Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra

Bachelorarbeit

Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder

Matrikelnummer : 49070

Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten, der chromatischen Zahl und den Krauszzerlegungen eines Graphen. Die dafür benötigten Grundlagen werden wir in Kapitel 1 erarbeiten.

1.1 Graphentheoretische Grundlagen

Es sei $G = (V(G), E(G))$ stets ein (schlichter, ungerichteter) Graph mit Eckenmenge $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ und Kantenmenge $E(G) = \{ij|i \text{ und } j \text{ sind in } G \text{ adjazent}\}$.Dann heißt $|G| := |V(G)$ die **Ordnung** von G. Der **Grad** einer Ecke $v \in V(G)$ sei definiert als $d_G(v) = |\,\{j|ij \in E(G)\}\,|$. Der **Minimalgrad** (**Maximalgrad**) sei definiert als der kleinste (größte) Grad einer Ecke von G und wird mit $\delta(G)$ ($\Delta(G)$) bezeichnet. Wir wollen nun einige häufig auftretenden Graphen bezeichnen. Der **vollständige Graph** der Ordnung n sei K_n und sein Komplement, der **leere Graph** der Ordnung n sei O_n, der **Kreis** der Länge n sei C_n. Der **Weg** der Länge n sei P_{n+1}. Für einen Graphen sei der **Kantengraph** $L(G)$ definiert als der Graph mit Eckenmenge $V(L(G)) = E(G)$ und Kantenmenge $E(L(G)) = \{ee'|e \text{ und } e' \text{ besitzen in } G \text{ eine gemeinsame Endecke}\}$. Ein Untergraph von G ist ein Graph H mit $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$. Gibt es eine Menge von Ecken $X \subseteq V(G)$ mit $V(H) = X$ und $E(H) = \{ij|i, j \in V(H) \text{ und } ij \in E(G)\}$ so heißt H **induzierter Untergraph** von G. Wir bezeichnen H dann mit $G[X]$. Die **Cliquenzahl** $\omega(G)$ ist die größte Zahl k, sodass G den vollständigen Graph vom Grad k als Untergraphen enthält, die **Unabhängigkeitszahl** $\alpha(G)$ ist die größte Zahl k, sodass G den leeren Graphen vom Grad k als Untergraphen enthält.

Bilder?

Ein Hypergraph $H = (V(H), E(H))$ mit **Eckenmenge** $V(H)$ und **Kantenmenge** $E(H)$ heißt **linearer Hypergraph**, falls zwei verschiedene Ecken $e, e' \in E(H)$ maximal eine Ecke gemeinsam haben ($|e \cap e'| \leq 1$). Für eine Kante e von H **Eckengrad** die Anzahl aller Ecken, die mit e einen nichtleeren Schnitt haben. Auch für Hypergraphen definieren wir den **Kantengraphen** $L(H)$ als den Graphen mit Eckenmenge $V(L(H)) = E(H)$ und Kantenmenge $E(L(H)) = \{ee'|e \cap e' \neq \emptyset\}$.

Eine **Färbung** von G ist eine Abbildung $f : V(G) \to C$ mit $f(v) \neq f(w)$ für alle $vw \in E(G)$, wobei C eine beliebige Menge, die **Farbmenge**, ist. Ist $|C| = k$ so heißt f **k-Färbung**. Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ bezeichne die kleinste postivie Zahl k, für welche eine k-Färbung von G existiert.

Ist H ein Hypergraph so heißt eine Abbildung $g : E(H) \to C$ (wieder heißt C die **Farbmenge**) eine **Kantenfärbung** von H falls $g(e) \neq g(e')$ für alle unterschiedlichen Kanten e, e' von H mit $e \cap e' \neq \emptyset$. Diese ist eine k-**Färbung**, falls $|C| = k$. Der chromatische Index $\chi'(H)$ bezeichne die kleinste positive Zahl k, derart, dass H eine echte k-Färbung besitzt.

