Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2016-2017

Εργασία 2η

Προτασιακή Λογική

Ερωτήματα

Ερώτημα 1.

Το ερώτημα 1.A.1 αφορά στα απλά γραμματικά στοιχεία του Προτασιακού Λογισμού (Π.Λ.): ποιά σύμβολα χρησιμοποιούμε, και με ποιούς κανόνες γράφουμε με αυτά τύπους και προτάσεις. [Βλ. σελ. 20-28, (1)].

Το ερώτημα 1.A.2 είναι μια άσκηση επαγωγικής ανάλυσης ενός θεμελιακού εργαλείου, της σχέσης De Morgan, που λέει απλά ότι «αν δεν αληθεύουν όλες οι τάδε προτάσεις, τότε, και μόνον τότε, κάποια ψεύδεται».

Το ερώτημα 1.B αφορά την άλλη πλευρά των προτάσεων: κάθε αποτίμηση των μεταβλητών μας επιτρέπει να αποτιμήσουμε έναν τύπο ως αληθή ή ψευδή. Οι τύποι που πάντα επαληθεύονται ή πάντα διαψεύδονται παίζουν ειδικό ρόλο στον Π.Λ. Το ερώτημα εδώ θέτει την απορία «πώς συμπεριφέρονται οι προτασιακοί τύποι που αληθεύουν κατά πλειοψηφία»;

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α, #1 (1 & 2), #2.

Α.1. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω εκφράσεις είναι ορθά συντεταγμένοι προτασιακοί τύποι. Για όσες είναι, σχεδιάστε το δενδροδιάγραμμά τους.

i. $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$

ii. $(p \,\&\, q)$

iii. $(p \vee q \wedge r)$

iv. $\neg((\neg r \vee (r \wedge \neg p)) \leftrightarrow \neg\neg\neg q)$

v. $(p \neg \vee q) \to (p \vee \neg q)$

---

i. ΣΩΣΤΟ: βλ. δενδροδιάγραμμα (*i*).

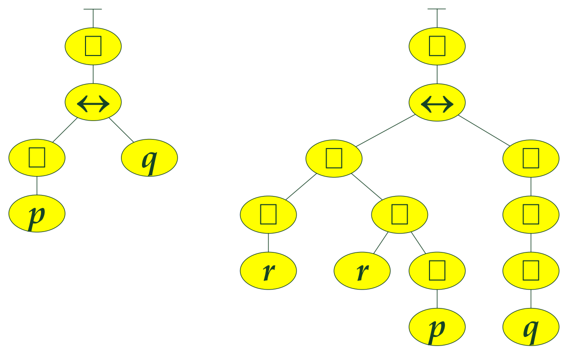
ii. ΛΑΘΟΣ: το σύμβολο «&» δεν ανήκει στο επιτρεπτό αλφάβητο.

iii. ΛΑΘΟΣ: δεν έχουμε κανόνες επίλυσης της «προτεραιότητας» ανάμεσα στους συνδέσμους $\wedge$ και $\vee$.

iv. ΣΩΣΤΟ: βλ. δενδροδιάγραμμα (*iii*).

v. ΛΑΘΟΣ: πριν τον σύνδεσμο $\vee$ ουδέποτε εμφανίζεται σύνδεσμος $\neg$, (ή $\vee$, $\wedge$, κττ.)

(*i*) (*iii*)



Α.2. Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n προτασιακοί τύποι. Η παρακάτω ταυτολογία, για $n = 2$, είναι ο γνωστός τύπος *De Morgan*:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_i\right) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\right)$$

Χρησιμοποιήσατε επαγωγή για να αποδείξετε την γενίκευσή του για κάθε $n \geq 3$.

---

(1) *Όλες οι παραπομπές μας είναι στο Τόμο Γ΄ περί* ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ.

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Για $n = 2$ έχουμε τον γνωστό τύπο *De Morgan*.
ΒΗΜΑ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $\left(\bigwedge_{i=1}^{k} \neg\varphi_i\right) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{k} \varphi_i\right)$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k+1$, δηλαδή ότι: $\left(\bigwedge_{i=1}^{k+1} \neg\varphi_i\right) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi_i\right)$.

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{k+1} \neg\varphi_i\right) \equiv \left(\overline{\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_i\right)} \wedge \neg\varphi_{k+1}\right) \equiv (\neg \ldots \qquad \left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi_i\right)$$

Το $2^{o} \equiv$ χρησιμοποιεί την επαγωγική υπόθεση, και το $3^{o} \equiv$ τον *de Morgan* για $n = 2$ (!).

Β. Έστω A ένα σύνολο με περιττό πλήθος λογικών αποτιμήσεων. Έστω D το σύνολο των προτασιακών τύπων που επαληθεύονται από *μια πλειοψηφία αποτιμήσεων* στο A (τις μισές συν μία, τουλάχιστον). Εξετάστε και εξηγήστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν:
1. Αν φ τύπος, τότε ακριβώς ένας από τους φ και $\neg\varphi$ ανήκει στο D.
2. Αν ο φ ανήκει στο D και ο $(\varphi \to \psi)$ είναι ταυτολογία, τότε ο ψ ανήκει στο D.
3. Αν φ και $(\varphi \to \psi)$ ανήκουν στο D, τότε ο ψ ανήκει στο D.

Έστω ότι έχουμε $2\rho+1$ λογικές αποτιμήσεις στο A. Ένας τύπος ανήκει στο D, (ή *επαληθεύεται πλειοψηφικά*) αν και μόνον επαληθεύεται από τουλάχιστον $\rho+1$ αποτιμήσεις στο A.
1. ΣΩΣΤΟ: Κάθε αποτίμηση επαληθεύει είτε τον φ είτε τον $\neg\varphi$, και φυσικά όχι και τους δύο. Άρα οι αποτιμήσεις A διαμερίζονται σε δύο σύνολα μεγέθους κ και λ, ένα των οποίων επαληθεύει το φ και το άλλο το $\neg\varphi$. Αφού $(\kappa+\lambda) = 2\rho+1$, δεν μπορεί να έχουμε $\kappa, \lambda \leq \rho$, ούτε $\kappa, \lambda \geq \rho+1$. Δηλαδη ένα εκ των δύο θα είναι το πολύ $\leq \rho$, και το άλλο τουλάχιστον $\geq (\rho+1)$, δηλαδή ένας και μόνον ένας εκ των $\{\ \varphi, \neg\varphi\ \}$ θα επαληθεύεται πλειοψηφικά.
2. ΣΩΣΤΟ: Αφού $\geq (\rho+1)$ αποτιμήσεις επαληθεύουν το φ, και το $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογία, το ψ επαληθεύεται για αυτές τουλάχιστον τις $\geq (\rho+1)$ αποτιμήσεις, δηλαδή επίσης πλειοψηφικά.
3. ΛΑΘΟΣ: Το ερώτημα προτρέπει σε μια πιο «βαθειά» ματιά στο πίνακα αληθείας του $\to$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι φ, ψ είναι *απλές προτασιακές μεταβλητές*:

ϕ	ψ	$\phi \to \psi$
Α	*Α*	*Α*
Α	Ψ	Ψ
Ψ	*Α*	*Α*
Ψ	Ψ	*Α*

ϕ	$\phi \to \psi$	ψ
Α	*Α*	*Α*
Α	Ψ	Ψ
		?
Ψ	*Α*	Ψ

Αν διαγράψουμε την $3^{η}$ γραμμή, (βλ. πίνακα δεξιά), απομένει σύνολο A τριών αποτιμήσεων. Παρατηρούμε ότι σε αυτές η φ αληθεύει με πλειοψηφία $^2/_3$ (✓), και ο $\varphi \to \psi$ επίσης (✓). Δεν ισχύει όμως το ίδιο για την ψ: αυτή *διαψεύδεται* με πλειοψηφία $^2/_3$ (**?**).

Ερώτημα 2.

Το ερώτημα 2.Α επιδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο ο Π.Λ. καθίσταται χρήσιμος σε «πραγματικό» περιβάλλον: (α) αποτυπώνουμε μια κατάσταση πραγμάτων με προτασιακές μεταβλητές και τύπους, (β) από τις οποίες αληθείς υποθέσεις παράγουμε αποδεικτικά συμπεράσματα, (γ) τα οποία θεωρούμε πλέον επίσης αληθή. Εδώ η «απόδειξη» έχει απλά και φυσικά βήματα, τόσο που μοιάζει με απλό καθημερινό συλλογισμό. Το ερώτημα ζητά, και προάγει, μια σαφή κατανόηση της συντακτικής vs. σημασιολογικής όψης του Π.Λ. [Βλ. σελ. 26 και εξής, περί αποτιμήσεων, και σελ. 54-58 περί αποδείξεων].

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α, #4, #7, ΓΙΑ ΤΟ Β, #2.

Μας παρουσιάζουν τρία σκεπασμένα καλάθια (1^o, 2^o, 3^o), τριών τύπων: είτε A (= περιέχει μόνον *Αχλάδια*), είτε B (= περιέχει μόνον *Βερύκοκα*), είτε AB (= *ανάμεικτο* απο A και B). Κάθε καλάθι φέρει μία πινακίδα που γράφει είτε A, είτε B, είτε AB. Για να περιγράψουμε την κατάσταση με γλώσσα του Π.Λ. χρησιμοποιούμε 9+9 προτασιακές μεταβλητές με δείκτες $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ και $\varphi \in \{A, B, AB\}$. Οι μεταβλητές και ο τρόπος αποτίμησής τους είναι οι εξής:

$\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ αποτιμάται ΑΛΗΘΗΣ αν-και-μόνον-αν «το καλάθι $\boldsymbol{\kappa}$ είναι τύπου $\boldsymbol{\varphi}$».

$\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ αποτιμάται ΑΛΗΘΗΣ αν-και-μόνον-αν «η πινακίδα στο καλάθι $\boldsymbol{\kappa}$ γράφει $\boldsymbol{\varphi}$».

(Οι δείκτες κ, φ παίζουν απλώς μνημονικό ρόλο, και διευκολύνουν την περιγραφή των προτασιακών τύπων. Θα μπορούσαμε λ.χ. να ονομάσουμε τις «ΕΧΕΙ» ως $p_1, \ldots, p_9$, και τις «ΓΡΑΦΕΙ» ως $q_1, \ldots, q_9$.)

1. Αναφερόμενοι στα παραπάνω, «μεταφράστε» σε απλά Ελληνικά τις εξής υποθέσεις $\mathbf{Y_1}$:

i. $\displaystyle\bigwedge_{\kappa\in\{1,2,3\}} \left(\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,AB]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,A]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,B]}\right)$

ii. $\displaystyle\bigwedge_{\substack{\kappa,\lambda\in\{1,2,3\}\\ \kappa\neq\lambda}} \bigwedge_{\varphi\in\{A,B,AB\}} \left(\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,\varphi]} \to \neg\text{ΕΧΕΙ}_{[\lambda,\varphi]}\right)$

iii. $\displaystyle\bigwedge_{\kappa\in\{1,2,3\}} \bigwedge_{\varphi\in\{A,B,AB\}} \left(\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]} \to \neg\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}\right)$

2. Οι πινακίδες στα καλάθια 1, 2, 3 γράφουν αντιστοίχως A, B, AB. Από τις 9+9 απλές προτάσεις $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ και $\neg\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$, κάποιο υποσύνολο $\mathbf{Y_2}$ περιέχει ακριβώς όσες επαληθεύονται με τα δεδομένα αυτού του υπο-ερωτήματος. Ποιό είναι αυτό το $\mathbf{Y_2}$;

3. Έχοντας ως σύνολο υποθέσεων $\mathbf{Y}$ τις προτάσεις $\mathbf{Y_1} \cup \mathbf{Y_2}$, δώσατε τυπικές αποδείξεις που εξασφαλίζουν ότι: $\mathbf{Y} \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \text{ΕΧΕΙ}_{[1,B]}$, $\mathbf{Y} \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \text{ΕΧΕΙ}_{[2,AB]}$. (Συμμετρικά θα ισχύει και: $\mathbf{Y} \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \text{ΕΧΕΙ}_{[1,AB]}$, $\mathbf{Y} \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}\} \vdash_{\text{ΠΛ}} \text{ΕΧΕΙ}_{[2,A]}$.)

4. Έστω ότι τα καλάθια και οι πινακίδες *επαληθεύουν*, υπό τον τρόπο της αποτίμησής μας, το παραπάνω σύνολο υποθέσεων $\mathbf{Y}$. Επιλέγετε όποιο καλάθι θέλετε, και σας δείχνουν ένα τυχαίο φρούτο από το καλάθι που επιλέξατε. Υπάρχει επιλογή καλαθιού που να επιτρέπει να *αποδείξουμε* ποιό είναι *το ακριβές περιεχόμενο όλων των καλαθιών*;

5. Έστω ότι από τις *επαληθευμένες* υποθέσεις $\mathbf{Y}$ και $\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}$ έχουμε όντως μια τυπική *απόδειξη* της $\text{ΕΧΕΙ}_{[2,A]}$. Βάσει ποίου θεωρήματος του Π.Λ. είμαστε βέβαιοι ότι το 2^o καλάθι περιέχει *πράγματι* Αχλάδια; (Λ.χ., βάσει του θ. απαγωγής; του θ. εγκυρότητας; του θ. πληρότητας; κάποιου άλλου;).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Προς χρήση των συνδέσμων $\neg\ \to$, αντί μιας υπόθεσης $X \wedge Y$ χρησιμοποιήστε τις $\{X, Y\}$, και αντί μιας υπόθεσης $X \vee Y \vee Z$ χρησιμοποιήστε την $\neg X \to (\neg Y \to Z)$.

---

1. (*i*) «Κάθε καλάθι είναι ενός (τουλάχιστον...) εκ των τριών τύπων A, B, AB.»
(*ii*) «Δεν υπάρχουν δύο καλάθια του ιδίου τύπου.»
(*iii*) «Καμμία πινακίδα δεν γράφει το ακριβές (= όλες λένε ψέμματα).»

(Οι συνθήκες (*i*) δεν αποκλείουν λ.χ. το $\text{ΕΧΕΙ}_{[1,A]} \wedge \text{ΕΧΕΙ}_{[1,B]}$, που δηλώνει ότι ένα καλάθι 'είναι' δύο τύπων...· αυτό αποκλείεται τελικά από συνδυασμό των (*i*) & (*ii*).)

2. Το Y_2 έχει τις $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[1,A]}, \text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[2,B]}, \text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[3,AB]}$, και τις $\neg\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ για τους υπόλοιπους συνδυασμούς των $\kappa = 1, 2, 3$ και $\varphi = A, B, AB$.

3. Ακολουθεί μια απόδειξη για τα $Y \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\} \vdash \text{ΕΧΕΙ}_{[2,AB]}, Y \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\} \vdash \text{ΕΧΕΙ}_{[1,B]}$.

(Στην απόδειξη συντομογραφούμε το «ΕΧΕΙ» ως «Ε», και το «ΓΡΑΦΕΙ» ως «Γ».)

ΣΤΑΔΙΟ	ΤΥΠΟΙ	ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ	
1	$\text{Ε}_{[3,A]}$	η υπόθεση πέραν των Υ.	
2	$\text{Ε}_{[3,A]} \rightarrow \neg\text{Ε}_{[2,A]}$	από υποθέσεις $Y_1.(ii)$.	
3	$\neg\text{Ε}_{[2,A]}$	***m.p.*** (2, 3).	
4	$\Gamma_{[2,B]}$	από υποθέσεις Y_2.	
5	$\Gamma_{[2,B]} \rightarrow \neg\text{Ε}_{[2,B]}$	από υποθέσεις $Y_1.(iii)$.	
6	$\neg\text{Ε}_{[2,B]}$	***m.p.*** (4, 5).	
7	$\neg\text{Ε}_{[2,A]} \rightarrow (\neg\text{Ε}_{[2,B]} \rightarrow \text{Ε}_{[2,AB]})$	από υποθέσεις $Y_1.(i)$.	
8	$\neg\text{Ε}_{[2,B]} \rightarrow \text{Ε}_{[2,AB]}$	***m.p.*** (3, 7).	
9	$\text{Ε}_{[2,AB]}$	***m.p.*** (6, 8).	$\text{ΕΧΕΙ}_{[2,AB]}$ ✓
10	$\text{Ε}_{[2,AB]} \rightarrow \neg\text{Ε}_{[1,AB]}$	από υποθέσεις $Y_1.(ii)$.	
11	$\neg\text{Ε}_{[1,AB]}$	***m.p.*** (9, 10).	
12	$\Gamma_{[1,A]}$	από υποθέσεις Y_2 .	
13	$\Gamma_{[1,A]} \rightarrow \neg\text{Ε}_{[1,A]}$	από υποθέσεις $Y_1.(iii)$.	
14	$\neg\text{Ε}_{[1,A]}$	***m.p.*** (12, 13).	
15	$\neg\text{Ε}_{[1,A]} \rightarrow (\neg\text{Ε}_{[1,AB]} \rightarrow \text{Ε}_{[1,B]})$	από υποθέσεις $Y_1.(i)$.	
16	$\neg\text{Ε}_{[1,AB]} \rightarrow \text{Ε}_{[1,B]}$	***m.p.*** από 14, 15.	
17	$\text{Ε}_{[1,B]}$	***m.p.*** από 11, 16.	$\text{ΕΧΕΙ}_{[1,B]}$ ✓

4. Από το $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[3,AB]}$ (Ερ. 2) και το $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[3,AB]} \rightarrow \neg\text{ΕΧΕΙ}_{[3,AB]}$ (1.(*iii*)) έχουμε (***m.p.***) το $\neg\text{ΕΧΕΙ}_{[3,AB]}$. Από αυτό και την υπόθεση $\neg\text{ΕΧΕΙ}_{[3,AB]} \rightarrow (\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]})$, εξάγουμε ότι $\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}$. Αν λοιπόν επιλέξουμε το καλάθι «3», αφού θα μας δείξουν **Α**χλάδι ή **Β**ερύκοκο, θα διαπιστώσουμε, σημασιολογικά, ως ΑΛΗΘΗ είτε την υπόθεση $\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}$ είτε την $\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}$ (αντιστοίχως). Μέσω του Ερ. 3 θα είμαστε λοιπόν σε θέση να «αποδείξουμε» τις αντίστοιχες $\text{ΕΧΕΙ}_{[1,\dots]}$ και $\text{ΕΧΕΙ}_{[2,\dots]}$ για τα υπόλοιπα καλάθια 1 και 2.

5. Αυτό που χρησιμοποιούμε είναι το θεώρημα Εγκυρότητας:

«αν από κάποιες υποθέσεις *Y* έχουμε αποδείξει το συμπέρασμα $\sigma : Y \vdash \sigma$,
και οι υποθέσεις *Y αληθεύουν* υπό την αποτίμηση $\alpha(\cdot)$,
τότε και το συμπέρασμα *σ επίσης* αληθεύει *υπό την ιδία αποτίμηση.*»

Σε αυτό το ερώτημα, ως συμπέρασμα *σ* θεωρείται το $\text{ΕΧΕΙ}_{[2,A]}$, και η αποτίμηση είναι: [«ΑΛΗΘΕΣ» εάν-και-μόνον-εάν «το καλάθι **2** είναι τύπου **Α**»]. Άρα η αποτίμηση, από το θ. Εγκυρότητας, ότι $\text{ΕΧΕΙ}_{[2,A]}$ = ΑΛΗΘΕΣ, *σημαίνει:* «το καλάθι **2** είναι τύπου **Α**».

Ερώτημα 3.

Το ερώτημα 3 εστιάζει σε σημασιολογικές όψεις του Π.Λ. και ειδικότερα το ερώτημα 3.Α ζητά μια εξοικείωση εκ μέρους σας με την έννοια της «ταυτολογίας». [Βλ. σελ. 32-33].

Στο ερώτημα 3.Β η προσοχή στρέφεται στους υπονοούμενους πίνακες αληθείας, δηλαδή σε εργαλείο με καίριο ρόλο στη σημασιολογία του Π.Λ. Μια βασική κατανόηση αυτού του εργαλείου επιτρέπει να μετρήσουμε την εκφραστική ποικιλία που έχουν οι τύποι του Π.Λ. Ρόλο σε αυτή την ανάλυση παίζουν και οι «κανονικές» μορφές των προτασιακών τύπων, εδώ η διαζευκτική μορφή. [Βλ. σελ. 43-45, και 46-47 περί διαζευκτικής μορφής].

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α #3, #5, #6,

ΓΙΑ ΤΟ Β, #6.

Α.1. Αν τα φ, χ, ψ είναι προτασιακοί τύποι, δείξτε (χρησιμοποιώντας τις ταυτολογικές ισοδυναμίες του Π.Λ.), την παρακάτω ταυτολογική ισοδυναμία.

$$(\varphi \wedge (\neg\chi \wedge \neg\psi)) \vee (\varphi \wedge (\chi \wedge \psi)) \equiv (\varphi \wedge ((\chi \vee \psi) \to (\chi \wedge \psi)))$$

Αρκούν τρία βήματα:	$(\varphi \wedge (\neg\chi \wedge \neg\psi)) \vee (\varphi \wedge (\chi \wedge \psi))$
με εξαγωγή του κοινού παράγοντα '$\varphi \wedge$'	$\equiv \varphi \wedge ((\neg\chi \wedge \neg\psi) \vee (\chi \wedge \psi))$
με De Morgan	$\equiv \varphi \wedge (\neg(\chi \vee \psi) \vee (\chi \wedge \psi))$
με μετατροπή συνεπαγωγής	$\equiv \varphi \wedge ((\chi \vee \psi) \to (\chi \wedge \psi))$

Α.2. Έστω φ, ψ προτασιακοί τύποι που δεν έχουν κοινές προτασιακές μεταβλητές. Δείξτε ότι οι δύο προτάσεις παρακάτω είναι ισοδύναμες.

i. Ο τύπος $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογία.

ii. Τουλάχιστον ένας από τους τύπους $\neg\varphi$ και ψ είναι ταυτολογία.

(όχι (*i*)) $\Rightarrow$ (όχι (*ii*)): Αν δεν ισχύει το (*i*), τότε υπάρχει αποτίμηση που επαληθεύει το φ, (δηλαδή διαψεύδει το $\neg\varphi$), και διαψεύδει το ψ. Εφόσον υπάρχει αποτίμηση που διαψεύδει και το $\neg\varphi$ και το ψ δεν μπορεί έστω ένα από αυτά να είναι ταυτολογία, άρα το (*ii*) δεν ισχύει.

(όχι (*ii*)) $\Rightarrow$ (όχι (*i*)): Αν δεν ισχύει το (*ii*), τότε υπάρχει αποτίμηση των μεταβλητών ***του*** $\boldsymbol{\neg\varphi}$ που τον διαψεύδει (δηλαδή επαληθεύει τον φ), και μια ίσως *άλλη* αποτίμηση των μεταβλητών ***του*** $\boldsymbol{\psi}$ που τον διαψεύδει. Αλλά δεν υπάρχουν κοινές μεταβλητές στα φ, ψ, άρα οι δύο αποτιμήσεις είναι δυνατόν να ενωθούν σε μια κοινή αποτίμηση των μεταβλητών του $\{ \boldsymbol{\varphi, \psi} \}$, που επαληθεύει το φ και διαψεύδει το ψ, δηλαδή *διαψεύδει* το $\varphi \to \psi$, οπότε το (*i*) δεν ισχύει.

Β. Έστω Γ προτασιακή γλώσσα με n μεταβλητές, P_1, ..., P_n. Ένας *πίνακας αληθείας* $\pi(\cdot)$, είναι τυπικά μια συνάρτηση που σε κάθε μία από τις 2^n δυνατές λογικές αποτιμήσεις $a(\cdot)$ αντιστοιχίζει κάποια τιμή αληθείας (Α ή Ψ). (Οι γνωστοί «πίνακες αληθείας» δεν είναι παρά η *σχεδίαση* μιας τέτοιας συνάρτησης όπου βάζουμε κάθε αποτίμηση των P_1, ..., P_n συν την αντίστοιχη τιμή αληθείας ανά μία «γραμμή»).

Κάθε τύπος $\varphi \in T(\Gamma)$ ορίζει έναν πίνακα αληθείας ΠΑ(φ) κατά φυσικό τρόπο: η ΠΑ(φ) αντιστοιχίζει σε κάθε αποτίμηση $a(\cdot)$ την αληθοτιμή $\bar{a}(\varphi)$ του φ υπό την $a(\cdot)$. Το θεώρημα 2.7 του βιβλίου εξηγεί γιατί αυτό ισχύει και αντιστρόφως: για κάθε πίνακα αληθείας $\pi(\cdot)$ υπάρχει τύπος ψ (*και μάλιστα σε κανονική διαζευκτική μορφή*), ώστε ΠΑ(ψ) = $\pi(\cdot)$.

1. Έστω $T^*(\Gamma) \subseteq T(\Gamma)$ οι τύποι που δεν περιέχουν καμμία άρνηση ($\neg$). Δείξατε ότι κάθε τύπος $\varphi \in T^*(\Gamma)$ επαληθεύεται από την αποτίμηση που καθιστά ΑΛΗΘΗ κάθε μεταβλητή.

Εδώ χρειάζεται μια επαγωγή στη πολυπλοκότητα των τύπων:
ΒΑΣΗ: Έστω ότι ο φ έχει $\kappa = 0$ συνδέσμους (από τους $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$). Αφού δεν έχει ούτε άρνηση $\neg$, τότε είναι απλώς μια μεταβλητή, και το ζητούμενο ισχύει κατά προφανή τρόπο.
ΒΗΜΑ: Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για τύπους με $\leq \kappa$ συνδέσμους. Θα δείξουμε ότι ισχύει για τύπο φ με κ+1 συνδέσμους. Χωρίς $\neg$ ο φ είναι της μορφής $(\chi \vee \psi)$, $(\chi \wedge \psi)$, $(\chi \rightarrow \psi)$, όπου οι χ, ψ έχουν $\leq \kappa$ συνδέσμους. Από την επαγωγική υπόθεση οι χ, ψ επαληθεύονται από την αποτίμηση «όλα ΑΛΗΘΕΣ», το οποίο συνεχίζει να ισχύει για τους παραπάνω τύπους, άρα και για τον τύπο φ.

2. Δείξτε το αντίστροφο, ότι δηλαδή εάν ο φ επαληθεύεται από την αποτίμηση που καθιστά ΑΛΗΘΗ κάθε μεταβλητή τότε υπάρχει $\psi \in T^*(\Gamma)$ με τον ίδιο πίνακα αληθείας: ΠΑ(ψ) = ΠΑ(φ).

> ΥΠΟΔΕΙΞΗ*: Σκεφτείτε τον τύπο ψ για τον πίνακα αληθείας του φ όπως στο θ. 2.7. Κάποιος συζευκτικός όρος του ψ θα περιέχει και τις n μεταβλητές, όλες χωρίς άρνηση. Χρησιμοποιήστε μια γενίκευση του 3.Α.1 για να αφαιρέσετε τις αρνήσεις από όλους τους άλλους όρους.*

Από την κατασκευή του θ. 2.7 υπάρχει τύπος ψ που είναι διάζευξη τύπων της μορφής $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)$ όπου κάθε x_k είναι είτε μια μεταβλητή, είτε η άρνηση μιας μεταβλητής. Όσοι τύποι από αυτούς περιέχουν έστω μια άρνηση μεταβλητής *διαψεύδονται* από την αποτίμηση «όλα ΑΛΗΘΕΣ», ενώ ο ψ υποτίθεται ότι επαληθεύεται. Άρα πρέπει να υπάρχει και ο συζευκτικός όρος Φ που περιέχει όλες τις μεταβλητές υπό θετική μορφή – χωρίς άρνηση. Έστω τώρα ένας συζευκτικός όρος Ψ που περιέχει $k \geq 1$ μεταβλητές $q_1, \ldots, q_k$ με άρνηση, και $n-k$ μεταβλητές $p_1, \ldots, p_{n-k}$ χωρίς άρνηση. Γράφουμε τις ‘p’ στην αρχή του τύπου, και τις ‘q’ στο τέλος. Κάνουμε το ίδιο και για τον Φ, και παίρνουμε την διάζευξη:

$$\underbrace{\big((p_1 \wedge \ldots \wedge p_{n-k}) \wedge (\neg q_1 \wedge \ldots \wedge \neg q_k)\big)} \vee \underbrace{\big((p_1 \wedge \ldots \wedge p_{n-k}) \wedge (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k)\big)}.$$

Κατ’ αναλογία των 3.Α.1 (όπου $n = 3$ και $k = 2$), και 1.Α.2 (*De Morgan*), αυτή γράφεται ως:

$(P \wedge (\neg q_1 \wedge \ldots \wedge \neg q_k)) \vee (P \wedge (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k))$	όπου $P = (p_1 \wedge \ldots \wedge p_{(n-k)})$.
$P \wedge ((\neg q_1 \wedge \ldots \wedge \neg q_k) \vee (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k))$	κοινός παράγων ο ‘$P \wedge$’.
$P \wedge (\neg(q_1 \vee \ldots \vee q_k) \vee (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k))$	*De Morgan* στις ‘αρνήσεις’.
$(p_1 \wedge \ldots \wedge p_{(n-k)}) \wedge ((q_1 \vee \ldots \vee q_k) \rightarrow (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k))$	μετατροπή συνεπαγωγής.

Για να απαλείψουμε τις υπόλοιπες αρνήσεις επαναλαμβάνουμε το αυτό για τους υπόλοιπους συζευκτικούς όρους Ψ΄, Ψ΄΄, κοκ. Χρειάζονται πρόσθετα ‘αντίτυπα’ του Φ, για να λάβουμε τα (Ψ΄ $\vee$ Φ), (Ψ΄΄ $\vee$ Φ), κοκ, αλλά τέτοια έχουμε όσα θέλουμε αφού $\Phi \equiv \Phi \vee \Phi \vee \ldots \vee \Phi$.

3. Με γνωστά τα παραπάνω (είτε τα αποδείξατε είτε όχι), δείξατε ότι οι διαφορετικοί πίνακες αληθείας των τύπων του $T(\Gamma)$ είναι 2^{2^n} στο πλήθος, ενώ οι διαφορετικοί πίνακες του $T^*(\Gamma)$ είναι 2^{2^n-1} στο πλήθος.

Αφού κάθε πίνακας αληθείας προέρχεται από έστω έναν τύπο στο $T(\Gamma)$ αρκεί να μετρήσουμε όλους τους δυνατούς πίνακες αληθείας. Κάθε αποτίμηση είναι μια (οποιαδήποτε) συνάρτηση από n παραμέτρους/μεταβλητές σε 2 παραμέτρους {Α, Ψ}. Από την συνδυαστική γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 2^n τέτοιες συναρτήσεις. Κάθε πίνακας αληθείας είναι μια συνάρτηση από $m = 2^n$ παραμέτρους (*όλες τις αποτιμήσεις*), προς 2 παραμέτρους {Α, Ψ}. Έχουμε λοιπόν 2^m τέτοιες συναρτήσεις, δηλαδή έχουμε 2^{2^n} πίνακες αληθείας εκ των τύπων $T(\Gamma)$.

Από το Β.1 κάθε τύπος $\varphi \in T^*(\Gamma)$ δίδει πίνακα αληθείας όπου η αποτίμηση «όλα ΑΛΗΘΗ» δίδει ΑΛΗΘΕΣ. Αλλά και, (από Β.2), *κάθε* τέτοιος πίνακας προέρχεται από κάποιο τύπο $\psi \in T^*(\Gamma)$. Άρα αρκεί να μετρήσουμε όλους τους πίνακες αληθείας στους οποίους η αποτίμηση «όλα ΑΛΗΘΗ» αντιστοιχίζεται στο Α. Κάθε τέτοιος πίνακας αληθείας ορίζεται από μια συνάρτηση *από τις υπόλοιπες* $m = (2^n - 1)$ αποτιμήσεις προς 2 παραμέτρους {Α, Ψ}, οπότε έχουμε 2^m τέτοιες συναρτήσεις, δηλαδή 2^{2^n-1} πίνακες αληθείας εκ των τύπων $T^*(\Gamma)$.

Ερώτημα 4.

Το ερώτημα 4 (Α και Β) εστιάζει στο «απαγωγικό» κομμάτι του Π.Λ., δηλαδή στον συντακτικό μηχανισμό παραγωγής αποδείξεων. Τα κύρια σημεία εδώ είναι τα αξιώματα του Π.Λ., ο κανόνας modus ponens, οι έννοιες της συνέπειας και της αντίφασης, και τα κύρια εργαλεία είναι θεμελιακά θεωρήματα του Π.Λ. όπως θ. Πληρότητας, θ. Απαγωγής, κά . [Βλ. σελ. 53-65 περί «προτασιακού λογισμού»].

Ειδικά το ερώτημα 4.Β παρουσιάζει και τις δύο όψεις: αποδείξεις που είναι δυνατόν να γίνουν, αλλά και «αποδείξεις» που δεν υπάρχουν.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α, #8, #9,

ΓΙΑ ΤΟ Β, #8, #9.

Α.1. (α) Βρείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα τύπων είναι συνεπή με χρήση του θεωρήματος Πληρότητας / Εγκυρότητας. (β) Αν υπάρχουν μη-συνεπή σύνολα, αποδείξτε το και χωρίς την (άμεση ή έμμεση) χρήση του θεωρήματος Πληρότητας / Εγκυρότητας.

i. $T = \{ (p \to q), (q \to r), (r \to \neg p) \}$

ii. $T = \{ \neg(p \to q), q \}$

Εκ του ορισμού, «T είναι αντιφατικό $\Leftrightarrow$ υπάρχει *απόδειξη* $T \vdash \{ \alpha, \neg\alpha \}$ για κάποιο α».

(α) *Χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα Εγκυρότητας/Πληρότητας ως εξής:*
(*i*) (ΣΥΝΕΠΕΣ) Βρίσκουμε, (εδώ εύκολα), ότι η αποτίμηση p, q, r = ΨΕΥΔΕΣ επαληθεύει το T. Άρα το T δεν μπορεί να είναι αντιφατικό διότι τότε *από το θ. Εγκυρότητας* θα έπρεπε η παραπάνω αποτίμηση να επαληθεύει ταυτοχρόνως τόσο κάποιο α όσο και το $\neg\alpha$.
(*ii*) (ΜΗ-ΣΥΝΕΠΕΣ) Ελέγχουμε *όλες* τις (εδώ λίγες) αποτιμήσεις, και βλέπουμε ότι καμμία δεν επαληθεύει το $T = \{ \neg(p \to q), q \}$:

p	q	$\neg(p \to q)$	$\{ \neg(p \to q), q \}$
Α	Α	**Ψ**	✗
Α	**Ψ**	Α	✗
Ψ	Α	**Ψ**	✗
Ψ	**Ψ**	**Ψ**	✗

Αφού το σύνολο T είναι μη-ικανοποιήσιμο, κατά το παράδειγμα 2.16 του βιβλίου (*όπου χρησιμοποιείται το θ. Πληρότητας*), είναι και μη-συνεπές.

(β) *Εκ του ορισμού*, αρκεί να βρούμε *απόδειξη* $T \vdash \{ \alpha, \neg\alpha \}$ για κάποιο α.
(*ii*) (ΜΗ-ΣΥΝΕΠΕΣ) Με $\boldsymbol{\alpha} = (p \to q)$, είναι προφανές ότι $\{\neg(\boldsymbol{p \to q}), q\} \vdash \neg(\boldsymbol{p \to q})$ $(= \neg\boldsymbol{\alpha})$.
Για το υπόλοιπο, $\{\neg(p \to q), q\} \vdash (p \to q)$ $(= \boldsymbol{\alpha})$, αρκεί η χρήση του ΑΣ1: $q \to (p \to q)$, και η προφανής εφαρμογή του *modus ponens* με χρήση και του q.

Α.2. Δείξτε χωρίς την χρήση του θεωρήματος Απαγωγής ότι $\neg\varphi \vdash (\neg\psi \to \varphi) \to \psi$.

Αναγνωρίζοντας το δεξιό μέλος ως την τελική έκφραση του ΑΣ3 προχωρούμε ως εξής:

Στάδιο:	Προέλευση/Βήμα:
1: $\neg\varphi$	υπόθεση $\neg\varphi$.
2: $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	ΑΣ1: $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$, όπου $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \neg\varphi, \neg\psi \rangle$.
3: $(\neg\psi \to \neg\varphi)$	*modus ponens* από 1 και 2.
4: $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$	ΑΣ3: $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$, με $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$
5: $(\neg\psi \to \varphi) \to \psi$	*modus ponens* από 3 και 4.

Β.1. Δώστε τις παρακάτω τυπικές αποδείξεις. Χρησιμοποιήστε ελεύθερα όλα τα σχετικά θεωρήματα εκτός από το θεώρημα Πληρότητας.

i. $\vdash (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$
(όπου δεξιές παρενθέσεις υπάρχουν μόνο στο τέλος και είναι n στο πλήθος)

ii. $\{(p_i \to p_{i+1}) : i \in \mathbf{N}\} \cup \{\neg p_5\} \vdash \neg p_2$ (Θεωρήσατε γνωστό ότι $\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi)$)

iii. $\{ (\varphi \to \psi), (\varphi \to \neg\psi) \} \vdash \neg\varphi$

(*i*) Από το *θεώρημα της «απαγωγής»* αρκεί να δείξουμε ότι,

$\varphi_1 \vdash (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$, ή,

$\varphi_1, \varphi_2 \vdash (\varphi_3 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$, ή

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash (\varphi_4 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$, και τελικά

…

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n \vdash \varphi_1$, το οποίον ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

(*ii*) Από το *θεώρημα της «αντιθετοαντιστροφής»* αρκεί να δείξουμε ότι,

$\{ (p_i \to p_{i+1}) : i \in \mathbf{N} \} \cup \{p_2\} \vdash \neg\neg p_5$

το οποίο ισχύει, διότι από το p_2 και το $(p_2 \to p_3)$ με *m.p.* λαμβάνουμε τα p_3. Ομοίως από p_3, $(p_3 \to p_4)$ λαμβάνουμε το p_4, και από p_4, $(p_4 \to p_5)$ το p_5. Από το p_5 και το ότι '$\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi)$' προκύπτει το ζητούμενο $\neg\neg p_5$.

(*iii*) Από το *θεώρημα της «εις άτοπον απαγωγής»* αρκεί να δείξουμε ότι,

$\{ (\varphi \to \psi), (\varphi \to \neg\psi), \varphi \}$ είναι αντιφατικό,

το οποίο ισχύει διότι με 2 εφαρμογές του *m.p.* λαμβάνουμε τόσο το ψ όσο και το $\neg\psi$.

Β.2. Δείξτε ότι οι παρακάτω υποδηλούμενες τυπικές αποδείξεις δεν υπάρχουν. Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε τα θεωρήματα Πληρότητας / Εγκυρότητας.

i. $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\chi \to \psi)$

ii. $\{ (p_i \to p_{i+1}) : i \in \mathbf{N} \} \vdash (p_4 \to p_2)$

Αν υπάρχουν τέτοιες αποδείξεις τότε (από θ. Εγκυρότητας) ό,τι επαληθεύει τις υποθέσεις θα επαληθεύει και τα συμπεράσματα. Αρκεί λοιπόν να βρούμε αποτιμήσεις-«αντιπαραδείγματα» όπου οι υποθέσεις επαληθεύονται μεν, αλλά τα συμπεράσματα όχι. Τα εξής αρκούν:

(*i*) χ = ΑΛΗΘΕΣ, ψ = ΨΕΥΔΕΣ, ώστε $(\chi \to \psi)$ = ΨΕΥΔΕΣ. Με αυτά: $((\varphi \to (\varphi \to \neg\psi))$ = ΑΛΗΘΕΣ, και ο όλος τύπος διαψεύδεται.

(*ii*) $\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \ldots \rangle = \langle$ Ψ, Ψ, Ψ, Α, Α, Α, … $\rangle$. Με αυτά, όλοι οι τύποι $(p_i \to p_{i+1})$ αληθεύουν, αλλά ο $(p_4 \to p_2)$ = (Α → Ψ) όχι.

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα σας εισάγει στην μορφή εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Τα ερωτήματα είναι αρκετά απλά ώστε να μπορείτε να τα απαντήσετε γρήγορα, και, ίσως, χωρίς χαρτί και μολύβι. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας σε λιγότερο από 15 λεπτά. Το ερώτημα 5.Α εστιάζει σε ζητήματα σημασιολογικής απορροής ($\models$), ενώ το 5.Β σε ζητήματα που αφορούν σε αποδείξεις ($\vdash$).

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α, #6, ΓΙΑ ΤΟ Β, #10.

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ), και **αιτιολογώντας συνοπτικά** τις απαντήσεις σας.

Α. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

1. (Σ/Λ) Αν $\varphi_1 \models \varphi_2$ και $\psi_1 \models \psi_2$, τότε $(\varphi_1 \wedge \psi_1) \models (\varphi_2 \wedge \psi_2)$

2. (Σ/Λ) Αν φ, ψ είναι τύποι τέτοιοι ώστε το $\{\varphi, \psi\}$ να είναι αντιφατικό, τότε ο $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ είναι ταυτολογία.

3. (Σ/Λ) $\{ p_{2i} : i \in \mathbf{N}\} \models ((p_7 \to p_{12}) \to p_{63})$

4. (Σ/Λ). Αν T σύνολο προτασιακών τύπων, η δήλωση «το T *δεν* συνεπάγεται ταυτολογικά τον τύπο φ» είναι ισοδύναμη με την δήλωση «$T \models \neg\varphi$»

---

1. **ΣΩΣΤΟ**: Κάθε αποτίμηση που επαληθεύει το $(\varphi_1 \wedge \psi_1)$ επαληθεύει τα φ_1 και ψ_1, άρα και τα φ_2 και ψ_2, (αφού $\varphi_1 \models \varphi_2$ και $\psi_1 \models \psi_2$), και άρα το $(\varphi_2 \wedge \psi_2)$.
2. **ΛΑΘΟΣ**: Το $\{\varphi, \neg\varphi\}$ είναι αντιφατικό σύνολο, αλλά το $(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$ δεν είναι ταυτολογία.
3. **ΛΑΘΟΣ**: Διότι είναι δυνατόν p_7 = ΑΛΗΘΕΣ, $p_{12} = p_{2\times 6}$ = ΑΛΗΘΕΣ, και p_{63} = ΨΕΥΔΕΣ.
4. **ΛΑΘΟΣ**: Π.χ. $T = \{ p \}$, και $\varphi = p \wedge q$, όπου p, q δύο μεταβλητές. Δεν ισχύει $T \models \varphi$, (με p = ΑΛΗΘΕΣ, q = ΨΕΥΔΕΣ, το 1° αληθεύει και το 2° όχι), αλλά επίσης δεν ισχύει $T \models \neg\varphi$, (ή $\{ p \} \models \neg(p \wedge q)$), διότι με p = ΑΛΗΘΕΣ, q = ΑΛΗΘΕΣ, το 1° επαληθεύεται και το 2° όχι.

Β. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

1. (Σ/Λ) Αν T σύνολο τύπων, τότε το T είναι συνεπές αν και μόνο αν υπάρχει τύπος φ που δεν αποδεικνύεται τυπικά από το T.

2. (Σ/Λ) Αν T συνεπές σύνολο τύπων και $T \vdash \varphi$, τότε ο φ είναι ταυτολογία.

3. (Σ/Λ) Αν T συνεπές σύνολο τύπων και ο τύπος φ είναι ταυτολογία, τότε το $T \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο (επαληθεύσιμο).

4. (Σ/Λ) Αν το $\{\varphi, \psi\}$ είναι ικανοποιήσιμο τότε το $\{\neg\varphi, \neg\psi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

---

1. **ΣΩΣΤΟ**: Αν το T δεν είναι συνεπές τότε εξ αυτού αποδεικνύονται τα α και $\neg\alpha$, για κάποιο α, και εξ αυτού τα πάντα. Το αντίστροφο ισχύει τετριμμένα.
2. **ΛΑΘΟΣ**: Για μια μεταβλητή p και με $T = \{ p \}$, $\varphi = p$ έχουμε και συνεπές T και $T \vdash \varphi$, αλλά το φ ($= p$, μεταβλητή) δεν είναι ταυτολογία.
3. **ΣΩΣΤΟ**: Ένα συνεπές σύνολο T είναι πάντα επαληθεύσιμο από κάποια αποτίμηση, η οποία θα επαληθεύει αναγκαστικα και το φ, αφού αυτό είναι ταυτολογία.
4. **ΛΑΘΟΣ**: Αν οι τύποι φ, ψ είναι δύο απλές προτασιακές μεταβλητές, τότε για το $\{\varphi, \psi\}$ αρκεί η αποτίμηση φ, ψ = ΑΛΗΘΕΣ, ενώ για το $\{\neg\varphi, \neg\psi\}$ αρκεί η φ, ψ = ΨΕΥΔΕΣ.
