Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΔΕΟ13 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge2_deo13.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο φοιτητή	<Όνομα Φοιτητή> <Επώνυμο Φοιτητή>

ΚωδικόςΘΕ	ΠΛΗ 20
Κωδικός Τμήματος	<ΤΜΗΜΑ>
Ακ. Έτος	2017–2018
α/α ΓΕ	**6η**

Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Σύμβουλου	<Όνομα ΣΕΠ> <Επώνυμο ΣΕΠ>
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο	***Τετάρτη 23/05/2018***
Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

***Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	0

Υπογραφή Φοιτητή

Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου

Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20
Ακ. Έτος 2017-2018

Ε ρ γ α σ ί α 6η

Δένδρα: βασικές έννοιες, αλγόριθμοι, εφαρμογές

Σκοπός** της παρούσας εργασίας **είναι η μελέτη της διακριτής δομής των δένδρων, η οποία έχει σπουδαιότατες εφαρμογές στην Επιστήμη των Υπολογιστών.** Σχετίζεται με τις ενότητες 5.1 έως 5.3 του τόμου Α και τις ενότητες 2.1.1, 2.1.2, 2.3.1 και 2.3.2 του τόμου Β. Περιλαμβάνει τόσο τις ουσιώδεις έννοιες και ιδιότητες των δένδρων όσο και μερικές βασικές αλγοριθμικές εφαρμογές τους. Η εργασία πρέπει να γραφεί **ηλεκτρονικά** και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας study.eap.gr το αργότερο μέχρι την **Τετάρτη 23/5/2018**. **Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο αρχείο αυτό πρέπει να **προσθέσετε** τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει **5** βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις**. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Προηγούμενες εργασίες: Εργασία 6 του ακαδημαϊκού έτους 2002/2003 (ερωτήματα 11-16, 18), Εργασία 4 του ακαδημαϊκού έτους 2003/2004 (ερωτήματα 1-6) Εργασία 4 του ακαδημαϊκού έτους 2004/2005 (ερωτήματα 1-4, 7,8), Εργασία 6 του ακαδημαϊκού έτους 2005/2006 (ερωτήματα 1-7), Εργασία 6 του ακαδημαϊκού έτους 2006-8 (ερωτήματα 1-8), Εργασία 6 των ακαδημαϊκών ετών 2009-17 (ερωτήματα 1-5).

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων (Μέρος Β): Θέματα της θεωρίας γραφημάτων στις εξεταστικές περιόδους 2003 (ερωτήματα: Ιούνιος 4, Ιούλιος 3,8), 2004 (ερωτήματα: Ιούνιος 3,5), 2005 (ερωτήματα: Ιούνιος 5, Ιούλιος 3,5), 2006 (ερωτήματα: Ιούνιος 4), *2007 (ερωτήματα: Ιούνιος 4, Ιούλιος 3,4), 2008 (ερωτήματα: Ιούνιος 4, Ιούλιος 4), 2009 (ερωτήματα: Ιούνιος 3,4), 2011 (ερωτήματα: Ιούνιος 4, Ιούλιος 4), 2012 (ερωτήματα: Ιούνιος 3, Ιούλιος 3), 2013 (ερωτήματα: Ιούνιος 4, Ιούλιος 3)* .

Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων (Μέρος Α): *Το Μέρος Α στις εξετάσεις είναι και αυτό ένα σημαντικό μέρος των εξετάσεων. Αποτελείται από ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών. Παραδείγματα μπορείτε να βρείτε στο Μέρος Α των εξετάσεων Ιουνίου*-Ιουλίου 2006-17 αλλά και στις εργασίες των ετών 2006-17.

