Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra

Bachelorarbeit

Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder

Matrikelnummer : 49070

Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten, der chromatischen Zahl und den Krauszzerlegungen eines Graphen. Die dafür benötigten Grundlagen werden wir in Kapitel 1 erarbeiten.

1.1 Graphentheoretische Grundlagen

Es sei $G = (V(G), E(G))$ stets ein (schlichter, ungerichteter) Graph mit Eckenmenge $V(G) = \{v_1, \dots v_n\}$ und Kantenmenge $E(G) = \{v_iv_j | v_i$ und v_j sind in G adjazent$\}$.Dann heißt $|G| = |V(G)|$ die **Ordnung** von G. Der **Grad** einer Ecke $v \in V(G)$ sei definiert als $d_G(v) = |\{v_j | v_iv_j \in E(G)\}|$. Der **Minimalgrad** (**Maximalgrad**) sei definiert als der kleinste (größte) Grad einer Ecke von G und wird mit $\delta(G)$ $(\Delta(G))$ bezeichnet. Wir wollen nun einige häufig auftretenden Graphen bezeichnen. Der **vollständige Graph** der Ordnung n sei K_n und sein Komplement, der **leere Graph** der Ordnung n sei O_n, der **Kreis** der Länge n sei C_n. Der **Weg** der Länge n sei P_{n+1}. Für einen Graphen G sei der **Kantengraph** $L(G)$ definiert als der Graph mit Eckenmenge $V(L(G)) = E(G)$ und Kantenmenge $E(L(G)) = \{ee' | e$ und e' besitzen in G eine gemeinsame Endecke$\}$. Ein Untergraph von G ist ein Graph H mit $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$. Gibt es eine Menge von Ecken $X \subseteq V(G)$ mit $V(H) = X$ und $E(H) = \{v_iv_j | v_i, v_j \in V(H)$ und $v_iv_j \in E(G)\}$ so heißt H **induzierter Untergraph** von G. Wir bezeichnen H dann mit $G[X]$. Die **Cliquenzahl** $\omega(G)$ ist die größte Zahl k, sodass G den vollständigen Graph der Ordnung k als Untergraphen enthält, die **Unabhängigkeitszahl** $\alpha(G)$ ist die größte Zahl k, sodass G den leeren Graphen der Ordnung k als Untergraphen enthält. Bilder?

Ein (schlingenloser) Hypergraph $H = (V(H), E(H))$ mit **Eckenmenge** $V(H)$ und **Kantenmenge** $E(H)$ heißt **linearer Hypergraph**, falls zwei verschiedene Kanten $e, e' \in E(H)$ maximal eine Ecke gemeinsam haben $(|e \cap e'| \leq 1)$. Für eine Kante e von H ist der **Kantengrad** die Anzahl aller Kanten, die mit e einen nichtleeren Schnitt haben. Der **Eckengrad** einer Ecke $v \in V(H)$ ist definiert als die Anzahl aller Kanten, welche v enthalten. Auch hier bezeichne $\delta(H)$ den kleinsten Grad aller Ecken von H. Auch für Hypergraphen definieren wir den **Kantengraphen** $L(H)$ als den Graphen mit Eckenmenge $V(L(H)) = E(H)$ und Kantenmenge $E(L(H)) = \{ee' | e \cap e' \neq \emptyset\}$.

Eine **Färbung** von G ist eine Abbildung $f : V(G) \to C$ mit $f(v) \neq f(w)$ für alle $vw \in E(G)$, wobei C eine beliebige Menge, die **Farbmenge**, ist. Ist $|C| = k$ so heißt

f **k-Färbung**. Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ bezeichne die kleinste postivie Zahl k, für welche eine k-Färbung von G existiert.

Ist H ein Hypergraph so heißt eine Abbildung $g : E(H) \to C$ (wieder heißt C die **Farbmenge**) eine **Kantenfärbung** von H falls $g(e) \neq g(e')$ für alle unterschiedlichen Kanten e, e' von H mit $e \cap e' \neq \emptyset$. Diese ist eine k-**Färbung**, falls $|C| = k$. Der chromatische Index $\chi'(H)$ bezeichne die kleinste positive Zahl k, derart, dass H eine echte k-Färbung besitzt.

Man beachte, dass eine Kantenfärbung eines Hypergraphen in direktem Zusammenhang zu einer Eckenfärbung seines Kantengraphen steht. Ist nämlich H ein Hypergraph und $G = L(H)$ sein Kantengraph, so gibt es offenbar eine bijektive Abbildung $\pi : E(H) \to V(G)$, welche jeder Kante von H die korrespondierende Ecke in G zuordnet. Ist f nun eine Färbung der Kanten von H, so ist $\pi \circ f$ eine Färbung der Ecken von G und umgekehrt.

1.2 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann hat A nur reelle Eigenwerte und folglich können diese monoton fallend angeordnet werden. Für eine symmetrische Matrix A sei also $\lambda_k(A)$ der k-größte **Eigenwert** (gezählt mit Vielfachheiten). Eine symmetrische Matrix A heißt **positiv semidefinit** falls $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Gilt außerdem $x^T Ax > 0$ für $x \neq 0$, so heißt A **positiv definit**. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

Satz 1.1 *Folgende Aussagen sind für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent*

(a) *A ist positiv semidefinit .*

(b) *Alle Eigenwerte von A sind nicht negativ.*

(c) *$A = UU^T$ für eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$.*

Der folgende Satz hilft uns bei der Berechnung der Eigenwerte einer symmetrischen Matrix. Er wurde von in bewiesen. suchen

Satz 1.2 (Courant-Fischer) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Seien die (reellen) Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$. Dann gilt für alle $p \in \{1, \ldots, n\}$:*

1. $\lambda_p(A) = \max\{\min\limits_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension* $p\}$.

2. $\lambda_p(A) = \min\{\max_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension* $n-p+1\}$.

Lemma 1.3 *Seien* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symmetrisch und* $A - B$ *positiv semidefinit. Dann ist* $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$ *für alle* $1 \leq i \leq n$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt $x^T(A-B)x \geq 0$, da $A - B$ positiv semidefinit ist. Daraus folgt

$$x^TAx \geq x^TBx$$

Folglich ist $\frac{x^TAx}{x^Tx} \geq \frac{x^TBx}{x^Tx}$ und es folgt mit Satz 1.2 :

$$\begin{aligned}
\lambda_i(A) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&\geq \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TBx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \lambda_i(B)
\end{aligned}$$

Für $1 \leq i \leq n$. Damit ist alles gezeigt. ■

Satz 1.4 (Interlacing) *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symmetrisch mit und* $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ *eine symmetrische Matrix, welche aus* A *durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht.*

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B) \geq \lambda_{i+k}(A)$$

Für $i = 1, \ldots n-k$.

Beweis: Seien $l_1 < \cdots < l_{n-k}$ die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nicht gelöscht werden. Setze $P := (e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$, wobei e_k der k-te Einheitsvektors des $\mathbb{R}^n$ ist. Dann besitzt P vollen Spaltenrang und $B = P^TAP$. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)}$ ein linearer Unterraum , $x \in V$ beliebig und $y = Px$. Dann ist $y \in PV = \{z \in \mathbb{R}^n | z = Px, x \in V\}$ und es gilt $y^Ty = x^TP^TPx = x^Tx$, da $P^TP = I_{n_k}$. Außerdem ist PV ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der selben Dimension wie V (P besitzt vollen Spaltenrang). Mit Satz 1.2 folgt :

$$\begin{aligned}
\lambda_i(B) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TBx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TP^TAPx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \max\{\min_{y\in PV, y\neq 0} \frac{y^TAy}{y^Ty} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&\leq \max\{\min_{x\in W, x\neq 0} \frac{y^TAy}{y^Ty} | W \subseteq \mathbb{R}^{n} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \lambda_i(A)
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die zweite folgt analog bei Betrachtung von $-A$ und $-B$, da $\lambda_i(-A) = \lambda_{n-i+1}(A)$. ■

Satz 1.5 (Weyl Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$*

$$\lambda_i(B) + \lambda_n(C) \leq \lambda_i(A) \leq \lambda_i(B) + \lambda_1(C)$$

Beweis: Siehe [1, 6.7]. ■

Satz 1.6 (Ky Fan Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Dann gilt für alle $k \leq n$*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(C)$$

Für $k = n$ gilt Gleichheit.

Beweis: Siehe [2, 3.]. ■

1.3 Eigenwerte von Graphen

Sei G ein Graph mit Eckenmenge $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Die **Adjanzenzmatrix** von G ist definiert als $A := A(G)$ mit

$$A(G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & ij \in E(G) \\ 0 & ij \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist A symmetrisch, und hat folglich nur reelle Eigenwerte. Damit es Sinn macht, von den Eigenwerten eines Graphen zu sprechen, dürfen die Eigenwerte von $A(G)$ nicht von der Nummerierung der Ecken abhängen. Das dem so ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 1.7 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann sind die Eigenwerte von $A(G)$ unabhängig von der Nummerierung der Ecken von G.*

Beweis: Seien $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ zwei Nummerierungen der Ecken. Sei weiterhin $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, B = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases} B_{i,j} = \begin{cases} 1 & u_i u_j \in E(G) \\ 0 & u_i u_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S^n$ sodass $v_{\sigma(i)} = u_i$. Folglich gilt $A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{i,j}$. Sei $P \in GL_n(\mathbb{R})$ die Matrix

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $P = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$. Nun betrachten wir $P^T AP$.

$$(P^T AP)_{i,j} = e_j^T P^T APe_i = e_{\sigma(j)}^T Ae_{\sigma(i)} = A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{i,j}$$

Also ist $P^T AP = B$. Somit sind A und B ähnlich und besitzen folglich die selben Eigenwerte. ■

Für einen Graphen G seien die **Eigenwerte** von G definiert als $\lambda_i(G) = \lambda_i(A(G))$.

Bemerkung 1.8 *Die Summe aller Eigenwerte eines Graphen (mit Vielfachheiten) ist* 0.

Beweis: Für die Adjazenzmatrix $A(G)$ gilt $\text{spur}(A(G)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A(G)) = \text{spur}(A(G)) = 0$ ■

Wir wollen nun einige elementaren Graphen und ihre Eigenwerte betrachten. Sei dazu zunächst $G = K_n$. Dann ist $A(G) = J - I$, wobei $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix ist, bei der jeder Eintrag 1 ist, und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Somit ist -1 ein Eigenwert mit Vielfachheit $n-1$. Da K_n $n-1$ regulär ist, ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von G zum Eigenwert $n-1$. Sei nun $G = C_n$. Dann hat G die Eigenwerte $2\cos(\frac{2\pi i}{n})$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ (siehe [3, 1.1.4]). Bilder!

Lemma 1.9 *Seien H ein induzierter Untergraph von G und $k = |G| - |H|$. Dann gilt*

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(H) \geq \lambda_{i+k}(G)$$

Für $1 \leq i \leq n-k$.

Beweis: Ist H ein induzierter Untergraph von G, so entsteht $A(H)$ aus $A(G)$ durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt alles aus Satz 1.4. ■

Korollar 1.10 *Sei G ein Graph mit $\omega(G) = p$ und $\alpha(G) = q$. Dann gilt :*

$$\lambda_p(G) \geq -1 \text{ und } \lambda_q(G) \geq 0$$

Beweis: Ist $\omega(G) = p$, so besitzt G einen vollständigen induzierten Untergraphen H, der Ordnung p. Nach dem obigen Beispiel besitzt dieser die Eigenwerte $\lambda_1(H) = p - 1$ und $\lambda_i(H) = -1$ für $2 \leq i \leq p$. Damit folgt aus Korollar 1.10, dass $\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H) \geq -1$. Ist $\alpha(G) = q$, so besitzt G einen kantenlosen induzierten Untergraphen H' der Ordnung q. Nach dem obigen Beispiel besitzt H' nur den Eigenwert $\lambda_i(H') = 0$ für $1 \leq i \leq q$. Also folgt aus Korollar 1.10, dass $\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H') = 0$. Damit ist alles gezeigt. ■

2 Krauszzerlegungen und die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

2.1 Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

Es bezeichne $\mathcal{EG}(n)$ die Klasse aller Graphen welche die Vereinigung von n kantendisjunkten vollständigen Graphen der Ordnung n sind. Für $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt also $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, wobei $G_i \cong K_n$ und $|G_i \cap G_j| \leq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$.

Geschichte, was ist bekannt etc.

Vermutung 2.1 (Erdős–Faber–Lovász) *Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann ist $\chi(G) = n$.*

Bilder, Beispiele

Bemerkung 2.2 *Vermutung 2.1 gilt für $n \leq 10$.*

Quelle

2.2 Krauszzerlegungen von Graphen

Historie, Line graphen etc

Definition 2.3 *Sei G ein Graph. Eine Menge $\mathcal{K}$ von Untergraphen von G heißt* **Krauszzerlegung** *von G, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(Ka) *Alle Graphen $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen mit $|K| \geq 2$.*

(Kb) *Sind K, K' zwei verschiedene Graphen aus $\mathcal{K}$, so sind sie kantendisjunkt (d.h. $|K \cap K'| \leq 1$)*

(Kc) *$\mathcal{K}$ ist eine Überdeckung von G, also $G = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$*

Desweiteren sei für $v \in V(G)$ der **Grad** *von v bezüglich $\mathcal{K}$ definiert als*

$$d_G(v : \mathcal{K}) := |\{K \in \mathcal{K} | v \in V(K)\}|$$

und der **Minimalgrad** *von G bezüglich $\mathcal{K}$ als*

$$\delta_G(\mathcal{K}) := \min_{v \in V(G)} d_G(v : \mathcal{K})$$

Für $d \geq 1$ sei $\kappa_d(G)$ die kleinste positive Zahl m derart, dass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ besitzt mit $|\mathcal{K}| = m$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Existiert keine solche Zahl m, so setzen wir $\kappa_d(G) = \infty$.

Bilder, Beispiele

Lemma 2.4 *Sei G ein Graph und $d \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $\kappa_d(G) < \infty$, wenn $\delta(G) \geq d$ ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\delta(G) \geq d$, falls $\kappa_d(G) < \infty$. Seien $\kappa_d(G) < \infty$ und $v \in V(G)$ mit $d_G(v) = \delta(G)$. Dann existieren d kantendisjunkte vollständige Untergraphen $H^1 \ldots H^d$ von G mit $v \in V(H^i)$ für alle $1 \leq i \leq d$. Da die H^i kantendisjunkt sind und $d_{H^i}(v) \geq 1$, gilt:

$$d \leq \sum_{i=1}^{d} d_{H^i}(v) \leq d_G(v) = \delta(G).$$

Sei nun $\delta(G) \geq d$. Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ gibt, mit $d_G(v : \mathcal{K}) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Sei $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Nummerierung der Kanten. Setze $H^i = G[e_i]$. Dann ist $\mathcal{K} = \{H^1, \ldots, H^m\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $d_G(v : \mathcal{K}) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Also ist $\kappa_d(G) \leq m < \infty$.

■

Beispiel 2.5 *Sei zunächst G ein bipartiter Graph mit Minimalgrad mindestens d. Dann ist $\kappa_d(G) = |E(G)|$, da G keine Dreiecke enthält und somit jeder Graph einer Krauszzerlegung von G isomorph zu K_2 sein muss.*

Satz 2.6 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) Für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $G \in \mathcal{EG}(p)$ gilt $\chi(G) = p$.

(b) Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.

(c) Für alle linearen Hypergraphen H gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass (b) aus (a) folgt. Sei G ein Graph der Ordnung n. Ist $\kappa_2(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist $\kappa_2(G) = p$. Dann existiert eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \left\{K^1, \ldots K^p\right\}$ von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Ist $p \geq n$ so gilt:

$$\chi(G) \leq n \leq p = \kappa_2(G)$$

Ist andererseits $p < n$, so ist $|K^i| \leq \omega(G) \leq \kappa_2(G) = p$ für alle $1 \leq i \leq p$ (siehe Korollar 2.11). Damit können wir für $1 \leq i \leq p$ jeden K^i durch Hinzufügen von Ecken und Kanten zu einem vollständigen Graphen vom Grad p aufblähen. Den so enstehenden Graphen nennen wir G'. Offenbar ist G ein Untergraph von G' und $G' \in \mathcal{EG}(p)$. Damit gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G') = p = \kappa_2(G)$$

Also folgt (b) aus (a).

Um zu zeigen, dass (a) aus (b) folgt, sei $G \in \mathcal{EG}(p)$. Dann ist G die kantendisjunkte Vereinigung von p vollständigen Graphen der Ordnung p, welche wir mit $K^1, \ldots K^p$ bezeichnen wollen. Nun entfernen wir wiederholt Ecken, deren Grad kleiner als p ist und zwar solange, bis entweder keine Ecken mehr übrig sind, oder es keine Ecken vom Grad kleiner als p existieren. Bleiben bei diesem Prozess keine Ecken übrig, so können wir G schrittweise mit p Farben färben, indem wir die in diesem Vorgang entstandenen Graphen färben. Da wir immer nur Ecken von Grad höchstens $p-1$ entfernen, reichen p Farben aus. Bleiben Ecken übrig, so nennen wir den resultierenden Graphen H. Nach Konstruktion gilt $\delta(H) \geq p$. Sei $\hat{K}^i = K^i \cap H$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $\hat{K}^i$ ein vollständiger Graph für alle i. Wähle $\mathcal{K} = \left\{\hat{K}^i || \hat{K}^i| \geq 2\right\}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von H mit $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$. (Ka) ist offensichtlich erfüllt. Da in G die K^i kantendisjunkt sind, sind die $\hat{K}^i$ in H ebenfalls kantendisjunkt, folglich gilt (Kb). Sei $v \in V(H)$. Dann ist $d_H(v) \geq p$, also auch $d_G(v) \geq d_H(v) \geq p$. Es existieren mindestens zwei $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $v \in V(K)$ und $v \in V(K')$. Wäre dem nicht so, so wäre $d_H(v) \leq p-1$, da alle $\hat{K}^i$, die nicht in $\mathcal{K}$ sind, nicht zum Grad einer Ecke beitragen, und $d_{\hat{K}^i}(v) \leq p-1$ für alle $1 \leq i \leq p$. Folglich ist $d_H(v : \mathcal{K}) \geq 2$ für alle $v \in V(H)$. Also ist $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung mit $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$. Also ist wegen (b)

$$\chi(H) \leq \kappa_2(H) \leq |\mathcal{K}| \leq p$$

Also ist H p-färbbar. Da wir H aus G erhalten haben, indem wir Ecken vom Grad kleiner als p entfernt haben, ist auch G p-färbbar. Damit ist die Äquivalenz von (a) und (b) gezeigt.

Es bleibt die Äquivalenz von (b) und (c) zu zeigen. Gelte (c) und sei G ein Graph. Wir müssen zeigen, dass $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$ gilt. Ist $\kappa_2(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Seien also $\kappa_2(G) = p < \infty$ und $\mathcal{K} = \left\{K^1, \ldots, K^p\right\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Für $v \in V(G)$ definiere e_v als die Menge aller $K \in \mathcal{K}$, welche v enthalten. Auf Grund der Wahl der Krauszzerlegung gilt $|e_v| \geq 2$ für alle $v \in V(G)$. Seien H der Hypergraph mit Eckenmenge $\mathcal{K}$ und Kantenmenge $\{e_v | v \in V(G)\}$ sowie $\pi : V(G) \mapsto E(H)$ mit $\pi(v) = e_v$. Dann ist π bijektiv. Wäre dem nicht so, so gäbe es zwei unterschiedliche Ecken v, w mit $e_v = e_w$. Da $|e_v| \geq 2$ wären dann die Kante vw in zwei Graphen von $\mathcal{K}$ enthalten, was (Kb) widersprechen würde. Also ist f bijektiv. Wir zeigen, dass H linear ist. Seien dazu e_v, e_w zwei unterschiedliche Kanten von H. Angenommen $|e_v \cap e_w| \geq 2$. Dies ist ein Widerspruch zu Eigenschaft (Kb) der Krauszzerlegung $\mathcal{K}$. Folglich ist $|e_v \cap e_w| \leq 1$, also ist H linear. Dann folgt aus der Vorraussetzung, dass $\chi'(H) \leq |H| = \kappa_2(G)$ Somit finden wir eine Färbung $g : E(H) \mapsto \{1, \ldots, p\}$ der Kanten von H. Sei dann $f = \pi \circ g$. Wir zeigen, dass f eine Färbung der Ecken von G ist. Ist dem nicht so, so existieren zwei unterschiedliche Ecken v, w mit $vw \in E(G)$ und $f(v) = f(w)$. Dann ist $g(e_v) = g(e_w)$ und folglich $|e_v \cap e_w| = 0$. Dann kann aber vw nicht in $E(G)$ sein, da die Graphen aus $\mathcal{K}$ eine Überdeckung von G sind. Ein Widerspruch. Also ist f ein Färbung von G. Damit ist

$$\chi(G) \leq |E(H)| = |\mathcal{K}| = p$$

Also impliziert (c) (b).

Das (c) aus (b) folgt, zeigen wir durch Widerspruch. Gelte (b) und sei H ein (von der Mächtigkeit der Ecken) minimaler linearer Hypergraph welcher (c) nicht erfüllt (d.h. ist H' ein weiterer linearer Hypergraph mit $|H'| < |H|$, so ist $\chi'(H') \leq |H'|$). Ist dann $\delta(H) \leq 1$ so können wir eine Ecke aus H entfernen und erhalten einen linearen Hypergraphen H' kleinerer Mächtigkeit, welcher ebenfalls (c) nicht erfüllt. Dies steht im Widerspruch zu ausführlicher? unserer Annahme der Minimalität von H. Also ist $\delta(H) \geq 2$. Sei G der Kantengraph von H mit $V(G) = E(H)$ und $E(G) = \{ee' | e \cap e' \neq \emptyset\}$. Definiere für $v \in V(H)$ die Menge $E_H(v)$ als die Menge aller Kanten von H, die mit v inzident sind und K^v als den durch $E_H(v)$ induzierten Untergraphen von G. Wir zeigen: $\mathcal{K} := \{K^v | v \in V(H)\}$ ist eine Krauszzerlegung von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Sei also $K \in \mathcal{K}$ beliebig. Dann gibt es eine Ecke $v \in V(H)$ mit $K = K^v = G[E_H(v)]$. Seien weiterhin $e, e' \in E_H(v)$. Damit ist $e \cap e' = \{v\}$ und deswegen $ee' \in E(K^v)$. Außerdem ist

$$|K^v| = |E_H(v)| = d_H(v) \geq \delta(H) \geq 2$$

Also erfüllt $\mathcal{K}$ (Ka). Seien nun $K, K' \in \mathcal{K}$ unterschiedlich. Wir müssen zeigen, dass diese keine Kante gemeinsam haben. Angenommen das wäre der Fall. Dann gibt es zwei unterschiedliche Ecken $e, e' \in V(K) \cap V(K')$. Folglich existieren zwei unterschiedliche Ecken $v, w \in V(H)$ mit $v, w \in e \cap e'$. Ein Widerspruch, da H ein linearer Hypergraph ist. Also erfüllt $\mathcal{K}$ (Kb). Sei $ee' \in E(G)$. Folglich ist $e \cap e' \neq \emptyset$ und es existiert eine Ecke v von H mit $e \cap e' = \{v\}$. Damit sind $e, e' \in V(K^v) \subseteq V(G)$. Also erfüllt $\mathcal{K}$ (Kc). Es bleibt zu zeigen, dass $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Sei dazu $e \in V(G)$ beliebig. Da wir H als schlingenlos angenommen haben, existieren zwei unterschiedliche Ecken $v, w \in e$. Also ist $e \in K^v$ und $e \in K^w$. Diese sind unterschiedlich, da sonst v und w mit den selben Kanten inzident wären und somit eine andere Kante e' existieren würde (da $\delta(H) \geq 2$) mit $v, w \in e'$. Das ist aber unmöglich, da H ein linearer Hypergraph ist. Damit ist

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_2(G) \leq |\mathcal{K}| = |H|$$

Ein Widerspruch. ■

2.3 Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Satz 2.7 *Sei G ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $d_G(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$. Desweiteren sei $d_i := d_G(v : \mathcal{K})$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq d$. Dann gilt:*

(a) $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ *für* $i = 1, \dots, n$

(b) $\lambda_{m+1}(G) \leq -d$ *falls* $m < n$

Beweis: Zunächst zeigen wir (a). Es sei A die Adjazenzmatrix von G und $D := \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Definiere $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ als die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$, also

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i \in K_j \\ 0 & v_i \notin K_j \end{cases}$$

Nun betrachten wir $M = BB^T$. Es gilt

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{j,k}$$

Seien zunächst $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Ist $B_{i,k} = 1$ und $B_{j,k} = 1$, so ist $v_i, v_j \in K_k$, und somit (da K_k ein vollständiger Graph ist) $v_i v_j \in E(G)$. Es können aber für höchstens ein $k \in \{1, \dots, m\}$ $B_{i,k}$ und $B_{j,k}$ gleichzeitig 1 seien, da nach Definition 2.3 die Graphen aus $\mathcal{K}$ kantendisjunkt sind. Also ist $M_{i,j} = 1$ genau dann, wenn $v_i v_j \in E(G)$, genau dann wenn $A_{i,j} = 1$. Somit ist $M_{i,j} = A_{i,j}$

Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wir betrachten $M_{i,i}$. Es gilt

$$M_{i,i} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{i,k} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k}$$

$B_{i,k} = 1$ genau dann, wenn $v_i \in K_k$. Folglich ist $M_{i,i} = d_G(v_i : \mathcal{K}) = d_i$. Damit gilt $M = A + D$. M ist nach Satz 1.1 positiv semidefinit. Folglich ist $A - (-D)$ positiv semidefinit, und es folgt mit Lemma 1.3, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -d_{n-i+1}$$

Damit ist (a) gezeigt.

Nun zeigen wir (b). Sei $m < n$. Dann ist $\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(B) \leq m$. Also ist $\lambda_{m+1}(M) = 0$ und es folgt mit Satz 1.5 dass

$$\lambda_{m+1}(A) + d \leq \lambda_{m+1}(A) + d_n \leq 0$$

Durch Umstellen erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

Korollar 2.8 *Sei H ein induzierter Untergraph von G mit $p = |H|$. Ist $\lambda_q(H) > -d$ für ein $q \leq p$ und $2 \leq d \in \mathbb{N}$, so ist $\kappa_d(G) \geq q$.*

Beweis: Angenommen $\kappa_d(G) < q$. Sei dann $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G mit $|\mathcal{K}| = \kappa_d(G)$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Dann ist nach Lemma 1.9 $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H) > -d$. Nach Satz 2.7 ist dann $\lambda_q(G) \leq \lambda_{\kappa_d(G)+1} \leq -d$, ein Widerspruch. ■

Korollar 2.9 *Sei $\delta(G) \geq 2$ und H ein induzierter Untergraph von G, welcher Kantengraph eines Waldes ist. Dann ist $\kappa_2(H) \geq |H|$*

Beweis: Da H Kantengraph eines Waldes ist, folgt $\lambda_{min}(H) > -2$ (vgl. [3, 3.4.10]) Nach Korollar 2.8 ist für $q = |H| : \lambda_q(H) = \lambda_{\min} > -2$. Dann ist mit Korollar 2.8 $\kappa_2(H) > |H|$.
■

Korollar 2.10 (Klotz) $\kappa_2(K_n) \geq n$

Beweis: K_n ist der Kantengraph von $K_{1,n}$. Nun folgt die Behauptung aus Korollar 2.9. ■

Korollar 2.11 *Ist $\delta(G) \geq 2$, so gilt $\omega(G) \leq \kappa_2(G)$ und $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$.*

Beweis: Sei $p = \omega(G)$. Dann gilt nach $\lambda_p(G) \geq -1 \geq -2$. Damit sind für $d = 2$ die Voraussetzungen von Korollar 2.8 erfüllt, und es gilt folglich $\kappa_2(G) \geq p = \omega(G)$ Für $q = \alpha(G))$ gilt wieder nach $\lambda_q(G) \geq 0 \geq -2$. Damit folgt analog $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$. ■

Satz 2.12 *Existiert ein $d \in \mathbb{N}$, sodass für alle Graphen G mit $\chi(G) = k$ gilt : $\lambda_k(G) > -d$, so gilt:*

(a) $\chi(G) \leq \kappa_d(G)$

(b) Ist H ein linearer Hypergraph mit $|e| \geq d$ für alle $e \in E(H)$, so ist $\chi'(H) \leq |H|$

Beweis:

Wir zeigen zunächst (a). Sei $\chi(G) = k$. Dann ist nach Voraussetzung $\lambda_k(G) > -d$. Mit Korollar 2.8 folgt $\kappa_d(G) \geq k = \chi(G)$. Damit ist (a) gezeigt.

Wir zeigen nun (b) durch Widerspruch. Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es einen (von der Mächtigkeit der Ecken) minimalen Hypergraphen H für welchen $\chi'(H) > |H|$ ist. Angenommen in diesem exisitiert eine Kante vom Grad kleiner als d. Entfernen wir diese, erhalten wir einen Hypergraphen H' kleinerer Mächtigkeit. Dieser erfüllt die Behauptung, da H das kleinste Gegenbeispiel ist. Also existiert eine Kantenfärbung von H' mit höchstens $|H'| < |H|$ Farben. Aus dieser gewinnen wir eine Kantenfärbung von H, indem wir alle Kanten wie in H' färben, und die entfernte Kante mit einer neuen Farbe färben. Folglich gilt also:

$$\chi'(H) \leq \chi'(H') + 1 \leq |H'| + 1 \leq |H|$$

Ein Widerspruch. Folglich haben alle Kanten in H mindestens Grad d.

Sei nun $G = L(H)$ der Kantengraph von H. Dann ist $\delta(G) \geq d$. Für eine Ecke $v \in V(H)$ sei (analog zum Beweis von Satz 2.6) $E_H(v) = \{e \in E(H) | v \in e\}$ und $K^v = G[E_H(v)]$. Wie in Satz 2.6 folgt, dass $\mathcal{K} = \{K^v | v \in V(H)\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ ist. Damit gilt

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_d(G) \leq |\mathcal{K}| = |H|$$

Wobei die erste Ungleichung wegen (a) gilt. Damit ist alles gezeigt. ■

2.4 Schranken für $\kappa_d(G)$

Wir wollen nun einige Schranken für $\kappa_d(G)$ angeben.

