TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra

Bachelorarbeit

Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder

Matrikelnummer : 49070

Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten, der chromatischen Zahl und den Krauszzerlegungen eines Graphen. Die dafür benötigten Grundlagen werden wir in Kapitel 1 erarbeiten.

1.1 Graphentheoretische Grundlagen

Die in dieser Arbeit betrachteten Graphen und Hypergraphen sind endlich und haben weder Mehrfachkanten noch Schlingen. Bei den Bezeichnungen richten wir uns im Wesentlichen nach dem Buch von Diestel beziehungsweise dem Buch von Berge. Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir Referenzen die Menge der positiven ganzen Zahlen und setzen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für eine Menge V sei die Menge 2^V die Potenzmenge von V und $[V]^p$ mit $p \in \mathbb{N}_0$ die Menge der p-elementigen Teilmengen von V.

Ein Hypergraph H ist ein Tupel von zwei Menge, $V(H)$ und $E(H)$. Dabei ist $V(H)$ endlich und $E(H)$ eine Teilmenge von $2^{V(H)}$ mit $|e| \geq 2$ für alle $e \in E(H)$. Die Menge $V(H)$ heißt dann **Eckenmenge** von H und ihre Elemente heißen **Ecken** von H. Die Menge $E(H)$ heißt **Kantenmenge** und ihre Elemente heißen **Kanten**. Ein Hypergraph heißt **linear**, falls zwei verschieden Kanten höchstens eine Ecke gemeinsam haben.

Sei H ein Hypergraph. Die **Ordnung** von H ist die Anzahl der Ecken von H, geschrieben $|H|$. Eine Kante e heißt **Hyperkante**, falls $|e| \geq 3$ und sonst **gewöhnliche Kante**. Für eine gewöhnliche Kante $e = \{u, v\}$ schreiben wir auch kurz $e = uv$ oder $e = vu$. Ist $E(H) \subseteq [V]^p$, so nennen wir H p-**uniform**. Ein **Graph** ist ein 2-uniformer Hypergraph, also ein Hypergraph in dem jede Kante gewöhnlich ist. Eine Ecke v ist **inzident** mit einer Kante e, falls $v \in e$ gilt. Für eine Ecke v von H sei $E_H(v) = \{e \in E(H) | v \in e\}$. Der **Grad** einer Ecke v ist $d_H(v) = |E_H(v)|$. Der **Minimalgrad** (**Maximalgrad**) sei definiert als der kleinste (größte) Grad einer Ecke von H und wird mit $\delta(H)$ ($\Delta(H)$) bezeichnet. Ist $\delta(H) = \Delta(H) = r$, so heißt H r-regulär.

Ein **Unterhypergraph** von H ist ein Hypergraph H' mit $V(H') \subseteq V(H)$ und $E(H') \subseteq E(H)$. Gibt es eine Menge $X \subseteq V(H)$ mit $V(H') = X$ und $E(H') = \{e \in E(H) | e \subset X\}$, so ist H' ein **induzierter Hypergraph** und wir schreiben $H' = H[X]$.

Eine Menge von Ecken $X \subseteq V(H)$ heißt **unabhängige Menge** von H, falls $E(H[X]) = \emptyset$ gilt, beziehungsweise **Clique**, falls $H[X]$ alle gewöhnlichen Kanten von $[X]^2$ enthält. Die **Unabhängigkeitszahl** $\alpha(H)$ ist die Ordnung der größten unabhänigegen Menge von H.

Die **Cliquenzahl** $\omega(H)$ ist die Ordnung der größten Clique von H.

Ein Graph G heißt **vollständiger Graph**, falls $E(G) = [V(G)]^2$ gilt. Ist G ein vollständiger Graph der Ordnung n, so schreiben wir auch $G = K_n$. Man beachte hierbei, dass alle vollständigen Graphen der Ordnung n isomorph sind. In diesem Sinne bezeichnen wir mit C_n den **Kreis** der Ordnung n, mit P_n den **Weg** der Ordnung n und mit O_n den **kantenlosen Graphen** der Ordnung n (d.h. das Komplement von K_n).

Damit ist $\omega(H)$ die größte Zahl, sodass H einen vollständigen Graphen der Ordnung n als Untergraphen enthält und $\alpha(H)$ die größte Zahl n, sodass H den kantenlosen Graphen der Ordnung n als induzierten Untergraphen enthält.

Der **Kantengraph** $L(H)$ eines Hyergraphen H ist der Graph mit der Eckenmenge $V(L(H)) = E(H)$ und Kantenmenge

$$E(L(H) = \left\{ee' \middle| \left\{e, e'\right\} \in [E(H)]^2, e \cap e' \neq \emptyset\right\}$$

Für eine Kante e von H sei $d_H(e) = d_{L(H)}(e)$ der **Kantengrad** von e in H. Dieser ist also die Zahl der von e verschiedenen Kanten e' von H, welche mit e nichtleeren Schnitt haben.

Eine **Färbung** von G ist eine Abbildung $f : V(G) \to C$ mit $f(v) \neq f(w)$ für alle $vw \in E(G)$, wobei C eine beliebige Menge, die **Farbmenge**, ist. Ist $|C| = k$ so heißt f **k-Kantenfärbung**. Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ bezeichne die kleinste postivie Zahl k, für welche eine k-Färbung von G existiert. Ist H ein Hypergraph so heißt eine Abbildung $g : E(H) \to C$ (wieder heißt C die **Farbmenge**) eine **Kantenfärbung** von H falls $g(e) \neq g(e')$ für alle unterschiedlichen Kanten e, e' von H mit $e \cap e' \neq \emptyset$. Diese ist eine **k-Färbung**, falls $|C| = k$. Der **chromatische Index** $\chi'(H)$ bezeichne die kleinste positive Zahl k, derart, dass H eine echte k-Färbung besitzt.

