Ενδεικτικές Ασκήσεις Προτασιακής Λογικής

Άσκηση 1 (2013-14 Ασκήσεις Κατανόησης)

1. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι **προτασιακοί τύποι**, ποιες όχι, και γιατί;

(i) $(p \to (q \to r)) \to q$ **(ii)** $\neg (s \neg (p \to q) \to r) \to s$

(iii) $p \to (q \to r) \to (p \to r)$ **(iv)** $\neg\neg p \wedge \neg q \to \neg r \vee p$

(v) $\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ **(vi)** $(p \neg \vee q \to p \vee \neg q) \to p \wedge q$

Απάντηση

Για να διαπιστώσουμε ποιές εκφράσεις (ή «λέξεις») φτιαγμένες από προτασιακές μεταβλητές, λογικούς συνδέσμους και παρενθέσεις, είναι «τύποι», πρέπει και αρκεί να ελέγξουμε το εάν σχηματίζονται ή όχι με την εφαρμογή των σχετικών κανόνων (βλ. ορισμό 2.2 σ. 20, και προτεραιότητες συνδέσμων σ. 25-26). Το 1^{ο} βήμα είναι η αντιστοίχιση των παρενθέσεων ώστε να ανοίγουν και να κλείνουν κανονικά. Αυτό το κάνουμε αρχίζοντας από μια εσώτατη παρένθεση – τέτοια ώστε κλείνει αμέσως (χωρίς να περιέχει άλλη παρένθεση). Κάθε παρένθεση πρέπει να περιέχει ένα σύνδεσμο και δύο μεταβλητές (πριν και μετά), ή δύο ήδη εξετασμένους τύπους – ή αλλιώς τον σύνδεσμο της άρνησης με μία μεταβλητή ή έναν ήδη εξετασμένο τύπο. Προσέχουμε ότι οι προτεραιότητες εφαρμογής των συνδέσμων αντιστοιχούν σε «υπονοούμενες» παρενθέσεις, π.χ. $\neg p \equiv (\neg p)$, και ότι η εξώτατη παρένθεση ίσως να παραλείπεται.

	Αποκατάσταση/αντιστοίχιση παρενθέσεων
$\boldsymbol{(p \to (q \to r)) \to q}$	$\overbrace{[\underbrace{(p \to \underbrace{(q \to r)}_{1})}_{2} \to q]}^{3}$
$\boldsymbol{\neg (s \neg (p \to q) \to r) \to s}$	$\neg\underbrace{(s \underbrace{\neg \underbrace{(p \to q)}_{1}}_{2} \to r)}_{3??} \to s$
$\boldsymbol{p \to (q \to r) \to (p \to r)}$	$\overbrace{[p \to \underbrace{(q \to r)}_{1} \to \underbrace{(p \to r)}_{2}]}^{3??}$
$\boldsymbol{\neg\neg p \wedge \neg q \to \neg r \vee p}$	$\overbrace{[\underbrace{\underbrace{\neg\underbrace{\neg p}_{1}}_{4} \wedge \underbrace{\neg q}_{2}}_{6} \to \underbrace{\underbrace{\underbrace{\neg r}_{3} \vee p}_{5}}_{7}]}^{8}$

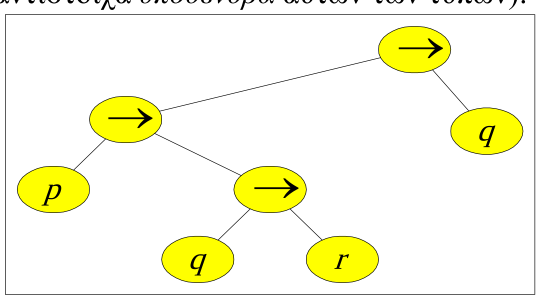
$\boldsymbol{\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q}$	$\overbrace{[\underbrace{\neg\underbrace{(p \vee q)}_{1}}_{4} \leftrightarrow \underbrace{\underbrace{\neg p}_{2} \wedge \underbrace{\neg q}_{3}}_{5}]}^{6}$
$\boldsymbol{(p \neg \vee q \rightarrow p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q}$	$[(p \underbrace{\neg \vee}_{3??} q \rightarrow p \vee \underbrace{\neg q}_{2}) \rightarrow \underbrace{p \wedge q}_{2}]$

Στον 1ο τύπο η δομή των παρενθέσεων αποκαθίσταται όπως στο παραπάνω πίνακα.
Στον 2ο τύπο στη τρίτη «παρένθεση», αριστερά του συνδέσμου δεν έχουμε έναν τύπο, αλλά δύο.
Στον 3ο τύπο στην εξώτατη παρένθεση έχουμε δύο λογικούς συνδέσμους (όχι έναν).
Στον 4ο και 5ο τύπο οι παρενθέσεις αποκαθίστανται ορθώς.
Στον 6ο τύπο η τρίτη «παρένθεση» που εξετάσαμε μιας άρνησης $\neg$ δεν ακολουθείται από μεταβλητή ή τύπο.

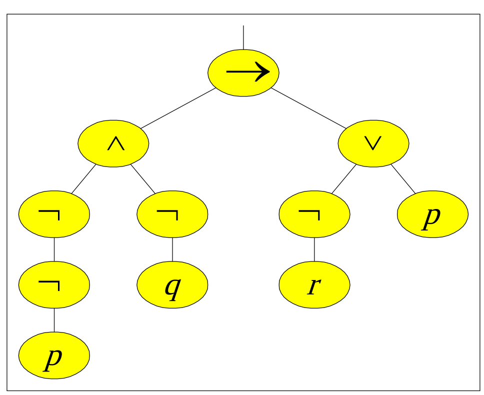
2. Για κάθε μια από τις εκφράσεις του προηγούμενου υποερωτήματος για την οποία διαπιστώσατε ότι είναι προτασιακός τύπος, κατασκευάστε το αντίστοιχο **δενδροδιάγραμμα**.

