Κεφάλαιο 11

Πραγματικές Τετραγωνικές Μορφές

Στα προηγούμενα κεφάλαια δώσαμε έμφαση κυρίως σε γραμμικές εξισώσεις της μορφής

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots\cdots + \alpha_n x_n = \beta$$

Το αριστερό κομμάτι της παραπάνω εξίσωσης

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots\cdots + \alpha_n x_n$$

αποτελείτε από μια συνάρτηση n μεταβλητών. Η γραμμική αυτή μορφή είναι πρώτου βαθμού εφόσον δεν υπάρχουν γινόμενα μεταξύ μεταβλητών.

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα μελετήσουμε συναρτήσεις των οποίων οι μεταβλητές είναι υψωμένες στο τετράγωνο ή περιλαμβάνουν γινόμενο δύο μεταβλητών. Τέτοιου είδους συναρτήσεις συναντώνται σε πολλές εφαρμογές των μαθηματικών όπως στην γεωμετρία, σε μηχανικά συστήματα, στατιστική κ.λ.π.

11.1 Τετραγωνικές Μορφές

Η **τετραγωνική μορφή** δύο μεταβλητών x και y, ορίζεται ως ένα πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού της μορφής

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 .$$

Το πολυώνυμο αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε ως

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z^T Az$$

όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός και $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Σημείωση **:** *Τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του πίνακα A είναι οι συντελεστές των τετραγωνισμένων όρων του πολυωνύμου, ενώ τα υπόλοιπα είναι το μισό των συντελεστών του γινομένου xy.*

11.1.1 Παραδείγματα Οι παρακάτω περιπτώσεις είναι τετραγωνικές μορφές δύο μεταβλητών.

1) $2x^2 + 6xy - 7y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2) $4x^2 - 5y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3) $xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Οι τετραγωνικές μορφές δεν περιορίζονται μόνο σε δύο μεταβλητές. Η γενική μορφή τετραγωνικών μορφών ορίζεται ως εξής.

11.1.2 Ορισμός

*Μία **τετραγωνική μορφή** με n μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots, x_n$ έχει την μορφή*

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

Εάν $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ τότε η (11.1) μπορεί να γραφτεί ως

$$x^T Ax = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}x_i x_j$$

όπου $\sum$ υποδεικνύει το άθροισμα των όρων $a_{ij}x_i x_j$.

Σημείωση : *Εάν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο πίνακας Α είναι συμμετρικός* $(A = A^T)$*, τότε η σχέση* $x^T Ax$ *μπορεί να εκφραστεί ως εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή,*

$$x^T Ax = x^T (Ax) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$$

11.1.3 Παραδείγματα

1) Δίνεται η τετραγωνική μορφή

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 .$$

Θα την μετατρέψουμε στην μορφή $x^T Ax$.

Λύση Όπως και στις περιπτώσεις με δύο μεταβλητές οι συντελεστές των x_1^2, x_2^2, x_3^2 θα τοποθετηθούνε στην κύρια διαγώνιο. Οι συντελεστές των γινομένων $x_i x_j$ $(i \neq j)$, θα τοποθετηθούν στις υπόλοιπες θέσεις. Δηλαδή, τις υπόλοιπες θέσεις του πίνακα A θα καταλαμβάνουν οι συντελεστές των γινομένων $x_i x_j$ $(i \neq j)$ διαιρεμένοι κατά το ήμισυ.

Συντελεστές	**Θέσεις στον πίνακα A**
x_1x_2	α_{12} και α_{21}
x_1x_3	α_{13} και α_{31}
x_2x_3	α_{23} και α_{32}

Επομένως,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2) Δίνεται η τετραγωνική μορφή

$$q(x,y,z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2 .$$

Θα την μετατρέψουμε στην μορφή $x^T Ax$.

Λύση

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3) Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί η τετραγωνική μορφή $q(x,y)$.

Λύση

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-3y & -3x+8y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 5x^2 - 3xy - 3xy + 8y^2 = 5x^2 - 6xy + 8y^2$$

4) Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί η τετραγωνική μορφή $q(x,y,z)$.

Λύση

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5x+4y+2z & 4x+5y+2z & 2x+2y+2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 4yz .$$

11.1.4 Ορισμός

*Η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ θα ονομάζεται **θετικά ορισμένη** εάν $x^T Ax > 0$ για κάθε $x \neq 0$, και ο συμμετρικός πίνακας A θα ονομάζεται **θετικά ορισμένος** πίνακας εάν $x^T Ax$ είναι θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή.*

11.1.5 Θεώρημα

*Ένας συμμετρικός πίνακας A θα είναι **θετικά ορισμένος** εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.*

11.1.6 Παράδειγμα

Θα δείξουμε ότι ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

Λύση

$$\det\left(A - \lambda x\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda = 1$ (διπλή) και $\lambda = 4$. Εφόσον όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος και για κάθε $x \neq 0$

$$\begin{aligned} x^T Ax &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = \\ &= \left(x_1 + x_2\right)^2 + \left(x_2 + x_3\right)^2 + \left(x_3 + x_1\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Θα μπορούσαμε στο Mathematica να ορίσουμε τον πίνακα A

```
a = {{2, 1, 1}, {1, 2, 1}, {1, 1, 2}}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

και να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του

```
Eigenvalues[a]
```

{4, 1, 1}

οι οποίες είναι όλες θετικές και συνεπώς ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος. ■

Σημείωση *Αντίστοιχα ένας συμμετρικός πίνακας A θα ονομάζεται **αρνητικά ορισμένος** εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές.*

Επόμενος στόχος μας είναι να εισάγουμε ένα κριτήριο το οποίο να προσδιορίζει το κατά πόσο ένας συμμετρικός πίνακας A είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος χωρίς να χρειάζεται να βρεθούν πρώτα οι ιδιοτιμές του. Στο σημείο αυτό καλό θα ήταν να εισάγουμε την παρακάτω ορολογία.

Εάν ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε θα ονομάζουμε ως κύριους υπο-πίνακες του A όλους εκείνους τους υπο-πίνακες που μπορούν να κατασκευαστούν από τις πρώτες r γραμμές και r στήλες του πίνακα A για $r = 1, 2, 3, \cdots, n$. Οι υπο-πίνακες αυτοί ορίζονται ως :

$$A_1 = [a_{11}],\ A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \ldots, A = A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

11.1.7 Θεώρημα

*Ένας συμμετρικός πίνακας A ονομάζεται **θετικά ορισμένος** εάν όλοι οι κύριοι υπο-πίνακες του έχουν θετική ορίζουσα.*

11.1.8 Παράδειγμα

Θα δείξουμε ότι ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

Λύση

Ελέγχουμε τις ορίζουσες των υπο-πινάκων του A

$$|2| = 2\,,\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\,,\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

Όλες οι ορίζουσες είναι θετικές άρα ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

Θα μπορούσαμε στο πρόγραμμα Mathematica να καλέσουμε το πακέτο MatrixManipulations που ανήκει στο πακέτο LinearAlgebra με την παρακάτω εντολή:

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
```

και στη συνέχεια εφόσον δηλώσουμε τον πίνακα A

```
a = {{2, -1, -3}, {-1, 2, 4}, {-3, 4, 9}}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

και εκτελέσουμε την παρακάτω επανάληψη :

```
For[i = 1, i ≤ 3,
 a1 = TakeMatrix[a, {1, 1}, {i, i}];
 Print[a1];
 Print[Det[a1]];
 i++]
```

θα πάρουμε ως αποτέλεσμα τους υποπίνακες ixi και τις ορίζουσες τους :

$$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4

Στην δεύτερη γραμμή της επανάληψης υπολογίζουμε τον υποπίνακα του A που βρίσκεται μεταξύ των στοιχείων {1,1} και {i,i}, τον οποίο εκτυπώνουμε με την εντολή στην 3^{η} γραμμή και υπολογίζουμε και εκτυπώνουμε την ορίζουσα στην 4^{η} γραμμή. Θα μπορούσαμε μάλιστα να γράψουμε ένα σύντομο πρόγραμμα που θα κάνει την παραπάνω διαδικασία και θα επιστρέφει την τιμή True αν ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος και False διαφορετικά. Μάλιστα θα επιστρέφει το μήνυμα «Error – The matrix is not symmetric» στην περίπτωση που ο πίνακας δεν είναι συμμετρικός.