Färbung neu-schrei-ben

Man beachte, dass eine Kantenfärbung eines Hypergraphen in direktem Zusammenhang zu einer Eckenfärbung seines Kantengraphen steht. Ist nämlich H ein Hypergraph und $G = L(H)$ sein Kantengraph, so gibt es offenbar eine bijektive Abbildung $\pi : E(H) \to V(G)$, welche jeder Kante von H die korrespondierende Ecke in G zuordnet. Ist f nun eine Färbung der Kanten von H, so ist $f \circ \pi^{-1}$ eine Färbung der Ecken von G und ist g eine Färbung der Ecken von G, so ist $g \circ \pi$ eine Färbung der Kanten von G.

1.2 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann hat A nur reelle Eigenwerte und folglich können diese monoton fallend angeordnet werden. Für eine symmetrische Matrix A sei also

$\lambda_k(A)$ der k-größte **Eigenwert** (gezählt mit Vielfachheiten). Eine symmetrische Matrix A heißt **positiv semidefinit** falls $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Gilt außerdem $x^T Ax > 0$ für $x \neq 0$, so heißt A **positiv definit**. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

Satz 1.1 *Folgende Aussagen sind für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent*

(a) *A ist positiv semidefinit .*

(b) *Alle Eigenwerte von A sind nicht negativ.*

(c) *$A = UU^T$ für eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times m}$.*

Der folgende Satz hilft uns bei der Berechnung der Eigenwerte einer symmetrischen Matrix. Ein Beweis findet sich unter anderem in [3, Theorem 13.5].

Satz 1.2 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Seien die (reellen) Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$. Dann gilt für alle $p \in \{1, \ldots, n\}$:*

(a) $\lambda_p(A) = \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension p*$\}$.

(b) $\lambda_p(A) = \min\{\max_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist linearer Unterraum der Dimension $n-p+1$*$\}$.

Lemma 1.3 *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $A - B$ positiv semidefinit. Dann ist $\lambda_p(A) \geq \lambda_p(B)$ für alle $1 \leq p \leq n$.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt $x^T(A-B)x \geq 0$, da $A-B$ positiv semidefinit ist. Daraus folgt

$$x^T Ax \geq x^T Bx$$

und folglich ist $\frac{x^T Ax}{x^T x} \geq \frac{x^T Bx}{x^T x}$ und es folgt mit Satz 1.2(a) :

$$\begin{aligned}
\lambda_p(A) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&\geq \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Bx}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \lambda_p(B)
\end{aligned}$$

für $1 \leq p \leq n$. Damit ist alles gezeigt. ∎

Satz 1.4 (Interlacing) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit und $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ eine symmetrische Matrix, welche aus A durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht. Dann gilt :*

$$\lambda_p(A) \geq \lambda_p(B) \geq \lambda_{p+k}(A)$$

für $p = 1, \dots n-k$.

Beweis: Seien $l_1 < \dots < l_{n-k}$ die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nicht gelöscht werden. Setze $P := (e_{l_1}, e_{l_2}, \dots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$, wobei e_k der k-te Einheitsvektors des $\mathbb{R}^n$ ist. Dann besitzt P vollen Spaltenrang und es gilt $B = P^T AP$. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)}$ ein linearer Unterraum , $x \in V$ beliebig und $y = Px$. Dann ist $y \in \operatorname{im} P_{|V} = \{z \in \mathbb{R}^n | z = Px, x \in V\}$ und es gilt $y^T y = x^T P^T P x = x^T x$, da $P^T P = I_{n_k}$ ist. Außerdem ist $\operatorname{im} P_{|V}$ ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim(\operatorname{im} P_{|V}) = \dim(V)$, da P vollen Spaltenrang besitzt. Mit Satz 1.2(a) folgt für $1 \leq p \leq n-k$:

$$\begin{aligned}
\lambda_p(B) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Bx}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T P^T APx}{x^T x} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \max\{\min_{y\in \operatorname{im} P_{|V}, y\neq 0} \frac{y^T Ay}{y^T y} | V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&\leq \max\{\min_{x\in W, x\neq 0} \frac{y^T Ay}{y^T y} | W \subseteq \mathbb{R}^{n} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \lambda_p(A)
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die zweite folgt analog bei Betrachtung von $-A$ und $-B$, da $\lambda_p(-A) = -\lambda_{n-p+1}(A)$. ■

Die folgenden Ungleichungen werden später bei der Betrachtung der Eigenwerte von Graphen hilfreich seien. Ein Beweis für die Weyl Ungleichungen findet sich in [1, 6.7].

Satz 1.5 (Weyl Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Dann gilt für alle $1 \leq p \leq n$*

$$\lambda_p(B) + \lambda_n(C) \leq \lambda_p(A) \leq \lambda_p(B) + \lambda_1(C)$$

Ein Beweis für die folgenden Ungleichungen findet sich in [4, 3.].

Satz 1.6 (Ky Fan Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Dann gilt für alle $k \leq n$*

$$\sum_{p=1}^{k} \lambda_p(A) \leq \sum_{p=1}^{k} \lambda_p(B) + \sum_{p=1}^{k} \lambda_p(C)$$

Für $k = n$ gilt Gleichheit.

