Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Ε ρ γ α σ ί α 1η

Συνδυαστική

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της συνδυαστικής.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας study.eap.gr μέχρι την* ***Τετάρτη, 6/11/2019***.

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα του* ***συνοδευτικού αρχείου απαντήσεων****. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο* ***συνοδευτικό αρχείο απαντήσεων*** *πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* ***5*** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Προηγούμενες εργασίες: των τελευταίων ετών (2010-2018).

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ας προηγηθούν στη μελέτη σας οι εξετάσεις των τελευταίων ετών (2010-2018).

Ερωτήματα

Ερώτημα 1. (μέγιστος βαθμός: 25)

Στο ερώτημα αυτό έχει σημασία να προσδιορίσετε το είδος του κάθε προβλήματος (άθροισμα, γινόμενο, επιλογές μη διατεταγμένων ή διατεταγμένων πλειάδων, διατάξεις, μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων, ρίψη σφαιριδίων σε κουτιά, κ.λ.π.) και στη συνέχεια να εφαρμόσετε τους κατάλληλους συνδυαστικούς τύπους.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #2, #3, #4,#5

(1α) Η κριτική επιτροπή ενός τηλεοπτικού διαγωνισμού αποτελείται από 7 άντρες και 13 γυναίκες. Στον τελικό του διαγωνισμού, οι κριτές θα καθίσουν όλοι σε μία σειρά. Να υπολογιστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό, αν οι κριτές θεωρούνται διακεκριμένοι και επιπλέον:

(1α1) δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς τον τρόπο που μπορούν να καθίσουν.
(1α2) ανάμεσα σε δύο άντρες κάθεται τουλάχιστον μία γυναίκα (δηλ. δεν κάθονται δύο άντρες ο ένας δίπλα στον άλλο).
(1α3) όλοι οι άντρες κάθονται σε διαδοχικές θέσεις.

Υπόδειξη για το **(1α2)**: σκεφτείτε με πόσους τρόπους μπορεί να τοποθετηθούν οι γυναίκες σε μία σειρά και στη συνέχεια με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι άντρες σε κάποια από τα κενά που προκύπτουν ανάμεσά τους.

(1β) Ύστερα από μία παρεξήγηση, οι γυναίκες της επιτροπής δεν προσήλθαν στον τελικό. Επομένως έμειναν 20 καρέκλες για να καθίσουν οι 7 άντρες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

(1γ) Στο τέλος του διαγωνισμού οι άντρες κάλεσαν τις γυναίκες σε δείπνο για να συζητήσουν το θέμα που προέκυψε. Στο εστιατόριο κάθισαν σε ένα στρογγυλό τραπέζι 20 θέσεων. Να υπολογιστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό, αν:

(1γ1) δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς τον τρόπο που μπορούν να καθίσουν.
(1γ2) ανάμεσα σε δύο άντρες κάθεται τουλάχιστον μία γυναίκα (δηλ. δεν κάθονται δύο άντρες ο ένας δίπλα στον άλλο).

Σημείωση: Στο στρογγυλό τραπέζι δύο τοποθετήσεις θεωρούνται ίδιες αν η μία λαμβάνεται από την άλλη περιστρέφοντας το τραπέζι. Ισοδύναμα, σε κάθε τοποθέτηση μας ενδιαφέρει ποιος κάθεται δεξιά ή αριστερά καθενός και όχι η συγκεκριμένη θέση στο κυκλικό τραπέζι.

Υπόδειξη για το **(1γ2)**: σκεφτείτε με πόσους τρόπους μπορεί να τοποθετηθούν οι γυναίκες σε ένα κύκλο και στη συνέχεια με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι άντρες σε κάποια από τα κενά που προκύπτουν ανάμεσά τους.

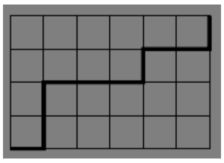
Ερώτημα 2. (μέγιστος βαθμός: 20)

Το ερώτημα αυτό θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε περισσότερο στην επιλογή των κατάλληλων τύπων σε προβλήματα συνδυαστικής.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #2, #3, #4, #5

(2α) Έστω m, n θετικοί ακέραιοι. Συμβολίζουμε με $P_{m,n}$ όλα τα μονοπάτια του επιπέδου με αφετηρία το $(0,0)$, τέρμα το (m,n) και μοναδιαία βήματα $A = (0,1)$ (μοναδιαίο κάθετο βήμα) ή $B = (1,0)$ (μοναδιαίο οριζόντιο βήμα).

