Ενδεικτικές Ασκήσεις
Συνδυαστική

Άσκηση 1 (2016-2017, Εργασία 1, Ερώτημα 1)

(1α) Από ένα σύνολο των 25 καθηγητών (10 άνδρες και 15 γυναίκες) ενός σχολείου, να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών εξαμελών επιτροπών όταν όλα τα μέλη είναι:

(1α1) Ισότιμα, δηλαδή οι ρόλοι που τους ανατίθενται είναι ταυτόσημοι.

(1α2) Ισότιμα, και οι γυναίκες-μέλη είναι περισσότερες από τους άνδρες-μέλη.

Εξηγήστε σε κάθε υποερώτημα την επιλογή του τύπου που χρησιμοποιείτε.

(1β) Να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών τρόπων να μοιραστούν σε 4 διαφορετικά παιδιά 6 μήλα και 7 πορτοκάλια, στις περιπτώσεις όπου κάθε παιδί πρέπει να πάρει από:

(1β1) Τουλάχιστον 1 μήλο.

(1β2) Το πολύ 2 πορτοκάλια.

(1β3) Τουλάχιστον ένα μήλο και το πολύ 2 πορτοκάλια.

(1β4) Τουλάχιστον ένα μήλο, ή το πολύ 2 πορτοκάλια, ή και τα δύο.

Υπόδειξη: Αν συμβολίσουμε με X την απάντηση στο (1β1), με Y την απάντηση στο (1β2), και με Z την απάντηση στο (1β3), μπορείτε να εκφράσετε την απάντηση του (1β4) ως συνάρτηση των X, Y και Z.

Απαντήσεις:

(1α1) Αφού τα 6 μέλη της επιτροπής είναι ισότιμα και δεν μπορούμε να επιλέξουμε κάποιον καθηγητή περισσότερες από μία φορές, πρόκειται για ένα πρόβλημα συνδυασμών 6 από 25 καθηγητές χωρίς επανάληψη. Άρα το πλήθος των επιτροπών είναι:

$$C(25,6) = \binom{25}{6} = \frac{25!}{19!\,6!} = 177.100$$

(1α2) Όπως και στο (1α1), έχουμε ένα πρόβλημα συνδυασμών χωρίς επανάληψη. Επειδή όμως οι γυναίκες πρέπει να είναι περισσότερες από τους άνδρες, η επιτροπή μπορεί να αποτελείται είτε (ι) από 6 γυναίκες, είτε (ιι) από 5 γυναίκες και 1 άνδρα, είτε (ιιι) από 4 γυναίκες και 2 άνδρες.

Παρόμοια με το (1α1), οι διαφορετικές επιτροπές που αποτελούνται από 6 γυναίκες είναι:

$$C(15,6) = \binom{15}{6} = \frac{15!}{9!\,6!} = 5.005$$

Στην περίπτωση (ιι), οι τρόποι να επιλέξουμε τις 5 γυναίκες της επιτροπής είναι:

$$C(15,5) = \binom{15}{5} = \frac{15!}{10!\,5!} = 3.003$$

Υπάρχουν ακόμη $C(10,1) = 10$ τρόποι να επιλέξουμε το μέλος της επιτροπής που είναι άνδρας. Επειδή οι επιλογές του άνδρα και των 5 γυναικών είναι ανεξάρτητες, εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, καταλήγουμε ότι οι διαφορετικές επιτροπές που αποτελούνται από 5 γυναίκες και 1 άνδρα είναι:

$$C(15,5)\cdot C(10,1)=\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{1}=3.003\cdot 10=30.030$$

Ομοίως, οι διαφορετικές επιτροπές με 4 γυναίκες και 2 άνδρες είναι:

$$C(15,4)\cdot C(10,2)=\binom{15}{4}\cdot\binom{10}{2}=\frac{15!}{11!4!}\cdot\frac{10!}{8!2!}=1.365\cdot 45=61.425.$$

Παρατηρούμε ότι τα γεγονότα (ι), (ιι) και (ιιι) είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Οπότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα του αθροίσματος, έχουμε ότι το συνολικό πλήθος των εξαμελών επιτροπών όπου οι γυναίκες είναι περισσότερες από τους άνδρες είναι:

$$5.005+30.030+61.425=96.460.$$

(1β) Παρατηρούμε ότι τα 4 παιδιά είναι διακεκριμένα, αλλά ότι τόσο τα 6 μήλα όσο και τα 7 πορτοκάλια δεν είναι. Συνεπώς η διανομή των μήλων (αντίστοιχα, των πορτοκαλιών) αποτελεί ένα πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη, ή ισοδύναμα, ένα πρόβλημα διανομής 6 (αντίστοιχα, 7) ίδιων αντικειμένων σε 4 διακεκριμένες «υποδοχές» (που αντιστοιχούν στα παιδιά).

(1β1) Μοιράζουμε τα 7 πορτοκάλια στα 4 παιδιά, χωρίς περιορισμούς, με

$$C(4+7-1,7)=\binom{10}{7}=\frac{10!}{7!3!}=120 \text{ τρόπους.}$$

Όσον αφορά τα μήλα, δίνουμε αρχικά από 1 μήλο σε κάθε παιδί, ώστε να ικανοποιηθεί ο περιορισμός. Αυτό συμβαίνει με έναν τρόπο, αφού τα μήλα δεν είναι διακεκριμένα. Κατόπιν μοιράζουμε τα υπόλοιπα 6 – 4 = 2 μήλα χωρίς περιορισμούς με

$$C(4+2-1,2)=\binom{5}{2}=\frac{5!}{3!2!}=10 \text{ τρόπους.}$$

Αφού τα μήλα και τα πορτοκάλια μοιράζονται ανεξάρτητα, εφαρμόζουμε τον κανόνα του γινομένου, και έχουμε ότι αυτά μπορούν να μοιραστούν με

$$X=C(10,7)\cdot C(5,2)=120\cdot 10=1.200 \text{ τρόπους.}$$

(1β2) Μοιράζουμε τα 6 μήλα στα 4 παιδιά, χωρίς περιορισμούς, με

$$C(4+6-1,6)=\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!3!}=84 \text{ τρόπους.}$$

Όσον αφορά τα πορτοκάλια, αφού έχουμε 4 παιδιά και 7 πορτοκάλια, ενώ κάθε παιδί πρέπει να πάρει από 2 πορτοκάλια το πολύ, σε κάθε τέτοια διανομή, θα έχουμε αναγκαστικά 3 παιδιά που παίρνουν από 2 πορτοκάλια και 1 παιδί που παίρνει 1 πορτοκάλι. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 4 τέτοιες διανομές πορτοκαλιών, όσοι και οι τρόποι να επιλέξουμε το παιδί που θα πάρει 1 πορτοκάλι.

Αφού τα μήλα και τα πορτοκάλια μοιράζονται ανεξάρτητα, εφαρμόζουμε τον κανόνα του γινομένου, και έχουμε ότι αυτά μπορούν να μοιραστούν με

$$Y=C(9,6)\cdot 4=84\cdot 4=336 \text{ τρόπους.}$$

(1β3) Σύμφωνα με το (1β1), υπάρχουν 10 τρόποι να μοιράσουμε τα 6 μήλα στα 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει από τουλάχιστον 1 μήλο. Σύμφωνα με το (1β2), υπάρχουν 4 τρόποι να μοιράσουμε τα 7 πορτοκάλια στα 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει από το πολύ 2 πορτοκάλια. Όπως και στα (1β1) και (1β2), τα μήλα και τα πορτοκάλια μοιράζονται ανεξάρτητα. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον κανόνα του γινομένου, οι διαφορετικοί τρόποι να μοιραστούν τα μήλα και τα πορτοκάλια είναι:

$$Z = 10 \cdot 4 = 40\ .$$

(1β4) Εδώ πρέπει να υπολογίσουμε πόσες διανομές ικανοποιούν τον περιορισμό του (1β1) ή τον περιορισμό του (1β2). Είδαμε ότι υπάρχουν X διανομές που ικανοποιούν τον περιορισμό του (1β1) και Y διανομές που ικανοποιούν τον περιορισμό του (1β2). Αν τα γεγονότα που περιγράφονται στα (1β1) και (1β2) ήταν αμοιβαία αποκλειόμενα, τότε θα αρκούσε να υπολογίσουμε το $X + Y$, σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος. Όμως οι διανομές των (1β1) και (1β2) δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, αφού υπάρχουν Z διανομές που ικανοποιούν τόσο τον περιορισμό του (1β1) όσο και τον περιορισμό του (1β2), και άρα προσμετρούνται τόσο στο X όσο και στο Y (άρα μετρούνται δύο φορές). Πρέπει λοιπόν να αφαιρέσουμε το Z από το άθροισμα $X + Y$ ώστε να μετρήσουμε μία μόνο φορά κάθε διανομή που ικανοποιεί τον περιορισμό του (1β1) ή τον περιορισμό του (1.β.2). Άρα, σύμφωνα με τον κανόνα εγκλεισμού-αποκλεισμού, ότι οι τρόποι είναι:

$$X + Y - Z = 1.200 + 336 - 40 = 1.496\ .$$

Άσκηση 2 (2014-2015, Εργασία 1, Ερώτημα 1)

Σε ένα συνέδριο συμμετέχουν 10 διακεκριμένοι καθηγητές πληροφορικής, 10 διακεκριμένοι καθηγητές ανθρωπιστικών επιστημών και 10 διακεκριμένοι καθηγητές φυσικών επιστημών.

