Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΔΕΟ13 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge2_deo13.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο φοιτητή	<Όνομα Φοιτητή> <Επώνυμο Φοιτητή>

ΚωδικόςΘΕ	ΠΛΗ 20
Κωδικός Τμήματος	<ΤΜΗΜΑ>
Ακ. Έτος	2017–2018
α/α ΓΕ	**3η**

Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Σύμβουλου	<Όνομα ΣΕΠ> <Επώνυμο ΣΕΠ>
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο	***Τετάρτη 31/1/2018***
Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

<u>Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή</u>*: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	0

Υπογραφή Φοιτητή

Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου

Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2017-2018

Ε ρ γ α σ ί α 3η

Κατηγορηματική Λογική

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της Κατηγορηματικής Λογικής.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας* study.eap.gr *μέχρι την* ***Τετάρτη 31/1/2018***.

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο αρχείο αυτό πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* ***5*** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις:*

   Προηγούμενες εργασίες: Η $3^η$ εργασία των ακαδημαϊκών ετών 2005-2017, η $6^η$ εργασία των ετών 2004-5, 2003-4, καθώς και η $2^η$ εργασία του έτους 2002-3.

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ενδεικτικά αναφέρονται τα θέματα Κατηγορηματικής Λογικής στις εξεταστικές περιόδους των ετών 2004-2017.

   Σημειώσεις και Υπερκείμενα για την Κατηγορηματική Λογική: Στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://study.eap.gr/mod/folder/view.php?id=3501, *στο φάκελο «Σημειώσεις - Ασκήσεις - ΕΔΥ», διατίθεται το υπερκείμενο για τη Λογική της Ε. Φουστούκου. Για την αποδεικτική μέθοδο της επαγωγής είναι πολύ χρήσιμη η μελέτη του παράλληλου υλικού του Δ. Φωτάκη, το οποίο διατίθεται μαζί με τον σχετικό οδηγό μελέτης, επίσης στην παραπάνω διεύθυνση.*

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτημα	Μέγιστος βαθμός	Βαθμός
1	20	
2	20	
3	25	
4	25	
5	10	
Συνολικός Βαθμός:	**100**	**0**

Γενικά Σχόλια:
<γενικά σχόλια για την εργασία από το Σύμβουλο-Καθηγητή>

Ερωτήματα

Ερώτημα 1.

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξοικείωση με τη χρήση της Κατηγορηματικής Λογικής για την περιγραφή προτάσεων της φυσικής γλώσσας. Στο πρώτο υποερώτημα δίνονται τρεις προτάσεις της φυσικής γλώσσας και ζητείται να μετατραπούν σε τύπους της Κατηγορηματικής Λογικής. Στο δεύτερο υποερώτημα ζητείται η ακριβώς αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η μετατροπή από την Κατηγορηματική Λογική στη φυσική γλώσσα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #1, #2 και #3.

Έστω τα κατηγορήματα $page(p)$, $mentions(p,w)$, $links(p_1,p_2)$, $person(x)$, $word(w)$, και $recommends(x,p)$, με ερμηνείες «το p είναι ιστοσελίδα», «η ιστοσελίδα p αναφέρει τη λέξη w», «η ιστοσελίδα p_1 περιέχει υπερσύνδεσμο προς την ιστοσελίδα p_2», «ο x είναι άνθρωπος», «το w είναι λέξη», «ο άνθρωπος x συστήνει την ιστοσελίδα y».

α) Δώστε τύπους του κατηγορηματικού λογισμού που να εκφράζουν τις ακόλουθες προτάσεις:

i. Η λέξη "logic" εμφανίζεται σε όλες τις σελίδες που συστήνει ο Alfred.
ii. Υπάρχει ιστοσελίδα που τη συστήνουν όλοι όσοι συστήνουν ιστοσελίδες που περιέχουν τη λέξη "math".
iii. Όλες οι σελίδες που έχουν εισερχόμενο υπερσύνδεσμο από σελίδα που αναφέρει τον Αριστοτέλη, έχουν το πολύ ένα υπερσύνδεσμο σε σελίδα που αναφέρει τον Tarski.

