Κεφάλαιο 6

Διανυσματικοί χώροι

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την έννοια του *διανυσματικού χώρου*, μιας μαθηματικής δομής, που αποτελεί γενίκευση της δομής του $\mathbb{R}^n$.

Θα γνωρίσουμε την έννοια του *διανυσματικού υποχώρου* ενός χώρου, πότε δηλαδή ένα υποσύνολο ενός χώρου γίνεται και εκείνο διανυσματικός χώρος. Θα δούμε τι είναι *γραμμικοί συνδυασμοί* στοιχείων-διανυσμάτων ενός χώρου και πως διανυσματικοί υποχώροι μπορούν να ‘χτιστούν’ από λίγα διανύσματα. Τέλος, θα δούμε πως από δοσμένους διανυσματικούς υποχώρους μπορούμε να παράξουμε άλλους χώρους μέσα από τη πράξη του *αθροίσματος υποχώρων*.

6.1 Διανυσματικοί χώροι

Στη παράγραφο αυτή θα εισαγάγουμε την έννοια του *διανυσματικού χώρου* και θα δούμε μερικά παραδείγματα, σημαντικά για τη συνέχεια, όπου διαπιστώνεται η ύπαρξη της νέας μαθηματικής δομής, του *διανυσματικού χώρου*.

Στην παράγραφο 5.1 μελετήσαμε το σύνολο $\mathbb{R}^n$, για κάθε $n \in N$, δηλαδή το $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$, όπου ορίσαμε μια πράξη πρόσθεσης και ένα 'πολλαπλασιασμό' που ονομάζουμε βαθμωτό ή κλιμακωτό. Θυμίζουμε λοιπόν ότι στο $\mathbb{R}^n$ έχουμε τους εξής ορισμούς.

<u>*Πρόσθεση*</u>: Αν $v_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ και $v_2 = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ στοιχεία του R^n τότε

$$v_1 + v_2 = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots x_n + y_n)$$

<u>*Βαθμωτός πολλαπλασιασμός*</u>: Για κάθε $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ και για κάθε $k \in R$ ορίζουμε

$$k\,v = k\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)$$

Η πράξη της πρόσθεσης[1] ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

1. $v + w = w + v$, για όλα τα $v, w \in R^n$ (*αντιμεταθετική* ιδιότητα στο R^n)
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$, για όλα τα $u, v, w \in R^n$ (*προσεταιριστική* ιδιότητα στο R^n)
3. υπάρχει ένα στοιχείο, το *μηδενικό* διάνυσμα $0 = (0, 0, \cdots, 0)$ για το οποίο ισχύει $0 + v = v = v + 0$, για κάθε v του R^n
4. για κάθε $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ υπάρχει το *αντίθετο* του, το οποίο συμβολίζουμε με $-v = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n) \in R^n$ και ικανοποιεί τη σχέση $v + (-v) = 0$

ενώ ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ικανοποιεί τις ιδιότητες:

5. $1v = v$, για κάθε $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ και 1 η μονάδα στο $\mathbb{R}$.
6. $k\,(v + w) = kv + kw$, για κάθε $v, w \in R^n$ και κάθε $k \in \mathbb{R}$ (*επιμεριστική* ιδιότητα του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού* ως προς τη *πρόσθεση* στο R^n)
7. $(k + l)v = kv + lv$, για κάθε $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ και κάθε $k, l \in R$ (*επιμεριστική* ιδιότητα του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού* ως προς τη *πρόσθεση* στο R)
8. $(k\,l)v = k\,(l\,v)$, για κάθε $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ και κάθε $k, l \in R$.

Τα στοιχεία του R^n τα ονομάζουμε, ως γνωστό, *διανύσματα*.

Οι παραπάνω αλγεβρικές ιδιότητες (1) - (8) ικανοποιούνται και από τα στοιχεία και άλλων συνόλων όταν αυτά εφοδιαστούν με μια πράξη πρόσθεσης και ένα βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, αν με *u, v, w* παραστήσουμε mxn

---

[1] Αν σε ένα μη κενό σύνολο Α οριστεί μια πράξη * η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) έως (4), τότε το ζεύγος (Α,*) λέγεται ***ομάδα*** *αντιμεταθετική* (ή απλά ομάδα όταν δεν ισχύει η ιδιότητα (1)) .

πίνακες με στοιχεία πραγματικούς (ή μιγαδικούς αριθμούς) με πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως ορίστηκαν στη παράγραφο 3.2 τότε οι ιδιότητες (1)-(8) παραμένουν ισχυρές. Έτσι, για παράδειγμα, το μηδενικό στοιχείο του συνόλου των mxn πινάκων είναι ο mxn πίνακας $(0)_{ij}$ (με όλα τα στοιχεία του μηδέν) και το αντίθετο ενός πίνακα $A=(a_{ij})$ είναι ο πίνακας $-A=(-a_{ij})$. Και ακόμα αν $k\in R$, και $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ δύο mxn πίνακες, τότε σχετικά με την ισχύ της ιδιότητας (6) του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο των mxn πινάκων, έχουμε

$$k(A+B)=k((a_{ij})+(b_{ij}))=k(a+b)_{ij}=(k(a+b))_{ij}=$$
$$(ka+kb)_{ij}=(ka)_{ij}+(kb)_{ij}=k(a_{ij})+k(b_{ij})=kA+kB$$

Ένα άλλο παράδειγμα σημαντικό στην ανάλυση Fourier, αποτελεί το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $[0,2\pi]$ ικανοποιεί αντίστοιχα τις παραπάνω οκτώ ιδιότητες (αφού το άθροισμα $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ συνεχών συναρτήσεων στο ίδιο διάστημα I είναι συνεχής συνάρτηση στο I, όπως επίσης συνεχής συνάρτηση στο I είναι και το γινόμενο $(kf)(x)=k\,f(x)$, αριθμού $k\in R$ με συνεχή συνάρτηση f στο I).

Γίνεται λοιπόν αναγκαίο να εξερευνήσουμε τα σύνολα με τέτοιες ιδιότητες για τα στοιχεία τους και να αναπτύξουμε μια κατάλληλη ορολογία για να τα περιγράψουμε. Έτσι, στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την έννοια του *διανυσματικού χώρου* και του *υποχώρου*, που είναι στην καρδιά της γραμμικής άλγεβρας.

6.1.1 Ορισμός. *Έστω V ένα μη κενό σύνολο και K το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή των μιγαδικών αριθμών, δηλαδή $K=R$ ή $K=C$[2]. Εφοδιάζουμε το V*
α) *με μια πράξη[3], την οποία ονομάζουμε πρόσθεση και συμβολίζουμε με + και η οποία ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες (1) –(4)*

1. *$v+w=w+v$, για όλα τα $v,w\in V$ (αντιμεταθετική ιδιότητα της πράξης + στο V)*
2. *$(u+v)+w=u+(v+w)$, για όλα τα $u,v,w\in V$ (προσεταιριστική ιδιότητα της + στο V)*
3. *υπάρχει ένα στοιχείο στο V το οποίο ονομάζουμε μηδενικό διάνυσμα και συμβολίζουμε με **0**, για το οποίο ισχύει $0+v=v=v+0$, για κάθε $v\in V$*
4. *για κάθε $v\in V$ υπάρχει ένα άλλο στοιχείο του V το οποίο ονομάζουμε αντίθετο του v και συμβολίζουμε με $-v$ και ικανοποιεί τη σχέση $v+(-v)=0$*

