Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξοικείωση με τους αναδρομικούς αλγορίθμους και με τις επαγωγικές αποδείξεις.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #1 ΚΑΙ #2

Στον παρακάτω αλγόριθμο, το *a* είναι θετικός και το *n* μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Το *n div 2* και το *n mod 2* είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του *n* με το 2.

```
procedure power (a,n)
   if n=0 then return (1)
   if n=1 then return (a)
   m:=n div 2              // πηλίκο της ακέραιας διαίρεσης
   r:=n mod 2              // υπόλοιπο της ακέραιας διαίρεσης
   b:=a*a
   c:=power(b,m)
   if r=0 then return (c)
   else return (a*c)
```

1) Υπολογίστε τις τιμές power(a,2), power(a,3), power(a,4).
2) Εξηγήστε τί υπολογίζει ο αλγόριθμος και αποδείξτε το με επαγωγή στο n.
3) Εάν $T(n)$ είναι το πλήθος των πολλαπλασιασμών που εκτελεί ο αλγόριθμος σε είσοδο (a, n), για $n \geq 1$, αποδείξτε ότι $T(n) \leq 2log_2(n)$.

   Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $n\text{div}2 = \lfloor n/2 \rfloor$. Βρείτε μία αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η $T(n)$ και χρησιμοποιήστε επαγωγή στο n.

Απάντηση

1) Αρχικά με είσοδο $(a, 2)$, η power υπολογίζει $m = 1$και $r = 0$, υπολογίζει το $b = a^2$και στη συνέχεια επιστρέφει την τιμή$power(b, 1)$, η οποία είναι ίση μεb. Άρα $power(a, 2) = a^2$. Σε είσοδο $(a, 3)$, η power υπολογίζει $m = 1$και $r = 1$, υπολογίζει το $b = a^2$και στη συνέχεια επιστρέφει την τιμή$a \cdot power(b, 1)$, η οποία είναι ίση με $a \cdot b$. Άρα $power(a, 3) = a^3$. Παρόμοια βλέπουμε ότι $power(a, 4) = power(a^2, 2) = power(a^4, 1) = a^4$.

2) Από τις παραπάνω αρχικές τιμές, φαίνεται ότι η διαδικασία power σε είσοδο (a, n)υπολογίζει το a^n, για οποιαδήποτε τιμή του a. Ας το αποδείξουμε με επαγωγή στο n.

Βάση της Επαγωγής: Για $n = 0$ και για $n = 1$ η πρόταση ισχύει (το εξασφαλίζουν οι δύο αρχικές γραμμές της διαδικασίας).

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $0 \leq k \leq n-1$, δηλαδή για κάθε τιμή του a, $power(a,k) = a^k$ για $0 \leq k \leq n-1$.

Επαγωγικό Βήμα: Σε είσοδο (a,n), η διαδικάσία υπολογίζει τα m και r ως πηλίκο και υπόλοιπο της διαίρεσης του n με το 2, δηλαδή ισχύει $n = 2m + r$ με $r \in \{0,1\}$. Στη συνέχεια επιστρέφει την τιμή $power(a^2,m)$ (αντίστοιχα $a \cdot power(a^2,m)$) εάν $r = 0$ (αντίστοιχα $r = 1$). Δηλαδή σε κάθε περίπτωση επιστρέφει την τιμή $a^r \cdot power(a^2,m)$. Παρατηρούμε τώρα ότι$0 \leq m \leq n-1$, οπότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $power(a^2,m) = (a^2)^m = a^{2m}$. 'Αρα η τιμή που επιστρέφει η διαδικασία είναι $a^r \cdot a^{2m} = a^{2m+r} = a^n$.

3) Με $T(n)$ συμβολίζουμε το πλήθος των πολλαπλασιασμών που εκτελεί η διαδικασία power σε είσοδο (a,n). Παρατηρήστε ότι το πλήθος αυτό δεν εξαρτάται από το a αλλά μόνο από το n. Θα δείξουμε ότι $T(n) \leq 2log(n)$ όπου με log συμβολίζουμε το λογάριθμο με βάση 2. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n.

Βάση της Επαγωγής: Για $n = 1$, βλέπουμε ότι η διαδικασία δεν εκτελεί πολλαπλασιασμό, δηλαδή $T(n) = 0$οπότε η ανισότητα ισχύει.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι $T(k) \leq 2log(k)$ για $1 \leq k \leq n-1$.