1.3 Eigenwerte von Graphen

Sei G ein Graph mit Eckenmenge $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Die **Adjanzenzmatrix** von G ist definiert als $A(G) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A(G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist A symmetrisch, und hat folglich nur reelle Eigenwerte. Damit es Sinn ergibt, von den Eigenwerten eines Graphen zu sprechen, dürfen die Eigenwerte von $A(G)$ nicht von der Nummerierung der Ecken abhängen. Das dem so ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 1.7 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann sind die Eigenwerte von $A(G)$ unabhängig von der Nummerierung der Ecken von G.*

Beweis: Seien $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ zwei Nummerierungen der Ecken. Sei weiterhin $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases} B_{i,j} = \begin{cases} 1 & u_i u_j \in E(G) \\ 0 & u_i u_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S^n$ sodass $v_{\sigma(i)} = u_i$. Folglich gilt $A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{i,j}$. Sei $P \in GL_n(\mathbb{R})$ die Matrix

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $P = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$. Nun betrachten wir $P^T AP$.

$$(P^T AP)_{i,j} = e_j^T P^T APe_i = e_{\sigma(j)}^T Ae_{\sigma(i)} = A_{\sigma(i),\sigma(j)} = B_{i,j}$$

Also ist $P^T AP = B$. Somit sind A und B ähnlich und besitzen folglich die selben Eigenwerte. ∎

Für einen Graphen G seien die **Eigenwerte** von G definiert als $\lambda_p(G) = \lambda_p(A(G))$ für alle $1 \leq p \leq |G|$.

Bemerkung 1.8 *Sei G ein Graph der Ordnung n.*

(a) *Die Summe aller Eigenwerte von G (mit Vielfachheiten) ist* 0.

(b) *Die Summe der Quadrate aller Eigenwerte von G (mit Vielfachheiten) ist* $2|E(G)|$.

Beweis: Sei G ein Graph der Ordnung n. Wir zeigen zunächst (i). Für die Adjazenzmatrix $A = A(G)$ gilt $\operatorname{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = \operatorname{spur}(A) = 0$.

Um (ii) zu beweisen, betrachten wir $B = A^2$. Die Einträge $B_{i,j}$ geben die Anzahl aller Kantenfolgen der Länge 2 zwischen den Ecken v_i und v_j an. Insbesondere gilt $B_{i,i} = d_G(v_i)$. Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G)^2 = \operatorname{spur}(B) = \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2|E(G)|$$

■

Wir wollen nun einige elementare Graphen und ihre Eigenwerte betrachten. Wir betrachten K_n, den vollständigen Graphen der Ordnung n. Dann ist $A(K_n) = J - I$, wobei $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix ist, bei der jeder Eintrag 1 ist, und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Somit ist -1 ein Eigenwert mit Vielfachheit $n-1$(da J Rang 1 hat). Aus der vorherigen Bemerkung folgt nun, dass $n-1$ ein Eigenwert mit Vielfachheit 1 ist.

Der Kreis C_n hat die Eigenwerte $2\cos(\frac{2\pi p}{n})$ für $p \in \{1, \dots, n\}$ (siehe z.B. [5, 1.1.4]).

Lemma 1.9 *Seien H ein induzierter Untergraph von G und $k = |G| - |H|$. Dann gilt*

$$\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H) \geq \lambda_{p+k}(G)$$

Für $1 \leq p \leq n-k$.

Beweis: Ist H ein induzierter Untergraph von G, so entsteht $A(H)$ aus $A(G)$ durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.4. ■

Korollar 1.10 *Sei G ein Graph mit $\omega(G) = p$ und $\alpha(G) = q$. Dann gilt :*

$$\lambda_p(G) \geq -1 \text{ und } \lambda_q(G) \geq 0.$$

Beweis: Ist $\omega(G) = p$, so besitzt G einen vollständigen induzierten Untergraphen H, der Ordnung p. Nach dem obigen Beispiel besitzt dieser die Eigenwerte $\lambda_1(H) = p - 1$ und $\lambda_p(H) = -1$ für $2 \leq p \leq p$. Damit folgt aus Korollar 1.10, dass $\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H) \geq -1$ ist . Ist $\alpha(G) = q$, so besitzt G einen kantenlosen induzierten Untergraphen H' der Ordnung q. Nach dem obigen Beispiel besitzt H' nur den Eigenwert $\lambda_p(H') = 0$ für $1 \leq p \leq q$. Also folgt aus Korollar 1.10, dass $\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H') = 0$. ∎

2 Krauszzerlegungen und die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

2.1 Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

Der Hauptteil dieser Bachelorarbeit befasst sich mit einer neuen Herangehensweise an die Erdős–Faber–Lovász Vermutung. Es bezeichne $\mathcal{EG}(n)$ die Klasse aller Graphen welche die Vereinigung von n kantendisjunkten vollständigen Graphen der Ordnung n sind.

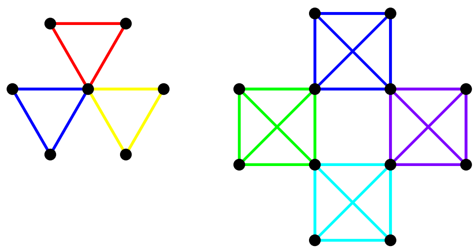

Abbildung 1: Zwei Graphen aus $\mathcal{EG}(3)$ und $\mathcal{EG}(4)$

Für $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt also $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, wobei $G_i \cong K_n$ und $|G_i \cap G_j| \leq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ (in Abbildung 1 sind die Kanten der vollständigen Graphen mit der selben Farbe markiert).

Vermutung 2.1 (Erdős–Faber–Lovász(1972)) *Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann ist $\chi(G) = n$.*

Über diese Vermutung ist viel bekannt, ein vollständiger Beweis fehlt jedoch bis jetzt. Wir wollen nun einige bekannte Resultate beziehungsweise äquivalente Formulierungen dieser Vermutung angeben. Im Anschluss werden wir eine Vermutung über den k-ten Eigenwert k-chromatischer Graphen aufstellen, welche (sollte sie sich als wahr herausstellen) Vermutung 2.1 impliziert.

