Ενδεικτικές Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

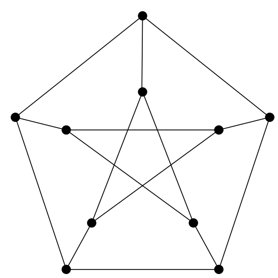
Άσκηση 1 (2015-2016, Εργασία 5, Ερώτημα 2)

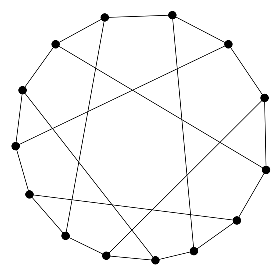
Θεωρήστε απλά, μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.

(α) Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ τα γραφήματα $K_{1,1,n}$ και $K_{2,n}$ είναι επίπεδα και υπολογίστε τον αριθμό των όψεων.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ένα ***k*-κανονικό** μεγιστοτικά επίπεδο συνεκτικό γράφημα για κάθε ακέραιο $2 \leq k \leq 5$.

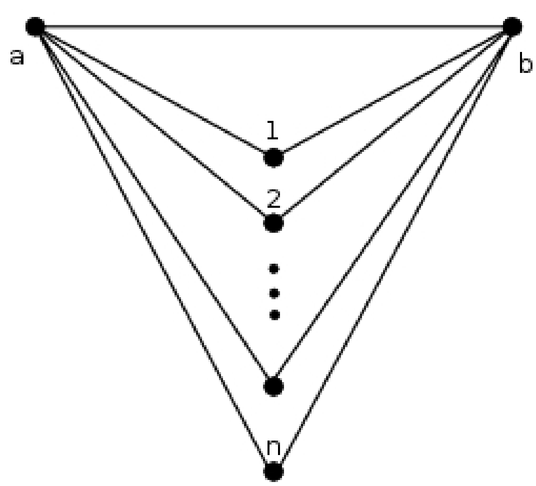
(γ) Δείξτε ότι τα παρακάτω γραφήματα δεν είναι επίπεδα.

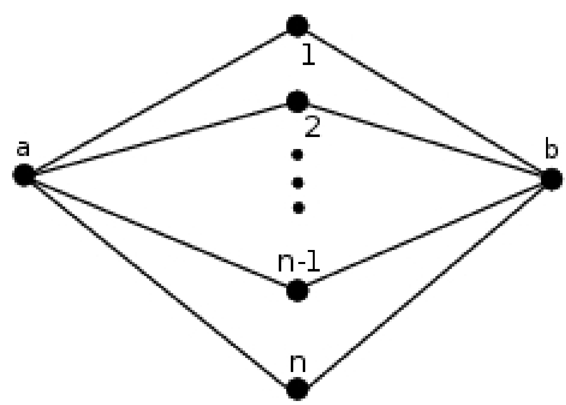




Απάντηση:

(α) Για την επιπεδότητα των $K_{1,1,n}$ και $K_{2,n}$ δίδονται οι παρακάτω αποτυπώσεις :





Έστω $\{a\}, \{b\}, \{1,2, \cdots, n\}$ τα 3 μερίδια του $K_{1,1,n}$. Για τον αριθμό των όψεων της αποτύπωσης του $K_{1,1,n}$ παρατηρούμε ότι υπάρχει μία μη φραγμένη όψη, μια όψη βαθμού 3, σχηματιζόμενη από τις ακμές $\{a, 1\}, \{b, 1\}, \{a, b\}$, και $n-1$ όψεις βαθμού 4 σχηματιζόμενες από τις ακμές

$$\{a, i\}, \{b, i\}, \{a, i+1\}, \{b, i+1\}, \text{ για } i = 1, \cdots, n-1.$$

Συνολικά, υπάρχουν $n+1$ όψεις.

Έστω $\{a, b\}, \{1,2, \cdots, n\}$ τα 2 μερίδια του $K_{2,n}$. Για τον αριθμό των όψεων της αποτύπωσης του $K_{2,n}$ παρατηρούμε ότι υπάρχει μία μη φραγμένη όψη και $n-1$ όψεις βαθμού 4 σχηματιζόμενες από τις ακμές

$$\{a, i\}, \{b, i\}, \{a, i+1\}, \{b, i+1\}, \text{ για } i = 1, \cdots, n-1.$$

Συνολικά, υπάρχουν n όψεις.

(β) Από το ερώτημα κατανόησης 7 της 5ης σειράς 2014-15 γνωρίζουμε ότι ένα μεγιστοτικά επίπεδο γράφημα G ικανοποιεί την σχέση

$$m = 3 \cdot n - 6$$

όπου $m = |E(G)|$ και $n = |V(G)|$. Επίσης, αν υπάρχει k-κανονικό (επίπεδο) γράφημα για κάποιο k, τότε το γινόμενο $n \cdot k$ ισούται με $2 \cdot m$ (αφού κάθε ακμή συμμετέχει σε 2 ακριβώς όψεις). Αντικαθιστώντας έχουμε

$$n \cdot k = 6 \cdot n - 12 \Leftrightarrow n \cdot (6-k) = 12.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει (ακέραια) λύση μόνο για $2 \leq k \leq 5$ και έχουμε

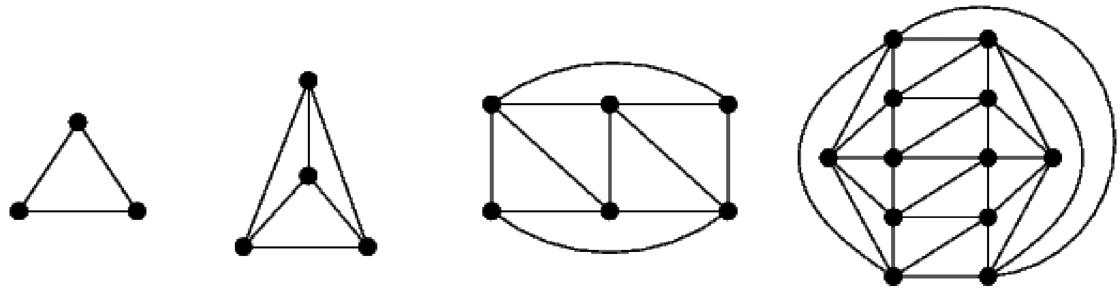
Για $k = 2$: $n = 3$ και $m = 3$

Για $k = 3$: $n = 4$ και $m = 6$

Για $k = 4$: $n = 6$ και $m = 12$

Για $k = 5$: $n = 12$ και $m = 30$.

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι αποτυπώσεις των k-κανονικών μεγιστοτικά επιπέδων γραφημάτων για $k = 2,3,4,5$.



(γ) Τα γραφήματα που δίνονται στην εκφώνηση είναι «διάσημα» και έχουν όνομα: το πρώτο είναι το γράφημα Petersen (συμβολισμός P) και το δεύτερο το γράφημα Heawood (συμβολισμός H).

Εργαζόμαστε όπως στο Θεώρημα 4.6, σελ. 143 Βούρος (βλέπε επίσης το ερώτημα κατανόησης 3 της 5ης σειράς 2014-15) ως εξής: έστω ότι υπάρχει επίπεδη αποτύπωση του P. Τότε θα ισχύει ο τύπος του Euler με $n = 10$ και $m = 15$

$$f - 15 + 10 = 2 \qquad (1)$$

όπου f ο αριθμός των όψεων. Παρατηρούμε ότι κάθε κύκλος στο P έχει μήκος τουλάχιστον 5 και άρα ο βαθμός κάθε όψης είναι τουλάχιστον ≥5. Άρα,

$$5 \cdot f \leq 2 \cdot 15 \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε $35 = 5 \cdot f \leq 30$ που είναι άτοπο. Άρα το γράφημα Petersen δεν είναι επίπεδο.

Έστω ότι υπάρχει επίπεδη αποτύπωση του H το οποίο έχει $n = 14$ κορυφές, $m = 21$ κορυφές και ελάχιστο μήκος κύκλου 6. Οι αντίστοιχες με τις σχέσεις (1) και (2) για το γράφημα H γίνονται

$$f - 21 + 14 = 2 \text{ και } 6 \cdot f \leq 2 \cdot 21$$

οι οποίες συνδυαζόμενες δίνουν $45 = 5 \cdot 9 \leq 42$ που είναι άτοπο. Άρα το γράφημα Heawood δεν είναι επίπεδο.

Άσκηση 2 (2015-16, Εργασία 5, Ερώτημα 3)

Θεωρήστε απλά, μη-κατευθυνόμενα γραφήματα. Συμβολίζουμε με $\chi(G)$ τον **χρωματικό αριθμό** του γραφήματος G, δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματίσουμε τις κορυφές του γραφήματος έτσι ώστε κάθε δύο γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα, και με $\alpha(G)$ τον **αριθμό ανεξαρτησίας**, δηλαδή το μέγιστο πλήθος κορυφών που δεν συνδέονται ανά δύο μεταξύ τους με ακμή.

(α) Εάν θέσουμε με P_n και C_n το μονοπάτι και το κύκλο n κορυφών αντίστοιχα, να υπολογίσετε τα $\alpha(P_n), \chi(P_n), \alpha(C_n), \chi(C_n)$.

(β) Δείξτε ότι για οποιοδήποτε γράφημα G με μέγιστο βαθμό $\Delta(G)$ ισχύει

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}.$$

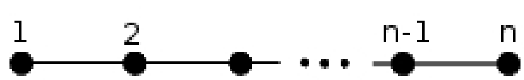
(γ) Εάν $\bar{G}$ το συμπληρωματικό γράφημα του G και *n* το πλήθος κορυφών, δείξτε τα παρακάτω:

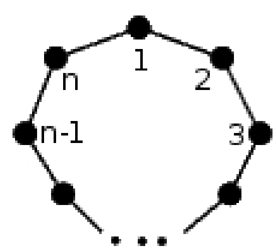
i) $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$

ii) $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$

Απάντηση:

(α) Αριθμούμε τις κορυφές του P_n και C_n με τους αριθμούς $\{1,2,\cdots,n\}$ έτσι ώστε διαδοχικοί αριθμοί να αντιστοιχούν σε γειτονικές κορυφές και επιπλέον οι κορυφές $1, n$ στο P_n (αντίστ. στο C_n) να έχουν βαθμό 1 (αντίστ. να είναι γειτονικές).





Αν $n = 2k$ άρτιος, $k \geq 1$, τότε τα σύνολα κορυφών $V_\pi = \{1,3,\cdots,2k-1\}$ και $V_\alpha = \{2,4,\cdots,2k\}$ έχουν πληθικό αριθμό k και αποτελούν, αμφότερα, σύνολα ανεξαρτησίας. Επιπλέον, τα V_π, V_α είναι τα μοναδικά σύνολα ανεξαρτησίας με k στοιχεία. Αφού είναι ξένα και $V_\pi \cup V_\alpha = V(P_n)$ είναι και μέγιστα. Άρα

$$\alpha(P_{2k}) = k = \left[\frac{2k}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

όπου [ ] συμβολίζει το ακέραιο μέρος.

Προφανώς, $\chi(P_{2k}) = 2$ για κάθε $k \geq 1$.

Αν $n = 2k + 1$ περιττός, $k \geq 1$, τότε τα σύνολα κορυφών

$$\{1,3,\cdots,2k-1,2k+1\},\ \{2,4,\cdots,2k\}$$

έχουν πληθικό αριθμό $k + 1$ και k αντίστοιχα και αποτελούν, αμφότερα, σύνολα ανεξαρτησίας. Όπως προηγουμένως έχουμε ότι το σύνολο $\{1,3,\cdots,2k-1,2k+1\}$ είναι μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας και άρα

$$\alpha(P_{2k+1}) = k + 1 = \left[\frac{(2\kappa+1)+1}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

και $\chi(P_{2k+1}) = 2$ για κάθε $k \geq 1$.

Τελικώς, $\forall n \geq 2, \alpha(P_n) = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ και $\chi(P_n) = 2$.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο ακριβώς τρόπο για το C_n έχουμε:

Αν $n = 2k$ άρτιος, $k \geq 1$, τότε τα σύνολα κορυφών $\{1,3,\cdots,2k-1\}$ και $\{2,4,\cdots,2k\}$ έχουν πληθικό αριθμό k και αποτελούν, αμφότερα, μέγιστα σύνολα ανεξαρτησίας με k στοιχεία και άρα

$$\alpha(P_{2k}) = k = \left[\frac{2k}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \text{ και } \chi(P_{2k}) = 2.$$

Αν $n = 2k + 1$ περιττός, $k \geq 1$, τότε τα σύνολα κορυφών

$$\{1,3,\cdots,2k-1\},\ \{2,4,\cdots,2k\} \text{ και } \{2k+1\}$$

είναι 3 σύνολα ανεξαρτησίας με τα τα 2 πρώτα να είναι μέγιστα. Συνεπώς,

$$\alpha(C_{2k+1}) = k = \left[\frac{2k}{2}\right] = \left[\frac{2k+1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \text{ και } \chi(C_{2k+1}) = 3.$$

Τελικώς, $\forall n \geq 2, \alpha(C_n) = \left[\frac{n}{2}\right]$ και $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, \text{αν n άρτιος} \\ 3, \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$

(β) Για την απόδειξη του υποερωτήματος αυτού θα χρειασθούμε την εξής ιδιότητα

(Ι) : $\chi(\mathrm{G}) \leq \Delta(G) + 1$, όπου $\Delta(G)$ είναι ο μέγιστος βαθμός του G.