Π.χ., στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το μονοπάτι με αφετηρία (0,0), τέρμα (6,4) και βήματα $BAABBBABBA$.



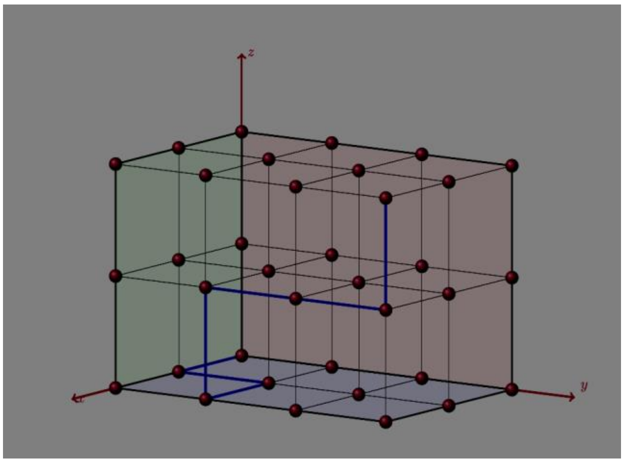
(2α1) Ποιο είναι το πλήθος των μονοπατιών του $P_{m,n}$ ως συνάρτηση των m και n;

(2α2) Πόσα από αυτά τα μονοπάτια **δεν** ξεκινούν με AB;

(2α3) Θεωρώντας ότι $m, n \geq 2$, βρείτε πόσα από αυτά τα μονοπάτια ούτε ξεκινούν με AB ούτε τερματίζουν με BA;

Υπόδειξη για το **(2α1)**: Αν αναπαραστήσουμε όλα τα μονοπάτια με ακολουθίες βημάτων Α, Β, πόσες φορές θα υπάρχει το Α και πόσες το Β; Μετρήστε αυτές τις ακολουθίες.

(2β) Έστω l, m, n θετικοί ακέραιοι. Συμβολίζουμε με $P_{l,m,n}$ όλα τα μονοπάτια του τρισδιάστατου χώρου με αφετηρία το (0,0,0) τέρμα το (l, m, n) και μοναδιαία βήματα $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ ή $\Gamma = (0,0,1)$. Ποιο είναι το πλήθος των μονοπατιών του $P_{l,m,n}$ ως συνάρτηση των l, m, n;



π.χ. στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται το μονοπάτι με αφετηρία (0,0,0), τέρμα (2,3,2) και βήματα $ABA\Gamma BB\Gamma$.

Υπόδειξη: Αν αναπαραστήσουμε όλα τα μονοπάτια με ακολουθίες βημάτων Α,Β,Γ πόσες φορές θα χρησιμοποιήσουμε το κάθε γράμμα; Μετρήστε αυτές τις ακολουθίες.

Ερώτημα 3. (μέγιστος βαθμός: 25)

Το ερώτημα θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε στην ανάπτυξη γεννητριών συναρτήσεων. Θα πρέπει να εξετάσετε αν πρέπει να γίνει χρήση απλής ή εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης, και να αναγνωρίσετε τον συντελεστή του κατάλληλου όρου που δίνει το σωστό αποτέλεσμα. Εξαιρετικά χρήσιμη σε αυτές της ασκήσεις είναι η ικανότητα μετασχηματισμού σε ισοδύναμα προβλήματα (π.χ. κατανομή μπαλών σε υποδοχές).

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #6, #7

Έστω ότι 20 άτομα επιθυμούν να επιβιβαστούν σε ένα τρένο με 20 βαγόνια, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να χωρέσει όλα τα άτομα. Να βρείτε γεννήτριες συναρτήσεις και να προσδιορίσετε το συντελεστή του όρου που δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να γίνει η επιβίβαση σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(3α) Τα άτομα θεωρούνται διαφορετικά μεταξύ τους, τα βαγόνια είναι αριθμημένα ανάλογα με τη θέση τους σε σχέση με τη μηχανή (και άρα είναι διακεκριμένα), δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των ατόμων σε κάθε βαγόνι, αλλά τα βαγόνια άρτιου αριθμού πρέπει να περιέχουν άρτιο αριθμό ατόμων (δηλ. 0,2,4,…) και τα υπόλοιπα βαγόνια πρέπει να περιέχουν περιττό αριθμό ατόμων (δηλ. 1,3,5…).

