Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΔΕΟ13 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge2_deo13.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο φοιτητή	<Όνομα Φοιτητή> <Επώνυμο Φοιτητή>

Κωδικός ΘΕ	ΠΛΗ 20
Κωδικός Τμήματος	<ΤΜΗΜΑ>
Ακ. Έτος	2016–2017
α/α ΓΕ	**2η**

Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Σύμβουλου	<Όνομα ΣΕΠ> <Επώνυμο ΣΕΠ>
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (*ημέρα Παρασκευή*)	***Τετάρτη 21/12/2016***
Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

***<u>Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή</u>**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	**0**

Υπογραφή Φοιτητή

Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου

Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2016-2017

Ε ρ γ α σ ί α 2η

Προτασιακή Λογική

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της Προτασιακής Λογικής.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας study.eap.gr μέχρι την* ***Τετάρτη 21/12/2016****.*

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο αρχείο αυτό πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* ***5*** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Συνοδευτικές ασκήσεις: Από αυτή την εργασία και εφεξής, θα σας διανέμεται επίσης ένα αρχείο με 10 ασκήσεις από παλιές εργασίες που μπορούν να σας βοηθήσουν στην απόκτηση εμπειρίας. Συνιστάται πάντως να μην περιοριστείτε σε αυτές αλλά να μελετήσετε και άλλες ασκήσεις από παλιές εργασίες όπως σημειώνονται παρακάτω.

   Προηγούμενες εργασίες: Η 2η εργασία των ακαδημαϊκών ετών 2005-6, 2006-7, 2007-8, 2008-9, 2009-10, 2010-11, 2011-12, η 5η εργασία των ετών 2004-5, 2003-4, καθώς και η 1η εργασία του έτους 2002-3.

Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: *Ενδεικτικά αναφέρονται τα θέματα Προτασιακής Λογικής στις εξεταστικές περιόδους των ετών 2013, 2012, 2011, 2010, 2009, 2008, 2007, 2006, 2005 και 2004.*

Σημειώσεις και Υπερκείμενα για την Προτασιακή Λογική: *Στην ηλεκτρονική διεύθυνση* http://study.eap.gr/mod/folder/view.php?id=3501 *και ειδικότερα στο φάκελο «Σημειώσεις - Ασκήσεις - ΕΔΥ», διατίθενται οι σημειώσεις για την Προτασιακή Λογική του Χ. Νικολαΐδη καθώς και το υπερκείμενο για τη Λογική της Ε. Φουστούκου. Για την αποδεικτική μέθοδο της επαγωγής είναι πολύ χρήσιμη η μελέτη του παράλληλου υλικού του Δ. Φωτάκη, το οποίο διατίθεται μαζί με τον σχετικό οδηγό μελέτης, επίσης στην παραπάνω διεύθυνση.*

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ερώτημα	**Μέγιστος βαθμός**	**Βαθμός**
1	20	
2	20	
3	25	
4	25	
5	10	
Συνολικός Βαθμός:	**100**	**0**

Γενικά Σχόλια:
<γενικά σχόλια για την εργασία από το Σύμβουλο-Καθηγητή>

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1.

Το ερώτημα 1.Α.1 αφορά στα απλά γραμματικά στοιχεία του Προτασιακού Λογισμού (Π.Λ.): ποιά σύμβολα χρησιμοποιούμε, και με ποιούς κανόνες γράφουμε με αυτά τύπους και προτάσεις. [Βλ. σελ. 20-28, [(1)]].

Το ερώτημα 1.Α.2 είναι μια άσκηση επαγωγικής ανάλυσης ενός θεμελιακού εργαλείου, της σχέσης De Morgan, που λέει απλά ότι «αν δεν αληθεύουν όλες οι τάδε προτάσεις, τότε, και μόνον τότε, κάποια ψεύδεται».

Το ερώτημα 1.Β αφορά την άλλη πλευρά των προτάσεων: κάθε αποτίμηση των μεταβλητών μας επιτρέπει να αποτιμήσουμε έναν τύπο ως αληθή ή ψευδή. Οι τύποι που πάντα επαληθεύονται ή πάντα διαψεύδονται παίζουν ειδικό ρόλο στον Π.Λ. Το ερώτημα εδώ θέτει την απορία «πώς συμπεριφέρονται οι προτασιακοί τύποι που αληθεύουν κατά πλειοψηφία»;

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α, #1 (1 & 2), #2.

Α.1. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω εκφράσεις είναι ορθά συντεταγμένοι προτασιακοί τύποι. Για όσες είναι, σχεδιάστε το δενδροδιάγραμμά τους.

i. $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$
ii. $(p \,\&\, q)$
iii. $(p \vee q \wedge r)$
iv. $\neg((\neg r \vee (r \wedge \neg p)) \leftrightarrow \neg\neg\neg q)$
v. $(p \neg \vee q) \rightarrow (p \vee \neg q)$

Α.2. Έστω $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ n προτασιακοί τύποι. Η παρακάτω ταυτολογία, για n = 2, είναι ο γνωστός τύπος *De Morgan*:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_i\right) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\right)$$

Χρησιμοποιήσατε επαγωγή για να αποδείξετε την γενίκευσή του για κάθε $n \geq 3$.

Β. Έστω A ένα σύνολο με περιττό πλήθος λογικών αποτιμήσεων. Έστω D το σύνολο των προτασιακών τύπων που επαληθεύονται από *μια πλειοψηφία αποτιμήσεων* στο A (τις μισές συν μία, τουλάχιστον). Εξετάστε και εξηγήστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν:

1. Αν φ τύπος, τότε ακριβώς ένας από τους φ και $\neg\varphi$ ανήκει στο D.
2. Αν ο φ ανήκει στο D και ο $(\varphi \rightarrow \psi)$ είναι ταυτολογία, τότε ο ψ ανήκει στο D.
3. Αν φ και $(\varphi \rightarrow \psi)$ ανήκουν στο D, τότε ο ψ ανήκει στο D.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:
<σχόλια>

---

(1) *Όλες οι παραπομπές μας είναι στο Τόμο Γ΄ περί* ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ.

Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 2.

Το ερώτημα 2.Α επιδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο ο Π.Λ. καθίσταται χρήσιμος σε «πραγματικό» περιβάλλον: (α) αποτυπώνουμε μια κατάσταση πραγμάτων με προτασιακές μεταβλητές και τύπους, (β) από τις όποιες αληθείς υποθέσεις παράγουμε αποδεικτικά συμπεράσματα, (γ) τα οποία θεωρούμε πλέον επίσης αληθή. Εδώ η «απόδειξη» έχει απλά και φυσικά βήματα, τόσο που μοιάζει με απλό καθημερινό συλλογισμό. Το ερώτημα ζητά, και προάγει, μια σαφή κατανόηση της συντακτικής vs. σημασιολογικής όψης του Π.Λ. [Βλ. σελ. 26 και εξής, περί αποτιμήσεων, και σελ. 54-58 περί αποδείξεων].

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α, #4, #7, ΓΙΑ ΤΟ Β, #2.

Μας παρουσιάζουν τρία σκεπασμένα καλάθια (1ο, 2ο, 3ο), τριών τύπων: είτε *Α* (= περιέχει μόνον *Αχλάδια*), είτε *Β* (= περιέχει μόνον *Βερύκοκα*), είτε *ΑΒ* (= *ανάμεικτο* απο *Α* και *Β*). Κάθε καλάθι φέρει μία πινακίδα που γράφει είτε *Α*, είτε *Β*, είτε *ΑΒ*. Για να περιγράψουμε την κατάσταση με γλώσσα του Π.Λ. χρησιμοποιούμε 9+9 προτασιακές μεταβλητές με δείκτες $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ και $\varphi \in \{A, B, AB\}$. Οι μεταβλητές και ο τρόπος αποτίμησής τους είναι οι εξής:

$\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ αποτιμάται ΑΛΗΘΗΣ αν-και-μόνον-αν «το καλάθι ***κ*** είναι τύπου ***φ***».

$\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ αποτιμάται ΑΛΗΘΗΣ αν-και-μόνον-αν «η πινακίδα στο καλάθι ***κ*** γράφει ***φ***».

(Οι δείκτες *κ*, *φ* παίζουν απλώς μνημονικό ρόλο, και διευκολύνουν την περιγραφή των προτασιακών τύπων. Θα μπορούσαμε λ.χ. να ονομάσουμε τις «ΕΧΕΙ» ως $p_1, \ldots, p_9$, και τις «ΓΡΑΦΕΙ» ως $q_1, \ldots, q_9$.)

1. Αναφερόμενοι στα παραπάνω, «μεταφράστε» σε απλά Ελληνικά τις εξής υποθέσεις $\mathbf{Y}_1$:

i. $\displaystyle\bigwedge_{\kappa\in\{1,2,3\}} \left(\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,AB]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,A]} \vee \text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,B]}\right)$

ii. $\displaystyle\bigwedge_{\substack{\kappa,\lambda\in\{1,2,3\}\\ \kappa\neq\lambda}} \ \bigwedge_{\varphi\in\{A,B,AB\}} \left(\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,\varphi]} \to \neg\text{ΕΧΕΙ}_{[\lambda,\varphi]}\right)$

iii. $\displaystyle\bigwedge_{\kappa\in\{1,2,3\}} \ \bigwedge_{\varphi\in\{A,B,AB\}} \left(\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]} \to \neg\text{ΕΧΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}\right)$

2. Οι πινακίδες στα καλάθια 1, 2, 3 γράφουν αντιστοίχως *Α*, *Β*, *ΑΒ*. Από τις 9+9 απλές προτάσεις $\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$ και $\neg\text{ΓΡΑΦΕΙ}_{[\kappa,\varphi]}$, κάποιο υποσύνολο $\mathbf{Y}_2$ περιέχει ακριβώς όσες επαληθεύονται με τα δεδομένα αυτού του υπο-ερωτήματος. Ποιό είναι αυτό το $\mathbf{Y}_2$;

3. Έχοντας ως σύνολο υποθέσεων **Y** τις προτάσεις $\mathbf{Y}_1 \cup \mathbf{Y}_2$, δώσατε τυπικές αποδείξεις που εξασφαλίζουν ότι: $\mathbf{Y} \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \text{ΕΧΕΙ}_{[1,B]}$, $\mathbf{Y} \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,A]}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \text{ΕΧΕΙ}_{[2,AB]}$. (Συμμετρικά θα ισχύει και: $\mathbf{Y} \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \text{ΕΧΕΙ}_{[1,AB]}$, $\mathbf{Y} \cup \{\text{ΕΧΕΙ}_{[3,B]}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \text{ΕΧΕΙ}_{[2,A]}$.)

4. Έστω ότι τα καλάθια και οι πινακίδες *επαληθεύουν*, υπό τον τρόπο της αποτίμησής μας, το παραπάνω σύνολο υποθέσεων **Y**. Επιλέγετε όποιο καλάθι θέλετε, και σας δείχνουν ένα τυχαίο φρούτο από το καλάθι που επιλέξατε. Υπάρχει επιλογή καλαθιού που να επιτρέπει να *αποδείξουμε* ποιό είναι *το ακριβές περιεχόμενο όλων των καλαθιών*;

5. Έστω ότι από τις *επαληθευμένες* υποθέσεις **Y** και $\mathrm{EXEI}_{[3,B]}$ έχουμε όντως μια τυπική *απόδειξη* της $\mathrm{EXEI}_{[2,A]}$. Βάσει ποίου θεωρήματος του Π.Λ. είμαστε βέβαιοι ότι το 2ο καλάθι περιέχει *πράγματι* Αχλάδια; (Λ.χ., βάσει του θ. απαγωγής; του θ. εγκυρότητας; του θ. πληρότητας; κάποιου άλλου;).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Προς χρήση των συνδέσμων $\neg$ $\rightarrow$, αντί μιας υπόθεσης $X \wedge Y$ χρησιμοποιήστε τις $\{X, Y\}$, και αντί μιας υπόθεσης $X \vee Y \vee Z$ χρησιμοποιήστε την $\neg X \rightarrow (\neg Y \rightarrow Z)$.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 20

Ερώτημα 3.

Το ερώτημα 3 εστιάζει σε σημασιολογικές όψεις του Π.Λ. και ειδικότερα το ερώτημα 3.Α ζητά μια εξοικείωση εκ μέρους σας με την έννοια της «ταυτολογίας». [Βλ. σελ. 32-33].

Στο ερώτημα 3.Β η προσοχή στρέφεται στους υπονοούμενους πίνακες αληθείας, δηλαδή σε εργαλείο με καίριο ρόλο στη σημασιολογία του Π.Λ. Μια βασική κατανόηση αυτού του εργαλείου επιτρέπει να μετρήσουμε την εκφραστική ποικιλία που έχουν οι τύποι του Π.Λ. Ρόλο σε αυτή την ανάλυση παίζουν και οι «κανονικές» μορφές των προτασιακών τύπων, εδώ η διαζευκτική μορφή. [Βλ. σελ. 43-45, και 46-47 περί διαζευκτικής μορφής].

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α #3, #5, #6, ΓΙΑ ΤΟ Β, #6.

A.1. Αν τα φ, χ, ψ είναι προτασιακοί τύποι, δείξτε (χρησιμοποιώντας τις ταυτολογικές ισοδυναμίες του Π.Λ.), την παρακάτω ταυτολογική ισοδυναμία.

$$(\varphi \wedge (\neg\chi \wedge \neg\psi)) \vee (\varphi \wedge (\chi \wedge \psi)) \equiv (\varphi \wedge ((\chi \vee \psi) \rightarrow (\chi \wedge \psi)))$$

A.2. Έστω φ, ψ προτασιακοί τύποι που δεν έχουν κοινές προτασιακές μεταβλητές. Δείξτε ότι οι δύο προτάσεις παρακάτω είναι ισοδύναμες.

i. Ο τύπος $\varphi \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.

ii. Τουλάχιστον ένας από τους τύπους $\neg\varphi$ και ψ είναι ταυτολογία.

B. Έστω *Γ* προτασιακή γλώσσα με *n* μεταβλητές, P_1, ..., P_n. Ένας *πίνακας αληθείας* $\pi(\cdot)$, είναι τυπικά μια συνάρτηση που σε κάθε μία από τις 2^n δυνατές λογικές αποτιμήσεις $a(\cdot)$ αντιστοιχίζει κάποια τιμή αληθείας (Α ή Ψ). (Οι γνωστοί «πίνακες αληθείας» δεν είναι παρά η *σχεδίαση* μιας τέτοιας συνάρτησης όπου βάζουμε κάθε αποτίμηση των P_1, ..., P_n συν την αντίστοιχη τιμή αληθείας ανά μία «γραμμή»).

Κάθε τύπος $\varphi \in T(\Gamma)$ ορίζει έναν πίνακα αληθείας ΠΑ(φ) κατά φυσικό τρόπο: η ΠΑ(φ) αντιστοιχίζει σε κάθε αποτίμηση $a(\cdot)$ την αληθοτιμή $\overline{a}(\varphi)$ του φ υπό την $a(\cdot)$. Το θεώρημα 2.7 του βιβλίου εξηγεί γιατί αυτό ισχύει και αντιστρόφως: για κάθε πίνακα αληθείας $\pi(\cdot)$ υπάρχει τύπος ψ (*και μάλιστα σε κανονική διαζευκτική μορφή*), ώστε ΠΑ(ψ) = $\pi(\cdot)$.

1. Έστω $T^*(\Gamma) \subseteq T(\Gamma)$ οι τύποι που δεν περιέχουν καμμία άρνηση ($\neg$). Δείξατε ότι κάθε τύπος $\varphi \in T^*(\Gamma)$ επαληθεύεται από την αποτίμηση που καθιστά ΑΛΗΘΗ κάθε μεταβλητή.

2. Δείξτε το αντίστροφο, ότι δηλαδή εάν ο φ επαληθεύεται από την αποτίμηση που καθιστά ΑΛΗΘΗ κάθε μεταβλητή τότε υπάρχει $\psi \in T^*(\Gamma)$ με τον ίδιο πίνακα αληθείας: ΠΑ(ψ) = ΠΑ(φ).

> ΥΠΟΔΕΙΞΗ*: Σκεφτείτε τον τύπο ψ για τον πίνακα αληθείας του φ όπως στο θ. 2.7. Κάποιος συζευκτικός όρος του ψ θα περιέχει και τις n μεταβλητές, όλες χωρίς άρνηση. Χρησιμοποιήστε μια γενίκευση του 3.Α.1 για να αφαιρέσετε τις αρνήσεις από όλους τους άλλους όρους.*

3. Με γνωστά τα παραπάνω (είτε τα αποδείξατε είτε όχι) , δείξατε ότι οι διαφορετικοί πίνακες αληθείας των τύπων του $T(\Gamma)$ είναι 2^{2^n} στο πλήθος, ενώ οι διαφορετικοί πίνακες του $T^*(\Gamma)$ είναι 2^{2^n-1} στο πλήθος.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

Ερώτημα 4.

Το ερώτημα 4 (Α και Β) εστιάζει στο «απαγωγικό» κομμάτι του Π.Λ., δηλαδή στον συντακτικό μηχανισμό παραγωγής αποδείξεων. Τα κύρια σημεία εδώ είναι τα αξιώματα του Π.Λ., ο κανόνας modus ponens, οι έννοιες της συνέπειας και της αντίφασης, και τα κύρια εργαλεία είναι θεμελιακά θεωρήματα του Π.Λ. όπως θ. Πληρότητας, θ. Απαγωγής, κά . [Βλ. σελ. 53-65 περί «προτασιακού λογισμού»].

Ειδικά το ερώτημα 4.Β παρουσιάζει και τις δύο όψεις: αποδείξεις που είναι δυνατόν να γίνουν, αλλά και «αποδείξεις» που δεν υπάρχουν.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α, #8, #9,

ΓΙΑ ΤΟ Β, #8, #9.

Α.1. (α) Βρείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα τύπων είναι συνεπή με χρήση του θεωρήματος Πληρότητας / Εγκυρότητας. (β) Αν υπάρχουν μη-συνεπή σύνολα, αποδείξτε το και χωρίς την (άμεση ή έμμεση) χρήση του θεωρήματος Πληρότητας / Εγκυρότητας.

i. $T = \{ (p \to q), (q \to r), (r \to \neg p) \}$

ii. $T = \{ \neg(p \to q), q \}$

Α.2. Δείξτε χωρίς την χρήση του θεωρήματος Απαγωγής ότι $\neg\varphi \vdash (\neg\psi \to \varphi) \to \psi$.

Β.1. Δώστε τις παρακάτω τυπικές αποδείξεις. Χρησιμοποιήστε ελεύθερα όλα τα σχετικά θεωρήματα εκτός από το θεώρημα Πληρότητας.

i. $\vdash (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$
(όπου δεξιές παρενθέσεις υπάρχουν μόνο στο τέλος και είναι n στο πλήθος)

ii. $\{(p_i \to p_{i+1}) : i \in \mathbf{N}\} \cup \{\neg p_5\} \vdash \neg p_2$ (θεωρήσατε γνωστό ότι $\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi)$)

iii. $\{ (\varphi \to \psi), (\varphi \to \neg\psi) \} \vdash \neg\varphi$

Β.2. Δείξτε ότι οι παρακάτω υποδηλούμενες τυπικές αποδείξεις δεν υπάρχουν. Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε τα θεωρήματα Πληρότητας / Εγκυρότητας.

i. $\vdash ((\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\chi \to \psi)$

ii. $\{ (p_i \to p_{i+1}) : i \in \mathbf{N} \} \vdash (p_4 \to p_2)$

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 25

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα σας εισάγει στην μορφή εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Τα ερωτήματα είναι αρκετά απλά ώστε να μπορείτε να τα απαντήσετε γρήγορα, και, ίσως, χωρίς χαρτί και μολύβι. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας σε λιγότερο από 15 λεπτά. Το ερώτημα 5.Α εστιάζει σε ζητήματα σημασιολογικής απορροής ($\models$), ενώ το 5.Β σε ζητήματα που αφορούν σε αποδείξεις ($\vdash$).

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: ΓΙΑ ΤΟ Α, #6, ΓΙΑ ΤΟ Β, #10.

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό* (Σ) ή *Λάθος* (Λ), και **αιτιολογώντας συνοπτικά** τις απαντήσεις σας.

Α. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

1. (Σ/Λ) Αν $\varphi_1 \models \varphi_2$ και $\psi_1 \models \psi_2$, τότε $(\varphi_1 \wedge \psi_1) \models (\varphi_2 \wedge \psi_2)$

2. (Σ/Λ) Αν φ, ψ είναι τύποι τέτοιοι ώστε το $\{\varphi, \psi\}$ να είναι αντιφατικό, τότε ο $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ είναι ταυτολογία.

3. (Σ/Λ) $\{ p_{2i} : i \in \mathbf{N}\} \models ((p_7 \to p_{12}) \to p_{63})$

4. (Σ/Λ). Αν T σύνολο προτασιακών τύπων, η δήλωση «το T *δεν* συνεπάγεται ταυτολογικά τον τύπο φ» είναι ισοδύναμη με την δήλωση «$T \models \neg\varphi$»

Β. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

1. (Σ/Λ) Αν T σύνολο τύπων, τότε το T είναι συνεπές αν και μόνο αν υπάρχει τύπος φ που δεν αποδεικνύεται τυπικά από το T.

2. (Σ/Λ) Αν T συνεπές σύνολο τύπων και $T \vdash \varphi$, τότε ο φ είναι ταυτολογία.

3. (Σ/Λ) Αν T συνεπές σύνολο τύπων και ο τύπος φ είναι ταυτολογία, τότε το $T \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο (επαληθεύσιμο).

4. (Σ/Λ) Αν το $\{\varphi, \psi\}$ είναι ικανοποιήσιμο τότε το $\{\neg\varphi, \neg\psi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

<Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

Αξιολόγηση Ερωτήματος	
Σχόλια Σύμβουλου Καθηγητή:	
<σχόλια>	
Αξιολόγηση Ερωτήματος :	/ 10