Απόδειξη της (Ι): Χρησιμοποιούμε επαγωγή στον αριθμό n των κορυφών του γραφήματος. Για $n = 1$ έχουμε $1 \leq 0 + 1$ που ισχύει. Για $n = 2$ τα αντίστοιχα γραφήματα είναι το γράφημα που αποτελείται από 2 απομονωμένες κορυφές και το K_2. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει χρωματισμός με 1, 1+1 αντίστοιχα χρώματα.

Υποθέτουμε ότι για κάθε γράφημα H με n κορυφές $(n > 2)$, ισχύει $\chi(\mathrm{H}) \leq \Delta(H) + 1$. Θεωρούμε γράφημα G με $n + 1$ κορυφές και θα δείξουμε ότι υπάρχει νόνιμος χρωματισμός με $\Delta(G) + 1$ χρώματα. Αφαιρούμε από G μία κορυφή $v \in V(G)$. Το γράφημα G' που προκύπτει έχει n κορυφές και βαθμό $\Delta(G') \leq \Delta(G)$. Άρα, από την υπόθεση της επαγωγής, οι κορυφές του G' χρωματίζονται με το πολύ $\Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$ χρώματα. Όμως η κορυφή v συνδέεται με το πολύ $\Delta(G)$ κορυφές και άρα ακόμη και αν όλες αυτές έχουν διαφορετικό χρώμα στο G', υπάρχει διαθέσιμο ένα τουλάχιστον χρώμα από τα $\Delta(G) + 1$ που χρησιμοποιήσαμε για το χρωματισμό του G', το οποίο δεν έχει χρησιμοποιηθεί σε κανένα γείτονα της v. Άρα η v μπορεί να χρωματιστεί νόμιμα με αυτό το χρώμα.

Το ότι το γράφημα G επιδέχεται νόμιμο χρωματισμό (δηλαδή, γειτονικές κορυφές έχουν διαφορετικό χρώμα) με $\chi(\mathrm{G})$ το πλήθος χρώματα σημαίνει ότι οι κορυφές του G, δηλαδή το σύνολο $\mathrm{V}(\mathrm{G})$, διαμερίζεται σε $\chi(\mathrm{G})$ το πλήθος σύνολα ανεξαρτησίας $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \cdots, \mathrm{V}_{\chi(\mathrm{G})}$ έτσι ώστε

- $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \cdots, \mathrm{V}_{\chi(\mathrm{G})}$ ξένα ανά δύο
- $\mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{V}_{\chi(\mathrm{G})} = \mathrm{V}(\mathrm{G})$
- $\forall \mathrm{i} = 1,2, \cdots, \chi(\mathrm{G})$ κανένα ζεύγος κορυφών του V_i δεν συνδέονται με ακμή.

Από τις δύο πρώτες ιδιότητες έχουμε

$$|\mathrm{V}_1| + |\mathrm{V}_2| + \cdots + \left|\mathrm{V}_{\chi(\mathrm{G})}\right| = |\mathrm{V}(\mathrm{G})| = \mathrm{n}.$$

Εξ ορισμού του αριθμού ανεξαρτησίας $\alpha(G)$, κάθε σύνολο V_i έχει το πολύ $\alpha(G)$ στοιχεία, δηλαδή $|\mathrm{V}_i| \leq \alpha(G), \forall \mathrm{i} = 1,2, \cdots, \chi(\mathrm{G})$. Συνεπώς,

$$\mathrm{n} = |\mathrm{V}_1| + |\mathrm{V}_2| + \cdots + \left|\mathrm{V}_{\chi(\mathrm{G})}\right| \leq \alpha(G)\chi(\mathrm{G}).$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα με την ιδιότητα (Ι) έχουμε το ζητούμενο

$$\mathrm{n} \leq \alpha(G)\chi(\mathrm{G}) \leq \alpha(G)(\Delta(G) + 1).$$

(γ) Έστω U μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας του G. Τότε από τον ορισμό του αριθμού ανεξαρτησίας ισχύει $|U| = \alpha(G)$.

(i) Χρωματίζουμε τις κορυφές του U με ένα (κοινό) χρώμα. Τις υπόλοιπες κορυφές, δηλαδή τις κορυφές στο $V(G)\setminus U$, τις χρωματίζουμε με $n-\alpha(G)$ χρώματα (1 χρώμα για κάθε κορυφή διαφορετικό από το κοινό χρώμα των κορυφών U). Έτσι έχουμε χρωματίσει νόμιμα όλες τις κορυφές του G χρησιμοποιώντας $n-\alpha(G)+1$ χρώματα. Άρα $\chi(\mathrm{G}) \leq n-\alpha(G)+1$.

(ii) Τα στοιχεία του συνόλου U καθορίζουν ένα πλήρες υπογράφημα στο $\bar{G}$ με $|U|=\alpha(G)$ κορυφές. Άρα το πλήρες γράφημα $K_{\alpha(G)}$ είναι υπογράφημα του $\bar{G}$ και άρα $\chi(\bar{G}\,) \geq \chi\left(K_{\alpha(G)}\right)=\alpha(G)$. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\mathrm{n} \leq \alpha(G)\chi(\mathrm{G})$ από το προηγούμενο υποερώτημα έχουμε

$$\chi(\mathrm{G})\chi(\bar{G}\,) \geq \chi(\mathrm{G})\alpha(G) \geq \frac{n}{\alpha(\mathrm{G})}\alpha(G)=n.$$

Άσκηση 3 (2011-12, Εργασία 5, Ερώτημα 2)

Σε ένα απλό, μη-κατευθυνόμενο γράφημα, δίνονται δύο κορυφές s,t και ένα μη-αρνητικό μήκος για κάθε ακμή.

(α) Προτείνετε έναν αλγόριθμο, ο οποίος υπολογίζει το δεύτερο συντομότερο s-t μονοπάτι, και αποδείξτε την ορθότητά του.

(β) Προτείνετε έναν αλγόριθμο, ο οποίος δέχεται ως είσοδο τις τελικές ετικέτες του αλγορίθμου του Dijkstra και παράγει ως έξοδο ένα συντομότερο s-t μονοπάτι. Επίσης, αποδείξτε την ορθότητά του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

[2.α]

Ας θεωρήσουμε ότι διαθέτουμε ήδη κάποιον αλγόριθμο (πχ, μια υλοποίηση του Dijkstra), που δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα G=(V,E), ένα ζεύγος κορυφών s,t$\in$V, και μια συνάρτηση μη αρνητικών μηκών για τις ακμές δ : E $\rightarrow$ $\mathbf{R}_+$, κι επιστρέφει τόσο τις (τελικές) ετικέτες d(u) αποστάσεων από τη ρίζα s, όσο και τον δείκτη parent(u) προς την κορυφή – γονιό του u κατά μήκος του συντομότερου μονοπατιού από την s, για όλες τις κορυφές που είναι προσβάσιμες από την s, μέχρι και την κορυφή t (στο σημείο αυτό ο κλασσικός Dijkstra τερματίζει).

Αναζητάμε το 2ο συντομότερο μονοπάτι στο G. Δηλαδή, εξαιρουμένου του συντομότερου st-μονοπατιού P1 (πχ, που εντοπίζει ο Dijkstra) επιθυμούμε να βρούμε το καλύτερο st-μονοπάτι P2 ≠ P1 στο γράφημα. Σημειώνεται ότι το P2 δεν είναι απαραίτητο να έχει μήκος αυστηρά μικρότερο του μήκους του P1. Ενδέχεται τα P1 και P2 να έχουν το ίδιο μήκος, όταν υπάρχουν περισσότερα από ένα συντομότερα st-μονοπάτια στο G.

Η λύση που εύκολα μπορεί κάποιος να υιοθετήσει για τον υπολογισμό του 2ου συντομότερου st-μονοπατιού στο G, δίνεται σε μορφή ψευδοκώδικα στο ακόλουθο σχήμα. Η βασική φιλοσοφία του αλγορίθμου είναι, αφού εντοπίσει ένα ελάχιστο st-μονοπάτι P1, να αφαιρεί μία-προς-μία κάθε ακμή e του P1 και στη συνέχεια να υπολογίσει ένα ελάχιστο st-μονοπάτι στο γράφημα G – e που απομένει. Πριν ξεκινήσουμε όμως αυτή τη διαδικασία, πρέπει να ανακατασκευάσουμε το συντομότερο st-μονοπάτι P1 που υπολογίζει ο Dijkstra, γιατί ο συγκεκριμένος αλγόριθμος επιστρέφει μόνο τις τελικές ετικέτες και (ενδεχομένως) το γονιό κάθε κορυφής στο παραγόμενο δένδρο συντομότερων μονοπατιών από το s. Αυτό ακριβώς κάνει ο βρόχος (3) στον ψευδοκώδικα. Στη συνέχεια, υπολογίζεται κάθε φορά το συντομότερο st-μονοπάτι (έστω P2) στο G – e, για κάθε ακμή e του P1. Το P2 συγκρίνεται (ως προς το μήκος του) με το καλύτερο 2ο μονοπάτι που έχουμε εντοπίσει μέχρι τώρα, κι αν είναι συντομότερο τότε φυλάσσεται αυτό ως η καλύτερη λύση μέχρι στιγμής. Για την ακρίβεια, φυλάσσεται το σύνολο ακμών 2nd_shortest_path που απαρτίζουν το 2ο καλύτερο st-μονοπάτι μέχρι τώρα, ενώ το μήκος του φυλάσσεται στη μεταβλητή 2nd_dist(t). Όλη αυτή η διαδικασία αναζήτησης του 2ου συντομότερου st-μονοπατιού γίνεται στον βρόχο (5) του ψευδοκώδικα.

1. [parent, d] = Dijkstra(G,s,t,δ);

2. u =t; shortest_path = {};

3. **WHILE** u ≠ s **DO** // προσδιορισμός συντομότερου st-μονοπατιού

3.1 shortest_path = { (parent(u),u) } U shortest_path;

3.2 u = parent(u);

3.3 **END WHILE**

4. 2nd_dist(t) = ∞; 2nd_shortest_path = {};

5. **FORALL** e ∈ shortest_path **DO**

```
5.1         [2nd_path , 2nd_d] = Dijkstra(G–e , s , t , δ) // υπολογισμός ελάχιστου st-μονοπατιού στο G – e
5.2         IF 2nd_d(t) < 2nd_dist(t)          // βρέθηκε καλύτερο st-μονοπάτι
5.3         THEN { 2nd_dist(t) = 2nd_d ; 2nd_shortest_path = 2nd_path; }
5.4     END FORALL
6.      RETURN(2nd_shortest_path,2nd_dist);
```

<u>Ορθότητα.</u> Η ορθότητα του παραπάνω αλγορίθμου είναι προφανής από το γεγονός ότι το 2^{ο} συντομότερο μονοπάτι θα πρέπει να διαφέρει από το συντομότερο st-μονοπάτι P1 του G τουλάχιστον σε μια ακμή του. Ο αλγόριθμος κάνει εξαντλητική αναζήτηση αφαιρώντας διαδοχικά όλες (μία προς μία) τις ακμές του P1 και αναζητώντας συντομότερο st-μονοπάτι στο εκάστοτε γράφημα που απομένει. Το καλύτερο από αυτά τα εναλλακτικά μονοπάτια επιστρέφεται ως το 2ο συντομότερο st-μονοπάτι του G.

[2.β]

Για την ανακατασκευή ενός συντομότερου st-μονοπατιού από τις (τελικές) τιμές ετικετών που παράγει ο Dijkstra, εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα των **βέλτιστων επιμέρους λύσεων** που ισχύει για τα συντομότερα μονοπάτια σε γραφήματα με μη αρνητικά μήκη στις ακμές, καθώς και την ορθότητα του ίδιου του Dijkstra. Το σκεπτικό είναι το εξής: Ξεκινώντας από τον προορισμό t, επιλέγουμε κάθε φορά εκείνη την ακμή που οδηγεί στον τρέχοντα κόμβο v, από μια κορυφή u που εξασφαλίζει ότι d(v) = d(u) + δ(uv). Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν φτάσουμε στην αφετηρία s. Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου είναι ο εξής:

<u>ΕΙΣΟΔΟΣ:</u> G = (V,E) ; s,t∈V ; **d** = (d(v) = dist(s,v))$_{v\in V}$; δ : E → $\mathbf{R}_+$

<u>ΕΞΟΔΟΣ:</u> Το σύνολο ακμών που απαρτίζουν ένα συντομότερο st-μονοπάτι.