Man beachte, dass eine Kantenfärbung eines Hypergraphen in direktem Zusammenhang zu einer Eckenfärbung seines Kantengraphen steht. Ist nämlich H ein Hypergraph und $G = L(H)$ sein Kantengraph, so gibt es offenbar eine bijektive Abbildung $\pi : E(H) \to V(G)$, welche jeder Kante von H die korrespondierende Ecke in G zuordnet. Ist f nun eine Färbung der Kanten von H, so ist $\pi \circ f$ eine Färbung der Ecken von G und umgekehrt.

1.2 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann hat A nur reelle Eigenwerte und folglich können diese monoton fallend angeordnet werden. Für eine symmetrische Matrix A sei also $\lambda_k(A)$ der k-größte **Eigenwert** (gezählt mit Vielfachheiten). Eine symmetrische Matrix A heißt **positiv semidefinit** falls $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Gilt außerdem $x^T Ax > 0$ für $x \neq 0$, so heißt A **positiv definit**. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

Satz 1.1 *Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:*

(a) A ist positiv semidefinit .

(b) Alle Eigenwerte von A sind nicht negativ.

(c) $A = UU^T$ für eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Beweis: Siehe [3, (1.3)]. ■

Satz 1.2 (Courant-Fischer) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Seien die (reellen) Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$. Dann gilt für alle $p \in \{1, \ldots, n\}$:*

1. $\lambda_p(A) = \max\{\min\limits_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension* $p\}$.

2. $\lambda_p(A) = \min\{\max\limits_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension* $n-p+1\}$.

Beweis: Siehe [2][13.5]. ■

Lemma 1.3 *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $A - B$ positiv semidefinit. Dann ist $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt

$$x^T(A-B)x \geq 0$$
$$x^TAx \geq x^TBx$$

Folglich ist $\frac{x^TAx}{x^Tx} \geq \frac{x^TBx}{x^Tx}$ und es folgt mit 1.2 :

$$\begin{aligned}\lambda_i(A) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\ &\geq \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TBx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\ &= \lambda_i(B)\end{aligned}$$

■

Satz 1.4 (Interlacing) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit und $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ eine symmetrische Matrix, welche aus A durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht.*

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B) \geq \lambda_{i+k}(A)$$

Für $i = 1, \ldots n-k$.

Beweis: Seien $l_1 < \cdots < l_{n-k}$ die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nicht gelöscht werden. Setze $P := (e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$, wobei e_k der k-te Einheitsvektors des $\mathbb{R}^n$ ist. Dann besitzt P vollen Spaltenrang und $B = P^TAP$. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)}$ ein linearer Unterraum , $x \in V$ beliebig und $y = Px$. Dann ist $y \in PV = \{z \in \mathbb{R}^n | z = Px, x \in V\}$ und es gilt $y^Ty = x^TP^TPx = x^Tx$, da $P^TP = I_{n_k}$. Außerdem ist PV ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der selben Dimension wie V (P besitzt vollen Spaltenrang). Mit 1.2 folgt :

$$\begin{aligned}\lambda_i(B) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TBx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\ &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TP^TAPx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\ &\leq \max\{\min_{y\in PV, y\neq 0} \frac{y^TAy}{y^Ty} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \quad (1.1) \\ &\leq \max\{\min_{x\in W, x\neq 0} \frac{y^TAy}{y^Ty} | W \subseteq \mathbb{R}^{n} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\ &= \lambda_i(A)\end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die zweite folgt analog bei Betrachtung von $-A$ und $-B$, da $\lambda_i(-A) = \lambda_{n-i+1}(A)$. ■

Satz 1.5 (Weyl Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$*

$$\lambda_i(B) + \lambda_n(C) \leq \lambda_i(A) \leq \lambda_i(B) + \lambda_1(C)$$

Beweis: Siehe [1, 6.7]. ■

Satz 1.6 (Ky Fan Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Dann gilt für alle $k \leq n$*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(C)$$

Für $k = n$ gilt Gleichheit.

