Ενδεικτικές Ασκήσεις Κατηγορηματικής Λογικής

Άσκηση 1 (2012-13)

Α. Θεωρούμε μια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο R. Γράψτε προτάσεις που να λένε ότι (η σχέση που ερμηνεύει το σύμβολο πληροί τα παρακάτω)

(i) Κάθε στοιχείο σχετίζεται (από τα δεξιά του) με δύο το πολύ στοιχεία.

(ii) Κάθε στοιχείο σχετίζεται (από τα δεξιά του) με τουλάχιστον δύο στοιχεία.

(iii) Αν τρία στοιχεία σχετίζονται ανά δύο, τότε είναι ίσα.

(iv) Θεωρώντας δεδομένο ότι η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας, ότι έχει τέσσερεις κλάσεις ισοδυναμίας.

Β. Θεωρούμε μια γλώσσα με ένα μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο Θ, και δυο διμελή κατηγορηματικά σύμβολα A, C και δύο σύμβολα σταθερών c, d τα οποία διαβάζουμε ως εξής:

$\Theta(x)$: x είναι γένους θηλυκού

$A(x, y)$: x, y είναι αδέλφια

$C(x, y)$: η οντότητα x είναι παιδί της οντότητας y

c: Η Μαρία

d: ο Νίκος

Γράψτε με αυτά τα σύμβολα τις παρακάτω φράσεις:

(i) Κάθε άνθρωπος έχει μητέρα.

(ii) Δύο αδέλφια έχουν την ίδια μητέρα.

(iii) Η μητέρα του Νίκου δεν έχει άλλα παιδιά.

(iv) Η Μαρία είναι θεία του Νίκου, από τη μητέρα του.

Απάντηση:

Α.

(i) $\forall x \forall y \forall z \forall w((R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge R(x,w)) \rightarrow ((w=y) \vee (w=z) \vee (y=z))$

(Αν κάποιο στοιχείο σχετίζεται με τρία άλλα, τότε τουλάχιστον δύο από αυτά τα άλλα είναι ίσα)

(ii) $\forall x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge \neg(y=z))$

(Κάθε στοιχείο σχετίζεται με δύο άλλα, τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους)

(iii) $$\forall x \forall y \forall z(((R(x,y) \vee R(y,x)) \wedge (R(y,z) \vee R(z,y)) \wedge (R(z,x) \vee R(x,z))) \rightarrow ((x=y) \wedge (y=z) \wedge (z=x)))$$

(Για οποιαδήποτε τρία στοιχεία, αν σχετίζονται, τότε είναι ανά δύο ίσα)

Προφανώς, στο συμπέρασμα θα αρκούσε να γράφαμε και $((x=y) \wedge (y=z))$.

(iv) $$\exists x \exists y \exists z \exists s[\neg[R(x,y) \vee R(x,z) \vee R(x,s) \vee R(y,z) \vee R(y,s) \vee R(z,s)] \wedge \forall w[R(w,x) \vee R(w,y) \vee R(w,z) \vee R(w,s)]]$$

(Υπάρχουν τέσσερα στοιχεία τέτοια ώστε κάθε στοιχείο σχετίζεται με ακριβώς ένα από αυτά)

.

(i) $\forall x \exists y (C(x,y) \wedge \Theta(y))$

(Για κάθε οντότητα υπάρχει μια άλλη ώστε η πρώτη να είναι παιδί της δεύτερης και η δεύτερη να είναι θηλυκού γένους)

(ii) $\forall x \forall y \forall z \forall w((A(x,y) \wedge C(x,z) \wedge C(y,w) \wedge \Theta(z) \wedge \Theta(w)) \rightarrow z = w)$

(Για κάθε δύο οντότητες, αν είναι αδέλφια και δύο θηλυκού γένους οντότητες τις έχουν παιδιά τους, τότε αυτές οι δύο (θηλυκού γένους) οντότητες ταυτίζονται)

(iii) $\forall x((C(d,x) \wedge \Theta(x)) \rightarrow \forall y(C(y,x) \rightarrow y = d))$

(Για κάθε οντότητα, αν είναι γένους θηλυκού και έχει παιδί το Νίκο, τότε κάθε άλλη οντότητα που είναι παιδί της πρώτης ταυτίζεται με το Νίκο)

(iv) $\exists x(\Theta(x) \wedge C(d,x) \wedge A(x,c))$

(Υπάρχει οντότητα που είναι γένους θηλυκού, έχει παιδί το Νίκο και είναι αδελφή της Μαρίας)

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στις αποδόσεις φράσεων σε συμβολική γλώσσα, υπάρχουν πολλοί τρόποι να αποδοθεί το ίδιο νόημα, άλλοτε ισοδύναμοι, άλλοτε ισοδύναμοι υπό προϋποθέσεις που εύλογα έχουμε συνηθίσει να κάνουμε (π.χ ότι κάθε άνθρωπος έχει μητέρα).