<u>ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ:</u>

```
1.      u = t; shortest_path = {};
2.      WHILE u ≠ s DO                 // προσδιορισμός συντομότερου st-μονοπατιού, ρ*
2.1         FORALL vu ∈ E DO           // αναζήτηση ακμής από γονιό προς u στο ρ*
```

```
2.1.1            IF d(u) = d(v) + δ(vu)
2.1.2            THEN { shortest_path = { vu } U shortest_path; BREAK; }
2.1.3        END FORALL
2.2      END WHILE
```

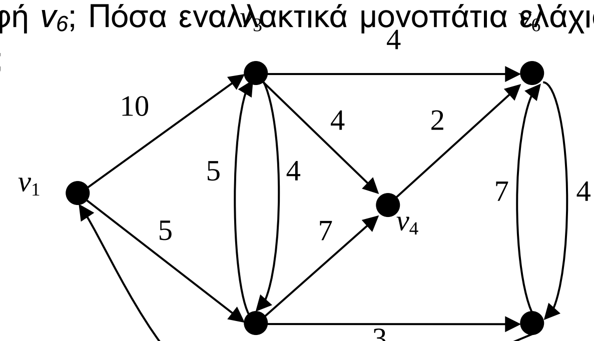
<u>Ορθότητα</u>: Κατά μήκος του συντομότερου st-μονοπατιού p*, προφανώς ισχύει ότι για κάθε κόμβο $u \in V$(p*), dist(s,u) = dist(s,parent(u)) + δ(parent(u),u), αφού και το πρόθεμα του ρ* από την s μέχρι την parent(u) είναι συντομότερο μονοπάτι μέχρι την parent(u) [Βούρος, Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.13].

Από την άλλη πλευρά, ας υποθέσουμε ότι για μια ακμή vu ισχύει ότι dist(s,u) = dist(s,v) + δ(vu). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει συντομότερο st-μονοπάτι που περιλαμβάνει τη vu. Κατ' αρχήν γνωρίζουμε (από τον τρόπο ορισμού των συντομότερων αποστάσεων dist(s,v) κορυφών v από τη ρίζα s) ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα sv-μονοπάτι ρ (ελάχιστου στο γράφημα) μήκους δ(ρ) = dist(s,v). Το μονοπάτι ρ' = ρ U {vu} είναι προφανώς ένα su-μονοπάτι.

Αν υπήρχε αυστηρά συντομότερο su-μονοπάτι από το ρ', έστω σ, τότε θα ίσχυε ότι δ(σ) < δ(ρ') = dist(s,u) = dist(s,v) + δ(vu) $\Rightarrow$ dist(s,v) > δ(σ) – δ(vu) ≥ δ(σ), λόγω της μη αρνητικότητας της συνάρτησης μηκών δ. Δηλαδή, καταλήξαμε ότι υπάρχει (πραγματικό) sv-μονοπάτι σ, μήκους δ(σ) αυστηρά μικρότερου από dist(s,v). Αυτό όμως δε μπορεί να συμβαίνει, αφού το d(v) = dist(s,v) είναι η τελική ετικέτα που υπολογίστηκε από τον Dijkstra για τον κόμβο v, και γνωρίζουμε ήδη ότι εκφράζει το μήκος του ελάχιστου sv-μονοπατιού στο γράφημα.

Άσκηση 4 (2008-2009, Εργασία 5, Ερώτημα 1)

α) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra, να προσδιορίσετε το ελάχιστο μήκος ενός μονοπατιού **από την κορυφή v_1 προς την κορυφή v_6**, στο γράφημα G που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Να παρουσιάσετε αναλυτικά την εκτέλεση του αλγορίθμου, βήμα προς βήμα, καταγράφοντας τις ετικέτες των κορυφών σε κάθε βήμα. Ποιο είναι το μονοπάτι ελάχιστου μήκους από την κορυφή v_1 προς την κορυφή v_6; Πόσα εναλλακτικά μονοπάτια ελάχιστου μήκους παρατηρείτε ότι υπάρχουν;



β) Σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν πολλαπλά διαφορετικά μονοπάτια ελάχιστου μήκους μεταξύ δύο κορυφών ενός γραφήματος με θετικά βάρη, το βέλτιστο από αυτά θεωρείται συχνά το μονοπάτι με τις λιγότερες ακμές. Για παράδειγμα, αν οι κορυφές ενός γραφήματος αναπαριστούν πόλεις και τα βάρη των ακμών αναπαριστούν το κόστος πτήσης μεταξύ των αντίστοιχων πόλεων, η βέλτιστη διαδρομή μεταξύ δύο πόλεων είναι αυτή με το ελάχιστο συνολικό κόστος και τις λιγότερες ενδιάμεσες στάσεις (σε περίπτωση πολλαπλών διαδρομών με το ελάχιστο κόστος). Να τροποποιήσετε τον αλγόριθμο του Dijkstra ώστε να υπολογίζει 2 ετικέτες για κάθε κορυφή ενός γραφήματος με θετικά βάρη: το ελάχιστο μήκος μονοπατιού από την κορυφή εκκίνησης και το ελάχιστο πλήθος ακμών σε ένα τέτοιο μονοπάτι.

γ) Έστω γράφημα *G(V,E)* με θετικά βάρη στις ακμές του $w : E \rightarrow \mathbf{R}_{+}$. Να εξεταστεί αν ο αλγόριθμος του Dijkstra επιστρέφει ένα μέγιστου μήκους μονοπάτι στο ίδιο γράφημα *G*, όμως με την αντίστροφη συνάρτηση βαρών $w' = 1/w$ στις ακμές του (δηλαδή, $\forall e \in E$, $w(e) = 1/w(e)$). Αιτιολογήστε την απάντησή σας είτε αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό ή δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

δ) Θεωρήστε ένα απλό κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο οι μόνες ακμές με αρνητικά βάρη είναι αυτές που ξεκινούν από την κορυφή εκκίνησης (δηλαδή όλες οι υπόλοιπες ακμές έχουν θετικά βάρη). Μπορεί ο αλγόριθμος του Dijkstra να υπολογίσει σωστά το ελάχιστο μήκος μονοπατιού μεταξύ της κορυφή εκκίνησης και οποιασδήποτε άλλης κορυφής του γραφήματος; Αποδείξτε την απάντησή σας.

Απάντηση:

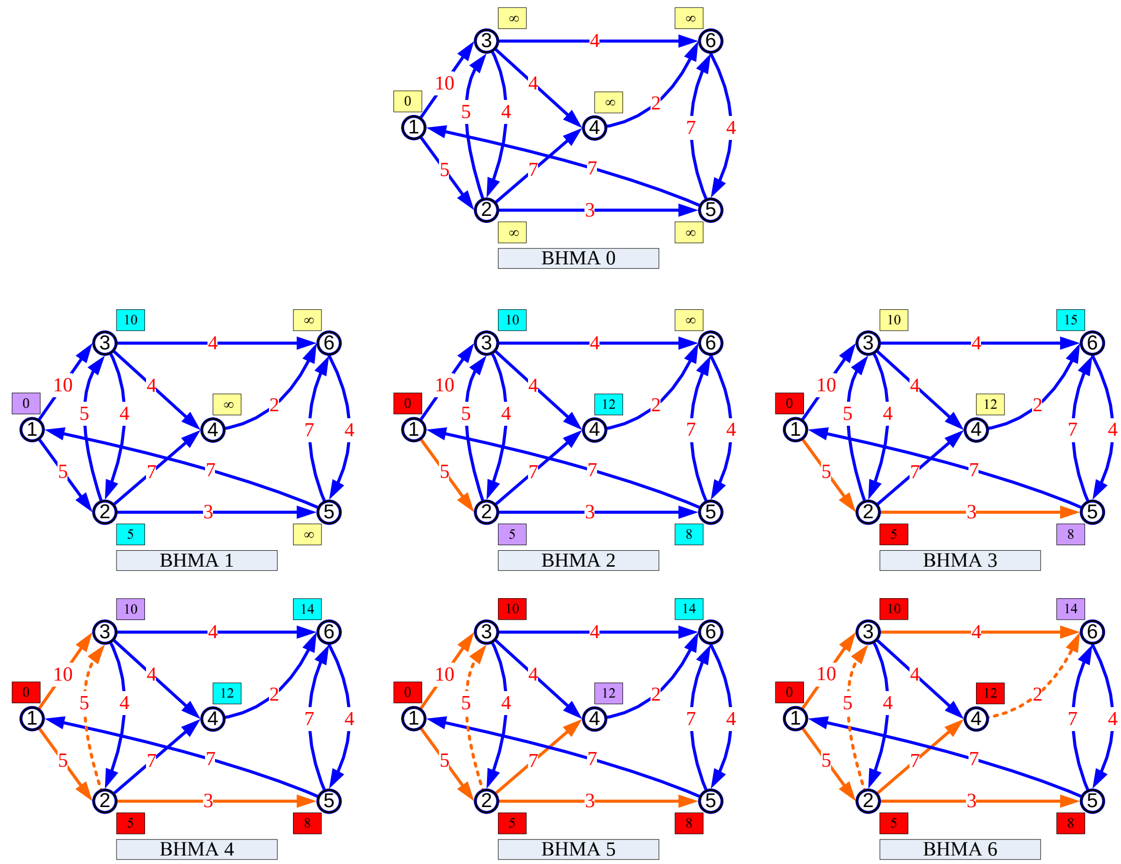
[1.α]

Συμβολίζουμε με $w : E \rightarrow \mathbf{R}_{+}$ τη συνάρτηση βαρών των ακμών στο γράφημα. Επίσης, $L : V \rightarrow \mathbf{R}_{+}$ είναι η συνάρτηση που μας δίνει τις (αρχικά προσωρινές, τελικά μονιμοποιημένες) ετικέτες των κορυφών, κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου του Dijkstra. Ακολουθούν τα βήματα εκτέλεσης του Dijkstra, για την εύρεση των συντομότερων (v1,v6)-μονοπατιών στο γράφημα της εκφώνησης. Κάθε βήμα που εμφανίζεται στο Σχήμα 1, αντιπροσωπεύει την κατάσταση του αλγορίθμου στο τέλος της τρέχουσας επανάληψης του κύριου βρόχου του Dijkstra.

Με την εκκίνηση του αλγορίθμου (βήμα 0 στο Σχήμα 1) γίνεται η *αρχικοποίηση των παραμέτρων*. Πιο συγκεκριμένα, όλες οι ετικέτες των κόμβων αρχικοποιούνται στην τιμή ∞ (άπειρο), εκτός από την ετικέτα της κορυφής v1, την οποία έχουμε επιλέξει ως αφετηρία του μονοπατιού που θέλουμε να κατασκευάσουμε, και η τιμή της ετικέτας της αρχικοποιείται στο μηδέν. Όλες οι ετικέτες θεωρούνται καταρχήν προσωρινές, και για το λόγο αυτό υποδεικνύονται (στο βήμα 0) με κίτρινο χρώμα. Στη συνέχεια, σε κάθε επανάληψη του κύριου βρόχου του αλγορίθμου του Dijkstra, επιλέγεται η κορυφή Y με τη μικρότερη τιμή ΠΡΟΣΩΡΙΝΗΣ ετικέτας, για μονιμοποίηση της ετικέτας της. Η συγκεκριμένη κορυφή Y θα υποδεικνύεται στο εκάστοτε βήμα του Σχήμα 1 με το μωβ χρώμα της ετικέτας της.

Η Y αφαιρείται τότε από το σύνολο T των κορυφών με προσωρινές ετικέτες, και είναι πλέον γνωστή η απόσταση της συντομότερης διαδρομής της από τη ρίζα v1 (όσο ακριβώς υποδεικνύει εκείνη τη στιγμή η ετικέτα της) : dist(v1,Y) = L(Y). Οι ακμές που χρησιμοποιούνται από κάποιο ελάχιστου μήκους (v1,Y)-μονοπάτι είναι τότε εύκολο να βρεθούν, ακριβώς τη στιγμή της μονιμοποίησης της Y: Καθεμιά από αυτές θα πρέπει να συνδέει κάποια κορυφή Z με ήδη μόνιμη (κόκκινη) ετικέτα με την Y, και επίσης να ισχύει ότι L(Z) + w(Z,Y) = L(Y).

Στην πραγματικότητα, επειδή επιθυμούμε να επιστρέψουμε τελικά όχι μόνο αποστάσεις κορυφών από την v1, αλλά ΚΑΙ τα συντομότερα μονοπάτια σύνδεσης με την v1, κάθε φορά που μονιμοποιούμε την ετικέτα μιας κορυφής Y, θα υποδεικνύουμε με πορτοκαλί χρώμα όλες τις ακμές που συνδέουν την Y με το υπάρχον δένδρο συντομότερων διαδρομών από την v1, εξασφαλίζοντας και για την Y ελάχιστου μήκους μονοπάτι από την v1. Εμφανίζουμε ως συμπαγή μια οποιαδήποτε από αυτές τις ακμές, ενώ ως διακεκομμένες εμφανίζουμε όλες τις υπόλοιπες ακμές. Το κάνουμε αυτό ώστε το σύνολο ΟΛΩΝ των πορτοκαλί ακμών να μας παρέχει ένα ΔΕΝΔΡΟ ελαχίστων διαδρομών από την v1, ενώ το σύνολο των ΣΥΜΠΑΓΩΝ πορτοκαλί ακμών να μας δίνει όλα τα ελάχιστου μήκους μονοπάτια από την v1 προς άλλες κορυφές.