Beweis: Siehe [4, 3.]. ■

1.3 Eigenwerte von Graphen

Sei G ein Graph mit Eckenmenge $V(G) = \{1, \ldots, n\}$. Die **Adjanzenzmatrix** von G ist definiert als $A := A(G)$ mit

$$A(G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & ij \in E(G) \\ 0 & ij \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist A symmetrisch, und hat folglich nur reelle Eigenwerte.Für einen Graphen G seien die **Eigenwerte** von G definiert als $\lambda_i(G) = \lambda_i(A(G))$.Wir wollen nun einige elementaren Graphen und ihre Eigenwerte betrachten. Sei dazu zunächst $G = K_n$. Dann ist $A(G) = J - I$, wobei $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix ist, bei der jeder Eintrag 1 ist, und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Somit ist -1 ein Eigenwert mit Vielfachheit $n-1$. Da K_n $n-1$ regulär ist, ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von G zum Eigenwert $n-1$.Sei nun $G = C_n$. Dann hat G die Eigenwerte $2\cos(\frac{2\pi i}{n})$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ (siehe [5, 1.1.4]). Bilder!

Lemma 1.7 *Seien H ein induzierter Untergraph von G und $k := |V(G)| - |V(H)|$. Dann gilt*

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(H) \geq \lambda_{i+k}(G)$$

Beweis: Ist H ein induzierter Untergraph von G, so entsteht $A(H)$ aus $A(G)$ durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt alles aus 1.4. ■

Korollar 1.8 *Sei G ein Graph mit $\omega(G) = p$ und $\alpha(G) = q$. Dann gilt :*

$$\lambda_p(G) \geq -1$$
$$\lambda_q(G) \geq 0$$

Beweis: Ist $\omega(G) = p$, so besitzt G einen vollständigen induzierten Untergraphen der Ordnung p, H. Nach besitzt H die Eigenwerte $\lambda_1(H) = p - 1$ und $\lambda_i(H) = -1$ für $i \in \{2, \ldots, p\}$. Damit folgt aus 1.7, $\lambda_p(G) \geq -1$.
Ist $\alpha(G) = q$, so besitzt G einen kantenlosen, induzierten Untergraphen der Ordnung q, O. Nach besitzt O die Eigenwerte $\lambda_i(O) = 0$ für $i \in \{1, \ldots, p\}$. Damit folgt aus 1.7, $\lambda_q(G) \geq 0$.
■

2 Krauszzerlegungen und die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

2.1 Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

Es bezeichne $\mathcal{EG}(n)$ die Klasse aller Graphen welche die Vereinigung von n kantendisjunkten vollständigen Graphen der Ordnung n sind. Für $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt also $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, wobei $G_i \cong K_n$ und $|G_i \cap G_j| \leq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$.

Bilder, Beispiele

Vermutung 2.1 (Erdős–Faber–Lovász) *Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann ist $\chi(G) = n$.*

Bemerkung 2.2 *2.1 gilt offenbar für $n = 1, 2$.*

2.2 Krauszzerlegungen von Graphen

Definition 2.3 *Sei G ein Graph. Eine Menge $\mathcal{K}$ von Untergraphen von G heißt* **Krauszzerlegung** *von G, falls gilt:*

(i) Alle Graphen $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen mit $|K| \geq 2$.

(ii) Sind K, K' zwei verschiedene Graphen aus $\mathcal{K}$, so sind sie kantendisjunkt (also $|K \cap K'| \leq 1$)

(iii) $\mathcal{K}$ ist eine Zerlegung von G, also $G = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$

Desweiteren sei für $v \in V(G)$ der **Grad** *von v bezüglich $\mathcal{K}$ definiert als*

$$d_G(v : \mathcal{K}) := |\{K \in \mathcal{K} | v \in V(K)\}|$$

und der **Minimalgrad** *von G bezüglich $\mathcal{K}$ als*

$$\delta_G(\mathcal{K}) := \min_{v \in V(G)} d_G(v : \mathcal{K})$$

Für $d \geq 1$ sei $\kappa_d(G)$ die kleinste positive Zahl m derart, dass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ besitzt mit $|\mathcal{K}| = m$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Existiert keine solche Zahl m, so setzen wir $\kappa_d(G) = \infty$.