A) Με πόσους τρόπους μπορεί να δημιουργηθεί μία επιτροπή 3 καθηγητών με έναν πρόεδρο, έναν γραμματέα και έναν ταμία αν πρέπει να συμμετέχει σε αυτήν ένας καθηγητής από κάθε ειδικότητα;

B) Αν για την προεδρία της επιτροπής γίνει φανερή ψηφοφορία, υπάρχουν 3 καθηγητές ως υποψήφιοι, κάθε ένας από τους 30 καθηγητές πρέπει να ψηφίσει υποχρεωτικά έναν από 3 υποψηφίους, αλλά κάθε υποψήφιος δεν μπορεί να ψηφίσει τον εαυτό του, πόσα είναι τα δυνατά διαφορετικά αποτελέσματα της ψηφοφορίας (παρατηρήστε ότι έχει σημασία τι ψηφίζει κάθε καθηγητής);

Γ) Οι 30 καθηγητές απαρτίζουν ζευγάρια (γυναίκα, άντρας) και από κάθε ζευγάρι θα μιλήσει ο άνδρας ή η γυναίκα, αλλά όχι και οι δύο. Πόσοι οι δυνατοί τρόποι διαμόρφωσης του προγράμματος του συνεδρίου, αν έχει σημασία η σειρά των ομιλιών και αν μετά το τέλος της 4ης και πριν την έναρξη της 10ης ομιλίας πρέπει να μεσολαβήσει ένα διάλειμμα;

Απάντηση

A) Αφού στην επιτροπή πρέπει να συμμετέχει ένας καθηγητής από κάθε ειδικότητα, επιλέγουμε *1* καθηγητή ανά ειδικότητα. Για κάθε ειδικότητα, η επιλογή αυτή πραγματοποιείται με *10* τρόπους ανεξάρτητα από την επιλογή σε οποιαδήποτε άλλη ειδικότητα. Συνεπώς οι *3* καθηγητές οι οποίοι θα συμμετέχουν στην επιτροπή μπορούν να επιλεγούν με 10^3 τρόπους.

Κατόπιν όμως πρέπει να ανατεθούν στους *3* επιλεγέντες οι *3* ρόλοι της επιτροπής. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι πρώτα ανατίθεται ο ρόλος του προέδρου με *3* δυνατούς τρόπους, κατόπιν (έχοντας αναθέσει το ρόλο του προέδρου) ανατίθεται ο ρόλος του γραμματέα με *2* πλέον τρόπους και, τελικά ο μοναδικός επιλεγέντας καθηγητής άνευ ρόλου αναλαμβάνει ταμίας. Ουσιαστικά λοιπόν, είναι σαν να έχουμε διατάξει τους *3* επιλεγέντες, ώστε να τους ανατεθούν οι ρόλοι, με *3!* τρόπους.

Αφού η ανάθεση των ρόλων πραγματοποιείται ανεξάρτητα από το ποιοι *3* καθηγητές επιλέγονται για να συμμετάσχουν στην επιτροπή, η επιτροπή μπορεί να δημιουργηθεί με $\boldsymbol{10^3*3!}$ τρόπους.

Β) Αφού καθένας από τους 30 καθηγητές θα ψηφίσει έναν υποψήφιο φανερά,

- καθένας από τους *3* υποψηφίους έχει *2* επιλογές, αφού δεν μπορεί να ψηφίσει τον εαυτό του, ενώ
- καθένας από τους υπόλοιπους *27* έχει *3* επιλογές, όσες δηλαδή και οι υποψήφιοι.

Επειδή κάθε καθηγητής ψηφίζει ανεξάρτητα από οποιονδήποτε άλλο, υπάρχουν $\boldsymbol{2^3*3^{27}}$ δυνατά διαφορετικά αποτελέσματα της ψηφοφορίας.

Γ) Η επιλογή του ενός ομιλητή από κάθε ζευγάρι μπορεί να πραγματοποιηθεί με *2* τρόπους, ανεξάρτητα από την επιλογή του ομιλητή από οποιοδήποτε άλλο ζευγάρι. Συνεπώς, οι *15* ομιλητές επιλέγονται από τα *15* ζεύγη με 2^{15} τρόπους.

Κατόπιν, πρέπει να προσδιοριστεί η σειρά των ομιλιών, δηλαδή πρέπει να διατάξουμε τους *15* ομιλητές στη σειρά. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με *15!* τρόπους, ανεξάρτητα από το ποιοι *15* ομιλητές έχουν επιλεγεί.

Τέλος, εισάγουμε το διάλειμμα με *6* δυνατούς τρόπους (μεταξύ της $4^{ης}$ και της $5^{ης}$ ομιλίας ή μεταξύ της $5^{ης}$ και της $6^{ης}$ ομιλίας ή .... ή μεταξύ της $9^{ης}$ και της $10^{ης}$ ομιλίας). Αυτό γίνεται ανεξάρτητα του ποιοι είναι οι ομιλητές και με ποια σειρά πραγματοποιούνται οι ομιλίες.

Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $\boldsymbol{6*15!*2^{15}}$ δυνατοί τρόποι διαμόρφωσης του προγράμματος.

Άσκηση 3 (2014-2015, Εργασία 1, Ερώτημα 2)

Τέσσερα ζευγάρια είναι καλεσμένα σε γάμο και κάθονται τυχαία σε ένα κυκλικό τραπέζι 8 θέσεων. Τα 8 συνολικά άτομα θεωρούνται διακεκριμένα. Το τραπέζι δεν έχει διακεκριμένες θέσεις αλλά έχει σημασία ποιον έχει δεξιά και ποιον αριστερά του κάθε καλεσμένος. Υπολογίστε τις παρακάτω πιθανότητες.

Α) Ο άνδρας και η γυναίκα κάθε ζευγαριού να κάθονται δίπλα ο ένας στον άλλο (παρατηρήστε ότι επιτρέπεται να καθίσουν διαδοχικά δύο γυναίκες ή άντρες)

Β) Να εναλλάσσονται άνδρες και γυναίκες στο τραπέζι.

Γ) Να κάθονται όλοι οι άνδρες διαδοχικά και όλες οι γυναίκες διαδοχικά.

Απάντηση

Αφού το τραπέζι δεν έχει διακεκριμένες θέσεις αλλά έχει σημασία ποιον έχει δεξιά και ποιον αριστερά του κάθε καλεσμένος, ο δειγματοχώρος περιλαμβάνει ***7!*** ισοπίθανα ενδεχόμενα, δηλαδή το αριθμό των κυκλικών μεταθέσεων 8 διακεκριμένων αντικειμένων (δείτε π.χ. τη διαφάνεια 9 στην παρουσίαση της 1[ης] ΟΣΣ).

Α) Αφού ο άνδρας και η γυναίκα κάθε ζευγαριού πρέπει να κάθονται δίπλα ο ένας στον άλλο, μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε ζεύγος ως ένα διακεκριμένο αντικείμενο, οπότε τα *4* ζεύγη τοποθετούνται κυκλικά με *3!* τρόπους.