Σχήμα 1. *Εκτέλεση του Αλγορίθμου του Dijkstra στο γράφημα της εκφώνησης [1.α]. Με* **κίτρινο χρώμα** *απεικονίζονται οι προσωρινές ετικέτες των κορυφών που δεν εξετάζονται για μεταβολή. Με* **γαλάζιο χρώμα** *απεικονίζονται οι προσωρινές ετικέτες των κορυφών που πρέπει να εξεταστούν για ενδεχόμενη μεταβολή της τιμής τους. Με* **μωβ χρώμα** *απεικονίζεται η ετικέτα της εκάστοτε κορυφής που επιλέγεται από τον βασικό βρόχο του αλγορίθμου για μονιμοποίηση. Με* **κόκκινο χρώμα** *απεικονίζονται οι ήδη μόνιμες ετικέτες κορυφών. Η εκάστοτε ακμή που συνδέει μια καινούργια κορυφή (***μωβ χρώματος***) στο υπάρχον δένδρο ελαχίστων διαδρομών (μέσω της μονιμοποίησης της ετικέτας της) υποδεικνύεται με* **συμπαγές πορτοκαλί χρώμα***. Με* **διακεκομμένο πορτοκαλί χρώμα** *υποδεικνύονται οι εναλλακτικές ακμές που ενσωματώνουν ΜΕ ΤΟ ΙΔΙΟ ΜΗΚΟΣ ΜΟΝΟΠΑΤΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗ ΡΙΖΑ την υπό μονιμοποίηση (***μωβ χρώματος***) κορυφή με το ήδη υπάρχον δένδρο ελαχίστων διαδρομών. Πχ, στο βήμα 4, η κορυφή v3 μπορεί να ενσωματωθεί στο υπάρχον δένδρο τόσο μέσω της ακμής (1,3), όσο και μέσω της ακμής (2,3). Και οι δυο αυτές περιπτώσεις εξασφαλίζουν ένα ελάχιστου μήκους (10) (1,3)-μονοπάτι. Αντίστοιχα, η κορυφή v6 ενσωματώνεται στο δένδρο ελαχίστων διαδρομών στο βήμα 6 του αλγορίθμου, θα μπορούσε να ενσωματωθεί στο υπάρχον δένδρο ελαχίστων διαδρομών τόσο μέσω της ακμής (3,6), όσο και μέσω της ακμής (4,6). Και οι δυο αυτές επιλογές εξασφαλίζουν ελάχιστου μήκους (1,6)-μονοπάτι (14).*

Αντίθετα, η ακμή (5,6) εξασφαλίζει ένα μήκους 15 (1,6)-μονοπάτι, και γι' αυτό απορρίπτεται.

Ας δούμε όμως πώς θα εκτελεστούν οι επαναλήψεις του κύριου βρόχου του αλγορίθμου: Στην 1^η επανάληψη (βήμα 1 του Σχήμα 1) ο αλγόριθμος επιλέγει ως κορυφή με τη μικρότερη τιμή ετικέτας την κορυφή v1 (γι' αυτό και η ετικέτα της εμφανίζεται με μωβ χρώμα). Η κορυφή αυτή αφαιρείται από το σύνολο T των κορυφών με προσωρινές ετικέτες, και είναι πλέον γνωστή η απόσταση της συντομότερης διαδρομής της από τη ρίζα v1 (όσο ακριβώς υποδεικνύει η ετικέτα της). Στην περίπτωση της v1, δεν απαιτείται καμιά ακμή να τη συνδέσει με τον εαυτό της. Επειδή στο εξής η τιμή της ετικέτας αυτής γίνεται μόνιμη, σε όλα τα επόμενα βήματα η κορυφή v1 θα έχει ακριβώς την ίδια τιμή ετικέτας, και θα εμφανίζεται πλέον με κόκκινο χρώμα.

Επίσης, οι κορυφές της έξω-γειτονιάς {v2,v3} της v1, οι οποίες έχουν ακόμα προσωρινές ετικέτες, πρέπει να εξεταστούν για ενδεχόμενη αλλαγή της τιμής της ετικέτας τους. Στο βήμα 1 οι κορυφές αυτές υποδεικνύονται από το μπλε χρώμα των ετικετών τους. Οι ετικέτες τους ανανεώνονται ως εξής:

- $L(v2) = \min \{ L(v2), L(v1) + w(v1, v2) \} = \min\{ \infty, 0+5 \} = 5$,
- $L(v3) = \min\{ L(v3), L(v1) + w(v1, v3) \} = \min\{ \infty, 0+10 \} = 10$.

Όλες οι υπόλοιπες κορυφές με προσωρινές ετικέτες (κίτρινου χρώματος στο βήμα 1) διατηρούν τις ετικέτες τους αναλλοίωτες. Το βήμα 1 του Σχήμα 1 δείχνει τις τελικές τιμές των ετικετών, αμέσως μετά την ολοκλήρωση και της δεύτερης εκτέλεσης του βασικού βρόχου του αλγορίθμου. Παρατηρείστε ότι οι v2, v3 συνεχίζουν να έχουν προσωρινές ετικέτες.

Στην 2^η επανάληψη του βρόχου, επιλέγεται για μονιμοποίηση η κορυφή με τη μικρότερη τιμή προσωρινής ετικέτας, δηλαδή, η v2. Η απόσταση λοιπόν της v2 από την v1 είναι dist(v1,v2) = L(v2) = 5. Επίσης, η ακμή που συνδέει την v2 με το υπάρχον δένδρο ελάχιστων διαδρομών, εξασφαλίζοντάς της μάλιστα ένα ελάχιστου μήκους (v1,v2)-μονοπάτι, είναι η (v1,v2), η οποία χρωματίζεται με πορτοκαλί χρώμα (συμπαγές, γιατί είναι μοναδική). Στη συνέχεια (εντός του ίδιου βρόχου) ελέγχονται για πιθανή ενημέρωση οι προσωρινές ετικέτες των κορυφών {v3,v4,v5}:

- $L(v3) = \min\{ L(v3), L(v2) + w(v2, v3) \} = \min\{ 10, 5+5 \} = 10$,
- $L(v4) = \min \{ L(v4), L(v2) + w(v2, v4) \} = \min\{ \infty, 5+7 \} = 12$,
- $L(v5) = \min \{ L(v5), L(v2) + w(v2, v5) \} = \min\{ \infty, 5+3 \} = 8$.

Με το ίδιο σκεπτικό επαναλαμβάνουμε τον κύριο βρόχο του αλγορίθμου του Dijkstra, μέχρι τελικά να μονιμοποιηθεί και η ετικέτα του κόμβου – προορισμού v6, στο βήμα 6 της εκτέλεσης του αλγορίθμου.

Αξίζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι στα βήματα 4 και 6, όταν μονιμοποιούνται οι ετικέτες των κορυφών v3 και v6 αντίστοιχα:

- Για την v3 (στο βήμα 3), τόσο η ακμή (1,3) όσο και η ακμή (2,3) εξασφαλίζουν ελάχιστου μήκους (v1,v3)-μονοπάτι, και γι' αυτό σημειώνονται και οι δυο αυτές ακμές με πορτοκαλί χρώμα. Αυθαίρετα θεωρούμε ότι μια από αυτές ανήκει στο δένδρο ελαχίστων διαδρομών, και τη σημειώνουμε ως συμπαγή ακμή. Η άλλη, που παρέχει κάποιο εναλλακτικό τρόπο πρόσβασης της v3 με ελάχιστο κόστος, σημειώνεται ως διακεκομμένη ακμή.
- Για την v6 (στο βήμα 6), από τις 3 εισερχόμενες ακμές σε αυτήν, μόνο οι ακμές (3,6) και (4,6) εξασφαλίζουν πρόσβαση από την v1 στην v6 με συνολικό κόστος 14. Η ακμή (5,6) εξασφαλίζει πρόσβαση με συνολικό κόστος 15. Κατά συνέπεια, χρωματίζουμε τις δυο πρώτες με πορτοκαλί χρώμα (αφού συμμετέχει η καθεμία τους σε τουλάχιστον ένα ελάχιστου μήκους (v1,v6)-μονοπάτι) και αφήνουμε εκτός της (v5,v6).

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται ένας εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης της εκτέλεσης του αλγορίθμου, όπου εμφανίζονται συγκεντρωτικά οι αλλαγές των ετικετών των κορυφών του γραφήματος, στο τέλος κάθε βήματος. Κάθε κελί αντιστοιχεί σε μια κορυφή και σε μια συγκεκριμένη επανάληψη του κύριου βρόχου. Το ζεύγος (X,B) που αποθηκεύεται σε ένα κελί που αντιστοιχεί στην κορυφή A και στο βήμα K, αναπαριστά την ΤΡΕΧΟΥΣΑ τιμή X = L(A) της ετικέτας της A στο τέλος του βήματος K, και το υποσύνολο κορυφών-«προγόνων» B = parents(A) μέσω των οποίων (προς το παρόν) η κορυφή A συνδέεται στη ρίζα v_1, με κόστος X. Ονομάζουμε τις κορυφές του B (προσωρινούς μέχρι τη μονιμοποίηση της ετικέτας) **προγόνους** της A. Ο χρωματισμός των κελιών είναι αντίστοιχος με το χρωματισμό των ετικετών στο Σχήμα 1.

	v1	**v2**	**v3**	**v4**	**v5**	**v6**
Βήμα 0	(0, ∅)	(∞,∅)	(∞,∅)	(∞,∅)	(∞,∅)	(∞,∅)
Βήμα 1	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1})	(∞,∅)	(∞,∅)	(∞,∅)
Βήμα 2	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1,2})	(12,{2})	(8,{2})	(∞,∅)
Βήμα 3	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1,2})	(12,{2})	(8,{2})	(15,{5})

Βήμα 4	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1,2})	(12,{2})	(8,{2})	(14,{3})
Βήμα 5	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1,2})	(12,{2})	(8,{2})	(14,{3,4})
Βήμα 6	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1,2})	(12,{2})	(8,{2})	(14,{3,4})

Αξίζει να σημειώσει κανείς την αλλαγή της ετικέτας του v6 στο τέλος του βήματος 4, από 15 (μέσω της v5) σε 14 (μέσω της v3), καθώς επίσης και την προσθήκη του επιπλέον «προγόνου» v2 της v3 στο τέλος του βήματος 2 (αφού και η v2 προσφέρει στη v3 ίδιας αξίας (v1,v3)-μονοπάτι με την v1), και τέλος την προσθήκη του επιπλέον «προγόνου» v4 της v6 στο τέλος του βήματος 5, καθώς η v4 προσφέρει ίδιας αξίας μονοπάτι στην v6 με το (ελάχιστου μήκους μέχρι τώρα) μονοπάτι που προσφέρει σε αυτήν η v3.

[1.β]

Να τροποποιήσετε τον αλγόριθμο του Dijkstra ώστε να υπολογίζει 2 ετικέτες για κάθε κορυφή ενός γραφήματος με θετικά βάρη: το ελάχιστο μήκος μονοπατιού από την κορυφή εκκίνησης και το ελάχιστο πλήθος ακμών σε ένα τέτοιο μονοπάτι.

Συμβολίζουμε με $H : V \rightarrow \mathbf{N}$ τη συνάρτηση που υποδεικνύει το πλήθος ακμών που απαρτίζουν το καλύτερο (μέχρι στιγμής) (v1,Y)-μονοπάτι που έχουμε εντοπίσει για την κορυφή Y του γραφήματος. Κατά την εκτέλεση του Dijkstra, μαζί με την ενημέρωση των προσωρινών ετικετών L(Y), για το καλύτερο μέχρι στιγμής μονοπάτι προς την Y, ενημερώνουμε και την ετικέτα H(Y) με το ελάχιστο πλήθος ακμών, μεταξύ των (v1,Y)-μονοπατιών που έχουμε μέχρι τώρα εντοπίσει. Η ενημέρωση του H(Y), εξετάζεται μόνο στην περίπτωση που η υπό μονιμοποίηση κορυφή X προσφέρει στην Y ένα ελάχιστου μήκους μονοπάτι, δηλαδή, μόνο όταν $L(X) + w(X,Y) \leq L(Y)$. Προσέξτε ότι το H(Y) (φυσικά) ενημερώνεται κάθε φορά που βρίσκουμε ΚΑΛΥΤΕΡΟ μονοπάτι προς την Y, αλλά πρέπει να εξεταστεί ΚΑΙ για τις περιπτώσεις που βρίσκουμε ένα εξίσου καλό μονοπάτι με αυτό που ήδη διαθέτουμε. Σε αυτή την περίπτωση συγκρίνουμε το πλήθος ακμών H(Y) του καλύτερου (μεταξύ των ήδη εντοπισμένων) μονοπατιού προς το Y, με το πλήθος ακμών του καινούργιου μονοπατιού προς την Y μέσω της X. Άρα, για τις γαλάζιες ετικέτες Y σε κάθε επανάληψη του βρόχου (όπου έστω ότι μονιμοποιείται η X), κάνουμε συνολικά τον εξής έλεγχο:

IF (L(X) + w(X, Y) < L(Y)) *// εύρεση αυστηρά συντομότερου μονοπατιού?*

THEN { parents(Y) = {X}; H(Y) = H(X)+1; L(Y) = L(X) + w(X, Y); }

```
    ELSE    IF      ( L(X) + w(X, Y)  == L(Y) )                    // εύρεση εξίσου σύντομου μονοπατιού?
                    THEN IF     ( H(Y) > H(X)+1 )                  // …με μικρότερο πλήθος  ακμών?
                                THEN { parents(Y) = {X}; H(Y) = H(X)+1; }
                                ELSE IF     ( H(Y) == H(X)+1 )     // …με ίδιο πλήθος ακμών?
                                        THEN { parents(Y) = parents(Y)∪{X}; }
```

Ας δούμε όμως πώς θα διαμορφωνόταν η εκτέλεση του (παραλλαγμένου πλέον) αλγορίθμου του Dijkstra αυτή τη φορά, για το στιγμιότυπο του γραφήματος του [1.α]:

	v1	**v2**	**v3**	**v4**	**v5**	**v6**
Βήμα 0	(0, ∅)	(∞,∅)	(∞,∅)	(∞,∅)	(∞,∅)	(∞,∅)
Βήμα 1	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1})	(∞,∅)	(∞,∅)	(∞,∅)
Βήμα 2	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1})	(12,{2})	(8,{2})	(∞,∅)
Βήμα 3	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1})	(12,{2})	(8,{2})	(15,{5})
Βήμα 4	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1})	(12,{2})	(8,{2})	(14,{3})
Βήμα 5	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1})	(12,{2})	(8,{2})	(14,{3})
Βήμα 6	(0, ∅)	(5,{1})	(10,{1})	(12,{2})	(8,{2})	(14,{3})

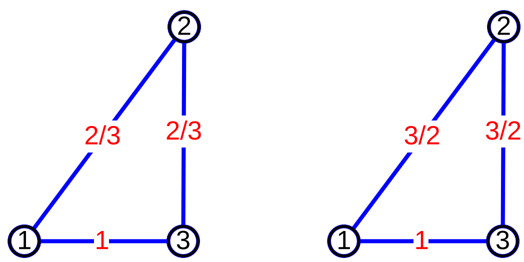
Βλέπουμε ότι η διαφορά (σε σχέση με την προηγούμενη εκτέλεση του αλγόριθμου) εδώ πλέον είναι ότι:

- Στο τέλος του βήματος 2, όταν ενημερώνεται η ετικέτα της v3, τα δυο ελάχιστου μήκους μονοπάτια έχουν διαφορετικό πλήθος ακμών, και γι' αυτό στους προγόνους κρατάμε μόνο την απευθείας σύνδεση με την v1. Έτσι, όταν στο βήμα 4 μονιμοποιείται η ετικέτα της v3, μοναδικό ελάχιστου μήκους μονοπάτι, που επιπλέον έχει και το ελάχιστο πλήθος ακμών (μεταξύ των ελαχίστου μήκους (v1,v3)-μονοπατιών), είναι το <v1, v1v3, v3>.

- Στο τέλος του βήματος 5 (όπου μονιμοποιείται η κορυφή v4), αν και η συγκεκριμένη κορυφή παρέχει ένα ελάχιστου μήκους μονοπάτι προς την v6, δεν το λαμβάνουμε υπόψη γιατί απαρτίζεται από 3 ακμές, ενώ το ελάχιστου μήκους μονοπάτι <v1,v1v3,v3,v3v6,v6> που ήδη έχουμε εντοπίσει, απαρτίζεται από μόνο 2 ακμές. Κατά συνέπεια, όταν στο βήμα 6 μονιμοποιείται και η ετικέτα της v6, μας δίνεται το μοναδικό ελάχιστου μήκους, ΚΑΙ με ελάχιστο πλήθος ακμών, (v1,v6)-μονοπάτι <v1,v1v3,v3,v3v6,v6>.

[1.γ]

Είναι εύκολο να δούμε μέσω ενός αντιπαραδείγματος, ότι ένα ελάχιστου μήκους μονοπάτι για το (V,E,w) δεν είναι απαραίτητα μέγιστου μήκους μονοπάτι για το (V,E,1/w). Στην πραγματικότητα, μπορεί ακόμη και να παραμένει ελάχιστου μήκους μονοπάτι. Για παράδειγμα στα γραφήματα του ακόλουθου σχήματος, το αριστερό γράφημα (V,E,w) έχει ως ελάχιστο (1,3)-μονοπάτι το <1,13,3>, το οποίο είναι ελάχιστου μήκους μονοπάτι και στο δεξιό γράφημα (που είναι το (V,E,1/w)).



(V,E,w) (V,E,1/w)

[1.δ]

Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε απλό, κατευθυνόμενο γράφημα D=(V,E), και έστω α,β $\in$ V δυο (διαφορετικές) κορυφές του. Έστω επίσης η συνάρτηση βαρών w : E $\rightarrow$ **R**, η οποία έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

ΓΙΑ ΚΑΘΕ γ,δ$\in$ V, ΑΝ (γ,δ) $\in$ E $\wedge$ γ $\neq$ α ΤΟΤΕ w(γ,δ) $\geq$ 0.

Η πρώτη μας παρατήρηση είναι ότι κανένα (α,β)-μονοπάτι (ανεξάρτητα από το μήκος του) στο γράφημα δεν περιλαμβάνει ακμή που εισέρχεται στην κορυφή α. Ο λόγος είναι ότι οποιοσδήποτε (α,β)-περίπατος περιλαμβάνει εισερχόμενη ακμή προς το α, επαναλαμβάνει (ως ενδιάμεση πλέον κορυφή) την α, και άρα δεν είναι μονοπάτι στο γράφημα D.

Η επόμενη παρατήρησή μας είναι ότι ο αλγόριθμος του Dijkstra ξεκινά με μηδενική τιμή ετικέτας στην αφετηρία (κορυφή α) και άπειρη τιμή ετικέτας στις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος. Κατά συνέπεια, η πρώτη ετικέτα που μονιμοποιείται από τον αλγόριθμο είναι αυτή της αφετηρίας α, και γι' αυτό ο Dijkstra στο εξής αγνοεί όλες τις ακμές που εισέρχονται στην κορυφή αυτή. Κατά συνέπεια, είτε αφήσουμε τις ακμές που εισέρχονται στην κορυφή α, είτε τις αφαιρέσουμε από το γράφημα D, ο Dijkstra θα έχει ακριβώς την ίδια συμπεριφορά.

Κατά συνέπεια, μπορούμε (για τη μελέτη του Dijkstra κατά τον υπολογισμό (α,β)-μονοπατιών) να θεωρήσουμε το γράφημα $H = D - \{e \in E : \exists v \in V, e = (v,\alpha)\}$ που αφαιρεί από το D όλες τις εισερχόμενες ακμές στην κορυφή α. Τα δυο γραφήματα H, D έχουν ακριβώς το ίδιο σύνολο (α,β)-μονοπατιών, και ο Dijkstra συμπεριφέρεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο για τα στιγμιότυπα (H,w) και (D,w). Όμως, το στιγμιότυπο (H,w) δεν έχει κύκλους αρνητικού μήκους, γιατί ένας τέτοιος κύκλος πρέπει να περιλαμβάνει και την κορυφή α, αλλά η α δεν έχει καμιά εισερχόμενη ακμή (στο H).

Ας θεωρήσουμε τώρα της έξω-γειτονιά $N(\alpha) = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_K\}$ της κορυφής α, δηλαδή, το υποσύνολο κορυφών για τις οποίες υπάρχει ακμή από την α <u>προς</u> αυτές. Παρατηρούμε ότι ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ (α,β)-μονοπάτι χρησιμοποιεί ΑΚΡΙΒΩΣ μια από τις ακμές του υποσυνόλου των εξερχόμενων ακμών από την α, $\delta^+(\alpha) = \{(\alpha,\gamma) : \gamma \in N(\alpha)\}$.

Αν Σ είναι η (κατ' απόλυτη τιμή) μέγιστη τιμή βάρους ακμής στο $\delta^+(\alpha)$, τότε θεωρούμε την συνάρτηση ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ βαρών $w' : E \to R_{\geq 0}$ που ορίζεται ως εξής:

ΓΙΑ ΚΑΘΕ $e \in \delta^+(\alpha)$, $w'(e) = w(e) + \Sigma$.

ΓΙΑ ΚΑΘΕ $e \in V \setminus \delta^+(\alpha)$, $w'(e) = w(e)$.

Προφανώς ο Dijkstra υπολογίζει σωστά ένα ελάχιστου μήκους (α,β)-μονοπάτι για το στιγμιότυπο (H, w'), αφού τα βάρη ακμών είναι πλέον μη αρνητικά. Ο ισχυρισμός μας τώρα είναι ότι: (ι) ο Dijkstra θα έχει ακριβώς την ίδια συμπεριφορά για τα στιγμιότυπα (H,w) και (H,w'). (ιι) Τα δυο στιγμιότυπα (H,w) και (H,w') έχουν ακριβώς το ίδιο σύνολο ελάχιστου μήκους (α,β)-μονοπατιών.

Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, για οποιοδήποτε (α,β)-μονοπάτι π στο H ισχύει ότι το συνολικό του βάρος αυξάνεται κατά τη σταθερά Σ: $w'(\pi) = w(\pi)+\Sigma$. Αυτό έχει δυο άμεσες συνέπειες: Ένα (α,β)-μονοπάτι π είναι ελάχιστου μήκους για το στιγμιότυπο (H,w') αν και μόνο αν είναι ελάχιστου μήκους για το στιγμιότυπο (H,w). Αυτό επιβεβαιώνει το (ιι). Όλες οι προσωρινές ετικέτες που έχουν πεπερασμένη τιμή (δηλαδή, έχει εντοπιστεί κάποιο (α,X)-μονοπάτι προς την αντίστοιχη κορυφή X) έχουν ως προς την συνάρτηση w' το μήκος τους επαυξημένο κατά Σ, σε σχέση με την συνάρτηση w. Όμως σε κάθε βήμα ο Dijkstra εξετάζει (για να αποφασίσει ποια ετικέτα να μονιμοποιήσει) τις τρέχουσες τιμές των (προσωρινών) ετικετών. Η αύξηση όλων τους κατά Σ δεν αλλάζει την εκάστοτε επιλογή του αλγορίθμου. Αυτό επιβεβαιώνει το (ι).

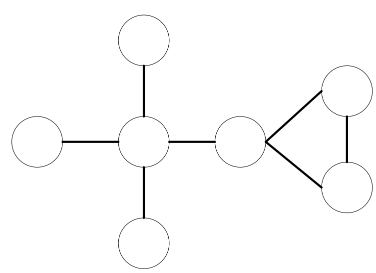
Συνεπώς, ο Dijkstra έχει πανομοιότυπη συμπεριφορά στα στιγμιότυπα (H,w’) και (H,w), άρα και το (D,w). Αφού τα (H,w’), (H’w), και (D,w) έχουν ακριβώς το ίδιο σύνολο ελάχιστου μήκους (α,β)-μονοπατιών, καταλήγουμε ότι ο Dijkstra υπολογίζει σωστά ένα ελάχιστου μήκους (α,β)-μονοπάτι, σε οποιοδήποτε κατευθυνόμενο γράφημα με (ενδεχομένως) αρνητικά βάρη ΜΟΝΟ σε ακμές που εξέρχονται από την αφετηρία α.

Άσκηση 6 (2015-16, Εργασία 4, Ερώτημα 3)

α) Βρείτε όλα τα μη-ισομορφικά γραφήματα με ακολουθίες βαθμών (4,4,3,3,3,3), (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2) και (5,4,4,4,3,3,3,3).

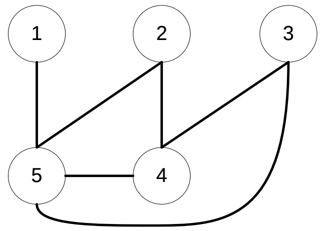
β) Θεωρήστε ένα απλό, μη-κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές, όπου ο μέσος όρος των βαθμών των κορυφών είναι $d(G)$, και έστω μία κορυφή v με βαθμό $d(v) \leq d(G)/2$. Δείξτε ότι το γράφημα G' που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την κορυφή v και όλες τις προσκείμενες σε αυτή ακμές εξακολουθεί να έχει μέσο βαθμό κορυφών $d(G') = d(G)$.

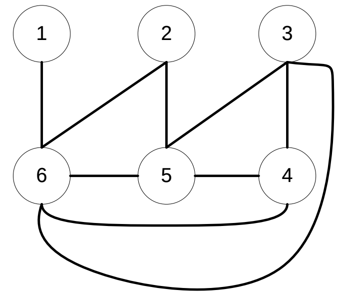
γ) Πόσα υπογραφήματα του K_7 και του K_{20} είναι ισομορφικά με το παρακάτω γράφημα;



δ) Θεωρήστε ένα απλό, μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 1. Αν το γράφημα έχει ακριβώς δύο κορυφές βαθμού k, ενώ οι βαθμοί όλων των υπολοίπων κορυφών είναι μεταξύ τους διαφορετικοί, αποδείξτε ότι $k=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (*Υπόδειξη*: διαβάστε προηγουμένως την Πρόταση 1.14, σελ. 81, Τόμος Β΄).

ε) Περιγράψτε ένα τέτοιο γράφημα για κάθε n, δηλαδή ένα γράφημα με ακριβώς δύο κορυφές ίδιου βαθμού (ισοδύναμα, με n-1 διαφορετικούς βαθμούς κορυφών) και ελάχιστο βαθμό κορυφής 1. Δείτε τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν.

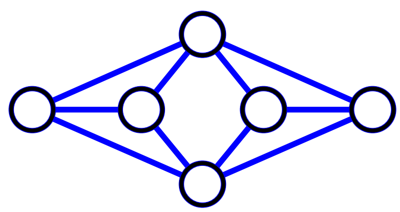




Απάντηση:

[3.α]

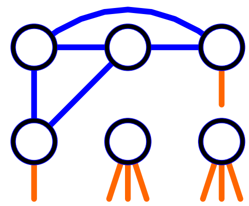
Ξεκινάμε με την ακολουθία βαθμών 1ο ΓΡΑΦΗΜΑ ΜΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΒΑΘΜΩΝ (4,4,3,3,3,3). Αν οι δυο κορυφές βαθμού 4 δεν συνδέονται μεταξύ τους, τότε θα πρέπει καθεμιά από αυτές να συνδέεται και στις 4 κορυφές βαθμού 3. Αν τώρα αφαιρέσουμε τις κορυφές βαθμού 4 από το γράφημα, το υπογράφημα που θα απομείνει θα είναι 2-κανονικό, και, λόγω απλότητας δεν μπορεί παρά να είναι ένας κύκλος μήκους 4. Δηλαδή:



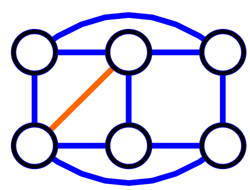
1ο ΓΡΑΦΗΜΑ ΜΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΒΑΘΜΩΝ (4,4,3,3,3,3)

Η εναλλακτική περίπτωση είναι οι δυο κορυφές βαθμού 4 να συνδέονται μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση, αν αφαιρέσουμε την συγκεκριμένη ακμή που συνδέει τις δυο αυτές ακμές, αυτό που απομένει είναι ένα 3-κανονικό γράφημα. Αυτό που λοιπόν ζητάμε ουσιαστικά, είναι η κατασκευή όλων των δυνατών (μη ισομορφικών) 3-κανονικών γραφημάτων με 6 κορυφές, στα οποία στη συνέχεια θα προσθέσουμε μια επιπλέον ακμή με όλους τους τρόπους.

Για ένα 3-κανονικό γράφημα 6 κορυφών, παρατηρούμε ότι αν τρεις κορυφές του συμμετέχουν σε έναν κύκλο μήκους 3 (τρίγωνο), τότε καθεμία από αυτές έχει μια επιπλέον ακμή στο 3-κανονικό γράφημα. Όσο για τις υπόλοιπες 3 κορυφές, αν μια από αυτές δέχεται τουλάχιστον δυο από τις τρεις ακμές που επίσης προσπίπτουν στο τρίγωνο, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι είναι αδύνατον να συμπληρώσουμε το γράφημα ώστε να είναι 3-κανονικό (απλό) γράφημα: Υπάρχουν 8 ημιακμές (με πορτοκαλί χρώμα στο ακόλουθο σχήμα) που πρέπει (ανά δύο) να τις συνδυάσουμε για την κατασκευή των υπόλοιπων ακμών ώστε όλες οι κορυφές να αποκτήσουν βαθμό 3. Όπως κι αν τις συνδυάσουμε όμως, οι δυο κορυφές που δεν έχουμε μελετήσει ως τώρα, θα έχουν τουλάχιστον δυο παράλληλες ακμές, πράγμα που αντιβαίνει την απλότητα του γραφήματος.



Συνεπώς, δεδομένης της ύπαρξης τριγώνου στο 3-κανονικό γράφημα, μοναδική περίπτωση είναι καθεμιά από τις τρεις κορυφές εκτός αυτού του τριγώνου να συνδέεται με ακριβώς μια κορυφή του τριγώνου. Με αυτό τον τρόπο όμως, οι βαθμοί των κορυφών του τριγώνου θα έχουν ήδη γίνει 3, ενώ οι τρεις κορυφές εκτός του τριγώνου, έχουν μόνο έναν τρόπο να συμπληρώσουν κι αυτές το βαθμό τους: Να σχηματίσουν και οι ίδιες ένα τρίγωνο. Το 3-κανονικό γράφημα που προκύπτει λοιπόν, είναι απόλυτα συμμετρικό (δυο τρίγωνα που έχουν ενωμένες με ακμές τις κορυφές τους μία προς μία), και η προσθήκη της επιπλέον ακμής (για να σχηματιστούν δυο κορυφές βαθμού 4 που ενώνονται μεταξύ τους) δίνει ακριβώς ένα (μη ισομορφικό) γράφημα. Το γράφημα αυτό φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



2ο ΓΡΑΦΗΜΑ ΜΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΒΑΘΜΩΝ (4,4,3,3,3,3)

(2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)

Όπως ήδη προαναφέραμε στην απάντηση του ερωτήματος [2.γ], ένα (απλό) 2-κανονικό γράφημα απαρτίζεται από συνιστώσες που είναι απλοί κύκλοι. Κατά συνέπεια, τα ζητούμενα γραφήματα έχουν ακριβώς αυτή την ιδιότητα. Μετράμε τα (μη ισομορφικά) γραφήματα με τη συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών χωριστά για κάθε τιμή του πλήθους συνιστωσών που έχουν:

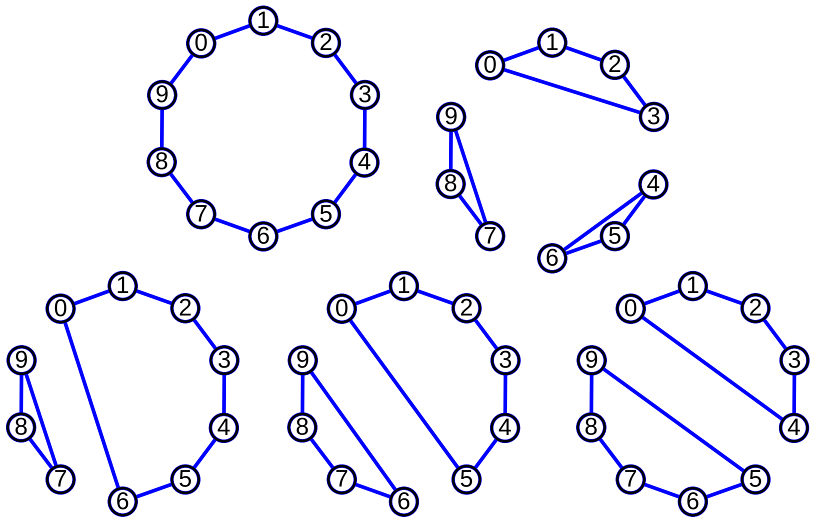
ΜΙΑ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ: Πρόκειται για έναν απλό κύκλο 10 κορυφών.

ΔΥΟ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ: Το βασικό ζητούμενο εδώ είναι να χωρίσουμε τις κορυφές σε δυο συνιστώσες απλών κύκλων. Ουσιαστικά, πρόκειται για ανάθεση 10 όμοιων σφαιριδίων σε 2 όμοιες υποδοχές. Αν οι υποδοχές ήταν διαφορετικές, με την προϋπόθεση ότι κάθε υποδοχή θα έχει τουλάχιστον 3 σφαιρίδια (η μικρότερη συνιστώσα θα είναι ένας κύκλος με τουλάχιστον 3 κορυφές, λόγω της απλότητας του γραφήματος). Αυτό μπορεί να γίνει ακριβώς με τρεις διαφορετικούς τρόπους: 7--3, 6--4, 5--5.

ΤΡΕΙΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ: Και πάλι θα πρέπει να μοιράσουμε τα 10 όμοια σφαιρίδια (οι κορυφές) σε τρεις αυτή τη φορά όμοιες υποδοχές, ώστε κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον 3 σφαιρίδια. Αυτό γίνεται μόνο με έναν τρόπο: 4--3--3.

ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 4 ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ: Αυτή τη φορά παρατηρούμε ότι δεν είναι εφικτό ένα ΑΠΛΟ 2-κανονικό γράφημα τάξης 10 με τουλάχιστον 4 συνιστώσες, διότι τουλάχιστον μια συνιστώσα θα περιέχει το πολύ δυο κορυφές, και για να ικανοποιηθεί η 2-κανονικότητα θα πρέπει να παραβιαστεί η απλότητα του γραφήματος.

Το ακόλουθο γράφημα παρουσιάζει όλα τα απλά, μυ κατευθυνόμενα, 2-τακτικά γραφήματα:



(5,4,4,4,3,3,3,3)

Η συγκεκριμένη ακολουθία δεν είναι ακολουθία βαθμών κάποιου γραφήματος, γιατί το άθροισμα των στοιχείων της είναι 5 + 3*4 + 4*3 = 29, ενώ το άθροισμα βαθμών σε οποιοδήποτε γράφημα είναι άρτιος βαθμός (από το Λήμμα της Χειραψίας).

[3.β]

Ο μέσος βαθμός σε ένα γράφημα G=(V,E) υπολογίζεται ως εξής:

$$d(G) \quad = \quad [\ \Sigma_{v\in V}\ d_G(v)\ ]\ /\ |V| \quad = \quad 2|E|\ /\ |V|$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα της Χειραψίας. Αφαιρώντας τώρα από το G μια κορυφή v με βαθμό $d(v) \leq d(G)/2$, αφαιρούμε μαζί και τις d(v) ακμές που προσπίπτουν σε αυτήν. Αν G' = G – v, τότε ο μέσος βαθμός στο καινούργιο γράφημα υπολογίζεται ως εξής:

$d(G') = [\ \Sigma_{v\in V(G')}\ d_{G'}(v)\ ]\ /\ (|V| - 1)$ // από ορισμό μέσου βαθμού γραφήματος

$= \quad 2|E(G')|\ /\ (\ |V|{-}1)$ // από Λήμμα Χειραψίας

$= \quad 2[\ |E(G)| - d(v)\ ]\ /\ (\ |V| - 1\ )$ // από ορισμό αφαίρεσης κορυφής από γράφημα

$= \quad |V|\ /\ (|V| - 1) * [\ 2|E(G)|\ /\ |V|\ - 2d(v)\ /\ |V|\ ]$

$\geq \quad |V|\ /(|V| - 1) * [\ d(G) - d(G)\ /\ |V|\ ]$ // $2d(v) \leq d(G)$

= $|V| /(|V| – 1) * d(G) * [1 – 1/ |V|]$

= d(G).

[3.γ]

Κατ' αρχήν παρατηρούμε η ακολουθία βαθμών του γραφήματος που μας ενδιαφέρει, είναι <4,3,2,2,1,1,1>. Επιπλέον, υπάρχει πλήρης συμμετρία του γραφήματος ως προς τις κορυφές βαθμού 1, όπως και ως προς τις κορυφές βαθμού 2. Συνεπώς, σε ένα πλήρες γράφημα 7 κορυφών με επιγραφές, υπάρχουν 7 επιλογές για το ποια θα είναι η κορυφή βαθμού 4, 6 επιλογές για το ποια θα είναι η κορυφή βαθμού 3, C(5,2) = 10 επιλογές για το ποιες θα είναι οι κορυφές βαθμού 2, και C(3,3) = 1 επιλογή πλέον για τις κορυφές βαθμού 1. Άρα, στο πλήρες γράφημα K_7 με επιγραφές, υπάρχουν 7*6*10*1 = 420 διαφορετικά υπογραφήματα που είναι ισομορφικά με το γράφημα της εκφώνησης.

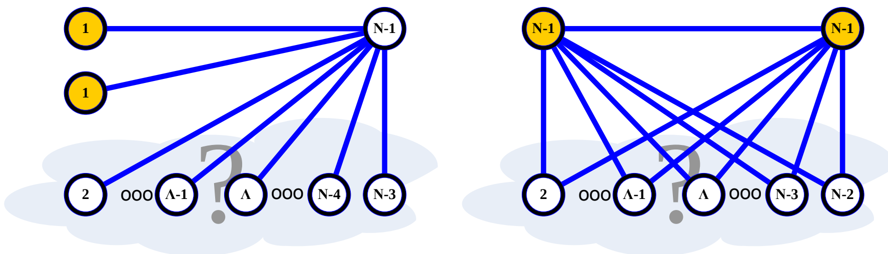
Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν C(20,7) = 77.520 τρόποι να συγκεκριμενοποιήσουμε τις 7 κορυφές (με επιγραφές) εντός τοτ K_{20}, που συμμετέχουν στο πλήρες γράφημα K7. Αφού εντός του K7 γνωρίζουμε ήδη ότι υπάρχουν 420 διαφορετικά υπογραφήματα που είναι ισομορφικά του ζητούμενου, καταλήγουμε ότι στο K_{20} υπάρχουν συνολικά 77.520 * 420 = 32.558.400 διαφορετικά υπογραφήματα που είναι ισομορφικά του γραφήματος της εκφώνησης.

