Ενδεικτικές Ασκήσεις Αλγορίθμων και Θεωρίας Γραφημάτων

Άσκηση 1 (2015-16, Εργασία 4, Ερώτημα 1)

Α. Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$F_1 = 1$, $F_2 = 2$ και $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, για $n \geq 3$.

Ο ακόλουθος αναδρομικός αλγόριθμος υπολογίζει την ακολουθία:

```
procedure Fib( n )
(*)       if (n = 1 OR n = 2) then  return ( n );
          return (Fib(n-1) + Fib(n-2));
```

i. Εξηγήστε τι συμβαίνει αν αντικαταστήσουμε τη γραμμή (*) με την εντολή: `if (n = 1) then return ( n );`

ii. Εξηγήστε τι συμβαίνει αν καλέσουμε τον αλγόριθμο `Fib` (στην αρχική του μορφή, χωρίς αλλαγή), με αρνητικό όρισμα (για παράδειγμα όταν καλούμε `Fib`(–1));

iii. Κάντε τις κατάλληλες τροποποιήσεις στον παραπάνω αλγόριθμο ώστε όταν κληθεί με αρνητικό όρισμα, `Fib(n)` (με $n < 0$), να επιστρέφει την τιμή F_{-n} (όπου φυσικά $-n > 0$).

Β. Έστω *A* ένας πίνακας με θέσεις αριθμημένες από 1 έως *n*, ο οποίος περιέχει *n* αριθμούς και ο οποίος είναι ταξινομημένος σε αύξουσα σειρά. Ο παρακάτω αλγόριθμος αναζητά το δεδομένο στοιχείο *x* εντός του *A* μεταξύ των θέσεων *i* και *j*. Εάν το βρεί (επιτυχημένη αναζήτηση) επιστρέφει τη θέση του στοιχειου μέσα στον πίνακα, διαφορετικά (αποτυχημένη αναζήτηση) επιστρέφει –1.

```
procedure Search(A, i, j, x)
   if (i > j) then  return ( -1 );
   m = (i + j)/2 // ακέραια διαίρεση
   if (A[m] = x) then  return ( m );
   if (A[m] > x) then  return (Search(A, i, m-1, x) );
   if (A[m] < x) then  return (Search(A, m+1, j, x) );
```

Έστω ότι ο πίνακας *A* περιέχει, ταξινομημένους σε αύξουσα σειρά, τους αριθμούς 1,2,...,*n*. Στα ακόλουθα ερωτήματα η αρχική κλήση του αλγορίθμου δεν υπολογίζεται ως αναδρομική κλήση.

1. Δείξτε ότι η εκτέλεση `Search(A, 1, n, x)` θα κάνει το πολύ $1+\log_2(n)$ αναδρομικές κλήσεις.
2. Υποθέστε ότι εκτελώντας `Search(A, 1, 100, x)` η αναζήτηση είναι επιτυχημένη. Τότε γνωρίζετε ότι η τιμή που επιστρέφει ο αλγόριθμος είναι ένας αριθμός μεταξύ του 1 και του 100. Εάν γνωρίζετε επιπλέον ότι κατά την εκτέλεση γίνονται ακριβώς 2 αναδρομικές κλήσεις, τι μπορείτε να πείτε για την τιμή που επιστρέφει ο αλγόριθμος;

Απάντηση

Α.

1. Με την αλλαγή αυτή έχουμε αφαιρέσει μία αρχική συνθήκη. Έτσι ο αλγόριθμος δεν μπορεί πλέον να υπολογίσει την τιμή Fib(2): θα καλέσει αναδρομικά την Fib(1) και την Fib(0). Η Fib(1) θα επιστρέψει την τιμή 1, όμως η Fib(0) θα καλέσει τις Fib(-1) και Fib(-2) οι οποίες με τη σειρά τους θα κάνουν δύο νέες αναδρομικές κλήσεις κάθε μία κλπ. Έτσι θα καταλήξουμε σε μία ακολουθία αναδρομικών κλήσεων δίχως τέλος. Το ίδιο φυσικά θα συμβεί εάν καλέσουμε την Fib με οποιοδήποτε όρισμα n μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

2. Θα συμβεί ό,τι ακριβώς περιγράψαμε στην προηγούμενη περίπτωση. Θα έχουμε αναδρομικές κλήσεις Fib(-2) και Fib(-3) που θα κάνουν δύο αναδρομικές κλήσεις κάθε μία κλπ.

3. Θα προσθέσουμε μία γραμμή πριν τον έλεγχο των αρχικών συνθηκών, για να ελέγξουμε εάν το όρισμα είναι αρνητικός αριθμός και, εάν είναι, να το μετατρέψουμε κατάλληλα.

```
procedure Fib( n )
        if (n < 0) then  return ( Fib(-n) );
(*)     if (n = 1 OR n = 2) then  return ( n );
        return (Fib(n-1) + Fib(n-2));
```

Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος εξακολουθεί να μη μπορεί να δώσει απάντηση για $n = 0$. Εάν θέλαμε να ορίσουμε τιμή και για $n = 0$ (ας πούμε Fib(0)=0) θα έπρεπε να το κάνουμε με κάποια αρχική συνθήκη (για παράδειγμα στη γραμμή (*))

Β.

1. Κάνουμε επαγωγή στο μέγεθος (εύρος δεικτών) του πίνακα στον οποίο γίνεται η αναζήτηση. Η βάση της επαγωγής είναι για αναζήτηση σε πίνακες με 1 στοιχείο ($n = 1$), οπότε i=j. Τότε ο αλγόριθμος υπολογίζει m = i.

- Εάν A[m]=x, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει με 0 αναδρομικές κλήσεις.
- Εάν A[m]>x, τότε έχουμε την κλήση Search(A,i,i-1,x) που τερματίζει
- Εάν A[m]<x, τότε έχουμε την κλήση Search(A,i+1,i,x) που τερματίζει.

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε το πολύ $1+\log_2(1)=1$ κλήσεις.

Υποθέτουμε ότι για κάθε αναζήτηση σε τμήμα πίνακα με $k < n$ στοιχεία γίνονται το πολύ $1+\log_2(k)$ αναδρομικές κλήσεις.

Έστω τώρα ότι έχουμε πίνακα A με n στοιχεία. Ο αλγόριθμος υπολογίζει το m. Παρατηρήστε ότι το εύρος δεικτών 1...m-1 καθώς και m+1...n είναι το πολύ n / 2.

- Εάν A[m]=x τότε ο αλγόριθμος τερματίζει (0 αναδρομικές κλήσεις).
- Εάν A[m]>x, έχουμε μία αναδρομική κλήση Search(A,1,m-1,x).
- Εάν A[m]<x, έχουμε μία αναδρομική κλήση Search(A,m+1,n,x).

Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις έχουμε μία αναζήτηση σε πίνακα με το πολύ n / 2 στοιχεία, η οποία τερματίζει, σύμφωνα με την επαγωγική μας υπόθεση, μετά από $1+\log_2(n/2)=1+\log_2(n)-1=\log_2(n)$ αναδρομικές κλήσεις. Άρα έχουμε συνολικά το πολύ $1+\log_2(n)$ αναδρομικές κλήσεις.

2. Έστω ότι αναζητούμε το x στον πίνακα A. Στην αρχική κλήση του αλγορίθμου, την οποία δε μετράμε ως αναδρομική, ο αλγόριθμος υπολογίζει m=50 και εξετάζει εάν A[50]=x. Αυτό φυσικά δεν ισχύει, αφού γνωρίζουμε ότι τελικά ο αλγόριθμος τερμάτισε με ακριβώς 2 αναδρομικές κλήσεις. Υπάρχουν λοιπόν δύο περιπτώσεις. Είτε A[50]>x ή A[50]<x. Άρα η 1η αναδρομική κλήση είναι είτε η Search(A,1,49,x) ή Search(A,51,100,x).

- Εάν η 1η αναδρομική κλήση είναι η Search(A,1,49,x), τότε υπολογίζεται το m=25 και γίνεται η 2η και τελευταία αναδρομική κλήση, η οποία είναι είτε η Search(A,1,24,x) ή Search(A,26,49,x). Όποια κι είναι πρέπει να "βρεί" το στοιχείο x και το βρίσκει στη θέση 12 ή στη θέση 37 αντίστοιχα.
- Εαν η 1η αναδρομική κλήση είναι η Search(A,51,100,x) εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα και βλέπουμε ότι το στοιχείο x βρίσκεται είτε στη θέση 62 ή στη θέση 88.

Άρα τελικά γνωρίζουμε ότι το x είναι ένα από τα 12, 37, 62, 88.

