ΠΛΗ20 – ΓΕ 2η – 2017/18: Ερωτήματα & απαντήσεις

Ερώτημα 1: Σύνταξη και συντακτικά δένδρα (δενδροδιαγράμματα). (7 + 7 μονάδες)

Το ερώτημα **1.A** *εξετάζει την ικανότητα συντακτικής ανάλυσης ενός προτασιακού τύπου.*

Το ερώτημα **1.B** *αποβλέπει στο να δείξει ότι τα συντακτικά δένδρα είναι χρήσιμα και κατά (πολλούς) άλλους τρόπους.*

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: (Α: ΘΕΜΑ #1), (Β: ΘΕΜΑ #3) .

Α. Διαγνώστε ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι ορθά συντεταγμένοι προτασιακοί τύποι επί των μεταβλητών $\{p,q,r,s\}$ και των συνδέσμων $\{\neg,\rightarrow,\vee,\wedge\}$. Για όσες είναι ορθές, σχεδιάστε το δενδροδιάγραμμά τους. (Τηρείστε τις προτεραιότητες συνδέσμων που εξηγούνται στο βιβλίο σελ. 25-26 [(1)].)

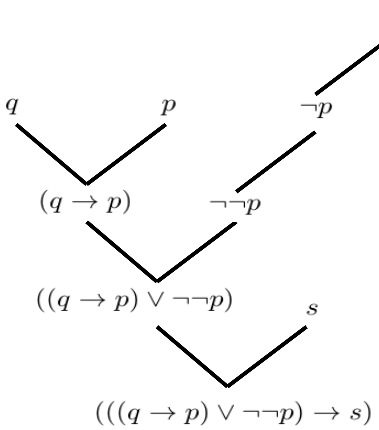
1) $((s\wedge p)\rightarrow\neg p)\rightarrow q)$ 2) $(s\rightarrow(p\vee q\wedge r))$ 3) $(((q\rightarrow p)\vee\neg\neg p)\rightarrow s)$ 4) $(q\rightarrow(r\vee(\neg p\leftarrow s)))$

1.Α: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1.Α.1. Λανθασμένη: περιέχει μία επιπλέον δεξιά παρένθεση.

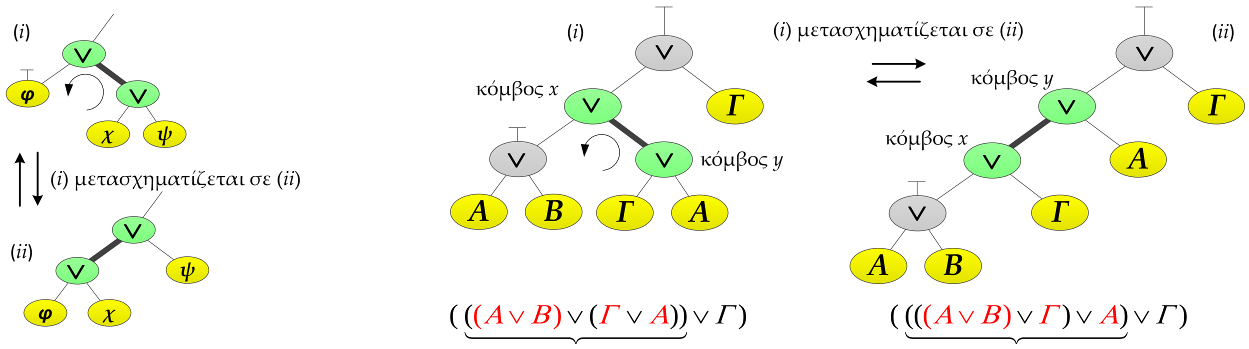
1.Α.2. Λανθασμένη: η προτεραιότητα με την οποία δίνεται νόημα στους συνδέσμους του $(p\vee q\wedge r)$ δεν είναι καθορισμένη (βλ. θεώρημα μοναδικής αναγνωσιμότητας στη σελ. 24 κ.ε.).

1.Α.3. Ορθή – το δενδροδιάγραμμα δίδεται στη συνέχεια:



1.Α.4. Λανθασμένη: το σύμβολο ← δεν περιέχεται στο σύνολο των διαθέσιμων τελεστών.

Β. Ο προσεταιριστικός νόμος της διάζευξης λέει ότι ο τύπος $(\varphi\vee(\chi\vee\psi))$ είναι αντικαταστήσιμος από τον τύπο $((\varphi\vee\chi)\vee\psi)$, βλ. σχήμα αριστερά. Στο σχήμα δεξιά εικονίζεται με δενδροδιαγράμματα, η εφαρμογή του προσεταιρισμού της διάζευξης σε τύπο με 5 εμφανίσεις μεταβλητών, και συγκεκριμένα επί των (υπο)-τύπων $\varphi=(A\vee B)$, $\chi=\Gamma$, $\psi=A$:



---

(1) *Όλες οι παραπομπές είναι στο Τόμο Γ΄ περί* ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ.

Έστω δύο διαζευκτικοί τύποι $Φ$ και $Φ΄$ με n εμφανίσεις $X_1, X_2, \ldots, X_n$, κάποιων προτασιακών μεταβλητών. Δείξατε ότι αν οι μεταβλητές έχουν την ίδια σειρά εμφάνισης, τότε, ανεξαρτήτως της θέσης των παρενθέσεων είναι δυνατόν, με χρήση του κανόνα της προσεταιριστικότητας, να μετασχηματίσουμε το έναν τύπο ώστε να προκύψει ο άλλος.

Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε, προαιρετικά, επαγωγή επί του πλήθους των αριστερών παρενθέσεων που εμφανίζονται από την αρχή ενός τύπου ως την πρώτη εμφάνιση μεταβλητής. Π.χ. στο σχήμα, δεξιά, από τρείς αρχικές παρενθέσεις στο (i), αποκτούμε τέσσερεις στο (ii).

1.Β: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Βάση επαγωγής: Προφανώς κάθε διαζευκτικός τύπος $Φ$ έχει τουλάχιστον $k = 1$ αρχικές παρενθέσεις. *Βήμα επαγωγής*: Θα δείξουμε ότι εάν ο $Φ$ έχει τουλάχιστον k αρχικές παρενθέσεις, όπου $k < (n–1)$, τότε μετασχηματίζεται σε τύπο με τουλάχιστον $(k +1)$ αρχικές παρενθέσεις, χωρίς αλλαγή της σειράς εμφάνισης των μεταβλητών. (Άρα επαγωγικά, ο $Φ$ μετασχηματίζεται ώστε να έχει ακριβώς n–1 αρχικές παρενθέσεις.)