Επαγωγικό Βήμα: Σε είσοδο (a,n) η διαδικασία εκτελεί ένα πολλαπλασιασμό (υπολογίζοντας το b), στη συνέχεια καλεί αναδρομικά την $power(a,m)$, όπου $m = \lfloor n/2 \rfloor$ και στη συνέχει εκτελεί το πολύ ένα ακόμη πολλαπλασιασμό (εάν$r = 1$). Άρα$T(n) \leq 2 + T(\lfloor n/2 \rfloor)$. Καθώς $1 \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq n-1$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική μας υπόθεση για $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Υπολογίζουμε

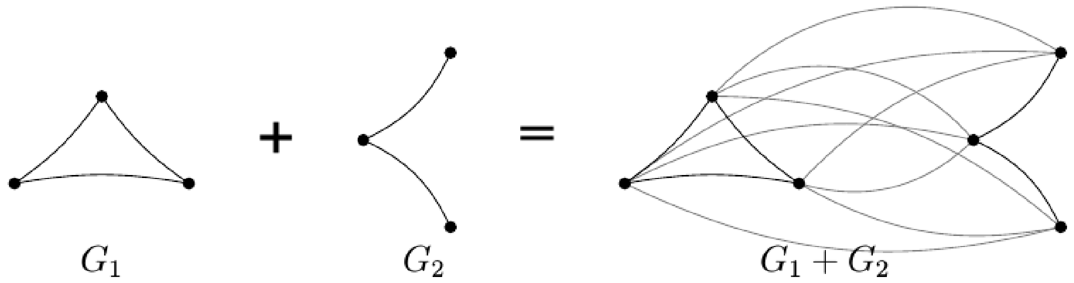
$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2 + T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq 2 + 2log(\lfloor n/2 \rfloor) \leq 2 + 2log(n/2) = 2\big(1 + log(n/2)\big) \\ &= 2log(n). \end{aligned}$$

Ερώτημα 2.

Στόχος του ερωτήματος αυτού είναι η κατανόηση των εννοιών του χρωματικού αριθμού και της μέγιστης κλίκας καθώς και η εφαρμογή τους σε επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #3 ΚΑΙ #4

Α) Δεδομένων δύο γραφημάτων G_1, G_2 κατασκευάζουμε ένα νέο γράφημα $G_1 + G_2$ το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές και ακμές των G_1, G_2 και επιπλέον, κάθε κορυφή του G_1συνδέεται με μία νέα ακμή με κάθε κορυφή του G_2.



1) Δείξτε ότι $\omega(G_1 + G_2) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$, όπου $\omega(G_i)$ είναι ο αριθμός κλίκας του γραφήματος.
2) Υπολογίστε το $\omega\left(K_{n_1,\dots,n_k}\right)$, όπου $K_{n_1,\dots,n_k}$ είναι ένα πλήρες k-μερές γράφημα.

Β) Σε ένα Τμήμα Πληροφορικής προσφέρονται n μαθήματα, τα οποία αριθμούμε $1,2,\dots,n$. Συμβολίζουμε με M_i το σύνολο των φοιτητών που είναι εγγεγραμμένοι στο μάθημα i, για $1 \le i \le n$. Για την εξεταστική περίοδο υπάρχουν n διαθέσιμες αίθουσες, αλλά μόνο ένα τρίωρο ανά ημέρα (ας πούμε 9 - 12 το πρωί). Για τον προγραμματισμό της εξεταστικής υπάρχει μόνο ο εξής κανόνας: "δύο μαθήματα τα οποία έχουν εγγεγραμμένο ένα τουλάχιστον κοινό φοιτητή δεν εξετάζονται την ίδια ημέρα". Εάν, για παράδειγμα, δεν υπάρχει φοιτητής ο οποίος να είναι εγγεγραμμένος σε δύο μαθήματα, τότε ένας δυνατός προγραμματισμός είναι να εξεταστούν όλα τα μαθήματα, παράλληλα, την 1η ημέρα. Φυσικά, υπάρχουν πολλοί ακόμη προγραμματισμοί που σέβονται τον κανόνα. Για παράδειγμα, το μάθημα i να εξεταστεί την ημέρα i. Ο πρώτος προγραμματισμός είναι βέλτιστος ως προς το πλήθος των ημερών που απαιτούνται για τη εξέταση όλων των μαθημάτων. Ένας προγραμματισμός εξετάσεων που ικανοποιεί τον κανόνα θα ονομάζεται "επιτρεπτός". Ένας επιτρεπτός προγραμματισμός ο οποίος απαιτεί τον ελάχιστο δυνατό αριθμό ημερών ονομάζεται "βέλτιστος".