Τα ονόματα όπως "logic", "Alfred", "math", "Tarski" μπορείτε να θεωρήσετε ότι είναι σταθερές της γλώσσας.

β) Εξηγήστε σε φυσική γλώσσα τι εκφράζουν οι παρακάτω τύποι. Θα πρέπει οι εκφράσεις που θα δώσετε να είναι όσο το δυνατόν πιο φυσικές και όχι απλώς να μεταφράζουν τους τύπους. Για παράδειγμα, αποφύγετε εκφράσεις της μορφής «Υπάρχει x έτσι ώστε για κάθε y…» (δηλαδή εκφράσεις που περιέχουν μεταβλητές).

i. $\neg\exists x\exists p[person(x)\wedge page(p)\wedge recommends(x,p)\wedge links(p,p)]$

ii.
$$\begin{aligned}&\forall x\forall y[(person(x)\wedge person(y)\wedge\neg(x\approx y))\rightarrow\\&\quad\exists p(page(p)\wedge((recommends(x,p)\wedge\neg recommends(y,p))\vee\\&\qquad(recommends(y,p)\wedge\neg recommends(x,p))))]\end{aligned}$$

iii.
$$\begin{aligned}&\forall p[(page(p)\wedge mentions(p,logic)\wedge\neg mentions(p,predicate))\rightarrow\\&\quad\exists q(page(q)\wedge mentions(q,propositional)\wedge links(p,q))]\end{aligned}$$

Λύση.

α)

i. $\forall p[page(p) \wedge recommends(Alfred, p) \rightarrow mentions(p, logic)]$

Αλλά και η λύση, στην οποία δηλώνεται με κατηγορήματα πως *logic* είναι λέξη και πως Alfred είναι άνθρωπος, είναι σωστή. Απλά είναι πλεονασμός. Δηλαδή,

$$\forall p[page(p) \wedge person(Alfred) \wedge recommends(Alfred, p) \rightarrow mentions(p, logic) \wedge word(logic)]$$

ii) $\exists p\big[page(p) \wedge \forall x \forall q\big(person(x) \wedge page(q) \wedge recommends(x, q) \wedge mentions(q, math) \rightarrow recommends(x, p)\big)\big]$

Αλλά και η λύση, στην οποία δηλώνεται με κατηγόρημα πως *math* είναι λέξη, είναι σωστή. Απλά είναι πλεονασμός. Δηλαδή,

$$\exists p\big[page(p) \wedge \forall x \forall q\big(person(x) \wedge page(q) \wedge recommends(x, q) \wedge word(math) \wedge mentions(q, math) \rightarrow recommends(x, p)\big)\big].$$

iii) Πρώτα, για συντομία, θα ορίσουμε με τον τύπο $R(p, w)$ τη πρόταση
«Η σελίδα p έχει το πολύ ένα υπερσύνδεσμο σε σελίδα που αναφέρει τη λέξη w.»

$$R(p, w) \coloneqq \forall p_1 \forall p_2 [page(p) \wedge page(p_1) \wedge page(p_2) \wedge link(p, p_1) \wedge link(p, p_2) \wedge word(w) \wedge mentions(p_1, w) \wedge mentions(p_2, w) \rightarrow p_1 \approx p_2].$$

Οπότε ο τελικός τύπος είναι

$$\forall p_3 \forall p_4 [page(p_3) \wedge page(p_4) \wedge mentions(p_3, Αριστοτέλης) \wedge links(p_3, p_4) \rightarrow R(p_4, Tarski)].$$

Όπως και στα προηγούμενα υποερωτήματα, η λύση, στην οποία δηλώνεται με κατηγόρημα πως *Tarski* και *Αριστοτέλης* είναι λέξεις, είναι σωστή. Απλά είναι πλεονασμός. Δηλαδή,

$$\forall p_3 \forall p_4 [page(p_3) \wedge page(p_4) \wedge word(Αριστοτέλης) \wedge mentions(p_3, Αριστοτέλης) \wedge links(p_3, p_4) \rightarrow word(Tarski) \wedge R(p_4, Tarski)]$$

β)

i. Κανείς δεν συστήνει σελίδα, η οποία περιέχει υπερσύνδεσμο προς τον εαυτό της.

ii. Για οποιουσδήποτε δύο διαφορετικούς ανθρώπους υπάρχει κάποια ιστοσελίδα που την συνιστά ο ένας αλλά όχι ο άλλος.

iii. Όλες οι ιστοσελίδες που αναφέρουν τη λέξη *logic*, αλλά όχι τη λέξη *predicate*, έχουν έναν υπερσύνδεσμο σε σελίδα που αναφέρει τη λέξη *propositional*.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 2.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #4, #5 και #6.

