει τόσο για $k = 0$, αφού $F_0 = 0$, όσο και για $k = 1$, αφού από το (4β1) $F_5 = 5F_1 + 3F_0 = 5$, που είναι πολλαπλάσιο του 5.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 0$, ο αριθμός F_{5k} είναι πολλαπλάσιο του 5, δηλαδή υπάρχει φυσικός λ τέτοιος ώστε $F_{5k} = 5\lambda$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $k + 1 \geq 1$, ο αριθμός $F_{5(k+1)} = F_{5k+5}$ είναι πολλαπλάσιο του 5. Πράγματι από το (4β1) θα έχουμε,

$$F_{5k+5} = 5F_{5k+1} + 3F_{5k} = 5F_{5k+1} + 3{\cdot}5\lambda = 5(F_{5k+1} + 3\lambda)$$

Σημειώστε ότι η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Συνεπώς,

$$F_{5k+5} = 5(F_{5k+1} + 3\lambda) = 5\lambda'$$

για κάποιον φυσικό αριθμό λ'. Δηλαδή ο αριθμός F_{5k} είναι πολλαπλάσιο του 5, που είναι και το ζητούμενο.

(4β) Έστω ότι σε μια σειρά N (αριθμημένων) καθισμάτων επιθυμούμε να τοποθετήσουμε φοιτητές για διεξαγωγή γραπτών εξετάσεων. Προκειμένου να μην υπάρχει ενδεχόμενο αντιγραφής, οι φοιτητές δεν επιτρέπεται να καθίσουν σε διαδοχικές θέσεις.

Μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε το πλήθος a_N των τρόπων επιλογής (κάποιων) θέσεων προκειμένου να καθίσουν σε αυτές εξεταζόμενοι φοιτητές, όταν τα N καθίσματα απαρτίζουν την σειρά καθισμάτων. Σημειώνουμε ότι το ενδεχόμενο να μην καθίσει κανένας φοιτητής θεωρείται έγκυρος τρόπος. Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{a}$ την ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Για τις αρχικές τιμές της ακολουθίας a_0 και a_1 ισχύουν τα ακόλουθα:

- για $N = 0$: Δεν υπάρχουν καθίσματα στην αίθουσα, συνεπώς έχουμε μόνο έναν τρόπο, δηλαδή να μην καθίσει κάποιος φοιτητής. Επομένως $a_0 = 1$.
- για $N = 1$: Υπάρχει μόνο ένα κάθισμα και έχουμε δύο τρόπους: είτε θα καθίσει κάποιος, είτε θα μείνει κενή η θέση. Επομένως $a_1 = 2$.

  (4β1) Να υπολογιστούν οι τιμές της ακολουθίας a_2, a_3 και a_4.

  (4β2) Να βρεθεί αναδρομικός τύπος για την τιμή του N-στού όρου a_N της ακολουθίας $\boldsymbol{a}$, ως συνάρτηση προηγούμενων όρων της. Θα πρέπει να αιτιολογηθεί η ορθότητα του προτεινόμενου αναδρομικού τύπου.

  <u>Υπόδειξη</u>: Προσπαθήστε να μετρήσετε τις επιτρεπόμενες επιλογές καθισμάτων ΜΕ και ΧΩΡΙΣ τη N-στή θέση στη σειρά χωριστά.

Απαντήσεις:

(4β1) Εξετάζουμε τις τρεις περιπτώσεις ξεχωριστά:

- $N = 2$: Στις δύο θέσεις είτε δεν θα καθίσει κάποιος φοιτητής (#1), είτε θα καθίσει μόνο ένας σε μια από τις δύο θέσεις (#2). $a_2 = 3$
- $N = 3$: Έχουμε την δυνατότητα να μη καθίσει κανένας (#1). Επίσης έχουμε την δυνατότητα να καθίσει μόνο ένας φοιτητής καταλαμβάνοντας είτε την 1η, είτε τη 2η, είτε τη 3η θέση (#3). Και τέλος αν καθίσουν δύο φοιτητές γίνεται μόνο με έναν τρόπο καταλαμβάνοντας τη 1η και τη 3η θέση, αντίστοιχα, αφήνοντας κενή τη θέση ανάμεσά τους (#1). Η δυνατότητα να καθίσουν τρεις φοιτητές δεν είναι έγκυρη καθώς τότε θα κάθονται σε διαδοχικές θέσεις δύο φοιτητές. $a_3 = 5$
- $N = 4$: Έχουμε την δυνατότητα να μη καθίσει κανένας (#1). Επίσης έχουμε την δυνατότητα να καθίσει μόνο ένας φοιτητής καταλαμβάνοντας είτε την 1η, είτε τη 2η, είτε τη 3η θέση, είτε τη 4η θέση (#4). Αν καθίσουν δύο φοιτητές γίνεται

καταλαμβάνοντας είτε τη 1η και τη 3η θέση, είτε τη 2η και τη 4η θέση, είτε τη 1η και τη 4η θέση (#3). Η δυνατότητα να καθίσουν τρεις ή περισσότεροι φοιτητές δεν είναι έγκυρη καθώς τότε θα κάθονται σε διαδοχικές θέσεις δύο φοιτητές. $a_4 = 8$

Συνολικά, θα έχουμε: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$ και $a_4 = 8$.

