Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2017-2018

Ενδεικτικές Απαντήσεις 6ης Κύριας Εργασίας
Δένδρα: βασικές έννοιες, αλγόριθμοι, εφαρμογές

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε βασικές ιδιότητες δένδρων και ειδικότερα στα ανεξάρτητα σύνολα κορυφών ενός δέντρου.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #5

Α. Η διάμετρος ενός δένδρου T ($\mathrm{diam}(T)$) είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών του δένδρου (Τόμος Β', σελ.151). Ένα ανεξάρτητο σύνολο είναι ένα σύνολο κορυφών με καμία μεταξύ τους ακμή. Να δείξετε ότι ένα δένδρο T περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $\left\lceil \frac{diam(T)+1}{2} \right\rceil$.

(Σημείωση: Για κάθε πραγματικό αριθμό a, η παράσταση $\lceil a \rceil$ συμβολίζει το μικρότερο ακέραιο ο οποίος είναι μεγαλύτερος ή ίσος με a.)

Β.

Β.1 Να δείξετε ότι κάθε μη-τετριμμένο δένδρο T έχει τουλάχιστον δύο μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα. Για ποια δένδρα υπάρχουν ακριβώς δύο τέτοια σύνολα και γιατί;

(Σημείωση: μεγιστοτικό είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο το οποίο δεν μπορεί να επαυξηθεί με την προσθήκη μίας επιπλέον κορυφής, επειδή προφανώς οποιαδήποτε τέτοια κορυφή συνδέεται με κάποια από τις κορυφές του συνόλου.)

Β.2 Να δείξετε, με επαγωγή στο n, ότι το γράφημα 'αστέρι' S_n (δηλαδή το διμερές γράφημα $K_{1,n-1}$) έχει το μεγαλύτερο αριθμό ανεξαρτήτων συνόλων μεταξύ όλων των δέντρων με n κορυφές. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

Απάντηση

Α. Έστω P ένα μονοπάτι στο T το οποίο έχει $\mathrm{diam}(T)$ ακμές. Τότε, το P μπορεί να γραφτεί σαν σύνολο (διαδοχικών) κορυφών $\{x_0, x_1, \dots, x_{\mathrm{diam}(T)}\}$. Το υποσύνολο των κορυφών $\{x_i : i \bmod 2 = 0, i \in \{0, \dots, \mathrm{diam}(T)\}\}$ (δηλαδή το σύνολο $\{x_0, x_2, x_4, \dots\}$) είναι ανεξάρτητο με πληθάριθμο $\left\lceil \frac{diam(T)+1}{2} \right\rceil$.

Β.1. Όπως είναι γνωστό, κάθε μη-τετριμμένο δένδρο είναι διμερές γράφημα. Επομένως, υπάρχει διαχωρισμός του συνόλου των κόμβων V σε δύο σύνολα A, B τέτοια ώστε κάθε ακμή του T να συνδέει μία κορυφή του A με μία κορυφή του B. Άρα τα A, B αποτελούν δύο μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα.

Το γράφημα αστέρι έχει ακριβώς δύο μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα· το ένα περιέχει έναν κόμβο και το άλλο τους υπόλοιπους. Κάθε άλλο δένδρο T περιέχει ένα μονοπάτι

x, y, z, w. Τα ανεξάρτητα σύνολα κορυφών $\{x, z\}, \{y, w\}, \{x, w\}$ δεν μπορούν να εμφανίζονται μαζί ανά δύο σε κάποιο μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο. Άρα δεν μπορεί να υπάρχουν μόνο δύο ανεξάρτητα μεγιστοτικά υποσύνολα στο T.

Β.2. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών n.

<u>Βάση επαγωγής</u>: $n = 1$.

Υπάρχει μόνο ένα δένδρο το οποίο αποτελείται από μία κορυφή και μπορεί να θεωρηθεί μία εκφυλισμένη περίπτωση του γραφήματος αστέρα.

