Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2016-2017

Ε ρ γ α σ ί α 3η

Κατηγορηματική Λογική

Ενδεικτικές Λύσεις

Ερώτημα 1.

Η περιγραφή και επεξεργασία των ανθρώπινων προτιμήσεων (preferences) αποτελεί σήμερα μια σημαντική ερευνητική περιοχή στην Πληροφορική, και ιδιαίτερα στην Τεχνητή Νοημοσύνη και στις Βάσεις Δεδομένων. Αν γνωρίζουμε τις προτιμήσεις ενός ατόμου, μπορούμε να του προτείνουμε ποια ταινία να διαλέξει, ποιο ταξίδι να πραγματοποιήσει, ποιο βιβλίο να αγοράσει, κλπ. Στο ερώτημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την Κατηγορηματική Λογική για να περιγράψουμε τις προτιμήσεις ενός ατόμου σχετικά με ταινίες.

Έστω τα κατηγορήματα $Movie(x)$, $Genre(x,y)$, $Director(x,y)$, $LeadingActor(x,y)$, και $Prefer(x,y)$, με ερμηνείες «το x είναι ταινία», «το είδος της ταινίας x είναι το y », «ο σκηνοθέτης της ταινίας x είναι ο y », «ο πρωταγωνιστής της ταινίας x είναι ο y », και «προτιμάω την ταινία x από την ταινία y ». Για παράδειγμα, οι παρακάτω είναι αποδεκτοί ατομικοί τύποι: $Movie(godfather)$, $Genre(godfather, crime)$, $Director(godfather, coppola)$ $LeadingActor(godfather, marlon\_brando)$, και $Prefer(godfather, pulp\_fiction)$.

α) Δώστε τύπους του κατηγορηματικού λογισμού οι οποίοι εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις, εισάγοντας όπου σας διευκολύνει βοηθητικά κατηγορήματα.

i. Απ'όλες τις ταινίες του Coppola, αυτή που προτιμάω είναι «Ο Νονός».
ii. Γενικά προτιμάω τις κωμωδίες από τις ταινίες δράσης. Εξαίρεση αποτελούν οι ταινίες δράσης με πρωταγωνιστή το De Niro, τις οποίες και προτιμάω απ'όλες τις κωμωδίες.
iii. Υπάρχουν δύο ταινίες που τις προτιμάω από όλες τις υπόλοιπες, αλλά που μεταξύ τους δεν μπορώ να τις συγκρίνω.

β) Εξηγήστε σε φυσική γλώσσα τι εκφράζουν οι παρακάτω τύποι. Θα πρέπει οι εκφράσεις σας να «μεταφράζουν» τους τύπους στη φυσική καθημερινή μας γλώσσα, και όχι απλώς να δίνουν την «εκφώνησή» τους. Για παράδειγμα, αποφύγετε εκφράσεις της μορφής «Υπάρχει x έτσι ώστε για κάθε y…» (δηλαδή εκφράσεις που περιέχουν μεταβλητές).

i. $\neg \exists x \exists y[Movie(x) \wedge Movie(y) \wedge Genre(x, romance) \wedge Genre(y, scifi) \wedge Prefer(x,y)]$

ii. $\forall x \forall y[(Movie(x) \wedge Movie(y) \wedge Genre(x, thriller) \wedge Genre(y, thriller) \wedge$
$$Director(x, hitchcock) \wedge Prefer(y,x)) \rightarrow Director(y, kubrick)]$$

iii. $\forall x \forall y \forall z\, [(Movie(x) \wedge LeadingActor(x, de\_niro) \wedge Genre(x, comedy) \wedge Movie(y) \wedge LeadingActor(y, de\_niro) \wedge Genre(y, z) \wedge \neg(z \approx comedy)) \rightarrow Prefer(x, y)]$.