1) Περιγράψτε πώς μπορεί να διατυπωθεί το παραπάνω πρόβλημα εύρεσης επιτρεπτών προγραμματισμών ως πρόβλημα γραφημάτων. Ειδικότερα, δεδομένων των συνόλων $M_1,\dots,M_n$ περιγράψτε κάποιο γράφημα G (περιγράφοντας σε ποιά δεδομένα αντιστοιχούν οι κορυφές και σε ποιά οι ακμές) και κάποια έννοια (σχετιζόμενη με το γράφημα G), η οποία να αντιστοιχεί σε ένα επιτρεπτό προγραμματισμό. Σε τι αντιστοιχεί τότε ένας βέλτιστος προγραμματισμός;
2) Με δεδομένα έξι μαθήματα με εγγεγραμμένους φοιτητές $M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{a,e,f\}, M_3 = \{b,e,g\}, M_4 = \{e,g,h\}, M_5 = \{a,f,h\}, M_6 = \{d,h,g\}$εφαρμόστε τη μέθοδο που περιγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα για να δώσετε ένα βέλτιστο προγραμματισμό.

Απάντηση

Α1) Έστω $\omega_1 = \omega_1(G_1), \omega_2 = \omega_2(G_2)$ και $\omega = \omega(G_1 + G_2)$ και ας συμβολίσουμε με Ω_1, Ω_2 μία μέγιστη κλίκα στα γραφήματα G_1 και G_2 αντίστοιχα. Θα δείξουμε τη ζητούμενη ισότητα σε δύο βήματα: αρχικά δείχνουμε ότι $\omega \geq \omega_1 + \omega_2$ και στη συνέχεια αποκλείουμε την περίπτωση $\omega > \omega_1 + \omega_2$.

Στο γράφημα $G_1 + G_2$ εξετάζουμε το σύνολο κορυφών $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Για την τυχούσα κορυφή $v \in \Omega_1$ παρατηρούμε ότι είναι γειτονική με κάθε άλλη κορυφή του Ω_1 (αφού το Ω_1 είναι κλίκα στο γράφημα G_1 και στην κατασκευή του $G_1 + G_2$ δεν αφαιρούμε ακμές) και από την κατασκευή του $G_1 + G_2$ είναι επίσης γειτονική με κάθε κορυφή του Ω_2. Όμοια δείχνει κανείς ότι κάθε κορυφή $v \in \Omega_2$ είναι γειτονική με κάθε άλλη κορυφή στο . Άρα το σύνολο κορυφών $\Omega_1 \cup \Omega_2$ είναι κλίκα στο γράφημα $G_1 + G_2$ και συνεπώς $\omega \geq \omega_1 + \omega_2$.

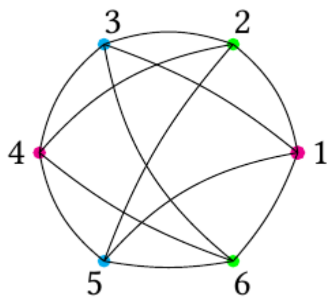
Θα αποκλείσουμε τώρα την περίπτωση $\omega > \omega_1 + \omega_2$, ότι δηλαδή ότι το γράφημα $G_1 + G_2$ περιέχει κλίκα με τουλάχιστον $\omega > \omega_1 + \omega_2$ κορυφές. Σε μία τέτοια περίπτωση, είτε τουλάχιστον $\omega_1 + 1$ από αυτές προέρχονται από το γράφημα G_1 ή τουλάχιστον $\omega_2 + 1$ προέρχονται από το γράφημα G_2. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι έχουμε τουλάχιστον $\omega_1 + 1$ κορυφές από το γράφημα G_1. Καθώς αυτές αποτελούν μέρος κλίκας στο $G_1 + G_2$ είναι ανά δύο γειτονικές, άρα αποτελούν κλίκα του G_1 (αφού στην κατασκευή του $G_1 + G_2$ δεν εισάγουμε ακμές μεταξύ κορυφών του G_1), πράγμα άτοπο, αφού κάθε μέγιστη κλίκα του G_1 έχει ω_1 κορυφές.

Α2) Θέτοντας $G_i, i = 1, \ldots, k$, να είναι το γράφημα με n_i κορυφές και καμία ακμή,

παρατηρούμε ότι το πλήρες k-μερές γράφημα $K_{n_1,\ldots,n_k}$ είναι ακριβώς το $G_1 + \cdots + G_k$. Τώρα, παρατηρώντας ότι $\omega(G_i) = 1$, από τα προηγούμενα ερωτήματα προκύπτει ότι $\omega(G_1 + \cdots + G_k) = k$.