Απάντηση

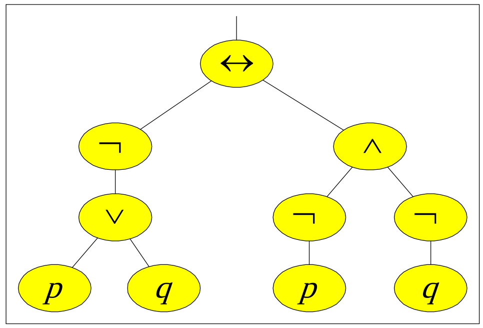
Μετατρέπουμε κάθε «παρένθεση» σε υπόδενδρο, με «ριζικό» κόμβο τον περιεχόμενο λογικό σύνδεσμο και με έναν ή δύο «θυγατρικούς» κόμβους τις σχετικές μεταβλητές ή τύπους (δηλαδή τα αντίστοιχα *υπόδενδρα* αυτών των τύπων):



Δενδροδιάγραμμα του προτασιακού τύπου (*i*) – (καθοδική σχεδίαση, συνοπτική μορφή).



Δενδροδιάγραμμα του προτασιακού τύπου (*iv*) – (καθοδική σχεδίαση, συνοπτική μορφή).



Δενδροδιάγραμμα του προτασιακού τύπου (*v*) – (καθοδική σχεδίαση, συνοπτική μορφή).

Άσκηση 2 (2008-09)

Έστω Τ το σύνολο των τύπων (της ΠΛ) οι οποίοι είναι:

- είτε προτασιακές μεταβλητές,
- είτε της μορφής $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, όπου φ, ψ είναι ήδη κατασκευασμένοι τύποι του Τ.

Για κάθε φ στο Τ, φ^* είναι ο τύπος που προκύπτει από τον φ αντικαθιστώντας κάθε προτασιακή μεταβλητή με την άρνησή της και εναλλάσσοντας τα $\vee$, $\wedge$ (δηλαδή ο σύνδεσμος $\vee$ μετατρέπεται στον $\wedge$ και ο $\wedge$ μετατρέπεται στον $\vee$). Δείξτε με επαγωγή στην δομή των τύπων του Τ ότι $\neg\varphi \equiv \varphi^*$.

(Σημείωση: Το ίδιο ερώτημα περιλαμβάνει άλλα δύο υποερωτήματα πάλι πάνω σε επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων. Συνιστάται να τα δείτε στην αναφερόμενη εργασία.)

Απάντηση

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στην δομή των τύπων του Τ για να δείξουμε ότι για κάθε τύπο του Τ υπάρχει τύπος φ^* τέτοιος ώστε:

$$\neg\varphi \equiv \varphi^* \qquad (\Pi)$$

Όπου φ^* είναι ο τύπος που προκύπτει από τον φ αντικαθιστώντας κάθε προτασιακή μεταβλητή με την άρνησή της και εναλλάσσοντας τα $\vee$, $\wedge$.

<u>*Βασικό Βήμα*</u>*:* Θα δείξουμε ότι η (Π) ισχύει για προτασιακές μεταβλητές. Πράγματι, αν ο φ είναι προτασιακή μεταβλητή p, τότε ο τύπος $\neg\varphi$ είναι ο $\neg p$ που ταυτίζεται με τον φ^*,

αφού ο φ δεν περιέχει τους συνδέσμους $\{\vee, \wedge\}$, και αποτελείται από μια μόνο προτασιακή μεταβλητή την οποία αντικαταστήσαμε με την άρνηση της.

Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι η (Π) ισχύει για τυχόντες τύπους του T, ψ και χ.

Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξουμε ότι η (Π) ισχύει για τύπους φ της μορφής $\neg\psi$, $\psi \vee \chi$, $\psi \wedge \chi$. Πράγματι:

- Αν $\varphi = \neg\psi$, τότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει τύπος ψ^* που κατασκευάζεται με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, τέτοιος ώστε

  $$\neg\psi \equiv \psi^*$$

  Άρα,

  $$\neg\varphi = \neg(\neg\psi) \equiv \quad \text{(Επαγωγική υπόθεση)}$$
  $$\neg(\psi^*)$$

  όπου ο τύπος $\neg(\psi^*)$, είναι ουσιαστικά ο ζητούμενος φ^*, αφού προκύπτει από τον φ με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω.

- Αν $\varphi = \psi \vee \chi$, τότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν τύποι ψ^*, χ^* που κατασκευάζονται με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω, έτσι ώστε

  $$\neg\psi \equiv \psi^* \text{ και } \neg\chi \equiv \chi^*$$

  Άρα

  $$\begin{aligned} \neg\varphi = \; & \neg(\psi \vee \chi) \equiv && \text{(2}^{\text{ος}}\text{ Νόμος De Morgan)} \\ & \neg\psi \wedge \neg\chi \equiv && \text{(Επαγωγική υπόθεση)} \\ & \psi^* \wedge \chi^* \end{aligned}$$

  Ουσιαστικά ο τύπος $\psi^* \wedge \chi^*$ είναι ο ζητούμενος τύπος φ^*, αφού προκύπτει από τον φ με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω.

- Αν $\varphi = \psi \wedge \chi$, τότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν τύποι ψ^*, χ^* που κατασκευάζονται με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω, έτσι ώστε

  $$\neg\psi \equiv \psi^* \text{ και } \neg\chi \equiv \chi^*$$

  Άρα

  $$\begin{aligned} \neg\varphi = \; & \neg(\psi \wedge \chi) \equiv && \text{(1}^{\text{ος}}\text{ Νόμος De Morgan)} \\ & \neg\psi \vee \neg\chi \equiv && \text{(Επαγωγική υπόθεση)} \\ & \psi^* \vee \chi^* \end{aligned}$$

  Ουσιαστικά ο τύπος $\psi^* \vee \chi^*$ είναι ο ζητούμενος τύπος φ^*, αφού προκύπτει από τον φ με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω.

Άρα η (Π) ισχύει για κάθε τύπο του T.

