Chromatische Zahl und Spektrum von Graphen

Stefan Heyder
Betreuer: Prof. Dr. Stiebitz

TU Ilmenau

30. September 2014

Inhalt

1. Die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

2. Eigenwerte von Graphen

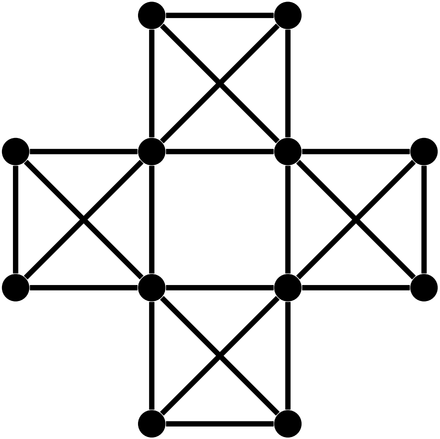
Ein Färbungsproblem

Es sei $\mathcal{EG}(n)$ die Klasse aller Graphen, welche die kantendisjunkte Vereinigung von n vollständigen Graphen der Ordnung n sind.

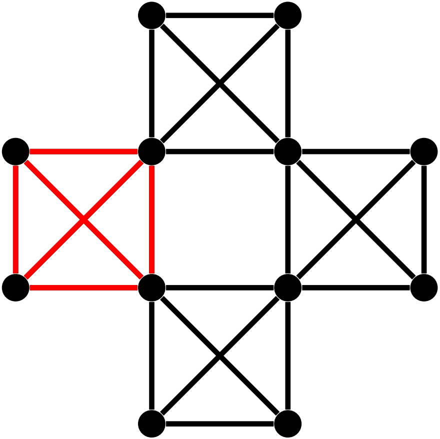
Problem

Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Was ist die chromatische Zahl von G?