Bemerkung 2.2 *Vermutung 2.1 gilt für $n \leq 10$.*

Quelle

2.2 Krauszzerlegungen von Graphen

Die Graphen aus $\mathcal{EG}(n)$ lassen sich alle durch n vollständige Graphen der Ordnung n kantendisjunkt überdecken. Im Folgenden wollen wir ein allgemeineres Konzept betrachten, indem wir nicht fordern, dass alle Graphen der Überdeckung die selbe Ordnung haben. Diese Art der Überdeckung wurde zuerst von Krausz zur Charakterisierung von Kantengraphen verwendet, daher der Name Krauszzerlegung.

ausführlicher

Definition 2.3 *Sei G ein Graph. Eine Menge $\mathcal{K}$ von Untergraphen von G heißt* **Krauszzerlegung** *von G, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(Ka) *Alle Graphen $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen mit $|K| \geq 2$.*

(Kb) *Sind K, K' zwei verschiedene Graphen aus $\mathcal{K}$, so sind sie kantendisjunkt (d.h. $|K \cap K'| \leq 1$)*

(Kc) *$\mathcal{K}$ ist eine Überdeckung von G, d.h. $G = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$*

Desweiteren sei für $v \in V(G)$ der **Grad** *von v bezüglich $\mathcal{K}$ definiert als*

$$d_G(v : \mathcal{K}) = |\{K \in \mathcal{K} | v \in V(K)\}|$$

und der **Minimalgrad** *von G bezüglich $\mathcal{K}$ als*

$$\delta_G(\mathcal{K}) = \min_{v \in V(G)} d_G(v : \mathcal{K})$$

Für $d \geq 1$ sei $\kappa_d(G)$ die kleinste positive Zahl m derart, dass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ mit $|\mathcal{K}| = m$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ besitzt. Existiert keine solche Zahl m, so setzen wir $\kappa_d(G) = \infty$.

Bilder, Beispiele

Lemma 2.4 *Seien G ein Graph und $d \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $\kappa_d(G) < \infty$, wenn $\delta(G) \geq d$ ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\delta(G) \geq d$ ist, falls $p = \kappa_d(G) < \infty$. Sei $v \in V(G)$ mit $d_G(v) = \delta(G)$. Dann existiert eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \left\{K^1, \ldots, K^p\right\}$ von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Da alle Graphen der Krauszzerlegung kantendisjunkt sind, gilt

$$d \leq \sum_{K \in \mathcal{K}, v \in K} d_K(v) \leq d_G(v) = \delta(v).$$

Dabei gilt die erste Ungleichung, da v in mindestens d der Graphen aus $\mathcal{K}$ vorkommt.

Sei nun $\delta(G) \geq d$. Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ gibt, mit $d_G(v : \mathcal{K}) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Sei $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Nummerierung der Kanten. Sei dann K^i der Graph, welcher nur aus der Kante e_i und den zu e_i inzidenten Kanten besteht. Wir zeigen: $\mathcal{K} = \{K^i | 1 \leq i \leq m\}$ ist eine Krauszzerlegung von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. (Ka) ist trivialerweise erfüllt, da alle Graphen von $\mathcal{K}$ isomporph zu K_2 sind. Sind K, K' zwei verschiedene Graphen aus $\mathcal{K}$, so sind sie kantendisjunkt, da ihre einzigen Kanten in G verschieden sind. Also ist auch (Kb) erfüllt. Da jede Kante von G in einem $K \in \mathcal{K}$ vorkommt, ist auch (Kc) erfüllt. Sei nun v eine Ecke von G. Dann ist

$$d_G(v : \mathcal{K}) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$$

und folglich auch $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G ist mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Also ist $\kappa_d(G) \leq |K| < \infty$. ■

Beispiel 2.5 *Sei G ein dreiecksfreier Graph mit Minimalgrad mindestens d. Dann ist $\kappa_d(G) = |E(G)|$, da G keine Dreiecke enthält und somit jeder Graph einer Krauszzerlegung von G isomorph zu K_2 sein muss.*

Satz 2.6 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $G \in \mathcal{EG}(p)$ gilt $\chi(G) = p$.*

(b) *Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.*

(c) *Für alle linearen Hypergraphen H gilt $\chi'(H) \leq |H|$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass (b) aus (a) folgt. Sei G ein Graph der Ordnung n. Ist $\kappa_2(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist $\kappa_2(G) = p$. Dann existiert eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \{K^1, \dots K^p\}$ von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Ist $p \geq n$, so gilt:

$$\chi(G) \leq n \leq p = \kappa_2(G).$$

Ist andererseits $p < n$, so ist $|K^i| \leq \omega(G) \leq \kappa_2(G) = p$ für alle $1 \leq i \leq p$ (die letzte Ungleichung wird später in 2.11 gezeigt). Damit können wir für $1 \leq i \leq p$ jeden K^i durch Hinzufügen von Ecken und Kanten zu einem vollständigen Graphen vom Grad p aufblähen. Den so enstehenden Graphen nennen wir G'. Offenbar ist G ein Untergraph von G' und $G' \in \mathcal{EG}(p)$. Damit gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G') = p = \kappa_2(G)$$

Also folgt (b) aus (a).

