Κεφάλαιο 8[1]

Γραμμικές Απεικονίσεις

Τα αντικείμενα μελέτης της γραμμικής άλγεβρας είναι σύνολα διανυσμάτων που χαρακτηρίζονται με την αλγεβρική δομή των διανυσματικών χώρων. Όπως λοιπόν στην ανάλυση μελετάμε συναρτήσεις μεταξύ συνόλων πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, με ανάλογο τρόπο στην γραμμική άλγεβρα μελετάμε συναρτήσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων. Τις συναρτήσεις που διατηρούν την αλγεβρική δομή των διανυσματικών χώρων τις ονομάζουμε γραμμικές απεικονίσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε τις βασικές ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων και θα δούμε πως περιγράφονται με την άλγεβρα των πινάκων. Στην μελέτη των γραμμικών απεικονίσεων οι πίνακες παίζουν κυρίαρχο ρόλο αφού, κάθε πίνακας ορίζει μια γραμμική απεικόνιση αλλά και κάθε γραμμική απεικόνιση μπορεί να παρασταθεί με ένα πίνακα.

Αρχικά δίνουμε τον ορισμό μιας γραμμικής απεικόνισης, κατόπιν ορίζουμε δύο σημαντικούς διανυσματικούς χώρους, τον πυρήνα και την εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης. Ένας τετριμμένος πυρήνας χαρακτηρίζει τις ένα προς ένα απεικονίσεις, ενώ αντίθετα η μεγαλύτερη δυνατή εικόνα τις «επί» γραμμικές απεικονίσεις .Στη συνέχεια προσεγγίζουμε τον πυρήνα και την εικόνα με την βοήθεια γραμμικών συστημάτων και δίνουμε το σημαντικότερο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου που είναι η αντιστοιχία (ισομορφία) μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων. Τέλος, χαρακτηρίζουμε τους ισοδύναμους και τους όμοιους πίνακες.

[1] **Συγγραφέας: Γιώργος Σαραφόπουλος**

8.1 Ορισμοί και παραδείγματα

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την έννοια της απεικόνισης μεταξύ δύο συνόλων. Στην παράγραφο αυτή θα εισαγάγουμε μια ειδική μορφή απεικονίσεων μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων, τις γραμμικές απεικονίσεις Μπορούμε να πούμε ότι μια απεικόνιση μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων είναι γραμμική αν διατηρεί την δομή του διανυσματικού χώρου, δηλαδή αν μετασχηματίζει το άθροισμα δύο διανυσμάτων σε άθροισμα των εικόνων τους και το βαθμωτό πολλαπλάσιο ενός διανύσματος στο ίδιο βαθμωτό πολλαπλάσιο της εικόνας του. Ας δούμε όμως πρώτα ένα παράδειγμα.

Εισαγωγικό παράδειγμα

Θεωρούμε την απεικόνιση (συνάρτηση) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=ax$ (όπου a ένας πραγματικός αριθμός).

Παρατηρούμε ότι

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad f(x+y)=a(x+y)=ax+ay=f(x)+f(y) \text{ και}$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\quad f(\lambda x)=a(\lambda x)=\lambda(ax)=\lambda f(x)$$

Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ και}$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\ f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

Μια απεικόνιση μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων, για την οποία ισχύουν οι προηγούμενες ιδιότητες θα την λέμε γραμμική απεικόνιση.

8.1.1 Ορισμός (Γραμμικής Απεικόνισης)

Έστω V,W δύο F-διανυσματικοί χώροι ($F=\mathbb{R}$ ή $F=\mathbb{C}$). Μια απεικόνιση $L:V\to W$ θα λέγεται **γραμμική απεικόνιση** αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1) *Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων u,v του V ισχύει*

$$L(u+v)=L(u)+L(v)$$

και

2) *Για κάθε βαθμωτό μέγεθος λ και για κάθε διάνυσμα u του V ισχύει*

$$L(\lambda u)=\lambda L(u)$$

Παρατηρήσεις:

α) Οι προηγούμενες συνθήκες 1) και 2) του ορισμού ισοδυναμούν με τη συνθήκη

$$\forall u,v\in V,\forall\lambda,\mu\in F$$
$$L(\lambda u+\mu v)=\lambda L(u)+\mu L(v)$$

β) Στην περίπτωση που $V = W$, μια γραμμική απεικόνιση $L : V \to V$ λέγεται και ***γραμμικός μετασχηματισμός***

8.1.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Η ταυτοτική απεικόνιση $1_V : V \to V$ με τύπο $1_V(u) = u$, για κάθε $u \in V$ είναι γραμμική. Πράγματι,

$$\begin{aligned}&\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in F\\ &1_V(\lambda u + \mu v) = \lambda u + \mu v = \lambda 1_V(u) + \mu 1_V(v)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Η μηδενική απεικόνιση $\vartheta : V \to W$ με τύπο $\vartheta(u) = 0_W$, για κάθε $u \in V$, είναι γραμμική. Πράγματι,

$$\begin{aligned}&\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in F\\ &\vartheta(\lambda u + \mu v) = 0_W \qquad \kappa\alpha\iota\\ &\lambda \vartheta(u) + \mu \vartheta(v) = \lambda 0_W + \mu 0_W = 0_W\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται ο 3×2 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν σε κάθε διάνυσμα $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ του $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχίσουμε το διάνυσμα[2]

$$AX = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ y \end{pmatrix}$$

δημιουργούμε μια απεικόνιση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^3$. Την απεικόνιση αυτή θα την συμβολίσουμε με L_A. Δηλαδή,

$$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

με τύπο

---

[2] Θα γράφουμε τα διανύσματα του F^n ως πίνακες με μία στήλη.

$$L_A(X) = AX$$

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική.

1ος τρόπος:

Αν $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$L_A(X+Y) = L_A\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ x+x'-y-y' \\ y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= L_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + L_A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

και

$$L_A(\lambda X) = L_A\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x+\lambda y \\ \lambda x-\lambda y \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} = \lambda L_A(X)$$

2ος τρόπος:

Αν $X, Y \in \mathbb{R}^2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, επειδή η απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ορίζεται με πολλαπλασιασμό (από αριστερά) με τον πίνακα A

$$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ X \mapsto AX$$

λόγω των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού πινάκων προκύπτει:

$$L_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = L_A(X) + L_A(Y)$$

και

$$L_A(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda L_A(X)$$

Επομένως η L_A είναι γραμμική.

Παράδειγμα 4

Το προηγούμενο παράδειγμα γενικεύεται για κάθε πίνακα A τύπου $m \times n$ με στοιχεία από το F. Δηλαδή αν μας δοθεί ένας πίνακας A τύπου $m \times n$ με στοιχεία από το F, μπορούμε να δημιουργήσουμε με πολλαπλασιασμό (από τα αριστερά) με τον A μια γραμμική απεικόνιση

$$L_A : F^n \to F^m$$

με τον τύπο

$$L_A(X) = AX$$

όπου $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$.

Παράδειγμα 5

Αν $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ διάνυσμα του $\mathbb{R}^4$, θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(X) = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+d \end{pmatrix}$$

είναι γραμμική.

Πράγματι, επειδή

$$f(X) = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = AX$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η απεικόνιση f δημιουργείται με πολλαπλασιασμό (από αριστερά) με τον πίνακα A και όπως δείξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα είναι γραμμική.

Παρατήρηση:

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια γραμμική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^4$ στο $\mathbb{R}^3$ με τη βοήθεια κάποιου πίνακα τύπου 3×4 έτσι ώστε, η εικόνα ενός διανύσματος να προκύπτει με πολλαπλασιασμό του διανύσματος με αυτόν τον πίνακα. Αργότερα θα δούμε ότι το ίδιο ισχύει και σε γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ τυχαίων διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Παράδειγμα 6

Η απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},x\mapsto x^2$$

δεν είναι γραμμική, αφού

$$f(x+y)=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=f(x)+f(y)+2xy\neq f(x)+f(y)$$

Παράδειγμα 7

Έστω Α το σύνολο των συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που έχουν παραγώγους κάθε τάξης. Το σύνολο αυτό με τις συνήθεις πράξεις των συναρτήσεων αποτελεί διανυσματικό χώρο. Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση

$$D:A\to A$$

με την σχέση

$$D(f)=f'$$

όπου f' είναι η παράγωγος της f.

[Για παράδειγμα, η εικόνα $D(f)$ της συνάρτησης $f(x)=x^3$ είναι η συνάρτηση $f'(x)=3x^2$, η εικόνα $D(g)$ της συνάρτησης $g(x)=\sin x$ είναι η συνάρτηση $g'(x)=\cos x$ κ.λ.π.]

Είναι εύκολο να δείξουμε, στηριζόμενοι στις ιδιότητες της παραγώγου, ότι η απεικόνιση D είναι γραμμική.

Πράγματι,

$$(\forall f,g\in A),D(f+g)=(f+g)'=f'+g'=D(f)+D(g)$$
$$(\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall f\in A),D(\lambda f)=(\lambda f)'=\lambda f'=\lambda D(f)$$

Παράδειγμα 8

Αν $\mathbb{R}_n[x]$ είναι ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n, ορίζουμε την απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n+1}[x],p(x)\mapsto p(0)+xp(x)$$

Θα εξετάσουμε την γραμμικότητα της f.

$\forall p(x),q(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ και $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f[p(x)+q(x)] = f[(p+q)(x)] &= (p+q)(0)+x(p+q)(x) \\ &= p(0)+q(0)+x[p(x)+q(x)] \\ &= p(0)+q(0)+xp(x)+xq(x) \\ &= f[p(x)]+f[q(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[\lambda p(x)] = f[(\lambda p)(x)] &= (\lambda p)(0)+x(\lambda p)(x) = \lambda p(0)+\lambda xp(x) \\ &= \lambda[p(0)+xp(x)] = \lambda f[p(x)] \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γραμμική.

▲

Θα δούμε τώρα μια πρόταση με την βοήθεια της οποίας μπορούμε να δείξουμε ότι μια απεικόνιση δεν είναι γραμμική.

8.1.3 Θεώρημα (Αναγκαίες συνθήκες γραμμικότητας)

Αν η απεικόνιση $f:V\to W$ είναι γραμμική τότε

(1) $f(0_V)=0_W$

(2) $(\forall u\in V)\quad f(-u)=-f(u)$

Απόδειξη

(1) Έχουμε $f(0_V)=f(0_F 0_V)=0_F f(0_V)=0_W$

(2) Θα χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη ιδιότητα. Για κάθε $u\in V$

$f(u)+f(-u)=f[u+(-u)]=f(0_V)\overset{(1)}{=}0_W$. Προσθέτοντας $-f(u)$ και στα δύο μέλη προκύπτει το ζητούμενο.

■

8.1.4 Παράδειγμα

Θα εξετάσουμε αν η απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, x\mapsto\begin{pmatrix} x+1 \\ x \end{pmatrix}$$

είναι γραμμική.

Παρατηρούμε ότι

$$f(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

επομένως η f δεν είναι γραμμική.

▲

Θα εξετάσουμε τώρα την γραμμικότητα της σύνθεσης δύο γραμμικών απεικονίσεων και της αντίστροφης απεικόνισης (όταν υπάρχει).

Εισαγωγικά παραδείγματα

Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ οι γραμμικές απεικονίσεις με τύπους

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y-z\end{pmatrix}, g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x\end{pmatrix}$$

Η σύνθεση $g\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ορίζεται ως εξής:

$$(g\circ f)(X)=g[f(X)]=g[f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}]=g[\begin{pmatrix}x+y\\y-z\end{pmatrix}]=\begin{pmatrix}x+y-(y-z)\\x+y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x+z\\x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=AX$$

Επομένως η σύνθεση $g\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ είναι της μορφής L_A, με

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

και επομένως είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Παρατηρήσεις:

1) Παρατηρούμε ότι οι γραμμικές απεικονίσεις f,g είναι της μορφής $f=L_B, g=L_C$ όπου

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

και η $g\circ f=L_{CB}$, αφού

$$CB=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=A$$

2) Αυτό ισχύει για κάθε ζεύγος γραμμικών απεικονίσεων που είναι της μορφής $f=L_B, g=L_C$ για τις οποίες ορίζεται η σύνθεση $g\circ f$.

$$(g\circ f)(X)=g[f(X)]=g(BX)=C(BX)=(CB)X$$

Δηλαδή η σύνθεση είναι της μορφής $g\circ f=L_{CB}$.

▲

Γνωρίζουμε ότι μια απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι ένα προς ένα και επί (βλ. Κεφάλαιο1). Θα δείξουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη και θα εξετάσουμε την γραμμικότητα της αντίστροφης.

<u>1^{ος} τρόπος</u>:

Παρατηρούμε ότι, αν $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ τότε

$$g(X)=g(Y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2-y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=y_2 \\ x_1=x_2 \end{cases} \Leftrightarrow X=Y$$

Δηλαδή η απεικόνιση είναι ένα προς ένα.

Θα δείξουμε τώρα ότι η g είναι επί. Αρκεί για δεδομένο $Y \in \mathbb{R}^2$, η εξίσωση $g(X)=Y$ να έχει λύση ως προς X.

$$g(X)=Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-y_1=x_2 \\ x_1=y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_2 \\ y_1=y_2-x_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Επομένως η απεικόνιση είναι επί και κατά συνέπεια υπάρχει η αντίστροφή της, που όπως φαίνεται από την σχέση $(*)$ είναι

$$g^{-1}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

με τύπο

$$g^{-1}(X)=g^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = DX$$

όπου

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι δηλαδή της μορφής $g^{-1}=L_D$ και άρα είναι γραμμική. (Παρατηρούμε ότι ο πίνακας D είναι ο αντίστροφος του C).

<u>2^{ος} τρόπος</u>:

Επειδή $g = L_C$ έχουμε

$$g(X) = g(Y) \Leftrightarrow CX = CY,$$

ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος (ορίζουσα διάφορη του μηδενός) άρα η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$CX = CY \Leftrightarrow C^{-1}CX = C^{-1}CY \Leftrightarrow X = Y$$

Επομένως η απεικόνιση είναι 1-1.

Από την σχέση $g(X) = Y$ προκύπτει

$$CX = Y \Leftrightarrow X = C^{-1}Y$$

Άρα η g είναι επί και επομένως αντιστρέψιμη, με αντίστροφη την

$$g^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g^{-1}(X) = C^{-1}X$$

▲

Οι επόμενες προτάσεις γενικεύουν τις προηγούμενες παρατηρήσεις μας.

8.1.5 Θεώρημα (Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων)

Αν $f : U \to V$ *και* $g : V \to W$ *είναι γραμμικές τότε και η σύνθεσή τους* $g \circ f : U \to W$ *είναι γραμμική.*

Απόδειξη

Έστω $u_1, u_2 \in U$ και $a, b \in F$. Από τον ορισμό της σύνθεσης και την γραμμικότητα των f και g προκύπτει

$$(g \circ f)(au_1 + bu_2) \overset{\text{ορισμός}}{=} g[f(au_1 + bu_2)] \overset{f-\text{γραμμική}}{=} g[af(u_1) + bf(u_2)]$$
$$\overset{g-\text{γραμμική}}{=} ag[f(u_1)] + bg[f(u_2)] = a(g \circ f)(u_1) + b(g \circ f)(u_2)$$

Άρα η $g \circ f : U \to W$ είναι γραμμική.

■

8.1.6 Θεώρημα (Αντίστροφη γραμμικής απεικόνισης)

Αν η γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ *είναι αντιστρέψιμη τότε και η αντίστροφη* $f^{-1} : W \to V$ *είναι γραμμική.*

Απόδειξη

Έστω $w_1, w_2 \in W$, γνωρίζουμε ότι μια απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι ένα προς ένα και επί. Επομένως υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $u_1, u_2 \in V$ έτσι ώστε $w_1 = f(u_1), w_2 = f(u_2)$. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$

$$f^{-1}(w_1+w_2)=f^{-1}[f(u_1)+f(u_2)] \overset{f-\gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\eta}}{=} f^{-1}[f(u_1+u_2)]$$
$$\overset{o\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma}{=} (f^{-1}\circ f)(u_1+u_2)=(1_V)(u_1+u_2)=u_1+u_2=f^{-1}(w_1)+f^{-1}(w_2)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αν $a\in F, w\in W$, $f^{-1}(aw)=af^{-1}(w)$

$$f^{-1}(aw) \overset{w=f(u)}{=} f^{-1}[af(u)]=f^{-1}[f(au)]=(f^{-1}\circ f)(au)$$
$$=(1_V)(au)=au=af^{-1}(w)$$

Άρα η $f^{-1}:W\to V$ είναι γραμμική.

■

8.1.7 Ορισμός (ισομορφισμού)

*Μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$ για την οποία υπάρχει η αντίστροφη λέγεται **ισομορφισμός,** οι δε χώροι V,W λέγονται **ισόμορφοι**. Στην περίπτωση που οι διανυσματικοί χώροι V,W είναι ισόμορφοι, γράφουμε $V\cong W$.*

Ένα σημαντικό παράδειγμα ισομορφισμού.

