Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra

Bachelorarbeit

Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder

Matrikelnummer : 49070

Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist

gute Einleitung, Verweis auf EFL Resultate

1.1 Graphentheoretische Grundlagen

Es sei $G = (V, E)$ stets ein (schlichter, ungerichteter) Graph mit Eckenmenge $V = V(G) = \{1, \ldots, n\}$ und Kantenmenge $E = E(G) = \{ij | i \text{ und } j \text{ sind in } G \text{ adjazent}\}$. Der **Grad** einer Ecke $v \in V(G)$ sei definiert als $d_G(v) = \{j | ij \in E(G)\}$. Der **Minimalgrad** (**Maximalgrad**) sei definiert als der kleinste (größte) Grad einer Ecke von G und wird mit $\delta(G)$ ($\Delta(G)$) bezeichnet.

Wir wollen nun einige häufig auftretenden Graphen bezeichnen. Der **vollständige Graph** der Ordnung n sei K_n und sein Komplement, der **leere Graph** der Ordnung n sei O_n, der **Kreis** der Länge n sei C_n. Der **Weg** der Länge n sei P_{n+1}.

Für einen Graphen sei der **Kantengraph** $L(G)$ definiert als der Graph mit Eckenmenge $V(L(G)) = E(G)$ und Kantenmenge $E(L(G)) = \{ee' | e \text{ und } e' \text{ besitzen in } G \text{ eine gemeinsame Endecke}\}$. . Ein Untergraph von G ist ein Graph H mit $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$. Sei $X \subseteq V(G)$, dann heißt H induzierter Untergraph von G, falls $V(H) = X$ und $E(H) = \{ij | i, j \in V(H) \text{ und } ij \in E(G)\}$. Wir bezeichnen H dann mit $G[X]$.

einige Beispiele

Die **Cliquenzahl** $\omega(G)$ ist die größte Zahl k, sodass G den vollständigen Graph vom Grad k K_k als Untergraphen enthält, die **Unabhängigkeitszahl** $\alpha(G)$ ist die größte Zahl k, sodass G den leeren Graphen vom Grad k O_k als Untergraphen enthält.

Ein Hypergraph $H = (V, E)$ mit **Eckenmenge** $V = V(H)$ und **Kantenmenge** $E = E(H)$ heißt **linearer Hypergraph**, falls zwei verschiedene Ecken $e, e' \in E(H)$ maximal eine Ecke gemeinsam haben ($|e \cap e'| \leq 1$). Auch für Hypergraphen definieren wir den **Kantengraphen** $L(H)$ als den Graphen mit Eckenmenge $V(L(H)) = E(H)$ und Kantenmenge $E(L(H)) = \{ee' | e \cap e' \neq \emptyset\}$.

Eine **Färbung** von G ist eine Abbildung $f : V(G) \to C$, wobei C eine beliebige Menge, die **Farbmenge**, ist. Diese ist eine **echte Färbung**, falls $f(v) \neq f(w)$ für alle $vw \in E(G)$. Ist $|C| = k$ so heißt f **k-Färbung**. Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ bezeichne die kleinste postivie Zahl k, für welche eine echte k-Färbung von G existiert.

Ist H ein Hypergraph so heißt eine Abbildung $g : E(H) \to C$ (wiederrum ist C die **Farbmenge**) eine **Kantenfärbung** von H. Diese ist eine **echte Kantenfärbung**, falls $g(e) \neq g(e')$ für alle unterschiedlichen Kanten e, e' von H mit $e \cap e' \neq \emptyset$ bzw. eine k-

Färbung, falls $|C| = k$. Der chromatische Index $\chi'(H)$ bezeichne die kleinste positive Zahl k, derart, dass H eine echte k-Färbung besitzt.

Man beachte, dass eine Kantenfärbung eines Graphen in direktem Zusammenhang zu einer Eckenfärbung seines Kantengraphen steht. Genauer

1.2 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann hat A nur reelle Eigenwerte und folglich können diese monoton fallend angeordnet werden. Für eine symmetrische Matrix A sei also $\lambda_k(A)$ der k-größte **Eigenwert** (gezählt mit Vielfachheiten). Eine symmetrische Matrix A heißt **positiv semidefinit** falls $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Gilt außerdem $x^T Ax > 0$ für $x \neq 0$, so heißt A **positiv definit**. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

Satz 1.1 *Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent:*

(a) A ist positiv semidefinit .

(b) Alle Eigenwerte von A sind nicht negativ.

