Ενδεικτικές Ασκήσεις Κατηγορηματικής Λογικής

Άσκηση 1 (2013-14, ερώτημα κατανόησης)

1. Έστω τα κατηγορήματα $C(x)$, $P(x)$, $G(x)$, $Plays(x,y)$, $Likes(x,y)$ με ερμηνείες «ο x είναι προπονητής», «ο x είναι παίχτης», «το x είναι αγώνας», «ο x παίζει στον αγώνα y», «ο x συμπαθεί τον y». Γράψτε τύπους του κατηγορηματικού λογισμού που να εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

- Κάθε παίχτης παίζει σε ένα τουλάχιστον αγώνα.
- Αν ένας προπονητής συμπαθεί ένα παίχτη, τότε αυτός παίζει σε όλους τους αγώνες.
- Αν ένας προπονητής δεν συμπαθεί ένα παίχτη, τότε αυτός δεν παίζει σε κανένα αγώνα.
- Αν δύο παίχτες δεν αλληλοσυμπαθούνται, δεν μπορούν να παίξουν στον ίδιο αγώνα.

Απάντηση:

- Κάθε παίχτης παίζει σε ένα τουλάχιστον αγώνα.
  $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge Plays(x,y)))$

- Αν ένας προπονητής συμπαθεί ένα παίχτη, τότε αυτός παίζει σε όλους τους αγώνες.
  $\forall x \forall y((C(x) \wedge P(y) \wedge Likes(x,y)) \rightarrow \forall z(G(z) \rightarrow Plays(y,z)))$

- Αν ένας προπονητής δεν συμπαθεί ένα παίχτη, τότε αυτός δεν παίζει σε κανένα αγώνα.
  $\forall x \forall y((C(x) \wedge P(y) \wedge \neg Likes(x,y)) \rightarrow \neg \exists z(G(z) \wedge Plays(x,z)))$

- Αν δύο παίχτες δεν αλληλοσυμπαθούνται, δεν μπορούν να παίξουν στον ίδιο αγώνα.
  $$\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x \approx y) \wedge \neg Likes(x,y) \wedge \neg Likes(y,x)) \rightarrow \neg \exists z(G(z) \wedge Plays(x,z) \wedge Plays(y,z)))$$

2. Δίνονται τα κατηγορήματα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα. Μετατρέψτε σε φυσική γλώσσα τους τύπους που ακολουθούν. Θα πρέπει οι εκφράσεις της φυσικής γλώσσας που θα δώσετε να είναι όσο το δυνατόν πιο φυσικές και όχι απλώς να μεταφράζουν τους τύπους. Για παράδειγμα, αποφύγετε εκφράσεις της μορφής «Υπάρχει x έτσι ώστε για κάθε y …» (δηλαδή εκφράσεις που περιέχουν μεταβλητές).

- $\exists x(C(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow \neg Likes(x,y)))$
- $\exists x(P(x) \wedge \neg \exists y(G(y) \wedge \neg Plays(x,y)))$
- $\forall x((P(x) \wedge C(x)) \rightarrow \exists z(G(z) \wedge \neg Plays(x,z)))$
- $\forall x((P(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow Plays(x,y))) \rightarrow \neg C(x))$

Απάντηση:

- $\exists x(C(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow \neg Likes(x,y)))$
  Υπάρχει προπονητής που δε συμπαθεί κανένα παίχτη.

- $\exists x(P(x) \wedge \neg \exists y(G(y) \wedge \neg Plays(x,y)))$
  Υπάρχει παίχτης που παίζει σε όλους τους αγώνες.

- $\forall x((P(x) \wedge C(x)) \rightarrow \exists z(G(z) \wedge \neg Plays(x,z)))$
  Αν ένας παίχτης είναι και προπονητής, δεν παίζει σε όλους τους αγώνες.

- $\forall x((P(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow Plays(x,y))) \rightarrow \neg C(x))$
  Αν ένας παίχτης παίζει σε όλους τους αγώνες τότε δεν είναι ταυτόχρονα και προπονητής.

Άσκηση 2 (2013-14, ερώτημα κατανόησης)

3. Μετατρέψτε την ακόλουθη πρόταση σε τύπο της κατηγορηματικής λογικής:

   «Υπάρχει ένας μαθητής ο οποίος έχει στείλει mail σε ακριβώς δύο άλλους συμμαθητές του, και πιθανώς και στον εαυτό του».

   Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το σύμβολο της ισότητας καθώς και το κατηγόρημα $\mathrm{E}(x,y)$ το οποίο έχει τη σημασία «ο x έχει στείλει mail στον y

». Υποθέστε ότι το πεδίο από το οποίο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές είναι το σύνολο των μαθητών μιας τάξης.

