Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2016-2017

Ε ρ γ α σ ί α 5η - Απαντήσεις

Θεωρία Γραφημάτων

Ερώτημα 1.

Το ερώτημα αυτό έχει να κάνει με τις έννοιες του χρωματικού αριθμού, την επιπεδότητα ενός γραφήματος όπως και ισομορφισμού γραφημάτων.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #2, #7, #5, #6

Έστω H_n για $n \geq 2$ το γράφημα με σύνολο κορυφών το $V_n = \{0,1,\dots,2n-1\}$ και σύνολο ακμών το

$$E_n = \{(i,i+n) : i \in \{0,1,\dots,n-1\}\} \cup$$

$$\{(i,i+1) : i \in \{0,1,\dots,2n-2\}\} \cup$$

$$\{(2n-1,0)\}.$$

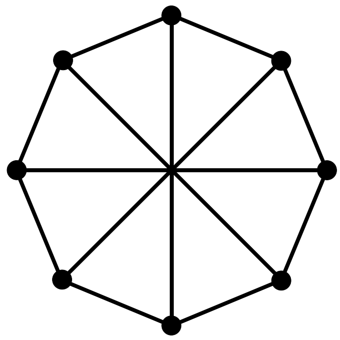
Έστω Z_n το γράφημα με σύνολο κορυφών το $W_n = \{0,1,\dots,2n-1\}$ και σύνολο ακμών το

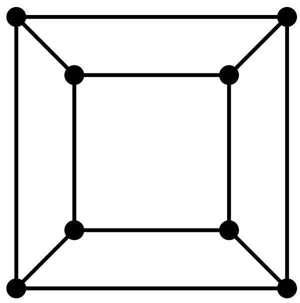
$$F_n = \{(i,i+n) : i \in \{0,1,\dots,n-1\}\} \cup$$

$$\{(i,i+1) : i \in \{0,1,\dots,n-2\}\} \cup \{(n-1,0)\} \cup$$

$$\{(n+i,n+i+1) : i \in \{0,1,\dots,n-2\}\} \cup \{(2n-1,n)\}.$$

Για παράδειγμα το H_nκαι το Z_n για $n = 4$ είναι τα παρακάτω γραφήματα.





Να απαντήσετε τα παρακάτω τεκμηριώνοντας σε κάθε περίπτωση πλήρως τις απαντήσεις σας με αποδείξεις:

1. Διερευνήστε για ποιες τιμές του $n \geq 2$, το H_n είναι επίπεδο.

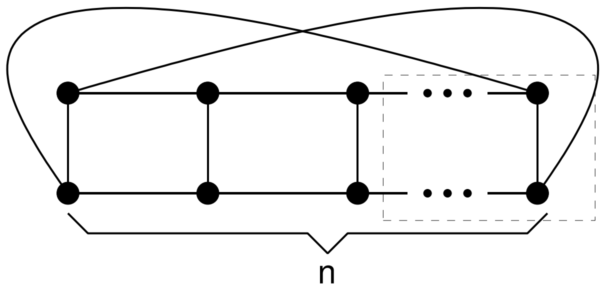
2. Δείξτε ότι ο χρωματικός αριθμός του H_n είναι πάντα το πολύ 3 όταν $n \geq 3$.

3. Δείξτε ότι ο χρωματικός αριθμός του Z_n είναι 3 όταν το n είναι περιττός και 2 όταν είναι άρτιος.

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $n \geq 2$ υπάρχει γράφημα που να έχει την ίδια ακολουθία βαθμών με το H_n και δεν είναι ισόμορφο με το H_n.

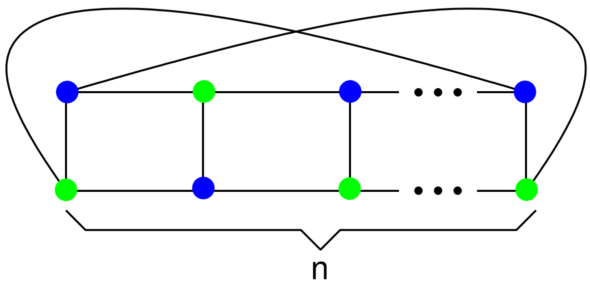
Απαντήσεις:

1. Αν το $n = 2$, τότε το H_n είναι πλήρες γράφημα με 4 κορυφές, το οποίο είναι επίπεδο. Αν το $n \geq 3$, τότε τότε το H_n μπορεί εναλλακτικά να ζωγραφιστεί ως εξής:

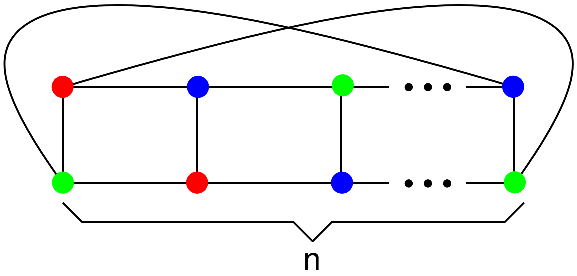


Αν στο παραπάνω γράφημα αφαιρέσουμε όλες τις «κάθετες» ακμές που βρίσκονται μέσα στο τετράγωνο με το διακεκομμένο περίγραμμα», το γράφημα που προκύπτει είναι ομοιομορφικό του $K_{3,3}$. Άρα αν το $n \geq 3$, τότε τότε το H_n δεν είναι επίπεδο.

2. Αν το $n \geq 3$, και ο n είναι περιττός τότε 2 χρώματα αρκούν:

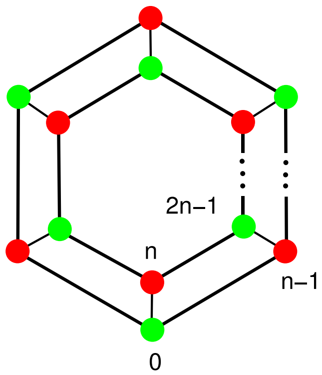


Αν το $n \geq 3$, και ο n είναι άρτιος τότε μπορούμε να χρωματίσουμε το H_n με 3 χρώματα:

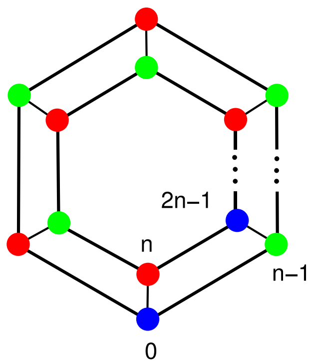


3. Αν το $n = 2$, τότε το Z_n είναι ο κύκλος με 4 κορυφές ο οποίος έχει χρωματικό αριθμό 2. Έστω τώρα ότι $n \geq 3$. Παρατηρούμε ότι το Z_n αποτελείται από δύο κύκλους. Ο ένας περιέχει τις κορυφές το $A = \{0,1, \dots, n-1\}$ και ο άλλος τις κορυφές το $B = \{n, \dots, 2n-1\}$.

Αν ο n είναι άρτιος τότε αναθέτουμε το κόκκινο χρώμα στους περιττούς αριθμούς του Α και τους ζυγούς αριθμούς του Β και το πράσινο χρώμα στους υπόλοιπους. Παρατηρούμε ότι αυτός είναι ένας έγκυρος χρωματισμός. Άρα όταν ο n είναι άρτιος, το Z_n είναι 2-χρωματίσιμο. Αφού το Z_n περιέχει τουλάχιστον μια ακμή, δεν είναι 1-χρωματίσμο. Καταλήγουμε ότι όταν ο n είναι άρτιος, ο χρωματικός αριθμός του Z_nείναι 2.



Έστω τώρα ότι ο n είναι περιττός. Στην περίπτωση αυτή χρωματίζουμε όπως και παραπάνω τις κορυφές του Α και του Β εκτός της 0 και της $2n-1$. Στην συνέχεια χρωματίζουμε τις 0 και την $2n-1$μπλέ και παρατηρούμε ότι ο χρωματισμός που προκύπτει είναι έγκυρος. Άρα όταν το n είναι περιττός το Z_n είναι 3-χρωματίσιμο και αφού περιέχει περιττό κύκλο δεν μπορεί να χρωματιστεί με 2 χρώματα. Άρα ο χρωματικός αριθμός του Z_n, όταν ο n είναι περιττός, είναι 3.



4. Παρατηρούμε ότι αν $n = 2$, τότε το H_n είναι η κλίκα με 4 κορυφές η οποία έχει ακολουθία βαθμών 3,3,3,3. Προφανώς δεν υπάρχει άλλο γράφημα με 4 κορυφές με την ίδια ακολουθία βαθμών.

Έστω τώρα ότι $n \geq 3$. Στην περίπτωση αυτή, το H_n και το Z_n είναι και τα δύο 3-κανονικά γραφήματα άρα έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών. Από την 1.1 ξέρουμε ότι το H_n δεν είναι επίπεδο. Επίσης έχουμε ήδη ζωγραφίσει το Z_n ως επίπεδο, άρα το Z_n δεν μπορεί να είναι ισόμορφο με το μη-επίπεδο H_n. Άρα στην περίπτωση όπου $n \geq 3$ υπάρχει γράφημα (το Z_n) με την ίδια ακολουθία βαθμών με το H_n που να μην είναι ισόμορφο με το H_n.

Ερώτημα 2.

Το ερώτημα αφορά ακολουθίες βαθμών γραφημάτων και k-συνεκτικά γραφήματα. Συγκεκριμένα πρέπει να αποδείξετε ιδιότητες γραφημάτων για τα οποία γνωρίζουμε ότι κάθε υπογράφημα που έχουνε πληρεί μία δεδομένη ιδιότητα.

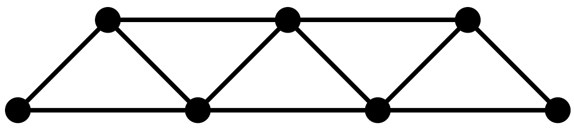
Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #10, #5, #6, #9

Έστω απλό γράφημα G με $n \geq 2$ κορυφές το οποίο να ικανοποιεί την εξής ιδιότητα:

«κάθε υπογράφημα H του G περιέχει κορυφή η οποία έχει βαθμό το πολύ 2 στο H.»

Θεωρήστε το γράφημα F που προκύπτει αν σε ένα μονοπάτι μήκους 7 ενώσουμε με ακμές κάθε ζεύγος κορυφών του μονοπατιού που βρίσκεται σε απόσταση

1. Δείξτε ότι το γράφημα F έχει την παραπάνω ιδιότητα και είναι ισόμορφο με το παρακάτω γράφημα.



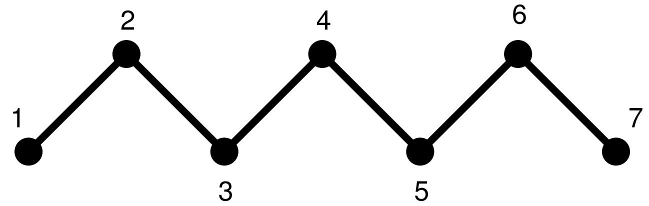
2. Δείξτε ότι για κάθε γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές το οποίο επίσης ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα, υπάρχει αρίθμηση $v_1, v_2, \ldots, v_n$ των κορυφών του τέτοια ώστε κάθε κορυφή να συνδέεται με το πολύ δύο κορυφές με μικρότερο δείκτη (δηλ. για κάθε $i \in \{2,3,\ldots,n\}$, το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ περιέχει το πολύ 2 γειτονικές κορυφές της v_i. Επαγωγή στο πλήθος των κορυφών

3. Δώστε δύο γραφήματα 6 κορυφών τα οποία να ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα και να είναι τέτοια ώστε το πρώτο να έχει ως ακολουθία βαθμών την (2,2,2,2,5,5) και το δεύτερο να έχει ως ακολουθία βαθμών την (2,2,3,3,4,4).

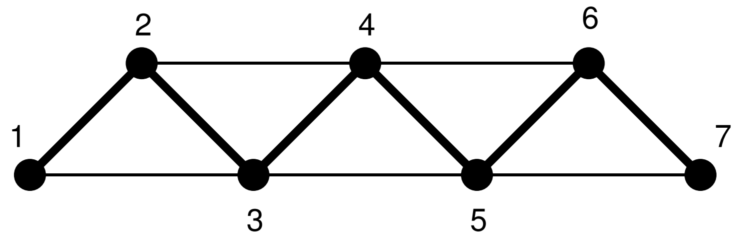
4. Δείξτε ότι κάθε γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές που ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα περιέχει το πολύ $2n - 3$ ακμές (*Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το 2.2.*).

Απαντήσεις:

1. Θεωρήστε το μονοπάτι που αποτελείται από τις κορυφές 1,2,3,4,5,6,7 και που έχει άκρα τις κορυφές 1 και 7. Το ζωγραφίζουμε ως εξής:



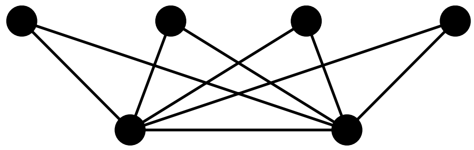
Μένει να παρατηρήσουμε ότι το γράφημα που προκύπτει αν ενώσουμε κάθε ζεύγος κορυφών αυτού του μονοπατιού οι οποίες είναι σε απόσταση 2, το γράφημα που προκύπτει είναι το παρακάτω γράφημα:

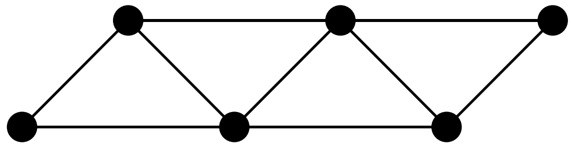


2. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο πλήθος των κορυφών του G. Η πρόταση είναι προφανής όταν το G έχει μια κορυφή. Έστω τώρα ότι η πρόταση ισχύει για κάθε γράφημα με λιγότερες από n κορυφές και έστω γράφημα G με n κορυφές. Μια και το G είναι υπογράφημα του εαυτού του, τότε, σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, θα περιέχει μια κορυφή, έστω v_n, βαθμού το πολύ 2. Έστω τώρα G' το γράφημα που προκύπτει αν από το G, αφαιρέσουμε την κορυφή v_n. Αφού το G' είναι υπογράφημα του G, τότε και το G' θα ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα και αφού το G' έχει λιγότερες κορυφές από το G, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση και να πάρουμε μια αρίθμηση $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$των κορυφών του G' τέτοια ώστε κάθε κορυφή να συνδέεται με το πολύ δύο κορυφές με μικρότερο δείκτη. Κατασκευάζουμε την αρίθμηση $v_1, v_2, \ldots, v_n$, των κορυφών του G προσθέτοντας την κορυφή v_n στο τέλος της αρίθμησης $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$. Παρατηρούμε ότι οι γειτονικές κορυφές της v_n στο G ανήκουν στο G' και άρα στο σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ Κατά συνέπεια υπάρχει αρίθμηση (η $v_1, v_2, \ldots, v_n$), των

κορυφών του G τέτοια ώστε κάθε κορυφή να συνδέεται με το πολύ δύο κορυφές με μικρότερο δείκτη.

3. Τα γραφήματα είναι τα παρακάτω:





4. Σύμφωνα με το 2.2. υπάρχει αρίθμηση $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, των κορυφών του γραφήματος G τέτοια ώστε κάθε κορυφή να συνδέεται με το πολύ δύο κορυφές με μικρότερο δείκτη. Καλούμε α-*βαθμό* μιας κορυφής v_i, στην παραπάνω αρίθμηση, το πλήθος των κορυφών με μικρότερο δείκτη με τις οποίες η v_i συνδέεται. Παρατηρούμε ότι το πλήθος των ακμών του γραφήματος G είναι ίσο με το άθροισμα των α-βαθμών όλων των κορυφών του G. Παρατηρούμε επίσης ότι η κορυφή v_1, έχει α-βαθμό 0, η κορυφή v_2, έχει α-βαθμό το πολύ 1 και κάθε μια από τις υπόλοιπες κορυφές έχει α-βαθμό το πολύ 2. Άρα το άθροισμα των α-βαθμών είναι το πολύ $0 + 1 + (n-2)n = 2n - 3$. Άρα το γράφημα G έχει το πολύ $2n - 3$ ακμές.

Ερώτημα 3.

Το ερώτημα έχει να κάνει με k-κανονικά γραφήματα όπως αυτά συσχετίζονται με τις έννοιες συνδεσιμότητας, επιπεδότητας, διμερών γραφημάτων και ομοιομορφικά γρασφήματα. Για τον ορισμό του k-κανονικού γραφήματος δείτε σελ. 69 στο βιβλίο του Μαυρονικόλα. Βρείτε ένα απλό 4-κανονικό γράφημα που να μην έχει σημεία κοπής.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #8, #10

1. Δείξτε ότι δεν υπάρχει επίπεδο 4-κανονικό γράφημα με n *κορυφές* που να είναι διμερές (*υπόδειξη: λάβετε υπόψιν ότι εάν ένα επίπεδο γράφημα δεν έχει τρίγωνα, τότε έχει το πολύ* $2n - 4$ *ακμές*)

2. Δείξτε ότι εάν ένα διμερές γράφημα με n *κορυφές* είναι κανονικό τότε το συμπληρωματικό του περιέχει κλίκα με ακριβώς $\frac{n}{2}$ κορυφές.

3. Δείξτε ότι ένα 3-κανονικό γράφημα δεν μπορεί να περιέχει ως υπογράφημα ένα γράφημα που να είναι ομοιομορφικό με το K_5.

Απαντήσεις:

1. Από γνωστό θεώρημα, το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος είναι ίσο με το πλήθος των ακμών διά δύο. Άρα κάθε 4 κανονικό γράφημα G με n κορυφές έχει ακριβώς $2n$ ακμές. Άρα το G δεν μπορεί να είναι επίπεδο γιατί κάθε διμερές επίπεδο γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ $2n - 4$ ακμές.

2. Έστω $G = (V, E)$ διμερές r-κανονικό γράφημα και έστω V_1 και έστω V_2 τα δύο μέρη του. Παρατηρούμε ότι το πλήθος m των ακμών του G είναι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του V_1. Άρα $m = r|V_1|$ και με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $m = r|V_2|$, άρα $|V_1 = |V_2|$ και αφού $|V_1| + |V_2| = n$, προκύπτει ότι $|V_1| = |V_2| = \frac{|V|}{2} = \frac{n}{2}$. Από το ορισμό του διμερούς γραφήματος, το καθένα από τα V_1, V_2 είναι ανεξάρτητο σύνολο του G άρα στο συμπλήρωμα του G τα V_1, V_2 είναι κλίκες η κάθε μια με $\frac{n}{2}$ κορυφές.

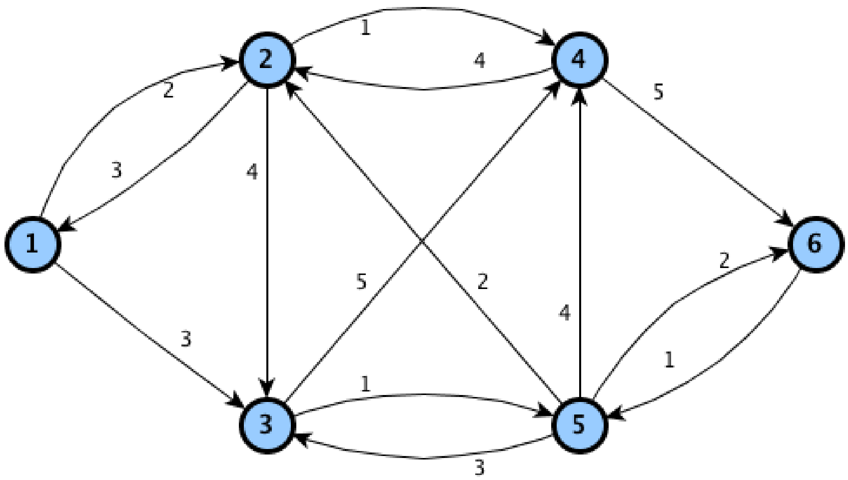
3. Έστω H υπογράφημα ενός 3-κανονικού γραφήματος και έστω το H είναι ομοιομορφικό του K_5. Παρατηρούμε ότι κάθε γράφημα που ομοιομορφικό του K_5 περιέχει 5 κορυφές βαθμού 4. Άρα ο μέγιστος βαθμός του H είναι 4. Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε υπογράφημα ενός 3-κανονικού γραφήματος έχει όλες τις κορυφές του βαθμού το πολύ 3. Άρα ο μέγιστος βαθμός του H είναι το πολύ 3, άτοπο.

Ερώτημα 4.

Σε αυτό το ερώτημα καλείστε να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του Dijkstra για την εύρεση τον συντομότερων μονοπατιών σε ένα γράφημα.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #3, #4

Θεωρήστε το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ όπου τα βάρη στις ακμές αντιστοιχούν σε αποστάσεις μεταξύ τους. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο του Dijkstra για τα παρακάτω ερωτήματα.



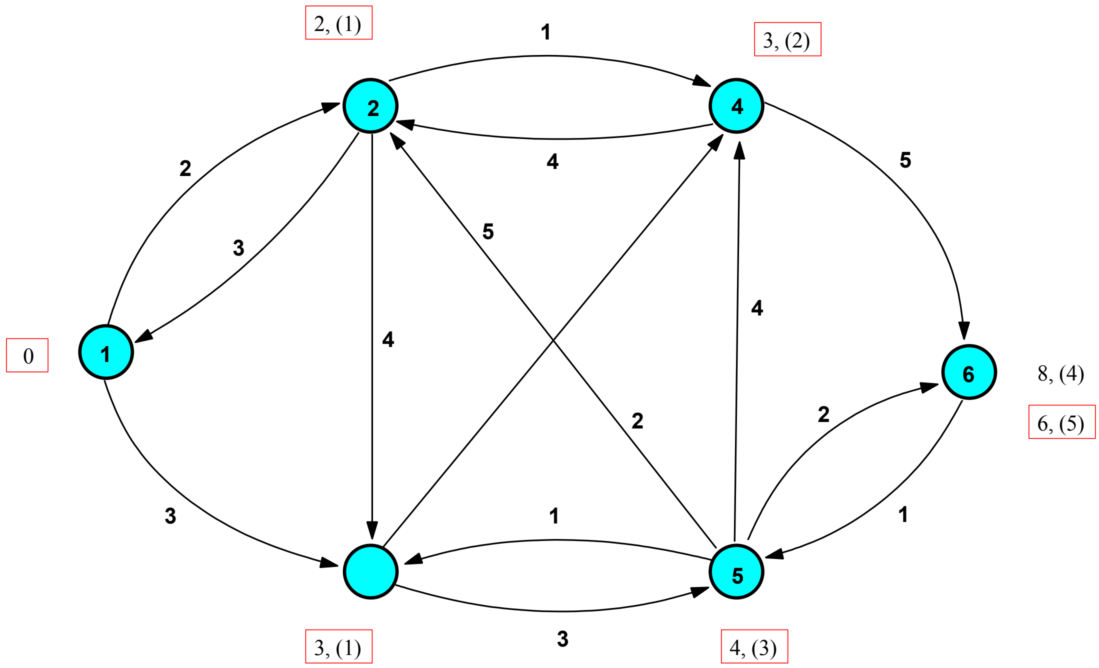
a. Βρείτε όλα τα συντομότερα μονοπάτια από την κορυφή 1 ως προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές. Η απάντηση σας να αναφέρει τόσο την σύσταση των μονοπατιών σχετικά με τις κορυφές που τα ορίζουν όσο και τη συνολική απόσταση.

b. Βρείτε σε κάθε περίπτωση εκείνη την κορυφή $v \in V(G)$ για την οποία ισχύει ότι:
   1. το άθροισμα των αποστάσεων όλων των συντομότερων $v - t$-μονοπατιών για κάθε $t \in V(G)$ είναι το ελάχιστο.
   2. το μέγιστο συντομότερο $v - t$-μονοπάτι για κάθε $t \in V(G)$ είναι το ελάχιστο.

c. Περιγράψτε ένα αλγόριθμο ο οποίος για κάθε διατεταγμένο σύνολο κορυφών $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ του $V(G)$ όπου τα v_i είναι διακριτά, θα επιστρέφει την απόσταση του συντομότερου $v_1 - v_k$ μονοπατιού το οποίο περνάει από όλες τις κορυφές στο σύνολο $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ (όχι κατά ανάγκη με αυτή την σειρά).

Απαντήσεις:

a. Η εφαρμογή του αλγόριθμου του Dijkstra στο γράφημα αντικατοπτρίζεται στο παρακάτω γράφημα όπου με κόκκινο τετράγωνο αναγράφονται οι ετικέτες των αντίστοιχων κορυφών που έγιναν μόνιμες και παρένθεση η προηγούμενη κορυφή στο μονοπάτι που είναι υπεύθυνη για την τιμή της ετικέτας. Υπενθυμίζουμε ότι η τιμή κάθε μόνιμης ετικέτας για κάποια κορυφή v_k αντιστοιχεί στο μήκος του συντομότερου $v_1 - v_k$ μονοπατιού .



Σύμφωνα με το παραπάνω γράφημα θα έχουμε τα εξής συντομότερα μονοπάτια με τα αντίστοιχα μήκη:

$v_1 - v_2$: (v_1, v_2) μήκος: 2

$v_1 - v_3$: (v_1, v_3) μήκος: 3

$v_1 - v_4$: (v_1, v_2, v_4) μήκος: 3

$v_1 - v_5$: (v_1, v_3, v_5) μήκος: 4

$v_1 - v_6$: (v_1, v_3, v_5, v_6) μήκος: 6

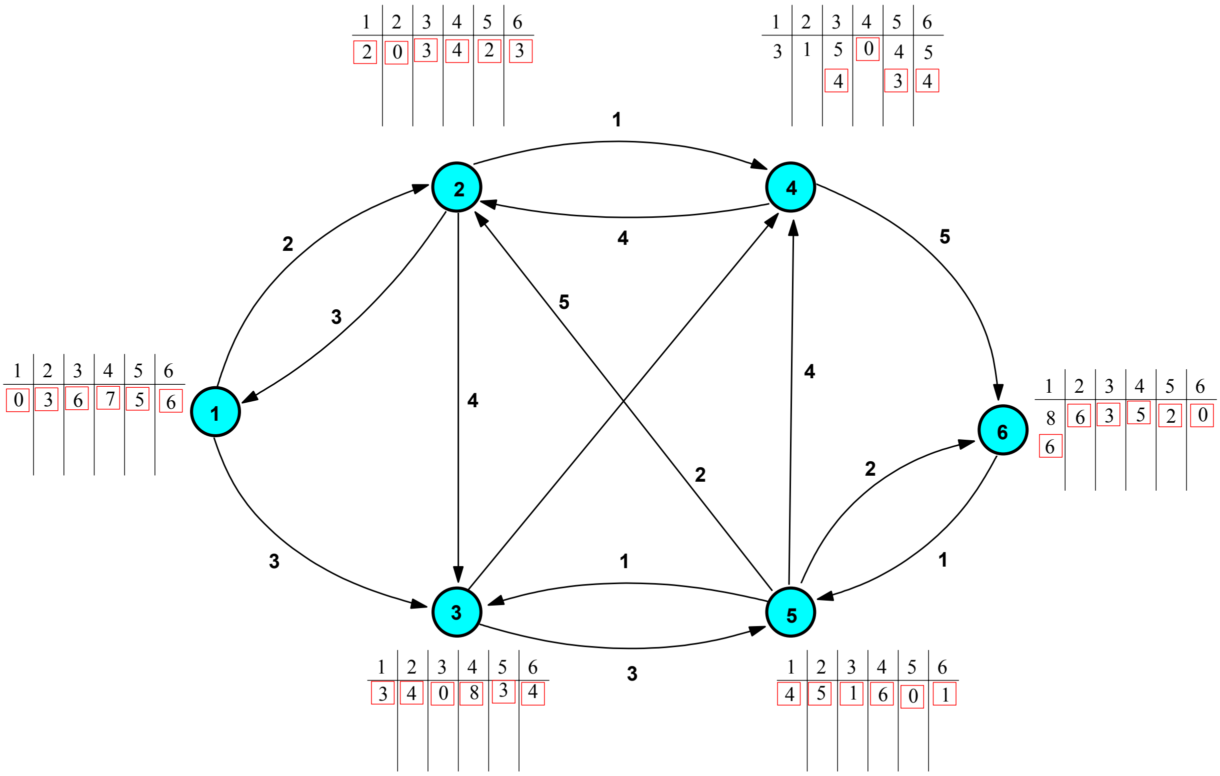
b. Έστω ότι ορίζουμε ένα πίνακα $P = (p_{ij})$ με 6 γραμμές και 6 στήλες τέτοιο ώστε

$$p_{\boldsymbol{ij}} = \text{μήκος συντομότερου } v_i - v_j \text{ μονοπατιού}$$

Τότε θα έχουμε:

1. Η κορυφή v_i για την οποία ισχύει ότι το άθροισμα των αποστάσεων όλων των συντομότερων $v_i - v_j$-μονοπατιών για κάθε $v_j \in V(G)$ είναι το ελάχιστο θα είναι εκείνη που ελαχιστοποιεί το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$
2. Η κορυφή v_i για την οποία ισχύει το μέγιστο συντομότερο $v_i - v_j$-μονοπάτι για κάθε $v_j \in V(G)$ είναι το ελάχιστο θα είναι εκείνη που ελαχιστοποιεί το μέγιστο στοιχείο κάθε γραμμής του πίνακα $max_j\, p_{ij}$ για κάθε $v_j \in V(G)$.

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα P πρέπει να υπολογίσουμε τα μήκη όλων των συντομότερων $v_i - v_j$ μονοπατιών για κάθε ζεύγος κορυφών στο γράφημα. Αυτό το κάνουμε με 6 εφαρμογές του αλγόριθμου Dijkstra για κάθε κορυφή όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα.



Σε κάθε κορυφή αναφέρουμε τις ετικέτες όπως διαμορφώνονται με την εκάστοτε εφαρμογή του αλγορίθμου για κάθε κορυφή του γραφήματος. Για παράδειγμα για τον υπολογισμό των συντομότερων μονοπατιών από την κορυφή 5 κοιτάμε για τις μόνιμες ετικέτες στην στήλη 5 σε κάθε κορυφή, οπότε τα μήκη τα είναι:

5-1 : 5

5-2 : 2

5-5 : 3

5-4 : 3

6-6 : 2

Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε το πίνακα P ώς εξής

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 8 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 18 & 6 \\ 19 & 6 \\ 17 & 6 \\ 30 & 8 \\ \color{red}{15} & \color{red}{5} \\ 18 & 6 \end{matrix}$$

όπου οι δύο επιπλέον στήλες αντιστοιχούνε στο άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα και στο μέγιστο κάθε γραμμής του πίνακα, και με κόκκινο χρώμα οι ελάχιστες τιμές. Οπότε βλέπουμε ότι εκείνη η κορυφή που ικανοποιεί τα 1. και 2. του ερωτήματος είναι η κορυφή 5.

c. Εφόσον το συντομότερο $v_1 - v_k$ μονοπάτι πρέπει να περιέχει όλες τις κορυφές στο σύνολο $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ σημαίνει ότι αυτές οι κορυφές θα εμφανίζονται με κάποια διάταξη $\left(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}\right)$ στο μονοπάτι. Συνεπώς το μήκος του συντομότερου μονοπατιού $\left(v_1, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_k\right)$ θα είναι το άθροισμα από τα μήκη των συντομότερων μονοπατιών $v_1 - v_{i_1},\ v_{i_1} - v_{i_2}, \dots,\ v_{i_{k-1}} - v_k$.

Ένας αλγόριθμος ολικής απαρίθμησης για την εύρεση τέτοιου μονοπατιού θα ήταν ο εξής:

1. Υπολόγισε το πίνακα $P = (p_{ij})$ όλων των ζευγαριών συντομότερων μονοπατιών όπως στο υποερώτημα **b.**
2. Για κάθε μετάθεση $\left(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}\right)$ του συνόλου $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ άθροισε
$$p_{1i_1} + p_{i_1 i_2} + \cdots + p_{i_{k-1} i_k}$$
3. Επέλεξε το ελάχιστο άθροισμα.

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα, από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι Σωστή (υπάρχει τέτοιο γράφημα) ή Λάθος (δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα). Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπο-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. Θεωρούμε ότι τα γραφήματα του ερωτήματος είναι <u>απλά και μη κατευθυνόμενα</u>.

Α. Στα παρακάτω υποερωτήματα καλείστε να εξετάσετε αν υπάρχει το γράφημα που περιγράφεται.

1) **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα με ακολουθία βαθμών (1,2,3,4,5,6).
2) **(Σ/Λ)** Υπάρχει διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών (3,3,3,3,4,4,4).
3) **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα που να μην είναι κλίκα και όπου κάθε υπογράφημά του με 3 κορυφές να μην είναι μονοπάτι με 3 κορυφές;
4) **(Σ/Λ)** Υπάρχει επίπεδο γράφημα με 2017 κορυφές που είναι ισόμορφο με το δυικό του.

Β. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

1) **(Σ/Λ)** Το συμπληρωματικό γράφημα ενός διμερούς γραφήματος με 2017 κορυφές δεν μπορεί να είναι κλίκα.
2) **(Σ/Λ)** Αν ένα γράφημα είναι Χαμιλτονιανό και έχει περιττό πλήθος κορυφών τότε χρειάζεται τουλάχιστον 3 χρώματα για να χρωματιστεί.
3) **(Σ/Λ)** Κάθε 2 κανονικό γράφημα είναι κύκλος.
4) **(Σ/Λ)** Υπάρχει επίπεδο γράφημα που να περιέχει τουλάχιστον μια όψη που να είναι πεντάγωνο, τουλάχιστον μια όψη που να είναι τρίγωνο και καμμιά όψη που να είναι τετράγωνο.

Απαντήσεις

Α1: Λάθος. Ένα τέτοιο γράφημα έχει 6 κορυφές και άρα ο μέγιστος βαθμός του είναι 5. Συνεπώς δεν μπορεί να έχει κορυφή βαθμού 6.

Α2. Σωστό. Είναι το πλήρες διμερές $K_{3,4}$ όπου το ένα μέρος έχει 4 κορυφές και το άλλο 3.

Α3: Σωστό. Το γράφημα που αποτελείται από 3 απομονωμένες κορυφές. Είναι μοναδικό υπογράφημα του εαυτού του με 3 κορυφές και δεν είναι μονοπάτι.

Α4: Σωστό. Το γράφημα που προκύπτει αν σε ένα κύκλο με 2016 κορυφές προσθέσουμε μια νέα κορυφή και την συνδέσουμε με όλες τις 2016 κορυφές του κύκλου.

Β1: Λάθος. Το γράφημα με 2017 κορυφές και καμμιά ακμή είναι διμερές και το συμπλήρωμά του είναι κλίκα.

Β2: Σωστό. Περιέχει περιττό κύκλο ο οποίος απαιτεί 3 χρώματα για να χρωματιστεί.

Β3: Λάθος. Πάρτε την ένωση 2 κύκλων με διαφορετικά σύνολα κορυφών.

Β4: Σωστό. Πάρτε την διακεκριμένη ένωση ενός τετραέδρου και ενός δωδεκαέδρου (δηλ. το παρακάτω γράφημα).