<u>Επαγωγικό βήμα</u> :

Θα δείξουμε ότι αν η πρόταση ισχύει για δένδρο $n - 1$ κορυφές (επαγωγική υπόθεση) τότε θα ισχύει για ένα δένδρο T με n κορυφές.

Έστω x ένα φύλλο του T και y ένας γείτονας του x. Τα ανεξάρτητα σύνολα του T αποτελούνται από τα ανεξάρτητα σύνολα του $T - x$ και όλα τα ανεξάρτητα σύνολα του $T - y - x$, τα οποία μπορούν να επαυξηθούν με το x. Τυπικά, αν $k(G)$ ο αριθμός των ανεξάρτητων συνόλων σε ένα γράφημα G, έχουμε

$$k(T) = k(T - x) + k(T - y - x). \tag{1}$$

Παρατηρήστε ότι επειδή το x είναι φύλλο, το $T - x$ είναι και αυτό δένδρο με μία κορυφή λιγότερη από το T. Δηλαδή, το $T - x$ είναι δένδρο με $n - 1$ κορυφές και άρα από την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι

$$k(T - x) \leq k(S_{n-1}).$$

Για τον δεύτερο όρο, παρατηρήστε ότι το $T - y - x$ είναι ένα γράφημα με δύο κορυφές λιγότερες από το T, δηλαδή $n - 2$ κορυφές, και ο αριθμός των ανεξαρτήτων συνόλων μεγιστοποιείται αν δεν υπάρχει καμία ακμή ανάμεσα στις κορυφές αυτές. Η ιδιότητα αυτή πρέπει να διατηρηθεί όταν κάθε ανεξάρτητο σύνολο επαυξηθεί με την κορυφή x. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν το T είναι γράφημα αστέρι και η κορυφή y σαν γείτονας του φύλλου x, είναι η κεντρική κορυφή (η κορυφή με βαθμό $n - 1$). Ο αριθμός των ανεξάρτητων συνόλων στην περίπτωση αυτή είναι

$$\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = 2^{n-2}.$$

(Ο όρος του αθροίσματος για $i = 0$, αριθμεί το κενό σύνολο κορυφών - το οποίο θεωρούμε ανεξάρτητο - και το οποίο επαυξάνεται με την κορυφή x παράγοντας ένα ανεξάρτητο σύνολο με μία κορυφή).

Συνολικά όταν $T = S_n$, αμφότεροι οι όροι του δεξιού μέλους της (1) μεγιστοποιούνται και άρα μεγιστοποιείται ο αριθμός των ανεξάρτητων συνόλων $k(T)$.

Το S_n έχει $n - 1$ κορυφές με βαθμό 1 και μία κορυφή με βαθμό $n - 1$. Κάθε υποσύνολο των $n - 1$ κορυφών είναι ανεξάρτητο. Επίσης το σύνολο που περιλαμβάνει μόνο τον κόμβο με βαθμό $n-1$ είναι ανεξάρτητο. Αν θεωρήσουμε ότι το κενό σύνολο (κορυφών) είναι ανεξάρτητο, ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$1+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}=1+2^{n-1}.$$

Ερώτημα 2.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε θέματα σχετικά με τους βαθμούς των κορυφών ενός δέντρου. Είναι σημαντική η χρήση του Λήμματος της Χειραψίας σε όλα τα υποερωτήματα.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #2, #3

Α. Να δείξετε ότι, αν σε ένα δένδρο T με n κορυφές δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό *2*, τότε ο αριθμός των φύλλων του T είναι μεγαλύτερος από $\frac{n}{2}$.

Β. Θεωρούμε ένα συνδεδεμένο γράφημα G με n κορυφές, μέγιστο βαθμό κορυφής Δ και n_i κορυφές με βαθμό $i \in \{1, \dots, \Delta\}$.

Β.1 Να δείξετε ότι αν το G είναι δένδρο τότε η ποσότητα

$$\sum_{i=1}^{\Delta} i n_i$$

εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των κορυφών του G.

Β.2 Να δείξετε ότι το G είναι δένδρο αν και μόνο αν

$$n_1=2+\sum_{i=3}^{\Delta}(i-2)n_i.$$

(Υπόδειξη:Χρησιμοποιείστε το Β.1 και παρατηρήστε ότι $n=\sum_{i=1}^{\Delta} n_i$.)

Απάντηση

Α. Επειδή το T είναι δένδρο, το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι $2(n-1)$. Αν το T έχει το πολύ $\frac{n}{2}$ φύλλα τότε υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{n}{2}$ κορυφές με βαθμό τουλάχιστον 3. Όμως τότε το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι τουλάχιστον $1\cdot\frac{n}{2}+3\cdot\frac{n}{2}=2n$ (άτοπο).

Β.1. Κάθε κορυφή με βαθμό i συνεισφέρει i στο δεδομένο άθροισμα. Επομένως το άθροισμα ισούται με το άθροισμα το βαθμών των κορυφών του G. Επομένως, σύμφωνα με το λήμμα της Χειραψίας το άθροισμα αυτό είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών. Επειδή το G είναι δένδρο ο αριθμός αυτός είναι $n-1$ και επομένως

$$\sum_{i=1}^{\Delta} in_i = 2(n-1).$$

B.2.

($\Rightarrow$) Εφ' όσον το G είναι δένδρο δείξαμε στο 2.B.1. ότι

$$\sum_{i=1}^{\Delta} in_i = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow n_1 + \sum_{i=2}^{\Delta} in_i = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow n_1 + \sum_{i=2}^{\Delta} in_i = 2\left(\sum_{i=1}^{\Delta} n_i - 1\right)$$

$$\Rightarrow n_1 + \sum_{i=2}^{\Delta} in_i = 2\left(n_1 + \sum_{i=2}^{\Delta} n_i - 1\right)$$

$$\Rightarrow n_1 + \sum_{i=2}^{\Delta} in_i = 2n_1 - 2 + 2\sum_{i=2}^{\Delta} n_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{\Delta} in_i - 2\sum_{i=2}^{\Delta} n_i = n_1 - 2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2)n_i + 2 = n_1$$

$$\Rightarrow (2-2)n_2 + \sum_{i=3}^{\Delta} (i-2)n_i + 2 = n_1$$

$$\Rightarrow n_1 = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta} (i-2)n_i$$

($\Leftarrow$) Ξεκινώντας από τη δεδομένη σχέση

$$n_1 = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta} (i-2)n_i$$

και διανύοντας την αντίστροφη πορεία από την παραπάνω καταλήγουμε στη σχέση

$$\sum_{i=1}^{\Delta} in_i = 2(n-1).$$

Επειδή $\sum_{i=1}^{\Delta} in_i = \sum_{v \in V(G)} d(v)$, όπου $d(v)$ ο βαθμός της κορυφής v, έχουμε

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2(n-1).$$

Όμως σύμφωνα με το λήμμα της Χειραψίας

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Επομένως ο αριθμός των ακμών $|E(G)|$ είναι ίσος με $n-1$ και άρα επειδή το G είναι συνδεδεμένο συνεπάγεται ότι είναι δένδρο.

Ερώτημα 3.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε ιδιότητες συνδετικών δένδρων και συγκεκριμμένα τον προσδιορισμό του αριθμού των συνδετικών δέντρων ενός γραφήματος με ετικέτες στις κορυφές του καθώς και την εύρεση του βάρους ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου σε ένα γράφημα με ειδικά βάρη στις ακμές του.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #4, #5, #6

Α. Προσδιορίστε τον αριθμό των συνδετικών δέντρων των παρακάτω γραφημάτων, των οποίων οι κορυφές έχουν ετικέτα (είναι δηλαδή διακεκριμμένες), και περιγράψτε τη διαδικασία απαρίθμησής τους.

Α.1 C_n (κύκλος με n κορυφές) και

Α.2 K_4.

