Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2017-2018

Ε ρ γ α σ ί α 3η - Ερωτήματα Κατανόησης

Κατηγορηματική Λογική

Στο αρχείο αυτό περιλαμβάνονται τα ερωτήματα κατανόησης της τρίτης εργασίας. Τα ερωτήματα αυτά είναι **τμήμα** της τρίτης εργασίας που θα σας κοινοποιηθεί στο σύνολο της σε μία εβδομάδα. Συνιστάται θερμά να ασχοληθείτε με αυτά άμεσα, χωρίς να περιμένετε την συνολική εργασία. Πρόκειται για απλά ερωτήματα που στόχο έχουν να σας καθοδηγήσουν στις βασικές έννοιες του γνωστικού αντικειμένου της εργασίας και θα σας βοηθήσουν στα υπόλοιπα (περισσότερο απαιτητικά) ερωτήματα. Το **σύνολο της εργασίας** θα πρέπει να παραδοθεί στην προκαθορισμένη ημερομηνία.

Σημειώνεται ότι μαζί με την εργασία σάς διανέμονται και κάποιες ασκήσεις παλαιότερων ετών μαζί με τις λύσεις τους. Η μελέτη τους θα σας βοηθήσει στην εκπόνηση της εργασίας σας. Υπάρχουν αναφορές σε κάθε ερώτημα που παραπέμπουν στις συνοδευτικές ασκήσεις που είναι υποβοηθητικές για την απάντηση του ερωτήματος. Σημειώνεται πάντως ότι δεν πρέπει να μείνετε στην μελέτη μόνο των συνοδευτικών ασκήσεων αλλά να προσπαθήσετε να λύσετε επιπλέον ασκήσεις από παλαιότερες εργασίες και εξετάσεις.

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξοικείωση με τη χρήση της Κατηγορηματικής Λογικής για την περιγραφή προτάσεων της φυσικής γλώσσας. Στο πρώτο υποερώτημα δίνονται τρεις προτάσεις της φυσικής γλώσσας και ζητείται να μετατραπούν σε τύπους της Κατηγορηματικής Λογικής. Στο δεύτερο υποερώτημα ζητείται η ακριβώς αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η μετατροπή από την Κατηγορηματική Λογική στη φυσική γλώσσα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #1, #2 και #3.

Έστω τα κατηγορήματα $page(p)$, $mentions(p,w)$, $links(p_1,p_2)$, $person(x)$, $word(w)$, και $recommends(x,p)$, με ερμηνείες «το p είναι ιστοσελίδα», «η ιστοσελίδα p αναφέρει τη λέξη w», «η ιστοσελίδα p_1 περιέχει υπερσύνδεσμο προς την ιστοσελίδα p_2», «ο x είναι άνθρωπος», «το w είναι λέξη», «ο άνθρωπος x συστήνει την ιστοσελίδα y».

α) Δώστε τύπους του κατηγορηματικού λογισμού που να εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις:

i. Η λέξη “logic” εμφανίζεται σε όλες τις σελίδες που συστήνει ο Alfred.

Τα ονόματα όπως “logic”, “Alfred”, κλπ. μπορείτε να θεωρήσετε ότι είναι σταθερές της γλώσσας.

β) Εξηγήστε σε φυσική γλώσσα τι εκφράζουν οι παρακάτω τύποι. Θα πρέπει οι εκφράσεις που θα δώσετε να είναι όσο το δυνατόν πιο φυσικές και όχι απλώς να μεταφράζουν τους τύπους. Για παράδειγμα, αποφύγετε εκφράσεις της μορφής «Υπάρχει *x* έτσι ώστε για κάθε *y*…» (δηλαδή εκφράσεις που περιέχουν μεταβλητές).

i. $\neg\exists x\exists p[person(x)\wedge page(p)\wedge recommends(x,p)\wedge links(p,p)]$

Ερώτημα 2.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #4, #5 και #6.

Σκοπός του ερωτήματος αυτού είναι η περαιτέρω εξοικείωση με τη χρήση της Κατηγορηματικής Λογικής, και πιο συγκεκριμένα με τις έννοιες της «ικανοποιησιμότητας», του «μοντέλου», και της «λογικής ισοδυναμίας».

α) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 η οποία περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο R και ένα τριμελές συναρτησιακό σύμβολο *f*. Έστω *A* ερμηνεία της Γ_1, με $|A|=\{0,1,2\}$, η οποία αντιστοιχίζει στο κατηγόρημα R τη σχέση $\{(1,1),(1,2),(2,2),(1,0),(2,0)\}$, και στο συναρτησιακό σύμβολο f τη συνάρτηση: $f(x,y,z)=(x-y+z)\bmod 3$. Εξηγήστε ποιοί από τους ακόλουθους τύπους είναι αληθείς στην *A:*

i. $\forall x\exists y(R(f(x,y,x),f(x,x,x)))$

ii. $\forall x\exists y(R(f(x,y,x),y)\rightarrow R(y,f(x,y,x)))$

Σημείωση: Ισχύει -1 mod 3 = 2.

Ερώτημα 3.

Στο παρόν ερώτημα επιχειρείται η εξοικείωση με την έννοια της «ερμηνείας», του «σύμπαντος μιας ερμηνείας», της «αλήθειας ενός τύπου σε σχέση με μια δεδομένη ερμηνεία», και της «ισοδυναμίας τύπων».

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #4, #5 και #6.

α) Έστω $A(x,y)$ τύπος με δύο ακριβώς ελεύθερες μεταβλητές *x* και *y*. Υπάρχει πάντοτε μοντέλο του τύπου $(\forall x\exists yA(x,y))\rightarrow(\exists y\forall xA(x,y))$ ανεξάρτητα από το ποιος είναι ο τύπος $A(x,y)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ερώτημα 4.

Σκοπός του ερωτήματος αυτού είναι επίσης η εξοικείωση με τη χρήση της Κατηγορηματικής Λογικής (ΚΛ). Πιο συγκεκριμένα, στο ερώτημα αυτό χρησιμοποιείται η ΚΛ για να εκφράσουμε κάποιες σχέσεις ανάμεσα σε σύνολα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #1, #2 και #3.

Στο ερώτημα αυτό θα γράψουμε τύπους που εκφράζουν σχέσεις ανάμεσα σε σύνολα που περιέχουν φυσικούς αριθμούς. Στους τύπους μας θα χρησιμοποιούμε μεταβλητές όπως $s_1, s_2, \ldots$ για να αναπαριστούμε σύνολα, και μεταβλητές όπως $x, y, z, \ldots$ για να αναπαριστούμε φυσικούς αριθμούς. Έχουμε στη διάθεσή μας δύο μονομελή κατηγορήματα, το set και το nat. Θα ερμηνεύουμε το $set(s)$ ως «το s είναι σύνολο» και το $nat(x)$ ως «το x είναι φυσικός αριθμός». Έχουμε στη διάθεσή μας και ένα μοναδικό διμελές κατηγόρημα, το $\in$. Αντί για το πιο τυπικό $\in(x,s)$ θα γράφουμε το πιο βολικό (και γνωστό) $x \in s$ το οποίο θα διαβάζουμε ως «το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο s». Έχουμε επίσης μία σταθερά, το $\varnothing$, που αναπαριστά το κενό σύνολο.

Για παράδειγμα, μπορούμε να εκφράσουμε την ιδιότητα «το σύνολο s_1 είναι υποσύνολο του συνόλου s_2», ως εξής:

$$subset(s_1, s_2) := set(s_1) \wedge set(s_2) \wedge \forall z((nat(z) \wedge (z \in s_1)) \rightarrow (z \in s_2))$$

Θα επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε μια έκφραση όπως το $subset(s_1, s_2)$ ως συντομογραφία του τύπου που βρίσκεται στα δεξιά του. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε την ιδιότητα «το σύνολο s_1 είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου s_2», ως εξής:

$$proper\_subset(s_1, s_2) := subset(s_1, s_2) \wedge \neg(s_1 \approx s_2)$$

Έστω n δεδομένος φυσικός αριθμός.

α) Δώστε τύπο $subset_n(s, y_1, \ldots, y_n)$ ο οποίος θα εκφράζει το $s \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$, όπου s σύνολο, $n \geq 0$, και $y_1, \ldots, y_n$ φυσικοί αριθμοί. Υπόδειξη: δώστε ένα τύπο για $n = 0$ και έναν για $n > 0$. Για $n = 0$ θα πρέπει να ορίσετε το $subset_0(s)$ το οποίο θα εκφράζει το $s \subseteq \varnothing$ (τι σημαίνει αυτό για το s;).