Άσκηση 3 (2010-2011 Ασκήσεις κατανόησης)

Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι **ταυτολογίες**, ποιοι **αντιφάσεις** και ποιοι τίποτα από τα δύο:

i) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ ii) $q \rightarrow (q \rightarrow p)$

iii) $(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow p$ iv) $(p \rightarrow q) \rightarrow p$

Απάντηση (βλ. ορισμό 2.4, σελ. 32, παράδειγμα 2.6.,σελ. 36, παράδειγμα 2.7, σελ. 37).

<u>**Χωρίς χρήση πινάκων αλήθειας**</u> (βλ. Παράδειγμα 2.7, σελ. 37, και Παράδειγμα 2.8, σελ. 38, τόμος 3).

i) p→(q→p). Υποθέτουμε ότι η p έχει τιμή Ψ τότε ο προτασιακός τύπος λαμβάνει τη τιμή Α ανεξαρτήτως της τιμής αλήθειας της q (από τον ορισμό του αληθοπίνακα της λογικής συναπαγωγής '**Ψ→?**' είναι Α). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η p έχει τιμή Α τότε η τιμή αλήθειας του προτασιακού τυπου εξαρτάται από τη τιμή αλήθειας του (q→p). Αν q είναι Ψ ο (q→p) λαμβάνει τη τιμή Α (για τόν ίδιο λόγο, '**Ψ→Α**' είναι Α) και έτσι ο αρχικός προτασιακός τύπος λαμβάνει τη τιμή Α ('**Α→Α**' είναι Α). Αν η q είναι Α τότε, δεδομένου ότι η p είναι Α, ο (q→p) είναι Α ('Α→Α'**)** και έτσι ο αρχικός προτασιακός τύπος είναι Α ('Α→Α'). Συνοψίζοντας, ο προτασιακός τύπος είναι <u>πάντα</u> Α, δηλαδή λαμβάνει τη τιμή αλήθειας Α για <u>όλες τις δυνατές και επιβεβλημένες αποτιμήσεις</u> των εμπλεκομένων προτασιακών μεταβλητών, επομένως είναι **ταυτολογία**.

<u>Σχηματικά</u> (το μπλέ χρώμα δείχνει την κατά-υπόθεση απόδοση τιμής αλήθειας στις προτασιακές μεταβλητές, το κόκκινο χρώμα δείχνει τη τιμή αλήθειας που λαμβάνει ο αρχικός προτασιακός τύπος):

p	**→**	**(q**	**→**	**p)**
Ψ	**Α**			
Α	**Α**	Α	Α	Α
Α	**Α**	Ψ	Α	Α

ii) q→(q→p). Υποθέτουμε ότι η q έχει τιμή Ψ τότε ο προτασιακός τύπος λαμβάνει τη τιμή Α ανεξαρτήτως της τιμής αλήθειας της p (από τον ορισμό του αληθοπίνακα της λογικής συναπαγωγής '**Ψ → ?**' είναι Α). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η q έχει τιμή Α. Αν υποθέσουμε ότι η p είναι Α τοτε η τιμή αλήθειας του (q → p) είναι Α ('Α→Α' είναι Α) και για τον ίδιο λόγο ο αρχικός προτασιακός τύπος είναι Α. Αν υποθέσουμε ότι η p είναι Ψ τοτε η τιμή αλήθειας του (q → p) είναι Ψ ('Α→Ψ' είναι Ψ) και έτσι ο αρχικός προτασιακός τύπος είναι Ψ (και πάλι επειδή 'Α→Ψ' είναι Ψ). Συνοψίζοντας, ο προτασιακός τύπος <u>δεν είναι</u> <u>πάντα</u> Α <u>ούτε πάντα</u> Ψ, επομένως δεν είναι **ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση**.

<u>Σχηματικά</u>:

q	**→**	**(q**	**→**	**p)**

Ψ	**A**	Ψ		
A	**A**	A	A	A
A	**Ψ**	A	Ψ	Ψ

iii) (p→¬p)↔p. Υποθέτουμε ότι η p έχει τιμή Ψ (¬p θα είναι Α), επομένως ο (p→¬p) λαμβάνει τη τιμή Α (‘Ψ→Α’ είναι Α) και έτσι ο αρχικός προτασιακός τύπος θα είναι Ψ (‘Α↔Ψ’ είναι Ψ). Συνεχίζοντας, υποθέτουμε ότι η p είναι Α (¬p θα είναι Ψ), επομένως ο (p→¬p) λαμβάνει τη τιμή Ψ (‘Α→Ψ’ είναι Ψ) και έτσι ο αρχικός προτασιακός τύπος θα είναι Ψ (‘Ψ↔Α’ είναι Ψ). Συνοψίζοντας, ο προτασιακός τύπος <u>είναι πάντα</u> Ψ, επομένως είναι **αντίφαση**.

<u>Σχηματικά</u>:

(p	**→**	**¬p)**	**↔**	**p**
Ψ	Α	Α	**Ψ**	Ψ
Α	Ψ	Ψ	**Ψ**	Α

iii) (p→q)→p. Υποθέτουμε ότι η p έχει τιμή Ψ τότε ο **(p→q)** είναι Α (‘Ψ → ?’ είναι Α) και έτσι ο αρχικός τύπος θα είναι Ψ (‘Α → Ψ’ είναι Ψ). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η p έχει τιμή Α το οποίο δεν αρκεί για απόδοση τιμής αλήθειας στο τύπο. Υποθέτουμε ότι q είναι Α, τότε ο (p→q) είναι Α (‘Α→Α’ είναι Α) και έτσι ο αρχικός τύπος θα είναι Α (και πάλι επειδή ‘Α→Α’ είναι Α). Αν υποθέσουμε ότι η q είναι Ψ τοτε ο (p→q) είναι Ψ (‘Α→Ψ’ είναι Ψ) και έτσι ο αρχικός τύπος θα είναι Α (‘Ψ→Α’ είναι Α). Συνοψίζοντας, ο προτασιακός τύπος <u>δεν είναι</u> <u>πάντα</u> Α <u>ούτε πάντα</u> Ψ, επομένως δεν είναι **ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση**.

