Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2016-2017

Εργασία 4η

Αλγόριθμοι, Θεωρία Γραφημάτων

Ερωτήματα

Ερώτημα 1.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξοικείωση με τους αναδρομικούς αλγορίθμους και με τις επαγωγικές αποδείξεις.

Έστω Α ένας πίνακας με θέσεις αριθμημένες από 1 έως n, ο οποίος περιέχει ακεραίους. Με `length(A)` αναφερόμαστε στο μήκος του πίνακα Α, δηλαδή το n. Για δύο δείκτες i, j, συμβολίζουμε με A[$i..j$] τον πίνακα με $j - i + 1$ στοιχεία του οποίου τα στοιχεία είναι τα A[i], A[i+1],...,A[j]. Για παράδειγμα, εάν A=[3,5,1,2,8,9,4], τότε A[3..6] = [1,2,8,9].

Στον παρακάτω αλγόριθμο χρησιμοποιούμε τη διαδικασία `merge(A,B)`, η οποία παίρνει ως είσοδο δύο ταξινομημένους πίνακες (σε αύξουσα σειρά) και δίνει ως έξοδο ένα ταξινομημένο πίνακα ο οποίος περιέχει όλα τα στοιχεία των δύο πινάκων. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα της merge([1,4,6,6],[2,3,4,7]) είναι ο πίνακας [1,2,3,4,4,6,6,7].

```
     procedure mSort( A )
          n := length(A)
(*)       if (n = 1) then  return ( A )
          m := (n+1)/2  // ακέραια διαίρεση
          B := mSort(A[1..m])
          C := mSort(A[m+1..n])
          return ( merge(B,C) )
```

1) Διατυπώστε τις αναδρομικές κλήσεις που θα γίνουν κατά την εκτέλεση της `mSort([2,4,1,8,5])`.
2) Εξηγήστε ποιός είναι ο ρόλος της γραμμής (*). Εξηγήστε τι θα γίνει εάν αντικαταστήσουμε τη γραμμή (*) με τη γραμμή (**) λαμβάνοντας υπόψη ότι τώρα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο `mSort()` μόνο για πίνακες μήκους $n \geq 2$:

```
(**)      if (n = 2) then
```

```
if (A[1] <= A[2]) then return ([A[1],A[2]])
else return ([A[2],A[1]])
```

3) Δείξτε ότι ο αλγόριθμος `mSort(A)` πάντα τερματίζει.
4) Υποθέστε ότι η διαδικασία `merge(B,C)`, κατά την εκτέλεση της, κάνει το πολύ `max{length(B),length(C)}` συγκρίσεις στοιχείων. Για ένα πίνακα A με μήκος n, συμβολίζουμε με $\mathrm{T}(n)$ το πλήθος των συγκρίσεων που κάνει η `mSort(A)`. Ειδικότερα, τη σύγκριση `n = 1` δεν τη μετράμε καθώς τα `n` και `1` είναι δείκτες και όχι στοιχεία του πίνακα. Για πίνακες με μήκος 2^k, δείξτε με επαγωγή στο k ότι
$$\mathrm{T}(2^k) \leq k\,2^k.$$

Απαντήσεις:

1) Οι αναδρομικές κλήσεις είναι οι παρακάτω. Δίπλα σε κάθε αναδρομική κλήση αναγράφεται ο πίνακας που επιστρέφεται.

```
mSort([2,4,1,8,5])  [1,2,4,5,8]
  |--  mSort([2,4,1])  [1,2,4]
  |      |--  mSort([2,4])  [2,4]
  |      |      |--  mSort([2])  [2]
  |      |      |--  mSort([4])  [4]
  |      |--  mSort([1])  [1]
  |--  mSort([8,5])  [5,8]
         |--  mSort([8])  [8]
         |--  mSort([5])  [5]
```