Σκοπός του ερωτήματος αυτού είναι η περαιτέρω εξοικείωση με τη χρήση της Κατηγορηματικής Λογικής, και πιο συγκεκριμένα με τις έννοιες της «ικανοποιησιμότητας», του «μοντέλου», και της «λογικής ισοδυναμίας».

Στα παρακάτω ερωτήματα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, αν χρειάζεται, τον ορισμό της αλήθειας του Tarski ή τους νόμους της Κατηγορηματικής λογικής.

α) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 η οποία περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο R και ένα τριμελές συναρτησιακό σύμβολο *f*. Έστω *A* ερμηνεία της Γ_1, με $|A|=\{0,1,2\}$, η οποία αντιστοιχίζει στο κατηγόρημα R τη σχέση $\{(1,1),(1,2),(2,2),(1,0),(2,0)\}$, και στο συναρτησιακό σύμβολο f τη συνάρτηση: $f(x,y,z)=(x-y+z)\bmod 3$. Εξηγήστε ποιοί από τους ακόλουθους τύπους είναι αληθείς στην *A:*

i. $\forall x \exists y(R(f(x,y,x), f(x,x,x)))$

ii. $\forall x \exists y(R(f(x,y,x),y) \rightarrow R(y, f(x,y,x)))$

Σημείωση: Ισχύει -1 mod 3 = 2.

β) Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 η οποία περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο R, δύο μονομελή κατηγορήματα R_1, R_2 και ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο *f*. Εξηγήστε ποιοί από τους ακόλουθους τύπους είναι λογικά ισοδύναμοι:

i. $\forall y \exists z (R(x,y) \wedge R(x,z))$ και $\exists z \forall y (R(x,y) \wedge R(x,z))$.

ii. $R_1(f(x)) \wedge R_2(f(x))$ και $\exists y (R_1(y) \wedge R_2(y) \wedge (y \approx f(x)))$

Λύση.

α)

i. Κάνοντας την ερμηνεία των συμβόλων *R* και *f*, έχουμε:

- Για x=0 έχουμε την τιμή $f(0,0,0)=0$. Άρα για y=1 παίρνουμε ότι ικανοποιείται η σχέση $R(2,0)$ στη δομή *A*.
- Για x=1 έχουμε την τιμή $f(1,1,1)=1$. Άρα για y=1 παίρνουμε ότι ικανοποιείται η σχέση $R(1,1)$ στη δομή *A*.
- Για x=2 έχουμε την τιμή $f(2,2,2)=2$. Άρα για y=0 παίρνουμε ότι ικανοποιείται η σχέση $R(1,2)$ στη δομή *A*.

Συνεπώς η απάντηση είναι: ο δοσμένος τύπος (για την ακρίβεια η πρόταση) αληθεύει στη δομή *A*.

ii. Κάνοντας την ερμηνεία των συμβόλων *R* και *f*, έχουμε:

- Για x=0 παίρνουμε y=1 και ικανοποιείται η συνεπαγωγή στη δομή *A*.
- Για x=1 παίρνουμε y=1 και ικανοποιείται η συνεπαγωγή στη δομή *A*.
- Για x=2 παίρνουμε y=2 και ικανοποιείται η συνεπαγωγή στη δομή *A*.

Άρα η απάντηση είναι: ο δοσμένος τύπος (η πρόταση) αληθεύει στη δομή *A*.