Προσέχουμε ότι ο $Φ$ έχει τόσες αρχικές παρενθέσεις όσους κόμβους με διάζευξη έχει ο αριστερός κλάδος $κ$ στο δενδροδιάγραμμά του. Έστω ότι έχει $δ \geq k$ κόμβους διάζευξης. Αν $δ = (n–1)$ τότε ήδη $δ \geq (k +1)$ αφού $(k +1) \leq (n–1) = δ$. Αν $δ < (n–1)$ κάποια τις $(n–1)$ διαζεύξεις θα κείται εκτός του κλάδου $κ$, σε κόμβο y συνδεδεμένο με κόμβο x επί του $κ$ – π.χ. η $(Γ \vee Δ)$ στο σχήμα (i). Η εφαρμογή της προσεταιριστικότητας αντιστοιχεί στη «στροφή» της ακμής που συνδέει τους κόμβους x και y ώστε να βρεθεί *και* ο y επί του $κ$, (βλ. σχήματα), χωρίς αλλαγή της σειράς εμφάνισης των μεταβλητών. Άρα οι αρχικές παρενθέσεις θα γίνουν $(δ +1)$, όπου $(δ +1) \geq (k +1)$.

Ο $Φ$ μετασχηματίζεται λοιπόν ώστε το δενδροδιάγραμμά του $Δ$ να έχει όλες τις $(n–1)$ διαζεύξεις *επί του ενός αριστερού κλάδου*, και τις μεταβλητές με την *αρχική σειρά εμφάνισης*. Άρα, παρομοίως, το δενδροδιάγραμμα του $Φ΄$ μετασχηματίζεται, στο *ίδιο* δένδρο $Δ$. Αφού οι $Φ$ και $Φ΄$ μετασχηματίζονται στο ίδιο $Δ$, μετασχηματίζονται και ο ένας στον άλλο, ακολουθώντας τους μετασχηματισμούς του $Φ$ έως το $Δ$, και τους αντίστροφους μετασχηματισμούς του $Φ΄$, με την αντίστροφη σειρά, από το $Δ$ έως τον $Φ΄$.

Ερώτημα 2: Σημασία \ «γραφή και ανάγνωση» προτασιακών τύπων. (10 + 10 μονάδες)

Το ερώτημα **2.Α** *εξετάζει την ικανότητα* γραφής *διαφόρων λογικών συνθηκών σε μια προτασιακή γλώσσα.*

Το ερώτημα **2.Β** *εξετάζει το συμμετρικό: την ικανότητα* ανάγνωσης και χρήσης (του νοήματος) *ενός προτασιακού τύπου.*

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: (Α1, Α2: ΘΕΜΑ #2, #4), (Β1: ΘΕΜΑ #2).

Α. Ως γνωστόν, στη γλώσσα των συνόλων γράφουμε ως $A \cup B$ το σύνολο που έχει ακριβώς όποια στοιχεία έχει το A συν όποια έχει το B· ως $A \cap B$ το σύνολο που έχει ακριβώς όποια στοιχεία ανήκουν και στο A και στο B· και ως $A–B$ το σύνολο που έχει ακριβώς όποια στοιχεία έχει το A αλλά δεν τα έχει το B. Έστω $α_σ$, $β_σ$, $γ_σ$, τρείς προτασιακές μεταβλητές που ερμηνεύονται ως «*το στοιχείο σ ανήκει στο σύνολο Α*», (και: «*... σύνολο Β*», και «*... σύνολο Γ*» αντιστοίχως).

1) Χρησιμοποιείστε τις $α_σ$, $β_σ$, $γ_σ$, και τους συνδέσμους $\{\neg, \vee, \wedge\}$ για να γράψετε δύο προτάσεις $Φ_σ$ και $Φ'_σ$ που να εκφράζουν ότι το στοιχείο $σ$ ανήκει (αντιστοίχως) στα σύνολα $((A \cup B) - Γ)$ και $((A - Γ) \cup (B - Γ))$, και δείξτε με τους νόμους/ισοδυναμίες των σελ. 38-40, ότι είναι ταυτολογικά ισοδύναμες: $Φ_σ \equiv Φ'_σ$.
2) Γράψτε δύο προτάσεις $Ψ_σ$ και $Ψ'_σ$ που να εκφράζουν ότι το στοιχείο $σ$ ανήκει (αντιστοίχως) στα σύνολα $((A \cup B) - (A \cap B))$ και $((A - B) \cup (B - A))$, και δείξτε παρομοίως ότι είναι ταυτολογικά ισοδύναμες.

2.Α: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Η κρίσιμη παρατήρηση εδώ είναι ότι για την πράξη $A–B$ μεταξύ συνόλων έχουμε «$\sigma \in A–B$» $\equiv (\alpha_\sigma \wedge \neg\beta_\sigma)$.

2.Α.1. Το $((A\cup B)-\Gamma)$ εκφράζεται ως $\Phi_\sigma \equiv (\alpha_\sigma \vee \beta_\sigma) \wedge \neg\gamma_\sigma$. Το $((A-\Gamma)\cup(B-\Gamma))$ εκφράζεται ως $\Phi'_\sigma \equiv (\alpha_\sigma \wedge \neg\gamma_\sigma) \vee (\beta_\sigma \wedge \neg\gamma_\sigma)$. Οι προτάσεις Φ_σ και Φ'_σ είναι ταυτολογικά ισοδύναμες καθώς η μία μπορεί να προκύψει από την άλλη με χρήση του νόμου της επιμεριστικότητας ($\wedge$ επί $\vee$):

$$(\alpha_\sigma \vee \beta_\sigma) \wedge \neg\gamma_\sigma \equiv (\alpha_\sigma \wedge \neg\gamma_\sigma) \vee (\beta_\sigma \wedge \neg\gamma_\sigma) .$$

2.Α.2. Το $((A\cup B)-(A\cap B))$ εκφράζεται ως $\Psi_\sigma \equiv (\alpha_\sigma \vee \beta_\sigma) \wedge \neg(\alpha_\sigma \wedge \beta_\sigma)$. Το $((A-B)\cup(B-A))$ εκφράζεται ως $\Psi'_\sigma \equiv (\alpha_\sigma \wedge \neg\beta_\sigma) \vee (\beta_\sigma \wedge \neg\alpha_\sigma)$. Η ταυτολογική ισοδυναμία $\Psi_\sigma \equiv \Psi'_\sigma$ διαπιστώνεται ως εξής:

$(\alpha_\sigma \wedge \neg\beta_\sigma) \vee (\beta_\sigma \wedge \neg\alpha_\sigma)$

με νόμο επιμεριστικότητας	$\equiv ((\alpha_\sigma \wedge \neg\beta_\sigma) \vee \beta_\sigma) \wedge ((\alpha_\sigma \wedge \neg\beta_\sigma) \vee \neg\alpha_\sigma)$
με νόμο επιμεριστικότητας	$\equiv ((\alpha_\sigma \vee \beta_\sigma) \wedge (\neg\beta_\sigma \vee \beta_\sigma)) \wedge ((\alpha_\sigma \vee \neg\alpha_\sigma) \wedge (\neg\beta_\sigma \vee \neg\alpha_\sigma))$
με νόμο αποκλεισμού τρίτου	$\equiv (\alpha_\sigma \vee \beta_\sigma) \wedge (\neg\beta_\sigma \vee \neg\alpha_\sigma)$
με νόμο *De Morgan*	$\equiv (\alpha_\sigma \vee \beta_\sigma) \wedge \neg (\beta_\sigma \wedge \alpha_\sigma)$
με νόμο αντιμεταθετικότητας	$\equiv (\alpha_\sigma \vee \beta_\sigma) \wedge \neg (\alpha_\sigma \wedge \beta_\sigma)$

Β. Μια ομάδα 8 επαγγελματιών $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, \Gamma_1, \Gamma_2$ πρέπει να εκλέξει τουλάχιστον 3 εκπροσώπους για το επαγγελματικό τους συνέδριο. Η συγκυρία στο κλάδο τους επιφέρει όμως κάποιες περιοριστικές συνθήκες που εκφράζονται ως εξής – (όπου η κάθε μεταβλητή 'X' ερμηνεύεται ως «*ο κ$_{ος}$/κ$_α$ X θα οριστεί εκπρόσωπος*»):

(*i*) $(A_1 \vee A_2 \vee A_3)\wedge(B_1 \vee B_2 \vee B_3)\wedge(\Gamma_1 \vee \Gamma_2)$.

(*ii*) $(A_1 \to B_1)\wedge(B_1 \to B_2)\wedge(B_2 \to \Gamma_1)\wedge(\Gamma_1 \to A_1)$.

(*iii*) $(B_1 \to\neg(B_2 \vee \Gamma_2))\wedge(B_2 \to\neg(B_1 \vee \Gamma_2))\wedge(\Gamma_2 \to\neg(B_1 \vee B_2))$.

(*iv*) $(A_2 \to \neg B_3)$.

1) Γράψτε την ερμηνεία των παραπάνω τύπων στη καθημερινή μας γλώσσα. (Εννοούμε εδώ μια *φυσική*, κατά το δυνατόν, απόδοση, και όχι την «απαγγελία» των τύπων: π.χ. για το $\neg(A \wedge B \wedge \Gamma)$ προτιμούμε την απόδοση «*είναι αδύνατον τα Α, Β, Γ να αληθεύουν από κοινού*», αντί της «*όχι και Α και Β και Γ*» .)
2) Υπό το φως των παραπάνω ερμηνειών διαπιστώστε, και εξηγείστε, αν είναι τελικά δυνατόν να βρεθούν τουλάχιστον 3 εκπρόσωποι, ώστε να τηρούνται οι παραπάνω περιορισμοί (*i*), (*ii*), (*iii*), (*iv*).

2.Β: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

2.Β.1. Η ερμηνεία των παραπάνω τύπων είναι η ακόλουθη:

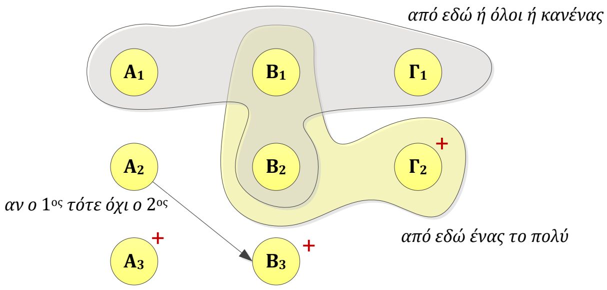
(*i*) «Κάθε ομάδα (των «Α», των «Β», και των «Γ») πρέπει να στείλει από έναν τουλάχιστον εκπρόσωπο.»

(*ii*) «Οι εκπρόσωποι A_1, B_1, B_2, Γ_1 ή θα σταλούν όλοι μαζί ή κανένας.»

(*iii*) «Από τους B_1, B_2, Γ_2 ένας το πολύ θα σταλεί εκπρόσωπος.»

(*iv*) «Ο A_2 μπορεί να εκλεγεί μόνον εάν δεν εκλεγεί ο B_3 .», ή: «Αν πάει ο A_2, τότε ο B_3 δεν θα πάει.»

2.Β.2. Η ερμηνεία εκ του 2.Β.1. είναι απεικονίσιμη όπως παρακάτω:



- Αφού από τους A_1, B_1, B_2, Γ_1 θα πάνε ή όλοι ή κανένας, και από τους B_1, B_2, Γ_2 μπορεί να πάει μόνον ένας το πολύ, τότε από τους A_1, B_1, B_2, Γ_1 δεν μπορεί να πάει κανένας.
- Αφού από τις (B_1, B_2, B_3) και (Γ_1, Γ_2) ομάδες θα πρέπει να πάει από ένας τουλάχιστον, και οι B_1, B_2, Γ_1 έχουν αποκλειστεί, επιβάλλεται η επιλογή των B_3 και Γ_2.
- Αφού από τους «Α» πρέπει να πάει τουλάχιστον ένας, ενώ ο μεν A_1 έχει αποκλειστεί, η δε παρουσία του A_2 θα απέκλειε την μοναδική μας επιλογή B_3 για τους «Β», η μόνη επιλογή που μένει είναι ο A_3.

Δηλαδή, τελικά υπάρχει μια (μοναδική) εκπροσώπηση που τηρεί τις συνθήκες: οι εκπρόσωποι A_3, B_3, Γ_2.

Ερώτημα 3: Τυπικές αποδείξεις. (5 + 15 μονάδες)

Το ερώτημα **3.Α** *ελέγχει την ικανότητα της αποτύπωσης ενός ζητήματος σε μια γλώσσα με συνδέσμους τους* $\{\neg, \rightarrow\}$.

