Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακ. Έτος 2016-2017

Ε ρ γ α σ ί α 1η

Συνδυαστική

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1.

Στο ερώτημα αυτό έχει σημασία να προσδιορίσετε το είδος του κάθε προβλήματος (άθροισμα, γινόμενο, επιλογές μη διατεταγμένων ή διατεταγμένων πλειάδων, διατάξεις, μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων, ρίψη σφαιριδίων σε κουτιά, κ.λ.π.) και στη συνέχεια να εφαρμόσετε τους κατάλληλους συνδυαστικούς τύπους.

(1α) Από ένα σύνολο των 25 καθηγητών (10 άνδρες και 15 γυναίκες) ενός σχολείου, να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών εξαμελών επιτροπών όταν όλα τα μέλη είναι:

(1α1) Ισότιμα, δηλαδή οι ρόλοι που τους ανατίθενται είναι ταυτόσημοι.

(1α2) Ισότιμα, και οι γυναίκες-μέλη είναι περισσότερες από τους άνδρες-μέλη.

Εξηγήστε σε κάθε υποερώτημα την επιλογή του τύπου που χρησιμοποιείτε.

(1β) Να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών τρόπων να μοιραστούν σε 4 διαφορετικά παιδιά 6 μήλα και 7 πορτοκάλια, στις περιπτώσεις όπου κάθε παιδί πρέπει να πάρει από:

(1β1) Τουλάχιστον 1 μήλο.

(1β2) Το πολύ 2 πορτοκάλια.

(1β3) Τουλάχιστον ένα μήλο και το πολύ 2 πορτοκάλια.

(1β4) Τουλάχιστον ένα μήλο, ή το πολύ 2 πορτοκάλια, ή και τα δύο.

Υπόδειξη: Αν συμβολίσουμε με Χ την απάντηση στο (1β1), με Υ την απάντηση στο (1β2), και με Ζ την απάντηση στο (1β3), μπορείτε να εκφράσετε την απάντηση του (1β4) ως συνάρτηση των Χ, Υ και Ζ.

Απαντήσεις:

(1α1) Αφού τα 6 μέλη της επιτροπής είναι ισότιμα και δεν μπορούμε να επιλέξουμε κάποιον καθηγητή περισσότερες από μία φορές, πρόκειται για ένα πρόβλημα συνδυασμών 6 από 25 καθηγητές χωρίς επανάληψη. Άρα το πλήθος των επιτροπών είναι:

$$C(25,6) = \binom{25}{6} = \frac{25!}{19!\,6!} = 177.100$$

(1α2) Όπως και στο (1α1), έχουμε ένα πρόβλημα συνδυασμών χωρίς επανάληψη. Επειδή όμως οι γυναίκες πρέπει να είναι περισσότερες από τους άνδρες, η επιτροπή μπορεί να αποτελείται είτε (ι) από 6 γυναίκες, είτε (ιι) από 5 γυναίκες και 1 άνδρα, είτε (ιιι) από 4 γυναίκες και 2 άνδρες.

Παρόμοια με το (1α1), οι διαφορετικές επιτροπές που αποτελούνται από 6 γυναίκες είναι:

$$C(15,6) = \binom{15}{6} = \frac{15!}{9!\,6!} = 5.005$$

Στην περίπτωση (ιι), οι τρόποι να επιλέξουμε τις 5 γυναίκες της επιτροπής είναι:

$$C(15,5) = \binom{15}{5} = \frac{15!}{10!\,5!} = 3.003$$

Υπάρχουν ακόμη $C(10,1) = 10$ τρόποι να επιλέξουμε το μέλος της επιτροπής που είναι άνδρας. Επειδή οι επιλογές του άνδρα και των 5 γυναικών είναι ανεξάρτητες, εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, καταλήγουμε ότι οι διαφορετικές επιτροπές που αποτελούνται από 5 γυναίκες και 1 άνδρα είναι:

$$C(15,5)\cdot C(10,1) = \binom{15}{5}\cdot\binom{10}{1} = 3.003\cdot 10 = 30.030$$

Ομοίως, οι διαφορετικές επιτροπές με 4 γυναίκες και 2 άνδρες είναι:

$$C(15,4)\cdot C(10,2) = \binom{15}{4}\cdot\binom{10}{2} = \frac{15!}{11!4!}\cdot\frac{10!}{8!2!} = 1.365\cdot 45 = 61.425.$$

Παρατηρούμε ότι τα γεγονότα (ι), (ιι) και (ιιι) είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Οπότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα του αθροίσματος, έχουμε ότι το συνολικό πλήθος των εξαμελών επιτροπών όπου οι γυναίκες είναι περισσότερες από τους άνδρες είναι:

$$5.005 + 30.030 + 61.425 = 96.460.$$

(1β) Παρατηρούμε ότι τα 4 παιδιά είναι διακεκριμένα, αλλά ότι τόσο τα 6 μήλα όσο και τα 7 πορτοκάλια δεν είναι. Συνεπώς η διανομή των μήλων (αντίστοιχα, των πορτοκαλιών) αποτελεί ένα πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη, ή ισοδύναμα, ένα πρόβλημα διανομής 6 (αντίστοιχα, 7) ίδιων αντικειμένων σε 4 διακεκριμένες «υποδοχές» (που αντιστοιχούν στα παιδιά).

(1β1) Μοιράζουμε τα 7 πορτοκάλια στα 4 παιδιά, χωρίς περιορισμούς, με

$$C(4+7-1,7) = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120 \text{ τρόπους.}$$

Όσον αφορά τα μήλα, δίνουμε αρχικά από 1 μήλο σε κάθε παιδί, ώστε να ικανοποιηθεί ο περιορισμός. Αυτό συμβαίνει με έναν τρόπο, αφού τα μήλα δεν είναι διακεκριμένα. Κατόπιν μοιράζουμε τα υπόλοιπα 6 – 4 = 2 μήλα χωρίς περιορισμούς με

$$C(4+2-1,2)=\binom{5}{2}=\frac{5!}{3!2!}=10 \text{ τρόπους.}$$

Αφού τα μήλα και τα πορτοκάλια μοιράζονται ανεξάρτητα, εφαρμόζουμε τον κανόνα του γινομένου, και έχουμε ότι αυτά μπορούν να μοιραστούν με

$$X=C(10,7)\cdot C(5,2)=120\cdot 10=1.200 \text{ τρόπους.}$$

(1β2) Μοιράζουμε τα 6 μήλα στα 4 παιδιά, χωρίς περιορισμούς, με

$$C(4+6-1,6)=\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!3!}=84 \text{ τρόπους.}$$

Όσον αφορά τα πορτοκάλια, αφού έχουμε 4 παιδιά και 7 πορτοκάλια, ενώ κάθε παιδί πρέπει να πάρει από 2 πορτοκάλια το πολύ, σε κάθε τέτοια διανομή, θα έχουμε αναγκαστικά 3 παιδιά που παίρνουν από 2 πορτοκάλια και 1 παιδί που παίρνει 1 πορτοκάλι. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 4 τέτοιες διανομές πορτοκαλιών, όσοι και οι τρόποι να επιλέξουμε το παιδί που θα πάρει 1 πορτοκάλι.

Αφού τα μήλα και τα πορτοκάλια μοιράζονται ανεξάρτητα, εφαρμόζουμε τον κανόνα του γινομένου, και έχουμε ότι αυτά μπορούν να μοιραστούν με

$$\Upsilon=C(9,6)\cdot 4=84\cdot 4=336 \text{ τρόπους.}$$

(1β3) Σύμφωνα με το (1β1), υπάρχουν 10 τρόποι να μοιράσουμε τα 6 μήλα στα 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει από τουλάχιστον 1 μήλο. Σύμφωνα με το (1β2), υπάρχουν 4 τρόποι να μοιράσουμε τα 7 πορτοκάλια στα 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει από το πολύ 2 πορτοκάλια. Όπως και στα (1β1) και (1β2), τα μήλα και τα πορτοκάλια μοιράζονται ανεξάρτητα. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον κανόνα του γινομένου, οι διαφορετικοί τρόποι να μοιραστούν τα μήλα και τα πορτοκάλια είναι:

$$Z=10\cdot 4=40\,.$$

(1β4) Εδώ πρέπει να υπολογίσουμε πόσες διανομές ικανοποιούν τον περιορισμό του (1β1) ή τον περιορισμό του (1β2). Είδαμε ότι υπάρχουν X διανομές που ικανοποιούν τον περιορισμό του (1β1) και Υ διανομές που ικανοποιούν τον περιορισμό του (1β2). Αν τα γεγονότα που περιγράφονται στα (1β1) και (1β2) ήταν αμοιβαία αποκλειόμενα, τότε θα αρκούσε να υπολογίσουμε το $X+\Upsilon$, σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος. Όμως οι διανομές των (1β1) και (1β2) δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, αφού υπάρχουν Z διανομές που ικανοποιούν τόσο τον περιορισμό του

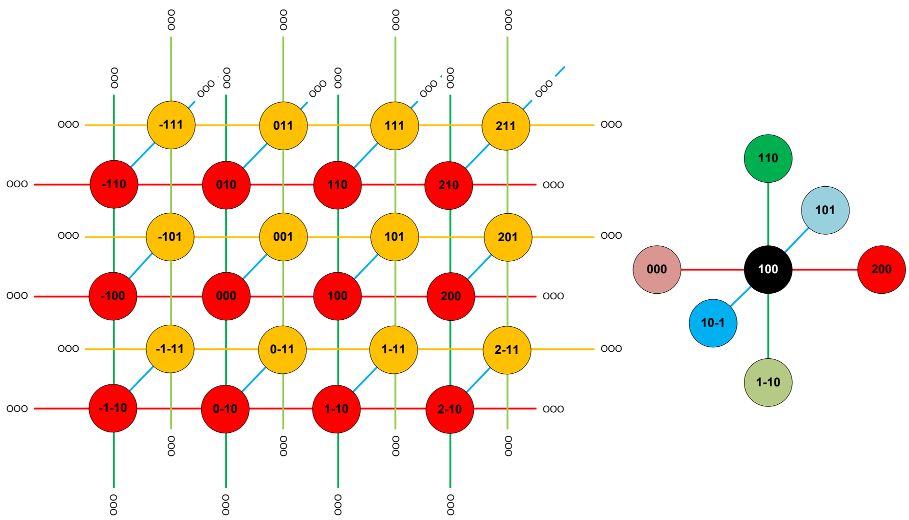
(1β1) όσο και τον περιορισμό του (1β2), και άρα προσμετρούνται τόσο στο X όσο και στο Y (άρα μετρούνται δύο φορές). Πρέπει λοιπόν να αφαιρέσουμε το Z από το άθροισμα $X + Y$ ώστε να μετρήσουμε μία μόνο φορά κάθε διανομή που ικανοποιεί τον περιορισμό του (1β1) ή τον περιορισμό του (1.β.2). Άρα, σύμφωνα με τον κανόνα εγκλεισμού-αποκλεισμού, ότι οι τρόποι είναι:

$$X + Y - Z = 1.200 + 336 - 40 = 1.496 .$$

Ερώτημα 2.

Το ερώτημα αυτό θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε περισσότερο στην επιλογή των κατάλληλων τύπων σε προβλήματα συνδυαστικής. Θα χρειαστεί να μελετήσετε την παράγραφο 1.7 «Μέτρηση και διακριτή πιθανότητα» του τόμου Δ.

Θεωρούμε ένα τριδιάστατο πλέγμα, όπου κάθε σημείο του είναι μια διατεταγμένη τριάδα ακεραίων αριθμών, π.χ., (0,0,0), (–1,0,4), κ.λπ. Στο πλέγμα αυτό τοποθετούμε ρομπότ σε διάφορα σημεία και κάθε ρομπότ έχει τη δυνατότητα να κινηθεί ακριβώς κατά μια θέση κάθε φορά, ως προς έναν από τους τρεις άξονες του πλέγματος. Π.χ., από το σημείο (1,0,0) ένα ρομπότ μπορεί να βρεθεί, με μια κίνηση, αποκλειστικά και μόνο σε ένα από τα σημεία (0,0,0), (2,0,0), (1, –1,0), (1,1,0), (1,0, –1), ή (1,0,1) (βλ. ακόλουθο σχήμα).



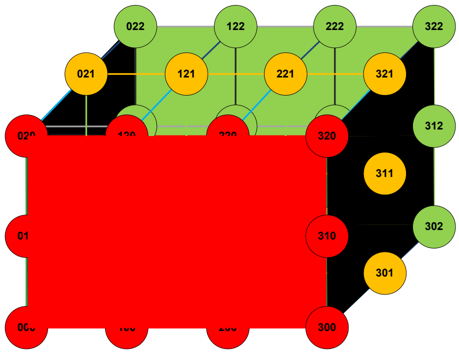
(2α) Να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών που μπορεί να ακολουθήσει ένα ρομπότ, ώστε να καταφέρει να μεταβεί από το σημείο (0,0,0) στο σημείο (4,3,5), κάνοντας ακριβώς 12 κινήσεις.

Υπόδειξη: Σκεφτείτε πώς κάθε διαδρομή του ρομπότ αποτυπώνεται ως μια αλληλουχία κινήσεων «αριστερά», «δεξιά», «πάνω», «κάτω», «εμπρός», ή «πίσω».

(2β) Έστω ότι δυο διαφορετικά ρομπότ τοποθετούνται στο πλέγμα με τυχαίο και ανεξάρτητο τρόπο το ένα από το άλλο. Το πρώτο τοποθετείται σε κάποιο σημείο από το σύνολο { (0,0,0), (0,0,1), (0,0,2), (0,0,3), (0,0,4), (0,0,5), (0,0,6) }, και το δεύτερο σε κάποιο σημείο από το { (1,0,0), (1,0,1), (1,0,2), (1,0,3), (1,0,4), (1,0,5), (1,0,6) }. Να υπολογιστεί η πιθανότητα τα δυο ρομπότ να βρίσκονται σε απόσταση ακριβώς μιας κίνησης το ένα από το άλλο.

(2γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα μία τυχαία επιλεγμένη διαδρομή 12 βημάτων, η οποία ξεκινά από το σημείο (0,0,0) και σε κάθε βήμα επιλέγει ισοπίθανα μια από τις έξι διαθέσιμες κινήσεις της, να καταλήξει πράγματι στο σημείο (4,3,5).

(2δ) Έστω ότι 5 διαφορετικά ρομπότ τοποθετούνται τυχαία σε σημεία του υποπλέγματος με «εμπρός-κάτω-αριστερό» σημείο το (0,0,0) και «πίσω-πάνω-δεξιό» σημείο το (3,2,2), βλ. ακόλουθο σχήμα. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο ρομπότ που τοποθετήθηκαν στο ίδιο σημείο του υποπλέγματος.



Απαντήσεις:

(2α) Για να επιτευχθεί η μετάβαση από το σημείο (0,0,0) στο σημείο (4,3,5) με 12 κινήσεις, πρέπει 4 από τις 12 κινήσεις του ρομπότ να είναι «δεξιά» (δηλ. από κάποιο σημείο (x, y, z) στο σημείο $(x+1, y, z)$), 3 κινήσεις να είναι «πάνω» (δηλ. από κάποιο σημείο (x, y, z) στο σημείο $(x, y+1, z)$), και 5 κινήσεις να είναι «πίσω» (δηλ. από κάποιο σημείο (x, y, z) στο σημείο $(x, y, z+1)$). Παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία γίνονται οι 12 αυτές κινήσεις (εφόσον οι 4 από αυτές είναι «δεξιά», οι 3 «πάνω», και οι 5 «πίσω»), αυτές οδηγούν πάντα το ρομπότ από το σημείο (0, 0, 0) στο σημείο (4, 3, 5). Οπότε οι εναλλακτικές διαδρομές με 12 κινήσεις από το (0, 0, 0) στο σημείο (4, 3, 5) διαφέρουν μόνο ως προς τη σειρά με την οποία εναλλάσσονται οι 4 κινήσεις «δεξιά», οι 3 «πάνω» και οι 5 «πίσω».

Έχουμε λοιπόν ένα πρόβλημα μεταθέσεων 12 αντικειμένων (των κινήσεων) που χωρίζονται σε 3 ομάδες ομοίων, με την πρώτη να αποτελείται από τις 4 κινήσεις «δεξιά», τη δεύτερη από τις 3 κινήσεις «πάνω» και την τρίτη από τις 5 κινήσεις «πίσω». Επομένως, οι διαφορετικές διαδρομές είναι:

$$\frac{12!}{4!3!5!} = 27.720.$$

(2β) Αφού τα δύο ρομπότ είναι διαφορετικά και τοποθετούνται ανεξάρτητα, ενώ κάθε ρομπότ έχει 7 επιλογές, έχουμε συνολικά $7 \cdot 7 = 49$ διαφορετικές τοποθετήσεις. Από αυτές, στις 7 έχουμε τα δύο ρομπότ σε απόσταση μιας κίνησης μεταξύ τους (βλ. (0,0,0)-(1,0,0), (0,0,1)-(1,0,1), (0,0,2)-(1,0,2), (0,0,3)-(1,0,3), (0,0,4)-(1,0,4), (0,0,5)-(1,0,5), (0,0,6)-(1,0,6)). Άρα η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι

$$\frac{7}{49} = \frac{1}{7}.$$

(2γ) Όπως φαίνεται στο σχήμα, μια τυχαία διαδρομή έχει 6 διαφορετικές επιλογές για το επόμενό της βήμα κάθε φορά. Επειδή η επιλογή είναι ανεξάρτητη για κάθε βήμα και τα βήματα είναι διακεκριμένα, έχουμε συνολικά 6^{12} διαφορετικές διαδρομές μήκους 12 που ξεκινούν από το σημείο (0, 0, 0). Σύμφωνα με το (2β), $\frac{12!}{4!3!5!} = 27.720$ από αυτές τις διαδρομές οδηγούν στο σημείο (4, 3, 5). Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\frac{12!}{4!3!5!}}{6^{12}} = \frac{27.720}{2.176.782.336} = \frac{385}{30.233.088} \approx 12{,}734 \cdot 10^{-6}.$$

(2δ) Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ πιθανές θέσεις για κάθε ρομπότ. Αν δεν υπάρχουν περιορισμοί, κάθε ρομπότ μπορεί να επιλέξει μια από αυτές ανεξάρτητα από τα άλλα. Οπότε, με βάση τον κανόνα του γινομένου (ή ισοδύναμα, θεωρώντας διατάξεις 5 διακεκριμένων επιλογών από 36 διακεκριμένα αντικείμενα με επανάληψη), έχουμε συνολικά 36^5 διαφορετικές τοποθετήσεις για τα 5 ρομπότ.

Στις $P(36,5) = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32$ από αυτές, καθένα από τα 5 ρομπότ επιλέγει μια διαφορετική θέση (παρατηρήστε ότι θεωρούμε τώρα διατάξεις 5 διακεκριμένων επιλογών από 36 διακεκριμένα αντικείμενα, χωρίς επανάληψη). Συνεπώς, η πιθανότητα τα 5 ρομπότ να βρίσκονται όλα σε διαφορετικές θέσεις είναι:

$$\frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{36^5} \approx 0{,}748171.$$

Η ύπαρξη τουλάχιστον 2 ρομπότ στην ίδια θέση αντιστοιχεί στο συμπληρωματικό γεγονός του να βρίσκονται όλα τα ρομπότ σε διαφορετικές θέσεις. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 2 ρομπότ στην ίδια θέση είναι:

$$1 - \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{36^5} \approx 1 - 0{,}748171 = 0{,}251829$$

Σημείωση: Δείτε ακόμη το παράδειγμα 1.11, που αναφέρεται στο παράδοξο των γενεθλίων, στην ενότητα 1.7 του βιβλίου «Αρχές Συνδυαστικής», του κ. Σταματίου.

Ερώτημα 3.

Το ερώτημα θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε στην ανάπτυξη γεννητριών συναρτήσεων. Θα πρέπει να εξετάσετε αν αναφέρεται σε πρόβλημα συνδυασμών ή διατάξεων αντικειμένων και ανάλογα να κάνετε χρήση απλής ή εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης. Μπορείτε να συμβουλευτείτε το ερώτημα 3 της 1ης εργασίας 2013-2016.

Έστω ότι θέλουμε να κολλήσουμε σε φακέλους γραμματόσημα αξίας R λεπτών του ευρώ, χρησιμοποιώντας γραμματόσημα των 5 λεπτών, 10 λεπτών, 20 λεπτών και 50 λεπτών. Τα γραμματόσημα της ίδιας αξίας είναι μεταξύ τους πανομοιότυπα. Να δοθεί η γεννήτρια συνάρτηση, καθώς και ο όρος της ο συντελεστής του οποίου δίνει την απάντηση, στις εξής περιπτώσεις:

(3α) Δεν έχει καμιά σημασία ο τρόπος τοποθέτησης των επιλεγμένων γραμματοσήμων επάνω στον φάκελο.

(3β) Δεν έχει καμιά σημασία ο τρόπος τοποθέτησης των επιλεγμένων γραμματοσήμων επάνω στον φάκελο, και επιλέγονται άρτιο πλήθος 5-λεπτων και 50-λεπτων γραμματοσήμων, τουλάχιστον ένα 10-λεπτο γραμματόσημο, και πολλαπλάσιος του πέντε αριθμός από 20-λεπτα γραμματόσημα.

(3γ) Για την τοποθέτηση των γραμματοσήμων υπάρχει προκαθορισμένος χώρος στον φάκελο, που απαρτίζεται από ακριβώς Ν θέσεις στην ευθεία και κάθε θέση πρέπει να πάρει ακριβώς ένα γραμματόσημο (θεωρούμε ότι R ≥ 5N). Η σειρά εμφάνισης των γραμματοσήμων στην ευθεία έχει σημασία.

(3δ) Διαθέτουμε αποκλειστικά και μόνο 14 γραμματόσημα των 50 λεπτών το καθένα, που είναι αφιερωμένα στο ελληνικό αλφάβητο. Τρία από αυτά αφορούν το γράμμα Α, δύο το Β, δύο το Γ, δύο το Δ, ένα το Ε, ένα το Ζ, δύο το Η, και ένα το Θ. Όλα τα γραμματόσημα που αφορούν το ίδιο γράμμα είναι μεταξύ τους πανομοιότυπα. Θέλουμε να τοποθετήσουμε 5 από αυτά στην ευθεία επάνω στον ίδιο φάκελο, και έχει σημασία η σειρά εμφάνισής τους (στην ευθεία).

Απαντήσεις:

(3α) Έχουμε ένα πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη που αφορά τη διανομή R ομοίων αντικειμένων (των R λεπτών της συνολικής αξίας των γραμματοσήμων) σε 4 διακεκριμένες υποδοχές (τα 4 είδη γραμματοσήμων) χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας στις υποδοχές. Οπότε απαιτείται μία συνήθης γεννήτρια συνάρτηση.

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με αυτό του υπολογισμού των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $5z_1 + 10z_2 + 20z_3 + 50z_4 = R$, όπου z_1 είναι το πλήθος των γραμματοσήμων 5 λεπτών που χρησιμοποιούμε, z_2 είναι το πλήθος των γραμματοσήμων 10 λεπτών, z_3 είναι το πλήθος των γραμματοσήμων 20 λεπτών και z_4 είναι το πλήθος των γραμματοσήμων 50 λεπτών.

Στην πρώτη υποδοχή, που αφορά τα γραμματόσημα των 5 λεπτών (ή ισοδύναμα την μεταβλητή z_1), κάθε γραμματόσημο συνεισφέρει 5 λεπτά στη συνολική αξία, συνεπώς ο αντίστοιχος απαριθμητής είναι

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + \cdots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

Η δεύτερη υποδοχή αφορά τα γραμματόσημα των 10 λεπτών. Αφού κάθε τέτοιο γραμματόσημο συνεισφέρει 10 λεπτά στη συνολική αξία, ο απαριθμητής είναι

$$1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40} + \cdots = \frac{1}{1-x^{10}}.$$

Η τρίτη υποδοχή αφορά τα γραμματόσημα των 20 λεπτών. Κάθε γραμματόσημο συνεισφέρει 20 λεπτά στη συνολική αξία και ο απαριθμητής είναι

$$1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + x^{80} + \cdots = \frac{1}{1-x^{20}}.$$

Η τέταρτη υποδοχή αφορά τα γραμματόσημα των 50 λεπτών. Κάθε γραμματόσημο συνεισφέρει 50 λεπτά στη συνολική αξία και ο απαριθμητής είναι

$$1 + x^{50} + x^{100} + x^{150} + x^{200} + \cdots = \frac{1}{1 - x^{50}}.$$

Συνολικά, η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\left(\frac{1}{1 - x^5}\right)\left(\frac{1}{1 - x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1 - x^{20}}\right)\left(\frac{1}{1 - x^{50}}\right)$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^R.

(3β) Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής ομοίων αντικειμένων σε 4 διακεκριμένες υποδοχές, αντίστοιχο με αυτό του (3α), αλλά με κάποιους περιορισμούς στο πλήθος των γραμματοσήμων που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε από κάθε είδος, ή ισοδύναμα, στο πλήθος των γραμματοσήμων σε κάθε υποδοχή.

Όπως και στο (3α), έχουμε πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη και θα χρησιμοποιήσουμε συνήθη γεννήτρια συνάρτηση. Αφού πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άρτιο πλήθος γραμματοσήμων 5 λεπτών, ο αντίστοιχος απαριθμητής είναι

$$1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40} + \cdots = \frac{1}{1-x^{10}}.$$

Αφού πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τουλάχιστον ένα γραμματόσημο 10 λεπτών, ο απαριθμητής για τα γραμματόσημα 10 λεπτών είναι

$$x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40} + x^{50} + \cdots = \frac{x^{10}}{1-x^{10}}.$$

Αφού πρέπει τα γραμματόσημα των 20 λεπτών να είναι πολλαπλάσια του 5, ο απαριθμητής για τα γραμματόσημα 20 λεπτών είναι

$$1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + x^{400} + \cdots = \frac{1}{1-x^{100}}.$$

Τέλος, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άρτιο πλήθος γραμματοσήμων 50 λεπτών, οπότε ο αντίστοιχος απαριθμητής είναι

$$1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + x^{400} + \cdots = \frac{1}{1-x^{100}}.$$

Συνολικά, η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{x^{10}}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{100}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{100}}\right) = \frac{x^{10}}{(1-x^{10})^2 \cdot (1-x^{100})^2}$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^R.

(3γ) Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής R όμοιων αντικειμένων (των R λεπτών της συνολικής αξίας των γραμματοσήμων) σε N διακεκριμένες υποδοχές (οι N θέσεις στην ευθεία όπου μπορούν να τοποθετηθούν τα γραμματόσημα), με τον περιορισμό ότι κάθε θέση μπορεί να συνεισφέρει είτε 5 λεπτά είτε 10 λεπτά είτε 20 λεπτά είτε 50 λεπτά στη συνολική αξία των γραμματοσήμων.

Έχουμε λοιπόν ένα πρόβλημα συνδυασμών και συνεπώς μία συνήθη γεννήτρια συνάρτηση. Ο απαριθμητής για καθεμία από τις N θέσεις κωδικοποιεί τις 4 επιλογές για τη συνεισφορά της υποδοχής στη συνολική αξία των γραμματοσήμων, άρα είναι ο

$$x^5 + x^{10} + x^{20} + x^{50}.$$

Συνολικά, η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση είναι $(x^5 + x^{10} + x^{20} + x^{50})^N$ και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^R.

(3δ) Έχουμε ένα πρόβλημα 5 διακεκριμένων επιλογών (μία επιλογή για καθεμία από τις 5 διακεκριμένες θέσεις της ευθείας όπου θα τοποθετηθούν τα γραμματόσημα) από 8 διαφορετικά είδη αντικειμένων (τα 8 διαφορετικά είδη γραμματοσήμων που αντιστοιχούν στα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ) με περιορισμένο αριθμό επαναλήψεων για κάθε είδος (οι επαναλήψεις καθορίζονται από το πλήθος των διαθέσιμων γραμματοσήμων για κάθε είδος).

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τη διανομή 5 διακεκριμένων σφαιριδίων (αν φανταστούμε ότι κάθε σφαιρίδιο έχει μια ετικέτα που αναφέρει σε ποια από τις 5 διακεκριμμένες θέσεις της ευθείας τοποθετείται) σε 8 διακεκριμένες υποδοχές (μια για κάθε γράμμα Α-Θ), με περιορισμούς στη χωρητικότητα των υποδοχών. Έχουμε λοιπόν ένα πρόβλημα διατάξεων και χρησιμοποιούμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση.

Αφού έχουμε μόνο 3 γραμματόσημα που αφορούν το γράμμα Α, ο εκθετικός απαριθμητής για το γράμμα Α είναι

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Για καθένα από τα γράμματα Β, Γ, Δ και Η, έχουμε μόνο 2 γραμματόσημα. Άρα ο εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα Β, Γ, Δ και Η είναι

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}.$$

Τέλος,, για καθένα από τα γράμματα Ε, Ζ και Θ, έχουμε μόνο 1 γραμματόσημο. Άρα ο εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα γράμματα Ε, Ζ και Θ είναι

$$1 + \frac{x}{1!}.$$

Συνολικά, η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)^4 \left(1 + \frac{x}{1!}\right)^3$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $x^5/_{5!}$.

Ερώτημα 4.

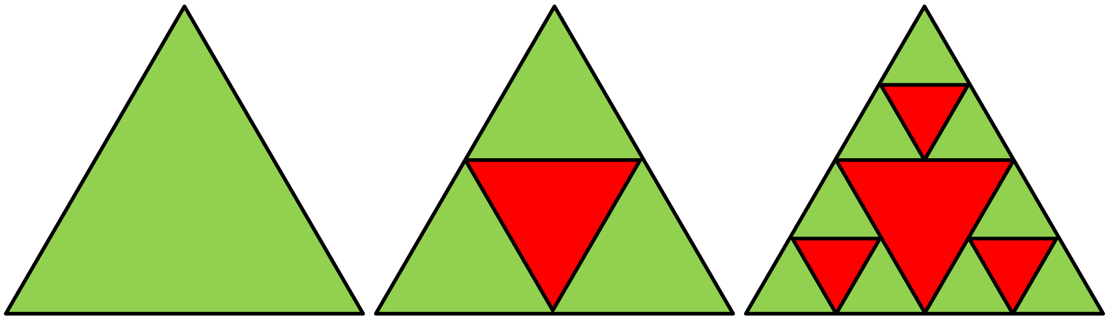
Στο πρώτο υποερώτημα θα εφαρμόσετε την πολύ χρήσιμη επαγωγική αποδεικτική μέθοδο, την οποία θα χρησιμοποιήσετε σε όλη τη διάρκεια της θεματικής ενότητας. Όπως αναφέρεται στις οδηγίες θα φανεί χρήσιμη η μελέτη των σημειώσεων στη «Μαθηματική Επαγωγή». Μπορείτε να ανατρέξετε σε ερωτήματα προηγούμενων ετών όπως τα ερωτήματα 4Α 1ης εργασίας 2010-2016.

Το δεύτερο υποερώτημα εξετάζει τις σχέσεις αναδρομής. Μπορείτε και εδώ να συμβουλευτείτε ερωτήματα προηγούμενων εργασιών όπως το ερώτημα 4Β της 1ης εργασίας 2011-2016.

(4α) Να αποδείξετε, με χρήση μαθηματικής επαγωγής, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, ο αριθμός $3^{2*n} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

Υπόδειξη: Για κάθε φυσικό αριθμό k, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί π(k), υ(k) τέτοιοι ώστε να ισχύει ότι k = 8*π(k) + υ(k) και υ(k) ∊ { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }. Αν ο k είναι πολλαπλάσιο του 8, τότε θα πρέπει να ισχύει ότι υ(k) = 0.

(4β) Έστω ότι εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία n φορές, για κάποιον φυσικό αριθμό n: Ξεκινώντας από ένα πράσινο ισόπλευρο τρίγωνο, με τη βάση προς τα κάτω, σε κάθε βήμα τοποθετούμε σε κάθε πράσινο τρίγωνο ένα (μικρότερο) κόκκινο τρίγωνο με τη βάση προς τα επάνω, ενώνοντας τα μέσα των τριών πλευρών του πράσινου τριγώνου. Για παράδειγμα, τα δυο πρώτα βήματα της συγκεκριμένης διαδικασίας φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



g(0) = 1, r(0) = 0, t(0) = 1 g(1) = 3, r(1) = 1, t(1) = 5 g(2) = 9, r(2) = 4, t(2) = 17

Να βρείτε αναδρομική σχέση για το πλήθος g(n) των πράσινων τριγώνων μετά από n βήματα. Στη συνέχεια να βρείτε έναν κλειστό τύπο (δηλαδή, κάποια έκφραση που είναι συνάρτηση του n και δεν εμπλέκει άλλους όρους της **g**, βλ. ΤΟΜΟ Δ, σελ.79-80) για τον όρο g(n) της ακολουθίας **g**. Να ελέγξετε την ορθότητα του προτεινόμενου κλειστού τύπου που προτείνετε, δίνοντας τις τιμές της **g** για n = 2 και n = 3.

(4γ) Να βρείτε αναδρομική σχέση για το πλήθος r(n) των κόκκινων τριγώνων μετά από n βήματα, στη διαδικασία που περιγράφεται στο (4β), ως συνάρτηση των πράσινων και των κόκκινων τριγώνων από προηγούμενα βήματα. Να βρείτε έναν κλειστό τύπο για την ακολουθία r(n), αξιοποιώντας τον κλειστό τύπο που βρήκατε στο (4β) για την ακολουθία g(n). Να ελέγξετε την ορθότητα του προτεινόμενου κλειστού τύπου που προτείνετε, δίνοντας τις τιμές της **g** για n = 2 και n = 3.

<u>Υπόδειξη:</u> Για την εύρεση κλειστού τύπου για το r(n), αντικαταστήστε τους όρους της **g** με τους αντίστοιχους κλειστούς τύπους που βρήκατε στο (4β), και τους προηγούμενους όρους της **r** με τη δική τους αναδρομική σχέση.

(4δ) Στη διαδικασία που περιγράφεται στο (4β), μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το πλήθος t(n) όλων των τριγώνων που υπάρχουν στο σχήμα, συμπεριλαμβανομένων και των πολύχρωμων τριγώνων. Π.χ., μετά το πρώτο βήμα υπάρχουν συνολικά t(1) = 5 τρίγωνα (κι όχι 4), αφού συμπεριλαμβάνεται και το μεγάλο (πολύχρωμο) τρίγωνο. Παρατηρούμε για το συνολικό πλήθος t(n) των τριγώνων μετά από n βήματα της διαδικασίας, ότι ισχύει η εξής αναδρομική σχέση (που όμως εμπλέκει όρους της ακολουθίας **g**):

$$\forall n\geq 1,\ t(n) = t(n-1) + 4*g(n-1)$$

Στόχος είναι να βρούμε μια όσο το δυνατόν πιο απλή αναδρομική σχέση για το t(n), που να περιλαμβάνει μόνο προηγούμενους όρους της ακολουθίας **t**. Να αποδείξετε ότι $\forall n\geq 2$, $t(n) = 4*t(n-1) - 3*t(n-2)$. Στη συνέχεια, και με δεδομένο αυτό, να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $\forall n\geq 1$, $t(n) = 3*t(n-1) + 2$.

Απαντήσεις:

(4α) *Βάση επαγωγής:* Το ζητούμενο ισχύει για $n = 0$, αφού $3^{2\cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0$, που είναι πολλαπλάσιο του 8.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 0$, ο αριθμός $3^{2n} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8, δηλαδή υπάρχει φυσικός $\pi(n)$ τέτοιος ώστε $3^{2n} - 1 = 8\pi(n)$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n + 1 \geq 1$, ο αριθμός $3^{2(n+1)} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8. Πράγματι,

$$3^{2(n+1)} - 1 = 9 \cdot 3^{2n} - 1 = 9 \cdot (3^{2n} - 1) + 9 - 1 = 9 \cdot 8\pi(n) + 8$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί $3^{2(n+1)} = 3^{2n} \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^{2n}$. Για τη δεύτερη ισότητα, προσθέτουμε και αφαιρούμε το 9. Η τρίτη ισότητα ισχύει γιατί, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ο αριθμός $3^{2n} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8, και συνεπώς υπάρχει φυσικός $\pi(n)$ τέτοιος ώστε $3^{2n} - 1 = 8\pi(n)$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$3^{2(n+1)} - 1 = 9 \cdot 8\pi(n) + 8 = 8 \cdot (9\pi(n) + 1),$$

συνεπώς ο αριθμός $3^{2(n+1)} - 1$ είναι πράγματι πολλαπλάσιο του 8.

(4β) Οι αρχικές τιμές της **g** δίνονται στο σχήμα και είναι $g(0) = 1$, $g(1) = 3$ και $g(2) = 9$. Έστω $g(n-1)$ το πλήθος των πράσινων τριγώνων μετά την $(n-1)$-οστή επανάληψη της διαδικασίας, για κάποιο $n \geq 1$. Κατά την n-οστή επανάληψη της διαδικασίας, κάθε υπάρχον πράσινο τρίγωνο αντικαθίσταται από 3 νέα πράσινα τρίγωνα και 1 νέο κόκκινο τρίγωνο. Άρα, μετά την n-οστή επανάληψη, το πλήθος των πράσινων τριγώνων είναι ίσο με το τριπλάσιο του πλήθους των πράσινων τριγώνων που υπήρχαν μετά την $(n-1)$-οστή επανάληψη. Άρα το $g(n)$ είναι ίσο με το τριπλάσιο του $g(n-1)$. και η ζητούμενη αναδρομική σχέση είναι

$$g(n) = 3g(n-1), \text{ για κάθε } n \geq 1, \text{ με αρχική συνθήκη } g(0) = 1.$$

Βρίσκουμε λοιπόν τον κλειστό τύπο της $g(n)$, με διαδοχικές αντικαταστάσεις:

$$g(n) = 3g(n-1) = 3 \cdot 3g(n-2) = 3 \cdot 3 \cdot 3g(n-3) = \cdots = 3^n g(0) = 3^n.$$

Στις παραπάνω ισότητες, παρατηρούμε ότι το άθροισμα του εκθέτη του 3 και του ορίσματος της **g** παραμένει πάντα ίσο με n, συνεπώς $g(n) = 3^n$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα οι τιμές $g(2) = 9$ και $g(3) = 27$, τιμές που επαληθεύονται εύκολα και στο σχήμα.

(4γ) Οι αρχικές τιμές της **r** δίνονται στο σχήμα και είναι $r(0) = 0$, $r(1) = 1$ και $r(2) = 4$. Έστω $r(n-1)$ το πλήθος των κόκκινων τριγώνων και $g(n-1)$ το πλήθος των πράσινων τριγώνων μετά την $(n-1)$-οστή επανάληψη της διαδικασίας, για κάποιο αυθαίρετο $n \geq 1$. Κατά την n-οστή επανάληψη της διαδικασίας, τα υπάρχοντα κόκκινα τρίγωνα διατηρούνται και κάθε υπάρχον πράσινο τρίγωνο αντικαθίσταται από 3 νέα πράσινα τρίγωνα και 1 νέο κόκκινο τρίγωνο. Άρα, μετά την n-οστή επανάληψη, το πλήθος των κόκκινων τριγώνων είναι ίσο με το πλήθος των κόκκινων τριγώνων στην $(n-1)$-οστή επανάληψη (υπάρχοντα κόκκινα τρίγωνα, $r(n-1)$) συν το πλήθος των πράσινων τριγώνων στην $(n-1)$-οστή επανάληψη (νέα κόκκινα τρίγωνα, $g(n-1)$). Συνεπώς, η ζητούμενη αναδρομική σχέση είναι

$$r(n) = r(n-1) + g(n-1), \text{ για κάθε } n \geq 1, \text{ με } g(n-1) = 3^{n-1},$$
$$\text{και αρχική συνθήκη } r(0) = 0.$$

Βρίσκουμε τον κλειστό τύπο για την $r(n)$ με διαδοχικές αντικαταστάσεις:

$$r(n) = r(n-1) + g(n-1) = \big(r(n-2) + g(n-2)\big) + g(n-1) =$$
$$= \Big(\big(r(n-3) + g(n-3)\big) + g(n-2)\Big) + g(n-1) = \cdots =$$
$$= r(0) + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} g(k) = 0 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n-1}{2}.$$

Στις παραπάνω ισότητες, παρατηρούμε ότι, κάθε φορά που αντικαθιστούμε τον όρο $r(k)$ με βάση τη σχέση $r(k) = r(k-1) + g(k-1)$, ο όρος $g(k-1)$ προστίθεται στο άθροισμα των όρων $g(k) + \cdots + g(n-1)$ που έχει σχηματιστεί από τις προηγούμενες αντικαταστάσεις. Έτσι καταλήγουμε ότι

$$r(n) = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0 = \frac{3^n-1}{2},$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον τύπο για το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο 3.

Οι τιμές $r(2) = 4$ και $r(3) = 13$ επαληθεύονται εύκολα και στο σχήμα.

(4δ) Ας δούμε αρχικά πως προκύπτει η αναδρομική σχέση:

$$t(n) = t(n-1) + 4g(n-1), \text{ για κάθε } n \geq 1, \text{ με } g(n-1) = 3^{n-1},$$
$$\text{και αρχική συνθήκη } t(0) = 1.$$

Θεωρούμε το πλήθος $t(n-1)$ όλων των τριγώνων και το πλήθος $g(n-1)$ των πράσινων τριγώνων μετά την $(n-1)$-οστή επανάληψη της διαδικασίας, για κάποιο αυθαίρετο $n \geq 1$. Κατά την n-οστή επανάληψη της διαδικασίας, τα υπάρχοντα τρίγωνα διατηρούνται και κάθε υπάρχον πράσινο τρίγωνο αντικαθίσταται από 4 νέα τρίγωνα, 3 πράσινα και 1 κόκκινο. Άρα, μετά την n-οστή επανάληψη, το πλήθος όλων των τριγώνων είναι ίσο με το πλήθος όλων των τριγώνων στην $(n-1)$-οστή επανάληψη (υπάρχοντα τρίγωνα, $t(n-1)$) συν το τετραπλάσιο του πλήθους των πράσινων τριγώνων στην $(n-1)$-οστή επανάληψη (νέα τρίγωνα, $4g(n-1)$). Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στην παραπάνω αναδρομική σχέση που δίνεται στην εκφώνηση.

Για να αποδείξουμε ότι αληθεύει η σχέση $t(n) = 4t(n-1) - 3t(n-2)$, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $n \geq 2$ και εφαρμόζουμε την αρχική αναδρομική σχέση για n – 1,:

$t(n-1) = t(n-2) + 4g(n-2) \Longrightarrow 4g(n-2) = t(n-1) - t(n-2)$.

Εφαρμόζοντας την αρχική αναδρομική σχέση για n, έχουμε ότι:

$$t(n) = t(n-1) + 4g(n-1) = t(n-1) + 12g(n-2),$$

Άρα χρησιμοποιώντας ότι $4g(n-2) = t(n-1) - t(n-2)$ προκύπτει ότι

$$12g(n-2) = 3t(n-1) - 3t(n-2).$$

Αντικαθιστώντας το $12g(n-2)$ παραπάνω, καταλήγουμε ότι για κάθε $n \geq 2$,

$$t(n) = t(n-1) + \big(3t(n-1) - 3t(n-2)\big) = 4t(n-1) - 3t(n-2).$$

Έχουμε ακόμη ότι $t(0) = 1$ και $t(1) = t(0) + 4g(0) = 1 + 4 \cdot 1 = 5$, ως αρχικές συνθήκες για την αναδρομική μας σχέση.

Για να αποδείξουμε ότι αληθεύει η αναδρομική σχέση

$$t(n) = 3t(n-1) + 2, \text{ για κάθε } n \geq 1, \text{ με αρχική συνθήκη } t(0) = 1,$$

εφαρμόζουμε μαθηματική επαγωγή, σύμφωνα με την εκφώνηση.

Βάση επαγωγής: Η αρχική συνθήκη $t(0) = 1$ είναι αληθής (δίνεται στην εκφώνηση). Επιπλέον, η σχέση $t(n) = 3t(n-1) + 2$ αληθεύει για $n = 1$, αφού $t(1) = 3t(0) + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ (προκύπτει δηλαδή η τιμή που δίνεται στην εκφώνηση).

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε επαγωγικά ότι η ζητούμενη αναδρομική σχέση αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n + 1 \geq 2$, αληθεύει ότι $t(n+1) = 3t(n) + 2$. Πράγματι,

$$t(n+1) = 4t(n) - 3t(n-1) = 3t(n) + \big(t(n) - 3t(n-1)\big) = 3t(n) + 2$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από την σχέση $t(n) = 4t(n-1) - 3t(n-2)$ που αποδείξαμε παραπάνω. Η τρίτη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση, σύμφωνα με την οποία

$$t(n) = 3t(n-1) + 2 \Longrightarrow t(n) - 3t(n-1) = 2$$

Ερώτημα 5.

Το ερώτημα αυτό έχει σκοπό στο να σας εισάγει στην μορφή της εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι σωστή ή λάθος. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Α) Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να προγραμματιστούν 6 διαφορετικές επιστημονικές διαλέξεις σε μια χρονική περίοδο 30 ημερών, ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερες διαλέξεις την ίδια ημέρα είναι ίσος με:

1. (Σ / Λ) Το πλήθος των διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους 30 που περιέχουν 6 άσσους.

2. (Σ / Λ) Τον συντελεστή του $\frac{x^6}{6!}$ στην παράσταση $(1 + x)^{30}$.

3. (Σ / Λ) 30^6

4. (Σ / Λ) $\frac{30!}{24!}$

Β) Θεωρούμε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να εκφραστεί ένας φυσικός αριθμός $n \geq 2$ ως άθροισμα από (κατάλληλο πλήθος) 2 και 3, όταν δεν παίζει ρόλο η σειρά εμφάνισης των όρων 2 και 3 στο άθροισμα. Π.χ. για το 5 υπάρχει ένας μόνο τρόπος, $5 = 3 + 2$, ενώ για το 8 υπάρχουν 2 τρόποι, $8 = 2 + 2 + 2 + 2$ και $8 = 3 + 3 + 2$. Για κάποιον φυσικό $n \geq 2$, ο αριθμός αυτών των τρόπων είναι ίσος με:

1. (Σ / Λ) Το πλήθος των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $2z_1 + 3z_2 = n$.

2. (Σ / Λ) Το πλήθος των διανομών n μη διακεκριμένων αντικειμένων σε 2 διακεκριμένες υποδοχές.

3. (Σ / Λ) Τον συντελεστή του x^n στην παράσταση $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$.

4. (Σ / Λ) Τον συντελεστή του $\frac{x^n}{n!}$ στην παράσταση $\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots\right)$.

Απαντήσεις:

(Α) Έχουμε ένα πρόβλημα διατάξεων με 6 διακεκριμένες επιλογές (τις ημέρες στις οποίες θα γίνουν οι διαλέξεις) από 30 διαφορετικές ημέρες χωρίς επανάληψη (επειδή μπορούμε να έχουμε το πολύ μία διάλεξη κάθε ημέρα). Συνεπώς το πλήθος των διαφορετικών τρόπων είναι $P(30, 6) = 30!/24!$.

(Α.1) Λάθος. Το πλήθος των διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους 30 με 6 άσσους είναι $C(30, 6) = 30!/(24!\,6!)$.

(Α.2) Σωστό. Αν αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με τη μεθοδολογία των γεννητριών συναρτήσεων, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, αφού έχουμε διατάξεις χωρίς επανάληψη. Ο εκθετικός απαριθμητής για κάθε ημέρα είναι $1+\frac{x}{1!}=1+x$ και η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι $(1+x)^{30}$. Αφού έχουμε 6 επιλογές, το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $\frac{x^6}{6!}$, που είναι $P(30,6)=30!/24!$.

(Α.3) Λάθος. Το 30^6 είναι διαφορετικό από το $30!/24!$. Το 30^6 εκφράζει τους διαφορετικούς τρόπους για 6 διακεκριμένες επιλογές από 30 διαφορετικές ημέρες με απεριόριστες επαναλήψεις.

(Α.4) Σωστό.

(Β) Ουσιαστικά θέλουμε να υπολογίσουμε πόσες διαφορετικές επιλογές έχουμε για το πλήθος των 2 και το πλήθος των 3 που θα χρησιμοποιήσουμε, ώστε το τελικό άθροισμα να είναι ίσο με n. Με άλλα λόγια, θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών $(k_1,k_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ που ικανοποιούν τη σχέση $2k_1+3k_2=n$.

(Β.1) Σωστό. Το πλήθος των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $2z_1+3z_2=n$ είναι ίσο με το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών $(k_1,k_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ που ικανοποιούν τη σχέση $2k_1+3k_2=n$.

(Β.2) Λάθος. Π.χ., έχουμε μόνο έναν τρόπο να εκφράσουμε το $n = 5$ ως άθροισμα 2 και 3, ενώ έχουμε $C(2+5-1,5)=C(6,5)=6$ τρόπους να διανείμουμε 5 ίδια αντικείμενα σε 2 διακεκριμένες υποδοχές.

(Β.3) Σωστό. Έχουμε ένα πρόβλημα διανομής n ακεραίων μονάδων σε 2 διακεκριμένες υποδοχές (την υποδοχή που αντιστοιχεί στο πλήθος των 2 που έχουμε στο άθροισμα και την υποδοχή που αντιστοιχεί στο πλήθος 3) όπου κάθε επιλογή της πρώτης υποδοχής απαιτεί την δέσμευση 2 μονάδων και κάθε επιλογή της δεύτερης υποδοχής απαιτεί τη δέσμευση 3 μονάδων. Έχουμε λοιπόν ένα πρόβλημα συνδυασμών. Άρα, αν αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με τη μεθοδολογία των γεννητριών συναρτήσεων, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συνήθη γεννήτρια συνάρτηση.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο απαριθμητής για την πρώτη υποδοχή (που αντιστοιχεί στο πλήθος των 2 στο άθροισμα) είναι

$$1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots$$

Ομοίως, απαριθμητής για την δεύτερη υποδοχή (που αντιστοιχεί στο πλήθος των 3 στο άθροισμα) είναι

$$1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\cdots$$

Συνολικά, η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots)$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^n.

(Β.4) Λάθος. Σύμφωνα με την απάντηση στο (Β.3), αν αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με τη μεθοδολογία των γεννητριών συναρτήσεων, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συνήθη, και όχι εκθετική, γεννήτρια συνάρτηση.

Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ στην παράσταση

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots\right)$$

είναι διαφορετικός από τον συντελεστή του x^n στην παράσταση

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

Π.χ., για $n = 5$, ο πρώτος συντελεστής είναι 10 ενώ ο δεύτερος συντελεστής είναι 1.