<u>Σχηματικά</u>:

(p	**→**	**q)**	**→**	**p**
Ψ	Α		**Ψ**	Ψ
Α	Α	Α	**Α**	Α
Α	Ψ	Ψ	**Α**	Α

<u>**Με χρήση πινάκων αλήθειας**</u> (βλ. παράδειγμα 2.6, σελ. 36, τόμος 3).

						i.	**ii.**	**iii**	**iv.**
p	q	¬p	(q → p)	(p → q)	(p → ¬p)	p → (q → p)	q → (q → p)	(p → ¬p) ↔ p	(p → q) → p
Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	**Α**	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	**Α**	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	**Α**	Ψ	Ψ	Ψ

Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	**Α**	Α	Ψ	Ψ
						ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑ	ΤΙΠΟΤΑ	ΑΝΤΙΦΑΣΗ	ΤΙΠΟΤΑ

Άσκηση 4 (2011-12 Ασκήσεις κατανόησης)

Έστω τέσσερις προτασιακές μεταβλητές p_1, p_2, p_3, p_4 και S ένα υποσύνολο του συνόλου {1,2,3,4}. Οι τέσσερις προτασιακές μεταβλητές ερμηνεύονται ως εξής: *p_k είναι αληθής αν και μόνο αν το στοιχείο k ανήκει στο S*. Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές p_k, κατασκευάστε προτασιακούς τύπους (οι οποίοι να εμπλέκουν αποκλειστικά τις τέσσερις προτασιακές μεταβλητές) που εκφράζουν κάθε μια από τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Το *S* είναι κενό.

(ii) Το *S* έχει το πολύ τρία στοιχεία

(iii) Το *S* έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Απάντηση

(i) «*S κενό*»
δηλαδή «*κανένα στοιχείο δεν ανήκει στο S*»
δηλαδή «***όλες** οι προτασιακές μεταβλητές p_k **ψευδείς***»

δηλαδή $\mathbf{(\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3) \wedge (\neg p_4)}$
$\equiv \neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4)$ ... De Morgan (2)

(ii) «*S το πολύ τρία στοιχεία*»
δηλαδή «*όχι τέσσερα στοιχεία*»
δηλαδή «***όχι όλες** οι προτασιακές μεταβλητές p_k **αληθείς***»

δηλαδή $\mathbf{\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4)}$
$\equiv (\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee (\neg p_3) \vee (\neg p_4)$... De Morgan (1)

(iii) «*S τουλάχιστον δύο στοιχεία*»
δηλαδή «*τουλάχιστον μία δυάδα στοιχείων*» ... {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}
δηλαδή «***τουλάχιστον δύο** από τις προτασιακές μεταβλητές p_k **αληθείς***»

δηλαδή $\mathbf{(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_4) \vee (p_2 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_4) \vee (p_3 \wedge p_4)}$

Άσκηση 5 (Ασκήσεις κατανόησης 2011-12)

Χρησιμοποιώντας τους νόμους της ΠΛ (βλέπε σελ. 38, τόμος 3) δείξτε ότι οι παρακάτω τύποι είναι **ταυτολογίες**:

(i) $p \to (q \to p)$ **(ii)** $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$ **(iii)** $p \to [\neg q \to \neg(p \to q)]$

Απάντηση Βλέπε «Ταυτολογίες» / «Νόμοι Προτασιακής Λογικής», σελ. 38

(i) $p \to (q \to p)$ … Νόμος αντικατάστασης

$\equiv \neg p \vee (q \to p)$ … Νόμος αντικατάστασης

$\equiv \neg p \vee (\neg q \vee p)$ … Νόμος αντιμεταθικότητας (2)

$\equiv \neg p \vee (p \vee \neg q)$ … απαλειφή παρενθέσεων

$\equiv \neg p \vee p \vee \neg q$ … Νόμος αποκλεισμού τρίτου

$\neg P \vee P \equiv \mathbf{A}$ … "άρνηση P <u>είτε</u> P πάντα **Α**ληθής"

P οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος

$\equiv \mathbf{A} \vee \neg q$ … "**Α**ληθής <u>είτε</u> P πάντα **Α**ληθής"

$\equiv \mathbf{A}$ => **ταυτολογία**

(ii) $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$ … Νόμος αντικατάστασης

$\equiv \neg(\neg p \to q) \vee (\neg q \to p)$ … Νόμος αντικατάστασης – 2 φορές

$\equiv \neg(\neg\neg p \vee q) \vee (\neg\neg q \vee p)$ … Νόμος διπλής άρνησης – 2 φορές

$\equiv \mathbf{\neg (p \vee q) \vee (q \vee p)}$ … Νόμος αποκλεισμού τρίτου

$\neg P \vee P \leftrightarrow \mathbf{A}$ … "άρνηση P <u>είτε</u> P πάντα **Α**ληθής"

$\equiv \mathbf{A}$ => **ταυτολογία**

(iii) $p \to [\neg q \to \neg(p \to q)]$ … Νόμος αντικατάστασης

$\equiv \neg p \vee [\neg q \to \neg(p \to q)]$ … Νόμος αντικατάστασης

$\equiv \neg p \vee [\neg\neg q \vee \neg(p \to q)]$ … Νόμος διπλής άρνησης

$\equiv \neg p \vee [q \vee \neg(p \to q)]$ … Νόμος αντικατάστασης

$\equiv \neg p \vee [q \vee \neg(\neg p \vee q)]$ … Νόμος De Morgan (2)

$\equiv \neg p \vee [q \vee (\neg\neg p \wedge \neg q)]$ … Νόμος διπλής άρνησης

$\equiv \neg p \vee [q \vee (p \wedge \neg q)]$ … Νόμος επιμεριστικότητας (2)

$\equiv \neg p \vee [(q \vee p) \wedge \mathbf{(q \vee (\neg q))}]$ … Νόμος αποκλεισμού τρίτου

$\neg P \vee P \equiv \mathbf{A}$ … "πάντα **Α**ληθής"