Το ερώτημα **3.Β** *ελέγχει την ικανότητα σχεδίασης μιας τυπικής απόδειξης με χρήση των σχετικών θεωρημάτων.*

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: (Α: ΘΕΜΑ #2), (Β: ΘΕΜΑ #10).

Μια παρέα πέντε προσώπων εξετάζει το ενδεχόμενο μιας εκδρομής τους. Οι περιστάσεις όμως μεταξύ τους προκαλούν τις εξής συνθήκες συμμετοχής σε αυτήν:

> *Ο Ανδρέας ίσως να συμμετάσχει, αλλά μόνον αν απουσιάσει είτε ο Γιάννης είτε η Δήμητρα· η Ευαγγελία ίσως να συμμετάσχει, αλλά μόνον αν έλθει ο Ανδρέας και δεν έλθει η Βασιλική· και, αν δεν συμμετάσχει ούτε η Βασιλική ούτε ο Γιάννης, τότε δεν θα πάει ούτε η Δήμητρα.*

Α. Εξηγείστε γιατί οι παραπάνω συνθήκες εκφράζονται από το εξής σύνολο προτασιακών τύπων, όπου η κάθε μεταβλητή *'Χ'* ερμηνεύεται ως «*το πρόσωπο με αρχικό ονόματος το Χ συμμετείχε στην εκδρομή*»:

$$\mathrm{Y} = \{\ \Gamma \rightarrow (\Delta \rightarrow \neg A),\ \ E \rightarrow A,\ \ E \rightarrow \neg B,\ \ \neg\Gamma \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\Delta)\ \}$$

3.Α: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Απαριθμούμε τους προτασιακούς τύπους:

$$Y_1 \equiv \Gamma \rightarrow (\Delta \rightarrow \neg A),\quad Y_2 \equiv E \rightarrow A,\quad Y_3 \equiv E \rightarrow \neg B,\quad \text{και}\quad Y_4 \equiv \neg\Gamma \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\Delta),$$

Κάθε μία από τις περιστάσεις που περιγράφονται λεκτικά μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν ή περισσότερους από τους παραπάνω προτασιακούς τύπους:

«*Ο Ανδρέας ίσως να συμμετάσχει, αλλά μόνον αν απουσιάσει είτε ο Γιάννης είτε η Δήμητρα·*»

Η περίσταση αυτή περιγράφεται από τον Y_1 ο οποίος εάν ο Γιάννης απουσιάσει, επαληθεύεται οτιδήποτε κι αν κάνει ο Ανδρέας, αλλά και αν η Δήμητρα απουσιάσει και πάλι επαληθεύεται ό,τι κι αν κάνει ο Ανδρέας. Επίσης, αν ο *και* ο Γιάννης *και* η Δήμητρα παραστούν τότε ο Y_1 επιβάλλει την απουσία του Ανδρέα.

«*Η Ευαγγελία ίσως να συμμετάσχει, αλλά μόνον αν έλθει ο Ανδρέας και δεν έλθει η Βασιλική·*»

Η περίσταση αυτή περιγράφεται από τον Y_2 και τον Y_3. Ο Y_2 επαληθεύεται με την Ευαγγελία να συμμετέχει μόνο εάν συμμετάσχει και ο Ανδρέας και ο Y_3 επαληθεύεται με την Ευαγγελία να συμμετέχει μόνο εάν δεν συμμετάσχει η Βασιλική.

«*Αν δεν συμμετάσχει ούτε η Βασιλική ούτε ο Γιάννης, τότε δεν θα πάει ούτε η Δήμητρα.*»

Η περίσταση αυτή περιγράφεται από τον Y_4,ο οποίος εάν *και* ο Γιάννης δεν συμμετάσχει *και* η Βασιλική δεν συμμετάσχει, επαληθεύεται αν και μόνον αν *δεν* συμμετάσχει η Δήμητρα.

Β. Μετά την εκδρομή ο Ζαχαρίας, *βλέποντας την Δήμητρα σε μια φωτογραφία από αυτήν*, σχολίασε: «*απ' ότι βλέπω, η... Ευαγγελία δεν ήταν στην εκδρομή*». Περιγράψτε, (με χρήση του *modus ponens* και των θεωρημάτων 2.8, 2.9, 2.10 στις σελ. 58-62), μια τυπική απόδειξη που να δικαιολογεί τον συλλογισμό του Ζαχαρία.

Υπόδειξη: προσέξτε ότι για να προκύψουν συμπεράσματα από τις υποθετικές προτάσεις, θα πρέπει τα $Γ$, $\neg Γ$, $Δ$, $Ε$ να βρεθούν σε κάποιες φάσεις της απόδειξης «αριστερά του $\vdash_{ΠΛ}$ ».

3.Β: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από τις υποθέσεις $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ είναι δυνατή μια απόδειξη $Y \vdash_{ΠΛ} (Δ \to \neg Ε) =$ «*αν πήγε η Δήμητρα τότε δεν πήγε η Ευαγγελία*». Αυτό εξηγείται στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις εξής πρόσθετες υποθέσεις:

- το $Δ$ (ως παρατήρηση)·
- το $Ε$ (ως υπόθεση από την οποία περιμένουμε να προκύψει άτοπο)·
- τα $Γ$ και $\neg Γ$, *σε δύο φάσεις*, (δηλαδή «*εάν πήγε ο Γιάννης, τότε ...*», και «*αν πάλι, δεν πήγε, τότε ...*»).

Οι αποδείξεις ότι από τα $Δ$ και $Ε$ προκύπτει κάποια αντίφαση, είτε ισχύει η $Γ$ είτε όχι, έχουν ως εξής:

1.	$Γ \to (Δ \to \neg Α)$	υπόθεση Y_1
2.	$Ε \to Α$	υπόθεση Y_2
3.	$Ε \to \neg Β$	υπόθεση Y_3
4.	$\neg Γ \to (\neg Β \to \neg Δ)$	υπόθεση Y_4
5.	$Δ$	πρόσθετη υπόθεση
6.	$Ε$	πρόσθετη υπόθεση
7.	$Γ$	πρόσθετη υπόθεση «Γ»
8.	$(Δ \to \neg Α)$	από (7, 1) με *m.p.*
9.	$\neg Α$	από (5, 8) με *m.p.*
10.	$Α$	από (6, 2) με *m.p.*

1.	$Γ \to (Δ \to \neg Α)$	υπόθεση Y_1
2.	$Ε \to Α$	υπόθεση Y_2
3.	$Ε \to \neg Β$	υπόθεση Y_3
4.	$\neg Γ \to (\neg Β \to \neg Δ)$	υπόθεση Y_4
5.	$Δ$	πρόσθετη υπόθεση
6.	$Ε$	πρόσθετη υπόθεση
7.	$\neg Γ$	πρόσθετη υπόθεση «¬Γ»
8.	$\neg Β$	από (6, 3) με *m.p.*
9.	$(\neg Β \to \neg Δ)$	από (7, 4) με *m.p.*
10.	$\neg Δ$	από (8, 9) με *m.p.*
11.	$Δ$	από (5) (υπόθεση)

Με χρήση των θεωρημάτων 2.8, 2.9, 2.10, οι «βοηθητικές» υποθέσεις $Δ$, $Ε$, $Γ$, $\neg Γ$, είτε *μεταφέρονται* στο συμπέρασμα δεξιά του $\vdash_{ΠΛ}$, είτε *απαλείφονται*, αφήνοντας μία απόδειξη με αφετηρία τις υποθέσεις Y :

		Οι εξής αποδείξεις είναι εφικτές:	*Εξήγηση:*
μεταφορά $Ε$	1.	$Y, Δ, Γ \vdash_{ΠΛ} \neg Ε$	από αριστερή στήλη με Θ. ΑΠΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΑΤΟΠΟ.
	2.	$Y, Δ, \neg Γ \vdash_{ΠΛ} \neg Ε$	από δεξιά στήλη με Θ. ΑΠΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΑΤΟΠΟ.
απαλειφή $Γ$, $\neg Γ$	3.	$Y, Δ, Ε \vdash_{ΠΛ} (\neg Γ)$	από (1) με Θ. ΑΝΤΙΘΕΤΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ.
	4.	$Y, Δ, Ε \vdash_{ΠΛ} \neg(\neg Γ)$	από (2) με Θ. ΑΝΤΙΘΕΤΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ.
	5.	$Y, Δ \vdash_{ΠΛ} \neg Ε$	από (3, 4) με Θ. ΑΠΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΑΤΟΠΟ.
μεταφορά $Δ$	6.	$Y \vdash_{ΠΛ} (Δ \to \neg Ε)$	από (5) με Θ. ΑΠΑΓΩΓΗΣ.

Το 6ο ήταν σε θέση να συμπεράνει τυπικά ο Ζαχαρίας γνωρίζοντας την κατάσταση $\boldsymbol{Y}$ της παρέας, ακόμα και *πριν* δει την Δήμητρα στην φωτογραφία. Γνωρίζοντας $(\boldsymbol{Δ \to \neg Ε})$ (από $\boldsymbol{Y}$ και Θ. ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ), και $\boldsymbol{Δ}$ (από τη φωτογραφία), μπορεί να διαπιστώσει ('*modus ponens*') ότι $\boldsymbol{\neg Ε} \equiv$ «*η Ευαγγελία δεν πήγε στην εκδρομή*».

Ερώτημα 4: Ικανοποιησιμότητα (επαληθευσιμότητα). (15 + 15 μονάδες)

Το κεντρικό ζήτημα στην προτασιακή λογική είναι η διάγνωση της ικανοποιησιμότητας (ή επαληθευσιμότητας) ενός συνόλου τύπων. Αυτό μπορεί, ως γνωστόν, να γίνει αν καταστρώσουμε ένα πίνακα αληθείας, αλλά αυτός για n *μεταβλητές θα περιέχει* 2^n *γραμμές, πλήθος ανέφικτο για «μεγάλα»* n*, π.χ.* n > 60*. Στην έως τώρα ιστορία των μαθηματικών όμως, δεν έχει βρεθεί καλύτερος αλγόριθμος. Ίσως να μην υπάρχει... και ως εκ τούτου, η έρευνα εστιάζεται σε ειδικές περιπτώσεις. Στα* **4.A**, **4.B** *εκδιπλώνεται η λύση μιας τέτοιας ειδικής περίπτωσης, (με κωδική ονομασία* **2SAT**). *Η ουσία εδώ ευρίσκεται στην κατανόηση των όρων/εννοιών που δίδονται στην εισαγωγή του ερωτήματος.*

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: (Α, Β, Γ: ΘΕΜΑ #8).

Έστω *n* προτασιακές μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Για τους σκοπούς του ερωτήματος θα χρησιμοποιήσουμε την εξής (περιστασιακή) φρασεολογία, όπου τα T και T' είναι σύνολα τύπων:

Φράση:	*Ερμηνεία:*
μονόλεκτο L_k :	Ο τύπος X_k ή ο τύπος $\neg X_k$. (Στη 2η περίπτωση θεωρούμε ως $\neg L_k$ το X_k.)
δίλεκτο :	Τύπος με έναν λογικό σύνδεσμο, ($\rightarrow$ *ή* $\wedge$ *ή* $\vee$), που συνδέει 2 μονόλεκτα.
T είναι *αντιστρεπτό* :	Αν περιέχει το όποιο δίλεκτο $L_\alpha \rightarrow L_\beta$, τότε περιέχει και το $\neg L_\beta \rightarrow \neg L_\alpha$.
T είναι *μεταβατικό* :	Αν περιέχει τα όποια ($L_\alpha \rightarrow L_\beta$) και ($L_\beta \rightarrow L_\gamma$), τότε περιέχει και το ($L_\alpha \rightarrow L_\gamma$).
T' είναι *επέκταση* του T :	Ισχύει ότι ($T \subseteq T'$) και (T = ικανοποιήσιμο $\Rightarrow$ T' = ικανοποιήσιμο).
T *εκτιμά* την X_k :	Το T περιέχει είτε το ($\neg X_k \rightarrow X_k$), είτε το ($X_k \rightarrow \neg X_k$), είτε και τα δύο.
T είναι *πλήρες* :	Για κάθε X_k το T περιέχει *ένα τουλάχιστον* από τα ($\neg X_k \rightarrow X_k$), ($X_k \rightarrow \neg X_k$).
T είναι *έγκυρο* :	Για κάθε X_k το T περιέχει *ένα το πολύ* από τα ($\neg X_k \rightarrow X_k$), ($X_k \rightarrow \neg X_k$).

