Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΔΕΟ13 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge2_deo13.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο φοιτητή	<Όνομα Φοιτητή> <Επώνυμο Φοιτητή>

Κωδικός ΘΕ	ΠΛΗ 20	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Σύμβουλου	<Όνομα ΣΕΠ> <Επώνυμο ΣΕΠ>
Κωδικός Τμήματος	<ΤΜΗΜΑ>	Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (*ημέρα Παρασκευή*)	***Τετάρτη 15/3/2017***
Ακ. Έτος	2016–2017	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	**4η**	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

<u>Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή</u>: *Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	**0**

Υπογραφή Φοιτητή

Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου

Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2016-2017

Ε ρ γ α σ ί α 4η

Αλγόριθμοι, Θεωρία Γραφημάτων

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της Θεωρίας Γραφημάτων και μια επανάληψη των Αναδρομικών Αλγορίθμων.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας study.eap.gr το αργότερο μέχρι την* ***Τετάρτη 15/3/2017.***

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο αρχείο αυτό πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* ***5*** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Προηγούμενες εργασίες: 4η Εργασία των πέντε τελευταίων ακαδημαϊκών ετών 2011-2012, 2012-2013, 2013-2014, 2014-2015 και 2015-2016.

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ενδεικτικά αναφέρονται τα θέματα Θεωρίας Γραφημάτων στις εξεταστικές περιόδους των ετών 2011-2016.

   Συμπληρωματικό Υλικό στη Θεωρία Γραφημάτων: Στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://study.eap.gr/course/view.php?id=78 *διατίθενται σημειώσεις για τη Θεωρία Γραφημάτων του κ. Σ. Κοντογιάννη, μια συλλογή ασκήσεων (με τις λύσεις τους) του κ. Χ. Σαρίμβεη, και ο πίνακας αντιστοίχησης των όρων που χρησιμοποιούνται στους Τόμους Α και Β,* *του κ. Χ. Σαρίμβεη. Για την αποδεικτική μέθοδο της επαγωγής είναι πολύ χρήσιμη η μελέτη του παράλληλου υλικού του κ. Δ. Φωτάκη, το οποίο διατίθεται μαζί με τον σχετικό οδηγό μελέτης, επίσης στην παραπάνω διεύθυνση.*

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτημα	Μέγιστος βαθμός	Βαθμός
1	20	
2	30	
3	20	
4	20	
5	10	
Συνολικός Βαθμός:	**100**	**0**

Γενικά Σχόλια:
<γενικά σχόλια για την εργασία από το Σύμβουλο-Καθηγητή>

Ερωτήματα

Ερώτημα 1.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξοικείωση με τους αναδρομικούς αλγορίθμους και με τις επαγωγικές αποδείξεις.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #1 ΚΑΙ #2

Έστω A ένας πίνακας με θέσεις αριθμημένες από 1 έως n, ο οποίος περιέχει ακεραίους. Με `length(A)` αναφερόμαστε στο μήκος του πίνακα A, δηλαδή το n. Για δύο δείκτες i, j, συμβολίζουμε με A[i..j] τον πίνακα με $j - i + 1$ στοιχεία του οποίου τα στοιχεία είναι τα A[i], A[i+1],...,A[j]. Για παράδειγμα, εάν A=[3,5,1,2,8,9,4], τότε A[3..6] = [1,2,8,9].

Στον παρακάτω αλγόριθμο χρησιμοποιούμε τη διαδικασία `merge(A,B)`, η οποία παίρνει ως είσοδο δύο ταξινομημένους πίνακες (σε αύξουσα σειρά) και δίνει ως έξοδο ένα ταξινομημένο πίνακα ο οποίος περιέχει όλα τα στοιχεία των δύο πινάκων. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα της merge([1,4,6,6],[2,3,4,7]) είναι ο πίνακας [1,2,3,4,4,6,6,7].

```
      procedure mSort( A )
            n := length(A)
(*)         if (n = 1) then  return ( A )
            m := (n+1)/2  // ακέραια διαίρεση
            B := mSort(A[1..m])
            C := mSort(A[m+1..n])
            return ( merge(B,C) )
```

1) Διατυπώστε τις αναδρομικές κλήσεις που θα γίνουν κατά την εκτέλεση της `mSort([2,4,1,8,5])`.
2) Εξηγήστε ποιός είναι ο ρόλος της γραμμής (*). Εξηγήστε τι θα γίνει εάν αντικαταστήσουμε τη γραμμή (*) με τη γραμμή (**) λαμβάνοντας υπόψη ότι τώρα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο `mSort()` μόνο για πίνακες μήκους $n \geq 2$:

```
(**)        if (n = 2) then
                  if (A[1] <= A[2]) then return ([A[1],A[2]])
                  else return ([A[2],A[1]])
```

3) Δείξτε ότι ο αλγόριθμος `mSort(A)` πάντα τερματίζει.
4) Υποθέστε ότι η διαδικασία `merge(B,C)`, κατά την εκτέλεση της, κάνει το πολύ max{`length(B)`,`length(C)`} συγκρίσεις στοιχείων. Για ένα πίνακα A με μήκος

n, συμβολίζουμε με $\mathrm{T}(n)$ το πλήθος των συγκρίσεων που κάνει η `mSort(A)`. Ειδικότερα, τη σύγκριση `n = 1` δεν τη μετράμε καθώς τα `n` και `1` είναι δείκτες και όχι στοιχεία του πίνακα. Για πίνακες με μήκος 2^k, δείξτε με επαγωγή στο k ότι

$$\mathrm{T}(2^k) \leq k\,2^k.$$

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 2.

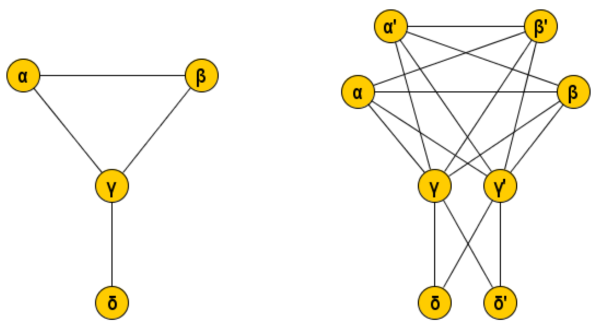
Ελέγχει τον βαθμό κατανόησης των βασικών εννοιών των επαγόμενων υπογραφημάτων, διμερή γραφημάτων, της συνεκτικότητας, του «κύκλου Euler» και του «κύκλου Hamilton».

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #3 ΚΑΙ #4

Σε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G *διπλασιάζουμε* <u>κάθε κορυφή</u> του G ως εξής:

- για κάθε κορυφή v του G προσθέτουμε μια νέα κορυφή w τέτοια ώστε η w να έχει την ίδια γειτονιά με τη v στο νέο γράφημα. Προσέξτε ότι η νέα κορυφή w δεν ενώνεται με την αρχική κορυφή v.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{D}(G)$ το γράφημα που προκύπτει από το G αν εκτελέσουμε τους διπλασιασμούς σε κάθε κορυφή του G. Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε ένα γράφημα G και το γράφημα $\mathrm{D}(G)$ που προκύπτει μετά τους διπλασιασμούς.



G *D(G)*

Στα ακόλουθα ερωτήματα θεωρούμε ένα οποιοδήποτε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές.

1) Δείξτε ότι οι ακμές του D(G) είναι $4m$. Επίσης δείξτε ότι το μέγιστο πλήθος ακμών του D(G) είναι $2n(n-1)$.
2) Δείξτε ότι το ίδιο το γράφημα G είναι επαγόμενο υπογράφημα του D(G).
3) Δείξτε ότι αν το G έχει Hamilton κύκλο τότε και το D(G) έχει Hamilton κύκλο. Επίσης δώστε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή ένα παράδειγμα όπου το D(G) έχει Hamilton κύκλο αλλά το G δεν έχει Hamilton κύκλο.
4) Συμβολίζουμε με ω(G) την τάξη της μέγιστης κλίκας στο G και με ω(D(G)) την τάξη της μέγιστης κλίκας στο D(G). Από το υποερώτημα 2) γνωρίζουμε ότι $\omega(G) \leq \omega(D(G))$. Δείξτε ότι $\omega(G) = \omega(D(G))$.
5) Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται στο βιβλίο Γ. Βούρου (σελίδα 107), για να έχει ένα γράφημα κύκλο Euler θα πρέπει να είναι συνεκτικό. Με βάση το σκεπτικό αυτό δείξτε ότι το G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το D(G) έχει Euler κύκλο.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 30

Ερώτημα 3.

Αποτελεί εξάσκηση στον τυπικό ορισμό απλών γραφοθεωρητικών ιδιοτήτων με χρήση της πρωτοβάθμιας γλώσσας και στην ερμηνεία προτάσεων της πρωτοβάθμιας γλώσσας σε γραφήματα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #5 ΚΑΙ #6

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει δύο κατηγορηματικά σύμβολα E και P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων, το σύμβολο E ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία συνδέονται με ακμή (ειδικότερα, το (a,a) δεν ανήκει ποτέ στη σχέση E) και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a,b) για τα οποία υπάρχει μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές a και b (ειδικότερα, το ζευγάρι (a,a) ανήκει πάντα στη σχέση καθώς η κορυφή a συνδέεται με τον εαυτό της με το κενό μονοπάτι).

Α. Γράψτε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής, οι οποίες στη συγκεκριμένη ερμηνεία να εκφράζουν ότι:

1. Το γράφημα είναι συνεκτικό.
2. Το γράφημα είναι πλήρες.

3. Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλίκα.

Β. Γράψτε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής, οι οποίες στη συγκεκριμένη ερμηνεία να εκφράζουν ότι:

1. Το γράφημα έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες.
2. Κάθε ζευγάρι κορυφών συνδέεται με μονοπάτι μήκους το πολύ 2.
3. Εκφράστε σε φυσική γλώσσα τον παρακάτω τύπο και δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος με 5 τουλάχιστον κορυφές το οποίο να τον ικανοποιεί.
   $\exists x \exists y(\neg P(x,y)) \wedge \forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow ((x=y) \vee E(x,y) \vee \exists z(E(x,z) \wedge E(y,z)))$

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 4.

Το ακόλουθο ερώτημα αποτελεί εξάσκηση στα επαγόμενα υπογραφήματα και στην εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής σε γραφήματα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #7 ΚΑΙ #8

1) Έστω ένα απλό γράφημα G με n κορυφές το οποίο δεν περιέχει κλίκα με $r + 1$ κορυφές, όπου $1 \leq r < n$.
   a) Δείξτε ότι αν αφαιρέσουμε ένα οποιοδήποτε υποσύνολο κορυφών από το G τότε το γράφημα που προκύπτει δεν περιέχει κλίκα με $r + 1$ κορυφές.
   b) Υποθέτουμε ότι διαμερίζουμε τις κορυφές του G στα σύνολα Α και Β τέτοιες ώστε οι κορυφές του Α να σχηματίζουν κλίκα στο G με r κορυφές. Δείξτε ότι το πλήθος των ακμών μεταξύ του Α και Β (δηλαδή εκείνες οι ακμές με ένα άκρο στο Α και το άλλο στο Β) είναι το πολύ $(r-1)(n-r)$.
   c) Δείξτε ότι υπάρχουν το πολύ $\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$ ακμές στο G.

   Υπόδειξη: μπορείτε να δείξτε τον ισχυρισμό επαγωγικά ως προς το πλήθος των κορυφών του G και εκμεταλλευόμενοι τα προηγούμενα υποερωτήματα.
2) Συμβολίζουμε με P_3 το γράφημα με τις κορυφές α, β, γ και τις ακμές $\{\alpha,\beta\}$ και $\{\beta,\gamma\}$. Δείξτε ότι ένα απλό γράφημα είναι η ένωση από κλίκες (δηλαδή, κάθε συνεκτική του συνιστώσα είναι κλίκα) αν και μόνο αν δεν περιέχει το P_3 ως επαγόμενο υπογράφημα.

Υπόδειξη: για την μια κατεύθυνση προσπαθήστε να αποδείξετε τον ισχυρισμό επαγωγικά ως προς το μήκος ενός οποιουδήποτε μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα, από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι Σωστή (υπάρχει τέτοιο γράφημα) ή Λάθος (δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα). Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #9 ΚΑΙ #10

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπο-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. Θεωρούμε ότι τα γραφήματα του ερωτήματος είναι απλά και μη κατευθυνόμενα.

Α. Στα παρακάτω υποερωτήματα καλείστε να εξετάσετε αν υπάρχει το γράφημα που περιγράφεται.

1. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα με ακολουθία βαθμών (5, 5, 5, 5, 3, 3).
2. **(Σ/Λ)** Υπάρχει διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών (3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1).
3. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα όπου κάθε επαγόμενο υπογράφημά του είναι συνεκτικό και το ίδιο το γράφημα δεν είναι κλίκα.
4. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα με 5 κορυφές που είναι ίδιο με το συμπλήρωμά του.

Β. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

1. **(Σ/Λ)** Σε κάθε συνεκτικό γράφημα υπάρχει ένα υπογράφημα που έχει Hamilton μονοπάτι.
2. **(Σ/Λ)** Το συμπλήρωμα από ένα διμερές γράφημα έχει μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο με μέγεθος το πολύ 2.
3. **(Σ/Λ)** Αν P είναι ένα μονοπάτι ενός γραφήματος G τέτοιο ώστε κάθε κορυφή εκτός του P να έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο P τότε το G είναι συνεκτικό.

4. **(Σ/Λ)** Αν *P* είναι ένα μονοπάτι ενός γραφήματος *G* τέτοιο ώστε κάθε κορυφή εκτός του *P* να έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο *P* τότε το *G* έχει Hamilton μονοπάτι.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 10