2) Η γραμμή (*) περιέχει τη συνθήκη η οποία θα τερματίσει ένα μονοπάτι αναδρομικών κλήσεων. Κανείς μπορεί να το δει ως τις αρχικές συνθήκες σε έναβ αναδρομικό ορισμό. Εάν αντικατασταθεί από τη γραμμή (**), τότε για να τερματιστεί ένα μονοπάτι αναδρομικών κλήσεων θα πρέπει (το μονοπάτι) να καταλήξει σε πίνακα με ένα στοιχείο. Παρατηρήστε ότι κάτι τέτοιο δε συμβαίνει πάντα. Για παράδειγμα, εάν εκτελέσουμε mSort([2,4,1]) θα υπάρξουν αναδρομικές κλήσεις mSort([2,4]) και mSort([1]). Η πρώτη θα τερματίσει λόγω της γραμμής (**). Όμως η δεύτερη θα προκαλέσει δύο νέες κλήσεις, τις mSort([1]) και mSort([]). Η mSort([]) θα καλεί δύο φορές τον εαυτό της και έτσι θα έχουμε αναδρομή χωρίς τέλος.
3) Για να βεβαιωθούμε ότι ο αλγόριθμος τερματίζει αρκεί να βεβαιωθούμε ότι κάθε αναδρομική κλήση γίνεται με είσοδο ένα “μικρότερο” πίνακα και ότι δε θα βρεθούμε με πίνακα μηδενικού μήκους. Αυτό ακριβώς θα δείξουμε με επαγωγή στο μήκος n του αρχικού πίνακα A.

<u>Βάση της επαγωγής</u>: Για $n = 1$, η mSort(A) τερματίζει λόγω της γραμμής (*)

<u>Επαγωγική υπόθεση</u>: Για το τυχόν $n \geq 1$, υποθέτουμε ότι η mSort(A) τερματίζει για κάθε πίνακα A με μήκος $k \leq n$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι αν A είναι ένας πίνακας μήκους $n+1$, τότε η mSort(A) τερματίζει. Πραγματικά, ο έλεγχος της γραμμής (*) αποτυγχάνει και έχουμε δύο αναδρομικές κλήσεις, τις mSort(B) και mSort(C). Παρατηρούμε ότι καθένας από τους πίνακες B και C έχει μήκος $1 \leq length(B), length(C) \leq n$ και άρα από επαγωγική υπόθεση ξέρουμε ότι και οι δύο αναδρομικές κλήσεις τερματίζουν. Άρα και η mSort(A) τερματίζει.

4) Το πλήθος των συγκρίσεων που κάνει η mSort(A) (όπου ο πίνακας A έχει μήκος n) είναι $T(n)$ = πλήθος συγκρίσεων της mSort(B) +
πλήθος συγκρίσεων της mSort(C) +
πλήθος συγκρίσεων της merge(B,C)

Ο πίνακας B έχει μήκος m, άρα η mSort(B) κάνει $T(m)$ συγκρίσεις. Ο πίνακας C έχει μήκος $n-m$ άρα η mSort(C) κάνει $T(n-m)$ συγκρίσεις. Η merge(B,C) μας δίνεται από την εκφώνηση ότι κάνει $max\{m, n-m\} = m$ συγκρίσεις. Άρα τελικά

$$T(n) = T(m) + T(n-m) + n - m.$$

Η αρχική συνθήκη είναι $T(1) = 0$.
Για $n = 2^k$ έχουμε $m = n - m = 2^{k-1}$, άρα $T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^{k-1}$.
Θα δείξουμε ότι $T(2^k) \leq k2^k, \forall k \geq 0$, με επαγωγή στο k.
Βάση της επαγωγής: Για $k = 0, T(2^0) = 0 \leq 02^{0.}$
Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για το τυχόν $k \geq 0$ ισχύει $T(2^k) \leq k2^k$
Επαγωγικό βήμα: Τότε έχουμε $T(2^{k+1}) = 2T(2^k) + 2^k \leq 2k2^k + 2^k \leq (k+1)2^{k+1}$.

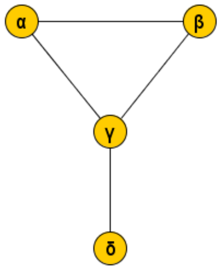
Ερώτημα 2.

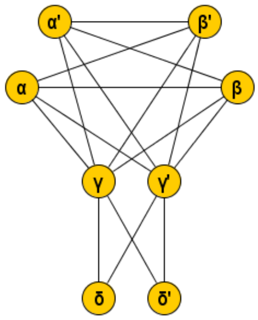
Ελέγχει τον βαθμό κατανόησης των βασικών εννοιών των επαγόμενων υπογραφημάτων, διμερή γραφημάτων, της συνεκτικότητας, του «κύκλου Euler» και του «κύκλου Hamilton».