---

[2] Γενικότερα το K είναι ένα ***σώμα,*** δηλ. ένα σύνολο εφοδιασμένο με δύο (εσωτερικές) πράξεις μια + (πρόσθεση) και μια $\bullet$ (πολλαπλασιασμός) ως προς τις οποίες τα $(K,+)$ και $(K^*,\bullet)$, είναι ομάδες αντιμεταθετικές (όπου $K^*=K-\{0\}$) και ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα της $\bullet$ ως προς την + . Τέτοια σύνολα είναι το σύνολο των ρητών, των πραγματικών των μιγαδικών αριθμών κ.ά. με τις γνωστές πράξεις + και $\bullet$. Το ρόλο του 0 στον πολλαπλασιασμό έχει ένα στοιχείο που συμβολίζεται με 1 (λέγεται *μοναδιαίο*), δηλ. $1\bullet x=x$, για κάθε $x\in K^*$ και το ρόλο του αντίθετου $-x$ έχει το x^{-1} (λέγεται *αντίστροφο*)

[3] Όταν λέμε ότι εφοδιάζουμε ένα μη κενό σύνολο A με μία *πράξη* * (συνήθως λέμε *εσωτερική πράξη*) εννοούμε μια συνάρτηση $*: A\times A\to A$, όπου $(a,b)\to a*b$

και

β) *και ένα πολλαπλασιασμό*[4] *το οποίο ονομάζουμε βαθμωτό πολλαπλασιασμό με πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς και ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες (5)-(8)*

5. $1v = v$, *για κάθε* $v \in V$
6. $k(v+w) = kv + kw$, *για κάθε* $v, w \in V$ *και κάθε* $k \in R$ *(ή C) (επιμεριστική ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς τη πρόσθεση στο V)*
7. $(k+l)v = kv + lv$, *για κάθε* $v \in V$ *και κάθε k, l* $\in R$ *(ή C) (επιμεριστική ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς τη πρόσθεση στο R)*
8. $(k\,l)v = k(l\,v)$, *για κάθε* $v \in V$ *και κάθε k, l* $\in R$ (ή *C*).

Τη μαθηματική δομή $(V,+,\bullet)$[5]*ονομάζουμε K-**διανυσματικό χώρο ή διανυσματικό χώρο πάνω από το K.***

6.1.2 Παραδείγματα:

1. Τα σύνολα *Q*, *R* και *C*, των ρητών, πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα, αποτελούν διανυσματικούς χώρους[6] πάνω από τον εαυτό τους, με πρόσθεση τη γνωστή μας πρόσθεση στο *R* ή *C* και βαθμωτό πολλαπλασιασμό τον γνωστό πολλαπλασιασμό μεταξύ ρητών, πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός, στη περίπτωση αυτή, είναι ταυτόσημος με την (εσωτερική) πράξη του πολλαπλασιασμού στο *Q* ή *R* ή *C*, δηλαδή πρόκειται για συναρτήσεις $\bullet : K \times K \to K$ όπου $K = Q, R$ ή *C* αντίστοιχα. Ακόμη, το *C* είναι *Q*- ή *R*-διανυσματικός χώρος με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό
$$\begin{cases}(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)\\ k(a+ib) = (ka)+i(kb)\end{cases}$$
όπου $a,b,c,d \in R$ και $k \in Q$ ή R. Όμοια και το *R* μπορεί να θεωρηθεί *Q*-διανυσματικός χώρος, με βαθμωτό πολλαπλασιασμό το πολλαπλασιασμό μεταξύ ρητών με πραγματικούς αριθμούς.
2. Το σύνολο όλων των πολυωνύμων *p*(*x*) βαθμού $\le n$
$P_n = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 : a_i \in R,\ 0 \le i \le n\}$
αποτελεί διανυσματικό χώρο με πρόσθεση : αν $p(x), q(x) \in P_n$ και
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0$
τότε
$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$
και βαθμωτό πολλαπλασιασμό : αν $k \in R$ και
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 \in P_n$ τότε

---

[4] Πρόκειται για εξωτερική όπως λέμε πράξη, δηλαδή για μια συνάρτηση $\bullet : R \times V \to V$, ή $C \times V \to V$ όπου $(k,v) \xrightarrow{\bullet} k \bullet v$ ή απλά $k\,v$.

[5] Το ζεύγος $(V,+)$ είναι πάντα ομάδα αντιμεταθετική σε ένα διανυσματικό χώρο $(V,+,\bullet)$

[6] Κάθε σώμα είναι και διανυσματικός χώρος.

$$k\,p(x) = ka_n x^n + ka_{n-1}x^{n-1} + \cdots ka_1 x + ka_0$$

3. Το σύνολο $A(R) = \{(a_n) = (a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots) : a_i \in R,\ i = 0,1,2,\cdots\}$ όλων των ακολουθιών με στοιχεία από το *R* αποτελεί *R*- διανυσματικό χώρο, με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$$\begin{cases} (a_n) + (b_n) = (a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots) + (b_0, b_1, \cdots b_n, \cdots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots a_n + b_n, \cdots) \\ k\,(a_n) = k\,(a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots) = (ka_0, ka_1, \cdots ka_n, \cdots),\ k \in R \end{cases}$$

Το μηδενικό στοιχείο του $A(R)$ είναι η ακολουθία $0 = (0,0,\cdots,0,\cdots)$ και το αντίθετο του $(a_n) = (a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots)$ η ακολουθία $(-a_n) = (-a_0, -a_1, \cdots - a_n, \cdots)$. Η ισχύς των ιδιοτήτων του ορισμού είναι εύκολο να αποδειχθεί.

4. Έστω $A \neq \emptyset$. Το σύνολο $F(A) = \{f : A \to R / A \subseteq R\}$ των συναρτήσεων $f : A \to R$, από το Α στο σύνολο *R* των πραγματικών αριθμών, αποτελεί διανυσματικό χώρο από το *R*. Πραγματικά, αν ορίσουμε
<u>Πρόσθεση</u> : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε *f, g* $\in F(A)$ και κάθε $x \in A$.
<u>Βαθμωτός πολλαπλασιασμός</u> : $(kf)(x) = k\,f(x)$ για κάθε *f, g* $\in F(A)$, κάθε $k \in R$ και κάθε $x \in A$.
Το αντίθετο μιας $f \in F(A)$ είναι η $(-f)$, όπου $(-f)(x) = -f(x)$ και το ρόλο του μηδενικού έχει η μηδενική συνάρτηση 0, δηλαδή $0(x) = 0$ απεικονίζει κάθε $x \in A$ στο 0 (το γνωστό μηδέν του *R*).
<u>Παρατήρηση</u> : Το σύνολο $F(A)$ είναι μη κενό, αφού $A \neq \emptyset$. Έτσι, π.χ. στο $F(A)$ ανήκει η μηδενική συνάρτηση, ή ακόμη η ταυτοτική συνάρτηση $I : A \to R$, όπου $I(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

5. Το σύνολο $M_n(K)$ των τετράγωνων nxn πινάκων αποτελεί *K*- διανυσματικό χώρο, με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό όπως ορίστηκαν γενικότερα (δες §3.2 αλλά και στην αρχή της §6.1) στο σύνολο $M_{m\times n}(K)$ των mxn πινάκων (αρκεί να θέσουμε $m = n$)

6.1.2 Βασικές ιδιότητες διανυσματικών χώρων

Έστω *V ένας K-διανυσματικός χώρος,* $K = R$ *ή* $K = C$. Οι επόμενες ιδιότητες των διανυσματικών χώρων προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό 6.1.1.