β)

i. Εφαρμόζοντας τους νόμους ποσοδεικτών (σελ.122) και τον νόμο άρνησης συνεπαγωγής (σελ. 38) έχουμε ότι είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή,

Μετασχηματισμός τύπου		Αιτιολόγηση
$\forall y \exists z \big(R(x,y) \wedge R(x,z)\big) \equiv$		νόμος άρνησης συνεπαγωγής
$\forall y \exists z \neg (R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)) \equiv$		νόμος άρνησης ποσοδεικτών
$\forall y \neg \forall z (R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)) \equiv$		νόμος άρνησης ποσοδεικτών
$\neg \exists y \forall z (R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)) \equiv$		νόμος μετακίνησης ποσοδεικτών, διότι η μεταβλητή z δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον R(x,y)
$\neg \exists y (R(x,y) \rightarrow \forall z \neg R(x,z)) \equiv$		νόμος μετακίνησης ποσοδεικτών, διότι η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall z \neg R(x,z)$

$\neg(\forall y R(x,y) \rightarrow \forall z \neg R(x,z)) \equiv$		νόμος μετακίνησης ποσοδεικτών, διότι η μεταβλητή z δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall y R(x,y)$
$\neg \forall z(\forall y R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)) \equiv$		νόμος μετακίνησης ποσοδεικτών, διότι η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\neg R(x,z)$
$\neg \forall z \exists y(R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)) \equiv$		νόμος άρνησης ποσοδεικτών
$\exists z \neg \exists y(R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)) \equiv$		νόμος άρνησης ποσοδεικτών
$\exists z \forall y \neg(R(x,y) \rightarrow \neg R(x,z)) \equiv$		νόμος άρνησης συνεπαγωγής
$\exists z \forall y(R(x,y) \wedge R(x,z))$		

ii. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της αλήθειας του Tarski έχουμε ότι είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή, έστω τυχαία δομή *A*, με σύμπαν |*A*|, η οποία ερμηνεύει τα δύο μονομελή κατηγορήματα R_1, R_2 και το μονομελές συναρτησιακό σύμβολο *f* και έστω μία αποτίμηση *v* στην *A*. Τότε παίρνοντας για *y* την εικόνα *f(a)*, όπου *a* είναι *v(x)*, δείχνουμε ότι ο ένας τύπος είναι αληθής αν και μόνο αν ό άλλος τύπος είναι αληθής. Πιο αναλυτικά,

$$A \vDash (R_1(f(x)) \wedge R_2(f(x)))[v] \text{ ανν}$$

$$A \vDash R_1(f(x))[\mathrm{v}] \text{ και } A \vDash R_2(f(x))[\mathrm{v}] \text{ ανν}$$

$$\overline{v}(f(x)) \in R_1^A \text{ και } \overline{v}(f(x)) \in R_2^A \text{ ανν}$$

$$f^A(v(x)) \in R_1^A \text{ και } f^A(v(x)) \in R_2^A \text{ ανν}$$

$$f^A(a) \in R_1^A \text{ και } f^A(a) \in R_2^A \text{ ανν}$$

$$\textit{υπάρχει } b \in |A| \textit{ τέτοιο ώστε } b = f^A(a) \textit{ και } b \in R_1^A \text{ και } b \in R_2^A \text{ ανν}$$

$$\textit{υπάρχει } b \in |A| \textit{ τέτοιο ώστε } b \in R_1^A \text{ και } b \in R_2^A \text{ και } b = f^A(a) \text{ ανν}$$

$$\textit{υπάρχει } b \in |A| \textit{ τέτοιο ώστε } A \vDash R_1(y)[\mathrm{v(y|b)}] \text{ και } A \vDash R_2(y)[\mathrm{v(y|b)}] \text{ και}$$

$$y \approx f(x)[v(y|b)] \text{ ανν}$$

$$\textit{υπάρχει } b \in |A| \textit{ τέτοιο ώστε } A \vDash (R_1(y) \wedge R_2(y) \wedge (y \approx f(x)))[v(y|b)] \text{ ανν}$$

$$A \vDash \exists y(R_1(y) \wedge R_2(y) \wedge (y \approx f(x)))[v].$$

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:
<σχόλια>

Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 3.

Στο παρόν ερώτημα επιχειρείται η εξοικείωση με την έννοια της «ερμηνείας», του «σύμπαντος μιας ερμηνείας», της «αλήθειας ενός τύπου σε σχέση με μια δεδομένη ερμηνεία», και της «ισοδυναμίας τύπων».

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #4, #5 και #6.

