

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften  
Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra

# Bachelorarbeit

## Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder  
Matrikelnummer : 49070  
Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Ecken- und Kantenfärbungen von Graphen und Hypergraphen . . . . .	1
1.2	Eigenwerte von symmetrischen Matrizen . . . . .	1
1.3	Eigenwerte von Graphen . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung</b>	<b>5</b>
2.1	Krauszerlegungen von Graphen . . . . .	5
2.2	Krauszerlegungen und Eigenwerte . . . . .	6
	<b>Literatur</b>	<b>8</b>

# 1 Einführung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Zusammenhang der chromatischen Zahl von Graphen und ihrem Spektrum.

gute  
Einlei-  
tung

Um die Beweise in Kapitel 2 zu führen, benötigen wir einige Sätze über Eigenwerte von symmetrischen Matrizen. Diese, und andere Grundlagen, werden wir in Kapitel 1 erarbeiten. .

Anders  
anord-  
nen

## 1.1 Ecken- und Kantenfärbungen von Graphen und Hypergraphen

Es sei  $G = (V(G), E(G))$  ein beliebiger Graph. Eine (**Ecken-)**Färbung von  $G$  zur **Farbmenge**  $C$  ist eine Abbildung  $f : V(G) \rightarrow C$  mit  $f(u) \neq f(v)$  für alle  $u, v \in V(G)$ . Ist  $|C| = k \in \mathbb{N}$ , so heißt  $f$   **$k$ -Färbung**. Die **chromatische Zahl**  $\chi(G)$  ist die kleinste Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $G$  eine  $k$ -Färbung besitzt.

Eine **Kantenfärbung** zur **Farbmenge**  $C$  ist eine Abbildung  $f : E(G) \rightarrow C$  mit  $f(e) \neq f(e')$  falls  $e, e' \in E(G)$  eine gemeinsame Endecke besitzen.

Ein Hypergraph ist ein Tupel  $H = (V(H), E(H))$ , wobei  $V(H)$  die (endliche) **Eckenmenge** von  $H$  und  $E(H) \subset \mathcal{P}(H)$  die **Kantenmenge** von  $H$  ist. Ein Hypergraph heißt **linearer Hypergraph**, falls für alle verschiedenen Kanten  $e, e' \in E(H)$  gilt :  $|e \cap e'| \leq 1$ . Eine **Kantenfärbung** von  $H$  zur Farbmenge  $C$  ist eine Abbildung  $f : V(H) \rightarrow C$  mit  $f(e) \neq f(e')$  für alle  $e, e' \in E(H)$  mit  $e \cap e' \neq \emptyset$ .

## 1.2 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix. Dann hat  $A$  nur reelle Eigenwerte und folglich können diese fallend angeordnet werden. Für eine symmetrische Matrix  $A$  sei also  $\lambda_i(A)$  der  $i$ -größte **Eigenwert** (gezählt mit Vielfachheiten). Eine symmetrische Matrix  $A$  heißt **positiv semidefinit** falls  $x^T A x \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Gilt  $x^T A x = 0$  nur für  $x = 0$  (also  $x^T A x > 0$  für  $x \neq 0$ ), so heißt  $A$  **positiv definit**. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

**Satz 1.1** Für eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sind äquivalent:

- (i)  $A$  ist positiv semidefinit .
- (ii) Alle Eigenwerte von  $A$  sind nicht negativ.
- (iii)  $A = U U^T$  für eine Matrix  $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

**Beweis:** Siehe [1, (1.3)]. ■

**Satz 1.2 (Courant-Fischer)** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch. Seien die (reellen) Eigenwerte von  $A$  gegeben durch  $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ . Dann gilt für alle  $p \in \{1, \dots, n\}$  :

1.  $\lambda_p(A) = \max\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p \}.$
2.  $\lambda_p(A) = \min\{ \max_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } n-p+1 \}.$

**Lemma 1.3** Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und  $A - B$  positiv semidefinit. Dann ist  $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$  für alle  $1 \leq i \leq n$ .

**Beweis:** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^T(A - B)x &\geq 0 \\ x^T A x &\geq x^T B x \end{aligned}$$

Folglich ist  $\frac{x^T A x}{x^T x} \geq \frac{x^T B x}{x^T x}$  und es folgt mit 1.2 :

$$\begin{aligned} \lambda_i(A) &= \max\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \} \\ &\geq \max\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T B x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \} \\ &= \lambda_i(B) \end{aligned}$$

■

**Satz 1.4 (Interlacing)** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch mit Eigenwerten  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Sei  $B \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$  eine symmetrische Matrix, welche aus  $A$  durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht, mit Eigenwerten  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_k$ . Dann gilt

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$$

für  $i = 1, \dots, n - k$ .