Άσκηση 2 (2015-16)

Το Mathematics Genealogy Project (δείτε τη σχετική διεύθυνση http://www.genealogy.ams.org/index.php) είναι μία βάση δεδομένων η οποία περιέχει το ακαδημαϊκό γενεαλογικό δέντρο χιλιάδων μαθηματικών. Για κάθε μαθηματικό μπορεί κανείς να δει τους διδακτορικούς φοιτητές που έχει επιβλέψει, το θέμα και την ημερομηνία της διατριβής τους, και πολλά ακόμη ενδιαφέροντα στοιχεία. Στο δέντρο μπορεί να βρει κανείς και πολλούς πληροφορικούς. Στο ερώτημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την Κατηγορηματική Λογική για να διατυπώσουμε προτάσεις σχετικά με το δέντρο αυτό. Έστω τα κατηγορήματα $CS(x)$, $M(x)$, $Adv(x,y)$, με ερμηνείες «ο x είναι πληροφορικός», «ο x είναι μαθηματικός», «ο x είναι επιβλέπων καθηγητής του y» (ή ισοδύναμα «ο y είναι φοιτητής του x»).

α) Δώστε τύπους του κατηγορηματικού λογισμού που να εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις:

i. Υπάρχει καθηγητής που έχει επιβλέψει φοιτητές οι οποίοι είναι όλοι τους μαθηματικοί. (Σημείωση: υποθέτουμε ότι ο καθηγητής αυτός έχει επιβλέψει έναν τουλάχιστον φοιτητή).

ii. Υπάρχει φοιτητής ο οποίος έχει δύο ακριβώς επιβλέποντες καθηγητές. (Σημείωση: οι καθηγητές αυτοί ονομάζονται «συνεπιβλέποντες» και η έννοια αυτή θα χρησιμοποιηθεί σε επόμενο υποερώτημα).

iii. Δεν υπάρχει καθηγητής που να έχει επιβλέψει δύο διαφορετικούς φοιτητές που ο ένας να είναι μαθηματικός και ο άλλος πληροφορικός.

β) Δώστε τύπους του κατηγορηματικού λογισμού που να εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις:

i. Υπάρχει φοιτητής που είχε δύο επιβλέποντες καθηγητές οι οποίοι είχαν τον ίδιο επιβλέποντα καθηγητή.

ii. Αν δύο φοιτητές είχαν τον ίδιο επιβλέποντα, τότε θα έχουν συνεπιβλέψει κάποιο φοιτητή.

iii. Αν κάποιος καθηγητής έχει επιβλέψει περισσότερους από δύο φοιτητές, τότε κάποιος φοιτητής του θα έχει συνεπιβλέποντα.

γ) Εξηγήστε σε φυσική γλώσσα τι εκφράζουν οι παρακάτω τύποι. Θα πρέπει οι εκφράσεις που θα δώσετε να είναι όσο το δυνατόν πιο φυσικές και όχι απλώς να μεταφράζουν τους τύπους. Για παράδειγμα, αποφύγετε εκφράσεις της μορφής «Υπάρχει x έτσι ώστε για κάθε y…» (δηλαδή εκφράσεις που περιέχουν μεταβλητές).

i. $\exists x \forall y (\neg Adv(x,y))$

ii. $\forall x \forall y ((Adv(x,y) \wedge CS(x)) \rightarrow \neg M(y))$

iii. $\forall x (\neg \exists y Adv(x,y) \rightarrow \exists z \exists w (Adv(z,x) \wedge Adv(z,w) \wedge \neg (x \approx w) \wedge \neg \exists y Adv(w,y)))$

Απάντηση:

α) Οι παρακάτω τύποι εκφράζουν τις δεδομένες προτάσεις:

i. $\exists x \exists y (Adv(x,y) \wedge \forall z (Adv(x,z) \rightarrow M(z)))$

ii. $\exists x \exists y \exists z [Adv(y,x) \wedge Adv(z,x) \wedge \neg (y \approx z) \wedge \forall w (Adv(w,x) \rightarrow ((w \approx y) \vee (w \approx z)))]$

iii. $\neg \exists x \exists y \exists z [Adv(x,y) \wedge Adv(x,z) \wedge \neg (y \approx z) \wedge M(y) \wedge CS(z)]$

β) Οι παρακάτω τύποι εκφράζουν τις δεδομένες προτάσεις:

i. $\exists x \exists y \exists z \exists w [Adv(y,x) \wedge Adv(z,x) \wedge \neg(y \approx z) \wedge Adv(w,y) \wedge Adv(w,z)]$

ii. $\forall x \forall y [(\neg(x \approx y) \wedge \exists w (Adv(w,x) \wedge Adv(w,y))) \rightarrow \exists u (Adv(x,u) \wedge Adv(y,u))]$

iii. $\forall x [\exists y \exists z \exists w (Adv(x,y) \wedge Adv(x,z) \wedge Adv(x,w) \wedge \neg(y \approx z) \wedge \neg(y \approx w) \wedge \neg(z \approx w)) \rightarrow \exists u \exists v (Adv(x,u) \wedge Adv(v,u) \wedge \neg(x \approx v))]$

