ΠΛΗ20, ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΛΙΟΥ 2018, ΜΕΡΟΣ Β'

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 (μονάδες 25)

α) Έστω ότι θέλουμε να συστήσουμε πενταμελές συμβούλιο που θα εκπροσωπεί στα όργανα διοίκησης του ΕΑΠ τους φοιτητές της ΠΛΗ για το τρέχον ακαδημαϊκό έτος. Η επιλογή θα γίνει ανάμεσα σε 20 υποψηφίους, ενώ στο συμβούλιο θα εκλεγούν πέντε μέλη εκ των οποίων ένα θα είναι πρόεδρος, ένα γραμματέας, και ένα ταμίας. Τα άλλα δυο (απλά) μέλη θεωρούνται ισότιμα μεταξύ τους. Να υπολογιστούν οι διαφορετικές συνθέσεις του συμβουλίου στις εξής περιπτώσεις:

i) Δίχως περιορισμό.
ii) Αν θεωρήσουμε δεδομένο ότι στην επιτροπή θα συμμετέχει ο φοιτητής X.
iii) Αν θεωρήσουμε δεδομένο ότι στην επιτροπή θα συμμετέχει ή ο φοιτητής X ως πρόεδρος, ή η φοιτήτρια Y ως απλό μέλος, ή και τα δύο.

β) Ένα κατάστημα αθλητικών ειδών διαθέτει σε 4 διαφορετικά σημεία πώλησης εντός του καταστήματος απεριόριστο αριθμό από μπάλες για τα αθλήματα του ποδοσφαίρου, της καλαθοσφαίρισης, της αντισφαίρισης και της επιτραπέζιας αντισφαίρισης. (Καθένα από τα 4 σημεία πώλησης διαθέτει μόνο ένα είδος μπάλας.) Να δοθούν οι γεννήτριες συναρτήσεις και να προσδιοριστεί ο όρος ο συντελεστής του οποίου δίνει τη ζητούμενη μέτρηση, για τις εξής περιπτώσεις:

i) Ένα αθλητικό σωματείο επιθυμεί να αγοράσει N μπάλες, έτσι ώστε να επιλεγούν άρτιο πλήθος μπαλών ποδοσφαίρου και περιττό πλήθος μπαλών αντισφαίρισης (και αυθαίρετο πλήθος μπαλών καλαθοσφαίρισης και επιτραπέζιας αντισφαίρισης). Μας ενδιαφέρουν οι διαφορετικοί τρόποι αγοράς των N μπαλών από το κατάστημα.
ii) Οι 30 (διαφορετικοί) μαθητές μιας τάξης προσέρχονται στα 4 σημεία πώλησης των μπαλών προκειμένου να αγοράσουν από μια μπάλα ο καθένας, αξιοποιώντας κάποιες προσφορές που δίνονται από το κατάστημα. Σε κάθε σημείο πώλησης μπορούν να εξυπηρετηθούν μέχρι 10 μαθητές. Κάθε μαθητής θα πρέπει να σταθεί σε κάποιο σημείο πώλησης, ενώ λαμβάνει μεγαλύτερη έκπτωση όσο πιο μπροστά βρεθεί στην ουρά του ταμείου (πχ, 50% ο πρώτος, 45% ο δεύτερος, 40% ο τρίτος, κ.λπ.). Μας ενδιαφέρουν οι διαφορετικοί τρόποι στοίχισης των 30 μαθητών στα 4 σημεία πώλησης.

Απάντηση

αi) Θεωρούμε τους 20 υποψηφίους ως διακεκριμένες υποδοχές χωρητικότητας 1, στις οποίες θα πρέπει να τοποθετηθούν 5 σφαιρίδια, εκ των οποίων υπάρχουν 3 διακεκριμένα σφαιρίδια (από ένα για την επιλογή προέδρου, γραμματέα και ταμία), ενώ υπάρχουν άλλα δύο σφαιρίδια που μεταξύ τους είναι όμοια (αφορούν την επιλογή των δυο απλών μελών του συμβουλίου). Υπάρχουν $\frac{P(20,5)}{1!1!1!2!}=\frac{P(20,5)}{2}$ διαφορετικές επιτροπές που μπορούν να προκύψουν.

