

Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2017-2018

Εργασία 6η

Ερωτήματα – Μέρος Α΄

Ερώτημα 1.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε βασικές ιδιότητες δένδρων και ειδικότερα στα ανεξάρτητα σύνολα κορυφών ενός δέντρου.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #1, #5

- A. Η διάμετρος ενός δένδρου T ($\text{diam}(T)$) είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών του δένδρου (Τόμος Β΄, σελ.151). Ένα ανεξάρτητο σύνολο είναι ένα σύνολο κορυφών με καμία μεταξύ τους ακμή. Να δείξετε ότι ένα δένδρο T περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $\left\lfloor \frac{\text{diam}(T)+1}{2} \right\rfloor$.

(Σημείωση: Για κάθε πραγματικό αριθμό a , η παράσταση $\lfloor a \rfloor$ συμβολίζει το μικρότερο ακέραιο ο οποίος είναι μεγαλύτερος ή ίσος με a .)

Ερώτημα 2.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε θέματα σχετικά με τους βαθμούς των κορυφών ενός δέντρου. Είναι σημαντική η χρήση του Λήμματος της Χειραψίας σε όλα τα υποερωτήματα.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #2, #3

- A. Να δείξετε ότι, αν σε ένα δένδρο T με n κορυφές δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό 2, τότε ο αριθμός των φύλλων του T είναι μεγαλύτερος από $\frac{n}{2}$.

Ερώτημα 3.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε ιδιότητες συνδετικών δένδρων και συγκεκριμένα τον προσδιορισμό του αριθμού των συνδετικών δέντρων ενός γραφήματος με ετικέτες στις κορυφές του καθώς και την εύρεση του βάρους ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου σε ένα γράφημα με ειδικά βάρη στις ακμές του.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #4, #5, #6

Θεωρήστε ότι όλα τα γραφήματα του υποερωτήματος έχουν ετικέτες στις κορυφές τους (συνεπώς αυτές είναι διακεκριμένες).

Error! Reference source not found. Error! Reference source not found.

Α. Προσδιορίστε τον αριθμό των συνδετικών δέντρων των παρακάτω γραφημάτων και περιγράψτε τη διαδικασία απαρίθμησής τους.

Α.1 C_n (κύκλος με n κορυφές) και

Α.2 K_4 .

Ερώτημα 4.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση στις ιδιότητες των δέντρων και των υποδέντρων τους.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #4, #7

Α.

Α.1 Για ποιες τιμές του n υπάρχει γράφημα G με n κορυφές τέτοιο ώστε τόσο το ίδιο όσο και το συμπλήρωμά του δεν περιέχουν κύκλο;

Α.2 Δείξτε ότι για κάθε δέντρο T και οποιεσδήποτε τρεις (όχι απαραίτητα διαφορετικές) κορυφές x, y, z , τα τρία μονοπάτια P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} που συνδέουν τα ζεύγη κορυφών xy, yz, xz , αντίστοιχα, περιέχουν κάποια κοινή κορυφή.

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας σε λιγότερο από 15 λεπτά. Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπό-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) και αιτιολογώντας συνοπτικά σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #2, #3, #8, #9

Α.

1. Δεδομένου ότι ένα δένδρο είναι διμερές γράφημα, η προσθήκη μίας επιπλέον ακμής πάντα παράγει διμερές γράφημα.
2. Το συμπληρωματικό γράφημα ενός οποιουδήποτε δένδρου είναι συνδεδεμένο.
3. Δεν υπάρχει δένδρο με ίσο αριθμό εσωτερικών κόμβων και φύλλων.
4. Για οποιοδήποτε συνδεδεμένο γράφημα G και οποιαδήποτε δύο συνδετικά του δένδρα T_1, T_2 , ισχύει ότι τα T_1, T_2 έχουν τουλάχιστον μία κοινή ακμή.

Error! Reference source not found. Error! Reference source not found.