Β1) Το πρόβλημα του προγραμματισμού των εξετάσεων είναι ουσιαστικά
ένα πρόβλημα αντιστοίχισης μαθημάτων σε ημέρες. Καθώς n ημέρες αρκούν, μία τέτοια αντιστοίχιση είναι μια απεικόνιση $\chi: \{1, \ldots, n\} \rightarrow \{1, \ldots, n\}$. Για να είναι μία τέτοια απεικόνιση "επιτρεπτή" πρέπει ανά δύο μαθήματα τα οποία αντιστοιχίζονται στην ίδια ημέρα, οι λίστες των
εγγεγραμμένων φοιτητών τους να μην έχουν κοινά στοιχεία. Ορίζουμε το γράφημα G να είναι το απλό, μη κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών το $V = \{1, \ldots, n\}$ (δηλαδή κάθε μάθημα "γίνεται" κορυφή) και σύνολο ακμών E που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα$\{i, j\} \in E \Leftrightarrow M_i \cap M_j \neq \emptyset$. Παρατηρούμε τώρα ότι, μία απεικόνιση $\chi: \{1, \ldots, n\} \rightarrow \{1, \ldots, n\}$ είναι επιτρεπτός προγραμματισμός αν και μόνο αν "για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ με $i \neq j$, εάν $M_i \cap M_j \neq \emptyset$τότε $\chi(i) \neq \chi(j)$" (δηλαδή, αν στα μαθήματα i, j υπάρχουν κοινοί φοιτητές
το μάθημα i εξετάζεται διαφορετική ημέρα από το μάθημα j), το οποίο ισοδύναμα γράφεται "για κάθε ακμή $\{i, j\} \in E$ έχουμε $\chi(i) \neq \chi(j)$". Δηλαδή, ένας επιτρεπτός προγραμματισμός αντιστοιχεί σε ένα χρωματισμό του γραφήματος και συνεπώς ένας βέλτιστος προγραμματισμός αντιστοιχεί σε ένα βέλτιστο χρωματισμό. Ειδικότερα, το ελάχιστο πλήθος απαιτούμενων ημερών είναι ο χρωματικός αριθμός του G.

Β2) Σύμφωνα με τον παραπάνω συλλογισμό, το γράφημα που αντιστοιχεί στα παραπάνω δεδομένα είναι το $G = (V, E)$, με σύνολο κορυφών $V = \{1, \dots, n\}$ και σύνολο ακμών $E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}\}$.
Ένας χρωματισμός του G είναι ο παρακάτω:
χρώμα 1, οι κορυφές 1, 4,
χρώμα 2, οι κορυφές 2, 6,
χρώμα 3, οι κορυφές 3, 5.



Άρα το γράφημα είναι 3-χρωματίσιμο και αυτό είναι το ελάχιστο δυνατό πλήθος χρωμάτων καθώς το γράφημα περιέχει μία 3-κλίκα. Άρα, ένας βέλτιστος προγραμματισμός απαιτεί τρεις ημέρες.
Ένας τέτοιος είναι ο παρακάτω:
1η ημέρα: μαθήματα 1, 4,
2η ημέρα: μαθήματα 2, 6,
3η ημέρα: μαθήματα 3, 5.

Ερώτημα 3.

Αποτελεί εξάσκηση στον τυπικό ορισμό απλών γραφοθεωρητικών ιδιοτήτων με χρήση της πρωτοβάθμιας γλώσσας και στην ερμηνεία προτάσεων της πρωτοβάθμιας γλώσσας σε γραφήματα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #5 ΚΑΙ #6

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει δύο κατηγορηματικά σύμβολα E και P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων, το σύμβολο E ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία συνδέονται με ακμή (ειδικότερα, το (a,a) δεν ανήκει ποτέ στη σχέση E) και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a,b) για τα οποία υπάρχει μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές a και b (ειδικότερα, το ζευγάρι (a,a) ανήκει πάντα στη σχέση καθώς η κορυφή a συνδέεται με τον εαυτό της με το κενό μονοπάτι).

A) Διατυπώστε σε φυσική γλώσσα τι σημαίνει κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις και δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος με 5 τουλάχιστον κορυφές, για το οποίο είναι αληθής.

1) $\forall x \exists y \left(E(x,y) \wedge \forall w \big(E(x,w) \rightarrow (w = y)\big)\right)$

2) $\exists x \left(\forall y P(x,y) \wedge \forall y \forall z \big((z \neq x) \wedge (y \neq x) \rightarrow \neg E(y,z)\big)\right)$

B) Δώστε τύπους της κατηγορηματικής λογικής οι οποίες να εκφράζουν τα παρακάτω:

1) Η κορυφή x έχει βαθμό ίσο με 2.

2) Το γράφημα έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες.