γ) Οι παρακάτω προτάσεις της φυσικής γλώσσας εκφράζουν τους δεδομένους τύπους:

i. Υπάρχει καθηγητής που δεν έχει επιβλέψει φοιτητές.
ii. Αν ένας καθηγητής είναι πληροφορικός, αποκλείεται να έχει επιβλέψει κάποιο φοιτητή που είναι μαθηματικός.
iii. Αν ένας καθηγητής δεν έχει επιβλέψει κανένα φοιτητή, τότε υπάρχει ένας ακαδημαϊκός «αδερφός» του καθηγητή αυτού (κάποιος δηλαδή που είχε τον ίδιο επιβλέποντα με αυτόν) ο οποίος επίσης δεν έχει επιβλέψει κανένα φοιτητή.

Άσκηση 3 (2015-16)

Η ντάμα είναι ένα γνωστό παιχνίδι του οποίου τους κανόνες μπορείτε να βρείτε στη σελίδα https://el.wikipedia.org/wiki/Ντάμα_(παιχνίδι) ή στην αντίστοιχη αγγλική σελίδα https://en.wikipedia.org/wiki/Draughts.

Σκοπός της άσκησης αυτής είναι να εκφράσουμε κανόνες ή συνθήκες που αφορούν το παιχνίδι αυτό. Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής κατηγορήματα:

- *square(x)*: «το *x* είναι τετράγωνο»
- *piece(x)*: «το *x* είναι πιόνι»
- *white(x)*: «το *x* είναι λευκού χρώματος»
- *black(x)*: «το *x* είναι μαύρου χρώματος»
- *empty(x,t)*: «το τετράγωνο *x* είναι κενό τη χρονική στιγμή *t*»
- *contains(x,y,t)*: «το τετράγωνο *x* περιέχει το πιόνι *y* τη χρονική στιγμή *t*»
- *captures(x,y,t)*: «το πιόνι *x* αιχμαλωτίζει το πιόνι *y* τη χρονική στιγμή *t*».
- *nump(t,n)*: «τη χρονική στιγμή *t* υπάρχουν *n* πιόνια στο παιχνίδι».

Στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να δώσετε τύπους της ΚΛ που να εκφράζουν τους κανόνες της ντάμας χρησιμοποιώντας τα παραπάνω κατηγορήματα. Μπορείτε στους τύπους που θα δώσετε να χρησιμοποιήσετε ελεύθερα όρους όπως το T+1 (χωρίς δηλαδή να εισάγετε ειδικό συναρτησιακό σύμβολο που να εκφράζει την επόμενη χρονική στιγμή).

α) Δώστε τύπους της ΚΛ που να εκφράζουν τους ακόλουθους κανόνες της ντάμας:

i. Κάθε πιόνι είναι είτε άσπρο είτε μαύρο.
ii. Τα λευκά τετράγωνα είναι πάντα κενά.

β) Δώστε τύπους της ΚΛ που να εκφράζουν τους ακόλουθους κανόνες της ντάμας:

i. Σε κάθε χρονική στιγμή, κάθε μαύρο τετράγωνο είτε είναι κενό είτε περιέχει ένα πιόνι.
ii. Όταν ένα μαύρο πιόνι αιχμαλωτίσει ένα λευκό, τότε την επόμενη χρονική στιγμή θα υπάρχει στο παιχνίδι ένα λιγότερο πιόνι.
iii. Αν ένα πιόνι που βρίσκεται στο τετράγωνο *x* αιχμαλωτίσει ένα πιόνι που βρίσκεται στο τετράγωνο *y* περνώντας από πάνω του και πηγαίνοντας στο άδειο τετράγωνο *z*, τότε την επόμενη χρονική στιγμή το τετράγωνο *z* περιέχει το πιόνι που κινήθηκε ενώ τα τετράγωνα *x* και *y* είναι πλέον κενά.