**Beweis:** Seien  $l_1 < \dots < l_{n-k}$  die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nach dem Löschen der Zeilen bzw. Spalten von  $A$  übrig bleiben. Setze  $P := (e_{l_1}, e_{l_2}, \dots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n \times n-k}$ .

bessere  
Formu-  
lierung

Dann ist  $B = P^T A P$ . Es folgt mit Hilfe von 1.2 :

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \max \left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T B x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \\
&= \max \left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T P^T A P x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \\
&\leq \max \left\{ \min_{y \in P V, y \neq 0} \frac{y^T A y}{y^T y} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \\
&\leq \max \left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{y^T A y}{y^T y} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } i \right\} \\
&= \lambda_i
\end{aligned}$$

■ PV anders

### 1.3 Eigenwerte von Graphen

Sei  $G$  ein Graph mit Eckenmenge  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Die **Adjanzenzmatrix** von  $G$  ist definiert als  $A := A(G)$  mit

$$A(G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist  $A$  symmetrisch, und hat folglich nur reelle Eigenwerte. Damit es Sinn macht, von den Eigenwerten eines Graphen zu sprechen, dürfen die Eigenwerte von  $A(G)$  nicht von der Nummerierung der Ecken abhängen. Das dem so ist, zeigt das folgende Lemma.

**Lemma 1.5** *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann sind die Eigenwerte von  $A(G)$  unabhängig von der Nummerierung der Ecken von  $G$ .*

**Beweis:** Seien  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\} = \{u_1, \dots, u_n\}$  zwei Nummerierungen der Ecken. Sei weiterhin  $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ,  $B = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases} \quad B_{i,j} = \begin{cases} 1 & u_i u_j \in E(G) \\ 0 & u_i u_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann gibt es eine Permutation  $\sigma \in S^n$  sodass  $v_{\sigma(i)} = u_i$ . Folglich gilt  $A_{\sigma(i), \sigma(j)} = B_{i,j}$ . Sei  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  die Matrix

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \sigma(i) = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist  $P = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ . Nun betrachten wir  $P^T AP$ .

$$(P^T AP)_{i,j} = e_j^T P^T AP e_i = e_{\sigma(j)}^T A e_{\sigma(i)} = A_{\sigma(i), \sigma(j)} = B_{i,j}$$

Also ist  $P^T AP = B$ . Somit sind  $A$  und  $B$  ähnlich und besitzen folglich die selben Eigenwerte. ■

Für einen Graphen  $G$  seien die **Eigenwerte** von  $G$  definiert als  $\lambda_i(G) = \lambda_i(A(G))$ .

**Beispiel 1.6** *Wir wollen nun einige elementaren Graphen und ihre Eigenwerte betrachten.*

**Lemma 1.7** *Sei  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$  und  $k := |V(G)| - |V(H)|$ . Dann gilt*

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(H) \geq \lambda_{i+k}(G)$$

**Beweis:** Ist  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$ , so entsteht  $A(H)$  aus  $A(G)$  durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt alles aus 1.4. ■

**Korollar 1.8** *Sei  $G$  ein Graph mit  $\omega(G) = p$  und  $\alpha(G) = q$ . Dann gilt :*

$$\lambda_p(G) \geq -1$$

$$\lambda_q(G) \geq 0$$

**Beweis:** Ist  $\omega(G) = p$ , so besitzt  $G$  einen vollständigen induzierten Untergraphen der Ordnung  $p$ ,  $H$ . Nach 1.6 besitzt  $H$  die Eigenwerte  $\lambda_1(H) = p - 1$  und  $\lambda_i(H) = -1$  für  $i \in \{2, \dots, p\}$ . Damit folgt aus 1.7,  $\lambda_p(G) \geq -1$ .

Ist  $\alpha(G) = q$ , so besitzt  $G$  einen kantenlosen, induzierten Untergraphen der Ordnung  $q$ ,  $O$ . Nach 1.6 besitzt  $O$  die Eigenwerte  $\lambda_i(O) = 0$  für  $i \in \{1, \dots, q\}$ . Damit folgt aus 1.7,  $\lambda_q(G) \geq 0$ . ■

## 2 Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

### 2.1 Krauszerlegungen von Graphen

**Definition 2.1** Sei  $G$  ein Graph. Eine Menge  $\mathcal{K}$  von Untergraphen von  $G$  heißt **Krauszerlegung** von  $G$ , falls gilt:

- (i)  $\forall K \in \mathcal{K} : K$  ist ein vollständiger Graph mit  $|K| \geq 2$
- (ii)  $\forall K, K' \in \mathcal{K}$  mit  $K \neq K'$  gilt  $|K \cap K'| \leq 1$
- (iii)  $G = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$

Desweiteren sei für  $v \in V(G)$  der **Grad** von  $v$  bezüglich  $\mathcal{K}$  definiert als

$$d_G(v : \mathcal{K}) := |\{K \in \mathcal{K} | v \in V(K)\}|$$

und der **Minimalgrad** von  $G$  bezüglich  $\mathcal{K}$  als

$$\delta_G(\mathcal{K}) := \min_{v \in V(G)} d_G(v : \mathcal{K})$$

Für  $d \geq 1$  sei  $\kappa_d(G)$  die kleinste positive Zahl  $m$  derart, dass  $G$  eine Krauszerlegung  $\mathcal{K}$  besitzt mit  $|\mathcal{K}| = m$  und  $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ .

**Lemma 2.2** Sei  $G$  ein Graph. Dann ist  $\kappa_d(G) < \infty$  genau dann, wenn  $\delta(G) \geq d$ .

**Beweis:** Seien  $\kappa_d(G) \leq \infty$  und  $v \in V(G)$  mit  $d_G(v) = \delta(G)$ . Dann existieren  $d$  kantendisjunkte vollständige Untergraphen  $H^1 \dots H^d$  von  $G$  mit  $v \in V(H^i)$  für alle  $1 \leq i \leq d$ . Da die  $H^i$  kantendisjunkt sind und  $d_H^i(v) \geq 1$ , gilt:

$$d \leq \sum_{i=1}^d d_{H^i}(v) \leq d_G(v) = \delta(G).$$

Sei nun  $\delta(G) \geq d$ . Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszerlegung  $\mathcal{K}$  gibt, mit  $d_G(v : \mathcal{K}) \geq d$ . Sei  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$  eine Nummerierung der Kanten. Setze  $H^i = G[e_i]$ . Dann ist  $\mathcal{K} = \{H^1, \dots, H^m\}$  eine Krauszerlegung von  $G$  mit  $d_G(v : \mathcal{K}) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$  für alle  $v \in V(G)$ . Also ist  $\kappa_d(G) \leq m < \infty$ . ■

## 2.2 Krauszerlegungen und Eigenwerte

**Satz 2.3** Sei  $G$  ein Graph mit  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$  eine Krauszerlegung von  $G$  mit  $d_G(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$ . Desweiteren sei  $d_i := d_G(v : K_i)$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq d$ . Dann gilt:

$$(a) \lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

$$(b) \lambda_{m+1}(G) \leq -d \text{ falls } m < n$$

**Beweis:** Es sei  $A$  die Adjazenzmatrix von  $G$  und  $D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Definiere  $B$  als die Inzidenzmatrix von  $\mathcal{K}$ , also

$$B(i, j) = \begin{cases} 1 & v_i \in K_j \\ 0 & v_i \notin K_j \end{cases}$$

$M = BB^T$  ist positiv semidefinit, und es gilt  $M = A + D$ . Folglich ist  $A - (-D)$  positiv semidefinit, und es folgt mit 1.3, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -d_{n-i+1}$$

■

**Korollar 2.4** Sei  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$  mit  $p = |H| \leq |G| = n$ . Ist  $\lambda_p(H) > -d$  für ein  $q \leq p$  und  $-2 \leq d \in \mathbb{N}$ , so ist  $\kappa_d(G) \geq q$ .

$\delta(H) \geq 2?$

**Beweis:** Angenommen  $\kappa_d(G) < q$ . Sei dann  $\mathcal{K}$  eine Krauszerlegung von  $G$  die zu  $d$  passt. Dann ist nach 1.4  $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H) > -d$ . Da  $i < q \leq n$  gilt nach 2.3  $\lambda_{i+1} \leq -d$  und somit  $\lambda_q(G) \leq \lambda_{i+1} \leq -d$ . Widerspruch. ■

**Korollar 2.5** Sei  $\delta(G) \geq 2$  und  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$ , welcher Kantengraph eines Waldes ist. Dann ist  $\kappa_2(H) \geq |H|$

**Beweis:** Nach 2.4 ist für  $q = |H|$ :  $\lambda_q(H) = \lambda_{\min} > -2$ . Dann ist mit 2.4  $\kappa_2(H) > |H|$ . ■

**Korollar 2.6 (Klotz)**  $\kappa_2(K_n) \geq n$

**Beweis:**  $K_n$  ist der Kantengraph von  $K_{1,n}$ . ■

**Korollar 2.7** Ist  $\delta(G) \geq 2$ , so gilt  $\omega(G) \leq \kappa_2(G)$  und  $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$ .

Satz  
Line-  
graphen  
Eigen-  
werte



**Beweis:** Sei  $p = \omega(G)$ . Dann gilt nach  $\lambda_p(G) \geq -1 \geq -2$ . Damit sind für  $d = 2$  die Voraussetzungen von 2.4 erfüllt, und es gilt folglich  $\kappa_2(G) \geq p = \omega(G)$ . Für  $q = \alpha(G)$  gilt wieder nach  $\lambda_q(G) \geq 0 \geq -2$ . Damit folgt analog  $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$ . ■

**Vermutung 2.8** Ist  $\chi(G) \geq k$ , so ist  $\lambda_k(G) > -d$ .

**Satz 2.9** Gelte 2.8. Dann gilt :

(i) Ist  $\delta(G) \geq 2$  so ist  $\chi(G) \leq \kappa_d(G)$

(ii) Ist  $H$  ein linearer Hypergraph mit  $|e| \geq d$ , so ist  $\chi'(H) \leq |H|$

**Beweis:** Sei  $\chi(G) = k$ . Dann ist nach 2.8  $\lambda_k(G) > -2$ . Mit 2.4 folgt  $\kappa_d(G) \geq k = \chi(G)$ . ■

## Literatur

[1]

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

---

Stefan Heyder