α) Έστω $A(x,y)$ τύπος με δύο ακριβώς ελεύθερες μεταβλητές x και y. Υπάρχει πάντοτε μοντέλο του τύπου $(\forall x \exists y A(x,y)) \to (\exists y \forall x A(x,y))$ ανεξάρτητα από το ποιος είναι ο τύπος $A(x,y)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Έστω F ένας τύπος της μορφής:

$$\forall x \forall y (A(x,y) \to A(y,x)) \to$$
$$(\forall u \forall v (A(u,v) \to B(u,v)) \to \exists x \exists y (A(x,y) \to C(x,y)))$$

όπου A, B, C είναι τυχαίοι τύποι με δύο ακριβώς ελεύθερες μεταβλητές ο καθένας. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας τύπος $G(x,y)$ με δύο ακριβώς ελεύθερες μεταβλητές ο οποίος δεν έχει καθόλου ποσοδείκτες και είναι τέτοιος ώστε ο τύπος F να είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\exists x \exists y G(x,y)$.

Λύση.

α) Ναι, υπάρχει. Για παράδειγμα, ένα μοντέλο M, το σύμπαν του οποίου να αποτελείται από ακριβώς ένα στοιχείο. Έστω λοιπόν $|M| = \{a\}$. Οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Στο M ικανοποιείται η σχέση $A(a,a)$. Ο έλεγχος του ποσοδείκτη $\forall x$ είναι απλός, μιας και έχουμε μόνο μια τιμή για το x. Σε αυτή τη περίπτωση αληθεύει και το αριστερό μέλος της συνεπαγωγής και το δεξί μέλος της συνεπαγωγής. Άρα από τον ορισμό αλήθειας του Tarski ο δοσμένος τύπος αληθεύει στο M.

(2) Στο M δεν ικανοποιείται η σχέση $A(a,a)$. Σε αυτή την περίπτωση δεν αληθεύει το αριστερό μέλος της συνεπαγωγής, άρα η συνεπαγωγή ισχύει τετριμμένα. Δηλαδή, ο δοσμένος τύπος αληθεύει στο M.

β) Παρατηρούμε καταρχήν ότι οι μεταβλητές u και v μπορούν να αντικατασταθούν από x και y αντίστοιχα. Έπειτα, εφαρμόζουμε τους κανόνες αντικατάστασης συνεπαγωγής, και ύστερα τους κανόνες μετακίνησης ποσοδεικτών. Δηλαδή,

$$F \equiv \forall x \forall y \big(A(x,y) \to A(y,x)\big) \to$$

$$\left(\forall x\forall y\big(A(x,y)\to B(x,y)\big)\to\exists x\exists y\big(A(x,y)\to C(x,y)\big)\right)\equiv$$

$$\neg\forall x\forall y\big(A(x,y)\to A(y,x)\big)\vee$$
$$\left(\forall x\forall y\big(A(x,y)\to B(x,y)\big)\to\exists x\exists y\big(A(x,y)\to C(x,y)\big)\right)\equiv$$

$$\exists x\exists y\neg\big(A(x,y)\to A(y,x)\big)\vee$$
$$\left(\forall x\forall y\big(A(x,y)\to B(x,y)\big)\to\exists x\exists y\big(A(x,y)\to C(x,y)\big)\right)\equiv$$

$$\exists x\exists y\neg\big(A(x,y)\to A(y,x)\big)\vee$$
$$\left(\neg\forall x\forall y\big(A(x,y)\to B(x,y)\big)\vee\exists x\exists y\big(A(x,y)\to C(x,y)\big)\right)\equiv$$

$$\exists x\exists y\neg\big(A(x,y)\to A(y,x)\big)\vee$$
$$\left(\exists x\exists y\neg\big(A(x,y)\to B(x,y)\big)\vee\exists x\exists y\big(A(x,y)\to C(x,y)\big)\right)\equiv$$

$$\exists x\exists y\left(\neg\big(A(x,y)\to A(y,x)\big)\vee\neg\big(A(x,y)\to B(x,y)\big)\vee\big(A(x,y)\to C(x,y)\big)\right)\equiv$$

$$\exists x\exists y G(x,y),$$

όπου $G(x,y)$ είναι ο τύπος:

$$\left(\neg\big(A(x,y)\to A(y,x)\big)\vee\neg\big(A(x,y)\to B(x,y)\big)\vee\big(A(x,y)\to C(x,y)\big)\right).$$

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

Ερώτημα 4.