```
positiveMatrix[a_] :=
 Module[{i, cond, a0},
  a0 = a;
  If[a0 ≠ Transpose[a0],
   Print["Error-The matrix is not symmetric"],
   cond = True;
   For[i = 1, i ≤ Length[a0],
    a1 = TakeMatrix[a0, {1, 1}, {i, i}];
    If[Det[a1] < 0, cond = False];
    i++];
   Return[cond]];]
```

```
positiveMatrix[a]
```

True

Μπορείτε να κάνετε μια αντίστοιχη συνάρτηση για αρνητικά ορισμένους πίνακες ; ■

Σύνοψη

Ένας συμμετρικός πίνακας A *και η τετραγωνική μορφή* $x^T Ax$ *θα ονομάζονται*

Θετικά ορισμένοι	*εάν*	$x^T Ax > 0$ *για κάθε* $x \neq 0$
Θετικά ημιορισμένοι	*εάν*	$x^T Ax \geq 0$ *για κάθε* $x \neq 0$
Αρνητικά ορισμένοι	*εάν*	$x^T Ax < 0$ *για κάθε* $x \neq 0$
Αρνητικά ημιορισμένοι	*εάν*	$x^T Ax \leq 0$ *για κάθε* $x \neq 0$
Αόριστοι	*εάν*	$x^T Ax$ *παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές.*

Ασκήσεις 11.1

1) Να μετατρέψετε τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές στην μορφή $x^T Ax$, όπου ο A είναι ένας συμμετρικός πίνακας.

α) $3x_1^2 + 7x_2^2$, β) $4x_1^2 - 9x_2^2 - 6x_1x_2$, γ) $5x_1^2 + 5x_1x_2$, δ) $-7x_1x_2$

2) Να μετατρέψετε τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές στην μορφή $x^T Ax$, όπου ο A είναι ένας συμμετρικός πίνακας.

α) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$, β) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 5x_1x_2 + 9x_1x_3$

γ) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, δ) $\sqrt{2}x_1^2 - \sqrt{3}x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 - 8\sqrt{3}x_1x_3$,

ε) $3x^2 - 7xy + 5xz + 4y^2 - 4yz - 3z^2$

3) Να προσδιορίσετε εάν οι παρακάτω τετραγωνικές μορφές είναι, θετικά ορισμένες, θετικά ημιορισμένες, αρνητικά ορισμένες, αρνητικά ημιορισμένες, ή αόριστες.

α) $x_1^2 + x_2^2$, β) $-x_1^2 - 3x_2^2$, γ) $(x_1 - x_2)^2$, δ) $-(x_1 - x_2)^2$

ε) $(x_1^2 - x_2^2)$, στ) x_1x_2.

4) Να προσδιορίσετε εάν οι παρακάτω πίνακες είναι, θετικά ορισμένοι, θετικά ημιορισμένοι, αρνητικά ορισμένοι, αρνητικά ημιορισμένοι, ή αόριστοι.

α) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, β) $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, δ) $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

δ) $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 8 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, ε) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, στ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες οι παρακάτω τετραγωνικές μορφές είναι θετικά ορισμένες.

α) $x_1^2 + kx_2^2 - 4x_1x_2$, β) $5x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

γ) $3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2kx_2x_3$

11.2 Διαγωνοποίηση Τετραγωνικών Μορφών

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε τις πραγματικές τετραγωνικές μορφές. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο πως μπορούμε να απλοποιήσουμε αυτές τις μορφές χρησιμοποιώντας μια σειρά από νέες μεταβλητές.

Έστω η τετραγωνική μορφή

$$x^T Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

Εάν

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

όπου $y_1, y_2, \cdots, y_n$ είναι οι νέες μεταβλητές. Εάν αντικαταστήσουμε με $x = Py$ στην παραπάνω τετραγωνική μορφή $x^T Ax$, τότε θα πάρουμε,

$$x^T Ax = \left(Py\right)^T A\left(Py\right) = y^T P^T APy = y^T Dy$$

Σημείωση ο πίνακας P έχει ως στήλες του τα ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Επομένως ,

$$x^T Ax = y^T Dy = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Δημιουργούμε δηλαδή, μία νέα τετραγωνική μορφή στην οποία δεν υπάρχουν γινόμενα μεταξύ μεταβλητών.

11.2.1 Θεώρημα

Έστω η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ με μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots, x_n$, όπου ο πίνακας A είναι ένας συμμετρικός πίνακας. Εάν ο πίνακας P έχει ως στήλες του τα ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα του πίνακα A και αν οι νέες μεταβλητές $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ορίζονται από *την σχέση* $x = Py$, *τότε αντικαθιστώντας για x στην τετραγωνική μορφή* $x^T Ax$ *θα πάρουμε*

$$x^T Ax = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A και* $D = P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Η νέα αυτή μορφή ονομάζεται ***κανονική ή διαγώνια*** *μορφή.*

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 11.2.1 για να διαγωνοποιήσουμε τετραγωνικές μορφές δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* ούτε τον πίνακα *P*. Το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

11.2.2 Παράδειγμα

Να βρεθεί η διαγώνια μορφή της τετραγωνικής μορφής $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

Λύση

$$x^T Ax = \left(x_1, x_2\right)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Άρα, $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(5-\lambda\right)^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(8-\lambda) = 0$. Επομένως $\lambda = 2$ και $\lambda = 8$ είναι οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα *A*.

Επομένως η διαγώνια (νέα τετραγωνική) μορφή είναι

$$\left(y_1, y_2\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + 8y_2^2 .$$

11.2.3 Παράδειγμα

Να βρεθεί η διαγώνια μορφή της τετραγωνικής μορφής $q\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

Λύση

$$q\left(x_1, x_2, x_3\right) = x^T Ax = \left(x_1, x_2, x_3\right)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Άρα,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3) = 0 .$$ Άρα λ=0, λ=3, και λ=-3.

Επομένως η διαγώνια (νέα τετραγωνική) μορφή είναι

$$\left(y_1, y_2, y_3\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = -3y_2^2 + 3y_3^2 .$$

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τον πίνακα A στο Mathematica :

```
a = {{1, -2, 0}, {-2, 0, 2}, {0, 2, -1}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια εφόσον υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A :

```
Eigensystem[a]
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ \{-1, -2, 2\} & \{-2, 2, 1\} & \{2, 1, 2\} \end{pmatrix}$$

να ορθοκανονικοποιήσουμε την βάση του ιδιοχώρου του πίνακα A :

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
p = Transpose[GramSchmidt[%[[2]]]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι :

```
Transpose[p].a.p
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό :

$$x = Py \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

θα πάρουμε

$$q\left(x_1, x_2, x_3\right) = -3y_1^2 + 3y_2^2 + 0y_3^2 = -3\left(-\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 + 3\left(-\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 \blacksquare$$

11.2.4 Θεώρημα

Ο πίνακας $P^T AP$ έχει το ίδιο πλήθος θετικών ιδιοτιμών, το ίδιο πλήθος αρνητικών ιδιοτιμών και το ίδιο πλήθος μηδενικών ιδιοτιμών με τον πίνακα A.

Με άλλα λόγια, τα πρόσημα των ιδιοτιμών και όχι οι ίδιες οι ιδιοτιμές διατηρούνται κατά τους μετασχηματισμούς ισοδυναμίας.

Το θεώρημα 11.2.4 είναι γνωστό ως ο *Νόμος Αδράνειας του Sylvester*.

Ασκήσεις 11.2

1) Να βρεθούν οι διαγώνιες μορφές (νέες μορφές) των παρακάτω τετραγωνικών εξισώσεων

α) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$, β) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$, γ) $2x_1x_2$, δ) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$

2) Να βρεθούν οι διαγώνιες μορφές (νέες μορφές)των παρακάτω τετραγωνικών εξισώσεων

α) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$, β) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
γ) $-5x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_2$, δ) $2x_1x_3 + 6x_2x_3$

3) Να βρεθούν οι διαγώνιες μορφές (νέες μορφές) των παρακάτω τετραγωνικών εξισώσεων.