Θα δείξουμε ότι για κάθε επιλογή βάσης σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης n, υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ αυτού του χώρου και του F^n

Γνωρίζουμε ότι αν $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ μια **διατεταγμένη βάση** . του διανυσματικού χώρου V, τότε για κάθε διάνυσμα $v\in V$ υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $x_1,\dots,x_n$ (οι συντεταγμένες του διανύσματος ως προς την συγκεκριμένη βάση) έτσι ώστε

$$v=x_1v_1+\dots+x_nv_n$$

Δημιουργείται έτσι ένα στοιχείο του F^n το $(x_1\ \dots\ x_n)^T$ που το λέμε διάνυσμα συντεταγμένων του v ως προς την βάση B και το συμβολίζουμε με $[v]_B$.

Δηλαδή

$$[v]_B=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα, αν $\dim V=3$ και $v=2v_1-3v_2+v_3$ τότε

$$[v]_B=\begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι με την επιλογή της διαταταγμένης βάσης $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ ο χώρος V γίνεται ισόμορφος με τον χώρο F^n

8.1.8 Θεώρημα

Η απεικόνιση: $\Phi_B : V \to F^n, v \mapsto [v]_B$ είναι ένας ισομορφισμός.

Απόδειξη

Θα δείξουμε αρχικά ότι είναι γραμμική.

Έστω $u,v\in V, \lambda \in F$. Αν $v = x_1v_1+\ldots+x_nv_n$ και $u = y_1v_1+\ldots+y_nv_n$, τότε

$$v+u = v = (x_1+y_1)v_1+\ldots+(x_n+y_n)v_n$$

και

$$\lambda v = (\lambda x_1)v_1+\ldots+(\lambda x_n)v_n$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\Phi_B(v+u) &= \begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & \ldots & x_n+y_n\end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix}^T \\ &= \Phi_B(v)+\Phi_B(u)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\Phi_B(\lambda v) &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \ldots & \lambda x_n\end{pmatrix}^T \\ &= \lambda\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{pmatrix}^T \\ &= \lambda\Phi_B(v)\end{aligned}$$

Η απεικόνιση είναι 1-1 διότι διαφορετικά διανύσματα έχουν διαφορετικές συντεταγμένες ως προς τη δεδομένη βάση. Ακόμη είναι και επί διότι αν $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}^T \in F^n$ υπάρχει το διάνυσμα $v = x_1v_1+\ldots+x_nv_n \in V$ έτσι ώστε $\Phi_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}^T$. Επομένως είναι ένας ισομορφισμός.

■

Παραδείγματα

1) Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2, θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $B=\{1,x,x^2\}$. Κάθε στοιχείο $p(x)=a+bx+cx^2$ του $\mathbb{R}_2[x]$ απεικονίζεται, μέσω της $\Phi_B:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ στο διάνυσμα

$$[p(x)]_B = \begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}^T$$

και ισχύει $\mathbb{R}_2[x] \cong \mathbb{R}^3$.

2) Στον διανυσματικό χώρο $M_2(\mathbb{R})$ των πινάκων τύπου 2×2, θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $B=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$, όπου

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Κάθε στοιχείο του $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ που γράφεται με νοναδικό τρόπο

$$A=aE_1+bE_2+cE_3+dE_4$$

απεικονίζεται, μέσω της $\Phi_B : M_2(\mathbb{R})\to \mathbb{R}^4$ στο διάνυσμα

$$[A]_B=\begin{pmatrix}a & b & c & d\end{pmatrix}^T$$

και ισχύει $M_2(\mathbb{R})\cong \mathbb{R}^4$.

▲

Θα αποδείξουμε τώρα μια πρόταση , σύμφωνα με την οποία, η ισότητα δύο γραμμικών απεικονίσεων πάνω σε ένα σύνολο γεννητόρων συνεπάγεται την ισότητά τους σε κάθε στοιχείο του διανυσματικού χώρου. Δηλαδή, αν δύο γραμμικές απεικονίσεις παίρνουν τις ίδιες τιμές πάνω σε ένα σύνολο γεννητόρων τότε είναι ίσες.

8.1.9 Θεώρημα (Αναγκαία και ικανή συνθήκη ισότητας γραμμικών απεικονίσεων)

Υποθέτουμε ότι $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *είναι ένα σύνολο γεννητόρων του* V. *Αν* $f:V\to W$ *και* $g:V\to W$ *γραμμικές απεικονίσεις έτσι ώστε* $f(v_i)=g(v_i),\forall i=1,\ldots,n$, *τότε* $f(v)=g(v),\forall v\in V$. *Δηλαδή* $f=g$.

Απόδειξη

Επειδή το σύνολο $\{v_1,\ldots,v_n\}$ παράγει τον V, αν $v\in V$ υπάρχουν βαθμωτά μεγέθη $x_1,x_2,\ldots,x_n$ έτσι ώστε $v=x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_nv_n$. Επομένως

$$\begin{aligned} f(v)&=f(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\ldots+\lambda_nv_n)=\lambda_1f(v_1)+\lambda_2f(v_2)+\ldots+\lambda_nf(v_n)\\ &=\lambda_1g(v_1)+\lambda_2g(v_2)+\ldots+\lambda_ng(v_n)=g(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\ldots+\lambda_nv_n)\\ &=g(v)\end{aligned}$$

Επειδή $f(v)=g(v),\forall v\in V$ έπεται ότι $f=g$

■

Θα εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα δημιουργίας μιας γραμμικής απεικόνισης, αν γνωρίζουμε μια αντιστοιχία που ορίζεται πάνω στα στοιχεία μιας βάσης.

Εισαγωγικό παράδειγμα (Απεικόνιση ορισμένη πάνω σε βάση)

1) Τα διανύσματα

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι γεννήτορες του $\mathbb{R}^2$. Αν ορίσουμε μια αντιστοιχία $f : \{e_1, e_2, u\} \to \{e_1, e_2, u\}$, με

$$f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_2, f(u) = u$$

είναι προφανές ότι η f δεν είναι συνάρτηση. Δηλαδή, μια τυχαία αντιστοιχία οριζόμενη πάνω σε γεννήτορες δεν οδηγεί αναγκαστικά σε συνάρτηση.

2) Ας υποθέσουμε τώρα, ότι ορίζουμε την αντιστοιχία $f : \{e_1, e_2, u\} \to \{e_1, e_2, u\}$ με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι συνάρτηση. Για παράδειγμα , έστω ότι

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, f(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η προηγούμενη συνάρτηση επεκτείνεται σε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Η απεικόνιση f δεν είναι γραμμική, αφού

$$f(e_1 + e_2) = f(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, f(e_1) + f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f ορισμένη πάνω σε γεννήτορες δεν επεκτάθηκε σε γραμμική συνάρτηση.

3) Αν ορίσουμε τώρα την συνάρτηση f πάνω στη βάση $f : \{e_1, e_2\} \to \{e_1, e_2\}$, με

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

μπορούμε να την επεκτείνουμε σε μια γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Πράγματι, αν $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ορίζουμε

$$f(X) = xf(e_1) + yf(e_2) = x\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + y \end{pmatrix}$$

που είναι γραμμική. Η γραμμική απεικόνιση f είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα

$$f(e_1)=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, f(e_2)=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

διότι, αν $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ είναι μια γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε

$$g(e_1)=f(e_1), g(e_2)=f(e_2)$$

τότε οι f,g ταυτίζονται πάνω σε ένα σύνολο γεννητόρων και από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι είναι ίσες.

8.1.10 Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα γραμμικής απεικόνισης ορισμένης πάνω σε βάση)

Έστω $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ *μια βάση του διανυσματικού χώρου* V *. Αν* $w_1,w_2,\ldots,w_n$ *είναι στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου* W *, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f:V\to W$ *έτσι ώστε* $f(v_i)=w_i$*, (* $i=1,\ldots,n$*).*

Απόδειξη

Αρχικά θα δείξουμε την ύπαρξη μιας γραμμικής απεικόνισης που ικανοποιεί τις υποθέσεις.

Έστω $v\in V$, τότε υπάρχουν μοναδικά βαθμωτά μεγέθη $x_1,x_2,\ldots,x_n$ έτσι ώστε $v=x_1v_1+\ldots+x_nv_n$. Θέτουμε

$$f(v)=x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_nw_n$$

ορίζουμε έτσι μια απεικόνιση $f:V\to W$ και θα δείξουμε ότι είναι γραμμική.

Πράγματι, αν $w=y_1v_1+\ldots+y_nv_n$ έχουμε

$$\begin{aligned}f(v+w)&=(x_1+y_1)w_1+(x_2+y_2)w_2+\ldots+(x_n+y_n)w_n\\&=(x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_nw_n)+(y_1w_1+y_2w_2+\ldots+y_nw_n)\\&=f(v)+f(w)\end{aligned}$$

και αν $\lambda\in F$

$$\begin{aligned}f(\lambda v)&=(\lambda x_1)w_1+(\lambda x_2)w_2+\ldots+(\lambda x_n)w_n\\&=\lambda\left(x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_nw_n\right)=\lambda f(v)\end{aligned}$$

Η γραμμική απεικόνιση f εξ' ορισμού ικανοποιεί την συνθήκη $f(v_i)=w_i$, ($i=1,\ldots,n$).

Θα δείξουμε τώρα ότι είναι μοναδική.

Αν υπάρχει και μια δεύτερη γραμμική απεικόνιση $g : V \to W$ έτσι ώστε $g(v_i) = w_i$, τότε $f(v_i) = g(v_i)$, $(i = 1,...,n)$, δηλαδή οι γραμμικές απεικονίσεις f και g ταυτίζονται σε ένα σύνολο γεννητόρων και επομένως θα είναι ίσες (Θεώρημα 8.1.9).

■

8.1.11 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Έστω η μοναδική γραμμική απεικόνιση (βλ. προηγούμενο θεώρημα)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

έτσι ώστε

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^T$$
$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}^T$$
$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

όπου e_1, e_2, e_3 η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$.

Να βρεθεί ο τύπο της.

Λύση

Αν $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ τότε, επειδή

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

προκύπτει

$$f(X) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$

και επειδή η f είναι γραμμική η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$f(X) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$
$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x \\ -y \\ -4x - 3y \end{pmatrix} = AX$$

όπου

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Έστω

$$u_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, u_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T, u_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$$

επειδή η ορίζουσά τους είναι διάφορη του μηδενός τα διανύσματα αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Δίνεται η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

τέτοια ώστε

$$f(u_1)=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^T, f(u_2)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T, f(u_3)=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}^T$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση:

Αν X τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$

$$f(X)=f(au_1+bu_2+cu_3)=af(u_1)+bf(u_2)+cf(u_3)$$

Αρκεί επομένως να βρούμε τις συντεταγμένες των διανύσματος X ως προς τη βάση u_1,u_2,u_3.

Αν $X=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^T$ οι συντεταγμένες ενός διανύσματος X ως προς την συνήθη βάση, τότε θα αναζητήσουμε τους μοναδικούς πραγματικούς αριθμούς a,b,c έτσι ώστε

$$X=au_1+bu_2+cu_3$$

Δηλαδή

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Οδηγούμαστε έτσι στην επίλυση, ως προς a,b,c ,του συστήματος

$$\begin{cases} a+b=x \\ a+c=y \\ b+c=z \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

και με γραμμοπράξεις προκύπτει

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{x+y-z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{x-y+z}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-x+y+z}{2} \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\begin{cases} a = \dfrac{x+y-z}{2} \\ b = \dfrac{x-y+z}{2} \\ c = \dfrac{-x+y+z}{2} \end{cases}$$

Άρα, αν $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(X) &= af(u_1) + bf(u_2) + cf(u_3) \\ &= \frac{x+y-z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x-y+z}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-x+y+z}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = AX \end{aligned}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

8.1.12 Ο διανυσματικός χώρος των γραμμικών απεικονίσεων

Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ είναι οι γραμμικές απεικονίσεις με τύπους

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(X) = AX, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+z \end{pmatrix} \Leftrightarrow g(X) = BX, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε μπορούμε να ορίσουμε:

α) το άθροισμά τους $f+g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ως εξής:

$$(f+g)(X) = f(X) + g(X) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y \\ x+z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = CX, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

που είναι της μορφής L_C, και επομένως είναι γραμμική. (Παρατηρούμε ότι $C = A+B$).

β) το βαθμωτό πολλαπλάσιο $\lambda f, (\lambda \in \mathbb{R})$ της f ως εξής:

$$(\lambda f)(X) = \lambda f(X) = \lambda \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda y \\ \lambda y - \lambda z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = BX, B = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

που είναι της μορφής L_B και άρα είναι μια γραμμική απεικόνιση (παρατηρούμε ότι $B = \lambda A$).

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το σύνολο $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ των γραμμικών απεικονίσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^3$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^2$, με τις προηγούμενες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ικανοποιεί όλα τα αξιώματα που ορίζουν ένα διανυσματικό χώρο. (Προφανώς το μηδενικό στοιχείο είναι η μηδενική απεικόνιση).

Ας γενικεύσουμε. Συμβολίζουμε με $L(V,W)$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων του V στον W, στο σύνολο αυτό θα ορίσουμε μια πράξη πρόσθεσης και μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού έτσι ώστε να του δώσουμε δομή διανυσματικού χώρου.

Αν $f : V \to W$ και $g : V \to W$ δύο γραμμικές απεικονίσεις και $\lambda \in F$, ορίζουμε το άθροισμα και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$(1) f+g : V \to W, u \mapsto f(u)+g(u)$$
$$(2) \lambda f : V \to W, u \mapsto \lambda f(u)$$

Θα δείξουμε ότι οι δύο αυτές απεικονίσεις είναι γραμμικές.

Για το άθροισμα έχουμε:

$$\forall u, v \in V, \forall \lambda \in F,$$
$$(f+g)(u+v) = f(u+v)+g(u+v) = f(u)+f(v)+g(u)+g(v)$$
$$= (f+g)(u)+(f+g)(v)$$
$$(f+g)(\lambda u) = f(\lambda u)+g(\lambda u) = \lambda f(u)+\lambda g(u)$$
$$= \lambda[f(u)+g(u)] = \lambda(f+g)(u)$$

Άρα η $f+g$ είναι γραμμική.

Για τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίστηκε από την σχέση (2) η απόδειξη γίνεται με όμοιο τρόπο.

Είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει μηδενικό στοιχείο, είναι η μηδενική απεικόνιση

$$\vartheta : V \to W, u \mapsto 0_W$$

Κάθε γραμμική απεικόνιση f έχει αντίθετη την $-f = (-1)f$ και ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα που ορίζουν ένα διανυσματικό χώρο.

8.1.13 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Έστω

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \mapsto \begin{pmatrix} x+y & x-y & y \end{pmatrix}^T$$

Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.

Λύση

Ο τύπος της f γράφεται

$$f(X) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AX, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή η απεικόνιση είναι της μορφής $f = L_A$ και επομένως είναι γραμμική.

Παράδειγμα 2

Έστω $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών πινάκων και $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R}), A \mapsto AX + XA$$

να δείξετε ότι είναι γραμμική.

Λύση

Θα δούμε αν ισχύουν οι δύο ιδιότητες της γραμμικότητας
Αν $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, τότε

$$\begin{aligned} f(A+B) &= (A+B)X + X(A+B) = (AX+XA)+(BX+XB) \\ &= f(A)+f(B) \end{aligned}$$

και για $a \in \mathbb{R}$

$$f(aA) = (aA)X + X(aA) = a(AX+XA) = af(A)$$

επομένως η f είναι γραμμική.

Παράδειγμα 3

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Να βρείτε τον τύπο της.

Λύση

Είναι προφανές ότι τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν βάση του πεδίου ορισμού. Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων αυτής της βάσης.
Από την σχέση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

προκύπτει

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = -2x+y \end{cases}$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= f[x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2x+y)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}] = xf(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) + (-2x+y)f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\
&= x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -5x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= AX, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση (βλ. και επόμενο παράδειγμα):

Ο πίνακας

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}
$$

είναι αντιστρέψιμος, άρα και η απεικόνιση f έχει αντίστροφη την $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f^{-1}(X) = A^{-1}X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}X \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}y \\ x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 4

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$
f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}
$$

Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.

Λύση

Αν θέσουμε $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, η απεικόνιση γράφεται

$$
\begin{aligned}
f(X) = f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= AX, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος έχουμε

$$f(X)=f(Y)\Leftrightarrow AX=AY\Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}AY\Leftrightarrow X=Y$$

δηλαδή η απεικόνιση είναι ένα προς ένα.

Ακόμη, αν $Y_0\in\mathbb{R}^2$ η εξίσωση $f(X)=Y_0$ γράφεται ισοδύναμα

$$AX=Y_0\Leftrightarrow X=A^{-1}Y_0$$

έχει δηλαδή λύση ως προς X, άρα η f είναι επί και κατά συνέπεια αντιστρέψιμη.