$\equiv \neg p \vee [(q \vee p) \wedge \mathbf{A}]$ … "P και **A**" ≡ P

$\equiv \neg p \vee (q \vee p)$ … Νόμος αντιμεταθικότητας (2)

$\equiv \neg p \vee (p \vee q)$ … απαλειφή παρενθέσεων

≡	$\neg p \vee p \vee q$	… απαλειφή παρενθέσεων
≡	$\mathbf{A} \vee q$	… Νόμος αποκλεισμού τρίτου

$\mathbf{A} \vee P \equiv \mathbf{A}$ … "**Α**ληθής <u>είτε</u> P πάντα **Α**ληθής"

≡ **Α** => **ταυτολογία**

Άσκηση 6 (2011-12 Ασκήσεις κατανόησης)

Εξετάστε κατά πόσο ισχύουν οι παρακάτω **ταυτολογικές συνεπαγωγές**:

(i) $\{p \to q, \neg p\} \models \neg q$ **(ii)** $\{p \to q, \neg q\} \models \neg p$

(iii) $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$ **(iv)** $\{p \to q, p \to r\} \models q \to r$

Απάντηση

Ορισμός. Το σύνολο προτασιακών τύπων Τ **ταυτολογικά συνεπάγεται** την πρόταση φ, Τ |= φ, αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί (= επαληθεύει) το Τ ικανοποιεί (επαληθεύει) και την φ.

(i) $\{p \to q, \neg p\} \models \neg q$

p	**q**	**p→q**	**¬p**	**¬q**
Α	Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	**Α**	**Α**	**Ψ**
Ψ	Ψ	**Α**	**Α**	**Α**

=> για την αποτίμηση της $4^{ης}$ γραμμής για την οποία <u>**όλες**</u> οι δεδομένες προτάσεις του συνόλου Τ = {p → q, ¬p} είναι **Α** η πρόταση ¬q είναι **Ψ** => **δεν ισχύει**.

(ii) $\{p \to q, \neg q\} \models \neg p$

p	**q**	**p→q**	**¬q**	**¬p**
Α	Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	**Α**	**Α**	**Α**

=> για την αποτίμηση της $4^{ης}$ γραμμής για την οποία <u>**όλες**</u> οι δεδομένες προτάσεις του συνόλου Τ = {p → q, ¬q} είναι **Α** η πρόταση ¬p είναι **Α** => **ισχύει**.

(iii) $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$

p	q	r	p→q	q→r	p→r
Α	Α	Α	**Α**	**Α**	**Α**
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	**Α**	**Α**	**Α**
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	**Α**	**Α**	**Α**
Ψ	Ψ	Ψ	**Α**	**Α**	**Α**

=> για όλες τις αποτιμήσεις για τις οποίες **όλες** οι δεδομένες προτάσεις του συνόλου Τ = $\{p \to q, q \to r\}$ (γραμμές 1, 5, 7 και 8) είναι **Α** η πρόταση $p \to r$ είναι επίσης **Α** => **ισχύει**.

(iv) $\{p \to q, p \to r\} \models q \to r$

p	q	r	p→q	p→r	q→r
Α	Α	Α	**Α**	**Α**	**Α**
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	**Α**	**Α**	**Α**
Ψ	Α	Ψ	**Α**	**Α**	**Ψ**
Ψ	Ψ	Α	**Α**	**Α**	**Α**
Ψ	Ψ	Ψ	**Α**	**Α**	**Α**

=> για την αποτίμηση της γραμμής 6, ενώ οι δεδομένες προτάσεις του συνόλου Τ = $\{p \to q, p \to r\}$ είναι **Α** η πρόταση $q \to r$ είναι **Ψ** => **δεν ισχύει**.

Άσκηση 7 (2014-2015)

(α) Χρησιμοποιώντας τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-3, τις αρχικές υποθέσεις, τον αποδεικτικό κανόνα Modus Ponens, και τα εξής τυπικά θεωρήματα:

Τ.Θ. διπλής άρνησης: $\vdash_{ΠΛ} \neg\neg\varphi \to \varphi$

Τ.Θ. μεταβατικότητας: $\vdash_{ΠΛ} (\varphi \to \psi) \to [\, (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)\,]$

να αποδείξετε ότι ισχύει το εξής:

$$\{\, \varphi \to \chi\, ,\, \neg\chi\, \} \vdash_{ΠΛ} \neg\varphi.$$

(β) Έστω ότι έχετε χάσει τα γυαλιά σας και κάνετε τους εξής συλλογισμούς:

- *«Αν τα γυαλιά είναι στο τραπέζι της κουζίνας, τότε τα είδα την ώρα του πρωινού».*
- *«Αν δεν διάβαζα την εφημερίδα στο καθιστικό,τότε θα πρέπει να τη διάβαζα στην κουζίνα».*
- *«Αν διάβαζα εφημερίδα στο καθιστικό, τότε τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ».*
- *«Δεν είδα τα γυαλιά μου κατά τη διάρκεια του πρωινού».*
- *«Αν διάβαζα το βιβλίο μου στο κρεβάτι, τότε άφησα τα γυαλιά μου στο κομοδίνο».*
- *«Αν διάβαζα εφημερίδα στην κουζίνα, τότε τα γυαλιά μου είναι στο τραπέζι της κουζίνας».*

Βρείτε τελικά πού είναι τα γυαλιά. Δώστε τυπική απόδειξη για την ορθότητα του επιχειρήματός σας. Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες προτασιακές μεταβλητές στους τύπους που θα προτείνετε:

ΓΚΖ : *«τα γυαλιά είναι στο τραπέζι της κουζίνας»*
ΓΠΡ : *«είδα τα γυαλιά την ώρα του πρωινού»*
ΕΚΘ : *«διάβαζα εφημερίδα στο καθιστικό»*
ΕΚΖ : *«διάβαζα εφημερίδα στην κουζίνα»*
ΓΚΦ : *«τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ»*
ΒΚΡ : *«διάβαζα το βιβλίο μου στο κρεβάτι»*
ΓΚΜ : *«τα γυαλιά είναι στο κομοδίνο»*

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και το προηγούμενο υποερώτημα, που είναι γνωστό και ως *αποδεικτικός κανόνας Modus Tollens*, καθώς και το Τυπικό Θεώρημα της Διπλής Άρνησης.