α) $2x^2 - 4xy - y^2$, β) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$, γ) $2x_1x_3$, δ) $2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3$,
ε) $-2x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_2x_3$, στ) $6x_1x_2 + 8x_2x_3$

11.3 Κωνικές Τομές

Εφαρμογές στη γεωμετρία του επιπέδου

Στην παράγραφο αυτή θα εφαρμόσουμε τις ιδέες των δύο προηγουμένων παραγράφων για να μελετήσουμε δευτεροβάθμιες εξισώσεις δύο μεταβλητών x και y. Οι εξισώσεις αυτές έχουν την μορφή

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0 \tag{1}$$

όπου τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένα από τα α, β, γ δεν είναι μηδέν.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ είναι η αντίστοιχη *τετραγωνική μορφή* της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

11.3.1 Παραδείγματα

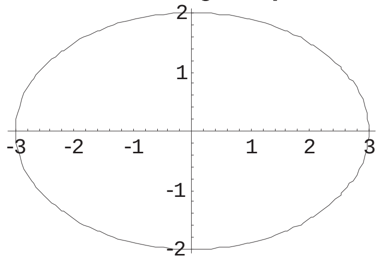
Δευτεροβάθμιες Εξισώσεις	Τετραγωνικές μορφές
1) $3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$	$3x^2 + 5xy - 7y^2$
2) $4x^2 - 5y^2 + 8y + 9 = 0$	$4x^2 - 5y^2$
3) $xy + y = 0$	xy

Το γράφημα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (1) ονομάζεται κωνική τομή. Οι τρεις πιο γνώστες εξισώσεις κωνικών τομών είναι αυτές της έλλειψης, της υπερβολής και της παραβολής οι οποίες και εκφράζονται από τις παρακάτω σχέσεις :

Έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1,\qquad \alpha, \beta > 0.$

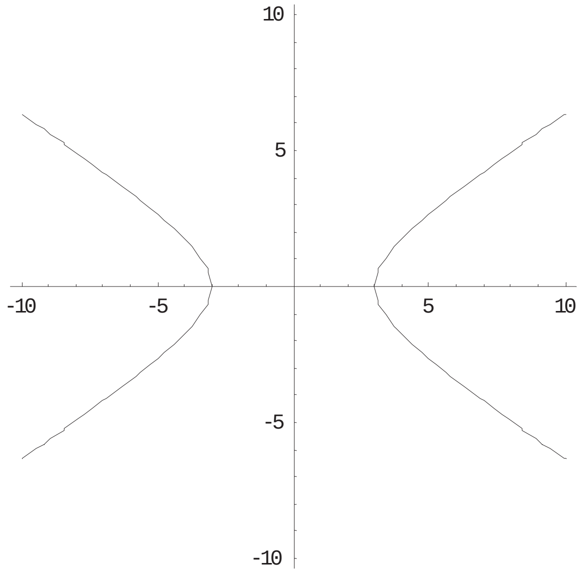
(Εάν $\alpha = \beta$ τότε έχουμε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα το α ή β)

```
<< Graphics`
ImplicitPlot[x^2/9 + y^2/4 == 1, {x, -3, 3}, {y, -2, 2}, AxesOrigin → {0, 0}]
```



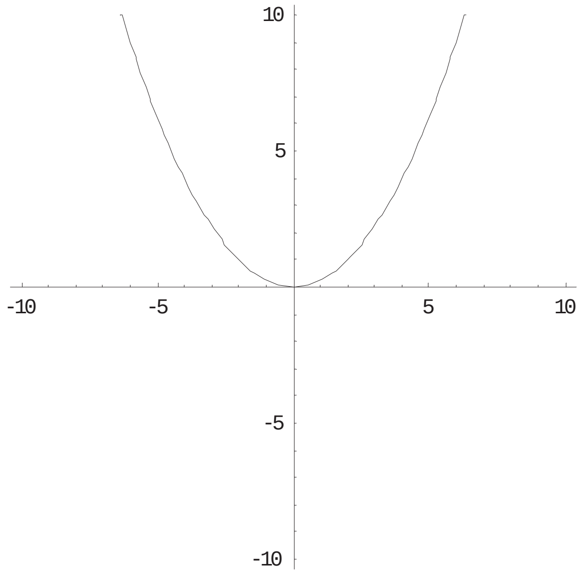
Υπερβολή $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ ή $\dfrac{y^2}{\alpha^2}-\dfrac{x^2}{\beta^2}=1,\quad \alpha,\beta>0$

ImplicitPlot$\left[\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}==1,\ \{x,-10,10\},\ \{y,-10,10\},\ \text{AxesOrigin}\to\{0,0\}\right]$

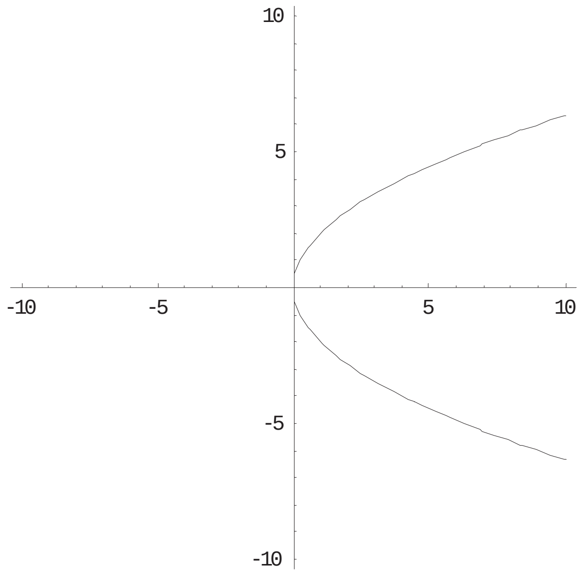


Παραβολή $x^2=\alpha y$ ή $y^2=\alpha x$,

ImplicitPlot$\left[x^2==4\,y,\ \{x,-10,10\},\ \{y,-10,10\},\ \text{AxesOrigin}\to\{0,0\}\right]$

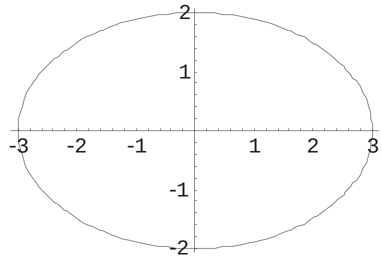


ImplicitPlot$\left[y^2==4\,x,\ \{x,-10,10\},\ \{y,-10,10\},\ \text{AxesOrigin}\to\{0,0\}\right]$

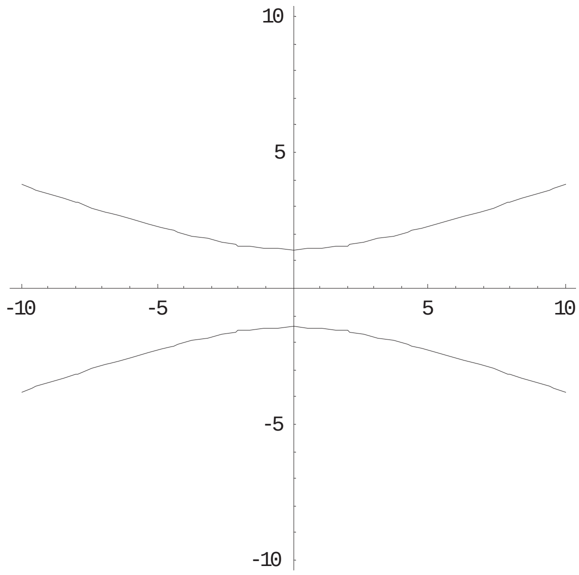


11.3.2 Παραδείγματα

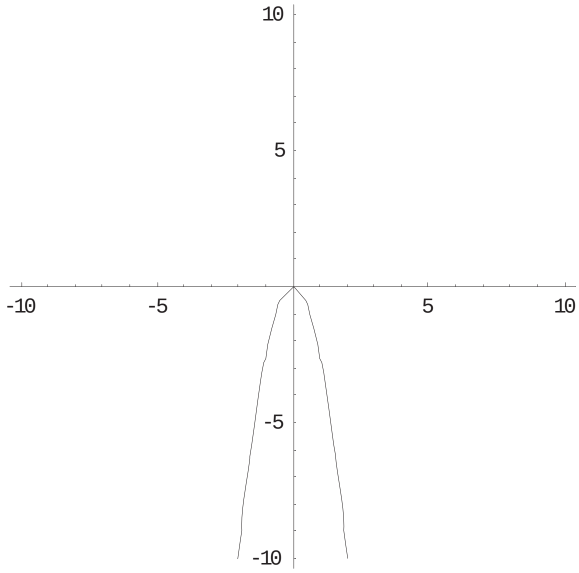
1) Η εξίσωση $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ μας δίνει μία έλλειψη η οποία τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $(-2,0)$ και $(2,0)$ και τον άξονα των y στα σημεία $(0,-3)$ και $(3,0)$.



2) Η εξίσωση $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{16}=1$ θα μας δώσει μία υπερβολή η οποία τέμνει τον άξονα των y στα σημεία $(0,-\sqrt{2})$ και $(0,\sqrt{2})$.



3) Η εξίσωση $5x^2 + 2y = 0$ θα μας δώσει μία παραβολή με $\alpha = -\dfrac{2}{5}$.