Lemma 2.13 *Ist $\delta(G) \geq d$, so ist $\kappa_d(G) \leq |E(G)|$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von Lemma 2.4. ■

Satz 2.14 *Sei G ein Graph der Ordnung n und $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\kappa_d(G) \geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d}$$

Beweis: Ist $\kappa_d(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen.

Fall 1 : $\kappa_d(G) \geq n$ Da $\lambda_1(G) \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_1(G) + d &\geq d \\
1 &\geq \frac{d}{\lambda_1(G) + d} \\
\kappa_d(G) \geq n &\geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d}
\end{aligned}$$

Fall 2 : $\kappa_d(G) < n$ Sei $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G mit $|\mathcal{K}| = \kappa_d(G)$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Seien $d_i = d_G(v : \mathcal{K})$. Wir können annehmen, dass die d_i fallend geordnet sind. Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Adjanzenzmatrix von $\mathcal{K}$ und $M = BB^T = A + D$, wobei $A = A(G)$ und $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Dann ist M positiv semidefinit und $\operatorname{rang}(M) \leq p = \kappa_d(G) < n$. Deswegen ist $\lambda_{p+1}(M) = \ldots \lambda_n(M) = 0$. Mit Satz 1.6 folgt dann :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(M) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(M) \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(D)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(n-p)d \leq (n-p)\lambda_n(D) \leq \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(D) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(A) \leq p\lambda_1(A)$$

Durch Umstellen nach p erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

2.5 Chromatische Zahl und Eigenwerte

2.6 Satz 2.12 für $d = 2$

Gilt Satz 2.12 für $d = 2$, so folgt die Erdős–Faber–Lovász Vermutung auf Grund von Satz 2.6. Im Folgenden wollen wir den Fall $d = 2$ für einige Graphenklassen untersuchen.

Vermutung 2.15 *Ist G ein Graph mit $\chi(G) = k$, dann gilt $\lambda_k(G) > -2$.*

Bemerkung 2.16 *Es reicht Vermutung 2.15 für k-kritische Graphen zu zeigen.*

Beweis: Sei G ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält G einen k-kritischen Untergraphen H. Für diesen gilt (nach Vermutung) $\lambda_k(H) > -2$. Nun folgt mit Satz **??**

$$\lambda_k(G) \geq \lambda_k(H) > -2$$

Damit gilt Vermutung 2.15 auch für G. ∎

Seien $v, k \in \mathbb{N}$ mit $v \geq k$. Der **Kneser Graph** $K_{v:r}$ ist der Graph mit Eckenmenge $V(K_{v:r}) = \{X \subset \{1, \dots v\} \,||X| = r\}$ und Kantenmenge $E(K_{v:r}) = \{XY | X, Y \in V(K_{v:r}), X \cap Y = \emptyset\}$.

Es wurde gezeigt , dass $\alpha(K_{v:r}) = \binom{v-1}{r-1}$ (falls $v > 2r$) und $\chi(K_{v:r}) = v - 2r + 2$. Referenz , binom. richtig

Das, und Korollar 1.10 erlaubt uns Vermutung 2.15 für alle Kneser Graphen zu beweisen.

Satz 2.17 *Ist $G = K_{v:r}$ und $k = \chi(G)$ so ist $\lambda_k(G) > -2$.*

Beweis: Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich r. **Fall 1 :** $r = 1$ Dann ist $K_{v:1}$ isomorph zu K_v. Dieser hat alle Eigenwerte größer als -2. **Fall 2 :** $\frac{v}{2} > r \geq 2$ Sei $p = \alpha(G)$. Dann ist $\alpha(G) = \binom{v-1}{r-1}$ und folglich $\alpha(G) \geq v - 1$. Andererseits ist $\chi(G) = v - 2r + 2 < v - 2$. Folglich ist $p > \chi(G)$. Mit Korollar 1.10 gilt dann

$$\lambda_k(G) \geq \lambda_p(G) \geq 0$$

Also ist alles gezeigt. **Fall 3 :** $2r = v$ Dann ist $\chi(G) = 2$ und $\omega(G) = 2$. Somit folgt die Behauptung aus Korollar 1.10. **Fall 3 :** $2r > v$ Dann ist $|E(G)| = 0$ und folglich ist G ein leerer Graph, welcher nur den Eigenwert 0 besitzt. ∎

Literatur

[1] J.N. Franklin. Matrix theory. Prentice-Hall Series in Applied Mathematics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. XII, 292 p. (1968)., 1968.

[2] Mohammad Sal Moslehian. Ky fan inequalities, 2011.

[3] Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson, and Slobodan Simić. *An introduction to the theory of graph spectra.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

Stefan Heyder