Απάντηση

(α) Η ιδέα είναι ότι δεν μπορούμε να αρνηθούμε *την άρνηση του φ*, διότι οδηγεί σε άτοπο: η διπλή άρνηση του φ είναι το ίδιο το φ, και από το φ εξάγεται τόσο το συμπέρασμα χ (αφού $\varphi \to \chi$), όσο και το $\neg\chi$ (αφού αυτό ισχύει και μόνο του). Το καίριο αξίωμα εδώ είναι το ΑΣ3: $(\neg\upsilon \to \neg\sigma) \to [(\neg\upsilon \to \sigma) \to \upsilon]$. Χρησιμοποιώντας το $\vdash_{\Pi\Lambda} \neg\neg\alpha \to \alpha$, και το $\vdash_{\Pi\Lambda} (\alpha \to \beta) \to [(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)]$, τα βήματα της απόδειξης $\{\boldsymbol{\varphi \to \chi, \neg\chi}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \boldsymbol{\neg\varphi}$ θα μπορούσαν να είναι τα εξής:

1.	$\boldsymbol{(\neg\neg\varphi \to \varphi)}$	τ.θ. διπλής άρνησης, με $\alpha \leftarrow \varphi$.
2.	$\boldsymbol{(\neg\neg\varphi \to \varphi)} \to ((\varphi \to \chi) \to (\neg\neg\varphi \to \chi))$	τ.θ. μεταβατικότητας, με $\alpha \leftarrow \neg\neg\varphi$, $\beta \leftarrow \varphi$, $\gamma \leftarrow \chi$.
3.	$\boldsymbol{(\varphi \to \chi)}$	μία εκ των υποθέσεων $\{\varphi \to \chi, \neg\chi\}$.
4.	$\boldsymbol{(\varphi \to \chi)} \to (\neg\neg\varphi \to \chi)$	modus ponens από 1. και 2.
5.	$(\neg\neg\varphi \to \chi)$	modus ponens από 3. και 4.
6.	$\boldsymbol{\neg\chi}$	μία εκ των υποθέσεων $\{\varphi \to \chi, \neg\chi\}$.
7.	$\boldsymbol{\neg\chi} \to (\neg\neg\varphi \to \neg\chi)$	**ΑΣ1** $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$, με $\alpha \leftarrow \neg\chi$, $\beta \leftarrow \neg\neg\varphi$.
8.	$\boldsymbol{(\neg\neg\varphi \to \neg\chi)}$	modus ponens από 6. και 7.
9.	$\boldsymbol{(\neg\neg\varphi \to \neg\chi)} \to [(\neg\neg\varphi \to \chi) \to \neg\varphi]$	**ΑΣ3** $(\neg\upsilon \to \neg\sigma) \to [(\neg\upsilon \to \sigma) \to \upsilon]$, με $\upsilon \leftarrow \neg\varphi$, $\sigma \leftarrow \chi$.
10.	$(\neg\neg\varphi \to \chi) \to \neg\varphi$	modus ponens από 8. και 9.
11.	$\neg\varphi$	modus ponens από 5. και 10.

Άρα έχουμε τον αποδεικτικό κανόνα, ***modus tollens*** : $\boldsymbol{\{\varphi \to \chi, \neg\chi\}} \vdash_{\Pi\Lambda} \boldsymbol{\neg\varphi}$

(β) Οι 6 προτάσεις που δίδονται γράφονται με βάση τις προτασιακές μεταβλητές μας ως εξής:

1. ΓΚΖ $\rightarrow$ ΓΠΡ
2. $\neg$ΕΚΘ $\rightarrow$ ΕΚΖ
3. ΕΚΘ $\rightarrow$ ΓΚΦ
4. $\neg$ΓΠΡ
5. ΒΚΡ $\rightarrow$ ΓΚΜ
6. ΕΚΖ $\rightarrow$ ΓΚΖ

Αντλούμε απαγωγικά τα συμπεράσματά μας από το αφετηριακό δεδομένο 4. $\neg$ΓΠΡ, όπου η αλυσίδα των σχετικών ισχυρισμών είναι η ακόλουθη:

7. $\neg$ΓΚΖ — modus tollens από 1. και 4. όπου (φ $\leftarrow$ ΓΚΖ, χ $\leftarrow$ ΓΠΡ).
8. $\neg$ΕΚΖ — modus tollens από 6. και 7. όπου (φ $\leftarrow$ ΕΚΖ, χ $\leftarrow$ ΓΚΖ)
9. $\neg\neg$ΕΚΘ — modus tollens από 2. και 8. όπου (φ $\leftarrow$ $\neg$ΕΚΘ, χ $\leftarrow$ ΕΚΖ)
10. $\neg\neg$ΕΚΘ $\rightarrow$ ΕΚΘ — τ.θ. διπλής άρνησης.
11. ΕΚΘ — modus ponens από 9. και 10.
12. ΓΚΦ — modus ponens από 11. και 3.

Αφού οι υποθέσεις μας είναι ΑΛΗΘΕΙΣ, και από αυτές αποδείξαμε το ΓΚΦ, *η εγκυρότητα του ΠΛ* δίδει ότι
ΓΚΦ = ΑΛΗΘΕΣ, δηλαδή: «*τα γυαλιά είναι στο τραπεζάκι του καφέ*».

Άσκηση 8

Να δειχθεί ότι $\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi\} \vdash_{ΠΛ} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$

α) Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής.

β) Χωρίς να γίνει χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής.

