

ΠΛΗ 20, ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΛΙΟΥ 2018, Α' ΜΕΡΟΣ

**ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΤΕ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΑΣ ΚΑΙ ΜΗΝ ΑΝΟΙΞΕΤΕ ΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΑΝ ΔΕΝ
ΣΑΣ ΠΕΙ Ο ΕΠΙΤΗΡΗΤΗΣ**

ΕΠΩΝΥΜΟ.....ΟΝΟΜΑ.....

ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ.....ΤΜΗΜΑ.....

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ.....ΥΠΟΓΡΑΦΗ.....

ΟΔΗΓΙΕΣ: Κυκλώστε το γράμμα «Σ» που είναι παραπλεύρως σε κάθε πρόταση αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή το γράμμα «Λ» αν θεωρείτε ότι είναι ψευδής. ΠΡΟΣΟΧΗ: Μια λάθος απάντηση αφαιρεί ένα τέταρτο της μονάδας από το ερώτημα. Σημειώστε μια απάντηση αν είστε αρκετά βέβαιοι για αυτήν. Αν χρειάζεστε, χρησιμοποιήστε για πρόχειρο τον χώρο μετά το τελευταίο ερώτημα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

1. Στους παρακάτω τύπους τα φ, χ, ψ είναι προτασιακοί τύποι. Ισχύει ότι:
 1. $(\Sigma / \Lambda) \quad \{\varphi, \chi, \psi\} \models (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \chi \quad (\text{Σωστό})$
 2. $(\Sigma / \Lambda) \quad \neg(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \neg\varphi \models \neg\chi \quad (\text{Λάθος})$
 3. $(\Sigma / \Lambda) \quad \text{Αν } \chi \models \varphi \text{ και } \psi \models \neg\varphi, \text{ τότε } \chi \vee \psi \models \varphi \rightarrow \varphi \quad (\text{Σωστό})$
 4. $(\Sigma / \Lambda) \quad \{\varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi\} \models \chi \quad (\text{Λάθος})$
2. Στα παρακάτω οι $\varphi(x, y), \psi(x)$ και $\chi(y)$ είναι πρωτοβάθμιοι τύποι οι οποίοι περιλαμβάνουν τις μεταβλητές στις παρενθέσεις σαν ελεύθερες. Ποιες από τις παρακάτω λογικές ισοδυναμίες ισχύουν;
 1. $(\Sigma / \Lambda) \quad \exists x \forall y (\varphi(x, y) \vee \chi(y)) \equiv \exists x (\forall y \varphi(x, y) \vee \forall y \chi(y)) \quad (\text{Λάθος})$
 2. $(\Sigma / \Lambda) \quad \forall x \forall y (\psi(x) \vee \chi(y)) \equiv \forall x \psi(x) \vee \forall y \chi(y) \quad (\text{Σωστό})$
 3. $(\Sigma / \Lambda) \quad \exists x \exists y (\varphi(x, y) \vee \psi(x)) \equiv \exists x \exists y \varphi(x, y) \vee \exists x \psi(x) \quad (\text{Σωστό})$
 4. $(\Sigma / \Lambda) \quad \exists x (\varphi(x, y) \wedge \psi(x)) \equiv \exists x \varphi(x, y) \wedge \exists x \psi(x) \quad (\text{Λάθος})$
3. Στους παρακάτω τύπους σημειώστε Σωστό εάν ο τύπος αληθεύει στους πραγματικούς και Λάθος σε διαφορετική περίπτωση. Το διμελές κατηγορημα $P(x, y)$ σημαίνει ότι $x < y$ και το « \cdot » είναι η πράξη του πολλαπλασιασμού.
 1. $(\Sigma / \Lambda) \quad \exists x \exists y \exists z (z \approx x \cdot y \rightarrow P(z, x) \wedge P(z, y)) \quad (\text{Σωστό})$
 2. $(\Sigma / \Lambda) \quad \forall x (\exists y (x \cdot y \neq x) \rightarrow \exists z P(x \cdot z, x)) \quad (\text{Σωστό})$
 3. $(\Sigma / \Lambda) \quad \forall x \exists y (y \approx x \cdot x) \quad (\text{Σωστό})$
 4. $(\Sigma / \Lambda) \quad \forall x (\exists y (x \cdot y \neq x) \rightarrow \forall z \exists w (z \approx x \cdot w)) \quad (\text{Σωστό})$
4. Για κάθε $n \geq 4$, το πλήθος των n -ψήφιων δυαδικών συμβολοσειρών που είτε αρχίζουν με «11» είτε τελειώνουν με «00» (αλλά όχι και τα δυο), ισούται με:
 1. $(\Sigma / \Lambda) \quad 2^{n-1}. \quad (\text{Λάθος})$
 2. $(\Sigma / \Lambda) \quad 2^{n-1} - 2^{n-4}. \quad (\text{Λάθος})$
 3. $(\Sigma / \Lambda) \quad 2^{n-1} - 2^{n-3}. \quad (\text{Σωστό})$
 4. $(\Sigma / \Lambda) \quad \text{Τις } (n-1)\text{-ψήφιες δυαδικές συμβολοσειρές που δεν ξεκινούν με «00»}. \quad (\text{Σωστό})$
5. Έστω ότι δοκιμάζουμε αναγραμματισμούς της λέξης ΧΑΡΑΚΑΣ.
 1. $(\Sigma / \Lambda) \quad \text{Υπάρχουν } 7! \text{ διαφορετικοί αναγραμματισμοί της λέξης ΧΑΡΑΚΑΣ}. \quad (\text{Λάθος})$
 2. $(\Sigma / \Lambda) \quad \text{Η γεννήτρια συνάρτηση που μετρά τους διαφορετικούς αναγραμματισμούς της λέξης ΧΑΡΑΚΑΣ είναι η } f(x) = \frac{x^7}{3!}. \quad (\text{Σωστό})$
 3. $(\Sigma / \Lambda) \quad \text{Υπάρχουν } 4! \text{ διαφορετικοί αναγραμματισμοί της λέξης ΧΑΡΑΚΑΣ, όπου όλα τα «Α» μένουν στη θέση τους}. \quad (\text{Σωστό})$
 4. $(\Sigma / \Lambda) \quad \text{Η γεννήτρια συνάρτηση που μετρά τους διαφορετικούς αναγραμματισμούς της λέξης ΧΑΡΑΚΑΣ, με όλα τα «Α» στη θέση τους, είναι η } f(x) = x^4. \quad (\text{Σωστό})$

6. Έξι διακεκριμένοι πελάτες στοιχίζονται σε τέσσερα ταμεία (έστω A, B, Γ και Δ) ενός σούπερ μάρκετ. Αν a_6 είναι το πλήθος των στοιχίσεων των πελατών αυτών στις ουρές των ταμείων, ώστε να εξυπηρετηθεί άρτιο πλήθος πελατών στο A , περιττό πλήθος πελατών στο B και τουλάχιστον ένας πελάτης στο Δ , τότε το a_6 είναι:
1. (Σ / Λ) ο συντελεστής του x^6 στη συνάρτηση
 $(1 + x^2 + x^4) \cdot (x + x^3 + x^5) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x + x^2 + x^3 + x^5)$. (Λάθος)
 2. (Σ / Λ) ο συντελεστής του x^6 στη συνάρτηση
 $\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)$. (Λάθος)
 3. (Σ / Λ) ο συντελεστής του $x^6/6!$ στη συνάρτηση
 $(1 + x^2 + x^4 + \dots) \cdot (x + x^3 + x^5 + \dots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \cdot (x + x^2 + x^3 + \dots)$. (Σωστό)
 4. (Σ / Λ) ο συντελεστής του $x^6/6!$ στη συνάρτηση
 $\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\right) \cdot \left(x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\right)$. (Λάθος)
7. Θεωρούμε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Είναι οι παρακάτω προτάσεις αληθείς;
1. (Σ / Λ) Αν σε ένα γράφημα υπάρχει κορυφή που να είναι γειτονική με όλες τις υπόλοιπες, τότε το γράφημα έχει μονοπάτι Hamilton. (Λάθος)
 2. (Σ / Λ) Το συμπλήρωμα του $K_{1,n}$, με $n \geq 3$, έχει κύκλο Hamilton. (Λάθος)
 3. (Σ / Λ) Σε κάθε γράφημα K_n , με $n \geq 5$, υπάρχουν n ακμές που αν τις αφαιρέσουμε θα προκύψει γράφημα με κύκλο Hamilton. (Σωστό)
 4. (Σ / Λ) Υπάρχει γράφημα με χρωματικό αριθμό το πολύ 2 που έχει κύκλο περιττού μήκους. (Λάθος)
8. Είναι οι παρακάτω προτάσεις αληθείς;
1. (Σ / Λ) Υπάρχει διμερές γράφημα με 6 κορυφές και 9 ακμές που είναι επίπεδο. (Λάθος)
 2. (Σ / Λ) Το συμπλήρωμα ενός διμερούς γραφήματος είναι πάντα μη-συνεκτικό γράφημα. (Λάθος)
 3. (Σ / Λ) Αν στο $K_{2,2}$ προστεθεί μία νέα κορυφή και ενωθεί με όλες τις υπάρχουσες, προκύπτει μη επίπεδο γράφημα. (Λάθος)
 4. (Σ / Λ) Δύο ομοιομορφικά γραφήματα με το ίδιο πλήθος ακμών είναι και ισόμορφα μεταξύ τους. (Σωστό)
9. Θεωρούμε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;
1. (Σ / Λ) Ένα γράφημα δεν έχει γέφυρα αν και μόνο αν έχει κύκλο Euler. (Λάθος)
 2. (Σ / Λ) Υπάρχει 2-κανονικό γράφημα το οποίο είναι δένδρο. (Λάθος)
 3. (Σ / Λ) Κάθε γράφημα έχει τουλάχιστον μια κορυφή η οποία δεν είναι αρθρική. (Σωστό)
 4. (Σ / Λ) Ένα γράφημα έχει συνδετικό δένδρο αν και μόνο αν είναι συνεκτικό. (Σωστό)
10. Έστω G απλό συνεκτικό γράφημα όπου κάθε ακμή e έχει θετικό βάρος $w(e)$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:
1. (Σ / Λ) Έστω P συντομότερη διαδρομή στο G μεταξύ δύο κορυφών x και y . Αν αλλάξουμε το βάρος της κάθε ακμής e σε $w(e) \cdot w(e)$ τότε η P παραμένει συντομότερη διαδρομή μεταξύ των x και y . (Λάθος)
 2. (Σ / Λ) Έστω ότι εκτελούμε τον αλγόριθμο του Dijkstra στο γράφημα που προκύπτει από το G αλλάζοντας το βάρος της κάθε ακμής e σε $-w(e)$. Ο αλγόριθμος επιστρέφει τις μακρινότερες διαδρομές από την αφετηριακή κορυφή ως προς τα αρχικά βάρη των ακμών. (Λάθος)
 3. (Σ / Λ) Έστω T ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο του G . Αν αλλάξουμε το βάρος της κάθε ακμής e σε $w(e) \cdot w(e)$ τότε το T παραμένει ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο. (Σωστό)
 4. (Σ / Λ) Έστω ότι εκτελούμε τον αλγόριθμο του Prim στο γράφημα που προκύπτει από το G αλλάζοντας το βάρος της κάθε ακμής e σε $-w(e)$. Ο αλγόριθμος επιστρέφει ένα συνδετικό δένδρο του G το οποίο είναι βαρύτερο ως προς τα αρχικά βάρη των ακμών. (Σωστό)