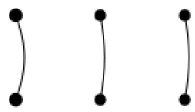
3) Το γράφημα είναι ένας απλός κύκλος (δηλαδή είναι το C_n για κάποιο $n \geq 3$).

Απάντηση

A1) Η πρόταση $\forall x \exists y \left(E(x,y) \wedge \forall w \big(E(x,w) \rightarrow (w = y)\big)\right)$εκφράζει ότι

Κάθε κορυφή συνδέεται με ακμή με μία ακριβώς άλλη κορυφή – δηλαδή κάθε κορυφή έχει βαθμό ίσο με 1.

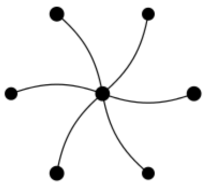
Ένα τέτοιο γράφημα είναι το παρακάτω:



A2) Η πρόταση $\exists x \left(\forall y P(x,y) \wedge \forall y \forall z \big((z \neq x) \wedge (y \neq x) \rightarrow \neg E(y,z)\big)\right)$ εκφράζει ότι

Υπάρχει κορυφή η οποία συνδέεται με μονοπάτι με όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος και οποιεσδήποτε άλλες δύο κορυφές του γραφήματος δεν συνδέονται με ακμή – είναι, δηλαδή, ένα "αστέρι".

Ένα τέτοιο γράφημα είναι το παρακάτω:



B1) Ο τύπος $\exists y \exists z \left((y \neq z) \wedge E(x,y) \wedge E(x,z) \wedge \forall w \big(E(x,w) \rightarrow (w = y) \vee (w = z) \big) \right)$ εκφράζει ότι η κορυφή x συνδέεται με ακμή με δύο κορυφές y, z, οι οποίες είναι διακεκριμένες, και συνδέεται μόνο με αυτές. Ο τύπος έχει μία ελεύθερη μεταβλητή, τη x. Ας ονομάσουμε

$degree_2(x)$ τον παραπάνω τύπο (θα τον ξαναχρησιμοποιήσουμε στο B3)) .

B2) $\exists x \exists y \left(\neg P(x,y) \wedge \forall z \big(P(z,x) \vee P(z,y) \big) \right)$

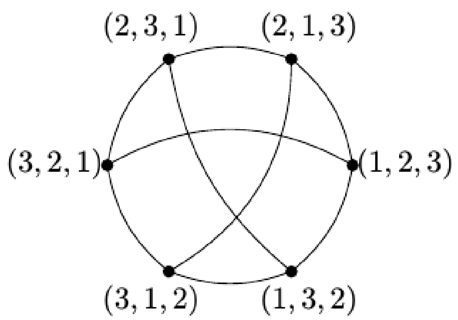
B3) Η βασική παρατήρηση είναι ότι το γράφημα C_n, με $n \geq 3$, χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα "είναι συνεκτικό γράφημα και ο βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με 2": Είναι φανερό ότι ένας απλός κύκλος είναι συνεκτικό γράφημα και όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ίσο με 2. Αντίστροφα, κανείς μπορεί να δείξει, για παράδειγμα με επαγωγή στο n, ότι ένα συνεκτικό γράφημα στο οποίο όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ίσο με 2 είναι ένας απλός κύκλος. Δεδομένου του χαρακτηρισμού, γράφουμε την πρόταση: $\forall x \forall y P(x,y) \wedge \forall x degree_2(x)$.

Ερώτημα 4.

Το ακόλουθο ερώτημα αποτελεί εξάσκηση στις έννοιες των μονοπατιών Euler και Hamilton και στην εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής σε γραφήματα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #7 ΚΑΙ #8

Θεωρήστε το γράφημα G_n του οποίου οι κορυφές είναι όλες οι μεταθέσεις του συνόλου $S = \{1,2,3,\ldots,n\}$ με την ιδιότητα ότι δύο κορυφές $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$,$(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n)$ συνδέονται με ακμή αν και μόνον αν η μία προκύπτει από την άλλη εναλλάσσοντας τις θέσεις δύο ακεραίων. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το γράφημα G_3.



1. Δείξτε ότι το πλήθος των κορυφών και των ακμών του γραφήματος είναι αντίστοιχα $n!$ και $n!\frac{n(n-1)}{4}$.
2. Με δεδομένο ότι το γράφημα είναι συνεκτικό, δείξτε ότι το G_n έχει κύκλο Euler όταν $n = 4k$ ή $n = 4k + 1$, όπου kφυσικός αριθμός.
3. Αποδείξτε ότι το G_n περιέχει ανεξάρτητο σύνολο με n κορυφές.
4. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, δείξτε ότι το G_n έχει κύκλο Hamilton για κάθε $n \geq 3$

(Υπόδειξη για το 4: Από το σχήμα είναι προφανές ότι το G_3 έχει κύκλο Hamilton, π.χ. τον (1, 2, 3) → (2, 1, 3) →(2, 3, 1) → (3, 2, 1) → (3, 1, 2) → (1, 3, 2) → (1, 2, 3).