Bilder, Beispiele

Lemma 2.4 *Sei G ein Graph. Dann ist $\kappa_d(G) < \infty$ genau dann, wenn $\delta(G) \geq d$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\delta(G) \geq d$, falls $\kappa_d(G) < \infty$. Seien $\kappa_d(G) < \infty$ und $v \in V(G)$ mit $d_G(v) = \delta(G)$. Dann existieren d kantendisjunkte vollständige Untergraphen $H^1 \dots H^d$ von G mit $v \in V(H^i)$ für alle $1 \leq i \leq d$. Da die H^i kantendisjunkt sind und $d_{H^i}(v) \geq 1$, gilt:

$$d \leq \sum_{i=1}^{d} d_{H^i}(v) \leq d_G(v) = \delta(G).$$

Sei nun $\delta(G) \geq d$. Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ gibt, mit $d_G(v : \mathcal{K}) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Sei $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ eine Nummerierung der Kanten. Setze $H^i = G[e_i]$. Dann ist $\mathcal{K} = \{H^1, \dots, H^m\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $d_G(v : \mathcal{K}) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Also ist $\kappa_d(G) \leq m < \infty$.

■

Beispiel 2.5 *Sei zunächst G ein bipartiter Graph mit Minimalgrad mindestens d. Dann ist $\kappa_d(G) = |E(G)|$, da G keine Dreiecke enthält und somit jeder Graph einer Krauszzerlegung von G isomorph zu K_2 sein muss.*

Satz 2.6 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt $\chi(G) = n$.

(b) Ist G ein Graph mit Minimalgrad mindestens 2, so ist $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.

(c) Ist H ein linearer Hypergraph so gilt $\chi'(H) \leq |H|$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass (b) aus (a) folgt. Sei G ein Graph mit $\kappa_2(G) = m$. Dann existiert eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \{K_1, \dots K_m\}$ von G. Ist $m \geq n$

$$\chi(G) \leq n \leq m = \kappa_2(G)$$

Ist andererseits $m < n$, so ist $|K^i| \leq \omega(G) \leq \kappa_2(G) = m$ (siehe 2.11). Damit können wir für $1 \leq i \leq n$ jeden K^i durch Hinzufügen von Ecken und Kanten zu einem vollständigen Graphen von Grad m aufblähen. Den so enstehenden Graphen nennen wir G'. Offenbar ist G ein Untergraph von G' und $G' \in \mathcal{EG}(m)$. Damit gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G') = m = \kappa_2(G)$$

Also folgt (b) aus (a).

Um zu zeigen, dass (a) aus (b) folgt, sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann ist G die kantendisjunkte Vereinigung von n vollständigen Graphen der Ordnung n. Wähle $X = \{v \in V(G) | d_G(v) \geq n\}$ und betrachte den von X induzierten Untergraphen H von G. Die Einschränkung der vollständigen Graphen, aus denen G besteht, auf H ergeben eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ von H (jeder induzierte Untergraph eines vollständigen Graphen ist wieder ein vollständiger Graph). Die Wahl von X sichert, dass $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Somit

$$\chi(H) \leq \kappa_2(H) \leq \kappa_2(G) \leq n$$

Also erhalten wir eine Färbung von H mit maximal n Farben. Diese lässt sich auf G zu einer Färbung mit maximal n Farben erweitern, da wir nur Ecken entfernt haben, deren Grad kleiner als n ist, welche folglich nur $n-1$ Nachbarn haben. Damit ist die Äquivalenz von (a) und (b) gezeigt. Es bleibt die Äquivalenz von (b) und (c) zu zeigen.

Gelte (c) und sei G ein Graph mit Minimalgrad größer oder gleich 2. Seien weiterhin $\kappa_2(G) = m$ und $\mathcal{K} = \{K^1, \ldots, K^m\}$ eine Krauszzerlegung von G. Für $v \in V(G)$ definiere e_v als die Menge aller $K \in \mathcal{K}$, welche v enthalten. Sind dann v und w zwei unterschiedliche Ecken von G, so sind e_v und e_w unterschiedlich, da sonst Eigenschafft (ii) der Krauszzerlegung verletzt wäre. Sei H der Hypergraph mit Eckenmenge $\mathcal{K}$ und Kantenmenge $\{e_v | v \in V(G)\}$. Wir zeigen, dass H linear ist. Seien dazu e_v, e_w zwei unterschiedliche Kanten von H. Angenommen $|e_v \cap e_w| \geq 2$. Dann existieren mindestens zwei vollständige Graphen K, K', welche sowohl v als auch w enthalten. Dies ist ein Widerspruch zu Eigenschaft (ii) der Krauszzerlegung. Folglich ist $|e_v \cap e_w| \leq 1$, also ist H linear. Dann folgt aus der Vorraussetzung, dass $\chi'(H) \leq |H| = \kappa_2(G)$ Somit finden wir eine Färbung der Kanten von H mit maximal $\kappa_2(G)$ Farben. Jede Kante von H korrespondiert mit genau einer Ecke von G. Folglich erhalten wir eine Färbung von G mit maximal $\kappa_2(G)$ Farben, wenn wir die Ecken von G mit der selben Farbe wie ihre korrespondierende Kante in H färben. Sonst exisiteren zwei Ecken v, w von G die benachbart sind und die selbe Farbe haben, also auch e_v und e_w. Da v und w benachbart sind, kommen sie beide im selben vollständigen Graph K der Krauszzerlegung vor. Damit ist $|e_v \cap e_w| = 0$ und folglich kommen v und w nicht in den selben vollständigen Graphen vor. Widerspruch. Damit folgt

$$\chi(G) \leq \chi(H) \leq \kappa_2(G)$$

Gelte (b) und sei H ein (von der Mächtigkeit) minimaler linearer Hypergraph welcher (c) nicht erfüllt. Ist dann $\delta(H) \leq 1$ so können wir eine Ecke aus H entfernen und erhalten einen linearen Hypergraphen H' kleinerer Mächtigkeit, welcher ebenfalls (c) nicht erfüllt. Also ist $\delta(H) \geq 2$. Sei G der Kantengraph von H mit $V(G) = E(H)$ und $E(G) = \{ee' | e \cap e' \neq \emptyset\}$. Definere für $v \in V(H)$ die Menge $E_H(v)$ als die Menge aller Kanten von H, die mit v inzident sind und K^v als den durch $E_H(v)$ induzierten Untergraphen von G. Wir zeigen: $\mathcal{K} := \{K^v | v \in V(H)\}$ ist eine Krauszzerlegung von G.

Seien e, e' zwei verschiedene Kanten aus $E_H(v)$. Dann haben e und e' die Ecke v gemeinsam. Folglich ist $e \cap e' \neq \emptyset$ und ee' ist eine Kante in G. Außerdem ist

$$|K^v| = |E_H(v)| = d_H(v) \geq 2$$

Damit erfüllen alle K^v Bedingung (i) von 2.3. Bedingung (ii) folgt, da H ein linearer Hypergraph ist . (iii) folgt, da jede Kante von H mit mindestens einer Ecke von H inzident ist. ausführlicher

■

2.3 Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Satz 2.7 *Sei G ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $d_G(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$. Desweiteren sei $d_i := d_G(v : \mathcal{K})$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq d$. Dann gilt:*

(a) $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ *für* $i = 1, \ldots, n$

(b) $\lambda_{m+1}(G) \leq -d$ *falls* $m < n$

Beweis:

(a) Es sei A die Adjazenzmatrix von G und $D := \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Definiere $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ als die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$, also

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i \in K_j \\ 0 & v_i \notin K_j \end{cases}$$

Nun betrachten wir $M = BB^T$. Es gilt

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{j,k}$$

Seien zunächst $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Ist $B_{i,k} = 1$ und $B_{j,k} = 1$, so ist $v_i, v_j \in K_k$, und somit (da K_k ein vollständiger Graph ist) $v_i v_j \in E(G)$. Es können aber für höchstens ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ $B_{i,k}$ und $B_{j,k}$ gleichzeitig 1 seien, da nach 2.3 die

Graphen aus $\mathcal{K}$ kantendisjunkt sind. Also ist $M_{i,j} = 1$ genau dann, wenn $v_i v_j \in E(G)$, genau dann wenn $A_{i,j} = 1$. Somit ist $M_{i,j} = A_{i,j}$

Sei nun $i \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Wir betrachten $M_{i,i}$. Es gilt

$$M_{i,i} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{i,k} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k}$$

$B_{i,k} = 1$ genau dann, wenn $v_i \in K_k$. Folglich ist $M_{i,i} = d_G(v_i : \mathcal{K}) = d_i$. Damit gilt $M = A + D$. M ist nach 1.1 positiv semidefinit. Folglich ist $A - (-D)$ positiv semidefinit, und es folgt mit 1.3, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = - - d_{n-i+1}$$

(b) Sei $m < n$. Dann ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq m$. Also ist $\lambda_{m+1}(M) = 0$ und es folgt mit 1.5 dass

$$\lambda_{m+1}(A) + d \leq \lambda_{m+1}(A) + d_n \leq 0$$

Durch Umstellen erhalten wir die gewünschte Ungleichung.

■

Korollar 2.8 *Sei H ein induzierter Untergraph von G mit $p = |H| \leq |G| = n$. Ist $\lambda_p(H) > -d$ für ein $q \leq p$ und $-2 \leq d \in \mathbb{N}$, so ist $\kappa_d(G) \geq q$.*

Beweis: Angenommen $\kappa_d(G) < q$. Sei dann $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G die zu d passt. Dann ist nach 1.4 $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H) > -d$. Da $i < q \leq n$ gilt nach 2.7 $\lambda_{i+1} \leq -d$ und somit $\lambda_q(G) \leq \lambda_{i+1} \leq -d$. Widerspruch. ■

Es sei G ein Graph. Der **Kantengraph** $L(G)$ (engl. line graph) von G ist definiert als der Graph mit Eckenmenge $E(G)$ und Kantenmenge $\{ee' | e \text{ und } e' \text{ besitzen eine gemeinsame Endecke}\}$.

Korollar 2.9 *Sei $\delta(G) \geq 2$ und H ein induzierter Untergraph von G, welcher Kantengraph eines Waldes ist. Dann ist $\kappa_2(H) \geq |H|$*

Beweis: Da H Kantengraph eines Waldes ist, folgt $\lambda_{min}(H) > -2$ (vgl. [5, 3.4.10]) Nach 2.8 ist für $q = |H| : \lambda_q(H) = \lambda_{\min} > -2$. Dann ist mit 2.8 $\kappa_2(H) > |H|$. ■

Korollar 2.10 (Klotz) $\kappa_2(K_n) \geq n$

Beweis: K_n ist der Kantengraph von $K_{1,n}$. Nun folgt die Behauptung aus 2.9. ■

Korollar 2.11 *Ist $\delta(G) \geq 2$, so gilt $\omega(G) \leq \kappa_2(G)$ und $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$.*

Beweis: Sei $p = \omega(G)$. Dann gilt nach $\lambda_p(G) \geq -1 \geq -2$. Damit sind für $d = 2$ die Voraussetzungen von 2.8 erfüllt, und es gilt folglich $\kappa_2(G) \geq p = \omega(G)$ Für $q = \alpha(G)$) gilt wieder nach $\lambda_q(G) \geq 0 \geq -2$. Damit folgt analog $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$. ■

Vermutung 2.12 *Ist $\chi(G) \geq k$, so ist $\lambda_k(G) > -d$.*

Satz 2.13 *Gelte 2.12. Dann gilt :*

(a) Ist $\delta(G) \geq d$ so ist $\chi(G) \leq \kappa_d(G)$

(b) Ist H ein linearer Hypergraph mit $|e| \geq d$, so ist $\chi'(H) \leq |H|$

Beweis:

(a) Sei $\chi(G) = k$. Dann ist nach 2.12 $\lambda_k(G) > -d$. Mit 2.8 folgt $\kappa_d(G) \geq k = \chi(G)$.

