Κεφάλαιο 7

Βάσεις και Διάσταση

Στο Κεφάλαιο 5 είδαμε την έννοια της βάσης στο $\mathbb{R}^n$ και στο Κεφάλαιο 6 μελετήσαμε διανυσματικούς χώρους. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε βάσεις σε τυχαίους πεπερασμένα παραγόμενους διανυσματικούς χώρους. Το κύριο θεωρητικό αποτέλεσμα είναι ότι κάθε δυο βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Το πλήθος αυτό ονομάζεται διάσταση του διανυσματικού χώρου. Θα μελετήσουμε πολλά σχετικά παραδείγματα και στη συνέχεια θα δούμε την έννοια της τάξης πίνακα και μια σημαντική εφαρμογή στα γραμμικά συστήματα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στα παρακάτω, με V θα συμβολίζουμε ένα $\mathbb{F}-$διανυσματικό χώρο.

ΒΑΣΕΙΣ

Ορισμός 1 (γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία)

*Έστω $v_1,\dots,v_m \in V$. Τα στοιχεία αυτά λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** πάνω από το $\mathbb{F}$ αν από τη σχέση $a_1v_1+\dots+a_mv_m=0$, όπου $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{F}$, έπεται ότι $a_1=\dots=a_m=0$. Σε διαφορετική περίπτωση θα λέμε ότι τα $v_1,\dots,v_m$ είναι **γραμμικά εξαρτημένα** πάνω από το $\mathbb{F}$.*

Παραδείγματα

1. Στο δ.χ. $\mathbb{R}^3$ τα
   a. $v_1=(1,1,1), v_2=(1,1,0), v_3=(1,0,0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Rightarrow$$
$$a_1(1,1,1) + a_2(1,1,0) + a_3(1,0,0) = (0,0,0) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

b. $(1,1,1),(1,1,0),(5,5,2)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα γιατί $2(1,1,1) + 3(1,1,0) - (5,5,2) = (0,0,0)$.

2. Στο δ.χ. $M_{2\times 3}(\mathbb{F})$:

a. Τα στοιχεία

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί

$$a_1v_1 + \ldots + a_6v_6 = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$a_1 = \ldots = a_6 = 0.$$

b. Τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα γιατί

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Τα στοιχεία $1, i$ του $\mathbb{C}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα υπεράνω του $\mathbb{R}$ αφού $a1 + bi = 0, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a = b = 0$, αλλά είναι γραμμικά εξαρτημένα υπεράνω του $\mathbb{C}$ αφού $i1 + (-1)i = 0$.

4. Αν κάποιο από τα $v_1, \ldots, v_m$ είναι το μηδενικό στοιχείο, τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι αν $v_1 = 0$, τότε έχουμε το γραμμικό συνδυασμό $1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m = 0$.

Ορισμός 1A

Επειδή θέλουμε να επεκτείνουμε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας σε άπειρα σύνολα δίνουμε τους εξής ορισμούς.

- *Ένα πεπερασμένο υποσύνολο* $\{v_1,\dots,v_m\}$ *του V λέγεται* ***γραμμικά ανεξάρτητο*** *αν τα στοιχεία* $v_1,\dots,v_m$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ένα άπειρο υποσύνολο του V λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε πεπερασμένο μη κενό υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
- *Ένα πεπερασμένο υποσύνολο* $\{v_1,\dots,v_m\}$ *του V λέγεται* ***γραμμικά εξαρτημένο*** *αν τα στοιχεία* $v_1,\dots,v_m$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ένα άπειρο υποσύνολο του V λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Δηλαδή αν υπάρχει πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο που είναι γραμμικά εξαρτημένο.*
- *Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Ορισμός 2 (βάση)

Μια ***βάση*** *του* $\mathbb{F}-$*δ.χ. V είναι ένα σύνολο στοιχείων του V που είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω από το* $\mathbb{F}$ *και παράγει το V πάνω από το* $\mathbb{F}$.

Σημείωση Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό ενδέχεται να έχουμε άπειρες βάσεις. Πράγματι μια βάση του δ.χ. $\mathbb{R}[x]$ των πραγματικών πολυωνύμων είναι ο σύνολο $\{1,x,x^2,\dots\}$. Όμως εδώ θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά οι δ.χ. που έχουν πεπερασμένες βάσεις.

Παραδείγματα

1. Μια βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η συνήθης βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$, όπου $e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,0,\dots,1)$.
2. Μια βάση του $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ αποτελείται από τα στοιχεία
$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
3. Μια βάση του $M_{n\times m}(\mathbb{F})$ είναι το σύνολο $\{E_{ij}\,|1\le i\le n, 1\le j\le m\}$ όπου σε κάθε θέση του $n\times m$ πίνακα E_{ij} υπάρχει το 0 εκτός από τη θέση (i,j) όπου υπάρχει το 1.

4. Μια βάση του $\mathbb{R}_n[x]$ είναι το $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

Ορισμός 3 (διάσταση)

*Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος $\mathbb{F}-$δ.χ.. Αποδεικνύεται ότι ο V έχει βάση και κάθε βάση του V έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων. Ο αριθμός αυτός λέγεται η **διάσταση** του V και συμβολίζεται με $\dim_{\mathbb{F}} V$ ή απλά $\dim V$.*

Παραδείγματα

- Σχετικά με τα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε
  $\dim \mathbb{R}^n = n, \dim M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6, \dim M_{n\times m}(\mathbb{R}) = nm, \dim \mathbb{R}_n[x] = n+1.$
- Στο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τον υπόχωρο $\langle (1,-1,2),(2,-2,4)\rangle$. Επειδή μια βάση αυτού είναι το $\{(1,-1,2)\}$ έχουμε $\dim\langle (1,-1,2),(2,-2,4)\rangle = 1$.

ΤΑΞΗ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός 4 (χώρος γραμμών, χώρος στηλών, τάξη)

Έστω $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$.

- *Κάθε γραμμή του A είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{F}^m$. Ο **χώρος γραμμών** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^m$ που παράγουν οι γραμμές του A και συμβολίζεται με $R(A)$. Η **τάξη γραμμών** του A είναι ο ακέραιος $\dim_{\mathbb{F}} R(A)$.*
- *Κάθε στήλη του A είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{F}^n$. Ο **χώρος στηλών** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$ που παράγουν οι στήλες του A και συμβολίζεται με $C(A)$. Η **τάξη στηλών** του A είναι ο ακέραιος $\dim_{\mathbb{F}} C(A)$.*
- *Αποδεικνύεται ότι $\dim_{\mathbb{F}} R(A) = \dim_{\mathbb{F}} C(A)$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται η **τάξη** του πίνακα A και συμβολίζεται με $r(A)$.*

Παράδειγμα

Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ έχουμε $r(A) = 1$, γιατί όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα $\dim\langle (1,-1,2),(2,-2,4)\rangle = 1$.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΒΑΣΕΙΣ

Στο Κεφάλαιο 5, Θεώρημα 3, είδαμε ότι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ έχει το πολύ n στοιχεία. Πιο γενικά έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1 (μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στοιχείων)

Έστω V ένας δ.χ. που παράγεται από m στοιχεία, όπου m είναι ένας ακέραιος. Τότε κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V είναι πεπερασμένο και έχει το πολύ m στοιχεία.

Ξέρουμε ότι κάθε δυο βάσεις του $\mathbb{R}^n$ έχουν το αυτό πλήθος στοιχείων. Γενικά ισχύει το εξής.

Θεώρημα 2 (πληθάριθμος βάσης)

Έστω V ένας δ.χ.. Αν υπάρχει μια πεπερασμένη βάση του V που έχει n στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του V έχει n στοιχεία.

Θεώρημα 3 (επέκταση γραμμικώς ανεξάρτητου συνόλου σε βάση)

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος δ.χ. και S ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V. Τότε υπάρχει βάση του V που περιέχει το S.

Από το προηγούμενο αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση[1].

Παράδειγμα

Εύκολα επαληθεύεται ότι τα $(1,2,0,-1),(1,2,0,1),(0,1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^4$. Το σύνολο αυτών μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$ με την προσθήκη του $(0,0,1,0)$. Πράγματι, έχουμε

[1] Επισημαίνουμε ότι το ίδιο συμπέρασμα αληθεύει για όλους τους δ.χ. αλλά εδώ θα ασχοληθούμε με τους πεπερασμένα παραγόμενους δ.χ..

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$ Συνεπώς τα στοιχεία $(1,2,0,-1),(1,2,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^4$ σύμφωνα με το Πόρισμα 5 του Κεφαλαίου 5.

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει το Πόρισμα 4 του Κεφαλαίου 5 σε τυχαίο πεπερασμένα παραγόμενο διανυσματικό χώρο.

Πρόταση 4

Έστω V ένας δ.χ. με $\dim V = n$. *Τότε*

1. *Αν ένα σύνολο* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *με n στοιχεία παράγει το V, τότε αυτό είναι βάση του V.*
2. *Αν ένα σύνολο* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *με n στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτό είναι βάση του V.*

Θεώρημα 5 (διαστάσεις υποχώρων)

Έστω V ένας δ.χ. με $\dim V = n$ *και U ένας υπόχωρος του V. Τότε*

1. $\dim U \leq \dim V$.
2. *Αν* $\dim U = n$, *τότε* $U = V$.

Θεώρημα 6 (διάσταση αθροίσματος υποχώρων)

Έστω U, W *δυο υπόχωροι ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου. Τότε*
$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$.

Παράδειγμα

Έστω $U = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3\}, W = \{(a,0,b) \in \mathbb{R}^3\}$. Τότε μια βάση του U είναι το $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ και άρα $\dim U = 2$. Μια βάση του W είναι το $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ και συνεπώς $\dim W = 2$. Το $U+W$ παράγεται από την ένωση των δυο προηγούμενων βάσεων η οποία τυχαίνει να είναι βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα $U+W = \mathbb{R}^3$ και $\dim(U+W) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Από τη σχέση

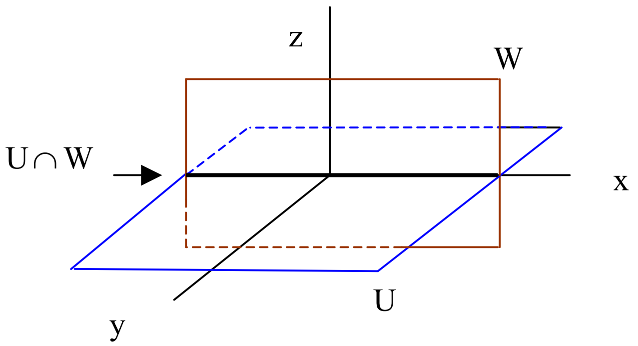
$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

έχουμε

$$3 = 2 + 2 - \dim U \cap W\,,$$

οπότε $\dim U \cap W = 1$.

Γεωμετρικά, το U είναι το xy επίπεδο, το W είναι το xz επίπεδο και η τομή τους είναι ο άξονας των x, όπως φαίνεται στο σχήμα.



ΤΑΞΗ ΠΙΝΑΚΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Πρόταση 7

- Η τάξη ενός κλιμακωτού πίνακα είναι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.
- Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.
- Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη.

Παράδειγμα

- Η τάξη του $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι $r(A) = 3$ γιατί ο πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή και υπάρχουν 3 μη μηδενικές γραμμές.
- Για να βρούμε την τάξη του $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή.

Αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη βρίσκουμε τον A. Άρα $r(B) = r(A) = 3$.

Τα επόμενα δυο αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

Θεώρημα 8 (κριτήριο συμβιβαστού γραμμικού συστήματος)

Ένα γραμμικό σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν η τάξη του επαυξημένου πίνακα του συστήματος ισούται με την τάξη του πίνακα των συντελεστών.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το επόμενο σύστημα είναι συμβιβαστό

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 2 \\ 3x + y - z &= a \\ 4x + y - 2z &= a \end{aligned}$$

Λύση

Μετά από αρκετούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, ο επαυξημένος πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & a \\ 4 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3a+24 \\ 0 & 0 & 0 & -7a+61 \end{pmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η τάξη του πίνακα των *συντελεστών* είναι 3. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8 το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν η τάξη του B είναι 3, δηλαδή αν και μόνο αν η τελευταία γραμμή του B είναι μηδενική, δηλαδή $a = \frac{61}{7}$.

Θεώρημα 9 (διάσταση λύσεων ομογενούς γραμμικού συστήματος)

Η διάσταση του δ.χ. των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος ισούται με τη διαφορά $m-r$, όπου m είναι το πλήθος των αγνώστων και r είναι η τάξη του πίνακα των συντελεστών.

Παράδειγμα

Η διάσταση του δ.χ. των λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} x+2y-4z+3w&=0\\ x+2y-2z+2w&=0\\ 2x+4y-2z+3w&=0 \end{aligned}$$

υπολογίζεται ως εξής. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών φέρουμε τον πίνακα των συντελεστών σε κλιμακωτή μορφή. Βρίσκουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Αυτός έχει τάξη $r=2$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9 η ζητούμενη διάσταση είναι $m-r=4-2=2$.

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο. (βλ. Κεφάλαιο 6, Ορισμός 6). Μια βάση $\{v_1,\ldots,v_n\}$ του V λέγεται **ορθοκανονική** αν $\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

Θεώρημα 10 (ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων)

Κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει μια ορθοκανονική βάση.

Μια αποτελεσματική μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικών βάσεων είναι η μέθοδος Gram-Schmidt.

Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram - Schmidt

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο.

Έστω $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *μια βάση του V. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1 \\ u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{|u_2|^2}u_2 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1 \\ &\vdots \\ u_n &= v_n - \frac{\langle v_n, u_{n-1}\rangle}{|u_{n-1}|^2}u_{n-1} - \ldots - \frac{\langle v_n, u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε $w_1 = \frac{1}{|u_1|}u_1,\ldots,w_n = \frac{1}{|u_n|}u_n$. *Τότε τα στοιχεία* $w_1,\ldots,w_n$ *αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του V.*

Παράδειγμα

Ας εφαρμόσουμε την προηγούμενη μέθοδο στη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, όπου $v_1 = (1,0,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,3,4)$. Το εσωτερικό γινόμενο που θεωρούμε εδώ είναι το σύνηθες. Θέτουμε

$$u_1 = v_1 = (1,0,1)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1 = v_2 = (1,0,-1)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{|u_2|^2}u_2 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1 = (0,3,4) - \frac{-4}{2}(1,0,-1) - \frac{4}{2}(1,0,1) = (0,3,0).$$

Τα μήκη των u_1, u_2, u_3 είναι αντίστοιχα $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3$. Διαιρώντας με αυτά βρίσκουμε την ορθοκανονική βάση $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), (0,1,0)\right\}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

1. $(1,1,-1,1),(2,1,0,1),(4,3,-2,2)$

2. $(1,1,-1,1),(2,1,0,1),(4,3,-2,3)$

Λύση

1. *Α τρόπος.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1 εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b,c\in\mathbb{R}$ από τα οποία ένα τουλάχιστον να είναι μη μηδενικό τέτοια ώστε

$$a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,2)=(0,0,0,0).$$

Έχουμε

$$a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,2)=(0,0,0,0)\Rightarrow$$
$$\begin{cases} a+2b+4c=0 \\ a+b+3c=0 \\ -a-2c=0 \\ a+b+2c=0. \end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη). Άρα $a=b=c=0$ και τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Β τρόπος.

Σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα και τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επειδή δεν υπάρχει μηδενική γραμμή στον τελευταίο πίνακα, τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. *Α τρόπος.*

Όπως στον Α τρόπο του 1, από τη σχέση

$$a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,3)=(0,0,0,0)$$

βρίσκουμε το σύστημα

$$\begin{cases} a+2b+4c=0 \\ a+b+3c=0 \\ -a-2c=0 \\ a+b+3c=0. \end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει και άλλη λύση πέρα από την τετριμμένη. Δηλαδή υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}$ που δεν είναι όλα μηδέν τέτοια ώστε $a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,3)=(0,0,0,0)$. Άρα τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Β τρόπος.

Σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα και τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή υπάρχει μηδενική γραμμή στον τελευταίο πίνακα, τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Άσκηση 2

Εξετάστε αν τα επόμενα στοιχεία του $M_2(\mathbb{R})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}$ από τα οποία ένα τουλάχιστον να είναι μη μηδενικό και να ικανοποιούν την ισότητα

$$a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$a\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & -5\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}a+3b+c & 2a-b-5c\\ 3a+2b-4c & a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}a+3b+c=0\\ 2a-b-5c=0\\ 3a+2b-4c=0\\ a+2b=0.\end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα του τελευταίου συστήματος, φτάνουμε στην κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Άμεσα συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μη μηδενική λύση, οπότε τα δοσμένα στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Άσκηση 3

Εξετάστε αν τα παρακάτω πολυώνυμα είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο δ.χ. $\mathbb{R}_2[x]$ των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.

1. $x^2+x+1,\ x^2-x+2,\ x^2+1,\ 2x^2-3x+2$
2. $x^2+x+1,\ x^2-x+2,\ x^2+1$

Λύση

1. Ξέρουμε ότι $\dim\mathbb{R}_2[x]=2+1=3$. Το πλήθος των δοσμένων στοιχείων είναι 4 και άρα από το Θεώρημα 1 αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2. Έστω $a,b,c\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$$a\left(x^2+x+1\right)+b\left(x^2-x+2\right)+c\left(x^2+1\right)=0\Rightarrow$$
$$\left(a+b+c\right)x^2+\left(a-b\right)x+\left(a+2b+c\right)=0\Rightarrow$$
$$\begin{cases}a+b+c=0\\ a-b=0\\ a+2b+c=0.\end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι ομογενές, τετραγωνικό και η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι $\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=1\neq 0$. Συνεπώς η μηδενική λύση $a=b=c=0$ είναι μοναδική. Άρα τα δοσμένα στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 4

Αν u,v,w είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία ενός $\mathbb{F}-$δ.χ., τότε αποδείξτε ότι και τα $u+2v+4w, 2v+5u+w, 3u+w$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση

Έστω $a,b,c\in\mathbb{F}$ τέτοια ώστε $a(u+2v+4w)+b(2u+5v+w)+c(3u+w)=0$. Τότε παίρνουμε $(a+2b+3c)u+(2a+5b)v+(4a+b+c)w=0$. Επειδή τα u,v,w είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλοι οι συντελεστές της τελευταίας σχέσης οφείλουν να είναι μηδέν, οπότε

$$\begin{cases} a+2b+3c=0\\ 2a+5b=0\\ 4a+b+c=0. \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι ομογενές και τετραγωνικό. Επειδή η ορίζουσα $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}=-53$ είναι μη μηδενική, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση που είναι βέβαια η μηδενική $a=b=c=0$. Άρα τα $u+2v+4w, 2v+5u+w, 3u+w$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 5

(α) Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες τα διανύσματα $(1,1,a), (2,0,1), (3,-1,1)$ *αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.*

(β) Για τις τιμές του a που βρήκατε πριν, να εκφράστε το $(1,0,0)$ *ως γραμμικό συνδυασμό των* $(1,1,a), (2,0,1), (3,-1,1)$.

(γ) Να βρεθούν οι τιμές του b για τις οποίες έχουμε $(1,2,b)\in\langle(1,1,1),(3,2,1)\rangle$.

Λύση

(α) Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3, το δοσμένο ερώτημα ισοδυναμεί με το να βρεθούν τα a τέτοια ώστε $\det A \neq 0,$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (βλ. Πόρισμα 5 του Κεφαλαίου 5). Υπολογίζοντας βρίσκουμε ότι $\det A = 2 - 2a$, οπότε $a \neq 1$.

(β) Για $a \neq 1$, τα δοσμένα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ αποτελούν μια βάση. Ζητάμε να βρεθούν τα x, y, z τέτοια ώστε

$$(1,0,0) = x(1,1,a) + y(2,0,1) + z(3,-1,1).$$

Το σύστημα που προκύπτει είναι

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - z = 0 \\ ax + y + z = 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών είναι ο A. Λύνοντάς το σύστημα με μια από τις γνωστές μεθόδους, π.χ. τον κανόνα του Cramer, βρίσκουμε ότι

$$x = \frac{1}{2(1-a)}, \quad y = \frac{a+1}{2(a-1)}, \quad z = \frac{1}{2(1-a)}.$$

(γ) Ζητάμε τα b τέτοια ώστε να υπάρχουν x, y ώστε να έχουμε

$(1,2,b) = x(1,1,1) + y(3,2,1).$ Το σύστημα που προκύπτει είναι το

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ x + y = b \end{cases}$$

δηλαδή είναι το $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$, όπου $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Από το Θεώρημα 8, το σύστημα αυτό έχει λύση αν και μόνο αν η τάξη του B ισούται με την τάξη του επαυξημένου πίνακα $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$. Η τάξη του B είναι 2, γιατί ο B είναι 3×2 και υπάρχουν 2 γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Συνεπώς ζητάμε τα b ώστε $r(C) = 2$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών παίρνουμε ότι ο C είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}$. Από τις γραμμές αυτού του πίνακα βλέπουμε ότι η τάξη του είναι 2 αν και μόνο αν η τελευταία γραμμή είναι μηδενική δηλαδή αν και μόνο αν $b=3$.

Άσκηση 6

Να βρεθεί η διάσταση και μια βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $u=(1,-2,5,-3), v=(2,3,1,-4), w=(3,8,-3,-5)$.

Λύση

Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα.

Τότε ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα u,v,w είναι ο χώρος γραμμών του A. Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών παίρνουμε τον πίνακα

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από την Πρόταση 7, ο χώρος γραμμών του A ταυτίζεται με τον χώρο γραμμών του B και μια βάση του τελευταίου είναι $\{(1,-2,5,-3),(0,7,-9,2)\}$. Η ζητούμενη διάσταση είναι 2.

Άσκηση 7

Έστω $\mathbb{R}_2[x]$ ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ 2. Αποδείξτε ότι μια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ είναι το σύνολο $\{1,\ x-1,(x-1)^2\}$ και βρείτε την παράσταση του $5x^2+3x+2$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της παραπάνω βάσης.

Λύση

Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}_2[x]$ είναι 3, αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{1,\ x-1,(x-1)^2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο (βλ. Πρόταση 4). Έχουμε

$$a1+b(x-1)+c(x-1)^2=0 \Rightarrow$$
$$cx^2+(b-2c)x+(a-b+c)=0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} c=0 \\ b-2c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=0.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, λύνουμε την εξίσωση

$$a1+b(x-1)+c(x-1)^2=2+3x+5x^2$$

ως προς τα a,b,c, δηλαδή την

$$cx^2+(b-2c)x+(a-b+c)=5x^2+3x+2.$$

Αυτή ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\begin{cases} c=5 \\ b-2c=3 \\ a-b+c=2. \end{cases}$$

Άρα $a=10, b=13, c=5.$ Τελικά $2+3x+5x^2=10+13(x-1)+5(x-1)^2.$

Άσκηση 8

Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του υπόχωρου

$U=\left\{X\in M_2(\mathbb{R}) \mid X\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}X\right\}$ του $M_2\left(\mathbb{R}\right)$.

Λύση

Πρώτα θα βρούμε τη γενική μορφή των πινάκων Χ. Έστω $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Τότε

$X\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b & 2a+b\\ c-d & 2c+d\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ -a+c & -b+d\end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$X\in U$ αν και μόνο αν

$$\begin{pmatrix} a-b & 2a+b \\ c-d & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-b = a+2c \\ 2a+b = b+2d \\ c-d = -a+c \\ 2c+d = -b+d \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b+2c = 0 \\ a-d = 0 \\ a-d = 0 \\ b+2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b+2c = 0 \\ a-d = 0. \end{cases}$$

Οι λύσεις του τελευταίου συστήματος είναι οι $(a,b,c,d) = (d,-2c,c,d),\ c,d \in \mathbb{R}$. Άρα $X = \begin{pmatrix} d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$. Δηλαδή

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι μια βάση του U είναι το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Πράγματι, αυτό παράγει το U γιατί $\begin{pmatrix} d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Επίσης τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί αν έχουμε $\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, τότε $\begin{pmatrix} \lambda & -2\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, οπότε $\lambda = \mu = 0$. Η διάσταση του U είναι 2.

Άσκηση 9

Έστω $U = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \middle| A^t = -A \right\}$ *το υποσύνολο του* $M_3(\mathbb{R})$ *που αποτελείται από τους αντισυμμετρικούς πίνακες. Αποδείξτε ότι το U είναι υπόχωρος του* $M_3(\mathbb{R})$. *Επιπλέον να βρεθεί μια βάση και η διάστασή του.*

Λύση

Το σύνολο U είναι βέβαια μη κενό. Έστω $A, B \in U$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$(A+B)^t = A^t + B^t = -A-B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in U,$$
$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda(-A) = -(\lambda A) \Rightarrow \lambda A \in U.$$

Συνεπώς το U είναι υπόχωρος του $M_3(\mathbb{R})$ σύμφωνα με την Πρόταση 2 του Κεφαλαίου 5.

Επειδή το τυχαίο στοιχείο A του U ικανοποιεί $A^t = -A$, βρίσκουμε ότι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Θα αποδείξουμε ότι τα στοιχεία

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

αποτελούν βάση του U.

Είναι σαφές ότι τα στοιχεία αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

Επίσης αυτά παράγουν το U γιατί

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τελικά, $\dim U = 3$.

Άσκηση 10

Έστω $\{u_1,\dots u_m, w_1,\dots,w_n\}$ *μια βάση του διανυσματικού χώρου* V. *Θέτουμε* $U = \langle u_1,\dots,u_m \rangle, W = \langle w_1,\dots,w_n \rangle$. *Αποδείξτε ότι* $V = U \oplus W$.

Λύση

Επειδή κάθε στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των $u_1,\dots,u_m, w_1,\dots,w_n$ είναι σαφές από τους ορισμούς ότι $V = U + W$. Για να αποδείξουμε ότι $V = U \oplus W$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $U \cap W = \langle 0 \rangle$. Για τον σκοπό αυτό, έστω $v \in U \cap W$. Τότε $v \in U$ που σημαίνει ότι το v είναι γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \ldots, u_m$, δηλαδή

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m,\ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Κατά παρόμοιο τρόπο

$$v = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_n w_n,\ \mu_i \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m - \mu_1 w_1 - \ldots - \mu_n w_n = 0,$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \mu_1 = \ldots = \mu_n = 0,$$

γιατί το $\{u_1, \ldots u_m, w_1, \ldots, w_n\}$ είναι βάση. Άρα $v = 0$, συνεπώς $U \cap W = \langle 0 \rangle$.

Άσκηση 11

Έστω U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα (1,3,2,1), (0,2,1,0). Να βρεθεί ένας υπόχωρος W του $\mathbb{R}^4$ ώστε $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Λύση

Θα βρούμε δύο στοιχεία $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ ώστε το $\{(1,3,2,1),(0,2,1,0), w_1, w_2\}$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^4$. Τότε το $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ θα έχει τη ζητούμενη ιδιότητα, λόγω της προηγούμενης Λυμένης Άσκησης. Θα επιλέξουμε (στην τύχη) δύο στοιχεία της συνήθους βάσης {(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)} του $\mathbb{R}^4$. Αν η επιλογή μας δεν οδηγεί σε βάση, θα ξαναδοκιμάσουμε. Έστω $w_1 = (1,0,0,0), w_2 = (0,1,0,0)$. Τότε

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Άρα το $\{(1,3,2,1),(0,2,1,0), w_1, w_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 12

Έστω οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1) \rangle,$$
$$W = \langle (1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3) \rangle.$$

Να βρεθούν οι διαστάσεις $\dim(U+W), \dim U \cap W$.

Λύση

Επειδή ο χώρος $U+W$ παράγεται και από τα έξι δοσμένα στοιχεία, θα εξετάσουμε την κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Μετά από πολλούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή υπάρχουν 3 μη μηδενικές γραμμές, συμπεραίνουμε ότι $\dim(U+W)=3$.

Για την τομή θα εφαρμόσουμε τον τύπο του Θεωρήματος 6 και για τον σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τις διαστάσεις $\dim U, \dim W$. Όπως και πριν θα μετασχηματίσουμε τους πίνακες των γεννητόρων σε κλιμακωτή μορφή. Για το U βλέπουμε ότι η κλιμακωτή μορφή του $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ είναι $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και άρα $\dim U = 2$.

Όμοια, $\dim W = 2$. Τέλος $\dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3=1$.

Άσκηση 13

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$

$U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z=2x-y-z=0.\right\}$

Λύση

Ο U είναι ο χώρος λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$$

Αυτό ισοδυναμεί με το $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \quad y+z=0 \end{cases}$ του οποίου οι λύσεις είναι

$(x,y,z)=(0,-z,z),\ z\in\mathbb{R}$. Άρα μια βάση του U είναι το $\{(0,-1,1)\}$ και $\dim U=1$.

Άσκηση 14

Έστω οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$, $U=\{(x,y,z)\mathbb{R}^3 \,|\, 2x-y-z=0\}$ *και* $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}$. *Βρείτε τη διάσταση και μια βάση για καθέναν από τους χώρους U, V,* $U\cap V$ *και U+V.*

Λύση

Θα μπορούσαμε να βρούμε τις διαστάσεις των *U,V* με τον τρόπο που είδαμε στην προηγούμενη Λυμένη Άσκηση. Ας δούμε εδώ μια άλλη μέθοδο.

Επειδή έχουμε $U\subseteq\mathbb{R}^3$ και $U\neq\mathbb{R}^3$ ισχύει $\dim U\leq 2$ σύμφωνα με το Θεώρημα 5. Δύο διανύσματα που ανήκουν στο *U* είναι τα (1,2,0) και (1,0,2). Παρατηρούμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα dim*U* = 2 και τα προηγούμενα διανύσματα αποτελούν βάση του *U*.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε, για παράδειγμα, τη βάση του *V* αποτελούμενη από τα διανύσματα $(1,-1,0),(0,1,-1)$.

Από τα προηγούμενα τέσσερα διανύσματα, τα πρώτα τρία είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί $\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\neq 0$) και ανήκουν στο *U*+*V*. Επειδή ο *U*+*V* είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ έχουμε dim(U+V) ≤ 3. Συνεπώς dim(*U*+*V*) = 3, και τα προαναφερθέντα τρία διανύσματα αποτελούν βάση.

Από τη σχέση $\dim U\cap V=\dim U+\dim V-\dim(U+V)$ ου Θεωρήματος 6 παίρνουμε $\dim U\cap V = 1$. Μένει να βρεθεί μια βάση του $U\cap V$ και προς τούτο αρκεί να βρούμε ένα μη μηδενικό στοιχείο του. Λύνοντας το σύστημα $2x-y-z=0,\ x+y+z=0$ βρίσκουμε x = 0, και y+z = 0, οπότε ένα μη μηδενικό στοιχείο της τομής είναι για παράδειγμα το $(0,1,-1)$.

Άσκηση 15

Αφού λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y-4z+3w&=0\\ x+2y-2z+2w&=0\\ 2x+4y-2z+3w&=0 \end{aligned}$$

να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου των λύσεων.

Λύση

Μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε ότι η κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα βρίσκουμε τις λύσεις $(x,y,z,w)=(-2y-w,y,\frac{w}{2},w), y,w\in\mathbb{R}$. Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι $m-r=4-2=2,$ όπου m = πλήθος αγνώστων και r = τάξη του πίνακα των συντελεστών. Για να βρούμε μία βάση, επιλέγουμε συγκεκριμένες τιμές για τις ελεύθερες μεταβλητές y,w ώστε οι δύο λύσεις να είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία. Για παράδειγμα από $y=0, w=2$ και $y=1, w=2$ παίρνουμε τη βάση $\{(-2,0,1,2),(-4,1,1,2)\}$

Άσκηση 16

Θεωρούμε τους υπόχωρους $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a+b=0\right\}, V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a+c=0\right\}$ *του* $M_2(\mathbb{R})$. *Να βρεθούν οι διαστάσεις των υπόχωρων* $U, V, U+V, U\cap V$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του U είναι της μορφής

$\begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Συνεπώς τα στοιχεία

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ παράγουν το U. Εύκολα επαληθεύεται ότι αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\lambda\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=0\\ \mu=0\\ \nu=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\lambda=\mu=\nu=0.$$

Συνεπώς μια βάση του U αποτελούν τα στοιχεία $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ και έχουμε $\dim U=3$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\dim V=3$.

Από τους ορισμούς προκύπτει ότι $U\cap V=\left\{\begin{pmatrix}a & -a\\ -a & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\right\}$. Όπως πριν αποδεικνύεται εύκολα ότι μια βάση του $U\cap V$ είναι το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Άρα $\dim U\cap V=2$.

Από τον τύπο $\dim U+\dim V=\dim(U+V)-\dim U\cap V$ του Θεωρήματος 6 παίρνουμε $\dim(U+V)=4$.

Άσκηση 17

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα $v_1=(1,1,1,1), v_2=(1,2,4,5), v_3=(1,-3,-4,-2)$.

Λύση

Σύμφωνα με τη μέθοδο των Gram-Schmidt θέτουμε

$$u_1=v_1=(1,1,1,1)$$

$$u_2=v_2-\frac{\langle v_2,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1=(1,2,4,5)-\frac{12}{4}(1,1,1,1)=(-2,-1,1,2)$$

$$u_3=v_3-\frac{\langle v_3,u_2\rangle}{|u_2|^2}u_2-\frac{\langle v_3,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1=$$

$$(1,-3,-4,-2)-\frac{-7}{10}(-2,-1,1,2)-\frac{-8}{4}(1,1,1,1)=(\frac{8}{5},\frac{-17}{10},\frac{-13}{10},\frac{7}{5}).$$

Διαιρώντας τα u_1, u_2, u_3 με τα μήκη τους βρίσκουμε τη ζητούμενη ορθοκανονική βάση $\left\{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,-1,1,2), \frac{10}{\sqrt{910}}(\frac{8}{5}, \frac{-17}{10}, \frac{-13}{10}, \frac{7}{5})\right\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε αν τα παρακάτω στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα

1. $(1,2,1,0),(1,2,-1,0),(0,0,2,0)$ στο $\mathbb{R}^4$
2. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ στο $M_2(\mathbb{R})$

Υπόδειξη 1. Βλ. Λυμένη Άσκηση 1. 2. Βλ. Λυμένη Άσκηση 2. **Απάντηση** 1. Είναι γραμμικά εξαρτημένα. 2. Είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 2

Εξετάστε αν τα πολυώνυμα $x^2+x+1, x^2+2x+1, x^2+x+2$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 3 και Πρόταση 4. **Απάντηση** Είναι βάση.

Άσκηση 3

Έστω u,v,w γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου.

1. Δείξτε ότι τα $2u-w, u+v+w, 3u-v-w$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Δείξτε ότι $\langle u,v,w\rangle = \langle 2u-w, u+v+w, 3u-v-w\rangle$

Υπόδειξη 1. Βλ. Λυμένη Άσκηση 4. 2. Επειδή ισχύει $\langle 2u-w, u+v+w, 3u-v-w\rangle \subseteq \langle u,v,w\rangle$ αρκεί να αποδειχτεί, σύμφωνα με το Θεώρημα 5, ότι $\dim\langle u,v,w\rangle = \dim\langle 2u-w, u+v+w, 3u-v-w\rangle$.

Άσκηση 4

1. Να βρεθούν οι τιμές του a τέτοιες ώστε στο $\mathbb{R}^3$ $(1,2,1) \in \langle (1,1,1),(0,a,1)\rangle$.
2. Να βρεθούν οι τιμές του a τέτοιες ώστε στο $\mathbb{R}^3$ $(1,2,2) \in \langle (1,1,1),(0,a,1)\rangle$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 5. **Απάντηση** 1. Δεν υπάρχει τέτοια τιμή του a. 2. $a = 1$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα $(1,4,-1,3),(2,1,-3,-1),(0,2,1,-5)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 6. **Απάντηση** Η διάσταση είναι 3.

Άσκηση 6

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=0\\ x+5y+z&=0\\ 3x+5y+8z&=0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 14. **Απάντηση** Μια βάση είναι το $\{(7,-1,-2)\}$ και η διάσταση είναι 1.

Άσκηση 7

Έστω $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$ το υποσύνολο του $M_3(\mathbb{R})$ που αποτελείται από τους συμμετρικούς πίνακες. Αποδείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του $M_3(\mathbb{R})$. Επιπλέον να βρεθεί μια βάση και η διάστασή του.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 9. **Απάντηση** $\dim W = 6$.

Άσκηση 8

Θεωρούμε τους υπόχωρους

$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+w=0\}, W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=z-2w=0\}$. Να βρεθούν οι διαστάσεις των $U, W, U \cap W, U+W$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 14.

Απάντηση $\dim U = 3, \dim W = 2, \dim U \cap W = 1, \dim(U+W) = 4$.

Άσκηση 9

Θεωρούμε τους υπόχωρους $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a-b=0\right\}, V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a-c=0\right\}$ του $M_2(\mathbb{R})$. Να βρεθούν οι διαστάσεις των υπόχωρων $U, V, U+V, U\cap V$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 16.

Απάντηση $\dim U=\dim V=3, \dim U\cap V=2, \dim(U+V)=4$.

Άσκηση 10

Αφού αποδείξτε ότι μια βάση του $M_2(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ να βρεθούν οι συντεταγμένες του $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ως προς τη βάση αυτή.

Υπόδειξη Από την Πρόταση 4 αρκεί να δείξετε ότι το δοσμένο σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο. **Απάντηση** Οι συντεταγμένες είναι $(3,-2,5,4)$, δηλαδή έχουμε

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 11

Έστω $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \,|\, y+z+w=0\}$. Να βρεθεί μια βάση ενός υπόχωρου W του $\mathbb{R}^4$ τέτοιου ώστε $U\oplus W=\mathbb{R}^4$.

Υπόδειξη Βρείτε μια βάση του U και επεκτείνατε την σε βάση του $\mathbb{R}^4$. Βλ. Λυμένη Άσκηση 11.

Άσκηση 12

Να βρεθούν οι τάξεις των πινάκων

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \\ 3 & 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη Μετασχηματίστε τους πίνακες σε κλιμακωτή μορφή και εφαρμόστε την Πρόταση 7. **Απάντηση** $r(A)=1, r(B)=2, r(C)=2$.

Άσκηση 13

Αποδείξτε ότι ένας $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η τάξη του είναι ίση με n.

Υπόδειξη Βλ. Θεώρημα 12 του Κεφαλαίου 3. Άλλος τρόπος: Βλ. Πόρισμα 5 Κεφάλαιο 5.

Άσκηση 14

Έστω $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Έστω ότι ο πίνακας $A-B$ έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο. Αποδείξτε ότι $|r(A)-r(B)| \leq 1$.

Υπόδειξη Εξετάστε τη διάσταση των χώρων γραμμών.

Άσκηση 15

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα (1,0,1),(1,1,0).

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 17. **Απάντηση** $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$