(c) $A = UU^T$ für eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Beweis: Siehe [2, (1.3)]. ■

Satz 1.2 (Courant-Fischer) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Seien die (reellen) Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$. Dann gilt für alle $p \in \{1, \dots, n\}$:*

1. $\lambda_p(A) = \max\{\min\limits_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension* $p\}$.
2. $\lambda_p(A) = \min\{\max\limits_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension* $n-p+1\}$.

beweisen

Lemma 1.3 *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $A - B$ positiv semidefinit. Dann ist $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt

$$x^T(A - B)x \geq 0$$

$$x^T Ax \geq x^T Bx$$

Folglich ist $\frac{x^TAx}{x^Tx} \geq \frac{x^TBx}{x^Tx}$ und es folgt mit 1.2 :

$$\begin{aligned}
\lambda_i(A) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&\geq \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TBx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \lambda_i(B)
\end{aligned}$$

■ nachprüfen

Satz 1.4 (Interlacing) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Sei $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ eine symmetrische Matrix, welche aus A durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht, mit Eigenwerten $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_k$. Dann gilt*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$$

für $i = 1, \ldots, n-k$.

Beweis: Seien $l_1 < \cdots < l_{n-k}$ die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nach dem Löschen der Zeilen bzw. Spalten von A übrig bleiben. Setze $P := (e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$. Dann besitzt P vollen Spaltenrang und $B = P^TAP$. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)}$ ein linearer Unterraum , $x \in V$ beliebig und $y = Px$. Dann ist $y \in PV = \{z \in \mathbb{R}^n | z = Px, x \in V\}$ und es gilt $y^Ty = x^TP^TPx = x^Tx$, da $P^TP = I_{n_k}$. Außerdem ist PV ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der selben Dimension wie V (P besitzt vollen Spaltenrang). Mit 1.2 folgt :

bessere Formulierung

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TBx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^TP^TAPx}{x^Tx} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&\leq \max\{\min_{y\in PV, y\neq 0} \frac{y^TAy}{y^Ty} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \qquad (1.1) \\
&\leq \max\{\min_{x\in W, x\neq 0} \frac{y^TAy}{y^Ty} | W \subseteq \mathbb{R}^{n} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i\} \\
&= \lambda_i
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die zweite folgt analog bei Betrachtung von $-A$ und $-B$. ■ Prüfen!

Satz 1.5 (Weyl Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$*

$$\lambda_i(B) + \lambda_n(C) \leq \lambda_i(A) \leq \lambda_i(B) + \lambda_1(C)$$

Beweis: Siehe [1, 6.7]. ■

Satz 1.6 (Ky Fan Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Dann gilt für alle $k \leq n$*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(C)$$

Für $k = n$ gilt Gleichheit.

Beweis: Siehe [3, 3.]. ■

1.3 Eigenwerte von Graphen

Sei G ein Graph mit Eckenmenge $V(G) = \{v_1, \dots v_n\}$. Die **Adjanzenzmatrix** von G ist definiert als $A := A(G)$ mit

$$A(G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist A symmetrisch, und hat folglich nur reelle Eigenwerte. Damit es Sinn macht, von den Eigenwerten eines Graphen zu sprechen, dürfen die Eigenwerte von $A(G)$ nicht von der Nummerierung der Ecken abhängen. Das dem so ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 1.7 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann sind die Eigenwerte von $A(G)$ unabhängig von der Nummerierung der Ecken von G.*

Beweis: Seien $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\} = \{u_1, \dots, u_n\}$ zwei Nummerierungen der Ecken. Sei weiterhin $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, B = (B_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases} B_{i,j} = \begin{cases} 1 & u_i u_j \in E(G) \\ 0 & u_i u_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S^n$ sodass $v_{\sigma(i)} = u_i$. Folglich gilt $A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{i,j}$. Sei $P \in GL_n(\mathbb{R})$ die Matrix

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $P = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$. Nun betrachten wir $P^T AP$.

$$(P^T AP)_{i,j} = e_j^T P^T APe_i = e_{\sigma(j)}^T Ae_{\sigma(i)} = A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{i,j}$$

Also ist $P^T AP = B$. Somit sind A und B ähnlich und besitzen folglich die selben Eigenwerte. ∎

Für einen Graphen G seien die **Eigenwerte** von G definiert als $\lambda_i(G) = \lambda_i(A(G))$.

Adjazenzmatrix ambiguity

Bemerkung 1.8 *1. Die Summe aller Eigenwerte eines Graphen (mit Vielfachheiten) ist* 0.