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω κύκλο του G_3, ένας κύκλος Hamilton του G_4 είναι ο εξής:

(1, 2, 3, 4) (2, 1, 3, 4) → (2, 3, 1, 4) (3, 2, 1, 4) → (3, 1, 2, 4) (1, 3, 2, 4) →(1, 2, 3, 4)
↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑
(1, 2, 4, 3) (2, 1, 4, 3) (2, 3, 4, 1) (3, 2, 4, 1) (3, 1, 4, 2) (1, 3, 4, 2)
↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑
(1, 4, 2, 3) (2, 4, 1, 3) (2, 4, 3, 1) (3, 4, 2, 1) (3, 4, 1, 2) (1, 4, 3, 2)
↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑
(4, 1, 2, 3) →(4, 2, 1, 3) (4, 2, 3, 1) → (4, 3, 2, 1) (4, 3, 1, 2) → (4, 1, 3, 2)

Γενικεύστε το παραπάνω για το επαγωγικό βήμα.)

Απάντηση

1) Το πλήθος των κορυφών $|V|$ του G_n ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων των στοιχείων του S, δηλαδή με n!. Για να βρούμε το πλήθος $|E|$ των ακμών του G_n , αρκεί να βρούμε τον βαθμό κάθε κορυφής και να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της χειραψίας . Ξεκινώντας από μία τυχαία κορυφή $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$οι γειτονικές προκύπτουν εναλλάσοντας τις θέσεις οποιωνδήποτε$\varepsilon_i, \varepsilon_j$ Το πλήθος των εναλλαγων αυτών είναι $\binom{n}{2}$και συνεπώς $deg(v) = \binom{n}{2}$για κάθε κορυφη του G_n. Τώρα, εφαρμόζοντας το θεώρημα της χειραψίας έχουμε

$2|E| = \sum deg\,(v) = \sum \binom{n}{2} = n!\binom{n}{2}$, δηλαδή $|E| = n!\,n(n-1)/4$.

2) Για να έχει το G_n κύκλωμα Euler, θα πρέπει κάθε κορυφή του να έχει άρτιο βαθμό. Στην δική μας περίπτωση, εφόσον $deg(v) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$για κάθε κορυφή v, θα πρέπει να

ελέχξουμε για ποιές τιμές του n το παραπάνω πηλίκο είναι άρτιος. Για να το δούμε αυτό, διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν n = 4k τότε $deg(v) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4k(4k-1)}{2} = 2k(4k-1)$που είναι άρτιος

• Αν n = 4k + 1 τότε $deg(v) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4k+1)4k}{2} = (4k+1)2k$που είναι άρτιος

• Αν n = 4k + 2 τότε $deg(v) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4k+2)(4k+11)}{2} = (2\kappa+1)(4k+1)$που είναι περιττός ως γινόμενο δύο περιττών.

• Αν n = 4k + 3 τότε $deg(v) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4\kappa+3)(4k+2)}{2} = (4k+3)(2\kappa+1)$που είναι περιττός ως γινόμενο δύο περιττών.

Άρα, το γράφημα έχει κύκλωμα Euler αν και μόνον αν n = 4k ή 4k + 1.

3) Θέλουμε να βρούμε ένα σύνολο n κορυφών, οι οποίες ανά δύο να μην συνδέονται με ακμή. Για το συγκεκριμένο γράφημα, αυτό σημαίνει να βρούμε n μεταθέσεις του συνόλου $\{1,2,\dots,n\}$ τέτοιες ώστε να μην μπορούμε από μία μετάθεση να φτιάξουμε μία άλλη με μία μόνο αντιμετάθεση δύο ακεραίων. Ένα τέτοιο σύνολο είναι οι κυκλικές μεταθέσεις του

$\{1,2,\dots,n\}$δηλαδή το σύνολο

$$\{(1,2,\dots n-1,n),(2,3,\dots,n,1),(3,4,\dots,n,1,2),\dots,(n,1,2,\dots,n-1)\}$$

Παρατηρήστε ότι δύο οποιεσδήποτε μεταθέσεις του παραπάνω συνόλου διαφέρουν σε κάθε θέση, δηλαδή σε τουλάχιστον 3 θέσεις (αφού n ≥ 3). Άρα είναι αδύνατο με μία αντιμετάθεση να οδηγηθούμε από μία μετάθεση του συνόλου σε μία άλλη.

