ΠΛΗ20, ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΛΙΟΥ 2018, ΜΕΡΟΣ Β'

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 (μονάδες 25)

α) Έστω ότι δοκιμάζουμε αναγραμματισμούς της λέξης ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ. Να υπολογιστούν όλοι οι δυνατοί αναγραμματισμοί, για τις εξής περιπτώσεις (χωριστά):

i) Δίχως περιορισμό.
ii) Όλα τα «Α» μένουν στη θέση τους.
iii) Τουλάχιστον ένα «Α» μένει στη θέση του. (*Υπόδειξη: υπολογίστε πόσοι αναγραμματισμοί έχουν «Α» στη θέση 2, πόσοι έχουν «Α» στη θέση 6, και πόσοι έχουν «Α» τόσο στη θέση 2 όσο και στη θέση 6.*)

β) Έστω ότι μας ενδιαφέρει το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων για το εξής σύστημα:

$$X + 2Y + 3Z \ = n.$$

Να δοθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις και να προσδιοριστεί ο όρος που δίνει το αποτέλεσμα της ζητούμενης μέτρησης για τις εξής περιπτώσεις:

i) Δίχως άλλον περιορισμό.
ii) Επιπρόσθετα, επιθυμούμε να ισχύει ότι $X + Y \ \geq \ 4$. (*Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε μια βοηθητική <u>μη αρνητική</u> ακέραια μεταβλητή S, για τη μετατροπή της ανισότητας σε ισότητα, και στη συνέχεια κάνετε αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση.*)

Απάντηση

α)

i) Πρόκειται για μετάθεση 9 αντικειμένων (τα γράμματα της λέξης), εκ των οποίων υπάρχουν τρεις ομάδες ομοιότητας (τα 2 Α, τα 2 Ι και τα 2 Κ). Το πλήθος των μεταθέσεων αυτών είναι λοιπόν $\frac{9!}{2!2!2!} = 45360$.

ii) Σε αυτή την περίπτωση τα δυο Α μένουν στις αρχικές τους θέσεις (2η και 6η θέση). Τα υπόλοιπα 7 γράμματα τοποθετούνται στις 7 θέσεις που απομένουν με όλους τους δυνατούς τρόπους. Αυτή τη φορά υπάρχουν δυο ομάδες ομοιότητας (τα 2 Ι και τα 2 Κ), άρα οι διαφορετικές μεταθέσεις σε αυτή την περίπτωση είναι $\frac{7!}{2!2!} = 1260$.

iii) Έστω X και Y τα σύνολα των μεταθέσεων των γραμμάτων της λέξης ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ που έχουν Α στη 2η θέση (για το X) και Α στην 6η θέση (για το Y). Αναζητάμε τις μεταθέσεις που έχουν Α στη 2η θέση, ή Α στην 6η θέση (δεν απαγορεύεται να ισχύουν και τα δύο). Δηλαδή, αναζητάμε τον πληθάριθμο του συνόλου $|X \cup Y|$. Δεν είναι ορθό να εφαρμόσουμε μόνο τον κανόνα του αθροίσματος διότι, όπως είδαμε στην απάντηση του υποερωτήματος α) ii), υπάρχουν μεταθέσεις που έχουν Α και στη 2η και στην 6η θέση ταυτόχρονα. Μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε την αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού:

$$|X \cup Y| = \ |X| + \ |Y| - |X \cap Y| = \frac{8!}{2!\,2!} + \frac{8!}{2!\,2!} - \frac{7!}{2!\,2!} = 20160 - 1260 \ = \ 18900$$

β)

i) Πρόκειται για πείραμα ρίψης n όμοιων σφαιριδίων (οι μονάδες του σταθερού όρου) σε τρεις διακεκριμένες υποδοχές, μια για το X, μια για το $2Y$ και μια για το $3Z$.

- Η πρώτη υποδοχή (για το X) δέχεται οποιοδήποτε πλήθος σφαιριδίων.
- Η δεύτερη υποδοχή (για το $2Y$) δέχεται οποιοδήποτε άρτιο πλήθος σφαιριδίων.
- Η τρίτη υποδοχή (για το $3Z$) δέχεται οποιοδήποτε πλήθος σφαιριδίων που είναι πολλαπλάσιο του 3.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η ζητούμενη (συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση είναι η εξής:

$$A(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

Αναζητάμε τον συντελεστή του όρου x^n στη συνάρτηση $A(x)$.