2. Ist G d regulär, so ist d ein Eigenwert von G.

Beweis:

1. Für die Adjazenzmatrix eines Graphen gilt $\mathrm{trace}(A) = 0$. Somit ist

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G) = \mathrm{trace}(A) = 0$$

2.

Beweisen

∎

Wir wollen nun einige elementaren Graphen und ihre Eigenwerte betrachten. Sei dazu zunächst $G = K_n$. Dann ist $A(G) = J - I$, wobei $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix ist, bei der jeder Eintrag 1 ist, und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Somit ist -1 ein Eigenwert mit Vielfachheit $n-1$. Außerdem folgt aus 1.8, dass $n-1$ ein Eigenwert von G ist.
Sei nun $G = C_n$. Dann hat G die Eigenwerte $2\cos(\frac{2\pi i}{n})$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ (siehe [4, 1.1.4]).

Bilder!

Lemma 1.9 *Seien H ein induzierter Untergraph von G und* $k := |V(G)| - |V(H)|$. *Dann gilt*

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(H) \geq \lambda_{i+k}(G)$$

Beweis: Ist H ein induzierter Untergraph von G, so entsteht $A(H)$ aus $A(G)$ durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt alles aus 1.4. ∎

Korollar 1.10 *Sei G ein Graph mit $\omega(G) = p$ und $\alpha(G) = q$. Dann gilt :*

$$\lambda_p(G) \geq -1$$
$$\lambda_q(G) \geq 0$$

Beweis: Ist $\omega(G) = p$, so besitzt G einen vollständigen induzierten Untergraphen der Ordnung p, H. Nach besitzt H die Eigenwerte $\lambda_1(H) = p - 1$ und $\lambda_i(H) = -1$ für $i \in \{2, \ldots, p\}$. Damit folgt aus 1.9, $\lambda_p(G) \geq -1$.

Ist $\alpha(G) = q$, so besitzt G einen kantenlosen, induzierten Untergraphen der Ordnung q, O. Nach besitzt O die Eigenwerte $\lambda_i(O) = 0$ für $i \in \{1, \ldots, p\}$. Damit folgt aus 1.9, $\lambda_q(G) \geq 0$.

■

2 Krauszzerlegungen und die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

2.1 Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

Es bezeichne $\mathcal{EG}(n)$ die Klasse aller Graphen welche die Vereinigung von n kantendisjunkten vollständigen Graphen der Ordnung n sind. Für $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt also $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, wobei $G_i \cong K_n$ und $|G_i \cap G_j| \leq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$.

Bilder, Beispiele

Vermutung 2.1 (Erdős–Faber–Lovász) *Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann ist $\chi(G) = n$.*

Bemerkung 2.2 *2.1 gilt offenbar für $n = 1, 2$.*

2.2 Krauszzerlegungen von Graphen

Definition 2.3 *Sei G ein Graph. Eine Menge $\mathcal{K}$ von Untergraphen von G heißt* **Krauszzerlegung** *von G, falls gilt:*

(i) Alle Graphen $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen mit $|K| \geq 2$.

(ii) Sind K, K' zwei verschiedene Graphen aus $\mathcal{K}$, so sind sie kantendisjunkt (also $|K \cap K'| \leq 1$)

(iii) $\mathcal{K}$ ist eine Zerlegung von G, also $G = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$

Desweiteren sei für $v \in V(G)$ der **Grad** *von v bezüglich $\mathcal{K}$ definiert als*

$$d_G(v : \mathcal{K}) := |\{K \in \mathcal{K} | v \in V(K)\}|$$

und der **Minimalgrad** *von G bezüglich $\mathcal{K}$ als*

$$\delta_G(\mathcal{K}) := \min_{v \in V(G)} d_G(v : \mathcal{K})$$

Für $d \geq 1$ sei $\kappa_d(G)$ die kleinste positive Zahl m derart, dass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ besitzt mit $|\mathcal{K}| = m$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Existiert keine solche Zahl m, so setzen wir $\kappa_d(G) = \infty$.