Nachprüfen ob d-1 reicht

(b) Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es einen minimalen Hypergraphen H für welchen $\chi'(H) > |H|$ ist. Angenommen in diesem exisitiert eine Kante vom Grad kleiner als d. Entfernen wir diese und alle mit keinen anderen Kanten inzidenten Ecken (von welchen es mindestens eine gibt, da alle Kanten mindestens d Ecken enthalten und H ein linearer Hypergraph ist), erhalten wir einen Hypergraphen H'. Dieser erfüllt die Behauptung, da H das kleinste Gegenbeispiel ist. Also existiert eine Kantenfärbung von H' mit höchstens $|H'| < |H|$ Farben. Aus dieser gewinnen wir eine Kantenfärbung von H, indem wir alle Kanten wie in H' färben, und die entfernte Kante mit einer neuen Farbe färben. Folglich gilt also:

$$\chi'(H) \leq \chi'(H') + 1 \leq |H'| + 1 \leq |H|$$

Ein Widerspruch. Folglich haben alle Kanten in H mindestens Grad d.

Sei nun G der Kantengraph von H. Dann ist $\delta(G) \geq d$, folglich also

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_d(G)$$

Die Kanten von G ergeben eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Jede Kante von G korrespondiert mit einer Ecke von H, da H ein linearer Hypergraph ist. Folglich ist

$$|E(G)| = |\{v \in V(H) | d_H(v) = 2\}| \leq |H|$$

Damit ist $\kappa_d(G) \leq |E(G)| \leq |H|$. Folglich existiert kein kleinstes Gegenbeispiel, und die Behauptung gilt für alle linearen Hypergraphen.

■

2.4 Schranken für $\kappa_d(G)$

Wir wollen nun einige Schranken für $\kappa_d(G)$ angeben.

Lemma 2.14 *Ist $\delta(G) \geq d$, so ist $\kappa_d(G) \leq |E(G)|$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von 2.4. ■

Satz 2.15

$$\kappa_d(G) \geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d}$$

Beweis: Ist $\kappa_d(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen.
Fall 1 : $\kappa_d(G) \geq n$ Da $\lambda_1(G) \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1(G) + d &\geq d \\ 1 &\geq \frac{d}{\lambda_1(G) + d} \\ \kappa_d(G) \geq n &\geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d} \end{aligned}$$

Fall 2 : $\kappa_d(G) < n$ Wir verwenden die selbe Bezeichnung wie in 2.7. Dann ist $M = A + D$ mit $\operatorname{rang}(M) = m \leq \kappa_d(G) < n$ und folglich $\lambda_{m+1}(M) = \cdots = \lambda_n(M) = 0$.

Mit 1.6 folgt dann :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(M) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(M) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(D) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(n-m)d \leq (n-m)\lambda_n(D) \leq \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(D) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(A) \leq m\lambda_1(A)$$

Durch Umstellen erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

Satz 2.16 *Sei G ein Graph mit Minimalgrad mindestens d. Dann gilt*

$$\kappa_d(G) \geq \frac{|E(G)|}{\binom{\omega(G)}{2}}$$
$$\kappa_d(G) \geq \frac{n}{\chi(G)}$$

Beweis: Sei $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G mit $|\mathcal{K}| = \kappa_d(G)$. Dann ist jeder Graph in $\mathcal{K}$ ein vollständiger Graph der Ordnung höchstens $\omega(G)$. Somit gilt

$$|E(G)| = \sum_{K \in \mathcal{K}} |E(K)|$$

Also gilt die erste Ungleichung. Nach 2.11 gilt $\kappa_d(G) \geq \alpha(G)$. Daraus folgt

$$\chi(G)\kappa_d(G) \geq \chi(G)\alpha(G) \geq n$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Literatur

[1] J.N. Franklin. Matrix theory. Prentice-Hall Series in Applied Mathematics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. XII, 292 p. (1968)., 1968.

[2] Stasys Jukna. *Extremal combinatorics. With applications in computer science. 2nd ed.* Berlin: Springer, 2nd ed. edition, 2011.

[3] László Lovász. Eigenvalues of graphs. `"http://www.cs.elte.hu/~lovasz/eigenvals-x.pdf"`, 2007.

[4] Mohammad Sal Moslehian. Ky fan inequalities, 2011.

[5] Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson, and Slobodan Simić. *An introduction to the theory of graph spectra.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

Stefan Heyder