ΠΛΗ20, ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΛΙΟΥ 2017, ΜΕΡΟΣ Β'

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 (μονάδες 24)

α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μεταφέρουμε 300 διαφορετικές βαλίτσες με 6 διαφορετικές πτήσεις αν σε κάθε μία πρέπει να φορτωθούν 50 βαλίτσες; Δεν ενδιαφέρει η σειρά φόρτωσης των βαλιτσών σε κάθε πτήση.

β) Με πόσους τρόπους μπορούν να φορτωθούν 200 ίδιες μεγάλες βαλίτσες και 100 ίδιες μικρές βαλίτσες σε 6 διακεκριμένα αεροπλάνα, αν κάθε πτήση πρέπει να πάρει τουλάχιστον 10 μεγάλες και τουλάχιστον 5 μικρές βαλίτσες; Και εδώ δεν ενδιαφέρει η σειρά φόρτωσης.

γ) Το αεροπλάνο μιας πτήσης έχει 50 καθίσματα στην Α’ θέση, 100 στην Business και 250 στην Οικονομική θέση. Με την πτήση αυτή πρόκειται να ταξιδέψουν 300 διακεκριμένοι επιβάτες. Θέλουμε να υπολογίσουμε τους τρόπους που μπορούν να καθίσουν οι επιβάτες στο αεροπλάνο αν σημασία έχει μόνο σε ποια θέση (δηλ. Α’, Business ή Οικονομική) θα ταξιδέψει κάποιος επιβάτης και όχι το ακριβές κάθισμα που θα πάρει. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο.

δ) Έχουμε 100 ίδιες βαλίτσες των 5 κιλών, 100 ίδιες βαλίτσες των 10 κιλών και 100 ίδιες βαλίτσες των 15 κιλών. Με πόσους τρόπους μπορούμε να φορτώσουμε πλήρως ένα αεροπλάνο χωρητικότητας 1000 κιλών (δηλαδή μέχρι το μέγιστο βάρος που μπορεί να μεταφέρει) αν πρέπει να φορτωθούν τουλάχιστον 10 βαλίτσες από κάθε βάρος; Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο.

Απάντηση

α) Πρόκειται για μεταθέσεις 6 ομάδων μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων κάθε μία από τις οποίες έχει 50 αντικείμενα. Οι τρόποι είναι $\frac{300!}{(50!)^6}$.

β) Για να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί φορτώνουμε σε κάθε πτήση από 10 μεγάλες βαλίτσες και από 5 μικρές και απομένουν 140 μεγάλες και 70 μικρές βαλίτσες για να κατανεμηθούν στις 6 πτήσεις. Αυτό το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την διανομή μη διακεκριμένων αντικειμένων σε διακεκριμένες υποδοχές. Για τις μεγάλες βαλίτσες οι τρόποι είναι C(140+6-1,140)=C(145, 140) ενώ για τις μικρές C(75, 70). Ο κανόνας του γινομένου δίνει C(145, 140)·C(75, 70).

γ) Έχουμε να διανείμουμε 300 διακεκριμένα αντικείμενα (επιβάτες) σε 3 διακεκριμένες υποδοχές (θέσεις του αεροπλάνου) χωρίς να έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των αντικειμένων σε κάθε υποδοχή. Η χωρητικότητα της κάθε υποδοχής δίνεται από το ερώτημα. Θα χρησιμοποιήσουμε συνεπώς εκθετική γεννήτρια συνάρτηση η οποία είναι:

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{50}}{50!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{100}}{100!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{250}}{250!}\right)$$

Σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του $\frac{x^{300}}{300!}$.

δ) Θα χρησιμοποιήσουμε συνήθη γεννήτρια συνάρτηση επειδή έχουμε διανομή όμοιων αντικειμένων (τα κιλά) σε διακεκριμένες υποδοχές (οι βαλίτσες κάθε είδους). Ο απαριθμητής για τις βαλίτσες των 5 κιλών θα έχει εκθέτες που θα αυξάνουν με βήμα 5, όσο δηλαδή είναι το επιπλέον βάρος που έχουμε από μία επιπλέον βαλίτσα των 5 κιλών. Η αρχική τιμή θα είναι 50. Επειδή έχουμε 100 τέτοιες βαλίτσες, το μέγιστο βάρος (άρα και ο εκθέτης του x) θα είναι 500. Παρόμοια, η αρχική τιμή στις βαλίτσες των 10 κιλών θα είναι 100 και το βήμα 10. Στις βαλίτσες των 15 κιλών η αρχική τιμή θα είναι 150 και το βήμα 15. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, δεν χρειάζεται άνω όρος καθώς το βάρος τους συνολικά είναι 1000 κιλά και άνω. Η γεννήτρια λοιπόν είναι:

$$\left(x^{50}+x^{55}+\cdots+x^{500}\right)\left(x^{100}+x^{110}+x^{120}+\cdots\right)\left(x^{150}+x^{165}+x^{180}\cdots\right)$$

Σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{1000}. Στους δύο τελευταίους απαριθμητές, δεν είναι απαραίτητο να δοθεί ένας άνω όρος στις δυνάμεις του x καθώς μεγαλύτεροι όροι από τον x^{1000} δεν έχουν σημασία. Προφανώς δεν είναι και λάθος να μπει το x^{1000} (ή ένας κατάλληλα υπολογισμένος εκθέτης) σαν μέγιστη δύναμη του x σε κάθε απαριθμητή.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 (μονάδες 36)

α)

(i) Αποδείξτε ότι ο τύπος $\varphi \lor \psi$ είναι ισοδύναμος του τύπου $(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow \varphi$.

(ii) Αποδείξτε ότι ο τύπος $\varphi \land \psi$ είναι ισοδύναμος του τύπου $((\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

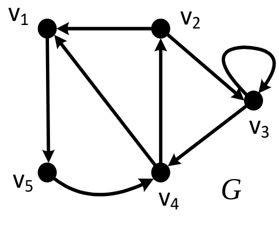
(iii) Δείξτε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων ότι για οποιονδήποτε προτασιακό τύπο χ που χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο $\{\land, \lor\}$ υπάρχει ισοδύναμος τύπος χ^* που χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο $\{\rightarrow,\leftrightarrow\}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)\} \vdash_{\Pi\Lambda} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλα τα γνωστά θεωρήματα, εκτός από το Θεώρημα Εγκυρότητας – Πληρότητας.

γ) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα σε κατευθυνόμενα γραφήματα που δεν έχουν παράλληλες ακμές (μπορεί όμως να έχουν ανακυκλώσεις) όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ δηλώνει ότι «*υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y*». Σε αυτή την ερμηνεία:

i) Δώστε έναν τύπο που δηλώνει ότι «*υπάρχει κορυφή από την οποία υπάρχει ακμή προς κάθε άλλη κορυφή του γραφήματος*».

ii) Θεωρούμε τον τύπο $\varphi_1 = \forall x \forall y \left(x \neq y \rightarrow P(x, y) \lor P(y, x) \right)$ και το κατευθυνόμενο γράφημα G που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος ακμών που πρέπει να προσθέσουμε στο G, ώστε το γράφημα που προκύπτει να επαληθεύει τον τύπο φ_1;



iii) Θεωρούμε τους τύπους:

$$\varphi_2 = \forall x \forall y \left(P(x, y) \land P(y, x) \rightarrow x = y \right) \text{ και}$$

$$\varphi_3 = \forall x \forall y \forall z \left(P(x, y) \land P(y, z) \rightarrow P(x, z) \right)$$

Εξετάστε ποιοι από τους τύπους φ_2 και φ_3 αληθεύουν στο γράφημα G.

Απάντηση

α)

(i) και (ii). Και οι δύο ισοδυναμίες αποδεικνύονται πολύ εύκολα με πίνακες αληθείας.

(iii) Βάση. Αν ο τύπος φ είναι προτασιακή μεταβλητή τότε προφανώς ο τύπος $\varphi^*=\varphi$ είναι ισοδύναμος τύπος που χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο $\{\to,\leftrightarrow\}$ (0 φορές τον κάθε ένα). Υποθέτουμε τώρα ότι για τυχόντες τύπους φ και ψ που χρησιμοποιούν μόνο συνδέσμους από το σύνολο $\{\wedge, \vee\}$ υπάρχουν ισοδύναμοι τύποι φ^* και ψ^* (δηλαδή $\varphi \equiv \varphi^*$ και $\psi \equiv \psi^*$) που χρησιμοποιούν μόνο συνδέσμους από το σύνολο $\{\to,\leftrightarrow\}$. Έστω τώρα τύπος χ που χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο $\{\wedge, \vee\}$. Ο τύπος χ θα είναι της μορφής $\chi=\varphi \vee \psi$ ή της μορφής $\chi=\varphi \wedge \psi$. Στην πρώτη περίπτωση από το (i) έχουμε ότι ο τύπος $\chi \equiv \varphi^* \vee \psi^* \equiv (\varphi^* \leftrightarrow \psi^*) \to \varphi^* = \chi^*$. Ο τελευταίος χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο $\{\to,\leftrightarrow\}$. Στην δεύτερη περίπτωση από το (ii) έχουμε ότι ο τύπος $\chi \equiv \varphi^* \wedge \psi^* \equiv ((\varphi^* \leftrightarrow \psi^*) \to \varphi^*) \leftrightarrow (\varphi^* \leftrightarrow \psi^*) = \chi^*$. Επίσης ο τελευταίος τύπος χρησιμοποιεί μόνο συνδέσμους από το σύνολο $\{\to,\leftrightarrow\}$ και άρα το ζητούμενο δείχθηκε σε κάθε περίπτωση.

β) Από το Θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi), (\varphi \to \psi)\} \vdash_{\text{ΠΛ}} (\neg\psi \to \varphi) \to \psi$$

Έχουμε λοιπόν:

1.	$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	Υπόθεση
2.	$\varphi \to \psi$	Υπόθεση
3.	$\neg\psi \to \neg\varphi$	1,2 MP
4.	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$	ΑΣ3 με εναλλαγή των φ και ψ
5.	$(\neg\psi \to \varphi) \to \psi$	3,4 MP

γ)

i) $\varphi = \exists x \forall y \left(x \neq y \to P(x, y) \right)$

ii) Ο τύπος φ_1 δηλώνει ότι μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαφορετικών κορυφών, υπάρχει ακμή από την πρώτη στη δεύτερη ή το αντίστροφο. Με επισκόπηση του γραφήματος παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 ζεύγη κορυφών, τα (v_1, v_3), (v_2, v_5) και (v_3, v_5), χωρίς καμία ακμή μεταξύ τους είτε προς την μία είτε προς άλλη κατεύθυνση. Συνεπώς πρέπει να προστεθούν αυτές οι 3 ακμές (με αυθαίρετο προσανατολισμό) ώστε το γράφημα να επαληθεύει τον τύπο.

(iii) Ο τύπος φ_2 δηλώνει ότι μεταξύ δύο διαφορετικών κορυφών δεν υπάρχουν ακμές και προς τις δύο κατευθύνσεις (αντιπαράλληλες), επιτρέπει όμως την ύπαρξη ανακύκλωσης σε μία κορυφή. Επαληθεύεται συνεπώς στο γράφημα G, διότι δεν υπάρχουν αντιπαράλληλες ακμές.

Ο τύπος φ_3 δηλώνει ότι το γράφημα είναι «μεταβατικό» δηλαδή αν υπάρχει ακμή από μία κορυφή x προς μία y και από την y προς μία z, τότε θα πρέπει να υπάρχει ακμή και από την x προς την z, κάτι που προφανώς δεν ισχύει στο γράφημα G (π.χ. για τις κορυφές v_2, v_1, v_5).

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 (μονάδες 24)

α) Έστω γράφημα G με $n \geq 2$ κορυφές που δεν είναι συνεκτικό. Να δείξετε ότι το συμπληρωματικό του γράφημα, $\overline{G}$, είναι συνεκτικό.

β) Δώστε έναν χρωματισμό των ακμών του K_5 με δύο χρώματα (δίπλα σε κάθε ακμή σημειώστε «κ» ή «π») έτσι ώστε 5 ακμές να είναι χαρακτηρισμένες κόκκινες («κ») και 5 πράσινες («π») και ένα από τα δύο υπογραφήματα (το «κ» ή το «π») να είναι συνεκτικό ενώ το άλλο όχι.

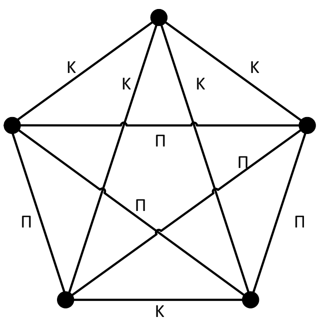
γ) Θεωρούμε το πλήρες γράφημα K_n, $n \geq 2$ στο οποίο κάθε *ακμή* του βάφεται είτε πράσινη είτε κόκκινη με αυθαίρετο τρόπο. Να δείξετε ότι υπάρχει συνδετικό δέντρο του K_n στο οποίο όλες οι ακμές έχουν το ίδιο χρώμα. (*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιείστε προαιρετικά το (α)).

δ) Διατυπώστε έναν αλγόριθμο ο οποίος με είσοδο το K_n, $n \geq 2$, και μια αυθαίρετη διαμέριση των ακμών του σε κόκκινες και πράσινες, υπολογίζει ένα συνδετικό δέντρο του K_n στο οποίο όλες οι ακμές έχουν το ίδιο χρώμα. Μπορείτε ελεύθερα να χρησιμοποιήσετε στον αλγόριθμό σας σαν υπορουτίνα οποιονδήποτε από τους γνωστούς αλγόριθμους πάνω σε γραφήματα.

Απάντηση

α) Έστω G μη συνεκτικό γράφημα και έστω u και v δύο κορυφές του σε μία συνεκτική του συνιστώσα G_1. Και η u και η v στο $\overline{G}$ προφανώς συνδέονται με ακμές με κάθε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη συνεκτική συνιστώσα και άρα βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\overline{G}$ με αυτές και συνεπώς και μεταξύ τους. Άρα το $\overline{G}$ είναι συνεκτικό.

β) Ένας τέτοιος χρωματισμός φαίνεται παρακάτω. Το κόκκινο υπογράφημα έχει συνδετικό δένδρο, ενώ το πράσινο, όχι.



γ) Θεωρούμε έναν αυθαίρετο χρωματισμό των ακμών του K_n και έστω A το γράφημα το επαγόμενο στις κόκκινες ακμές. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε έχει συνδετικό δένδρο και συνεπώς τελειώσαμε. Αν όχι, τότε το συμπληρωματικό γράφημα του A είναι το γράφημα το επαγόμενο στις πράσινες ακμές (έστω B), το οποίο από το (α) πρέπει να είναι συνεκτικό και συνεπώς να έχει συνδετικό δένδρο.

Εναλλακτικά, χωρίς την χρήση του (α), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο πλήθος των κορυφών n. Η βάση της επαγωγής για $n=2$ ισχύει προφανώς καθώς το K_2 έχει ένα συνδετικό δένδρο με μία ακμή, άρα μονοχρωματικό. Υποθέτουμε ότι αν οι ακμές του K_n, $n>2$ χρωματιστούν αυθαίρετα με δύο χρώματα κόκκινο και πράσινο, το K_n έχει μονοχρωματικό συνδετικό δένδρο. Για το βήμα της επαγωγής θεωρούμε το K_{n+1} με αυθαίρετα χρωματισμένες τις ακμές του με τα χρώματα κόκκινο και πράσινο. Θεωρούμε την κορυφή v_{n+1}. Αν όλες οι ακμές από την v_{n+1} προς τις υπόλοιπες κορυφές έχουν το ίδιο χρώμα, έχουμε ένα μονοχρωματικό δένδρο του K_{n+1}. Αν όχι, τότε υπάρχει μία τουλάχιστον πράσινη και μία τουλάχιστον κόκκινη ακμή από την v_{n+1} προς δύο άλλες κορυφές. Η υπόθεση της επαγωγής όμως δίνει ότι το K_n που απομένει όταν αφαιρέσουμε την v_{n+1} έχει μονοχρωματικό συνδετικό δένδρο. Αυτό μαζί με την ακμή ίδιου χρώματος από την v_{n+1} είναι μονοχρωματικό δένδρο του K_{n+1}.

δ) Από το (γ) ένα από τα δύο γραφήματα *A* και *B* (ή και τα δύο) πρέπει να είναι συνεκτικό. Εκτελούμε λοιπόν τον αλγόριθμο Αναζήτησης κατά Βάθος (DFS), στην αρχή στο γράφημα *A*. Αν αυτό είναι συνεκτικό ο αλγόριθμος DFS θα επισκεφτεί όλες τις κορυφές του *A* και θα επιστρέψει ένα συνδετικό δένδρο οπότε τερματίζουμε. Αν το *A* δεν είναι συνεκτικό γράφημα, τότε εκτελούμε για δεύτερη φορά τον DFS στο γράφημα *B* αυτή τη φορά το οποίο αναγκαστικά θα είναι συνεκτικό και ο αλγόριθμος θα μας επιστρέψει ένα συνδετικό του δένδρο. Προφανώς στον αλγόριθμο μπορεί εξίσου καλά να χρησιμοποιηθεί Αναζήτηση κατά Πλάτος (BFS) αντί για DFS.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 (μονάδες 16)

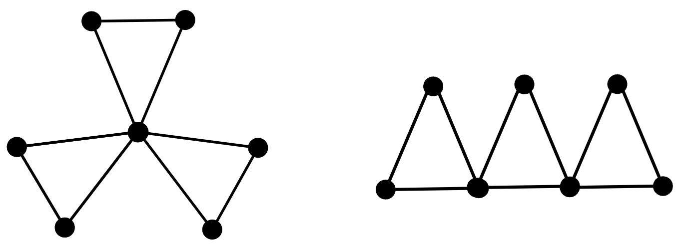
Έστω *G* απλό συνεκτικό γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές το οποίο δεν περιλαμβάνει κανέναν απλό κύκλο άρτιου μήκους.

α) Σχεδιάστε ένα τέτοιο γράφημα με 7 κορυφές και 9 ακμές.

β) Δείξτε ότι για κάθε δύο κορυφές *u* και *v* που ανήκουν σε έναν απλό κύκλο *C* του *G*, οι *u* και *v* δεν συνδέονται με άλλο μονοπάτι παρά μόνο με τα δύο τμήματα του *C*. (*Υπόδειξη:* θεωρείστε ότι υπάρχει ένα τέτοιο μονοπάτι με άκρα τις *u* και *v* και καταλήξτε σε άτοπο δείχνοντας ότι αυτό θα συνεπάγεται την ύπαρξη απλού κύκλου άρτιου μήκους.)

Απάντηση

α) Παρακάτω φαίνονται δύο τέτοια γραφήματα.



β) Ονομάζουμε τα δύο τμήματα του κύκλου *C* που περιλαμβάνει τις κορυφές *u* και *v*, p_1 και p_2. Επειδή ο κύκλος *C* έχει περιττό μήκος, ένα εκ των p_1 και p_2 έχει περιττό μήκος και το άλλο άρτιο. Έστω ότι το p_1 είναι το περιττό μονοπάτι. Υποθέτουμε τώρα (με σκοπό το άτοπο) ότι υπάρχουν και άλλα μονοπάτια με άκρα τις *u* και *v*, διαφορετικά των p_1 και p_2. Θεωρούμε ένα τέτοιο μονοπάτι *p* με άκρα τις *u* και *v*, διαφορετικό από τα p_1 και p_2. Αν το *p* δεν έχει κοινές κορυφές με τα p_1 και p_2 εκτός των *u* και *v*, (έχουμε δηλαδή μια «χορδή» *p* στον *C*), τότε αν έχει άρτιο μήκος, το *p* μαζί με το p_2 δημιουργούν άρτιο κύκλο, άτοπο. Αν πάλι είναι περιττό, τότε το *p* μαζί με το p_1, πάλι δημιουργούν άρτιο κύκλο, επίσης άτοπο.

Παρόμοια, αν το p μοιράζεται κάποιες κορυφές ή και ακμές με τα p_1 και p_2 (βλ. σχήμα, το μονοπάτι με διακεκομμένη γραμμή), για να διαφέρει από αυτά θα πρέπει ένα τουλάχιστον τμήμα του με κορυφές έστω a και b να μην ανήκει στον C. Θα πρέπει συνεπώς να υπάρχει μια τουλάχιστον «χορδή» a-b στον κύκλο C. Καταλήγουμε όμως και πάλι σε άτοπο ακριβώς όπως και παραπάνω, αν θεωρήσουμε τον κύκλο C, και στην θέση των u και v τις κορυφές a και b με το μονοπάτι a-b να παίζει τώρα τον ρόλο του p και να είναι ξένο με τον C (εκτός των a και b).