Bilder, Beispiele

Lemma 2.4 *Sei G ein Graph. Dann ist $\kappa_d(G) < \infty$ genau dann, wenn $\delta(G) \geq d$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\delta(G) \geq d$, falls $\kappa_d(G) < \infty$. Seien $\kappa_d(G) < \infty$ und $v \in V(G)$ mit $d_G(v) = \delta(G)$. Dann existieren d kantendisjunkte vollständige Untergraphen $H^1 \dots H^d$ von G mit $v \in V(H^i)$ für alle $1 \leq i \leq d$. Da die H^i kantendisjunkt sind und $d_{H^i}(v) \geq 1$, gilt:

$$d \leq \sum_{i=1}^{d} d_{H^i}(v) \leq d_G(v) = \delta(G).$$

Sei nun $\delta(G) \geq d$. Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ gibt, mit $d_G(v : \mathcal{K}) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Sei $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ eine Nummerierung der Kanten. Setze $H^i = G[e_i]$. Dann ist $\mathcal{K} = \{H^1, \dots, H^m\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $d_G(v : \mathcal{K}) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Also ist $\kappa_d(G) \leq m < \infty$.

■

Satz 2.5 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt $\chi(G) = n$.

(b) Ist G ein Graph mit Minimalgrad mindestens 2, so ist $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.

(c) Ist H ein linearer Hypergraph so gilt $\chi'(H) \leq |H|$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass (b) aus (a) folgt. Sei G ein Graph mit $\kappa_2(G) = m$. Dann existiert eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \{K_1, \dots K_m\}$ von G. Ist $m \geq n$

$$\chi(G) \leq n \leq m = \kappa_2(G)$$

Ist andererseits $m < n$, so ist $|K^i| \leq \omega(G) \leq \kappa_2(G) = m$ (siehe 2.10). Damit können wir für $1 \leq i \leq n$ jeden K^i durch Hinzufügen von Ecken und Kanten zu einem vollständigen Graphen von Grad m aufblähen. Den so enstehenden Graphen nennen wir G'. Offenbar ist G ein Untergraph von G' und $G' \in \mathcal{EG}(m)$. Damit gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G') = m = \kappa_2(G)$$

Also folgt (b) aus (a).

Um zu zeigen, dass (a) aus (b) folgt, sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann ist G die kantendisjunkte Vereinigung von n vollständigen Graphen der Ordnung n. Wähle $X = \{v \in V(G) | d_G(v) \geq n\}$ und betrachte den von X induzierten Untergraphen H von G. Die Einschränkung der vollständigen Graphen, aus denen G besteht, auf H ergeben eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ von

H (jeder induzierte Untergraph eines vollständigen Graphen ist wieder ein vollständiger Graph). Die Wahl von X sichert, dass $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Somit

$$\chi(H) \leq \kappa_2(H) \leq \kappa_2(G) \leq n$$

Also erhalten wir eine Färbung von H mit maximal n Farben. Diese lässt sich auf G zu einer Färbung mit maximal n Farben erweitern, da wir nur Ecken entfernt haben, deren Grad kleiner als n ist, welche folglich nur $n-1$ Nachbarn haben. Damit ist die Äquivalenz von (a) und (b) gezeigt. Es bleibt die Äquivalenz von (b) und (c) zu zeigen.

Gelte 3. und sei G ein Graph mit Minimalgrad größer oder gleich 2. Seien weiterhin $\kappa_2(G) = m$ und $\mathcal{K} = \{K^1, \ldots, K^m\}$ eine Krauszzerlegung von G. Für $v \in V(G)$ definiere e_v als die Menge aller $K \in \mathcal{K}$, welche v enthalten. Sind dann v und w zwei unterschiedliche Ecken von G, so sind e_v und e_w unterschiedlich, da sonst Eigenschafft (ii) der Krauszzerlegung verletzt wäre. Sei H der Hypergraph mit Eckenmenge $\mathcal{K}$ und Kantenmenge $\{e_v | v \in V(G)\}$. Wir zeigen, dass H linear ist. Seien dazu e_v, e_w zwei unterschiedliche Kanten von H. Angenommen $|e_v \cap e_w| \geq 2$. Dann existieren mindestens zwei vollständige Graphen K, K', welche sowohl v als auch w enthalten. Dies ist ein Widerspruch zu Eigenschaft (ii) der Krauszzerlegung. Folglich ist $|e_v \cap e_w| \leq 1$, also ist H linear. Dann folgt aus der Vorraussetzung, dass $\chi'(H) \leq |H| = \kappa_2(G)$ Somit finden wir eine Färbung der Kanten von H mit maximal $\kappa_2(G)$ Farben. Jede Kante von H korrespondiert mit genau einer Ecke von G. Folglich erhalten wir eine Färbung von G mit maximal $\kappa_2(G)$ Farben, wenn wir die Ecken von G mit der selben Farbe wie ihre korrespondierende Kante in H färben. Sonst Format exisiteren zwei Ecken v, w von G die benachbart sind und die selbe Farbe haben, also auch e_v und e_w. Da v und w benachbart sind, kommen sie beide im selben vollständigen Graph K der Krauszzerlegung vor. Damit ist $|e_v \cap e_w| = 0$ und folglich kommen v und w nicht in den selben vollständigen Graphen vor. Widerspruch. Damit folgt