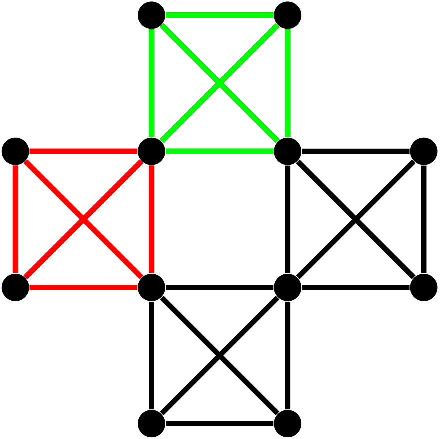
Ein Färbungsproblem



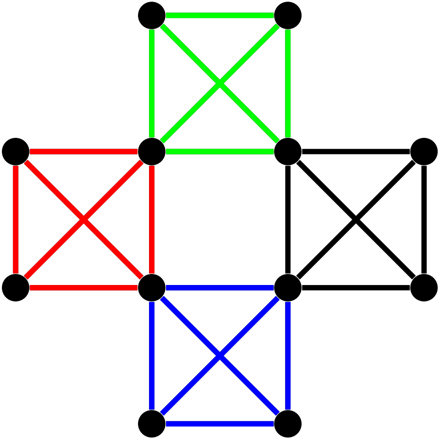
Ein Färbungsproblem



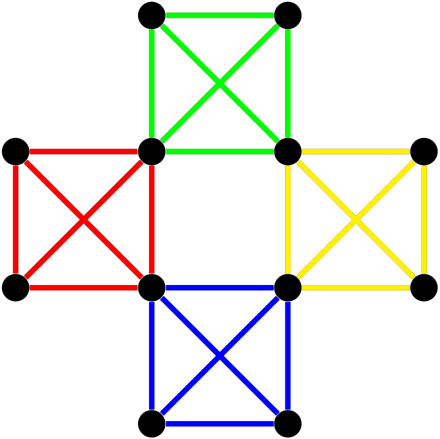
Ein Färbungsproblem



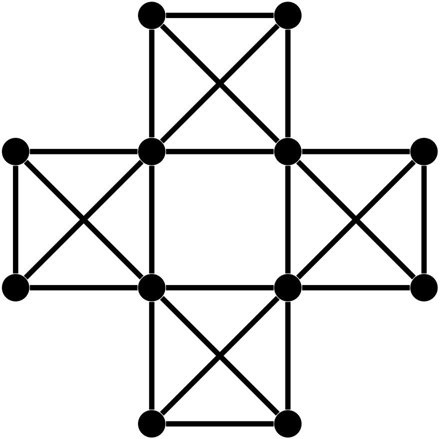
Ein Färbungsproblem



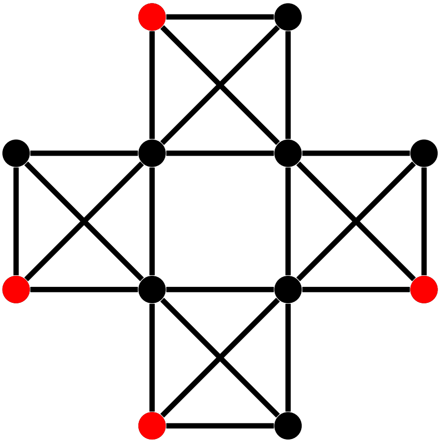
Ein Färbungsproblem



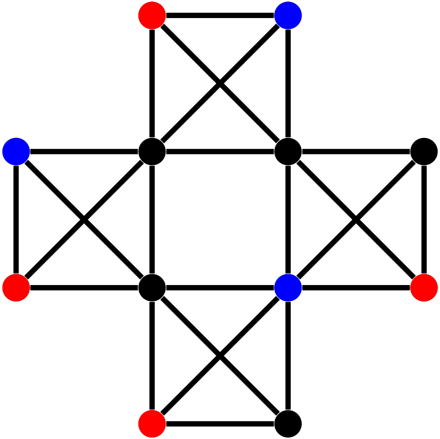
Ein Färbungsproblem



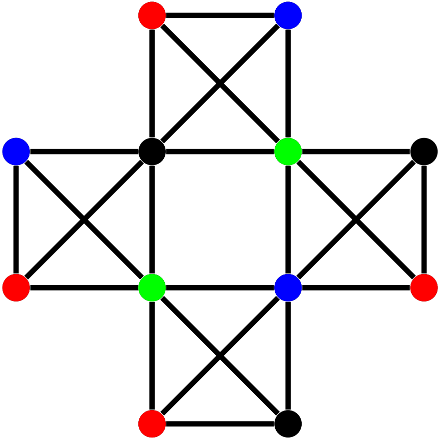
Ein Färbungsproblem



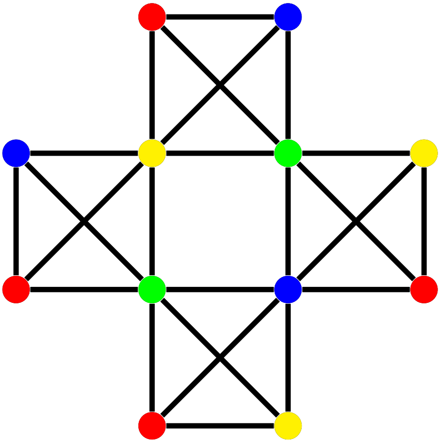
Ein Färbungsproblem



Ein Färbungsproblem



Ein Färbungsproblem



Die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

Vermutung (Erdős-Faber-Lovász(1972))

Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq n$.

Ein Hypergraph H heißt **linear**, falls $|e \cap e'| \leq 1$ für alle $e, e' \in E(H)$.

Vermutung

Sei H ein linearer Hypergraph. Dann gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

Vermutung (Erdős-Faber-Lovász(1972))

Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq n$.

Ein Hypergraph H heißt **linear**, falls $|e \cap e'| \leq 1$ für alle $e, e' \in E(H)$.

Vermutung

Sei H ein linearer Hypergraph. Dann gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

Vermutung (Erdős-Faber-Lovász(1972))

Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq n$.