Παρατηρώντας τις εξισώσεις των τριών αυτών κωνικών τομών βλέπουμε ότι καμία από αυτές δεν περιλαμβάνει το γινόμενο των μεταβλητών x και y (xy). Η παρουσία του όρου xy στην εξίσωση μας υποδεικνύει την περιστροφή των καρτεσιανών αξόνων. Δηλαδή την περιστροφή της κωνικής τομής. Πώς όμως γίνεται η περιστροφή αυτή;

Ας πάρουμε λοιπόν την εξίσωση (1) και ας την γράψουμε στην μορφή

$$x^T Ax + Bx + \zeta = 0 \tag{2}$$

όπου,

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας A είναι συμμετρικός πίνακας και όπως ήδη γνωρίζουμε μπορεί να διαγωνοποιηθεί από έναν ορθοκανονικό πίνακα P. Άρα

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

όπου λ_1 και λ_2 είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A και ο πίνακας P έχεις ως στήλες του τα αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Εάν

$$x = Py \quad \text{και} \quad y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

τότε η εξίσωση (2) μπορεί να γραφτεί ως

$$(Py)^T A(Py) + B(Py) + \zeta = 0$$

$$y^T\left(P^T AP\right)y + B\left(Py\right) + \zeta = 0$$

ή

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \zeta = 0 \qquad (3)$$

ή

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \delta' x' + \varepsilon' y' + \zeta = 0 \qquad (4)$$

όπου $\delta' = \delta p_{11} + \varepsilon p_{21}$ και $\varepsilon' = \delta p_{12} + \varepsilon p_{22}$. Η εξίσωση (4) δεν έχει πλέον τον όρο του γινομένου των δύο μεταβλητών $x'y'$.

Ο πίνακας P είναι ορθοκανονικός με $\det(P) = 1$ και έχει την μορφή

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

όπου θ η γωνία περιστροφής από τον θετικό καρτεσιανό άξονα x στον θετικό καρτεσιανό άξονα x'.

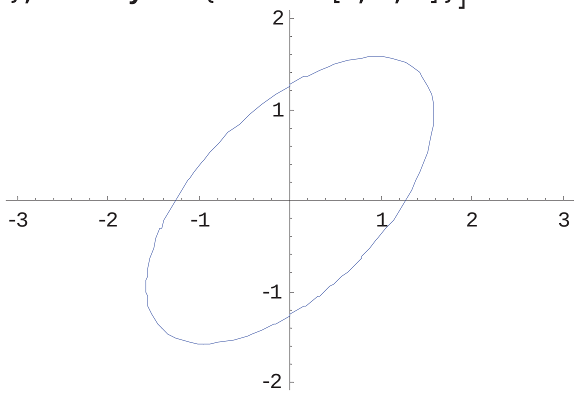
11.3.3 Παράδειγμα

Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0\,.$$

Η εξίσωση αυτή περιέχει τον όρο του γινομένου των δύο μεταβλητών xy και επομένως έχουμε μία περιστροφή της κωνικής τομής.

```
p1 = ImplicitPlot[5 x^2 - 6 x y + 5 y^2 - 8 == 0, {x, -3, 3}, {y, -2, 2},
  AxesOrigin → {0, 0}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Η τετραγωνική μορφή της είναι η $5x - 6xy + 5y^2$. Διαγωνοποιόντας την τετραγωνική μορφή παίρνουμε

$$x^T Ax = \left(x, y\right)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Άρα, $|A-\lambda I_2| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(8-\lambda) = 0$. Επομένως $\lambda = 2$ και $\lambda = 8$ είναι οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα A. Τα αντίστοιχα ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα είναι

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα, $D = P^T AP$ και επομένως $x^T Ax = y^T Dy$.

Η διαγώνια (νέα τετραγωνική) μορφή είναι

$$(x_1, y_1)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 8y_1^2.$$

Επομένως,

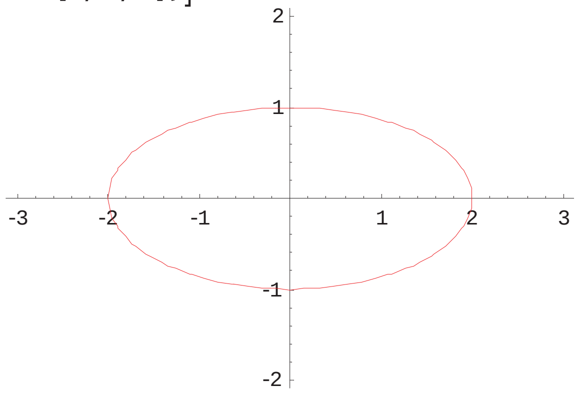
$$2x_1^2 + 8y_1^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x_1^2 + 8y_1^2 = 8$$

Διαιρώντας με το 8 παίρνουμε

$$\frac{x_1^2}{2^2} + y_1^2 = 1,$$

δηλαδή, έχουμε μία έλλειψη.

```
p2 = ImplicitPlot[x^2/4 + y^2 == 1, {x, -3, 3}, {y, -2, 2}, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0]}]
```



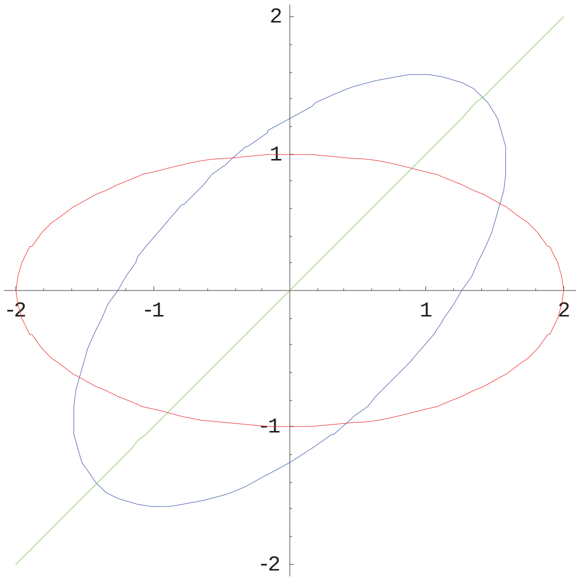
Ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Άρα η ζητούμενη γωνία είναι $\theta = 45^\circ$. Δηλαδή η έλλειψη περιστρέφετε κατά γωνία $\theta = 45^\circ$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^0) & -\sin(45^0) \\ \sin(45^0) & \cos(45^0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