Άσκηση 2 (2014-15, Εργασία 4, Ερώτημα 1)

Ένας πίνακας ακεραίων $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, με $n \geq 3$, ονομάζεται *μονοκόρυφος* αν υπάρχει p όπου $1 < p < n$, τέτοιο ώστε: $a_1 < a_2 < ... < a_p$ και $a_p > a_{p+1} > ... > a_n$. Ο ακόλουθος αναδρομικός αλγόριθμος υπολογίζει την μέγιστη τιμή ενός μονοκόρυφου πίνακα:

```
procedure fmax(A, left, right)
  mid := [(left + right) / 2] ;
  if (A[mid-1] < A[mid]) && (A[mid] > A[mid+1]) then
       return A[mid];
  if ( A[mid-1] > A[mid] ) then
       return fmax(A, left, mid);
  else   // θα ισχύει:  A[mid] < A[mid+1]
       return fmax(A, mid, right);
```

Η διαδικασία *fmax*(*A*, *left*, *right*) δέχεται ως παραμέτρους έναν μονοκόρυφο πίνακα ακεραίων *A*, και τους φυσικούς αριθμούς *left* και *right* και επιστρέφει σαν έξοδο το μέγιστο στοιχείο του πίνακα *A* από τις θέσεις *left* έως και *right*. Υποθέτουμε ότι ισχύει πάντοτε ότι $left \leq right$. Αν ο πίνακας *A* έχει *n* στοιχεία, η αρχική κλήση είναι *fmax*(*A*, 1, *n*). Ο συμβολισμός *A*[*left*] δηλώνει το στοιχείο του πίνακα *A* στη θέση *left*. Η παράσταση [(*left* + *right*) / 2] δηλώνει το **κάτω ακέραιο** μέρος της διαίρεσης, π.χ. [(1+4)/2]=2.

1) Έστω ότι *A* = [3, 4, 8, 9, 11, 15, 19, 22, 27, 33, 37, 1].

a) Να εκτελεστούν όλα τα βήματα της κλήσης *fmax* (*A*, 1, 12) με είσοδο τον πίνακα *A*.

b) Ποιο είναι το βάθος της αναδρομής της κλήσης *fmax*(*A*, 1, 12);

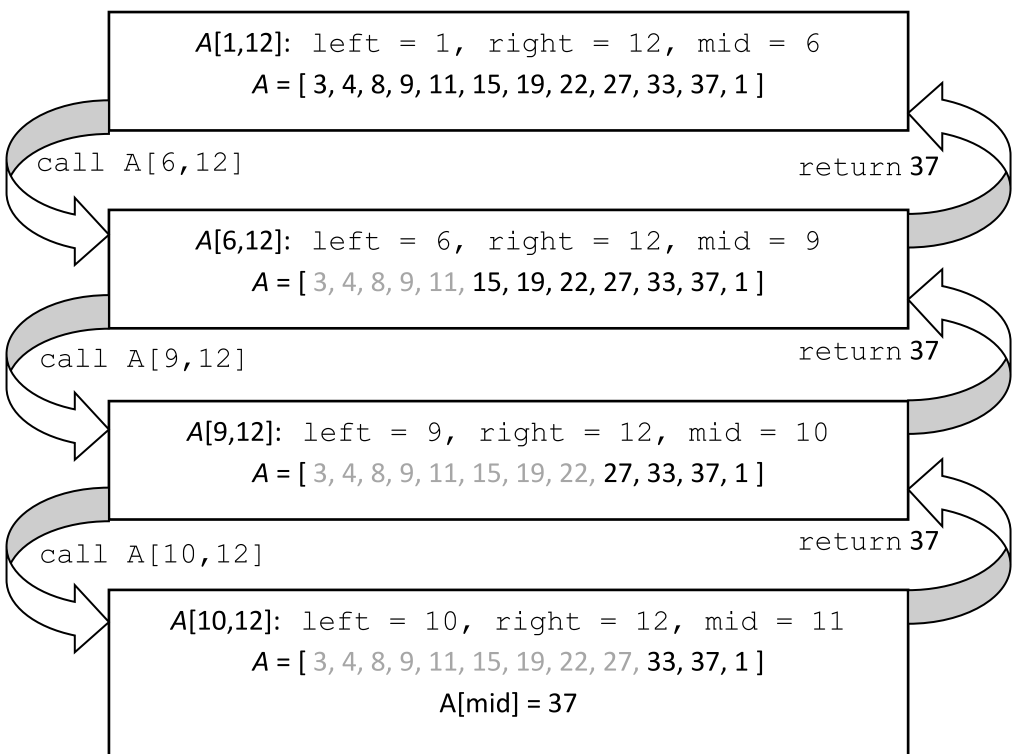
2) Να αποδείξετε με επαγωγή ότι ο αλγόριθμος είναι σωστός, δηλαδή, η κλήση *fmax* (*A*, 1, *n*) υπολογίζει το μέγιστο στοιχείο του μονοκόρυφου πίνακα *A*[1…*n*] .

3) Να υπολογίσετε το μέγιστο βάθος της αναδρομής της κλήσης *fmax* (*A*, 1, *n*) ως συνάρτηση του *n*.

Απάντηση

1)

a) Τα βήματα του αλγόριθμου φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, με την μορφή μονοπατιού με αρχική κλήση *fmax*(A, 1, 12). Κάθε κόμβος του μονοπατιού αντιπροσωπεύει την n-οστή κλήση του αλγόριθμου *max* πάνω στον πίνακα που αναγράφεται. Υπάρχουν δύο ειδών ακμές μεταξύ των κόμβων του μονοπατιού. Η πρώτη ακμή αναφέρει ότι ο ένας κόμβος αποτελεί κλήση του αλγορίθμου από τον άλλο και η δεύτερη ακμή αναφέρει την τιμή που επιστρέφει ο αλγόριθμος στον κόμβο που κάλεσε. Η κλήση του *fmax*(A, 1, 12) θα επιστρέψει την τιμή 37, που είναι το μέγιστο στοιχείο στον πίνακα A. Στο τελευταίο κόμβο του μονοπατιού ισχύει η βάση της αναδρομής: A[mid-1] < A[mid] και A[mid] > A[mid+1].



b) Γνωρίζουμε ότι κάθε φορά που ένας αναδρομικός αλγόριθμος καλεί τον εαυτό του, δημιουργείται στην μνήμη ένα αντίγραφο που περιλαμβάνει όλα τα δεδομένα του αλγόριθμου, το οποίο διαγράφεται όταν τερματίσει και επιστρέψει η ροή του προγράμματος στο σημείο που έγινε η κλήση. Το βάθος θα είναι λοιπόν το μήκος του μονοπατιού που περιγράφει την αναδρομή, δηλαδή η απόσταση στο μονοπάτι αναδρομής από την αρχική κλήση *fmax*(*A*, 1, 12), μέχρι τον τερματικό κόμβο όπου στην περίπτωση του *fmax*(*A*,1,12) θα είναι 3.

2) Εφαρμόζουμε επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του πίνακα:

Βάση επαγωγής: πρέπει να δείξουμε ότι για n=3: *fmax*(*A*, 1, 3) = max{a_1, a_2, a_3}. Το a_2 είναι το μέγιστο στοιχείο του μονοκόρυφου πίνακα καθώς είναι το μοναδικό *p* για το οποίο μπορούν να ισχύουν οι ανισώσεις του μονοκόρυφου πίνακα: $a_1 < a_2$ και $a_2 > a_3$. Επομένως για το στοιχείο $a_2 = A[2]$ ισχύουν οι συνθήκες που περιγράφονται στο πρώτο if της διαδικασίας καθώς $mid = (1+3)/2 = 2$, $left=1$ και $right=3$.

Επαγωγική υπόθεση: υποθέτουμε ότι η διαδικασία επιστρέφει το μέγιστο στοιχείο ενός μονοκόρυφου πίνακα με $k < n$ στοιχεία. Δηλαδή $fmax(A, 1, k) = \max\{a_1, ..., a_k\}$ με $3 \leq k < n$.

