

## Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΔΕΟ13 θα πρέπει να γραφεί: «*ioannou\_ge2\_deo13.doc*».

### ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όνοματεπώνυμο φοιτητή	<Όνομα Φοιτητή> <Επώνυμο Φοιτητή>
-----------------------	-----------------------------------

Κωδικός ΘΕ	ΠΛΗ 20	Όνοματεπώνυμο Καθηγητή -Σύμβουλου	<Όνομα ΣΕΠ> <Επώνυμο ΣΕΠ>
Κωδικός Τμήματος	<ΤΜΗΜΑ>	Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (ημέρα Τρίτη)	<b>Τετάρτη, 22/11/2017</b>
Ακ. Έτος	2017-2018	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	<b>1η</b>	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

**Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή:** Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

### ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
<b>Βαθμολογία (αριθμητικά, ολογράφως)</b>	<b>0</b>

Υπογραφή  
Φοιτητή

Υπογραφή  
Καθηγητή-Συμβούλου

## Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2017-2018

### Εργασία 1η

#### Συνδυαστική

**Σκοπός** της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της Συνδυαστικής. Η εργασία πρέπει να γραφεί **ηλεκτρονικά** και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας [study.eap.gr](http://study.eap.gr) μέχρι την **Τετάρτη 22/11/2017**.

#### Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα. Για να συμπληρώσετε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.
2. Στο αρχείο αυτό πρέπει να **προσθέσετε** τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.

3. Η εργασία περιλαμβάνει **5** βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.
4. **Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις.** Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:

Προηγούμενες εργασίες: Εργασία 1 των ακαδημαϊκών ετών 2004-2016.

Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ας προηγηθούν στη μελέτη σας οι εξετάσεις των τελευταίων ετών 2010-2017.

Ασκήσεις Συνδυαστικής: Πρόκειται για μια εκτενή σειρά ασκήσεων διαβαθμισμένης δυσκολίας, από τις οποίες ενδεικτικά προτείνονται οι 1-9, 19-22, 24-26. Θα τις βρείτε στη διεύθυνση:

<http://study.eap.gr/mod/folder/view.php?id=3501>

*ακολουθώντας το menu Συμπληρωματικό Υλικό > Σημειώσεις – Ασκήσεις - ΕΔΥ*

*Για την αποδεικτική μέθοδο της επαγωγής είναι πολύ χρήσιμη η μελέτη του παράλληλου υλικού που έχει επιμεληθεί ο κ. Δημήτρης Φωτάκης, το οποίο βρίσκεται επίσης στην παραπάνω διεύθυνση.*

## ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτημα	Μέγιστος βαθμός	Βαθμός
1	25	
2	20	
3	25	
4	20	
5	10	
<b>Συνολικός Βαθμός:</b>	<b>100</b>	<b>0</b>

**Γενικά Σχόλια:**

&lt;γενικά σχόλια για την εργασία από το Σύμβουλο-Καθηγητή&gt;

## Ε ρ ω τ ή μ α τ α

### Ερώτημα 1.

Στο ερώτημα αυτό έχει σημασία να προσδιορίσετε το είδος του κάθε προβλήματος (άθροισμα, γινόμενο, επιλογές μη διατεταγμένων ή διατεταγμένων πλειάδων, διατάξεις, μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων, ρίψη σφαιριδίων σε κουτιά, κ.λ.π.) και στη συνέχεια να εφαρμόσετε τους κατάλληλους συνδυαστικούς τύπους.

#### Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #1, #2, #3, #4

(1α) Έστω ότι 100 (διαφορετικοί) φοιτητές εισέρχονται σε δύο αίθουσες εξετάσεων, την αίθουσα Α με χωρητικότητα 80 (διαφορετικών) θέσεων και την αίθουσα Β με χωρητικότητα 40 (διαφορετικών) θέσεων. Στα ερωτήματα (1α1) και (1α2) μας ενδιαφέρει όχι μόνο ποιοι φοιτητές θα μπουں στην κάθε αίθουσα αλλά και σε ποιες θέσεις θα καθίσουν.

(1α1) Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες.

