TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra

Bachelorarbeit

Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

vorgelegt von : Stefan Heyder

Matrikelnummer : 49070

Betreuer : Prof. Dr. Michael Stiebitz

26. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten, der chromatischen Zahl und den Krauszzerlegungen eines Graphen. Die dafür benötigten Grundlagen werden wir in Kapitel 1 erarbeiten.

1.1 Graphen und Hypergraphen

Die in dieser Arbeit betrachteten Graphen und Hypergraphen sind endlich und haben weder Mehrfachkanten noch Schlingen. Bei den Bezeichnungen richten wir uns im Wesentlichen nach dem Buch von Diestel [8] beziehungsweise dem Buch von Berge [1]. Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der positiven ganzen Zahlen und setzen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für eine Menge V sei die Menge 2^V die Potenzmenge von V und $[V]^p$ mit $p \in \mathbb{N}_0$ die Menge der p-elementigen Teilmengen von V.

Ein **Hypergraph** H ist ein Tupel von zwei Menge, $V(H)$ und $E(H)$. Dabei ist $V(H)$ endlich und $E(H)$ eine Teilmenge von $2^{V(H)}$ mit $|e| \geq 2$ für alle $e \in E(H)$. Die Menge $V(H)$ heißt dann **Eckenmenge** von H und ihre Elemente heißen **Ecken** von H. Die Menge $E(H)$ heißt **Kantenmenge** und ihre Elemente heißen **Kanten**. Ein Hypergraph heißt **linear**, falls zwei verschieden Kanten höchstens eine Ecke gemeinsam haben. Ist $V(H) = \varnothing$, so nennen wir H auch den **leeren Graphen** und schreiben kurz $H = \varnothing$.

Sei H ein Hypergraph. Die **Ordnung** von H ist die Anzahl der Ecken von H, geschrieben $|H|$. Eine Kante e heißt **Hyperkante**, falls $|e| \geq 3$ ist und heißt **gewöhnliche Kante**, falls $|e| = 2$ ist. Für eine gewöhnliche Kante $e = \{u, v\}$ schreiben wir auch kurz $e = uv$ oder $e = vu$. Ist $E(H) \subseteq [V]^p$, so nennen wir H p**-uniform**. Ein **Graph** ist ein 2-uniformer Hypergraph, also ein Hypergraph in dem jede Kante gewöhnlich ist. Eine Ecke v ist **inzident** mit einer Kante e, falls $v \in e$ gilt. Für eine Ecke v von H sei $E_H(v) = \{e \in E(H) \mid v \in e\}$ die Menge aller mit v inzidenten Kanten. Der **Grad** einer Ecke v ist $d_H(v) = |E_H(v)|$. Der **Minimalgrad** (**Maximalgrad**) sei definiert als der kleinste (größte) Grad einer Ecke von H und wird mit $\delta(H)$ ($\Delta(H)$) bezeichnet. Für $H = \varnothing$ setzen wir $\delta(H) = \Delta(H) = 0$. Ist $\delta(H) = \Delta(H) = r$, so heißt H r-regulär.

Ein **Unterhypergraph** von H ist ein Hypergraph H' mit $V(H') \subseteq V(H)$ und $E(H') \subseteq E(H)$. Wir schreiben dann $H' \subseteq H$. Gilt zusätzlich $H' \neq H$, so ist H' ein **echter Unterhypergraph**. Gibt es eine Menge $X \subseteq V(H)$, sodass $V(H') = X$ und $E(H') = E(H) \cap 2^X$ gilt, so ist H' ein **induzierter Unterhypergraph** und wir schreiben $H' = H[X]$ oder

$H' \trianglelefteq H$. Ist $X \subseteq V(H)$, so bezeichne $H - X = H[V(H) \setminus X]$. Ist $X = \{v\}$, so schreiben wir dafür auch $H - v$ statt $H - \{v\}$. Ist $F \subseteq 2^{V(H)}$ eine Menge, so sei $H - F$ der Hypergraph mit Eckenmenge $V(H)$ und Kantenmenge $E(H) \setminus F$ und $H + F$ der Hypergraph mit Eckenemenge $V(H)$ und Kantenmenge $E(H) \cup F$. Ist $F = \{e\}$ so schreiben wir $H \pm e$ anstatt $H \pm \{e\}$.

Eine Menge von Ecken $X \subseteq V(H)$ heißt **unabhängige Menge** von H, falls $E(H[X]) = \varnothing$ gilt. Die **Unabhängigkeitszahl** $\alpha(H)$ ist die Ordnung der größten unabhänigegen Menge von H. Eine Menge von Ecken $X \subseteq V(H)$ heißt **Clique** von H, falls $H[X]$ alle gewöhnlichen Kanten von $[X]^2$ enthält. Die **Cliquenzahl** $\omega(H)$ ist die Ordnung der größten Clique von H.

Sind H, H' zwei Hypergraphen, so heißt eine bijektive Abbildung $f : V(H) \to V(H')$ **Isomorphismus** zwischen H und H', falls für alle Teilmengen $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ von Ecken von $V(H)$ gilt:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \text{ ist Kante von } H \Leftrightarrow \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)\} \text{ ist Kante von } H'.$$

Zwei Hypergraphen H, H' heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus zwischen H und H' gibt.

Für einen Graphen G sei $\overline{G}$ der **Komplementargraph** von G mit $V(\overline{G}) = V(G)$ und $E(\overline{G}) = [V(G)]^2 \setminus E(G)$. Ein Graph G heißt **vollständiger Graph**, falls $E(G) = [V(G)]^2$ gilt. Ist G ein vollständiger Graph der Ordnung n, so schreiben wir auch $G = K_n$. Man beachte hierbei, dass alle vollständigen Graphen der Ordnung n isomorph sind. In diesem Sinne bezeichnen wir mit C_n den **Kreis** der Ordnung n und mit O_n den **kantenlosen Graphen** der Ordnung n (d.h. das Komplement von K_n). Ein Kreis C_n heißt **gerade** beziehungsweise **ungerade**, je nachdem ob seine Ordnung gerade beziehungsweise ungerade ist.

Für einen Hypergraphen H ist $\omega(H)$ die größte Zahl n, sodass H einen vollständigen Graphen der Ordnung n als Untergraphen enthält, und $\alpha(H)$ ist die größte Zahl n, sodass H den kantenlosen Graphen der Ordnung n als induzierten Untergraphen enthält.

1.2 Färbungen von Graphen und Hypergraphen

Das **Färbungsproblem** für Graphen ist ein klassischen Problem aus der Graphentheorie mit vielfältigen Anwendungen in der kombinatorischen Optimierung und anderen Teilgebieten der Mathematik. Beim Färbungsproblem besteht die Aufgabe darin, die Ecken eines Graphen so zu färben, dass durch eine Kante verbundene Ecken verschiedenen Farben erhalten. Dabei sollen natürlich möglichst wenige Farben verwendet werden.

Seien G ein Graph C eine Menge. Eine Abbildung $\varphi : V(G) \to C$ heißt **Färbung** von G, falls für alle Kanten vw von G gilt: $\varphi(v) \neq \varphi(w)$. Ist $|C| = k \in \mathbb{N}_0$, so heißt φ auch **k-Färbung**. Besitzt ein Graph G eine k-Färbung, so heißt G **k-färbbar**. Die kleinste natürliche Zahl k, für die G eine k-Färbung besitzt, bezeichnen wir mit $\chi(G)$, der **chromatischen Zahl** von G. Ist die chromatische Zahl von G gleich k, so wird G auch **k-chromatisch** genannt.

Die Bestimmung der chromatischen Zahl eines Graphen ist ein NP-schweres Optimierungsproblem, wie im Jahre 1972 von Karp [23] gezeigt wurde. Sei φ eine Färbung von G und H ein Untergraph von G. Dann ist $\varphi|_{V(H)}$ eine Färbung von H. Folglich ist die chromatische Zahl ein monotoner Graphenparameter, d.h.

$$H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G).$$

Außerdem ist die chromatische Zahl subadditiv, d.h. sind X, Y zwei Teilmengen von $V(G)$ mit $X \cup Y = V(G)$, so gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G[X]) + \chi(G[Y]).$$

Ist nämlich $\chi(G[X]) = k$ und $\chi(G[Y]) = \ell$, so erhalten wir eine $(k + \ell)$-Färbung von G, indem wir zunächst alle Ecken aus X mit k Farben färben, und dann die verbleibenden Ecken aus $Y \setminus X$ mit höchstens ℓ Farben färben.

Eine Abbildung $\varphi : V(G) \to C$ ist genau dann eine Färbung von G, wenn für alle $c \in C$ das Urbild $\varphi^{-1}(c)$ eine unabhängige Menge in G ist (d.h. keine zwei Ecken von $\varphi^{-1}(c)$ sind durch eine Kante von G verbunden). Diese Urbilder nennen wir **Farbklassen**. Offensichtlich sind die Farbklassen disjunkt und haben höchstens $\alpha(G)$ Ecken. Daraus folgt, dass jede k-Färbung von G die Ungleichung $|G| \leq k\alpha(G)$ erfüllt, und deswegen auch $|G| \leq \chi(G)\alpha(G)$ gilt.

Da jede Ecke eine unabhängige Menge ist, gilt $\chi(G) \leq |G|$. Damit gilt

$$\chi(G) \geq |G| \Leftrightarrow \chi(G) = |G| \Leftrightarrow \alpha(G) \leq 1 \Leftrightarrow G \text{ ist ein vollständiger Graph}$$

Insbesondere gilt somit für $n \in \mathbb{N}_0 : \chi(K_n) = n$. Da χ ein monotoner Graphenparameter ist, ist also

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

Die chromatische Zahl des Graphen G ist die kleinste Zahl k, für die sich $V(G)$ in k viele unabhängige Mengen (die Farbklassen) zerlegen lässt. Deswegen gilt $\chi(G) = 0$ nur, falls $V(G) \neq \varnothing$ ist, d.h. falls G der leere Graph ist. Außerdem ist $\chi(G) \leq 1$ genau dann, wenn G keine Kanten hat, und $\chi(G) \leq 2$ gilt genau dann, wenn G bipartit ist. Nach dem Satz von König [25] ist G genau dann bipartit, wenn G keinen Kreis ungerader Ordnung als Untergraphen besitzt.

Nach Stockmeyer [33] ist für jedes $k \geq 3$ das Entscheidungsproblem ob ein gegebener Graph k-färbbar ist NP-vollständig. Es ist also nicht zu erwarten, dass sich Graphen mit chromatischer Zahl höchstens k für festes $k \geq 3$ einfach charakterisieren lassen.

Bei der Untersuchung des Färbungsproblems für Graphen erweisen sich die kritischen Graphen als ein nützliches Hilfsmittel. Dies liegt vor allem daran, dass sich Färbungsprobleme für Graphen oft auf entsprechende Färbungsprobleme für kritische Graphen zurückführen lassen. Ein Graph G heißt **k-kritisch**, falls $\chi(G) = k$ ist und $\chi(H) < k$ gilt für alle echten induzierten Untergraphen H von G.

Entfernen wir aus einem Graphen G eine Ecke oder Kante, so bleibt die chromatische Zahl gleich oder verringert sich um den Wert 1, d.h. für $t \in V(G) \cup E(G)$ gilt:

$$\chi(G) - 1 \leq \chi(G - t) \leq \chi(G). \tag{1.1}$$

Daraus erhalten wir den folgenden bekannten Satz, wonach die $(k-1)$-färbbaren Graphen durch verbotene k-kritische Untergraphen charakterisiert werden können.

Satz 1.1 *Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\chi(G) \geq k$, genau dann wenn G einen k-kritischen Graphen H als induzierten Untergraphen enthält.*

Beweis: Falls G einen k-kritischen Untergraphen H enthält, so ist $\chi(G) \geq \chi(H) = k$, da χ ein monotoner Graphenparamter ist. Sei also $\chi(G) \geq k$. Da G endliche Ordnung hat, besitzt G einen induzierten Untergraphen G' kleinster Ordnung mit $\chi(G') = k$. Dann ist $\chi(H) < k$ für jeden echten induzierten Untergraphen H von G'. Wegen $\chi(G') \geq k \geq 1$ gibt es eine Ecke v in G'. Dann ist $G' - v$ ein echter induzierter Untergraph von G' und somit ist $\chi(H) < k$. Aus (1.1) folgt dann $\chi(G') = k$. Folglich ist G' ein k-kritischer Graph. ∎

Gegenüber k-chromatischen Graphen haben k-kritische Graphen eine eingeschränkte Struktur. Ein einfaches Beispiel dafür ist das folgende Resultat.

Lemma 1.2 *Ist G ein k-kritischer Graph mit $k \geq 1$, so ist G ein zusammenhängender Graph mit $\delta(G) \geq k - 1$.*

Beweis: Ist G nicht zusammenhängend, so ist jede Komponente von G ein echter induzierter Untergraph. Also besitzt jede Komponente eine $(k-1)$-Färbung. Dann besitzt aber auch G eine $(k-1)$-Färbung, d.h. $\chi(G) \leq k-1$. Das ist aber unmöglich, da G ein k-kritischer Graph ist. Ist $\delta(G) \leq k-2$, so besitzt G eine Ecke v mit $d_G(v) \leq k-2$. Dann ist $G-v$ ein echter induzierter Untergraph von G und besitzt somit eine $(k-1)$-Färbung. Unter den Nachbarn von v kommen höchstens $k-2$ Farben vor und somit können wir eine $(k-1)$-Färbung von $G-v$ zu einer $(k-1)$-Färbung von G erweitern. Dann ist aber $\chi(G) \leq k-1$, was unmöglich ist, da G ein k-kritischer Graph ist. ■

Im Jahr 1968 beschrieben Szekeres und Wilf [34] eine einfache Methode zur Bestimmung von oberen Schranken für die chromatische Zahl. Dazu betrachten wir einen **Graphenparameter** ρ, d.h. eine Abbilung die jedem Graphen G eine reelle Zahl $\rho(G)$ zuordnet, sodass isomorphe Graphen denselben Wert erhalten. Wir nennen ρ einen **Szekeres-Wilf-Parameter**, falls für alle Graphen G und H folgende Bedingungen erfüllt sind:

(S1) Ist $H \trianglelefteq G$, so gilt $\rho(H) \leq \rho(G)$.

(S2) $\rho(H) \geq \delta(H) + 1$

Szekeres und Wilf [34] bewiesen dann folgendes Resultat.

Satz 1.3 (Szekeres,Wilf) *Ist ρ ein Szekeres-Wilf-Paramter, so ist ρ eine obere Schranke für die chromatische Zahl, d.h. für alle Graphen G ist $\chi(G) \leq \rho(G)$.*

Beweis: Ist $G = \varnothing$, so ist $\chi(G) = 0$ und aus (S2) folgt $\rho(G) \geq \delta(G) + 1 = 1$, d.h. $\chi(G) \leq \rho(G)$. Sei nun $G \neq \varnothing$ und sei $k = \chi(G)$. Dann ist $k \geq 1$ und aus Satz 1.1 folgt, dass es einen k-kritischen induzierten Untergraphen H von G gibt. Wegen Lemma 1.2 ist $\delta(H) \geq k-1$. Mit Hilfe von (S1) und (S2) erhalten wir dann:

$$\chi(G) = \chi(H) \leq \delta(H) + 1 \leq \rho(H) \leq \rho(H).$$

Was zu zeigen war. ■

Ein einfaches Beispiel für einen Szekeres-Wilf Paramter ist $\Delta + 1$. Somit gilt für jeden Graphen G die Ungleichung $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Brooks [2] bestimmte im Jahr 1941 die Graphen G mit $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, er bewies folgendes Resultat:

Satz 1.4 (Brooks) *Sei G ein zusammenhängender Graph mit Maximalgrad Δ. Dann gilt*

$$\chi(G) \leq \Delta + 1.$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn G ein vollständiger Graph oder ein ungerader Kreis ist.

Ein weiteres Beispiel für einen Szekeres-Wilf-Paramter ist die **Färbungszahl** $\mathrm{col}(G)$ eines Graphen definiert durch

$$\mathrm{col}(G) = 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$$

Auch dieser Paramter ist somit eine obere Schranke für die chromatische Zahl. Es lässt sich auch leicht zeigen, dass für jeden Szekeres-Wilf Paramter ρ die Ungleichung $\mathrm{col}(G) \leq \rho(G)$ für alle Graphen G gilt.

1.3 Färbungen von Kantengraphen

In diesem Abschnitt betrachten wir das Färbungsproblem für die Klasse der Kantengraphen. Der **Kantengraph** $L(H)$ eines Hyergraphen H ist der Graph mit der Eckenmenge $V(L(H)) = E(H)$ und der Kantenmenge

$$E(L(H)) = \{ee' \mid \{e, e'\} \in [E(H)]^2, e \cap e' \neq \varnothing\}.$$

Zwei verschieden Kanten von H, welche eine Ecke gemeinsam haben heißen adjazent. Für eine Kante e von H sei $d_H(e) = d_{L(H)}(e)$ der **Kantengrad** von e in H. Dieser ist also die Zahl der von e verschiedenen Kanten e' von H, welche mit e adjazent sind. Dann sei $\Delta'(H)$ der **maximale Kantengrad** von H und $\delta'(H)$ der **minimale Kantengrad** von H und wir setzen $\Delta'(H) = \delta'(H) = 0$, falls $E(H) = \varnothing$.

Eine Färbung des Kantengraphen eines Hypergraphen H wird auch **Kantenfärbung** von H genannt. Eine Kantenfärbung ist somit eine Abbildung, die jeder Kante von H eine Farbe zuordnet, sodass adjazente Kanten verschiedene Farben erhalten. Wir bezeichnen dann mit dem **chromatischen Index** $\chi'(H)$ die kleinste natürliche Zahl k, sodass $L(H)$ eine k-Färbung besitzt. Also gilt $\chi'(H) = \chi(L(H))$. Ist v eine Ecke von H, so ist $E_H(v)$ eine Clique von $L(H)$, und folglich gilt $\chi'(H) \geq \Delta(H)$. König zeigte in [26] , dass diese Schranke für bipartite Graphen scharf ist.

Satz 1.5 (König) *Ist G ein bipartiter Graph, so gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Die erste obere Schranke für beliebige Graphen wurde 1964 von Vizing [36] bestimmt.

Satz 1.6 (Vizing) *Sei G ein Graph mit Maximalgrad Δ. Dann gilt $\chi'(G) = \Delta$ oder $\chi'(G) = \Delta + 1$.*

1.4 Eigenwerte von symmetrischen Matrizen

Bevor wir uns den Eigenwerten von Graphen zuwenden, wollen wir den Leser an einige bekannte Tatsachen über symmetrische Matrizen erinnern. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$Ax = \lambda x \tag{1.2}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die (reelle) Eigenwertgleichung von A. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge

$$E_A(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim(E_A(\lambda) \geq 0$. Man nennt dann λ einen **Eigenwert** von A, falls $\dim(E_A(\lambda)) \geq 1$ ist, die Vektoren aus $E_A(\lambda)$ heißen **Eigenvektoren** von A zum Eigenwert λ und $E_A(\lambda)$ ist der zu λ gehörende **Eigenraum** von A. Die Abbildung p_A mit

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

ist ein Polynom aus $\mathbb{R}[\lambda]$ vom Grade n, welches **charakteristisches Polynom** von A genannt wird (dabei ist $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix der Ordnung n). Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0.$$

Da A symmetrisch ist, zerfällt p_A in genau n reelle Linearfaktoren, d.h. p_A hat genau n Nullstellen (gezählt mit ihren Vielfachheiten). Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $m_A(\lambda)$ die Vielfachheit von λ als Nullstelle von p_A. Die Matrix A besitzt somit n reelle Eigenwerte, welche wir monton fallend anordnen können. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\lambda_p(A)$ den p-größten Eigenwert von A, das heißt es gilt

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A).$$

Dann ist $\lambda_{max}(A) = \lambda_1(A)$ der größte Eigenwert von A und $\lambda_{min}(A) = \lambda_n(A)$ ist der kleinste Eigenwert von A. Die Folge

$$\mathrm{sp}(A) = (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A))$$

der Eigenwerte bezeichnet man als das **Spektrum** von A. Diese Bezeichnung geht auf Hilbert zurück. Bekanntlich besitzen zwei symmetrische Matrizen genau dann das gleiche Spektrum, wenn sie zueinander ähnlich sind. Ist λ ein Eigenwert von A so ist $\dim E_A(\lambda) = m_A(\lambda)$. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind stets orthogonal und $\mathbb{R}^n$ ist die direkte Summe der Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten. Insbesondere besitzt der $\mathbb{R}^n$ eine Orthonomalbasis aus lauter Eigenvektoren von A.

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **positiv semidefinit**, falls $x^T Ax \geq 0$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Gilt zusätzlich noch $x^T Ax = 0$ nur für $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ (hat also A vollen Rang), so heißt A **positiv definit**. Wir wollen nun einige Eigenschaften von positiv (semi)definiten Matrizen anführen.

Satz 1.7 *Folgende Aussagen sind für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent:*

(a) *A ist positiv semidefinit.*

(b) *Alle Eigenwerte von A sind nicht negativ.*

(c) *$A = UU^T$ für eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times m}$.*

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist

$$R_A(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

der **Rayleigh-Quotient** von A an der Stelle x. Die Abbildung R_A wurde zuerst von J.W. Rayleigh zur numerischen Berechnung der Eigenwerte von A benutzt. Ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt $R_A(x) = \lambda$. Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist

$$\lambda_{min}(A) \leq R_A(x) \leq \lambda_{max}(A)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die folgende Charakterisierung wurder zuerst in einer Arbeit von Fischer [15] und danach in dem Lehrbuch von Courant und Hilbert [5] erwähnt. In der Literatur wird dieses Resultat daher als Minmax-Prinzip von Courant-Fischer (Courant-Fischer Minmax Theorem) bezeichnet.

Satz 1.8 (Courant-Fischer) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Für den p-größten Eigenwert von A mit $1 \leq p \leq n$ gilt dann:*

(a) $\lambda_p(A) = \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} R_A(x) \mid V \subseteq \mathbb{R}^n$ *linearer Unterraum*, $\dim(V) = p\}$.

(b) $\lambda_p(A) = \min\{\max_{x\in V, x\neq 0} R_A(x) \mid V \subseteq \mathbb{R}^n$ *linearer Unterraum*, $\dim(V) = n - p + 1\}$.

Lemma 1.9 *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $A - B$ positiv semidefinit. Dann ist $\lambda_p(A) \geq \lambda_p(B)$ für alle $1 \leq p \leq n$.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt $x^T(A-B)x \geq 0$, da $A-B$ positiv semidefinit ist. Daraus folgt

$$x^T Ax \geq x^T Bx$$

und folglich ist $\frac{x^T Ax}{x^T x} \geq \frac{x^T Bx}{x^T x}$. Mit Satz 1.8(a) erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\lambda_p(A) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&\geq \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Bx}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \lambda_p(B)
\end{aligned}$$

für $1 \leq p \leq n$. ■

Oftmals interessiert man sich, wie sich die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix verändern, wenn man Zeilen und die korrespondierenden Spalten der Matrix löscht. Die bei diesem Prozess entstehende Matrix ist wieder symmetrisch. Es stellt sich heraus, dass die Eigenwerte der so entstehenden Matrix sich durch die Eigenwerte der ursprünglichen beschränken lassen. Das folgende Resultat geht auf Cauchy zurück, es scheint schwierig eine Originalquelle zu finden.

Satz 1.10 (Interlacing) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und sei $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ die symmetrische Matrix, welche aus A durch Löschen von Zeilen und den entsprechenden Spalten entsteht. Dann ist B symmetrisch, und es gilt:*

$$\lambda_p(A) \geq \lambda_p(B) \geq \lambda_{p+k}(A)$$

für $1 \leq p \leq n-k$.

Beweis: Seien $l_1 < \cdots < l_{n-k}$ die Nummern der Zeilen bzw. Spalten die nicht gelöscht werden. Setze $P = (e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots, e_{l_{n-k}}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$, wobei e_k der k-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ ist. Dann besitzt P vollen Spaltenrang und es gilt $B = P^T AP$. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)}$ ein linearer Unterraum , $x \in V$ beliebig und $y = Px$. Dann ist y ein Vektor aus dem Bild von V unter P, $\operatorname{im} P|_V = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = Px, x \in V\}$ und es gilt $y^T y = x^T P^T Px = x^T x$, da $P^T P = I_{n_k}$ ist. Außerdem ist $\operatorname{im} P|_V$ ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim(\operatorname{im} P|_V) =$

dim(V), da P vollen Spaltenrang besitzt. Mit Satz 1.8(a) folgt für $1 \leq p \leq n-k$:

$$\begin{aligned}
\lambda_p(B) &= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T Bx}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \max\{\min_{x\in V, x\neq 0} \frac{x^T P^T APx}{x^T x} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \max\{\min_{y\in \operatorname{im} P|_V, y\neq 0} \frac{y^T Ay}{y^T y} \mid V \subseteq \mathbb{R}^{(n-k)} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&\leq \max\{\min_{x\in W, x\neq 0} \frac{y^T Ay}{y^T y} \mid W \subseteq \mathbb{R}^{n} \text{ ist linearer Unterraum der Dimension } p\} \\
&= \lambda_p(A)
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die zweite folgt analog bei Betrachtung von $-A$ und $-B$, da $\lambda_p(-A) = -\lambda_{n-p+1}(A)$ ist. ■

Die folgenden Ungleichungen werden später bei der Betrachtung der Eigenwerte von Graphen hilfreich seien. Die Weyl Ungleichungen wurden von [37] bewiesen.

Satz 1.11 (Weyl Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Für alle $1 \leq p \leq n$ gilt dann:*

$$\lambda_p(B) + \lambda_n(C) \leq \lambda_p(A) \leq \lambda_p(B) + \lambda_1(C)$$

Die folgenden Ungleichungen wurden von Fan [13] bewiesen.

Satz 1.12 (Ky Fan Ungleichungen) *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen mit $A = B + C$. Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt dann:*

$$\sum_{p=1}^{k} \lambda_p(A) \leq \sum_{p=1}^{k} \lambda_p(B) + \sum_{p=1}^{k} \lambda_p(C)$$

Für $k = n$ gilt Gleichheit.

1.5 Eigenwerte von Graphen

Sei G ein Graph der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ mit der Eckenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Die **Adjanzenzmatrix** von G ist die Matrix $A(G) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{falls } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Dann ist A symmetrisch und hat folglich nur reelle Eigenwerte. Damit es Sinn ergibt, von den Eigenwerten eines Graphen zu sprechen, dürfen die Eigenwerte von $A(G)$ nicht von der Nummerierung der Ecken abhängen. Das dem so ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 1.13 *Sei G ein Graph. Dann ist das charakteristische Polynom von $A(G)$ unabhängig von der Nummerierung der Ecken von G.*

Beweis: Seien $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ zwei Nummerierungen der Ecken. Seien weiterhin $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_iv_j \in E(G) \\ 0 & \text{falls } v_iv_j \notin E(G) \end{cases} \text{ und } B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_iu_j \in E(G) \\ 0 & \text{falls } u_iu_j \notin E(G). \end{cases}$$

Dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S^n$ sodass $v_{\sigma(i)} = u_i$ ist. Folglich gilt $A_{\sigma(i)\sigma(j)} = B_{ij}$. Sei $P = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}$. Dann ist P eine reguläre Matrix und für die Matrix P^TAP gilt:

$$(P^TAP)_{ij} = e_j^T P^T APe_i = e_{\sigma(j)}^T Ae_{\sigma(i)} = A_{\sigma(i)\sigma(j)} = B_{ij}$$

Also ist $P^TAP = B$. Somit sind A und B ähnlich, und besitzen folglich dasselbe charakteristische Polynom. ■

Für den Graphen G der Ordnung n sei dann $p_G = p_{A(G)}$ das **charakteristische Polynom** von G und $\lambda_p(G) = \lambda_p(A(G))$ der **p-größte Eigenwerte** von G (für $1 \leq p \leq |G|$) und $\mathrm{sp}(G) = \mathrm{sp}(A(G))$ das **Spektrum** von G. Diese Größen sind nach Lemma 1.13 unabhängig von der Nummerierung der Ecken, und somit wohldefiniert. Dies gilt jedoch nicht für die Eigenvektoren. Wir können aber auch eine koordinatenfreie Interpretation für die Eigenvektoren geben. Dazu betrachten wir einen Eigenwert λ von G und einen zugehörigen Eigenvektor x von $A(G)$. Aus der Eigenwertgleichung (1.2) erhalten wir das Gleichungssystem

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} A(G)_{ij} x_j \tag{1.3}$$

für $1 \leq i \leq n$. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ordnet der Ecke v_i den Wert $x_i = x(v_i)$ zu und die Gleichung (1.3) ist äquivalent zu

$$\lambda x(v_i) = \sum_{v_j : v_iv_j \in E(G)} x(v_j). \tag{1.4}$$

Wir betrachten nun den Vektorraum $\mathbb{R}^{V(G)}$ aller Abbildungen $x : V(G) \to \mathbb{R}$. Offenbar ist die Abbildung $x \in \mathbb{R}^{V(G)}$ genau dann ein Eigenvektor von G zum Eigenwert λ, wenn für alle Ecken v von G gilt:

$$\lambda x(v) = \sum_{u:uv \in E(G)} x(u) \tag{1.5}$$

d.h. die Summe der Werte $x(u)$ über die Nachbarn u von v ergibt den Wert $\lambda x(v)$. Es sei dann $E_G(\lambda)$ die Menge aller dieser Abbildungen. Dann ist $E_G(\lambda)$ der **Eigenraum** von G zum Eigenwert λ. Es sei $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{V(G)}$ die **Einsabbildung** mit $\mathbb{1}(v) = 1$ für alle $v \in V(G)$. Für eine Ecke v von G gilt dann

$$d_G(v) = \sum_{u:uv \in E(G)} 1 = \sum_{u:uv \in E(G)} \mathbb{1}(u)$$

und aus Gleichung (1.3) folgt somit für $r \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{1} \in E_G(r) \Leftrightarrow G \text{ ist } r\text{-regulär.} \tag{1.6}$$

Beispiel 1.14 *Für den vollständigen Graphen K_n mit $n \geq 1$ gelten folgenden Aussagen:*

(a) $\mathrm{sp}(K_n) = (n-1, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{n-1 \text{ mal}})$.

(b) $p_{K_n}(\lambda) = (-1)^n(\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}$.

(c) $E_{K_n}(n-1) = [\mathbb{1}]$.

(d) $E_{K_n}(-1) = \{x \in \mathbb{R}^{V(K_n)} \mid x \text{ ist orthogonal zu } \mathbb{1}\}$.

Beweis: Es sei $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix, welche nur 1 als Einträg besitzt (diese werden wir mit 1-Matrix bezeichnen). Dann gilt $A(K_n) = J - I$, wobei $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist. Da $\mathrm{rang}(J) = 1$, ist also -1 ein Eigenwert von G mit Vielfachheit $n-1$. Da K_n $n-1$ regulär ist, ist auch $n-1$ ein Eigenwert von K_n. Damit folgen (a) und (b). Weiterhin gilt (c) wegen Gleichung (1.6). Aus der Orthognalität der Eigenvektoren folgt nun (d). ∎

Beispiel 1.15 *Der Kreis C_n der Ordnung $n \geq 3$ hat die Eigenwerte*

$$\lambda_p(C_n) = 2\cos\left(\frac{2\pi p}{n}\right)$$

für $1 \leq p \leq n$. Man beachte hierbei, dass die Eigenwerte nicht der Größe nach geordnet sind. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sp}(C_3) = \mathrm{sp}(K_3) &= (2, -1, -1) \\
\mathrm{sp}(C_4) &= (2, 0, 0, -2) \\
\mathrm{sp}(C_5) &= (2, \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \tfrac{1}{2}(-\sqrt{5}-1), \tfrac{1}{2}(-\sqrt{5}-1))
\end{aligned}$$

Einen Beweis findet der Leser in [7, 2.1]

Beispiel 1.16 *Für den kantenlosen Graphen O_n der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ ist $A(O_n)$ die Nullmatrix und somit gilt $p_{O_n}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$ und $\lambda_i(O_n) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Beispiel 1.17 *Ist G die disjunkte Vereinigug der nichtleeren Graphen $G_1, G_2, \ldots, G_l$ mit $l \in \mathbb{N}$, so ist*

$$p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda) \cdot p_{G_2}(\lambda) \cdot \ldots \cdot p_{G_l}(\lambda)$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$. Das Spektrum von G ergibt sich somit aus der Vereinigung der Spektren von $G_1, G_2, \ldots, G_l$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$m_G(\lambda) = m_{G_1}(\lambda) + m_{G_2}(\lambda) + \cdots + m_{G_l}(\lambda)$$

Beweis: Wir nummerieren die Ecken von G so, dass für $1 \leq i \leq l-1$ die Ecken von G_i vor den Ecken von G_{i+1} aufgelistet werden. Dann ist

$$A(G) = \operatorname{diag}(A(G_1), A(G_2), \ldots, A(G_l))$$

und somit ist

$$A(G) - \lambda I = \operatorname{diag}(A(G_1) - \lambda I, A(G_2) - \lambda I, \ldots, A(G_l) - \lambda I)$$

wobei I die Einheitsmatrix der passenden Ordnung ist. Dann ist

$$\begin{aligned} p_G(\lambda) &= \det(A(G) - \lambda I) \\ &= \det(A(G_1) - \lambda I) \cdot \det(A(G_2) - \lambda I) \cdot \ldots \cdot \det(A(G_l) - \lambda I) \\ &= p_{G_1}(\lambda) \cdot p_{G_2}(\lambda) \cdot \ldots \cdot p_{G_l}(\lambda) \cdot \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, gilt dann für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$m_G(\lambda) = m_{G_1}(\lambda) + m_{G_2}(\lambda) + \cdots + m_{G_l}(\lambda).$$

Was zu zeigen war. ∎

Ist $G = K_n + K_n$ die disjunkte Vereinigung zweier vollständiger Graphen K_n, so gilt folglich für das Spektrum von G:

$$\operatorname{sp}(G) = (n-1, n-1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{2n-2 \text{ mal}}).$$

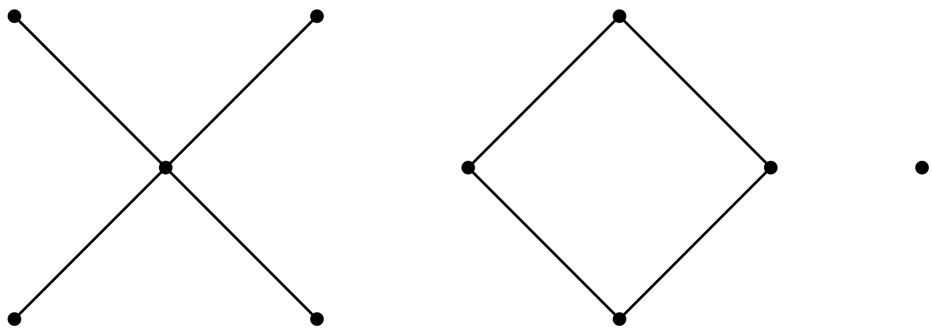

Abbildung 1: Zwei nicht isomorphe Graphen

Insbesondere ist $\lambda_{max}(G) = n - 1$ ein doppelter Eigenwert von G.

Lemma 1.13 impliziert insbesondere, dass isomorphe Graphen dasselbe charakteristische Polynom und somit dasselbe Spetkrum haben. Die Umkehrung gilt hingegen nicht. Dazu betrachten wir die Graphen G und H, wobei $G = K_{1,4}$ ein Stern ist und $H = C_4 + K_1$, die disjunkte Vereinigung von C_4 und K_1 ist (siehe Abbildung 1). Diese sind offenbar nicht Bild neu isomorph. Wir können die Ecken so nummerieren, dass für die Adjazenzmatrizen gilt:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine einfache Rechnung liefert dann

$$p_G(\lambda) = p_H(\lambda) = -\lambda^3(\lambda + 2)(\lambda - 2)$$

und somit

$$\mathrm{sp}(G) = \mathrm{sp}(H) = (2, 0, 0, 0, -2).$$

Die Graphen G und H haben dasselbe Spektrum, sind aber nicht isomorph. Zwei Graphen heißen **isospektral**, falls sie das selbe Spektrum besitzen. Isomoprhe Graphen sind also stets isospektral, aber nicht umgekehrt.

Die Graphentheorie beschäftigt sich mit der Struktur und den Eigenschaften von Graphen. Eine **Grapheneigenschaft** ist eine Klasse von Graphen, die mit jedem Graphen G auch alle dazu isomorphen Graphen enthält. So ist zum Beispiel Zusammenhang (d.h. die Klasse der zusammenhängenden Graphen) eine Grapheneigenschaft. Eine **Spektraleigenschaft von Graphen** ist eine Klasse von Graphen, die mit jedem Graphen G auch alle dazu isospektralen Graphen enthält. Dann ist jede Spektraleigenschaft von Graphen auch eine Grapheneigenschaft, aber nicht umgekehrt. Wie das obige Beispiel isospektraler Graphen $K_{1,4}$ und $C_4 + K_1$ zeigt, ist Zusammenhang keine Spektraleigenschaft.

1.6 Eigenschaften des Graphenspektrums

In diesem Abschnitt wollen wir einige einfache, aber wichtigen Eigenschaften der Spektra von Graphen anführen. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **reduzibel**, falls zwei nichtleere disjunkte Teilmengen X, Y von $\{1, \ldots, n\}$ existieren, mit $X \cup Y = \{1, \ldots, n\}$ und

$$A_{ik} = 0 \ i \in X, k \in Y,$$

anderfalls heißt A **irreduzibel**. Wie man leicht zeigen kann, ist A genau dann reduzibel, wenn man A durch Umordnen der Zeilen und Spalten in folgende Blockform überführen kann:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Ist G ein Graph, so gilt

$$G \text{ ist zusammenhängend} \Leftrightarrow A(G) \text{ ist irreduzibel.}$$

Anfang des vorherigen Jahrhunderts beschäftigten sich Perron [30] und Frobenius [16] mit dem Spektrum von unzerlegbaren Matrizen mit nicht negativen Elementen, insbesondere mit dem **Spektralradius** solcher Matrizen, d.h., ihrem betragsmäßig größtem Eigenwert. Die von ihnen erzielten Ergbnisse, welche als Satz von Perron-Frobenius bekannt sind, spielen in vielen Teilgebieten der Mathematik (Analysis, Numerik, Stochastik, Graphentheorie usw.) eine wichtige Rolle. Der folgende Satz ist ein unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Perron-Frobenius.

Satz 1.18 *Für einen zusammenhängenden Graphen G der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ gelten folgende Aussagen:*

(a) *$\lambda_{max}(G)$ ist ein einfacher Eigenwert mit $\lambda_{max}(G) \leq \Delta(G)$.*

(b) *Es gibt einen Eigenvektor x von G zum Eigenwert $\lambda_{max}(G)$ mit $x(v) > 0$ für alle $v \in V(G)$.*

(c) *Ist x ein Eigenvektor von G zum Eigenwert λ mit $x(v) > 0$ für alle $v \in V(G)$, so ist $\lambda = \lambda_{max}(G)$.*

(d) *Für alle Eigenwerte* λ *von* G *gilt* $|\lambda| \leq \lambda_{max}(G)$.

Korollar 1.19 *Für einen* r*-regulären Graphen* G *der Ordnung* $n \in \mathbb{N}$ *gelten folgende Aussagen:*

(a) $\lambda_{max}(G) = r$.

(b) G *ist genau dann zusammenhängend, wenn* $\lambda_{max}(G)$ *ein einfacher Eigenwert ist.*

Beweis: Es seien $G_1, \ldots, G_l$ die Komponenten von G. Dann ist jede Komponente G_i ein r-regulärer Graph ($1 \leq i \leq l$). Damit folgt aus (1.6), dass $\mathbb{1}$ ein Eigenvektor von G_i zum Eigenwert r ist. Dann ist $\lambda_{max}(G) = r$ und $m_G(r) = l$. Daraus folgt dann sowohl (a) als auch (b). ■

Korollar 1.20 *Ist* G *ein* r*-regulärer Graph der Ordnung* $n \geq 1$, *so gelten folgende Aussagen:*

(a) $\lambda_1(G) = r$ *und* $\lambda_1(\overline{G}) = n - 1 - r$.

(b) $\lambda_i(\overline{G}) = -\lambda_{n-i+1}(G) - 1$ *für* $2 \leq i \leq n$.

Beweis: Aussage (a) folgt aus Korollar 1.19, da der Komplementargraph eines r-regulären Graphen $(n - 1 - r)$-regulär ist. Zum Beweis von (b) wählen wir für G und $\overline{G}$ die selbe Nummerierung der Ecken. Dann ist

$$A(G) + A(\overline{G}) = J - I$$

wobei $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die 1-Matrix ist, und $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist. Wir betrachten $\lambda = \lambda_i(G)$ für $i \geq 2$. Dann existiert ein Eigenvektor x zum Eigenwert λ. Dieser ist orthogonal zu $\mathbb{1} \in E_G(r)$. Folglich ist

$$A(G)x + A(\overline{G})x = Jx - Ix = -x$$

Durch Umstellen erhalten wir $A(\overline{G})x = (-\lambda - 1)x$. Also ist $(-\lambda - 1)$ ein Eigenwert von $\overline{G}$. Analog können wir zeigen, dass für $\lambda = \lambda_i(\overline{G})$ $(i \geq 2)$ $-1 - \lambda$ ein Eigenwert von G ist. ■

Lemma 1.21 *Sei* G *ein Graph der Ordnung* $n \in \mathbb{N}$ *mit* m *Kanten. Dann gilt:*

(a) $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \cdots + \lambda_n(G) = 0$.

(b) $\lambda_1(G)^2 + \lambda_2(G)^2 + \cdots + \lambda_n(G)^2 = 2m$.

Beweis: Wir zeigen zunächst (a). Für die Adjazenzmatrix $A = A(G)$ gilt $\text{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = \text{spur}(A) = 0$ ist.

Um (b) zu beweisen, betrachten wir $B = A^2$. Die Einträge B_{ij} geben die Anzahl aller Kantenfolgen der Länge 2 zwischen den Ecken v_i und v_j an. Insbesondere gilt $B_{ii} = d_G(v_i)$, da jede Kantenfolge der Länge 2 von v_i nach v_i genau einer Kante entspricht. Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G)^2 = \text{spur}(B) = \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2m.$$

Somit gilt (b). ■

Lemma 1.22 *Seien H ein induzierter Untergraph von G und $k = |G| - |H|$. Dann gilt*

$$\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H) \geq \lambda_{p+k}(G)$$

für $1 \leq p \leq n - k$.

Beweis: Ist H ein induzierter Untergraph von G, so entsteht $A(H)$ aus $A(G)$ durch Streichen von Spalten und den korrespondierenden Zeilen. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.10. ■

Korollar 1.23 *Sei G ein Graph mit $\omega(G) = p$ und $\alpha(G) = q$. Dann gilt:*

$$\lambda_p(G) \geq -1 \textit{ und } \lambda_q(G) \geq 0.$$

Beweis: Ist $\omega(G) = p$, so besitzt G einen vollständigen induzierten Untergraphen H, der Ordnung p. Dann gilt $\lambda_1(H) = p - 1$ und $\lambda_i(H) = -1$ für $2 \leq i \leq p$(siehe Beispiel 1.14). Damit folgt aus Korollar 1.22, dass $\lambda_p(G) \geq \lambda_p(H) \geq -1$ ist. Ist $\alpha(G) = q$, so besitzt G einen kantenlosen induzierten Untergraphen H' der Ordnung q. Dann ist $\lambda_i(H') = 0$ für $1 \leq i \leq q$. Also folgt aus Korollar 1.22, dass $\lambda_q(G) \geq \lambda_q(H') = 0$ ist. ■

Wir wollen uns nun noch kurz mit den Eigenwerten von Kantengraphen befassen. Es sei $G = L(H)$ der Kantengraph des Graphs H mit $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und $E(H) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Wir betrachten die Inzidenzmatrix $B = B(H) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit

$$B_i j = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{falls } v_i \notin e_j. \end{cases}$$

Dann erhalten wir die folgenden Beziehungen:

$$A(G) = B^T B - 2I \text{ und } A(H) = BB^T - D,$$

wobei $D = \mathrm{diag}(d_H(v_1), d_H(v_2), \ldots, d_H(v_n)$ die Gradmatrix von H ist. Die Matrizen $B^T B$ und BB^T sind dann positiv semidefinit und folglich sind ihre Eigenwerte nicht negativ (siehe Satz 1.7). Für den p-größten Eigenwert von G gilt somit

$$\lambda_p(G) = \lambda_p(B^T B) - 2 \geq -2,$$

also ist insbesondere $\lambda_{min}(G) \geq -2$. Ist der Graph H kreislos, und damit ein Wald, so ist $\mathrm{rang}(B) = m$ (wie sich leicht durch Induktion nach n zeigen lässt). Dann ist $B^T B$ positiv definit und somit $\lambda_{min}(G) > -2$. Zusammenfassend erhalten wir dann folgendes, wohlbekanntes Resultat (siehe [7, Theorem 6.11]).

einheitlicher rang

Satz 1.24 *Ist $G = L(H)$ der Kantengraph eines Graphen H, so ist $\lambda_{min}(G) \geq -2$. Ist H ein Wald, so ist $\lambda_{min}(G) > -2$.*

Aus der Linearen Algebra weiß man, dass die Matrizen BB^T und $B^T B$ dieselben Eigenwerte mit den selben Vielfachheiten besitzen, mit Ausnahme des Eigenwerts $\lambda = 0$. Es gilt dann

$$\lambda^n p_{B^T B}(\lambda) = \lambda^m p_{BB^T}(\lambda)$$

Die Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda = 0$ hängt nur von dem Rang der Matrix B ab. Ist H zusammenhängend und $n \geq 2$, so kann der Rang von B nur die Werte n oder $n-1$ annehmen, je nachdem ob H bipartit ist oder nicht. Dies wurde zuerst von Sachs [32] gezeigt. Daraus erhält man folgendes Resultat (siehe auch das Buch von Cvetković, Rowlinson und Simić [6, Theorem 2.2.4].

Satz 1.25 *Es sei H ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und m Kanten, wobei $n \geq 2$ ist. Für die Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = -2$ von $G = L(H)$ gilt:*

$$m_G(-2) = \begin{cases} m - n + 1 & \textit{falls } H \textit{ bipartit ist} \\ m - n & \textit{sonst.} \end{cases}$$

In den 1970er Jahren sind verschieden Arten erschienen, die sich mit der Charakterisierung der Graphen G mit $\lambda_{min}(G) \geq -2$ befassen. Zur Geschichte dieses Problems siehe

[6]. Eine erste Teilcharakterisierung dieser Graphenklasse wurde 1977 von Hoffman [21], eine vollständige Charakterisierung wurde 1978 von Cameron, Goethals, Seidel und Shult [3] gefunden.

2 Die Erdős–Faber–Lovász Vermutung

Der Hauptteil dieser Bachelorarbeit befasst sich mit einer neuen Herangehensweise an die Erdős–Faber–Lovász Vermutung. Wir geben zuerst einen kurzen Überblick über die Vermutung und ihr Geschichte und behandeln dann Krauszzerlegungen von Graphen.

2.1 Die Geschichte der Vermutung

Es bezeichne $\mathcal{EG}(n)$ die Klasse aller Graphen welche die Vereinigung von n kantendisjunkten vollständigen Graphen der Ordnung n sind. Für einen Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ gibt es dann Graphen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ mit $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, $G_i = K_n$ für $1 \leq i \leq n$ und $|G_i \cap G_j| \leq 1$ für $1 \leq i < j \leq n$. Dann ist $\omega(G) \geq n$ und somit gilt $\chi(G) \geq n$. Es ergibt sich dann die Frage, ob G eine n-Färbung besitzt.

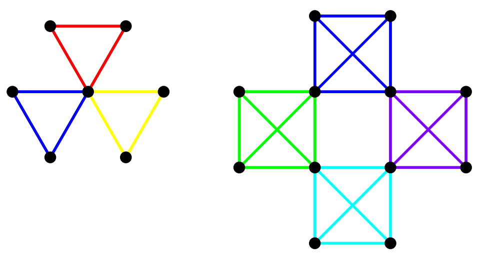

Abbildung 2: Zwei Graphen aus $\mathcal{EG}(3)$ und $\mathcal{EG}(4)$

Vermutung 2.1 (Erdős–Faber–Lovász) *Für jeden Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $\chi(G) \leq n$.*

Die Vermutung wurde 1972 in Ohio von Erdős, Faber und Lovász aufgestellt, als sie über eine Verallgemeinerung der Vizing-Schranke für lineare Hypergraphen nachdachten (siehe [14] und [9]). Bereits sieben Jahre später bot Erdős schon 500 Dollar für die Lösung des Problems [**?**]. Diese Vermutung gehörte zu Erdős drei Lieblingsproblemen (siehe [11]).

Vermutung 2.1 ist äquivalent zu der folgenden Vermutung über lineare Hypergraphen (siehe Satz 2.7):

Vermutung 2.2 (Erdős–Faber–Lovász) *Für jeden linearen Hypergraphen H ist $\chi(H) \leq |H|$.*

Im Folgenden wollen wir einige Resultate zur Vermutung 2.1 anführen. Chung und Lawler [4] bewiesen die folgende obere Schranke für die chromatische Zahl von Graphen aus $\mathcal{EG}(n)$:

Satz 2.3 *Für jeden Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $\chi(G) \leq \frac{3n}{2} - 2$.*

Kahn [22] verbesserte diese obere Schranke, indem er bewies, dass die Vermutung asymptotisch wahr ist.

Satz 2.4 *Für jeden linearen Hypergraphen H ist $\chi(H) \leq |H| + o(|H|)$.*

Es ist außerdem bekannt, das Vermutung 2.1 für $n \leq 10$ gilt, wie Hindman [19] bewies. Weitere Anmerkungen und Resultate finden sich in [31].

2.2 Krauszzerlegungen von Graphen

Die Graphen aus $\mathcal{EG}(n)$ lassen sich alle durch n vollständige Graphen der Ordnung n kantendisjunkt überdecken. Im Folgenden wollen wir ein allgemeineres Konzept betrachten, indem wir nicht fordern, dass alle Graphen der Überdeckung dieselbe Ordnung haben. Diese Art der Überdeckung wurde zuerst von Krausz [28] zur Charakterisierung von Kantengraphen verwendet, daher der Name Krauszzerlegung.

Sei G ein Graph und $\mathcal{K}$ eine Menge Untergraphen von G. Man nennt $\mathcal{K}$ dann eine Krauszzerlegung von G, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(K1) Jeder Graphen $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen mit $|K| \geq 2$.

(K2) Je zwei verschiedenen Graphen K, K' Graphen aus $\mathcal{K}$ sind kantendisjunkt (d.h. $|K \cap K'| \leq 1$).

(K3) $\mathcal{K}$ ist eine Überdeckung von G, d.h. $G = \bigcup\limits_{K \in \mathcal{K}} K$.

Desweiteren sei für $v \in V(G)$ der **Grad** von v bezüglich $\mathcal{K}$ definiert als

$$d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in V(K)\}|.$$

Der **Minimalgrad** von $\mathcal{K}$ ist

$$\delta(\mathcal{K}) = \min_{v \in V(G)} d_{\mathcal{K}}(v)$$

und der **Maximalgrad** von $\mathcal{K}$ ist

$$\Delta(\mathcal{K}) = \max_{v \in V(G)} d_{\mathcal{K}}(v).$$

Krausz [28] beschäftigte sich mit der Frage, welche Graphen Kantengraphen von Graphen sind. Er bewieß, dass ein Graph genau dann ein Kantengraph eines Graphen ist, wenn es eine Krauszzerlegung mit Maximalgrad höchstens 2 besitzt. Ist $G = L(H)$ der Kantengraph des Graphen H, so ist für jede Ecke $v \in V(H)$ die Kantenmenge $E_H(v)$ eine Clique von G und somit ist $K^v = G[E_H(v)]$ ein vollständiger Graph. Für zwei verschiedene Ecken $u, v \in V(H)$ gilt dann:

$$K^u \cap K^v \neq \varnothing \Leftrightarrow uv \in E(H) \Leftrightarrow |K^u \cap K^v| \leq 1.$$

Sind nun $e, e' \in E(H)$ zwei adjazente Kanten von H und somit ee' eine Kante von G, so gibt es eine Ecke $v \in e \cap e'$ und e, e' gehören zu K^v. Also ist $\mathcal{K} = \{K^v \mid v \in V(H)\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $\Delta(\mathcal{K}) \leq 2$.

Für $d \geq 1$ sei $\kappa_d(G)$ die kleinste positive Zahl m derart, dass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ mit $|\mathcal{K}| = m$ und $\delta(\mathcal{K}) \geq d$ besitzt. Existiert keine solche Zahl m, so setzen wir $\kappa_d(G) = \infty$.

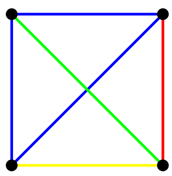

Abbildung 3: Eine Krauszzerlegung des K_4

In Abbildung 3 sehen wir eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ des K_4 (die einzelnen kantendisjunkten Untergraphen sind jeweils mit der selben Farbe markiert). Wir können außerdem erkennen, dass $\delta_G(\mathcal{K}) = 2$, und folglich $\kappa_2(K_4) \leq 4$ (wir werden später sehen, dass stets $\kappa_2(K_n) \geq n$ gilt, und somit $\kappa_2(K_4) = 4$ ist).

Lemma 2.5 *Seien G ein Graph und $d \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $\kappa_d(G) < \infty$, wenn $\delta(G) \geq d$ ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\delta(G) \geq d$ ist, falls $p = \kappa_d(G) < \infty$. Sei $v \in V(G)$ mit $d_G(v) = \delta(G)$. Dann existiert eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \left\{K^1, \ldots, K^p\right\}$ von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Da alle Graphen der Krauszzerlegung kantendisjunkt sind, gilt

$$d \leq \sum_{K \in \mathcal{K}, v \in K} d_K(v) \leq d_G(v) = \delta(v).$$

Dabei gilt die erste Ungleichung, da v in mindestens d der Graphen aus $\mathcal{K}$ vorkommt und in diesen mindestens Grad 1 hat.

Sei nun $\delta(G) \geq d$. Wir müssen zeigen, dass es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ gibt, mit $d_{\mathcal{K}}(v) \geq d$ für alle $v \in V(G)$. Sei $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Nummerierung der Kanten. Sei dann K^i der Graph, welcher nur aus der Kante e_i und den zu e_i inzidenten Kanten besteht. Wir zeigen: $\mathcal{K} = \left\{K^i \mid 1 \leq i \leq m\right\}$ ist eine Krauszzerlegung von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. (K1) ist trivialerweise erfüllt, da alle Graphen von $\mathcal{K}$ isomporph zu K_2 sind. Sind K, K' zwei verschiedene Graphen aus $\mathcal{K}$, so sind sie kantendisjunkt, da ihre einzigen Kanten in G verschieden sind. Also ist auch (K2) erfüllt. Da jede Kante von G in einem $K \in \mathcal{K}$ vorkommt, ist auch (K3) erfüllt. Sei nun v eine Ecke von G. Dann ist

$$d_{\mathcal{K}}(v) = d_G(v) \geq \delta(G) \geq d$$

und folglich auch $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G ist mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Also ist $\kappa_d(G) \leq |\mathcal{K}| < \infty$. ■

Beispiel 2.6 *Sei G ein dreiecksfreier Graph mit Minimalgrad mindestens d. Dann ist $\kappa_d(G) = |E(G)|$, da G keine Dreiecke enthält und somit jeder Graph einer Krauszzerlegung von G isomorph zu K_2 sein muss.*

Wir werden nun einen Zusammenhang zwischen Krauszzerlegungen und der Erdős Faber Lovász Vermutung herstellen.

Satz 2.7 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $G \in \mathcal{EG}(p)$ gilt $\chi(G) = p$.*

(b) *Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.*

(c) *Für alle linearen Hypergraphen H gilt $\chi'(H) \leq |H|$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass (b) aus (a) folgt. Sei G ein Graph der Ordnung n. Ist $\kappa_2(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist $\kappa_2(G) = p$. Dann existiert eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \left\{K^1, \ldots K^p\right\}$ von G mit $\delta(\mathcal{K}) \geq 2$. Ist $p \geq n$, so gilt:

$$\chi(G) \leq n \leq p = \kappa_2(G).$$

Ist andererseits $p < n$, so ist $|K^i| \leq \omega(G) \leq \kappa_2(G) = p$ für alle $1 \leq i \leq p$ (die letzte Ungleichung wird später in Korollar 3.6 gezeigt). Damit können wir für $1 \leq i \leq p$ jeden K^i durch Hinzufügen von Ecken und Kanten zu einem vollständigen Graphen vom Grad

p aufblähen. Den so enstehenden Graphen nennen wir G'. Dann ist G ein Untergraph von G' und $G' \in \mathcal{EG}(p)$. Damit gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G') = p = \kappa_2(G)$$

Also folgt (b) aus (a).

Um zu zeigen, dass (a) aus (b) folgt, sei $G \in \mathcal{EG}(p)$ mit $p \in \mathbb{N}$. Dann ist G die kantendisjunkte Vereinigung von p vollständigen Graphen der Ordnung p, welche wir mit $K^1, \ldots, K^p$ bezeichnen wollen. Nun entfernen wir wiederholt Ecken aus G, deren aktueller Grad kleiner als p ist solange, bis keine Ecken vom Grad kleiner als p existieren. Den daraus resultierenden (möglicherweise leeren) Graphen nennen wir H. Gelingt es, H mit p Farben zu färben, so können wir diese Färbung schrittweise zu einer Färbung von G erweitern, indem wir die entfernten Ecken in umgekehrter Reihenfolge färben. Dies ist mit p Farben möglich, da jede zu färbende Ecke höchstens $p-1$ bereits gefärbte Nachbarn besitzt. Somit reicht es zu zeigen, das $\chi(H) \leq p$. Ist $V(H) = \varnothing$, so gilt dies trivialerweise. Andernfalls gilt nach Konstruktion $\delta(H) \geq p$. Sei $\hat{K}^i = K^i \cap H$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $\hat{K}^i$ ein vollständiger Graph für alle i. Wähle $\mathcal{K} = \left\{\hat{K}^i \mid |\hat{K}^i| \geq 2, 1 \leq i \leq n\right\}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von H mit $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$ ist. Die Bedingung (K1) ist offensichtlich erfüllt. Da in G die K^i kantendisjunkt sind, sind die $\hat{K}^i$ in H ebenfalls kantendisjunkt, da H ein Untergraph von G ist. Folglich ist die Bedingung (K2) ebenfalls erfüllt. Sei $v \in V(H)$. Dann ist $d_H(v) \geq p$, und somit gilt $d_G(v) \geq d_H(v) \geq p$. Die Ecke v ist in mindestens zwei vollständigen Graphen K und K' aus der Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ enthalten. Ansonsten wäre v nur in einem vollständigen Graphen $K \in \mathcal{K}$ enthalten und somit wäre $d_H(v) = d_K(v) \leq p-1$, was unmöglich ist. Folglich ist $d_{\mathcal{K}}(v) \geq 2$ für alle $v \in V(H)$. Also ist $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung mit $\delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$, und wegen (b) folgt dann:

$$\chi(H) \leq \kappa_2(H) \leq |\mathcal{K}| \leq p.$$

Also lässt sich H mit p Farben färben, und wir können wie oben beschrieben G ebenfalls mit p Farben färben. Also ist $\chi(G) \leq p$. Damit ist die Äquivalenz von (a) und (b) gezeigt.

Es bleibt die Äquivalenz von (b) und (c) zu zeigen. Zunächst zeigen wir, dass (b) aus (c) folgt. Dazu betrachten wir einen beliebigen Graphen G und zeigen, dass $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$ gilt. Ist $\kappa_2(G) = \infty$, so ist (b) trivialerweise erfüllt. Andernfalls ist $\kappa_2(G) = p < \infty$ und es gibt eine Krauszzerlegung $\mathcal{K} = \left\{K^1, \ldots, K^p\right\}$ von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$. Für $v \in V(G)$ definiere e_v als die Menge aller $K \in \mathcal{K}$, welche v enthalten. Auf Grund der Wahl der Krauszzerlegung gilt $|e_v| = d_{\mathcal{K}}(v) \geq \delta_H(\mathcal{K}) \geq 2$ für alle $v \in V(G)$. Sei H der Hypergraph mit Eckenmenge $\mathcal{K}$ und Kantenmenge $\{e_v \mid v \in V(G)\}$. Wir betrachten $\pi : V(G) \mapsto E(H)$ mit $\pi(v) = e_v$, diese ist offensichtlich surjektiv. Wir zeigen, dass π bijektiv ist. Wäre dem nicht so, so gäbe es zwei unterschiedliche Ecken v, w mit $e_v = e_w$. Da $|e_v| \geq 2$ ist, wäre dann die Kante vw in zwei Graphen von $\mathcal{K}$ enthalten, was der Bedingung (K2) widerspräche. Also ist π bijektiv. Wir zeigen nun, dass H ein linear Hypergraph ist. Seien dazu e_v, e_w zwei unterschiedliche Kanten von H. Angenommen $|e_v \cap e_w| \geq 2$. Dann existieren mindestens zwei Graphen $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $v, w \in K, K'$. Da K, K' aus der Krauszerlegung sind, ist die Kante vw sowohl in K als auch in K' vorhanden. Dies ist aber ein Widerspruch zu Eigenschaft (K2) einer Krauszzerlegung. Folglich ist $|e_v \cap e_w| \leq 1$, also ist H linear. Dann folgt aus der Vorraussetzung (c), dass $\chi'(H) \leq |H| = \kappa_2(G)$ ist. Somit finden wir eine Färbung $\phi : E(H) \mapsto \{1, \ldots, p\}$ der Kanten von H. Sei dann $\varphi = \phi \circ \pi$. Wir zeigen, dass f eine Färbung der Ecken von G ist. Dazu betrachten wir eine Kante $vw \in E(G)$. Dann existiert ein $K \in \mathcal{K}$ mit $vw \in E(K)$. Also ist $e_v \cap e_w \neq \varnothing$ und folglich

$$\varphi(v) = \phi(e_v) \neq \phi(e_w) = \varphi(w).$$

Also ist φ ein p-Färbung von G. Das heißt

$$\chi(G) \leq p = \kappa_2(G).$$

Also folgt (b) aus (c).

Dass (c) aus (b) folgt, zeigen wir durch Widerspruch. Gelte (b) und sei H ein linearer Hypergraph minimaler Ordnung welcher (c) nicht erfüllt (d.h. ist H' ein weiterer linearer Hypergraph mit $|H'| < |H|$, so ist $\chi'(H') \leq |H'|$). Ist $\delta(H) \leq 1$, so können wir aus H eine Ecke v mit $d_H(v) \leq 1$ entfernen. Für den Hypergraphen $H' = H - v$ gilt dann $\chi'(H') \leq |H'| = |H| - 1$. Da v in höchstens einer Kante von H enthalten ist, lässt sich die Färbung von H' zu einer $\chi'(H) + 1$-Färbung von H erweitern. Folglich gilt also:

$$\chi'(H) \leq \chi'(H') + 1 \leq |H'| + 1 = |H|$$

Dies steht im Widerspruch zur Wahl von H. Also ist $\delta(H) \geq 2$. Sei $G = L(H)$ der Kantengraph von H und $K^v = G[E_H(v)]$ für $v \in V(G)$. Wir zeigen, dass die Menge $\mathcal{K} = \{K^v \mid v \in V(H)\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$ ist. Sei also $K \in \mathcal{K}$ beliebig. Dann gibt es eine Ecke $v \in V(H)$ mit $K = K^v = G[E_H(v)]$. Seien weiterhin $e, e' \in E_H(v)$ unterschiedliche Kanten. Da H ein linearer Hypergraph ist, ist $e \cap e' = \{v\}$

und deswegen $ee' \in E(K^v)$. Also ist K^v ein vollständiger Graph. Außerdem ist

$$|K^v| = |E_H(v)| = d_H(v) \geq \delta(H) \geq 2$$

Also erfüllt $\mathcal{K}$ die Bedingung (K1). Seien nun K^v, K^w zwei verschiedene vollständige Graphen aus $\mathcal{K}$. Wir müssen zeigen, dass diese keine Kante in G gemeinsam haben. Angenommen, es gäbe eine solche Kante $ee' \in E(G)$. Dann wäre $v, w \in e \cap e'$. Ein Widerspruch, da H ein linearer Hypergraph ist. Also erfüllt $\mathcal{K}$ (K2). Sei $ee' \in E(G)$. Folglich ist $e \cap e' \neq \varnothing$ und es existiert eine Ecke v von H mit $e \cap e' = \{v\}$ (da H ein linearer Hypergraph ist). Damit sind $e, e' \in V(K^v)$. Da K^v ein vollständiger Graph ist, ist $ee' \in E(K^v)$. Also erfüllt $\mathcal{K}$ die Bedingung (K3). Es bleibt zu zeigen, dass $\delta_G(\mathcal{K}) \geq 2$ ist. Sei dazu $e \in V(G)$ beliebig. Da wir H schlingenlos ist, existieren zwei unterschiedliche Ecken $v, w \in e$. Also ist $e \in K^v$ und $e \in K^w$. Diese beiden vollständigen Graphen sind unterschiedlich, da sonst v und w in zwei Kanten enthalten sind, welche nicht gleich sein können, da H ein linearer Hypergraph ist. Damit ist

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_2(G) \leq |\mathcal{K}| = |H|$$

Ein Widerspruch zur Annahme $\chi'(H) > |H|$. ■

3 Spektraleigenschaften von Graphen

In diesem Kapitel wollen wir die in Abschnitt 1.4 behandelten Themen weiter vertiefen. Insbesondere werden wir einen Zusammenhang zwischen Krauszzerlegungen und den Eigenwerten eines Graphen herstellen. Da spezielle Krauszzerlegungen von Graphen (nämlich diejenigen mit Minimalgrad ≥ 2) in Zusammenhang mit Vermutung 2.1 stehen, werden wir hier eine alternative Herangehensweise an die Vermutung finden.

3.1 Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Satz 3.1 *Seien G ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathcal{K} = \{K^1, \ldots, K^p\}$ eine Krauszzerlegung von G mit $d(\mathcal{K}) \geq d \geq 2$. Desweiteren sei $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$ für $1 \leq i \leq n$. Dabei wählen wir die Eckennummerierung so, dass $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ ist. Dann gelten folgende Aussagen :*

(a) $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ *für $i = 1, \ldots, n$.*

(b) $\lambda_{p+1}(G) \leq -d$ *falls $p < n$ ist.*

Beweis: Zunächst zeigen wir (a). Es sei A die Adjazenzmatrix von G und $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Definiere $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ als die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$, also

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \in K^j \\ 0 & \text{falls } v_i \notin K^j \end{cases}$$

Nun betrachten wir $M = BB^T$. Es gilt

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik} B_{kj}^T = \sum_{k=1}^{m} B_{ik} Bjk$$

Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Da B die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$ ist, gilt

$$B_{ik} = 1 \text{ und } B_{jk} = 1 \Leftrightarrow v_i, v_j \in K^k.$$

Ist $v_iv_j \in E(G)$, so kommt die Kante v_iv_j in genau einem $K \in \mathcal{K}$ vor, d.h. es gibt genau ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ für das B_{ik} und B_{jk} gleich 1 sind. Ist $v_iv_j \notin E(G)$, so kommt die Kante v_iv_j auch nicht in einem der Graphen der Krauszzerlegung vor. Also ist für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$ $B_{ik}B_{jk} = 0$. Folglich ist $M_{ij} = 1$ genau dann, wenn $v_iv_j \in G$. Also ist $M_{ij} = A_{ij}$.

Sei nun $i \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Wir betrachten M_{ii}. Es gilt

$$M_{ii} = \sum_{k=1}^{d} B_{ik} B_{ik} = \sum_{k=1}^{d} B_{ik}.$$

$B_{ik} = 1$ gilt genau dann, wenn $v_i \in K^k$. Folglich ist $M_{ii} = d_{\mathcal{K}}(v_i) = d_i$. Damit gilt $M = A + D$. $M = BB^T$ ist nach Satz 1.7 positiv semidefinit. Folglich ist $A - (-D)$ positiv semidefinit, und es folgt mit Lemma 1.9, dass

$$\lambda_i(G) = \lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -d_{n-i+1}$$

Damit ist (a) gezeigt.

Nun zeigen wir (b). Sei $p < n$. Dann ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p$. Also ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$ und es folgt mit Satz 1.11 dass

$$\lambda_{p+1}(A) + d \leq \lambda_{p+1}(A) + d_n = \lambda_{p+1}(A) + \lambda_n(D) \leq \lambda_{p+1}(M) = 0$$

Durch Umstellen erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ■

Wir wollen nun eine Folge von Graphenparametern definieren. Seien dazu $d \geq 1$ und G ein Graph. Wir bezeichnen mit ξ_d die Anzahl aller Eigenwerte von G, welche echt größer als $-d$ sind. Damit ist also

$$\xi_d(G) = \max\{i \mid \lambda_i > -d\}.$$

Ist $G = \varnothing$, so setzen wir $\xi_d(G) = 0$ für alle $d \in \mathbb{N}$. Dieser ist ein Graphenparamter, da nach Lemma 1.13 isomorphe Graphen das selbe Spektrum besitzen, und somit ξ_d zwei isomorphen Graphen die selbe natürliche Zahl zuordnet.

Lemma 3.2 *Seien G ein Graph und $d \in \mathbb{N}$. Dann gelten für den Graphenparameter ξ_d folgende Aussagen:*

(a) *Ist H ein induzierter Untergraph von G, so gilt $\xi_d(H) \leq \xi_d(G)$.*

(b) *Ist $d \geq 2$, so gilt $\omega(G) \leq \xi_d(G)$.*

(c) $\alpha(G) \leq \xi_d(G)$.

(d) *Ist $v \in V(G)$ eine Ecke von G, so gilt $\xi_d(G) \leq \xi_d(G - v) + 1$.*

(e) *Ist $d' \in \mathbb{N}$ mit $d \leq d'$, so gilt $\xi_d(G) \leq \xi_{d'}(G)$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst (a). Sei $\xi_d(H) = l$. Folglich ist $\lambda_l(H) > -d$, und wir erhalten mit Lemma 1.22, dass $\lambda_l(G) \geq \lambda_l(H) > -d$ gilt. Deswegen ist $\xi_d(G) \geq l = \xi_d(H)$. Also gilt (a).

Um (b) und (c) zu zeigen, seien $p = \omega(G)$ und $q = \alpha(G)$. Nach Korollar 1.23 ist dann $\lambda_p(G) \geq -1$ und $\lambda_q(G) \geq 0$ und deswegen $\xi_d(G) \geq p = \omega(G)$ für $d \geq 2$ und $\xi_d(G) \geq q = \alpha(G)$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

Für den Beweis von (d) wählen wir eine beliebige Ecke $v \in V(G)$ von G. Dann ist $G-v$ ein induzierter Untergraph der Ordnung $|G|-1$. Sei $l = \xi_d(G-v)$. Ist $l = |G|-1$, so ist nichts zu zeigen, da $\xi_d(G)$ nach oben durch $|G|$ beschränkt ist. Andernfalls ist $l < |G|-1$. Dann ist $\lambda_l(G-v) > -d$ und $\lambda_{l+1}(G-v) \leq -d$. Nun folgt mit Lemma 1.22, dass

$$\lambda_{l+2}(G) \leq \lambda_{l+1}(G-v) \leq -d$$

richtig ist. Deswegen ist $\xi_d(G) \leq l+1 = \xi_l(G-v)+1$.

Aussage (e) gilt, da die Eigenwerte eines Graphen fallend geordnet sind. ■

Mit Satz 3.1 erhalten wir sofort Aussagen über Krauszzerlegungen von G, falls G bestimmte Untergraphen enthält.

Korollar 3.3 *Seien G ein Graph und H ein induzierter Untergraph von G. Desweiteren seien $q, d \in \mathbb{N}$ mit $\xi_d(H) \geq q$. Dann ist $\kappa_d(G) \geq q$.*

Beweis: Da H ein induzierter Untergraph von G ist, folgt aus Lemma 3.2, dass $\xi_d(G) \geq q$ gilt. Also ist $\lambda_q(G) > -d$. Angenommen es gilt $p = \kappa_d(G) < q$. Dann gibt es eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ von G mit $|\mathcal{K}| = p$ und $\delta(\mathcal{K}) \geq d$. Aus Satz 3.1 folgt, dass $\lambda_q(G) \leq \lambda_{p+1}(G) \leq -d$ gilt. Dann ist aber auch $\xi_d(G) < q$ und wir erhalten einen Widerspruch. Folglich ist $\kappa_2(G) \geq q$. ■

Korollar 3.4 *Seien G ein Graph und H ein induzierter Untergraph von G. Ist H Kantengraph eines Waldes, so gilt $\kappa_2(G) \geq |H|$.*

Beweis: Ist $\delta(G) \leq 1$, so ist nichts zu zeigen, da dann mit 2.5 folgt, dass $\kappa_2(G) = \infty$ richtig ist.

Sei sonst $q = |H|$. Da H Kantengraph eines Waldes ist, folgt $\lambda_q(H) > -2$ aus Korollar 1.24. Also ist $\xi_2(H) = |H|$. Dann ist mit Korollar 3.3 $\kappa_2(G) \geq |H|$. ■

Der folgende Korollar wurde bereits von Klotz [24] gezeigt. Wir erhalten über die Krauszzerlegung und Korollar 3.4 jedoch einen eleganten Beweis.

Korollar 3.5 (Klotz) $\kappa_2(K_n) \geq n$

Beweis: K_n ist der Kantengraph von $K_{1,n}$. Nun folgt die Behauptung aus Korollar 3.4.

Einen zweiten Beweis erhalten wir durch Betrachten der Eigenwerte von K_n. Nach Lemma 3.2 gilt $n = \omega(K_n) \leq \xi_2(K_n)$. Somit folgt die Behauptung aus Korollar 3.3. ∎

Korollar 3.6 *Ist $\delta(G) \geq 2$, so gilt $\omega(G) \leq \kappa_2(G)$ und $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$.*

Beweis: Sei $p = \omega(G)$. Dann gilt nach Korollar 1.23 $\lambda_p(G) \geq -1 > -2$. Damit sind für $d = 2$ die Voraussetzungen von Korollar 3.3 erfüllt, und es gilt folglich $\kappa_2(G) \geq p = \omega(G)$. Für $q = \alpha(G)$ gilt mit Korollar 1.23 $\lambda_q(G) \geq 0 > -2$. Damit folgt $\alpha(G) \leq \kappa_2(G)$. ∎

Um die Erdős-Faber-Lovász Vermutung zu beweisen, reicht es aus zu zeigen, dass jeder Graph

$$\chi(G) \leq \xi_2(G)$$

erfüllt. Dann gilt mit Korollar 3.3

$$\chi(G) \leq \kappa_2(G),$$

woraus mit Satz 3.9 dann Vermutung 2.1 folgt.

Eine Möglichkeit dies zu zeigen, wäre zu beweisen, dass ξ_2 ein Szekeres-Wilf-Paramter ist. Die Eigenschaft (S1) ist nach den obigen Überlgungen erfüllt. Berechnungen in Maple zeigen jedoch, dass Eigenschaft (S2) nicht immer erfüllt ist.

ausführlicher? mit Beispiel?

Es ist jedoch möglich die chromatische Zahl durch eine Funktion von ξ_2 nach oben zu beschränken, wie der folgende Satz zeigt. Dazu benötigen wir einen weiteren Parameter, β, welcher für einen Graphen G wie folgt definiert ist:

$$\beta(G) = \max\{|H| \mid H \trianglelefteq G, \lambda_{min}(H) > -2\}.$$

Lemma 3.7 *Ist G ein Graph mit $\beta(G) \leq p$ und $\omega(G) \leq q$, so existiert eine Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ für die $\chi(G) \leq f(p, q)$ gilt.*

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach $\omega(G)$. Sei also $\beta(G) \leq p$ für $p \in \mathbb{N}$. Ist $\omega(G) \leq 1$, so ist $\chi(G) \leq 1$ und wir können $f(p, 1) = 1$ wählen.

Sei nun $\omega(G) \leq q$ mit $q \geq 2$ und gelte für alle Graphen H mit $\omega(H) \leq q - 1$, dass $\chi(H) \leq f(p, q-1)$ für alle $p \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Ist $\omega(G) \leq q - 1$, so folgt die Aussage durch die Induktionsvoraussetzung. Andernfalls ist $\omega(G) = q$ und $\beta(G) = l \leq p$. Dann gibt es einen induzierten Untergraphen H von G, sodass $|H| = l$ und $\lambda_{min}(H) > -2$. Für $v \in V(H)$ sei $N_v = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$, die Menge der Nachbarn von v in G. Dann ist $\omega(G[N_v]) \leq \omega(G) - 1$, da sonst $G[N_v \cup \{v\}]$ einen vollständiger Graphen der Ordnung $p+1$ enthält, was nicht möglich ist, da $\omega(G) \leq p$ ist. Außerdem gilt $\beta(G[N_v]) \leq \beta(G)$, da jeder induzierte Untergraph von $G[N_v]$ wieder ein induzierter Untergraph von G ist. Wegen der Induktionsvorraussetzung folgt dann, dass $\chi(G[N_v]) \leq f(p, q-1)$ richtig ist. Wir wählen

$$N = V(G) \setminus \cup \bigcup_{v \in V(H)} N_v,$$

die Menge aller Ecken von G die mit keiner Ecke von H benachbart sind. Wir zeigen, dass $G[N]$ kantenlos ist. Wäre dem nicht so, so existiert eine Kante $uv \in E(G[N])$. Dann kommen beide Ecken nach Definition von N nicht in $V(H)$ vor. Also gilt $u, v \notin V(H)$ und weder u noch v ist mit einer Ecke aus H benachbart. Wir betrachten den Graphen

$$H' = G[V(H) \cup \{u, v\}].$$

Dieser ist ebenfalls ein induzierter Untergraph von G mit $|H'| > |H|$. Da er die disjunkte Vereinigung von H und einem vollständigen Graphen der Ordnung 2 ist, ist das Spektrum von H' die Vereinigung des Spektrums von H und $(1, -1)$. Insbesondere ist

$$\lambda_{min}(H') = \min\{\lambda_{min}(H), -1\} > -2.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von H. Also ist $G[N]$ kantenlos, und folglich gilt $\chi(G[N]) \leq 1$. Wegen der Subadditivität der chromatischen Zahl und $|H| \leq \beta(G) \leq q$ gilt dann

$$\chi(G) \leq \chi(G[N]) + \chi(H) + \sum_{v \in V(H)} \chi(G[N_v]) \leq 1 + |H| + |H| f(p, q-1) \leq 1 + q + p \cdot f(p, q-1).$$

Also folgt aus dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass die Funktion f eine obere Schranke für $\chi(G)$ ist. ∎

Mit dieser Vorarbeit können wir nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.8 *Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche*

$$\chi(G) \leq g(\xi_2(G))$$

für alle Graphen G erfüllt.

Beweis: Wir zeigen, dass für alle Graphen G die Ungleichung $\beta(G) \leq \xi_2(G)$ erfüllt ist. Dann folgt die Behauptung, indem wir $g(\xi_2(G)) = f(\xi_2(G), \xi_2(G))$ setzen, wobei f die Funktion aus 3.7 ist.

Sei also $\beta(G) = l \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein induzierter Untergraph H von G mit $|H| = l$ und $\lambda_{min}(H) = \lambda_l(H) > -2$. Folglich ist mit Lemma 1.22 $\lambda_l(G) \geq \lambda_l(H) > -2$, was $\xi_2(G) \geq l = \beta(G)$ impliziert. ■

Satz 3.9 *Existiert ein $d \in \mathbb{N}$, sodass für alle Graphen G*

$$\chi(G) \leq \xi_d(G)$$

gilt, so gelten die folgende Aussagen:

(a) *Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_d(G)$.*

(b) *Ist H ein linearer Hypergraph mit $|e| \geq d$ für alle $e \in E(H)$, so ist $\chi'(H) \leq |H|$*

Beweis: Wir zeigen zunächst (a). Sei G ein beliebiger Graph mit $\chi(G) = k$. Nach Voraussetzung ist dann $\chi(G) \leq \xi_d(G)$, d.h. $\lambda_k(G) > -d$. Mit Korollar 3.3 folgt $\kappa_d(G) \geq k = \chi(G)$. Damit ist (a) gezeigt.

Wir zeigen nun (b) durch Widerspruch. Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es einen linearen Hypergraphen minimaler Ordnung mit $|e| \geq d$ für alle $e \in E(H)$, für welchen $\chi'(H) > H$. Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich dem kleinsten Eckengrad.

Fall 1 : $\delta(H) < d$ Dann existiert eine Kante e von H vom Grad kleiner als d. Da $|e| \geq d$ ist und H ein linearer Hypergraph ist, gibt es eine Ecke v von H welche nur in e vorkommt. Sei $H' = H - e$. Dann ist $|H'| < |H|$. Dieser lässt sich auf Grund der Wahl von H mit $\chi'(H') \leq |H'|$ Farben färben. Diese Färbung können wir zu einer Färbung von H mit höchstens $|H'| + 1 = |H|$ Farben erweitern, indem wir e mit einer neuen Farbe färben. Dann gilt

$$\chi'(H) \leq \chi'(H) + 1 \leq |H'| + 1 = |H|.$$

Ein Widerspruch zur Wahl von H.

Fall 2 : $\delta(H) \geq d$ Sei $G = L(H)$ der Kantengraph von H. Dann ist $\delta(G) \geq d$. Sei $K^v = G[E_H(v)]$ für alle $v \in V(G)$. Sei $\mathcal{K} = \{K^v \mid v \in V(H)\}$. Dann ist $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G. mit $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Damit gilt

$$\chi'(H) = \chi(G) \leq \kappa_d(G) \leq |\mathcal{K}| = |H|.$$

Wobei die erste Ungleichung wegen (a) gilt. ■

3.2 Schranken für $\kappa_d(G)$

Wir wollen nun einige Schranken für $\kappa_d(G)$ angeben.

Lemma 3.10 *Ist $\delta(G) \geq d$, so ist $\kappa_d(G) \leq |E(G)|$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von Lemma 2.5. ∎

Satz 3.11 *Sei G ein Graph der Ordnung n und $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\kappa_d(G) \geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d}$$

Beweis: Ist $\kappa_d(G) = \infty$, so ist nichts zu zeigen.
Fall 1 : $\kappa_d(G) \geq n$ Da $\lambda_1(G) \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1(G) + d &\geq d \\ 1 &\geq \frac{d}{\lambda_1(G) + d} \\ \kappa_d(G) \geq n &\geq \frac{nd}{\lambda_1(G) + d} \end{aligned}$$

Fall 2 : $\kappa_d(G) < n$ Sei $\mathcal{K}$ eine Krauszzerlegung von G mit $|\mathcal{K}| = \kappa_d(G)$ und $\delta_G(\mathcal{K}) \geq d$. Seien $d_i = d_{\mathcal{K}}(v)$. Wir können annehmen, dass die d_i fallend geordnet sind. Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Adjanzenzmatrix von $\mathcal{K}$ und $M = BB^T = A + D$, wobei $A = A(G)$ und $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Dann ist M positiv semidefinit und $\operatorname{rang}(M) \leq p = \kappa_d(G) < n$. Deswegen ist $\lambda_{p+1}(M) = \ldots \lambda_n(M) = 0$. Mit Satz 1.12 folgt dann :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(M) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(M) \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(D) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(n-p)d \leq (n-p)\lambda_n(D) \leq \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(D) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(A) \leq p\lambda_1(A)$$

Durch Umstellen nach p erhalten wir die gewünschte Ungleichung. ∎

3.3 Chromatische Zahl und Eigenwerte

Es ist nicht viel über den Zusammenhang der chromatischen Zahl eines Graphen, und seinen Eigenwerte bekannt. Wir wollen hier auf zwei Sätze verweisen, die Schranken für die chromatische Zahl eines Graphen in Abhängigkeit des größten bzw. kleinsten Eigenwerts angeben. Eine Abschätzung nach oben gibt Wilf in [38] an. Man beachte, dass diese eine Verstärkung von Satz 1.4 ist, da der größte Eigenwert eines Graphen duch den Maximalgrad beschränkt ist.

Satz 3.12 *Ist G ein Graph, so gilt:*

$$\chi(G) \leq \lambda_1(G) + 1.$$

Gleichheit tritt nur auf, falls G ein vollständer Graph oder ein ungerader Kreis ist.

Beweis: Wir zeigen, dass λ_1+1 ein Szekeres-Wilf Parameter ist. Dann folgt die Behauptung wegen Satz 1.3.

Um (S1) zu zeigen, sei H ein induzierter Untergraph von G. Dann ist wegen Lemma 1.22 $\lambda_1(H) \leq \lambda_1(G)$ und folglich auch $\lambda_1(H) + 1 \leq \lambda_1(G) + 1$.

Um (S2) zu zeigen, sei

■

<++> Eine untere Schranke findet sich in [20] (man beachte hierbei, dass $\lambda_{min}(G)$ negativ ist):

Satz 3.13 *Ist G ein Graph, so gilt:*

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_{max}(G)}{\lambda_{min}(G)}$$

3.4 Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Gelten die Vorraussetzungen von Satz 3.9 für $d = 2$, so folgt die Erdős–Faber–Lovász Vermutung auf Grund von Satz 2.7. Im Folgenden wollen wir für einige Graphenklassen folgende Vermutung überprüfen.

Vermutung 3.14 *Ist G ein Graph so gilt* $\chi(G) \leq \xi_2(G)$

Bemerkung 3.15 *Es reicht Vermutung 3.14 für k-kritische Graphen zu zeigen.*

Beweis: Gelte Vermutung 3.14 für kritische Graphen. Sei G ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält G einen k-kritischen Untergraphen H. Für diesen gilt nach Vorraussetzung

$$k = \chi(H) \leq \xi_2(H).$$

Dann ist aber auch

$$k \leq \xi_2(H) \leq \xi_2(G),$$

da H ein induzierter Untergraph von G ist. Damit gilt Vermutung 3.14 auch für G. ∎

Seien k, r zwei natürliche Zahlen mit $k \geq 2r - 1$. Der **Kneser Graph** $K_{k:r}$ geht auf Kneser [27] zurück und ist der Graph mit Eckenmenge

$$V(K_{k:r}) = [\{1, \ldots, k\}]^r$$

und Kantenmenge

$$E(K_{k:r}) = \{XY \mid X, Y \in V(K_{k:r}), X \cap Y = \varnothing\}.$$

$K_{k:1}$ ist ein vollständiger Graph der Ordnung k und $K_{2r-1:r}$ besitzt keine Kanten. Kneser gibt in [27] eine obere Schranke für die chromatische Zahl der Kneser Graphen an. Später zeigte Lovász , dass diese Schranke immer angenommen wird. Referenz

Satz 3.16 *Ist $k \geq 2r - 1$, dann gilt*

$$\chi(K_{k:r}) \leq k - 2r + 2$$

Der folgende Satz ist als Satz von Erdős-Ko-Rado [12] bekannt, und gibt die Unabhängigkeitszahl eines Kneser Graphen an.

Satz 3.17 *Ist $k \geq 2r$ und $r \geq 2$, so gilt:*

$$\alpha(K_{k:r}) = \binom{k-1}{r-1}.$$

Mit den beiden vorrangegangenen Sätzen können wir nun beweisen, dass ein Kneser Graph unsere Vermutung 3.14 erfüllt.

Satz 3.18 *Seien $k \geq 2r - 1$, $r \geq 1$ und sei $G = K_{k:r}$ ein Kneser Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.*

Beweis: Sei $\chi(G) = k$. Wir fixieren $k \in \mathbb{N}$ und machen eine Fallunterscheidung bezüglich r.

Fall 1 : $r = 1$ Dann ist $G = K_{k:1}$ isomorph zu K_k. Die Eigenwerte des K_k sind alle größer als -2, insbesondere also auch $\lambda_k(G)$. Folglich ist $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.

Fall 2 : $k > 2r \geq 4$ Sei $p = \alpha(G)$. Dann ist nach Satz 3.17 $p = \binom{k-1}{r-1}$ und folglich $p \geq k-1$. Nach Satz 3.16 ist $\chi(G) = k-2r+2 < k-2$. Folglich ist $p > \chi(G)$. Mit Korollar 1.23 gilt dann

$$\lambda_k(G) \geq \lambda_p(G) \geq 0 > -2.$$

Folglich gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.

Fall 3 : $k = 2r$ Die Ecken von G sind alle r-elementingen Teilmengen von $\{1, \ldots, k\}$. Da $k = 2r$ ist für ein $w \in V(G)$ die einzige benachbarte Ecke ihr Komplement in $\{1, \ldots, k\}$. Also sind die Komponenten von G alle isomorph zu K_2. Dann ist $\chi(G) = 2$ und $\omega(G) = 2$. Aus Korollar 1.23 folgt dann, dass $\lambda_2(G) \geq -1 > -2$ ist. Insbesondere ist $\chi(G) \leq \xi(G)$.

Fall 4 : $k = 2r+1$ Dann ist $|E(G)| = 0$, und folglich ist G ein kantenloser Graph, welcher nur den Eigenwert $0 > -2$ besitzt. Insbesondere ist also auch $\lambda_k(G) = 0 > -2$. Und deswegen gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$. ∎

Eine weitere Klasse von Graphen die unsere Vermutung erfüllen sind die perfekten Graphen.

Satz 3.19 *Sei G ein perfekter Graph. Dann gilt:*

$$\chi(G) \leq \xi_2(G)$$

Beweis: Da G ein perfekter Graph ist, gilt $k = \chi(G) = \omega(G)$. Also besitzt G einen vollständigen Graphen der Ordnung k als induzierten Untergraphen. Nach 1.23 ist

$$\lambda_k(G) > -2.$$

Und damit $\chi(G) \leq \xi_2(G)$. ∎

Satz 3.20 *Sei G ein planrer Graph mit $|G| \geq 7$. Dann gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.*

Beweis: Wir zeigen, dass $\lambda_4(G) > -2$ gilt. Dann ist $\xi_2(G) \geq 4$. Da alle planaren Graphen eine chromatische Zahl kleiner gleich 4 haben, folgt dann die Behauptung.

Nehmen wir dafür an, dass $\lambda_4(G) < -2$ gilt. Aus Lemma 1.21 (i) folgt dann:

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(G) = -\sum_{i=4}^{n} \lambda_i(G) \geq 2(n-3) = 2n-6$$

Mit Lemma 1.21 (ii) folgt außerdem:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(G)^2 &= 2m - \sum_{i=4}^{n} \lambda_i(G)^2 \\ &\leq 2(3n-6) - 4(n-3) = 2n\end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt dabei aus der Abschärtzung der Kanten für planare Graphen. Aus der Abschätzung der 2 und 1 Norm folgt nun:

$$\begin{aligned} 2n &\geq \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3|)^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(2n-6)^2 \end{aligned}$$

Lösen der entstehenden quadratischen Gleichung ergibt $n \leq 6$, ein Widerspruch. ■

Korollar 3.21 *Sei G ein planarer Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.*

Beweis: Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich $k = \chi(G)$. Auf Grund des 4-Farbensatzes reicht es dann die Fälle $k = 1, 2, 3, 4$ zu betrachten.

Fall 1 : *$k = 1$* Da jeder Graph mindestens einen nichtnegativen Eigenwert besitzt, ist $\xi_2(G) \geq 1 = \chi(G)$.

Fall 2 : *$k = 2$* Dann ist G bipartit. Insbesondere ist $\omega(G) = 2$ und wir finden wegen Lemma 3.2 $\xi_2(G) \geq \omega(G) = 2 = \chi(G)$.

Fall 3 : *$k = 3$* Ist $|G| \geq 7$, so ist wegen Satz 3.20 nichts zu zeigen. Anderfalls ist $|G| \leq 6$. Da G nicht bipartit ist, enthält G einen Kreis ungerader Länge. Dieser kann nur die Länge 3 oder 5 haben, da $|G| \leq 6$ ist. In beiden Fällen folgt mit Beispiel 1.15 und Lemma 1.22, dass $\xi_2(G) \geq 3 = \chi(G)$ gilt.

Fall 4 : *$k = 4$* G enthält nach Satz 1.1 einen 4-kritischen Untergraphen G'. Ist $|G'| \geq 7$, so ist wegen Satz 3.20 $\xi_2(G') \geq 4$. Mit Lemma 3.2 folgt dann $\xi_2(G) \geq \xi_2(G') \geq 4 = \chi(G)$. Ist $|G'| \leq 6$, so folgt aus einem Resultat von Toft [35], dass $G' = K_4$ oder G' den Kreis C_5 als induzierten Untergraphen enthält. Nun folgt $\xi_2(G) \geq \xi_2(G') \geq 4 = \chi(G)$.

Damit ist alles gezeigt. ■

3.5 Hájos und Ore Summe

In diesem Abschnitt wollen wir die Klasse der Hájos-konstruierbaren Graphen und die Klasse der Ore-konstruierbaren Graphen untersuchen.

Sei G ein Graph und X eine nichtleere Menge von Ecken von G. Wir erhalten einen neuen Graphen G' aus G durch **Identifizierung** von X mit einer Ecke x, falls G' aus $G - X$ durch hinzufügen der neuen Ecke x entsteht, welche in G' mit allen Nachbarn von X in $G - X$ benachbart ist.

Seien G_1, G_2 zwei nichtleere disjunkte Graphen und $x_1y_1 \in E(G_1)$ sowie $x_2y_2 \in E(G_2)$ zwei beliebige Kanten. Die **Hajós Summe** [18] von G_1 und G_2 (bezüglich x_1y_1 und x_2y_2) ist derjenige Graph, der entsteht wenn wir G_1 und G_2 vereinigen, die Kanten x_1y_1 und x_2y_2 entfernen, die Kante y_1y_2 hinzufügen und die Ecken x_1 und x_2 identifizieren. Wir schreiben dann auch $G = \text{Hájos}(G_1, x_1y_1, G_2, x_1y_2)$ oder kurz $G = \text{Hájos}(G_1, G_2)$.

Wir betrachten nun im folgenden für $k \in \mathbb{N}$ die Graphenklasse $\mathcal{H}_k$ der **k-Hajós konstruierbaren Graphen**. Diese ist die kleinste Klasse $\mathcal{H}_k$ welche folgende drei Eigenschaften erfüllt:

1. $K_k \in \mathcal{H}_k$.
2. Sind $G, H \in \mathcal{H}_k$, so auch die Hajós Summe von G und H.
3. Ist $G \in \mathcal{H}_k$ und $u, v \in V(G)$ zwei nicht benachbarte Ecken von G, dann ist die Identifizierung von u und v in G auch in $\mathcal{H}_k$.

Es ist bekannt, dass die Hájos Summe zweier k-chromatischer Graphen wieder k-chromatisch ist . quelle?

Satz 3.22 *Seien $k \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{N}$. Seien weiterhin G_1 und G_2 Graphen mit $k \leq \xi_d(G)$. Dann gilt für $G = \text{Hájos}(G_1, G_2)$: $\xi_d(G) \geq 2k - 4$*

Beweis: Seien $x_1y_1 \in E(G_1)$ und $x_2y_2 \in E(G_2)$ die Kanten welche bei der Hájos Summe verwendet werden. Wir setzen

$$H_i = G[V(G_i) \setminus \{x_i, y_i\}]$$

für $i = 1, 2$. Dann ist für $i = 1, 2$ der Graph H_i sowohl ein induzierter Untergraph von G_i als auch von G. Desweiteren gilt $|H_i| = |G_i| - 2$ für $i = 1, 2$. Also folgt aus Lemma 1.22, dass

$$\lambda_{k-2}(H_i) \geq \lambda_k(G_i) > -d$$

für $i = 1, 2$ richtig ist. Wir betrachten nun den Graphen H, welcher die disjunkte Vereinigung von H_1 und H_2 ist. Dann ist H ebenfalls ein induzierter Untergraph von G. Das Spektrum von H ist nach Beispiel 1.17 die Vereinigung der Spektra von H_1 und H_2. Also gilt $\xi_d(H) \geq 2(k-2) = 2k-4$, da sowohl H_1 als auch H_2 mindestens $k-2$ Eigenwerte besitzen, die größer als $-d$ sind. Da ξ_d ein monotoner Graphenparamter ist, gilt auch $\xi_d(G) \geq 2k-4$. ■

Eine weitere, der Hájos Summe ähnliche Konstruktion ist die **Ore Summe** [29]. Seien G_1 und G_2 zwei disjunkte Graphen und x_1y_1 eine Kante von G_1 und x_2y_2 eine Kante von G_2. Desweiteren seien $v_1, v_2, \ldots, v_t$ unterschiedliche Ecken von $G_1 \setminus x_1$ und $u_1, u_2, \ldots, u_r$ unterschiedliche Ecken von $G_2 \setminus x_2$. Wir konstruieren nun die Ore Summe von G_1 und G_2 aus der Hájos Summe Hájos$(G_1, x_1y_1, G_2, x_2y_2)$, indem wir zusätzlich die Kanten $v_1u_1, v_2u_2, \ldots, v_ru_r$ hinzufügen. Der so entstandene Graph ist dann die Ore Summe von G_1 und G_2.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{O}_k$ die Klasse der **Ore k-konstruierbaren Graphen** definiert als die kleinste Klasse, welche folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

1. $K_k \in \mathcal{O}_k$.

2. Sind $G, H \in O_k$, so auch die Ore Summe von G und H.

Wie sich zeigen lässt, gilt dann für alle $k \in \mathbb{N}$: $\mathcal{O}_k)\mathcal{H}_k$.

Literatur

[1] Berge, C. , *The Theory of Graphs*, Dover 2001.

[2] Brooks, R. L. , On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **37** (1941) 194–197.

[3] Cameron, P. J., Goethals, J. -M., Seidel, J. J. und Shult, E. E. , Line graphs, root systems, and elliptic geometry. *J. Algebra* **43** (1978) 305–327.

[4] Chung, W. und Lawler, E. , Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász. *Combinatorica* **8** (1988) 293–295.

[5] Courant, R. und Hilbert, D. , *Methoden der Mathematischen Physik I.* Springer 1924.

[6] Cvetković; D. M., Rowlinson,P. und Simić, S. , *An Introduction to the Theory of Graph Spectra* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979, Academic Press 1980.

[7] Cvetković; D. M., Doob, M. und Sachs, H. , *Spectra of Graphs: Theory and Application.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979, Academic Press 1980.

[8] Diestel, R. , *Graphentheorie*, Springer 2010.

[9] Erdős, P. , Problems and results in graph theory and combinatorial analysis. *Congr. Numer.* **XV** (1976) 169–192.

[10] Erdős, P. , Problems and results in graph theory and combinatorial analysis. *Graph Theory and Related Topics*, pp. 153–163. Academic Press 1979.

[11] Erdős, P. , On combinatorial problems which I would most like to see solved. *Combinatorica* **1** (1981) 25–42.

[12] Erdős, P., Ko, C. und Rado, R. , Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **12** (1961) 313–320.

[13] Fan, Ky , On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35** (1949) 652–655.

[14] Faber, V. und Lovász, L. , Problem 18, Hypergraph Seminar, Ohio State Univ., 1972. Lcture Notes in Mathematics, vol. 411, p. 284. Springer 1974.

[15] FISCHER, E. , Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten. *Monatsh. Phys.* **16** (1905) 234–249.

[16] FROBENIUS, G. , Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. *Sitzber. Akad. Wiss., Phys.-math. Klasse, Berlin* (1912) 456–477.

[17] GODSIL, C. und ROY, G. , *Algebraic Graph Theory.* Graduate Text in Mathematics, Vol. 207, Springer 2001.

[18] HAJÓS, GY. , Über eine Konstruktion nicht n-färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Natur. Reihe* **10** (1961) 116–117.

[19] HINDMAN, N. , On a Conjecture of Erdős, Faber and Lovász about n colorings. *Cand. J. Math.* **33** (1981) 563–570.

[20] HOFFMAN, A. , On eigenvalues and colorings. *Graph Theory and its Applications*, pp. 79–91. Academic Press 1970.

[21] HOFFMAN, A. , On graphs whose least eigenvalue exceeds $-1-\sqrt{2}$. *Lin. Alg. Appl.* **16** (1977) 153–165.

[22] KAHN, J. , Coloring nearly-disjoint hypergraphs with $n + o(n)$ colors. *J. Combin. Theory Ser. A* **59** (1992) 31–39.

[23] KARP, R. M. , Reducibility among combinatorial problems. *Complexity and Computer Computation*, pp. 85–103. Plenum Press 1972.

[24] KLOTZ, W. , Clique Covers and Coloring Problems of Graphs. *Journal of Combinatorical Theory* **46** (1989) 338–345.

[25] KÖNIG, D. , Über Graphen und ihre Anwendungen auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Math. Ann.* **77** (1916) 453–465.

[26] KÖNIG, D. , *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen.* Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig 1936. Reprinted by Chealsea 1950 and by B. G. Teubner 1986. English translation published by Birkhäuser 1990.

[27] KNESER, M. , Aufgabe 360. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **58** (2. Abteilung)(1955) 27.

[28] Krausz, J. , Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les résaux (Hungarian with French summary). *Mat. Fiz. Lapok* **50** (1943) 75–85.

[29] Ore, O , *The Four Colour Problem.* Academic Press, 1967.

[30] Perron, O. , Zur Theorie der Matrizen. *Math. Ann.* **64** (1907) 248–263.

[31] Romero, D. und Sánchez-Arroyo, A. , Advances on the Erdős-Faber-Lovász conjecture. *Combinatorics, Complexity, and Chance: A Tribute to Dominic Welsh*, pp. 285–298. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Oxford University Press 2007.

[32] Sachs, H. , Über Teiler, Faktoren und charakteristische Polynome von Graphen II. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau* **13** (1967), 405–412.

[33] Stockmeyer, L. , Planar 3-colorability is polynomial complete. *ACM SIGACT News* **5** (1973) 19–25.

[34] Szekeres, G. und Wilf, H. S. , An inequality for the chromatic number of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B* **4** (1968) 1–3.

[35] Toft, B. , Critical subgraphs of colour critical graphs. *Discrete Math.* **7** (1974) 377–392.

[36] Vizing, V. G. , On an estimate of the chromatic class of a p-graph (in Russian). *Diskret. Analiz* **3** (1964) 25–30.

[37] Weyl, H. , Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichtungen. *Math. Ann.* **71** (1912) 441–479.

[38] Wilf, H. S. , The eigenvalues of a graph and its chromatic number. *J. London Math. Soc.* **42** (1967) 330–332.

Erklärung: Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ilmenau, 26. September 2014

Stefan Heyder