Η αντίστροφη $f^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ έχει τύπο

$$f^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=f^{-1}(X)=A^{-1}X=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}X$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\\\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 5

Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ με τύπους

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}2x\\y+z\end{pmatrix}, g(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x-z\\y\end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι απεικονίσεις $f+g, 2f, 3f-5g$.

Λύση

Αν θέσουμε $X=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}^T$, τότε

$$(f+g)(X)=f(X)=g(X)=\begin{pmatrix}2x\\y+z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x-z\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-z\\2y+z\end{pmatrix}$$
$$(2f)(X)=2f(X)=2\begin{pmatrix}2x\\y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x\\2y+2z\end{pmatrix}$$
$$(3f-5g)(X)=3f(X)-5g(X)=3\begin{pmatrix}2x\\y+z\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}x-z\\y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6x\\3y+3z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5x-5z\\5y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-5z\\-2y+3z\end{pmatrix}$$

2^{ος} τρόπος:

$$(f+g)(X)=f(X)+g(X)=AX+BX=(A+B)X$$
$$=CX, C=A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2f)(X)=2f(X)=2(AX)=(2A)X$$
$$=DX, D=2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3f-5g)(X)=3f(X)-5g(X)=3AX-5BX=(3A-5B)X$$
$$=EX, E=3A-5B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 6

Έστω οι απεικονίσεις $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπους

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 2x \\ y+z \end{pmatrix}, g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι απεικονίσεις $f\circ g, g\circ f$.

Λύση

Η $f\circ g$ δεν ορίζεται. Για την $g\circ f$, έχουμε: $g\circ f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$(g\circ f)(X)=g(f(X))=g(\begin{pmatrix} 2x \\ y+z \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} y+z \\ 2x \end{pmatrix}$$

2^{ος} τρόπος

Επειδή

$$f(X)=AX, A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, g(X)=BX, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(g\circ f)(X)=g(f(X))=g(AX)=BAX$$
$$=CX, C=BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ασκήσεις 8.1

1) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω απεικονίσεις $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικές:

(1) $f\left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T\right)=\begin{pmatrix} y & z & 0 \end{pmatrix}^T$

(2) $f\left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} z & -y & x \end{pmatrix}^T$

(3) $f\left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} |x| & -z & 0 \end{pmatrix}^T$

(4) $f\left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} x-1 & z & 0 \end{pmatrix}^T$

(5) $f\left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} x+y & z & 0 \end{pmatrix}^T$

(6) $f\left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} x-2y+3z & x-z & -x-y \end{pmatrix}^T$

2) Δίνεται ένας τετραγωνικός μη μηδενικός πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω απεικονίσεις $T_A : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι γραμμικές.

(1) $T_A(X) = XA - AX$

(2) $T_A(X) = XA^2 - AX^2$

3) Να εξετάσετε αν η παρακάτω απεικόνιση είναι γραμμική

$f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$ με τύπο $f\left(p(x)\right) = 1 + xp(x)$

4) Έστω $I : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση

$$I\left(p(x)\right) = \int_0^1 p(x)dx\,,$$

να δείξετε ότι είναι γραμμική.

Απαντήσεις / Υποδείξεις 8.1

1)

(1), (2), (5), (6) Είναι γραμμικές [χρησιμοποιήστε τον ορισμό 8.1.1, βλ. παράδειγμα 8.1.13 1)].(3), (4) δεν είναι γραμμικές (χρησιμοποιήστε το θεώρημα 8.1.3, βλ. παράδειγμα 8.1.4)

2)

(1) Είναι γραμμική, βλ παράδειγμα 8.1.13 2).

(2) Δεν είναι γραμμική, (βλ. Θεώρημα 8.1.3)

3) Δεν είναι γραμμική, βλ. Θεώρημα 8.1.3

4) Είναι γραμμική (χρησιμοποιήστε ιδιότητες του ολοκληρώματος).

8.2 Πυρήνας και εικόνα

Θα ορίσουμε δύο σημαντικούς διανυσματικούς χώρους, τον πυρήνα και την εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης. Ένας τετριμμένος πυρήνας χαρακτηρίζει τις ένα προς ένα απεικονίσεις, ενώ αντίθετα η μεγαλύτερη δυνατή εικόνα τις «επί» γραμμικές απεικονίσεις .

8.2.1 Ορισμός (Πυρήνα και Εικόνας)

1) ***Ο πυρήνας*** *$Kerf$ μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to W$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων του V που απεικονίζονται στο μηδενικό στοιχείο του W. Δηλαδή*

$$Kerf = \{ v \in V, f(v) = 0_W \} \subseteq V .$$

2) Υπενθυμίζουμε ότι ***η εικόνα*** *$Im\,f$ μιας απεικόνισης αποτελείται από τα διανύσματα $w \in W$ τα οποία έχουν πρότυπο, δηλαδή τα στοιχεία του πεδίου τιμών για τα οποία υπάρχει $v \in V$ έτσι ώστε $w = f(v)$.*

$$Im\,f = \{ w \in W, \exists v \in V, w = f(v) \} \subseteq W$$

8.2.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \mapsto 3x - 2y$$

Θα αναζητήσουμε :
α) Τα διανύσματα που αποτελούν τον πυρήνα $Kerf$ της f. Δηλαδή, τα διανύσματα $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$ του $\mathbb{R}^2$ που απεικονίζονται στο μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}$. Επειδή

$$3x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x$$

τα διανύσματα του πυρήνα είναι το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{2}{3}x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & \frac{2}{3}x \end{pmatrix}^T, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Παρατηρούμε ότι ο πυρήνας της f είναι ο μονοδιάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T$ και φυσικά και από κάθε συγγραμμικό του όπως το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^T$

β) Τα διανύσματα του πεδίου τιμών που ανήκουν στην εικόνα $Im\, f$. Δηλαδή, τα διανύσματα του πεδίου τιμών τα οποία έχουν πρότυπα. Επομένως, αναζητούμε τους πραγματικούς αριθμούς που γράφονται στην μορφή $3x-2y,(x,y\in\mathbb{R})$.

Επειδή κάθε πραγματικός αριθμός z γράφεται $z=3\left(\frac{2z}{3}\right)-2\left(\frac{z}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι η εικόνα της f είναι το $\mathbb{R}$. (Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των διαστάσεων του πυρήνα και της εικόνας μας δίνουν την διάσταση του πεδίου ορισμού της γραμμικής απεικόνισης).

Παράδειγμα 2

Έστω

$$D: A\to A$$

η γραμμική απεικόνιση του παραδείγματος 7 της 8.1.2.

Ο πυρήνας της D είναι:

$$KerD=\{f\in A\,/\,D(f)=0\}=\{f\in A\,/\,f'=0\}=\{c\,/\,c\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R},$$

διότι, αν μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση έχει μηδενική παράγωγο τότε η συνάρτηση είναι σταθερή.

Η εικόνα της D είναι

$$Im\, f=\{D(f), f\in A\}=\{f', f\in A\}$$

δηλαδή μια συνάρτηση g του Α ανήκει στην εικόνα της απεικόνισης αν, και μόνο αν μπορεί να γραφεί σαν παράγωγο μιας άλλης συνάρτησης f του Α ($g=f'$).

Επομένως, πρόκειται για τις συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει παράγουσα (ή αρχική). Από την Ανάλυση γνωρίζουμε ότι κάθε συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση έχει παράγουσα και επομένως το πεδίο τιμών είναι το Α. Η απεικόνιση είναι επί του Α.

Παράδειγμα 3

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

με τύπο

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\\y\end{pmatrix}$$

α) Θα βρούμε τον πυρήνα $Kerf$ της f

Παρατηρούμε ότι η f γράφεται

$$f(X)=f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=AX, A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επειδή ο πυρήνας αποτελείται από τα διανύσματα του πεδίου ορισμού που απεικονίζονται στο μηδενικό διάνυσμα του πεδίου τιμών, αρκεί να λύσουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$X \in Kerf \Leftrightarrow f(X)=O \Leftrightarrow AX=O \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ \quad y=0 \end{cases}$$

Αυτό το σύστημα έχει μοναδική λύση $x=y=0$, άρα το μηδενικό διάνυσμα $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ είναι το μόνο στοιχείο του πυρήνα. Δηλαδή ο πυρήνας είναι ο τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

$$Kerf=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right\}$$

β) Θα βρούμε την εικόνα της $Im\, f$ της f

Επειδή

$$Y \in Im\, f \Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{R}^2 : Y=f(X)$$

και επειδή

$$f(X)=f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$Y \in Im\, f \Leftrightarrow \exists X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : Y=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

που σημαίνει ότι ένα διάνυσμα του πεδίου τιμών ανήκει στην εικόνα της απεικόνισης μόνο όταν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$u_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, u_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Δηλαδή το Y ανήκει στην εικόνα μόνο όταν ανήκει στον χώρο που παράγεται από αυτά τα διανύσματα. Επομένως, η εικόνα παράγεται από τα διανύσματα u_1, u_2 που προφανώς είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση της εικόνας. Κατά συνέπεια η εικόνα παράγεται από τις στήλες του πίνακα A.

$$Im\, f = span(u_1, u_2) \text{ και } dim(Im\, f) = 2$$

Παράδειγμα 4

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+d \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθεί ο πυρήνας της

Λύση

Αρκεί να λύσουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b-c=0 \\ a+d=0 \end{cases}$$

Το προηγούμενο σύστημα είναι ισοδύναμο με

$$\begin{cases} a=-b \\ b=c \\ a=-d \end{cases}$$

οπότε ο πυρήνας αποτελείται από τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} -b \\ b \\ b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (b \in \mathbb{R})$$

Δηλαδή ο πυρήνας παράγεται από το διάνυσμα $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Επομένως

$$dim(Ker f) = 1$$

β) Να βρεθεί η εικόνα της f.

Λύση

Επειδή

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

η εικόνα παράγεται από τα διανύσματα

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

που, αφού ανήκουν σε τρισδιάστατο διανυσματικό χώρο είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Επειδή η ορίζουσα που σχηματίζουν τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 είναι διάφορη του μηδενός

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

τα u_1, u_2, u_3 είναι μια βάση της εικόνας. Επομένως

$$dim(Im\, f\,) = 3\,.$$

Παρατηρήσεις:

1) Μπορούμε να εξετάσουμε την γραμμική ανεξαρτησία των

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

κάνοντας γραμμοπράξεις στον πίνακα που έχει ως γραμμές αυτά τα διανύσματα όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5.

Πράγματι,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα τα τρία πρώτα διανύσματα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

2) Στα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρήσαμε ότι το άθροισμα των διαστάσεων του πυρήνα και της εικόνας μας δίνουν την διάσταση του πεδίου ορισμού της γραμμικής απεικόνισης.
3) Η διάσταση της εικόνας ισούται με την τάξη του πίνακα που προκύπτει από τον τύπο της απεικόνισης.

▲

Στα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε ότι ο πυρήνας και η εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης είναι διανυσματικοί υποχώροι του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών αντίστοιχα. Στην επόμενη πρόταση το αποδεικνύουμε για κάθε γραμμική απεικόνιση.

8.2.3 Θεώρημα (Δομή πυρήνα και εικόνας)

Αν $f: V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση τότε:

1) *ο πυρήνας της f είναι διανυσματικός υπόχωρος του V*
2) *η εικόνα της f είναι διανυσματικός υπόχωρος του W*

Απόδειξη

1)Επειδή $f(0_V) = 0_W$, το μηδενικό στοιχείο του V ανήκει στον πυρήνα, άρα ο πυρήνας είναι ένα μη κενό σύνολο.
Αν $u, v \in Kerf$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $u + v \in Kerf$ και $\lambda u \in Ker\, f$ διότι
$f(u+v) = f(u) + f(v) = 0_W + 0_W = 0_W$. Και $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda 0_W = 0_W$
Επομένως το σύνολο $Kerf$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και άρα είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

2) Επειδή $f(0_V) = 0_W$, το μηδενικό στοιχείο του W ανήκει στην εικόνα άρα η εικόνα είναι ένα μη κενό σύνολο.
Αν $u, v \in Im\, f$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $u + v \in Im\, f$ και $\lambda u \in Im\, f$ διότι επειδή τα στοιχεία u και v ανήκουν στην εικόνα υπάρχουν $u', v' \in V$ έτσι ώστε $u = f(u'), v = f(v')$.
Επομένως $u + v = f(u') + f(v') = f(u' + v')$. Δηλαδή το $u + v$ είναι η εικόνα του $u' + v'$ που είναι στοιχείο του V. Ομοίως το λu είναι η εικόνα του $\lambda u' \in V$ αφού $\lambda u = \lambda f(u') = f(\lambda u')$. Άρα η εικόνα της f είναι διανυσματικός υπόχωρος του W.

■

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι ο πυρήνας χαρακτηρίζει τις 1-1 γραμμικές απεικονίσεις.

8.2.4 Θεώρημα

Αν $f: V \to W$ γραμμική απεικόνιση τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Η f είναι 1-1

(2) $Kerf = \{0_V\}$

Απόδειξη

$(1) \Rightarrow (2)$: Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1. Έστω $v \in Kerf$, τότε $f(v) = 0_W$ που γράφεται $f(v) = f(0_V)$, επομένως $v = 0_V$. Άρα $Kerf = \{0_V\}$.

$(2) \Rightarrow (1)$: Υποθέτουμε ότι $Kerf = \{0_V\}$. Έστω $f(u) = f(v)$, λόγω της γραμμικότητας της f η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow f(u) - f(v) = 0_W \Leftrightarrow f(u-v) = 0_W \Leftrightarrow u - v \in Kerf$$

Επομένως, $u - v = 0_V \Leftrightarrow u = v$ και η) η f είναι 1-1.

■

Παράδειγμα

Η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ του παραδείγματος 3 της 8.2.2 είναι ένα προς ένα διότι

$$Kerf = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T \right\}.$$

▲

Είδαμε στο ίδιο παράδειγμα ότι $dim(Im\, f) = 2$. Παρατηρούμε ότι

$$dim\, \mathbb{R}^2 = dim(Kerf) + dim(Im\, f)$$

Στο παράδειγμα 4 της 8.2.2 θεωρήσαμε μια γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ και δείξαμε ότι $dim(Kerf) = 1$ και $dim(Im\, f) = 3$, άρα και εδώ παρατηρούμε ότι ισχύει

$$dim\, \mathbb{R}^4 = dim(Kerf) + dim(Im\, f)$$

Στο ίδιο παράδειγμα, μια βάση του πυρήνα είναι το διάνυσμα

$$u = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

και μια βάση της εικόνας αποτελείται από τα διανύσματα

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, w_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες βάσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε μια βάση του πεδίου ορισμού. Πράγματι, ας αναζητήσουμε διανύσματα v_1, v_2, v_3 του $\mathbb{R}^4$ που έχουν ως εικόνες τα w_1, w_2, w_3 αντίστοιχα. Εύκολα βρίσκουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Επειδή τα διανύσματα u, v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το σύνολο $\{u, v_1, v_2, v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$. Στην ιδέα αυτή της κατασκευής μιας βάσης του πεδίου ορισμού από μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας στηρίζεται η απόδειξη του επόμενου σημαντικού θεωρήματος.

8.2.5 Θεώρημα (της διάστασης)

Αν οι διανυσματικοί χώροι V και W έχουν πεπερασμένη διάσταση και $f: V \to W$ γραμμική απεικόνιση τότε:

$$\dim V = \dim(Ker f) + \dim(Im\, f)$$

Απόδειξη

Αν η εικόνα αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα , τότε $Ker f = V$ και το θεώρημα είναι προφανές. Αν $Im\, f \neq \{0_W\}$ έστω $\dim Im\, f = s > 0$ και $\{w_1, ..., w_s\}$ μία βάση της , οπότε υπάρχουν $v_1, ..., v_s \in V$ έτσι ώστε $f(v_i) = w_i, (i = 1, 2, ..., s)$.

Αν ο πυρήνας δεν αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα θα υπάρχει μια βάση του, έστω η $\{u_1, ..., u_q\}$. Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι η $\{u_1, ..., u_q, v_1, ..., v_s\}$ είναι μια βάση του V.

Έστω $v \in V$, επειδή $f(v) \in Im\, f$ υπάρχουν αριθμοί $x_1, ..., x_s$ έτσι ώστε

$$f(v) = x_1 w_1 + ... + w_s x_s$$

Επειδή $f(v_i) = w_i, (i = 1, 2, ..., s)$, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$f(v) = x_1 f(v_1) + ... + x_s f(v_s)$$

και επειδή η f είναι γραμμική καταλήγουμε στην σχέση

$$f(v) = f(x_1 v_1 + ... + x_s v_s)$$

Επομένως

$$f(v - x_1 v_1 + ... + x_s v_s) = 0_W$$

Άρα

$$v - x_1v_1 + ... + x_sv_s \in Kerf$$

Επειδή $\{u_1,...,u_q\}$ είναι μια βάση του πυρήνα υπάρχουν αριθμοί $y_1,...,y_s$ τέτοιοι ώστε

$$v - x_1v_1 + ... + x_sv_s = y_1u_1 + ... + y_qu_q$$

Επομένως

$$v = x_1v_1 + ... + x_sv_s + y_1u_1 + ... + y_qu_q$$

Δηλαδή το σύνολο $\{u_1,...,u_q,v_1,...,v_s\}$ παράγει τον V. Θα δείξουμε τώρα την γραμμική ανεξαρτησία.

Έστω

$$x_1v_1 + ... + x_sv_s + y_1u_1 + ... + y_qu_q = 0_V \quad (*)$$

επειδή $\{u_1,...,u_q\}$ είναι μια βάση του πυρήνα, $f(u_i) = 0_W$, άρα

$$\begin{aligned}
&f(x_1v_1 + ... + x_sv_s + y_1u_1 + ... + y_qu_q) = f(0_V) \Rightarrow \\
&x_1f(v_1) + ... + x_sf(v_s) + y_1f(u_1) + ... + y_qf(u_q) = 0_W \Rightarrow \\
&x_1f(v_1) + ... + x_sf(v_s) = 0_W
\end{aligned}$$

Όμως $f(v_i) = w_i, (i = 1,2,...,s)$, άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$x_1w_1 + ... + x_sw_s = 0_W$$

Οπότε, επειδή τα $\{w_1,...,w_s\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, προκύπτει

$$x_1 = x_2 = ... = x_s = 0$$

Επομένως η σχέση $(*)$ γίνεται $y_1u_1 + ... + y_qu_q = 0_V$ και επειδή $\{u_1,...,u_q\}$ είναι μια βάση του πυρήνα προκύπτει ότι $y_1 = ... = y_q = 0$, άρα

$$x_1 = x_2 = ... = x_s = y_1 = ... = y_q = 0$$

Τελικά αποδείξαμε ότι η $\{u_1,...,u_q,v_1,...,v_s\}$ όπως πριν είναι μια βάση του V, επομένως

$$\dim V = q + s = \dim(Kerf) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

Στην αρχή της απόδειξης υποθέσαμε ότι ο πυρήνας δεν αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα. Δηλαδή $\dim Kerf \neq 0$. Αν $\dim Kerf = 0$ η απόδειξη γίνεται όπως πριν, μόνο που παραλείπουμε ότι έχει σχέση με την βάση $\{u_1,...,u_q\}$ του πυρήνα.

Άρα σε κάθε περίπτωση :

$$\dim V = \dim(Kerf) + \dim(\mathrm{Im} f).$$

■

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της διάστασης μπορούμε να αποδείξουμε το εξής:

8.2.6 Θεώρημα (Χαρακτηρισμός ισομορφισμού)

Αν οι διανυσματικοί χώροι V και W έχουν την ίδια διάσταση n και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Η f είναι 1-1

(2) Η f είναι επί

(3) Η f είναι 1-1 και επί (δηλαδή ένας ισομορφισμός)

(4) Η εικόνα μιας βάσης του V είναι μια βάση του W, δηλαδή αν $\{v_1,\dots,v_n\}$ είναι μια βάση του V τότε $\{f(v_1),\dots,f(v_n)\}$ είναι μια βάση του W.

Απόδειξη

$(1)\Rightarrow(3)$: Έστω ότι η f είναι 1-1, επομένως $Kerf = \{0_V\}$ και από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι

$$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim V = n = \dim W$$

επομένως $Imf = W$ και έτσι η f είναι επί και κατά συνέπεια 1-1 και επί (ισομορφισμός).

$(2)\Rightarrow(3)$: Αν η f είναι επί, τότε $Imf = W$. Επομένως

$$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim W = n = \dim V = \dim(Kerf) + \dim(\mathrm{Im} f)$$

Άρα

$$\dim(Kerf) = 0 \Leftrightarrow Kerf = \{0_V\}$$

Δηλαδή η f είναι 1-1.

$(3)\Rightarrow(1)$ και $(3)\Rightarrow(2)$: Είναι προφανές.

$(1)\Rightarrow(4)$: Έστω ότι η f είναι 1-1, επομένως $Kerf = \{0_V\}$. Αν $\{v_1,\dots,v_n\}$ είναι μια βάση του V τότε τα διανύσματα $f(v_1),\dots,f(v_n)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0_W$$

τότε από την γραμμικότητα της f προκύπτει

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) = 0_W$$

Επομένως

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \in Kerf \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$$

Επειδή $\{v_1,\ldots,v_n\}$ είναι μια βάση του V από την προηγούμενη σχέση προκύπτει

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Επομένως, τα διανύσματα $f(v_1),\ldots,f(v_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επειδή $dim V = n$ αποτελούν μια βάση του V.

$(4) \Rightarrow (2)$: Επειδή $Im f \subseteq W$ αρκεί να δείξουμε ότι $W \subseteq Im f$. Έστω $w \in W$ και $\{v_1,\ldots,v_n\}$ μια βάση του V, τότε $\{f(v_1),\ldots,f(v_n)\}$ είναι μια βάση του W, επομένως

$$w = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n) \Rightarrow w = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) \Rightarrow w \in Im f$$

Άρα $Im f = W$ που σημαίνει ότι η f είναι επί.

■

8.2.7 Θεώρημα (Χαρακτηρισμός ισόμορφων διανυσματικών χώρων)

Δύο διανυσματικοί χώροι V και W έχουν την ίδια διάσταση αν και μόνο αν είναι ισόμορφοι.

Απόδειξη

Αν $dim V = dim W = n$. Έστω $\{v_1,\ldots,v_n\}$ μια βάση του V και $\{w_1,\ldots,w_n\}$ μια βάση του W. Σύμφωνα με το θεώρημα 8.1.10 υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$ έτσι ώστε $f(v_j) = w_j, (j = 1,2,\ldots,n)$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα η απεικόνιση αυτή είναι ένας ισομορφισμός (απεικονίζει βάση σε βάση) και άρα οι διανυσματικοί χώροι V και W είναι ισόμορφοι.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι οι χώροι είναι ισόμορφοι, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός $f: V \to W$ και όπως γνωρίζουμε ισχύουν

$$Kerf = \{0_V\} \text{ και } Im f = W$$

Επομένως, από το θεώρημα της διάστασης προκύπτει

$$dim V = dim(Kerf) + dim(Im f) = dim W$$

■

8.2.8 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Δίνεται η απεικόνιση

$$f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), A \mapsto NA$$

όπου, $M_2(\mathbb{R})$ είναι ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ και N ένας αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας.

α) Να εξετάσετε αν η απεικόνιση είναι γραμμική.

Λύση

Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ τότε

$$f(\lambda A+\mu B)=N(\lambda A+\mu B)=\lambda(NA)+\mu(NB)=\lambda f(A)+\mu f(B)$$

άρα η f είναι γραμμική.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι ένας ισομορφισμός.

Λύση

Θα βρούμε πρώτα τον πυρήνα της απεικόνισης. Από τον ορισμό

$$Kerf=\{A\in M_2(\mathbb{R}), NA=O\}$$

Επειδή ο πίνακας N είναι αντιστρέψιμος, δεν μπορεί να είναι ο μηδενικός άρα

$$NA=O \Leftrightarrow A=O$$

Κατά συνέπεια $Kerf=\{O\}$ και η απεικόνιση είναι ένα προς ένα.

Θα εξετάσουμε τώρα αν είναι επί. Δηλαδή αν κάθε $B\in M_2(\mathbb{R})$ μπορεί να γραφεί $B=NA$ για κάποιο $A\in M_2(\mathbb{R})$.

Επειδή

$$B=NA \Leftrightarrow A=N^{-1}B$$

προκύπτει ότι $N^{-1}B$ είναι το πρότυπο του B και άρα η f είναι επί. Κατά συνέπεια είναι ένας ισομορφισμός.

γ) Αν

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

η συνήθης βάση του $M_2(\mathbb{R})$ να βρείτε μια βάση της εικόνας της f.

Λύση

Επειδή η f είναι ένας ισομορφισμός, η εικόνα μιας βάσης θα είναι επίσης βάση (θεώρημα 8.2.6) επομένως αρκεί να επιλέξουμε ένα αντιστρέψιμο πίνακα N και να βρούμε τις εικόνες

$$f(E_1)=NE_1, f(E_2)=NE_2, f(E_3)=NE_3, f(E_4)=NE_4$$

Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε

$$N=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

τότε η νέα βάση είναι

$$NE_1=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, NE_2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$NE_3=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, NE_4=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), A \mapsto NA$$

όπου, $M_2(\mathbb{R})$ είναι ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ και

$$N=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{(μη αντιστρέψιμος)}$$

α) Να βρεθεί μια βάση της εικόνας $Im\, f$

Λύση

Αν $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ τότε

$$f(A)=NA \Leftrightarrow f(\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-z & y-\omega \\ -2x+2z & -2y+2\omega \end{pmatrix}$$

Έστω

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

η συνήθης βάση του $M_2(\mathbb{R})$. Επειδή

$$f(A)=f(\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix})=f(xE_1+yE_2+zE_3+\omega E_4)$$

$$=xf(E_1)+yf(E_2)+zf(E_3)+\omega f(E_4)$$

η εικόνα παράγεται από τους πίνακες

$$f(E_1),f(E_2),f(E_3),f(E_4)$$

Από τον ορισμό της απεικόνισης

$$f(E_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, f(E_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, f(E_3)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, f(E_4)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Τα παραπάνω διανύσματα παράγουν την εικόνα και το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων από αυτά αποτελεί μια βάση. Επομένως μια βάση της εικόνας είναι η εξής: $\{f(E_1),f(E_2)\}$.

β) Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $Kerf$

Λύση

Από το θεώρημα της διάστασης προκύπτει ότι

$$dim\,Kerf = dim\,M_2(\mathbb{R}) - dim\,Im\,f = 4-2=2$$

Επειδή

$$f(A)=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-z & y-\omega \\ -2x+2z & -2y+2\omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y-\omega=0 \\ -2x+2z=0 \\ -2y+2\omega=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=\omega \end{cases}$$

ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

ανήκει στον πυρήνα της απεικόνισης αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$$

Επειδή

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

οι πίνακες

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

παράγουν τον πυρήνα. Όμως είναι και γραμμικώς ανεξάρτητοι αφού από την σχέση $aB + bC = O$ προκύπτει

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Τελικά, μια βάση του πυρήνα είναι $\{B, C\}$.

Παράδειγμα 3

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης με $\dim V > \dim W$ και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Να δείξετε ότι ο πυρήνας της δεν μπορεί να είναι μόνο το μηδενικό διάνυσμα του V (δηλαδή η απεικόνιση δεν μπορεί να είναι ένα προς ένα).

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

Αν $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ επομένως

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} f) \le \dim W$$

που είναι άτοπο.

Ασκήσεις 8.2

1) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχουν παραγώγους κάθε τάξης και

$$D : V \to V, f \mapsto f''$$

η απεικόνιση που σε κάθε συνάρτηση αντιστοιχεί την παράγωγο δεύτερης τάξης . Να δείξετε ότι η D είναι γραμμική και να βρεθεί ο πυρήνας της.

2) Να βρεθεί η διάσταση του υποχώρου των τετραγωνικών 3×3 πινάκων A για τους οποίους ισχύει $tr(A)=0$.

3) Να βρεθεί η διάσταση του υποχώρου του $\mathbb{R}^4$ που αποτελείται από τα διανύσματα $X=\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^T$ για τα οποία ισχύει

$$a+2b=0 \text{ και } c-15d=0$$

4) Έστω $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών πινάκων και

$$f: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

η απεικόνιση που ορίζεται από την σχέση

$$f(A)=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.

β) Να δείξετε ότι ο πυρήνας της αποτελείται από τους αντισυμμετρικούς πίνακες.

γ) Να δείξετε ότι η εικόνα της αποτελείται από τους συμμετρικούς πίνακες.

δ) Γνωρίζοντας ότι η διάσταση του χώρου των συμμετρικών πινάκων είναι $\frac{n(n+1)}{2}$, να βρείτε την διάσταση και μια βάση του χώρου των αντισυμμετρικών πινάκων.

5) Έστω U,W υποχώροι του διανυσματικού χώρου V, στόχος της άσκησης είναι η απόδειξη της σχέσης

$$dim U + dim W = dim(U+W) + dim(U\cap W) \qquad (*)$$

Έστω η απεικόνιση

$$f: U\times W \to V, (u,w) \mapsto u-w$$

α) Να δείξετε ότι είναι γραμμική.

β) Να δείξετε ότι η εικόνα της f είναι : $Im f = U+W$

γ) Να δείξετε ότι $Kerf=\{(u,u)\in U\times W : u\in U\cap W\}$ και να βρεθεί μια βάση του.

δ) Να αποδείξετε τη σχέση $(*)$

Απαντήσεις / Υποδείξεις 8.2

1) Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό της γραμμικότητας, ιδιότητες παραγώγων και το γεγονός ότι αν μια συνάρτηση έχει μηδενική παράγωγο σε κάποιο διάστημα τότε είναι σταθερή.

2)και 3) Να κατασκευάσετε μια γραμμική απεικόνιση με πυρήνα το σύνολο του οποίου ζητάμε την διάσταση και χρησιμοποιήστε το θεώρημα 8.2.5 ή χρησιμοποιείστε συστήματα.

4) α) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της γραμμικότητας και ιδιότητες πινάκων.

β) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του πυρήνα και τον ορισμό του αντισυμμετρικού πίνακα.

γ) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της εικόνας και τον ορισμό του συμμετρικού πίνακα

δ) Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 8.2.5

5) β) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της απεικόνισης και δείξτε την ισότητα των δύο συνόλων.

γ) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του πυρήνα και δείξτε την ισότητα των δύο συνόλων.

δ) Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 8.2.5

8.3 Γραμμικές Απεικονίσεις και Γραμμικά Συστήματα

Στα παραδείγματα 8.2.2 2) και 3) είδαμε ότι αν μια γραμμική απεικόνιση είναι της μορφής L_A, τότε ο πυρήνας της προκύπτει από την επίλυση του ομογενούς γραμμικού συστήματος $AX = 0$ και η εικόνα της παράγεται από τις στήλες του A. Επειδή το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών ενός πίνακα ισούται με την τάξη του, προκύπτει ότι η τάξη του A είναι ίση με την διάσταση της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης. Εργαζόμενοι όπως στα παραδείγματα της παραγράφου 8.2 μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι προηγούμενες παρατηρήσεις ισχύουν και στην γενική περίπτωση. Δηλαδή:

Αν A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το F,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

και

$$L_A : F^n \to F^m, X \mapsto AX$$

η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση, τότε ισχύει:

8.3.1 Θεώρημα (Πυρήνας και εικόνα της γραμμικής απεικόνισης L_A)

(1) Ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης L_A αποτελείται από τις λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $AX = O$

(2) η εικόνα της L_A είναι ο υπόχωρος του F^m που παράγεται από τις στήλες του πίνακα A.

(3) Η τάξη $rank(A)$ του πίνακα A ισούται με την διάσταση της εικόνας του L_A.

*(Η διάσταση της εικόνας λέγεται και **τάξη ή βαθμός της γραμμικής απεικόνισης**).*

8.3.2 Θεώρημα (Διάσταση του χώρου λύσεων ομογενούς γραμμικού συστήματος)

Αν $rank(A) = r$, τότε η διάσταση του χώρου των λύσεων του συστήματος $AX = O$ είναι $n - r$

Απόδειξη

Επειδή ο χώρος λύσεων του συστήματος $AX = O$ είναι ο $KerL_A$ και $dim(Im\, L_A) = r$, από το θεώρημα της διάστασης έχουμε

$$dim\, F^n = dim(KerL_A) + dim(Im\, L_A) \Leftrightarrow dim(KerL_A) = n - r$$

■

Θα μελετήσουμε τώρα το σύνολο των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος.