Απάντηση:

α) Οι ακόλουθοι τύποι εκφράζουν τους δεδομένους κανόνες:

i. $\forall x[piece(x) \rightarrow (white(x) \leftrightarrow \neg black(x))]$

ii. $\forall x[(square(x) \wedge white(x)) \rightarrow \forall t\ empty(x,t)]$

β) Οι ακόλουθοι τύποι εκφράζουν τους δεδομένους κανόνες:

i. $\forall x[(square(x) \wedge black(x)) \rightarrow \forall t(empty(x,t) \leftrightarrow \neg \exists y\ contains(x,y,t))]$

ii. $$\begin{aligned}&\forall x \forall y \forall t \forall n[(piece(x) \wedge black(x) \wedge piece(y) \wedge white(y) \wedge \\ &\qquad captures(x,y,t) \wedge nump(t,n)) \rightarrow nump(t+1,n-1)]\end{aligned}$$

iii. $$\begin{aligned}&\forall u \forall v \forall x \forall y \forall z \forall t[(piece(u) \wedge piece(v) \wedge square(x) \wedge square(y) \wedge \\ &\qquad square(z) \wedge empty(z,t) \wedge contains(x,u,t) \wedge \\ &\qquad contains(y,v,t) \wedge captures(u,v,t)) \rightarrow \\ &\qquad empty(x,t+1) \wedge empty(y,t+1) \wedge contains(z,u,t+1)]\end{aligned}$$

Άσκηση 4 (2012-13)

Θεωρούμε μία γλώσσα με δύο διμελή κατηγορηματικά σύμβολα $enemy$ και $friend$ τα οποία διαβάζονται ως εξής: $enemy(x,y)$: «ο άνθρωπος x έχει για εχθρό του τον άνθρωπο y» και $friend(x,y)$: «ο άνθρωπος x έχει για φίλο του τον άνθρωπο y». Παρακάτω μελετάμε κάποιες συνέπειες του γνωστού ρητού «ο εχθρός του εχθρού μου είναι φίλος μου». Θεωρούμε τους ακόλουθους τύπους:

(i) $\forall x \forall y \forall z(enemy(x,y) \wedge enemy(y,z) \rightarrow friend(x,z))$

(ii) $\forall x \forall y(enemy(x,y) \leftrightarrow enemy(y,x))$

(iii) $\forall x \neg enemy(x,x)$

(iv) $\forall x \exists y(enemy(x,y))$

(v) $\forall x \exists y \exists z(enemy(x,y) \wedge enemy(x,z) \wedge (y \neq z))$

(vi) $\forall x \exists y(friend(x,y) \wedge (x \neq y))$

Α. Κατασκευάστε δομή A στην οποία αληθεύουν οι τύποι (i), (ii), (iii) και (iv) αλλά δεν αληθεύει ο τύπος (vi).

Β. Αποδείξτε ότι αν σε μία οποιαδήποτε δομή αληθεύουν οι τύποι (i), (ii), (iii) και (v) τότε αληθεύει και ο τύπος (vi).

Απάντηση:

Α. Έστω δομή A με σύμπαν το σύνολο $\{a,b\}$ στην οποία ισχύουν τα ακόλουθα: στο κατηγορηματικό σύμβολο *enemy* αντιστοιχεί η σχέση $enemy^A = \{(a,b),(b,a)\}$ ενώ στο κατηγορηματικό σύμβολο *friend* αντιστοιχεί η σχέση $friend^A = \{(a,a),(b,b)\}$. Οι τύποι (i), (ii), (iii) και (iv) αληθεύουν τετριμμένα στην ερμηνεία αυτή ενώ ο τύπος (v) δεν αληθεύει (διότι στην $friend^A$ δεν υπάρχει ζεύγος (d_1,d_2) με $d_1 \neq d_2$).

Β. Έστω A τυχαία δομή που ικανοποιεί τους τύπους (i), (ii), (iii) και (v) και έστω τυχαίο $d \in |A|$. Από τους τύπους (v) και (iii) προκύπτει ότι υπάρχουν $d_1, d_2 \in |A|$ με $d_1 \neq d_2$, $d_1 \neq d$ και $d_2 \neq d$ τέτοια ώστε $(d,d_1) \in enemy^A$ και $(d,d_2) \in enemy^A$. Από τον τύπο (ii) έχουμε επίσης ότι $(d_1,d) \in enemy^A$ και $(d_2,d) \in enemy^A$. Έστω τώρα το στοιχείο d_1. Από τον τύπο (v) έχουμε ότι θα υπάρχει $d_3 \in |A|$ με $d_1 \neq d_3$ τέτοιο ώστε $(d_1,d_3) \in enemy^A$ (σημείωση: το d_3 μπορεί να ταυτίζεται με το d_2). Επομένως έχουμε $(d,d_1) \in enemy^A$ και $(d_1,d_3) \in enemy^A$, και από το (i) παίρνουμε ότι $(d,d_3) \in friend^A$.

Άσκηση 5 (2015-16)

Δίνονται οι ακόλουθοι τρεις τύποι της ΚΛ:

i. $\exists x \exists z((R(z,x) \to R(x,z)) \to \forall y R(x,y))$

ii. $\exists x \forall y((P(y) \to R(y,x)) \wedge (\forall u(P(u) \to R(u,y)) \to R(x,y)))$

iii. $\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y)) \to ((P(y) \wedge \neg R(y,x)) \to \exists z(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z))))$

α) Εξετάστε αν κάθε ένας από τους παραπάνω τύπους ικανοποιείται στη δομή με σύμπαν το σύνολο των φυσικών αριθμών όταν η ερμηνεία του *P(x)* είναι «το *x* είναι άρτιος αριθμός» και η ερμηνεία του *R(x,y)* είναι «το *x* είναι μικρότερο ή ίσο από το *y*».

