

Pràctica 2: Quadratura i mètode de Newton

Les instruccions precises de què (i quan) cal entregar com a resultat d'aquesta pràctica s'expliquen al final d'aquest document.

En aquesta pràctica combinarem el càlcul d'integrals amb el de zeros de funcions.

Integració pel mètode dels trapezis

Donada una funció $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ volem trobar una aproximació de $\int_a^b f(x) dx$. Per a això podem usar el mètode dels trapezis compost fent una partició de l'interval $[a, b]$ en N subintervalls iguals. Llavors tenim que

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_N = \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} f(a + ih_N) + \frac{1}{2}f(b) \right] h_N,$$

on $h_N = (b - a)/N$. Una manera de trobar una bona aproximació de la integral és començar amb $N = 2$ i anar multiplicant per dos el nombre de subintervalls fins que la diferència $|T_{2^n} - T_{2^{n-1}}|$ sigui més petita que una certa tolerància, i en tal cas donarem per bona l'aproximació donada per T_{2^n} .

- Feu una funció de prototipus

```
double trapezis(int N, double a, double b)
```

que calculi l'aproximació T_N de l'integral $\int_a^b f(x) dx$. Aquesta funció cridarà a la seva vegada una funció

```
double f(double x)
```

que ens permetrà avaluar la funció f .

- Feu un programa principal tal que llegeixi **a**, **b**, la tolerància **tol** i el nombre **nmax** que ens indicarà el nombre màxim de subdivisions que fem de l'interval $[a, b]$. El programa cridarà la funció **trapezis** per a $N = 2, 2^2, \dots$, fins que $|T_N - T_{N/2}| < \text{tol}$, o fins que $N = 2^{\text{nmax}}$. En el primer cas escriurà el valor aproximat de la integral, i en el segon cas donarà un avís que la integral no s'ha pogut trobar.

Com a exemple podeu calcular la integral $\int_0^\pi \sin x dx$.

Segona part: Mètode de Newton

Donada una funció $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i un nombre real c , volem trobar les solucions de l'equació $F(x) = c$. Si definim $G(x) = F(x) - c$, podem fer el següent: a) Dividim l'interval inicial en n

subinterval·s iguals: $[a, b] = \cup_{i=0}^{n-1} [a_i, a_{i+1}]$, on $a_i = a + i(b - a)/n$. b) Avaluem $G(a_i)$, començant per $i = 0, 1, 2, \dots$. Si, per un cert i , $G(a_{i-1})G(a_i) < 0$ usem el mètode de Newton per a trobar un zero en l'interval $[a_i, a_{i+1}]$, donant com a valor inicial $x_0 = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)$, i continuem calculant $G(a_{i+1})$, $G(a_{i+2}), \dots$ fins que trobem un altre canvi de signe. Acabem el procés quan $i = n$ o ja hem calculat tots els zeros que volíem.

- Implementeu una funció per trobar zeros de $F(x) - c$, on F és una funció real de variable, real pel mètode de Newton. La seva capçalera serà:

```
int Newton(double *x, double tol, int itmax, double c);
```

La funció rebrà com a paràmetres l'aproximació inicial `*x`, el nombre màxim d'iterats `itmax`, la tolerància `tol` i la constant `c`. Dins de la funció `Newton` es cridaran dues funcions de capçalera:

```
double F(double x);
```

```
double dF(double x);
```

que s'usaran per calcular el valor de la funció F i de la seva derivada F' , respectivament.

Per a implementar el mètode de Newton cal usar la fórmula iterativa:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i) - c}{F'(x_i)},$$

on x_0 és el valor que rep la funció `Newton` en la variable `x`.

La funció `Newton` retornarà 0 si, per un cert iterat $i \leq n$, $|x_i - x_{i-1}| \leq \text{tol}$ o $|F(x_i) - c| \leq \text{tol}$, i retornarà 1 en cas contrari.

- Dissenyeu un programa principal (la funció `main`) que llegeixi els extrems d'un interval $[a, b]$ en què volem trobar un nombre màxim m de solucions de $F(x) = c$ fent servir n subinterval·s. El programa cridarà a la funció `Newton` per a trobar aquestes solucions.

Com a exemple podeu calcular els zeros del polinomi $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, que són tots reals i es troben a l'interval $[-1, 3]$.

Tercera part: Aplicació.

Volem resoldre el problema següent: Donada una funció f positiva i un nombre $c > 0$, trobar un nombre real positiu x tal que $\int_{-x}^x f(y) dy = c$. Per això, fem $F(x) = \int_{-x}^x f(y) dy$.

- A partir del programa principal del primer apartat, feu una funció de prototipus

```
double F(double x)
```

que calculi l'aproximació de la integral $\int_{-x}^x f(y) dy$ usant `tol` = $1e-8$ i `nmax` = 30.

- Feu una funció de prototipus

```
double dF(double x)
```

que calculi la derivada $F'(x)$ de la funció anterior, és a dir, $f(x) + f(-x)$.

- Useu el programa principal i les funcions anteriors, així com una funció f de prototipus

```
double f(double x),
```

per resoldre el problema proposat.

Com a exemple podeu calcular $x > 0$ tal que $\int_{-x}^x \sin^2 y dy = 1$.

Instruccions per a l'entrega

Abans de començar a fer la pràctica heu de crear un subdirectori anomenat:

Grup-Cognom1Cognom2Nom-X

on

- Grup: és el vostre grup de pràctiques en majúscules (pot ser A, B, C o D).
- Cognom1Cognom2Nom: és el vostre primer cognom, segon cognom i nom.
- X: identifica el número de la pràctica (1, 2, 3, etc).

Exemple: **A-LopezPerezMaria-1** correspon a una alumna del grup A que fa la pràctica 1.

Aquest directori contindrà els arxius .c corresponents a les diverses parts i un arxiu .h.

- Arxiu **prac2funs.c** que conté les funcions **trapezis**, **Newton**.
- Arxiu **prac2funs.h** que conté les capçaleres de les funcions **trapezis**, **Newton**, **f**, **F** i **dF**.
- Arxiu **prac2a.c** que conté el programa principal de la primera part, i les funcions particulars d'aquesta part.
- Arxiu **prac2b.c** que conté el programa principal de la segona part, i les funcions particulars d'aquesta part.
- Arxiu **prac2c.c** que conté el programa principal de la tercera part, i les funcions particulars d'aquesta part.

No es poden incloure funcions en els arxius tret de les que apareixen en el text

Es crearà un arxiu comprimit del directori amb la comanda

```
tar -czvf A-LopezPerezMaria-2.tgz A-LopezPerezMaria-2
```

executada des del directori pare.

Entregar la pràctica vol dir el següent:

- Es penjarà el fitxer comprimit (.tgz) al campus virtual abans del **20 de desembre de 2015**.
Tots els arxius .c lliurats hauran de començar amb les dades de l'alumne en un comentari de la forma

```
/* COGNOM1: COGNOM2: NOM: DNI: */
```


Tots els programes hauran de compilar amb les opcions: **-ansi -pedantic -O -Wall**.
Lliurar un programa sense les dades personals (usant l'estil anterior), o amb algun error o avís (warning) de compilació, serà avaluat amb la qualificació mínima.
- Entregar un document (imprès) durant l'hora del laboratori del **21 de desembre de 2015** on es doni resposta argumentada a les diferents qüestions que es proposin en relació a la pràctica.