

Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

Stefan Heyder
Betreuer: Prof. Dr. Stiebitz

TU Ilmenau

30. September 2014

- 1 Die Erdős-Faber-Lovász Vermutung
- 2 Eigenwerte von Graphen

Es sei $\mathcal{EG}(n)$ die Klasse aller Graphen, welche die kantendisjunkte Vereinigung von n vollständigen Graphen der Ordnung n sind.

Vermutung (Erdős-Faber-Lovász(1972))

Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq n$.

Ein Hypergraph H heißt **linear**, falls $|e \cap e'| \leq 1$ für alle $e, e' \in E(H)$.

Beispiel: Ein linearer Hypergraph H mit $|E(H)| = n$ ist ein $\mathcal{EG}(n)$.

Vermutung (Erdős-Faber-Lovász(1972))

Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq n$.

Ein Hypergraph H heißt **linear**, falls $|e \cap e'| \leq 1$ für alle $e, e' \in E(H)$.

Sei H ein linearer Hypergraph. Dann gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Vermutung (Erdős-Faber-Lovász(1972))

Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq n$.

Ein Hypergraph H heißt **linear**, falls $|e \cap e'| \leq 1$ für alle $e, e' \in E(H)$.

Sei H ein linearer Hypergraph. Dann gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Vermutung (Erdős-Faber-Lovász(1972))

Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq n$.

Ein Hypergraph H heißt **linear**, falls $|e \cap e'| \leq 1$ für alle $e, e' \in E(H)$.

Vermutung

Sei H ein linearer Hypergraph. Dann gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Theorem (Chung & Lawler)

Für jeden Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt $\chi(G) \leq \frac{3n}{2} - 2$.

Theorem (Kahn)

Für jeden linearen Hypergraphen H ist $\chi'(H) \leq |H| + o(|H|)$.

Theorem (Chung & Lawler)

Für jeden Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt $\chi(G) \leq \frac{3n}{2} - 2$.

Theorem (Kahn)

Für jeden linearen Hypergraphen H ist $\chi'(H) \leq |H| + o(|H|)$.

Eine Menge von Untergraphen \mathcal{K} von G heißt **Krauszerlegung** von G , falls gilt:

- Alle $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen der Ordnung $|K| \geq 2$.
- Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ verschieden, so gilt $|K \cap K'| \leq 1$.

Eine Menge von Untergraphen \mathcal{K} von G heißt **Krauszerlegung** von G , falls gilt:

- 1 Alle $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen der Ordnung $|K| \geq 2$.
- 2 Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ verschieden, so gilt $|K \cap K'| \leq 1$.
- 3 $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = G$.

Eine Menge von Untergraphen \mathcal{K} von G heißt **Krauszerlegung** von G , falls gilt:

- 1 Alle $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen der Ordnung $|K| \geq 2$.
- 2 Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ verschieden, so gilt $|K \cap K'| \leq 1$.
- 3 $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = G$.

Eine Menge von Untergraphen \mathcal{K} von G heißt **Krauszerlegung** von G , falls gilt:

- 1 Alle $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen der Ordnung $|K| \geq 2$.
- 2 Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ verschieden, so gilt $|K \cap K'| \leq 1$.
- 3 $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = G$.

- $d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in K\}|$, der **Grad** von v in \mathcal{K} .
- $\delta(\mathcal{K})$, der **Minimalgrad**.
- $\kappa_d(G)$, die kleinste Zahl p , sodass G eine Krauszerlegung \mathcal{K} mit $|\mathcal{K}| = p$ besitzt ($\kappa_d(G) = \infty$, falls kein solches p existiert).

- $d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in K\}|$, der **Grad** von v in \mathcal{K} .
- $\delta(\mathcal{K})$, der **Minimalgrad**.
- $\kappa_d(G)$, die kleinste Zahl p , sodass G eine Krauszerlegung \mathcal{K} mit $|\mathcal{K}| = p$ besitzt ($\kappa_d(G) = \infty$, falls kein solches p existiert).

- $d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in K\}|$, der **Grad** von v in \mathcal{K} .
- $\delta(\mathcal{K})$, der **Minimalgrad**.
- $\kappa_d(G)$, die kleinste Zahl p , sodass G eine Krauszerlegung \mathcal{K} mit $|\mathcal{K}| = p$ besitzt ($\kappa_d(G) = \infty$, falls kein solches p existiert).

Theorem

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1 Für alle Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt $\chi(G) \leq n$.
- 2 Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.
- 3 Für alle linearen Hypergraphen H gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Theorem

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1 Für alle Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt $\chi(G) \leq n$.
- 2 Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.
- 3 Für alle linearen Hypergraphen H gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Theorem

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

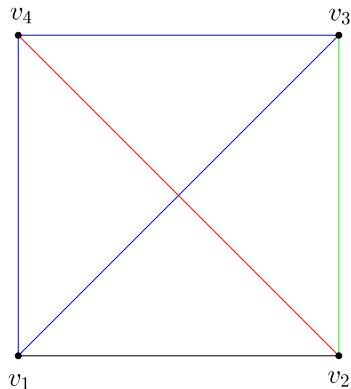
- 1 Für alle Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt $\chi(G) \leq n$.
- 2 Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.
- 3 Für alle linearen Hypergraphen H gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Theorem