β) Εξετάστε αν κάθε ένας από τους παραπάνω τύπους ικανοποιείται στη δομή με σύμπαν το σύνολο των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών όταν η ερμηνεία του *P(x)* είναι «το x είναι πεπερασμένο υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών» και η ερμηνεία του *R(x,y)* είναι «το x είναι υποσύνολο του y».

Απάντηση:

α)

i. Αφού ο τύπος έχει υπαρξιακούς ποσοδείκτες εξωτερικά, αρκεί να βρούμε συγκεκριμένες τιμές για τα x και z που να τον κάνουν αληθή. Παίρνοντας το x και το z να είναι και τα δύο ίσα με το 0, η αριστερή συνεπαγωγή του τύπου γίνεται αληθής: τόσο το δεξί όσο και το αριστερό της μέλος είναι και τα δύο αληθή, καθώς το 0 είναι μικρότερο ή ίσο του 0. Επίσης, ο υποτύπος $\forall y R(x,y)$ είναι και αυτός αληθής γιατί το 0 είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός. Κατά συνέπεια, και ο συνολικός τύπος είναι αληθής.

ii. Ο δεδομένος τύπος μπορεί ισοδύναμα να μετατραπεί χρησιμοποιώντας το νόμο κατανομής των ποσοδεικτών στον ακόλουθο τύπο:

$$\exists x(\forall y(P(y) \to R(y,x)) \wedge \forall y(\forall u(P(u) \to R(u,y)) \to R(x,y)))$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο υποτύπος $\forall y(P(y) \to R(y,x))$ είναι ψευδής στη δεδομένη δομή για όλα τα πιθανά x καθώς λέει «για κάθε y, αν το y είναι άρτιο τότε το y είναι μικρότερο ή ίσο από το x», κάτι το οποίο δεν ισχύει διότι οι άρτιοι αριθμοί μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλοι. Αφού ο αριστερότερος εσωτερικός τύπος είναι ψευδής για οποιοδήποτε x και αν επιλέξουμε, θα είναι ψευδής και ο συνολικός τύπος.

iii. Χρησιμοποιώντας την ταυτολογία $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$, μετατρέπουμε τον δεδομένο τύπο στον εξής (λίγο) πιο κατανοητό:

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y) \wedge P(y) \wedge \neg R(y,x)) \to \exists z(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z)))$$

Μπορεί τώρα εύκολα να δει κανείς ότι ο παραπάνω τύπος είναι αληθής στη δεδομένη δομή: αν διαλέξουμε δύο άρτιους αριθμούς που ο ένας είναι γνησίως μικρότερος του άλλου, τότε θα υπάρχει πάντα ένας φυσικός αριθμός που βρίσκεται ανάμεσα τους (για παράδειγμα, ο μέσος όρος των δύο αυτών αριθμών).

β)

i. Παίρνοντας το x και το z να είναι ίσα με το κενό σύνολο, ο τύπος γίνεται αληθής για παρόμοιους λόγους όπως και στο αντίστοιχο υποερώτημα του **(α)** μέρους.

ii. Όπως και στο (α) μέρος, θα χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο τύπο:

$$\exists x(\forall y(P(y) \to R(y,x)) \wedge \forall y(\forall u(P(u) \to R(u,y)) \to R(x,y)))$$

Αφού ο τύπος έχει ένα υπαρξιακό ποσοδείκτη εξωτερικά, αρκεί να βρούμε ένα συγκεκριμένο x που να τον κάνει αληθή. Παίρνουμε λοιπόν ως x το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών. Ο αριστερότερος εσωτερικός υποτύπος αληθεύει διότι κάθε πεπερασμένο σύνολο φυσικών είναι υποσύνολο του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών. Ο δεξιός εσωτερικός υποτύπος αληθεύει διότι κάθε υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών που περιέχει όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα, ταυτίζεται με ολόκληρο το σύνολο των φυσικών.

iii. Όπως και στο (α) μέρος, θα χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο τύπο:

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y) \wedge P(y) \wedge \neg R(y,x)) \to \exists z(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z)))$$

Ο τύπος αυτός είναι επίσης αληθής στη δεδομένη δομή. Αν x και y είναι δύο πεπερασμένα υποσύνολα του συνόλου των φυσικών αριθμών και ισχύει ότι $x \subset y$ (δηλαδή το x είναι γνήσιο υποσύνολο του y), τότε μπορούμε να πάρουμε ως z ένα μονοσύνολο που αποτελείται από ένα φυσικό αριθμό που δεν ανήκει στο y (και επομένως ούτε στο x, αφού το x είναι υποσύνολο του y). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ένα τέτοιο σύνολο z επαληθεύει τον τύπο $(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z))$ και συνεπώς και ολόκληρο τον παραπάνω τύπο.