(1α2) Έστω ότι από τους 100 (διαφορετικούς) φοιτητές, 60 είναι κορίτσια και 40 είναι αγόρια. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες αν όλα τα αγόρια καθίσουν στην ίδια αίθουσα.

(1β) Έστω ότι επιλέγουμε 4 βιβλία από 8 διαφορετικά βιβλία Μαθηματικών και 5 βιβλία από 10 διαφορετικά βιβλία Πληροφορικής και τα τοποθετούμε στη σειρά σε ένα ράφι. Υπολογίστε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η παραπάνω επιλογή και τοποθέτηση των βιβλίων στο ράφι όταν:

(1β1) Τοποθετούμε τα βιβλία σε οποιαδήποτε σειρά.

(1β2) Τα βιβλία Μαθηματικών και Πληροφορικής εναλλάσσονται.

(1β3) Το πρώτο βιβλίο είναι Μαθηματικών και το πέμπτο βιβλίο είναι Πληροφορικής.

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

## Ερώτημα 2.

Το ερώτημα αυτό θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε περισσότερο στην επιλογή των κατάλληλων τύπων σε προβλήματα συνδυαστικής. Θα χρειαστεί να μελετήσετε την παράγραφο 1.7 «Μέτρηση και διακριτή πιθανότητα» του τόμου Δ.

### Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #1, #2, #3, #4

Μια εταιρία, στο πλαίσιο διαφημιστικής εκστρατείας, διοργανώνει ένα διαγωνισμό στον οποίο μοιράζονται λαχνοί. Οι λαχνοί περιέχουν όλους τους δυνατούς αναγραμματισμούς του ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ (π.χ., ΑΛΛΑΩΠΔΡΟ, ΡΑΑΟΠΛΔΩΛ, κλπ). Κερδίζουν όσοι λαχνοί εμφανίζουν κάποια (τουλάχιστον μία) από τις λέξεις ΠΟΛΛΑ ή ΔΩΡΑ. Π.χ., οι λαχνοί ΠΟΛΛΑΑΔΡΩ, ΑΠΛΛΟΔΩΡΑ και ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ είναι νικηφόροι.

(2α) Υπολογίστε το συνολικό πλήθος των λαχνών.

(2β) Υπολογίστε το πλήθος των νικηφόρων λαχνών.

(2γ) Έστω ότι λαμβάνουμε ένα τυχαίο λαχνό από ένα κιβώτιο το οποίο περιλαμβάνει μόνο τους λαχνούς που ξεκινούν με το γράμμα Δ. Ποια είναι η πιθανότητα ο λαχνός μας να είναι νικηφόρος;

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

## Ερώτημα 3.

Το ερώτημα θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε στην ανάπτυξη γεννητριών συναρτήσεων. Θα πρέπει να εξετάσετε αν αναφέρεται σε πρόβλημα συνδυασμών ή διατάξεων αντικειμένων και ανάλογα να κάνετε χρήση απλής ή εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης. Μπορείτε να συμβουλευτείτε το ερώτημα 3 της 1<sup>ης</sup> εργασίας 2013-2016.

### Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #5, #6

(3α) Έστω για δυο πειράματα  $P_1$  (π.χ., αγορά βιβλίων πληροφορικής) και  $P_2$  (π.χ., αγορά βιβλίων μαθηματικών), τα οποία δε μοιράζονται κοινό ενδεχόμενο (π.χ., η αγορά γίνεται σε ένα βιβλιοπωλείο που έχει βιβλία αμιγώς για μαθηματικά, ή αμιγώς για πληροφορική), γνωρίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση  $F_1(x)$  του  $P_1$ , όπως επίσης και τη γεννήτρια συνάρτηση  $F_2(x)$  του  $P_2$ .

(3α1) Να δείξετε ότι η γεννήτρια συνάρτηση του πειράματος  $\Pi$  που εκτελεί είτε το  $\Pi_1$  ή το  $\Pi_2$  (όχι όμως και τα δυο) είναι  $F_1(x) + F_2(x)$ .