Δεδομένης μίας τοποθέτησης των *4* ζευγών και ανεξάρτητα από το πώς αυτή πραγματοποιείται, κάθε ζεύγος διαθέτει *2* επιλογές ως προς το αν η γυναίκα θα είναι αριστερά ή δεξιά του άντρα. Η επιλογή αυτή για κάθε ζεύγος μπορεί να πραγματοποιηθεί ανεξάρτητα από την αντίστοιχη επιλογή οποιουδήποτε άλλου ζεύγους, αφού επιτρέπεται να καθίσουν διαδοχικά δύο γυναίκες ή άντρες. Άρα οι δυνατοί τρόποι για τα *4* ζεύγη είναι 2^4.

Συνεπώς τα επιθυμητά ενδεχόμενα είναι $\boldsymbol{3!*2^4}$ και η ζητούμενη πιθανότητα

.

Β) Αφού πρέπει να εναλλάσσονται άνδρες και γυναίκες στο τραπέζι, ας υποθέσουμε ότι τοποθετούνται πρώτα κυκλικά οι *4* γυναίκες, αφήνοντας μία θέση ανάμεσά τους. Εδώ πρόκειται για κυκλικές μεταθέσεις *4* διακεκριμένων αντικειμένων, όπου κάθε 'διακεκριμένο αντικείμενο' απαρτίζεται από μία γυναίκα και την επόμενη προς τα αριστερά άδεια θέση. Συνεπώς η κυκλική τοποθέτηση μόνο των *4* γυναικών μπορεί να πραγματοποιηθεί με *3!* τρόπους.

Δεδομένης μίας τοποθέτησης των γυναικών και ανεξάρτητα από το πώς έχει αυτή πραγματοποιηθεί (προσέξτε ότι η γυναίκα και ο άντρας ενός ζεύγους δεν είναι απαραίτητο πλέον να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις) οι *4* άντρες τοποθετούνται με *4!* τρόπους στις θέσεις που απομένουν.

Συνεπώς τα επιθυμητά ενδεχόμενα είναι ***3!* 4!*** και η ζητούμενη πιθανότητα

.

Γ) Εφόσον όλοι οι άντρες κάθονται σε διαδοχικές θέσεις αλλά στο τέλος μαζί με τις γυναίκες θα σχηματίσουν κύκλο, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιεσδήποτε *4* διαδοχικές θέσεις ως τις θέσεις των αντρών (μπορούμε δηλαδή να τις επιλέξουμε με *1* τρόπο), οπότε είναι προφανές ότι στις υπόλοιπες *4* θέσεις θα καθήσουν οι διαδοχικά οι *4* γυναίκες.

Οι *4* άντρες μπορούν να καθήσουν στις *4* θέσεις τους με *4!* διαφορετικούς τρόπους, όσες δηλαδή και οι μεταθέσεις *4* αντικειμένων (παρατηρήστε ότι οι *4* άντρες δεν σχηματίζουν από μόνοι τους κύκλο!). Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τις γυναίκες, ανεξάρτητα από τη μετάθεση των ανδρών.

Συνεπώς τα επιθυμητά ενδεχόμενα είναι $(4!)^2$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

.

Άσκηση 4 (2017-2018, Εργασία 1, Ερώτημα 1)

(1α) Έστω ότι 100 (διαφορετικοί) φοιτητές εισέρχονται σε δύο αίθουσες εξετάσεων, την αίθουσα Α με χωρητικότητα 80 (διαφορετικών) θέσεων και την αίθουσα Β με χωρητικότητα 40 (διαφορετικών) θέσεων. Στα ερωτήματα (1α1) και (1α2) μας ενδιαφέρει όχι μόνο ποιοι φοιτητές θα μπουν στην κάθε αίθουσα αλλά και σε ποιες θέσεις θα καθίσουν.

> **(1α1)** Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες.
>
> **(1α2)** Έστω ότι από τους 100 (διαφορετικούς) φοιτητές, 60 είναι κορίτσια και 40 είναι αγόρια. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες αν όλα τα αγόρια καθίσουν στην ίδια αίθουσα.

Απαντήσεις

(1α1) Έχουμε τοποθέτηση $k = 100$ διαφορετικών αντικειμένων (οι διαφορετικοί φοιτητές) σε $n = 80 + 40 = 120$ διαφορετικές υποδοχές (οι διαφορετικές θέσεις στις δύο αίθουσες), όπου κάθε υποδοχή λαμβάνει το πολύ ένα αντικείμενο. Άρα έχουμε $P(120,100) = \frac{120!}{20!}$ διαφορετικές τοποθετήσεις των φοιτητών.

(Πιο αναλυτικά, αριθμούμε τους φοιτητές από το 1 έως και το 100 με αυθαίρετο τρόπο και διατάσσουμε τις 120 διαφορετικές υποδοχές με $P(n,n) = 120!$ τρόπους. Στην πρώτη υποδοχή σε αυτή τη διάταξη θα καθίσει ο πρώτος φοιτητής, στη δεύτερη υποδοχή ο δεύτερος φοιτητής κοκ. Μετά την τοποθέτηση των φοιτητών μας μένουν 20 κενές υποδοχές, η σχετική διάταξη των οποίων δε μας ενδιαφέρει. Άρα έχουμε $\frac{P(120,120)}{20!} = \frac{120!}{20!}$ διαφορετικές τοποθετήσεις των φοιτητών.)

(1α2) Εξετάζουμε δύο αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις:

1) Όλα τα 40 αγόρια τοποθετούνται στην αίθουσα A. Όπως στο ερώτημα (1α1), αυτό γίνεται με $P(80,40)$ διαφορετικούς τρόπους. Τώρα μας μένουν 80 θέσεις (40 θέσεις στην αίθουσα A και 40 θέσεις στην αίθουσα B), στις οποίες τοποθετούμε τα 60 κορίτσια. Έχουμε $P(80,60)$ δυνατούς τρόπους τοποθέτησης των κοριτσιών σε αυτές τις θέσεις. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου, το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων στην περίπτωση (1) είναι $P(80,40) \times P(80,60)$.

2) Όλα τα 40 αγόρια τοποθετούνται στην αίθουσα B. Αυτό γίνεται με $P(40,40)$ τρόπους. Τώρα μας μένουν 80 θέσεις στην αίθουσα A στις οποίες τοποθετούμε τα κορίτσια με $P(80,60)$ τρόπους. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου, το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων στην περίπτωση (2) είναι $P(40,40) \times P(80,60)$.

Αφού οι περιπτώσεις (1) και (2) είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων είναι $P(80,40) \times P(80,60) + P(40,40) \times P(80,60) = P(80,60) \times [P(80,40) + P(40,40)]$.

(1β) Έστω ότι επιλέγουμε 4 βιβλία από 8 διαφορετικά βιβλία Μαθηματικών και 5βιβλία από 10 διαφορετικά βιβλία Πληροφορικής και τα τοποθετούμε στη σειρά σε ένα ράφι. Υπολογίστε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η παραπάνω επιλογή και τοποθέτηση των βιβλίων στο ράφι όταν:

- **(1β1)** Τοποθετούμε τα βιβλία σε οποιαδήποτε σειρά.
- **(1β2)** Τα βιβλία Μαθηματικών και Πληροφορικής εναλλάσσονται.
- **(1β3)** Το πρώτο βιβλίο είναι Μαθηματικών και το πέμπτο βιβλίο είναι Πληροφορικής.

Απαντήσεις

(1β1) Επιλέγουμε τα 4 βιβλία Μαθηματικών με $C(8,4)$ τρόπους και τα 5 βιβλία Πληροφορικής με $C(10,5)$ τρόπους. Στη συνέχεια, τοποθετούμε στο ράφι σε σειρά τα 9 επιλεγμένα βιβλία με $P(9,9) = 9!$ τρόπους, άρα συνολικά έχουμε $C(8,4) \times C(10,5) \times 9!$ δυνατές τοποθετήσεις.

(1β2) Διατάσσουμε ξεχωριστά τα 4 από τα 8 βιβλία των Μαθηματικών με $P(8,4)$ τρόπους και τα 5 από τα 10 βιβλία Πληροφορικής με $P(10,5)$ τρόπους. Καθώς τα βιβλία Μαθηματικών και Πληροφορικής θα πρέπει να εναλλάσσονται, το πρώτο βιβλίο πρέπει να είναι Πληροφορικής, δηλαδή θα εμφανίζονται με τη σειρά $\Pi_1 M_1 \Pi_2 M_2 \Pi_3 M_3 \Pi_4 M_4 \Pi_5$. Άρα έχουμε $P(8,4) \times P(10,5)$ δυνατές διατάξεις.