Άσκηση 6 (2009-10)

Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 και έστω A μια ερμηνεία της. Έστω φ τύπος της Γ_1 ο οποίος περιέχει μια ελεύθερη μεταβλητή x. Κάθε τέτοιος τύπος *ορίζει στην* A ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι τα μέλη του $|A|$ για τα οποία ο τύπος αληθεύει. Για παράδειγμα, έστω η γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ της θεωρίας αριθμών (βιβλίο Κ. Δημητρακόπουλου, σελίδες 96-97) και η ερμηνεία της N (παράδειγμα 3.4(iii), σελίδα 104 του ίδιου βιβλίου). Τότε, ο τύπος:

$$\exists y(x \approx ((0')') \odot y)$$

ορίζει στην N το σύνολο των άρτιων αριθμών, ενώ ο τύπος:

$$\exists z(x \approx z \oplus ((0)')') \wedge \forall y \forall z[(x \approx y \odot z) \to ((y \approx (0)') \vee (z \approx (0)')]$$

ορίζει στην N το σύνολο των πρώτων αριθμών.

1. Βρείτε τύπους της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ οι οποίοι να ορίζουν στην N το κενό σύνολο $\varnothing$, το μονοσύνολο $\{1\}$, και το απειροσύνολο $\{0,1,2,3,...\}$ των φυσικών αριθμών.
2. Έστω ερμηνεία N_e που ορίζεται ως εξής: το σύμπαν $|N_e|$ της N_e είναι το σύνολο $\{0,2,4,...\}$ των άρτιων αριθμών. Στα σύμβολα $\oplus$ και $\odot$ αντιστοιχίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους άρτιους αριθμούς. Στο σύμβολο ' αντιστοιχίζεται η συνάρτηση $'^{N_e}(n) = n+2$, και στη σταθερά **0** αντιστοιχίζεται ο αριθμός 0. Εξετάστε ποια σύνολα ορίζονται στην N_e από τους τύπους $\exists y(x \approx ((0')') \odot y)$ και $\exists z(x \approx z \oplus ((0)')') \wedge \forall y \forall z[(x \approx y \odot z) \to ((y \approx (0)') \vee (z \approx (0)')]$.
3. Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ η οποία διαθέτει μόνο τα δύο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $\oplus$ και $\odot$. Με άλλα λόγια, η $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ δεν διαθέτει τη σταθερά **0** ούτε το μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο '. Έστω ερμηνεία N^- της $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ με σύμπαν το σύνολο των φυσικών αριθμών και με τις συνηθισμένες ερμηνείες των $\oplus$ και $\odot$. Βρείτε τύπους της $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ οι οποίοι να ορίζουν στην N^- το μονοσύνολο $\{0\}$ και το μονοσύνολο $\{1\}$.

Απάντηση:

1. Το κενό σύνολο μπορεί να αναπαρασταθεί από τον τύπο $(x \approx (x)')$ (γιατί δεν υπάρχει κανένα x το οποίο να είναι ίσο με $x+1$). Το μονοσύνολο $\{1\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί από τον τύπο $(x \approx (0)')$. Το απειροσύνολο $\{0,1,2,3,...\}$ των

φυσικών αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί από τον τύπο $(x \approx x)$ (ο οποίος ικανοποιείται από όλους τους φυσικούς αριθμούς).

2. Ο τύπος $\exists y(x \approx ((0')') \odot y)$ μπορεί να γραφτεί πιο απλά ως $\exists y(x \approx 4 \odot y)$. Το y μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο $\{0,2,4,...\}$. Επομένως, ο τύπος ορίζει όλους εκείνους τους άρτιους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 8.

Έστω τώρα ο τύπος $\exists z(x \approx z \oplus ((0)')') \wedge \forall y \forall z[(x \approx y \odot z) \rightarrow ((y \approx (0)') \vee (z \approx (0)')]$, ο οποίος μπορεί να γραφεί: $\exists z(x \approx z \oplus 4) \wedge \forall y \forall z[(x \approx y \odot z) \rightarrow ((y \approx 2) \vee (z \approx 2)]$.

Ο τύπος αυτός ορίζει όλους εκείνους τους άρτιους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 4 και οι οποίοι δεν μπορούν να γραφούν στη μορφή $(2 \cdot p) \cdot (2 \cdot q)$, όπου τα p, q είναι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2.

3. Αφού η $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ δεν διαθέτει τη σταθερά **0** ούτε το μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο ', θα πρέπει να αναπαραστήσουμε το μονοσύνολο $\{0\}$ και το μονοσύνολο $\{1\}$ με τη χρήση των υπόλοιπων συναρτησιακών συμβόλων. Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, ενώ το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Έτσι, ο τύπος $\forall y(y \approx x \oplus y)$ αναπαριστά το $\{0\}$ ενώ ο τύπος $\forall y(y \approx x \odot y)$ αναπαριστά το $\{1\}$.