Σκοπός του ερωτήματος αυτού είναι επίσης η εξοικείωση με τη χρήση της Κατηγορηματικής Λογικής (ΚΛ). Πιο συγκεκριμένα, στο ερώτημα αυτό χρησιμοποιείται η ΚΛ για να εκφράσουμε κάποιες σχέσεις ανάμεσα σε σύνολα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #1, #2 και #3.

Στο ερώτημα αυτό θα γράψουμε τύπους που εκφράζουν σχέσεις ανάμεσα σε σύνολα που περιέχουν φυσικούς αριθμούς. Στους τύπους μας θα χρησιμοποιούμε μεταβλητές όπως $s_1, s_2, \ldots$ για να αναπαριστούμε σύνολα, και μεταβλητές όπως $x, y, z, \ldots$ για να αναπαριστούμε φυσικούς αριθμούς. Έχουμε στη διάθεσή μας δύο μονομελή κατηγορήματα, το set και το nat. Θα ερμηνεύουμε το $set(s)$ ως «το s είναι σύνολο» και το $nat(x)$ ως «το x είναι φυσικός αριθμός». Έχουμε στη διάθεσή μας και ένα μοναδικό διμελές κατηγόρημα, το $\in$. Αντί για το πιο τυπικό $\in(x,s)$ θα γράφουμε το πιο βολικό (και γνωστό) $x \in s$ το οποίο θα διαβάζουμε ως «το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο s». Έχουμε επίσης μία σταθερά, το $\varnothing$, που αναπαριστά το κενό σύνολο.

Για παράδειγμα, μπορούμε να εκφράσουμε την ιδιότητα «το σύνολο s_1 είναι υποσύνολο του συνόλου s_2», ως εξής:

$$subset(s_1, s_2) := set(s_1) \land set(s_2) \land \forall z((nat(z) \land (z \in s_1)) \to (z \in s_2))$$

Θα επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε μια έκφραση όπως το $subset(s_1, s_2)$ ως συντομογραφία του τύπου που βρίσκεται στα δεξιά του. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε την ιδιότητα «το σύνολο s_1 είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου s_2», ως εξής:

$$proper\_subset(s_1, s_2) := subset(s_1, s_2) \land \neg(s_1 \approx s_2)$$

Έστω n δεδομένος φυσικός αριθμός.

α) Δώστε τύπο $subset_n(s, y_1, \ldots, y_n)$ ο οποίος θα εκφράζει το $s \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$, όπου s σύνολο, $n \geq 0$, και $y_1, \ldots, y_n$ φυσικοί αριθμοί. Υπόδειξη: δώστε ένα τύπο για $n = 0$ και έναν για $n > 0$. Για $n = 0$ θα πρέπει να ορίσετε το $subset_0(s)$ το οποίο θα εκφράζει το $s \subseteq \varnothing$ (τι σημαίνει αυτό για το s;).

β) Δώστε τύπο $atmost_n(s)$ ο οποίος θα εκφράζει το γεγονός ότι το σύνολο s έχει το πολύ n στοιχεία, όπου $n \geq 0$. Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το $subset_n$.

γ) Δώστε τύπο $exactly_n(s)$ ο οποίος θα εκφράζει το γεγονός ότι το σύνολο s έχει ακριβώς n στοιχεία, όπου $n \geq 0$. Ο τύπος σας θα πρέπει να έχει (περίπου) το διπλάσιο μήκος από τον τύπο για το $atmost_n(s)$. Υπόδειξη: σκεφτείτε απλά.