(3β) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα τρόπο επιβίβασης από τους τρόπους που υπολογίσατε στο ερώτημα **(3α)**, να δώσετε ένα τύπο (ως συνάρτηση συντελεστών κατάλληλων γεννητριών συναρτήσεων) για την πιθανότητα ακριβώς 7 από τα βαγόνια άρτιου αριθμού να είναι κενά.

(3γ) Μας ενδιαφέρει μόνο ο αριθμός των ατόμων σε κάθε βαγόνι (δηλ. τα άτομα θεωρούνται μη-διακεκριμένα), και όλα τα βαγόνια θεωρούνται πανομοιότυπα (πχ. μια τοποθέτηση 20 ατόμων στο 1ο βαγόνι θεωρείται ίδια με μια τοποθέτηση 20 ατόμων στο 2ο βαγόνι).

(3δ) Μας ενδιαφέρει μόνο ο αριθμός των ατόμων σε κάθε βαγόνι, όλα τα βαγόνια θεωρούνται πανομοιότυπα αλλά τα βαγόνια που δεν είναι κενά πρέπει να έχουν διαφορετικό αριθμό ατόμων.

Ερώτημα 4. (μέγιστος βαθμός: 20)

Το ερώτημα αυτό θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε στην επίλυση αναδρομικών σχέσεων μέσω μαθηματικής επαγωγής και μέσω γεννητριών συναρτήσεων.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #8, #9

(4α) Έστω $D_0, D_1, D_2, \ldots$ μια ακολουθία που ικανοποιεί την εξής αναδρομική σχέση, για κάθε $n \geq 2$: $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, με αρχικές συνθήκες $D_0 = 1, D_1 = 0$. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι, για κάθε $n \geq 0$,

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

(4β) Να χρησιμοποιήσετε γεννήτριες συναρτήσεις για να επιλύσετε (δηλ. να βρείτε ένα κλειστό τύπο για τον n-οστό όρο a_n, για κάθε $n = 0,1, \ldots$) την παρακάτω αναδρομική εξίσωση:

$$a_n - 4a_{n-2} = 3^n,$$

με αρχικούς όρους $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 3$.

Ερώτημα 5. (μέγιστος βαθμός: 10)

Το ερώτημα αυτό έχει σκοπό στο να σας εισάγει στην μορφή της εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι σωστή ή λάθος. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους, βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(5α) Το ελληνικό αλφάβητο αποτελείται από 7 φωνήεντα και 17 σύμφωνα.

1. (Σ / Λ) Αν επιτρέπεται η επανάληψη γραμμάτων, το πλήθος των λέξεων μήκους πέντε που περιέχουν ακριβώς ένα φωνήεν είναι $5 \cdot 7 \cdot 17^4$.

2. (Σ / Λ) Αν επιτρέπεται η επανάληψη γραμμάτων, το πλήθος των λέξεων μήκους πέντε που περιέχουν το πολύ ένα φωνήεν είναι $7 \cdot 17^4$.

3. (Σ / Λ) Αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη γραμμάτων, το πλήθος των λέξεων μήκους πέντε που περιέχουν ακριβώς ένα φωνήεν είναι $5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14$.

4. (Σ / Λ) Αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη γραμμάτων, το πλήθος των λέξεων μήκους πέντε που περιέχουν συνεχόμενα τα ΑΒ είναι $4 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$.

(5β) **1. (Σ / Λ)** Ο αριθμός των τρόπων να κατανεμηθούν 20 διακεκριμένα αντικείμενα σε 10 διακεκριμένες υποδοχές όταν έχει σημασία η σειρά σε κάθε υποδοχή ισούται με το συντελεστή του $\frac{x^{20}}{20!}$ στη συνάρτηση $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^{10}$.

2. (Σ / Λ) Το ζητούμενο του ερωτήματος **(3γ)** ισούται με τον αριθμό των ακέραιων μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $20 \cdot x_{20} + 19 \cdot x_{19} + \cdots + x_1 = 20$, όπου οι $x_i, i = 1,2, \ldots 20$, είναι μεταβλητές.

3. (Σ / Λ) Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να γράψουμε τον αριθμό 5 ως άθροισμα θετικών ακέραιων αριθμών, αν έχει σημασία η σειρά των προσθετέων, ισούται με 2^4.

4. (Σ / Λ) Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να γράψουμε τον αριθμό 4 ως άθροισμα θετικών ακέραιων αριθμών, αν δεν έχει σημασία η σειρά των προσθετέων, ισούται με τον συντελεστή του $\frac{x^4}{4!}$ στη συνάρτηση $\left(1 + \frac{x^4}{4!}\right)\left(1 + \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$.