Απάντηση:

Η παραπάνω πρόταση μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση τεσσάρων επιμέρους προτάσεων. Η πρώτη πρόταση $different(x, y, z)$ εκφράζει το γεγονός ότι οι συμμαθητές x, y, z είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Η δεύτερη πρόταση $email1(x, y, z)$ εκφράζει το γεγονός ότι ο μαθητής x έχει στείλει mail στους y, z. Η τρίτη πρόταση εκφράζει ότι ο μαθητής x έχει στείλει mail στους y, z και στον εαυτό του. Η τέταρτη προταση εκφράζει ότι ο μαθητής x δεν έχει στείλει mail σε κανέναν άλλο πέρα από τους y, z και τον εαυτό του. Η συνολική πρόταση είναι η ακόλουθη:

$$\exists x \exists y \exists z (different(x, y, z) \wedge (email1(x, y, z) \vee email2(x, y, z)) \wedge notothers(x, y, z))$$

Οι επιμέρους προτάσεις είναι οι ακόλουθες:

$$different(x, y, z) \equiv \neg(x \approx y) \wedge \neg(x \approx z) \wedge \neg(y \approx z)$$

$$email1(x, y, z) \equiv E(x, y) \wedge E(x, z)$$

$$email2(x, y, z) \equiv E(x, y) \wedge E(x, z) \wedge E(x, x)$$

$$notothers(x, y, z) \equiv \forall u (E(x, u) \rightarrow ((u \approx x) \vee (u \approx y) \vee (u \approx z)))$$

Άσκηση 3 (2015-16)

Το Mathematics Genealogy Project (δείτε τη σχετική διεύθυνση http://www.genealogy.ams.org/index.php) είναι μία βάση δεδομένων η οποία περιέχει το ακαδημαϊκό γενεαλογικό δέντρο χιλιάδων μαθηματικών. Για κάθε μαθηματικό μπορεί κανείς να δει τους διδακτορικούς φοιτητές που έχει επιβλέψει, το θέμα και την ημερομηνία της διατριβής τους, και πολλά ακόμη ενδιαφέροντα στοιχεία. Στο δέντρο μπορεί να βρει κανείς και πολλούς πληροφορικούς. Στο ερώτημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την Κατηγορηματική Λογική για να διατυπώσουμε προτάσεις σχετικά με το δέντρο αυτό. Έστω τα κατηγορήματα $CS(x)$, $M(x)$, $Adv(x, y)$, με ερμηνείες «ο x

είναι πληροφορικός», «ο x είναι μαθηματικός», «ο x είναι επιβλέπων καθηγητής του y» (ή ισοδύναμα «ο y είναι φοιτητής του x»).

α) Δώστε τύπους του κατηγορηματικού λογισμού που να εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις:

i. Υπάρχει καθηγητής που έχει επιβλέψει φοιτητές οι οποίοι είναι όλοι τους μαθηματικοί. (Σημείωση: υποθέτουμε ότι ο καθηγητής αυτός έχει επιβλέψει έναν τουλάχιστον φοιτητή).

ii. Υπάρχει φοιτητής ο οποίος έχει δύο ακριβώς επιβλέποντες καθηγητές. (Σημείωση: οι καθηγητές αυτοί ονομάζονται «συνεπιβλέποντες» και η έννοια αυτή θα χρησιμοποιηθεί σε επόμενο υποερώτημα).

iii. Δεν υπάρχει καθηγητής που να έχει επιβλέψει δύο διαφορετικούς φοιτητές που ο ένας να είναι μαθηματικός και ο άλλος πληροφορικός.

β) Δώστε τύπους του κατηγορηματικού λογισμού που να εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις:

i. Υπάρχει φοιτητής που είχε δύο επιβλέποντες καθηγητές οι οποίοι είχαν τον ίδιο επιβλέποντα καθηγητή.

ii. Αν δύο φοιτητές είχαν τον ίδιο επιβλέποντα, τότε θα έχουν συνεπιβλέψει κάποιο φοιτητή.

iii. Αν κάποιος καθηγητής έχει επιβλέψει περισσότερους από δύο φοιτητές, τότε κάποιος φοιτητής του θα έχει συνεπιβλέποντα.

γ) Εξηγήστε σε φυσική γλώσσα τι εκφράζουν οι παρακάτω τύποι. Θα πρέπει οι εκφράσεις που θα δώσετε να είναι όσο το δυνατόν πιο φυσικές και όχι απλώς να μεταφράζουν τους τύπους. Για παράδειγμα, αποφύγετε εκφράσεις της μορφής «Υπάρχει x έτσι ώστε για κάθε y…» (δηλαδή εκφράσεις που περιέχουν μεταβλητές).

i. $\exists x \forall y (\neg Adv(x, y))$

ii. $\forall x \forall y ((Adv(x, y) \wedge CS(x)) \rightarrow \neg M(y))$

iii. $\forall x(\neg\exists y Adv(x,y)\rightarrow \exists z\exists w(Adv(z,x)\wedge Adv(z,w)\wedge\neg(x\approx w)\wedge\neg\exists y Adv(w,y)))$

Απάντηση:

α) Οι παρακάτω τύποι εκφράζουν τις δεδομένες προτάσεις:

i. $\exists x\exists y(Adv(x,y)\wedge\forall z(Adv(x,z)\rightarrow M(z)))$

ii. $\exists x\exists y\exists z[Adv(y,x)\wedge Adv(z,x)\wedge\neg(y\approx z)\wedge\forall w(Adv(w,x)\rightarrow((w\approx y)\vee(w\approx z)))]$

iii. $\neg\exists x\exists y\exists z[Adv(x,y)\wedge Adv(x,z)\wedge\neg(y\approx z)\wedge M(y)\wedge CS(z)]$