```
p3 = ImplicitPlot[x == y, {x, -3, 3}, {y, -2, 2}, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotStyle → {RGBColor[0, 1, 0]}]
Show[p1, p2, p3]
```



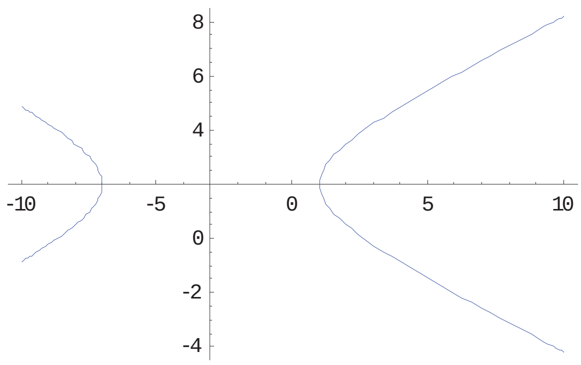
Επιστρέφοντας στις εξισώσεις των τριών κωνικών τομών μία ακόμα παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι οι εξισώσεις αυτές δεν περιλαμβάνουν ταυτόχρονα τους όρους x^2 και x ούτε και τους όρους y^2 και y. Εάν λοιπόν έχουμε ένα από τα προαναφερθέντα ζεύγη, x^2 και x ή y^2 και y ενώ δεν υπάρχει ο όρος xy, τότε συμπεραίνουμε ότι η κωνική τομή έχει υποστεί μία μεταφορά.

11.3.4 Παράδειγμα

Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 23 = 0$$

Η εξίσωση αυτή δεν περιέχει τον όρο του γινομένου των δύο μεταβλητών xy αλλά περιέχει τα ζεύγη x^2, x και y^2, y. Επομένως έχουμε μεταφορά της κωνικής τομής.



Ξεκινάμε φτιάχνοντας τέλεια τετράγωνα

$$x^2 + 6x + 9 - 4(y^2 - 4y + 4) - 23 = 9 - 16$$

$$(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = 23+9-16 = 16 \tag{5}$$

Θέτουμε

$$x' = x+3 \quad \text{και} \quad y' = y-2$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

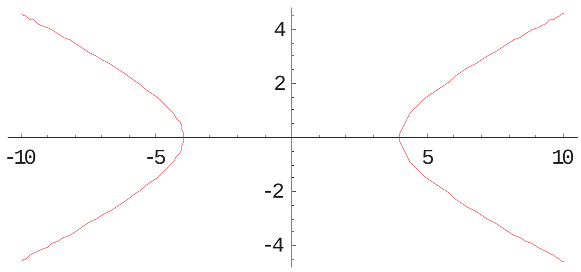
Η εξίσωση (5) μπορεί πλέον να γραφτεί ως

$$x'^2 - 4y'^2 = 16$$

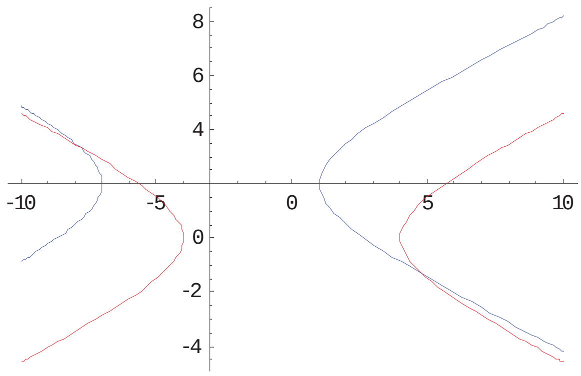
ή ως

$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Το γράφημα της εξίσωσης αυτής είναι μία υπερβολή όπου βρίσκεται πάνω σε νέους καρτεσιανούς άξονες με αρχή το σημείο $(0,0)$.



Σε αντίθεση με την αρχική εξίσωση της οποίας η γραφική παράσταση έχει μετατοπιστεί κατά το διάνυσμα $P = (-3 \quad 2)^T$ και συνεπώς έχει αρχή το σημείο $(-3,2)$.



Τέλος θα δούμε πως μπορούμε να αναγνωρίσουμε την κωνική τομή σε περιπτώσεις πού στην εξίσωση (1) περιέχεται ο όρος του γινομένου των δύο μεταβλητών xy αλλά και τα ζεύγη x^2, x και y^2, y. Με άλλα λόγια η συγκεκριμένη κωνική τομή έχει υποστεί μόνο μεταφορά.

11.3.5 Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 56 = 0$$

Να βρεθεί η κωνική τομή που αντιπροσωπεύει.

Λύση

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2) έχουμε

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 56 = 0$$

Για την εύρεση των ιδιοτιμών του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ έχουμε

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(5-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 8$.
Λύνοντας την εξίσωση $(A - \lambda I_2)x = 0$ για κάθε λ βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A έτσι ώστε να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα P.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Επομένως ο ορθοκανονικός πίνακας P είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Άρα,

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad BP = \begin{pmatrix} -24\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 32 \end{pmatrix}$$

Θέτοντας

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) παίρνουμε

$$2x'^2+8y'^2-16x'+32y'+56=0$$

ή

$$x'^2+4y'^2-8x'+16y'+28=0$$

Συνεχίζουμε φτιάχνοντας τέλεια τετράγωνα

$$\left(x'-4\right)^2+4\left(y'+2\right)^2-16-16+28=0$$

ή

$$\left(x'-4\right)^2+4\left(y'+2\right)^2=4$$

ή

$$\frac{\left(x'-4\right)^2}{2^2}+\frac{\left(y'+2\right)^2}{1^2}=1$$

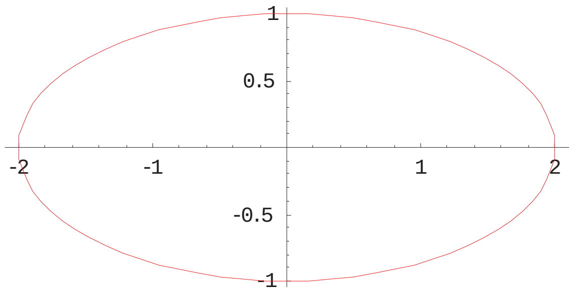
Εάν $x''=x'-4$ και $y''=y+2$ ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

τότε

$$\frac{x''^2}{2^2}+\frac{y''^2}{1^2}=1$$

δηλαδή έχουμε μία έλλειψη.



Ο συνολικός μετασχηματισμός που εφαρμόσαμε είναι ο παρακάτω :

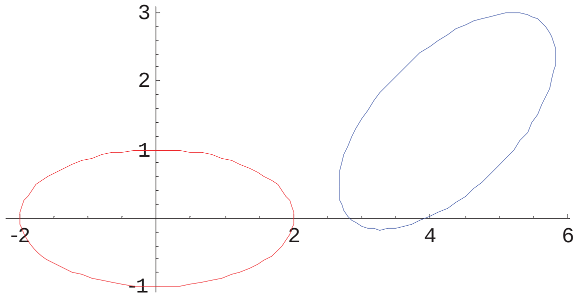
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας

$$P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(45^0) & -\sin(45^0) \\ \sin(45^0) & \cos(45^0) \end{pmatrix}$$

και επομένως η έλλειψη έχει περιστραφεί από την αρχή των αξόνων κατά γωνία $\theta = 45^\circ$ και έχει μεταφερθεί σε νέους καρτεσιανούς άξονες με αρχή το σημείο $\left(6/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}\right)$.



11.3.6 Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}y} + 4 = 0$$

Να βρεθεί η κωνική τομή που αντιπροσωπεύει.

Λύση

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2) έχουμε

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4 = 0$$

Για την εύρεση των ιδιοτιμών του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\left|A - \lambda I_2\right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$
$$= (\lambda - 4)(\lambda - 9) = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = 9$.

Λύνοντας την εξίσωση $(A - \lambda I_2)x = 0$ για κάθε λ μπορούμε να βρούμε και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A έτσι ώστε να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα P.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 9$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Επομένως ο ορθοκανονικός πίνακας P είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Άρα,

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ και } BP = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -36 \end{pmatrix}$$

Θέτοντας

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) παίρνουμε

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0$$

Φτιάχνοντας τέλεια τετράγωνα έχουμε

$$4(x'-1)^2 + 9(y'-2)^2 - 4 + 4 - 36 = 0$$

ή

$$4(x'-1)^2 + 9(y'-2)^2 = 36$$

ή

$$\frac{(x'-1)^2}{9} + \frac{(y'-2)^2}{4} = 1$$

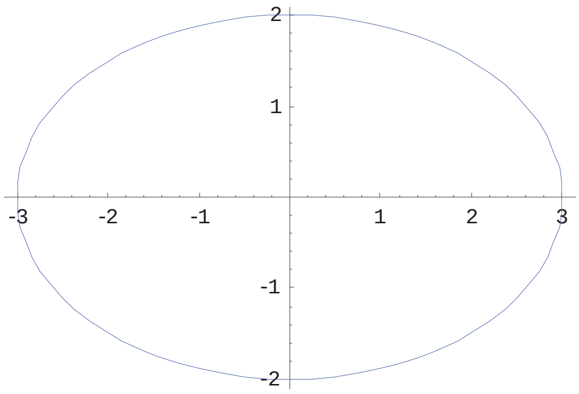
Εάν $x'' = x' - 1$ και $y'' = y - 2$ ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

τότε

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

δηλαδή μία έλλειψη.



Ο συνολικός μετασχηματισμός που εφαρμόσαμε είναι ο παρακάτω :

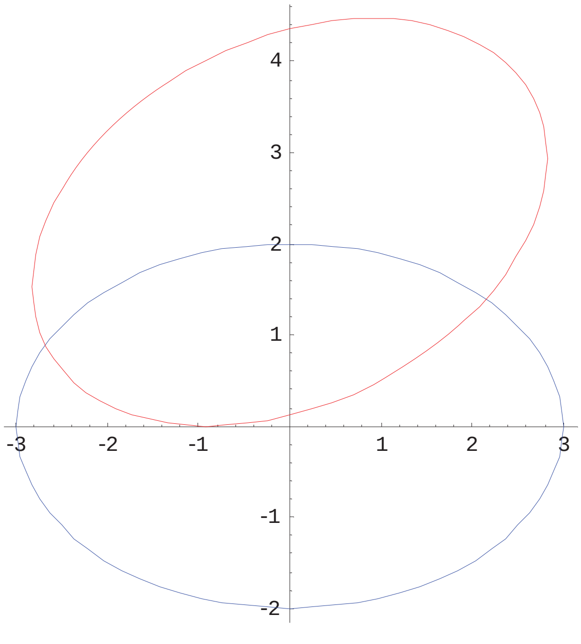
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(26,6^\circ) & -\sin(26,6^\circ) \\ \sin(26,6^\circ) & \cos(26,6^\circ) \end{pmatrix}$$

και επομένως η έλλειψη έχει περιστραφεί περίπου κατά γωνία $\theta = 26,6^\circ$ και έχει μεταφερθεί σε νέους καρτεσιανούς άξονες με αρχή το σημείο $\left(0,\sqrt{5}\right)$.



Το γράφημα μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης με μεταβλητές x και y μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση που προκύπτει μετά την περιστροφή των αξόνων, δηλαδή από την εξίσωση (3) ή την εξίσωση (4). Η αναγνώριση των κωνικών τομών από τις εξισώσεις (3) ή (4) δίνεται στον παρακάτω πίνακα

$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$		$\lambda_1 \lambda_2 = 0$
$\lambda_1 \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	
Έλλειψη	Υπερβολή	Παραβολή

Εφαρμογές στη γεωμετρία του χώρου

Όπως στην γεωμετρία του επιπέδου μελετήσαμε δευτεροβάθμιες εξισώσεις δύο μεταβλητών x και y έτσι και στη γεωμετρία του χώρου θα μελετήσουμε δευτεροβάθμιες εξισώσεις τριών μεταβλητών x, y και z. Οι εξισώσεις αυτές έχουν την μορφή

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 + 2\beta_1 xy + 2\beta_2 xz + 2\beta_3 yz + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \delta = 0 \qquad (6)$$

όπου τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2, \delta \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένα από τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ δεν είναι μηδέν.

Η εξίσωση $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 + 2\beta_1 xy + 2\beta_2 xz + 2\beta_3 yz$ είναι η αντίστοιχη *τετραγωνική μορφή* της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Η εξίσωση (6) μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_3 \\ \beta_2 & \beta_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \delta = 0 .$$

Δηλαδή ως,

$$x^T A x + Bx + \delta = 0 \qquad (7)$$

όπου

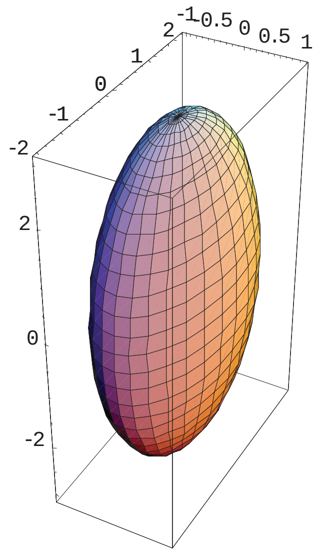
$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_3 \\ \beta_2 & \beta_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Η εξίσωση (6) μπορεί να αναχθεί σε μία από τις παρακάτω γνωστές εξισώσεις των οποίων και γνωρίζουμε το είδος της επιφάνειας.

Ελλειψοειδές $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

(Εάν $\alpha=\beta=\gamma$ τότε έχουμε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο το $(0,0,0)$ και ακτίνα το α ή β ή γ)