Απάντηση

α) Από το Θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δειχθεί ότι

$$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \chi$$

1.	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	Υπόθεση
2.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$	Υπόθεση
3.	$\varphi \rightarrow \psi$	Υπόθεση
4.	φ	2,3 MP

5.	$\psi \to \chi$	1,4 MP
6.	ψ	3,4 MP
7.	χ	5,6 MP

β) Χωρίς χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής έχουμε

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	Υπόθεση
2.	$(\varphi \to \psi) \to \varphi$	Υπόθεση
3.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	ΑΣ2
4.	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	3,1 MP
5.	$((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \to (((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to \chi))$	ΑΣ2
6.	$((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to \chi)$	5,4 MP
7.	$(\varphi \to \psi) \to \chi$	6,2 MP

Άσκηση 9 (2008)

Δείξτε τα παρακάτω:

(α) $\varphi \;\vdash\; (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \theta) \to ((\theta \to \xi) \to \xi))$

(β) $\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\varphi \to (\chi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi))$

(γ) $\neg\neg\varphi \vdash ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)$

Επιτρέπεται η χρήση γνωστών θεωρημάτων εκτός των θεωρημάτων Εγκυρότητας και Πληρότητας.

Απάντηση

(α) Θα χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά το θεώρημα Απαγωγής (Θεώρημα 2.8, σελ. 58. Τόμος 3), ώστε να απλουστεύσουμε κατά το δυνατόν τον προς απόδειξη τύπο ανάγοντας ουσιαστικά μέρη του σε υποθέσεις της τυπικής απόδειξης που θα κατασκευάσουμε. Σύμφωνα με το θεώρημα Απαγωγής για δείξουμε το ζητούμενο:

$$\varphi \;\vdash\; (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \theta) \to ((\theta \to \xi) \to \xi)) \qquad (1)$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \;\vdash\; (\psi \to \theta) \to ((\theta \to \xi) \to \xi) \qquad (2)$$

Κάνοντας δεύτερη φορά χρήση του θεωρήματος Απαγωγής, για να δείξουμε την (2), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi,\ \psi \rightarrow \theta\} \quad |\!- \quad (\theta \rightarrow \xi) \rightarrow \xi \qquad (3)$$

Τέλος, εφαρμόζοντας και μια τρίτη φορά το θεώρημα Απαγωγής, για να δείξουμε την (3), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi,\ \psi \rightarrow \theta,\ \theta \rightarrow \xi\} \quad |\!- \quad \xi \qquad (4)$$

Δηλαδή τελικά για να δείξουμε το ζητούμενο (1), αρκεί να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη για την (4). Η τυπική απόδειξη της (4) είναι αρκετά εύκολη. Συγκεκριμένα:

1.	φ	(Υπόθεση)
2.	$\varphi \rightarrow \psi$	(Υπόθεση)
3.	$\psi \rightarrow \theta$	(Υπόθεση)
4.	$\theta \rightarrow \xi$	(Υπόθεση)
5.	ψ	1,2 MP
6.	θ	5,3 MP
7.	ξ	6,4 MP

(β) Παρατηρώντας προσεκτικά τα «συστατικά» του προς απόδειξη τυπικού θεωρήματος θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αυτά μοιάζουν ως προς την συντακτική μορφή τους με «συστατικά» του ΑΣ2. Συγκεκριμένα, ο τύπος του ερωτήματος που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι τυπικό θεώρημα είναι

$$(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow(\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$$

και οι υποτύποι (τα «συστατικά») από τους οποίους αποτελείται είναι οι

$$\varphi \rightarrow \chi,\ \ \varphi \rightarrow(\chi \rightarrow \psi),\ \ \varphi \rightarrow \psi$$

Το ΑΣ2 (βλ. σελ. 56, τόμος 3) έχει τη μορφή

$$(\varphi \rightarrow(\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

Αν όπου χ βάλουμε ψ και όπου ψ βάλουμε χ και άρα θεωρήσουμε τον ΑΣ2 στην μορφή

$$(\varphi \rightarrow(\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$$

τότε οι υποτύποι που συμμετέχουν στο ΑΣ2 είναι ακριβώς οι υποτύποι (τα «συστατικά») του τύπου της εκφώνησης, τα οποία βρήκαμε παραπάνω δηλαδή :

$$\varphi \rightarrow(\chi \rightarrow \psi),\ \ \varphi \rightarrow \chi,\ \ \varphi \rightarrow \psi$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Απαγωγής θα προσπαθήσουμε να αναδιατάξουμε τους υποτύπους του ζητούμενου τυπικού θεωρήματος ώστε να εκμεταλλευτούμε την «ομοιότητά» του με το ΑΣ2.

Σύμφωνα με το θεώρημα Απαγωγής για να δείξουμε το τυπικό θεώρημα:

$$\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\varphi \to(\chi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi))$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\varphi \to \chi \ \vdash \ (\varphi \to(\chi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$$

Ενώ με μια δεύτερη εφαρμογή του ίδιου θεωρήματος θα αρκούσε να δείξουμε ότι

$$\{\varphi \to \chi, \varphi \to(\chi \to \psi)\} \ \vdash \ \varphi \to \psi$$

Έχοντας πάντα κατά νου την αρχική παρατήρηση μας κατασκευάζουμε την παρακάτω τυπική απόδειξη:

1.	$\varphi \to \chi$	Υπόθεση
2.	$\varphi \to (\chi \to \psi)$	Υπόθεση
3.	$(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$	ΑΣ2 όπου θέσαμε φ στη θέση του φ, χ στη θέση του ψ και ψ στη θέση του χ.
4.	$(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)$	2,3 MP
5.	$\varphi \to \psi$	1,4 MP

(γ) Θα κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη για το

$$\neg\neg\varphi \vdash ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)$$

Για να βρούμε τυπική απόδειξη δουλεύουμε αντίστροφα, ξεκινώντας από το ζητούμενο συμπέρασμα της τυπικής απόδειξης και προσπαθούμε κάνοντας κατάλληλη χρήση των ΑΣ1,2,3 και του MP να καταλήξουμε στην υπόθεση $\neg\neg\varphi$.

