

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra

Bachelorarbeit

Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder
Matrikelnummer : 49070
Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Eigenwerte von symmetrischen Matrizen	1
1.2	Eigenwerte von Graphen	3
2	Krauszerlegungen und die Erdős–Faber–Lovász Vermutung	5
2.1	Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung	5
2.2	Krauszerlegungen von Graphen	5
2.3	Krauszerlegungen und Eigenwerte	7
	Literatur	10

1 Einführung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Zusammenhang der chromatischen Zahl von Graphen und ihrem Spektrum.

gute
Einlei-
tung

Um die Beweise in Kapitel 2 zu führen, benötigen wir einige Sätze über Eigenwerte von symmetrischen Matrizen. Diese, und andere Grundlagen, werden wir in Kapitel 1 erarbeiten. .

Anders
anord-
nen

1.1 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann hat A nur reelle Eigenwerte und folglich können diese monoton fallend angeordnet werden. Für eine symmetrische Matrix A sei also $\lambda_k(A)$ der k -größte **Eigenwert** (gezählt mit Vielfachheiten). Eine symmetrische Matrix A heißt **positiv semidefinit** falls $x^T A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Gilt außerdem $x^T A x > 0$ für $x \neq 0$, so heißt A **positiv definit**. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

Satz 1.1 Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:

- (i) A ist positiv semidefinit .
- (ii) Alle Eigenwerte von A sind nicht negativ.
- (iii) $A = U U^T$ für eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Beweis: Siehe [1, (1.3)].

■

Satz 1.2 (Courant-Fischer) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Seien die (reellen) Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$. Dann gilt für alle $p \in \{1, \dots, n\}$:

1. $\lambda_p(A) = \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p \right\}$.
2. $\lambda_p(A) = \min\left\{ \max_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } n-p+1 \right\}$.

Lemma 1.3 Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $A - B$ positiv semidefinit. Dann ist $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^T(A - B)x &\geq 0 \\ x^T Ax &\geq x^T Bx \end{aligned}$$

Folglich ist $\frac{x^T Ax}{x^T x} \geq \frac{x^T Bx}{x^T x}$ und es folgt mit 1.2 :

$$\begin{aligned} \lambda_i(A) &= \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \\ &\geq \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T Bx}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \\ &= \lambda_i(B) \end{aligned}$$

■ nachprüfen

Satz 1.4 (Interlacing) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Sei $B \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ eine symmetrische Matrix, welche aus A durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht, mit Eigenwerten $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_k$. Dann gilt

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$$

für $i = 1, \dots, n - k$.

Beweis: Seien $l_1 < \dots < l_{n-k}$ die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nach dem Löschen der Zeilen bzw. Spalten von A übrig bleiben. Setze $P := (e_{l_1}, e_{l_2}, \dots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$. Dann besitzt P vollen Spaltenrang und $B = P^T A P$. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)}$ ein linearer Unterraum, $x \in V$ beliebig und $y = Px$. Dann ist $y \in PV = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = Px, x \in V\}$ und es gilt $y^T y = x^T P^T P x = x^T x$, da $P^T P = I_{n-k}$. Außerdem ist PV ein linearer Unterraum des \mathbb{R}^n der selben Dimension wie V (P besitzt vollen Spaltenrang). Mit 1.2 folgt :

bessere
Formu-
lierung

$$\begin{aligned} \mu_i &= \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T Bx}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \\ &= \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T P^T A P x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \\ &\leq \max\left\{ \min_{y \in PV, y \neq 0} \frac{y^T A y}{y^T y} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \quad (1.1) \\ &\leq \max\left\{ \min_{x \in W, x \neq 0} \frac{y^T A y}{y^T y} \mid W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \\ &= \lambda_i \end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die zweite folgt analog bei Betrachtung von $-A$ und $-B$.

■ Prüfen!

1.2 Eigenwerte von Graphen

Sei G ein Graph mit Eckenmenge $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Die **Adjazenzmatrix** von G ist definiert als $A := A(G)$ mit

$$A(G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist A symmetrisch, und hat folglich nur reelle Eigenwerte. Damit es Sinn macht, von den Eigenwerten eines Graphen zu sprechen, dürfen die Eigenwerte von $A(G)$ nicht von der Nummerierung der Ecken abhängen. Das dem so ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 1.5 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann sind die Eigenwerte von $A(G)$ unabhängig von der Nummerierung der Ecken von G .*

Beweis: Seien $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\} = \{u_1, \dots, u_n\}$ zwei Nummerierungen der Ecken. Sei weiterhin $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, B = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases} \quad B_{i,j} = \begin{cases} 1 & u_i u_j \in E(G) \\ 0 & u_i u_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S^n$ sodass $v_{\sigma(i)} = u_i$. Folglich gilt $A_{\sigma(i), \sigma(j)} = B_{i,j}$. Sei $P \in GL_n(\mathbb{R})$ die Matrix

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $P = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$. Nun betrachten wir $P^T A P$.

$$(P^T A P)_{i,j} = e_j^T P^T A P e_i = e_{\sigma(j)}^T A e_{\sigma(i)} = A_{\sigma(i), \sigma(j)} = B_{i,j}$$

Also ist $P^T A P = B$. Somit sind A und B ähnlich und besitzen folglich die selben Eigenwerte. ■

Für einen Graphen G seien die **Eigenwerte** von G definiert als $\lambda_i(G) = \lambda_i(A(G))$.

Bemerkung 1.6 $\langle ++ \rangle$

1. Die Summe aller Eigenwerte eines Graphen (mit Vielfachheiten) ist 0.
2. Ist G d regulär, so ist d ein Eigenwert von G .

Beweis:

Adjazenzmatrix
ambigui-
ty

1. Für die Adjazenzmatrix eines Graphen gilt $\text{trace}(A) = 0$. Somit ist

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(G) = \text{trace}(A) = 0$$

2. _____

Beweisen

■

Wir wollen nun einige elementaren Graphen und ihre Eigenwerte betrachten. Sei dazu zunächst $G = K_n$ der vollständige Graph der Ordnung n . Dann ist $A(G) = J - I$, wobei $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix ist, bei der jeder Eintrag 1 ist, und $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Somit ist -1 ein Eigenwert mit Vielfachheit $n - 1$. Außerdem folgt aus 1.6, dass $n - 1$ ein Eigenwert von G ist.

Sei nun $G = C_n$ _____

Lemma 1.7 *Sei H ein induzierter Untergraph von G und $k := |V(G)| - |V(H)|$. Dann gilt*

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(H) \geq \lambda_{i+k}(G)$$

Beweis: Ist H ein induzierter Untergraph von G , so entsteht $A(H)$ aus $A(G)$ durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt alles aus 1.4. ■

Korollar 1.8 *Sei G ein Graph mit $\omega(G) = p$ und $\alpha(G) = q$. Dann gilt :*

$$\lambda_p(G) \geq -1$$

$$\lambda_q(G) \geq 0$$

Beweis: Ist $\omega(G) = p$, so besitzt G einen vollständigen induzierten Untergraphen der Ordnung p , H . Nach besitzt H die Eigenwerte $\lambda_1(H) = p - 1$ und $\lambda_i(H) = -1$ für $i \in \{2, \dots, p\}$. Damit folgt aus 1.7, $\lambda_p(G) \geq -1$.

Ist $\alpha(G) = q$, so besitzt G einen kantenlosen, induzierten Untergraphen der Ordnung q , O . Nach besitzt O die Eigenwerte $\lambda_i(O) = 0$ für $i \in \{1, \dots, q\}$. Damit folgt aus 1.7, $\lambda_q(G) \geq 0$.

■

vollständige
Gra-
phen,
Kreise,
Komple-
mente
usw.
Bilder!

2 Krauszerlegungen und die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

2.1 Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

Es bezeichne $\mathcal{EG}(n)$ die Klasse aller Graphen welche die Vereinigung von n kantendisjunkten vollständigen Graphen der Ordnung n sind. Für $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt also $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$, wobei $G_i \cong K_n$ und $|G_i \cap G_j| \leq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$.

Vermutung 2.1 (Erdős–Faber–Lovász) Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann ist $\chi(G) = n$.

Bilder,
Beispiele

2.2 Krauszerlegungen von Graphen

Definition 2.2 Sei G ein Graph. Eine Menge \mathcal{K} von Untergraphen von G heißt **Krauszerlegung** von G , falls gilt:

- (i) $\forall K \in \mathcal{K} : K$ ist ein vollständiger Graph mit $|K| \geq 2$
- (ii) $\forall K, K' \in \mathcal{K}$ mit $K \neq K'$ gilt $|K \cap K'| \leq 1$
- (iii) $G = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$

Desweiteren sei für $v \in V(G)$ der **Grad** von v bezüglich \mathcal{K} definiert als

$$d_G(v : \mathcal{K}) := |\{K \in \mathcal{K} | v \in V(K)\}|$$

und der **Minimalgrad** von G bezüglich \mathcal{K} als

$$\delta_G(\mathcal{K}) := \min_{v \in V(G)} d_G(v : \mathcal{K})$$

Für $d \geq 1$ sei $\kappa_d(G)$ die kleinste positive Zahl m derart, dass G eine Krauszerlegung \mathcal{K} besitzt mit $|\mathcal{K}| = m$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$.

Lemma 2.3 Sei G ein Graph. Dann ist $\kappa_d(G) < \infty$ genau dann, wenn $\delta(G) \geq d$.

Beweis: Seien $\kappa_d(G) < \infty$ und $v \in V(G)$ mit $d_G(v) = \delta(G)$. Dann existieren d kantendisjunkte vollständige Untergraphen $H^1 \dots H^d$ von G mit $v \in V(H^i)$ für alle $1 \leq i \leq d$. Da die H^i kantendisjunkt sind und $d_H^i(v) \geq 1$, gilt:

$$d \leq \sum_{i=1}^d d_{H^i}(v) \leq d_G(v) = \delta(G).$$

Bilder,
Beispiele

Sei nun $\delta(G) \geq d$. Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszerlegung \mathcal{K} gibt, mit $d_G(v : \mathcal{K}) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Sei $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ eine Nummerierung der Kanten. Setze $H^i = G[e_i]$. Dann ist $\mathcal{K} = \{H^1, \dots, H^m\}$ eine Krauszerlegung von G mit $d_G(v : \mathcal{K}) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Also ist $\kappa_d(G) \leq m < \infty$. ■

Satz 2.4 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. 2.1
2. Ist G ein Graph mit Minimalgrad mindestens 2, so ist $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.
3. Ist H ein linearer Hypergraph so gilt $\chi'(H) \leq |H|$

Beweis: Gelte zunächst 2.1 und sei G ein Graph mit $\kappa_2(G) = m$. Dann existiert eine Krauszerlegung $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ von G . Ist $m \geq n$

$$\chi(G) \leq n \leq m = \kappa_2(G)$$

Ist andererseits $m < n$, so ist $|K^i| \leq \omega(G) \leq \kappa_2(G) = m$ (siehe 2.9). Damit können wir für $1 \leq i \leq n$ jeden K^i durch Hinzufügen von Ecken und Kanten zu einem vollständigen Graphen von Grad m aufblähen. Den so entstehenden Graphen nennen wir G' . Offenbar ist G ein Untergraph von G' und $G' \in \mathcal{EG}(m)$. Damit gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G') = m = \kappa_2(G)$$

Gelte nun die zweite Aussage . Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann ist G die kantendisjunkte Vereinigung von n vollständigen Graphen der Ordnung n . Wähle $X = \{v \in V(G) | d_G(v) \geq n\}$ und betrachte den von X induzierten Untergraphen H von G . Die Einschränkung der vollständigen Graphen, aus denen G besteht, auf H ergeben eine Krauszerlegung \mathcal{K} von H (jeder induzierte Untergraph eines vollständigen Graphen ist wieder ein vollständiger Graph). Die Wahl von X sichert, dass $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Somit

$$\chi(H) \leq \kappa_2(H) \leq \kappa_2(G) \leq n$$

Also erhalten wir eine Färbung von H mit maximal n Farben. Diese lässt sich auf G zu einer Färbung mit maximal n Farben erweitern, da wir nur Ecken entfernt haben, deren Grad kleiner als n ist, welche folglich nur $n - 1$ Nachbarn haben.

bessere
Formu-
lierung

Gelte 3. und sei G ein Graph mit Minimalgrad größer oder gleich 2. Seien weiterhin $\kappa_2(G) = m$ und $\mathcal{K} = \{K^1, \dots, K^m\}$ eine Krauszerlegung von G . Für $v \in V(G)$ definiere e_v als die Menge aller $K \in \mathcal{K}$, welche v enthalten. Sei H der Hypergraph mit Eckenmenge \mathcal{K} und Kantenmenge $\{e_v | v \in V(G)\}$. Wir zeigen, dass H linear ist. Seien dazu e_v, e_w zwei unterschiedliche Kanten von H . Angenommen $|e_v \cap e_w| \geq 2$. Dann existieren mindestens zwei vollständige Graphen K, K' , welche sowohl v als auch w enthalten. Dies ist ein Widerspruch zu Eigenschaft (ii) der Krauszerlegung. Folglich ist $|e_v \cap e_w| \leq 1$, also ist H linear. Dann folgt mit aus der Voraussetzung, dass $\chi'(H) \leq |H| = \kappa_2(G)$. ■

wieso
chi G
kleiner

2.3 Krauszerlegungen und Eigenwerte

Satz 2.5 Sei G ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ eine Krauszerlegung von G mit $d_G(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$. Desweiteren sei $d_i := d_G(v : \mathcal{K})$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq d$. Dann gilt:

$$(a) \lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

$$(b) \lambda_{m+1}(G) \leq -d \text{ falls } m < n$$

Beweis:

- (a) Es sei A die Adjazenzmatrix von G und $D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Definiere $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ als die Inzidenzmatrix von \mathcal{K} , also

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i \in K_j \\ 0 & v_i \notin K_j \end{cases}$$