Ενδεικτικές Λύσεις Ερωτήματος 1:

α) Διατυπώνουμε για κάθε πρόταση στα Ελληνικά μία πρόταση στη δοσμένη πρωτοβάθμια γλώσσα, χρησιμοποιώντας δηλαδή τα κατηγορήματα τα οποία δίνονται.

i. $\forall x \big(Movie(x) \wedge Director(x, coppola) \wedge \neg(x \approx godfather) \rightarrow Prefer(godfather, x)\big)$

ii. Χάριν διευκόλυνσης, ας ορίσουμε το κατηγόρημα

$$ComedyAction(x, y) = Movie(x) \wedge Genre(x, comedy) \wedge Movie(y) \wedge Genre(y, action),$$

το οποίο συνοψίζει ότι η x είναι κωμωδία και η y ταινία δράσης. Σημειώστε ότι το κατηγόρημά μας είναι ένας τύπος της κατηγορηματικής λογικής στον οποίο οι δύο μεταβλητές οι οποίες εμφανίζονται ως ορίσματά του είναι ελεύθερες.

Η ζητούμενη πρόταση είναι η ακόλουθη:

$$\forall x \forall y\, [(ComedyAction(x, y) \wedge \neg LeadingActor(y, de\_niro) \rightarrow Prefer(x, y)) \wedge (ComedyAction(x, y) \wedge LeadingActor(y, de\_niro) \rightarrow Prefer(y, x))].$$

iii. Ας εργαστούμε αντίστροφα, υποθέτοντας ότι για καθεμία από τις δύο προτάσεις στα Ελληνικά οι οποίες συνθέτουν τη ζητούμενη πρόταση έχουμε ένα αντίστοιχο κατηγόρημα:

- *MostPrerred(x,y)*: "υπάρχουν δύο ταινίες που τις προτιμάω από όλες τις υπόλοιπες", και,
- *Incomparable(x,y)*: "μεταξύ τους δεν μπορώ να τις συγκρίνω".

Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι η ζητούμενη πρόταση είναι η εξής:

$$\exists x \exists y\, [MostPreferred(x, y) \wedge Incomparable(x, y)].$$

Ας ορίσουμε τώρα τα κατηγορήματα, γράφοντας χάριν συντομίας $x \neq y$ αντί $\neg(x \approx y)$:

$$MostPreferred(x, y) = Movie(x) \wedge Movie(y) \wedge \forall z(Movie(z) \wedge (z \neq x) \wedge (z \neq y) \rightarrow Prefer(x, z) \wedge Prefer(y, z)),$$

$$Incomparable(x, y) = Movie(x) \wedge Movie(y) \wedge \neg Prefer(x, y) \wedge \neg Prefer(y, x).$$

β) Έχοντας την εμπειρία του προηγούμενου υποερωτήματος, ας δούμε κάθε πρόταση ξεχωριστά.

i. Δεν υπάρχει ρομαντική ταινία την οποία προτιμώ από μία ταινία επιστημονικής φαντασίας.

ii. Τα μόνα θρίλερ που προτιμώ σε σχέση με αυτά που έχει σκηνοθετήσει ο Hitchcock είναι όσα έχουν σκηνοθετηθεί από τον Kubric.

iii. Από τις ταινίες στις οποίες πρωταγωνιστεί ο De Niro προτιμώ περισσότερο τις κωμωδίες.

Ερώτημα 2.

Η Monopoly είναι ένα γνωστό παιχνίδι την περιγραφή του οποίου μπορείτε να βρείτε στη σελίδα https://en.wikipedia.org/wiki/Monopoly_(game).