Εισαγωγικό παράδειγμα

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + 3z = 3 \\ y - 2z = 4 \end{cases} \quad (*)$$

Οι λύσεις του είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3z \\ 4 + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, (z \in \mathbb{R})$$

Οι λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad (**)$$

είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, (z \in \mathbb{R})$$

Παρατηρούμε επίσης ότι το

$$X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι μια λύση του συστήματος $(*)$. Δηλαδή κάθε λύση του αρχικού συστήματος γράφεται σαν άθροισμα μιας λύσης X_0 και μιας λύσης του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος. Θα αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει για κάθε γραμμικό σύστημα. Δηλαδή ότι ισχύει το εξής θεώρημα:

8.3.3 Θεώρημα (Σύνολο λύσεων γραμμικού συστήματος)

Έστω X_0 μια λύση του συστήματος $AX = B$. Το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι

$$S = X_0 + KerL_A = \{X_0 + Y, Y \in KerL_A\}.$$

Δηλαδή οι λύσεις του είναι της μορφής $X_0 + Y$*, όπου* Y *λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.*

Απόδειξη

Έστω $X_0 + Y \in X_0 + KerL_A$, τότε

$$A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = B + O = B$$

Άρα $X_0 + Y$ είναι λύση του $AX = B$ κατά συνέπεια $X_0 + Y \in S$, δηλαδή

$$X_0 + KerL_A \subseteq S \qquad (*)$$

Αντίστροφα, αν $Z \in S$, τότε

$$A(Z - X_0) = AZ - AX_0 = B - B = O \Rightarrow Z - X_0 \in KerL_A$$

Επομένως, αν θέσουμε $Z - X_0 = Y$, η λύση $Z \in S$ γράφεται

$$Z = X_0 + Y, (Y \in KerL_A)$$

και κατά συνέπεια $Z \in X_0 + KerL_A$, δηλαδή

$$S \subseteq X_0 + KerL_A \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ προκύπτει ότι

$$S = X_0 + KerL_A = \{X_0 + Y, Y \in KerL_A\}$$

■

Παράδειγμα

Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Λύση

Το σύστημα έχει μια προφανή λύση την $x = \frac{1}{2}, y = z = 0$.

Αρκεί να βρούμε το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος. Θα βρούμε αρχικά τη διάσταση του πυρήνα της L_A, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Η τάξη του A είναι 2, επομένως

$$dim(KerL_A) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(L_A) = 3 - 2 = 1$$

Κατά συνέπεια, ο διανυσματικός χώρος των λύσεων του ομογενούς συστήματος είναι μονοδιάστατος και μια προφανής του λύση είναι : $x = -1, y = z = 1$.

Επομένως το σύνολο των λύσεων του αρχικού συστήματος είναι:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + KerL_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

8.3.9 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, X \mapsto AX$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(α) Υπολογίστε την εικόνα $f[(2,-1,2)^T]$. Βρείτε έναν ‘τύπο’ για την f.

(β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση για καθέναν από τους υπόχωρους $Kerf$ και $Im\, f = f(\mathbb{R}^3)$.

(γ) Είναι η απεικόνιση f ένα προς ένα ή επί;

Λύση

α) Χρησιμοποιώντας ότι η f είναι γραμμική και τον ορισμό πίνακα γραμμικής απεικόνισης ως προς μια βάση, έχουμε

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Όπως πριν έχουμε

$$f(X) = AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 2z \\ 3x - y + z \\ 5x + 3y + 5z \end{pmatrix}$$

β) Για τον πυρήνα λύνουμε το σύστημα

$$AX = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας γραμμοπράξεις βρίσκουμε ότι οι λύσεις είναι

$$(x, y, z)^T = \left(\frac{-4}{7} z, \frac{-5}{7} z, z \right)^T, \text{όπου } z \in \mathbb{R}.$$

Άρα μια βάση του πυρήνα αποτελεί το $\left(\frac{-4}{7}, \frac{-5}{7}, 1 \right)^T$ και η διάσταση είναι 1.

Η διάσταση της εικόνας είναι

$$\dim f(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Kerf = 3 - 1 = 2.$$

Μια βάση αποτελούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

π.χ. οι πρώτες δύο.

γ) Η δεδομένη απεικόνιση δεν είναι 1-1 αφού ο πυρήνας της δεν είναι περιέχει μόνο το μηδενικό στοιχείο, όπως είδαμε πριν. Επίσης δεν είναι επί αφού είδαμε ότι $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2 \neq 3$ και άρα η εικόνα $f(\mathbb{R}^3)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η απεικόνιση:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x \quad y \quad z)^T \mapsto (2x + y - z \quad 3x - 2y + 4z)^T$$

(α)Αποδείξτε ότι είναι γραμμική.

(β) Βρείτε βάσεις του πυρήνα $Kerf$ και της εικόνας $Im f$ της f.

Λύση

(α) Επειδή

$$\begin{pmatrix} 2x + y - z \\ 3x - 2y + 4z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = AX$$

η f είναι της μορφής L_A και επομένως είναι γραμμική.

(β) Για τον πυρήνα της f έχουμε:

$$X=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in Kerf \Leftrightarrow f(X)=O \Leftrightarrow AX=O \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x-2y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ 3x-2y+4(2x+y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ 11x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-\dfrac{11}{2}x \\ y=\dfrac{-11}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-7}{2}x \\ y=\dfrac{-11}{2}x \end{cases}, x\in\mathbb{R}$$

Έτσι τα στοιχεία του $Kerf$ έχουν τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} x & \dfrac{-11}{2}x & -\dfrac{7}{2}x \end{pmatrix}^T = x\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-11}{2} & \dfrac{-7}{2} \end{pmatrix}^T$$

με το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-11}{2} & \dfrac{-7}{2} \end{pmatrix}^T$ να αποτελεί βάση. Πρόκειται , δηλαδή για έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 1.

Αντίστοιχα, για την εικόνα $Im\, f$ της γραμμικής απεικόνισης γνωρίζουμε ότι παράγεται από τις στήλες του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Πρόκειται δηλαδή για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Επειδή τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ο χώρος που παράγουν είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ διάστασης 2, δηλαδή ο ίδιος ο $\mathbb{R}^2$. Έτσι $Im\, f \cong \mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 3

Να γράψετε τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} x+y+z+2\omega=2 \\ 2x-y-z+\omega=1 \\ x+2y+2z-\omega=3 \end{cases}$$

με την μορφή του θεωρήματος 8.3.3

Λύση

Μια προφανής λύση του συστήματος είναι η

$$x=1, y=1, z=0, \omega=0$$

Η τάξη του πίνακα A των συντελεστών των αγνώστων είναι $rank(A)=3$ επομένως η διάσταση του χώρου λύσεων του ομογενούς συστήματος είναι $dim(KerL_A)=1$. Μια προφανής λύση του ομογενούς συστήματος είναι

$$x=0, y=-1, z=1, \omega=0$$

Επομένως το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι

$$S=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\left\{ t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t\in\mathbb{R} \right\}$$

Παρατήρηση:

Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα με την μέθοδο των γραμμοπράξεων και να καταλήξουμε στο σύνολο των λύσεων της προηγούμενης μορφής.

Ασκήσεις 8.3

1) Να βρεθεί η διάσταση του διανυσματικού χώρου των λύσεων των συστημάτων:

$$a)\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}, b)\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ 3x+4y=0 \\ 5x+y+z=0 \end{cases}$$

2) Να βρεθεί ο πυρήνας και η εικόνα των γραμμικών απεικονίσεων:

$$a) f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-3y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$$

και

$$b)\, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y+z \\ x+y-z \\ 3x+4y \\ 5x+y+z \\ \end{pmatrix}$$

Απαντήσεις / Υποδείξεις 8.3

1) α) 1, β) 0, βλ. Θεώρημα 8.3.2, 2) α) Η διάσταση του πυρήνα είναι 1 και επομένως η διάσταση της εικόνας είναι 2.

Μια βάση του πυρήνα είναι το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T$ και μια βάση της εικόνας τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}^T$

β) Η διάσταση του πυρήνα είναι 0 και επομένως η διάσταση της εικόνας είναι 3, μια βάση της εικόνας δημιουργείται από τις στήλες του πίνακα που δημιουργεί την απεικόνιση. Βλ. παραδείγματα.8.3.9

8.4 Πίνακες και Γραμμικές Απεικονίσεις

Σ' αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι η επιλογή διατεταγμένων βάσεων στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών μιας γραμμικής απεικόνισης δημιουργεί ένα πίνακα A, έτσι ώστε αν ταυτίσουμε κάθε διάνυσμα με αυτό των συντεταγμένων του, τότε η απεικόνιση παίρνει την μορφή L_A (πολλαπλασιασμός με πίνακα). Θα δούμε επίσης το σημαντικότερο αποτέλεσμα του κεφαλαίου, που είναι η ισομορφία του χώρου των γραμμικών απεικονίσεων και του χώρου των πινάκων. Τέλος, θα εξετάσουμε το πρόβλημα της έκφρασης των συντεταγμένων ενός διανύσματος ως προς διαφορετικές βάσεις.

Είδαμε ότι με κάθε πίνακα $A \in M_{m\times n}(F)$ μπορούμε να δημιουργήσουμε μια μοναδική γραμμική απεικόνιση (πολλαπλασιασμός με A)

$$L_A : F^n \to F^m, X \mapsto AX$$

και στα παραδείγματα που εξετάσαμε είδαμε ότι και αντιστρόφως, για μια γραμμική απεικόνιση $f : F^n \to F^m$, μπορούμε να βρούμε ένα μοναδικό πίνακα A τύπου $m \times n$ έτσι ώστε $f = L_A$, δηλαδή $\forall X \in F^n, f(X) = AX$.

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε την απόδειξη της παρατήρησης αυτής.

8.4.1 Θεώρημα (Ύπαρξης πίνακα)

Αν $f : F^n \to F^m$ γραμμική απεικόνιση τότε υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας $A \in M_{m\times n}(F)$ έτσι ώστε $f = L_A$, Δηλαδή, για κάθε $X \in F^n$

$$f(X) = AX$$

Απόδειξη

Έστω $C = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ η συνήθης διατεταγμένη βάση του F^n, κάθε διάνυσμα

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$$

του F^n γράφεται

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$$

Επομένως

$$f(X)=f(x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+\ldots+x_nf(e_n)$$

οπότε, αν θέσουμε

$$f(e_1)=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},f(e_2)=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\ldots\ldots,f(e_n)=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$f(X)=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=AX=L_A(X)$$

όπου

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερος πίνακας B έτσι ώστε $f=L_B$, τότε για κάθε $X\in F^n$ θα ισχύει $f(X)=L_A(X)=L_B(X)$. Επομένως και για τα διανύσματα $e_1,e_2,\ldots,e_n$ της βάσης θα ισχύει

$$L_A(e_j)=L_B(e_j)\Leftrightarrow Ae_j=Be_j,(j=1,2,\ldots,n)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες των πινάκων A,B είναι μία προς μία ίσες και άρα $A=B$. Επομένως ο πίνακας είναι μοναδικός.

■

8.4.2 Ορισμός (Πίνακας γραμμικής απεικόνισης ως προς τις συνήθεις βάσεις)

*Ο πίνακας A του προηγούμενου θεωρήματος λέγεται **πίνακας της γραμμικής απεικόνισης ως προς τις συνήθεις διατεταγμένες βάσεις** $C=\{e_1,\ldots,e_n\}$ και $C^*=\{e_1^*,\ldots,e_m^*\}$ των χώρων F^n και F^m αντίστοιχα.*

Για να τονίσουμε την εξάρτηση του πίνακα από τις βάσεις και την γραμμική απεικόνιση γράφουμε $A=(f:\hat{C},\hat{C}^*)$.

Σημαντική παρατήρηση:
Αν συμβολίσουμε με $c_i(i=1,2,...,n)$ την i στήλη του πίνακα A τότε

$$c_i = Ae_i = f(e_i).$$

Δηλαδή η i στήλη του A αποτελείται από την εικόνα του διανύσματος e_i.

8.4.3 Παράδειγμα

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τον πίνακά της ως προς τις συνήθεις διατεταγμένες βάσεις του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών, υπολογίζουμε τις εικόνες $f(e_i),(i=1,2,3)$, που αποτελούν τις στήλες του πίνακα. Οπότε

$$A=(f:C,C^*)=\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θα εξετάσουμε τώρα αν το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και σε τυχαίους διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα:

8.4.4 Εισαγωγικό παράδειγμα

Έστω V και W δύο διανυσματικοί χώροι με $\dim V = 3$ και $\dim W = 2$. $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ και $B^*=\{w_1,w_2\}$ διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα . Είδαμε ότι για να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$ αρκεί να ορίσουμε τις εικόνες μιας βάσης.

'Έστω ότι η f ορίζεται με τις σχέσεις:

$$f(v_1) = w_1 + w_2$$
$$f(v_2) = 2w_1 - w_2$$
$$f(v_3) = w_1 - 3w_2$$

Αν $v \in V$ τότε το διάνυσμα αυτό γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης: $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$, δηλαδή

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Δημιουργείται έτσι ο ισομορφισμός

$$\Phi_B : V \to F^3, v \to [v]_B$$

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του $f(v)$ ως προς την διατεταγμένη βάση B^*. Για το σκοπό αυτό θα γράψουμε την εικόνα του v ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων αυτής της βάσης .

$$\begin{aligned} f(v) &= f(xv_1 + yv_2 + zv_3) = xf(v_1) + yf(v_2) + zf(v_3) \\ &= x(w_1 + w_2) + y(2w_1 - w_2) + z(w_1 - 3w_2) \\ &= (x + 2y + z)w_1 + (x - y - 3z)w_2 \end{aligned}$$

Επομένως

$$[f(v)]_{B^*} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ x - y - 3z \end{pmatrix}$$

Άρα

$$[f(v)]_{B^*} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} [v]_B$$

Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

λέγεται πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις B και B^* και συμβολίζεται $A = (f : B, B^*)$.

8.4.5 Παρατηρήσεις

1) Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του πίνακα είναι το διάνυσμα $[f(v_1)]_{\hat{B}^*}$ των συντεταγμένων του $f(v_1)$ ως προς την βάση $\hat{B}^*$, η δεύτερη στήλη είναι $[f(v_2)]_{B^*}$ και η τρίτη $[f(v_3)]_{B^*}$.

2)Μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω με ένα διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_B \downarrow & & \downarrow \Phi_{B^*} \\ F^3 & \xrightarrow{L_A} & F^2 \end{array}$$

Ξεκινήσαμε από μια γραμμική απεικόνιση

$$f : V \to W, v \mapsto f(v)$$

η επιλογή των βάσεων δημιούργησε τους δύο ισομορφισμούς και επομένως την γραμμική απεικόνιση $L_A = \Phi_{B^*} \circ f \circ \Phi_B^{-1}$ (πολλαπλασιασμός με πίνακα) .

$$L_A : F^n \mapsto F^m, X \mapsto AX$$

όπου

$$A = (f : B, B^*)$$

3) Η σχέση

$$[f(v)]_{B^*} = A[v]_B$$

γράφεται

$$(\Phi_{B^*} \circ f)(v) = (L_A \circ \Phi_B)(v).$$

Δηλαδή ισχύει

$$\Phi_{B^*} \circ f = L_A \circ \Phi_B$$

Γι' αυτό το λόγο λέμε ότι το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό. Δηλαδή για να βρούμε τις συντεταγμένες της εικόνας ενός διανύσματος $v \in V$ μπορούμε να βρούμε πρώτα το $f(v)$ και κατόπιν το $\Phi_{B^*}(f(v))$ ή πρώτα το $\Phi_B(v)$ και κατόπιν το $L_A(\Phi_B(v))$.

Δηλαδή, στο παραπάνω διάγραμμα, ξεκινώντας από τον χώρο V δεν έχει σημασία η διαδρομή που θα ακολουθήσουμε .

▲

Στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρήσαμε ότι αν επιλέξουμε διατεταγμένες βάσεις στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών μιας γραμμικής απεικόνισης και γράψουμε τα διανύσματα με χρήση των συντεταγμένων τους τότε η απεικόνιση γίνεται L_A (πολλαπλασιασμός με πίνακα), όπου $A=(f:B,B^*)$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει σε τυχαίους διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.

8.4.6 Ορισμός (Πίνακας γραμμικής απεικόνισης ως προς διατεταγμένες βάσεις)

Αν $\dim V=n$, $\dim W=m$. $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, $B^*=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ *διατεταγμένες βάσεις των* V *και* W *αντίστοιχα και* $f:V\to W, v\mapsto f(v)$ *μια γραμμική απεικόνιση, τότε ο πίνακας του οποίου η* j *στήλη* $(j=1,2,...,n)$ *αποτελείται από τις συντεταγμένες* $[f(v_j)]_{B^*}$ *του διανύσματος* $f(v_j)$ *ως προς την βάση* B^* *λέγεται* ***πίνακας της*** f ***ως προς τι ςδιατεταγμένες βάσεις*** B ***και*** B^* ***και συμβολίζεται*** $(f:B,B^*)$

Αναλυτικότερα, αν

$$\begin{aligned}
&f(v_1)=a_{11}w_1+a_{21}w_2+...+a_{m1}w_m\\
&f(v_2)=a_{12}w_1+a_{22}w_2+...+a_{m2}w_m\\
&\vdots\\
&f(v_n)=a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+...+a_{mn}w_m
\end{aligned}$$

τότε

$$(f:B,B^*)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Όπως θα δείξουμε τώρα χρησιμοποιώντας τον πίνακα $A=(f:B,B^*)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες της εικόνας ενός τυχαίου διανύσματος του πεδίου ορισμού.

8.4.7 Θεώρημα (Συντεταγμένες εικόνας)

Αν $\dim V=n$, $\dim W=m$. $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, $B^*=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ *διατεταγμένες βάσεις των* V *και* W *αντίστοιχα και* $f:V\to W, v\mapsto f(v)$ *μια γραμμική απεικόνιση, τότε*

$$[f(v)]_{B^*}=(f:B,B^*)[v]_B$$

Απόδειξη

Αν $v \in V$, τότε

$$f(v) = f(x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + ... + x_nf(v_n)$$

όμως

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} f(v) &= x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + ... + x_nf(v_n) \\ &= x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m) + ... + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m) \\ &= (x_1a_{11} + ... + x_na_{1n})w_1 + ... + (x_1a_{m1} + ... + x_na_{mn})w_m \end{aligned}$$

Δηλαδή οι συντεταγμένες του $f(v)$ ως προς την διατεταγμένη βάση

$B^* = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ είναι

$$[f(v)]_{B^*} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + ... + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + ... + x_na_{2n} \\ \vdots \\ x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + ... + x_na_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f : B, B^*)[v]_B$$

■

Μπορούμε να συνοψίσουμε τις παρατηρήσεις μας με το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_B \downarrow & & \downarrow \Phi_{B^*} \\ F^n & \xrightarrow{L_A} & F^m \end{array} \qquad \Phi_{B^*} \circ f = L_A \circ \Phi_B$$

Δηλαδή, η επιλογή των διατεταγμένων βάσεων στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών της f δημιουργεί τους ισομορφισμούς Φ_B , Φ_{B^*} και την γραμμική απεικόνιση

$$L_A = \Phi_{B^*} \circ f \circ \Phi_B^{-1} \text{ (πολλαπλασιασμός με τον πίνακα } A = (f : B, B^*))$$

Μπορούμε να πούμε ότι η L_A είναι η έκφραση της f ως προς τα επιλεγμένα συστήματα συντεταγμένων.

8.4.8 Παράδειγμα

Έστω

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \text{ και}$$
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T, w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}^T$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ και $B^* = \{w_1, w_2\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$.

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

με τύπο

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ 3x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθεί ο πίνακας $A = (f : B, B^*)$ της f ως προς τις παραπάνω διατεταγμένες βάσεις.

β) Να επαληθεύσετε την σχέση $[f(v)]_{B^*} = (f : B, B^*)[v]_B$ του θεωρήματος 8.4.7

Λύση

α) Για να βρούμε τον πίνακα της απεικόνισης ως προς τις δοσμένες διατεταγμένες βάσεις θα πρέπει να βρούμε:

(ι) Τις εικόνες $f(v_j), (j = 1, 2, 3)$

(ιι) Τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $f(v_j), (j = 1, 2, 3)$ ως προς την διατεταγμένη βάση $B^* = \{w_1, w_2\}$. Για τον σκοπό αυτό θα πρέπει να εκφράσουμε τα διανύσματα αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των w_1, w_2.

Από τον ορισμό της γραμμικής απεικόνισης προκύπτει:

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, f(v_2) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, f(v_3) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Θα βρούμε τώρα τις συντεταγμένες ενός διανύσματος $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ του $\mathbb{R}^2$ ως προς την διατεταγμένη βάση $B^* = \{w_1, w_2\}$. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την έκφραση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

από την οποία προκύπτει

$$\begin{cases} a = 4x - y \\ b = -3x + y \end{cases} \qquad (*)$$

Έτσι, για να βρούμε τις συντεταγμένες του διανύσματος $(2 \quad 5)^T$ ως προς την διατεταγμένη βάση $B^* = \{w_1, w_2\}$, θέτουμε όπου $x = 2$ και $y = 5$ και έχουμε $a = 3, b = -1$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 11\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$(f : B, B^*) = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

β) Θα βρούμε πρώτα τις συντεταγμένες $[v]_B$ ενός διανύσματος $v = (x \quad y \quad z)^T$ του $\mathbb{R}^3$ ως προς την διατεταγμένη βάση $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Οι συντεταγμένες αυτές προσδιορίζονται από την σχέση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b \\ a \end{pmatrix}$$

από την οποία προκύπτει

$$a = z, b = y - z, c = x - y$$

Άρα

$$[v]_B = \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix}$$

Θα βρούμε τώρα τις συντεταγμένες $[f(v)]_{B^*}$ του $f(v)$ ως προς την διατεταγμένη βάση $B^* = \{w_1, w_2\}$. Επειδή ως προς τις συνήθεις βάσεις

$$f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ 3x-2y+4z \end{pmatrix}$$

Από την σχέση $(*)$ προκύπτει

$$\begin{cases} a = 4(2x+y-z)-(3x-2y+4z) \\ b = -3(2x+y-z)+3x-2y+4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5x+6y-8z \\ b = -3x-5y+7z \end{cases}$$

Επομένως

$$[f(v)]_{B^*} = \begin{pmatrix} 5x+6y-8z \\ -3x-5y+7z \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Υπολογίζοντας το γινόμενο $(f : B, B^*)[v]_B$ βρίσκουμε

$$(f : B, B^*)[v]_B = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+8y-8z \\ -3x-5y+7z \end{pmatrix} \qquad (***)$$

Από τις σχέσεις $(**)$ και $(***)$ προκύπτει, όπως ήταν αναμενόμενο, η ισότητα

$$[f(v)]_{B^*} = (f : B, B^*)[v]_B$$

8.4.9 Ορισμός (Πίνακας γραμμικού μετασχηματισμού ως προς διατεταγμένη βάση)

*Αν $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση και επιλέξουμε την ίδια διατεταγμένη βάση $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών, τότε ο πίνακας $(f : B, B^*)$ λέγεται πίνακας **πίνακας της f ως προς την διατεταγμένη βάση** B.*

8.4.10 Παράδειγμα

Στον χώρο $\mathbb{R}_n[X]$ θεωρούμε την βάση $B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ και την γραμμική απεικόνιση

$$D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x], P(x)\mapsto P'(x)$$

Να βρεθεί ο πίνακας $(D:B,B)$ της D ως προς την διατεταγμένη βάση B.

Λύση

Θα βρούμε τις συντεταγμένες ,ως προς την διατεταγμένη βάση B, της εικόνας κάθε διανύσματος της βάσης.

$$\begin{aligned}
D(1)&=(1)'=0=0.1+0.X+\ldots+0.X^{n-1}+0.X^n\\
D(X)&=(X)'=1=1.1+0.X+\ldots+0.X^{n-1}+0.X^n\\
D(X^2)&=(X^2)'=2X=0.1+2.X+\ldots+0.X^{n-1}+0.X^n\\
&\vdots\\
D(X^n)&=(X^n)'=nX^{n-1}=0.1+0.X+\ldots+n.X^{n-1}+0.X^n
\end{aligned}$$

Άρα

$$(D:B,B)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

8.4.11 Θεώρημα (Πίνακας ταυτοτικής απεικόνισης)

Αν $\dim V=n$ και $f:V\to V$ γραμμική απεικόνιση, ισχύει η ισοδυναμία

$$(f:B,B)=I_n \Leftrightarrow f=1_V$$

Δηλαδή:

Ο πίνακας $(f:B,B)$ είναι ο μοναδιαίος αν και μόνο αν η $f:V\to V$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Απόδειξη

Αν $v=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ μια διατεταγμένη βάση του V, η απόδειξη στηρίζεται στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V\\ \Phi_v\downarrow & & \downarrow\Phi_v\\ F^n & \xrightarrow{L_A} & F^n\end{array}$$

Η έκφραση της f ως προς το επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$L_A = \Phi_v^{-1} \circ f \circ \Phi_v \quad \text{με} \quad A = (f : B, B)$$

Αν ο πίνακας $A = (f : B, B)$ είναι ο μοναδιαίος τότε η $L_A = 1_{F^n}$ (ταυτοτική απεικόνιση του F^n. Επομένως

$$L_A = \Phi_v^{-1} \circ f \circ \Phi_v = 1_{F^n} \Rightarrow f = \Phi_v \circ 1_{F^n} \circ \Phi_v^{-1} \Rightarrow f = 1_V$$

Αντίστροφα:

Αν $f = 1_V$ τότε

$$L_A = \Phi_v^{-1} \circ f \circ \Phi_v = \Phi_v^{-1} \circ 1_V \circ \Phi_v = \Phi_v^{-1} \circ \Phi_V \Rightarrow L_A = 1_{F^n} \text{ (ταυτοτική του } F^n\text{)}$$

Άρα ο πίνακας $A = (f : B, B)$ είναι ο μοναδιαίος.

■

Θα δείξουμε τώρα το κεντρικό θεώρημα του κεφαλαίου που συνοψίζει την αντιστοιχία μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων

8.4.12 Θεώρημα (Ισομορφία διανυσματικού χώρου γραμμικών απεικονίσεων και διανυσματικού χώρου πινάκων)

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Αν $\dim V = n$, $\dim W = m$, $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ και $B^* = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα τότε η απεικόνιση

$$M_{B^*}^B : L(V, W) \to M_{m \times n}(F),$$

έτσι ώστε

$$M_{B^*}^B(f) = (f : B, B^*)$$

που σε κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί τον πίνακά της ως προς τις επιλεγμένες διατεταγμένες βάσεις είναι ένας ισομορφισμός. [3]

Απόδειξη

Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση είναι γραμμική αρκεί να δείξουμε ότι για $f, g \in L(V, W)$ και $a, b \in F$ ισχύει

$$M_{B^*}^B(af + bg) = aM_{B^*}^B(f) + bM_{B^*}^B(g)$$

Θα συγκρίνουμε τις $j-$στήλες των πινάκων

$$M_{B^*}^B(af + bg) \text{ και } aM_{B^*}^B(f) + bM_{B^*}^B(g), (j = 1, 2, ..., n)$$

[3] Λόγω του ισομορφισμού $M_{B^*}^B$, θα συμβολίζουμε τον πίνακα $(f : B, B^*)$ και ως $M_{B^*}^B(f)$.

Η $j-$στήλη του $M_{B^*}^{B}(af+bg)$ είναι

$$\left[(af+bg)(v_j)\right]_{B^*}=\left[af(v_j)+bg(v_j)\right]_{B^*}=\left[af(v_j)\right]_{B^*}+\left[bg(v_j)\right]_{B^*}$$
$$=a\left[f(v_j)\right]_{B^*}+b\left[g(v_j)\right]_{B^*}$$

που είναι το άθροισμα της $j-$στήλης του $aM_{B^*}^{B}(f)$ και της $j-$στήλης του $bM_{B^*}^{B}(g)$.

Επομένως οι στήλες των πινάκων $M_{B^*}^{B}(af+bg)$ και $aM_{B^*}^{B}(f)+bM_{B^*}^{B}(g)$ είναι ίσες, άρα οι πίνακες είναι ίσοι.

Θα δείξουμε τώρα ότι η $M_{B^*}^{B}$ είναι ένα προς ένα. Αρκεί ο πυρήνας της να αποτελείται μόνο από την μηδενική γραμμική απεικόνιση $\vartheta : V\to W$. Πράγματι αν $f\in Ker(M_{B^*}^{B})$, τότε

$$M_{B^*}^{B}(f)=O_{m\times n}\Leftrightarrow\left[f(v_j)\right]_{B^*}=O_{m\times 1}\Leftrightarrow f(v_j)=0_W,(j=1,2,\ldots,n)\Leftrightarrow f=\vartheta$$

Απομένει να δείξουμε ότι η γραμμικά απεικόνιση $M_{B^*}^{B}$ είναι επί. Έστω ένας πίνακας $A\in M_{m\times n}(F)$ θα δείξουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f\in L(V,W)$ έτσι ώστε $A=M_{B^*}^{B}(f)$, δηλαδή ο πίνακάς της ως προς τις επιλεγμένες βάσεις να είναι ο A. Πράγματι, ο πίνακας A ορίζει μια γραμμικά απεικόνιση $L_A : F^n\to F^m, X\mapsto AX$ και όπως φαίνεται και από το παρακάτω διάγραμμα, η απεικόνιση $f=\Phi_{B^*}{}^{-1}\circ L_A\circ\Phi_B$ ικανοποιεί την συνθήκη $A=M_{B^*}^{B}(f)$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_B\downarrow & & \downarrow\Phi_{B^*} \\ F^n & \xrightarrow{L_A} & F^m \end{array}$$

Επομένως η $M_{B^*}^{B}$ είναι επί και τελικά είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών χώρων $L(V,W)$ και $M_{m\times n}(F)$.

8.4.13 Παράδειγμα

Έστω C,C^* οι συνήθεις διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα. Αν δοθεί η γραμμική απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z & 5x-y+4z \end{pmatrix}^T$$

τότε υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας A που αντιστοιχεί σ' αυτήν ως προς τις επιλεγμένες βάσεις. Είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην f με τον προηγούμενο ισομορφισμό

$$A = M_{C^*}^{C}(f) = (f : C, C^*) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Αλλά και αντίστροφα: αν δοθεί ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto BX$$

δηλαδή,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y+z \\ 2x+4y-5z \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$M_{C^*}^{C}(f) = (f : C, C^*) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

8.4.14 Θεώρημα (Πίνακας σύνθεσης)

Έστω $f:U \to V, g:V \to W$ γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Αν $u=\{u_1,\dots,u_n\}, v=\{v_1,\dots,v_p\}$ και $w=\{w_1,\dots,w_m\}$ διατεταγμένες βάσεις των διανυσματικών χώρων U,V,W αντίστοιχα, τότε ο πίνακας της σύνθεσης $g\circ f$ ως προς τις διατεταγμένες βάσεις u,w είναι :

$$M_w^u(g\circ f) = M_w^v(g)\times M_v^u(f)$$

Παρατήρηση:

Σημειώνουμε την αναλογία του προηγούμενου τύπου με αυτούς που ονομάζουμε «σχέσεις του Chasles» (στην πρόσθεση διανυσμάτων, στον ολοκληρωτικό λογισμό, κ.λ.π)

Απόδειξη

Η απόδειξη στηρίζεται στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_u} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_v} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_W} \\ F^n & \xrightarrow[L_A]{} & F^p & \xrightarrow[L_B]{} & F^m \end{array}$$

Αρχικά, ο πίνακας της $L_B \circ L_A$, ως προς τις κανονικές βάσεις, είναι ο

$$BA = M_w^v(g) \times M_v^u(f)$$

αφού

$$L_B \circ L_A(x) = L_B(L_A(x)) = L_B(Ax) = B(Ax) = (BA)x$$

Όμως επειδή

$$L_B \circ L_A = \Phi_u^{-1} \circ (g \circ f) \circ \Phi_W$$

η γραμμική απεικόνιση $L_B \circ L_A$ είναι «η έκφραση της $g \circ f$ ως προς τα επιλεγμένα συστήματα συντεταγμένων». Άρα

$$M_w^u(g \circ f) = BA = M_w^v(g) \times M_v^u(f)$$

8.4.15 Πόρισμα (Πίνακας αντίστροφης)

Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι πίνακας ενός ισομορφισμού.

Δηλαδή, αν $\dim V = \dim W = n$ *και* $f : V \to W$ *γραμμική απεικόνιση*

$$H \ f \text{ είναι ένας ισομορφισμός} \Leftrightarrow \text{ o } M_w^v(f) \text{ είναι αντιστρέψιμος}$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$[M_w^v(f)]^{-1} = M_v^w(f^{-1})$$

Απόδειξη

Αν η f είναι ισομορφισμός, τότε υπάρχει η $f^{-1} : W \to V$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{f^{-1}} V$$

και έχουμε

$$M_v^v(f^{-1} \circ f) = M_v^v(1_V) = M_v^w(f^{-1}) \times M_w^v(f)$$

Επειδή

$$M_v^v(1_V) = I_n$$

προκύπτει

$$M_v^w(f^{-1}) \times M_w^v(f) = I_n$$

Άρα ο πίνακας $M_w^v(f)$ είναι αντιστρέψιμος και $[M_w^v(f)]^{-1} = M_v^w(f^{-1})$.

Αντίστροφα:

Αν ο πίνακας $M_w^v(f)$ είναι αντιστρέψιμος τότε έστω ότι $[M_w^v(f)]^{-1}=N$.

Θεωρούμε την μοναδική γραμμική απεικόνιση $g:W\to V$ με $M_v^w(g)=N$, τότε έχουμε

$$V\xrightarrow{f}W\xrightarrow{g}V$$

με

$$M_v^v(g\circ f)=M_v^w(g)\times M_w^v(f)=I_n$$

Επομένως η απεικόνιση $g\circ f$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση και κατά συνέπεια η f είναι ένας ισομορφισμός.

■

Πίνακας αλλαγής βάσης ή πίνακας μετάβασης.

Όταν σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης επιλέξουμε δύο διαφορετικές βάσεις, τότε το ίδιο διάνυσμα θα έχει, γενικά, διαφορετικές συντεταγμένες ως προς τις επιλεγμένες βάσεις. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε την σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς διαφορετικές βάσεις.

Εισαγωγικό παράδειγμα

Στο παράδειγμα 8.4.8 είδαμε ότι, αν X είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες ως προς τη συνήθη διατεταγμένη βάση $C=\{e_1,e_2\}$

$$[X]_C=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

τότε οι συντεταγμένες του X ως προς την διατεταγμένη βάση $B^*=\{w_1,w_2\}$, όπου $w_1=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}^T, w_2=\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}^T$ είναι

$$[X]_{B^*}=\begin{pmatrix}4x-y\\-3x+y\end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$[X]_{B^*}=\begin{pmatrix}4x-y\\-3x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

που γράφεται

$$[X]_{B^*} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} [X]_C$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς την βάση $B^* = \{w_1, w_2\}$ όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος ως προς την κανονική βάση. Ακόμη, επειδή

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι οι στήλες του πίνακα αποτελούνται από τις συντεταγμένες των διανυσμάτων της συνήθους βάσης ως προς την διατεταγμένη βάση $B^* = \{w_1, w_2\}$.

Επομένως, ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

με χρήση του οποίου υπολογίζουμε τις νέες συντεταγμένες είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην ταυτοτική απεικόνιση του $\mathbb{R}^2$

$$1_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto X$$

όταν στο πεδίο ορισμού θεωρήσουμε ως διατεταγμένη βάση την συνήθη και στο πεδίο τιμών την βάση $B^* = \{w_1, w_2\}$. Δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = M^C_{B^*}(1_{\mathbb{R}^2}) = (1_{\mathbb{R}^2} : C, B^*)$$

Τον πίνακα αυτό τον ονομάζουμε πίνακα αλλαγής βάσης ή πίνακα μετάβασης από την διατεταγμένη βάση C στην διατεταγμένη βάση B^* ([4]) και τον συμβολίζουμε $P^C_{B^*}$.

Δηλαδή,

$$P^C_{B^*} = (1_{\mathbb{R}^2} : C, B^*)$$

(Την βάση που επιλέγουμε στο πεδίο ορισμού την λέμε «παλαιά βάση» και αυτή του πεδίου τιμών «νέα βάση»).

8.4.16 Ορισμός (Πίνακας αλλαγής βάσης)

Έστω

$$1_V : V \to V, x \mapsto x$$

η ταυτοτική απεικόνιση ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης και

---

[4] Πολλοί συγγραφείς τον ονομάζουν πίνακα μετάβασης από την βάση B^* στην βάση C.

$$v=\{v_1,\dots,v_n\},v^{/}=\{v_1^{/},\dots,v_p^{/}\}$$

δύο διατεταγμένες βάσεις του.

Ο πίνακας $M_{v^{/}}^{v}(1_V)=(1_V:v,v^{/})$ *λέγεται* ***πίνακας αλλαγής βάσης*** *ή* ***πίνακας μετάβασης από την βάση*** v ***στην*** $v^{/}$ *και συμβολίζεται* $P_{v^{/}}^{v}$.

Παρατηρήσεις

1) Συνηθίζουμε να λέμε ότι η v είναι «η παλαιά βάση» και η $v^{/}$ η «νέα βάση».

2) Η i στήλη του πίνακα αποτελείται από το διάνυσμα

$$\left[1_V(v_i)\right]_{v^{/}}=\left[v_i\right]_{v^{/}}\ (i=1,2,\dots,n)$$

δηλαδή τις συντεταγμένες του v_i ως προς την νέα βάση $v^{/}$.

3) Η επιλογή των διατεταγμένων βάσεων δημιουργεί τους ισομορφισμούς Φ_v, $\Phi_{v^{/}}$ και επομένως την γραμμική απεικόνιση (ισομορφισμό) L_A (Α ο πίνακας αλλαγής βάσης) όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "1_V"] \arrow[d, "\Phi_v"] & V \arrow[d, "\Phi_{v^{/}}"] \\ F^n \arrow[r, "L_A"] & F^n \end{tikzcd} \qquad L_A=\Phi_{v^{/}}\circ 1_V\circ\Phi_V^{-1}=\Phi_{v^{/}}\circ\Phi_V^{-1}$$

8.4.17 Παράδειγμα

Στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις

$$C=\{e_1,e_2\},B=\{v_1,v_2\},$$

όπου C η συνήθης βάση και

$$v_1=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^T,v_2=\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}^T$$

Ο πίνακας μετάβασης από την βάση B στην κανονική βάση έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων της βάσης B ως προς την συνήθη βάση. Δηλαδή

$$P_C^B=\begin{pmatrix}[v_1]_C & [v_2]_C\end{pmatrix}$$

Επομένως

$$P_C^B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης από την διατεταγμένη βάση C στην διατεταγμένη βάση B έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων της C ως προς την βάση B.

$$P_B^C = \left([e_1]_B \quad [e_2]_B \right)$$

Από την σχέση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

προκύπτει

$$\begin{cases} a = -5x + 3y \\ b = 2x - y \end{cases}$$

Έτσι, για να βρούμε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ ως προς την βάση B θέτουμε όπου $x = 1$, $y = 0$ και έχουμε $a = -5, b = 2$. Ομοίως για το $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ θέτουμε $x = 0$, $y = 1$ και βρίσκουμε $a = 3, b = -1$

Επομένως

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Κατά συνέπεια

$$P_B^C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση:

Παρατηρούμε ότι

$$P_C^B P_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Δηλαδή, οι προηγούμενοι πίνακες είναι αντίστροφοι.

8.4.18 Θεώρημα (Συντεταγμένες διανύσματος ως προς διαφορετικές διατεταγμένες βάσεις)

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε:

$$\left[1_V(x) \right]_{v'} = P_{v'}^{v} \left[x \right]_v \text{ ή } \left[x \right]_{v'} = P_{v'}^{v} \left[x \right]_v$$

Δηλαδή, για να βρούμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς τηνδιατεταγμένη βάση v' αρκεί να πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά τις συντεταγμένες του διανύσματος ως προς την διατεταγμένη βάση v με τον πίνακα μετάβασης από την βάση v στην βάση $v^{/}$.

Σχέση μεταξύ των πινάκων $P_{v^{/}}^{v}$ και $P_{v}^{v^{/}}$

Όπως είδαμε στο εισαγωγικό παράδειγμα

$$[X]_{B^*} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} [X]_C$$

Αν τώρα γνωρίζουμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς την βάση διατεταγμένη βάση B^* και θέλουμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του ως προς την συνήθη βάση, αρκεί να εξετάσουμε την αντιστρεψιμότητα του παραπάνω πίνακα $P_{B^*}^{C}$.

Ο πίνακας $P_{B^*}^{C}$ είναι αντιστρέψιμος (η ορίζουσά του ισούται με $1 \neq 0$) και

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$[X]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} [X]_{B^*}$$

Παρατηρούμε ότι οι στήλες του νέου πίνακα αποτελούνται από τις συντεταγμένες των διανυσμάτων της διατεταγμένης βάσης B^* ως προς την συνήθη βάση. Δηλαδή

$$P_{C}^{B^*} = (P_{B^*}^{C})^{-1}$$

8.4.19 Θεώρημα (Αντίστροφος πίνακα αλλαγής βάσης)

Οι πίνακες $P_{v^{/}}^{v}$ και $P_{v}^{v^{/}}$ είναι αντιστρέψιμοι και ισχύει: $(P_{v^{/}}^{v})^{-1} = P_{v}^{v^{/}}$

Απόδειξη

$$I_n = M_{v^{/}}^{v^{/}}(1_V) = M_{v^{/}}^{v^{/}}(1_V \circ 1_V) = M_{v^{/}}^{v}(1_V) \times M_{v}^{v^{/}}(1_V) = P_{v^{/}}^{v} \times P_{v}^{v^{/}}$$

Επομένως οι πίνακες μετάβασης $P_{v^{/}}^{v}$ *και* $P_{v}^{v^{/}}$ είναι αντίστροφοι.

■

8.4.20 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις : $v = \{v_1, v_2\}, v^{/} = \{v_1^{/}, v_2^{/}\}$,όπου

$$v_1=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^T, v_2=\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}^T \text{ και } v_1^{/}=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^T, v_2^{/}=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}^T$$

(α) Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης από την βάση v στην $v^{/}$.

(β) Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης από την βάση $v^{/}$ στην v.

Λύση

(α) Από την σχέση

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

προκύπτει

$$\begin{cases}a=2x+y\\b=-x-y\end{cases}$$

Άρα

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=11\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+(-8)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$[v_1]_{v'}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix},[v_2]_{v'}=\begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix}$$

Επομένως

$$P_{v^{/}}^{v}=\begin{pmatrix}4 & 11\\-3 & -8\end{pmatrix}$$

(β) Ο πίνακας μετάβασης από την $v^{/}$ στην v είναι ο αντίστροφος του προηγούμενου

$$P_{v}^{v^{/}}=(P_{v^{/}}^{v})^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 11\\-3 & -8\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow P_{v}^{v^{/}}=\begin{pmatrix}-8 & -11\\3 & 4\end{pmatrix}$$

<u>2ος τρόπος</u>

Όπως είδαμε στο <u>παράδειγμα 8.4.17</u> από την σχέση

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

προκύπτει

$$\begin{cases}a=-5x+3y\\b=2x-y\end{cases}$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -8\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -11\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$P_v^{v'} = \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Στο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις

$$C = \{e_1, e_2, e_3\}, B = \{v_1, v_2, v_3\},$$

όπου C η συνήθης βάση και

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$$

(α)Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης P_C^B από την βάση B στην C.

(β) Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης P_B^C από την βάση C στην B.

(γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ ως προς την βάση B.

Λύση

(α) Επειδή οι συντεταγμένες των διανυσμάτων της βάσης B ως προς την C είναι

$$[v_1]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, [v_2]_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, [v_3]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$$

ο ζητούμενος πίνακας είναι

$$P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(β)

<u>1^{ος} τρόπος</u>

Ο πίνακας P_B^C είναι ο αντίστροφος του προηγούμενου πίνακα P_C^B

Με γραμμοπράξεις βρίσκουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Άρα

$$P_B^C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2ος τρόπος

Γράφουμε, για τυχαίο διάνυσμα $X \in \mathbb{R}^3$ του οποίου οι συντεταγμένες ως προς την συνήθη βάση είναι $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

και προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα, από το οποίο προσδιορίζουμε τα a,b,c συναρτήσει των x,y,z. Δίνουμε τιμές στα x,y,z (ανάλογα με τις συντεταγμένες, ως προς την συνήθη βάση, του δεδομένου διανύσματος) και υπολογίζουμε τα a,b,c. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει

$$\begin{cases} a + 2b + c = x \\ b + 2c = y \\ a + 2b + 2c = z \end{cases}$$

Με γραμμοπράξεις, στον επαυξημένο πίνακα έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 1 & 2 & 2 & z \end{array}\right) \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-x \end{array}\right) \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3 \\ \Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2x-z \\ 0 & 1 & 0 & 2x+y-2z \\ 0 & 0 & 1 & z-x \end{array}\right)$$

$$\overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2x-2y+3z \\ 0 & 1 & 0 & 2x+y-2z \\ 0 & 0 & 1 & z-x \end{array}\right)$$

Άρα

$$\begin{cases} a = -2x - 2y + 3z \\ b = \ \ 2x + y - 2z \\ c = \qquad\ z - x \end{cases}$$

Οπότε

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$P_B^C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι για να βρούμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς την βάση B αρκεί να πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά τις συντεταγμένες του διανύσματος ως προς την συνήθη βάση με τον πίνακα μετάβασης από την συνήθη βάση στην βάση B (Θεώρημα 8.4.18). Δηλαδή

$$[x]_B = P_B^C [x]_C$$

Επομένως

$$[x]_B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}[x]_C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ασκήσεις 8.4

1) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y - 4z \\ x - 5y + 3z \end{pmatrix}$$

α) Να βρείτε τον πίνακα της f ως προς τις συνήθεις βάσεις C, C^* των $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ αντίστοιχα.

β) Έστω

$$v_1 = (1 \quad 1 \quad 1)^T, v_2 = (1 \quad 1 \quad 0)^T, v_3 = (1 \quad 0 \quad 0)^T$$
$$u_1 = (1 \quad 3)^T, u_2 = (2 \quad 5)^T$$

Να βρείτε τον πίνακα της f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις

$B=\{v_1,v_2,v_3\}, B^*=\{u_1,u_2\}$ των $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ αντίστοιχα..

γ) Να επαληθεύσετε την σχέση: $[f(v)]_{B^*}=M_{B^*}^{B}(f)[v]_B$

2)Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A ορίζει την γραμμική απεικόνιση $L_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με τύπο $L_A(X)=AX$

α) Να βρείτε τον πίνακα της L_A ως προς την συνήθη βάση C του $\mathbb{R}^3$.

β) Έστω

$$v_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, v_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T, v_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^T$$

Να βρείτε τον πίνακα της L_A ως προς την διατεταγμένη βάση $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ του $\mathbb{R}^3$.

γ) Αν $[v]_B=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^T$, να βρείτε το διάνυσμα $[L_A(v)]_B$

3) Έστω

$$v_1=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}^T, v_2=\begin{pmatrix}3 & -4\end{pmatrix}^T, u_1=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}^T, u_2=\begin{pmatrix}3 & 8\end{pmatrix}^T$$

α) Να βρείτε τον πίνακα μετάβασης από την διατεταγμένη βάση $B=\{v_1,v_2\}$ στην διατεταγμένη βάση $B^*=\{u_1,u_2\}$ του $\mathbb{R}^2$.

β) Να βρείτε τον πίνακα μετάβασης από την διατεταγμένη βάση $B^*=\{u_1,u_2\}$ στην διατεταγμένη βάση $B=\{v_1,v_2\}$ του $\mathbb{R}^2$.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $X=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}^T\in\mathbb{R}^2$ ως προς την διατεταγμένη βάση $B=\{v_1,v_2\}$ και ως προς την διατεταγμένη βάση $B^*=\{u_1,u_2\}$.

Απαντήσεις / Υποδείξεις 8.4

1) βλ. παραδείγματα: 8.4.3 και 8.4.8 ,

α) $M_{C^*}^{C}(f)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

β) $M_{B^*}^{B}(f)=\begin{pmatrix} -7 & -33 & 13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$

2) βλ. παραδείγματα: 8.4.3 και 8.4.8

α) $M_C^C(L_A) = A$

β) $M_B^B(L_A) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 7 & -6 & -11 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

3) βλ. παραδείγματα 8.4.20

α) $P_{B^*}^B = \begin{pmatrix} -14 & -36 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$

β) Χρησιμοποιείστε το θεώρημα 8.4.19γ)

$[X]_B = P_B^C [X]_C, P_B^C = \left(P_C^B\right)^{-1}$, ομοίως για $[X]_{B^*}$

8.5 Ισοδύναμοι και όμοιοι πίνακες

Είδαμε ότι η επιλογή μιας διατεταγμένης βάσης στο πεδίο ορισμού και μιας διατεταγμένης βάσης στο πεδίο τιμών μιας γραμμικής απεικόνισης f δημιουργεί ένα πίνακα A, έτσι ώστε αν γράψουμε την απεικόνιση με την μορφή των συντεταγμένων των διανυσμάτων ως προς τις επιλεγμένες βάσεις, τότε η f είναι της μορφής L_A (πολλαπλασιασμός με τον A). Αν τώρα επιλέξουμε άλλες βάσεις στο πεδίο ορισμού και στο πεδίο τιμών τότε δημιουργείται ένας πίνακας B και η f γίνεται L_B. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την σχέση που συνδέει τους πίνακες A και B. Δηλαδή, την σχέση που συνδέει τους πίνακες μιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικά ζεύγη διατεταγμένων βάσεων του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών.

Εισαγωγικό παράδειγμα

Στο παράδειγμα 8.4.8 θεωρήσαμε την γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

με τύπο

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ 3x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

και είδαμε ότι. αν

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \text{ και } w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T, w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}^T$$

ο πίνακας της f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ και $B^* = \{w_1, w_2\}$ των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα, είναι

$$(f : B, B^*) = M_{B^*}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

Επίσης, ο πίνακας της f ως προς τις συνήθεις βάσεις C και C^* των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα, είναι

$$(f : C, C^*) = M_{C^*}^{C}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

δηλαδή, ο πίνακας $M_{B^*}^{B}(f)$ προκύπτει από τον $M_{C^*}^{C}(f)$ με πολλαπλασιασμό από αριστερά και δεξιά με δύο αντιστρέψιμους πίνακες

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } Q=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ισχύει δηλαδή

$$M_{B^*}^{B}(f)=QM_{C^*}^{C}(f)P$$

Πώς όμως συνδέονται οι πίνακες P,Q με τα δεδομένα;

Παρατηρούμε ότι οι στήλες του πίνακα P αποτελούνται από τις συντεταγμένες των διανυσμάτων v_1,v_2,v_3 ως προς την συνήθη βάση. Δηλαδή $P=P_C^B$. Ακόμη, ο αντίστροφος του Q είναι ο πίνακας

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

που οι στήλες του αποτελούνται από τις συντεταγμένες των w_1,w_2 ως προς την συνήθη βάση. Δηλαδή $Q^{-1}=P_{C^*}^{B^*}$, επομένως $Q=P_{B^*}^{C^*}$. Τελικά, η σχέση που συνδέει τους πίνακες της γραμμικής απεικόνισης ως προς τις διατεταγμένες βάσεις B,B^* και C,C^* είναι

$$M_{B^*}^{B}(f)=P_{B^*}^{C^*}M_{C^*}^{C}(f)P_C^B \qquad (*)$$

όπου P_C^B και $P_{B^*}^{C^*}$ οι πίνακες μετάβασης.

▲

Θα δείξουμε ότι και στην γενική περίπτωση, μια σχέση της προηγούμενης μορφής $(*)$ συνδέει τους πίνακες μιας γραμμικής απεικόνισης.

Πράγματι, έστω $f:V\to W$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Αν $v=\{v_1,...,v_n\}, v^{/}=\{v_1^{/},...,v_n^{/}\}$ δύο διατεταγμένες βάσεις του διανυσματικού χώρου V και $w=\{w_1,...,w_m\}, w^{/}=\{w_1^{/},...,w_m^{/}\}$ δύο διατεταγμένες βάσεις του διανυσματικού χώρου W, θα αναζητήσουμε την σχέση που συνδέει τους πίνακες

$$A=M_w^v(f) \text{ και } B=M_{w^{/}}^{v^{/}}(f).$$

Η σχέση αυτή προκύπτει εύκολα αν εξετάσουμε το παρακάτω διάγραμμα που προκύπτει από την επιλογή των βάσεων στους διανυσματικούς χώρους V και W.

$$\begin{array}{ccc} F^n & \xrightarrow{L_B} & F^m \\ \uparrow^{\Phi_{v^{/}}} & & \uparrow^{\Phi_{w^{/}}} \\ V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow^{\Phi_v} & & \downarrow^{\Phi_w} \\ F^n & \xrightarrow[L_A]{} & F^m \end{array}$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$L_B=\Phi_{w^{/}}\circ f\circ\Phi_{v^{/}}^{-1} \text{ και}$$

$$L_A=\Phi_w\circ f\circ\Phi_v^{-1}$$

Από την δεύτερη σχέση έχουμε

$$f=\Phi_w^{-1}\circ L_A\circ\Phi_v$$

και επομένως, αντικαθιστώντας στην πρώτη, προκύπτει

$$L_B=\Phi_{w^{/}}\circ\Phi_w^{-1}\circ L_A\circ\Phi_v\circ\Phi_{v^{/}}^{-1}=(\Phi_{w^{/}}\circ\Phi_w^{-1})\circ L_A\circ(\Phi_v\circ\Phi_{v^{/}}^{-1})$$

Ο πίνακας της

$$\Phi_v\circ\Phi_{v^{/}}^{-1}:[x]_{v^{/}}\mapsto[x]_v$$

είναι ο πίνακας μετάβασης $P_v^{v^{/}}$ και ο πίνακας της

$$\Phi_{w^{/}}\circ\Phi_w^{-1}:[x]_w\mapsto[x]_{w^{/}}$$

είναι ο πίνακας μετάβασης $P_w^{w^{/}}$. Επομένως

$$B=P_{w^{/}}^{w}AP_v^{v^{/}}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν την εξής σημαντική σχέση που συνδέει τους πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικές βάσεις:

8.5.1 Θεώρημα (Πίνακες γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικές διατετεγμένες βάσεις)

Αν $f:V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, $v=\{v_1,...,v_n\}, v' = \{v_1',...,v_n'\}$ δύο διατεταγμένες βάσεις του διανυσματικού χώρου V και $w=\{w_1,...,w_m\}, w' = \{w_1',...,w_m'\}$ δύο διατεταγμένες βάσεις του διανυσματικού χώρου W, τότε

$$M_{w'}^{v'}(f) = P_{w'}^{w} M_{w}^{v}(f) P_{v}^{v'} \quad (**)$$

■

Παρατήρηση:
Σημειώνουμε την αναλογία του προηγούμενου τύπου με αυτούς που ονομάζουμε «σχέσεις του Chasles» (στην πρόσθεση διανυσμάτων, στον ολοκληρωτικό λογισμό, κ.λ.π.)

8.5.2 Ορισμός (Ισοδύναμοι πίνακες)

*Αν $A,B \in M_{m\times n}(F)$ θα λέμε ότι οι πίνακες είναι **ισοδύναμοι**, αν υπάρχουν δύο αντιστρέψιμοι πίνακες P,Q έτσι ώστε $B = QAP$*

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι αν δύο πίνακες είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης $f:V \to W$ ως προς διαφορετικά ζεύγη διατεταγμένων βάσεων του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών, τότε είναι ισοδύναμοι.

▲

Αν $f:V \to V$ γραμμική απεικόνιση και $v=\{v_1,...,v_n\}, v' = \{v_1',...,v_n'\}$ δύο διατεταγμένες βάσεις του διανυσματικού χώρου V, τότε από την σχέση $(**)$ προκύπτει ότι οι πίνακες $M_{v}^{v}(f)$ και $M_{v'}^{v'}(f)$ συνδέονται με την σχέση

$$M_{v'}^{v'}(f) = P_{v'}^{v} M_{v}^{v}(f) P_{v}^{v'}$$

και επειδή

$$P_{v'}^{v} = \left(P_{v}^{v'}\right)^{-1}$$

προκύπτει

$$M_{v'}^{v'}(f) = \left(P_{v}^{v'}\right)^{-1} M_{v}^{v}(f) P_{v}^{v'}$$

Δηλαδή ισχύει:

8.5.3 Θεώρημα (Πίνακες γραμμικού μετασχηματισμού ως προς διαφορετικές διατετεγμένες βάσεις)

Αν $f:V\to V$ *γραμμική απεικόνιση και* $v=\{v_1,\dots,v_n\},v'=\{v_1',\dots,v_n'\}$ *δύο διατεταγμένες βάσεις του διανυσματικού χώρου* V, *τότε*

$$M_{v'}^{v'}(f)==\left(P_v^{v'}\right)^{-1}M_v^v(f)P_v^{v'}$$

■

8.5.4 Ορισμός (Όμοιοι πίνακες)

Αν $A,B\in M_{n\times n}(F)$ *τετραγωνικοί πίνακες, θα λέμε ότι οι πίνακες είναι* ***όμοιοι****, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* P *έτσι ώστε* $B=P^{-1}AP$

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι αν δύο πίνακες είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης $f:V\to V$ ως προς δύο διαφορετικές βάσεις του V, τότε είναι όμοιοι.

8.5.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Στο παράδειγμα 8.4.8 βρήκαμε τον πίνακα $M_{B^*}^B(f)$ της γραμμικής απεικόνισης

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$

με τύπο

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y-z\\3x-2y+4z\end{pmatrix}$$

ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ και $B^*=\{w_1,w_2\}$ του $\mathbb{R}^2$, όπου,

$v_1=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T,v_2=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}^T,v_3=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T$ και $w_1=\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}^T,w_2=\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix}^T$

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα.

Από τον ορισμό της f μπορούμε να βρούμε τον πίνακά της ως προς τις συνήθεις βάσεις C,C^* των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα. Πράγματι

$$M_{C^*}^{C}(f)=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα

$$M_{B^*}^{B}(f)=P_{B^*}^{C^*}M_{C^*}^{C}(f)P_C^B$$

όμως, P_C^B είναι ο πίνακας μετάβασης από την βάση B στην συνήθη βάση.

Γνωρίζουμε ότι οι στήλες του είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων της βάσης B ως προς την συνήθη βάση. Επομένως

$$P_C^B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ακόμη, γνωρίζουμε ότι

$$P_{B^*}^{C^*}=\left(P_{C^*}^{B^*}\right)^{-1} \text{ και } P_{C^*}^{B^*}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Επομένως

$$P_{B^*}^{C^*}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

Τελικά έχουμε

$$M_{B^*}^{B}(f)=P_{B^*}^{C^*}M_{C^*}^{C}(f)P_C^B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 6 & -8\\ -3 & -5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 11 & 5\\ -1 & -8 & -3\end{pmatrix}$$

Άρα

$$M_{B^*}^{B}(f)=\begin{pmatrix}3 & 11 & 5\\ -1 & -8 & -3\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$L_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, X\mapsto AX$$

όπου

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

και τα διανύσματα

$$u_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T, u_2=\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}^T$$

Να βρεθεί ο πίνακας B της γραμμικής απεικόνισης ως προς την διατεταγμένη βάση $u=\{u_1,u_2\}$.

Λύση

Ο πίνακας της απεικόνισης ως προς την συνήθη βάση C του $\mathbb{R}^2$ είναι

$$M_C^C(f)=A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

και γνωρίζουμε ότι ο ζητούμενος πίνακας είναι όμοιος με τον A και ισχύει

$$M_u^u(L_A)=P_u^C M_C^C(L_A) P_C^u=\left(P_C^u\right)^{-1} M_C^C(L_A) P_C^u$$

Γνωρίζουμε ότι

$$P_C^u=P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ με } P^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

επομένως

$$B=M_u^u(L_A)=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -53 & -89 \\ 32 & 54 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 3

Στο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις

$$C=\{e_1,e_2,e_3\}, B=\{v_1,v_2,v_3\},$$

όπου C η συνήθης βάση,

$$v_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, v_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, v_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$$

και την γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τον πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y-2z \\ 2x-4y+z \\ 3x-y+2z \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς την διατεταγμένη βάση v.

Λύση

Ο πίνακας A είναι ο πίνακας της f ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ και γνωρίζουμε ότι

$$M_B^B(f) = P_B^C M_C^C(f) P_C^B = \left(P_C^B\right)^{-1} M_C^C(f) P_C^B$$

Από το [παράδειγμα 2](#) της 8.4.20 , γνωρίζουμε ότι

$$P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } P_B^C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 21 & 17 \\ -9 & -14 & -8 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 4

Στο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις

$$C = \{e_1, e_2, e_3\}, v = \{v_1, v_2, v_3\},$$

όπου C η συνήθης βάση,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$$

και την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y+z \\ 2x+5y-4z \\ x-2y+2z \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας B της f ως προς την διατεταγμένη βάση v.

Λύση

Ο πίνακας της f ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$M_C^C(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

και γνωρίζουμε ότι

$$B = M_v^v(f) = P_v^C M_C^C(f) P_C^v = P^{-1}AP$$

Επομένως

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 7 & -6 & -11 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 5

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto AX$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

και τα διανύσματα

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T, u_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}^T$$

Να βρεθεί ο πίνακας B της γραμμικής απεικόνισης ως προς την διατεταγμένη βάση $u = \{u_1, u_2\}$.

Λύση

Ο πίνακας της απεικόνισης ως προς την συνήθη βάση C του $\mathbb{R}^2$ είναι

$$M_C^C(f) = A = A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

και γνωρίζουμε ότι ο ζητούμενος πίνακας είναι όμοιος με τον A και ισχύει

$$B = M_u^u(L_A) = P_u^C M_C^C(L_A) P_C^u = \left(P_C^u\right)^{-1} M_C^C(L_A) P_C^u$$

Γνωρίζουμε ότι

$$P_C^u = P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ με } P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

επομένως

$$B = M_u^u(L_A) = P^{-1}AP = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως βρίσκουμε την βάση ως προς την οποία ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι διαγώνιος.

▲

Λόγω του θεωρήματος 8.5.1 οι πίνακες μιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικές βάσεις είναι ισοδύναμοι. Θα αποδείξουμε και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν δύο πίνακες του ίδιου τύπου είναι ισοδύναμοι τότε είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικές βάσεις.

8.5.6 Θεώρημα

Έστω $v=\{v_1,\ldots,v_n\}$ *και* $w=\{w_1,\ldots,w_m\}$ *διατεταγμένες βάσεις των διανυσματικών χώρων* V *και* W. *Αν* $A,B\in M_{m\times n}(F)$ *και υπάρχουν δύο αντιστρέψιμοι πίνακες* P,Q *έτσι ώστε* $B=QAP$, *τότε υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις* $v'=\{v_1',\ldots,v_n'\}$, $w'=\{w_1',\ldots,w_m'\}$ *των* V *και* W *αντίστοιχα και μια γραμμική απεικόνιση* $f:V\to W$ *έτσι ώστε* $A=M_w^v(f)$ *και* $B=M_{w'}^{v'}(f)$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $B=QAP$. Έστω $f:V\to W$ η γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στον πίνακα A μέσω του ισομορφισμού M_w^v του θεωρήματος 8.4.12. Ισχύει $M_w^v(f)=A$. Έστω, για κάθε $j=1,2,\ldots,n,$ το διάνυσμα v_j' του οποίου οι συντεταγμένες ως προς την βάση v είναι τα στοιχεία της $j-$στήλης του πίνακα P. Επειδή ο P είναι αντιστρέψιμος, τα διανύσματα v_j' είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση v' του V και από τον τρόπο που ορίσαμε τα διανύσματα v_j' προκύπτει ότι $P=P_v^{v'}$. Έστω, για κάθε $j=1,2,\ldots,m,$ το διάνυσμα w_j' του οποίου οι συντεταγμένες ως προς την βάση w είναι τα στοιχεία της $j-$στήλης του πίνακα Q^{-1}. Επειδή ο πίνακας Q^{-1} είναι αντιστρέψιμος, τα διανύσματα w_j' είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση w' του W και από τον τρόπο που ορίσαμε τα διανύσματα w_j' προκύπτει ότι $Q^{-1}=P_w^{w'}$. Ο πίνακας της f ως προς τις νέες βάσεις v' και w' είναι

$$M_{w^{/}}^{v^{/}}(f) = P_{w^{/}}^{w} M_{w}^{v}(f) P_{v}^{v^{/}} = QAP = B$$

■

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $W = V$, και για κάθε j, $v_j = w_j$ και $v_j^{/} = w_j^{/}$ προκύπτει:

8.5.7 Πόρισμα

Αν οι τετραγωνικοί πίνακες A, B είναι όμοιοι, δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $B = P^{-1}AP$, τότε οι πίνακες A, B είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ ως προς δύο διατεταγμένες βάσεις του V.

Χαρακτηρισμός ισοδύναμων πινάκων

Από τα θεωρήματα 8.5.1 και 8.5.6 προκύπτει ότι:

Δύο πίνακες είναι ισοδύναμοι αν, και μόνο αν είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to W$ ως προς διατεταγμένες βάσεις $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $v^{/} = \{v_1^{/}, \ldots, v_n^{/}\}$ του V και $w = \{w_1, \ldots, w_m\}$, $w^{/} = \{w_1^{/}, \ldots, w_m^{/}\}$ του W.

Χαρακτηρισμός όμοιων πινάκων

Από το θεώρημα 8.5.3 και το πόρισμα 8.5.7 προκύπτει ότι:

Δύο πίνακες είναι όμοιοι αν, και μόνο αν είναι πίνακες του ίδιου γραμμικού μετασχηματισμού $f : V \to V$ ως προς διατεταγμένες βάσεις $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και $v^{/} = \{v_1^{/}, \ldots, v_n^{/}\}$ του V.

Ασκήσεις 8.5

1) Στην άσκηση 8.4. 1), να βρεθεί ο πίνακας $M_{B^*}^{B}(f)$ της f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $B = \{v_1, v_2, v_3\}, B^* = \{u_1, u_2\}$, χρησιμοποιώντας την θεωρία της παραγράφου 8.5

2) Στην άσκηση 8.4. 2), να βρεθεί ο πίνακας $M_{B}^{B}(L_A)$ της L_A ως προς την βάση $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ του $\mathbb{R}^3$.

3) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με τύπο

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ -2x + 3y + 2z \\ -3x + 3y + 2z \end{pmatrix}$$

και τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Να βρεθούν οι πίνακες $M_C^B(f)$ και $M_B^B(f)$, ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ και C (η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$).

Απαντήσεις / Υποδείξεις

Βλ. Παραδείγματα 8.5.5

1) Χρησιμοποιήστε την σχέση

$$M_{B^*}^B(f) = P_{B^*}^{C^*} M_{C^*}^C(f) P_C^B, P_{B^*}^{C^*} = \left(P_{C^*}^{B^*}\right)^{-1}$$

2) Χρησιμοποιήστε την σχέση

$$M_B^B(L_A) = P_B^C M_C^C(f) P_C^B, P_B^C = \left(P_C^B\right)^{-1}$$

3)

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, M_B^B(f) = P_B^C M_C^C(f) P_C^B P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_B^C = \left(P_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$