Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra

Bachelorarbeit

Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder

Matrikelnummer : 49070

Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Zusammenhang der chromatischen Zahl von Graphen und ihrem Spektrum.

gute Einleitung

Um die Beweise in Kapitel 2 zu führen, benötigen wir einige Sätze über Eigenwerte von symmetrischen Matrizen. Diese, und andere Grundlagen, werden wir in Kapitel 1 erarbeiten. .

Anders anordnen

1.1 Ecken- und Kantenfärbungen von Graphen und Hypergraphen

Es sei $G = (V(G), E(G))$ ein beliebiger Graph. Eine **(Ecken-)Färbung** von G zur **Farbmenge** C ist eine Abbildung $f : V(G) \to C$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $u, v \in V(G)$. Ist $|C| = k \in \mathbb{N}$, so heißt f **k-Färbung**. Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ ist die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass G eine k-Färbung besitzt.
Eine **Kantenfärbung** zur **Farbmenge** C ist eine Abbildung $f : E(G) \to C$ mit $f(e) \neq f(e')$ falls $e, e' \in E(G)$ eine gemeinsame Endecke besitzen.

Ein Hypergraph ist ein Tupel $H = (V(H), E(H))$, wobei $V(H)$ die (endliche) **Eckenmenge** von H und $E(H) \subset \mathcal{P}(H)$ die **Kantenmenge** von H ist. Ein Hypergraph heißt **linearer Hypergraph**, falls für alle verschiedenen Kanten $e, e' \in E(H)$ gilt : $|e \cap e'| \leq 1$. Eine **Kantenfärbung** von H zur Farbmenge C ist eine Abbildung $f : V(H) \to C$ mit $f(e) \neq f(e')$ für alle $e, e' \in E(H)$ mit $e \cap e' \neq \emptyset$.

1.2 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann hat A nur reelle Eigenwerte und folglich können dieses fallend angeordnet werden. Für eine symmetrische Matrix A sei also $\lambda_i(A)$ der i-größte **Eigenwert** (gezählt mit Vielfachheiten). Eine symmetrische Matrix A heißt **positiv semidefinit** falls $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Gilt $x^T Ax = 0$ nur für $x = 0$(also $x^T Ax > 0$ für $x \neq 0$), so heißt A **positiv definit**. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

Satz 1.1 *Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:*

(i) A ist positiv semidefinit .

(ii) Alle Eigenwerte von A sind nicht negativ.

(iii) $A = UU^T$ für eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Beweis: Siehe [1, (1.3)]. ■

Satz 1.2 (Courant-Fischer) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Seien die (reellen) Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$. Dann gilt für alle $p \in \{1, \ldots, n\}$:*

1. $\lambda_p(A) = \max\{\min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension* $p\}$.
2. $\lambda_p(A) = \min\{\max_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension* $n-p+1\}$.

Lemma 1.3 *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $A - B$ positiv semidefinit. Dann ist $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt

$$x^T (A - B) x \geq 0$$
$$x^T A x \geq x^T B x$$

Folglich ist $\frac{x^T A x}{x^T x} \geq \frac{x^T B x}{x^T x}$ und es folgt mit 1.2 :

$$\begin{aligned}
\lambda_i(A) &= \max\{\min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&\geq \max\{\min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T B x}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \lambda_i(B)
\end{aligned}$$

■

Satz 1.4 (Interlacing) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Sei $B \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ eine symmetrische Matrix, welche aus A durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht, mit Eigenwerten $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_k$. Dann gilt*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$$

für $i = 1, \ldots, n - k$.

Beweis: Seien $l_1 < \cdots < l_{n-k}$ die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nach dem Löschen der Zeilen bzw. Spalten von A übrig bleiben. Setze $P := (e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n \times n-k}$.

bessere Formulierung

Dann ist $B = P^T AP$. Es folgt mit Hilfe von 1.2 :

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Bx}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T P^T APx}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&\leq \max\{\min_{y\in PV, y\neq 0} \frac{y^T Ay}{y^T y} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&\leq \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{y^T Ay}{y^T y} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \lambda_i
\end{aligned}$$

■ PV anders

1.3 Eigenwerte von Graphen

Sei G ein Graph mit Eckenmenge $V(G) = \{v_1, \dots v_n\}$. Die **Adjanzenzmatrix** von G ist definiert als $A := A(G)$ mit

$$A(G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist A symmetrisch, und hat folglich nur reelle Eigenwerte. Damit es Sinn macht, von den Eigenwerten eines Graphen zu sprechen, dürfen die Eigenwerte von $A(G)$ nicht von der Nummerierung der Ecken abhängen. Das dem so ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 1.5 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann sind die Eigenwerte von $A(G)$ unabhängig von der Nummerierung der Ecken von G.*

Beweis: Seien $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\} = \{u_1, \dots, u_n\}$ zwei Nummerierungen der Ecken. Sei weiterhin $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, B = (B_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases} \quad B_{i,j} = \begin{cases} 1 & u_i u_j \in E(G) \\ 0 & u_i u_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S^n$ sodass $v_{\sigma(i)} = u_i$. Folglich gilt $A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{i,j}$. Sei $P \in GL_n(\mathbb{R})$ die Matrix

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $P = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$. Nun betrachten wir $P^T AP$.

$$(P^T AP)_{i,j} = e_j^T P^T APe_i = e_{\sigma(j)}^T Ae_{\sigma(i)} = A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{i,j}$$

Also ist $P^T AP = B$. Somit sind A und B ähnlich und besitzen folglich die selben Eigenwerte. ■

Für einen Graphen G seien die **Eigenwerte** von G definiert als $\lambda_i(G) = \lambda_i(A(G))$.

Adjazenzmatrix ambiguity

Bemerkung 1.6 <++>

1. *Die Summe aller Eigenwerte eines Graphen (mit Vielfachheiten) ist* 0.

2. *Ist* G d *regulär, so ist* d *ein Eigenwert von* G.

Beweis:

1. Für die Adjazenzmatrix eines Graphen gilt $\mathrm{trace}(A) = 0$. Somit ist

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G) = \mathrm{trace}(A) = 0$$

2. Beweisen

■

Wir wollen nun einige elementaren Graphen und ihre Eigenwerte betrachten. Sei dazu zunächst $G = K_n$ der vollständige Graph der Ordnung n. Dann ist $A(G) = J - I$, wobei $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix ist, bei der jeder Eintrag 1 ist, und $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Somit ist -1 ein Eigenwert mit Vielfachheit $n - 1$. Außerdem folgt aus 1.6, dass $n - 1$ ein Eigenwert von G ist.

Sei nun $G = C_n$

vollständige Graphen, Kreise, Komplemente usw. Bilder!

Lemma 1.7 *Sein* H *ein induzierter Untergraph von* G *und* $k := |V(G)| - |V(H)|$. *Dann gilt*

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(H) \geq \lambda_{i+k}(G)$$

Beweis: Ist H ein induzierter Untergraph von G, so entsteht $A(H)$ aus $A(G)$ durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt alles aus 1.4. ■

Korollar 1.8 *Sei G ein Graph mit $\omega(G) = p$ und $\alpha(G) = q$. Dann gilt :*

$$\lambda_p(G) \geq -1$$
$$\lambda_q(G) \geq 0$$

Beweis: Ist $\omega(G) = p$, so besitzt G einen vollständigen induzierten Untergraphen der Ordnung p, H. Nach besitzt H die Eigenwerte $\lambda_1(H) = p - 1$ und $\lambda_i(H) = -1$ für $i \in \{2, \ldots, p\}$. Damit folgt aus 1.7, $\lambda_p(G) \geq -1$.

Ist $\alpha(G) = q$, so besitzt G einen kantenlosen, induzierten Untergraphen der Ordnung q, O. Nach besitzt O die Eigenwerte $\lambda_i(O) = 0$ für $i \in \{1, \ldots, p\}$. Damit folgt aus 1.7, $\lambda_q(G) \geq 0$.

■

2 Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

2.1 Krauszzerlegungen von Graphen

Definition 2.1 *Sei G ein Graph. Eine Menge $\mathcal{K}$ von Untergraphen von G heißt* **Krausz-zerlegung** *von G, falls gilt:*

(i) $\forall K \in \mathcal{K} : K$ *ist ein vollständiger Graph mit* $|K| \geq 2$

(ii) $\forall K, K' \in \mathcal{K}$ *mit* $K \neq K'$ *gilt* $|K \cap K'| \leq 1$

(iii) $G = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$

Desweiteren sei für $v \in V(G)$ der **Grad** *von v bezüglich $\mathcal{K}$ definiert als*

$$d_G(v : \mathcal{K}) := |\{K \in \mathcal{K} | v \in V(K)\}|$$

und der **Minimalgrad** *von G bezüglich $\mathcal{K}$ als*

$$\delta_G(\mathcal{K}) := \min_{v \in V(G)} d_G(v : \mathcal{K})$$

Für $d \geq 1$ sei $\kappa_d(G)$ die kleinste positive Zahl m derart, dass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ besitzt mit $|\mathcal{K}| = m$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$.

Lemma 2.2 *Sei G ein Graph. Dann ist $\kappa_d(G) < \infty$ genau dann, wenn $\delta(G) \geq d$.*

Beweis: Seien $\kappa_d(G) < \infty$ und $v \in V(G)$ mit $d_G(v) = \delta(G)$. Dann existieren d kantendisjunkte vollständige Untergraphen $H^1 \dots H^d$ von G mit $v \in V(H^i)$ für alle $1 \leq i \leq d$. Da die H^i kantendisjunkt sind und $d^i_H(v) \geq 1$, gilt:

$$d \leq \sum_{i=1}^{d} d_{H^i}(v) \leq d_G(v) = \delta(G).$$

Sei nun $\delta(G) \geq d$. Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ gibt, mit $d_G(v : \mathcal{K}) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Sei $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ eine Nummerierung der Kanten. Setze $H^i = G[e_i]$. Dann ist $\mathcal{K} = \{H^1, \dots, H^m\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $d_G(v : \mathcal{K}) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Also ist $\kappa_d(G) \leq m < \infty$.

■

2.2 Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Satz 2.3 *Sei G ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $d_G(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$. Desweiteren sei $d_i := d_G(v : \mathcal{K})$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq d$. Dann gilt:*

(a) $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ für $i = 1, \dots, n$

(b) $\lambda_{m+1}(G) \leq -d$ falls $m < n$

Beweis: Es sei A die Adjazenzmatrix von G und $D := \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Definiere $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ als die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$, also

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i \in K_j \\ 0 & v_i \notin K_j \end{cases}$$

Nun betrachten wir $M = BB^T$. Es gilt

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{j,k}$$

Seien zunächst $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Ist $B_{i,k} = 1$ und $B_{j,k} = 1$, so ist $v_i, v_j \in K_k$, und somit (da K_k ein vollständiger Graph ist) $v_i v_j \in E(G)$. Es können aber für höchstens ein $k \in \{1, \dots, m\}$ $B_{i,k}$ und $B_{j,k}$ gleichzeitig 1 seien, da nach 2.1 die Graphen aus $\mathcal{K}$ kantendisjunkt sind. Also ist $M_{i,j} = A_{i,j}$.
Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wir betrachten $M_{i,i}$. Es gilt

$$M_{i,i} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{i,k} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k}$$

$B_{i,k} = 1$ genau dann, wenn $v_i \in K_k$. Folglich ist $M_{i,i} = d_G(v : \mathcal{K})$. Damit gilt $M = A + D$. M ist nach 1.1 positiv semidefinit. Folglich ist $A - (-D)$ positiv semidefinit, und es folgt mit 1.3, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = - - d_{n-i+1}$$

∎

Korollar 2.4 *Sei H ein induzierter Untergraph von G mit $p = |H| \leq |G| = n$. Ist $\lambda_p(H) > -d$ für ein $q \leq p$ und $-2 \leq d \in \mathbb{N}$, so ist $\kappa_d(G) \geq q$.*

$\delta(H) \geq 2$?

Beweis: Angenommen $\kappa_d(G) < q$. Sei dann $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G die zu d passt. Dann ist nach 1.4 $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H) > -d$. Da $i < q \leq n$ gilt nach 2.3 $\lambda_{i+1} \leq -d$ und somit $\lambda_q(G) \leq \lambda_{i+1} \leq -d$. Widerspruch. ∎

Es sei G ein Graph. Der **Kantengraph** $L(G)$ (engl. line graph) von G ist definiert als der Graph mit Eckenmenge $E(G)$ und Kantenmenge $\{ee'|e$ und e'besitzen eine gemeinsame Endecke$\}$.

Korollar 2.5 *Sei $\delta(G) \geq 2$ und H ein induzierter Untergraph von G, welcher Kantengraph eines Waldes ist. Dann ist $\kappa_2(H) \geq |H|$*

Beweis: Nach 2.4 ist für $q = |H| : \lambda_q(H) = \lambda_{\min} > -2$. Dann ist mit 2.4 $\kappa_2\,(H) > |H|$. ∎

Satz Line-graphen Eigen-werte

Korollar 2.6 (Klotz) $\kappa_2\,(K_n) \geq n$

Beweis: K_n ist der Kantengraph von $K_{1,n}$. ∎

Korollar 2.7 *Ist $\delta\,(G) \geq 2$, so gilt $\omega\,(G) \leq \kappa_2\,(G)$ und $\alpha\,(G) \leq \kappa_2\,(G)$.*

Beweis: Sei $p = \omega(G)$. Dann gilt nach $\lambda_p\,(G) \geq -1 \geq -2$. Damit sind für $d = 2$ die Voraussetzungen von 2.4 erfüllt, und es gilt folglich $\kappa_2\,(G) \geq p = \omega\,(G)$ Für $q = \alpha\,(G))$ gilt wieder nach $\lambda_q\,(G) \geq 0 \geq -2$. Damit folgt analog $\alpha\,(G) \leq \kappa_2\,(G)$. ∎

Vermutung 2.8 *Ist $\chi\,(G) \geq k$, so ist $\lambda_k\,(G) > -d$.*

Satz 2.9 *Gelte 2.8. Dann gilt :*

(i) Ist $\delta\,(G) \geq 2$ so ist $\chi\,(G) \leq \kappa_d\,(G)$

(ii) Ist H ein linearer Hypergraph mit $|e| \geq d$, so ist $\chi'\,(H) \leq |H|$

Beweis: Sei $\chi(G) = k$. Dann ist nach 2.8 $\lambda_k\,(G) > -2$. Mit 2.4 folgt$\kappa_d\,(G) \geq k = \chi\,(G)$. ∎

Literatur

[1]

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

Stefan Heyder