$$\chi(G) \leq \chi(H) \leq \kappa_2(G)$$

Gelte 2. und sei H ein (von der Mächtigkeit) minimaler linearer Hypergraph welcher 3. nicht erfüllt. Ist dann $\delta(H) \leq 1$ so können wir eine Ecke aus H entfernen und erhalten einen linearen Hypergraphen H' kleinerer Mächtigkeit, welcher ebenfalls 3. nicht erfüllt. Also ist $\delta(H) \geq 2$. Sei G der Kantengraph von H mit $V(G) = E(H)$ und $E(G) = \{ee' | e \cap e' \neq \emptyset\}$. Definere für $v \in V(H)$ die Menge $E_H(v)$ als die Menge aller Kanten von H, die mit v inzident sind und K^v als den durch $E_H(v)$ induzierten Untergraphen von G. Wir zeigen: $\mathcal{K} := \{K^v | v \in V(H)\}$ ist eine Krauszzerlegung von G.

Seien e, e' zwei verschiedene Kanten aus $E_H(v)$. Dann haben e und e' die Ecke v gemeinsam. Folglich ist $e \cap e' \neq \emptyset$ und ee' ist eine Kante in G. Außerdem ist

$$|K^v| = |E_H(v)| = d_H(v) \geq 2$$

Damit erfüllen alle K^v Bedingung (i) von 2.3. Bedingung (ii) folgt, da H ein linearer Hypergraph ist . (iii) folgt, da jede Kante von H mit mindestens einer Ecke von H inzident ausführlicher ist. ■

2.3 Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Satz 2.6 *Sei G ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ eine Krausz-zerlegung von G mit $d_G(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$. Desweiteren sei $d_i := d_G(v : \mathcal{K})$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq d$. Dann gilt:*

(a) $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ *für* $i = 1, \ldots, n$

(b) $\lambda_{m+1}(G) \leq -d$ *falls* $m < n$

Beweis:

(a) Es sei A die Adjazenzmatrix von G und $D := \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Definiere $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ als die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$, also

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i \in K_j \\ 0 & v_i \notin K_j \end{cases}$$

Nun betrachten wir $M = BB^T$. Es gilt

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{j,k}$$

Seien zunächst $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Ist $B_{i,k} = 1$ und $B_{j,k} = 1$, so ist $v_i, v_j \in K_k$, und somit (da K_k ein vollständiger Graph ist) $v_i v_j \in E(G)$. Es können aber für höchstens ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ $B_{i,k}$ und $B_{j,k}$ gleichzeitig 1 seien, da nach 2.3 die Graphen aus $\mathcal{K}$ kantendisjunkt sind. Also ist $M_{i,j} = 1$ genau dann, wenn $v_i v_j \in E(G)$, genau dann wenn $A_{i,j} = 1$. Somit ist $M_{i,j} = A_{i,j}$

Sei nun $i \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Wir betrachten $M_{i,i}$. Es gilt

$$M_{i,i} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{i,k} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k}$$

$B_{i,k} = 1$ genau dann, wenn $v_i \in K_k$. Folglich ist $M_{i,i} = d_G(v_i : \mathcal{K}) = d_i$. Damit gilt $M = A + D$. M ist nach 1.1 positiv semidefinit. Folglich ist $A - (-D)$ positiv semidefinit, und es folgt mit 1.3, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = - - d_{n-i+1}$$

(b) Sei $m < n$. Dann ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq m$. Also ist $\lambda_{m+1}(M) = 0$ und es folgt mit 1.5 dass

$$\lambda_{m+1}(A) + d \leq \lambda_{m+1}(A) + d_n \leq 0$$

Durch Umstellen erhalten wir die gewünschte Ungleichung.

■

Korollar 2.7 *Sei H ein induzierter Untergraph von G mit $p = |H| \leq |G| = n$. Ist $\lambda_p(H) > -d$ für ein $q \leq p$ und $-2 \leq d \in \mathbb{N}$, so ist $\kappa_d(G) \geq q$.* $\delta(H) \geq 2$?