Ein Hypergraph H heißt **linear**, falls $|e \cap e'| \leq 1$ für alle $e, e' \in E(H)$.

Vermutung

Sei H ein linearer Hypergraph. Dann gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

Vermutung (Erdős-Faber-Lovász(1972))

Sei $G \in \mathcal{EG}(n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq n$.

Ein Hypergraph H heißt **linear**, falls $|e \cap e'| \leq 1$ für alle $e, e' \in E(H)$.

Vermutung

Sei H ein linearer Hypergraph. Dann gilt $\chi'(H) \leq |H|$.

Die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

Theorem (Chung & Lawler)

Für jeden Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ *gilt* $\chi(G) \leq \frac{3n}{2} - 2$.

Theorem (Kahn)

Für jeden linearen Hypergraphen H *ist* $\chi'(H) \leq |H| + o(|H|)$.

Die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

Theorem (Chung & Lawler)

Für jeden Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ *gilt* $\chi(G) \leq \frac{3n}{2} - 2$.

Theorem (Kahn)

Für jeden linearen Hypergraphen H *ist* $\chi'(H) \leq |H| + o(|H|)$.

Eine Menge von Untergraphen $\mathcal{K}$ von G heißt **Krauszzerlegung** von G, falls gilt:

1. Alle $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen der Ordnung $|K| \geq 2$.
2. Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ verschieden, so gilt $|K \cap K'| \leq 1$.
3. $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = G$.

Krauszzerlegungen

Eine Menge von Untergraphen $\mathcal{K}$ von G heißt **Krauszzerlegung** von G, falls gilt:

1. Alle $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen der Ordnung $|K| \geq 2$.
2. Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ verschieden, so gilt $|K \cap K'| \leq 1$.
3. $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = G$.

Krauszzerlegungen

Eine Menge von Untergraphen $\mathcal{K}$ von G heißt **Krauszzerlegung** von G, falls gilt:

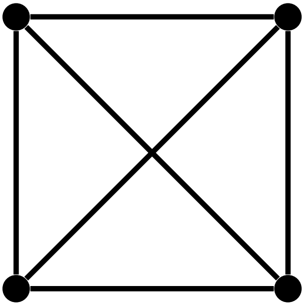
1. Alle $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen der Ordnung $|K| \geq 2$.
2. Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ verschieden, so gilt $|K \cap K'| \leq 1$.
3. $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = G$.

Krauszzerlegungen

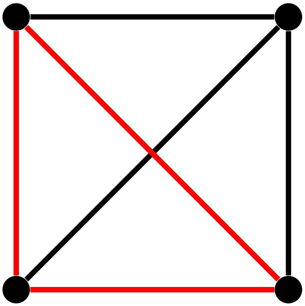
Eine Menge von Untergraphen $\mathcal{K}$ von G heißt **Krauszzerlegung** von G, falls gilt:

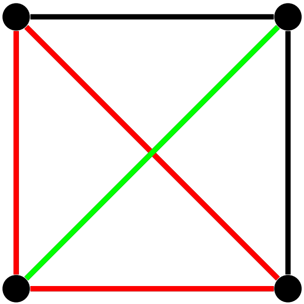
1. Alle $K \in \mathcal{K}$ sind vollständige Graphen der Ordnung $|K| \geq 2$.
2. Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ verschieden, so gilt $|K \cap K'| \leq 1$.
3. $\bigcup\limits_{K \in \mathcal{K}} K = G$.