Αν στην ιδιότητα (7) του ορισμού 6.1.1 θέσουμε $-l$ αντί l, (αφού ισχύει για κάθε $l \in K$) η ιδιότητα (7) γίνεται :

$$(k - l)v = kv - lv \qquad (7α)$$

Αν στην (7α) θέσουμε $k = l$, τότε έχουμε

$$(k - k)v = kv - kv = \mathbf{0}$$

όπου **0** το μηδενικό στοιχείο του *V*. Έτσι έχουμε

$$0v = \mathbf{0} \quad \text{για κάθε } v \in V \qquad (9)$$

Ανάλογα, αν στην ιδιότητα (6) θέσουμε $-w$ αντί w τότε αποκτούμε

$$k(w-w) = k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

δηλαδή

$$k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}\,, \text{ για κάθε } k \in K \tag{6α}$$

Αν στην ιδιότητα (5) του ορισμού 6.1.1 θέσουμε $k = -1$ τότε γίνεται

$$-1v = -v\,, \quad \text{για κάθε } v \in V \tag{10}$$

6.2 Υποχώροι

Στη παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε πότε ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου αποτελεί και αυτό διανυσματικό χώρο, το οποίο θα ονομάζουμε *διανυσματικό υποχώρο*. Πότε π.χ. ένα σύνολο διανυσμάτων του R^3 ή του R^n ή ακόμα του C^n και όχι ολόκληροι οι χώροι γίνονται διανυσματικοί χώροι με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό αυτούς που έχουν ήδη ορισθεί στα R^n και C^n.

6.2.1 Ορισμός. *Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος,* $K = R$ *ή* $K = C$. *Ένα μη κενό υποσύνολο W του V θα λέγεται K-**διανυσματικός υποχώρος** του V αν είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον V.*

Θα πρέπει επομένως κάποιος για να ελέγξει αν ένα υποσύνολο *W* ενός διανυσματικού χώρου *V* ότι θα είναι διανυσματικός υποχώρος, βάσει του ορισμού 6.1.2, να ελέγξει την ισχύ των οκτώ ιδιοτήτων του ορισμού 6.1.1. Το επόμενο θεώρημα όμως απλουστεύει αυτό τον έλεγχο. Έτσι,

6.2.2 Θεώρημα. *Ένα μη κενό υποσύνολο W ενός K-διανυσματικού χώρου V θα K-διανυσματικός υποχώρος του V αν και μόνο αν ισχύουν για το W οι επόμενες δύο ιδιότητες:*

i) $u + v \in W$ *για κάθε* $u, v \in W$

ιι) $k\, w \in W$ *για κάθε* $k \in K$ *και κάθε* $w \in W$

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι αν ο *W* είναι *K*-διανυσματικός υποχώρος του *V* τότε ως χώρος ικανοποιεί τις οκτώ ιδιότητες του ορισμού 6.1.1 για χώρους. Έτσι το άθροισμα στοιχείων ενός χώρου, άρα και του *W*, είναι πάλι στοιχείο του χώρου, οπότε ικανοποιείται η ιδιότητα (i). Όμοια, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στον *V* είναι και βαθμωτός πολλαπλασιασμός για τον *W*, αφού $W \subseteq V$. Και εφόσον ο *W* είναι χώρος το $k\, w \in W$ είναι πάντα στοιχείο του, επομένως ισχύει και η ιδιότητα (ii).

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύουν οι ιδιότητες (i) και (ii). Εφόσον $W \subseteq V$ τότε τα στοιχεία του *W* ικανοποιούν την αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης (οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού 6.1.1). Από την ιδιότητα (ii) για $k = -1$ και για κάθε $w \in W$ έχουμε $(-1)w = -w \in W$ (ιδιότητα (10), της §6.1.2), δηλαδή κάθε στοιχείο του W έχει αντίθετο που ανήκει πάλι στο *W* (ισχύει δηλ η ιδιότητα 3 του ορισμού 6.1.1). Επίσης, για $k = 0$ η ιδιότητα (ii) δίνει $0w = 0 \in W$ (ιδιότητα (9)), όπου 0 το μηδενικό στοιχείο του *V* (ισχύς της ιδιότητας 4 του ορισμού 6.1.1). Οι ιδιότητες (5)-(8) του ορισμού 6.1.1 ισχύουν για τα στοιχεία του *W*, αφού μπορούν να θεωρηθούν και στοιχεία του *V*. Και το θεώρημα αποδείχτηκε.

6.2.3 Παρατηρήσεις. **α)** Από το θεώρημα 6.2.2 και την απόδειξη έγινε φανερό ότι ένα μη κενό υποσύνολο *W* ενός *K*-διανυσματικού χώρου *V* θα *K*-διανυσματικός υποχώρος του *V* αν και μόνο αν το άθροισμα στοιχείων του *W* είναι πάλι στοιχείο του *W* όπως και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στο *W* δίνει ξανά στοιχείο του *W*.

β) Κάθε υποχώρος ενός *K*-διανυσματικού χώρου *V* είναι πάντοτε ένα μη κενό σύνολο, αφού οπωσδήποτε περιέχει το μηδενικό στοιχείο του *V*.

Το παραπάνω θεώρημα 6.2.2 έχει και την επόμενη ισοδύναμη έκφρασή του:

6.2.4. Πρόταση. *Ένα μη κενό υποσύνολο W ενός K-διανυσματικού χώρου V θα K-διανυσματικός υποχώρος του V αν και μόνο αν για κάθε* $u, v \in W$ *και κάθε* $k, l \in K$ *, ισχύει*

$$ku + lv \in W$$

Απόδειξη. Αν ο *W* είναι *K*-διανυσματικός υποχώρος του *V* τότε για $u, v \in W$ και κάθε $k, l \in K$ τότε $ku \in W$ και $lv \in W$ οπότε και $ku + lv \in W$ **.**

Αντίστροφα, αν ισχύει $ku + lv \in W$ για κάθε $u, v \in W$ και κάθε $k, l \in K$, τότε για $k = l = 1$ έχουμε $u + v \in W$ και ακόμη για $l = 0$ έχουμε $ku \in W$ για κάθε $k \in K$ και κάθε $u \in W$. ‘Ετσι ικανοποιούνται οι ιδιότητες του θεωρήματος 6.2.2 και επομένως ο *W* είναι *K*-διανυσματικός υποχώρος του *V*.

6.2.5 Παραδείγματα.

1. Έστω *V* ένας *K*-διανυσματικός χώρος. Τότε ο εαυτός του και το μονοσύνολο $\{0\}$, όπου 0 το μηδενικό στοιχείο του *V*, είναι *K*-διανυσματικοί υποχώροι του *V*. Πράγματι, στο $\{0\}$ έχουμε ότι $0 + 0 = 0$ και $k\,0 = 0$, για κάθε $k \in K$ και σύμφωνα με το θεώρημα 6.2.2 το $\{0\}$ αποτελεί *K*-διανυσματικοί υποχώρο του *V*. Είναι προφανές ότι ο ίδιος χώρος *V* είναι υποχώρος του εαυτού του.
2. Έστω $M_n(K)$ ο *K*-διανυσματικός χώρος των nxn πινάκων με στοιχεία από το $K = \mathbb{R}$ *ή* $K = \mathbb{C}$.