Δεδομένου ενός συνόλου *S* από μονόλεκτα ή/και δίλεκτα, ορίζουμε την διαδικασία `ΠΛΗΡΕΣ(S)` ως εξής:

[1] Θεωρούμε ότι το *S* περιέχει μόνον δίλεκτα της μορφής $L_\alpha \rightarrow L_\beta$, και θέτουμε $S'=S$.
[2] Για κάθε τύπο $L_\alpha \rightarrow L_\beta$ του S' προσθέτουμε το αντιθετοαντίστροφο $\neg L_\beta \rightarrow \neg L_\alpha$ στο S'.
[3] Εάν στο S' υπάρχουν κάποια $L_\alpha \rightarrow L_\beta$ και $L_\beta \rightarrow L_\gamma$ αλλά όχι το $L_\alpha \rightarrow L_\gamma$,
τότε: (3.α) προσθέτουμε το $L_\alpha \rightarrow L_\gamma$ στο S', (3.β) επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο [3].

A. Δείξατε τα εξής:

1) Το βήμα [1] είναι εφικτό χωρίς απώλεια γενικότητας, και το βήμα [3] θα τερματίζει πάντοτε.
2) Το παραγόμενο σύνολο S' = ΠΛΗΡΕΣ(S) αποτελεί *επέκταση* του S και μάλιστα *αντιστρεπτή* & *μεταβατική*.

4.A: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

4.A.1. Δείχνουμε κατ' αρχάς ότι το βήμα [1] δεν αποτελεί απώλεια γενικότητας, δηλαδή, ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους τύπους του *S* με δίλεκτα σε μορφή συνεπαγωγής, και να λάβουμε ένα νέο σύνολο τύπων *λογικά ισοδύναμο* με το αρχικό, (δηλαδή το ένα επαληθεύεται εάν και μόνον επαληθεύεται το άλλο):

Αντί του τύπου:	*χρησιμοποιούμε στο S το/τα:*	*που είναι λογικά ισοδύναμο, διότι:*
X_α	$(\neg X_\alpha \rightarrow X_\alpha)$	επιβάλλει X_α = ΑΛΗΘΕΣ.
$\neg X_\alpha$	$(X_\alpha \rightarrow \neg X_\alpha)$	επιβάλλει X_α = ΨΕΥΔΕΣ.
$L_\alpha \vee L_\beta$	$(\neg L_\alpha \rightarrow L_\beta)$	ισχύει ο νόμος αντικατάστασης.
$L_\alpha \wedge L_\beta$	$(\neg L_\alpha \rightarrow L_\alpha)$ $(\neg L_\beta \rightarrow L_\beta)$	επιβάλλει και το L_α και το L_β.
$L_\alpha \rightarrow L_\beta$	$(L_\alpha \rightarrow L_\beta)$	μένει ως έχει.

Προσέχουμε στα παραπάνω ότι η άρνηση του $\neg L_\alpha$ «απορροφάται» από την αντίστοιχη μεταβλητή: αν L_α είναι το X_α, τότε $\neg L_\alpha$ είναι το $\neg X_\alpha$, ενώ αν L_α είναι το $\neg X_\alpha$, τότε $\neg L_\alpha$ είναι το X_α. Άρα το $\neg L_\alpha$ μπορεί να θεωρηθεί ως μονόλεκτο. Επομένως το *S* μπορεί να θεωρηθεί, χωρίς απώλεια γενικότητας, ως μια συλλογή δίλεκτων τύπων σε μορφή συνεπαγωγής.

Για το βήμα [3], αρκεί να παρατηρήσουμε ότι εφόσον ένα δίλεκτο δεν προστίθεται στο *S'* αν ήδη υπάρχει σε αυτό, το βήμα αυτό θα εκτελεστεί το πολύ τόσες φορές όσες και τα δίλεκτα που μπορούν να προκύψουν μεταξύ όλων των μονόλεκτων του S. Το πλήθος αυτών είναι πεπερασμένο, διότι αν έχουμε n μεταβλητές τότε έχουμε $2n$ μονόλεκτα (λόγω των αρνήσεων, αλλά και της απλοποίησης του $\neg\neg X_k$ σε X_k), και άρα τα δίλεκτα είναι το πολύ $2n \times 2n$. Επομένως το βήμα [3] επαναλαμβάνεται το πολύ $4n^2$ φορές.

4.A.2. Κατά το βήμα [2] το S' *παραμένει διαρκώς επέκταση* του δεδομένου S, διότι αν μια αποτίμηση επαληθεύει ένα δίλεκτο $L_\alpha \rightarrow L_\beta$ του S', τότε επαληθεύει και το προστιθέμενο $\neg L_\beta \rightarrow \neg L_\alpha$ (αντιθετοαντιστροφή).

Κατά το βήμα [3], η προσθήκη στο S' του $L_\alpha \rightarrow L_\gamma$ για κάποια $L_\alpha \rightarrow L_\beta$ και $L_\beta \rightarrow L_\gamma$ του S', επίσης *επεκτείνει* το S' (άρα και το S), διότι κάθε αποτίμηση που επαληθεύει τα $L_\alpha \rightarrow L_\beta$ και $L_\beta \rightarrow L_\gamma$ επαληθεύει και το $L_\alpha \rightarrow L_\gamma$, όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακα αληθείας:

L_α	L_β	L_γ	$L_\alpha \rightarrow L_\beta$	$L_\beta \rightarrow L_\gamma$	$L_\alpha \rightarrow L_\gamma$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Επίσης, το S' παραμένει *και αντιστρεπτό*, διότι ήταν ήδη, δηλαδή περιέχοντας τα $L_\alpha \rightarrow L_\beta$ και $L_\beta \rightarrow L_\gamma$, περιείχε και τα αντιθετοαντίστροφα, $\neg L_\gamma \rightarrow \neg L_\beta$, $\neg L_\beta \rightarrow \neg L_\alpha$· άρα ο ίδιος έλεγχος στο βήμα [3] θα προσθέσει τόσο το «καινούργιο» $L_\alpha \rightarrow L_\gamma$ όσο το αντιθετοαντίστροφό του $\neg L_\gamma \rightarrow \neg L_\alpha$.

Άρα στο (*αναπόφευκτο*, βλ. 4.Α.1) τέλος της διαδικασίας, το S' θα έχει παραμείνει και *επέκταση* του S, και *αντιστρεπτό*, αλλά θα έχει καταστεί και *μεταβατικό* – αλλιώς το βήμα [3] δεν θα είχε σταματήσει.

Β. Δείξατε ότι αν το S' είναι *πλήρες*, τότε το αφετηριακό σύνολο S είναι ικανοποιήσιμο εάν και μόνον εάν το S' είναι *έγκυρο*.