Um zu zeigen, dass (a) aus (b) folgt, sei $G \in \mathcal{EG}(p)$ mit $p \in \mathbb{N}$. Dann ist G die kantendisjunkte Vereinigung von p vollständigen Graphen der Ordnung p, welche wir mit $K^1, \dots, K^p$ bezeichnen wollen. Nun entfernen wir wiederholt Ecken aus G, deren aktueller Grad kleiner als p ist solange, bis keine Ecken vom Grad kleiner als p existieren. Den daraus resultierenden (möglicherweise leeren) Graphen nennen wir H. Gelingt es, H mit p Farben zu färben, so können wir diese Färbung schrittweise zu einer Färbung von G erweitern, indem wir die entfernten Ecken in umgekehrter Reihenfolge färben. Dies ist mit p Farben möglich, da jede zu färbende Ecke höchstens $p-1$ bereits gefärbte Nachbarn besitzt. Somit reicht es zu zeigen, das $\chi(H) \leq p$. Ist $V(H) = \emptyset$, so gilt dies trivialerweise. Andernfalls gilt nach Konstruktion $\delta(H) \geq p$. Bleiben Ecken übrig, so nennen wir den resultierenden Graphen H. Nach Konstruktion gilt $\delta(H) \geq p$. Sei $\hat{K}^i = K^i \cap H$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $\hat{K}^i$ ein vollständiger Graph für alle i. Wähle $\mathcal{K} = \Big\{\hat{K}^i | |\hat{K}^i| \geq 2\Big(, 1 \leq i \leq n\}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von H mit $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$ ist. Die Bedingung (Ka) ist offensichtlich erfüllt. Da in G die K^i kantendisjunkt sind, sind die $\hat{K}^i$ in H ebenfalls kantendisjunkt. Folglich ist die Bedingung (Kb) ebenfalls erfüllt. Sei $v \in V(H)$. Dann ist $d_H(v) \geq p$, und somit gilt $d_G(v) \geq d_H(v) \geq p$. Die Ecke v ist in mindestens zwei vollständigen Graphen K und K' aus der Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ enthalten. Ansonsten wäre v nur in einem vollständigen Graphen $K \in \mathcal{K}$ enthalten und somit wäre $d_H(v) = d_K(v) \leq p-1$, was unmöglich ist. Folglich ist $d_H(v : \mathcal{K}) \geq 2$ für alle $v \in V(H)$. Also ist $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung mit $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$, und wegen (b) folgt dann:

$$\chi(H) \leq \kappa_2(H) \leq |\mathcal{K}| \leq p.$$

Damit ist die Äquivalenz von (a) und (b) gezeigt.

Es bleibt die Äquivalenz von (b) und (c) zu zeigen. Zunächst zeigen wir, dass (b) aus (c) folgt. Dazu betrachten wir einen beliebigen Graphen G und zeigen, dass $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$ gilt. Ist $\kappa_2(G) = \infty$, so ist (b) trivialerweise erfüllt. Andernfalls ist $\kappa_2(G) = p < \infty$ und es gibt eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \{K^1, \dots, K^p\}$ von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Für $v \in V(G)$ definiere e_v als die Menge aller $K \in \mathcal{K}$, welche v enthalten. Auf Grund der Wahl der Krauszzerlegung gilt $|e_v| = d_G(v : \mathcal{K}) \geq \delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$ für alle $v \in V(G)$. Sei H der Hypergraph mit Eckenmenge $\mathcal{K}$ und Kantenmenge $\{e_v | v \in V(G)\}$. Wir betrachten $\pi : V(G) \mapsto E(H)$ mit $\pi(v) = e_v$, diese ist offensichtlich surjektiv. Wir zeigen, dass π bijektiv ist. Wäre dem nicht so, so gäbe es zwei unterschiedliche Ecken v, w mit $e_v = e_w$. Da $|e_v| \geq 2$ ist, wäre dann die Kante vw in zwei Graphen von $\mathcal{K}$ enthalten, was der Bedingung (Kb) widerspräche. Also ist π bijektiv. Wir zeigen nun, dass H ein linear Hypergraph ist. Seien dazu e_v, e_w zwei unterschiedliche Kanten von H. Angenommen $|e_v \cap e_w| \geq 2$. Dies ist ein Widerspruch zu Eigenschaft (Kb) der Krauszzerlegung $\mathcal{K}$. Folglich ist $|e_v \cap e_w| \leq 1$, also ist H linear. Dann folgt aus der Vorraussetzung (c), dass $\chi'(H) \leq |H| = \kappa_2(G)$ ist. Somit finden wir eine Färbung $g : E(H) \mapsto \{1, \ldots, p\}$ der Kanten von H. Sei dann $f = g \circ \pi$. Wir zeigen, dass f eine Färbung der Ecken von G ist. Dazu betrachten wir eine Kante $vw \in E(G)$. Dann existiert ein $K \in \mathcal{K}$ mit $vw \in E(K)$. Also ist $e_v \cap e_w \neq \emptyset$ und folglich

$$f(v) = g(e_v) \neq g(e_w) = f(w).$$

Also ist f ein p-Färbung von G. Das heiß

$$\chi(G) \leq p = \kappa_2(G).$$

Also folgt (b) aus (c).

Dass (c) aus (b) folgt, zeigen wir durch Widerspruch. Gelte (b) und sei H ein linearer Hypergraph minimaler Ordnung welcher (c) nicht erfüllt (d.h. ist H' ein weiterer linearer Hypergraph mit $|H'| < |H|$, so ist $\chi'(H') \leq |H'|$). Ist $\delta(H) \leq 1$, so können wir aus H eine Ecke v mit $d_H(v) \leq 1$ entfernen. Für den Hypergraphen $H' = H - v$ gilt dann $\chi'(H') \leq |H'| = |H| - 1$. Da v in höchstens einer Kante von H enthalten ist, lässt sich die Färbung von H' zu einer $\chi'(H) + 1$-Färbung von H erweitern. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von H. Also ist $\delta(H) \geq 2$. Sei G der Kantengraph von H, d.h. $V(G) = E(H)$ und $E(G) = \{ee' | e \cap e' \neq \emptyset, e, e' \in E(H)\}$. Für $v \in V(H)$ seien $E_H(v) = \{e \in E(H) | v \in e\}$ und $K^v = G[E_H(v)]$. Wir zeigen, dass die Menge $\mathcal{K} = \{K^v | v \in V(H)\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$ ist. Sei also $K \in \mathcal{K}$ beliebig. Dann gibt es eine Ecke $v \in V(H)$ mit $K = K^v = G[E_H(v)]$. Seien weiterhin $e, e' \in E_H(v)$ unterschiedliche Kanten. Da H ein linearer Hypergraph ist, ist $e \cap e' = \{v\}$ und deswegen $ee' \in E(K^v)$. Also ist K^v ein vollständiger Graph. Außerdem ist

$$|K^v| = |E_H(v)| = d_H(v) \geq \delta(H) \geq 2$$

Also erfüllt $\mathcal{K}$ die Bedingung (Ka). Seien nun K^v, K^w zwei verschiedene vollständige Graphen aus $\mathcal{K}$. Wir müssen zeigen, dass diese keine Kante in G gemeinsam haben. Angenommen, es gäbe eine solche Kante $ee' \in E(G)$. Dann wäre $v, w \in e \cap e'$. Ein Widerspruch, da H ein linearer Hypergraph ist. Also erfüllt $\mathcal{K}$ (Kb). Sei $ee' \in E(G)$. Folglich ist $e \cap e' \neq \emptyset$ und es existiert eine Ecke v von H mit $e \cap e' = \{v\}$ (da H linearer Hypergraph). Damit sind $e, e' \in V(K^v)$. Da K^v ein vollständiger Graph ist, ist $ee' \in E(K^v$. Also erfüllt $\mathcal{K}$ die

Bedingung (Kc). Es bleibt zu zeigen, dass $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$ ist. Sei dazu $e \in V(G)$ beliebig. Da wir H als schlingenlos angenommen haben, existieren zwei unterschiedliche Ecken $v, w \in e$. Also ist $e \in K^v$ und $e \in K^w$. Diese beiden vollständigen Graphen sind unterschiedlich, da sonst v und w in zwei Kanten enthalten sind. Das ist aber unmöglich, da H ein linearer Genauer! Hypergraph ist. Damit ist

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_2(G) \leq |\mathcal{K}| = |H|$$

Ein Widerspruch zur Annahme $\chi'(H) > |H|$. ■

2.3 Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Satz 2.7 *Seien G ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{K} = \{K^1, \dots, K^p\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $d_G(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$. Desweiteren sei $d_i = d_G(v_i : \mathcal{K})$ für $1 \leq i \leq n$. Dabei wählen wir die Eckennummerierung so, dass $d_1 \geq \dots \geq d_n$ ist. Dann gelten folgende Aussagen :*

(a) $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ *für* $i = 1, \dots, n$.

(b) $\lambda_{p+1}(G) \leq -d$ *falls* $p < n$ *ist.*

Beweis: Zunächst zeigen wir (a). Es sei A die Adjazenzmatrix von G und $D := \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Definiere $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ als die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$, also

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i \in K^j \\ 0 & v_i \notin K^j \end{cases}$$

Nun betrachten wir $M = BB^T$. Es gilt

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{j,k}$$

Seien zunächst $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Ist $B_{i,k} = 1$ und $B_{j,k} = 1$, so ist $v_i, v_j \in K^k$, und somit (da K^k ein vollständiger Graph ist) $v_i v_j \in E(G)$. Es können aber für höchstens ein $k \in \{1, \dots, m\}$ $B_{i,k}$ und $B_{j,k}$ gleichzeitig 1 seien, da nach Definition 2.3 die Graphen aus $\mathcal{K}$ kantendisjunkt sind. Also ist $M_{i,j} = 1$ genau dann, wenn $v_i v_j \in E(G)$, genau dann wenn $A_{i,j} = 1$. Somit ist $M_{i,j} = A_{i,j}$

Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wir betrachten $M_{i,i}$. Es gilt

$$M_{i,i} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} B_{i,k} = \sum_{k=1}^{d} B_{i,k}.$$

$B_{i,k} = 1$ gilt genau dann, wenn $v_i \in K^k$. Folglich ist $M_{i,i} = d_G(v_i : \mathcal{K}) = d_i$. Damit gilt $M = A + D$. M ist nach Satz 1.1 positiv semidefinit. Folglich ist $A - (-D)$ positiv semidefinit, und es folgt mit Lemma 1.3, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -d_{n-i+1}$$

Damit ist (a) gezeigt.

Nun zeigen wir (b). Sei $p < n$. Dann ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p$. Also ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$ und es folgt mit Satz 1.5 dass

$$\lambda_{p+1}(A) + d \leq \lambda_{p+1}(A) + d_n \leq 0$$

Durch Umstellen erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

Korollar 2.8 *Sei H ein induzierter Untergraph von G und seien $q, d \in \mathbb{N}$ mit $q \leq |H|$ und $d \geq 2$. Ist $\lambda_q(H) \geq -d$, so ist $\kappa_d(G) > q$.*

Beweis: Angenommen es gilt $p = \kappa_d(G) < q$. Dann gibt es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ von G mit $|\mathcal{K}| = p$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Wegen Lemma 1.9 gilt dann $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H) > -d$. Andererseits folgt aus Satz 2.7 dass $\lambda_q(G) \leq \lambda_{p+1} \leq -d$, ein Widerspruch. ■

Korollar 2.9 *Seien $\delta(G) \geq 2$ und H ein induzierter Untergraph von G. Ist H Kantengraph eines Waldes, so gilt Dann ist $\kappa_2(G) \geq |H|$.*

Beweis: Sei $q = |H|$. Da H Kantengraph eines Waldes ist, folgt $\lambda_q(H) > -2$ (vgl. [5, 3.4.10]) Dann ist mit Korollar 2.8 $\kappa_2(G) \geq |H|$. ■

Korollar 2.10 (Klotz) $\kappa_2(K_n) \geq n$

Beweis: K_n ist der Kantengraph von $K_{1,n}$. Nun folgt die Behauptung aus Korollar 2.9. ■

Korollar 2.11 *Ist $\delta(G) \geq 2$, so gilt $\omega(G) \leq \kappa_2(G)$ und $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$.*

Beweis: Sei $p = \omega(G)$. Dann gilt nach Korollar 1.10 $\lambda_p(G) \geq -1 > -2$. Damit sind für $d = 2$ die Voraussetzungen von Korollar 2.8 erfüllt, und es gilt folglich $\kappa_2(G) \geq p = \omega(G)$. Für $q = \alpha(G)$ gilt mit Korollar 1.10 $\lambda_q(G) \geq 0 > -2$. Damit folgt $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$. ■

Satz 2.12 *Existiert ein $d \in \mathbb{N}$, sodass für alle Graphen G mit $\chi(G) = k$ gilt $\lambda_k(G) > -d$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_d(G)$.