α) Συμβολίζουμε με $D_n(K)$ το υποσύνολο του $M_n(K)$ των διαγωνίων nxn πινάκων, δηλαδή των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$. Το $D_n(K)$ αποτελεί *K*-διανυσματικό υποχώρο του $M_n(K)$. Πράγματι, αφού το άθροισμα δύο διαγώνιων

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2+b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n+b_n \end{bmatrix}$$

είναι πάλι διαγώνιος πίνακας. Αλλά και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός

$$k\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ka_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & ka_n \end{bmatrix}, \text{ για κάθε } k \in K$$

είναι ξανά διαγώνιος πίνακας. Επομένως, από το θεώρημα 6.2.2 το $D_n(K)$ αποτελεί *K*-διανυσματικό υποχώρο του $M_n(K)$.

β) Συμβολίζουμε με $AT_n(K)$ το υποσύνολο του $M_n(K)$ των άνω τριγωνικών πινάκων, δηλαδή πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ των οποίων τα στοιχεία κάτω από τη κύρια διαγώνιο είναι όλα ίσα με μηδέν. Το $AT_n(K)$ αποτελεί *K*-διανυσματικό υποχώρο του $M_n(K)$. Πράγματι, το άθροισμα δύο άνω τριγωνικών πινάκων

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι τριγωνικός πίνακας. Και ανάλογα ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός άνω τριγωνικού πίνακα με στοιχείο του *K*

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ 0 & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}, \text{ για κάθε } k \in K$$

είναι πάλι τριγωνικός πίνακας και σύμφωνα με το θεώρημα 6.2.2 το $AT_n(K)$ αποτελεί *K*-διανυσματικό υποχώρο του $M_n(K)$.

γ) Συμβολίζουμε με $S_n(K)$ το υποσύνολο του $M_n(K)$ των συμμετρικών πινάκων δηλαδή τετράγωνων πινάκων των οποίων τα στοιχεία είναι συμμετρικά ως προς τη κύρια διαγώνιο (π.χ. αν n=3, ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & 5 & \sqrt{2} \\ 5 & -1 & 7 \\ \sqrt{2} & 7 & 4 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός. Θυμίζουμε ότι για ένα συμμετρικό πίνακα $A=(a_{ij})$ ισχύει $A = A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$). Το $S_n(K)$ αποτελεί *K*-διανυσματικό υποχώρο του $M_n(K)$. Πράγματι, το άθροισμα δύο τυχαίων συμμετρικών nxn πινάκων

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός πίνακας και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός συμμετρικού πίνακα με στοιχείο του *K*

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{12} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{1n} & ka_{2n} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}, \text{ για κάθε } k \in K$$

είναι ξανά συμμετρικός πίνακας. Επαληθεύεται επομένως το θεώρημα 6.2.2 και έτσι το $S_n(K)$ αποτελεί *K*-διανυσματικό υποχώρο του $M_n(K)$.

3. Το σύνολο $W = \{(s,0,t,2s-3t) : s,t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ είναι $\mathbb{R}$-υποχώρος του $\mathbb{R}^4$. Έστω $(s,0,t,2s-3t)$ και $(s',0,t',2s'-3t')$ δύο στοιχεία του *W*. Τότε το άθροισμα τους
$(s,0,t,2s-3t)+(s',0,t',2s'-3t')=(s+s',0,t+t',2(s+s')-3(t+t'))$

είναι στοιχείο του *W*. Ανάλογα, για κάθε $k \in \mathbb{R}$ και $(s,0,t,2s-3t)$ του *W* έχουμε

$k(s,0,t,2s-3t)=(ks,0,kt,2(ks)-3(kt)) \in W$

Άρα το *W* είναι $\mathbb{R}$-υποχώρος του $\mathbb{R}^4$.

4. Το σύνολο $W = \{(s,-5,t,3s+4t) : s,t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ δεν είναι $\mathbb{R}$-υποχώρος του $\mathbb{R}^4$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το μηδενικό στοιχείο $0=(0,0,0,0)$ του $\mathbb{R}^4$ δεν είναι στοιχείο του *W*, αφού δεν μπορεί να είναι της μορφής $(s,-5,t,3s+4t)$ για καμία τιμή των *s*, *t*. Οπότε σύμφωνα με τη παρατήρηση 6.2.3 (β) το *W* δεν μπορεί να αποτελεί $\mathbb{R}$-υποχώρο του $\mathbb{R}^4$.

5. Ανάλογα μπορούμε να αποδείξουμε ότι το επίπεδο $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ είναι υποχώρος του χώρου $\mathbb{R}^3$. Παρατηρείστε ότι, πρόκειται για ένα επίπεδο διερχόμενο από την αρχή $0=(0,0,0)$ των αξόνων. Ενώ το επίπεδο $Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-3z=-1\}$, δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και επομένως το μηδενικό στοιχείο του χώρου $\mathbb{R}^3$ δεν περιέχεται στο υποσύνολό του *Q*, πράγμα που σημαίνει ότι το *Q* δεν αποτελεί υποχώρο του $\mathbb{R}^3$.

Οι επόμενες προτάσεις μας δίνουν δύο σημαντικά παραδείγματα υποχώρων που συνοδεύουν κάθε $m \times n$ πίνακα *A*.

6.2.6 Πρόταση. *Αν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{R}$, το σύνολο*

$$N(A)=\{X \in \mathbb{R}^n : AX=0\}$$

είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

Σημείωση. Η πρόταση 6.2.6 μπορεί να διατυπωθεί και πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{C}$.

6.2.7 Ορισμός. *Για ένα $m \times n$ πίνακα A ο υποχώρος*

$$N(A)=\{X \in \mathbb{R}^n : AX=0\}$$

*λέγεται **μηδενοχώρος** (nullspace) του A.*

Απόδειξη της Πρότασης 6.2.6. Θεωρώντας τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ σαν στήλες με n στοιχεία το γινόμενο AX εκτελείται. Έστω λοιπόν $X_1, X_2 \in N(A)$ οπότε $AX_1 = 0$ και $AX_2 = 0$. Έχουμε $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$, οπότε το άθροισμα στοιχείων του $N(A)$ είναι στοιχείο του $N(A)$. Ακόμα, αν $k \in \mathbb{R}$ και $X \in N(A)$, τότε $A(kX) = AkX = k(AX) = k0 = 0$, δηλαδή $kX \in N(A)$. Επομένως, $N(A)$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

6.2.8 Πόρισμα. *Το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς συστήματος, m εξισώσεων με n αγνώστους, είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Αν A είναι ο $m \times n$ πίνακας του συστήματος και X παριστάνει τη στήλη $[x_1\, x_2 \cdots x_n]^T$ των αγνώστων του συστήματος, τότε το σύστημα ως γνωστό παίρνει τη μορφή $AX = 0$. Οπότε κάθε λύση X του συστήματος είναι στοιχείο του μηδενοχώρου $N(A)$ του πίνακα A και επομένως το σύνολο λύσεων είναι ακριβώς ο μηδενοχώρος του A, δηλαδή $\mathbb{R}$-διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

6.2.9 Πρόταση. *Αν είναι ένας $m \times n$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς (αντ. μιγαδικούς) πίνακας, το σύνολο*

$$R(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^m : AX = b,\ \text{για κάποιο}\ X \in \mathbb{R}^n \right\}$$

είναι ένας $\mathbb{R}$ (αντ. $\mathbb{C}$)-διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^m$ (αντ. $\mathbb{C}^m$).

6.2.10 Ορισμός. Για ένα $m \times n$ πίνακα A ο υποχώρος

$$R(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^m : AX = b,\ \text{για κάποιο}\ X \in \mathbb{R}^n \right\}$$

λέγεται ***χώρος των στηλών*** (*range*) του *πίνακα A*.