Nun betrachten wir $M = BB^T$. Es gilt

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^d B_{i,k} B_{j,k}$$

Seien zunächst $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Ist $B_{i,k} = 1$ und $B_{j,k} = 1$, so ist $v_i, v_j \in K_k$, und somit (da K_k ein vollständiger Graph ist) $v_i v_j \in E(G)$. Es können aber für höchstens ein $k \in \{1, \dots, m\}$ $B_{i,k}$ und $B_{j,k}$ gleichzeitig 1 seien, da nach 2.2 die Graphen aus \mathcal{K} kantendisjunkt sind. Also ist $M_{i,j} = 1$ genau dann, wenn $v_i v_j \in E(G)$, genau dann wenn $A_{i,j} = 1$. Somit ist $M_{i,j} = A_{i,j}$.

Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wir betrachten $M_{i,i}$. Es gilt

$$M_{i,i} = \sum_{k=1}^d B_{i,k} B_{i,k} = \sum_{k=1}^d B_{i,k}$$

$B_{i,k} = 1$ genau dann, wenn $v_i \in K_k$. Folglich ist $M_{i,i} = d_G(v_i : \mathcal{K}) = d_i$. Damit gilt $M = A + D$. M ist nach 1.1 positiv semidefinit. Folglich ist $A - (-D)$ positiv semidefinit, und es folgt mit 1.3, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -d_{n-i+1}$$

- (b) Sei $m < n$. Dann ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq m$. Folglich besitzt M den Eigenwert 0 mit Vielfachheit mindestens $n - m$. ■

Korollar 2.6 Sei H ein induzierter Untergraph von G mit $p = |H| \leq |G| = n$. Ist $\lambda_p(H) > -d$ für ein $q \leq p$ und $-2 \leq d \in \mathbb{N}$, so ist $\kappa_d(G) \geq q$.

$\delta(H) \geq 2?$

Beweis: Angenommen $\kappa_d(G) < q$. Sei dann \mathcal{K} eine Krauszerlegung von G die zu d passt. Dann ist nach 1.4 $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H) > -d$. Da $i < q \leq n$ gilt nach 2.5 $\lambda_{i+1} \leq -d$ und somit $\lambda_q(G) \leq \lambda_{i+1} \leq -d$. Widerspruch. ■

Es sei G ein Graph. Der **Kantengraph** $L(G)$ (engl. line graph) von G ist definiert als der Graph mit Eckenmenge $E(G)$ und Kantenmenge $\{ee' | e \text{ und } e' \text{ besitzen eine gemeinsame Endecke}\}$.

Korollar 2.7 *Sei $\delta(G) \geq 2$ und H ein induzierter Untergraph von G , welcher Kantengraph eines Waldes ist. Dann ist $\kappa_2(H) \geq |H|$*

Beweis: Da H Kantengraph eines Waldes ist, folgt $\lambda_{\min}(H) > -2$ (vgl. [2, 3.4.10]) Nach 2.6 ist für $q = |H|$: $\lambda_q(H) = \lambda_{\min} > -2$. Dann ist mit 2.6 $\kappa_2(H) > |H|$. ■

Korollar 2.8 (Klotz) $\kappa_2(K_n) \geq n$

Beweis: K_n ist der Kantengraph von $K_{1,n}$. Nun folgt die Behauptung aus 2.7. ■

Korollar 2.9 *Ist $\delta(G) \geq 2$, so gilt $\omega(G) \leq \kappa_2(G)$ und $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$.*

Beweis: Sei $p = \omega(G)$. Dann gilt nach $\lambda_p(G) \geq -1 \geq -2$. Damit sind für $d = 2$ die Voraussetzungen von 2.6 erfüllt, und es gilt folglich $\kappa_2(G) \geq p = \omega(G)$. Für $q = \alpha(G)$ gilt wieder nach $\lambda_q(G) \geq 0 \geq -2$. Damit folgt analog $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$. ■

Vermutung 2.10 *Ist $\chi(G) \geq k$, so ist $\lambda_k(G) > -d$.*

Satz 2.11 *Gelte 2.10. Dann gilt :*

(i) *Ist $\delta(G) \geq 2$ so ist $\chi(G) \leq \kappa_d(G)$*

(ii) *Ist H ein linearer Hypergraph mit $|e| \geq d$, so ist $\chi'(H) \leq |H|$*

Beweis: Sei $\chi(G) = k$. Dann ist nach 2.10 $\lambda_k(G) > -2$. Mit 2.6 folgt $\kappa_d(G) \geq k = \chi(G)$.

■

Literatur

- [1] László Lovász. Eigenvalues of graphs. "<http://www.cs.elte.hu/~lovasz/eigenvals-x.pdf>", 2007.
- [2] Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson, and Slobodan Simić. *An introduction to the theory of graph spectra*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

Stefan Heyder