δ) Ο προφανής τρόπος για να γράψει κανείς ένα τύπο $distinct_n(y_1,...,y_n)$, όπου $n \geq 2$ και $y_1,...,y_n$ φυσικοί αριθμοί, και ο οποίος να σημαίνει ότι τα $y_1,...,y_n$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, είναι να γράψει τη σύζευξη των τύπων $\neg(y_i \approx y_j)$ για όλα τα i, j με $1 \leq i < j \leq n$. Αφού όμως υπάρχουν $n(n-1)/2$ τέτοιοι τύποι, η προσέγγιση αυτή θα δημιουργήσει ένα σχετικά πολύπλοκο τύπο. Κατασκευάστε τύπο για το $distinct_n(y_1,...,y_n)$ ο οποίος αποφεύγει τη χρήση των $n(n-1)/2$ συγκρίσεων. Υπόδειξη: μπορείτε να κατασκευάσετε ένα πολύ απλό τύπο ο οποίος χρησιμοποιεί ακριβώς δύο από τα νέα «κατηγορήματα» $subset_n$, $atmost_n$, $exactly_n$ που έχουμε ορίσει στα υποερωτήματα α, β και γ.

Λύση.

α)

- Για *n=0*, ορίζουμε το $subset_0(s)$ να είναι ο τύπος:
$$set(s) \wedge set(\emptyset) \wedge s \approx \emptyset.$$
- Για *n>0*, ορίζουμε το $subset_n(s, y_1, \ldots, y_n)$ να είναι ο τύπος:
$$set(s) \wedge nat(y_1) \wedge \ldots \wedge nat(y_n) \wedge \forall x(nat(x) \wedge x \in s \to (x \approx y_1 \vee \ldots \vee x \approx y_n)).$$

β)

- Για *n=0*, ορίζουμε το $atmost_0(s)$ να είναι ο τύπος:
$$set(s) \wedge set(\emptyset) \wedge s \approx \emptyset.$$
- Για *n>0*, ορίζουμε το $atmost_n(s,)$ να είναι ο τύπος:
$$\exists y_1 \ldots \exists y_n subset_n(s, y_1, \ldots y_n).$$

γ)

- Για *n=0*, ορίζουμε το $exactly_0(s)$ να είναι ο τύπος:
$$set(s) \wedge set(\emptyset) \wedge s \approx \emptyset.$$
- Για *n>0*, ορίζουμε το $exactly_n(s,)$ να είναι ο τύπος:
$$atmost_n(s) \wedge \neg\, atmost_{n-1}(s).$$

δ) Δίνεται $n \geq 2$. Ορίζουμε τον τύπο $distinct_n(y_1, \ldots y_n)$ ως εξής:

$$\exists s(subset_n(s, y_1, \ldots y_n) \wedge exactly_n(s)).$$

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος

Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει σκοπό να σας εισάγει στην μορφή της εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα από την Κατηγορηματική Λογική με τέσσερις απαντήσεις το καθένα από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι σωστή ή λάθος. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας σε λιγότερο από 15 λεπτά.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #7, #8 και #9.

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ), **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

α) Έστω γλώσσα *L* πρώτης τάξης και έστω ερμηνεία της *L* με σύμπαν το σύνολο των φυσικών αριθμών στην οποία το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $<$ έχει τη γνωστή ερμηνεία «μικρότερο από». Έστω *F(x)* τυχαίος τύπος της *L* με μια ελεύθερη μεταβλητή. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \exists y (F(x) \wedge F(y))$ εκφράζει την ιδιότητα «υπάρχουν τουλάχιστον δύο φυσικοί αριθμοί για τους οποίους αληθεύει ο τύπος *F*».
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall x \exists y ((x < y) \wedge F(y))$ εκφράζει την ιδιότητα «υπάρχουν άπειροι φυσικοί αριθμοί για τους οποίους αληθεύει ο τύπος *F*».
3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall x \forall y \forall z ((F(x) \wedge F(y) \wedge F(z)) \rightarrow ((x \approx y) \vee (y \approx z)))$ εκφράζει την ιδιότητα «υπάρχουν το πολύ δύο φυσικοί αριθμοί για τους οποίους αληθεύει ο τύπος *F*».
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists x \forall y (F(y) \rightarrow (y < x))$ εκφράζει την ιδιότητα «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών για τους οποίους αληθεύει ο τύπος *F*».