ii) Αυτή τη φορά θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι $X + Y \geq 4$. Θεωρούμε τη μη-αρνητική ακέραια (βοηθητική) μεταβλητή $S = X + Y - 4 \geq 0$, προκειμένου να εξασφαλίσουμε τη ζητούμενη ανισότητα. Κάνουμε την εξής αντικατάσταση στην αρχική μας εξίσωση, που ισοδυναμεί με την παραπάνω εξίσωση: $S + 4 = X + Y$:

$$(X + Y) + Y + 3Z = n \Leftrightarrow S + Y + 3Z = n - 4$$

Αναζητάμε το πλήθος των μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων στην τελευταία εξίσωση, δίχως περιορισμό πλέον. Πρόκειται για ρίψη n – 4 όμοιων σφαιριδίων σε 3 διακεκριμένες υποδοχές (μια για το S, μια για το Y και μια για το 3Z). Η ζητούμενη (συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση είναι η εξής:

$$B(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

Αναζητάμε τον συντελεστή του όρου x^{n-4} στη συνάρτηση $B(x)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 (μονάδες 35)

α) i) Έστω φ και ψ προτασιακοί τύποι για τους οποίους ισχύει ότι $\varphi \vDash \psi$ και ο φ δεν είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον ψ ($\varphi \not\equiv \psi$). Δείξτε ότι υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί τον ψ αλλά δεν ικανοποιεί τον φ.

ii) Έστω το σύνολο των n προτασιακών τύπων $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ που είναι όλοι ορισμένοι σε k προτασιακές μεταβλητές και για τους οποίους ισχύει $\varphi_1 \vDash \varphi_2, \varphi_2 \vDash \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1} \vDash \varphi_n$. Δείξτε, χρησιμοποιώντας το υποερώτημα α) i), ότι αν $n > 2^k + 1$, τότε δύο τουλάχιστον από τους τύπους $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ είναι ισοδύναμοι.

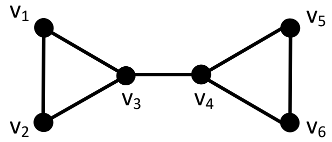
β) Δώστε τυπική απόδειξη του τύπου $(\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \neg\psi) \to (\varphi \to \neg\chi))$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλα τα γνωστά θεωρήματα (Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής, Απαγωγής σε άτοπο, κλπ.) εκτός από τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας.

γ) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά (μη κατευθυνόμενα) γραφήματα και περιλαμβάνει δύο διμελή κατηγορηματικά σύμβολα P και C. Το $P(x, y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή ενώ το $C(x, y)$ ότι οι κορυφές x και y βρίσκονται μαζί σε απλό κύκλο. Το $C(x, x)$ δεν είναι αληθές για καμία κορυφή x. Στη γλώσσα αυτή:

i) Δώστε τύπο $\varphi(x, y)$ που να δηλώνει: «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή η οποία είναι γέφυρα» (*υπενθύμιση*: μια ακμή λέγεται γέφυρα αν η αφαίρεσή της αυξάνει το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος).

ii) Δώστε τύπο φ_1 που να χρησιμοποιεί σαν υποτύπο τον $\varphi(x, y)$ του υποερωτήματος γ) i) και να δηλώνει: «το γράφημα είναι δάσος».

iii) Βρείτε στο παρακάτω γράφημα ένα ζεύγος κορυφών (v_i, v_j) που να επαληθεύει τον τύπο $\psi(v_i, v_j)$, όπου $\psi(x, y) = \exists u \exists w (u \neq w \wedge C(x, u) \wedge C(y, w) \wedge \neg C(x, y))$. Εξηγήστε τον ρόλο κάθε μεταβλητής του τύπου στην απάντησή σας.



Απάντηση

α)

i) Εφόσον ισχύει ότι $\varphi \vDash \psi$, κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τον φ ικανοποιεί και τον ψ. Επειδή όμως και $\varphi \not\equiv \psi$, δεν μπορεί ο ψ να ικανοποιείται μόνο από τις αποτιμήσεις που ικανοποιούν τον φ. Άρα υπάρχει μία τουλάχιστον αποτίμηση που ικανοποιεί τον ψ αλλά δεν ικανοποιεί τον φ.

ii) Υπάρχουν 2^k διαφορετικές αποτιμήσεις των k προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται στους τύπους $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Ας υποθέσουμε, με σκοπό το άτοπο, ότι δεν υπάρχουν δύο ισοδύναμοι τύποι μεταξύ των $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Τότε όμως από το υποερώτημα α) i) έχουμε ότι η ακολουθία ταυτολογικών συνεπαγωγών $\varphi_1 \vDash \varphi_2, \varphi_2 \vDash \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1} \vDash \varphi_n$ υποδηλώνει ότι για δύο οποιουσδήποτε διαδοχικούς τύπους φ_i και φ_{i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$, ο φ_{i+1} επαληθεύεται από τις αποτιμήσεις που επαληθεύουν τον φ_i και μία τουλάχιστον ακόμη. Άρα, ακόμη και αν ο φ_1 δεν ικανοποιείται από κάποια αποτίμηση (είναι δηλαδή αντίφαση), ο φ_n θα πρέπει να ικανοποιείται από $n-1$ τουλάχιστον αποτιμήσεις. Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή δίδεται ότι $n > 2^k + 1$.