Beweis: Angenommen $\kappa_d(G) < q$. Sei dann $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G die zu d passt. Dann ist nach 1.4 $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H) > -d$. Da $i < q \leq n$ gilt nach 2.6 $\lambda_{i+1} \leq -d$ und somit $\lambda_q(G) \leq \lambda_{i+1} \leq -d$. Widerspruch. ■

Es sei G ein Graph. Der **Kantengraph** $L(G)$ (engl. line graph) von G ist definiert als der Graph mit Eckenmenge $E(G)$ und Kantenmenge $\{ee'|e \text{ und } e' \text{ besitzen eine gemeinsame Endecke}\}$.

Korollar 2.8 *Sei $\delta(G) \geq 2$ und H ein induzierter Untergraph von G, welcher Kantengraph eines Waldes ist. Dann ist $\kappa_2(H) \geq |H|$*

Beweis: Da H Kantengraph eines Waldes ist, folgt $\lambda_{min}(H) > -2$ (vgl. [4, 3.4.10]) Nach 2.7 ist für $q = |H| : \lambda_q(H) = \lambda_{\min} > -2$. Dann ist mit 2.7 $\kappa_2(H) > |H|$. ■

Korollar 2.9 (Klotz) $\kappa_2(K_n) \geq n$

Beweis: K_n ist der Kantengraph von $K_{1,n}$. Nun folgt die Behauptung aus 2.8. ■

Korollar 2.10 *Ist $\delta(G) \geq 2$, so gilt $\omega(G) \leq \kappa_2(G)$ und $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$.*

Beweis: Sei $p = \omega(G)$. Dann gilt nach $\lambda_p(G) \geq -1 \geq -2$. Damit sind für $d = 2$ die Voraussetzungen von 2.7 erfüllt, und es gilt folglich $\kappa_2(G) \geq p = \omega(G)$ Für $q = \alpha(G))$ gilt wieder nach $\lambda_q(G) \geq 0 \geq -2$. Damit folgt analog $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$. ■

Vermutung 2.11 **(C_d)** *Ist $\chi(G) \geq k$, so ist $\lambda_k(G) > -d$.*

Cd richtig anzeigen

Satz 2.12 *Gelte 2.11. Dann gilt :*

(i) *Ist $\delta(G) \geq 2$ so ist $\chi(G) \leq \kappa_d(G)$*

(ii) *Ist H ein linearer Hypergraph mit $|e| \geq d$, so ist $\chi'(H) \leq |H|$*

Beweis: Sei $\chi(G) = k$. Dann ist nach 2.11 $\lambda_k(G) > -2$. Mit 2.7 folgt$\kappa_d(G) \geq k = \chi(G)$.

■

2.4 Schranken für $\kappa_d(G)$

Wir wollen nun einige Schranken für $\kappa_d(G)$ angeben.

Lemma 2.13 *Ist $\delta(G) \geq d$, so ist $\kappa_d(G) \leq |E(G)|$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von 2.4. ■

Satz 2.14

$$\kappa_d(G) \geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d}$$

Beweis: Ist $\kappa_d(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen.

Fall 1 : $\kappa_d(G) \geq n$ Da $\lambda_1(G) \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1(G) + d &\geq d \\ 1 &\geq \frac{d}{\lambda_1(G) + d} \\ \kappa_d(G) \geq n &\geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d} \end{aligned}$$

Fall 2 : $\kappa_d(G) < n$ Wir verwenden die selbe Bezeichnung wie in 2.6. Dann ist $M = A + D$ mit $\operatorname{rang}(M) = m \leq \kappa_d(G) < n$ und folglich $\lambda_{m+1}(M) = \cdots = \lambda_n(M) = 0$.

Mit 1.6 folgt dann :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(M) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(M) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(D) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(n-m)\lambda_n(D) \leq \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(D) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(A) \leq m\lambda_1(A)$$

Durch Umstellen erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

Literatur

[1] J.N. Franklin. Matrix theory. Prentice-Hall Series in Applied Mathematics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. XII, 292 p. (1968)., 1968.

[2] László Lovász. Eigenvalues of graphs. `"http://www.cs.elte.hu/~lovasz/eigenvals-x.pdf"`, 2007.

[3] Mohammad Sal Moslehian. Ky fan inequalities, 2011.

[4] Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson, and Slobodan Simić. *An introduction to the theory of graph spectra.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

Stefan Heyder