Άσκηση 7 (2015-16)

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ), **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

α) Έστω μία γλώσσα L πρώτης τάξης με ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο f και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο g. Έστω ερμηνεία της L με σύμπαν το σύνολο N στην οποία στο g ανατίθεται η γνωστή μας πρόσθεση φυσικών αριθμών ενώ στο f η συνάρτηση που για κάθε φυσικό αριθμό επιστρέφει το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το 4. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \exists y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall x \forall y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \forall y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall x \exists y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

β) Έστω μία γλώσσα *L* πρώτης τάξης με ένα μονομελές σύμβολο κατηγορήματος *P* και ένα διμελές σύμβολο κατηγορήματος *R*. Έστω ερμηνεία της *L* με σύμπαν το σύνολο των πραγματικών αριθμών και στην οποία το *P(x)* ερμηνεύεται ως «το x είναι ρητός αριθμός» και το *R(x,y)* ερμηνεύεται ως «το *y* είναι ίσο με το τετράγωνο του *x*» (δηλαδή $y = x^2$). Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \exists z ((R(z,x) \to R(x,z)) \to \forall y R(x,y))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \forall y ((P(y) \to R(y,x)) \wedge (\forall u (P(u) \to R(u,y)) \to R(x,y)))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \forall y \exists z ((P(x) \to R(x,y)) \wedge P(y) \wedge \neg R(y,z))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall y (\exists z \forall t \; R(t,z) \wedge \forall x (R(x,y) \to \neg R(x,y)))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

Απάντηση:

α) Για κάθε μία από τις περιπτώσεις έχουμε τα ακόλουθα:

1. **Σωστό.** Ο παραπάνω τύπος γράφεται απλούστερα ως $\exists x \exists y ((x+y) \text{ mod } 4 \approx (x \text{ mod } 4))$ και αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία. Για παράδειγμα, αρκεί να πάρουμε *x=y=4.*

2. **Λάθος.** Ο παραπάνω τύπος γράφεται απλούστερα ως $\forall x \forall y ((x+y) \text{ mod } 4 \approx (x \text{ mod } 4))$ και είναι ψευδής στην παραπάνω ερμηνεία. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να πάρουμε *x=1* και *y=2.*

3. **Λάθος.** Ο παραπάνω τύπος γράφεται απλούστερα ως $\exists x \forall y((x+y) \bmod 4 \approx (x \bmod 4))$ και είναι ψευδής στην παραπάνω ερμηνεία. Δεν υπάρχει κανένα x που να ικανοποιεί τον τύπο για $y=1$.
4. **Σωστό.** Ο παραπάνω τύπος γράφεται απλούστερα ως: $\forall x \exists y((x+y) \bmod 4 \approx (x \bmod 4))$ και αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία. Για παράδειγμα, αρκεί να πάρουμε $y=4$.

β) Για κάθε μία από τις περιπτώσεις έχουμε τα ακόλουθα:

1. **Σωστό.** Αν διαλέξουμε $x=4$ και $z=2$, ο υποτύπος $R(z,x) \to R(x,z)$ γίνεται ψευδής κάτω από τη δεδομένη ερμηνεία και τη συγκεκριμένη ανάθεση μεταβλητών. Κατά συνέπεια, ο συνολικός τύπος γίνεται αληθής.
2. **Λάθος.** Με το νόμο μετακίνησης των ποσοδεικτών, γράφουμε τον τύπο ως: $\exists x(\forall y(P(y) \to R(y,x)) \wedge \forall y(\forall u(P(u) \to R(u,y)) \to R(x,y)))$. Οποιοδήποτε x και αν επιλέξουμε, μπορούμε να βρούμε ένα ρητό αριθμό y τέτοιο ώστε το x να μην είναι ίσο με το τετράγωνο του y. Κατά συνέπεια ο υποτύπος $\forall y(P(y) \to R(y,x))$ γίνεται ψευδής και συνεπώς και ολόκληρος ο τύπος.
3. **Λάθος.** Με τους νόμους μετακίνησης των ποσοδεικτών, γράφουμε τον τύπο ως: $\exists x \forall y(P(x) \to R(x,y)) \wedge \forall y P(y) \wedge \forall y \exists z \neg R(y,z)$. Ο υποτύπος $\forall y P(y)$ ο οποίος λέει ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ρητός, είναι ψευδής και συνεπώς και ο συνολικός τύπος είναι ψευδής.
4. **Λάθος.** Με τους νόμους μετακίνησης των ποσοδεικτών, γράφουμε τον τύπο ως: $\exists z \forall t\ R(t,z) \wedge \forall y \forall x(R(x,y) \to \neg R(x,y))$. Ο νέος τύπος είναι ισοδύναμος με τον $\exists z \forall t\ R(t,z) \wedge \forall y \forall x \neg R(x,y)$, του οποίου οι δύο υποτύποι είναι αντιφατικοί.