Παρατηρούμε ότι ο τύπος

$$((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi) \qquad (1)$$

μπορεί να προσαρμοστεί στο συμπέρασμα της «κεντρικής» συνεπαγωγής του ΑΣ3.
Δηλαδή, αφού το ΑΣ3 είναι:

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to \mathbf{((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)} \qquad (2)$$

μπορώ να θέσω στον (2) όπου φ τον τύπο φ της (1) και όπου ψ τον τύπο $\neg\varphi$. Το ΑΣ3 τότε παίρνει την μορφή:

$$(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi) \ (3)$$

Για να προκύψει ο τύπος (1) από το (3), μπορούμε να εφαρμόσουμε τον MP, αρκεί να μπορέσουμε με κάποιο τρόπο να «παραγάγουμε» την υπόθεση της συνεπαγωγής του (3), δηλαδή τον τύπο $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$.

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $(\neg\varphi\rightarrow\neg\neg\varphi)$, θα μπορούσε να προσαρμοστεί στο συμπέρασμα της συνεπαγωγής του ΑΣ1. Αφού το ΑΣ1 είναι

$$\varphi \rightarrow \boldsymbol{(\psi \rightarrow \varphi)} \qquad (4)$$

θα μπορούσαμε να θέσουμε στον (4), όπου φ τον τύπο $\neg\neg\varphi$ και όπου ψ τον τύπο $\neg\varphi$. Το ΑΣ1 τότε θα έπαιρνε τη μορφή:

$$\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \qquad (5)$$

Παρατηρούμε, ότι η υπόθεση της συνεπαγωγής στον τύπο (5), είναι υπόθεση της τυπικής μας απόδειξης άρα χρησιμοποιώντας τον MP, μπορούμε να παράγουμε τον $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$.

Ετσι, συνολικά η τυπική απόδειξη μας είναι:

1. $\neg\neg\varphi$ Υπόθεση

2. $\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ ΑΣ1, όπου θέσαμε στη θέση του φ τον τύπο $\neg\neg\varphi$ και στον τύπο ψ τον τύπο $\neg\varphi$ [είναι ο τύπος (5) παραπάνω]

3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ 1,2 MP

4. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi)$ ΑΣ3, όπου θέσαμε στη θέση του φ τον τύπο φ και στον τύπο ψ τον τύπο $\neg\varphi$ [είναι ο τύπος (3) παραπάνω]

5. $((\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi)$ 3,4 MP

Άσκηση 10 (2013-14)

(α) Δείξτε ότι ένα σύνολο προτασιακών τύπων T είναι **συνεπές** αν και μόνο αν είναι **ικανοποιήσιμο**.

(β) Δείξτε ότι για κάθε **συνεπές** σύνολο τύπων T, υπάρχει **μεγιστοτικά συνεπές** υπερσύνολο του, T^*. Δηλαδή, το T^* είναι τέτοιο ώστε, αν υπάρχει συνεπές σύνολο T' με την ιδιότητα $T^* \subseteq T'$, τότε $T^* = T'$ (ισοδύναμα μπορείτε να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνεπές, γνήσιο υπερσύνολο του T^*).

Υπόδειξη: Εφόσον υπάρχει αποτίμηση α που ικανοποιεί το T, θεωρείστε το σύνολο T^*, που περιέχει όλους τους προτασιακούς τύπους που αληθεύουν για την αποτίμηση α.

Απάντηση

(α) Εξετάζουμε τις δύο κατευθύνσεις της ισοδυναμίας:

Συνεπές $\Rightarrow$ *Ικανοποιήσιμο*: Θα πάμε «εκ του αντιστρόφου» δηλαδή ότι (*όχι Ικανοποιήσιμο* $\Rightarrow$ *όχι Συνεπές*). Και πράγματι εάν το Τ δεν είναι ικανοποιήσιμο τότε για μια οποιαδήποτε μεταβλητή (ή και τύπο) φ ισχύει ότι Τ $\models \varphi$, (αφού τετριμμένα: «*ότι επαληθεύει το* 1^o *επαληθεύει και το* 2^o»). Παρόμοια όμως ισχύει και ότι Τ $\models \neg\varphi$. Από το *θ. πληρότητας* το Τ $\models \varphi$ δίδει Τ $\vdash \varphi$, και το Τ $\models \neg\varphi$ δίδει Τ $\vdash \neg\varphi$. Αυτά από κοινού καθιστούν το Τ ασυνεπές και έχουμε το ζητούμενο.

Ικανοποιήσιμο $\Rightarrow$ *Συνεπές*: Πράγματι εάν το Τ επαληθεύεται από κάποια αποτίμηση α, τότε δεν είναι δυνατόν να υπάρξει τύπος φ και αποδείξεις Τ $\vdash \varphi$ και Τ $\vdash \neg\varphi$, διότι κατά την αληθοποιό του Τ αποτίμηση α τόσο ο φ όσο και ο $\neg\varphi$ θα έπρεπε (*θ. εγκυρότητας*) να αποτιμηθούν επίσης ως ΑΛΗΘΕΙΣ, πράγμα άτοπο. Άρα το Τ είναι συνεπές.

(β) Αφού το Τ είναι συνεπές τότε είναι και επαληθεύσιμο από κάποια αποτίμηση α, (βλ. προηγούμενη παράγραφο). Έστω Τ* το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων που επαληθεύονται από την α. Προφανώς Τ $\subseteq$ Τ*, και το Τ* είναι συνεπές, αφού είναι επαληθεύσιμο και αφού αυτά τα δύο κατά την προηγούμενη παράγραφο συμπίπτουν. Το Τ* είναι μεγιστοτικό διότι δεν μπορεί να αυξηθεί κατά ούτε έναν τύπο φ:

(i) Εάν ο φ επαληθεύεται από την α τότε έχει ήδη συμπεριληφθεί στο Τ* και δεν αυξάνει το Τ*.

(ii) Εάν ο φ διαψεύδεται από την α τότε η $\neg\varphi$ επαληθεύεται και *αυτή* έχει ήδη συμπεριληφθεί στο Τ*. Με την προσθήκη και του φ στο Τ*, το Τ* θα περιείχε τόσο τον φ όσο και τον $\neg\varphi$, και θα έπαυε να είναι επαληθεύσιμο, άρα θα έπαυε να είναι και συνεπές (όπως απαιτείται).