Επομένως, το σύνολο S είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο του G_nμε n στοιχεία.

4) Θα δείξουμε με επαγωγή ότι το G n έχει κύκλο Hamilton για κάθε n ≥ 3.

Βάση της Επαγωγής: Το G_3 έχει κύκλο Hamilton.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι το G_n έχει κύκλο Hamilton

Επαγωγικό βήμα: Δείχνουμε ότι το G_{n+1} έχει κύκλο Hamilton.

Η ιδέα είναι ότι χρησιμοποιούμε έναν κύκλο Hamilton του G_n και κατασκευάζουμε έναν κύκλο Hamilton του G_{n+1} ως εξής:

Για κάθε κορυφή $v = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ του G_nορίζουμε τα εξής μονοπάτια του G_{n+1}:

$$\mu(\mathbf{v}, n+1) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n, n+1) \to (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, n+1, \varepsilon_n) \to$$
$$\to \cdots \to (\varepsilon_1, n+1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) \to (n+1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$$

$$\mu(n+1, \mathbf{v}) = (n+1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) \to (\varepsilon_1, n+1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) \to$$
$$\to \cdots \to (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, n+1, \varepsilon_n) \to (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n, n+1)$$

Δηλαδή, το $\mu(n+1, v)$ είναι το μονοπάτι που προκύπτει αρχίζοντας από την (v, n + 1) και διασχίζοντας τις ακμές που προκύπτουν μεταθέτοντας το n + 1 κατά μία θέση αριστερότερα κάθε φορά. Αντίστοιχα, το $\mu(v, n+1)$είναι το μονοπάτι που προκύπτει αρχίζοντας από την (n + 1, v) και διασχίζοντας τις ακμές που προκύπτουν μεταθέτοντας το n + 1 μία θέση δεξιότερα κάθε φορά.

Τέλος, παρατηρούμε ότι αν $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_N \to v_1$είναι ένας κύκλος Hamilton του G_nτότε η παρακάτω ακολουθία μονοπατιών

$$\underbrace{(\mathbf{v}_1, n+1) \to \cdots \to (n+1, \mathbf{v}_1)}_{\mu(n+1,\mathbf{v}_1)} \to \underbrace{(n+1, \mathbf{v}_2) \to \cdots \to (\mathbf{v}_2, n+1)}_{\mu(\mathbf{v}_2,n+1)} \to \underbrace{(\mathbf{v}_3, n+1) \to \cdots \to (n+1, \mathbf{v}_3)}_{\mu(\mathbf{v}_3,n+1)} \to$$
$$\to \cdots \to \underbrace{(n+1, \mathbf{v}_N) \to \cdots \to (\mathbf{v}_N, n+1)}_{\mu(n+1,\mathbf{v}_N)} \to (\mathbf{v}_1, n+1)$$

είναι κύκλος Hamilton του G_{n+1}.

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα, από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι Σωστή (υπάρχει τέτοιο γράφημα) ή Λάθος (δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα). Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #9 ΚΑΙ #10

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπο-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. Θεωρούμε ότι τα γραφήματα του ερωτήματος είναι απλά και μη κατευθυνόμενα.

Α. Στα παρακάτω υποερωτήματα καλείστε να εξετάσετε αν το γράφημα που περιγράφεται υπάρχει ή αν έχει κάποια ιδιότητα.

1. **(Σ/Λ)** Ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και λιγότερες από n ακμές πρέπει οπωσδήποτε να έχει μία κορυφή βαθμού 1.
2. **(Σ/Λ)** Υπάρχει γράφημα με επτά κορυφές, βαθμών 2,3,4,5,6,6,6 αντίστοιχα.
3. **(Σ/Λ)** Υπάρχει 3-κανονικό γράφημα με 8 κορυφές.
4. **(Σ/Λ)** Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{33,44}$ έχει κύκλωμα Euler.

B. Στα παρακάτω ερωτήματα, το γράφημα $G+G$είναι το γράφημα που προκύπτει από την κατασκευή που περιγράφεται στο 2ο ερώτημα.

1. **(Σ/Λ)** Το γράφημα $G+G$ είναι πάντα συνεκτικό.
2. **(Σ/Λ)** Το γράφημα $\overline{G+G}$ (δηλαδή το συμπλήρωμα του $G+G$), είναι πάντα συνεκτικό.
3. **(Σ/Λ)** Εάν το γράφημα G έχει κύκλο Euler, τότε και το $G+G$ έχει κύκλο Euler.
4. **(Σ/Λ)** Εάν το γράφημα G έχει κύκλο Hamilton, τότε και το $G+G$ έχει κύκλο Hamilton.