Β. Θεωρήστε ένα πλήρες γράφημα με n κορυφές, οι οποίες έχουν τις ετικέτες $\{1,2.,\ldots,n\}$ και στο οποίο η (μη-κατευθυνόμενη) ακμή $\{i,j\}, i,j \in \{1,2.,\ldots,n\}$ έχει βάρος $c_{ij} = i + j$ (κάποια δηλαδή από τα βάρη είναι ίδια). Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal, δείξτε ότι γράφημα αυτό έχει μοναδικό ελάχιστο συνδετικό δέντρο και προσδιορίστε το βάρος του.

Απάντηση

Α.

Α.1 Ο κύκλος με n κορυφές έχει n ακμές, συνεπώς η αφαίρεση οποιασδήποτε από τις ακμές του δημιουργεί δέντρο και μάλιστα διαφορετικό από αυτό που προκύπτει από την αφαίρεση οποιασδήποτε άλλης ακμής (αφού οι κορυφές είναι διακεκριμμένες). Συνεπώς τα συνδετικά δέντρα του C_n είναι ακριβώς n.

Α.2 Τα συνδετικά δέντρα του K_4 είναι ισομορφικά (εφόσον οι κορυφές δε θεωρηθούν διακεκριμμένες) με το P_4 ή το $K_{1,3}$, τα δύο δηλαδή μη-ισομορφικά δέντρα με *4* κορυφές.

Θεωρώντας τις κορυφές διακεκριμμένες, υπάρχουν *4* τρόποι να προκύψει ως συνδετικό δέντρο το $K_{1,3}$ (όσοι και οι τρόποι επιλογής της μοναδικής κορυφής βαθμού *3*) και *12* τρόποι να προκύψει ως συνδετικό δέντρο το P_4 (*C(4,2)* τρόποι επιλογής των κορυφών βαθμού *2* και *2* επιλογές σύνδεσης με αυτές των κορυφών βαθμού *1*). Συνεπώς, υπάρχουν συνολικά *16* συνδετικά δέντρα του K_4.

Β. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Kruskal μπορούμε να αποδείξουμε ότι το μοναδικό ελάχιστο συνδετικό δέντρο θα περιέχει τις ακμές $(1, j), j = 2,3, .., n$. Ας εφαρμόσουμε επαγωγή στις ακμές που προστίθενται. Ισοδύναμα, εφαρμόζουμε επαγωγή στα βήματα του αλγορίθμου κατά τα οποία η ακμή που εξετάζεται πράγματι προστίθεται στο υπό κατασκευή δέντρο, δε δημιουργεί δηλαδή κύκλο με κάποιες από τις ακμές οι οποίες προστέθηκαν σε προηγούμενα βήματα.

Προφανώς η πρώτη ακμή που προστίθεται είναι η ακμή $(1,2)$, η οποία έχει το ελάχιστο βάρος μεταξύ όλων των ακμών (αυτή προστίθεται στην πρώτη του επανάληψη του αλγορίθμου του Kruskal).
Υποθέτοντας λοιπόν οι πρώτες k ακμές οι οποίες έχουν προστεθεί είναι οι $(1, j), j = 2,3, .., k$, θα δείξουμε ότι η επόμενη ακμή οι οποία θα προστεθεί είναι η $(1, k + 1)$. Αφού ο αλγόριθμος εξετάζει της ακμές σε αύξουσα σειρά ως προς το βάρος, οι ακμές οι οποίες εξετάζονται μετά την $(1, k)$ έχουν βάρος τουλάχιστον $k + 1$.
Παρατηρούμε ότι οι ακμές με βάρος ακριβώς $k + 1$ είναι οι $(2, k − 1)$, $(3, k − 2)$, κ.ό.κ., των οποίων αμφότερα τα άκρα ήδη συνδέονται στο υπό κατασκευή δέντρο με την κορυφή 1 (με βάση την επαγωγική υπόθεση), συνεπώς η προσθήκη τους θα δημουργούσε κύκλο. Παρατηρούμε επίσης ότι οι ακμές με βάρος ακριβώς $k + 2$ είναι οι $(1, k + 1)$, $(2, k)$, $(3, k − 1)$, κ.ό.κ., άρα ομοίως και με βάση την επαγωγική υπόθεση η προσθήκη οποιασδήποτε τέτοιας ακμής εκτός της $(1, k + 1)$ θα δημιουργούσε κύκλο στο στο υπό κατασκευή δέντρο. Συνεπώς, ο αλγόριθμος του Kruskal επιλέγει αμέσως μετά την ακμή $(1, k)$ την ακμή $(1, k + 1)$ ως την ελάχιστου βάρους ακμή, η οποία δε δημιουργεί κύκλο με τις ακμές $(1, j), j = 2,3, .., k$ οι οποίες έχουν ήδη προστεθεί.

