Ενδεικτικές Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

Άσκηση 1 (Ερώτημα 1, 5η Γ.Ε. 2015-2016)

1.1 Δείξτε ότι ένα γράφημα με *n* κορυφές είναι **διμερές** εάν και μόνο εάν υπάρχει αρίθμηση των κορυφών του τέτοια ώστε ο πίνακας γειτνίασης να έχει την μορφή $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$, όπου ο *A* είναι ένα πίνακας διαστάσεων $k \times (n - k)$, για κάποιον ακέραιο $0 < k < n$, ο A^T είναι ο ανάστροφος του *A*, και ο πίνακας 0 είναι ένας πίνακας με μηδενικά αναλόγων διαστάσεων.

1.2

(α) Έστω ότι V_G είναι ο πίνακας γειτνίασης ενός συνδεόμενου γραφήματος *G* με *n* κορυφές. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα V_G^k, όπου $0 \le k \le n - 1$, για να βρείτε τα παρακάτω:

(1) τον **πίνακα αποστάσεων** του γραφήματος D_G όπου $D_G(i, j)$ = *μήκος συντομότερου μονοπατιού μεταξύ κορυφών i και j,*

(2) τον **πίνακα μονοπατιών** του γραφήματος P_G όπου $P_G(i, j)$ = *πλήθος διαφορετικών συντομότερων μονοπατιών μεταξύ κορυφών i και j, και*

(3) τον ***t*-βαθμό** μιας κορυφής $d_t(i)$ = *πλήθος συντομότερων μονοπατιών μήκους t που συμμετέχει η κορυφή i ως αρχική κορυφή.*

(β) Έστω ότι V_{K_3} είναι ο πίνακας γειτνίασης του πλήρους γραφήματος K_3 με τρεις κορυφές. Δείξτε με επαγωγή στο *k* ότι ο $V_{K_3}^k$ είναι τέτοιος ώστε όλες οι τιμές της κύριας διαγωνίου είναι ίσες, όπως και όλες οι τιμές εκτός της κύριας διαγωνίου.

Ενδεικτική Απάντηση

1.1

Ένα γράφημα *n* κορυφών είναι διμερές εάν και μόνο εάν το σύνολο των κορυφών του *V* διαμερίζεται σε δύο μέρη *I* και *J* τέτοια ώστε οποιαδήποτε ακμή είναι της μορφής *(i, j)* όπου $i \in I$ και $j \in J$. Ας θεωρήσουμε ότι $|I|=k$ όπου $k<n$, δηλαδή τα σύνολα *I* και *J* περιέχουν αντίστοιχα *k* και *n-k* κορυφές.

($\Leftarrow$) Εάν λοιπόν ένα γράφημα *G* με *n* κορυφές είναι διμερές, μπορούμε να αριθμήσουμε τις *n* κορυφές του ως *1,2,…,n* ώστε οι *k* πρώτες κορυφές *1,2,…,k* να αποτελούν το σύνολο *I* και οι υπόλοιπες κορυφές *k+1,k+2,…,n* να αποτελούν το σύνολο *J*. Τότε ο πίνακας γειτνίασης *M* του γραφήματος *G* είναι της μορφής που δίνεται στην εκφώνηση λόγω των εξής παρατηρήσεων.

- Για κάθε *i=1,2,…,k* και *j=1,2,…,k* ισχύει *M(i,j)=0* αφού σε αυτή την περίπτωση αμφότερα τα *i* και *j* ανήκουν στο *I*. Δηλαδή ο 'πάνω αριστερά' *k×k* υποπίνακας του *M* είναι ένας μηδενικός πίνακας.
- Για κάθε *i=k+1,k+2,…,n* και *j=k+1,k+2,…,n* ισχύει *M(i,j)=0* αφού σε αυτή την περίπτωση αμφότερα τα *i* και *j* ανήκουν στο *J*. Δηλαδή ο 'κάτω δεξιά' *(n-k)×(n-k)* υποπίνακας του *M* είναι ένας μηδενικός πίνακας.
- Για κάθε *i=1,2,…,k* και *j=k+1,k+2,…,n* ισχύει ότι *M(i,j)=1* εάν και μόνο εάν η η ακμή *(i,j)* ανήκει στο *G*, άρα (αφού το *G* είναι μη-κατεθυνόμενο) εάν και μόνο εάν η ακμή *(j,i)* ανήκει στο *G*, άρα εάν και μόνο εάν *M(j,i)=1*. Δηλαδή ο 'κάτω αριστερά' *(n-k)×k* υποπίνακας του *M* είναι ο ανάστροφος του 'πάνω δεξιά' *k×(n-k)* υποπίνακα του *M*.

($\Rightarrow$) Έστω ότι υπάρχει αρίθμηση των κορυφών ενός γραφήματος *G* ώστε ο πίνακας γειτνίασης του *M* να είναι της μορφής που δίνεται στην εκφώνηση. Τότε:

- Αφού *M(i,j)=0* για κάθε *i=1,2,…,k* και *j=1,2,…,k*, δεν υπάρχει ακμή μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών *i* και *j* οι οποίες ανήκουν στο σύνολο *I={1,2,…,k}*.
- Αφού *M(i,j)=0* για κάθε *i=k+1,k+2,…,n* και *j=k+1,k+2,…,n* δεν υπάρχει ακμή μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών *i* και *j* οι οποίες ανήκουν στο σύνολο *J={ k+1,k+2,…,n}*.

Συνεπώς οποιαδήποτε ακμή στο *G* μπορεί να είναι της μορφής *(i, j)* όπου $i \in I$ και $j \in J$, άρα το *G* είναι διμερές.

1.2

(α) Η απάντηση προκύπτει βάσει του Θεωρήματος 4.4 του Τόμου Α΄ (σελ. 131): *«Το κελί (i, j) του πίνακα V_G^k είναι ίσο με τον αριθμό των μονοπατιών μήκους k από την κορυφή i στη κορυφή j του γραφήματος G»*. Συνεπώς ισχύουν τα παρακάτω.

(1) Το κελί $D_G(i, j)$ είναι ίσο με το ελάχιστο *k* για το οποίο υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή *i* στη κορυφή *j*, δηλαδή το ελάχιστο *k* για το οποίο το κελί *(i, j)* του πίνακα $V_G{}^k$ είναι θετικό. Τυπικά θα γράφαμε:

$$D_G(i, j) = \min \{k : V_G{}^k(i, j) > 0\}.$$

(2) Το κελί $P_G(i, j)$ ισούται την τιμή του $V_G{}^k(i, j)$ για το ελάχιστο *k* για το οποίο το στοιχείο $V_G{}^k(i, j)$ είναι θετικό, δηλαδή για την τιμή εκείνη του *k* η οποία ισούται με το $D_G(i, j)$. Τυπικά (και λίγο περίπλοκα) θα γράφαμε:

$$P_G(i,j) = V_G^{D_G(i,j)}(i,j).$$

(3) Το κελί $d_t(i)$ ισούται με το άθροισμα των κελιών $P_G(i,j)$ για όλα τα *j* για τα οποία το συντομότερο μονοπάτι από την κορυφή *i* στην κορυφή *j* έχει μήκος *t*, δηλαδή για όλα τα *j* (διαφορετικά από το *i*) για τα οποία η τιμή του κελιού $D_G(i,j)$ ισούται με *t*. Τυπικά θα γράφαμε:

$$d_t(i) = \sum \{P_G(i,j) : j \neq i, D_G(i,j) = t\}.$$

(β)

Για *k=1* ο πίνακας $M = V_{K_3}$ έχει τη μορφή:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

συνεπώς ικανοποιεί το ζητούμενο αφού όλες οι τιμές της κύριας διαγωνίου είναι *0,* και όλες οι τιμές εκτός της κύριας διαγωνίου είναι *1*.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο πίνακας M^k ικανοποιεί επίσης το ζητούμενο, έχει δηλαδή τη μορφή:

$$M^k = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}.$$

Το επαγωγικό βήμα αποδεικνύεται εύκολα βάσει πολλαπλασιασμού πινάκων (θυμηθείτε ότι πολλαπλασιάζουμε τη γραμμή *i* του ‘αριστερού’ πίνακα με τη στήλη *j* του ‘δεξιού’, τοποθετώντας το αποτέλεσμα στο κελί *(i,j)* του πίνακα-γινομένου).

$$M^{k+1} = M^k \cdot M = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & a+b & a+b \\ a+b & 2b & a+b \\ a+b & a+b & 2b \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2 (Ερώτημα 1, 5η Γ.Ε. 2012-2013)

Θεωρήστε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα *G* με *n* κορυφές, το μητρώο σύνδεσής του *A* και τον πίνακα $Y=A+A^2+...+A^{n-1}$.

(α) Αν *Y[i,j]=0, i≠j*, τι ισχύει για τις κορυφές *i* και *j*;

(β) Αν *Y[i,i]=0,* τι ισχύει για την κορυφή *i*;

(γ) Θεωρήστε τον πίνακα *Ω*, για τον οποίο ισχύει *Ω[i,j]=0,* αν *Y[i,j]=0* ή *i=j,* και *Ω[i,j]=1,*αν *Y[i,j]≠0* και *i≠j*. Δείξτε ότι ο πίνακας *Ω* είναι το μητρώο σύνδεσης ενός γραφήματος *G'* το οποίο είναι συνδεδεμένο αν και μόνο αν το γράφημα *G* είναι συνδεδεμένο.

Ενδεικτική Απάντηση

2 (α)

Ας θεωρήσουμε γράφημα Γ = (V , E) με N=|V| κορυφές.

Γνωρίζουμε ότι, για κάθε α,β$\in$V και φυσικό αριθμό K ≥ 1, η τιμή A^K[α,β] του μητρώου A^K υποδεικνύει το πλήθος των διαφορετικών αβ-περιπάτων με ακριβώς K ακμές στο γράφημα Γ (βλ. [ΒΟΥΡΟΣ, Θεώρημα 4.4])[1].

Επίσης, είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών α,β, ΑΝ υπάρχει (ανοικτός) αβ-περίπατος στο Γ ΤΟΤΕ υπάρχει και αβ-μονοπάτι στο Γ. Αυτό ισχύει γιατί απλά μπορούμε να ακολουθήσουμε οποιονδήποτε αβ-περίπατο και να παρακαμπτουμε οποιονδήποτε κλειστό υποπερίπατο εμφανίζεται σε αυτόν, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο ένα αβ-μονοπάτι στο γράφημα.

Όμως, οποιοδήποτε αβ-μονοπάτι στο Γ απαρτίζεται από το πολύ N-1 ακμές, αφού σε αυτό δεν υπάρχουν επαναλήψεις κορυφών. Αυτό σημαίνει ότι κάθε αβ-μονοπάτι θα πρέπει να προσμετράται σε (ακριβώς) ένα από τα στοιχεία A[α,β], A^2[α,β], A^3[α,β], ..., ή A^{N-1}[α,β], ανάλογα με το πλήθος των ακμών που το απαρτίζουν.

Το στοιχείο Y[α,β] = A[α,β] + A^2[α,β] + A^3[α,β] + ... + A^{N-1}[α,β] υποδηλώνει το πλήθος των αβ-περιπάτων στο Γ με το πολύ N-1 ακμές, στο οποίο βέβαια προσμετρώνται και όλα τα αβ-μονοπάτια στο Γ.

Αν λοιπόν διαπιστώσουμε για κάποιο ζεύγος (διαφορετικών) κορυφών α,β$\in$V ότι Y[α,β] = 0, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει κανένα αβ-μονοπάτι στο Γ (αλλιώς θα έπρεπε να προσμετρηθεί), και άρα κανένας αβ-περίπατος ανεξάρτητα από μήκος. Επομένως, τα α,β βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του Γ.

2 (β)

Ως απόρροια του Θεωρήματος 4.4 του Βούρου, ισχύει επίσης ότι για κάθε α$\in$V και για κάθε φυσικό αριθμό K ≥ 1, το στοιχείο A^K[α,α] μετρά το πλήθος των διαφορετικών κλειστών περιπάτων K ακμών που περιλαμβάνουν την κορυφή α. Αφού εστιάζουμε σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα, παρατηρούμε ότι κάθε ακμή αβ που προσπίπτει στη α ορίζει κι έναν κλειστό περίπατο (μήκους 2) <α,αβ,β,βα,α>, ενώ (λόγω απλότητας) δεν υπάρχουν κλειστοί περίπατοι μήκους 1 στο Γ. Αυτό σημαίνει ότι A[α,α]=0 και A^2[α,α] = |{{α,β}$\in$E}| = δ_Γ(α) είναι ο βαθμός της κορυφής α στο Γ. Κατά συνέπεια:

[1] Προς αποφυγή συγχύσεων, θα ακολουθήσουμε την ορολογία του Τόμου του Μαυρονικόλα περί «περιπάτων» και «μονοπατιών», που αντιστοιχούν σε «μονοπάτια» και «απλά μονοπάτια» στον Τόμο του Βούρου.

$0 = Y[\alpha,\alpha] \geq A^2[\alpha,\alpha] = \delta_\Gamma(\alpha) \geq 0 \quad => \quad \delta_\Gamma(\alpha) = 0$

Δηλαδή, θα πρέπει η κορυφή α να είναι **απομονωμένη κορυφή** στο Γ.

2 (γ)

Παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών $\alpha,\beta \in V$, το στοιχείο $\Omega[\alpha,\beta] \in \{0,1\}$ υποδηλώνει την ύπαρξη (ή μη ύπαρξη) αβ-μονοπατιού στο Γ, όπως αυτό αποτυπώνεται από τη μη-μηδενικότητα του $Y[\alpha,\beta]$.

Στο γράφημα Γ' = (V , Ω) προφανώς υπάρχει ακμή μεταξύ διαφορετικών κορυφών $\alpha,\beta \in V$ αν και μόνο αν υπάρχει αβ-περίπατος στο Γ. Η διμελής σχέση Σ που υποδηλώνει την «*ύπαρξη αβ-περιπάτου*» στο (μη κατευθυνόμενο) γράφημα Γ είναι μια <u>σχέση ισοδυναμίας</u>:

- Ισχύει η <u>ανακλαστικότητα</u> γιατί για κάθε κορυφή α υπάρχει ο τετριμμένος περίπατος < α >.
- Ισχύει η <u>συμμετρικότητα</u>, γιατί για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών α,β, υπάρχει αβ-περίπατος αν και μόνο αν υπάρχει και βα-περίπατος (λόγω των μη κατευθυνόμενων ακμών στο γράφημα).
- Ισχύει η <u>μεταβατικότητα</u>, γιατί για κάθε τριάδα κορυφών α,β,γ ισχύει ότι:

ΑΝ υπάρχουν στο Γ ένας αβ-περίπατος και ένας βγ-περίπατος

ΤΟΤΕ υπάρχει στο Γ ένας αγ-περίπατος.

Αυτό σημαίνει ότι στο γράφημα Γ' οι συνεκτικές συνιστώσες είναι κλίκες (αντιστοιχούν σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη Σ).

Καταλήγουμε λοιπόν ότι για κάθε ζεύγος κορυφών $\alpha,\beta \in V$, υπάρχει αβ-περίπατος στο Γ αν και μόνο αν $\{\alpha,\beta\} \in \Omega$.

Άσκηση 3 (Ερώτημα 3, 5η Γ.Ε. 2006-2007)

α) Το ελάχιστο μήκος κύκλου ενός γραφήματος ονομάζεται **girth** του γραφήματος. Διευκρινίζεται ότι μια ανακύκλωση είναι κύκλος μήκους 1 και δύο παράλληλες μη-κατευθυνόμενες ακμές ορίζουν έναν κύκλο μήκους 2.

Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα G με girth 5. Να δείξετε ότι εάν κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον k, τότε το γράφημα έχει τουλάχιστον k^2+1 κορυφές. Για k = 2 και k = 3, βρείτε ένα τέτοιο γράφημα με ακριβώς $k^2 + 1$ κορυφές.

Συμβουλή: Χρησιμοποιήστε την ακόλουθη έννοια της γειτονιάς μιας κορυφής: N(x) είναι όλες οι κορυφές που απέχουν 1 βήμα από την κορυφή x. Υπολογίστε το μέγεθος της γειτονιάς $N_2(x)$ που περιλαμβάνει τις κορυφές με απόσταση 2 από την x.

β) Να δείξετε ότι ο ισομορφισμός γραφημάτων διατηρεί την ιδιότητα του σημείου άρθρωσης, δηλαδή εάν ένα γράφημα έχει σημείο άρθρωσης τότε και τα ισομορφικά με αυτό γραφήματα έχουν σημείο άρθρωσης. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του σημείου άρθρωσης από το ερώτημα 3, της εργασίας 4, 2006-07.

Ενδεικτική Απάντηση

3 α)

Για οποιαδήποτε κορυφή X, η γειτονιά της N(X) θα περιέχει κ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ κορυφές, αφού (λόγω της τιμής του girth) στην ουσία δεν επιτρέπονται ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές στο γράφημα, δηλαδή, πρόκειται για ΑΠΛΟ μη κατευθυνόμενο γράφημα.

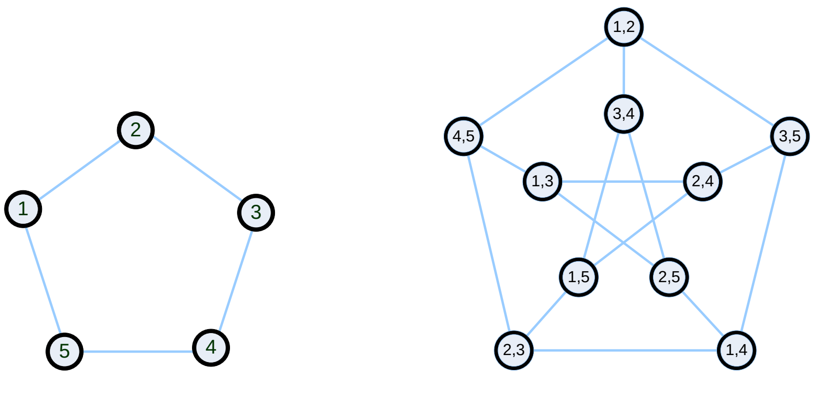
Επίσης, θεωρούμε ότι κ ≥ 2: Για κ=1 ή για κ=0, η ύπαρξη κύκλου μήκους τουλάχιστον 5 εξασφαλίζει αυτόματα τουλάχιστον 5 κορυφές στο γράφημα και κατά συνέπεια το φράγμα ικανοποιείται τετριμμένα.

Έστω Y μια οποιαδήποτε κορυφή στη γειτονιά N(X) του X. Η Y έχει τουλάχιστον κ–1 άλλες (διαφορετικές μεταξύ τους, λόγω απλότητας) κορυφές με τις οποίες συνδέεται, πέρα από τη X. Έστω $Z \in N(Y)\setminus\{X\}$ μια τέτοια κορυφή. Η Z δε μπορεί να ανήκει στην N(X) γιατί τότε θα υπήρχε ως υπογράφημα το K_3 (τρίγωνο) στο γράφημα. Επιπλέον, για οποιαδήποτε κορυφή R του συνόλου $N(X)\setminus\{Y\}$ ισχύει ότι η ακμή RZ δεν ανήκει στο γράφημα Γ: Αν ανήκε, τότε θα υπήρχε στο γράφημα ο εξής κύκλος μήκους 4:

$$< X, XY, Y, YZ, Z, ZR, R, RX, X >$$

Άρα λοιπόν, το Γ έχει για κάθε κορυφή Y του N(X) τουλάχιστον κ–1 **μοναδικές** κορυφές στις οποίες συνδέεται η Y και ΔΕΝ συνδέονται οι κορυφές του $\{X\} \cup N(X) \setminus \{Y\}$. Συνολικά λοιπόν, υπάρχουν τουλάχιστον $1+\kappa+\kappa(\kappa-1) = \kappa^2+1$ διαφορετικές κορυφές στο Γ.

Παραδείγματα γραφημάτων με κ=2 και κ=3 και κ^2+1 κορυφές είναι ο κύκλος C_5 και το γράφημα Petersen που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



3 β)

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι αν ένα γράφημα Γ=(V,E) έχει σημείο άρθρωσης, τότε και οποιοδήποτε γράφημα Η=(V',E') που είναι ισομορφικό με το Γ επίσης έχει σημείο άρθρωσης. Έστω f: V → V' μια οποιαδήποτε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία κορυφών που αποδεικνύει τον ισομορφισμό των Γ και Η.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του σημείου άρθρωσης, όπως δόθηκε και στην 4η εργασία: Μια κορυφή ενός συνδεδεμένου, μη κατευθυνόμενου γραφήματος ονομάζεται ***σημείο άρθρωσης*** αν το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση αυτής της κορυφής και όλων των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή δεν είναι συνδεδεμένο.

Αυτό σημαίνει ότι αν ν είναι ένα σημείο άρθρωσης του Γ, τότε υπάχει ζεύγος διαφορετικών κορυφών α,β του Γ, τέτοιο ώστε όλα τα μονοπάτια σύνδεσης των κορυφών α και β να διέρχονται από την κορυφή ν. Θα δείξουμε ότι σε αυτή την περίπτωση και η εικόνα ν' = f(ν) της ν στο Η είναι σημείο άρθρωσης του Η, δηλαδή, υπάρχει ζεύγος διαφορετικών κορυφών (α',β'), για το οποίο ισχύει ότι οποιοδήποτε μονοπάτι σύνδεσής τους διέρχεται από την ν'. Θεωρούμε τις κορυφές α'=f(α) και β'=f(β). Για χάρη της απαγωγής σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μονοπάτι

$$Π' = < α', ε'_1 ,..., ε'_κ, β' >$$

που ενώνει τις α' και β' στο Η, αλλά δεν διέρχεται από την ν'. Η εικόνα $Π=f^{-1}(Π')$ του Π' είναι επίσης μονοπάτι στο Γ, που συνδέει τις κορυφές α και β:

1. Καμιά κορυφή του Π δεν εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές, αφού καμιά κορυφή του Π' δεν εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές,
2. για κάθε ακμή ε'=(κ',λ') που εμφανίζεται στο Π', το ζεύγος

   $$ε=(f^{-1}(κ'),f^{-1}(λ'))$$

   που εμφανίζεται στο Π είναι επίσης ακμή του Γ, η οποία ενώνει τις κορυφές $κ = f^{-1}(κ')$ και $λ = f^{-1}(λ')$, δηλαδή τις εικόνες των κορυφών κ' και λ' του Η που εμφανίζονται στο Π αμέσως πριν και αμέσως μετά την ε, και
3. αρχή και τέλος του μονοπατιού Π είναι οι κορυφές $α = f^{-1}(α)$ και $β = f^{-1}(β)$.

Επιπρόσθετα όμως, αφού στο Π' δεν εμφανίζεται η εικόνα ν' του ν, καταλήγουμε ότι θα πρέπει να μην εμφανίζεται και στο Π η κορυφή $ν = f^{-1}(ν')$. Δηλαδή, υπάρχει μονοπάτι σύνδεσης των α και β στο γράφημα Γ, που δεν διέρχεται από την κορυφή ν, πράγμα που βέβαια είναι ΑΤΟΠΟ.

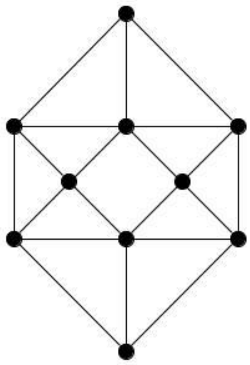
Άσκηση 4 (Ερώτημα 4, 5η Γ.Ε. 2015-2016)

4.1 Θεωρήστε απλά, μη-κατευθυνόμενα γραφήματα. Συμβολίζουμε με $c(G)$ τον **χρωματικό αριθμό** του γραφήματος G δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματίσουμε τις κορυφές του γραφήματος έτσι ώστε κάθε δύο γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα. Να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός $c(G)$ εάν το G είναι:

(α) διμερές γράφημα,

(β) κύκλος με *n* κορυφές,

(γ) το παρακάτω γράφημα.



4.2 Ένα γράφημα *G* ονομάζεται *k*-***κρίσιμο*** εάν $\chi(G) = k$ και $\chi(G - v) < k$ για κάθε κορυφή $v \in V(G)$, όπου με $G - v$ συμβολίζουμε το γράφημα που προκύπτει από το *G* εάν αφαιρέσουμε την κορυφή *v* όπως και όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή.

(α) Δώστε ένα παράδειγμα ενός 3-κρίσιμου γραφήματος.

(β) Δείξτε ότι εάν το *G* είναι *k*-κρίσιμο τότε είναι συνδεδεμένο.

(γ) Δείξτε ότι εάν το *G* είναι *k*-κρίσιμο τότε ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών του είναι τουλάχιστον $k - 1$.

Ενδεικτική Απάντηση

4.1 Λαμβάνουμε υπόψη ότι ο χρωματικός αριθμός *χ(G)* ενός γραφήματος *G* είναι ίσος ή μεγαλύτερος από τον "*αριθμό κλίκας ω(G)*" (δείτε διαφάνεια 29 στην παρουσίαση της 4ης ΟΣΣ), δηλαδή από το μέγιστο αριθμό των κορυφών σε οποιοδήποτε πλήρες υπογράφημα του *G*. Για παράδειγμα ένα γράφημα με μία ακμή (κλίκα τάξης *2*) έχει χρωματικό αριθμό τουλάχιστον *2*, ένα γράφημα με ένα τρίγωνο έχει χρωματικό αριθμό τουλάχιστον *3* και ούτω καθεξής.

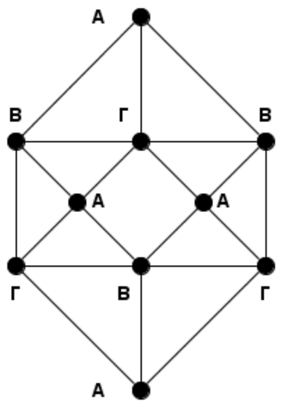
(α) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν το διμερές γράφημα έχει *0* ακμές τότε όλες οι κορυφές μπορού να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα, οπότε ο χρωματικός αριθμός του είναι *1*. Διαφορετικά, η ύπαρξη μίας τουλάχιστον ακμής συνεπάγεται ότι ο χρωματικός αριθμός είναι *2*, επειδή οι κορυφές κάθε μέρους μπορούν να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα αφού εξ' ορισμού οποιεσδήποτε δύο από αυτές δε συνδέονται.

(β) Παρατηρήστε ότι ένας κύκλος έχει χρωματικό αριθμό τουλάχιστον *2* αφού έχει μία τουλάχιστον ακμή. Είναι επίσης εύλογο τα χρώματα κατά μήκος του κύκλου να εναλλάσονται, δηλαδή η 1η κορυφή να χρωματίζεται με το χρώμα *Α*, η 2η με το *Β*, η 3η ξανά με το *Α*, η 4η ξανά με το *Β* και ούτω καθεξής. Αν όμως ο κύκλος έχει 3 κορυφές, παρατηρήστε ότι η 3η κορυφή γειτνιάζει τόσο με την 1η όσο και με τη 2η άρα πρέπει να χρωματιστεί με ένα τρίτο χρώμα *Γ*. Το ίδιο ισχύει για οποιοδήποτε κύκλο με μονό πλήθος κορυφών.

Έστω λοιπόν ο κύκλος *n* κορυφών και μία αρίθμηση των κορυφών του *1,2,…,n* όπου διαδοχικοί αριθμοί αντιστοιχούν σε διαδοχικές κορυφές του κύκλου. Αν *n=2k* όπου *k* φυσικός αριθμός τουλάχιστον ίσος με *2*, τότε οι κορυφές *1,3,...,n-1* μπορούν να χρωματιστούν με το χρώμα *Α* και οι κορυφές *2,4,....,n* με το χρώμα *Β* οπότε ο χρωματικός αριθμός είναι 2.

Διαφορετικά, *n=2k+1* όπου *k* φυσικός αριθμός τουλάχιστον ίσος με *1*. Τότε οι κορυφές *1,3,...,n-1* μπορούν να χρωματιστούν με το χρώμα *Α,* οι κορυφές *2,4,....,n-2* με το χρώμα *Β* και η κορυφή *n* με το χρώμα *Γ* (αφού γειτνιάζει τόσο με την *1* η οποία έχει χρώμα *Α* όσο και με τη *n-1* η οποία έχει χρώμα *Β*). Συνεπώς ο χρωματικός αριθμός είναι *3*.

(γ) Παρατηρούμε ότι το γράφημα περιέχει τρίγωνα, δηλαδή κλίκες τάξης *3*, άρα χρωματίζεται με τουλάχιστον *3* χρώματα. Για να δείξουμε λοιπόν ότι ο χρωματικός του αριθμός είναι *3*, αρκεί να το χρωματίσουμε με (ακριβώς) τρία χρώματα *Α*,*Β* και *Γ*. Ένας τέτοιος χρωματισμός φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



4.2

(α) Ένα εύκολο παράδειγμα είναι το πλήρες γράφημα *3* κορυφών, δηλαδή το K_3. Το K_3 απαιτεί *3* χρώματα για το χρωματισμό του, δηλαδή έχει χρωματικό αριθμό *3*, ενώ η αφαίρεση οποιασδήποτε κορυφής δημουργεί ένα γράφημα δύο συνδεόμενων κορυφών, το οποία προφανώς έχει χρωματικό αριθμό *2*.

(β) Η απάντηση βασίζεται στην παρατήρηση ότι ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος είναι ο μέγιστος χρωματικός αριθμός οποιασδήποτε από τις συνεκτικές του συνιστώσες. Για παράδειγμα το δεύτερο από τα γραφήματα στην απάντηση του Ερωτήματος 2.2.β έχει ο χρωματικό αριθμό *3* επειδή μία από τις συνιστώσες του έχει χρωματικό αριθμό *3* και η άλλη *1*.

Για να δομήσουμε μία απόδειξη χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο, θεωρούμε ένα k-κρίσιμο γράφημα G το οποίο δεν είναι συνδεδεμένο. Σε αυτό ας θεωρήσουμε, βάση της παραπάνω παρατήρησης, μία συνεκτική συνιστώσα H με $\chi(G)=\chi(H)$ και μία δεύτερη συνιστώσα I για την οποία προφανώς θα ισχύει $\chi(I)\leq\chi(H)=\chi(G)$. Αφαιρώντας μία κορυφή v από τη συνιστώσα I, το γράφημα G-v εξακολουθεί και περιέχει (ολόκληρη) τη συνιστώσα H. Συνεπώς $\chi(G\text{-}v)= \chi(H)= \chi(G)$ άρα το γράφημα G δεν είναι k-κρίσιμο, άτοπο.

(γ) Προκειμένου να αποδείξουμε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο, θεωρούμε ένα k-κρίσιμο γράφημα G στο οποίο όμως ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών είναι k-*2*. Τότε, το G έχει κάποια κορυφή v βαθμού k-*2*. Αφού το G είναι k-κρίσιμο, υπάρχει ένας χρωματισμός του γραφήματος G-v με k-*1* χρώματα. Επαναφέροντας τότε την κορυφή v, το πολύ k-*2* χρώματα εμφανίζονται στους γείτονές της, συνεπώς υπάρχει κάποιο από τα k-*1* χρώματα διαθέσιμο για το χρωματισμό της v. Τότε όμως, χρησιμοποιώντας το χρωματισμό του G-v, έχουμε χρωματίσει το G με k-*1* χρώματα ενώ υποθέσαμε αρχικά ότι το G είναι k-κρίσιμο άρα έχει χρωματικό αριθμό k, άτοπο.

Άσκηση 5 (Ερώτημα 3, 5η Γ.Ε. 2006-2007)

α) Το ελάχιστο μήκος κύκλου ενός γραφήματος ονομάζεται **girth** του γραφήματος. Διευκρινίζεται ότι μια ανακύκλωση είναι κύκλος μήκους 1 και δύο παράλληλες μη-κατευθυνόμενες ακμές ορίζουν έναν κύκλο μήκους 2.

Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα G με girth 5. Να δείξετε ότι εάν κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον k, τότε το γράφημα έχει τουλάχιστον k^2+1 κορυφές. Για k = 2 και k = 3, βρείτε ένα τέτοιο γράφημα με ακριβώς $k^2 + 1$ κορυφές.

Συμβουλή: Χρησιμοποιήστε την ακόλουθη έννοια της γειτονιάς μιας κορυφής: N(x) είναι όλες οι κορυφές που απέχουν 1 βήμα από την κορυφή x. Υπολογίστε το μέγεθος της γειτονιάς $N_2(x)$ που περιλαμβάνει τις κορυφές με απόσταση 2 από την x.

β) Να δείξετε ότι ο ισομορφισμός γραφημάτων διατηρεί την ιδιότητα του σημείου άρθρωσης, δηλαδή εάν ένα γράφημα έχει σημείο άρθρωσης τότε και τα ισομορφικά με αυτό γραφήματα έχουν σημείο άρθρωσης. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του σημείου άρθρωσης από το ερώτημα 3, της εργασίας 4, 2006-07.

Ενδεικτική Απάντηση

5 α) Για οποιαδήποτε κορυφή X, η γειτονιά της N(X) θα περιέχει κ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ κορυφές, αφού (λόγω της τιμής του girth) στην ουσία δεν επιτρέπονται ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές στο γράφημα, δηλαδή, πρόκειται για ΑΠΛΟ μη κατευθυνόμενο γράφημα.

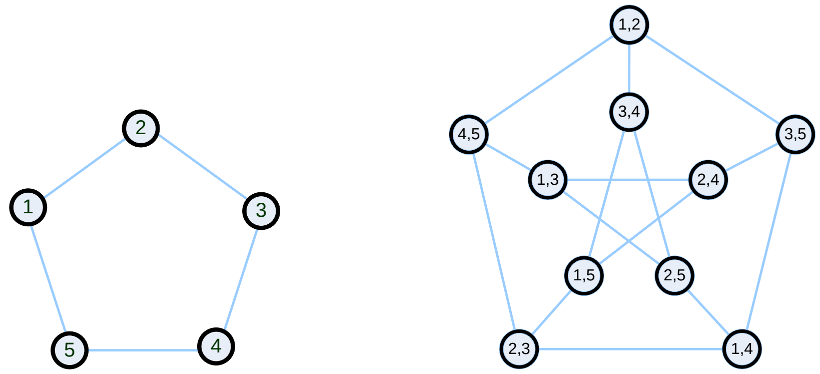
Επίσης, θεωρούμε ότι $κ \geq 2$: Για κ=1 ή για κ=0, η ύπαρξη κύκλου μήκους τουλάχιστον 5 εξασφαλίζει αυτόματα τουλάχιστον 5 κορυφές στο γράφημα και κατά συνέπεια το φράγμα ικανοποιείται τετριμμένα.

Έστω Y μια οποιαδήποτε κορυφή στη γειτονιά N(X) του X. Η Y έχει τουλάχιστον κ–1 άλλες (διαφορετικές μεταξύ τους, λόγω απλότητας) κορυφές με τις οποίες συνδέεται, πέρα από τη X. Έστω $Z \in N(Y) \setminus \{X\}$ μια τέτοια κορυφή. Η Z δε μπορεί να ανήκει στην N(X) γιατί τότε θα υπήρχε ως υπογράφημα το K_3 (τρίγωνο) στο γράφημα. Επιπλέον, για οποιαδήποτε κορυφή R του συνόλου $N(X) \setminus \{Y\}$ ισχύει ότι η ακμή RZ δεν ανήκει στο γράφημα Γ: Αν ανήκε, τότε θα υπήρχε στο γράφημα ο εξής κύκλος μήκους 4:

$$< X, XY, Y, YZ, Z, ZR, R, RX, X >$$

Άρα λοιπόν, το Γ έχει για κάθε κορυφή Y του N(X) τουλάχιστον κ–1 **μοναδικές** κορυφές στις οποίες συνδέεται η Y και ΔΕΝ συνδέονται οι κορυφές του $\{X\} \cup N(X) \setminus \{Y\}$. Συνολικά λοιπόν, υπάρχουν τουλάχιστον $1+κ+κ(κ-1) = κ^2+1$ διαφορετικές κορυφές στο Γ.

Παραδείγματα γραφημάτων με κ=2 και κ=3 και $κ^2+1$ κορυφές είναι ο κύκλος C_5 και το γράφημα Petersen που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



5 β)

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι αν ένα γράφημα Γ=(V,E) έχει σημείο άρθρωσης, τότε και οποιοδήποτε γράφημα Η=(V',E') που είναι ισομορφικό με το Γ επίσης έχει σημείο άρθρωσης. Έστω f: V → V' μια οποιαδήποτε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία κορυφών που αποδεικνύει τον ισομορφισμό των Γ και Η.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του σημείου άρθρωσης, όπως δόθηκε και στην 4η εργασία: Μια κορυφή ενός συνδεδεμένου, μη κατευθυνόμενου γραφήματος ονομάζεται ***σημείο άρθρωσης*** αν το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση αυτής της κορυφής και όλων των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή δεν είναι συνδεδεμένο.

Αυτό σημαίνει ότι αν ν είναι ένα σημείο άρθρωσης του Γ, τότε υπάχει ζεύγος διαφορετικών κορυφών α,β του Γ, τέτοιο ώστε όλα τα μονοπάτια σύνδεσης των κορυφών α και β να διέρχονται από την κορυφή ν. Θα δείξουμε ότι σε αυτή την περίπτωση και η εικόνα ν' = f(ν) της ν στο Η είναι σημείο άρθρωσης του Η, δηλαδή, υπάρχει ζεύγος διαφορετικών κορυφών (α',β'), για το οποίο ισχύει ότι οποιοδήποτε μονοπάτι σύνδεσής τους διέρχεται από την ν'. Θεωρούμε τις κορυφές α'=f(α) και β'=f(β). Για χάρη της απαγωγής σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μονοπάτι

$$Π' = < α', ε'_1 ,..., ε'_κ, β' >$$

που ενώνει τις α' και β' στο Η, αλλά δεν διέρχεται από την ν'. Η εικόνα $Π=f^{-1}(Π')$ του Π' είναι επίσης μονοπάτι στο Γ, που συνδέει τις κορυφές α και β:

1. Καμιά κορυφή του Π δεν εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές, αφού καμιά κορυφή του Π' δεν εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές,
2. για κάθε ακμή ε'=(κ',λ') που εμφανίζεται στο Π', το ζεύγος

   $$ε=(f^{-1}(κ'),f^{-1}(λ'))$$

   που εμφανίζεται στο Π είναι επίσης ακμή του Γ, η οποία ενώνει τις κορυφές $κ = f^{-1}(κ')$ και $λ = f^{-1}(λ')$, δηλαδή τις εικόνες των κορυφών κ' και λ' του Η που εμφανίζονται στο Π αμέσως πριν και αμέσως μετά την ε, και

3. αρχή και τέλος του μονοπατιού Π είναι οι κορυφές α = f^{-1}(α) και β = f^{-1}(β).

Επιπρόσθετα όμως, αφού στο Π' δεν εμφανίζεται η εικόνα ν' του ν, καταλήγουμε ότι θα πρέπει να μην εμφανίζεται και στο Π η κορυφή ν = f^{-1}(ν'). Δηλαδή, υπάρχει μονοπάτι σύνδεσης των α και β στο γράφημα Γ, που δεν διέρχεται από την κορυφή ν, πράγμα που βέβαια είναι ΑΤΟΠΟ.

Άσκηση 6 (Ερώτημα 2, 4η Γ.Ε. 2012-2013)

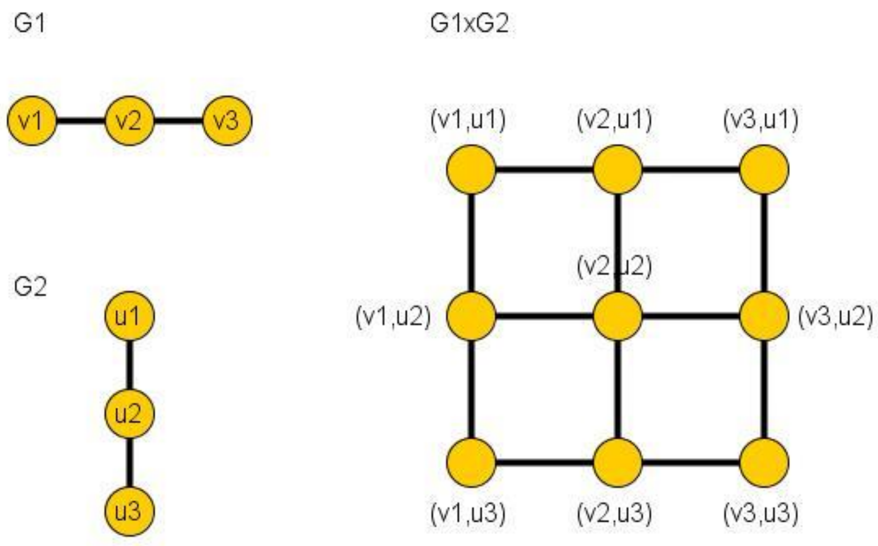
1) Έστω ότι τα G_1, G_2 είναι μονοπάτια με 3 κορυφές, δηλαδή $V(G_1)=\{v_1, v_2, v_3\}$, $E(G_1)=\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$, και $V(G_2)=\{u_1, u_2, u_3\}$, $E(G_2)=\{(u_1, u_2), (u_2, u_3)\}$.
   a. Σχεδιάστε το $G_1 \times G_2$.
   b. Υπάρχει κύκλος Euler στο $G_1 \times G_2$;
   c. Υπάρχει κύκλος Hamilton στο $G_1 \times G_2$;

2)
   a. Δείξτε μέσω αντιπαραδείγματος ότι δεν ισχύει η παρακάτω πρόταση: «Αν το γράφημα $G_1 \times G_2$ έχει κύκλο Hamilton τότε τουλάχιστον ένα από τα γραφήματα G_1, G_2 έχει κύκλο Hamilton.»
   b. Έστω ότι το γράφημα G_1 έχει περιττό πλήθος κορυφών. Δείξτε ότι το γράφημα $G_1 \times G_2$ έχει κύκλο Euler <u>αν και μόνο αν</u> τα G_1, G_2 έχουν και <u>τα δύο</u> κύκλο Euler.

Ενδεικτική Απάντηση

1)

a. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα γραφήματα G_1, G_2 και $G_1 \times G_2$.

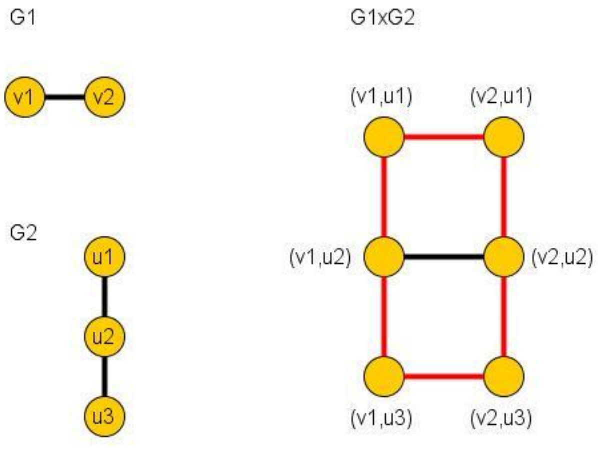


b. Γνωρίζουμε ότι για να υπάρχει κύκλος Euler σε ένα γράφημα πρέπει κάθε κορυφή να έχει άρτιο βαθμό. Στο γράφημα G_1 x G_2 υπάρχουν τέσσερις κορυφές με βαθμό 3: οι κορυφές (v_1,u_2), (v_2,u_1)¸ (v_2,u_3) και (v_3,u_2). Επομένως δεν υπάρχει κύκλος Euler.

c. Ας υποθέσουμε ότι στο γράφημα G_1 x G_2 υπάρχει κύκλος Hamilton. Εξ' ορισμού ο κύκλος Hamilton περνάει από όλες τις κορυφές του γραφήματος ακριβώς μία φορά. Για την κορυφή (v_1,u_1) που έχει βαθμό 2, ο κύκλος Hamilton θα περιέχει τις δύο ακμές που προσπίπτουν στην (v_1,u_1), δηλαδή τις ακμές ((v_1,u_1), (v_1,u_2)) και ((v_1,u_1), (v_2,u_1)). Το ίδιο ισχύει για όλες τις κορυφές βαθμού 2. Στο διπλανό σχήμα οι ακμές που ανήκουν υποχρεωτικά στον Hamilton κύκλο φαίνονται με κόκκινο χρώμα. Προκύπτει επομένως ότι αν υπάρχει κύκλος Hamilton στο γράφημα G_1 x G_2, τότε δεν μπορεί να διέρχεται από την κορυφή (v_2,u_2). Επομένως στο γράφημα G_1 x G_2 δεν υπάρχει κύκλος Hamilton.

2)

a. Παίρνουμε τα γραφήματα G_1, G_2 να είναι μονοπάτια με 2 και 3 κορυφές αντίστοιχα, δηλαδή $V(G_1)=\{v_1, v_2\}$, $E(G_1)=\{(v_1, v_2)\}$, και $V(G_2)=\{u_1, u_2, u_3\}$, $E(G_2)=\{(u_1, u_2), (u_2, u_3)\}$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα γραφήματα G_1, G_2 και G_1 x G_2. Παρατηρούμε ότι το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Hamilton (ο κόκκινος κύκλος στο σχήμα), ενώ κανένα από τα γραφήματα G_1 και G_2 δεν έχει κύκλο Hamilton. Επομένως ο ισχυρισμός «Αν το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Hamilton τότε τουλάχιστον ένα από τα γραφήματα G_1, G_2 έχει κύκλο Hamilton.» δεν είναι αληθής.



b.

⇒Καταρχήν θα δείξουμε ότι αν το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Euler τότε τα G_1, G_2 έχουν και τα δύο κύκλο Euler, με την υπόθεση ότι το γράφημα G_1 έχει περιττό πλήθος κορυφών. Έστω λοιπόν ότι το γράφημα G_1 έχει περιττό πλήθος κορυφών και ότι το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Euler. Γνωρίζουμε ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι στα γραφήματα G_1 και G_2 όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.

Έστω $v \in V(G_1)$ μία κορυφή του G_1 και $u \in V(G_2)$ μια κορυφή του G_2. Τότε η κορυφή (v,u) του $G_1 \times G_2$ έχει βαθμό

$$\mathbf{d((v,u))=d_1(v)+d_2(u)},$$

όπου $d_1(v)$ ο βαθμός της κορυφής v στο G_1 και $d_2(u)$ ο βαθμός της κορυφής u στο G_2. **Άρα οι βαθμοί d((*v*,*u*)) είναι όλοι άρτιοι αριθμοί για κάθε ζεύγος κορυφών** $v \in V(G_1)$ και $u \in V(G_2)$.

Θα δείξουμε ότι οι κορυφές του G_1 έχουν είτε όλες άρτιο βαθμό είτε όλες περιττό βαθμό. Πράγματι, έστω $v_1, v_2 \in V(G_1)$ δύο κορυφές του G_1 και $u \in V(G_2)$ μια κορυφή του G_2. Τότε οι $d((v_1,u))=d_1(v_1)+d_2(u)$ και $d((v_2,u))=d_1(v_2)+d_2(u)$ είναι άρτιοι αριθμοί. Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$d((v_1,u)) - d((v_2,u)) = d_1(v_1) - d_1(v_2).$$

Επειδή $d((v_1,u)) - d((v_2,u))$ είναι άρτιος αριθμός ως διαφορά δύο άρτιων αριθμών, τότε και $d_1(v_1) - d_1(v_2)$ είναι άρτιος αριθμός. **Συνεπώς $d_1(v_1)$, $d_1(v_2)$ είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί**, οπότε **οι κορυφές του G_1 έχουν είτε όλες άρτιο βαθμό είτε όλες περιττό βαθμό**.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: οι κορυφές του G_1 έχουν όλες περιττό βαθμό.

Από τη σχέση

$$\sum_{v \in V(G_1)} d_1(v) = 2|E(G_1)|$$

προκύπτει ότι αν όλες οι κορυφές του G_1 έχουν περιττό βαθμό, τότε το πλήθος τους θα πρέπει να είναι άρτιο, δηλαδή το G_1 θα είχε άρτιο πλήθος κορυφών. Όμως από την υπόθεση του ερωτήματος έχουμε ότι το γράφημα G_1 έχει περιττό πλήθος κορυφών, άρα η 1η περίπτωση δεν μπορεί να ισχύει.

2η περίπτωση: οι κορυφές του G_1 έχουν όλες άρτιο βαθμό και επομένως **το γράφημα G_1 έχει κύκλο Euler**.

Θα δείξουμε τώρα ότι και στο γράφημα G_2 όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Πράγματι, από τη σχέση

$$d((v,u))=d_1(v)+d_2(u)$$

με $d((v,u))$ και $d_1(v)$ άρτιους αριθμούς, προκύπτει ότι και $d_2(u)$ είναι άρτιος αριθμός, για κάθε κορυφή $u \in V(G_2)$. Συνεπώς όλες οι κορυφές του G_2 έχουν άρτιο βαθμό και επομένως **το γράφημα G_2 έχει κύκλο Euler**.

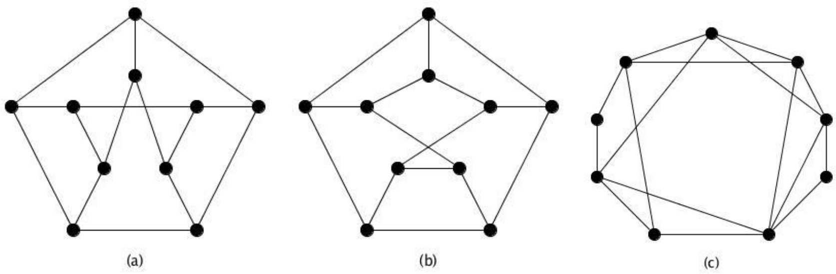
Καταλήξαμε ότι τα γραφήματα G_1 και G_2 έχουν και τα δύο κύκλο Euler.

⇐Αντίστροφα, έστω ότι τα γραφήματα G_1, G_2 έχουν και τα δύο κύκλο Euler. Θα δείξουμε ότι και το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Euler.

Εφόσον το γράφημα G_1 έχει κύκλο Euler, κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό, δηλαδή **$d_1(v)$ είναι άρτιος** για κάθε κορυφή $v \in V(G_1)$. Ομοίως, στο γράφημα G_2, κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό, δηλαδή **$d_2(u)$ είναι άρτιος** για κάθε κορυφή $u \in V(G_2)$. Τότε για την κορυφή (v,u) του G_1 x G_2 με βαθμό $d((v,u))=d_1(v)+d_2(u)$ προκύπτει ότι και **$d((v,u))$ είναι άρτιος**. Δηλαδή κάθε κορυφή του G_1 x G_2 έχει άρτιο βαθμό και επομένως **το γράφημα G_1 x G_2 έχει κύκλο Euler**.

Άσκηση 7 (Ερώτημα 3, 5η Γ.Ε. 2015-2016)

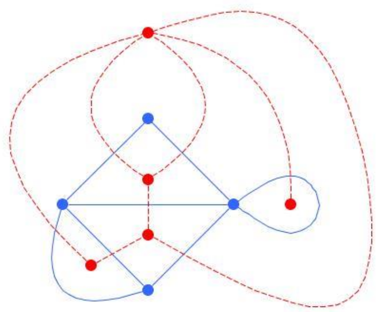
1. Εξετάστε ποια από τα παρακάτω γραφήματα είναι επίπεδα είτε δίνοντας μία επίπεδη αποτύπωση και επιβεβαιώνοντας τον τύπο του Euler ή αποδεικνύοντας τη μη-επιπεδότητα μέσω του Θ. Kuratowski.



2 Το **δυικό γράφημα** G^* ενός επιπέδου γραφήματος G ορίζεται ως εξής:

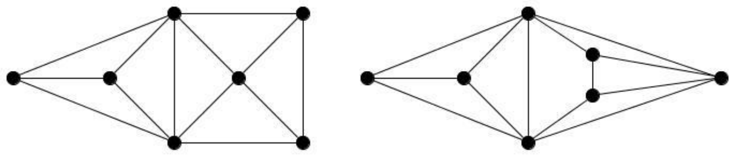
- για κάθε όψη του G υπάρχει μία κορυφή στο G^* και
- για κάθε ακμή του G υπάρχει μία ακμή στο G^* μεταξύ των κορυφών που αντιστοιχούν στις όψεις στις οποίες συμμετέχει η ακμή του G.

Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα, το G είναι το μπλε γράφημα και το δυικό του G^* είναι το κόκκινο.



Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε δεδομένο ότι το *G* είναι συνδεόμενο εάν και μόνο εάν το $G*$ είναι συνδεόμενο.

(α) Δείξτε ότι τα παρακάτω γραφήματα είναι ισομορφικά αλλά τα δυικά τους δεν είναι.



(β) Δείξτε ότι εάν το *G* είναι ένα επίπεδο συνδεόμενο γράφημα με *n* κορυφές, *m* ακμές και *o* όψεις ενώ οι αντίστοιχες τιμές για το G^* είναι n^*, m^* και o^* τότε ισχύει ότι

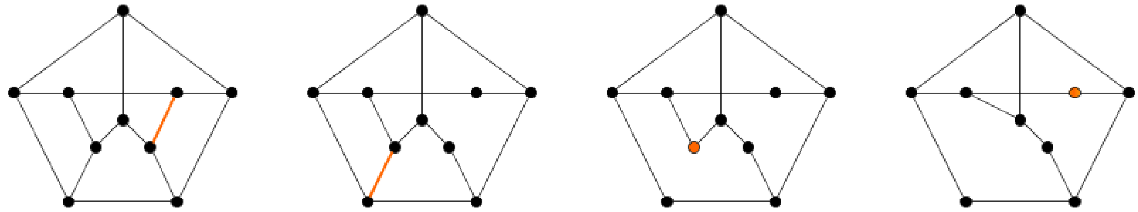
$$n^* = o, \;\; m^* = m, \text{ και } o^* = n$$

(γ) Δείξτε ότι εάν το *G* είναι ένα επίπεδο συνδεόμενο γράφημα τότε αυτό είναι διμερές εάν και μόνο εάν το G^* έχει κύκλο Euler.

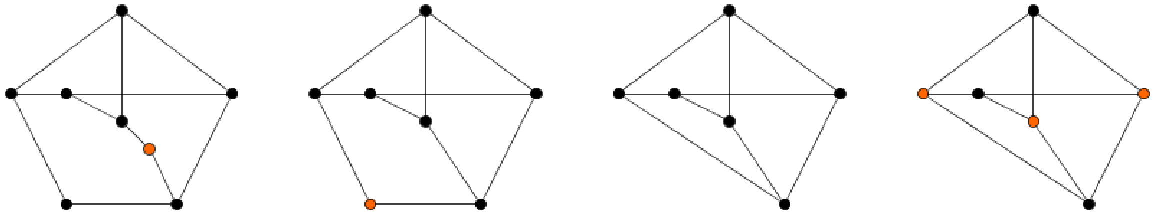
Ενδεικτική Απάντηση

1)

(α) Θα δείξουμε ότι το γράφημα δεν είναι επίπεδο, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.7 και την προσέγγιστη του Παραδείγματος 4.23 του Τόμου Α' (σελ. 146). Θα αφαιρούμε δηλαδή κάποια ακμή ώστε κάποια κορυφή να αποκτά βαθμό *2*, κατόπιν θα κάνουμε απλοποίηση σειράς σε μία κορυφή βαθμού *2* (λαμβάνοντας έτσι ένα ομοιομορφικό γράφημα) και θα επαναλάβουμε τη διαδικασία έως καταλήξουμε σε ένα γράφημα ισομορφικό του $K_{3,3}$.

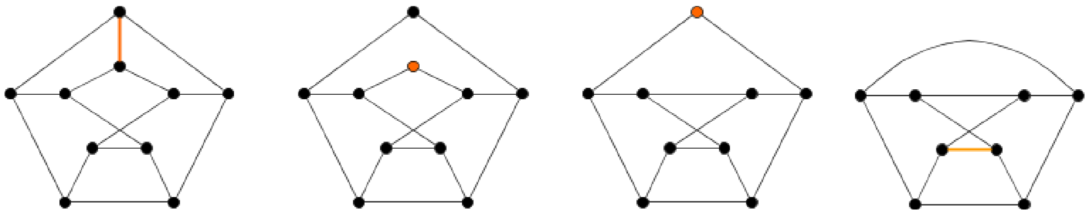


Το 1ο από αριστερά γράφημα είναι το αρχικό γράφημα έχοντας μετακινήσει λίγο μία κορυφή ώστε να τέμνονται πλέον δύο μόνο ακμές. Το 2ο προέκυψε αφαιρώντας μία ακμή και το 3ο αφαιρώντας μία επιπλέον. Αν στο 3ο γράφημα κάνουμε μία απλοποίηση σειράς λαμβάνουμε το 4ο. Στο 4ο γράφημα κάνουμε μία απλοποίηση σειράς, λαμβάνοντας το πρώτο από τα παρακάτω γραφήματα.

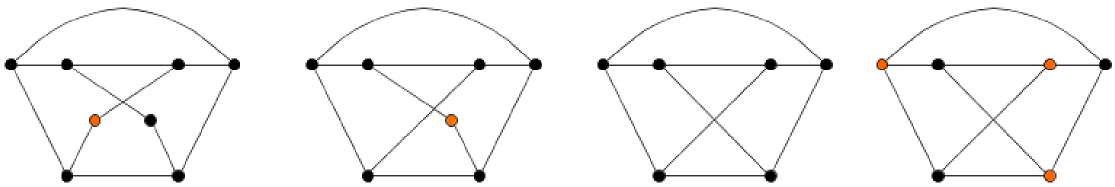


Το 2ο γράφημα προέκυψε κάνοντας μία ακόμη απλοποίηση σειράς και το 3ο κάνοντας μία τελεταία τέτοια απλοποίηση. Το 3ο γράφημα είναι πλέον ισομορφικό με το $K_{3,3}$ όπως φαίνεται ευκολότερα στο τελευταίο σχήμα όπου έχουμε χρωματίσει τις *3* κορυφές του ενός μέρους.

(β) Όπως και πριν, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 4.7 και την προσέγγιστη του Παραδείγματος 4.23 του Τόμου Α' (σελ. 146).

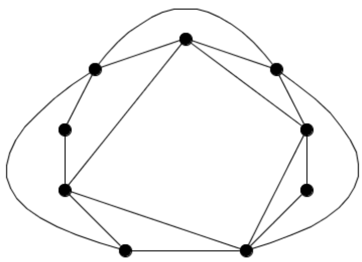


Το 1ο από αριστερά γράφημα είναι το αρχικό, το 2ο προέκυψε αφαιρώντας μία ακμή, το 3ο κάνοντας μία απλοποίηση σειράς και το 4ο κάνοντας μία ακόμη τέτοια απλοποίηση. Στο 4ο γράφημα διαγράφουμε μία ακμή, λαμβάνοντας το πρώτο από τα παρακάτω γραφήματα.



Το 2ο γράφημα προέκυψε κάνοντας μία απλοποίηση σειράς και το 3ο κάνοντας μία επιπλέον απλοποίηση σειράς. Το 3ο γράφημα είναι ισομορφικό με το $K_{3,3}$ όπως φαίνεται ευκολότερα στο τελευταίο σχήμα όπου έχουμε χρωματίσει τις *3* κορυφές του ενός μέρους

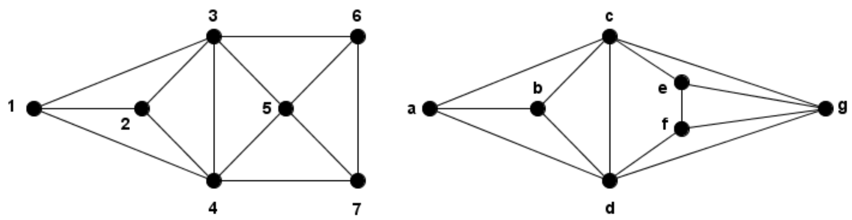
(γ) Το γράφημα είναι επίπεδο όπως φαίνεται από την παρακάτω αποτύπωσή του.



Το γράφημα αυτό έχει *o=9* όψεις (μαζί με την εξωτερική), *n=9* κορυφές και *m=16* ακμές, οπότε πράγματι ικανοποιεί τον τύπο του Euler αφού *n+o=9+9=18=m+2*.

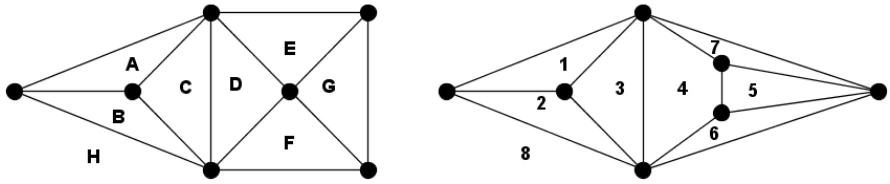
2)

(α) Ας αριθμήσουμε τις κορυφές των δύο γραφημάτων όπως στο παρακάτω σχήμα.

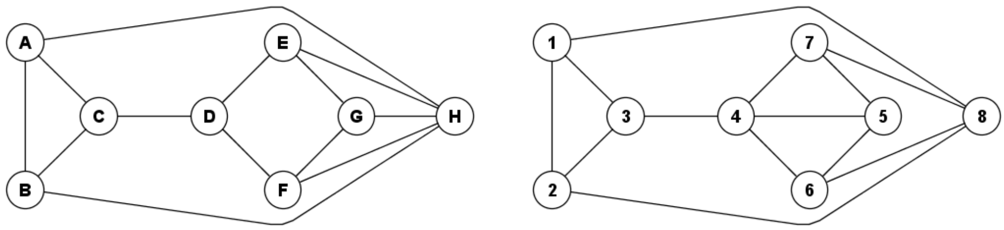


Παρατηρώντας τους βαθμούς των κορυφών, βλέπουμε ότι οι μοναδικές κορυφές βαθμού *4* είναι οι *2* και *5* στο αριστερό γράφημα και οι *b* και *g* στο δεξιό. Βλέπουμε επίσης ότι όλες οι υπόλοιπες *5* κορυφές έχουν βαθμό *3*, ωστόσο υπάρχουν σε κάθε γράφημα *2* κορυφές βαθμού *3* οι οποίες συνδέονται με αμφότερες τις κορυφές βαθμού *4:* αυτές είναι οι κορυφές *3* και *4* στο αριστερό γράφημα και οι *c* και *d* στο δεξιό. Αντιστοιχίζοντας αυτές τις τέσσερις κορυφές του αριστερού γραφήματος σε κορυφές του δεξιού, έχουμε πρακτικά ολοκληρώσει τον ισομορφισμό, ο οποίος είναι ο *1~a, 2~b, 3~c, 4~d, 5~g, 6~e, 7~f*. Συνεπώς τα δύο γραφήματα είναι ισομορφικά.

Για να κατασκευάσουμε τα δυϊκά των δύο γραφημάτων ας αριθμήσουμε αυτή τη φορά τις όψεις τους όπως στο παρακάτω σχήμα.



Με βάση τον ορισμό, προκύπτουν τα παρακάτω δυϊκά γραφήματα.



Τα δύο αυτά γραφήματα, παρότι οπτικά σχεδόν όμοια, δεν είναι ισομορφικά επειδή το αριστερό έχει μία κορυφή με βαθμό *5* (την *H*) ενώ το δεξιό καμία.

(β) Το ότι το γράφημα G^* έχει τόσες κορυφές όσες και οι όψεις του G, το ότι δηλαδή $n^*=o$, προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ενός δυϊκού γραφήματος. Παρατηρήστε ότι τόσο το G όσο και το G^* δεν είναι απαραίτητα απλά γραφήματα, μπορούν δηλαδή να έχουν ανακυκλώσεις ή παράλληλες ακμές. Τονίζουμε επίσης ότι ο τύπος του Euler εφαρμόζεται και σε μη-απλά συνδεόμενα γραφήματα, όπως μπορείτε να διαπιστώσετε από το Θεώρημα 4.5 του Τόμου Α΄ (σελ. 146) αλλά και την απόδειξή του.

Παρατηρούμε ότι κάθε ακμή στο G ανήκει σε ακριβώς δύο όψεις, με την σχετικά ειδική περίπτωση μία ακμής-γέφυρας, την οποία θεωρούμε ότι ανήκει δύο φορές στην όψη εντός της οποίας εμφανίζεται (οπότε στο G^* δημιουργεί μία ανακύκλωση). Ο ορισμός ενός δυϊκού γραφήματος συνεπάγεται ότι κάθε ακμή του G, εφόσον ανήκει σε δύο όψεις, δημιουργεί μία μόνο ακμή στο G^* μεταξύ των κορυφών οι οποίες αντιστοιχούν στις όψεις αυτές. Αντίστροφα, κάθε ακμή στο G^* δημιουργείται από μία μόνο ακμή του G, παρατηρώντας ότι αν δύο όψεις του G μοιράζονται περισσότερες από μία ακμή τότε οι αντίστοιχες κορυφές του G^* συνδέονται με ισάριθμες παράλληλες ακμές. Συνεπώς, τα δύο γραφήματα έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών, δηλαδή $m^*=m$.

Τέλος, θεωρώντας ότι το G^* είναι συνδεόμενο, αφού και το G είναι συνδεόμενο (όπως διατυπώνεται στην εκφώνηση), το ότι $o^*=n$ προκύπτει εύκολα εφαρμόζοντας τον τύπο του Euler στο G ($n=m-o+2$) και στο G^* ($o^*=m^*-n^*+2$) και λαμβάνοντας υπόψη, όπως ήδη αποδείχτηκε, ότι $n^*=o$ και $m^*=m$:

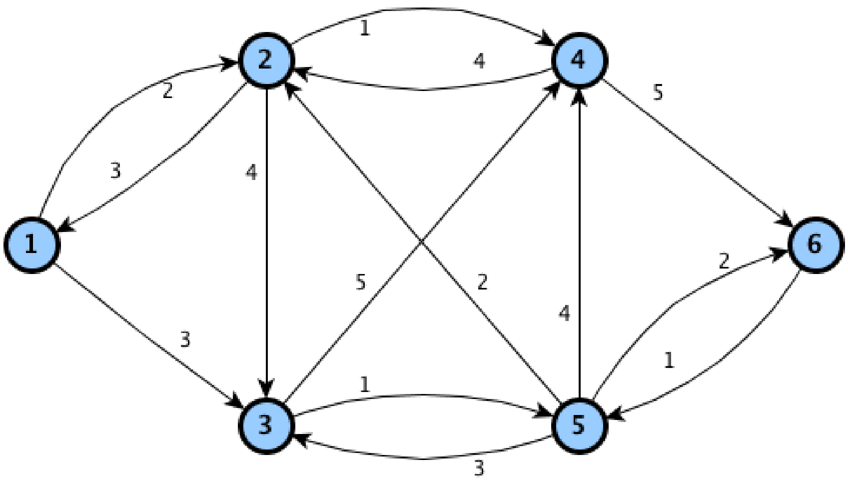
$$n=m-o+2= m^*-n^*+2= o^*.$$

(γ) ($\Leftarrow$) Θεωρήστε ένα επίπεδο συνδεόμενο γράφημα G το οποίο είναι και διμερές. Αυτό σημαίνει ότι κάθε όψη του G ορίζεται από ένα κύκλο άρτιου μήκους (δείτε διαφάνεια 34 στην παρουσίαση της 4ης ΟΣΣ). Από τον ορισμό του δυϊκού γραφήματος G^*, κάθε κορυφή του G^* αντιστοιχεί σε μία όψη του G και, κυρίως, ο βαθμός μίας κορυφής του G^* ισούται με το μήκος του κύκλου που ορίζει την αντίστοιχη όψη του G. Αυτό προκύπτει επειδή κάθε κορυφή του G^* έχει ένα γείτονα για κάθε όψη του G η οποία έχει κοινή ακμή με την όψη στην οποία η κορυφή αυτή αντιστοιχεί. Τότε όμως, το ότι το G είναι διμερές, άρα κάθε όψη του ορίζεται από ένα κύκλο άρτιου μήκους, συνεπάγεται ότι κάθε κορυφή του G^* έχει άρτιο βαθμό, οπότε και το G^* έχει κύκλο Euler βάσει του Θεωρήματος 4.1 του Τόμου Α΄ (σελ. 109) και της υπόθεσης ότι το G^* είναι συνδεόμενο αφού και το G είναι συνδεόμενο.

($\Rightarrow$) Θεωρήστε ένα επίπεδο συνδεόμενο γράφημα G του οποίου το δυϊκό γράφημα G^* έχει κύκλο Euler. Βάσει του Θεωρήματος 4.1 του Τόμου Α΄ και της υπόθεσης ότι το G^* είναι συνδεόμενο, αφού και το G είναι συνδεόμενο, κάθε κορυφή του G^* έχει άρτιο βαθμό. Όπως και πριν, επειδή ο βαθμός μίας κορυφής του G^* ισούται με το μήκος του κύκλου που ορίζει την αντίστοιχη όψη του G, αυτό συνεπάγεται ότι κάθε κύκλος του G έχει άρτιο μήκος. Άρα το G είναι διμερές (δείτε διαφάνεια 34 στην παρουσίαση της 4ης ΟΣΣ).

Άσκηση 8 (Ερώτημα 4, 5η Γ.Ε. 2016-2017)

Θεωρήστε το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ όπου τα βάρη στις ακμές αντιστοιχούνε σε αποστάσεις μεταξύ τους. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο του Dijkstra για τα παρακάτω ερωτήματα.



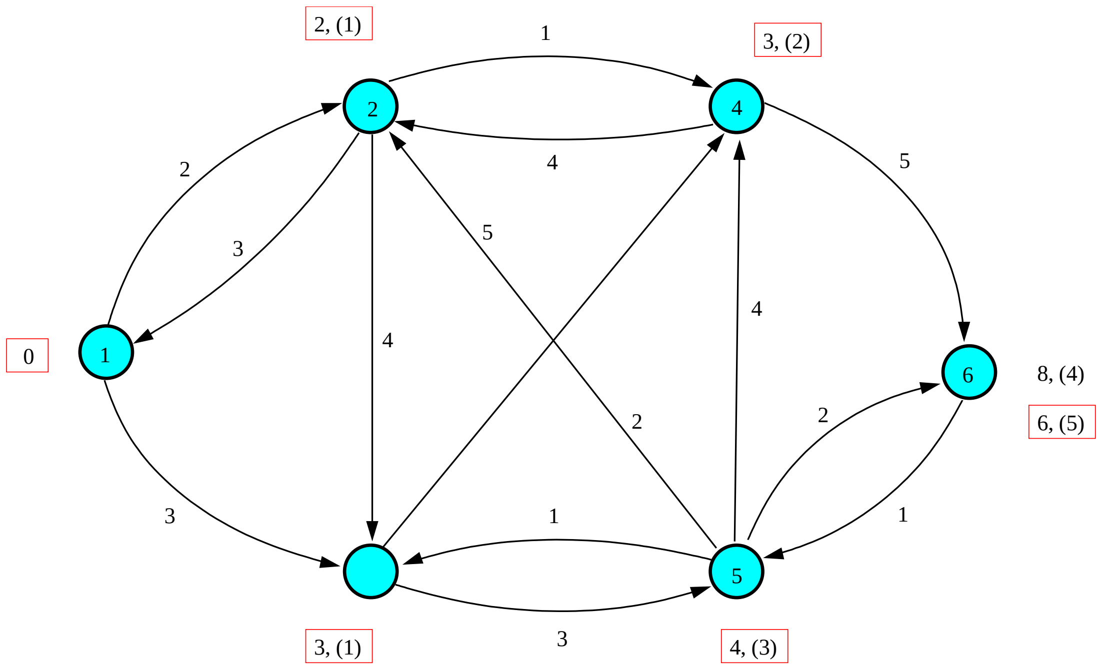
a. Βρείτε όλα τα συντομότερα μονοπάτια από την κορυφή 1 ως προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές. Η απάντηση σας να αναφέρει τόσο την σύσταση των μονοπατιών σχετικά με τις κορυφές που τα ορίζουν όσο και τη συνολική απόσταση.

b. Βρείτε σε κάθε περίπτωση εκείνη την κορυφή $v \in V(G)$ για την οποία ισχύει ότι:
   1. το άθροισμα των αποστάσεων όλων των συντομότερων $v - t$-μονοπατιών για κάθε $t \in V(G)$ είναι το ελάχιστο.
   2. το μέγιστο συντομότερο $v - t$-μονοπάτι για κάθε $t \in V(G)$ είναι το ελάχιστο.

c. Περιγράψτε ένα αλγόριθμο ο οποίος για κάθε διατεταγμένο σύνολο κορυφών $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ του $V(G)$ όπου τα v_i είναι διακριτά, θα επιστρέφει την απόσταση του συντομότερου $v_1 - v_k$ μονοπατιού το οποίο περνάει από όλες τις κορυφές στο σύνολο $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ (όχι κατά ανάγκη με αυτή την σειρά).

Ενδεικτική Απάντηση

a. Η εφαρμογή του αλγόριθμου του Dijkstra στο γράφημα αντικατοπτρίζεται στο παρακάτω γράφημα όπου με κόκκινο τετράγωνο αναγράφονται οι ετικέτες των αντίστοιχων κορυφών που έγιναν μόνιμες και παρένθεση η προηγούμενη κορυφή στο μονοπάτι που είναι υπεύθυνη για την τιμή της ετικέτας. Υπενθυμίζουμε ότι η τιμή κάθε μόνιμης ετικέτας για κάποια κορυφή v_k αντιστοιχεί στο μήκος του συντομότερου $v_1 - v_k$ μονοπατιού .



Σύμφωνα με το παραπάνω γράφημα θα έχουμε τα εξής συντομότερα μονοπάτια με τα αντίστοιχα μήκη:

$v_1 - v_2$: (v_1, v_2) μήκος: 2

$v_1 - v_3$: (v_1, v_3) μήκος: 3

$v_1 - v_4$: (v_1, v_2, v_4) μήκος: 3

$v_1 - v_5$: (v_1, v_3, v_5) μήκος: 4

$v_1 - v_6$: (v_1, v_3, v_5, v_6) μήκος: 6

b. Έστω ότι ορίζουμε ένα πίνακα $P = (p_{ij})$ με 6 γραμμές και 6 στήλες τέτοιο ώστε

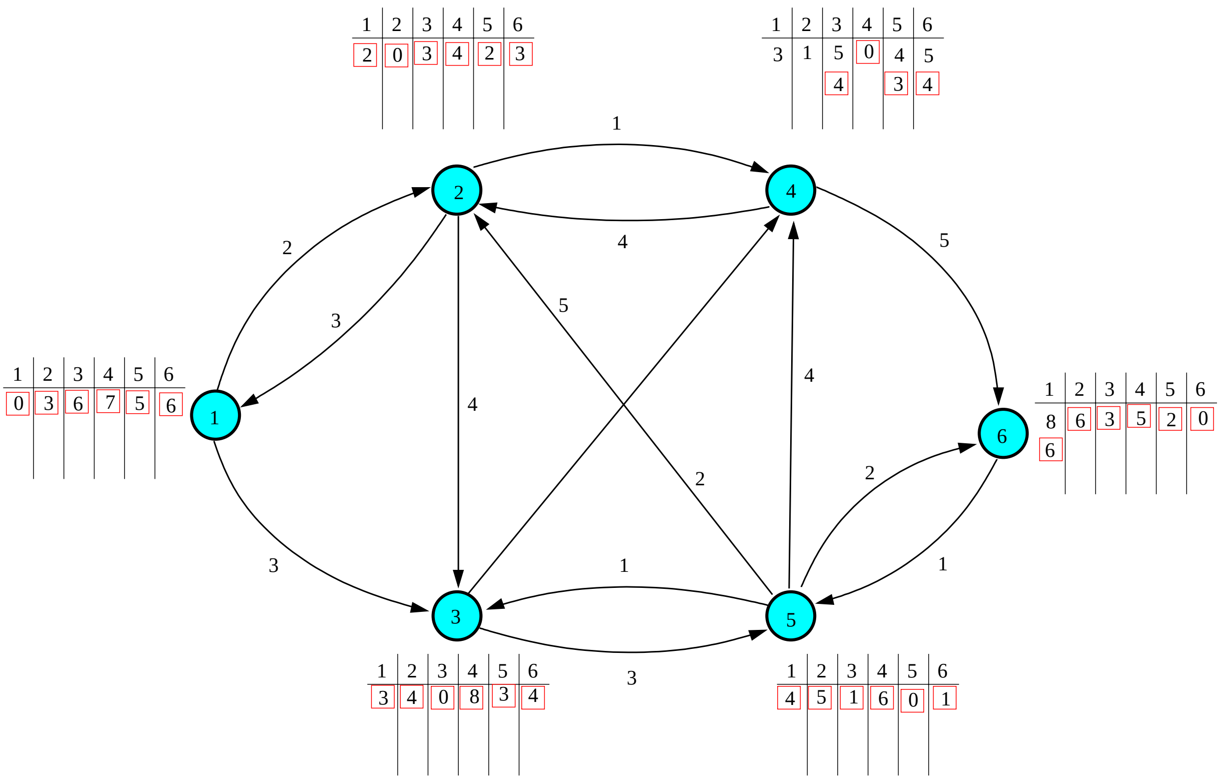
$$p_{\boldsymbol{ij}} = \text{μήκος συντομότερου } v_i - v_j \text{ μονοπατιού}$$

Τότε θα έχουμε:

1. Η κορυφή v_i για την οποία ισχύει ότι το άθροισμα των αποστάσεων όλων των συντομότερων $v_i - v_j$-μονοπατιών για κάθε $v_j \in V(G)$ είναι το ελάχιστο θα είναι εκείνη που ελαχιστοποιεί το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$

2. Η κορυφή v_i για την οποία ισχύει το μέγιστο συντομότερο $v_i - v_j$-μονοπάτι για κάθε $v_j \in V(G)$ είναι το ελάχιστο θα είναι εκείνη που ελαχιστοποιεί το μέγιστο στοιχείο κάθε γραμμής του πίνακα $max_j\ p_{ij}$ για κάθε $v_j \in V(G)$.

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα P πρέπει να υπολογίσουμε τα μήκη όλων των συντομότερων $v_i - v_j$ μονοπατιών για κάθε ζεύγος κορυφών στο γράφημα. Αυτό το κάνουμε με 6 εφαρμογές του αλγόριθμου Dijkstra για κάθε κορυφή όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα.



Σε κάθε κορυφή αναφέρουμε τις ετικέτες όπως διαμορφώνονται με την εκάστοτε εφαρμογή του αλγορίθμου για κάθε κορυφή του γραφήματος. Για παράδειγμα για τον υπολογισμό των συντομότερων μονοπατιών από την κορυφή 5 κοιτάμε για τις μόνιμες ετικέτες στην στήλη 5 σε κάθε κορυφή, οπότε τα μήκη τα είναι:

5-1 : 5

5-2 : 2

5-5 : 3

5-4 : 3

6-6 : 2

Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε το πίνακα P ώς εξής

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 8 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 18 & 6 \\ 19 & 6 \\ 17 & 6 \\ 30 & 8 \\ \color{red}{15} & \color{red}{5} \\ 18 & 6 \end{matrix}$$

όπου οι δύο επιπλέον στήλες αντιστοιχούνε στο άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα και στο μέγιστο κάθε γραμμής του πίνακα, και με κόκκινο χρώμα οι ελάχιστες τιμές. Οπότε βλέπουμε ότι εκείνη η κορυφή που ικανοποιεί τα 1. και 2. του ερωτήματος είναι η κορυφή 5.

c. Εφόσον το συντομότερο $v_1 - v_k$ μονοπάτι πρέπει να περιέχει όλες τις κορυφές στο σύνολο $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ σημαίνει ότι αυτές οι κορυφές θα εμφανίζονται με κάποια διάταξη $\left(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}\right)$ στο μονοπάτι. Συνεπώς το μήκος του συντομότερου μονοπατιού $\left(v_1, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_k\right)$ θα είναι το άθροισμα από τα μήκη των συντομότερων μονοπατιών $v_1 - v_{i_1},\ v_{i_1} - v_{i_2}, \dots,\ v_{i_{k-1}} - v_k$.

Ένας αλγόριθμος ολικής απαρίθμησης για την εύρεση τέτοιου μονοπατιού θα ήταν ο εξής:

1. Υπολόγισε το πίνακα $P = (p_{ij})$ όλων των ζευγαριών συντομότερων μονοπατιών όπως στο υποερώτημα **b.**
2. Για κάθε μετάθεση $\left(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}\right)$ του συνόλου $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ άθροισε
$$p_{1i_1} + p_{i_1 i_2} + \cdots + p_{i_{k-1} i_k}$$
3. Επέλεξε το ελάχιστο άθροισμα.

Άσκηση 9 (Ερώτημα 2, 5η Γ.Ε. 2011-2012)

Σε ένα απλό, μη-κατευθυνόμενο γράφημα, δίνονται δύο κορυφές s,t και ένα μη-αρνητικό μήκος για κάθε ακμή.

(α) Προτείνετε έναν αλγόριθμο, ο οποίος υπολογίζει το δεύτερο συντομότερο s-t μονοπάτι, και αποδείξτε την ορθότητά του.

(β) Προτείνετε έναν αλγόριθμο, ο οποίος δέχεται ως είσοδο τις τελικές ετικέτες του αλγορίθμου του Dijkstra και παράγει ως έξοδο ένα συντομότερο s-t μονοπάτι. Επίσης, αποδείξτε την ορθότητά του.

Ενδεικτική Απάντηση

α)

Ας θεωρήσουμε ότι διαθέτουμε ήδη κάποιον αλγόριθμο (πχ, μια υλοποίηση του Dijkstra), που δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα G=(V,E), ένα ζεύγος κορυφών s,t$\in$V, και μια συνάρτηση μη αρνητικών μηκών για τις ακμές $\delta : E \rightarrow \mathbf{R}_{+}$, κι επιστρέφει τόσο τις (τελικές) <u>ετικέτες</u> d(u) αποστάσεων από τη ρίζα s, όσο και τον δείκτη parent(u) προς την <u>κορυφή – γονιό</u> του u κατά μήκος του συντομότερου μονοπατιού από την s, για όλες τις κορυφές που είναι προσβάσιμες από την s, μέχρι και την κορυφή t (στο σημείο αυτό ο κλασσικός Dijkstra τερματίζει).

Αναζητάμε το 2ο συντομότερο μονοπάτι στο G. Δηλαδή, εξαιρουμένου του συντομότερου st-μονοπατιού P1 (πχ, που εντοπίζει ο Dijkstra) επιθυμούμε να βρούμε το καλύτερο st-μονοπάτι P2 $\neq$ P1 στο γράφημα. Σημειώνεται ότι το P2 δεν είναι απαραίτητο να έχει μήκος αυστηρά μικρότερο του μήκους του P1. Ενδέχεται τα P1 και P2 να έχουν το ίδιο μήκος, όταν υπάρχουν περισσότερα από ένα συντομότερα st-μονοπάτια στο G.

Η λύση που εύκολα μπορεί κάποιος να υιοθετήσει για τον υπολογισμό του <u>2ου συντομότερου</u> st-μονοπατιού στο G, δίνεται σε μορφή ψευδοκώδικα στο ακόλουθο σχήμα. Η βασική φιλοσοφία του αλγορίθμου είναι, αφού εντοπίσει ένα ελάχιστο st-μονοπάτι P1, να αφαιρεί μία-προς-μία κάθε ακμή e του P1 και στη συνέχεια να υπολογίσει ένα ελάχιστο st-μονοπάτι στο γράφημα G – e που απομένει. Πριν ξεκινήσουμε όμως αυτή τη διαδικασία, πρέπει να <u>ανακατασκευάσουμε</u> το συντομότερο st-μονοπάτι P1 που υπολογίζει ο Dijkstra, γιατί ο συγκεκριμένος αλγόριθμος επιστρέφει μόνο τις τελικές ετικέτες και (ενδεχομένως) το γονιό κάθε κορυφής στο παραγόμενο δένδρο συντομότερων μονοπατιών από το s. Αυτό ακριβώς κάνει ο βρόχος (3) στον ψευδοκώδικα. Στη συνέχεια, υπολογίζεται κάθε φορά το συντομότερο st-μονοπάτι (έστω P2) στο G – e, για κάθε ακμή e του P1. Το P2 συγκρίνεται (ως προς το μήκος του) με το καλύτερο 2ο μονοπάτι που έχουμε εντοπίσει μέχρι τώρα, κι αν είναι συντομότερο τότε φυλάσσεται αυτό ως η καλύτερη λύση μέχρι στιγμής. Για την ακρίβεια, φυλάσσεται το σύνολο ακμών 2nd_shortest_path που απαρτίζουν το 2ο καλύτερο st-μονοπάτι μέχρι τώρα, ενώ το μήκος του φυλάσσεται στη μεταβλητή 2nd_dist(t). Όλη αυτή η διαδικασία αναζήτησης του 2ου συντομότερου st-μονοπατιού γίνεται στον βρόχο (5) του ψευδοκώδικα.

```
1.    [parent, d] = Dijkstra(G,s,t,δ);
2.    u =t; shortest_path = {};
```

```
3.     WHILE u ≠ s DO                          // προσδιορισμός συντομότερου st-μονοπατιού
3.1        shortest_path = { (parent(u),u) } U shortest_path;
3.2        u = parent(u);
3.3    END WHILE
4.     2nd_dist(t) = ∞; 2nd_shortest_path = {};
5.     FORALL e ∈ shortest_path DO
5.1        [2nd_path , 2nd_d] = Dijkstra(G–e , s , t , δ) // υπολογισμός ελάχιστου st-μονοπατιού στο G – e
5.2        IF 2nd_d(t) < 2nd_dist(t)           // βρέθηκε καλύτερο st-μονοπάτι
5.3        THEN { 2nd_dist(t) = 2nd_d ; 2nd_shortest_path = 2nd_path; }
5.4    END FORALL
6.     RETURN(2nd_shortest_path,2nd_dist);
```

Ορθότητα. Η ορθότητα του παραπάνω αλγορίθμου είναι προφανής από το γεγονός ότι το 2ο συντομότερο μονοπάτι θα πρέπει να διαφέρει από το συντομότερο st-μονοπάτι P1 του G τουλάχιστον σε μια ακμή του. Ο αλγόριθμος κάνει εξαντλητική αναζήτηση αφαιρώντας διαδοχικά όλες (μία προς μία) τις ακμές του P1 και αναζητώντας συντομότερο st-μονοπάτι στο εκάστοτε γράφημα που απομένει. Το καλύτερο από αυτά τα εναλλακτικά μονοπάτια επιστρέφεται ως το 2ο συντομότερο st-μονοπάτι του G.

β)

Για την ανακατασκευή ενός συντομότερου st-μονοπατιού από τις (τελικές) τιμές ετικετών που παράγει ο Dijkstra, εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα των **βέλτιστων επιμέρους λύσεων** που ισχύει για τα συντομότερα μονοπάτια σε γραφήματα με μη αρνητικά μήκη στις ακμές, καθώς και την ορθότητα του ίδιου του Dijkstra. Το σκεπτικό είναι το εξής: Ξεκινώντας από τον προορισμό t, επιλέγουμε κάθε φορά εκείνη την ακμή που οδηγεί στον τρέχοντα κόμβο v, από μια κορυφή u που εξασφαλίζει ότι d(v) = d(u) + δ(uv). Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν φτάσουμε στην αφετηρία s. Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου είναι ο εξής:

ΕΙΣΟΔΟΣ: $G = (V,E)$; $s,t \in V$; $\mathbf{d} = (\, d(v) = dist(s,v)\,)_{v\in V}$; $\delta : E \rightarrow \mathbf{R}_+$

ΕΞΟΔΟΣ: Το σύνολο ακμών που απαρτίζουν ένα συντομότερο st-μονοπάτι.

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ:

```
1.     u = t; shortest_path = {};
```

```
2.      WHILE u ≠ s DO          // προσδιορισμός συντομότερου st-μονοπατιού, ρ*
2.1         FORALL vu ∈ E DO    // αναζήτηση ακμής από γονιό προς u στο ρ*
2.1.1           IF d(u) = d(v) + δ(vu)
2.1.2           THEN { shortest_path = { vu } U shortest_path; BREAK; }
2.1.3       END FORALL
2.2     END WHILE
```

<u>Ορθότητα</u>: Κατά μήκος του συντομότερου st-μονοπατιού p*, προφανώς ισχύει ότι για κάθε κόμβο $u \in V$(p*), dist(s,u) = dist(s,parent(u)) + δ(parent(u),u), αφού και το πρόθεμα του ρ* από την s μέχρι την parent(u) είναι συντομότερο μονοπάτι μέχρι την parent(u) [Βούρος, Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.13].

Από την άλλη πλευρά, ας υποθέσουμε ότι για μια ακμή vu ισχύει ότι dist(s,u) = dist(s,v) + δ(vu). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει συντομότερο st-μονοπάτι που περιλαμβάνει τη vu. Κατ' αρχήν γνωρίζουμε (από τον τρόπο ορισμού των συντομότερων αποστάσεων dist(s,v) κορυφών v από τη ρίζα s) ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα sv-μονοπάτι ρ (ελάχιστου στο γράφημα) μήκους δ(ρ) = dist(s,v). Το μονοπάτι ρ' = ρ U {vu} είναι προφανώς ένα su-μονοπάτι.

Αν υπήρχε αυστηρά συντομότερο su-μονοπάτι από το ρ', έστω σ, τότε θα ίσχυε ότι δ(σ) < δ(ρ') = dist(s,u) = dist(s,v) + δ(vu) $\Rightarrow$ dist(s,v) > δ(σ) – δ(vu) ≥ δ(σ), λόγω της μη αρνητικότητας της συνάρτησης μηκών δ. Δηλαδή, καταλήξαμε ότι υπάρχει (πραγματικό) sv-μονοπάτι σ, μήκους δ(σ) αυστηρά μικρότερου από dist(s,v). Αυτό όμως δε μπορεί να συμβαίνει, αφού το d(v) = dist(s,v) είναι η τελική ετικέτα που υπολογίστηκε από τον Dijkstra για τον κόμβο v, και γνωρίζουμε ήδη ότι εκφράζει το μήκος του ελάχιστου sv-μονοπατιού στο γράφημα.