Απάντηση

A

1. Λάθος

Η πρόταση δεν ισχύει για το γράφημα το οποίο έχει μία μόνο μία κορυφή και καμία ακμή. Παρατηρήστε ότι η πρόταση *είναι αληθής* για κάθε άλλο (απλό, μη κατευθυνόμενο) γράφημα, δηλαδή όταν $n \geq 2$. Ειδικότερα, αν το γράφημα δεν έχει καμία κορυφή βαθμού 1, τότε κάθε κορυφή v θα έχει βαθμό $deg(v) = 0$ ή $deg(v) \geq 2$. Λόγω συνεκτικότητας, η περίπτωση $deg(v) = 0$ απορρίπτεται (διότι $n \geq 2$οπότε θα είχαμε μεμονωμένη κορυφή) επομένως $deg(v) \geq 2$ για κάθε κορυφή. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το θεώρημα χειραψίας, προκύπτει $2n \leq \sum_{v \in V} deg(v) = 2|E| < 2n$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, θα πρέπει να υπάρχει μία κορυφή βαθμού 1 στο γράφημα.

2. Λάθος

Το γράφημα έχει τρείς κορυφές βαθμού 6, έστωv_1, v_2, v_3. Επομένως, κάθε μία από τις κορυφές v_1, v_2, v_3 συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος. Άρα, κάθε άλλη κορυφή του γραφήματος έχει βαθμό τουλάχιστον 3.

3. Σωστό

Ο κύβος είναι ένα γράφημα με οκτώ κορυφές, όλες βαθμού 3.

4. Λάθος

Το γράφημα $K_{33,44}$ έχει 44 κορυφές βαθμού 33 και 33 κορυφές βαθμού 44. Εφόσον, δεν έχουν όλες οι κορυφές άρτιο βαθμό, συμπεραίνουμε ότι το γράφημα δεν έχει κύκλωμα Euler.

B

1. Σωστό

Έστω δύο κορυφές v, u του $G + G$. Εάν προέρχονται από διαφορετικά αντίγραφα του G, τότε συνδέονται με ακμή. Εάν προέρχονται από το ίδιο αντίγραφο, τότε αν w είναι μια κορυφή που προέρχεται από το άλλο αντίγραφο, ένα μονοπάτι από το v στο u είναι το v, w, u.

2. Λάθος

Εάν v είναι μία κορυφή που προέρχεται από το ένα αντίγραφο του G και v' είναι μία κορυφή που προέρχεται από το άλλο αντίγραφο, τότε παρατηρήστε ότι δεν υπάρχει μονοπάτι που να τις συνδέει.

3. Λάθος

Εφόσον το G έχει κύκλο Euler, κάθε κορυφή του θα έχει άρτιο βαθμό. Έστω v μία κορυφή του G με βαθμό $2k$. Έαν το G έχει n κορυφές, τότε ο βαθμός της v στο $G + G$ είναι ίσος με $2k + n$, το οποίο είναι περιττός όταν το n είναι περιττός. Για παράδειγμα, εάν το Gείναι ένας απλός κύκλος μήκους 3, τότε έχει (προφανώς) κύκλο Euler, αλλά το $G + G$ δεν έχει, αφού υπάρχει κορυφή με βαθμό 5 (εδώ κάθε κορυφή έχει βαθμό 5).

4. Σωστό

Εφόσον $n \geq 3$ και το αρχικό γράφημα έχει κύκλο Hamilton, βλέπουμε ότι ο βαθμός κάθε κορυφής στο αρχικό γράφημα είναι τουλάχιστον 2. Συνεπώς, στο γράφημα $G + G$ κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον $n + 2$, ενώ το συνολικό πλήθος κορυφών είναι $N = 2n$. Δηλαδή ο βαθμός κάθε κορυφής στο $G + G$ είναι τουλάχιστον $n + 2 > N/2$. Επομένως, από το Θεώρημα του Dirac, το $G + G$ έχει κύκλο Hamilton.
Εναλλακτικά, χωρίς το Θεωρημα του Dirac, ας συμβολίσουμε με $v_1, \ldots, v_n$ τις κορυφές του $G + G$ που προέρχονται από το πρώτο "αντίγραφο" του G και με $v'_1, \ldots, v'_n$ αυτές που προέρχονται από το δεύτερο "αντίγραφο" του G. Παρατηρήστε ότι εάν $v_1, \ldots, v_n, v_1$ είναι ένας κύκλος Hamilton του G, τότε $v_1, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_n, v_1$ είναι ένας κύκλος Hamilton του $G + G$.