

# Bachelorarbeit

## Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder

Matrikelnummer : 49070

Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Graphen und Hypergraphen . . . . .	1
1.2	Färbungen von Graphen und Hypergraphen . . . . .	2
1.3	Färbungen von Kantengraphen . . . . .	6
1.4	Eigenwerte von symmetrischen Matrizen . . . . .	7
1.5	Eigenwerte von Graphen . . . . .	10
1.6	Eigenschaften des Graphenspektrums . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung</b>	<b>20</b>
2.1	Die Geschichte der Vermutung . . . . .	20
2.2	Krauszerlegungen von Graphen . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Spektraleigenschaften von Graphen</b>	<b>27</b>
3.1	Krauszerlegungen und Eigenwerte . . . . .	27
3.2	Schranken für $\kappa_d(G)$ . . . . .	34
3.3	Chromatische Zahl und Eigenwerte . . . . .	35
3.4	Hájos und Ore Summe . . . . .	35
3.5	Graphen mit $\chi \leq \xi_2$ . . . . .	37
	<b>Literatur</b>	<b>43</b>

# 1 Einführung

Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten, der chromatischen Zahl und den Krauszzerlegungen eines Graphen. Die dafür benötigten Grundlagen werden wir in Kapitel 1 erarbeiten.

## 1.1 Graphen und Hypergraphen

Die in dieser Arbeit betrachteten Graphen und Hypergraphen sind endlich und haben weder Mehrfachkanten noch Schlingen. Bei den Bezeichnungen richten wir uns im Wesentlichen nach dem Buch von Diestel [9] beziehungsweise dem Buch von Berge [2]. Mit  $\mathbb{N}$  bezeichnen wir die Menge der positiven ganzen Zahlen und setzen  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Für eine Menge  $V$  sei die Menge  $2^V$  die Potenzmenge von  $V$  und  $[V]^p$  mit  $p \in \mathbb{N}_0$  die Menge der  $p$ -elementigen Teilmengen von  $V$ .

Ein **Hypergraph**  $H$  ist ein Tupel von zwei Menge,  $V(H)$  und  $E(H)$ . Dabei ist  $V(H)$  endlich und  $E(H)$  eine Teilmenge von  $2^{V(H)}$  mit  $|e| \geq 2$  für alle  $e \in E(H)$ . Die Menge  $V(H)$  heißt dann **Eckenmenge** von  $H$  und ihre Elemente heißen **Ecken** von  $H$ . Die Menge  $E(H)$  heißt **Kantenmenge** und ihre Elemente heißen **Kanten**. Ein Hypergraph heißt **linear**, falls zwei verschiedene Kanten höchstens eine Ecke gemeinsam haben. Ist  $V(H) = \emptyset$ , so nennen wir  $H$  auch den **leeren Graphen** und schreiben kurz  $H = \emptyset$ .

Sei  $H$  ein Hypergraph. Die **Ordnung** von  $H$  ist die Anzahl der Ecken von  $H$ , geschrieben  $|H|$ . Eine Kante  $e$  heißt **Hyperkante**, falls  $|e| \geq 3$  ist und heißt **gewöhnliche Kante**, falls  $|e| = 2$  ist. Für eine gewöhnliche Kante  $e = \{u, v\}$  schreiben wir auch kurz  $e = uv$  oder  $e = vu$ . Ist  $E(H) \subseteq [V]^p$ , so nennen wir  $H$   **$p$ -uniform**. Ein **Graph** ist ein 2-uniformer Hypergraph, also ein Hypergraph in dem jede Kante gewöhnlich ist. Eine Ecke  $v$  ist **inzident** mit einer Kante  $e$ , falls  $v \in e$  gilt. Für eine Ecke  $v$  von  $H$  sei  $E_H(v) = \{e \in E(H) \mid v \in e\}$  die Menge aller mit  $v$  inzidenten Kanten. Der **Grad** einer Ecke  $v$  ist  $d_H(v) = |E_H(v)|$ . Der **Minimalgrad** (**Maximalgrad**) sei definiert als der kleinste (größte) Grad einer Ecke von  $H$  und wird mit  $\delta(H)$  ( $\Delta(H)$ ) bezeichnet. Für  $H = \emptyset$  setzen wir  $\delta(H) = \Delta(H) = 0$ . Ist  $\delta(H) = \Delta(H) = r$ , so heißt  $H$   $r$ -regulär.

Ein **Unterhypergraph** von  $H$  ist ein Hypergraph  $H'$  mit  $V(H') \subseteq V(H)$  und  $E(H') \subseteq E(H)$ . Wir schreiben dann  $H' \subseteq H$ . Gilt zusätzlich  $H' \neq H$ , so ist  $H'$  ein **echter Unterhypergraph**. Gibt es eine Menge  $X \subseteq V(H)$ , sodass  $V(H') = X$  und  $E(H') = E(H) \cap 2^X$  gilt, so ist  $H'$  ein **induzierter Unterhypergraph** und wir schreiben  $H' = H[X]$  oder

$H' \trianglelefteq H$ . Ist  $X \subseteq V(H)$ , so bezeichne  $H - X = H[V(H) \setminus X]$ . Ist  $X = \{v\}$ , so schreiben wir dafür auch  $H - v$  statt  $H - \{v\}$ . Ist  $F \subseteq 2^{V(H)}$  eine Menge, so sei  $H - F$  der Hypergraph mit Eckenmenge  $V(H)$  und Kantenmenge  $E(H) \setminus F$  und  $H + F$  der Hypergraph mit Eckenmenge  $V(H)$  und Kantenmenge  $E(H) \cup F$ . Ist  $F = \{e\}$  so schreiben wir  $H \pm e$  anstatt  $H \pm \{e\}$ .

Eine Menge von Ecken  $X \subseteq V(H)$  heißt **unabhängige Menge** von  $H$ , falls  $E(H[X]) = \emptyset$  gilt. Die **Unabhängigkeitszahl**  $\alpha(H)$  ist die Ordnung der größten unabhängigen Menge von  $H$ . Eine Menge von Ecken  $X \subseteq V(H)$  heißt **Clique** von  $H$ , falls  $H[X]$  alle gewöhnlichen Kanten von  $[X]^2$  enthält. Die **Cliquenzahl**  $\omega(H)$  ist die Ordnung der größten Clique von  $H$ .

Sind  $H, H'$  zwei Hypergraphen, so heißt eine bijektive Abbildung  $f : V(H) \rightarrow V(H')$  **Isomorphismus** zwischen  $H$  und  $H'$ , falls für alle Teilmengen  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  von Ecken von  $V(H)$  gilt:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \text{ ist Kante von } H \Leftrightarrow \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)\} \text{ ist Kante von } H'.$$

Zwei Hypergraphen  $H, H'$  heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus zwischen  $H$  und  $H'$  gibt.

Für einen Graphen  $G$  sei  $\overline{G}$  der **Komplementargraph** von  $G$  mit  $V(\overline{G}) = V(G)$  und  $E(\overline{G}) = [V(G)]^2 \setminus E(G)$ . Ein Graph  $G$  heißt **vollständiger Graph**, falls  $E(G) = [V(G)]^2$  gilt. Ist  $G$  ein vollständiger Graph der Ordnung  $n$ , so schreiben wir auch  $G = K_n$ . Man beachte hierbei, dass alle vollständigen Graphen der Ordnung  $n$  isomorph sind. In diesem Sinne bezeichnen wir mit  $C_n$  den **Kreis** der Ordnung  $n$  und mit  $O_n$  den **kantenlosen Graphen** der Ordnung  $n$  (d.h. das Komplement von  $K_n$ ). Ein Kreis  $C_n$  heißt **gerade** beziehungsweise **ungerade**, je nachdem ob seine Ordnung gerade beziehungsweise ungerade ist.

Für einen Hypergraphen  $H$  ist  $\omega(H)$  die größte Zahl  $n$ , sodass  $H$  einen vollständigen Graphen der Ordnung  $n$  als Untergraphen enthält und  $\alpha(H)$  ist die größte Zahl  $n$ , sodass  $H$  den kantenlosen Graphen der Ordnung  $n$  als induzierten Untergraphen enthält.

## 1.2 Färbungen von Graphen und Hypergraphen

Das **Färbungsproblem** für Graphen ist ein klassisches Problem aus der Graphentheorie mit vielfältigen Anwendungen in der kombinatorischen Optimierung und anderen Teilgebieten der Mathematik. Beim Färbungsproblem besteht die Aufgabe darin, die Ecken

eines Graphen so zu färben, dass durch eine Kante verbundene Ecken verschiedenen Farben erhalten. Dabei sollen natürlich möglichst wenige Farben verwendet werden.

Seien  $G$  ein Graph  $C$  eine Menge. Eine Abbildung  $\varphi : V(G) \rightarrow C$  heißt **Färbung** von  $G$ , falls für alle Kanten  $vw$  von  $G$  gilt:  $\varphi(v) \neq \varphi(w)$ . Ist  $|C| = k \in \mathbb{N}_0$ , so heißt  $\varphi$  auch  **$k$ -Färbung**. Besitzt ein Graph  $G$  eine  $k$ -Färbung, so heißt  $G$   **$k$ -färbbar**. Die kleinste natürliche Zahl  $k$ , für die  $G$  eine  $k$ -Färbung besitzt, bezeichnen wir mit  $\chi(G)$ , der **chromatischen Zahl** von  $G$ . Ist die chromatische Zahl von  $G$  gleich  $k$ , so wird  $G$  auch  **$k$ -chromatisch** genannt.

Die Bestimmung der chromatischen Zahl eines Graphen ist ein NP-schweres Optimierungsproblem, wie im Jahre 1972 von Karp [25] gezeigt wurde. Sei  $\varphi$  eine Färbung von  $G$  und  $H$  ein Untergraph von  $G$ . Dann ist  $\varphi|_{V(H)}$  eine Färbung von  $H$ . Folglich ist die chromatische Zahl ein monotoner Graphenparameter, d.h.

$$H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G).$$

Außerdem ist die chromatische Zahl subadditiv, d.h. sind  $X, Y$  zwei Teilmengen von  $V(G)$  mit  $X \cup Y = V(G)$ , so gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G[X]) + \chi(G[Y]).$$

Ist nämlich  $\chi(G[X]) = k$  und  $\chi(G[Y]) = \ell$ , so erhalten wir eine  $(k + \ell)$ -Färbung von  $G$ , indem wir zunächst alle Ecken aus  $X$  mit  $k$  Farben färben und dann die verbleibenden Ecken aus  $Y \setminus X$  mit höchstens  $\ell$  Farben färben.

Eine Abbildung  $\varphi : V(G) \rightarrow C$  ist genau dann eine Färbung von  $G$ , wenn für alle  $c \in C$  das Urbild  $\varphi^{-1}(c)$  eine unabhängige Menge in  $G$  ist (d.h. keine zwei Ecken von  $\varphi^{-1}(c)$  sind durch eine Kante von  $G$  verbunden). Diese Urbilder nennen wir **Farbklassen**. Offensichtlich sind die Farbklassen disjunkt und haben höchstens  $\alpha(G)$  Ecken. Daraus folgt, dass jede  $k$ -Färbung von  $G$  die Ungleichung  $|G| \leq k\alpha(G)$  erfüllt und deswegen auch  $|G| \leq \chi(G)\alpha(G)$  gilt.

Da jede Ecke eine unabhängige Menge ist, gilt  $\chi(G) \leq |G|$ . Damit gilt

$$\chi(G) \geq |G| \Leftrightarrow \chi(G) = |G| \Leftrightarrow \alpha(G) \leq 1 \Leftrightarrow G \text{ ist ein vollständiger Graph}$$

Insbesondere gilt somit für  $n \in \mathbb{N}_0$  :  $\chi(K_n) = n$ . Da  $\chi$  ein monotoner Graphenparameter ist, ist also

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

Die chromatische Zahl des Graphen  $G$  ist die kleinste Zahl  $k$ , für die sich  $V(G)$  in  $k$  viele unabhängige Mengen (die Farbklassen) zerlegen lässt. Deswegen gilt  $\chi(G) = 0$  nur, falls  $V(G) \neq \emptyset$  ist, d.h. falls  $G$  der leere Graph ist. Außerdem ist  $\chi(G) \leq 1$  genau dann, wenn  $G$  keine Kanten hat und  $\chi(G) \leq 2$  gilt genau dann, wenn  $G$  bipartit ist. Nach dem Satz von König [27] ist  $G$  genau dann bipartit, wenn  $G$  keinen Kreis ungerader Ordnung als Untergraphen besitzt.

Nach Stockmeyer [35] ist für jedes  $k \geq 3$  das Entscheidungsproblem ob ein gegebener Graph  $k$ -färbbar ist NP-vollständig. Es ist also nicht zu erwarten, dass sich Graphen mit chromatischer Zahl höchstens  $k$  für festes  $k \geq 3$  einfach charakterisieren lassen.

Bei der Untersuchung des Färbungsproblems für Graphen erweisen sich die kritischen Graphen als ein nützliches Hilfsmittel. Dies liegt vor allem daran, dass sich Färbungsprobleme für Graphen oft auf entsprechende Färbungsprobleme für kritische Graphen zurückführen lassen. Ein Graph  $G$  heißt  **$k$ -kritisch**, falls  $\chi(G) = k$  ist und  $\chi(H) < k$  für alle echten induzierten Untergraphen  $H$  von  $G$  gilt.

Entfernen wir aus einem Graphen  $G$  eine Ecke oder Kante, so bleibt die chromatische Zahl gleich oder verringert sich um den Wert 1, d.h. für  $t \in V(G) \cup E(G)$  gilt:

$$\chi(G) - 1 \leq \chi(G - t) \leq \chi(G). \quad (1.1)$$

Daraus erhalten wir den folgenden bekannten Satz, wonach die  $(k - 1)$ -färbbaren Graphen durch verbotene  $k$ -kritische Untergraphen charakterisiert werden können.

**Satz 1.1** *Sei  $G$  ein Graph und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\chi(G) \geq k$ , genau dann wenn  $G$  einen  $k$ -kritischen Graphen  $H$  als induzierten Untergraphen enthält.*

**Beweis:** Falls  $G$  einen  $k$ -kritischen Untergraphen  $H$  enthält, so ist  $\chi(G) \geq \chi(H) = k$ , da  $\chi$  ein monotoner Graphenparameter ist. Sei also  $\chi(G) \geq k$ . Da  $G$  endliche Ordnung hat, besitzt  $G$  einen induzierten Untergraphen  $G'$  kleinster Ordnung mit  $\chi(G') = k$ . Dann ist  $\chi(H) < k$  für jeden echten induzierten Untergraphen  $H$  von  $G'$ . Wegen  $\chi(G') \geq k \geq 1$  gibt es eine Ecke  $v$  in  $G'$ . Dann ist  $G' - v$  ein echter induzierter Untergraph von  $G'$  und somit ist  $\chi(G - v) < k$ . Aus (1.1) folgt dann  $\chi(G') = k$ . Folglich ist  $G'$  ein  $k$ -kritischer Graph. ■

Gegenüber  $k$ -chromatischen Graphen haben  $k$ -kritische Graphen eine eingeschränkte Struktur. Ein einfaches Beispiel dafür ist das folgende Resultat.

**Lemma 1.2** *Ist  $G$  ein  $k$ -kritischer Graph mit  $k \geq 1$ , so ist  $G$  ein zusammenhängender Graph mit  $\delta(G) \geq k - 1$ .*

**Beweis:** Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so ist jede Komponente von  $G$  ein echter induzierter Untergraph. Also besitzt jede Komponente eine  $(k-1)$ -Färbung. Dann besitzt aber auch  $G$  eine  $(k-1)$ -Färbung, d.h.  $\chi(G) \leq k-1$ . Das ist aber unmöglich, da  $G$  ein  $k$ -kritischer Graph ist. Ist  $\delta(G) \leq k-2$ , so besitzt  $G$  eine Ecke  $v$  mit  $d_G(v) \leq k-2$ . Dann ist  $G-v$  ein echter induzierter Untergraph von  $G$  und besitzt somit eine  $(k-1)$ -Färbung. Unter den Nachbarn von  $v$  kommen höchstens  $k-2$  Farben vor und somit können wir eine  $(k-1)$ -Färbung von  $G-v$  zu einer  $(k-1)$ -Färbung von  $G$  erweitern. Dann ist aber  $\chi(G) \leq k-1$ , was unmöglich ist, da  $G$  ein  $k$ -kritischer Graph ist. ■

Im Jahr 1968 beschrieben Szekeres und Wilf [36] eine einfache Methode zur Bestimmung von oberen Schranken für die chromatische Zahl. Dazu betrachten wir einen **Graphenparameter**  $\rho$ , d.h. eine Abbildung die jedem Graphen  $G$  eine reelle Zahl  $\rho(G)$  zuordnet, sodass isomorphe Graphen denselben Wert erhalten. Wir nennen  $\rho$  einen **Szekeres-Wilf-Parameter**, falls für alle Graphen  $G$  und  $H$  folgende Bedingungen erfüllt sind:

(S1) Ist  $H \trianglelefteq G$ , so gilt  $\rho(H) \leq \rho(G)$ .

(S2)  $\rho(H) \geq \delta(H) + 1$

Szekeres und Wilf [36] bewiesen dann folgendes Resultat.

**Satz 1.3 (Szekeres, Wilf)** *Ist  $\rho$  ein Szekeres-Wilf-Parameter, so ist  $\rho$  eine obere Schranke für die chromatische Zahl, d.h. für alle Graphen  $G$  ist  $\chi(G) \leq \rho(G)$ .*

**Beweis:** Ist  $G = \emptyset$ , so ist  $\chi(G) = 0$  und aus (S2) folgt  $\rho(G) \geq \delta(G) + 1 = 1$ , d.h.  $\chi(G) \leq \rho(G)$ . Sei nun  $G \neq \emptyset$  und sei  $k = \chi(G)$ . Dann ist  $k \geq 1$  und aus Satz 1.1 folgt, dass es einen  $k$ -kritischen induzierten Untergraphen  $H$  von  $G$  gibt. Wegen Lemma 1.2 ist  $\delta(H) \geq k-1$ . Mit Hilfe von (S1) und (S2) erhalten wir dann:

$$\chi(G) = \chi(H) \leq \delta(H) + 1 \leq \rho(H) \leq \rho(G).$$

Was zu zeigen war. ■

Ein einfaches Beispiel für einen Szekeres-Wilf Parameter ist  $\Delta + 1$ . Somit gilt für jeden Graphen  $G$  die Ungleichung  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Brooks [3] bestimmte im Jahr 1941 die Graphen  $G$  mit  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ , er bewies folgendes Resultat:

**Satz 1.4 (Brooks)** *Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph mit Maximalgrad  $\Delta$ . Dann gilt*

$$\chi(G) \leq \Delta + 1.$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn  $G$  ein vollständiger Graph oder ein ungerader Kreis ist.

Ein weiteres Beispiel für einen Szekeres-Wilf-Paramter ist die **Färbungszahl**  $\text{col}(G)$  eines Graphen definiert durch

$$\text{col}(G) = 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$$

Auch dieser Paramter ist somit eine obere Schranke für die chromatische Zahl. Es lässt sich auch leicht zeigen, dass für jeden Szekeres-Wilf Paramter  $\rho$  die Ungleichung  $\text{col}(G) \leq \rho(G)$  für alle Graphen  $G$  gilt.

### 1.3 Färbungen von Kantengraphen

In diesem Abschnitt betrachten wir das Färbungsproblem für die Klasse der Kantengraphen. Der **Kantengraph**  $L(H)$  eines Hyergraphen  $H$  ist der Graph mit der Eckenmenge  $V(L(H)) = E(H)$  und der Kantenmenge

$$E(L(H)) = \{ee' \mid \{e, e'\} \in [E(H)]^2, e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

Zwei verschiedenen Kanten von  $H$ , welche eine Ecke gemeinsam haben heißen **adjazent**. Für eine Kante  $e$  von  $H$  sei  $d_H(e) = d_{L(H)}(e)$  der **Kantengrad** von  $e$  in  $H$ . Dieser ist also die Zahl der Kanten von  $H$ , welche mit  $e$  adjazent sind. Dann sei  $\Delta'(H)$  der **maximale Kantengrad** von  $H$  und  $\delta'(H)$  der **minimale Kantengrad** von  $H$  und wir setzen  $\Delta'(H) = \delta'(H) = 0$ , falls  $E(H) = \emptyset$ .

Eine Färbung des Kantengraphen eines Hypergraphen  $H$  wird auch **Kantenfärbung** von  $H$  genannt. Eine Kantenfärbung ist somit eine Abbildung, die jeder Kante von  $H$  eine Farbe zuordnet, sodass adjazente Kanten verschiedene Farben erhalten. Wir bezeichnen dann mit dem **chromatischen Index**  $\chi'(H)$  die kleinste natürliche Zahl  $k$ , sodass  $L(H)$  eine  $k$ -Färbung besitzt. Also gilt  $\chi'(H) = \chi(L(H))$ . Ist  $v$  eine Ecke von  $H$ , so ist  $E_H(v)$  eine Clique von  $L(H)$  und folglich gilt  $\chi'(H) \geq \Delta(H)$ . König zeigte in [28], dass diese Schranke für bipartite Graphen scharf ist.

**Satz 1.5 (König)** *Ist  $G$  ein bipartiter Graph, so gilt  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .*

Die erste obere Schranke für beliebige Graphen wurde 1964 von Vizing [38] bestimmt.

**Satz 1.6 (Vizing)** *Sei  $G$  ein Graph mit Maximalgrad  $\Delta$ . Dann gilt  $\chi'(G) = \Delta$  oder  $\chi'(G) = \Delta + 1$ .*



## 1.4 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Bevor wir uns den Eigenwerten von Graphen zuwenden, wollen wir den Leser an einige bekannte Tatsachen über symmetrische Matrizen erinnern. Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$Ax = \lambda x \tag{1.2}$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  die (reelle) Eigenwertgleichung von  $A$ . Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist die Lösungsmenge

$$E_A(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

ein linearer Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\dim(E_A(\lambda)) \geq 0$ . Man nennt dann  $\lambda$  einen **Eigenwert** von  $A$ , falls  $\dim(E_A(\lambda)) \geq 1$  ist, die Vektoren aus  $E_A(\lambda)$  heißen **Eigenvektoren** von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  und  $E_A(\lambda)$  ist der zu  $\lambda$  gehörende **Eigenraum** von  $A$ . Die Abbildung  $p_A$  mit

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

ist ein Polynom aus  $\mathbb{R}[\lambda]$  vom Grade  $n$ , welches **charakteristisches Polynom** von  $A$  genannt wird (dabei ist  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix der Ordnung  $n$ ). Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt dann

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0.$$

Da  $A$  symmetrisch ist, zerfällt  $p_A$  in genau  $n$  reelle Linearfaktoren, d.h.  $p_A$  hat genau  $n$  Nullstellen (gezählt mit ihren Vielfachheiten). Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei  $m_A(\lambda)$  die Vielfachheit von  $\lambda$  als Nullstelle von  $p_A$ . Die Matrix  $A$  besitzt somit  $n$  reelle Eigenwerte, welche wir monoton fallend anordnen können. Im Folgenden bezeichnen wir mit  $\lambda_p(A)$  den  $p$ -größten Eigenwert von  $A$ , das heißt es gilt

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A).$$

Dann ist  $\lambda_{\max}(A) = \lambda_1(A)$  der größte Eigenwert von  $A$  und  $\lambda_{\min}(A) = \lambda_n(A)$  ist der kleinste Eigenwert von  $A$ . Die Folge

$$\text{sp}(A) = (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A))$$

der Eigenwerte bezeichnet man als das **Spektrum** von  $A$ . Diese Bezeichnung geht auf Hilbert zurück. Bekanntlich besitzen zwei symmetrische Matrizen genau dann das gleiche Spektrum, wenn sie zueinander ähnlich sind. Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  so ist  $\dim E_A(\lambda) = m_A(\lambda)$ . Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind stets orthogonal und  $\mathbb{R}^n$  ist die

direkte Summe der Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten. Insbesondere besitzt der  $\mathbb{R}^n$  eine Orthonormalbasis aus lauter Eigenvektoren von  $A$ .

Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **positiv semidefinit**, falls  $x^T A x \geq 0$  für alle Vektoren  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt. Gilt zusätzlich noch  $x^T A x = 0$  nur für  $x = 0 \in \mathbb{R}^n$  (hat also  $A$  vollen Rang), so heißt  $A$  **positiv definit**. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

**Satz 1.7** *Folgende Aussagen sind für eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  äquivalent:*

- (a)  $A$  ist positiv semidefinit.
- (b) Alle Eigenwerte von  $A$  sind nicht negativ.
- (c)  $A = U U^T$  für eine Matrix  $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist der **Rayleigh-Quotient** von  $A$  an der Stelle  $x$  als

$$R_A(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$$

definiert. Die Abbildung  $R_A$  wurde zuerst von J.W. Rayleigh zur numerischen Berechnung der Eigenwerte von  $A$  benutzt. Ist  $x$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , so gilt  $R_A(x) = \lambda$ . Für eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist

$$\lambda_{\min}(A) \leq R_A(x) \leq \lambda_{\max}(A)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Die folgende Charakterisierung wurde zuerst in einer Arbeit von Fischer [17] und danach in dem Lehrbuch von Courant und Hilbert [6] erwähnt. In der Literatur wird dieses Resultat daher als Minmax-Prinzip von Courant-Fischer (Courant-Fischer Minmax Theorem) bezeichnet.

**Satz 1.8 (Courant-Fischer)** *Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix. Für den  $p$ -größten Eigenwert von  $A$  mit  $1 \leq p \leq n$  gilt dann:*

- (a)  $\lambda_p(A) = \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} R_A(x) \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ linearer Unterraum, } \dim(V) = p \right\}.$
- (b)  $\lambda_p(A) = \min\left\{ \max_{x \in V, x \neq 0} R_A(x) \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ linearer Unterraum, } \dim(V) = n - p + 1 \right\}.$

**Lemma 1.9** *Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und  $A - B$  positiv semidefinit. Dann ist  $\lambda_p(A) \geq \lambda_p(B)$  für alle  $1 \leq p \leq n$ .*

**Beweis:** Sei  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  beliebig. Dann gilt  $x^T(A - B)x \geq 0$ , da  $A - B$  positiv semidefinit ist. Daraus folgt

$$x^T A x \geq x^T B x$$

und folglich ist  $\frac{x^T A x}{x^T x} \geq \frac{x^T B x}{x^T x}$ . Mit Satz 1.8(a) erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \lambda_p(A) &= \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p \right\} \\ &\geq \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T B x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p \right\} \\ &= \lambda_p(B) \end{aligned}$$

für  $1 \leq p \leq n$ . ■

Oftmals interessiert man sich, wie sich die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix verändern, wenn man Zeilen und die korrespondierenden Spalten der Matrix löscht. Die bei diesem Prozess entstehende Matrix ist wieder symmetrisch. Es stellt sich heraus, dass die Eigenwerte der so entstehenden Matrix sich durch die Eigenwerte der ursprünglichen beschränken lassen. Das folgende Resultat geht auf Cauchy zurück, es scheint schwierig eine Originalquelle zu finden.

**Satz 1.10 (Interlacing)** *Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und sei  $B \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$  die symmetrische Matrix, welche aus  $A$  durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht. Dann ist  $B$  symmetrisch und es gilt:*

$$\lambda_p(A) \geq \lambda_p(B) \geq \lambda_{p+k}(A)$$

für  $1 \leq p \leq n - k$ .

**Beweis:** Seien  $l_1 < \dots < l_{n-k}$  die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nicht gelöscht werden. Setze  $P = (e_{l_1}, e_{l_2}, \dots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$ , wobei  $e_k$  der  $k$ -te Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^n$  ist. Dann besitzt  $P$  vollen Spaltenrang und es gilt  $B = P^T A P$ . Seien  $V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)}$  ein linearer Unterraum,  $x \in V$  beliebig und  $y = Px$ . Dann ist  $y$  ein Vektor aus dem Bild von  $V$  unter  $P$ , im  $P|_V = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = Px, x \in V\}$  und es gilt  $y^T y = x^T P^T P x = x^T x$ , da  $P^T P = I_{n-k}$  ist. Außerdem ist  $\text{im } P|_V$  ein linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  mit  $\dim(\text{im } P|_V) =$

$\dim(V)$ , da  $P$  vollen Spaltenrang besitzt. Mit Satz 1.8(a) folgt für  $1 \leq p \leq n - k$  :

$$\begin{aligned}
\lambda_p(B) &= \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T B x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p \right\} \\
&= \max\left\{ \min_{x \in V, x \neq 0} \frac{x^T P^T A P x}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p \right\} \\
&= \max\left\{ \min_{y \in \text{im } P|_V, y \neq 0} \frac{y^T A y}{y^T y} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p \right\} \\
&\leq \max\left\{ \min_{x \in W, x \neq 0} \frac{y^T A y}{y^T y} \mid W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p \right\} \\
&= \lambda_p(A)
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die zweite folgt analog bei Betrachtung von  $-A$  und  $-B$ , da  $\lambda_p(-A) = -\lambda_{n-p+1}(A)$  für alle  $1 \leq p \leq n$  ist. ■

Die folgenden Ungleichungen werden später bei der Betrachtung der Eigenwerte von Graphen hilfreich sein. Die Weyl Ungleichungen wurden von [39] bewiesen.

**Satz 1.11 (Weyl Ungleichungen)** *Seien  $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrische Matrizen mit  $A = B + C$ . Für alle  $1 \leq p \leq n$  gilt dann:*

$$\lambda_p(B) + \lambda_n(C) \leq \lambda_p(A) \leq \lambda_p(B) + \lambda_1(C)$$

Die folgenden Ungleichungen wurden von Fan [15] bewiesen.

**Satz 1.12 (Ky Fan Ungleichungen)** *Seien  $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrische Matrizen mit  $A = B + C$ . Für alle  $1 \leq p \leq n$  gilt dann:*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i(A) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i(B) + \sum_{i=1}^p \lambda_i(C)$$

Für  $k = n$  gilt Gleichheit.

## 1.5 Eigenwerte von Graphen

Sei  $G$  ein Graph der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eckenmenge  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Die **Adjazenzmatrix** von  $G$  ist die Matrix  $A(G) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{falls } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist  $A$  symmetrisch und hat folglich nur reelle Eigenwerte. Damit es Sinn ergibt, von den Eigenwerten eines Graphen zu sprechen, dürfen die Eigenwerte von  $A(G)$  nicht von der Nummerierung der Ecken abhängen. Das dem so ist, zeigt das folgende Lemma.

**Lemma 1.13** *Sei  $G$  ein Graph. Dann ist das charakteristische Polynom von  $A(G)$  unabhängig von der Nummerierung der Ecken von  $G$ .*

**Beweis:** Seien  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\} = \{u_1, \dots, u_n\}$  zwei Nummerierungen der Ecken. Seien weiterhin  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{falls } v_i v_j \notin E(G) \end{cases} \quad \text{und} \quad B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i u_j \in E(G) \\ 0 & \text{falls } u_i u_j \notin E(G). \end{cases}$$

Dann gibt es eine Permutation  $\sigma \in S^n$  sodass  $v_{\sigma(i)} = u_i$  ist. Folglich gilt  $A_{\sigma(i)\sigma(j)} = B_{ij}$ . Sei  $P = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ . Dann ist  $P$  eine reguläre Matrix und für die Matrix  $P^T A P$  gilt:

$$(P^T A P)_{ij} = e_j^T P^T A P e_i = e_{\sigma(j)}^T A e_{\sigma(i)} = A_{\sigma(i)\sigma(j)} = B_{ij}$$

Also ist  $P^T A P = B$ . Somit sind  $A$  und  $B$  ähnlich und besitzen folglich dasselbe charakteristische Polynom. ■

Für den Graphen  $G$  der Ordnung  $n$  sei dann  $p_G = p_{A(G)}$  das **charakteristische Polynom** von  $G$  und  $\lambda_p(G) = \lambda_p(A(G))$  der  **$p$ -größte Eigenwerte** von  $G$  (für  $1 \leq p \leq |G|$ ) und  $\text{sp}(G) = \text{sp}(A(G))$  das **Spektrum** von  $G$ . Diese Größen sind nach Lemma 1.13 unabhängig von der Nummerierung der Ecken und somit wohldefiniert. Dies gilt jedoch nicht für die Eigenvektoren. Wir können aber auch eine koordinatenfreie Interpretation für die Eigenvektoren geben. Dazu betrachten wir einen Eigenwert  $\lambda$  von  $G$  und einen zugehörigen Eigenvektor  $x$  von  $A(G)$ . Aus der Eigenwertgleichung (1.2) erhalten wir das Gleichungssystem

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n A(G)_{ij} x_j \tag{1.3}$$

für  $1 \leq i \leq n$ . Der Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  ordnet der Ecke  $v_i$  den Wert  $x_i = x(v_i)$  zu und die Gleichung (1.3) ist äquivalent zu

$$\lambda x(v_i) = \sum_{v_j: v_i v_j \in E(G)} x(v_j). \tag{1.4}$$

Wir betrachten nun den Vektorraum  $\mathbb{R}^{V(G)}$  aller Abbildungen  $x: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ . Offenbar ist die Abbildung  $x \in \mathbb{R}^{V(G)}$  genau dann ein Eigenvektor von  $G$  zum Eigenwert  $\lambda$ , wenn für

alle Ecken  $v$  von  $G$  gilt:

$$\lambda x(v) = \sum_{u:uv \in E(G)} x(u) \quad (1.5)$$

d.h. die Summe der Werte  $x(u)$  über die Nachbarn  $u$  von  $v$  ergibt den Wert  $\lambda x(v)$ . Es sei dann  $E_G(\lambda)$  die Menge aller dieser Abbildungen. Dann ist  $E_G(\lambda)$  der **Eigenraum** von  $G$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Es sei  $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{V(G)}$  die **Einsabbildung** mit  $\mathbb{1}(v) = 1$  für alle  $v \in V(G)$ . Für eine Ecke  $v$  von  $G$  gilt dann

$$d_G(v) = \sum_{u:uv \in E(G)} 1 = \sum_{u:uv \in E(G)} \mathbb{1}(u)$$

und aus Gleichung (1.3) folgt somit für  $r \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{1} \in E_G(r) \Leftrightarrow G \text{ ist } r\text{-regulär.} \quad (1.6)$$

**Beispiel 1.14** Für den vollständigen Graphen  $K_n$  mit  $n \geq 1$  gelten folgenden Aussagen:

- (a)  $\text{sp}(K_n) = (n-1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1 \text{ mal}})$ .
- (b)  $p_{K_n}(\lambda) = (-1)^n (\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}$ .
- (c)  $E_{K_n}(n-1) = [\mathbb{1}]$ .
- (d)  $E_{K_n}(-1) = \{x \in \mathbb{R}^{V(K_n)} \mid x \text{ ist orthogonal zu } \mathbb{1}\}$ .

**Beweis:** Es sei  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Matrix, welche nur 1 als Eintrag besitzt (diese werden wir mit 1-Matrix bezeichnen). Dann gilt  $A(K_n) = J - I$ , wobei  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix ist. Da  $\text{rang}(J) = 1$ , ist also  $-1$  ein Eigenwert von  $G$  mit Vielfachheit  $n-1$ . Da  $K_n$   $n-1$  regulär ist, ist auch  $n-1$  ein Eigenwert von  $K_n$ . Damit folgen (a) und (b). Weiterhin gilt (c) wegen Gleichung (1.6). Aus der Orthogonalität der Eigenvektoren folgt nun (d). ■

**Beispiel 1.15** Der Kreis  $C_n$  der Ordnung  $n \geq 3$  hat die Eigenwerte

$$\lambda_p(C_n) = 2 \cos \left( \frac{2\pi p}{n} \right)$$

für  $1 \leq p \leq n$ . Man beachte hierbei, dass die Eigenwerte nicht der Größe nach geordnet sind. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \text{sp}(C_3) &= \text{sp}(K_3) = (2, -1, -1) \\ \text{sp}(C_4) &= (2, 0, 0, -2) \\ \text{sp}(C_5) &= (2, \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1), \frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1)) \end{aligned}$$

Einen Beweis findet der Leser in [8, 2.1]

**Beispiel 1.16** Für den kantenlosen Graphen  $O_n$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  ist  $A(O_n)$  die Nullmatrix und somit gilt  $p_{O_n}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$  und  $\lambda_i(O_n) = 0$  für alle  $1 \leq i \leq n$ .

**Beispiel 1.17** Ist  $G$  die disjunkte Vereinigung der nichtleeren Graphen  $G_1, G_2, \dots, G_l$  mit  $l \in \mathbb{N}$ , so ist

$$p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda) \cdot p_{G_2}(\lambda) \cdot \dots \cdot p_{G_l}(\lambda)$$

für  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Das Spektrum von  $G$  ergibt sich somit aus der Vereinigung der Spektren von  $G_1, G_2, \dots, G_l$  und für  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$m_G(\lambda) = m_{G_1}(\lambda) + m_{G_2}(\lambda) + \dots + m_{G_l}(\lambda)$$

**Beweis:** Wir nummerieren die Ecken von  $G$  so, dass für  $1 \leq i \leq l-1$  die Ecken von  $G_i$  vor den Ecken von  $G_{i+1}$  aufgelistet werden. Dann ist

$$A(G) = \text{diag}(A(G_1), A(G_2), \dots, A(G_l))$$

und somit ist

$$A(G) - \lambda I = \text{diag}(A(G_1) - \lambda I, A(G_2) - \lambda I, \dots, A(G_l) - \lambda I)$$

wobei  $I$  die Einheitsmatrix der passenden Ordnung ist. Dann ist

$$\begin{aligned} p_G(\lambda) &= \det(A(G) - \lambda I) \\ &= \det(A(G_1) - \lambda I) \cdot \det(A(G_2) - \lambda I) \cdot \dots \cdot \det(A(G_l) - \lambda I) \\ &= p_{G_1}(\lambda) \cdot p_{G_2}(\lambda) \cdot \dots \cdot p_{G_l}(\lambda). \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, gilt dann für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$m_G(\lambda) = m_{G_1}(\lambda) + m_{G_2}(\lambda) + \dots + m_{G_l}(\lambda).$$

Was zu zeigen war. ■

Ist  $G = K_n + K_n$  die disjunkte Vereinigung zweier vollständiger Graphen  $K_n$ , so gilt folglich für das Spektrum von  $G$ :

$$\text{sp}(G) = (n-1, n-1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{2n-2 \text{ mal}}).$$

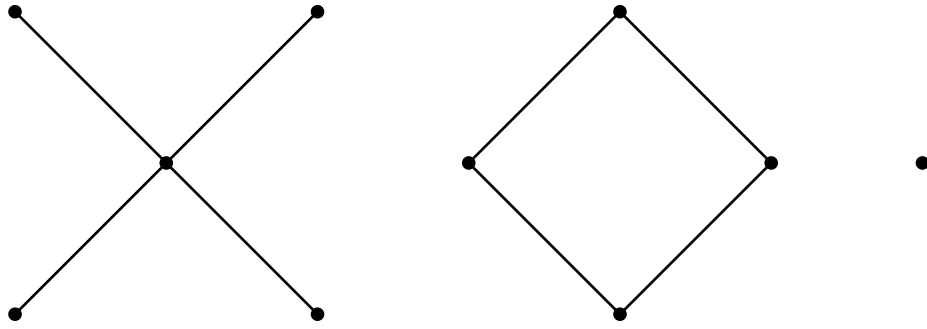


Abbildung 1: Zwei nicht isomorphe Graphen

Insbesondere ist  $\lambda_{\max}(G) = n - 1$  ein doppelter Eigenwert von  $G$ .

Lemma 1.13 impliziert insbesondere, dass isomorphe Graphen dasselbe charakteristische Polynom und somit dasselbe Spektrum haben. Die Umkehrung gilt hingegen nicht. Dazu betrachten wir die Graphen  $G$  und  $H$ , wobei  $G = K_{1,4}$  ein Stern ist und  $H = C_4 + K_1$ , die disjunkte Vereinigung von  $C_4$  und  $K_1$  ist (siehe Abbildung 1). Diese sind offenbar nicht isomorph. Wir können die Ecken so nummerieren, dass für die Adjazenzmatrizen gilt:

Bild neu

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine einfache Rechnung liefert dann

$$p_G(\lambda) = p_H(\lambda) = -\lambda^3(\lambda + 2)(\lambda - 2)$$

und somit

$$\text{sp}(G) = \text{sp}(H) = (2, 0, 0, 0, -2).$$

Die Graphen  $G$  und  $H$  haben dasselbe Spektrum, sind aber nicht isomorph. Zwei Graphen heißen **isospektral**, falls sie das selbe Spektrum besitzen. Isomorphe Graphen sind also stets isospektral, aber nicht umgekehrt.

Die Graphentheorie beschäftigt sich mit der Struktur und den Eigenschaften von Graphen. Eine **Grapheneigenschaft** ist eine Klasse von Graphen, die mit jedem Graphen  $G$  auch alle dazu isomorphen Graphen enthält. So ist zum Beispiel Zusammenhang (d.h. die Klasse der zusammenhängenden Graphen) eine Grapheneigenschaft. Eine **Spektraleigenschaft von Graphen** ist eine Klasse von Graphen, die mit jedem Graphen  $G$  auch



alle dazu isospektralen Graphen enthält. Dann ist jede Spektraleigenschaft von Graphen auch eine Grapheneigenschaft, aber nicht umgekehrt. Wie das obige Beispiel isospektraler Graphen  $K_{1,4}$  und  $C_4 + K_1$  zeigt, ist Zusammenhang keine Spektraleigenschaft.

## 1.6 Eigenschaften des Graphenspektrums

In diesem Abschnitt wollen wir einige einfache, aber wichtigen Eigenschaften der Spektra von Graphen anführen. Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **reduzibel**, falls zwei nichtleere disjunkte Teilmengen  $X, Y$  von  $\{1, \dots, n\}$  existieren, mit  $X \cup Y = \{1, \dots, n\}$  und

$$A_{ik} = 0 \text{ } i \in X, k \in Y,$$

anderfalls heißt  $A$  **irreduzibel**. Wie man leicht zeigen kann, ist  $A$  genau dann reduzibel, wenn man  $A$  durch Umordnen der Zeilen und Spalten in folgende Blockform überführen kann:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Ist  $G$  ein Graph, so gilt

$$G \text{ ist zusammenhängend} \Leftrightarrow A(G) \text{ ist irreduzibel.}$$

Anfang des vorherigen Jahrhunderts beschäftigten sich Perron [32] und Frobenius [18] mit dem Spektrum von unzerlegbaren Matrizen mit nicht negativen Elementen, insbesondere mit dem **Spektralradius** solcher Matrizen, d.h., ihrem betragsmäßig größtem Eigenwert. Die von ihnen erzielten Ergebnisse, welche als Satz von Perron-Frobenius bekannt sind, spielen in vielen Teilgebieten der Mathematik (Analysis, Numerik, Stochastik, Graphentheorie usw.) eine wichtige Rolle. Der folgende Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Perron-Frobenius.

**Satz 1.18** *Für einen zusammenhängenden Graphen  $G$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  gelten folgende Aussagen:*

- (a)  $\lambda_{\max}(G)$  ist ein einfacher Eigenwert mit  $\lambda_{\max}(G) \leq \Delta(G)$ .
- (b) Es gibt einen Eigenvektor  $x$  von  $G$  zum Eigenwert  $\lambda_{\max}(G)$  mit  $x(v) > 0$  für alle  $v \in V(G)$ .
- (c) Ist  $x$  ein Eigenvektor von  $G$  zum Eigenwert  $\lambda$  mit  $x(v) > 0$  für alle  $v \in V(G)$ , so ist  $\lambda = \lambda_{\max}(G)$ .

(d) Für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $G$  gilt  $|\lambda| \leq \lambda_{\max}(G)$ .

**Korollar 1.19** Für einen  $r$ -regulären Graphen  $G$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  gelten folgende Aussagen:

(a)  $\lambda_{\max}(G) = r$ .

(b)  $G$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\lambda_{\max}(G)$  ein einfacher Eigenwert ist.

**Beweis:** Es seien  $G_1, \dots, G_l$  die Komponenten von  $G$ . Dann ist jede Komponente  $G_i$  ein  $r$ -regulärer Graph ( $1 \leq i \leq l$ ). Damit folgt aus (1.6), dass  $\mathbb{1}$  ein Eigenvektor von  $G_i$  zum Eigenwert  $r$  ist. Dann ist  $\lambda_{\max}(G) = r$  und  $m_G(r) = l$ . Daraus folgt dann sowohl (a) als auch (b). ■

**Korollar 1.20** Ist  $G$  ein  $r$ -regulärer Graph der Ordnung  $n \geq 1$ , so gelten folgende Aussagen:

(a)  $\lambda_1(G) = r$  und  $\lambda_1(\overline{G}) = n - 1 - r$ .

(b)  $\lambda_i(\overline{G}) = -\lambda_{n-i+1}(G) - 1$  für  $2 \leq i \leq n$ .

**Beweis:** Aussage (a) folgt aus Korollar 1.19, da der Komplementargraph eines  $r$ -regulären Graphen  $(n - 1 - r)$ -regulär ist. Zum Beweis von (b) wählen wir für  $G$  und  $\overline{G}$  die selbe Nummerierung der Ecken. Dann ist

$$A(G) + A(\overline{G}) = J - I$$

wobei  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die 1-Matrix ist und  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix ist. Wir betrachten  $\lambda = \lambda_i(G)$  für  $i \geq 2$ . Dann existiert ein Eigenvektor  $x$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Dieser ist orthogonal zu  $\mathbb{1} \in E_G(r)$ . Folglich ist

$$A(G)x + A(\overline{G})x = Jx - Ix = -x$$

Durch Umstellen erhalten wir  $A(\overline{G})x = (-\lambda - 1)x$ . Also ist  $(-\lambda - 1)$  ein Eigenwert von  $\overline{G}$ . Analog können wir zeigen, dass für  $\lambda = \lambda_i(\overline{G})$  ( $i \geq 2$ )  $-1 - \lambda$  ein Eigenwert von  $G$  ist. ■

**Lemma 1.21** Sei  $G$  ein Graph der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m$  Kanten. Dann gilt:

(a)  $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \dots + \lambda_n(G) = 0$ .

$$(b) \lambda_1(G)^2 + \lambda_2(G)^2 + \cdots + \lambda_n(G)^2 = 2m.$$

**Beweis:** Wir zeigen zunächst (a). Für die Adjazenzmatrix  $A = A(G)$  gilt  $\text{spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$ . Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = \text{spur}(A) = 0$  ist.

Um (b) zu beweisen, betrachten wir  $B = A^2$ . Die Einträge  $B_{ij}$  geben die Anzahl aller Kantenfolgen der Länge 2 zwischen den Ecken  $v_i$  und  $v_j$  an. Insbesondere gilt  $B_{ii} = d_G(v_i)$ , da jede Kantenfolge der Länge 2 von  $v_i$  nach  $v_i$  genau einer Kante entspricht. Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(G)^2 = \text{spur}(B) = \sum_{i=1}^n B_{ii} = \sum_{i=1}^n d_G(v_i) = 2m.$$

Somit gilt (b). ■

**Lemma 1.22** *Seien  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$  und  $k = |G| - |H|$ . Dann gilt*

$$\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H) \geq \lambda_{p+k}(G)$$

für  $1 \leq p \leq n - k$ .

**Beweis:** Ist  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$ , so entsteht  $A(H)$  aus  $A(G)$  durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.10. ■

**Korollar 1.23** *Sei  $G$  ein Graph mit  $\omega(G) = p$  und  $\alpha(G) = q$ . Dann gilt:*

$$\lambda_p(G) \geq -1 \text{ und } \lambda_q(G) \geq 0.$$

**Beweis:** Ist  $\omega(G) = p$ , so besitzt  $G$  einen vollständigen induzierten Untergraphen  $H$ , der Ordnung  $p$ . Dann gilt  $\lambda_1(H) = p - 1$  und  $\lambda_i(H) = -1$  für  $2 \leq i \leq p$  (siehe Beispiel 1.14). Damit folgt aus Korollar 1.22, dass  $\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H) \geq -1$  ist. Ist  $\alpha(G) = q$ , so besitzt  $G$  einen kantenlosen induzierten Untergraphen  $H'$  der Ordnung  $q$ . Dann ist  $\lambda_i(H') = 0$  für  $1 \leq i \leq q$ . Also folgt aus Korollar 1.22, dass  $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H') = 0$  ist. ■

Wir wollen uns nun noch kurz mit den Eigenwerten von Kantengraphen befassen. Es sei  $G = L(H)$  der Kantengraph des Graphs  $H$  mit  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  und  $E(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Wir betrachten die Inzidenzmatrix  $B = B(H) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{falls } v_i \notin e_j. \end{cases}$$

Dann erhalten wir die folgenden Beziehungen:

$$A(G) = B^T B - 2I \text{ und } A(H) = BB^T - D,$$

wobei  $D = \text{diag}(d_H(v_1), d_H(v_2), \dots, d_H(v_n))$  die Gradmatrix von  $H$  ist. Die Matrizen  $B^T B$  und  $BB^T$  sind dann positiv semidefinit und folglich sind ihre Eigenwerte nicht negativ (siehe Satz 1.7). Für den  $p$ -größten Eigenwert von  $G$  gilt somit

$$\lambda_p(G) = \lambda_p(B^T B) - 2 \geq -2,$$

also ist insbesondere  $\lambda_{\min}(G) \geq -2$ . Ist der Graph  $H$  kreislos und damit ein Wald, so ist  $\text{rang}(B) = m$  (wie sich leicht durch Induktion nach  $n$  zeigen lässt). Dann ist  $B^T B$  positiv definit und somit  $\lambda_{\min}(G) > -2$ . Zusammenfassend erhalten wir dann folgendes, wohlbekanntes Resultat (siehe [8, Theorem 6.11]).

einheitlicher  
rang

**Satz 1.24** *Ist  $G = L(H)$  der Kantengraph eines Graphen  $H$ , so ist  $\lambda_{\min}(G) \geq -2$ . Ist  $H$  ein Wald, so ist  $\lambda_{\min}(G) > -2$ .*

Aus der Linearen Algebra weiß man, dass die Matrizen  $BB^T$  und  $B^T B$  dieselben Eigenwerte mit den selben Vielfachheiten besitzen, mit Ausnahme des Eigenwerts  $\lambda = 0$ . Es gilt dann

$$\lambda^n p_{B^T B}(\lambda) = \lambda^m p_{BB^T}(\lambda)$$

Die Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda = 0$  hängt nur von dem Rang der Matrix  $B$  ab. Ist  $H$  zusammenhängend und  $n \geq 2$ , so kann der Rang von  $B$  nur die Werte  $n$  oder  $n - 1$  annehmen, je nachdem ob  $H$  bipartit ist oder nicht. Dies wurde zuerst von Sachs [34] gezeigt. Daraus erhält man folgendes Resultat (siehe auch das Buch von Cvetković, Rowlinson und Simić [7, Theorem 2.2.4]).

**Satz 1.25** *Es sei  $H$  ein zusammenhängender Graph mit  $n$  Ecken und  $m$  Kanten, wobei  $n \geq 2$  ist. Für die Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda = -2$  von  $G = L(H)$  gilt:*

$$m_G(-2) = \begin{cases} m - n + 1 & \text{falls } H \text{ bipartit ist} \\ m - n & \text{sonst.} \end{cases}$$

In den 1970er Jahren sind verschieden Arten erschienen, die sich mit der Charakterisierung der Graphen  $G$  mit  $\lambda_{\min}(G) \geq -2$  befassen. Zur Geschichte dieses Problems siehe

[7]. Eine erste Teilcharakterisierung dieser Graphenklasse wurde 1977 von Hoffman [23], eine vollständige Charakterisierung wurde 1978 von Cameron, Goethals, Seidel und Shult [4] gefunden.

## 2 Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

Der Hauptteil dieser Bachelorarbeit befasst sich mit einer neuen Herangehensweise an die Erdős–Faber–Lovász Vermutung. Wir geben zuerst einen kurzen Überblick über die Vermutung und ihr Geschichte und behandeln dann Krauszerlegungen von Graphen.

### 2.1 Die Geschichte der Vermutung

Es bezeichne  $\mathcal{EG}(n)$  die Klasse aller Graphen welche die Vereinigung von  $n$  kantendisjunkten vollständigen Graphen der Ordnung  $n$  sind. Für einen Graphen  $G \in \mathcal{EG}(n)$  gibt es dann Graphen  $G_1, G_2, \dots, G_n$  mit  $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ ,  $G_i = K_n$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $|G_i \cap G_j| \leq 1$  für  $1 \leq i < j \leq n$ . Dann ist  $\omega(G) \geq n$  und somit gilt  $\chi(G) \geq n$ . Es ergibt sich dann die Frage, ob  $G$  eine  $n$ -Färbung besitzt.

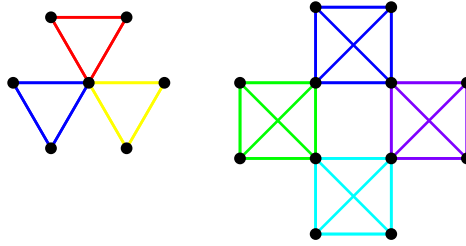


Abbildung 2: Zwei Graphen aus  $\mathcal{EG}(3)$  und  $\mathcal{EG}(4)$

**Vermutung 2.1 (Erdős–Faber–Lovász)** Für jeden Graphen  $G \in \mathcal{EG}(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\chi(G) \leq n$ .

Die Vermutung wurde 1972 in Ohio von Erdős, Faber und Lovász aufgestellt, als sie über eine Verallgemeinerung der Vizing-Schranke für lineare Hypergraphen nachdachten (siehe [16] und [10]). Bereits sieben Jahre später bot Erdős schon 500 Dollar für die Lösung des Problems [?]. Diese Vermutung gehörte zu Erdős drei Lieblingsproblemen (siehe [12]).

Vermutung 2.1 ist äquivalent zu der folgenden Vermutung über lineare Hypergraphen (siehe Satz 2.7):

**Vermutung 2.2 (Erdős–Faber–Lovász)** Für jeden linearen Hypergraphen  $H$  ist  $\chi(H) \leq |H|$ .

Im Folgenden wollen wir einige Resultate zur Vermutung 2.1 anführen. Chung und Lawler [5] bewiesen die folgende obere Schranke für die chromatische Zahl von Graphen aus  $\mathcal{EG}(n)$ :

**Satz 2.3** *Für jeden Graphen  $G \in \mathcal{EG}(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\chi(G) \leq \frac{3n}{2} - 2$ .*

Kahn [24] verbesserte diese obere Schranke, indem er bewies, dass die Vermutung asymptotisch wahr ist.

**Satz 2.4** *Für jeden linearen Hypergraphen  $H$  ist  $\chi(H) \leq |H| + o(|H|)$ .*

Es ist außerdem bekannt, dass Vermutung 2.1 für  $n \leq 10$  gilt, wie Hindman [21] bewies. Weitere Anmerkungen und Resultate finden sich in [33].

## 2.2 Krauszerlegungen von Graphen

Die Graphen aus  $\mathcal{EG}(n)$  lassen sich alle durch  $n$  vollständige Graphen der Ordnung  $n$  kantendisjunkt überdecken. Im Folgenden wollen wir ein allgemeineres Konzept betrachten, indem wir nicht fordern, dass alle Graphen der Überdeckung dieselbe Ordnung haben. Diese Art der Überdeckung wurde zuerst von Krausz [30] zur Charakterisierung von Kantengraphen verwendet, daher der Name Krauszerlegung.

Sei  $G$  ein Graph und  $\mathcal{K}$  eine Menge Untergraphen von  $G$ . Man nennt  $\mathcal{K}$  dann eine Krauszerlegung von  $G$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (K1) Jeder Graphen  $K \in \mathcal{K}$  ist ein vollständiger Graph der Ordnung  $|K| \geq 2$ .
- (K2) Sind  $K, K' \in \mathcal{K}$  unterschiedlich, so sind sie kantendisjunkt (d.h.  $|K \cap K'| \leq 1$ ).
- (K3)  $\mathcal{K}$  ist eine Überdeckung von  $G$ , d.h.  $G = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ .

Desweiteren sei für  $v \in V(G)$  der **Grad** von  $v$  bezüglich  $\mathcal{K}$  definiert als

$$d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in V(K)\}|.$$

Der **Minimalgrad** von  $\mathcal{K}$  ist

$$\delta(\mathcal{K}) = \min_{v \in V(G)} d_{\mathcal{K}}(v)$$

und der **Maximalgrad** von  $\mathcal{K}$  ist

$$\Delta(\mathcal{K}) = \max_{v \in V(G)} d_{\mathcal{K}}(v).$$

Krausz [30] beschäftigte sich mit der Frage, welche Graphen Kantengraphen von Graphen sind. Er bewies, dass ein Graph genau dann ein Kantengraph eines Graphen ist, wenn es eine Krauszerlegung mit Maximalgrad höchstens 2 besitzt. Ist  $G = L(H)$  der Kantengraph des Graphen  $H$ , so ist für jede Ecke  $v \in V(H)$  die Kantenmenge  $E_H(v)$  eine Clique von  $G$  und somit ist  $K^v = G[E_H(v)]$  ein vollständiger Graph. Für zwei verschiedene Ecken  $u, v \in V(H)$  gilt dann:

$$K^u \cap K^v \neq \emptyset \Leftrightarrow uv \in E(H) \Leftrightarrow |K^u \cap K^v| \leq 1.$$

Sind nun  $e, e' \in E(H)$  zwei adjazente Kanten von  $H$  und somit  $ee'$  eine Kante von  $G$ , so gibt es eine Ecke  $v \in e \cap e'$  und  $e, e'$  gehören zu  $K^v$ . Also ist  $\mathcal{K} = \{K^v \mid v \in V(H)\}$  eine Krauszerlegung von  $G$  mit  $\Delta(\mathcal{K}) \leq 2$ .

Für  $d \geq 1$  sei  $\kappa_d(G)$  die kleinste positive Zahl  $m$  derart, dass  $G$  eine Krauszerlegung  $\mathcal{K}$  mit  $|\mathcal{K}| = m$  und  $\delta(\mathcal{K}) \geq d$  besitzt. Existiert keine solche Zahl  $m$ , so setzen wir  $\kappa_d(G) = \infty$ .

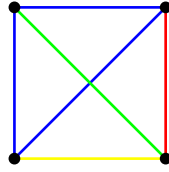


Abbildung 3: Eine Krauszerlegung des  $K_4$

In Abbildung 3 sehen wir eine Krauszerlegung  $\mathcal{K}$  des  $K_4$  (die einzelnen kantendisjunkten Untergraphen sind jeweils mit der selben Farbe markiert). Wir können außerdem erkennen, dass  $\delta_G(\mathcal{K}) = 2$  und folglich  $\kappa_2(K_4) \leq 4$  (wir werden später sehen, dass stets  $\kappa_2(K_n) \geq n$  gilt und somit  $\kappa_2(K_4) = 4$  ist).

**Lemma 2.5** *Seien  $G$  ein Graph und  $d \in \mathbb{N}$ . Genau dann ist  $\kappa_d(G) < \infty$ , wenn  $\delta(G) \geq d$  ist.*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass  $\delta(G) \geq d$  ist, falls  $p = \kappa_d(G) < \infty$ . Sei  $v \in V(G)$  mit  $d_G(v) = \delta(G)$ . Dann existiert eine Krauszerlegung  $\mathcal{K} = \{K^1, \dots, K^p\}$  von  $G$  mit  $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ . Da alle Graphen der Krauszerlegung kantendisjunkt sind, gilt

$$d \leq \sum_{K \in \mathcal{K}, v \in K} d_K(v) \leq d_G(v) = \delta(v).$$

Dabei gilt die erste Ungleichung, da  $v$  in mindestens  $d$  der Graphen aus  $\mathcal{K}$  vorkommt und in diesen mindestens Grad 1 hat.



Sei nun  $\delta(G) \geq d$ . Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszerlegung  $\mathcal{K}$  gibt, mit  $d_{\mathcal{K}}(v) \geq d$  für alle  $v \in V(G)$ . Sei  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$  eine Nummerierung der Kanten. Sei dann  $K^i$  der Graph, welcher nur aus der Kante  $e_i$  und den zu  $e_i$  inzidenten Kanten besteht. Wir zeigen:  $\mathcal{K} = \{K^i \mid 1 \leq i \leq m\}$  ist eine Krauszerlegung von  $G$  mit  $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ . (K1) ist trivialerweise erfüllt, da alle Graphen von  $\mathcal{K}$  isomorph zu  $K_2$  sind. Sind  $K, K'$  zwei verschiedene Graphen aus  $\mathcal{K}$ , so sind sie kantendisjunkt, da ihre einzigen Kanten in  $G$  verschieden sind. Also ist auch (K2) erfüllt. Da jede Kante von  $G$  in einem  $K \in \mathcal{K}$  vorkommt, ist auch (K3) erfüllt. Sei nun  $v$  eine Ecke von  $G$ . Dann ist

$$d_{\mathcal{K}}(v) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$$

und folglich auch  $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ . Damit ist gezeigt, dass  $\mathcal{K}$  eine Krauszerlegung von  $G$  ist mit  $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ . Also ist  $\kappa_d(G) \leq |\mathcal{K}| < \infty$ . ■

**Beispiel 2.6** Sei  $G$  ein dreiecksfreier Graph mit Minimalgrad mindestens  $d$ . Dann ist  $\kappa_d(G) = |E(G)|$ , da  $G$  keine Dreiecke enthält und somit jeder Graph einer Krauszerlegung von  $G$  isomorph zu  $K_2$  sein muss.

Wir werden nun einen Zusammenhang zwischen Krauszerlegungen und der Erdős Faber Lovász Vermutung herstellen.

**Satz 2.7** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $G \in \mathcal{EG}(n)$  gilt  $\chi(G) \leq n$ .
- (b) Für alle linearen Hypergraphen  $H$  gilt  $\chi'(H) \leq |H|$ .
- (c) Für alle Graphen  $G$  gilt  $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$ .

**Beweis:** Wir zeigen zuerst, dass (b) aus (a) folgt. Sei dazu  $H$  ein linearer Hypergraph der Ordnung  $n$  und  $G = L(H)$  sein Kantengraph. Sei  $v \in V(H)$  eine Ecke von  $H$ . Wir betrachten dann  $K^v = G[E_H(v)]$ . Dann ist  $K^v$  ein vollständiger Graph. Wir zeigen, dass seine Ordnung höchstens  $n - 1$  ist. Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann ist die Ordnung von  $K^v$  mindestens  $n$  und wir finden  $n$  unterschiedlich Kanten in  $E_H(v)$ , welche  $v$  enthalten. Da  $H$  ein linearer Hypergraph ist, ist  $|e \cap e'| = |\{v\}| = 1$  für alle  $\{e, e'\} \in [E_H(v)]^2$ . Außerdem ist  $|e| \geq 2$  für alle  $e \in E(H)$ . Dann folgt aber, dass

$$|H| \geq \left| \bigcup_{e \in E_H(v)} e \right| = \sum_{e \in E_H(v)} |e \setminus \{v\}| + |\{v\}| \geq n + 1.$$

Ein Widerspruch zur Voraussetzung  $|H| = n$ . Also ist  $K^v$  ein vollständiger Graph der Ordnung höchstens  $n - 1$ . Wir bezeichnen dann mit  $\tilde{K}^v$  den vollständigen Graphen der Ordnung  $n$ , der aus  $K^v$  entsteht indem wir die nötige Anzahl Ecken und Kanten hinzufügen. Es bezeichne dann  $\tilde{G}$  den Graphen, den wir aus  $G$  erhalten, indem wir alle Ecken und Kanten die wir so hinzugefügt haben auch zu  $G$  hinzufügen. Dann ist  $G$  ein induzierter Untergraph von  $\tilde{G}$ . Wir zeigen jetzt, dass  $\mathcal{K} = \{K^v \mid v \in V(H)\}$  eine Krauszerlegung von  $G$  ist. (K1) ist trivialerweise erfüllt. Um (K2) zu zeigen, nehmen wir an das in  $G$  eine Kante  $ee' \in E(G)$  existiert, welche in zwei verschiedenen Graphen  $K, K'$  von  $\mathcal{K}$  vorkommt. Dann existieren zwei unterschiedliche Ecken  $u, v$  von  $H$  für welche  $K = K^v$  und  $K' = K^w$  gilt. Da  $e, e' \in V(K^v) \cap V(K^w)$  gilt, kommen die Ecken  $v$  und  $u$  von  $H$  also sowohl in  $e$  als auch in  $e'$  vor. Damit ist  $|e \cap e'| \geq 2$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $H$  ein linearer Hypergraph ist. Damit gilt (K2). Sei  $ee' \in V(G)$  eine Kante von  $G$ . Da  $G$  der Kantengraph von  $H$  ist, existiert eine Ecke  $v \in V(H)$  mit  $v \in e \cap e'$ . Also ist  $ee' \in K^v \in \mathcal{K}$ . Damit ist auch (K3) gezeigt. Also ist  $\mathcal{K}$  eine Krauszerlegung von  $G$ . Insbesondere ist auch  $\tilde{\mathcal{K}} = \{\tilde{K}^v \mid v \in V(H)\}$  eine Krauszerlegung von  $\tilde{G}$ . Also ist  $\tilde{G} \in \mathcal{EG}(n)$ . Mit (a) folgt dann

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \chi(\tilde{G}) \leq n = |H|.$$

Als nächstes zeigen wir, dass (c) aus (b) folgt. Dazu betrachten wir einen beliebigen Graphen  $G$  und zeigen, dass  $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$  gilt. Ist  $\kappa_2(G) = \infty$ , so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist  $\kappa_2(G) = p < \infty$  und es gibt eine Krauszerlegung  $\mathcal{K} = \{K^1, \dots, K^p\}$  von  $G$  mit  $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$ . Für  $v \in V(G)$  definieren wir  $e_v$  als die Menge aller  $K \in \mathcal{K}$ , welche  $v$  enthalten. Da  $\mathcal{K}$  eine Krauszerlegung ist, gilt  $|e_v| = d_{\mathcal{K}}(v) \geq \delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$  für alle  $v \in V(G)$ . Sei  $H$  der Hypergraph mit Eckenmenge  $\mathcal{K}$  und Kantenmenge  $\{e_v \mid v \in V(G)\}$ . Wir betrachten  $\pi : V(G) \mapsto E(H)$  mit  $\pi(v) = e_v$ , diese ist offensichtlich surjektiv. Wir zeigen, dass  $\pi$  bijektiv ist. Wäre dem nicht so, so gäbe es zwei unterschiedliche Ecken  $v, w$  mit  $e_v = e_w$ . Da  $|e_v| \geq 2$  ist, wäre dann die Kante  $vw$  in zwei Graphen von  $\mathcal{K}$  enthalten, was der Bedingung (K2) widerspräche. Also ist  $\pi$  bijektiv. Wir zeigen nun, dass  $H$  ein linear Hypergraph ist. Seien dazu  $e_v, e_w$  zwei unterschiedliche Kanten von  $H$ . Angenommen  $|e_v \cap e_w| \geq 2$ . Dann existieren mindestens zwei Graphen  $K, K' \in \mathcal{K}$  mit  $v, w \in K, K'$ . Da  $K, K'$  aus der Krauszerlegung sind, ist die Kante  $vw$  sowohl in  $K$  als auch in  $K'$  vorhanden. Dies ist aber ein Widerspruch zu Eigenschaft (K2) einer Krauszerlegung. Folglich ist  $|e_v \cap e_w| \leq 1$ , also ist  $H$  linear. Dann folgt aus der Voraussetzung (b), dass  $\chi'(H) \leq |H| = \kappa_2(G)$  ist. Somit finden wir eine Färbung  $\phi : E(H) \mapsto \{1, \dots, p\}$  der Kanten von  $H$ . Sei dann  $\varphi = \phi \circ \pi$ . Wir zeigen, dass  $\varphi$  eine Färbung der Ecken von  $G$  ist.

Dazu betrachten wir eine Kante  $vw \in E(G)$ . Dann existiert ein  $K \in \mathcal{K}$  mit  $vw \in E(K)$ . Also ist  $e_v \cap e_w \neq \emptyset$  und folglich

$$\varphi(v) = \phi(e_v) \neq \phi(e_w) = \varphi(w).$$

Also ist  $\varphi$  ein  $p$ -Färbung von  $G$ . Das heißt

$$\chi(G) \leq p = \kappa_2(G).$$

Also folgt (c) aus (b).

Nun zeigen wir, dass (a) aus (c) folgt. Sei  $G \in \mathcal{EG}(p)$  mit  $p \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $G$  die kantendisjunkte Vereinigung von  $p$  vollständigen Graphen der Ordnung  $p$ , welche wir mit  $K^1, \dots, K^p$  bezeichnen wollen. Nun entfernen wir wiederholt Ecken aus  $G$ , deren aktueller Grad kleiner als  $p$  ist solange, bis keine Ecken vom Grad kleiner als  $p$  existieren. Den daraus resultierenden (möglicherweise leeren) Graphen nennen wir  $H$ . Gelingt es,  $H$  mit  $p$  Farben zu färben, so können wir diese Färbung schrittweise zu einer Färbung von  $G$  erweitern, indem wir die entfernten Ecken in umgekehrter Reihenfolge färben. Dies ist mit  $p$  Farben möglich, da jede zu färbende Ecke höchstens  $p - 1$  bereits gefärbte Nachbarn besitzt. Somit reicht es zu zeigen, dass  $\chi(H) \leq p$  ist. Ist  $V(H) = \emptyset$ , so gilt dies trivialerweise. Andernfalls gilt nach Konstruktion  $\delta(H) \geq p$ . Sei  $\hat{K}^i = K^i \cap H$  für  $1 \leq i \leq n$ . Dann ist  $\hat{K}^i$  ein vollständiger Graph für alle  $i$ . Wähle  $\mathcal{K} = \{\hat{K}^i \mid |\hat{K}^i| \geq 2, 1 \leq i \leq n\}$ . Wir zeigen, dass  $\mathcal{K}$  eine Krauszerlegung von  $H$  mit  $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$  ist. Die Bedingung (K1) ist offensichtlich erfüllt. Da in  $G$  die  $K^i$  kantendisjunkt sind, sind die  $\hat{K}^i$  in  $H$  ebenfalls kantendisjunkt, da  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$  ist. Folglich ist die Bedingung (K2) ebenfalls erfüllt. Sei  $v \in V(H)$ . Dann ist  $d_H(v) \geq p$  und somit gilt  $d_G(v) \geq d_H(v) \geq p$ . Die Ecke  $v$  ist in mindestens zwei vollständigen Graphen  $K$  und  $K'$  aus der Krauszerlegung  $\mathcal{K}$  enthalten. Ansonsten wäre  $v$  nur in einem vollständigen Graphen  $K \in \mathcal{K}$  enthalten und somit wäre  $d_H(v) = d_K(v) \leq p - 1$ , was unmöglich ist. Folglich ist  $d_{\mathcal{K}}(v) \geq 2$  für alle  $v \in V(H)$ . Also ist  $\mathcal{K}$  eine Krauszerlegung mit  $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$  und wegen (c) folgt dann:

$$\chi(H) \leq \kappa_2(H) \leq |\mathcal{K}| \leq p.$$

Also lässt sich  $H$  mit  $p$  Farben färben und wir können wie oben beschrieben  $G$  ebenfalls mit  $p$  Farben färben. Also ist  $\chi(G) \leq p$ . ■

Aus dem vorhergehenden Satz folgt, dass Vermutung 2.1 und Vermutung 2.2 äquivalent sind. Eine weitere dazu äquivalente Vermutung ist die folgende:

**Vermutung 2.8** *Für jeden Graphen  $G$  ist  $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$ .*

Im Zusammenhang mit diesen Vermutungen ist es sinnvoll, die folgenden Extremalfunktionen zu betrachten:

$$f_1(n) = \max\{\chi(G) \mid G \in \bigcup_{p=1}^n \mathcal{EG}(p)\}$$

$$f_2(n) = \max\{\chi'(H) \mid H \text{ ist ein linearer Hypergraph mit } |H| \leq n\}$$

$$f_3(n) = \max\{\chi(G) \mid G \text{ ist ein Graph mit } \kappa_2(G) \leq n\}$$

für  $n \geq 3$ . Der Beweis von Satz 2.7 lässt sich dann ohne Schwierigkeiten modifizieren, dass man zeigen kann

$$f_1(n) = f_2(n) = f_3(n)$$

für alle  $n \geq 3$ .

### 3 Spektraleigenschaften von Graphen

In diesem Kapitel wollen wir die in Abschnitt 1.4 behandelten Themen weiter vertiefen. Insbesondere werden wir einen Zusammenhang zwischen Krauszerlegungen und den Eigenwerten eines Graphen herstellen. Da spezielle Krauszerlegungen von Graphen (nämlich diejenigen mit Minimalgrad mindestens 2) in Zusammenhang mit Vermutung 2.1 stehen, werden wir hier eine alternative Herangehensweise an die Vermutung finden.

#### 3.1 Krauszerlegungen und Eigenwerte

**Satz 3.1** *Seien  $G$  ein Graph mit  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $\mathcal{K} = \{K^1, \dots, K^p\}$  eine Krauszerlegung von  $G$  mit  $\delta(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$ . Desweiteren sei  $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$  für  $1 \leq i \leq n$ . Dabei wählen wir die Eckennummerierung so, dass  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  ist. Dann gelten folgende Aussagen :*

- (a)  $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$  für  $i = 1, \dots, n$ .
- (b)  $\lambda_{p+1}(G) \leq -d$  falls  $p < n$  ist.

**Beweis:** Zunächst zeigen wir (a). Es sei  $A = A(G)$  die Adjazenzmatrix von  $G$  und  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Definiere  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  als die Inzidenzmatrix von  $\mathcal{K}$ , also

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{falls } v_i \notin K^j \end{cases}$$

Nun betrachten wir  $M = BB^T$ . Es gilt

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^m B_{ik} B_{kj}^T = \sum_{k=1}^m B_{ik} B_{jk}$$

Seien  $1 \leq i < j \leq n$ . Da  $B$  die Inzidenzmatrix von  $\mathcal{K}$  ist, gilt

$$B_{ik} B_{jk} = 1 \Leftrightarrow B_{ik} = 1 \text{ und } B_{jk} = 1 \Leftrightarrow v_i, v_j \in K^k.$$

Ist  $v_i v_j \in E(G)$ , so kommt die Kante  $v_i v_j$  in genau einem  $K \in \mathcal{K}$  vor, d.h. es gibt genau ein  $k \in \{1, \dots, m\}$  für das  $B_{ik}$  und  $B_{jk}$  gleich 1 sind. Ist  $v_i v_j \notin E(G)$ , so kommt die Kante  $v_i v_j$  auch nicht in einem der Graphen der Krauszerlegung vor. Also ist für alle  $k \in \{1, \dots, m\}$   $B_{ik} B_{jk} = 0$ . Folglich ist  $M_{ij} = 1$  genau dann, wenn  $v_i v_j \in G$ . Also ist  $M_{ij} = A_{ij}$ . Sei nun  $1 \leq i \leq n$ . Dann gilt für die Diagonaleinträge  $M_{ii}$  der Matrix  $M$ :

$$M_{ii} = \sum_{k=1}^d B_{ik} B_{ik} = \sum_{k=1}^d B_{ik}.$$

Die Gleichung  $B_{ik} = 1$  ist genau dann erfüllt, wenn  $v_i \in K^k$ . Folglich ist  $M_{ii} = d_K(v_i) = d_i$ . Damit gilt  $M = A + D$ . Außerdem ist die Matrix  $M = BB^T$  nach Satz 1.7 positiv semidefinit. Folglich ist  $A - (-D)$  positiv semidefinit und es folgt mit Lemma 1.9, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -d_{n-i+1}$$

Damit ist (a) gezeigt.

Nun zeigen wir (b). Sei  $p < n$ . Dann ist  $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p$ . Also ist  $\lambda_{p+1}(M) = 0$  und es folgt mit Satz 1.11, dass

$$\lambda_{p+1}(A) + d \leq \lambda_{p+1}(A) + d_n = \lambda_{p+1}(A) + \lambda_n(D) \leq \lambda_{p+1}(M) = 0$$

Durch Umstellen erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

Wir wollen nun eine Folge von Graphenparametern definieren. Seien dazu  $d \geq 1$  und  $G$  ein Graph. Wir bezeichnen mit  $\xi_d(G)$  die Anzahl aller Eigenwerte von  $G$ , welche echt größer als  $-d$  sind. Damit ist also

$$\xi_d(G) = \max\{i \mid \lambda_i(G) > -d\}.$$

Ist  $G = \emptyset$ , so setzen wir  $\xi_d(G) = 0$  für alle  $d \in \mathbb{N}$ . Dieser ist ein Graphenparameter, da nach Lemma 1.13 isomorphe Graphen das selbe Spektrum besitzen und somit  $\xi_d$  zwei isomorphen Graphen die selbe natürliche Zahl zuordnet.

**Lemma 3.2** *Seien  $G$  ein Graph und  $d \in \mathbb{N}$ . Dann gelten für den Graphenparameter  $\xi_d$  folgende Aussagen:*

- (a) *Ist  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$ , so gilt  $\xi_d(H) \leq \xi_d(G)$ .*
- (b) *Ist  $d \geq 2$ , so gilt  $\omega(G) \leq \xi_d(G)$ .*
- (c)  *$\alpha(G) \leq \xi_d(G)$ .*
- (d) *Ist  $v \in V(G)$  eine Ecke von  $G$ , so gilt  $\xi_d(G) \leq \xi_d(G - v) + 1$ .*
- (e) *Ist  $d' \in \mathbb{N}$  mit  $d \leq d'$ , so gilt  $\xi_d(G) \leq \xi_{d'}(G)$ .*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst (a). Sei  $\xi_d(H) = l$ . Folglich ist  $\lambda_l(H) > -d$  und wir erhalten mit Lemma 1.22, dass  $\lambda_l(G) \geq \lambda_l(H) > -d$  gilt. Deswegen ist  $\xi_d(G) \geq l = \xi_d(H)$ . Also gilt (a).

Um (b) und (c) zu zeigen, seien  $p = \omega(G)$  und  $q = \alpha(G)$ . Nach Korollar 1.23 ist dann  $\lambda_p(G) \geq -1$  und  $\lambda_q(G) \geq 0$  und deswegen  $\xi_d(G) \geq p = \omega(G)$  für  $d \geq 2$  und  $\xi_d(G) \geq q = \alpha(G)$  für alle  $d \in \mathbb{N}$ .

Für den Beweis von (d) wählen wir eine beliebige Ecke  $v \in V(G)$  von  $G$ . Dann ist  $G - v$  ein induzierter Untergraph von  $G$  der Ordnung  $|G| - 1$ . Sei  $l = \xi_d(G - v)$ . Ist  $l = |G| - 1$ , so ist nichts zu zeigen, da  $\xi_d(G)$  nach oben durch  $|G|$  beschränkt ist. Andernfalls ist  $l < |G| - 1$ . Dann ist  $\lambda_l(G - v) > -d$  und  $\lambda_{l+1}(G - v) \leq -d$ . Nun folgt mit Lemma 1.22, dass

$$\lambda_{l+2}(G) \leq \lambda_{l+1}(G - v) \leq -d$$

richtig ist. Deswegen ist  $\xi_d(G) \leq l + 1 = \xi_l(G - v) + 1$ .

Aussage (e) gilt, da die Eigenwerte eines Graphen fallend geordnet sind. ■

Mit Satz 3.1 erhalten wir sofort Aussagen über Krauszerlegungen von  $G$ , falls  $G$  bestimmte Untergraphen enthält.

**Korollar 3.3** *Seien  $G$  ein Graph und  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$ . Desweiteren seien  $q, d \in \mathbb{N}$  mit  $\xi_d(H) \geq q$ . Dann ist  $\kappa_d(G) \geq q$ .*

**Beweis:** Da  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$  ist, folgt aus Lemma 3.2, dass  $\xi_d(G) \geq q$  gilt. Also ist  $\lambda_q(G) > -d$ . Angenommen, es gilt  $p = \kappa_d(G) < q$ . Dann gibt es eine Krauszerlegung  $\mathcal{K}$  von  $G$  mit  $|\mathcal{K}| = p$  und  $\delta(\mathcal{K}) \geq d$ . Aus Satz 3.1 folgt, dass  $\lambda_q(G) \leq \lambda_{p+1}(G) \leq -d$  gilt. Dann ist aber auch  $\xi_d(G) < q$  und wir erhalten einen Widerspruch. Folglich ist  $\kappa_2(G) \geq q$ . ■

**Korollar 3.4** *Seien  $G$  ein Graph und  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$ . Ist  $H$  Kantengraph eines Waldes, so gilt  $\kappa_2(G) \geq |H|$ .*

**Beweis:** Ist  $\delta(G) \leq 1$ , so ist nichts zu zeigen, da dann mit 2.5 folgt, dass  $\kappa_2(G) = \infty$  richtig ist.

Sei sonst  $q = |H|$ . Da  $H$  Kantengraph eines Waldes ist, folgt  $\lambda_q(H) > -2$  aus Korollar 1.24. Also ist  $\xi_2(H) = |H|$ . Dann ist mit Korollar 3.3  $\kappa_2(G) \geq |H|$ . ■

Der folgende Korollar wurde bereits von Klotz [26] gezeigt. Wir erhalten über die Krauszerlegung und Korollar 3.4 jedoch einen eleganten Beweis.

**Korollar 3.5 (Klotz)**  $\kappa_2(K_n) \geq n$

**Beweis:**  $K_n$  ist der Kantengraph von  $K_{1,n}$ . Nun folgt die Behauptung aus Korollar 3.4.

Einen zweiten Beweis erhalten wir durch Betrachten der Eigenwerte von  $K_n$ . Nach Lemma 3.2 gilt  $n = \omega(K_n) \leq \xi_2(K_n)$ . Somit folgt die Behauptung aus Korollar 3.3. ■

**Korollar 3.6** *Ist  $\delta(G) \geq 2$ , so gilt  $\omega(G) \leq \kappa_2(G)$  und  $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$ .*

**Beweis:** Sei  $p = \omega(G)$ . Dann gilt nach Korollar 1.23  $\lambda_p(G) \geq -1 > -2$ . Damit sind für  $d = 2$  die Voraussetzungen von Korollar 3.3 erfüllt und es gilt folglich  $\kappa_2(G) \geq p = \omega(G)$ . Für  $q = \alpha(G)$  gilt mit Korollar 1.23  $\lambda_q(G) \geq 0 > -2$ . Damit folgt  $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$ . ■

Um die Erdős-Faber-Lovász Vermutung zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass jeder Graph  $G$  die Ungleichung

$$\chi(G) \leq \xi_2(G)$$

erfüllt. Dann gilt mit Korollar 3.3

$$\chi(G) \leq \kappa_2(G),$$

woraus mit Satz 3.9 dann Vermutung 2.1 folgt.

Eine Möglichkeit dies zu zeigen, wäre zu beweisen, dass  $\xi_2$  ein Szekeres-Wilf-Parameter ist. Die Eigenschaft (S1) ist nach den obigen Überlegungen erfüllt. Berechnungen in Maple zeigen jedoch, dass Eigenschaft (S2) nicht immer erfüllt ist.

Es ist jedoch möglich die chromatische Zahl durch eine Funktion von  $\xi_2$  nach oben zu beschränken, wie der folgende Satz zeigt. Dazu benötigen wir einen weiteren Parameter,  $\beta$ , welcher für einen Graphen  $G$  wie folgt definiert ist:

$$\beta(G) = \max\{|H| \mid H \trianglelefteq G, \lambda_{\min}(H) > -2\}.$$

**Lemma 3.7** *Ist  $G$  ein Graph mit  $\beta(G) \leq p$  und  $\omega(G) \leq q$ , so existiert eine Funktion  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  für die  $\chi(G) \leq f(p, q)$  gilt.*

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach  $\omega(G)$ . Sei also  $\beta(G) \leq p$  für  $p \in \mathbb{N}$ . Ist  $\omega(G) \leq 1$ , so ist  $\chi(G) \leq 1$  und wir können  $f(p, 1) = 1$  wählen.

Sei nun  $\omega(G) \leq q$  mit  $q \geq 2$  und gelte für alle Graphen  $H$  mit  $\omega(H) \leq q - 1$ , dass  $\chi(H) \leq f(p, q - 1)$  für alle  $p \in \mathbb{N}$  erfüllt ist. Ist  $\omega(G) \leq q - 1$ , so folgt die Aussage durch die Induktionsvoraussetzung. Andernfalls ist  $\omega(G) = q$  und  $\beta(G) = l \leq p$ . Dann gibt es einen induzierten Untergraphen  $H$  von  $G$ , sodass  $|H| = l$  und  $\lambda_{\min}(H) > -2$ . Für  $v \in V(H)$  sei  $N_v = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ , die Menge der Nachbarn von  $v$  in  $G$ . Dann



ist  $\omega(G[N_v]) \leq \omega(G) - 1$ , da sonst  $G[N_v \cup \{v\}]$  einen vollständiger Graphen der Ordnung  $p + 1$  enthält, was nicht möglich ist, da  $\omega(G) \leq p$  ist. Außerdem gilt  $\beta(G[N_v]) \leq \beta(G)$ , da jeder induzierte Untergraph von  $G[N_v]$  wieder ein induzierter Untergraph von  $G$  ist. Wegen der Induktionsvoraussetzung folgt dann, dass  $\chi(G[N_v]) \leq f(p, q - 1)$  richtig ist. Wir wählen

$$N = V(G) \setminus \bigcup_{v \in V(H)} N_v,$$

die Menge aller Ecken von  $G$  die mit keiner Ecke von  $H$  benachbart sind. Wir zeigen, dass  $G[N]$  kantenlos ist. Wäre dem nicht so, so existiert eine Kante  $uv \in E(G[N])$ . Dann kommen beide Ecken nach Definition von  $N$  nicht in  $V(H)$  vor. Also gilt  $u, v \notin V(H)$  und weder  $u$  noch  $v$  ist mit einer Ecke aus  $H$  benachbart. Wir betrachten den Graphen

$$H' = G[V(H) \cup \{u, v\}].$$

Dieser ist ebenfalls ein induzierter Untergraph von  $G$  mit  $|H'| > |H|$ . Da er die disjunkte Vereinigung von  $H$  und einem vollständigen Graphen der Ordnung 2 ist, ist das Spektrum von  $H'$  die Vereinigung des Spektrums von  $H$  und  $(1, -1)$ . Insbesondere ist

$$\lambda_{\min}(H') = \min\{\lambda_{\min}(H), -1\} > -2.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von  $H$ . Also ist  $G[N]$  kantenlos und folglich gilt  $\chi(G[N]) \leq 1$ . Wegen der Subadditivität der chromatischen Zahl und  $|H| \leq \beta(G) \leq q$  gilt dann

$$\chi(G) \leq \chi(G[N]) + \sum_{v \in V(H)} \chi(G[N_v]) \leq 1 + |H|f(p, q - 1) \leq 1 + p \cdot f(p, q - 1).$$

Also folgt aus dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass die Funktion  $f$  eine obere Schranke für  $\chi(G)$  ist. ■

Mit dieser Vorarbeit können wir nun den folgenden Satz beweisen.

**Satz 3.8** *Es gibt eine Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  welche*

$$\chi(G) \leq g(\xi_2(G))$$

*für alle Graphen  $G$  erfüllt.*

**Beweis:** Wir zeigen, dass für alle Graphen  $G$  die Ungleichung  $\beta(G) \leq \xi_2(G)$  erfüllt ist. Dann folgt die Behauptung, indem wir  $g(\xi_2(G)) = f(\xi_2(G), \xi_2(G))$  setzen, wobei  $f$  die Funktion aus 3.7 ist.

Sei also  $\beta(G) = l \in \mathbb{N}$ . Dann existiert ein induzierter Untergraph  $H$  von  $G$  mit  $|H| = l$  und  $\lambda_{\min}(H) = \lambda_l(H) > -2$ . Folglich ist mit Lemma 1.22  $\lambda_l(G) \geq \lambda_l(H) > -2$ , was  $\xi_2(G) \geq l = \beta(G)$  impliziert. ■

**Satz 3.9** *Existiert ein  $d \in \mathbb{N}$ , sodass für alle Graphen  $G$*

$$\chi(G) \leq \xi_d(G)$$

*gilt, so gelten die folgende Aussagen:*

- (a) *Für alle Graphen  $G$  gilt  $\chi(G) \leq \kappa_d(G)$ .*
- (b) *Ist  $H$  ein linearer Hypergraph mit  $|e| \geq d$  für alle  $e \in E(H)$ , so ist  $\chi'(H) \leq |H|$*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst (a). Sei  $G$  ein beliebiger Graph mit  $\chi(G) = k$ . Nach Voraussetzung ist dann  $\chi(G) \leq \xi_d(G)$ , d.h.  $\lambda_k(G) > -d$ . Mit Korollar 3.3 folgt  $\kappa_d(G) \geq k = \chi(G)$ . Damit ist (a) gezeigt.

Wir zeigen nun (b) durch Widerspruch. Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es einen linearen Hypergraphen minimaler Ordnung mit  $|e| \geq d$  für alle  $e \in E(H)$ , für welchen  $\chi'(H) > |H|$ . Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich dem kleinsten Eckengrad.

**Fall 1 :**  $\delta(H) < d$  Dann existiert eine Kante  $e$  von  $H$  vom Grad kleiner als  $d$ . Da  $|e| \geq d$  ist und  $H$  ein linearer Hypergraph ist, gibt es eine Ecke  $v$  von  $H$  welche nur in  $e$  vorkommt. Sei  $H' = H - e$ . Dann ist  $|H'| < |H|$ . Dieser lässt sich auf Grund der Wahl von  $H$  mit  $\chi'(H') \leq |H'|$  Farben färben. Diese Färbung können wir zu einer Färbung von  $H$  mit höchstens  $|H'| + 1 = |H|$  Farben erweitern, indem wir  $e$  mit einer neuen Farbe färben. Dann gilt

$$\chi'(H) \leq \chi'(H') + 1 \leq |H'| + 1 = |H|.$$

Ein Widerspruch zur Wahl von  $H$ .

**Fall 2 :**  $\delta(H) \geq d$  Sei  $G = L(H)$  der Kantengraph von  $H$ . Dann ist  $\delta(G) \geq d$ . Sei  $K^v = G[E_H(v)]$  für alle  $v \in V(G)$ . Sei  $\mathcal{K} = \{K^v \mid v \in V(H)\}$ . Dann ist  $\mathcal{K}$  eine Krauszzerlegung von  $G$  mit  $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ . Damit gilt

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_d(G) \leq |\mathcal{K}| = |H|.$$

Wobei die erste Ungleichung wegen (a) gilt. ■

**Satz 3.10** Sei  $G$  ein Graph mit  $n$  Ecken und  $m$  Kanten. Sei außerdem  $d \in \mathbb{N}$  mit  $\xi_d(G) \leq k$ . Dann gilt:

$$2m \geq \frac{d^2 n(n-k)}{k}.$$

**Beweis:** Es bezeichne  $\lambda = (\lambda_1(G), \lambda_2(G), \dots, \lambda_k(G)) \in \mathbb{R}^k$  den Vektor der ersten  $k$  Eigenwerte von  $G$ . Dann ist  $\lambda_i(G) \leq -d$  für  $i \geq k+1$ , da  $\xi_d(G) \leq k$  ist. Wegen Lemma 1.21(a) gilt dann

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(G) = - \sum_{i=k+1}^n \lambda_i(G) \geq d(n-k).$$

Außerdem folgt folgende Ungleichung aus Lemma 1.21(b):

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(G)^2 = 2m - \sum_{i=k+1}^n \lambda_i(G)^2 \leq 2m - (n-k)d^2.$$

Aus einer Abschätzung der 1- und 2-Norm auf  $\mathbb{R}^k$  folgt außerdem

$$\|\lambda\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \|\lambda\|_1.$$

Damit erhalten wir folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} 2m - (n-k)d^2 &\geq \|\lambda\|_2^2 \\ &\geq \frac{1}{k} \|\lambda\|_1^2 \\ &\geq \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i(G) \right)^2 \\ &\geq \frac{d^2}{k} (n^2 - nk + k^2) \end{aligned}$$

Diese Ungleichung können wir nach  $2m$  umstellen:

$$2m \geq d^2 \frac{n^2 - 2nk + k^2 + nk - k^2}{k} = d^2 \frac{n^2 - nk}{k} = \frac{d^2 n(n-k)}{k} \quad (3.1)$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Damit erhalten wir folgende Aussage über einen Graphen  $G$ : Besitzt  $G$  nur eine geringe Anzahl von Eigenwerten, die größer als  $-d$  sind, so muss  $G$  viele Kanten besitzen. Besitzt ein Graph der Ordnung  $n$ ,  $G$ , zum Beispiel nur einen Eigenwert, welcher größer als  $-1$  ist, so muss  $G$  ein vollständiger Graph sein. Dies erhalten wir, da  $\binom{n}{2}$  eine obere Schranke für die Zahl der Kanten  $m$  eines Graphen ist. Setzen wir in Gleichung (3.1) dann  $d = 1, k = 1$ , so erhalten wir

$$n(n-1) \geq 2m \geq n(n-1).$$

Deswegen muss  $G$  alle möglichen Kanten enthalten.

### 3.2 Schranken für $\kappa_d(G)$

Wir wollen nun einige Schranken für  $\kappa_d(G)$  angeben.

**Lemma 3.11** *Ist  $\delta(G) \geq d$ , so ist  $\kappa_d(G) \leq |E(G)|$ .*

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von Lemma 2.5. ■

**Satz 3.12** *Sei  $G$  ein Graph der Ordnung  $n$  und  $d \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:*

$$\kappa_d(G) \geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d}$$

**Beweis:** Ist  $\kappa_d(G) = \infty$ , so ist nichts zu zeigen. Sei sonst  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  eine Nummerierung der Ecken von  $G$ .

**Fall 1 :**  $\kappa_d(G) \geq n$  Da  $\lambda_1(G) \geq 0$ , gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1(G) + d &\geq d \\ 1 &\geq \frac{d}{\lambda_1(G) + d} \\ \kappa_d(G) &\geq n \geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d} \end{aligned}$$

**Fall 2 :**  $\kappa_d(G) < n$  Sei  $\mathcal{K}$  eine Krauszzerlegung von  $G$  mit  $|\mathcal{K}| = \kappa_d(G)$  und  $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$ .

Seien  $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$ . Wir können annehmen, dass die  $d_i$  fallend geordnet sind. Sei  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  die Adjazenzmatrix von  $\mathcal{K}$  und  $M = BB^T = A + D$ , wobei  $A = A(G)$  und  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Dann ist  $M$  positiv semidefinit und  $\text{rang}(M) \leq p = \kappa_d(G) < n$ . Deswegen ist  $\lambda_{p+1}(M) = \dots \lambda_n(M) = 0$ . Mit Satz 1.12 folgt dann :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i(D) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(D) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(M) = \sum_{i=1}^p \lambda_i(M) \\ &\leq \sum_{i=1}^p \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^p \lambda_i(D) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=p+1}^n \lambda_i(D) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i(A)$$

und wir erhalten

$$(n-p)d \leq (n-p)\lambda_n(D) \leq \sum_{i=p+1}^n \lambda_i(D) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i(A) \leq p\lambda_1(A).$$

Durch Umstellen nach  $p$  erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

### 3.3 Chromatische Zahl und Eigenwerte

Es ist nicht viel über den Zusammenhang der chromatischen Zahl eines Graphen und seinen Eigenwerte bekannt. Wir wollen hier auf zwei Sätze verweisen, die Schranken für die chromatische Zahl eines Graphen in Abhängigkeit des größten bzw. kleinsten Eigenwerts angeben. Eine Abschätzung nach oben gibt Wilf in [40] an.

**Satz 3.13** *Ist  $G$  ein Graph, so gilt:*

$$\chi(G) \leq \lambda_1(G) + 1.$$

*Gleichheit tritt nur auf, falls  $G$  ein vollständiger Graph oder ein ungerader Kreis ist.*

**Beweis:** Wir zeigen, dass  $\lambda_1 + 1$  ein Szekeres-Wilf Parameter ist. Dann folgt die Behauptung wegen Satz 1.3. Sei dazu  $|G| = n \in \mathbb{N}$  und  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Um (S1) zu zeigen, sei  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$ . Dann ist wegen Lemma 1.22  $\lambda_1(H) \leq \lambda_1(G)$  und folglich auch  $\lambda_1(H) + 1 \leq \lambda_1(G) + 1$ . Wir zeigen nun (S2). Für den Rayleigh-Quotienten des Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$ , dessen Komponenten alle gleich 1 sind, gilt dann:

$$R_{A(G)}(x) = \frac{x^T A(G) x}{x^T x} = \frac{x^T (d_G(v_1), d_G(v_2), \dots, d_G(v_n))^T}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_G(v_i).$$

Also ist dieser gleich dem durchschnittlichen Eckengrad. Folglich gilt  $R_{A(G)}(x) \geq \delta(G)$ . Außerdem folgt aus Satz 1.8, dass  $\lambda_1(G) = \lambda_1(A(G)) \geq R_{A(G)}(x)$  ist. Somit ist  $\lambda_1(G) + 1 \geq \delta(G) + 1$ . Damit haben wir (S2) gezeigt. Der Beweis, dass Gleichheit nur für vollständige Graphen oder ungerade Kreise auftritt, ist etwas aufwendiger, wir verweisen deswegen auf die Originalarbeit [40] von Wilf. ■

Eine untere Schranke geht auf Hoffman zurück und findet sich in [22] (man beachte hierbei, dass  $\lambda_{\min}(G)$  negativ ist):

**Satz 3.14** *Ist  $G$  ein Graph, so gilt:*

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}$$

### 3.4 Hájos und Ore Summe

In diesem Abschnitt wollen wir die Klasse der Hájos-konstruierbaren Graphen und die Klasse der Ore-konstruierbaren Graphen untersuchen.

Sei  $G$  ein Graph und  $X$  eine nichtleere Menge von Ecken von  $G$ . Wir erhalten einen neuen Graphen  $G'$  aus  $G$  durch **Identifizierung** von  $X$  mit einer Ecke  $x$ , falls  $G'$  aus  $G - X$  durch hinzufügen der neuen Ecke  $x$  entsteht, welche in  $G'$  mit allen Nachbarn von  $X$  in  $G - X$  benachbart ist.

Seien  $G_1, G_2$  zwei nichtleere disjunkte Graphen und  $x_1y_1 \in E(G_1)$  sowie  $x_2y_2 \in E(G_2)$  zwei beliebige Kanten. Die **Hájós Summe** [20] von  $G_1$  und  $G_2$  (bezüglich  $x_1y_1$  und  $x_2y_2$ ) ist derjenige Graph, der entsteht wenn wir  $G_1$  und  $G_2$  vereinigen, die Kanten  $x_1y_1$  und  $x_2y_2$  entfernen, die Kante  $y_1y_2$  hinzufügen und die Ecken  $x_1$  und  $x_2$  identifizieren. Wir schreiben dann auch  $G = \text{Hájós}(G_1, x_1y_1, G_2, x_2y_2)$  oder kurz  $G = \text{Hájós}(G_1, G_2)$ .

Wir betrachten nun im folgenden für  $k \in \mathbb{N}$  die Graphenklasse  $\mathcal{H}_k$  der  **$k$ -Hájós konstruierbaren Graphen**. Diese ist die kleinste Klasse  $\mathcal{H}_k$  welche folgende drei Eigenschaften erfüllt:

1.  $K_k \in \mathcal{H}_k$ .
2. Sind  $G, H \in \mathcal{H}_k$ , so auch die Hájós Summe von  $G$  und  $H$ .
3. Ist  $G \in \mathcal{H}_k$  und  $u, v \in V(G)$  zwei nicht benachbarte Ecken von  $G$ , dann ist die Identifizierung von  $u$  und  $v$  in  $G$  auch in  $\mathcal{H}_k$ .

Es ist bekannt, dass die Hájós Summe zweier  $k$ -chromatischer Graphen wieder  $k$ -chromatisch ist .

quelle?

**Satz 3.15** Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $d \in \mathbb{N}$ . Seien weiterhin  $G_1$  und  $G_2$  Graphen mit  $k_i \leq \xi_d(G_i)$  für  $i = 1, 2$ . Dann gilt für  $G = \text{Hájós}(G_1, G_2)$ :  $\xi_d(G) \geq k_1 + k_2 - 4$

**Beweis:** Seien  $x_1y_1 \in E(G_1)$  und  $x_2y_2 \in E(G_2)$  die Kanten welche bei der Hájós Summe verwendet werden. Wir setzen

$$H_i = G[V(G_i) \setminus \{x_i, y_i\}]$$

für  $i = 1, 2$ . Dann ist für  $i = 1, 2$  der Graph  $H_i$  sowohl ein induzierter Untergraph von  $G_i$  als auch von  $G$ . Desweiteren gilt  $|H_i| = |G_i| - 2$  für  $i = 1, 2$ . Also folgt aus Lemma 1.22, dass

$$\lambda_{k_i-2}(H_i) \geq \lambda_{k_i}(G_i) > -d$$

für  $i = 1, 2$  richtig ist. Wir betrachten nun den Graphen  $H$ , welcher die disjunkte Vereinigung von  $H_1$  und  $H_2$  ist. Dann ist  $H$  ebenfalls ein induzierter Untergraph von  $G$ . Das

Spektrum von  $H$  ist nach Beispiel 1.17 die Vereinigung der Spektren von  $H_1$  und  $H_2$ . Also gilt  $\xi_d(H) \geq (k_1 - 2) + (k_2 - 2) = k_1 + k_2 - 4$ , da  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ) mindestens  $k_i - 2$  Eigenwerte besitzt, die größer als  $-d$  sind. sowohl  $H_1$  als auch  $H_2$  mindestens  $k - 2$  Eigenwerte besitzen, die größer als  $-d$  sind. Da  $\xi_d$  ein monotoner Graphenparameter ist, gilt auch  $\xi_d(G) \geq k_1 + k_2 - 4$ . ■

Eine weitere, der Hájos Summe ähnliche Konstruktion ist die **Ore Summe** [31]. Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei disjunkte Graphen und  $x_1y_1$  eine Kante von  $G_1$  und  $x_2y_2$  eine Kante von  $G_2$ . Desweiteren seien  $v_1, v_2, \dots, v_t$  unterschiedliche Ecken von  $G_1 \setminus x_1$  und  $u_1, u_2, \dots, u_r$  unterschiedliche Ecken von  $G_2 \setminus x_2$ . Wir konstruieren nun die Ore Summe von  $G_1$  und  $G_2$  aus der Hájos Summe  $\text{Hájos}(G_1, x_1y_1, G_2, x_2y_2)$ , indem wir zusätzlich die Kanten  $v_1u_1, v_2u_2, \dots, v_ru_r$  hinzufügen. Der so entstandene Graph ist dann die Ore Summe von  $G_1$  und  $G_2$ .

Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{O}_k$  die Klasse der **Ore  $k$ -konstruierbaren Graphen** definiert als die kleinste Klasse, welche folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

1.  $K_k \in \mathcal{O}_k$ .
2. Sind  $G, H \in \mathcal{O}_k$ , so auch die Ore Summe von  $G$  und  $H$ .

Wie sich zeigen lässt, gilt dann für alle  $k \in \mathbb{N}$ :  $\mathcal{O}_k = \mathcal{H}_k$ .

### 3.5 Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Gelten die Voraussetzungen von Satz 3.9 für  $d = 2$ , so folgt die Erdős–Faber–Lovász Vermutung auf Grund von Satz 2.7. Im Folgenden wollen wir für einige Graphenklassen folgende Vermutung überprüfen.

**Vermutung 3.16** *Ist  $G$  ein Graph so gilt  $\chi(G) \leq \xi_2(G)$*

**Bemerkung 3.17** *Es reicht Vermutung 3.16 für  $k$ -kritische Graphen zu zeigen.*

**Beweis:** Gelte Vermutung 3.16 für kritische Graphen. Sei  $G$  ein Graph mit  $\chi(G) = k$ . Dann enthält  $G$  einen  $k$ -kritischen Untergraphen  $H$ . Für diesen gilt nach Voraussetzung

$$k = \chi(H) \leq \xi_2(H).$$

Dann ist aber auch

$$k \leq \xi_2(H) \leq \xi_2(G),$$

da  $H$  ein induzierter Untergraph von  $G$  ist. Damit gilt Vermutung 3.16 auch für  $G$ . ■

Seien  $k, r$  zwei natürliche Zahlen mit  $k \geq 2r - 1$ . Der **Kneser Graph**  $K_{k:r}$  geht auf Kneser [29] zurück und ist der Graph mit Eckenmenge

$$V(K_{k:r}) = [\{1, \dots, k\}]^r$$

und Kantenmenge

$$E(K_{k:r}) = \{XY \mid X, Y \in V(K_{k:r}), X \cap Y = \emptyset\}.$$

$K_{k:1}$  ist ein vollständiger Graph der Ordnung  $k$  und  $K_{2r-1:r}$  besitzt keine Kanten. Der Graph  $K_{5:2}$  ist auch als der Petersen Graph bekannt.

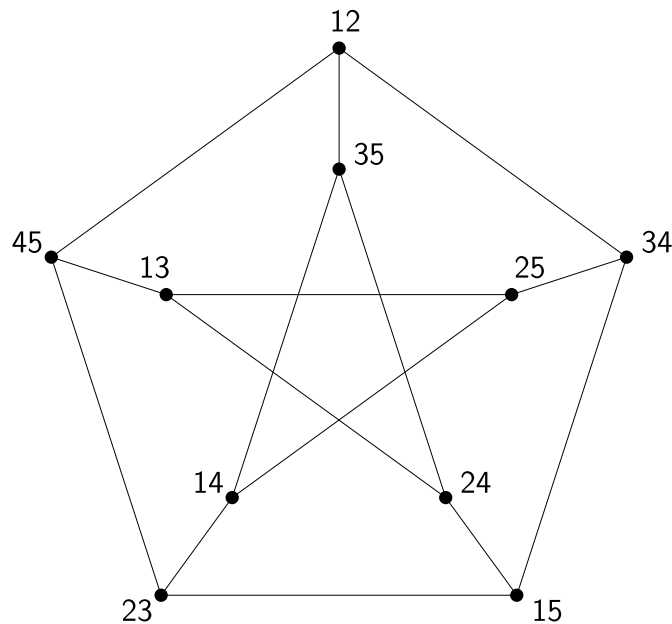


Abbildung 4: Der Petersen Graph

Kneser gibt in [29] eine obere Schranke für die chromatische Zahl der Kneser Graphen an. Später zeigte Lovász, dass diese Schranke immer angenommen wird.

Referenz

**Satz 3.18** Ist  $k \geq 2r - 1$ , so gilt

$$\chi(K_{k:r}) \leq k - 2r + 2$$

Der folgende Satz ist als Satz von Erdős-Ko-Rado [13] bekannt und gibt die Unabhängigkeitszahl eines Kneser Graphen an.



**Satz 3.19** Ist  $k \geq 2r$  und  $r \geq 2$ , so gilt:

$$\alpha(K_{k:r}) = \binom{k-1}{r-1}.$$

Mit den beiden vorangegangenen Sätzen können wir nun einen Satz über die Eigenwerte von Kneser Graphen beweisen.

**Satz 3.20** Seien  $k \geq 2r - 1$ ,  $r \geq 1$  und sei  $G = K_{k:r}$  ein Kneser Graph. Dann gilt  $\chi(G) \leq \xi_2(G)$ .

**Beweis:** Sei  $\chi(G) = k$ . Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich  $r$ .

**Fall 1 :**  $r = 1$  Dann ist  $G = K_{k:1}$  isomorph zu  $K_k$ . Die Eigenwerte des  $K_k$  sind alle größer als  $-2$ , insbesondere also auch  $\lambda_k(G)$ . Folglich ist  $\chi(G) \leq \xi_2(G)$ .

**Fall 2 :**  $k > 2r \geq 4$  Sei  $p = \alpha(G)$ . Dann ist nach Satz 3.19  $p = \binom{k-1}{r-1}$  und folglich  $p \geq k-1$ . Nach Satz 3.18 ist  $\chi(G) = k-2r+2 < k-2$ . Folglich ist  $p > \chi(G)$ . Mit Korollar 1.23 gilt dann

$$\lambda_k(G) \geq \lambda_p(G) \geq 0 > -2.$$

Folglich gilt  $\chi(G) \leq \xi_2(G)$ .

**Fall 3 :**  $k = 2r$  Die Ecken von  $G$  sind alle  $r$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, k\}$ . Da  $k = 2r$  ist für ein  $w \in V(G)$  die einzige benachbarte Ecke ihr Komplement in  $\{1, \dots, k\}$ . Also sind die Komponenten von  $G$  alle isomorph zu  $K_2$ . Dann ist  $\chi(G) = 2$  und  $\omega(G) = 2$ . Aus Lemma 3.2 folgt dann  $\xi_2(G) \geq \omega(G) = \chi(G)$ .

**Fall 4 :**  $k = 2r + 1$  Dann ist  $|E(G)| = 0$  und folglich ist  $G$  ein kantenloser Graph. Also ist  $\alpha(G) = |G|$  und wir erhalten aus Lemma 3.2, dass  $\xi_2(G) \geq \alpha(G)$  gilt. ■

**Satz 3.21** Sei  $G$  ein perfekter Graph. Dann gilt:

$$\chi(G) \leq \xi_2(G)$$

**Beweis:** Da  $G$  ein perfekter Graph ist, gilt  $k = \chi(G) = \omega(G)$ . Mit Lemma 3.2 folgt dann  $\xi_2(G) \geq \omega(G) = \chi(G)$ . ■

**Satz 3.22** Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $|G| \geq 7$ . Dann gilt  $\xi_2(G) \geq 4$ .

**Beweis:** Wir zeigen, dass  $\lambda_4(G) > -2$  gilt. Dann ist  $\xi_2(G) \geq 4$ . Nehmen wir dafür an, dass  $\lambda_4(G) < -2$  gilt. Dann ist  $\xi_2(G) \leq 3$ . Aus Satz 3.10 folgt, dass für die Zahl der Kanten  $m$  von  $G$  gilt:

$$2m \geq \frac{4n(n-3)}{3}.$$

Da  $G$  ein planarer Graph ist, gilt zusätzlich

$$m \leq 3n - 6.$$

Wir erhalten nun durch Umstellen die quadratische Ungleichung

$$-2n^2 + 15n - 18 \geq 0.$$

Lösen dieser Ungleichung ergibt  $\frac{3}{2} \leq n \leq 6$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung  $n \geq 7$ . ■

**Korollar 3.23** *Sei  $G$  ein planarer Graph. Dann gilt  $\chi(G) \leq \xi_2(G)$ .*

**Beweis:** Die Aussage gilt offensichtlich für den leeren Graph, also können wir annehmen, dass  $G$  mindestens eine Ecke besitzt. Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich der chromatischen Zahl  $\chi(G) = k$ . Auf Grund des 4-Farbensatzes reicht es dann die Fälle  $k = 1, 2, 3, 4$  zu betrachten.

**Fall 1 :**  $k = 1$  Dann besitzt  $G$  keine Kanten und mindestens eine Ecke. Deswegen besitzt  $G$  nur den Eigenwert  $\lambda_i = 0$  für  $1 \leq i \leq |G|$ . Also ist  $\xi_2(G) = |G| \geq 1$ .

**Fall 2 :**  $k = 2$  Dann ist  $G$  bipartit und enthält mindestens eine Kante. Insbesondere ist  $\omega(G) = 2$  und wir finden wegen Lemma 3.2  $\xi_2(G) \geq \omega(G) = 2 = \chi(G)$ .

**Fall 3 :**  $k = 3$  Ist  $|G| \geq 7$ , so ist wegen Satz 3.22 nichts zu zeigen. Anderfalls ist  $|G| \leq 6$ . Da  $G$  nicht bipartit ist, besitzt  $G$  nach dem Satz von König einen ungeraden Kreis  $C$  als Untergraphen. Da  $|G| \leq 6$  gilt dann  $|C| = 3$  oder  $|C| = 5$ . Ist  $|C| = 3$ , so ist  $\omega(G) \geq 3$  und die Behauptung folgt mit Lemma 3.2. Anderfalls ist  $|C| = 5$  und wir können annehmen, dass  $G$  dreiecksfrei ist. Wir zeigen, dass  $C$  ein induzierter Untergraph von  $G$  ist. Sei  $C' = G[V(C)]$ . Wir bleibt zu zeigen, dass  $E(C') = E(C)$  ist. Sei  $uv \in E(C') \setminus E(C)$  eine Kante von  $C'$ , welche nicht in  $C$  vorkommt. Dann gibt es eine Ecke  $w$ , für welche  $uw, vw \in E(C)$ , da  $C$  ein Kreis der Ordnung 5 ist. Dann ist aber  $G[\{u, v, w\}]$  ein Dreieck und folglich  $G$  nicht dreiecksfrei, ein Widerspruch. Deswegen ist  $C$  ein induzierter Untergraph und wir finden

$$\xi_2(G) \geq \xi_2(C) = 5 > 3 = \chi(G).$$

**Fall 4 :**  $k = 4$   $G$  enthält nach Satz 1.1 einen 4-kritischen Untergraphen  $G'$ . Ist  $|G'| \geq 7$ , so ist wegen Satz 3.22  $\xi_2(G') \geq 4$ . Mit Lemma 3.2 folgt dann  $\xi_2(G) \geq \xi_2(G') \geq 4 = \chi(G)$ . Ist  $|G'| \leq 6$ , so folgt aus einem Resultat von Toft [37], dass  $G' = K_4$  oder  $G'$  den Kreis  $C_5$  als induzierten Untergraphen enthält. Nun folgt  $\xi_2(G) \geq \xi_2(G') \geq 4 = \chi(G)$ .

Damit ist alles gezeigt. ■

Berge [1, Kapitel 15, Satz 2] zeigte, dass ein Graph  $G$  der Ordnung  $n$  und sein Komplement  $\overline{G}$  stets die Ungleichung  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$  erfüllen. Außerdem bewies Finck [14], dass Gleichheit in dieser Ungleichung nur dann gilt, wenn  $G$  einer der beiden Graphentypen  $F_1$  oder  $F_2$  ist. Diese sind wie folgt definiert: Seien  $n, p$  zwei natürliche Zahlen. Ein Graph  $G$  gehört zum Typ  $F_1(n, p)$ , falls  $G$  aus einer unabhängigen Menge  $O$  der Ordnung  $p$  und einem vollständigen Graphen  $K$  der Ordnung  $n - p + 1$  besteht und es genau eine Ecke gibt, welche sowohl in  $O$  als auch in  $K$  vorkommt. Zwischen  $O$  und  $K$  dürfen Kanten verlaufen.

bessere  
formu-  
lierung

Ein Graph  $G$  gehört zum Typ  $F_2(n, p)$ , falls  $G$  aus einem Kreis  $C = C_5$ , einem vollständigen Graphen  $K = K_{n-p-5}$  und einer unabhängigen Menge  $O = O_p$  besteht. Seien  $v \in V(C), w \in V(K), u \in V(O)$  beliebig. Dann ist  $vw \in E(G), vu \notin E(G)$  und  $uw$  kann, muss aber nicht zu  $E(G)$  gehören.

**Satz 3.24** Sei  $G$  ein Graph der Ordnung  $n$ . Dann gilt  $\xi_2(G) + \xi_2(\overline{G}) \geq n$ .

**Beweis:** Seien  $\xi_2(G) = l$ ,  $A = A(G)$  die Adjazenzmatrix von  $G$  und  $\overline{A} = J - I - A = A(\overline{G})$  die Adjazenzmatrix von  $\overline{G}$ . Ist  $l = n$ , so ist nichts zu zeigen. Wir betrachten also den Fall  $l < n$ . Dann ist  $\lambda_{l+1}(A) \leq -2$ . Zeigen wir  $\xi_2(\overline{G}) \geq n - l$ , so ist die Behauptung bewiesen. Nach Satz 1.8 ist

$$\lambda_{n-l}(\overline{A}) = \max\left\{\min_{x \in V, x \neq 0} R_{\overline{A}}(x) \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ linearer Unterraum, } \dim(V) = n - l\right\}.$$

Ist also  $V$  ein linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - l$ , so gilt

$$\lambda_{n-l}(\overline{A}) \geq \min_{x \in V, x \neq 0} R_{\overline{A}}(x).$$

Außerdem folgt aus Satz 1.8, dass es einen linearen Unterraum  $V$  des  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $n - l$  gibt mit  $\max_{x \in V} R_A(x) = \lambda_{l+1}(A) \leq -2$ . Insbesondere ist also  $R_A(x) \leq -2$  für alle  $x \in V$ . Wir betrachten den Rayleigh Quotienten von  $\overline{A}$  auf diesem Unterraum. Da  $J$  positiv semidefinit ist, gilt für alle  $x \in V$  mit  $x \neq 0$

$$R_{\overline{A}}(x) = R_J(x) - R_I(x) - R_A(x) \geq R_J(x) - 1 + 2 = R_J(x) + 1 \geq 1.$$

Dann ist  $\lambda_{n-l}(\overline{A}) \geq \min_{x \in V} R_{\overline{A}}(x) \geq 1$ . Also ist  $\xi_2(\overline{G}) \geq n - l$ . ■

**Satz 3.25** *Sei  $G$  ein Graph. Dann gilt  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \xi_2(G) + \xi_2(\overline{G})$ .*

**Beweis:** Gilt  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n$ , so ist nach Satz 3.24 nichts mehr zu zeigen. Anderfalls ist  $G$  entweder vom Typ  $F_1$  oder  $F_2$ .

**Fall 1 :**  $G$  ist vom Typ  $F_1(n, p)$  Dann ist  $\omega(G) = n - p + 1$  und  $\omega(\overline{G}) = p$ . Dann folgt mit Lemma 3.2, dass

$$\xi_2(G) + \xi_2(\overline{G}) \geq \omega(G) + \omega(\overline{G}) = n + 1 = \chi(G) + \chi(\overline{G}).$$

**Fall 2 :**  $G$  ist vom Typ  $F_2(n, p)$  Wir betrachten den induzierten Untergraphen  $H = G[V(C) \cup V(O)]$ . Dann ist  $H$  die disjunkte Vereinigung eines kantenlosen Graphen und eines  $C_5$ . Es gilt  $|H| = p + 5$  und aus Beispiel 1.17 sowie Beispiel 1.15 folgt, dass  $\xi_2(H) = |H|$ . Für  $\tilde{H} = \overline{G}(V(C) \cup V(K))$  gilt dann nach dem selben Argument

$$\xi_2(\tilde{H}) = |\tilde{H}| = |V(C)| + |V(K)| = n - p.$$

Dann gilt

$$\xi_2(G) + \xi_2(\overline{G}) \geq \xi_2(H) + \xi_2(\overline{H}) = p + 5 + n - p = n + 5 > n + 1 = \chi(G) + \chi(\overline{G}).$$

Damit ist alles gezeigt. ■

**Korollar 3.26** *Sei  $G$  ein Graph. Dann gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:*

(a)  $\xi_2(G) \geq \chi(G)$ .

(b)  $\xi_2(\overline{G}) \geq \chi(\overline{G})$ .

**Beweis:** Angenommen, beide Aussagen gelten nicht. Dann ist

$$\xi_2(G) + \xi_2(\overline{G}) < \chi(G) + \chi(\overline{G}),$$

im Widerspruch zu Satz 3.25. ■

## Literatur

- [1] BERGE, C. , *Graphs*, Elsevier Science Publishers B.V., North Holland 1991.
- [2] BERGE, C. , *The Theory of Graphs*, Dover 2001.
- [3] BROOKS, R. L. , On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **37** (1941) 194–197.
- [4] CAMERON, P. J., GOETHALS, J. -M., SEIDEL, J. J. und SHULT, E. E. , Line graphs, root systems, and elliptic geometry. *J. Algebra* **43** (1978) 305–327.
- [5] CHUNG, W. und LAWLER, E. , Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász. *Combinatorica* **8** (1988) 293–295.
- [6] COURANT, R. und HILBERT, D. , *Methoden der Mathematischen Physik I*. Springer 1924.
- [7] CVETKOVIĆ; D. M., ROWLINSON, P. und SIMIĆ, S. , *An Introduction to the Theory of Graph Spectra* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979, Academic Press 1980.
- [8] CVETKOVIĆ; D. M., DOOB, M. und SACHS, H. , *Spectra of Graphs: Theory and Application*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979, Academic Press 1980.
- [9] DIESTEL, R. , *Graphentheorie*, Springer 2010.
- [10] ERDŐS, P. , Problems and results in graph theory and combinatorial analysis. *Congr. Numer.* **XV** (1976) 169–192.
- [11] ERDŐS, P. , Problems and results in graph theory and combinatorial analysis. *Graph Theory and Related Topics*, pp. 153–163. Academic Press 1979.
- [12] ERDŐS, P. , On combinatorial problems which I would most like to see solved. *Combinatorica* **1** (1981) 25–42.
- [13] ERDŐS, P., KO, C. und RADO, R. , Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **12** (1961) 313–320.
- [14] FINCK, H.J. , Über die chromatische Zahl eines Graphen und seines Komplements. *Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau* **12** (1966) 243–246.

- [15] FAN, KY, On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35** (1949) 652–655.
- [16] FABER, V. und LOVÁSZ, L., Problem 18, Hypergraph Seminar, Ohio State Univ., 1972. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 411, p. 284. Springer 1974.
- [17] FISCHER, E., Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten. *Monatsh. Phys.* **16** (1905) 234–249.
- [18] FROBENIUS, G., Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. *Sitzber. Akad. Wiss., Phys.-math. Klasse, Berlin* (1912) 456–477.
- [19] GODSIL, C. und ROY, G., *Algebraic Graph Theory*. Graduate Text in Mathematics, Vol. 207, Springer 2001.
- [20] HAJÓS, GY., Über eine Konstruktion nicht  $n$ -färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Natur. Reihe* **10** (1961) 116–117.
- [21] HINDMAN, N., On a Conjecture of Erdős, Faber and Lovász about  $n$  colorings. *Canad. J. Math.* **33** (1981) 563–570.
- [22] HOFFMAN, A., On eigenvalues and colorings. *Graph Theory and its Applications*, pp. 79–91. Academic Press 1970.
- [23] HOFFMAN, A., On graphs whose least eigenvalue exceeds  $-1 - \sqrt{2}$ . *Lin. Alg. Appl.* **16** (1977) 153–165.
- [24] KAHN, J., Coloring nearly-disjoint hypergraphs with  $n + o(n)$  colors. *J. Combin. Theory Ser. A* **59** (1992) 31–39.
- [25] KARP, R. M., Reducibility among combinatorial problems. *Complexity and Computer Computation*, pp. 85–103. Plenum Press 1972.
- [26] KLOTZ, W., Clique Covers and Coloring Problems of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory* **46** (1989) 338–345.
- [27] KÖNIG, D., Über Graphen und ihre Anwendungen auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Math. Ann.* **77** (1916) 453–465.

- [28] KÖNIG, D. , *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*. Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig 1936. Reprinted by Chelsea 1950 and by B. G. Teubner 1986. English translation published by Birkhäuser 1990.
- [29] KNESER, M. , Aufgabe 360. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **58** (2. Abteilung)(1955) 27.
- [30] KRAUSZ, J. , Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les réseaux (Hungarian with French summary). *Mat. Fiz. Lapok* **50** (1943) 75–85.
- [31] ORE, O. , *The Four Colour Problem*. Academic Press, 1967.
- [32] PERRON, O. , Zur Theorie der Matrizen. *Math. Ann.* **64** (1907) 248–263.
- [33] ROMERO, D. und SÁNCHEZ-ARROYO, A. , Advances on the Erdős-Faber-Lovász conjecture. *Combinatorics, Complexity, and Chance: A Tribute to Dominic Welsh*, pp. 285–298. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Oxford University Press 2007.
- [34] SACHS, H. , Über Teiler, Faktoren und charakteristische Polynome von Graphen II. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau* **13** (1967), 405–412.
- [35] STOCKMEYER, L. , Planar 3-colorability is polynomial complete. *ACM SIGACT News* **5** (1973) 19–25.
- [36] SZEKERES, G. und WILF, H. S. , An inequality for the chromatic number of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B* **4** (1968) 1–3.
- [37] TOFT, B. , Critical subgraphs of colour critical graphs. *Discrete Math.* **7** (1974) 377–392.
- [38] VIZING, V. G. , On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph (in Russian). *Diskret. Analiz* **3** (1964) 25–30.
- [39] WEYL, H. , Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. *Math. Ann.* **71** (1912) 441–479.
- [40] WILF, H. S. , The eigenvalues of a graph and its chromatic number. *J. London Math. Soc.* **42** (1967) 330–332.

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

---

Stefan Heyder