Επαγωγικό βήμα: πρέπει να αποδείξουμε ότι για έναν μονοκόρυφο πίνακα με n στοιχεία η διαδικασία επιστρέφει το μέγιστο στοιχείο. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι

$$fmax(A, 1, n) = \max\{a_1, ..., a_n\}.$$

Έχουμε $left = 1$, $right = n$, και $mid = [(1 + n) / 2]$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν ισχύει το πρώτο if της διαδικασίας τότε εξ ορισμού $A[mid] = a_p$ και πράγματι το στοιχείο a_p είναι το μέγιστο στοιχείο μιας μονοκόρυφης ακολουθίας. Δηλαδή $fmax(A, 1, n) = A[mid] = a_p = \max\{a_1, ..., a_n\}$.
- Αν ισχύει το δεύτερο if τότε δεξιά του *mid* έχουμε το δεύτερο κομμάτι ενός μονοκόρυφου πίνακα καθώς θα πρέπει να ισχύει $a_{mid} > a_{mid+1} > ... > a_n$. Δηλαδή $\max\{a_1, ..., a_n\} = \max\{a_1, ..., a_{mid}\}$. Επομένως σωστά η αναδρομική κλήση υπολογίζει ότι $fmax(A, 1, n) = fmax(A, 1, mid)$. Επειδή $mid < n$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την **επαγωγική υπόθεση**, ότι δηλαδή

  $$fmax(A, 1, mid) = \max\{a_1, ..., a_{mid}\}$$

  και πράγματι θα ισχύει

  $$fmax(A, 1, n) = fmax(A, 1, mid) = \max\{a_1, ..., a_{mid}\} = \max\{a_1, ..., a_n\}$$

  που είναι το ζητούμενο.
- Αλλιώς (η περίπτωση του else) αριστερά του *mid* έχουμε το πρώτο κομμάτι ενός μονοκόρυφου πίνακα καθώς θα πρέπει να ισχύει $a_1 < a_2 < ... < a_{mid}$. Δηλαδή $\max\{a_1, ..., a_n\} = \max\{a_{mid}, ..., a_n\}$. Επομένως σωστά η αναδρομική κλήση υπολογίζει ότι $fmax(A, 1, n) = fmax(A, mid, n)$. Επειδή $n - mid - 1 < n$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την **επαγωγική υπόθεση**, ότι δηλαδή

  $$fmax(A, mid, n) = \max\{a_{mid}, ..., a_n\}$$

  και πράγματι θα ισχύει

  $$fmax(A, 1, n) = max(A, mid, n) = \max\{a_{mid}, ..., a_n\} = \max\{a_1, ..., a_n\}$$

  που είναι το ζητούμενο.

3) Η διαδικασία εφαρμόζει την ιδέα της δυαδικής αναζήτησης όπου γνωρίζουμε ότι το μέγιστο βάθος της δυαδικής αναζήτησης είναι $\log n$. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει το πλήθος των αναδρομικών κλήσεων ή αλλιώς το βάθος του δένδρου αναδρομής που στη συγκεκριμένη περίπτωση το δένδρο είναι ένα μονοπάτι. Το μέγιστο βάθος αναδρομής το πετυχαίνουμε όταν κάθε φορά εκτελούμε αναδρομικά την ίδια συνάρτηση. Αυτό γίνεται όσο δεν ισχύει η πρώτη συνθήκη του if. Επομένως η αναδρομική κλήση θα σταματήσει όταν ο πίνακας θα έχει 3 μόνο στοιχεία. Δηλαδή το φύλλο στο δένδρο αναδρομής θα έχει 3 μόνο στοιχεία.

Έστω ότι το βάθος της αναδρομής είναι k. Παρατηρούμε ότι το μέγεθος του πίνακα σε κάθε αναδρομική κλήση μειώνεται κατά ήμισυ. Ωστόσο σε κάθε αναδρομική κλήση το μέγεθος του πίνακα που καλείται έχει τα μισά στοιχεία συν επιπλέον το στοιχείο mid. Συνεπώς, το μέγεθος του πίνακα μειώνεται ως εξής:

$$n, \frac{n}{2}+1, \frac{\frac{n}{2}+1}{2}+1, \frac{\frac{\frac{n}{2}+1}{2}+1}{2}+1, \ldots, \frac{n+2+2^2+2^3+\cdots+2^k}{2^k} = \frac{n+2^{k+1}-2}{2^k}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το k και επειδή το φύλλο του δένδρου αναδρομής έχει 3 στοιχεία θα ισχύει

$$\frac{n+2^{k+1}-2}{2^k} = 3$$

Λύνοντας ως προς k θα έχουμε το μέγιστο βάθος της αναδρομής: $k = \log_2(n-2)$.

(Σημείωση: Επειδή το βάθος είναι ακέραιος αριθμός θα έχουμε $k = \lfloor \log_2(n-2) \rfloor$, καθώς η μείωση του πίνακα στα μισά του στοιχεία, αφορά το κάτω ακέραιο μέρος, $\lfloor n/2 \rfloor$, όπως περιγράφεται και στην εκφώνηση).

Άσκηση 3 (2013-14, Εργασία 4, Ερωτήματα Κατανόησης, Ερώτημα 1)

1) Θεωρούμε το γράφημα G_1 του Σχήματος 1.

   i) Αναφέρετε τις κορυφές με τον μέγιστο και τον ελάχιστο βαθμό.

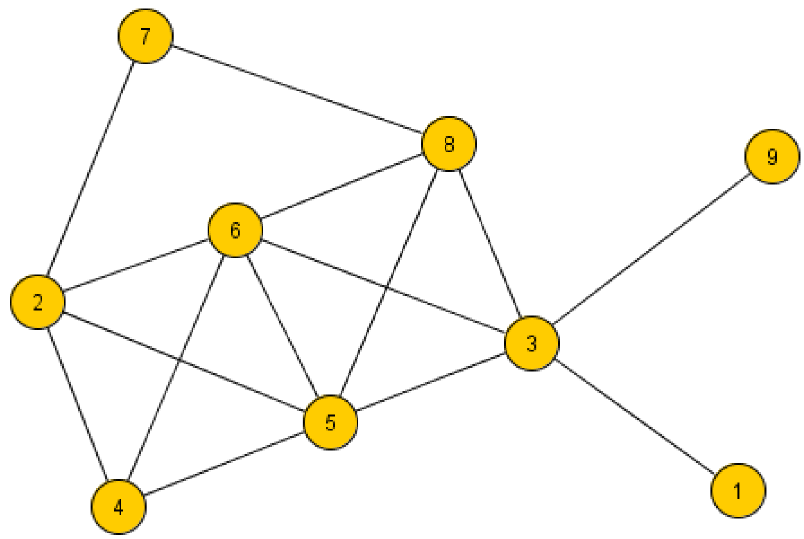
   ii) Για κάθε ακμή αναφέρετε τον κύκλο που συμμετέχει με το μέγιστο πλήθος κορυφών ή αναφέρετε ότι η ακμή αυτή δεν συμμετέχει σε κανέναν κύκλο.

   iii) Εντοπίστε ένα πλήρες υπογράφημα (κλίκα) με μέγιστο αριθμό κορυφών. Αιτιολογήστε γιατί έχει μέγιστο αριθμό κορυφών.

   iv) Δείξτε ότι οι κορυφές 1 και 9 συμμετέχουν σε *κάθε* σύνολο ανεξαρτησίας με μέγιστο αριθμό κορυφών (Ο ορισμός του συνόλου ανεξαρτησίας δίνεται στο βιβλίο «Θεωρία Γράφων», Μ. Μαυρονικόλας, ορισμός 1.5, σελ. 18.).

   v) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι "*ένα γράφημα G έχει μια κλίκα μεγέθους k αν και μόνο αν το* $\overline{G}$ *έχει σύνολο ανεξαρτησίας μεγέθους k*" (Ερώτημα 2, 4η Εργασία

Κατανόησης 2012-2013) βρείτε ένα σύνολο ανεξαρτησίας με μέγιστο αριθμό κορυφών στο γράφημα G_1. Αιτιολογήστε γιατί έχει μέγιστο αριθμό κορυφών.



Σχήμα 1: Το γράφημα G_1

Απάντηση:

i) Ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος είναι 5: οι κορυφές {3,5,6} έχουν μέγιστο βαθμό 5. Ο ελάχιστος βαθμός του γραφήματος είναι 1: οι κορυφές {1,9} έχουν μέγιστο βαθμό 1.

ii) Ας βρούμε πρώτα έναν μέγιστο κύκλο του γραφήματος. Οι κορυφές {1,9} δεν μπορούν να συμμετέχουν σε κάποιο κύκλο του γραφήματος καθώς έχουν βαθμό 1. Οι υπόλοιπες 7 κορυφές συμμετέχουν στον κύκλο των κορυφών{2,4,5,6,3,8,7} που είναι μέγιστος ως προς το πλήθος των κορυφών.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε ακμή είτε συμμετέχει σε έναν κύκλο με 7 κορυφές (επομένως και μέγιστο) είτε δεν συμμετέχει σε κανέναν κύκλο.

ακμή (1,3): δεν συμμετέχει σε κανέναν κύκλο

ακμή (2,4): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,4,5,6,3,8,7}

ακμή (2,5): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,5,4,6,3,8,7}

ακμή (2,6): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,6,4,5,3,8,7}

ακμή (2,7): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,4,5,6,3,8,7}

ακμή (3,5): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,6,4,5,3,8,7}

ακμή (3,6): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,4,5,6,3,8,7}

ακμή (3,8): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,4,5,6,3,8,7}

ακμή (3,9): δεν συμμετέχει σε κανέναν κύκλο

ακμή (4,5): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,4,5,6,3,8,7} ακμή (4,6): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,6,4,5,3,8,7}

ακμή (5,6): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,4,5,6,3,8,7}

ακμή (5,8): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,4,6,3,5,8,7}

ακμή (6,8): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,4,5,3,6,8,7}

ακμή (7,8): συμμετέχει στο κύκλο των κορυφών {2,4,5,3,6,8,7}

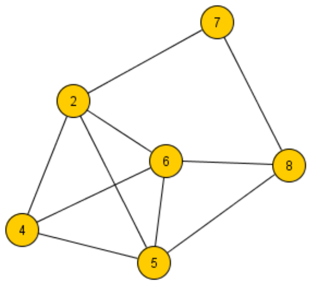
iii) Υπάρχουν δύο κλίκες με τέσσερεις κορυφές: το υπογράφημα που παράγεται από τις κορυφές {2,4,5,6} και το υπογράφημα που παράγεται από τις κορυφές {5,6,3,8}. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει κλίκα με πέντε ή περισσότερες κορυφές. Σε μία κλίκα με k κορυφές κάθε κορυφή έχει βαθμό $k-1$. Στο γράφημα G υπάρχουν οι κορυφές {3,5,6} με βαθμό 5 και οι κορυφές {2,8} με βαθμό 4. Επομένως οι πέντε αυτές κορυφές {2,3,5,6,8} είναι οι μοναδικές υποψήφιες για να συμμετέχουν σε μια κλίκα 5 κορυφών. Ωστόσο στο γράφημα που επάγεται από αυτές δεν υπάρχουν οι ακμές (2,3) και (2,8). Συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχει κλίκα με $k > 4$ κορυφές.

iv) Δείχνουμε ότι σε ένα μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας πάντα συμμετέχουν οι κορυφές 1 και 9. Μεταξύ τους δεν έχουν ακμή και οπότε μπορούμε να τις συμπεριλάβουμε στο σύνολο ανεξαρτησίας. Επειδή είναι γειτονικές με την κορυφή 3:

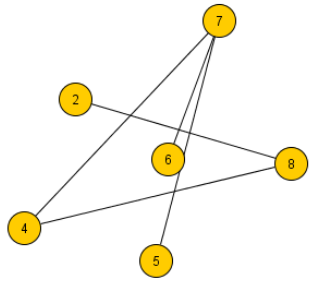
- είτε οι 1 και 9 συμμετέχουν σε ένα σύνολο ανεξαρτησίας αλλά δεν συμμετέχει η 3
- είτε συμμετέχει η κορυφή 3 στο σύνολο ανεξαρτησίας αλλά δεν συμμετέχουν οι 1 και 9.

Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι συμμετέχει η 3 σε ένα μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας. Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την 3 στο σύνολο ανεξαρτησίας με τις δύο κορυφές 1 και 9 αυξάνοντας το μέγεθος ανεξαρτησίας κατά ένα. Σημειώνουμε ότι οι κορυφές 1 και 9 δεν είναι γειτονικές με καμία άλλη κορυφή πλην της 3 οπότε πράγματι μπορούν να συμπεριληφθούν στο σύνολο ανεξαρτησίας. Επομένως καταλήγουμε σε άτοπο διότι βρήκαμε ένα σύνολο ανεξαρτησίας μεγαλύτερο από το μέγιστο. Συνεπώς οι κορυφές 1 και 9 βρίσκονται σε κάθε μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας.

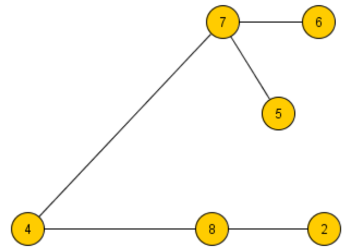
v) Λόγω του iv) η κορυφή 3 δεν ανήκει σε ένα μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας. Εξετάζουμε το υπογράφημα που επάγεται από τις κορυφές {2,4,5,6,7,8}. Ισχυριζόμαστε ότι το γράφημα αυτό έχει μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας 2. Για να το δείξουμε θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός: ένα γράφημα G έχει σύνολο ανεξαρτησίας k αν και μόνο αν το $\overline{G}$ έχει κλίκα μεγέθους k. Κατασκευάζουμε το γράφημα $\overline{G}$ από το σύνολο {2,4,5,6,7,8} όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



επαγώμενο υπογράφημα από {2,4,5,6,7,8}



Το συμπλήρωμα $\overline{G}$ του αριστερού υπογραφήματος



μια άλλη σχεδίαση του συμπληρώματος $\overline{G}$

Από το τελευταίο σχήμα εύκολα συμπεραίνουμε ότι το γράφημα $\overline{G}$ είναι άκυκλο οπότε και η μέγιστη κλίκα του είναι 2. Δηλαδή το επαγώμενο υπογράφημα G των κορυφών {2,4,5,6,7,8} έχει μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας 2. Συνολικά, λόγω και των κορυφών 1 και 9 από το (iv), το μέγιστο σύνολο ανεξαρτησίας είναι 4. Στο G_1 ένα τέτοιο σύνολο ανεξαρτησίας είναι για παράδειγμα το {5,7,1,9}.

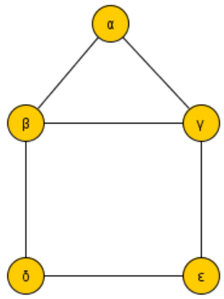
Άσκηση 4 (2015-16, Εργασία 4, Ερώτημα 2)

Σε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:

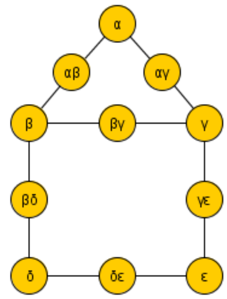
- υποδιαίρεση ακμής $\{u, v\}$ του G: διαγράφουμε την ακμή $\{u, v\}$ και προσθέτουμε μια νέα κορυφή που είναι γειτονική μόνο στις u και v.
- αληθής αντιγραφή κορυφής v του G: προσθέτουμε μια νέα κορυφή w στο G τέτοια ώστε η w να είναι γειτονική με την v και με όλες τις γειτονικές κορυφές της v. Δηλαδή, *αντιγράφουμε* την v και η αντιγραφή της v ενώνεται με τη v.

Συμβολίζουμε με $G(Y)$ το γράφημα που προκύπτει από το G αν εκτελέσουμε υποδιαίρεση ακμής *σε κάθε ακμή* του G. Συμβολίζουμε με $G(A)$ το γράφημα που προκύπτει από το G αν εκτελέσουμε διαδοχικές πράξεις αληθούς αντιγραφής *σε κάθε κορυφή* του G.

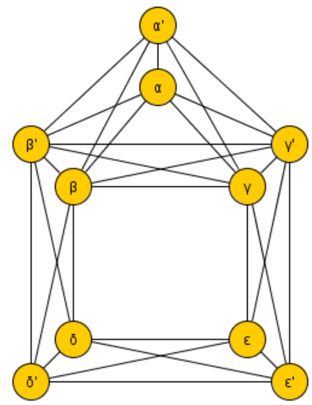
Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε ένα γράφημα G και τα γραφήματα, $G(Y)$ και $G(A)$.



G



G(Y)



G(A)

a) Για οποιοδήποτε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές βρείτε μια σχέση μεταξύ των κορυφών και των ακμών των γραφημάτων $G(Y)$ και $G(A)$ ως προς τα n και m συμπληρώνοντας τον ακόλουθο πίνακα.

	G	$G(Y)$	$G(A)$
πλήθος κορυφών:	n		
πλήθος ακμών:	m		

b) Για οποιοδήποτε γράφημα G σκοπός μας είναι να συμπληρώσουμε τον ακόλουθο πίνακα χρησιμοποιώντας τα σύμβολα ☑ και ☒. Σε κάθε γραμμή του πίνακα θεωρούμε ότι το γράφημα G έχει την ιδιότητα που περιγράφεται στη συγκεκριμένη γραμμή και εξετάζουμε αν τα αντίστοιχα γραφήματα $G(Y)$, και $G(A)$ έχουν την ίδια ιδιότητα.

Στη περίπτωση που συμπληρώνετε το σύμβολο ☑ θα πρέπει να αιτιολογήσετε την απάντησή σας, ενώ στη περίπτωση που συμπληρώνετε το σύμβολο ☒ θα πρέπει να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα που δείχνει ότι δεν ισχύει η ιδιότητα.

	G	$G(Y)$	$G(A)$
κύκλος Euler:	☑	☐	☐
κύκλος Hamilton:	☑	☐	☐
διμερές:	☑	☐	☐

Απάντηση

a) Το γράφημα $G(A)$ έχει διπλάσιο αριθμό κορυφών από το αρχικό G ενώ το πλήθος των κορυφών του γράφημα $G(Y)$ αυξάνεται κατά m. Ως προς τις ακμές, παρατηρούμε ότι για κάθε ακμή $\{u, v\}$ του G υπάρχουν 4 ακμές μεταξύ των κορυφών (u, u') και (v, v') στο γράφημα $G(A)$. Ειδικότερα για το γράφημα $G(A)$ θα πρέπει να προσθέσουμε n επιπλέον ακμές καθώς κάθε κορυφή ενώνεται και με το αντίγραφό της. Για το πλήθος των ακμών του $G(Y)$ παρατηρούμε ότι σε κάθε ακμή του G αντιστοιχούμε δύο ακμές του $G(Y)$. Συνολικά θα έχουμε:

	G	$G(Y)$	$G(A)$
πλήθος κορυφών:	n	$n + m$	$2n$
πλήθος ακμών:	m	$2m$	$4m + n$

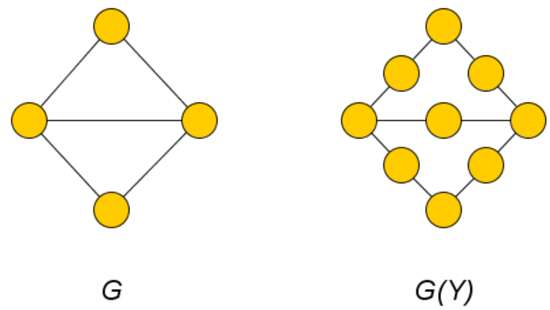
b) Εξετάζουμε τον κύκλο Euler. Για να έχει το γράφημα G κύκλο Euler θα πρέπει κάθε κορυφή του G να έχει άρτιο βαθμό στο G.

- $G(Y)$: Αν μια κορυφή έχει βαθμό k στο G τότε στο $G(Y)$ θα έχει βαθμό πάλι k καθώς δεν αλλάξαμε το πλήθος των γειτονικών κορυφών της στο $G(Y)$. Επομένως οι πραγματικές κορυφές του G έχουν άρτιο βαθμό στο $G(Y)$ διότι το k είναι άρτιο. Οι υπόλοιπες κορυφές του $G(Y)$ είναι κορυφές που έχουν προέλθει από υποδιαιρέσεις. Αυτές οι κορυφές έχουν βαθμό 2 από τον ορισμό της υποδιαίρεσης. Συνολικά κάθε κορυφή του $G(Y)$ έχει άρτιο βαθμό.
- $G(A)$: Όλες οι κορυφές του $G(A)$ θα έχουν περιττό βαθμό καθώς θα ενώνονται με 2*(άρτιο σε πλήθος κορυφές) + 1 κορυφή του αρχικού G. Για παράδειγμα όταν το G είναι το K_3 που έχει κύκλο Euler τότε το $G(A)$ είναι το K_6 που δεν έχει κύκλο Euler.

Εξετάζουμε τον κύκλο Hamilton. Έστω C ένας κύκλος Hamilton στο G που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$C = < v_1, v_2, ..., v_n >$$

- $G(Y)$: Μπορούμε να προσθέσουμε προσεκτικά τις νέες κορυφές στον αρχικό κύκλο C και να σχηματίσουμε έναν αντίστοιχο κύκλο στο $G(Y)$. Ωστόσο ορισμένες νέες κορυφές που αντιστοιχούν σε εσωτερικές ακμές του κύκλου ενδέχεται να μην τις έχουμε επισκεφτεί. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι το $G(Y)$ δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.



- $G(A)$: Κατασκευάζουμε τον ακόλουθο κύκλο Hamilton C' από το C:

  $$C' = < v_1, w_1, v_2, w_2, \ \ldots, v_n, w_n >,$$

  όπου w_i είναι η αντιγραφή της πραγματικής κορυφής v_i στο $G(A)$. Σημειώστε ότι για να ορίζει το C' έναν κύκλο Hamilton θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχουν οι ακόλουθες ακμές:
  - $\{ v_i , w_i \}$: κάθε αντιγραφή ενώνεται με τον εαυτό της.
  - $\{ w_i , v_{i+1} \}$: υπάρχει στον κύκλο C η ακμή $\{v_i , v_{i+1} \}$ και επομένως υπάρχει και μεταξύ του αντίγραφου w_i και της πραγματικής κορυφής v_{i+1}.
  - $\{ w_n , v_1 \}$: εξαιτίας της ακμής $\{v_n , v_1 \}$

Εξετάζουμε τη διμερότητα. Έστω (A, B) μια διαμέριση των κορυφών του G έτσι ώστε καμία ακμή του G να μην βρίσκεται μέσα στο A ή μέσα στο B.

- $G(Y)$: Παρατηρούμε ότι δύο γειτονικές πραγματικές κορυφές του G δεν ενώνονται στο $G(Y)$ καθώς παρεμβάλλεται μια νέα κορυφή στο $G(Y)$. Επίσης οι νέες κορυφές δεν ενώνονται μεταξύ τους $G(Y)$ καθώς είναι γειτονικές μόνο με πραγματικές κορυφές του G. Επομένως αν συμβολίσουμε με N το σύνολο των νέων κορυφών του $G(Y)$ τότε η διαμέριση $(A \cup B, N)$ ορίζει ένα διμερές γράφημα του $G(Y)$.
- $G(A)$: Εύκολα βλέπουμε ότι με την προσθήκη αληθών αντιγραφών δημιουργείται τρίγωνο στο $G(A)$, δηλαδή περιττός κύκλος και έτσι το $G(A)$ δεν είναι διμερές. Για παράδειγμα από ένα K_2 (μια ακμή) παίρνουμε ως $G(A)$ ένα K_4 (πλήρες γράφημα 4 κορυφών).

Συνολικά λοιπόν θα έχουμε:

	G	$G(Y)$	$G(A)$
κύκλος Euler:	☑	☑	☒
κύκλος Hamilton:	☑	☒	☑
διμερές:	☑	☑	☒

Άσκηση 5 (2014-15, Εργασία 4, Ερωτήματα Κατανόησης, Ερώτημα 6)

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε **απλά, μη κατευθυνόμενα** γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b), για τα οποία υπάρχει ακμή που συνδέει την a με την b.

α) Να γράψετε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής που (στη συγκεκριμένη ερμηνεία) εκφράζουν ότι:

i. Δεν υπάρχει μεμονωμένη κορυφή (δηλαδή κορυφή με βαθμό 0).

ii. Κάθε κορυφή είτε έχει βαθμό ίσο με ένα ή περιέχεται σε απλό κύκλο μήκους τρία.

iii. Κάθε κορυφή συνδέεται με κάθε άλλη κορυφή με μονοπάτι μήκους το πολύ δύο.

β) Αναφορικά με τη συγκεκριμένη ερμηνεία, εξηγείστε τι εκφράζει η καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις και σχεδιάστε ένα γράφημα με τουλάχιστον 4 κορυφές και ακμές που να ανταποκρίνεται στον τύπο:

i) $\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x)) \rightarrow (\exists w((w \neq y) \wedge (w \neq z) \wedge P(x,w))))$

ii) $\forall x \exists y \exists z((y \neq z) \wedge (x \neq z) \wedge (x \neq y) \wedge P(x,y) \wedge (P(x,z) \vee P(y,z)))$

Απάντηση:

α)

i) $\forall x \exists y P(x,y)$

Παρατηρήστε ότι η γλώσσα ερμηνεύεται σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Ειδικότερα, δεν υπάρχουν ανακυκλώσεις. Επομένως, η παραπάνω πρόταση είναι ισοδύναμη με την $\forall x \exists y((x \neq y) \wedge P(x,y))$. Την ίδια παρατήρηση, ότι δηλαδή η έκφραση $((x \neq y) \wedge P(x,y))$ είναι ισοδύναμη με την $P(x,y)$ στη συγκεκριμένη ερμηνεία θα τη χρησιμοποιήσουμε και στα επόμενα ερωτήματα.

ii) Κατ'αρχάς, δεδομένης μίας κορυφής x, εκφράζουμε την πρόταση "η κορυφή x έχει βαθμό ίσο με ένα". Είναι ένα μονομελές κατηγόρημα. Ας το ονομάσουμε DegreeOne(x).

DegreeOne(x): $(\exists y P(x,y)) \wedge (\forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow y = z))$

Στη συνέχεια εκφράζουμε την πρόταση "η κορυφή x ανήκει σε απλό κύκλο μήκους 3". Ας ονομάσουμε το μονομελές κατηγόρημα in_3_cycle(x).

In3Cycle(x): $\exists y \exists z(P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x))$

Άρα η πρόταση ii) μπορεί να γραφεί στη γλώσσα ως:

$\forall x(DegreeOne(x) \vee \text{In3Cycle}(x))$

iii) $\forall x \forall y((x \neq y) \to (P(x,y) \vee \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y))))$

Η πρόταση αυτή εκφράζει ότι για κάθε ζεύγος κορυφών x,y εάν είναι διαφορετικές τότε είτε συνδέονται με ακμή ή υπάρχει κοινός γείτονας (και συνεπώς οι x,y συνδέονται με μονοπάτι μήκους 2).

β) i) Η πρόταση εκφράζει το παρακάτω: Για κάθε τριάδα κορυφών x,y,z, οι οποίες σχηματίζουν κλίκα με 3 κορυφές (3-κλίκα), υπάρχει τέταρτη κορυφή w, η οποία συνδέεται (με ακμή) με την κορυφή x. Παρατηρήστε ότι λόγω των ποσοδεικτών "για κάθε" καθώς και της συμμετρίας των x,y,z στα αριστερα του συμβόλου $\to$, προκειμένου ένα γράφημα να ικανοποιεί την πρόταση, πρέπει κάθε κορυφή η οποία συμμετέχει σε μία 3-κλίκα να συνδέεται με μία τέταρτη κορυφή. Ένα γράφημα για το οποίο η πρόταση είναι αληθής είναι το πλήρες γράφημα με 4 κορυφές, K_4, ενώ αν αφαιρέσουμε μία οποιαδήποτε ακμή, η πρόταση καθίσταται ψευδής για το γράφημα που προκύπτει. Πραγματικά, αν για παράδειγμα αφαιρέσουμε την ακμή (1,4), τότε για την τριάδα κορυφών {x=1,y=2,z=3} παρατηρούμε ότι η $P(1,2) \wedge P(2,3) \wedge P(3,1)$ είναι αληθής, αλλά η πρόταση $\exists w((w \neq 2) \wedge (w \neq 3) \wedge P(1,w))$ είναι ψευδής.

ii) Η πρόταση εκφράζει το παρακάτω: Για κάθε κορυφή x υπάρχουν κορυφές y,z, διαφορετικές μεταξύ τους και διαφορετικές από τη x, τέτοιες ώστε η κορυφή x συνδέεται (με ακμή) με την y και είτε συνδέεται η x με τη z ή συνδέεται η y με τη z. Παρατηρήστε ότι η παραπάνω πρόταση μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα: Για κάθε κορυφή x, η συνεκτική συνιστώσα η οποία περιέχει τη x, περιέχει τουλάχιστον δύο ακόμη κορυφές. Ακόμη απλούστερα, μπορούμε να διατυπώσουμε ισοδύναμα: Κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος έχει τουλάχιστον 3 κορυφές. Ένα παράδειγμα γραφήματος για το οποίο η πρόταση είναι αληθής είναι το K_4, ενώ η πρόταση είναι ψευδής για οποιοδήποτε γράφημα το οποίο έχει, για παράδειγμα, κάποια μεμονωμένη κορυφή.

Άσκηση 6 (2015-16, Εργασία 4, Ερώτημα 3)

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία συνδέονται με ακμή (ειδικότερα, το (a,a) δεν ανήκει ποτέ στη σχέση P).

Α. Να γράψετε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής που (στη συγκεκριμένη ερμηνεία) εκφράζουν ότι:

1. Το γράφημα περιέχει μεμονωμένη κορυφή.
2. Κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 1.

3. Το γράφημα είναι πλήρες.
4. Κάθε κορυφή που συμμετέχει σε κύκλο μήκους 3 έχει βαθμό τουλάχιστον 3.

Β.

1. Αναφορικά με τη συγκεκριμένη ερμηνεία, εξηγήστε (σε φυσική γλώσσα) τι σημαίνει κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.

   Επίσης, δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος με 5 κορυφές για το οποίο η πρόταση (i) είναι αληθής (ανεξάρτητα από την πρόταση (ii)) και ένα παράδειγμα γραφήματος με 5 κορυφές για το οποίο η πρόταση (ii) είναι αληθής και η πρόταση (i) είναι ψευδής.

   (i) $\exists x \forall y((x \neq y) \rightarrow (P(x, y) \wedge \forall z((z \neq x) \rightarrow \neg P(z, y))))$

   (ii) $\forall x \forall y((x \neq y) \rightarrow (P(x, y) \vee \exists z(P(x, z) \wedge P(z, y))))$

2. Γράψτε μία πρόταση στη συγκεκριμένη πρωτοβάθμια γλώσσα που να εκφράζει την πρόταση: "Κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος είναι κλίκα".

   Υπόδειξη: Σκεφτείτε έναν ισοδύναμο τρόπο να περιγράψετε την ζητούμενη ιδιότητα. Ειδικότερα, παρατηρήστε ότι μία συνεκτική συνιστώσα με 1 ή 2 κορυφές είναι αναγκαστικά κλίκα. Σκεφτείτε αρχικά πώς μπορείτε να διατυπώσετε την ιδιότητα "η συνιστώσα είναι κλίκα" για συνιστώσες με 3 κορυφές και στη συνέχεια δείτε πώς μπορείτε να γενικεύσετε.

Απάντηση

Α.

1. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$
2. $\forall x \exists y P(x, y)$ (πρόκειται για την άρνηση της πρότασης 1).
3. $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow P(x, y))$
4. $\forall x[\exists y \exists z((x \neq y) \wedge P(x, y) \wedge P(y, z) \wedge P(z, x)) \rightarrow$

   $\exists y \exists z \exists w((y \neq z) \wedge (y \neq w) \wedge (z \neq w) \wedge P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge P(x, w))]$

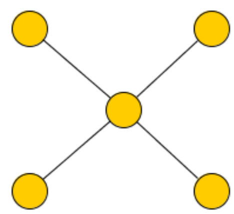
Β.

1. Σχετικά με τις δύο προτάσεις:

   1. Η πρόταση αυτή εκφράζει το εξής: "Υπάρχει κάποια κορυφή x τέτοια ώστε κάθε άλλη κορυφή y συνδέεται με την x και δε συνδέεται με καμία άλλη κορυφή." Πρόκειται δηλαδή για γράφημα "αστέρι".

2. Η πρόταση αυτή εκφράζει το εξής: “Κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών είτε συνδέεται με ακμή (είναι γειτονικές) ή έχουν κοινό γείτονα.” Πρόκειται δηλαδή για γράφημα στο οποίο η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών είναι το πολύ 2. Τη μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών ενός γραφήματος την ονομάζουμε και διάμετρο του γραφήματος. Πρόκειται δηλαδή για γράφημα με διάμετρο 2.

Κατ' αρχάς παρατηρήστε ότι ένα γράφημα για το οποίο η πρόταση 1 είναι αληθής, η απόσταση δύο οποιονδήποτε κορυφών είναι το πολύ 2, συνεπώς και η πρόταση 2 είναι αληθής. Ένα τέτοιο γράφημα με 5 κορυφές είναι το ακόλουθο:



Ένα γράφημα για το οποίο η πρόταση 2 είναι αληθής αλλά η πρόταση 1 είναι ψευδής πρέπει να έχει διάμετρο 2 αλλά να μην είναι το αστέρι. Για παράδειγμα το πλήρες γράφημα με 5 κορυφές.

2. Θέλουμε έναν ισοδύναμο τρόπο για να εκφράσουμε την ιδιότητα “κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος είναι κλίκα”. Παρατηρήστε ότι εάν μία συνιστώσα περιέχει μόνο μία ή δύο κορυφές, τότε είναι απαραίτητα κλίκα. Εάν περιέχει τρεις ή περισσότερες κορυφές, τότε ένας ισοδύναμος τρόπος για να εκφράσουμε τη δεδομένη ιδιότητα είναι ο εξής: για κάθε τρεις κορυφές x,y,z εάν ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα τότε υπάρχουν οι ακμές {x,y}, {y,z}, {z,x}. Μένει να εκφράσουμε την ιδιότητα “ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Παρατηρήστε ότι οι κορυφές x,y,z ανήκουν στην ίδια συνιστώσα αν και μόνο αν ανά δύο συνδέονται, δηλαδή εάν υπάρχουν, για παράδειγμα, οι ακμές {x,y} και {y,z}. Άρα τελικά έχουμε την πρόταση:

$$\forall x \forall y \forall z ((x \neq z) \wedge P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$$

Άσκηση 8 (2014-15, Εργασία 4, Ερώτημα 4)

Συμβολίζουμε με P_4 το γράφημα με σύνολο κορυφών {a,b,c,d} και σύνολο ακμών {{a,b}, {b,c}, {c,d}}, δηλαδή ένα απλό μονοπάτι 4 κορυφών μήκους 3.

i) Έστω ένα γράφημα G στο οποίο υπάρχει μια κορυφή x που έχει βαθμό 0 ή $n-1$. Δείξτε ότι το G είναι μη-συνεκτικό ή το $\overline{G}$ είναι μη-συνεκτικό.

ii) Δείξτε ότι για κάθε γράφημα G με $2 \leq n \leq 4$, είτε το G είναι μη-συνεκτικό είτε το $\overline{G}$ είναι μη-συνεκτικό εκτός αν είναι το P_4.

iii) Έστω ένα γράφημα G με $n \geq 2$ που δεν περιέχει P_4. Δείξτε επαγωγικά ότι κάθε επαγόμενο υπογράφημα του G είναι μη-συνεκτικό ή το συμπλήρωμα ενός μη-συνεκτικού γραφήματος.

Υπόδειξη: Στο επαγωγικό βήμα μπορείτε να θεωρήσετε το γράφημα $G - x$, για κάποια κορυφή x του G, και να βρείτε περιπτώσεις στις οποίες η x θα μπορούσε να συμμετέχει σε κάποιο P_4.

Απάντηση

i) Αν υπάρχει απομονωμένη κορυφή x (δεν ενώνεται με καμία άλλη) τότε το G δεν είναι συνεκτικό. Αντίστοιχα, αν υπάρχει κορυφή που ενώνεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές (η κορυφή με βαθμό $n-1$), τότε στο συμπλήρωμα του γραφήματος υπάρχει κορυφή που είναι απομονωμένη. Επομένως είτε το G είναι μη-συνεκτικό (όταν η x έχει βαθμό 0) είτε το $\overline{G}$ (όταν η x έχει βαθμό $n-1$) είναι μη-συνεκτικό.

ii) Εξετάζουμε τις διαφορετικές περιπτώσεις ως προς το n.

- Για $n = 2$: Αν οι δυο κορυφές δεν ενώνονται τότε το γράφημα είναι μη-συνεκτικό γράφημα. Διαφορετικά (αν ενώνονται), παίρνουμε το συμπλήρωμα ενός μη-συνεκτικού γραφήματος.
- Για $n = 3$: Θα χρησιμοποιήσουμε το υποερώτημα i): αν υπάρχει κορυφή με βαθμό 2 ή 0 τότε γνωρίζουμε ότι το γράφημα ή το συμπλήρωμά τους είναι μη-συνεκτικά. Το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό πρέπει να είναι άρτιο σε πλήθος. Ο μοναδικός περιττός βαθμός είναι 1. Άρα θα πρέπει να έχουμε είτε 0 κορυφές με βαθμό 1, είτε 2 κορυφές με βαθμό 1. Αν έχουμε 0 κορυφές με βαθμό 1 τότε αναγκαστικά θα έχουμε κορυφή με βαθμό 2 ή 0 ενώ το ίδιο ισχύει και στη περίπτωση που έχουμε 2 κορυφές

με βαθμό 1. Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ένα γράφημα που είτε το ίδιο είτε το συμπλήρωμά του είναι μη-συνεκτικά.

- Για $n = 4$: Αν υπάρχει κορυφή με βαθμό 3 ή 0 τότε γνωρίζουμε από το b. ότι το ίδιο το γράφημα ή το συμπλήρωμά του είναι μη-συνεκτικά. Άρα θα πρέπει να έχουμε κορυφές με βαθμό 1 ή 2 για να μην ισχύει αυτή η ιδιότητα. Εξαιτίας του άρτιου πλήθους των κορυφών περιττού βαθμού θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις ως προς τους βαθμούς των κορυφών:
    - <1, 1, 1, 1>: Το μοναδικό γράφημα που πραγματοποιεί την ακολουθία αυτή είναι μη-συνεκτικό που αποτελείται από 2 ανεξάρτητες ακμές μεταξύ τους.
    - <2, 2, 2, 2>: Το συμπλήρωμα του γραφήματος που πραγματοποιεί την ακολουθία είναι το <1, 1, 1, 1> που δείξαμε ότι είναι μη-συνεκτικό.
    - <1, 1, 2, 2>: Το μοναδικό γράφημα που πραγματοποιεί την γραφική ακολουθία είναι το P_4, το οποίο πράγματι τόσο το ίδιο όσο και το συμπλήρωμά του είναι συνεκτικά γραφήματα.

iii) Αποδεικνύουμε επαγωγικά ως προς το πλήθος των κορυφών $n = |V(G)|$ του G. Το μοναδικό γράφημα με $n \leq 4$ κορυφές που είναι συνεκτικό και το συμπλήρωμά του είναι επίσης συνεκτικό, είναι το P_4 από το υποερώτημα ii). Επομένως η βάση της επαγωγής για $n \leq 4$ ισχύει.

Έστω x μια οποιαδήποτε κορυφή του G. Εξετάζουμε το γράφημα που προκύπτει από την διαγραφή της x, το οποίο θα συμβολίζουμε με $G - x$. Εφόσον το γράφημα $G - x$ αποτελείται από $n - 1$ κορυφές, εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση στο $G - x$ που σημαίνει ότι είτε το $G - x$ είναι μη-συνεκτικό, είτε το συμπλήρωμά του είναι μη-συνεκτικό. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που το $G - x$ είναι μη-συνεκτικό. Έστω $H_1, H_2, ..., H_p$, οι συνεκτικές συνιστώσες του $G - x$. Θα δείξουμε ότι το G είναι μη-συνεκτικό ή το $\overline{G}$ είναι μη-συνεκτικό. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) Αν η κορυφή x είναι γειτονική με όλες τις κορυφές του $G - x$, τότε στο $\overline{G}$ η x δεν είναι γειτονική με καμία κορυφή και επομένως το $\overline{G}$ είναι μη-συνεκτικό.

(ii) Αν η κορυφή x δεν είναι γειτονική με καμία κορυφή κάποιας συνεκτικής συνιστώσας H_i του $G - x$, τότε το G παραμένει μη-συνεκτικό γράφημα με την H_i να αποτελεί μια συνεκτική συνιστώσα του G.

Επομένως για τις υπόλοιπες περιπτώσεις γνωρίζουμε ότι η κορυφή x έχει τουλάχιστον έναν γείτονα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα $H_1, H_2, ..., H_p$ (λόγω του (ii)) και η x δεν γειτνιάζει με όλες τις κορυφές του $G - x$ (λόγω του (i)). Θα δείξουμε ότι σε κάθε άλλη περίπτωση θα υπάρχει ένα επαγόμενο P_4 στο γράφημα G και επομένως μόνο οι προηγούμενες δύο περιπτώσεις μπορούν να ισχύουν.

Έστω z μια κορυφή του $G - x$ που δεν είναι γειτονική με την x. Σημειώστε ότι λόγω του (i) υπάρχει τέτοια κορυφή z. Συμβολίζουμε με H_j την συνεκτική συνιστώσα που ανήκει η z. Στην H_j η κορυφή x έχει τουλάχιστον μια γειτονική κορυφή, λόγω του (ii). Έστω y η κορυφή της H_j που είναι γειτονική με την x. Επειδή το γράφημα H_j είναι συνεκτικό θα υπάρχει μονοπάτι μεταξύ της y και της z. Έστω P το μονοπάτι αυτό με την ακόλουθη μορφή:

$$< y = y_1, y_2, \ldots y_{k-1}, y_k = z > \text{ με } k \geq 2.$$

Ακολουθώντας το μονοπάτι P και ξεκινώντας από τη κορυφή y, διαλέγουμε τη πρώτη κορυφή y_i που δεν είναι γειτονική με τη x. Αυτό σημαίνει ότι η x είναι γειτονική με την y_{i-1} και δεν είναι γειτονική με τη y_i και, εξαιτίας του μονοπατιού P, γνωρίζουμε ότι οι κορυφές y_{i-1} και y_i είναι γειτονικές. Επομένως οι κορυφές x, y_{i-1}, y_i επάγουν ένα P_3 στο G.
Εφόσον το $G - x$ είναι μη-συνεκτικό θα υπάρχει και άλλη μια συνεκτική συνιστώσα $H_q \neq H_j$ στο $G - x$. Λόγω του (ii) θα υπάρχει μια κορυφή w της H_q που είναι γειτονική με τη x. Επειδή οι y_{i-1}, y_i ανήκουν σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα από την w, οι κορυφές y_{i-1}, y_i δεν είναι γειτονικές με την w. Συνεπώς οι κορυφές w, x, y_{i-1}, y_i επάγουν ένα μονοπάτι μήκους 3, δηλαδή ένα P_4, στο G και καταλήγουμε σε άτοπο.

Για την περίπτωση που το συμπλήρωμα του $G - x$ είναι μη-συνεκτικό τότε δουλεύουμε με παρόμοιο τρόπο στις συνεκτικές συνιστώσες του συμπληρώματος $G - x$ και καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα. Πιο συγκεκριμένα αν H_1, H_2, ..., H_p, είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $\overline{H}$ με $H = G - x$, τότε μόνο οι ακόλουθες δυο περιπτώσεις μπορούν να ισχύουν για το H:

(i) Αν η κορυφή x δεν είναι γειτονική με καμία από τις κορυφές του H, τότε το G είναι μη-συνεκτικό.

(ii) Αν η κορυφή x είναι γειτονική με όλες τις κορυφές κάποιας συνεκτικής συνιστώσας H_i του $\overline{H}$, τότε στο $\overline{G}$ η x δεν είναι γειτονική με καμία κορυφή της H_i και το $\overline{G}$ παραμένει μη-συνεκτικό γράφημα με την H_i να αποτελεί μια συνεκτική συνιστώσα του $\overline{G}$.

Σε κάθε άλλη περίπτωση καταλήγουμε σε ένα επαγόμενο P_4 δουλεύοντας με αντίστοιχο τρόπο όπως με την περίπτωση που το $G - x$ είναι μη-συνεκτικό γράφημα.

Άσκηση 8 (2013-14, Εργασία 4, Ερώτημα 4)

Έστω ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον $(n / 2) + 1$. Να δειχθεί ότι το G περιέχει τρίγωνο (κύκλο μήκους 3).

Απάντηση

Κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 2 εξαιτίας του $n \geq 3$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα περιέχει τουλάχιστον μια ακμή. Έστω x και y τα άκρα κάποιας ακμής του γραφήματος G.

Δείχνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή εκτός των x και y που είναι γειτονική με τις x και y (με άλλα λόγια δείχνουμε ότι η κοινή γειτονιά των x και y είναι μη-κενή). Θεωρούμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι κάθε γειτονική κορυφή της x δεν είναι γειτονική κορυφή της y. Τότε θα έχουμε

$$n \geq d(x) + d(y),$$

διότι στο άθροισμα των βαθμών τους καμία κορυφή δεν μετριέται παραπάνω από μια φορά. Εξαιτίας όμως του περιορισμού της εκφώνησης θα έχουμε:

$$d(x) + d(y) \geq (n / 2) + 1 + (n / 2) + 1 = n +2,$$

και καταλήγουμε σε άτοπο λόγω της προηγούμενης σχέσης.

Επομένως η κοινή γειτονιά των x και y είναι μη-κενή, δηλαδή υπάρχει μια κορυφή w που είναι γειτονική τόσο με την x όσο και με την y. Εφόσον οι κορυφές x και y είναι γειτονικές, οι τρεις κορυφές x, y και w επάγουν τρίγωνο στο γράφημα G.

Άσκηση 9 (2014-15, Εργασία 4, Ερωτήματα Κατανόησης, Ερώτημα 5)

Υπάρχουν διμερή γραφήματα $G = (A, B, E)$ με τις παρακάτω ιδιότητες; Εάν ναι, να κατασκευάσετε ένα τέτοιο γράφημα. Εάν όχι, να αιτιολογήσετε το γιατί δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα. Ο ορισμός του διμερούς γραφήματος δίνεται στο βιβλίο «Θεωρία Γράφων», Μ. Μαυρονικόλας, ορισμός 1.6, σελ. 19.

i) Ακολουθία βαθμών (3, 3, 2, 2, 2)

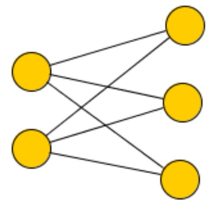
ii) Ακολουθία βαθμών (3, 2, 2, 2, 1, 1)

iii) Ακολουθία βαθμών (3, 3, 2, 2, 2, 2) και $|A| = |B|$

iv) Ακολουθία βαθμών (4, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 1) και $|A| = |B|$

Απάντηση:

i) Για την συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών υπάρχει το ακόλουθο διμερές γράφημα:

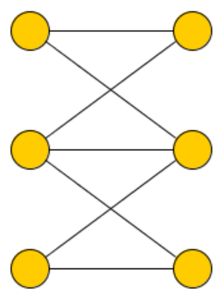


ii) Γνωρίζουμε ότι για κάθε απλό γράφημα ισχύει $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$. Το άθροισμα των βαθμών όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι περιττός αριθμός, άρα δεν υπάρχει απλό γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών, οπότε ούτε και διμερές.

iii) Αν το G είναι διμερές γράφημα και $|A| = |B|$ τότε θα πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{v \in A} d_G(v) = \sum_{v \in B} d_G(v) = \frac{1}{2}\sum_{v \in B} d_G(v) = |E(G)|$$

Οπότε μπορούμε να διαμερίσουμε την ακολουθία βαθμών σε $A = B = \{3,2,2\}$ και τότε θα έχουμε το εξής διμερές γράφημα:



iv) Με βάση το προηγούμενο υποερώτημα τώρα έχουμε $\frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 9$ και δεν υπάρχει διαμέριση της ακολουθίας σε A και B τέτοια ώστε $|A| = |B|$.

Άσκηση 10 (2014-15, Εργασία 4, Ερωτήματα Κατανόησης, Ερώτημα 3)

Ένα μονοπάτι Hamilton είναι ένα μονοπάτι του γραφήματος το οποίο περνά ακριβώς μια φορά από κάθε κορυφή του γραφήματος.

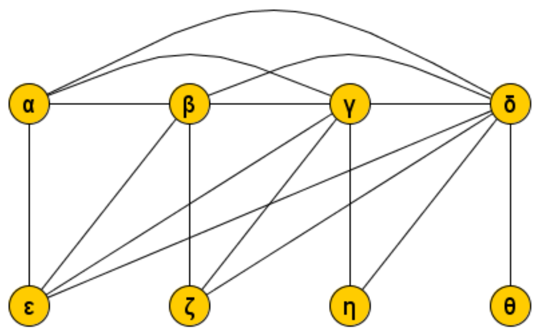
(i) Δείξτε ότι το γράφημα $\overline{G_1}$ του Σχήματος 1 δεν έχει κύκλο Hamilton.

(ii) Δείξτε ότι το γράφημα $\overline{G_1}$ του Σχήματος 1 έχει μονοπάτι Hamilton.

(iii) Έστω ένα γράφημα G που έχει μονοπάτι Hamilton και περιέχει μια κορυφή x με βαθμό 1. Δείξτε ότι το γράφημα $G - x$ (δηλαδή το γράφημα που προκύπτει από το G μετά την αφαίρεση της κορυφής x) έχει μονοπάτι Hamilton.

Απάντηση:

(i) Εξετάζουμε το γράφημα $\overline{G_1}$ το οποίο το παραθέτουμε ξανά για χάρη πληρότητας.



Παρατηρούμε ότι υπάρχει κορυφή με βαθμό 1, η κορυφή «θ». Επομένως δεν μπορεί να υπάρχει κύκλος Hamilton καθώς σε ένα γράφημα με κύκλο Hamilton όλες οι κορυφές έχουν βαθμό τουλάχιστον 2.

(ii) Για να δείξουμε ότι υπάρχει μονοπάτι Hamilton παρατηρούμε πάλι την κορυφή με το βαθμό 1. Σε ένα μονοπάτι Hamilton θα πρέπει αυτή η κορυφή να εμφανίζεται ως άκρο του μονοπατιού. Ξεκινάμε από την κορυφή «θ» και αναγκαστικά προχωράμε στη κορυφή «δ». Αν θεωρήσουμε ότι οι κορυφές τις οποίες ήδη επισκεφτήκαμε αφαιρούνται από το γράφημα διότι δεν πρόκειται να τις συναντήσουμε ξανά, τότε στο γράφημα που προκύπτει δηλαδή στο $\overline{G_1}$ – {θ, δ}, υπάρχει η κορυφή «η» που έχει βαθμό 1. Επειδή η «δ» ενώνεται με την «η», συνεχίζουμε το μονοπάτι με αυτό τον τρόπο και χτίζουμε το ακόλουθο μονοπάτι <θ,δ,η,γ,ζ,β,ε,α> όπου εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αποτελεί και ένα μονοπάτι Hamilton.

(iii) Εφόσον το γράφημα έχει μονοπάτι Hamilton, η κορυφή x θα αποτελεί άκρο του μονοπατιού καθώς κάθε ενδιάμεση κορυφή του μονοπατιού έχει βαθμό στο γράφημα τουλάχιστον δύο. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι αν αφαιρέσουμε την κορυφή x από το μονοπάτι Hamilton του G τότε θα οδηγηθούμε σε ένα μονοπάτι που ξεκινάει ή καταλήγει στο μοναδικό γείτονα της κορυφής x. Το μονοπάτι αυτό αποτελεί και μονοπάτι Hamilton για το γράφημα $G - x$ καθώς περνάει από όλες τις κορυφές ακριβώς μια φορά, όπως ακριβώς περνούσε και το μονοπάτι Hamilton στο γράφημα G.