Απόδειξη της πρότασης 6.2.9. Έστω $b_1, b_2 \in R(A)$, οπότε υπάρχουν $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $AX_1 = b_1$ και $Ax_2 = b_2$. Έχουμε

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = b_1 + b_2$$

δηλαδή για το στοιχείο $b_1 + b_2$ υπάρχει το $X_1 + X_2 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $A(X_1 + X_2) = b_1 + b_2$. Άρα $b_1 + b_2 \in R(A)$.

Έστω $b \in R(A)$ και $k \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $X \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $AX = b$ και $A(kX) = k(AX) = kb$, οπότε $kb \in R(A)$ αφού υπάρχει το $kX \in \mathbb{R}^n$ ώστε $A(kX) = kb$.

Επομένως, $R(A)$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^m$.

6.2.11. Παραδείγματα.

1. Θεωρείστε το παράδειγμα 6.2.5 (3). Το σύνολο $W = \left\{ (s, 0, t, 2s - 3t) : s, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ είναι ο χώρος των στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

δηλαδή $R(A) = W$. Πραγματικά

$$R(A) = \left\{ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \text{ για καποιο } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} =$$

$$\left\{ b = [b_1\ b_2\ b_3\ b_4]^T \in \mathbb{R}^4 : [b_1\ b_2\ b_3\ b_4]^T = [x\ 0\ y\ 2x+3y]^T \right\} = W$$

2. Έστω το σύνολο $V = \left\{ [x-y\ \ -x+3y\ \ x\ \ y]^T \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R} \right\}$**.** Το σύνολο V είναι ένας υποχώρος του $\mathbb{R}^4$, αν τον θεωρήσουμε σαν το μηδενοχώρο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Πράγματι, ένα στοιχείο $X = [a\ b\ c\ d]^T \in \mathbb{R}^4$ του μηδενοχώρου $N(A)$ του A έχει την ιδιότητα $AX = 0$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ οπότε } \begin{cases} a - c + d = 0 \\ b + c - 3d = 0 \end{cases} \text{ απ' όπου } a = c - d \text{ και}$$

$b = -c + 3d$. Έτσι $X = \begin{bmatrix} c-d \\ -c+3d \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-d & -c+3d & c & d \end{bmatrix}^T$, το οποίο έχει την μορφή των στοιχείων του συνόλου V. Άρα $V = N(A)$, το οποίο σημαίνει ότι το V είναι ένας υποχώρος του $\mathbb{R}^4$.

6.3 Γραμμικοί συνδυασμοί

Στη παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορούμε να περιγράφουμε διανυσματικούς υποχώρους με λίγα διανύσματα τους, πως δηλαδή θα μπορούμε να χτίσουμε αυτούς τους χώρους από λίγα διανύσματα με βάση τη πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Έτσι θα αποκτήσουμε στη συνέχεια τη δυνατότητα να περιγράψουμε με σαφήνεια τις λύσεις (αορίστων) συστημάτων.

6.3.1 Ορισμός. *Αν* $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *και* w *είναι διανύσματα ενός K-διανυσματικού χώρου V, θα λέμε ότι το* w *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *αν υπάρχουν αριθμοί (πραγματικοί ή μιγαδικοί)* $k_1, k_2, \cdots k_n$ *τέτοιοι ώστε*

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

6.3.2 Παραδείγματα.

1. Το διάνυσμα $[-5\ 4\ 8]^T$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $[1\ 2\ -1]^T, [1\ -1\ 3]^T$ και $[2\ 0\ -1]^T$, αφού

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

των πινάκων $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Αν $v = (2,1)$ και $w = (-1,-1)$ δύο διανύσματα του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ τότε ένα τυχαίο διάνυσμα $u = (a,b)$ του $\mathbb{R}^2$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός αυτών με τον επόμενο τρόπο

$$u = (a-b)v + (a-2b)w$$

Αν τα *v* και *w* ήταν διαφορετικά θα εξακολουθούσε το τυχαίο διάνυσμα *u* του επιπέδου να γράφεται σαν γραμμικός τους συνδυασμός ; Την απάντηση θα δούμε σε επόμενη παράγραφο που αναφέρεται στη γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων.

6.3.3. Θεώρημα. *Αν* $v_1, v_2, \cdots, v_s$ *είναι διανύσματα ενός K-διανυσματικού χώρου V, τότε το σύνολο όλων των γραμμικών τους συνδυασμών αποτελεί υποχώρο του V.*

Απόδειξη. Ας είναι *W* το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $v_1, v_2, \cdots, v_s$, δηλαδή

$$W = \{w : w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots k_s v_s,\ k_1, k_2, \cdots k_s \in K\}$$

Αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με το θεώρημα 6.2.2 ότι το άθροισμα στοιχείων του W και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με στοιχείο του W δίνει αποτέλεσμα μέσα στο W. Έστω λοιπόν w, u στοιχεία *του* W. Τότε γράφονται σας γραμμικοί συνδυασμοί των $v_1, v_2, \cdots, v_s$ και είναι

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots k_s v_s \quad \text{και} \quad u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots c_s v_s$$

Τότε

$$w + u = (k_1 + c_1)v_1 + (k_2 + c_2)v_2 + \cdots (k_s + c_s)v_s$$

και $\quad kw = (kk_1)v_1 + (kk_2)v_2 + \cdots (kk_s)v_s$

οπότε $w + u \in W$ και $kw \in W$.

6.3.4 Ορισμός. *Αν* $v_1, v_2, \cdots, v_s$ *είναι διανύσματα ενός K-διανυσματικού χώρου V τότε ο υποχώρος του V όλων των γραμμικών συνδυασμών των* $v_1, v_2, \cdots, v_s$ *λέγεται* ***χώρος παραγόμενος από τα διανύσματα*** $v_1, v_2, \cdots, v_s$ *και τον συμβολίζουμε με* $span\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$.

6.3.5 Παραδείγματα.

1. Στο παράδειγμα 6.3.2 (3) είδαμε ότι τα διανύσματα $v = (2,1)$ και $w = (-1,-1)$ του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ παράγουν τον $\mathbb{R}^2$, αφού ένα τυχαίο διάνυσμα του $u = (a,b)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός αυτών. Επομένως, $\mathbb{R}^2 = span\{v, w\}$.

2. Τα διανύσματα $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ παράγουν τον ίδιο, αφού ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $u = (x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός αυτών σαν $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

3. Γενικότερα, τα διανύσματα $e_1 = (1,0,\cdots,0),\ e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$, ..., $e_n = (0,0,\cdots,1)$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$, για κάθε n, επειδή ένα διάνυσμα $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ γράφεται σαν $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n$. Οπότε $\mathbb{R}^n = span\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.

4. Όπως είδαμε και στο παράδειγμα 6.3.2(2) κάθε 2x2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ σαν $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$. Και γενικότερα, στο σύνολο $M_n(K)$ των $n \times n$ πινάκων, αν με E_{ij} παραστήσουμε εκείνο τον $n \times n$ πίνακα που έχει στη (ij)-θέση τη μονάδα και παντού αλλού μηδέν, τότε κάθε $n \times n$ πίνακας γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των E_{ij}. Επομένως,

$$M_n(K) = span\{E_{ij},\ 1 \le i, j \le n\}$$

6.3.6 Παρατήρηση. Ένας χώρος μπορεί να παράγεται από περισσότερα το ενός σύνολα (διάφορα μεταξύ τους) διανυσμάτων. Αυτό διαπιστώνουμε και στα παραπάνω παραδείγματα 6.3.5 (1) και (3), όπου ο χώρος $\mathbb{R}^2$ μπορεί να είναι

$$\mathbb{R}^2 = span\{v, w\} = span\{e_1, e_2\}, \text{ όπου } e_1 = (1, 0) \text{ και } e_2 = (0, 1)$$

Θα δούμε όμως, αργότερα, ότι κάποια σύνολα διανυσμάτων που παράγουν ένα χώρο είναι ‘καλύτερα’ από κάποια άλλα.