Σκοπός του ερωτήματος αυτού είναι να εκφράσουμε σε Κατηγορηματική Λογική μερικούς από τους κανόνες του παιχνιδιού Monopoly, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω κατηγορήματα:

- *plays(p,t)*: «ο παίκτης *p* παίζει τη χρονική στιγμή *t*»
- *dice (p,t,n$_1$,n$_2$)*: «ο παίκτης *p* ρίχνει τη χρονική στιγμή *t* τα ζάρια και φέρνει αποτέλεσμα n_1 στο ένα και n_2 στο άλλο»
- *position(p,t,s)*: «ο παίκτης *p* βρίσκεται τη χρονική στιγμή *t* στη θέση *s* του ταμπλώ του παιχνιδιού»
- *collects(p,t,m)*: «ο παίκτης *p* λαμβάνει τη χρονική στιγμή *t* το χρηματικό ποσό *m*»
- *pays(p,t,m)*: «ο παίκτης *p* πληρώνει τη χρονική στιγμή *t* το χρηματικό ποσό *m*»

Μπορείτε στους τύπους που θα δώσετε να χρησιμοποιήσετε ελεύθερα όρους όπως το *t+1* (χωρίς δηλαδή να εισάγετε ειδικό συναρτησιακό σύμβολο που να εκφράζει την επόμενη χρονική στιγμή). Οι θέσεις πάνω στο ταμπλώ της μονόπολης θα εκφράζονται από τους αριθμούς 1 έως 40, όπου το τετράγωνο 1 είναι αυτό της αφετηρίας και το τετράγωνο 40 είναι αυτό που βρίσκεται μόλις πριν την αφετηρία. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το συναρτησιακό σύμβολο *mod40(x)* το οποίο θεωρούμε ότι μας επιστρέφει το υπόλοιπο της διαίρεσης του *x* με το *40*. Το συναρτησιακό αυτό σύμβολο θα το χρειαστείτε διότι το ταμπλώ της μονόπολης είναι κυκλικό και η επόμενη θέση του παίχτη που ρίχνει τα ζάρια θα πρέπει να υπολογιστεί με βάση την τρέχουσα θέση του και το αποτέλεσμα της ρίψης των ζαριών *mod* 40.

Ας δούμε ορισμένους βασικούς κανόνες του παιχνιδιού, διατυπωμένους τόσο στη φυσική μας γλώσσα όσο και ως προτάσεις της Κατηγορηματικής Λογικής.

- Σε κάθε χρονική στιγμή, παίζει ακριβώς ένας παίκτης:
  $\forall t \exists p[plays(p,t) \wedge \forall q(plays(q,t) \rightarrow (q \approx p))]$.

- Ο παίκτης που παίζει κάποια στιγμή ρίχνει τα ζάρια εκείνη ακριβώς τη στιγμή:
  $\forall t \forall p[plays(p,t) \rightarrow \exists n_1 \exists n_2 dice(p,t,n_1,n_2)]$.

α) Εξηγήστε σε φυσική γλώσσα ποιους κανόνες του παιχνιδιού εκφράζουν οι παρακάτω τύποι. Θα πρέπει οι εκφράσεις σας να είναι όπως ζητείται και στο Ερώτημα 1β.

i. $$\forall p \forall t \forall n_1 \forall n_2 [plays(p,t) \wedge position(p,t,s) \wedge dice(p,t,n_1,n_2) \rightarrow position(p,t+1, \bmod 40(s+n_1+n_2))]$$

ii. $$\forall p \forall t \forall n_1 \forall n_2 [plays(p,t) \wedge position(p,t,s) \wedge dice(p,t,n_1,n_2) \wedge (s+n_1+n_2 > 40) \rightarrow collects(p,t+1,200)]$$

iii. $$\forall p \forall t \forall n [plays(p,t) \wedge position(p,t,s) \wedge dice(p,t,n,n) \rightarrow position(p,t+1, \bmod 40(s+n+n)) \wedge plays(p,t+1)]$$

β) Δώστε τύπους της ΚΛ οι οποίοι εκφράζουν τους ακόλουθους κανόνες, εισάγοντας όπου κρίνετε σκόπιμο βοηθητικά κατηγορήματα.