Σε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα *G διπλασιάζουμε* κάθε κορυφή του *G* ως εξής:

- για κάθε κορυφή *v* του *G* προσθέτουμε μια νέα κορυφή *w* τέτοια ώστε η *w* να έχει την ίδια γειτονιά με τη *v* στο νέο γράφημα. Προσέξτε ότι η νέα κορυφή *w* δεν ενώνεται με την αρχική κορυφή *v*.

Συμβολίζουμε με D(*G*) το γράφημα που προκύπτει από το *G* αν εκτελέσουμε τους διπλασιασμούς σε κάθε κορυφή του *G*. Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε ένα γράφημα *G* και το γράφημα D(*G*) που προκύπτει μετά τους διπλασιασμούς.





Στα ακόλουθα ερωτήματα θεωρούμε ένα οποιοδήποτε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές.

1) Δείξτε ότι οι ακμές του D(G) είναι $4m$. Επίσης δείξτε ότι το μέγιστο πλήθος ακμών του D(G) είναι $2n(n – 1)$.
2) Δείξτε ότι το ίδιο το γράφημα G είναι επαγόμενο υπογράφημα του D(G).
3) Δείξτε ότι αν το G έχει Hamilton κύκλο τότε και το D(G) έχει Hamilton κύκλο. Επίσης δώστε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή ένα παράδειγμα όπου το D(G) έχει Hamilton κύκλο αλλά το G δεν έχει Hamilton κύκλο.
4) Συμβολίζουμε με ω(G) την τάξη της μέγιστης κλίκας στο G και με ω(D(G)) την τάξη της μέγιστης κλίκας στο D(G). Από το υποερώτημα 2) γνωρίζουμε ότι $\omega(G) \leq \omega(D(G))$. Δείξτε ότι $\omega(G) = \omega(D(G))$.
5) Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται στο βιβλίο Γ. Βούρου (σελίδα 107), για να έχει ένα γράφημα κύκλο Euler θα πρέπει να είναι συνεκτικό. Με βάση το σκεπτικό αυτό δείξτε ότι το G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το D(G) έχει Euler κύκλο.

Απαντήσεις:

1) Κάθε ακμή {x,y} του G αντιστοιχίζεται με 4 ακμές στο D(G): {x,y},{x,y’},{x’,y},{x’,y’}, όπου οι κορυφές x’, y’ είναι τα αντίγραφα των x, y αντίστοιχα. Επομένως θα έχουμε συνολικά $4m$ ακμές στο D(G). Επίσης, οι κορυφές του D(G) είναι σε πλήθος $2n$. Μια κορυφή του D(G) δεν είναι γειτονική με την διπλάσιά της ενώ μπορεί να είναι γειτονική με όλες τις υπόλοιπες κορυφές. Δηλαδή ο μέγιστος βαθμός μιας κορυφής του D(G) είναι $2n – 2$. Αθροίζοντας τους μέγιστους βαθμούς των κορυφών θα έχουμε από το λήμμα της χειραψίας $(2n – 2)\, 2n = 2m_D$, όπου m_D είναι το μέγιστο πλήθος ακμών του D(G). Άρα $m_D = 2n\,(n – 1)$.
2) Για να δείξουμε ότι το G είναι επαγόμενο υπογράφημα του D(G) αρκεί να δείξουμε ότι μετά από κάποιες διαγραφές κορυφών του D(G) καταλήγουμε στο γράφημα G. Πράγματι λοιπόν αν διαγράψουμε όλα τα αντίγραφα των κορυφών του D(G) (δηλαδή διαγράφοντας μια μόνο κορυφή από τα δύο αντίγραφα), παίρνουμε ως αποτέλεσμα τις

κορυφές του γραφήματος G και επειδή δεν αφαιρέσαμε κάποια ακμή που είναι προσκείμενη στις κορυφές του G, το γράφημα που απομένει είναι το ίδιο το G.

3) Έστω ότι υπάρχει ο Hamilton κύκλος $< v_1, v_2, ..., v_n, v_1>$ στο G που περνάει από όλες τις n κορυφές του G. Τότε υπάρχει ο κύκλος $< v'_1, v'_2, ..., v'_n, v'_1>$ στο D(G) που περνάει από τα αντίγραφα v'_i των πραγματικών κορυφών v_i. Σχηματίζουμε τον Hamilton κύκλο του D(G) «κόβοντας» την τελευταία ακμή του πραγματικού κύκλου και ενώνοντας το αντίγραφο v'_n με την κορυφή v_1 ως εξής: $< v_1, v_2, ..., v_n, v'_1, v'_2, ..., v'_n, v_1 >$.

   Για να δείξουμε το ζητούμενο αντιπαράδειγμα, θεωρούμε το άκυκλο γράφημα G που αποτελείται από δύο κορυφές που ενώνονται. Εφόσον το G είναι άκυκλο δεν περιέχει και Hamitlon κύκλο. Ωστόσο το D(G) που προκύπτει αποτελείται από τον Hamilton κύκλο 4 κορυφών.

4) Έστω ότι $\omega(G) < \omega(D(G))$. Για να αυξηθεί η μέγιστη κλίκα στο D(G) θα πρέπει μια νέα κορυφή v' να ενωθεί με όλες τις $\omega(G)$ κορυφές που συμμετέχουν στη μέγιστη κλίκα του G. Τότε θα πρέπει και η πραγματική κορυφή v του G να ενώνεται με όλες τις $\omega(G)$ κορυφές της μέγιστης κλίκας του G. Δηλαδή το γράφημα που επάγεται από την v μαζί με τις $\omega(G)$ κορυφές σχηματίζουν μια κλίκα από $\omega(G) + 1$ κορυφές που σημαίνει ότι υπάρχει μια κλίκα με περισσότερες από $\omega(G)$ κορυφές, κάτι που είναι αδύνατο από τον ορισμό του $\omega(G)$.

5) ($\Rightarrow$) Αν το G είναι συνεκτικό τότε θα δείξουμε ότι το D(G) έχει κύκλο Euler. Για να έχει κύκλο Euler θα πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι το D(G) είναι συνεκτικό. Εφόσον το G είναι συνεκτικό, για οποιεσδήποτε δύο κορυφές x,y του G υπάρχει μονοπάτι $P_{x,y}$ στο G μεταξύ των x και y. Δείχνουμε για οποιεσδήποτε δύο κορυφές x' και y' του D(G) υπάρχει μονοπάτι $P'_{x',y'}$ στο D(G).
   - Αν οι κορυφές x' και y' είναι πραγματικές κορυφές του G τότε υπάρχει μονοπάτι στο G το οποίο παραμένει και μονοπάτι στο D(G).
   - Αν οι κορυφές x' και y' είναι αντίγραφα κάποιων κορυφών x και y τότε στο μονοπάτι $P_{x,y}$ του G αντικαθιστούμε τις εμφανίσεις των x και y με τα αντίγραφα x' και y'. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό και μας δίνει ένα μονοπάτι $P'_{x',y'}$ στο D(G) καθώς κάθε γείτονας του x ή του y είναι και γείτονας των αντίστοιχων x' και y'.
   - Η τελευταία περίπτωση που εξετάζουμε είναι αν η x' είναι μια πραγματική κορυφή x και η y' είναι το αντίγραφο της x. Τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάποιος γείτονας w της x στο G καθώς το G είναι συνεκτικό. Εφόσον η w είναι γειτονική με τη x, θα είναι γειτονική και με τη y' (= x) και έτσι υπάρχει μονοπάτι μεταξύ της x και της x' στο D(G).

   Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει το μονοπάτι $P'_{x',y'}$ στο D(G) που σημαίνει ότι το D(G) είναι συνεκτικό.

   Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ότι το D(G) έχει κύκλο Euler, θα πρέπει να δείξουμε ότι οι κορυφές του D(G) έχουν άρτιο βαθμό. Έστω ότι η κορυφή x του G

ενώνεται με k κορυφές στο G. Στο D(G) η x θα ενώνεται με $2k$ κορυφές καθώς εκτός από τις πραγματικές κορυφές του G ενώνεται και με τα αντίγραφά τους. Έτσι λοιπόν κάθε πραγματική κορυφή του D(G) θα έχει άρτιο βαθμό. Για τις κορυφές του D(G) που δεν αντιστοιχούν στις πραγματικές κορυφές του G παρατηρούμε ότι έχουν ακριβώς την ίδια γειτονιά με κάποια πραγματική κορυφή, άρα έχουν και αυτές άρτιο βαθμό.