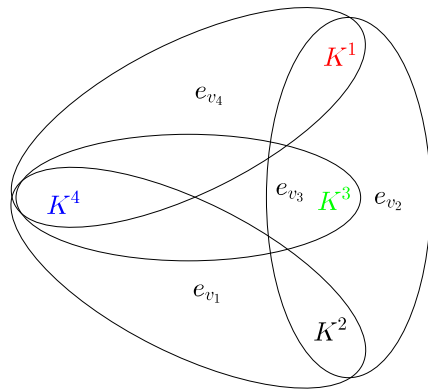
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1 Für alle Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt $\chi(G) \leq n$.
- 2 Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.
- 3 Für alle linearen Hypergraphen H gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Krauszerlegungen und die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

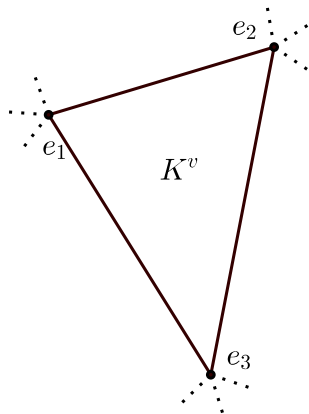
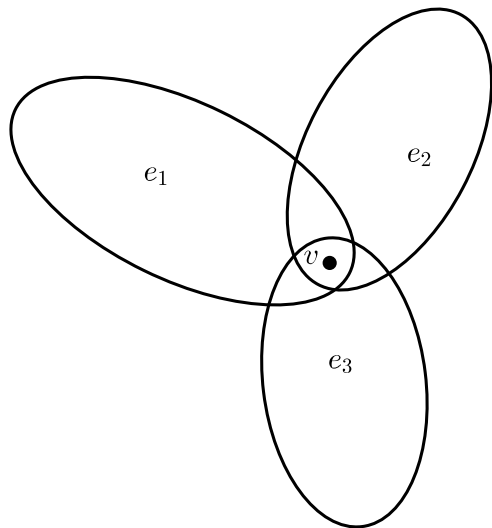


G



H

Krauszerlegungen und die Erdős-Faber-Lovász Vermutung



Es sei $A(G)$ die **Adjazenzmatrix** von G mit

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die **Eigenwerte** von G sind dann die Eigenwerte von $A(G)$. Wir bezeichnen mit $\lambda_i(G)$ den i -größten Eigenwert von G . Also gilt

$$\lambda_{\max}(G) = \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G) = \lambda_{\min}(G).$$

Es sei $A(G)$ die **Adjazenzmatrix** von G mit

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die **Eigenwerte** von G sind dann die Eigenwerte von $A(G)$. Wir bezeichnen mit $\lambda_i(G)$ den i -größten Eigenwert von G . Also gilt

$$\lambda_{\max}(G) = \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G) = \lambda_{\min}(G).$$

Es sei $A(G)$ die **Adjazenzmatrix** von G mit

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die **Eigenwerte** von G sind dann die Eigenwerte von $A(G)$. Wir bezeichnen mit $\lambda_i(G)$ den i -größten Eigenwert von G . Also gilt

$$\lambda_{\max}(G) = \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G) = \lambda_{\min}(G).$$

Theorem (Wilf)

Ist G ein zusammenhängender Graph, so gilt $\chi(G) \leq \lambda_1(G) + 1$.

Theorem (Hoffman)

Ist G ein Graph, so gilt $\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}$.

Theorem

Sei $\mathcal{K} = \{K^1, K^2, \dots, K^p\}$ eine Krauszerlegung von G . Wir setzen $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$, wobei wir die Nummerierung der Ecken so wählen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ gilt. Dann gelten folgende Aussagen:

- 1 $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ für alle $1 \leq i \leq n$.
- 2 $\lambda_{p+1}(G) \leq -d_n$, falls $p < n$.

Theorem

Sei $\mathcal{K} = \{K^1, K^2, \dots, K^p\}$ eine Krauszerlegung von G . Wir setzen $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$, wobei wir die Nummerierung der Ecken so wählen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ gilt. Dann gelten folgende Aussagen:

1 $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ für alle $1 \leq i \leq n$.

2 $\lambda_{p+1}(G) \leq -d_n$, falls $p < n$.

Theorem

Sei $\mathcal{K} = \{K^1, K^2, \dots, K^p\}$ eine Krauszerlegung von G . Wir setzen $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$, wobei wir die Nummerierung der Ecken so wählen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ gilt. Dann gelten folgende Aussagen:

- 1 $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ für alle $1 \leq i \leq n$.
- 2 $\lambda_{p+1}(G) \leq -d_n$, falls $p < n$.

Krauszerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von \mathcal{K} . Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

Krauszerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von \mathcal{K} . Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

Krauszerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von \mathcal{K} . Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

Krauszerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von \mathcal{K} . Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

Krauszerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von \mathcal{K} . Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

- Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\xi_d(G) = |\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i(G) > -d\}|$.
- Es ist leicht zu zeigen, dass $\xi_d(G) \leq \kappa_d(G)$ gilt.

Vermutung

Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.

- Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\xi_d(G) = |\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i(G) > -d\}|$.
- Es ist leicht zu zeigen, dass $\xi_d(G) \leq \kappa_d(G)$ gilt.

Vermutung

Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.

- Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\xi_d(G) = |\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i(G) > -d\}|$.
- Es ist leicht zu zeigen, dass $\xi_d(G) \leq \kappa_d(G)$ gilt.

Vermutung

Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kreisgraphen.
- Planare Graphen.
- Hyperfeste Graphen.
- Kantengraphen.

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Produkt Graphen.
- Cayleygraphen.

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Theorem

Sei G ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$ oder $\chi(\overline{G}) \leq \xi_2(\overline{G})$.