β) Οι παρακάτω τύποι εκφράζουν τις δεδομένες προτάσεις:

i. $\exists x\exists y\exists z\exists w[Adv(y,x)\wedge Adv(z,x)\wedge\neg(y\approx z)\wedge Adv(w,y)\wedge Adv(w,z)]$

ii. $\forall x\forall y[(\neg(x\approx y)\wedge\exists w(Adv(w,x)\wedge Adv(w,y)))\rightarrow\exists u(Adv(x,u)\wedge Adv(y,u))]$

iii. $\forall x[\exists y\exists z\exists w(Adv(x,y)\wedge Adv(x,z)\wedge Adv(x,w)\wedge\neg(y\approx z)\wedge\neg(y\approx w)\wedge\neg(z\approx w))\rightarrow \exists u\exists v(Adv(x,u)\wedge Adv(v,u)\wedge\neg(x\approx v))]$

γ) Οι παρακάτω προτάσεις της φυσικής γλώσσας εκφράζουν τους δεδομένους τύπους:

i. Υπάρχει καθηγητής που δεν έχει επιβλέψει φοιτητές.
ii. Αν ένας καθηγητής είναι πληροφορικός, αποκλείεται να έχει επιβλέψει κάποιο φοιτητή που είναι μαθηματικός.
iii. Αν ένας καθηγητής δεν έχει επιβλέψει κανένα φοιτητή, τότε υπάρχει ένας ακαδημαϊκός «αδερφός» του καθηγητή αυτού (κάποιος δηλαδή που είχε τον ίδιο επιβλέποντα με αυτόν) ο οποίος επίσης δεν έχει επιβλέψει κανένα φοιτητή.

Άσκηση 4 (2011-12, Ερώτημα Κατανόησης)

Εξετάστε αν οι ακόλουθες προτάσεις είναι λογικά έγκυρες (βλέπε ορισμός 3.9, σελίδα 116). Σε περίπτωση που κάποια από τις προτάσεις δεν είναι λογικά έγκυρη, δώστε αντιπαράδειγμα (δηλαδή μια ερμηνεία στην οποία ο τύπος δεν είναι αληθής). Στην αντίθετη περίπτωση, χρησιμοποιήστε τον ορισμό της αλήθειας του Tarski (ορισμός 3.7, σελίδα 109) είτε τους νόμους της κατηγορηματικής λογικής (σελίδα 122) για να δείξετε την εγκυρότητα του τύπου.

- $\forall x \forall y[(P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))]$
- $\forall x(P(x) \rightarrow A(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall x A(x))$
- $[\forall x(A(x) \leftarrow B(x)) \wedge \forall x B(x)] \rightarrow \forall x A(x)$
- $\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \wedge Q(x,z)) \rightarrow (\neg Q(y,z) \vee P(x,z)))$

Απάντηση:

- $\forall x \forall y[(P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))]$

Δεν είναι έγκυρος. Έστω δομή με πεδίο τους φυσικούς αριθμούς. Έστω ότι $P(x)$ σημαίνει «ο x είναι άρτιος» και $R(x,y)$ σημαίνει «ο y είναι διπλάσιος του x». Τότε η παραπάνω πρόταση διαβάζεται «για κάθε άρτιο x και y, αν $y = 2*x$ τότε υπάρχει z τέτοιο ώστε $z = 2*x$ και $y = 2*z$». Η πρόταση αυτή είναι ψευδής (πχ. για $y = 4$ και $x = 2$).

- $\forall x(P(x) \rightarrow A(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall x A(x))$

Δεν είναι έγκυρος. Έστω δομή με πεδίο τους φυσικούς αριθμούς. Έστω ότι $P(x)$ σημαίνει «ο x είναι πολλαπλάσιο του 4» και $A(x)$ σημαίνει «ο x είναι άρτιος». Τότε, το αριστερό μέρος της ισοδυναμίας διαβάζεται «αν ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε είναι και άρτιος». Το δεξί μέρος της ισοδυναμίας διαβάζεται «αν υπάρχει αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε όλοι οι αριθμοί είναι άρτιοι», το οποίο είναι προφανώς ψευδές.

- $[\forall x(A(x) \leftarrow B(x)) \wedge \forall x B(x)] \rightarrow \forall x A(x)$

Είναι έγκυρος. Έστω M τυχαία δομή και v αποτίμηση στην M. Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος αληθεύει για την v στην M. Έστω ότι δεν αληθεύει. Τότε με βάση τον ορισμό της αλήθειας του Tarski παίρνουμε ότι ισχύει $M \models (\forall x(A(x) \leftarrow B(x)) \wedge \forall x B(x))[v]$ και δεν ισχύει $M \models (\forall x A(x))[v]$. Από την πρώτη σχέση παίρνουμε ότι $M \models \forall x(A(x) \leftarrow B(x))[v]$ και $M \models \forall x B(x)[v]$. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε ότι για όλα τα $d \in |M|$ ισχύει $M \models (A(x) \leftarrow B(x))[v(x \mid d)]$ και $M \models B(x)[v(x \mid d)]$. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε ότι για όλα τα $d \in |M|$ ισχύει $M \models A(x)[v(x \mid d)]$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας ότι δεν ισχύει το $M \models (\forall x A(x))[v]$. Κατά συνέπεια η αρχική μας υπόθεση ότι ο τύπος δεν αληθεύει για την v στην M μας οδήγησε σε άτοπο. Επομένως ο τύπος είναι έγκυρος.