αii) Θα πρέπει να προσδιοριστεί κατ' αρχάς ο ρόλος που θα ανατεθεί στον φοιτητή X. Μελετάμε χωριστά τις εξής αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις:

- Ο X είναι απλό μέλος της επιτροπής. Σε αυτή την περίπτωση, απομένει να επιλεγούν, με συγκεκριμένη σειρά, 4 από τους υπόλοιπους 19 υποψηφίους, όπου κάθε επιλεγμένος υποψήφιος θα αναλάβει διαφορετικό ρόλο (πρόεδρος, γραμματέας, ταμίας, ή απλό μέλος). Άρα, υπάρχουν $P(19,4)$ διαφορετικές επιτροπές που μπορούν να προκύψουν, με τον X ως απλό μέλος τους.

- Ο X δεν είναι απλό μέλος της επιτροπής (δηλαδή, είναι πρόεδρος, ή γραμματέας, ή ταμίας). Υπάρχουν 3 επιλογές για τον ρόλο του X. Για τις υπόλοιπες 4 θέσεις του συμβουλίου, θα γίνει επιλογή μεταξύ των 19 υποψηφίων που απομένουν, με $\frac{P(19,4)}{1!1!2!} = \frac{P(19,4)}{2}$ διαφορετικούς τρόπους (αντίστοιχα με το 1αi). Από τον κανόνα του γινομένου, καταλήγουμε ότι υπάρχουν $3 \times \frac{P(19,4)}{2}$ διαφορετικές επιτροπές σε αυτή την περίπτωση.

Από τον κανόνα του αθροίσματος καταλήγουμε ότι τελικά υπάρχουν

$$P(19,4) + \frac{3}{2}P(19,4) = \frac{5}{2}P(19,4)$$

διαφορετικές επιτροπές που περιλαμβάνουν του υποψήφιο X.

αiii) Οι επιτροπές που περιλαμβάνουν τον φοιτητή X ως πρόεδρο της επιτροπής, είναι $\frac{P(19,4)}{2}$. Οι επιτροπές που περιλαμβάνουν τη φοιτήτρια Y ως απλό μέλος, είναι $P(19,4)$. Οι επιτροπές που περιλαμβάνουν ΚΑΙ τον X ως πρόεδρο και την Y ως απλό μέλος, είναι $P(18,3)$: Ο γραμματέας, ο ταμίας και το άλλο απλό μέλος πρέπει να επιλεγούν (με συγκεκριμένη σειρά, λόγω των διαφορετικών ρόλων) από τους 18 υποψηφίους που απομένουν.

Αναζητάμε το πλήθος των επιτροπών που περιλαμβάνουν τον X ως πρόεδρο ή την Y ως απλό μέλος. Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του αθροίσματος, αφού υπάρχουν επιτροπές με τον X ως πρόεδρο ΚΑΙ την Y ως απλό μέλος. Μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε τη γενίκευσή του, δηλαδή την αρχή του εγκλεισμού αποκλεισμού. Η απάντηση λοιπόν είναι ότι υπάρχουν τελικά

$$\frac{P(19,4)}{2} + P(19,4) - P(18,3) = \frac{3}{2}P(19,4) - P(18,3)$$

διαφορετικές επιτροπές που περιλαμβάνουν τον X ως πρόεδρο ή την Y ως απλό μέλος.