($\Leftarrow$) Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θεωρούμε ότι το D(G) έχει κύκλο Euler, άρα είναι συνεκτικό, και πρέπει να δείξουμε ότι το G είναι συνεκτικό. Εφόσον το D(G) είναι συνεκτικό θα υπάρχει ένα μονοπάτι $P'_{x',y'}$ στο D(G) για τις κορυφές x' και y'. Αν κάποια κορυφή του $P'_{x',y'}$ δεν είναι πραγματική κορυφή τότε αντικαθιστούμε την εμφάνισή της με τη πραγματική της κορυφή και παίρνουμε ένα μονοπάτι μεταξύ των πραγματικών κορυφών x και y στο G. Σημειώνουμε ότι μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση των κορυφών καθώς για κάθε ακμή {a',b'} υπάρχει η ακμή {a,b} όπου οι κορυφές a και b είναι πραγματικές κορυφές του G. Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον μονοπάτι στο G μεταξύ των κορυφών x και y.

Ερώτημα 3.

Αποτελεί εξάσκηση στον τυπικό ορισμό απλών γραφοθεωρητικών ιδιοτήτων με χρήση της πρωτοβάθμιας γλώσσας και στην ερμηνεία προτάσεων της πρωτοβάθμιας γλώσσας σε γραφήματα.

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει δύο κατηγορηματικά σύμβολα E και P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων, το σύμβολο E ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία συνδέονται με ακμή (ειδικότερα, το (a,a) δεν ανήκει ποτέ στη σχέση E) και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a,b) για τα οποία υπάρχει μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές a και b (ειδικότερα, το ζευγάρι (a,a) ανήκει πάντα στη σχέση καθώς η κορυφή a συνδέεται με τον εαυτό της με το κενό μονοπάτι).

Α. Γράψτε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής, οι οποίες στη συγκεκριμένη ερμηνεία να εκφράζουν ότι:

1. Το γράφημα είναι συνεκτικό.
2. Το γράφημα είναι πλήρες.
3. Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλίκα.

Β. Γράψτε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής, οι οποίες στη συγκεκριμένη ερμηνεία να εκφράζουν ότι:

1. Το γράφημα έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες.
2. Κάθε ζευγάρι κορυφών συνδέεται με μονοπάτι μήκους το πολύ 2.

3. Εκφράστε σε φυσική γλώσσα τον παρακάτω τύπο και δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος με τουλάχιστον 5 κορυφές το οποίο να τον ικανοποιεί.

$$\exists x \exists y(\neg P(x,y)) \wedge \forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow ((x=y) \vee E(x,y) \vee \exists z(E(x,z) \wedge E(y,z)))$$

Απαντήσεις:

Α.

1. $\forall x \forall y P(x,y)$
2. $\forall x \forall y\big((x \neq y) \rightarrow E(x,y)\big)$
3. Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Για κάθε ζεύγος κορυφών οι οποίες συνδέονται (και άρα βρίσκονται στην ίδια συνιστώσα), είτε πρόκειται για την ίδια κορυφή (παρατηρήστε ότι εξ' ορισμού το κατηγόρημα P(x,x) είναι πάντα αληθές) ή συνδέονται με ακμή. Η τελευταία πρόταση γράφεται στη γλώσσα μας ως $\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow (x=y) \vee E(x,y))$

Β.

1. Η πρόταση που θα γράψουμε θα εκφράζει ότι το γράφημα έχει δύο κορυφές οι οποίες δε συνδέονται με μονοπάτι (άρα υπάρχουν τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες) και κάθε κορυφή συνδέεται με μία από αυτές τις δύο (άρα δεν υπάρχουν περισσότερες από δύο συνιστώσες).
$\exists x \exists y\left(\neg P(x,y) \wedge \forall z\big(P(z,x) \vee P(z,y)\big)\right)$
2. $\forall x \forall y\left((x=y) \vee E(x,y) \vee \exists z\big(E(x,z) \wedge E(z,y)\big)\right)$
3. Η πρόταση που μας δίνεται είναι η σύζευξη δύο προτάσεων. Η πρώτη, $\exists x \exists y\big(\neg P(x,y)\big)$ εκφράζει ότι το γράφημα δεν είναι συνεκτικό. Η δεύτερη, $\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow ((x=y) \vee E(x,y) \vee \exists z(E(x,z) \wedge E(y,z)))$ εκφράζει ότι κάθε δύο κορυφές εντός μίας συνεκτικής συνιστώσας έχουν απόσταση το πολύ 2. Τελικά μπορούμε να εκφράσουμε τη δοσμένη πρόταση ως: "Το γράφημα δεν είναι συνεκτικό και κάθε συνεκτική του συνιστώσα έχει διάμετρο το πολύ 2". Ένα παράδειγμα τέτοιου γραφήματος με 5 κορυφές είναι αυτό που έχει δύο συνιστώσες: το $G=(V,E)$ με $V=\{1,2,3,4,5\}$ και $E=\{(1,2),(3,4),(4,5)\}$.