(1β3) Επιλέγουμε με 8 τρόπους ένα βιβλίο Μαθηματικών το οποίο θα τοποθετηθεί στην πρώτη θέση, και με 10 τρόπους ένα βιβλίο Πληροφορικής το οποίο θα τοποθετηθεί στην πέμπτη θέση. Απομένει να επιλέξουμε 3 από τα υπόλοιπα 7 βιβλία Μαθηματικών, με $C(7,3)$ τρόπους, και 4 από τα υπόλοιπα 9 βιβλία Πληροφορικής με $C(9,4)$ τρόπους. Διατάσσουμε αυτά τα 7 βιβλία με $P(7,7) = 7!$ τρόπους, άρα συνολικά έχουμε $8 \times 10 \times C(7,3) \times C(9,4) \times 7!$ δυνατές τοποθετήσεις.

Ενδεικτικές Ασκήσεις
Συνδυαστική

Άσκηση 5 (2017-2018, Εργασία 1, Ερώτημα 2)

Μια εταιρία, στα πλαίσια διαφημιστικής εκστρατείας, διοργανώνει ένα διαγωνισμό στον οποίο μοιράζονται λαχνοί. Οι λαχνοί περιέχουν όλους τους δυνατούς αναγραμματισμούς του ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ (π.χ., ΑΛΛΑΩΠΔΡΟ, ΡΑΑΟΠΛΔΩΛ, κλπ). Κερδίζουν όσοι λαχνοί εμφανίζουν κάποια (τουλάχιστον μία) από τις λέξεις ΠΟΛΛΑ ή ΔΩΡΑ. Π.χ., οι λαχνοί **ΠΟΛΛΑ**ΑΔΡΩ, ΑΠΛΛΟ**ΔΩΡΑ** και **ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ** είναι νικηφόροι.

(2α) Υπολογίστε το συνολικό πλήθος των λαχνών.
(2β) Υπολογίστε το πλήθος των νικηφόρων λαχνών.
(2γ) Έστω ότι λαμβάνουμε ένα τυχαίο λαχνό από ένα κιβώτιο το οποίο περιλαμβάνει μόνο τους λαχνούς που ξεκινούν με το γράμμα Δ. Ποια είναι η πιθανότητα ο λαχνός μας να είναι νικηφόρος;

Απαντήσεις

(2α) Εφαρμόζουμε τον τύπο διατάξεων ομάδων μη διακεκριμένων αντικειμένων. Έχουμε $N = 9$ αντικείμενα, όσα τα γράμματα του ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ, τα οποία χωρίζονται σε 2 ομάδες των 2, για τα γράμματα Λ και Α, και σε 5 ομάδες του ενός, για τα γράμματα Π, Ο, Δ, Ω και Ρ. Άρα έχουμε $\frac{9!}{2!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = \frac{9!}{4}$ λαχνούς.

(2β) Έστω Π το σύνολο των λαχνών που περιέχουν τη λέξη ΠΟΛΛΑ και Δ το σύνολο των λαχνών που περιέχουν τη λέξη ΔΩΡΑ. Τότε, το πλήθος των νικηφόρων λαχνών είναι $N = |\Pi \cup \Delta|$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε

$$N = |\Pi \cup \Delta| = |\Pi| + |\Delta| - |\Pi \cap \Delta|.$$

Για να υπολογίσουμε τον πληθάριθμο του συνόλου Π θεωρούμε τη λέξη ΠΟΛΛΑ ως ένα σύμβολο. Έτσι, μετράμε το πλήθος των δυνατών διατάξεων 5 διαφορετικών συμβόλων (ΠΟΛΛΑ, Δ, Ω, Ρ, Α) που είναι $P(5,5) = 5!$, δηλαδή $|\Pi| = 5!$. Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε $|\Delta| = \frac{6!}{2}$, αφού έχουμε τις δυνατές διατάξεις των 6 συμβόλων ΔΩΡΑ, Π, Ο, Λ, Λ, Α, όπου το ένα σύμβολο εμφανίζεται 2 φορές και τα υπόλοιπα από μία.

Το σύνολο $\Pi \cap \Delta$ αποτελείται από τους λαχνούς στους οποίους εμφανίζονται οι δύο λέξεις ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ μαζί, δηλαδή από 2 λαχνούς (ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ και ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ), άρα έχουμε $|\Pi \cap \Delta| = 2$. Συνεπώς, $N = |\Pi \cup \Delta| = 5! + \frac{6!}{2} - 2 = 478$.

(2γ) Αφού κάθε λαχνός στο κιβώτιο ξεκινά με το γράμμα Δ, το πλήθος των λαχνών δίνεται από τις διατάξεις των υπόλοιπων 8 γραμμάτων, όπου έχουμε από 2 φορές τα γράμματα Λ και Α, και από 1 φορά τα γράμματα Π, Ο, Ω και Ρ. Άρα έχουμε $K = \frac{8!}{2!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = \frac{8!}{4} = 10080$ λαχνούς στο κιβώτιο.

Έστω Π' το σύνολο των λαχνών του κιβωτίου που περιέχουν τη λέξη ΠΟΛΛΑ και Δ' το σύνολο των λαχνών του κιβωτίου που περιέχουν τη λέξη ΔΩΡΑ. Τότε, το πλήθος N' των νικηφόρων λαχνών είναι $|\Pi' \cup \Delta'|$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε

$$N' = |\Pi' \cup \Delta'| = |\Pi'| + |\Delta'| - |\Pi' \cap \Delta'|.$$

Για να υπολογίσουμε τον πληθάριθμο του συνόλου Π' θεωρούμε τη λέξη ΠΟΛΛΑ ως ένα σύμβολο. Έτσι, μετράμε το πλήθος των δυνατών διατάξεων 4 διαφορετικών συμβόλων (ΠΟΛΛΑ, Ω, Ρ, Α) που είναι $P(4,4) = 4!$, δηλαδή $|\Pi'| = 4!$.

Οι λαχνοί του συνόλου Δ' ξεκινούν όλοι με τη λέξη ΔΩΡΑ, άρα μετράμε τις διατάξεις των γραμμάτων Π, Ο, Λ, Λ, Α, οι οποίοι είναι $|\Delta'| = \frac{5!}{2!\times1!\times1!\times1!} = \frac{5!}{2}$.

Το σύνολο $\Pi' \cap \Delta'$ αποτελείται από τους λαχνούς στους οποίους εμφανίζονται οι δύο λέξεις ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ μαζί, δηλαδή από 1 λαχνό (ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ), άρα έχουμε $|\Pi' \cap \Delta'| = 1$. Επομένως, $N' = |\Pi' \cup \Delta'| = 4! + \frac{5!}{2} - 1 = 83$.

Άρα η πιθανότητα ένας τυχαίος λαχνός να είναι νικηφόρος είναι $\frac{N}{K} \approx 0.0082$.

Άσκηση 6 (2016-2017, Εργασία 1, Ερώτημα 3)

Έστω ότι θέλουμε να κολλήσουμε σε φακέλους γραμματόσημα αξίας R λεπτών του ευρώ, χρησιμοποιώντας γραμματόσημα των 5 λεπτών, 10 λεπτών, 20 λεπτών και 50 λεπτών. Τα γραμματόσημα της ίδιας αξίας είναι μεταξύ τους πανομοιότυπα. Να δοθεί η γεννήτρια συνάρτηση, καθώς και ο όρος της ο συντελεστής του οποίου δίνει την απάντηση, στις εξής περιπτώσεις:

(3α) Δεν έχει καμιά σημασία ο τρόπος τοποθέτησης των επιλεγμένων γραμματοσήμων επάνω στον φάκελο.

(3β) Δεν έχει καμιά σημασία ο τρόπος τοποθέτησης των επιλεγμένων γραμματοσήμων επάνω στον φάκελο, και επιλέγονται άρτιο πλήθος 5-λεπτων και 50-λεπτων γραμματοσήμων, τουλάχιστον ένα 10-λεπτο γραμματόσημο, και πολλαπλάσιος του πέντε αριθμός από 20-λεπτα γραμματόσημα.