βi) Έχουμε ρίψη σφαιριδίων (οι επιλογές μπαλών) σε 4 υποδοχές άπειρης χωρητικότητας (μια υποδοχή για κάθε σημείο πώλησης). Τα σφαιρίδια θα πρέπει να είναι μεταξύ τους όμοια, αφού μας ενδιαφέρει μόνο πόσες μπάλες θα αγοράσουμε από κάθε είδος, κι όχι με ποια σειρά θα επιλέξουμε τις μπάλες που θα αγοράσουμε. Θα κατασκευάσουμε λοιπόν συνήθη γεννήτρια συνάρτηση. Ζητάμε άρτιο πλήθος μπαλών ποδοσφαίρου, περιττό πλήθος μπαλών αντισφαίρισης, και αυθαίρετο πλήθος μπαλών καλαθοσφαίρισης και επιτραπέζιας αντισφαίρισης, άρα η ζητούμενη ΣΓΣ είναι η εξής:

$$A(x) = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(x + x^3 + x^5 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)^2.$$

Στη γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ αναζητάμε τον συντελεστή α_Nτου όρου x^N.

βii) Αυτή τη φορά έχουμε 30 διακεκριμένα σφαιρίδια (οι μαθητές) που τοποθετούνται σε διακεκριμένες υποδοχές χωρητικότητας μέχρι 10 σφαιριδίων (τα σημεία πώλησης μπαλών), όπου ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των σφαιριδίων εντός κάθε υποδοχής. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να γίνει χρήση εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης όπου, για οποιαδήποτε k σφαιρίδια, υπάρχουν $k!$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησής τους στην ίδια υποδοχή. Κάθε υποδοχή έχει τον ίδιο (εκθετικό) απαριθμητή, που είναι ο εξής:

$$1 + x + 2!\frac{x^2}{2!} + 3!\frac{x^3}{3!} + \ \ldots + 10!\frac{x^{10}}{10!} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10}.$$

Η ζητούμενη γεννήτρια είναι λοιπόν η εξής:

$$B(x) = (1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \cdots + x^{10})^4.$$

Αναζητάμε εντός της $B(x)$ τον συντελεστή του β_{30} του (εκθετικού) όρου $\frac{x^{30}}{30!}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 (μονάδες 35)

α) Έστω p_1 και p_2 προτασιακές μεταβλητές και φ ένας (οποιοσδήποτε) από τους 4 προτασιακούς τύπους της μορφής $\varphi = x \to y$ όπου το x μπορεί να είναι το p_1 ή το $\neg p_1$ και το y το p_2 ή το $\neg p_2$. Έστω επίσης ότι ο φ ικανοποιείται από τις τρεις αποτιμήσεις α, β, γ. Συμβολίζουμε με $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$ τις τιμές (0 ή 1) που οι τρεις αποτιμήσεις αποδίδουν στην μεταβλητή p_i, αντίστοιχα. Δείξτε ότι ο φ ικανοποιείται επίσης και από την αποτίμηση v η οποία αποδίδει στην μεταβλητή p_i την τιμή $v_i = (\alpha_i \vee \beta_i) \wedge (\beta_i \vee \gamma_i) \wedge (\gamma_i \vee \alpha_i)$. (*Υπόδειξη: Δείξτε και χρησιμοποιήστε στη συνέχεια ότι η τιμή της v_i είναι η πλειοψηφούσα τιμή από τις $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.*)

β)

i) Αποδείξτε ότι δεν είναι τυπικό θεώρημα ο τύπος $\big(\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)\big) \to (\chi \to \psi)$. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Εγκυρότητας-Πληρότητας.

ii) Δείξτε ότι $\vdash_{\Pi\Lambda} \neg\neg\varphi \to \big((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi\big)$ χωρίς να χρησιμοποιηθεί το Θεώρημα Εγκυρότητας-Πληρότητας. Κάθε άλλο θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

γ) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά (μη κατευθυνόμενα) γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος, και περιλαμβάνει το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P με το $P(x, y)$ να δηλώνει ότι «*οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή*». Στη γλώσσα αυτή:

i) Δώστε τύπο φ που να δηλώνει: «για κάθε 3 κορυφές του γραφήματος G ισχύει ότι όταν υπάρχει ακμή μεταξύ ενός ζευγαριού κορυφών, τότε υπάρχει ακμή και μεταξύ των δύο άλλων ζευγαριών κορυφών».