Αφού η επιλογή κάθε ακμής είναι μοναδική, έπεται ότι και το ελάχιστο συνδετικό δέντρο είναι μοναδικό, περιέχει τις ακμές $(1, j), j = 2,3, .., n$, και το βάρος του ισούται με

$$3 + 4 + \cdots + n + 1 = \frac{(n + 4)(n − 1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + 3n − 4).$$

Παρατήρηση: Η μοναδικότητα του παραπάνω ελάχιστου συνδετικού δέντρου, έστω T, μπορεί να δικαιολογηθεί εύκολα ως εξής. Μπορούμε να ορίσουμε την κορυφή 1 ως ρίζα οποιουδήποτε συνδετικού δένδρου T' του γραφήματος μας. Έτσι, το βάρος του δένδρου δίνεται ως το άθροισμα των βαρών των ακμών που συνδέουν κάθε κορυφή $j > 1$ με το γονέα της στο δένδρο. Το βάρος αυτό είναι τουλάχιστον $j + 1$, επομένως αν υπάρχει ακμή $e \in T' - T$, τότε το βάρος του T' θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από αυτό του T.

Ερώτημα 4.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση στις ιδιότητες των δέντρων και των υποδέντρων τους και ειδικότερα στην ύπαρξη κοινής κορυφής μεταξύ υποδέντρων ή μονοπατιών.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #4, #7

Α.

Α.1 Για ποιες τιμές του n υπάρχει γράφημα G με n κορυφές τέτοιο ώστε τόσο το ίδιο όσο και το συμπλήρωμά του δεν περιέχουν κύκλο;

Α.2 Δείξτε ότι για κάθε δέντρο T και οποιεσδήποτε τρεις (όχι απαραίτητα διαφορετικές) κορυφές x, y, z, τα τρία μονοπάτια P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} που συνδέουν τα ζεύγη κορυφών xy, yz, xz, αντίστοιχα, περιέχουν κάποια κοινή κορυφή.

Β. Θεωρούμε ένα δένδρο T και $T_1, T_2, \ldots, T_k$ $(k > 1)$ υποδέντρα του T με την ιδιότητα ότι οποιαδήποτε δύο από αυτά περιέχουν μία τουλάχιστον κοινή κορυφή.

Β.1 Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο k, να δείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον κορυφή κοινή σε όλα τα $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

(*Υπόδειξη: στο επαγωγικό βήμα θεωρήστε τις κοινές κορυφές (α) των δέντρων $T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$, (β) των δέντρων $T_2, \ldots, T_k$ και (γ) των δέντρων T_1, T_2 και χρησιμοποιήστε το Α.2.*)

Β.2 Να δείξετε ότι το υπογράφημα του T, το οποίο επάγεται από τις κορυφές οι οποίες είναι κοινές στα υποδέντρα $T_1, T_2, \ldots, T_k$, είναι επίσης δέντρο.

Απάντηση

Α.

Α.1 Για $n = 1$, το μοναδικό γράφημα είναι αυτό με μία απομονωμένη κορυφή, το οποίο είναι ίδιο με το συμπληρωματικό του συνεπώς δεν έχει κύκλους. Για $2 \leq n \leq 4$, παρατηρούμε ότι το γράφημα P_n (δηλαδή το μονοπάτι με n κορυφές) έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

Για $n \geq 5$, ένα ακυκλικό γράφημα G θα έχει $m \leq n - 1$ ακμές. Συνεπώς το συμπληρωματικό του γράφημα $\bar{G}$ θα έχει

$$\frac{n(n-1)}{2} - m \geq \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) \geq \frac{5(n-1)}{2} - (n-1) > n-1$$

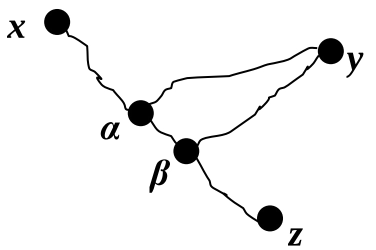
ακμές, άρα δεν μπορεί να είναι ακυκλικό.