i. Αν ένας παίχτης φέρει σε τρεις διαδοχικές χρονικές στιγμές διπλές, τότε την επόμενη χρονική στιγμή πηγαίνει στη φυλακή (δηλαδή στο τετράγωνο με αριθμό 21).
ii. Αν ένας παίχτης βρίσκεται σε μια δεδομένη χρονική στιγμή στο τετράγωνο «Φόρος Εισοδήματος» (τετράγωνο με αριθμό 5) ή στο τετράγωνο «ΕΝΦΙΑ» (τετράγωνο με αριθμό 39) τότε πληρώνει 200 Ευρώ και 100 Ευρώ αντίστοιχα.
iii. Αν ένα παίχτης βρίσκεται στη φυλακή και είναι η σειρά του να παίξει, θα πρέπει πρώτα είτε να πληρώσει 50 Ευρώ είτε να φέρει διπλές ώστε να μπορέσει να παίξει την επόμενη χρονική στιγμή.

<u>Ενδεικτικές Λύσεις Ερωτήματος 2:</u>

α)

i. Σε κάθε χρονική στιγμή, ο παίκτης του οποίου είναι η σειρά, ρίχνει τα ζάρια και προχωράει τοσες θέσεις όσες είναι το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών.

ii. Αν ένας παίκτης φτάσει ή περάσει από την αφετηρία, παίρνει 200 Ευρώ.

iii. Αν ένας παίχτης φέρει διπλές, τότε προχωράει με βάση το αποτέλεσμα των ζαριών και επίσης ξαναπαίζει την επόμενη χρονική στιγμή.

β)

i. Ας εισάγουμε το κατηγόρημα

$$double(p,t) = \exists n[plays(p,t) \wedge dice(p,t,n,n)],$$

το οποίο δηλώνει ότι ο παίκτης *p* έφερε διπλές τη χρονική στιγμή *t* (προσέξτε ότι η θέση του παίκτη δε μας ενδιαφέρει). Η πρόταση γράφεται ως εξής:

$$\forall p \forall t[double(p,t) \wedge double(p,t+1) \wedge double(p,t+2) \rightarrow position(p,t+3,21)].$$

ii. $\forall p \forall t[(position(p,t,5) \rightarrow pays(p,t,200)) \wedge (position(p,t,39) \rightarrow pays(p,t,100))]$

iii. Χρησιμοποιώντας το κατηγόρημα το οποίο ορίσαμε στο υποερώτημα (iv), η πρόταση είναι:

$$\forall p \forall t[position(p,t,21) \wedge \neg((pays(p,t,50) \wedge \neg double(p,t) \vee$$
$$(\neg pays(p,t,50) \wedge double(p,t)) \rightarrow \neg plays(p,t+1)].$$

Ερώτημα 3.

α) Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 η οποία περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *R,* και έστω *A* και *B* ερμηνείες της Γ_1, όπου $|A|$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών και $|B|$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών. Έστω επίσης ότι, τόσο στην *A* όσο και στη *B*, το *R(x,y)* ερμηνεύεται ως «ο *x* είναι μικρότερος ή ίσος από τον *y*».

i. Δώστε τύπο της Γ_1 ο οποίος να είναι ψευδής στην *A* και αληθής στην *B*.

ii. Δώστε τύπο της Γ_1 ο οποίος να είναι αληθής στην *A* και ψευδής στη *B*. Ο τύπος που θα δώσετε γι'αυτό το υποερώτημα δεν θα πρέπει να είναι λογικά ισοδύναμος με την άρνηση του τύπου που θα δώσετε στο προηγούμενο υποερώτημα.

Σε κάθε περίπτωση, δικαιολογήστε τυπικά αλλά και διαισθητικά την απάντησή σας.