ii) Δείξτε ότι στη δομή των απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων ισχύει ότι
$$\varphi \vDash \forall x \forall \mathrm{y}\big(x = y \vee P(x, y)\big) \vee \forall x \forall \mathrm{y}\big(\neg P(x, y)\big)$$
όπου φ ο τύπος του (i). Δείξτε δηλαδή ότι στα γραφήματα που επαληθεύεται ο φ, επαληθεύεται και ο τύπος $\forall x \forall \mathrm{y}\big(x = y \vee P(x, y)\big) \vee \forall x \forall \mathrm{y}\big(\neg P(x, y)\big)$. Ποια είναι αυτά τα γραφήματα;

Απάντηση

α) Η απόδειξη μπορεί να γίνει βέβαια εξετάζοντας εξαντλητικά και τις 4 μορφές που μπορεί να έχει ο φ και τις πιθανές τιμές που αποδίδουν οι α, β, γ. Επειδή όμως οι συνδυασμοί είναι αρκετοί, είναι πολύ ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε την υπόδειξη την οποία και αποδεικνύουμε αρχικά. Αν λοιπόν τουλάχιστον 2 από τις 3 αποτιμήσεις α, β, γ αποδίδουν 0 στην μεταβλητή p_i, τότε από την δοθείσα σχέση $v_i = (\alpha_i \vee \beta_i) \wedge (\beta_i \vee \gamma_i) \wedge (\gamma_i \vee \alpha_i)$, θα υπάρχει μία τουλάχιστον παρένθεση που θα έχει και τις δύο αποτιμήσεις 0, οπότε και η v_i θα είναι 0. Αντίστοιχα αν τουλάχιστον 2 από τις 3 αποτιμήσεις α, β, γ αποδίδουν 1 στην μεταβλητή p_i, τότε και οι τρεις παρενθέσεις θα έχουν τουλάχιστον ένα 1 στην διάζευξη οπότε όλες είναι 1 και το ίδιο και η v_i.

Θεωρούμε τώρα την συνεπαγωγή $\varphi = x \to y$. Ανεξάρτητα από το αν ο x είναι η p_1 ή η $\neg p_1$, 2 τουλάχιστον από τις 3 τιμές που τελικά λαμβάνει η υπόθεση της συνεπαγωγής (δηλαδή το x) από τις $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ είναι ίσες και επίσης ίσες με την τιμή που θα λάβει από την v_1. Παρόμοια, 2 τουλάχιστον από τις 3 τιμές που λαμβάνει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής είναι ίσες και επίσης ίσες με την τιμή που θα λάβει από την

v_2. Αυτό σημαίνει όμως ότι μία από τις α, β, γ αποδίδει στις p_1 και p_2 τις πλειοψηφούσες τιμές, δηλαδή αυτές ακριβώς που αποδίδει και η v. Άρα η v ικανοποιεί τον φ.

β)

i) Από το Θεώρημα Εγκυρότητας-Πληρότητας γνωρίζουμε ότι ισχύει ότι $\vdash_{\Pi\Lambda} \big(\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)\big) \to (\chi \to \psi)$ ανν ο τύπος $\big(\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)\big) \to (\chi \to \psi)$ είναι ταυτολογία. Θέτοντας όμως τους τύπους φ και χ αληθείς ενώ τον ψ ψευδή, έχουμε ότι η υπόθεση της (εξωτερικής) συνεπαγωγής είναι αληθής ενώ το συμπέρασμα ψευδές.

ii) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι $\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi$. Η τυπική απόδειξη είναι λοιπόν

1. $\neg\neg\varphi$	Υπόθεση
2. $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$	ΑΣ1, όπου θέσαμε στη θέση του φ τον τύπο $\neg\neg\varphi$ και στον τύπο ψ τον τύπο $\neg\varphi$
3. $\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$	1,2 MP
4. $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \big((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi\big)$	ΑΣ3, όπου ο φ παρέμεινε και στον τύπο ψ θέσαμε τον τύπο $\neg\varphi$
5. $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi$	3,4 MP

γ)

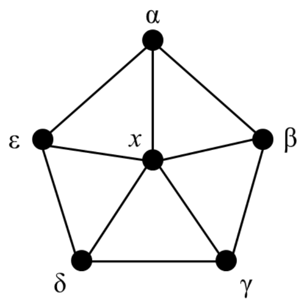
i) Ο ζητούμενος τύπος είναι
$\varphi = \forall x \forall y \forall z (x \neq y \land y \neq z \land z \neq x \land P(x,y) \to P(x,z) \land P(y,z))$

ii) Ο τύπος φ ικανοποιείται όταν η συνεπαγωγή ικανοποιείται για κάθε τριάδα κορυφών x, y, z. Αν λοιπόν υπάρχουν 2 κορυφές x, y για τις οποίες επαληθεύεται το $P(x,y)$ (δηλαδή υπάρχει η ακμή xy), θα πρέπει να επαληθεύονται και τα $P(x,z)$ και $P(y,z)$ για κάθε άλλη κορυφή z. Συνεπώς, για τυχούσες κορυφές u και v (με $u \neq v$) επαληθεύονται τα $P(x,u)$ και $P(x,v)$ και συνεπώς και το $P(u,v)$. Άρα αν ένα γράφημα επαληθεύει τον φ και έχει μία ακμή, τότε έχει όλες τις δυνατές ακμές, είναι δηλαδή πλήρες γράφημα.
Η άλλη δυνατότητα για να επαληθεύονται οι συνεπαγωγές, είναι οι υποθέσεις τους να είναι ψευδείς. Αυτό συμβαίνει όταν για κάθε x, y αληθεύει το $\neg P(x,y)$.
Συμπεραίνουμε ότι κάθε γράφημα που επαληθεύει τον τύπο φ, επαληθεύει και τον τύπο $\forall x \forall y \big(x = y \lor P(x,y)\big) \lor \forall x \forall y \big(\neg P(x,y)\big)$. Τα γραφήματα που επαληθεύουν τον φ είναι λοιπόν είτε πλήρη γραφήματα είτε γραφήματα που τα συμπληρωματικά τους είναι πλήρη.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 (μονάδες 24)

α) Δείξτε ότι το γράφημα του διπλανού σχήματος περιέχει 3 ακμές που αν τις αφαιρέσουμε τότε το γράφημα που προκύπτει είναι ένα διμερές γράφημα.

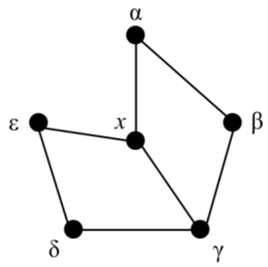
β) Δείξτε ότι από το γράφημα του διπλανού σχήματος, δεν μπορεί να προκύψει διμερές γράφημα αφαιρώντας λιγότερες από 3 ακμές.



γ) Για $k \geq 1$, θεωρούμε έναν κύκλο C_{2k+1} περιττού μήκους. Συμβολίζουμε με G το γράφημα που προκύπτει από το C_{2k+1} προσθέτοντας μια νέα κορυφή x γειτονική με όλες τις κορυφές του C_{2k+1}. Βρίσκοντας πρώτα τον χρωματικό αριθμό (δηλ., το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων) του G, δείξτε ότι αν αφαιρέσουμε οποιαδήποτε ακμή από το G τότε μειώνεται ο χρωματικός αριθμός.

Απάντηση

α) Από το γράφημα του σχήματος αφαιρούμε 3 ακμές όπως φαίνονται παρακάτω:



Τότε μια διαμέριση των έξι κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα είναι $\{x, \beta, \delta\}$ και $\{\alpha, \gamma, \varepsilon\}$.

β) Θυμίζουμε ότι τα διμερή γραφήματα χαρακτηρίζονται ως εκείνα τα γραφήματα που δεν περιέχουν περιττούς κύκλους. Παρατηρούμε ότι το γράφημα περιέχει 5 τρίγωνα και έναν κύκλο μήκους 5. Από τον κύκλο μήκους 5 πρέπει να αφαιρέσουμε τουλάχιστον μια ακμή. Αφαιρώντας την ακμή αυτή, καταστρέφουμε και ένα από τα τρίγωνα με αποτέλεσμα να προκύψει ένα γράφημα με συνολικά 4 τρίγωνα. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια μόνο ακμή που αν την αφαιρέσουμε θα προκύψει διμερές γράφημα. Τότε αυτή η ακμή θα πρέπει να είναι κοινή ακμή και στα 4 τρίγωνα. Ωστόσο εύκολα παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποια ακμή που να συμμετέχει και στα 4 τρίγωνα. Επομένως χρειαζόμαστε τουλάχιστον δύο επιπλέον ακμές που θα πρέπει να αφαιρέσουμε. Μαζί με την πρώτη ακμή του κύκλου μήκους 5, θα χρειαστούμε τουλάχιστον 3 ακμές.

γ) Ο περιττός κύκλος C_{2k+1} που περιέχει το G χρειάζεται 3 ακριβώς χρώματα. Εφόσον η x είναι γειτονική με όλες τις κορυφές του C_{2k+1}, άρα και με τα τρία χρώματα του C_{2k+1}, η κορυφή x θα χρειαστεί ένα τέταρτο χρώμα. Επομένως $\chi(G) = 4$.
Έστω ότι αφαιρούμε μια ακμή του G. Αυτή η ακμή είτε θα βρίσκεται πάνω στον κύκλο C_{2k+1}, είτε θα προσπίπτει στην x. Και στις δύο περιπτώσεις δείχνουμε ότι ο χρωματικός αριθμός θα είναι 3.

- Έστω ότι η ακμή βρίσκεται πάνω στον κύκλο C_{2k+1}: το γράφημα που προκύπτει αποτελείται από ένα απλό μονοπάτι (που χρειάζεται 2 χρώματα) και μια κορυφή γειτονική με όλες τις κορυφές του μονοπατιού. Επομένως 3 χρώματα αρκούν για να χρωματίσουμε τις κορυφές.
- Έστω ότι η ακμή είναι της μορφής $\{x, y\}$ όπου y μια κορυφή του κύκλου C_{2k+1}: διαγράφουμε τις κορυφές x και y και χρωματίζουμε με δύο χρώματα το μονοπάτι που προκύπτει. Εφόσον οι x και y δεν είναι γειτονικές, μπορούμε να χρωματίσουμε με το τρίτο χρώμα και τις δύο αυτές κορυφές. Άρα και στη περίπτωση αυτή καταλήγουμε σε ένα γράφημα που χρωματίζεται με 3 χρώματα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 (μονάδες 16)

α) Έστω G ένα απλό μη κατευθυντικό (μη κατευθυνόμενο) γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές, όπου ακριβώς δύο κορυφές του έχουν περιττό βαθμό.

i) Δείξτε ότι υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των δύο κορυφών περιττού βαθμού.

ii) Δείξτε ότι αν το G δεν περιέχει κύκλους (δηλ., είναι ακυκλικό) τότε το ίδιο το γράφημα G αποτελείται από ένα μονοπάτι και ενδεχομένως κάποιες απομονωμένες κορυφές (δηλ., κορυφές με βαθμό 0). *Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι αν σε ένα δένδρο υπάρχει κορυφή με βαθμό k τότε το δέντρο έχει τουλάχιστον k φύλλα.*

β) Έστω G ένα απλό μη κατευθυντικό (μη κατευθυνόμενο) συνεκτικό γράφημα όπου κάθε ακμή e έχει <u>θετικό βάρος</u> $w(e)$. Έστω S ένα σύνολο ακμών του G με ελάχιστο βάρος, τέτοιο ώστε το γράφημα $G - S$, το οποίο προκύπτει με τη διαγραφή των ακμών του S, δεν περιέχει κύκλους (δηλ., είναι ακυκλικό). Δείξτε ότι το $G - S$ είναι ένα συνδετικό δένδρο του G με μέγιστο βάρος.

Απάντηση

αi) Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι δύο κορυφές περιττού βαθμού, έστω x και y, βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G. Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο. Έστω G_x η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει την κορυφή x και έστω ότι $y \notin G_x$. Θεωρούμε το G_x ως ένα ξεχωριστό γράφημα και παρατηρούμε ότι ο βαθμός κάθε κορυφής u του G_x είναι ίδιος με το βαθμό της u στο G. Άρα το G_x έχει μόνο μια κορυφή περιττού βαθμού, το οποίο είναι άτοπο καθώς αντιβαίνει το Λήμμα της Χειραψίας (από το οποίο συνεπάγεται ότι οποιοδήποτε γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού).

αii) Έστω x και y οι δύο κορυφές περιττού βαθμού του G. Από το (αi) γνωρίζουμε ότι οι x και y βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα G_x του G. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G είναι δένδρο, αφού είναι συνεκτικό υπογράφημα ενός ακυκλικού γραφήματος. Από την υπόδειξη γνωρίζουμε ότι κάθε δένδρο με τουλάχιστον δύο κορυφές περιέχει κορυφή βαθμού τουλάχιστον ένα, άρα περιέχει και τουλάχιστον ένα φύλλο (κορυφή βαθμού 1). Επομένως, κάθε συνεκτική συνιστώσα του G με τουλάχιστον δύο κορυφές θα πρέπει να περιέχει κορυφή περιττού βαθμού, το οποίο σημαίνει ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα εκτός της G_x αποτελείται από μια απομονωμένη κορυφή.

Απομένει να δείξουμε ότι το G_x είναι μονοπάτι. Θα δείξουμε ότι όλες οι κορυφές του G_x εκτός των x και y έχουν βαθμό ίσο με 2. Αν μια τέτοια κορυφή έχει βαθμό >2 τότε από την υπόδειξη το δέντρο G_x περιέχει >2 φύλλα, άρα και περισσότερες από δύο κορυφές περιττού βαθμό. Επίσης κορυφές βαθμού 0 δεν υπάρχουν διότι το G_x είναι συνεκτικό, ενώ κορυφές βαθμού 1 δεν υπάρχουν άλλες εκτός των x και y. Άρα κάθε κορυφή του G_x εκτός των x και y έχει βαθμό ίσο 2 που σημαίνει ότι το G_x είναι μονοπάτι.

β) Θα δείξουμε πρώτα ότι το $G - S$ είναι δένδρο. Από τον ορισμό του S έχουμε ότι το $G - S$ είναι ακυκλικό, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεκτικό. Έστω ότι το $G - S$ αποτελείται από τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες. Αφού το G είναι συνεκτικό, θα υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή $\{x, y\}$ στο G τέτοια ώστε οι κορυφές x και y να ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του $G - S$. Ορίζουμε το σύνολο ακμών $S' = S - \{x, y\}$. Τότε το $G - S'$ είναι ακυκλικό και αφού οι ακμές έχουν θετικό βάρος, το S' έχει μικρότερο βάρος από το S, το οποίο αντιβαίνει τον ορισμό του S.

Απομένει να δείξουμε ότι το $G - S$ έχει μέγιστο βάρος $w(G - S)$ σε σχέση με όλα τα συνδετικά δένδρα του G. Έστω T ένα αυθαίρετο συνδετικό δένδρο του G και έστω R οι ακμές που δεν ανήκουν σε αυτό, δηλαδή $T = G - R$. Από τον ορισμό του S έχουμε $w(S) \leq w(R)$. Το συνολικό βάρος των ακμών του G είναι $w(G) = w(T) + w(R) = w(G - R) + w(R)$. Ομοίως, έχουμε $w(G) = w(G - S) + w(S)$. Άρα, $w(G - S) = w(G - R) + w(R) - w(S) \geq w(G - R) \Rightarrow w(G - S) \geq w(T)$.

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο – Πάροδος Αριστοτέλους 18, 26335 ΠΑΤΡΑ
Τηλ.: 2610-367300 Fax: 2610-367350