Krauszzerlegungen

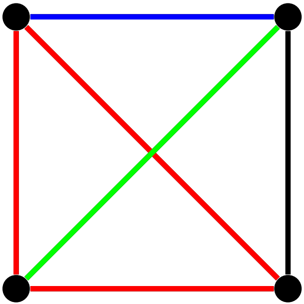


Krauszzerlegungen

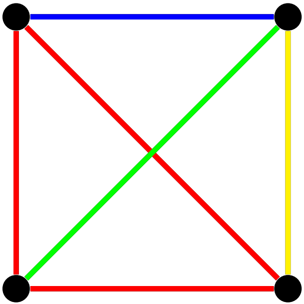




Krauszzerlegungen



Krauszzerlegungen



Krauszzerlegungen

- $d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in K\}|$, der **Grad** von v in $\mathcal{K}$.
- $\delta(\mathcal{K})$, der **Minimalgrad** .
- $\kappa_d(G)$, die kleinste Zahl p, sodass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ mit $|\mathcal{K}| = p$ besitzt ($\kappa_d(G) = \infty$, falls kein solches p existiert).

Krauszzerlegungen

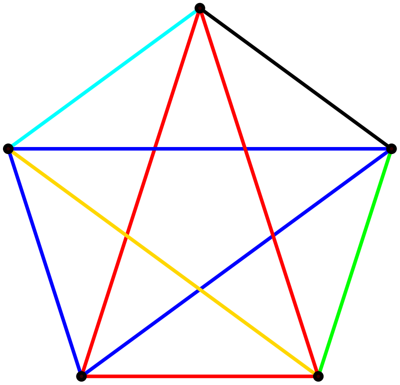
- $d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in K\}|$, der **Grad** von v in $\mathcal{K}$.
- $\delta(\mathcal{K})$, der **Minimalgrad** .
- $\kappa_d(G)$, die kleinste Zahl p, sodass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ mit $|\mathcal{K}| = p$ besitzt ($\kappa_d(G) = \infty$, falls kein solches p existiert).

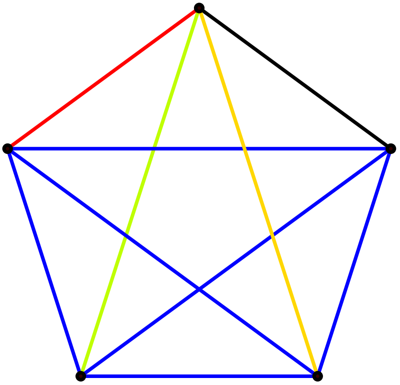
Krauszzerlegungen

- $d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in K\}|$, der **Grad** von v in $\mathcal{K}$.
- $\delta(\mathcal{K})$, der **Minimalgrad** .
- $\kappa_d(G)$, die kleinste Zahl p, sodass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ mit $|\mathcal{K}| = p$ besitzt ($\kappa_d(G) = \infty$, falls kein solches p existiert).

Krauszzerlegungen

- $d_{\mathcal{K}}(v) = |\{K \in \mathcal{K} \mid v \in K\}|$, der **Grad** von v in $\mathcal{K}$.
- $\delta(\mathcal{K})$, der **Minimalgrad** .
- $\kappa_d(G)$, die kleinste Zahl p, sodass G eine Krauszzerlegung $\mathcal{K}$ mit $|\mathcal{K}| = p$ besitzt ($\kappa_d(G) = \infty$, falls kein solches p existiert).





Theorem

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Für alle Graphen* $G \in \mathcal{EG}(n)$ *gilt* $\chi(G) \leq n$.
2. *Für alle Graphen* G *gilt* $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.
3. *Für alle linearen Hypergraphen* H *gilt* $\chi'(H) \leq |H|$.

Krauszzerlegungen und die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

Theorem

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Für alle Graphen $G \in \mathcal{EG}(n)$ gilt $\chi(G) \leq n$.*
2. *Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.*
3. *Für alle linearen Hypergraphen H gilt $\chi'(H) \leq |H|$.*

Krauszzerlegungen und die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

Theorem

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

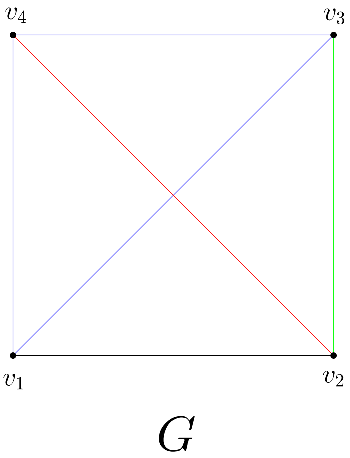
1. *Für alle Graphen* $G \in \mathcal{EG}(n)$ *gilt* $\chi(G) \leq n$.
2. *Für alle Graphen* G *gilt* $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.
3. *Für alle linearen Hypergraphen* H *gilt* $\chi'(H) \leq |H|$.