Συμπληρωματικό Υλικό: *Στην ηλεκτρονική διεύθυνση* http://study.eap.gr/course/view.php?id=78 *όπου είναι η κεντρική σελίδα της Θεματικής Ενότητας και επιλέγοντας τον σύνδεσμο «Συμπληρωματικό Υλικό», διατίθενται σημειώσεις για τη Θεωρία Γραφημάτων του κ. Σ. Κοντογιάννη, μια συλλογή ασκήσεων (με τις λύσεις τους) του κ. Χ. Σαρίμβεη, και ο πίνακας αντιστοίχησης των όρων που χρησιμοποιούνται στους Τόμους Α και Β, του κ. Χ. Σαρίμβεη. Για την αποδεικτική μέθοδο της επαγωγής είναι πολύ χρήσιμη η μελέτη του παράλληλου υλικού του κ. Δ. Φωτάκη, το οποίο διατίθεται μαζί με τον σχετικό οδηγό μελέτης, επίσης στην παραπάνω διεύθυνση.*

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτημα	Μέγιστος βαθμός	Βαθμός
1	25	
2	20	
3	25	
4	20	
5	10	
Συνολικός Βαθμός:	**100**	**0**

Γενικά Σχόλια:
<γενικά σχόλια για την εργασία από το Σύμβουλο-Καθηγητή>

Ερωτήματα

Ερώτημα 1.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε βασικές ιδιότητες δένδρων και ειδικότερα στα ανεξάρτητα σύνολα κορυφών ενός δέντρου.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #5

A. Η διάμετρος ενός δένδρου T ($\mathrm{diam}(T)$) είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών του δένδρου (Τόμος Β', σελ.151). Ένα ανεξάρτητο σύνολο είναι ένα σύνολο κορυφών με καμία μεταξύ τους ακμή. Να δείξετε ότι ένα δένδρο T περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $\left\lceil \frac{diam(T)+1}{2} \right\rceil$.

*(Σημείωση**:** Για κάθε πραγματικό αριθμό α, η παράσταση $\lceil \alpha \rceil$ συμβολίζει το μικρότερο ακέραιο ο οποίος είναι μεγαλύτερος ή ίσος με α.)*

B.

B.1 Να δείξετε ότι κάθε μη-τετριμμένο δένδρο T έχει τουλάχιστον δύο μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα. Για ποια δένδρα υπάρχουν ακριβώς δύο τέτοια σύνολα και γιατί;

(Σημείωση: μεγιστοτικό είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο το οποίο δεν μπορεί να επαυξηθεί με την προσθήκη μίας επιπλέον κορυφής, επειδή προφανώς οποιαδήποτε τέτοια κορυφή συνδέεται με κάποια από τις κορυφές του συνόλου.)

B.2 Να δείξετε, με επαγωγή στο n, ότι το γράφημα 'αστέρι' S_n (δηλαδή το διμερές γράφημα $K_{1,n-1}$) έχει το μεγαλύτερο αριθμό ανεξαρτήτων συνόλων μεταξύ όλων των δέντρων με n κορυφές. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

Ερώτημα 2.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε θέματα σχετικά με τους βαθμούς των κορυφών ενός δέντρου. Είναι σημαντική η χρήση του Λήμματος της Χειραψίας σε όλα τα υποερωτήματα.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #2, #3

Α. Να δείξετε ότι, αν σε ένα δένδρο T με n κορυφές δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό *2*, τότε ο αριθμός των φύλλων του T είναι μεγαλύτερος από $\frac{n}{2}$.

Β. Θεωρούμε ένα συνδεδεμένο γράφημα G με n κορυφές, μέγιστο βαθμό κορυφής Δ και n_i κορυφές με βαθμό $i \in \{1, \ldots, \Delta\}$.

Β.1 Να δείξετε ότι αν το G είναι δένδρο τότε η ποσότητα

$$\sum_{i=1}^{\Delta} i n_i$$

εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των κορυφών του G.

Β.2 Να δείξετε ότι το G είναι δένδρο αν και μόνο αν

$$n_1 = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta} (i-2) n_i.$$

(Υπόδειξη:Χρησιμοποιείστε το Β.1 και παρατηρήστε ότι $n = \sum_{i=1}^{\Delta} n_i$*.)*

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 3.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε ιδιότητες συνδετικών δένδρων και συγκεκριμμένα τον προσδιορισμό του αριθμού των συνδετικών δέντρων ενός γραφήματος με ετικέτες στις κορυφές του καθώς και την εύρεση του βάρους ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου σε ένα γράφημα με ειδικά βάρη στις ακμές του.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #4, #5, #6

Θεωρήστε ότι όλα τα γραφήματα του υποερωτήματος έχουν ετικέτες στις κορυφές τους (συνεπώς αυτές είναι διακεκριμμένες).