β) Δίνεται ο τύπος:

$$\forall z \forall u \exists x \forall y((R(x,y) \wedge P(u)) \rightarrow (P(y) \rightarrow R(z,x)))$$

i. Δώστε, αν υπάρχει, ερμηνεία με σύμπαν το σύνολο των φυσικών αριθμών, στην οποία ο τύπος αληθεύει.

ii. Δώστε, αν υπάρχει, ερμηνεία με σύμπαν το σύνολο των φυσικών αριθμών, στην οποία ο τύπος είναι ψευδής.

Σε κάθε περίπτωση, δικαιολογήστε τυπικά αλλά και διαισθητικά την απάντησή σας (προσπαθήστε να απλοποιήσετε τον τύπο βάσει και της ταυτολογίας $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$).

<u>Ενδεικτικές Λύσεις Ερωτήματος 3:</u>

α)

i. Με βάση την ερμηνεία του κατηγορήματος *R(x,y)* παρατηρούμε καταρχήν ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ρητών αριθμών υπάρχει πάντοτε ένας ρητός, κάτι το οποίο δεν ισχύει για δύο οποιουσδήποτε φυσικούς. Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο τύπος

$$\forall x \forall y \exists z((x \neq y) \wedge R(x,y) \to (x \neq z) \wedge (z \neq y) \wedge R(x,z) \wedge R(z,y))$$

είναι ψευδής στην *A* και αληθής στη *B*. Πράγματι, ο τύπος δεν ισχύει για *y=x+1,* διότι δεν υπάρχει φυσικός *z* διαφορετικός από τους *x* και *y* τέτοιος ώστε $x \leq z \leq y$.

Αντίθετα, για δύο οποιουσδήποτε ρητούς *x* και *y* τέτοιους ώστε *x<y*, ο αριθμός $z = \frac{x+y}{2}$ είναι ρητός και επαληθεύει τον παραπάνω τύπο.

ii. Παρατηρούμε ότι οι φυσικοί αριθμοί περιλαμβάνουν μόνο θετικούς αριθμούς, ενώ οι ρητοί επιτρέπουν και αρνητικούς. Θεωρούμε λοιπόν τον τύπο $\exists x \forall y R(x,y)$, ο οποίος είναι αληθής στην *A* για *x=0* αλλά όχι στη *B*, αφού δεν υπάρχει ελάχιστος ρητός.

β) Χρησιμοποιώντας την ταυτολογία $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$:

$$\forall z \forall u \exists x \forall y((R(x,y) \wedge P(u)) \to (P(y) \to R(z,x))) \equiv$$
$$\forall z \forall u \exists x \forall y((R(x,y) \wedge P(u)) \wedge P(y) \to R(z,x)) \equiv$$
$$\forall z \forall u \exists x \forall y(R(x,y) \wedge P(u) \wedge P(y) \to R(z,x)).$$

Χρησιμοποιώντας νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών αλλά και το νόμο της αντικατάστασης (δείτε Τόμος Γ', σελ. 122):

$$\forall z \forall u \exists x \forall y(R(x,y) \wedge P(u) \wedge P(y) \to R(z,x)) \equiv$$
$$\forall z \forall u \exists x(\exists y(R(x,y) \wedge P(u) \wedge P(y)) \to R(z,x)) \equiv$$
$$\forall z \forall u \exists x(\neg \exists y(R(x,y) \wedge P(u) \wedge P(y)) \vee R(z,x)) \equiv$$
$$\forall z \forall u(\exists x \neg \exists y(R(x,y) \wedge P(u) \wedge P(y)) \vee \exists x R(z,x)) \equiv$$
$$\forall z \forall u(\neg \forall x \exists y(R(x,y) \wedge P(u) \wedge P(y)) \vee \exists x R(z,x)) \equiv$$
$$\forall z \forall u(\forall x \exists y(R(x,y) \wedge P(u) \wedge P(y)) \to \exists x R(z,x)) \equiv$$
$$\forall z(\exists u \forall x \exists y(R(x,y) \wedge P(u) \wedge P(y)) \to \exists x R(z,x)) \equiv$$
$$\exists u \forall x \exists y(R(x,y) \wedge P(u) \wedge P(y)) \to \forall z \exists x R(z,x).$$

i. Αν το *R(x,y)* ερμηνεύεται ως «ο *x* είναι μικρότερος ή ίσος από τον *y*» και ανεξάρτητα από την ερμηνεία του *P(x)*, αληθεύει ότι κάθε φυσικός αριθμός *z* είναι μικρότερος ή ίσος κάποιου φυσικού αριθμού *x*, δηλαδή $\forall z \exists x R(z,x)$.

Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω τύπος

$\exists u \forall x \exists y (R(x, y) \wedge P(u) \wedge P(y)) \rightarrow \forall z \exists x R(z, x)$,

είναι μία συνεπαγωγή, η οποία προφανώς αληθεύει με βάση την παραπάνω ερμηνεία του *R(x,y)*, αφού αληθεύει το συμπέρασμά της (ανεξάρτητα από το αν αληθεύει η υπόθεσή της).

ii. Δεν υπάρχει ερμηνεία του *R(x,y)* η οποία καθιστά τον τύπο ψευδή, επειδή ο τύπος είναι λογικά έγκυρος, δηλαδή αληθεύει σε οποιαδήποτε ερμηνεία. Για να το αποδείξουμε αυτό χρησιμοποιώντας τον ορισμό αλήθειας του Tarski, ας απλοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο λίγο περαιτέρω.

$\exists u \forall x \exists y (R(x, y) \wedge P(u) \wedge P(y)) \rightarrow \forall z \exists x R(z, x) \equiv$

$\exists u (P(u) \wedge \forall x \exists y (R(x, y) \wedge P(y))) \rightarrow \forall z \exists x R(z, x) \equiv$

$\exists u P(u) \wedge \forall x \exists y (R(x, y) \wedge P(y)) \rightarrow \forall z \exists x R(z, x)$.

Η σύζευξη στην υπόθεση της παραπάνω συνεπαγωγής δηλώνει ότι αληθεύουν τόσο ο τύπος $\exists u P(u)$ όσο και ο τύπος $\forall x \exists y (R(x, y) \wedge P(y))$. Το ότι αληθεύει ο δεύτερος τύπος μας δηλώνει ότι για κάθε τιμή του σύμπαντος *α* υπάρχει μία τιμή του σύμπαντος *β* για την οποία αληθεύουν τόσο το *R(α,β)* όσο και το *P(α)*. Δηλαδή για κάθε *α* υπάρχει *β* τέτοιο ώστε *R(α,β)*, με άλλα λόγια $\forall z \exists x R(z, x)$, το οποίο είναι το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Συνεπώς ο παραπάνω τύπος είναι έγκυρος.

Ερώτημα 4.

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 η οποία περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *R,* και την ερμηνεία *A* της Γ_1 με $|A| = \{n \in N : n \geq 2\}$ στην οποία το *R(x,y)* ερμηνεύεται ως «ο *x* διαιρεί τον *y*». Κάθε τύπος φ της Γ_1, ο οποίος περιέχει μια ελεύθερη μεταβλητή *x*, *ορίζει στην ερμηνεία* A ένα σύνολο μελών του $|A|$ για τα οποία ο τύπος αληθεύει. Τέτοιου είδους είναι οι παρακάτω τύποι:

i. $\forall y (R(y, x) \rightarrow (x \approx y))$

ii. $\forall y \forall z ((R(y, x) \wedge R(z, x)) \rightarrow (R(y, z) \vee R(z, y)))$

iii. $\forall y \forall z (R(y, x) \rightarrow (R(z, y) \rightarrow R(x, z)))$

Εξηγήστε ποιο υποσύνολο του $|A|$ ορίζει καθένας από αυτούς. Δικαιολογήστε προσεκτικά τις απαντήσεις σας.

<u>Ενδεικτικές Λύσεις Ερωτήματος 4:</u>

i. Ο τύπος ορίζει εκείνους τους φυσικούς *x,* οι οποίοι αν διαιρούνται από οποιονδήποτε άλλο φυσικό αριθμό *y*, τότε ταυτίζονται με αυτόν. Παρατηρούμε ότι το *1*, το οποίο διαιρεί οποιονδήποτε φυσικό x, δεν περιλαμβάνεται στο $|A|$. Συνεπώς, ο τύπος ορίζει όλους τους φυσικούς οι οποίοι, εκτός του *1*, διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους, δηλαδή τους πρώτους αριθμούς.

ii. Ο τύπος ορίζει εκείνους τους φυσικούς x, των οποίων οποιοιδήποτε δύο διαιρέτες διάφοροι του *1* (κι όχι απαραίτητα ίσοι) έχουν την ιδιότητα ότι τουλάχιστον ο ένας διαιρεί τον άλλο. Αυτό προφανώς ισχύει για τους πρώτους αριθμούς οι οποίο έχουν ένα μοναδικό διαιρέτη. Ισχύει όμως και για όσους αριθμούς γράφονται ως δύναμη ενός μοναδικού πρώτου αριθμού: αν $x=w^k$, όπου w πρώτος αριθμός, οποιοιδήποτε δύο διαιρέτες του x έχουν τη μορφή $y=w^l$ και $z=w^m$ συνεπώς αν $l<m$ ο y διαιρεί τον z, διαφορετικά ο z διαιρεί τον y.

Αντίθετα, ένας αριθμός ο οποίος είναι γινόμενο δυνάμεων τουλάχιστον δύο πρώτων έχει δύο τουλάχιστον διαιρέτες οι οποίοι ως πρώτοι αριθμοί δε διαιρούνται μεταξύ τους. Θεωρήστε παράδειγμα το $x=36=2^2*3^2$ και παρατηρήστε ότι για $y=2, z=3$ ο τύπος δεν αληθεύει.

iii. Ο τύπος ορίζει εκείνους τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι διαιρούν (όλους) τους διαιρέτες (όλων) των διαιρετών τους, οι οποίοι είναι διάφοροι του αριθμού *1* (αφού αυτός δεν ανήκει στο σύμπαν). Άρα ο τύπος ορίζει τους πρώτους αριθμούς.

Εναλλακτικά παρατηρούμε ότι ο τύπος είναι ισοδύναμος με τον $\forall y \forall z((R(y,x) \wedge R(z,y)) \rightarrow R(x,z))$. Αφού ο τύπος αυτός θα πρέπει να αληθεύει για όλα τα y, θα πρέπει να αληθεύει και στην ειδική περίπτωση $y=z$, δηλαδή θα πρέπει να είναι αληθής και ο $\forall y((R(y,x) \wedge R(y,y)) \rightarrow R(x,y))$. Επειδή όμως το $R(y,y)$ ισχύει πάντοτε (κάθε αριθμός διαιρεί τον εαυτό του), ο τύπος είναι ισοδύναμος με το $\forall y(R(y,x) \rightarrow R(x,y))$. Ο τελευταίος αυτός τύπος ισχύει μόνο αν ο x είναι πρώτος αριθμός, αφού ο μόνος y διάφορος του *1* που τον διαιρεί είναι ο εαυτός του, στην οποία περίπτωση και ο x διαιρεί τον y.

Ερώτημα 5.