```
<< Graphics`
ParametricPlot3D[
 {Cos[u] Cos[v], 2 Sin[u] Cos[v], 3 Sin[v]},
 {u, 0, 2 Pi},
 {v, -Pi / 2, Pi / 2}]
```



Γραφική παράσταση της $x^2+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$

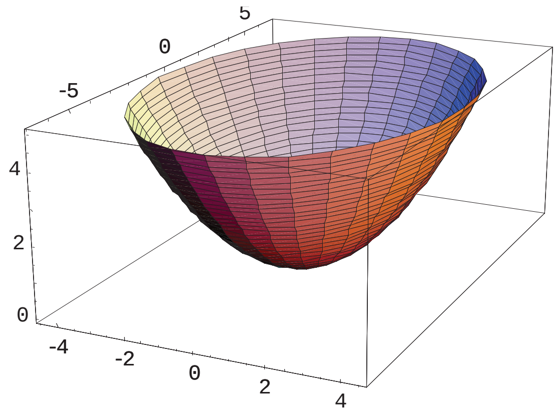
Παρατηρήστε ότι αν $x=\cos(u)\cos(v), y=2\sin(u)\cos(v), y=3\sin(v)$ τότε

```
(Cos[u] Cos[v])^2 + (2 Sin[u] Cos[v])^2/4 + (3 Sin[v])^2/9 // Simplify
```

1

Ελλειπτικό παραβολοειδές $$z=\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}$$

```
ParametricPlot3D[
 {2 Cos[v] Sqrt[z], 3 Sin[v] Sqrt[z], z},
 {v, 0, 2 Pi},
 {z, 0, 5}, ViewPoint -> {1.354, -2.922, 1.040}]
```



Γραφική παράσταση της $z = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}$

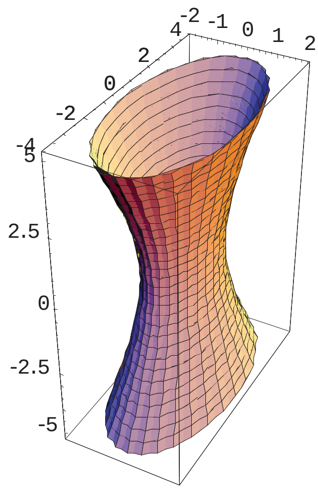
Παρατηρήστε ότι αν $x = 2\cos(v)\sqrt{z}, y = 3\sin(v)\sqrt{z}, z = z$ τότε :

```
Simplify[(2 Cos[v] √z)^2/4 + (3 Sin[v] √z)^2/9 - z]
```

0

Μονόχωνο υπερβολοειδές $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$

```
ParametricPlot3D[
 {Sqrt[z^2/9 + 1] Cos[v], 2 Sqrt[z^2/9 + 1] Sin[v], z},
 {v, -2 Pi, 2 Pi},
 {z, -5, 5}]
```



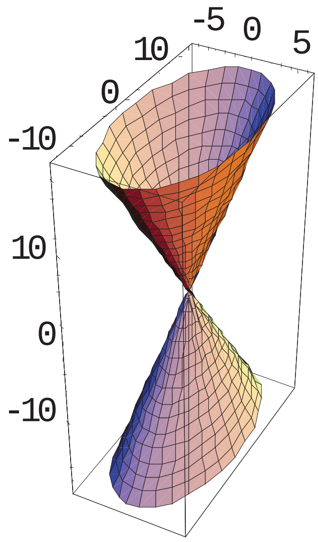
Γραφική παράσταση της $x^2 + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$

Παρατηρήστε ότι αν $x = \sqrt{\frac{z^2}{9} + 1}\cos(v), y = 2\sqrt{\frac{z^2}{9} + 1}\sin(v), z = z$ τότε :

```
(Sqrt[z^2/9 + 1] Cos[v])^2 + (2 Sqrt[z^2/9 + 1] Sin[v])^2/4 - (z)^2/9 // Simplify
```

1

Κώνος $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$



Γραφική παράσταση της $x^2+\frac{y^2}{2^2}-\frac{z^2}{3^2}=0$

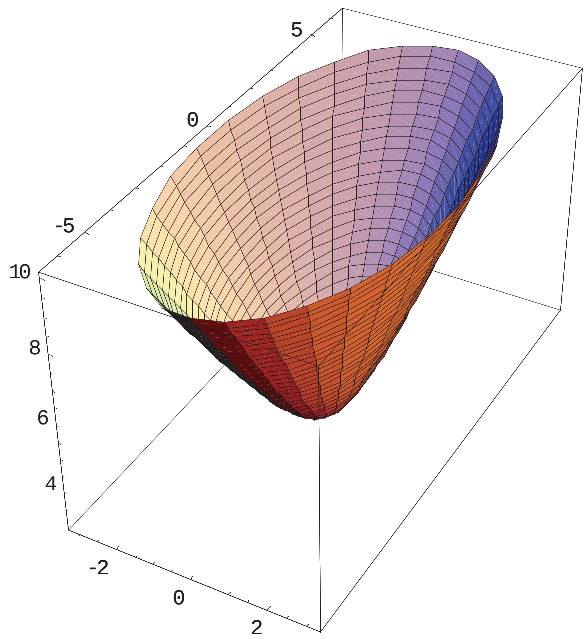
Παρατηρήστε ότι αν $x=z\cos(v), y=2z\sin(v), z=3z$ τότε :

```
(z Cos[v])^2 + (2 z Sin[v])^2/4 - (3 z)^2/9 // Simplify
```

0

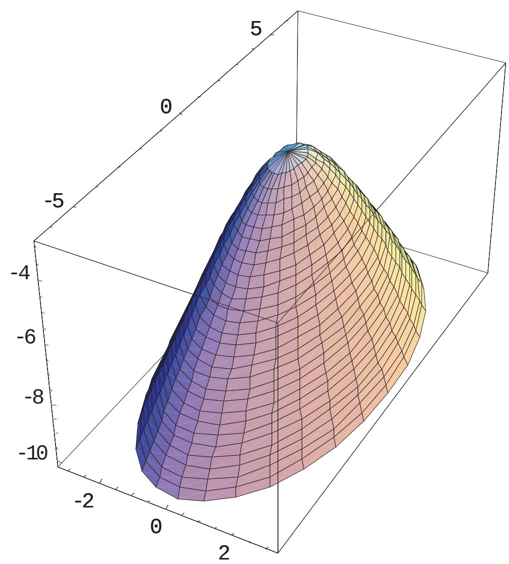
Δίχωνο υπερβολοειδές $-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$

```
p1 = ParametricPlot3D[
  {Sqrt[z^2/9 - 1] Cos[v], 2 Sqrt[z^2/9 - 1] Sin[v], z},
  {v, 0, 2 Pi},
  {z, 3, 10}]
```



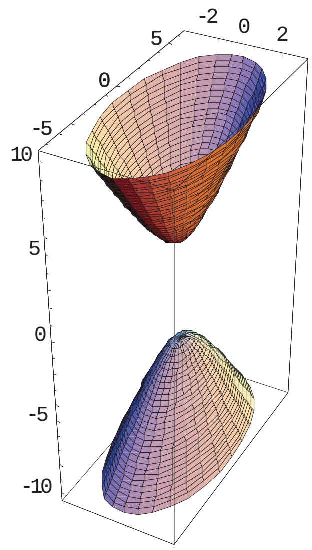
Γραφική παράσταση της $-x^2-\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$ για $z\in[3,10]$