β)

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απαγωγής τρεις φορές, αρκεί να δείξουμε ότι $\{\varphi \to \psi, \chi \to \neg\psi, \varphi\} \vdash \neg\chi$. Η τελευταία όμως τυπική απόδειξη προκύπτει αν δειχθεί ότι το σύνολο $\{\varphi \to \psi, \chi \to \neg\psi, \varphi, \chi\}$ είναι αντιφατικό. Έχουμε λοιπόν:

1. $\varphi \to \psi$	Υπόθεση
2. $\chi \to \neg\psi$	Υπόθεση
3. φ	Υπόθεση
4. χ	Υπόθεση
5. ψ	1,3 MP
6. $\neg\psi$	2,4 MP

Οι δύο τελευταίοι τύποι δείχνουν το ζητούμενο.

γ)

i) Μία ακμή (x, y) είναι γέφυρα αν και μόνο αν τα άκρα της δεν ανήκουν σε κοινό κύκλο διότι αν ανήκαν τότε η αφαίρεση της ακμής δεν θα είχε σαν αποτέλεσμα οι κορυφές x και y να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Με βάση αυτή την παρατήρηση ο ζητούμενος τύπος είναι:

$$\varphi(x, y) \; = \; P(x, y) \wedge \neg C(x, y)$$

ii) Ένα δάσος είναι ένα γράφημα στο οποίο κάθε ακμή είναι γέφυρα. Με βάση αυτή την ιδιότητα ο ζητούμενος τύπος είναι:

$$\varphi_1 = \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \varphi(x, y))$$

Παρατήρηση: Αν στον παραπάνω τύπο αντικατασταθεί ο $\varphi(x, y)$ από το υποερώτημα γ) i) τότε παίρνουμε τον τύπο

$$\varphi_1 \equiv \forall x \forall y (\neg P(x, y) \vee \neg C(x, y)),$$

ο οποίος, επειδή έχουμε απλά γραφήματα, είναι ισοδύναμος με τον

$$\varphi_1 \equiv \forall x \forall y \neg C(x, y),$$

που δηλώνει «το γράφημα δεν έχει κύκλο», που είναι ο αρχικός ορισμός του δάσους.

iii) Ο τύπος $\psi(x, y)$ δηλώνει: «δεν υπάρχει κύκλος που να περιλαμβάνει τις κορυφές x και y ενώ υπάρχουν δύο διαφορετικές κορυφές, που η μία βρίσκεται σε κοινό κύκλο με την x και η άλλη με την y». Ένα τέτοιο ζευγάρι είναι π.χ. η κορυφή v_1 στον ρόλο της x και η v_5 στον ρόλο της y. Σε αυτή την περίπτωση τον ρόλο των u και w παίζουν αντίστοιχα οι v_2 και v_6. Παρατηρούμε ότι οι v_1 και v_5 δεν βρίσκονται σε κοινό κύκλο ενώ η πρώτη βρίσκεται σε κύκλο με την v_2 και η δεύτερη με την v_6.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 (μονάδες 24)

α) Έστω G ένα επίπεδο συνεκτικό γράφημα που είναι 3-κανονικό και κάθε όψη του περικλείεται από 4 ή 6 ακμές. Δείξτε ότι το πλήθος των όψεων του G που περικλείονται από 4 ακμές είναι 6. (*Υπόδειξη: εκμεταλλευτείτε το γεγονός ότι το άθροισμα των ακμών που περικλείουν όλες τις όψεις είναι ίσο με το διπλάσιο των ακμών.*)

β) Έστω G ένα απλό μη κατευθυντικό (μη κατευθυνόμενο) γράφημα που δεν έχει κύκλους. Δείξτε ότι αν προσθέσουμε μια νέα κορυφή x στο G και την συνδέσουμε με κάποιες κορυφές του G, τότε το γράφημα που προκύπτει δεν έχει κύκλους αν και μόνο αν η x έχει το πολύ έναν γείτονα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του G.

γ) Βασιζόμενοι στο γεγονός ότι κάθε επίπεδο γράφημα περιέχει μια κορυφή με βαθμό το πολύ πέντε, δείξτε επαγωγικά, ως προς το πλήθος των κορυφών, ότι <u>οι ακμές</u> κάθε επίπεδου γραφήματος διαμερίζονται σε πέντε, το πολύ, γραφήματα που δεν έχουν κύκλους. (*Υπόδειξη: ως προς τη βάση της επαγωγής εξετάστε τις ακμές ενός επίπεδου γραφήματος με το πολύ 4 κορυφές, ενώ για το επαγωγικό βήμα αφαιρέστε την κορυφή με βαθμό το πολύ πέντε και εκμεταλλευτείτε το υποερώτημα β).*)

Απάντηση

α) Συμβολίζουμε με n και m το πλήθος των κορυφών και ακμών του G. Από το Λήμμα της χειραψίας και το γεγονός ότι κάθε κορυφή έχει βαθμό 3, έχουμε:

$$\sum d(v) = 3n = 2m \qquad (1)$$

Επίσης, συμβολίζουμε με f_4 και f_6 το πλήθος των όψεων που περικλείονται από 4 και 6 ακμές, αντίστοιχα. Επειδή κάθε ακμή ανήκει στο σύνορο δύο όψεων θα έχουμε:

$$4f_4 + 6f_6 = 2m \qquad (2)$$

Εφόσον το G είναι συνεκτικό επίπεδο γράφημα από τον τύπο του Euler, θα έχουμε:

$$n + f = m + 2,$$

όπου $f = f_4 + f_6$ το πλήθος των όψεων του G. Η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφτεί ως:

$$n + f_4 + f_6 = m + 2 \Leftrightarrow 6n + 6f_4 + 6f_6 = 6m + 12$$

Από την σχέση (2), θα έχουμε:

$$6n + 2f_4 + 2m = 6m + 12 \Leftrightarrow 6n + 2f_4 = 4m + 12 \Leftrightarrow 3n + f_4 = 2m + 6$$

Και τελικά από την σχέση (1), καταλήγουμε στο ζητούμενο: $f_4 = 6$.

β) Έστω ότι η x έχει το πολύ έναν γείτονα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα. Ας υποθέσουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει κύκλος στο γράφημα που προκύπτει μετά την πρόσθεση της x. Ο κύκλος αυτός θα πρέπει να περιέχει την x και κορυφές που βρίσκονται σε μια συνεκτική συνιστώσα, εφόσον κάθε συνεκτική συνιστώσα του G δεν έχει κύκλους. Αυτό σημαίνει ότι η x έχει τουλάχιστον δύο γείτονες στην ίδια συνεκτική συνιστώσα και καταλήγουμε σε άτοπο.
Έστω ότι η x έχει τουλάχιστον δύο γείτονες u και v σε μια συνεκτική συνιστώσα του G. Παρατηρούμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι μεταξύ των u και v. Τότε το μονοπάτι αυτό, μαζί με τη x σχηματίζουν έναν κύκλο στο γράφημα που προκύπτει με τη προσθήκη της x.

γ) Δείχνουμε το ζητούμενο επαγωγικά ως προς το πλήθος των κορυφών n.

Βάση της επαγωγής: Κάθε επίπεδο γράφημα με το πολύ 4 κορυφές ($n \leq 4$) έχει το πολύ 6 ακμές. Οι 6 ακμές διαμερίζονται σε 5 άκυκλα γραφήματα, όπου ένα από αυτά έχει δύο ακμές και τα υπόλοιπα γραφήματα περιέχουν μια μόνο ακμή. Επομένως δεν υπάρχει κύκλος σε κανένα από αυτά τα γραφήματα, καθώς για να σχηματιστεί κύκλος χρειάζονται τουλάχιστον 3 ακμές.

Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε ότι οι ακμές κάθε επίπεδου γραφήματος με $< n$ κορυφές μπορούν να διαμεριστούν σε 5 άκυκλα γραφήματα.

Επαγωγικό βήμα: Έστω G ένα επίπεδο γράφημα με n κορυφές. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια κορυφή x στο G με βαθμό το πολύ 5. Έστω v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 οι γειτονικές κορυφές της x. Σβήνουμε τη x από το G και παρατηρούμε ότι το $G - x$ είναι επίπεδο γράφημα (ως υπογράφημα επίπεδου γραφήματος) και περιέχει $n - 1$ κορυφές. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση στο $G - x$ και παρατηρούμε ότι οι ακμές του $G - x$ διαμερίζονται σε 5 άκυκλα γραφήματα G_1, G_2, G_3, G_4, G_5. Στόχος μας είναι να μοιράσουμε τις 5 ακμές που ακουμπάνε στη x στα 5 αυτά γραφήματα. Κάθε ακμή xv_i τη μεταφέρουμε στο γράφημα G_i. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το G_i μετά τη προσθήκη της xv_i παραμένει άκυκλο. Αυτό προκύπτει από το υποερώτημα β) καθώς η x έχει έναν το πολύ γείτονα σε κάθε G_i και η x δεν ανήκει σε κανένα από τα G_i του γραφήματος $G - x$. Άρα κάθε G_i μετά τη προσθήκη της ακμής xv_i παραμένει άκυκλο που είναι και το ζητούμενο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 (μονάδες 16)

Έστω G ένα απλό, μη κατευθυντικό (μη κατευθυνόμενο), ακυκλικό γράφημα με $2k$ κορυφές περιττού βαθμού, για ακέραιο $k \geq 1$.

α) Θεωρήστε ένα μονοπάτι P μέγιστου μήκους στο G.
- i) Δείξτε ότι τα άκρα (η πρώτη και η τελευταία κορυφή) του P έχουν βαθμό 1.
- ii) Έστω $G' = G - P$ το γράφημα που προκύπτει από το G με την αφαίρεση των ακμών του P. Δείξτε ότι το G' έχει $2k - 2$ κορυφές περιττού βαθμού.

β) Δείξτε ότι το G περιέχει k μη-τετριμμένα (δηλ., με τουλάχιστον μια ακμή) μονοπάτια χωρίς κοινές ακμές. (*Υπόδειξη: εφαρμόστε το υποερώτημα α) ii) διαδοχικά, μια φορά για κάθε μονοπάτι που βρίσκετε.*)

Απάντηση

α)
- i) Έστω x και y η πρώτη και η τελευταία κορυφή του P. Θα δείξουμε ότι η x έχει βαθμό 1. Έστω z η γειτονική κορυφή της x στο P. Ας υποθέσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει ακμή xw όπου $w \neq z$. Αν $w \in P$ τότε το τμήμα του P από την x στην w μαζί με την ακμή xw δημιουργούν κύκλο, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το G είναι ακυκλικό. Επομένως, $w \notin P$, το οποίο σημαίνει ότι το μονοπάτι P μπορεί να επεκταθεί με την προσθήκη της ακμής xw. Αυτό όμως αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το P είναι μέγιστο. Άρα, σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε η κορυφή x δεν μπορεί να έχει βαθμό > 1. Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί και για την y, επομένως η πρόταση έχει αποδειχθεί.

ii) Εξετάζουμε το βαθμό που έχουν στο G' οι κορυφές του μονοπατιού P, αφού ο βαθμός των υπόλοιπων κορυφών δεν επηρεάζεται. Παρατηρούμε ότι ο βαθμός κάθε κορυφής $w \in P - \{x, y\}$ μειώνεται κατά 2 στο G'. Επομένως, αν ο βαθμός της w στο G είναι άρτιος, τότε παραμένει άρτιος και στο G'. Ομοίως, αν ο βαθμός της w στο G είναι περιττός, τότε παραμένει περιττός και στο G'. Από την άλλη, ο βαθμός των x και y μειώνεται κατά 1, και επομένως, από το υποερώτημα α) i) γίνεται 0, δηλαδή άρτιος. Αυτό σημαίνει ότι το G' έχει 2 λιγότερες κορυφές περιττού βαθμού σε σχέση με το G, δηλαδή $2k - 2$.

β) Επιχειρηματολογούμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε k φορές τη διαδικασία που περιγράφει το υποερώτημα α) ii), ως εξής:
Για $i = 1,2,\dots,k$

Έστω P ένα μέγιστο μονοπάτι στο G.

Θέτουμε $P_i = P$ και $G = G - P$.

Αρχικά, το γράφημα G έχει $2k$ κορυφές περιττού βαθμού. Από το υποερώτημα α) ii) γνωρίζουμε ότι κάθε επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας μειώνει το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού κατά 2. Επομένως, θα εκτελεστεί ακριβώς k φορές μέχρι να μην υπάρχουν πλέον κορυφές περιττού βαθμού στο G.

Τέλος, είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι τα μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_k$ δεν έχουν κοινές ακμές. Μόλις υπολογίσουμε το επόμενο μονοπάτι P_i, αφαιρούμε τις ακμές του από το γράφημα G, επομένως οι ακμές αυτές δεν μπορούν να συμπεριληφθούν σε κάποιο επόμενο μονοπάτι P_j, $j > i$.