Pràctica 1: Àlgebra Lineal

Les instruccions precises de què (i quan) cal entregar com a resultat d'aquesta pràctica s'expliquen al final d'aquest document.

Fixades unes dimensions $m > n \geq 2$ volem trobar "solucions"de sistemes sobredeterminats (més equacions que incògnites).

Primera Part: Sistemes triangulars

Implementeu una funció per resoldre el sistema d'equacions $Lx = b$ quan L és triangular inferior (amb zeros sobre la diagonal principal). La funció tindrà com a capçalera

```
int resLinf (int n, double **L, double *b, double *x, double tol);
```

La funció rebrà com a paràmetres la dimensió `n`, la matriu L i el vector b, respectivament i `tol` és la tolerància acceptada, és a dir, qualsevol nombre més petit, en valor absolut, que `tol` el considerem 0.

Per tal de resoldre el sistema, la funció `resLinf` suposarà que la matriu L és triangular inferior, és a dir, tal que $l_{ij} = 0$ per $i < j < n$, $i = 0, \ldots, n-1$. La solució del sistema es guardarà en el vector `x`. D'altra banda, la funció retornarà l'enter 0 si ha pogut resoldre el sistema i 1 altrament. Cal usar les fórmules de substitució endavant:

$$x_0 = \frac{b_0}{l_{00}}, \quad x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=0}^{i-1} l_{ik}\, x_k \right) \; i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Dissenyeu un programa principal (la funció `main`) que llegeixi una matriu $L = (l_{ij})_{0 \leq i,j < n}$, llegeixi un vector $b = (b_i)_{0 \leq i < n}$ i cridi la funció `resLinf`. Una vegada s'hagi calculat la solució x del sistema $Lx = b$, el programa principal escriurà el vector solució x i el valor $\|Lx - b\|_2$ com a indicador de la bondat de la solució x proposada. Com a aplicació resoleu els sistemes següents, amb toleràncies 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9} i 10^{-12}:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1.0234 & 0 & 0 & 0 \\ 2.0981 & -6.9876 & 0 & 0 \\ 9.9871 & 2.2222 & -1.9870 & 0 \\ 1.1 & 0.3333 & 20.121 & 1.1234 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcular el producte matriu per vector $y = Ax$ $y \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ useu la funció

```
void prodMatVec (int m, int n, double **A, double *x, double *y);
```

Ara voldrem resoldre sistemes triangulars superiors de la forma $L^t x = b$ amb L triangular inferior (com en l'apartat anterior). Implementeu la funció

```
int resLsup (int n, double **L, double *b, double *x, double tol);
```

amb els paràmetres similars a `resLinf`. Cal usar fòrmules de sustitució enrere i tenir en compte que el sistema és $L^t x = b$ i se li passa L:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{l_{n-1,n-1}}, \quad x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n-1} l_{ki}\, x_k\right) \; i = n-2, \ldots, 1, 0$$

Segona Part: Descomposició LDL^t

Donada una matriu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simètrica ($a_{ij} = a_{ji}$) en determinades condicions pot descompondre's en la forma $A = LDL^t$, amb L triangular inferior amb 1's a la diagonal i D matriu diagonal. Una vegada trobada la descomposició, per resoldre $Ax = (LDL^t)x = b$ resoldrem, en aquest ordre, $Lz = b$, $Dy = z$ i $L^t x = y$; els primer i tercer sistemes són triangulars i el segon, diagonal (de solució trivial).

Les fórmules per trobar L i D són, per a $k = 0, \cdots, n-1$:

$$d_{kk} = a_{kk} - \sum_{j=0}^{k-1} l_{kj}^2 d_{jj}, \quad l_{kk} = 1$$

$$l_{ik} = \frac{1}{d_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{j=0}^{k-1} l_{ij}\, l_{kj}\, d_{jj}\right) \quad i = k+1, \cdots, n-1$$

Implementeu una funció que faci aquest algorisme i resolgui el sistema. La funció tindrà com a capçalera

```
int ldlt(int n, double **A, double *v, double tol)
```

i descompondrà la matriu $A = LDL^t$; en entrar A conté la matriu del sistema (que suposarem simètrica) i v, el terme independent; en sortir A contindrà L i v, la solució. La funció retornarà 0 si s'ha pogut trobar la solució i 1 si no ha estat possible.

Notes:

a) Observeu que, un cop descompost el sistema, caldrà cridar les funcions escaients per resoldre el sistema.

b) `A` no conté la matriu original a la sortida de la funció i `v` conté la solució del sistema a la sortida.

Dissenyeu un programa principal (la funció `main`) que llegeixi una matriu $A = (a_{ij})_{0\le i,j<n}$, llegeixi un vector $b = (b_i)_{0\le i<n}$ i cridi la funció `ldlt` per resoldre el sistema lineal $Ax = b$, el programa principal escriurà el vector solució x i el valor $\|Ax - b\|_2$ com a indicador de la bondat de la solució x proposada.

Per testejar la funció resoleu els sistemes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1.1 & 2.3 & 4.1 & 0.3 \\ 2.3 & -4.2 & 3.2 & -1 \\ 4.1 & 3.2 & 8.27 & 0 \\ 0.3 & -1 & 0 & 1.23 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tercera (i última) Part: Equacions normals

Quan tenim plantejat un sistema $Ax = b$ amb més equacions que incògnites, en general no tindrà solució. Aleshores es busca x^* tal que el valor $\|Ax - b\|_2$ sigui el més petit possible (si existeix solució el valor teòric és 0). És fàcil veure que aquesta x^* és solució del sistema $n \times n$ $A^t Ax = A^t b$, anomenat **sistema d'equacions normals** amb la matriu del sistema $A^t A$ simètrica.

Dissenyeu un programa principal (la funció `main`) que llegeixi la matriu $A = (a_{ij})$ $0 \leq i < m$, $0 \leq j < n$ (amb $m > n$) i el vector $b = (b_i)$ $0 \leq i < m$, calculi la matriu $A^t A$ i el vector $A^t b$ usant

```
void prodMatMat (int m, int n, int p, double **A, double **B, double **C);
```

$A\, m \times n, B\, n \times p, C\, m \times p$ i `prodMatVec` (definida a dalt).
Un cop tinguem el sistema d'equacions normals, es resoldrà usant la tècnica i funcions de les dues primeres parts. Caldrà escriure la solució x^* i el valor $\|Ax^* - b\|_2$

Per testejar la funció calculeu les x^* del sistemes següents:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 1 & 0.50 \\ 1 & 0.75 \\ 1 & 1.00 \\ 1 & 1.25 \\ 1 & 1.50 \\ 1 & 1.75 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.50 \\ 0.90 \\ 1.28 \\ 1.60 \\ 1.66 \\ 2.02 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Instruccions per a l'entrega

Abans de començar a fer la pràctica heu de crear un subdirectori anomenat:

Grup-Cognom1Cognom2Nom-X

on

- Grup: és el vostre grup de pràctiques en majúscules (pot ser A, B, C o D).
- Cognom1Cognom2Nom: és el vostre primer cognom, segon cognom i nom.
- X: identifica el número de la pràctica (1, 2, 3, etc).

Exemple: `A-LopezPerezMaria-1` correspon a una alumna del grup A que fa la pràctica 1.
Aquest directori contindrà els arxius .c corresponents a les diverses parts:

a) Arxiu `prac1funs.c` que conté les funcions `resLinf`, `resLsup`, `prodMatVec`, `prodMatMat`.

b) Arxiu `prac1a.c` que conté el programa principal de la primera part.

c) Arxiu `prac1b.c` que conté el programa principal de la segona part i la funció `ldlt`.

d) Arxiu `prac1c.c` que conté el programa principal de la tercera part i la funció `ldlt`.

No es poden incloure funcions en els arxius tret de les que apareixen en el texte

Es crearà un arxiu comprimit del directori amb la comanda

```
tar -czvf A-LopezPerezMaria-1.tgz A-LopezPerezMaria-1
```

executada des del directori pare.

Entregar la pràctica vol dir el següent:

(1) Es penjarà el fitxer comprimit (.tgz) al campus virtual abans del **15 de novembre de 2015**.

Tots els arxius .c lliurats hauran de començar amb les dades de l'alumne en un comentari de la forma

```
/* COGNOM1: COGNOM2: NOM: DNI: */
```

Tots els programes hauran de compilar amb les opcions: `-ansi -pedantic -O -Wall`.
Lliurar un programa sense les dades personals (usant l'estil anterior), o amb algun error o avís (warning) de compilació, serà avaluat amb la qualificació mínima.

(2) Entregar un document (imprès) durant l'hora del laboratori del **16 de novembre de 2015** on es doni resposta argumentada a les diferents qüestions que es proposin en relació a la pràctica.