Συνεπώς υπάρχει γράφημα G με n κορυφές τέτοιο ώστε τόσο το ίδιο όσο και το συμπλήρωμά του δεν περιέχουν κύκλο αν και μόνο αν $n \leq 4$.

A.2 Αν οποιεσδήποτε δύο από τις τρεις κορυφές u, v, w ταυτίζονται, είναι προφανές ότι υπάρχει μία κοινή κορυφή μεταξύ των τριών μονοπατιών. Θεωρούμε λοιπόν ότι οι τρεις κορυφές είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Αν τα μονοπάτια P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} δεν έχουν ανά δύο καμία κοινή κορυφή, τότε τα τρία αυτά μονοπάτια σχηματίζουν έναν απλό κύκλο, το οποίο είναι άτοπο αφού το T είναι δέντρο.

Συνεπώς υπάρχει μία κορυφή ανά ζεύγος μονοπατιών, δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κορυφή α ανήκει σε αμφότερα τα P_{xy}, P_{xz} κι ότι η κορυφή β ανήκει σε αμφότερα τα P_{xy}, P_{yz}. Αν οι κορυφές α και β διαφέρουν, τότε σχηματίζεται κύκλος από τα μονοπάτια $P_{ay}, P_{y\beta}, P_{\alpha\beta}$ (δείτε και το παρακάτω σχήμα), το οποίο είναι άτοπο.



B.

B.1 Η πρόταση ισχύει εξ' ορισμού για $k = 2$. Υποθέτοντας ότι οποιαδήποτε $k-1$ μεταξύ των υποδέντρων $T_1, T_2, \dots, T_k$ έχουν κοινή κορυφή, θα δείξουμε ότι υπάρχει κορυφή κορυφή κοινή σε όλα τα $T_1, T_2, \dots, T_k$.

Με βάση την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει κορυφή u κοινή σε όλα τα δέντρα $T_1, T_2, \dots, T_{k-1}$, κορυφή v κοινή σε όλα τα δέντρα $T_2, T_3, \dots, T_k$ και κορυφή w κοινή στα δέντρα T_1, T_2. Τυπικά:

$u \in V_1 = \bigcap_{i=1}^{k-1} V(T_i)$, $v \in V_2 = \bigcap_{i=2}^{k} V(T_i)$, $w \in V_3 = V(T_1) \cap V(T_2)$.

Τα μονοπάτια που συνδέουν ανά δύο τις κορυφές u, v, w έχουν τουλάχιστον μία κοινή κορυφή, με βάση του υποερώτημα Α.2. Αφού καθένα από τα δέντρα $T_1, T_2, \dots, T_k$ περιέχει οπωσδήποτε δύο από τις κορυφές u, v, w, περιέχει και ένα από τα μεταξύ τους μονοπάτια.

Συνεπώς η κοινή κορυφή αυτών των τριών μονοπατιών είναι κοινή σε όλα τα δέντρα $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

Β.2 Αφού το T είναι δέντρο, οποιοδήποτε επαγόμενο υπογράφημά του είναι ακυκλικό. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι το υπογράφημα το οποίο επάγεται από τις κορυφές οι οποίες είναι κοινές στα υποδέντρα $T_1, T_2, \ldots, T_k$, είναι συνεντικό. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι για οποιεσδήποτε δύο κορυφές $u, v \in V^* = \bigcap_{i=1}^{k} V(T_i)$, όλες οι κορυφές στο μοναδικό μονοπάτι P_{uw} το οποίο υπάρχει στο T ανήκουν επίσης στο V^*. Αυτό προκύπτει εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι, αφού οι κορυφές u, v ανήκουν σε οποιοδήποτε δέντρο $T_1, T_2, \ldots, T_k$, συνδέονται σε αυτό το δέντρο αυτό αναγκαστικά με το ίδιο μονοπάτι P_{uw} με το οποίο συνδέονται στο T (αφού οποιοδήποτε τέτοιο δέντρο είναι υποδέντρο του T).