(4β2) Εκλαμβάνουμε μια σειρά N καθισμάτων ως μια N-ψήφια συμβολοσειρά $\sigma = \langle \sigma[1], \sigma[2], \dots, \sigma[N] \rangle$, στην οποία πρέπει να σημειώσουμε με «1» τα καθίσματα που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για την εξέταση, και με «0» τα καθίσματα που θα παραμείνουν κενά. Μας ενδιαφέρει το πλήθος a_N των N -ψήφιων δυαδικών συμβολοσειρών όπου το «1» δεν εμφανίζεται σε διαδοχικές θέσεις.

Για παράδειγμα, για $N = 22$, η συμβολοσειρά:

1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0

δηλώνει ότι θα χρησιμοποιηθούν οι θέσεις 1, 5, 7, 9, 13, 15, 17, και 21.

Διακρίνουμε τις εξής αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις, ως προς την τιμή του τελευταίου ψηφίου:

(i) $\sigma[N] = 0$: Οι πρώτες $N-1$ θέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν με όλους τους δυνατούς τρόπους, αρκεί να μην εμφανίζεται το «1» σε διαδοχικές θέσεις. Υπάρχουν a_{N-1} τρόποι δημιουργίας τέτοιας συμβολοσειράς, η οποία συμπληρώνεται (με έναν τρόπο) με ένα τελικό 0.

(ii) $\sigma[N] = 1$: Σε αυτή την περίπτωση είναι σίγουρο ότι θα πρέπει επίσης να ισχύει ότι $\sigma[N-1] = 0$, διαφορετικά θα είχαμε διαδοχικές εμφανίσεις του «1». Για τα υπόλοιπα $N-2$ ψηφία δεν υπάρχει άλλος περιορισμός, εκτός του ότι σε αυτά δεν πρέπει επίσης να υπάρχουν διαδοχικές εμφανίσεις του 1. Υπάρχουν a_{N-2} διαφορετικές $(N-2)$-ψήφιες συμβολοσειρές, οι οποίες με έναν τρόπο επεκτείνονται με το «01» για να πάρουμε μια συμβολοσειρά της συγκεκριμένης περίπτωσης.

Αφού οι δυο περιπτώσεις είναι μεταξύ τους αμοιβαία αποκλειόμενες και δε μοιράζονται κοινή επιλογή των θέσεων (διαφέρουν οι συμβολοσειρές στο τελευταίο ψηφίο), από τον κανόνα του αθροίσματος γνωρίζουμε ότι η ζητούμενη αναδρομική σχέση είναι η εξής:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ \text{και } a_N = a_{N-1} + a_{N-2} \text{ για κάθε } N \geq 3.$$

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει σκοπό στο να σας εισάγει στην μορφή της εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι σωστή ή λάθος. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Α) Μας ενδιαφέρουν οι διαφορετικοί τρόποι να μοιράσουμε 100 διακεκριμένους μαρκαδόρους σε 5 διαφορετικές κασετίνες, με χωρητικότητα 30 θέσεων η κάθε κασετίνα.

1. (Σ / Λ) 5^{100}, αν οι θέσεις της κάθε κασετίνας δεν θεωρούνται διακεκριμένες.

2. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του $\frac{x^{100}}{100!}$ στην παράσταση $\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{29}}{29!}+\frac{x^{30}}{30!}\right)^5$, αν οι θέσεις της κάθε κασετίνας δεν θεωρούνται διακεκριμένες.

3. (Σ / Λ) $\frac{150!}{100!}$, αν οι θέσεις της κάθε κασετίνας θεωρούνται διακεκριμένες.

4. (Σ / Λ) $C(150,100)$, αν οι θέσεις της κάθε κασετίνας θεωρούνται διακεκριμένες.

Απαντήσεις:

Α).

(Α.1) Λάθος. Ο συνδυαστικός τύπος 5^{100} εκφράζει τη διανομή 100 μαρκαδόρων σε 5 κασετίνες με απεριόριστες επαναλήψεις χωρίς να λαμβάνει υπόψη την χωρητικότητα της κάθε κασετίνας.

(Α.2) Σωστό. Χρησιμοποιούμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση καθώς έχουμε διανομή 100 διακεκριμένων αντικειμένων (μαρκαδόροι) σε 5 διακεκριμένες υποδοχές (κασετίνες) με χωρητικότητα η κάθε υποδοχή μέχρι 30 θέσεων. Ο εκθετικός απαριθμητής για κάθε κασετίνα από τις 5 είναι $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\frac{x^{29}}{29!}+\frac{x^{30}}{30!}$. Αφού έχουμε 100 μαρκαδόρους, το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $\frac{x^{100}}{100!}$.