- $\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \wedge Q(x,z)) \rightarrow (\neg Q(y,z) \vee P(x,z)))$

Δεν είναι έγκυρος. Έστω ότι $P(x,y)$ σημαίνει «η ευθεία x είναι παράλληλη με την ευθεία y» και $Q(x,y)$ σημαίνει «η ευθεία x είναι κάθετη στην ευθεία y». Τότε η παραπάνω πρόταση διαβάζεται «αν μια ευθεία x είναι παράλληλη προς μια ευθεία y και η x είναι κάθετη στην z, τότε ή η y δεν είναι κάθετη στη z ή η x είναι παράλληλη με τη z».

Άσκηση 5 (2012-13, Ερώτημα Κατανόησης)

Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι μεταξύ τους;

(1) $\forall x \neg(P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y))$

(2) $\forall x \exists y(P(x) \vee Q(x,y))$

(3) $\forall x P(x) \wedge \forall x \forall y \neg Q(x,y)$

(4) $\forall x(P(x) \vee \exists y Q(x,y))$

(5) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x \exists y Q(x,y)$

Απάντηση:

Αν στον πρώτο τύπο

$\forall x \neg (P(x) \to \exists y Q(x, y))$

περάσουμε το σύμβολο της άρνησης μέσα στην παρένθεση, γίνεται ισοδύναμος με τον

$\forall x (P(x) \wedge \neg \exists y Q(x, y))$

δηλαδή ισοδύναμος με τον

$\forall x (P(x) \wedge \forall y \neg Q(x, y))$

Όμως ο καθολικός ποσοδείκτης επιμερίζει το «και», οπότε ο τελευταίος είναι ισοδύναμος με τον

$\forall x P(x) \wedge \forall x \forall y \neg Q(x, y)$

δηλαδή με τον τρίτο από τους παραπάνω τύπους.

Επίσης, επειδή ο υπαρξιακός ποσοδείκτης επιμερίζει το «είτε», είναι προφανές ότι ο δεύτερος από τους παραπάνω τύπους

$\forall x \exists y (P(x) \vee Q(x, y))$

γίνεται ισοδύναμος με τον

$\forall x (\exists y P(x) \vee \exists y Q(x, y))$

κι αφού η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον $P(x)$, έχουμε ότι ο $\exists y P(x)$ είναι ισοδύναμος με τον $P(x)$, άρα εν τέλει ο δεύτερος με τον τέταρτο $\forall x (P(x) \vee \exists y Q(x, y))$.

Για τη διάκριση των ισοδυνάμων (1), (3) από τον (5): Αν μια δομή επαληθεύει τους (1), (3), τότε επαληθεύει την υπόθεση της συνεπαγωγής στον (5). Επομένως πρέπει να επαληθεύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής του (5). Αρα πρέπει κάθε στοιχείο a της δομής να σχετίζεται με κάποιο άλλο b μέσω της ερμηνείας του Q. Ομως ο (3) μας λέει επιπλέον ότι οποιαδήποτε δύο στοιχεία μίας δομής που τον επαληθεύει δεν σχετίζονται μέσω της ερμηνείας του Q. Αρα μια δομή που επαληθεύει τον (3) δε μπορεί να επαληθεύει τον (5).

Για τη διάκριση των ισοδυνάμων (2), (4) από τον (5): Ας πάρουμε $P(x)$ να λέει κάτι το αντιφατικό, π.χ $x \neq x$. Τότε οποιαδήποτε δομή, τετριμμένα, επαληθεύει τον (5), γιατί η υπόθεση της συνεπαγωγής δεν επαληθεύεται ποτέ ("όλα τα x είναι διαφορετικά από τον εαυτό τους"). Ας πάρουμε τώρα μια δομή που η "υπάρχει y ώστε $Q(x,y)$" να μην επαληθεύεται για όλα τα x. Για παράδειγμα στη δομή των φυσικών αριθμών με τη διάταξή τους $Q(x,y)$ να σημαίνει "ο x είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τον y". Σε αυτήν τη δομή λοιπόν ο (4) δεν επαληθεύεται, αφού λέει ότι "για κάθε x, ή ο x είναι διάφορος του εαυτού του ή υπάρχει y το οποίο είναι αυστηρά μικρότερο του x" (και φυσικά για $x = 0$ αυτό δεν είναι αλήθεια).

Για τη διάκριση των ισοδυνάμων (1), (3) από τα ισοδύναμα (2), (4): Ας ερμηνεύσουμε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών το $P(x)$ ως "$x = 0$" και $Q(x,y)$ ως "ο y είναι πολλαπλασιαστικά αντίστροφος του x" (δηλαδή $x \cdot y = 1$). Προφανώς οι πραγματικοί αριθμοί επαληθεύουν τον (4) ("κάθε πραγματικός αριθμός ή είναι ίσος με μηδέν ή έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο"). Επ' ουδενί όμως δεν επαληθεύει τον (3) ("κάθε αριθμός είναι ίσος με 0 και κανείς αριθμός δεν είναι αντίστροφος κάποιου άλλου"!).