β) Έστω γλώσσα *L* πρώτης τάξης και έστω ερμηνεία της *L* της οποίας το σύμπαν είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών και τα σύμβολα $+$, $\cdot$, 1, $>$ έχουν το γνωστό τους νόημα (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, ο αριθμός 1, και η σχέση «μεγαλύτερο»). Κάθε τύπος φ της *L* ο οποίος περιέχει μια ελεύθερη μεταβλητή *x*, θα λέμε ότι *ορίζει* το σύνολο εκείνων των φυσικών αριθμών για τους οποίους ο τύπος αληθεύει. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\exists y(x \approx y + y)$ ορίζει το σύνολο των άρτιων αριθμών.
2. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall y(x > y)$ ορίζει το σύνολο $\{0\}$.
3. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $(x > 1) \wedge \forall y \forall z((x \approx y \cdot z) \rightarrow (z \approx 1))$ ορίζει το σύνολο των πρώτων αριθμών.
4. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $\forall y \forall z(((y > 1) \wedge (x \approx y \cdot z)) \rightarrow (y \approx (1+1)))$ ορίζει το σύνολο των δυνάμεων του 2 που είναι μεγαλύτερες ή ίσες από το 2.

Λύση.

α)

1. Λάθος

Στον τύπο αυτό δεν υπάρχει συνθήκη που να αναγκάζει τα *x*, *y* να είναι διαφορετικά. Κάλλιστα θα μπορούσε η ερμηνεία του *x* να είναι ίδια με την ερμηνεία του *y*.

2. Σωστό

Καταρχήν για $x=0$, υπάρχει κάποιος φυσικός m_0 έτσι ώστε να ισχύει ο τύπος $F(m_0)$. Θέτοντας $x=m_0$, υπάρχει κάποιος φυσικός m_1, με $m_0 < m_1$, έτσι ώστε να ισχύει ο τύπος $F(m_1)$. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζεται μια άπειρη αριθμήσιμη ακολουθία φυσικών για τους οποίους ισχύει ο τύπος *F*.

3. Λάθος

Έστω τυχαία δομή *A*, τέτοια ώστε στο σύμπαν $|A|$ να υπάρχουν δύο διακεκριμένα στοιχεία, a, b για τα οποία να ικανοποιείται ο τύπος $F(x)$. Τότε θέτοντας $x = a, y = b, z = a$, έχουμε ότι ισχύει το αριστερό μέλος της συνεπαγωγής, αλλά όχι το δεξί, μιας και $a \neq b$ και $b \neq a$. Οπότε δεν ισχύει ο δοσμένος τύπος.

4. Σωστό

Η ερμηνεία του *x* στο μοντέλο δίνει ένα άνω φράγμα για τους φυσικούς για τους οποίους αληθεύει ο *F*. Άρα υπάρχει πεπερασμένο πλήθος φυσικών για τους οποίους αληθεύει ο *F*.

β)

1. Σωστό

Ο τύπος αυτός ορίζει το σύνολο των αρτίων διότι για οπουδήποτε φυσικό αριθμό n, ο n είναι άρτιος αν και μόνο αν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε $n=m+m$.

2. Λάθος

Για $x=0$, και $y=0$ διαπιστώνουμε πως δεν ισχύει η ανισότητα. Άρα ο τύπος δεν ορίζει το σύνολο $\{0\}$.

3. Λάθος

Ας πάρουμε για παράδειγμα τον πρώτο αριθμό 3, ο οποίος μπορεί να γραφεί ως $1 \cdot 3$. Οπότε ερμηνεύοντας το y ως 1 και το z ως 3, το αριστερό μέλος της συνεπαγωγής αληθεύει στο μοντέλο μας, αλλά όχι το δεξί μέλος της συνεπαγωγής. Άρα δεν ορίζει ο δοσμένος τύπος το σύνολο των πρώτων.

4. Λάθος

Ας πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό 8, ο οποίος είναι δύναμη του 2 και μπορεί να γραφεί ως $4 \cdot 2$. Οπότε, για x=8 και ερμηνεύοντας το y ως 4 και το z ως 2, έχουμε το αριστερό μέλος της συνεπαγωγής να αληθεύει στο μοντέλο μας, αλλά το δεξί μέλος της συνεπαγωγής δεν αληθεύει στο μοντέλο μας. Δηλαδή ο αριθμός 8 δεν ανήκει στο σύνολο που ορίζεται από τον δοσμένο τύπο.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 10