(3γ) Για την τοποθέτηση των γραμματοσήμων υπάρχει προκαθορισμένος χώρος στον φάκελο, που απαρτίζεται από ακριβώς N θέσεις στην ευθεία και κάθε θέση πρέπει να πάρει ακριβώς ένα γραμματόσημο (θεωρούμε ότι R ≥ 5N). Η σειρά εμφάνισης των γραμματοσήμων στην ευθεία έχει σημασία.

(3δ) Διαθέτουμε αποκλειστικά και μόνο 14 γραμματόσημα των 50 λεπτών το καθένα, που είναι αφιερωμένα στο ελληνικό αλφάβητο. Τρία από αυτά αφορούν το γράμμα Α, δύο το Β, δύο το Γ, δύο το Δ, ένα το Ε, ένα το Ζ, δύο το Η, και ένα το Θ. Όλα τα γραμματόσημα που αφορούν το ίδιο γράμμα είναι μεταξύ τους πανομοιότυπα. Θέλουμε να τοποθετήσουμε 5 από αυτά στην ευθεία επάνω στον ίδιο φάκελο, και έχει σημασία η σειρά εμφάνισής τους (στην ευθεία).

Απαντήσεις:

Ενδεικτικές Ασκήσεις
Συνδυαστική

(3α) Έχουμε ένα πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη που αφορά τη διανομή R ομοίων αντικειμένων (των R λεπτών της συνολικής αξίας των γραμματοσήμων) σε 4 διακεκριμένες υποδοχές (τα 4 είδη γραμματοσήμων) χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας στις υποδοχές. Οπότε απαιτείται μία συνήθης γεννήτρια συνάρτηση.

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με αυτό του υπολογισμού των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $5z_1 + 10z_2 + 20z_3 + 50z_4 = R$, όπου z_1 είναι το πλήθος των γραμματοσήμων 5 λεπτών που χρησιμοποιούμε, z_2 είναι το πλήθος των γραμματοσήμων 10 λεπτών, z_3 είναι το πλήθος των γραμματοσήμων 20 λεπτών και z_4 είναι το πλήθος των γραμματοσήμων 50 λεπτών.

Στην πρώτη υποδοχή, που αφορά τα γραμματόσημα των 5 λεπτών (ή ισοδύναμα την μεταβλητή z_1), κάθε γραμματόσημο συνεισφέρει 5 λεπτά στη συνολική αξία, συνεπώς ο αντίστοιχος απαριθμητής είναι

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + \cdots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

Η δεύτερη υποδοχή αφορά τα γραμματόσημα των 10 λεπτών. Αφού κάθε τέτοιο γραμματόσημο συνεισφέρει 10 λεπτά στη συνολική αξία, ο απαριθμητής είναι

$$1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40} + \cdots = \frac{1}{1-x^{10}}.$$

Η τρίτη υποδοχή αφορά τα γραμματόσημα των 20 λεπτών. Κάθε γραμματόσημο συνεισφέρει 20 λεπτά στη συνολική αξία και ο απαριθμητής είναι

$$1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + x^{80} + \cdots = \frac{1}{1-x^{20}}.$$

Η τέταρτη υποδοχή αφορά τα γραμματόσημα των 50 λεπτών. Κάθε γραμματόσημο συνεισφέρει 50 λεπτά στη συνολική αξία και ο απαριθμητής είναι

$$1 + x^{50} + x^{100} + x^{150} + x^{200} + \cdots = \frac{1}{1 - x^{50}}.$$

Συνολικά, η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\left(\frac{1}{1 - x^5}\right)\left(\frac{1}{1 - x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1 - x^{20}}\right)\left(\frac{1}{1 - x^{50}}\right)$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^R.

(3β) Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής ομοίων αντικειμένων σε 4 διακεκριμένες υποδοχές, αντίστοιχο με αυτό του (3α), αλλά με κάποιους περιορισμούς στο πλήθος των γραμματοσήμων που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε από κάθε είδος, ή ισοδύναμα, στο πλήθος των γραμματοσήμων σε κάθε υποδοχή.

Όπως και στο (3α), έχουμε πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη και θα χρησιμοποιήσουμε συνήθη γεννήτρια συνάρτηση. Αφού πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άρτιο πλήθος γραμματοσήμων 5 λεπτών, ο αντίστοιχος απαριθμητής είναι

$$1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40} + \cdots = \frac{1}{1-x^{10}}.$$

Αφού πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τουλάχιστον ένα γραμματόσημο 10 λεπτών, ο απαριθμητής για τα γραμματόσημα 10 λεπτών είναι

$$x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40} + x^{50} + \cdots = \frac{x^{10}}{1-x^{10}}.$$

Αφού πρέπει τα γραμματόσημα των 20 λεπτών να είναι πολλαπλάσια του 5, ο απαριθμητής για τα γραμματόσημα 20 λεπτών είναι

$$1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + x^{400} + \cdots = \frac{1}{1-x^{100}}.$$

Τέλος, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άρτιο πλήθος γραμματοσήμων 50 λεπτών, οπότε ο αντίστοιχος απαριθμητής είναι

$$1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + x^{400} + \cdots = \frac{1}{1-x^{100}}.$$

Συνολικά, η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{x^{10}}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{100}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{100}}\right) = \frac{x^{10}}{(1-x^{10})^2 \cdot (1-x^{100})^2}$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^R.

(3γ) Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής R όμοιων αντικειμένων (των R λεπτών της συνολικής αξίας των γραμματοσήμων) σε N διακεκριμένες υποδοχές (οι N θέσεις στην ευθεία όπου μπορούν να τοποθετηθούν τα γραμματόσημα), με τον περιορισμό ότι κάθε θέση μπορεί να συνεισφέρει είτε 5 λεπτά είτε 10 λεπτά είτε 20 λεπτά είτε 50 λεπτά στη συνολική αξία των γραμματοσήμων.

Έχουμε λοιπόν ένα πρόβλημα συνδυασμών και συνεπώς μία συνήθη γεννήτρια συνάρτηση. Ο απαριθμητής για καθεμία από τις N θέσεις κωδικοποιεί τις 4 επιλογές για τη συνεισφορά της υποδοχής στη συνολική αξία των γραμματοσήμων, άρα είναι ο

$$x^5 + x^{10} + x^{20} + x^{50}.$$

Συνολικά, η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση είναι $(x^5 + x^{10} + x^{20} + x^{50})^N$ και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^R.

(3δ) Έχουμε ένα πρόβλημα 5 διακεκριμένων επιλογών (μία επιλογή για καθεμία από τις 5 διακεκριμένες θέσεις της ευθείας όπου θα τοποθετηθούν τα γραμματόσημα) από 8 διαφορετικά είδη αντικειμένων (τα 8 διαφορετικά είδη γραμματοσήμων που αντιστοιχούν στα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ) με περιορισμένο αριθμό επαναλήψεων για κάθε είδος (οι επαναλήψεις καθορίζονται από το πλήθος των διαθέσιμων γραμματοσήμων για κάθε είδος).

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τη διανομή 5 διακεκριμένων σφαιριδίων (αν φανταστούμε ότι κάθε σφαιρίδιο έχει μια ετικέτα που αναφέρει σε ποια από τις 5 διακεκριμμένες θέσεις της ευθείας τοποθετείται) σε 8 διακεκριμένες υποδοχές (μια για κάθε γράμμα Α-Θ), με περιορισμούς στη χωρητικότητα των υποδοχών. Έχουμε λοιπόν ένα πρόβλημα διατάξεων και χρησιμοποιούμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση.

Αφού έχουμε μόνο 3 γραμματόσημα που αφορούν το γράμμα Α, ο εκθετικός απαριθμητής για το γράμμα Α είναι

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}.$$

Για καθένα από τα γράμματα Β, Γ, Δ και Η, έχουμε μόνο 2 γραμματόσημα. Άρα ο εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα Β, Γ, Δ και Η είναι

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}.$$

Τέλος,, για καθένα από τα γράμματα Ε, Ζ και Θ, έχουμε μόνο 1 γραμματόσημο. Άρα ο εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα γράμματα Ε, Ζ και Θ είναι

$$1+\frac{x}{1!}.$$

Συνολικά, η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^4\left(1+\frac{x}{1!}\right)^3$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $\frac{x^5}{5!}$.

Άσκηση 7 (2014-2015, Εργασία 1, Ερώτημα 3)

Α. 100 διακεκριμένοι μαθητές μοιράζονται σε 4 διακεκριμένες αίθουσες, ώστε σε κάθε αίθουσα να μπουν το λιγότερο 20 και το πολύ 30 μαθητές.

i) Αναπτύξτε γεννήτρια συνάρτηση και προσδιορίστε τον όρο, του οποίου ο συντελεστής δίνει τους τρόπους με τους οποίους θα μοιραστούν οι φοιτητές στις αίθουσες.
ii) Πώς θα πρέπει να τροποποιηθεί η παραπάνω γεννήτρια συνάρτηση αν ληφθεί υπόψη και η σειρά με την οποία εισέρχονται οι μαθητές σε κάθε αίθουσα;

Β. Δίνεται θετικός ακέραιος αριθμός Χ που αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$$X=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}$$

i) Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και προσδιορίστε τον όρο, του οποίου ο συντελεστής δίνει το πλήθος των διαιρετών του X που εκφράζονται ως γινόμενο ακριβώς n (όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους) πρώτων παραγόντων.
ii) Υπολογίστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος Β(i) για X=1200, n=5.

Απάντηση

Ενδεικτικές Ασκήσεις
Συνδυαστική

Ai) Το συνδυαστικό αυτό πρόβλημα είναι αντίστοιχο με εκείνο της διανομής 100 διακεκριμένων αντικειμένων σε 4 διακεκριμένα κουτιά (χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης σε κάθε κουτί), ώστε σε κάθε κουτί να τοποθετηθούν από 20 ως 30 αντικείμενα. Επομένως θα κατασκευάσουμε την παρακάτω εκθετική γεννήτρια συνάρτηση.

Σε αυτή τη συνάρτηση, ο συντελεστής του όρου $x^{100}/100!$ ισούται με τους τρόπους με τους οποίους θα μοιραστούν οι φοιτητές στις αίθουσες.

Aii) Το πρόβλημα αντιστοιχεί στη διανομή 100 διακεκριμένων αντικειμένων σε 4 διακεκριμένα κουτιά (όπου, σε αντίθεση με το προηγούμενο ερώτημα, μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης σε κάθε κουτί), ώστε σε κάθε κουτί να τοποθετηθούν από 20 ως 30 αντικείμενα. Επομένως θα κατασκευάσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, λαμβάνοντας όμως τώρα υπόψη ότι η τοποθέτηση k διακεκριμένων αντικειμένων σε μια υποδοχή μπορεί να γίνει με $k!$ τρόπους. Αυτό σημαίνει ότι κάθε όρος κάθε απαριθμητή του προηγούμενου ερωτήματος Β θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον παρονομαστή του. Συνεπώς η συνάρτηση θα έχει τη μορφή

Σε αυτή τη συνάρτηση, ο συντελεστής του όρου $x^{100}/100!$ ισούται με τους τρόπους με τους οποίους θα μοιραστούν οι φοιτητές στις αίθουσες.

Bi) Παρατηρούμε ότι οποιοσδήποτε διαιρέτης του X προκύπτει ως το γινόμενο των αριθμών p_i, όπου ο καθένας εμφανίζεται στο γινόμενο από 0 έως n_i φορές, $i=1,\dots,k$. Άρα η συνάρτηση είναι η

και σε αυτή ζητούμε το συντελεστή του x^n.

Bii) Για $X=1200$ η γεννήτρια συνάρτηση του ερωτήματος i) είναι η

.

Παρατηρήστε ότι ο όρος x^5 προκύπτει

- πολλαπλασιάζοντας τον όρο x^2 του πρώτου απαριθμητή με τον όρο x^1 του δεύτερου απαριθμητή και τον όρο x^2 του πρώτου απαριθμητή (ένας τρόπος), ή
- πολλαπλασιάζοντας τον x^3 του πρώτου απαριθμητή είτε με τους όρους x^1, x^1 είτε με τους όρους x^0, x^2 από το δεύτερο και τον τρίτο αντίστοιχα απαριθμητή (2 τρόποι), ή
- πολλαπλασιάζοντας τον x^4 του πρώτου απαριθμητή είτε με τους όρους x^0, x^1 είτε με τους όρους x^1, x^0 από το δεύτερο και τον τρίτο αντίστοιχα απαριθμητή (2 τρόποι).

Συνεπώς ο συντελεστής του όρου x^5 είναι $1+2+2=5$.

Άσκηση 8 (2016-2017, Εργασία 1, Ερώτημα 4)

(4α) Να αποδείξετε, με χρήση μαθηματικής επαγωγής, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, ο αριθμός $3^{2*n} – 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

Υπόδειξη: Για κάθε φυσικό αριθμό k, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί π(k), υ(k) τέτοιοι ώστε να ισχύει ότι k = 8*π(k) + υ(k) και υ(k) ∈ { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }. Αν ο k είναι πολλαπλάσιο του 8, τότε θα πρέπει να ισχύει ότι υ(k) = 0.

(4β) Έστω ότι εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία n φορές, για κάποιον φυσικό αριθμό n: Ξεκινώντας από ένα πράσινο ισόπλευρο τρίγωνο, με τη βάση προς τα κάτω, σε κάθε βήμα τοποθετούμε σε κάθε πράσινο τρίγωνο ένα (μικρότερο) κόκκινο τρίγωνο με τη βάση προς τα επάνω, ενώνοντας τα μέσα των τριών πλευρών του πράσινου τριγώνου. Για παράδειγμα, τα δυο πρώτα βήματα της συγκεκριμένης διαδικασίας φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.

Να βρείτε αναδρομική σχέση για το πλήθος g(n) των πράσινων τριγώνων μετά από n βήματα. Στη συνέχεια να βρείτε έναν κλειστό τύπο (δηλαδή, κάποια έκφραση που είναι συνάρτηση του n και δεν εμπλέκει άλλους όρους της **g**, βλ. ΤΟΜΟ Δ, σελ.79-80) για τον όρο g(n) της ακολουθίας **g**. Να ελέγξετε την ορθότητα του προτεινόμενου κλειστού τύπου που προτείνετε, δίνοντας τις τιμές της **g** για n = 2 και n = 3.

(4γ) Να βρείτε αναδρομική σχέση για το πλήθος r(n) των κόκκινων τριγώνων μετά από n βήματα, στη διαδικασία που περιγράφεται στο (4β), ως συνάρτηση των πράσινων και των κόκκινων τριγώνων από προηγούμενα βήματα. Να βρείτε έναν κλειστό τύπο για την ακολουθία r(n), αξιοποιώντας τον κλειστό τύπο που βρήκατε στο (4β) για την ακολουθία g(n). Να ελέγξετε την ορθότητα του προτεινόμενου κλειστού τύπου που προτείνετε, δίνοντας τις τιμές της **g** για n = 2 και n = 3.

Υπόδειξη: Για την εύρεση κλειστού τύπου για το r(n), αντικαταστήστε τους όρους της **g** με τους αντίστοιχους κλειστούς τύπους που βρήκατε στο (4β), και τους προηγούμενους όρους της **r** με τη δική τους αναδρομική σχέση.

(4δ) Στη διαδικασία που περιγράφεται στο (4β), μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το πλήθος t(n) όλων των τριγώνων που υπάρχουν στο σχήμα, συμπεριλαμβανομένων και των πολύχρωμων τριγώνων. Π.χ., μετά το πρώτο βήμα υπάρχουν συνολικά t(1) = 5 τρίγωνα (κι όχι 4), αφού συμπεριλαμβάνεται και το μεγάλο (πολύχρωμο) τρίγωνο. Παρατηρούμε για το συνολικό πλήθος t(n) των τριγώνων μετά από n βήματα της διαδικασίας, ότι ισχύει η εξής αναδρομική σχέση (που όμως εμπλέκει όρους της ακολουθίας **g**):

$$\forall n \geq 1,\ t(n) = t(n–1) + 4*g(n–1)$$

Στόχος είναι να βρούμε μια όσο το δυνατόν πιο απλή αναδρομική σχέση για το t(n), που να περιλαμβάνει μόνο προηγούμενους όρους της ακολουθίας **t**. Να αποδείξετε ότι $\forall n \geq 2$, t(n) = 4*t(n–1) – 3*t(n–2). Στη συνέχεια, και με δεδομένο αυτό, να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $\forall n \geq 1$, t(n) = 3*t(n–1) + 2.

Απαντήσεις:

Ενδεικτικές Ασκήσεις
Συνδυαστική

(4α) *Βάση επαγωγής:* Το ζητούμενο ισχύει για $n = 0$, αφού $3^{2\cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0$, που είναι πολλαπλάσιο του 8.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 0$, ο αριθμός $3^{2n} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8, δηλαδή υπάρχει φυσικός $\pi(n)$ τέτοιος ώστε $3^{2n} - 1 = 8\pi(n)$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n + 1 \geq 1$, ο αριθμός $3^{2(n+1)} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8. Πράγματι,

$$3^{2(n+1)} - 1 = 9 \cdot 3^{2n} - 1 = 9 \cdot (3^{2n} - 1) + 9 - 1 = 9 \cdot 8\pi(n) + 8$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί $3^{2(n+1)} = 3^{2n} \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^{2n}$. Για τη δεύτερη ισότητα, προσθέτουμε και αφαιρούμε το 9. Η τρίτη ισότητα ισχύει γιατί, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ο αριθμός $3^{2n} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8, και συνεπώς υπάρχει φυσικός $\pi(n)$ τέτοιος ώστε $3^{2n} - 1 = 8\pi(n)$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$3^{2(n+1)} - 1 = 9 \cdot 8\pi(n) + 8 = 8 \cdot (9\pi(n) + 1),$$

συνεπώς ο αριθμός $3^{2(n+1)} - 1$ είναι πράγματι πολλαπλάσιο του 8.

(4β) Οι αρχικές τιμές της **g** δίνονται στο σχήμα και είναι $g(0) = 1$, $g(1) = 3$ και $g(2) = 9$. Έστω $g(n-1)$ το πλήθος των πράσινων τριγώνων μετά την $(n-1)$-οστή επανάληψη της διαδικασίας, για κάποιο $n \geq 1$. Κατά την n-οστή επανάληψη της διαδικασίας, κάθε υπάρχον πράσινο τρίγωνο αντικαθίσταται από 3 νέα πράσινα τρίγωνα και 1 νέο κόκκινο τρίγωνο. Άρα, μετά την n-οστή επανάληψη, το πλήθος των πράσινων τριγώνων είναι ίσο με το τριπλάσιο του πλήθους των πράσινων τριγώνων που υπήρχαν μετά την $(n-1)$-οστή επανάληψη. Άρα το $g(n)$ είναι ίσο με το τριπλάσιο του $g(n-1)$. και η ζητούμενη αναδρομική σχέση είναι

$g(n) = 3g(n-1)$, για κάθε $n \geq 1$, με αρχική συνθήκη $g(0) = 1$.

Βρίσκουμε λοιπόν τον κλειστό τύπο της $g(n)$, με διαδοχικές αντικαταστάσεις:

$g(n) = 3g(n-1) = 3 \cdot 3g(n-2) = 3 \cdot 3 \cdot 3g(n-3) = \cdots =$
$3^n g(0) = 3^n$.

Στις παραπάνω ισότητες, παρατηρούμε ότι το άθροισμα του εκθέτη του 3 και του ορίσματος της **g** παραμένει πάντα ίσο με n, συνεπώς $g(n) = 3^n$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα οι τιμές $g(2) = 9$ και $g(3) = 27$, τιμές που επαληθεύονται εύκολα και στο σχήμα.

(4γ) Οι αρχικές τιμές της **r** δίνονται στο σχήμα και είναι $r(0) = 0$, $r(1) = 1$ και $r(2) = 4$. Έστω $r(n-1)$ το πλήθος των κόκκινων τριγώνων και $g(n-1)$ το πλήθος των πράσινων τριγώνων μετά την ($n - 1$-οστή επανάληψη της διαδικασίας, για κάποιο αυθαίρετο $n \geq 1$. Κατά την n-οστή επανάληψη της διαδικασίας, τα υπάρχοντα κόκκινα τρίγωνα διατηρούνται και κάθε υπάρχον πράσινο τρίγωνο αντικαθίσταται από 3 νέα πράσινα τρίγωνα και 1 νέο κόκκινο τρίγωνο. Άρα, μετά την n-οστή επανάληψη, το πλήθος των κόκκινων τριγώνων είναι ίσο με το πλήθος των κόκκινων τριγώνων στην $(n-1)$-οστή επανάληψη (υπάρχοντα κόκκινα τρίγωνα,

$r(n-1)$) συν το πλήθος των πράσινων τριγώνων στην $(n-1)$-οστή επανάληψη (νέα κόκκινα τρίγωνα, $g(n-1)$). Συνεπώς, η ζητούμενη αναδρομική σχέση είναι

$r(n) = r(n-1) + g(n-1)$, για κάθε $n \geq 1$, με $g(n-1) = 3^{n-1}$,
και αρχική συνθήκη $r(0) = 0$.

Βρίσκουμε τον κλειστό τύπο για την $r(n)$ με διαδοχικές αντικαταστάσεις:

$$r(n) = r(n-1) + g(n-1) = \big(r(n-2) + g(n-2)\big) + g(n-1) =$$
$$\Big(\big(r(n-3) + g(n-3)\big) + g(n-2)\Big) + g(n-1) = \cdots =$$
$$r(0) + \sum_{k=0}^{n-1} g(k) = 0 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Στις παραπάνω ισότητες, παρατηρούμε ότι, κάθε φορά που αντικαθιστούμε τον όρο $r(k)$ με βάση τη σχέση $r(k) = r(k-1) + g(k-1)$, ο όρος $g(k-1)$ προστίθεται στο άθροισμα των όρων $g(k) + \cdots + g(n-1)$ που έχει σχηματιστεί από τις προηγούμενες αντικαταστάσεις. Έτσι καταλήγουμε ότι

$$r(n) = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0 = \frac{3^n - 1}{2},$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον τύπο για το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο 3.

Οι τιμές $r(2) = 4$ και $r(3) = 13$ επαληθεύονται εύκολα και στο σχήμα.

(4δ) Ας δούμε αρχικά πως προκύπτει η αναδρομική σχέση:

$t(n) = t(n-1) + 4g(n-1)$, για κάθε $n \geq 1$, με $g(n-1) = 3^{n-1}$,
και αρχική συνθήκη $t(0) = 1$.

Θεωρούμε το πλήθος $t(n-1)$ όλων των τριγώνων και το πλήθος $g(n-1)$ των πράσινων τριγώνων μετά την ($n-1$-οστή επανάληψη της διαδικασίας, για κάποιο αυθαίρετο $n \geq 1$. Κατά την n-οστή επανάληψη της διαδικασίας, τα υπάρχοντα τρίγωνα διατηρούνται και κάθε υπάρχον πράσινο τρίγωνο αντικαθίσταται από 4 νέα τρίγωνα, 3 πράσινα και 1 κόκκινο. Άρα, μετά την n-οστή επανάληψη, το πλήθος όλων των τριγώνων είναι ίσο με το πλήθος όλων των τριγώνων στην $(n-1)$-οστή επανάληψη (υπάρχοντα τρίγωνα, $t(n-1)$) συν το τετραπλάσιο του πλήθους των πράσινων τριγώνων στην $(n-1)$-οστή επανάληψη (νέα τρίγωνα, $4g(n-1)$). Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στην παραπάνω αναδρομική σχέση που δίνεται στην εκφώνηση.

Για να αποδείξουμε ότι αληθεύει η σχέση $t(n) = 4t(n-1) - 3t(n-2)$, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $n \geq 2$ και εφαρμόζουμε την αρχική αναδρομική σχέση για $n-1$,:

$$t(n-1) = t(n-2) + 4g(n-2) \Longrightarrow 4g(n-2) = t(n-1) - t(n-2).$$

Εφαρμόζοντας την αρχική αναδρομική σχέση για n, έχουμε ότι:

$$t(n) = t(n-1) + 4g(n-1) = t(n-1) + 12g(n-2),$$

Άρα χρησιμοποιώντας ότι $4g(n-2) = t(n-1) - t(n-2)$ προκύπτει ότι

$$12g(n-2) = 3t(n-1) - 3t(n-2).$$

Αντικαθιστώντας το $12g(n-2)$ παραπάνω, καταλήγουμε ότι για κάθε $n \geq 2$,

$$t(n) = t(n-1) + \big(3t(n-1) - 3t(n-2)\big) = 4t(n-1) - 3t(n-2).$$

Έχουμε ακόμη ότι $t(0) = 1$ και $t(1) = t(0) + 4g(0) = 1 + 4 \cdot 1 = 5$, ως αρχικές συνθήκες για την αναδρομική μας σχέση.