```
p2 = ParametricPlot3D[
  {Sqrt[z^2/9 - 1] Cos[v], 2 Sqrt[z^2/9 - 1] Sin[v], z},
  {v, 0, 2Pi},
  {z, -10, -3}]
```



Γραφική παράσταση της $-x^2-\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$ για $z\in[-10,-3]$

```
Show[p1, p2]
```



Γραφική παράσταση της $-x^2-\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$ για $z\in[-10,-3]\cup[3,10]$

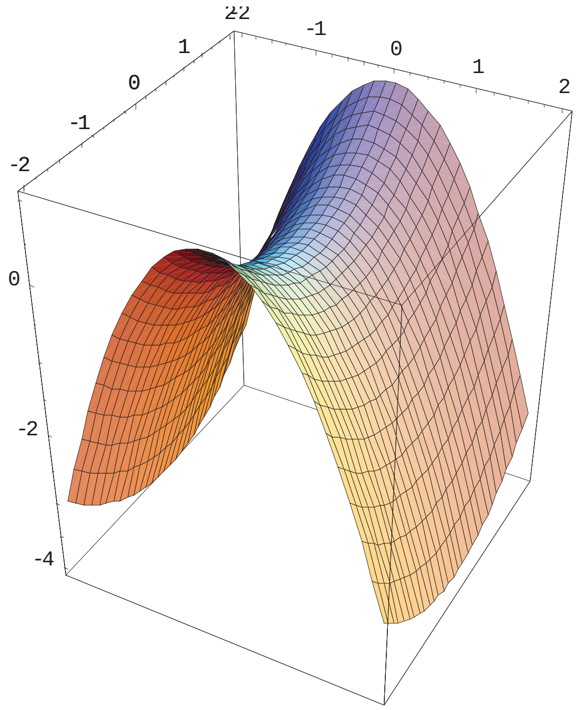
Παρατηρήστε ότι αν $x=\sqrt{\frac{z^2}{9}-1}\cos(v), y=2\sqrt{\frac{z^2}{9}-1}\sin(v), z=z$ τότε :

$$-\left(\sqrt{\frac{z^2}{9}-1}\,\mathrm{Cos}[v]\right)^2-\frac{\left(2\sqrt{\frac{z^2}{9}-1}\,\mathrm{Sin}[v]\right)^2}{4}+\frac{(z)^2}{9}\ //\ \mathrm{Simplify}$$

1

Υπερβολικό παραβολοειδές $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=z$

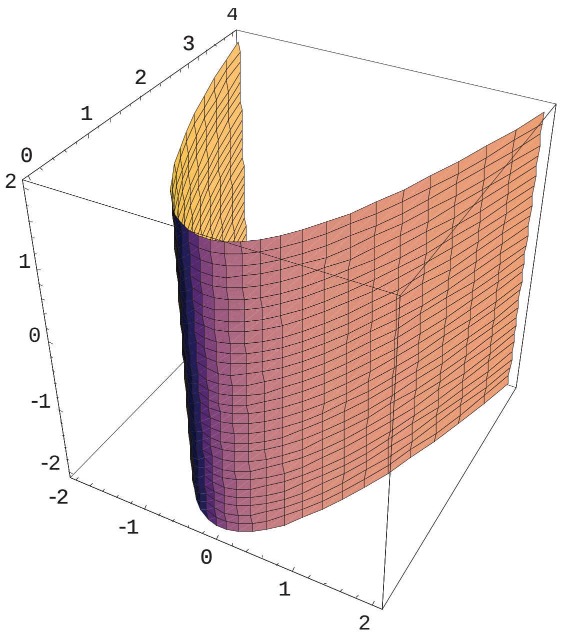
```
ParametricPlot3D[
  {x, y, y^2/4 - x^2},
  {x, -2, 2},
  {y, -2, 2}]
```



Γραφική παράσταση της $-x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} = z$ για $x \in [-2,2], y \in [-2,2]$

Παραβολικός κύλινδρος $x^2 = ay\,, \quad a > 0$