(Α.3) Λάθος. Έχουμε $5\times 30 = 150$ διακεκριμένα αντικείμενα που μοιράζονται σε 100 υποδοχές. Δηλαδή έχουμε $P(150,100)=150!/50!$ τρόπους που είναι διαφορετικό από το $150!/100!$.

(Α.4) Λάθος. Ο συνδυαστικός τύπος $C(150{,}100)$ δίνει το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε τις 100 από τις $5 \times 30 = 150$ διαφορετικές θέσεις στις οποίες θα τοποθετηθούν οι μαρκαδόροι, χωρίς να μας ενδιαφέρει ποιος μαρκαδόρος θα τοποθετηθεί σε κάθε θέση. Δηλαδή, είναι να σα να θεωρούμε ότι οι 100 μαρκαδόροι μη διακεκριμένοι.

Β) Υπάρχουν 4 διακεκριμένα βαγόνια και έχουμε 5 ίδια εισιτήρια για κάθε βαγόνι. Μας ενδιαφέρουν οι διαφορετικοί τρόποι να μοιράσουμε τα εισιτήρια σε 20 άτομα.

1. **(Σ / Λ)** $20!/(5!\,5!\,5!\,5!)$, αν κάθε άτομο πρέπει να πάρει ένα εισιτήριο ακριβώς.
2. **(Σ / Λ)** Όσοι ο συντελεστής του $\frac{x^{20}}{20!}$ στην παράσταση $\left(\frac{x^5}{5!}\right)^4$, αν κάθε άτομο πρέπει να πάρει ένα εισιτήριο ακριβώς.
3. **(Σ / Λ)** $C(20,4)$, αν επιλέξουμε 4 άτομα και καθένας από τους 4 πάρει και τα 5 εισιτήρια από ένα βαγόνι.
4. **(Σ / Λ)** Όσοι ο συντελεστής του $\frac{x^4}{4!}$ στην παράσταση $(1+x)^{20}$, αν επιλέξουμε 4 άτομα και καθένας από τους 4 πάρει και τα 5 εισιτήρια από κάθε βαγόνι.

Β).

(Β.1) Σωστό. Έχουμε 4 ομάδες όμοιων αντικειμένων (5 ίδια εισιτήρια για κάθε βαγόνι) που μοιράζονται σε 20 άτομα.

(Β.2) Σωστό. Εφόσον κάθε άτομο παίρνει ακριβώς ένα εισιτήριο, αυτό ισοδυναμεί με τη διανομή 20 αντικειμένων σε 4 υποδοχές που είναι τα βαγόνια με δυνατότητα κάθε υποδοχή να δεχτεί μέχρι 5 αντικείμενα. Επομένως έχουμε εκθετικό απαριθμητή $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$ για το κάθε βαγόνι με συνολική εκθετική γεννήτρια $\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)^5$ και ζητάμε τον συντελεστή του όρου $\frac{x^{20}}{20!}$. Προσέξτε ότι ο συντελεστής του μεγαλύτερου όρου είναι ίσος με τον συντελεστή του $\frac{x^{20}}{20!}$ στη παράσταση είναι ίσος με τον συντελεστή του $\left(\frac{x^5}{5!}\right)^4$. Σημειώστε επίσης ότι ο συντελεστής του $\frac{x^{20}}{20!}$ στην παράσταση $\left(\frac{x^5}{5!}\right)^4$ είναι ίσος με το αποτέλεσμα του (Β.1).

(Β.3) Λάθος. Το $C(20{,}4)$ μετρά τους τρόπους επιλογής (χωρίς επανάληψη) μιας μη-διατεταγμένης τετράδας (ανθρώπων), την οποία όμως πρέπει στη συνέχεια να αναθέσουμε στα 4 διαφορετικά βαγόνια (υπάρχουν 4! τρόποι να γίνει αυτό). Η σωστή απάντηση είναι λοιπόν $P(20{,}4) = 4! \times C(20{,}4)$.

(Β.4) Σωστό. Όπως στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε 4 διακεκριμένα εισιτήρια που τα μοιράζουμε σε 20 άτομα έτσι ώστε κάθε ένας από τους 20 είτε παίρνει ολόκληρη την ομάδα εισιτηρίων για κάποιο βαγόνι είτε όχι. Επομένως ο εκθετικός απαριθμητής για κάθε άτομο είναι $1+\frac{x}{1!}=1+x$ και η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι $(1+x)^{20}$. Αφού έχουμε 4 επιλογές, το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $\frac{x^4}{4!}$, που είναι $P(20,4)=20!/16!$.