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας σε λιγότερο από 15 λεπτά. Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υπό-ερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) και αιτιολογώντας συνοπτικά σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #2, #3, #8, #9

Α.

1. Δεδομένου ότι ένα δένδρο είναι διμερές γράφημα, η προσθήκη μίας επιπλέον ακμής πάντα παράγει διμερές γράφημα.
2. Το συμπληρωματικό γράφημα ενός οποιουδήποτε δένδρου είναι συνδεδεμένο.
3. Δεν υπάρχει δένδρο με ίσο αριθμό εσωτερικών κόμβων και φύλλων.
4. Για οποιοδήποτε συνδεδεμένο γράφημα G και οποιαδήποτε δύο συνδετικά του δένδρα T_1, T_2, ισχύει ότι τα T_1, T_2 έχουν τουλάχιστον μία κοινή ακμή.

Β. Θεωρήστε δένδρο T με n κορυφές.

1. Αν το T έχει *2* φύλλα, τότε ο βαθμός κάθε κορυφής του είναι μικρότερος ή ίσος του *2*.
2. Αν το T έχει $n-1$ φύλλα τότε η προσθήκη μιας ακμής μεταξύ δύο οποιονδήποτε φύλλων δημιουργεί κύκλο μήκους *4*.
3. Αν το T είναι δυαδικό δένδρο με ρίζα, τότε τα φύλλα του είναι τουλάχιστον $n/2$.
4. Ο πίνακας πρόσπτωσης του T έχει $n-1$ στήλες.

Απάντηση

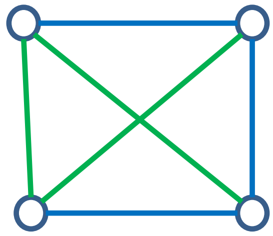
Α.

1. **Λάθος.** Ο κύκλος που θα δημιουργηθεί από την προσθήκη της ακμής μπορεί να είναι περιττού μήκους και επομένως το παραγόμενο γράφημα δεν είναι διμερές.

2. **Λάθος.** Το $\overline{K}_{1,n}$ δεν είναι συνδεδεμένο αφού περιέχει έναν κόμβο με βαθμό 0.

3. **Λάθος.** Το P_4 περιέχει δύο φύλλα και δύο εσωτερικούς κόμβους.

4. **Λάθος.** Θεωρήστε το γράφημα K_4 με τα συνδετικά δένδρα που σχηματίζονται από τις μπλέ και πράσινες ακμές.



Β.

1. **Σωστό**. Αν κάποια κορυφή είχε βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του *2* τότε το άθροισμα των βαθμών των κορυφών (με δύο μόνο κορυφές βαθμού *1*) θα ήταν μεγαλύτερο του *2(n-1)* συνεπώς, με βάση το λήμμα της χειραψίας, το δέντρο θα είχε περισσότερες από *n-1* ακμές (άτοπο).
2. **Λάθος**. Αν το T έχει $n-1$ φύλλα, τότε είναι το γράφημα ‘αστέρι’, στο οποίο η προσθήκη οποιασδήποτε ακμής δημιουργεί κύκλο μήκους *3*.
3. **Λάθος.** Αν το T είναι δυαδικό δένδρο αλλά όχι πλήρες, π.χ. με κάθε εσωτερική κορυφή να έχει βαθμό ακριβώς *2*, τότε θα έχει δύο φύλλα.
4. **Σωστό.** Εξ’ ορισμού ο πίνακας πρόσπτωσης έχει τόσες στήλες όσες και οι ακμές, δηλαδή *n-1* στην περίπτωση ενός δέντρου.