Υπόδειξη: για το **Β** αξιοποιείστε το **Α.2**: S' = αντιστρεπτή και μεταβατική επέκταση του S. (Χάριν του θέματος, αναφέρουμε ότι το S', ακόμα και όταν δεν είναι πλήρες, είναι δυνατόν να καταστεί σταδιακά πλήρες, και άρα να διαπιστωθεί τελικά εάν το S είναι ικανοποιήσιμο ή όχι.)

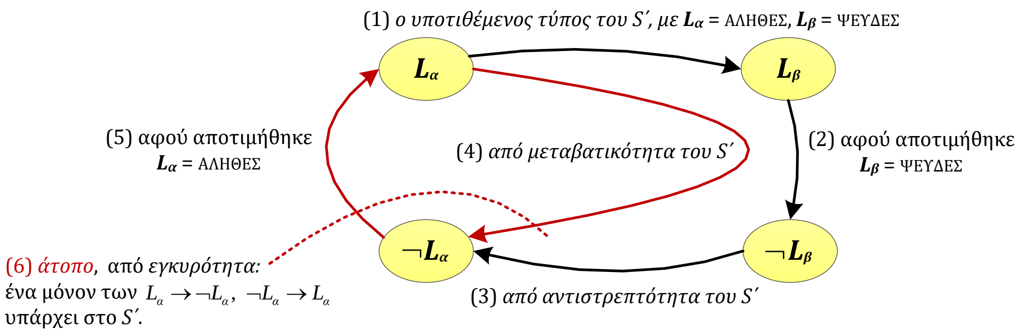
4.Β: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Υπό την υπόθεση ότι «S' = *πλήρες*», έχουμε δύο «κατευθύνσεις» συνεπαγωγής να δείξουμε:

1η *κατεύθυνση: «αν S' = έγκυρο, τότε S = ικανοποιήσιμο»:*

Το S', ως πλήρες, περιέχει για κάθε μεταβλητή X_k είτε το $\neg X_k \rightarrow X_k$, είτε το $X_k \rightarrow \neg X_k$. Στη 1η περίπτωση αποτιμούμε X_k = ΑΛΗΘΕΣ, και στη 2η, X_k = ΨΕΥΔΕΣ. Έτσι για κάθε μονόλεκτο L θα έχουμε L = ΑΛΗΘΕΣ ή ΨΕΥΔΕΣ, ανάλογα με το εάν το S' περιέχει το $\neg L \rightarrow L$, ή το $L \rightarrow \neg L$. Επειδή το S' είναι έγκυρο, δεν θα περιέχει ποτέ και τα δύο, άρα αυτή η αποτίμηση είναι εφικτή.

Υπό αυτή την αποτίμηση επαληθεύονται όλοι οι τύποι $L_\alpha \rightarrow L_\beta$ του S', διότι για να υπάρξει $(L_\alpha \rightarrow L_\beta)$ = ΨΕΥΔΕΣ, πρέπει να έχει αποτιμηθεί L_α = ΑΛΗΘΕΣ και L_β = ΨΕΥΔΕΣ.



Τότε όμως θα έπρεπε να υπάρχουν όλοι οι εξής τύποι στο S', (εικονιζόμενοι με βελάκια στο σχετικό επεξηγηματικό σχήμα),

$$(1)\ L_\alpha \to L_\beta,\quad (2)\ L_\beta \to \neg L_\beta,\quad (3)\ \neg L_\beta \to \neg L_\alpha,\quad (4)\ L_\alpha \to \neg L_\alpha,\quad (5)\ \neg L_\alpha \to L_\alpha,$$

ενώ κάτι τέτοιο οδηγεί σε άτοπο: από τα (4) και (5) το έγκυρο S' μπορεί να περιέχει μόνον ένα.

Αφού όλοι οι τύποι στο S' επαληθεύονται, επαληθεύονται και όλοι στο S, αφού το S' *επεκτείνει* το S: $S \subseteq S'$.

2η κατεύθυνση: «Αν S' = μη-έγκυρο, τότε S = μη-ικανοποιήσιμο».

Αν το S' είναι μη-έγκυρο τότε για κάποια μεταβλητή X_k περιέχει και το $\neg X_k \to X_k$ και το $X_k \to \neg X_k$, δηλαδή είναι μη-ικανοποιήσιμο, αφού αυτά επιβάλλουν το άτοπο X_k = ΑΛΗΘΕΣ και X_k = ΨΕΥΔΕΣ. Αφού το S' δεν είναι ικανοποιήσιμο, ούτε το S είναι: αν το S ήταν ικανοποιήσιμο θα ήταν και το S' ως *επέκταση* του S.

Ερώτημα 5: «Χωρίς χαρτί & μολύβι». **(8 + 8 μονάδες)**

Έχουμε εδώ μια εισαγωγή στην εξέταση με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών – εδώ απλώς διλήμματα ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ. Τα ερωτήματα είναι αρκετά απλά ώστε να μπορούν να απαντηθούν γρήγορα, και, ίσως, χωρίς χαρτί και μολύβι. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να τα απαντήσετε σε σύντομο χρόνο – π.χ. σε λίγα λεπτά ανά ερώτημα κατά μέσον όρο.

ΠΡΟΣΟΧΗ: *μην παραλείψετε να δώσετε μια σύντομη εξήγηση σε κάθε απάντηση· υπάρχει πάντα μία των ολίγων γραμμών.*

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: (Α: ΘΕΜΑ #11), (Β: ΘΕΜΑ #8).

Α. Απαντείστε με ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς ή όχι, (όπου τα κεφαλαία σύμβολα δηλώνουν προτασιακούς τύπους):

1. **(Σ/Λ)** «Αν ο $\Phi \vee \Psi$ είναι ταυτολογία, τότε $\neg\Phi \vdash_{\text{ΠΛ}} \Psi$».
2. **(Σ/Λ)** «Αν $\Phi \models \Psi$ και όχι $\Phi \vdash_{\text{ΠΛ}} \Psi$, τότε ο Ψ είναι αντίφαση».
3. **(Σ/Λ)** «Αν $\{Y_1, Y_2, Y_3, A\} \models \Sigma$ και $\{Y_2, Y_3, Y_4, \neg A\} \models \Sigma$, τότε $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \Sigma$».
4. **(Σ/Λ)** Θα αποκαλούμε μια υπόθεση Y_k *κρίσιμη* (ως προς Σ) εάν $(\neg Y_k \models \neg\Sigma)$· και θα αποκαλούμε την Y_k *ανεξάρτητη* (από τις υπόλοιπες $Y = \{Y_1, ..., Y_k, ..., Y_n\}$) εάν *δεν* ισχύει $(Y - \{Y_k\} \models Y_k)$. Ισχυρισμός: «*δεν μπορεί από το Y να προκύψει μια τυπική απόδειξη του Σ, αν μείνει αχρησιμοποίητη έστω και μία κρίσιμη ανεξάρτητη υπόθεση Y_k*».

5.Α: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. **ΣΩΣΤΟ** Αν ο $\Phi \vee \Psi$ είναι ταυτολογία, τότε κάθε αποτίμηση που διαψεύδει το Φ πρέπει να επαληθεύει το Ψ, άρα $\neg\Phi \models \Psi$, και από θ. πληρότητας πρέπει $\neg\Phi \vdash_{\text{ΠΛ}} \Psi$.
2. **ΣΩΣΤΟ** Από θ. πληρότητας η υπόθεση «αν $\Phi \models \Psi$ και όχι $\Phi \vdash_{\text{ΠΛ}} \Psi$» είναι πάντοτε ΨΕΥΔΗΣ, και μια συνεπαγωγή με ψευδή υπόθεση είναι πάντοτε ΑΛΗΘΗΣ.
3. **ΣΩΣΤΟ** Κάθε αποτίμηση που επαληθεύει το $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ επαληθεύει τα $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ και $\{Y_2, Y_3, Y_4\}$, οπότε και στις δύο περιπτώσεις (είτε A = ΑΛΗΘΕΣ, είτε ο $\neg A$= ΑΛΗΘΕΣ), θα επαληθεύεται το Σ. Άρα θα έχουμε $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\} \models \Sigma$ και από θ. πληρότητας, $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \Sigma$.

4. **ΣΩΣΤΟ** Αφού η Y_k είναι *ανεξάρτητη* υπάρχει αποτίμηση α(-) των μεταβλητών που ικανοποιεί τις $Y-\{\, Y_k \,\}$ και την $\neg Y_k$. Αν υπήρχε απόδειξη $Y-\{\, Y_k \,\} \vdash_{ΠΛ} \Sigma$ τότε για την α(-) θα είχαμε και Σ = ΑΛΗΘΕΣ (από *εγκυρότητα* $\vdash_{ΠΛ}$), και $\neg\Sigma$ = ΑΛΗΘΕΣ (από *κρισιμότητα* Y_k), πράγμα άτοπο.

Β. Απαντείστε με Σ/Λ αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς ή όχι, (όπου τα $X_1,\ldots,X_n,B$ είναι προτασιακές μεταβλητές):

1. **(Σ/Λ)** Αν το $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$, $n \geq 2$, είναι ικανοποιήσιμο, τότε για οποιοδήποτε $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ είναι ικανοποιήσιμο και το $\{\,(X_1 \vee X_2 \vee \ldots X_k \vee B),\;\; (\neg B \vee X_{k+1} \vee X_{k+2} \vee \ldots X_n)\,\}$.

(διευκρίνιση: υπό την ιδία αποτίμηση των X_j.)

2. **(Σ/Λ)** Αν για κάποιο k, $1 \leq k \leq (n-1)$, το $\{\,(X_1 \vee X_2 \vee \ldots X_k \vee B),\; (\neg B \vee X_{k+1} \vee X_{k+2} \vee \ldots X_n)\,\}$ είναι ικανοποιήσιμο, τότε και ο τύπος $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ είναι ικανοποιήσιμος.

(διευκρίνιση: υπό την ιδία αποτίμηση των X_j.)

3. **(Σ/Λ)** Υπάρχουν τρία δίλεκτα Δ_1, Δ_2, Δ_3 επί των προτασιακών μεταβλητών X_1, X_2, X_3 [για τον ορισμό του '*δίλεκτου'* βλ. Ερώτημα 4], τέτοια ώστε $(X_1 \vee X_2 \vee X_3) \equiv \Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \Delta_3$.

4. **(Σ/Λ)** Έστω ότι το σύνολο S περιέχει μόνον τύπους της μορφής $X_\alpha \wedge X_\beta \wedge X_\gamma \rightarrow L_\kappa$, όπου τα X_α, X_β, X_γ είναι κάποιες από τις μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 1$, και ότι το L_κ είναι είτε το X_κ είτε το $\neg X_\kappa$, $\kappa \in \{1,\ldots,n\}$. Τότε, το S είναι πάντοτε ικανοποιήσιμο.

5.Β: ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. **ΣΩΣΤΟ** Η αποτίμηση που ικανοποιεί το $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ θα πρέπει να καθιστά ΑΛΗΘΕΣ ένα τουλάχιστον X_j, $1 \leq j \leq n$. Αν $1 \leq j \leq k$ τότε επιλέγοντας, $\neg B$ = ΑΛΗΘΕΣ, ικανοποιούνται και οι δύο τύποι που δίδονται· αν $(k+1) \leq j \leq n$ τότε, παρομοίως, επιλέγουμε, B = ΑΛΗΘΕΣ.

2. **ΣΩΣΤΟ** Αν για μια αποτίμηση ικανοποιούνται και οι δύο τύποι, τότε αν B = ΨΕΥΔΕΣ, πρέπει να αληθεύει ένα των $X_1,\ldots,X_k$, και αν $\neg B$ = ΨΕΥΔΕΣ, πρέπει να αληθεύει ένα των $X_{k+1},\ldots,X_n$, άρα ένα τουλάχιστον X_j, $1 \leq j \leq n$, αληθεύει, άρα και το $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$.

3. **ΛΑΘΟΣ** Στον πίνακα αληθείας του, το $X_1 \vee X_2 \vee X_3$ περιέχει **7** «Α» και **1** «Ψ». Άρα κάποιο από τα Δ_j θα πρέπει να έχει «Ψ» στη στήλη του, άρα *δύο* «Ψ» τουλάχιστον, επειδή είναι δίλεκτο και κάποιο X_i λείπει. Άρα το $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \Delta_3$ θα έχει δύο τουλάχιστον «Ψ» και όχι ακριβώς ένα.

4. **ΣΩΣΤΟ** Αρκεί να αποτιμήσουμε όλες τις μεταβλητές ως ΨΕΥΔΕΙΣ: τότε οι τιμές αληθείας των L_κ στο «δεξιό μέρος» των συνεπαγωγών δεν θα έχουν κανένα αντίκτυπο.