Άσκηση 8 (2013-14)

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ), **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(A) Έστω μία γλώσσα πρώτης τάξης με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω ο τύπος $\varphi = \forall x \forall y[\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y)) \to P(x,y)]$. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών όπου το $P(x,y)$ σημαίνει «το σύνολο x είναι υποσύνολο του συνόλου y».
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των δυαδικών συμβολοσειρών όπου το $P(x,y)$ σημαίνει «η συμβολοσειρά y είναι υποσυμβολοσειρά της συμβολοσειράς x».
3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών αριθμών όπου το $P(x,y)$ σημαίνει «ο φυσικός αριθμός x δεν διαιρείται από το φυσικό αριθμό y».
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των ανθρώπων όπου το $P(x,y)$ σημαίνει «ο άνθρωπος x είναι πρόγονος του ανθρώπου y».

(B) Εξετάστε αν οι τύποι που αναγράφονται παρακάτω είναι ανά ζεύγη ταυτολογικά ισοδύναμοι:

1. **(Σ/Λ)** $\exists x(\exists y P(x,y) \vee \neg \forall y \neg P(x,y))$ και $\exists u \exists v P(u,v)$
2. **(Σ/Λ)** $(\forall x(P(x) \to \exists y Q(x,y)) \wedge \exists x P(x))) \to \exists x \exists y Q(x,y)$ και $\forall u \exists v(P(u) \to Q(u,v))$
3. **(Σ/Λ)** $\forall x(\neg P(x) \wedge \exists y P(y))$ και $\forall x P(x)$
4. **(Σ/Λ)** $\exists x \forall y \neg P(x,y,z) \wedge \forall x \exists y Q(x,y,z)$ και $\exists x \forall y \forall u \exists v(\neg P(x,y,z) \wedge Q(u,v,z))$

Απάντηση:

(A) Ο δεδομένος τύπος είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\forall x \forall y \forall z[(P(x,z) \wedge P(z,y)) \to P(x,y)]$, γεγονός που μας διευκολύνει στην εξέταση των περιπτώσεων που μας δίνονται. Για κάθε μία από τις περιπτώσεις έχουμε τα ακόλουθα:

1. **Σωστό.** Αν A,B,C είναι σύνολα και έχουμε $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$ τότε ισχύει και $A \subseteq C$.

2. **Σωστό.** Αν u, v, w είναι συμβολοσειρές και ισχύει ότι η u είναι υποσυμβολοσειρά της v και η v υποσυμβολοσειρά της w, τότε και η u είναι υποσυμβολοσειρά της w.
3. **Λάθος.** Αν m, n, r είναι φυσικοί αριθμοί και ο m δεν διαιρείται από τον n και ο n δεν διαιρείται από τον r, τότε αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά και ο m δεν θα διαιρείται από τον r. Για παράδειγμα, το 10 δεν διαιρείται από το 3, το 3 δεν διαιρείται από το 2 αλλά το 10 διαιρείται από το 2.
4. **Σωστό.** Προφανώς, αν ο x είναι πρόγονος του z και ο z πρόγονος του y, τότε και ο x είναι πρόγονος του y.

(Β) Για κάθε μία από τις περιπτώσεις έχουμε τα ακόλουθα:

1. **Σωστό.** Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης επιμερίζει το «είτε», οπότε η πρώτη πρόταση είναι ισοδύναμη με την $\exists x \exists y P(x,y) \vee \exists x \exists y P(x,y)$, η οποία είναι ισοδύναμη με το ένα διάζευγμα. Επιπλέον, αφού είναι δεσμευμένες οι μεταβλητές, μπορούμε να τους αλλάξουμε όνομα και να προκύψει η δεύτερη πρόταση.
2. **Λάθος.** Η πρώτη πρόταση είναι μια ταυτολογία ενώ η δεύτερη μπορεί να επαληθεύεται ή όχι, ανάλογα με την ερμηνεία των συμβόλων.
3. **Λάθος.** Ο καθολικός ποσοδείκτης επιμερίζει το «και», οπότε η πρώτη πρόταση γίνεται ισοδύναμη με την $\forall x \neg P(x) \wedge \forall x \exists y P(y)$, δηλαδή με την $\forall x \neg P(x) \wedge \exists y P(y)$ η οποία είναι αντίφαση, ενώ η δεύτερη μπορεί να επαληθεύεται ή όχι, ανάλογα με την ερμηνεία των συμβόλων.
4. **Σωστό.** Σωστό γιατί μπορούμε να επανονομάσουμε τις μεταβλητές x, y στο δεύτερο κομμάτι της σύζευξης και να εφαρμόσουμε νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών.