Κεφάλαιο 10
Διαγωνοποίηση

Μια από τις πιο απλές μορφές πινάκων είναι οι διαγώνιοι πίνακες. Θα δούμε στο κεφάλαιο αυτό διάφορα κριτήρια που μας πληροφορούν αν ένας πίνακας ανάγεται σε διαγώνια μορφή και πως επιτυγχάνεται η αναγωγή αυτή. Επίσης θα ασχοληθούμε με εφαρμογές και με τη διαγωνοποίηση ειδικών κατηγοριών πινάκων.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ορισμός 1 (διαγωνοποιήσιμος πίνακας)

*Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος** υπεράνω του $\mathbb{F}$ αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.*

Παραδείγματα

1. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$, επειδή υπάρχει ο αντιστρέψιμος πίνακας $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε να ισχύει

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{F}$.

   Πράγματι, αν $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F})$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τότε με υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} cd & d^2 \\ -c^2 & -cd \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι διαγώνιος μόνο αν $d=c=0$. Αλλά τότε $\det P=0$, που είναι άτοπο αφού ο P είναι αντιστρέψιμος.

3. Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Αυτός διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{C}$. Πράγματι εύκολα επαληθεύεται η σχέση $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, όπου $P=\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - Ο A δε διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{R}$. Πράγματι δεν υπάρχει πραγματικός πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος. (Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του παραδείγματος 2).

Ορισμός 2 (διαγωνοποιήσιμη γραμμική απεικόνιση)

*Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to V$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμη** αν για μια επιλογή μιας διατεταγμένης βάσης $\widehat{\alpha}$ του V ο αντίστοιχος πίνακας $\left(f:\widehat{\alpha},\widehat{\alpha}\right)$ της απεικόνισης είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, με $f(x,y)=(y,0)$. Ως προς τη συνήθη βάση στον $\mathbb{R}^2$, ο αντίστοιχος πίνακας είναι $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Στο προηγούμενο παράδειγμα, είδαμε ότι ο πίνακας A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος και συνεπώς η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση f δεν είναι διαγωνοποιήσιμη.
2. Αν εξετάσουμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, με $f(x,y)=(4x-y,2x+y)$, διαπιστώνουμε πως είναι διαγωνοποιήσιμη. Πράγματι, θεωρώντας την κανονική βάση στον $\mathbb{R}^2$, ο αντίστοιχος πίνακας είναι $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Για τον A υπάρχει κατάλληλος αντιστρέψιμος πίνακας $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ έτσι ώστε $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Σημείωση Στο εύλογο ερώτημα πως σκεφτήκαμε το συγκεκριμένο P θα απαντήσουμε παρακάτω.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗΣ

Συμβολισμός Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Τα ιδιοδιανύσματα του A είναι στοιχεία του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ δηλαδή είναι στοιχεία της μορφής $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Για συντομία θα γράφουμε $\mathbb{F}^{n\times 1}$ στη θέση του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Παρατηρούμε ότι ο χώρος $\mathbb{F}^{n\times 1}$ είναι ουσιαστικά ο $\mathbb{F}^n$ με τη μόνη διαφορά στο $\mathbb{F}^{n\times 1}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία με στήλες $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ενώ στο $\mathbb{F}^n$ χρησιμοποιούμε γραμμές $(x_1,\ldots,x_n)$. Ακριβέστερα η απεικόνιση $f:\mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^n, f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1,\ldots,x_n)$ είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Μέσω αυτού πολλές φορές θα ταυτίζουμε το $\mathbb{F}^{n\times 1}$ με το $\mathbb{F}^n$.

Θεώρημα 1 (κριτήριο διαγωνοποίησης μέσω ιδιοδιανυσμάτων)

Ένας $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ διαγωνοποιείται αν και μόνο αν ο χώρος $\mathbb{F}^{n\times 1}$ έχει βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Ισοδύναμα, ένας $n\times n$ πίνακας A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα Δ αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Στην πράξη μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο Θεώρημα με τον ακόλουθο τρόπο.

Αλγόριθμος διαγωνοποίησης του $A \in M_n(F)$

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και υπολογίζουμε τις ρίζες του, οπότε έχουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

2. Για κάθε ιδιοτιμή που υπολογίσαμε λύνουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda I - A)X = 0$. Βρίσκουμε μία βάση του χώρου των λύσεων.
3. Θεωρούμε το σύνολο $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, το οποίο έχει για στοιχεία τα στοιχεία των βάσεων που υπολογίστηκαν στο βήμα 2.
   - Αν $m \neq n$, τότε ο A δε διαγωνοποιείται.
   - Αν $m = n$, τότε ο A διαγωνοποιείται. Ορίζοντας P να είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα $p_1, p_2, \ldots, p_n$, έχουμε

$$\varDelta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_\nu \end{pmatrix},$$

όπου λ_i είναι η ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το p_i, $1 \leq i \leq n$.

Για συγκεκριμένα παραδείγματα εφαρμογής του αλγορίθμου αυτού παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 1, 2, 3.

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν και άλλοι τρόποι να αποφανθούμε αν ένας πίνακας διαγωνοποιείται. Ιδιαίτερα χρήσιμο είναι το Θεώρημα 3 παρακάτω.

Πρόταση 2

Αν ένας $n \times n$ πίνακας A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Θεώρημα 3 (κριτήριο διαγωνοποίησης μέσω του ελαχίστου πολυωνύμου)

Ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ του πίνακα A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, δηλαδή

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_k)$$

όπου οι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι ανά δυο διάφοροι.

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda)=\det\left(\lambda I-A\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-2&\lambda-2\end{pmatrix}=$$

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\0&-(\lambda-1)&\lambda-1\end{pmatrix}=(\lambda-1)\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=$$

$(\lambda-1)^2(\lambda-5)$.

και οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_2=5$.

Στο Θεώρημα 15 του Κεφαλαίου 9 είδαμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό. Άρα οι πιθανές εκφράσεις του ελαχίστου πολυωνύμου είναι

$$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5),\qquad m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=\chi_A(\lambda).$$

Ελέγχουμε αν ο $(A-I)(A-5I)$ είναι ίσος με 0. Έχουμε

$$(A-I)(A-5I)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2&1\\1&-2&1\\1&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Έτσι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5)$, το οποίο είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται.

Για άλλα παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος 3 παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 4,5,6.

Το ανάλογο αποτέλεσμα της Πρότασης 2 για γραμμικές απεικονίσεις είναι το εξής.

Πρόταση 4

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν η f έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

Παράδειγμα

Η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με

$f(x,y,z)=\left(2x+z,-x+4y-z,-x+2y\right)$, ως προς τη συνήθη βάση στον $\mathbb{R}^3$,

έχει αντίστοιχο πίνακα τον $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}=$$
$$(\lambda-2)((\lambda-4)\lambda+2)-(-2-\lambda+4)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

και έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ και $\lambda_3=3$. Επειδή αυτές είναι διακεκριμένες και το πλήθος τους είναι 3, η γραμμική απεικόνιση είναι διαγωνοποιήσιμη.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το ανάλογο του Θεωρήματος 3 για γραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα 5

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Η f είναι διαγωνοποιήσιμη αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Ας δούμε μερικές τυπικές εφαρμογές της διαγωνοποίησης πινάκων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1: Δυνάμεις πινάκων

Υποθέτουμε πως ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, συνεπώς μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $A=P\Delta P^{-1}$, με $\Delta=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ και $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ιδιοτιμές του πίνακα A. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A^k=\left(P\Delta P^{-1}\right)^k=\left(P\Delta P^{-1}\right)\left(P\Delta P^{-1}\right)\ldots\left(P\Delta P^{-1}\right)=$$
$$P\Delta^k P^{-1}=Pdiag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\ldots,\lambda_n^k)P^{-1}$$

δηλαδή,

$$A^k=Pdiag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\ldots,\lambda_n^k)P^{-1} \qquad (1)$$

Για παράδειγμα, αν ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τον A^{2004}, όταν $A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του *A*. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)$, σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{C}$. Έτσι από την (1) παίρνουμε $A^k=P\begin{pmatrix}(-i)^k & 0\\ 0 & i^k\end{pmatrix}P^{-1}$, οπότε με αντικατάσταση $k=2004$ έχουμε $A^{2004}=P\begin{pmatrix}(-i)^{2004} & 0\\ 0 & i^{2004}\end{pmatrix}P^{-1}=PIP^{-1}=I$.

Εφαρμογή 2: Ρίζες πινάκων

Ένας πίνακας $B\in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται *τετραγωνική ρίζα* του $A\in M_n(\mathbb{F})$, αν ισχύει $B^2=A$.

Στην περίπτωση όπου ο πίνακας *A* διαγωνοποιείται και τα στοιχεία $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ του διαγώνιου πίνακα *Δ* είναι πραγματικοί αριθμοί και μη αρνητικοί, τότε οι πίνακες

$$B=Pdiag\left(\pm\sqrt{\lambda_1},\pm\sqrt{\lambda_2},\ldots,\pm\sqrt{\lambda_n}\right)P^{-1} \qquad (2)$$

είναι πραγματικοί και είναι τετραγωνικές ρίζες του *A*. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η (2) δίνει κάποιες τετραγωνικές ρίζες του *A*, όχι αναγκαστικά όλες.

Παράδειγμα

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τετραγωνικές ρίζες του πίνακα $A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του *A* και να βρούμε τους *B* από την (2). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-10\lambda+9=(\lambda-1)(\lambda-9)$, οπότε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=9$.

Ο πίνακας *A* διαγωνοποιείται, (βλ. Πρόταση 2) και εύκολα επαληθεύουμε ότι οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι $V(1)=\left\{x\begin{pmatrix}3\\ -5\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$, $V(9)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$.

Συνεπώς οι πίνακες P, P^{-1} είναι $P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$ και $P^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, οπότε από την (2) οι τέσσερις πίνακες είναι $B_1=Pdiag(1,3)P^{-1}$, $B_2=Pdiag(1,-3)P^{-1}$, $B_3=Pdiag(-1,3)P^{-1}$, $B_4=Pdiag(-1,-3)P^{-1}$.

Σημείωση Επισημαίνουμε ότι η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται όχι μόνο για τετραγωνικές ρίζες πινάκων αλλά πιο γενικά για εξισώσεις της μορφής $B^m = A$, όπου ο A διαγωνοποιείται.

Εφαρμογή 3: Αναδρομικές ακολουθίες

Θεωρούμε την ακολουθία (a_n), $n = 1, 2, \ldots$, η οποία ορίζεται από τους όρους $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ και τον αναδρομικό τύπο $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n = 3, 4, \ldots$. Να βρεθεί ο γενικός όρος a_n συναρτήσει των a_1, a_2 και n.

Προφανώς έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_{n-1} &= a_{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Αν εφαρμόσουμε την (3) διαδοχικά, για τις διάφορες τιμές των n, έχουμε

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-4} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία σχέση είναι αρκετό να υπολογίσουμε τον A^{n-2}, γιατί λόγω της ισότητας των πινάκων θα μπορέσουμε να εκφράσουμε τον όρο a_n συναρτήσει των a_1, a_2 και n. Με βάση την προηγούμενη διαδικασία (δυνάμεις πινάκων) και τη σχέση (1), το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$, οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, βρίσκουμε τις μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης $(\lambda_1 I - A)X = 0$. Έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -3x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x_2 = -x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2 = 3$, από την εξίσωση $(\lambda_2 I - A)X = 0$ έχουμε :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 - 3x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$x_1 = 3x_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ο πίνακας A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ έχει αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ οπότε $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Έτσι από την (1) έχουμε

$$A^{n-2} = P\begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^{n-2} + 3^{n-1} & -3(-1)^{n-2} + 3^{n-1} \\ (-1)^{n-1} + 3^{n-2} & 3(-1)^{n-2} + 3^{n-2} \end{pmatrix},$$

οπότε από την ισότητα πινάκων της (3) προκύπτει

$$a_n = \frac{1}{4}\left\{\left((-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right)a_2 + \left(-3(-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right)a_1\right\}.$$

Με αντικατάσταση των όρων $a_1 = 1$ και $a_2 = 4$, έχουμε $a_n = \dfrac{1}{4}\left((-1)^{n-2} + 5\cdot 3^{n-1}\right)$, $n \geq 3$.

Εφαρμογή 4: Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Αν συμβολίσουμε $x_i = x_i(t)$ τις παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις, $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και με $x_i' = x_i'(t)$ τις παραγώγους τους, είναι γνωστό ότι για $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $i \in \mathbb{N}$ η διαφορική εξίσωση $x_i' = \lambda_i x_i$ έχει λύσεις τις $x_i = ce^{\lambda_i t}$, $c \in \mathbb{R}$ (*).

Για $i = 1, 2, \ldots, n$ θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{matrix} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{matrix},$$

του οποίου μια λύση είναι η μηδενική. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα.

Προφανώς μπορούμε να γράψουμε το σύστημα με τη βοήθεια πινάκων

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση που ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, αν θεωρήσουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P, που κατασκευάζεται όπως ο αλγόριθμος διαγωνοποίησης περιγράφει, τότε έχουμε $A = P\varDelta P^{-1}$, με $\varDelta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω σύστημα

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P\varDelta P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \varDelta P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

θέτοντας

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{**}$$

η (4) μετασχηματίζεται

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \varDelta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}.$$

Η τελευταία ισότητα των πινάκων δίνει τις λύσεις των y_i για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, αφού από (*) έχουμε $y_i = c_i e^{\lambda_i t}$, όπου $c_i \in \mathbb{R}$ σταθερές. Έτσι η γενική λύση του διαφορικού συστήματος, από τη σχέση της αντικατάστασης (**), είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1' &= 7x_1 + x_2 - 6x_3 \\
x_2' &= 2x_2 \\
x_3' &= 8x_1 - 7x_3
\end{aligned}
$$

που με την «γλώσσα» των πινάκων γράφεται

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 2$, οι οποίες είναι διακεκριμένες επομένως ο A διαγωνοποιείται (δες Πρόταση 2).

Εύκολα επαληθεύεται ότι: Για $\lambda_1 = -1$, ο ιδιόχωρος είναι $V(-1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$, για $\lambda_2 = 1$, ο ιδιόχωρος είναι $V(1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ και για $\lambda_3 = 2$, ο ιδιόχωρος είναι $V(2) = \left\{ x \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$. Ο αντιστρέψιμος πίνακας P είναι $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ με αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα τον $P^{-1}AP = \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Από την (5) έχουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + 9c_3 e^{2t} \\ 3c_3 e^{2t} \\ 4c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + 8c_3 e^{2t} \end{pmatrix},$$

όπου οι σταθερές $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ

Ορισμός 6

*Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι **τριγωνοποιήσιμος** υπεράνω του $\mathbb{F}$ αν είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $S^{-1}AS$ να είναι άνω τριγωνικός.*

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ είναι τριγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$, επειδή για τον αντιστρέψιμο πίνακα $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ισχύει

$$S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Υπάρχουν πίνακες που δεν είναι τριγωνοποιήσιμοι υπεράνω του $\mathbb{R}$, όπως για παράδειγμα ο $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, όπως θα δούμε παρακάτω. Όμως υπεράνω του $\mathbb{C}$ κάθε $A \in M_n(\mathbb{C})$ είναι τριγωνοποιήσιμος σύμφωνα με το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7 (τριγωνοποίηση)

1. *Ένας $A \in M_n(\mathbb{F})$ τριγωνοποιείται αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο αναλύεται στο $\mathbb{F}[x]$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων.*
2. *Κάθε $A \in M_n(\mathbb{C})$ τριγωνοποιείται.*

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Αν αναφερόμαστε στο σύνολο $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν ιδιοτιμές, άρα ο A δεν τριγωνοποιείται, ενώ αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 7, ο A τριγωνοποιείται. Επιπλέον επειδή υπάρχουν δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, από την Πρόταση 2 έπεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΡΜΙΤΙΑΝΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Υπενθυμίζουμε τους εξής ορισμούς.

- Ένας πίνακας $U \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **μοναδιαίος** αν ισχύει $UU^* = U^*U = I$, όπου $U^* = \overline{U^t}$, δηλαδή αν $U^{-1} = U^*$. Για παράδειγμα ο $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος .
- Ένας **ορθογώνιος** πίνακας είναι ένας μοναδιαίος πίνακας που έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Δηλαδή ένας P είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν $P^{-1} = P^t$. Για παράδειγμα ο $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιος για κάθε πραγματικό θ.
- Ένας πίνακας $H \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **Ερμιτιανός** αν $H = H^*$. Για παράδειγμα, ο $\begin{pmatrix} 2 & 4-5i \\ 4+5i & 3 \end{pmatrix}$ είναι Ερμιτιανός. Στην ειδική περίπτωση που $H \in M_n(\mathbb{R})$, τότε ο Η είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν είναι συμμετρικός.

Τα επόμενο αποτέλεσμα μας πληροφορεί ότι κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται μέσω ορθογωνίου

Θεώρημα 8

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ συμμετρικός πίνακας. Τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ είναι (πραγματικός) διαγώνιος.

Για μιγαδικούς πίνακες υπάρχει ανάλογο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 9

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας. Τότε υπάρχει μοναδιαίος πίνακας $U \in M_n(\mathbb{C})$ τέτοιος ώστε ο $U^{-1}AU$ είναι (πραγματικός) διαγώνιος.

Πρόταση 10

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές συμμετρικού (ή Ερμιτιανού) πίνακα είναι μεταξύ τους κάθετα.

Σχόλιο Σύμφωνα με τα Θεωρήματα 8 και 9, στην περίπτωση ενός συμμετρικού (ή Ερμιτιανού) πίνακα A, μπορούμε να επιλέξουμε τον P (αντίστοιχα τον U) να είναι *ορθογώνιος* (αντίστοιχα, *μοναδιαίος*) πίνακας. Στην πράξη συνήθως κατασκευάζουμε ένα τέτοιο P (ή U) με τη μέθοδο Gram-Schmidt. Επειδή τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές ήδη είναι ανά δύο κάθετα (δες Πρόταση 10), εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt μόνο ανάμεσα στα ιδιοδανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Ο συμμετρικός πίνακας $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$, οπότε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=3$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0$ ένα ιδιοδιάνυσμα είναι $p_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}^t$, για την $\lambda_2=1$ ένα ιδιοδιάνυσμα είναι $p_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}^t$ και για $\lambda_3=3$ ένα ιδιοδιάνυσμα είναι $p_3=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$. Όλες οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 10 τα προηγούμενα τρία ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Συνεπώς αυτά θα μετατραπούν σε ορθοκανονικά αν διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του. Έτσι παίρνουμε $\hat{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}p_1$, $\hat{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}p_2$ και $\hat{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}p_3$. Ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Ένας ορθογώνιος πίνακας P που υλοποιεί τη διαγωνοποίηση του A είναι

$$P=\begin{pmatrix}\hat{p}_1 & \hat{p}_2 & \hat{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$ και ισχύει $P^tAP=diag(0,1,3)$.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Γνωρίζουμε ότι ένας πίνακας $A\in M_n(\mathbb{C})$ διαγωνοποιείται αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του χώρου $\mathbb{C}^{n\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Επειδή υπάρχουν πίνακες που δε διαγωνοποιούνται, ξέρουμε ότι υπάρχουν πίνακες A έτσι ώστε είναι αδύνατο ο χώρος $\mathbb{C}^{n\times 1}$ να παράγεται από ιδιοδιανύσματα του A. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τα 'γενικευμένα ιδιοδιανύσματα' του A, που έχουν την ιδιότητα να παράγουν το $\mathbb{C}^{n\times 1}$ *για κάθε* A.

Ορισμός 11

Έστω $A\in M_n(\mathbb{C})$. *Ένα μη μηδενικό* $X\in\mathbb{C}^{n\times 1}$ *λέγεται* ***γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα*** *του* A *αν υπάρχει* $\lambda\in\mathbb{C}$ *τέτοιο ώστε* $(A-\lambda I)^m X=0$ *για κάποιο θετικό ακέραιο m. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το X αντιστοιχεί στο λ.*

Από τον ορισμό φαίνεται ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A. Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα δεν είναι αναγκαστικά ιδιοδιανύσματα. Για παράδειγμα, έστω $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$. Τότε για $\lambda=3$ εύκολα επαληθεύεται ότι $(A-\lambda I)^2=0$ και συνεπώς κάθε μη μηδενικό $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A. Από αυτά, μόνο τα $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιανύσματα του A.

Επισημαίνουμε ότι τα λ που εμφανίζονται στον Ορισμό 11 είναι οι ιδιοτιμές του A.

Θεώρημα 12

Έστω $A\in M_n(\mathbb{C})$. *Υπάρχει μια βάση του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{C}^{n\times 1}$ *που αποτελείται από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A*

Στην πράξη, για να υπολογίσουμε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ενός μιγαδικού πίνακα A μπορούμε να εργαστούμε ως εξής.

Τρόπος υπολογισμού γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A και τις πολλαπλότητές τους, δηλαδή παραγοντοποιούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A σε γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων $(x-\lambda_1)^{m_1}\ldots(x-\lambda_k)^{m_k}$. Στη συνέχεια επιλύουμε όλα τα συστήματα $\left(A-\lambda_i I\right)^{m_i} X = 0$, για $i = 1,\ldots,k$.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Υπολογίζοντας κατά τα γνωστά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο βρίσκουμε $\det(xI - A) = (x-2)^2(x-3)$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ και οι αντίστοιχες πολλαπλότητες $m_1 = 2, m_2 = 1$.

α) Λύνοντας το σύστημα $\left(A-\lambda_1 I\right)^{m_1} X = 0$ βρίσκουμε $X = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a,b \in \mathbb{C}$. Τα $a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, όπου τουλάχιστον ένας από τους a,b δεν είναι μηδέν, είναι τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$.

β) Λύνοντας το $\left(A-\lambda_2 I\right)^{m_2} X = 0$ βρίσκουμε $X = c\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}$. Τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι τα $c\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, όπου ο c δεν είναι μηδέν.

Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε ότι τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ συγκροτούν μια βάση του $\mathbb{C}^{3\times 1}$ όπως είναι αναμενόμενο από το Θεώρημα 12, αλλά μόνο τα $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιανύσματα του A.

Σημείωση Επισημαίνουμε ότι από το Θεώρημα 12 έπεται μια πολύ χρήσιμη κανονική μορφή πινάκων, η λεγόμενη μορφή Jordan, με την οποία δεν θα ασχοληθούμε στο υλικό αυτό.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε αν ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}-2&5&1&2\\-1&4&6&-1\\0&0&5&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ *διαγωνοποιείται*

Λύση

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda+2&-5&-1&-2\\1&\lambda-4&-6&1\\0&0&\lambda-5&0\\0&0&-1&\lambda-1\end{pmatrix}=$$

$$\det\begin{pmatrix}\lambda+2&-5\\1&\lambda-4\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\lambda-5&0\\-1&\lambda-1\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda^2-2\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-1)=(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-1).$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $-1,1,3,5$. Οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες και σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 2

Εξετάστε αν ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ *είναι διαγωνοποιήσιμος. Να βρεθεί ένας πίνακας* $P\in M_2(\mathbb{R})$, *τέτοιος ώστε ο* $P^{-1}AP$ *να είναι διαγώνιος.*

Λύση

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\\ -3 & \lambda-2\end{pmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=4$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2, οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, συνεπώς ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$, οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης $(\lambda_1 I-A)X=0$ δίνουν αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix}-2x_1-2x_2=0\\ -3x_1-3x_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$x_2=-x_1\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ -x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\quad x_1\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_1=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=4$, από την εξίσωση $(\lambda_2 I-A)X=0$ έχουμε :

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix}3x_1-2x_2=0\\ -3x_1+2x_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{3}{2}x_1\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \frac{3}{2}x_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}x_1\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix},\quad x_1\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=4$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}^t$.

Θέτουμε $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ και έχουμε $P^{-1}AP=\Delta=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Άσκηση 3

Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες μπορούν να διαγωνοποιηθούν και εκτελέστε τη διαγωνοποίηση όποτε αυτό είναι δυνατόν:

i) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ ii) $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 2\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ iii) $\Gamma=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Λύση

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det\left(\lambda I-A\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -4\\ -3 & \lambda-2 & 1\\ -2 & -1 & \lambda+1\end{pmatrix}=$$
$$\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3).$$

(Σημειώνουμε ότι η παραγοντοποίηση στην τελευταία ισότητα δεν είναι τελείως προφανής. Πρώτα παρατηρούμε ότι το 1 είναι ρίζα του $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6$ και στη συνέχεια διαιρούμε το $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6$ με το $\lambda-1$ για να βρούμε το πηλίκο $(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)$).

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=3$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Στη $\lambda_1=-2$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(\lambda_1 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-3 & 1 & -4\\ -3 & -4 & 1\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{aligned}-3x_1+x_2-4x_3&=0\\ x_1+x_2&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_2&=-x_1\\ x_3&=-x_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ -x_1\\ -x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα $p_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}^t$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_2=1$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(\lambda_2 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ -3 & -1 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{aligned}x_2-4x_3&=0\\ -3x_1-x_2+x_3&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_2&=4x_3\\ x_1&=-x_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_3\\ 4x_3\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Στην $\lambda_2=1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_3=3$, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$$(\lambda_3 I - A)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ είναι,}$$

$$\left.\begin{matrix} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα p_1, p_2, p_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί σε διακεκριμένες ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. (Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα που αυτά σχηματίζουν).

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης, θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και έχουμε

$$P^{-1}AP = \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι

$$\chi_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+2 & -5 & -2 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda+1)((\lambda+2)(\lambda-4)+5) = (\lambda-3)(\lambda+1)^2,$$

επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1$ (διπλή ρίζα).

Στη $\lambda_1 = 3$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του

συστήματος $(\lambda_1 I - B)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$ Για τη $\lambda_1 = 3$

επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$.

Η $\lambda_2 = -1$ έχει ιδιοδιάνυσμα τις μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$$(\lambda_2 I - B)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Άρα έχουμε

$$\left.\begin{matrix} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 5x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$ είναι λιγότερα από τη διάσταση του $\mathbb{R}^3$, άρα με βάση τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης βήμα 3i) ο B **δε** διαγωνοποιείται.

Προσοχή Εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε και το Θεώρημα 3. Πράγματι, υπολογίζοντας το ελάχιστο πολυώνυμο του B, διαπιστώνουμε ότι είναι το $m_B(\lambda) = \chi_B(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+1)^2$, που δεν έχει πρωτοβάθμιους διακεκριμένους παράγοντες. Άρα ο B **δε** διαγωνοποιείται.

iii) Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Γ με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών (αφαιρούμε την δεύτερη από την πρώτη)

$$\chi_\Gamma(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -(\lambda-2) & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda-2)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_2 = 6$.

Η $\lambda_1 = 2$ έχει ιδιοδιανύσματα τις μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$$(\lambda_1 I - \Gamma)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Η λύση του συστήματος υπολογίζεται από την εξίσωση

$$x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_3=-x_1-x_2 \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1-x_2 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_1,x_2 \in \mathbb{R}-\{0\}.$$

Για $\lambda_1=2$ ο ιδιόχωρος $V(2)$ παράγεται από τα $p_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^t$, $p_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=6$, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$(\lambda_2 I-\Gamma)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ δίνουν τον αντίστοιχο ιδιόχωρο, οπότε

$$\left.\begin{matrix} 3x_1-x_2-x_3=0 \\ -x_1-x_2+3x_3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=x_3 \\ x_2=2x_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R}-\{0\}.$$

Συνεπώς επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα p_1,p_2,p_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (έχουν μη μηδενική ορίζουσα), άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 1 ο Γ διαγωνοποιείται. Ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

ο οποίος μετά από τις πράξεις δίνει το διαγώνιο πίνακα $P^{-1}\Gamma P=\Delta=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 4

Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας είναι τριγωνικός και επομένως το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-a)^4$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό, οι πιθανές εκφράσεις του ελαχίστου πολυωνύμου είναι

$$\lambda - a\,,\ (\lambda - a)^2,\ (\lambda - a)^3 \ \text{ή}\ (\lambda - a)^4 = \chi_A(\lambda)$$

Προφανώς ισχύει $A - aI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Επομένως το $m_A(\lambda)$ δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων και με βάση το Θεώρημα 3 ο πίνακας **δε** διαγωνοποιείται.

Άσκηση 5

Εξετάστε αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & -4 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 6 & -6 & -3 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda+1)\det\begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+2)^2$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ και $\lambda_3 = -2$ (διπλή ρίζα). Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό, οι πιθανές εκφράσεις του ελαχίστου πολυωνύμου είναι

$$(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+2) \quad \text{ή} \quad (\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+2)^2 = \chi_A(\lambda).$$

Παρατηρούμε ότι

$$(A-4I)(A+I)(A+2I) =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 1 & 4 & -1 \\ -7 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -1 \\ -7 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & -1 \\ -7 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+2)^2$, οπότε με βάση το Θεώρημα 3 ο πίνακας A **δε** διαγωνοποιείται.

Άσκηση 6

Έστω ο πραγματικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες ο πίνακας A διαγωνοποιείται.*

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-(2-a) & -a & -(a-3) \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \lambda^3 + (a-1)\lambda^2 - \lambda + 1 - a$$
$$= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+a-1)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 1-a$.

Στην περίπτωση όπου $a \neq 0$ και $a \neq 2$ οι ιδιοτιμές είναι όλες διακεκριμένες, επομένως ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 2).

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου $a = 0$, οπότε ο πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ και

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$. Επειδή συμβαίνει

$(A+I)(A-I) \neq 0$, είναι φανερό πως το ελάχιστο πολυώνυμο είναι

$m_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = \chi_A(\lambda)$, άρα για $a = 0$ ο πίνακας **δε** διαγωνοποιείται,

σύμφωνα με το Θεώρημα 3.

Όμοια εξετάζουμε και την περίπτωση όπου $a = 2$, οπότε ο πίνακας είναι

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$. Και

στην περίπτωση αυτή το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1) = \chi_A(\lambda)$,

άρα για $a = 2$ σύμφωνα με το Θεώρημα 3 ο πίνακας **δε** διαγωνοποιείται.

Άσκηση 7

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *με*

$f(x,y,z) = (4x+z, \quad 4y+z, \quad -x+y+4z)$. *Εξετάστε αν η* f *διαγωνοποιείται.*

Λύση

Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του είναι

$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I - A)=\det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix}=(\lambda-4)^3$, επομένως η μοναδική

ιδιοτιμή $\lambda_1=4$ είναι τριπλή ρίζα του. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(\lambda)$, της γραμμικής απεικόνισης f είναι το ίδιο με αυτό του πίνακα A, αρκεί να υπολογίσουμε το $m_A(\lambda)$. Τα πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα μπορεί να είναι

$$\lambda-4,\quad (\lambda-4)^2 \text{ ή } (\lambda-4)^3=\chi_A(\lambda)$$

Παρατηρούμε ότι $A-4I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$. Άρα το $m_A(\lambda)$ δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων παραγόντων πρώτου βαθμού και σύμφωνα με την Θεώρημα 3 η γραμμική απεικόνιση **δε** διαγωνοποιείται.

Άσκηση 8

Για κάθε θετικό ακέραιο k υπολογίστε τον A^k, όταν $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Λύση

Έχουμε $\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I - A)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$, οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1=-2$ και $\lambda_2=1$ (διπλή ρίζα).

Για $\lambda_1=-2$, οι μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος

$(\lambda_1 I - A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, που είναι

$$\left.\begin{aligned} -3x_1+3x_2-3x_3&=0 \\ 3x_2-6x_3&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1&=x_3 \\ x_2&=2x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R}-\{0\}$$

αποτελούν τον ιδιόχωρο $V(-2)$ της $\lambda_1=-2$. Επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα $p_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=1$, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ 0 & 6 & -6\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$3x_2-3x_3=0\Rightarrow x_2=x_3\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\\ x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\ x_1,x_3\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Επομένως για $\lambda_2=1$ ο ιδιόχωρος $V(1)$ παράγεται από τα $p_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t$, $p_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$. Τα ιδιοδιανύσματα p_1,p_2,p_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επειδή $\det\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=-1\neq 0$, άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 ο A διαγωνοποιείται, οπότε θέτοντας $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ έχουμε $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ και ισχύει

$P^{-1}AP=\Delta=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Από την τελευταία σχέση και την (1) έχουμε :

$$A^k=P\Delta^kP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^k & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1 & (-2)^k-1 & -(-2)^k+1\\ 0 & 2(-2)^k-1 & -2(-2)^k+2\\ 0 & (-2)^k-1 & -(-2)^k+2\end{pmatrix}.$$

Άσκηση 9

Να βρεθούν 8 διαφορετικοί πίνακες B, τέτοιοι ώστε $B^2=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ -6 & 5 & 2\\ -7 & 4 & 4\end{pmatrix}$.

Λύση

Αν συμβολίσουμε με A τον πίνακα στο δεύτερο μέλος της δοθείσης εξίσωσης βρίσκουμε ότι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Για $\lambda_1=1$, οι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(\lambda_1 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -2 \\ 7 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, δίνουν τον ιδιόχωρο

$$V(1)=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$$, οπότε επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=2$, οι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(\lambda_2 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & -2 \\ 7 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, δίνουν τον ιδιόχωρο

$$V(2)=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 3x_1/2 \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$$, οπότε επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το

$p_2=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_3=3$, οι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(\lambda_3 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, δίνουν τον ιδιόχωρο

$$V(3)=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 4x_1/3 \\ 5x_1/3 \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$$, οπότε επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το

$p_3=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}^t$.

Θέτουμε $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Ο P είναι αντιστρέψιμος γιατί τα ιδιοδιανύσματα p_1,p_2,p_3 αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές και υπολογίζουμε ότι $P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Επειδή έχουμε $B^2=A$, η σχέση (2) δίνει $B=Pdiag\left(\pm 1,\ \pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3}\right)P^{-1}$, από όπου προκύπτουν $8=2^3$ διαφορετικοί πίνακες-λύσεις της εξίσωσης.

Άσκηση 10

Έστω οι πίνακες $A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix}$ *και* $Z_n=\begin{pmatrix} w_n \\ y_n \end{pmatrix}$ *με* $w_n+y_n=1$*, για κάθε* $n=1,2,\ldots$*, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση* $Z_n=AZ_{n-1}$*. Αν* $w_1=0,2$*, να εκφράσετε τους όρους* w_n, y_n *συναρτήσει του* n*.*

Λύση

Η δοθείσα ισότητα πινάκων γράφεται και

$$\begin{pmatrix} w_n \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} w_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη ισότητα διαδοχικά για τις διάφορες τιμές των n θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} w_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} w_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix} w_{n-3} \\ y_{n-3} \end{pmatrix}=\ldots=A^{n-1}\begin{pmatrix} w_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Από την τελευταία σχέση είναι αρκετό να υπολογίσουμε τον A^{n-1}, γιατί λόγω της ισότητας των πινάκων θα μπορέσουμε να εκφράσουμε τον $Z_n=\begin{pmatrix} w_n & y_n \end{pmatrix}^t$ συναρτήσει των w_1, y_1 και n. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-1,1\lambda+0,1=(\lambda-0,1)(\lambda-1)$ και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=0,1$ και $\lambda_2=1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0,1$, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$(\lambda_1 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix} -0,3 & -0,3 \\ -0,6 & -0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ δίνουν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Έτσι έχουμε

$\left.\begin{array}{l}-0,3x_1-0,3x_2=0\\-0,6x_1-0,6x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow x_2=-x_1\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}-\{0\}$. Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0,1$ επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα $p_1=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=1$, από το σύστημα $(\lambda_2 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0,6 & -0,3\\-0,6 & 0,3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ έχουμε

$0,6x_1-0,3x_2=0\Rightarrow x_2=2x_1\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\2x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}-\{0\}$. Ο πίνακας A για την ιδιοτιμή $\lambda_2=1$ έχει αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $p_2=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^t$.

Οι πίνακες P,P^{-1} είναι $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$ και $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

Έτσι από την (1) έχουμε

$$A^{n-1}=P\begin{pmatrix}0,1^{n-1} & 0\\0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot 0,1^{n-1}+1 & 1-0,1^{n-1}\\2-2\cdot 0,1^{n-1} & 2+0,1^{n-1}\end{pmatrix},$$

και από την (*) προκύπτει

$$Z_n=\begin{pmatrix}w_n\\y_n\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\left(1+2\cdot 0,1^{n-1}\right)w_1+\left(1-0,1^{n-1}\right)y_1\\\left(2-2\cdot 0,1^{n-1}\right)w_1+\left(2+0,1^{n-1}\right)y_1\end{pmatrix}\overset{(w_1+y_1=1)}{=}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+(2w_1-y_1)\cdot 0,1^{n-1}\\2+(-2w_1+y_1)\cdot 0,1^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Με αντικατάσταση των $w_1=0,2$ και $y_1=0,8$, έχουμε τελικά

$$w_n=\frac{1}{3}\left(1-0,4\cdot 0,1^{n-1}\right),\quad y_n=\frac{1}{3}\left(2+0,4\cdot 0,1^{n-1}\right),\quad n\geq 1.$$

Άσκηση 11

Έστω $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\-4 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

1. *Εξετάστε αν ο A τριγωνοποιείται.*
2. *Εξετάστε αν ο A διαγωνοποιείται.*
3. *Στην περίπτωση που η απάντηση στο 1 είναι θετική, να βρεθεί ένας πραγματικός αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε $S^{-1}AS$ είναι άνω τριγωνικός.*

Λύση

1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 4 & x-2 \end{pmatrix} = x^2$ που είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7, ο πίνακας A τριγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{R}$.
2. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του A οφείλει να διαιρεί το x^2 και να έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό. Άρα το $m_A(x)$ είναι είτε το x είτε το x^2. Προφανώς δεν είναι το x αφού $A \neq 0$. Άρα το $m_A(x)$ δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων και συνεπώς ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.
3. Ένα ιδιοδιάνυσμα του A είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Επεκτείνουμε το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^{2\times1}$, έστω την $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Θέτουμε $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε διαπιστώνουμε ότι $S^{-1}AS = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 12

Θεωρούμε το συμμετρικό πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας* P *έτσι ώστε ο* $P^{-1}AP$ *να είναι διαγώνιος.*

Λύση

Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός με βάση το Θεώρημα 8 αυτός διαγωνοποιείται και μάλιστα τα ιδιοδιανύσματα των διακεκριμένων ιδιοτιμών είναι μεταξύ τους κάθετα (Πρόταση 10). Ωστόσο για να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο το οποίο είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$, οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = 1$ (διπλή ρίζα).

Υπολογίζοντας κατά τα γνωστά βρίσκουμε ότι για $\lambda_1 = 4$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο $V(4) = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ και για $\lambda_2 = 1$ ο ιδιόχωρος είναι

$V(1)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$. Τα ιδιοδιανύσματα $p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (πχ η αντίστοιχη ορίζουσα είναι μη μηδενική) και άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Επιπλέον τα p_1,p_2 και p_1,p_3 είναι κάθετα (Πρόταση 10). Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt στο $\{p_1,p_2,p_3\}$. Βρίσκουμε

$$\hat{p}_1=\frac{1}{|p_1|}p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad \hat{p}_2=\frac{1}{|p_2|}p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \hat{p}_3=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Ο ορθογώνιος πίνακας P είναι $P=\begin{pmatrix}\hat{p}_1 & \hat{p}_2 & \hat{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

Ξέρουμε ότι $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Άσκηση 13

Έστω $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιοι ώστε $AB=BA$. Αποδείξτε ότι αν ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο B διαγωνοποιείται.

Λύση

Έστω ότι $X_1,\dots,X_n$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ του A. Τότε αυτά είναι μια βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ γιατί τα $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ είναι διακεκριμένα. Θα δείξουμε ότι τα $X_1,\dots,X_n$ είναι ιδιοδιανύσματα του B. Τότε από το Πρόταση 2 ο B διαγωνοποιείται.

Από τη σχέση $AB=BA$ παίρνουμε

$$(AB)X_i=(BA)X_i\Rightarrow A(BX_i)=B(AX_i)=B(\lambda_iX_i)=\lambda_iBX_i.$$

Άρα το BX_i είναι στοιχείο του ιδιόχωρου $V(\lambda_i)$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ είναι διακεκριμένες η πολλαπλότητα κάθε μιας ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι ίση με 1. Από το Θεώρημα 13 του Κεφαλαίου 9 έπεται ότι $\dim V(\lambda_i) \leq 1$ και άρα $\dim V(\lambda_i) = 1$. Συνεπώς $V(\lambda_i) = \langle X_i \rangle$.

Από τις σχέσεις $BX_i \in \langle X_i \rangle$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\mu_i \in \mathbb{F}$ με

$$BX_i = \mu_i X_i.$$

Τα X_i είναι μη μηδενικά και άρα είναι ιδιοδιανύσματα του B.

Άσκηση 14

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ τέτοιος ώστε $A^m = I$ για κάποιο θετικό ακέραιο m και $TrA = n$. Αποδείξτε ότι $A = I$.