6.3.7 Πρόταση. *Αν για ένα χώρο V ισχύει $V = span\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ και $v_{s+1} \in V$, $v_{s+1} \neq 0$ διάφορο των $v_1, v_2, \cdots, v_s$, τότε $V = span\{v_1, v_2, \cdots, v_s, v_{s+1}\}$.*

Απόδειξη. Αν $u \in span\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ τότε $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_s v_s$ για κάποια $a_i \in K$. Όμως το *u* μπορεί να γραφεί και ως $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_s v_s + 0 v_{s+1}$, επομένως τα $v_1, v_2, \cdots, v_s, v_{s+1}$ παράγουν τον χώρο *V*.

6.3.8 Θεώρημα. *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Ο χώρος των στηλών $R(A)$ του A είναι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα A. Δηλαδή, αν $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$, όπου $A_1, A_2, \cdots, A_n$ οι στήλες του A, τότε $R(A) = span\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$.*

Απόδειξη. Επειδή θέλουμε να δείξουμε μια ισότητα μεταξύ συνόλων, αρκεί να δείξουμε ότι $R(A) \subseteq span\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ και $span\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subseteq R(A)$

Έστω $u = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots + k_n A_n$. Τότε το *u* γράφεται και σαν

$u = [A_1, A_2, \cdots, A_n]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$, από όπου $u = AX$ για $X = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$. Άρα το *u* είναι στοιχείο του $R(A)$ (βλέπε ορισμό 6.2.10) και έτσι $span\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subseteq R(A)$

Αντίστροφα, έστω $b \in R(A)$ οπότε $AX = b$ για κάποιο $X = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Τότε όμως

$b = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots + k_n A_n$, δηλαδή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα *A* και επομένως $R(A) \subseteq span\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$.

6.3.9 Παραδείγματα.

1. Να βρεθούν τα διανύσματα που παράγουν το χώρο $R(A)$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Απάντηση : Σύμφωνα με το θεώρημα 6.3 ο χώρος $R(A)$ είναι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του Α, δηλαδή

$$R(A) = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Κάθε διάνυσμα w λοιπόν στο $R(A)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός

$$w = c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ c_i \in \mathbb{R}$$

Παρατηρείστε όμως ότι, τα διανύσματα- στήλες $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ μπορούν να γραφούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί των άλλων δύο στηλών $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ του πίνακα *A*, αφού υπάρχουν $k, l \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + l\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k-l\\2k-l\end{bmatrix}$$

απ’ όπου $k = -1$ και $l = -3$

Επίσης

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + l\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k-l\\2k-l\end{bmatrix}$$

απ’ όπου $k = -1$ και $l = -2$

Έτσι $R(A) = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ και το τυχαίο στοιχείο $w \in R(A)$ γράφεται πλέον σαν

$$w = a\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Δείτε ότι και

$$R(A) = span\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Δηλαδή υπάρχουν διαφορετικά σύνολα διανυσμάτων που παράγουν τον $R(A)$.

2. Να βρεθούν διανύσματα που παράγουν τον μηδενοχώρο $N(A)$ του πίνακα $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\2 & 3 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Απάντηση : Αν $X \in N(A)$ τότε $X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x & y & z & w\end{bmatrix}^T$ και $AX = 0$ οπότε

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\2 & 3 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}x & y & z & w\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$ απ’ όπου

$\begin{cases} x + y + z - 2w = 0 \\ 2x + 3y - w = 0 \end{cases}$. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα των εξισώσεων
$x+3z-5w=0$ και $y-2z+3w=0$, απ' όπου
$x=-3z+5w$ και $y=2z-3w$.

Δηλαδή αν $X=\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^T \in N(A)$ τότε έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3z+5w \\ 2z-3w \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3z \\ 2z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5w \\ -3w \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, το τυχαίο $X \in N(A)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ και $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Άρα

$$N(A)=span\left\{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$$

6.3.10 Παράδειγμα: Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

α) Αν $X=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$ τότε $AX \in R(A)$. Να δείτε ότι το AX είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.
β) Είναι το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ στοιχείο του $R(A)$;

Απάντηση: α) Είναι

$$AX=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \in R(A)$$

λόγω ορισμού του χώρου $R(A)$. Σύμφωνα με το θεώρημα 6.3.3, το $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A. Δηλαδή υπάρχουν c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1-c_3 \\ c_1+3c_2+c_3 \\ c_1+c_2 \end{bmatrix}$$

και λύνοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι $c_1=1$, $c_2=-2$ και $c_3=2$.

β) Για να είναι το διάνυσμα $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T$ στοιχείο του $R(A)$, αρκεί να γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A. Έστω λοιπόν

$$\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\1 & 3 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 2\\1 & 3 & 1 & 1\\2 & 0 & -1 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 2\\1 & 2 & 1 & -1\\0 & -2 & 1 & -3\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & -4\end{array}\right]$$

όπου η τελευταία γραμμή δηλώνει ότι το σύστημα είναι αδύνατο. Επομένως το $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T$ δεν μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A και έτσι $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T \notin R(A)$.

6.4 Γραμμική ανεξαρτησία

Έστω $V = span\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ ένας K -διανυσματικός χώρος. Τότε το μηδενικό στοιχείο 0 του V γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \cdots, v_s$, δηλαδή υπάρχουν $c_1, c_2, \cdots, c_s \in K$ τέτοια ώστε

$$0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_s v_s \qquad (6.4.1)$$

Ενδιαφερόμαστε αν υπάρχουν $c_1, c_2, \cdots, c_s \in K$ τα οποία είναι όλα μηδέν για να ισχύει η σχέση (6.4.1) ή κάποια από αυτά είναι διάφορα του μηδενός και εξακολουθεί να ισχύει η σχέση (6.4.1). Δίνουμε για το λόγο αυτό τους επόμενους ορισμούς.

6.4.1 Ορισμός. *Έστω $v_1, v_2, \cdots, v_s$ διανύσματα ενός K -διανυσματικού χώρου V. Αν από κάθε γραμμικό συνδυασμό $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_s v_s = 0$ των $v_1, v_2, \cdots, v_s$ προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$, τότε τα διανύσματα $v_1, v_2, \cdots, v_s$ λέγονται* ***γραμμικά ανεξάρτητα****. Σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή αν υπάρχει ένα τουλάχιστο $c_i \neq 0$ και ισχύει $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_s v_s = 0$, τότε τα διανύσματα $v_1, v_2, \cdots, v_s$ λέγονται* ***γραμμικά εξαρτημένα****.*

6.4.2 Παραδείγματα.