Για να αποδείξουμε ότι αληθεύει η αναδρομική σχέση

$t(n) = 3t(n-1) + 2$, για κάθε $n \geq 1$, με αρχική συνθήκη $t(0) = 1$,

εφαρμόζουμε μαθηματική επαγωγή, σύμφωνα με την εκφώνηση.

Βάση επαγωγής: Η αρχική συνθήκη $t(0) = 1$ είναι αληθής (δίνεται στην εκφώνηση). Επιπλέον, η σχέση $t(n) = 3t(n-1) + 2$ αληθεύει για $n = 1$, αφού $t(1) = 3t(0) + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ (προκύπτει δηλαδή η τιμή που δίνεται στην εκφώνηση).

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε επαγωγικά ότι η ζητούμενη αναδρομική σχέση αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n + 1 \geq 2$, αληθεύει ότι $t(n+1) = 3t(n) + 2$. Πράγματι,

$$t(n+1) = 4t(n) - 3t(n-1) = 3t(n) + \big(t(n) - 3t(n-1)\big) = 3t(n) + 2$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από την σχέση $t(n) = 4t(n-1) - 3t(n-2)$ που αποδείξαμε παραπάνω. Η τρίτη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση, σύμφωνα με την οποία

$$t(n) = 3t(n-1) + 2 \Longrightarrow t(n) - 3t(n-1) = 2$$

Άσκηση 9 (2014-2015, Εργασία 1, Ερώτημα 4)

Α. Δείξτε με επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς ότι για κάθε φυσικό αριθμό *$n>0$,* ο αριθμός 3^n είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό n^2.

Β. Θεωρήστε τους αριθμούς μήκους *n* που αποτελούνται μόνο από τα ψηφία 0,1,2 τελειώνουν στο ψηφίο 1, και δύο γειτονικά ψηφία διαφέρουν το πολύ κατά 1.

i) Αναπτύξτε αναδρομική σχέση η οποία υπολογίζει το πλήθος των αριθμών αυτών.

ii) Επιλύστε την παραπάνω αναδρομική σχέση και προσδιορίστε τη λύση σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις.

Απάντηση

Α) Βάση της επαγωγής: η ανισότητα $3^n>n^2$ ισχύει για $n=1$ αφού $3>1$ και $n=2$ αφού $9>4$.

Επαγωγική υπόθεση: υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $n=k$, δηλαδή ότι $3^k>k.^2$

Επαγωγικό βήμα: θα δείξουμε ότι η ανισότητα ισχύει $n=k+1$, δηλαδή ότι $3^{k+1}>(k+1)^2$. Παρατηρήστε ότι $3^{k+1}=3*3^k$ οπότε με βάση την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $3^{k+1}>3k^2= k^2+2k^2$. Επίσης, για $k\geq 2$ ισχύει ότι $2k^2\geq 2k*2=2k+2k>2k+1$. Συνεπώς,

$$3^{k+1} =3*3^k >3k^2= k^2+2k^2\geq k^2+ 2k*2= k^2+2k+2k> k^2+2k+1= (k+1)^2.$$

Bi) Συμβολίζουμε με a_n το πλήθος των αριθμών μήκους n που αποτελούνται μόνο από τα ψηφία *0,1,2*, τελειώνουν στο ψηφίο *1*, και δύο γειτονικά ψηφία διαφέρουν το πολύ κατά *1*.

Παρατηρούμε αρχικά ότι υπάρχει ένας τέτοιος αριθμός με κανένα ψηφίο (ο ‘κενός’, ας πούμε, αριθμός) και ένας τέτοιος αριθμός (ο ‘*1*’) με ένα ψηφίο, δηλαδή $a_1= a_0=1$. Οι δυνατοί τέτοιοι αριθμοί μήκους 2 είναι οι *01, 11* και *21*, δηλαδή $a_2=3$. Οι $a_3=7$ δυνατοί αριθμοί μήκους 3 είναι οι εξής.

- Οι *001* και *101*, οι οποίοι προκύπτουν προσθέτοντας το ‘*0*’ και το ‘*1*’ στα αριστερά του ‘*01*’. Προσέξτε ότι το ‘*2*’ δεν μπορεί να προστεθεί στα αριστερά του ‘*01*’ αφού διαφέρει περισσότερο από μία μονάδα από το ‘*0*’.
- Οι *121* και *221*, οι οποίοι προκύπτουν προσθέτοντας το ‘*1*’ και το ‘*2*’ στα αριστερά του ‘*21*’. Όμοια με πριν, το ‘*0*’ δεν μπορεί να προστεθεί στα αριστερά του ‘*21*’ αφού διαφέρει περισσότερο από μία μονάδα από το ‘*2*’.
- Οι *011, 111* και *211*, οι οποίοι προκύπτουν προσθέτοντας το ‘*0*’, το ‘*1*’ και το ‘*2*’ στα αριστερά του ‘*11*’. Προσέξτε ότι προστίθενται όλα τα δυνατά ψηφία, αφού κανένα δε διαφέρει περισσότερο από μία μονάδα από το ‘*1*’.

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν οποιοδήποτε αριθμό με τη ζητούμενη ιδιότητα μήκους n. Αυτός προκύπτει από έναν αριθμό μήκους n-1 με τρεις τρόπους αν το ‘πιο αριστερά’ ψηφίο του αριθμού μήκους $n-1$ είναι το ‘*1*’ ή με δύο τρόπους διαφορετικά (αν το ψηφίο αυτό του αριθμού μήκους $n-1$ είναι το ‘*0*’ ή το ‘*2*’).

Το λεπτό σημείο είναι να παρατηρήσουμε ότι οι αριθμοί μήκους $n-1$ των οποίων το ‘πιο αριστερά’ ψηφίο είναι το ‘*1*’ είναι τόσοι όσοι οι αριθμοί μήκους $n-2$, αφού το ‘*1*’ προστίθεται σε οποιοδήποτε αριθμό επειδή διαφέρει από όλα τα (επιτρεπτά) ψηφία το πολύ μία μονάδα. Συνεπώς σε a_{n-2} αριθμούς μήκους $n-1$ το ‘πιο αριστερά’ ψηφίο είναι το ‘*1*’ και στους υπόλοιπους $(a_{n-1}-a_{n-2})$ το ‘πιο αριστερά’ ψηφίο είναι το ‘*0*’ ή το ‘*2*’. Άρα το πλήθος a_n των αριθμών μήκους n με τη ζητούμενη ιδιότητα εκφράζεται αναδρομικά ως

$$a_n=3*a_{n-2}+2*(a_{n-1}-a_{n-2})=2a_{n-1}+a_{n-2}.$$

Bii) Η αναδρομική σχέση μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις (Τόμος Δ΄, Παράγραφος 2.6.3, σελ. 90-92). Πολλαπλασιάζουμε την αναδρομική ακολουθία με για n=2,3,4,... και αθροίζουμε κατά μέρη τις ισότητες οπότε προκύπτει ότι

.

Με διαδοχικά βήματα προσπαθούμε να δημιουργήσουμε στην παραπάνω ισότητα τη γεννήτρια συνάρτηση , ως εξής.

, ή

, ή

,ή

.

Επιλύουμε την τελευταία εξίσωση ως προς A(z):

.

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή κάθε κλάσματος με τον αντίστοιχο αριθμητή και κάνουμε στοιχειώδεις πράξεις ώστε κάθε κλάσμα να έχει τη μορφή *1/(1-cz)*:

.

Όπως και στο Παράδειγμα 2.3 του τόμου Δ΄ (σελ. 55), προκύπτει ότι

.

Οπότε οι όροι της ζητούμενης ακολουθίας σε κλειστή μορφή είναι

.