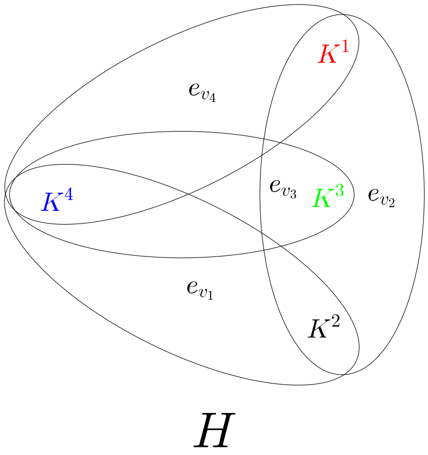
Krauszzerlegungen und die Erdős-Faber-Lovász Vermutung

Theorem

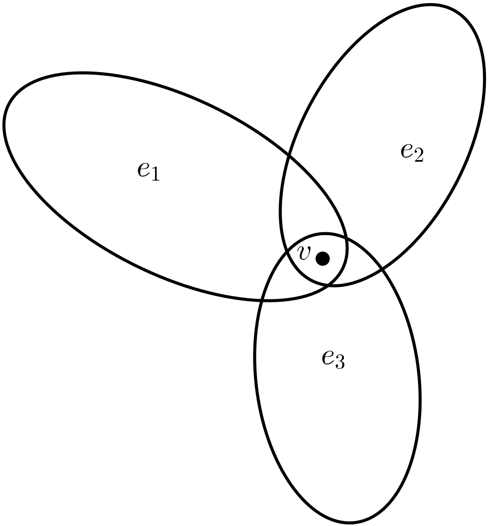
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Für alle Graphen* $G \in \mathcal{EG}(n)$ *gilt* $\chi(G) \leq n$.
2. *Für alle Graphen* G *gilt* $\chi(G) \leq \kappa_2(G)$.
3. *Für alle linearen Hypergraphen* H *gilt* $\chi'(H) \leq |H|$.

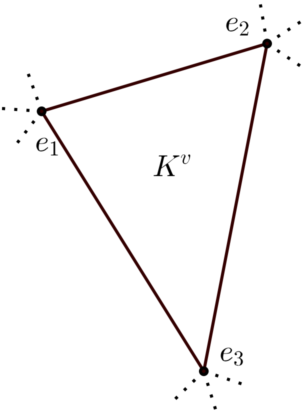

v_4
v_3
v_1
v_2
G


K^1
e_{v_4}
K^4
e_{v_3}
K^3
e_{v_2}
e_{v_1}
K^2
H

Krauszzerlegungen und die Erdős-Faber-Lovász Vermutung



H



$L(H)$

Eigenwerte von Graphen

Es sei $A(G)$ die **Adjazenzmatrix** von G mit

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Die **Eigenwerte** von G sind dann die Eigenwerte von $A(G)$. Wir bezeichnen mit $\lambda_i(G)$ den i-größten Eigenwert von G. Also gilt

$$\lambda_{max}(G) = \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G) = \lambda_{min}(G).$$

Eigenwerte von Graphen

Es sei $A(G)$ die **Adjazenzmatrix** von G mit

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Die **Eigenwerte** von G sind dann die Eigenwerte von $A(G)$. Wir bezeichnen mit $\lambda_i(G)$ den i-größten Eigenwert von G. Also gilt

$$\lambda_{max}(G) = \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G) = \lambda_{min}(G).$$

Eigenwerte von Graphen

Es sei $A(G)$ die **Adjazenzmatrix** von G mit

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Die **Eigenwerte** von G sind dann die Eigenwerte von $A(G)$. Wir bezeichnen mit $\lambda_i(G)$ den i-größten Eigenwert von G. Also gilt

$$\lambda_{max}(G) = \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G) = \lambda_{min}(G).$$

Theorem (Wilf)

Ist G ein zusammenhängender Graph, so gilt $\chi(G) \leq \lambda_{max}(G) + 1$.