(b) Ist H ein linearer Hypergraph mit $|e| \geq d$ für alle $e \in E(H)$, so ist $\chi'(H) \leq |H|$

Beweis: Wir zeigen zunächst (a). Sei G ein beliebiger Graph mit $\chi(G) = k$. Nach Voraussetzung des Satzes ist dann $\lambda_k(G) > -d$. Mit Korollar 2.8 folgt $\kappa_d(G) \geq k = \chi(G)$. Damit ist (a) gezeigt.

Wir zeigen nun (b) durch Widerspruch. Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es einen linearen Hypergraphen minimaler Ordnung mit $|e| \geq d$ für alle $e \in E(H)$, für welchen $\chi'(H) > H$. Fall 1: Es existiert eine Kante e von H vom Grad kleiner als fallunterscheidu d. Da $|e| \geq d$ ist und H ein linearer Hypergraph ist, gibt es eine Ecke v von H welche nur in e vorkommt. Diese entfernen wir und erhalten einen Hypergraphen H' der Ordnung $|H'| = |H| - 1$. Dieser lässt sich mit $\chi'(H') \leq |H'|$ Farben färben. Diese Färbung können wir zu einer Färbung von H mit höchstens $|H'| + 1 = |H|$ Farben erweitern. Ein Widerspruch zur Wahl von H.

Fall 2: Alle Kanten von H haben mindestens den Grad d.

Angenommen in diesem exisitiert eine Kante vom Grad kleiner als d. Entfernen wir diese, erhalten wir einen Hypergraphen H' kleinerer Mächtigkeit. Dieser erfüllt die Behauptung, da H das kleinste Gegenbeispiel ist. Also existiert eine Kantenfärbung von H' mit höchstens $|H'| < |H|$ Farben. Aus dieser gewinnen wir eine Kantenfärbung von H, indem wir alle Kanten wie in H' färben, und die entfernte Kante mit einer neuen Farbe färben. Folglich gilt also:

$$\chi'(H) \leq \chi'(H') + 1 \leq |H'| + 1 \leq |H|$$

Ein Widerspruch. Folglich haben alle Kanten in H mindestens Grad d.

Sei nun $G = L(H)$ der Kantengraph von H. Dann ist $\delta(G) \geq d$. Für eine Ecke $v \in V(H)$ sei (analog zum Beweis von Satz 2.6) $E_H(v) = \{e \in E(H) | v \in e\}$ und $K^v = G[E_H(v)]$. Wie in Satz 2.6 folgt, dass $\mathcal{K} = \{K^v | v \in V(H)\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ ist. Damit gilt

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_d(G) \leq |\mathcal{K}| = |H|$$

Wobei die erste Ungleichung wegen (a) gilt. Damit ist alles gezeigt. ■

2.4 Schranken für $\kappa_d(G)$

Wir wollen nun einige Schranken für $\kappa_d(G)$ angeben.

Lemma 2.13 *Ist $\delta(G) \geq d$, so ist $\kappa_d(G) \leq |E(G)|$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von Lemma 2.4. ∎

Satz 2.14 *Sei G ein Graph der Ordnung n und $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\kappa_d(G) \geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d}$$

Beweis: Ist $\kappa_d(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen.

Fall 1 : $\kappa_d(G) \geq n$ Da $\lambda_1(G) \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1(G) + d &\geq d \\ 1 &\geq \frac{d}{\lambda_1(G) + d} \\ \kappa_d(G) \geq n &\geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d} \end{aligned}$$

Fall 2 : $\kappa_d(G) < n$ Sei $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G mit $|\mathcal{K}| = \kappa_d(G)$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Seien $d_i = d_G(v : \mathcal{K})$. Wir können annehmen, dass die d_i fallend geordnet sind. Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Adjanzenzmatrix von $\mathcal{K}$ und $M = BB^T = A + D$, wobei $A = A(G)$ und $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Dann ist M positiv semidefinit und $\mathrm{rang}(M) \leq p = \kappa_d(G) < n$. Deswegen ist $\lambda_{p+1}(M) = \ldots \lambda_n(M) = 0$. Mit Satz 1.6 folgt dann :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(M) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(M) \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(D) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(n-p)d \leq (n-p)\lambda_n(D) \leq \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(D) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(A) \leq p\lambda_1(A)$$

Durch Umstellen nach p erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ∎

2.5 Chromatische Zahl und Eigenwerte

Es ist nicht viel über den Zusammenhang der chromatischen Zahl eines Graphen, und seinen Eigenwerte bekannt. Wir wollen hier nur kurz auf zwei Sätze verweisen, die Schranken für die chromatische Zahl eines Graphen in Abhängigkeit des größten bzw. kleinsten Eigenwerts angeben. Eine Abschätzung nach oben (ähnlich zu dem Brookschen Satz) gibt Wilf in [6] an.

Satz 2.15 *Ist G ein Graph, so gilt:*

$$\chi(G) \leq \lambda_1(G) + 1$$

Gleichheit tritt nur auf, falls G ein vollständer Graph oder ein ungerader Kreis ist.

Eine untere Schranke findet sich in [2] (man beachte hierbei, dass $\lambda_n(G)$ negativ ist):

Satz 2.16 *Ist G ein Graph mit $|G| = n$, so gilt:*

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1(G)}{\lambda_n(G)}$$

2.6 k-chromatische Graphen mit $\lambda_k > -2$

Gilt Satz 2.12 für $d = 2$, so folgt die Erdős–Faber–Lovász Vermutung auf Grund von Satz 2.6. Im Folgenden wollen wir für einige Graphenklassen folgende Vermutung überprüfen.

Vermutung 2.17 *Ist G ein Graph mit $\chi(G) = k$, dann gilt $\lambda_k(G) > -2$.*

Ein Graph G heißt k-kritisch, falls $\chi(G) = k$ und $\chi(H) < k$ für alle induzierten Untergraphen H von G.

Bemerkung 2.18 *Es reicht Vermutung 2.17 für k-kritische Graphen zu zeigen.*

Beweis: Sei G ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält G einen k-kritischen Untergraphen H. Für diesen gilt (nach Vermutung) $\lambda_k(H) > -2$. Nun folgt mit Satz referenz

$$\lambda_k(G) \geq \lambda_k(H) > -2$$

Damit gilt Vermutung 2.17 auch für G. ■

Seien v, r zwei natürliche Zahlen mit $v \geq r$. Der **Kneser Graph** $K_{v:r}$ ist der Graph mit Eckenmenge $V(K_{v:r}) = \{X \subset \{1, \dots v\} \,||X| = r\}$ und Kantenmenge

$E(K_{v:r}) = \{XY | X, Y \in V(K_{v:r}), X \cap Y = \emptyset\}$.

Es wurde gezeigt, dass $\alpha(K_{v:r}) = \binom{v-1}{r-1}$ (falls $v > 2r$) und $\chi(K_{v:r}) = v - 2r + 2$. Das, Referenz und Korollar 1.10 erlaubt uns Vermutung 2.17 für alle Kneser Graphen zu beweisen.

Satz 2.19 *Seien $k, v \in \mathbb{N}$ mit $k > v$ und sei $G = K_{v:r}$ ein Kneser-Graph mit $\chi(G) = k$. Dann gilt $\lambda_k(G) > -2$*

Beweis: Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich r.

Fall 1 : $r = 1$ Dann ist $G = K_{v:1}$ isomorph zu K_v, da alle Ecken von G einelementige Teilmengen von $\{1, \ldots, v\}$ sind, und diese alle miteinander disjunkt sind. Die Eigenwerte des K_v sind alle größer als -2.

Fall 2 : $v > 2r \geq 4$ Sei $p = \alpha(G)$. Dann ist $p = \binom{v-1}{r-1}$ und folglich $p \geq v-1$. Andererseits ist $\chi(G) = v - 2r + 2 < v - 2$. Folglich ist $p > \chi(G)$. Mit Korollar 1.10 gilt dann

$$\lambda_k(G) \geq \lambda_p(G) \geq 0 > -2$$

Fall 3 : $2r = v$ Die Ecken von G sind alle r-elementingen Teilmengen von $\{1, \ldots, v\}$. Da $v = 2r$ ist für ein $w \in V(G)$ die einzige benachbarte Ecke ihr Komplement in $\{1, \ldots, v\}$. Also sind die Komponenten von G alle isomoprh zu K_2. Dann ist $\chi(G) = 2$ und $\omega(G) = 2$. Aus Korollar 1.10 folgt dann, dass $\lambda_2(G) \geq -1 > -2$ ist.

Fall 4 : $2r > v$ Dann ist $|E(G)| = 0$, da je zwei Ecken nichtleeren Schnitt haben, und folglich ist G ein leerer Graph, welcher nur den Eigenwert $0 > -2$ besitzt. Insbesondere ist also auch $\lambda_k(G) > -2$. ∎

Satz 2.20 *Sei G ein perfekter Graph. Dann gilt für $k = \chi(G)$:*

$$\lambda_k(G) > -2$$

Beweis: Da G ein perfekter Graph ist, gilt $k = \chi(G) = \omega(G)$. Also besitzt G einen vollständigen Graphen der Ordnung k als induzierten Untergraphen. Nach 1.10 ist $\lambda_k(G) > -2$. ∎

Satz 2.21 *Vermutung 2.17 gilt für planare Graphen.*

Beweis: Sei G ein planarer Graph. Wir machen eine Fallunterscheidung nach $n = |G|$.
Fall 1 : $n \leq 6$

Fall 2 : $n \geq 7$ Wir zeigen, dass $\lambda_4(G) > -2$ gilt. Da alle planaren Graphen eine chromatische Zahl kleiner gleich 4 haben, folgt dann die Behauptung.

Nehmen wir dafür an, dass $\lambda_4(G) < -2$ gilt. Aus Bemerkung 1.8 (i) folgt dann:

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(G) = -\sum_{i=4}^{n} \lambda_i(G) \geq 2(n-3) = 2n - 6$$

Mit Bemerkung 1.8 (ii) folgt außerdem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(G)^2 &= 2m - \sum_{i=4}^{n} \lambda_i(G)^2 \\ &\leq 2(3n-6) - 4(n-3) = 2n \end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt dabei aus der Abschärtzung der Kanten für planare Graphen. Aus der Abschätzung der 2 und 1 Norm folgt nun:

$$\begin{aligned} 2n &\geq \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3|)^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(2n-6)^2 \end{aligned}$$

Lösen der entstehenden quadratischen Gleichung ergibt $n \leq 6$, ein Widerspruch. ■

Literatur

[1] J.N. Franklin. Matrix theory. Prentice-Hall Series in Applied Mathematics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. XII, 292 p. (1968)., 1968.

[2] A.J. Hoffman. On eigenvalues and colorings of graphs. In ed. B.Harris, editor, *Graph Theory and its Applications*, pages 79–91. Academic Press, 1970.

[3] Stasys Jukna. *Extremal combinatorics. With applications in computer science. 2nd ed.* Berlin: Springer, 2nd ed. edition, 2011.

[4] Mohammad Sal Moslehian. Ky fan inequalities, 2011.

[5] Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson, and Slobodan Simić. *An introduction to the theory of graph spectra.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[6] Herbert S Wilf. The eigenvalues of a graph and its chromatic number. *J. London Math. Soc*, 42(1967):330, 1967.

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

Stefan Heyder