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ), **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

α) Έστω μία γλώσσα L πρώτης τάξης με ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο f και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο g. Έστω ερμηνεία της L με σύμπαν το σύνολο $N-\{0\}$ στην οποία στο g ανατίθεται η γνωστή μας πρόσθεση φυσικών αριθμών ενώ στο f ανατίθεται η συνάρτηση που για κάθε φυσικό αριθμό n επιστρέφει 1 αν $n=1$, και αν το n είναι διάφορο του 1 επιστρέφει το μικρότερο πρώτο αριθμό που είναι διαιρέτης του n. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \exists y(f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall x \forall y(f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \forall y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall x \exists y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

β) Έστω μία γλώσσα L πρώτης τάξης με μιά σταθερά **c**, ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\oplus$, και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\otimes$. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $F_1 \equiv \forall u \forall v \exists x (\neg(v \approx c) \rightarrow (u \oplus (v \otimes x) \approx c))$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους πραγματικούς αριθμούς στην οποία στο c αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\neg F_1$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους ακέραιους αριθμούς στην οποία στο c αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.
3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $F_2 \equiv \forall u \forall v \forall w \exists x (\neg(w \approx c) \rightarrow (u \oplus (v \otimes x) \oplus ((w \otimes (x \otimes x)) \approx c)))$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους μιγαδικούς αριθμούς στην οποία στο c αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\neg F_2$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους πραγματικούς αριθμούς στην οποία στο c αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.

Ενδεικτικές Λύσεις Ερωτήματος 5:

α) Παρατηρούμε αρχικά ότι ο τύπος άνευ των ποσοδεικτών, δηλαδή ο $f(g(x,y)) \approx f(x)$ σημαίνει ότι το άθροισμα των δύο αριθμών έχει τον ίδιο μικρότερο πρώτο διαιρέτη (διάφορο του *1*) με τον πρώτο από αυτούς.

1. **Σωστό.** Ο τύπος ζητά την ύπαρξη δύο αριθμών, των οποίων το άθροισμα έχει τον ίδιο μικρότερο πρώτο διαιρέτη με ένας από τους δύο αριθμούς. Εύκολα βλέπουμε ότι ο τύπος αληθεύει, για παράδειγμα, αν *x=y=2.*

2. **Λάθος.** Ένα απλό αντιπαράδειγμα είναι *x=2, y=3,* αφού το *5* δε διαιρείται με το *2*.

3. **Λάθος.** Αν το *x* είναι ζυγός αριθμός (οπότε *f(x)=2*) και θέσουμε *y=x+1,* το άθροισμά τους είναι μονός αριθμός, συνεπώς *f(x+y)>2*. Α το *x* είναι μονός (συνεπώς *f(x)>2*) και θέσουμε *y=x,* το άθροισμά τους είναι ζυγός αριθμός, συνεπώς *f(x+y)=2*. Σε αμφότερες δηλαδή τις περιπτώσεις, ο τύπος δεν ισχύει.

4. **Λάθος.** Παρατηρήστε ότι ο τύπος δεν ισχύει για *x=1*, καθώς *f(1)=1* και *f(1+y)>1* για οποιοδήποτε *y*.

β) Έστω μία γλώσσα L πρώτης τάξης με μιά σταθερά **c**, ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\oplus$, και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\otimes$. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **Σωστό.** Ο τύπος λέει ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών u,v όπου το v δεν είναι 0, υπάρχει ένας πραγματικός x τέτοιος ώστε $u+v*x=0$. Προφανώς αυτό ο αριθμός είναι ο $x=-u/v$ αφού το v είναι διάφορο του 0.

2. **Σωστό.** Πράγματι, η γραμμική εξίσωση δεν έχει πάντοτε ακέραια λύση, ας σκεφτούμε ως παράδειγμα την $1+2x=0$.

3. **Σωστό.** Ο τύπος λέει ότι για οποιουσδήποτε τρεις μιγαδικούς u,v,w όπου το w δεν είναι 0, υπάρχει ένας μιγαδικός x τέτοιος ώστε $u+v*x+w*x^2=0$. Πράγματι η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει πάντοτε μία μιγαδική λύση.

4. **Σωστό.** Πράγματι η δευτεροβάθμια εξίσωση δεν έχει πάντοτε μία πραγματική λύση, ας σκεφτούμε ως παράδειγμα την $1+x^2=0$.