```
ParametricPlot3D[
 {x, x^2, z},
 {x, -2, 2},
 {z, -2, 2}]
```



Γραφική παράσταση της $x^2 = y$ για $x \in [-2,2], y \in [-2,2]$

11.3.7 Ορισμός

Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας Α μεγέθους 3×3*. Θα ονομάζουμε inertia (αδράνεια) του πίνακα Α, In(A), την διατεταγμένη τριάδα των αριθμών σχετικά με το πλήθος των ιδιοτιμών του πίνακα Α που δίνεται ως*

(θετικές, αρνητικές, μηδενικές)

11.3.8 Παραδείγματα

Να βρεθεί το $In(A)$ για κάθε έναν από του παρακάτω πίνακες

α) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, β) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, γ) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Λύση

α) $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-4=\lambda(\lambda-4)=0$. Δηλαδή, $\lambda_1=0$ και $\lambda_2=4$.

Άρα, $In(A)=(1,0,1)$

β) $\left|A-\lambda I\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$. Δηλαδή, $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$.
Άρα, $In(A) = (2,0,0)$.

γ) $\left|A-\lambda I\right| = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0$. Δηλαδή, $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ και $\lambda_3 = 4$.
Άρα, $In(A) = (1,2,0)$.

Η αναγνώριση των επιφανίων στον χώρο δίνεται στον παρακάτω πίνακα

$In(A) = (3,0,0)$	Ελλειψοειδές
$In(A) = (2,0,1)$	Ελλειπτικό παραβολοειδές
$In(A) = (2,1,0)$	Μονόχωνο υπερβολοειδές
$In(A) = (1,2,0)$	Δίχωνο υπερβολοειδές
$In(A) = (1,1,1)$	Υπερβολικό παραβολοειδές
$In(A) = (1,0,2)$	Παραβολικός κύλινδρος

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες τεχνικές με εκείνες που χρησιμοποιήθηκαν στις δύο διαστάσεις, δηλαδή στο επίπεδο, μπορούμε και εδώ, δηλαδή στο χώρο, να απαλείψουμε τα γινόμενα *xy*, *xz*, ή *yz* με μία περιστροφή των καρτεσιανών αξόνων ή να απαλείψουμε πρωτοβάθμιους όρους με μία μεταφορά των αξόνων.

11.3.9 Παράδειγμα

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια η οποία δίνεται από την παρακάτω δευτεροβάθμια εξίσωση.

$$2x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 6xy - 5x + 3y = 2$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (7) έχουμε

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \qquad (8)$$

στην μορφή $x^T A x + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} x = 2$, όπου $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Για την εύρεση των ιδιοτιμών του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\left|A-\lambda I\right|_3 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(4-\lambda)(-4-\lambda)-9\right]$$

$$=(2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5)=0$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα *A* είναι $\lambda_1=5$, $\lambda_2=2$ και $\lambda_3=-5$. Άρα το $In(A)=(2,1,0)$ και επομένως η επιφάνεια είναι μονόχωνο υπερβολοειδές.

Λύνοντας την εξίσωση $(A-\lambda I_3)x=0$ για κάθε λ μπορούμε να βρούμε και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* έτσι ώστε να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα *P*.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, για την ιδιοτιμή $\lambda_2=5$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, για την ιδιοτιμή και για την ιδιοτιμή $\lambda_3=-5$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Επομένως ο ορθοκανονικός πίνακας *P* είναι ο

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Έστω $x=Py$. Η εξίσωση (8) μπορεί να γραφτεί ως

$$(Py)^T A(Py)+BPy=2$$

$$y^T\left(P^T AP\right)y+BPy=2$$

Τώρα,

$$P^T AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ και } BP = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 9/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Εάν $y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ τότε

$$y^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} y + \begin{pmatrix} -5 & 9/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} y = 2 .$$

Δηλαδή,

$$2x'^2 + 5y'^2 - 5z'^2 - 5x' + \frac{9}{\sqrt{10}} y' + \frac{3}{\sqrt{10}} z' = 2$$

Το επόμενο βήμα είναι να φτιάξουμε τέλεια τετράγωνα. Άρα,

$$2\left(x' - \frac{5}{4} \right)^2 + 5\left(y' + \frac{9}{10\sqrt{10}} \right)^2 - 5\left(z' - \frac{3}{10\sqrt{10}} \right)^2 = 2 + \frac{25}{8} + \frac{81}{200} - \frac{9}{200} = \frac{1097}{200}$$

Εάν τώρα $x'' = x' - \frac{5}{4}$, $y'' = y' + \frac{9}{10\sqrt{10}}$ και $z'' = z' - \frac{3}{10\sqrt{10}}$ η ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{9}{10\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{10\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{9}{10\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{10\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

η εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$2x''^2 + 5y''^2 - 5z''^2 = \frac{1097}{200}$$

ή

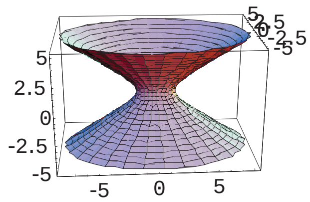
$$\frac{x''^2}{\frac{1097}{400}} + \frac{y''^2}{\frac{1097}{1000}} - \frac{z''^2}{\frac{1097}{1000}} = 1$$

ParametricPlot3D[

$$\left\{\sqrt{\frac{z^2}{\frac{1097}{1000}}+1}\,\sqrt{\frac{1097}{400}}\,\mathrm{Cos}[v],\ \sqrt{\frac{1097}{1000}}\,\sqrt{\frac{z^2}{\frac{1097}{1000}}+1}\,\mathrm{Sin}[v],\ z\right\},$$

{v, -2Pi, 2Pi},

{z, -5, 5}, ViewPoint -> {-0.208, -3.139, 1.247}]



$$\frac{\left(\sqrt{\frac{z^2}{\frac{1097}{1000}}+1}\,\sqrt{\frac{1097}{400}}\,\mathrm{Cos}[v]\right)^2}{\left(\frac{1097}{400}\right)}+\frac{\left(\sqrt{\frac{1097}{1000}}\,\sqrt{\frac{z^2}{\frac{1097}{1000}}+1}\,\mathrm{Sin}[v]\right)^2}{\left(\frac{1097}{1000}\right)}-\frac{(z)^2}{\left(\frac{1097}{1000}\right)}\ \text{// Simplify}$$

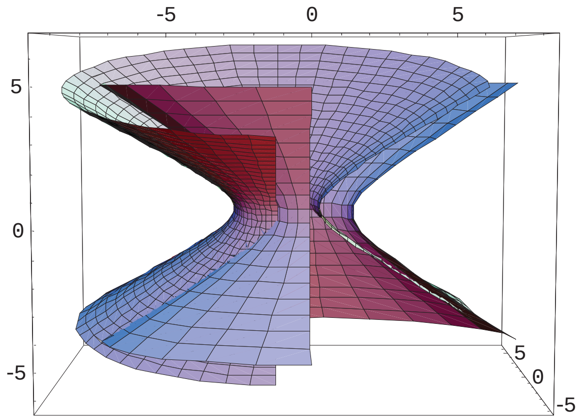
1

Επειδή

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3/\sqrt{10}&1/\sqrt{10}\\0&1/\sqrt{10}&-3/\sqrt{10}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3/\sqrt{10}&1/\sqrt{10}\\0&1/\sqrt{10}&-3/\sqrt{10}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\\frac{9}{10\sqrt{10}}\\-\frac{3}{10\sqrt{10}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3/\sqrt{10}&1/\sqrt{10}\\0&1/\sqrt{10}&-3/\sqrt{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\\frac{24}{100}\\\frac{18}{100}\end{pmatrix}$$

η γραφική παράσταση της εξίσωσης μας θα είναι μετατοπισμένη κατά το διάνυσμα $\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}&\frac{24}{100}&\frac{18}{100}\end{pmatrix}^T$ και θα προέρχεται από στροφή του παραπάνω σχήματος ως προς τον άξονα xx’ κατά γωνία $\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ που αντιστοιχεί σε γωνία 18.44^o.



Σημείωση. Στροφή ως προς τον άξονα xx’

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Στροφή ως προς τον άξονα yy’

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Στροφή ως προς τον άξονα zz’

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ασκήσεις 11.3

1) Να χαρακτηριστούν οι κωνικές τομές

α) $x^2+9y^2-9=0$, β) $25y^2-4x^2=100$, γ) $y^2-16=0$, δ) $4x^2+4y^2-9=0$

2) Για τις παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις να βρεθούν οι κωνικές τομές που αντιπροσωπεύουν

α) $x^2+2y^2-4x-4y+4=0$, β) $x^2+y^2-8x-6y=0$, γ) $x^2+xy+y^2=6$

δ) $2x^2-4xy-y^2+8=0$, ε) $9x^2+y^2+6xy-10\sqrt{10}x+10\sqrt{10}y+90=0$

στ) $5x^2+12xy-12\sqrt{13}x=36$, η) $x^2-y^2+2\sqrt{3}xy+6x=0$.

3) Για τις παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις να περιστρέψετε και να μετατοπίσετε τους καρτεσιανούς άξονες έτσι ώστε να βρεθούν η κωνικές τομές τους. Να χαρακτηριστούν οι κωνικές τομές, να βρεθούν οι εξισώσεις τους καθώς και να δοθεί η τελική τους θέση.

α) $9x^2-4xy+6y^2-10x-20y=5$, β) $3x^2-8xy-12y^2-30x-64y=0$

γ) $2x^2-4xy-y^2-4x-8y=-14$, δ) $21x^2+6xy+13y^2-114x+34y+73=0$

ε) $x^2-6xy-7y^2+10x+2y+9=0$, στ) $4x^2-20xy+25y^2-15x-6y=0$

11.4 Λύσεις Ασκήσεων

Ασκήσεις 11.1

1) α) $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}$, β) $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -3 & 9\end{bmatrix}$, γ) $A=\begin{bmatrix}5 & 5/2\\ 5/2 & 0\end{bmatrix}$, δ) $A=\begin{bmatrix}0 & -7/2\\ -7/2 & 0\end{bmatrix}$

2) α) $A=\begin{bmatrix}9 & 3 & -4\\ 3 & -1 & 1/2\\ -4 & 1/2 & 4\end{bmatrix}$, β) $A=\begin{bmatrix}1 & -5/2 & 9/2\\ -5/2 & 1 & 0\\ 9/2 & 0 & -3\end{bmatrix}$

γ) $A=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{bmatrix}$, δ) $A=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & -4\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ -4\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$

ε) $A=\begin{bmatrix}3 & -7/2 & 5/2\\ -7/2 & 4 & -2\\ 5/2 & -2 & -3\end{bmatrix}$

3) α) θετικά ορισμένη, β) αρνητικά ορισμένη, γ) θετικά ημιορισμένη,
δ) αρνητικά ημιορισμένη, ε) αόριστη, στ) αόριστη.

4) α) αόριστος, β) αόριστος, γ) θετικά ορισμένος, δ) αόριστος,
ε) θετικά και αρνητικά ορισμένος, στ) θετικά ορισμένος.

5) α) $k>4$, β) $k>2$, γ) $-\frac{1}{3}\sqrt{15}<k<\frac{1}{3}\sqrt{15}$

Ασκήσεις 11.2

1) α) $y_1^2+3y_2^2$, β) $y_1^2+6y_2^2$, γ) $y_1^2-y_2^2$, δ) $\left(1+\sqrt{17}\right)y_1^2+\left(1-\sqrt{17}\right)y_2^2$.

2) α) $y_1^2+7y_2^2+4y_3^2$, β) $7y_1^2+4y_2^2+y_3^2$, γ) $2y_2^2-7y_3^2$, δ) $\sqrt{10}y_2^2-\sqrt{10}y_3^2$.

3) α) $2x'^2-3y'^2$, β) $y_1^2+2y_2^2$, γ) $y_2^2-y_3^2$, δ) $4y_2^2$, ε) $-2y_1^2+5y_2^2-5y_3^2$
στ) $5y_2^2-5y_3^2$

Ασκήσεις 11.3

1) α) έλλειψη, β) υπερβολή, γ) παραβολή, δ) κύκλος.

2) α) έλλειψη, $\frac{x'^2}{2}+y'^2=1$, β) κύκλος, $\frac{x'^2}{5^2}+\frac{y'^2}{5^1}=1$, γ) έλλειψη, $\frac{x'^2}{12}+\frac{y'^2}{4}=1$
δ) υπερβολή, $3x'^2-2y'^2+8=0$ ή $-2x'^2+3y'^2+8=0$, δ) παραβολή,
$y''^2=-4x''$, ε) υπερβολή $\frac{x''^2}{4}-\frac{y''^2}{9}=1$, υπερβολή $\frac{x''^2}{9/8}-\frac{y''^2}{9/8}=1$.

3) α) έλλειψη, $2x''+y''^2=6$, β) υπερβολή, $13y''^2-4x''^2=81$, γ) υπερβολή,
$2x''^2-3y''^2=24$, δ) έλλειψη, $6x''^2+11y''^2=66$, ε) υπερβολή, $4y''^2-x''^2=0$,
στ) παραβολή, $\sqrt{29}x'^2-3y'=0$