ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΛΗ 12 2018-2019
Τηλεσυνεδρίαση 17/01/2019

Αφορά την ύλη των ασκήσεων 1 και $2^{α}$ της $3^{ης}$ εργασίας

- Συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής
- Όρια
- Συνέχεια
- Παράγωγος

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 6) Δίνονται παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(1)=3$, $f'(1)=5$, $f'(4)=-3$, $g(1)=4$, $g'(1)=-2$. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\dfrac{f}{g}$, $f^2 g$ και $f\circ g$ στο σημείο $x_0=1$.

β) (μον. 8) Να βρεθούν όλες οι τιμές της πραγματικής σταθεράς c για τις οποίες η συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $F(x)=\begin{cases}16-11x, & \text{αν} \quad x\le 2\\ cx^3+c^2x, & \text{αν} \quad x>2\end{cases}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$. Υπάρχει τιμή του c για την οποία η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$;

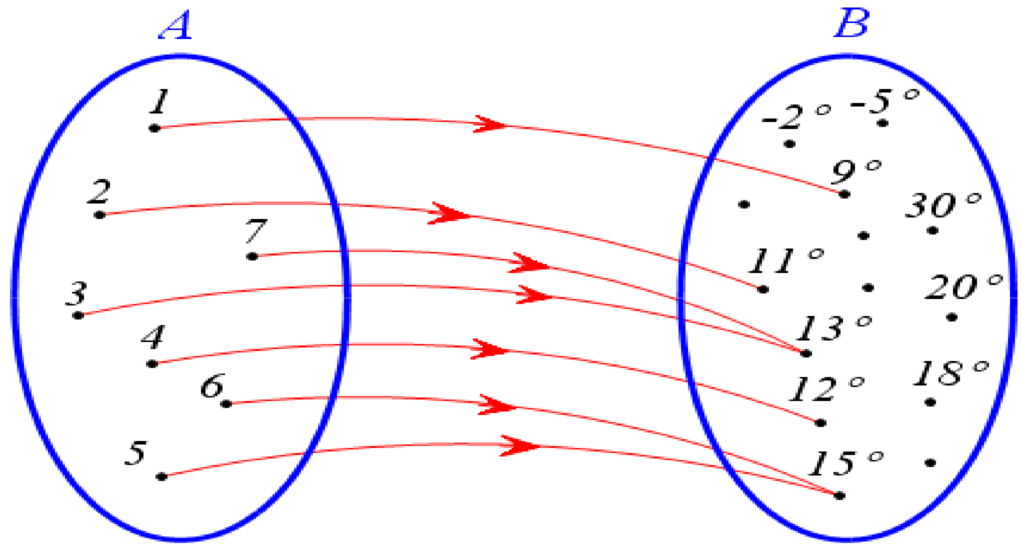
γ) (μον. 6) Θεωρούμε τη συνάρτηση $G:\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $G(x)=\dfrac{x+4}{x^2+3x+2}$. Να αποδειχθεί ότι η παράγωγος τάξης n της G δίνεται από τον τύπο $G^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left(\dfrac{3}{(x+1)^{n+1}}-\dfrac{2}{(x+2)^{n+1}}\right)$, για κάθε θετικό ακέραιο n και για κάθε $x\neq -1,-2$.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 6) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x^4+23+\cos(x-1)}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y=f(x)$ στο σημείο $(1,\,5)$ και να υπολογιστεί προσεγγιστικά το $f(1.005)$.

ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΑ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- **Συνάρτηση** από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.



A: ημέρες μιας εβδομάδας

B: μέγιστη θερμοκρασία

A= D_f : πεδίο ορισμού

R_f = {9, 11, 13, 12, 15} σύνολο τιμών

Πραγματικές Συναρτήσεις $y = f(x)$

$$f : D_f \subset \mathbb{R} \to R_f = f(D_f) \subset B$$

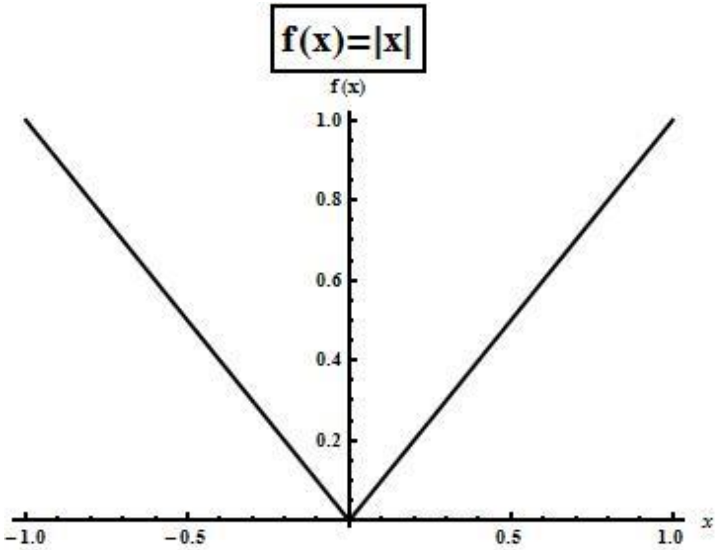
Το **πεδίο ορισμού *D_f*** αποτελείται από όλους τους πραγματικούς για τους οποίους έχει νόημα η μαθηματική έκφραση *y=f(x)*.

Μη μηδενικοί παρανομαστές, μη αρνητικές υπόριζες ποσότητες, θετικοί λογάριθμοι ….

Το $f(D_f)$ είναι το **πεδίο τιμών R_f**, υποσύνολο του συνόλου άφιξης και αποτελείται από του πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους **η εξίσωση *y=f(x)* ως προς *x* να έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

Κάποιες φορές πρέπει να ορίσετε τις συναρτήσεις σε κλάδους

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



Μία συνάρτηση είναι **επί** του πεδίου τιμών της και **επί του συνόλου άφιξης** όταν $f(D_f)=B$.

Συνάρτηση 1-1

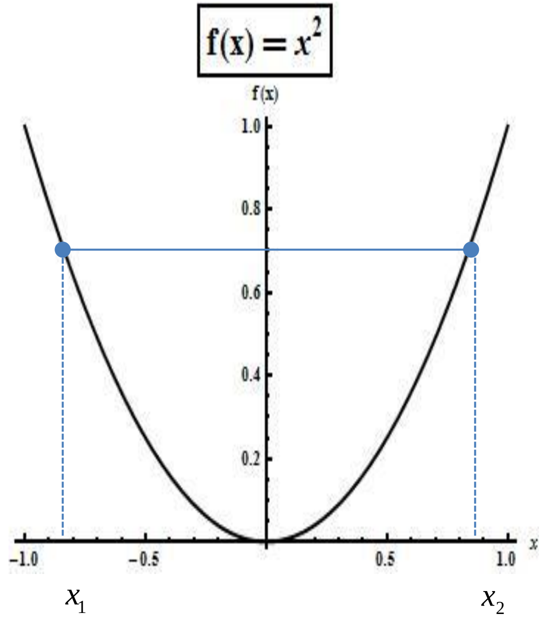
$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

ή

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

Συνάρτηση όχι 1-1

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$



Παραδείγματα:

$$f(x)=\sqrt{x-3},\ \ D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 3\}=[3,+\infty)$$

$$R_f=[0,+\infty)$$

Είναι "1-1" και "επί" του R_f

$$g(x)=\sqrt{x^2-9},\ \ D_g=\{x\in\mathbb{R}:(x-3)(x+3)\geq 0\}=$$

$$=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty),$$

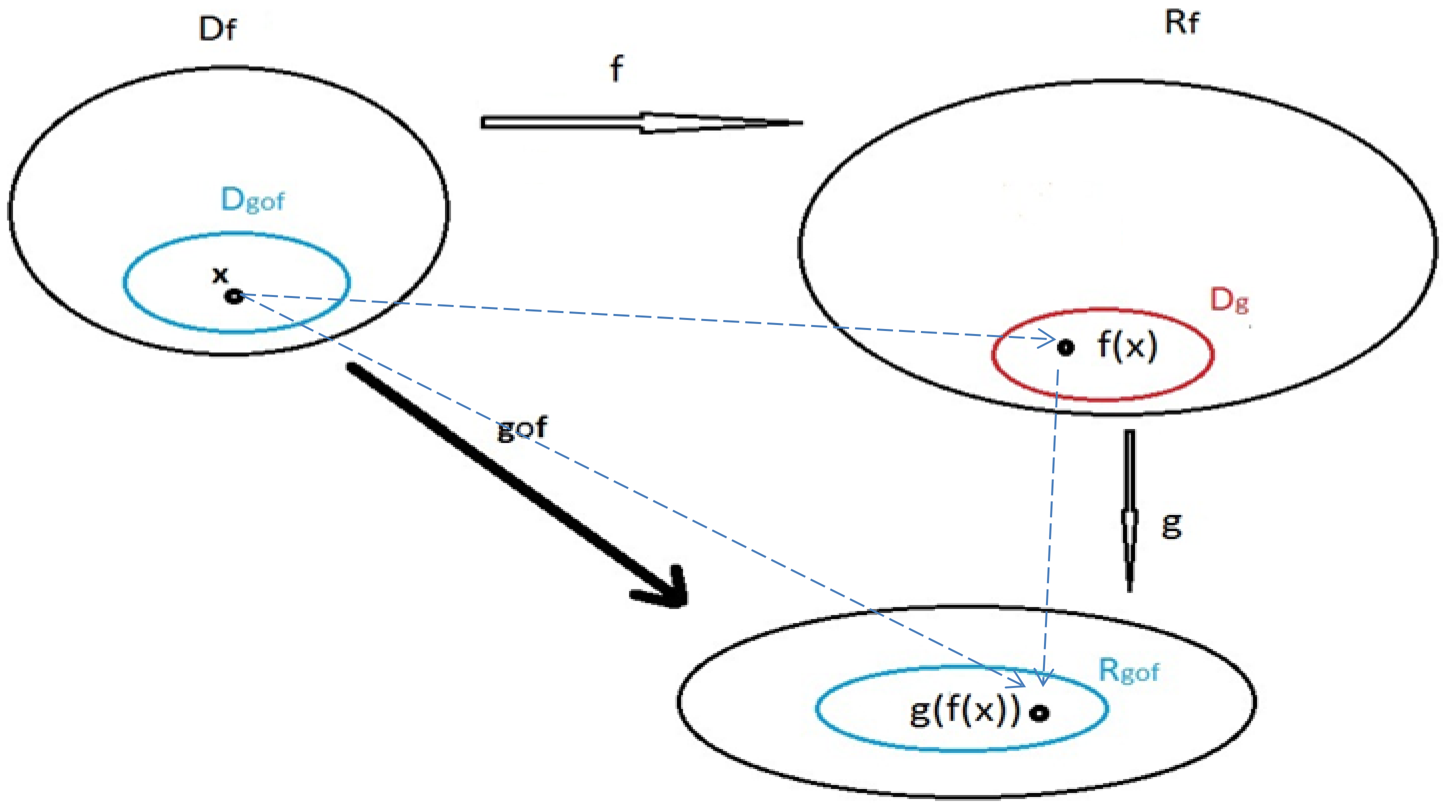
$$R_g=[0,+\infty)$$

Είναι "επί" του R_g αλλά όχι "1-1" διότι π.χ. $g(-4)=g(4)$

$$h(x)=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right),\ D_h=\{x\in\mathbb{R}:(1-x)(x+1)>0\}=(-1,1)$$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



$$D_{gof} = \left\{x \in D_f : f(x) \in D_g\right\} \subseteq D_f$$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ- παραδειγματα:

$$f(x)=\sqrt{x-3},\ \ D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 3\}=[3,+\infty),\ \ R_f=[0,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{x^2-9},\ \ D_g=\{x\in\mathbb{R}:(x-3)(x+3)\geq 0\}=$$

$$=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty),\ \ R_f=[0,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}: x\leq -3 \text{ ή } x\geq 3 \text{ και } \sqrt{x^2-9}\geq 3\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}: x\leq -3\sqrt{2} \text{ ή } x\geq 3\sqrt{2}\}=(-\infty,-3\sqrt{2}]\cup[3\sqrt{2},+\infty)$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x^2-9})=\sqrt{\sqrt{x^2-9}-3}$$

Όμοια: $D_{gof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}=\ldots=[12+\infty),$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-3})=\sqrt{(\sqrt{x-3})^2-9}=\sqrt{x-12}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Όταν μία συνάρτηση είναι 1-1 ορίζεται η **αντίστροφη συνάρτηση της**

$$f^{-1} : f(D_f) \to D_f$$

Για τον τύπο της λύνω την $y = f(x)$ ως προς x

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Παραδείγματα

$$y = f(x) = x^2,\ x \in [0, +\infty) = D_f = A \Rightarrow f(A) = [0, +\infty) = B$$

1. $H\ \ f : A \to B$ είναι "1 – 1" και "επί" και άρα αντιστρέφεται.

$$x = \sqrt{y},\ y \in B \Rightarrow f^{-1} : B \to A,\ \ f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

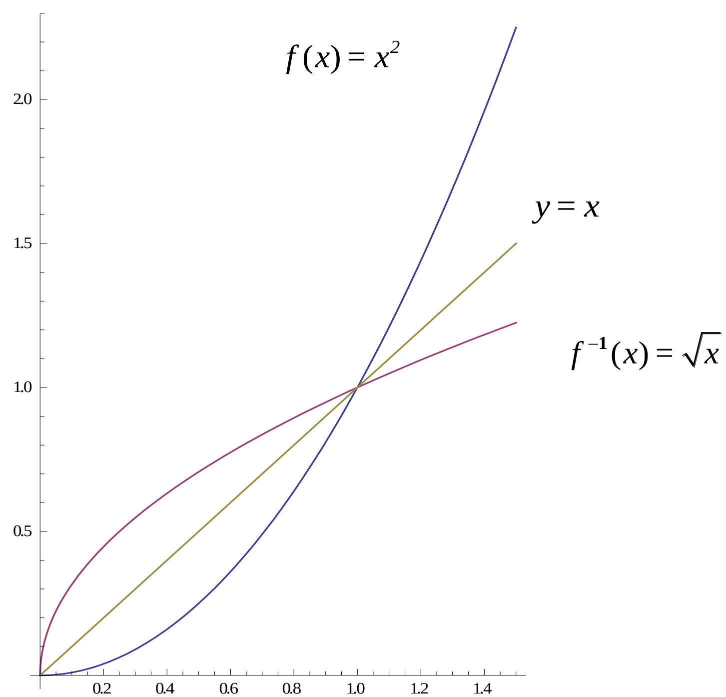
$$y = f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R} = \mathrm{A} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = (0, +\infty) = \mathrm{B}$$

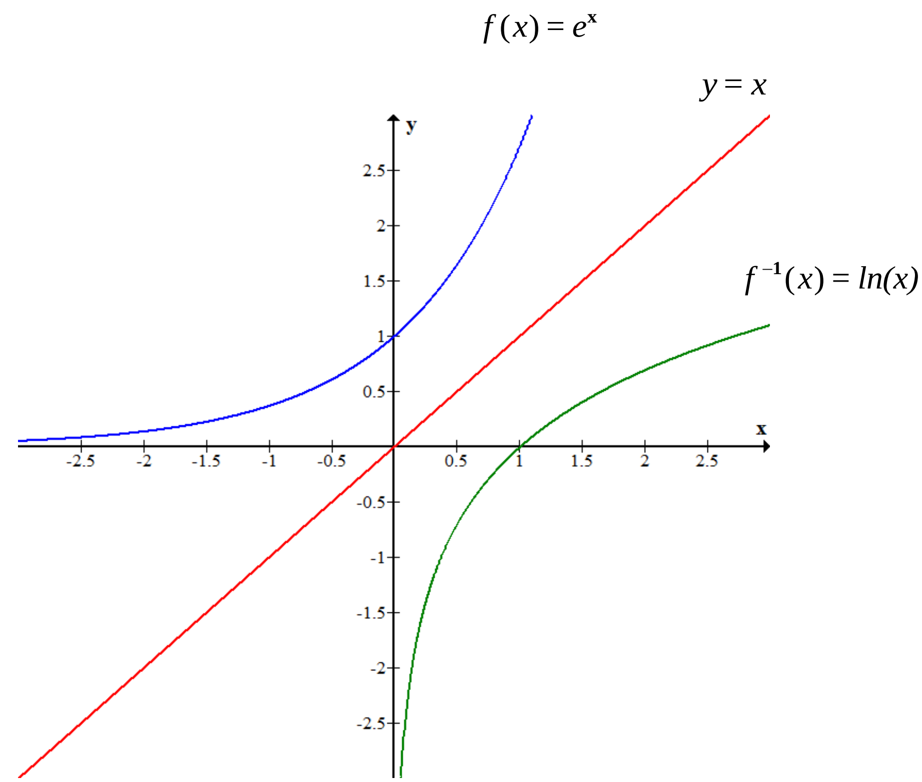
2. $H\ \ f : A \to B$ είναι "1 – 1" και "επί" και άρα αντιστρέφεται,

$$x = \ln y,\ y \in (0, +\infty) \Rightarrow f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ \ f^{-1}(x) = \ln x$$

Η γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι **συμμετρικές ως προς την ευθεία** $y=x$

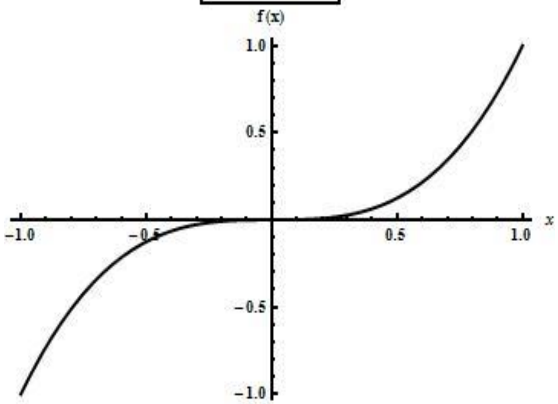
(διχοτόμο της 1ης γωνίας των αξόνων).



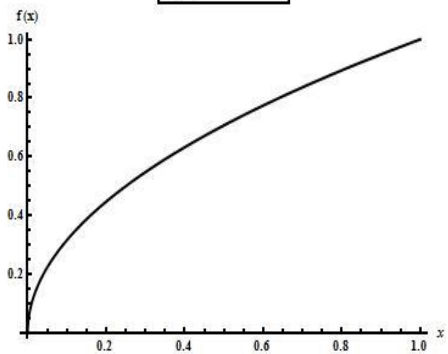


Μερικές γραφικές παραστάσεις γνωστών συναρτήσεων

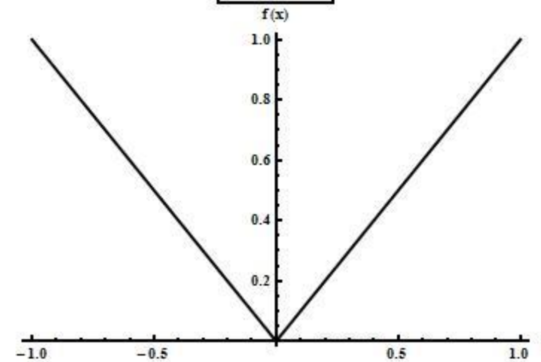
$\mathbf{f(x)} = x^3$



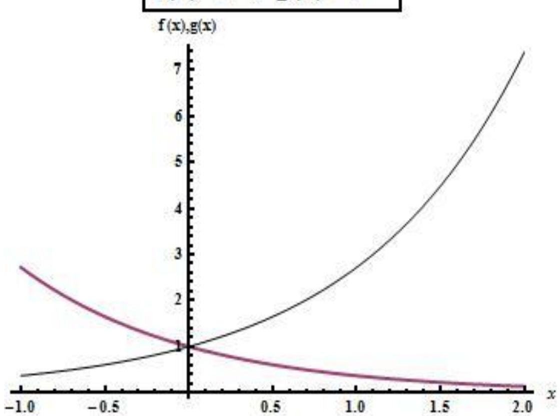
$\mathbf{f(x)} = \sqrt{x}$



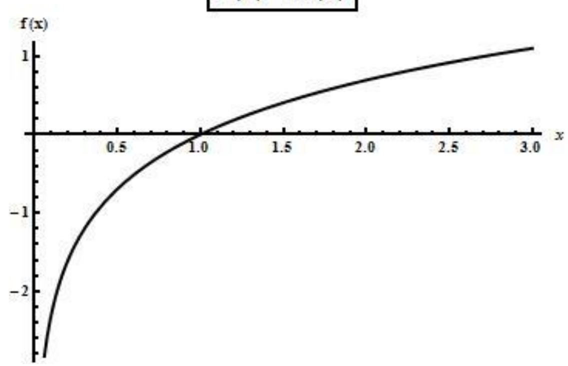
$\mathbf{f(x)=|x|}$



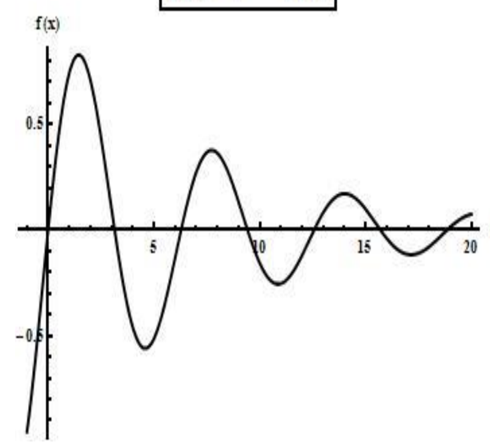
$\mathbf{f(x)}=e^{x}, \ \mathbf{g(x)}=e^{-x}$



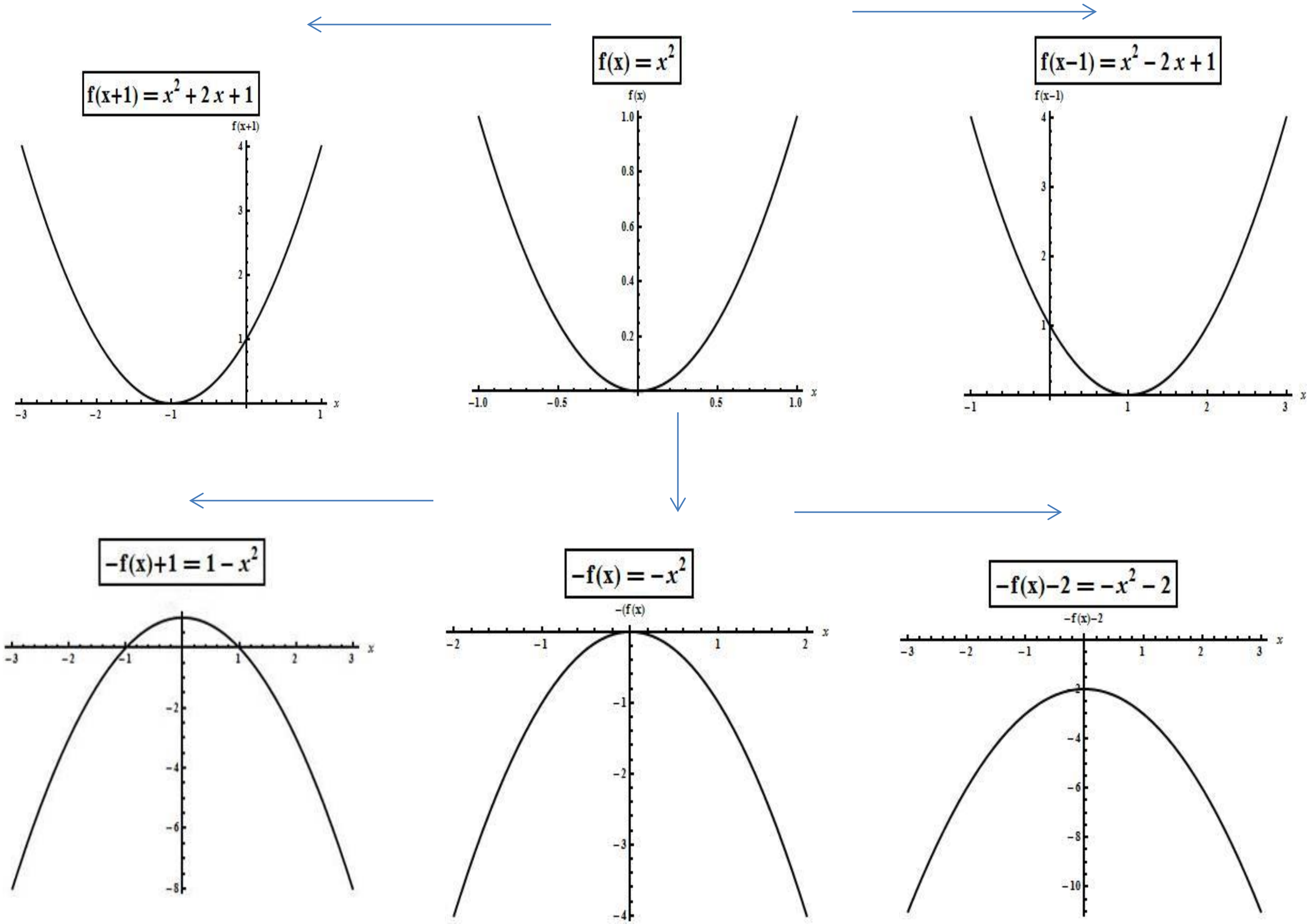
$\mathbf{f(x)=ln(x)}$



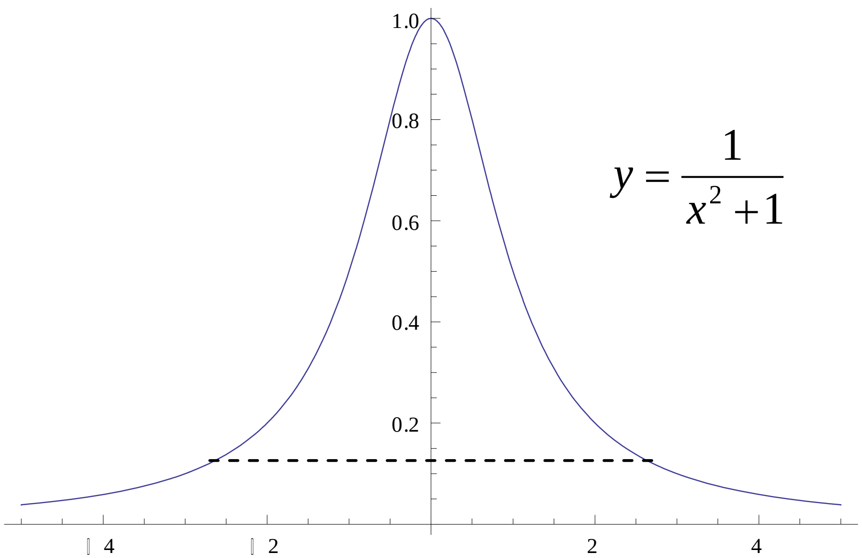
$\mathbf{f(x)}=e^{-x/8}\mathbf{sinx}$

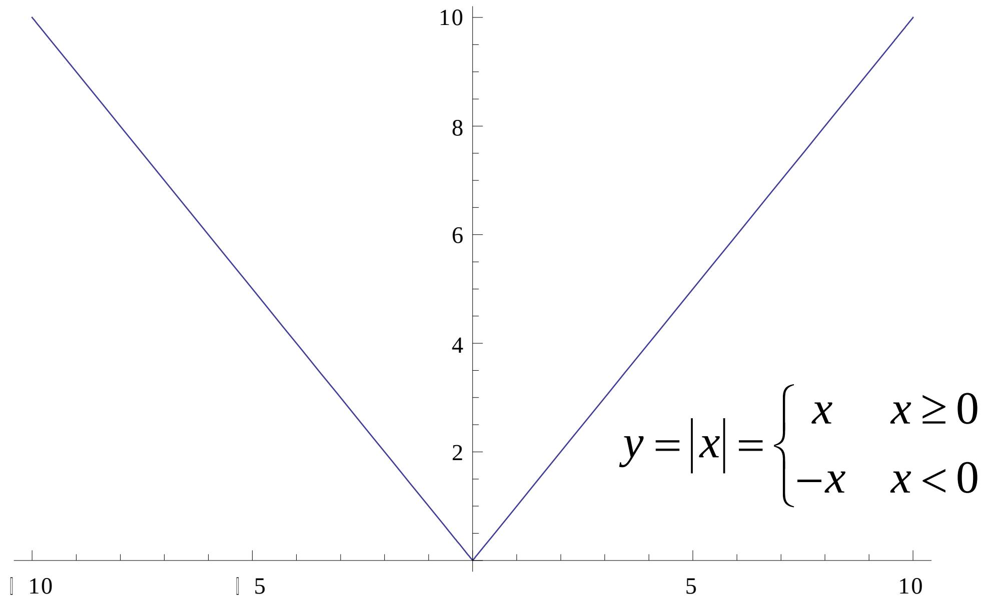


Παραγωγή γραφικών παραστάσεων από μια γνωστή: αυτήν της $f(x)=x^2$

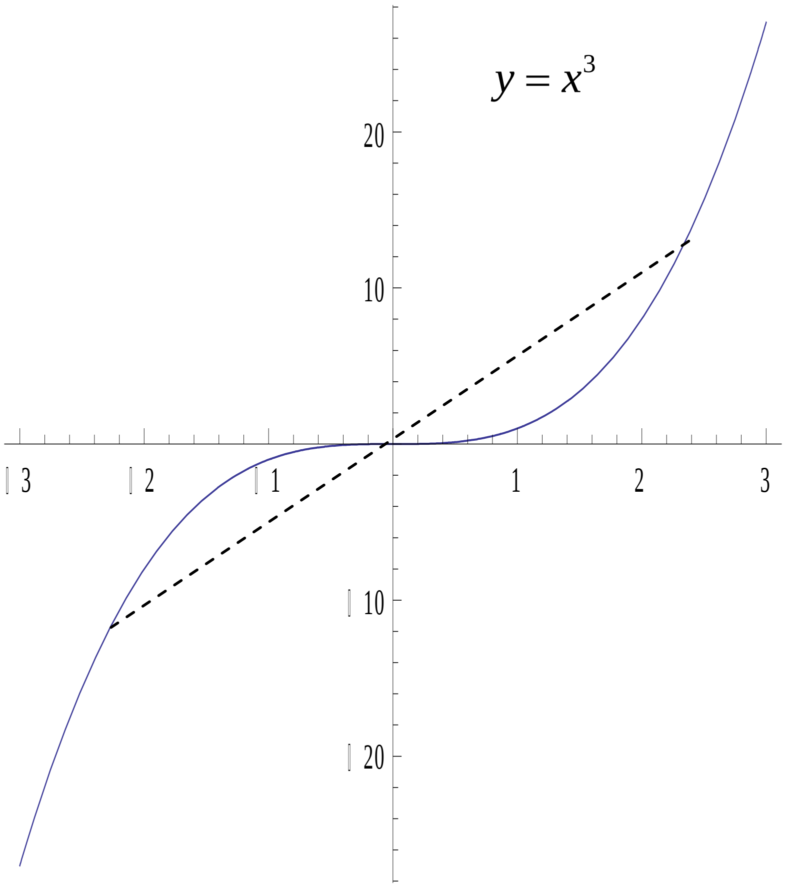


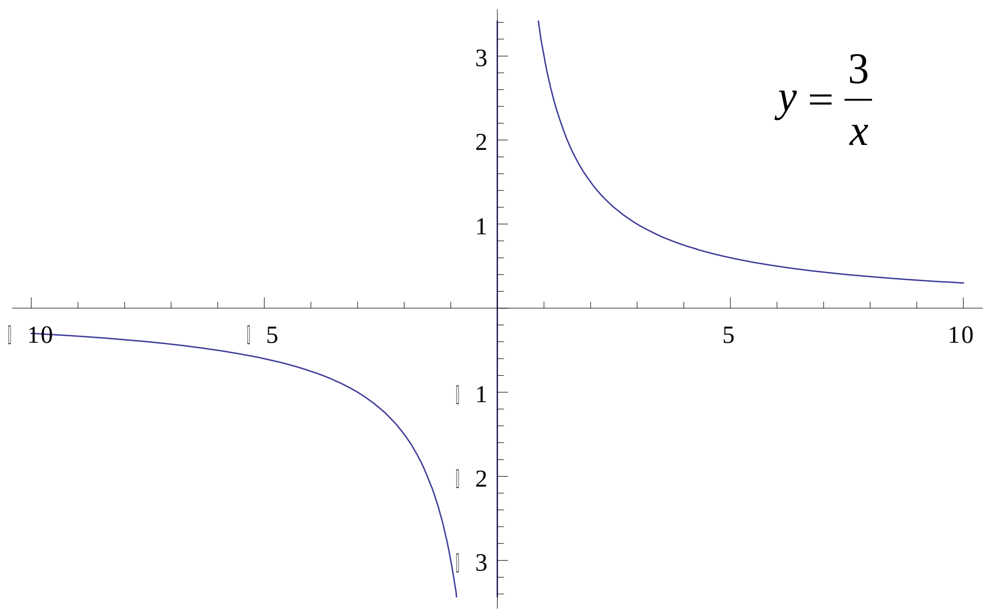
Μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $[-\alpha,\alpha]$ είναι **άρτια** εφόσον ισχύει η σχέση $f(-x)=f(x)$. Οι άρτιες συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα yy'.





Μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *[-α,α]* είναι **περιττή** εφόσον ισχύει η σχέση $f(-x)=-f(x)$. Οι περιττές συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.





ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

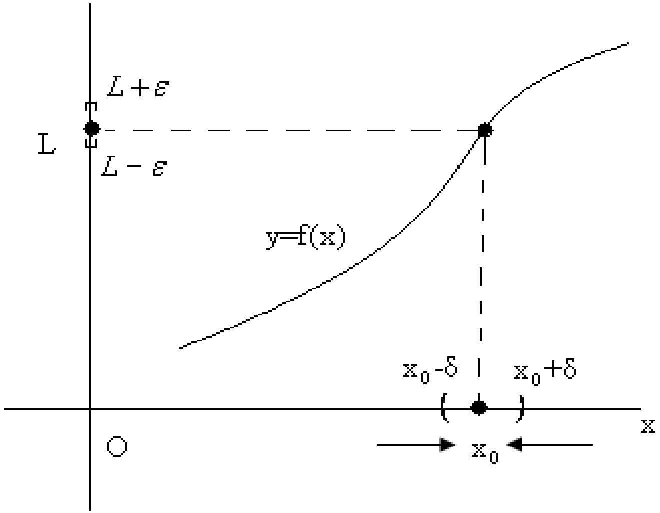
Α. Όριο συνάρτησης σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $f : D \to R$, όπου D=(α,β) με $x_0 \in$(α,β) ή $D = (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

Ορισμός (κλασσικός ε,δ ορισμός)

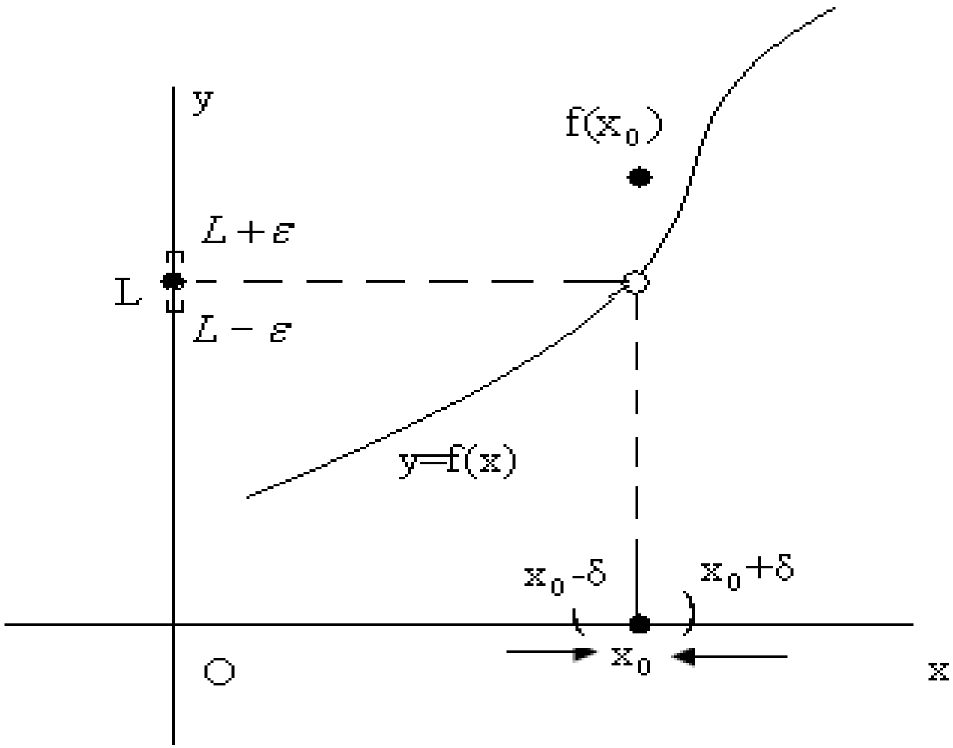
Η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $L \in \mathbb{R}$ για $x \to x_0$ (**του x τείνοντος στο** x_0) και θα το συμβολίζουμε με $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - L| < \varepsilon$

Δηλαδή όταν τα x <u>πλησιάζουν</u> το σημείο x_0 (σε απόσταση μικρότερη από δ, το οποίο πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y = f(x)$ <u>πλησιάζουν</u> τον αριθμό L (σε απόσταση μικρότερη από ε, για κάθε δοσμένο ε).



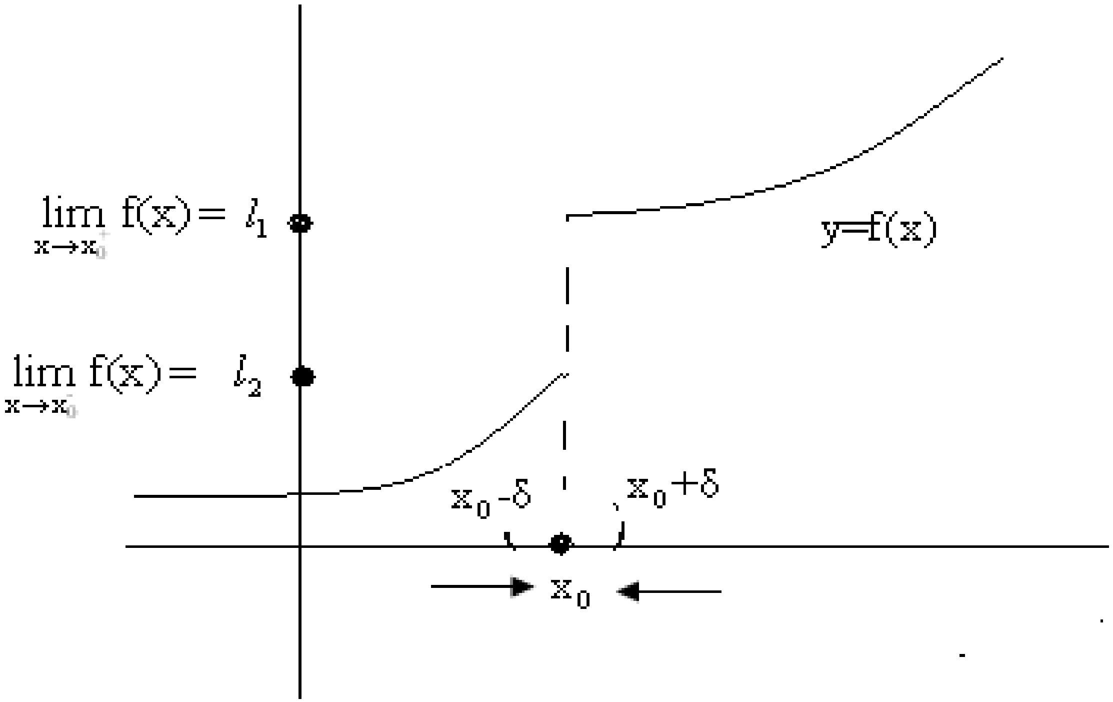
Η συνάρτηση f δεν είναι απαραίτητο να είναι ορισμένη στο σημείο x_0.

Ακόμα, αν η f είναι ορισμένη στο σημείο x_0, τότε η τιμή $f(x_0)$ δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με το όριο L, δηλαδή $f(x_0) \neq L$ εν γένει



Όταν το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει είναι και **μοναδικό.**

Πλευρικά όρια



Όταν $x \to x_o$, $x < x_0$ (συμβ. $x \to x_0^-$), τότε το $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ καλείται **αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης** f **στο σημείο** x_0 (από τα αρνητικά)

Ανάλογα, όταν $x \to x_o$, $x > x_0$ (συμβ. $x \to x_0^+$), τότε το $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ καλείται **δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης** f **στο σημείο** x_0. (από τα θετικά)

Ιδιότητες του ορίου

Εάν f,g,h είναι συναρτήσεις των οποίων υπάρχει το όριο στο σημείο x_0, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x),\ c\in\mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to x_0} c = c$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)},$$ εάν $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

Ιδιότητες του ορίου

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim_{x\to x_0} f(x))^n, n\in \mathbb{N}^*$$

Ειδικότερα $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$

$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)},$ όταν $f(x) \geq 0$.

(ισοσυγκλίνουσες συναρτήσεις)

Εάν ισχύει: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$ τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Εάν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Αν $x_0 \in D$ **αντικαθιστούμε** το x με x_0 στον τύπο της $\mathrm{f(x)}$.

Εάν το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι **ένας πεπερασμένος αριθμός A**, τότε (ενδέχεται) το Α να είναι το όριο της $\mathrm{f(x)}$ στο x_0, δηλαδή:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to 3}\left(4x^2 + 3x - 1\right) = 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 = \ 44$$

$$\lim_{\mathrm{x} \to 2} \frac{\mathrm{x} - 2}{\mathrm{x}^2 + 4} = \frac{2 - 2}{2^2 + 4} = \frac{0}{8} = 0$$

Αν $x_0 \in D$ αντικαθιστούμε το x με x_0 στον τύπο της $f(x)$.

Εάν το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι **απροσδιόριστη μορφή τότε προσπαθούμε με μαθηματικούς μετασχηματισμούς να άρουμε την απροσδιοριστία**

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \pm\infty \cdot 0, \frac{\pm\infty}{0}, 1^{\pm\infty}, (+\infty)^0, 0^0, \frac{\alpha}{0} \quad \alpha \in \mathbb{R}, -\infty + \infty$$

Προσπαθούμε να κάνουμε κάποιο είδος <u>παραγοντοποίησης</u> ή να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις γνωστές <u>ταυτότητες</u>.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x\right)=1+\cos 0=2$$

Εάν η συνάρτηση είναι ρητή (κλάσμα) και περιέχει ριζικά, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση (αριθμητή ή παρονομαστή, ανάλογα με το που υπάρχουν τα ριζικά).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}^{2}-\sqrt{1-x}^{2}}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}=\frac{2}{3\cdot 2}=\frac{1}{3}$$

Χρησιμοποιούμε οτιδήποτε άλλο κρίνουμε αναγκαίο. Π.χ.

- το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων,
- ανισοτικές σχέσεις όπως π.χ. $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- το όριο μερικών «βασικών» συναρτήσεων (όπως π.χ. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

που έχουμε υπολογίσει με τον ε,δ ορισμό.

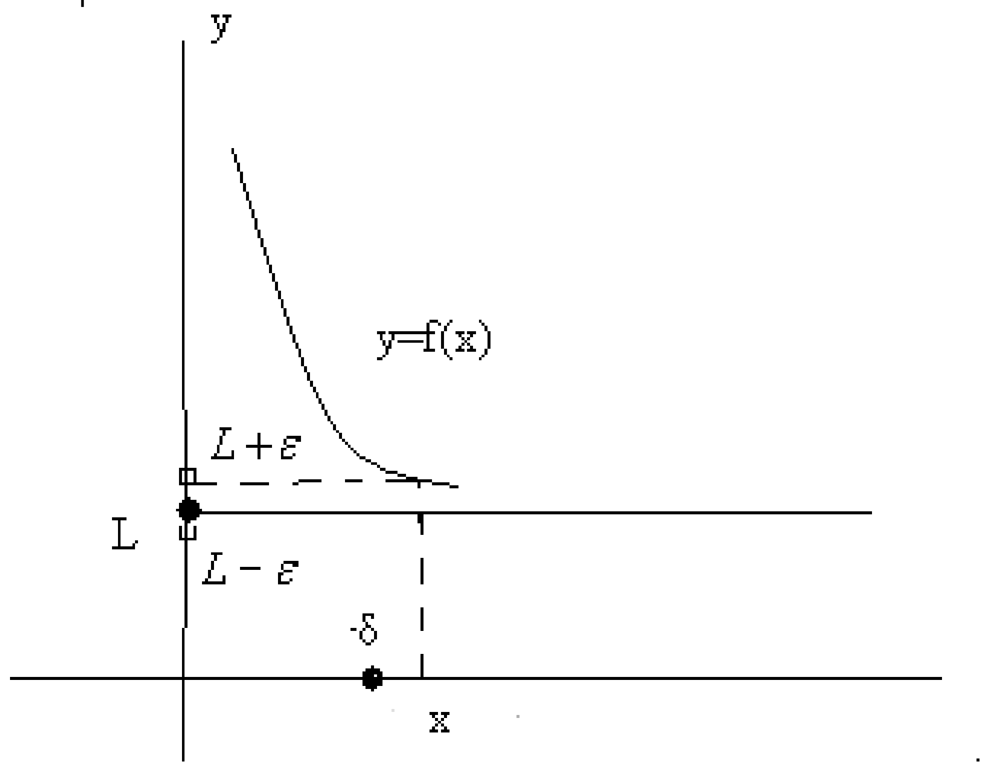
Εφαρμογή

Το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (είναι βασικό και) μας βοηθά να υπολογίσουμε το όριο συναρτήσεων που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \overset{u=5x}{=} 5 \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 5$$

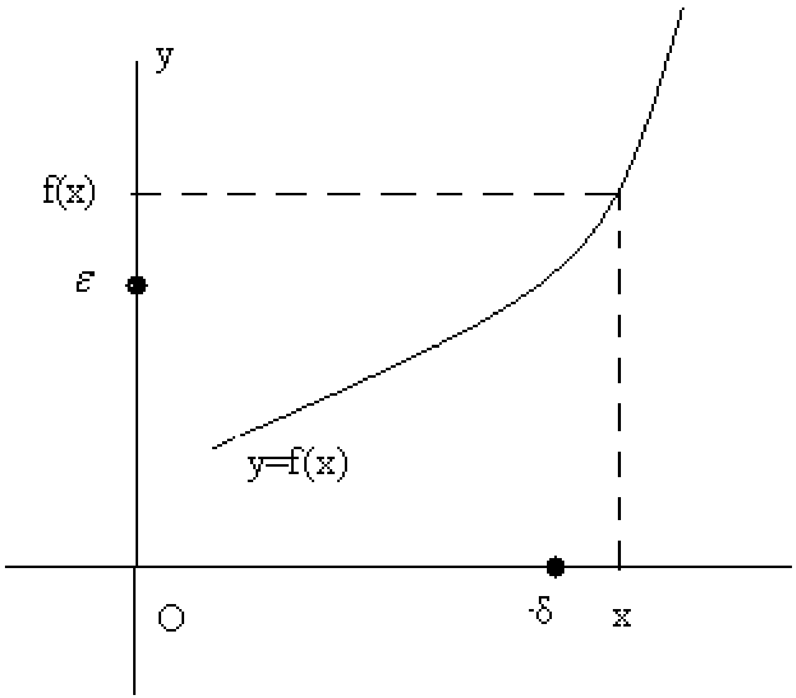
Πεπερασμένο όριο της συνάρτησης στο άπειρο (πεπερασμένο)

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $L \in \mathbb{R}$ για $x \to +\infty$ (**του** x **τείνοντος στο** $+\infty$**)** και θα το συμβολίζουμε με $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν $x > \delta$ τότε: $|f(x) - L| < \varepsilon$



Άπειρο Όριο της συνάρτησης στο άπειρο (άπειρο).

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** το $+\infty$, για $x \to +\infty$ (**του** x **τείνοντος στο** $+\infty$**)** και θα το συμβολίζουμε με $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο αν $x > \delta$ τότε: $f(x) > \varepsilon$



Ανάλογα ορίζονται

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης στο άπειρο

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x^1+\alpha_0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\alpha_n x^n\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4x^2+3x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(4x^2\right)=4\cdot\lim_{x\to+\infty}x^2=4\cdot(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^2+3x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^2\right)=-4\cdot\lim_{x\to+\infty}x^2=-4\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4x^3+3x-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(4x^3\right)=4\cdot\lim_{x\to-\infty}x^3=4\cdot(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-4x^3+3x-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-4x^3\right)=-4\cdot\lim_{x\to-\infty}x^3=-4\cdot(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+3x-1}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(4x^2+3x-1\right)}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(4x^2\right)}=+\infty$$

Όριο ρητής συνάρτησης

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο μιας ρητής συνάρτησης, δηλαδή το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x),\ Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι θα ισχύει:

1. Αν ο βαθμός $\beta\alpha\theta(P(x)) > \beta\alpha\theta(Q(x))$ τότε: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

(εξαρτάται από το πρόσημο των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων)).

2. Αν ο $\beta\alpha\theta(P(x)) < \beta\alpha\theta(Q(x))$ τότε: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$

3. Αν ο $\beta\alpha\theta(P(x)) = \beta\alpha\theta(Q(x))$ τότε: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)} =$ πηλίκο συντελεστών μεγιστοβάθμιων όρων.

Παραδείγματα:

Λύση

(α) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-3x^2-2}{3x^2-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3}=+\infty$$

(β) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+5x^2}{-x^5+6x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{-x^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x}=0$$

(γ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+5x^2-2}{6-4x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{-4x^3}=-\frac{1}{4}$$

Όριο ριζικών στο άπειρο

Για το όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τον **<u>συζυγή</u>** της παράστασης, οπότε (επειδή $x\to+\infty$, θεωρούμε μια περιοχή του $+\infty$, π.χ. $(0,+\infty)$, οπότε είναι $x>0$):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

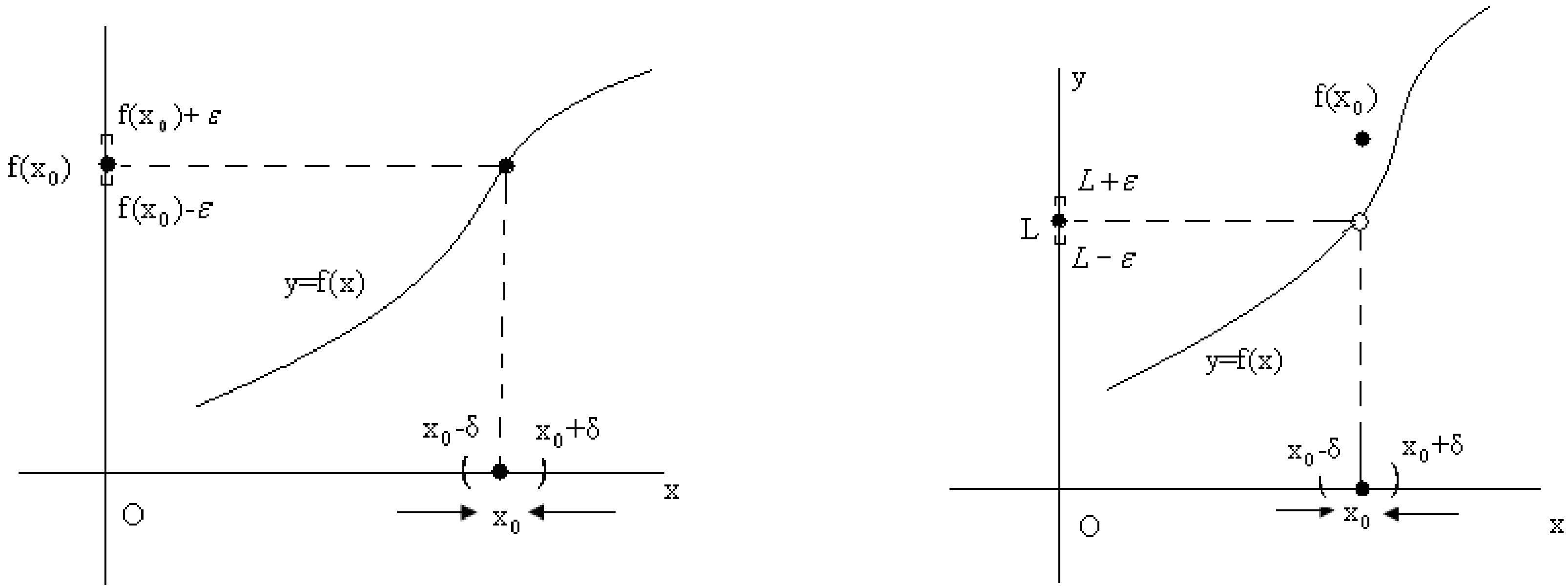
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνάρτηση $f(x)$ καλείται **συνεχής στο σημείο** x_0 αν ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ Δηλαδή θα πρέπει:

(α) η συνάρτηση $f(x)$ να ορίζεται στο σημείο x_0**,** άρα θα υπάρχει η τιμή $f(x_0)$

(β) να υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$

(γ) τα (α) και (β) θα πρέπει να είναι ίσα



Μια συνάρτηση καλείται **συνεχής**, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μια συνάρτηση f <u>**δεν**</u> **είναι συνεχής** σε ένα σημείο x_0, εάν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω

(a) υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ αλλά είναι διάφορο από την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο x_0 (δηλαδή $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$).

Η ασυνέχεια αυτή καλείται **ασυνέχεια πρώτου είδους** (ή <u>αιρούμενη</u> ασυνέχεια διότι ορίζοντας την τιμή της συνάρτησης f κατάλληλα στο σημείο x_0, η συνάρτηση γίνεται συνεχής

(b) <u>δεν</u> υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Η ασυνέχεια αυτή καλείται **ασυνέχεια δεύτερου είδους**

Εάν υπάρχει το αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 και είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο x_0 (δηλαδή $\lim_{x \to x_0 -} f(x)=f(x_0)$), τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **αριστερά συνεχής στο σημείο** x_0.

Ανάλογα, εάν υπάρχει το δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 και είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο x_0 (δηλαδή $\lim_{x \to x_0 +} f(x)=f(x_0)$), τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **δεξιά συνεχής στο σημείο** x_0.

Εάν η συνάρτηση f ορίζεται στο κλειστό διάστημα [α,β], λέμε ότι είναι **συνεχής**
στο [α,β] εάν:

(i) είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$,
(ii) είναι δεξιά συνεχής στο σημείο α και
(iii) αριστερά συνεχής στο σημείο β.

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Εάν f,g είναι **συνεχείς** συναρτήσεις στο σημείο x_0 , τότε είναι **συνεχείς** και οι συναρτήσεις

(α) $f \pm g$

(β) $\alpha \cdot f,\ \alpha \in \mathbb{R}$

(γ) $f \cdot g$

(δ) $\dfrac{f}{g}$ όταν $g\left(x_0\right) \neq 0$

(ε) η $\sqrt[n]{f(x)}$ όταν $f(x) \geq 0$

Εάν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο σημείο $f\left(x_0\right)$, τότε η και σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Η συνάρτηση $f(x)= x^n,\ n\in\mathbb{N}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$.

Άρα:

(α) Μιά πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n\text{-}1}x^{n\text{-}1}+\ldots+\alpha_1 x^1+\alpha_0,\alpha_n\neq 0$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\mathrm{x}_0\in\mathbb{R}$.

(β) Μιά ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x),Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x , είναι συνεχής (ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων) σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της (δηλαδή σε κάθε σημείο x_0 που δεν μηδενίζει τον παρονομαστή της).

Οι συναρτήσεις

$$\sin x,\ \cos x,\ e^x,\ \ln x,\ \alpha^x$$

είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους

Εφαρμογή

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών, α,β ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} -2\sin x+1, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha \sin x+\beta-2, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x+1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Λύση

Η συνάρτηση f για $x < -\frac{\pi}{2}$ είναι συνεχής σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι συνεχής, ομοίως, και για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ όπως και για $x > \frac{\pi}{2}$.

Άρα, για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι και συνεχής και στα σημεία π/2 και - π/2. Για είναι συνεχής στο π/2 και στο - π/2 πρέπει:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

και

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-}(-2\sin x+1) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1 = 2+1 = 3\\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}(\alpha\sin x+\beta-2) = \alpha\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\beta-2 = -\alpha+\beta-2\end{aligned}\right\}\ \alpha\rho\alpha$$

$$-\alpha+\beta-2=3 \Rightarrow -\alpha+\beta=5 \quad (\mathrm{A})$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\alpha\sin x+\beta-2) = \alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\beta-2 = \alpha+\beta-2\\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}(\cos x+1) = \cos\frac{\pi}{2}+1 = 1\end{aligned}\right\}\ \alpha\rho\alpha$$

$$\alpha+\beta-2=1 \Rightarrow \alpha+\beta=3 \quad (\mathbf{B})$$

Από (Α) και (Β) έχουμε το σύστημα

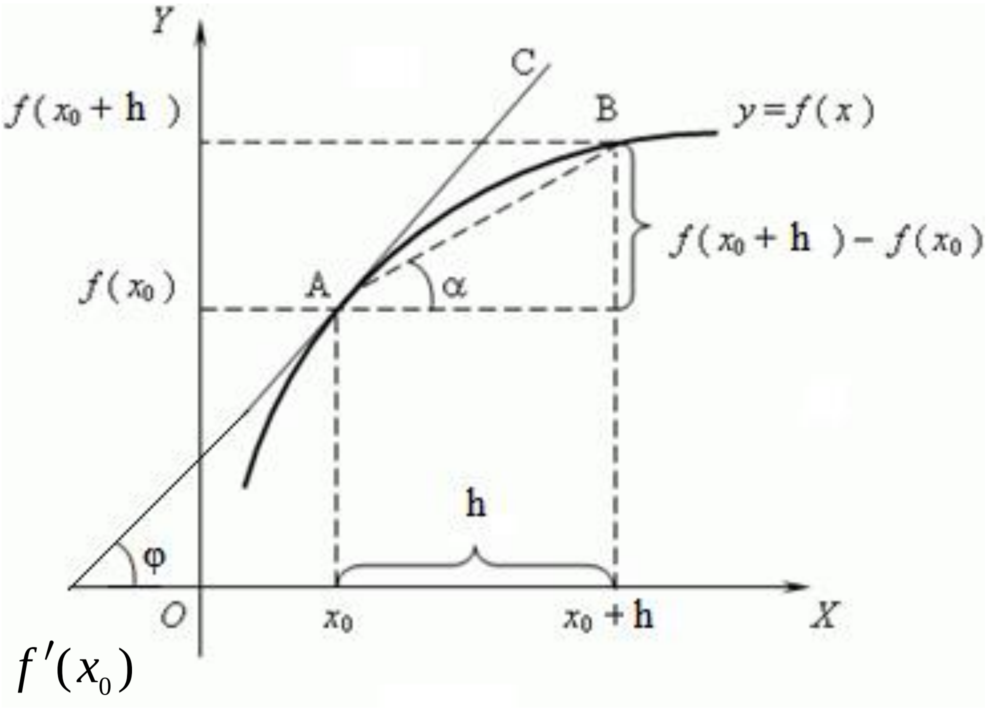
$$\left.\begin{aligned} -\alpha+\beta &= 5 \\ \alpha+\beta &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\beta = 8 \Rightarrow \beta = 4 \quad \alpha\rho\alpha \;\; \alpha = -1$$

Παράγωγος σε σημείο

η τιμή του ορίου (εφόσον υπάρχει)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}, \quad h = x - x_0$$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη συνάρτηση στο σημείο



$$\tan(\varphi) = f'(x_0)$$

Παράγωγος συνεχούς συνάρτησης

παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη συνάρτηση

η παράγωγος ως συνάρτηση

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Συμβολισμοί

Σε μία συνάρτηση *y=f(x)* το *x* είναι **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το *y* είναι **εξαρτημένη** (από το *x*) μεταβλητή.

$$y' \quad f' \quad f'(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{df}{dx} \quad \frac{d}{dx}f(x) \quad (....)'$$

$$y'(a) \quad f'(a) \quad y'\big|_{x=a} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

$$f''(a) \quad f^{(k)}(a) \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \frac{d^ky}{dx^k}$$

ΠΛΕΥΡΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Το όριο:

$$f'_+(x_o) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

ονομάζεται **δεξιά (πλευρική) παράγωγος της f** στο σημείο $x = x_o$ ενώ το όριο:

$$f'_-(x_o) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

ονομάζεται **αριστερή (πλευρική) παράγωγος της f** στο σημείο $x = x_o$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = x_o$, αν και μόνον αν τα παραπάνω πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα.

Αν f είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής

Πότε μία συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη:

- Αν η $f(x)$ δεν είναι συνεχής.
- Όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- Για σημεία στα οποία η συνάρτηση μας αλλάζει συμπεριφορά, όταν υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσες οι πλευρικές παράγωγοι, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Στα άκρα κλειστού διαστήματος μία συνάρτηση μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη όταν υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια.

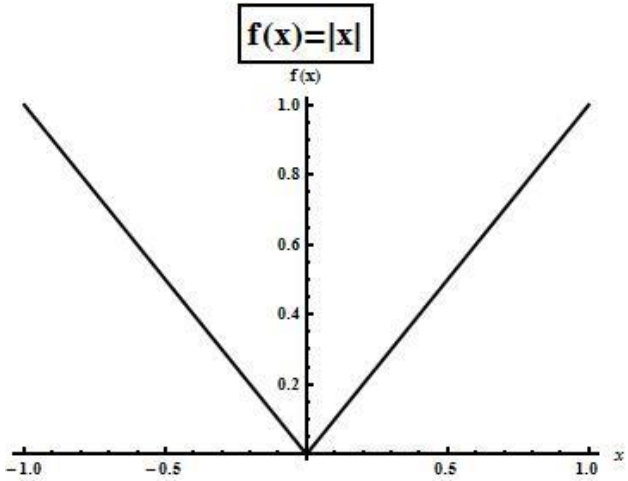
Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=|x|=\begin{cases} -x & x<0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και στο σημείο $x=0$

διότι: $\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$

Η συνάρτηση όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=0$, διότι:

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0) \equiv \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ f'_-(0) \equiv \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow \nexists\, f'(0)$$



Εργασία 3, Άσκηση 1iii 2017-2018

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x\le 1 \\ 8-x, & \text{αν} \quad 1<x\le 2 \\ 6x-x^2-2, & \text{αν} \quad x>2 \end{cases}$

Για ποιές τιμές του $a\in\mathbb{R}$ είναι η f συνεχής στο σημείο a; Για ποιές τιμές του $a\in\mathbb{R}$ είναι η f παραγωγίσιμη στο σημείο a;

iii) Αν $a\neq 1,2$, τότε η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο a διότι δίνεται από πολυωνυμικό τύπο σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το a. Μένει να ελέγξουμε αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα σημεία $a=1$ και $a=2$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x^2+1)=2$ και $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(8-x)=7$. Άρα η f δεν είναι συνεχής, επομένως ούτε και παραγωγίσιμη, στο σημείο $a=1$.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(8-x)=6$, $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(6x-x^2-2)=6$ και $f(2)=6$, άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $a=2$. Τέλος, $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{8-x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{2-x}{x-2}=-1$ και

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{6x-x^2-2-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{6x-x^2-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{(x-2)(4-x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}(4-x)=2$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $a=2$.

Για την άσκηση 1β

Παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\le 3 \\ \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}, & x>3 \end{cases}$ Να προσδιοριστούν τα $a,b\in\mathbb{R}$

ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x<3$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη για κάθε $x>3$ ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων. Άρα για να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο $x=3$.
Άρα θα πρέπει να υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f_-{}'(3),\ f_+{}'(3)$ και να είναι ίσες:

$$f_-{}'(3)=f_+{}'(3).$$

Η f , ως παραγωγίσιμη, θα είναι και συνεχής στο $x=3$.

Επομένως θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$$

$$\Rightarrow 3a+b=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}=\frac{1}{3}\Rightarrow \qquad \boxed{3a+b=\frac{1}{3}} \qquad (2)$$

$$f_-'(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{ax+b-3a-b}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{ax-3a}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}=a$$

$$\boxed{3a+b=\frac{1}{3}}$$

$$f_+'(3)\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{2x+3}-3-\frac{1}{3}(x-3)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3^+}\frac{3\sqrt{2x+3}-(x+6)}{3(x-3)^2}=$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{9(2x+3)-(x+6)^2}{3(x-3)^2(3\sqrt{2x+3}+x+6)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-(x-3)^2}{3(x-3)^2(3\sqrt{2x+3}+x+6)}=-\frac{1}{54}$$

$$f_-'(3)=f_+'(3).$$

$$a=-\frac{1}{54}\quad \text{και}\quad b\overset{(2)}{=}\frac{1}{3}-3a=\frac{1}{3}+\frac{3}{54}=\frac{7}{18}$$

Εργασία 3, Άσκηση 1Α 2016-2017

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) πραγματικοί αριθμοί a, β, γ ώστε η συνάρτηση με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^3+\beta x+\gamma, & x>0 \\ e^x, & x<0 \\ a, & x=0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το **R.**

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για $x<0$ ως εκθετική. Ακόμα είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ ως πολυωνυμική. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο **R** πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο 0. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στο σημείο $x=0$. Ως γνωστόν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι και συνεχής, άρα η όποια συνθήκη στα a, β, γ που προκύπτει από τη συνέχεια της f, θα πρέπει να ισχύει ώστε η f να είναι διαφορίσιμη.

Για την άσκηση 1β

Για τη συνέχεια της f στο $x=0$ πρέπει και αρκεί $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = a$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^3 + \beta x + \gamma) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 + \lim\limits_{x\to 0^+}(\beta x) + \lim\limits_{x\to 0^+} \gamma = \gamma$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$, άρα θα πρέπει να ισχύει $\gamma = 1 = a$. (1)

Για την παραγωγισιμότητα της f στο $x=0$ θα πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x^3+\beta x+1)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+\beta x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x^2+\beta) = \beta .$$

Για το δεύτερο όριο (και επειδή $x<0$) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} \underset{\text{Del' Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x-1)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1 .$$

Συνεπώς, θα πρέπει $\beta = 1$ και τελικά η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$ εάν $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

(προσέξτε τη χρήση του L’ Hospital)

Με βάση τον ορισμό υπολογίζονται παράγωγοι βασικών συναρτήσεων:

$$(c)' = 0,$$

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\sinh x)' = \cosh x,$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

Κανόνες παραγώγισης παραγώγου σε σημείο

(α) (**σταθερά επί συν.**) $(\alpha f)'(x_o) = \alpha f'(x_o),\ \alpha \in \mathbb{R}$

(β) (**αθροίσματος**) $\left(f + g\right)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$

(γ) (**διαφοράς**) $\left(f - g\right)'(x_o) = f'(x_o) - g'(x_o)$

(δ) (**γινομένου**) $\left(f \cdot g\right)'(x_o) = f'(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot g'(x_o)$

(ε) (**πηλίκου**) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_o) = \dfrac{f'(x_o) \cdot g(x_o) - f(x_o) \cdot g'(x_o)}{g^2(x_o)}$

Κανόνες παραγώγισης παραγώγου ως συνάρτηση

(α) (**σταθερά επί συν.**) $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$

(β) (**αθροίσματος**) $\left(f+g\right)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(γ) (**διαφοράς**) $\left(f-g\right)'(x) = f'(x) - g'(x)$

(δ) (**γινομένου**) $\left(f \cdot g\right)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(ε) (**πηλίκου**) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Παραδείγματα:

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) = 5\times 3x^2 = 15x^2 \qquad \frac{d}{dx}\left(4x^5\right) = ?$$

$$\frac{d}{dx}\left(5x^3 + 4x^5\right) = \frac{d}{dx}\left(5x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(4x^5\right) = 15x^2 + 20x^4 \qquad \frac{d}{dx}\left(x^3 - x^2 + x - 1\right) = ?$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5x + 6)\right] =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[(x^2 - 2x + 1)\right]\times(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 2x + 1)\times\frac{d}{dx}\left[(x^2 - 5x + 6)\right] =$$

$$= (2x - 2)\times(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 2x + 1)\times(2x - 5)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x+1)\left(x^3 - 1\right)\right] = ?$$

Παραδείγματα:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\right]=\frac{\left(x^2-5x+6\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2-2x+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-5x+6\right)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-2\right)-\left(x^2-2x+1\right)\left(2x-5\right)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x+1}{x^3-1}\right]=?$$

$$f(x)=\frac{1}{x^n},\quad f'(x)=?,\quad f'(2)=?,$$

κανόνας αλυσίδας ή σύνθετη παραγώγιση

Εάν $f: \alpha,\beta \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x = x_o$ (εσωτερικό του διαστήματος [α,β]) και η $g: \gamma,\delta \to \mathbb{R}$ (με $f\left([\alpha,\beta]\right) \subseteq [\gamma,\delta]$) είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $z_0 = f(x_o)$.

Τότε η σύνθεσή τους $g \circ f :[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = x_o$ και ισχύει:

$$\left(g \circ f\right)'(x_o) = g'(f(x_o)) \cdot f'(x_o)$$

$$\left(g \circ f\right)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\left((f(x))^n\right)' = nf^{n-1}(x)f'(x), \qquad \left(\sin(f(x))\right)' = f'(x)\cos(f(x))$$

Παραδείγματα:

$$\frac{d}{dx}\left[(3x+1)^2\right]=\left[2(3x+1)\right]\times\frac{d}{dx}\left[3x+1\right]=2(3x+1)\times 3=6(3x+1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{(3x+1)}\right]=?$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x))=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]=?$$

$$\frac{d}{dx}(\cos(x))=-\sin(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\cos(x^5)\right]=?$$

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x+1}{x^3-1}\right)^3\right)=\left(\left(\frac{x+1}{x^3-1}\right)^3\right)'=?$$

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 6) Δίνονται παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(1)=3$, $f'(1)=5$, $f'(4)=-3$, $g(1)=4$, $g'(1)=-2$. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\frac{f}{g}$, $f^2 g$ και $f\circ g$ στο σημείο $x_0=1$.

Απλή εφαρμογή των κανόνων παραγώγισης και αντικατάσταση στο σημείο που μας ενδιαφέρει.

Άσκηση Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Αφού πρώτα υπολογίσετε τις παραγώγους 1ης, 2ης και 3ης τάξης της συνάρτησης *f* να δώσετε, συναρτήσει του φυσικού αριθμού n, γενικό τύπο για την παράγωγο τάξης n, τον οποίο και να αποδείξετε με τη μέθοδο της **μαθηματικής επαγωγής**.

Λύση.

$$f'(x) = -\frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(1-x)'}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^{-2}$$

$$f''(x) = -2(x-1)^{-2-1} = -2(x-1)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3(x-1)^{-3-1} = 2\cdot 3(x-1)^{-4}$$

και επομένως θα πρέπει να αποδειχθεί (επαγωγικά) ότι

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} n!(x-1)^{-(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Βήμα 1: **Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για ν=1**

Βήμα 2:: **Δεχόμαστε ότι η συγκεκριμένη πρόταση ισχύει γενικά για ν=κ**

Βήμα 3: **Με βάση το Βήμα 2 αποδεικνύουμε ότι ισχύει και**

για τον επόμενό του ν=κ+1

Για n=1 είναι $f'(x)=(-1)^0 0!\left(x-1\right)^{-2}=\left(x-1\right)^{-2}$, και άρα ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για n=k, δηλαδή

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}k!(x-1)^{-(k+1)}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για n=k+1. Είναι:

$$f^{(k+1)}(x)=[f^{(k)}(x)]'=\left(\left(-1\right)^{k-1}k!\left(x-1\right)^{-(k+1)}\right)'=$$

$$=\left(-1\right)^{k-1}k!(-(k+1))\left(x-1\right)^{-(k+1)-1}=$$

$$=\left(-1\right)^{k}(k+1)!\left(x-1\right)^{-(k+2)}$$

Επομένως ισχύει και για n=k+1 και άρα ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Εργασία 3, Άσκηση 1iv 2017-2018

Δίνεται η συνάρτηση $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$. Για κάθε θετικό ακέραιο n, να

βρεθεί τύπος για την παράγωγο τάξης n της g.

Έχουμε $g'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, για κάθε $x\in(0,\infty)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής για να

δείξουμε ότι $g^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}$, για κάθε φυσικό $n\geq 2$ και για κάθε $x\in(0,\infty)$.

Για $n=2$, έχουμε $g''(x)=\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=(-1)^{2-1}\frac{1}{2^2}x^{\frac{1}{2}-2}$.

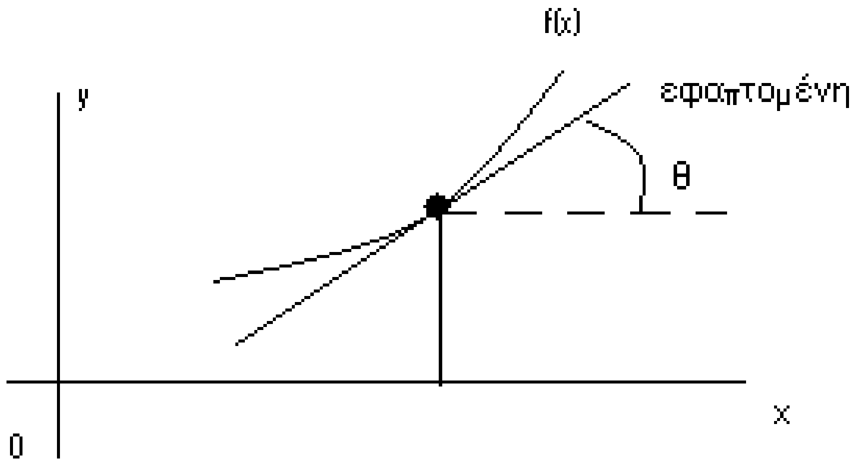
Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για n, δηλαδή $g^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}$

$$g^{(n+1)}(x)=\left((-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}\right)'=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\left(\frac{1}{2}-n\right)x^{\frac{1}{2}-n-1}=(-1)^{(n+1)-1}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2(n+1)-3)}{2^{n+1}}x^{\frac{1}{2}-(n+1)}$$

άρα ο ισχυρισμός ισχύει και για $n+1$. Επομένως, ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $n\geq 2$.

Για την άσκηση 1γ

Η παράγωγος ως κλίση της εφαπτομένης της $y=f(x)$



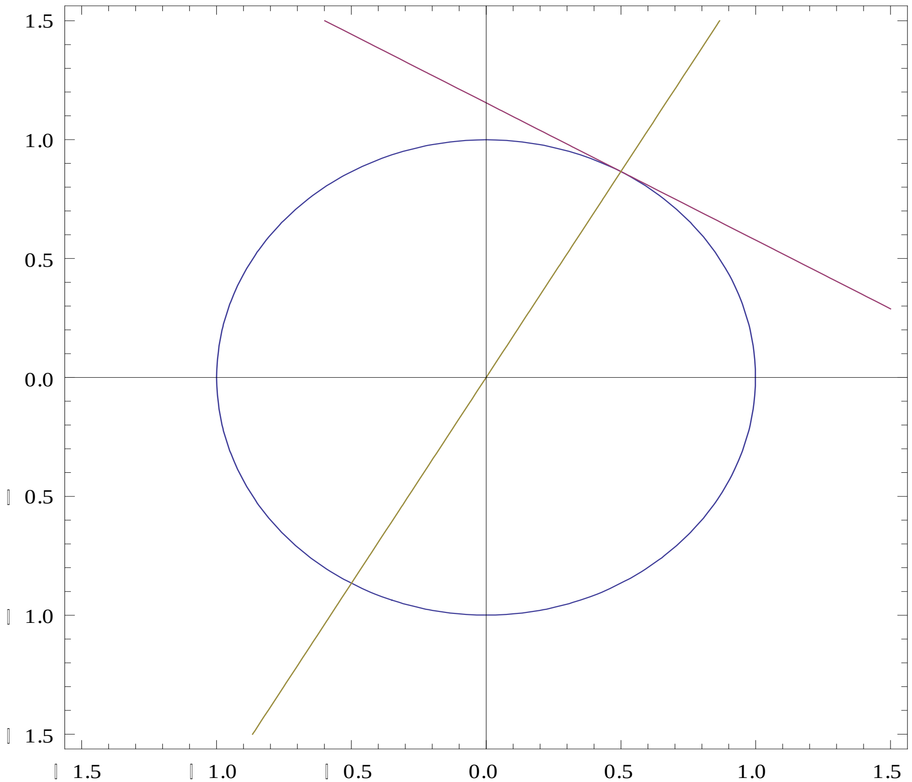
εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $(x_0, f(x_0))$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) $\tan(\theta) = f'(x_0)$

Άσκηση:

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης κύκλου με κέντρο το (0,0) και ακτίνα 1 στο σημείο $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ αλλά και η εξίσωση της κάθετής της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο.



Για την άσκηση 2α

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x\frac{d}{dx}\left(x\right) + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1/2,\sqrt{3}/2)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Η εξίσωση της κάθετης της εφαπτόμενης που περνά από το σημείο αυτό έχει κλίση

$$\lambda = \frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$$

οπότε η εξίσωσή της είναι

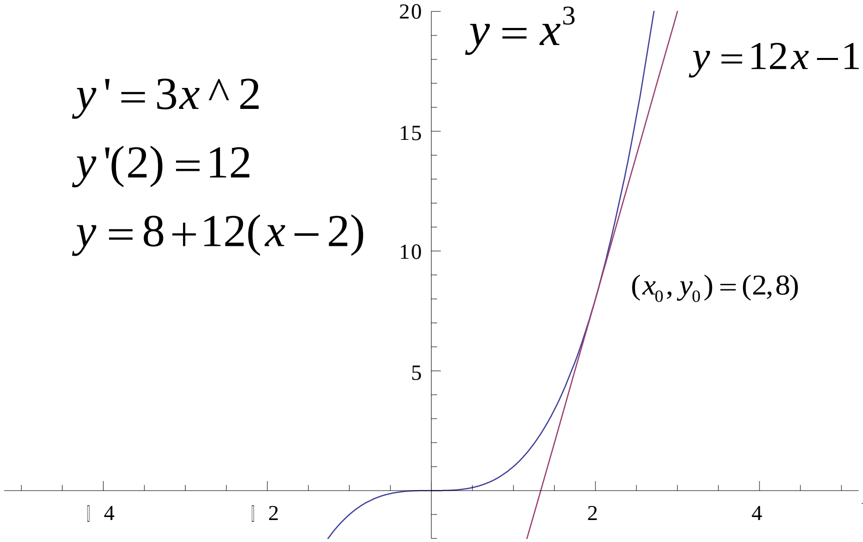
$$y = \sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}x$$

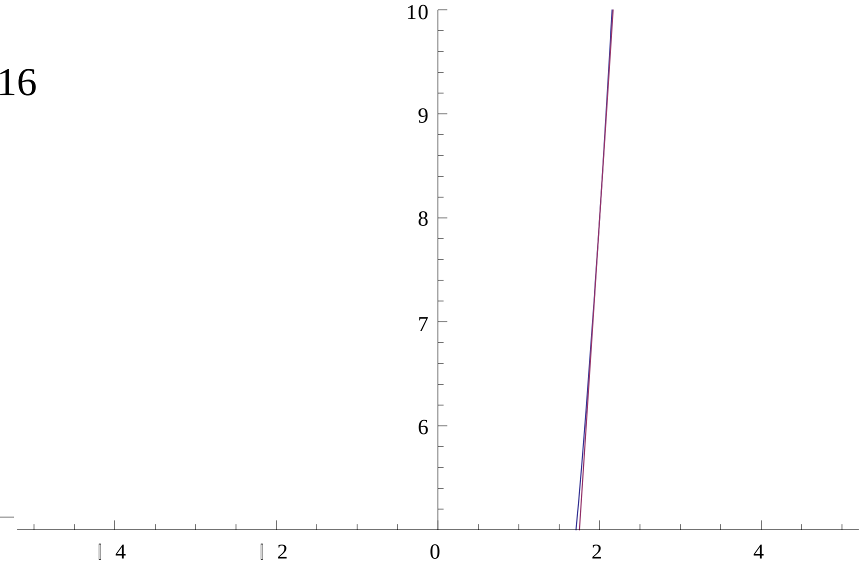
Γραμμικοποίηση

$$y' = 3x \wedge 2$$

$$y'(2) = 12$$

$$y = 8 + 12(x-2)$$





Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x=c$, τότε η συνάρτηση

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$$

ονομάζεται **γραμμικοποίηση** της συνάρτησης f στην περιοχή του c.

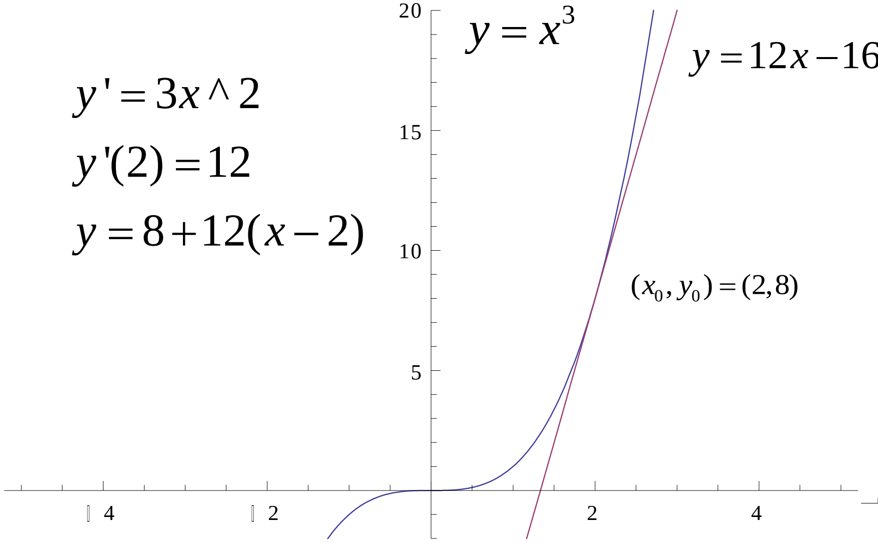
$$f(x) \approx L(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$$

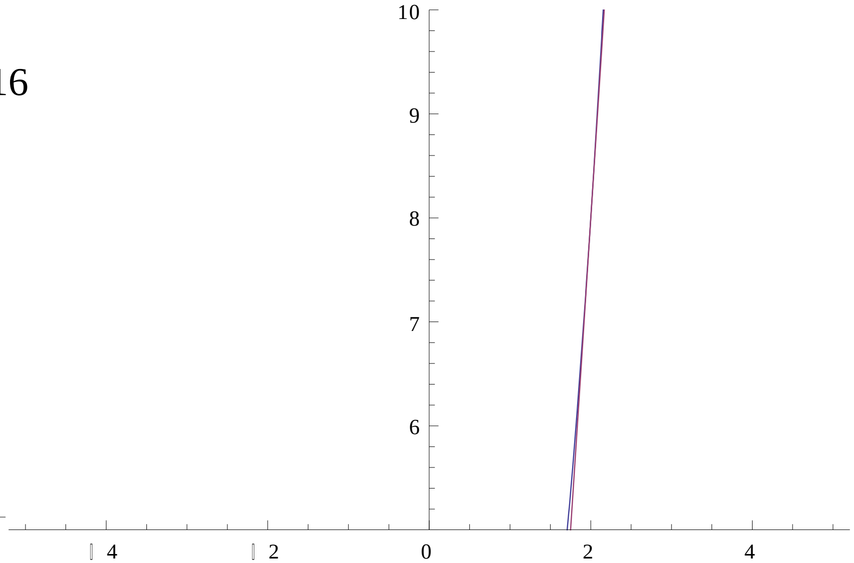
Γραμμικοποίηση

$$y' = 3x \wedge 2$$

$$y'(2) = 12$$

$$y = 8 + 12(x - 2)$$





x	x^3	*12x-16*	*Απόλυτη διαφορά*
2.05	8.61512	8.6	0.015125
2.01	8.120601	8.12	0.000601
2.005	8.060150125	8.06	0.000150125
2.001	8.0012006001	8.0012	0.000006010
2	8	8	0

Η γραμμικοποίηση της $(1+x)^{\kappa}$, όπου κ πραγματικός, στο 0 είναι $1+\kappa x$.

$$(1+x)^{\kappa} \approx L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)=1+\kappa x$$

της $\sin(x)$, στο 0, αφού $(\sin(x))'=\cos(x)$, είναι

$$\sin(x) \approx L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)=0+x= x$$

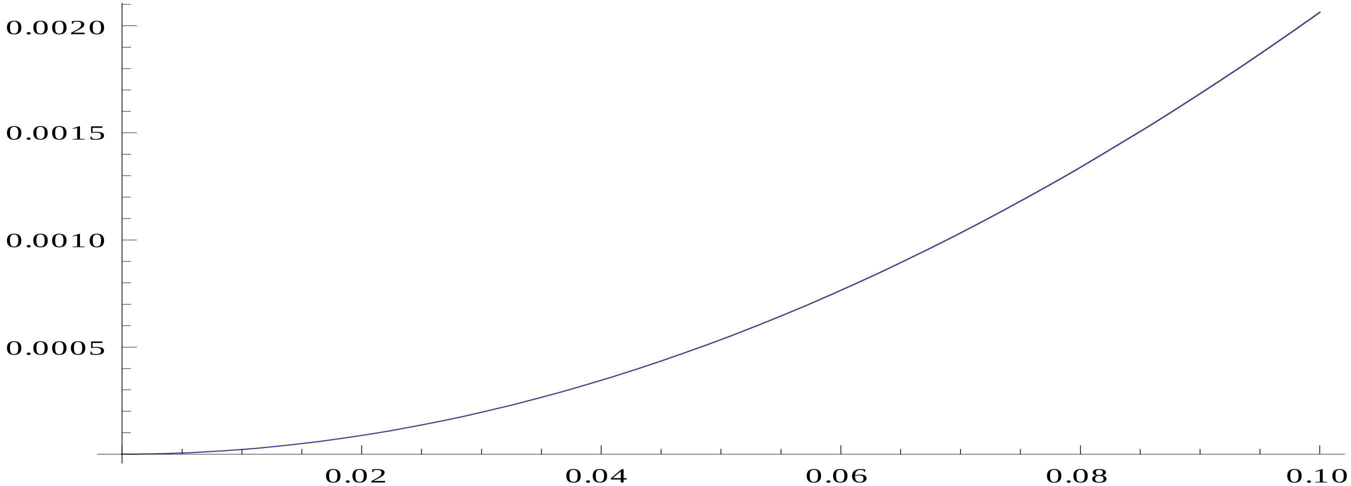
της $\cos(x)$, στο 0, αφού $(\cos(x))'=-\sin(x)$, είναι

$$\cos(x) \approx L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)=1+0\, x = 1$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{3}}\approx 1+\left(-\frac{1}{3}\right)x=1-\frac{x}{3}$$

x	$f(x)$	$L(x)$	*Απόλυτη διαφορά*
0.05	0.9838681468062	0.9833333333333	0.0005348134728 (≈10^{-4})
0.01	0.9966887174773	0.9966666666667	0.0000220508106 (≈10^{-5})
0.005	0.9983388673736	0.9983333333333	0.0000055340402 (≈10^{-6})
0.001	0.9996668887162	0.9996666666667	0.0000002220495 (≈10^{-7})
0	1	1	0

$$err(x)=\left|(1+x)^{-\frac{1}{3}}-1+\frac{x}{3}\right|$$



Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση όπου x το $-x^2$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}\approx 1+\left(-\frac{1}{3}\right)(-x^2)=1+\frac{1}{3}x^2$$

x	$f(x)$	$L(x)$	*Απόλυτη διαφορά*
0.05	1.000834725	1.00083332	0.0000013916 ($\approx 10^{-6}$)
0.01	1.000033336	1.00003333	0.0000000022 ($\approx 10^{-9}$)
0.005	1.000008333 ...	1.000008333 ...	0.000000000134 ($\approx 10^{-10}$)
0.001	1.000000333 ...	1.000000333 ...	0.00000000000022 ($\approx 10^{-13}$)
0	1	1	0

Παράδειγμα: Υπολογίστε προσεγγιστικά την τιμή $\sqrt{9.2}$

Λύση Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+3}$. Για $x_0=6$ έχουμε $f(6)=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3.$

Επίσης $x-x_0=6.2-6=0.2$, $f'(6)=\dfrac{1}{2\sqrt{6+3}}=\dfrac{1}{6}$, οπότε από τον προσεγγιστικό τύπο

έχουμε $\sqrt{9.2}=f(6.2)\approx f(6)+f'(6)(6.2-6)=3+\dfrac{1}{6}\cdot 0.2=3+\dfrac{1}{30}=\dfrac{91}{30}\approx 3.033$

Διαφορετικά θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x}$, $x_0=9$, οπότε

$$\sqrt{9.2}\approx g(9)+g'(9)\cdot 0.2=3+\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot 0.2=3+\frac{1}{6}\cdot 0.2=\frac{91}{30}\approx 3.033$$

Για την άσκηση 2α

Εργασία 3, Άσκηση 2i 2017-2018

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+15}{\sqrt{x^2+3}}$.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y=f(x)$ στο σημείο $(1, 9)$.

Να υπολογιστεί προσεγγιστικά ο αριθμός $f(0.99)$.

$f'(x)=\dfrac{(3x^2+4x)\sqrt{x^2+3}-(x^3+2x^2+15)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=\dfrac{2x^4+2x^3+9x^2-3x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$, άρα $f'(1)=\dfrac{5}{4}$. Επομένως, η

εφαπτομένη της καμπύλης $y=f(x)$ στο σημείο $(1, 9)$ δίνεται από την εξίσωση $y=9+\dfrac{5}{4}(x-1)$. Άρα ο αριθμός $f(0.99)$ είναι προσεγγιστικά ίσος με $9+\dfrac{5}{4}(0.99-1)=8.9875$.

Για την άσκηση 2α