Κεφάλαιο 9

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Έστω $f:V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση όπου ο V είναι ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια βάση $\{v_1,\ldots,v_n\}$ του V τέτοια ώστε υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{F}$ με $f(v_i)=\lambda_i v_i$. Τότε ο αντίστοιχος πίνακας της f είναι διαγώνιος $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Από αυτόν μπορούμε να συνάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την f, όπως για παράδειγμα, ότι η διάσταση του πυρήνα της είναι το πλήθος των λ_i που είναι ίσα με μηδέν. Επιπλέον ξέρουμε ότι οι πράξεις με διαγώνιους πίνακες είναι απλές και επομένως έχουμε ένα εύχρηστο εργαλείο για τη μελέτη της f.

Όμως δεν αληθεύει ότι για κάθε f υπάρχει μια βάση με τις παραπάνω ιδιότητες. Στην περίπτωση που υπάρχει $v \in V, v \neq 0$, τέτοιο ώστε $f(v)=\lambda v$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$, θα λέμε ότι το λ είναι μια ιδιοτιμή της f και v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της f. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα και στο επόμενο θα εξετάσουμε πότε υπάρχει μια βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στα παρακάτω, με V θα συμβολίζουμε ένα $\mathbb{F}-$διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης n.

Ορισμός 1 (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα)

- *Έστω $f: V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν υπάρχει μη μηδενικό $v \in V$ τέτοιο ώστε $f(v) = \lambda v$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$, θα λέμε ότι το λ είναι μια* ***ιδιοτιμή*** *της f και το v είναι ένα* ***ιδιοδιάνυσμα*** *της f που αντιστοιχεί στη λ.*
- *Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Αν υπάρχει μη μηδενικό $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ τέτοιο ώστε $AX = \lambda X$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$, θα λέμε ότι το λ είναι μια* ***ιδιοτιμή*** *του πίνακα A και το X είναι ένα* ***ιδιοδιάνυσμα*** *του A που αντιστοιχεί στη λ.*

Παραδείγματα

1. Για τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x+2y,3x+2y)$ εύκολα επαληθεύεται ότι $f(2,3)=4(2,3).$ Άρα μια ιδιοτιμή της f είναι το 4 και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $(2,3).$ Επίσης κάθε μη μηδενικό διάνυσμα της μορφής $(2x,3x),$ όπου $x\in\mathbb{R}$, είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=4.$

2. Για τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ εύκολα επαληθεύεται ότι $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}.$ Άρα μια ιδιοτιμή του A είναι το -1 και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $X=\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}.$

3. Η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(-y,x),$ δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα. Πράγματι, αν $f(x,y)=\lambda(x,y)$, τότε $(-y,x)=\lambda(x,y)$, οπότε έχουμε το σύστημα $\begin{cases}\lambda x+y=0\\ -x+\lambda y=0.\end{cases}$ Επειδή η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι $\det\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+1\neq 0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση $(x,y)=(0,0).$ Αλλά από τον ορισμό, ιδιοδιανύσματα είναι μη μηδενικά διανύσματα. Άρα η f δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα.

4. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2, f(x,y)=(-y,x).$ Παρατηρούμε ότι ο 'τύπος' $f(x,y)=(-y,x)$ συμπίπτει με το προηγούμενο παράδειγμα. Θα αναζητήσουμε μιγαδικές ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Όπως πριν έχουμε
$$f(x,y)=\lambda(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda x+y=0\\ -x+\lambda y=0.\end{cases}$$
Το σύστημα αυτό έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν
$\det\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+1=0,$ δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda=\pm i.$ Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι οι $\pm i$.

Για $\lambda = i$, το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ -x + \lambda y = 0 \end{cases}$ έχει λύσεις $(x, y) = (iy, y),\ y \in \mathbb{C}.$ Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = i$ είναι τα (iy, y), όπου $y \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι στην ιδιοτιμή $\lambda = -i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $(-iy, y)$, όπου $y \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Ορισμός 2 (χαρακτηριστικό πολυώνυμο)

- *Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Το* ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** *του A είναι το πολυώνυμο* $\chi_A(x) = \det(xI - A)$.
- *Έστω $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Το* ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** *της f είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $(f : \alpha, \alpha)$, όπου α είναι μια διατεταγμένη βάση*[1] *του V.*

Παράδειγμα

1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε

$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-2 & -3 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} =$$
$$(x-2)(x-1) - (-3)(-1) = x^2 - 3x - 1.$$

2. Για τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, x + y)$ εύκολα επαληθεύεται ότι $(f : \alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, όπου α είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$.

   Είδαμε πριν ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αυτού του πίνακα είναι το $x^2 - 3x - 1$. Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι το $\chi_f(x) = x^2 - 3x - 1$.

Συμβολισμός: Έστω ότι $g(x) = g_m x^m + \dots g_1 x + g_0 \in \mathbb{F}[x]$ είναι ένα πολυώνυμο.

[1] Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός αυτός δεν εξαρτάται από την επιλογή της διατεταγμένης βάσης. Δηλαδή, αποδεικνύεται ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

- Αν $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας πίνακας, τότε με $g(A)$ συμβολίζουμε τον πίνακα $g_m A^m + \dots g_1 A + g_0 I$.
- Αν $f: V \to V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε με $g(f)$ συμβολίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $g_m f^m + \dots g_1 f + g_0 I_V$.

Ορισμός 3 (ελάχιστο πολυώνυμο)

*Το **ελάχιστο πολυώνυμο** ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ (αντίστοιχα μιας γραμμικής απεικόνισης $f: V \to V$) είναι το ελαχίστου βαθμού μονικό[2] πολυώνυμο[3] $g(x)$ με συντελεστές από το $\mathbb{F}$, τέτοιο ώστε $g(A)=0$ (αντίστοιχα $g(f)=0$). Συμβολίζεται δε με $m_A(x)$ (αντίστοιχα $m_f(x)$).*

Παραδείγματα

1. Αν $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $m_I(x) = x - 1$.
2. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, τότε $m_A(x) = (x-1)(x-2)$. Πράγματι,
   - εύκολα επαληθεύουμε ότι $(A-I)(A-2I)=0$. Άρα ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου του A είναι το πολύ 2.
   - Είναι φανερό ότι δεν υπάρχει πρωτοβάθμιο πολυώνυμο $g(x) = ax + b$, τέτοιο ώστε $g(A)=0$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε
     $$aA + bI = 0 \Rightarrow A = -\frac{b}{a} I = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 1, -\frac{b}{a} = 2,$$ που είναι άτοπο.
   - Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μονικό, συμπεραίνουμε ότι αυτό είναι το $(x-1)(x-2)$.

[2] Ένα πολυώνυμο λέγεται μονικό αν ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του είναι το 1.

[3] Αποδεικνύεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο πίνακα ή γραμμικής απεικόνισης υπάρχει και είναι μοναδικό.

Ορισμός 4 (ιδιόχωρος που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή)

- *Έστω $f: V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν το λ είναι μια ιδιοτιμή της f, τότε το σύνολο $V(\lambda) = \ker(f - \lambda 1_V) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ είναι ένας μη τετριμμένος υπόχωρος του V που λέγεται ο **ιδιόχωρος** της f που αντιστοιχεί στη λ.*
- *Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Αν το λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε το σύνολο $V(\lambda) = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{F}) \mid AX = \lambda X\}$ είναι ένας μη τετριμμένος υπόχωρος του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ που λέγεται ο **ιδιόχωρος** που αντιστοιχεί στη λ.*

Σημείωση Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ.

Παράδειγμα

Είδαμε πριν ότι μια ιδιοτιμή του $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ είναι το -1. Λύνοντας το σύστημα $AX = -X$, δηλαδή το $(A + I)X = 0$ βρίσκουμε ότι $X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

Άρα $V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Πρόταση 1

- *Έστω $f: V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*
    - *Το λ είναι ιδιοτιμή της f*
    - $\ker(f - \lambda 1_V) \neq 0.$
- *Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*
    - *Το λ είναι ιδιοτιμή του A*

- *Το σύστημα* $(A-\lambda I)X=0$ *έχει μη μηδενική λύση*
- $\det(A-\lambda I)=0.$

Παρατήρηση Στην προηγούμενη πρόταση η συνθήκη '*Το σύστημα* $(A-\lambda I)X=0$ *έχει μη μηδενική λύση*' είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη '*Το σύστημα* $(\lambda I-A)X=0$ *έχει μη μηδενική λύση*' γιατί $A-\lambda I=-(\lambda I-A)$. Άρα στον προσδιορισμό ιδιοδιανυσμάτων δεν έχει σημασία ποιο από τα δυο συστήματα χρησιμοποιούμε. Επίσης, επειδή $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \det(\lambda I-A)=0$, στον προσδιορισμό ιδιοτιμών δεν έχει σημασία ποια από τα δυο εξισώσεις χρησιμοποιούμε.

Παράδειγμα

Από την προηγούμενη Πρόταση, βλέπουμε ότι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός πίνακα ή μιας γραμμικής απεικόνισης είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα ή της γραμμικής απεικόνισης. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ λύνουμε την εξίσωση $\det(A-\lambda I)=0$. Έχουμε

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda&1&0\\0&1-\lambda&-1\\0&2&4-\lambda\end{pmatrix}=$$
$$(2-\lambda)\big((1-\lambda)(4-\lambda)+2\big)=(2-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι 2,3.

Πρόταση 2

Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο (και τις ίδιες ιδιοτιμές).

Πρόταση 3

Οι ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης $f:V\to V$ *είναι οι ιδιοτιμές κάθε πίνακα που την αναπαριστά, δηλαδή κάθε πίνακα της μορφής* $(f:\alpha,\alpha)$, *όπου* α *είναι μια διατεταγμένη βάση του V.*

Πρόταση 4 (πολυώνυμα πινάκων και ιδιοτιμές)

- *Έστω* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *και* $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Αν το λ είναι μια ιδιοτιμή του A και X είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε το* $f(\lambda)$ *είναι μια ιδιοτιμή του* $f(A)$ *και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το X.*
- *Έστω* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *και* $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Αν* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *είναι οι ιδιοτιμές του A (όχι αναγκαστικά διακεκριμένες) , τότε οι ιδιοτιμές του* $f(A)$ *είναι οι* $f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n)$.

Για παράδειγμα, αν ξέρουμε ότι οι $\lambda = 2, 3$ είναι δυο από τις ιδιοτιμές ενός πίνακα A, τότε οι $2^m, 3^m$ είναι ιδιοτιμές του A^m, m θετικός ακέραιος.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Πρόταση 5 (ανάστροφοι πίνακαες)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A^t.

Πρόταση 6 (χαρακτηριστικό πολυώνυμο τριγωνικού πίνακα)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ένας τριγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα* $\lambda_1, ..., \lambda_n$. *Τότε*

1. *το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι* $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)...(x_n - \lambda_n)$
2. *οι ιδιοτιμές του A είναι οι* $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Μια χρήσιμη γενίκευση της προηγούμενης Πρότασης είναι η εξής.

Πρόταση 7

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *της μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & * & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix},$$

όπου $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F}), n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. *Τότε* $\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)...\chi_{A_k}(x)$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 2 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Έστω $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Τότε $A=\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Άρα $\chi_A(x)=\chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\chi_{A_1}(x)=\det\begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}=x^2-4x+3=(x-1)(x-3),$$

$$\chi_{A_2}(x)=\det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 2 & x-4 \end{pmatrix}=x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Άρα $\chi_A(x)=(x-1)(x-2)(x-3)^2$. Οι ιδιοτιμές του A είναι 1,2,3.

Πρόταση 8 (χαρακτηριστικό πολυώνυμο, ορίζουσα και ίχνος)

Έστω $A\in M_n(\mathbb{F})$ και $\chi_A(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Τότε

$$a_0=(-1)^n\det A \quad \text{και} \quad a_{n-1}=-TrA$$

όπου TrA είναι το ίχνος του A, δηλαδή το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του A.

Πόρισμα 9 (ιδιοτιμές, ορίζουσα και ίχνος)

Έστω $A\in M_n(\mathbb{C})$ με ιδιοτιμές $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Τότε

$$\det A=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \quad \text{και} \quad TrA=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n.$$

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A\in M_4(\mathbb{C})$ αν γνωρίζουμε ότι το $\chi_A(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές, μια ιδιοτιμή είναι το $\lambda_1=2-3i$, $\det A=-13$ και $TrA=4$.

Λύση

Αφού το $2-3i$ είναι μια ιδιοτιμή και το $\chi_A(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε και το $\lambda_2=2+3i$ είναι ρίζα του $\chi_A(x)$. Έστω λ_3,λ_4 οι άλλες ιδιοτιμές του A. Τότε από το προηγούμενο Πόρισμα έχουμε τις σχέσεις

$$-13=(2-3i)(2+3i)\lambda_3\lambda_4, \quad 4=(2-3i)+(2+3i)+\lambda_3+\lambda_4.$$

δηλαδή $\lambda_3\lambda_4=-1, \lambda_3+\lambda_4=0$. Άρα $\lambda_3=1,\lambda_4=-1$ (ή $\lambda_3=-1,\lambda_4=1$).

Πόρισμα 10 (αντιστρέψιμοι πίνακες)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Ο Α είναι αντιστρέψιμος.*
2. *Ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του Α είναι μη μηδενικός.*
3. *Το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του Α.*

Πρόταση 11

Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Σημείωση Επισημαίνουμε ότι είναι δυνατό δυο πίνακες να έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο χωρίς να είναι όμοιοι. Για παράδειγμα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και του $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι το x^2 και οι πίνακες αυτοί δεν είναι όμοιοι.

Θεώρημα 12 (Cayley-Hamilton)

- *Κάθε τετραγωνικός πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, δηλαδή αν* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *και* $\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, *τότε*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0 I = 0.$$

- *Κάθε γραμμική απεικόνιση* $f : V \to V$ *μηδενίζει το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο.*

ΙΔΙΟΧΩΡΟΙ

Θεώρημα 13

Έστω ότι το λ είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα ή μιας γραμμικής απεικόνισης και έστω $m(\lambda)$ *ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε το* $(x-\lambda)^{m(\lambda)}$ *διαιρεί το αντίστοιχο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Τότε* $\dim V(\lambda) \leq m(\lambda)$.

Για παράδειγμα αν $\chi_A(x) = (x-1)^3(x-2)^5$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A, τότε $\dim V(1) \leq 3, \dim V(2) \leq 5$

Πρόταση 14 (διαστάσεις ιδιόχωρων)

- *Έστω* $f:V \to V$ *μια γραμμική απεικόνιση. Αν το* $\lambda \in \mathbb{F}$ *είναι ιδιοτιμή της f τότε* $\dim V(\lambda) = \dim \ker(f - \lambda 1_V)$.
- *Έστω* $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Αν το λ είναι ιδιοτιμή του A τότε* $\dim V(\lambda) = n - r(A - \lambda I)$, *όπου* $r(A - \lambda I)$ *είναι η τάξη του πίνακα* $A - \lambda I$.

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Θεώρημα 15 (ιδιότητες του ελάχιστου πολυώνυμου)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *και* $m_A(x)$ *το ελάχιστο πολυώνυμο του A. Τότε ισχύουν τα εξής.*

1. *Το* $m_A(x)$ *διαιρεί κάθε πολυώνυμο του* $\mathbb{F}[x]$ *που μηδενίζεται από τον A.*
2. *Το* $m_A(x)$ *διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.*
3. *Το* $m_A(x)$ *έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.*

Για παράδειγμα, αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα είναι το $(x-1)^2(x-3)$ τότε οι δυνατές περιπτώσεις για το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $(x-1)^2(x-3), (x-1)(x-3)$ γιατί αυτό πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ισχύουν ανάλογες προτάσεις και για το ελάχιστο πολυώνυμο γραμμικής απεικόνισης.

Η επόμενη πρόταση είναι το ανάλογο της Πρότασης 7 για ελάχιστα πολυώνυμα.

Πρόταση 16

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *της μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix},$$

όπου $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F}), n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. *Τότε το* $m_A(x)$ *είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των πολυωνύμων* $m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), \ldots, m_{A_k}(x)$.

Πρόταση 17

Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

1. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

   $$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}).$$

2. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης*

   $$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x+2y,3x+2y).$$

Λύση

1. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του *A*,

$$\chi_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x-1 & -2\\ -3 & x-2\end{pmatrix}=(x-1)(x-2)-(-2)(-3)=(x-4)(x+1).$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του *A* είναι οι πραγματικές ρίζες του $\chi_A(x)$, βρίσκουμε ότι αυτές είναι $\lambda_1=4,\lambda_2=-1$. Για κάθε μια από αυτές θα προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνοντας το σύστημα $(A-\lambda I)X=0$ σύμφωνα με τον Ορισμό 1.

Για $\lambda_1=4$:

$$(A-\lambda I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1-4 & 2\\ 3 & 2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-3x+2y\\ 3x-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3x+2y=0\\ 3x-2y=0.\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $(x,y)=(x,\frac{3}{2}x),x\in\mathbb{R}.$ Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_1=4$ είναι τα $X=\begin{pmatrix}x\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix},x\in\mathbb{R}-\{0\}.$

Για $\lambda_2=-1$:

$$(A-\lambda I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1-(-1) & 2\\ 3 & 2-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}2x+2y\\ 3x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y=0\\ 3x+3y=0.\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $(x,y)=(x,-x),x\in\mathbb{R}.$ Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_2=-1$ είναι τα $X=\begin{pmatrix}x\\ -x\end{pmatrix},x\in\mathbb{R}-\{0\}.$

2. Εύκολα βλέπουμε ότι ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο A του προηγούμενου ερωτήματος. Συνεπώς οι ιδιοτιμές της f είναι οι ιδιοτιμές του A (βλ. Πρόταση 3), δηλαδή οι $4,-1$. Θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα της f προσδιορίζοντας τα μη μηδενικά v από τη σχέση $f(v)=\lambda v$. Έστω $v=(x,y)$.

Για $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{aligned}&f(v)=\lambda v \Rightarrow (x+2y,3x+2y)=4(x,y)\Rightarrow\\&(-3x+2y,3x-2y)=(0,0)\Rightarrow\\&\begin{cases}-3x+2y=0\\3x-2y=0.\end{cases}\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό προέκυψε και πριν, οπότε $(x,y)=(x,\frac{3}{2}x), x\in\mathbb{R}$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_1 = 4$ είναι τα $(x,\frac{3}{2}x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Για $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{aligned}&f(v)=\lambda v \Rightarrow (x+2y,3x+2y)=-(x,y)\Rightarrow\\&(2x+2y,3x+3y)=(0,0)\Rightarrow\\&\begin{cases}2x+2y=0\\3x+3y=0.\end{cases}\end{aligned}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_2 = -1$ είναι τα $(x,-x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Προσοχή Στην άσκηση αυτή είδαμε ότι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 4 είναι τα $X=\begin{pmatrix}x\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$, και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι τα $(x,\frac{3}{2}x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Δηλαδή έχουμε ουσιαστικά **τα ίδια ιδιοδιανύσματα** μιας γραμμικής απεικόνισης f και ενός πίνακα $(f:\alpha,\alpha)$ που την αναπαριστά. Αυτό το φαινόμενο **δεν** είναι γενικό. Συγκεκριμένα, αν είχαμε μια διατεταγμένη βάση β του $\mathbb{R}^n$ διαφορετική από τη συνήθη, τότε τα ιδιοδιανύσματα του νέου πίνακα $(f:\beta,\beta)$ θα ήταν γενικά διαφορετικά από αυτά της f. Βλ. Λυμένη Άσκηση 5. Από την άλλη μεριά οι ιδιοτιμές παραμένουν ίδιες σύμφωνα με την Πρόταση 3.

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ *και* $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

όταν αυτοί θεωρηθούν στοιχεία του

1. $M_2(\mathbb{R})$
2. $M_2(\mathbb{C})$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & x\end{pmatrix}=x^2+1$ και

αυτό του B είναι $\det(xI-B)=\det\begin{pmatrix}x & 0 & -1\\ 1 & x & 1\\ 0 & -1 & x-1\end{pmatrix}=(x-1)(x^2+1).$

1. Θεωρούμε τα A και B ως στοιχεία του $M_2(\mathbb{R})$. Δηλαδή θα αναζητήσουμε πραγματικές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

   Επειδή το x^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες, ο A δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα.

   Επειδή το $(x-1)(x^2+1)$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα ο B έχει μόνο μια ιδιοτιμή, τη $\lambda=1$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνουμε το σύστημα $(B-I)X=0$ και παίρνουμε τις μη μηδενικές λύσεις. Έχουμε

$$(B-I)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x+y=0\\ x-y-z=0\\ y=0.\end{cases}$$

   Οι λύσεις είναι $(x,y,z)=(y,0,y),$ όπου $y\in\mathbb{R}$, και άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $X=\begin{pmatrix}y\\ 0\\ y\end{pmatrix}$, όπου $y\in\mathbb{R}-\{0\}$.

2. Θεωρούμε τα A και B ως στοιχεία του $M_2(\mathbb{C})$. Δηλαδή θα αναζητήσουμε μιγαδικές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

   Οι ιδιοτιμές του A είναι οι μιγαδικές ρίζες του $x^2+1,$ δηλαδή $\pm i$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνουμε τα δυο συστήματα

$(A-iI)X=0, (A+iI)X=0$ και παίρνουμε τις μη μηδενικές λύσεις. Για το πρώτο σύστημα έχουμε

$$(A-iI)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -ix+y \\ -x-iy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ix+y=0 \\ -x-iy=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x,y)=(x,ix), x\in\mathbb{C} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή i είναι τα

$X=\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}-\{0\}.$

Για το δεύτερο σύστημα έχουμε

$$(A+iI)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} ix+y \\ -x+iy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ix+y=0 \\ -x+iy=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x,y)=(x,-ix), x\in\mathbb{C} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $-i$ είναι τα

$X=\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}-\{0\}.$

Για τον πίνακα B, οι ιδιοτιμές είναι οι μιγαδικές ρίζες του $(x-1)(x^2+1)$, δηλαδή είναι οι $1, i, -i$. Λύνοντας όπως πριν τα αντίστοιχα συστήματα

$$(A-I)X=0,\ (A-iI)X=0,\ (A+iI)=0,$$

βρίσκουμε ότι: στην ιδιοτιμή $\lambda=1$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $X=\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$,

όπου $y\in\mathbb{C}-\{0\}$, στη $\lambda=i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $X=\begin{pmatrix} -z \\ (1+i)z \\ -iz \end{pmatrix}$, όπου $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, και στη $\lambda = -i$ αντιστοιχούν τα $X = \begin{pmatrix} -z \\ (1-i)z \\ iz \end{pmatrix}$, όπου

$z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι δυνατές ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις

1. $f^2 = 1_V$
2. $f^2 = f$
3. $f^2 = 0$

Λύση

Έστω ότι υπάρχει μια ιδιοτιμή λ της f με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v. Τότε $f(v) = \lambda v, v \neq 0$. Επομένως $f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$.

1. $f^2 = 1_V \Rightarrow f^2(v) = v \Rightarrow \lambda^2 v = v$. Αφού $v \neq 0$, έχουμε $\lambda^2 = 1$, οπότε $\lambda = \pm 1$.
2. $f^2 = f \Rightarrow f^2(v) = f(v) = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 v = \lambda v$. Αφού $v \neq 0$, έχουμε $\lambda^2 = \lambda$, οπότε $\lambda = 0,1$.
3. $f^2 = 0 \Rightarrow f^2(v) = 0 \Rightarrow \lambda^2 v = 0$. Αφού $v \neq 0$, παίρνουμε $\lambda = 0$.

Άσκηση 4

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. *Να βρεθούν*

1. *το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A*
2. *το ελάχιστο πολυώνυμο του A*
3. *οι ιδιοτιμές του A*
4. *τα ιδιοδιανύσματα του A*
5. *μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A.*

Λύση

1. $\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{pmatrix}$. Θα είναι χρήσιμο για τα επόμενα υποερωτήματα να ξέρουμε τις ρίζες του $\chi_A(x)$. Για το λόγο αυτό αντί να υπολογίσουμε την ορίζουσα μηχανικά, επιδιώκουμε πρώτα κάποια παραγοντοποίηση. Προσθέτοντας τη δεύτερη στήλη στην τρίτη, παίρνουμε

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ -3 & x+5 & x+2 \\ -6 & 6 & x+2 \end{pmatrix} =$$

$$(x+2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ -3 & x+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για να είναι οι πράξεις πιο απλές, αφαιρούμε την τρίτη γραμμή από τη δεύτερη και αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την τρίτη στήλη.

$$(x+2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ -3 & x+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (x+2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ 3 & x-1 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(x+2)((x-1)^2 - 9) = (x+2)(x^2 - 2x - 8) =$$

$$(x+2)^2(x-4).$$

Άρα $\chi_A(x) = (x+2)^2(x-4)$.

2. Σύμφωνα με το Θεώρημα 15 ξέρουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$ και έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό. Επειδή $\chi_A(x) = (x+2)^2(x-4)$, συνάγουμε ότι υπάρχουν δυο δυνατές περιπτώσεις: είτε $m_A(x) = (x+2)(x-4)$ είτε $m_A(x) = (x+2)^2(x-4)$. Με πράξεις πινάκων επαληθεύεται ότι $(A+2I)(A-4I) = 0$. Άρα $m_A(x) = (x+2)(x-4)$.

3. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι πραγματικές ρίζες του $\chi_A(x) = (x+2)^2(x-4)$, δηλαδή οι $-2, 4$.

4. Για $\lambda = -2$: Το σύστημα $(\lambda I - A)X = 0$ είναι το

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+3y-3z=0 \\ -3x+3y-3z=0 \\ -6x+6y-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y+z=0.$$

Οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -2, είναι $V(-2)=\left\{\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}$ και τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$, όπου τουλάχιστον ένα από τα y,z είναι μη μηδενικό.

Για $\lambda=4$: Το σύστημα $(\lambda I-A)X=0$ είναι το

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+3y-3z=0 \\ -3x+9y-3z=0 \\ -6x+6y \qquad =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y-z=0. \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 4, είναι $V(4)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \middle| z\in\mathbb{R}\right\}$ και τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix}$, όπου το z είναι μη μηδενικό.

5. Είδαμε πριν ότι $V(-2)=\left\{\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}$. Δυο στοιχεία αυτού του χώρου είναι τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το $V(-2)$, επειδή $\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Άρα αυτά συγκροτούν μια βάση του $V(-2)$.

Επειδή $V(4)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ 1 \end{pmatrix} \middle| z\in\mathbb{R}\right\}$, μια βάση αυτού αποτελεί το στοιχείο $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 5

1. *Αποδείξτε την Πρόταση 2 δηλαδή ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές.*
2. *Στη συνέχεια δώστε ένα παράδειγμα δυο όμοιων πινάκων που έχουν διαφορετικά ιδιοδιανύσματα.*

Λύση

1. Έστω ότι $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ είναι όμοιοι πίνακες. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in M_n(\mathbb{F})$ με $A = P^{-1}BP$. Θα δείξουμε ότι $\chi_A(x) = \chi_B(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det(xI - P^{-1}BP) = \\
&\det(xP^{-1}P - P^{-1}BP) = \det\left(P^{-1}(xI - B)P\right) = \\
&\det(P^{-1})\det(xI - B)\det P = (\det P)^{-1}\det(xI - B)\det P = \\
&\det(xI - B) = \chi_B(x).
\end{aligned}$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και έχουμε $\chi_A(x) = \chi_B(x)$, οι A,B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

2. Από την ισότητα πινάκων $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ έχουμε ότι οι $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι. Το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πρώτου γιατί $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, αλλά δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του δεύτερου αφού $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ και το $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ δεν είναι πολλαπλάσιο του $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 6

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}).$

1. *Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το X είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A.*
2. *Για τις τιμές του a που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα υπολογίστε τη διάσταση του ιδιόχωρου που περιέχει το X.*

Λύση

1. Το X είναι ιδιοδιάνυσμα του A αν και μόνο αν $AX=\lambda X$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $AX=\begin{pmatrix}3\\1+2a\\0\end{pmatrix}$. Το X είναι ιδιοδιάνυσμα αν και μόνο αν

$\begin{pmatrix}3\\1+2a\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3=\lambda\\1+2a=2\lambda\end{cases}$. Άρα έχουμε ότι $a=\dfrac{5}{2}$.

2. Έστω $a=\dfrac{5}{2}$. Είδαμε πριν ότι το X αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3. Ο ιδιόχωρος που περιέχει το X είναι ο $V(3)$. Από την Πρόταση 14 ξέρουμε ότι $\dim V(3)=3-r(A-3I)$. Έχουμε $A-3I=\begin{pmatrix}-2&1&2\\1&-\frac{1}{2}&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$. Ξέρουμε ότι η τάξη ενός πίνακα αυτού με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στην κλιμακωτή του μορφή. Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε τη κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ και συνεπώς $r(A-3I)=2$. Άρα έχουμε $\dim V(3)=3-2=1$.

Άσκηση 7

Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του πίνακα $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

Λύση

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών και στηλών. Έχουμε

$$\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{pmatrix} \overset{r_3\to r_3-2r_2}{=} \det\begin{pmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ 0 & -2(x+1) & x+1 \end{pmatrix}=$$

$$(x+1)\det\begin{pmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_2\to c_2+2c_1}{=} (x+1)\det\begin{pmatrix} x-3 & -10 & -4 \\ -2 & x-4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$(x+1)\big((x-3)(x-4)-20\big)=(x+1)^2(x-8).$$

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $-1,8.$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο -1: Το σύστημα $(A-(-1)I)X=0$ είναι το

$$\begin{cases} 4x+2y+4z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+2y+4z=0. \end{cases}$$

Άμεσα βλέπουμε ότι αυτό ισοδυναμεί με την εξίσωση $2x+y+2z=0.$ Άρα

$V(-1)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{-y-2z}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}$. Θέτοντας $y=1,z=0$ και $y=0,z=1$ παίρνουμε τα

στοιχεία $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Αυτά αποτελούν μια βάση του $V(-1),$ γιατί είναι γραμμικά

ανεξάρτητα και παράγουν το $V(-1)$ καθώς $\begin{pmatrix} \frac{-y-2z}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο 8: Το σύστημα $(A-8I)X=0$ είναι το

$$\begin{cases} -5x+2y+4z=0 \\ 2x-8y+2z=0 \\ 4x+2y-5z=0. \end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} 5x-2y-4z=0 \\ \qquad 2y-z=0 \end{cases}.$$

Οι λύσεις είναι $(x,y,z)=(z,\frac{z}{2},z)$, $z\in\mathbb{R}$. Άρα $V(8)=\left\{\begin{pmatrix} z \\ \frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} \middle| z\in\mathbb{R}\right\}$. Μια βάση

αποτελεί το στοιχείο $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 8

Υπολογίστε τις ιδιοτιμές των εξής πινάκων

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$

2. $B=\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$.

Λύση

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Έχουμε

$$xI-A=\begin{pmatrix} x-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & x-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & x-1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}.$$

Προσθέτουμε στην πρώτη στήλη του τελευταίου πίνακα κάθε άλλη στήλη, οπότε προκύπτει ο

$$-\begin{pmatrix} n-x & 1 & \dots & 1 \\ n-x & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-x & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\det(xI-A)=\det\left(-\begin{pmatrix} n-x & 1 & \dots & 1 \\ n-x & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-x & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}\right)=$$

$$(-1)^n(n-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}.$$

Στον τελευταίο πίνακα αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από κάθε άλλη. Έτσι παίρνουμε

$$\det(xI-A)=(-1)^n(n-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x \end{pmatrix}=(-1)^n(n-x)(-x)^{n-1},$$ γιατί ο

τελευταίος πίνακας είναι τριγωνικός. Τελικά $\det(xI-A)=-(n-x)x^{n-1}$ και οι ιδιοτιμές είναι $0,n.$ (Παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή 0 έχει πολλαπλότητα $n-1$).

2. Μπορούμε να εφαρμόσουμε και εδώ τη μέθοδο που είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x)=bx+a-b$ και παρατηρούμε ότι $B=f(A).$ Από την Πρόταση 4, οι ιδιοτιμές του B είναι $f(0)=a-b,\ f(n)=bn+a-b=a+b(n-1).$

Άσκηση 9

Να βρεθεί η διάσταση του (μοναδικού) ιδιόχωρου του

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F}).$$

Λύση

Ο A είναι άνω τριγωνικός και τα στοιχεία της διαγωνίου είναι 1. Από την Πρόταση 6 υπάρχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda=1$ και το ζητούμενο είναι η διάσταση του $V(1).$ Από την Πρόταση 14 έχουμε $\dim V(1)=n-r(A-I).$ Παρατηρούμε ότι

$$A-I=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Αν $a=0$, τότε $r(A-I)=0$ και $\dim V(1)=n$.
- Αν $a\neq 0$, τότε $r(A-I)=n-1$ και $\dim V(1)=1$.

Άσκηση 10

Έστω $A\in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με 1.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ τέτοιο ώστε $AX=X$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του A. Στην πρώτη στήλη του πίνακα $A-I$ προσθέτουμε κάθε άλλη στήλη. Τότε προκύπτει ένας πίνακας του οποίου η πρώτη στήλη είναι μηδενική. Άρα $\det(A-I)=0$ και το 1 είναι ιδιοτιμή του A.

Άσκηση 11

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο για καθέναν από τους επόμενους πραγματικούς πίνακες

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\chi_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix} x-4 & -2 \\ -1 & x-3 \end{pmatrix}=(x-2)(x-5)$$

$$\chi_B(x)=(x-1)(x-2)$$

γιατί ο B είναι τριγωνικός. Ο πίνακας C είναι της μορφής $C=\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Από την Πρόταση 7 συμπεραίνουμε ότι $\chi_C(x)=\chi_A(x)\chi_B(x)=(x-1)(x-2)^2(x-5)$.

Για τα ελάχιστα πολυώνυμα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 15 που μας λέει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί το χαρακτηριστικό και έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό. Άρα $m_A(x)=(x-2)(x-5), m_B(x)=(x-1)(x-2)$. Για το C εφαρμόζουμε την Πρόταση 16, οπότε $m_C(x)=\varepsilon\kappa\pi\{(x-2)(x-5),(x-1)(x-2)\}=(x-1)(x-2)(x-5)$.

Άσκηση 12

Έστω $A=\begin{pmatrix}-5&4&1\\-6&5&1\\0&0&0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. *Να υπολογιστεί ο πίνακας* $A^{2005}+A^{2006}$.

Λύση

Έχουμε $\chi_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x+5&-4&-1\\6&x-5&-1\\0&0&x\end{pmatrix}=x((x+5)(x-5)+24)=x^3-x$.

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε $A^3-A=0$. Άρα

$$\begin{aligned}A^4&=AA^3=AA=A^2,\\A^5&=AA^4=AA^2=A^3=A\\A^6&=AA^5=AA=A^2.\end{aligned}$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $A^{2n}=A^2, A^{2n+1}=A$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Πράγματι, η πρώτη σχέση αληθεύει για $n=1$. Έστω ότι αυτή αληθεύει για ένα συγκεκριμένο n. Τότε $A^{2(n+1)}=A^{2n}A^2=A^2A^2=AA^3=AA=A^2$. Η δεύτερη σχέση αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Έχουμε $A^{2005}+A^{2006}=A+A^2$. Με υπολογισμούς βρίσκουμε $A+A^2=\begin{pmatrix}-4&4&0\\-6&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Άσκηση 13

Έστω ο πραγματικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&-2&-1\\0&3&2\end{pmatrix}$.

1. *Απλοποιήστε την παράσταση* A^5-2A^4+3I.
2. *Εκφράστε τους πίνακες* A^{-1},A^{-2} *ως πολυώνυμα του* A.
3. *Αποδείξτε ότι* $A^{2006}-2A^{2005}=A^2-2A$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & -3 & x-2 \end{pmatrix} =$$

$$(x-2)\big((x+2)(x-2)+3\big) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Από το Θεώρημα Cayley – Hamilton έχουμε

$$\chi_A(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0\,.$$

1. Διαιρώντας το πολυώνυμο $x^5 - 2x^4 + 3$ με το $\chi_A(x)$ βρίσκουμε

   $x^5 - 2x^4 + 3 = \chi_A(x)(x^2+1) + x + 1$. Άρα

   $A^5 - 2A^4 + 3I = \chi_A(A)(A^2+1) + A + I = A + I.$

2. Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν είναι μηδέν, ο A είναι αντιστρέψιμος (βλ. Πόρισμα 10). Πολλαπλασιάζοντας με τον A^{-1} παίρνουμε

$$A^2 - 2A - I + 2A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I\right).$$

   Πολλαπλασιάζοντας πάλι με τον A^{-1} παίρνουμε $A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I + A^{-1}\right)$. Άρα

$$A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I + \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I\right)\right) = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{5}{4}I.$$

3. Η σχέση $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$ γράφεται $A^3 - 2A^2 = A - 2I$, οπότε

$$\begin{aligned} &A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A \\ &A^5 - 2A^4 = A^3 - 2A^2 = A - 2I \\ &A^6 - 2A^5 = A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A \\ &\text{κλπ} \end{aligned}$$

   Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο n ότι

$$A^{2n} - 2A^{2n-1} = A^2 - 2A,\ n \geq 2.$$

   Πράγματι, η σχέση αληθεύει για $n = 2$. Έστω ότι αληθεύει για ένα συγκεκριμένο n. Τότε

$$A^{2(n+1)} - 2A^{2(n+1)-1} = A^2\left(A^{2n} - 2A^{2n-1}\right) =$$

$$A^2\left(A^2 - 2A\right) = A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A.$$

   Επομένως $A^{2006} - 2A^{2005} = A^2 - 2A$.

Άσκηση 14

Έστω $A \in M_3(\mathbb{C})$. Αποδείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1. $A^3 = 0.$
2. $\chi_A(x) = x^3$
3. $TrA = TrA^2 = TrA^3 = 0.$

Λύση

$1 \Rightarrow 2.$ Αν ισχύει $A^3 = 0$ και λ είναι μια ιδιοτιμή του A τότε το λ^3 είναι ιδιοτιμή του A^3 σύμφωνα με την Πρόταση 4. Αφού $A^3 = 0$, έχουμε $\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, δηλαδή κάθε ιδιοτιμή του A είναι ίση με μηδέν. Άρα $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = x^3$.

$2 \Rightarrow 3.$ Από τη σχέση $\chi_A(x) = x^3$ συμπεραίνουμε ότι κάθε ιδιοτιμή του A είναι ίση με μηδέν. Άρα κάθε ιδιοτιμή του A^m, m θετικός ακέραιος, είναι ίση με μηδέν. Τότε από την Πρόταση 9 έχουμε $TrA^m = 0, m = 1, 2, \ldots$

$3 \Rightarrow 1.$ Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές του A. Θα δείξουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

Από την υπόθεση και την Πρόταση 9 έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0 \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 0. \end{cases}$$

Έστω ότι κάποιο από τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι διάφορο του 0. Θα φτάσουμε σε άτοπο. Από τις προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 &= 0 \\ \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \lambda_3^2 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

έχει μη μηδενική λύση. Άρα η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = 0.$ Αυτή είναι η γνωστή ορίζουσα Vandermonde για την οποία είδαμε στο Κεφάλαιο 4 ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1).$$

Συνεπώς $(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)=0,$ δηλαδή τα λ_i δεν είναι ανά δύο διάφορα. Αυτό είναι άτοπο. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_2=\lambda_3$. Τότε παίρνουμε

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ \lambda_1^{\ 2}+2\lambda_2^{\ 2}=0\\ \lambda_1^{\ 3}+2\lambda_2^{\ 3}=0.\end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\lambda_1=-2\lambda_2$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη παίρνουμε $\left(-2\lambda_2\right)^2+2\lambda_2^{\ 2}=0\Rightarrow 6\lambda_2^2=0\Rightarrow\lambda_2=0$. Άρα $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$

Αφού $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,$ παίρνουμε $\chi_A(x)=x^3.$ Από το Θεώρημα των Cayley – Hamilton έχουμε $A^3=0.$

Άσκηση 15

Εξετάστε αν αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις.

1. *Αν για ένα* 3×3 *πίνακα Α ισχύει* $A^4=0$, *τότε* $A^3=0.$
2. *Αν για ένα* 3×3 *πίνακα Α ισχύει* $A^3=0$, *τότε* $A^2=0.$
3. *Υπάρχει πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το* $(x-2)^2(x-5)$ *και ελάχιστο το* $(x-2)^2$.
4. *Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το* x^3-2x^2+x.

Λύση

1. Αυτή αληθεύει, γιατί αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A τότε από τη υπόθεση έχουμε $\lambda^4=0\Rightarrow\lambda=0.$ Άρα κάθε ιδιοτιμή του A είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς $\chi_A(x)=x^3.$ Τότε από το Θεώρημα των Cayley – Hamilton παίρνουμε $A^3=0.$
2. Αυτή δεν αληθεύει. Ένα αντιπαράδειγμα είναι ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$

   Έχουμε $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0, A^3=0$
3. Αυτή δεν αληθεύει λόγω του Θεωρήματος 15 3).
4. Αυτή δεν αληθεύει γιατί ο σταθερός όρος του δοσμένου πολυωνύμου είναι ίσος με 0 (βλ. Πόρισμα 10).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα

1. του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$
2. της γραμμικής απεικόνισης $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(4x+2y,3x+3y)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 1. **Απάντηση** 1. Οι ιδιοτιμές του A είναι 1,4 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(2x,-x), x\in\mathbb{R}-\{0\}, (x,x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$. 2. Οι ιδιοτιμές της f είναι 1,6 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(2x,-3x), x\in\mathbb{R}-\{0\}, (x,x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Άσκηση 2

Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των εξής πινάκων

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ B=\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Απάντηση $\chi_A(x)=x^2-8x+23,\ \chi_B(x)=x^3-3x^2+2x,\ \chi_C(x)=x^3-6x^2+5x-12$

Άσκηση 3

Έστω $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. *Να βρεθούν*

1. *το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A*
2. *το ελάχιστο πολυώνυμο του A*
3. *οι ιδιοτιμές του A*
4. *τα ιδιοδιανύσματα του A*
5. *μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A.*

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 4.

Απάντηση $\chi_A(x)=(x-2)^2(x-6),\ m_A(x)=(x-2)(x-6),\ \lambda=2,6,$ οι ιδιόχωροι είναι

$V(2)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\middle|x,y\in\mathbb{R}\right\},V(6)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$ και αντίστοιχες βάσεις είναι

$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}.$

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της γραμμικής απεικόνισης

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(x-y,2x+3y+2z,x+y+2z).$

Υπόδειξη Οι ιδιοτιμές είναι $1,2,3.$ Βάσεις των $V(1),V(2),V(3)$ είναι αντίστοιχα τα $\{(1,0,-1)\},\{(2,-2,-1)\},\{(1,-2,-2)\}$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του

$$A=\begin{pmatrix}2&5&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&4&2&0\\0&0&3&5&0\\0&0&0&0&7\end{pmatrix}\in M_5(\mathbb{R}).$$

Υπόδειξη Εφαρμόστε την Πρόταση 7 και την Πρόταση 16.

Απάντηση $\chi_A(x)=(x-2)^3(x-7)^2,m_A(x)=(x-2)^2(x-7).$

Άσκηση 6

Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες το $X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\a&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}).$ Να βρεθεί η διάσταση του ιδιόχωρου του A που περιέχει το X.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 6. **Απάντηση** $a=5, \dim V(-1)=1$.

Άσκηση 7

Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $A^{2005}-4A+I$.

Υπόδειξη Αφού υπολογίστε τις ιδιοτιμές του A, εφαρμόστε την Πρόταση 4.

Απάντηση $4, 5^{2005}-19$.

Άσκηση 8

Υπολογίστε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και τις διαστάσεις των ιδιόχωρων των πινάκων $A=\begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2-i & -3+i & 0 \\ 2+i & 3-i & 0 \\ -3+i & 5+5i & 6+8i \end{pmatrix}$

Απάντηση Οι ιδιοτιμές του A είναι 0, 6 και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι $V(0)=\left\{ x\begin{pmatrix} -1-2i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C} \right\}, V(6)=\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C} \right\}$. Οι ιδιοτμές του B είναι $0, 1-2i, 6+8i$ και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι

$$V(0)=\left\{ x\begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C} \right\}, V(1-2i)=\left\{ x\begin{pmatrix} 4+3i \\ -4-3i \\ 4 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C} \right\}, V(6+8i)=\left\{ x\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C} \right\}.$$

Άσκηση 9

Ορίζουμε μια συνάρτηση $h: M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a^2+d^2+2bc$. Αποδείξτε ότι αν οι πίνακες $A, B\in M_2(\mathbb{F})$ είναι όμοιοι, τότε $h(A)=h(B)$.

Υπόδειξη Παρατηρήστε ότι $h(A)=(TrA)^2-2\det A$. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2 και το Πόρισμα 9. (Σημείωση: Μια άλλη λύση πηγάζει από τη σχέση $h(A)=Tr(A^2)$).

Άσκηση 10

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A^5 - 3A^4 - 2A^3 + 2A^2 + 4I$
2. Να βρεθεί ένα πραγματικό πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού 2 τέτοιο ώστε $A^{-1} = f(A)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 13. **Απάντηση** 1. $3A - I$ 2. $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$.