(3α2) Πώς διαφοροποιείται η απάντηση για τη γεννήτρια του  $\Pi$ , εάν τα  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  μοιράζονται κάποια ενδεχόμενα (πχ, στο βιβλιοπωλείο υπάρχουν και ορισμένα διεπιστημονικά βιβλία μαθηματικών στην πληροφορική), και είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τη γεννήτρια  $F_3(x)$  που αφορά το πλήθος των αποτελεσμάτων όταν εκτελούμε και τα δυο πειράματα (πχ, αγορά βιβλίων και μαθηματικών και πληροφορικής);

(3β) Έστω ότι επιθυμούμε να απαριθμήσουμε  $n$ -ψήφιος συμβολοσειρές στο τριαδικό αλφάβητο  $\{0,1,2\}$ . Να βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον κατάλληλο όρο της, ο συντελεστής του οποίου δίνει τις διαφορετικές συμβολοσειρές, σε κάθε μια από τις εξής περιπτώσεις:

(3β1) Υπάρχουν τουλάχιστον δυο εμφανίσεις του 0.

(3β2) Υπάρχουν το πολύ δυο εμφανίσεις του 1.

(3β3) Υπάρχουν τουλάχιστον δυο εμφανίσεις του 0 και το πολύ δυο εμφανίσεις του 1.

(3β4) Υπάρχουν τουλάχιστον δυο εμφανίσεις του 0, ή το πολύ δυο εμφανίσεις του 1.

(3γ) Έστω ότι μας ενδιαφέρει το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης  $X + 2Y + 3Z + 4W = n$ , όταν οι μεταβλητές  $X, Y, Z, W$  παίρνουν μη αρνητικές ακέραιες τιμές και επιπλέον  $X + Y = 1$ . Να υπολογίσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο ο συντελεστής του οποίου δίνει το αποτέλεσμα της συγκεκριμένης μέτρησης.

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

#### Ερώτημα 4.

Στο πρώτο υποερώτημα θα εφαρμόσετε την πολύ χρήσιμη επαγωγική αποδεικτική μέθοδο, την οποία θα χρησιμοποιήσετε σε όλη τη διάρκεια της θεματικής ενότητας. Όπως αναφέρεται στις οδηγίες θα φανεί χρήσιμη η μελέτη των σημειώσεων στη «Μαθηματική Επαγωγή». Μπορείτε να ανατρέξετε σε ερωτήματα προηγούμενων ετών όπως τα ερωτήματα 4Α 1<sup>ης</sup> εργασίας 2010-2016.

Το δεύτερο υποερώτημα εξετάζει τις σχέσεις αναδρομής. Μπορείτε και εδώ να συμβουλευτείτε ερωτήματα προηγούμενων εργασιών όπως το ερώτημα 4B της 1<sup>ης</sup> εργασίας 2011-2016.

**Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιότερων ετών: #7, #8**

**(4α)** Θεωρούμε την ακολουθία Fibonacci που ορίζεται ως εξής:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  και  $\forall n \geq 2$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ .

**(4α1)** Να εκφράσετε το  $F_n$  ως συνάρτηση των  $F_{n-4}$  και  $F_{n-5}$ .

**(4α2)** Να δείχθεί με χρήση μαθηματικής επαγωγής η εξής αριθμητική ιδιότητα:  $\forall k \in \mathbb{N}$ , ο αριθμός  $F_{5k}$  είναι πολλαπλάσιο του 5.

**(4β)** Έστω ότι σε μια σειρά  $N$  (αριθμημένων) καθισμάτων επιθυμούμε να τοποθετήσουμε φοιτητές για διεξαγωγή γραπτών εξετάσεων. Προκειμένου να μην υπάρχει ενδεχόμενο αντιγραφής, οι φοιτητές δεν επιτρέπεται να καθίσουν σε διαδοχικές θέσεις.

Μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε το πλήθος  $a_N$  των τρόπων επιλογής (κάποιων) θέσεων προκειμένου να καθίσουν σε αυτές εξεταζόμενοι φοιτητές, όταν τα  $N$  καθίσματα απαρτίζουν την σειρά καθισμάτων. Σημειώνουμε ότι το ενδεχόμενο να μην καθίσει κανένας φοιτητής θεωρείται έγκυρος τρόπος. Συμβολίζουμε με  $\mathbf{a}$  την ακολουθία  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Για τις αρχικές τιμές της ακολουθίας  $a_0$  και  $a_1$  ισχύουν τα ακόλουθα:

- για  $N = 0$ : Δεν υπάρχουν καθίσματα στην αίθουσα, συνεπώς έχουμε μόνο έναν τρόπο, δηλαδή να μην καθίσει κάποιος φοιτητής. Επομένως  $a_0 = 1$ .
- για  $N = 1$ : Υπάρχει μόνο ένα κάθισμα και έχουμε δύο τρόπους: είτε θα καθίσει κάποιος, είτε θα μείνει κενή η θέση. Επομένως  $a_1 = 2$ .

**(4β1)** Να υπολογιστούν οι τιμές της ακολουθίας  $a_2, a_3$  και  $a_4$ .

**(4β2)** Να βρεθεί αναδρομικός τύπος για την τιμή του  $N$ -στού όρου  $a_N$  της ακολουθίας  $\mathbf{a}$ , ως συνάρτηση προηγούμενων όρων της. Θα πρέπει να αιτιολογηθεί η ορθότητα του προτεινόμενου αναδρομικού τύπου.

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να μετρήσετε τις επιτρεπόμενες επιλογές καθισμάτων ΜΕ και ΧΩΡΙΣ τη  $N$ -στή θέση στη σειρά χωριστά.

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25



### Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει σκοπό στο να σας εισάγει στην μορφή της εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι σωστή ή λάθος. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό ή λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

**A)** Μας ενδιαφέρουν οι διαφορετικοί τρόποι να μοιράσουμε 100 διακεκριμένους μαρκαδόρους σε 5 διαφορετικές κασετίνες, με χωρητικότητα 30 θέσεων η κάθε κασετίνα. Είναι το πλήθος των τρόπων το παρακάτω;

1. (Σ / Λ)  $5^{100}$ , αν οι θέσεις της κάθε κασετίνας δεν θεωρούνται διακεκριμένες.

2. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του  $\frac{x^{100}}{100!}$  στην παράσταση  $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{29}}{29!} + \frac{x^{30}}{30!}\right)^5$ , αν οι θέσεις της κάθε κασετίνας δεν θεωρούνται διακεκριμένες.

3. (Σ / Λ)  $\frac{150!}{100!}$ , αν οι θέσεις της κάθε κασετίνας θεωρούνται διακεκριμένες.

4. (Σ / Λ)  $C(150, 100)$ , αν οι θέσεις της κάθε κασετίνας θεωρούνται διακεκριμένες.

**B)** Υπάρχουν 4 διακεκριμένα βαγόνια και έχουμε 5 ίδια εισιτήρια για κάθε βαγόνι. Μας ενδιαφέρουν οι διαφορετικοί τρόποι να μοιράσουμε τα εισιτήρια σε 20 άτομα. Είναι το πλήθος των τρόπων το παρακάτω;

1. (Σ / Λ)  $20!/(5! 5! 5! 5!)$ , αν κάθε άτομο πρέπει να πάρει ένα εισιτήριο ακριβώς.

2. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του  $\frac{x^{20}}{20!}$  στην παράσταση  $\left(\frac{x^5}{5!}\right)^4$ , αν κάθε άτομο πρέπει να πάρει ένα εισιτήριο ακριβώς.

3. (Σ / Λ)  $C(20, 4)$ , αν επιλέξουμε 4 άτομα και καθένας από τους 4 πάρει και τα 5 εισιτήρια από ένα βαγόνι.

4. (Σ / Λ) Όσοι ο συντελεστής του  $\frac{x^4}{4!}$  στην παράσταση  $(1 + x)^{20}$ , αν επιλέξουμε 4 άτομα και καθένας από τους 4 πάρει και τα 5 εισιτήρια από κάθε βαγόνι.

<Χώρος Απάντησης (Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)>

#### Αξιολόγηση Ερωτήματος

Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:

<σχόλια>

Αξιολόγηση Ερωτήματος :

/ 10