Λύση

Από την υπόθεση $A^m = I$ συνάγουμε ότι

- Ο A διαγωνοποιείται. Πράγματι, το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του A διαιρεί το $x^m - 1$ και επειδή το $x^m - 1$ έχει διακεκριμένες ρίζες στο $\mathbb{C}$, το ίδιο συμβαίνει με το $m_A(x)$. Από το Θεώρημα 3 ο A διαγωνοποιείται.
- Κάθε ιδιοτιμή του A ικανοποιεί τη σχέση $\lambda^m = 1$.

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) οι ιδιοτιμές του A. Από το Κεφάλαιο 9 ξέρουμε ότι $TrA = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. Από την τριγωνική ανισότητα για μέτρα μιγαδικών παίρνουμε

$$n = TrA = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \Rightarrow n = |\lambda_1 + \ldots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| = 1 + \ldots + 1 = n.$$

Άρα η ανισότητα είναι ισότητα και επομένως $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Συνεπώς $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$. Άρα η διαγώνια μορφή του A είναι ο ταυτοτικός πίνακας I, οπότε $A = PIP^{-1}$ για κάποιον αντιστρέψιμο P. Επομένως $A = I$.

Άσκηση 15

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{F})$. *Αποδείξτε ότι ο A διαγωνοποιείται αν και μόνο αν $a = f = 0$.*

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $(x-1)^2(x-2)^2$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 15 του Κεφαλαίου 9, το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα από τα

$$(x-1)(x-2), \quad (x-1)^2(x-2), \quad (x-1)(x-2)^2, \quad (x-1)^2(x-2)^2.$$

Από το Θεώρημα 3 συνάγουμε ότι ο A διαγωνοποιείται αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $(x-1)(x-2)$. Είναι σαφές ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $(x-1)(x-2)$ αν και μόνο αν $(A-I)(A-2I)=0$. Υπολογίζοντας βρίσκουμε

$$(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ ad & 0 & 0 & 0 \\ ae+bf & df & f & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως $(A-I)(A-2I)=0 \Leftrightarrow a=f=0.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε αν οι επόμενοι πίνακες διαγωνοποιούνται

$$\text{i) } A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } \Gamma=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{iv) } \Delta=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη Βλ Λυμένες Ασκήσεις 1,3,4,5 . **Απάντηση** Οι πίνακες A και B διαγωνοποιούνται και οι πίνακες Γ και Δ δε διαγωνοποιούνται

Άσκηση 2

Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες μπορούν να διαγωνοποιηθούν και εκτελέστε τη διαγωνοποίηση όποτε αυτό είναι δυνατόν:

$$\text{i) } A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } \Gamma=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{v) } \Delta=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη Βλ Λυμένες Ασκήσεις 1,3,4,5. **Απάντηση** Οι πίνακες A και Δ δε διαγωνοποιούνται, οι B και Γ διαγωνοποιούνται.

Άσκηση 3

Έστω ο πραγματικός πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 6. **Απάντηση** Για $a \neq -1$ ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Άσκηση 4

Να εξετάσετε αν διαγωνοποιείται η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y,z)=\left(-3x+y-z,\quad 2x+y,\quad -3x+z\right)$. Αν διαγωνοποιείται, να γράψετε την απεικόνιση που αντιστοιχεί στη διαγώνια μορφή.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 7. Υπολογίστε το διαγώνιο πίνακα και από αυτόν γράψτε την απεικόνιση που του αντιστοιχεί ως προς τη βάση των ιδιοδιανυσμάτων που βρήκατε. **Απάντηση** Οι ιδιοτιμές είναι $-4,1,2$ **,** $f(x,y,z)=(-4x,y,2x)$

Άσκηση 5

Έστω $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, να υπολογίστε τον A^n, για κάθε θετικό ακέραιο n.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 8. **Απάντηση** Ο ζητούμενος πίνακας είναι

$$A^n = Pdiag(2^n,1,1)P^{-1} = \begin{pmatrix} -3\cdot 2^n+4 & -3\cdot 2^n+3 & -3\cdot 2^n+3 \\ -2^n+1 & -2^n+2 & -2^n+1 \\ 5\cdot 2^n-5 & 5\cdot 2^n-5 & 5\cdot 2^n-4 \end{pmatrix}, \text{ με } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

P πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του A.

Άσκηση 6

Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, να βρεθούν τέσσερις διαφορετικοί πίνακες B, τέτοιοι ώστε $B^2 = A$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 9 . **Απάντηση** Οι πίνακες είναι

$B_1 = Pdiag\left(1,\sqrt{5}\right)P^{-1}$ $B_2 = Pdiag\left(1,-\sqrt{5}\right)P^{-1}$, $B_3 = Pdiag\left(-1,\sqrt{5}\right)P^{-1}$,

$B_4 = Pdiag\left(-1,-\sqrt{5}\right)P^{-1}$, όπου $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του A.

Άσκηση 7

Έστω η ακολουθία (a_n), $n = 1,2,\dots$, η οποία ορίζεται από τους όρους $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ και τον αναδρομικό τύπο $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $n = 3,4,\dots$. Να βρεθεί ο γενικός όρος a_n συναρτήσει του n.

Υπόδειξη Βλ. Αναδρομικές ακολουθίες και Λυμένη Άσκηση 10.

Απάντηση $a_n = \frac{1}{5}\left((-1)^{n-2} + 4^{n-1}\right)$.

Άσκηση 8

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{F}^{4\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη Προσδιορίστε τα ιδιοδιανύσματα του A. Με κατάλληλες επιλογές βάσεων δεν θα χρειαστεί να εφαρμόσετε τη μέθοδο Gram – Schmidt.

Απάντηση $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0)^t$.

Άσκηση 9

Εξετάστε αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P, τέτοιος ώστε ο $P^t AP$ να είναι διαγώνιος, όταν $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Στην περίπτωση που υπάρχει να βρεθεί ένας τέτοιος P.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 12. **Απάντηση** $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και ο $P^t AP = diag(2,4,4)$.

Άσκηση 10

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας διαγωνοποιήσιμος πίνακας. Αποδείξτε ότι υπάρχει πραγματικός πίνακας B με $B^3 = A$. Βρείτε έναν B αν $A=\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη Βλ. Ρίζες Πινάκων. **Απάντηση** $B=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$