Ερώτημα 4.

Το ακόλουθο ερώτημα αποτελεί εξάσκηση στα επαγόμενα υπογραφήματα και στην εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής σε γραφήματα.

1) Έστω ένα απλό γράφημα G με n κορυφές το οποίο δεν περιέχει κλίκα με $r + 1$ κορυφές, όπου $1 \leq r < n$.
   a) Δείξτε ότι αν αφαιρέσουμε ένα οποιοδήποτε υποσύνολο κορυφών από το G τότε το γράφημα που προκύπτει δεν περιέχει κλίκα με $r + 1$ κορυφές.
   b) Υποθέτουμε ότι διαμερίζουμε τις κορυφές του G στα σύνολα A και B τέτοιες ώστε οι κορυφές του A να σχηματίζουν κλίκα στο G με r κορυφές. Δείξτε ότι το πλήθος των ακμών μεταξύ του A και B (δηλαδή εκείνες οι ακμές με ένα άκρο στο A και το άλλο στο B) είναι το πολύ $(r-1)(n-r)$.
   c) Δείξτε ότι υπάρχουν το πολύ $\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$ ακμές στο G.

   Υπόδειξη: μπορείτε να δείξτε τον ισχυρισμό επαγωγικά ως προς το πλήθος των κορυφών του G και εκμεταλλευόμενοι τα προηγούμενα υποερωτήματα.
2) Συμβολίζουμε με P_3 το γράφημα με τις κορυφές α, β, γ και τις ακμές $\{\alpha,\beta\}$ και $\{\beta,\gamma\}$. Δείξτε ότι ένα απλό γράφημα είναι η ένωση από κλίκες (δηλαδή, κάθε συνεκτική του συνιστώσα είναι κλίκα) αν και μόνο αν δεν περιέχει το P_3 ως επαγόμενο υπογράφημα. *Υπόδειξη*: για την μια κατεύθυνση προσπαθήστε να αποδείξετε τον ισχυρισμό επαγωγικά ως προς το μήκος ενός οποιουδήποτε μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών.

Απαντήσεις:

1) a) Έστω G' το γράφημα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε κάποιες κορυφές από το G. Αν το G' έχει μια κλίκα K με παραπάνω από r κορυφές τότε και το αρχικό γράφημα G θα περιέχει την ίδια κλίκα K που είναι αδύνατο.

   b) Γνωρίζουμε ότι $|A| = r$ και $|B| = n - r$. Κάθε κορυφή από το B μπορεί να είναι γειτονική με το πολύ $|A| - 1$ κορυφές από το σύνολο A. Διότι διαφορετικά η κορυφή αυτή με τις κορυφές του A θα σχημάτιζαν κλίκα με $r + 1$ κορυφές στο γράφημα. Με δεδομένο αυτό, κάθε κορυφή του B έχει το πολύ $r - 1$ γείτονες στο A, έτσι ώστε το πλήθος των ακμών μεταξύ του A και B να είναι $(r - 1)(n - 1)$.

   c) Θα δείξουμε επαγωγικά <u>ως προς το πλήθος των κορυφών</u> ότι υπάρχουν το πολύ $\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$ ακμές στο G.

   <u>Βάση της επαγωγής</u>: Αν $n = r$ τότε το μέγιστο πλήθος ακμών το πετυχαίνουμε όταν όλες οι κορυφές ενώνονται μεταξύ τους. Πράγματι, ο τύπος για $n = r$ θα ισχύει, καθώς:

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{r^2}{2} = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για ένα γράφημα *G'* με $k < n$ κορυφές που δεν περιέχει κλίκα με $r + 1$ κορυφές, υπάρχουν το πολύ $\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{k^2}{2}$ ακμές.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι για ένα γράφημα *G* με ακριβώς *n* κορυφές που δεν περιέχει κλίκα με $r + 1$ κορυφές, υπάρχουν το πολύ $\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$ ακμές. Διαμερίζουμε τις κορυφές του *G* σε δύο σύνολα Α και Β τέτοια ώστε οι κορυφές του Α να είναι σε πλήθος *r*. Έστω *m*(Α) και *m*(Β) το πλήθος των ακμών που βρίσκονται μέσα στο Α και μέσα στο Β, αντίστοιχα. Για το *m*(Α) γνωρίζουμε ότι μεγιστοποιείται όταν οι κορυφές του Α επάγουν κλίκα στο γράφημα. Δηλαδή,