Α. Προσδιορίστε τον αριθμό των συνδετικών δέντρων των παρακάτω γραφημάτων και περιγράψτε τη διαδικασία απαρίθμησής τους.

Α.1 C_n (κύκλος με n κορυφές) και

Α.2 K_4.

Β. Θεωρήστε ένα πλήρες γράφημα με n κορυφές, οι οποίες έχουν τις ετικέτες $\{1,2.,\dots,n\}$ και στο οποίο η (μη-κατευθυνόμενη) ακμή $\{i,j\}, i,j \in \{1,2.,\dots,n\}$ έχει βάρος $c_{ij} = i + j$ (κάποια δηλαδή από τα βάρη είναι ίδια). Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal, δείξτε ότι γράφημα αυτό έχει μοναδικό ελάχιστο συνδετικό δέντρο και προσδιορίστε το βάρος του.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 4.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση στις ιδιότητες των δέντρων και των υποδέντρων τους και ειδικότερα στην ύπαρξη κοινής κορυφής μεταξύ υποδέντρων ή μονοπατιών.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #4, #7

Α.

Α.1 Για ποιες τιμές του n υπάρχει γράφημα G με n κορυφές τέτοιο ώστε τόσο το ίδιο όσο και το συμπλήρωμά του δεν περιέχουν κύκλο;

Α.2 Δείξτε ότι για κάθε δέντρο T και οποιεσδήποτε τρεις (όχι απαραίτητα διαφορετικές) κορυφές x, y, z, τα τρία μονοπάτια P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} που συνδέουν τα ζεύγη κορυφών xy, yz, xz, αντίστοιχα, περιέχουν κάποια κοινή κορυφή.

Β. Θεωρούμε ένα δένδρο T και $T_1, T_2, \ldots, T_k$ ($k > 1$) υποδέντρα του T με την ιδιότητα ότι οποιαδήποτε δύο από αυτά περιέχουν μία τουλάχιστον κοινή κορυφή.

Β.1 Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο k, να δείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον κορυφή κοινή σε όλα τα $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

(*Υπόδειξη: στο επαγωγικό βήμα θεωρήστε τις κοινές κορυφές (α) των δέντρων $T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$, (β) των δέντρων $T_2, \ldots, T_k$ και (γ) των δέντρων T_1, T_2 και χρησιμοποιήστε το Α.2.*)

Β.2 Να δείξετε ότι το υπογράφημα του T, το οποίο επάγεται από τις κορυφές οι οποίες είναι κοινές στα υποδέντρα $T_1, T_2, \ldots, T_k$, είναι επίσης δέντρο.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας σε λιγότερο από 15 λεπτά. Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπό-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) και αιτιολογώντας συνοπτικά σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #2, #3, #8, #9

Α.

1. Δεδομένου ότι ένα δένδρο είναι διμερές γράφημα, η προσθήκη μίας επιπλέον ακμής πάντα παράγει διμερές γράφημα.
2. Το συμπληρωματικό γράφημα ενός οποιουδήποτε δένδρου είναι συνδεδεμένο.
3. Δεν υπάρχει δένδρο με ίσο αριθμό εσωτερικών κόμβων και φύλλων.
4. Για οποιοδήποτε συνδεδεμένο γράφημα G και οποιαδήποτε δύο συνδετικά του δένδρα T_1, T_2, ισχύει ότι τα T_1, T_2 έχουν τουλάχιστον μία κοινή ακμή.

Β. Θεωρήστε δένδρο T με n κορυφές.

1. Αν το T έχει *2* φύλλα, τότε ο βαθμός κάθε κορυφής του είναι μικρότερος ή ίσος του *2*.
2. Αν το T έχει $n-1$ φύλλα τότε η προσθήκη μιας ακμής μεταξύ δύο οποιονδήποτε φύλλων δημιουργεί κύκλο μήκους *4*.
3. Αν το T είναι δυαδικό δένδρο με ρίζα, τότε τα φύλλα του είναι τουλάχιστον $n/2$.
4. Ο πίνακας πρόσπτωσης του T έχει $n-1$ στήλες.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 10