[3.δ]

Για οποιοδήποτε απλό, μη κατευθυνόμενο γράφημα G = (V,E) τάξης |V| = N, έστω (χωρίς βλάβη της γενικότητας — χβτγ) ότι οι μοναδικές κορυφές βαθμού Λ (για κάποιο $1 \leq Λ \leq N-1$) στο γράφημα είναι οι κορυφές v_{N-1},v_N.

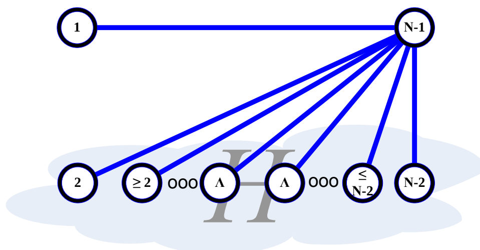
Ας δούμε τώρα μερικές πρώτες τιμές για το N. Προφανώς, για N=1 δε μπορούμε να έχουμε τέτοιο γράφημα, ενώ για N=2, το μοναδικό απλό γράφημα με ελάχιστο βαθμό 1, είναι το K_2, για το οποίο προφανώς ισχύει ότι Λ = 1 = N/2. Για N=3 επίσης δεν έχουμε πολλές επιλογές (δεδομένης της απλότητας του γραφήματος και ότι ο ελάχιστος βαθμός είναι 1). Μοναδική μας επιλογή είναι η ακολουθία βαθμών <2,1,1> που αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι μήκους 2.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν στο εξής την περίπτωση γραφημάτων με τουλάχιστον 4 κορυφές (N ≥4). Αφού (λόγω απλότητας) όλοι οι βαθμοί υπόλοιπων κορυφών ανήκουν στο {1,2,…,N−1} \ {Λ} και είναι (σύμφωνα με την εκφώνηση) μεταξύ τους διαφορετικοί, θεωρούμε (χβτγ) ότι: $1 \leq d_G(v_1) < d_G(v_2) < \ldots < d_G(v_{N-2}) \leq N-1$. Ειδικότερα, ΟΛΟΙ οι αριθμοί από το {1,2,…,N−1} \ {Λ} εμφανίζονται στην ακολουθία βαθμών του G ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΦΟΡΑ, εκτός από το Λ που εμφανίζεται ΑΚΡΙΒΩΣ ΔΥΟ φορές. Αυτό αμέσως σημαίνει ότι (ι) Λ > 1, γιατί διαφορετικά (αν είχαμε δυο κορυφές βαθμού 1) δε θα ήταν δυνατόν να υπάρχει και κορυφή βαθμού N−2 και κορυφή βαθμού N−1, και (ιι) Λ < N−1, γιατί διαφορετικά δε θα μπορούσε να υπάρξει κορυφή βαθμού 1:



Άρα, $2 \le \Lambda \le N-2$, $d_G(\nu_1) = 1$, $d_G(\nu_2) = 2$, $d_G(\nu_{N-3}) = N-2$ και $d_G(\nu_{N-2}) = N-1$.

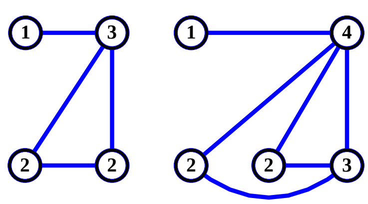
Αν θεωρήσουμε τώρα το (επίσης απλό, μη κατευθυνόμενο) γράφημα $H = (G - \nu_1) - \nu_{N-2}$, τότε παρατηρούμε πως υπάρχουν ακριβώς $N-2 \ge 2$ κορυφές, οι οποίες έχουν (ΟΛΟΥΣ) τους βαθμούς τους μειωμένους κατά μια μονάδα σε σχέση με το G, και ο ελάχιστος βαθμός είναι και πάλι 1:



Συνεπώς, η ακολουθία βαθμών του H είναι ως εξής:

$$1 = d_H(\nu_2) = d_G(\nu_2)-1 \le d_H(\nu_3) = d_G(\nu_3)-1 \le \dots \le d_H(\nu_{N-3}) = d_G(\nu_{N-3})-1 = N-3.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι και πάλι όλοι οι αριθμοί από το σύνολο $\{1,\dots, N-3\}$ εμφανίζονται ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΦΟΡΑ στην ακολουθία βαθμών του H, εκτός από το $\Lambda-1 \ge 1$, που εμφανίζεται ΑΚΡΙΒΩΣ ΔΥΟ ΦΟΡΕΣ. Αν ισχύει ότι $N = 4$, τότε αυτό σημαίνει ότι το H είναι ισομορφικό του K_2. Δηλαδή, η μοναδική υποψήφια ακολουθία βαθμών είναι η $<3,2,2,1>$, με $\Lambda=2$, που ικανοποιεί τη συνθήκη $\Lambda = \lfloor N/2 \rfloor$. Επιπλέον, πράγματι υπάρχει γράφημα G με ακολουθία βαθμών την $<3,2,2,1>$. Αν τώρα $N=5$, τότε το H απαρτίζεται από 3 κορυφές, και έχει ακολουθία βαθμών την $<2,1,1>$. Αυτό σημαίνει ότι $\Lambda=2$, ενώ η ακολουθία βαθμών του G αναγκαστικά είναι η εξής: $<4,3,2,2,1>$. Το ακόλουθο σχήμα δείχνει τα δυο αυτά γραφήματα 4 και 5 κορυφών αντίστοιχα.



Ας μελετήσουμε τώρα την περίπτωση που το H περιλαμβάνει $N \ge 6$ κορυφές. Λόγω της απλότητας του H, παρατηρούμε ότι ο μοναδικός βαθμός Λ-1 που επαναλαμβάνεται ικανοποιεί ότι $2 \le \Lambda-1 \le N-4$, αλλιώς η ακολουθία φυσικών αριθμών $< d_H(\nu_2)$, $d_G(\nu_3)$, … , $d_G(\nu_{N-3})$, $d_G(\nu_{N-1})$, $d_G(\nu_N) >$ δεν αντιστοιχεί σε απλό γράφημα αντίστοιχο με το προηγούμενο επιχείρημα για το ίδιο το G). Παρατηρούμε λοιπόν και πάλι ότι: $2 \leq K-1 \leq N-4$, $d_H(v_2) = 1$, $d_H(v_3) = 2$, $d_H(v_{N-4}) = N-3$ και $d_H(v_{N-3}) = N-2$.

Αν θεωρήσουμε αρχικά ότι Γ = G, τότε ενόσω το Γ έχει τουλάχιστον 6 κορυφές, θεωρούμε το υπογράφημα H που προκύπτει από την αφαίρεση των μοναδικών κορυφών μέγιστου και ελάχιστου βαθμού στο Γ. Στη συνέχεια, θέτουμε Γ = H και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, μέχρι να καταλήξουμε σε γράφημα Γ με 4 ή 5 κορυφές (που επαναλαμβάνει το βαθμό 2 και στις δυο περιπτώσεις, όπως ήδη εξηγήσαμε).

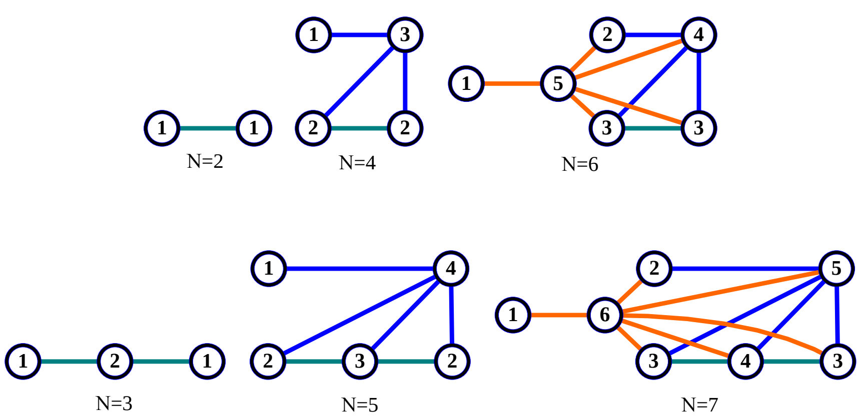
Αν $N = 2P+1$, τότε θα πάρουμε γραφήματα τάξης N, $N-2$, $N-4$, … , 7 , 5. Σε κάθε μετάβαση οι δυο κοινού βαθμού κορυφές χάνουν από μια μονάδα στο βαθμό τους. Δηλαδή, μέχρι να φτάσουμε στο γράφημα τάξης 5, οι κορυφές αυτές έχουν ήδη χάσει $\lfloor N/2 \rfloor - 2 = P - 2$ ακμές, ενώ (στο τελευταίο γράφημα) απομένουν 2 ακμές στις δυο κορυφές με κοινό βαθμό.

Αν αντίθετα $N = 2P$, τότε θα πάρουμε γραφήματα τάξης N, $N-2$, $N-4$, … , 6 , 4. Και πάλι, σε κάθε μετάβαση οι δυο κοινού βαθμού κορυφές χάνουν από μια μονάδα στο βαθμό τους. Δηλαδή, μέχρι να φτάσουμε στο γράφημα τάξης 4, οι κορυφές αυτές έχουν ήδη χάσει $\lfloor N/2 \rfloor - 2 = P - 2$ ακμές, ενώ (στο τελευταίο γράφημα) απομένουν 2 ακμές στις δυο κορυφές με κοινό βαθμό.

Συνολικά λοιπόν καταλήγουμε ότι $\Lambda = P = \lfloor N/2 \rfloor$.

[3.ε]

Η απόδειξη που κάναμε στο [3.δ] είναι κατασκευαστική, και δίνει σαφή εικόνα για τη μορφή που έχουν τα απλά γραφήματα με ακριβώς δυο επαναλαμβανόμενες κορυφές και ελάχιστο βαθμό 1: Ξεκινώντας από τα γραφήματα με δυο και τρεις κορυφές ως βάση (μονοπάτι μήκους 1 και μονοπάτι μήκους 2 αντίστοιχα), οποιοδήποτε γράφημα τάξης $N \geq 5$ προκύπτει αναδρομικά από το γράφημα της οικογένειας με τάξη N-2, προσθέτοντας ακριβώς δυο καινούργιες κορυφές, εκ των οποίων η πρώτη είναι βαθμού N-1 και η δεύτερη είναι βαθμού 1. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται τα πρώτα γραφήματα της οικογένειας αυτής:



Άσκηση 7 (2015-16, Εργασία 5 Ερωτήματα Κατανόησης, Ερώτημα 8)

Συμβολίζουμε με $\chi(G)$ τον **χρωματικό αριθμό** του γραφήματος G, δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματίσουμε τις κορυφές του γραφήματος έτσι ώστε κάθε δύο γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα. Δείξτε ότι εάν για κάποιο γράφημα G ισχύει ότι

$$\chi(G-\{v,u\})=\chi(G)-2$$

για κάθε δύο κορυφές $v,u\in V(G)$, τότε το G είναι πλήρες.

Απάντηση:

Έστω G γράφημα με την ιδιότητα $\chi(G\backslash\{v,u\})=\chi(G)-2$ για κάθε 2 κορυφές του G. Υποθέτουμε ότι G όχι πλήρες. Τότε, θα υπάρχουν κορυφές u_0, v_0 που δεν συνδέονται με ακμή στο G. Θα καταλήξουμε σε άτοπο δείχνοντας ότι για τις κορυφές u_0, v_0 δεν ισχύει η σχέση $\chi(G\backslash\{u_0,v_0\})=\chi(G)-2$.

Θεωρούμε το γράφημα $G\backslash\{u_0,v_0\}$ το οποίο επιδέχεται νόμιμο χρωματισμό (δηλαδή, γειτονικές κορυφές έχουν διαφορετικό χρώμα) με $X=\chi(G\backslash\{u_0,v_0\})$ το πλήθος χρώματα. Αυτό σημαίνει ότι οι κορυφές του $G\backslash\{u_0,v_0\}$, δηλαδή το σύνολο $V(G)\backslash\{u_0,v_0\}$, διαμερίζεται σε X το πλήθος σύνολα ανεξαρτησίας $V_1,V_2,\cdots,V_\chi$ έτσι ώστε

- $V_1,V_2,\cdots,V_X$ ξένα ανά δύο
- $V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_X=V(G)\backslash\{u_0,v_0\}$
- $\forall i=1,2,\cdots,X$ κανένα ζεύγος κορυφών του V_i δεν συνδέονται με ακμή.

Αφού u_0,v_0 όχι γειτονικές στο G, τα σύνολα $V_1,V_2,\cdots,V_X,V_{X+1}=\{u_0,v_0\}$ διαμερίζουν το σύνολο κορυφών $V(G)$ του G σε $X+1$ το πλήθος σύνολα ανεξαρτησίας. Άρα υπάρχει χρωματισμός του G με $X+1$ χρώματα. Συνεπώς

$$\chi(G)\leq X+1=\chi(G\backslash\{u_0,v_0\})+1<\chi(G\backslash\{u_0,v_0\})+2$$

Συνεπώς για τις κορυφές u_0,v_0 δεν ισχύει η σχέση $\chi(G\backslash\{u_0,v_0\})=\chi(G)-2$.

Άσκηση 8 (2007-2008, Εργασία 5, Ερώτημα 3)

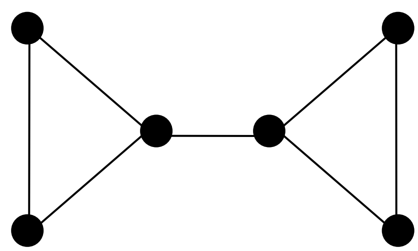
1. Δείτε τον ορισμό του *k-κανονικού γραφήματος* στον Τόμο Β΄, σελ. 69.

α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει απλό 5-κανονικό γράφημα με *2m+1* κορυφές, για κάθε *m≥3*.

β) Θεωρήστε ένα απλό 5-κανονικό γράφημα με τριάντα (30) ακμές. Αν το γράφημα αυτό είναι συνδεδεμένο και επίπεδο, ποιος ο αριθμός των όψεών του;

γ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει απλό 5-κανονικό γράφημα με διάμετρο ένα (1) που να είναι επίπεδο (δείτε τον ορισμό της *διαμέτρου* στον Τόμο Β΄, σελ. 150).

2. Πόσα υπογραφήματα των γραφημάτων K_6 και K_{20} είναι ισομορφικά με το παρακάτω γράφημα; Θεωρούμε ότι κάθε κορυφή των K_6 και K_{20} έχει ‘ετικέτα’ (δηλαδή οι κορυφές είναι διακεκριμένες). (*Υπόδειξη:* δείτε το Ερώτημα 1.β των Εξετάσεων Ιουνίου 2007)



Απάντηση:

[3.1.α]

Η απάντηση βασίζεται στο λήμμα της χειραψίας: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει 5-κανονικό γράφημα G=(V,E) τάξης 2κ+1, για κάποιο κ≥3. Τότε, το άθροισμα βαθμών του θα ήταν ίσο με το διπλάσιο του πλήθους των ακμών του γραφήματος: $2|E| = \Sigma_{v\in V}\ d_G(v) = 5|V| = 10κ+5$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί απαιτεί ένας άρτιος φυσικός αριθμός (2|E|) να ισούται με έναν περιττό φυσικό αριθμό (10κ+5).

[3.1.β]

Εφόσον το άθροισμα των βαθμών του γραφήματος είναι ίσο με το διπλάσιο του πλήθους των ακμών του ($2|E| = \Sigma_{v\in V}\ d_G(v)$), προκύπτει ότι 5|V| = 2*30 ή ισοδύναμα |V|=12. Από τον τύπο του Euler (Τόμος Α΄, σελ. 142), προκύπτει εύκολα ότι ο αριθμός των όψεων είναι ο=|E| - |V|+2 = 30-12+2=20.

[3.1.γ]

Η διάμετρος ορίζεται ως η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών του γραφήματος. Συνεπώς, όταν η διάμετρος ισούται με 1, οποιοδήποτε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών είναι συνδεδεμένο με απευθείας ακμή, δηλαδή το γράφημα είναι πλήρες. Ο βαθμός όλων των κορυφών ενός πλήρους γραφήματος K_N είναι ίσος με Ν-1. Εύκολα λοιπόν διαπιστώνουμε ότι το μοναδικό πλήρες γράφημα που είναι 5-κανονικό είναι το K_6. Το γράφημα K_6 εμπεριέχει ως υπογράφημα το K_5 (όπως και το $K_{3,3}$) άρα με βάση το Θεώρημα του Kuratowski (Τόμος Α΄, σελ. 145) δεν είναι επίπεδο. Συνεπώς, δεν υπάρχει επίπεδο 5-κανονικό γράφημα διαμέτρου 1.

[3.2]

Συμβολίζουμε με G το γράφημα 6 κορυφών που δίνεται στην εκφώνηση.

Ας δούμε κατ' αρχήν το πλήθος των ισομορφικών γραφημάτων Η του G που εμφανίζονται ως υπογραφήματα του K_6. Έστω $f{:}G \rightarrow H$ η αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση των κορυφών του G σε κορυφές του Η. Ας ονομάσουμε τις κορυφές βαθμού 3 στο G a και b, οπότε οι εικόνες τους θα είναι οι f(a) και f(b). Υπάρχουν ακριβώς C(6,2) τρόποι να επιλέξει κανείς από το V(H) τις εικόνες των δυο κορυφών βαθμού 3 στο G. Παρατηρείστε ότι χρησιμοποιούμε ΕΠΙΛΟΓΗ 2 από 6 διακεκριμένα αντικείμενα, και όχι ΔΙΑΤΑΞΗ 2 από 6 διακεκριμένα αντικείμενα, γιατί δε μας απασχολεί ποια από τις δυο κορυφές του K_6 θα παίξει το ρόλο της f(a) και ποια το ρόλο της f(b), αφού με αντιστροφή των ρόλων τους (μαζί με αντίστοιχη μετακίνηση των γειτονικών τους κορυφών–εικόνων βαθμού 2) θα πάρουμε ακριβώς το ίδιο υπογράφημα του K_6.

Ως προς την κορυφή f(a) τώρα, έχουμε C(4,2) επιλογές για τον προσδιορισμό (στο Η) των δυο κορυφών βαθμού δύο που θα ενώνονται με αυτήν, και θα αποτελούν τις εικόνες των γειτονικών κορυφών βαθμού 2 ως προς την κορυφή a.

Παρόμοια, για την κορυφή f(b) υπάρχουν C(2,2) επιλογές για τον προσδιορισμό (στο Η) των δυο εικόνων των κορυφών βαθμού 2 που ενώνονται με την κορυφή b στο G. Συνολικά λοιπόν, εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, στο γράφημα K_6 (με επιγραφές στις κορυφές) υπάρχουν C(6,2)*C(4,2)*C(2,2) = 90 διαφορετικά υπογραφήματα που είναι ισομορφικά του G.

Έστω τώρα ότι μας δίνεται το γράφημα K_{20} (με επιγραφές στις κορυφές), μέσα στο οποίο αναζητάμε υπογραφήματα ισομορφικά του G. Θα πρέπει κατ' αρχήν να προσδιορίσουμε το σύνολο των 6 κορυφών του K_{20}, στο επαγόμενο υπογράφημα K_6 των οποίων θα αναζητήσουμε ισομορφικά γραφήματα του G. Υπάρχουν ακριβώς C(20,6) διαφορετικοί τρόποι για να γίνει αυτό. Όπως είδαμε και προηγούμενα, δεδομένου του υπογραφήματος K_6 του K_{20} που έχουμε εστιάσει την προσοχή μας, υπάρχουν C(6,2)*C(4,2)*C(2,2) = 90 διαφορετικά υπογραφήματά του που είναι ισομορφικά του G. Άρα λοιπόν (κανόνας γινομένου) υπάρχουν μέσα στο K_{20} C(20,6)* C(6,2)*C(4,2)*C(2,2) = 3.488.400 διαφορετικά υπογραφήματα που είναι ισομορφικά του γραφήματος G.

Άσκηση 9 (2013-2014, Εργασία 5, Ερωτήματα Κατανόησης, Ερώτημα 7)

Δείξτε ότι είτε και οι τρεις ακολουθίες $(d_1,d_2,....,d_n)$, $(n\text{-}d_1,n\text{-}d_2,...,n\text{-}d_n)$ και $(n,d_1+1,d_2+1,...,d_n+1)$ είναι γραφικές (αντιστοιχούν δηλαδή στους βαθμούς των κορυφών ενός γραφήματος) ή ότι καμία από τις τρεις δεν είναι γραφική. Στην πρώτη περίπτωση δείξτε ότι ο αριθμός των γραφημάτων που ορίζονται από κάθε ακολουθία είναι ο ίδιος.

Απάντηση:

Διακρίνουμε τις ακόλουθες αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α: Η ακολουθία < d(1), … , d(N) > είναι γραφική, δηλαδή, αντιστοιχεί στην ακολουθία βαθμών ενός ΑΠΛΟΥ μη κατευθυνόμενου γραφήματος). Έστω Γ ένα γράφημα που αντιστοιχεί σε αυτήν. Τότε προφανώς και η ακολουθία < N , 1+d(1) , … , 1+d(N) > είναι γραφική, γιατί πχ το γράφημα H που προκύπτει από το Γ προσθέτοντας ακριβώς μια νέα κορυφή και όλες τις ακμές μεταξύ αυτής και των κορυφών του Γ, θα έχει ακριβώς τη συγκεκριμένηα ακολουθία βαθμών. Τέλος, η ακολουθία < N-1-d(1), … , N-1-d(N) > αντιστοιχεί στην ακολουθία βαθμών του συμπληρωματικού γραφήματος NOT(Γ) = K_N – E(Γ).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β: Η ακολουθία < d(1), … , d(N) > δεν είναι γραφική. Τότε, προφανώς ούτε η ακολουθία < N, 1+d(1), … , 1+d(N) > δε μπορεί να είναι γραφική, γιατί αν υπήρχε απλό, μη κατευθυνόμενο γράφημα H με τη συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών, τότε το Γ = H – v (όπου v η κορυφή βαθμού N) θα είχε ακολουθία βαθμών την < d(1), … , d(N) >, αντιβαίνοντας τη μη-γραφικότητά της. Αντίστοιχα, ούτε η ακολουθία < N-1-d(1), … , N-1-d(N) > μπορεί να είναι γραφική, γιατί αν υπήρχε απλό, μη κατευθυνόμενο γράφημα H με αυτή την ακολουθία βαθμών, τότε το Γ = NOT(H) = K_N – E(H) θα είχε ως ακολουθία βαθμών την < d(1), … , d(N) >.

Άσκηση 10 (2013-14, Εργασία 5, Ερώτημα 2)

Θεωρήστε απλά, μη-κατευθυνόμενα γραφήματα. Ένα γράφημα τουλάχιστον κ+1 κορυφών, ονομάζεται κ-συνδεδεμένο αν η αφαίρεση οποιοωνδήποτε κ-1 κορυφών δεν το καθιστά μη-συνδεδεμένο. Ισχύει ότι ένα κ-συνδεδεμένο γράφημα έχει ελάχιστο βαθμό κορυφής τουλάχιστον ίσο με κ (ΕΔΥ Γραφημάτων, Πρόταση 1.9, σελίδα 14).

(α) Δείξτε ότι ένα επίπεδο γράφημα έχει μία κορυφή βαθμού το πολύ 5.

(β) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν επίπεδα 6-συνδεδεμένα γραφήματα.

(γ) Δείξτε ότι ένα επίπεδο 5-συνδεδεμένο γράφημα έχει τουλάχιστον 12 κορυφές.

(δ) Κατασκευάστε ένα επίπεδο 5-συνδεδεμένο γράφημα 12 κορυφών.

Απάντηση:

[2.α]

Ας υποθέσουμε, για χάρη της απαγωγής σε άτοπο, ότι ο ελάχιστος βαθμός ενός επίπεδου γραφήματος G=(V,E) είναι $d_{min}(G) \geq 6$. Από το Λήμμα της Χειραψίας έχουμε:

$$2|E| = \Sigma_{v \in V}\, d_G(v) \geq 6|V| \quad \Rightarrow \quad \boxed{|E| \geq 3|V|}$$

Το γράφημα είναι όμως κι επίπεδο, άρα πρέπει να επαληθεύεται η εξής αναγκαία συνθήκη επιπεδότητας: $\boxed{|E| \leq 3|V| - 6}$

Οι δυο αυτές ανισότητες όμως οδηγούν προφανώς σε ΑΤΟΠΟ. Καταλήγουμε λοιπόν ότι οποιοδήποτε επίπεδο γράφημα έχει ελάχιστο βαθμό το πολύ 5.

[2.β]

Γνωρίζουμε από τη θεωρία (βλ. για παράδειγμα ΕΔΥ Γραφημάτων, Πρόταση 1.9) ότι αν ένα γράφημα με τουλάχιστον 7 κορυφές είναι 6-συνδεδεμένο, τότε θα πρέπει ο ελάχιστος βαθμός του να είναι τουλάχιστον 6. Στο **2.α** όμως είδαμε ότι για οποιοδήποτε γράφημα ο ελάχιστος βαθμός κορυφής είναι το πολύ 5. Κατά συνέπεια, οποιοδήποτε 6-συνδεδεμένο γράφημα δε μπορεί να είναι επίπεδο.

[2.γ]

Οποιοδήποτε 5-συνδεδεμένο γράφημα G=(V,E) πρέπει να έχει ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον 5. Αυτό σημαίνει, βάσει του Λήμματος της Χειραψίας, ότι:

$$5 * |V| \leq \Sigma_{v \in V}\, d_G(v) = 2|E| \quad \Rightarrow \quad \boxed{|E| \geq (5/2) * |V|}$$

Από την επιπεδότητα του G, πρέπει επίσης να ισχύει και η αναγκαία συνθήκη επιπεδότητας που χρησιμοποιήσαμε και νωρίτερα: $\boxed{|E| \leq 3|V| - 6}$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες, καταλήγουμε ότι:

$$(5/2) * |V| \leq 3|V| - 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|V| \geq 12}$$

[2.δ]

Το ζητούμενο γράφημα είναι το εικοσάεδρο: