TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra

# Bachelorarbeit

# Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder

Matrikelnummer : 49070

Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einführung

Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten, der chromatischen Zahl und den Krauszzerlegungen eines Graphen. Die dafür benötigten Grundlagen werden wir in Kapitel 1 erarbeiten.

## 1.1 Graphen und Hypergraphen

Die in dieser Arbeit betrachteten Graphen und Hypergraphen sind endlich und haben weder Mehrfachkanten noch Schlingen. Bei den Bezeichnungen richten wir uns im Wesentlichen nach dem Buch von Diestel [6] beziehungsweise dem Buch von Berge [1]. Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der positiven ganzen Zahlen und setzen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für eine Menge $V$ sei die Menge $2^V$ die Potenzmenge von $V$ und $[V]^p$ mit $p \in \mathbb{N}_0$ die Menge der $p$-elementigen Teilmengen von $V$.

Ein **Hypergraph** $H$ ist ein Tupel von zwei Menge, $V(H)$ und $E(H)$. Dabei ist $V(H)$ endlich und $E(H)$ eine Teilmenge von $2^{V(H)}$ mit $|e| \geq 2$ für alle $e \in E(H)$. Die Menge $V(H)$ heißt dann **Eckenmenge** von $H$ und ihre Elemente heißen **Ecken** von $H$. Die Menge $E(H)$ heißt **Kantenmenge** und ihre Elemente heißen **Kanten**. Ein Hypergraph heißt **linear**, falls zwei verschieden Kanten höchstens eine Ecke gemeinsam haben.

Sei $H$ ein Hypergraph. Die **Ordnung** von $H$ ist die Anzahl der Ecken von $H$, geschrieben $|H|$. Eine Kante $e$ heißt **Hyperkante**, falls $|e| \geq 3$ und sonst **gewöhnliche Kante**. Für eine gewöhnliche Kante $e = \{u, v\}$ schreiben wir auch kurz $e = uv$ oder $e = vu$. Ist $E(H) \subseteq [V]^p$, so nennen wir $H$ $p$**-uniform**. Ein **Graph** ist ein 2-uniformer Hypergraph, also ein Hypergraph in dem jede Kante gewöhnlich ist. Eine Ecke $v$ ist **inzident** mit einer Kante $e$, falls $v \in e$ gilt. Für eine Ecke $v$ von $H$ sei $E_H(v) = \{e \in E(H) \mid v \in e\}$. Der **Grad** einer Ecke $v$ ist $d_H(v) = |E_H(v)|$. Der **Minimalgrad** (**Maximalgrad**) sei definiert als der kleinste (größte) Grad einer Ecke von $H$ und wird mit $\delta(H)$ ($\Delta(H)$) bezeichnet. Ist $\delta(H) = \Delta(H) = r$, so heißt $H$ $r$-regulär.

Ein **Unterhypergraph** von $H$ ist ein Hypergraph $H'$ mit $V(H') \subseteq V(H)$ und $E(H') \subseteq E(H)$. Wir schreiben dann $H' \subseteq H$. Gilt $H' \neq H$, so ist $H'$ ein **echter Unterhypergraph**. Gibt es eine Menge $X \subseteq V(H)$ mit $V(H') = X$ und $E(H') = \{e \in E(H) \mid e \subset X\}$, so ist $H'$ ein **induzierter Hypergraph** und wir schreiben $H' = H[X]$ beziehungsweise $H' \trianglelefteq H$.

Ist $H$ ein Hypergraph und $X \subseteq V(H)$, so bezeichne $H - X = H[V(H) \setminus X]$. Ist $X = \{v\}$, so schreiben wir dafür auch $H - v$ statt $H - X$. Ist $F \subseteq 2^{V(H)}$ eine Menge, so sei $H - F$ der Hypergraph mit Eckenmenge $V(H)$ und Kantenmenge $E(H) \setminus F$ und $H + F$ der Hypergraph mit Eckenemenge $V(H)$ und Kantenmenge $E(H) \cup F$. Ist $F = \{e\}$ so schreiben wir $H \pm e$ anstatt $H \pm \{e\}$.

Eine Menge von Ecken $X \subseteq V(H)$ heißt **unabhängige Menge** von $H$, falls $E(H[X]) = \emptyset$ gilt, beziehungsweise **Clique**, falls $H[X]$ alle gewöhnlichen Kanten von $[X]^2$ enthält. Die **Unabhängigkeitszahl** $\alpha(H)$ ist die Ordnung der größten unabhänigegen Menge von $H$. Die **Cliquenzahl** $\omega(H)$ ist die Ordnung der größten Clique von $H$.

Sind $H, H'$ zwei Hypergraphen, so heißt eine bijektive Abbildung $\varphi : V(H) \to V(H')$ **Isomorphismus** zwischen $H$ und $H'$, falls für alle Teilmengen $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von Ecken von $V(H)$ gilt:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ ist Kante von } H \Leftrightarrow \{\phi(v_1), \phi(v_2), \ldots, \phi(v_n)\} \text{ ist Kante von } H'.$$

Zwei Hypergraphen $H, H'$ heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus zwischen $H$ und $H'$ gibt.

Ein Graph $G$ heißt **vollständiger Graph**, falls $E(G) = [V(G)]^2$ gilt. Ist $G$ ein vollständiger Graph der Ordnung $n$, so schreiben wir auch $G = K_n$. Man beachte hierbei, dass alle vollständigen Graphen der Ordnung $n$ isomorph sind. In diesem Sinne bezeichnen wir mit $C_n$ den **Kreis** der Ordnung $n$, mit $P_n$ den **Weg** der Ordnung $n$ und mit $O_n$ den **kantenlosen Graphen** der Ordnung $n$ (d.h. das Komplement von $K_n$). Ein Kreis $C_n$ heißt **gerade** beziehungsweise **ungerade**, je nachdem ob seine Ordnung gerade beziehungsweise ungerade ist.

Für einen Hypergraphen $H$ ist $\omega(H)$ die größte Zahl $n$, sodass $H$ einen vollständigen Graphen der Ordnung $n$ als Untergraphen enthält, und $\alpha(H)$ ist die größte Zahl $n$, sodass $H$ den kantenlosen Graphen der Ordnung $n$ als induzierten Untergraphen enthält.

## 1.2 Färbungen von Graphen und Hypergraphen

Das **Färbungsproblem** für Graphen ist ein klassischen Problem aus der Graphentheorie mit vielfältigen Anwendungen in der kombinatorischen Optimierung und anderen Teilgebieten der Mathematik. Beim Färbungsproblem besteht die Aufgabe darin, die Ecken eines Graphen so zu färben, dass durch eine Kante verbundene Ecken verschiedenen Farben erhalten. Dabei sollen natürlich möglichst wenige Farben verwendet werden.

Seien $G$ ein Graph $C$ eine Menge. Eine Abbildung $\varphi : V(G) \to C$ heißt **Färbung** von $G$, falls für alle Kanten $vw$ von $G$ gilt: $\varphi(v) \neq \varphi(w)$. Ist $|C| = k \in \mathbb{N}_0$, so heißt

$\varphi$ $k$**-Färbung**. Besitzt ein Graph $G$ eine $k$-Färbung, so heißt $G$ $k$**-färbbar**. Die kleinste natürliche Zahl $k$, für die $G$ $k$-färbbar ist, bezeichnen wir mit $\chi(G)$, der **chromatischen Zahl** von $G$. Ist die chromatische Zahl von $G$ gleich $k$, so wird $G$ auch $k$-chromatisch.

Die Bestimmung der chromatischen Zahl eines Graphen ist ein NP-schweres Optimierungsproblem, wie im Jahre 1972 von Karp [20] gezeigt wurde. Sei $\varphi$ eine Färbung von $G$ und $H$ ein Untergraph von $G$. Dann ist $\varphi_{|V(H)}$ eine Färbung von $H$. Folglich ist die chromatische Zahl ein monotoner Graphenparameter, d.h.

$$H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G).$$

Eine Abbildung $\varphi : V(G) \to C$ ist genau dann eine Färbung von $G$, wenn für alle $c \in C$ das Urbild $\varphi^{-1}(c)$ eine unabhängige Menge in $G$ ist (d.h. keine zwei Ecken von $\varphi^{-1}(c)$ sind durch eine Kante von $G$ verbunden). Diese Urbilder nennen wir **Farbklassen**. Offensichtlich sind die Farbklassen disjunkt und haben höchstens $\alpha(G)$ Ecken. Daraus folgt, dass jede $k$-Färbung von $G$ die Ungleichung $|G| \leq k\alpha(G)$ erfüllt, und deswegen auch $|G| \leq \chi(G)\alpha(G)$ gilt.

Da jede Ecke eine unabhängige Menge ist, gilt $\chi(G) \leq |G|$. Damit gilt

$$\chi(G) \geq |G| \Leftrightarrow \chi(G) = |G| \Leftrightarrow \alpha(G) \leq 1 \Leftrightarrow G \text{ ist ein vollständiger Graph}$$

Insbesondere gilt somit für $n \in \mathbb{N}_0 : \chi(K_n) = n$. Da $\chi$ ein monotoner Graphenparameter ist, ist also

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

Die chromatische Zahl des Graphen $G$ ist die kleinste Zahl $k$, für die sich $V(G)$ in $k$ viele unabhängige Mengen (die Farbklassen) zerlegen lässt. Deswegen gilt $\chi(G) = 0$ nur, falls $V(G) \neq \emptyset$ ist, d.h. falls $G$ der **leere Graph** ist (kurz $G = \emptyset$). Außerdem ist $\chi(G) \leq 1$ genau dann, wenn $G$ keine Kanten hat, und $\chi(G) \leq 2$ gilt genau dann, wenn $G$ bipartit ist. Nach dem Satz von König [21] ist $G$ genau dann bipartit, wenn $G$ keinen Kreis ungerader Ordnung als Untergraphen besitzt.

Nach Stockmeyer [28] ist für jedes $k \geq 3$ das Entscheidungsproblem ob ein gegebener Graph $k$ färbbar ist NP-vollständig. Es ist also nicht zu erwarten, dass sich Graphen mit chromatischer Zahl kleiner gleich $k$ für festes $k \geq 3$ einfach charakterisieren lassen.

Bei der Untersuchung des Färbungsproblems für Graphen erweisen sich die kritischen Graphen als ein nützliches Hilfsmittel. Dies liegt vor allem daran, dass sich Färbungsprobleme für Graphen oft auf entsprechende Färbungsprobleme für kritische Graphen zurückführen lassen. Ein Graph $G$ heißt **k-kritisch**, falls $\chi(G) = k$ ist und $\chi(H) < k$ gilt für alle echten induzierten Untergraphen $H$ von $G$.

Entfernen wir aus einem Graphen $G$ eine Ecke oder Kante, so bleibt die chromatische Zahl gleich oder verringert sich um den Wert 1, d.h. für $t \in V(G) \cup E(G)$ gilt:

$$\chi(G) - 1 \leq \chi(G - t) \leq \chi(G). \tag{1.1}$$

Daraus erhalten wir den folgenden bekannten Satz, wonach die $(k-1)$-färbbaren Graphen durch verbotene $k$-kritische Untergraphen charakterisiert werden können.

**Satz 1.1** *Sei $G$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\chi(G) \geq k$, genau dann wenn $G$ einen $k$-kritischen Graphen $H$ als induzierten Untergraphen enthält.*

**Beweis:** Falls $G$ einen $k$-kritischen Untergraphen enthält, so ist $\chi(G) \geq \chi(H) = k$, da $\chi$ ein monotoner Graphenparamter ist. Sei also $\chi(G) \geq k$. Da $G$ endliche Ordnung hat, besitzt $G$ einen induzierten Untergraphen $G'$ kleinster Ordnung mit $\chi(G') = k$. Dann ist $\chi(H) < k$ für jeden echten induzierten Untergraphen $H$ von $G'$. Wegen $\chi(G') \geq k \geq 1$ gibt es eine Ecke $v$ in $G'$. Dann ist $G' - v$ ein echter induzierter Untergraph von $G'$ und somit ist $\chi(H) < k$. Aus (1.1) folgt dann $\chi(G') = k$. Folglich ist $G'$ ein $k$-kritischer Graph. ∎

Gegenüber $k$-chromatischen Graphen haben $k$-kritische Graphen eine eingeschränkte Struktur. Ein einfaches Beispiel dafür ist das folgende Resultat.

**Lemma 1.2** *Ist $G$ ein $k$-kritischer Graph mit $k \geq 1$, so ist $G$ ein zusammenhängender Graph mit $\delta(G) \geq k - 1$.*

**Beweis:** Ist $G$ nicht zusammenhängens, so ist jede Komponente von $G$ ein echter induzierter Untergraph. Also besitzt jede Komponente eine $(k-1)$-Färbung. Dann besitzt aber auch $G$ eine $(k-1)$-Färbung, d.h. $\chi(G) \leq k - 1$. Das ist aber unmöglich, da $G$ ein $k$-kritischer Graph ist. Ist $\delta(G) \leq k - 2$, so besitzt $G$ eine Ecke $v$ mit $d_G(v) \leq k - 2$. Dann ist $G - v$ ein echter induzierter Untergraph von $G$ und besitzt somit eine $(k-1)$-Färbung. Unter den Nachbarn von $v$ kommen höchstens $k - 2$ Farben vor und somit können wir eine $(k-1)$-Färbung von $G - v$ zu einer $(k-1)$-Färbung von $G$ erweitern. Dann ist aber $\chi(G) \leq k - 1$, was unmöglich ist, da $G$ ein $k$-kritischer Graph ist. ∎

Im Jahr 1968 beschrieben Szekeres und Wilf [29] eine einfache Methode zur Bestimmung von oberen Schranken für die chromatische Zahl. Dazu betrachten wir einen **Graphenparameter** $\rho$, d.h. eine Abbilung die jedem Graphen $G$ eine reelle Zahl $\rho(G)$ zuordnet, sodass isomorphe Graphen denselben Wert erhalten. Wir nennen $\rho$ einen **Szekeres-Wilf-Parameter**, falls für alle Graphen $G$ und $H$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

S(1) Ist $H \trianglelefteq G$, so gilt $\rho(H) \leq \rho(G)$.

S(2) $\rho(H) \geq \delta(H) + 1$

Wir sagen dann, dass $\rho$ die **Szekeres-Wilf Eigenschaft** hat. Szekeres und Wilf [29] bewiesen dann folgendes Resultat.

**Satz 1.3 (Szekeres,Wilf)** *Ist $\rho$ ein Szekeres-Wilf-Paramter, so ist $\rho$ eine obere Schranke für die chromatische Zahl, d.h. für alle Graphen $G$ ist $\chi(G) \leq \rho(G)$.*

**Beweis:** Ist $G = \emptyset$, so ist $\chi(G) = 0$ und aus (S2) folgt $\rho(G) \geq \delta(G) + 1 = 1$, d.h. $\chi(G) \leq \rho(G)$. Sei nun $G \neq \emptyset$ und sei $k = \chi(G)$. Dann ist $k \geq 1$ und aus Satz 1.1 folgt, dass es einen $k$-kritischen Untergraphen $H$ von $G$ gibt. Wegen Lemma 1.2 ist $\delta(H) \geq k-1$. Mit Hilfe von (S1) und (S2) erhalten wir dann:

$$\chi(G) = \chi(H) \leq \delta(H) + 1 \leq \rho(H) \leq \rho(H).$$

Was zu zeigen war. ■

Ein einfaches Beispiel für einen Szekeres-Wilf Paramter ist $\Delta + 1$. Somit gilt für jeden Graphen $G$ die Ungleichung $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Brooks [2] bestimmte im Jahr 1941 die Graphen $G$ mit $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, er bewies folgendes Resultat:

**Satz 1.4 (Brooks)** *Sei $G$ ein zusammenhängender Graph mit Maximalgrad $\Delta$. Dann gilt*

$$\chi(G) \leq \Delta + 1.$$

*Die Gleichheit gilt dann, und nur dann, wenn $G$ ein vollständiger Graph, oder ein ungerader Kreis ist.*

Ein weiteres Beispiel für einen Szekeres-Wilf-Paramter ist die **Färbungszahl** $\mathrm{col}(G)$ eines Graphen definiert durch

$$\mathrm{col}(G) = 1 + \max_{H \subset G} \delta(H)$$

Auch dieser Paramter ist somit eine obere Schranke für die chromatische Zahl. Es lässt sich auch leicht zeigen, dass für jeden Szekeres-Wilf Paramter $\rho$ die Ungleichung $\mathrm{col}(G) \leq \rho(G)$ für alle Graphen $G$ gilt.

## 1.3 Färbungen von Kantengraphen

In diesem Abschnitt betrachten wir das Färbungsproblem für die Klasse der Kantengraphen. Der **Kantengraph** $L(H)$ eines Hyergraphen $H$ ist der Graph mit der Eckenmenge $V(L(H)) = E(H)$ und Kantenmenge

$$E(L(H)) = \{ee' \mid \{e, e'\} \in [E(H)]^2, e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

Zwei verschieden Kanten von $H$, welche eine Ecke gemeinsam heißen adjazent. Für eine Kante $e$ von $H$ sei $d_H(e) = d_{L(H)}(e)$ der **Kantengrad** von $e$ in $H$. Dieser ist also die Zahl der von $e$ verschiedenen Kanten $e'$ von $H$, welche mit $e$ adjazent sind. Dann sei $\Delta'(H)$ der **maximale Kantengrad** von $H$ und $\delta'(H)$ der **minimale Kantengrad** und wir setzen $\Delta'(H) = \delta'(H) = 0$, falls $E(H) = \emptyset$.

Eine Färbung des Kantengraphen eines Hypergraphen $H$, heißt **Kantenfärbung** von $H$. Eine Kantenfärbung ist somit eine Abbildung, die jeder Kante von $H$ eine Farbe zuordnet, sodass adjazente Kanten verschiedene Farben erhalten. Wir bezeichnen dann mit dem **chromatischen Index** $\chi'(H)$ die kleinste natürliche Zahl $k$, sodass $L(H)$ eine $k$-Färbung besitzt. Also gilt $\chi'(H) = \chi(L(H))$. Ist $v$ eine Ecke von $H$, so ist $E_H(v)$ eine Clique von $L(H)$, und folglich gilt $\chi'(H) \geq \Delta(H)$. König zeigte in [22] , dass diese Schranke für bipartite Graphen scharf ist.

**Satz 1.5 (König)** *Ist $G$ ein bipartiter Graph, so gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Die erste obere Schranke für beliebige Graphen wurde 1964 von Vizing bestimmt. kkkkkk

**Satz 1.6 (Vizing)** *Sei $G$ ein Graph mit Maximalgrad $\Delta$. Dann gilt $\chi'(G) = \Delta$ oder $\chi'(G) = \Delta + 1$.*

## 1.4 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Bevor wir uns den Eigenwerten von Graphen zuwenden, wollen wir den Leser an einige bekannte Tatsachen über symmetrische Matrizen erinnern. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$Ax = \lambda x \tag{1.2}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die (reelle) Eigenwertgleichung von $A$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge

$$E_A(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim(E_A(\lambda) \geq 0$. Man nennt dann $\lambda$ einen **Eigenwert** von $A$, falls $\dim(E_A(\lambda)) \geq 1$ ist, die Vektoren aus $E_A(\lambda)$ heißen **Eigenvektoren** von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ und $E_A(\lambda)$ ist der zu $\lambda$ gehörende **Eigenraum** von $A$. Die Abbildung $p_A$ mit

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

ist ein Polynom aus $\mathbb{R}[\lambda]$ vom Grade $n$, welches **charakteristisches Polynom** von $A$ genannt wird (dabei ist $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix der Ordnung $n$). Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0.$$

Da $A$ symmetrisch ist, zerfällt $p_A$ in genau $n$ reelle Linearfaktoren, d.h. $p_A$ hat genau $n$ Nullstellen (gezählt mit ihren Vielfachheiten). Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $m_A(\lambda$ die Vielfachheit von $\lambda$ als Nullstelle von $p_A$. Die Matrix $A$ besitzt somit $n$ reelle Eigenwerte, welche wir monton fallend anordnen können. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\lambda_p(A)$ den $p$-größten Eigenwert von $A$, das heißt es gilt

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \lambda_n(A)$$

Dann ist $\lambda_{max}(A) = \lambda_1(A)$ der größte Eigenwert von $A$ und $\lambda_{min}(A) = \lambda_n(A)$ der kleinste Eigenwert von $A$. Die Folge

$$\operatorname{sp}(A) = (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots \lambda_n(A))$$

der Eigenwerte bezeichnet man als das **Spektrum** von $A$. Bekanntlich besitzen zwei symmetrische Matrizen genau dann das gleiche Spektrum, wenn sie zueinander ähnlich sind. Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ so ist $\dim E_A(\lambda) = m_A(\lambda)$. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind stets orthogonal und $\mathbb{R}^n$ ist die direkte Summe der Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten. Insbesondere besitzt der $\mathbb{R}^n$ eine Orthonomalbassi aus lauter Eigenwerten von $A$.

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv semidefinit, falls $x^T Ax \geq 0$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Gilt zusätzlich noch $x^T Ax = 0$ nur für $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ (hat also $A$ vollen Rang), so heißt $A$ positiv definit. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

**Satz 1.7** *Folgende Aussagen sind für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent:*

(a) *$A$ ist positiv semidefinit.*

(b) *Alle Eigenwerte von $A$ sind nicht negativ.*

(c) $A = UU^T$ *für eine Matrix* $U \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei der **Rayleigh-Quotient** $R_A(x)$ definiert als

$$R_A(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Der folgende Satz findet sich in der Literatur als Courant-Fischer Minmax Theorem [4] [13].

**Satz 1.8 (Courant-Fischer)** *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symmetrisch. Dann gilt für alle* $p \in \{1, \dots, n\}$*:*

(a) $\lambda_p(A) = \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} R_A(x) \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ linearer Unterraum}, \dim(V) = p\}$.

(b) $\lambda_p(A) = \min\{\max_{x\in V, x\neq 0} R_A(x) \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ linearer Unterraum}, \dim(V) = n - p + 1\}$.

**Lemma 1.9** *Seien* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symmetrisch und* $A - B$ *positiv semidefinit. Dann ist* $\lambda_p(A) \geq \lambda_p(B)$ *für alle* $1 \leq p \leq n$.

**Beweis:** Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt $x^T(A-B)x \geq 0$, da $A-B$ positiv semidefinit ist. Daraus folgt

$$x^T A x \geq x^T B x$$

und folglich ist $\frac{x^T A x}{x^T x} \geq \frac{x^T B x}{x^T x}$ und es folgt mit Satz 1.8(a) :

$$\begin{aligned}
\lambda_p(A) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&\geq \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T B x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \lambda_p(B)
\end{aligned}$$

für $1 \leq p \leq n$. ■

Oftmals interessiert man sich, wie die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sich verändern, wenn man Zeilen und die korrespondierenden Spalten der Matrix löscht. Die bei diesem Prozess entstehende Matrix ist wieder symmetrisch. Es stellt sich heraus, dass die Eigenwerte der so entstehenden Matrix sich durch die der ursprünglichen beschränken lassen. Das folgende Resultat geht auf Cauchy zurück, es scheint schwierig eine Originalquelle zu finden.

**Satz 1.10 (Interlacing)** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und sei $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ die symmetrische Matrix, welche aus $A$ durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht. Dann ist $B$ symmetrisch, und es gilt:*

$$\lambda_p(A) \geq \lambda_p(B) \geq \lambda_{p+k}(A)$$

*für $1 \leq p \leq n-k$.*

**Beweis:** Seien $l_1 < \cdots < l_{n-k}$ die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nicht gelöscht werden. Setze $P = (e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$, wobei $e_k$ der $k$-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ ist. Dann besitzt $P$ vollen Spaltenrang und es gilt $B = P^TAP$. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)}$ ein linearer Unterraum , $x \in V$ beliebig und $y = Px$. Dann ist $y \in \operatorname{im} P|_V = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = Px, x \in V\}$ und es gilt $y^Ty = x^TP^TPx = x^Tx$, da $P^TP = I_{n_k}$ ist. Außerdem ist $\operatorname{im} P|_V$ ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim(\operatorname{im} P|_V) = \dim(V)$, da $P$ vollen Spaltenrang besitzt. Mit Satz 1.8(a) folgt für $1 \leq p \leq n-k$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_p(B) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TBx}{x^Tx} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TP^TAPx}{x^Tx} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \max\{\min_{y\in \operatorname{im} P|_V, y\neq 0} \frac{y^TAy}{y^Ty} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&\leq \max\{\min_{x\in W, x\neq 0} \frac{y^TAy}{y^Ty} \mid W \subseteq \mathbb{R}^{n} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \lambda_p(A)
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die zweite folgt analog bei Betrachtung von $-A$ und $-B$, da $\lambda_p(-A) = -\lambda_{n-p+1}(A)$ ist. ■

Die folgenden Ungleichungen werden später bei der Betrachtung der Eigenwerte von Graphen hilfreich seien. Ein Beweis für die Weyl Ungleichungen findet sich in [31], ein Beweis für die Ky-Fan Ungleichungen findet sich in [11].

**Satz 1.11 (Weyl Ungleichungen)** *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Dann gilt für alle $1 \leq p \leq n$*

$$\lambda_p(B) + \lambda_n(C) \leq \lambda_p(A) \leq \lambda_p(B) + \lambda_1(C)$$

**Satz 1.12 (Ky Fan Ungleichungen)** *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt dann:*

$$\sum_{p=1}^{k} \lambda_p(A) \leq \sum_{p=1}^{k} \lambda_p(B) + \sum_{p=1}^{k} \lambda_p(C)$$

*Für $k = n$ gilt Gleichheit.*

## 1.5 Eigenwerte von Graphen

Sei $G$ ein Graph der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ mit der Eckenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n \mid \ \}$. Die **Adjanzenzmatrix** von $G$ ist die Matrix $A(G) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_iv_j \in E(G) \\ 0 & \text{falls } v_iv_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist $A$ symmetrisch, und hat folglich nur reelle Eigenwerte. Damit es Sinn ergibt, von den Eigenwerten eines Graphen zu sprechen, dürfen die Eigenwerte von $A(G)$ nicht von der Nummerierung der Ecken abhängen. Das dem so ist, zeigt das folgende Lemma.

**Lemma 1.13** *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann ist das charakteristische Polynom von $A(G)$ unabhängig von der Nummerierung der Ecken von $G$.*

**Beweis:** Seien $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n \mid \ =\}\{u_1, \ldots, u_n \mid \ \}$ zwei Nummerierungen der Ecken. Sei weiterhin $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_iv_j \in E(G) \\ 0 & \text{falls } v_iv_j \notin E(G) \end{cases} \text{ und } B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_iu_j \in E(G) \\ 0 & \text{falls } u_iu_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S^n$ sodass $v_{\sigma(i)} = u_i$ ist. Folglich gilt $A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{ij}$ . Sei $P \in GL_n(\mathbb{R})$ die Matrix mit

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $P = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$. Für die Matrix $P^TAP$ gilt dann:

$$(P^TAP)_{ij} = e_j^T P^T APe_i = e_{\sigma(j)}^T Ae_{\sigma(i)} = A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{ij}$$

Also ist $P^TAP = B$. Somit sind $A$ und $B$ ähnlich, und besitzen folglich das selbe charakteristische Polynom. ■

Für den Graphen $G$ der Ordnung $n$ sei dann $p_G = p_{A(G)}$ das **charakteristische Polynom** von $G$ und $\lambda_p(G) = \lambda_p(A(G))$ der $p$-**größte Eigenwerte** von $G$ (für $1 \leq p \leq |G|$) und $\mathrm{sp}(G) = \mathrm{sp}(A(G))$ das **Spektrum** von $G$. Diese sind nach Lemma 1.13 unabhängig von der Nummerierung der Ecken, und somit wohldefiniert. Dies gilt jedeoch nicht für die Eigenvektoren. Wir können aber auch eine koordinatenfreie Interpretation für die Eigenvektoren geben. Dazu betrachten wir einen Eigenwert $\lambda$ von $G$ und einen zugehörigen Eigenvektor $x$ von $A(G)$. Aus der Eigenwertgleichung (1.2) erhalten wir das Gleichungssystem

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} A(G)_{ij} x_j \tag{1.3}$$

für $1 \leq i \leq n$. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ordnet der Ecke $v_i$ den Wert $x_i = x(v_i)$ zu und die Gleichung (1.3) ist äquivalent zu

$$\lambda x(v_i) = \sum_{v_j : v_i v_j \in E(G)} x(v_j). \tag{1.4}$$

Wir betrachten nun den Vektorraum $\mathbb{R}^{V(G)}$ aller Abbildungen $x : V(G) \to \mathbb{R}$. Offenbar ist die Abbildung $x \in \mathbb{R}^{V(G)}$ genau dann ein Eigenvektor von $G$ zum Eigenwert $\lambda$, wenn für alle Ecken $v$ von $G$ gilt:

$$\lambda x(v) = \sum_{u : uv \in E(G)} x(u) \tag{1.5}$$

d.h. die Summe der Werte $x(u)$ über die Nachbarn $u$ von $v$ ergibt den Wert $\lambda x(v)$. Es sei dann $E_G(\lambda)$ die Menge aller dieser Abbildungen. Dann ist $E_G(\lambda)$ der **Eigenraum** von $G$ zum Eigenwert $\lambda$. Es sei $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{V(G)}$ die Einsabbildung mit $\mathbb{1}(v) = 1$ für alle $v \in V(G)$. Für eine Ecke $v$ von $G$ gilt dann

$$d_G(v) = \sum_{u : uv \in E(G)} 1 = \sum_{u : uv \in E(G)} \mathbb{1}(u)$$

und aus Gleichung (1.3) folgt somit für $r \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{1} \in E_G(r) \Leftrightarrow G \text{ ist } r\text{-regulär}. \tag{1.6}$$

**Beispiel 1.14** *Für den vollständigen Graphen der Ordnung $K_n$ der Ordnung $n \geq 1$ gelten folgenden Aussagen:*

(a) $\mathrm{sp}(K_n) = (n-1, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{n-1 \ mal})$.

(b) $p_{K_n}(\lambda) = (-1)^n(\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}$.

(c) $E_{K_n}(n-1) = [\mathbb{1}]$, *wobei* $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{V(K_n)}$ *die Einsabbildung ist mit* $1(v) = 1$ *für alle* $v \in V(G)$.

(d) $E_{K_n}(-1) = \{x \in \mathbb{R}^{V(K_n)} | x$ *ist orthogonal zu* $\mathbb{1}$ | $\}$.

**Beweis:** Es sei $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, welche nur 1 als Einträg besitzt (diese werden wir mit 1-Matrix bezeichnen). Dann gilt $A(K_n) = J - I$, wobei $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix ist. Da $\mathrm{rang}(J) = 1$, ist also $-1$ ein Eigenwert von $G$ mit Vielfachheit $n-1$. Da $K_n$ $n-1$ regulär ist, ist auch $n-1$ ein Eigenwert von $K_n$. Damit folgen (a) und (b). Weiterhin gilt (c) wegen Gleichung (1.6). Aus der Orthognalität der Eigenvektoren folgt nun (d). ■

**Beispiel 1.15** *Der Kreis* $C_n$ *der Ordnung* $n \geq 3$ *hat die Eigenwerte*

$$\lambda_p(C_n) = 2\cos\left(\frac{2\pi p}{n}\right)$$

*für* $1 \leq p \leq n$. *Man beachte hierbei, dass die Eigenwerte nicht der Größe nach geordnet sind. Insbesondere gilt:*

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}(C_3) = \mathrm{sp}(K_3) &= (2, -1, -1) \\ \mathrm{sp}(C_4) &= (2, 0, 0, -2) \\ \mathrm{sp}(C_5) &= (2, \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1), \frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1)) \end{aligned}$$

Einen Beweis findet der Leser in [**?**, 1.1.4].

**Beispiel 1.16** *Für den kantenlosen Graphen* $O_n$ *der Ordnung* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $A(O_n)$ *die Nullmatrix und somit gilt* $p_{O_n}(\lambda) = (-1)^n\lambda^n$ *und* $\lambda_i(O_n) = 0$ *für alle* $1 \leq i \leq n$.

**Beispiel 1.17** *Ist* $G$ *die disjunkte Vereinigug der nichtleeren Graphen* $G_1, G_2, \ldots, G_l$ *mit* $l \in \mathbb{N}$, *so ist*

$$p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda) \cdot p_{G_2}(\lambda) \cdot \cdots \cdot p_{G_l}(\lambda)$$

*für* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Das Spektrum von* $G$ *ergibt sich somit aus der Vereinigung der Spektren von* $G_1, G_2, \ldots, G_l$ *und für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$m_G(\lambda) = m_{G_1}(\lambda) + m_{G_2}(\lambda) + \cdots + m_{G_l}(\lambda)$$

**Beweis:** Wir nummerieren die Ecken von $G$ so, dass für $1 \leq i \leq l-1$ die Ecken von $G_i$ vor den Ecken von $G_{i+1}$ aufgelistet werden. Dann ist

$$A(G) = \mathrm{diag}(A(G_1), A(G_2), \ldots, A(G_l))$$

und somit ist

$$A(G) - \lambda I = \mathrm{diag}(A(G_1) - \lambda I, A(G_2) - \lambda I, \ldots, A(G_l) - \lambda I)$$

wobei $I$ die Einheitsmatrix der passenden Ordnung ist. Dann ist

$$\begin{aligned} p_G(\lambda) &= \det(A(G) - \lambda I) \\ &= \det(A(G_1) - \lambda I) \cdot \det(A(G_2) - \lambda I) \cdot \ldots \cdot \det(A(G_l) - \lambda I) \\ &= p_{G_1}(\lambda) \cdot p_{G_2}(\lambda) \cdot \ldots \cdot p_{G_l}(\lambda) \cdot \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, gilt dann für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$m_G(\lambda) = m_{G_1}(\lambda) + m_{G_2}(\lambda) + \cdots + m_{G_l}(\lambda).$$

■

Ist $G$ die disjunkte Vereinigung zweier vollständiger Graphen $K_n$, so ist

$$\mathrm{sp}(G) = (n-1, n-1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{2n-2 \text{ mal}}).$$

Insbesondere ist $\lambda_{max}(G) = n-1$ ein doppelter Eigenwert von $G$.

Lemma 1.13 impliziert insbesondere, dass isomorphe Graphen dasselbe charakteristische Polynom und somit dasselbe Spetkrum haben. Die Umkehrung gilt hingegen nicht. Dazu betrachten wir die Graphen $G$ und $H$, wobei $G = K_{1,4}$ ein Stern ist und $H = C_4 + K_1$, die disjunkte Vereinigung von $C_4$ und $K_1$ ist (siehe 1).

Diese sind offenbar nicht isomorph. Dann können wir die Ecken sp nummerieren, dass für die Adjazenzmatrzen gilt:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

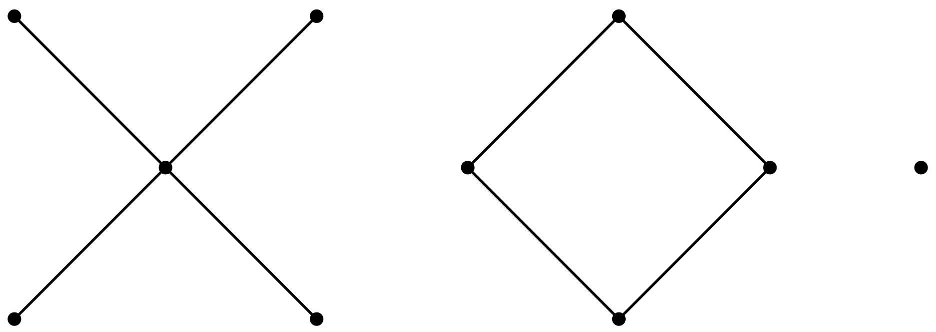

Abbildung 1: Zwei nicht isomorphe Graphen

Eine einfache Rechnung liefert dann

$$p_G(\lambda) = p_H(\lambda) = -\lambda^3(\lambda + 2)(\lambda - 2)$$

und somit

$$\mathrm{sp}(G) = \mathrm{sp}(H) = (2, 0, 0, 0, -2).$$

Die Graphen $G$ und $H$ haben dasselbe Spektrum, sind aber nicht isomorph. Zwei Graphen heißen **isospektral**, falls sie das selbe Spektrum besitzen. Isomoprhe Graphen sind also stets isospektral, aber nicht umgekehrt.

Die Graphentheorie beschäftigt sich mit der Struktur und den Eigenschaften von Graphen. Eine **Grapheneigenschaft** ist eine Klasse von Graphen, die mit jedem Graphen $G$ auch alle dazu isomorphen Graphen enthält. So ist zum Beispiel Z̈usammenhang(̈d.h. die Klasse der zusammenhängenden Graphen) eine Grapheneigenschaft. Eine **Spektraleigenschaft von Graphan** ist eine Klasse von Graphen, die mit jedem Graphen $G$ auch alle dazu isospektralen Graphen enthält. Dann ist jede Spektraleigenschaft von Graphen auch eine Grapheneigenschaft, aber nicht umgekehrt. Wie das obige Beispiel isospektraler Graphen $K_{1,4}$ und $C_4 + K_1$ zeigt, ist Z̈usammenhang k̈eine Spektraleigenschaft.

## 1.6 Eigenschaften des Graphenspektrums

In diesem Abschnitt wollen wir einige einfache, aber wichtigen Eigenschaften der Spektra von Graphen anführen. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **reduzibel**, falls zwei nichtleere disjunkte Teilmengen $X, Y$ von $\{1, \dots, n \mid \ \}$ existieren, mit $X \cup Y = \{1, \dots, n \mid \ \}$ und

$$A_{ik} = 0 \ i \in X, k \in Y,$$

anderfalls heißt $A$ **irreduzibel**. Wie man leicht zeigen kann, ist $A$ genau dann reduzibel, wenn man durch Umordnen der Zeilen und Spalten $A$ in folgende Blockform gebracht werden kann:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Ist $G$ ein Graph, so gilt

$$G \text{ ist zusammenhängend} \Leftrightarrow A(G) \text{ist irreduzibel.}$$

Anfang des vorherigen Jahrhunderts beschäftigten sich Perron [26] und Frobenius [14] mit dem Spektrum von unzerlegbaren Matrizen mit nicht negativen Elementen, insbesondere mit dem **Spektralradius** solcher Matrizen, d.h., ihrem betragsmäßig größtem Eigenwert. Die von ihnen erzielten Ergbnisse, welche als Satz von Perron-Frobenius bekannt sind, spielen in vielen Teilgebieten der Mathematik (Analysis, Numerik, Stochastik, Graphentheorie usw.) eine wichtige Rolle. Der folgende Satzt ist ein unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Perron-Frobenius.

**Satz 1.18** *Für einen zusammenhängenden Graphen $G$ der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ gelten folgende Aussagen:*

(a) *$\lambda_{max}(G)$ ist ein einfacher Eigenwert mit $\lambda_{max}(G) \leq \Delta(G)$.*

(b) *Es gibt einen Eigenvektor $x$ von $G$ zum Eigenwert $\lambda_{max}(G)$ mit $x(v) > 0$ für alle $v \in V(G)$.*

(c) *Ist $x$ ein Eigenvektor von $G$ zum Eigenwert $\lambda$ mit $x(v) > 0$ für alle $v \in V(G)$, so ist $\lambda = \lambda_{max}(G)$.*

(d) *Für alle Eigenwerte $\lambda$ von $G$ gilt $|\lambda| \leq \lambda_{max}(G)$.*

**Korollar 1.19** *Für einen $r$-regulären Graphen $G$ der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ gelten folgende Aussagen:*

(a) *$\lambda_{max}(G) = r$.*

(b) *$G$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\lambda_{max}(G)$ ein einfacher Eigenwert ist.*

**Beweis:** Es seien $G_1, \ldots, G_l$ die Komponenten von $G$. Dann ist jede Komponente $G_i$ ein $r$-regulärer Graph ($1 \leq i \leq l$). Damit folgt aus (1.6), dass $\mathbb{1}$ ein Eigenvektor von $G_i$ zum

Eigenwert $r$ ist. Dann ist $\lambda_{max}(G) = r$ und $m_G(r) = l$. Somit gilt sowohl (a) als auch (b). ■

Für einen Graphen $G$ sei $\overline{G}$ der **Komplementargraph** von $G$ mit $V(\overline{G}) = V(G)$ und $E(\overline{G}) = [V(G)]^2 \setminus E(G)$.

**Korollar 1.20** *Ist $G$ ein $r$-regulärer Graph der Ordnung $n \geq 1$, so gelten folgende Aussagen:*

(a) $\lambda_1(G) = r$ *und* $\lambda_1(\overline{G}) = n - 1 - r$.

(b) $\lambda_i(\overline{G}) = -\lambda_{n-i+1}(G) - 1$ *für* $2 \leq i \leq n$.

**Beweis:** Aussage (a) folgt aus Korollar 1.19, da der Komplementargraph eines $r$-regulären Graphes $n - 1 - r$-regulär ist. Zum Beweis von (b) wählen wir für $G$ und $\overline{G}$ die selbe Nummerierung der Ecken, etwa $v_1, v_2, \dots v_n$. Dann ist

$$A(G) + A(\overline{G}) = J - I$$

wobei $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die 1-Matrix ist, und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix ist. Wir betrachten $\lambda = \lambda_i(G)$ für $i \geq 2$. Dann existiert ein Eigenvektor $x$ zum Eigenwert $\lambda$. Dieser ist orthogonal zu $\mathbb{1} \in E_G(r)$. Folglich ist

$$A(G)x + A(\overline{G})x = Jx - Ix = -x$$

Durch Umstellen erhalten wir $A(\overline{G})x = (-\lambda - 1)x$. Also ist $(-\lambda - 1)$ ein Eigenwert von $\overline{G}$. Analog können wir zeigen, dass für $\lambda = \lambda_i(\overline{G})$ $(i \geq 2)$ $-1 - \lambda$ ein Eigenwert von $G$ ist. ■

**Lemma 1.21** *Sei $G$ ein Graph der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ mit $m$ Kanten. Dann gilt:*

(a) $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \cdots + \lambda_n(G) = 0$

(b) $\lambda_1(G)^2 + \lambda_2(G)^2 + \cdots + \lambda_n(G)^2 = 2m$

**Beweis:** Wir zeigen zunächst (i). Für die Adjazenzmatrix $A = A(G)$ gilt $\text{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = \text{spur}(A) = 0$ ist. Um (ii) zu beweisen, betrachten wir $B = A^2$. Die Einträge $B_{ij}$ geben die Anzahl aller Kantenfolgen der Länge 2 zwischen den Ecken $v_i$ und $v_j$ an. Insbesondere gilt $B_{ii} = d_G(v_i)$, da jede Kantenfolge der Länge 2 von $v_i$ nach $v_i$ genau einer Kante entspricht. Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G)^2 = \text{spur}(B) = \sum_{i=1}^{n} B_{ii} \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2|E(G)|$$

■

**Lemma 1.22** *Seien $H$ ein induzierter Untergraph von $G$ und $k = |G| - |H|$. Dann gilt*

$$\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H) \geq \lambda_{p+k}(G)$$

*für $1 \leq p \leq n - k$.*

**Beweis:** Ist $H$ ein induzierter Untergraph von $G$, so entsteht $A(H)$ aus $A(G)$ durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.10. ■

**Korollar 1.23** *Sei $G$ ein Graph mit $\omega(G) = p$ und $\alpha(G) = q$. Dann gilt:*

$$\lambda_p(G) \geq -1 \text{ und } \lambda_q(G) \geq 0.$$

**Beweis:** Ist $\omega(G) = p$, so besitzt $G$ einen vollständigen induzierten Untergraphen $H$, der Ordnung $p$. Dann gilt $\lambda_1(H) = p - 1$ und $\lambda_i(H) = -1$ für $2 \leq i \leq p$(siehe Beispiel 1.14). Damit folgt aus Korollar 1.23, dass $\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H) \geq -1$ ist. Ist $\alpha(G) = q$, so besitzt $G$ einen kantenlosen induzierten Untergraphen $H'$ der Ordnung $q$. Dann ist $\lambda_i(H') = 0$ für $1 \leq i \leq q$. Also folgt aus Korollar 1.23, dass $\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H') = 0$ ist. ■

Wir wollen hier auf das Buch SSpectra of Graphs"von Cvetković, Doob und Sachs [5] verweisen, welches weitere Resultate über das Spektrum von Graphen enthält. Dort werden auch die Eigenwerte von Kantengraphen charakterisiert. Der Beweis findet sich in [5, Theorem 6.11].

**Satz 1.24 (Doob)** *Für jeden Graphen $G$ gilt:*

$$\lambda_{min}(L(G)) \geq -2.$$

*Gleichheit tritt dann, und nur dann auf, wenn $G$ einen geraden Kreis oder zwei ungerade Kreise in einer Komponente enthält.*

**Korollar 1.25** *Ist $G$ der Kantengraph eines Waldes, so gilt $\lambda_{min}(G) > -2$.*

**Beweis:** Da $G$ Kantengraph eines Waldes ist, folgt mit Satz 1.24, dass $\lambda_{min}(G) \geq -2$ gilt. Wäre nun $\lambda_{min}(G) = -2$, so würde der Wald, dessen Kantengraph $G$ ist einen Kreis enthalten (entweder einen geraden Kreis, oder zwei ungerade Kreise in einer Komponente). Da aber Wälder keine Kreise enthalten, ist dies unmöglich und es gilt $\lambda_{min}(G) > -2$. ■

## 2 Erdős–Faber–Lovász Vermutung

Der Hauptteil dieser Bachelorarbeit befasst sich mit einer neuen Herangehensweise an die Erdős–Faber–Lovász Vermutung. Es bezeichne $\mathcal{EG}(n)$ die Klasse aller Graphen welche die Vereinigung von $n$ kantendisjunkten vollständigen Graphen der Ordnung $n$ sind. Für $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt also $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, wobei $G_i \cong K_n$ und $|G_i \cap G_j| \leq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ (in Abbildung 2 sind die Kanten der vollständigen Graphen mit der selben Farbe markiert). Es ergibt sich auf natürliche Weise die Frage nach der chromatischen Zahl eines

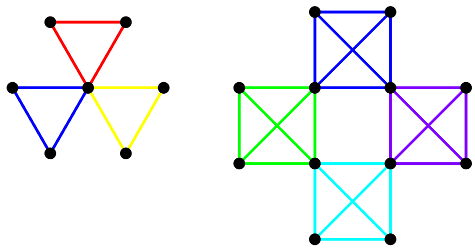

Abbildung 2: Zwei Graphen aus $\mathcal{EG}(3)$ und $\mathcal{EG}(4)$

solchen Graphen.

**Vermutung 2.1 (Erdős–Faber–Lovász)** *Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann ist $\chi(G) = n$.*

Die Vermutung wurde 1972 in Ohio von Erdős, Faber und Lovász aufgestellt, als sie über eine Verallgemeinerung der Vizing-Schranke für lineare Hypergraphen nachdachten (siehe [12] und [7]). Bereits sieben Jahre später, im Jahr 1979 bot Erdős schon 500 Dollar für die Lösung des Problems.

Diese Vermutung gehörte zu Erdős Lieblingsproblemen (siehe [9]).

Vermutung 2.1 lässt ist äquivalent zu der folgenden Vermutung über lineare Hypergraphen (siehe Satz 2.7):

**Vermutung 2.2** *Sei $H$ ein linearer Hypergraph mit $|H| = n \in \mathbb{N}$. Ist $H$ $n$-uniform, so gilt:*

$$\chi'(H) \leq |H|.$$

Im Folgenden wollen wir einige Resultate zur Vermutung 2.1 anführen. Kahn [19] bewies, dass die Vermutung asymptotische wahr ist.

**Satz 2.3** *Ist $H$ ein linearer Hypergraph, so gilt:*

$$\chi'(H) = |H| + o(|H|)$$

Weitere Anmerkungen und Resultate finden sich in [27].

## 2.1 Krauszzerlegungen von Graphen

Die Graphen aus $\mathcal{EG}(n)$ lassen sich alle durch $n$ vollständige Graphen der Ordnung $n$ kantendisjunkt überdecken. Im Folgenden wollen wir ein allgemeineres Konzept betrachten, indem wir nicht fordern, dass alle Graphen der Überdeckung die selbe Ordnung haben. Diese Art der Überdeckung wurde zuerst von Krausz [24] zur Charakterisierung von Kantengraphen verwendet, daher der Name Krauszzerlegung. Dazu wollen wir kurz eine Motivation geben. Sei $G$ ein Graph mit Kantengraph $L(G)$. Wir betrachten zu einer Ecke $v$ von $G$ die Menge $E_G(v)$ aller Kanten die mit $v$ inzident sind. Dann ist $L(G)[E_G(v)]$ ein vollständiger Graph der Ordnung $|E_G(v)| = d_G(v)$, da alle $e, e' \in E_G(v)$ die Ecke $v$ gemeinsam haben und somit die Kante $ee'$ in $L(G)$ vorkommt. Somit lässt sich der Kantengraph $L(G)$ mit vollständigen Graphen überdecken. Wir wollen diese Art von Überdeckungen nun verallgemeinern.

Sei $G$ ein Graph. Eine Menge $\mathcal{K}$ von Untergraphen von $G$ heißt **Krauszzerlegung** von $G$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(K1) Alle Graphen $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen mit $|K| \geq 2$.

(K2) Sind $K, K'$ zwei verschiedene Graphen aus $\mathcal{K}$, so sind sie kantendisjunkt (d.h. $|K \cap K'| \leq 1$)

(K3) $\mathcal{K}$ ist eine Überdeckung von $G$, d.h. $G = \bigcup\limits_{K \in \mathcal{K}} K$

Desweiteren sei für $v \in V(G)$ der **Grad** von $v$ bezüglich $\mathcal{K}$ definiert als

$$d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in V(K)\}|,$$

der **Minimalgrad** von $G$ bezüglich $\mathcal{K}$ als

$$\delta(\mathcal{K}) = \min_{v \in V(G)} d_{\mathcal{K}}(v)$$

und der **Maximalgrad** von $G$ bezüglich $\mathcal{K}$ als

$$\Delta(\mathcal{K}) = \max_{v \in V(G)} d_{\mathcal{K}}(v).$$

Für $d \geq 1$ sei $\kappa_d(G)$ die kleinste positive Zahl $m$ derart, dass $G$ eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ mit $|\mathcal{K}| = m$ und $\delta(\mathcal{K}) \geq d$ besitzt. Existiert keine solche Zahl $m$, so setzen wir $\kappa_d(G) = \infty$.

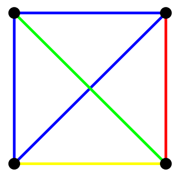

Abbildung 3: Eine Krauszzerlegung des $K_4$

**Beispiel 2.4** *In Abbildung 3 sehen wir eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ des $K_4$ (die einzelnen kantendisjunkten Untergraphen sind jeweils mit der selben Farbe markiert). Wir können außerdem erkennen, dass $\delta_G(\mathcal{K}) = 2$, und folglich $\kappa_2(K_4) \leq 4$ (wir werden später sehen, dass $\kappa_2(K_n) \geq n$ stets gilt, und somit $\kappa_2(K_4) = 4$ ist).*

**Lemma 2.5** *Seien $G$ ein Graph und $d \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $\kappa_d(G) < \infty$, wenn $\delta(G) \geq d$ ist.*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass $\delta(G) \geq d$ ist, falls $p = \kappa_d(G) < \infty$. Sei $v \in V(G)$ mit $d_G(v) = \delta(G)$. Dann existiert eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \{K^1, \ldots, K^p\}$ von $G$ mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Da alle Graphen der Krauszzerlegung kantendisjunkt sind, gilt

$$d \leq \sum_{K \in \mathcal{K}, v \in K} d_K(v) \leq d_G(v) = \delta(v).$$

Dabei gilt die erste Ungleichung, da $v$ in mindestens $d$ der Graphen aus $\mathcal{K}$ vorkommt und in diesen mindestens Grad 1 hat.

Sei nun $\delta(G) \geq d$. Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ gibt, mit $d_{\mathcal{K}}(v) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Sei $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Nummerierung der Kanten. Sei dann $K^i$ der Graph, welcher nur aus der Kante $e_i$ und den zu $e_i$ inzidenten Kanten besteht. Wir zeigen: $\mathcal{K} = \{K^i \mid 1 \leq i \leq m\}$ ist eine Krauszzerlegung von $G$ mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. (K1) ist trivialerweise erfüllt, da alle Graphen von $\mathcal{K}$ isomporph zu $K_2$ sind. Sind $K, K'$ zwei verschiedene Graphen aus $\mathcal{K}$, so sind sie kantendisjunkt, da ihre einzigen Kanten in

$G$ verschieden sind. Also ist auch (K2) erfüllt. Da jede Kante von $G$ in einem $K \in \mathcal{K}$ vorkommt, ist auch (K3) erfüllt. Sei nun $v$ eine Ecke von $G$. Dann ist

$$d_{\mathcal{K}}(v) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$$

und folglich auch $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von $G$ ist mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Also ist $\kappa_d(G) \leq |\mathcal{K}| < \infty$. ■

**Beispiel 2.6** *Sei $G$ ein dreiecksfreier Graph mit Minimalgrad mindestens $d$. Dann ist $\kappa_d(G) = |E(G)|$, da $G$ keine Dreiecke enthält und somit jeder Graph einer Krauszzerlegung von $G$ isomorph zu $K_2$ sein muss.*

**Satz 2.7** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $G \in \mathcal{EG}(p)$ gilt $\chi(G) = p$.*

(b) *Für alle Graphen $G$ gilt $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.*

(c) *Für alle linearen Hypergraphen $H$ gilt $\chi'(H) \leq |H|$.*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass (b) aus (a) folgt. Sei $G$ ein Graph der Ordnung $n$. Ist $\kappa_2(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist $\kappa_2(G) = p$. Dann existiert eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \left\{K^1, \dots K^p\right\}$ von $G$ mit $\delta(\mathcal{K}) \geq 2$. Ist $p \geq n$, so gilt:

$$\chi(G) \leq n \leq p = \kappa_2(G).$$

Ist andererseits $p < n$, so ist $|K^i| \leq \omega(G) \leq \kappa_2(G) = p$ für alle $1 \leq i \leq p$ (die letzte Ungleichung wird später in Korollar 3.5 gezeigt). Damit können wir für $1 \leq i \leq p$ jeden $K^i$ durch Hinzufügen von Ecken und Kanten zu einem vollständigen Graphen vom Grad $p$ aufblähen. Den so enstehenden Graphen nennen wir $G'$. Dann ist $G$ ein Untergraph von $G'$ und $G' \in \mathcal{EG}(p)$. Damit gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G') = p = \kappa_2(G)$$

Also folgt (b) aus (a).

Um zu zeigen, dass (a) aus (b) folgt, sei $G \in \mathcal{EG}(p)$ mit $p \in \mathbb{N}$. Dann ist $G$ die kantendisjunkte Vereinigung von $p$ vollständigen Graphen der Ordnung $p$, welche wir mit $K^1, \dots, K^p$ bezeichnen wollen. Nun entfernen wir wiederholt Ecken aus $G$, deren aktueller Grad kleiner als $p$ ist solange, bis keine Ecken vom Grad kleiner als $p$ existieren. Den daraus resultierenden (möglicherweise leeren) Graphen nennen wir $H$. Gelingt es, $H$ mit $p$ Farben zu färben, so können wir diese Färbung schrittweise zu einer Färbung von $G$ erweitern, indem wir die entfernten Ecken in umgekehrter Reihenfolge färben. Dies ist mit $p$ Farben möglich, da jede zu färbende Ecke höchstens $p-1$ bereits gefärbte Nachbarn besitzt. Somit reicht es zu zeigen, das $\chi(H) \leq p$. Ist $V(H) = \emptyset$, so gilt dies trivialerweise. Andernfalls gilt nach Konstruktion $\delta(H) \geq p$. Sei $\hat{K}^i = K^i \cap H$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $\hat{K}^i$ ein vollständiger Graph für alle $i$. Wähle $\mathcal{K} = \left\{\hat{K}^i \mid |\hat{K}^i| \geq 2, 1 \leq i \leq n\right\}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von $H$ mit $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$ ist. Die Bedingung (K1) ist offensichtlich erfüllt. Da in $G$ die $K^i$ kantendisjunkt sind, sind die $\hat{K}^i$ in $H$ ebenfalls kantendisjunkt, da $H$ ein Untergraph von $G$ ist. Folglich ist die Bedingung (K2) ebenfalls erfüllt. Sei $v \in V(H)$. Dann ist $d_H(v) \geq p$, und somit gilt $d_G(v) \geq d_H(v) \geq p$. Die Ecke $v$ ist in mindestens zwei vollständigen Graphen $K$ und $K'$ aus der Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ enthalten. Ansonsten wäre $v$ nur in einem vollständigen Graphen $K \in \mathcal{K}$ enthalten und somit wäre $d_H(v) = d_K(v) \leq p-1$, was unmöglich ist. Folglich ist $d_{\mathcal{K}}(v) \geq 2$ für alle $v \in V(H)$. Also ist $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung mit $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$, und wegen (b) folgt dann:

$$\chi(H) \leq \kappa_2(H) \leq |\mathcal{K}| \leq p.$$

Also lässt sich $H$ mit $p$ Farben färben, und wir können wie oben beschrieben $G$ ebenfalls mit $p$ Farben färben. Also ist $\chi(G) \leq p$. Damit ist die Äquivalenz von (a) und (b) gezeigt.

Es bleibt die Äquivalenz von (b) und (c) zu zeigen. Zunächst zeigen wir, dass (b) aus (c) folgt. Dazu betrachten wir einen beliebigen Graphen $G$ und zeigen, dass $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$ gilt. Ist $\kappa_2(G) = \infty$, so ist (b) trivialerweise erfüllt. Andernfalls ist $\kappa_2(G) = p < \infty$ und es gibt eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \left\{K^1, \ldots, K^p\right\}$ von $G$ mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Für $v \in V(G)$ definiere $e_v$ als die Menge aller $K \in \mathcal{K}$, welche $v$ enthalten. Auf Grund der Wahl der Krauszzerlegung gilt $|e_v| = d_{\mathcal{K}}(v) \geq \delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$ für alle $v \in V(G)$. Sei $H$ der Hypergraph mit Eckenmenge $\mathcal{K}$ und Kantenmenge $\{e_v \mid v \in V(G)\}$. Wir betrachten $\pi : V(G) \mapsto E(H)$ mit $\pi(v) = e_v$, diese ist offensichtlich surjektiv. Wir zeigen, dass $\pi$ bijektiv ist. Wäre dem nicht so, so gäbe es zwei unterschiedliche Ecken $v, w$ mit $e_v = e_w$. Da $|e_v| \geq 2$ ist, wäre dann die Kante $vw$ in zwei Graphen von $\mathcal{K}$ enthalten, was der Bedingung (K2) widerspräche. Also ist $\pi$ bijektiv. Wir zeigen nun, dass $H$ ein linear Hypergraph ist. Seien dazu $e_v, e_w$ zwei unterschiedliche Kanten von $H$. Angenommen $|e_v \cap e_w| \geq 2$. Dann existieren mindestens zwei Graphen $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $v, w \in K, K'$. Da $K, K'$ aus der Krauszerlegung sind, ist die Kante $vw$ sowohl in $K$ als auch in $K'$ vorhanden. Dies ist aber ein Widerspruch zu Eigenschaft (K2) einer Krauszzerlegung. Folglich ist $|e_v \cap e_w| \leq 1$, also ist $H$ linear. Dann folgt aus der Vorraussetzung (c), dass $\chi'(H) \leq |H| = \kappa_2(G)$ ist. Somit finden wir eine Färbung $\phi : E(H) \mapsto \{1, \ldots, p\}$ der Kanten von $H$. Sei dann $\varphi = \phi \circ \pi$. Wir zeigen, dass $f$ eine Färbung der Ecken von $G$ ist. Dazu betrachten wir eine Kante $vw \in E(G)$. Dann existiert ein $K \in \mathcal{K}$ mit $vw \in E(K)$. Also ist $e_v \cap e_w \neq \emptyset$ und folglich

$$\varphi(v) = \phi(e_v) \neq \phi(e_w) = \varphi(w).$$

Also ist $\varphi$ ein $p$-Färbung von $G$. Das heißt

$$\chi(G) \leq p = \kappa_2(G).$$

Also folgt (b) aus (c).

Dass (c) aus (b) folgt, zeigen wir durch Widerspruch. Gelte (b) und sei $H$ ein linearer Hypergraph minimaler Ordnung welcher (c) nicht erfüllt (d.h. ist $H'$ ein weiterer linearer Hypergraph mit $|H'| < |H|$, so ist $\chi'(H') \leq |H'|$). Ist $\delta(H) \leq 1$, so können wir aus $H$ eine Ecke $v$ mit $d_H(v) \leq 1$ entfernen. Für den Hypergraphen $H' = H - v$ gilt dann $\chi'(H') \leq |H'| = |H| - 1$. Da $v$ in höchstens einer Kante von $H$ enthalten ist, lässt sich die Färbung von $H'$ zu einer $\chi'(H) + 1$-Färbung von $H$ erweitern. Folglich gilt also:

$$\chi'(H) \leq \chi'(H') + 1 \leq |H'| + 1 = |H|$$

Dies steht im Widerspruch zur Wahl von $H$. Also ist $\delta(H) \geq 2$. Sei $G = L(H)$ der Kantengraph von $H$ und $K^v = G[E_H(v)]$ für $v \in V(G)$. Wir zeigen, dass die Menge $\mathcal{K} = \{K^v \mid v \in V(H)\}$ eine Krauszzerlegung von $G$ mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$ ist. Sei also $K \in \mathcal{K}$ beliebig. Dann gibt es eine Ecke $v \in V(H)$ mit $K = K^v = G[E_H(v)]$. Seien weiterhin $e, e' \in E_H(v)$ unterschiedliche Kanten. Da $H$ ein linearer Hypergraph ist, ist $e \cap e' = \{v\}$ und deswegen $ee' \in E(K^v)$. Also ist $K^v$ ein vollständiger Graph. Außerdem ist

$$|K^v| = |E_H(v)| = d_H(v) \geq \delta(H) \geq 2$$

Also erfüllt $\mathcal{K}$ die Bedingung (K1). Seien nun $K^v, K^w$ zwei verschiedene vollständige Graphen aus $\mathcal{K}$. Wir müssen zeigen, dass diese keine Kante in $G$ gemeinsam haben. Angenommen, es gäbe eine solche Kante $ee' \in E(G)$. Dann wäre $v, w \in e \cap e'$. Ein Widerspruch, da $H$ ein linearer Hypergraph ist. Also erfüllt $\mathcal{K}$ (K2). Sei $ee' \in E(G)$. Folglich ist $e \cap e' \neq \emptyset$ und es existiert eine Ecke $v$ von $H$ mit $e \cap e' = \{v\}$ (da $H$ ein linearer Hypergraph ist). Damit sind $e, e' \in V(K^v)$. Da $K^v$ ein vollständiger Graph ist, ist $ee' \in E(K^v)$. Also erfüllt $\mathcal{K}$ die Bedingung (K3). Es bleibt zu zeigen, dass $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$ ist. Sei dazu $e \in V(G)$ beliebig.

Da wir $H$ schlingenlos ist, existieren zwei unterschiedliche Ecken $v, w \in e$. Also ist $e \in K^v$ und $e \in K^w$. Diese beiden vollständigen Graphen sind unterschiedlich, da sonst $v$ und $w$ in zwei Kanten enthalten sind, welche nicht gleich sein können, da $H$ ein linearer Hypergraph ist. Damit ist

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_2(G) \leq |\mathcal{K}| = |H|$$

Ein Widerspruch zur Annahme $\chi'(H) > |H|$. ■

# 3 Spektraleigenschaften von Graphen

In diesem Kapitel wollen wir die in Abschnitt 1.4 behandelten Themen weiter vertiefen. Insbesondere werden wir einen Zusammenhang zwischen Krauszzerlegungen und den Eigenwerten eines Graphen herstellen. Da spezielle Krauszzerlegungen von Graphen (nämlich diejenigen mit Minimalgrad $\geq 2$) in Zusammenhang mit Vermutung 2.1 stehen, werden wir hier eine alternative Herangehensweise an die Vermutung finden.

## 3.1 Krauszzerlegungen und Eigenwerte

**Satz 3.1** *Seien $G$ ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{K} = \{K^1, \dots, K^p\}$ eine Krauszzerlegung von $G$ mit $d(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$ . Desweiteren sei $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$ für $1 \leq i \leq n$. Dabei wählen wir die Eckennummerierung so, dass $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ ist. Dann gelten folgende Aussagen :*

(a) $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ *für* $i = 1, \dots, n$.

(b) $\lambda_{p+1}(G) \leq -d$ *falls* $p < n$ *ist.*

**Beweis:** Zunächst zeigen wir (a). Es sei $A$ die Adjazenzmatrix von $G$ und $D := \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Definiere $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ als die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$, also

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \in K^j \\ 0 & \text{falls } v_i \notin K^j \end{cases}$$

Nun betrachten wir $M = BB^T$. Es gilt

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{d} B_{ik} B^T_{kj} = \sum_{k=1}^{d} B_{ik} Bjk$$

Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Da $B$ die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$ ist, gilt

$$B_{ik} = 1 \text{ und } B_{jk} = 1 \Leftrightarrow v_i, v_j \in K^k.$$

Ist $v_i v_j \in E(G)$, so kommt die Kante $v_i v_j$ in genau einem $K \in \mathcal{K}$ vor, d.h. es gibt genau ein $k \in \{1, \dots, m\}$ für das $B_{ik}$ und $B_{jk}$ gleich 1 sind. Ist $v_i v_j \notin E(G)$, so kommt die Kante $v_i v_j$ auch nicht in einem der Graphen der Krauszzerlegung vor. Also ist für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ $B_{ik} B_{jk} = 0$. Folglich ist $M_{ij} = 1$ genau dann, wenn $v_i v_j \in G$. Also ist $M_{ij} = A_{ij}$.

Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wir betrachten $M_{ii}$. Es gilt

$$M_{ii} = \sum_{k=1}^{d} B_{ik} B_{ik} = \sum_{k=1}^{d} B_{ik}.$$

$B_{ik} = 1$ gilt genau dann, wenn $v_i \in K^k$. Folglich ist $M_{ii} = d_{\mathcal{K}}(v_i) = d_i$. Damit gilt $M = A + D$. $M = BB^T$ ist nach Satz 1.7 positiv semidefinit. Folglich ist $A - (-D)$ positiv semidefinit, und es folgt mit Lemma 1.9, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -d_{n-i+1}$$

Damit ist (a) gezeigt.

Nun zeigen wir (b). Sei $p < n$. Dann ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p$. Also ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$ und es folgt mit Satz 1.11 dass

$$\lambda_{p+1}(A) + d \leq \lambda_{p+1}(A) + d_n = \lambda_{p+1}(A) + \lambda_n(D) \leq \lambda_{p+1}(M) = 0$$

Durch Umstellen erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

**Korollar 3.2** *Seien $G$ ein Graph und $H$ ein induzierter Untergraph von $G$. Desweiteren seien $q, d \in \mathbb{N}$ mit $q \leq |H|$ und $d \geq 2$. Ist $\lambda_q(H) \geq -d$, so ist $\kappa_d(G) > q$.*

**Beweis:** Angenommen es gilt $p = \kappa_d(G) < q$. Dann gibt es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ von $G$ mit $|\mathcal{K}| = p$ und $\delta(\mathcal{K}) \geq d$. Wegen Lemma 1.22 gilt dann $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H) > -d$. Andererseits folgt aus Satz 3.1 dass $\lambda_q(G) \leq \lambda_{p+1} \leq -d$, ein Widerspruch. ■

**Korollar 3.3** *Seien $\delta(G) \geq 2$ und $H$ ein induzierter Untergraph von $G$. Ist $H$ Kantengraph eines Waldes, so gilt $\kappa_2(G) \geq |H|$.*

**Beweis:** Sei $q = |H|$. Da $H$ Kantengraph eines Waldes ist, folgt $\lambda_q(H) > -2$ aus Korollar 1.25. Dann ist mit Korollar 3.2 $\kappa_2(G) \geq |H|$. ■

**Korollar 3.4 (Klotz)** $\kappa_2(K_n) \geq n$

**Beweis:** $K_n$ ist der Kantengraph von $K_{1,n}$. Nun folgt die Behauptung aus Korollar 3.3. ■

**Korollar 3.5** *Ist $\delta(G) \geq 2$, so gilt $\omega(G) \leq \kappa_2(G)$ und $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$.*

**Beweis:** Sei $p = \omega(G)$. Dann gilt nach Korollar 1.23 $\lambda_p(G) \geq -1 > -2$. Damit sind für $d = 2$ die Voraussetzungen von Korollar 3.2 erfüllt, und es gilt folglich $\kappa_2(G) \geq p = \omega(G)$. Für $q = \alpha(G)$ gilt mit Korollar 1.23 $\lambda_q(G) \geq 0 > -2$. Damit folgt $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$. ■

Wir wollen nun einen Menge von Graphenparametern definieren. Seien dazu $d \geq 1$ und $G$ ein Graph. Wir bezeichnen mit $\xi_d$ die Anzahl aller Eigenwerte von $G$, welche echt größer als $-d$ sind. Damit ist also

$$\xi_d(G) = \max\{i \mid \lambda_i > -d\}.$$

Dieser ist ein Graphenparamter, da nach Lemma 1.13 isomorphe Graphen das selbe Spektrum besitzen, und somit $\xi_d$ zwei isomorphen Graphen die selbe reelle Zahl zuordnet. Nach Lemma 1.22 ist $\xi_d$ für alle $d \geq 1$ ein monotoner Graphenparamter, d.h. ist $H$ ein induzierter Untergraph von $G$, so gilt $\xi_d(H) \leq \xi_d(G)$. Um die Erdős-Faber-Lovász Vermutung zu beweisen, reicht es also aus zu zeigen, dass jeder Graph

$$\chi(G) \leq \xi_2(G)$$

erfüllt.

Eine Möglichkeit dies zu zeigen, wäre zu beweisen, dass $\xi_2$ ein Szekeres-Wilf-Paramter ist. Die Eigenschaft (S1) ist nach den obigen Überlgungen erfüllt. Berechnungen in Maple zeigen jedoch, dass Eigenschaft (S2) nicht immer erfüllt ist. ausführlicher? mit Beispiel?

**Satz 3.6** *Existiert ein $d \in \mathbb{N}$, sodass für alle Graphen $G$*

$$\chi(G) \leq \xi_d(G)$$

*gilt, so gelten folgende Aussagen:*

(a) *Für alle Graphen $G$ gilt $\chi(G) \leq \kappa_d(G)$.*

(b) *Ist $H$ ein linearer Hypergraph mit $|e| \geq d$ für alle $e \in E(H)$, so ist $\chi'(H) \leq |H|$*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst (a). Sei $G$ ein beliebiger Graph mit $\chi(G) = k$. Nach Voraussetzung ist dann $\chi(G) \leq \xi_d(G)$, d.h. $\lambda_k(G) > -d$. Mit Korollar 3.2 folgt $\kappa_d(G) \geq k = \chi(G)$. Damit ist (a) gezeigt.

Wir zeigen nun (b) durch Widerspruch. Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es einen linearen Hypergraphen minimaler Ordnung mit $|e| \geq d$ für alle $e \in E(H)$ , für welchen $\chi'(H) > H$. Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich dem kleinsten Eckengrad.

**Fall 1 :** Es existiert eine Kante $e$ von $H$ vom Grad kleiner als $d$. Da $|e| \geq d$ ist und $H$ ein linearer Hypergraph ist, gibt es eine Ecke $v$ von $H$ welche nur in $e$ vorkommt. Sei $H' = H - e$. Dann ist $|H'| < |H|$. Dieser lässt sich auf Grund der Wahl von $H$ mit

$\chi'(H') \leq |H'|$ Farben färben. Diese Färbung können wir zu einer Färbung von $H$ mit höchstens $|H'| + 1 = |H|$ Farben erweitern, indem wir $e$ mit einer neuen Farbe färben. Dann gilt

$$\chi'(H) \leq \chi'(H) + 1 \leq |H'| + 1 = |H|.$$

Ein Widerspruch zur Wahl von $H$.

**Fall 2 :** *A*lle Kanten von $H$ haben mindestens den Grad $d$. Sei $G = L(H)$ der Kantengraph von $H$. Dann ist $\delta(G) \geq d$. Sei $K^v = G[E_H(v)]$ für alle $v \in V(G)$. Sei $\mathcal{K} = \{K^v \mid v \in V(H)\}$. Dann ist $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von $G$. mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Damit gilt

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_d(G) \leq |\mathcal{K}| = |H|.$$

Wobei die erste Ungleichung wegen (a) gilt. ■

## 3.2 Schranken für $\kappa_d(G)$

Wir wollen nun einige Schranken für $\kappa_d(G)$ angeben.

**Lemma 3.7** *Ist $\delta(G) \geq d$, so ist $\kappa_d(G) \leq |E(G)|$.*

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von Lemma 2.5. ■

**Satz 3.8** *Sei $G$ ein Graph der Ordnung $n$ und $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\kappa_d(G) \geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d}$$

**Beweis:** Ist $\kappa_d(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen.
**Fall 1 :** $\kappa_d(G) \geq n$ Da $\lambda_1(G) \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned}\lambda_1(G) + d &\geq d \\ 1 &\geq \frac{d}{\lambda_1(G) + d} \\ \kappa_d(G) \geq n &\geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d}\end{aligned}$$

**Fall 2 :** $\kappa_d(G) < n$ Sei $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von $G$ mit $|\mathcal{K}| = \kappa_d(G)$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Seien $d_i = d_{\mathcal{K}}(v)$. Wir können annehmen, dass die $d_i$ fallend geordnet sind. Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Adjanzenzmatrix von $\mathcal{K}$ und $M = BB^T = A + D$, wobei $A = A(G)$ und $D =$

$\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Dann ist $M$ positiv semidefinit und $\operatorname{rang}(M) \leq p = \kappa_d(G) < n$. Deswegen ist $\lambda_{p+1}(M) = \ldots \lambda_n(M) = 0$. Mit Satz 1.12 folgt dann :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(M) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(M) \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(D)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(n-p)d \leq (n-p)\lambda_n(D) \leq \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(D) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(A) \leq p\lambda_1(A)$$

Durch Umstellen nach $p$ erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

## 3.3 Chromatische Zahl und Eigenwerte

Es ist nicht viel über den Zusammenhang der chromatischen Zahl eines Graphen, und seinen Eigenwerte bekannt. Wir wollen hier auf zwei Sätze verweisen, die Schranken für die chromatische Zahl eines Graphen in Abhängigkeit des größten bzw. kleinsten Eigenwerts angeben. Eine Abschätzung nach oben gibt Wilf in [?] an. Man beachte, dass diese eine Verstärkung von Satz 1.4 ist, da der größte Eigenwert eines Graphen duch den Maximalgrad beschränkt ist.

**Satz 3.9** *Ist $G$ ein Graph, so gilt:*

$$\chi(G) \leq \lambda_1(G) + 1.$$

*Gleichheit tritt nur auf, falls $G$ ein vollständer Graph oder ein ungerader Kreis ist.*

Eine untere Schranke findet sich in [?] (man beachte hierbei, dass $\lambda_{min}(G)$ negativ ist):

**Satz 3.10** *Ist $G$ ein Graph, so gilt:*

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_{max}(G)}{\lambda_{min}(G)}$$

## 3.4 Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Gelten die Vorraussetzungen von Satz 3.6 für $d = 2$, so folgt die Erdős–Faber–Lovász Vermutung auf Grund von Satz 2.7. Im Folgenden wollen wir für einige Graphenklassen folgende Vermutung überprüfen.

**Vermutung 3.11** *Ist $G$ ein Graph so gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$*

**Bemerkung 3.12** *Es reicht Vermutung 3.11 für $k$-kritische Graphen zu zeigen.*

**Beweis:** Gelte Vermutung 3.11 für kritische Graphen. Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ einen $k$-kritischen Untergraphen $H$. Für diesen gilt nach Vorraussetzung

$$k = \chi(H) \leq \xi_2(H).$$

Folglich ist $\lambda_k(H) > -2$. Nun folgt mit Satz 1.22:

$$\lambda_k(G) \geq \lambda_k(H) > -2.$$

Und deswegen $\chi(G) = k \leq \xi_2(G)$. Damit gilt Vermutung 3.11 auch für $G$. ■

Seien $v, r$ zwei natürliche Zahlen mit $v \geq 2r - 1$. Der **Kneser Graph** $K_{v:r}$ geht auf Kneser [23] zurück und ist der Graph mit Eckenmenge

$$V(K_{v:r}) = \{X \subset \{1, \dots v\} \mid |X| = r\}$$

und Kantenmenge

$$E(K_{v:r}) = \{XY \mid X, Y \in V(K_{v:r}), X \cap Y = \emptyset\}.$$

$K_{v:1}$ ist ein vollständiger Graph der Ordnung $v$ und $K_{2r-1:r}$ besitzt keine Kanten. Kneser gibt in [23] eine obere Schranke für die chromatische Zahl der Kneser Graphen an. Später zeigte Lovász , dass diese Schranke immer angenommen wird. Referenz

**Satz 3.13** *Ist $v \geq 2r - 1$, dann gilt*

$$\chi(K_{v:r}) \leq v - 2r + 2$$

Der folgende Satz ist als Satz von Erdős-Ko-Rado [10] bekannt, und gibt die Unabhängigkeitszahl eines Kneser Graphen an.

**Satz 3.14** *Ist $v \geq 2r$ und $r \geq 2$, so gilt:*

$$\alpha(K_{v:r}) = \binom{v-1}{r-1}.$$

**Satz 3.15** *Seien $v \geq 2r-1$, $r \geq 1$ und sei $G = K_{v:r}$ ein Kneser Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.*

**Beweis:** Sei $\chi(G) = k$. Wir fixieren $v \in \mathbb{N}$ und machen eine Fallunterscheidung bezüglich $r$.

**Fall 1 :** $r = 1$ Dann ist $G = K_{v:1}$ isomorph zu $K_v$. Die Eigenwerte des $K_v$ sind alle größer als $-2$, insbesondere also auch $\lambda_k(G)$. Folglich ist $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.

**Fall 2 :** $v > 2r \geq 4$ Sei $p = \alpha(G)$. Dann ist nach Satz 3.14 $p = \binom{v-1}{r-1}$ und folglich $p \geq v-1$. Nach Satz 3.13 ist $\chi(G) = v-2r+2 < v-2$. Folglich ist $p > \chi(G)$. Mit Korollar 1.23 gilt dann

$$\lambda_k(G) \geq \lambda_p(G) \geq 0 > -2.$$

Folglich gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$. **Fall 3 :** $v = 2r$ Die Ecken von $G$ sind alle $r$-elementingen Teilmengen von $\{1, \ldots, v\}$. Da $v = 2r$ ist für ein $w \in V(G)$ die einzige benachbarte Ecke ihr Komplement in $\{1, \ldots, v\}$. Also sind die Komponenten von $G$ alle isomorph zu $K_2$. Dann ist $\chi(G) = 2$ und $\omega(G) = 2$. Aus Korollar 1.23 folgt dann, dass $\lambda_2(G) \geq -1 > -2$ ist. Insbesondere ist $\chi(G) \leq \xi(G)$.

**Fall 4 :** $v = 2r+1$ Dann ist $|E(G)| = 0$, und folglich ist $G$ ein kantenloser Graph, welcher nur den Eigenwert $0 > -2$ besitzt. Insbesondere ist also auch $\lambda_k(G) = 0 > -2$. Und deswegen gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$. ■

**Satz 3.16** *Sei $G$ ein perfekter Graph. Dann gilt:*

$$\chi(G) \leq \xi_2(G)$$

**Beweis:** Da $G$ ein perfekter Graph ist, gilt $k = \chi(G) = \omega(G)$. Also besitzt $G$ einen vollständigen Graphen der Ordnung $k$ als induzierten Untergraphen. Nach 1.23 ist $\lambda_k(G) > -2$. Und damit $\chi(G) \leq \xi_2(G)$. ■

**Satz 3.17** *Vermutung 3.11 gilt für planare Graphen welche mindestens 7 Ecken besitzen.*

**Beweis:** Sei $G$ ein planarer Graph mit $|G| \geq 7$. Wir zeigen, dass $\lambda_4(G) > -2$ gilt. Da alle planaren Graphen eine chromatische Zahl kleiner gleich 4 haben, folgt dann die Behauptung.

Nehmen wir dafür an, dass $\lambda_4(G) < -2$ gilt. Aus Lemma 1.21 (i) folgt dann:

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(G) = -\sum_{i=4}^{n} \lambda_i(G) \geq 2(n-3) = 2n - 6$$

Mit Lemma 1.21 (ii) folgt außerdem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(G)^2 &= 2m - \sum_{i=4}^{n} \lambda_i(G)^2 \\ &\leq 2(3n-6) - 4(n-3) = 2n \end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt dabei aus der Abschärtzung der Kanten für planare Graphen. Aus der Abschätzung der 2 und 1 Norm folgt nun:

$$\begin{aligned} 2n &\geq \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3|)^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(2n-6)^2 \end{aligned}$$

Lösen der entstehenden quadratischen Gleichung ergibt $n \leq 6$, ein Widerspruch. ■

## 3.5 Hájos und Ore Summe

In diesem Abschnitt wollen wir die Klasse der Hájos-konstruierbaren Graphen und die Klasse der Ore-konstruierbaren Graphen untersuchen.

Sei $G$ ein Graph und $X$ eine nichtleere Menge von Ecken von $G$. Wir erhalten einen neuen Graphen $G'$ aus $G$ durch **Identifizierung** von $X$ mit einer Ecke $x$, falls $G'$ aus $G - X$ durch hinzufügen der neuen Ecke $x$ entsteht, welche mit allen Nachbarn von $X$ in $G - X$ benachbart ist.

Seien $G_1, G_2$ zwei nichtleere disjunkte Graphen und $x_1y_1 \in E(G_1)$ sowie $x_2y_2 \in E(G_2)$ zwei beliebige Kanten. Die **Hajós Summe** [16] von $G_1$ und $G_2$ (bezüglich $x_1y_1$ und $x_2y_2$) ist derjenige Graph, der entsteht wenn wir $G_1$ und $G_2$ vereinigen, die Kanten $x_1y_1$ und $x_2y_2$ entfernen, die Kante $y_1y_2$ hinzufügen und die Ecken $x_1$ und $x_2$ identifizieren. Wir schreiben dann auch $G = \text{Hájos}(G_1, x_1y_1, G_2, x_1y_2)$ oder kurz $G = \text{Hájos}(G_1, G_2)$ falls die Wahl der Kanten beliebig ist.

Für $k \in \mathbb{N}$ heißt ein Graph $G$ **Hájos-$k$-konstruierbar**, falls $G$ entweder ein vollständiger Graph der Ordnung $k$ ist, falls $G$ durch die Hajós Summe zweier Hajós $k$-konstruierbarer Graphen entsteht, oder falls $G$ durch die Identifizierung zweier nicht benachbarten Ecken eines Hajós $k$-konstruierbaren Graphen entsteht.

Es ist bekannt, dass die Hájos Summe zweier $k$-chromatischer Graphen wieder $k$-chromatisch ist .

ein Bild?

quelle?

**Satz 3.18** *Seien $k \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{N}$. Seien weiterhin $G_1$ und $G_2$ Graphen mit $k \leq \xi_d(G)$. Dann gilt für $G = Hájos(G_1, G_2)$:*

$$\xi_d(G) \geq 2k - 4$$

**Beweis:** Seien $x_1y_1 \in E(G_1)$ und $x_2y_2 \in E(G_2)$ die Kanten welche bei der Hájos Summe verwendet werden. Wir setzen

$$H_i = G[V(G_i) \setminus \{x_i, y_i\}]$$

für $i = 1, 2$. Dann ist für $i = 1, 2$ der Graph $H_i$ sowohl ein induzierter Untergraph von $G_i$ als auch von $G$. Desweiteren gilt $|H_i| = |G_i| - 2$ für $i = 1, 2$. Also folgt aus Lemma 1.22, dass

$$\lambda_{k-2}(H_i) \geq \lambda_k(G_i) > -d$$

für $i = 1, 2$ richtig ist. Wir betrachten nun den Graphen $H$, welcher die disjunkte Vereinigung von $H_1$ und $H_2$ ist. Dann ist $H$ ebenfalls ein induzierter Untergraph von $G$. Das Spektrum von $H$ ist nach Beispiel 1.17 die Vereinigung der Spektra von $H_1$ und $H_2$. Also gilt $\xi_d(H) \geq 2(k-2) = 2k-4$, da sowohl $H_1$ als auch $H_2$ mindestens $k-2$ Eigenwerte besitzen, die größer als $-d$ sind. Da $\xi_d$ ein monotoner Graphenparamter ist, gilt auch $\xi_d(G) \geq 2k - 4$. ∎

Eine weitere, der Hájos Summe ähnliche Konstruktion ist die **Ore Summe** [25]. Seien $G_1$ und $G_2$ zwei disjunkte Graphen und $x_1y_1$ eine Kante von $G_1$ und $x_2y_2$ eine Kante von $G_2$. Desweiteren seien $v_1, v_2, \ldots, v_t$ unterschiedliche Ecken von $G_1 \setminus x_1$ und $u_1, u_2, \ldots, u_r$ unterschiedliche Ecken von $G_2 \setminus x_2$. Wir konstruieren nun die Ore Summe von $G_1$ und $G_2$ aus der Hájos Summe Hájos$(G_1, x_1y_1, G_2, x_2y_2)$, indem wir zusätzlich die Kanten $v_1u_1, v_2u_2, \ldots, v_ru_r$ hinzufügen. Der so entstandene Graph ist dann die Ore Summe von $G_1$ und $G_2$.

Für $k \in \mathbb{N}$ heißt ein Graph $G$ **Ore $k$-konstruierbar**, falls $G$ entweder ein vollständiger Graph der Ordnung $k$ ist, oder die Ore Summe zweier disjunkter Ore $k$-konstruierbaren Graphen ist.

## Literatur

[1] Berge, C. , (2001). *The Theory of Graphs* Dover

[2] Brooks, R. L. , On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **37** (1941) 194–197.

[3] Chung, W. und Lawler, E. , Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász. *Combinatorica* **8** (1988) 293–295.

[4] Courant, R. und Hilbert, D. , *Methoden der Mathematischen Physik I.* Springer 1924.

[5] Cvetković; D. M., Doob, M. und Sachs, H. , *Spectra of Graphs: Theory and Application.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979, Academic Press 1980.

[6] Diestel, R. , (2010). *Graphentheorie* Springer

[7] Erdős, P. , Problems and results in graph theory and combinatorial analysis. *Congr. Numer.* **XV** (1976) 169–192.

[8] Erdős, P. , Problems and results in graph theory and combinatorial analysis. *Graph Theory and Related Topics*, pp. 153–163. Academic Press 1979.

[9] Erdős, P. , On combinatorial problems which I would most like to see solved. *Combinatorica* **1** (1981) 25–42.

[10] Erdős, P., Ko, C. und Rado, R. , Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **12** (1961) 313–320.

[11] Fan, Ky , On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35** (1949) 652–655.

[12] Faber, V. und Lovász, L. , Problem 18, Hypergraph Seminar, Ohio State Univ., 1972. Lcture Notes in Mathematics, vol. 411, p. 284. Springer 1974.

[13] Fischer, E. , Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten. *Monatsh. Phys.* **16** (1905) 234–249.

[14] Frobenius, G. , Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. *Sitzber. Akad. Wiss., Phys.-math. Klasse, Berlin* (1912) 456–477.

[15] Godsil, C. und Roy, G. , *Algebraic Graph Theory.* Graduate Text in Mathematics, Vol. 207, Springer 2001.

[16] Hajós, Gy. , Über eine Konstruktion nicht $n$-färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Natur. Reihe* **10** (1961) 116–117.

[17] Hoffman, A. , On eigenvalues and colorings. *Graph Theory and its Applications*, pp. 79–91. Academic Press 1970.

[18] Hoffman, A. , On graphs whose least eigenvalue exceeds $-1-\sqrt{2}$. *Lin. Alg. Appl.* **16** (1977) 153–165.

[19] Kahn, J. , Coloring nearly-disjoint hypergraphs with $n + o(n)$ colors. *J. Combin. Theory Ser. A* **59** (1992) 31–39.

[20] Karp, R. M. , Reducibility among combinatorial problems. *Complexity and Computer Computation*, pp. 85–103. Plenum Press 1972.

[21] König, D. , Über Graphen und ihre Anwendungen auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Math. Ann.* **77** (1916) 453–465.

[22] König, D. , *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen.* Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig 1936. Reprinted by Chealsea 1950 and by B. G. Teubner 1986. English translation published by Birkhäuser 1990.

[23] Kneser, M. , Aufgabe 360. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **58** (2. Abteilung)(1955) 27.

[24] Krausz, J. , Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les résaux (Hungarian with French summary). *Mat. Fiz. Lapok* **50** (1943) 75–85.

[25] Ore, O , *The Four Colour Problem.* Academic Press, 1967.

[26] Perron, O. , Zur Theorie der Matrizen. *Math. Ann.* **64** (1907) 248–263.

[27] Romero, D. und Sánchez-Arroyo, A. , Advances on the Erdős-Faber-Lovász conjecture. *Combinatorics, Complexity, and Chance: A Tribute to Dominic Welsh*, pp. 285–298. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Oxford University Press 2007.

[28] Stockmeyer, L. , Planar 3-colorability is polynomial complete. *ACM SIGACT News* **5** (1973) 19–25.

[29] Szekeres, G. und Wilf, H. S. , An inequality for the chromatic number of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B* **4** (1968) 1–3.

[30] Vizing, V. G. , On an estimate of the chromatic class of a $p$-graph (in Russian). *Diskret. Analiz* **3** (1964) 25–30.

[31] Weyl, H. , Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichtungen. *Math. Ann.* **71** (1912) 441–479.

[32] Wilf, H. S. , The eigenvalues of a graph and its chromatic number. *J. London Math. Soc.* **42** (1967) 330–332.

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

Stefan Heyder