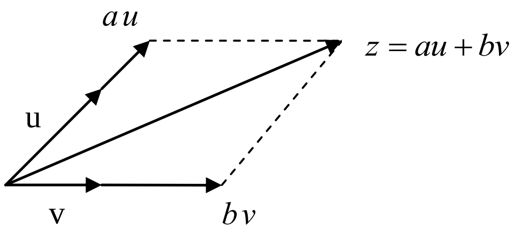
1. Έστω *u* και *v* διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ και έστω $au + bv = 0$ ένας γραμμικός τους ίσος με μηδέν. Έστω π.χ. ότι $a \neq 0$, τότε $u = -\frac{b}{a} v$. Αν θέσουμε $k = -\frac{b}{a}$ τότε $u = k\,v$, το οποίο σημαίνει ότι τα διανύσματα *u* και *v* είναι συγγραμμικά. Δηλαδή, αν δύο διανύσματα *u* και *v* του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε αυτά είναι συγγραμμικά. Αλλά και αντίστροφα, αν ισχύει $u = k\,v$, $k \in K$, για δύο διανύσματα *u* και *v* του $\mathbb{R}^2$, τότε $u - k\,v = 0$, δηλαδή υπάρχει ένας γραμμικός τους συνδυασμός με μη μηδενικούς συντελεστές που είναι ίσος με μηδέν. Άρα τα *u* και *v* είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αν όμως από τη σχέση $au + bv = 0$ προκύπτει κατανάγκη ότι $a = b = 0$, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα διανύσματα *u* και *v* του $\mathbb{R}^2$ δεν μπορούν να είναι συγγραμμικά.

2. Τα διανύσματα $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πραγματικά, αν θεωρήσουμε ένα γραμμικό τους συνδυασμό $c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = 0$, τότε $(c_1,0,0) + (0,c_2,0) + (0,0,c_3) = (0,0,0)$, από όπου προφανώς $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, δηλαδή τα e_1, e_2, e_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Με ανάλογο ακριβώς τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα διανύσματα $e_1 = (1,0,\cdots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots,0), \ldots,$ $e_n = (0,0,\cdots,0,1)$, του χώρου $\mathbb{R}^n$, είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

3. Είναι γνωστό ότι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα *u* και *v* του $\mathbb{R}^3$ ορίζουν ένα επίπεδο *P*, είναι δηλαδή συνεπίπεδα. Από το προηγούμενο παράδειγμα 6.4.2 (1) τα *u* και *v* θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Κάθε άλλο διάνυσμα $z \in P$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός $z = au + bv$ (σύμφωνα με το κανόνα του παραλληλογράμμου. Αργότερα θα δούμε ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ τον παράγουν).

Έστω $w \in \mathbb{R}^3$ διαφορετικό των *u* και *v*. Αν το $w \in P$ θα είναι και αυτό γραμμικός συνδυασμός των *u* και *v*. Αν $w \notin P$ και $au + bv + cw = 0$ τότε *c*=0, γιατί διαφορετικά $w = -\frac{a}{c}u - \frac{b}{c}v$, δηλαδή $w \in P$, πράγμα αδύνατο. Άρα *c*=0 και τότε



και $a = b = 0$, αφού τα *u* και *v* είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι, *τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα u, v και w του* $\mathbb{R}^3$ *είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητα.*

4. Είναι τα διανύσματα $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T$ και $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^4$;

Απάντηση : Αρκεί να πάρουμε ένα γραμμικό συνδυασμό των u, v, w, $au + bv + cw = 0$ και να δούμε αν όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν (προκειμένου για γραμμικά ανεξάρτητα) ή ένας τουλάχιστο είναι διάφορος του μηδενός (προκειμένου για γραμμικά εξαρτημένα).
Έχουμε λοιπόν

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και λύνοντας το σύστημα παίρνουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

το οποίο σημαίνει ότι υπάρχουν $a = -2$, $b = 1$ και $c = 1$ μη μηδενικά ώστε $au + bv + cw = 0$. Επομένως τα u, v και w είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$.

5. Το μηδενικό διάνυσμα **0** είναι γραμμικά εξαρτημένο, αφού για κάθε $k \neq 0$ ισχύει $k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

6. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα *u* είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αφού η σχέση $a\,u = 0$ ισχύει μόνο αν $a = 0$.

6.4.3 Θεώρημα. *Κάθε υποσύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων.*

Απόδειξη. Αν τα $v_1, v_2, \cdots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε οσαδήποτε από αυτά, π.χ. τα $v_1, v_2, \cdots, v_t$, $t \leq k$ συνεχίζουν να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γιατί αν

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_tv_t = 0$$

τότε μπορούμε να γράψουμε

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_tv_t + 0v_{t+1} + \cdots + 0v_s = 0 \qquad (6.4.2)$$

Επειδή τα $v_1, v_2, \cdots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, από τη σχέση (6.4.2) προκύπτει ότι $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0$ από όπου διαπιστώνουμε ότι και τα $v_1, v_2, \cdots, v_t$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

6.4.4 Παραδείγματα. **1.** Είναι γνωστό (παράδειγμα 6.4.2 (2)) ότι τα διανύσματα $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από το θεώρημα 6.4.3, τα διανύσματα $e_1, e_2,\ e_3$ είναι ανά δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ (π.χ. τα $e_1,\ e_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα). Και ανάλογα, κάθε υποσύνολο του συνόλου $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, π.χ. $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ με $k \le n$,είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (παράδειγμα 6.4.2 (2)).

2. Είδαμε, στο παράδειγμα 6.4.2 (4) ότι οι στήλες $u = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$, $w = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & -2\end{bmatrix}^T$ και $v = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & -2\end{bmatrix}^T$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^4$. Σύμφωνα με το θεώρημα 6.4.3, όποιες δύο από τις στήλες *u*, *v* και *w* είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^4$.

6.4.4 Θεώρημα. *Το σύνολο των διανυσμάτων* $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένο αν και μόνο αν ένα διάνυσμα του συνόλου είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων*.

Απόδειξη. Έστω ότι το διάνυσμα v_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλαδή

$$v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_s v_s$$

οπότε

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_s v_s = 0$$

απ' όπου προκύπτει ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Αντίστροφα, αν το σύνολο $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_i v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_s v_s = 0$$

όπου ένας τουλάχιστο συντελεστής, έστω $a_i \neq 0$. Τότε το λύνοντας ως προς το v_i έχουμε

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \frac{a_2}{a_i} v_2 - \cdots + -\frac{a_s}{a_i} v_s$$

ότι το v_i γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων του συνόλου $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$.

6.4.5 Παράδειγμα. Αν τρία διανύσματα *u*, *v* και *w* του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε ένα από αυτά π.χ. το *w* θα είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο *u* και *v*. Αυτό σημαίνει ότι το *w* ανήκει τότε στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα *u* και *v*.

6.4.6 Θεώρημα. *Κάθε υπερσύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο*.

Απάντηση. Έστω $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων ενός K -διανυσματικού χώρου V και $w \in V$ διαφορετικό των $v_1, v_2, \cdots, v_s$. Έστω ένας γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \cdots, v_s$ και w
$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_s v_s + bw = 0$. Αν $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = b = 0$, δηλαδή τα $v_1, v_2, \cdots, v_s$ και w είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Όμως τότε από το θεώρημα 6.4.3 και τα $v_1, v_2, \cdots, v_s$ θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα πράγμα άτοπο. Άρα το σύνολο $\{v_1, v_2, \cdots, v_s, w\}$ είναι ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι όταν κάποια διανύσματα $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ενός K -διανυσματικού χώρου V και τον παράγουν, τότε αποτελούν μια βάση του, η οποία παίζει σπουδαίο ρόλο στη περιγραφή του χώρου.

6.5 Άθροισμα και ευθύ άθροισμα υποχώρων

6.5.1 Ορισμός. *Αν U και W είναι δύο υποχώροι ενός K -διανυσματικού χώρου V, ορίζουμε* ***άθροισμα*** *U+W το σύνολο*

$U+W=\{v : v=x+y, \text{για καποιο } x\in U \quad \text{και καποιο } y\in W\}$

Ο ορισμός θα μπορούσε να δοθεί και για πεπερασμένου πλήθους υποχώρους $U_1, U_2, \cdots, U_t$ *ενός K -διανυσματικού χώρου V σαν*

$U_1+U_2+\cdots+U_t=\{v : v=u_1+u_2+\cdots+k_t, \quad \text{για καποια } \mathrm{u_i}\in U_i, 1\le i\le t\}$

Αναφέρουμε μια χρήσιμη πρόταση για τη συνέχεια.