Theorem (Hoffman)

Ist G ein Graph, so gilt $\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_{max}(G)}{\lambda_{min}(G)}$.

Chromatische Zahl und Eigenwerte

Theorem (Wilf)

Ist G ein zusammenhängender Graph, so gilt $\chi(G) \leq \lambda_{max}(G) + 1$.

Theorem (Hoffman)

Ist G ein Graph, so gilt $\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_{max}(G)}{\lambda_{min}(G)}$.

Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Theorem

Sei $\mathcal{K} = \{K^1, K^2, \dots, K^p\}$ eine Krauszzerlegung von G. Wir setzen $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$, wobei wir die Nummerierung der Ecken so wählen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ gilt. Dann gelten folgende Aussagen:

1. $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ *für alle* $1 \leq i \leq n$.
2. $\lambda_{p+1}(G) \leq -d_n$, *falls* $p < n$.

Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Theorem

Sei $\mathcal{K} = \{K^1, K^2, \ldots, K^p\}$ *eine Krauszzerlegung von* G. *Wir setzen* $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$, *wobei wir die Nummerierung der Ecken so wählen, dass* $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ *gilt. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ *für alle* $1 \leq i \leq n$.
2. $\lambda_{p+1}(G) \leq -d_n$, *falls* $p < n$.

Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Theorem

Sei $\mathcal{K} = \{K^1, K^2, \ldots, K^p\}$ *eine Krauszzerlegung von* G*. Wir setzen* $d_i = d_{\mathcal{K}}(v_i)$*, wobei wir die Nummerierung der Ecken so wählen, dass* $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ *gilt. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. $\lambda_i(G) \geq -d_{n-i+1}$ *für alle* $1 \leq i \leq n$*.*
2. $\lambda_{p+1}(G) \leq -d_n$*, falls* $p < n$*.*

Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$. Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$. Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$. Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$. Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

Krauszzerlegungen und Eigenwerte

Es seien $A = A(G)$, $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Inzidenzmatrix von $\mathcal{K}$. Dann gilt

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in K^j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M = BB^T$. Dann ist M positiv semidefinit und $M = A + D$, wie sich leicht zeigen lässt. Also folgt

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(-D) = -\lambda_{n-i+1}(D) = -d_{n-i+1}$$

Ist $p < n$, so ist $\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(B) \leq p < n$, insbesondere ist $\lambda_{p+1}(M) = 0$. Somit gilt

$$\lambda_{p+1}(A) + d_n \leq \lambda_{p+1}(M) = 0.$$

Eigenwerte von Graphen

- Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\xi_d(G) = |\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i(G) > -d\}|$.
- Es ist leicht zu zeigen, dass $\xi_d(G) \leq \kappa_d(G)$ gilt.

Vermutung

Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.

Eigenwerte von Graphen

- Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\xi_d(G) = |\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i(G) > -d\}|$.
- Es ist leicht zu zeigen, dass $\xi_d(G) \leq \kappa_d(G)$ gilt.

Vermutung

Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.

Eigenwerte von Graphen

- Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\xi_d(G) = |\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i(G) > -d\}|$.
- Es ist leicht zu zeigen, dass $\xi_d(G) \leq \kappa_d(G)$ gilt.

Vermutung

Für alle Graphen G gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Vermutung gilt für

- Graphen G mit $\chi(G) \leq 3$.
- Kneser Graphen.
- Planare Graphen.
- Perfekte Graphen.
- Kantengraphen.

Graphen mit $\chi \leq \xi_2$

Theorem

Sei G ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \xi_2(G)$ *oder* $\chi(\overline{G}) \leq \xi_2(\overline{G})$.