$$m(A) \leq \frac{r(r-1)}{2}$$

Οι κορυφές του Β είναι σε πλήθος $n - r < n$ και γνωρίζουμε ότι δεν μπορούν να επάγουν κλίκα με $r + 1$ κορυφές από το υποερώτημα a). Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση και θα έχουμε,

$$m(B) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{(n-r)^2}{2}$$

Επίσης από το b) γνωρίζουμε ότι οι ακμές μεταξύ των Α και Β, *m*(Α,Β), είναι το πολύ $(r - 1)(n - 1)$ σε πλήθος. Δηλαδή,

$$m(A,B) \leq (r-1)(n-r)$$

Συνολικά για το πλήθος των ακμών *m*(*G*), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} m(G) &= m(A) + m(A,B) + m(B) \\ &\leq \frac{r(r-1)}{2} + (r-1)(n-r) + \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{(n-r)^2}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{r^2}{2} + r(n-r) + \frac{n^2 - 2nr + r^2}{2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

2) (⇒) Έστω ότι το γράφημα *G* είναι η ένωση από κλίκες. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει P_3 ως επαγόμενο υπογράφημα στο *G*. Αν υπάρχει P_3 στο *G* τότε οι 3 κορυφές $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ του P_3 θα βρίσκονται σε κάποια συνεκτική συνιστώσα του *G*. Ωστόσο θα πρέπει δύο από αυτές, έστω οι α και γ, να μην ενώνονται μεταξύ τους στο *G* κάτι που είναι αδύνατο καθώς η συνεκτική συνιστώσα που ανήκουν είναι κλίκα.

(⇐) Έστω ότι το γράφημα *G* δεν περιέχει κανένα P_3 ως επαγόμενο υπογράφημα. Θα δείξουμε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του *G* είναι κλίκα. Θεωρούμε μια συνεκτική συνιστώσα *C* του *G* και διαλέγουμε δύο τυχαίες κορυφές *x*,*y* που ανήκουν στη *C*. Θα δείξουμε ότι οι κορυφές *x*,*y* ενώνονται στο *G*. Εφόσον οι *x*,*y* ανήκουν στη *C*, θα υπάρχει ένα μονοπάτι μεταξύ της *x* και της *y* στο *G*. Διαλέγουμε ένα τέτοιο μονοπάτι

P_{xy} μεταξύ των x και y. Θα δείξουμε επαγωγικά ως προς το μήκος του P_{xy} ότι οι κορυφές x και y ενώνονται μεταξύ τους.

Βάση της επαγωγής: Αν το μήκος του P_{xy} είναι 1 τότε οι x και y ενώνονται.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι αν το μήκος του P_{xy} είναι k τότε οι κορυφές οι x και y ενώνονται.

Επαγωγικό βήμα: Δείχνουμε ότι αν το μήκος του P_{xy} είναι $k + 1$ τότε οι κορυφές οι x και y ενώνονται. Έστω z η κορυφή του P_{xy} που ενώνεται με τη y. Τότε υπάρχει το μονοπάτι P_{xz} μεταξύ των x και z το οποίο μάλιστα έχει μήκος k. Από την επαγωγική υπόθεση οι κορυφές x και z ενώνονται. Αν οι κορυφές x και y δεν ενώνονται μεταξύ τους τότε οι κορυφές {x,y,z} επάγουν ένα P_3 στο γράφημα που αντιβαίνει το γεγονός ότι το γράφημα δεν περιέχει P_3 ως επαγόμενο υπογράφημα. Άρα οι κορυφές x και y πρέπει να ενώνονται μεταξύ τους.

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα, από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι Σωστή (υπάρχει τέτοιο γράφημα) ή Λάθος (δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα). Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπο-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. Θεωρούμε ότι τα γραφήματα του ερωτήματος είναι απλά και μη κατευθυνόμενα.

A. Στα παρακάτω υποερωτήματα καλείστε να εξετάσετε αν υπάρχει το γράφημα που περιγράφεται.

1. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα με ακολουθία βαθμών (5, 5, 5, 5, 3, 3).
2. **(Σ/Λ)** Υπάρχει διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών (3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1).
3. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα όπου κάθε επαγόμενο υπογράφημά του είναι συνεκτικό και το ίδιο το γράφημα δεν είναι κλίκα.
4. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα με 5 κορυφές που είναι ίδιο με το συμπλήρωμά του.

B. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιές όχι;

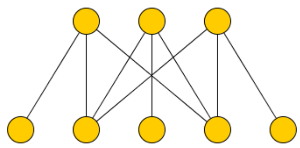
1. **(Σ/Λ)** Σε κάθε συνεκτικό γράφημα υπάρχει ένα υπογράφημα που έχει Hamilton μονοπάτι.
2. **(Σ/Λ)** Το συμπλήρωμα από ένα διμερές γράφημα έχει μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο με μέγεθος το πολύ 2.
3. **(Σ/Λ)** Αν *P* είναι ένα μονοπάτι ενός γραφήματος *G* τέτοιο ώστε κάθε κορυφή εκτός του *P* να έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο *P* τότε το *G* είναι συνεκτικό.
4. **(Σ/Λ)** Αν *P* είναι ένα μονοπάτι ενός γραφήματος *G* τέτοιο ώστε κάθε κορυφή εκτός του *P* να έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο *P* τότε το *G* έχει Hamilton μονοπάτι.

Απαντήσεις:

A

1. **Λάθος.** Υπάρχουν έξι συνολικά κορυφές και τέσσερις από αυτές έχουν βαθμό 5 δηλαδή ενώνονται με όλες τις κορυφές. Άρα οι υπόλοιπες δύο κορυφές θα έπρεπε να είχαν βαθμό τουλάχιστον 4.

2. **Σωστό.** Το ακόλουθο διμερές γράφημα πραγματοποιείται από την ακολουθία (3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1).



3. **Λάθος.** Αν κάθε επαγόμενο υπογράφημα είναι συνεκτικό τότε για οποιεσδήποτε δύο κορυφές x, y το επαγόμενο υπογράφημά τους πρέπει να είναι συνεκτικό που σημαίνει ότι θα πρέπει να ενώνονται μεταξύ τους. Δηλαδή τότε το γράφημα πρέπει να είναι κλίκα.

4. **Σωστό.** Ο απλός κύκλος με πέντε κορυφές C_5 είναι ένα τέτοιο γράφημα.

B.

1. **Σωστό.** Σε κάθε συνεκτικό γράφημα μπορούμε να βρούμε δύο κορυφές x, y που ενώνονται μεταξύ τους. Το επαγόμενο υπογράφημά τους είναι δύο κορυφές που ενώνονται και είναι προφανές ένα Hamilton μονοπάτι.

2. **Σωστό.** Έστω ότι υπάρχουν τουλάχιστον 3 κορυφές που δεν ενώνονται μεταξύ τους στο συμπλήρωμα από ένα διμερές γράφημα. Τότε οι κορυφές αυτές επάγουν μια κλίκα με τουλάχιστον 3 κορυφές στο ίδιο το διμερές γράφημα. Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο καθώς τότε θα είχαμε ένα τρίγωνο στο διμερές γράφημα, δηλαδή έναν κύκλο με περιττό μήκος.

3. **Σωστό.** Για δύο οποιεσδήποτε κορυφές x, y πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μονοπάτι.

- Αν οι x, y ανήκουν στο μονοπάτι P τότε προφανώς υπάρχει μονοπάτι μεταξύ τους.

- Αν η x ανήκει στο P και η y ανήκει στο $G - P$ τότε η y έχει έναν γείτονα στο P, έστω z, και από τον z γνωρίζουμε ότι υπάρχει μονοπάτι P' στον x. Επομένως υπάρχει το μονοπάτι <x, P', z, y>.
- Αν οι x,y ανήκουν στο $G - P$ τότε υπάρχει ένας γείτονας x' του x στο P και αντίστοιχα υπάρχει ένας γείτονας y' του y στο P. Επειδή οι x', y' ανήκουν στο P θα υπάρχει ένα μονοπάτι P' μεταξύ τους. Άρα το <x, x', P', y',y> είναι το ζητούμενο μονοπάτι.

4. **Λάθος.** Στο γράφημα $K_{1,3}$ (πλήρες διμερές) υπάρχει ένα τέτοιο μονοπάτι αλλά το ίδιο το γράφημα δεν έχει Hamilton μονοπάτι.