6.5.2 Πρόταση. *Το άθροισμα των υποχώρων U και W ενός K -διανυσματικού χώρου V, αποτελεί υποχώρο του V.*

Απόδειξη. Αν $v_1=x_1+y_1$ και $v_2=x_2+y_2$ δύο στοιχεία του αθροίσματος *U+W* τότε είναι φανερό ότι

$$v_1+v_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\in U+W \quad \text{και}$$
$$k\,v_1=kx_1+kx_2\in U+W$$

εφόσον οι *U και W* είναι υποχώροι.

6.5.3 Παρατήρηση. Το άθροισμα των υποχώρων *U* και *W* του χώρου *V* είναι ο μικρότερος υποχώρος του *V* που περιέχει και τους δύο υποχώρους. Ενώ η ένωση τους, σαν σύνολα, δεν αποτελεί υποχώρο του *V* (δείτε το σαν άσκηση) παρότι φυσικά περιέχει και τους δύο υποχώρους. Έτσι λοιπόν η έννοια του αθροίσματος υποχώρων αποκτά ιδιαίτερη σημασία σε σχέση με την ένωση υποχώρων (δείτε, σε αντιδιαστολή με την ένωση, ότι η τομή υποχώρων είναι πάλι υποχώρος).

6.5.6 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Αφού ελέγξετε ότι το σύστημα έχει

$$\begin{cases} w+2x-y+z=2 \\ 3x-2y+2z=4 \\ 2w-x+y-z=-1 \end{cases}$$

άπειρες λύσεις, να βρείτε εκείνες τις λύσεις που παράγουν το σύνολο των λύσεων του συστήματος.

Άσκηση 2. **α)** Αποδείξτε ότι το σύνολο P_3 των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 3 αποτελεί υποχώρο του διανυσματικού χώρου όλων των πολυωνύμων.
β) Εξετάστε αν το σύνολο $\{p \in P_3 : p(1)=0\}$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 3 που έχουν μια ρίζα το $x = 1$ αποτελεί υποχώρο του P_3.
γ) Εξετάστε αν το σύνολο $\{p \in P_3 : p(1)=4\}$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 3 που έχουν τιμή 4 στο $x = 1$ αποτελεί υποχώρο του P_3.

Άσκηση 3. **α)** Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1,-1,5,-5)$ και $(1,-1,1,2)$ ανήκουν στο χώρο που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,-1,1)$ και $(2,1,1,\text{-}1)$.
β) εξετάστε αν οι χώροι που παράγονται από τα διανύσματα $u_1=(1,0,1)$, $u_2=(0,1,-1)$ και $\upsilon_1=(1,1,0), \upsilon_2=(2,1,1)$ και $\upsilon_3=(1,-1,2)$, είναι ίσοι (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

Άσκηση 4. α) Τι μορφής γεωμετρικά είναι εκείνος ο υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από ένα μη μηδενικό διάνυσμα;
β) Τι μορφής γεωμετρικά είναι εκείνος ο υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από δύο μη μηδενικά διανύσματα που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία;
γ) Έστω ότι τα διανύσματα w_1, w_2, w_3 παράγουν το χώρο W. Αν $w_4, w_5 \in W$ τότε τα διανύσματα w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 παράγουν επίσης τον ίδιο χώρο W;

Άσκηση 5. Ο φοιτητής Παύλος κάνοντας την εργασία του στη Γραμμική Άλγεβρα, παρατήρησε ότι όταν έχει τα διανύσματα $u=(1,1,-3)$, $\upsilon=(2,-1,2)$, $w=(1,-2,4)$ ισχύει ότι $0u+0\upsilon+0w=0$. Τι μπορεί να συμπεράνει ο Παύλος για τα διανύσματα u,υ,w **α)** ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ή **β)** γραμμικά εξαρτημένα ή **γ)** δεν μπορεί να συμπεράνει τίποτα από τα δύο.

Άσκηση 6. Η φοιτήτρια Κατερίνα κάνοντας την εργασία της στη Γραμμική Άλγεβρα, παρατήρησε ότι αν $x=(2,-1,1), y=(1,0,2), z=(1,1,-3)$ τότε το σύστημα $c_1x+c_2y+c_3z=0$ έχει μοναδική λύση την $c_1=c_2=c_3=0$. Μπορεί η Κατερίνα να αποδείξει τότε ότι τα x,y,z είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ή γραμμικά εξαρτημένα ή δεν μπορεί να αποδείξει τίποτε από τα δύο.

Άσκηση 7. Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας και έστω $\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_k$ διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν τα διανύσματα $\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε και τα διανύσματα $A\upsilon_1, A\upsilon_2, ..., A\upsilon_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Άσκηση 8. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας.
α) Αν b διάνυσμα του χώρου $\dim R(A)$, τότε το σύστημα $AX = b$ έχει λύση. Αν ναι έχει μια ή άπειρες και πότε.
β) Αν $N(A) = 0$, τότε το σύστημα $AX = b$ έχει λύση. Αν ναι έχει μια ή άπειρες και πότε.
γ) Αν X_1, X_2 είναι δύο λύσεις του συστήματος $AX = b$ τότε μπορείτε να βρείτε μια λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $AX = 0$.

Άσκηση 9. α) Κατασκευάστε ένα πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος περιέχει το διάνυσμα $x = (1,1,2)$.
β) Κατασκευάστε ένα πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος του ανάστροφου του περιέχει το διάνυσμα $y = (1, 5)$.
γ) Κατασκευάστε ένα πίνακα του οποίου ο χώρος των στηλών παράγεται από το διάνυσμα $(1,1,2)$ και του οποίου ο χώρος των γραμμών παράγεται από το διάνυσμα $(1,5)$.

Άσκηση 10. Εξηγήστε ποια από τις υπόλοιπες προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής.
α) Κάθε ευθεία του χώρου R^3 αποτελεί υποχώρο του.
β) Κάθε επίπεδο του χώρου R^3 αποτελεί υποχώρο του.

Άσκηση 11. Να προσδιορίσετε κατά πόσο το W είναι ή όχι ένας υποχώρος του R^3, όπου το W αποτελείται από όλα τα διανύσματα (a,b,c) στον R^3 για τα οποία: (α) $a = 3b$, (β) $a \le b \le c$, (γ) $a + b + c = 0$, (δ) $b = a^2$, (ε) $a = 2b = 3c$.

Άσκηση 12. Υποθέτοντας ότι οι U και W είναι υποχώροι του V για τους οποίους ο $U \cup W$ είναι επίσης ένας υποχώρος, να δείξετε ότι $U \subseteq W$ ή $W \subseteq U$.

Άσκηση 13. Να γράψετε το πολυώνυμο $f(t) = at^2 + bt + c$ ως γραμμικό συνδυασμό των πολυωνύμων $p_1 = (1-t)^2$, $p_2 = t - 1$, $p_3 = 1$. [Επομένως τα p_1, p_2, p_3 παράγουν το χώρο των πολυωνύμων βαθμού ≤ 2, $P_2(t)$.]

Άσκηση 14. Υποθέτοντας ότι το $\{u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, να δείξετε ότι $span(u_i) \cap span(w_j) = \{0\}$.