Άσκηση 6 (2015-16)

Δίνονται οι ακόλουθοι τρεις τύποι της ΚΛ:

i. $\exists x \exists z((R(z,x) \to R(x,z)) \to \forall y R(x,y))$

ii. $\exists x \forall y((P(y) \to R(y,x)) \wedge (\forall u(P(u) \to R(u,y)) \to R(x,y)))$

iii. $\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y)) \to ((P(y) \wedge \neg R(y,x)) \to \exists z(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z))))$

α) Εξετάστε αν κάθε ένας από τους παραπάνω τύπους ικανοποιείται στη δομή με σύμπαν το σύνολο των φυσικών αριθμών όταν η ερμηνεία του *P(x)* είναι «το *x* είναι άρτιος αριθμός» και η ερμηνεία του *R(x,y)* είναι «το *x* είναι μικρότερο ή ίσο από το *y*».

β) Εξετάστε αν κάθε ένας από τους παραπάνω τύπους ικανοποιείται στη δομή με σύμπαν το σύνολο των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών όταν η ερμηνεία του *P(x)* είναι «το *x* είναι πεπερασμένο υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών» και η ερμηνεία του *R(x,y)* είναι «το *x* είναι υποσύνολο του *y*».

Απάντηση:

α)

i. Αφού ο τύπος έχει υπαρξιακούς ποσοδείκτες εξωτερικά, αρκεί να βρούμε συγκεκριμένες τιμές για τα x και z που να τον κάνουν αληθή. Παίρνοντας το x και το z να είναι και τα δύο ίσα με το 0, η αριστερή συνεπαγωγή του τύπου γίνεται αληθής: τόσο το δεξί όσο και το αριστερό της μέλος είναι και τα δύο αληθή, καθώς το 0 είναι μικρότερο ή ίσο του 0. Επίσης, ο υποτύπος $\forall y R(x,y)$ είναι και αυτός αληθής γιατί το 0 είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός. Κατά συνέπεια, και ο συνολικός τύπος είναι αληθής.

ii. Ο δεδομένος τύπος μπορεί ισοδύναμα να μετατραπεί χρησιμοποιώντας το νόμο κατανομής των ποσοδεικτών στον ακόλουθο τύπο:

$$\exists x(\forall y(P(y) \to R(y,x)) \wedge \forall y(\forall u(P(u) \to R(u,y)) \to R(x,y)))$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο υποτύπος $\forall y(P(y) \to R(y,x))$ είναι ψευδής στη δεδομένη δομή για όλα τα πιθανά x καθώς λέει «για κάθε y, αν το y είναι άρτιο τότε το y είναι μικρότερο ή ίσο από το x», κάτι το οποίο δεν ισχύει διότι οι άρτιοι αριθμοί μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλοι. Αφού ο αριστερότερος εσωτερικός τύπος είναι ψευδής για οποιοδήποτε x και αν επιλέξουμε, θα είναι ψευδής και ο συνολικός τύπος.

iii. Χρησιμοποιώντας την ταυτολογία $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$, μετατρέπουμε τον δεδομένο τύπο στον εξής (λίγο) πιο κατανοητό:

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y) \wedge P(y) \wedge \neg R(y,x)) \to \exists z(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z)))$$

Μπορεί τώρα εύκολα να δει κανείς ότι ο παραπάνω τύπος είναι αληθής στη δεδομένη δομή: αν διαλέξουμε δύο άρτιους αριθμούς που ο ένας είναι γνησίως μικρότερος του άλλου, τότε θα υπάρχει πάντα ένας φυσικός αριθμός που βρίσκεται ανάμεσα τους (για παράδειγμα, ο μέσος όρος των δύο αυτών αριθμών).

β)

i. Παίρνοντας το x και το z να είναι ίσα με το κενό σύνολο, ο τύπος γίνεται αληθής για παρόμοιους λόγους όπως και στο αντίστοιχο υποερώτημα του **(α)** μέρους.

ii. Όπως και στο (α) μέρος, θα χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο τύπο:

$$\exists x(\forall y(P(y) \rightarrow R(y,x)) \wedge \forall y(\forall u(P(u) \rightarrow R(u,y)) \rightarrow R(x,y)))$$

Αφού ο τύπος έχει ένα υπαρξιακό ποσοδείκτη εξωτερικά, αρκεί να βρούμε ένα συγκεκριμένο x που να τον κάνει αληθή. Παίρνουμε λοιπόν ως x το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών. Ο αριστερότερος εσωτερικός υποτύπος αληθεύει διότι κάθε πεπερασμένο σύνολο φυσικών είναι υποσύνολο του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών. Ο δεξιός εσωτερικός υποτύπος αληθεύει διότι κάθε υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών που περιέχει όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα, ταυτίζεται με ολόκληρο το σύνολο των φυσικών.

iii. Όπως και στο (α) μέρος, θα χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο τύπο:

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y) \wedge P(y) \wedge \neg R(y,x)) \rightarrow \exists z(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z)))$$

Ο τύπος αυτός είναι επίσης αληθής στη δεδομένη δομή. Αν x και y είναι δύο πεπερασμένα υποσύνολα του συνόλου των φυσικών αριθμών και ισχύει ότι $x \subset y$ (δηλαδή το x είναι γνήσιο υποσύνολο του y), τότε μπορούμε να πάρουμε ως z ένα μονοσύνολο που αποτελείται από ένα φυσικό αριθμό που δεν ανήκει στο y (και επομένως ούτε στο x, αφού το x είναι υποσύνολο του y). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ένα τέτοιο σύνολο z επαληθεύει τον τύπο $(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z))$ και συνεπώς και ολόκληρο τον παραπάνω τύπο.

Άσκηση 7 (2009-10)

Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 και έστω A μια ερμηνεία της. Έστω φ τύπος της Γ_1 ο οποίος περιέχει μια ελεύθερη μεταβλητή x. Κάθε τέτοιος τύπος *ορίζει στην* A ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι τα μέλη του $|A|$ για τα οποία ο τύπος αληθεύει. Για παράδειγμα, έστω η γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ της θεωρίας αριθμών (βιβλίο Κ. Δημητρακόπουλου, σελίδες 96-97) και η ερμηνεία της N (παράδειγμα 3.4(iii), σελίδα 104 του ίδιου βιβλίου). Τότε, ο τύπος:

$$\exists y(x \approx ((0')') \odot y)$$

ορίζει στην N το σύνολο των άρτιων αριθμών, ενώ ο τύπος:

$$\exists z(x \approx z \oplus ((0)')') \wedge \forall y \forall z[(x \approx y \odot z) \rightarrow ((y \approx (0)') \vee (z \approx (0)')]$$

ορίζει στην N το σύνολο των πρώτων αριθμών.

1. Βρείτε τύπους της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ οι οποίοι να ορίζουν στην N το κενό σύνολο $\varnothing$, το μονοσύνολο $\{1\}$, και το απειροσύνολο $\{0,1,2,3,\ldots\}$ των φυσικών αριθμών.
2. Έστω ερμηνεία N_e που ορίζεται ως εξής: το σύμπαν $|N_e|$ της N_e είναι το σύνολο $\{0,2,4,\ldots\}$ των άρτιων αριθμών. Στα σύμβολα $\oplus$ και $\odot$ αντιστοιχίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους άρτιους αριθμούς. Στο σύμβολο ' αντιστοιχίζεται η συνάρτηση $'^{N_e}(n) = n+2$, και στη σταθερά **0** αντιστοιχίζεται ο αριθμός 0. Εξετάστε ποια σύνολα ορίζονται στην N_e από τους τύπους $\exists y(x \approx ((0')') \odot y)$ και $\exists z(x \approx z \oplus ((0)')') \wedge \forall y \forall z[(x \approx y \odot z) \rightarrow ((y \approx (0)') \vee (z \approx (0)')]$.
3. Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ η οποία διαθέτει μόνο τα δύο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $\oplus$ και $\odot$. Με άλλα λόγια, η $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ δεν διαθέτει τη σταθερά **0** ούτε το μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο '. Έστω ερμηνεία N^- της $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ με σύμπαν το σύνολο των φυσικών αριθμών και με τις συνηθισμένες ερμηνείες των $\oplus$ και $\odot$. Βρείτε τύπους της $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ οι οποίοι να ορίζουν στην N^- το μονοσύνολο $\{0\}$ και το μονοσύνολο $\{1\}$.

Απάντηση:

1. Το κενό σύνολο μπορεί να αναπαρασταθεί από τον τύπο $(x \approx (x)')$ (γιατί δεν υπάρχει κανένα x το οποίο να είναι ίσο με $x+1$). Το μονοσύνολο $\{1\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί από τον τύπο $(x \approx (0)')$. Το απειροσύνολο $\{0,1,2,3,\ldots\}$ των

φυσικών αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί από τον τύπο $(x \approx x)$ (ο οποίος ικανοποιείται από όλους τους φυσικούς αριθμούς).

2. Ο τύπος $\exists y(x \approx ((0')') \square y)$ μπορεί να γραφτεί πιο απλά ως $\exists y(x \approx 4 \square y)$. Το y μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο $\{0, 2, 4, \ldots\}$. Επομένως, ο τύπος ορίζει όλους εκείνους τους άρτιους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 8.

Έστω τώρα ο τύπος $\exists z(x \approx z \oplus ((0)')') \wedge \forall y \forall z[(x \approx y \square z) \rightarrow ((y \approx (0)') \vee (z \approx (0)')]$, ο οποίος μπορεί να γραφεί: $\exists z(x \approx z \oplus 4) \wedge \forall y \forall z[(x \approx y \square z) \rightarrow ((y \approx 2) \vee (z \approx 2)]$.

Ο τύπος αυτός ορίζει όλους εκείνους τους άρτιους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 4 και οι οποίοι δεν μπορούν να γραφούν στη μορφή $(2 \cdot p) \cdot (2 \cdot q)$, όπου τα p, q είναι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2.

3. Αφού η $\Gamma_1^{\theta\alpha-}$ δεν διαθέτει τη σταθερά **0** ούτε το μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο ', θα πρέπει να αναπαραστήσουμε το μονοσύνολο $\{0\}$ και το μονοσύνολο $\{1\}$ με τη χρήση των υπόλοιπων συναρτησιακών συμβόλων. Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, ενώ το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Έτσι, ο τύπος $\forall y(y \approx x \oplus y)$ αναπαριστά το $\{0\}$ ενώ ο τύπος $\forall y(y \approx x \square y)$ αναπαριστά το $\{1\}$.

Άσκηση 8 (2015-16)

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ), **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

α) Έστω μία γλώσσα L πρώτης τάξης με ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο f και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο g. Έστω ερμηνεία της L με σύμπαν το σύνολο N στην οποία στο g ανατίθεται η γνωστή μας πρόσθεση φυσικών αριθμών ενώ στο f η συνάρτηση που για κάθε φυσικό αριθμό επιστρέφει το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το 4. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \exists y(f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall x \forall y(f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \forall y(f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall x \exists y(f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

β) Έστω μία γλώσσα *L* πρώτης τάξης με ένα μονομελές σύμβολο κατηγορήματος *P* και ένα διμελές σύμβολο κατηγορήματος *R*. Έστω ερμηνεία της *L* με σύμπαν το σύνολο των πραγματικών αριθμών και στην οποία το *P(x)* ερμηνεύεται ως «το *x* είναι ρητός αριθμός» και το *R(x,y)* ερμηνεύεται ως «το *y* είναι ίσο με το τετράγωνο του *x*» (δηλαδή $y = x^2$). Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \exists z((R(z,x) \to R(x,z)) \to \forall y R(x,y))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \forall y((P(y) \to R(y,x)) \wedge (\forall u(P(u) \to R(u,y)) \to R(x,y)))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \forall y \exists z((P(x) \to R(x,y)) \wedge P(y) \wedge \neg R(y,z))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall y(\exists z \forall t\ R(t,z) \wedge \forall x(R(x,y) \to \neg R(x,y)))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

Απάντηση:

α) Για κάθε μία από τις περιπτώσεις έχουμε τα ακόλουθα:

1. **Σωστό.** Ο παραπάνω τύπος γράφεται απλούστερα ως $\exists x \exists y((x+y) \bmod 4 \approx (x \bmod 4))$ και αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία. Για παράδειγμα, αρκεί να πάρουμε *x=y=4*.

2. **Λάθος.** Ο παραπάνω τύπος γράφεται απλούστερα ως $\forall x \forall y((x+y) \bmod 4 \approx (x \bmod 4))$ και είναι ψευδής στην παραπάνω ερμηνεία. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να πάρουμε *x=1* και *y=2*.

3. **Λάθος.** Ο παραπάνω τύπος γράφεται απλούστερα ως $\exists x \forall y((x+y) \bmod 4 \approx (x \bmod 4))$ και είναι ψευδής στην παραπάνω ερμηνεία. Δεν υπάρχει κανένα *x* που να ικανοποιεί τον τύπο για *y=1*.
4. **Σωστό.** Ο παραπάνω τύπος γράφεται απλούστερα ως: $\forall x \exists y((x+y) \bmod 4 \approx (x \bmod 4))$ και αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία. Για παράδειγμα, αρκεί να πάρουμε *y=4*.

β) Για κάθε μία από τις περιπτώσεις έχουμε τα ακόλουθα:

1. **Σωστό.** Αν διαλέξουμε *x=4* και *z=2*, ο υποτύπος $R(z,x) \to R(x,z)$ γίνεται ψευδής κάτω από τη δεδομένη ερμηνεία και τη συγκεκριμένη ανάθεση μεταβλητών. Κατά συνέπεια, ο συνολικός τύπος γίνεται αληθής.
2. **Λάθος.** Με το νόμο μετακίνησης των ποσοδεικτών, γράφουμε τον τύπο ως: $\exists x(\forall y(P(y) \to R(y,x)) \wedge \forall y(\forall u(P(u) \to R(u,y)) \to R(x,y)))$. Οποιοδήποτε *x* και αν επιλέξουμε, μπορούμε να βρούμε ένα ρητό αριθμό *y* τέτοιο ώστε το *x* να μην είναι ίσο με το τετράγωνο του *y*. Κατά συνέπεια ο υποτύπος $\forall y(P(y) \to R(y,x))$ γίνεται ψευδής και συνεπώς και ολόκληρος ο τύπος.
3. **Λάθος.** Με τους νόμους μετακίνησης των ποσοδεικτών, γράφουμε τον τύπο ως: $\exists x \forall y(P(x) \to R(x,y)) \wedge \forall y P(y) \wedge \forall y \exists z \neg R(y,z)$. Ο υποτύπος $\forall y P(y)$ ο οποίος λέει ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ρητός, είναι ψευδής και συνεπώς και ο συνολικός τύπος είναι ψευδής.
4. **Λάθος.** Με τους νόμους μετακίνησης των ποσοδεικτών, γράφουμε τον τύπο ως: $\exists z \forall t\ R(t,z) \wedge \forall y \forall x(R(x,y) \to \neg R(x,y))$. Ο νέος τύπος είναι ισοδύναμος με τον $\exists z \forall t\ R(t,z) \wedge \forall y \forall x \neg R(x,y)$, του οποίου οι δύο υποτύποι είναι αντιφατικοί.

Άσκηση 9 (2013-14)

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ), **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(A) Έστω μία γλώσσα πρώτης τάξης με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω ο τύπος $\varphi = \forall x \forall y[\exists z(P(x,z) \wedge P(z,y)) \rightarrow P(x,y)]$. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών όπου το $P(x,y)$ σημαίνει «το σύνολο x είναι υποσύνολο του συνόλου y».
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των δυαδικών συμβολοσειρών όπου το $P(x,y)$ σημαίνει «η συμβολοσειρά y είναι υποσυμβολοσειρά της συμβολοσειράς x».
3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών αριθμών όπου το $P(x,y)$ σημαίνει «ο φυσικός αριθμός x δεν διαιρείται από το φυσικό αριθμό y».
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος φ αληθεύει στο σύνολο των ανθρώπων όπου το $P(x,y)$ σημαίνει «ο άνθρωπος x είναι πρόγονος του ανθρώπου y».

(B) Εξετάστε αν οι τύποι που αναγράφονται παρακάτω είναι ανά ζεύγη ταυτολογικά ισοδύναμοι:

1. **(Σ/Λ)** $\exists x(\exists y P(x,y) \vee \neg\forall y \neg P(x,y))$ και $\exists u \exists v P(u,v)$
2. **(Σ/Λ)** $(\forall x(P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)) \wedge \exists x P(x))) \rightarrow \exists x \exists y Q(x,y)$ και $\forall u \exists v(P(u) \rightarrow Q(u,v))$
3. **(Σ/Λ)** $\forall x(\neg P(x) \wedge \exists y P(y))$ και $\forall x P(x)$
4. **(Σ/Λ)** $\exists x \forall y \neg P(x,y,z) \wedge \forall x \exists y Q(x,y,z)$ και $\exists x \forall y \forall u \exists v(\neg P(x,y,z) \wedge Q(u,v,z))$

Απάντηση:

(A) Ο δεδομένος τύπος είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\forall x \forall y \forall z[(P(x,z) \wedge P(z,y)) \rightarrow P(x,y)]$, γεγονός που μας διευκολύνει στην εξέταση των περιπτώσεων που μας δίνονται. Για κάθε μία από τις περιπτώσεις έχουμε τα ακόλουθα:

1. **Σωστό.** Αν A, B, C είναι σύνολα και έχουμε $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$ τότε ισχύει και $A \subseteq C$.

2. **Σωστό.** Αν u, v, w είναι συμβολοσειρές και ισχύει ότι η u είναι υποσυμβολοσειρά της v και η v υποσυμβολοσειρά της w, τότε και η u είναι υποσυμβολοσειρά της w.
3. **Λάθος.** Αν m, n, r είναι φυσικοί αριθμοί και ο m δεν διαιρείται από τον n και ο n δεν διαιρείται από τον r, τότε αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά και ο m δεν θα διαιρείται από τον r. Για παράδειγμα, το 10 δεν διαιρείται από το 3, το 3 δεν διαιρείται από το 2 αλλά το 10 διαιρείται από το 2.
4. **Σωστό.** Προφανώς, αν ο x είναι πρόγονος του z και ο z πρόγονος του y, τότε και ο x είναι πρόγονος του y.

(B) Για κάθε μία από τις περιπτώσεις έχουμε τα ακόλουθα:

1. **Σωστό.** Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης επιμερίζει το «είτε», οπότε η πρώτη πρόταση είναι ισοδύναμη με την $\exists x \exists y P(x, y) \vee \exists x \exists y P(x, y)$, η οποία είναι ισοδύναμη με το ένα διάζευγμα. Επιπλέον, αφού είναι δεσμευμένες οι μεταβλητές, μπορούμε να τους αλλάξουμε όνομα και να προκύψει η δεύτερη πρόταση.
2. **Λάθος.** Η πρώτη πρόταση είναι μια ταυτολογία ενώ η δεύτερη μπορεί να επαληθεύεται ή όχι, ανάλογα με την ερμηνεία των συμβόλων.
3. **Λάθος.** Ο καθολικός ποσοδείκτης επιμερίζει το «και», οπότε η πρώτη πρόταση γίνεται ισοδύναμη με την $\forall x \neg P(x) \wedge \forall x \exists y P(y)$, δηλαδή με την $\forall x \neg P(x) \wedge \exists y P(y)$ η οποία είναι αντίφαση, ενώ η δεύτερη μπορεί να επαληθεύεται ή όχι, ανάλογα με την ερμηνεία των συμβόλων.
4. **Σωστό.** Σωστό γιατί μπορούμε να επανονομάσουμε τις μεταβλητές x, y στο δεύτερο κομμάτι της σύζευξης και να εφαρμόσουμε νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών.