# Κεφάλαιο 5

# Οι Χώροι $\mathbb{R}^n$

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα των χώρων $\mathbb{R}^n$ για να εισαγάγουμε μερικές θεμελιώδεις έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας. Ιδιαίτερα θα μελετήσουμε την έννοια της βάσης του $\mathbb{R}^n$ και ιδιότητες του συνήθους εσωτερικού γινομένου στο $\mathbb{R}^n$. Με τον τρόπο αυτό διευκολύνεται η μετάβαση σε πιο γενικούς χώρους που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

# ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

## ΒΑΣΕΙΣ

### Ορισμός 1 (πράξεις στο $\mathbb{R}^n$)

Υπενθυμίζουμε ότι με $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε το σύνολο των διατεταγμένων *n*-άδων $(u_1,\ldots,u_n)$, όπου $u_i \in \mathbb{R}$. Τα στοιχεία του συνόλου αυτού μπορούν να θεωρηθούν σαν πίνακες μεγέθους $1\times n$, δηλαδή σαν πίνακες που έχουν μόνο μια γραμμή. Συνεπώς στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ έχουμε την ***πρόσθεση*** που ορίζεται από

$$(u_1,\ldots,u_n)+(v_1,\ldots,v_n)=(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)$$

και επίσης μπορούμε να ***πολλαπλασιάσουμε*** στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ με αριθμούς σύμφωνα με τον κανόνα

$$a(u_1,\ldots,u_n)=(au_1,\ldots,au_n),\ a\in\mathbb{R}.$$

Για παράδειγμα, $(2,-1,3)+2(0,-3,7)=(2,-1,3)+(0,-6,14)=(2,-7,17)$.

Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ μαζί με τις προηγούμενες πράξεις θα χρησιμοποιούμε την έκφραση ο **χώρος** $\mathbb{R}^n$. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα λέμε και **διανύσματα.**

### Ορισμός 2 (γραμμικός συνδυασμός)

*Έστω* $v_1,\ldots,v_m \in \mathbb{R}^n$.

1. *Ένας **γραμμικός συνδυασμός** των* $v_1,\ldots,v_m$ *είναι ένα στοιχείο του* $\mathbb{R}^n$ *της μορφής* $a_1v_1+\ldots+a_mv_m$, $a_i\in\mathbb{R}$.

2. *Θα λέμε ότι τα στοιχεία* $v_1,\dots,v_m$ ***παράγουν*** *το χώρο* $\mathbb{R}^n$ *αν για κάθε* $v\in\mathbb{R}^n$ *υπάρχουν* $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $v=a_1v_1+\dots+a_mv_m$.

## Παραδείγματα

1. Εξετάζουμε αν το $(1,4,3)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,2,-1),(0,1,2)$, δηλαδή εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(1,4,3)=a(1,2,-1)+b(0,1,2)$. Έχουμε

$$(1,4,3)=a(1,2,-1)+b(0,1,2)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}1=a\\4=2a+b\\3=-a+2b.\end{cases}$$

Βλέπουμε άμεσα ότι το τελευταίο σύστημα έχει λύση, τη $a=1,b=2$. Άρα το $(1,4,3)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,2,-1),(0,1,2)$ και έχουμε $(1,4,3)=(1,2,-1)+2(0,1,2)$.

2. Εξετάζουμε αν τα $(1,2,-1),(0,1,2)$ παράγουν το $\mathbb{R}^3$, δηλαδή αν για κάθε $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$ υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$(c_1,c_2,c_3)=a(1,2,-1)+b(0,1,2).$$

Έχουμε

$$(c_1,c_2,c_3)=a(1,2,-1)+b(0,1,2)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}c_1=a\\c_2=2a+b\\c_3=-a+2b.\end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (με αγνώστους $a$,$b$) είναι

$$\begin{pmatrix}1&0&c_1\\2&1&c_2\\-1&2&c_3\end{pmatrix}.$$

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών (βλ. Κεφάλαιο 3) βλέπουμε ότι αυτός είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$$\begin{pmatrix}1&0&c_1\\0&1&c_2-2c_1\\0&0&c_3+5c_1-2c_2\end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία γραμμή βλέπουμε ότι αν $c_3 + 5c_1 - 2c_2 \neq 0$, τότε το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο. Άρα τα $(1,2,-1),(0,1,2)$ δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

### Ορισμός 3 (γραμμική ανεξαρτησία)

*Έστω $v_1,...,v_m \in \mathbb{R}^n$. Τα στοιχεία αυτά λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν από τη σχέση $a_1v_1 + ... + a_mv_m = 0,\ a_i \in \mathbb{R}$, έπεται αναγκαστικά ότι $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$. Διαφορετικά αυτά ονομάζονται **γραμμικά εξαρτημένα**.*

### Παραδείγματα

1. Τα $(1,2),(3,3) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί

$$\begin{aligned} & a(1,2) + b(3,3) = 0 \Rightarrow \\ & (a+3b, 2a+3b) = 0 \Rightarrow \\ & \begin{cases} a + 3b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ & a = b = 0. \end{aligned}$$

2. Ας εξετάσουμε αν τα $(1,2),(3,3),(1,3) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   Έχουμε

$$\begin{aligned} & a(1,2) + b(3,3) + c(1,3) = (0,0,0) \Rightarrow \\ & (a+3b+c, 2a+3b+3c) = (0,0,0) \Rightarrow \\ & \begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Το τελευταίο σύστημα έχει και άλλη λύση εκτός από τη μηδενική (αφού είναι ομογενές και οι άγνωστοι είναι περισσότεροι των εξισώσεων, βλ. Κεφ 3, Θεώρημα 9). Άρα τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

### Ορισμός 4 (βάση του $\mathbb{R}^n$)

*Ένα σύνολο $\{v_1,...,v_m\}$ στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **βάση** του $\mathbb{R}^n$ αν έχει τις ιδιότητες*

1. *τα $v_1,...,v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$*
2. *τα $v_1,...,v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα*

### Παράδειγμα

Το σύνολο $\{(1,2),(3,3)\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι,

1. Τα $(1,2),(3,3)$ παράγουν το $\mathbb{R}^2$: Έστω $(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$. Τότε

$$a(1,2)+b(3,3)=(c_1,c_2)\Leftrightarrow$$
$$(a+3b,2a+3b)=(c_1,c_2)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a+3b=c_1 \\ 2a+3b=c_2 \end{cases}.$$

   Βλέπουμε ότι το σύστημα με αγνώστους τους $a$,$b$ έχει λύση, αφού

   $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\neq 0$.

2. Είδαμε πριν στα Παραδείγματα του Ορισμού 3 ότι τα $(1,2),(3,3)\in\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

## ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

### Ορισμός 5 (το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο)

*Έστω* $u,v\in\mathbb{R}^n, u=(u_1,...,u_n), v=(v_1,...,v_n)$.

- *Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των u,v είναι ο πραγματικός αριθμός* $\langle u,v\rangle=u_1v_1+...+u_nv_n$.
- *Το μήκος ( ή μέτρο) του u είναι ο πραγματικός αριθμός* $|u|=\sqrt{u_1{}^2+...+u_n{}^2}$.

Παρατηρούμε ότι

$$|u|=\sqrt{\langle u,u\rangle}.$$

Για παράδειγμα, αν $u=(4,5,-1), v=(2,1,3)$, τότε έχουμε

$$\langle u,v\rangle=4\cdot 2+5\cdot 1+(-1)\cdot 3=10,\ |u|=\sqrt{4^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{42}.$$

### Ορισμός 6 (γωνία διανυσμάτων)

Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\theta$ με $0\le\theta\le\pi$ τέτοιος ώστε

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}.$$

*Θα λέμε ότι η* ***γωνία*** *μεταξύ των* $u,v$ *είναι θ. Στην ειδική περίπτωση* $\theta=\frac{\pi}{2}$, *θα λέμε ότι τα* $u,v$ *είναι* ***κάθετα*** *μεταξύ τους.*

### Ορισμός 7 (ορθοκανονική βάση)

*Μια βάση* $\{v_1,..,v_n\}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *λέγεται ορθοκανονική αν* $\langle v_1,v_1\rangle = \ldots = \langle v_n,v_n\rangle = 1$ *και* $\langle v_i,v_j\rangle = 0$ *για κάθε* $i \neq j$.

### Παράδειγμα

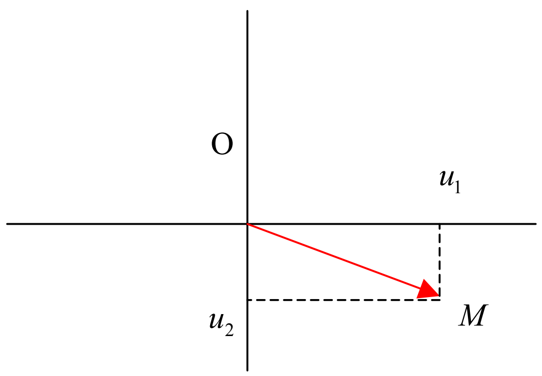
Η συνήθης βάση $\{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,\ldots,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθοκανονική.

Μιλώντας με κάποιο βαθμό ελευθερίας, μπορούμε να πούμε οι ορθοκανονικές βάσεις γενικεύουν την έννοια των κάθετων αξόνων που ξέρουμε στους χώρους $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$.

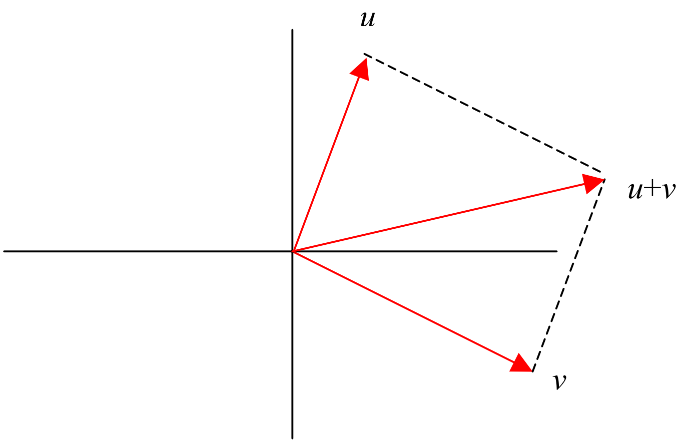
## ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΟ $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

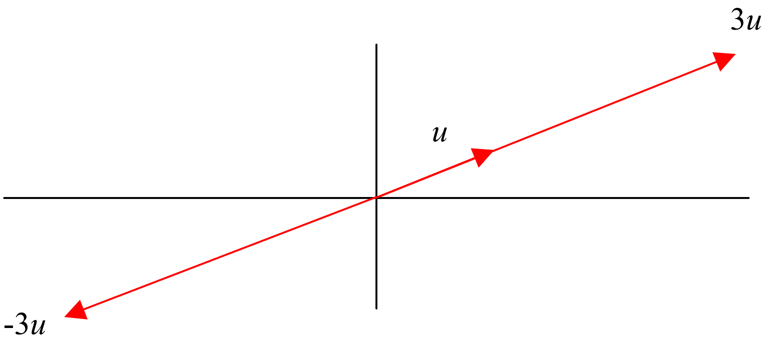
Υπενθυμίζουμε ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο στοιχείο $(u_1,u_2)$ του $\mathbb{R}^2$ το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του επιπέδου που έχει αρχή το σημείο Ο = (0,0) και πέρας το σημείο $M = (u_1,u_2)$, όπως φαίνεται στο σχήμα




Τότε για να προσθέσουμε τα στοιχεία $u = (u_1,u_2), v = (v_1,v_2)$ έχουμε τον *κανόνα του παραλληλογράμμου* που μας είναι γνωστός από το Κεφάλαιο 1.




Για το γινόμενο $au$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathbb{R}^2$, παρατηρούμε ότι το $au$ αντιστοιχεί σε διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα του $u$. Η δε φορά του εξαρτάται από το πρόσημο του $a$ όπως φαίνεται το σχήμα




Οι πράξεις στο $\mathbb{R}^3$ επιδέχονται αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία.

**Πρόταση 1 (ιδιότητες των πράξεων)**

*Έστω* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *και* $a, b \in \mathbb{R}$. *Τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες.*

$(u+v)+w = u+(v+w)$ $\qquad$ $a(u+v) = au+av$

$u+0 = u$ $\qquad$ $(a+b)u = au+bu$

$u+(-u) = 0$ $\qquad$ $(ab)u = a(bu)$

$u+v = v+u$ $\qquad$ $1u = u$

*όπου με 0 συμβολίζουμε το* $(0,\ldots,0)$.

## ΒΑΣΕΙΣ

### Πρόταση 2

*Έστω ότι τα διανύσματα* $v_1,\ldots,v_m$ *παράγουν το* $\mathbb{R}^n$. *Αν το* $v_m$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $v_1,\ldots,v_{m-1}$, *τότε τα* $v_1,\ldots,v_{m-1}$ *παράγουν το* $\mathbb{R}^n$.

### Θεώρημα 3 (πληθάριθμος βάσης)

*Έστω* $v_1,\ldots,v_m \in \mathbb{R}^n$.

1. *Αν τα* $v_1,\ldots,v_m$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έχουμε* $m \le n$.
2. *Αν τα* $v_1,\ldots,v_m$ *παράγουν το* $\mathbb{R}^n$, *τότε έχουμε* $m \ge n$.
3. *Αν τα* $v_1,\ldots,v_m$ *αποτελούν βάση του* $\mathbb{R}^n$, *τότε έχουμε* $m = n$.

Τονίζουμε ότι κάθε βάση του $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από $n$ στοιχεία.

### Πόρισμα 4

*Έστω* $\{v_1,\ldots,v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

1. *Το* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^n$
2. *Το* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *παράγει το* $\mathbb{R}^n$
3. *Το* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Σύμφωνα με το Πόρισμα αυτό, αν έχουμε $n$ στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ και θέλουμε να ελέγξουμε αν αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε αρκεί να ελέγξουμε μόνο μία από τις δυο συνθήκες που υπάρχουν στον ορισμό της βάσης.

### Πόρισμα 5 (βάσεις και ορίζουσες)

*Έστω* $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{R}^n$ *και έστω* $A$ *ο* $n \times n$ *πίνακας του οποίου η στήλη* $i$ *είναι το* $v_i$, $i = 1,\ldots,n$. *Τότε τα* $v_1,\ldots,v_n$ *αποτελούν βάση του* $\mathbb{R}^n$ *αν και μόνο αν* $\det A \neq 0$.

### Παράδειγμα

Τα διανύσματα $(1,2,1),(1,4,0),(2,-1,5)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$, γιατί

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

*Σημείωση* Στο Πόρισμα 5 θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε τον πίνακα με γραμμές τα $v_i$, γιατί ανάστροφοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα (βλ. Κεφάλαιο 4)

**Πρόταση 6 (μοναδικότητα συντελεστών ως προς μια βάση)**

*Έστω* $\{v_1,\ldots,v_n\}$ *μια βάση του* $\mathbb{R}^n$. *Τότε για κάθε* $v\in\mathbb{R}^n$, *υπάρχουν μοναδικά* $a_i\in\mathbb{R}$ *με* $v=a_1v_1+\ldots+a_nv_n$.

## ΤΟ ΣΥΝΗΘΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

**Πρόταση 7 (ιδιότητες)**

*Έστω* $u,v,w\in\mathbb{R}^n, a\in\mathbb{R}$. *Τότε έχουμε*

1. $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$
2. $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$
3. $\langle au,v\rangle=a\langle u,v\rangle=\langle u,av\rangle$
4. $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$
5. $\langle u,u\rangle\geq 0$
6. $\langle u,u\rangle=0\Leftrightarrow u=0.$

**Παράδειγμα**

Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n$ με $\langle u,u\rangle=1,\langle v,v\rangle=2,\langle u,v\rangle=-1$. Να υπολογιστούν

- το $\langle 4u+5v,2u-v\rangle$
- το μήκος του $2u-v$.

Λύση

- Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση, έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
&\langle 4u+5v,2u-v\rangle\overset{1}{=}\langle 4u,2u-v\rangle+\langle 5v,2u-v\rangle\overset{2}{=}\\
&=\langle 4u,2u\rangle-\langle 4u,v\rangle+\langle 5v,2u\rangle-\langle 5v,v\rangle\overset{3}{=}\\
&=8\langle u,u\rangle-4\langle u,v\rangle+10\langle v,u\rangle-5\langle v,v\rangle\overset{4}{=}\\
&=8\langle u,u\rangle+6\langle u,v\rangle-5\langle v,v\rangle=\\
&=8\cdot 1+6(-1)-5\cdot 2=-8.
\end{aligned}$$

- $|2u-v|=\sqrt{\langle 2u-v,2u-v\rangle}$ και

$$\begin{aligned}&\langle 2u-v,2u-v\rangle=\langle 2u,2u-v\rangle-\langle v,2u-v\rangle=\\&=\langle 2u,2u\rangle-\langle 2u,v\rangle-\langle v,2u\rangle+\langle v,v\rangle=\\&=4\langle u,u\rangle-4\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=4+4+2=10.\end{aligned}$$

Άρα $|2u-v|=\sqrt{10}$.

### Θεώρημα 8 (δυο σημαντικές ανισότητες)

*Έστω* $u,v\in\mathbb{R}^n$. *Τότε*

1. *(ανισότητα Cauchy - Schwarz)* $|\langle u,v\rangle|\le|u||v|$
2. *(τριγωνική ανισότητα)* $|u+v|\le|u|+|v|$.

### Πρόταση 9 (κριτήριο καθετότητας)

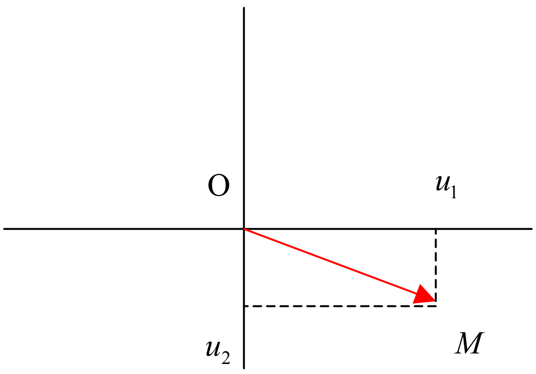
*Δυο διανύσματα* $u,v\in\mathbb{R}^n$ *είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνο αν* $\langle u,v\rangle=0$.

### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Για να εξηγήσουμε το κίνητρο του ορισμού του συνήθους εσωτερικού γινομένου στο $\mathbb{R}^n$, ας θυμηθούμε τις έννοιες του μήκους και της γωνίας στο επίπεδο και στο χώρο.

- *Στο Επίπεδο*

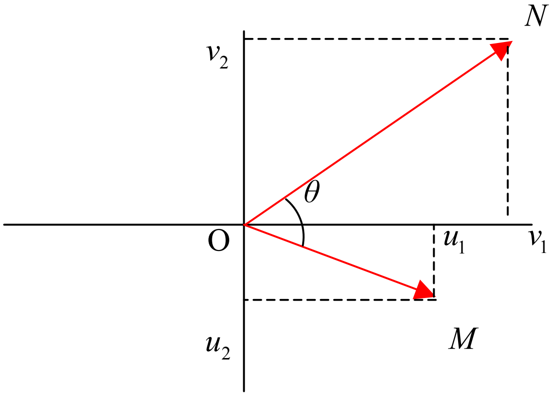
  Έστω $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$. Το **μήκος** $|u|$ του $u$ ορίζεται να είναι το μήκος $|OM|$ του ευθυγράμμου τμήματος $OM$ όπως φαίνεται στο σχήμα




Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$|u|=|OM|=\sqrt{u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}}.$$

Έστω ότι έχουμε δυο μη μηδενικά στοιχεία $u,v\in\mathbb{R}^2, u=(u_1,u_2), v=(v_1,v_2)$.




Τότε σχηματίζονται δυο γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$. Μια από αυτές παίρνει τιμές στο διάστημα [0,π]. Στο σχήμα η εν λόγω γωνία συμβολίζεται με $\theta$. Τη γωνία αυτή ονομάζουμε **γωνία** των $u,v$.

Υπενθυμίζουμε ότι μια διασύνδεση μεταξύ των εννοιών του μήκους και της γωνίας δίνεται από το νόμο των συνημιτόνων: Στο τρίγωνο $OMN$ έχουμε

$$|MN|^2 = |OM|^2 + |ON|^2 - 2|OM||ON|\cos\theta .$$

Αντικαθιστώντας τα μήκη και κάνοντας πράξεις βρίσκουμε

$$u_1v_1 + u_2v_2 = |u||v|\cos\theta.$$

Αυτή η σχέση είναι σημαντική γιατί μας πληροφορεί ότι το $\cos\theta$ καθορίζεται από τα μήκη $|u|,|v|$ και την ποσότητα $u_1v_1 + u_2v_2$.

Αν στην ποσότητα $u_1v_1 + u_2v_2$ θέσουμε $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ τότε προκύπτει το $u_1^2 + u_2^2 = |u|^2$. Άρα βλέπουμε ότι το μήκος είναι μια ποσότητα της μορφής $u_1v_1 + u_2v_2$.

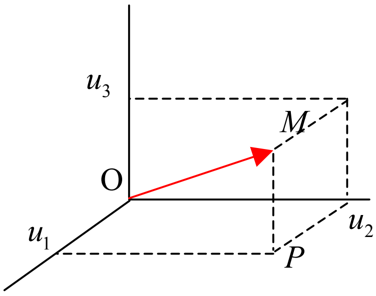
**Συμπέρασμα** Ορίζοντας την απεικόνιση

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto u_1v_1 + u_2v_2,$$

βλέπουμε ότι μέσω αυτής εκφράζεται και η έννοια του μήκους και η έννοια της γωνίας στο επίπεδο.

- *Στο Χώρο*

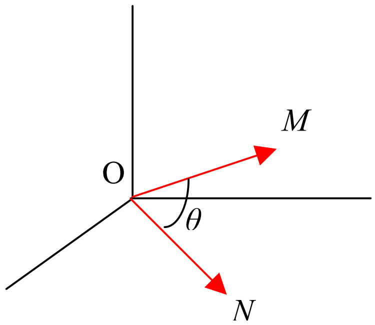
Έστω $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Ορίζουμε το **μήκος** του $u$ να είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $OM$, όπου $M$ είναι το σημείο $(u_1, u_2, u_3)$, βλ σχήμα.




Αν $P$ είναι η προβολή του $M$ στο xy επίπεδο, τότε εφαρμόζοντας δυο φορές το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$|u| = |OM| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Η **γωνία** μεταξύ δυο μη μηδενικών στοιχείων $u, v \in \mathbb{R}^3$ ορίζεται με τρόπο εντελώς ανάλογο με την περίπτωση του επιπέδου




Όπως και πριν, από το νόμο των συνημιτόνων συμπεραίνουμε ότι

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |u||v|\cos\theta.$$

Εδώ βλέπουμε ότι το $\cos\theta$ καθορίζεται από τα (μη μηδενικά) μήκη $|u|,|v|$ και την ποσότητα $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Αν στην ποσότητα $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ θέσουμε $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$ τότε προκύπτει το $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = |u|^2$.

**Συμπέρασμα** Ορίζοντας την απεικόνιση

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

βλέπουμε ότι μέσω αυτής εκφράζεται και η έννοια του μήκους και η έννοια της γωνίας στο χώρο.

# ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Άσκηση 1

*Εξετάστε αν το* $(1,2,-1)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός*

*1.* *των* $(3,0,4),(5,4,2)$

2. *των* $(3,0,4),(5,4,1)$

**Λύση**

1. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2, εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}$ με $(1,2,-1)=a(3,0,4)+b(5,4,2)$. Έχουμε διαδοχικά

$$(1,2,-1)=a(3,0,4)+b(5,4,2)\Leftrightarrow$$
$$(1,2,-1)=(3a+5b,4b,4a+2b)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}1=3a+5b\\2=4b\\-1=4a+2b.\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βλέπουμε ότι υπάρχει λύση. (Μάλιστα, η λύση είναι μοναδική $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$, αλλά αυτό δεν μας απασχολεί εδώ. Μας ενδιαφέρει η *ύπαρξη* τουλάχιστον μιας λύσης). Άρα το $(1,2,-1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(3,0,4),(5,4,2)$.

2. Εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}$ με $(1,2,-1)=a(3,0,4)+b(5,4,1)$. Έχουμε διαδοχικά

$$(1,2,-1)=a(3,0,4)+b(5,4,1)\Leftrightarrow$$
$$(1,2,-1)=(3a+5b,4b,4a+b)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}1=3a+5b\\2=4b\\-1=4a+b.\end{cases}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύστημα δεν έχει λύση. Άρα το $(1,2,-1)$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $(3,0,4),(5,4,1)$.

## Άσκηση 2

*1.* *Εξετάστε αν το σύνολο* $\{(1,2,-1),(0,3,4),(0,2,1)\}$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}^3$.

2. *Να βρεθούν οι τιμές του x τέτοιες ώστε το* $\{(1,2,-1),(0,3,4),(0,2,x)\}$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}^3$.

**Λύση**

1. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5, έχουμε $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} = -5 \neq 0$ και άρα το δοσμένο σύνολο είναι βάση.

2. Με παρόμοιο τρόπο έχουμε $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 2 & x\end{pmatrix} = 3x-8$ και άρα το δοσμένο σύνολο είναι βάση αν και μόνο αν $3x-8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{8}{3}$.

## Άσκηση 3

*Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

1. $(1,1,-1,2),(0,1,1,2),(2,3,0,1)$
2. $(1,1,-1,2),(0,1,1,2),(2,3,0,1),(2,4,5,1),(0,-1,-1,2)$.

**Λύση**

1. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3, έστω $a,b,c \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$a(1,1,-1,2)+b(0,1,1,2)+c(2,3,0,1)=(0,0,0,0) \Leftrightarrow$$
$$(a+2c, a+b+3c, -a+b, 2a+2b+c)=(0,0,0,0) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a+2c=0\\ a+b+3c=0\\ -a+b=0\\ 2a+2b+c=0. \end{cases}$$

Μας ενδιαφέρει αν υπάρχει μη μηδενική λύση του παραπάνω συστήματος. Για το σκοπό αυτό ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss στον επαυξημένο πίνακα όπως μάθαμε στο Κεφάλαιο 3. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από τον τελευταίο πίνακα βλέπουμε άμεσα ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Άρα τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Φυσικά θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και εδώ την προηγούμενη μέθοδο αλλά απαιτούνται αρκετές πράξεις. Ένας πιο σύντομος και κομψός τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι έχουμε 5 διανύσματα στο $\mathbb{R}^4$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 3 1) αυτά δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

*Σημείωση* Στο πρώτο υποερώτημα της άσκησης αυτής είδαμε ότι για να αποφανθούμε αν διανύσματα $v_1,\dots,v_m$ του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, μπορούμε να σχηματίζουμε τον $n\times m$ πίνακα με στήλες τα $v_i$ και να φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή. Από αυτή εύκολα συμπεραίνουμε αν υπάρχει μη μηδενική λύση. Στο δεύτερο υποερώτημα είδαμε ότι ο προηγούμενος αλγόριθμος δεν είναι πάντα ο οικονομικότερος τρόπος επίλυσης.

### Άσκηση 4

*Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα παράγουν το* $\mathbb{R}^3$.

*1.* $(1,2,-1),(3,4,0),(5,8,-2),(8,12,-2)$

*2.* $(1,1,3),(2,0,1)$.

**Λύση**

1. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2 έστω $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$. Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$a(1,2,-1)+b(3,4,0)+c(5,8,-2)+d(8,12,-2)=(c_1,c_2,c_3)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} a+3b+5c+8d=c_1 \\ 2a+4b+8c+12d=c_2 \\ -a-2c-2d=c_3. \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 & c_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & c_2 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & c_3 \end{pmatrix}$$

και εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss βρίσκουμε, μετά από αρκετούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία γραμμή συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο, άρα τα δοσμένα διανύσματα δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

2. Έχουμε 2 διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 3 2) αυτά δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

### Άσκηση 5

*Εξετάστε για ποια k τα* $(1,2,-1),(3,4,0),(5,8,-2),(8,12,k)$ *παράγουν το* $\mathbb{R}^3$.

**Λύση**

**1$^{ος}$ τρόπος.** Εργαζόμενοι όπως ακριβώς στο πρώτο μέρος της προηγούμενης άσκησης φθάνουμε στο σύστημα

$$\begin{cases} a+3b+5c+8d=c_1 \\ 2a+4b+8c+12d=c_2 \\ -a-2c+kd=c_3. \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 & c_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & c_2 \\ -1 & 0 & -2 & k & c_3 \end{pmatrix}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε την τριγωνική μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 & c_1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & c_2-2c_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2k-4 & -2c_3+4c_1-3c_2 \end{pmatrix}.$$

Τα δοσμένα διανύσματα παράγουν το $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν το σύστημα που αντιστοιχεί στο τελευταίο πίνακα έχει λύση για κάθε $c_i$. Από την τελευταία γραμμή βλέπουμε ότι αν $-2k-4=0$, δηλαδή αν $k=-2$, το σύστημα είναι αδύνατο στην περίπτωση που $-2c_3+4c_1-3c_2 \neq 0$. Άρα τα διανύσματα δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$. Αντίθετα, για κάθε $k \neq -2$, το σύστημα είναι συμβιβαστό για κάθε $c_i$ και τα διανύσματα παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

**2ος τρόπος.** Εύκολα επαληθεύουμε ότι τα πρώτα τρία διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα και έχουμε $(5,8,-2)=2(1,2,-1)+(3,4,0)$. Άρα το ερώτημα της άσκησης ισοδυναμεί με το να βρούμε τις τιμές του $k$ για τις οποίες τα διανύσματα

$$(1,2,-1),(3,4,0),(8,12,k)$$

παράγουν το $\mathbb{R}^3$. Επειδή αυτά είναι 3 διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$, έχουμε στη διάθεσή μας το Πόρισμα 5. Αυτά σχηματίζουν έναν πίνακα που έχει ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 12 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix} = -2k-4$ και αυτή είναι διάφορη του μηδενός αν και μόνο αν $k \neq -2$.

## Άσκηση 6

*Εξετάστε αν τα διανύσματα*

$$\begin{aligned} v_1 &= (2,1,0,\ldots,0) \\ v_2 &= (1,2,1,0,\ldots,0) \\ v_3 &= (0,1,2,1,0,\ldots,0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n-1} &= (0,\ldots,0,1,2,1) \\ v_n &= (0,\ldots,0,1,2) \end{aligned}$$

*αποτελούν μια βάση του* $\mathbb{R}^n$.

**Λύση**

Έστω $D_n$ η ορίζουσα του πίνακα με στήλες τα διανύσματα αυτά. Στη Λυμένη Άσκηση 13 του Κεφαλαίου 4 είδαμε ότι $D_n = n+1 \neq 0$. Άρα αυτά συγκροτούν μια βάση του $\mathbb{R}^n$ σύμφωνα με το Πόρισμα 5.

## Άσκηση 7

*Έστω ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.*

1. *Αποδείξτε ότι το $B = \{2v_1 + v_2, 2v_2 + v_3, 2v_3 + v_1\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.*
2. *Παραστήστε το $v_1 - v_2 + 3v_3$ σαν γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης B.*

**Λύση**

1. Επειδή το $B$ αποτελείται από 3 στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, αρκεί να δείξουμε ότι αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πόρισμα 5). Έχουμε

$$\begin{aligned}&a(2v_1 + v_2) + b(2v_2 + v_3) + c(2v_3 + v_1) = 0 \Rightarrow \\ &(2a+c)v_1 + (a+2b)v_2 + (b+2c)v_3 = 0.\end{aligned}$$

   Από την υπόθεση τα $v_1, v_2, v_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς από την τελευταία σχέση παίρνουμε $2a+c = a+2b = b+2c = 0$. Λύνοντας το σύστημα αυτό βλέπουμε ότι $a = b = c = 0$. Άρα τα στοιχεία του $B$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Έχουμε

$$\begin{aligned}&v_1 - v_2 + 3v_3 = a(2v_1 + v_2) + b(2v_2 + v_3) + c(2v_3 + v_1) \Leftrightarrow \\ &v_1 - v_2 + 3v_3 = (2a+c)v_1 + (a+2b)v_2 + (b+2c)v_3.\end{aligned}$$

   Από την τελευταία ισότητα και τη μοναδικότητα των συντελεστών (Πρόταση 6) παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 1 = 2a + c \\ -1 = a + 2b \\ 3 = b + 2c \end{cases}$$

   Λύνοντάς το βρίσκουμε $a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{5}{3}$. Άρα ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός είναι $v_1 - v_2 + 3v_3 = -\frac{1}{3}(2v_1 + v_2) - \frac{1}{3}(2v_2 + v_3) + \frac{5}{3}(2v_3 + v_1)$.

### Άσκηση 8

*Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες το* $(k,2,1)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $(1,1,1),(2,1,-1)$. *Για τις τιμές αυτές να παραστήσετε το* $(k,2,1)$ *σαν γραμμικό συνδυασμό των* $(1,1,1),(2,1,-1)$.

**Λύση**

Αναζητάμε τα $k$ για τα οποία υπάρχουν $a,b$ τέτοια ώστε

$(k,2,1)=a(1,1,1)+b(2,1,-1)$. Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{cases} k=a+2b \\ 2=a+b \\ 1=a-b \end{cases}$$

Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε $a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2}$. Τότε η πρώτη δίνει $k=\frac{5}{2}$.

Ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός είναι $(k,2,1)=a(1,1,1)+b(2,1,-1)$, δηλαδή

$(\frac{5}{2},2,1)=\frac{3}{2}(1,1,1)+\frac{1}{2}(2,1,-1)$.

### Άσκηση 9

*Έστω* $u=(1,2,4), v=(2,-3,5)$. *Να υπολογιστούν οι ποσότητες*

$$\langle u,v\rangle, |u|, |v|, |2u-v|, \cos\theta,$$

*όπου* $\theta$ *είναι η γωνία μεταξύ των u,v.*

**Λύση**

Σύμφωνα με τον Ορισμό 5 έχουμε

$$\begin{aligned} &\langle u,v\rangle = 1\cdot 2+2\cdot(-3)+4\cdot 5=16 \\ &|u|^2=\langle u,u\rangle = 1^2+2^2+4^2=21 \Rightarrow |u|=\sqrt{21} \\ &|v|^2=\langle v,v\rangle = 2^2+(-3)^2+5^2=38 \Rightarrow |v|=\sqrt{38}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7 έχουμε

$$\begin{aligned} |2u-v|^2 &= \langle 2u-v,2u-v\rangle = 4\langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle - 2\langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \\ &= 4\langle u,u\rangle - 4\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = 84-64+38=58. \end{aligned}$$

Για τη γωνία $\theta$ έχουμε (βλ Ορισμός 6) $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|} = \frac{16}{\sqrt{21}\sqrt{38}}$.

## Άσκηση 10

1. *Να βρεθούν οι τιμές του k τέτοιες ώστε τα διανύσματα* $u=(2,k,3), v=(1,2,k)$ *είναι κάθετα.*
2. *Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα* $w_1=(1,2,3), w_2=(-1,0,2)$.

**Λύση**

1. Σύμφωνα με την Πρόταση 9, τα *u*,*v* είναι κάθετα αν και μόνο αν

   $\langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow 2+2k+3k=0 \Leftrightarrow k=-\dfrac{2}{5}.$

2. Αρκεί να βρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $a=(x,y,z)$ κάθετο και στο $w_1$ και στο $w_2$, δηλαδή αρκεί $\langle a,w_1\rangle=\langle a,w_2\rangle=0,$ όπου $a\neq 0.$ Έχουμε $\langle a,w_1\rangle=\langle a,w_2\rangle=0 \Leftrightarrow x+2y+3z=-x+2z=0.$ Οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι $(x,y,z)=(2z,-\dfrac{5}{2}z,z),\ z\in\mathbb{R}.$ Συνεπώς κάθε διάνυσμα της μορφής $(2z,-\dfrac{5}{2}z,z),\ z\neq 0,$ έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες.

## Άσκηση 11

*Έστω* $u,v\in\mathbb{R}^n$. *Αποδείξτε ότι* $|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow$ *τα u,v είναι κάθετα.*

**Λύση**

Σύμφωνα με την Πρόταση 9 θα δείξουμε ότι $|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow \langle u,v\rangle=0.$

Έστω $|u+v|=|u-v|$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
&|u+v|=|u-v| \Rightarrow |u+v|^2=|u-v|^2 \Leftrightarrow\\
&\langle u+v,u+v\rangle=\langle u-v,u-v\rangle \Leftrightarrow\\
&\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=\langle u,u\rangle-2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle \Leftrightarrow\\
&4\langle u,v\rangle=0 \Leftrightarrow \langle u,v\rangle=0.
\end{aligned}
$$

Αντίστροφα, αν $\langle u,v\rangle=0,$ τότε όπως είδαμε πριν ισχύει $|u+v|^2=|u-v|^2$. Επειδή οι ποσότητες $|u+v|,|u-v|$ είναι μη αρνητικές, παίρνουμε $|u+v|=|u-v|.$

## Άσκηση 12

*Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε $|u| = |v| = 1$ και η γωνία τους είναι $\frac{\pi}{3}$. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των*

*1.* $u+v,\ u-v.$

*2.* $u+v,\ u-2v$

**Λύση**

1. Αν $\theta$ είναι η ζητούμενη γωνία, τότε (Ορισμός 6)

$$\cos\theta = \frac{\langle u+v, u-v\rangle}{|u+v||u-v|}.$$

Για τον αριθμητή έχουμε

$$\langle u+v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle =$$
$$= \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle = |u|^2 - |v|^2 = 1-1 = 0.$$

Άρα $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. Αν $\theta$ είναι η ζητούμενη γωνία, τότε

$$\cos\theta = \frac{\langle u+v, u-2v\rangle}{|u+v||u-2v|}.$$

Έχουμε $\langle u,v\rangle = |u||v|\cos\frac{\pi}{3} = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Για τον αριθμητή έχουμε

$$\langle u+v, u-2v\rangle = \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - 2\langle v,v\rangle =$$
$$= \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - 2\langle v,v\rangle = |u|^2 - \langle u,v\rangle - 2|v|^2 = 1 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$

Στον παρονομαστή έχουμε

$$|u+v|=\sqrt{\langle u+v,u+v\rangle}=$$
$$\sqrt{\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle}=$$
$$\sqrt{|u|^2+2\langle u,v\rangle+|v|^2}=\sqrt{1+2\frac{1}{2}+1}=\sqrt{3}$$

και

$$|u-2v|=\sqrt{\langle u-2v,u-2v\rangle}=$$
$$\sqrt{\langle u,u\rangle-4\langle u,v\rangle+4\langle v,v\rangle}=$$
$$\sqrt{|u|^2-4\langle u,v\rangle+4|v|^2}\sqrt{1-4\frac{1}{2}+4}=\sqrt{3}.$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση βρίσκουμε τελικά ότι

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$. Άρα $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

### Άσκηση 13

*Έστω* $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. *Αποδείξτε ότι* $(a_1+\dots+a_n)^2\le n\left(a_1^{\,2}+\dots+a_n^{\,2}\right)$

**Λύση**

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz στα διανύσματα

$u=(a_1,\dots,a_n)$, $v=(1,\dots,1)$. Έχουμε $\langle u,v\rangle=a_1+\dots+a_n$ και $|v|=\sqrt{1^2+\dots+1^2}=\sqrt{n}$.

Άρα

$$|\langle u,v\rangle|\le|u||v|\Rightarrow|\langle u,v\rangle|^2\le|u|^2|v|^2\Rightarrow$$
$$(a_1+\dots+a_n)^2\le n\left(a_1^{\,2}+\dots+a_n^{\,2}\right).$$

### Άσκηση 14

*Να βρεθούν οι* $a,b,c\in\mathbb{R}$ *τέτοιοι ώστε τα διανύσματα*

$(1+a,1,1,1,1,1)$
$(1,1-a,1,1,1,1)$
$(1,1,1+b,1,1,1)$
$(1,1,1,1-b,1,1)$
$(1,1,1,1,1+c,1)$
$(1,1,1,1,1,1-c)$

*να αποτελούν βάση του* $\mathbb{R}^6$.

**Λύση**

Εργαζόμενοι όπως ακριβώς στη Λυμένη Άσκηση 15 του Κεφαλαίου 4, βρίσκουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα που σχηματίζουν τα δοσμένα διανύσματα είναι ίση με $-a^2b^2c^2$. Άρα τα ζητούμενα $a,b,c$ είναι τα $a,b,c \in \mathbb{R}-\{0\}$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1

Ποια από τα σύνολα

$\{(1,2,1),(0,1,2)\}$,

$\{(1,2,1),(0,1,2),(1,3,3)\}$,

$\{(1,2,1),(0,1,2),(1,0,2)\}$,

$\{(1,2,1),(0,1,2),(1,0,2),(1,1,1)\}$

είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$;

**Υπόδειξη** Το πρώτο και τέταρτο απορρίπτονται άμεσα σύμφωνα με το Θεώρημα 3. Για τα άλλα δυο μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 5. **Απάντηση** Μόνο το τρίτο είναι βάση.

### Άσκηση 2

Εξετάστε αν το $(1,3,-1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός

1. των $(3,0,4),(5,6,2)$
2. των $(3,0,4),(5,6,1)$

**Υπόδειξη** Βλ. Λυμένη Άσκηση 1. **Απάντηση** 1. ναι, 2. όχι.

### Άσκηση 3

Να βρεθούν οι τιμές του $x$ τέτοιες ώστε το $\{(1,2,0),(0,2,4),(0,2,x)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

**Υπόδειξη** Βλ. Λυμένη Άσκηση 2. **Απάντηση** $x \neq 4$.

### Άσκηση 4

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα παράγουν το $\mathbb{R}^2$.

1. $\{(1,2),(-2,-4),(3,6)\}$
2. $\{(1,2),(-2,-4),(3,7)\}$

**Υπόδειξη** Βλ. Λυμένη Άσκηση 4. **Απάντηση** Μόνο το δεύτερο παράγει το $\mathbb{R}^2$.

### Άσκηση 5

Έστω $a,b,c \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα διανύσματα $(a,a^2,a^3),(b,b^2,b^3),(c,c^2,c^3)$ να αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

**Υπόδειξη** Εφαρμόστε το Πόρισμα 5 και τη Λυμένη Άσκηση 9 του Κεφαλαίου 4.

**Απάντηση** $abc(a-b)(b-c)(a-c) \neq 0$.

### Άσκηση 6

Εξετάστε για ποια $k$ το $(1,1,k)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(k,1,1),(1,k,-1)$. Για τις τιμές αυτές να βρεθούν οι σχετικοί γραμμικοί συνδυασμοί.

**Υπόδειξη** Βλ. Λυμένη Άσκηση 8. **Απάντηση** $k = 0,1$. Οι γραμμικοί συνδυασμοί είναι αντίστοιχα $(1,1,0) = (0,1,1) + (1,0,-1)$, $(1,1,1) = (1,1,1)$.

### Άσκηση 7

Έστω $\{v_1, v_2, v_3\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Αφού αποδείξτε ότι το σύνολο $B = \{3v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_1 + v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$, παραστήστε το $8v_1 + v_2 + 3v_3$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $B$.

**Υπόδειξη** Βλ. Λυμένη Άσκηση 7.

**Απάντηση** $8v_1 + v_2 + 3v_3 = (3v_1 - v_2) + 2(v_1 + v_2) + 3(v_1 + v_3)$

### Άσκηση 8

Έστω $\{u, v\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^2$ και $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $au + cv, bu + dv$ συγκροτούν βάση του $\mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$

**Υπόδειξη** Εξετάστε τη γραμμική ανεξαρτησία. Από τη σχέση $x(au+cv) + y(bu+dv) = 0$ προκύπτει ένα ομογενές $2\times 2$ σύστημα με πίνακα συντελεστών το $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Εφαρμόστε το Πόρισμα 9 του Κεφαλαίου 4.

## Άσκηση 9

Έστω ότι $u, v, w$ είναι μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι ανά δύο κάθετα. Αποδείξτε ότι αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

**Υπόδειξη** Εξετάστε τη γραμμικά ανεξαρτησία. Αν $xu + yv + zw = 0$, τότε $\left\langle xu + yv + zw, u \right\rangle = \left\langle 0, u \right\rangle = 0$. Αναπτύξτε το αριστερό μέλος και συμπεράνατε ότι $x = 0$. Μετά δείξτε με παρόμοιο τρόπο ότι $y = z = 0$.

## Άσκηση 10

Να βρεθούν οι τιμές του $k$ τέτοιες ώστε η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $u = (0,1,1), v = (k,1,k)$ είναι $\frac{\pi}{4}$.

**Υπόδειξη** Χρησιμοποιήστε τη σχέση $\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Απάντηση** $k = 0, 2$.